

数学整理

o7k40shen

2020 年 12 月 12 日

目录

1	不等式	3
1.1	均值不等式	3
1.2	对数平均不等式	3
1.3	柯西不等式	3
1.4	排序不等式	4
1.5	权方和不等式	4
1.6	舒尔不等式	5
1.7	琴生不等式	5
1.8	绝对值不等式	5
2	函数	5
2.1	拉格朗日中值定理	5
2.2	拉格朗日乘数法	5
2.3	高次韦达定理	6
2.4	泰勒展开	7
2.5	极值点偏移	7
2.6	最值函数基本定理	8
3	数列	8
3.1	不动点原理	8
4	组合数学	8
4.1	容斥原理	8

目录	2
4.2 伯努利装错信封问题	8
5 向量	9
5.1 极化恒等式	9
5.2 分点恒等式	9
5.3 三点共线定理	9
5.4 向量中值定理	9
5.5 向量数乘余弦定理	10
6 三角	10
6.1 和差化积	10
6.2 积化和差	10
6.3 半角公式	10
6.4 辅助角公式	11
7 统计、概率、分布	11
7.1 期望、方差、标准差	11
7.2 二项分布	11
7.3 正态分布	11
7.4 几何分布	12
7.5 超几何分布	12
8 方程	12
8.1 立方和分解	12
8.2 立方差分解	12
9 几何	12
9.1 射影定理	12
9.2 阿波罗尼斯圆	13
9.3 角平分线定理	13
10 方法	13
10.1 主元法	13

1 不等式

1.1 均值不等式

H_n 为调和平均数、 G_n 为几何平均数、 A_n 为算数平均数、 Q_n 为平方平均数。任意 $x_i > 0$ 都成立时，有

$$H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号

1.2 对数平均不等式

$a \neq b$ 时，有

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$$

1.3 柯西不等式

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 时取等号

其中二维形式如下

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

当且仅当 $ad = bc$ 即 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ 时取等

1.4 排序不等式

排序不等式表示如下

设有两组数 a_1, a_2, \dots, a_n 和 b_1, b_2, \dots, b_n , 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ 且 $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, c_1, c_2, \dots, c_n 是 b_1, b_2, \dots, b_n 的乱序排列, 则有:

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ 时取等号。便于记忆, 常记为:

反序和 \leq 乱序和 \leq 顺序和

1.5 权方和不等式

若 $a_i > 0$, $b_i > 0$, $m > 0$, 则有

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{m+1}}{b_i^m} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^m}$$

即为

$$\frac{a_1^{m+1}}{b_1^m} + \frac{a_2^{m+1}}{b_2^m} + \dots + \frac{a_n^{m+1}}{b_n^m} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{m+1}}{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^m}$$

当且仅当 $a_i = \lambda b_i$ 时取等号

其中二维形式如下

对于正数 a, b, x, y , 有

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

当且仅当 $a:b = x:y$ 时取等号

也有

$$\frac{a^2}{ax} + \frac{b^2}{by} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{ax+by}$$

当且仅当 $x = y$ 时取等号

1.6 舒尔不等式

$a, b, c \geq 0$ $t \in R$ 时, 有

$$a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-a)(b-c) + c^t(c-a)(c-b) \geq 0$$

当且仅当 $a = b = c$, 或其中两个数相等且另一个等于零时, 取等号。特别的, 当 t 为非负偶数时, 此不等式对任意实数 a, b, c 成立。

1.7 琴生不等式

设 $f(x)$ 在区间 I 上是下凸函数, 则对任意 $x_i \in I$ 及 $p_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 有

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot f(x_i)}{\sum_{i=1}^n p_i} \geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)$$

其中等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 时成立, 若 $f(x)$ 在区间 I 上是上凸函数, 则不等号反向。

1.8 绝对值不等式

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

2 函数

2.1 拉格朗日中值定理

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2.2 拉格朗日乘数法

【例题】若正数 a, b 满足 $2a + b = 1$, 则 $\frac{a}{2-2a} + \frac{b}{2-b}$ 的最小值为?

解: 构造拉格朗日函数

$$L(a, b, \lambda) = \frac{a}{2-2a} + \frac{b}{2-b} - \lambda(2a + b - 1)$$

令

$$\frac{\partial L}{\partial a} = L_a = \frac{1}{2(1-a)^2} - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = L_b = \frac{2}{(2-b)^2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = L_\lambda = -(2a + b - 1) = 0$$

联立解得

$$a = \frac{5-3\sqrt{2}}{2}, b = 3\sqrt{2}-4, \lambda = \frac{1}{27-18\sqrt{2}}$$

从而

$$\frac{a}{2-2a} + \frac{b}{2-b} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$$

此即为所求的最小值。

2.3 高次韦达定理

设 x_1, x_2, \dots, x_n 为如下方程的根

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

则有

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_n x_{n-1} = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

...

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

其中三次的形式如下

若 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) 的 3 个根分别为 x_1, x_2, x_3 则有

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

2.4 泰勒展开

若函数 $f(x)$ 在 x_0 存在 n 阶导数, 则有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}$$

上式即为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒展开式, 其中 $R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (其中 ξ 介于 x 和 x_0 间) 叫做拉格朗日余项。

拉格朗日余项可用于证明不等式。如:

$-1 < x < 1$ 时

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4(1+\xi)^4} \quad (-1 < \xi < 1)$$

因为 $-\frac{x^4}{4(1+\xi)^4} \leq 0$, 所以 $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

2.5 极值点偏移

【例题】已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 有两个零点 x_1 和 x_2 , 证明: $x_1 + x_2 > 2$

$$f(x) = e^x - ax = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} = a$$

令

$$\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$$

则

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2), \quad \varphi'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

因此 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 单减, $(1, +\infty)$ 单增, 不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2$

则 $x_1 + x_2 > 2 \Leftrightarrow x_2 > 2 - x_1$, 注意到 $2 - x_1 > 1$

$\Leftrightarrow \varphi(x_2) > \varphi(2 - x_1)$, 注意到 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

则 $\varphi(x_1) > \varphi(2 - x_1)$, 其中 $0 < x_1 < 1$

令

$$g(x) = \varphi(x) - \varphi(2-x), \quad 0 < x < 1$$

易知

$$g'(x) < 0$$

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单减, $g(x) > g(1) = \varphi(1) - \varphi(1) = 0$

即 $\varphi(x) - \varphi(2-x) > 0$, 令 $x = x_1$, Q.E.D.

2.6 最值函数基本定理

定理一:

$$\min\{a, b\} \leq \frac{a+b}{2} \leq \max\{a, b\}$$
$$\min\{a, b\} \leq \sqrt{ab} \leq \max\{a, b\} \quad (a > 0, b > 0)$$

定理二:

$$\max\{|a+b|, |a-b|\} = |a| + |b|$$
$$\min\{|a+b|, |a-b|\} = ||a| - |b||$$

定理三:

$$\max\{|a|, |b|\} = \frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$
$$\min\{|a|, |b|\} = \left| \frac{|a+b|}{2} - \frac{|a-b|}{2} \right|$$

3 数列

3.1 不动点原理

【例题】求 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$ 的通项公式

其特征函数为 $f(x) = 2x + 1$, 令 $f(x) = x$, 解得 $x = -1$

带入得 $a_{n+1} - (-1) = 2(a_n - (-1))$, 即 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$, 之后根据等比数列可得 $a_n = 2^n - 1$

4 组合数学

4.1 容斥原理

建议根据韦恩图解题

4.2 伯努利装错信封问题

n 封信与 n 个信封全部错位的组合数为

$$f(n) = n! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$$

5 向量

5.1 极化恒等式

重要恒等式: $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$

极化恒等式: $4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$

5.2 分点恒等式

在 $\triangle ABC$ 中, M 为 BC 上一等分点

当 $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{MC}$, 有

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+\lambda} \overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \overrightarrow{AC}$$

5.3 三点共线定理

在平面中 A、B、P 三点共线的充要条件是: 对于该平面内任意一点 O, 存在唯一的实数 x, y 使得:

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$$

且

$$x + y = 1$$

特别的有: 当 P 在线段 AB 上时, $x > 0, y > 0$

P 在线段 AB 之外时, $xy < 0$

5.4 向量中值定理

在 $\triangle ABC$ 中, M 为 BC 的中点, 则

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

对应的向量公式有:

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = 2 \left[\left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2} \right)^2 \right]$$

5.5 向量数乘余弦定理

在 $\triangle ABC$ 中, 有

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

6 三角

6.1 和差化积

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

6.2 积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

6.3 半角公式

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

6.4 辅助角公式

$$a\sin\theta \pm b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta \pm \varphi), \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

7 统计、概率、分布

7.1 期望、方差、标准差

数学期望：我们称 $E\xi = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$ 为离散型随机变量 ξ 的数学期望

方差和标准差：我们称 $D\xi = \sum_{i=1}^n (x_i - E\xi)^2 p_i$ 为离散型随机变量 ξ 的方差，其算术平方根 $\sqrt{D\xi} = \sigma\xi$ 叫做离散型随机变量 ξ 的标准差

定理一：

$$E(a\xi + b) = aE\xi + b$$

$$D(a\xi + b) = a^2 D\xi$$

定理二：

$$E(a\xi_1 + b\xi_2) = aE\xi_1 + bE\xi_2$$

7.2 二项分布

n 次试验中事件 A 恰好发生 k 次

$$P(E) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

我们称 ξ 服从二项分布，记作 $\xi \sim B(n, p)$

定理： $E\xi = np$, $D\xi = np(1-p)$

7.3 正态分布

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in R, \sigma > 0$$

记作 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$

性质：1. 其正态曲线关于 $x = \mu$ 对称，最高点为 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

$$2. E\xi = \mu, D\xi = \sigma^2$$

3. σ 越大, 正态曲线越“矮胖”, 表示分布越分散, σ 越小, 正态曲线越“瘦高”, 表示分布越集中

7.4 几何分布

在 n 次伯努利试验中, 试验 k 次才得到第一次成功的机率。

记为 $P(\xi = k) = g(k, p) = q^{k-1}p$, 其中 $q = 1 - p$, 也记为 $\xi \sim GE(p)$

定理: $E\xi = \frac{1}{p}, D\xi = \frac{q}{p^2}$

7.5 超几何分布

它描述了从有限 N 个物件 (其中包含 M 个指定种类的物件) 中抽出 n 个物件, 成功抽出该指定种类的物件的次数 (不放回)

记为 $\eta \sim H(n, M, N)$

$$P(\eta = m) = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} \quad m = 0, 1, 2, \dots, \min\{n, M\}$$

8 方程

8.1 立方和分解

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

8.2 立方差分解

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

9 几何

9.1 射影定理

射影定理, 又称“欧几里德定理”: 在直角三角形中, 斜边上的高是两条直角边在斜边射影的比例中项, 每一条直角边又是这条直角边在斜边上

的射影和斜边的比例中项。

在 $Rt \triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, BD 为斜边 AC 上的高, 则有射影定理如下:

$$BD^2 = AD \cdot CD$$

$$AB^2 = AC \cdot AD$$

$$BC^2 = CD \cdot AC$$

9.2 阿波罗尼斯圆

平面内到两个定点的距离之比为常数 $k(k \neq 1)$ 的点的轨迹是圆

9.3 角平分线定理

在 $\triangle ABC$ 中, AM 为 $\angle BAC$ 的角平分线, M 在 BC 上, 则有:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC}$$

10 方法

10.1 主元法

【例题】 对任意 $m \in [-1, 1]$, 函数 $f(x) = x^2 + (m-4)x + 4 - 2m$ 的值恒大于零, 求 x 的取值范围。

$$f(x) = x^2 + (m-4)x + 4 - 2m = (x-2)m + x^2 - 4x + 4$$

令

$$g(m) = (x-2)m + x^2 - 4x + 4$$

所以有

$$\begin{cases} g(-1) = (x-2)(-1) + x^2 - 4x + 4 > 0 \\ g(1) = (x-2) \cdot 1 + x^2 - 4x + 4 > 0 \end{cases}$$

解得 $x < 1$ 或 $x > 3$