

数学整理

o7k40shen

2020 年 11 月 21 日

目录

1 不等式	2
1.1 均值不等式	2
1.2 对数平均不等式	2
1.3 柯西不等式	2
1.4 排序不等式	3
1.5 权方和不等式	3
1.6 舒尔不等式	4
1.7 琴生不等式	4

1 不等式

1.1 均值不等式

H_n 为调和平均数、 G_n 为几何平均数、 A_n 为算数平均数、 Q_n 为平方平均数。任意 $x_i > 0$ 都成立时，有

$$H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号

1.2 对数平均不等式

$a \neq b$ 时，有

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$$

1.3 柯西不等式

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 时取等号

其中二维形式如下

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

当且仅当 $ad = bc$ 即 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ 时取等

1.4 排序不等式

排序不等式表示如下

设有两组数 a_1, a_2, \dots, a_n 和 b_1, b_2, \dots, b_n , 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ 且 $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, c_1, c_2, \dots, c_n 是 b_1, b_2, \dots, b_n 的乱序排列, 则有:

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ 时取等号。便于记忆, 常记为:

反序和 \leq 乱序和 \leq 顺序和

1.5 权方和不等式

若 $a_i > 0$, $b_i > 0$, $m > 0$, 则有

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^{m+1}}{b_i^m} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^m}$$

即为

$$\frac{a_1^{m+1}}{b_1^m} + \frac{a_2^{m+1}}{b_2^m} + \dots + \frac{a_n^{m+1}}{b_n^m} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{m+1}}{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^m}$$

当且仅当 $a_i = \lambda b_i$ 时取等号

其中二维形式如下

对于正数 a, b, x, y , 有

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

当且仅当 $a:b = x:y$ 时取等号

也有

$$\frac{a^2}{ax} + \frac{b^2}{by} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{ax+by}$$

当且仅当 $x = y$ 时取等号

1.6 舒尔不等式

$a, b, c \geq 0$ $t \in R$ 时, 有

$$a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-a)(b-c) + c^t(c-a)(c-b) \geq 0$$

当且仅当 $a = b = c$, 或其中两个数相等且另一个等于零时, 取等号。特别的, 当 t 为非负偶数时, 此不等式对任意实数 a, b, c 成立。

1.7 琴生不等式

设 $f(x)$ 在区间 I 上是下凸函数, 则对任意 $x_i \in I$ 及 $p_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 有

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot f(x_i)}{\sum_{i=1}^n p_i} \geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)$$

其中等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 时成立, 若 $f(x)$ 在区间 I 上是上凸函数, 则不等号反向。