1 برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
2 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1 سمتیات 1

1.1 مقداری اور سمتیہ 1

1.2 سمتی الجبرا 2

1.3 کارتیسی محدد 3

1.4 اکائی سمتیات 5

1.5 میدانی سمتیہ 9

1.6 سمتی رقبہ 9

1.7 غیر سمتی ضرب 10

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب 14

1.9 گول نلکی محدد 17

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب 20

1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق 20

1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں 25

1.10 کروی محدد 27

2 کولومب کا قانون 39

2.1 قوت کشش یا دفع 39

2.2 برقی میدان کی شدت 43

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان 46

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح 51

2.5 چارج بردار حجم 55

2.6 مزید مثال 56

2.7 برقی میدان کے سمت بہاو خط 64

3 گاؤس کا قانون اور پھیلاو 69

3.1 ساکن چارج 69

3.2 فیراڈے کا تجربہ 69

3.3 گاؤس کا قانون 70

3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال 72

3.4.1 نقطہ چارج 72

3.4.2 یکساں چارج بردار کروی سطح 74

3.4.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر 74

3.5 ہم محوری تار 75

3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح 77

3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق 77

3.8 پھیلاو 80

3.9 نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات 82

3.10 پھیلاو کی عمومی مساوات 84

3.11 مسئلہ پھیلاو 86

4 توانائی اور برقی دباو 93

4.1 توانائی اور کام 93

4.2 لکیری تکملہ 94

4.3 برقی دباو 99

4.3.1 نقطہ چارج کا برقی دباو 100

4.3.2 لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو 101

4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباو 102

4.4 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباو 102

4.5 برقی دباو کی ڈھلوان 106

4.5.1 نلکی محدد میں ڈھلوان 110

4.5.2 کروی محدد میں ڈھلوان 111

4.6 جفت قطب 112

4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاو خط 114

4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی 117

5 موصل، ذو برق اور کپیسٹر 125

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو 125

5.2 استمراری مساوات 127

5.3 موصل 129

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط 134

5.5 عکس کی ترکیب 137

5.6 نیم موصل 140

5.7 ذو برق 141

5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط 146

5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط 150

5.10 کپیسٹر 150

5.10.1 متوازی چادر کپیسٹر 151

5.10.2 ہم محوری کپیسٹر 152

5.10.3 ہم کوہ کپیسٹر 153

5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر 154

5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس 155

6 پوئسن اور لاپلاس مساوات 165

6.1 مسئلہ یکتائی 167

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے 168

6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات 169

6.4 لاپلاس مساوات کے حل 170

6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال 176

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل 179

6.7 عددی دہرانے کا طریقہ 186

7 ساکن مقناطیسی میدان 193 79

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون 193 80

7.2 ایمپیئر کا دوری قانون 197 81

7.3 گردش 202 82

7.3.1 نلکی محدد میں گردش 209 83

7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات 214 84

7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات 216 85

7.4 مسئلہ سٹوکس 217 86

7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو 220 87

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو 227 88

7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول 232 89

7.7.1 سمتی مقناطیسی دباو 232 90

7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون 234 91

8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ 239 92

8.1 متحرک چارج پر قوت 239 93

8.2 تفرقی چارج پر قوت 240 94

8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت 243 95

8.4 قوت اور مروڑ 244 96

8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے 249 97

8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل 250 98

8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط 253 99

8.8 مقناطیسی دور 254 100

8.9 مقناطیسی مخفی توانائی 257 101

8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ 258 102

8.11 مشترکہ امالہ 262 103

9 وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات 265 104
9.1 فیراڈے کا قانون 265 105
9.2 انتقالی برقی رو 271 106
9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل 275 107
9.4 میکس ویل مساوات کی تکمل شکل 276 108
9.5 تاخیری دباو 278 109

10 مستوی امواج 283 110
10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج 283 111
10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج 284 112
10.2.1 خالی خلاء میں امواج 291 113
10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج 293 114
10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج 295 115
10.3 پوئنٹنگ سمتیہ 298 116
10.4 موصل میں امواج 302 117
10.5 انعکاس مستوی موج 308 118
10.6 شرح ساکن موج 314 119

11 ترسیلی تار 321 120
11.1 ترسیلی تار کے مساوات 321 121
11.2 ترسیلی تار کے مستقل 325 122
11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل 326 123
11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل 329 124
11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار 330 125
11.3 ترسیلی تار کے چند مثال 331 126
11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ 336 127
11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ 343 128
11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال 344 129

12 تقطیب موج 349 30

12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب 349 31

12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئنٹنگ سمتیہ 352 32

13 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار 355 33

13.1 ترچھی آمد 355 34

13.2 ترسیم بائی گن 366 35

14 مویج اور گھمکیا 369 36

14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ 369 37

14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج 370 38

14.3 کھوکھلا مستطیلی مویج 376 39

14.3.1 مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور 385 40

14.4 مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی $\text{TM}mn$ موج 392 41

14.5 کھوکھلی نالی مویج 396 42

14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف 403 43

14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف 405 44

14.8 سطحی موج 407 45

14.9 ذو برق تختی مویج 412 46

14.10 شیش ریشہ 415 47

14.11 پردہ بصارت 418 48

14.12 گھمکی خلاء 420 49

14.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل 423 50

15 اینٹینا اور شعاعی اخراج 431
15.1 تعارف 431
15.2 تاخیری دباو 431
15.3 تکمل 433
15.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا 434
15.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت 442
15.6 ٹھوس زاویہ 446
15.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش 447
15.8 قطاری ترتیب 454
15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع 454
15.8.2 ضرب نقش 455
15.8.3 ثنائی قطار 456
15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار 458
15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار 460
15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار 460
15.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا 464
15.9 تداخُل پیما 465
15.10 مسلسل خطی اینٹینا 466
15.11 مستطیل سطحی اینٹینا 467
15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریئر بدل ہیں 470
15.13 خطی اینٹینا 470
15.14 چلتے موج اینٹینا 475
15.15 چھوٹا گھیرا اینٹینا 476
15.16 پیچ دار اینٹینا 477
15.17 دو طرفہ کردار 479
15.18 جھری اینٹینا 481
15.19 پیپا اینٹینا 482
15.20 فرائس ریڈار مساوات 484
15.21 ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی 487
15.22 حرارت نظام اور حرارت بعید 489

16 سوالات 491
16.1 موصل 491

باب 5

موصل، ذو برق اور کپیسٹر

اس باب میں ہم برقی رو اور کثافت برقی رو سے شروع ہو کر بنیادی استمراری مساوات[1] حاصل کریں گے۔ اس کے بعد اوہم کے قانون کی نقطہ شکل اور اس کی بڑی شکل حاصل کریں گے۔ دو اجسام کے سرحد پر سرحدی شرائط[2] حاصل کرتے ہوئے عکس[3] کے طریقے کا استعمال دیکھیں گے۔

ذو برق[4] کی تقطیب[5] پر غور کرتے ہوئے جزو برقی مستقل حاصل کریں گے۔ اس کے بعد کپیسٹر پر غور کیا جائے گا۔ سادہ شکل و صورت رکھنے والے کپیسٹر کی قیمتیں حاصل کی جائیں گیں۔ ایسا گزشتہ بابوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے کیا جائے گا۔

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو

جیسے پانی کے حرکت کو پانی کا بہاو کہتے ہیں، اسی طرح برقی چارج کے حرکت کو برقی رو کہتے ہیں۔ برقی رو کو i اور I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ برقی رو کی اکائی ایمپیئر (A) ہے۔ کسی نقطے یا سطح سے ایک کولمب چارج فی سیکنڈ کے گزر کو ایک ایمپیئر کہتے ہیں۔ یوں

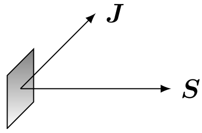
$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.1}$$

لکھا جائے گا۔

ایسی موصل تار جس کی ایک سرے سے دوسری سرے تک موٹائی مسلسل کم ہوتی ہو کے بالکل محور پر برقی چارج محوری سمت میں حرکت کرے گا جبکہ محور سے دور چارج کی حرکت تار کی موٹائی کم یا زیادہ ہونے کی وجہ سے قدرِ ترچھی ہو گی۔ یوں اگرچہ تار میں ہر مقام پر برقی رو کی مقدار برابر ہے لیکن برقی رو کی سمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ اسی بنا پر ہم برقی رو کو مقداری تصور کریں گے۔ اگر تار کی موٹائی انتہائی کم ہو تب برقی رو سمتیہ مانند ہو گا لیکن ایسی صورت میں بھی ہم اسے مقداری ہی تصور کرتے ہوئے تار کی لمبائی کو سمتیہ لیں گے۔

---

[1] continuity equation
[2] boundary conditions
[3] images
[4] dielectric
[5] polarization



شکل 5.1: سطح سے گزرتی برقی رو۔

کثافت برقی رو[6] سے مراد برقی رو فی اکائی مربع سطح $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right)$ ہے اور اسے J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر چھوٹی سطح ΔS سے عمودی سمت میں ΔI برقی رو گزرے تب

$$\Delta I = J_n \Delta S \tag{5.2}$$

کے برابر ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو اور سمتی رقبہ کی سمتیں مختلف ہوں تب

$$\Delta I = \boldsymbol{J} \cdot \Delta S \tag{5.3}$$

لکھا جائے گا اور پوری سطح سے کل گزرتی برقی رو تکمل کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.4}$$

1314

مثال 5.1: شکل 5.1 میں سیدھی سطح $\boldsymbol{S} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ دکھائی گئی ہے جہاں کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ پائی جاتی ہے۔ سطح سے گزرتی برقی رو اور اس کی سمت دریافت کریں۔ اگر سطح کی دوسری سمت کو سطح کی سمت لی جائے تب برقی رو کی مقدار اور اس کی سمت کیا ہوں گے۔

1316

حل: چونکہ یہاں $\boldsymbol{J}$ مستقل مقدار ہے لہٰذا اسے مساوات 5.4 میں تکمل کے باہر لایا جا سکتا ہے اور یوں اس تکمل سے

$$I = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{S} = 2\,\mathrm{A}$$

1317 حاصل ہوتا ہے۔ برقی رو چونکہ مثبت ہے لہٰذا یہ سطح کی سمت میں ہی سطح سے گزر رہی ہے۔

اگر سطح کی دوسری طرف کو سطح کی سمت لی جائے تب $\boldsymbol{S} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ لکھا جائے گا اور یوں

$$I = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{S} = -2\,\mathrm{A}$$

حاصل ہو گا۔ برقی رو کی مقدار اب بھی دو ایمپیئر ہی ہے البتہ اس کی علامت منفی ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ برقی رو سطح کے سمت کی الٹی سمت میں ہے۔ یوں اب
1319 بھی برقی رو بائیں سے دائیں ہی گزر رہی ہے۔

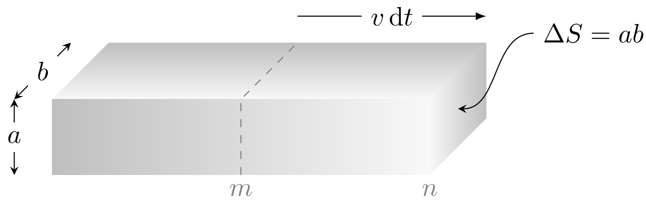
1320

1321 اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ S کی سمت میں برقی رو کو مثبت برقی رو کہا جاتا ہے۔

شکل 5.2 میں a اور b اطراف کی تار میں لمبائی کی سمت میں v رفتار سے چارج حرکت کر رہا ہے۔ شکل میں اس تار کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔ یوں $\mathrm{d}t$ دورانیہ میں چارج $v\,\mathrm{d}t$ فاصلہ طے کرے گا۔ اس طرح اس دورانیہ میں m پر لگائی گئی نقطہ دار لکیر n پہنچ جائے گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیہ میں m اور n کے درمیان

---

[6] current density



شکل 5.2: حرکت کرتے چارج کی رفتار اور کثافت برقی رو۔

موجود چارج سطح ΔS سے گزر جائے گا۔ m سے n تک حجم $abv\,\mathrm{d}t$ کے برابر ہے۔ اگر تار میں چارج کی حجمی کثافت ρ_h ہو تب اس حجم میں کل چارج $\rho_h abv\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔ یوں برقی رو

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_h abv\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \rho_h \Delta S v$$

لکھتے ہوئے کثافت برقی رو

$$J = \frac{I}{\Delta S} = \rho_h v$$

حاصل ہوتی ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{5.5}$$

ہے۔ اس مساوات میں $\boldsymbol{J}$ کثافت اتصالی رو[7] کو ظاہر کرتی ہے۔

یہ مساوات کہتا ہے کہ حجمی چارج کثافت بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ اسی طرح چارج کی رفتار بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ یہ ایک عمومی نتیجہ ہے۔ یوں سڑک پر زیادہ لوگ گزارنے کا ایک طریقہ انہیں تیز چلنے پر مجبور کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ دوسرا طریقہ یہ ہے کہ انہیں قریب قریب کر دیا جائے۔

5.2 استمراری مساوات

قانون بقائے چارج کہتا ہے کہ چارج کو نہ تو پیدا اور نا ہی اسے ختم کیا جا سکتا ہے، اگرچہ برابر مقدار میں مثبت اور منفی چارج کو ملا کر انہیں ختم کیا جا سکتا ہے اور اسی طرح برابر مقدار میں انہیں پیدا بھی کیا جا سکتا ہے۔

یوں اگر ڈبے میں ایک جانب $5\,\mathrm{C}$ اور دوسری جانب $-3\,\mathrm{C}$ چارج موجود ہو تو اس ڈبے میں کل $2\,\mathrm{C}$ چارج ہے۔ اگر ہم $3\,\mathrm{C}$ کو $-3\,\mathrm{C}$ کے ساتھ ملا کر ختم کر دیں تب بھی ڈبے میں کل $2\,\mathrm{C}$ ہی چارج رہے گا۔

مثال 5.2: ایک ڈبہ جس کا حجم $5\,\mathrm{m}^3$ ہے میں حجمی کثافت چارج $3\,\mathrm{C/m^3}$ ہے۔ اس ڈبے سے چارج کی نکاسی ہو رہی ہے۔ دو سیکنڈ میں حجمی کثافت چارج $1\,\mathrm{C/m^3}$ رہ جاتی ہے۔ ان دو سیکنڈوں میں ڈبے سے خارج برقی رو کا تخمینہ لگائیں۔

[7] convection current density

حل: شروع میں ڈبے میں $Q_1 = 3 \times 5 = 15\,\mathrm{C}$ چارج ہے جبکہ دو سیکنڈ بعد اس میں $Q_1 = 1 \times 5 = 5\,\mathrm{C}$ رہ جاتا ہے۔یوں دو سیکنڈ میں ڈبے سے $10\,\mathrm{C}$ چارج خارج ہوتا ہے۔اس طرح ڈبے سے خارج برقی رو $\frac{10}{2} = 5\,\mathrm{A}$ ہے۔اسی کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{(5-15)}{2} = 5\,\mathrm{A}$$

1334

اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ ڈبے میں ΔQ منفی ہونے کی صورت میں خارجی برقی رو کی قیمت مثبت ہوتی ہے۔آئیں اس حقیقت کو بہتر شکل دیں۔ 1335

حجم کو مکمل طور پر گھیرتی سطح کو بند سطح کہتے ہیں۔کسی بھی مقام پر ایسی سطح کی سمت سطح کے عمودی باہر کو ہوتی ہے۔مساوات 5.4 کے تحت برقی رو کو کثافت برقی رو کے سطحی تکمل سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں

$$I = \oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.6}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں حجم کی سطح بند سطح ہونے کی بنا پر بند تکمل کی علامت استعمال کی گئی ہے اور Q حجم میں کل چارج ہے۔ 1336

مساوات 5.6 استمراری مساوات[8] کی تکمل شکل ہے۔آئیں اب اس کی نقطہ شکل حاصل کریں۔ 1337

مسئلہ پھیلاو کو صفحہ 87 پر مساوات 3.43 میں بیان کیا گیا ہے۔مسئلہ پھیلاو کسی بھی سمتی تفاعل کے لئے درست ہے لہٰذا اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.6 میں بند سطحی تکمل کو حجمی تکمل میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}h$$

اگر حجم میں حجمی کثافت چارج ρ_h ہو تب اس میں کل چارج

$$Q = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h$$

ہو گا۔ان دو نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}h = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_h \rho_h \,\mathrm{d}h$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ دو متغیرات پر لاگو ہو گا۔یہ متغیرات تکمل کے اندر حجمی چارج کثافت ρ_h اور حجم h ہے۔ 1338

آپ جانتے ہیں کہ دو متغیرات کے تفرق کو جزوی تفرق کی شکل میں

$$\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t}v + u\frac{\partial v}{\partial t}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں v کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial u}{\partial t}$ اور u کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial v}{\partial t}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ 1339

---

[8] continuity equation

اگر ہم یہ شرط لاگو کریں کہ حجم کی سطح تبدیل نہیں ہو گی تب حجم بھی تبدیل نہیں ہو گا اور یوں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ کو جزوی تفرق میں تبدیل کرتے ہوئے تکمل کے اندر لکھتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}h = \int_h -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}\,\mathrm{d}h$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات ہر ممکنہ حجم کے لئے درست ہے للہذا یہ نہایت چھوٹی حجم کے لئے بھی درست ہے۔ نہایت چھوٹی حجم $\mathrm{d}h$ کے لئے تکمل

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}h = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}\,\mathrm{d}h$$

ہی ہے جس سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} \tag{5.7}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 5.7 استمراری مساوات کی نقطہ شکل ہے۔

پھیلاو کی تعریف کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.7 کہتا ہے کہ ہر نقطے پر چھوٹی سی حجم سے فی سیکنڈ چارج کا اخراج، یعنی برقی رو، فی اکائی حجم مساوی ہے چارج کے گھٹاو فی سیکنڈ فی اکائی حجم۔

5.3 موصل

غیر چارج شدہ موصل میں منفی الیکٹران اور مثبت ساکن ایٹموں کی تعداد برابر ہوتی ہے البتہ اس میں برقی رو آزاد الیکٹران کے حرکت سے پیدا ہوتا ہے۔ موصل میں الیکٹران آزادی سے بے ترتیب حرکت کرتا رہتا ہے۔ یہ حرکت کرتا ہوا لمحہ بہ لمحہ ساکن ایٹم سے ٹکراتا ہے اور ہر ٹکر سے اس کے حرکت کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔ یوں ایسے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر کے برابر ہوتی ہے۔ آئیں دیکھیں کہ برقی میدان کے موجودگی میں کیا ہوتا ہے۔

برقی میدان $\boldsymbol{E}$ میں الیکٹران پر قوت

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E} \tag{5.8}$$

عمل کرے گی جہاں الیکٹران کا چارج $e-$ ہے۔ الیکٹران کی رفتار اس قوت کی وجہ سے اسراع کے ساتھ قوت کی سمت میں بڑھنے شروع ہو جائے گی۔ یوں بلا ترتیب رفتار کے ساتھ ساتھ قوت کے سمت میں الیکٹران رفتار پکڑے گا۔ موصل میں پائے جانے والا الیکٹران جلد کسی ایٹم سے ٹکرا جاتا ہے اور یوں اس کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔ جس لمحہ الیکٹران کسی ایٹم سے ٹکراتا ہے اگر لاگو میدان کو صفر کر دیا جائے تو الیکٹران دوبارہ بلا ترتیب حرکت کرتا رہے گا اور اس کی اوسط رفتار دوبارہ صفر ہی ہو گی، البتہ اس کی رفتار اب پہلے سے زیادہ ہو گی۔ اگر الیکٹران ایٹم سے نہ ٹکراتا تب برقی میدان صفر کرنے کے بعد یہ برقرار قوت کی سمت میں حاصل کردہ رفتار سے حرکت کرتا رہتا۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہر ٹکر سے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر ہو جاتی ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{E}$ کے موجودگی میں موصل میں الیکٹران کی رفتار مسلسل نہیں بڑھتی بلکہ یہ قوت کی سمت میں اوسط رفتار $\boldsymbol{v}_d$ حاصل کرتا ہے اور جیسے ہی میدان صفر کر دیا جائے الیکٹران کی اوسط رفتار بھی صفر ہو جاتی ہے۔ $\boldsymbol{v}_d$ کو رفتار بہاو[9] کہتے ہیں۔ رفتار بہاو کا دار و مدار $\boldsymbol{E}$ کی قیمت پر ہے للہذا ہم

$$\boldsymbol{v}_d = -\mu_e \boldsymbol{E} \tag{5.9}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات کے مستقل μ_e کو الیکٹران کی حرکت پذیری[10] کہتے ہیں۔ حرکت پذیری کی مقدار مثبت ہے۔ چونکہ v_d کو میٹر فی سیکنڈ اور $\boldsymbol{E}$ کو وولٹ فی میٹر میں ناپا جاتا ہے للہذا حرکت پذیری کو $\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{V\,s}}$ میں ناپا جائے گا۔

---

[9] drift velocity
[10] mobility

مساوات 5.9 کو صفحہ 127 پر دیے مساوات 5.5 میں پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{J} = -\rho_e \mu_e \boldsymbol{E} \tag{5.10}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موصل میں آزاد الیکٹران کی حجمی چارج کثافت کو ρ_e لکھا گیا ہے۔ ρ_e منفی مقدار ہے۔ یاد رہے کہ غیر چارج شدہ موصل میں حجمی کثافت چارج صفر کے برابر ہے چونکہ اس میں منفی الیکٹران اور مثبت ایٹم کے چارج برابر ہوتے ہیں۔ اس مساوات کو عموماً

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{5.11}$$

لکھا جاتا ہے جو اوہم کے قانون کی نقطہ شکل ہے اور جہاں

$$\sigma = -\rho_e \mu_e \tag{5.12}$$

لکھا گیا ہے۔ مساوات 5.11 میں $\boldsymbol{J}$ کو کثافت ایصالی برقی رو[11] ہے جبکہ σ کو موصلیت کا مستقل[12] کہتے ہیں اور اس کی اکائی[13] سیمنز فی میٹر $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ سیمنز کو بڑے S سے جبکہ سیکنڈ کو چھوٹے s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ ان میں غلطی نہیں کریں گے۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 497 پر جدول 16.1 میں کئی موصل اور غیر موصل اشیاء کی موصلیت پیش کی گئی ہیں۔

مثال 5.3: تانبے[14] کی موصلیت کے مستقل کی قیمت $5.8 \times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے جبکہ اس کی کمیتی کثافت $8940\,\mathrm{kg/m^3}$ اور ایٹمی کمیت $63.5\,\mathrm{g}$ ہیں۔ اگر ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہو تب تانبے میں الیکٹران کی حرکت پذیری حاصل کریں۔ برقی میدان $E = 0.1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں الیکٹران کا رفتار بہاو حاصل کریں۔

حل: ایٹمی کمیت 6.023×10^{23} یعنی ایک مول[15] ایٹم کی کمیت کو کہتے ہیں۔ چونکہ ایک مربع میٹر میں $8940\,\mathrm{kg}$ ہیں لٰہذا ایک مربع میٹر میں

$$\frac{8940 \times 6.023 \times 10^{23}}{0.0635} = 8.48 \times 10^{28}$$

ایٹم پائیں جائیں گے۔ ہر ایٹم ایک الیکٹران آزاد کرتا ہے لٰہذا $0.1\,\mathrm{nm}$ اطراف کے مربع میں اوسطاً 0.848 یعنی تقریباً ایک عدد آزاد الیکٹران پایا جائے گا۔ اس طرح ایک مربع میٹر میں کل آزاد الیکٹران چارج یعنی حجمی آزاد چارج کثافت

$$\rho_e = -1.6 \times 10^{-19} \times 8.48 \times 10^{28} = -1.36 \times 10^{10}\,\mathrm{C/m^3} \tag{5.13}$$

ہو گی۔ ایک مربع میٹر میں یوں انتہائی زیادہ آزاد چارج پایا جاتا ہے۔ اس طرح مساوات 5.12 کی مدد سے

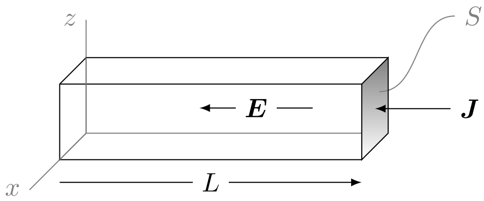
$$\mu_e = -\frac{\sigma}{\rho_e} = \frac{5.8 \times 10^7}{-1.36 \times 10^{10}} = 0.004\,27\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $0.004\,27\,\frac{\mathrm{m^2\,S}}{\mathrm{C}}$ کو $0.004\,27\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ لکھا گیا ہے۔ آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ یہ برابر مقدار ہیں۔ اب مساوات 5.9 استعمال کرتے ہوئے الیکٹران کی رفتار بہاو

$$v_d = -0.00427 \times 0.1 = -0.000\,427\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

---

[11] conduction current density
[12] conductivity
[13] یہ اکائی جرمنی کے جناب ارنسٹ ورنر وان سیمنز (1816-1892) کے نام ہے جنہوں نے موجودہ سیمنز ادارے کی بنیاد رکھی۔
[14] copper
[15] mole



شکل 5.3: اوہم کے قانون کی بڑی شکل۔

حاصل ہوتی ہے۔ منفی رفتار کا مطلب ہے کہ الیکٹران $\boldsymbol{E}$ کے الٹ سمت حرکت کر رہا ہے۔ اس رفتار[16] سے الیکٹران ایک کلو میٹر کا فاصلہ ستائیس دن و رات چل کر طے کرے گا۔ یہاں یہ بتلاتا چلوں کہ عام درجہ حرارت مثلاً $300\,\mathrm{K}$ پر تانبے میں حرارتی توانائی سے حرکت کرتے الیکٹران کی رفتار تقریباً $1000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ ہوتی ہے۔

یوں موصل میں آزاد الیکٹرانوں کو نئی جگہ منتقل ہوتے شہد کے مکھیوں کا جھنڈ سمجھا جا سکتا ہے۔ ایسے جھنڈ میں کوئی ایک مکھی نہایت تیز رفتار سے آگے پیچھے اڑتی ہے جبکہ پورا جھنڈ نسبتاً آہستہ رفتار سے ایک سمت میں حرکت کرتا ہے۔ موصل میں بھی کوئی ایک الیکٹران نہایت تیز رفتار سے ایٹموں سے ٹکراتا ہوا حرارتی توانائی کی وجہ سے نہایت تیزی سے اِدھر اُدھر حرکت کرتا ہے جبکہ بیرونی لاگو میدان کی وجہ سے ایسے تمام الیکٹران نہایت آہستہ رفتار سے میدان کی سمت میں حرکت کرتے ہیں۔

اگر موصل میں آزاد الیکٹران اتنے کم رفتار سے بیرونی لاگو میدان کی سمت میں صفر کرتے ہیں تب بجلی چالو کرتے ہی بلب کس طرح روشن ہوتا ہے۔ اس کو سمجھنے کی خاطر برقی تار کو پانی بھرے ایک لمبے پائپ مانند سمجھیں۔ ایسے پائپ میں جیسے ہی ایک جانب سے مزید پانی داخل کیا جائے، اسی وقت پائپ کے دوسرے سرے سے برابر پانی خارج ہو گا۔ امید ہی سمجھ آ گئی ہو گی۔

مندرجہ بالا مثال میں بتلایا گیا کہ تانبے کا ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہے۔ اس حقیقت کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ تانبے کا ایٹمی عدد 29 ہے۔ ایٹم کے کسی بھی مدار میں $2n^2$ الیکٹران ہو سکتے ہیں جہاں پہلے مدار کے لئے $n=1$، دوسرے مدار کے لئے $n=2$ وغیرہ لیا جاتا ہے۔ یوں اس کے پہلے مدار میں 2، دوسرے مدار میں 8، تیسرے مدار میں 18 اور آخری مدار[17] میں 1 الیکٹران ہو گا۔ ایٹم آخری مدار میں واحد الیکٹران کو آزاد کرتا ہے۔ آئیں اب بڑی شکل میں اوہم کا قانون حاصل کریں۔

شکل 5.3 میں موصل سلاخ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L اور رقبہ عمودی تراش S ہیں۔ سلاخ کو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں لیٹا تصور کریں۔ سلاخ میں لمبائی کی سمت میں مستقل اور یکساں برقی میدان $\boldsymbol{E}=-E\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}=-J\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ پائے جاتے ہیں۔ یوں اگر سلاخ کا بایاں سرا برقی زمین تصور کیا جائے تب اس کے دائیں سرے پر برقی دباو کو صفحہ 99 پر دئے مساوات 4.11 سے یوں

$$V=-\int_0^L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\int_0^L E\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}=\int_0^L E\,\mathrm{d}y=E\int_0^L\mathrm{d}y=EL$$

حاصل کرتے ہیں۔ رقبہ عمودی تراش کو شکل میں گہرے رنگ سے اجاگر کیا گیا ہے۔ سمتی رقبہ عمودی تراش بند سطح نہیں ہے لہٰذا اس کے دو ممکنہ رخ ہیں۔ سلاخ کے دائیں سرے سے داخل برقی رو حاصل کرنے کی غرض سے رقبہ عمودی تراش کو $\boldsymbol{S}=-S\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھتے ہیں۔ یوں دائیں سرے سے داخل برقی رو کی مقدار مثبت ہو گی۔ برقی رو

$$I=\int_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=JS$$

---

[16] کھودا پہاڑ، نکلا چوہا۔ آزاد الیکٹران تو کچھوے سے بھی آہستہ چلتا ہے۔

[17] چوتھے مدار میں 32 الیکٹران ممکن ہیں لیکن تانبے کے ایٹم میں اس مدار کے لئے صرف ایک عدد الیکٹران بچتا ہے۔

حاصل ہوتی ہے۔ان معلومات کو شکل 5.11 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{I}{S}=\sigma\frac{V}{L}$$

یا

$$V=I\frac{L}{\sigma S}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$R=\frac{L}{\sigma S} \tag{5.14}$$

کو مزاحمت لکھتے ہوئے

$$V=IR \tag{5.15}$$

1369 حاصل ہوتا ہے جو اوہم کے قانون کی جانی پہچانی شکل ہے۔

مساوات 5.14 یکساں رقبہ عمودی تراش رکھنے والے موصل سلاخ کی مزاحمت[18] دیتا ہے جہاں مزاحمت کی اکائی اوہم[19] ہے جسے Ω سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یکساں رقبہ عمودی تراش کے سلاخ میں برقی میدان یکساں ہوتا ہے۔اگر سلاخ کا رقبہ عمودی تراش یکساں نہ ہو تب اس میں برقی میدان بھی یکساں نہ ہو گا اور ایسی صورت میں مساوات 5.14 استعمال نہیں کیا جا سکتا البتہ ایسی صورت میں بھی مزاحمت کو مساوات 5.15 کی مدد سے برقی دباو فی اکائی برقی رو سے بیان کیا جاتا ہے۔یوں مساوات 4.11 اور مساوات 5.4 استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے b سے a سرے تک مزاحمت

$$R=\frac{V}{I}=\frac{-\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\int_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}=\frac{-\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\int_S \sigma\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}} \tag{5.16}$$

1370 سے حاصل ہو گی جہاں برقی رو سلاخ کے مثبت برقی دباو والے سرے سے سلاخ میں داخل ہوتے برقی رو کو کہتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات میں سطحی تکمل پہلا سلاخ
1371 کے مثبت سرے پر حاصل کیا جائے گا جہاں سطح عمودی تراش کی سمت سلاخ کی جانب لی جائے گی۔

1372 مثال 5.4: تانبے کی ایک کلو میٹر لمبی اور تین ملی میٹر رداس کے تار کی مزاحمت حاصل کریں۔

حل: یہاں $L=1000\,\mathrm{m}$ جبکہ $S=\pi r^2=2.83\times10^{-7}\,\mathrm{m}^2$ اور $\sigma=5.8\times10^{7}$ ہے لہٰذا

$$R=\frac{1000}{5.8\times10^{7}\times2.83\times10^{-7}}=0.61\,\Omega$$

1373 حاصل ہوتا ہے۔

1374

1375

---

resistance[18]
ohm[19]

مشق 5.1: المونیم میں کثافت برقی رو مندرجہ ذیل صورتوں میں حاصل کریں۔(الف) برقی میدان کی شدت $50\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ ہے۔(ب) آزاد الیکٹران کی رفتار بہاو $0.12\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$ ہے۔(پ) ایک ملی میٹر موٹی تار جس میں $2\,\mathrm{A}$ برقی رو گزر رہی ہے۔

جوابات: $1.91\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$، $3.82\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$ اور $2.55\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$

ہم دیکھ چکے ہیں کہ موصل کے اندر داخل کیا گیا چارج جلد موصل کے سطح پر پہنچ کر سطحی چارج کثافت پیدا کرتا ہے۔یہ جانتے ہوئے کہ حقیقت میں موصل کے اندر چارج کا پیدا ہونا یا وہاں چارج داخل کرنا معمول کی بات ہر گز نہیں، ہم ایسے داخل کئے گئے چارج کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔

اوہم کے قانون

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

اور استمراری مساوات

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

دونوں میں صرف آزاد چارج کی بات کی جاتی ہے۔ان مساوات سے

$$\nabla \cdot \sigma \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

یا

$$\nabla \cdot \frac{\sigma}{\epsilon} \boldsymbol{D} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر موصل میں σ اور ϵ کی قیمتیں اٹل ہوں تب اس مساوات کو

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔صفحہ 82 پر مساوات 3.33 جو میکس ویل کی پہلی مساوات ہے کی مدد سے یوں

$$\rho_h = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 5.12 کہتا ہے کہ موصلیت کی قیمت آزاد الیکٹران کی حجمی چارج کثافت ρ_e اور الیکٹران کی حرکت پذیری پر منحصر ہے۔مساوات 5.13 تانبے میں $\rho_e = -1.36 \times 10^{10}\,\mathrm{C/m^3}$ دیتا ہے جو انتہائی بڑی مقدار ہے۔اتنے چارج میں بیرونی داخل چارج نمک برابر بھی حیثیت نہیں رکھتا لہٰذا σ کی قیمت کو اٹل تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں مندرجہ بالا مساوات کو نئی شکل

$$\frac{\partial \rho_h}{\rho_h} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \partial t$$

میں لکھتے ہوئے، اس کا تکمل

$$\rho_h = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

حاصل کرتے ہیں جہاں وقت $t = 0$ پر داخل کئے گئے چارج کا حجمی چارج کثافت ρ_0 ہے۔اس مساوات کے تحت حجمی چارج کثافت $\frac{\sigma}{\epsilon}$ وقتی مستقل[20] رکھتا ہے۔ تقطیر شدہ پانی کا وقتی مستقل جدول 16.1 اور جدول 16.2 کی مدد سے

$$\frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{80}{36\pi \times 10^9 \times 10^{-4}} = 7.07\,\mu\text{s}$$

حاصل ہوتا ہے۔اگرچہ تقطیر شدہ پانی انتہائی کم موصل ہے لیکن اس میں بھی کثافت چارج صرف سات مائیکرو سیکنڈ میں ابتدائی قیمت کے صرف 37 فی صد رہ جاتا ہے۔یوں کسی بھی موصل کے اندر انتہائی کم دورانیے کے لئے اضافی چارج پایا جا سکتا ہے۔اس لمحاتی چارج کثافت کے علاوہ اندرون موصل کو چارج سے پاک تصور کیا جا سکتا ہے۔

ذو برق میں مختلف وجوہات کی بنا پر لگاتار آزاد چارج پیدا ہوتے رہتے ہیں جس کی بنا پر ذو برق صفر سے زیادہ موصلیت رکھتے ہوئے برقی رو گزارتا ہے۔ذو برق کے اندر چارج بھی آخر کار سطح پر پہنچ جاتا ہے۔

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط

غیر چارج شدہ موصل میں کل آزاد الیکٹران اور مثبت ایٹم برابر تعداد میں پائے جاتے ہیں۔یوں اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔فرض کریں کہ غیر چارج شدہ موصل کے اندر کسی طرح چند الیکٹران نمودار ہو جاتے ہیں۔یہ الیکٹران برقی میدان $\boldsymbol{E}$ پیدا کریں گے جس کی وجہ سے موصل میں آزاد الیکٹران موصل کے سطح کی جانب چل پڑیں گے۔ سطح کے باہر غیر موصل خلاء پائی جاتی ہے جس میں الیکٹران حرکت نہیں کر سکتے لہٰذا الیکٹران موصل کے سطح پر پہنچ کر رک جائیں گے۔موصل میں نمودار ہونے والے الیکٹران کے برابر تعداد میں الیکٹران موصل کے سطح پر منتقل ہوں گے جس کے بعد موصل میں دوبارہ منفی الیکٹران اور مثبت ایٹموں کی تعداد برابر ہو جائے گی اور یہ غیر چارج شدہ صورت اختیار کر لے گا۔

آپ نے دیکھا کہ اضافی چارج موصل میں زیادہ دیر نہیں رہ سکتا اور یہ جلد سطح پر منتقل ہو جاتا ہے۔یوں اضافی چارج موصل کے سطح پر بیرونی جانب چمٹا رہتا ہے۔یہ موصل کی پہلی اہم خاصیت ہے۔

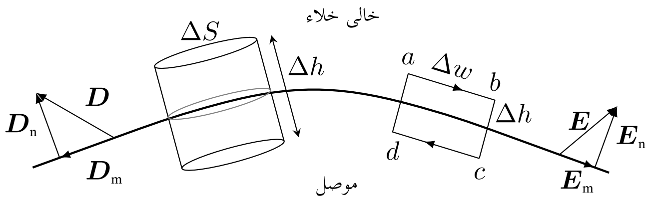
موصل کی دوسری خاصیت برقی سکون[21] کی حالت کے لئے بیان کرتے ہیں۔برقی سکون سے مراد ایسی صورت ہے جب چارج حرکت نہ کر رہا ہو یعنی جب برقی رو صفر کے برابر ہو۔برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر ساکن برقی میدان صفر رہتا ہے۔اگر ایسا نہ ہوتا تو میدان کی وجہ سے اس میں آزاد الیکٹران حرکت کر کے برقی رو کو جنم دیتے جو غیر ساکن حالت ہے۔

یوں برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر اضافی چارج اور برقی میدان دونوں صفر کے برابر ہوتے ہیں البتہ اس کے سطح پر بیرونی جانب چارج پایا جا سکتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ سطح پر پائے جانے والا چارج موصل کے باہر کس قسم کا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔

موصل کے سطح پر چارج، موصل کے باہر برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ سطح پر کسی بھی نقطے پر ایسے میدان کو دو اجزاء کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔پہلا جزو سطح کے مماسی اور دوسرا جزو سطح کے عمودی رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مماسی جزو صفر ہو گا۔اگر ایسا نہ ہو تو اس میدان کی وجہ سے سطح پر پائے جانے والے آزاد الیکٹران حرکت میں آئیں گے جو غیر ساکن حالت ہو گی۔یوں ہم

$$E_{\text{مماسی}} = 0 \tag{5.17}$$

time constant[20]
electrostatic[21]



شکل 5.4: موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی شرائط۔

لکھ سکتے ہیں۔ سطح پر عمودی برقی میدان گاوس کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جو کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے کل برقی بہاو کا اخراج، سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتا ہے۔ چونکہ سطح پر مماسی برقی میدان صفر ہے اور موصل کے اندر بھی برقی میدان صفر ہے لہٰذا سطح پر چارج سے برقی بہاو کا اخراج صرف عمودی سمت میں ہو سکتا ہے۔ یوں ΔS سطح سے عمودی اخراج $D\Delta S$ اسی سطح پر چارج $\rho_S \Delta S$ کے برابر ہو گا جس سے

$$D_{\text{عمودی}} = \rho_S \tag{5.18}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اسی بحث کو بہتر جامہ پہنائیں۔ ایسا کرتے ہوئے ہم ایک عمومی ترکیب سیکھ لیں گے جو مختلف اقسام کے اشیاء کے سرحد پر میدان کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے درمیان سرحد موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ اس سرحد پر خلاء میں $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ دکھائے گئے ہیں۔ خلاء میں $\boldsymbol{E}$ کو $\boldsymbol{E}_m$ اور $\boldsymbol{E}_n$ کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جو بالترتیب سرحد کے مماسی اور عمودی اجزاء ہیں۔ اسی طرح $\boldsymbol{D}$ کو بھی مماسی اور عمودی اجزاء کے مجموعہ کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ ہم صرف اس حقیقت کو لے کر آگے بڑھتے ہیں کہ موصل کے اندر $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ دونوں صفر کے برابر ہیں۔ آئیں اس حقیقت کی بنا پر خلاء میں $\boldsymbol{E}$ کی قیمت حاصل کریں۔ ہم $\boldsymbol{E}$ کے مجموعے $\boldsymbol{E}_m$ اور $\boldsymbol{E}_n$ حاصل کریں گے۔ پہلے $\boldsymbol{E}_m$ حاصل کرتے ہیں۔

سرحد پر $abcd$ مستطیل بنایا گیا ہے جہاں ab اور cd سرحد کے مماسی جبکہ bc اور da سرحد کے عمودی ہیں۔ ab خالی خلاء میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر جبکہ cd موصل میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر ہیں۔ ab اور cd کی لمبائیاں Δw ہیں جبکہ bc اور da کی لمبائیاں Δh ہے۔ صفحہ 105 پر دئے مساوات 4.28

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

کو $abcd$ پر لاگو کرتے ہیں۔ اس تکمل کو چار ٹکڑوں کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} + \int_b^c \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} + \int_c^d \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} + \int_d^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

اب a سے b تک

$$\int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_m \Delta w$$

حاصل ہوتا ہے۔ خلاء میں نقطہ b پر عمودی میدان کو $E_{n,b}$ لکھتے ہوئے b سے c تک

$$\int_b^c \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -E_{n,b} \frac{\Delta h}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ bc کی آدھی لمبائی موصل کے اندر ہے جہاں $\boldsymbol{E} = 0$ ہے۔ c سے d تک تکمل صفر کے برابر ہے چونکہ یہ راستہ موصل کے اندر ہے جہاں $\boldsymbol{E} = 0$ ہے۔

$$\int_c^d \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

خلاء میں نقطہ a پر عمودی میدان کو $E_{n,a}$ لکھتے ہوئے d سے a تک

$$\int_d^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_{n,a} \frac{\Delta h}{2}$$

ان چار نتائج سے

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_m \Delta w + \left(E_{n,a} - E_{n,b}\right) \frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔ سرحد کے قریب میدان حاصل کرنے کی خاطر ہمیں سرحد کے قریب تر ہونا ہو گا یعنی Δh کو تقریباً صفر کے برابر کرنا ہو گا۔ ایسا کرنے سے $\left(E_{n,a} - E_{n,b}\right) \frac{\Delta h}{2}$ کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ ہم Δw کو اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ اس کی پوری لمبائی پر میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ ایسا کرتے ہوئے اس مساوات سے

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_m \Delta w = 0$$

یعنی

$$E_m = 0 \tag{5.19}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب E_n حاصل کریں۔ E_n کی بجائے گاوس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

کی مدد سے D_n کا حصول زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے لہٰذا ہم اسی کو حاصل کرتے ہیں۔ 1406

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر Δh لمبائی کا بیلن دکھایا گیا ہے۔ اس بیلن کے ڈھکنوں کا رقبہ ΔS ہے۔ اگر سرحد پر ρ_S پایا جائے تب بیلن $\rho_S \Delta S$ چارج کو گھیرے گا۔ گاوس کے قانون کے تحت بیلن سے اسی مقدار کے برابر برقی بہاو کا اخراج ہو گا۔ برقی بہاو کا اخراج بیلن کے دونوں سروں اور اس کے نلکی نما سطح سے ممکن ہے۔ یوں

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{نچلا ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{بالائی ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \rho_S \Delta S$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب بیلن کی نچلی سطح موصل کے اندر ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے لہٰذا

$$\int_{\text{نچلا ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

ہو گا۔ مساوات 5.19 کے تحت سرحد پر خلاء میں مماسی میدان صفر ہوتا ہے۔ موصل میں بھی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا

$$\int_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

ہو گا۔ بیلن کے بالائی سرے پر

$$\int_{\text{بالائی ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_n \Delta S$$

ہو گا۔ان تین نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_n \Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$D_n = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ $D = \epsilon_0 E$ ہوتا ہے لہٰذا یوں

$$D_n = \epsilon_0 E_n = \rho_S \tag{5.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 5.19 اور مساوات 5.20 موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر برقی میدان کے شرائط بیان کرتے ہیں۔موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی میدان موصل سے عمودی خارج ہوتا ہے جبکہ اس کے سرحد کے مماسی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔نتیجتاً موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے۔یوں موصل کی سطح پر دو نقطوں کے مابین کسی بھی راستے پر برقی میدان کا تکمل صفر کے برابر ہو گا یعنی $\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$ ہو گا۔یاد رہے کہ برقی میدان کا تکمل برقی دباو دیتا ہے جو تکمل کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہٰذا اس راستے کو موصل کی سطح پر ہی رکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{E}_{\text{مماسی}} = 0$ ہونے کی وجہ سے تکمل صفر کے برابر ہو گا۔

مشق 5.2: نقطہ $N(2,-3,5)$ موصل کی سطح پر پایا جاتا ہے جہاں $\boldsymbol{E} = 210\boldsymbol{a}_{\text{X}} - 350\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 99\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$ کے برابر ہے۔اس نقطے پر E_m، E_n اور ρ_S حاصل کریں۔

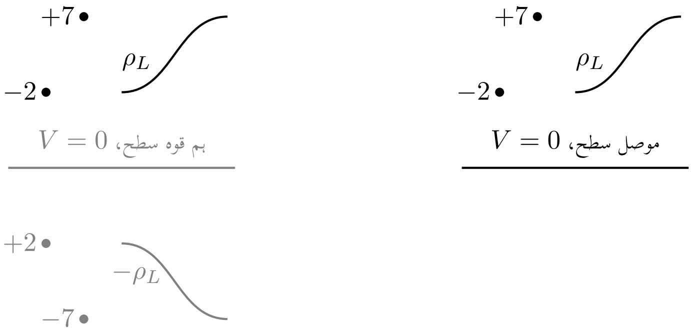
جوابات: 0، $420\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور $3.71\ \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$

5.5 عکس کی ترکیب

جفت قطب کے خطوط صفحہ 115 پر شکل 4.10 میں دکھائے گئے ہیں جہاں دونوں چارجوں سے برابر فاصلے پر لا محدود برقی زمینی سطح دکھائی گئی ہے۔برقی زمین پر انتہائی باریک موٹائی کی لا محدود موصل سطح رکھی جا سکتی ہے۔ایسی موصل سطح پر برقی دباو صفر وولٹ ہو گا اور اس پر میدان عمودی ہو گا۔موصل کے اندر برقی میدان صفر رہتا ہے اور اس سے برقی میدان گزر نہیں پاتا۔

اگر اس موصل سطح کے نیچے سے جفت قطب کا منفی چارج ہٹا دیا جائے تب بھی سطح کے بالائی جانب میدان عمودی ہی ہو گا۔یاد رہے برقی زمین صفر وولٹ پر ہوتی ہے۔موصل سطح سے اوپر میدان جوں کا توں رہے گا جبکہ اس سے نیچے میدان صفر ہو جائے گا۔اسی طرح سطح سے اوپر جفت قطب کا مثبت چارج ہٹانے سے سطح کے نچلے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ سطح سے اوپر میدان صفر ہو جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو دوسری نقطہ نظر سے دیکھیں۔فرض کریں کہ لا محدود موصل سطح یا برقی زمین سے $\frac{d}{2}$ فاصلے پر اوپر مثبت نقطہ چارج $+Q$ پایا جاتا ہے۔چونکہ ایسی صورت میں سطح سے اوپر برقی میدان بالکل جفت قطب کے میدان کی طرح ہو گا لہٰذا ہم $\frac{d}{2}$ فاصلے پر برقی زمین سے نیچے عین مثبت چارج کے نیچے منفی چارج $-Q$



شکل 5.5: عکس کی ترکیب۔

رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹا سکتے ہیں۔ اوپر جانب کے میدان پر ان اقدام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ یوں جفت قطب کے تمام مساوات بروئے کار لاتے ہوئے زمین کے اوپر جانب کا میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یاد رہے کہ سطح کے نیچے برقی زمین کو صفر ہی تصور کیا جائے گا۔ اگر برقی زمین کی سطح کو آئینہ تصور کیا جائے تب مثبت چارج کا عکس اس آئینہ میں اسی مقام پر نظر آئے گا جہاں ہم نے تصوراتی منفی چارج رکھا۔ یوں اس منفی چارج کو حقیقی چارج کا عکس[22] کہتے ہیں۔

ایسی ہی ترکیب لامحدود زمینی سطح کے ایک جانب منفی چارج سے پیدا میدان حاصل کرنے کی خاطر بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں زمین کی دوسری جانب عین منفی چارج کے سامنے، اتنے ہی فاصلے پر برابر مقدار مگر مثبت چارج رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹایا جا سکتا ہے۔

کسی بھی چارج کو نقطہ چارجوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ لہٰذا لامحدود برقی زمین یا لامحدود موصل سطح کی ایک جانب کسی بھی شکل کے چارجوں کا میدان، سطح کی دوسری جانب چارجوں کا عکس رکھتے اور زمین کو ہٹاتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اس ترکیب کو عکس کی ترکیب کہتے ہیں۔ یاد رہے کہ کسی بھی لامحدود موصل سطح جس کے ایک جانب چارج پایا جاتا ہو پر سطحی چارج پایا جائے گا۔ عموماً مسئلے میں لامحدود سطح اور سطح کے باہر چارج معلوم ہوں گے۔ ایسے مسئلے کو حل کرنے کی خاطر سطح پر سطحی چارجوں کا علم بھی ضروری ہوتا ہے۔ سطحی چارج دریافت کرنا نسبتاً مشکل کام ہے جس سے چھٹکارا حاصل کرنا عقلمندی ہو گی۔ عکس کی ترکیب میں سطحی چارج کا جاننا ضروری نہیں لہٰذا اس ترکیب سے مسئلہ کو حل کرنا عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

شکل 5.5 میں لامحدود موصل سطح سے اوپر مختلف اقسام کے چارج دکھائے گئے ہیں۔ اسی شکل میں مسئلے کو عکس کے ترکیب کی نقطہ نظر سے بھی دکھایا گیا ہے۔ موصل سطح کے مقام پر دونوں صورتوں میں صفر وولٹ ہی رہتے ہیں۔

مثال 5.5: لامحدود موصل سطح $z=3$ کے قریب $N(5,7,8)$ پر $5\,\mu\mathrm{C}$ چارج پایا جاتا ہے۔ موصل کی سطح پر نقطہ $M(2,4,3)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہوئے اسی مقام پر موصل کی سطحی کثافت چارج حاصل کریں۔

حل: $5\,\mu\mathrm{C}$ کا عکس $-5\,\mu\mathrm{C}$ لامحدود سطح کے دوسری جانب نقطہ $P(5,7,-2)$ پر رکھتے ہوئے موصل سطح ہٹاتے ہیں۔ اب N سے M تک سمتیہ $\boldsymbol{R}_{MN}=-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے جبکہ P سے M تک سمتیہ $\boldsymbol{R}_{MP}=-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے۔ یوں $5\,\mu\mathrm{C}$ نقطہ M پر

$$\boldsymbol{E}_{+}=\frac{5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})}{4\pi\epsilon_0(3^2+3^2+5^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

---

[22] image

پیدا کرے گا۔اسی طرح $-5\,\mu\mathrm{C}$ چارج نقطہ M پر

$$\boldsymbol{E}_{-}=\frac{-5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})}{4\pi\epsilon_0(3^2+3^2+5^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-5\times10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کرے گا۔چونکہ برقی میدان خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہٰذا کسی بھی نقطے پر مختلف چارجوں کے پیدا کردہ میدان جمع کرتے ہوئے کل میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں نقطہ M پر کل میدان

$$\boldsymbol{E}_{\text{کل}}=\boldsymbol{E}_{+}+\boldsymbol{E}_{-}=\frac{-50\times10^{-6}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

ہو گا۔موصل کی سطح پر میدان عمودی ہوتا ہے۔موجودہ جواب اس حقیقت کی تصدیق کرتا ہے۔یوں موصل کی سطح پر

$$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}=\frac{-50\times10^{-6}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi(43)^{\frac{3}{2}}}=-14.13\times10^{-9}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

حاصل ہوتا ہے جو سطح میں داخل ہونے کی سمت میں ہے۔یوں مساوات 5.20 کے تحت سطح پر

$$\rho_S=-14.3\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$$

پایا جاتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال میں اگر $N(5,7,8)$ پر $5\,\mu\mathrm{C}$ پایا جاتا اور لامحدود سطح موجود نہ ہوتا تب $M(2,4,3)$ پر میدان $\boldsymbol{E}_{+}$ ہوتا۔لامحدود موصل سطح کی موجودگی میں یہ قیمت تبدیل ہو کر مثال میں حاصل کی گئی $\boldsymbol{E}_{\text{کل}}$ ہو جاتی ہے۔درحقیقت سطح کے قریب چارج کی وجہ سے سطح پر سطحی چارج کثافت پیدا ہو جاتا ہے۔کسی بھی نقطے پر بیرونی چارج اور سطحی چارج دونوں کے میدان کا مجموعہ حقیقی میدان ہوتا ہے۔

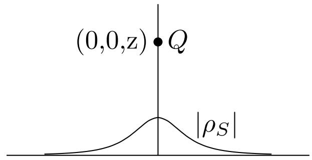
مثال 5.6: لامحدود موصل سطح $z=0$ میں $(0,0,z)$ پر Q نقطہ چارج سے پیدا کثافت سطحی چارج حاصل کریں۔

حل: اس مسئلے کو عکس کے ترکیب سے حل کرنے کی خاطر $(0,0,-z)$ پر $-Q$ چارج رکھتے ہوئے موصل سطح کو ہٹا کر حل کرتے ہیں۔ایسی صورت میں سطح کے مقام پر عمومی نقطہ $(\rho,\phi,0)$ پر Q اور $-Q$ چارج

$$\boldsymbol{E}_{+}=\frac{Q(\rho\boldsymbol{a}_\rho-z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\boldsymbol{E}_{-}=\frac{-Q(\rho\boldsymbol{a}_\rho+z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کریں گے۔$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}$ استعمال کرتے ہوئے کل

$$\boldsymbol{D}=\frac{-2Qz\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



شکل 5.6: نقطہ چارج سے لامحدود موصل سطح میں پیدا سطحی کثافت چارج۔

حاصل ہوتا ہے جس کی سمت $-\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہے جو موصل میں اوپر سے داخل ہونے کی سمت ہے۔ یوں موصل سطح پر

$$\rho_S = \frac{-2Qz}{4\pi(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \tag{5.21}$$

1447 پایا جائے گا۔ شکل 5.6 میں چارج Q اور موصل سطح پر ρ_S دکھائے گئے ہیں۔

1448

1449 مساوات 5.21 کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود موصل سطح پر کل چارج حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یقینی طور پر اس کی مقدار $-Q$ ہی حاصل ہو گی۔

5.6 نیم موصل 1450

نیم موصل اشیاء مثلاً خالص سلیکان اور جرمینیم میں آزاد چارجوں کی تعداد موصل کی نسبت سے کم جبکہ غیر موصل کی نسبت سے زیادہ ہوتی ہے۔ یوں ان کی موصلیت موصل اور غیر موصل کے موصلیت کے درمیان میں ہوتی ہے۔ نیم موصل کی خاص بات یہ ہے کہ ان میں انتہائی کم مقدار کے ملاوٹ[23] سے ان کی موصلیت پر انتہائی گہرا اثر پڑتا ہے۔ نیم موصل دوری جدول[24] کے چوتھے جماعت[25] سے تعلق رکھتے ہیں۔ دوری جدول کے پانچویں جماعت کے عناصر مثلاً نائٹروجن اور فاسفورس کا ایٹم ایک عدد الیکٹران عطا کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں انہیں عطا کنندہ[26] عناصر کہتے ہیں۔ نیم موصل میں ایسا ہر عطا کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد الیکٹران کو جنم دیتا ہے۔ ایسے عنصر کی نہایت کم مقدار کی ملاوٹ سے نیم موصل میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھ جاتی ہے جس سے ان کی موصلیت بہت بڑھ جاتی ہے۔ ایسے نیم موصل جن میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھا دی گئی ہو کو n نیم موصل کہتے ہیں۔ اس کے برعکس تیسرے جماعت کے عناصر مثلاً المونیم کا ایٹم ایک عدد الیکٹران قبول کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں المونیم کو قبول کنندہ[27] عنصر کہا جاتا ہے۔ ملاوٹی المونیم کا ایٹم نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران حاصل کرتے ہوئے الیکٹران کی جگہ خالی جگہ پیدا کر دیتا ہے جسے خول[28] کہا جاتا ہے۔ نیم موصل میں ایسا ہر قبول کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد خول کو جنم دیتا ہے۔ ایسا آزاد خول مثبت ذرے کی مانند معلوم ہوتا ہے جس کا چارج الیکٹران کے چارج e کے برابر مگر الٹ قطب کا ہوتا ہے اور جس کی کمیت m_h لی جا سکتی ہے۔ اسی طرح آزاد خول کی حرکت پذیری μ_h لکھی جاتی ہے۔ بالکل آزاد الیکٹران کی طرح برقی میدان کی موجودگی میں آزاد خول رفتار بہاو $\boldsymbol{v}_d = \mu_h \boldsymbol{E}$ سے حرکت کرتا ہے جو موصلیت $\sigma = \rho_h \mu_h$ کو جنم دیتا ہے۔ یاد رہے کہ مثبت خول $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں ہی حرکت کرے گا لہٰذا اس کے رفتار بہاو کی سمت $\boldsymbol{E}$ کی سمت ہی ہو گی۔ تیسرے جماعت کے عناصر کی ملاوٹ کردہ نیم موصل کو p نیم موصل کہا جاتا ہے۔ آزاد الیکٹران اور آزاد خول مل کر

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h \tag{5.22}$$

---

doping[23]
periodic table[24]
group[25]
donor[26]
acceptor[27]
hole[28]

موصلیت پیدا کرتے ہیں جہاں ρ_h آزاد خول کی حجمی چارج کثافت ہے۔ خالص نیم موصل میں حرارتی توانائی سے نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران خارج ہو کر آزاد الیکٹران کی حیثیت اختیار کرتا ہے جبکہ ایسے الیکٹران کا خالی کردہ مقام آزاد خول کی حیثیت اختیار کرتا ہے۔ یوں خالص نیم موصل میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد برابر ہوتی ہے۔

خالص نیم موصل اوہم کے قانون کی نقطہ شکل پر پورا اترتا ہے۔ یوں کسی ایک درجہ حرارت پر نیم موصل کی موصلیت تقریباً اٹل قیمت رکھتی ہے۔

آپ کو یاد ہو گا کہ درجہ حرارت بڑھانے سے موصل میں آزاد الیکٹران کی رفتار بہاو کم ہوتی ہے جس سے موصلیت کم ہو جاتی ہے۔ درجہ حرارت کا موصل میں آزاد الیکٹران کے حجمی چارج کثافت پر خاص اثر نہیں ہوتا۔ اگرچہ نیم موصل میں بھی درجہ حرارت بڑھانے سے آزاد چارج کی رفتار بہاو کم ہوتی ہے لیکن ساتھ ہی ساتھ آزاد چارج کی مقدار نسبتاً زیادہ مقدار میں بڑھتی ہے جس کی وجہ سے نیم موصل کی موصلیت درجہ حرارت بڑھانے سے بڑھتی ہے۔ یہ موصل اور نیم موصل کے خصوصیات میں واضح فرق ہے۔

مشق 5.3: $300\,\mathrm{K}$ درجہ حرارت پر خالص سلیکان میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد 1.5×10^{16} فی مربع میٹر، الیکٹران کی رفتار بہاو $0.12\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ جبکہ خول کی رفتار بہاو $0.025\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ ہے۔ جرمینیم کے لئے یہی قیمتیں بالترتیب 2.4×10^{19} فی مربع میٹر، $0.36\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ اور $0.17\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ ہیں۔ خالص سلیکان اور خالص جرمینیم کی موصلیت دریافت کریں۔

جوابات: $0.348\,\frac{\mathrm{mS}}{\mathrm{m}}$ اور $2\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

5.7 ذو برق

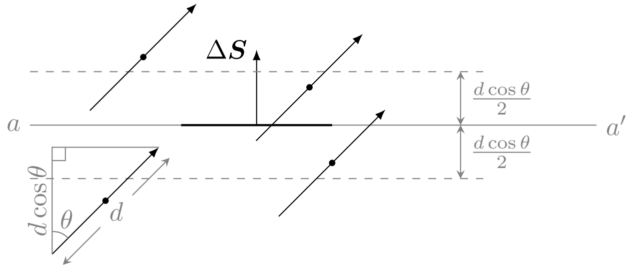
اس باب میں اب تک ہم موصل اور نیم موصل کی بات کر چکے ہیں جن میں آزاد چارج پائے جاتے ہیں۔ یوں ایسے اشیاء پر برقی دباو لاگو کرنے سے ان میں برقرار برقی رو پیدا کی جا سکتی ہے۔ آئیں ایسی اشیاء کی بات کریں جن میں آزاد چارج نہیں پائے جاتے لٰہذا ان میں برقرار برقی رو پیدا کرنا ممکن نہیں ہوتا۔

بعض اشیاء مثلاً پانی کے مالیکیول میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز پائے جاتے ہیں۔ ایسے مالیکیول کو قطبی[29] مالیکیول کہتے ہیں۔ قطبی مالیکیول کو جفت قطب تصور کیا جا سکتا ہے۔ بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں کسی بھی چیز میں قطبی مالیکیول بلا ترتیب پائے جاتے ہیں۔ بیرونی میدان $\boldsymbol{E}$ لاگو کرنے سے مالیکیول کے مثبت سرے پر میدان کی سمت میں جبکہ منفی سرے پر میدان کی الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے۔ ان قوتوں کی وجہ سے مالیکیول کے مثبت اور منفی مراکز ان قوتوں کی سمتوں میں حرکت کرتے ہوئے گھوم جاتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ مراکز کے درمیان فاصلہ بھی بڑھ جاتا ہے۔ ٹھوس قطبی اشیاء میں ایٹموں اور مالیکیول کے درمیان قوتیں ان حرکات کو روکنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اسی طرح مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش ان کے درمیان فاصلہ بڑھنے کو روکتا ہے۔ جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہوں وہاں مثبت اور منفی مراکز رک جاتے ہیں۔ بیرونی میدان ان تمام بلا ترتیب جفت قطب کو ایک سمت میں لانے کی کوشش کرتا ہے۔

بعض اشیاء میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز نہیں پائے جاتے البتہ انہیں بیرونی میدان میں رکھنے سے ان میں ایسے مراکز پیدا ہو جاتے ہیں۔ ایسے اشیاء کو غیر قطبی[30] کہتے ہیں۔ بیرونی میدان مالیکیول کے الیکٹرانوں کو ایک جانب کھینچ کر منفی مرکز جبکہ بقایا ایٹم کو مثبت چھوڑ کر مثبت مرکز پیدا کرتا ہے۔ مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش اس طرح مراکز پیدا ہونے کے خلاف عمل کرتا ہے۔ جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہو جائیں وہیں پر چارج کے حرکت کا سلسلہ رک جاتا ہے۔ یہ اشیاء قدرتی طور پر غیر قطبی ہیں البتہ انہیں بیرونی میدان قطبی بنا دیتا ہے۔ پیدا کردہ جفت قطب بیرونی میدان کی سمت میں ہی ہوں گے۔

---

[29] polar
[30] non polar



شکل 5.7: بیرونی میدان کی موجودگی میں مقید چارج کی حرکت۔

ایسے تمام اشیاء جو یا تو پہلے سے قطبی ہوں اور یا انہیں بیرونی میدان کی مدد سے قطبی بنایا جا سکے **ذو برق**[31] کہلاتے ہیں۔

ذو برق میں بیرونی میدان سے مالیکیول کے اندر حرکت پیدا ہوتی ہے البتہ مالیکیول از خود اسی جگہ رہتا ہے۔ ایسا چارج جو بیرونی میدان کی وجہ سے اپنی جگہ پر معمولی حرکت کرتا ہو کو **مقید چارج**[32] کہتے ہیں۔ اس کے برعکس آزاد چارج بیرونی میدان میں مسلسل حرکت کرتا ہے۔

ذو برق کے جفت قطب کا معیار اثر کو صفحہ 113 میں دیے مساوات 4.68

$$\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d} \tag{5.23}$$

سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں Q ذو برق کے جفت قطب میں مثبت مرکز کا چارج ہے۔

اگر اکائی حجم میں n جفت قطب پائے جائیں تب Δv حجم میں $n\Delta v$ جفت قطب ہوں گے جن کا اجتماعی معیار اثر جفت قطب تمام کے سمتی مجموعے

$$\boldsymbol{p}_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \boldsymbol{p}_i \tag{5.24}$$

کے برابر ہو گا جہاں انفرادی $\boldsymbol{p}$ مختلف ہو سکتے ہیں۔ **تقطیب**[33] سے مراد اکائی حجم میں کل معیار اثر جفت قطب ہے یعنی

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \boldsymbol{p}_i \tag{5.25}$$

جس کی اکائی کولمب فی مربع میٹر ہے۔ Δv کو کم سے کم[34] کرتے ہوئے نقطے پر تقطیب حاصل کی گئی ہے۔ حقیقت میں Δv کو اتنا رکھا جاتا ہے کہ اس میں جفت قطب کی تعداد $(n\Delta v)$ اتنی ہو کہ انفرادی جفت قطب کے اثر کو نظر انداز کرنا ممکن ہو۔ یوں تقطیب کو یکساں تفاعل تصور کیا جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔

شکل 5.7 کو دیکھتے ہوئے آگے بڑھیں۔ تصور کریں کہ ذو برق میں غیر قطبی مالیکیول پائے جاتے ہیں جن کا مقام بیرونی میدان کی غیر موجودگی میں دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں $\boldsymbol{P} = 0$ ہو گا۔ ذو برق کے اندر تصوراتی سطح ΔS لیتے ہیں جسے موٹی گہری سیاہی کی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کے دونوں جانب ہلکی سیاہی سے a تا a' لکیر بھی دکھائی گئی ہے۔ بیرونی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب $\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d}$ پیدا ہوتے ہیں جن کا $\boldsymbol{d}$ اور $\boldsymbol{p}$ سطح ΔS کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ ان جفت قطب کو سمتیوں سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں سمتیہ کی نوک مثبت جبکہ اس کی دم منفی چارج کا مقام دیتی ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ aa' سے $\frac{d\cos\theta}{2}$ فاصلے نیچے تک تمام مثبت چارج بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے اوپر چلے جائیں گے۔ اسی طرح aa' سے

---

dielectric[31]
bound charge[32]
polarization[33]
[34] یہ ایسے ہی ہے جیسے لمحاتی رفتار $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ حاصل کرتے وقت $\Delta t \to 0$ لیا جاتا ہے۔

$\frac{d\cos\theta}{2}$ فاصلے اوپر تک تمام منفی چارج بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے نیچے چلے جائیں گے۔یوں ΔS رقبہ اور $d\cos\theta$ گہرائی کے حجم $d\Delta S\cos\theta$ میں جتنے بھی جفت قطب ہوں ان تمام کا ایک سرا $\Delta \boldsymbol{S}$ سے گزرے گا۔چونکہ اکائی حجم میں n جفت قطب ہیں لہٰذا اتنی حجم میں $nd\Delta S\cos\theta$ جفت قطب ہوں گے۔یوں $\frac{nQd\Delta S\cos\theta}{2}$ چارج ΔS سے گزر کر اوپر جبکہ $\frac{-nQd\Delta S\cos\theta}{2}$ چارج ΔS سے گزر کر نیچے جائے گا۔مثبت چارج کا اوپر جانب حرکت اور منفی چارج کا نیچے جانب حرکت ایک ہی معنی رکھتے ہیں لہٰذا کل

$$\Delta Q_m = nQd\Delta S\cos\theta = nQ\boldsymbol{d}\cdot\Delta\boldsymbol{S} \tag{5.26}$$

چارج سطح سے گزرتے ہوئے اوپر جانب جائے گا جہاں ΔQ_m لکھتے ہوئے اس حقیقت کی یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ ہم مقید چارج کی بات کر رہے ہیں۔چونکہ تمام جفت قطب ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا اس حجم کی تقطیب

$$\boldsymbol{P} = nQ\boldsymbol{d} \tag{5.27}$$

ہو گی۔یوں مساوات 5.26 کو

$$\Delta Q_m = \boldsymbol{P}\cdot\Delta\boldsymbol{S} \tag{5.28}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $\Delta\boldsymbol{S}$ کو بند سطح کا ٹکڑا سمجھا جائے جہاں $\boldsymbol{a}_S$ بیرونی سمت کو ہو تب اس بند سطح سے کل چارج کا اخراج

$$\oint_S \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

کے برابر ہو گا۔یوں بند سطح میں مقید چارج کا اضافہ

$$Q_m = -\oint_S \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.29}$$

ہو گا۔یہ مساوات گاوس کے قانون کی شکل رکھتی ہے لہٰذا ہم کثافت برقی بہاو کی تعریف یوں تبدیل کرتے ہیں کہ یہ خالی خلاء کے علاوہ دیگر صورتوں میں بھی قابل استعمال ہو۔گاوس کا قانون صفحہ 71 پر مساوات 3.6 میں دیا گیا ہے۔ہم پہلے اس قانون کو $\epsilon_0\boldsymbol{E}$ اور کل گھیرے چارج $Q_{\text{کل}}$ کی شکل میں لکھتے ہیں

$$Q_{\text{کل}} = \oint_S \epsilon_0\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.30}$$

جہاں

$$Q_{\text{کل}} = Q + Q_m \tag{5.31}$$

کے برابر ہے۔مساوات 5.30 میں بند سطح $\boldsymbol{S}$ آزاد چارج Q اور مقید چارج Q_m کو گھیرے ہوئے ہے۔مساوات 5.31 میں مساوات 5.29 اور مساوات 5.30 پر کرتے ہوئے

$$Q = Q_{\text{کل}} - Q_m = \oint_S (\epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.32}$$

حاصل ہوتا ہے۔

1484

ہم کثافت برقی بہاو کو اب

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{5.33}$$

بیان کرتے ہیں جو زیادہ کار آمد اور عمومی مساوات ہے۔یوں ذو برق اشیاء کے لئے کثافت برقی بہاو میں اضافی جزو $\boldsymbol{P}$ شامل ہو جاتا ہے۔اس طرح

$$Q = \oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.34}$$

1485 لکھا جا سکتا ہے جہاں Q گھیرا ہوا آزاد چارج ہے۔

ہم آزاد، مقید اور کل چارجوں کے لئے آزاد، مقید اور کل حجمی کثافت بیان کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h \\
Q_m &= \int_h \rho_m \,\mathrm{d}h \\
Q_{\text{کل}} &= \int_h \rho_{\text{کل}} \,\mathrm{d}h
\end{aligned}
$$

1486 لکھ سکتے ہیں۔

مسئلہ پھیلاو کے استعمال سے مساوات 5.29، مساوات 5.30 اور مساوات 5.34 کے نقطہ اشکال

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{P} &= -\rho_m \\
\epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \rho_{\text{کل}}
\end{aligned}
$$

اور

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{5.35}$$

1487 لکھے جا سکتے ہیں۔

1488 قلم میں دہراتے طرز پر ایٹم پائے جاتے ہیں۔ قلم میں عموماً کسی ایک سمت میں با آسانی جبکہ بقایا سمتوں میں مشکل سے تقطیب پیدا کرنا ممکن ہوتا ہے۔ جس سمت
1489 میں با آسانی تقطیب پیدا کی جا سکے اسے آسان محور[35] یا آسان سمت یا نرم محور کہتے ہیں۔۔ ایسے اشیاء جو مختلف اطراف میں مختلف خصوصیات رکھتے ہوں سمتی[36] اشیاء
1490 کہلاتے ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ یہ ضروری نہیں کہ بیرونی لاگو میدان اور تقطیب ایک ہی سمت میں ہوں۔ کچھ ایسے اشیاء بھی پائے جاتے ہیں جو برقی چال[37] کی خاصیت
1491 رکھتے ہیں۔ ان میں تقطیب کی قیمت ان اشیاء کی گزشتہ تاریخ پر مبنی ہوتی ہے۔ یہ عمل بالکل مقناطیسی مادے کی مقناطیسی چال کے طرز کی خصوصیت ہے۔

کچھ ذو برق اشیاء میں لاگو بیرونی میدان $\boldsymbol{E}$ اور تقطیب $\boldsymbol{P}$ ہر صورت ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں۔ ان اشیاء کی خصوصیات ہر طرف بالکل ایک ہی طرح ہوتی ہیں۔ ایسے اشیاء غیر سمتی[38] اشیاء کہلاتے ہیں۔ انجنیئرنگ میں استعمال ہونے والے ذو برق اشیاء عموماً ایسے ہی ہوتے ہیں۔ اس کتاب میں صرف انہیں پر تبصرہ کیا جائے گا۔ ایسے اشیاء میں تقطیب اور لاگو برقی میدان راست تناسب تعلق

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \chi_e \epsilon_0 \boldsymbol{E} \\
&= (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 \boldsymbol{E}
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

رکھتا ہے جہاں مساوات کے مستقل کو $\chi_e \epsilon_0$ یا $(\epsilon_R - 1)\epsilon_0$ لکھا جاتا ہے۔ یوں مساوات 5.33

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 \boldsymbol{E}$$

یا

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_R \epsilon_0 \boldsymbol{E} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{5.37}$$

[35] easy axis
[36] anisotropic
[37] ferroelectric
[38] isotropic

شکل اختیار کرتا ہے جہاں ذو برق کا برقی مستقل

$$\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0 \tag{5.38}$$

کے برابر ہے۔ ماہر طبیعیات عموماً χ_e جبکہ انجنیئر عموماً ϵ_R استعمال کرتے ہیں۔ ان کا تعلق

$$\chi_e = \epsilon_R - 1 \tag{5.39}$$

ہے۔

χ_e برقی اثر پذیری[39]، ϵ_R جزوی برقی مستقل[40] جبکہ ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل[41] کہلاتے ہیں۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 498 پر چند مخصوص اشیاء کے برقی مستقل جدول 16.2 میں دیئے گئے ہیں۔

غیر یکساں[42] خاصیت رکھنے والے اشیاء اتنے سادہ مساوات سے نہیں نپٹے جاتے۔ ان اشیاء میں $\boldsymbol{E}$ کا ہر کارتیسی جزو $\boldsymbol{D}$ کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہٰذا ان کا تعلق یوں

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned} \tag{5.40}$$

لکھا جاتا ہے جہاں نو اعدادی ϵ_{ij} کو مجموعی طور پر تناوی مستقل[43] کہا جاتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.40 کے طرز کے مساوات تناوی مساوات کہلاتے ہیں۔ غیر سمتی اشیاء میں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ (اور $\boldsymbol{P}$) آپس میں متوازی نہیں ہوتے اور اگرچہ $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ ان کے لئے بھی درست ہے، $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ استعمال کرتے وقت اس حقیقت کا خیال رکھنا ہو گا کہ ϵ اب تناوی مستقل ہے۔ غیر سمتی اشیاء پر ایک مثال کے بعد بحث روکتے ہیں۔

مثال 5.7: ایک غیر سمتی ذو برق کا تناوی مستقل

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

ہے۔ برقی میدان $\boldsymbol{E} = \sqrt{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{E} = \sqrt{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{E} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کی صورت میں $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{D} = 4\sqrt{3}\epsilon_0 \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{D} = 9\epsilon_0 \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon_0(4\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 9\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 9\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})$

اس مثال میں تینوں بار $|E| = \sqrt{3}$ رہا جبکہ D کی قیمتیں خاصی مختلف ہیں۔ یہی غیر سمتی ذو برق کی پہچان ہے۔

---

[39] electric susceptibility
[40] relative electric constant, relative permittivity
[41] permittivity of vacuum, electric constant of vacuum
[42] non homogeneous
[43] tensor

مشق 5.4: مندرجہ ذیل صورتوں میں تقطیب حاصل کریں۔ (الف) ذو برق میں $E = 5\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں $D = 1.2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ پایا جاتا ہے۔ (ب) $D = 2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ اور $\chi_e = 1.5$ ہیں۔ (پ) ذو برق میں 6×10^{20} مالیکیول فی مربع میٹر ہیں جہاں $E = 100\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$ پر ہر مالیکیول کا معیار جفت قطب $1.2 \times 10^{-26}\,\mathrm{C\,m}$ ہے۔

جوابات: $1.156\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$، $1.2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ اور $7.2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$

5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط

دو مختلف ذو برق کے سرحدی برقی شرائط[44] شکل 5.8 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں پہلے ذو برق کا برقی مستقل ϵ_1 جبکہ دوسرے ذو برق کا برقی مستقل ϵ_2 ہے۔ پہلے مماسی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر مستطیلی راستہ $abcd$ پر

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

یعنی

$$E_{m1}\Delta w - E_{n1,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{n2,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{m2}\Delta w + E_{n2,a}\frac{\Delta h}{2} + E_{n1,a}\frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھتے ہیں جس سے

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w + (E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ Δw اتنا چھوٹا لیا جاتا ہے کہ اس پر مماسی میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ مستطیل کے بائیں اور دائیں اطراف کے میدان کو زیر نوشت میں a اور b سے ظاہر کیا گیا ہے۔ سرحدی شرائط حاصل کرنے کی خاطر سطح کے قریب تر جانا ہو گا۔ ایسا کرنے سے $\Delta h \to 0$ ہو گا جس سے

$$(E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} \to 0$$

ہو کر قابل نظر انداز ہو گا۔ یوں

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w = 0$$

رہ جاتا ہے جس سے

$$E_{m1} = E_{m2} \tag{5.41}$$

حاصل ہوتا ہے جسے

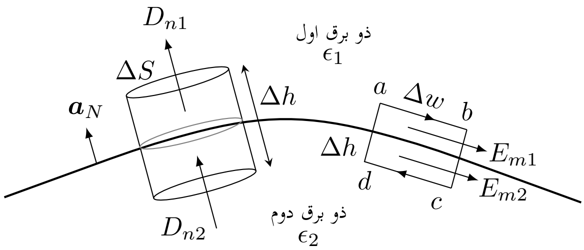
$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{E}1 - \boldsymbol{E}_2) = 0 \tag{5.42}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات سے

$$\frac{D_{m1}}{\epsilon_1} = E_{m1} = E_{m2} = \frac{D_{m2}}{\epsilon_2}$$

---

[44] boundary conditions



شکل 5.8: دو مختلف ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط۔

یعنی

$$\frac{D_{m1}}{D_{m2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tag{5.43}$$

یا

$$\boldsymbol{a}_N \times \left(\boldsymbol{D}_1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \boldsymbol{D}_2 \right) = 0 \tag{5.44}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 5.41 کہتا ہے کہ ایک ذو برق سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے سرحد پر مماسی برقی شدت بلا جوڑ[45] ہوتا ہے۔ اس کے برعکس مساوات 5.43 کہتا ہے کہ دو ذو برق کے سرحد پر مماسی برقی بہاو جوڑ دار[46] ہوتا ہے۔ یوں ایک ذو برق سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے مماسی برقی بہاو میں سیڑھی نما[47] تبدیلی پائی جاتی ہے۔

عمودی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر گاؤس کا قانون شکل میں رقبہ ΔS گھیرتے بیلن پر لاگو کرتے ہوئے

$$\int\limits_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int\limits_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int\limits_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int\limits_{\Delta S} \rho_S \,\mathrm{d}S \tag{5.45}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چھوٹے رقبہ پر میدان کو یکساں تصور کرتے ہوئے تکمل کے باہر لے جاتے ہوئے مساوات 5.45 کے پہلے جزو سے

$$\int\limits_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_{n1} \Delta S$$

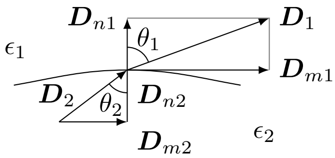
حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ بند سطح کی سمت باہر کو ہوتی ہے لہٰذا $\boldsymbol{D}_{n1}$ اور بیلن کا بالائی ڈھکن ایک ہی سمت رکھتے ہیں جبکہ $\boldsymbol{D}_{n2}$ اور بیلن کا نچلا ڈھکن الٹ سمت میں ہیں۔ مساوات 5.45 کا دوسرا جزو

$$\int\limits_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -D_{n2} \Delta S$$

دیتا ہے۔ سطح کے قریب سے قریب ہونے سے $\Delta h \to 0$ ہو گا جس سے نلکی سطح کا رقبہ قابل نظر انداز ہو گا جس سے مساوات 5.45 کا تیسرا جزو صفر ہو جاتا ہے جبکہ

$$\int\limits_{\Delta S} \rho_S \,\mathrm{d}S = \rho_S \Delta S$$

continuous[45]
discontinuous[46]
step[47]



شکل 5.9: $\epsilon_1 > \epsilon_2$ کی صورت میں $D_1 > D_2$ ہو گا۔اسی طرح $\theta_1 > \theta_2$ جبکہ $E_1 < E_2$ ہو گا۔

کے برابر ہے۔ان تمام نتائج سے

$$D_{n1}\Delta S - D_{n2}\Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_S \tag{5.46}$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S \tag{5.47}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔یوں $D = \epsilon E$ کے استعمال سے

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\epsilon_1 \boldsymbol{E}_1 - \epsilon_2 \boldsymbol{E}_2) = \rho_S \tag{5.48}$$

1515 حاصل ہوتا ہے۔

جزوی برقی مستقل کی مدد سے مقید چارج کا حساب رکھا جاتا ہے۔اس طرح مقید چارج کا علیحدہ طور پر خیال رکھنے کی ضرورت نہیں رہتی۔یوں مندرجہ بالا مساوات میں ρ_S مقید چارج نہیں ہے۔ ρ_S سرحد پر با مقصد طور رکھی گئی سطحی چارج کثافت ہے۔اس منفرد صورت، جہاں سرحد پر از خود چارج رکھا جائے، کے علاوہ دو ذو برق کی سرحد پر کبھی چارج نہیں پایا جاتا۔انجنیئرنگ مسائل میں عموماً $\rho_S = 0$ ہی ہوتا ہے۔ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات نسبتاً سادہ شکل

$$D_{n1} = D_{n2} \tag{5.49}$$

اختیار کر لیتی ہے جس سے

$$\epsilon_1 E_{n1} = D_{n1} = D_{n2} = \epsilon_2 E_{n2} \tag{5.50}$$

1516 لکھا جا سکتا ہے۔یوں سرحد پار کرتے وقت E_n میں سیڑھی نما تبدیلی پائی جاتی ہے۔اس حقیقت کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ سرحد پر E_n **جوڑ دار**[48] ہے۔اس کے
1517 برعکس D_n سرحد پر **بلا جوڑ** ہے۔

آئیں ان جوابات کی مدد سے سرحد کے دونوں جانب برقی میدان کا تعلق حاصل کریں۔شکل 5.9 کو دیکھتے ہوئے ہم

$$\begin{aligned}
D_{m1} &= D_1 \sin\theta_1 \\
D_{n1} &= D_1 \cos\theta_1 \\
D_{m2} &= D_2 \sin\theta_2 \\
D_{n2} &= D_2 \cos\theta_2
\end{aligned}$$

[48] discontinuous

لکھ سکتے ہیں جن سے

$$\begin{aligned} \frac{D_{n1}}{D_{n2}} &= \frac{D_1 \cos\theta_1}{D_2 \cos\theta_2} = 1 \\ \frac{D_{m1}}{D_{m2}} &= \frac{D_1 \sin\theta_1}{D_2 \sin\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 5.49 اور مساوات 5.43 کا استعمال کیا گیا ہے۔ انہیں

$$\begin{aligned} D_1 \cos\theta_1 &= D_2 \cos\theta_2 \\ \epsilon_2 D_1 \sin\theta_1 &= \epsilon_1 D_2 \sin\theta_2 \end{aligned} \tag{5.51}$$

لکھ سکتے ہیں۔ ان میں دوسری مساوات کو پہلی مساوات سے تقسیم کرتے ہیں

$$\frac{\epsilon_2 D_1 \sin\theta_1}{D_1 \cos\theta_1} = \frac{\epsilon_1 D_2 \sin\theta_2}{D_2 \cos\theta_2}$$

جس سے

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tag{5.52}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات سرحد کے دونوں جانب میدان کے زاویوں کا تعلق بیان کرتا ہے۔ چونکہ $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ ہوتا ہے لہٰذا سرحد کے کسی بھی طرف، اس
1519 طرف کا $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ ایک ہی سمت رکھتے ہیں۔ شکل میں $\epsilon_1 > \epsilon_2$ تصور کیا گیا ہے لہٰذا اس میں $\theta_1 > \theta_2$ ہے۔

مساوات 5.51 کے پہلے جزو کا مربع لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} D_1^2 \cos^2\theta_1 &= D_2^2 \cos^2\theta_2 \\ &= D_2^2 (1 - \sin^2\theta_2) \\ &= D_2^2 - D_2^2 \sin^2\theta_2 \end{aligned}$$

اس میں مساوات 5.51 کے دوسرے جزو سے $D_2 \sin\theta_2$ کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$D_1^2 \cos^2\theta_1 = D_2^2 - D_1^2 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1} \tag{5.53}$$

ملتا ہے۔ چونکہ $E = \frac{D}{\epsilon}$ ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے

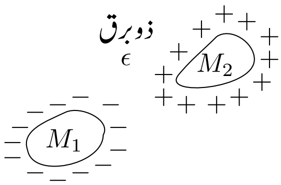
$$\begin{aligned} E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} &= \frac{D_1}{\epsilon_2} \sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1} \\ &= \frac{\epsilon_1 E_1}{\epsilon_2} \sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1} \end{aligned}$$

یعنی

$$E_2 = E_1 \sqrt{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2 \cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1} \tag{5.54}$$

1520 حاصل ہوتا ہے۔

1521 جس جانب برقی مستقل کی قیمت زیادہ ہو، سرحد کے اسی طرف D کی قیمت بھی زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ہوں جس صورت میں $D_2 = $
1522 D_1 ہوتا ہے۔ اسی طرح کم ϵ جانب E کی قیمت زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1 = \theta_2 = 90$ ہوں جس صورت میں $E_2 = E_1$ ہوتا ہے۔



شکل 5.10: کپیسٹنس کی تعریف۔

5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط

موصل اور ذو برق کے سرحد پر صورت حال تقریباً ویسے ہی ہے جیسے موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر تھی۔ موصل میں $\boldsymbol{E} = 0$ ہونے کی وجہ سے سرحد پر مستطیلی راستے پر کرچاف کے قانون سے ذو برق میں $E_m = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح $D_m = \frac{E_m}{\epsilon} = 0$ ہو گا۔

اسی طرح سرحد پر چھوٹا بیلن $\rho_S \Delta S$ چارج کو گھیرے گا جو گاوس کے قانون کی مدد سے بیلن کے ذو برق جانب ڈھکن پر عمودی بہاو $D_n \Delta S$ پیدا کرے گا۔ یوں $D_n = \rho_S$ حاصل ہوتا ہے جس سے $E_n = \frac{D_n}{\epsilon} = \frac{\rho_S}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔

ان نتائج سے صاف ظاہر ہے کہ موصل اور ذو برق کے سرحد پر برقی میدان کے جوابات موصل اور خالی خلاء کے سرحد کے جوابات میں ϵ_0 کی جگہ ϵ پر کرنے سے حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} D_m &= E_m = 0 \\ D_n &= \epsilon E_n = \rho_S \end{aligned} \tag{5.55}$$

5.10 کپیسٹر

شکل 5.10 میں دو عدد موصل M_1 اور M_2 دکھائے گئے ہیں جن کے گرد ذو برق پایا جاتا ہے۔ M_1 پر کل $-Q$ اور M_2 پر کل $+Q$ چارج پایا جاتا ہے۔ ان چارجوں کے علاوہ پورے نظام میں کوئی اور چارج نہیں پایا جاتا۔ یوں پورا نظام غیر چارج شدہ ہے۔ چونکہ موصل پر صرف سطحی چارج پایا جاتا ہے لہٰذا دونوں موصل پر چارج سطحی چارج کثافت کی صورت میں پایا جائے گا۔

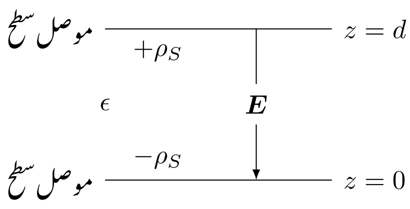
گاوس کے قانون کے تحت M_2 سے عمودی سمت میں $+Q$ کے برابر برقی بہاو کا اخراج اور M_1 پر عمودی سمت میں اتنی ہی برقی بہاو کا دخول ہو گا۔ یوں موصل کے گرد ذو برق میں کثافت برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ پائی جائے گی۔ $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ کی ابتدا M_2 سے ہو گی اور ان کا اختتام M_1 پر ہو گا۔

اس برقی میدان میں کسی بھی راستے ایک کولمب کا چارج M_1 تا M_2 منتقل کرنے کی خاطر V_0 توانائی درکار ہو گی۔ موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے لہٰذا پہلے موصل کی سطح سے کسی بھی نقطے سے دوسرے موصل کی سطح پر کسی بھی نقطے تک چارج منتقل کرنے کی خاطر برابر توانائی درکار ہوتی ہے۔

کپیسٹنس C[49] کی تعریف

$$C = \frac{Q}{V_0} \tag{5.56}$$

[49] capacitance



شکل 5.11: متوازی چادر کپیسٹر۔

ہے جہاں M_1 کو صفر برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے M_2 کی برقی دباو V_0 اور مثبت موصل یعنی M_2 کا چارج Q ہے۔ منفی موصل سے مثبت موصل تک اکائی مثبت چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی V_0 کو تکمل کے ذریعے حاصل کیا جاتا ہے۔اسی طرح مثبت موصل پر چارج Q کو گاوس کے قانون کی مدد سے بذریعہ سطحی تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔یوں صفحہ 71 پر مساوات 3.6 اور صفحہ 99 پر مساوات 4.11 کی مدد سے کپیسٹنس کی عمومی مساوات

$$C=\frac{\oint_S \epsilon \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{-\int_-^+ \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}} \tag{5.57}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

دونوں موصل پر چارج دگنا کرنے سے گاوس کے قانون کے تحت برقی بہاو بھی دگنی ہو جائے گی۔یوں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ بھی دگنے ہوں گے جس سے دونوں موصل کے مابین برقی دباو بھی دگنا ہو گا۔اس طرح دگنا چارج تقسیم دگنا دباو ایک بار پھر وہی کپیسٹنس دے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کپیسٹنس کی قیمت کا دار و مدار موصل کے اشکال، ان کے درمیان فاصلہ اور برقی مستقل پر منحصر ہے ناکہ موصل پر کل چارج کے۔

کپیسٹنس کی اکائی فیراڈ[50] ہے جسے F سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ایک کولمب فی وولٹ ایک فیراڈ[51] کے برابر ہے۔ایک فیراڈ نہایت بڑی قیمت ہے اور عام طور کپیسٹنس کو مائیکرو فیراڈ µF یا پیکو فیراڈ pF میں ناپا جاتا ہے۔

5.10.1 متوازی چادر کپیسٹر

شکل 5.11 میں دو لامحدود متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں۔ نچلی چادر $z=0$ پر ہے اور اس پر سطحی چارج کثافت $-\rho_S$ پائی جاتی ہے جبکہ بالائی چادر $z=d$ پر ہے اور اس پر سطحی چارج کثافت $+\rho_S$ پائی جاتی ہے۔اس مسئلے کو ہم پہلے تفصیلی طور پر دیکھ چکے ہیں۔دو چادروں کے درمیان میدان صفحہ 54 پر مساوات 2.44 دیتا ہے جہاں مثبت چادر $x=0$ اور منفی چادر $x=x_1$ پر رکھے گئے تھے۔یوں موجودہ شکل کے مطابق مساوات 2.44 کی صورت

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\rho_S}{\epsilon}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہو گی۔میدان مثبت سے منفی چادر کی سمت میں ہے۔مثبت سطح سے خارج برقی بہاو کی کثافت مثبت ہے یعنی اس سطح پر عمودی $D_+=\rho_S$ کے برابر ہے جبکہ منفی چادر پر برقی بہاو داخل ہوتا ہے لہٰذا یہاں $D_-=-\rho_S$ ہو گا۔

منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر

$$V=-\int_0^d \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=\int_0^d \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\epsilon}\cdot \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}=\int_0^d \frac{\rho_S}{\epsilon}\,\mathrm{d}z=\frac{\rho_S d}{\epsilon}$$

[50]Farad
[51]یہ اکائی انگلستانی ماہر طبیعیات مائکل فیراڈے کے نام سے منسوب ہے۔

برقی دباو ہو گا۔ لا محدود چادر پر لا محدود چارج پایا جائے گا جس سے چادر لا محدود کپیسٹنس کا حامل ہو گا۔ حقیقی کپیسٹر محدود رقبے کے چادر سے بنائے جاتے ہیں۔ اگر محدود رقبے کے متوازی چادروں کے اطراف کی لمبائیاں سطحوں کے مابین فاصلے سے زیادہ ہو تو ایسی صورت میں چادروں کے درمیانی خطے میں برقی میدان لا محدود چادروں کے میدان کی مانند ہی ہو گا۔ S رقبے کے چادروں کے کپیسٹر کو لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مثبت چادر پر کل

$$Q = \int_S \rho_S \, \mathrm{d}S = \rho_S S$$

چارج پایا جائے گا۔ یوں اس کی کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon S}{d} \tag{5.58}$$

ہو گی۔ کپیسٹر کے کناروں کے قریب میدان پھول کر کپیسٹر سے باہر نکلے گا۔ میدان کے پھولنے[52] کو ہم نے نظرانداز کیا ہے۔ کپیسٹنس کی قیمت رقبہ بڑھا کر اور چادروں کے درمیان فاصلہ کم کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح چادروں کے درمیان زیادہ سے زیادہ برقی مستقل کا ذو برق استعمال کرتے ہوئے کپیسٹنس بڑھائی جا سکتی ہے۔

بلند تر تعدد پر چلنے والے کپیسٹر ابرق استعمال کرتے ہوئے بنائے جاتے ہیں۔ ابرق کپیسٹر[53] انتہائی کم برقی طاقت ضائع کرتا ہے۔ ابرق کی پتری کے دونوں جانب موصل مادے کی تہہ چڑھا[54] کر کپیسٹر تیار کیا جاتا ہے۔

مثال 5.8: ایک ملی میٹر کے ایک چوتھائی موٹا اور ایک سنٹی میٹر اطراف کے مربع ابرق کے پتری کے دونوں جانب المونیم کی تہہ چڑھا کر کپیسٹر تیار کیا گیا۔ اس کی کپیسٹنس دریافت کریں۔

حل: کتاب کے آخر میں جدول 16.2 سے ابرق کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_R = 5.4$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$C = \frac{5.4 \times 0.01^2}{36\pi \times 10^9 \times 0.25 \times 10^{-3}} = 19.1\,\mathrm{pF}$$

حاصل ہوتا ہے۔

5.10.2 ہم محوری کپیسٹر

صفحہ 102 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہم محوری تار کے دو تاروں کے درمیان برقی دباو دیتا ہے جہاں اندرونی تار پر لکیری چارج کثافت ρ_L ہے۔ بیرونی تار کو برقی زمین تصور کیا گیا ہے۔ L لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی تار پر یوں $Q = \rho_L L$ چارج پایا جائے گا۔ اس طرح اتنی تار کا کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_L L}{\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{5.59}$$

ہو گا جہاں اندرونی تار کا رداس ρ_1 جبکہ بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔

---

[52] fringing
[53] mica capacitor
[54] deposit

1556 ### 5.10.3 ہم کوہ کپیسٹر

محدد کے مرکز پر r_A اور r_B رداس کے موصل کرہ سطح ہیں جہاں $r_B > r_A$ ہے۔اندرونی سطح پر $+Q$ اور بیرونی سطح پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔گاوس کے قانون کے تحت اندرونی سطح کے اندر یعنی $r < r_A$ اور بیرونی سطح باہر یعنی $r > r_B$ پر میدان صفر ہوگا۔دونوں سطحوں کے درمیان میدان بالکل ایسا ہی ہوگا جیسے محدد کے مرکز پر نقطہ چارج $+Q$ کا میدان ہوتا ہے۔یوں بیرونی سطح کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی سطح پر برقی دباو صفحہ 101 پر مساوات 4.13

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس طرح ان سطحوں کا کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}} \tag{5.60}$$

1557 ہوگا۔

ایک دلچسپ صورت حال کو دیکھتے ہیں۔اگر r_B کو لامحدود کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات سے

$$C = 4\pi\epsilon R \qquad \text{کرہ کی کپیسٹنس} \tag{5.61}$$

1558 حاصل ہوتا ہے جہاں r_A کی جگہ R لکھا گیا ہے۔یہ مساوات رداس R کرہ کی کپیسٹنس دیتا ہے۔یاد رہے کہ اس کپیسٹر کی دوسری سطح لامحدود فاصلے پر ہے۔

1559

1560 مثال 5.9: آپ نے بچپن میں بلور تو کھیلیں ہوں گے۔بلور کا قطر تقریباً ایک سنٹی میٹر ہوتا ہے۔خالی خلاء میں موصل بلور کی کپیسٹنس حاصل کریں۔

حل:

$$C = \frac{0.5 \times 10^{-2}}{9 \times 10^9} = 0.55\,\mathrm{pF}$$

1561

---

r_A رداس کے چارج بردار موصل بلور کے اوپر r_A تا r_1 برقی مستقل ϵ_1 کے ذو برق کی تہہ چڑھانے سے $\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کی بدولت

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} & (r_A < r < r_1) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} & (r > r_1) \end{cases}$$

ہوگا۔برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر رکھتے ہوئے بلور کا برقی دباو

$$\begin{aligned} V &= -\int_{\infty}^{r_1} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_1 r^2} - \int_{r_1}^{r_A} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_1 r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_1}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1}\right) \end{aligned}$$

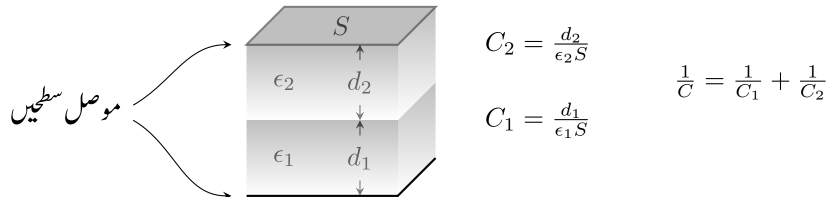
ہوگا جس سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1}\right)} \tag{5.62}$$

1562 حاصل ہوتی ہے۔

1563 5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر

متوازی چادر کپیسٹر میں دو مختلف ذو برق بھرنے کا کپیسٹنس پر اثر دیکھتے ہیں۔ایسا کپیسٹر شکل 5.12 میں دکھایا گیا ہے۔چادروں کے درمیان فاصلہ چادر کے اطراف کی لمبائیوں سے نہایت کم ہونے کی صورت میں انہیں لامحدود دو چادروں کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔ منفی چادر پر ϵ_1 برقی مستقل کی d_1 موٹائی کی تہہ اور مثبت چادر پر ϵ_2 برقی مستقل کی d_2 موٹائی کی تہہ ہیں۔ نفی چادر پر $-\rho_S$ جبکہ مثبت چادر پر $+\rho_S$ سطحی چارج کثافت کی صورت میں چادروں کے درمیان $D = \rho_S$ ہو گا۔یوں ϵ_1 ذو برق کے خطے میں



شکل 5.12: سلسلہ وار کپیسٹر۔

$$E_1 = \frac{\rho_S}{\epsilon_1}$$

جبکہ ϵ_2 ذو برق کے خطے میں

$$E_2 = \frac{\rho_S}{\epsilon_2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\rho_S d_1}{\epsilon_1} + \frac{\rho_S d_2}{\epsilon_2}$$

ہو گا جبکہ مثبت چادر پر چارج $Q = \rho_S S$ ہو گا جس سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

یعنی

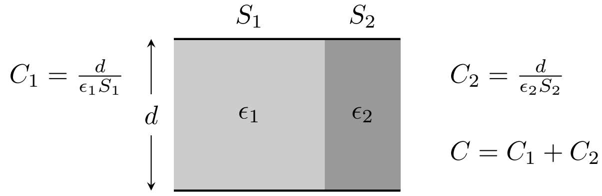
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{5.63}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{d_1}{\epsilon_1 S} \\ C_2 &= \frac{d_2}{\epsilon_2 S} \end{aligned} \tag{5.64}$$

1564 کے برابر ہیں۔یہی جواب شکل 5.12 میں سلسلہ وار جڑے C_1 اور C_2 کی نشاندہی کرتے ہوئے لکھا جا سکتا ہے۔

1565 آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل متوازی دو چادروں کے درمیان تیسرے اور چوتھے ذو برق کے تہہ دئے جا سکتے ہیں۔انہیں سلسلہ وار کپیسٹر تصور کرتے ہوئے
1566 حل کیا جا سکتا ہے۔



شکل 5.13: متوازی جڑے کپیسٹر۔

شکل 5.13 میں دو چادروں کے درمیان دو مختلف ذو برق اس طرح بھرے گئے ہیں کہ یہ متوازی جڑے کپیسٹر کو جنم دیں۔ ہم شکل کو دیکھ کر ہی

$$C = C_1 + C_2 \tag{5.65}$$

لکھ سکتے ہیں۔ آئیں اتنی جلدی کرنے کی بجائے اس مسئلے کا ریاضیاتی حل نکالیں۔ دونوں موصل چادر ہم قوہ ہیں لہٰذا نچلی چادر کو برقی زمین یعنی صفر وولٹ اور دوسری چادر کو V_0 برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں چادروں کے درمیان خطے میں $E = \frac{V_0}{d}$ ہو گا جس سے بائیں ہاتھ، یعنی ϵ_1 برقہ مستقل کے ذو برق میں $D_1 = \epsilon_1 E$ جبکہ دائیں ہاتھ کے ذو برق میں $D_2 = \epsilon_2 E$ ہوں گے۔ D_1 اور D_2 موصل چادروں کے عمودی ہیں لہٰذا سرحدی شرائط کے تحت مثبت چادر کے S_1 حصے پر $\rho_1 = D_1$ جبکہ اس کے S_2 حصے پر $\rho_2 = D_2$ ہو گا۔ یوں مثبت چادر پر کل چارج

$$Q = \rho_1 S_1 + \rho_2 S_2 = \epsilon_1 \frac{V_0}{d} S_1 + \epsilon_2 \frac{V_0}{d} S_2$$

سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d}$$

یعنی

$$C = C_1 + C_2 \tag{5.66}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\epsilon_1 S_1}{d} \\ C_2 &= \frac{\epsilon_2 S_2}{d} \end{aligned} \tag{5.67}$$

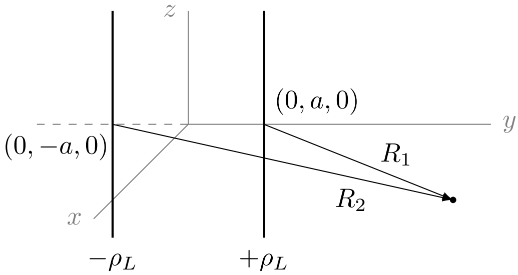
1567 کے برابر ہیں۔

1568 5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس

1569 شکل 5.14 میں دو لامحدود لمبائی کے تار z محدد کے متوازی دکھائے گئے ہیں۔ ہم ایسے متوازی جوڑی کی کپیسٹنس حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ ہم قوہ تار کی طرح دو متوازی
1570 تار بھی انتہائی اہم ہیں اور ان سے زندگی میں بار بار واسطہ پڑتا ہے۔

ایک تار جو $(0, a, 0)$ سے گزرتی ہے پر مثبت لکیری چارج کثافت $+\rho_L$ پایا جاتا ہے جبکہ دوسری تار جو $(0, -a, 0)$ سے گزرتی ہے پر منفی لکیری چارج کثافت $-\rho_L$ پایا جاتا ہے۔ z محدد پر لامحدود لمبائی کے لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو صفحہ 102 پر مساوات 4.16

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1}$$



شکل 5.14: دو متوازی تاروں کی کپیسٹنس۔

دیتا ہے جہاں برقی میدان کو ρ_0 پر تصور کیا گیا۔ اس مساوات کو شکل 5.14 کے لئے ترتیب دیتے ہوئے دونوں تاروں کا مجموعی برقی دباو

$$V=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\left(\ln\frac{R_{10}}{R_1}-\ln\frac{R_{20}}{R_2}\right)=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{R_{10}R_2}{R_{20}R_1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $R_{10}=R_{20}$ رکھا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$V=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ سطح $y=0$ پر $R_{10}=R_{20}$ ہو گا لہٰذا دراصل ہم برقی زمین کو $y=0$ سطح پر رکھ رہے ہیں۔ اب R_1 اور R_2 کو x اور y کی صورت

$$\boldsymbol{R}_1=x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+(y-a)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$
$$\boldsymbol{R}_2=x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+(y+a)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

میں لکھتے ہوئے

$$V=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln\sqrt{\frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2}}=\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2}\tag{5.68}$$

یا

$$e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V}{\rho_L}}=\frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2}\tag{5.69}$$

1571 لکھا جا سکتا ہے۔

ہم قوہ سطحیں حاصل کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو کسی اٹل برقی دباو مثلاً V_1 کے لئے لکھ کر حل کرتے ہیں۔ چونکہ V_1 اٹل یا مستقل قیمت ہے جو تبدیل نہیں ہوتا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں

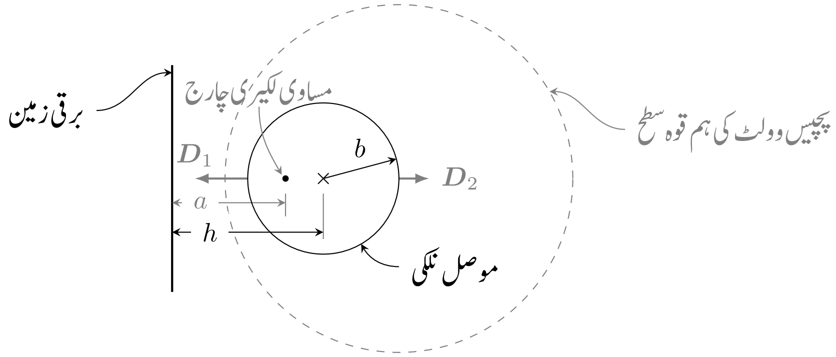
$$K_1=e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\rho_L}}\tag{5.70}$$

لکھ کر اسے

$$K_1=\frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے حل کرتے ہوئے

$$x^2+y^2-2ay\frac{K_1+1}{K_1-1}=-a^2$$



شکل 5.15: زمین کے قریب موٹی تار کا کپیسٹنس۔

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات کے دونوں جانب $a^2\frac{(K_1+1)^2}{(K_1-1)^2}$ جمع کرتے ہوئے یوں

$$x^2+\left[y-a\left(\frac{K_1+1}{K_1-1}\right)\right]^2=\left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}\right)^2 \tag{5.71}$$

لکھا جا سکتا ہے جو رداس $\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}$ کے گول دائرے کی مساوات ہے جس کا مرکز $[0, \frac{a(K_1+1)}{K_1-1}]$ پر ہے۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ ہم قوہ سطح z کی قیمت پر منحصر نہیں ہے یعنی یہ نلکی شکل رکھتی ہے۔ مساوات 5.71 میں

$$\begin{aligned} b&=\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}\\ h&=a\left(\frac{K_1+1}{K_1-1}\right) \end{aligned} \tag{5.72}$$

لکھتے ہوئے اسے

$$x^2+(y-h)^2=b^2 \tag{5.73}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں ان نتائج پر غور کریں۔

شکل 5.14 کو عکس کے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے $y=0$ پر برقی زمین رکھتے ہوئے منفی چارج کثافت کے تار کو ہٹانے سے زمین کے دائیں جانب میدان میں کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہو گی۔ دائیں جانب اب بھی ہم قوہ سطحیں b رداس کے دائرے بنائے گیں جن کا مرکز زمین سے h فاصلے پر ہو گا۔ ہم قوہ سطح کے رداس اور h کا دارومدار K_1 پر ہے جو از خود V_1 پر منحصر ہے۔ ہم مختلف برقی دباو $V_2, V_3, \dots$ کے لئے $K_2, K_3, \dots$ حاصل کرتے ہوئے ایسے ہم قوہ سطحوں کے رداس اور زمین سے ان کے مرکز کے فاصلے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم V_1 ہم قوہ سطح کی جگہ V_1 برقی دباو کی موصل سطح رکھ سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے میدان پر کہیں بھی کوئی اثر نہیں آئے گا۔

آئیں ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود سیدھی موصل سطح سے h فاصلے پر b رداس کے موصل نلکی کی کپیسٹنس حاصل کریں۔ یہ صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔ یہاں h اور b دیے گئے ہیں جن سے مساوات 5.72 کی مدد سے a، K_1 اور یوں V_1 معلوم کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 5.72 کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a&=\sqrt{h^2-b^2}\\ K_1&=\left(\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}\right)^2 \end{aligned} \tag{5.74}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس سے

$$V_1=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}$$

1578 حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ زمین صفر وولٹ اور موصل نلکی V_1 وولٹ پر ہے لٰہذا ان کے درمیان V_1 برقی دباو ہو گا۔

شکل 5.14 میں مثبت تار کے L لمبائی پر کل چارج $Q=\rho_L L$ پایا جاتا ہے۔ شکل 5.15 میں بھی برقی زمین کے اتنے ہی لمبائی پر اتنے ہی مقدار مگر منفی چارج ہو گا جبکہ b رداس کے موصل نلکی پر یہی $Q=\rho_L L$ چارج ہو گا۔ یوں L لمبائی کے موصل نلکی اور زمین کے درمیان

$$C=\frac{Q}{V_1}=\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}}=\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\cosh^{-1}\frac{h}{b}} \tag{5.75}$$

1579 کپیسٹنس پایا جائے گا۔

زمین سے دور کم موٹائی کے تار کی صورت میں $h\gg b$ ہو گا لٰہذا مساوات 5.75

$$C=\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\frac{2h}{b}}\qquad h\gg b \tag{5.76}$$

صورت اختیار کر لے گا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔ شکل 5.14 میں دو تاروں کے درمیان کپیسٹنس مساوات 5.75 کے جواب کا نصف ہو گا چونکہ مثبت تار اور زمین کے مابین کپیسٹر اور منفی تار اور زمین کے مابین کپیسٹر کو سلسلہ وار جڑا تصور کیا جا سکتا ہے۔ 1581

1582 کچھ حقائق مثال کی مدد سے بہتر سمجھ آتے ہیں۔ آئیں مثال 5.10 کی مدد سے ایسی چند باتیں سیکھیں۔

1583

1584 مثال 5.10: برقی زمین کے متوازی خالی خلاء میں دس میٹر کے فاصلے پر پانچ میٹر رداس کی موصل نلکی پائی جاتی ہے جس پر پچاس وولٹ کا برقی دباو ہے۔

- 1585 نلکی پر لکیری چارج کثافت حاصل کریں۔
- 1586 ایک میٹر لمبائی کے لئے نلکی اور زمین کے مابین کپیسٹنس حاصل کریں۔
- 1587 پچیس وولٹ ہم قوہ سطح کا رداس اور زمین سے اس کے مرکز کا فاصلہ حاصل کریں۔
- 1588 زمین سے ایسی لکیری چارج کثافت کا فاصلہ دریافت کریں جو ہو بہو ایسی ہی ہم قوہ سطحیں پیدا کرے گا۔
- 1589 نلکی پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

1590 حل: صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔

- یہاں $h=10$ جبکہ $b=5$ ہیں لہٰذا مساوات 5.74 کی مدد سے

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{10^2-5^2} = 8.66\,\mathrm{m}\\
K_1 &= \left(\frac{10+\sqrt{10^2-5^2}}{5}\right)^2 = 13.92
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 5.70 کے استعمال سے یوں

$$
\rho_L = \frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\ln K_1} = \frac{50}{9\times10^9\times\ln 13.92} = 2.11\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}
$$

1591 حاصل ہوتا ہے۔

- مساوات 5.75 یا کپیسٹنس کی تعریف سے فی میٹر کپیسٹنس حاصل کرتے ہیں۔

$$
C = \frac{\rho_L L}{V_1} = \frac{2.11\times10^{-9}\times 1}{50} = 4.22\,\mathrm{nF}
$$

- پچیس وولٹ ہم قوہ سطح کے لئے مساوات 5.70 سے

$$
K_2 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_2}{\rho_L}} = e^{\frac{25}{9\times10^9\times2.11\times10^{-9}}} = 3.73
$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 5.72 سے پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح کے لئے

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{2\times 8.66\times\sqrt{3.73}}{3.73-1} = 12.25\,\mathrm{m}\\
h &= 8.66\times\left(\frac{3.73+1}{3.73-1}\right) = 15\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

1592 حاصل ہوتے ہیں۔ پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح جس کا رداس سوا بارہ میٹر اور جو زمین سے پندرہ میٹر کے فاصلے پر ہے کو شکل میں ہلکی سیاہی سے نقطہ دار گول
1593 دائرے سے دکھایا گیا ہے۔

- 1594 برقی زمین سے $8.66\,\mathrm{m}$ فاصلے پر $2.11\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ لکیری چارج کثافت کی باریک تار بالکل اسی طرز کے ہم قوہ سطحیں پیدا کرے گا۔

- 1595 کسی بھی جگہ $\boldsymbol{E}$ کو مساوات 5.68

$$
V = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln(x^2+(y+a)^2) - \ln(x^2+(y-a)^2)\right]
$$

کے ڈھلوان $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس سے

$$
\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} = -\epsilon_0\nabla V = -\epsilon_0\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)
$$

بھی حاصل ہوتا ہے جہاں

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2x}{x^2+(y+a)^2} - \frac{2x}{x^2+(y-a)^2}\right]\\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(y+a)}{x^2+(y+a)^2} - \frac{2(y-a)}{x^2+(y-a)^2}\right]
\end{aligned}
$$

1596 کے برابر ہیں۔

چونکہ موصل کے سطح پر $\boldsymbol{D}$ عمودی ہوتا ہے اور اس کی قیمت سطحی چارج کثافت کے برابر ہوتی ہے لہٰذا ہم موصل نلکی پر برقی زمین کے قریبی جانب $\boldsymbol{D}_1$ اور اس سے دور جانب $\boldsymbol{D}_2$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ انہیں شکل 5.15 میں دکھایا گیا ہے۔ زمین سے نلکی کا قریبی فاصلہ $h-b = 5\,\mathrm{m}$ ہے۔ یوں $x=0$ اور $y=5$ ہو گا جس سے

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2\times 0}{0^2+(5+8.66)^2}-\frac{2\times 0}{0^2+(5-8.66)^2}\right]=0$$
$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(5+8.66)}{0^2+(5+8.66)^2}-\frac{2(5-8.66)}{0^2+(5-8.66)^2}\right]=\frac{0.693\rho_L}{4\pi\epsilon_0}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$\boldsymbol{D}_1=-\frac{0.693\rho_L}{4\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

ہو گا۔ زمین سے دور نلکی پر $x=0$ اور $y=h+b=10+5=15\,\mathrm{m}$ ہیں جس سے

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2\times 0}{0^2+(15+8.66)^2}-\frac{2\times 0}{0^2+(15-8.66)^2}\right]=0$$
$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(15+8.66)}{0^2+(15+8.66)^2}-\frac{2(15-8.66)}{0^2+(15-8.66)^2}\right]=-\frac{0.231\rho_L}{4\pi\epsilon_0}$$

یا

$$\boldsymbol{D}_2=\frac{0.231\rho_L}{4\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دونوں جوابات سے ظاہر ہے کہ بہاو کا اخراج سطح کے عمودی ہے۔ یوں موصل نلکی پر

$$\rho_{S\,\text{قریبی}}=\frac{0.693\rho_L}{4\pi}$$
$$\rho_{S\,\text{دور}}=\frac{0.231\rho_L}{4\pi}$$

پایا جائے گا۔ یاد رہے کہ قریبی جانب منفی جواب کا مطلب ہے کہ اخراج زمین کی جانب ہے جبکہ دور جانب مثبت جواب کا مطلب ہے کہ اخراج $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب
1598 ہے۔ دونوں جانب اخراج ہی ہے لہٰذا سطحی چارج کثافت دونوں جگہوں پر مثبت ہی ہے۔

1599

1600 اس مثال سے صاف ظاہر ہے کہ نلکی کا چارج بالکل اس طرح عمل کرتا ہے جیسے برقی زمین سے $8.66\,\mathrm{m}$ فاصلے پر باریک چارج بردار تار جس پر $2.11\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ پایا
1601 جاتا ہو۔ نلکی سے پیدا اہم قوہ سطحیں اسی فرضی لکیری چارج کثافت کے تار سے حاصل کی جاتی ہیں۔

1602

1603 مشق 5.5: مساوات 5.74 کو ثابت کریں۔

1604

باب 16

سوالات

16.1 موصل

سوال16.1: نلکی محدد میں کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = 50e^{-1.5z}(\rho^2 \boldsymbol{a}_\rho + \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$ دی گئی ہے۔الف) سطح $z = 0$ اور $z = 1$ پر رداس $0 < \rho < 1$ کی ٹکیا سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت میں گزرتی برقی رو دریافت کریں۔ب) بند بیلن $0 \le \rho \le 1$ ، $0 \le z \le 1$ سے خارج کل برقی رو حاصل کریں۔

جوابات: $157\,\mathrm{A}$ ، $35\,\mathrm{A}$ ، $41\,\mathrm{A}$

سوال16.2: کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = \frac{550 \sin 2\theta}{r^2+6}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$ دی گئی ہے۔کروی سطح $r = 0.5$ ، $0.1\pi \le \theta \le 0.25\pi$ ، $0 \le \phi \le 2\pi$ سے رداسی سمت میں خارج کل برقی رو حاصل کریں۔اس سطح پر اوسط کثافت برقی رو دریافت کریں۔

جوابات: $29.86\,\mathrm{A}$ ، $77.9\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$

سوال16.3: دو متوازی سطحیں $z = 0$ اور $z = 10\,\mathrm{mm}$ پر پائے جاتے ہیں جن کے درمیان $1000\,\mathrm{V}$ کا برقی دباو ہے۔نچلی سطح سے الیکٹران صفر ابتدائی رفتار کے ساتھ خارج ہو کر بالائی سطح کی جانب اسراع پذیر ہوتے ہیں جہاں انہیں وصول کیا جاتا ہے۔الیکٹران کا چارج $-1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ جبکہ اس کی کمیت $9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ ہے۔نچلی سطح سے کل $50\,\mu\mathrm{A}$ برقی رو $0.1\,\mathrm{mm}$ رداس کے شعاع کی صورت میں خارج ہوتی ہے۔چادروں کے درمیان E حاصل کریں۔اسراع پذیر الیکٹران کی رفتار $v(t)$ کی مساوات حاصل کریں۔اسی طرح $z(t)$ اور $v(z)$ بھی حاصل کریں۔کثافت برقی رو اور حجمی کثافت چارج کے مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $a(t) = -10^5 \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $v(t) = 1.758 \times 10^{16} t\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ، $z(t) = 8.792 \times 10^{15} t^2\,\mathrm{m}$ ، $v(z) = 1.87 \times 10^8 \sqrt{z}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ، $1592\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$ ، $\frac{-8.51 \times 10^{-6}}{\sqrt{z}}\,\mathrm{C/m^3}$

سوال16.4: کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = \frac{J_0 e^{-\alpha z}}{(y+1)(x+1)} \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی صورت میں سطح $z = 0$ ، $0 < x < 1$ ، $0 < y < 1$ سے گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: $0.48 J_0$

سوال16.5: کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = 3xyz\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 2x^2yz^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5xy^2z^2$ کی صورت میں نقطہ $N(7, -4, 2)$ پر $1\,\mathrm{m}$ لمبائی اطراف کے مکعب سے کتنی برقی رو خارج ہوتی ہے؟مکعب کے اطراف کارتیسی محدد کے متوازی ہیں جبکہ نقطہ N اس کا وسطی نقطہ ہے۔مکعب میں چارج کس شرح سے بڑھ رہی ہے؟

جواب: $1875\,\mathrm{A}$ ، $-1875\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$

سوال 16.6: سلیکان کی موصلیت $1200\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ سلیکان کا پچر $0 \le z \le 0.08$ ، $0.02 \le \rho \le 0.07$ ، $0 \le \phi \le 0.3\pi$ شکل رکھتا ہے۔ برقی شدت $\boldsymbol{E} = \frac{0.005}{\rho}\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں پچر میں برقی رو اور اس کی مزاحمت حاصل کریں۔

جوابات: $0.6\,\mathrm{A}$ ، $6\,\mathrm{m\Omega}$

سوال 16.7: برقی شدت $\boldsymbol{E} = \frac{0.005}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہونے کی صورت میں سوال 16.6 کو دوبارہ حل کریں۔

جوابات: $0.3468\,\mathrm{A}$ ، $18\,\mathrm{m\Omega}$

سوال 16.8: پاکستان میں برقی طاقت کی پیداوار اور منتقلی واپڈا[1] کے ذمہ ہے۔ اگرچہ تانبہ کی موصلیت نہایت عمدہ ہے لیکن تانبہ مہنگا عنصر ہے لہٰذا برقی طاقت کے منتقلی کے لئے المونیم کی تار استعمال کی جاتی ہے۔ المونیم از خود کمزور عنصر ہے لہٰذا المونیم کے تاروں کو سٹیل کے تار کے گرد لپیٹا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ $2\,\mathrm{mm}$ رداس کے لوہے کی تار پر $3\,\mathrm{mm}$ المونیم کی تہہ چڑھائی جاتی ہے۔ ایسی ایک کلو میٹر لمبی تار کی مزاحمت حاصل کریں۔ المونیم اور لوہے کی موصلیت بالترتیب $3.82 \times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ اور $1.03 \times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔

جواب: $377.4\,\mathrm{m\Omega}$

سوال 16.9: ایک خطے میں کثافت برقی رو کو $\boldsymbol{J} = 0.02re^{-1000t}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$ لکھا جا سکتا ہے۔ لمحہ $t = 1\,\mathrm{ms}$ پر رداس $r = 3$ کے کرہ سے کتنی برقی رو خارج ہو گی۔ استمراری مساوات $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$ استعمال کرتے ہوئے ρ_h حاصل کریں۔ ایسا کرتے ہوئے $t \to \infty$ پر $\rho_h \to 0$ لیں۔ حجمی کثافت چارج ρ_h کی رفتار کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $2.5\,\mathrm{A}$ ، $\rho_h = 60e^{-1000t}\,\mathrm{\mu C/m^3}$ ، $333r\boldsymbol{a}_\mathrm{r}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

سوال 16.10: برقی ہیٹر[2] عموماً نائیکروم کی تار سے بنائے جاتے ہیں۔ گھریلو $220\,\mathrm{V}$ اور $50\,\mathrm{Hz}$ پر چلنے والے $1\,\mathrm{kW}$ طاقت کے ہیٹر کے تار کا قطر حاصل کریں اگر تار کی لمبائی $4\,\mathrm{m}$ ہو۔ اس طاقت پر تار میں کثافت برقی رو حاصل کریں۔ صفحہ 16.1 پر جدول 16.1 کی مدد لیں۔

جواب: $0.324\,\mathrm{mm}$ ، $55\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 16.11: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}} \qquad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

سے $M(5,3,1)$ پر $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{D} = \frac{5\times10^{-9}(5\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - 1\boldsymbol{a}_\mathrm{z})}{2\pi\times26}$

سوال 16.12: لامحدود موصل زمینی سطح $z = 0$ رکھتے ہوئے سوال 16.11 کو دوبارہ حل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{D} = \frac{5\times10^{-9}(40\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - 112\boldsymbol{a}_\mathrm{z})}{2\pi\times884}$

[1] WAPDA
[2] heater

سوال 16.13: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}} \qquad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

پایا جاتا ہے جبکہ $z = 0$ پر لا محدود موصل زمینی سطح موجود ہے۔ سطح کے $M(5,3,0)$ مقام پر سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

جواب: $-0.1097\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 16.14: مشق 5.3 میں $300\,\mathrm{K}$ درجہ حرارت پر سلیکان اور جرمینیم کے مستقل دئے گئے ہیں۔ اگر سلیکان میں المونیم کا ایک ایٹم فی $10^7 \times 1$ سلیکان ایٹم ملاوٹ شامل کی جائے تو سلیکان کی موصلیت کیا ہو گی۔ سلیکان کی تعدادی کثافت $10^{28} \times 5$ ایٹم فی مربع میٹر ہے۔ (ہر ملاوٹی المونیم کا ایٹم ایک عدد آزاد خول پیدا کرتا ہے جن کی تعداد مشق میں دئے خالص سلیکان میں آزاد خول کی تعداد سے بہت زیادہ ہوتی ہے لہٰذا ایسی صورت میں موصلیت صرف ملاوٹی ایٹموں کے پیدا کردہ آزاد خول ہی تعین کرتے ہیں۔)

جواب: $800\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

سوال 16.15: صفحہ 139 پر مثال 5.6 میں لا محدود موصل سطح $z = 0$ میں $(0,0,z)$ پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے پیدا سطحی چارج کثافت ρ_S حاصل کیا گیا۔ موصل سطح میں پائے جانے والا کل چارج سطحی تکمل سے حاصل کریں۔

جواب: $-Q$

سوال 16.16: صفحہ 130 پر تانبے کے ایک مربع میٹر میں کل آزاد چارج مساوات 5.13 میں حاصل کیا گیا۔ ایک ایمپیئر کی برقی رو کتنے وقت میں اتنے چارج کا اخراج کرے گا۔

جواب: چار سو اکتیس (431) سال۔

سوال 16.17: مساوات 5.75 میں $\ln \frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b} = \cosh^{-1}\frac{h}{b}$ لکھا گیا ہے۔ اسے ثابت کریں۔

سوال 16.18: پانچ میٹر رداس کی موصل نلکی کا محور برقی زمین سے تیرہ میٹر پر ہے۔ نلکی پر ایک سو وولٹ کا برقی دباو ہے۔

- ایسی لکیری چارج کثافت کا زمین سے فاصلہ اور اس کا ρ_L حاصل کریں جو ایسی ہم قوہ سطح پیدا کرے۔
- موصل نلکی سے پیدا پچاس وولٹ کے ہم قوہ سطح کا رداس اور اس کے محور کا زمین سے فاصلہ دریافت کریں۔
- نلکی پر زمین کے قریب اور اس سے دور سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

جوابات: $12\,\mathrm{m}$، $3.46\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$، $13.4\,\mathrm{m}$، $18\,\mathrm{m}$، $1.65\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}^2}$ اور $0.73\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}^2}$

سوال16.19: مندرجہ ذیل صورتوں میں موصل میں $|\boldsymbol{J}|$ حاصل کریں۔ الف) حرکت پذیری $5.2\times10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vs}}$ ، حجمی کثافت چارج $-4\times10^{9}\,\mathrm{C/m^3}$ اور برقی شدت $72\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ ب) رفتار بہاو $30\,\frac{\mathrm{\mu m}}{\mathrm{s}}$ ہے جبکہ الیکٹران کی تعدادی کثافت 5.5×10^{28} فی مربع میٹر ہے۔ پ) موصلیت $2.5\times10^{6}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ جبکہ برقی شدت $50\,\mathrm{mV}$ ہے۔

جوابات: $1.5\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$ ، $0.26\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$ ، $0.125\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$

سوال16.20: نلکی محدد میں رداس $\rho=0.2$ اور $\rho=0.5$ پر موصل نلکی چادر پائے جاتے ہیں جبکہ ان چادروں کے درمیان خالی خلاء میں $V=150\rho^3$ برقی دباو پایا جاتا ہے۔ الف) اندرونی اور بیرونی نلکی چادر پر سطحی کثافت چارج دریافت کریں۔ دونوں چادروں کے درمیان خطہ $0<z<1$ ، $0.2<\rho<0.5$ میں کل چارج حاصل کریں۔ پ) خطہ $0<z<1$ میں کل چارج حاصل کریں۔ یہاں چادروں پر اور خلاء میں پائے جانے والے تمام کو شامل کریں۔ یاد رہے کہ مثبت موصل چادر سے برقی بہاو کا اخراج ہوتا ہے۔

جوابات: $-0.159\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ ، $0.996\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ ، $-2.93\,\mathrm{nC}$ ، 0

سوال16.21: گریفائٹ سے بنی نلکی جس کی لمبائی $4\,\mathrm{cm}$ ، اندرونی رداس $\rho=5\,\mathrm{cm}$ اور بیرونی رداس $\rho=7\,\mathrm{cm}$ ہے میں $2\,\mathrm{A}$ کی برقی رو رداسی سمت میں گزر رہی ہے۔ گریفائٹ کی موصلیت $7\times10^{4}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ نلکی میں $\boldsymbol{J}$ ، $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ نلکی کے اندرونی اور بیرونی گول سطحوں کے درمیان برقی دباو V حاصل کرتے ہوئے ان کے درمیان مزاحمت R حاصل کریں۔ نلکی میں طاقت کا ضیاع $V\times I$ اور حجمی تکمل $\iiint \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}h$ سے حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{J}=\frac{7.96}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho$ ، $\boldsymbol{E}=\frac{1.14e-4}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho$ ، $V=38.25\,\mathrm{\mu V}$ ، $R=19.12\,\mathrm{\mu\Omega}$ ، $76\,\mathrm{\mu W}$ ، $76\,\mathrm{\mu W}$

سوال16.22: رقبہ A کی ایک موصل چادر $z=0$ اور دوسری $z=d$ پر رکھی گئی ہے۔ چادروں کے درمیانی خطے میں موصلیت $\sigma(z)=\sigma_0e^{-z}$ ہے جہاں σ_0 مستقل ہے۔ چادر $z=0$ کو صفر وولٹ پر رکھا جاتا ہے جبکہ چادر $z=d$ کو V_0 برقی دباو پر رکھا جاتا ہے۔ الف) دونوں چادروں کے درمیان مزاحمت حاصل کریں۔ ب) چادروں کے مابین برقی رو حاصل کریں۔ پ) چادروں کے درمیان کثافت برقی رو اور برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔

جوابات: $R=\frac{e^d-1}{A\sigma_0}$ ، $I=\frac{A\sigma_0V_0}{e^d-1}$ ، $\boldsymbol{J}=-\frac{V_0\sigma_0}{e^d-1}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $\boldsymbol{E}=-\frac{V_0e^z}{e^d-1}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

سوال16.23: خالی خلاء میں برقی دباو $V=50(\rho^2+1)z\sin\phi\,\mathrm{V}$ دی گئی ہے۔ ہم قوہ سطح $V=100\,\mathrm{V}$ موصل سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔ اس سطح پر نقطہ $(0.65,0.25\pi,z)$ دیا گیا ہے۔ اس نقطے پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہوئے سطحی کثافت چارج $|\rho_S|$ حاصل کریں۔

جوابات: $(\rho^2+1)z\sin\phi=2$ ، $\boldsymbol{E}=-91\boldsymbol{a}_\rho-154\boldsymbol{a}_\phi-50\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $|\rho_S|=1.65\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$

سوال16.24: مثبت z خطے میں برقی دباو $V=\frac{50z(x+y)}{x^2+9}\,\mathrm{V}$ دی گئی ہے۔ موصل سطح $z=0$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ موصل سطح پر سطحی کثافت چارج حاصل کریں۔ سطح پر $2<x<5$ ، $3<y<6$ کل چارج حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{E}=-\frac{50(x+y)}{x^2+9}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\rho_S=-\frac{50\epsilon_0(x+y)}{x^2+9}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$ ، $-1.52\,\mathrm{nC}$

سوال16.25: خالی خلاء میں $V=50\ln\frac{(x+1)^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}\,\mathrm{V}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N(3,1,2)$ پر موصل سطح ہے۔ اس سطح پر $\boldsymbol{E}$ اور ρ_S حاصل کریں۔ سطح پر عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_N$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{E} = 13.33\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 10\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\rho_S = 148\,\frac{\mathrm{pC}}{\mathrm{m}^2}$ ، $\boldsymbol{a}_N = \frac{4}{5}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{3}{5}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ؛ چونکہ ہمیں یہ نہیں معلوم کہ موصل سطح نقطہ N کے کس جانب ہے لہٰذا سطحی کثافت چارج مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔ یوں اکائی سمتیہ کی سمت الٹ بھی ممکن ہے۔

سوال 16.26: نقطہ چارج $Q = 8\pi\,\mathrm{\mu C}$ موصل زمین $z = 0$ کے قریب نقطہ $(2, 0, 4)$ اور $(-2, 0, 4)$ پر پائے جاتے ہیں۔ الف) محدد y پر $\boldsymbol{D}$ کی مساوات حاصل کریں۔ یاد رہے کہ برقی زمین میں چارج کے عکس بھی کردار ادا کریں گے۔ ب) نقطہ $(0, 0, 0)$ پر سطحی کثافت چارج حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{D} = -16\left[\frac{1}{[(x+2)^2+16]^{3/2}} + \frac{1}{[(x-2)^2+16]^{3/2}}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m}^2}$ ، $\rho_S = -0.36\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m}^2}$

جدول 16.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	تقطیر شدہ پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹس	10^{-17}

جدول 16.2: ϵ_R and $\sigma/\omega\epsilon$

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 16.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 16.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$