

# 数学整理

o7k40shen

2020 年 8 月 15 日

## 目录

<b>1</b>	<b>不等式</b>	<b>2</b>
1.1	均值不等式 . . . . .	2
1.2	对数平均不等式 . . . . .	2
1.3	柯西不等式 . . . . .	2
1.4	排序不等式 . . . . .	3
1.5	权方和不等式 . . . . .	3
1.6	舒尔不等式 . . . . .	4
1.7	琴生不等式 . . . . .	4
<b>2</b>	<b>函数</b>	<b>5</b>
2.1	拉格朗日中值定理 . . . . .	5
2.2	拉格朗日乘数法 . . . . .	5
2.3	高次韦达定理 . . . . .	5
2.4	切比雪夫最佳逼近 . . . . .	6
2.5	泰勒展开 . . . . .	6

## 1 不等式

### 1.1 均值不等式

$H_n$  为调和平均数、 $G_n$  为几何平均数、 $A_n$  为算数平均数、 $Q_n$  为平方平均数。任意  $x_i > 0$  都成立时，有

$$H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$$

当且仅当  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$  时取等号

### 1.2 对数平均不等式

$a \neq b$  时，有

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$$

### 1.3 柯西不等式

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$$

当且仅当  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$  时取等号

其中二维形式如下

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

当且仅当  $ad = bc$  即  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  时取等

## 1.4 排序不等式

排序不等式表示如下

设有两组数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , 满足  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  且  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ ,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  是  $b_1, b_2, \dots, b_n$  的乱序排列, 则有:

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  或  $b_1 = b_2 = \dots = b_n$  时取等号。便于记忆, 常记为:

反序和  $\leq$  乱序和  $\leq$  顺序和

## 1.5 权方和不等式

若  $a_i > 0$ ,  $b_i > 0$ ,  $m > 0$ , 则有

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{m+1}}{b_i^m} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^m}$$

即为

$$\frac{a_1^{m+1}}{b_1^m} + \frac{a_2^{m+1}}{b_2^m} + \dots + \frac{a_n^{m+1}}{b_n^m} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{m+1}}{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^m}$$

当且仅当  $a_i = \lambda b_i$  时取等号

其中二维形式如下

对于正数  $a, b, x, y$ , 有

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

当且仅当  $a:b = x:y$  时取等号

也有

$$\frac{a^2}{ax} + \frac{b^2}{by} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{ax+by}$$

当且仅当  $x = y$  时取等号

### 1.6 舒尔不等式

$a, b, c \geq 0$   $t \in R$  时, 有

$$a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-a)(b-c) + c^t(c-a)(c-b) \geq 0$$

当且仅当  $a = b = c$ , 或其中两个数相等且另一个等于零时, 取等号。特别的, 当  $t$  为非负偶数时, 此不等式对任意实数  $a, b, c$  成立。

### 1.7 琴生不等式

设  $f(x)$  在区间  $I$  上是下凸函数, 则对任意  $x_i \in I$  及  $p_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 有

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot f(x_i)}{\sum_{i=1}^n p_i} \geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)$$

其中等号当且仅当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  时成立, 若  $f(x)$  在区间  $I$  上是上凸函数, 则不等号反向。

## 2 函数

### 2.1 拉格朗日中值定理

设  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上可导, 则存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### 2.2 拉格朗日乘数法

【例题】若正数  $a, b$  满足  $2a + b = 1$ , 则  $\frac{a}{2-2a} + \frac{b}{2-b}$  的最小值为?

解: 构造拉格朗日函数

$$L(a, b, \lambda) = \frac{a}{2-2a} + \frac{b}{2-b} - \lambda(2a + b - 1)$$

令

$$\frac{\partial L}{\partial a} = L_a = \frac{1}{2(1-a)^2} - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = L_b = \frac{2}{(2-b)^2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = L_\lambda = -(2a + b - 1) = 0$$

联立解得

$$a = \frac{5-3\sqrt{2}}{2}, b = 3\sqrt{2}-4, \lambda = \frac{1}{27-18\sqrt{2}}$$

从而

$$\frac{a}{2-2a} + \frac{b}{2-b} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$$

此即为所求的最小值。

### 2.3 高次韦达定理

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为如下方程的根

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

则有

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_nx_{n-1} = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

...

$$x_1x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

其中三次的形式如下

若  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的 3 个根分别为  $x_1, x_2, x_3$  则有

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

## 2.4 切比雪夫最佳逼近

## 2.5 泰勒展开