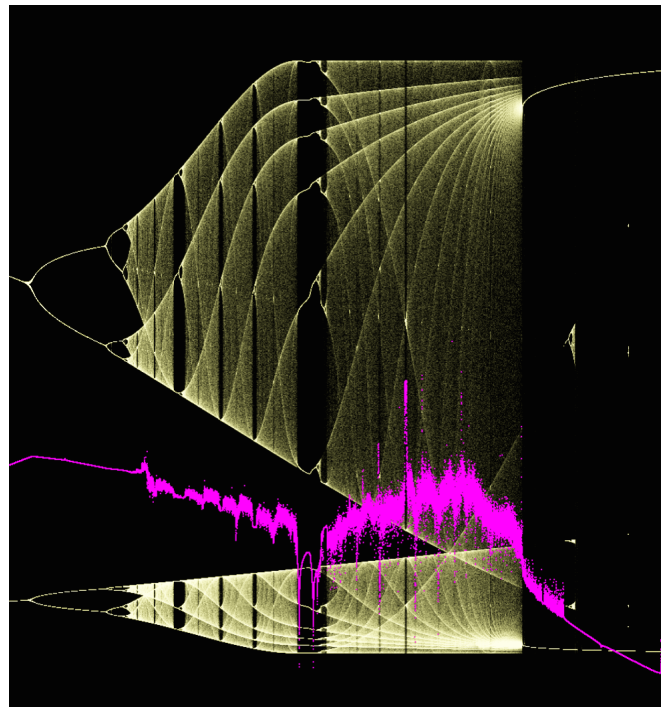


# Protokoll zum Versuch Nichtlineare Dynamik und Chaos

Nicolas Heimann, Jesse Hinrichsen

*Universität Hamburg*

2015



ABSTRACT TEXT TODO - vorläufig stand 270815

## 1 Einleitung

Alle Plots und Simulationen in diesem Protokoll haben wir im Rahmen des Versuches selber implementiert. Dafür wählten wir als Programmiersprache Python2.7 und nutzten OpenGL4.1 und OpenCL für Visualisierungen und Berechnungen. Der Quellcode ist über github einsehbar: [https://github.com/keksnicoh/gl\\_plotting\\_experimental](https://github.com/keksnicoh/gl_plotting_experimental). Bei Abbildungen ist ein entsprechender Quellcodeverweis angegeben.

Im folgenden bezeichnet  $f^2(x) = f(f(x))$

## Inhaltsverzeichnis

### 1 Einleitung

1

<b>2</b>	<b>Logistische Abbildung</b>	<b>2</b>
2.1	Fixpunkte / Stabilitätsbedingung . . . . .	2
2.2	Lyapunov Exponent . . . . .	5
2.2.1	Betrachtung im chaotischen Bereich. . . . .	6
2.2.2	Vergleich der analytischen und renormierten Implementation . . . . .	6
2.3	Feigenbaumkonstante . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Sinus Abbildung</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Duffing-Gleichung</b>	<b>10</b>
4.1	Attraktoren . . . . .	10
4.2	Poincareschnitt . . . . .	10
<b>5</b>	<b>LDR-Oszillator</b>	<b>12</b>
5.1	Theorie . . . . .	12
5.2	Numerische Berechnungen . . . . .	13
5.2.1	Phasenraumdiagramme . . . . .	14
5.2.2	Poincaré-Schnitt . . . . .	16
5.2.3	Bifurcations-Diagramm . . . . .	16
5.3	Versuchsaufbau . . . . .	16
5.4	Versuchsdurchführung . . . . .	16
5.4.1	Oszillation und Phasenraumdiagramm . . . . .	16
5.5	Bifurkationsdiagramm . . . . .	19
5.6	Zusammenfassung . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Literatur</b>	<b>19</b>

## 2 Logistische Abbildung

Die logistische Abbildung ist gegeben durch  $f(x_n) = x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ . Es zeigt sich das diese einfache Funktionsvorschrift bereits chaotisches Verhalten an den Tag legt welches wir im folgenden Abschnitt genauer untersucht haben. Zunächst haben wir ein Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung erzeugt indem wir den Parameter  $r$  gegen Iterationspunkte aufgetragen haben. Dabei fixierten wir jeweils ein  $r$  und erzeugten eine Folge  $x_0 \dots x_{1000}$  von welcher wir  $x_{500} \dots x_{1000}$  auf die y-Achse aufgetragen haben (Abbildung 1). Das Bifurkationsdiagramm lässt sich in mehrere Bereiche unterteilen. Bis  $r = 3$  laufen die  $x_{500} \dots x_{1000}$  auf den gleichen Fixpunkt zu. An  $r = 3$  gabelt sich das Diagramm in zwei Äste auf (Periodenverdoppelung). An  $r = 3.449$  gibt es eine weitere Periodenverdopplung und es ist eine Selbstähnlichkeit mit dem Bereich um  $r = 3$  zu erkennen (fraktale Strukturen). Ab  $r = 3.569$  entsteht ein chaotischer Bereich in welchem sich aber noch Strukturen feststellen lassen (Bögen, Punkte auf Geraden, freie Bereiche).

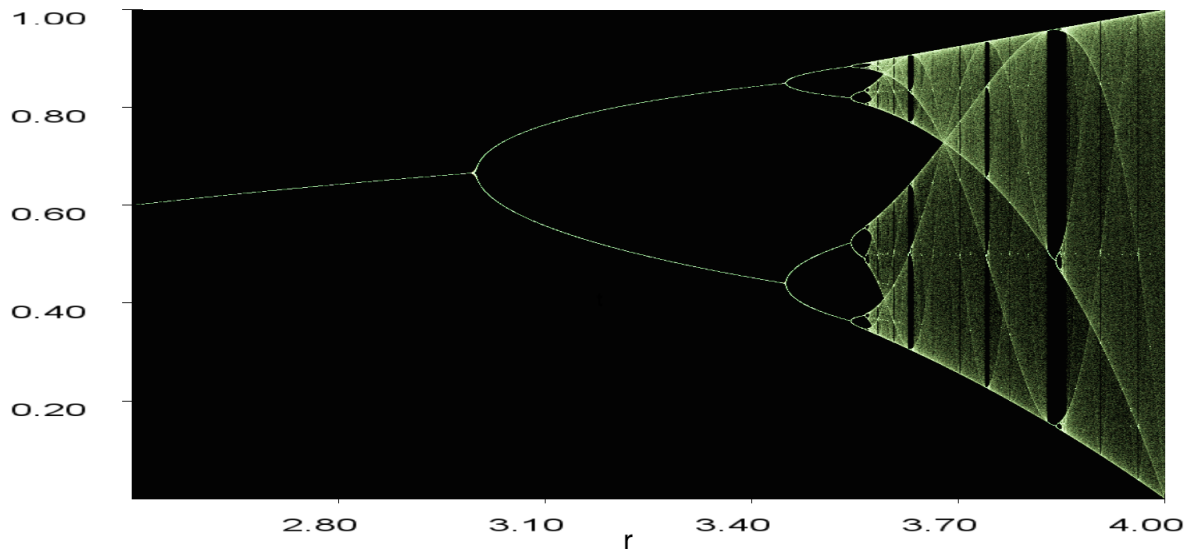
### 2.1 Fixpunkte / Stabilitätsbedingung

Bildet die Funktion einen Punkt idempotent ab, so handelt es sich um einen Fixpunkt, es gilt:  $f^n(x^*) = x^* \forall n \iff x^* \text{ ist Fixpunkt}$ . Stabilitätsbedingung:

$$|f'(x^*)| < 1 \iff \text{Fixpunkt} - \text{stabil}$$

$$|f'(x^*)| > 1 \iff \text{Fixpunkt} - \text{instabil}$$

Mit  $f(x^*) = rx^*(1 - x^*) = x^* \iff x^* = 1 - 1/r \vee x' = 0$  ließ sich so analytisch bestimmen, dass die Fixpunkte für  $r \in [0, 1) \cup (3, 4]$  instabil für  $r \in (1, 3)$  stabil sind. Obwohl für den Parameter  $0 < r < 1$  der Fixpunkt instabil ist konvergieren  $f^n(x)$  gegen  $0 \forall x \neq x^*$ , denn  $f^n(x)$  ist ein Polynom vom grad  $2n$ .



**Abbildung 1:** Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung im Bereich  $r \in [2.6, 4]$ . sourcecode: prak/birukation-logistisch-no-opt.py

Abbildung 2 zeigt wie sich die Iteration jeweils für einen stabilen und einen instabilen Fixpunkt verhält. So lässt sich auf die Aufspaltung im Bifurkationsdiagramm (Abbildung 1) für  $r > 3$  verstehen. Für den Zweierzyklus  $f^2(x)$  ließen sich folgende Fixpunkte bestimmen welche in Abbildung 3 zusammen mit dem Einerzyklus Fixpunkten dargestellt sind. Die logistische Funktion zeigte bei einigen Parametern  $r$  Intermittenz (Abbildung 3). Intermittenz ein Grund für die Verdichtungen welche im chaotischen Bereich des Bifurkationsdiagrammes zu sehen sind.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_r(x_n) = rx_n(1 - x_n) \\ \Rightarrow x_{n+2} &= r^2 x_n(1 - x_n)(1 - rx_n(1 - x_n)) \end{aligned}$$

Fixpunktgleichung (Zweierzyklus):

$$\begin{aligned} x &= r^2 x(1 - x)(1 - rx(1 - x)) \\ \Rightarrow x_{3,4} &= \pm \frac{\sqrt{r^2 - 2r - 3} + r + 1}{2r} \end{aligned}$$

Damit  $x_{3,4} \in \mathbb{R}$  muss  $r^2 - 2r - 3 \geq 0$

$$\Rightarrow r \leq -1 \wedge r \geq 3$$

Für diesen Bereich gibt es folglich 2 weitere Fixpunkte  $x_{3,4} \Leftrightarrow$  Periodenverdopplung. Im Fall der logistischen Abbildung gilt

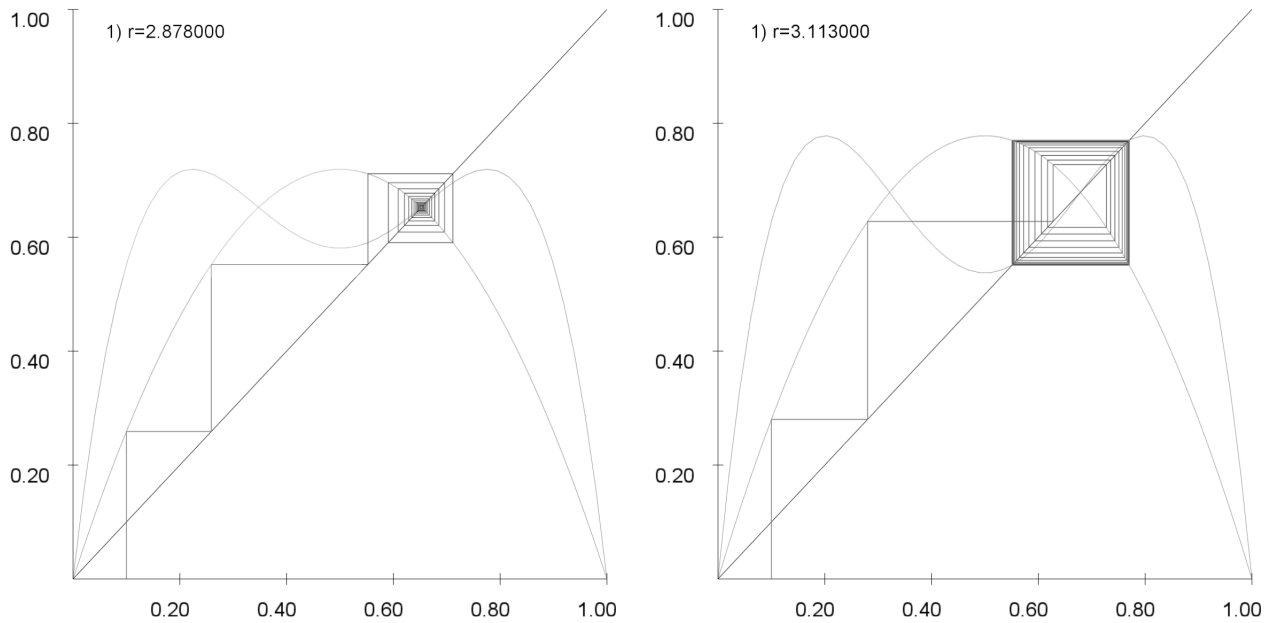
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= r - 2rx = r(1 - 2x) \\ \frac{d}{dx} f^2(x) &= -r^2(2x - 1)(2r(x - 1)x + 1) \end{aligned}$$

AB HIER TODO: Grafisch lässt sich ablesen, dass der Fixpunkt  $x_3 = \frac{\sqrt{r^2 - 2r - 3} + r + 1}{2r}$  (grüner Graph) für folgende Bereiche stabil ist:

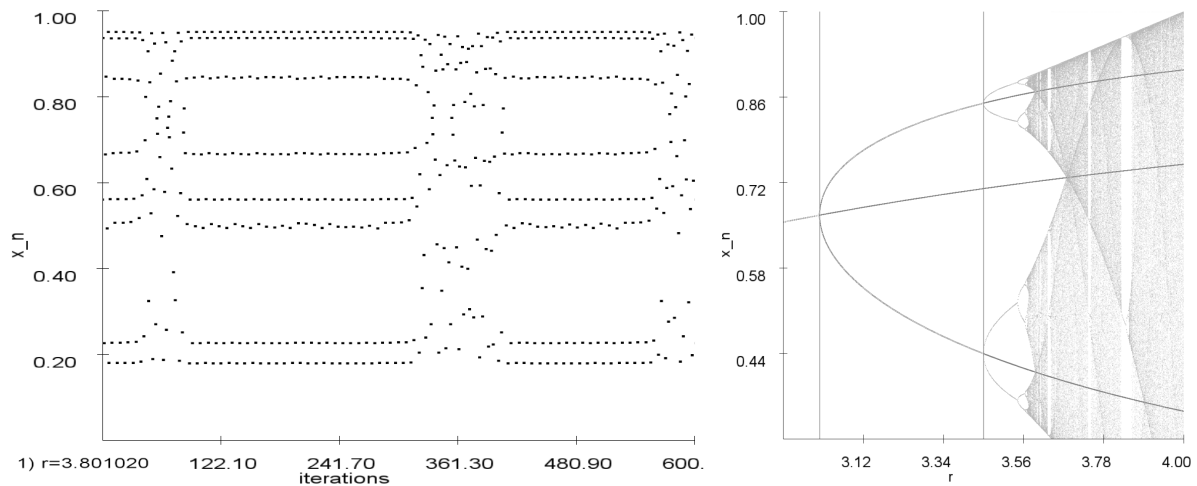
$$-1.45 < r < -0.82 \Rightarrow -1.45 < r \leq -1$$

$$2.82 < r < 3.45 \Rightarrow 3 \leq r < 3.45$$

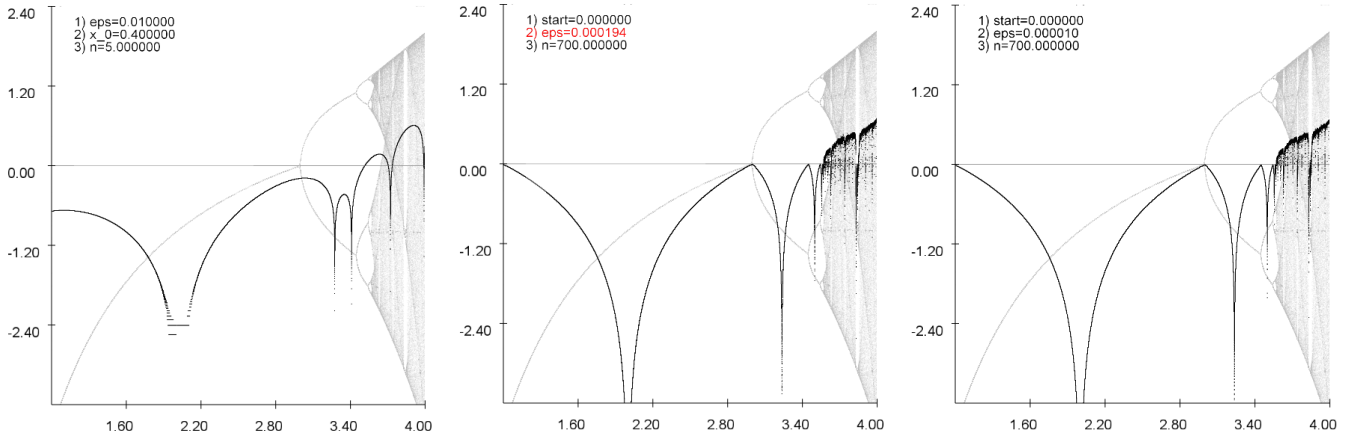
Der Fixpunkt  $x_4 = \frac{-\sqrt{r^2 - 2r - 3} + r + 1}{2r}$  (grauer Graph) ist im gesamten Bereich  $-1.45 < r < 3.45$  stabil aber da der Fixpunkt ebenfalls nur für  $r \leq -1 \wedge r \geq 3$  existiert gilt der selbe Bereich wie für  $x_3$ . Die Fixpunkte sind dort stabil, wo sich der graue und der grüne Graph in der Abbildung überlagern.



**Abbildung 2:** Verlauf der Iterationen bei festen Parameter  $r$ . Linkes Bild zeigt einen stabilen Fixpunkt bei  $r=2.878$ , rechtes Bild zeigt instabilen Fixpunkt bei  $r=3.113$ . Der Verlauf der logistischen Funktion  $f(x)$ ,  $f^2(x)$  sowie die Einheitsgerade  $y = x$  sind aufgetragen. Als Linie Verbunden geplottet sind die Folgen  $(x_n, 0.0)$ ,  $(x_n, x_{n+1})$ ,  $(x_{n+1}, x_{n+1})$ ,  $(x_{n+1}, x_{n+2})$ ,  $(x_{n+2}, x_{n+2})$ ,  $(x_{n+2}, x_{n+3})$ , ... Sourcecode: prak/logisitsch-no-opt-behavior.py



**Abbildung 3:** Logistische Funktion. Links: Intermittenz bei  $r = 3.80102$ . Rechts: Die stabile Lösung des Einerzyklus  $x^*$  und die beiden Lösungen des Zweierzyklus  $x_{3,4}$ . Im Hintergrund das Bifurkationsdiagramm. Die vertikalen Linien sind an  $r = 3.0$  und  $r = 3.44$  und markieren die Stellen wo  $|f'(x)| = 1$ ,  $|\frac{d}{dx} f^2(x)| = 1$  sind. Sourcecode: prak/intermittenz.py, prak/logis-zyklen.py



**Abbildung 4:** Drei verschiedene Implementierung des Lyapunov Exponent. Links: Definition, Mitte: Analytisch, Rechts: Renormiert. Die linke Implementation weist deutliche Abweichungen im Vergleich zu den anderen beiden Implementation auf und ist somit unbrauchbar. Sourcecode: `prak/lyapunov.py`

## 2.2 Lyapunov Exponent

Der Lyapunov Exponent beschreibt mit welcher Geschwindigkeit sich zwei naheliegende Punkte voneinander entfernen. Es gibt drei Wege den Lyapunov Exponenten zu implementieren:

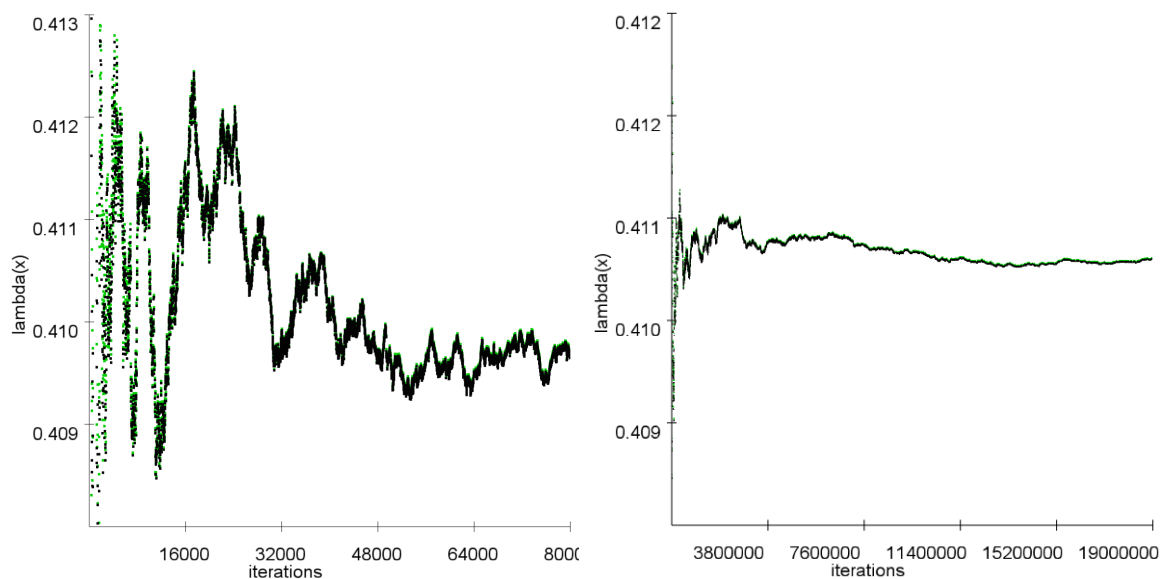
- (1) Definition  $\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \log \left| \frac{f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)}{\epsilon} \right|$
- (2) Analytisch  $\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log f'(x)$
- (3) Renormiert: Nach jedem Iterationsschritt wird der Abstand  $\epsilon$  neu gesetzt.

In Abbildung 4 haben wir die drei Möglichkeiten auf die logistische Funktion angewendet. Es zeigte sich, dass die erste Möglichkeit sehr schlechte Ergebnisse im Vergleich zu den beiden letzten Methoden ergibt. Dies liegt daran, dass schon bei kleinen  $\epsilon$  die Funktionswerte sehr schnell divergieren und somit die Definition des Differenzenquotienten keinen Sinn ergibt. Die Renormierung hält diesen Abstand in jedem Iterationsschritt klein, weshalb sich der Lyapunov Exponent trotzdem ausrechnen lässt. Der Lyapunov Exponent hat seine Nullstellen dort wo die Abbildung ihre periodenverdoppelnden Stellen hat. Umgekehrt divergiert an den superattraktiven Stellen  $\lambda(x_0)$  gegen  $-\infty$ . Man erhält also Information über das Verhalten der Abbildung für bestimmte  $x_0$ . Tratsächlich kann man den Lyapunov-Exponenten über den mittleren Informationsverlust ausdrücken  $\lambda(x_0) = -\log(2) * \delta I$  (QUELLE skript todo). Im folgenden ist der OpenCL Quellcode der renormierten Formel des Lyapunov Exponenten:

---

```
float g(float r, float x) {
    return r * x * (1-x);
}
vec4 f(vec4 x) {
    float x0 = 0.4;
    float eps = 0.0001;
    float n = 10000;
    float summe = x0;
    for (int i=1; i < n; i++) {
        x0 = g(x.x, x0);
        summe += log(abs(g(x.x, x0+eps)-g(x.x, x0))/eps);
    }
    return vec4(x.x, summe/n, 0, 0.5);
}
```

---



**Abbildung 5:** Analytischer(schwarz) und renormierter(grün) Lyapunov Exponent im chaotischen Bereich bei  $r = 3.78$ . Links: Zoom im Bereich 0 bis  $80 \cdot 10^3$  Iterationen. Rechts: 0 bis  $19 \cdot 10^6$  Iterationen.

### 2.2.1 Betrachtung im chaotischen Bereich.

In Abbildung 4 ist zu sehen wie der Lyapunov Exponent ab  $r = \dots$  zu rauschen beginnt. Der Verdacht liegt nahe, dass nicht genügend Iterationsschritte zur Berechnung ausgeführt wurden also erhöhten wir die Anzahl an Iterationsschritten für die Berechnung von  $\lambda(x)$ . Es zeigte sich allerdings kaum eine Veränderung. Die Frage nach der Konvergenz von  $\lambda(x)$  im chaotischen Bereich galt es zu untersuchen: Abbildung 5 zeigt das Langzeitverhalten von  $\lambda(x)$  über  $19 \cdot 10^6$  Iterationen.  $\lambda(x)$  erinnert die ersten  $10^7$  Iterationen eher an einen Börsenkurs und nicht an ein Objekt welches gegen einen Grenzwert konvergiert. Erst nach ca.  $10^7$  Iterationen deutet sich Konvergenzverhalten an. Dieses ist aber nicht präzise: Falls

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_N(x) = L$$

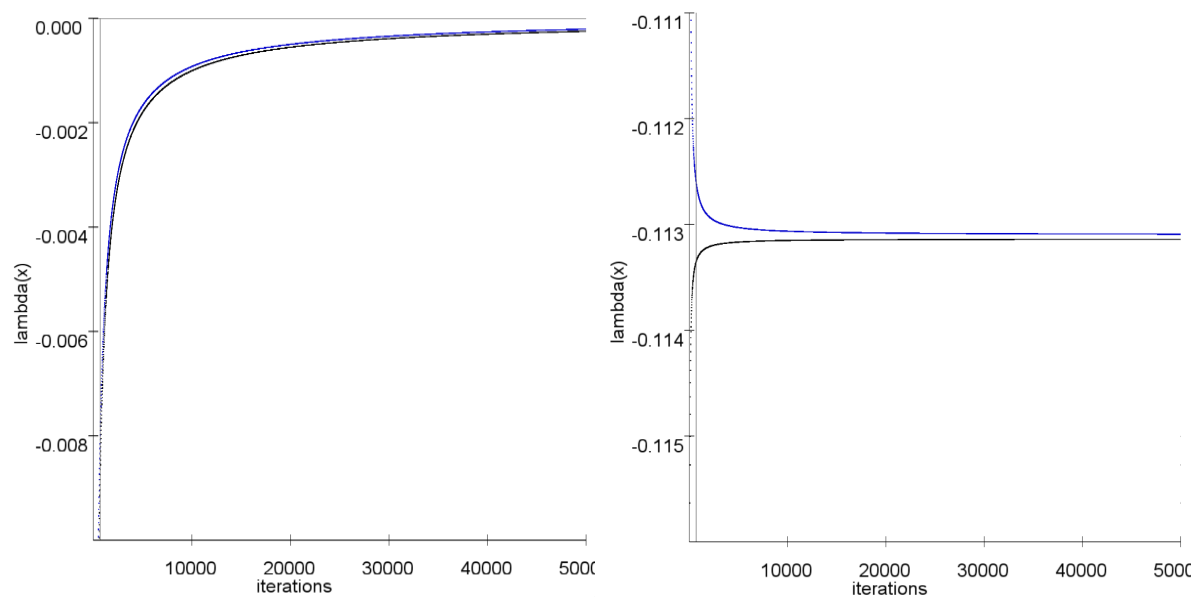
so kann man nach  $2 \cdot 10^7$  Iterationen höchstens feststellen, dass der Graph in einen Epsilon Schlauch von  $\epsilon = 0.002$  passt. Dies ist nicht sehr befriedigend angesichts der massiven Iterationslänge.

TODO: Optimierungen?

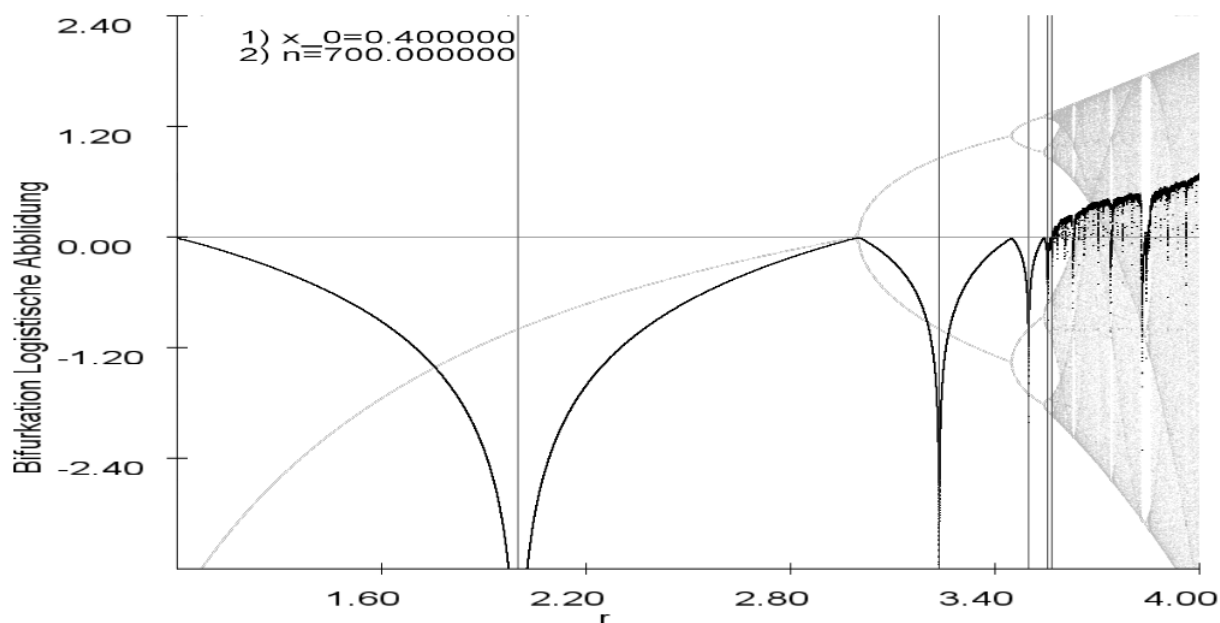
TODO: was passiert bei  $r > 4.0$

### 2.2.2 Vergleich der analytischen und renormierten Implementation

Wir haben nun die analytische und die renormierte Implementation des Lyapunovexponenten weiter untersucht. Dabei stellten wir fest, dass bei Stellen mit Periodenverdoppelung die renormierte Formel etwas schneller gegen die 0 konvergiert als die analytische Formel. An einer weiteren Stelle ( $r = 3.05$ ) ist zu erkennen wie beide Implementationen jeweils von oben (renormiert) und von unten (analytisch) scheinbar gegen einen gemeinsamen Wert streben (Abbildung 6). Die Vermutung liegt nahe, dass man mit dem Mittelwert aus beiden Implementationen an solchen Stellen wesentlich schneller den Grenzwert bestimmen kann. Es zeigt sich aber, dass dieses Verhalten nicht regelmäßig auftritt weshalb wir es nicht weiter untersucht haben. Nach weiteren Stichproben scheint die analytische Implementation bis zum 500ten Iterationsschritt etwas schneller als die renormierte Implementation zu konvergieren. Beide Versionen zeigten in allen Stichproben  $r < 3$ , dass sie stets gegen den gleichen Grenzwert strebten.



**Abbildung 6:** Vergleich des analytischen(Schwarz) und renormierten(Blau) Iterationsverhalten des Lyapunov Exponenten. Vertikale Linie bei  $N=700$ . Oberes Bild zeigt Iterationsverhalten bei  $r = 3.0$ . Unteres Bild zeigt Iterationsverhalten bei  $r = 3.05$



**Abbildung 7:** Analyse des Bifurkationsdiagrammes der logistischen Funktion. Eingezeichnet sind die  $y=0$  Achse, sowie die ersten 5 Superattraktiven Stellen. Das Bifurkationsdiagramm wurde so translatiert und skaliert, so dass es hinter dem Lyapunov Exponenten erscheint.

## 2.3 Feigenbaumkonstante

Die Feigenbaumkonstante ist eine universelle Größe. Sie tritt in chaotischen nicht linearen System auf und lässt sich wie folgt bestimmen:

$$\delta_i = \frac{b_i - b_{i+1}}{b_{i+1} - b_{i+2}}$$

oder

$$\delta_i = \frac{s_i - s_{i+1}}{s_{i+1} - s_{i+2}}$$

$$\delta = \lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = 4.669201609102991 \quad (2.3.1)$$

(TODO QUELLE <https://oeis.org/A006890>) wobei  $s_i, b_i$  die Folgen der superattraktiven und periodenverdoppelnden Stellen sind. Also lässt sich die Feigenbaumkonstante mit dem Lyapunov Exponenten bestimmen. Als erstes haben wir versucht die Nullstellen des Lyapunov Exponenten zu bestimmen. Wir wendeten dabei das folgende Kriterium für Nullstellen an:

$$\lambda(x - \epsilon) < \lambda(x) \wedge \lambda(x + \epsilon) < \lambda(x) \wedge |\lambda(x)| < \epsilon$$

Bei genauer Betrachtung des numerisch bestimmten Lyapunov Exponenten zeigten sich große Schwankungen, weshalb dieses Kriterium nicht mit unseren verfügbaren Rechenleistungen praktikabel war (Abbildung 8). Aufgrund dieser Probleme haben wir uns dazu entschieden die superattraktiven Stellen anstelle der Bifurkationspunkte numerisch zu bestimmen. Unser Algorithmus startet im Suchmodus bei gegebenem Startwert  $x_{start}$  und geht in kleinen Schritten  $\Delta x$  die x-Achse ab. In jedem Schritt wird  $l_1 = \lambda(x_0)$   $l_2 = \lambda(x_0 + \Delta x)$  berechnet. Ist

$$l_2 - l_1 \leq 0(1)$$

wandert der Iterationsschritt zum superattraktiven Fall. Dies wird so lange fortgesetzt bis die Bedingung (1) nicht mehr hält. Es wird nun um  $\Delta x$  zurückgegangen und anschließend die Schrittweite  $\Delta x \mapsto \frac{\Delta x}{10}$  verkleinert. Nun wird erneut so lange iteriert, bis (1) nicht mehr hält. Der Vorgang wiederholt sich 8 mal. Anschließend wird  $(2 * x_0 + \Delta x)/2$  als Ergebniss gespeichert. Als nächstes befindet sich der Algorithmus im Anfangspunkt-Modus. Es wird so lange die x-Achse abgetestet bis die Bedingung

$$\lambda(x_0) < \lambda(x_0 + \Delta x) < \lambda(x_0 + 2 * \Delta x)$$

nicht mehr erfüllt ist und somit ein neues  $x_{start}$  gefunden wurde. Der Suchmodus wird aktiviert (Quellcode: prak/feigenbaum.py). Im folgenden ist die Terminal Ausgabe des Algorithmusses beigelegt:

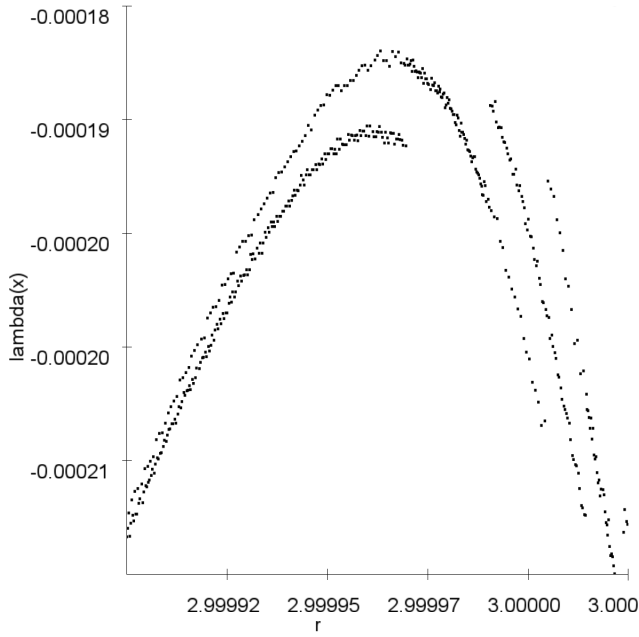
---

```
searching from 1.9
looking for next start_r from 2.00000000002
searching from 2.99950000003
looking for next start_r from 3.23606797751
searching from 3.44927797752
looking for next start_r from 3.49856169934
searching from 3.54400769935
looking for next start_r from 3.55464086278
searching from 3.56439786279
looking for next start_r from 3.56666737986
found values [2.0000000000249916, 3.236067977509959, 3.498561699344952,
3.554640862779951, 3.5666673798649517]
delta_0=4.70894301336
delta_1=4.68077099865
delta_2=4.66295961155
```

---

Somit konnten wir numerisch für  $i = 2$  eine Feigenbaumkonstante von  $\delta_2 = 4.66295961155$  berechnen. Dieser Wert weicht um 0.133671789% vom tatsächlichen Wert (2.3.1) ab. Die Grenzen des Algorithmus





**Abbildung 8:** Zoom in den Lyapunovexponenten der logistischen Abbildung bei  $r = 3$  mit 80000 Iterationen. Eine präzise Konvergenz ist nicht zu erkennen wodurch die numerische Bestimmung der Spitzen an den Bifurkationspunkten erschwert wird. Sourcecode: prak/lyapunov-superattraktiv.py

sind bereits nach 5 gefunden superattraktiven Stellen erreicht. Ab  $r > 3.57$  fängt die numerische Implementation des Lyapunov Exponenten an zu "rauschen" (Abbildung 7). Der Algorithmus kann daher nicht mehr präzise seinen Suchmodus ausführen. Ebenfalls liegen die nächsten superattraktiven Punkte noch dichter zusammen als es für  $s_4, s_5$  der Fall war, was ebenfalls vom Algorithmus nicht mehr detektiert wird.

### 3 Sinus Abbildung

Die Sinusabbildung ist gegeben durch

$$f(x_n) = x_{n+1} = r * \sin(x)$$

Wir haben die bereits implementierten Programme nun auf die Sinus Funktion angewendet. Abbildung 9 zeigt das Bifurkationsdiagramm der Sinusabbildung. Es fällt sofort auf, dass sich die Bildpunkte innerhalb einer Einhüllenden befinden. Betrachtet man die Funktion wird wegen des Bildbereiches des Sinus ( $[-1, 1]$ ) sofort klar, dass  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f^n(r)| \leq r$  gilt. Bei den Bifurkationsdiagrammen der logistischen Abbildung hatten wir ein festen Startwert  $x_0$  gewählt. Für die Sinusabbildung wählten wir als Startwerte die Folge  $x_{0,n} = (-1)^n * x_0$  da sonst im Bereich  $r \in [0, \pi]$  das Bild des Graphen stets positiv wäre. Auch dieses Phänomen lässt sich mit einfachen Überlegungen erklären:

$$\sin([0, \pi]) = [0, 1] \Rightarrow f([0, \pi]) = [0, \pi] \Rightarrow f^2([0, \pi]) = [0, \pi] \forall r \in [0, \pi]$$

Das Anwenden unseres Algorithmus zur bestimmung der Feigenbaumkonstante lieferte im Vergleich zur logistischen Abbildung keine guten Ergebnisse. Die ersten superattraktiven Stellen  $s_i$  ließen sich ohne weiteres bestimmen. Die Abstände  $\Delta s$  werden schon nach den ersten 4 Folgegliedern sehr klein und der Lyapunov Exponent beginnt zu "rauschen". Wir entwickelten einen weiteren Algorithmus, welcher nur marginal bessere Ergebnisse nach  $s_4$  lieferte. Die Idee des Algorithmusses war es, zunächst den Lyapunov Exponenten Grob für  $r \in [0, 3.2]$  zu berechnen. Die so entstandene Folge  $l_i = (x_i, l(x_i))$  wird nun iteriert. Sobald  $l_{i,1} < M < 0$  gilt wird  $A = l_{i,0}$  gesetzt. Es wird weiter iteriert bis  $l_{i,1} > 0$  und schließlich wird das Intervall  $[A, l_{i,1}]$  gespeichert. Dies wird bis zum Ende der Folge  $l_i$  ausgeführt. Nun wird der Algorithmus für eine tiefere Schranke auf alle ermittelten Intervalle erneut angewendet. Wir fanden so mehrere Hinweise auf die nächsten superattraktiven Stellen. Schließlich wurde  $M \leq 4.0$  und plötzlich fielen keine Punkte außer  $s_1, s_2, s_3, s_4$  in das Raster. Beim betrachten des Lyapunovexponenten

fiel auf, dass trotz einer Iterationstiefe von 10000 Iterationen stets galt  $\lambda(x) > -4.0$ . Wir haben dafür nur zwei plausible Erklärungen: (1.)  $s_5 - s_4$  ist sehr klein und wir erwarten, dass  $s_6 - s_5$  noch kleiner ist (untere Abbildung 9). Eventuell reicht unsere numerische Genauigkeit nicht aus. (2.) Der Sinus ist ungenau implementiert und verschmiert so den Grenzwert. Die folgenden superattraktiven Stellen haben wir ermittelt:  $s_1 = 0.0$ ,  $s_2 = 1.570728749999546$ ,  $s_3 = 2.4432446071429674$ ,  $s_4 = 2.6580499999998904$ ,  $s_5 = 2.70599999999986$ ,  $s_6 = 2.71600010303040$  und daraus die ersten 4 Glieder in der Feigenbaum Folge bestimmen:

$$\delta_1 = 1.8002294596$$

$$\delta_2 = 4.06188990667$$

$$\delta_3 = 4.47977878743$$

$$\delta_4 = 4.79495059736$$

Anders als die logistische Abbildung bricht das Bifurkationsdiagramm der Sinusfunktion nicht ab. Auch dies lässt sich auf den Kompakten Bildbereich des Sinus zurückführen. Der Lyapunov Exponent weist ab  $r > 8$  eine Periodizität von  $\pi$  auf weshalb weitere Betrachtungen für  $r > 8$  nicht zielführend erscheinen.

TODO weitere Analyse dokumentieren.

## 4 Duffing-Gleichung

Wir betrachten nun einen angetriebenen und gedämpften Oszillator. Als Unterschied zum gewöhnlichen Harmonischen Oszillator tritt hier ein kubischer Dämpfungsterm auf.

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \beta x^3 = \epsilon \cos \Omega t$$

Diese DGL lässt sich nun nicht mehr analytisch berechnen. Im Folgenden lösen wir die Gleichung mit der Euler-Methode (REFERENZ: Euler...) als auch mit dem Runge-Kutta Verfahren (REFERENZ: Runge...).

$$\frac{dy}{dt} = \epsilon \cos \theta - \lambda y - \beta x^3$$

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega$$

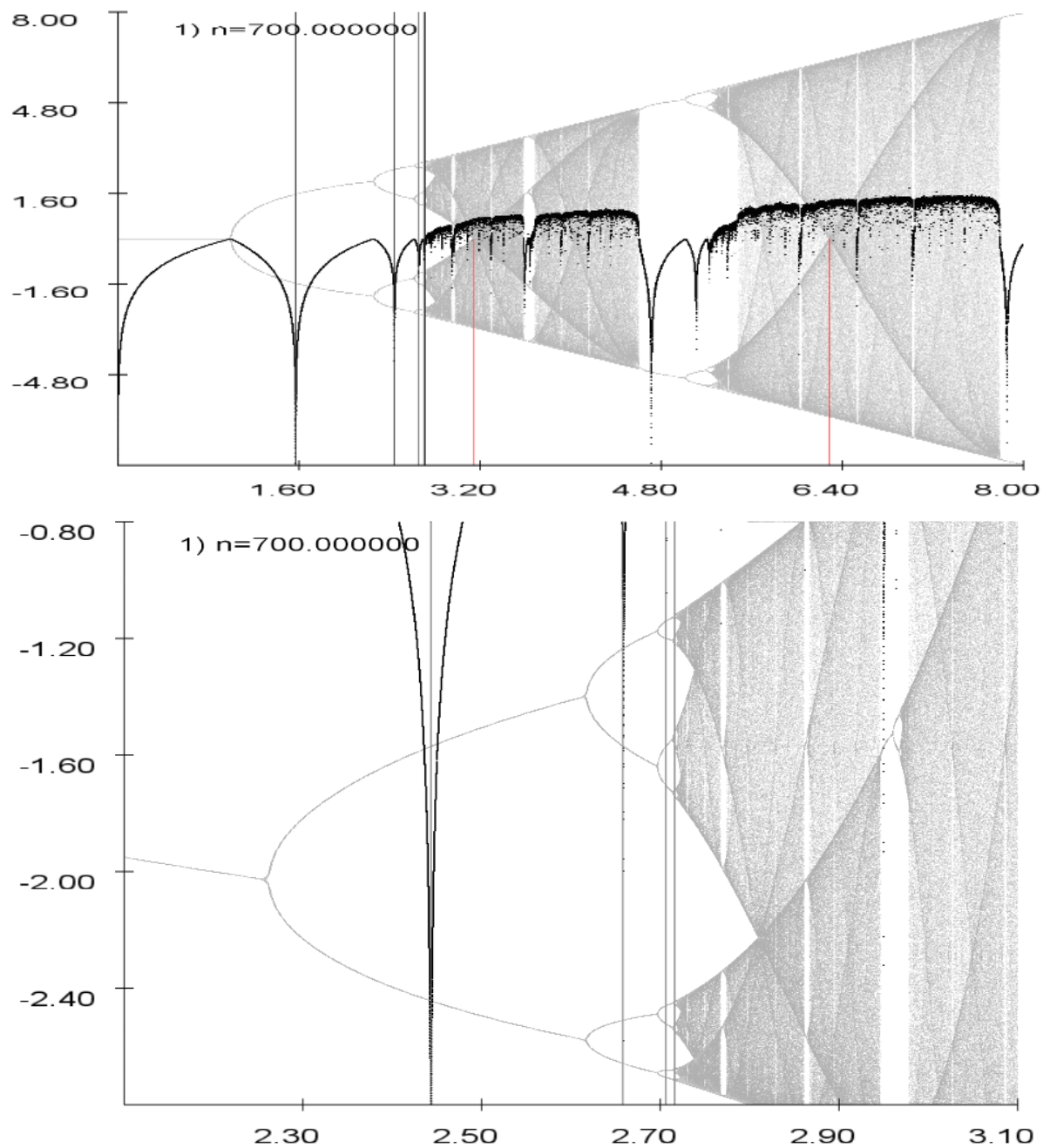
### 4.1 Attraktoren

Im folgenden verwenden wir als Parameter  $\epsilon = 0,2$ ,  $\lambda = 0,08$ ,  $\beta = 1$  und  $\Omega = 1$ . Zunächst untersuchen wir die Unterschiede der verwendeten numerischen Verfahren bei gleich bleibenden Anfangswerten. Dazu wählen wir  $x_0 = 0.21$  und  $y_0 = 0.02$  und betrachten das Phasendiagramm bei unterschiedlichen Schrittgrößen  $h$ .

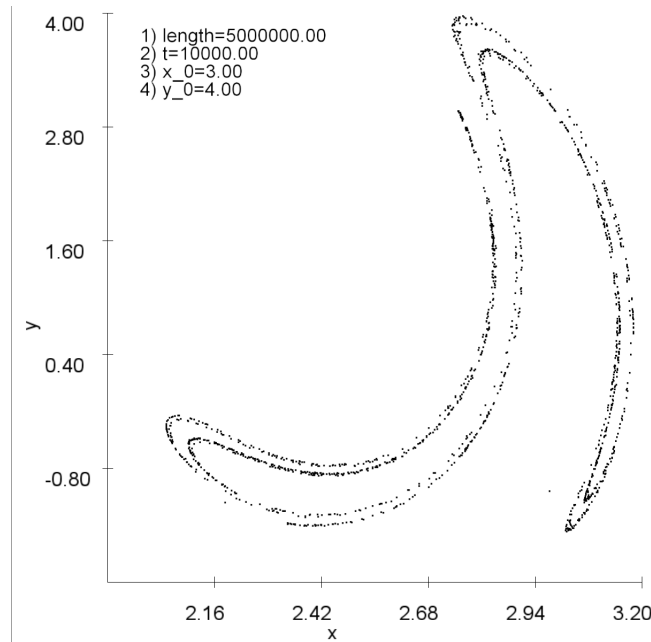
- Unterschiede Runge Kutta Euler (unterschiedliche attraktoren)
- variation parameter  $h = \frac{\text{Zeit}}{\text{Iterationen}}$  und Bedeutung

### 4.2 Poincareschnitt

Die gezeigten Phasenraumportraits sind Projektionen des dreidimensionalen Phasenraums  $(x, y, \theta)$  auf die  $(x, y)$  Ebene. Der Poincare Schnitt ist eine Abbildung aller  $(x, y)$  welche eine bestimmte Ebene im Phasenraum schneiden. In Abbildung XYZ ist ein Bereich Poincare Schnitt des Duffing-Oszillators mit  $\epsilon = 7.72$  und  $\theta = 0$  gezeigt. Zur Implementation des Poincare Schnittes wählten wir  $\theta = 0$  um die Praktikumsanleitung als Test unserer Software nutzen zu können. Dabei nutzten wir  $\sin(\theta_1) * \sin(\theta_2) \leq 0.0 \iff \text{Ebenenschnitt}$ :



**Abbildung 9:** Oben: Analyse des Bifurkationsdiagrammes der sinus Abbildung. Eingezeichnet sind die  $y=0$  Achse, sowie die ersten 6 Superattraktiven Stellen für  $r$  (Erste Superattraktive Stelle bei  $r = 0$ . Ebenfalls wurden  $\pi$  und  $2\pi$  eingezeichnet. Unten: Vergrößerung des Ausschnittes  $r \in [2.1, 3.1]$ ,  $y \in [-2.8, -0.8]$



**Abbildung 10:** Poincare Schnitt des Duffing Oszillators für  $\epsilon = 7.72x = 3.0, y = 4.0, \lambda = 0.2, \beta = 1, \theta = 1$ . als Referenz aus dem VORBEREITUNGSSHEFT-LITERATUR-S38

---

```
pos = sin(theta);
if (last_pos*pos <= 0.0f) {
    result[k*2] = last_x;
    result[k*2+1] = last_y;
    k++;
}
last_pos = pos;
```

---

Dieses Verfahren zeigt bei genauerer Betrachtung aber leichter Ungenauigkeiten. So wird nicht exakt das  $(x, y)$  duplet abgebildet bei welchen die Ebene geschnitten wurden, stattdessen wird das  $(x, y)$  Duplet bei  $\theta_2$  angezeigt. Eine Möglichkeit dies zu Optimieren wäre den Mittelwert  $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$  als Schnittpunkt zu identifizieren.

## 5 LDR-Oszillator

Im folgenden untersuchen wir einen realen nichtlinearen Schwingkreis. Dieser wurde realisiert indem bei einem LCR-Schwingkreis der Kondensator durch eine Diode ausgetauscht wurde.

### 5.1 Theorie

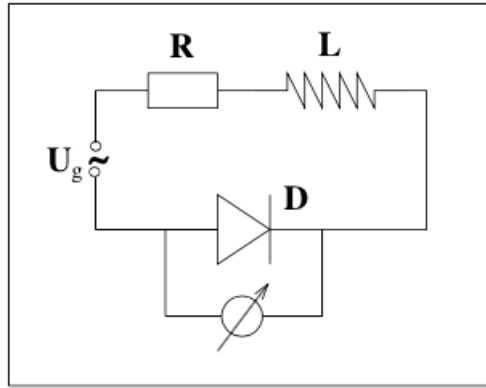
Zunächst lässt sich ein linearer Schwingkreis der aus einem Widerstand, einem Kondensator und einer Spule besteht über die Spannungen an den einzelnen Bauteilen beschreiben

$$V_g = V_c + V_l + V_r \text{ (Kirschoff'sches Gesetz)}$$

Daraus folgt mit  $V_g = V_s \cos \omega t$  die Differentialgleichung

$$\ddot{Q}L + \dot{Q}R + \frac{Q}{C} = V_s \cos \omega t$$

welche mit dem angetriebenen, gedämpften Oszillator vergleichbar ist. Dabei ist  $Q$  die Ladung,  $L$  die Induktivität der Spule,  $R$  der Widerstand,  $C$  die Kapazität des Kondensators  $V_s$ , die angelegte Spannung



**Abbildung 11:** Schaltskizze für nichtlinearen Schwingkreis. Quelle: Versuchsanleitung, S. 43, Uni Hamburg

und  $\omega$  die Frequenz der angelegten Wechselspannung.

Wird nun der Kondensator durch eine Diode ausgetauscht erhalten wir, wie bei dem Duffing-Oszillator eine Gleichung die nicht mehr analytisch lösbar ist. Während beim linearen Schwingkreis  $I = \frac{dQ}{dt}$  gilt lässt sich die Diode als parallel geschalteter Kondensator und Widerstand mit

$$I = I_f(1 - \exp(-\frac{V_d}{V_t})) + \frac{dQ}{dt}$$

beschreiben, wobei  $I_f$  und  $V_t$  Konstanten sind. Dies führt zu

$$\frac{dV_d}{dt} = \frac{I - I_f(1 - \exp(-\frac{V_d}{V_t}))}{C_f \exp(-\frac{V_d}{V_t})}$$

in Durchlassrichtung und

$$\frac{dV_d}{dt} = \frac{I - I_f(1 - \exp(-\frac{V_d}{V_t}))}{C_r(1 + \frac{V_d}{\phi})^\gamma}$$

in Sperrrichtung. Außerdem gilt

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V_s \cos \theta - V_d - RI}{L}$$

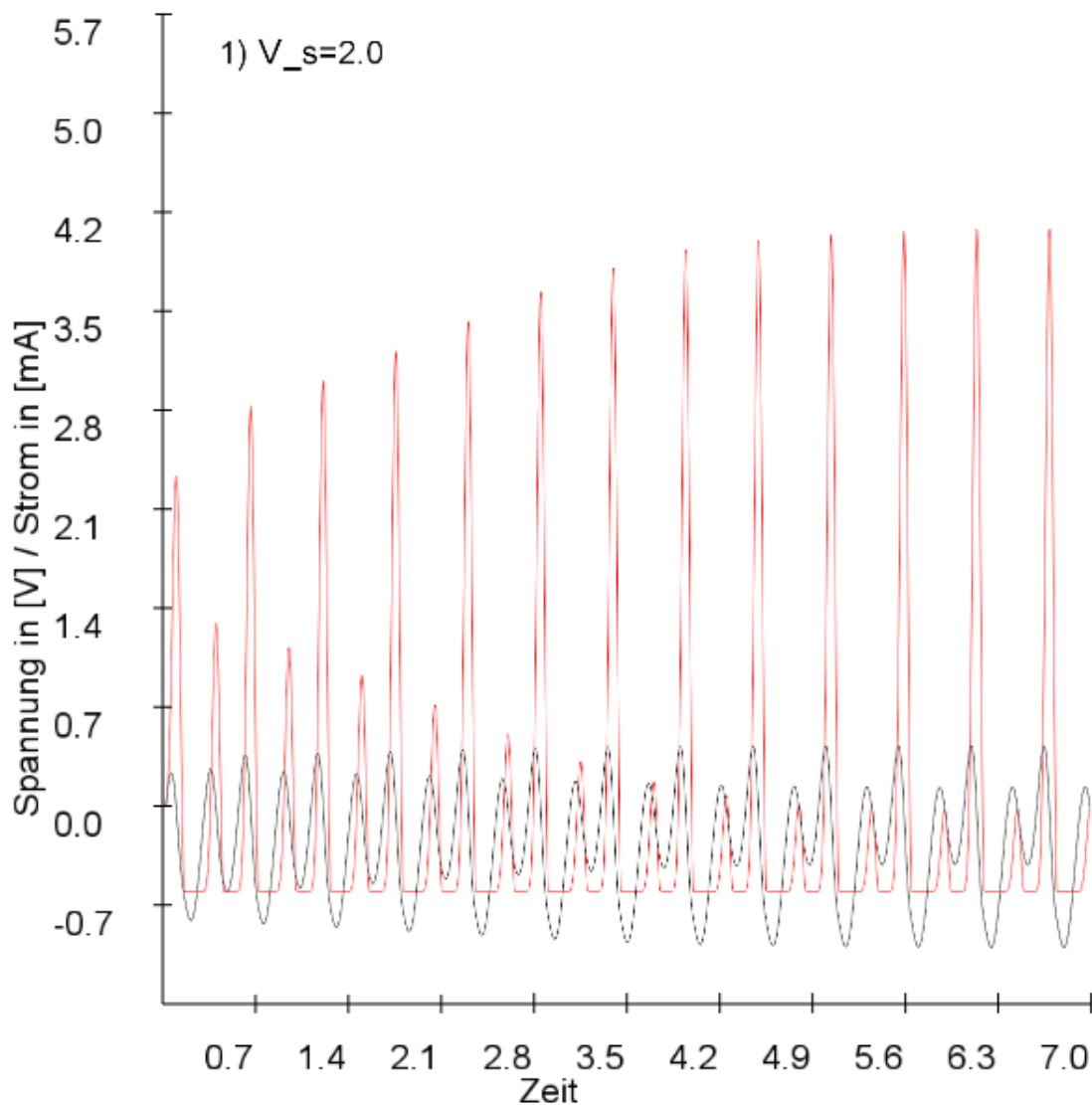
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

Diese Gleichungen lassen sich nun numerisch lösen.

## 5.2 Numerische Berechnungen

Unter Verwendung folgender Parameter

$R$	$100\Omega$	Widerstand
$L$	$2367 \cdot 10^{-6}H$	Spule
$C_r$	$82pF$	Konstante proportional zur Kapazität der Diode in Sperrrichtung
$C_f$	$56 \cdot 10^{-6}pF$	Konstante proportional zur Kapazität der Diode in Durchlassrichtung
$I_f$	$2,8pA$	Konstante proportional zum Strom
$\gamma$	$0,44$	Konstante
$\phi$	$0,6V$	Konstante
$V_t$	$34mV$	Konstante



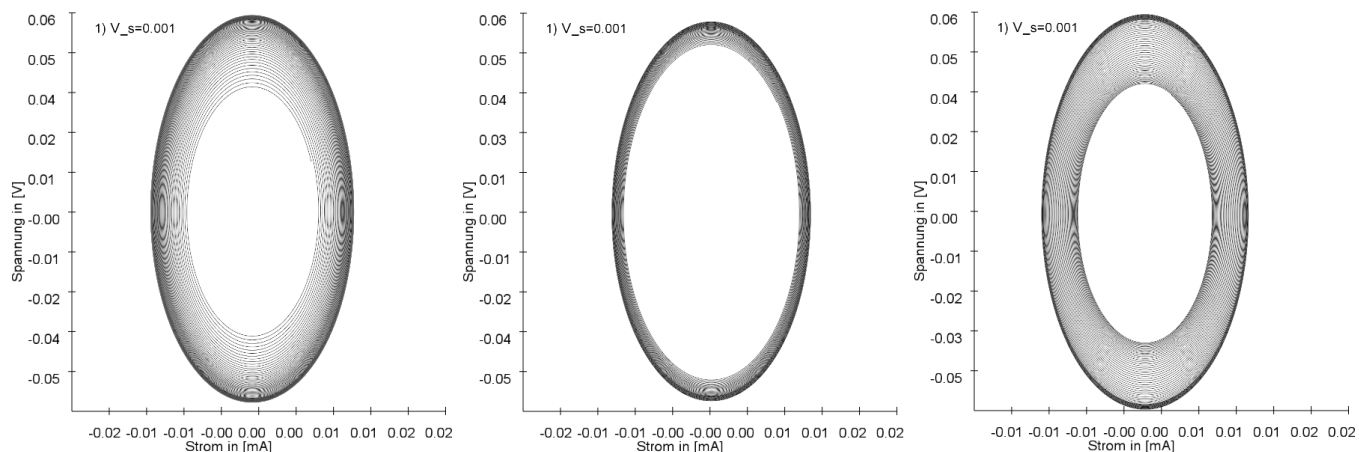
**Abbildung 12:** Oszillation von Strom (schwarz) und Spannung (rot) bei  $V_s = 2V$  mit Runge-Kutta-Verfahren 4ter Ordnung

haben wir für unterschiedliche Anregungsspannungen  $V_s$  numerisch die Gleichungen aus 5.1 gelöst. Dabei sind wir davon ausgegangen, dass für  $V_d > -0.6$  die Diode sperrt und ansonsten leitet. Um sinnvolle Lösungen zu erhalten muss für die Schrittweite gelten  $h \geq 10^{-8}$ . Diese oszillierende Lösungen für den Strom und die Spannung über der Diode sind in Abbildung 12 dargestellt. Strom und Spannung oszillieren mit gleicher Phase und Pendeln sich nach gewisser Zeit unabhängig von den Anfangsbedingungen ein.

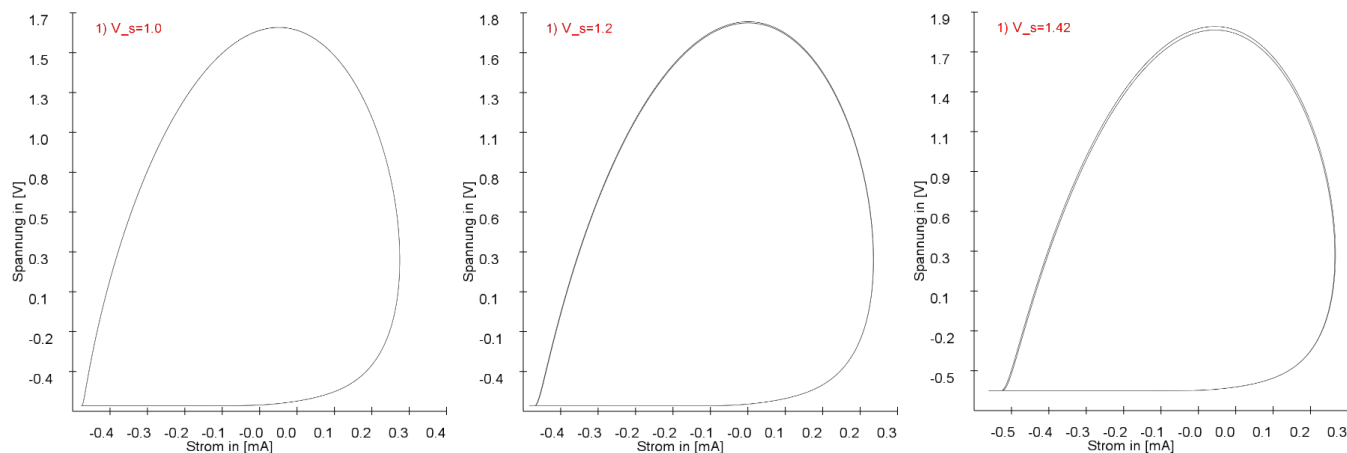
### 5.2.1 Phasenraumdiagramme

Bereits bei sehr geringer Anregungsspannung  $V_s = 0.001V$  stellt sich ein Chaotisches Verhalten ein (siehe Abbildung 13). Eindeutige Attraktoren erhalten wir bei Spannungen ab  $V_s = 1V$  (Abbildung 14). Dabei ist bei  $V_s = 1V$  (links) die Trajektorie wohl definiert, während bei  $V_s = 1.2V$  (mitte) sie sich langsam aufspaltet und bei  $V_s = 1.42V$  (rechts) auf 2 Pfade durch den Phasenraum verläuft. Je höher  $V_s$  wird, desto stärker gehen die Trajektorien auseinander bis sie bei ca.  $V_s = 20V$  ein maximum erreichen (Abbildung 15 links) und dann wieder zusammen gehen und chaotisches Verhalten zeigen (Abbildung 15 mitte und rechts).

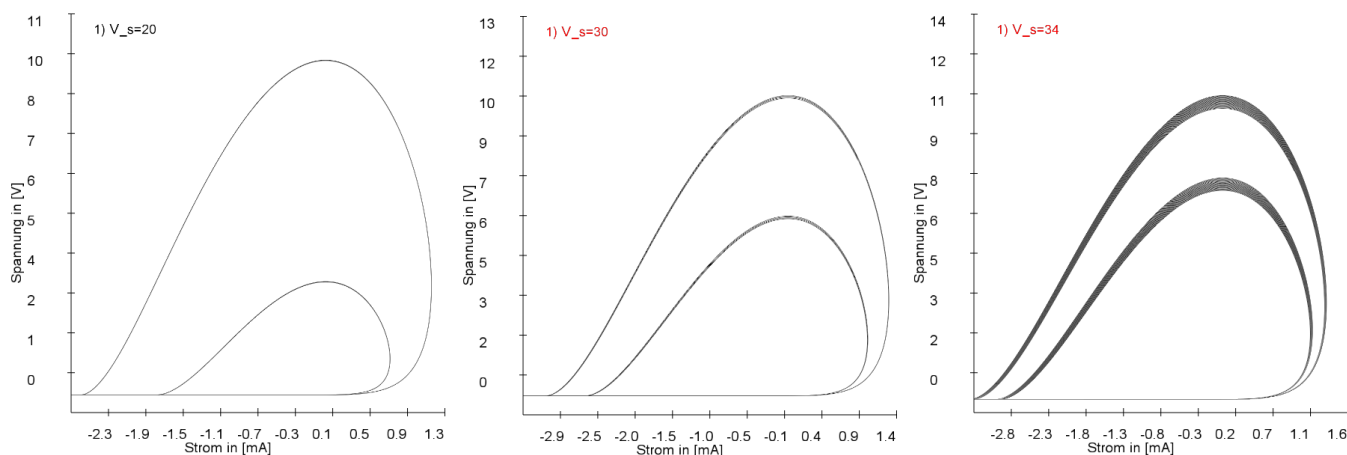
Nach Änderung des Zeitschrittes  $h$  auf  $h = 10^{-8}$  haben wir sehr unterschiedliche Beobachtungen gemacht.



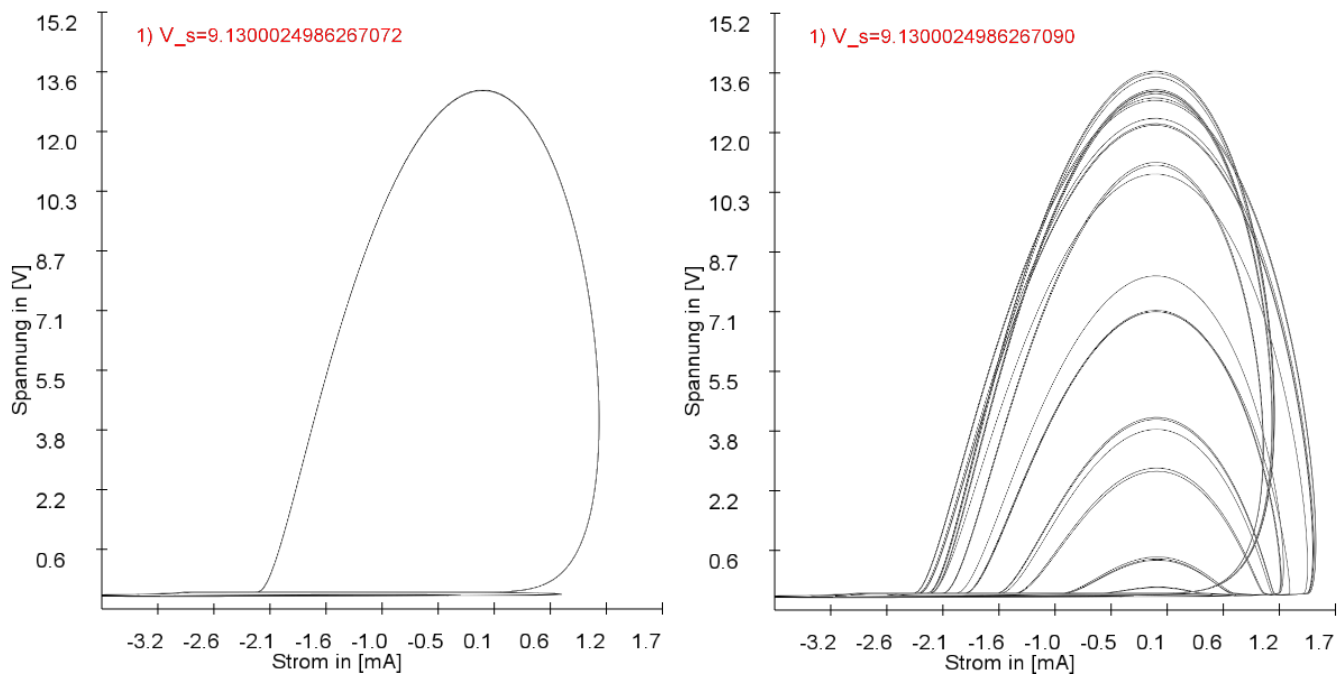
**Abbildung 13:** Phasenraumdiagramm mit Runge-Kutta 4ter Ordnung für  $V_s = 0.001V$  mit  $2 \cdot 10^5$  Zeitschritte bei einer Schrittweite von  $h = 10^{-9}$ . Links: Nach  $5 \cdot 10^4$  Zeitschritten Einschwingzeit, Mitte: Nach  $10^2$  Zeitschritten Einschwingzeit. Rechts: Nach  $2 \cdot 10^5$  Zeitschritten Einschwingzeit



**Abbildung 14:** Phasenraumdiagramm mit Runge-Kutta 4ter Ordnung für  $2 \cdot 10^4$  Zeitschritte nach einer Einschwingzeit von  $3 \cdot 10^5$  Zeitschritten und einer Schrittweite von  $h = 10^{-9}$ . Links:  $V_s = 1V$ , Mitte:  $V_s = 1.2V$ . Rechts:  $V_s = 1.42V$



**Abbildung 15:** Phasenraumdiagramm mit Runge-Kutta 4ter Ordnung nach einer Einschwingzeit von  $3 \cdot 10^5$  Zeitschritten und einer Schrittweite von  $h = 10^{-9}$ . Links:  $V_s = 20V$  für  $2 \cdot 10^4$  Zeitschritte, Mitte:  $V_s = 30V$  für  $2 \cdot 10^4$  Zeitschritte. Rechts:  $V_s = 34V$  für  $1.2 \cdot 10^5$  Zeitschritte



**Abbildung 16:** Phasenraumdiagramm mit Runge-Kutta 4ter Ordnung nach einer Einschwingzeit von  $3 \cdot 10^5$  Zeitschritten für weitere  $5 \cdot 10^4$  Zeitschritte bei einer Schrittweite von  $h = 10^{-8}$ . Links: Wohldefinierter Attraktor. Rechts: Chaos

Z.b. erhalten wir bei  $V_s = 9.1300024986267072V$  einen eindeutigen Attraktor (Abbildung 16 links) und Chaos bei einem Wert  $10^{-15}V$  größer (rechts)....(ERKLÄRUNG) Auch unter Verwendung des Euler-Cauchy-Verfahrens beobachten wir teilweise ein anderes Verhalten. So können wir im Bereich von  $V_s = 3V$  bis  $V_s = 4.7V$  mehrere Periodenverdopplungen beobachten (Abbildung 17 und 18 ) bis hin zum Chaos.

### 5.2.2 Poincaré-Schnitt

TODO

### 5.2.3 Bifurcations-Diagramm

TODO

## 5.3 Versuchsaufbau

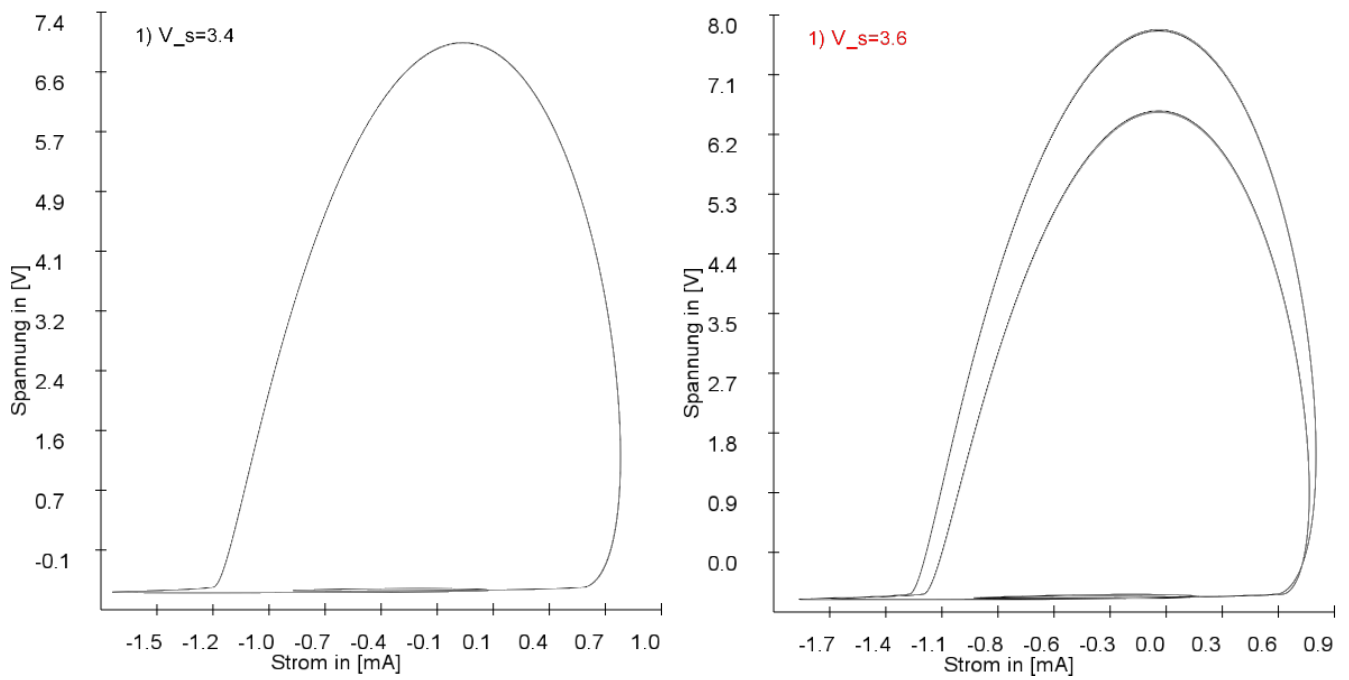
Für die Messung an einem realen LDR-Schwingkreis haben wir zunächst einen Messaufbau wie in Abbildung 20 (links) verwendet. Über die Eingänge A und B des Oszilloskop konnten wir Strom und Spannung über der Diode einzeln und als Phasendiagramm darstellen. Ferner haben wir einen Gate-Delay Generator verwendet der.... reffig:ldr-aufbau1 (rechts) Abbildung xxx zeigt eine der verwendeten Schaltkreise. Dabei haben wir  $x$  Widerstände mit insgesamt  $R = xx\Omega$  verwendet. Außerdem xxx Spulen mit einer Induktivität von insgesamt  $L = xxxH$ . Bei der Diode handelt es sich um xxx.

## 5.4 Versuchsdurchführung

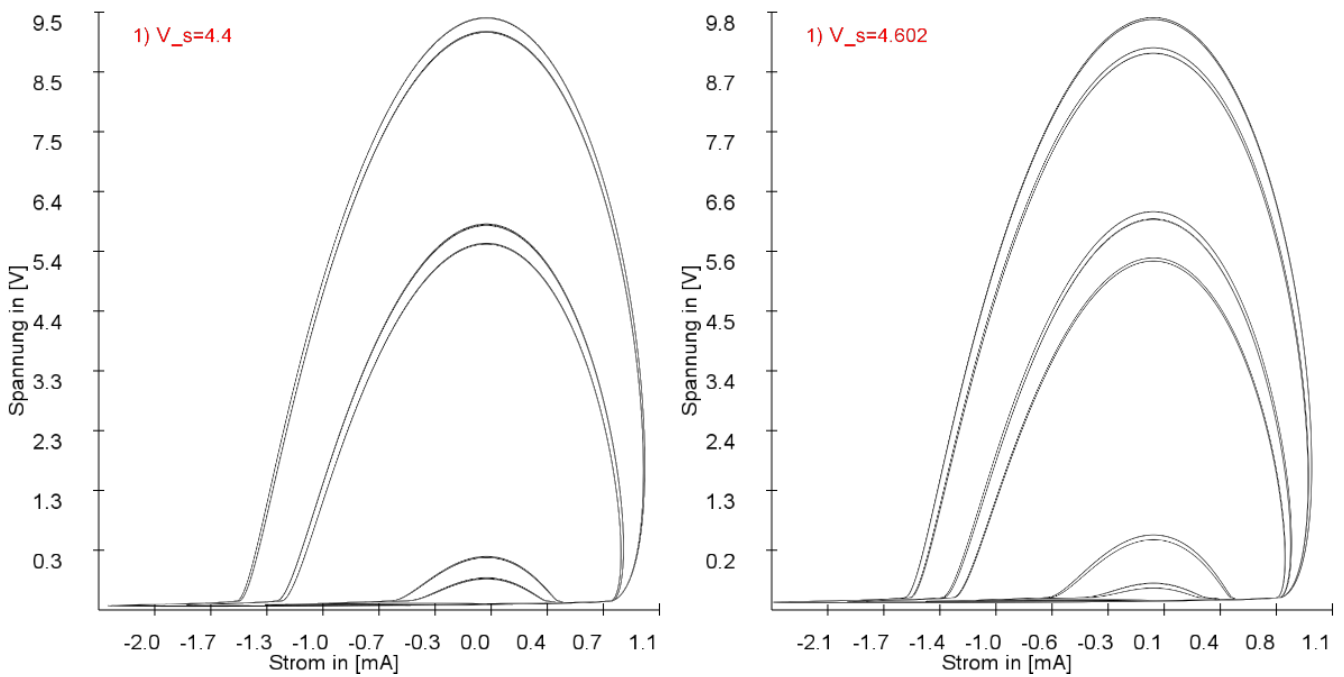
### 5.4.1 Oszillation und Phasenraumdiagramm

Zunächst haben wir bei einer Eingangsspannung von  $V_s = 0.128V$  die Resonanzfrequenz über die Betrachtung des Phasenraumdiagramms auf  $\omega = 800kHz$  bestimmt. Leider konnten wir nicht die selben Bedingungen wie bei den numerischen Berechnungen schaffen, da .....

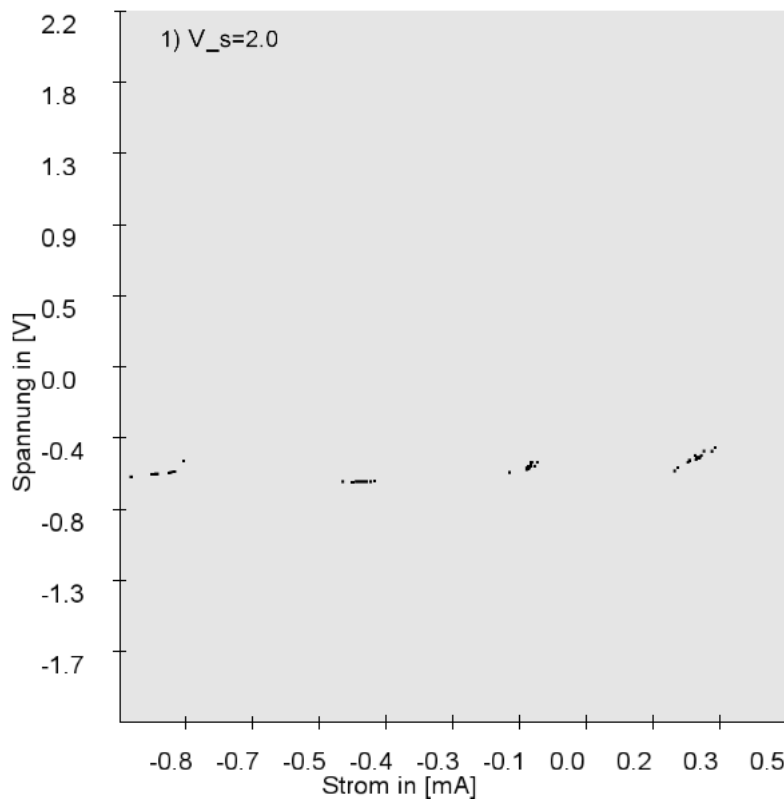




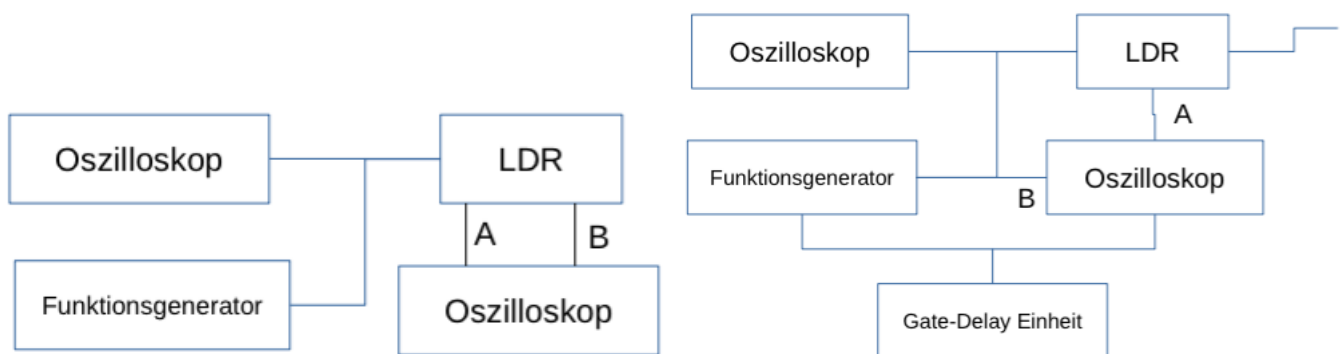
**Abbildung 17:** Phasenraumdiagramm mit Euler-Cauchy-Verfahren nach Einschwingzeit von  $2.5 \cdot 10^6$  Zeitschritten für weitere  $10^5$  Zeitschritte. Links:  $V_s = 3.4V$ , Rechts:  $V_s = 3.6V$



**Abbildung 18:** Phasenraumdiagramm mit Euler-Cauchy-Verfahren nach Einschwingzeit von  $2.5 \cdot 10^6$  Zeitschritten für weitere  $10^5$  Zeitschritte. Links:  $V_s = 4.4V$ , Rechts:  $V_s = 4.602V$



**Abbildung 19:** Poincaré-Schnitt für  $V_s = 2V$  durch die Ebene bei  $\sin(\theta) = 0$  angefangen nach  $10^4$  Iterationen. Insgesamt 1500 Punkte



**Abbildung 20:** Messaufbau zur Visualisierung des LDR-Schwingkreises. Oszilloskop links zur Überprüfung der Eingangsspannung und Frequenz. Links: Strom und Spannung über der Diode werden dargestellt auf Oszilloskop über Eingänge A und B. Rechts: Gate-Delay Einheit verzögert Signal in Abhängigkeit der jetzt variierenden Eingangsspannung  $V_s$  zur Darstellung des Stroms bzw. der Spannung in Abhängigkeit von  $V_s$

## 5.5 Bifurkationsdiagramm

Zur Visualisierung des Bifurcationsdiagrammes haben wir einen anderen Schaltkreis verwendet, dessen Resonanzfrequenz wir auf  $\omega = 325kHz$  bestimmt haben. Aufgrund des Gate-Delay Generators konnten wir das Verhalten der Oszillation von Strom bzw. Spannung in Abhängig von  $V_s$  darstellen. In Abbildung xxx kann man gut wann Periodenverdopplung und schließlich Chaos auftritt. Wir waren in der Lage 3 Werte für Periodenverdopplung zu messen.

$$V_{s_1} = 6.6V \pm 0.2V$$

$$V_{s_2} = 13.6V \pm 0.2V$$

$$V_{s_3} = 18V \pm 2V$$

Dabei haben wir die Fehler lediglich geschätzt auf Basis der Ungenauigkeit des Oszilloskopes. Das führt zu einer Feigenbaumkonstante von  $\delta = 1.6 \pm xxx$

## 5.6 Zusammenfassung

## 6 Literatur

- Nichtlineare Dynamik und Chaos - Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene Universität Hamburg