Protokoll zum Versuch Nichtlineare Dynamik und Chaos

Nicolas Heimann, Jesse Hinrichsen

Universität Hamburg

2015

Zusammenfassung

1 Einleitung

LALALA

2 Logistische Abbildung

$$x_{n+1} = f_r(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

Def.: $f^2(x) = f(f(x))$

$$\Rightarrow x_{n+2} = r^2 x_n(1 - x_n)(1 - rx_n(1 - x_n))$$

Fixpunktgleichung (Einerzyklus):

$$x = rx(1 - x)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1 - \frac{1}{r}$$

Startwerte x=0 und x=1 haben den Fixpunkt x_1 wohingegen für alle $x \in (0, 1)$ der Fixpunkt x_2 ist.
Fixpunktgleichung (Zweierzyklus):

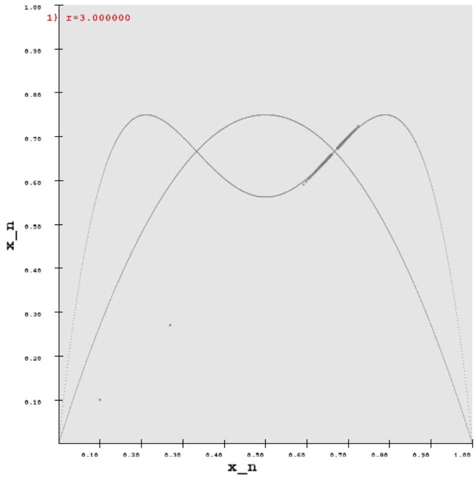
$$x = r^2 x(1 - x)(1 - rx(1 - x))$$

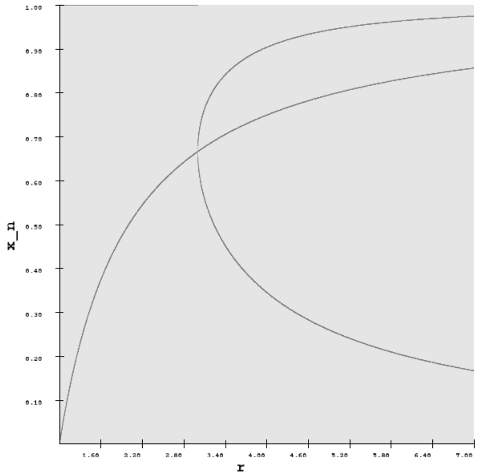
$$\Rightarrow x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{r^2 - 2r - 3} + r + 1}{2r}$$

Damit $x_{3,4}$ reel bleibt muss $r^2 - 2r - 3 \geq 0$

$$\Rightarrow r \leq -1 \land r \geq 3$$

Für diesen Bereich gibt es folglich 2 weitere Fixpunkte $x_{3,4} \Leftrightarrow$ Perdiodenverdopplung





2.1 Stabilitätsbedingung

Ein Fixpunkt ist stabil, wenn gilt:

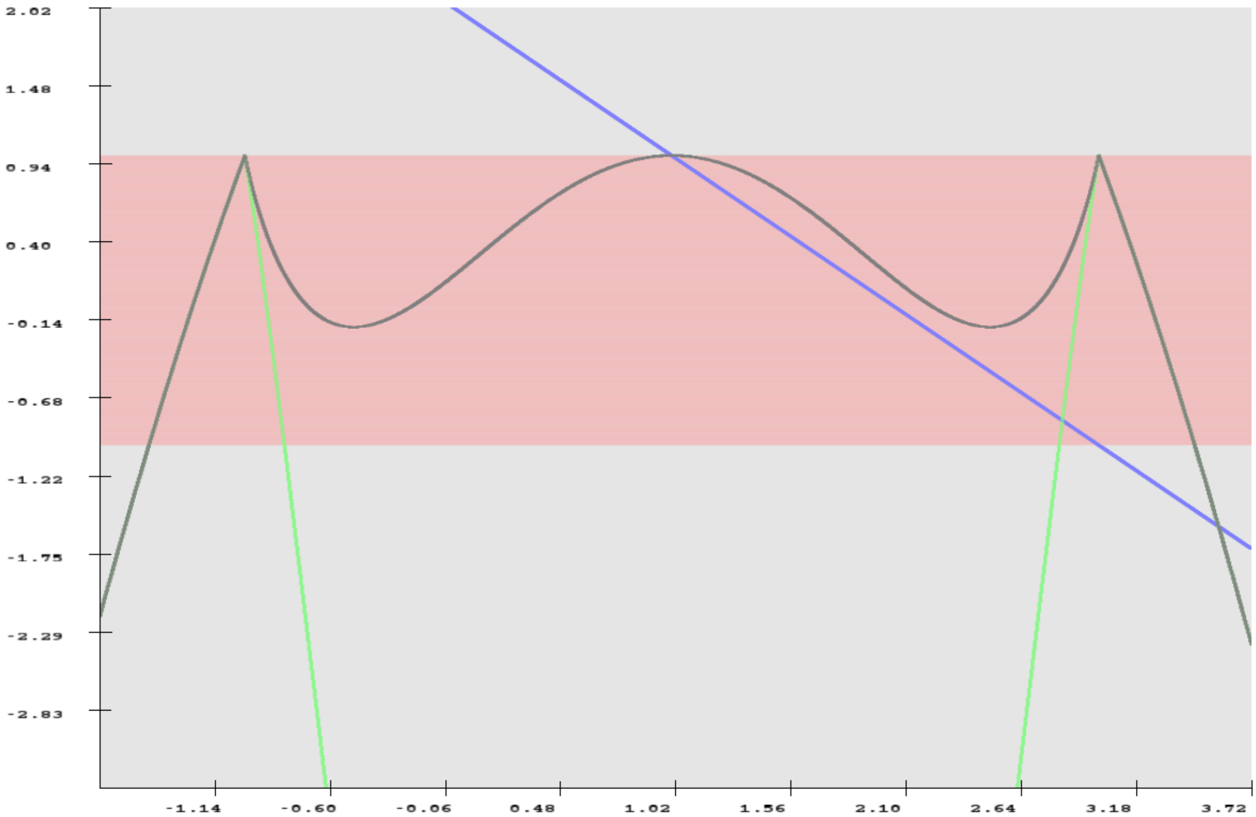
$$\mid f'(x) \mid < 1$$

Im Fall der logistischen Abbildung gilt

$$\frac{d}{dx} f(x) = r - 2rx = r(1 - 2x)$$

$$\frac{d}{dx} f^2(x) = -r^2(2x - 1)(2r(x - 1)x + 1)$$

Es gilt zu lösen, für welche r bei bekannten Fixpunkte die Stabilitätsbedingung erfüllt ist.



Grafisch lässt sich ablesen, dass der Fixpunkt $x_3 = \frac{\sqrt{r^2-2r-3}+r+1}{2r}$ (grüner Graph) für folgende Bereiche stabil ist:

$$-1.45 < r < -0.82 \Rightarrow -1.45 < r \leq -1$$

$$2.82 < r < 3.45 \Rightarrow 3 \geq r > 3.45$$

Der Fixpunkt $x_4 = \frac{-\sqrt{r^2-2r-3}+r+1}{2r}$ (grauer Graph) ist im gesamten Bereich $-1.45 < r < 3.45$ stabil aber da der Fixpunkt ebenfalls nur für $r \leq -1 \wedge r \geq 3$ existiert gilt der selbe Bereich wie für x_3. Die Fixpunkt sind dort stabil, wo sich der graue und der grüne Graph in der Abbildung überlagern.

3 Feigenbaumkonstante

3.1 Lyapunov

Eine Möglichkeit die Feigenbaumkonstante zu berechnen ist über die Nullstellen des Lyapunov-Exponenten. Gerade an diesen Stellen kommt es zu einer Periodenverdopplung. Dann lässt sich die Feigenbaumkonstante durch

$$\delta = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{a_n - a_{n-1}}$$

, wobei die a_n der Parameter ist bei dem die n-te Periodenverdopplung auftritt.
Für dern Lyapunov-Exponenten gilt:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \to \infty} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{N} \log \left| \frac{f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)}{\epsilon} \right|$$

oder auch

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log f'(x)$$

Zweite Formel implementiert als OpenGL Kernel für die logistische Abbildung:

```
float g(float r, float x) {
   return r * x * (1-x);
}
vec4 f(vec4 x) {
   float x0 = 0.4;
   float eps = 0.0001;
   float n = 10000;
   float summe = x0;
   for (int i = 1; i <= n - 1; i+=1) {
      y0 = g(x.x, x0);
      summe += log(abs(g(x.x, y0+eps)-g(x.x, y0))/eps);
   }
   return vec4(x.x, summe/n, 0, 0.5);
}
```

4 Literatur

- Nichtlineare Dynamik und Chaos - Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene Universität Hamburg