数学整理

o7k40shen

2020 年 11 月 21 日

目录

1 函数

1.1 拉格朗日中值定理

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f^{'}(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

1.2 拉格朗日乘数法

【例题】若正数 a,b 满足 $2a+b=1$，则 $\frac{a}{2-2a}+\frac{b}{2-b}$ 的最小值为?
解：构造拉格朗日函数

$$L(a,b,\lambda)=\frac{a}{2-2a}+\frac{b}{2-b}-\lambda(2a+b-1)$$

令

$$\frac{\partial L}{\partial a}=L_a=\frac{1}{2(1-a)^2}-2\lambda=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial b}=L_b=\frac{2}{(2-b)^2}-\lambda=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=L_\lambda=-(2a+b-1)=0$$

联立解得

$$a=\frac{5-3\sqrt{2}}{2},b=3\sqrt{2}-4,\lambda=\frac{1}{27-18\sqrt{2}}$$

从而

$$\frac{a}{2-2a}+\frac{b}{2-b}=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{2}$$

此即为所求的最小值。

1.3 高次韦达定理

设 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为如下方程的根

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

则有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_nx_{n-1} = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\cdots$$

$$x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

其中三次的形式如下

若 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ 的 3 个根分别为 x_1, x_2, x_3 则有

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

1.4 切比雪夫最佳逼近

1.5 泰勒展开