

# Protokoll zum Versuch Nichtlineare Dynamik und Chaos

Nicolas Heimann, Jesse Hinrichsen

*Universität Hamburg*

2015

Zusammenfassung

## 1 Einleitung

LALALA

## 2 Logistische Abbildung

$$x_{n+1} = f_r(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

Def.:  $f^2(x) = f(f(x))$

$$\Rightarrow x_{n+2} = r^2 x_n(1 - x_n)(1 - rx_n(1 - x_n))$$

Fixpunktgleichung (Einerzyklus):

$$x = rx(1 - x)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1 - \frac{1}{r}$$

Startwerte  $x=0$  und  $x=1$  haben den Fixpunkt  $x_1$  wohingegen für alle  $x \in (0, 1)$  der Fixpunkt  $x_2$  ist.

Fixpunktgleichung (Zweierzyklus):

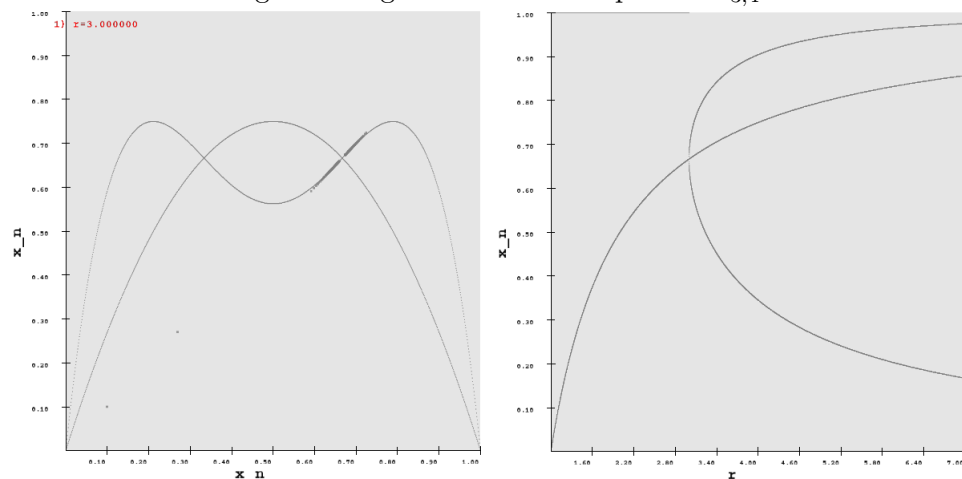
$$x = r^2 x(1 - x)(1 - rx(1 - x))$$

$$\Rightarrow x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{r^2 - 2r - 3} + r + 1}{2r}$$

Damit  $x_{3,4}$  reel bleibt muss  $r^2 - 2r - 3 \geq 0$

$$\Rightarrow r \leq -1 \wedge r \geq 3$$

Für diesen Bereich gibt es folglich 2 weitere Fixpunkte  $x_{3,4} \Leftrightarrow$  Periodeverdopplung



## 2.1 Stabilitätsbedingung

Ein Fixpunkt ist stabil, wenn gilt:

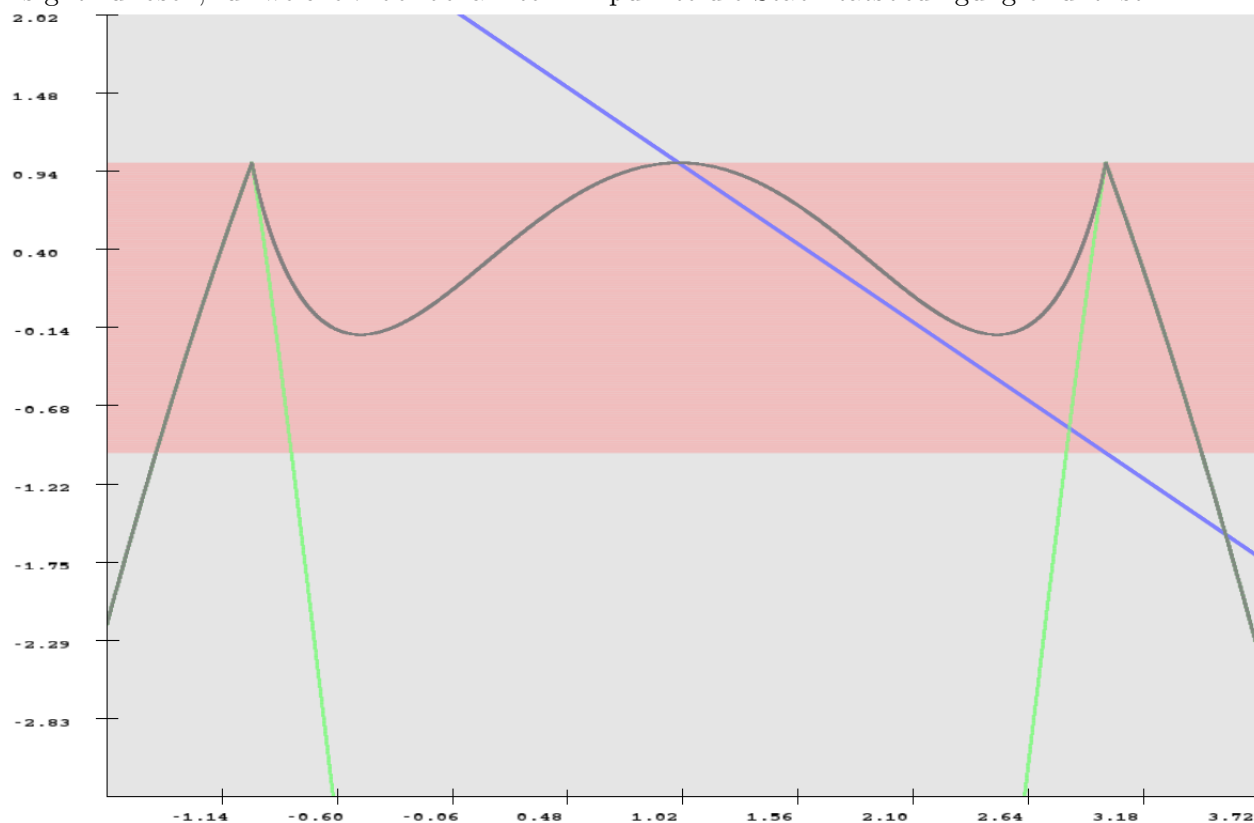
$$|f'(x)| < 1$$

Im Fall der logistischen Abbildung gilt

$$\frac{d}{dx}f(x) = r - 2rx = r(1 - 2x)$$

$$\frac{d}{dx}f^2(x) = -r^2(2x - 1)(2r(x - 1)x + 1)$$

Es gilt zu lösen, für welche  $r$  bei bekannten Fixpunkte die Stabilitätsbedingung erfüllt ist.



Grafisch lässt sich ablesen, dass der Fixpunkt  $x_3 = \frac{\sqrt{r^2-2r-3}+r+1}{2r}$  (grüner Graph) für folgende Bereiche stabil ist:

$$-1.45 < r < -0.82 \Rightarrow -1.45 < r \leq -1$$

$$2.82 < r < 3.45 \Rightarrow 3 \geq r > 3.45$$

Der Fixpunkt  $x_4 = \frac{-\sqrt{r^2-2r-3}+r+1}{2r}$  (grauer Graph) ist im gesamten Bereich  $-1.45 < r < 3.45$  stabil aber da der Fixpunkt ebenfalls nur für  $r \leq -1 \wedge r \geq 3$  existiert gilt der selbe Bereich wie für  $x_3$ . Die Fixpunkte sind dort stabil, wo sich der graue und der grüne Graph in der Abbildung überlagern.

## 3 Bifurktationsdiagramm

### 3.1 Logistische Abbildung

asdf

### 3.2 Sinus Abbildung

asdf

## 4 Feigenbaumkonstante

### 4.1 Lyapunov

Eine Möglichkeit die Feigenbaumkonstante zu berechnen ist über die Nullstellen des Lyapunov-Exponenten. Gerade an diesen Stellen kommt es zu einer Periodenverdopplung. Dann lässt sich die Feigenbaumkonstante durch

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{a_n - a_{n-1}}$$

, wobei die  $a_n$  der Parameter ist bei dem die n-te Periodenverdopplung auftritt. Für den Lyapunov-Exponenten gilt:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \log \left| \frac{f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)}{\epsilon} \right|$$

oder auch

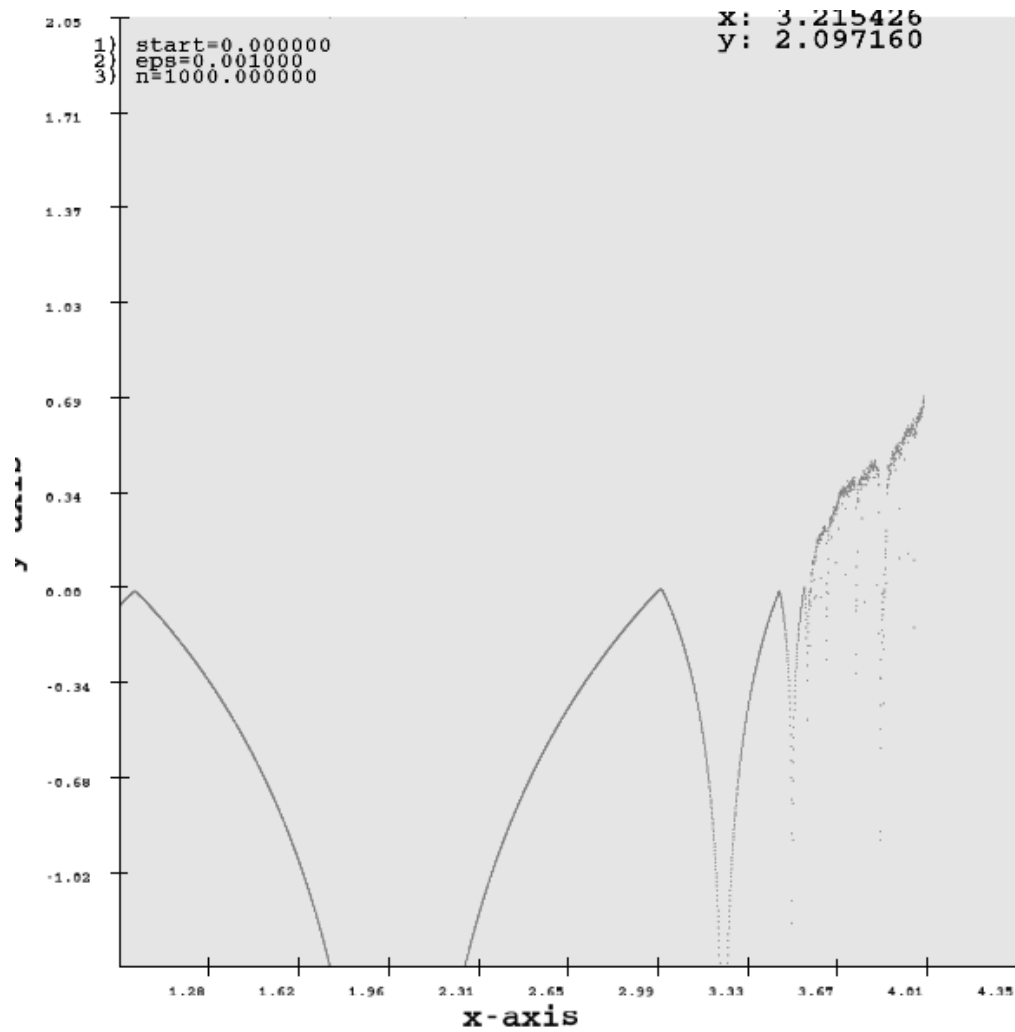
$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log f'(x)$$

Zweite Formel implementiert als OpenGL Kernel für die logistische Abbildung:

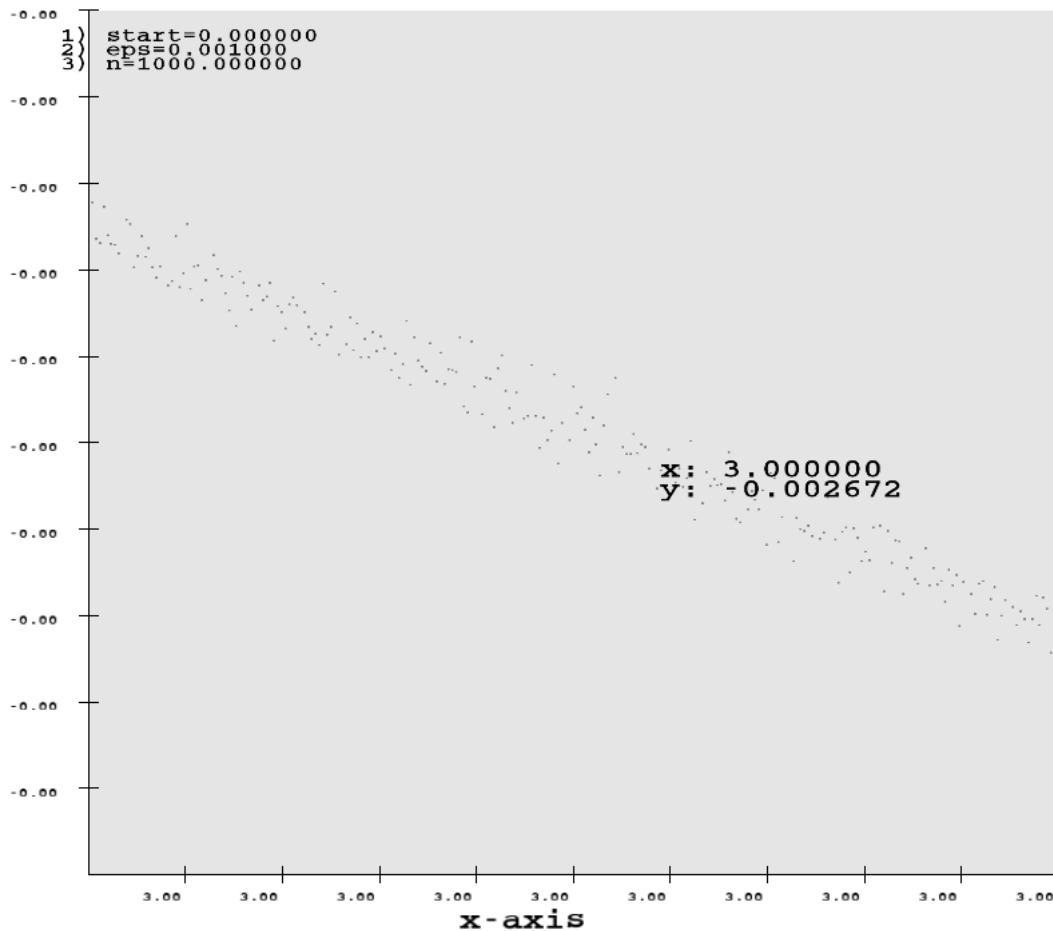
---

```
float g(float r, float x) {
    return r * x * (1-x);
}
vec4 f(vec4 x) {
    float x0 = 0.4;
    float eps = 0.0001;
    float n = 10000;
    float summe = x0;
    for (int i = 1; i <= n - 1; i+=1) {
        x0 = g(x.x, x0);
        summe += log(abs(g(x.x, x0+eps)-g(x.x, x0))/eps);
    }
    return vec4(x.x, summe/n, 0, 0.5);
}
```

---



**Abbildung 1:** Lyapunov mit  $N=1000$  und  $\epsilon = 0.001$  (Logistische Abbildung). Parameter  $r$  auf der x-achse und  $\lambda(x_0)$  auf y-achse, mit startwert  $x_0 = 0.4$



**Abbildung 2:** 1. Bei  $x = 3$  erhalten wir einen von 0 verschiedenen Wert ( $\lambda \approx -0,0027$ ) 2. Wie stellen fest das der Lyapunov-Exponent für unterschiedliche  $r$  fluktuiert.

Wie erwartet ist eine Nullstelle bei  $x = 3$ . Gucken wir uns allerdings den Bereich für  $x = 3$  genauer an, so stellen wir eine gewisse Ungenauigkeit fest (vgl. nächste Abbildung). Da wir für die Feigenbaumkonstante möglichst genau die Stellen an denen Periodenverdopplung auftritt identifizieren wollen, müssen wir die Parameter entsprechend modifizieren. Die Fluktuation nehmen zu, wenn  $\epsilon$  kleiner wird.

@TODO: Bei  $N \rightarrow 13000$  und  $\epsilon < 0.00001$  kommt man schon ganz gut dran! 1. Verhalten wenn man erst später anfängt zu summieren 2. Bei gegebener Konfiguration für  $r=3$  messen mit Fehler etc. 3. Weitere Periodenverdopplungen grafisch identifizieren. (Domain hoch setzen für bessere Genauigkeit) 4. Ursache für Fluktuationen?? Und Möglichkeit diese Fluktuationen zu mitteln!? 5. Mit gemittelter Fluktuation in OpenCL nicht-grafisch Nullstellen identifizieren (double precision!!! -> Fehler der durch float64 berücksichtigt werden muss)

## 5 Duffing-Gleichung

Wir betrachten nun ein angetrieben und gedämpften Oszillator. Als Unterschied zum klassischen Harmonischen Oszillator wird der Term mit der Federkonstante kubisch.

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \beta x^3 = \epsilon \cos \Omega t$$

Diese DGL lässt sich nun nicht mehr analytisch berechnen. Im Folgenden lösen wir die Gleichung mit der Euler-Methode als auch mit dem Runge-Kutta Verfahren.

$$\frac{dy}{dt} = \epsilon \cos \theta - \lambda y - \beta x^3$$

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega$$

## 5.1 Attraktoren

Parameter:

$$\epsilon = 0,2, \lambda = 0,08, \beta = 1, \Omega = 1$$

- Unterschiede Runge Kutta Euler (unterschiedliche attraktoren)
- stabile / instabile Trajektorien  $\rightarrow$  parameter  $h = \frac{\text{Zeit}}{\text{Iterationen}}$
- Optimierung durch Schrittweiten adaptierung
- lyapunov??

## 5.2 Poincareschnitt

Die gezeigten Phasenraumportraits sind projektionen des dreidimensionalen Phasenraums  $(x, y, \theta)$  auf die  $(x, y)$  Ebene. Der Poincare Schnitt ist eine Abbildung aller  $(x, y)$  welche eine Ebene im Phasenraum schneiden. In Abbildung XYZ ist ein Bereich Poincare Schnitt des Duffing-Oszillators mit  $\epsilon = 7.72$  gezeigt. Zur Implementation des Poincare Schnittes wählten wir  $\theta = 0$  um die Praktikumsanleitung als Referenz zu benutzen. Dabei nutzten wir  $\sin(\theta_1) * \sin(\theta_2) \leq 0.0 \iff \text{Ebenenschnitt}$ :

---

```
pos = sin(theta);
if (last_pos*pos <= 0.0f) {
    result[k*2] = last_x;
    result[k*2+1] = last_y;
    k++;
}
last_pos = pos;
```

---

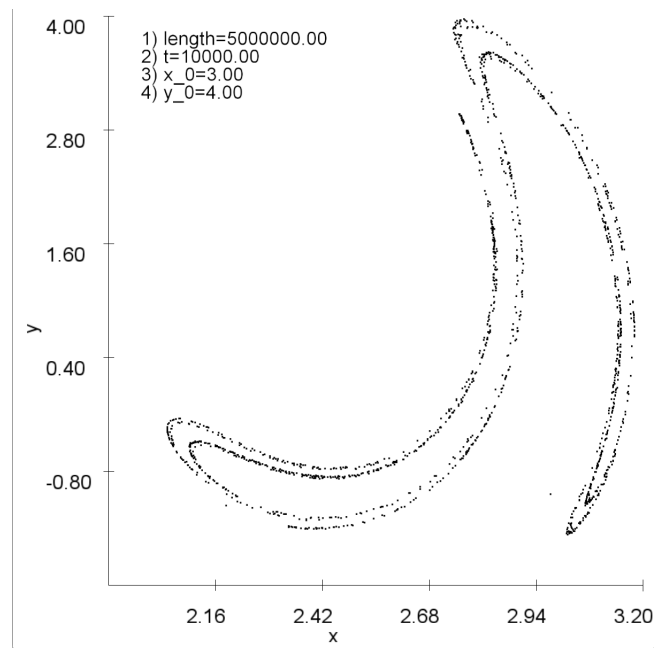
Dieses Verfahren zeigt bei genauerer Betrachtung aber leichter ungenauigkeit. So wird nicht exakt das  $(x, y)$  duplet angezeigt bei welchen die Ebene geschnitten wurden. Stattdessen wird das  $(x, y)$  Duplet bei  $\theta_2$  angezeigt. Eine Möglichkeit dies zu Optimieren wäre den Mittelwert  $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$  als Schnittpunkt zu identifizieren.

## 6 LDR-Oszillator

## 7 LDR-Oszillator

## 8 Literatur

- Nichtlineare Dynamik und Chaos - Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene Universität Hamburg



**Abbildung 3:** Poincare Schnitt des Duffing Oszillators für  $\epsilon = 7.72x = 3.0, y = 4.0, \lambda = 0.2, \beta = 1, \theta = 1$ . als Referenz aus dem VORBEREITUNGSHFT-LITERATUR-S38

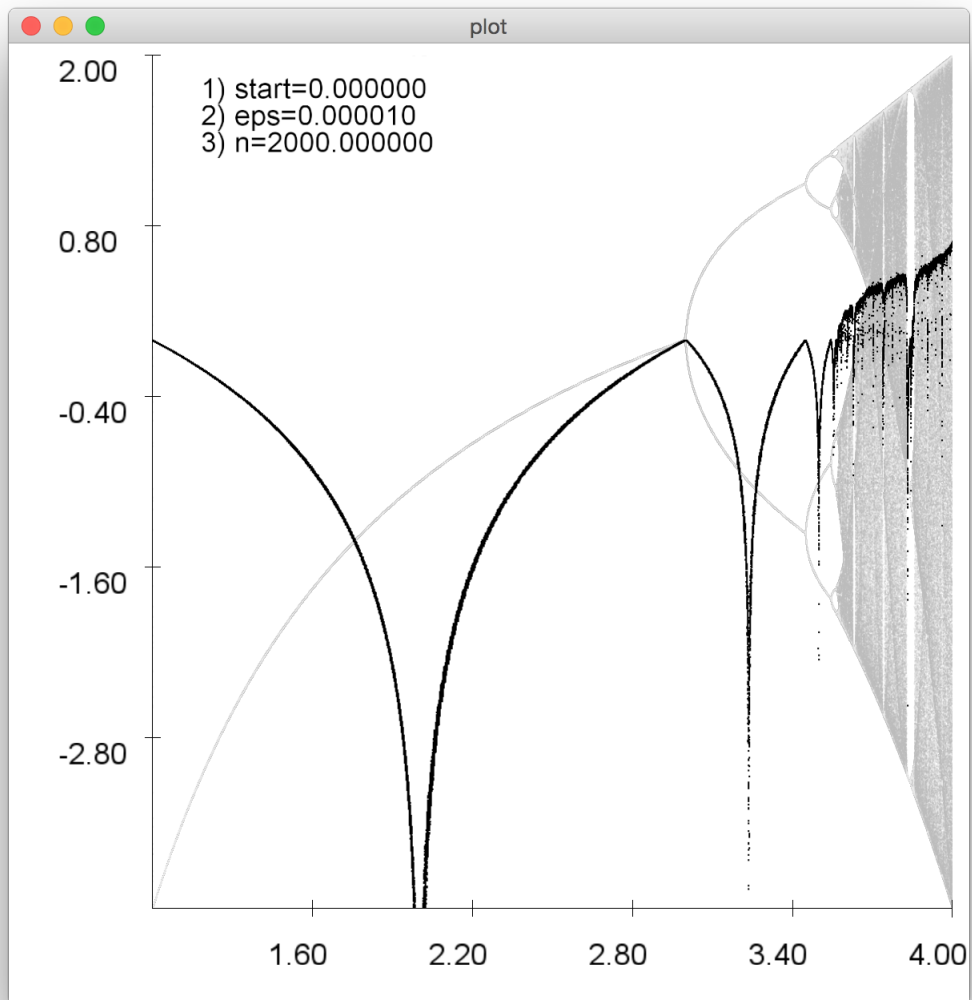


Abbildung 4: asdf