1 برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
2 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 1

سمتیات

1.1 مقداری اور سمتیہ

وہ طبعی مقدار جس کے مکمل اظہار کے لئے سمت کی ضرورت نہیں ہوتی مقداری[1] کہلاتا ہے۔کسی چیز کی کمیت m یا اس کا درجہ حرارت T مقداری کی مثالیں ہیں۔ مقداری کی قیمت اٹل یا متغیر ممکن ہے۔کمیت اٹل مقداری کی مثال ہے۔متغیر مقداری کی قیمت مختلف اوقات اور نقاط پر مختلف ہو سکتی ہے۔یوں کسی بھی نقطے پر درجہ حرارت کی قیمت وقت t کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔اسی طرح کسی بھی وقت مختلف نقاط پر درجہ حرارت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔یوں اگر صبح کے وقت اسلام آباد میں کسی مقام پر درجہ حرارت $12\,^\circ\mathrm{C}$ ہو تو دوپہر کو اسی مقام پر درجہ حرارت $30\,^\circ\mathrm{C}$ ہو سکتا ہے۔درجہ حرارت T، وقت t، کارتیسی محدد[2] کے متغیرات x، y اور z تمام مقداری متغیرات ہیں۔

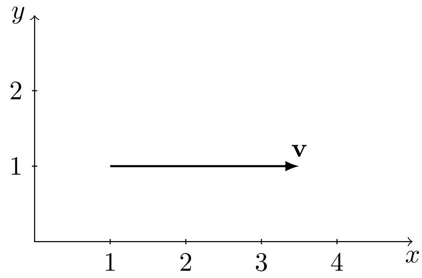
ایسی طبعی مقدار جسے بیان کرنے کے لئے سمت درکار ہو سمتیہ[3] کہلاتا ہے۔اس کتاب میں سمتیہ کی قیمت (یا طول) کو مثبت تصور کیا جائے گا۔یوں سمتیہ کی حتمی قیمت ہی اس کی مقدار ہو گی۔سمتیہ کی مثالیں قوت، سمتی رفتار اور سمتی اسراع ہیں۔

اس کتاب میں مقداری متغیرات کو سادہ طرز کی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے حروف مثلاً a، b، α، ... یا بڑے حروف مثلاً A، B، Ψ، ... سے ظاہر کیا جائے گا۔سمتیہ متغیرات کو موٹی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے یا بڑے حروف سے ظاہر کیا جائے گا۔یوں قوت کو $\mathbf{F}$ جبکہ سمتی رفتار کو $\mathbf{v}$ سے ظاہر کیا جائے گا۔قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں قوت کو $\vec{F}$ یا $\overrightharpoon{F}$ لکھا جاتا ہے۔سمتیہ کو تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں تیر کی لمبائی سمتیہ کی حتمی قیمت $|\mathbf{F}|$ ظاہر کرتی ہے جبکہ سمتیہ کی سمت تیر کی سمت سے ظاہر کی جاتی ہے۔سمتیہ کی حتمی قیمت کو سمتیہ ظاہر کرنے والے حرف کو سادہ لکھائی میں لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں قوت $\mathbf{F}$ کی حتمی قیمت کو F لکھا جائے گا۔

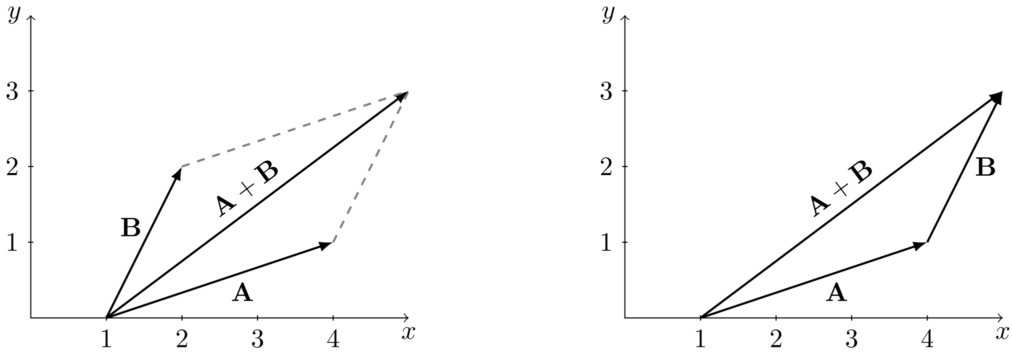
شکل 1.1 میں نقطہ $(1,1)$ پر پانی کی رفتار کو سمتیہ $\mathbf{v}$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس نقطے پر مثبت افقی محور کی سمت میں پانی کی رفتار $2.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے۔سمتیہ کی دُم اس مقام پر رکھی جاتی ہے جہاں سمتیہ کی قیمت بیان کی جا رہی ہو۔یوں شکل میں سمتیہ کی دُم $(1,1)$ پر رکھی گئی ہے۔اس شکل میں $1\,\mathrm{cm}$ کی لمبائی $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ کی رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔

---

scalar[1]
Cartesian coordinates[2]
vector[3]



شکل 1.1: سمتیہ



(ا) سر کے ساتھ دُم جوڑ کر مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

(ب) متوازی الاضلاع سے بھی مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.2: سمتیوں کے مجموعے کا حصول

1.2 سمتی الجبرا

دو سمتیوں کا ترسیمی مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر ایک سمتیہ کے سر کو دوسری سمتیہ کے دُم کے ساتھ ملایا جاتا ہے۔پہلی سمتیہ کی دُم سے دوسری سمتیہ کے سر تک سمتیہ حاصل جمع ہو گا۔اس عمل کو شکل 1.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔شکل میں $\mathbf{A}$ کے سر کے ساتھ $\mathbf{B}$ کی دُم ملائی گئی ہے۔دو سے زیادہ سمتیوں کا مجموعہ بھی اسی عمل کو استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔اس عمل کو سر سے دُم جوڑنا[4] کہتے ہیں۔شکل 1.2-ب میں دو سمتیوں کے دُم ملا کر سمتیوں کے متوازی الاضلاع[5] سے ان کا مجموعہ حاصل کرنا دکھایا گیا ہے جسے دیکھ کر صاف ظاہر ہے کہ $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ ہے یعنی سمتیوں کا مجموعہ قانون تبادل[6] پر پورا اترتا ہے۔اسی طرح سمتیوں کا مجموعہ قانون تلازمی[7]

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} \tag{1.1}$$

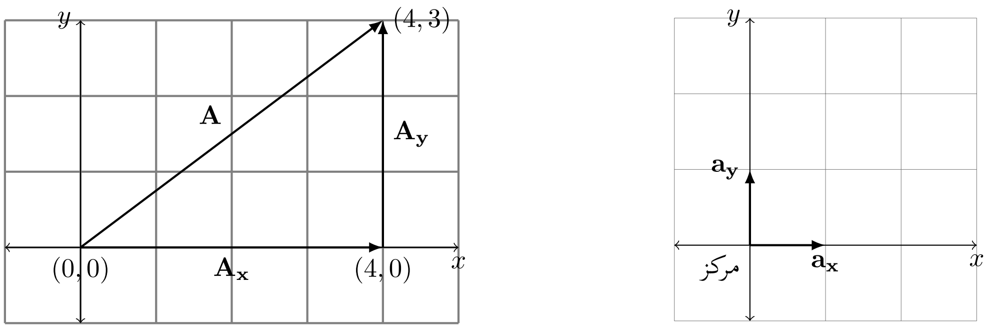
پر بھی پورا اترتا ہے۔

سمتیوں کے تفریق کا اصول جمع کے اصول سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ہم $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ کو $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$ لکھ سکتے ہیں جہاں $-\mathbf{B}$ سے مراد یہ ہے کہ سمتیہ $\mathbf{B}$ کی سمت الٹی کر دی گئی ہے۔یوں $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ حاصل کرنے کی خاطر $\mathbf{B}$ کی سمت الٹی کرتے ہوئے اس نئے سمتیہ کو $\mathbf{A}$ کے ساتھ جمع کیا جاتا ہے۔

سمتیہ $\mathbf{A}$ کو مثبت مقداری k سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت پر کوئی اثر نہیں ہوتا جبکہ اس کی لمبائی k گنا ہو جاتی ہے۔اس کے برعکس سمتیہ $\mathbf{A}$ کو منفی مقداری $-k$ سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت الٹ ہو جاتی ہے اور اس کی لمبائی $|k|$ گنا ہو جاتی ہے۔

---

[4] head to tail rule
[5] parallelogram law
[6] commutative law
[7] associative law



(ا) اکائی سمتیہ

(ب) اکائی سمتیوں کی مدد سے کسی بھی سمتیہ کو ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

شکل 1.3: اکائی سمتیہ اور ان کا استعمال

دو سمتیے اُس صورت میں برابر ہوتے ہیں جب ان کا تفریق صفر کے برابر ہو یعنی $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ تب ہو گا جب $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=0$ ہو۔

سمتی میدان کے متغیرات کو ہم آپس میں جمع یا منفی صرف اُس صورت کریں گے جب یہ متغیرات ایک ہی نقطے پر بیان کئے گئے ہوں۔یوں کسی بھی نقطے پر دو یا دو سے زیادہ مقناطیسوں کا اجتماعی مقناطیسی میدان حاصل کرتے ہوئے اس نقطے پر تمام مقناطیسوں کا علیحدہ علیحدہ مقناطیسی میدان لیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

اگر سمتی میدان کی بات نہ ہو رہی ہو تب مختلف مقامات پر پائے جانے والے سمتیوں کا بھی مجموعہ یا فرق لیا جا سکتا ہے۔یوں سمندر کے پانی میں ڈوبے آب دوز کی اوپر اور نچلی سطح پر قوت کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا یہ مزید ڈوبے گا یا نہیں۔

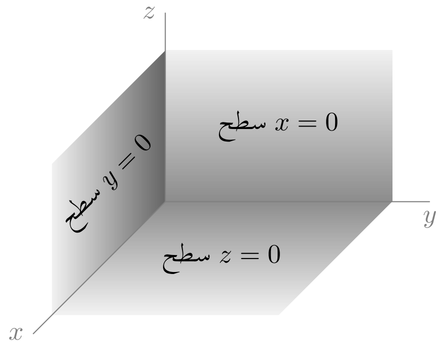
1.3 کارتیسی محدد

ایسا طریقہ جس سے کسی نقطے کا مقام بیان کیا جائے محدد[8] کہلاتا ہے۔سیدھی سطح پر کسی بھی نقطے کو دو محدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔خلاء تین طرفہ[9] ہے لہٰذا خلاء میں کسی بھی نقطے کو تین محدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔شکل 1.3-الف میں دو طرفہ کارتیسی محدد پر اکائی لمبائی کے دو سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ دکھائے گئے ہیں۔اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کی سمت مثبت x جانب کو ہے جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت مثبت y جانب کو ہے۔شکل-ب میں $\mathbf{A}$ دکھایا گیا ہے۔کسی بھی سمتیہ کو دو یا دو سے زیادہ سمتیوں کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔شکل میں $\boldsymbol{A}$ کو $\boldsymbol{A}_x$ اور $\boldsymbol{A}_y$ کے مجموعے کی شکل میں دکھایا گیا ہے یعنی

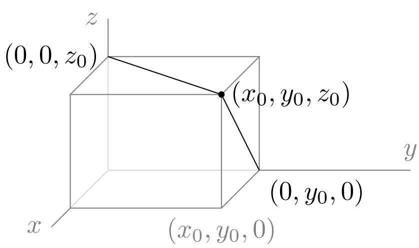
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_x+\boldsymbol{A}_y \tag{1.2}$$

زمین کی سطح کو لامحدود سیدھی سطح تصور کرتے ہوئے، اس کے ہم سطحی[10] دو عمودی لکیریں کھینچتے ہوئے ایک لکیر کو x محدد اور دوسری لکیر کو y محدد تصور کیا جا سکتا ہے۔زمین کے ہم سطحی لکیر سے مراد ایسی لکیر ہے جس پر ہر نقطہ اس سطح کو چھوتا ہے۔x محدد کے مثبت حصے سے گھڑی کی الٹ سمت گھومتے ہوئے نوے درجے پر y محدد کا مثبت حصہ رکھتے ہوئے اونچائی کو z محدد کے مثبت حصے سے ظاہر کیا جائے گا۔اب اگر اونچائی صفر رکھتے ہوئے x اور y کو تبدیل کیا جائے تو ہم زمین کی سطح پر حرکت کریں گے۔اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ زمین کی سطح پر $z=0$ جبکہ اس پر x اور y آزاد متغیرات ہیں۔یوں زمین کی سطح کو $z=0$ سطح کہتے ہیں جسے

$$z=0, \quad x\leq|\mp\infty|, \quad y\leq|\mp\infty|$$



(ا) کارتیسی محدد میں عمودی سیدھی سطحیں۔



(ب) نقطے سے محدد پر عمود۔

شکل 1.4: کارتیسی نظام میں نقطہ اور تین عمودی سطحیں۔

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.4-الف میں اس سطح کی نشاندہی کی گئی ہے۔ہم بالکل اسی طرح $y=0$ سطح اور $x=0$ سطح بھی بیان کر سکتے ہیں۔

شکل 1.4-ب کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی نقطے کو (x_0, y_0, z_0) لکھا جا سکتا ہے۔اس نقطے تک پہنچنے کی خاطر کارتیسی محدد کے مرکز سے پہلے x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0, 0, 0)$ تک پہنچیں۔اس کے بعد y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0, y_0, 0)$ تک پہنچیں اور آخر کار z محدد کے متوازی z_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے درکار نقطہ (x_0, y_0, z_0) تک پہنچیں۔اس عمل میں یہ ضروری نہیں کہ پہلے x محدد کے متوازی ہی چلا جائے۔آپ مرکز سے پہلے y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرنے کے بعد z محدد کے متوازی z_0 اور آخر کار x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے بھی اسی نقطے تک پہنچ سکتے ہیں۔تینوں فاصلوں کو کسی بھی ترتیب سے طے کیا جا سکتا ہے۔

نقطہ (x_0, y_0, z_0) سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے $(x_0, 0, 0)$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح اس نقطے سے y محدد پر عمود $(0, y_0, 0)$ اور z محدد پر عمود $(0, 0, z_0)$ دیتا ہے۔نقطہ (x_0, y_0, z_0) سے y محدد اور z محدد پر عمودی لکیریں گہری سیاہی میں دکھائے گئے ہیں۔اگر (x_0, y_0, z_0) سے شروع ہوتے ہوئے z محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $z=0$ ہو جائے تو نقطہ $(x_0, y_0, 0)$ حاصل ہو گا۔اب اگر یہاں سے x محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $x=0$ ہو جائے تو نقطہ $(0, y_0, 0)$ حاصل ہو گا۔یہ وہی نقطہ ہے جو (x_0, y_0, z_0) سے y محدد پر عمودی لکیر بناتے ہوئے حاصل ہوتا ہے۔اس عمل میں ہم پہلے x محدد کے متوازی چلتے ہوئے $x=0$ کرنے کے بعد z محدد کے متوازی چلتے ہوئے $z=0$ کرتے ہوئے بھی نقطہ $(0, y_0, 0)$ تک پہنچ سکتے تھے۔

نقطہ (x_0, y_0, z_0) تک قدر مختلف انداز سے بھی پہنچا جا سکتا ہے جسے کارتیسی محدد میں سمجھنا زیادہ آسان ہے۔فرض کریں کہ $x=x_0$ پر لامحدود yz سیدھی سطح بنائی جائے۔ایسی سطح کو $x=x_0$ سطح کہتے ہیں۔اس سطح کو

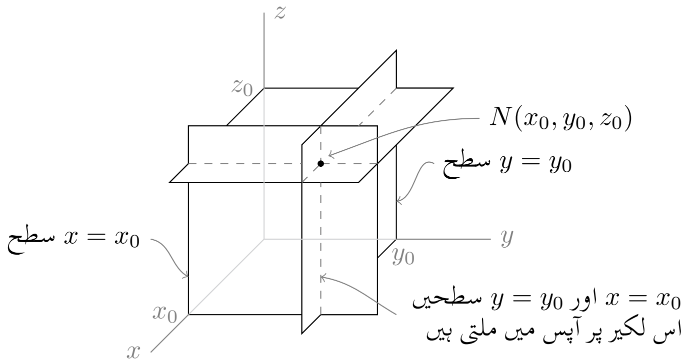
$$x=x_0, \quad y \leq |\mp\infty|, \quad z \leq |\mp\infty|$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں x_0 مقررہ ہے جبکہ y اور z متغیرات ہیں۔دو متغیرات کی مساوات سطح کو ظاہر کرتی ہے۔اگر $y=y_0$ پر لامحدود xz سیدھی سطح بنائی جائے تو یہ دو سطحے آپس میں سیدھی لکیر پر ملیں گے۔یہ لکیر

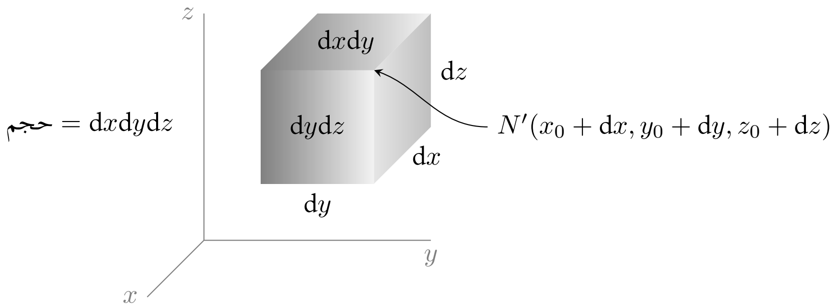
$$x=x_0, \quad y=y_0, \quad z \leq |\mp\infty|$$

لکھی جا سکتی ہے۔اس مساوات میں x_0 اور y_0 مقررہ ہیں جبکہ z متغیرہ ہے۔ایک متغیرہ کی مساوات لکیر کو ظاہر کرتی ہے۔اب اگر $z=z_0$ پر لامحدود xy سیدھی سطح بھی بنائی جائے تب یہ تینوں سطحے ایک نقطے $N(x_0, y_0, z_0)$ پر آپس کو چھوئینگے۔یہ صورت حال شکل 1.5 میں دکھائی گئی ہے جہاں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھیں گے کہ نقطے تک پہنچنے کا یہ طریقہ دیگر محدد میں استعمال کرنا لازمی ثابت ہو گا۔

coordinates[8]
three dimensional[9]
coplanar[10]



شکل 1.5: تین عمودی سطحوں سے نقطے کا حصول۔



شکل 1.6: چھ سطحے مکعب گھیرتی ہیں۔

اگر سطح $x = x_0$ کے متوازی $x = x_0 + \mathrm{d}x$ پر اور اسی طرح $y = y_0$ کے متوازی $y = y_0 + \mathrm{d}y$ اور $z = z_0$ کے متوازی $z = z_0 + \mathrm{d}z$ سطح رکھے جائیں تو یہ چھ سطحے ایک چھوٹی مکعب نما حجم کو گھیریں گی جسے شکل 1.6 میں دکھایا گیا ہے جبکہ یہ تین نئی سطحیں آپس میں نقطہ $N'(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y, z_0 + \mathrm{d}z)$ پر ملیں گی۔ اس مکعب نما کے اطراف $\mathrm{d}x$، $\mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}z$ ہیں۔ اس کی اوپر والی سطح کا رقبہ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہے۔ اسی طرح اس کی نچلی سطح کا رقبہ بھی $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہے۔ سامنے سطح اور پچھلی سطح دونوں $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ رقبے رکھتے ہیں جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ کے برابر ہیں۔ اس مکعب نما کی حجم $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ہے۔ نقطہ $N'(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y, z_0 + \mathrm{d}z)$ شکل میں دکھایا گیا ہے جبکہ نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ مکعب نما کا وہ واحد کونا ہے جسے شکل میں نہیں دکھایا گیا۔ ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ $NN' = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$ ہے۔

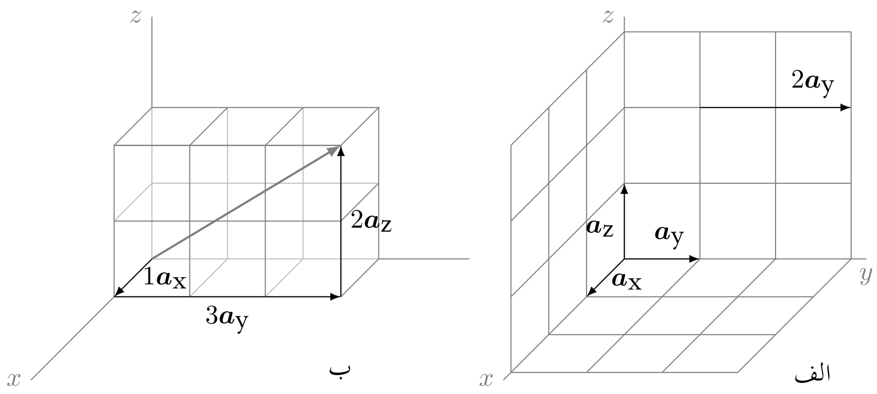
کارتیسی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرنے سے ہم N سے N' پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک کی سمتیہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{1.3}$$

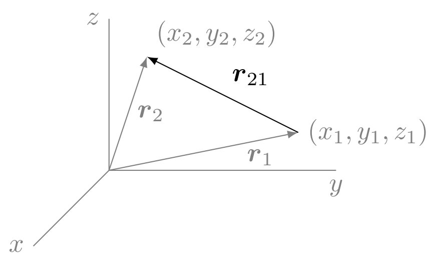
لکھی جاتی ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی لمبائی دیتی ہے۔

1.4 اکائی سمتیات

حصہ 1.3 کے شروع میں دو طرفہ کارتیسی نظام میں سیدھی سطح پر کسی بھی سمتیہ کو دو سمتیات کی صورت میں لکھنا دکھایا گیا۔ یہی طریقہ تین طرفہ کارتیسی نظام کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ تین طرفہ کارتیسی نظام کے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھے جاتے ہیں۔ یہ تینوں سمتیات آپس میں عمودی



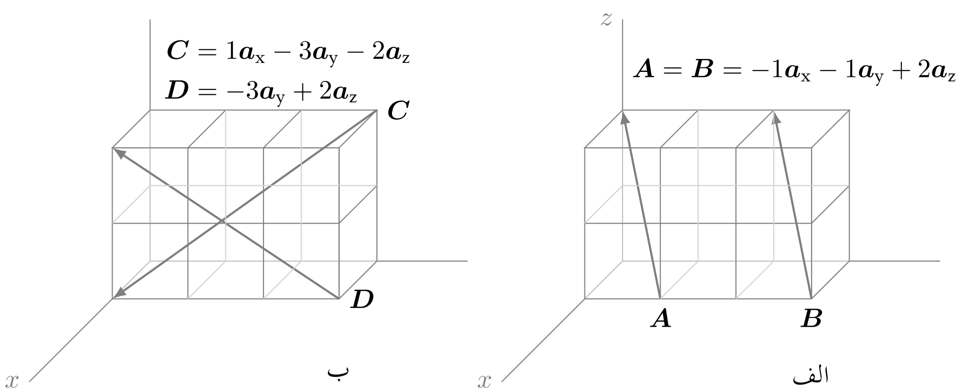
شکل 1.7: کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات اور ان کا استعمال



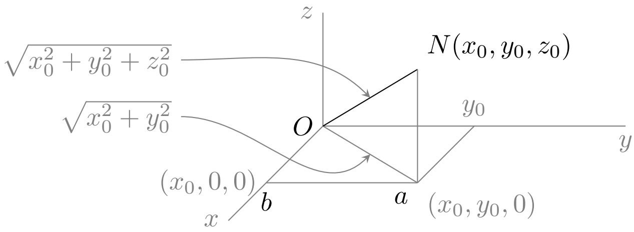
شکل 1.8: کارتیسی نظام میں سمتیہ کی مساوات کا حصول

ہیں۔کسی بھی اکائی سمتیہ کی طرح یہ تین اکائی سمتیات اکائی لمبائی رکھتے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کی سمت x محدد کے بڑھتے جانب کو ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت y محدد کے بڑھتے جانب کو اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی سمت z محدد کے بڑھتے جانب کو ہے۔ شکل 1.7-الف میں یہ تینوں اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔اسی شکل میں نقطہ $(0,1,2)$ پر سمتیہ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ یہ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت میں ہے۔اس سمتیہ کو $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھا جا سکتا ہے۔یاد رہے کہ ایسے دو سمتیات برابر ہوتے ہیں جن کا طول برابر ہو اور جو ایک ہی سمت میں ہوں۔یوں سمت تبدیل کئے بغیر سمتیہ کو کارتیسی محدد کے مرکز منتقل کرتے ہوئے اس کی قیمت نسبتاً آسانی سے لکھی جا سکتی ہے۔

شکل 1.8 میں مرکز سے (x_1, y_1, z_1) تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور مرکز سے (x_2, y_2, z_2) تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ بھی دکھائی گئی ہے جس کی دُم (x_1, y_1, z_1) اور نوک (x_2, y_2, z_2) پر ہے۔ سر سے دُم جوڑنے



شکل 1.9: کارتیسی نظام میں چند سمتیات۔



شکل 1.10: کارتیسی نظام میں سمتیہ کا طول۔

کے اصول کے استعمال سے $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_{21} + \boldsymbol{r}_1$ لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{21} &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \end{aligned} \tag{1.4}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے استعمال سے سمتیہ کی مساوات باآسانی حاصل ہوتی ہے۔سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں سمتیہ کی نوک کو 2 اور اس کی دُم کو 1 سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس کتاب میں سمتیہ لکھتے ہوئے نوک اور دُم کو اسی ترتیب سے زیر نوشت میں لکھا جائے گا۔یوں سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ کو تین اجزاء $(x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_{\text{X}}$، $(y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ اور $(z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.7-ب میں مرکز سے $(1, 3, 2)$ تک سمتیہ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کو تین سمتیات کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے یعنی $1\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ جہاں اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے تینوں اجزاء کو لکھا گیا ہے۔سمتیہ کی دُم $(0, 0, 0)$ اور اس کی نوک $(1, 3, 2)$ پر لیتے ہوئے یہی جواب مساوات 1.4 سے بھی حاصل ہوتا ہے۔

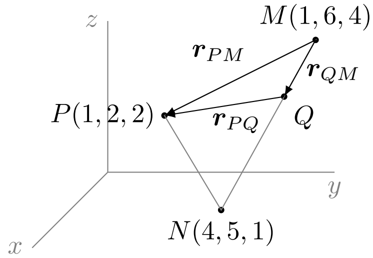
شکل 1.9-الف میں دو متوازی سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دکھائے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔چونکہ ان کی لمبائی برابر ہے اور یہ دونوں ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = -1\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ لکھا جائے گا۔شکل 1.9-ب میں $\boldsymbol{C}$ کی دُم سے $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ جانب ایک قدم اور یہاں سے $-\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ جانب تین قدم اور آخر کار $-\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ جانب دو قدم چلنے سے اس کی نوک تک پہنچا جا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{C} = 1\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ لکھا جائے گا۔اسی طرح $\boldsymbol{D}$ کی دُم سے $-\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ جانب تین قدم اور پھر $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ جانب دو قدم چلتے ہوئے سمتیہ کی نوک تک پہنچا جا یا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{D} = -3\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ لکھا جائے گا۔سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کو دو اجزاء کی شکل میں لکھا گیا ہے چونکہ اس کے تیسرے جزو کی لمبائی صفر کے برابر ہے۔

مشق 1.1: مساوات 1.4 کے استعمال سے شکل 1.9 میں تمام سمتیات لکھیں۔

جوابات: تمام جوابات شکل میں دئے گئے ہیں۔

شکل 1.10 میں مرکز سے نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ تک کا فاصلہ ON مسئلہ فیثاغورث[11] سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس نقطے سے $z = 0$ سطح پر عمود سے نقطہ a حاصل ہوتا ہے۔نقطہ a سے x محدد پر عمود نقطہ b دیتا ہے۔تکون Oba میں O سے b کا فاصلہ x_0 ہے جبکہ b سے a کا فاصلہ y_0 ہے۔یوں فاصلہ Oa مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ کے برابر ہو گا۔ تکون OaN میں a پر $90°$ کا زاویہ پایا جاتا ہے۔یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے ON کا فاصلہ $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ حاصل ہوتا ہے۔

[11] Pythagoras theorem



شکل 1.11: سمتیوں کا استعمال

مساوات 1.4 سمتیہ کی عمومی مساوات ہے۔اس میں دئے سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ کی دُم محدد کے مرکز پر رکھنے سے صاف ظاہر ہے کہ سمتیہ کی مقدار

$$|\boldsymbol{r}_{21}| = r_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{1.5}$$

کے برابر ہے۔اگر سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کیا جائے تو حاصل جواب کی مقدار اکائی ہو گی جبکہ اس کی سمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی۔یوں $\boldsymbol{r}_{21}$ کو $|\boldsymbol{r}_{21}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{r}_{21}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{r21}$ حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\boldsymbol{a}_{r21} = \frac{\boldsymbol{r}_{21}}{|\boldsymbol{r}_{21}|} = \frac{(x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_\text{x} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_\text{y} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_\text{z}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \tag{1.6}$$

یاد رہے کہ سمتیہ کی سمت اور طول تبدیل کئے بغیر اسے ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کیا جا سکتا ہے۔البتہ وہ سمتیہ جو کسی نقطے کی مقام تعین کرتا ہو کو اگر کہیں اور منتقل کیا جائے تو ایسی صورت میں سمتیہ کی نوک درکار نقطے پر نہیں رہے گی۔اسی حقیقت کی بنا پر میدان ظاہر کرنے والے سمتیہ کو اپنی جگہ سے نہیں ہٹایا جا سکتا۔میدانی سمتیہ کی دُم اس مقام پر پائی جاتی ہے جہاں میدان بیان کی جا رہی ہو۔

سمتیات کے استعمال سے نقطہ (x,y,z) کے مقام کو $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_\text{x} + y\boldsymbol{a}_\text{y} + z\boldsymbol{a}_\text{z}$ لکھا جاتا ہے۔کسی بھی سمتیہ مثلاً قوت $\boldsymbol{F}$ کو بالکل اسی طرح $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{a}_\text{x} + F_y\boldsymbol{a}_\text{y} + F_z\boldsymbol{a}_\text{z}$ لکھا جاتا ہے جہاں $F_x\boldsymbol{a}_\text{x}$، $F_y\boldsymbol{a}_\text{y}$ اور $F_z\boldsymbol{a}_\text{z}$ اس کے تین اجزاء ہیں۔اس طرح قوت کی مقدار $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ کے برابر ہو گی۔

مثال 1.1: نقطہ $(-5,2,-1)$ کا مقام ظاہر کرنے والا سمتیہ اور اس سمتیہ کا طول حاصل کریں۔اسی سمتیہ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز سے اس نقطے تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r} = -5\boldsymbol{a}_\text{x} + 2\boldsymbol{a}_\text{y} - 1\boldsymbol{a}_\text{z}$ ہے جبکہ اس سمتیہ کا طول $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 1^1} = \sqrt{30}$ ہے۔یوں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_r = \frac{-5\boldsymbol{a}_\text{x} + 2\boldsymbol{a}_\text{y} - 1\boldsymbol{a}_\text{z}}{\sqrt{30}}$ ہو گا۔

مثال 1.2: شکل 1.11 میں تین نقطے $M(1,6,4)$، $N(4,5,1)$ اور $P(1,2,2)$ دئے گئے ہیں۔M اور N کے درمیان سیدھی لکیر پر M سے کل فاصلے کے $\frac{1}{3}$ پر نقطہ Q پایا جاتا ہے۔Q سے P تک سمتیہ حاصل کرتے ہوئے ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔ حل: M سے N تک سمتیہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{NM} &= (4-1)\boldsymbol{a}_\text{x} + (5-6)\boldsymbol{a}_\text{y} + (1-4)\boldsymbol{a}_\text{z} \\ &= 3\boldsymbol{a}_\text{x} - 1\boldsymbol{a}_\text{y} - 3\boldsymbol{a}_\text{z}\end{aligned}$$

ہے۔ M سے Q تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{QM}$ اور $\boldsymbol{r}_{NM}$ ایک ہی سمت میں ہیں جبکہ $|\boldsymbol{r}_{QM}| = \frac{1}{3}|\boldsymbol{r}_{NM}|$ کے برابر ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{r}_{QM} = \frac{1}{3}\boldsymbol{r}_{NM} = \frac{1}{3}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

ہو گا۔ M سے P تک سمتیہ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{PM} &= (1-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (2-6)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (2-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ &= -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \end{aligned}$$

ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں $\boldsymbol{r}_{QM} + \boldsymbol{r}_{PQ} = \boldsymbol{r}_{PM}$ لہٰذا

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{PQ} &= \boldsymbol{r}_{PM} - \boldsymbol{r}_{QM} \\ &= (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) - (1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \\ &= -1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{11}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \end{aligned}$$

ہو گا۔ Q سے P تک فاصلہ $\sqrt{1^1 + \left(\frac{11}{3}\right)^2 + 1^2} = 3.93$ ہے۔

مشق 1.2: مثال 1.2 میں دیے نقطوں کو استعمال کرتے ہوئے M سے P تک سمتیہ حاصل کریں۔ اسی طرح P سے N تک سمتیہ اور M سے N تک سمتیہ حاصل کریں۔ پہلے دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے سر سے دُم جوڑنے کے اصول سے تیسرا سمتیہ دوبارہ حاصل کریں۔

جوابات: $-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$، $-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $-6\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

1.5 میدانی سمتیہ

لکھنا ہے

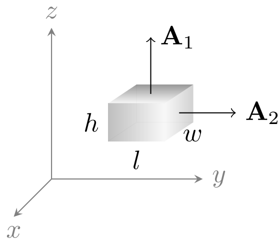
1.6 سمتی رقبہ

کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں۔ یوں سطح کے کسی بھی نقطے پر دو آپس میں الٹ سمتوں میں عمود بنائے جا سکتے ہیں۔ سیدھی سطح جس کا رقبہ S ہو کے ایک طرف پر اکائی عمود $\boldsymbol{a}_N$ اور دوسری طرف پر اکائی عمود $-\boldsymbol{a}_N$ بنائے جا سکتے ہیں۔ اگر ان دو عمود میں سے ایک عمود مثلاً $\boldsymbol{a}_N$ کو سطح کی سمت[12] تصور کیا جائے تب اس سطح کا سمتی رقبہ[13] $S\boldsymbol{a}_N$ ہو گا۔ بند سطح کے بیرونی اکائی عمود کو سطح کی سمت تصور کیا جاتا ہے۔ شکل 1.12 میں سمتی رقبے $\boldsymbol{A}_1$ اور $\boldsymbol{A}_2$ دکھائے گئے ہیں جہاں بند سطح کے بیرونی عمود کو ہی سطح کی سمت دکھایا گیا ہے۔

---

[12] عمود سطح کے ساتھ نوے درجہ زاویہ بناتا ہے۔ $\boldsymbol{a}_N$ کے زیر نوشت میں N، لفظ نوے کے پہلے حرف کی آواز کو ظاہر کرتا ہے۔

[13] vector area



$$\mathbf{A}_1 = A_1\mathbf{a}_{N1} = wl\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{A}_2 = A_2\mathbf{a}_{N2} = wh\mathbf{a}_y$$

شکل 1.12: سمتی رقبہ

1.7 غیر سمتی ضرب 292

دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے غیر سمتی ضرب[14] سے مراد $\boldsymbol{A}$ کی مقدار ضربِ $\boldsymbol{B}$ کی مقدار ضربِ سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کا کوسائن ہے۔

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta_{AB} \tag{1.7}$$

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر 293
منتقل کیا جا سکتا ہے۔غیر سمتی ضرب دو سمتیوں کے مابین کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب مقداری ہوتا ہے جس کی وجہ سے اسے مقداری ضرب 294 بھی
کہا جاتا ہے۔غیر سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان نقطے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی وجہ سے اسے ضرب نقطہ[15] بھی کہا جاتا ہے۔یوں $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ کو "$\boldsymbol{A}$ 295 نقطہ
$\boldsymbol{B}$" پڑھا جاتا ہے۔بالکل سادہ ضرب کی طرح $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ کو $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ بھی لکھا جا سکتا ہے یعنی غیر سمتی ضرب میں متغیرات کی ترتیب اہمیت نہیں رکھتی 296۔

کارتیسی اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ آپس میں عمودی ہیں لہٰذا ان میں کسی بھی دو سمتیات کے درمیان 90 زاویہ پایا جاتا ہے۔چونکہ $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ان میں کسی بھی دو سمتیوں کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0 \tag{1.8}$$

ایک ہی سمت میں دو سمتیوں کے درمیان صفر زاویہ ہوتا ہے اور $\cos 0 = 1$ کے برابر ہے۔اکائی سمتیہ کا طول بھی ایک کے برابر ہے لہٰذا مساوات 1.7 کے تحت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کا غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = (|\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}|)(|\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}|)(\cos 0) = (1)(1)(1) = 1$$

ہو گا۔بقایا دو کارتیسی اکائی سمتیات کا خود غیر سمتی ضرب بھی ایک کے برابر ہے۔

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 1 \tag{1.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کو کرونیکر ڈیلٹا[16] δ_{ij} کی مدد سے ایک ہی مساوات کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \tag{1.10}$$

جہاں

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases} \tag{1.11}$$

---

[14] scalar product
[15] dot product
[16] یہ لیوپولڈ کرونیکر کے نام سے منسوب ہے۔

کے برابر ہے یعنی $i = j$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت ایک جبکہ $i \neq j$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت صفر کے برابر لی جاتی ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ کی صورت میں $i = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جبکہ $j = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ کے برابر ہیں۔یوں i اور j برابر نہیں ہیں لہٰذا حاصل جواب صفر کے برابر ہو گا۔اس کے بر عکس $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کی صورت میں $i = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $j = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہیں لہٰذا $i = j$ ہے اور یوں حاصل جواب ایک کے برابر ہے۔ 299

کارتیسی تین عمودی اکائیوں کی مدد سے سمتیات کا غیر سمتی ضرب نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔یوں اگر $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ دو سمتیات ہوں تب ان کا غیر سمتی ضرب

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cdot (B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \\ &= A_xB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_xB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_xB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ &\quad + A_yB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_yB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_yB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ &\quad + A_zB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_zB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_zB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

ہو گا۔مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کا سہارا لیتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.12}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کا خود غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\boldsymbol{A}|^2 \tag{1.13}$$

اس کے طول کے مربع کے برابر ہے۔یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جسے عموماً استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کا طول حاصل کیا جاتا ہے۔ 300

مساوات 1.7 اور مساوات 1.12 کی مدد سے دو سمتیوں کے مابین زاویہ معلوم کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B})}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}\right) \tag{1.14}$$

301

مثال 1.3: شکل 1.11 میں تکون دکھایا گیا ہے جس کے نوک $M(1,6,4)$، $N(4,5,1)$ اور $P(1,2,2)$ ہیں۔M پر زاویہ حاصل کریں۔ 302

حل: مثال 1.2 میں $\boldsymbol{r}_{NM} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{r}_{PM} = 0\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ حاصل کئے گئے۔ $|\boldsymbol{r}_{NM}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{19}$ اور $|\boldsymbol{r}_{PM}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ ہیں جبکہ

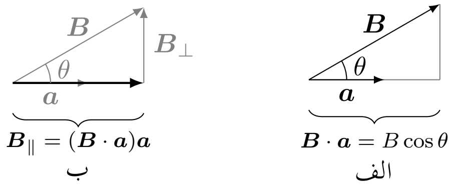
$$\boldsymbol{r}_{NM} \cdot \boldsymbol{r}_{PM} = 0 + 4 + 6 = 10$$

کے برابر ہے۔یوں ان سمتیوں کے مابین زاویہ

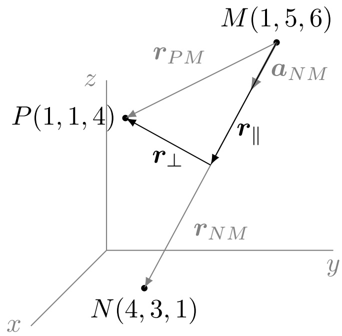
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{19}\sqrt{20}}\right) = 1.0321 \quad \mathrm{rad}$$

یا $59.137°$ ہے۔ 303

304



شکل 1.13: کسی بھی سمت میں سمتیہ کے جزو کا حصول۔



شکل 1.14: متوازی اور عمودی اجزاء۔

شکل 1.13-الف میں سمتیہ $\boldsymbol{B}$ اور اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}$ دکھائے گئے ہیں۔ان کا غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{a}|\cos\theta = B\cos\theta$$

کے برابر ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ یہی $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کے جزو کا طول $B_{\parallel}$[17] ہے۔یوں کسی بھی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کے جزو کا طول حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{B}$ اور اس سمت کی اکائی سمتیہ کا غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔یوں حاصل طول کا اکائی سمتیہ کے ساتھ ضرب یعنی $(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$ سے اکائی سمتیہ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کا سمتی جزو حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.13-ب میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کا سمتی جزو $\boldsymbol{B}_{\parallel}$ دکھایا گیا ہے۔شکل سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{B}$ سے $B_{\parallel}\boldsymbol{a}$ منفی کرنے سے $B_{\perp}$ حاصل ہوتا ہے جو $\boldsymbol{B}$ کا وہ جزو ہے جو $\boldsymbol{a}$ کے عمودی ہے۔

غیر سمتی ضرب کا حاصل جواب دو صورتوں میں صفر کے برابر ہوتا ہے۔پہلی صورت وہ ہے جب دونوں سمتیوں میں سے کم از کم ایک سمتیہ کا طول صفر کے برابر ہو۔دوسری صورت وہ ہے جب دونوں سمتیات آپس میں عمودی ہوں۔ عمودی ہونے کی صورت میں ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہو گا اور $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے۔یوں دو سمتیوں کے نقطہ ضرب صفر کے برابر ہونے سے اخذ کیا جاتا ہے کہ یہ آپس میں عمودی ہیں۔

مثال 1.4: شکل 1.14 میں تین نقطے $M(1,5,6)$، $N(4,3,1)$ اور $P(1,1,4)$ دئے گئے ہیں۔M اور N سے گزرتی سیدھی لکیر سے P کا عمودی فاصلہ حاصل کریں۔

حل: M سے N تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{NM} = 3\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہے جس کا طول $|\boldsymbol{r}_{NM}| = \sqrt{38}$ ہے۔یوں اس سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM} = \frac{3\boldsymbol{a}_{\text{x}}-2\boldsymbol{a}_{\text{y}}-5\boldsymbol{a}_{\text{z}}}{\sqrt{38}}$ ہو گا۔اسی طرح M سے P تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{PM} = -4\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہے۔$\boldsymbol{a}_{NM}$ کی سمت میں $\boldsymbol{r}_{PM}$ کا طول

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \boldsymbol{r}_{PM}\cdot\boldsymbol{a}_{NM} = (-4\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{z}})\cdot\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\text{z}}}{\sqrt{38}}\right) \\ &= \frac{0+8+10}{\sqrt{38}} = \frac{18}{\sqrt{38}} \end{aligned}$$

[17] $B_{\parallel}$ لکھتے ہوئے زیرنوشت میں دو متوازی لکیریں یہ بتلاتی ہیں کہ $\boldsymbol{B}$ کا یہ وہ حصہ ہے جو $\boldsymbol{a}$ کے متوازی ہے۔اسی طرح عمودی مقدار کو عموماً $\perp$ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہے یوں $\boldsymbol{a}_{NM}$ سمت میں $\boldsymbol{r}_{PM}$ کا سمتی جزو

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} = r_{\parallel}\boldsymbol{a}_{NM} = \frac{18}{\sqrt{38}}\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}}\right) = \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})$$

ہے۔ $\boldsymbol{r}_{PM}$ سے $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ منفی کرنے سے لکیر سے P تک عمودی سمتیہ $\boldsymbol{r}_{\perp}$ حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{\perp} = \boldsymbol{r}_{PM} - \boldsymbol{r}_{\parallel} &= (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) - \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \\ &= \frac{-27\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 58\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{19}\end{aligned}$$

جس کا طول $\frac{\sqrt{27^2+58^2+7^2}}{19} = 3.3873$ ہے۔یوں P کا لکیر سے عمودی فاصلہ 3.3873 ہے۔

$\boldsymbol{r}_{\parallel}$ اور $\boldsymbol{r}_{\perp}$ آپس میں عمودی ہیں لہٰذا ان کا نقطہ ضرب

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{r}_{\perp} = \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \left(\frac{-27\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 58\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{19}\right) = \frac{18}{722}(-81 + 116 - 35) = 0$$

صفر کے برابر ہے۔

شکل 1.14 میں اگر M پر $\boldsymbol{r}_{NM}$ کی دُم رکھی جائے تب $\boldsymbol{r}_{NM}$ کی نوک N کا مقام تعین کرتا ہے۔عموماً کسی بھی نقطے کا مقام محدد کے مرکز $(0,0,0)$ کی نسبت سے طے کیا جاتا ہے۔ایسا سمتیہ جس کی دُم مرکز پر رکھتے ہوئے اس کی نوک نقطے کا مقام طے کرے مقام تعین کنندہ سمتیہ[18] کہلاتا ہے۔اگر تعین کنندہ سمتیہ کو مرکز سے ہٹایا جائے تب ظاہر ہے اس کی نوک اصل مقام طے کرنے سے قاصر ہو گی۔

مثال 1.5: شکل 1.14 میں M سے شروع ہوتے اور N جانب بڑھتی سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطے کا مقام تعین کرتے تعین کنندہ سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز $(0,0,0)$ سے نقطہ M تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_M = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے جبکہ M سے N جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM}$ گزشتہ مثال میں حاصل کیا گیا۔اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM}$ کی سمت میں M سے s فاصلے پر نقطہ Q تک کا سمتیہ $s\boldsymbol{a}_{NM}$ ہے۔یوں مرکز سے Q تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_M + s\boldsymbol{a}_{NM}$ ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}_Q = (1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) + s\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}}\right)$$

اس مساوات میں s متغیرہ ہے جسے تبدیل کرتے ہوئے سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطہ Q تک پہنچا جا سکتا ہے۔

مثال 1.6: $z = z_0$ پر $1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے عمودی سیدھی سطح کی مساوات حاصل کریں جہاں z_0 مستقل ہے۔

[18]displacement vector

حل:نقطہ $N_1(0,0,z_0)$ سے کسی بھی نقطہ $N_2(x,y,z)$ تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}=x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+(z-z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے۔سطح پر کسی بھی سمتیہ اور سطح کے عمودی سمتیہ آپس میں نوے درجے زاویہ پر پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔یوں اگر N_2 اسی عمودی سطح پر پایا جائے تب

$$1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot[x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+(z-z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}]=z-z_0=0$$

ہو گا جس سے اس سطح کی مساوات $z=z_0$ حاصل ہوتی ہے۔

اس قیمت کو $\boldsymbol{r}_{21}$ میں پُر کرتے ہوئے $\boldsymbol{r}_{21}=x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل ہوتا ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں۔چونکہ مرکز سے N_1 کا تعین کنندہ سمتیہ $\boldsymbol{r}_{10}=z_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے لہٰذا $z=z_0$ سطح پر کسی بھی نقطہ N_2 کا تعین کنندہ سمتیہ یعنی سطح کی سمتی مساوات $\boldsymbol{r}_{20}=x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+z_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو گی۔

مشق 1.3: مرکز سے $(2,1,3)$ تک کی سمتیہ ایک سیدھی سطح کی عمودی سمتیہ ہے۔اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $2x+y+3z=14$

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب

دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے سمتی ضرب[19] کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جس کا طول $\boldsymbol{A}$ کی مقدار ضربِ $\boldsymbol{B}$ کی مقدار ضربِ سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کے سائن کے برابر ہے۔حاصل سمتیہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سمتیات کی عمودی سمت میں ہوتا ہے جسے اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{a}_N$ سے ظاہر کیا جائیگا۔

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta_{AB}\boldsymbol{a}_N \tag{1.15}$$

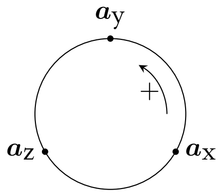
جس سیدھی سطح پر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں پائے جائیں، $\boldsymbol{a}_N$ اس سطح کے دو عمودی سمتیات میں سے ایک ہے۔$\boldsymbol{a}_N$ کو دائیں ہاتھ کے قانون[20] سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

دائیں ہاتھ کی ہتھیلی سیدھی اور انگوٹھے کو بقایا چار انگلیوں کے عمود میں رکھتے ہوئے پہلی انگلی کو $\boldsymbol{A}$ اور دوسری انگلی کو $\boldsymbol{B}$ کی سمت میں رکھیں۔اس صورت میں انگوٹھا $\boldsymbol{a}_N$ کی سمت میں ہو گا۔

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان صلیبی نشان $\times$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی وجہ سے اسے صلیبی ضرب[21] بھی کہا جاتا ہے اور

---

[19] vector product
[20] right hand rule
[21] cross product



شکل 1.15: صلیبی ضرب کا حصول۔

$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ کو "$\boldsymbol{A}$ صلیب $\boldsymbol{B}$" پڑھا جاتا ہے۔ سمتی ضرب میں سمتیوں کی ترتیب نہایت اہم ہے اور انہیں الٹانے سے حاصل جواب کی سمت الٹی ہو جاتی ہے۔

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \tag{1.16}$$

اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $1 = \sin 90$ کے برابر ہے جبکہ دائیں ہاتھ کے قانون سے ان کے صلیبی ضرب کی سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ حاصل ہوتی ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے برابر ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔مساوات 1.16 کے تحت یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھے جا سکتے ہیں۔دو متوازی سمتیوں کے درمیان صفر درجے کا زاویہ ہوتا ہے اور $0 = \sin 0$ کے برابر ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = 0$ کے برابر ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 0$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0$ کے برابر ہیں۔ان تمام جوابات کو ایک جگہ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \quad &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \quad &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \\ &\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = 0 \quad &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 0 \quad &&\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

یہی جوابات شکل 1.15 کی مدد سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔اس شکل میں گھڑی کی الٹ سمت مثبت سمت ہے۔یوں اگر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ حاصل کرنا[339] ہو تو شکل میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سے شروع ہو کر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی جانب کم راستے پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ حاصل ہوتا ہے۔ساتھ ہی ساتھ چونکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانے کی خاطر مثبت راستہ[340] اختیار کیا گیا لہٰذا جواب مثبت یعنی $+\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہو گا۔اس کے برعکس $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب کم راستے پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ حاصل[341] ہوتا ہے البتہ یہ راستہ گھڑی کے الٹ سمت یعنی منفی سمت میں ہے لہٰذا جواب $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ہو گا۔[342]

مساوات 1.17 کی مدد سے $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی صلیبی ضرب

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \times (B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \\ &= A_xB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_xB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_xB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ &\quad + A_yB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_yB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_yB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ &\quad + A_zB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_zB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_zB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \end{aligned}$$

کو

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.18}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس جواب کو قالب کے حتمی قیمت کی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.19}$$

یوں اگر $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہوں تب

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\
&= [(-3)(-4) - (1)(5)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - [(2)(-4) - (1)(6)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + [(2)(5) - (-3)(6)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 14\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 28\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

ہو گا۔ 343

مثال 1.7: $N_1(2,3,1)$، $N_2(1,6,5)$ اور $N_3(-2,-3,2)$ سیدھی سطح پر پائے جاتے ہیں۔اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔ 344

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{21} &= (1-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (6-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (5-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{r}_{31} &= (-2-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (-3-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (2-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

کے سمتی ضرب سے ان کا عمودی سمتیہ حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_N &= (-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \times (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \\
&= 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 16\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 24\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\
&= 27\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 15\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

سطح پر دئے گئے تین نقطوں سے سطح پر کسی بھی نقطہ $N_4(x,y,z)$ تک کا سمتیہ اس عمودی سمتیہ کے نوے درجے زاویہ پر ہو گا اور یوں ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔N_1 سے N_4 تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{41} = (x-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے استعمال سے

$$\boldsymbol{r}_{41} \cdot \boldsymbol{r}_N = [(x-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}] \cdot (27\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 15\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) = 0$$

لکھ کر

$$27(x-2) - 15(y-3) + 18(z-1) = 0$$

سے

$$27x - 15y + 18z = 27$$

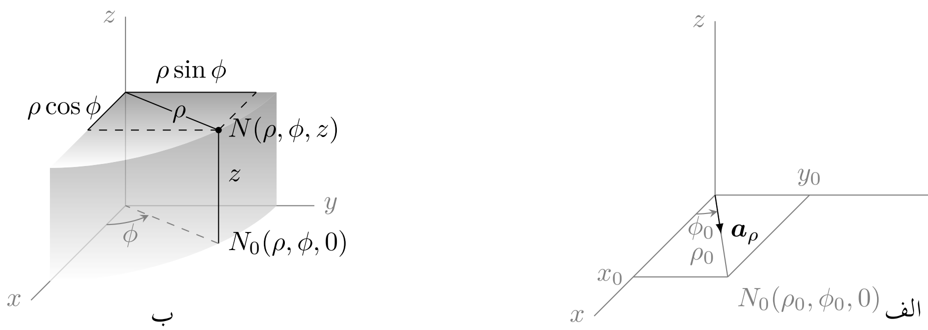
سیدھی سطح کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ایسی مساوات میں x، y اور z کے مخفف عمودی سمتیہ میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے مخفف 27، -15 اور 18 ہوتے ہیں۔ 345
346

سطح کی مساوات سے $z = \frac{9-9x+5y}{6}$ لکھا جا سکتا ہے۔ سطح پر N_4 کی تعین کنندہ مساوات $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ میں z کی قیمت پُر کرتے ہوئے سطح کی سمتی مساوات

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{9-9x+5y}{6}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں جبکہ z کو بطور تابع متغیرہ لکھا گیا ہے۔ 347

348



شکل 1.16: نلکی محدد

مشق 1.4: $\boldsymbol{A} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{B} = 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی صورت میں $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$، $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{a}_B$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times (\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{B})$ حاصل کریں۔

خلاء میں کسی بھی نقطے کا مقام کارتیسی محدد کے علاوہ دیگر طرز کے محدد سے بھی تعین کیا جا سکتا ہے۔ماہرین طبیعیات تقریباً ایک درجن اقسام کے محددی نظام استعمال کرتے ہیں۔ہم اس کتاب میں کارتیسی نظام کے علاوہ دو مزید اقسام کے محددی نظام استعمال کریں گے۔آئیں انہیں پر غور کریں۔

1.9 گول نلکی محدد

کارتیسی نظام میں کسی بھی نقطے کا مقام مرکز سے x، y اور z سمتوں میں فاصلوں سے طے کیا جاتا ہے۔آئیں اب ایسا نظام دیکھیں جس میں ایک عدد زاویہ اور دو عدد فاصلے استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے کا مقام طے ہو۔

شکل 1.16-الف میں $z = 0$ سطح پر نقطہ N_0 دکھایا گیا ہے جسے کارتیسی محدد میں $N_0(x_0, y_0, 0)$ لکھا جائے گا۔اگر مرکز سے N_0 تک سیدھی لکیر کی لمبائی ρ_0 اور x محدد سے اس لکیر کا زاویہ ϕ_0 ہو تب اسی نقطے کو **گول نلکی محدد**[22] کے نظام میں $N_0(\rho_0, \phi_0, 0)$ لکھا جاتا ہے۔اس کتاب میں گول نلکی محدد کا نام چھوٹا کر کے اسے **نلکی محدد** پکارا جائے گا۔اگر $z = 0$ سطح پر مرکز سے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ ہو تب مرکز سے نقطے تک سمتیہ کو

$$\boldsymbol{\rho} = \rho_0 \boldsymbol{a}_\rho \qquad (\phi = \phi_0, \quad z = 0) \tag{1.20}$$

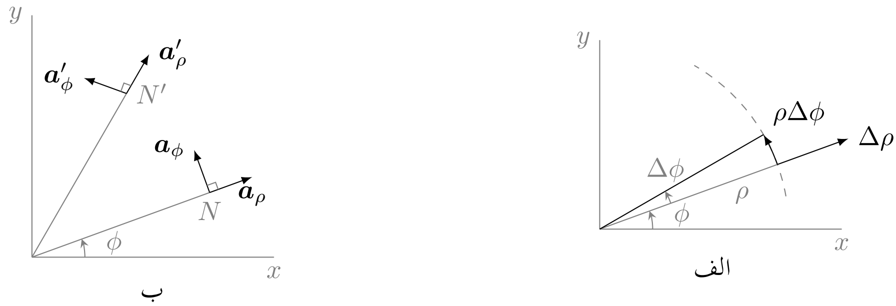
لکھا جا سکتا ہے۔نلکی اور کارتیسی نظام میں z محدد یکساں ہیں۔

شکل 1.16-الف یا شکل-ب سے کارتیسی اور نلکی محدد کے تعلق اخذ کئے جا سکتے ہیں۔یوں نلکی محدد کے متغیرات (ρ, ϕ, z) سے کارتیسی متغیرات (x, y, z) یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \tag{1.21}$$

---

[22]cylindrical coordinate system



شکل 1.17: نلکی محدد میں متغیرات کے تبدیلی سے فاصلے کا حصول اور اکائی سمتیات۔

اسی طرح (x, y, z) سے (ρ, ϕ, z) یوں حاصل کئے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (\rho \geq 0) \\
\phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \\
z &= z
\end{aligned} \tag{1.22}$$

مندرجہ بالا مساوات میں رداس کی صرف مثبت قیمت لی گئی۔ہم رداس کی قیمت مثبت ہی لیتے ہیں۔

شکل 1.17-الف میں ϕ زاویہ پر ρ رداس کا ہلکی سیاہی میں دکھایا سمتیہ نقطہ N ہے۔اس شکل میں ϕ اور z تبدیل کئے بغیر ρ کو $\Delta\rho$ بڑھتا دکھایا گیا ہے۔اس صورت میں سمتیہ کی نوک $\Delta\rho$ فاصلہ طے کرتی ہے۔نقطہ N سے $\Delta\rho$ کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے $\boldsymbol{a}_\rho$ لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.17-الف میں ρ اور z تبدیل کئے بغیر ϕ کو $\Delta\phi$ بڑھا کر اسی سمتیہ کو گاڑھی سیاہی میں دوبارہ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سمتیہ کی نوک نے ρ رداس کے گول دائرے پر حرکت کرتے ہوئے $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کیا۔یوں اگر زاویہ کو 0 تا 2π ریڈیئن تبدیل کیا جائے تو سمتیہ کی نوک گول دائرے پر ایک مکمل چکر کاٹے گی۔جیسے جیسے $\Delta\phi$ کو کم سے کم کیا جائے ویسے ویسے $\rho\Delta\phi$ گول دائرے کے مماس کی صورت اختیار کرے گی حتیٰ کہ $\mathrm{d}\phi$ کی صورت میں $\rho\,\mathrm{d}\phi$ گول دائرے کا مماس ہو گا۔نقطہ N پر بڑھتے ϕ جانب مماس کی سمت میں اکائی سمتیہ کو $\boldsymbol{a}_\phi$ لکھا جاتا ہے۔اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح اگر نقطہ N پر صرف z کو Δz تبدیل کیا جائے تب سمتیہ کی نوک Δz فاصلہ طے کرے گی۔Δz کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی تیسری اور آخری بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔نلکی محدد کے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ مل کر دائیں ہاتھ کا عمودی نظام دیتے ہیں۔نقطہ (ρ_1, ϕ_1, z_1) پر نلکی محدد کے اکائی سمتیات کو شکل 1.18 میں دکھایا گیا ہے۔$\boldsymbol{a}_\rho$ گول سطح $\rho = \rho_1$ کے عمودی ہے۔یہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_\phi$ سیدھی سطح $\phi = \phi_1$ کے عمودی ہے۔یہ $z = z_1$ سطح پر پایا جاتا ہے اور $\rho = \rho_1$ نلکی سطح کا مماس ہے۔$\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اکائی سمتیہ $z = z_1$ سطح کے عمودی ہے۔یہ $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔

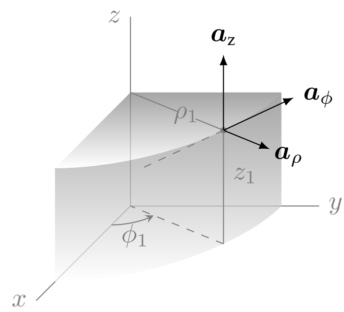
دائیں ہاتھ کے عمودی نظام میں سمتی ضرب کا حاصل جواب صفحہ 14 پر دئے گئے دائیں ہاتھ کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\phi = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \boldsymbol{a}_\rho, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \times \boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_\phi \tag{1.23}$$

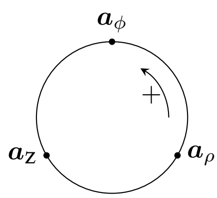
لکھا جا سکتا ہے۔یہی جوابات شکل 1.19 سے بھی اخذ کئے جا سکتے ہیں۔

کسی سمتیہ کا خود سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\rho = 0, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_\phi = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 0 \tag{1.24}$$



شکل 1.18: نلکی محدد کے اکائی سمتیات۔



شکل 1.19: صلیبی ضرب کی حاصل اکائی سمتیہ۔

لکھا جا سکتا ہے جبکہ کسی بھی اکائی سمتیہ کا خود غیر سمتی ضرب ایک کے برابر ہوتا ہے لٰہذا

$$\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 1, \quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 1, \quad \boldsymbol{a}_Z \cdot \boldsymbol{a}_Z = 1 \tag{1.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح کسی بھی دو عمودی سمتیات کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0, \quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_Z = 0, \quad \boldsymbol{a}_Z \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 0 \tag{1.26}$$

غیر سمتی ضرب کو کرونیکر ڈیلٹا کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \tag{1.27}$$

جہاں

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases} \tag{1.28}$$

کے برابر ہے۔

آپ دیکھتے ہیں کہ کسی بھی نقطہ $N(\rho, \phi, z)$ پر اکائی سمتیات حاصل کرنے کی خاطر محدد کے متغیرات ρ، ϕ اور z کو باری باری انتہائی کم بڑھایا جاتا ہے۔ جس سمت میں نقطہ حرکت کرے، اسی سمت میں اکائی سمتیہ ہو گی۔ شکل 1.17-ب میں دو مختلف نقاط N اور N' پر نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات کی سمت کا دارومدار اس نقطے پر ہے جہاں انہیں حاصل کیا جائے۔ آپ جانتے ہیں کہ کارتیسی نظام میں نقطے کا مقام تبدیل کرنے سے کارتیسی اکائی سمتیات تبدیل نہیں ہوتے۔ یوں نلکی محدد کے اکائی سمتیات اٹل نہیں ہیں۔ یہ ایک انتہائی اہم حقیقت ہے جو تکمل لیتے وقت پیچیدگیاں پیدا کرتا ہے۔ تکمل لیتے وقت کارتیسی اکائی سمتیات اٹل ہونے کی بنا پر تکمل کے باہر لے جائے جا سکتے ہیں جبکہ نلکی محدد کے $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ اکائی سمتیات کو تکمل کے باہر نہیں لے جایا جا سکتا۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ N پر حاصل کئے گئے $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_Z$ آپس میں عمودی ہوں گے جبکہ کسی اور نقطہ N' پر حاصل کئے گئے $\boldsymbol{a}'_\rho$، $\boldsymbol{a}'_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_Z$ آپس میں عمودی ہوں گے۔

شکل 1.20: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

جدول 1.1: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_{\text{z}}$	$\boldsymbol{a}_{\text{y}}$	$\boldsymbol{a}_{\text{x}}$	
0	$\sin\phi$	$\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_{\rho}$
0	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	$\boldsymbol{a}_{\phi}$
1	0	0	$\boldsymbol{a}_{\text{z}}$

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب 382

شکل 1.20-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ کے مابین زاویہ ϕ ہے جبکہ اکائی سمتیات کی لمبائی ایک ہوتی ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{x}} = (1)(1)(\cos\phi) = \cos\phi \tag{1.29}$$

ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کے مابین زاویہ $(90^\circ - \phi)$ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{y}} = (1)(1)[\cos(90^\circ - \phi)] = \sin\phi \tag{1.30}$$

کے برابر ہے۔ اس مساوات میں $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ کو استعمال کرتے ہوئے $\cos(90^\circ - \phi) = \sin\phi$ لکھا گیا ہے۔ شکل 1.20-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\phi}$، $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ کے مابین زاویہ $(90^\circ + \phi)$ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{x}} = (1)(1)[\cos(90^\circ + \phi)] = -\sin\phi \tag{1.31}$$

ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کے مابین زاویہ ϕ ہے لہٰذا

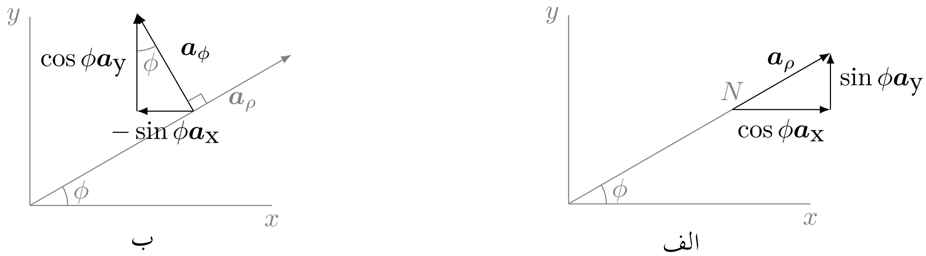
$$\boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{y}} = (1)(1)(\cos\phi) = \cos\phi \tag{1.32}$$

کے برابر ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ کا $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہے۔ اس کی وجہ ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے۔ ان تمام غیر سمتی ضرب 383
کو جدول 1.1 میں یکجا کیا گیا ہے۔ 384

1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق 385

شکل 1.21-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدد میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ کی لمبائی ایک کے برابر ہے۔ یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\rho} &= \cos\phi\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \sin\phi\boldsymbol{a}_{\text{y}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\text{y}}\end{aligned} \tag{1.33}$$



شکل 1.21: $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

شکل 1.22: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدد کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔ شکل 1.21-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدد میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\phi} &= -\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\ &= -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\end{aligned} \tag{1.34}$$

جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدد کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔ 386

شکل 1.22-الف میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ جس نقطے پر ایسا درکار ہو، اس نقطے پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کی دُم رکھیں۔ مرکز سے نقطے تک نقطہ دار سیدھی لکیر کھینچتے ہوئے اسے مزید آگے بڑھائیں۔ اس نقطے پر $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اسی لکیر کی سمت میں ہو گا جبکہ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ لکیر کے ساتھ نوے درجے کا زاویہ بنائے گا۔ شکل میں $\boldsymbol{a}_{\phi}$ دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود بنائیں۔ صاف ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔ ان میں سے ایک سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ کی سمت میں اور دوسرا سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کی الٹ جانب کو ہو گا۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = \cos\phi\boldsymbol{a}_{\rho} - \sin\phi\boldsymbol{a}_{\phi} \tag{1.35}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.22-ب میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ یہاں نقطہ پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی دُم رکھتے ہوئے اس کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود کھینچا گیا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \sin\phi\boldsymbol{a}_{\rho} + \cos\phi\boldsymbol{a}_{\phi} \tag{1.36}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ 387

آئیں مساوات 1.33 تا مساوات 1.36 کو جدول 1.1 کی مدد سے حاصل کریں۔ کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کو کارتیسی یا نلکی محدد میں لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ &= A_\rho\boldsymbol{a}_{\rho} + A_\phi\boldsymbol{a}_{\phi} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned} \tag{1.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان میں پہلی مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\text{X}}\cdot\boldsymbol{A}&=A_x\boldsymbol{a}_{\text{X}}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{X}}+A_y\boldsymbol{a}_{\text{X}}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{y}}+A_z\boldsymbol{a}_{\text{X}}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{Z}}=A_x\\ \boldsymbol{a}_{\text{y}}\cdot\boldsymbol{A}&=A_x\boldsymbol{a}_{\text{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{X}}+A_y\boldsymbol{a}_{\text{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{y}}+A_z\boldsymbol{a}_{\text{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{Z}}=A_y\\ \boldsymbol{a}_{\text{Z}}\cdot\boldsymbol{A}&=A_x\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{X}}+A_y\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{y}}+A_z\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{Z}}=A_z\end{aligned}\tag{1.38}$$

حاصل ہوتے ہیں۔$\boldsymbol{A}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر A_x، A_y اور A_z درکار ہوتے ہیں جنہیں مندرجہ بالا مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح مساوات 1.37 کے نچلے حصے کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{A}&=A_\rho\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\rho+A_\phi\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\phi+A_z\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_{\text{Z}}=A_\rho\\ \boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{A}&=A_\rho\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_\rho+A_\phi\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_\phi+A_z\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_{\text{Z}}=A_\phi\\ \boldsymbol{a}_{\text{Z}}\cdot\boldsymbol{A}&=A_\rho\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_\rho+A_\phi\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_\phi+A_z\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{Z}}=A_z\end{aligned}\tag{1.39}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{A}$ کو نلکی نظام میں لکھنے کی خاطر A_ρ، A_ϕ اور A_z کو مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ 388

آئیں $\boldsymbol{a}_\rho$ کو کارتیسی نظام میں لکھیں۔یوں $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_\rho$ کو کارتیسی نظام میں لکھنا مطلوب ہے۔مساوات 1.38 کے مطابق A_x حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ لینا ہو گا۔جدول 1.1 کے استعمال سے

$$A_x=\boldsymbol{a}_{\text{X}}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_{\text{X}}\cdot\boldsymbol{a}_\rho=\cos\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح جدول کو استعمال کرتے ہوئے

$$A_y=\boldsymbol{a}_{\text{y}}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_{\text{y}}\cdot\boldsymbol{a}_\rho=\sin\phi$$

اور

$$A_z=\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_\rho=0$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{a}_{\text{X}}+A_y\boldsymbol{a}_{\text{y}}+A_z\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{a}_\rho=\cos\phi\boldsymbol{a}_{\text{X}}+\sin\phi\boldsymbol{a}_{\text{y}}$$

لکھا جائے گا۔یہی جواب مساوات 1.33 میں بھی حاصل کیا گیا تھا۔ 389

$\boldsymbol{a}_\phi$ کو بھی اسی طرح کارتیسی نظام میں لکھا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے اس سمتیہ کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}A_x&=\boldsymbol{a}_{\text{X}}\cdot\boldsymbol{a}_\phi=-\sin\phi\\ A_y&=\boldsymbol{a}_{\text{y}}\cdot\boldsymbol{a}_\phi=\cos\phi\\ A_z&=\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_\phi=0\end{aligned}$$

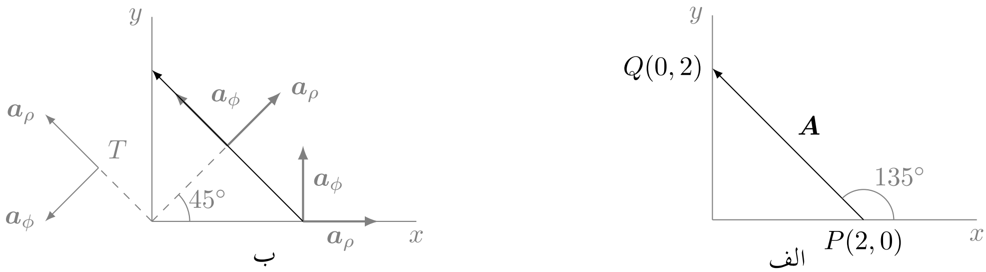
یوں

$$\boldsymbol{a}_\phi=A_x\boldsymbol{a}_{\text{X}}+A_y\boldsymbol{a}_{\text{y}}+A_z\boldsymbol{a}_{\text{Z}}=-\sin\phi\boldsymbol{a}_{\text{X}}+\cos\phi\boldsymbol{a}_{\text{y}}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہی جواب مساوات 1.34 بھی دیتا ہے۔ 390

آپ سے گزارش ہے کہ جدول 1.34 کو یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔اپنے آپ میں یہ صلاحیت پیدا کریں کہ ان جوابات کو آپ جلد اخذ کر سکیں۔ 391

392



شکل 1.23: کارتیسی اور نلکی محدد میں سمتیہ۔

---

393 **مشق 1.5:** $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کو جدول 1.1 کی مدد سے نلکی محدد میں لکھیں۔

جوابات:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} &= \cos\phi\boldsymbol{a}_\rho - \sin\phi\boldsymbol{a}_\phi \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} &= \sin\phi\boldsymbol{a}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{a}_\phi \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

394

شکل 1.23 میں $P(2,0)$ سے $Q(0,2)$ تک سمتیہ $\boldsymbol{A}$ دکھایا گیا ہے۔کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \tag{1.40}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس سمتیہ کی حتمی قیمت

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} = \sqrt{(-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})\cdot(-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})} = \sqrt{8}$$

ہے۔آئیں اسی سمتیہ کو نلکی محدد میں لکھیں۔ایسا کرنے کی خاطر A_ρ اور A_ϕ درکار ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{A}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
A_\rho &= \boldsymbol{a}_\rho\cdot(-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) = -2\cos\phi + 2\sin\phi \\
A_\phi &= \boldsymbol{a}_\phi\cdot(-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) = 2\sin\phi + 2\cos\phi
\end{aligned}$$

یوں

$$\boldsymbol{A} = 2(-\cos\phi + \sin\phi)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin\phi + \cos\phi)\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ اس کی حتمی قیمت کیا حاصل ہوتی ہے۔اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\rho = 1$، $\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 1$ اور $\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 0$ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} \\
&= \sqrt{2^2(-\cos\phi + \sin\phi)^2 + 2^2(\sin\phi + \cos\phi)^2} \\
&= \sqrt{4(\cos^2\phi + \sin^2\phi - 2\cos\phi\sin\phi) + 4(\cos^2\phi + \sin^2\phi + 2\cos\phi\sin\phi)} \\
&= \sqrt{8(\cos^2\phi + \sin^2\phi)} \\
&= \sqrt{8}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یقیناً سمتیہ کی حتمی قیمت محدد کے نظام پر منحصر نہیں۔

مساوات 1.40 اور مساوات 1.41 ایک ہی سمتیہ کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔یہاں کارتیسی نظام کا استعمال نہایت آسان ثابت ہوا۔آگے چل کر آپ دیکھیں گے کہ کہیں مسئلوں میں نلکی محدد کا استعمال زیادہ آسان ہو گا۔آئیں مساوات 1.40 پر مزید غور کریں۔اس مساوات میں اکائی سمتیات از خود اٹل نہیں ہیں۔ان کی سمتوں کا دارومدار زاویہ ϕ پر ہے۔شکل 1.23-ب میں $\phi = 0°$، $\phi = 45°$ اور $\phi = 135°$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھائے گئے ہیں۔نقطہ P یعنی $\phi = 0°$ پر مساوات 1.41

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\phi=0°} &= 2(-\cos 0° + \sin 0°)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin 0° + \cos 0°)\boldsymbol{a}_\phi \\
&= -2\boldsymbol{a}_\rho + 2\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi = 0°$ پر $\boldsymbol{A}$ کو دو عدد سمتیات کے مجموعہ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے جن میں پہلی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کے الٹ سمت میں ہے اور اس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ دوسری سمتیہ کی مقدار دو اور اس کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت میں ہی ہے۔شکل 1.23-ب میں نقطہ P پر $\boldsymbol{A}$ کی سمت واقع بڑھتی $\boldsymbol{a}_\phi$ اور گھٹتی $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں ہے۔یاد رہے کہ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کو $\phi = 0°$ پر حاصل کیا گیا ہے۔$\phi = 0°$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ برابر ہوتے ہیں اور اسی طرح $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ برابر ہوتے ہیں۔یہی وجہ ہے کہ مساوات 1.40 میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\phi$ پُر کرنے سے مندرجہ بالا مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$\phi = 45°$ پر مساوات 1.41

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\phi=45°} &= 2(-\cos 45° + \sin 45°)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin 45° + \cos 45°)\boldsymbol{a}_\phi \\
&= 2(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\rho + 2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\phi \\
&= \sqrt{8}\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi = 45°$ پر $\boldsymbol{A}$ صرف اور صرف $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت میں ہے اور اس کی لمبائی $\sqrt{8}$ ہے۔شکل 1.23-ب میں یہ حقیقت واضح ہے کہ $\phi = 45°$ پر $\boldsymbol{A}$ کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ ہی ہے۔یاد رہے کہ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کو $\phi = 45°$ پر حاصل کیا گیا ہے۔شکل میں اکائی سمتیات کو عین $\boldsymbol{A}$ کے اوپر کھینچا گیا ہے تاکہ سمتیات کی سمتوں کا موازنہ آسانی سے کیا جا سکے۔

آپ نے دیکھا کہ نلکی محدد میں سمتیہ کی مساوات کا دارومدار اس نقطے پر ہے جس نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کئے جائیں۔آئیں دیکھیں کہ $\phi = 135°$ پر پائے جانے والے نقطہ T کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کیسا لکھا جائے گا۔مساوات 1.41 میں $\phi = 135°$ پُر کرنے سے

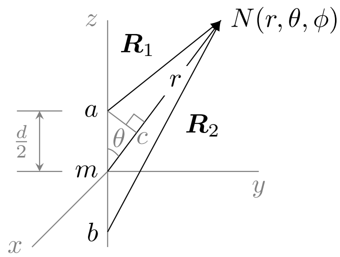
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\phi=135°} &= 2(-\cos 135° + \sin 135°)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin 135° + \cos 135°)\boldsymbol{a}_\phi \\
&= 2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\rho + 2(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\phi \\
&= \sqrt{8}\boldsymbol{a}_\rho
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi = 135°$ کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کو $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں $\sqrt{8}$ لمبائی کا سمتیہ لکھا جا سکتا ہے۔شکل سے یہ حقیقت واضح ہے۔

مثال 1.8: شکل 1.24 میں z محدد پر نقطہ $a(0, 0, \frac{d}{2})$ پر مثبت چارج $+Q$ اور نقطہ $b(0, 0, -\frac{d}{2})$ پر منفی چارج $-Q$ پائے جاتے ہیں۔ایسے دو برابر لیکن الٹ علامت کے دو قریب قریب پائے جانے والے چارجوں کے جوڑی کو جفت قطب[23] کہتے ہیں۔دکھائے گئے سمتی فاصلوں $\boldsymbol{R}_1$ اور $\boldsymbol{R}_2$ کو کروی محدد میں لکھیں۔

---

[23] dipole



شکل 1.24: جفت قطب کے چارجوں سے دور نقطے تک فاصلے۔

حل: m سے N تک فاصلہ r ہے اور اس سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔ نقطہ a سے r پر عمودی لکیر لگائی گئی ہے جو اسے c پر ملتی ہے۔ یوں ac کی سمت کروی محدد کے اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ کی سمت میں ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے $mc = \frac{d}{2}\cos\theta$ اور $ac = \frac{d}{2}\sin\theta$ لکھے جا سکتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{R}_1$ کو ہم a سے c تک سمتیہ $\frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$ اور c سے N تک سمتیہ $(r-\frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کے مجموعے کی شکل میں

$$\boldsymbol{R}_1 = \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta + (r - \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{1.42}$$

لکھ سکتے ہیں۔ ہم اسی طرح شکل 1.24 میں N سے m تک لکیر کو m سے آگے بڑھا کر b سے اس پر عمودی لکیر کھینچ کر شکل کو دیکھتے ہوئے $\boldsymbol{R}_2$ کی مساوات بھی لکھ سکتے ہیں البتہ ایسا کرنے کی بجائے آئیں $\boldsymbol{R}_2$ کی مساوات تحلیلی طریقے سے حاصل کریں۔ شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{R}_2 = \frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور کروی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ استعمال کئے گئے۔ کروی محدد میں کسی بھی لکیر کی طرح

$$\boldsymbol{R}_2 = A_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + A_\theta\boldsymbol{a}_\theta + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں $A_r = \boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سے حاصل کریں۔

$$A_r = \left(\frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right)\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{d}{2}\cos\theta + r$$

اسی طرح $A_\theta = \boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{a}_\theta$ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$A_\theta = \left(\frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right)\cdot\boldsymbol{a}_\theta = -\frac{d}{2}\sin\theta$$

اسی طرح $A_\phi = \boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{a}_\phi$ لکھتے ہوئے $A_\phi = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

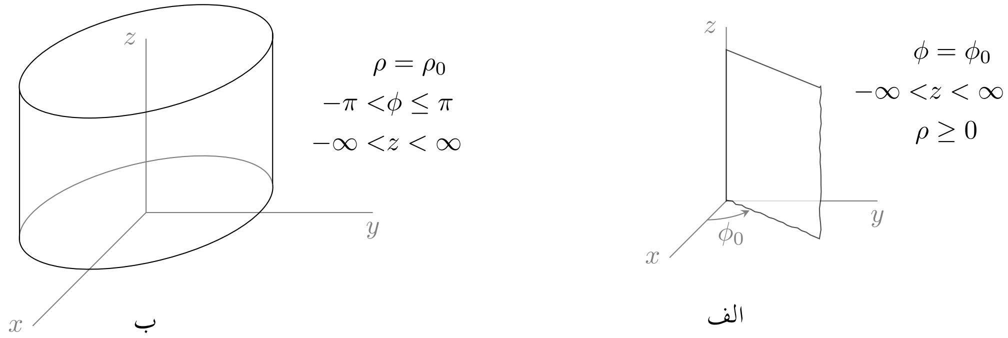
$$\boldsymbol{R}_2 = \left(\frac{d}{2}\cos\theta + r\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta \tag{1.43}$$

410 لکھا جا سکتا ہے۔

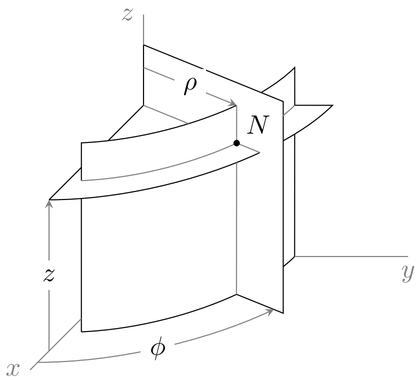
411

412 1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں

413 شکل 1.25-الف میں ϕ تبدیل کئے بغیر ρ اور z کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے $\phi = \phi_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا ہے۔ یہ سطح نلکی شکل رکھتی ہے جس کا اوپر والا منہ اور نچلا منہ کھلے ہیں یعنی ان پر ڈھکن نہیں۔ شکل-ب میں ρ تبدیل کئے بغیر ϕ اور z کو تبدیل کرتے ہوئے $\rho = \rho_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا



شکل 1.25: $\phi = \phi_0$ اور $\rho = \rho_0$ سطحیں۔



شکل 1.26: نلکی محدد کے تین سطحیں۔

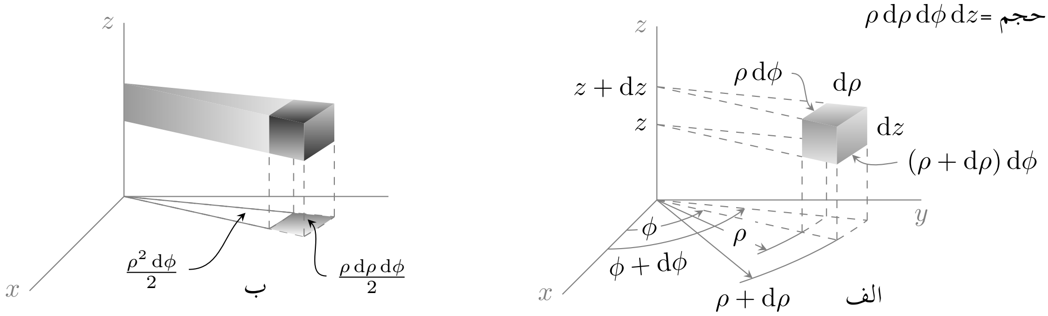
ہے۔ان دونوں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے ان اشکال میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-الف میں ρ کی قیمت صرف مثبت جبکہ z کی قیمت مثبت یا منفی ممکن ہے۔ شکل-ب میں زاویہ کل 2π ریڈیئن تبدیل ہو سکتا ہے۔یوں زاویے کا مثبت حد π ریڈیئن یعنی 180 درجہ ہے جبکہ اس کا منفی[24] حد $-\pi$ یعنی -180 درجے ہے۔ نلکی محدد اور کارتیسی نظام دونوں میں $z = z_0$ سطح یکساں بنتی ہے۔

جیسے شکل 1.26 میں دکھایا گیا ہے، $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحیں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔اسی طرح $\rho = \rho_1$ اور $z = z_1$ سطحیں ایک گول دائرے پر ملتے ہیں جبکہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔$\rho = \rho_1$، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں صرف اور صرف ایک ہی نقطہ N پر اکٹھے ملتے ہیں۔ نلکی محدد میں کسی بھی نقطے کا مقام اسی طرح تین سطحوں کے متقاطع نقطہ سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ $(0,0,z)$ تک پہنچنے کی خاطر ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔

کسی بھی نقطہ $N(\rho_1,\phi_1,z_1)$ پر $\rho = \rho_1$، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں بنانے کے بعد اگر نلکی محدد کے متغیرات کو $\mathrm{d}\rho$، $\mathrm{d}\phi$ اور $\mathrm{d}z$ بڑھا کر مزید تین سطحیں کھینچے جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر منحرف مکعب کو گھیریں گے جیسے شکل 1.27-الف میں دکھایا گیا ہے۔رداسی سمت میں اس منحرف مکعب کے اطراف کی لمبائی $\mathrm{d}\rho$ جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت کے اطراف کی لمبائی $\mathrm{d}z$ ہے۔ $\boldsymbol{a}_\phi$ سمت میں z محدد کے قریبی گول طرف کی لمبائی $\rho\,\mathrm{d}\phi$ جبکہ محدد سے دور طرف کی گول لمبائی $(\rho+\mathrm{d}\rho)\,\mathrm{d}\phi$ ہے۔ جیسے جیسے اس منحرف مکعب کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے یہ ایک درست مکعب کی صورت اختیار کرتا ہے لہٰذا نہایت چھوٹے حجم کو مکعب تصور کرتے ہوئے اس کا حجم $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.27-ب میں چھوٹے منحرف مکعب کو رداسی سمت میں z محدد تک بڑھا کر پچر یا فانہ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر اس کا عمودی سایہ بھی دکھایا گیا ہے۔ρ رداس کے گول دائرے کے مرکز سے $\mathrm{d}\phi$ زاویے پر دو لکیریں دائرے تک کھینچنے سے $\frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2}$ رقبہ گھیرا جاتا ہے۔اگر رداس $\rho+\mathrm{d}\rho$

[24]حقیقت میں منفی حد $-180°$ کو نہیں چھوتا۔اگر منفی حد $-180°$ کو چھوئے تب منفی x محدد دو مرتبہ شامل ہوتا ہے۔



شکل 1.27: نلکی محدد میں انتہائی چھوٹی حجم۔

ہو تب رقبہ $\frac{(\rho+\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2}$ ہو گا۔یوں شکل-ب میں چھوٹے مکعب کے سایہ کا رقبہ $\mathrm{d}S$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \frac{(\rho+\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} - \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2} \\
&= \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi + 2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi + (\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} - \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2} \\
&= \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi + \frac{(\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} \\
&\approx \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}
$$

ہو گا۔یہاں آخری قدم پر d کی علامت، مجموعہ کے پہلے رکن میں دو مرتبہ جبکہ دوسرے رکن میں تین مرتبہ ہے۔یوں دوسرے اور پہلے رکن کی نسبت $\frac{0.5(\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi} = \frac{\mathrm{d}\rho}{2\rho}$ ہو گی۔$\mathrm{d}\rho$ کو کم سے کم[25] کرتے ہوئے دوسرے رکن کو قابل نظر انداز بناتے ہوئے نظرانداز کیا گیا ہے۔یوں $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ رقبہ اور $\mathrm{d}z$ بلندی کے مکعب کا حجم $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ ہو گا۔

شکل 1.27 کو درست مکعب تصور کرتے ہوئے، اس کے اطراف کی لمبائی $\rho\,\mathrm{d}\phi$، $\mathrm{d}\rho$ اور $\mathrm{d}z$ لی جاتی ہے۔یوں مکعب کے نچلی اور اوپر سطح کا رقبہ مستطیل کے اطراف کو ضرب دیتے ہوئے $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح سامنے اور پیچھے سطحوں کا رقبہ $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$ جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کا رقبہ $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.27-الف میں نلکی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(\rho,\phi,z)$ کونے سے $N'(\rho+\mathrm{d}\rho,\phi+\mathrm{d}\phi,z+\mathrm{d}z)$ کونے پہنچتے ہیں۔N سے N' تک سمتیہ کو

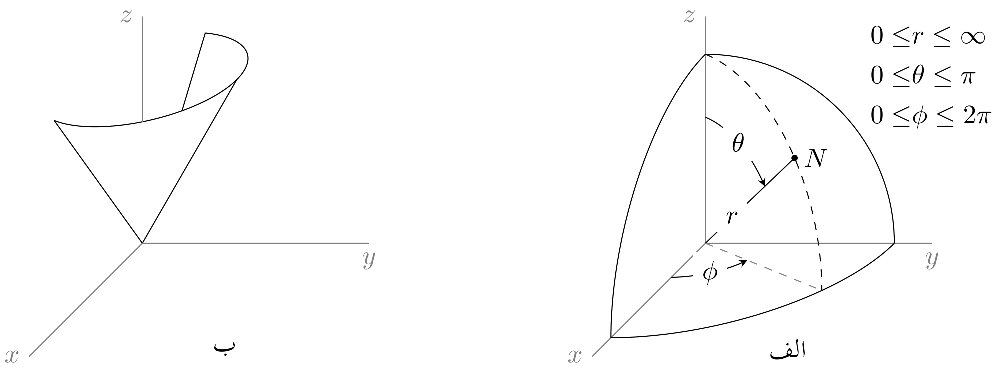
$$
\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.44}
$$

لکھا جاتا ہے۔یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے مابین سمتی فاصلے کو ظاہر کرتی ہے۔

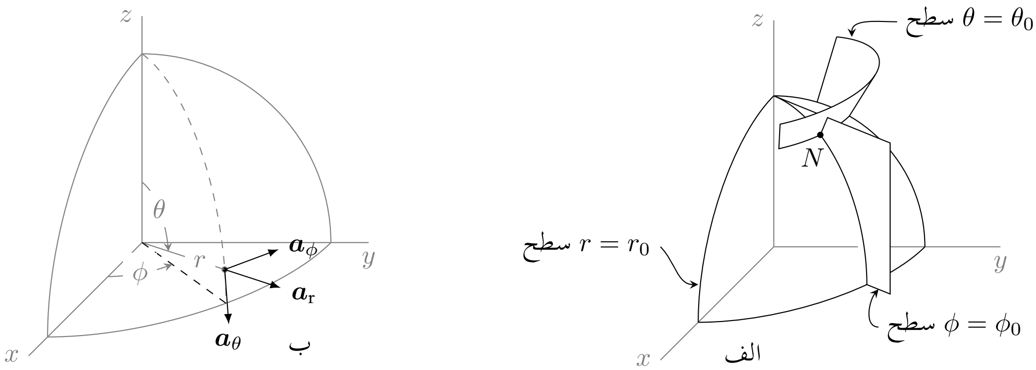
1.10 کروی محدد

سیدھی لکیروں اور سیدھی سطحوں کو کارتیسی محدد میں زیادہ آسانی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ نلکی سطحوں کو ظاہر کرنے کے لئے نلکی محدد بہتر ثابت ہوتا ہے۔اسی طرح کرہ اشکال کے سطحوں کو کروی محدد میں باآسانی لکھا جا سکتا ہے۔آئیں کروی نظام پر غور کریں۔

[25] کسی بھی متغیرہ مثلاً ρ میں چھوٹی سی تبدیلی کو $\Delta\rho$ لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $\mathrm{d}\rho$ لکھا جاتا ہے۔$\mathrm{d}\rho$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $\mathrm{d}\rho \to 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.28: الف کروی محدد کے متغیرات۔ ب $\theta = \theta_0$ سطح کا کچھ حصہ۔



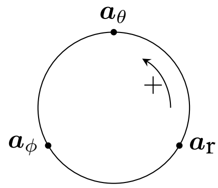
شکل 1.29: (الف) تین عمودی سطحوں کے ملاپ سے نقطہ N کا حصول۔ (ب) کروی محدد کے تین عمودی اکائی سمتیات۔

شکل 1.28-الف میں کروی محدد کے متغیرات r، θ اور ϕ دکھائے گئے ہیں۔ محدد کے مرکز سے نقطہ N تک کے فاصلے r کو کروی رداس پکارا جاتا ہے جبکہ z محدد سے کروی رداس تک زاویے کو θ لکھا جاتا ہے۔ x محدد سے رداس کے عمودی سائے تک زاویہ ϕ ہے۔ کروی اور نلکی نظام میں ϕ یکساں بیان کیا جاتا ہے۔ رداس کی قیمت مثبت لی جاتی ہے۔ یوں $r \geq 0$ ممکن ہے۔ θ کی کم سے کم قیمت $0°$ اور زیادہ سے زیادہ قیمت $180°$ ہے جبکہ ϕ کی کم سے کم قیمت $0°$ اور زیادہ سے زیادہ قیمت $360°$ ہے۔

r اور ϕ تبدیل کئے بغیر θ کو 0 سے بڑھاتے ہوئے π ریڈیئن کرنے سے نقطہ N شکل 1.28-الف میں نقطہ دار لکیر پر چلتے ہوئے مثبت z محدد سے شروع ہو کر منفی z محدد پر پہنچتا ہے۔ اسے نقطہ دار لکیر کو کرہ ارض کے خط طول بلد[26] تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل-الف میں θ کا $0°$ تا $90°$ تبدیل ہوتا دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح r اور θ تبدیل کئے بغیر ϕ کو $0°$ تا $360°$ تبدیل کرنے سے نقطہ N گول دائرے پر z محدد کے گرد ایک چکر کاٹے گا۔ یہ حرکت کرہ ارض کے خط عرض بلد[27] پر چلنے کے مانند ہے۔ θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کو تبدیل کرنے سے نقطہ N مرکز سے سیدھی باہر نکلتی لکیر پر حرکت کرتا ہے۔

r تبدیل کئے بغیر θ کو $0°$ تا $180°$ اور ϕ کو $0°$ تا $360°$ تبدیل کرنے سے نقطہ N کروی $r = r_0$ سطح پر حرکت کرے گا۔ اس کروی سطح کا رداس r ہو گا۔ شکل 1.28-الف میں θ کو $0°$ تا $90°$ اور ϕ کو $0°$ تا $90°$ تبدیل کرنے سے حاصل سطح دکھائی گئی ہے۔ شکل 1.28-ب میں θ تبدیل کئے بغیر r اور ϕ تبدیل کرنے سے پیدا مخروط[28] $\theta = \theta_0$ کروی سطح دکھائی گئی ہے۔ ϕ تبدیل کئے بغیر r اور θ تبدیل کرنے سے نلکی محدد کی طرح $\phi = \phi_0$ سطح حاصل ہوتی ہے۔ شکل 1.29-الف میں ان تینوں سطحوں کو دکھایا گیا ہے۔ بالکل کارتیسی اور نلکی محدد کی طرح، کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ کا مقام ان تین

longitude[26]
latitude[27]
cone[28]



شکل 1.30: کروی نظام میں اکائی سمتیات کی صلیبی ضرب۔

سطحوں کے نقطہ ملاپ سے اخذ کیا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطہ $N(r_0,\theta_0,\phi_0)$ پر $r=r_0$، $\theta=\theta_0$ اور $\phi=\phi_0$ سطحیں آپس میں عمودی ہوتی ہے اور یہ صرف اور صرف اسی نقطے پر اکٹھے ملتی ہیں۔

شکل 1.29-ب میں کروی نظام کے تین عمودی اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$، $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھائے گئے ہیں۔ نلکی محدد کی طرح کروی محدد کے عمودی اکائی سمتیات بھی مقام تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ $N(r_0,\theta_0,\phi_0)$ پر θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کے بڑھتے جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہو گی۔ اسی طرح θ بڑھانے سے نقطہ N اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ کی جانب حرکت کرے گا جبکہ ϕ بڑھانے سے نقطہ $\boldsymbol{a}_\phi$ کی جانب حرکت کرے گا۔ کارتیسی اور نلکی محدد کی طرح کروی محدد کے اکائی سمتیات کو بھی محددی نظام کے متغیرات کو کم سے کم بڑھاتے ہوئے نقطے کی حرکت کی جانب اکائی سمتیہ کھینچنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.29-الف سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سمتیہ $r=r_0$ سطح کے عمودی جبکہ $\theta=\theta_0$ اور $\phi=\phi_0$ سطحوں کے متوازی ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_\theta$ سمتیہ $\theta=\theta_0$ سطح کے عمودی اور $\phi=\phi_0$ سطح کے متوازی پایا جاتا ہے جبکہ $r=r_0$ سطح کے ساتھ مماس بناتا ہے۔ $\boldsymbol{a}_\phi$ سمتیہ $\phi=\phi_0$ سطح کے عمودی جبکہ $r=r_0$ اور $\theta=\theta_0$ سطحوں کے ساتھ مماس بناتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$، $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کروی نظام کے اکائی سمتیات ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\times\boldsymbol{a}_\theta=\boldsymbol{a}_\phi$ لکھنے سے دائیں ہاتھ کا کروی نظام حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ کے قانون میں دائیں ہاتھ کا انگوٹھا r جبکہ پہلی انگلی θ اور دوسری انگلی ϕ بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ نلکی محدد میں یہ انگلیاں ρ، ϕ اور z جبکہ کارتیسی محدد میں x، y اور z بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہیں۔

دائیں ہاتھ کے قانون یا شکل 1.30 کی مدد سے یوں اکائی سمتیات کے صلیبی ضرب

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\times\boldsymbol{a}_\theta=\boldsymbol{a}_\phi\,,\quad \boldsymbol{a}_\theta\times\boldsymbol{a}_\phi=\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\,,\quad \boldsymbol{a}_\phi\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{a}_\theta \tag{1.45}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ اسی طرح

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=1\,,\quad \boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_\theta=1\,,\quad \boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_\phi=1 \tag{1.46}$$

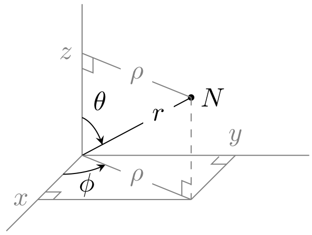
اور

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_\theta=0\,,\quad \boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_\phi=0\,,\quad \boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=0 \tag{1.47}$$

بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

نقطہ N کا z محدد سے فاصلہ ρ ہے جو نلکی محدد کا رداس ہے۔ اسے شکل 1.31 میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\rho=r\sin\theta$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $z=0$ سطح سے N کی اونچائی z ہے جو شکل کو دیکھتے ہوئے $z=r\cos\theta$ لکھی جا سکتی ہے۔ نقطہ N کا عمودی سایہ $z=0$ سطح پر دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $x=\rho\cos\phi$ اور $y=\rho\sin\phi$ لکھے جا سکتے ہیں۔ $\rho=r\sin\theta$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} x&=r\sin\theta\cos\phi\\ y&=r\sin\theta\sin\phi\\ z&=r\cos\theta \end{aligned} \tag{1.48}$$



شکل 1.31: کروی، نلکی اور کارتیسی متغیرات کا تبادلہ۔

شکل 1.32: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

لکھے جا سکتے ہیں جہاں z کی مساوات بھی ساتھ ہی لکھی گئی ہے۔ مساوات 1.48 کروی سے کارتیسی متغیرات دیتا ہے۔ اسی شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$
\begin{aligned}
r^2 &= \rho^2 + z^2 \\
\rho^2 &= x^2 + y^2
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

لکھتے ہوئے

$$
r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.50}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.48 میں z کی مساوات سے

$$
\theta = \cos^{-1} \frac{z}{r} = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{1.51}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.48 کے y کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$
\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \tag{1.52}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.50، مساوات 1.51 اور مساوات 1.52 کارتیسی سے کروی متغیرات دیتے ہیں۔ 465

شکل 1.29-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کی سمت تبدیل کئے بغیر اسے محدد کے مرکز پر منتقل کرتے ہوئے شکل 1.32-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ اسے نلکی محدد کے اکائی سمتیات کی مدد سے

$$
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = A_\rho \boldsymbol{a}_\rho + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.53}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.32-الف میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کی لمبائی ایک لیتے ہوئے $A_\rho = \sin\theta$ اور $A_z = \cos\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.54}
$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \sin\theta \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0 \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \cos\theta
\end{aligned}
\tag{1.55}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 1$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 0$ وغیرہ کا استعمال کیا گیا۔یہ مساوات کروی رداسی اکائی سمتیے اور نلکی نظام کے اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔اسی طرح جدول 1.1 استعمال کرتے ہوئے مساوات 1.54 کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = \sin\theta\cos\phi \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} = \sin\theta\sin\phi \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \cos\theta
\end{aligned}
\tag{1.56}
$$

حاصل ہوتا ہے۔مکمل نتائج ایک جگہ لکھنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کو بھی شامل کیا گیا ہے۔ یہ مساوات کروی اکائی رداسی سمتیے اور کارتیسی اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔ 467

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھتے ہیں۔مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ جبکہ $A_y = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ اور $A_z = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہوں گے۔یہ تمام مساوات 1.56 میں دئے گئے ہیں۔یوں

$$
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\tag{1.57}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ 468

شکل 1.29-ب میں دکھائے $\boldsymbol{a}_\theta$ کو $\phi = \phi_0$ سطح پر حرکت دیتے ہوئے مرکز کے اتنے قریب لا کر شکل 1.32-ب میں دکھایا گیا ہے کہ اس کی نوک $x = 0$ سطح کو چھوتی ہے۔جیسا شکل 1.29-الف سے واضح ہے، $\phi = \phi_0$ سطح پر $\boldsymbol{a}_\theta$ کو حرکت دینے سے اس سمتیہ کی سمت تبدیل نہیں ہوتی۔شکل 1.32-ب کو دیکھتے ہوئے $\boldsymbol{a}_\theta = B_\rho\boldsymbol{a}_\rho - B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جا سکتا ہے۔یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ $B_\rho\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\theta$ کے مابین زاویہ θ ہے۔$\boldsymbol{a}_\theta$، $B_\rho\boldsymbol{a}_\rho$ اور $-B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ مل کر تکون بناتے ہیں جسے دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$
\begin{aligned}
B_\rho &= \cos\theta \\
B_z &= \sin\theta
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$
\boldsymbol{a}_\theta = \cos\theta\boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\tag{1.58}
$$

کے برابر ہے۔اس مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\rho &= (\cos\theta\boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos\theta \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\phi &= (\cos\theta\boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0 \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} &= (\cos\theta\boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -\sin\theta
\end{aligned}
\tag{1.59}
$$

$\boldsymbol{a}_\theta$ اور نلکی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح مساوات 1.58 کا باری باری ax، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} &= (\cos\theta\boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = \cos\theta\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = \cos\theta\cos\phi \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} &= (\cos\theta\boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} = \cos\theta\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} = \cos\theta\sin\phi \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} &= (\cos\theta\boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -\sin\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -\sin\theta
\end{aligned}
\tag{1.60}
$$

جدول 1.2: کروی اکائی سمتیات کا نلکی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_{\text{z}}$	$\boldsymbol{a}_{\phi}$	$\boldsymbol{a}_{\rho}$	
$\cos\theta$	0	$\sin\theta$	$\boldsymbol{a}_{\text{r}}$
$-\sin\theta$	0	$\cos\theta$	$\boldsymbol{a}_{\theta}$
0	1	0	$\boldsymbol{a}_{\phi}$

جدول 1.3: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_{\text{z}}$	$\boldsymbol{a}_{\text{y}}$	$\boldsymbol{a}_{\text{x}}$	
$\cos\theta$	$\sin\theta\sin\phi$	$\sin\theta\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_{\text{r}}$
$-\sin\theta$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_{\theta}$
0	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	$\boldsymbol{a}_{\phi}$

حاصل ہوتے ہیں۔ یہ مساوات $\boldsymbol{a}_{\theta}$ اور کارتیسی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_{\theta}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\theta} = \boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\text{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\text{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ لکھتے ہیں۔ مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = \boldsymbol{a}_{\text{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\theta}$ جبکہ $A_y = \boldsymbol{a}_{\text{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\theta}$ اور $A_z = \boldsymbol{a}_{\text{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\theta}$ ہوں گے۔ یہ تمام مساوات 1.60 میں دئے گئے ہیں۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_{\theta} = \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_{\text{Y}} - \sin\theta\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \tag{1.61}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

کروی محدد کا $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور نلکی محدد کا $\boldsymbol{a}_{\phi}$ یکساں ہیں۔ اسے کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{a}_{\phi} = -\sin\phi\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \cos\phi\boldsymbol{a}_{\text{Y}} \tag{1.62}$$

لکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کا $\boldsymbol{a}_{\text{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\text{Y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{X}} &= -\sin\phi \\
\boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{Y}} &= \cos\phi \\
\boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{Z}} &= 0
\end{aligned} \tag{1.63}$$

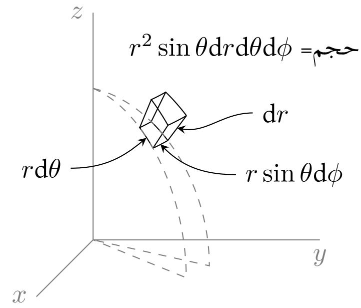
لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 1.55 اور مساوات 1.59 کے نتائج کے ساتھ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کے مختلف غیر سمتی ضربوں کو جدول 1.2 میں یکجا کیا گیا ہے۔

مساوات 1.56 اور مساوات 1.60 کے نتائج جدول 1.3 میں یکجا کئے گئے ہیں۔

شکل 1.29 میں $N(r, \theta, \phi)$ پر تین عمودی سطحیں دکھائی گئی ہیں۔ اگر کروی محدد کے متغیرات $\mathrm{d}r$، $\mathrm{d}\theta$ اور $\mathrm{d}\phi$ بڑھا کر دوبارہ تین عمودی سطحیں کھینچی جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر چھوٹا منحرف مکعب نما حجم گھیریں گی جسے شکل 1.33 میں دکھایا گیا ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\text{r}}$ سمت میں مکعب کے چار اطراف کی لمبائیاں $\mathrm{d}r$ ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\theta}$ سمت میں z محدد کے قریبی دو اطراف کی لمبائیاں $r\,\mathrm{d}\theta$ جبکہ دو دور اطراف کی لمبائیاں $(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta$ ہے جسے دو اجزاء کی صورت میں یوں $r\,\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔ دور اطراف کے لمبائی کا پہلا جزو ہوبہو قریبی اطراف کی لمبائی ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو دور اور قریبی اطراف کے لمبائیوں میں فرق کو ظاہر کرتی ہے۔ ان دو اجزاء کی نسبت $\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{r\,\mathrm{d}\theta}$ کے برابر ہے۔ $\mathrm{d}r$ کو کم سے کم[29] کرتے ہوئے اس نسبت کو کم سے کم کیا جا سکتا ہے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے ہم $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ کو رد کرتے ہوئے ان چاروں اطراف کی لمبائیاں $r\,\mathrm{d}\theta$ ہی لیتے ہیں۔ اسی طریقہ کار سے $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اطراف کی

[29] کسی بھی متغیرہ مثلاً r میں چھوٹی سی تبدیلی کو Δr لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $\mathrm{d}r$ لکھا جاتا ہے۔ $\mathrm{d}r$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $\mathrm{d}r \to 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.33: کروی نظام میں چھوٹی حجم۔

لمبائیاں $r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$ لکھی جا سکتی ہے۔ منحرف مکعب نما کے اطراف میں معمولی فرق کو نظرانداز کرتے ہوئے اسے مکعب نما تصور کیا جا سکتا ہے جس کے $r=r_0$ سطحوں کا رقبہ $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ جبکہ $\theta=\theta_0$ سطحوں کا رقبہ $r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$ اور $\phi=\phi_0$ سطحوں کا رقبہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ ہو گا۔ اس مکعب کا حجم $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ ہو گا۔

شکل 1.33 میں کروی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(r,\theta,\phi)$ کونے سے $N'(r+\mathrm{d}r,\theta+\mathrm{d}\theta,\phi+\mathrm{d}\phi)$ کونے پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک سمتیہ کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta}+r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi} \tag{1.64}$$

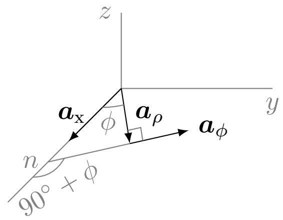
لکھا جاتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی فاصلہ دیتا ہے۔

کسی بھی مکمل بند سطح کی سمت، سطح کے عمودی باہر جانب لی جاتی ہے۔ شکل 1.33 میں $r=r_0$ سطح مرکز کا قریبی سطح ہے۔ اس سطح کے دو آپس میں الٹ عمودی اطراف $\mp\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہیں جن میں $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ بند سطح کی بیرونی سمت کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا یہی اس سطح کی درست سمت ہے۔ اس کے برعکس $r=r_0+\mathrm{d}r$ سطح مرکز سے دور تر ہے۔ اس سطح کے بھی دو آپس میں الٹ عمودی سمتیں $\mp\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہیں جن میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سطح کی درست سمت ہے۔ یوں $r=r_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ جبکہ $r=r_0+\mathrm{d}r$ سطح کا سمتی رقبہ $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔ اسی طرح $\theta=\theta_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\theta}$ جبکہ $\theta=\theta_0+\mathrm{d}\theta$ سطح کا سمتی رقبہ $r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\theta}$ ہو گا۔ $\phi=\phi_0$ سطح کا $-r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\phi=\phi_0+\mathrm{d}\phi$ سطح کا سمتی رقبہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\phi}$ ہو گا۔

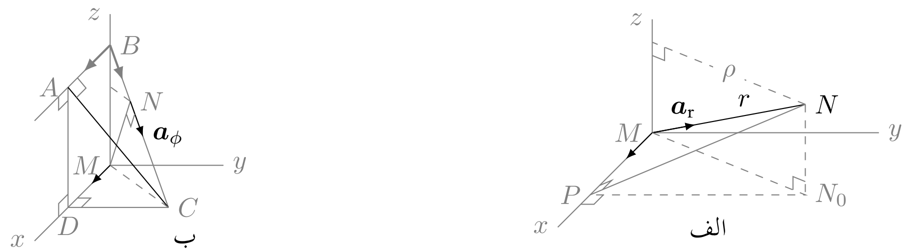
مشق 1.6: شکل 1.33 میں سمت میں مرکز کے قریبی اور دور اطراف کی لمبائیاں لکھیں۔

جوابات: $r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$، $r\sin(\theta+\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}\phi$، $(r+\mathrm{d}r)\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$ اور $(r+\mathrm{d}r)\sin(\theta+\mathrm{d}\theta)\,\mathrm{d}\phi$

مثال 1.9: دو اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_1$ اور $\boldsymbol{a}_2$ کا غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=(1)(1)\cos\alpha_{12}$ یعنی ان کے مابین زاویے α_{12} کے کوسائن کے برابر ہوتا ہے۔ غیر سمتی ضرب کے اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\phi}$ حاصل کریں۔



شکل 1.34: کارتیسی اور نلکی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔



شکل 1.35: کروی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔

حل: شکل 1.34 میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_\rho$ کے درمیان زاویہ ϕ جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_\rho$ کے درمیان زاویہ $90° - \phi$ پایا جاتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos(90° - \phi) = \sin\phi$ کے برابر ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمتیں تبدیل کئے بغیر اگر انہیں یوں ہلایا جائے کہ ان کی دُم نقطہ n پر آ ٹھرے تو شکل سے ظاہر ہے کہ ان کے مابین زاویہ $90° + \phi$ ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = \cos(90° + \phi) = -\sin\phi$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کے درمیان ϕ زاویہ ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = \cos\phi$ کے برابر ہے۔ چونکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ان دونوں نلکی اکائی سمتیات کے عمودی ہے لہٰذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔

مثال 1.10: مثال 1.9 کے طرز پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-الف میں نقطہ $N(r, \theta, \phi)$ دکھایا گیا ہے جسے $N(x, y, z)$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔ شکل میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \cos \underline{/NMP}$ کے برابر ہے جہاں N اور P سے M تک لکیریں کھینچنے سے زاویہ $\underline{/NMP}$ بنتا ہے۔ N سے $z = 0$ سطح پر عمود نقطہ N_0 دیتا ہے۔ N_0 سے x محدد پر عمود نقطہ P دیتا ہے۔ N سے N_0 اور یہاں سے P منتقل ہوتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت میں کسی قسم کی حرکت نہیں کی جاتی لہٰذا اگر کارتیسی نظام میں $N(x, y, z)$ لکھا جائے تو اسی نظام میں $N_0(x, y, 0)$ اور $P(x, 0, 0)$ لکھے جائیں گے۔ ہم N سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے بھی P تک پہنچ سکتے ہیں۔ تکون NMP میں M سے N تک کا فاصلہ $\overline{MN} = r$ جبکہ M سے P تک کا فاصلہ $\overline{MP} = x$ اور زاویہ $\underline{/NPM} = 90°$ ہیں لہٰذا $\cos \underline{/NMP} = \frac{x}{r}$ ہو گا۔ یہی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کے غیر سمتی ضرب کے برابر ہے۔ N سے y محدد پر عمود بناتے ہوئے یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{y}{r}$ اور N سے z محدد پر عمود سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{z}{r}$ لکھے جا سکتے ہیں۔ چونکہ $x = r\sin\theta\cos\phi$، $y = r\sin\theta\sin\phi$ اور $z = r\cos\theta$ کے برابر ہیں لہٰذا ہم

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\phi$$
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\phi$$
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \frac{z}{r} = \cos\theta$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 1.11: مثال 1.9 کے طرز پر $\boldsymbol{a}_\theta$ کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ جبکہ محدد کے مرکز M پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ حاصل کرنے کی خاطر سمتیات کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں z محدد پر نقطہ B منتقل کرتے ہوئے دوبارہ دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos \underline{\angle ABC}$ کے برابر ہے۔ اس شکل میں $\underline{\angle DMC} = \phi$ اور $\underline{\angle BMN} = \theta$ کروی محدد کے زاویے ہیں۔ تکون ΔBMN میں زاویہ $\underline{\angle MNB}$ نوے درجے کا ہے۔ یوں $\underline{\angle NBM} = 90^\circ - \theta$ ہو گا۔ شکل سے واضح ہے کہ $\underline{\angle CBM} = \underline{\angle NBM}$ ہیں۔ اس طرح تکون ΔBMC میں $\underline{\angle BMC} = 90^\circ$ جبکہ $\underline{\angle CBM} = 90^\circ - \theta$ ہونے کی بنا پر $\underline{\angle MCB} = \theta$ ہو گا۔

شکل-ب میں $\overline{BM} = l$ لیتے ہوئے تکون ΔBMC کو دیکھتے ہوئے

$$\overline{BC} = \frac{l}{\sin\theta}$$
$$\overline{MC} = \frac{l}{\tan\theta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ تکون ΔMDC سے

$$\overline{MD} = \overline{MC}\cos\phi = \frac{l\cos\phi}{\tan\theta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ $\overline{MD}$ اور $\overline{AB}$ برابر ہیں یعنی $\overline{AB} = \overline{MD}$۔ یوں تکون ΔBAC سے

$$\cos\underline{\angle ABC} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\left(\frac{l\cos\phi}{\tan\theta}\right)}{\left(\frac{l}{\sin\theta}\right)} = \cos\theta\cos\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos\theta\cos\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 1.7: شکل 1.35-ب کے طرز پر شکل بناتے ہوئے $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\cos\theta\sin\phi$ اور $-\sin\theta$

سوالات

سوال 1.1: سمتیہ $\boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 1\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ اور $\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہیں۔ مندرجہ ذیل حاصل کریں: (الف) $2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B}$ اور اسی کی سمت میں اکائی سمتیہ؛ (ب) $2\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{a}_{\text{x}}$؛ (پ) $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})\,|3\boldsymbol{A}||2\boldsymbol{B}|$

جوابات: $-13\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 13\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 8\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ، $-0.648\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 0.648\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 0.399\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ، 28.3 ، $1359\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 1087\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 1359\boldsymbol{a}_{\text{z}}$

سوال 1.2: نقطہ $A(1,-2,3)$ ، $B(3,-1,2)$ اور $C(7,5,-4)$ دیے گئے ہیں۔ (الف) محدد کے مرکز سے A تک سمتیہ لکھیں؛ (ب) مرکز سے لکیر AB کے وسط تک سمتیہ لکھیں؛ (پ) اسی سمت میں اکائی سمتیہ لکھیں؛ (ت) تکون ABC کا احاطہ دریافت کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 3\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ، $2\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 1.5\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 2.5\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ، $0.566\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 0.424\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 0.707\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ، 23.4

سوال 1.3: مرکز سے نقطہ A تک سمتیہ $2\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \boldsymbol{a}_{\text{y}} + 3\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہے جبکہ مرکز سے $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\text{x}} - \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\text{y}} + \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ اکائی سمتیہ کی سمت میں نقطہ B پایا جاتا ہے۔ دونوں نقطوں کے درمیان 4 فاصلہ ہونے کی صورت میں نقطہ B دریافت کریں۔

جوابات: $(2.57, -2.57, 1.28)$

سوال 1.4: سمتی میدان $\boldsymbol{M} = (x + y^2)\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 2(xy + 3)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 4z^2\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ دیا گیا ہے۔ نقطہ $A(2,-3,1)$ پر اس میدان کی قیمت حاصل کریں۔ اسی نقطے پر میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ دریافت کریں۔ ایسی سطح جس پر $|\boldsymbol{M}| = 5$ ہو کی مساوات حاصل کریں۔ اس سطح پر $y = 2$ اور $z = -1$ ہونے کی صورت میں حاصل لکیر کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{M} = 11\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 6\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ، $(0.836\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 0.456\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 0.304\boldsymbol{a}_{\text{z}})$ ،
$x^2 + y^2 + 2xy^2 + 4x^2y^2 + 24xy + 16z^4 - 11 = 0$ ، $17x^2 + 56x + 9 = 0$

سوال 1.5: سمتی میدان $\boldsymbol{B} = 2x^2\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 3y(x + 2z)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ اور $\boldsymbol{M} = (x + y + z)\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \frac{y}{x}\boldsymbol{a}_{\text{y}} + xy\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ دیے گئے ہیں۔ نقطہ $N(2,-3,-1)$ پر $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{M}$ حاصل کریں۔ اسی نقطے پر سمتیہ $2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{B} = 8\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ، $\boldsymbol{M} = -2\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 1.5\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ، $0.830\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 0.069\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 0.553\boldsymbol{a}_{\text{z}}$

سوال 1.6: نقطہ $(N(2,-3,7))$ پر میدان $\boldsymbol{M} = \frac{16}{x^2+y^2}(x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + y\boldsymbol{a}_{\text{y}})$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_M$ دریافت کریں۔ نقطہ N پر $\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ اور $\boldsymbol{M}$ کے درمیان زاویہ حاصل کریں۔ اسی طرح نقطہ N پر $\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ اور $\boldsymbol{M}$ کے درمیان زاویہ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{a}_M = 0.555\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 0.832\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ ، 56.3° ، 33.7°

سوال 1.7: میدان $\boldsymbol{M} = \frac{16}{x^2+y^2}(x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + y\boldsymbol{a}_{\text{y}})$ کا مندرجہ ذیل دو درجی تکمل $y = 3$ سطح پر حاصل کریں۔

$$\int_0^3 \int_0^2 \boldsymbol{M} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z \cdot \boldsymbol{a}_{\text{x}}$$

جواب: $24 \ln \frac{13}{9}$

سوال 1.8: غیر سمتی ضرب استعمال کرتے ہوئے تکون ABC میں زاویہ A اور C حاصل کریں۔ تکون کے کونے $A(3,1,2)$ ، $B(4,6,2)$ اور $C(1,4,-2)$ ہیں۔

جوابات: 61.74° ، 56.51°

سوال 1.9: نقطے $A(4,1,2)$ ، $B(-2,4,3)$ اور $C(2,3,-1)$ دیے گئے ہیں۔ سمتیہ $\boldsymbol{R}_{BA}$ اور $\boldsymbol{R}_{CA}$ حاصل کریں۔ دوسری سمتیہ پر پہلی سمتیہ کے عمودی سائے[30] کی لمبائی دریافت کریں۔ لکیر AB کے درمیانے نقطے سے لکیر AC کے درمیانے نقطے تک سیدھا سمتیہ حاصل کریں۔

جوابات: $-6\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، 4.12 ، $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-0.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

سوال 1.10: سمتیہ $\boldsymbol{M}=5\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کا وہ حصہ حاصل کریں جو سمتیہ $\boldsymbol{P}=-7\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-6\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے متوازی ہے۔ وہ حصہ حاصل کریں جو اس کے عمودی ہے۔

جوابات: $4.17\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-1.19\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+3.57\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $0.83\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-1.81\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-1.57\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

سوال 1.11: تین سمتیات $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+3\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $\boldsymbol{r}_2=-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{r}_3=5\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+3\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ دیے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ ایسی اکائی سمتیہ حاصل کریں جو $\boldsymbol{r}_1$ اور $\boldsymbol{r}_2$ دونوں کو عمودی ہو۔ سمتیہ $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ اور $\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2$ دونوں کو عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ اس تکون کا رقبہ حاصل کریں جس کے اطراف $\boldsymbol{r}_1$ اور $\boldsymbol{r}_2$ ہوں۔ اس تکون کا رقبہ حاصل کریں جس کے کونے یہ تین سمتیات دیتے ہیں۔

جوابات: $-0.81\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+0.16\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.58\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $\mp(-0.81\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+0.16\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.58\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})$ ، $\mp(0.29\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+0.88\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.37\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})$ ، 4.3 ، 13.6

سوال 1.12: نقطہ $N(5,10,4)$ پر سمتیات $\boldsymbol{R}_{AN}=-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+12\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{R}_{BN}=12\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ مل کر تکون بناتی ہیں۔ تکون کی عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ سمتیہ $\boldsymbol{R}_{BN}$ کے عمودی اور تکون کی سطح کے متوازی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ تکون کی سطح پر اس اکائی سمتیہ کو حاصل کریں جو نقطہ N پر تکون کے کونے کو نصف زاویہ میں کاٹے۔

جوابات: $\mp(-0.83\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+0.39\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-0.40\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})$ ، $\mp(0.26\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-0.38\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-0.89\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})$ ، $0.19\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+0.87\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.45\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

سوال 1.13: سمتیہ $\boldsymbol{M}=(x^2+y^2)^{-1}(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})$ کو نلکی محدد کے متغیرات میں لکھیں۔ نقطہ $(5,30^\circ,6)$ پر سمتیہ کی قیمت کارتیسی اور نلکی محدد میں حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{M}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho$ ، $\boldsymbol{M}=0.41\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+0.29\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ، $\boldsymbol{M}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}_\rho$

سوال 1.14: نقطہ $N(\rho=2,\phi=45^\circ,z=12)$ اور $P(\rho=5,\phi=-60^\circ,z=-6)$ دئے گئے ہیں۔ کارتیسی محدد میں، پہلے نقطے سے دوسرے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ اسی اکائی سمتیہ کو پہلے نقطے پر پائے جانے والے نلکی محدد کے متغیرات کی صورت میں لکھیں۔ اسی اکائی سمتیہ کو دوسرے نقطے پر پائے جانے والے نلکی محدد کے متغیرات کی صورت میں لکھیں۔

جوابات: $0.057\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-0.303\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-0.951\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $-0.174\boldsymbol{a}_\rho-0.255\boldsymbol{a}_\phi-0.951\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $0.292\boldsymbol{a}_\rho-0.180\boldsymbol{a}_\phi-0.951\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

سوال 1.15: نقطہ $N(\rho=5,\phi=30^\circ,z=6)$ سے نقطہ $P(\rho=10,\phi=75^\circ,z=12)$ تک سمتیہ کارتیسی محدد میں لکھیں۔ اسی سمت میں اکائی سمتیہ بھی لکھیں۔ کارتیسی محدد میں دوسرے نقطے سے مرکز تک اکائی سمتیہ لکھیں۔

جوابات: $-1.74\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+7.16\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+6\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $-0.183\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-0.618\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.631\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $0.166\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-0.618\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-0.768\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

---

[30] projection

سوال 1.16: نقطہ $M(5,-3,2)$ سے نقطہ $N(10,2,-5)$ تک سمتیہ کو نقطہ M پر نلکی محدد کے اکائی سمتیات کی مدد سے لکھیں۔ دوسرے نقطے سے پہلے نقطے کی سمت میں اکائی سمتیہ کو دوسرے نقطے پر نلکی اکائی سمتیات کی مدد سے لکھیں۔ دوسرے نقطے سے مرکز تک اکائی سمتیہ دوسرے نقطے کے اکائی سمتیات کی صورت میں لکھیں۔

جوابات: $-1.71\boldsymbol{a}_\rho - 6.86\boldsymbol{a}_\phi + 7\boldsymbol{a}_\text{z}$ ، $0.59\boldsymbol{a}_\rho + 0.39\boldsymbol{a}_\phi - 0.7\boldsymbol{a}_\text{z}$ ، $0.90\boldsymbol{a}_\rho + 0.44\boldsymbol{a}_\text{z}$

سوال 1.17: رداس $\rho = 2$ اور $\rho = 6$ حجم گھیرتے ہیں جو $z = 11$ تا $z = 13$ اور $\phi = 30^\circ$ تا $\phi = 60^\circ$ پایا جاتا ہے۔ اس جسم کے حجم کو تین درجی تکمل سے حاصل کریں۔ اس کی بھی تکمل سے سطح بھی حاصل کریں۔

جوابات: 16.8 ، 41.1

سوال 1.18: نقطہ $N(5,3,8)$ سے نقطہ $P(3,-4,2)$ تک سمتیہ کارتیسی، نلکی اور کروی محدد میں حاصل کریں۔ پہلے نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کریں۔ تینوں سمتیات کی لمبائی حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ تینوں سمتیات کی لمبائی برابر ہے۔

جوابات: $-2\boldsymbol{a}_\text{x} - 7\boldsymbol{a}_\text{y} - 6\boldsymbol{a}_\text{z}$ ، $-5.3165\boldsymbol{a}_\rho - 4.9735\boldsymbol{a}_\phi - 6.0000\boldsymbol{a}_\text{z}$ ، $-8.6615 - 2.7739\boldsymbol{a}_\theta - 2.5069\boldsymbol{a}_\phi$ ، 9.434

سوال 1.19: نقطہ N پر سمتیہ $\boldsymbol{K} = 3\boldsymbol{a}_\text{r} - 2\boldsymbol{a}_\theta + 8\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{G} = 2\boldsymbol{a}_\text{r} + 5\boldsymbol{a}_\theta + 2\boldsymbol{a}_\phi$ دیے گئے ہیں۔ ان کی غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{G}$ حاصل کریں۔ دوسری سمتیہ کی پہلی سمتیہ کی سمت میں لمبائی حاصل کریں۔ پہلی سمتیہ کا وہ حصہ دریافت کریں جو دوسری سمتیہ کی سمت میں ہے۔ دونوں سمتیوں کا سمتی ضرب $\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{G}$ حاصل کریں۔ اس نقطے پر دونوں سمتیوں کی عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

جوابات: 12 ، 1.3675 ، $0.46753\boldsymbol{a}_\text{r} - 0.31169\boldsymbol{a}_\theta + 1.24675\boldsymbol{a}_\phi$ ، $44\boldsymbol{a}_\text{r} - 10\boldsymbol{a}_\theta - 19\boldsymbol{a}_\phi$ ، $\mp(0.89871\boldsymbol{a}_\text{r} - 0.20425\boldsymbol{a}_\theta - 0.38808\boldsymbol{a}_\phi)$

سوال 1.20: ایک جسم $r = 6$ تا $r = 10$ ، $\theta = 30^\circ$ تا $\theta = 70^\circ$ اور $\phi = 25^\circ$ تا $\phi = 100^\circ$ حجم گھیرتا ہے۔ اس جسم کے دو دور ترین کونوں کے درمیان فاصل حاصل کریں۔ جسم کی سطح کا رقبہ حاصل کریں۔ جسم کی حجم دریافت کریں۔

جوابات: 9.27 ، 198.27 ، 179.25

سوال 1.21: نقطہ $N(5,4,-2)$ اور $P(6,4,10)$ دیے گئے ہیں۔ پہلے نقطے کو نلکی محدد میں لکھیں۔ پہلے نقطے کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے پہلے نقطے سے دوسرے نقطے تک سمتیہ نلکی محدد میں لکھیں۔

جوابات: $P(6.4031, 38.6598^\circ, -2.0000)$ ، $0.57\boldsymbol{a}_\rho - 0.82\boldsymbol{a}_\phi + 12\boldsymbol{a}_\text{z}$

باب 14

اینٹینا اور شعاعی اخراج

14.1 تعارف

14.2 تاخیری دباو

کسی بھی اخراجِ شعاع کے نظام میں موج کے ترسیل کے لئے درکار دورانیہ اہمیت رکھتا ہے۔یوں شکل 14.3 میں دکھائے تار میں برقی رو سے پیدا میدان کا اثر نقطہ N پر کچھ وقفے سے ہو گا۔خالی خلاء میں یہ وقفہ موج کو تار سے نقطے تک پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے جہاں $c = 3 \times 10^8 \, \mathrm{m/s}$ خالی خلاء میں شعاع کی رفتار ہے۔یوں N کے نقطہ نظر سے تار میں برقی رو

$$I = I_0 \cos \omega t \tag{14.1}$$

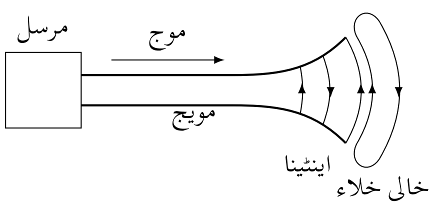
کی بجائے

$$[I] = I_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \tag{14.2}$$

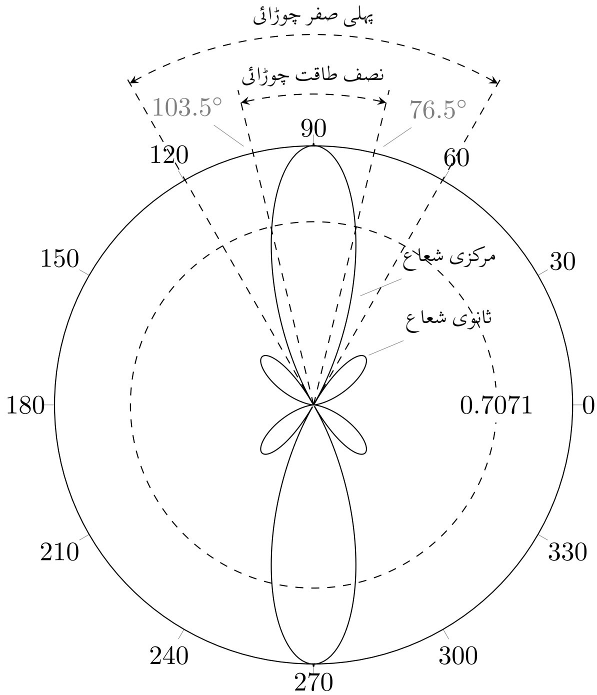
لکھی جا سکتی ہے جہاں $[I]$ تاخیری برقی رو[1] کہلاتی ہے۔تاخیری تفاعل کو چکور قوسین میں بند لکھا جاتا ہے۔تاخیری برقی رو لکھتے ہوئے وقت t کی جگہ تاخیری وقت $(t - \frac{r}{c})$ استعمال کیا جاتا ہے۔

مساوات 14.2 کہتا ہے کہ نقطہ N پر لمحہ t پر پیدا اثر، گزرے لمحے $(t - \frac{r}{c})$ پر تار میں برقی رو کا اثر ہے جہاں تار سے N تک فاصلہ r ہے۔تار سے N تک شعاع پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے۔

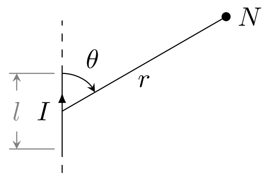
[1] retarded current



شکل 14.1: اینٹینا وہ عبوری خطہ ہے جہاں منضبط موج ترسیلی نظام سے نکل کر خلاء میں بطور آزاد موج خارج ہوتی ہے۔



شکل 14.2: اینٹینا کے شعاع کا نقش



شکل 14.3: برقی رو گزارتی تار کی چھوٹی لمبائی

گزشتہ بابوں میں امواج کی بات کرتے ہوئے $\cos(\omega t-\beta x)$ استعمال کیا گیا جس میں $c=\frac{\omega}{\beta}$ کے استعمال سے

$$\cos(\omega t-\beta x)=\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right) \tag{14.3}$$

4882 لکھا جا سکتا ہے جو تاخیری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

مساوات 14.2 کی دوری سمتیہ شکل

$$[I]=I_0e^{j\omega(t-r/c)}=I_0e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.4}$$

ہے۔اسی طرح کثافت برقی رو کی تاخیری دوری سمتیہ شکل

$$[\boldsymbol{J}]=\boldsymbol{J}_0e^{j\omega(t-r/c)}=\boldsymbol{J}_0e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.5}$$

ہو گی جسے استعمال کرتے ہوئے تاخیری مقناطیسی دباو

$$[\boldsymbol{A}]=\frac{\mu}{4\pi}\int_h\frac{[\boldsymbol{J}]}{r}\,\mathrm{d}h=\frac{\mu}{4\pi}\int_h\frac{\boldsymbol{J}_0e^{j\omega(t-r/c)}}{r}\,\mathrm{d}h \tag{14.6}$$

لکھا جائے گا۔اسی طرح تاخیری حجمی کثافت چارج

$$[\rho_h]=\rho_0e^{j\omega(t-r/c)} \tag{14.7}$$

لکھتے ہوئے تاخیری برقی دباو

$$[V]=\frac{1}{4\pi\epsilon}\int_h\frac{[\rho_h]}{r}\,\mathrm{d}h \tag{14.8}$$

4883 لکھا جائے گا۔ باب-9 کے آخر میں مساوات 9.76 اور مساوات 9.75 کے بائیں ہاتھ کے تفاعل کو چکور قوسین میں لکھ کر موج کی رفتار c لیتے ہوئے اور فاصلے
4884 کو کروی محدد کے رداس r سے ظاہر کرنے سے یہی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

4885 ہم یہاں اصل موضوع سے ہٹ کر ایک تکمل پر غور کرتے ہیں جو اس باب میں بار بار استعمال کیا جائے گا۔

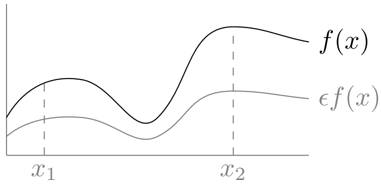
4886
14.3 تکمل

شکل 14.4 میں تفاعل $f(x)$ دکھایا گیا ہے جس کا x_1 تا x_2 تکمل خط کے نیچے دو عمودی نقطہ دار لکیروں کے مابین رقبے کے برابر ہے۔اس رقبے کو K کہتے ہوئے

$$\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,\mathrm{d}x=K \tag{14.9}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں $\frac{f(x)}{2}$ بھی دکھایا گیا ہے جسے $\epsilon f(x)$ لکھا گیا ہے جہاں $\epsilon=0.5$ ہے۔چونکہ x_1 تا x_2 کے ہر نقطے پر تفاعل کی قیمت آدھی ہے لہٰذا ہلکی سیاہی کے خط کے نیچے رقبہ $\frac{K}{2}$ ہو گا لہٰذا

$$\int_{x_1}^{x_2}\epsilon f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{K}{2}=\epsilon K \tag{14.10}$$



شکل 14.4: تفاعل کا تکمل

لکھا جائے گا۔اب فرض کریں کہ $\epsilon(x)$ مستقل نہیں ہے بلکہ اس کی قیمت x پر منحصر ہے۔مزید یہ کہ $\epsilon(x)$ کی قیمت 0 تا ϵ ممکن ہے۔ایسی صورت میں x_1 تا x_2 پر $\epsilon(x)f(x)$ کی قیمت 0 تا $\epsilon f(x)$ ممکن ہے لہٰذا $\epsilon(x)f(x)$ کا تکمل ϵK سے کم ہو گا یعنی

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x) f(x)\,\mathrm{d}x \leq \epsilon K \tag{14.11}$$

جہاں ہر جگہ $\epsilon(x) = 1$ کو بھی مد نظر رکھا گیا ہے۔اگر $\epsilon \to 0$ ہو تب تکمل قابل نظر انداز

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x) f(x)\,\mathrm{d}x \to 0 \qquad (\epsilon \to 0) \tag{14.12}$$

4887 ہو گا۔

آئیں اب $\frac{f(x)}{1+\epsilon}$ کے تکمل

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{1+\epsilon}\,\mathrm{d}x \tag{14.13}$$

پر غور کریں جہاں $\epsilon \to 0$ کے برابر ہے۔ہم

$$\frac{1}{1+\epsilon} = (1+\epsilon)^{-1} = 1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots \tag{14.14}$$

لکھ سکتے ہیں لہٰذا تکمل

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots\right) f(x)\,\mathrm{d}x \tag{14.15}$$

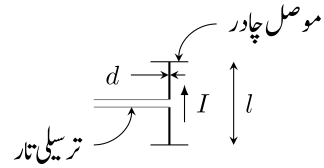
صورت اختیار کر لے گا۔مساوات 14.12 کو استعمال کرتے ہوئے $\epsilon \to 0$ کی صورت میں اسے

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{1+\epsilon}\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots\right) f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{14.16}$$

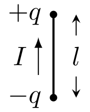
4888 لکھا جا سکتا ہے جو K کے برابر ہے۔

4889 14.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا

مختصر لمبائی کے سیدھے موصل تار کو عموماً مختصر جفت قطب[2] کہا جاتا ہے۔مندرجہ ذیل گفتگو میں مختصر جفت قطب کی لمبائی محدود ہو گی۔لا محدود حد تک
4891 کم لمبائی کی صورت میں اسے صغاری جفت قطب[3] کہا جائے گا۔

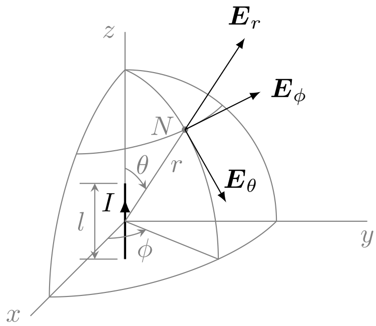


الف: متوازن ترسیلی تار سے جفت قطب کو طاقت مہیا کی گئی ہے۔



ب: جفت قطب بطور چھوٹی تار

شکل 14.5: جفت قطب



شکل 14.6: جفت قطب محدد کے مرکز پر ہے۔مرکز سے دور نقطہ N پر دور میدان کے اجزاء بھی دکھائے گئے ہیں۔

خطی نوعیت کے کسی بھی اینٹینا کو متعدد تعداد کے سلسلہ وار جڑے مختصر جفت قطبوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے لہٰذا مختصر جفت قطب کی خاصیت 4892
جانتے ہوئے زیادہ لمبے جفت قطب یا مختلف انداز میں جڑے موصل تاروں کی خاصیت جاننے میں مدد ملے گی۔ 4893

آئیں شکل 14.5-الف میں دکھائے مختصر جفت قطب پر غور کریں جس کی لمبائی l طول موج سے بہت کم $l \ll \lambda$ ہے۔جفت قطب کے سروں پر موصل چادر بطور کپیسٹر بوجھ کردار ادا کرتے ہیں۔جفت قطب کی مختصر لمبائی اور اس کے سروں پر موصل چادر مل کر جفت قطب کی پوری لمبائی پر تقریباً برابر برقی رو رکھنے میں مدد دیتے ہیں۔جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کو متوازن ترسیلی تار سے طاقت مہیا کی جا سکتی ہے۔یہ فرض کرتے ہوئے کہ ترسیلی تار سے شعاعی اخراج نہیں ہوتی، اس کے موجودگی کو نظر انداز کیا جائے گا۔جفت قطب کے سروں پر نسب موصل چادروں کے شعاعی اخراج کو بھی نظر انداز کیا جائے گا۔جفت قطب کی موٹائی d اس کے لمبائی سے بہت کم $d \ll \lambda$ ہے۔ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے تحلیلی تجزیے کی خاطر جفت قطب کو شکل 14.5-ب کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔ایسا جفت قطب یکساں برقی رو I گزارتا، l لمبائی کا تار معلوم ہو گا جس کے دونوں سروں پر برابر مگر الٹ قطب کے چارج $\mp q$ ہوں۔کپیسٹر پر چارج q اور برقی رو I کا تعلق

$$I = \frac{\partial q}{\partial t} \tag{14.17}$$

ہے۔ 4894

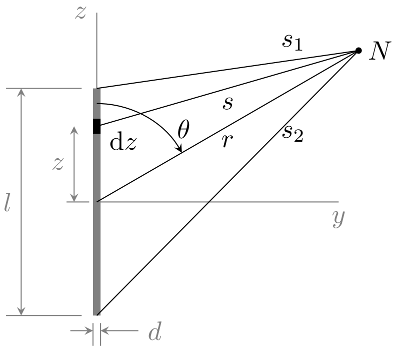
آئیں لامحدود وسعت کی خالی خلاء میں جفت قطب کے میدان حاصل کریں۔جیسے شکل 14.6 میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کے وسط کو کروی محدد 4895
کے مرکز اور لمبائی کو z محدد پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔کسی بھی نقطہ N پر عموماً آپس میں عمودی تین میدان E_r، E_θ اور $E\phi$ پائے جائیں گے۔ 4896

کسی بھی نقطہ N پر مساوات 9.71 اور مساوات 9.73 بالترتیب مقناطیسی میدان اور برقی میدان دیتے ہیں

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{14.18}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{14.19}$$

[2] short dipole
[3] infinitesimal



شکل 14.7: جفت قطب اور دور میدان۔

جہاں

V نقطہ N پر مقداری برقی دباو

$\boldsymbol{A}$ نقطہ N پر سمتی دباو

ہیں۔ اگر ہمیں کسی بھی نقطے پر مقداری دباو V اور سمتی دباو $\boldsymbol{A}$ معلوم ہوں تب مندرجہ بالا دو مساوات سے اس نقطے پر برقی اور مقناطیسی میدان حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ چونکہ ہمیں جفت قطب سے دور میدان درکار ہیں لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 14.6 اور مساوات 14.8 میں دئے تاخیری دباو قابل استعمال ہوں گے۔ یوں ان مساوات کو

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times [\boldsymbol{A}] \tag{14.20}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla[V] - \frac{\partial[\boldsymbol{A}]}{\partial t} = -\nabla[V] - j\omega[\boldsymbol{A}] \tag{14.21}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 9.59 اور مساوات 9.60 سے تاخیری دباو

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_h \frac{\boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r}\,\mathrm{d}h \tag{14.22}$$

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_h \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r}\,\mathrm{d}h \tag{14.23}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

کسی بھی برقی چارج اور برقی رو سے پیدا میدان مساوات 14.20 اور مساوات 14.21 سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ مساوات 14.23 کے تحت تاخیری مقداری دباو $[V]$ صرف ساکن چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 14.22 کے تحت تاخیری سمتی دباو $[\boldsymbol{A}]$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے۔ مساوات 14.20 کے تحت مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 14.21 کے تحت برقی میدان $\boldsymbol{E}$ ساکن چارج اور برقی رو دونوں پر منحصر ہے۔ ہم جلد مساوات 14.46 میں دیکھیں گے کہ کسی بھی چارج اور برقی رو سے دور پیدا مقناطیسی اور برقی میدانوں کا دارومدار صرف برقی رو پر ہوتا ہے۔ چونکہ اس باب میں تاخیری دباو ہی استعمال کئے جائیں گے لہٰذا انہیں چکور قوسین میں لکھنے سے گریز کیا جائے گا۔ اس باب میں یہاں سے آگے بغیر چکور قوسین کے دباو کو تاخیری دباو ہی سمجھا جائے۔

شکل 14.6 یا شکل 14.7 سے ظاہر ہے کہ سمتی دباو کا صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جزو

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{I_0 e^{j(\omega t-\beta s)}}{s}\,\mathrm{d}z \tag{14.24}$$

پایا جاتا ہے۔ اگر جفت قطب کی لمبائی l، نقطہ N سے جفت قطب تک فاصلہ r سے نہایت کم $r \gg l$ اور طول موج λ سے بھی نہایت کم $\lambda \gg l$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات میں متغیر فاصلہ s کی جگہ مستقل فاصلہ r پر کیا جا سکتا ہے[4] اور ساتھ ہی ساتھ l پر مختلف نقطوں سے N پر پیدا دباو میں زاویائی فرق کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح ان تمام کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔ جفت قطب کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 کی صورت میں I_0 کو بھی تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \tag{14.25}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو کروی محدد میں یوں

$$\boldsymbol{A} = A_r \boldsymbol{a}_\mathrm{r} + A_\theta \boldsymbol{a}_\theta + A_\phi \boldsymbol{a}_\phi$$

لکھا جائے گا جہاں

$$\begin{aligned}
A_r &= \boldsymbol{a}_\mathrm{r} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \boldsymbol{a}_\mathrm{r} \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{Z} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \cos\theta \\
A_\theta &= \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{Z} = -\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \sin\theta \\
A_\phi &= \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{Z} = 0
\end{aligned} \tag{14.26}$$

ہوں گے جہاں اکائی سمتیات کے مقداری ضرب صفحہ 32 پر جدول 1.2 سے حاصل کئے گئے۔ اس طرح

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} (\cos\theta \boldsymbol{a}_\mathrm{r} - \sin\theta \boldsymbol{a}_\theta) \tag{14.27}$$

لکھا جائے گا۔

4907

ساکن چارج جفت قطب کے سروں پر پایا جاتا ہے لہٰذا مقداری دباو

$$V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right] \tag{14.28}$$

ہو گا جہاں مساوات 14.17 کے تحت

$$q = \int I \,\mathrm{d}t = \frac{I}{j\omega} \tag{14.29}$$

کے برابر ہے جہاں

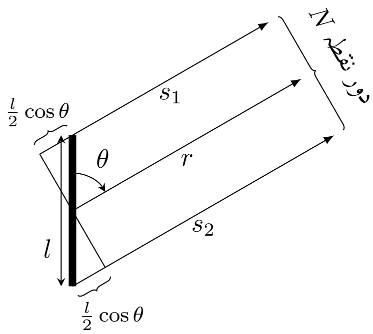
$$\begin{aligned}
I &= I_0 e^{j(\omega t - \beta s)} \\
q &= q_0 e^{j(\omega t - \beta s)}
\end{aligned}$$

ہیں۔ مساوات 14.29 سے $q_0 = \frac{I_0}{j\omega}$ حاصل کرتے ہوئے مساوات 14.28 میں پر کرتے ہیں۔

$$V = \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right] \tag{14.30}$$

شکل 14.8 کو دیکھ کر

[4] جیسے حصہ 14.3 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 14.8: جفت قطب اور دور نقطے کے تعلق۔

$$
\begin{aligned}
s_1 &= r - \frac{l}{2}\cos\theta \\
s_2 &= r + \frac{l}{2}\cos\theta
\end{aligned}
$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں مساوات 14.30 میں پر کرتے

$$
V = \frac{I_0 e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega}\left[\frac{(r+\frac{l}{2}\cos\theta)e^{j\frac{\beta l}{2}\cos\theta}-(r-\frac{l}{2}\cos\theta)e^{-j\frac{\beta l}{2}\cos\theta}}{r^2-\frac{l^2}{4}\cos^2\theta}\right] \tag{14.31}
$$

ملتا ہے۔چکور قوسین میں شرح کے نچلے حصے میں $r \gg l$ کی وجہ سے $\frac{l^2}{4}\cos^2\theta$ کو نظر انداز کرتے ہیں۔مسئلہ ڈی موے ور[5] کے استعمال سے

$$
\begin{aligned}
V = \frac{I_0 e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2}\Bigg[\left(r+\frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2}+j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right) \\
-\left(r-\frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2}-j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right)\Bigg]
\end{aligned} \tag{14.32}
$$

لکھا جائے گا۔چونکہ $\lambda \gg l$ ہے لٰہذا

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} &= \cos\frac{\pi l\cos\theta}{\lambda} \approx l \\
\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2} &\approx \frac{\beta l\cos\theta}{2}
\end{aligned}
$$

ہوں گے، جنہیں مساوات 14.32 میں پر کرنے سے

$$
V = \frac{I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{1}{r}+\frac{c}{j\omega r^2}\right) \tag{14.33}
$$

4908 حاصل ہوتا ہے جہاں

4909 I_0 برقی رو کا حیطہ یعنی اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت، A

4910 l جفت قطب کی لمبائی، m

[5] $(e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha)$ de Moivre's theorem

4911 ω زاویائی تعدد ($\omega = 2\pi f$)، اکائی $\mathrm{rad/s}$۔ جہاں ہرٹز Hz میں تعدد f ہے

4912 β زاویائی مستقل ($\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$)، اکائی $\mathrm{rad/m}$

4913 t وقت، s

4914 θ جفت قطب اور جفت قطب سے نقطہ N تک سمتیہ کے مابین زاویہ

4915 ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل، $8.854\,\mathrm{pF/m}$

4916 c خالی خلاء میں شعاع کی رفتار، $3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

4917 j خیالی عدد $\sqrt{-1}$

4918 r جفت قطب کے وسط سے نقطہ N تک فاصلہ، m

4919 ہیں۔

مختصر جفت قطب کے وسط سے، $\lambda \gg l$ اور $r \gg l$ کی صورت میں، r فاصلے اور θ زاویے پر مساوات 14.27 سمتی دباو اور مساوات 14.33 مقداری دباو دیتے ہیں۔ کروی محدد میں مقداری دباو کی ڈھلوان

$$
\begin{aligned}
\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_{\phi} \\
&= \frac{I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0 c}\left[-\left(\frac{\cos\theta}{r^2}+\frac{2c\cos\theta}{j\omega r^3}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \left(\frac{\sin\theta}{r^2}+\frac{c\sin\theta}{j\omega r^3}\right)\boldsymbol{a}_{\theta}\right]
\end{aligned}
\tag{14.34}
$$

کے برابر ہے۔ برقی میدان $\boldsymbol{E} = E_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + E_\theta\boldsymbol{a}_\theta + E_\phi\boldsymbol{a}_\phi$ کے اجزاء مساوات 14.21 کی مدد سے

$$
\begin{aligned}
E_r &= -j\omega A_r - \frac{\partial V}{\partial r} \\
E_\theta &= -j\omega A_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\
E_\phi &= -j\omega A_\phi - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}
\end{aligned}
$$

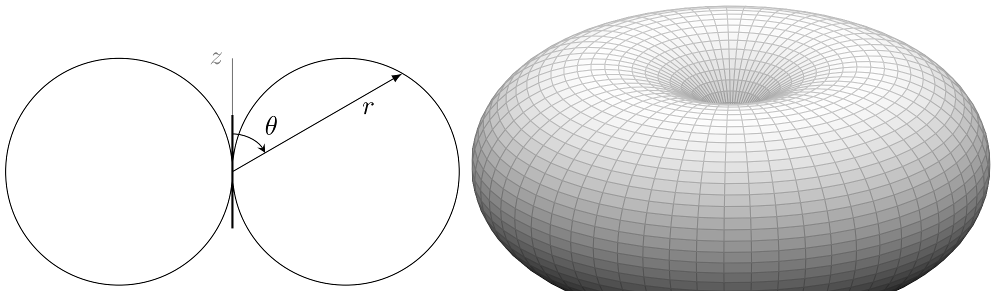
لکھے جا سکتے ہیں جن میں مطلوبہ تفاعل پر کرنے سے برقی میدان کے عمومی مساوات

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{I_0 l\cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right) \\
E_\theta &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{c^2 r}+\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right) \qquad \text{عمومی میدان} \\
E_\phi &= 0
\end{aligned}
\tag{14.35}
$$

4920 حاصل ہوتے ہیں۔

مقناطیسی میدان مساوات 14.20 سے حاصل ہو گی۔ کروی محدد میں سمتی دباو کی گردش

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta \\
+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}
\tag{14.36}
$$



(ب)

(ا)

شکل 14.9: اندرسہ شکل کا دور میدان۔

میں مساوات 14.26 پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی عمومی مساوات

$$
\begin{aligned}
H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right) \qquad \text{عمومی میدان}\\
H_r &= 0\\
H_\theta &= 0
\end{aligned}
\tag{14.37}
$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ کا استعمال کیا گیا۔

مساوات 14.35 اور مساوات 14.37 کے تحت جفت قطب سے پیدا میدان کے صرف تین اجزاء E_r، E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں۔جفت قطب سے زیادہ فاصلے پر میدان کی مساوات میں ایسے اجزاء جن میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ پایا جاتا ہو کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔یوں E_r قابل نظر انداز ہو گا لہٰذا $E_r \approx 0$ تصور کیا جائے گا جبکہ

$$
\begin{aligned}
E_\theta &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\frac{j\omega}{c^2 r} = j\frac{30 I_0 \beta l}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}\\
H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\frac{j\omega}{cr} = j\frac{I_0 \beta l}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \qquad \text{دور میدان}
\end{aligned}
\tag{14.38}
$$

ہوں گے۔مساوات 14.38 استعمال کرتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح

$$
\frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7\,\Omega
\tag{14.39}
$$

حاصل ہوتی ہے جو خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ Z_0 ہے۔

یہاں اس حقیقت پر توجہ دیں کہ خالی خلاء میں TEM موج کی طرح، جفت قطب سے دور E_θ اور H_ϕ آپس میں ہم قدم ہیں۔اس کے علاوہ دونوں میدان $\sin\theta$ کے راست تناسب ہیں یعنی جفت قطب کے محوری سمت $\theta = 0^\circ$ پر ان کی قیمت صفر جبکہ $\theta = 90^\circ$ پر ان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے۔اندرسہ[6] شکل کی ان میدان کو شکل 14.9-الف میں دکھایا گیا ہے جبکہ شکل-ب میں کارتیسی محدد کی سطح $x = 0$ پر دور میدان کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔شکل-الف میں اندرسے کے محور پر جفت قطب پایا جاتا ہے جسے شکل-ب میں z محدد پر موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔

[6]doughnut

جفت قطب سے دور میدان حاصل کرتے وقت مساوات 14.35 اور مساوات 14.37 میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ رکھتے اجزاء کو نظر انداز کیا گیا یعنی E_θ میں

$$\left| j\frac{\omega}{c^2 r} \right| \gg \frac{1}{cr^2}$$
$$\left| j\frac{\omega}{c^2 r} \right| \gg \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right|$$

یا

$$r \gg \frac{c}{\omega} \tag{14.40}$$

تصور کیا گیا۔اسی طرح H_ϕ میں بھی

$$\left| j\frac{\omega}{cr} \right| \gg \frac{1}{r^2}$$

یا

$$r \gg \frac{c}{\omega} \tag{14.41}$$

تصور کیا گیا جسے

$$r \gg \frac{1}{\beta} \qquad (\text{دور میدان}) \tag{14.42}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔اگر جفت قطب کے قریب میدان کی بات کی جائے تو $r \ll \frac{c}{\omega}$ یعنی $r \ll \frac{1}{\beta}$ لیا جائے گا۔یوں مساوات 14.35 اور مساوات 14.37 میں

$$\frac{1}{cr^2} \ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right|$$
$$\left| \frac{j\omega}{c^2 r} \right| \ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right|$$
$$\frac{1}{cr^2} \ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right|$$
$$\left| \frac{j\omega}{cr} \right| \ll \frac{1}{r^2}$$

ہوں گے لہٰذا قریبی میدان

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\
E_\theta &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})}}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\
H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \frac{1}{r^2} = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r^2} \qquad \text{قریبی میدان}
\end{aligned} \tag{14.43}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔کل قریبی برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = E_r \boldsymbol{a}_\mathrm{r} + E_\theta \boldsymbol{a}_\theta = \left[\frac{I_0 l \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{I_0 l \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \boldsymbol{a}_\theta \right] e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})} \tag{14.44}$$

ہو گا۔ مساوات 14.44 کے برقی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}$ پایا جاتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t-\beta r)}$ پایا جاتا ہے۔ یوں جفت
قطب کے قریب کسی بھی نقطے پر ہر لمحہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان میں $\frac{\pi}{2}$ زاویے کا فرق پایا جاتا ہے جو ساکن میدان کی نشانی ہے۔ 4928

جفت قطب کے قریب برقی اور مقناطیسی میدان میں لمحاتی طور $\frac{\pi}{2}$ ریڈیئن کا زاویہ پایا جاتا ہے جبکہ جفت قطب سے دور دونوں میدان لمحاتی طور پر ہم قدم ہیں لہٰذا کسی درمیانے فاصلے پر ان میدانوں میں $45°$ کا زاویہ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جفت قطب سے فاصلہ بڑھانے سے برقی میدان وقت کی نسبت سے گھوم کر مقناطیسی میدان کے ہم قدم ہو جاتا ہے۔ 4931

مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.38 سے دور میدان میں کثافت توانائی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]_{\text{حقیقی}} = \frac{1}{2}E_\theta H_\phi^* \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{15 I_0^2 \beta^2 l^2}{4\pi r^2}\sin^2\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \qquad \text{دور کثافت طاقت}$$

حاصل ہوتی ہے جو رداسی r سمت میں منتقل ہوتی حقیقی توانائی ہے۔ یہی اینٹینا کی شعاعی اخراج ہے۔ شعاعی اخراج $\theta = 90°$ پر زیادہ سے زیادہ ہے۔ اسی طرح پوئنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.43 سے قریبی میدان میں کثافت توانائی

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]_{\text{حقیقی}} &= \frac{1}{2}\left[\left(E_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+E_\theta\boldsymbol{a}_\theta\right)\times H_\phi^*\boldsymbol{a}_\phi\right]_{\text{حقیقی}}\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{I_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\theta+\frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right]\frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2}e^{-j\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جس کا بیشتر حصہ خیالی ہے اور ساتھ ہی ساتھ شعاعی اخراج کے علاوہ یہاں θ سمت میں گھومتی طاقت بھی پائی جاتی ہے۔ 4932

آئیں اب نہایت کم تعدد پر صورت حال دیکھیں۔ مساوات 14.35 میں $I_0 = j\omega q_0$ پر کرتے ہوئے اور مساوات 14.37 کو جوں کا توں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{q_0 l\cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{cr^2}+\frac{1}{r^3}\right)\\
E_\theta &= \frac{q_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r}+\frac{j\omega}{cr^2}+\frac{1}{r^3}\right)\\
H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right)
\end{aligned}$$

$\left|e^{-j\beta r}\right| = 1$ لیتے ہوئے، صفر کے قریب تر تعدد $\omega \to 0$ پر ان مساوات سے میدان کی حتمی قیمت

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{q_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}\\
E_\theta &= \frac{q_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\\
H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2} \qquad \text{نیم ساکن میدان}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہیں جن سے برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{14.45}$$

جدول 14.1: مختصر جفت قطب کے میدان

جزو	عمومی مساوات	دور میدان	نیم ساکن میدان
E_r	$\frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right)$	0	$\frac{q_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$
E_θ	$\frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{c^2 r}+\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right)$	$\frac{j60\pi I_0 \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{r}\frac{l}{\lambda}$	$\frac{q_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
H_ϕ	$\frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right)$	$\frac{jI_0\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2r}\frac{l}{\lambda}$	$\frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2}$

لکھا جا سکتا ہے۔ان میدان کو نیم ساکن میدان[7] کہا جاتا ہے۔یہ صفحہ 113 پر حاصل کی گئی مساوات 4.67 ہی ہے۔اسی طرح مندرجہ بالا مقناطیسی میدان H_ϕ کی قیمت صفحہ 200 پر مساوات 7.3 ہی ہے۔چونکہ یہ میدان $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ کے تعلق سے تبدیل ہوتے ہیں لٰہذا یہ جفت قطب کے قریب ہی پائے جاتے ہیں۔جفت قطب سے دور ان کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے لٰہذا ان کا شعاعی اخراج میں خاص کردار نہیں ہوتا۔بلند تعدد پر دور میدان جنہیں مساوات 14.38 پیش کرتی ہے، $\frac{1}{r}$ کے تعلق سے گھٹتی ہیں لٰہذا یہی شعاعی اخراج کو ظاہر کرتی ہیں اور یوں انہیں اخراجی میدان[8] کہا جاتا ہے۔

مختصر جفت قطب، $r \ll l$ اور $l \ll \lambda$، کے تمام میدان کو جدول 14.1 میں پیش کیا گیا ہے۔بقایا اجزاء $E_\phi = H_r = H_\theta = 0$ صفر کے برابر ہیں۔

مساوات 14.35 میں دیے E_θ میں $\frac{1}{r^2}$ اور $\frac{1}{r^3}$ رکھنے والے اجزاء برقی دباو V کے پیدا کردہ ہیں جو دور میدان میں قابل نظر انداز ہوتے ہیں۔اگر ہماری دلچسپی صرف دور میدان میں ہو تب مطلوبہ میدان کو نہایت آسانی کے ساتھ صرف $\boldsymbol{A}$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 14.21 اور مساوات 14.26 سے

$$E_\theta = -j\omega A_\theta = -j\omega\left(-\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\sin\theta\right) = j\frac{30 I_0 \beta l}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.46}$$

حاصل ہوتا ہے۔مقناطیسی میدان H_ϕ کو مساوات 14.20 سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں $\frac{1}{r^2}$ اجزاء رد کئے جائیں گے۔مقناطیسی میدان کو نسبتاً زیادہ آسانی سے، لامحدود خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ استعمال کرتے ہوئے

$$H_\phi = \frac{E_\theta}{Z_0} = j\frac{30 I_0 \beta l}{120\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} = j\frac{I_0 \beta l}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.47}$$

سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔چونکہ دور میدان کا دارومدار جفت قطب کے چارج q_0 پر ہر گز نہیں لٰہذا ان چارج کا جاننا غیر ضروری ہے۔کسی بھی اینٹینا کو متعدد مختصر جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں کسی بھی اینٹینا کے میدان تمام جفت قطب کے میدان کو جمع کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 14.38 میں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے دور برقی میدان کو

$$E_\theta = j60\pi I_0 \frac{l}{\lambda}\frac{1}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.48}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کے اجزاء کو دور دور لکھتے ہوئے پہچاننے کی کوشش کرتے ہیں۔

$$E_\theta = j \quad \underbrace{60\pi}_{\text{مقدار}} \quad \underbrace{I_0}_{\text{رو}} \quad \underbrace{\frac{l}{\lambda}}_{\text{لمبائی}} \quad \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{فاصلہ}} \quad \underbrace{\sin\theta}_{\text{شکل}} \quad \underbrace{e^{j(\omega t-\beta r)}}_{\text{زاویہ}} \tag{14.49}$$

[7] quasi stationary fields
[8] radiation fields

لکھا جا سکتا ہے جہاں 60π مساوات کا مستقل ہے، I_0 برقی رو، $\frac{l}{\lambda}$ جفت قطب کی لمبائی جسے طول موج میں ناپا گیا ہے، $\frac{1}{r}$ فاصلے کو ظاہر کرتا ہے، $\sin\theta$ میدان کا نقش اور $e^{j(\omega t-\beta r)}$ زاویائی فرق ہے۔کسی بھی اینٹینا کے میدان کو عموماً ان چھ اجزاء کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

جدول 14.1 مختصر جفت قطب کے میدان دیتا ہے۔

14.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

اینٹینا کے گرد کسی بھی بند سطح پر مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ

$$\boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} \tag{14.50}$$

کی سطحی تکمل

$$P = \int_S \boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad (\mathrm{W}) \tag{14.51}$$

کل شعاعی اخراج P دے گی۔فی سیکنڈ خارج ہونے والی توانائی شعاعی اخراج کہلاتی ہے لہٰذا اس کی اکائی واٹ W ہے۔سادہ ترین بند سطح کرہ ہے۔یوں اینٹینا کو کروی محدد کے مرکز پر رکھتے ہوئے تکمل حاصل کیا جائے گا۔چونکہ دور کے میدان نسبتاً سادہ صورت رکھتے ہیں لہٰذا بند سطح کا رداس جتنا زیادہ رکھا جائے تکمل اتنا آسان ہو گا۔یوں رداس زیادہ سے زیادہ رکھتے ہوئے دور میدان استعمال کرتے ہوئے جفت قطب کا شعاعی اخراج P حاصل کیا جاتا ہے۔

کامل اینٹینا کی صورت میں شعاعی اخراج اس برقی طاقت کے برابر ہو گا جو اینٹینا کے برقی سروں پر مہیا کی گئی ہو۔اینٹینا کو مزاحمت R تصور کرتے ہوئے اس برقی طاقت کو $P=\frac{1}{2}I_0^2R$ لکھا جا سکتا ہے جہاں I_0 سائن نما برقی رو کا حیطہ ہے۔یوں

$$R = \frac{2P}{I_0^2} \qquad (\Omega) \tag{14.52}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں R اینٹینا کی **اخراجی مزاحمت**[9] کہلاتی ہے۔

آئیں مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں لہٰذا شعاعی اخراج

$$P = \frac{1}{2}\int_S \left[E_\theta H_\phi^*\right]_{\text{حقیقی}} \mathrm{d}s \tag{14.53}$$

سے حاصل ہو گی جہاں H_ϕ^* مقناطیسی میدان H_ϕ کا جوڑی دار مخلوط ہے۔اب $E_\theta = Z_0 H_\phi$ ہے لہٰذا

$$P = \frac{1}{2}\int_S \left[H_\phi H_\phi^* Z_0\right]_{\text{حقیقی}} \mathrm{d}s = \frac{Z_0}{2}\int_S \left|H_\phi\right|^2 \mathrm{d}s \tag{14.54}$$

یا

$$P = \frac{1}{2Z_0}\int_S \left|E_\phi\right|^2 \mathrm{d}s \tag{14.55}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ اور $\mathrm{d}s = r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi$ کے برابر ہیں۔

[9] radiation resistance

جفت قطب کے میدان حاصل کرتے وقت فرض کیا گیا کہ اس کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 پائی جاتی ہے۔ساتھ ہی ساتھ لمبائی l کے مختلف نقطوں کے میدان کا زاویائی فرق نظر انداز کیا گیا۔جفت قطب کی پوری لمبائی پر برابر برقی رو نہ ہونے کی صورت میں مساوات 14.24 سے مساوات 14.25 حاصل ہونے کی بجائے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\mu_0 e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\int_{-l/2}^{l/2} i\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\mu_0 l I e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}
\end{aligned}
$$

حاصل ہو گا جہاں I اوسط برقی رو ہے۔اسی حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 14.38 سے مقناطیسی میدان کا حیطہ

$$
H_\phi = \frac{I\beta l}{4\pi r}\sin\theta \tag{14.56}
$$

لکھتے ہوئے I_0 کی جگہ اوسط برقی رو I لکھی گئی ہے۔مقناطیسی میدان کے اس حیطے کو مساوات 14.54 میں پر کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ اخراجی طاقت

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{120\pi}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{I\beta l}{4\pi r}\sin\theta\right)^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{120\pi}{2}\left(\frac{\beta I l}{4\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= 80\pi^2 I^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتی ہے۔مساوات 14.54 یا مساوات 14.55 برقی رو کی چوٹی I کی صورت میں اخراجی طاقت دیتے ہیں جو سائن نما برقی رو کی صورت میں اوسط اخراجی طاقت کے دگنا ہوتی ہے۔یوں اوسط اخراجی طاقت

$$
P_{\text{اوسط}} = 40\pi^2 I^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{14.57}
$$

ہو گی۔مساوات 14.52 سے مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$
R = 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\left(\frac{I}{I_0}\right)^2 \qquad (\Omega) \tag{14.58}
$$

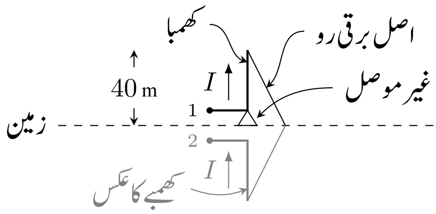
4951 حاصل ہوتی ہے۔

کسی بھی اینٹینا کی اخراجی مزاحمت

$$
R = \frac{Z_0}{I_0^2}\int_S |H|^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{Z_0 I_0^2}\int_S |E|^2\,\mathrm{d}s \tag{14.59}
$$

4952 سے حاصل کی جا سکتی ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ کے برابر ہے۔

4953 مثال 14.1: چالیس میٹر لمبے کھمبے اینٹینا کو موصل سطح پر کھڑا کئے $300\,\mathrm{kHz}$ کے تعدد پر استعمال کیا جاتا ہے۔اسے برقی اشارہ نچلے سرے پر فراہم
4954 کیا جاتا ہے۔اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔اس کھمبے کو شکل 14.10 میں دکھایا گیا ہے۔کھمبے کو غیر موصل بنیاد پر کھڑا کیا گیا ہے۔



شکل 14.10: کھمبا اینٹینا

حل: موصل زمین میں کھمبا اینٹینا کا عکس بنتا ہے۔ درکار تعدد پر $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{300000} = 1000\,\mathrm{m}$ ہے جو کھمبے کی لمبائی سے بہت زیادہ ہے۔ یوں اینٹینا اور اس کا عکس بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں۔ چونکہ کھمبے کے سر پر موصل چادر نسب نہیں کیا گیا ہے لہٰذا اس کے پورے لمبائی پر برابر برقی رو تصور کرنا غلط ہو گا۔ حقیقت میں، جیسے شکل میں وضاحت کی گئی ہے، کھمبے کے کھلے سر پر برقی رو صفر ہو گی جبکہ نچلے سر پر اس کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، برقی رو بالمقابل لمبائی l کا خط تکونی ہے۔ یوں اوسطاً برقی رو $I_{\text{اوسط}} = \frac{I_0}{2}$ ہو گی جہاں برقی رو کی زیادہ سے زیادہ قیمت I_0 ہے۔

یوں 40×2 میٹر لمبے فرضی جفت قطب کی اخراجی مزاحمت مساوات 14.58 سے

$$80\pi^2 \left(\frac{2\times 40}{1000}\right)^2 \left(\frac{0.5 I_0}{I_0}\right)^2 = 1.2633\,\Omega$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مزاحمت حقیقی کھمبے کے سر 1 اور عکسی کھمبے کے سر 2 کے مابین ہے۔ یوں اصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت جو زمین اور 1 کے مابین ناپی جائے گی کی قیمت

$$R_{\text{اخراجی}} = \frac{0.63165}{2} = 0.63\,\Omega \tag{14.60}$$

ہو گی۔

حقیقی دھات کامل موصل نہیں ہوتے لہٰذا کسی بھی دھات سے بنائے گئے جفت قطب میں توانائی کا ضیاع ہو گا۔ موصل کے علاوہ اینٹینا کے ساتھ منسلک ذو برق میں بھی طاقت کا ضیاع ہو گا۔ ان ضیاع کو مزاحمت $R_{\text{ضیاعی}}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ یوں اینٹینا کے برقی سروں پر کل مزاحمت

$$R = R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیاعی}} \tag{14.61}$$

ہو گی۔ مندرجہ بالا مثال میں اگر $R_{\text{ضیاعی}} = 0.63\,\Omega$ ہو تا تب اینٹینا کی کار گزاری[10] k

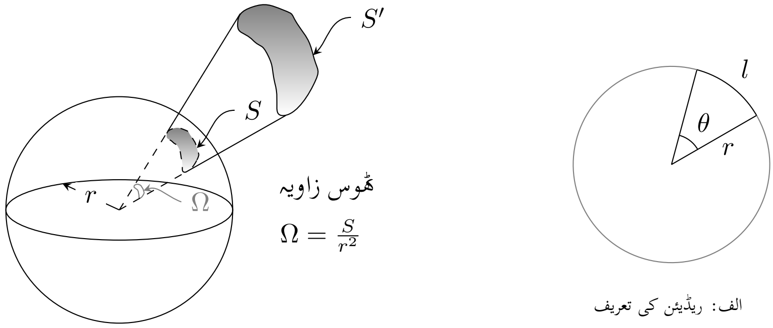
$$k = \frac{\text{اخراجی طاقت}}{\text{داخلی طاقت}} = \frac{R_{\text{اخراجی}}}{R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیاعی}}} \frac{0.63}{0.63 + 0.63} = 50\,\% \tag{14.62}$$

پچاس فی صد ہو گی۔ اگر طاقت کا ضیاع بڑھائے بغیر زیادہ لمبائی کا جفت قطب استعمال کیا جائے تو کار گزاری اس سے بہتر کی جا سکتی ہے۔

اینٹینا کو مکمل گھیرتی بند سطح پر مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل لینے سے حقیقی طاقت کے ساتھ ساتھ خیالی طاقت بھی حاصل ہوتا ہے۔ حقیقی طاقت اخراجی طاقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ خیالی طاقت متعامل جزو ہے۔ سطح تکمل کی صورت اور مقام کا تکمل کے حقیقی جزو پر کوئی اثر نہیں البتہ خیالی طاقت کا دارومدار سطح کی صورت اور مقام پر ہے۔ اینٹینا سے بہت دور خیالی جزو قابل نظر انداز ہوتا ہے جبکہ اینٹینا کے قریب اس جزو کی مقدار بڑھ جاتی ہے۔ نہایت پتلی ساخت کے خطی اینٹینا کی صورت میں اگر سطح تکمل کو بالکل سطح اینٹینا کے ساتھ ملا لیا جائے تب حاصل مخلوط طاقت تقسیم I_0^2 رکاوٹ $R + jX$ دیتا ہے جہاں R اینٹینا کے اخراجی مزاحمت کو ظاہر کرتا ہے۔

---

[10] efficiency



ب: سٹریڈیئن کی تعریف

الف: ریڈیئن کی تعریف

شکل 14.11: ریڈیئن اور سٹریڈیئن کی تعریف

14.6 ٹھوس زاویہ

اگلے حصے میں ٹھوس زاویہ[11] درکار ہو گا لہٰذا اسے پہلے سمجھتے ہیں۔

شکل 14.11-الف میں رداس r کے دائرے پر قوس کی لمبائی l اور رداس r کی شرح

$$\theta = \frac{l}{r} \qquad \text{(rad)} \tag{14.63}$$

زاویہ θ دیتی ہے جس کی اکائی ریڈیئن[12] (rad) ہے۔یوں اکائی رداس کے دائرے پر اکائی لمبی قوس، دائرے کے مرکز پر، ایک ریڈیئن (1 rad) کا زاویہ بنائے گی۔یہی اکائی ریڈیئن کی تعریف ہے۔چونکہ دائرے کا محیط $2\pi r$ ہے لہٰذا دائرے کے گرد ایک مکمل چکر 2π ریڈیئن کے زاویے کو ظاہر کرتی ہے۔اگرچہ مساوات 14.63 کے تحت θ دراصل بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی ریڈیئن میں ناپتے ہیں۔یوں x rad سے ظاہر ہوتا ہے کہ x زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

بالکل اسی طرح رداس r کے کرہ کی سطح پر کسی بھی رقبہ S اور کرہ کے رداس کے مربع r^2 کی شرح

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \qquad \text{(sr)} \tag{14.64}$$

ٹھوس زاویہ Ω دیتی ہے جسے مربع ریڈیئن یعنی سٹریڈیئن[13] (sr) میں ناپا جاتا ہے۔اکائی رداس کے کرہ پر اکائی رقبہ، کرہ کے مرکز پر، ایک سٹریڈیئن کا ٹھوس زاویہ بنائے گی۔یہی سٹریڈیئن کی تعریف ہے۔چونکہ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہٰذا پوری کرہ 4π سٹریڈیئن کا ٹھوس زاویہ دیتی ہے۔اگرچہ ٹھوس زاویہ بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی سٹریڈیئن میں ناپتے ہیں۔یوں مختلف اعداد کی بات کرتے وقت یہ جاننا ممکن ہوتا ہے کہ ٹھوس زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

شکل 14.11-ب میں عمومی رقبہ S' کا محدد کے مرکز پر ٹھوس زاویہ حاصل کرنے کا طریقہ دکھایا گیا ہے۔مرکز سے دیکھتے ہوئے S' کا بیرونی خاکہ نظر آئے گا۔اگر اس خاکے کے بیرونی کناروں سے مرکز تک ربڑی چادر کھینچ کر لگائی جائے تو یہ چادر رداس r کے کرہ کو کاٹے گی۔کرہ کی سطح پر یوں رقبہ S گھیرا جائے گا۔ٹھوس زاویے

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \tag{14.65}$$

---

solid angle[11]
radian[12]
steradian[13]

4978 کے برابر ہو گا۔اکائی رداس کے کرہ کی صورت میں رقبہ S کی قیمت ٹھوس زاویے کی قیمت کے برابر ہو گی۔

4979 شکل 14.11-الف میں θ نظارے کے حدود کو ظاہر کرتا ہے۔اسی طرح شکل 14.11-ب میں Ω نظارے کے حدود تعین کرتا ہے۔

شکل 14.11-الف میں دکھایا گیا زاویہ سطحی نوعیت کا ہے جسے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔اس کے برعکس شکل 14.11-ب میں دکھایا گیا زاویہ حجمی نوعیت کا ہے جسے سٹریڈیئن یا ریڈیئن کے مربع میں ناپا جاتا ہے۔یاد رہے کہ ایک مربع ریڈیئن کو ہی ایک سٹریڈیئن کہتے ہیں۔

$$1\,\mathrm{sr} = 1\,\mathrm{rad}^2 \tag{14.66}$$

کروی محدد میں r رداس کے کرہ کی سطح پر رقبے کو

$$S = \int_\theta \int_\phi r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \tag{14.67}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ رقبہ کرہ کے مرکز پر

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = \int_\theta \int_\phi \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \qquad (\mathrm{sr}) \tag{14.68}$$

4980 ٹھوس زاویہ بنائے گی۔

4981 ## 14.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش

مختصر جفت قطب کے دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں جنہیں مساوات 14.38 میں پیش کیا گیا ہے۔کسی بھی اینٹینا کی طرح اس کے دور میدان $\frac{1}{r}$ کی شرح سے گھٹتے ہیں لہٰذا پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} = \frac{Z_0}{2}\left|H\right|^2 \boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \frac{1}{2Z_0}\left|E\right|^2 \boldsymbol{a}_\mathrm{r} \tag{14.69}$$

$\frac{1}{r^2}$ کی شرح سے گھٹے گی۔یوں پوئنٹنگ سمتیہ کے رداسی جزو کو r^2 سے ضرب دینے سے $P(\theta,\phi)$

$$P(\theta,\phi) = r^2\mathscr{P} = \frac{Z_0}{2}\left|H\right|^2 r^2 = \frac{1}{2Z_0}\left|E\right|^2 r^2 \qquad (\mathrm{W/sr}) \tag{14.70}$$

4982 حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت فاصلہ r بڑھانے سے نہیں گھٹتی۔$P(\theta,\phi)$ اخراجی شدت[14] کہلاتی ہے۔اخراجی شدت کے بُعد پر غور کریں۔پوئنٹنگ سمتیہ
4983 طاقت کی کثافت یعنی طاقت فی رقبہ دیتی ہے۔مساوات 14.64 سے رقبے کو $S = \Omega r^2$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں پوئنٹنگ سمتیہ ضرب مربع رداس کا بُعد
4984 طاقت فی ٹھوس زاویہ $\mathrm{W/sr}$ بنتی ہے۔

اخراجی شدت کو قابل پذیر[15] بنانے کی خاطر $P(\theta,\phi)$ کو اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت $r^2\mathscr{P}_{\text{بلند تر}} = P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$P_n(\theta,\phi) = \frac{P(\theta,\phi)}{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}} \qquad \text{بے بُعد} \tag{14.71}$$

---

[14] radiation intensity
[15] normalized

4985 بے بُعد[16] مقدار $P_n(\theta,\phi)$ حاصل ہوتی ہے جو اینٹینا کی تقابل پذیر نقش طاقت[17] ہے۔

اینٹینا کی کل اخراج

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathscr{P}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{14.72}$$

ہے۔اگر کثافت طاقت $\mathscr{P}_{\text{بلند تر}}$ ہو تب اتنی اخراج مکمل کرہ کی سطح کے بجائے کرہ کی سطح پر رقبہ S سے خارج ہو گی یعنی

$$\mathscr{P}_{\text{بلند تر}}S=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathscr{P}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{14.73}$$

ہو گا۔اس میں مساوات 14.64 کی مدد سے کرہ کی سطح پر رقبے کو ٹھوس زاویے کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$\Omega_A=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathscr{P}r^2}{\mathscr{P}_{\text{بلند تر}}r^2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

یعنی

$$\Omega_A=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}P_n(\theta,\phi)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\iint_{4\pi}P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega \qquad (\mathrm{sr}) \tag{14.74}$$

4986 حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے تحت Ω_A ٹھوس زاویے پر یکساں زیادہ سے زیادہ طاقت خارج کرتے ہوئے اینٹینا پوری طاقت خارج کر سکتی ہے۔ Ω_A
4987 کو اخراجی ٹھوس زاویہ[18] کہتے ہیں۔

مرکزی شعاع[19] پر تکمل

$$\Omega_M=\iint_{\text{مرکزی شعاع}}P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega \qquad (\mathrm{sr}) \tag{14.75}$$

لیتے ہوئے مرکزی ٹھوس زاویہ[20] حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں ثانوی شعاع[21] کے ٹھوس زاویہ Ω_m کو اخراجی ٹھوس زاویے اور مرکزی ٹھوس زاویے کے فرق

$$\Omega_m=\Omega_A-\Omega_M \tag{14.76}$$

4988 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔غیر سمتی[22] اینٹینا ہر سمت میں برابر اخراج کرتی ہے لہٰذا ہر سمت میں اس کا $P_n(\theta,\phi)=1$ اور $\Omega_A=4\pi$ ہو گا۔

اینٹینا کی دوسری اہم خاصیت اس کی سمتیت[23] ہے۔اخراجی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت اور اوسط اخراجی شدت کی شرح

$$D=\frac{\text{زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{اوسط اخراجی شدت}}=\frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{P(\theta,\phi)_{\text{اوسط}}} \qquad \text{بے بُعد} \tag{14.77}$$

---

[16] dimensionless
[17] normalized power pattern
[18] beam solid angle
[19] main lobe
[20] major lobe solid angle
[21] minor lobe
[22] isotropic
[23] directivity

اس کی سمتیت کہلاتی ہے۔کل اخراج W کو 4π سٹریڈیئن سے تقسیم کرنے سے اوسط اخراجی شدت $P(\theta,\phi)_{\text{اوسط}}$ حاصل ہوتی ہے جبکہ اخراجی شدت $P(\theta,\phi)$ کا 4π سٹریڈیئن پر تکمل لینے سے اینٹینا کی کل اخراج حاصل ہوتی ہے۔یوں

$$\begin{aligned} D = \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{W/4\pi} &= \frac{4\pi P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{\iint\limits_{4\pi} P(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \\ &= \frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} \frac{P(\theta,\phi)}{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}\,\mathrm{d}\Omega} \\ &= \frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \end{aligned} \tag{14.78}$$

لکھی جا سکتی ہے۔مساوات 14.74 کے ساتھ موازنے کے بعد اسے

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \qquad \text{بے بُعد} \tag{14.79}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں اینٹینا کی سمتیت سے مراد، کرہ کا ٹھوس زاویہ 4π تقسیم اینٹینا کی اخراجی ٹھوس زاویہ Ω ہے۔سمتیت اینٹینا کی ایک منفرد خاصیت ہے۔مخصوص ٹھوس زاویے میں طاقت مرکوز کرنے کی صلاحیت کی ناپ سمتیت ہے۔سمتیت جتنی زیادہ ہو گی اینٹینا اتنی کم ٹھوس زاویے میں طاقت کو مرکوز کر پائے گا۔

مثال 14.2: غیر سمتی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہٰذا اس کا $P_n(\theta,\phi) = 1$ اور $\Omega_A = 1$ ہوں گے۔یوں

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} = 1 \tag{14.80}$$

حاصل ہو گا۔کسی بھی اینٹینا کی یہ کم سے کم ممکنہ سمتیت ہے۔

مثال 14.3: مختصر جفت قطب کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.38 استعمال کرتے ہوئے تقابل پذیر نقش طاقت

$$P_n(\theta,\phi) = \frac{H_\phi^2(\theta,\phi)}{H_\phi^2(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}} = \sin^2\theta \tag{14.81}$$

لکھی جا سکتی ہے۔مساوات 14.74 سے

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi = \frac{8\pi}{3} \tag{14.82}$$

اور یوں مساوات سے

$$D = \frac{4\pi}{\Omega} = \frac{3}{2} \tag{14.83}$$

4998 حاصل ہوتا ہے۔یوں غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے مختصر جفت قطب کی زیادہ سے زیادہ اخراج $\frac{3}{2}$ گنا زیادہ ہے۔

4999

سمتیت کا دارومدار صرف اور صرف دور میدان کی نقش پر ہے۔اس میں اینٹینا کی کار گزاری شامل نہیں ہے۔اس کے بر عکس اینٹینا کی کار گزاری، اینٹینا کی افزائش طاقت یا افزائش[24] پر اثر انداز ہوتی ہے۔اینٹینا کی افزائش سے مراد

$$\text{افزائش} = G = \frac{\text{آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{حوالہ اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}} \tag{14.84}$$

ہے جہاں دونوں اینٹینوں کی داخلی طاقت برابر ہے۔کسی بھی اینٹینا کو بطور حوالہ اینٹینا لیا جا سکتا ہے۔اگر ہم بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کو حوالہ تصور کریں تب

$$G_0 = \frac{P'_m}{P_0} \tag{14.85}$$

5000 ہو گا جہاں

5001 P'_m آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت،

5002 P_0 بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کی اخراجی شدت

ہیں۔یاد رہے کہ غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہٰذا اس کی زیادہ سے زیادہ شدت اور اوسط اخراجی شدت برابر ہوتے ہیں۔آزمودہ اینٹینا کی اخراجی شدت P'_m اور کامل اینٹینا کی اخراجی شدت P_m کی شرح اینٹینا کی کار گزاری k دیتی ہے۔یہ وہی k ہے جسے مساوات 14.62 میں بھی حاصل کیا گیا۔یوں

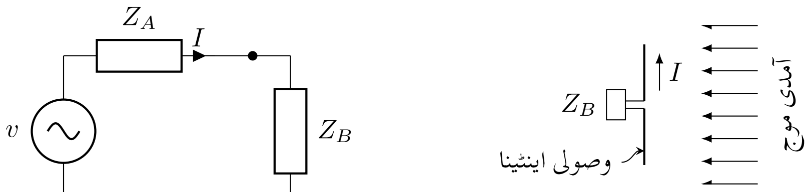
$$G_0 = \frac{kP_m}{P_0} = kD \tag{14.86}$$

5003 حاصل ہوتا ہے۔یہ مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی کامل اینٹینا $(k = 100\,\%)$ کی افزائش، کامل غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے، اسی اینٹینا کی سمتیت کے

5004 برابر ہوتی ہے۔غیر کامل $k < 100\,\%$ اینٹینا کی صورت میں افزائش کی قیمت سمتیت سے کم ہو گی۔

سمتیت کی قیمت 1 تا ∞ ممکن ہے۔سمتیت کی قیمت اکائی سے کم نہیں ہو سکتی۔اس کے بر عکس افزائش کی قیمت صفر تا لا محدود ممکن ہے۔

$$\begin{aligned} 1 \leq &D \leq \infty \\ 0 \leq &G \leq \infty \qquad \text{ممکنہ قیمت} \end{aligned}$$



ب: اینٹینا کے ساتھ برقی رکاوٹ جوڑا گیا ہے

الف: آمدی موج میں تر وصولی اینٹینا

شکل 14.12: وصولی اینٹینا آمدی موج سے طاقت حاصل کر کے برقی رکاوٹ کو فراہم کرتی ہے۔

اخراجی اینٹینا[25] شعاعی اخراج کرتی ہے۔اس کے بر عکس وصولی اینٹینا[26] شعاع سے طاقت وصول کرتی ہے۔برقی و مقناطیسی امواج جب وصولی اینٹینا پر پہنچتے ہیں تو وصولی اینٹینا ان سے طاقت حاصل کرتی ہے۔اگر اینٹینا کے برقی سروں پر بیرونی مزاحمت R_B نسب کی جائے تو حاصل کردہ طاقت کا کچھ حصہ اس مزاحمت میں ضائع ہو گا۔ہم چونکہ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $W = I^2 R_B$ میں دلچسپی رکھتے ہیں لہٰذا اسی کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $I^2 R_B$ کے برابر طاقت آمدی موج کے رقبہ S میں پایا جاتا ہے۔یوں

$$\mathscr{P} S = I^2 R_B \tag{14.87}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ اینٹینے کا رقبہ S ہی ہے اور اینٹینا اتنے رقبے پر آمدی موج سے مکمل طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی برقی سروں تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔اس فرضی رقبے کو وصولی رقبہ[27] کہا جاتا ہے۔یوں وصولی رقبے کو

$$S = \frac{I^2 R_B}{\mathscr{P}} \tag{14.88}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں

S اینٹینا کا فرضی رقبہ، $\mathrm{m^2}$

I موثر برقی رو، A

$\mathscr{P}$ آمدی موج کا پوئنٹنگ سمتیہ، $\mathrm{W/m^2}$

R_L برقی مزاحمت، Ω

ہیں۔حقیقت میں اینٹینا $I^2 R_B$ سے زیادہ طاقت حاصل کرتی ہے جس کا کچھ حصہ اینٹینا کے اندر ہی ضائع ہو جاتا ہے۔ہمیں اینٹینا کے اندر ضائع ہونے والے طاقت سے کوئی دلچسپی نہیں ہے۔

شکل 14.12-الف میں آمدی موج میں تر اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بیرونی برقی رکاوٹ Z_B کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔اینٹینا کا تھونن[28] مساوی دور استعمال کرتے ہوئے، شکل-ب میں اسی کا مکمل برقی دور دکھایا گیا ہے۔اس دور میں سلسلہ وار برقی رو

$$I = \frac{v}{Z_A + Z_B} = \frac{v}{R_A + R_B + j(X_A + X_B)}$$

ہو گی جہاں

---

[24] gain
[25] transmitting antenna
[26] receiving antenna
[27] antenna aperture
[28] Thevenin equivalent circuit

5013 v اینٹینا میں آمدی موج سے پیدا موثر برقی دباو،

5014 R_A اینٹینا کے تھونن مساوی دور میں اینٹینا کی مزاحمت،

5015 X_A تھونن دور میں اینٹینا کی متعاملیت،

5016 R_B بیرونی مزاحمت،

5017 X_B بیرونی متعاملیت

ہیں۔یوں بیرونی مزاحمت کو مہیا طاقت

$$|I|^2 R_B = \frac{v^2 R_B}{(R_A+R_B)^2+(X_A+X_B)^2} \tag{14.89}$$

ہو گا جس سے اینٹینے کا رقبہ وصولی

$$S = \frac{v^2 R_B}{\mathscr{P}\left[(R_A+R_B)^2+(X_A+X_B)^2\right]} \tag{14.90}$$

5018 حاصل ہوتا ہے۔

آمدی موج کی نسبت سے ایک مخصوص انداز میں رکھے ہوئے اینٹینا میں زیادہ سے زیادہ برقی دباو پیدا ہو گا۔اسی جگہ اینٹینا کو رکھتے ہوئے بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت اس صورت منتقل ہو گی جب

$$R_B = R_A \tag{14.91}$$

$$X_B = -X_A \tag{14.92}$$

ہوں۔بے ضیاع اینٹینا کی تھونن مزاحمت دراصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r ہی ہے۔اس طرح بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرتے وقت زیادہ سے زیادہ وصولی رقبہ

$$S_{\text{اخراجی}} = \frac{v^2}{4\mathscr{P}R_r} \tag{14.93}$$

5019 حاصل ہو گا جسے اینٹینا کا **اخراجی رقبہ**[29] $S_{\text{اخراجی}}$ پکارا جاتا ہے۔ہر اینٹینا مخصوص قیمت کا **اخراجی رقبہ** رکھتا ہے۔

5020

5021 مثال 14.4: پورے مختصر جفت قطب پر یکساں برقی رو تصور کرتے ہوئے، اس کا اخراجی رقبہ حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.93 سے ظاہر ہے کہ اخراجی رقبہ دریافت کرنے کے لئے، اینٹینا میں پیدا برقی دباو v، اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r اور آمدی موج میں کثافت طاقت $\mathscr{P}$ درکار ہوں گے۔جفت قطب میں زیادہ سے زیادہ برقی دباو اس صورت پیدا ہو گی جب اینٹینا کی تار اور آمدی موج کا برقی میدان متوازی ہوں۔ایسی صورت میں اینٹینا میں

$$v = El \tag{14.94}$$

[29] effective aperture

برقی دباو پیدا ہو گی۔آمدی موج کی پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P}=\frac{E^2}{Z_0} \qquad (\mathrm{W/m^2}) \tag{14.95}$$

ہے جہاں $Z_0=\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}=120\pi$ خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔مساوات 14.58 میں $I=I_0$ پر کرنے سے موجودہ جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R_r=80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{14.96}$$

حاصل ہوتی ہے۔ان تمام کو مساوات 14.93 میں پر کرتے ہوئے

$$S_{\text{اخراجی}}=\frac{E^2l^2}{4\frac{E^2}{Z_0}80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2}=\frac{3\lambda^2}{8\pi}=0.119\lambda^2 \qquad (\mathrm{m^2}) \tag{14.97}$$

یوں کامل مختصر جفت قطب کی لمبائی جتنی بھی کم کیوں نہ ہو یہ ہر صورت $0.119\lambda^2$ اخراجی رقبے پر آمدی موج سے تمام طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی مزاحمت تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔حقیقی جفت قطب غیر کامل ہو گا لہٰذا اس کی مزاحمت $R_{\text{ضائع}}+R_{\text{اخراجی}}$ ہو گی۔یوں کامل جفت قطب کا اخراجی رقبہ کچھ کم ہو گا۔

آئیں ایسے اینٹینا کی بات کریں جس کا اخراجی رقبہ $S_{\text{اخراجی}}$ اور اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A ہو۔اخراجی رقبے پر یکساں برقی میدان E_m کی صورت میں اخراجی طاقت

$$P=\frac{E_m^2}{Z}S_{\text{اخراجی}} \tag{14.98}$$

ہو گا جہاں Z انتقالی خطے کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

اگر r فاصلے پر میدان E_r ہو تب اخراجی طاقت

$$P=\frac{E_r^2}{Z}r^2\Omega_A \tag{14.99}$$

ہو گا۔

ہم آگے جا کر مساوات 14.155 حاصل کریں گے جس کے تحت $E_r=\frac{E_m S_{\text{اخراجی}}}{r\lambda}$ ہے۔اس نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا دو مساوات کو برابر لکھتے ہوئے

$$\lambda^2=S_{\text{اخراجی}}\Omega_A \qquad (\mathrm{m^2}) \tag{14.100}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

- λ طول موج،
- $S_{\text{اخراجی}}$ اینٹینا کا اخراجی رقبہ اور
- Ω_A اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ

ہیں۔اس مساوات کے تحت اینٹینا کا اخراجی رقبہ ضرب اخراجی ٹھوس زاویہ برابر ہوتا ہے طول موج کا مربع۔یوں اگر ہمیں اخراجی رقبہ معلوم ہو تب ہم اخراجی ٹھوس زاویہ حاصل کر سکتے ہیں اور اگر اخراجی ٹھوس زاویہ معلوم ہو تب اخراجی رقبہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ 5033

مساوات 14.79 میں مساوات 14.100 پر کرنے سے

$$D=\frac{4\pi}{\lambda^2}S_{\text{اخراجی}} \tag{14.101}$$

لکھا جا سکتا ہے۔سمتیت کی یہ تیسری مساوات ہے۔تینوں کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں 5034

$$\begin{aligned}D&=\frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{P_{\text{اوسط}}}\\D&=\frac{4\pi}{\Omega}\\D&=\frac{4\pi}{\lambda^2}S_{\text{اخراجی}}\end{aligned} \tag{14.102}$$

جہاں پہلی دو مساوات میں سمتیت اخراجی شعاع کے نقش سے حاصل کی گئی ہے جبکہ تیسری مساوات میں اسے اخراجی رقبے سے حاصل کیا گیا ہے۔ 5035

14.8 قطاری ترتیب 5036

مسئلہ اینٹینا دراصل اینٹینا کے مختلف حصوں سے پیدا میدانوں کا درست مجموعہ حاصل کرنا ہے۔اینٹینا کے مختلف حصوں کے میدان جمع کرتے ہوئے ان کے انفرادی حیطے اور زاویائی فرق کا خیال رکھنا ضروری ہے۔ 5038

14.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع 5039

دو عدد نقطہ منبع کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔دونوں منبع غیر سمتی ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ d ہے۔نقطہ منبع سے مراد ایسی فرضی منبع ہے جس کا حجم صفر 5040
کے برابر ہو۔ہم آگے چل کر مسئلہ متکافیت[30] دیکھیں گے جس کے تحت نقطہ منبع کے قطاروں کا اخراجی نقش اور انہیں کا وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے 5041
ہیں۔ 5042

ہم فرض کرتے ہیں کہ دونوں منبع برابر حیطے اور ہم قدم میدان پیدا کرتے ہیں۔دونوں میدان کے خطی تقطیب ہیں۔مزید یہ کہ دونوں کے $\boldsymbol{E}$ میدان صفحے کے عمودی ہیں۔دونوں منبع سے برابر فاصلے پر ان کے بالکل درمیانے مقام پر زاویائی صفر تصور کرتے ہوئے، دور میدان کو

$$E=E_2e^{j\frac{\psi}{2}}+E_1e^{-j\frac{\psi}{2}} \tag{14.103}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\psi=\beta d\cos\theta=\frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta \tag{14.104}$$

ہے۔ان مساوات میں 5043

---

[30] reciprocity

E_1 منبع-1 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان،

E_2 منبع-2 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان اور

ψ دونوں اشارات کا زاویہ θ کی سمت میں زاویائی فرق

ہیں۔دونوں دور میدان برابر $(E_1 = E_2)$ ہونے کی صورت میں یوں

$$E = E_1\left(e^{j\frac{\psi}{2}} + e^{-j\frac{\psi}{2}}\right) = 2E_1\cos\frac{\psi}{2} \tag{14.105}$$

ہو گا۔ فاصلہ $d = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اگر زاویائی صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام کی جگہ منبع-1 پر چنا جاتا تب دور میدان

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 e^{j\psi} \\ &= \left(E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} + E_2 e^{j\frac{\psi}{2}}\right) e^{j\frac{\psi}{2}} \end{aligned} \tag{14.106}$$

حاصل ہوتا جو $E_1 = E_2$ کی صورت میں

$$E = 2E_1\cos\frac{\psi}{2} e^{j\frac{\psi}{2}} = 2E_1\cos\frac{\psi}{2}\underline{/\frac{\psi}{2}} \tag{14.107}$$

حاصل ہوتا۔میدان کا نقش چونکہ میدان کے حیطے پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا اس میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوئی البتہ میدان کا زاویہ تبدیل ہو گیا ہے۔میدان کے زاویے کی تبدیلی کی وجہ یہ ہے کہ ہم نے زاویے کے صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام سے ہٹا کر منبع-1 پر چنا ہے۔

14.8.2 ضرب نقش

گزشتہ حصے میں بالکل یکساں دو عدد غیر سمتی نقطہ منبع کے میدان پر غور کیا گیا۔اگر نقطہ منبع سمتی ہوں اور دونوں کے نقش بالکل یکساں ہوں تب بھی مساوات 14.105 (یا مساوات 14.107) ہی ان کا مجموعی میدان دے گا پس فرق اتنا ہے کہ اب E_1 از خود θ کا تفاعل $E(\theta)$ ہے۔انفرادی منبع کے نقش $E(\theta)$ کو انفرادی نقش[31] جبکہ $\cos\frac{\psi}{2}$ کو قطاری نقش[32] کہا جائے گا۔یوں

$$E = E(\theta)\cos\frac{\psi}{2} \tag{14.108}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 14.108 ضرب نقش[33] کا اصول بیان کرتا ہے جس کے تحت انفرادی منبع کا نقش اور غیر سمتی نقطہ منبع کے قطار کا نقش ضرب دینے سے سمتی منبع کے قطار کا نقش حاصل ہوتا ہے۔یہاں فرض کیا گیا ہے کہ قطار میں انفرادی نقطہ منبع کا نقش وہی ہے جو اس نقطہ منبع کا تنہائی میں نقش ہوتا ہے۔

---

[31] primary pattern
[32] array pattern
[33] pattern multiplication

5054
14.8.3 ثنائی قطار

مساوات 14.107 دو غیر سمتی زاویائی طور پر ہم قدم نقطہ منبع کے جوڑی کا دور میدان دیتا ہے۔نقطہ منبع کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ اور $E_1 = \frac{1}{2}$ ہونے کی صورت میں اس مساوات کو

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.109}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس نقش کو شکل میں دکھایا گیا ہے جس میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔اس جوڑی منبع کے سیدھ میں $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر منبع کی دوسری جوڑی رکھنے سے شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔اس شکل میں دو درمیانے منبع دراصل ایک ہی نقطے پر پائے جائیں گے لیکن وضاحت کی خاطر انہیں اوپر نیچے دکھایا گیا ہے۔ضرب نقش کے اصول کے تحت ان کا مجموعی میدان

$$E = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.110}$$

5055 ہو گا جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔اس مساوات پر شق کرنے والوں کے لئے مثال میں تفصیلی ثبوت پیش کیا گیا ہے۔

اس قطار کو تین عدد منبع کی قطار تصور کیا جا سکتا ہے جہاں قطار میں بالترتیب، منبع کی طاقت $(1 : 2 : 1)$ نسبت سے ہے۔اس تین رکنی قطار کے سیدھ میں لیکن $\frac{\lambda}{2}$ ہٹ کر بالکل ایسی ہی تین رکنی قطار رکھنے سے شکل حاصل ہوتی ہے۔اس نئی قطار کو چار رکنی تصور کیا جا سکتا ہے جہاں بالترتیب منبع کی طاقت $(1 : 3 : 3 : 1)$ نسبت سے ہے۔اس چار رکنی قطار کا میدان

$$E = \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.111}$$

ہے۔اس نقش میں بھی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔اسی طرح بڑھتے ہوئے، ثانوی شعاع سے پاک، زیادہ سے زیادہ سمتیت کا نقش حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں زیادہ منبع پر مبنی قطار میں منبع کی طاقت ثنائی تسلسل[34] کے ثنائی سر[35] کی نسبت سے ہوتے ہیں۔ثنائی سروں کو شکل میں دکھائے گئے پاسکل تکون[36] کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس میں ہر اندرونی عدد، اوپر کے قریبی دو اعداد کا مجموعہ ہوتا ہے۔متعدد منبع کے قطار کا نقش

$$E = \cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.112}$$

5056 کے برابر ہو گا جہاں قطار میں منبع کی تعداد n ہے۔

اگرچہ مندرجہ بالا n رکنی قطار کے نقش میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا اس کے باوجود اس کی سمتیت برابر طاقت کے n رکنی منبع کے قطار سے کم
5058 ہوتی ہے۔حقیقی قطار عموماً ان دو صورتوں (ثنائی قطار اور یکساں قطار) کی درمیانی شکل رکھتے ہیں۔

5059

5060 **مثال 14.5:** مساوات 14.110 کو ثابت کریں۔

---

[34] binomial series
[35] binomial coefficient
[36] Pascal triangle

حل: مساوات 14.106 کی طرح زاویائی صفر کو قطار کے پہلی رکن پر چنتے ہوئے

$$\begin{aligned}
E &= E_0 + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j2\psi} \\
&= E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right) + E_0 e^{j\psi} \left(1 + e^{j\psi}\right) \\
&= E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right) \left(1 + e^{j\psi}\right) \\
&= E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right)^2
\end{aligned}$$

جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \frac{\pi}{2} \cos\theta$ پر کرتے ہوئے

$$E = \left[\left(\frac{e^{-j\frac{\psi}{2}} + e^{j\frac{\psi}{2}}}{2} \right) e^{j\frac{\psi}{2}} \right]^2 = \cos^2 \frac{\psi}{2} \underline{/\psi}$$

5061 لکھا جا سکتا ہے۔اس کا حیطہ $\cos^2 \frac{\psi}{2}$ نقش کی مساوات ہے۔

5062

5063

5064 مثال 14.6: مساوات 14.112 کو تفصیل سے ثابت کریں۔

ثنائی قطار میں رکن کے طاقت ثنائی تسلسل کے سر کی نسبت سے ہوتے ہیں۔یوں $n+1$ رکنی قطار میں بالترتیب رکن کے طاقت $(1+x)^n$ کی ثنائی تسلسل

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \tag{14.113}$$

کے سر سے حاصل کئے جاتے ہیں۔یوں تین رکنی قطار کے سر ثنائی تسلسل

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \tag{14.114}$$

کے سر کی نسبت $1 : 2 : 1$ سے ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے تین رکنی قطار کا دور میدان مندرجہ بالا مساوات کے بائیں یا دائیں ہاتھ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$E = E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right)^2 = E_0(1 + 2e^{j\psi} + e^{j2\psi}) \tag{14.115}$$

تین رکنی قطار کو دیکھ کر دور میدان مندرجہ بالا مساوات کی دائیں ہاتھ دیتی ہے جسے ثنائی تسلسل کی مدد سے مساوات کی بائیں ہاتھ کی صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔مساوات کے بائیں ہاتھ سے نقش $\cos^2 \frac{\psi}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح n رکنی قطار کو $(1+x)^{n-1}$ کی ثنائی تسلسل کی مدد سے اکھٹے کرتے ہوئے

$$E = E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right)^{n-1} \tag{14.116}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \pi \cos\theta$ پر کرتے ہوئے صرف حیطہ لیتے ہوئے قطار کا نقش

$$E = \cos^{n-1} \left(\frac{\pi}{2} \cos\theta \right) \tag{14.117}$$

5065 لکھا جا سکتا ہے۔

5066

14.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار

ثنائی قطار غیر یکساں رکنی قطار ہے۔آئیں شکل میں دکھائے گئے n رکنی، غیر سمتی، یکساں طاقت کے منبع کی قطار کا دور میدان حاصل کریں۔یہاں فرض کیا جاتا ہے کہ قطار میں ہر دو قریبی منبع میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔یوں

$$\psi = \beta d \cos\theta + \delta \tag{14.118}$$

ہو گا۔قطار کا دور میدان

$$E = E_0 \left(1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \cdots + e^{j(n-1)\psi}\right) \tag{14.119}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

d قطار میں رکن کے درمیان فاصلہ،

δ ہر دو قریبی رکن کے درمیان زاویائی فرق اور

ψ دو قریبی رکن میں کل زاویائی فرق یعنی $\psi = \beta d \cos\theta + \delta$

ہیں۔

اس میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے جانی پہچانی تسلسل

$$E_0 \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}\right)$$

حاصل ہوتی ہے جس کا مجموعہ

$$E_0 \left(\frac{1 - x^n}{1 - x}\right)$$

کے برابر ہے۔

مساوات 14.119 کو $e^{j\psi}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$Ee^{j\psi} = E_0 \left(e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \cdots + e^{jn\psi}\right) \tag{14.120}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 14.119 سے مساوات 14.120 منفی کر کے E کے لئے حل کرتے ہوئے

$$E = E_0 \frac{1 - e^{jn\psi}}{1 - e^{j\psi}} = E_0 \frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \underline{/(n-1)\frac{\lambda}{2}} \tag{14.121}$$

حاصل ہوتا ہے۔اگر قطار کے درمیانے نقطے کو زاویائی صفر چنا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات میں زاویہ $\underline{/(n-1)\frac{\lambda}{2}}$ نہ پایا جاتا۔تمام رکن غیر سمتی ہونے کی صورت میں E_0 ہر رکن کا انفرادی نقش ہو گا جبکہ $\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$ قطاری نقش ہے۔

غیر سمتی منبع اور زاویائی صفر کا مقام قطار کے درمیانے نقطے پر رکھتے ہوئے

$$E = E_0 \frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \tag{14.122}$$

ہو گا۔ قطار کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\psi \to 0$ کی صورت میں پائی جائے گی۔ چونکہ $\psi = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات $E = \frac{0}{0}$ دیتا ہے جو بے معنی[37] ہے لٰہذا ہمیں ال ہوس پٹل[38] کا قاعدہ استعمال کرنا ہو گا جس کے تحت اگر تفاعل $y = \frac{m(x)}{n(x)}$ کی قیمت $x \to a$ پر $y = \frac{0}{0}$ حاصل ہو تب قیمت $y = \frac{\partial m/\partial x}{\partial n/\partial x}$ سے حاصل ہو گی۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے $\psi \to 0$ پر

$$
\begin{aligned}
E &= E_0 \left. \frac{\frac{\partial \sin \frac{n\psi}{2}}{\partial \psi}}{\frac{\partial \sin \frac{\psi}{2}}{\partial \psi}} \right|_{\psi \to 0} \\
&= E_0 \left. \frac{\frac{n}{2} \cos \frac{n\psi}{2}}{\frac{1}{2} \cos \frac{\psi}{2}} \right|_{\psi \to 0}
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
E = nE_0 \tag{14.123}
$$

حاصل ہوتا ہے جو قطار کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ میدان ہے۔ یہ میدان قطار میں انفرادی منبع کے طاقت سے n گنا زیادہ ہے۔ اس قطار کے نقش کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس زاویے پر پائی جائے گی جس پر $\psi = 0$ یعنی

$$
\beta d \cos \theta + \delta = 0 \tag{14.124}
$$

ہو جس سے

$$
\theta_{\text{بلند تر طاقت}} = \cos^{-1} \left(-\frac{\delta}{\beta d} \right) \tag{14.125}
$$

5076 حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح اخراجی نقش کا صفر اس مقام پر ہو گا جہاں مساوات 14.122 صفر کے برابر ہو یعنی جہاں $\frac{n\psi}{2} = \mp k\pi$ کے برابر ہو یعنی

$$
\frac{n}{2} \left(\beta d \cos \theta + \delta \right) = \mp k\pi \tag{14.126}
$$

جس سے صفر اخراج کا زاویہ

$$
\theta_0 = \cos^{-1} \left[\left(\mp \frac{2k\pi}{n} - \delta \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right] \tag{14.127}
$$

5077 حاصل ہوتا ہے جہاں

5078 θ_0 صفر اخراج کا زاویہ،

5079 k اعداد $k = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے جہاں $k \neq mn$ کی شرط لاگو ہے جس میں $m = 1, 2, 3, \cdots$ کے برابر ہے۔

مساوات 14.122 کو مساوات 14.123 سے تقسیم کرتے ہوئے تقابل پذیر میدان E_n

$$
E_n = \frac{E}{nE_0} = \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \tag{14.128}
$$

5080 حاصل ہوتا ہے۔

---

[37] indeterminate
[38] L Hospital's rule

5081 ### 14.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار

نقش کی چوٹی اس مقام پر پائی جاتی ہے جس پر $\beta d\cos\theta = -\delta$ ہو۔ قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر، چوڑائی جانب $(\theta = 90^\circ)$ زیادہ سے زیادہ اخراج $\delta = 0$ کی صورت میں ہو گا یعنی جب تمام انفرادی منبع ہم قدم ہوں۔ اگر θ کی جگہ اس کا **زاویہ تکملہ**[39] γ استعمال کیا جائے تب نقش کے صفر

$$\gamma_0 = \sin^{-1}\left(\mp\frac{k\lambda}{nd}\right) \tag{14.129}$$

پر پائے جائیں گے۔ لمبی قطار $k\lambda \gg nd$ کی صورت میں γ_0 کم قیمت کا ہو گا للٰذا اسے

$$\gamma_0 = \frac{k}{nd/\lambda} \approx \frac{k}{L/\lambda} \tag{14.130}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں قطار کی لمبائی $L = (n-1)d$ ہے۔ لمبائی کو $n \gg 1$ کی صورت میں

$$L = (n-1)d \approx nd$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 14.130 میں $k = 1$ پر کرتے ہوئے نقش کا پہلا صفر γ_{01} حاصل ہوتا ہے۔ یوں گوشے کے دونوں اطراف پر پہلے صفروں کے درمیان نقش کی چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = \gamma_{01} \approx \frac{2}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{114.6^\circ}{L/\lambda} \tag{14.131}$$

حاصل ہوتی ہے۔ نقش میں زیادہ سے زیادہ طاقت کے زاویے کے دونوں اطراف وہ زاویے پائے جاتے ہیں جن پر طاقت نصف ہوتی ہے۔ ان کے درمیان زاویے کو **نصف طاقت چوڑائی**[40]، کہتے ہیں۔ لمبے یکساں **چوڑائی جانب اخراجی قطار**[41] کے نصف طاقت چوڑائی کی قیمت **پہلی صفر چوڑائی**[42] کے تقریباً آدھی ہوتی ہے۔ یوں

$$\text{نصف طاقت چوڑائی} \approx \frac{\text{پہلی صفر چوڑائی}}{2} = \frac{1}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{57.3^\circ}{L/\lambda} \tag{14.132}$$

5082 ہو گی۔

5083 شکل 14.13 میں چوڑائی جانب اخراجی قطار کا قابل پذیر نقش دکھایا گیا ہے۔ یہ نقش مساوات 14.128 سے حاصل کیا گیا ہے۔ اس قطار میں منبع $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر رکھے گئے ہیں۔ بیس عدد برابر طاقت کے منبع پر مبنی اس قطار کی نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP}^\circ = 5.1^\circ$ ہے۔ شکل میں نقش کا تراش دکھایا گیا ہے۔ یہ حقیقت میں چرخی مانند ہے للٰذا $\phi = 0^\circ$ تا $\phi = 360^\circ$ گھومتے ہوئے اس کی صورت یہی نظر آئے گی۔ یوں ϕ زاویے پر اس کی نصف طاقت چوڑائی $\phi_{HP}^\circ = 360^\circ$ ہے۔
5086

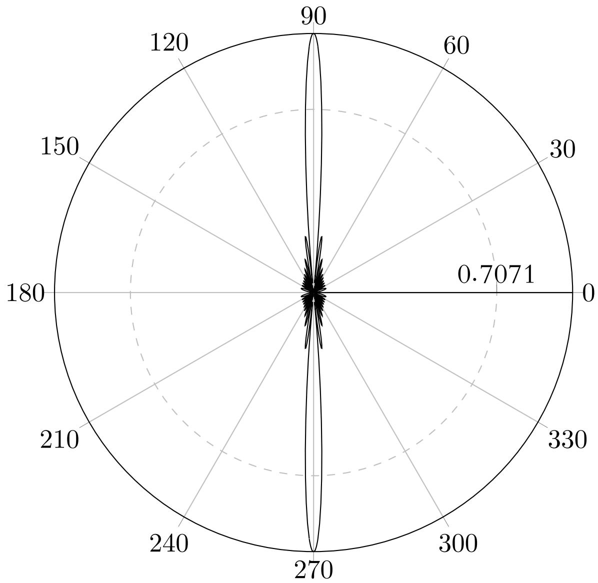
5087 ### 14.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار

زیادہ سے زیادہ اخراج کا زاویہ مساوات 14.124

$$\beta d\cos\theta + \delta = 0 \tag{14.133}$$

---

[39] complementary angle
[40] half power beam width, HPBW
[41] broadside array
[42] beam width between first nulls, BWFN



شکل 14.13: چوڑائی جانب اخراجی قطار

سے حاصل ہوتا ہے۔قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر سیدھا آگے $(\theta = 0)$ لمبائی کی جانب زیادہ سے زیادہ اخراج اس صورت ہو گا جب ہر دو قریبی منبع کے مابین

$$\delta = -\beta d \tag{14.134}$$

زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔یوں ایسے قطار کے صفر مساوات 14.126 کے تحت

$$\frac{n}{2}\beta d\left(\cos\theta_0 - 1\right) = \mp k\pi$$

یعنی

$$\cos\theta_0 - 1 = \mp\frac{k}{nd/\lambda}$$

سے حاصل ہوں گے۔اس سے

$$\frac{\theta_0}{2} = \sin^{-1}\left(\mp\sqrt{\frac{k}{2nd/\lambda}}\right) \tag{14.135}$$

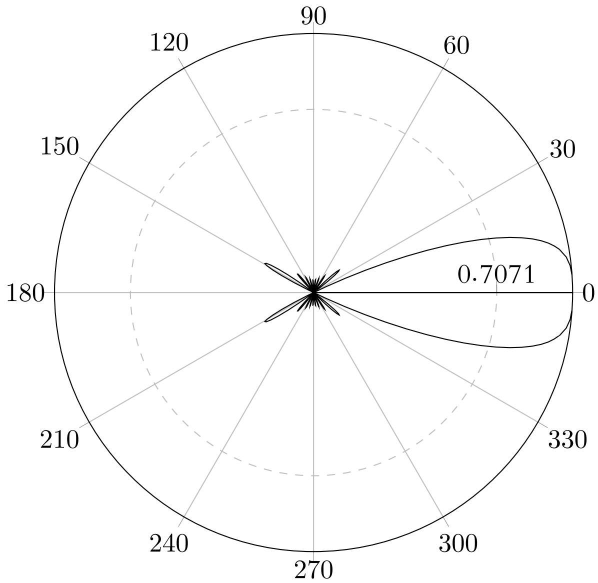
لکھا جا سکتا ہے۔لمبی قطار $(nd \gg k\lambda)$ کی صورت میں اسے

$$\theta_0 = \mp\sqrt{\frac{2k}{nd/\lambda}} \approx \mp\sqrt{\frac{2k}{L/\lambda}} \tag{14.136}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمبائی $L = (n-1)d$ کو $(nd \gg k\lambda)$ کی صورت میں $L \approx= nd$ لکھا گیا ہے۔پہلا صفر $k = 1$ پر حاصل ہو گا جس سے پہلی صفر چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\theta_{01} \approx 2\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}}\,\text{rad} = 114.6^\circ\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}} \tag{14.137}$$

حاصل ہوتی ہے۔



شکل 14.14: لمبائی جانب اخراجی قطار

بیس منبع پر مبنی، لمبائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر اخراجی نقش شکل 14.14 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ نقش مساوات 14.128 سے حاصل کیا گیا ہے۔ منبع کے درمیانی فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ ہے۔ مساوات 14.128 سے پہلی صفر چوڑائی $52°$ اور نصف طاقت چوڑائی $34° = \theta_{HP}^{\circ}$ حاصل ہوتی ہے۔ یہ نقش جتنا چوڑا ہے یہ اتنا صفحہ کے عمودی جانب موٹا بھی ہے۔ یوں ϕ جانب بھی اس کی نصف طاقت چوڑائی $34° = \phi_{HP}^{\circ}$ ہی ہے۔ لمبائی جانب اخراجی لمبی قطار کی نصف طاقت چوڑائی اس کے پہلے صفر چوڑائی کے تقریباً $\frac{2}{3}$ گنا ہوتی ہے۔

جیسے مثال 14.7 اور مثال 14.8 میں آپ دیکھیں گے کہ n عدد منبع پر مبنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت n عدد منبع پر مبنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت سے زیادہ ہوتی ہے۔

مساوات 14.79 اینٹینا کی سمتیت

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \tag{14.138}$$

دیتا ہے جہاں ٹھوس زاویہ مساوات 14.74 سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر ثانوی شعاعوں کو نظرانداز کیا جائے تب مرکزی شعاع کے θ سمت میں نصف طاقت زاویے θ_{HP} اور ϕ سمت میں نصف طاقت زاویے ϕ_{HP} کا ضرب تقریباً ٹھوس زاویے کے برابر ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 14.74 حل کرنا ضروری نہیں اور سمتیت کو

$$D \approx \frac{4\pi}{\phi_{HP}\phi_{HP}} \tag{14.139}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں نصف طاقت زاویے ریڈیئن میں ہیں۔ اس مساوات میں

$$4\pi \,\mathrm{sr} = 4\pi \,\mathrm{rad}^2 = 4\pi \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \,\mathrm{deg}^2 = 41\,253 \,\mathrm{deg}^2$$

پر کرتے ہوئے

$$D \approx \frac{41\,253}{\theta_{HP}^{\circ}\phi_{HP}^{\circ}} \tag{14.140}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 14.7: بیس رکنی، چوڑائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta^{\circ}_{HP} = 5.1^{\circ}$ اور $\phi^{\circ}_{HP} = 360^{\circ}$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.140 سے

$$D \approx \frac{41\,253}{5.1 \times 360} = 22.5$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 14.8: بیس رکنی، لمبائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta^{\circ}_{HP} = \phi^{\circ}_{HP} = 34^{\circ}$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

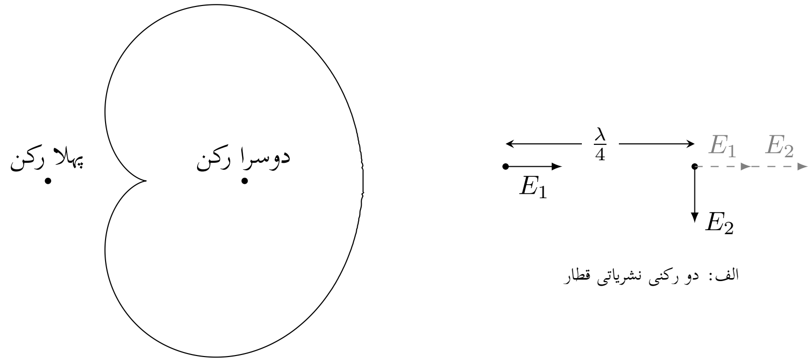
حل: مساوات 14.140 سے

$$D \approx \frac{41\,253}{34 \times 34} = 35.7$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 14.9: دو ارکان پر مبنی قطار میں ارکان کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{4}$ ہے۔ دائیں رکن (دوسرا رکن) کو 90° پیچھے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ دونوں برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہے۔ دونوں ارکان افقی سطح پر سیدھے کھڑے ہیں۔ افقی میدان پر اخراجی نقش حاصل کریں۔

حل: برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہونے کی صورت میں $|E_1| = |E_2| = E$ ہوں گے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر بائیں رکن (پہلا رکن) کا برقی میدان 0° میکانی زاویے پر ہو تب اسی لمحہ دائیں رکن (دوسرا رکن) کا میدان -90° میکانی زاویے پر ہو گا۔ شکل 14.15-الف میں ان میدان (E_1 اور E_2) کو گاڑھی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ چونکہ دونوں ارکان میں $\frac{\lambda}{4}$ کا فاصلہ ہے لہٰذا جتنی دیر میں بائیں رکن کے میدان کی موج E_1 چل کر دائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دوری عرصے کے $\frac{1}{4}$ برابر وقت گزر چکا ہو گا لہٰذا دوسرے رکن میں برقی رو $\frac{1}{4} \times 360^{\circ} = 90^{\circ}$ آگے بڑھ چکی ہو گی اور یوں اس لمحہ پر دوسرا رکن 0° میکانی زاویے پر ہی میدان پیدا کرے گا۔ یوں دوسرے رکن کے مقام پر دونوں میدان ہم قدم پائے جائیں گے لہٰذا یہاں برقی میدان $E_1 + E_2$ یعنی دگنا ہو گا۔ شکل 14.15-الف میں کچھ دیر بعد کے ان میدان کو ہلکی سیاہی میں ہم قدم دکھایا گیا ہے۔ دونوں میدان دائیں جانب ہم قدم رہتے ہوئے حرکت کریں گے۔



دو رکنی قطار کا نقش

الف: دو رکنی نشریاتی قطار

شکل 14.15: دو رکنی اشاعتی قطار اور اس کا نقش

اس کے برعکس جس لمحہ دائیں رکن کی برقی رو 0° پر ہو اسی لمحہ بائیں رکن کی برقی رو 90° پر ہو گی۔اس لمحے پر دائیں رکن کا میدان 0° پر ہو گا جبکہ بائیں رکن کا میدان 90° پر ہو گا۔اب جتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان بائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان مزید 90° آگے بڑھ کر 180° پر پہنچ چکا ہو گا۔یوں دائیں رکن کے مقام پر دونوں میدان آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لہٰذا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔اس طرح دائیں رکن کے دائیں جانب میدان صفر ہی پایا جائے گا۔شکل 14.15 میں صفر اور پائے ریڈیئن زاویوں پر دگنا اور صفر میدان دکھایا گیا ہے۔

دونوں رکن کے درمیان عمودی لکیر پر پہنچنے کے لئے دونوں میدان کو برابر دوری طے کرنے کی ضرورت ہے لہٰذا اس لکیر پر دونوں میدان آپس میں عمودی رہیں گے۔یوں اس لکیر پر کل میدان مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{E^2+E^2} = 1.4142E$ حاصل ہو گا۔شکل 14.15-ب میں اسی طرح مختلف مقامات پر میدان حاصل کرتے ہوئے حاصل کردہ نقش دکھایا گیا ہے۔

مندرجہ بالا مثال کے نقش سے ظاہر ہے کہ یہ اینٹینا بائیں جانب اخراج نہیں کرتا لہٰذا اس کے بائیں جانب دوسرا اینٹینا نسب کیا جا سکتا ہے جس کی اخراجی سمت بائیں رکھی جائے گی تاکہ دونوں علیحدہ علیحدہ نشریات کر سکیں۔

14.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا

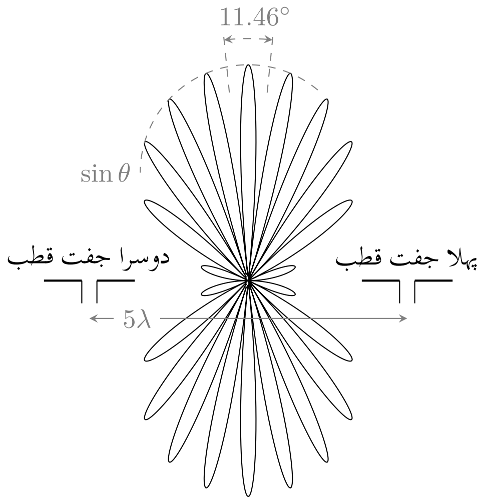
مساوات 14.125

$$\theta_{\text{بلند تر طاقت}} = \cos^{-1}\left(-\frac{\delta}{\beta d}\right) \tag{14.141}$$

یکساں ارکان کے قطار کی مرکزی نقش کا زاویہ دیتی ہے۔چوڑائی جانب اخراجی قطار میں $\theta = 90^\circ$ رکھا جاتا ہے جبکہ لمبائی جانب اخراجی قطار میں $\theta = 0^\circ$ رکھا جاتا ہے۔اگر شعاع کی سمت تبدیل کرنی ہو تو ایسے اینٹینا کو گھمانا ہو گا۔

مساوات 14.125 کے تحت δ کو تبدیل کرتے ہوئے شعاع کی سمت کسی بھی زاویے پر رکھی جا سکتی ہے۔یوں δ کو -1 تا $+1$ مسلسل تبدیل کرتے ہوئے شعاع کی سمت کو 0° تا 180° مسلسل تبدیل کیا جا سکتا ہے۔یوں بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا[43] کو ہلائے بغیر اس کی اخراجی سمت تبدیل کی جا سکتی ہے۔

[43] scanning antenna



شکل 14.16: دو عدد مختصر جفت قطب جنہیں 5λ فاصلے پر رکھا گیا ہے سے حاصل تداخل پیما کا نقش۔

14.9 تداخُل پیما 5132

فلکیات[44] کے میدان میں اینٹینا کا کلیدی کردار ہے۔ریڈیائی فلکیات[45] میں استعمال ہونے والے اینٹینا کو تداخل پیما[46] اینٹینا کہتے ہیں۔ 5133

شکل 14.16 میں دو عدد مختصر جفت قطب کے درمیان فاصلہ L ہے۔دونوں کو ہم قدم برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ضرب نقش کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے اس کا نقش

$$E = 2E_1 \cos\frac{\psi}{2} \tag{14.142}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\psi = \beta L \cos\theta$ کے برابر ہے۔ضرب نقش کے تحت E_1 انفرادی رکن کی نقش ہے جبکہ $\cos\frac{\psi}{2}$ دو رکنی قطار کا نقش ہے۔ہمیں میدان بالمقابل زاویہ سے غرض ہے۔مساوات 14.49 مختصر جفت قطب کا نقش دیتا ہے جس میں میدان اور زاویے کا تعلق $\sin\theta$ ہے۔اسی کو استعمال کرتے ہوئے تقابل پذیر نقش

$$E = \sin\theta\cos\frac{\psi}{2} = \sin\theta\cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\cos\theta\right) \tag{14.143}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔شکل 14.16 میں $L = 5\lambda$ کے لئے نقش دکھایا گیا ہے۔زاویہ θ کا زاویہ تکملہ $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ استعمال کرتے ہوئے، پہلا صفر

$$\frac{\pi L}{\lambda}\cos\theta = \frac{\pi L}{\lambda}\sin\gamma_{01} = \frac{\pi}{2}$$

کی صورت میں پایا جائے گا جس سے

$$\gamma_{01} = \sin^{-1}\frac{1}{2L/\lambda} \tag{14.144}$$

astronomy[44]
radio astronomy[45]
interferometer[46]

حاصل ہوتا ہے۔اگر $L \gg \lambda$ ہو تب پہلی صفر چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\gamma_{01} = \frac{1}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{57.3}{L/\lambda}\,\text{deg} \tag{14.145}$$

لکھی جا سکتی ہے۔یہ مساوات 14.131 میں دیے، n رکنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کے پہلی صفر چوڑائی کی آدھی قیمت ہے۔ہلکی سیاہی کے نقطہ دار لکیر سے شکل میں مختصر جفت قطب کے نقش $\sin\theta$ کو واضح کیا گیا ہے۔

پانچ طول موج برابر L کی صورت میں مساوات 14.145 سے پہلی صفر چوڑائی $11.46°$ حاصل ہوتی ہے۔

ریڈیائی فلکیات میں فلکی اخراجی مادے کی شعاع کو تداخل پیما سے وصول کیا جاتا ہے۔ان کی جسامت کا بہتر سے بہتر تخمینہ لگانے میں چوڑائی نقش کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

مشق 14.1: $L = 20\lambda$ کی صورت میں تداخل پیما کی پہلی صفر چوڑائی حاصل کریں۔

جواب: $2.865°$

14.10 مستطیل سطحی اینٹینا

ہم متعدد تعداد کے نقطہ منبع پر مبنی مختلف اقسام کے اینٹینا دیکھ چکے ہیں۔اگر نقطہ منبع کے صف در صف اتنے قریب قریب فرضی سطح پر رکھے جائیں کہ یہ علیحدہ علیحدہ منبع کی جگہ ایک مسلسل سطح نظر آئے تو ایسی صورت میں سطحی اینٹینا[47] حاصل ہو گا۔ایسی ہی ایک مستطیلی سطح جس کی x سمت میں لمبائی x_1 اور y سمت میں لمبائی a ہے کو شکل 14.17 میں دکھایا گیا ہے۔تصور کریں کہ اس سطح پر J_x کثافت برقی رو پائی جاتی ہے۔یہ تصور کرتے ہوئے کہ سطح کے نیچے یعنی $z < 0$ خطے میں مقناطیسی میدان نہیں پایا جاتا، ایمپیئر کے دوری قانون کی مدد سے

$$H_y = -J_x \tag{14.146}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں H_y سطح کے انتہائی قریب بالائی جانب[48] مقناطیسی میدان ہے۔سطحی اینٹینا کے دور میدان پر تبصرے سے پہلے ایک حقیقت پر غور کرتے ہیں۔

فرض کریں کی خالی خلاء میں سطحی برقی و مقناطیسی موج پائی جاتی ہے۔ہائی گن[49] کے اصول کے تحت محاذ موج پر ہر نقطہ، منبع موج کا کردار ادا کرتا ہے۔یوں سطح پر چھوٹے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ پر خطی قطبی برقی میدان E_x بطور منبع کردار ادا کرے گا۔سطح کے برقی میدان E_x سے یہاں کا مقناطیسی میدان

$$H_y = \frac{E_x}{Z_0} \tag{14.147}$$

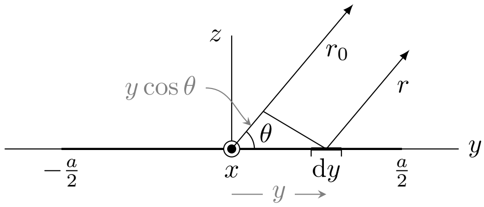
لکھا جا سکتا ہے جہاں Z_0 خطے کی قدرتی رکاوٹ $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ ہے۔

---

[47] continuous aperture

[48] یہاں فرض کیا گیا ہے کہ سطحی اینٹینا نچلی جانب اخراج نہیں کر رہی۔اگر اینٹینا نچلی جانب بھی اخراج کرے تب $H_y = -0.5J_x$ لکھا جائے گا۔

[49] Huygen's principle



شکل 14.17: مستطیل سطحی اینٹینا

مساوات 14.146 اور مساوات 14.147 دو مختلف وجوہات کی بنا پر پیدا مقناطیسی میدان ظاہر کرتے ہیں۔دور سے ان دونوں میں کسی قسم کا کوئی فرق نہیں دیکھا جا سکتا لٰہذا ان دونوں سے پیدا موج میں بھی کوئی فرق نہیں پایا جائے گا۔اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطحی اینٹینا کا دور میدان اور خلاء میں فرضی سطح پر موج کا دور میدان بالکل یکساں ہوں گے۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی سطح پر کثافت برقی رو J_x کو خالی خلاء میں مقناطیسی میدان H_y یا برقی میدان E_x سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$-J_x = H_y = \frac{E_x}{Z_0} \tag{14.148}$$

اس طرح مندرجہ ذیل تبصرہ ان دونوں کے لئے قابل قبول ہے۔ 5146

آئیں اب واپس اصل موضوع پر آتے ہیں۔تصور کریں کہ شکل 14.17 کے سطحی اینٹینا پر x سمت میں نہ تبدیل ہوتی جبکہ y سمت میں تبدیل ہوتی کثافت برقی رو $J_x(y)$ پائی جاتی ہے۔پوری سطح پر کثافت برقی رو ہم قدم ہے۔ 5148

مساوات 14.25 میں $I_0 = J_x \,\mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}l = \mathrm{d}x$ پر کرنے سے A حاصل کرتے ہوئے، چھوٹے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ سے دور تفرق میدان کو $E = -j\omega A$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}E &= -j\omega[\mathrm{d}A_x] \\
&= -j\omega \frac{\mu_0 I_0 \,\mathrm{d}l \, e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \\
&= -j\omega \frac{\mu_0 J_x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \, e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \\
&= \frac{j\omega\mu_0 E(y)}{4\pi r Z_0} e^{j(\omega t - \beta r)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{14.149}$$

جہاں مساوات 14.148 کا سہارا لیا گیا ہے۔پورے رقبے سے پیدا میدان سطحی تکمل سے حاصل ہو گا۔رقبے کے وسط سے r_0 فاصلے اور θ زاویے پر میدان

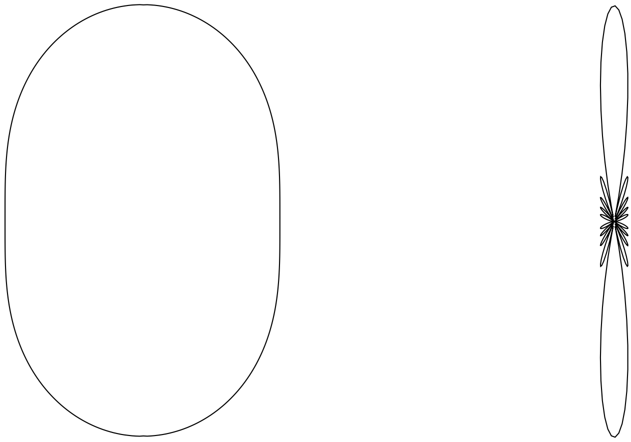
$$E(\theta) = \frac{j\omega\mu_0 e^{j(\omega t - \beta r_0)}}{4\pi r_0 Z_0} \int\limits_{-a/2}^{a/2} \int\limits_{-x_1/2}^{x_1/2} E(y) e^{j\beta y \cos\theta} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{14.150}$$

ہو گا جہاں $r \approx r_0$ لیا[50] گیا ہے۔بیرونی تکمل لیتے اور $\frac{\omega\mu_0}{4\pi Z_0} = \frac{1}{2\lambda}$ پر کرتے ہوئے میدان کی حتمی قیمت $|E|$

$$E(\theta) = \frac{x_1}{2 r_0 \lambda} \int\limits_{-a/2}^{a/2} E(y) e^{j\beta y \cos\theta} \,\mathrm{d}y \tag{14.151}$$

---

[50] جیسے حصہ 14.3 میں دکھایا گیا ہے۔



الف: مستطیل سطحی اینٹینا کا $a = 5\lambda$ کی صورت میں نقش

ب: مستطیل سطحی اینٹینا کا $a = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں نقش

شکل 14.18: مستطیل سطح کے نقش

حاصل ہوتی ہے جہاں $\left| je^{(\omega t - \beta r_0)} \right| = 1$ لیا گیا ہے۔پوری سطح پر یکساں میدان $E(y) = E_a$ کی صورت میں

$$E(\theta) = \frac{x_1 E_a}{2 r_0 \lambda} \int\limits_{-a/2}^{a/2} e^{j\beta y \cos\theta} \, \mathrm{d}y \tag{14.152}$$

لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \frac{x_1 a E_a}{2 r_0 \lambda} \frac{\sin[(\beta a/2) \cos\theta]}{(\beta a/2)\cos\theta} \\ &= \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2 r_0 \lambda} \frac{\sin[(\beta a/2) \cos\theta]}{(\beta a/2)\cos\theta} \end{aligned} \tag{14.153}$$

حاصل ہو گا جہاں $S_{\text{اخراجی}}$ سطح کا رقبہ ہے۔ 5149

زیادہ سے زیادہ میدان $\theta = 90^\circ$ پر

$$E(\theta)_{\text{بلند تر}} = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2 r_0 \lambda} \qquad \text{دو رُخی اخراج} \tag{14.154}$$

حاصل ہوتا ہے۔اگر $\theta = 270^\circ$ جانب اخراج صفر ہو تب $\theta = 90^\circ$ جانب اخراج دگنی

$$E(\theta)_{\text{بلند تر}} = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{r_0 \lambda} \qquad \text{یک رُخی اخراج} \tag{14.155}$$

ہو گی۔اس میدان کو $a = 5\lambda$ اور $a = \frac{\lambda}{2}$ کے لئے شکل 14.18 میں دکھایا گیا ہے۔ 5150

صفحہ 545 پر مساوات 14.122

$$E(\theta) = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$$

یکساں غیر سمتی n رکنی قطار کا دور میدان دیتی ہے جہاں $(\psi = \beta d \cos\theta + \delta)$ ہے اور E_0 انفرادی رکن کا میدان ہے۔چوڑائی جانب اخراجی قطار $\delta = 0$ کی صورت میں حاصل ہوتا ہے جس سے مندرجہ بالا مساوات

$$E(\theta) = E_0 \frac{\sin[(n\beta d/2)\cos\theta]}{\sin[(\beta d/2)\cos\theta]} \tag{14.156}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔قطار کی لمبائی a' لکھتے ہوئے، زیادہ قیمت کی n اور a' کی صورت میں $a' = (n-1)d \approx nd$ ہو گا۔اگر ہم اپنی توجہ $\theta = 90^\circ$ کے قریب رکھیں تب مساوات 14.156 کو

$$E(\theta) = nE_0 \frac{\sin[(\beta a'/2)\cos\theta]}{(\beta a'/2)\cos\theta} \tag{14.157}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کا مساوات 14.153 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ a لمبائی کی سطحی اینٹینا اور n رکنی a' لمبی چوڑائی اخراجی قطار کے مرکزی شعاع ایک جیسے ہیں۔مزید $nE_0 = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2r_0\lambda}$ کی صورت میں دونوں کے میدان بالکل برابر حتمی قیمت رکھتے ہیں۔

14.11 درز کا دور میدان بذریعہ فوریئر بدل

ہم کسی بھی کثافت برقی رو کا پیدا کردہ دور میدان حاصل کرنا دیکھ چکے ہیں۔بعض اوقات ہمیں کثافت برقی رو معلوم نہیں ہوتی البتہ کسی مخصوص سطح پر میدان معلوم ہوتا ہے۔اس طرح کے مسئلے کی مثال مستطیل پیپا اینٹینا ہے۔مستطیل موبیج کا منہ کھول کر مستطیل پیپا اینٹینا حاصل کیا جاتا ہے۔اس اینٹینا کے منہ پر کسی قسم کی موصل چادر نہیں نسب کی جاتی لہٰذا اس کے کھلے منہ کے کناروں پر برقی رو پائی جاتی ہے جس کی شکل جاننا دشوار ہے۔البتہ پیپے کی منہ پر برقی میدان جاننا نسبتاً آسان کام ہے۔ہم دیکھیں گے کہ ایسی صورت میں دور میدان قریبی میدان کے فوریئر بدل[51] سے حاصل ہوتا ہے۔آئیں پہلے فوریئر بدل کی یاد دوبارہ تازہ کریں۔

آپ فوریئر بدل جوڑی سے بخوبی واقف ہوں گے۔کسی بھی تفاعل $w(x)$ جس کا آزاد متغیرہ x ہو کا فوریئر بدل $W(k_x)$

$$W(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{jk_x x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{فوریئر بدل} \tag{14.158}$$

لکھا[52] جاتا ہے جہاں $W(k_x)$ کا آزاد متغیرہ k_x ہے۔یوں کسی بھی تفاعل کا آزاد متغیرہ تبدیل کرنا ممکن ہے۔اسی طرح $W(k_x)$ کا الٹ فوریئر بدل $w(x)$

$$w(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(k_x) e^{-jk_x x}\,\mathrm{d}k_x \qquad \text{فوریئر الٹ بدل} \tag{14.159}$$

ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات فوریئر بدل جوڑی کہلاتے ہیں۔مساوات 14.158 کے دونوں اطراف کا k_x کے ساتھ تفرق

$$\frac{\mathrm{d}W(k_x)}{\mathrm{d}k_x} = jk_x \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{jk_x x}\,\mathrm{d}x = jk_x W(k_x) \tag{14.160}$$

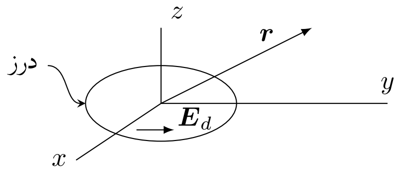
لکھا جا سکتا ہے۔دائیں ہاتھ تفرق لیتے ہوئے دھیان رہے کہ تکمل کے اندر k_x کا کردار بالکل ایک مستقل کا ہے لہٰذا تفرق کو تکمل کے اندر لے جایا جا سکتا ہے۔اسی طرح مساوات 14.159 کا تفرق x کے ساتھ لینے سے

$$\frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{-jk_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(k_x) e^{-jk_x x}\,\mathrm{d}k_x = -jk_x w(x) \tag{14.161}$$

---

[51] Fourier transform pair

[52] عموماً مساوات 14.158 میں تکمل کو $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ سے ضرب دے کر لکھا جاتا ہے۔اسی طرح مساوات 14.159 میں بھی $\frac{1}{2\pi}$ کی جگہ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ سے تکمل کو ضرب دیا جاتا ہے۔اس طرح جوڑی کے دونوں مساوات تقریباً یکساں شکل اختیار کر لیتے ہیں۔



شکل 14.19: سطح z=0 پر درز میں برقی میدان $\boldsymbol{E}_a$ کو دور میدان فوریئر بدل ہے۔

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح

$$\frac{\mathrm{d}^2\, W(k_x)}{\mathrm{d}k_x^2} = (jk_x)^2 W(k_x) = -k_x^2 W(k_x) \tag{14.162}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\, w(x)}{\mathrm{d}x^2} = (-jk_x)^2 w(x) = -k_x^2 w(x) \tag{14.163}$$

5159 بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

دو آزاد متغیرات پر مبنی تفاعل $u(x,y)$ کا فوریئر بدل

$$U(k_x,k_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{jk_x x + jk_y y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{14.164}$$

لکھا جاتا ہے۔اس کا واپسی فوریئر بدل

$$u(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(k_x,k_y) e^{-jk_x x - jk_y y}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y \tag{14.165}$$

ہو گا۔مساوات 14.164 کے تفرق لے کر

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial k_x} &= jxU\\
\frac{\partial U}{\partial k_y} &= jyU\\
\frac{\partial^2 U}{\partial k_x^2} &= -x^2 U\\
\frac{\partial^2 U}{\partial k_x \partial k_y} &= -xyU
\end{aligned} \tag{14.166}$$

اور مساوات 14.165 کے تفرق سے

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -jk_x u\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -jk_y u\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -k_x^2 u\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -k_x k_y u
\end{aligned} \tag{14.167}$$

فوریئر بدل کی یاد تازہ کرنے کے بعد اصل موضوع پر واپس آتے ہیں۔شکل 14.19 میں $z=0$ سطح پر درز دکھایا گیا ہے جس پر برقی میدان $\boldsymbol{E}_d$ 5160
ہے۔یہ میدان $z<0$ خطے میں موجود کثافت برقی رو کی وجہ سے پایا جاتا ہے۔ہمیں اس کثافت برقی رو کی ضرورت نہیں پڑے گی۔درز کا رقبہ S_d 5161
5162 ہے۔آئیں درز پر موجود میدان سے خالی خلاء میں کہیں دور پیدا میدان دریافت کریں۔

میکس ویل کی مساوات $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ کے گردش کو

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{E} - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -j\omega\mu_0 \nabla \times \boldsymbol{H} \\ = -j\omega\mu_0(\boldsymbol{J} + j\omega\epsilon_0 \boldsymbol{E})$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں دوسری قدم پر $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ پر کیا گیا ہے۔ساتھ ہی ساتھ $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$ کے علاوہ $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = j\omega \boldsymbol{E}$ اور $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = j\omega \boldsymbol{H}$ کا بھی استعمال کیا گیا ہے۔ شکل 14.19 میں درز سے دور خالی خلاء میں نہ کوئی کثافت چارج پائی جاتی ہے اور نہ ہی کثافت برقی رو۔یوں مندرجہ بالا مساوات میں دور مقام پر $\boldsymbol{J} = 0$ اور

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{14.168}$$

پر کرتے ہوئے

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k_0^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{14.169}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \tag{14.170}$$

لکھا گیا ہے۔مساوات 14.168 اور مساوات 14.169 کو کارتیسی محدد میں یوں لکھا جائے گا۔

$$\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z} = 0 \tag{14.171}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\right) \boldsymbol{E}(x,y,z) = 0 \tag{14.172}$$

ان دو مساوات کا فوریئر بدل مساوات 14.167 کی مدد سے لکھتے ہیں

$$k_x E_x(k_x,k_y,k_z) + k_y E_y(k_x,k_y,k_z) + j\frac{\partial E_z(k_x,k_y,k_z)}{\partial z} = 0 \tag{14.173}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k_0^2 - k_x^2 - k_y^2)\right] \boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z) = 0 \tag{14.174}$$

جہاں $u(x,y,z) = E(x,y,z)$ لیتے ہوئے $U(k_x,k_y,k_z) = E(k_x,k_y,k_z)$ لکھا گیا ہے۔یہاں بہتر ہوتا کہ برقی میدان اور اس کے فوریئر بدل کے لئے میں علیحدہ علیحدہ علامات استعمال کرتا لیکن امید کی جاتی ہے کہ $E(x,y,z)$ کے آزاد متغیرات (x,y,z) سے $E(x,y,z)$ کو اصل تفاعل اور $E(k_x,k_y,k_z)$ کے آزاد متغیرات (k_x,k_y,k_z) سے $E(k_x,k_y,k_z)$ کو فوریئر بدل سمجھا جا سکتا ہے۔

مندرجہ بالا مساوات میں

$$k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 = k_z^2 \tag{14.175}$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z)}{\partial z^2} + k_z^2 \boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z) = 0 \tag{14.176}$$

حاصل ہوتا ہے جس کے حل $e^{\mp jk_z z}$ صورت رکھتے ہیں۔ان میں $e^{-jk_z z}$ کارتیسی نظام میں بڑھتے z جانب حرکت کرتی موج ہے جبکہ $e^{jk_z z}$ گھٹتے z جانب حرکت کرتی موج ہے۔ہم پہلے جواب کو تسلیم کرتے ہیں لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کا حل

$$\boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z) = \boldsymbol{f}(k_x,k_y)e^{-jk_z z} \tag{14.177}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{f}(k_x, k_y)$ دریافت کرنا باقی ہے۔

مساوات 14.177 کو مساوات 14.173 میں پر کرنے سے

$$k_x f_x + k_y f_y + k_z f_z = 0 \tag{14.178}$$

یعنی

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{f} = 0 \tag{14.179}$$

ملتا ہے جہاں $\boldsymbol{f} = f_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + f_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + f_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{k} = k_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + k_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + k_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھے گئے ہیں۔مساوات 14.179 کے تحت f_x ، f_y اور f_z تینوں آزاد متغیرات نہیں ہو سکتے۔ان میں کوئی دو آزاد ہونے کی صورت میں تیسرے جزو کو ان دو اجزاء سے حاصل کیا جا سکتا ہے لہٰذا تیسرا جزو تابع متغیرہ ہو گا۔یہ حقیقت برقی میدان پر بھی لاگو ہوتی ہے جہاں اس حقیقت کو $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ لکھا جاتا ہے۔

اصل برقی میدان $\boldsymbol{E}(x, y, z)$ حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{E}(k_x, k_y, k_z)$ کا الٹ فوریئر بدل لیتے ہیں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(k_x, k_y, k_z) e^{-jk_x x - jk_y y} \, \mathrm{d}k_x \, \mathrm{d}k_y \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(k_x, k_y) e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z} \, \mathrm{d}k_x \, \mathrm{d}k_y
\end{aligned}$$

جہاں مساوات 14.177 استعمال کیا گیا ہے۔کارتیسی محدد میں سمتی فاصلے کو $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$k_x x + k_y y + k_z z = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}$$

لکھتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات کو

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(k_x, k_y) e^{-j\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}} \, \mathrm{d}k_x \, \mathrm{d}k_y \qquad \text{درز کا میدان} \tag{14.180}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں تکمل کے اندر $\boldsymbol{f} e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ حرکت کرتی موج کو ظاہر کرتی ہے۔یوں $z > 0$ خطے میں میدان حرکت کرتی موج ہو گی۔ مساوات 14.175 سے واضح ہے کہ $|\boldsymbol{k}| = k_0$ کے برابر ہے۔یوں اگر $k_x^2 + k_y^2 > k_0^2$ ہو تب k_z خیالی مقدار ہو گا۔ایسی صورت میں موج z سمت میں $e^{-k_z z}$ کی رفتار سے گھٹے گی جو فنا پذیر موج کی نشانی ہے۔یہ فنا پذیر موج درز کے سامنے قریبی میدان کو ظاہر کرتی ہے۔اگر k_x اور k_y کو کارتیسی محدد پر دکھایا جائے تو جو قیمت k_0 رداس کے دائرے سے باہر ہو، وہ فنا پذیر موج کو ظاہر کریں گے جبکہ اس دائرے کے اندر قیمتیں دور میدان کو ظاہر کرتی ہیں۔

مساوات 14.180 کے حاصل کردہ میدان کی قیمت سطح $z = 0$ پر عین شکل 14.19 کے میدان برابر ہو گی۔اس شکل میں میدان $z = 0$ سطح کے متوازی ہے۔یوں اگر $\boldsymbol{f}$ کے x اور y اجزاء کو $\boldsymbol{f}_m$ سے ظاہر کیا جائے (یعنی $\boldsymbol{f}_m = f_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + f_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$) تب

$$\boldsymbol{E}_d(x, y) = \boldsymbol{E}_m(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}_m(k_x, k_y) e^{-jk_x x - jk_y y} \, \mathrm{d}k_x \, \mathrm{d}k_y \tag{14.181}$$

ہو گا۔مساوات 14.181 فوریئر بدل کی مساوات ہے لہٰذا اس کا الٹ فوریئر بدل یوں

$$\boldsymbol{f}_m(k_x, k_y) = \iint_{S_d} \boldsymbol{E}_d(x, y) e^{jk_x x + jk_y y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{14.182}$$

لکھنا ممکن ہے۔اس مساوات کے تحت درز پر میدان کا فوریئر بدل دور میدان کو ظاہر کرتی ہے۔مساوات 14.179 سے

$$f_z = \frac{-\boldsymbol{k}_m \cdot \boldsymbol{f}_m}{k_z} = \frac{-k_x f_x - k_y f_y}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}} \tag{14.183}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات مل کر $\boldsymbol{f}$ کے تینوں اجزاء دیتے ہیں۔

مساوات 14.182 اور مساوات 14.182 سے حاصل $\boldsymbol{f}(k_x, k_y)$ کو مساوات 14.180 میں پر کرتے ہوئے درز کا میدان حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں اب مساوات 14.180 کا حل حاصل کریں۔

ہمیں دور میدان سے غرض ہے۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 14.180 کو صرف دور میدان کے لئے حل کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر جو ترکیب بروئے کار لائی جائے گی اس کی بنیاد اس حقیقت پر ہے کہ r کی قیمت زیادہ ہونے کی صورت میں $e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ نہایت تیزی سے ارتعاش کرتا تفاعل ہو گا۔یوں مساوات 14.180 میں $k_x k_y$ سطح کے مختلف نقطوں پر اس تفاعل کی قیمتیں ایک دونوں کو ختم کریں گی۔اس تفاعل میں r کی قیمت زیادہ ہونے کی وجہ سے $k_x k_y$ سطح پر قریب ترین نقطوں کے درمیان بھی اتنا زاویائی فرق $j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ پایا جاتا ہے کہ تکمل میں ان کا مجموعہ قابل نظر انداز ہوتا ہے۔البتہ ایسے مقام جہاں زاویائی فرق نہ پایا جاتا ہو، دور میدان میں کردار ادا کرتے ہیں۔ان مقام جنہیں ساکن نقطے[53] کہا جاتا ہے کو مندرجہ ذیل مساوات سے حاصل کیا جاتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial k_x} &= 0 \\
\frac{\partial(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial k_y} &= 0
\end{aligned}
\tag{14.184}
$$

ساکن نقطوں پر $e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ کی قیمت میں ٹھہراو پایا جاتا ہے لہٰذا تکمل میں ایسے مقام کا مجموعہ دور میدان میں کردار ادا کرتا ہے۔ساکن مقام $k_1 k_2$ سطح پر چھوٹا خطہ ہو گا۔اس چھوٹے خطے میں $\boldsymbol{f}(k_x, k_y)$ کے قیمت میں تبدیلی کو رد کرتے ہوئے اسے اٹل تصور کیا جاتا ہے۔اس طرح $\boldsymbol{f}(k_x, k_y)$ کو تکمل کے باہر منتقل کیا جاتا ہے۔بقایا تکمل میں صرف $e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ رہ جاتا ہے جسے حاصل کرنا ممکن ہے۔

اگر $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ میں کروی محدد کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے $x = r\sin\theta\cos\phi$، $y = r\sin\theta\sin\phi$ اور $z = r\cos\theta$ پر کئے جائیں تو

$$
\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = r(k_x\sin\theta\cos\phi + k_y\sin\theta\sin\phi + \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}\cos\theta)
\tag{14.185}
$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 14.184 استعمال کرتے ہوئے ساکن نقطہ

$$
k_x = k_1 = k_0\sin\theta\cos\phi
\tag{14.186}
$$

$$
k_y = k_2 = k_0\sin\theta\sin\phi
\tag{14.187}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ساکن نقطے کے قریب ٹیلر تسلسل[54] کے استعمال سے ہم لکھ سکتے ہیں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} &= k_0 r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}{\partial k_x^2}(k_x - k_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}{\partial k_y^2}(k_y - k_2)^2 + \frac{\partial^2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}{\partial k_x\partial k_y}(k_x - k_1)(k_y - k_2) \\
&= k_0 r - (Au^2 + Bv^2 + Cuv)
\end{aligned}
$$

جہاں $u = k_x - k_1$، $v = k_y - k_2$ ہیں جبکہ

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{r}{2}\left(\frac{1}{k_0} + \frac{k_1^2}{k_0^3\cos^2\theta}\right) \\
B &= \frac{r}{2}\left(\frac{1}{k_0} + \frac{k_2^2}{k_0^3\cos^2\theta}\right) \\
C &= \frac{k_1 k_2 r}{k_0^3\cos^2\theta}
\end{aligned}
\tag{14.188}
$$

---

[53] stationary points
[54] Taylor series

5181 ہیں۔چونکہ $\frac{\partial}{\partial k_x}=0$ اور $\frac{\partial}{\partial k_y}=0$ ہیں لہٰذا انہیں بالا ٹیلر تسلسل میں شامل نہیں کیا گیا۔

ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.180 کو مندرجہ ذیل صورت میں لکھنا ممکن ہے

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi^2}\boldsymbol{f}(k_0\sin\theta\cos\phi, k_0\sin\theta\sin\phi)\iint\limits_{\Delta s} e^{j(Au^2+Bv^2+Cuv)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{14.189}$$

جہاں تکمل ساکن نقطے پر چھوٹی سطح Δs پر حاصل کیا جاتا ہے اور جہاں $\boldsymbol{f}$ کی قیمت اٹل تصور کرتے ہوئے ساکن نقطے پر $\boldsymbol{f}$ کی قیمت لی گئی ہے۔یہاں ایک مرتبہ دوبارہ اس حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں کہ چونکہ A ، B اور C کی قیمتیں r کے مماثل ہیں لہٰذا یہ قیمتیں بھی بہت بڑی ہوں گی۔یوں u اور v کے تبدیلی سے مندرجہ بالا تکمل میں A ، B اور C پر منحصر تفاعل بھی تیزی سے ارتعاش کرے گی جس کی وجہ سے مختلف نقطوں پر تفاعل آپس میں جمع نہ ہو پائے گا۔اس حقیقت کی بنا پر اگر تکمل کو لامحدود سطح پر لیا جائے تو حاصل جواب پر کوئی اثر نہیں پڑنا چاہیے۔ایسا ہی کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات میں

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{j(Au^2+Bv^2+Cuv)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{14.190}$$

کا حل حاصل کرتے ہیں۔ہم

$$Au^2+Bv^2+Cuv=\left(\sqrt{A}u+\frac{Cv}{2\sqrt{A}}\right)^2-\frac{C^2v^2}{4A}+Bv^2$$

لکھ کر $\sqrt{A}u+\frac{Cv}{2\sqrt{A}}=w$ پر کرتے ہوئے

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{jw^2}e^{\frac{j(4AB-C^2)v^2}{4A}}\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{A}}\,\mathrm{d}v \tag{14.191}$$

لکھ سکتے ہیں۔ہم یہاں پہلے سے معلوم تکمل

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{j\gamma(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}e^{j\frac{\pi}{4}} \tag{14.192}$$

کا استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{jw^2}e^{\frac{j(4AB-C^2)v^2}{4A}}\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{A}}\,\mathrm{d}v &= \frac{j2\pi}{\sqrt{4AB-C^2}}\\ &= j2\pi\frac{k_0}{r}\cos\theta\end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں۔مساوات 14.188 میں دئے مستقل پر کرتے ہوئے یوں مساوات 14.180 کا حل

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{jk_0\cos\theta}{2\pi r}e^{-jk_0 r}\boldsymbol{f}(k_0\sin\theta\cos\phi, k_0\sin\theta\sin\phi) \tag{14.193}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\boldsymbol{f}_m(k_x,k_y)=\iint\limits_{S_a}\boldsymbol{E}_d(x,y)e^{jk_xx+jk_yy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{14.194}$$

کے برابر ہے۔

مساوات 14.193 کہتی ہے دور میدان، درز پر میدان کا فوریئر بدل ہے جہاں فوریئر بدل میں k_x کی جگہ $k_0 \sin\theta \cos\phi$ اور k_y کی جگہ $k_0 \sin\theta \sin\phi$ پر کیا جاتا ہے۔

چونکہ $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{f} = 0$ کے برابر ہے لہٰذا $\boldsymbol{k}$ کی سمت میں $\boldsymbol{f}$ کی قیمت صفر کے برابر ہے یعنی z محدد پر صرف f_x اور f_x پایا جائے گا۔ کروی محدد میں یوں

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = jk_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{2\pi r} \left[\boldsymbol{a}_\theta (f_x \cos\phi + f_y \sin\phi) + \boldsymbol{a}_\phi \cos\theta (f_y \cos\phi - f_x \sin\phi)\right] \tag{14.195}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مقناطیسی میدان $\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{H}} = Z_0$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 14.10: مستطیل درز کی x سمت میں لمبائی $2a$ ہے جبکہ y سمت میں اس کی لمبائی $2b$ ہے۔ درز $z = 0$ پر پایا جاتا ہے جبکہ اس پر میدان $\boldsymbol{E}_d = E_0 \boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ ہے۔ دور میدان حاصل کریں۔

حل: پہلے $\boldsymbol{f}_m$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_m &= E_0 \boldsymbol{a}_\mathrm{x} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} e^{jk_x x + jk_y y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&= 4abE_0 \boldsymbol{a}_\mathrm{x} \frac{\sin k_x a}{k_x a} \frac{\sin k_y b}{k_y b} \\
&= 4abE_0 \boldsymbol{a}_\mathrm{x} \frac{\sin k_0 a \sin\theta \cos\phi}{k_0 a \sin\theta \cos\phi} \frac{\sin k_0 b \sin\theta \sin\phi}{k_0 b \sin\theta \sin\phi} \\
&= 4abE_0 \boldsymbol{a}_\mathrm{x} \frac{\sin u}{u} \frac{\sin v}{v}
\end{aligned}$$

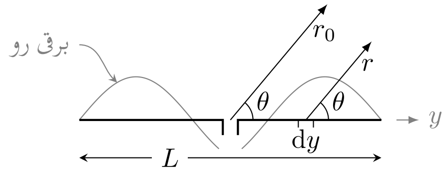
اب دور میدان مساوات 14.195 سے لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{jk_0 4abE_0}{2\pi r} e^{-jk_0 r} \frac{\sin u}{u} \frac{\sin v}{v} (\boldsymbol{a}_\theta \cos\phi - \boldsymbol{a}_\phi \sin\phi \cos\theta)$$

14.12 خطی اینٹینا

مختصر جفت قطب ہم دیکھ چکے ہیں جہاں جفت قطب کی لمبائی طول موج سے بہت کم $\lambda \gg l$ تھی۔ متعدد تعداد کے نقطہ منبع کو سیدھ میں قریب قریب رکھنے سے کسی بھی لمبائی کا اینٹینا حاصل کیا جا سکتا ہے۔ آئیں ایسی لمبی اینٹینا پر غور کریں۔ اینٹینا پر سائن نما برقی رو تصور کی جائے گی۔

شکل 14.20 میں L لمبائی کا اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بالکل درمیان سے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ اینٹینا کے دونوں بالکل یکساں نصف اطراف میں برقی رو بھی ہم شکل ہے۔ ہم L کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں $\mathrm{d}y$ کو انفرادی جفت قطب تصور کرتے ہوئے ان سب کے میدان کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے اس اینٹینا کا دور میدان حاصل کریں گے۔



شکل 14.20: خطی اینٹینا پر سائن نما برقی رو پائی جاتی ہے۔

تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ ایسی اینٹینا میں برقی رو

$$I = \begin{cases} I_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}+y\right)\right] & y<0 \\ I_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}-y\right)\right] & y>0 \end{cases} \tag{14.196}$$

صورت رکھتی ہے۔ مختصر جفت قطب کی لمبائی کو $\mathrm{d}y$ اور اس کے دور میدان کو $\mathrm{d}E_\theta$ لکھتے ہوئے مساوات 14.38

$$\mathrm{d}E_\theta = j\frac{30 I\beta \,\mathrm{d}y}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.197}$$

یعنی

$$\mathrm{d}E_\theta = \frac{j60\pi e^{j(\omega t-\beta r_0)}}{r_0\lambda}\sin\theta I e^{j\beta y\cos\theta}\,\mathrm{d}y \tag{14.198}$$

دیتی ہے۔ یوں L لمبے اینٹینا کا میدان

$$E_\theta = k\sin\theta\int\limits_{-L/2}^{L/2} I e^{j\beta y\cos\theta}\,\mathrm{d}y \tag{14.199}$$

ہو گا جہاں

$$k = \frac{j60\pi e^{j(\omega t-\beta r_0)}}{r_0\lambda} \tag{14.200}$$

لکھا گیا ہے۔ مساوات 14.196 استعمال کرتے اور تکمل لیتے ہوئے

$$E_\theta = \frac{j60[I_0]}{r_0}\left\{\frac{\cos[(\beta L\cos\theta)/2]-\cos(\beta L/2)}{\sin\theta}\right\} \quad \text{خطی اینٹینا کی عمومی مساوات} \tag{14.201}$$

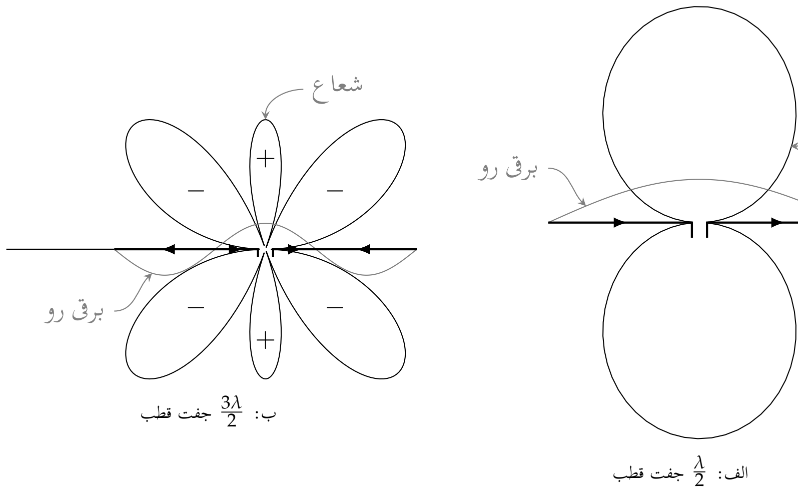
حاصل ہوتا ہے جہاں $[I_0] = I_0 e^{j(\omega t-\beta r_0)}$ تاخیری برقی رو ہے۔ $\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب کی صورت میں اسے

$$E_\theta = \frac{j60[I_0]}{r_0}\frac{\cos[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \quad \frac{\lambda}{2}\ \text{جفت قطب} \tag{14.202}$$

5195 لکھا جا سکتا ہے۔

میدان کی شکل مساوات 14.201 کے دائیں جانب قوسین میں بند جزو پر منحصر ہے جسے $\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب کی صورت میں

$$E_\theta = \frac{\cos[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \quad \frac{\lambda}{2}\ \text{جفت قطب} \tag{14.203}$$



شکل 14.21: 0.5λ اور 1.5λ جفت قطب کے دور میدان۔

اور 1.5λ جفت قطب کی صورت میں

$$E_\theta = \frac{\cos[\frac{3\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \qquad \frac{3\lambda}{2} \text{ جفت قطب} \tag{14.204}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 14.21 میں $\frac{\lambda}{2}$ اور $\frac{3\lambda}{2}$ جفت قطب اور ان کے شعاع نلکی محدد پر دکھائے گئے ہیں۔ جفت قطب پر برقی رو کی سمتیں تیر کی نشان سے دکھائے گئے ہیں۔

شکل-ب میں میدان کے شعاعوں میں $180°$ کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔

جفت قطب کو محور لیتے ہوئے دیئے گئے نقش کو اس کے گرد گمانے سے تین رُخی نقش حاصل ہو گا۔

اوسط پوئنٹنگ سمتیہ کا بڑی رداس کے کرہ پر سطحی تکمل

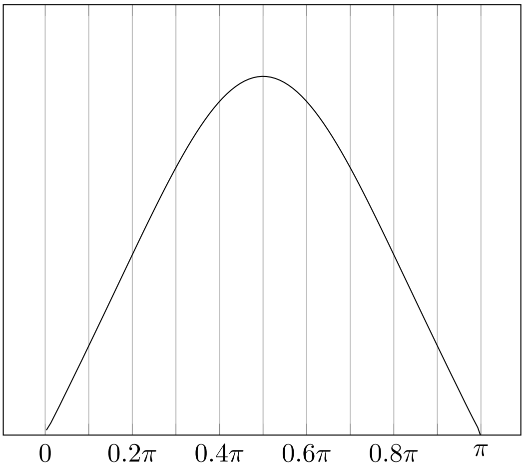
$$P = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\left|E_\theta\right|^2}{2Z} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \tag{14.205}$$

عددی طریقے سے حاصل کرتے ہوئے کل اخراجی مزاحمت R حاصل کی جاتی ہے۔ اس مساوات میں $|E_\theta|$ کو مساوات 14.202 سے پر کرتے ہوئے

$$P = \frac{15 I_0^2}{\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ اور $r = r_0$ لکھے گئے ہیں۔ بیرونی تکمل پہلے لیتے ہوئے

$$P = 30 I_0^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \,\mathrm{d}\theta \tag{14.206}$$



شکل 14.22: اخراجی مزاحمت کا عددی حل۔

ملتا ہے۔اس مساوات کو عددی طریقے سے حل کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر اسے مجموعہ

$$P=\sum_{i=0}^{n} 30I_0^2\frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta}\Delta\theta=\sum_{i=0}^{n} p(\theta)\Delta\theta \tag{14.207}$$

کی شکل میں لکھتے ہیں جہاں

$$p(\theta)=30I_0^2\frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \tag{14.208}$$

لکھا گیا ہے۔ شکل 14.22 میں کارتیسی محدد پر تفاعل $p(\theta)$ کو دکھایا گیا ہے۔افقی محدد پر $\theta=0$ تا $\theta=\pi$ ہے جبکہ عمودی محدد پر $p(\theta)$ ہے۔اگر 5201
$\theta=0$ تا π کو n برابر ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے تو ہر ٹکڑے کی چوڑائی $\frac{\pi}{n}$ ہو گی۔ گراف کے ایسے ہر ٹکڑے کو مستطیل تصور کیا جا سکتا ہے۔ان تمام 5202
مستطیل کے رقبے جمع کرتے ہوئے تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔اسے کہتے ہیں عددی طریقہ۔ 5203

شکل میں $n=10$ لیا گیا ہے۔یوں ہمیں دس مستطیل کے رقبے حاصل کرنے ہیں۔ہر مستطیل کے دونوں اطراف کے قد کی اوسط قیمت کو مستطیل کا قد تصور کیا جائے گا۔بائیں بازو سے شروع کرتے ہوئے پہلے مستطیل کے بائیں طرف کا قد 0 ہے جبکہ اس کے دائیں طرف کا قد $\theta=0.1\pi$ پر مساوات 14.208 سے

$$p_1(\theta)=30I_0^2\frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos(0.1\pi)]}{\sin(0.1\pi)}=0.573I_0^2 \tag{14.209}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح بقایا تمام نقطوں پر بھی قد حاصل کرتے ہوئے جدول 14.2 میں دیے گیے ہیں۔ 5204

شکل 14.22 میں بائیں سے دوسرے مستطیل ($\theta=0.1\pi$ تا $\theta=0.2\pi$) کا رقبہ

$$\begin{aligned}
\text{رقبہ}&=\text{اوسط قد}\times\text{چوڑائی}\\
&=0.1\pi\times\left(\frac{0.573I_0^2+4.457I_0^2}{2}\right)\\
&=0.79I_0^2
\end{aligned}$$

ہے۔ 5205

جدول 14.2: برابر زاویائی فاصلوں پر تفاعل کے قیمت۔

$30I_0^2 \frac{\cos^2[\pi/2\cos\theta]}{\sin\theta}$	θ
0	0.0π
$00.573I_0^2$	0.1π
$04.457I_0^2$	0.2π
$13.492I_0^2$	0.3π
$24.677I_0^2$	0.4π
$30I_0^2$	0.5π
$24.677I_0^2$	0.6π
$13.492I_0^2$	0.7π
$04.457I_0^2$	0.8π
$00.573I_0^2$	0.9π
0	1.0π

جدول 14.2 کی مدد سے کل رقبہ

$$
\begin{aligned}
P = 0.1\pi I_0^2 \bigg(\frac{0}{2} &+ 0.573 + 4.457 + 13.492 + 24.677 + 30 \\
&+24.677 + +13.492 + 4.457 + 0.573 + \frac{0}{2}\bigg)
\end{aligned}
$$

یعنی

$$P = 36.5675I_0^2 \tag{14.210}$$

حاصل ہوتا ہے۔سائن نما برقی رو کی چوٹی I_0 ہونے کی صورت میں مزاحمت R میں طاقت کا ضیاع $\frac{1}{2}I_0^2R$ ہوتا ہے لہٰذا ان دونوں کو برابر لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{2}I_0^2R_{\text{اخراجی}} = 36.5675I_0^2$$

$\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کے جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

$$R_{\text{اخراجی}} = 73.13\,\Omega \qquad \frac{\lambda}{2}\ \text{جفت قطب} \tag{14.211}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ وہ مزاحمت ہے جو اینٹینا کو طاقت مہیا کرنے یا اس سے طاقت وصول کرنے والے ترسیلی تار کو نظر آتی ہے۔$\frac{\lambda}{2}$ اینٹینا کے اخراجی مزاحمت کا موازنہ مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت ($0.63\,\Omega$) کے ساتھ کریں جسے صفحہ 531 پر مثال 14.1 میں حاصل کیا گیا ہے۔

اینٹینا کی رکاوٹ میں $j42.5$ اوہم کا خیالی جزو ($Z = 73.1 + j42.5$) بھی پایا جاتا ہے۔اینٹینا کی لمبائی چند فی صد کم کرنے سے خیالی جزو صفر کیا جا سکتا ہے، البتہ اس سے حقیقی جزو قدر کم ہو کر $70\,\Omega$ رہ جاتا ہے۔زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کے لئے ضروری ہے کہ ایسے اینٹینا کو $70\,\Omega$ قدرتی رکاوٹ کے ترسیلی تار کے ساتھ جوڑا جائے۔$\frac{3\lambda}{2}$ اینٹینا کا اخراجی مزاحمت $100\,\Omega$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 14.11: $\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کے خطی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.78 میں مساوات 14.203 پر کرتے ہوئے

$$D=\frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega}=\frac{4\pi}{2\pi\int_0^{\pi}\frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin^2\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta} \tag{14.212}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مساوات 14.206 سے موازنہ کرتے ہوئے، مساوات 14.210 میں حاصل کی گئی قیمت $36.5675I_0^2$ استعمال کرتے ہوئے

$$D=\frac{4\pi}{2\pi\left(\frac{36.5675I_0^2}{30I_0^2}\right)}=1.64 \tag{14.213}$$

حاصل ہوتا ہے۔

14.13 چلتی موج اینٹینا

گزشتہ حصے میں خطی اینٹینا پر سائن نما برقی رو تصور کیا گیا۔ایسی دبلی موصل تار، جس کا قطر d طول موج λ سے بہت کم ہو $d<\frac{\lambda}{100}$ اور جس کا آخری سرا کھلے سرے ہو، کے برقی رو کی شکل تقریباً ایسی ہی ہوتی ہے۔

کئی طول موج لمبی خطی اینٹینا موصل زمین کے متوازی h اونچائی پر پائی جاتی ہے۔ جیسے شکل 14.23-الف میں دکھایا گیا ہے، اس کو بائیں جانب سے ٹرانسمٹر[55] طاقت مہیا کرتا ہے۔ خطی اینٹینا اور موصل زمین مل کر کھلے سرے ترسیلی تار کا کردار ادا کرتے ہیں۔یوں کھلے سر پر آمدی برقی رو اور یہاں سے انعکاسی برقی رو مل کر ساکن موج کو جنم دیتے ہیں جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے۔تار کے کھلے سر پر برقی رو کے ساکن موج کا صفر پایا جاتا ہے جبکہ $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔یہی برقی رو گزشتہ حصے میں خطی اینٹینا پر فرض کی گئی تھی۔

آئیں اب ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ کے برابر مزاحمت R، تار کے کھلے سر اور زمین کے درمیان جوڑیں۔ایسا کرنے کے بعد اینٹینا پر انعکاسی موج پیدا نہیں ہو گی۔تار میں قابل نظر انداز ضیاع کی صورت میں پوری لمبائی پر برقی رو کی قیمت یکساں ہو گی جبکہ لمبائی جانب بڑھتا زاویائی فرق پایا جائے گا۔اس طرح قدرتی رکاوٹ کے برابر مزاحمت سے اختتام کردہ اینٹینا کو شکل 14.23-ب میں دکھایا گیا ہے۔زمین سے دور خطی اینٹینا پر ایسی ہی مسلسل موج پیدا کرنے کی ترکیب شکل 14.23-پ میں دکھائی گئی ہے جہاں $\frac{\lambda}{2}$ اینٹینا کے وسطی نقطے کو زمین تصور کیا گیا ہے۔

مسلسل موج کے اس خطی اینٹینا کو چھوٹے چھوٹے، سلسلہ وار جڑے، لمبائی جانب اخراجی جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ایسا شکل میں دکھایا گیا ہے۔مساوات 14.128 غیر سمتی ارکان کے قطار کا تقابل پذیر نقش

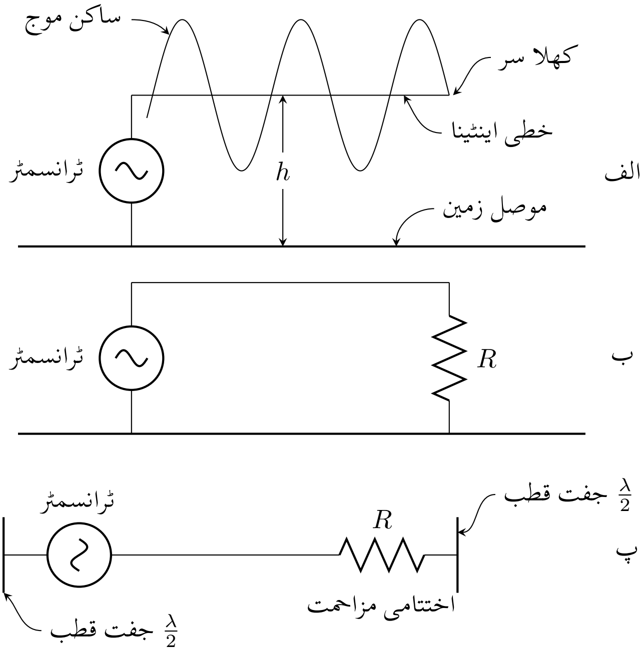
$$E_n=\frac{1}{n}\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$$

دیتی ہے جہاں لمبائی جانب اخراج کی صورت میں $\psi=\beta d(\cos\theta-1)$ کے برابر ہے۔اگر انفرادی رکن کا نقش E_0 ہو تب ضرب نقش کی ترکیب سے قطار کا نقش

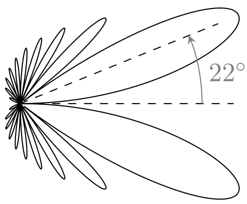
$$E(\theta)=\frac{E_0}{n}\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$$

---

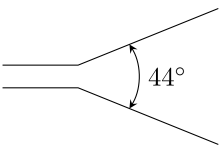
[55] transmitter



شکل 14.23: مسلسل موج اینٹینا۔



الف: خطی اختتام کردہ مسلسل موج اینٹینا۔



(ا) ب: دو مسلسل موج اینٹینا کو 44° پر رکھ کر بہتر سمتیت حاصل کی جاتی ہے۔

شکل 14.24

لکھا جا سکتا ہے۔انتہائی چھوٹے جفت قطب کا نقش $E_0=\sin\theta$ ہے لہٰذا لمبے اینٹینا $L=d(n-1)\approx nd$ کے لئے

$$E(\theta)=\frac{\sin\theta}{n}\frac{\sin[\frac{\beta L}{2}(\cos\theta-1)]}{\sin[\frac{\beta L}{2n}(\cos\theta-1)]} \tag{14.214}$$

لکھا جائے گا۔یہ اینٹینا لمبائی جانب اخراج کرتا ہے لہٰذا θ کی قیمت زیادہ نہیں ہو گی۔ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات کو

$$E(\theta)=\sin\theta\frac{\sin[\beta L/2(\cos\theta-1)]}{\beta L/2(\cos\theta-1)} \tag{14.215}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 14.24-الف میں $n=20$ اور $d=\frac{\lambda}{4}$ کی صورت میں حاصل 4.75λ لمبائی کے اینٹینا کی شعاع دکھائی گئی ہے۔مرکزی شعاع $\theta=22^\circ$ پر پائی جاتی ہے۔جیسا شکل-ب میں دکھایا گیا ہے، دو عدد ایسے اینٹینا کو آپس میں 44° کے میکانی زاویے پر رکھنے سے یک سمتی اینٹینا حاصل ہو گا جسے دو تار کے ترسیلی تار سے طاقت مہیا کی جا سکتی ہے۔دونوں کے قریبی شعاع مل کر بہتر سمتیت دیتی ہے۔

زمین کے متوازی اینٹینا کا عمودی شعاع حاصل کرنے کی خاطر زمین میں اینٹینا کے عکس کو بھی مد نظر رکھا جائے گا۔

14.14 چھوٹا گھیرا اینٹینا 5231

شکل 14.25-الف میں d قطر کا گھیرا اینٹینا[56] دکھایا گیا ہے جس میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ دائرے کا قطر طول موج سے بہت کم $\lambda \gg d$ ہے لہٰذا پورے گول دائرے پر یک قیمت اور ہم قدم برقی رو تصور کی جا سکتی ہے۔اس چھوٹے گول دائرے کو شکل-ب کا چکور تصور کرتے ہوئے، دور میدان حاصل کرتے ہیں۔چکور اور گول دائرے کے رقبے برابر

$$S = s^2 = \frac{\pi d^2}{4} \tag{14.216}$$

لئے جاتے ہیں۔ چکور کے چار اطراف کو چار جفت قطب تصور کرتے ہوئے دور میدان حاصل کیا جائے گا۔چکور کو کارتیسی محدد کے مرکز پر $z=0$ سطح پر رکھتے ہوئے $x=0$ سطح پر دور میدان حاصل کیا جائے گا۔ $x=0$ سطح پر چکور کے اطراف الف اور پ برابر مگر الٹ سمت میں میدان پیدا کرتے ہیں لہٰذا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہے۔اطراف ب اور ت بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں جن کا نقش $x=0$ سطح پر غیر سمتی ہے لہٰذا انہیں دو غیر سمتی جفت قطب تصور کیا جا سکتا ہے۔ایسا ہی شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے دور میدان

$$E(\theta) = E_2 e^{-j\frac{\psi}{2}} - E_4 e^{j\frac{\psi}{2}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں $E_2 = E_4$ اور $\psi = \beta s \sin\theta$ ہیں۔یوں

$$E(\theta) = -j2E_2 \sin\left(\frac{\beta s}{2}\sin\theta\right)$$

لکھا جا سکتا ہے جسے $\lambda \gg s$ کی صورت میں

$$E(\theta) = -jE_2 \beta s \sin\theta \tag{14.217}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ صفحہ 529 پر دیے گئے جدول 14.1 سے مختصر جفت قطب کے دور میدان E_θ کے حیطے کو E_2 کی جگہ پر کرتے ہوئے

$$E(\theta) = \frac{60\pi I l}{r\lambda}\beta s \sin\theta \tag{14.218}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 14.25-پ میں جفت قطب کی لمبائی $s = l$ ہے جبکہ چکور کا رقبہ $S = s^2$ ہے لہٰذا

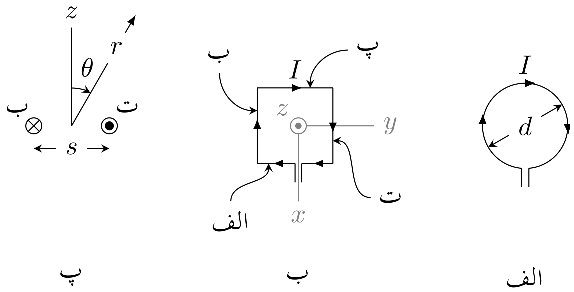
$$E(\theta) = \frac{120\pi^2 I}{r}\frac{S}{\lambda^2}\sin\theta \tag{14.219}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مندرجہ بالا مساوات S رقبے کے چھوٹے دائرے یا چکور کا دور میدان دیتی ہے۔ چکور کا قطر جتنا کم ہو یہ مساوات اتنا ہی زیادہ درست میدان دیتا ہے۔حقیقت میں S رقبے کے کسی بھی شکل کے چھوٹے بند دائرے کا دور میدان یہی مساوات دیتا ہے۔ 5233

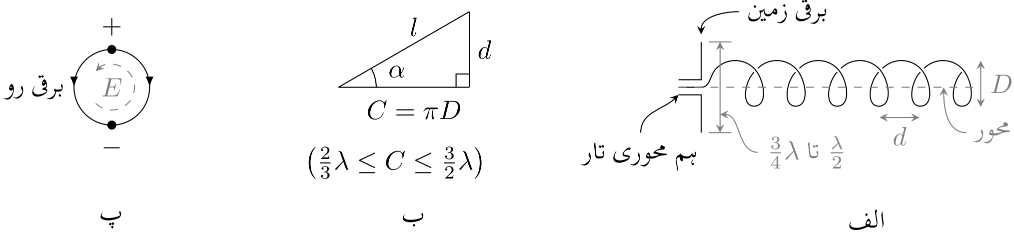
14.15 پیچ دار اینٹینا 5234

طول موج برابر محیط کا پیچ دار لچھا لمبائی جانب اخراجی اینٹینا کا کام کرتا ہے۔ایسے اینٹینا کی شعاع، دائری قطبیت رکھتی ہے۔لچھے کی لمبائی اور اینٹینا کی سمتیت راست تناسب کا تعلق رکھتے ہیں۔ پیچ دار اینٹینا[57] کا قطر D،اس کا محیط C، چکر کے مابین فاصلہ d، چکر کی لمبائی l اور پیچ دار زاویہ α، اس کے اہم ناپ ہیں۔ان تمام کو شکل 14.26 میں دکھایا گیا ہے۔ایسا لچھے جس کا محیط $C = \pi D$ تقریباً ایک طول موج (1λ) لمبا ہو پر ایک مکمل موج پائی جائے گی۔یوں نصف چکر پر برقی موج کا مثبت حصہ اور بقایا پر موج کا منفی حصہ پایا جائے گا۔ لچھے کے ایک چکر کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں اس پر برقی رو اور چارج دکھائے گئے ہیں جو میدان $\boldsymbol{E}$ پیدا کرتے ہیں۔ جیسے جیسے برقی رو کی موج اینٹینا پر آگے حرکت کرتی ہے ویسے ویسے میدان $\boldsymbol{E}$ گھومے گا جو اینٹینا کے محور پر دائری قطبیت[58] کو جنم دے گی۔ پیچ دار لچھا بطور مسلسل موج اینٹینا کردار ادا کرتا ہے اور اس کی خاصیت یہ ہے کہ اسے کسی مزاحمت سے

[56] loop antenna
[57] helical-beam antenna
[58] circular polarization



شکل 14.25: دائرہ اور چکور اینٹینا



شکل 14.26: پیچ دار اینٹینا۔

اختتام پذیر کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔اس پر برقی رو بالکل مسلسل موج اینٹینا کی مانند ہوتی ہے۔اینٹینا کے کھلے سر سے انعکاسی موج قابل نظرانداز ہونے کے ناطے، اس پر یکساں حیطے کے برقی رو کی موج خارجی جانب حرکت کرتی پائی جاتی ہے۔

پیچ دار اینٹینا کو لمبائی جانب اخراجی قطار تصور کیا جا سکتا ہے جہاں ہر چکر کو انفرادی منبع فرض کیا جاتا ہے۔ضرب نقش کے اصول سے، انفرادی منبع کا نقش ضرب غیر سمتی ارکان کے قطار کا نقش،

$$E(\theta)=\cos\theta\frac{\sin(n\psi/2)}{\sin(\psi/2)} \tag{14.220}$$

اینٹینے کا نقش دیتا ہے۔اس مساوات میں انفرادی چکر کے نقش کو $\cos\theta$ کے لگ بھگ تصور کیا گیا ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں

$$\psi=\beta d\cos\theta-\frac{c\beta L}{v} \tag{14.221}$$

کے برابر ہے جہاں دو قریبی چکر کے مابین زاویائی فرق $\frac{c\beta L}{v}$ ہو گا جو ایک چکر گولائی L پر v رفتار سے حرکت کرتی موج کا زاویائی فرق ہے۔

مساوات 14.220 اور مساوات 14.215 کے موازنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ قدر مختلف ہیں۔مساوات 14.220 میں $\cos\theta$ پایا جاتا ہے جس کی قیمت $\theta=0$ پر زیادہ سے زیادہ ہے جو اینٹینا کا محور یعنی شعاعی اخراج کی سمت ہے۔اس کے برعکس مساوات 14.215 میں $\sin\theta$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے جو اینٹینا کے محور پر صفر کے برابر ہے لہٰذا اس اینٹینا کی شعاع دو شاخی ہے اور اس کی سمتیت قدر کم ہے۔

چونکہ میدان دائری قطبی اور محور کے گرد یکساں ہے لہٰذا یہی مساوات $E_\theta(\theta)$ کے علاوہ $E_\phi(\theta)$ کا نقش بھی دیتی ہے۔

کسی بھی لمبائی جانب اخراجی قطار میں تمام منبع کے میدان اینٹینا کے محور پر ہم قدم ہوتے ہیں جو

$$\psi=0,\mp2\pi,\mp4\pi,\cdots \tag{14.222}$$

کی صورت میں ممکن ہوتا ہے۔ پیچ دار اینٹینا میں $\psi = -2\pi$ کے برابر ہے۔ ارکان کے مابین $\psi = -2\pi$ زاویائی فرق کی بنیاد پر حاصل نقش اور اصل پیچ دار اینٹینا کے ناپے گئے نقش میں خاصہ فرق پایا جاتا ہے۔ پیچ دار اینٹینا کی ناپی گئی سمتیت زیادہ ہے۔ ہنسن اور ووڈیارڈ[59] یہ ثابت کر چکے ہیں کہ n رکنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی زیادہ سے زیادہ سمتیت اس صورت حاصل ہوتی ہے جب اس کے ارکان کے مابین $\psi = -2\pi - \frac{\pi}{n}$ زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔ مساوات 14.220 میں ارکان کے مابین زاویائی فرق $\psi = -2\pi - \frac{\pi}{n}$ پر کرنے سے حقیقی اینٹینا کے ناپے نقش جیسا نقش حاصل ہوتا ہے۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ حقیقی اینٹینا پر دو قریبی چکر کے مابین یہی زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ اس نتیجے کو تسلیم کرتے ہوئے مساوات 14.221 سے

$$\psi = \beta d \cos\theta - \frac{c\beta L}{v} = -2\pi - \frac{\pi}{n} \tag{14.223}$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{d}{\lambda} + \frac{2n+1}{2n}} \tag{14.224}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں $C = \lambda$ ، $\alpha = 12^\circ$ اور $n = 20$ کی صورت میں $\frac{v}{c} = 0.82$ ہو گی۔ حقیقی پیچ دار اینٹینا پر موج کی رفتار یہی ناپی جاتی ہے۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ پیچ دار اینٹینا خود بخود موج کی رفتار کو اس قیمت پر رکھتی ہے جس پر اینٹینا کی سمتیت زیادہ سے زیادہ حاصل ہو۔ تین سے زیادہ چکر پر مبنی پیچ دار اینٹینا یہ عمل $(5^\circ < \alpha < 20^\circ)$ اور $(\frac{3}{4}\lambda < C < \frac{3}{2}\lambda)$ تک حاصل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ چکر کی تعداد بڑھا کر سمتیت بڑھائی جا سکتی ہے۔

پیچ دار اینٹینا کی سمتیت تقریباً

$$D = 15 \left(\frac{C}{\lambda}\right)^2 \frac{nd}{\lambda} \tag{14.225}$$

کے برابر ہے۔ یوں $C = \lambda$ اور $\alpha = 12^\circ$ کی صورت میں $D = 64$ ہو گی۔

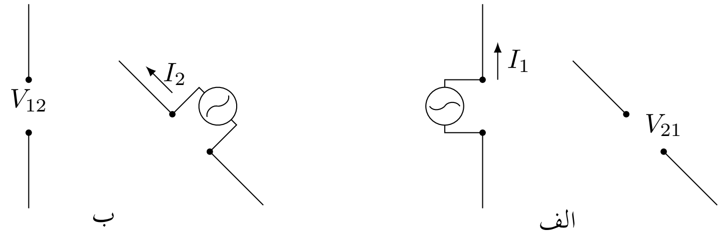
پیچ دار زاویہ $\alpha = 12^\circ$ اور $d = 0.213\lambda$ کی صورت میں طول موج میں تقریباً پانچ چکر پائیں جائیں گے لہٰذا 20 چکر کا اینٹینا $20 \times 0.213\lambda = 4.3\lambda$ لمبائی کا ہو گا۔ اتنی لمبائی کے عام لمبائی جانب اخراجی اینٹینا کی سمتیت چار گنا سے بھی قدر کم ہوتی ہے۔

پیچ دار اینٹینا کی سمتیت زیادہ ہونے کا مطلب ہے کہ اس کی اخراجی سطح حقیقی سطح سے بہت زیادہ ہوتی ہے۔ مصنوعی سیاروں پر مبنی ذرائع ابلاغ میں پیچ دار اینٹینا کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

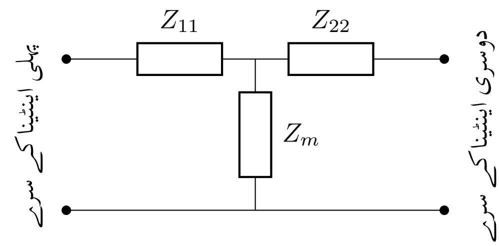
14.16 دو طرفہ کردار

اینٹینا شعاع خارج کرتی ہے اور یا اسے وصول کرتی ہے۔ اینٹینا کے تمام خاصیت دو طرفہ ہیں۔ یوں اس کی سمتیت، اخراجی رقبہ، نقش اور اخراجی مزاحمت دونوں (اخراجی اور وصولی) صورتوں میں برابر پائے جاتے ہیں۔ البتہ اینٹینا پر برقی رو اخراجی اور وصولی صورت میں مختلف صورت رکھتی ہے۔

اینٹینا کی دو طرفہ خاصیت[60] پر شکل 14.27 کی مدد سے غور کرتے ہیں۔ دونوں اینٹینا کے درمیان غیر متحرک، خطی اور غیر سمتی خطہ پایا جاتا ہے۔ شکل-الف میں پہلے اینٹینا کو صفر رکاوٹ اور f تعدد کے منبع سے طاقت مہیا کی جاتی ہے جس سے پہلے اینٹینا کے داخلی سروں پر I_1 برقی رو اور دوسرے اینٹینا کے کھلے برقی سروں پر برقی دباو V_{21} پیدا ہوتی ہے۔ اگر منبع طاقت کو دوسرے اینٹینا کے ساتھ جوڑا جائے تب دوسرے اینٹینا میں I_2 برقی رو اور پہلے



شکل 14.27: دو اینٹینا کے مابین باہمیت۔



شکل 14.28: مساوی T دور۔

اینٹینا کے کھلے برقی سروں پر V_{12} برقی دباو پیدا ہو گا۔ شکل-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ چونکہ کسی بھی چار سروں والے برقی دور کا مساوی T دور بنانا ممکن ہے لہٰذا ان اینٹینا کے چار برقی سروں کے مابین بھی ایسا کرنا ممکن ہو گا۔ شکل 14.28 میں یہ مساوی دور دکھایا گیا ہے جہاں سے

$$
\begin{aligned}
V_{21} &= I_1 Z_m \\
V_{12} &= I_2 Z_m
\end{aligned}
$$

یا

$$
\frac{V_{21}}{I_1} = \frac{V_{12}}{I_2} = Z_m \tag{14.226}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ دونوں اینٹینا کو برابر برقی رو $(I_1 = I_2)$ مہیا کرنے کی صورت میں

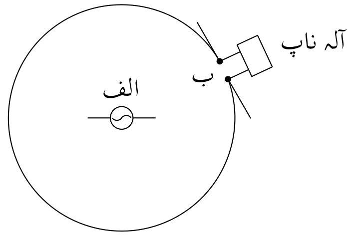
$$
V_{21} = V_{12} \tag{14.227}
$$

ہو گا۔

اینٹینا کی دو طرفہ خاصیت کے تحت اگر کسی ایک اینٹینا کو برقی رو I مہیا کی جائے جس سے کسی دوسرے اینٹینا میں برقی دباو V پیدا ہو تب دوسرے اینٹینا کو برقی رو I فراہم کرنے سے پہلے اینٹینا میں برقی دباو V پیدا ہو گا۔

دونوں اینٹینا کے مابین مشترکہ رکاوٹ Z_m دونوں اطراف سے برابر ہے۔

Hansen and Woodyard[59]
reciprocity[60]



شکل 14.29: نقش کی ناپ۔

نقش

شکل 14.29 میں اینٹینا-الف شعاع خارج کر رہی ہے جبکہ اینٹینا-ب اس شعاع کو وصول کر رہی ہے۔اینٹینا-الف ساکن ہے جبکہ اینٹینا-ب اس کے گرد گول دائرے پر گھوم رہی ہے۔اینٹینا-ب پر پیدا برقی دباو، اینٹینا-الف کی نقش دے گی۔اب اگر دائرے پر گھومتی اینٹینا شعاع خارج کرے اور ساکن اینٹینا اس شعاع کو وصول کرے تو اینٹینا کے دو طرفہ خاصیت کے تحت وہی نقش دوبارہ حاصل ہو گا۔یوں کسی بھی اینٹینا کا اخراجی نقش اور وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں۔اینٹینا کی دو طرفہ خاصیت اس کے نقش کے لئے بھی درست ثابت ہوتی ہے۔

سمتیت اور اخراجی رقبہ

مساوات 14.78

$$D=\frac{4\pi}{\underset{4\pi}{\iint} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \tag{14.228}$$

کے تحت سمتیت صرف اور صرف نقش پر منحصر ہے اور ہم دیکھ چکے ہیں کہ اینٹینا کا اخراجی نقش اور اس کا وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں لہٰذا اس کی اخراجی سمتیت اور وصولی سمتیت بھی بالکل یکساں ہوں گے۔

اگر اخراجی سمتیت اور وصولی سمتیت برابر ہوں تب مساوات 14.102

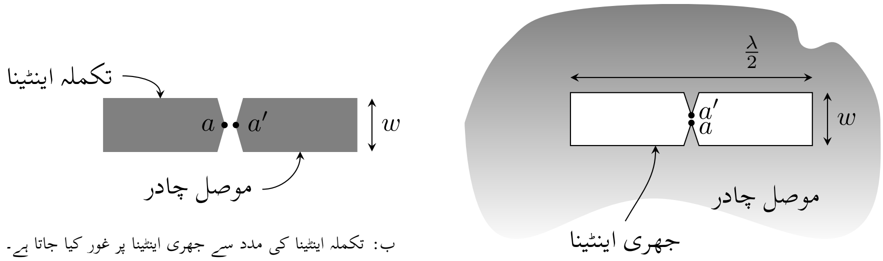
$$D=\frac{4\pi}{\lambda^2}S_{\text{اخراجی}} \tag{14.229}$$

کے تحت اخراجی رقبہ اور وصولی رقبہ بھی برابر ہوں گے۔اینٹینا کی دو طرفہ خاصیت سمتیت اور رقبے کے لئے بھی درست ثابت ہوتی ہے۔

اخراجی مزاحمت اور وصولی مزاحمت

اخراجی اینٹینا کو صرف داخلی برقی سروں سے برقی رو مہیا کی جا سکتی ہے جبکہ وصولی اینٹینا کے تمام جسامت پر برقی دباو پیدا ہوتا ہے جس سے اینٹینا کی برقی رو عموماً اخراجی صورت سے مختلف ہو گی۔

اگر اینٹینا کو مختلف برقی رکاوٹوں کا مجموعہ تصور کیا جائے تب اگرچہ اس کے مختلف حصوں پر برقی رو مختلف ممکن ہے لیکن کسی بھی دو سروں کے مابین رکاوٹ تبدیل نہیں ہوتی۔یوں اینٹینا کے برقی سروں کے مابین برقی رکاوٹ کا دارومدار اینٹینا میں برقی رو کی صورت پر نہیں ہوتی۔اس کا اخراجی رکاوٹ اور وصولی رکاوٹ بالکل برابر ہوتے ہیں۔اینٹینا کی دو طرفہ خاصیت یہاں بھی قابل استعمال ہے۔



ب: تکملہ اینٹینا کی مدد سے جھری اینٹینا پر غور کیا جاتا ہے۔

الف: موصل چادر میں جھری بطور اینٹینا کام کرتی ہے۔

شکل 14.30: جھری اینٹینا اور اس کا تکملہ اینٹینا۔

5284
14.17 جھری اینٹینا

وسیع موصل چادر میں $\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کی جھری شکل 14.30-الف میں دکھائی گئی ہے۔ اگر aa' کو ترسیلی تار سے جوڑا جائے تو جھری کے گرد موصل چادر میں برقی رو کی وجہ سے شعاعی اخراج پیدا ہو گی۔ جھری کو از خود موصل چادر فرض کرتے اینٹینا تصور کیا جا سکتا ہے جس کی مدد سے جھری اینٹینا[61] کا میدان حاصل کیا جاتا ہے۔ شکل-ب میں اسی تکملہ اینٹینا[62] کو دکھایا گیا ہے۔ جھری اینٹینا کو aa' پر طاقت چوڑائی کے اطراف کے مابین فراہم کی جاتی ہے جبکہ تکملہ اینٹینا کو لمبائی جانب کے اطراف کے مابین طاقت aa' پر مہیا کی جاتی ہے۔ یوں ان کے میدان آپس میں $90°$ پر ہوں[63] گے۔ جھری اینٹینا کی اخراجی رکاوٹ Z_g اور تکملہ اینٹینا کی اخراجی رکاوٹ Z_d کا آپس میں تعلق

$$Z_g = \frac{Z_0^2}{4Z_d} \tag{14.230}$$

5285 ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

اس طرح جفت قطب کے خصوصیات جانتے ہوئے جھری کے خصوصیات دریافت کئے جا سکتے ہیں۔ یوں اگر جھری کی چوڑائی $\lambda \gg c$ اور اس کی لمبائی $\frac{\lambda}{2}$ کر دی جائے تو تکملہ اینٹینا (صفحہ 566) کی اخراجی رکاوٹ $Z_d = 73 + j42.5$ جانتے ہوئے جھری اینٹینا کی اخراجی رکاوٹ

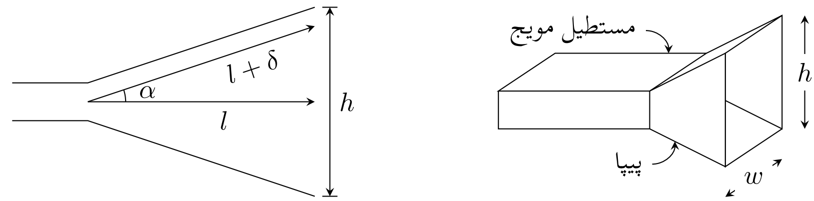
$$Z_g = \frac{377^2}{4 \times (73 + j42.5)} = 363 - j211\,\Omega \tag{14.231}$$

5286 لکھی جا سکتی ہے۔

5287
14.18 پیپا اینٹینا

شکل 14.31 میں پیپا اینٹینا[64] دکھایا گیا ہے جسے بائیں جانب سے مستطیلی ترسیلی تار طاقت مہیا کر رہی ہے۔ پیپا اینٹینا کو مستطیل ترسیلی تار کا کھلا منہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ مستطیلی ترسیلی تار کا منہ بڑھانے سے اینٹینا کی اخراجی سطح بڑھانا مقصد ہے جس سے سمتیت بڑھتی ہے۔ اگرچہ پیپا کے منہ پر ہم قدم میدان

[61] slot antenna
[62] complementary antenna
[63] Booker's theory
[64] horn antenna



الف: پیپا اینٹینا۔

ب: پیپا اینٹینا کے اہم ناپ۔

شکل 14.31: پیپا اینٹینا اور اس کے اہم ناپ۔

ہی سے بہتر سمتیت حاصل ہو گی، حقیقت میں ایسا ہم قدم میدان حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا۔ یوں حقیقی اینٹینا میں پیپا کے منہ پر میدان میں فرق کو کسی مخصوص مقدار δ سے کم رکھا جاتا ہے۔ شکل-ب کو دیکھ کر

$$\cos\theta = \frac{l}{l+\delta}$$
$$\sin\theta = \frac{h}{2(l+\delta)}$$
$$\tan\theta = \frac{h}{2l}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ کم δ کی صورت میں ان مساوات سے

$$l = \frac{h^2}{8\delta} \tag{14.232}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{h}{2l} = \cos^{-1}\frac{l}{l+\delta} \tag{14.233}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ برقی میدان h سمت میں اور مقناطیسی میدان w سمت میں تصور کرتے ہوئے آگے پڑھیں۔ برقی میدان E کے سطح پر اس فرق کو $\delta < \frac{\lambda}{5}$ رکھا جاتا ہے جس سے پیپے کے منہ پر کل فرق $\mp 36^\circ$ تک محدود رہتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان H کے سطح پر فرق $\delta < \frac{3\lambda}{8}$ تک محدود رکھا جاتا ہے۔ مقناطیسی میدان کے سطح پیپے کے اطراف پر برقی میدان سطح کے متوازی ہونے کی وجہ سے صفر ہوتا ہے لہٰذا میدان میں زیادہ زاویائی فرق سے دور میدان زیادہ متاثر نہیں ہوتا۔

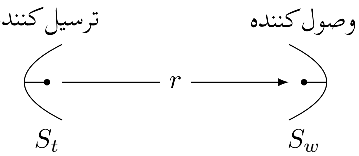
مثال 14.12: شکل میں $h = 10\lambda$ ہے جبکہ ترسیلی تار میں TE_{10} موج پائی جاتی ہے۔ شکل میں، w اور نصف زاویے θ اور ϕ حاصل کریں۔

حل: برقی میدان کی سطح پر $\delta < \frac{\lambda}{5}$ لیتے ہوئے

$$l = \frac{h^2}{8\delta} = \frac{100\lambda^2}{8\times\frac{\lambda}{5}} = 62.5\lambda$$

حاصل ہوتا ہے جس سے E سطح پر

$$\theta = \tan^{-1}\frac{h}{2l} = \tan^{-1}\frac{10\lambda}{2\times 62.5\lambda} = 4.6^\circ$$



شکل 14.32: وصول کردہ طاقت کا انحصار ترسیلی اور وصولی اینٹینا کے اخراجی رقبوں پر ہے۔

حاصل ہوتا ہے۔مقناطیسی میدان پر $\delta < \frac{3\lambda}{8}$ لیتے ہوئے

$$\phi = \cos^{-1}\frac{62.5\lambda}{62.5\lambda + \frac{3}{8}\lambda} = 6.26^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔پیپے کی چوڑائی

$$w = 2l\tan\phi = 2 \times 62.5 \times \lambda \times \tan 6.26^\circ = 13.7\lambda$$

حاصل ہوتی ہے۔ 5294

5295

14.19 فرائس ریڈار مساوات 5296

شکل 14.32 میں S_t اخراجی رقبے کا ترسیل کنندہ اور S_w اخراجی رقبے کا وصول کنندہ اینٹینا آپس میں r فاصلے پر دکھائے گئے ہیں۔اگر غیر سمتی ترسیل کنندہ P_t طاقت کی شعاع خارج کرے تب وصول کنندہ کے قریب اکائی رقبے پر

$$P = \frac{P_t}{4\pi r^2} \tag{14.234}$$

کثافت طاقت دستیاب ہو گی جس سے وصول کنندہ

$$P'_w = PS_w \tag{14.235}$$

طاقت حاصل کر پائے گا۔ترسیلی سطح S_t کے سمتی ترسیل کنندہ کی سمتیت $D = \frac{4\pi S_t}{\lambda^2}$ ہے لہٰذا اس کی شعاع سے وصول کنندہ

$$P_w = DP'_w = \frac{4\pi S_t}{\lambda^2}\frac{P_t S_w}{4\pi r^2} \tag{14.236}$$

طاقت حاصل کر پائے گا۔اس مساوات سے

$$\frac{P_w}{P_t} = \frac{S_t S_w}{\lambda^2 r^2} \tag{14.237}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کسی بھی دو اینٹینا کے نظام میں مساوات کا دایاں ہاتھ بے بُعد مستقل ہے۔یہ مساوات **فرائس ترسیلی مساوات**[65] کہلاتی ہے۔آئیں اب شکل 14.33-الف پر غور کریں جہاں ترسیل کنندہ اینٹینا شعاع خارج کرتی ہے۔انعکاسی شعاع کو وصول کنندہ اینٹینا وصول کرتی ہے۔ریڈار میں عموماً ایک

[65] Friis transmission equation

ہی اینٹینا دونوں کام سرانجام دیتی ہے۔شعاع کا انعکاس ہوا میں اڑتے جہاز سے ممکن ہے۔شکل 14.33-ب میں عاکس کو دو اینٹینا کی صورت میں دکھایا گیا ہے جہاں ایک اینٹینا شعاع وصول کرتے ہوئے دوسرے اینٹینا سے واپس خارج کرتا ہے۔یوں مساوات 14.237 کو دو مرتبہ استعمال کرتے ہوئے

$$\frac{P_w}{P_t}=\frac{S_t S_w S_e^2}{\lambda^4 r^4} \tag{14.238}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر ایک ہی اینٹینا بطور ترسیلی اور وصولی اینٹینا استعمال کیا جائے تب

$$\frac{P_w}{P_t}=\frac{S_w^2 S_e^2}{\lambda^4 r^4} \tag{14.239}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں عاکس کا اخراجی رقبہ S_e ہے۔ 5297

اگر عاکس وسیع جسامت کا ہو اور اس سے انعکاسی موج عین ریڈار کی سمت میں ہو تب عاکس کا اخراجی رقبہ اس کے میکانی رقبے جتنا ہو گا۔ عموماً عاکس غیر سمتی اخراج کرتا ہے جس کی وجہ سے اس کا اخراجی رقبہ، اس کے میکانی رقبے سے کم ہوتا ہے۔ایسی صورت میں عاکس کے وصولی رقبے کو σ لکھتے ہوئے مساوات 14.237 سے عاکس کی حاصل کردہ طاقت

$$\frac{P}{P_t}=\frac{S_t\sigma}{\lambda^2 r^2} \tag{14.240}$$

لکھی جائے گی۔یہی طاقت غیر سمتی خارج کی جائے گی۔ غیر سمتی اینٹینا کا اخراجی رقبہ $S=\frac{\lambda^2}{4\pi}$ ہوتا ہے۔یہی عاکس کی اخراجی رقبہ لیتے ہوئے مساوات 14.239 میں $S_e^2=S\sigma$ لکھتے ہوئے

$$\frac{P_w}{P_t}=\frac{S_w^2 S\sigma}{\lambda^4 r^4} \tag{14.241}$$

یعنی

$$\frac{P_w}{P_t}=\frac{S_w^2\sigma}{4\pi\lambda^2 r^4} \tag{14.242}$$

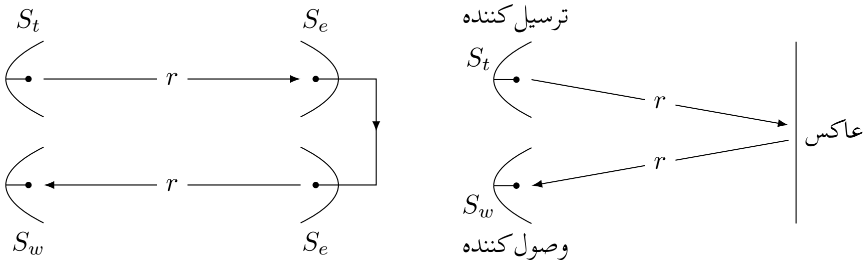
حاصل ہوتا ہے جہاں σ **ریڈار رقبہ تراش**[66] کہلاتا ہے۔یہ **ریڈار مساوات**[67] کہلاتی ہے۔ 5298

بڑی جسامت کی موصل کرہ، جس کا رداس a ہو، کی ریڈار رقبہ تراش اس کے میکانی رقبہ تراش πa^2 کے برابر ہوتی ہے۔ غیر کامل عاکس کی صورت 5299
میں ریڈار رقبی تراش نسبتاً کم ہو گا، مثلاً ایک میٹر طول موج پر چاند کا ریڈار رقبہ تراش تقریباً $\frac{1}{10}$ گنا حاصل ہوتا ہے۔ 5300

5301

مثال 14.13: ایک ٹی وی اسٹیشن موصل زمین پر کھڑے 200 m قد کے اینٹینا سے 1 kW کی طاقت سے نشریات کرتی ہے۔افقی سطح پر اینٹینا غیر 5302
سمتی ہے جبکہ عمودی سمت میں اس کی نصف طاقت چوڑائی 10° ہے۔طول موج 1 m ہونے کی صورت میں 4 km دور کتنی اونچائی پر اینٹینا بہترین وصولی 5303
کر پائے گا۔وصول کردہ طاقت کا بھی تخمینہ لگائیں۔وصولی اینٹینا مندرجہ ذیل فرض کرتے ہوئے حل کریں۔ 5304

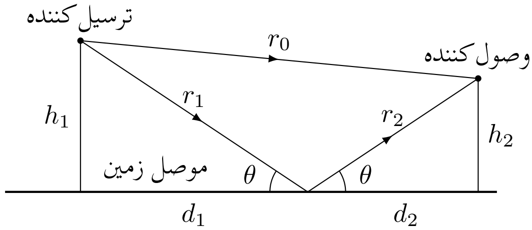
- عمودی قطبی اینٹینا جس کی سمتیت 4 کے برابر ہے۔ 5305
- افقی قطبی اینٹینا جس کی سمتیت 4 کے برابر ہے۔ 5306



الف: عاکس سے انعکاسی موج کی وصولی۔

ب: عاکس کو اینٹینا فرض کیا گیا ہے۔

شکل 14.33: ریڈار اینٹینا شعاع خارج کر کے انعکاسی موج وصول کرتا ہے۔



شکل 14.34: سیدھی آمد موج اور انعکاسی موج کے اثرات۔

- دائری قطبی 6 چکر کا پیچ دار اینٹینا جس کا $\alpha = 12.5°$ اور چکر کے مابین فاصلہ 0.22λ ہے۔

حل: شکل میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ موصل زمین سے انعکاس پر زمین کے متوازی برقی میدان میں $180°$ کی تبدیلی رونما ہو گی۔ یوں اگر وصولی اینٹینا زمین کے بالکل قریب ہو تب افقی قطبی میدان کی صورت میں یہ صفر طاقت وصول کر پائے گا جبکہ عمودی قطبیت کی صورت میں اسے سیدھی رسائی کے علاوہ زمین سے انعکاسی میدان بھی میسر ہو گا۔ یوں کل میدان دگنا اور طاقت چار گنا ہو گا۔

شکل 14.34 کو دیکھتے ہوئے کہہ سکتے ہیں کہ کسی بھی h پر اگر

$$r_1 + r_2 - r_0 = n\lambda \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{14.243}$$

ہو تب افقی قطبی میدان صفر پایا جائے گا جبکہ عمودی قطبی میدان دگنا ہو گا۔ اسی طرح جب بھی

$$r_1 + r_2 - r_0 = n\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots) \tag{14.244}$$

ہو تب افقی قطبی میدان دگنا اور عمودی قطبی میدان صفر پایا جائے گا۔ ان حقائق سے ظاہر ہے کہ زیادہ سے زیادہ افقی قطبی میدان کے دو قریبی نقطوں کے درمیانی نقطے پر زیادہ سے زیادہ عمودی قطبی میدان پایا جاتا ہے۔

بایاں دائری قطبی موج انعکاس کے بعد دایاں دائری قطبی ہوتا ہے۔ اسی طرح دایاں دائری قطبی موج انعکاس کے بعد بایاں دائری قطبی ہوتا ہے۔ یوں اگر ترسیلی اینٹینا دایاں دائری قطبی ہو تب دایاں دائری قطبی اینٹینا صرف سیدھے آمدی میدان کو وصول کر پائے گا جبکہ بایاں دائری قطبی اینٹینا صرف انعکاسی میدان کو وصول کر پائے گا۔ یوں دونوں اقسام کے دائری قطبی اینٹینا اکائی میدان حاصل کریں گے۔ ترسیلی اینٹینا بایاں قطبی ہونے کی صورت میں بایاں قطبی وصولی اینٹینا سیدھے آمد میدان کو وصول کرے گا جبکہ دایاں قطبی اینٹینا انعکاسی میدان کو وصول کرے گا۔

---

[66] radar cross section
[67] radar equation

افقی اور عمودی قطبی اینٹینوں کی صورت میں وصولی اینٹینا کی اونچائی تبدیل کرنے سے میدان صفر تا دگنا حاصل کرنا ممکن ہے جبکہ دائری قطبی اینٹینا کی صورت میں وصول طاقت کا دارومدار اینٹینا کی اونچائی پر نہیں ہوتا۔دائری اینٹینا ہر صورت اکائی میدان حاصل کرتی ہے۔

چونکہ آمدی اور انعکاسی زاویے برابر ہوتے ہیں لہٰذا شکل میں آمدی تکون اور انعکاسی تکون یکساں ہیں۔یوں $(r_1 + r_2 - r_0)$ کی قیمت $\frac{2h_1h_2}{d}$ لکھی جا سکتی ہے۔یوں عمودی قطب میدان کی زیادہ سے زیادہ قیمت

$$h_2 = \frac{d\lambda}{2h_1} = \frac{4 \times 10^3 \times 1}{2 \times 200} = 10\,\mathrm{m}$$

کی صورت میں حاصل ہو گی جس سے افقی قطبی میدان کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی اونچائی 5، 15، 25، . . . میٹر لکھی جا سکتی ہے۔

فرائس کی مساوات سے، ایک راہ سے موصول طاقت

$$P_w = \frac{P_t A_t A_w}{r^2 \lambda^2} = \frac{10^3 \times 0.32 \times 0.91}{16 \times 10^6 \times 1} = 18\,\mathrm{\mu W}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں ترسیلی اینٹینا کی سمتیت

$$D = \frac{4\pi}{\theta_{HP}\phi_{HP}} = \frac{4\pi}{\frac{360 \times \pi}{180} \times \frac{10 \times \pi}{180}} = 11.459$$

لیتے ہوئے اس کا اخراجی رقبہ

$$A_t = \frac{\lambda^2}{4\pi} D = 0.91\,\mathrm{m^2}$$

اور وصولی اینٹینا کا وصولی رقبہ

$$A_w = \frac{\lambda^2}{4\pi} D = \frac{1^2 \times 4}{4\pi} = 0.32\,\mathrm{m^2}$$

لئے گئے ہیں۔سیدھی آمد اور انعکاسی آمد میدان مل کر زیادہ سے زیادہ طاقت 4 گنا کر دیتی ہیں۔یوں افقی قطبی اور عمودی قطبی اینٹینا کی صورت میں زیادہ سے زیادہ وصول کردہ طاقت $72\,\mathrm{\mu W}$ ہو گا جبکہ دونوں صورتوں میں کم سے کم حاصل کردہ طاقت صفر ہو گا۔

دائری قطبی صورت میں وصولی اینٹینا کی سمتیت

$$D = 15 \left(\frac{C}{\lambda}\right)^2 \frac{nd}{\lambda} = 15 \left(\frac{\frac{0.22}{\tan 12.5^\circ}}{1}\right)^2 \times \frac{6 \times 0.22}{1} = 19.5$$

اور وصولی رقبہ

$$A_w = \frac{\lambda^2 D}{4\pi} = 1.55\,\mathrm{m^2}$$

ہیں لہٰذا ہر اونچائی پر وصول کردہ طاقت

$$P_w = \frac{1.55}{0.32} \times 18 = 87\,\mathrm{\mu W}$$

ہو گا۔

وصول کردہ طاقت کا تخمینہ لگاتے ہوئے ہم نے اینٹینوں کے درمیان فاصلے کو چار کلو میٹر ہی تصور کیا اگرچہ حقیقی فاصلے قدر مختلف ہیں۔چار کلو میٹر کے فاصلے پر چند میٹر کم یا زیادہ سے حاصل جواب میں کوئی خاص تبدیلی پیدا نہیں ہوتی۔

14.20 ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی

کسی بھی برقی مزاحمت R میں حرارت T کی وجہ سے آزاد چارج حرکت کرتے ہیں جس سے مزاحمت میں حراری شور[68] پیدا ہوتا ہے۔ایسی مزاحمت کے برقی سروں پر B تعددی پٹی پر

$$W = kBT \tag{14.245}$$

طاقت شور[69] پایا جاتا ہے۔اکائی تعددی پٹی پر یوں

$$w = kT \tag{14.246}$$

طاقت شور پایا جائے گا جہاں

w اکائی تعددی پٹی پر شور کی طاقت، $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Hz}}$

k بولٹزمن کا مستقل، $1.38 \times 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

B تعددی پٹی، Hz

T مزاحمت کی حتمی حرارت، K

ہیں۔ T کو حرارت شور[70] کہا جاتا ہے۔برابر تعددی پٹی پر برابر طاقت شور پایا جاتا ہے۔

اگر برقی مزاحمت R کے برابر اخراجی مزاحمت $(R = R_{\text{اخراجی}})$ کے اینٹینا کے برقی سروں پر طاقت شور ناپی جائے تو یہ مزاحمت پر ناپی گئی طاقت شور سے مختلف ہو گی۔اینٹینا کے سروں پر طاقت شور، خلاء کے اس خطے کی حرارت T سے پیدا شور ہو گا جہاں سے اینٹینا طاقت وصول کر رہا ہو۔اس طاقت شور کا اینٹینا کی حرارت سے کوئی تعلق نہیں۔یوں اینٹینا کو بطور بعید پیما حرارت[71] استعمال کیا جا سکتا ہے۔

ایک سنٹی میٹر طول موج کے ریڈیائی دوربین کی مرکز نگاہ آسمان کے ایسے خطوں پر رکھی جا سکتی ہے جہاں حتمی حرارت $0\,\mathrm{K}$ کے قریب ہوتی ہے۔ایسی صورت میں طاقت شور آسمان کی حرارت سے پیدا ہو گا نا کہ اینٹینا کے حرارت سے جو $300\,\mathrm{K}$ کے لگ بھگ ہو گی۔ریڈیائی دوربین کی طاقت شور فی تعدد

$$w = kT_A \qquad \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Hz}}\right) \tag{14.247}$$

لکھی جاتی ہے جہاں T_A اینٹینا کی حراری شور ہے جسے عموماً حرارت اینٹینا[72] یا اخراجی مزاحمت کی حرارت کہا جاتا ہے۔حرارت اینٹینا وہ خطہ کرتی ہے جس پر اینٹینا کے نقش کی نظر ہو۔یوں اینٹینا کی مدد سے دور آسمان کے خطوں کی حرارت ناپنا ممکن ہے۔ہم نے اس پورے بحث میں یہ فرض کر رکھا ہے کہ اینٹینا بے ضیاع ہے اور یہ آسمان کی طرف نظر رکھے ہوئے ہے۔یوں انعکاسی شعاع اور ثانوی شعاع کو رد کیا گیا ہے۔

ریڈیائی دوربین کو استعمال کرتے ہوئے کثافت طاقت شور فی تعدد

$$p = \frac{w}{S_e} = \frac{kT_A}{S_e} \qquad \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,Hz}}\right) \tag{14.248}$$

---

[68] thermal noise
[69] noise power
[70] noise temperature
[71] remote temperature sensor
[72] antenna temperature

کا استعمال زیادہ سود مند ثابت ہوتا ہے جسے پوئنٹنگ سمتیہ فی تعدد تصور کیا جا سکتا ہے۔

اگر ہمیں منبع شور کی زاویائی وسعت Ω_M معلوم ہو اور یہ Ω_A کی نسبت سے کم ہو تب منبع کی حرارت

$$\frac{T_A}{T_M} = \frac{\Omega_M}{\Omega_A} \tag{14.249}$$

سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ یاد رہے کہ T_A کا اینٹینا کی حرارت سے کوئی تعلق نہیں۔

مثال 14.14: مریخ[73] پر مرکز نگاہ رکھتے ہوئے 15 m لمبی ریڈیائی دوربین کی اینٹینا حرارت 31.5 mm طول موج پر 0.24 K ناپی جاتی ہے۔ اینٹینا پر مریخ 0.005° زاویہ بناتا ہے اور اینٹینا کا نصف طاقت زاویہ 0.116° ہے۔ مریخ کی حرارت دریافت کریں۔

حل: مساوات 14.249 سے مریخ کی حرارت

$$T_M = \frac{\Omega_A}{\Omega_M} T_A \approx \frac{0.116^2}{\pi(0.005^2/4)} 0.24 = 164\,\mathrm{K}$$

حاصل ہوتی ہے۔

14.21 حرارت نظام اور حرارت بعید

حرارت اینٹینا سے اس خطے کی حرارت حاصل کی جا سکتی ہے جس پر اینٹینا کا مرکز نگاہ ہو۔ یوں اینٹینا کو بعید پیما حرارت استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ایک سنٹی میٹر طول موج کے ریڈیائی دوربین کی نگاہ، ستاروں سے خالی آسمان کے خطے پر رکھتے ہوئے انتہائی کم اینٹینا حرارت حاصل کی جا سکتی ہے۔ آسمان کو دیکھتے ہوئے کم تر حرارت 3 K حاصل ہوتی جو کائنات کی ابتدائی دھماکے[74] کی بقیہ حرارت[75] ہے۔ اگر اینٹینا کے سامنے ستارہ موجود ہو تب بقیہ حرارت سے زیادہ حرارت ناپی جائے گی۔ ایک میٹر طول موج پر ہماری کہکشاں کی حرارت کئی ہزار کیلون ناپی جاتی ہے۔ ہم حراری[76] شور کی حرارت ناپنے کی بات کر رہے ہیں۔ یہ کامل اخراجی-وصولی خاصیت کے جسم کی حرارت ہے۔ ایسے جسم کو سیاہ جسم[77] کہا جاتا ہے۔ یوں اگر اینٹینا کی پوری وصولی نقش کے خطے میں گرم کوئلے یا سیاہ دھات کا کرہ پایا جائے، تو اینٹینا سے کرہ کی ناپی گئی حرارت وہی ہو گی جو تھرمامیٹر[78] سے ناپی جائے گی۔ اس کے برعکس ترسیلی اینٹینا کی ناپی گئی اینٹینا حرارت غیر یقینی طور پر زیادہ حاصل ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر اگر قریب ریڈیو اسٹیشن کی نشریات، $10\,\mathrm{m^2}$ وصولی رقبے اور 10 kHz تعددی پٹی کے وصولی اینٹینا کے قریب $10\,\frac{\mathrm{\mu V}}{\mathrm{m}}$ کا میدان پیدا کرے تو وصولی اینٹینا کی کل وصول کردہ طاقت

$$W = \frac{E^2}{Z_0} S_e = \frac{10^{-10}}{377} \times 10 = 2.65\,\mathrm{pW}$$

Mars[73]
big bang[74]
residual temperature[75]
thermal[76]
blackbody[77]
thermometer[78]

ہو گی جسے مساوات 14.245 میں پر کرتے ہوئے

$$T=\frac{W}{kB}=\frac{2.65\times10^{-12}}{1.38\times10^{-23}\times10^{4}}=1.9\times10^{7}\,\mathrm{K}$$

حاصل ہوتی ہے۔اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ صرف $10\,\frac{\mu\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کا میدان $1.9\times10^{7}\,\mathrm{K}$ کی اینٹینا حرارت پیدا کر سکتا ہے۔یہ اتنی بڑی مقدار ہے کہ اس کی موجودگی میں بقایا نظام کی حرارت، جسے حرارت نظام[79] پکارا جاتا ہے، کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔البتہ، ریڈیائی دوربین اتنی کم طاقت کے اشارات پر کام کرتے ہیں کہ ان میں حرارت نظام انتہائی اہم ہوتا ہے۔اس کا اندازہ آپ یوں کر سکتے ہیں کہ ریڈیائی دوربین کے استعمال میں کثافت طاقت فی ہرٹز کی اکائی جانسکی[80] ہے جہاں $1\,\mathrm{Ja}=10^{-26}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,Hz}}$ کے برابر ہے۔

[79] system temperature
[80] Jansky

سوالات

سوال 14.1: غیر سمتی اینٹینا $E=\frac{25I}{r}$ میدان پیدا کرتی ہے جہاں اینٹینا کا داخلی موثر برقی رو I اور اینٹینا سے فاصلہ r ہے۔اس اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔

جواب: $20.8\,\Omega$

سوال 14.2: اینٹینا کی شعاع $0 < \theta < 30^\circ$ ، $0 < \phi < 2\pi$ خطے میں یکساں میدان پیدا کرتی ہے جبکہ $30^\circ < \theta < 180^\circ$ خطے میں میدان صفر کے برابر ہے۔الف) اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A حاصل کریں۔ب) شعاع کی سمتیت D دریافت کریں۔

جوابات: $0.842\,\mathrm{sr}$ ، 14.9

سوال 14.3:

اینٹینا کی شعاع $0 < \theta < 60^\circ$ ، $0 < \phi < 2\pi$ خطے میں یکساں میدان پیدا کرتی ہے جبکہ $60^\circ < \theta < 180^\circ$ خطے میں میدان صفر کے برابر ہے۔الف) اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A حاصل کریں۔ب) شعاع کی سمتیت D دریافت کریں۔پ) اینٹینا کا اخراجی رقبہ A_e حاصل کریں۔ت) اینٹینا کا داخلی موثر برقی رو $12\,\mathrm{A}$ ہونے کی صورت میں اینٹینا سے $164\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر موثر برقی میدان $7\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔اینٹینا کا اخراجی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}}$ دریافت کریں۔

جوابات: $3.142\,\mathrm{sr}$ ، 4 ، $0.318\lambda^2$ ، $76.3\,\Omega$

سوال 14.4: اینٹینا کی شعاع $45^\circ < \theta < 60^\circ$ ، $0^\circ < \phi < 120^\circ$ خطے میں یکساں ہے۔بقایا خطے میں میدان صفر کے برابر ہے۔اینٹینا سے $1000\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر اس خطے میں $2\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ برقی میدان حاصل کرنے کی خاطر $4\,\mathrm{A}$ موثر داخلی برقی رو درکار ہے۔اینٹینا کی اخراجی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}}$ دریافت کریں۔

جواب: $288\,\Omega$

سوال 14.5: اینٹینا کی مرکزی شعاع $0^\circ < \theta < 45^\circ$ خطے میں یکساں پائی جاتی ہے جبکہ اس کی ثانوی شعاع $120^\circ < \theta < 180^\circ$ خطے میں یکساں پائی جاتی ہے۔میدان ϕ کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا۔مرکزی شعاع میں میدان ثانوی شعاع کے میدان کے چار گنا ہے۔الف) اینٹینا کی سمتیت D دریافت کریں۔ب) مرکزی شعاع میں اینٹینا سے $350\,\mathrm{m}$ فاصلے پر $E_{\text{موثر}} = 6\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ برقی میدان کے حصول کے لئے اینٹینا کو $6\,\mathrm{A}$ موثر داخلی برقی رو مہیا کیا جاتی ہے۔اینٹینا کی اخراجی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}}$ دریافت کریں۔

جوابات: $D=6.17$ ، $662\,\Omega$

سوال 14.6: دو عدد غیر سمتی، ہم قدم منبع کے درمیان فاصل 2λ ہے۔الف) نقش کے صفر حاصل کریں۔ب) نقش کی چوٹیاں حاصل کریں۔

جوابات:الف) $\mp 41.4^\circ$ ، $\mp 75.5^\circ$ ، $\mp 104.5^\circ$ ، $\mp 138.6^\circ$ ؛ب) 0° ، $\mp 60^\circ$ ، $\mp 90^\circ$ ، $\mp 120^\circ$ ، 180°

سوال 14.7: دو عدد غیر سمتی، منبع کے درمیان فاصل $\frac{3\lambda}{2}$ ہے جبکہ ان میں زاویائی فرق 180° ہے۔الف) نقش کے صفر حاصل کریں۔ب) نقش کی چوٹیاں حاصل کریں۔

جوابات:الف) $\mp 90^\circ$ ، $\mp 48.2^\circ$ ، $\mp 131.8^\circ$ ؛ب) 0° ، $\mp 70.5^\circ$ ، $\mp 109.5^\circ$

سوال 14.8: چار رکنی قطار میں غیر سمتی، یکساں طاقت کے منبع پائے جاتے ہیں۔ قطار میں ہر دو قریبی منبع میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ منبع کے درمیان فاصلہ نصف طول موج سے کم $d < \frac{\lambda}{2}$ ہے۔ زیادہ سے زیادہ میدان $\theta = 45^\circ$ پر اور نقش کا صفر $\theta = 90^\circ$ پر حاصل کرنے کے لئے درکار δ اور d حاصل کریں۔

جوابات: $\delta = -90^\circ$ ، $d = 0.354\lambda$

سوال 14.9: گھریلو ریڈیو سے $585\,\mathrm{kHz}$ تعدد کی نشریات سنی جا رہی ہے۔ الف) ریڈیو اینٹینا کو غیر سمتی تصور کرتے ہوئے اس کا اخراجی رقبہ دریافت کریں۔ ب) گھر سے ریڈیو اسٹیشن کا فاصلہ $10\,\mathrm{km}$ جبکہ اسٹیشن کی اخراجی طاقت $5\,\mathrm{kW}$ کی صورت میں ریڈیو کتنی طاقت وصول کر پاتا ہے۔ اسٹیشن کی اخراج غیر سمتی تصور کریں۔ پ) ریڈیو کی داخلی مزاحمت $300\,\Omega$ ہے۔ ریڈیو کو صرف $1\,\mu\mathrm{V}$ موثر داخلی اشارہ درکار ہے۔ درکار داخلی طاقت کی قیمت حاصل کریں۔

جوابات: $20\,928\,\mathrm{m^2}$ ، $83.3\,\mathrm{mW}$ ، $3.33\,\mathrm{fW}$

سوال 14.10: 1.5λ لمبے خطی اینٹینا کا اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر آپ کو صفحہ 566 پر دیے جدول 14.2 کے طرز کا جدول حاصل کرنا ہو گا۔

جواب: $100\,\Omega$

سوال 14.11: یکساں غیر سمتی منبع پر مبنی قطار میں ارکان کے درمیان $d = \frac{\lambda}{4}$ ہے۔ مرکزی شعاع $\theta = 30^\circ$ پر حاصل کرنے کی خاطر ارکان کے مابین زاویائی فرق δ حاصل کریں۔

جواب: $1.36\,\mathrm{rad}$

سوال 14.12: تداخل پیما میں جفت قطب کے مابین فاصلہ 10λ ہونے کی صورت میں پہلے صفر چوڑائی حاصل کریں۔

جواب: 5.7°

سوال 14.13: خلاء میں دو مصنوعی سیاروں کے درمیان $2 \times 10^8\,\mathrm{m}$ کا فاصلہ ہے۔ یہ آپس میں $2.5\,\mathrm{GHz}$ تعدد پر اشارات کا تبادلہ کرتے ہیں۔ دونوں سیارے $D = 1500$ سمتیت کے اینٹینا استعمال کرتے ہیں۔ اطلاعات صحیح موصول ہونے کے لئے ضروری ہے کہ حاصل کردہ اشارے کی طاقت برقی شور سے قدر زیادہ ہو۔ یوں ضروری ہے کہ حاصل کردہ برقی اشارے کی طاقت کم از کم $1\,\mathrm{pW}$ ہو۔ اخراجی اینٹینا کی درکار طاقت حاصل کریں۔

جواب: $195\,\mathrm{W}$

ڈھلوان، پھیلاو، گردش اور لاپلاسی

کارتیسی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & az \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

نلکی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_{\rho} & \boldsymbol{a}_{\phi} & \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

کروی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_{\phi} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\boldsymbol{a}_{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{a}_{\phi} \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}
\end{aligned}
$$

5411 عمومی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{1}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}\boldsymbol{a}_v + \frac{1}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w}\boldsymbol{a}_w \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{k_1k_2k_3}\left(\frac{\partial(k_2k_3A_u)}{\partial u} + \frac{\partial(k_3k_1A_v)}{\partial v} + \frac{\partial(k_1k_2A_w)}{\partial w}\right) \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{k_2k_3}\left[\frac{\partial(k_3A_w)}{\partial v} - \frac{\partial(k_2A_v)}{\partial w}\right]\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_3k_1}\left[\frac{\partial(k_1A_u)}{\partial w} - \frac{\partial(k_3A_w)}{\partial u}\right]\boldsymbol{a}_v \\
&\quad + \frac{1}{k_1k_2}\left[\frac{\partial(k_2A_v)}{\partial u} - \frac{\partial(k_1A_u)}{\partial v}\right]\boldsymbol{a}_w \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_2k_3}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_3k_1}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{k_1k_2}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]
\end{aligned}
$$

5412 سمتی مماثل

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G} &= FG\cos\theta \qquad \text{غیر سمتی (نقطہ) ضرب} \\
\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}}{FG}\right) \\
\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G} &= FG\sin\theta\boldsymbol{a}_N \qquad \text{سمتی (صلیبی) ضرب} \\
\theta &= \sin^{-1}\left[\frac{(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{a}_N}{FG}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) &= 0 \\
\nabla\cdot\nabla f &= \nabla^2 f \\
\nabla\times\nabla f &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla(f+g) &= \nabla f + \nabla g \\
\nabla\cdot(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) &= \nabla\cdot\boldsymbol{F} + \nabla\cdot\boldsymbol{G} \\
\nabla\times(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) &= \nabla\times\boldsymbol{F} + \nabla\times\boldsymbol{G}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\
\nabla\cdot(f\boldsymbol{G}) &= f(\nabla\cdot\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G}\cdot(\nabla f) \\
\nabla\times(f\boldsymbol{G}) &= f(\nabla\times\boldsymbol{G}) + (\nabla f)\times\boldsymbol{G}
\end{aligned}
$$

$$
\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) - \nabla^2\boldsymbol{F}
$$

جہاں $\nabla^2\boldsymbol{F}$ سے مراد

$$
\nabla^2\boldsymbol{F} = \nabla^2F_x\boldsymbol{a}_\text{X} + \nabla^2F_y\boldsymbol{a}_\text{y} + \nabla^2F_z\boldsymbol{a}_\text{Z}
$$

ہے۔

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{G} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{G}) \\
\boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{H}) &= \boldsymbol{G} \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{H} \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) \\
\nabla \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{F}(\nabla \cdot \boldsymbol{G}) - \boldsymbol{G}(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} \\
\nabla(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) &= (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \times (\nabla \times \boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G} \times (\nabla \times \boldsymbol{F})
\end{aligned}
$$

5413 سطحی اور حجمی تکمل کے تعلق

مندرجہ ذیل تین مساوات میں دائیں جانب حجمی تکمل کے حجم کو بائیں جانب سطحی تکمل کی سطح گھیرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\oint_S f \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_h \nabla f \,\mathrm{d}h \\
\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_h \nabla \cdot \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}h \qquad \text{مسئلہ پھیلاو} \\
\oint_S \boldsymbol{a}_N \times \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}S &= \int_h \nabla \times \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}h
\end{aligned}
$$

5414 خطی اور سطحی تکمل کے تعلق

مندرجہ ذیل دو مساوات میں دائیں جانب سطحی تکمل کی سطح کو بائیں جانب خطی تکمل کی بند راہ گھیرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\oint_l f \,\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_S \boldsymbol{a}_N \times \nabla f \,\mathrm{d}S \\
\oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \text{مسئلہ سٹوکس}
\end{aligned}
$$

complex permitivity
dispersion
try to resolve the issue of using k and γ as propagation constants
kraus p473 fig 10-60 sec 10.18 and 10.19, 10.17,10.16,10.15,10.11 or do the entire chap9 and 10 transmission from kraus too
fourier transform sec 14.8 of kraus must draw the figures
charge is barqi bar and let the reader figure out which bar is meant
degree angle and degree celcius, ohm, micro etc not showing
kraus p581 mentions three types of impedances: intrinsic, characteristic and transverse. ensure that i too have these distinctions
kraus fig-13.28 and fig 13.29 and table 13.3 (on p577) are v. impt
Huygens improvements
figTransmissionSmithFromInternet.tex is not giving the figure of the book
the answers should be at the end of the book
handle all side notes (   ) and remove the corresponding text
read chapter 9 onwards (proof reading)
antenna chapter, 3D figure at start and complete the start section.
house completion certificate.
zaryab fish
F=-dW/dT to include in inductance chapter plus a question or two
magnetizartion curve and an iteration example. fig 8.10, 11 of hayt.
add questions to machine book too.

when giving fields always remember the following rules:
always ensure that divergence of magnetic field is zero.
moving waves must be of the form $E = E0\cos(wt - kz)$ where $c = (\mu * \epsilon)^{-0.5}$ and $k = 2 * \pi/\lambda$
include complex permitivity (7th ed Q12.18 says sigma=omega*epsilon")
include 4th ed fig 11.11 of page 422

جدول 15.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیر	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^{7}	گریفائٹ	7×10^{4}
تانبا	5.80×10^{7}	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^{7}	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^{7}	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^{7}	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^{7}	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^{7}	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^{7}	مقطر پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^{7}	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^{7}	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^{7}	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^{7}	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^{7}	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^{7}	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^{7}	کوارٹس	10^{-17}

جدول 15.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 15.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 15.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$