UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

ANTONIO FELYPE FERREIRA MACIEL

MÉTODOS NUMÉRICOS
INTERPOLAÇÃO E AJUSTE DE CURVAS

FORTALEZA
2021

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Interpolação e Ajuste de Curvas são procedimentos para estimação de valores a partir de um conjunto de dados existente. Esses métodos são amplamente aplicados nos campos da Engenharia e da Computação, com destaque para aprendizado de máquina.

Na interpolação, é determinado um polinômio que é capaz de obter os valores exatos dos pontos do conjunto de dados existente. Seu objetivo é estimar valores entre esses pontos. Dessa categoria, serão apresentados os métodos de Lagrange, de Newton e Spline Linear.

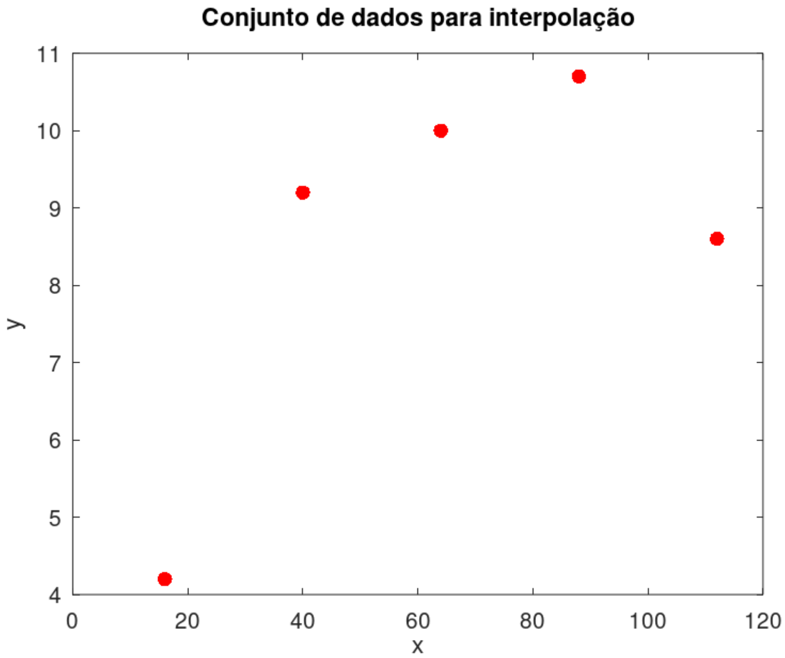
Aqui, os métodos citados acima serão utilizados para encontrar um valor de y para x = 105, a partir dos seguintes dados:

Tabela 1 – Dados para os métodos de interpolação.

x	16	40	64	88	112
y	4.2	9.2	10	10.7	8.6

Fonte: Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas.

Figura 1 – Gráfico do conjunto de dados para interpolação.



Fonte: produzido pelo autor.

Já no ajuste de curvas, uma equação é encontrada para melhor repesentar um conjunto de dados. Diferente da interpolação, o ajuste de curvas não busca fornecer o valor exato dos pontos do conjunto de dados, mas aproximá-los em uma curva. Dessa categoria, será apresentado o método da regressão linear utilizando mínimos quadrados.

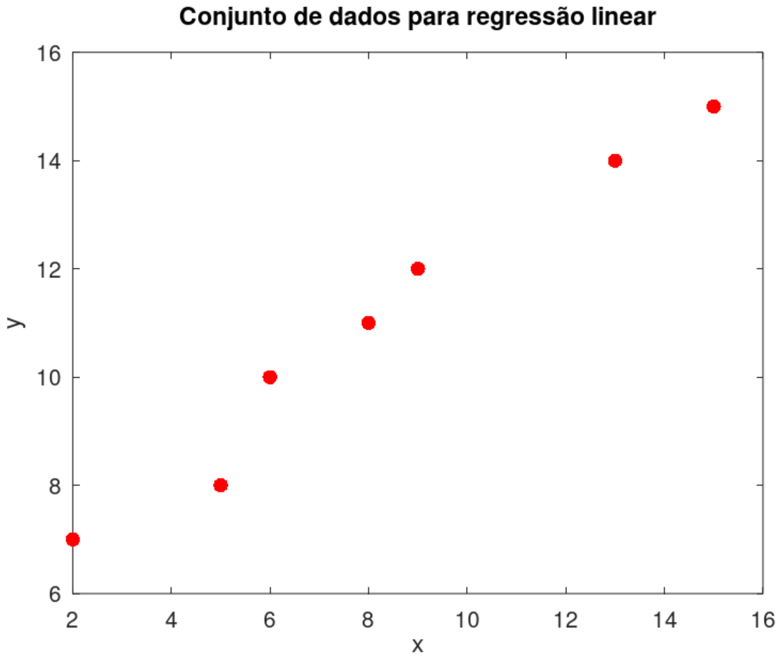
O objetivo do método citado é obter os coeficientes de uma reta que melhor se ajuste aos seguintes dados:

Tabela 2 – Dados para regressão linear.

x	2	5	6	8	9	13	15
y	7	8	10	11	12	14	15

Fonte: Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas.

Figura 2 – Gráfico do conjunto de dados para regressão linear.



Fonte: produzido pelo autor.

2 MÉTODO DA INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

2.1 Funcionamento

1. O método recebe os vetores x e y e o valor de x para o qual deseja-se encontrar um valor de y.
2. O valor de y interpolado é calculado a partir de fórmula abaixo:

   $$yint = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$$

   Para esse somatório, é feito um laço de repetição que soma os valores de y_i multiplicados por L_i.
3. O valor de L_i é calculado a partir de uma função chamada durante o somatório. Ela segue a fórmula abaixo;

   $$L_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

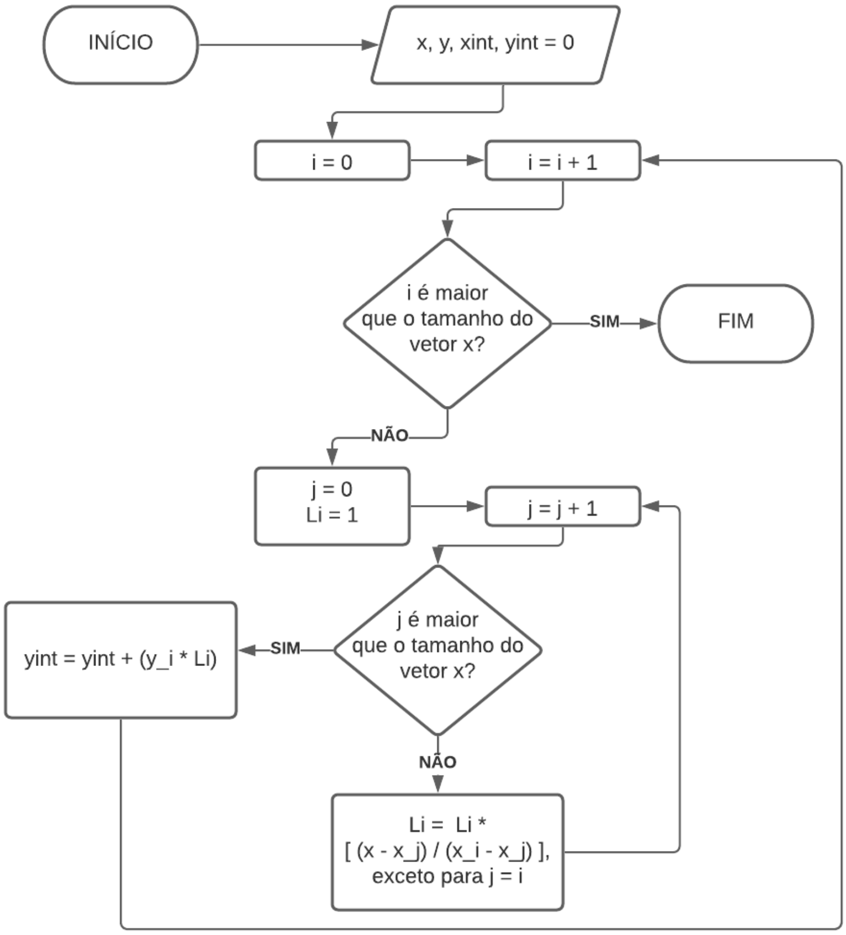
2.2 Pseudocódigo

```
INÍCIO
#produtório para o cálculo das funções de lagrange
FUNÇÃO lagfunc(xis, k, xinterp)
  p = 1;
  PARA j=1 ATÉ TAMANHO(xis)
    SE j != k
      ENTÃO p = p*((xinterp-xis(j))/(xis(k) - xis(j)));
    FIM SE
  FIM PARA
  RETORNE p
FIM FUNÇÃO
yint = 0;
#somatório para encontrar o valor de y interpolado
PARA i = 1 ATÉ TAMANHO(x)
  yint = yint + (y(i)*lagfunc(x, i, xint));
```

```
16. FIM PARA
17. FIM
```

2.3 Fluxograma

Figura 3 – Fluxograma do Método da Interpolação de Lagrange.



Fonte: produzido pelo autor.

Valor de y interpolado encontrado no código: 9.9314.

3 MÉTODO DA INTERPOLAÇÃO DE NEWTON

3.1 Funcionamento

1. O método recebe os vetores x e y e o valor de x para o qual deseja-se encontrar um valor de y.
2. O primeiro coeficiente a_1 corresponde ao primeiro elemento do vetor y.
3. Um laço de repetição é utilizado para calcular as diferenças divididas simples e armazená-las na primeira coluna da matriz $diferencas$.

$$diferencas_{i,1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{xi + 1 - x_i}$$

4. Um segundo laço calcula as diferenças divididas de ordem 2 e superior e as distribui nas colunas da matriz $diferencas$.

$$diferencas_{i,j} = \frac{diferencas_{i+1,j-1} - diferencas_{i,j-1}}{x_{j+i} - x_i}$$

5. Um novo laço calcula os demais coeficientes do vetor a.
6. Por fim, o valor de y interpolado é encontrado através de um laço de repetição, utilizando os coefientes de a.

3.2 Pseudocódigo

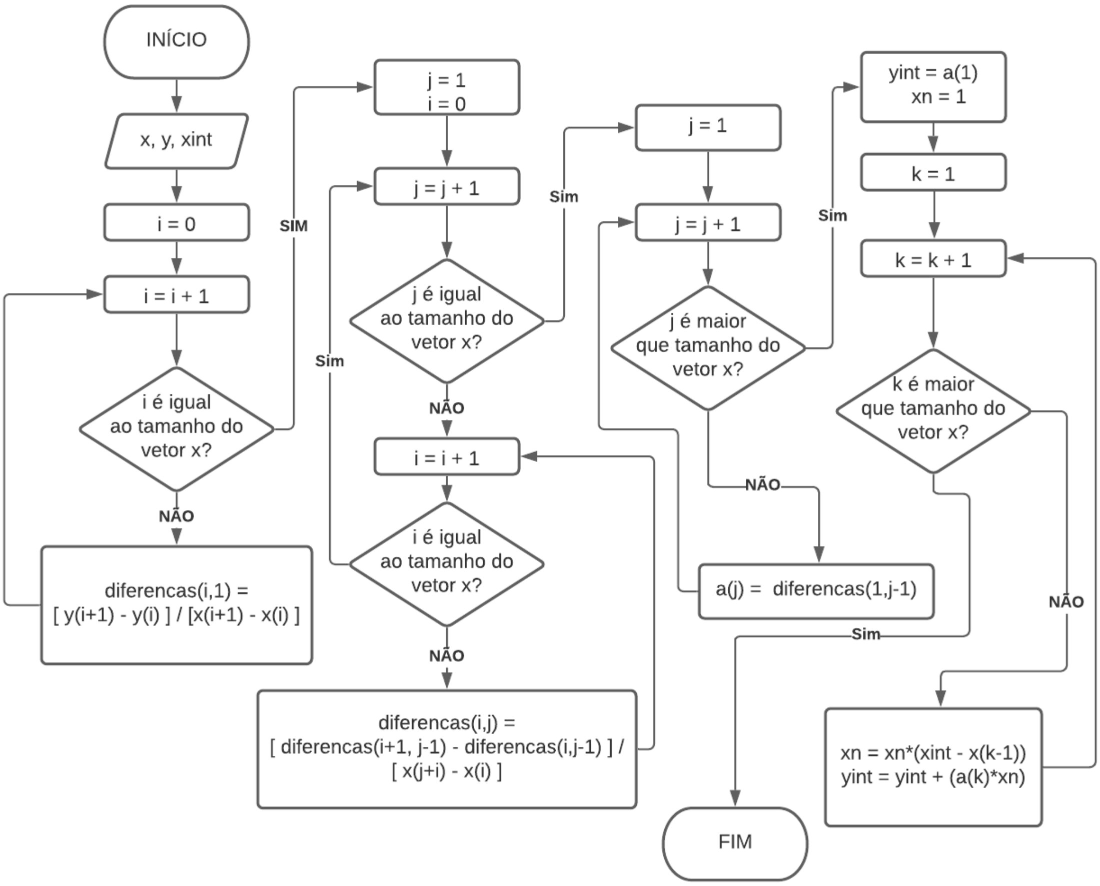
```
INÍCIO
a = []; #vetor dos coeficientes
a(1) = y(1); #o primeiro coeficiente é o valor do primeiro elemento de
y
diferencas = []; #vetor das diferenças divididas
#cálculo das diferenças divididas simnples
PARA i = 1 ATÉ TAMANHO(x)-1
  diferencas(i,1) = (y(i+1) - y(i))/(x(i+1) - x(i));
FIM PARA
#cálculo das diferenças divididas de ordem 2 em diante
PARA j = 2 ATÉ TAMANHO(x)-1
  PARA i = 1 ATÉ TAMANHO(x)-j
```

```
    diferencas(i,j) = (diferencas(i+1, j-1) - diferencas(i,j-1))/(x(j+i) - x(i));
  FIM PARA
FIM PARA
#cálculo dos demais coeficientes
PARA j = 2 ATÉ TAMANHO(x)
  a(j) = diferencas(1,j-1);
FIM PARA
#encontrando o valor de yint
yint = a(1);
xn = 1;
PARA k = 2 ATÉ TAMANHO(x)
  xn = xn*(xint - x(k-1));
  yint = yint + (a(k)*xn);
FIM PARA
FIM
```

3.3 Fluxograma

Valor de y interpolado encontrado no código: 9.9314.

Figura 4 – Fluxograma do Método da Interpolação de Newton.



Fonte: produzido pelo autor.

4 MÉTODO SPLINE LINEAR

4.1 Funcionamento

1. O método recebe os vetores x e y e o valor de x para o qual deseja-se encontrar um valor de y.
2. Um laço de repetição é utilizado para descobrir em que intervalo de x a variável $xint$ está.
3. Quando encontrado o intervalo, $yint$ é calculado de acordo com a expressão a seguir:

$$yint = \frac{(xint - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} y_i + \frac{(xint - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} y_{i+1}$$

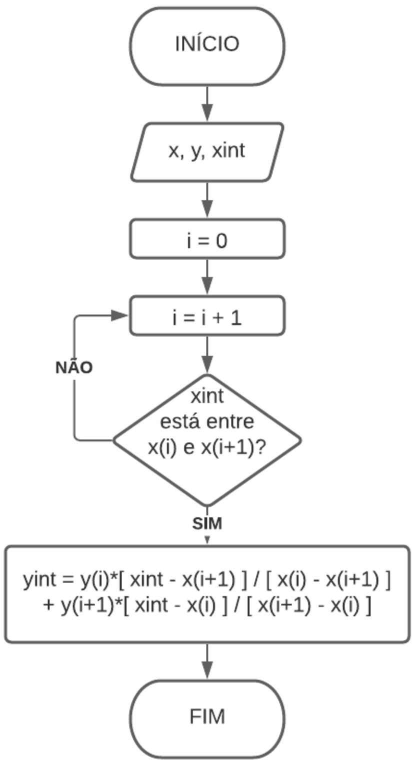
4.2 Pseudocódigo

```
INÍCIO
PARA i = 1:TAMANHO(x)-1
  SE ((xint >= x(i)) E (xint <= x(i+1))) #verificando em que intervalo está o x interpolado
#de acordo com o valor de xint, os coeficientes para o cálculo de yint mudam
    ENTÃO FAÇA yint = ((xint - x(i+1))/(x(i) - x(i+1)))*y(i) + ((xint - x(i))/(x(i+1) - x(i)))*y(i+1);
    PARE;
  FIM SE
FIM PARA
FIM
```

4.3 Fluxograma

Valor de y interpolado encontrado pelo código: 9.7606.

Figura 5 – Fluxograma do Método Spline Linear.



Fonte: produzido pelo autor.

5 MÉTODO DA REGRESSÃO LINEAR

5.1 Funcionamento

1. O método recebe os vetores x e y, que contém os dados para a regressão linear.
2. O coeficiente a_1 é calculado a partir da seguinte expressão:

$$a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

3. O coeficiente a_0 é calculado a partir da seguinte expressão:

$$a_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

4. Para ada somatório nas expressões acima, há uma função no código para calculá-lo.
5. Após os coeficientes serem encontrados, a expressão da reta é calculada.

$$fx = a_1 x + a_0$$

5.2 Pseudocódigo

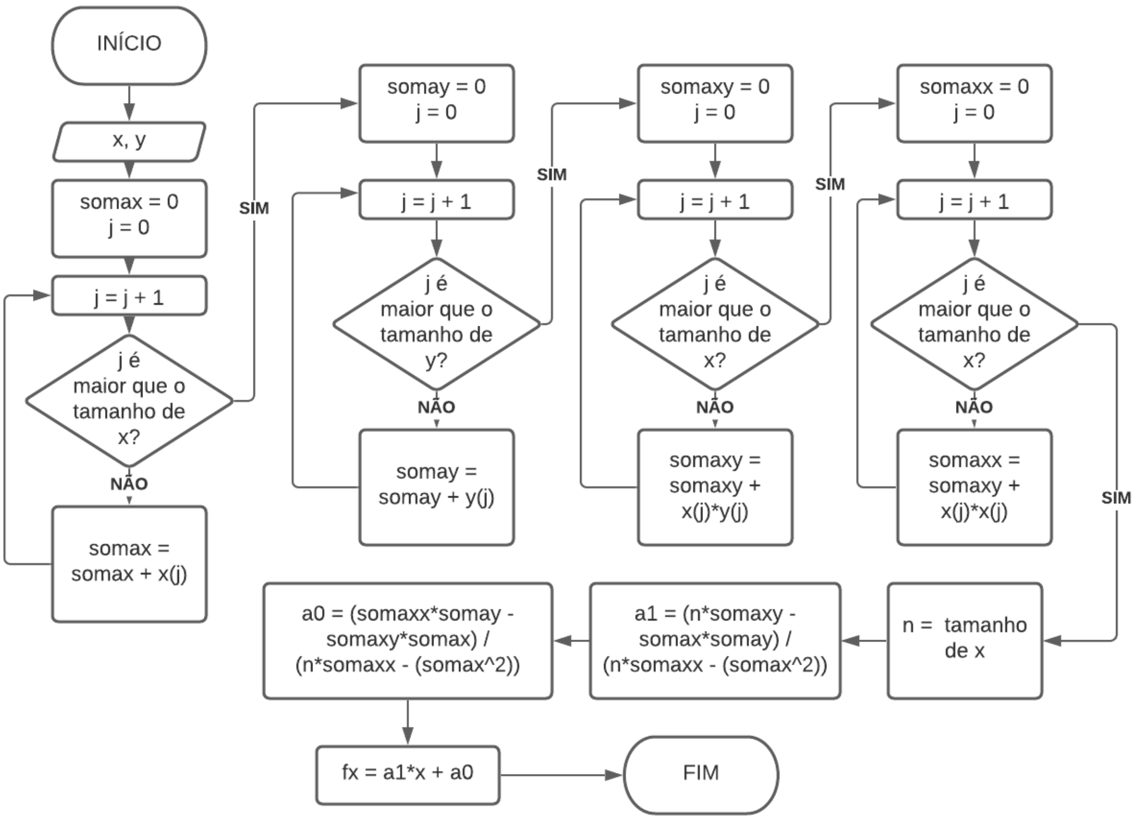
```
INÍCIO
n = TAMANHO(x); #tamanho dos vetores (que é igual para ambos)
#somatório dos elementos de x
FUNÇÃO sumx(xis)
  s = 0;
  PARA j = 1 ATÉ TAMANHO(xis);
    s = s + xis(j);
  FIM PARA
  RETORNE s
FIM FUNÇÃO
#somatorio dos elementos de y
```

```
FUNÇÃO sumy(yps)
  s = 0;
  PARA j = 1 ATÉ TAMANHO(yps)
    s = s + yps(j);
  FIM PARA
  RETORNE s
FIM FUNÇÃO
#somatorio de x_j*y_j
FUNÇÃO sumxy(xis, yps)
  s = 0;
  PARA j = 1 ATÉ TAMANHO(xis)
    s = s + xis(j)*yps(j);
  FIM PARA
  RETORNE s
FIM FUNÇÃO
#somatorio dos valores ao quadrado de x
FUNÇÃO sumxx(xis)
  s = 0;
  PARA j = 1 ATÉ TAMANHO(xis)
    s = s + (xis(j))^2;
  FIM PARA
  RETORNE s
FIM FUNÇÃO
#erro global
FUNÇÃO erroglobal(xis, yps, aum, azero)
  s = 0;
  PARA j = 1 ATÉ TAMANHO(xis)
    s = s + (yps(j) - (aum*xis(j) + azero))^2;
  FIM PARA
  RETORNE s
FIM FUNÇÃO
#encontrando o valor do coeficiente a1
```

```
a1 = (n*sumxy(x,y) - sumx(x)*sum(y))/(n*sumxx(x) - (sumx(x))^2);
#encontrando o valor do coeficiente a0
a0 = (sumxx(x)*sumy(y) - sumxy(x,y)*sumx(x))/(n*sumxx(x) - (sumx(x))^2);
FIM
```

5.3 Fluxograma

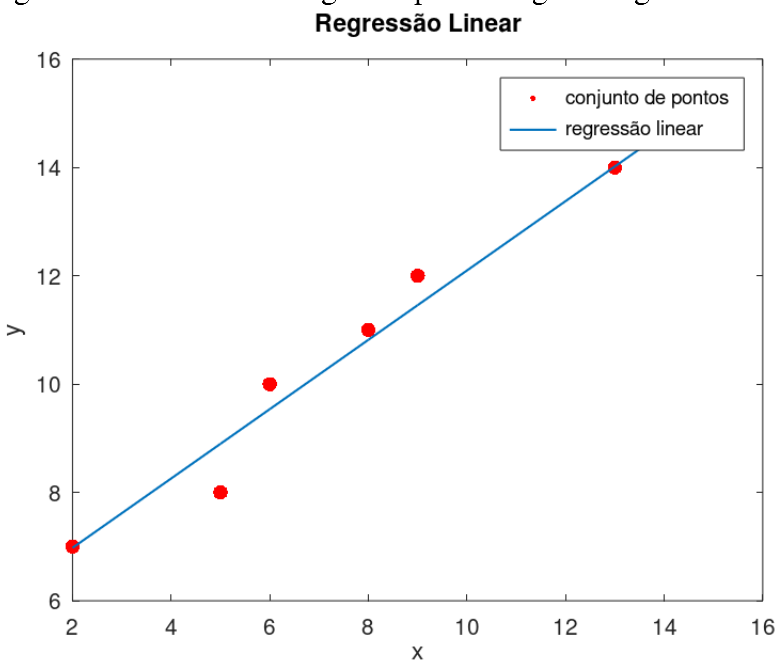
Figura 6 – Fluxograma da Regressão Linear.



Fonte: produzido pelo autor.

Valores dos coeficientes da reta encontrados pelo código: a1 = 0.640046 e a0 = 5.696759.

Figura 7 – Gráfico da reta gerada pelo código da regressão linear.



Fonte: produzido pelo autor.

6 CONCLUSÃO

Nesse trabalho, foi possível observar que os métodos de Lagrange e de Newton obtiveram os mesmos resultados. Já o Spline Linear gerou um resultado com diferença de 0.7189 em comparação aos outros métodos citados.

Isso é justificável pois aqui foi utilizado o Spline Linear, que utiliza polinômios do 1º grau. Além disso, esse método funciona melhor quando os espaços entre os pontos do conjunto de dados, é pequeno. Provavelmente, utilizando Spline Linear com grau maior e com mais pontos no conjunto de dados, o valor de y interpolado seria mais próximo dos outros métodos.

A regressão linear aproximou-se do resultado esperado e teve erro global (soma de todos os erros ao quadrado dos pontos) de 1.436343.