数学整理

o7k40shen

2020 年 11 月 21 日

目录

1 函数

1.1 拉格朗日中值定理

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f^{'}(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

1.2 拉格朗日乘数法

【例题】若正数 a, b 满足 $2a + b = 1$，则 $\frac{a}{2-2a} + \frac{b}{2-b}$ 的最小值为?
解：构造拉格朗日函数

$$L(a, b, \lambda) = \frac{a}{2 - 2a} + \frac{b}{2 - b} - \lambda(2a + b - 1)$$

令

$$\frac{\partial L}{\partial a} = L_a = \frac{1}{2(1-a)^2} - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = L_b = \frac{2}{(2-b)^2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = L_\lambda = -(2a + b - 1) = 0$$

联立解得

$$a = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{2}, b = 3\sqrt{2} - 4, \lambda = \frac{1}{27 - 18\sqrt{2}}$$

从而

$$\frac{a}{2 - 2a} + \frac{b}{2 - b} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$$

此即为所求的最小值。

1.3 高次韦达定理

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为如下方程的根

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

则有

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_nx_{n-1} = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\cdots$$

$$x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

其中三次的形式如下

若 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ 的 3 个根分别为 x_1, x_2, x_3 则有

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

1.4 切比雪夫最佳逼近

1.5 泰勒展开