数学整理

o7k40shen

2020 年 11 月 21 日

目录

1 不等式

1.1 均值不等式

H_n 为调和平均数、G_n 为几何平均数、A_n 为算数平均数、Q_n 为平方平均数。任意 $x_i > 0$ 都成立时，有

$$H_n = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

$$A_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号

1.2 对数平均不等式

$a \neq b$ 时，有

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{lna - lnb} < \frac{a+b}{2}$$

1.3 柯西不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 时取等号
其中二维形式如下

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

当且仅当 $ad = bc$ 即 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ 时取等

1.4 排序不等式

排序不等式表示如下
设有两组数 $a_1,a_2,...,a_n$ 和 $b_1,b_2,...,b_n$，满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 且 $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ $c_1,c_2,...,c_n$ 是 $b_1,b_2,...,b_n$ 的乱序排列，则有：

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1 \leq a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n \leq a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时取等号。便于记忆，常记为：

$$\text{反序和} \leq \text{乱序和} \leq \text{顺序和}$$

1.5 权方和不等式

若 $a_i>0$，$b_i>0$，$m>0$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m} \geq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)^{m}}$$

即为

$$\frac{a_1^{m+1}}{b_1^m}+\frac{a_2^{m+1}}{b_2^m}+\cdots+\frac{a_n^{m+1}}{b_n^m} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{m+1}}{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^m}$$

当且仅当 $a_i=\lambda b_i$ 时取等号
其中二维形式如下
对于正数 a，b，x，y，有

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

当且仅当 $a:b=x:y$ 时取等号
也有

$$\frac{a^2}{ax}+\frac{b^2}{by}=\frac{a}{x}+\frac{b}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{ax+by}$$

当且仅当 $x=y$ 时取等号

1.6 舒尔不等式

$a, b, c \geq 0 \quad t \in R$ 时，有

$$a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-a)(b-c)+c^t(c-a)(c-b) \geq 0$$

当且仅当 $a=b=c$，或其中两个数相等且另一个等于零时，取等号。特别的，当 t 为非负偶数时，此不等式对任意实数 a, b, c 成立。

1.7 琴生不等式

设 $f(x)$ 在区间 I 上是下凸函数，则对任意 $x_i \in I$ 及 $p_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$，有

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot f(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} \geq f\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}\right)$$

其中等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立，若 $f(x)$ 在区间 I 上是上凸函数，则不等号反向。

2 函数

2.1 拉格朗日中值定理

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f^{'}(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

2.2 拉格朗日乘数法

【例题】若正数 a,b 满足 $2a+b=1$，则 $\frac{a}{2-2a}+\frac{b}{2-b}$ 的最小值为?
解：构造拉格朗日函数

$$L(a,b,\lambda)=\frac{a}{2-2a}+\frac{b}{2-b}-\lambda(2a+b-1)$$

令

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial a}=L_a=\frac{1}{2(1-a)^2}-2\lambda=0\\
\frac{\partial L}{\partial b}=L_b=\frac{2}{(2-b)^2}-\lambda=0\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda}=L_\lambda=-(2a+b-1)=0
\end{aligned}$$

联立解得

$$a=\frac{5-3\sqrt{2}}{2},b=3\sqrt{2}-4,\lambda=\frac{1}{27-18\sqrt{2}}$$

从而

$$\frac{a}{2-2a}+\frac{b}{2-b}=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{2}$$

此即为所求的最小值。

2.3 高次韦达定理

设 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 为如下方程的根

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

则有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_nx_{n-1} = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\dots$$

$$x_1x_2\dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

其中三次的形式如下

若 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ 的 3 个根分别为 x_1, x_2, x_3 则有

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

2.4 切比雪夫最佳逼近

2.5 泰勒展开