1 # برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
2 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1 سمتیات 1

1.1 مقداری اور سمتیہ 1

1.2 سمتی الجبرا 2

1.3 کارتیسی محدد 3

1.4 اکائی سمتیات 5

1.5 میدانی سمتیہ 9

1.6 سمتی رقبہ 9

1.7 غیر سمتی ضرب 10

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب 14

1.9 گول نلکی محدد 17

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب 20

1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق 20

1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں 25

1.10 کروی محدد 27

2 کولومب کا قانون 39

2.1 قوت کشش یا دفع 39

2.2 برقی میدان کی شدت 43

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان 46

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح 51

2.5 چارج بردار حجم 55

2.6 مزید مثال 56

2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط 63

2.8 سوالات 65

3 گاؤس کا قانون اور پھیلاو 67
3.1 ساکن چارج 67
3.2 فیراڈے کا تجربہ 67
3.3 گاؤس کا قانون 68
3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال 70
3.4.1 نقطہ چارج 70
3.4.2 یکساں چارج بردار کروی سطح 72
3.4.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر 72
3.5 ہم محوری تار 73
3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح 75
3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق 75
3.8 پھیلاو 78
3.9 نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات 80
3.10 پھیلاو کی عمومی مساوات 82
3.11 مسئلہ پھیلاو 84

4 توانائی اور برقی دباو 87
4.1 توانائی اور کام 87
4.2 لکیری تکملہ 88
4.3 برقی دباو 93
4.3.1 نقطہ چارج کا برقی دباو 94
4.3.2 لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو 95
4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباو 96
4.4 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباو 96
4.5 برقی دباو کی ڈھلوان 100
4.5.1 نلکی محدد میں ڈھلوان 104
4.5.2 کروی محدد میں ڈھلوان 105
4.6 جفت قطب 106
4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاو خط 108
4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی 111

5 موصل، ذو برق اور کپیسٹر 117

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو 117

5.2 استمراری مساوات 119

5.3 موصل 121

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط 126

5.5 عکس کی ترکیب 129

5.6 نیم موصل 132

5.7 ذو برق 133

5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط 138

5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط 142

5.10 کپیسٹر 142

5.10.1 متوازی چادر کپیسٹر 144

5.10.2 ہم محوری کپیسٹر 145

5.10.3 ہم کوہ کپیسٹر 145

5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر 147

5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس 148

6 پوئسن اور لاپلاس مساوات 157

6.1 مسئلہ یکتائی 159

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے 160

6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات 161

6.4 لاپلاس مساوات کے حل 162

6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال 168

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل 171

6.7 عددی دہرانے کا طریقہ 178

7 ساکن مقناطیسی میدان 185 80
7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون 185 81
7.2 ایمپیئر کا دوری قانون 189 82
7.3 گردش 194 83
7.3.1 نلکی محدد میں گردش 201 84
7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات 206 85
7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات 208 86
7.4 مسئلہ سٹوکس 209 87
7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو 212 88
7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو 219 89
7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول 224 90
7.7.1 سمتی مقناطیسی دباو 224 91
7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون 226 92

8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ 231 93
8.1 متحرک چارج پر قوت 231 94
8.2 تفرقی چارج پر قوت 232 95
8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت 235 96
8.4 قوت اور مروڑ 236 97
8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے 241 98
8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل 242 99
8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط 245 100
8.8 مقناطیسی دور 246 101
8.9 مقناطیسی مخفی توانائی 249 102
8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ 250 103
8.11 مشترکہ امالہ 254 104

9 وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات 257

9.1 فیراڈے کا قانون 257

9.2 انتقالی برقی رو 263

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل 267

9.4 میکس ویل مساوات کی تکمل شکل 268

9.5 تاخیری دباو 270

10 مستوی امواج 275

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج 275

10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج 276

10.2.1 خالی خلاء میں امواج 283

10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج 285

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج 287

10.3 پوئنٹنگ سمتیہ 290

10.4 موصل میں امواج 294

10.5 انعکاس مستوی موج 300

10.6 شرح ساکن موج 306

11 ترسیلی تار 313

11.1 ترسیلی تار کے مساوات 313

11.2 ترسیلی تار کے مستقل 317

11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل 318

11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل 321

11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار 322

11.3 ترسیلی تار کے چند مثال 323

11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ 328

11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ 335

11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال 336

12 تقطیب موج 341 131

12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب 341 132

12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئنٹنگ سمتیہ 344 133

13 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار 347 134

13.1 ترچھی آمد 347 135

13.2 ترسیم بائی گن 358 136

14 مویج اور گھمکیا 361 137

14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ 361 138

14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج 362 139

14.3 کھوکھلا مستطیلی مویج 368 140

14.3.1 مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور 377 141

14.4 مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی $\mathrm{TM}mn$ موج 384 142

14.5 کھوکھلی نالی مویج 388 143

14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف 395 144

14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف 397 145

14.8 سطحی موج 399 146

14.9 ذو برق تختی مویج 404 147

14.10 شیش ریشہ 407 148

14.11 پردہ بصارت 410 149

14.12 گھمکی خلاء 412 150

14.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل 415 151

15 اینٹینا اور شعاعی اخراج 423 152

15.1 تعارف 423 153

15.2 تاخیری دباو 423 154

15.3 تکمل 425 155

15.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا 426 156

15.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت 434 157

15.6 ٹھوس زاویہ 438 158

15.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش 439 159

15.8 قطاری ترتیب 446 160

15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع 446 161

15.8.2 ضرب نقش 447 162

15.8.3 ثنائی قطار 448 163

15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار 450 164

15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار 452 165

15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار 452 166

15.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا 456 167

15.9 تداخُل پیما 457 168

15.10 مسلسل خطی اینٹینا 458 169

15.11 مستطیل سطحی اینٹینا 459 170

15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریئر بدل ہیں 462 171

15.13 خطی اینٹینا 462 172

15.14 چلتے موج اینٹینا 467 173

15.15 چھوٹا گھیرا اینٹینا 468 174

15.16 پیچ دار اینٹینا 469 175

15.17 دو طرفہ کردار 471 176

15.18 جھری اینٹینا 473 177

15.19 پیپا اینٹینا 474 178

15.20 فرائس ریڈار مساوات 476 179

15.21 ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی 479 180

15.22 حرارت نظام اور حرارت بعید 481 181

16 سوالات 483 182

باب 1

سمتیات

1.1 مقداری اور سمتیہ

وہ طبعی مقدار جس کے مکمل اظہار کے لئے سمت کی ضرورت نہیں ہوتی مقداری [1] کہلاتا ہے۔ کسی چیز کی کمیت m یا اس کا درجہ حرارت T مقداری کی مثالیں ہیں۔ مقداری کی قیمت اٹل یا متغیر ممکن ہے۔ کمیت اٹل مقداری کی مثال ہے۔ متغیر مقداری کی قیمت مختلف اوقات اور نقاط پر مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں کسی بھی نقطے پر درجہ حرارت کی قیمت وقت t کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔ اسی طرح کسی بھی وقت مختلف نقاط پر درجہ حرارت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں اگر صبح کے وقت اسلام آباد میں کسی مقام پر درجہ حرارت $12\,^\circ\mathrm{C}$ ہو تو دوپہر کو اسی مقام پر درجہ حرارت $30\,^\circ\mathrm{C}$ ہو سکتا ہے۔ درجہ حرارت T، وقت t، کارتیسی محدد [2] کے متغیرات x، y اور z تمام مقداری متغیرات ہیں۔

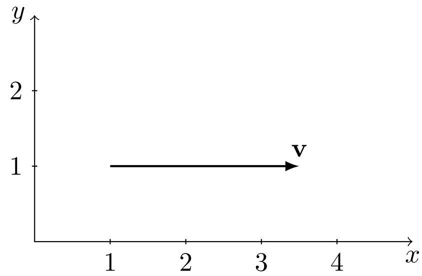
ایسی طبعی مقدار جسے بیان کرنے کے لئے سمت درکار ہو سمتیہ [3] کہلاتا ہے۔ اس کتاب میں سمتیہ کی قیمت (یا طول) کو مثبت تصور کیا جائے گا۔ یوں سمتیہ کی حتمی قیمت ہی اس کی مقدار ہو گی۔ سمتیہ کی مثالیں قوت، سمتی رفتار اور سمتی اسراع ہیں۔

اس کتاب میں مقداری متغیرات کو سادہ طرز کی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے حروف مثلاً a، b، α، . . . یا بڑے حروف مثلاً A، B، Ψ، . . . سے ظاہر کیا جائے گا۔ سمتیہ متغیرات کو موٹی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے یا بڑے حروف سے ظاہر کیا جائے گا۔ یوں قوت کو $\mathbf{F}$ جبکہ سمتی رفتار کو $\mathbf{v}$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں قوت کو $\vec{F}$ یا $\overrightarrow{F}$ لکھا جاتا ہے۔ سمتیہ کو تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں تیر کی لمبائی سمتیہ کی حتمی قیمت $|\mathbf{F}|$ ظاہر کرتی ہے جبکہ سمتیہ کی سمت تیر کی سمت سے ظاہر کی جاتی ہے۔ سمتیہ کی حتمی قیمت کو سمتیہ ظاہر کرنے والے حرف کو سادہ لکھائی میں لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں قوت $\mathbf{F}$ کی حتمی قیمت کو F لکھا جائے گا۔

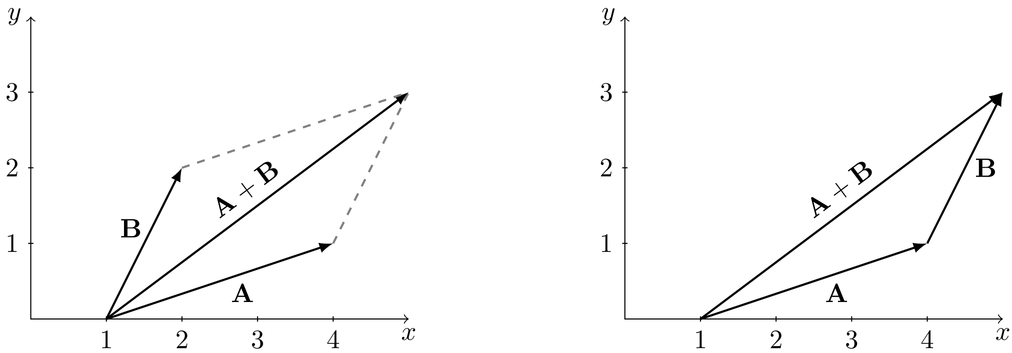
شکل 1.1 میں نقطہ $(1,1)$ پر پانی کی رفتار کو سمتیہ $\mathbf{v}$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر مثبت افقی محور کی سمت میں پانی کی رفتار $2.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے۔ سمتیہ کی دُم اس مقام پر رکھی جاتی ہے جہاں سمتیہ کی قیمت بیان کی جا رہی ہو۔ یوں شکل میں سمتیہ کی دُم $(1,1)$ پر رکھی گئی ہے۔ اس شکل میں $1\,\mathrm{cm}$ کی لمبائی $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ کی رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔

---

[1] scalar
[2] Cartesian coordinates
[3] vector



شکل 1.1: سمتیہ



(ا) سر کے ساتھ دُم جوڑ کر مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

(ب) متوازی الاضلاع سے بھی مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.2: سمتیوں کے مجموعے کا حصول

1.2 سمتی الجبرا 201

دو سمتیوں کا ترسیمی مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر ایک سمتیہ کے سر کو دوسری سمتیہ کے دُم کے ساتھ ملایا جاتا ہے۔پہلی سمتیہ کی دُم سے دوسری سمتیہ کے سر تک سمتیہ حاصل جمع ہو گا۔اس عمل کو شکل 1.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔شکل میں $\mathbf{A}$ کے سر کے ساتھ $\mathbf{B}$ کی دُم ملائی گئی ہے۔دو سے زیادہ سمتیوں کا مجموعہ بھی اسی عمل کو استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔اس عمل کو سر سے دُم جوڑنا[4] کہتے ہیں۔شکل 1.2-ب میں دو سمتیوں کے دُم ملا کر سمتیوں کے متوازی الاضلاع[5] سے ان کا مجموعہ حاصل کرنا دکھایا گیا ہے جسے دیکھ کر صاف ظاہر ہے کہ $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ ہے یعنی سمتیوں کا مجموعہ قانون تبادل[6] پر پورا اترتا ہے۔اسی طرح سمتیوں کا مجموعہ قانون تلازمی[7]

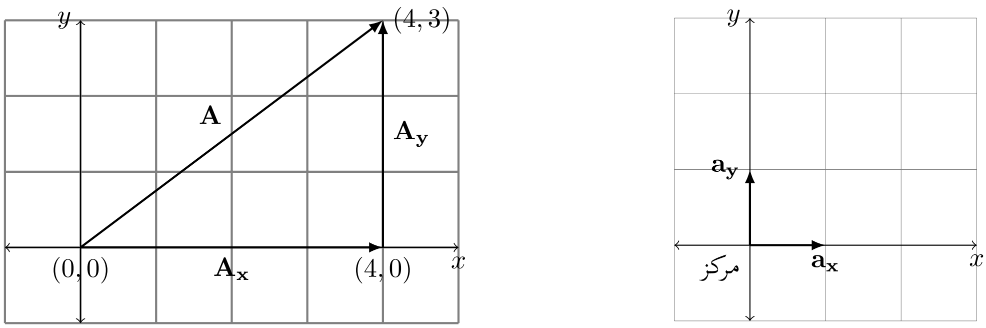
$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} \tag{1.1}$$

پر بھی پورا اترتا ہے۔ 202

سمتیوں کے تفریق کا اصول جمع کے اصول سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ہم $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ کو $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$ لکھ سکتے ہیں جہاں $-\mathbf{B}$ سے مراد یہ ہے کہ سمتیہ $\mathbf{B}$ کی سمت الٹی کر دی گئی ہے۔یوں $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ حاصل کرنے کی خاطر $\mathbf{B}$ کی سمت الٹی کرتے ہوئے اس نئے سمتیہ کو $\mathbf{A}$ کے ساتھ جمع کیا جاتا ہے۔

سمتیہ $\mathbf{A}$ کو مثبت مقداری k سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت پر کوئی اثر نہیں ہوتا جبکہ اس کی لمبائی k گنا ہو جاتی ہے۔اس کے برعکس سمتیہ $\mathbf{A}$ کو منفی مقداری $-k$ سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت الٹ ہو جاتی ہے اور اس کی لمبائی $|k|$ گنا ہو جاتی ہے۔ 206

[4] head to tail rule
[5] parallelogram law
[6] commutative law
[7] associative law



(ا) اکائی سمتیہ

(ب) اکائی سمتیوں کی مدد سے کسی بھی سمتیہ کو ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

شکل 1.3: اکائی سمتیہ اور ان کا استعمال

دو سمتیے اُس صورت میں برابر ہوتے ہیں جب ان کا تفریق صفر کے برابر ہو یعنی $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ تب ہو گا جب $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=0$ ہو۔

سمتی میدان کے متغیرات کو ہم آپس میں جمع یا منفی صرف اُس صورت کریں گے جب یہ متغیرات ایک ہی نقطے پر بیان کئے گئے ہوں۔یوں کسی بھی نقطے پر دو یا دو سے زیادہ مقناطیسوں کا اجتماعی مقناطیسی میدان حاصل کرتے ہوئے اس نقطے پر تمام مقناطیسوں کا علیحدہ علیحدہ مقناطیسی میدان لیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

اگر سمتی میدان کی بات نہ ہو رہی ہو تب مختلف مقامات پر پائے جانے والے سمتیوں کا بھی مجموعہ یا فرق لیا جا سکتا ہے۔یوں سمندر کے پانی میں ڈوبے آب دوز کی اوپر اور نچلی سطح پر قوت کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا یہ مزید ڈوبے گا یا نہیں۔

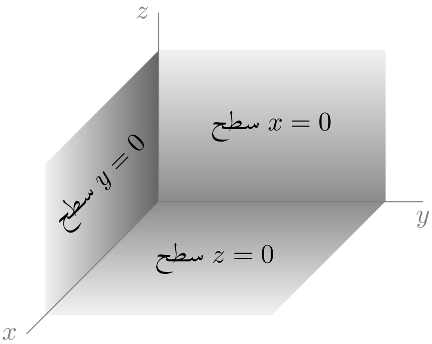
1.3 کارتیسی محدد

ایسا طریقہ جس سے کسی نقطے کا مقام بیان کیا جائے محدد[8] کہلاتا ہے۔سیدھی سطح پر کسی بھی نقطے کو دو محدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔خلاء تین طرفہ[9] ہے لہٰذا خلاء میں کسی بھی نقطے کو تین محدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔شکل 1.3-الف میں دو طرفہ کارتیسی محدد پر اکائی لمبائی کے دو سمتیات $\mathbf{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\mathbf{a}_{\mathrm{y}}$ دکھائے گئے ہیں۔اکائی سمتیہ $\mathbf{a}_{\mathrm{x}}$ کی سمت مثبت x جانب کو ہے جبکہ $\mathbf{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت مثبت y جانب کو ہے۔شکل-ب میں $\mathbf{A}$ دکھایا گیا ہے۔کسی بھی سمتیہ کو دو یا دو سے زیادہ سمتیوں کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔شکل میں $\boldsymbol{A}$ کو $\boldsymbol{A}_x$ اور $\boldsymbol{A}_y$ کے مجموعے کی شکل میں دکھایا گیا ہے یعنی

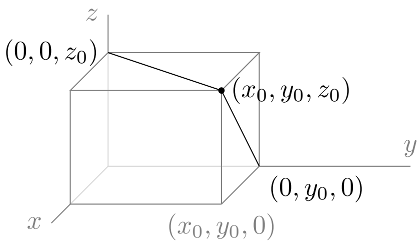
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_x+\boldsymbol{A}_y \tag{1.2}$$

زمین کی سطح کو لامحدود سیدھی سطح تصور کرتے ہوئے، اس کے ہم سطحی[10] دو عمودی لکیریں کھینچتے ہوئے ایک لکیر کو x محدد اور دوسری لکیر کو y محدد تصور کیا جا سکتا ہے۔زمین کے ہم سطحی لکیر سے مراد ایسی لکیر ہے جس پر ہر نقطہ اس سطح کو چھوتا ہے۔x محدد کے مثبت حصے سے گھڑی کی الٹ سمت گھومتے ہوئے نوے درجے پر y محدد کا مثبت حصہ رکھتے ہوئے اونچائی کو z محدد کے مثبت حصے سے ظاہر کیا جائے گا۔اب اگر اونچائی صفر رکھتے ہوئے x اور y کو تبدیل کیا جائے تو ہم زمین کی سطح پر حرکت کریں گے۔اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ زمین کی سطح پر $z=0$ جبکہ اس پر x اور y آزاد متغیرات ہیں۔یوں زمین کی سطح کو $z=0$ سطح کہتے ہیں جسے

$$z=0, \quad x\leq\left|\mp\infty\right|, \quad y\leq\left|\mp\infty\right|$$



(ا) کارتیسی محدد میں عمودی سیدھی سطحیں۔



(ب) نقطے سے محدد پر عمود۔

شکل 1.4: کارتیسی نظام میں نقطہ اور تین عمودی سطحیں۔

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.4-الف میں اس سطح کی نشاندہی کی گئی ہے۔ ہم بالکل اسی طرح $y=0$ سطح اور $x=0$ سطح بھی بیان کر سکتے ہیں۔

شکل 1.4-ب کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی نقطے کو (x_0,y_0,z_0) لکھا جا سکتا ہے۔ اس نقطے تک پہنچنے کی خاطر کارتیسی محدد کے مرکز سے پہلے x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0,0,0)$ تک پہنچیں۔ اس کے بعد y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0,y_0,0)$ تک پہنچیں اور آخر کار z محدد کے متوازی z_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے درکار نقطہ (x_0,y_0,z_0) تک پہنچیں۔ اس عمل میں یہ ضروری نہیں کہ پہلے x محدد کے متوازی ہی چلا جائے۔ آپ مرکز سے پہلے y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرنے کے بعد z محدد کے متوازی z_0 اور آخر کار x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے بھی اسی نقطے تک پہنچ سکتے ہیں۔ تینوں فاصلوں کو کسی بھی ترتیب سے طے کیا جا سکتا ہے۔

نقطہ (x_0,y_0,z_0) سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے $(x_0,0,0)$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح اس نقطے سے y محدد پر عمود $(0,y_0,0)$ اور z محدد پر عمود $(0,0,z_0)$ دیتا ہے۔ نقطہ (x_0,y_0,z_0) سے y محدد اور z محدد پر عمودی لکیریں گہری سیاہی میں دکھائے گئے ہیں۔ اگر (x_0,y_0,z_0) سے شروع ہوتے ہوئے z محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $z=0$ ہو جائے تو نقطہ $(x_0,y_0,0)$ حاصل ہو گا۔ اب اگر یہاں سے x محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $x=0$ ہو جائے تو نقطہ $(0,y_0,0)$ حاصل ہو گا۔ یہ وہی نقطہ ہے جو (x_0,y_0,z_0) سے y محدد پر عمودی لکیر بناتے ہوئے حاصل ہوتا ہے۔ اس عمل میں ہم پہلے x محدد کے متوازی چلتے ہوئے $x=0$ کرنے کے بعد z محدد کے متوازی چلتے ہوئے $z=0$ کرتے ہوئے بھی نقطہ $(0,y_0,0)$ تک پہنچ سکتے تھے۔

نقطہ (x_0,y_0,z_0) تک قدر مختلف انداز سے بھی پہنچا جا سکتا ہے جسے کارتیسی محدد میں سمجھنا زیادہ آسان ہے۔ فرض کریں کہ $x=x_0$ پر لامحدود yz سیدھی سطح بنائی جائے۔ ایسی سطح کو $x=x_0$ سطح کہتے ہیں۔ اس سطح کو

$$x=x_0, \quad y\le|\mp\infty|, \quad z\le|\mp\infty|$$

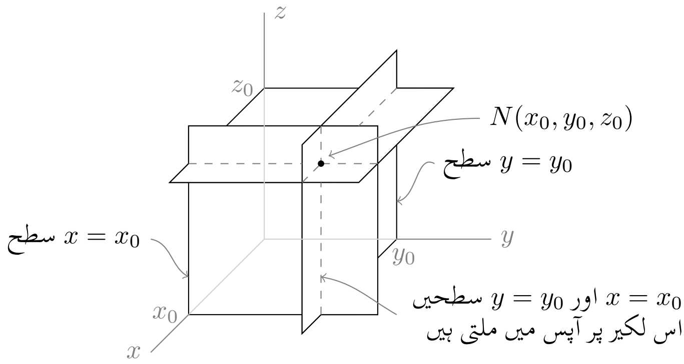
لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں x_0 مقررہ ہے جبکہ y اور z متغیرات ہیں۔ دو متغیرات کی مساوات سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر $y=y_0$ پر لامحدود xz سیدھی سطح بنائی جائے تو یہ دو سطحے آپس میں سیدھی لکیر پر ملیں گے۔ یہ لکیر

$$x=x_0, \quad y=y_0, \quad z\le|\mp\infty|$$

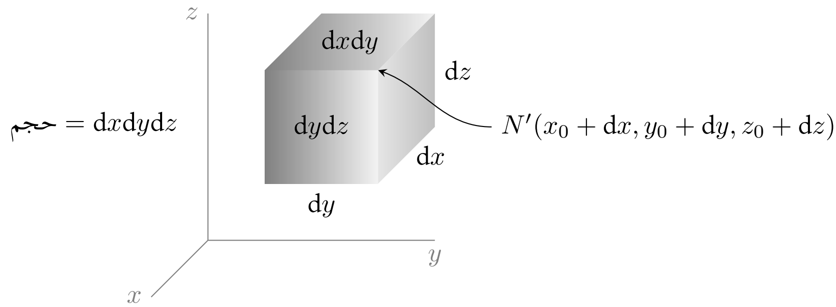
لکھی جا سکتی ہے۔ اس مساوات میں x_0 اور y_0 مقررہ ہیں جبکہ z متغیرہ ہے۔ ایک متغیرہ کی مساوات لکیر کو ظاہر کرتی ہے۔ اب اگر $z=z_0$ پر لامحدود xy سیدھی سطح بھی بنائی جائے تب یہ تینوں سطحے ایک نقطے $N(x_0,y_0,z_0)$ پر آپس کو چھوئینگے۔ یہ صورت حال شکل 1.5 میں دکھائی گئی ہے جہاں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ نقطے تک پہنچنے کا یہ طریقہ دیگر محدد میں استعمال کرنا لازمی ثابت ہو گا۔

---

coordinates[8]
three dimensional[9]
coplanar[10]



شکل 1.5: تین عمودی سطحوں سے نقطے کا حصول۔



شکل 1.6: چھ سطحے مکعب گھیرتی ہیں۔

اگر سطح $x = x_0$ کے متوازی $x = x_0 + \mathrm{d}x$ پر اور اسی طرح $y = y_0$ کے متوازی $y = y_0 + \mathrm{d}y$ اور $z = z_0$ کے متوازی $z = z_0 + \mathrm{d}z$ سطح رکھے جائیں تو یہ چھ سطحے ایک چھوٹی مکعب نما حجم کو گھیریں گی جسے شکل 1.6 میں دکھایا گیا ہے جبکہ یہ تین نئی سطحیں آپس میں نقطہ $N'(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y, z_0 + \mathrm{d}z)$ پر ملیں گی۔ اس مکعب نما کے اطراف $\mathrm{d}x$، $\mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}z$ ہیں۔ اس کی اوپر والی سطح کا رقبہ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہے۔ اسی طرح اس کی نچلی سطح کا رقبہ بھی $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہے۔ سامنے سطح اور پچھلی سطح دونوں $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ رقبے رکھتے ہیں جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ کے برابر ہیں۔ اس مکعب نما کی حجم $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ہے۔ نقطہ $N'(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y, z_0 + \mathrm{d}z)$ شکل میں دکھایا گیا ہے جبکہ نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ مکعب نما کا وہ واحد کونا ہے جسے شکل میں نہیں دکھایا گیا۔ ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ $NN' = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$ ہے۔

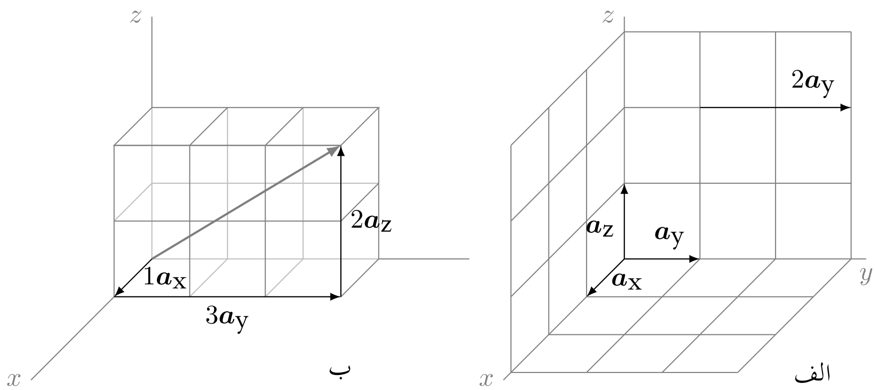
کارتیسی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرنے سے ہم N سے N' پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک کی سمتیہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{1.3}$$

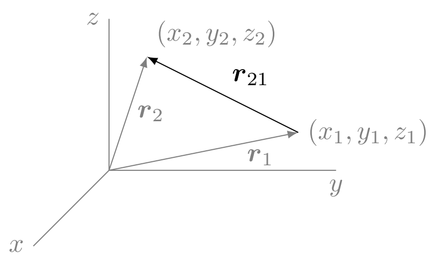
لکھی جاتی ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی لمبائی دیتی ہے۔

1.4 اکائی سمتیات

حصہ 1.3 کے شروع میں دو طرفہ کارتیسی نظام میں سیدھی سطح پر کسی بھی سمتیہ کو دو سمتیات کی صورت میں لکھنا دکھایا گیا۔ یہی طریقہ تین طرفہ کارتیسی نظام کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ تین طرفہ کارتیسی نظام کے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھے جاتے ہیں۔ یہ تینوں سمتیات آپس میں عمودی



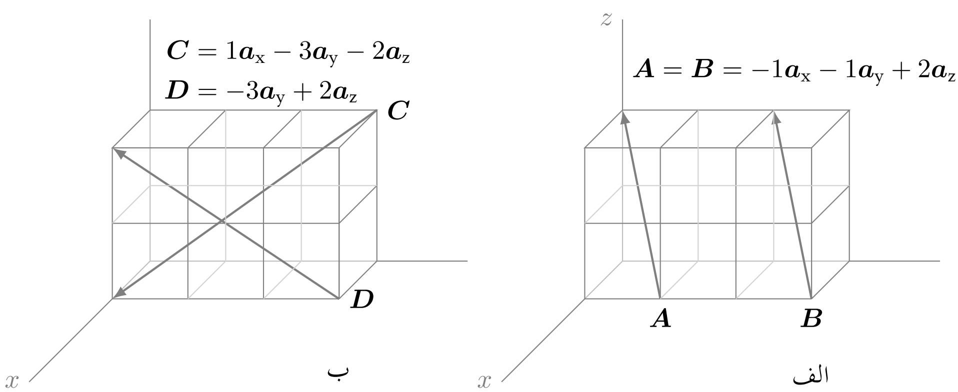
شکل 1.7: کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات اور ان کا استعمال



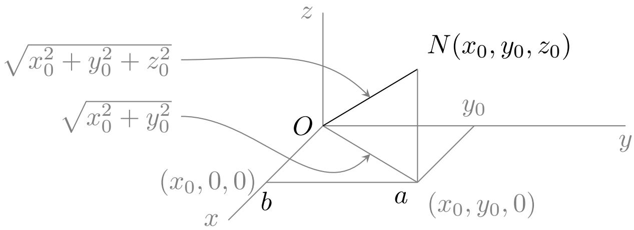
شکل 1.8: کارتیسی نظام میں سمتیہ کی مساوات کا حصول

ہیں۔ کسی بھی اکائی سمتیہ کی طرح یہ تین اکائی سمتیات اکائی لمبائی رکھتے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کی سمت x محدد کے بڑھتے جانب کو ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت y محدد کے بڑھتے جانب کو اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی سمت z محدد کے بڑھتے جانب کو ہے۔ شکل 1.7-الف میں یہ تینوں اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ اسی شکل میں نقطہ $(0,1,2)$ پر سمتیہ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ یہ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت میں ہے۔ اس سمتیہ کو $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یاد رہے کہ ایسے دو سمتیات برابر ہوتے ہیں جن کا طول برابر ہو اور جو ایک ہی سمت میں ہوں۔ یوں سمت تبدیل کئے بغیر سمتیہ کو کارتیسی محدد کے مرکز منتقل کرتے ہوئے اس کی قیمت نسبتاً آسانی سے لکھی جا سکتی ہے۔

شکل 1.8 میں مرکز سے (x_1, y_1, z_1) تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور مرکز سے (x_2, y_2, z_2) تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ بھی دکھائی گئی ہے جس کی دُم (x_1, y_1, z_1) اور نوک (x_2, y_2, z_2) پر ہے۔ سر سے دُم جوڑنے



شکل 1.9: کارتیسی نظام میں چند سمتیات۔



شکل 1.10: کارتیسی نظام میں سمتیہ کا طول۔

کے اصول کے استعمال سے $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_{21} + \boldsymbol{r}_1$ لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{21} &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \end{aligned} \tag{1.4}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے استعمال سے سمتیہ کی مساوات باآسانی حاصل ہوتی ہے۔سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں سمتیہ کی نوک کو 2 اور اس کی دُم کو 1 سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس کتاب میں سمتیہ لکھتے ہوئے نوک اور دُم کو اسی ترتیب سے زیر نوشت میں لکھا جائے گا۔یوں سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ کو تین اجزاء $(x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$، $(y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $(z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.7-ب میں مرکز سے $(1, 3, 2)$ تک سمتیہ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کو تین سمتیات کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے یعنی $1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جہاں اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے تینوں اجزاء کو لکھا گیا ہے۔سمتیہ کی دُم $(0, 0, 0)$ اور اس کی نوک $(1, 3, 2)$ پر لیتے ہوئے یہی جواب مساوات 1.4 سے بھی حاصل ہوتا ہے۔

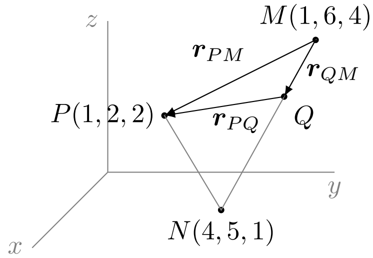
شکل 1.9-الف میں دو متوازی سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دکھائے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔چونکہ ان کی لمبائی برابر ہے اور یہ دونوں ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = -1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھا جائے گا۔شکل 1.9-ب میں $\boldsymbol{C}$ کی دُم سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ جانب ایک قدم اور یہاں سے $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب تین قدم اور آخر کار $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب دو قدم چلنے سے اس کی نوک تک پہنچا جا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{C} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھا جائے گا۔اسی طرح $\boldsymbol{D}$ کی دُم سے $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب تین قدم اور پھر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب دو قدم چلتے ہوئے سمتیہ کی نوک تک پہنچا جایا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{D} = -3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھا جائے گا۔سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کو دو اجزاء کی شکل میں لکھا گیا ہے چونکہ اس کے تیسرے جزو کی لمبائی صفر کے برابر ہے۔

مشق 1.1: مساوات 1.4 کے استعمال سے شکل 1.9 میں تمام سمتیات لکھیں۔

جوابات: تمام جوابات شکل میں دئے گئے ہیں۔

شکل 1.10 میں مرکز سے نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ تک کا فاصلہ ON مسئلہ فیثاغورث[11] سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس نقطے سے $z = 0$ سطح پر عمود سے نقطہ a حاصل ہوتا ہے۔نقطہ a سے x محدد پر عمود نقطہ b دیتا ہے۔تکون Oba میں O سے b کا فاصلہ x_0 ہے جبکہ b سے a کا فاصلہ y_0 ہے۔یوں فاصلہ Oa مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ کے برابر ہو گا۔ تکون OaN میں a پر $90°$ کا زاویہ پایا جاتا ہے۔یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے ON کا فاصلہ $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ حاصل ہوتا ہے۔

[11] Pythagoras theorem



شکل 1.11: سمتیوں کا استعمال

مساوات 1.4 سمتیہ کی عمومی مساوات ہے۔اس میں دئے سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ کی دُم محدد کے مرکز پر رکھنے سے صاف ظاہر ہے کہ سمتیہ کی مقدار

$$|\boldsymbol{r}_{21}| = r_{21} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1.5}$$

کے برابر ہے۔اگر سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کیا جائے تو حاصل جواب کی مقدار اکائی ہو گی جبکہ اس کی سمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی۔یوں $\boldsymbol{r}_{21}$ کو $|\boldsymbol{r}_{21}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{r}_{21}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{r21}$ حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\boldsymbol{a}_{r21} = \frac{\boldsymbol{r}_{21}}{|\boldsymbol{r}_{21}|} = \frac{(x_2-x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(y_2-y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+(z_2-z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \tag{1.6}$$

یاد رہے کہ سمتیہ کی سمت اور طول تبدیل کئے بغیر اسے ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کیا جا سکتا ہے۔البتہ وہ سمتیہ جو کسی نقطے کی مقام تعین کرتا ہو کو اگر کہیں اور منتقل کیا جائے تو ایسی صورت میں سمتیہ کی نوک درکار نقطے پر نہیں رہے گی۔اسی حقیقت کی بنا پر میدان ظاہر کرنے والے سمتیہ کو اپنی جگہ سے نہیں ہٹایا جا سکتا۔میدانی سمتیہ کی دُم اس مقام پر پائی جاتی ہے جہاں میدان بیان کی جا رہی ہو۔

سمتیات کے استعمال سے نقطہ (x,y,z) کے مقام کو $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جاتا ہے۔کسی بھی سمتیہ مثلاً قوت $\boldsymbol{F}$ کو بالکل اسی طرح $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+F_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+F_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جاتا ہے جہاں $F_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $F_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $F_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اس کے تین اجزاء ہیں۔اس طرح قوت کی مقدار $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}$ کے برابر ہو گی۔

مثال 1.1: نقطہ $(-5,2,-1)$ کا مقام ظاہر کرنے والا سمتیہ اور اس سمتیہ کا طول حاصل کریں۔اسی سمتیہ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز سے اس نقطے تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r} = -5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے جبکہ اس سمتیہ کا طول $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{5^2+2^2+1^1} = \sqrt{30}$ ہے۔یوں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_r = \frac{-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{30}}$ ہو گا۔

مثال 1.2: شکل 1.11 میں تین نقطے $M(1,6,4)$، $N(4,5,1)$ اور $P(1,2,2)$ دئے گئے ہیں۔M اور N کے درمیان سیدھی لکیر پر M سے کل فاصلے کے $\frac{1}{3}$ پر نقطہ Q پایا جاتا ہے۔Q سے P تک سمتیہ حاصل کرتے ہوئے ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔ حل: M سے N تک سمتیہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{NM} &= (4-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(5-6)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+(1-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ &= 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

ہے۔ M سے Q تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{QM}$ اور $\boldsymbol{r}_{NM}$ ایک ہی سمت میں ہیں جبکہ $|\boldsymbol{r}_{QM}| = \frac{1}{3}|\boldsymbol{r}_{NM}|$ کے برابر ہے۔یوں

$$\boldsymbol{r}_{QM} = \frac{1}{3}\boldsymbol{r}_{NM} = \frac{1}{3}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

ہو گا۔ M سے P تک سمتیہ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{PM} &= (1-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (2-6)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (2-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ &= -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \end{aligned}$$

ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں $\boldsymbol{r}_{QM} + \boldsymbol{r}_{PQ} = \boldsymbol{r}_{PM}$ لہٰذا

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{PQ} &= \boldsymbol{r}_{PM} - \boldsymbol{r}_{QM} \\ &= (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) - (1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \\ &= -1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{11}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \end{aligned}$$

ہو گا۔ Q سے P تک فاصلہ $\sqrt{1^1 + \left(\frac{11}{3}\right)^2 + 1^2} = 3.93$ ہے۔

مشق 1.2: مثال 1.2 میں دئے نقطوں کو استعمال کرتے ہوئے M سے P تک سمتیہ حاصل کریں۔اسی طرح P سے N تک سمتیہ اور M سے N تک سمتیہ حاصل کریں۔پہلے دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے سر سے دُم جوڑنے کے اصول سے تیسرا سمتیہ دوبارہ حاصل کریں۔

جوابات: $-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$، $-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $-6\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

1.5 میدانی سمتیہ

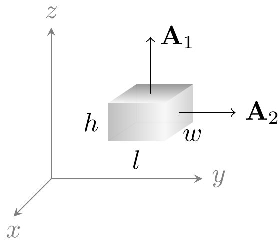
لکھنا ہے

1.6 سمتی رقبہ

کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں۔یوں سطح کے کسی بھی نقطے پر دو آپس میں الٹ سمتوں میں عمود بنائے جا سکتے ہیں۔سیدھی سطح جس کا رقبہ S ہو کے ایک طرف پر اکائی عمود $\boldsymbol{a}_N$ اور دوسری طرف پر اکائی عمود $-\boldsymbol{a}_N$ بنائے جا سکتے ہیں۔اگر ان دو عمود میں سے ایک عمود مثلاً $\boldsymbol{a}_N$ کو سطح کی سمت[12] تصور کیا جائے تب اس سطح کا سمتی رقبہ[13] $S\boldsymbol{a}_N$ ہو گا۔بند سطح کے بیرونی اکائی عمود کو سطح کی سمت تصور کیا جاتا ہے۔شکل 1.12 میں سمتی رقبے $\boldsymbol{A}_1$ اور $\boldsymbol{A}_2$ دکھائے گئے ہیں جہاں بند سطح کے بیرونی عمود کو ہی سطح کی سمت دکھایا گیا ہے۔

[12] عمود سطح کے ساتھ نوے درجہ زاویہ بناتا ہے۔ $\boldsymbol{a}_N$ کے زیر نوشت میں N، لفظ نوے کے پہلے حرف کی آواز کو ظاہر کرتا ہے۔

[13] vector area



$$\mathbf{A}_1 = A_1 \mathbf{a}_{N1} = wl\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{A}_2 = A_2 \mathbf{a}_{N2} = wh\mathbf{a}_y$$

شکل 1.12: سمتی رقبہ

1.7 غیر سمتی ضرب

دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے غیر سمتی ضرب[14] سے مراد $\boldsymbol{A}$ کی مقدار ضربِ $\boldsymbol{B}$ کی مقدار ضربِ سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کا کوسائن ہے۔

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos \theta_{AB} \tag{1.7}$$

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔غیر سمتی ضرب دو سمتیوں کے مابین کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب مقداری ہوتا ہے جس کی وجہ سے اسے مقداری ضرب بھی کہا جاتا ہے۔غیر سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان نقطے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی وجہ سے اسے ضرب نقطہ[15] بھی کہا جاتا ہے۔یوں $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ کو "$\boldsymbol{A}$ نقطہ $\boldsymbol{B}$" پڑھا جاتا ہے۔بالکل سادہ ضرب کی طرح $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ کو $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ بھی لکھا جا سکتا ہے یعنی غیر سمتی ضرب میں متغیرات کی ترتیب اہمیت نہیں رکھتی۔

کارتیسی اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ آپس میں عمودی ہیں لہٰذا ان میں کسی بھی دو سمتیات کے درمیان 90 زاویہ پایا جاتا ہے۔چونکہ $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ان میں کسی بھی دو سمتیوں کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0 \tag{1.8}$$

ایک ہی سمت میں دو سمتیوں کے درمیان صفر زاویہ ہوتا ہے اور $\cos 0 = 1$ کے برابر ہے۔اکائی سمتیہ کا طول بھی ایک کے برابر ہے لہٰذا مساوات 1.7 کے تحت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کا غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = (|\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}|)(|\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}|)(\cos 0) = (1)(1)(1) = 1$$

ہو گا۔بقایا دو کارتیسی اکائی سمتیات کا خود غیر سمتی ضرب بھی ایک کے برابر ہے۔

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 1 \tag{1.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کو کرونیکر ڈیلٹا[16] δ_{ij} کی مدد سے ایک ہی مساوات کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \tag{1.10}$$

جہاں

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases} \tag{1.11}$$

---

[14] scalar product
[15] dot product
[16] یہ لیوپولڈ کرونیکر کے نام سے منسوب ہے۔

کے برابر ہے یعنی $j = i$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت ایک جبکہ $j \neq i$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت صفر کے برابر لی جاتی ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی صورت میں $i = \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ جبکہ $j = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے برابر ہیں۔یوں i اور j برابر نہیں ہیں لہٰذا حاصل جواب صفر کے برابر ہو گا۔اس کے برعکس $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی صورت میں $i = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $j = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہیں لہٰذا $i = j$ ہے اور یوں حاصل جواب ایک کے برابر ہے۔ 294

کارتیسی تین عمودی اکائیوں کی مدد سے سمتیات کا غیر سمتی ضرب نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔یوں اگر $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ دو سمتیات ہوں تب ان کا غیر سمتی ضرب

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\cdot(B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\\
&= A_xB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_xB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_xB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\
&\quad + A_yB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_yB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_yB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\
&\quad + A_zB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_zB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_zB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}
\end{aligned}$$

ہو گا۔مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کا سہارا لیتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.12}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کا خود غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\boldsymbol{A}|^2 \tag{1.13}$$

اس کے طول کے مربع کے برابر ہے۔یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جسے عموماً استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کا طول حاصل کیا جاتا ہے۔ 295

مساوات 1.7 اور مساوات 1.12 کی مدد سے دو سمتیوں کے مابین زاویہ معلوم کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B})}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}\right) \tag{1.14}$$

296

مثال 1.3: شکل 1.11 میں تکون دکھایا گیا ہے جس کے نوک $M(1,6,4)$، $N(4,5,1)$ اور $P(1,2,2)$ ہیں۔M پر زاویہ حاصل کریں۔ 297

حل: مثال 1.2 میں $\boldsymbol{r}_{NM} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{r}_{PM} = 0\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ حاصل کئے گئے۔ $|\boldsymbol{r}_{NM}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{19}$ اور $|\boldsymbol{r}_{PM}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ ہیں جبکہ

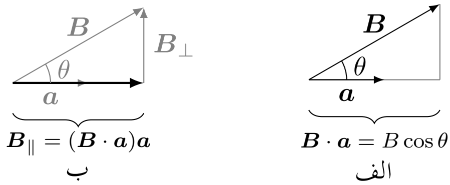
$$\boldsymbol{r}_{NM}\cdot\boldsymbol{r}_{PM} = 0 + 4 + 6 = 10$$

کے برابر ہے۔یوں ان سمتیوں کے مابین زاویہ

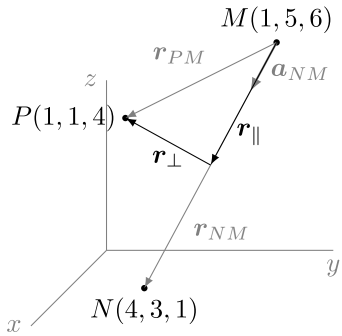
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{19}\sqrt{20}}\right) = 1.0321 \quad \mathrm{rad}$$

یا $59.137°$ ہے۔ 298

299



شکل 1.13: کسی بھی سمت میں سمتیہ کے جزو کا حصول۔



شکل 1.14: متوازی اور عمودی اجزاء۔

شکل 1.13-الف میں سمتیہ $\boldsymbol{B}$ اور اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}$ دکھائے گئے ہیں۔ان کا غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{a}|\cos\theta=B\cos\theta$$

کے برابر ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ یہی $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کے جزو کا طول $B_{\parallel}$[17] ہے۔یوں کسی بھی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کے جزو کا طول حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{B}$ اور اس سمت کی اکائی سمتیہ کا غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔یوں حاصل طول کا اکائی سمتیہ کے ساتھ ضرب یعنی $(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$ سے اکائی سمتیہ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کا سمتی جزو حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.13-ب میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کا سمتی جزو $\boldsymbol{B}_{\parallel}$ دکھایا گیا ہے۔شکل سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{B}$ سے $B_{\parallel}\boldsymbol{a}$ منفی کرنے سے $B_{\perp}$ حاصل ہوتا ہے جو $\boldsymbol{B}$ کا وہ جزو ہے جو $\boldsymbol{a}$ کے عمودی ہے۔

غیر سمتی ضرب کا حاصل جواب دو صورتوں میں صفر کے برابر ہوتا ہے۔پہلی صورت وہ ہے جب دونوں سمتیوں میں سے کم از کم ایک سمتیہ کا طول صفر کے برابر ہو۔دوسری صورت وہ ہے جب دونوں سمتیات آپس میں عمودی ہوں۔ عمودی ہونے کی صورت میں ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہو گا اور $\cos 90=0$ کے برابر ہوتا ہے۔یوں دو سمتیوں کے نقطہ ضرب صفر کے برابر ہونے سے اخذ کیا جاتا ہے کہ یہ آپس میں عمودی ہیں۔

مثال 1.4: شکل 1.14 میں تین نقطے $M(1,5,6)$، $N(4,3,1)$ اور $P(1,1,4)$ دئے گئے ہیں۔M اور N سے گزرتی سیدھی لکیر سے P کا عمودی فاصلہ حاصل کریں۔

حل: M سے N تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{NM}=3\boldsymbol{a}_{\text{x}}-2\boldsymbol{a}_{\text{y}}-5\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہے جس کا طول $|\boldsymbol{r}_{NM}|=\sqrt{38}$ ہے۔یوں اس سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM}=\frac{3\boldsymbol{a}_{\text{x}}-2\boldsymbol{a}_{\text{y}}-5\boldsymbol{a}_{\text{z}}}{\sqrt{38}}$ ہو گا۔اسی طرح M سے P تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{PM}=-4\boldsymbol{a}_{\text{y}}-2\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہے۔$\boldsymbol{a}_{NM}$ کی سمت میں $\boldsymbol{r}_{PM}$ کا طول

$$\begin{aligned}
r_{\parallel}&=\boldsymbol{r}_{PM}\cdot\boldsymbol{a}_{NM}=(-4\boldsymbol{a}_{\text{y}}-2\boldsymbol{a}_{\text{z}})\cdot\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\text{x}}-2\boldsymbol{a}_{\text{y}}-5\boldsymbol{a}_{\text{z}}}{\sqrt{38}}\right)\\
&=\frac{0+8+10}{\sqrt{38}}=\frac{18}{\sqrt{38}}
\end{aligned}$$

[17] $B_{\parallel}$ لکھتے ہوئے زیرنوشت میں دو متوازی لکیریں یہ بتلاتی ہیں کہ $\boldsymbol{B}$ کا یہ وہ حصہ ہے جو $\boldsymbol{a}$ کے متوازی ہے۔اسی طرح عمودی مقدار کو عموماً $\perp$ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہے یوں $\boldsymbol{a}_{NM}$ سمت میں $\boldsymbol{r}_{PM}$ کا سمتی جزو

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} = r_{\parallel}\boldsymbol{a}_{NM} = \frac{18}{\sqrt{38}}\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}}\right) = \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})$$

ہے۔ $\boldsymbol{r}_{PM}$ سے $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ منفی کرنے سے لکیر سے P تک عمودی سمتیہ $\boldsymbol{r}_{\perp}$ حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{\perp} = \boldsymbol{r}_{PM} - \boldsymbol{r}_{\parallel} &= (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) - \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\\ &= \frac{-27\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 58\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{19}\end{aligned}$$

جس کا طول $\frac{\sqrt{27^2+58^2+7^2}}{19} = 3.3873$ ہے۔ یوں P کا لکیر سے عمودی فاصلہ 3.3873 ہے۔

$\boldsymbol{r}_{\parallel}$ اور $\boldsymbol{r}_{\perp}$ آپس میں عمودی ہیں لہٰذا ان کا نقطہ ضرب

$$\boldsymbol{r}_{\parallel}\cdot\boldsymbol{r}_{\perp} = \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\cdot\left(\frac{-27\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 58\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{19}\right) = \frac{18}{722}(-81 + 116 - 35) = 0$$

صفر کے برابر ہے۔

شکل 1.14 میں اگر M پر $\boldsymbol{r}_{NM}$ کی دُم رکھی جائے تب $\boldsymbol{r}_{NM}$ کی نوک N کا مقام تعین کرتا ہے۔ عموماً کسی بھی نقطے کا مقام محدد کے مرکز $(0,0,0)$ کی نسبت سے طے کیا جاتا ہے۔ ایسا سمتیہ جس کی دُم مرکز پر رکھتے ہوئے اس کی نوک نقطے کا مقام طے کرے **مقام تعین کنندہ** سمتیہ[18] کہلاتا ہے۔ اگر تعین کنندہ سمتیہ کو مرکز سے ہٹایا جائے تب ظاہر ہے اس کی نوک اصل مقام طے کرنے سے قاصر ہو گی۔

مثال 1.5: شکل 1.14 میں M سے شروع ہوتے اور N جانب بڑھتی سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطے کا مقام تعین کرتے تعین کنندہ سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز $(0,0,0)$ سے نقطہ M تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_M = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے جبکہ M سے N جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM}$ گزشتہ مثال میں حاصل کیا گیا۔ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM}$ کی سمت میں M سے s فاصلے پر نقطہ Q تک کا سمتیہ $s\boldsymbol{a}_{NM}$ ہے۔ یوں مرکز سے Q تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_M + s\boldsymbol{a}_{NM}$ ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}_Q = (1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) + s\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}}\right)$$

اس مساوات میں s متغیرہ ہے جسے تبدیل کرتے ہوئے سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطہ Q تک پہنچا جا سکتا ہے۔

مثال 1.6: $z = z_0$ پر $1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے عمودی سیدھی سطح کی مساوات حاصل کریں جہاں z_0 مستقل ہے۔

[18] displacement vector

حل: نقطہ $N_1(0,0,z_0)$ سے کسی بھی نقطہ $N_2(x,y,z)$ تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے۔ سطح پر کسی بھی سمتیہ اور سطح کے عمودی سمتیہ آپس میں نوے درجے زاویہ پر پائے جاتے ہیں للٰہذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔یوں اگر N_2 اسی عمودی سطح پر پایا جائے تب

$$1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \left[x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right] = z - z_0 = 0$$

ہو گا جس سے اس سطح کی مساوات $z = z_0$ حاصل ہوتی ہے۔

اس قیمت کو $\boldsymbol{r}_{21}$ میں پُر کرتے ہوئے $\boldsymbol{r}_{21} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل ہوتا ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں۔چونکہ مرکز سے N_1 کا تعین کنندہ سمتیہ $\boldsymbol{r}_{10} = z_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے للٰہذا $z = z_0$ سطح پر کسی بھی نقطہ N_2 کا تعین کنندہ سمتیہ یعنی سطح کی سمتی مساوات $\boldsymbol{r}_{20} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہو گی۔

مشق 1.3: مرکز سے $(2,1,3)$ تک کی سمتیہ ایک سیدھی سطح کی عمودی سمتیہ ہے۔اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $2x + y + 3z = 14$

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب

دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے سمتی ضرب[19] کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جس کا طول $\boldsymbol{A}$ کی مقدار ضربِ $\boldsymbol{B}$ کی مقدار ضربِ سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کے سائن کے برابر ہے۔حاصل سمتیہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سمتیات کی عمودی سمت میں ہوتا ہے جسے اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{a}_N$ سے ظاہر کیا جائیگا۔

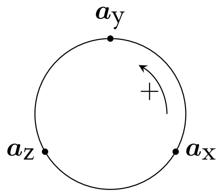
$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta_{AB}\boldsymbol{a}_N \tag{1.15}$$

جس سیدھی سطح پر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں پائے جائیں، $\boldsymbol{a}_N$ اس سطح کے دو عمودی سمتیات میں سے ایک ہے۔$\boldsymbol{a}_N$ کو دائیں ہاتھ کے قانون[20] سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

دائیں ہاتھ کی ہتھیلی سیدھی اور انگوٹھے کو بقایا چار انگلیوں کے عمود میں رکھتے ہوئے پہلی انگلی کو $\boldsymbol{A}$ اور دوسری انگلی کو $\boldsymbol{B}$ کی سمت میں رکھیں۔اس صورت میں انگوٹھا $\boldsymbol{a}_N$ کی سمت میں ہو گا۔

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان صلیبی نشان $\times$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی وجہ سے اسے صلیبی ضرب[21] بھی کہا جاتا ہے اور

[19] vector product
[20] right hand rule
[21] cross product



شکل 1.15: صلیبی ضرب کا حصول۔

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ کو "$\boldsymbol{A}$ صلیب $\boldsymbol{B}$" پڑھا جاتا ہے۔ سمتی ضرب میں سمتیوں کی ترتیب نہایت اہم ہے اور انہیں الٹانے سے حاصل جواب کی سمت الٹی ہو جاتی ہے۔

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \tag{1.16}$$

اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\sin 90 = 1$ کے برابر ہے جبکہ دائیں ہاتھ کے قانون سے ان کے صلیبی ضرب کی سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ حاصل ہوتی ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 1.16 کے تحت یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھے جا سکتے ہیں۔ دو متوازی سمتیوں کے درمیان صفر درجے کا زاویہ ہوتا ہے اور $\sin 0 = 0$ کے برابر ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = 0$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 0$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0$ کے برابر ہیں۔ ان تمام جوابات کو ایک جگہ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \quad &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \quad &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \\ &\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = 0 \quad &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 0 \quad &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

یہی جوابات شکل 1.15 کی مدد سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ اس شکل میں گھڑی کی الٹ سمت مثبت سمت ہے۔ یوں اگر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل کرنا ہو تو شکل میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سے شروع ہو کر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی جانب کم راستے پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ حاصل ہوتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ چونکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانے کی خاطر مثبت راستہ اختیار کیا گیا لہٰذا جواب مثبت یعنی $+\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہو گا۔ اس کے برعکس $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب کم راستے پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ حاصل ہوتا ہے البتہ یہ راستہ گھڑی کے الٹ سمت یعنی منفی سمت میں ہے لہٰذا جواب $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ہو گا۔

مساوات 1.17 کی مدد سے $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی صلیبی ضرب

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \times (B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \\ &= A_xB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_xB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_xB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ &\quad + A_yB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_yB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_yB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ &\quad + A_zB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_zB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_zB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \end{aligned}$$

کو

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.18}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس جواب کو قالب کے حتمی قیمت کی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.19}$$

یوں اگر $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہوں تب

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\
&= [(-3)(-4) - (1)(5)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - [(2)(-4) - (1)(6)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + [(2)(5) - (-3)(6)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 14\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 28\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

ہو گا۔ 338

مثال 1.7: $N_1(2,3,1)$، $N_2(1,6,5)$ اور $N_3(-2,-3,2)$ سیدھی سطح پر پائے جاتے ہیں۔اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔ 339

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{21} &= (1-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (6-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (5-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{r}_{31} &= (-2-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (-3-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (2-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

کے سمتی ضرب سے ان کا عمودی سمتیہ حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_N &= (-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \times (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \\
&= 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 16\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 24\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\
&= 27\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 15\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

سطح پر دئے گئے تین نقطوں سے سطح پر کسی بھی نقطہ $N_4(x,y,z)$ تک کا سمتیہ اس عمودی سمتیہ کے نوے درجے زاویہ پر ہو گا اور یوں ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔N_1 سے N_4 تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{41} = (x-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے استعمال سے

$$\boldsymbol{r}_{41} \cdot \boldsymbol{r}_N = [(x-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}] \cdot (27\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 15\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) = 0$$

لکھ کر

$$27(x-2) - 15(y-3) + 18(z-1) = 0$$

سے

$$27x - 15y + 18z = 27$$

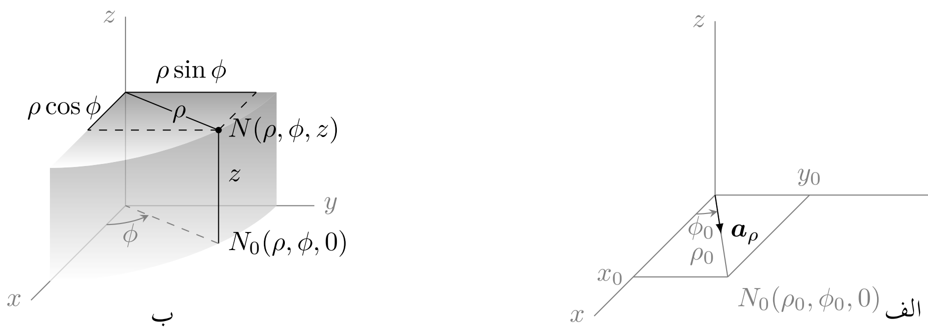
سیدھی سطح کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ایسی مساوات میں x، y اور z کے مخفف عمودی سمتیہ میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے مخفف 27، -15 اور 18 ہوتے ہیں۔ 341

سطح کی مساوات سے $z = \frac{9-9x+5y}{6}$ لکھا جا سکتا ہے۔ سطح پر N_4 کی تعین کنندہ مساوات $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ میں z کی قیمت پُر کرتے ہوئے سطح کی سمتی مساوات

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{9-9x+5y}{6}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں جبکہ z کو بطور تابع متغیرہ لکھا گیا ہے۔ 342

343



شکل 1.16: نلکی محدد

مشق 1.4: $\boldsymbol{A} = 1\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ اور $\boldsymbol{B} = 5\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کی صورت میں $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$، $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{a}_B \times \boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \times (\boldsymbol{a}_{\text{y}} \times \boldsymbol{B})$ حاصل کریں۔

خلاء میں کسی بھی نقطے کا مقام کارتیسی محدد کے علاوہ دیگر طرز کے محدد سے بھی تعین کیا جا سکتا ہے۔ماہرین طبیعیات تقریباً ایک درجن اقسام کے محددی نظام استعمال کرتے ہیں۔ہم اس کتاب میں کارتیسی نظام کے علاوہ دو مزید اقسام کے محددی نظام استعمال کریں گے۔آئیں انہیں پر غور کریں۔

1.9 گول نلکی محدد

کارتیسی نظام میں کسی بھی نقطے کا مقام مرکز سے x، y اور z سمتوں میں فاصلوں سے طے کیا جاتا ہے۔آئیں اب ایسا نظام دیکھیں جس میں ایک عدد زاویہ اور دو عدد فاصلے استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے کا مقام طے ہو۔

شکل 1.16-الف میں $z = 0$ سطح پر نقطہ N_0 دکھایا گیا ہے جسے کارتیسی محدد میں $N_0(x_0, y_0, 0)$ لکھا جائے گا۔اگر مرکز سے N_0 تک سیدھی لکیر کی لمبائی ρ_0 اور x محدد سے اس لکیر کا زاویہ ϕ_0 ہو تب اسی نقطے کو گول نلکی محدد[22] کے نظام میں $N_0(\rho_0, \phi_0, 0)$ لکھا جاتا ہے۔اس کتاب میں گول نلکی محدد کا نام چھوٹا کر کے اسے نلکی محدد پکارا جائے گا۔اگر $z = 0$ سطح پر مرکز سے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ ہو تب مرکز سے نقطے تک سمتیہ کو

$$\boldsymbol{\rho} = \rho_0 \boldsymbol{a}_\rho \qquad (\phi = \phi_0, \quad z = 0) \tag{1.20}$$

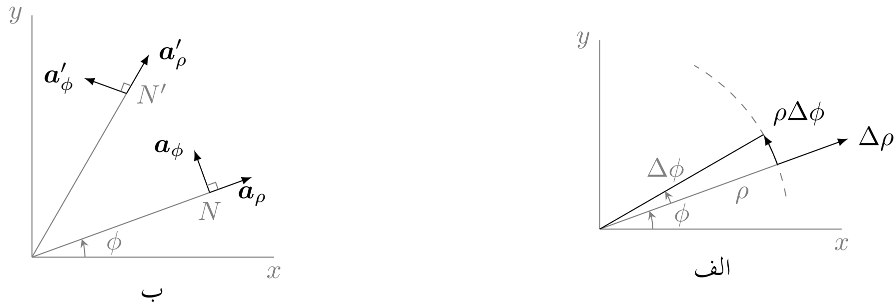
لکھا جا سکتا ہے۔نلکی اور کارتیسی نظام میں z محدد یکساں ہیں۔

شکل 1.16-الف یا شکل-ب سے کارتیسی اور نلکی محدد کے تعلق اخذ کئے جا سکتے ہیں۔یوں نلکی محدد کے متغیرات (ρ, ϕ, z) سے کارتیسی متغیرات (x, y, z) یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \tag{1.21}$$

---

[22] cylindrical coordinate system



شکل 1.17: نلکی محدد میں متغیرات کے تبدیلی سے فاصلے کا حصول اور اکائی سمتیات۔

اسی طرح (x, y, z) سے (ρ, ϕ, z) یوں حاصل کئے جاتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (\rho \geq 0) \\
\phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \\
z &= z
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

مندرجہ بالا مساوات میں رداس کی صرف مثبت قیمت لی گئی۔ہم رداس کی قیمت مثبت ہی لیتے ہیں۔

شکل 1.17-الف میں ϕ زاویہ پر ρ رداس کا ہلکی سیاہی میں دکھایا سمتیہ نقطہ N ہے۔اس شکل میں ϕ اور z تبدیل کئے بغیر ρ کو $\Delta\rho$ بڑھتا دکھایا گیا ہے۔اس صورت میں سمتیہ کی نوک $\Delta\rho$ فاصلہ طے کرتی ہے۔نقطہ N سے $\Delta\rho$ کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے $\boldsymbol{a}_\rho$ لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.17-الف میں ρ اور z تبدیل کئے بغیر ϕ کو $\Delta\phi$ بڑھا کر اسی سمتیہ کو گاڑھی سیاہی میں دوبارہ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سمتیہ کی نوک نے ρ رداس کے گول دائرے پر حرکت کرتے ہوئے $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کیا۔یوں اگر زاویہ کو 0 تا 2π ریڈیئن تبدیل کیا جائے تو سمتیہ کی نوک گول دائرے پر ایک مکمل چکر کاٹے گی۔جیسے جیسے $\Delta\phi$ کو کم سے کم کیا جائے ویسے ویسے $\rho\Delta\phi$ گول دائرے کے مماس کی صورت اختیار کرے گی حتیٰ کہ $\mathrm{d}\phi$ کی صورت میں $\rho\,\mathrm{d}\phi$ گول دائرے کا مماس ہو گا۔نقطہ N پر بڑھتے ϕ جانب مماس کی سمت میں اکائی سمتیہ کو $\boldsymbol{a}_\phi$ لکھا جاتا ہے۔اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح اگر نقطہ N پر صرف z کو Δz تبدیل کیا جائے تب سمتیہ کی نوک Δz فاصلہ طے کرے گی۔Δz کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی تیسری اور آخری بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔نلکی محدد کے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ مل کر دائیں ہاتھ کا عمودی نظام دیتے ہیں۔نقطہ (ρ_1, ϕ_1, z_1) پر نلکی محدد کے اکائی سمتیات کو شکل 1.18 میں دکھایا گیا ہے۔$\boldsymbol{a}_\rho$ گول سطح $\rho = \rho_1$ کے عمودی ہے۔یہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_\phi$ سیدھی سطح $\phi = \phi_1$ کے عمودی ہے۔یہ $z = z_1$ سطح پر پایا جاتا ہے اور $\rho = \rho_1$ نلکی سطح کا مماس ہے۔$\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اکائی سمتیہ $z = z_1$ سطح کے عمودی ہے۔یہ $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔

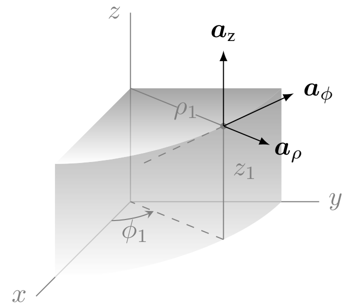
دائیں ہاتھ کے عمودی نظام میں سمتی ضرب کا حاصل جواب صفحہ 14 پر دئے گئے دائیں ہاتھ کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔یوں

$$
\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\phi = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \boldsymbol{a}_\rho, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \times \boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_\phi
\tag{1.23}
$$

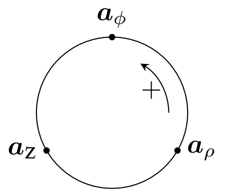
لکھا جا سکتا ہے۔یہی جوابات شکل 1.19 سے بھی اخذ کئے جا سکتے ہیں۔

کسی سمتیہ کا خود سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$
\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\rho = 0, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_\phi = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 0
\tag{1.24}
$$



شکل 1.18: نلکی محدد کے اکائی سمتیات۔



شکل 1.19: صلیبی ضرب کی حاصل اکائی سمتیہ۔

لکھا جا سکتا ہے جبکہ کسی بھی اکائی سمتیہ کا خود غیر سمتی ضرب ایک کے برابر ہوتا ہے لٰہذا

$$\boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 1 \tag{1.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح کسی بھی دو عمودی سمتیات کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} = 0 \tag{1.26}$$

غیر سمتی ضرب کو کرونیکر ڈیلٹا کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \tag{1.27}$$

جہاں

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases} \tag{1.28}$$

کے برابر ہے۔

آپ دیکھتے ہیں کہ کسی بھی نقطہ $N(\rho,\phi,z)$ پر اکائی سمتیات حاصل کرنے کی خاطر محدد کے متغیرات ρ، ϕ اور z کو باری باری انتہائی کم بڑھایا جاتا ہے۔جس سمت میں نقطہ حرکت کرے، اسی سمت میں اکائی سمتیہ ہو گی۔شکل 1.17-ب میں دو مختلف نقاط N اور N' پر نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات کی سمت کا دارومدار اس نقطے پر ہے جہاں انہیں حاصل کیا جائے۔آپ جانتے ہیں کہ کارتیسی نظام میں نقطے کا مقام تبدیل کرنے سے کارتیسی اکائی سمتیات تبدیل نہیں ہوتے۔یوں نلکی محدد کے اکائی سمتیات اٹل نہیں ہیں۔یہ ایک انتہائی اہم حقیقت ہے جو تکمل لیتے وقت پیچیدگیاں پیدا کرتا ہے۔تکمل لیتے وقت کارتیسی اکائی سمتیات اٹل ہونے کی بنا پر تکمل کے باہر لے جائے جا سکتے ہیں جبکہ نلکی محدد کے $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اکائی سمتیات کو تکمل کے باہر نہیں لے جایا جا سکتا۔یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ N پر حاصل کئے گئے $\boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ آپس میں عمودی ہوں گے جبکہ کسی اور نقطہ N' پر حاصل کئے گئے $\boldsymbol{a}'_{\rho}$، $\boldsymbol{a}'_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ آپس میں عمودی ہوں گے۔

شکل 1.20: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

جدول 1.1: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$	
0	$\sin\phi$	$\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_{\rho}$
0	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	$\boldsymbol{a}_{\phi}$
1	0	0	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب

شکل 1.20-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے مابین زاویہ ϕ ہے جبکہ اکائی سمتیات کی لمبائی ایک ہوتی ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_{\rho}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}=(1)(1)(\cos\phi)=\cos\phi \tag{1.29}$$

ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے مابین زاویہ $(90^\circ-\phi)$ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_{\rho}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}=(1)(1)[\cos(90^\circ-\phi)]=\sin\phi \tag{1.30}$$

کے برابر ہے۔اس مساوات میں $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ کو استعمال کرتے ہوئے $\cos(90^\circ-\phi)=\sin\phi$ لکھا گیا ہے۔ شکل 1.20-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\phi}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے مابین زاویہ $(90^\circ+\phi)$ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_{\phi}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}=(1)(1)[\cos(90^\circ+\phi)]=-\sin\phi \tag{1.31}$$

ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے مابین زاویہ ϕ ہے لہٰذا

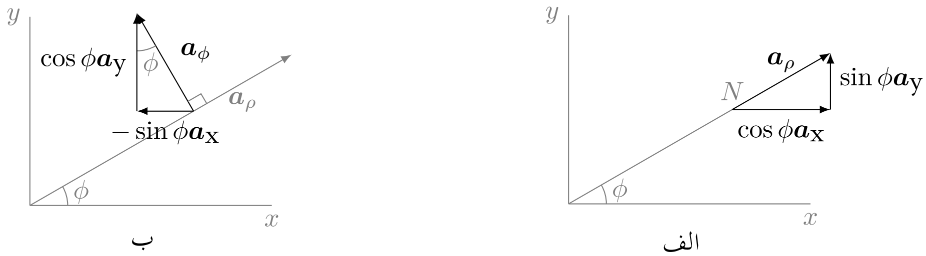
$$\boldsymbol{a}_{\phi}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}=(1)(1)(\cos\phi)=\cos\phi \tag{1.32}$$

کے برابر ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہے۔اس کی وجہ ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے۔ان تمام غیر سمتی ضرب کو جدول 1.1 میں یکجا کیا گیا ہے۔

1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق

شکل 1.21-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدد میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ کی لمبائی ایک کے برابر ہے۔یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\rho}&=\cos\phi\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\sin\phi\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\&=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\end{aligned} \tag{1.33}$$



شکل 1.21: $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

شکل 1.22: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدد کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔ شکل 1.21-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدد میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_\phi &= -\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\\ &= -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\end{aligned} \tag{1.34}$$

381 جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدد کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔

شکل 1.22-الف میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ جس نقطے پر ایسا درکار ہو، اس نقطے پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کی دُم رکھیں۔ مرکز سے نقطے تک نقطہ دار سیدھی لکیر کھینچتے ہوئے اسے مزید آگے بڑھائیں۔ اس نقطے پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اسی لکیر کی سمت میں ہو گا جبکہ $\boldsymbol{a}_\phi$ لکیر کے ساتھ نوے درجے کا زاویہ بنائے گا۔ شکل میں $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود بنائیں۔ صاف ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔ ان میں سے ایک سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں اور دوسرا سمتیہ $\boldsymbol{a}_\phi$ کی الٹ جانب کو ہو گا۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = \cos\phi\boldsymbol{a}_\rho - \sin\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.35}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.22-ب میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ یہاں نقطہ پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ کی دُم رکھتے ہوئے اس کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود کھینچا گیا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} = \sin\phi\boldsymbol{a}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.36}$$

382 لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں مساوات 1.33 تا مساوات 1.36 کو جدول 1.1 کی مدد سے حاصل کریں۔ کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کو کارتیسی یا نلکی محدد میں لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ &= A_\rho\boldsymbol{a}_\rho + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned} \tag{1.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان میں پہلی مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$، $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\text{x}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\text{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{x}} + A_y \boldsymbol{a}_{\text{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\text{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{z}} = A_x \\
\boldsymbol{a}_{\text{y}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\text{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{x}} + A_y \boldsymbol{a}_{\text{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\text{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{z}} = A_y \\
\boldsymbol{a}_{\text{z}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\text{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{x}} + A_y \boldsymbol{a}_{\text{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\text{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{z}} = A_z
\end{aligned} \tag{1.38}$$

حاصل ہوتے ہیں۔$\boldsymbol{A}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر A_x، A_y اور A_z درکار ہوتے ہیں جنہیں مندرجہ بالا مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح مساوات 1.37 کے نچلے حصے کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{A} &= A_\rho \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\rho + A_\phi \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\phi + A_z \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\text{z}} = A_\rho \\
\boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{A} &= A_\rho \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\rho + A_\phi \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\phi + A_z \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_{\text{z}} = A_\phi \\
\boldsymbol{a}_{\text{z}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_\rho \boldsymbol{a}_{\text{z}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho + A_\phi \boldsymbol{a}_{\text{z}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi + A_z \boldsymbol{a}_{\text{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{z}} = A_z
\end{aligned} \tag{1.39}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{A}$ کو نلکی نظام میں لکھنے کی خاطر A_ρ، A_ϕ اور A_z کو مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ 383

آئیں $\boldsymbol{a}_\rho$ کو کارتیسی نظام میں لکھیں۔یوں $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_\rho$ کو کارتیسی نظام میں لکھنا مطلوب ہے۔مساوات 1.38 کے مطابق A_x حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{x}}$ لینا ہو گا۔جدول 1.1 کے استعمال سے

$$A_x = \boldsymbol{a}_{\text{x}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\text{x}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح جدول کو استعمال کرتے ہوئے

$$A_y = \boldsymbol{a}_{\text{y}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\text{y}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \sin\phi$$

اور

$$A_z = \boldsymbol{a}_{\text{z}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\text{z}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\text{x}} + A_y \boldsymbol{a}_{\text{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\text{z}}$ لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi \boldsymbol{a}_{\text{x}} + \sin\phi \boldsymbol{a}_{\text{y}}$$

لکھا جائے گا۔یہی جواب مساوات 1.33 میں بھی حاصل کیا گیا تھا۔ 384

$\boldsymbol{a}_\phi$ کو بھی اسی طرح کارتیسی نظام میں لکھا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے اس سمتیہ کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$، $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
A_x &= \boldsymbol{a}_{\text{x}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = -\sin\phi \\
A_y &= \boldsymbol{a}_{\text{y}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = \cos\phi \\
A_z &= \boldsymbol{a}_{\text{z}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0
\end{aligned}$$

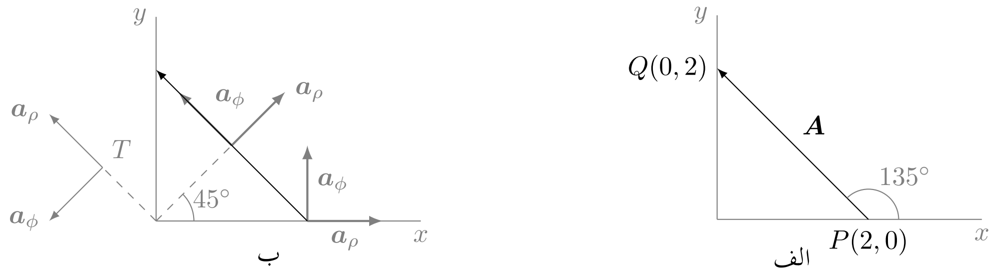
یوں

$$\boldsymbol{a}_\phi = A_x \boldsymbol{a}_{\text{x}} + A_y \boldsymbol{a}_{\text{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\text{z}} = -\sin\phi \boldsymbol{a}_{\text{x}} + \cos\phi \boldsymbol{a}_{\text{y}}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہی جواب مساوات 1.34 بھی دیتا ہے۔ 385

آپ سے گزارش ہے کہ جدول 1.34 کو یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔اپنے آپ میں یہ صلاحیت پیدا کریں کہ ان جوابات کو آپ جلد اخذ کر سکیں۔ 386

387



شکل 1.23: کارتیسی اور نلکی محدد میں سمتیہ۔

---

388 مشق 1.5: $\boldsymbol{a}_\mathrm{X}$، $\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ کو جدول 1.1 کی مدد سے نلکی محدد میں لکھیں۔

جوابات:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\mathrm{X} &= \cos\phi\boldsymbol{a}_\rho - \sin\phi\boldsymbol{a}_\phi \\
\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} &= \sin\phi\boldsymbol{a}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{a}_\phi \\
\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} &= \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}
\end{aligned}
$$

389

شکل 1.23 میں $P(2,0)$ سے $Q(0,2)$ تک سمتیہ $\boldsymbol{A}$ دکھایا گیا ہے۔کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{Y} \tag{1.40}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس سمتیہ کی حتمی قیمت

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} = \sqrt{(-2\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{Y})\cdot(-2\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{Y})} = \sqrt{8}$$

ہے۔آئیں اسی سمتیہ کو نلکی محدد میں لکھیں۔ایسا کرنے کی خاطر A_ρ اور A_ϕ درکار ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{A}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
A_\rho &= \boldsymbol{a}_\rho\cdot(-2\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}) = -2\cos\phi + 2\sin\phi \\
A_\phi &= \boldsymbol{a}_\phi\cdot(-2\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}) = 2\sin\phi + 2\cos\phi
\end{aligned}
$$

یوں

$$\boldsymbol{A} = 2(-\cos\phi + \sin\phi)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin\phi + \cos\phi)\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ اس کی حتمی قیمت کیا حاصل ہوتی ہے۔اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\rho = 1$، $\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 1$ اور $\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 0$ استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} \\
&= \sqrt{2^2(-\cos\phi + \sin\phi)^2 + 2^2(\sin\phi + \cos\phi)^2} \\
&= \sqrt{4(\cos^2\phi + \sin^2\phi - 2\cos\phi\sin\phi) + 4(\cos^2\phi + \sin^2\phi + 2\cos\phi\sin\phi)} \\
&= \sqrt{8(\cos^2\phi + \sin^2\phi)} \\
&= \sqrt{8}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یقیناً سمتیہ کی حتمی قیمت محدد کے نظام پر منحصر نہیں۔

مساوات 1.40 اور مساوات 1.41 ایک ہی سمتیہ کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔یہاں کارتیسی نظام کا استعمال نہایت آسان ثابت ہوا۔آگے چل کر آپ دیکھیں گے کہ کہیں مسئلوں میں نلکی محدد کا استعمال زیادہ آسان ہو گا۔آئیں مساوات 1.40 پر مزید غور کریں۔اس مساوات میں اکائی سمتیات از خود اٹل نہیں ہیں۔ان کی سمتوں کا دارومدار زاویہ ϕ پر ہے۔شکل 1.23-ب میں $\phi=0^\circ$، $\phi=45^\circ$ اور $\phi=135^\circ$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھائے گئے ہیں۔نقطہ P یعنی $\phi=0^\circ$ پر مساوات 1.41

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\phi=0^\circ} &= 2(-\cos 0^\circ+\sin 0^\circ)\boldsymbol{a}_\rho+2(\sin 0^\circ+\cos 0^\circ)\boldsymbol{a}_\phi\\
&= -2\boldsymbol{a}_\rho+2\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}
$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi=0^\circ$ پر $\boldsymbol{A}$ کو دو عدد سمتیات کے مجموعہ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے جن میں پہلی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کے الٹ سمت میں ہے اور اس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ دوسری سمتیہ کی مقدار دو اور اس کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت میں ہی ہے۔شکل 1.23-ب میں نقطہ P پر $\boldsymbol{A}$ کی سمت واقع بڑھتی $\boldsymbol{a}_\phi$ اور گھٹتی $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں ہے۔یاد رہے کہ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کو $\phi=0^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔$\phi=0^\circ$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ برابر ہوتے ہیں اور اسی طرح $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ برابر ہوتے ہیں۔یہی وجہ ہے کہ مساوات 1.40 میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\phi$ پُر کرنے سے مندرجہ بالا مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$\phi=45^\circ$ پر مساوات 1.41

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\phi=45^\circ} &= 2(-\cos 45^\circ+\sin 45^\circ)\boldsymbol{a}_\rho+2(\sin 45^\circ+\cos 45^\circ)\boldsymbol{a}_\phi\\
&= 2(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\rho+2(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\phi\\
&= \sqrt{8}\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}
$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi=45^\circ$ پر $\boldsymbol{A}$ صرف اور صرف $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت میں ہے اور اس کی لمبائی $\sqrt{8}$ ہے۔شکل 1.23-ب میں یہ حقیقت واضح ہے کہ $\phi=45^\circ$ پر $\boldsymbol{A}$ کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ ہی ہے۔یاد رہے کہ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کو $\phi=45^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔شکل میں اکائی سمتیات کو عین $\boldsymbol{A}$ کے اوپر کھینچا گیا ہے تاکہ سمتیات کی سمتوں کا موازنہ آسانی سے کیا جا سکے۔

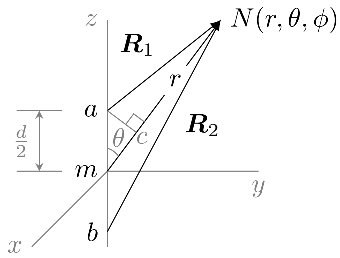
آپ نے دیکھا کہ نلکی محدد میں سمتیہ کی مساوات کا دارومدار اس نقطے پر ہے جس نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کئے جائیں۔آئیں دیکھیں کہ $\phi=135^\circ$ پر پائے جانے والے نقطہ T کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کیسا لکھا جائے گا۔مساوات 1.41 میں $\phi=135^\circ$ پُر کرنے سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\phi=135^\circ} &= 2(-\cos 135^\circ+\sin 135^\circ)\boldsymbol{a}_\rho+2(\sin 135^\circ+\cos 135^\circ)\boldsymbol{a}_\phi\\
&= 2(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\rho+2(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\phi\\
&= \sqrt{8}\boldsymbol{a}_\rho
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi=135^\circ$ کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کو $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں $\sqrt{8}$ لمبائی کا سمتیہ لکھا جا سکتا ہے۔شکل سے یہ حقیقت واضح ہے۔

مثال 1.8: شکل 1.24 میں z محدد پر نقطہ $a(0,0,\frac{d}{2})$ پر مثبت چارج $+Q$ اور نقطہ $b(0,0,-\frac{d}{2})$ پر منفی چارج $-Q$ پائے جاتے ہیں۔ایسے دو برابر لیکن الٹ علامت کے دو قریب قریب پائے جانے والے چارجوں کے جوڑی کو جفت قطب[23] کہتے ہیں۔دکھائے گئے سمتی فاصلوں $\boldsymbol{R}_1$ اور $\boldsymbol{R}_2$ کو کروی محدد میں لکھیں۔

[23] dipole



شکل 1.24: جفت قطب کے چارجوں سے دور نقطے تک فاصلے۔

حل: m سے N تک فاصلہ r ہے اور اس سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔نقطہ a سے r پر عمودی لکیر لگائی گئی ہے جو اسے c پر ملتی ہے۔یوں ac کی سمت کروی محدد کے اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ کی سمت میں ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے $mc = \frac{d}{2}\cos\theta$ اور $ac = \frac{d}{2}\sin\theta$ لکھے جا سکتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{R}_1$ کو ہم a سے c تک سمتیہ $\frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$ اور c سے N تک سمتیہ $(r-\frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کے مجموعے کی شکل میں

$$\boldsymbol{R}_1 = \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta + (r-\frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{1.42}$$

لکھ سکتے ہیں۔ہم اسی طرح شکل 1.24 میں N سے m تک لکیر کو m سے آگے بڑھا کر b سے اس پر عمودی لکیر کھینچ کر شکل کو دیکھتے ہوئے $\boldsymbol{R}_2$ کی مساوات بھی لکھ سکتے ہیں البتہ ایسا کرنے کی بجائے آئیں $\boldsymbol{R}_2$ کی مساوات تحلیلی طریقے سے حاصل کریں۔شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{R}_2 = \frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور کروی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ استعمال کئے گئے۔کروی محدد میں کسی بھی لکیر کی طرح

$$\boldsymbol{R}_2 = A_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + A_\theta\boldsymbol{a}_\theta + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi$$

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں $A_r = \boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سے حاصل کریں۔

$$A_r = \left(\frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right)\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{d}{2}\cos\theta + r$$

اسی طرح $A_\theta = \boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{a}_\theta$ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$A_\theta = \left(\frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right)\cdot\boldsymbol{a}_\theta = -\frac{d}{2}\sin\theta$$

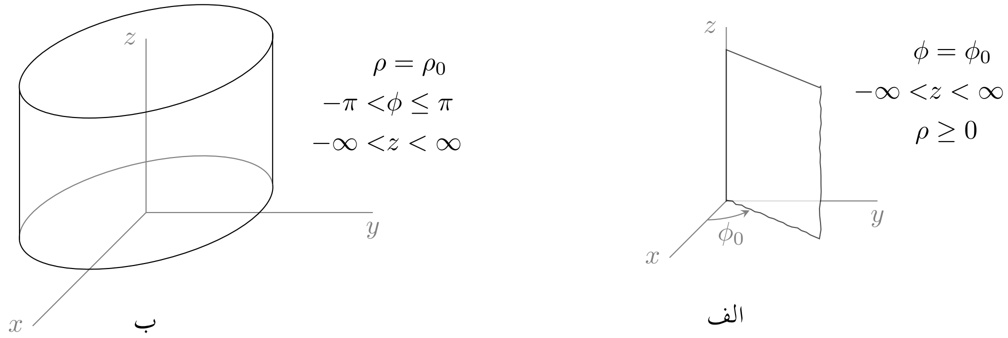
اسی طرح $A_\phi = \boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{a}_\phi$ لکھتے ہوئے $A_\phi = 0$ حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{R}_2 = \left(\frac{d}{2}\cos\theta + r\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta \tag{1.43}$$

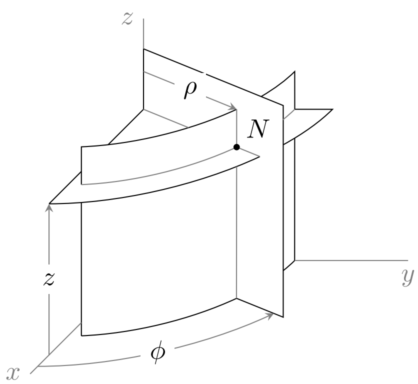
لکھا جا سکتا ہے۔

1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں

شکل 1.25-الف میں ϕ تبدیل کئے بغیر ρ اور z کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے $\phi = \phi_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا ہے۔یہ سطح نلکی شکل رکھتی ہے جس کا اوپر والا منہ اور نچلا منہ کھلے ہیں یعنی ان پر ڈھکن نہیں۔شکل-ب میں ρ تبدیل کئے بغیر ϕ اور z کو تبدیل کرتے ہوئے $\rho = \rho_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا



شکل 1.25: $\phi = \phi_0$ اور $\rho = \rho_0$ سطحیں۔



شکل 1.26: نلکی محدد کے تین سطحیں۔

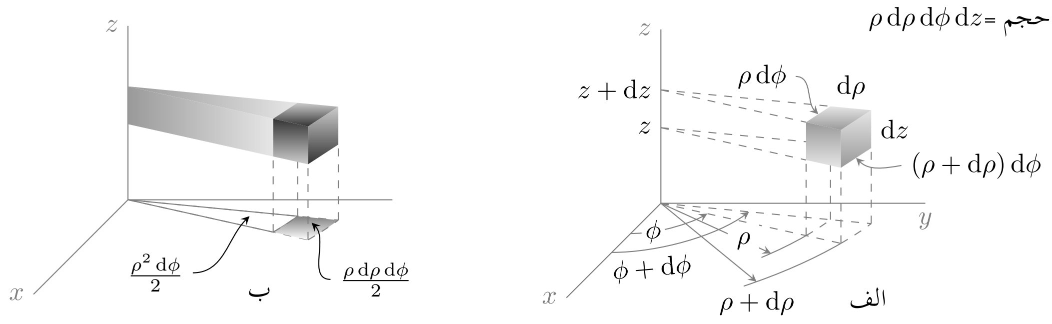
ہے۔ان دونوں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے ان اشکال میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-الف میں ρ کی قیمت صرف مثبت جبکہ z کی قیمت مثبت یا منفی ممکن ہے۔شکل-ب میں زاویہ کل 2π ریڈیئن تبدیل ہو سکتا ہے۔یوں زاویے کا مثبت حد π ریڈیئن یعنی 180 درجہ ہے جبکہ اس کا منفی[24] حد $-\pi$ یعنی -180 درجے ہے۔ نلکی محدد اور کارتیسی نظام دونوں میں $z = z_0$ سطح یکساں بنتی ہے۔

جیسے شکل 1.26 میں دکھایا گیا ہے، $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحیں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔اسی طرح $\rho = \rho_1$ اور $z = z_1$ سطحیں ایک گول دائرے پر ملتے ہیں جبکہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں $\boldsymbol{a}_{\rho}$ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔$\rho = \rho_1$، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں صرف اور صرف ایک ہی نقطہ N پر اکٹھے ملتے ہیں۔ نلکی محدد میں کسی بھی نقطے کا مقام اسی طرح تین سطحوں کے متقاطع نقطہ سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ $(0, 0, z)$ تک پہنچنے کی خاطر ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔

کسی بھی نقطہ $N(\rho_1, \phi_1, z_1)$ پر $\rho = \rho_1$، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں بنانے کے بعد اگر نلکی محدد کے متغیرات کو $\mathrm{d}\rho$، $\mathrm{d}\phi$ اور $\mathrm{d}z$ بڑھا کر مزید تین سطحیں کھینچے جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر منحرف مکعب کو گھیریں گے جیسے شکل 1.27-الف میں دکھایا گیا ہے۔رداسی سمت میں اس منحرف مکعب کے اطراف کی لمبائی $\mathrm{d}\rho$ جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت کے اطراف کی لمبائی $\mathrm{d}z$ ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ سمت میں z محدد کے قریبی گول طرف کی لمبائی $\rho \, \mathrm{d}\phi$ جبکہ محدد سے دور طرف کی گول لمبائی $(\rho + \mathrm{d}\rho) \, \mathrm{d}\phi$ ہے۔جیسے جیسے اس منحرف مکعب کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے یہ ایک درست مکعب کی صورت اختیار کرتا ہے لہٰذا نہایت چھوٹے حجم کو مکعب تصور کرتے ہوئے اس کا حجم $\rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z$ لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.27-ب میں چھوٹے منحرف مکعب کو رداسی سمت میں z محدد تک بڑھا کر پچر یا فانہ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر اس کا عمودی سایہ بھی دکھایا گیا ہے۔ρ رداس کے گول دائرے کے مرکز سے $\mathrm{d}\phi$ زاویے پر دو لکیریں دائرے تک کھینچنے سے $\frac{\rho^2 \, \mathrm{d}\phi}{2}$ رقبہ گھیرا جاتا ہے۔اگر رداس $\rho + \mathrm{d}\rho$

[24]حقیقت میں منفی حد $-180°$ کو نہیں چھوتا۔اگر منفی حد $-180°$ کو چھوئے تب منفی x محدد دو مرتبہ شامل ہوتا ہے۔



شکل 1.27: نلکی محدد میں انتہائی چھوٹی حجم۔

ہو تب رقبہ $\frac{(\rho+\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2}$ ہو گا۔یوں شکل-ب میں چھوٹے مکعب کے سایہ کا رقبہ $\mathrm{d}S$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \frac{(\rho+\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} - \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2} \\
&= \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi + 2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi + (\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} - \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2} \\
&= \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi + \frac{(\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} \\
&\approx \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

ہو گا۔یہاں آخری قدم پر d کی علامت، مجموعہ کے پہلے رکن میں دو مرتبہ جبکہ دوسرے رکن میں تین مرتبہ ہے۔یوں دوسرے اور پہلے رکن کی نسبت $\frac{0.5(\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi} = \frac{\mathrm{d}\rho}{2\rho}$ ہو گی۔$\mathrm{d}\rho$ کو کم سے کم[25] کرتے ہوئے دوسرے رکن کو قابل نظر انداز بناتے ہوئے نظر انداز کیا گیا ہے۔یوں $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ رقبہ اور $\mathrm{d}z$ بلندی کے مکعب کا حجم $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ ہو گا۔

شکل 1.27 کو درست مکعب تصور کرتے ہوئے، اس کے اطراف کی لمبائی $\rho\,\mathrm{d}\phi$، $\mathrm{d}\rho$ اور $\mathrm{d}z$ لی جاتی ہے۔یوں مکعب کے نچلی اور اوپر سطح کا رقبہ مستطیل کے اطراف کو ضرب دیتے ہوئے $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح سامنے اور پیچھے سطحوں کا رقبہ $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$ جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کا رقبہ $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.27-الف میں نلکی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(\rho,\phi,z)$ کونے سے $N'(\rho+\mathrm{d}\rho,\phi+\mathrm{d}\phi,z+\mathrm{d}z)$ کونے پہنچتے ہیں۔N سے N' تک سمتیہ کو

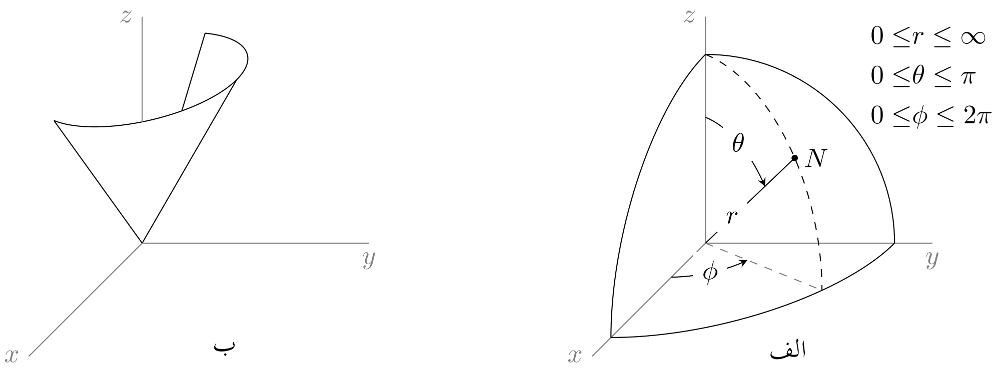
$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{1.44}$$

لکھا جاتا ہے۔یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے مابین سمتی فاصلے کو ظاہر کرتی ہے۔

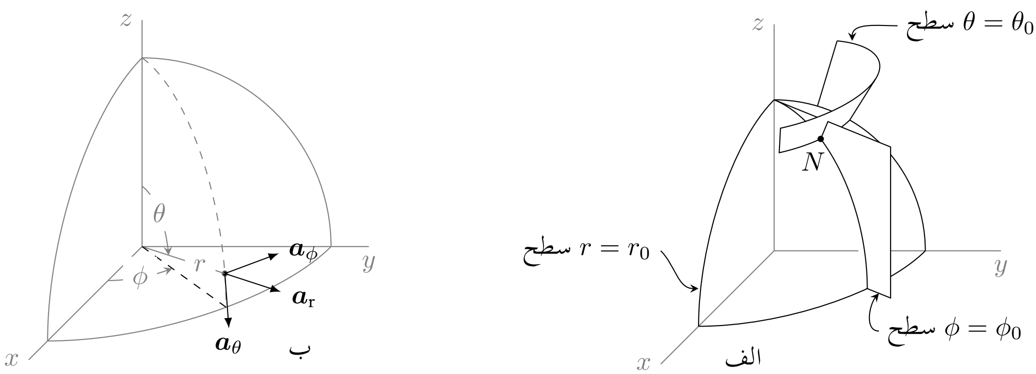
1.10 کروی محدد

سیدھی لکیروں اور سیدھی سطحوں کو کارتیسی محدد میں زیادہ آسانی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ نلکی سطحوں کو ظاہر کرنے کے لئے نلکی محدد بہتر ثابت ہوتا ہے۔اسی طرح کرہ اشکال کے سطحوں کو کروی محدد میں باآسانی لکھا جا سکتا ہے۔آئیں کروی نظام پر غور کریں۔

[25] کسی بھی متغیرہ مثلاً ρ میں چھوٹی سی تبدیلی کو $\Delta\rho$ لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $\mathrm{d}\rho$ لکھا جاتا ہے۔$\mathrm{d}\rho$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $\mathrm{d}\rho \to 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.28: الف کروی محدد کے متغیرات۔ ب $\theta = \theta_0$ سطح کا کچھ حصہ۔



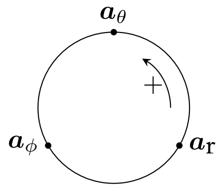
شکل 1.29: (الف) تین عمودی سطحوں کے ملاپ سے نقطہ N کا حصول۔ (ب) کروی محدد کے تین عمودی اکائی سمتیات۔

شکل 1.28-الف میں کروی محدد کے متغیرات r، θ اور ϕ دکھائے گئے ہیں۔ محدد کے مرکز سے نقطہ N تک کے فاصلے r کو کروی رداس پکارا جاتا ہے جبکہ z محدد سے کروی رداس تک زاویے کو θ لکھا جاتا ہے۔ x محدد سے رداس کے عمودی سائے تک زاویہ ϕ ہے۔ کروی اور نلکی نظام میں ϕ یکساں بیان کیا جاتا ہے۔ رداس کی قیمت مثبت لی جاتی ہے۔ یوں $r \geq 0$ ممکن ہے۔ θ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 180° ہے جبکہ ϕ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 360° ہے۔

r اور ϕ تبدیل کئے بغیر θ کو 0 سے بڑھاتے ہوئے π ریڈیئن کرنے سے نقطہ N شکل 1.28-الف میں نقطہ دار لکیر پر چلتے ہوئے مثبت z محدد سے شروع ہو کر منفی z محدد پر پہنچتا ہے۔ اسے نقطہ دار لکیر کو کرہ ارض کے خط طول بلد[26] تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل-الف میں θ کا 0° تا 90° تبدیل ہوتا دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح r اور θ تبدیل کئے بغیر ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N گول دائرے پر z محدد کے گرد ایک چکر کاٹے گا۔ یہ حرکت کرہ ارض کے خط عرض بلد[27] پر چلنے کے مانند ہے۔ θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کو تبدیل کرنے سے نقطہ N مرکز سے سیدھی باہر نکلتی لکیر پر حرکت کرتا ہے۔

r تبدیل کئے بغیر θ کو 0° تا 180° اور ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N کروی $r = r_0$ سطح پر حرکت کرے گا۔ اس کروی سطح کا رداس r ہو گا۔ شکل 1.28-الف میں θ کو 0° تا 90° اور ϕ کو 0° تا 90° تبدیل کرنے سے حاصل سطح دکھائی گئی ہے۔ شکل 1.28-ب میں θ تبدیل کئے بغیر r اور ϕ تبدیل کرنے سے پیدا مخروط[28] $\theta = \theta_0$ کروی سطح دکھائی گئی ہے۔ ϕ تبدیل کئے بغیر r اور θ تبدیل کرنے سے نلکی محدد کی طرح $\phi = \phi_0$ سطح حاصل ہوتی ہے۔ شکل 1.29-الف میں ان تینوں سطحوں کو دکھایا گیا ہے۔ بالکل کارتیسی اور نلکی محدد کی طرح، کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ کا مقام ان تین

[26] longitude
[27] latitude
[28] cone



شکل 1.30: کروی نظام میں اکائی سمتیات کی صلیبی ضرب۔

سطحوں کے نقطہ ملاپ سے اخذ کیا جاتا ہے۔کسی بھی نقطہ $N(r_0,\theta_0,\phi_0)$ پر $r=r_0$، $\theta=\theta_0$ اور $\phi=\phi_0$ سطحیں آپس میں عمودی ہوتی ہے اور یہ صرف اور صرف اسی نقطے پر اکٹھے ملتی ہیں۔

شکل 1.29-ب میں کروی نظام کے تین عمودی اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$، $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھائے گئے ہیں۔نلکی محدد کی طرح کروی محدد کے عمودی اکائی سمتیات بھی مقام تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتے ہیں۔کسی بھی نقطہ $N(r_0,\theta_0,\phi_0)$ پر θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کے بڑھتے جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہو گی۔اسی طرح θ بڑھانے سے نقطہ N اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ کی جانب حرکت کرے گا جبکہ ϕ بڑھانے سے نقطہ $\boldsymbol{a}_\phi$ کی جانب حرکت کرے گا۔کارتیسی اور نلکی محدد کی طرح کروی محدد کے اکائی سمتیات کو بھی محددی نظام کے متغیرات کو کم سے کم بڑھاتے ہوئے نقطے کی حرکت کی جانب اکائی سمتیہ کھینچنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.29-الف سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سمتیہ $r=r_0$ سطح کے عمودی جبکہ $\theta=\theta_0$ اور $\phi=\phi_0$ سطحوں کے متوازی ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_\theta$ سمتیہ $\theta=\theta_0$ سطح کے عمودی اور $\phi=\phi_0$ سطح کے متوازی پایا جاتا ہے جبکہ $r=r_0$ سطح کے ساتھ مماس بناتا ہے۔$\boldsymbol{a}_\phi$ سمتیہ $\phi=\phi_0$ سطح کے عمودی جبکہ $r=r_0$ اور $\theta=\theta_0$ سطحوں کے ساتھ مماس بناتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$، $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کروی نظام کے اکائی سمتیات ہیں۔$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\times\boldsymbol{a}_\theta=\boldsymbol{a}_\phi$ لکھنے سے دائیں ہاتھ کا کروی نظام حاصل ہوتا ہے۔دائیں ہاتھ کے قانون میں دائیں ہاتھ کا انگوٹھا r جبکہ پہلی انگلی θ اور دوسری انگلی ϕ بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتے ہیں۔نلکی محدد میں یہ انگلیاں ρ، ϕ اور z جبکہ کارتیسی محدد میں x، y اور z بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہیں۔

دائیں ہاتھ کے قانون یا شکل 1.30 کی مدد سے یوں اکائی سمتیات کے صلیبی ضرب

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\times\boldsymbol{a}_\theta=\boldsymbol{a}_\phi,\quad \boldsymbol{a}_\theta\times\boldsymbol{a}_\phi=\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}},\quad \boldsymbol{a}_\phi\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{a}_\theta \tag{1.45}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔اسی طرح

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=1,\quad \boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_\theta=1,\quad \boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_\phi=1 \tag{1.46}$$

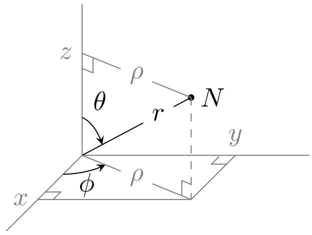
اور

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_\theta=0,\quad \boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_\phi=0,\quad \boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=0 \tag{1.47}$$

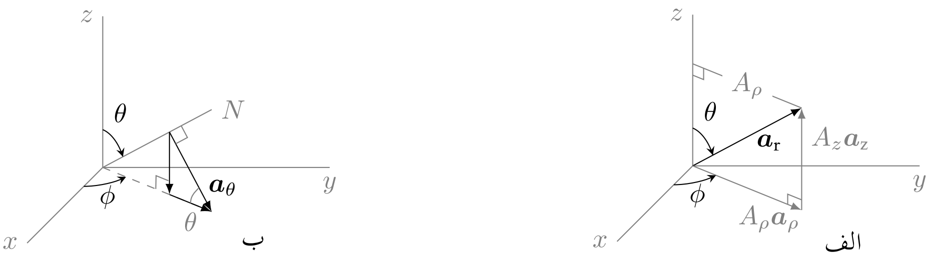
بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

نقطہ N کا z محدد سے فاصلہ ρ ہے جو نلکی محدد کا رداس ہے۔اسے شکل 1.31 میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\rho=r\sin\theta$ کے برابر ہے۔اسی طرح $z=0$ سطح سے N کی اونچائی z ہے جو شکل کو دیکھتے ہوئے $z=r\cos\theta$ لکھی جا سکتی ہے۔نقطہ N کا عمودی سایہ $z=0$ سطح پر دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $x=\rho\cos\phi$ اور $y=\rho\sin\phi$ لکھے جا سکتے ہیں۔$\rho=r\sin\theta$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned}x&=r\sin\theta\cos\phi\\y&=r\sin\theta\sin\phi\\z&=r\cos\theta\end{aligned} \tag{1.48}$$



شکل 1.31: کروی، نلکی اور کارتیسی متغیرات کا تبادلہ۔



شکل 1.32: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

لکھے جا سکتے ہیں جہاں z کی مساوات بھی ساتھ ہی لکھی گئی ہے۔ مساوات 1.48 کروی سے کارتیسی متغیرات دیتا ہے۔ اسی شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$
\begin{aligned}
r^2 &= \rho^2 + z^2 \\
\rho^2 &= x^2 + y^2
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

لکھتے ہوئے

$$
r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.50}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.48 میں z کی مساوات سے

$$
\theta = \cos^{-1}\frac{z}{r} = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{1.51}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.48 کے y کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$
\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{1.52}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.50، مساوات 1.51 اور مساوات 1.52 کارتیسی سے کروی متغیرات دیتے ہیں۔ 460

شکل 1.29-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کی سمت تبدیل کئے بغیر اسے محدد کے مرکز پر منتقل کرتے ہوئے شکل 1.32-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ اسے نلکی محدد کے اکائی سمتیات کی مدد سے

$$
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = A_\rho \boldsymbol{a}_\rho + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.53}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.32-الف میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کی لمبائی ایک لیتے ہوئے $A_\rho = \sin\theta$ اور $A_z = \cos\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.54}
$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_\text{z}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\text{r}\cdot\boldsymbol{a}_\rho &= (\sin\theta\boldsymbol{a}_\rho+\cos\theta\boldsymbol{a}_\text{z})\cdot\boldsymbol{a}_\rho=\sin\theta\\
\boldsymbol{a}_\text{r}\cdot\boldsymbol{a}_\phi &= (\sin\theta\boldsymbol{a}_\rho+\cos\theta\boldsymbol{a}_\text{z})\cdot\boldsymbol{a}_\phi=0\\
\boldsymbol{a}_\text{r}\cdot\boldsymbol{a}_\text{z} &= (\sin\theta\boldsymbol{a}_\rho+\cos\theta\boldsymbol{a}_\text{z})\cdot\boldsymbol{a}_\text{z}=\cos\theta
\end{aligned}\tag{1.55}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\rho=1$، $\boldsymbol{a}_\text{z}\cdot\boldsymbol{a}_\rho=0$ وغیرہ کا استعمال کیا گیا۔یہ مساوات کروی رداسی اکائی سمتیے اور نلکی نظام کے اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔اسی طرح جدول 1.1 استعمال کرتے ہوئے مساوات 1.54 کا باری باری $\boldsymbol{a}_\text{x}$ اور $\boldsymbol{a}_\text{y}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\text{r}\cdot\boldsymbol{a}_\text{x} &= (\sin\theta\boldsymbol{a}_\rho+\cos\theta\boldsymbol{a}_\text{z})\cdot\boldsymbol{a}_\text{x}=\sin\theta\cos\phi\\
\boldsymbol{a}_\text{r}\cdot\boldsymbol{a}_\text{y} &= (\sin\theta\boldsymbol{a}_\rho+\cos\theta\boldsymbol{a}_\text{z})\cdot\boldsymbol{a}_\text{y}=\sin\theta\sin\phi\\
\boldsymbol{a}_\text{r}\cdot\boldsymbol{a}_\text{z} &= (\sin\theta\boldsymbol{a}_\rho+\cos\theta\boldsymbol{a}_\text{z})\cdot\boldsymbol{a}_\text{z}=\cos\theta
\end{aligned}\tag{1.56}$$

حاصل ہوتا ہے۔مکمل نتائج ایک جگہ لکھنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات میں $\boldsymbol{a}_\text{r}\cdot\boldsymbol{a}_\text{z}$ کو بھی شامل کیا گیا ہے۔ یہ مساوات کروی اکائی رداسی سمتیے اور
کارتیسی اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔ 462

$\boldsymbol{a}_\text{r}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_\text{r}=\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{a}_\text{x}+A_y\boldsymbol{a}_\text{y}+A_z\boldsymbol{a}_\text{z}$ لکھتے ہیں۔مساوات 1.38 کے مطابق $A_x=\boldsymbol{a}_\text{x}\cdot\boldsymbol{a}_\text{r}$ جبکہ $A_y=\boldsymbol{a}_\text{y}\cdot\boldsymbol{a}_\text{r}$ اور $A_z=\boldsymbol{a}_\text{z}\cdot\boldsymbol{a}_\text{r}$ ہوں گے۔یہ تمام مساوات 1.56 میں دئے گئے ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{a}_\text{r}=\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_\text{x}+\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_\text{y}+\cos\theta\boldsymbol{a}_\text{z}\tag{1.57}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ 463

شکل 1.29-ب میں دکھائے $\boldsymbol{a}_\theta$ کو $\phi=\phi_0$ سطح پر حرکت دیتے ہوئے مرکز کے اتنے قریب لا کر شکل 1.32-ب میں دکھایا گیا ہے کہ اس کی نوک $x=0$ سطح کو چھوتی ہے۔جیسا شکل 1.29-الف سے واضح ہے، $\phi=\phi_0$ سطح پر $\boldsymbol{a}_\theta$ کو حرکت دینے سے اس سمتیہ کی سمت تبدیل نہیں ہوتی۔شکل 1.32-ب کو دیکھتے ہوئے $\boldsymbol{a}_\theta=B_\rho\boldsymbol{a}_\rho-B_z\boldsymbol{a}_\text{z}$ لکھا جا سکتا ہے۔یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ $B_\rho\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\theta$ کے مابین زاویہ θ ہے۔$\boldsymbol{a}_\theta$، $B_\rho\boldsymbol{a}_\rho$ اور $-B_z\boldsymbol{a}_\text{z}$ مل کر تکون بناتے ہیں جسے دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned}
B_\rho&=\cos\theta\\
B_z&=\sin\theta
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{a}_\theta=\cos\theta\boldsymbol{a}_\rho-\sin\theta\boldsymbol{a}_\text{z}\tag{1.58}$$

کے برابر ہے۔اس مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_\text{z}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_\rho &= (\cos\theta\boldsymbol{a}_\rho-\sin\theta\boldsymbol{a}_\text{z})\cdot\boldsymbol{a}_\rho=\cos\theta\\
\boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_\phi &= (\cos\theta\boldsymbol{a}_\rho-\sin\theta\boldsymbol{a}_\text{z})\cdot\boldsymbol{a}_\phi=0\\
\boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_\text{z} &= (\cos\theta\boldsymbol{a}_\rho-\sin\theta\boldsymbol{a}_\text{z})\cdot\boldsymbol{a}_\text{z}=-\sin\theta
\end{aligned}\tag{1.59}$$

$\boldsymbol{a}_\theta$ اور نلکی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح مساوات 1.58 کا باری باری ax، $\boldsymbol{a}_\text{y}$ اور $\boldsymbol{a}_\text{z}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_\text{x} &= (\cos\theta\boldsymbol{a}_\rho-\sin\theta\boldsymbol{a}_\text{z})\cdot\boldsymbol{a}_\text{x}=\cos\theta\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\text{x}=\cos\theta\cos\phi\\
\boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_\text{y} &= (\cos\theta\boldsymbol{a}_\rho-\sin\theta\boldsymbol{a}_\text{z})\cdot\boldsymbol{a}_\text{y}=\cos\theta\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\text{y}=\cos\theta\sin\phi\\
\boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_\text{z} &= (\cos\theta\boldsymbol{a}_\rho-\sin\theta\boldsymbol{a}_\text{z})\cdot\boldsymbol{a}_\text{z}=-\sin\theta\boldsymbol{a}_\text{z}\cdot\boldsymbol{a}_\text{z}=-\sin\theta
\end{aligned}\tag{1.60}$$

جدول 1.2: کروی اکائی سمتیات کا نلکی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

	$\boldsymbol{a}_\rho$	$\boldsymbol{a}_\phi$	$\boldsymbol{a}_\text{z}$
$\boldsymbol{a}_\text{r}$	$\sin\theta$	0	$\cos\theta$
$\boldsymbol{a}_\theta$	$\cos\theta$	0	$-\sin\theta$
$\boldsymbol{a}_\phi$	0	1	0

جدول 1.3: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

	$\boldsymbol{a}_\text{x}$	$\boldsymbol{a}_\text{y}$	$\boldsymbol{a}_\text{z}$
$\boldsymbol{a}_\text{r}$	$\sin\theta\cos\phi$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta$
$\boldsymbol{a}_\theta$	$\cos\theta\cos\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$-\sin\theta$
$\boldsymbol{a}_\phi$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0

حاصل ہوتے ہیں۔یہ مساوات $\boldsymbol{a}_\theta$ اور کارتیسی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_\theta$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_\text{X} + A_y\boldsymbol{a}_\text{Y} + A_z\boldsymbol{a}_\text{Z}$ لکھتے ہیں۔مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = \boldsymbol{a}_\text{X}\cdot\boldsymbol{a}_\theta$ جبکہ $A_y = \boldsymbol{a}_\text{Y}\cdot\boldsymbol{a}_\theta$ اور $A_z = \boldsymbol{a}_\text{Z}\cdot\boldsymbol{a}_\theta$ ہوں گے۔یہ تمام مساوات 1.60 میں دئے گئے ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{a}_\theta = \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_\text{X} + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_\text{Y} - \sin\theta\boldsymbol{a}_\text{Z} \tag{1.61}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

کروی محدد کا $\boldsymbol{a}_\phi$ اور نلکی محدد کا $\boldsymbol{a}_\phi$ یکساں ہیں۔اسے کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{a}_\phi = -\sin\phi\boldsymbol{a}_\text{X} + \cos\phi\boldsymbol{a}_\text{Y} \tag{1.62}$$

لکھا جاتا ہے۔اس مساوات کا $\boldsymbol{a}_\text{X}$، $\boldsymbol{a}_\text{Y}$ اور $\boldsymbol{a}_\text{Z}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_\text{X} &= -\sin\phi\\
\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_\text{Y} &= \cos\phi\\
\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_\text{Z} &= 0
\end{aligned} \tag{1.63}$$

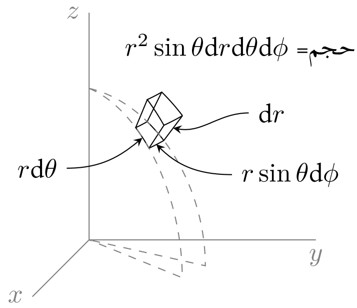
لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 1.55 اور مساوات 1.59 کے نتائج کے ساتھ $\boldsymbol{a}_\phi$ کے مختلف غیر سمتی ضربوں کو جدول 1.2 میں یکجا کیا گیا ہے۔

مساوات 1.56 اور مساوات 1.60 کے نتائج جدول 1.3 میں یکجا کئے گئے ہیں۔

شکل 1.29 میں $N(r,\theta,\phi)$ پر تین عمودی سطحیں دکھائی گئی ہیں۔اگر کروی محدد کے متغیرات $\mathrm{d}r$، $\mathrm{d}\theta$ اور $\mathrm{d}\phi$ بڑھا کر دوبارہ تین عمودی سطحیں کھینچی جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر چھوٹا منحرف مکعب نما حجم گھیریں گی جسے شکل 1.33 میں دکھایا گیا ہے۔$\boldsymbol{a}_\text{r}$ سمت میں مکعب کے چار اطراف کی لمبائیاں $\mathrm{d}r$ ہے۔$\boldsymbol{a}_\theta$ سمت میں z محدد کے قریبی دو اطراف کی لمبائیاں $r\,\mathrm{d}\theta$ جبکہ دو دور اطراف کی لمبائیاں $(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta$ ہے جسے دو اجزاء کی صورت میں یوں $r\,\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔دور اطراف کے لمبائی کا پہلا جزو ہوبہو قریبی اطراف کی لمبائی ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو دور اور قریبی اطراف کے لمبائیوں میں فرق کو ظاہر کرتی ہے۔ان دو اجزاء کی نسبت $\frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{r\,\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{r}$ کے برابر ہے۔$\mathrm{d}r$ کو کم سے کم[29] کرتے ہوئے اس نسبت کو کم سے کم کیا جا سکتا ہے۔ایسا ہی کرتے ہوئے ہم $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ کو رد کرتے ہوئے ان چاروں اطراف کی لمبائیاں $r\,\mathrm{d}\theta$ ہی لیتے ہیں۔اسی طریقہ کار سے $\boldsymbol{a}_\phi$ اطراف کی

[29]کسی بھی متغیرہ مثلاً r میں چھوٹی سی تبدیلی کو Δr لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $\mathrm{d}r$ لکھا جاتا ہے۔$\mathrm{d}r$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $\mathrm{d}r \to 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.33: کروی نظام میں چھوٹی حجم۔

لمبائیاں $r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$ لکھی جا سکتی ہے۔ منحرف مکعب نما کے اطراف میں معمولی فرق کو نظرانداز کرتے ہوئے اسے مکعب نما تصور کیا جا سکتا ہے جس کے $r=r_0$ سطحوں کا رقبہ $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ جبکہ $\theta=\theta_0$ سطحوں کا رقبہ $r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$ اور $\phi=\phi_0$ سطحوں کا رقبہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ ہو گا۔ اس مکعب کا حجم $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ ہو گا۔

شکل 1.33 میں کروی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(r,\theta,\phi)$ کونے سے $N'(r+\mathrm{d}r,\theta+\mathrm{d}\theta,\phi+\mathrm{d}\phi)$ کونے پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک سمتیہ کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta}+r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi} \tag{1.64}$$

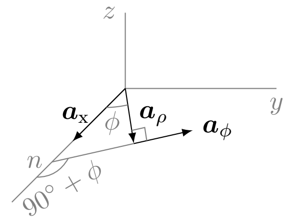
لکھا جاتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی فاصلہ دیتا ہے۔

کسی بھی مکمل بند سطح کی سمت، سطح کے عمودی باہر جانب لی جاتی ہے۔ شکل 1.33 میں $r=r_0$ سطح مرکز کا قریبی سطح ہے۔ اس سطح کے دو آپس میں الٹ عمودی اطراف $\mp\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہیں جن میں $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ بند سطح کی بیرونی سمت کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا یہی اس سطح کی درست سمت ہے۔ اس کے برعکس $r=r_0+\mathrm{d}r$ سطح مرکز سے دور تر ہے۔ اس سطح کے بھی دو آپس میں الٹ عمودی سمتیں $\mp\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہیں جن میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سطح کی درست سمت ہے۔ یوں $r=r_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ جبکہ $r=r_0+\mathrm{d}r$ سطح کا سمتی رقبہ $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔ اسی طرح $\theta=\theta_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\theta}$ جبکہ $\theta=\theta_0+\mathrm{d}\theta$ سطح کا سمتی رقبہ $r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\theta}$ ہو گا۔ $\phi=\phi_0$ سطح کا $-r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\phi=\phi_0+\mathrm{d}\phi$ سطح کا سمتی رقبہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\phi}$ ہو گا۔

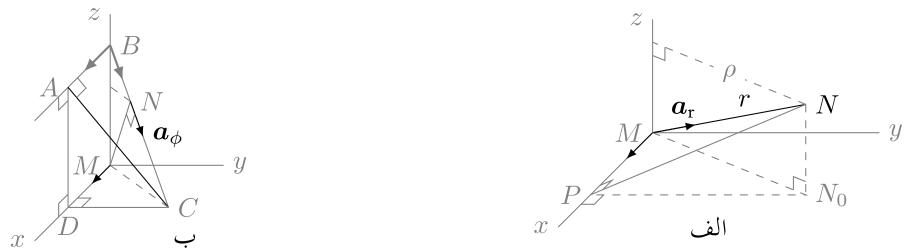
مشق 1.6: شکل 1.33 میں سمت میں مرکز کے قریبی اور دور اطراف کی لمبائیاں لکھیں۔

جوابات: $r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$، $r\sin(\theta+\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}\phi$، $(r+\mathrm{d}r)\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$ اور $(r+\mathrm{d}r)\sin(\theta+\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}\phi$

مثال 1.9: دو اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_1$ اور $\boldsymbol{a}_2$ کا غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=(1)(1)\cos\alpha_{12}$ یعنی ان کے مابین زاویے α_{12} کے کوسائن کے برابر ہوتا ہے۔ غیر سمتی ضرب کے اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\phi}$ حاصل کریں۔



شکل 1.34: کارتیسی اور نلکی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔



شکل 1.35: کروی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔

حل: شکل 1.34 میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\rho}$ کے درمیان زاویہ ϕ جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\rho}$ کے درمیان زاویہ $90° - \phi$ پایا جاتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} = \cos\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} = \cos(90° - \phi) = \sin\phi$ کے برابر ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کی سمتیں تبدیل کئے بغیر اگر انہیں یوں ہلایا جائے کہ ان کی دُم نقطہ n پر آ ٹھرے تو شکل سے ظاہر ہے کہ ان کے مابین زاویہ $90° + \phi$ ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = \cos(90° + \phi) = -\sin\phi$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کے درمیان ϕ زاویہ ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = \cos\phi$ کے برابر ہے۔ چونکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ان دونوں نلکی اکائی سمتیات کے عمودی ہے لہٰذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔

مثال 1.10: مثال 1.9 کے طرز پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-الف میں نقطہ $N(r, \theta, \phi)$ دکھایا گیا ہے جسے $N(x, y, z)$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔ شکل میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \cos \underline{/NMP}$ کے برابر ہے جہاں N اور P سے M تک لکیریں کھینچنے سے زاویہ $\underline{/NMP}$ بنتا ہے۔ N سے $z = 0$ سطح پر عمود نقطہ N_0 دیتا ہے۔ N_0 سے x محدد پر عمود نقطہ P دیتا ہے۔ N سے N_0 اور یہاں سے P منتقل ہوتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت میں کسی قسم کی حرکت نہیں کی جاتی لہٰذا اگر کارتیسی نظام میں $N(x, y, z)$ لکھا جائے تو اسی نظام میں $N_0(x, y, 0)$ اور $P(x, 0, 0)$ لکھے جائیں گے۔ ہم N سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے بھی P تک پہنچ سکتے ہیں۔ تکون NMP میں M سے N تک کا فاصلہ $r = \overline{MN}$ جبکہ M سے P تک کا فاصلہ $x = \overline{MP}$ اور زاویہ $\underline{/NPM} = 90°$ ہیں لہٰذا $\cos \underline{/NMP} = \frac{x}{r}$ ہو گا۔ یہی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کے غیر سمتی ضرب کے برابر ہے۔ N سے y محدد پر عمود بناتے ہوئے یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{y}{r}$ اور N سے z محدد پر عمود سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{z}{r}$ لکھے جا سکتے ہیں۔ چونکہ $x = r\sin\theta\cos\phi$، $y = r\sin\theta\sin\phi$ اور $z = r\cos\theta$ کے برابر ہیں لہٰذا ہم

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\phi$$
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\phi$$
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \frac{z}{r} = \cos\theta$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 1.11: مثال 1.9 کے طرز پر $\boldsymbol{a}_\theta$ کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ جبکہ محدد کے مرکز M پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ حاصل کرنے کی خاطر سمتیات کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں z محدد پر نقطہ B منتقل کرتے ہوئے دوبارہ دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos \underline{/ABC}$ کے برابر ہے۔ اس شکل میں $\underline{/DMC} = \phi$ اور $\underline{/BMN} = \theta$ کروی محدد کے زاویے ہیں۔ تکون ΔBMN میں زاویہ $\underline{/MNB}$ نوے درجے کا ہے۔ یوں $\underline{/NBM} = 90^\circ - \theta$ ہو گا۔ شکل سے واضح ہے کہ $\underline{/NBM} = \underline{/CBM}$ ہیں۔ اس طرح تکون ΔBMC میں $\underline{/BMC} = 90^\circ$ جبکہ $\underline{/CBM} = 90^\circ - \theta$ ہونے کی بنا پر $\underline{/MCB} = \theta$ ہو گا۔

شکل-ب میں $\overline{BM} = l$ لیتے ہوئے تکون ΔBMC کو دیکھتے ہوئے

$$\overline{BC} = \frac{l}{\sin\theta}$$
$$\overline{MC} = \frac{l}{\tan\theta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ تکون ΔMDC سے

$$\overline{MD} = \overline{MC}\cos\phi = \frac{l\cos\phi}{\tan\theta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ $\overline{MD}$ اور $\overline{AB}$ برابر ہیں یعنی $\overline{AB} = \overline{MD}$۔ یوں تکون ΔBAC سے

$$\cos\underline{/ABC} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\left(\frac{l\cos\phi}{\tan\theta}\right)}{\left(\frac{l}{\sin\theta}\right)} = \cos\theta\cos\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos\theta\cos\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 1.7: شکل 1.35-ب کے طرز پر شکل بناتے ہوئے $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\cos\theta\sin\phi$ اور $-\sin\theta$

سوالات

سوال 1.1: سمتیہ $\boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہیں۔مندرجہ ذیل حاصل کریں: (الف) $2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B}$ اور اسی کی سمت میں اکائی سمتیہ؛ (ب) $2\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$؛ (پ) $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})$ $|3\boldsymbol{A}||2\boldsymbol{B}|$

جوابات: $-13\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 13\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 8\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $-0.648\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 0.648\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 0.399\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، 28.3 ، $1359\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 1087\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1359\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

سوال 1.2: نقطہ $A(1,-2,3)$ ، $B(3,-1,2)$ اور $C(7,5,-4)$ دیے گئے ہیں۔(الف) محدد کے مرکز سے A تک سمتیہ لکھیں؛ (ب) مرکز سے لکیر AB کے وسط تک سمتیہ لکھیں؛ (پ) اسی سمت میں اکائی سمتیہ لکھیں؛ (ت) تکون ABC کا احاطہ دریافت کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 1.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $0.566\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 0.424\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 0.707\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، 23.4

سوال 1.3: مرکز سے نقطہ A تک سمتیہ $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے جبکہ مرکز سے $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اکائی سمتیہ کی سمت میں نقطہ B پایا جاتا ہے۔دونوں نقطوں کے درمیان 4 فاصلہ ہونے کی صورت میں نقطہ B دریافت کریں۔

جوابات: $(2.57, -2.57, 1.28)$

سوال 1.4: سمتی میدان $\boldsymbol{M} = (x + y^2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 2(xy + 3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4z^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ دیا گیا ہے۔نقطہ $A(2,-3,1)$ پر اس میدان کی قیمت حاصل کریں۔اسی نقطے پر میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ دریافت کریں۔ایسی سطح جس پر $|\boldsymbol{M}| = 5$ ہو کی مساوات حاصل کریں۔اس سطح پر $y = 2$ اور $z = -1$ ہونے کی صورت میں حاصل لکیر کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{M} = 11\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $(0.836\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 0.456\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.304\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})$ ، $x^2 + y^2 + 2xy^2 + 4x^2y^2 + 24xy + 16z^4 - 11 = 0$ ، $17x^2 + 56x + 9 = 0$

سوال 1.5: سمتی میدان $\boldsymbol{B} = 2x^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 3y(x + 2z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{M} = (x + y + z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{y}{x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + xy\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ دیے گئے ہیں۔نقطہ $N(2,-3,-1)$ پر $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{M}$ حاصل کریں۔اسی نقطے پر سمتیہ $2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{B} = 8\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $\boldsymbol{M} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 1.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $0.830\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 0.069\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.553\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

سوال 1.6: نقطہ $N(2,-3,7)$ پر میدان $\boldsymbol{M} = \frac{16}{x^2+y^2}(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_M$ دریافت کریں۔نقطہ N پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{M}$ کے درمیان زاویہ حاصل کریں۔اسی طرح نقطہ N پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{M}$ کے درمیان زاویہ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{a}_M = 0.555\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 0.832\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ، 56.3° ، 33.7°

سوال 1.7: میدان $\boldsymbol{M} = \frac{16}{x^2+y^2}(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})$ کا مندرجہ ذیل دو درجی تکمل $y = 3$ سطح پر حاصل کریں۔

$$\int_0^3 \int_0^2 \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$$

جواب: $24\ln\frac{13}{9}$

سوال 1.8: غیر سمتی ضرب استعمال کرتے ہوئے تکون ABC میں زاویہ A اور C حاصل کریں۔تکون کے کونے $A(3,1,2)$ ، $B(4,6,2)$ اور $C(1,4,-2)$ ہیں۔

جوابات: 61.74° ، 56.51°

سوال 1.9: نقطے $A(4,1,2)$، $B(-2,4,3)$ اور $C(2,3,-1)$ دیے گئے ہیں۔سمتیہ $\boldsymbol{R}_{BA}$ اور $\boldsymbol{R}_{CA}$ حاصل کریں۔دوسری سمتیہ پر پہلی سمتیہ کے عمودی سائے[30] کی لمبائی دریافت کریں۔لکیر AB کے درمیانے نقطے سے لکیر AC کے درمیانے نقطے تک سیدھا سمتیہ حاصل کریں۔

جوابات: $-6\boldsymbol{a}_{\text{X}}+3\boldsymbol{a}_{\text{y}}+\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $-2\boldsymbol{a}_{\text{X}}+2\boldsymbol{a}_{\text{y}}-3\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، 4.12 ، $2\boldsymbol{a}_{\text{X}}-0.5\boldsymbol{a}_{\text{y}}-2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$

سوال 1.10: سمتیہ $\boldsymbol{M}=5\boldsymbol{a}_{\text{X}}-3\boldsymbol{a}_{\text{y}}+2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کا وہ حصہ حاصل کریں جو سمتیہ $\boldsymbol{P}=-7\boldsymbol{a}_{\text{X}}+2\boldsymbol{a}_{\text{y}}-6\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کے متوازی ہے۔وہ حصہ حاصل کریں جو اس کے عمودی ہے۔

جوابات: $4.17\boldsymbol{a}_{\text{X}}-1.19\boldsymbol{a}_{\text{y}}+3.57\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $0.83\boldsymbol{a}_{\text{X}}-1.81\boldsymbol{a}_{\text{y}}-1.57\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$

سوال 1.11: تین سمتیات $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{a}_{\text{X}}-1\boldsymbol{a}_{\text{y}}+3\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $\boldsymbol{r}_2=-3\boldsymbol{a}_{\text{X}}+4\boldsymbol{a}_{\text{y}}-5\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ اور $\boldsymbol{r}_3=5\boldsymbol{a}_{\text{X}}-2\boldsymbol{a}_{\text{y}}+3\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ دیے گئے ہیں۔$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ایسی اکائی سمتیہ حاصل کریں جو $\boldsymbol{r}_1$ اور $\boldsymbol{r}_2$ دونوں کو عمودی ہو۔سمتیہ $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ اور $\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2$ دونوں کو عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔اس تکون کا رقبہ حاصل کریں جس کے اطراف $\boldsymbol{r}_1$ اور $\boldsymbol{r}_2$ ہوں۔اس تکون کا رقبہ حاصل کریں جس کے کونے یہ تین سمتیات دیتے ہیں۔

جوابات: $-0.81\boldsymbol{a}_{\text{X}}+0.16\boldsymbol{a}_{\text{y}}+0.58\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $\mp(-0.81\boldsymbol{a}_{\text{X}}+0.16\boldsymbol{a}_{\text{y}}+0.58\boldsymbol{a}_{\text{Z}})$ ، $\mp(0.29\boldsymbol{a}_{\text{X}}+0.88\boldsymbol{a}_{\text{y}}+0.37\boldsymbol{a}_{\text{Z}})$ ، 4.3 ، 13.6

سوال 1.12: نقطہ $N(5,10,4)$ پر سمتیات $\boldsymbol{R}_{AN}=-3\boldsymbol{a}_{\text{X}}+6\boldsymbol{a}_{\text{y}}+12\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ اور $\boldsymbol{R}_{BN}=12\boldsymbol{a}_{\text{X}}+20\boldsymbol{a}_{\text{y}}-5\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ مل کر تکون بناتی ہیں۔تکون کی عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔سمتیہ $\boldsymbol{R}_{BN}$ کے عمودی اور تکون کی سطح کے متوازی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔تکون کی سطح پر اس اکائی سمتیہ کو حاصل کریں جو نقطہ N پر تکون کے کونے کو نصف زاویہ میں کاٹے۔

جوابات: $\mp(-0.83\boldsymbol{a}_{\text{X}}+0.39\boldsymbol{a}_{\text{y}}-0.40\boldsymbol{a}_{\text{Z}})$ ، $\mp(0.26\boldsymbol{a}_{\text{X}}-0.38\boldsymbol{a}_{\text{y}}-0.89\boldsymbol{a}_{\text{Z}})$ ، $0.19\boldsymbol{a}_{\text{X}}+0.87\boldsymbol{a}_{\text{y}}+0.45\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$

سوال 1.13: سمتیہ $\boldsymbol{M}=(x^2+y^2)^{-1}(x\boldsymbol{a}_{\text{X}}+y\boldsymbol{a}_{\text{y}})$ کو نلکی محدد کے متغیرات میں لکھیں۔نقطہ $(5,30^\circ,6)$ پر سمتیہ کی قیمت کارتیسی اور نلکی محدد میں حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{M}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho$ ، $\boldsymbol{M}=0.41\boldsymbol{a}_{\text{X}}+0.29\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ ، $\boldsymbol{M}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}_\rho$

سوال 1.14: نقطہ $N(\rho=2,\phi=45^\circ,z=12)$ اور $P(\rho=5,\phi=-60^\circ,z=-6)$ دئے گئے ہیں۔کارتیسی محدد میں، پہلے نقطے سے دوسرے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ حاصل کریں۔اسی اکائی سمتیہ کو پہلے نقطے پر پائے جانے والے نلکی محدد کے متغیرات کی صورت میں لکھیں۔اسی اکائی سمتیہ کو دوسرے نقطے پر پائے جانے والے نلکی محدد کے متغیرات کی صورت میں لکھیں۔

جوابات: $0.057\boldsymbol{a}_{\text{X}}-0.303\boldsymbol{a}_{\text{y}}-0.951\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $-0.174\boldsymbol{a}_\rho-0.255\boldsymbol{a}_\phi-0.951\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $0.292\boldsymbol{a}_\rho-0.180\boldsymbol{a}_\phi-0.951\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$

سوال 1.15: نقطہ $N(\rho=5,\phi=30^\circ,z=6)$ سے نقطہ $P(\rho=10,\phi=75^\circ,z=12)$ تک سمتیہ کارتیسی محدد میں لکھیں۔اسی سمت میں اکائی سمتیہ بھی لکھیں۔کارتیسی محدد میں دوسرے نقطے سے مرکز تک اکائی سمتیہ لکھیں۔

جوابات: $-1.74\boldsymbol{a}_{\text{X}}+7.16\boldsymbol{a}_{\text{y}}+6\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $-0.183\boldsymbol{a}_{\text{X}}-0.618\boldsymbol{a}_{\text{y}}+0.631\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $0.166\boldsymbol{a}_{\text{X}}-0.618\boldsymbol{a}_{\text{y}}-0.768\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$

[30] projection

سوال 1.16: نقطہ $M(5,-3,2)$ سے نقطہ $N(10,2,-5)$ تک سمتیہ کو نقطہ M پر نلکی محدد کے اکائی سمتیات کی مدد سے لکھیں۔ دوسرے نقطے سے پہلے نقطے کی سمت میں اکائی سمتیہ کو دوسرے نقطے پر نلکی اکائی سمتیات کی مدد سے لکھیں۔ دوسرے نقطے سے مرکز تک اکائی سمتیہ دوسرے نقطے کے اکائی سمتیات کی صورت میں لکھیں۔

جوابات: $-1.71\boldsymbol{a}_{\rho}-6.86\boldsymbol{a}_{\phi}+7\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $0.59\boldsymbol{a}_{\rho}+0.39\boldsymbol{a}_{\phi}-0.7\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $0.90\boldsymbol{a}_{\rho}+0.44\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

سوال 1.17: رداس $\rho=2$ اور $\rho=6$ حجم گھیرتے ہیں جو $z=11$ تا $z=13$ اور $\phi=30^\circ$ تا $\phi=60^\circ$ پایا جاتا ہے۔ اس جسم کے حجم کو تین درجی تکمل سے حاصل کریں۔ اس کی بھی تکمل سے سطح بھی حاصل کریں۔

جوابات: 16.8 ، 41.1

سوال 1.18: نقطہ $N(5,3,8)$ سے نقطہ $P(3,-4,2)$ تک سمتیہ کارتیسی، نلکی اور کروی محدد میں حاصل کریں۔ پہلے نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کریں۔ تینوں سمتیات کی لمبائی حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ تینوں سمتیات کی لمبائی برابر ہے۔

جوابات: $-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-7\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}-6\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $-5.3165\boldsymbol{a}_{\rho}-4.9735\boldsymbol{a}_{\phi}-6.0000\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ،
$-8.6615-2.7739\boldsymbol{a}_{\theta}-2.5069\boldsymbol{a}_{\phi}$ ، 9.434

سوال 1.19: نقطہ N پر سمتیہ $\boldsymbol{K}=3\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}-2\boldsymbol{a}_{\theta}+8\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{G}=2\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+5\boldsymbol{a}_{\theta}+2\boldsymbol{a}_{\phi}$ دیے گئے ہیں۔ ان کی غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{K}$ حاصل کریں۔ دوسری سمتیہ کی پہلی سمتیہ کی سمت میں لمبائی حاصل کریں۔ پہلی سمتیہ کا وہ حصہ دریافت کریں جو دوسری سمتیہ کی سمت میں ہے۔ دونوں سمتیوں کا سمتی ضرب $\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{G}$ حاصل کریں۔ اس نقطے پر دونوں سمتیوں کی عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

جوابات: 12 ، 1.3675 ، $0.46753\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}-0.31169\boldsymbol{a}_{\theta}+1.24675\boldsymbol{a}_{\phi}$ ، $44\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}-10\boldsymbol{a}_{\theta}-19\boldsymbol{a}_{\phi}$ ،
$\mp(0.89871\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}-0.20425\boldsymbol{a}_{\theta}-0.38808\boldsymbol{a}_{\phi})$

سوال 1.20: ایک جسم $r=6$ تا $r=10$ ، $\theta=30^\circ$ تا $\theta=70^\circ$ اور $\phi=25^\circ$ تا $\phi=100^\circ$ حجم گھیرتا ہے۔ اس جسم کے دو دور ترین کونوں کے درمیان فاصل حاصل کریں۔ جسم کی سطح کا رقبہ حاصل کریں۔ جسم کی حجم دریافت کریں۔

جوابات: 9.27 ، 198.27 ، 179.25

سوال 1.21: نقطہ $N(5,4,-2)$ اور $P(6,4,10)$ دیے گئے ہیں۔ پہلے نقطے کو نلکی محدد میں لکھیں۔ پہلے نقطے کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے پہلے نقطے سے دوسرے نقطے تک سمتیہ نلکی محدد میں لکھیں۔

جوابات: $P(6.4031,38.6598^\circ,-2.0000)$ ، $0.57\boldsymbol{a}_{\rho}-0.82\boldsymbol{a}_{\phi}+12\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

باب 16

سوالات

کولومب

سوال 16.1: تکون کے تینوں کونوں پر $25\,\mu\mathrm{C}$ کا چارج پایا جاتا ہے جبکہ تینوں کونوں سے $15\,\mathrm{cm}$ فاصلے پر $20\,\mu\mathrm{C}$ چارج پایا جاتا ہے۔ تکون کے اطراف $10\,\mathrm{cm}$ ہونے کی صورت میں چوتھے چارج پر قوت دفع کی مقدار حاصل کریں۔

جواب: $0.553\,\mathrm{N}$

سوال 16.2: $z=0$ پر $4\,\mathrm{nF}$ اور $z=1\,\mathrm{cm}$ پر $-3\,\mathrm{nF}$ چارج پائے جاتے ہیں۔ z محدد پر وہ نقطے دریافت کریں جہاں مثبت چارج پر صفر قوت پائی جائے گی۔

جوابات: $z=0.92\,\mathrm{cm}$ ، $z=7.08\,\mathrm{cm}$

سوال 16.3: ایک چکور کے اطراف $25\,\mathrm{cm}$ ہیں جبکہ اس کے چاروں کونوں پر $30\,\mathrm{nC}$ چارج پایا جاتا ہے۔ کسی ایک کونے کے چارج پر کتنی قوت عمل کرے گی۔

جواب: $0.248\,\mathrm{mN}$

سوال 16.4: نقطہ $(2,1,-3)$ پر $15\,\mathrm{nC}$ اور نقطہ $(-3,-5,4)$ پر $-6\,\mathrm{nC}$ چارج پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(2,1,-3)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $-0.191\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+1.057\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+2.195\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

سوال 16.5: نقطہ $(0,0,3)$ اور $(0,0,-3)$ پر $20\,\mu\mathrm{C}$ چارج پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $N(2,0,0)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ محدد کے مرکز پر کتنا چارج نقطہ N پر اتنی ہی برقی شدت پیدا کرے گا۔

جوابات: $\boldsymbol{E}=15\,339\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $6.827\,\mu\mathrm{C}$

سوال 16.6: نقطہ $(4,-2,7)$ پر $5\,\mu\mathrm{C}$ اور $(-3,4,-2)$ پر $12\,\mu\mathrm{C}$ چارج پایا جاتا ہے۔ y محدد پر کہاں $E_x=0$ ہو گا۔

جواب: $y=-22.11$ ، $y=-6.89$

سوال 16.7: نقطہ $P(6,3,7)$ پر $6\,\mu\mathrm{C}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $N(5,4,2)$ پر کارتیسی، نلکی اور کروی محدد میں $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔نقطہ N کے اکائی سمتیات استعمال کریں۔- جوابات: $\boldsymbol{E}=-384.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+384.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-1922\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $\boldsymbol{E}=-60\boldsymbol{a}_{\rho}+540\boldsymbol{a}_{\phi}-1922\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $\boldsymbol{E}=-630\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+1817\boldsymbol{a}_{\theta}+540\boldsymbol{a}_{\phi}$

سوال 16.8: نقطہ $(0,0,0.25)$ اور $(0,0,-0.25)$ پر $50\,\mathrm{nC}$ جبکہ $(0,0,0)$ پر $-35\,\mathrm{nC}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $N(3,1,2)$ پر کارتیسی اور کروی محدد میں $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $34\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+11\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+22\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $42\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+0.39\boldsymbol{a}_{\theta}$

سوال 16.9: محدد کے مرکز پر $1\,\mathrm{nC}$ چارج پایا جاتا ہے۔ سطح $z=0$ پر اس خط کی مساوات حاصل کریں جس پر $E_y=1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہو گا۔

جواب: $80.8y^2=(x^2+y^2)^3$ ، $\rho^2=8.987\sin\phi$

سوال 16.10: محدد کے مرکز پر پڑے چکور کے چاروں کونوں پر $5\,\mathrm{nC}$ نقطہ چارج پائے جاتے ہیں۔چکور $z=0$ سطح پر پایا جاتا ہے جبکہ اس کے اطراف $1\,\mathrm{m}$ لمبے ہیں۔نقطہ $(0,a,0)$ اور نقطہ $(0,2a,0)$ پر برقی شدت کی شرح $a=2$ ، $a=10$ اور $a=\infty$ کی صورت میں حاصل کریں۔

جوابات: 4.15 ، 4.01 ، 4

سوال 16.11: نقطہ $(0,0,0)$ پر Q_1 اور نقطہ $(1,0,0)$ پر Q_2 نقطہ چارج پائے جاتے ہیں۔نقطہ $(2,1,0)$ پر $E_x=0$ ہونے کی صورت میں چارجوں کا تعلق دریافت کریں۔

جواب: $Q_1=-1.976Q_2$

سوال 16.12: کارتیسی محدد کے پہلے آٹھویں حصے $(x>0,y>0,z>0)$ میں حجمی کثافت چارج $\rho_h=10e^{-2z}(x^2+2y^2)$ ہے جبکہ بقایا سات حصوں میں کوئی چارج نہیں پایا جاتا۔خطہ $(0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1)$ میں کل چارج حاصل کریں۔اسی طرح خطہ $(0\le x+2y\le 1,\ 0\le z\le 1)$ میں کل چارج حاصل کریں۔

جوابات: پہلا جواب $4.32\,\mathrm{C}$ ہے۔دوسرا تکمل $\int_0^{1/2}\int_0^{1-2y}\int_0^1\rho_h\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ لکھتے ہوئے $0.27\,\mathrm{C}$ حاصل ہو گا۔

سوال 16.13: حجمی کثافت چارج $\rho_h=(\rho+0.002)z^2\tan\phi\,\mathrm{C/m^3}$ خطہ $0\le\rho\le 0.008$، $30^\circ\le\phi\le 75^\circ$، $2\le z\le 5$ میں پایا جاتا ہے۔ کثافت چارج کی زیادہ سے زیادہ قیمت دریافت کریں۔اس خطے میں کل چارج حاصل کریں۔

جوابات: $0.933\,\mathrm{C/m^3}$ ، $11.05\,\mu\mathrm{C}$

سوال 16.14: نلکی محدد میں z محدد کے گرد یکساں حجمی کثافت چارج $e^{-\rho^2}$ پائی جاتی ہے۔ $z=0$ تا $z=1$ کل چارج حاصل کریں۔ z محدد کے گرد کتنے رداس کے اندر کل چارج کا آدھا پایا جاتا ہے۔

جوابات: $3.142\,\mathrm{C}$ ، $0.832\,\mathrm{m}$

سوال 16.15: کروی محدد میں رداس کے ساتھ بدلتی حجمی کثافت چارج $\rho_h=\sqrt{r}$ پائی جاتی ہے۔اکائی رداس کے کرہ میں کل چارج حاصل کریں۔اسی طرح خطہ $(r\le 0.5,\theta\le 25^\circ,\phi\le\frac{\pi}{3})$ میں کل چارج حاصل کریں۔

جوابات: $3.59\,\mathrm{C}$ ، $0.028\,\mathrm{C}$