数学整理

o7k40shen

2020 年 12 月 6 日

目录

1 不等式

1.1 均值不等式

H_n 为调和平均数、G_n 为几何平均数、A_n 为算数平均数、Q_n 为平方平均数。任意 $x_i > 0$ 都成立时，有

$$H_n = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

$$A_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

$$H_n \le G_n \le A_n \le Q_n$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号

1.2 对数平均不等式

$a \neq b$ 时，有

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{lna - lnb} < \frac{a+b}{2}$$

1.3 柯西不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \ge (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 时取等号
其中二维形式如下

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \ge (ac + bd)^2$$

当且仅当 $ad = bc$ 即 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ 时取等

1.4 排序不等式

排序不等式表示如下
设有两组数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\ldots,b_n$，满足 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ 且 $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$ $c_1,c_2,\ldots,c_n$ 是 $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 的乱序排列，则有：

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1 \le a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n \le a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时取等号。便于记忆，常记为：

$$\text{反序和} \le \text{乱序和} \le \text{顺序和}$$

1.5 权方和不等式

若 $a_i>0$，$b_i>0$，$m>0$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m} \ge \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)^{m}}$$

即为

$$\frac{a_1^{m+1}}{b_1^m}+\frac{a_2^{m+1}}{b_2^m}+\cdots+\frac{a_n^{m+1}}{b_n^m} \ge \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{m+1}}{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^m}$$

当且仅当 $a_i=\lambda b_i$ 时取等号
其中二维形式如下
对于正数 a，b，x，y，有

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \ge \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

当且仅当 $a:b=x:y$ 时取等号
也有

$$\frac{a^2}{ax}+\frac{b^2}{by}=\frac{a}{x}+\frac{b}{y} \ge \frac{(a+b)^2}{ax+by}$$

当且仅当 $x=y$ 时取等号

1.6 舒尔不等式

$a, b, c \geq 0 \quad t \in R$ 时，有

$$a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-a)(b-c) + c^t(c-a)(c-b) \geq 0$$

当且仅当 $a = b = c$，或其中两个数相等且另一个等于零时，取等号。特别的，当 t 为非负偶数时，此不等式对任意实数 a, b, c 成立。

1.7 琴生不等式

设 $f(x)$ 在区间 I 上是下凸函数，则对任意 $x_i \in I$ 及 $p_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$，有

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot f(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} \geq f\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}\right)$$

其中等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立，若 $f(x)$ 在区间 I 上是上凸函数，则不等号反向。

2 函数

2.1 拉格朗日中值定理

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f^{'}(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2.2 拉格朗日乘数法

【例题】若正数 a, b 满足 $2a + b = 1$，则 $\frac{a}{2-2a} + \frac{b}{2-b}$ 的最小值为?

解：构造拉格朗日函数

$$L(a, b, \lambda) = \frac{a}{2-2a} + \frac{b}{2-b} - \lambda(2a + b - 1)$$

令

$$\frac{\partial L}{\partial a} = L_a = \frac{1}{2(1-a)^2} - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = L_b = \frac{2}{(2-b)^2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = L_\lambda = -(2a+b-1) = 0$$

联立解得

$$a = \frac{5-3\sqrt{2}}{2}, b = 3\sqrt{2}-4, \lambda = \frac{1}{27-18\sqrt{2}}$$

从而

$$\frac{a}{2-2a} + \frac{b}{2-b} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$$

此即为所求的最小值。

2.3 高次韦达定理

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为如下方程的根

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

则有

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_nx_{n-1} = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\cdots$$

$$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

其中三次的形式如下

若 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ 的 3 个根分别为 x_1, x_2, x_3 则有

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

2.4 泰勒展开

若函数 $f(x)$ 在 x_0 存在 n 阶导数，则有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}$$

上式即为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒展开式，其中 $R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（其中 ξ 介于 x 和 x_0 间）叫做拉格朗日余项。
拉格朗日余项可用于证明不等式。如：
$-1<x<1$ 时

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4(1+\xi)^4}(-1<\xi<1)$$

因为 $-\frac{x^4}{4(1+\xi)^4}\le 0$，所以 $\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

2.5 极值点偏移

【例题】已知函数 $f(x)=e^x-ax$ 有两个零点 x_1 和 x_2，证明：$x_1+x_2>2$

$$f(x)=e^x-ax=0\Leftrightarrow \frac{e^x}{x}=a$$

令

$$\varphi(x)=\frac{e^x}{x}$$

则

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \varphi(x_1)=\varphi(x_2),\quad \varphi'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

因此 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 单减，$(1,+\infty)$ 单增，不妨设 $0<x_1<1<x_2$
则 $x_1+x_2>2\Leftrightarrow x_2>2-x_1$，注意到 $2-x_1>1$
$\Leftrightarrow \varphi(x_2)>\varphi(2-x_1)$，注意到 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$
则 $\varphi(x_1)>\varphi(2-x_1)$，其中 $0<x_1<1$
令

$$g(x)=\varphi(x)-\varphi(2-x),\quad 0<x<1$$

易知

$$g'(x)<0$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单减，$g(x)>g(1)=\varphi(1)-\varphi(1)=0$
即 $\varphi(x)-\varphi(2-x)>0$，令 $x=x_1$，Q.E.D.

2.6 最值函数基本定理

定理一：

$$min\{a,b\}\le\frac{a+b}{2}\le max\{a,b\}$$

$$min\left\{a,b\right\}\leq\sqrt{ab}\leq max\left\{a,b\right\}.(a>0,b>0)$$

定理二：

$$max\left\{\left|a+b\right|,\left|a-b\right|\right\}=\left|a\right|+\left|b\right|$$
$$min\left\{\left|a+b\right|,\left|a-b\right|\right\}=\left|\left|a\right|-\left|b\right|\right|$$

定理三：

$$max\left\{|a|,|b|\right\}=\frac{|a+b|}{2}+\frac{|a-b|}{2}$$
$$min\left\{|a|,|b|\right\}=\left|\frac{|a+b|}{2}-\frac{|a-b|}{2}\right|$$

3 数列

3.1 不动点原理

【例题】求 $a_1=1,a_{n+1}=2a_n+1$ 的通项公式
其特征函数为 $f(x)=2x+1$，令 $f(x)=x$, 解得 $x=-1$
带入得 $a_{n+1}-(-1)=2(a_n-(-1))$，即 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，之后根据等比数列可得 $a_n=2^n-1$

4 组合数学

4.1 容斥原理

建议根据韦恩图解题

4.2 伯努利装错信封问题

n 封信与 n 个信封全部错位的组合数为

$$f(n)=n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$

5 向量

5.1 极化恒等式

重要恒等式:$4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$
极化恒等式:$4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$

5.2 分点恒等式

在 $\triangle ABC$ 中，M 为 BC 上一等分点
当 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MC}$ ，有

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AC}$$

5.3 三点共线定理

在平面中 A、B、P 三点共线的充要条件是：对于该平面内任意一点 O，存在唯一的实数 x,y 使得：

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$$

且

$$x+y=1$$

特别的有：当 P 在线段 AB 上时，$x>0,y>0$
P 在线段 AB 之外时,$xy<0$

5.4 向量中值定理

在 $\triangle ABC$ 中，M 为 BC 的中点，则

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

对应的向量公式有：

$$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2=2\left[\left(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right)^2+\left(\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}\right)^2\right]$$

5.5 向量数乘余弦定理

在 $\triangle ABC$ 中, 有

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$$

6 三角

6.1 和差化积

$$sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$sin\alpha - sin\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

6.2 积化和差

$$sin\alpha cos\beta = \frac{1}{2}\left[sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)\right]$$
$$cos\alpha sin\beta = \frac{1}{2}\left[sin(\alpha+\beta) - sin(\alpha-\beta)\right]$$
$$cos\alpha cos\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$sin\alpha sin\beta = -\frac{1}{2}\left[cos(\alpha+\beta) - cos(\alpha-\beta)\right]$$

6.3 半角公式

$$sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}$$
$$sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}$$
$$tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}} = \frac{sin\alpha}{1+cos\alpha} = \frac{1-cos\alpha}{sin\alpha}$$

7 统计、概率、分布

7.1 期望、方差、标准差

数学期望：我们称 $E\xi = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$ 为离散型随机变量 ξ 的数学期望

方差和标准差：我们称 $D\xi = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E\xi)^2p_i$ 为离散型随机变量 ξ 的方差，其算数平方根 $\sqrt{D\xi} = \sigma\xi$ 叫做离散型随机变量 ξ 的标准差

定理一：

$$E(a\xi + b) = aE\xi + b$$

$$D(a\xi + b) = a^2D\xi$$

定理二：

$$E(a\xi_1 + b\xi_2) = aE\xi_1 + bE\xi_2$$

7.2 二项分布

n 次试验中事件 A 恰好发生 k 次

$$P(E) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

我们称 ξ 服从二项分布，记作 $\xi \sim B(n, p)$
定理：$E\xi = np$, $D\xi = np(1-p)$

7.3 正态分布

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in R, \sigma > 0$$

记作 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$
性质：1. 其正态曲线关于 $x = \mu$ 对称，最高点为 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$
2.$E\xi = \mu, D\xi = \sigma^2$
3.σ 越大，正态曲线越“矮胖”，表示分布越分散，σ 越小，正态曲线越“瘦高”，表示分布越集中

7.4 几何分布

在 n 次伯努利试验中，试验 k 次才得到第一次成功的机率。
记为 $P(\xi=k)=g(k,p)=q^{k-1}p$, 其中 $q=1-p$，也记为 $\xi\sim GE(p)$
定理：$E\xi=\frac{1}{p}, D\xi=\frac{q}{p^2}$

7.5 超几何分布

它描述了从有限 N 个物件（其中包含 M 个指定种类的物件）中抽出 n 个物件，成功抽出该指定种类的物件的次数（不放回）
记为 $\eta\sim H(n,M,N)$

$$P\left(\eta=m\right)=\frac{\binom{M}{m}\cdot\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}\quad m=0,1,2,\ldots,min\left\{n,M\right\}$$

8 方程

8.1 立方和分解

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

8.2 立方差分解

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

9 方法

9.1 主元法

【例题】已知函数 $f(x)=\lg\frac{1+2^x+4^x\cdot a}{a^2-a+1}$, 其中 a 为常数, 若当 $x\in(-\infty,1]$ 时，$f(x)$ 有意义，求实数 a 的取值范围
由 $\frac{1+2^x+4^x\cdot a}{a^2-a+1}>0$，且 $a^2-a+1=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$
得 $1+2^x+4^x\cdot a>0$，故 $a>-(\frac{1}{4^x}+\frac{1}{2^x})$
当 $x\in(-\infty,1]$ 时，$y=\frac{1}{4^x}$ 和 $y=\frac{1}{2^x}$ 都是减函数，所以 $y=-(\frac{1}{4^x}+\frac{1}{2^x})$ 单增，且其最大值为 $-\frac{3}{4}$，所以 a 取值为 $\left(-\frac{3}{4},+\infty\right)$