

# برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی  
 کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
 khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

3

1	سمتیات	1
1	4	
1.1	مقداری اور سمتیہ	1
1	5	
1.2	سمتی الجبرا	2
2	6	
1.3	کارتیسی محدود	3
3	7	
1.4	اکائی سمتیات	5
5	8	
1.5	میدانی سمتیہ	9
9	9	
1.6	سمتی رقبہ	9
9	10	
1.7	غیر سمتی ضرب	10
10	11	
1.8	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	14
14	12	
1.9	گول نلکی محدود	17
17	13	
1.9.1	نلکی اکائی سمتیات کا کارتسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	20
20	14	
1.9.2	نلکی اور کارتسی اکائی سمتیات کا تعلق	20
20	15	
1.9.3	نلکی لامحدود سطحیں	25
25	16	
1.10	کروی محدود	27
27	17	
2	کولومب کا قانون	39
39	18	
2.1	قوت کشش یا دفع	39
39	19	
2.2	برقی میدان کی شدت	43
43	20	
2.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	46
46	21	
2.4	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	51
51	22	
2.5	چارج بردار حجم	55
55	23	
2.6	مزید مثال	56
56	24	
2.7	برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	64
64	25	

69 <sup>26</sup>	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ	3
69 <sup>27</sup>	ساکن چارج	3.1
69 <sup>28</sup>	فیراڈے کا تجربہ	3.2
70 <sup>29</sup>	گاؤس کا قانون	3.3
72 <sup>30</sup>	گاؤس کے قانون کا استعمال	3.4
72 <sup>31</sup>	نقطہ چارج	3.4.1
74 <sup>32</sup>	یکساں چارج بردار کروی سطح	3.4.2
74 <sup>33</sup>	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر	3.4.3
75 <sup>34</sup>	ہم محوری تار	3.5
77 <sup>35</sup>	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	3.6
77 <sup>36</sup>	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق	3.7
80 <sup>37</sup>	پھیلاؤ	3.8
82 <sup>38</sup>	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات	3.9
84 <sup>39</sup>	پھیلاؤ کی عمومی مساوات	3.10
86 <sup>40</sup>	مسئلہ پھیلاؤ	3.11
93 <sup>41</sup>	توانائی اور برقی دباؤ	4
93 <sup>42</sup>	توانائی اور کام	4.1
94 <sup>43</sup>	لکیری تکملہ	4.2
99 <sup>44</sup>	برقی دباؤ	4.3
100 <sup>45</sup>	نقطہ چارج کا برقی دباؤ	4.3.1
101 <sup>46</sup>	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ	4.3.2
102 <sup>47</sup>	ہم محوری تار کا برقی دباؤ	4.3.3
102 <sup>48</sup>	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ	4.4
106 <sup>49</sup>	برقی دباؤ کی ڈھلوان	4.5
110 <sup>50</sup>	نلکی محدود میں ڈھلوان	4.5.1
111 <sup>51</sup>	کروی محدود میں ڈھلوان	4.5.2
112 <sup>52</sup>	جفت قطب	4.6
114 <sup>53</sup>	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط	4.6.1
117 <sup>54</sup>	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی	4.7

125 <sub>s</sub>	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
125 <sub>s6</sub>	برقی رو اور کثافت برقی رو	5.1
127 <sub>s7</sub>	استمراری مساوات	5.2
129 <sub>s8</sub>	موصل	5.3
134 <sub>s9</sub>	موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	5.4
137 <sub>s10</sub>	عکس کی ترکیب	5.5
140 <sub>s11</sub>	نیم موصل	5.6
141 <sub>s12</sub>	ذو برق	5.7
146 <sub>s13</sub>	کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	5.8
150 <sub>s14</sub>	موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	5.9
150 <sub>s15</sub>	کیپسٹر	5.10
152 <sub>s16</sub>	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
153 <sub>s17</sub>	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
153 <sub>s18</sub>	5.10.3 ہم محوری کرہ کیپسٹر	
155 <sub>s19</sub>	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
156 <sub>s20</sub>	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
169 <sub>s21</sub>	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
171 <sub>s22</sub>	6.1 مسئلہ یکنائی	
173 <sub>s23</sub>	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
173 <sub>s24</sub>	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
174 <sub>s25</sub>	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
181 <sub>s26</sub>	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
183 <sub>s27</sub>	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
191 <sub>s28</sub>	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

199 <sub>9</sub>	ساکن مقناطیسی میدان	7
199 <sub>0</sub>	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
204 <sub>1</sub>	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.2
210 <sub>2</sub>	گردش	7.3
217 <sub>3</sub>	نلکی محدود میں گردش	7.3.1
222 <sub>4</sub>	عمومی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.2
224 <sub>5</sub>	کروی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.3
225 <sub>6</sub>	مسئلہ سٹوکس	7.4
228 <sub>7</sub>	مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ	7.5
235 <sub>8</sub>	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	7.6
240 <sub>9</sub>	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	7.7
240 <sub>0</sub>	سمتی مقناطیسی دباؤ	7.7.1
242 <sub>1</sub>	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.7.2
249 <sub>2</sub>	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	8
249 <sub>3</sub>	متحرک چارج پر قوت	8.1
250 <sub>4</sub>	تفرقی چارج پر قوت	8.2
254 <sub>5</sub>	برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	8.3
255 <sub>6</sub>	قوت اور مروڑ	8.4
261 <sub>7</sub>	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	8.5
262 <sub>8</sub>	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	8.6
265 <sub>9</sub>	مقناطیسی سرحدی شرائط	8.7
268 <sub>00</sub>	مقناطیسی دور	8.8
271 <sub>01</sub>	مقناطیسی مخفی توانائی	8.9
271 <sub>02</sub>	خود امالہ اور مشترکہ امالہ	8.10
277 <sub>03</sub>	مشترکہ امالہ	8.11

283 <sub>04</sub>	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات	9
283 <sub>05</sub>	فیراڈے کا قانون	9.1
290 <sub>06</sub>	انتقالی برقی رو	9.2
295 <sub>07</sub>	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل	9.3
297 <sub>08</sub>	میکس ویل مساوات کی تکمل شکل	9.4
302 <sub>09</sub>	تاخیری دباؤ	9.5
311 <sub>10</sub>	مستوی امواج	10
311 <sub>11</sub>	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج	10.1
312 <sub>12</sub>	برقی و مقناطیسی مستوی امواج	10.2
319 <sub>13</sub>	10.2.1 خالی خلاء میں امواج	
323 <sub>14</sub>	10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج	
325 <sub>15</sub>	10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج	
328 <sub>16</sub>	10.3 پوئنٹنگ سمتیہ	
333 <sub>17</sub>	10.4 موصل میں امواج	
339 <sub>18</sub>	10.5 انعکاس مستوی موج	
345 <sub>19</sub>	10.6 شرح ساکن موج	
345 <sub>20</sub>	11 ترسیلی تار	
345 <sub>21</sub>	11.1 ترسیلی تار کے مساوات	
349 <sub>22</sub>	11.2 ترسیلی تار کے مستقل	
350 <sub>23</sub>	11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل	
353 <sub>24</sub>	11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل	
354 <sub>25</sub>	11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار	
355 <sub>26</sub>	11.3 ترسیلی تار کے چند مثال	
360 <sub>27</sub>	11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ	
367 <sub>28</sub>	11.4.1 سمتیہ فراوانی نقشہ	
368 <sub>29</sub>	11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال	

373 <sub>30</sub>	12 تقطیب موج
373 <sub>31</sub>	12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
376 <sub>32</sub>	12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پرنٹنگ سمتیہ
379 <sub>33</sub>	13 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار
379 <sub>34</sub>	13.1 ترچھی آمد
390 <sub>35</sub>	13.2 ترسیم ہائی گن
393 <sub>36</sub>	14 موج اور گھمکیا
393 <sub>37</sub>	14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور موج کا موازنہ
394 <sub>38</sub>	14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے موج میں عرضی برقی موج
400 <sub>39</sub>	14.3 کھوکھلا مستطیلی موج
409 <sub>40</sub>	14.3.1 مستطیلی موج کے میدان پر تفصیلی غور
416 <sub>41</sub>	14.4 مستطیلی موج میں عرضی مقناطیسی $TM_{mn}$ موج
420 <sub>42</sub>	14.5 کھوکھلی نالی موج
427 <sub>43</sub>	14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف
429 <sub>44</sub>	14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف
431 <sub>45</sub>	14.8 سطحی موج
436 <sub>46</sub>	14.9 ذو برق تختی موج
439 <sub>47</sub>	14.10 شیش ریشہ
442 <sub>48</sub>	14.11 پردہ بصارت
444 <sub>49</sub>	14.12 گھمکی خلاء
447 <sub>50</sub>	14.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل



- 15.1 تعارف 455<sup>52</sup>
- 15.2 تاخیری دباؤ 455<sup>53</sup>
- 15.3 تکمل 457<sup>54</sup>
- 15.4 مختصر جفت قطبی ایٹینا 458<sup>55</sup>
- 15.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت 466<sup>56</sup>
- 15.6 ٹھوس زاویہ 470<sup>57</sup>
- 15.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش 471<sup>58</sup>
- 15.8 قطاری ترتیب 478<sup>59</sup>
- 15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع 478<sup>60</sup>
- 15.8.2 ضرب نقش 479<sup>61</sup>
- 15.8.3 ثنائی قطار 480<sup>62</sup>
- 15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار 482<sup>63</sup>
- 15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار 484<sup>64</sup>
- 15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار 484<sup>65</sup>
- 15.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلنے زاویہ اخراجی ایٹینا 488<sup>66</sup>
- 15.9 تداخل پیمہ 489<sup>67</sup>
- 15.10 مسلسل خطی ایٹینا 490<sup>68</sup>
- 15.11 مستطیل سطحی ایٹینا 491<sup>69</sup>
- 15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریر بدل ہیں 494<sup>70</sup>
- 15.13 خطی ایٹینا 494<sup>71</sup>
- 15.14 چلتے موج ایٹینا 499<sup>72</sup>
- 15.15 چھوٹا گھیرا ایٹینا 500<sup>73</sup>
- 15.16 پیچ دار ایٹینا 501<sup>74</sup>
- 15.17 دو طرفہ کردار 503<sup>75</sup>
- 15.18 جھری ایٹینا 505<sup>76</sup>
- 15.19 پیپا ایٹینا 506<sup>77</sup>
- 15.20 فرانس ریڈار مساوات 508<sup>78</sup>
- 15.21 ریڈیائی دوربین، ایٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی 511<sup>79</sup>
- 15.22 حرارت نظام اور حرارت بعید 513<sup>80</sup>





## مستوی امواج

لامحدود خطہ جس کا کوئی سرحد نہ ہو میں میکس ویل مساوات کا حل سادہ ترین مسئلہ ہے البتہ اس سے حاصل نتائج انتہائی دلچسپ اور معلوماتی ثابت ہوتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے جبکہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ چونکہ برقی میدان چارج کی بدولت جبکہ مقناطیسی میدان برقی رو کی بدولت ہے لہذا چارج یارو میں کسی بھی تبدیلی سے باہمی تعاون سے بدلتا برقی اور بدلتا مقناطیسی میدان یعنی **برقی و مقناطیسی** اموج پیدا ہوتی ہے۔ ایسے امواج کی **تعدد** کا دار و مدار چارج یارو (یادونوں) میں تبدیلی کی شرح پر منحصر ہے۔ یوں  $\omega$  **زاویائی تعدد**<sup>3</sup> پر سائن نمائش میں ارتعاش کرتا چارج  $\omega$  زاویائی تعدد کی سائن نموج ہی پیدا کرتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج روشنی کی رفتار سے حرکت کرتی ہیں۔ انسانی آنکھ مخصوص تعدد کی برقی و مقناطیسی امواج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج کے تعدد کی وہ پٹی جو ہمیں نظر آتی ہیں **روشنی**<sup>4</sup> کہلاتی ہے۔ سائن نموج کو اس کی تعدد **دور** **عری**  $\lambda$ <sup>5</sup> سے بیان کیا جاسکتا ہے۔ ہم  $380 \text{ nm}$  تا  $750 \text{ nm}$  کے دوری عرصے کے برقی و مقناطیسی امواج دیکھ سکتے ہیں۔

دو اشیاء کے سرحد پر برقی و مقناطیسی موج پر غور کرنے سے شعاعی **انعکاس**<sup>6</sup>، شعاعی **انحراف**<sup>7</sup> اور **انکسار امواج**<sup>8</sup> کے حقائق دریافت ہوتے ہیں۔ مختصر اشعاع کے تمام خصوصیات میکس ویل کے مساوات سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

## 10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی جسم کے اندر کسی بھی طرح پہنچایا گیا اضافی چارج باہمی قوت دفع سے آخر کار حجم کے سطح پر پہنچ جاتا ہے۔ اگر ان لحاظ کو نظر انداز کیا جائے جتنی دیر آزاد چارج سطح تک پہنچتا ہے تو جسم کے حجم میں  $\rho_h = 0$  تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس کتاب میں  $\rho_h = 0$  ہی تصور کرتے ہوئے برقی و مقناطیسی

electromagnetic<sup>1</sup>  
frequency<sup>2</sup>  
angular frequency<sup>3</sup>  
light<sup>4</sup>  
time period<sup>5</sup>  
reflection<sup>6</sup>  
refraction<sup>7</sup>  
diffraction<sup>8</sup>

امواج پر غور کیا جائے گا لہذا ایسا ہی تصور کرتے ہوئے صفحہ 295 پر دئے گئے میکس ویل مساوات یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$(10.1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$(10.2) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$(10.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$(10.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

جہاں  $D = \epsilon E$  اور  $B = \mu H$  کے علاوہ قانون اوہم کی نقطہ شکل  $J = \sigma E$  کے استعمال سے تمام مساوات صرف دو متغیرات  $E$  اور  $H$  کی صورت میں لکھے گئے ہیں۔

3051

اس سے پہلے کہ ہم ان مساوات کو حل کریں، انہیں انہیں صرف دیکھ کر فیصلہ کریں کہ خالی خلاء میں ان سے کیا نتائج اخذ کئے جاسکتے ہیں۔ خالی خلاء میں کشافیت برقی  $J$  صفر کے برابر ہوتی ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ مساوات 10.1 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گردش میدان کی گردش پیدا ہوتی ہے۔ گردش سے مراد ایسا میدان ہے جو بند دائرے پر اس نقطے کے گردشومتی ہو۔ اگر مقناطیسی میدان کی قیمت زیادہ ہو تب برقی گردش کی قیمت بھی زیادہ ہوگی اور اگر مقناطیسی میدان کی قیمت کم ہو تب گردش بھی کم ہوگی۔ یوں دو حقائق سامنے آتے ہیں۔ پہلی حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی نقطے پر بدلتا مقناطیسی میدان اس نقطے کے گردش، یعنی نقطے سے ذرہ دور، برقی میدان پیدا کرتی ہے اور دوسری حقیقت یہ کہ پہلی میدان کی قیمت کم یا زیادہ کرنے سے پیدا میدان کی قیمت بھی تبدیل ہوتی ہے یعنی بدلتا مقناطیسی میدان، بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اسی طرح مساوات 10.2 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گردشومتی پیدا ہوتی ہے۔ یہاں بھی صاف واضح ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیل، اس نقطے سے ذرہ دور، بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ بدلتا مقناطیسی میدان کچھ فاصلے پر آگے کر کے بدلتا برقی میدان پیدا کرتا ہے جو مزید آگے مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے اور یہ سلسلہ چلے جاتا ہے۔ جیسا کہ ہم جلد دیکھیں گے، ایسے جڑواں، ہاتھ میں ہاتھ ڈالے، حرکت کرتے بدلتے برقی اور بدلتے مقناطیسی میدان کی رفتار  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  یعنی تقریباً  $3 \times 10^8 \frac{m}{s}$  ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔

3061

3062

## 10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج

میکس ویل مساوات کے حل **دوری سمتیات**<sup>9</sup> کی مدد سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں لہذا پہلے دوری سمتیہ پر غور کرتے ہیں جو آپ نے برقی ادوار حل کرتے وقت ضرور استعمال کئے ہوں گے۔

3064

سائن نمائندگی عمومی شکل

$$(10.5) \quad E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)$$

ہے جہاں

$$(10.6) \quad \omega = 2\pi f$$

**زاویائی تعدد**<sup>10</sup> اور  $\phi$  **زاویائی فاصلہ**<sup>11</sup> ہیں جبکہ  $E_{xyz}$  از خود  $x, y, z$  اور  $\omega$  **کاتالغ تفاعل**<sup>12</sup> ہو سکتا ہے۔ تعدد  $f$  کی اکائی ہرٹز<sup>13</sup> ہے۔ یہاں دھیان رہے کہ  $E_{xyz}$  وقت  $t$  **کاتالغ** نہیں ہے۔

3066

<sup>9</sup> phasor  
<sup>10</sup> angular frequency  
<sup>11</sup> phase angle  
<sup>12</sup> dependent function  
<sup>13</sup> Hertz

کسی بھی متغیر  $x$  کے لئے یولر مماثل<sup>14</sup> کو  $e^{jx} = \cos x + j \sin x$  لکھا جاتا ہے جہاں  $j = \sqrt{-1}$  خیالی عدد<sup>15</sup> ہے۔ آزاد متغیر  $\psi + \omega t$  کے لئے یولر مماثل

$$e^{j(\omega t + \psi)} = \cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)$$

لکھا جاسکتا ہے جو حقیقی<sup>16</sup> اور خیالی<sup>17</sup> اجزاء پر مشتمل مخلوط تفاعل<sup>18</sup> ہے۔ یوں  $\cos(\omega t + \psi)$  کو  $e^{j(\omega t + \psi)}$  کا حقیقی جزو تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح

$$E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) = \left[ E_{xyz} e^{j(\omega t + \psi)} \right]_{\text{حقیقی}} = \left[ E_{xyz} e^{j\omega t} e^{j\psi} \right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں زیر نوشت میں حقیقی لکھنے سے مراد یہ ہے کہ پورے تفاعل کا حقیقی جزو لیا جائے۔ مندرجہ بالا مساوات کو بطور دوری سمتیہ یوں

$$E_{ys} = E_{xyz} e^{j\psi}$$

لکھا جاتا ہے جہاں  $e^{j\omega t}$  اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کے بائیں ہاتھ  $E_{ys}$  لکھتے ہوئے زیر نوشت میں  $s$  یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں لکھی گئی ہے لہذا یاد رہے کہ اصل تفاعل میں  $e^{j\omega t}$  پایا جاتا ہے اور پورے تفاعل کا صرف حقیقی جزو ہی لیا جائے۔ تفاعل  $E_{ys}$  کے زیر نوشت میں  $s$  دراصل اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ اس تفاعل کا آزاد متغیر، مخلوط تعدد<sup>19</sup> ہے۔ ہمارے استعمال میں  $s$  خیالی عدد یعنی  $j\omega$  ہو گا۔

3069

اب  $E_y = 10.5 \cos(10^6 t - 0.35z)$  کو دوری سمتیہ کی شکل میں لکھنے کی خاطر اسے یولر مماثل کے حقیقی جزو

$$E_y = \left[ 10.5 e^{j(10^6 t - 0.35z)} \right]_{\text{حقیقی}} = \left[ 10.5 e^{j10^6 t} e^{-j0.35z} \right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھنے کے بعد  $e^{j10^6 t}$  اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے یوں

$$E_{ys} = 10.5 e^{-j0.35z}$$

3070

لکھا جائے گا جہاں بائیں ہاتھ  $E_{ys}$  میں زیر نوشت میں  $s$  کا اضافہ کیا گیا۔ یاد رہے کہ  $E_y$  حقیقی تفاعل ہے جبکہ  $E_{ys}$  عموماً مخلوط تفاعل ہوتا ہے۔

3071

دوری سمتیہ سے اصل تفاعل حاصل کرنے کی خاطر اسے  $e^{j\omega t}$  سے ضرب دیتے ہوئے حاصل جواب کا حقیقی جزو لیا جاتا ہے۔

مساوات 10.5 کا وقت کے ساتھ جزوی تفرق

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)] = -\omega E_{xyz} \sin(\omega t + \psi) \\ &= \left[ j\omega E_{xyz} e^{j(\omega t + \psi)} \right]_{\text{حقیقی}} \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ یہ عمومی نتیجہ ہے جس کے تحت وقت کے ساتھ تفاعل کا تفرق، دوری سمتیہ کو  $j\omega$  سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔ یوں مثال کے طور پر اگر

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

ہو تب اسی کی دوری سمتیہ شکل

$$j\omega E_{xs} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_{ys}}{\partial z}$$

Euler's identity<sup>14</sup>  
imaginary number<sup>15</sup>  
real<sup>16</sup>  
imaginary<sup>17</sup>  
complex function<sup>18</sup>  
complex frequency<sup>19</sup>

ہوگی۔ اسی طرح سائن نمائیدان کے لئے میکس ویل کے مساوات بھی باآسانی دوری سمتیہ کی شکل میں لکھے جاسکتے ہیں لہذا

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

کو دوری سمتیہ کی صورت میں

$$(10.7) \quad \nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu \mathbf{H}_s$$

لکھا جائے گا۔ میکس ویل کے بقایا مساوات کو بھی دوری سمتیہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(10.8) \quad \nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s$$

$$(10.9) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0$$

$$(10.10) \quad \nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0$$

آئیں ان مساوات سے امواج کی مساوات حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر مساوات 10.7 کی گردش

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla^2 \mathbf{E}_s = -j\omega\mu \nabla \times \mathbf{H}_s$$

میں مساوات 10.8 اور مساوات 10.9 پر کرنے سے

$$(10.11) \quad \nabla^2 \mathbf{E}_s = j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s = \gamma^2 \mathbf{E}_s$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(10.12) \quad \gamma = \pm \sqrt{j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon)}$$

**حرکی مستقل**<sup>20</sup> کہلاتا ہے۔ چونکہ  $j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon)$  مخلوط عدد ہے لہذا اس کا جزر  $\gamma$  بھی مخلوط عدد ہو گا جسے

$$(10.13) \quad \gamma = \alpha + j\beta$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں  $\alpha$  اور  $\beta$  مثبت اور حقیقی اعداد ہیں۔ مساوات 10.12 کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$(10.14) \quad \gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

جہاں کسی وجہ سے صرف مثبت قیمت لی گئی ہے۔ یہ وجہ آپ کو جلد بتلا دی جائے گی۔

مساوات 10.11 **سمتی ہولتز** مساوات<sup>22,21</sup> کہلاتی ہے۔ کارتیسی محدود بھی سمتی ہولتز مساوات کی بڑی شکل کافی خوفناک نظر آتی ہے چونکہ اس سے چار

چار اجزاء پر مشتمل تین عدد مساوات نکلتے ہیں۔ کارتیسی محدود میں اس کی  $x$  مساوات

$$(10.15) \quad \nabla^2 E_{xs} = \gamma^2 E_{xs}$$

یعنی

$$(10.16) \quad \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs}$$

<sup>20</sup>propagation constant  
<sup>21</sup>vector Helmholtz equation

<sup>22</sup>برمن لڈوگ فرڈینانڈ ون ہلم ہولتز جرمنی کے عالم طبیعیات تھے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ جن امواج پر ہم غور کرنا چاہتے ہیں ان میں ناتواخ اور ناہی  $y$  کے ساتھ میدان تبدیل ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں  $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} = 0$  اور  $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} = 0$  ہوں گے لہذا مندرجہ بالا مساوات

$$(10.17) \quad \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ اس طرح کے دو درجی تفرقی مساوات آپ نے پڑھے ہوں گے لہذا میں توقع رکھتا ہوں کہ آپ اس کے حل

$$(10.18) \quad E_{xs} = Ae^{-\gamma z}$$

اور

$$(10.19) \quad E_{xs} = Be^{\gamma z}$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں  $\gamma = \alpha + j\beta$  پر کرتے ہوئے ان جوابات میں سے مساوات 10.18 پر غور کریں۔ مساوات 10.18 درحقیقت دوری سمتیہ ہے لہذا اسے  $e^{j\omega t}$  سے ضرب دے کر

$$E_x = \left[ Ae^{j\omega t} e^{-(\alpha + j\beta)z} \right]_{\text{حقیقی}} \\ = \left[ Ae^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \right]_{\text{حقیقی}}$$

حقیقی جزو

$$E_x = Ae^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

لیتے ہیں۔ مساوات کے مستقل  $A$  کی جگہ  $t = 0$  اور  $z = 0$  پر میدان کی قیمت  $E_0$  پر کرتے ہوئے اصل حل

$$(10.20) \quad E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ **مستوی موج**  $^{23}$  کی وہ مساوات ہے جس کی تلاش میں ہم نکلے تھے۔ اگر ہم مساوات 10.19 کو لے کر آگے بڑھتے تو مساوات 10.20 کی جگہ موج کی مساوات

$$(10.21) \quad E_x = E_0 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$$

حاصل ہوتی۔

مساوات 10.18 میں  $A = E_0$  پر کرتے ہوئے اس کی سمتیہ شکل

$$(10.22) \quad \mathbf{E}_s = E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_x$$

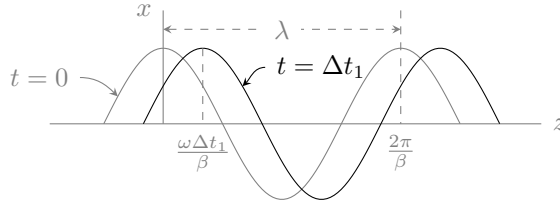
لکھی جاسکتی ہے جو صرف  $\alpha x$  جزو پر مشتمل ہے۔ آئیں مساوات 10.20 میں دئے **متحرک موج**  $^{24}$  پر اب غور کریں۔

مساوات 10.20 کہتی ہے کہ برقی میدان ہر نقطے پر  $x$  محدد کے متوازی ہے۔ اگر  $z$  کی قیمت تبدیل نہ کی جائے تب  $x$  اور  $y$  تبدیل کرنے سے میدان تبدیل نہیں ہوتا۔

مساوات 10.20 میں  $z$  بڑھانے سے  $\alpha$  کی وجہ سے موج کی چوٹی گھٹتی ہے لہذا  $\alpha$  **تضعیفی مستقل**  $^{25}$  کہلاتا ہے۔ تضعیفی مستقل کو **نپیر**  $^{26}$  فی میٹر  $\frac{\text{NP}}{\text{m}}$  میں ناپا جاتا ہے۔ مساوات 10.20 میں  $e$  کی طاقت یعنی  $\alpha z$  بے بعد  $^{28}$  مقدار **نپیر**  $\text{Np}$  میں ہوگی۔ موج کے مساوات میں  $\beta z$  - زاویائی فاصلہ ہے جسے ریڈین میں ناپا جاتا ہے لہذا  $\beta$  **زاویائی مستقل**  $^{29}$  کہلاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈین فی میٹر  $\frac{\text{rad}}{\text{m}}$  ہے۔

<sup>23</sup> plane wave  
<sup>24</sup> travelling wave  
<sup>25</sup> attenuation constant  
<sup>26</sup> neper  
<sup>27</sup> تضعیفی مستقل کی اکائی جان نپیر کے نام سے منسوب ہے۔  
<sup>28</sup> dimensionless  
<sup>29</sup> phase constant





شکل 10.1: وقت  $t = 0$  اور  $t = t_1$  پر خلاء میں موج کا مقام۔

موج کی مساوات میں  $\alpha = 0$  تصور کرتے ہوئے اسے وقت  $t = 0$  پر شکل 10.1 میں ہلکی سیاہی سے دکھایا گیا ہے۔ یہاں دھیان رہے کہ شکل میں  $z$  محدود کو افقی دکھایا گیا ہے۔ جیسے آپ دیکھ سکتے ہیں  $t = 0$  پر موج کی دو آپس میں قریبی چوٹیاں  $z = 0$  اور  $z = \frac{2\pi}{\beta}$  پر پائی جاتی ہیں۔ دو آپس میں قریبی چوٹیوں کے درمیان فاصلے کو **طول موج**<sup>30</sup> پکارا اور  $\lambda$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں اس موج کی طول موج

$$(10.23) \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

ہے جس سے

$$(10.24) \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

لکھا جاسکتا ہے جو انتہائی اہم نتیجہ ہے۔

موج کی مساوات ہی کو وقت  $t = \Delta t_1$  پر شکل 10.1 میں دوبارہ گاڑھی سیاہی میں بھی دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیے میں موج نے دائیں جانب یعنی  $z$  بڑھنے کی طرف حرکت کی ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ یہ موج وقت کے ساتھ مثبت  $z$  جانب حرکت کر رہی ہے۔ دورانیہ  $\Delta t_1$  میں موج کی چوٹی نے  $\frac{\omega \Delta t_1}{\beta}$  فاصلہ طے کیا ہے لہذا موج کے رفتار کو

$$(10.25) \quad v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega \Delta t_1}{\beta} \frac{1}{\Delta t_1} = \frac{\omega}{\beta}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 10.24 کو مساوات 10.25 میں پر کرنے سے

$$(10.26) \quad v = f\lambda$$

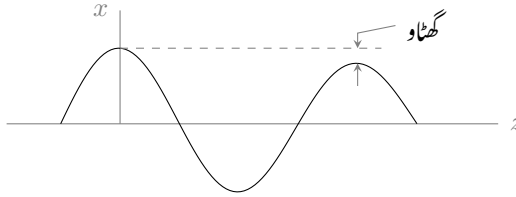
حاصل ہوتا ہے جو  $\lambda$  طول موج اور  $f$  تعدد رکھنے والے موج کی رفتار  $v$  دیتی ہے۔

مساوات 10.20 میں مساوات 10.25 استعمال کرتے ہوئے

$$(10.27) \quad E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right]$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 10.25 اور مساوات 10.24 کی مدد سے

$$(10.28) \quad E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos \left( \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right)$$



شکل 10.2: موج چلتے ہوئے آہستہ آہستہ کمزور ہوتی رہتی ہے۔

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

موج کی رفتار کو مساوات 10.20 سے دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ اس مساوات کے تحت کسی بھی لمحہ  $t$  پر موج کی چوٹی اس مقام پر ہوگی جہاں

$$\omega t - \beta z = 0$$

ہو۔ چونکہ رفتار  $\frac{dz}{dt}$  کو کہتے ہیں لہذا اس مساوات کے تفرق

$$\omega dt - \beta dz = 0$$

سے رفتار

$$(10.29) \quad v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

حاصل ہوتی ہے۔

شکل 10.2 میں  $\alpha$  کو صفر تصور نہیں کیا گیا ہے۔ جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں، ایسی صورت میں موج کی چوٹی،  $z$  کے ساتھ بتدریج گھٹتی ہے لہذا  $\alpha = 0.001 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$  کی صورت میں 1 km کے فاصلے پر موج کی چوٹی، ابتدائی چوٹی کے  $\frac{e^{-1}}{e^0} = 0.368$  گنا رہ گئی ہوگی جہاں ابتدائی چوٹی  $z = 0$  پر ملی گئی ہے۔

برقی موج  $E_s$  سے مساوات 10.7

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

کی مدد سے مقناطیسی موج باآسانی حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 10.22 استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات سے

$$-\gamma E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

یا

$$\mathbf{H}_s = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 10.12 سے مثبت  $\gamma$  کی قیمت پر کرنے سے

$$(10.30) \quad \begin{aligned} \mathbf{H}_s &= \sqrt{\frac{\sigma + j\omega\epsilon}{j\omega\mu}} E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y \\ &= \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں دوسرے قدم پر

$$(10.31) \quad \eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

لکھی گئی<sup>32</sup> ہے۔ اس مساوات کو

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}}} \quad (10.32)$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 10.22 کی غیر سمتی صورت یعنی  $E_{xs} = E_0 e^{-\gamma z}$  کو مساوات 10.30 کے غیر سمتی صورت یعنی  $H_{ys} = \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z}$  سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{E_{xs}}{H_{ys}} = \eta \quad (10.33)$$

ملتا ہے۔

یہاں ذرہ رک کرایک برقی دور پر غور کرتے ہیں۔ منبع برقی دباؤ  $V_0 \cos(\omega t - \psi)$  جسے دوری سمتیہ  $V_0 e^{-j\psi}$  لکھا جاسکتا ہے کے ساتھ سلسلہ وار مزاحمت  $R$ ، امالہ  $L$  اور کپیسٹر  $C$  جڑے ہیں جن کی رکاوٹ  $Z$

$$Z = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX = |Z| e^{j\theta_Z} = |Z| \angle \theta_Z$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$  کی صورت میں  $X$  مثبت ہوگا جبکہ  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$  کی صورت میں یہ منفی ہوگا۔ مزید  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  کی صورت میں دور خالص مزاحمتی رکاوٹ پیش کرے گا اور  $\theta_Z = 0$  ہوگا۔ اس دور میں برقی رودوری سمتیہ کی مدد سے

$$I_s = \frac{V_s}{Z_s} = \frac{V_0 e^{-j\psi}}{|Z| e^{j\theta_Z}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{-j(\psi + \theta_Z)}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$i = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \psi - \theta_Z)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ برقی دباؤ اور برقی روا یک ہی تعدد رکھتے ہیں البتہ ان میں زاویائی فاصلہ  $\theta_Z$  پایا جاتا ہے۔ مثبت  $X$  کی صورت میں برقی روا س زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباؤ کے پیچھے رہتی ہے جبکہ منفی  $X$  کی صورت میں برقی روا س زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباؤ کے آگے رہتی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ برقی دباؤ اور برقی روا کی شرح

$$\frac{V_s}{I_s} = |Z| e^{j\theta_Z} = Z$$

کے برابر ہے جسے رکاوٹ کہتے ہیں۔

آئیں اب دوبارہ امواج کی بات کریں۔ برقی موج کو اس مثال کے برقی دباؤ کی جگہ اور مقناطیسی موج کو مثال کے روا کی جگہ رکھتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ دونوں مسائل ہو ہو یکساں ہیں۔ اسی وجہ سے برقی موج  $E_{xs}$  اور مقناطیسی موج  $H_{ys}$  کی شرح  $\eta$ ، **قدرتی رکاوٹ**<sup>33</sup> کہلاتی ہے۔ بالکل برقی رکاوٹ کی طرح قدرتی رکاوٹ حقیقی یا خیالی اور یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی اکائی اوہم  $\Omega$  ہے۔

مساوات 10.30 سے مقناطیسی موج

$$H_y = \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|\eta|} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \quad (10.34)$$

<sup>31</sup> یونانی حروف تہجی  $\eta$  ایٹا پڑھا جاتا ہے۔

<sup>32</sup> eta

<sup>33</sup> intrinsic impedance

لکھی جائے گی جہاں قدرتی رکاوٹ کو

$$\eta = |\eta| e^{j\theta_\eta} \quad (10.35)$$

3094

لکھا گیا۔

مساوات 10.20 کے تحت برقی میدان  $x$  محدود کے متوازی ہے جبکہ مساوات 10.34 کے تحت مقناطیسی میدان  $y$  محدود کے متوازی ہے لہذا یہ میدان آپس میں ہر وقت عمودی رہتے ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں امواج  $z$  سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ یوں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت بھی آپس میں عمودی ہیں۔ ایسے امواج جن میں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت عمودی ہوں **عرضی امواج**<sup>34</sup> کہلاتے ہیں۔ پانی کی سطح پر لہریں بھی عرضی امواج ہوتے ہیں۔ اسی طرح رسی کو کھینچ کر رکھتے ہوئے اسے جھٹکے سے ہلانے سے رسی میں عرضی موج پیدا ہوتی ہے۔ **عرضی برقی و مقناطیسی موج**<sup>35</sup> میں برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں حرکت کے سمت کے عمودی ہوتے ہیں۔ باب 14 میں ایسے امواج پر غور کیا جائے گا جن میں صرف ایک میدان سمت حرکت کے عمودی ہوگا۔ انہیں **عرضی برقی موج**<sup>36</sup> یا **عرضی مقناطیسی موج**<sup>37</sup> کا نام دیا گیا ہے۔

3100

آئیں اب چند مخصوص صورتوں میں ان مساوات کو استعمال کرنا سیکھیں۔

3101

## 10.2.1 خالی خلاء میں امواج

3102

خالی خلاء میں  $\epsilon_R = 1$  اور  $\mu_R = 1$ ،  $\sigma = 0$  ہیں لہذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_R\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0)} = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، جسے روایتی طور پر  $c$  سے ظاہر کیا جاتا ہے، مساوات 10.25 سے

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad (10.36)$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت

$$c = \frac{1}{\sqrt{4 \times \pi \times 10^{-7} \times 8.854 \times 10^{-12}}} = 2.99 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3103

ہے۔

مساوات 10.31 سے خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu_R\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

<sup>34</sup>transverse waves

<sup>35</sup>transverse electromagnetic, TEM

<sup>36</sup>transverse electric wave, TE wave

<sup>37</sup>transverse magnetic wave, TM wave

حاصل ہوتی ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہم  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9}$  سے  $\frac{1}{4\pi \epsilon_0} = 9 \times 10^9$  حاصل کرتے ہوئے

$$\eta = 120\pi \approx 377 \Omega \quad (10.37)$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں خالی خلاء میں کسی بھی لمحے، کسی بھی نقطے پر برقی میدان کی قیمت اس نقطے پر مقناطیسی میدان کے 377 گنا ہوگی۔

حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے خالی خلاء میں متحرک موج کے میدان

$$E_x = E_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \right]$$

$$H_y = \frac{E_0}{120\pi} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \right]$$

لکھے جائیں گے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں میدان ہم زاویہ ہیں۔ یوں کسی بھی نقطے پر بڑھتے برقی میدان کی صورت میں اس نقطے پر مقناطیسی میدان بھی بڑھتا ہے۔ ان مساوات کے تحت امواج بالکل سیدھے حرکت کرتے ہیں اور ناوقت اور ناہی فاصلے کے ساتھ ان کی طاقت میں کسی قسم کی کمی رونما ہوتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ کائنات کے دور ترین کہکشاؤں سے ہم تک برقی و مقناطیسی امواج پہنچتی ہیں اور ہمیں رات کے چمکتے اور خوبصورت تارے نظر آتے ہیں۔

مشق 10.1: **بے تار**<sup>38</sup> ذرائع ابلاغ میں 36 000 km کی اونچائی پر پرواز کرتے مصنوعی سیارے اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ یہ سیارے زمین کے اوپر ایک ہی نقطے پر آویزاں نظر آتے ہیں۔ ان سیاروں سے زمین کے قریبی نقطے تک برقی اشارہ کتنی دیر میں پہنچے گا۔

جواب: 0.12 s

مثال 10.1: خالی خلاء میں 240 MHz تعدد کی موج بڑھتے  $a_z$  سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ الف)  $\lambda$ ،  $\beta$  اور  $\omega$  دریافت کریں۔ ب) لمحہ  $t = 0$  پر موج کی  $128 \frac{V}{m}$  چوٹی محدود کے مرکز پر پائی جاتی ہے۔ موج کی حقیقی اور دوری مساوات لکھیں۔ پ) اگر موج کی چوٹی لمحہ  $t = 1.2 \text{ ns}$  پر نقطہ  $z = 25 \text{ cm}$  پہ ہو تب موج کی مساوات کیا ہوگی؟

حل: الف) موج کی رفتار  $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$  لیتے ہوئے

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{240 \times 10^6} = \frac{5}{4} \text{ m}$$

اور یوں

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{8\pi}{5} \text{ rad/m}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اب زاویائی تعدد حاصل کرتے ہیں۔

$$\omega = 2\pi f = 4.8\pi \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(ب) حقیقی مساوات

$$E = 128 \cos \left( 4.8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{5} z \right)$$

ہے جبکہ دوری مساوات مندرجہ ذیل ہے۔

$$E = 128 e^{-j \frac{8\pi}{5} z}$$

(پ) اب موج تاخیر سے محدود کے مرکز پر پہنچتی ہے۔ موج کا تاخیری زاویہ  $\theta$  لکھتے ہوئے موج کی مساوات

$$E = 128 \cos \left( 4.8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{5} z + \theta \right)$$

ہوگی۔ موج کی چوٹی  $(4.8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{5} z + \theta) = 0$  پر ہوگی لہذا  $t = 1.2 \text{ ns}$  اور  $z = 0.25 \text{ m}$  پر کرتے ہوئے  $\theta = -0.176\pi$  حاصل ہوتا ہے۔ یہ قیمت مندرجہ بالا مساوات میں استعمال کی جائے گی۔ موج کی دوری مساوات مندرجہ ذیل ہے۔

$$E_s = 128 e^{-j\pi(\frac{8}{5}z + 0.176)}$$

3117

3118

مثال 10.2: لمحہ  $t = 0$  پر محدود کے مرکز پر موج کی چوٹی  $340 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  پائی جاتی ہے جبکہ  $z = 1.5 \text{ m}$  وہ قریب ترین نقطہ ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے۔ موج گھٹے  $z$  کی سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ اس لمحہ برقی میدان اکائی سمتیہ  $\mathbf{a}_E = \frac{2}{\sqrt{13}} \mathbf{a}_x + \frac{3}{\sqrt{13}} \mathbf{a}_y$  کی سمت میں ہے۔ برقی موج کی مساوات لکھیں۔

3121

حل: موج کی چوٹی اور صفر کے درمیان فاصلے سے  $\frac{\lambda}{4} = 1.5$  لکھ کر  $\lambda = 6 \text{ m}$  حاصل ہوتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3}$  اور  $f = \frac{3 \times 10^8}{6} = 50 \text{ MHz}$  حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ موج گھٹے  $z$  جانب حرکت کر رہی ہے اور لمحہ  $t = 0$  پر اس کی چوٹی محدود کے مرکز پر پائی جاتی ہے لہذا

$$E = E_0 \cos \left( 2\pi \times 50 \times 10^6 t + \frac{\pi}{3} z \right)$$

لکھا جائے گا۔ لمحہ  $t = 0$  پر محدود کے مرکز پر میدان  $340 \text{ a}_E$  پایا جاتا ہے لہذا موج کی مکمل خاصیت مندرجہ ذیل مساوات بیان کرے گی۔

$$E = 340 \left[ \frac{2}{\sqrt{13}} \mathbf{a}_x + \frac{3}{\sqrt{13}} \mathbf{a}_y \right] \cos \left( 2\pi \times 50 \times 10^6 t + \frac{\pi}{3} z \right)$$

اس کی دوری شکل مندرجہ ذیل ہے۔

$$E_s = 340 \left[ \frac{2}{\sqrt{13}} \mathbf{a}_x + \frac{3}{\sqrt{13}} \mathbf{a}_y \right] e^{j \frac{\pi}{3} z}$$

مثال 10.3: خالی خلاء میں برقی موج  $e^{j\frac{\pi}{3}z}$   $E_s = 340 \left[ \frac{2}{\sqrt{13}}a_x + \frac{3}{\sqrt{13}}a_y \right]$  پائی جاتی ہے۔ مقناطیسی موج کی مساوات لکھیں۔

حل: خالی خلاء میں

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

سے مقناطیسی چوٹی کی قیمت

$$H_0 = \frac{340}{120\pi} = \frac{17}{6\pi}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ حقیقی عدد ہے لہذا برقی اور مقناطیسی میدان ہم قدم ہیں۔ خالی خلاء میں موج کے برقی اور مقناطیسی میدان آپس میں عمودی ہوتے ہیں۔ یوں مقناطیسی موج کی سمت میں سمتیہ  $xa_x + ya_y$  اور برقی موج کی سمت میں سمتیہ  $a_E$  کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوگا یعنی

$$\left( \frac{2}{\sqrt{13}}a_x + \frac{3}{\sqrt{13}}a_y \right) \cdot (xa_x + ya_y) = 0$$

ہوگا جس سے

$$(10.38) \quad 2x + 3y = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس میں  $x$  کی کوئی بھی قیمت پر کرتے ہوئے  $y$  کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔ یوں  $x = 1$  پر کرنے سے  $y = -\frac{2}{3}$  حاصل ہوتا ہے۔ یوں مقناطیسی میدان  $1a_x - \frac{2}{3}a_y$  سمتیہ کی سمت میں ہوگی۔ اس طرح مقناطیسی میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ

$$a_H = \frac{a_x - \frac{2}{3}a_y}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{13}}a_x - \frac{2}{\sqrt{13}}a_y$$

ہوگی۔ یاد رہے کہ  $a_E \times a_H$  سے موج کے حرکت کی سمت حاصل ہوتی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ

$$a_E \times a_H = \left( \frac{2}{\sqrt{13}}a_x + \frac{3}{\sqrt{13}}a_y \right) \times \left( \frac{3}{\sqrt{13}}a_x - \frac{2}{\sqrt{13}}a_y \right) = -a_z$$

کے برابر ہے جو موج کی درست سمت ہے۔ اب ہم مساوات 10.38 میں  $x$  کی قیمت منفی بھی کر سکتے تھے۔ آئیں ایسا بھی کر کے دیکھ لیں۔ اگر ہم  $x = -1$  پر کرتے تب  $y = \frac{2}{3}$  حاصل ہوتا جس سے اکائی سمتیہ  $-1a_x + \frac{2}{3}a_y$  حاصل ہوتی۔ اس اکائی سمتیہ اور  $a_E$  کے سمتی ضرب سے  $a_z$  حاصل ہوتا ہے جو بالکل الٹ سمت میں حرکت کرتی موج کی سمت ہے۔ ظاہر ہے کہ ہم ان دو جوابات میں سے پہلی جواب کو ہی یہاں درست تسلیم کریں گے۔ یوں مقناطیسی موج کی دوری مساوات مندرجہ ذیل ہوگی۔

$$H_s = H_0 a_H e^{j\frac{\pi}{3}z} = \frac{17}{6\pi} \left( \frac{3}{\sqrt{13}}a_x - \frac{2}{\sqrt{13}}a_y \right) e^{j\frac{\pi}{3}z}$$

## 10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج

خالص یا کامل ذو برقی سے مراد ایسا ذو برق ہے جس میں متحرک برقی و مقناطیسی امواج کی توانائی ضائع نہیں ہوتی۔ خالص ذو برق میں  $\sigma = 0$  جبکہ اس کا جزوی مقناطیسی مستقل  $\mu_R$  اور جزوی برقی مستقل  $\epsilon_R$  ہے لہذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(10.39)$$

$$\alpha = 0$$

$$(10.40)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار مساوات 10.25 سے

$$(10.41)$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_R\mu_0\epsilon_R\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں  $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$  کو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار  $c$  لکھا گیا ہے۔ چونکہ ذو برق میں  $\mu_R\epsilon_R > 1$  ہے لہذا ذو برق میں روشنی کی رفتار خالی خلاء میں روشنی کے رفتار سے کم ہوگی۔ خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اس کی زیادہ سے زیادہ رفتار ہے۔

موج کی رفتار اور تعدد سے طول موج

$$(10.42)$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کے طول موج کو  $\lambda_0$  لکھا گیا ہے۔ اس مساوات سے ذو برق میں روشنی کی رفتار کم ہونے کی وجہ سامنے آتی ہے۔ چونکہ  $\mu_R\epsilon_R > 1$  ہے لہذا ذو برق میں طول موج کم ہو جاتا ہے جس سے روشنی کی رفتار کم ہو جاتی ہے۔

مساوات 10.31 سے ذو برقی کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ کو  $\eta_0$  لکھا گیا ہے۔

یوں ذو برقی میں امواج کے مساوات

$$(10.43)$$

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$(10.44)$$

$$H_y = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

ہیں۔

مثال 10.4: پانی کے لئے  $\epsilon_R = 78.4$ ،  $\mu_R = 1$  اور  $\sigma = 0$  لیتے ہوئے 300 MHz تعدد کے برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، طول موج اور تعدد کی رکاوٹ حاصل کریں۔ برقی میدان  $\frac{mV}{m}$  50 ہونے کی صورت میں برقی اور مقناطیسی امواج کے مساوات لکھیں۔ ہم  $\sigma = 0$  لیتے ہوئے درحقیقت پانی میں توانائی کے ضیاع کو نظر انداز کر رہے ہیں۔



حل:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{78.4}} = 0.3388 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.3388 \times 10^8}{300 \times 10^6} = 11.29 \text{ cm}$$

ہیں جبکہ خالی خلاء میں  $\lambda = 1 \text{ m}$  ہے۔ بقایا مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 55.7 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

اور

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \frac{377}{\sqrt{78.4}} = 42.58 \Omega$$

ہیں۔ امواج کے مساوات

$$E_x = 0.05 \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$

$$H_y = \frac{0.05}{42.58} \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z) = 0.00117 \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$

ہیں۔

3137

3138

3139

مشق 10.2: کتاب کے آخر میں مختلف اشیاء کے مستقل دئے گئے ہیں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے ابرق میں، طاقت کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے، 5.6 GHz اور  $10 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$  حیطے کی مقناطیسی میدان پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

3141

3142

3143

3144

3145

3146

3147

3148

• موج کی رفتار،

• طول موج،

• زاویائی مستقل،

• قدرتی رکاوٹ،

• برقی میدان کا حیطہ۔

جوابات:  $1.62 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  اور  $162.1 \Omega$ ،  $272.6 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ،  $23 \text{ cm}$ ،  $1.29 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

کامل ذو برقی میں امواج پر غور کے بعد فطری طور ناقص ذو برقی پر بات کرنا ضروری ہے لہذا صاف پانی کو مثال بناتے ہوئے 20 GHz تعدد پر ایسا ہی کرتے ہیں۔<sup>3151</sup> صفحہ 328 پر شکل 10.4 میں صاف پانی کے مستقل دئے گئے ہیں۔

اس تعدد پر صاف پانی کے مستقل  $\epsilon_R = 41$  اور  $\frac{S}{m} = 36.7$   $\sigma = 36.7$  ہیں۔ چونکہ پانی غیر مقناطیسی ہے لہذا اس کا  $\mu_R = 1$  ہوگا۔ یوں

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0.8$$

اور

$$\begin{aligned}\gamma &= j2 \times \pi \times 20 \times 10^9 \times \frac{\sqrt{1 \times 41}}{3 \times 10^8} \sqrt{1 - j0.8} \\ &= 3035 / 70.67^\circ \\ &= 1005 + j2864 \quad m^{-1}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں پانی کا تضعیفی مستقل

$$\alpha = 1005 \frac{Np}{m}$$

ہے جس کا مطلب ہے کہ پانی میں ہر  $\frac{1}{1005}$  میٹر یعنی 1 mm فاصلہ طے کرنے پر برقی اور مقناطیسی امواج 0.368 گنا گھٹ جائیں گے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں **ریڈار**<sup>39</sup> پانی میں کیوں کام نہیں کرتا۔ اسی طرح بارش کی صورت میں بھی ریڈار کی کارکردگی بری طرح متاثر ہوتی ہے۔ پانی میں دیکھنے کی خاطر موج آواز استعمال کی جاتی ہیں۔

زاویائی مستقل

$$\beta = 2864 \frac{rad}{m}$$

ہے جو  $\sigma = 0$  کی صورت میں  $\frac{rad}{m}$  2682 حاصل ہوتا ہے لہذا پانی کے موصلیت سے زاویائی مستقل زیادہ متاثر نہیں ہوا۔ اس تعدد پر خالی خلاء میں طول موج <sup>3156</sup> 1.5 cm ہے جبکہ پانی میں  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$  سے طول موج 2.19 mm ہے۔

قدرتی رکاوٹ

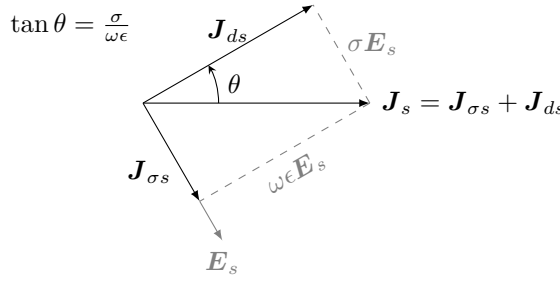
$$\eta = \frac{377}{\sqrt{41}} \frac{1}{\sqrt{1 - j0.8}} = 52 / 19.33^\circ = 49.1 + j17.2 \quad \Omega$$

ہے لہذا  $E_x$  ہر نقطے پر  $H_y$  سے  $19.33^\circ$  آگے ہے۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s = \mathbf{J}_{vs} + \mathbf{J}_{ds}$$

میں ایصال اور انتقالی کثافت برقی رو کے سمتی مجموعے کو شکل 10.3 میں بطور مجموعی کثافت  $\mathbf{J}_s$  دکھایا گیا ہے۔ ایصالی رو اور انتقالی رو آپس میں  $90^\circ$  درجے کا زاویہ بناتے ہیں۔ انتقالی رو  $90^\circ$  آگے رہتا ہے۔ یہ بالکل متوازی جڑے مزاحمت اور کپیسٹر کے رو کی طرح صورت حال ہے۔ کپیسٹر کی رو، مزاحمت کی رو سے  $90^\circ$  آگے



شکل 10.3: طاقت کے ضیاع کا ٹکون۔

رہتی ہے۔ مزید یہ کہ مزاحمت کی رو سے برقی طاقت کا ضیاع پیدا ہوتا ہے جبکہ کپیسٹر کی رو سے ایسا نہیں ہوتا۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے شکل 10.3 میں زاویہ  $\theta$  (جس کا کروئی محدود کے زاویہ  $\theta$  کے ساتھ کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں ہے) کو دیکھیں جس کے لئے

$$\tan \theta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \quad (10.45)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں اس ٹکون کو طاقت کے ضیاع کا ٹکون پکارا جاتا ہے اور  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$  کی شرح کو ضیاعی ٹینجینٹ<sup>40</sup> یا مماس ضیاع کہا جاتا ہے۔

مساوات 10.14 اور مساوات 10.32 استعمال کرتے ہوئے لکھا گیا۔ کسی ذوبرق کے کامل یا غیر کامل ہونے کا فیصلہ اس کے مماس ضیاع کی قیمت کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔ اگر اس شرح کی قیمت اکائی کے قریب ہو تب ذوبرق غیر کامل قرار دیا جاتا ہے جبکہ  $1 \ll \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$  کی صورت میں ذوبرق کو کامل تصور کیا جاتا ہے۔<sup>3159</sup>

کم مماس ضیاع کی صورت میں حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کے کارآمد مساوات حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}}$$

کو مسئلہ ثنائی<sup>41</sup>

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

جہاں  $|x| < 1$  ہے، کی مدد سے تسلسل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ اگر ہم  $x = -j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$  اور  $n = \frac{1}{2}$  لیں تو حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[ 1 - j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} + \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 + \dots \right]$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$\alpha \doteq j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \left( -j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (10.46)$$

اور

$$\beta \doteq \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[ 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right] \quad (10.47)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اگر  $1 \ll \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$  ہو تب

$$\beta \doteq \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (10.48)$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ بالکل اسی طرح قدرتی رکاوٹ کو

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[ 1 - \frac{3}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 + j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right] \quad (10.49)$$

یا

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left( 1 + j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right) \quad (10.50)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

انہیں دیکھیں کہ ان مساوات سے حاصل جواب اصل مساوات کے جوابات کے کتنے قریب ہیں۔ ایسا صاف پانی کی مثال کو دوبارہ حل کر کے دیکھتے ہیں۔ صاف پانی کے مستقل 20 GHz تعدد پر  $\epsilon_R = 41$ ,  $\mu_R = 1$  اور  $\sigma = 36.7 \frac{S}{m}$  ہیں لہذا مساوات 10.46 سے

$$\alpha = 1080 \frac{Np}{m}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ حاصل کردہ قیمت  $1005 \frac{Np}{m}$  کے کافی قریب ہے۔ مساوات 10.47 سے

$$\beta = 2897 \frac{rad}{m}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ جواب  $2864 \frac{rad}{m}$  کے بہت قریب ہے۔ مساوات 10.48 سے حاصل جواب

$$\beta = 2682 \frac{rad}{m}$$

درست جواب سے نسبتاً زیادہ مختلف ہے۔ قدرتی رکاوٹ مساوات 10.49 سے

$$\eta = 44.75 + j23.55$$

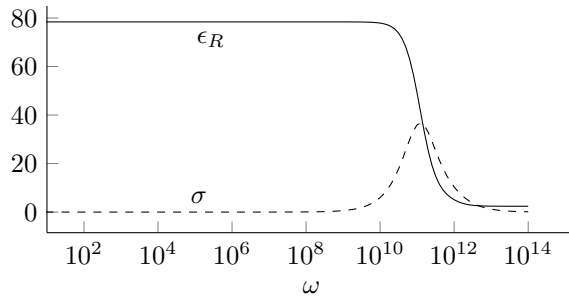
حاصل ہوتا ہے جو  $49.1 + j17.2$  کے بہت قریب ہے البتہ مساوات 10.50 سے حاصل جواب

$$\eta = 58.88 + j23.55$$

قدر مختلف ہے۔ صاف پانی کی اس مثال میں مماس ضیاع 0.8 ہے جو اکائی سے بہت کم نہیں ہے، اسی لئے جوابات پہلے سے قدر مختلف حاصل ہوئے۔ چونکہ موصلیت اور برقی مستقل کی بالکل درست قیمتیں عموماً ہمیں معلوم نہیں ہوتیں لہذا سادہ مساوات سے حاصل جوابات کے اس فرق کو زیادہ اہمیت نہیں دینی چاہئے۔ بہتر یہی ہوتا ہے کہ  $0.1 < \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$  ہی کی صورت میں سادہ مساوات استعمال کئے جائیں۔

عموماً ذوب برق کی موصلیت تعدد بڑھانے سے غیر خطی طور پر بڑھتی ہے جبکہ  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$  قیمت میں تبدیلی نسبتاً کم ہوتی ہے۔ یہی وجہ مماس ضیاع کی اہمیت کا راز ہے۔ یاد رہے کہ مختلف تعدد پر موصلیت، برقی مستقل اور مماس ضیاع نہایت تیزی سے تبدیل ہو سکتے ہیں۔ ایسا عموماً نظر آنے والی روشنی سے قدر کم یا قدر زیادہ تعدد پر ہوتا ہے۔

شکل 10.4 میں صاف پانی کا جزوی برقی مستقل  $\epsilon_R$  بالمقابل زاویائی تعدد  $\omega$  ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے جبکہ موصلیت بالمقابل تعدد نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ افقی محد تعدد کالاگ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تقریباً  $10 \frac{Grad}{s}$  تعدد تک  $\epsilon_R = 78.4$  رہتا ہے جبکہ اس سے بلند تعدد پر اس کی قیمت گھٹ کر 2.4 ہو جاتی ہے۔ موصلیت کی چوٹی تقریباً  $36.7 \frac{S}{m}$  پائی جاتی ہے۔ دیگر ذوب برق کے خط مختلف اشکال کے ہوں گے۔



شکل 10.4: صاف پانی کا جزوی برقی مستقل بالمقابل زاویائی تعدد اور موصلیت بالمقابل زاویائی تعدد۔

مشق 10.3: ایک مادے کے مستقل 1 MHz تعدد پر  $\mu_R = 1$ ،  $\epsilon_R = 2.8$  اور  $\sigma = 10^{-10} \frac{S}{m}$  ہیں۔ اس مادے کے مماس ضیاع، تضعیفی مستقل اور زاویائی مستقل حاصل کریں۔

جوابات:  $0.0642$ ،  $1.13 \times 10^{-3} \frac{Np}{m}$  اور  $3.51 \times 10^{-4} \frac{rad}{m}$

مشق 10.4: ایک غیر مقناطیسی مادے کا مماس ضیاع  $0.07$  جبکہ  $\mu_R = 4.7$  ہیں۔ ان قیمتوں کو 1 MHz تا 80 MHz تعدد کے درمیان اٹل تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس کا تضعیفی مستقل اور مادے میں طول موج 20 MHz اور 60 MHz تعدد پر حاصل کریں۔

جوابات:  $0.031 \frac{Np}{m}$ ،  $6.9 m$ ،  $0.095 \frac{Np}{m}$ ،  $2.3 m$

### 10.3 پوینٹنگ سمتیہ

امواج کی طاقت جاننے کے لئے مسئلہ پوینٹنگ<sup>42</sup> درکار ہو گا لہذا پہلے اسے<sup>43</sup> حاصل کرتے ہیں۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

کا  $\mathbf{E}$  کے ساتھ غیر سمتی ضرب

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

<sup>42</sup>Poynting theorem

<sup>43</sup>جان پیٹری پوینٹنگ نے 1884 میں پہلی بار اس مسئلے کو پیش کیا۔

لیتے ہوئے سمتی ممال (جسے آپ با آسانی کار تئسی محد میں ثابت کر سکتے ہیں)

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}$$

کے ذریعہ

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس میں  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  پر کرنے سے

$$-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

یا

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب

$$\epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon E^2}{2} \right)$$

اور

$$\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھے جاسکتے ہیں لہذا

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس کے صحیحی مکمل

$$-\int_h \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dh = \int_h \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dh + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left( \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dh$$

پر مسئلہ پھیلاؤ کے اطلاق سے

$$(10.51) \quad -\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_h \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dh + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left( \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dh$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو کی بات کرتے ہیں۔ اگر پورے حجم میں کہیں پر بھی منبع طاقت موجود نہ ہو تب یہ مکمل حجم میں کل لمحاتی مزاحمتی طاقت کا ضیاع دیتا ہے۔ اگر حجم میں منبع طاقت پایا جاتا ہو تب ان منبع کے حجم پر مکمل کی قیمت مثبت ہوگی اگر منبع کو طاقت فراہم کی جارہی ہو اور یہ مکمل منفی ہوگا اگر منبع طاقت فراہم کر رہا ہو۔

مساوات کے دائیں ہاتھ دوسرا مکمل حجم میں توانائی کا کل ذخیرہ دیتا ہے جس کا وقت کے ساتھ تفرق حجم میں ذخیرہ توانائی میں لمحاتی تبدیل یعنی طاقت دیتا ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ حجم میں داخل ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔ یوں حجم سے کل خارجی طاقت

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

ہوگا جہاں حجم گھیرتی سطح پر مکمل لیا گیا ہے۔ سمتی ضرب  $H \times E$  پوائنٹنگ سمتیہ  $\mathcal{P}$  پکارا جاتا ہے

$$\mathcal{P} = E \times H \quad (10.52)$$

جس سے مراد لمحاتی طاقت کی کثافت لی جاتی ہے جو واٹ فی مربع میٹر  $\frac{W}{m^2}$  میں ناپی جاتی ہے۔ یہاں بھی برقی میدان میں کثافت توانائی  $\frac{1}{2} D \cdot E$  یا مقناطیسی میدان میں کثافت توانائی  $\frac{1}{2} B \cdot H$  کے استعمال کی طرح یاد رہے کہ پوائنٹنگ سمتیہ کا بند سطح پر مکمل ہی حقیقی معنی رکھتا ہے اور ایسا مکمل سطح سے خارج ہوتا مکمل طاقت دیتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر  $\mathcal{P}$  کی سمت اس نقطے پر لمحاتی طاقت کے بہاؤ کی سمت دیتا ہے۔

چونکہ  $\mathcal{P}$  برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں کے عمودی ہے لہذا طاقت کی بہاؤ بھی دونوں میدان کے عمودی سمت میں ہوگی۔ ہم نے برقی و مقناطیسی امواج پر تبصرے کے دوران دیکھا کہ امواج کے حرکت کی سمت  $E$  اور  $H$  کے عمودی ہوتی ہے لہذا  $\mathcal{P}$  کی سمت ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔ مزید کامل ذو برق میں

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

سے لمحاتی کثافت سطحی بہاؤ طاقت

$$E_x \mathbf{a}_x \times H_y \mathbf{a}_y = \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_z = \mathcal{P} \mathbf{a}_z$$

حاصل ہوتی ہے۔ اوسط کثافت طاقت حاصل کرنے کی خاطر ہم ایک پھیرے یعنی  $T = \frac{1}{f}$  دورانیے کا مکمل لیتے ہوئے دوری عرصہ  $T$  پر تقسیم

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{اوسط}} &= f \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) dt \\ &= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \int_0^{\frac{1}{f}} [1 + \cos(2\omega t - 2\beta z)] dt \\ &= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \left[ t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t - 2\beta z) \right]_0^{\frac{1}{f}} \end{aligned}$$

کرتے ہوئے

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \quad \frac{W}{m^2} \quad (10.53)$$

حاصل کرتے ہیں جو  $z$  سمت میں کثافت طاقت کی بہاؤ دیتا ہے۔ اگر میدان کی چوٹی  $E_0$  کی جگہ اس کی موثر قیمت  $E_{\text{موز}}$  استعمال کی جائے تب مندرجہ بالا مساوات میں  $\frac{1}{2}$  کا جزو ضروری نہیں لکھا جائے گا۔

موج کی سمت کے عمودی سطح  $S$  سے یوں

$$P_{z, \text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} S \quad W$$

طاقت گزرے گی۔

غیر کامل ذو برق کی صورت میں

$$\eta = |\eta| e^{j\theta_\eta}$$

لیتے ہوئے

$$(10.54) \quad \begin{aligned} E_x &= E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \\ H_y &= \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|\eta|} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \end{aligned}$$

ہوں گے جن سے

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{اوسط}} &= f \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) dt \\ &= f \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} [\cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_\eta) + \cos \theta_\eta] dt \end{aligned}$$

یعنی

$$(10.55) \quad \mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta$$

3192

حاصل ہوتا ہے۔

کثافت طاقت کی اوسط قیمت مخلوط پونٹنگ سمتیہ

$$(10.56) \quad \mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]_{\text{حقیقی}}$$

سے بھی حاصل کی جاسکتی ہے جہاں جوڑی دار مخلوط<sup>45</sup> مقناطیسی موج استعمال کی جاتی ہے۔ انہیں مساوات 10.55 کو اس ترکیب سے دوبارہ حاصل کریں۔ مساوات 10.54 کی دوری سمتی شکل

$$\begin{aligned} E_{sx} &= E_0 e^{-\alpha z - j\beta z} \\ H_{sy} &= \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z - j\beta z - j\theta_\eta} \\ H_{sy}^* &= \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z + j\beta z + j\theta_\eta} \end{aligned}$$

ہے جہاں جوڑی دار مخلوط مقناطیسی موج  $H_{sy}^*$  بھی لکھی گئی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^* &= \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z + j\theta_\eta} \\ &= \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} (\cos \theta_\eta + j \sin \theta_\eta) \end{aligned}$$

کا حقیقی حصہ لیتے ہوئے

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta$$

3193

کثافت اوسط توانائی کی مطلوبہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

3194

اس کتاب میں اوسط کثافت توانائی حاصل کرتے وقت مساوات 10.56 استعمال کی جائے گی۔



3195

مشق 10.5: ایک میگاہرٹز، تین سو میگاہرٹز اور تین گیگاہرٹز کے تعدد پر صاف پانی کے برف کے جزو برقی مستقل بالترتیب 3.2، 3.45، 4.15 اور 3.2 ہیں جبکہ اس کے مماس ضیاع بالترتیب 0.12، 0.035 اور 0.0009 ہیں۔ یکساں سطحی موج جس کی چوٹی  $z = 100 \frac{V}{m}$  ہو برف سے گزر رہی ہے۔ ایک مربع میٹر سطح سے اوسط طاقت کا بہاؤ  $z = 5 \text{ m}$  اور  $z = 5 \text{ m}$  پر حاصل کریں۔

3198

3199

جوابات: 14.31 W، 23.7 W، 12.48 W، 24.7 W، 26.4 W، 27.1 W

3200

3201

مثال 10.5:  $z$  محدود پر  $\sigma = 3.2 \times 10^7 \frac{S}{m}$  موصلیت کے غیر مقناطیسی مادے سے بنی لا محدود لمبائی کی سلاخ پائی جاتی ہے جس کا جزوی برقی مستقل  $\epsilon_R = 1$  ہے۔ اس سلاخ میں  $a_z$  سمت 250 A کی یکساں یک سمتی برقی رو گزر رہی ہے اور سلاخ کا رداس 2 cm ہے۔ (الف) سلاخ کی فی میٹر مزاحمت حاصل کریں۔ (ب) سلاخ میں فی میٹر طاقت کا ضیاع  $I^2 R$  سے حاصل کریں۔ (پ) سلاخ میں  $J$ ،  $E$  اور  $H$  حاصل کریں۔ (ت) سلاخ کی سطح پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی نکل لیتے ہوئے فی میٹر سلاخ میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔ (ث) رداس 5 cm کے ٹکلی سطح پر پونٹنگ سمتیہ کے سطحی نکل کے استعمال سے سلاخ کے قریب برقی میدان حاصل کریں۔

3206

حل: (الف) فی میٹر سلاخ کی مزاحمت حاصل کرتے ہیں۔

$$R = \frac{1}{3.2 \times 10^7 \times \pi \times 0.02^2} = 24.87 \frac{\mu\Omega}{m}$$

(ب) فی میٹر سلاخ میں طاقت کا مزاحمتی ضیاع یوں حاصل ہو گا۔

$$P = I^2 R = 250^2 \times 24.87 \times 10^{-6} = 1.554247 \frac{W}{m}$$

(پ) سلاخ کا رقبہ عمودی تراش  $A = \pi \times 0.02^2$  مربع میٹر ہے۔ یوں سلاخ میں کثافت برقی رو

$$J = \frac{I}{A} a_z = \frac{250}{\pi \times 0.02^2} a_z = 198949 a_z \frac{A}{m^2}$$

ہوگی جس سے سلاخ میں برقی شدت  $J = \sigma E$  سے

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{198949 a_z}{3.2 \times 10^7} = 6.217 \times 10^{-3} a_z \frac{V}{m}$$

حاصل ہوتی ہے۔ دو سنٹی میٹر سے کم رداس  $\rho < 2 \text{ cm}$  کا دائرہ کل

$$\frac{250 \times \pi \times \rho^2}{\pi \times 0.02^2} = 625000 \rho^2$$

ایمپیر کی برقی رو گھیرے گی۔ یوں ایمپیر کا دوری قانون استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے اندر رداس  $\rho$  پر مقناطیسی میدان

$$H_\phi = \frac{625000 \rho^2}{2\pi\rho} = 99472 \rho a_\phi \frac{A}{m}$$

حاصل ہوگا۔

ت) پونٹنگ سمتیہ

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -618.42 \rho a_\rho \frac{\mathbf{W}}{\text{m}^2}$$

ہے۔ ہم 2 cm کے انتہائی قریب لیکن اس سے ذرہ کم رداس اور 1 m لمبائی کی تصوراتی سطح پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی نکل لیتے ہوئے فی میٹر سلاخ میں مزاحمتی ضیاع حاصل کرتے ہیں۔ اس ڈبی نما تصوراتی سطح کی چلی اور بالائی سیدھی سمتی سطح بالترتیب  $-a_z$  اور  $a_z$  سمت میں ہیں جبکہ پونٹنگ سمتیہ  $a_\rho$  سمت میں ہے لہذا ان سطحوں پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی نکل صفر کے برابر ہوگا۔ یوں سطحی نکل حقیقت میں صرف تصوراتی سطح کے گول حصے پر لینا ضروری ہے۔ سطح میں داخل ہوتا طاقت

$$\int_S -\mathcal{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 618.42 \rho^2 d\phi dz = 1.554247 \frac{\mathbf{W}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں  $\rho = 2 \text{ cm}$  پر کیا گیا ہے۔ یاد رہے کہ ہم نے دو سنٹی میٹر سے ذرہ کم رداس چننا کہ سلاخ کے اندر حاصل کردہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان قابل استعمال ہوں۔

ٹ) سلاخ کے رداس سے زیادہ رداس پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی نکل وہی طاقت دے گا جو سلاخ کے سطح پر نکل لیتے ہوئے حاصل ہوا تھا۔ مزاحمتی طاقت کا ضیاع ہمارے چنے گئے سطح پر منحصر نہیں ہے۔ 5 cm رداس اور 1 m لمبائی کی تصوراتی سطح لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ 5 cm کا گول دائرہ پورے 250 A کی برقی رو کو گھیرے گا۔ یوں اس دائرے پر

$$\mathbf{H} = \frac{250}{2\pi \times 0.05} a_\phi = 795.7747 a_\phi \frac{\mathbf{A}}{\text{m}}$$

ہوگا۔ سلاخ کے گول سطح پر برقی میدان  $a_z$  سمت میں ہے۔ سرحدی شرائط کے مطابق کسی بھی دو مختلف اجسام کے سرحد پر متوازی برقی میدان برابر ہوتے ہیں۔ یوں لامحدود لمبائی کے سلاخ کے بالکل قریب برقی میدان  $a_z$  سمت میں ہی ہوگا۔ ایسا کوئی جواز نظر نہیں آتا کہ سلاخ سے دور میدان کیوں  $a_z$  سمت میں نہ ہو۔ یوں ہم  $\mathbf{E} = E_0 a_z$  لیتے ہیں۔ اس طرح تصوراتی سطح کی چلی اور بالائی سطحوں پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی نکل صفر کے برابر ہوگا۔ سلاخ میں داخل ہوتا طاقت تصوراتی سطح کے گول حصے پر نکل سے حاصل ہوگا یعنی

$$\int_S -\mathcal{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 795.7747 E_0 \rho d\phi dz = 250 E_0 \mathbf{W}$$

جہاں  $\rho = 5 \text{ cm}$  پر کیا گیا ہے۔ حاصل جواب کو 1.554247 W کے برابر کرتے ہوئے سلاخ کے باہر

$$\mathbf{E} = 6.217 \times 10^{-3} a_z \frac{\mathbf{V}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مثال میں سلاخ کے باہر اور سلاخ کے اندر برابر برقی میدان پایا جاتا ہے۔

موصل میں امواج پر غور کی خاطر ہم تصور کرتے ہیں کہ موصل سے جڑے ذو برق میں امواج پیدا کئے جاتے ہیں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ ایسے موج ذو برق اور موصل کے سرحد پر موصل میں کیسے داخل ہوتے ہیں اور موصل میں ان کی کیا کارکردگی ہوتی ہے۔

ایصالی اور انتقالی رو کی شرح  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$  کو مماس ضیاع کہتے ہیں۔ یوں ناقص موصل کی مماس ضیاع بلند تعدد پر کم ہوگی۔ نائیکروم<sup>46</sup> ناقص موصل ہے جس کا مماس ضیاع 100 MHz تعدد پر تقریباً  $2 \times 10^8$  ہے۔ یوں کسی بھی موصل کے لئے  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$  ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے چند سادہ مساوات حاصل کرتے ہیں۔ حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

کو  $1 \gg \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$  کی بنا پر

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

یا

$$\gamma = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب

$$-j = 1/\underline{-90^\circ}$$

کے برابر ہے جس کا جزر

$$\sqrt{1/\underline{-90^\circ}} = 1/\underline{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ہے لہذا

$$\gamma = j\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

یا

$$(10.57) \quad \gamma = (j+1)\sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(10.58) \quad \alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

ملتا ہے۔

ان معلومات کے بعد کہا جاسکتا ہے کہ کسی بھی  $\mu$  اور  $\sigma$  مستقل رکھنے والے موصل کے  $\alpha$  اور  $\beta$  ہر تعدد پر برابر ہی رہتے ہیں۔ یوں  $z$  سمت میں دوبارہ امواج فرض کرتے ہوئے موصل میں برقی میدان کی موج کو

$$(10.59) \quad E_x = E_0 e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma})$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر  $z < 0$  کا ل ذو برق اور  $z > 0$  موصل خطے ہوں تب ان کے سرحد  $z = 0$  پر برقی سرحدی شرائط کے مطابق متوازی برقی میدان سرحد کے دونوں اطراف پر برابر ہوں گے۔ مساوات 10.59 کے تحت سرحد پر موصل میں

$$(10.60) \quad E_x = E_0 \cos \omega t \quad (z = 0)$$

ہو گا اور یوں سرحد پر ذو برق میں بھی برقی میدان یہی ہو گا۔ اب اسی حقیقت کو یوں بھی دیکھا جاسکتا ہے کہ سرحد پر ذو برق میں برقی میدان مساوات 10.60 دیتا ہے جو موصل میں سرحد پر اسی قیمت کا میدان پیدا کرتا ہے۔ ایسا تصور کرنے کا مطلب یہ ہے کہ ہم ذو برق میں میدان کو منبع میدان تصور کرتے ہیں جو موصل میں مساوات 10.59 میں دی موج پیدا کرتا ہے۔ موصل میں  $1 \gg \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$  کی بنا پر انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$J = \sigma E \quad (10.61)$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا موصل میں ہر نقطے پر کثافت رو اور برقی میدان راہ تناسب کا تعلق رکھتے ہیں اور یوں موصل میں

$$J_x = \sigma E_0 e^{-z} \sqrt{\pi f \mu \sigma} \cos(\omega t - z \sqrt{\pi f \mu \sigma}) \quad (10.62)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 10.5 میں  $J_x$  دکھایا گیا ہے جہاں عین سرحد یعنی  $z = 0$  پر کثافت رو کے قیمت  $J_0 \sigma E_0$  لکھا گیا ہے۔

مساوات 10.59 اور مساوات 10.62 میں بہت معلومات پائی جاتی ہے۔ پہلے ان مساوات میں  $e^{z \sqrt{\pi f \mu \sigma}}$  جزو پر غور کریں۔ سرحد پر اس کی قیمت  $e^0 = 1$  کے برابر ہے جو سرحد سے

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

فاصلے پر  $e^{-1} = 0.368$  رہ جاتی ہے۔ یہ فاصلہ **گہرائی جلد**<sup>47</sup> کہلایا اور  $\delta$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (10.63)$$

برقی رو کا سطحی تہہ تک محدود رہنے کو **اثر جلد**<sup>48</sup> کہا جاتا ہے۔ یوں موصل میں

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta} \quad (10.64)$$

ہو گا۔ اسی طرح سرحد سے  $2\delta$  فاصلے پر میدان  $e^{-2} = 0.135$  اور  $4\delta$  فاصلے پر میدان  $e^{-4} = 0.018$  یعنی صرف % 1.8 رہ جائے گا۔

تانبے کی  $\sigma = 5.8 \times 10^7 \frac{S}{m}$  ہے لہذا اس میں گہرائی جلد

$$\delta_{\text{تانبہ}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times f \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}}$$

میٹر کے برابر ہے۔ یوں 50 Hz کا میدان سرحد سے  $\frac{0.0661}{\sqrt{50}} = 9.35 \text{ mm}$  فاصلے پر کم ہو کر صرف 0.368 گنا رہ جائے گا۔ برقی ادوار میں مزاحمت میں طاقت کا ضیاع رو کے مربع کے راست تناسب ہوتا ہے لہذا ہر ایک گہرائی جلد کے فاصلے پر کثافت طاقت  $0.135 = 0.368^2$  گنا کم ہوگی۔ **خرد امواج**<sup>49</sup> کے تعداد یعنی 10 GHz پر گہرائی جلد  $0.661 \mu m$  یعنی نظر آنے والے روشنی کے طول کے آٹھویں حصے کے برابر ہے۔

ان تعداد پر کسی بھی موصل مثلاً تانبے میں سرحد سے چند ہی گہرائی جلد کے فاصلے پر تمام میدان تقریباً صفر کے برابر ہوتے ہیں۔ موصل کے سرحد پر پیدا کئے گئے برقی میدان یا کثافت رو، سرحد سے دوری کے ساتھ تیزی سے کم ہوتے ہیں۔ برقی و مقناطیسی طاقت موصل کے اندر نہیں بلکہ اس کے باہر صفر کرتی ہے۔ موصل کا کام صرف اتنا ہے کہ یہ ان امواج کو راستہ دکھاتی ہے۔ موصل کے سرحد پر پیدا کثافت رو، موصل میں موج کے حرکت کے عمودی سمت میں داخل ہوتی ہے جس سے موصل میں مزاحمتی ضیاع پیدا ہوتا ہے۔ یوں موصل بطور راہ گیر کردار ادا کرتے ہوئے مزاحمتی ضیاع بطور اجرت حاصل کرتا ہے۔

اگر آپ کسی بجلی گھر میں 50 Hz کے برقی رو کو منتقل کرنے کی خاطر پانچ سٹی میٹر داس کے تانبے کی ٹھوس تار استعمال کر رہے ہوں تو یہ سراسر تانبہ ضائع کرنا ہوگا چونکہ کثافت روتار کے بیرونی سطح پر ہی پائی جائے گی۔ اندرونی تار، سطح سے دور، کثافت رو قابل نظر انداز ہوگی لہذا اس سے بہتر ہوگا کہ زیادہ داس کی نکلی نمائندگی استعمال کی جائے جس کی موٹائی تقریباً  $1.5\delta$  یعنی  $1.4\text{ cm}$  ہو۔ اگرچہ یہ فیصلہ لامحدود جسامت کے سرحد کے نتائج پر بنیاد ہے، حقیقت میں محدود سرحد پر بھی میدان اسی نسبت سے گھٹے ہیں۔

3228

بلند تعدد پر گہرائی جلد کا فاصلہ اتنا کم ہوتا ہے کہ راہ گیر موصل کی سطحی تہہ ہی اہمیت رکھتی ہے۔ یوں خرد امواج کی منتقلی کے لئے شیشے پر  $0.661\text{ }\mu\text{m}$  موٹی چاندی کی تہہ کافی ہے۔

3230

آئیں اب موصل میں طول موج اور رفتار موج کے مساوات حاصل کریں۔ ہم

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

سے شروع کرتے ہوئے مساوات 10.64 استعمال کرتے ہوئے

$$\lambda = 2\pi\delta$$

لکھ سکتے ہیں۔ اسی طرح مساوات 10.25

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

سے

$$(10.65) \quad v = \omega\delta$$

3231

ملتا ہے۔

تانبے میں 50 Hz پر  $\lambda = 5.8\text{ cm}$  اور  $v = 2.94 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  یا  $10.6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  حاصل ہوتے ہیں۔ میں تقریباً  $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  کی رفتار سے چلتا ہوں۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تانبے میں برقی و مقناطیسی امواج انتہائی آہستہ چلتے ہیں۔ یاد رہے کہ اسی 50 Hz کے موج کی خالی خلاء میں  $\lambda = 6000\text{ km}$  اور رفتار  $3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ہو گی۔

3234

موصل میں  $H_y$  کی مساوات لکھنے کی خاطر موصل کی قدرتی رکاوت درکار ہوگی۔ مساوات 10.31

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

کو  $1 \gg \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$  کی وجہ سے

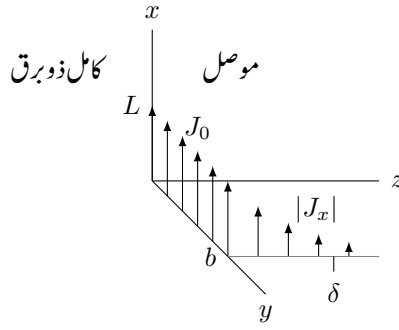
$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

یا

$$(10.66) \quad \eta = \frac{\sqrt{2}/45^\circ}{\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} + j\frac{1}{\sigma\delta}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 10.60 کو گہرائی جلد کی صورت

$$(10.67) \quad E_x = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$



شکل 10.5: موصل میں طاقت کے ضیاع اور گہرائی جلد۔

میں لکھتے ہوئے مقناطیسی موج کو

$$(10.68) \quad H_y = \frac{\sigma \delta E_0}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos \left( \omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی موج، برقی موج سے پھیرے کے آٹھویں حصے پیچھے ہے۔

مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے پونینگ مساوات

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma \delta E_0^2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{2z}{\delta}} \cos \frac{\pi}{4}$$

یا

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{\sigma \delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}}$$

دیتا ہے۔ آپ دوبارہ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک گہرائی جلد کی گہرائی پر کثافت طاقت، سرحد کے کثافت طاقت کے  $e^{-2} = 0.135$  گنا رہ گئی ہے۔

شکل 10.5 پر دوبارہ نظر ڈالیں۔ مسئلہ پونینگ کہتا ہے کہ سرحد پر  $L$  اور  $b$  اطراف کے مستطیل میں جتنی برقی و مقناطیسی طاقت داخل ہوتی ہے، وہ تمام کی تمام موصل میں ضائع ہو جاتی ہے۔ یہ طاقت

$$\begin{aligned} P_{L, \text{اوسط}} &= \int_0^b \int_0^L \mathcal{P}_{\text{اوسط}}|_{z=0} dx dy \\ &= \int_0^b \int_0^L \frac{\sigma \delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}} \Big|_{z=0} dx dy \\ &= \frac{\sigma \delta b L E_0^2}{4} \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ سرحدی کثافت رو

$$J_0 = \sigma E_0$$

کی صورت میں اسے

$$(10.69) \quad P_{L, \text{اوسط}} = \frac{1}{4\sigma} \delta b L J_0^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ اگر  $b$  چوڑائی میں کل برقی رو کو  $\delta$  گہرائی تک محدود کر دیا جائے تو مزاحمتی ضیاع کتنا ہوگا۔ ایسا کرنے کی خاطر پہلے اس چوڑائی میں کل رو

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x dy dz$$

حاصل کرتے ہیں جہاں مکمل آسان بنانے کی غرض سے

$$J_x = J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

کو دوری سمتیہ کی شکل

$$\begin{aligned} J_{xs} &= J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} \\ &= J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \end{aligned}$$

میں لکھ کر مکمل حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^b J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} dy dz \\ &= \frac{J_0 b \delta}{1+j} \end{aligned}$$

اس سے

$$I = \frac{J_0 b \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

لکھا جائے گا۔ اگر اس رو کو  $b < y < \delta$  اور  $0 < z < \delta$  میں محدود کر دیا جائے تب نئی کثافت رو

$$J'_x = \frac{J_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

ہوگی۔ مزاحمتی طاقت کا ضیاع فی اکائی حجم  $J \cdot E$  کے برابر ہے لہذا اس حجم میں کل ضیاع

$$P_L = \frac{1}{\sigma} (J'_x)^2 b L \delta = \frac{J_0^2}{2\sigma} b L \delta \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

ہوگا۔ مربع کو سائن موج کی اوسط قیمت  $\frac{1}{2}$  کے برابر ہوتی ہے لہذا اوسط طاقت کے ضیاع کو

$$P_L = \frac{J_0^2 b L \delta}{4\sigma} \quad (10.70)$$

لکھا جاسکتا ہے جو عین مساوات 10.69 ہے۔

اس نتیجے کو دیکھ کر اب کسی بھی موصل، جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو، میں کل رو کو ایک جلد گہرائی میں یکساں تقسیم شدہ تصور کرتے ہوئے سلاخ کی مزاحمتی ضیاع حاصل کی جاسکتی ہے۔ یوں  $b$  چوڑائی،  $L$  لمبائی اور  $\delta$  گہرائی سلاخ جس میں یکساں تقسیم شدہ <sup>346</sup> اثر جلد پایا جاتا ہو اور  $b$  چوڑائی،  $L$  لمبائی اور  $\delta$  گہرائی سلاخ جس میں یکساں تقسیم شدہ رو ہو کے مزاحمت بالکل برابر ہوں گے۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے رداس  $r$  کے ٹھوس نکلی سلاخ کی مزاحمت بلند تعدد پر حاصل کی جاسکتی ہے۔ اگر گہرائی جلد سلاخ کے رداس سے بہت کم ہو تب اس طرح حاصل کردہ مزاحمت کی قیمت تقریباً بالکل درست ہوگی۔ ایسی تعدد جس پر اثر جلد پایا جاتا ہو کی صورت میں سلاخ کی بیرونی جلد ہی رو گزارے گی لہذا مزاحمت کی قیمت حاصل کرتے وقت اس نکلی نماجی کو ہی موصول تصور کیا جائے گا لہذا مزاحمت  $R$

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{\sigma 2\pi r \delta} \quad (10.71)$$

ایک ملی میٹر رداس اور دس میٹر لمبی تانبے کے تار کی یک سمتی مزاحمت

$$R_{\text{یک سمتی}} = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times \pi \times 0.001^2} = 54.88 \text{ m}\Omega$$

ہے۔ ایک سو میگا ہرٹز کی تعدد پر تانبے کی  $\delta = 6.61 \mu\text{m}$  ہوگی لہذا اس تعدد پر اسی تار کی مزاحمت

$$R = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times 2 \times \pi \times 0.001 \times 6.61 \times 10^{-6}} = 4.15 \Omega$$

ہوگی۔

3242

مشق 10.6: ٹھوس نکلی نمالو ہے کی تار جس کا رداس 5 mm اور جس کی لمبائی 2.5 m ہے میں  $2 \cos 10000t$  ایمپیئر کی برقی رو گزر رہی ہے۔ کتاب کے آخر میں ضمیمے سے  $\sigma = 1.03 \times 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$  اور  $\mu_R = 4000$  دئے گئے ہیں۔ یاد رہے کہ موصول  $\epsilon_R = 1$  ہوتا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ منہدم جہ ذیل حاصل کریں۔

3245

• یک سمتی رو مزاحمت،

3246

• گہرائی جلد،

3247

• بدلتی رو مزاحمت یا موثر مزاحمت،

3248

• مزاحمتی طاقت کا ضیاع۔

3249

جوابات:  $2.49 \text{ W}$  اور  $1.25 \Omega$ ،  $62 \mu\text{m}$ ،  $3.09 \text{ m}\Omega$

3250

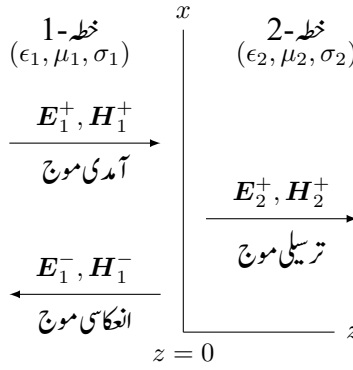
3251

10.5 انعکاس مستوی موج

3252

لامحدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج ہم دیکھ چکے۔ ایسے حجم میں کبھی بھی موج دو مختلف اقسام کے اشیاء کے درمیان پائی جانے والی سرحد نہیں چھوتی۔ ہمیں محدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج پر غور کریں جہاں امواج کو ایک قسم کے مادے سے دوسرے قسم کے مادے میں داخل ہونا ہوگا۔ آپ دیکھیں گے کہ ایسی صورت میں موج کا کچھ حصہ پہلے خطے سے دوسرے خطے میں داخل ہوتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ سرحد سے ٹکرا کر واپس پہلے خطے میں لوٹ جاتا ہے۔ اس حصے میں





شکل 10.6: آمدی موج سرحد سے گزرتی ترسیلی اور اس سے لوٹتی انعکاسی امواج پیدا کرتی ہے۔

ہم سرحد سے گزرتے اور اس سے ٹکرا کر واپس لوٹنے حصوں کے مساوات حاصل کریں گے۔ یہ نتائج **ترسیلی تاروں**<sup>50</sup> اور **رہبر موج**<sup>51</sup> کے مسائل میں جوں کے توں قابل استعمال ہوں گے۔

3257

ہم  $z < 0$  کو خطہ-1 تصور کرتے ہیں جہاں  $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$  ہیں جبکہ  $z > 0$  کو خطہ-2 تصور کرتے ہیں جہاں  $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$  ہیں۔ یہ صورت حال شکل 10.6 میں دکھائی گئی ہے۔ ہم بڑھتے  $z$  جانب حرکت کرتے موج کو بالا نوشت + جبکہ گھٹتے  $z$  جانب حرکت کرتے موج کو بالا نوشت - سے ظاہر کریں گے۔ اب تصور کریں کہ پہلے خطے میں سرحد کی جانب برقی موج

$$(10.72) \quad E_{xs1}^+ = E_{x10}^+ e^{-\gamma_1 z}$$

آتی ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ اس برقی موج کے ساتھ لازماً مقناطیسی موج

$$(10.73) \quad H_{ys1}^+ = \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z}$$

بھی ہوگی۔ سرحد کی طرف آتے موج کو **آمدی موج**<sup>52</sup> کہا جاتا ہے۔ چونکہ یہ موج سرحد کے عمودی حرکت کر رہا ہے لہذا اس کے حرکت کو **عمودی آمد**<sup>53</sup> کہتے ہیں۔

اس آمدی موج کا کچھ حصہ جسے **ترسیلی موج**<sup>54</sup> کہتے ہیں، سرحد سے گزرتے ہوئے سیدھا چلے جائے گا۔ ترسیلی امواج

$$(10.74) \quad E_{xs2}^+ = E_{x20}^+ e^{-\gamma_2 z}$$

$$(10.75) \quad H_{ys2}^+ = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z}$$

3259

ہیں۔ سرحد کے دوسرے جانب حرکی مستقل  $\gamma_2$  اور قدرتی رکاوٹ  $\eta_2$  ہیں جو پہلے خطے سے مختلف ہیں۔ ترسیلی امواج سرحد سے دور چلتی جاتی ہیں۔

آمدی اور ترسیلی برقی امواج  $x$  محدد کے متوازی جبکہ مقناطیسی امواج  $y$  محدد کے متوازی ہیں لہذا یہ چاروں امواج سرحد کے بھی متوازی ہیں۔ صفحہ 297 پر مساوات 9.45 اور اس کے قریب ہی مساوات 9.47 متوازی امواج کے سرحدی شرائط بیان کرتے ہیں۔ اب کائنات میں کبھی بھی دواشیاء کے سرحد پر سطحی کثافت رو نہیں پائی جاتی۔ یوں  $K_{\perp} = 0$  لیتے ہوئے ان شرائط کو

$$\begin{aligned} E_{m1} &= E_{m2} \\ H_{m1} &= H_{m2} \quad (K_{\perp} = 0) \end{aligned}$$

لکھا جاتا ہے۔

اب اگر پہلی شرط پوری کی جائے تو سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی برقی میدان برابر ہوں گے لہذا  $z = 0$  پر مساوات 10.72 اور مساوات 10.74 برابر ہوں گے۔ یوں  $E_{x10}^+ = E_{x20}^+$  حاصل ہوتا ہے لیکن دوسری شرط کے مطابق سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان بھی برابر ہونا ہوگا لہذا  $z = 0$  پر مساوات 10.73 اور مساوات 10.75 بھی برابر ہوں گے جس سے  $\frac{E_{x10}^+}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2}$  حاصل ہوتا ہے۔ یہ دونوں تب ممکن ہے جب  $\eta_1 = \eta_2$  ہو جو حقیقت میں کبھی بھی نہیں ہوگا لہذا صرف آمدی اور ترسیلی امواج کی صورت میں سرحدی شرائط پورا نہیں اتر جاسکتا۔ مندرجہ بالا دونوں سرحدی شرائط صرف اس صورت میں پورا ہوتے ہیں جب سرحد سے ٹکرا کر واپس لوٹنے والے امواج

$$(10.76) \quad E_{xs1}^- = E_{x10}^- e^{\gamma_1 z}$$

$$(10.77) \quad H_{ys1}^- = -\frac{E_{x10}^-}{\eta_1} e^{\gamma_1 z}$$

بھی پائے جائیں جنہیں **انعکاسی امواج** <sup>55</sup> کہا جاتا ہے۔ انعکاسی موج کا حرکت مستقل  $\gamma_1$  ہی ہے جبکہ یہ موج گھٹتے  $z$  جانب حرکت کر رہی ہے۔ انعکاسی موج میں  $E_{x10}^-$  مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ چونکہ انعکاسی امواج گھٹتے  $z$  جانب حرکت کرتی ہیں لہذا مسئلہ پونٹنگ کے تحت  $E_{xs1}^- = -\eta_1 H_{ys1}^-$  ہوگا تاکہ  $\mathbf{E}_1^- \times \mathbf{H}_1^-$  کی سمت  $-\mathbf{a}_z$  ہو۔

آمدی، ترسیلی اور انعکاسی امواج کی صورت میں دونوں سرحدی شرائط پورے ہوتے ہیں اور ان کی مدد سے  $E_{x10}^+$  کی صورت میں بقایا تمام امواج کے طول بھی حاصل ہوتے ہیں۔ انہیں دیکھیں کہ ایسا کس طرح ہوتا ہے۔

اب پہلے خطے میں آمدی امواج کے علاوہ انعکاسی امواج بھی پائے جاتے ہیں لہذا سرحدی شرائط میں دونوں کا مجموعہ استعمال کیا جائے گا۔ یوں  $z = 0$  پر سرحد کے دونوں جانب متوازی برقی میدان برابر ہونے سے

$$E_{xs1} = E_{xs2} \quad (z = 0)$$

یعنی

$$E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- = E_{xs2}^+ \quad (z = 0)$$

یا

$$(10.78) \quad E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{x20}^+$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح  $z = 0$  پر سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان کے برابری سے

$$H_{ys1} = H_{ys2} \quad (z = 0, K_{\perp} = 0)$$

یعنی

$$H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2}^+ \quad (z = 0, K_{\perp} = 0)$$

یا

$$(10.79) \quad \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 10.78 اور مساوات 10.79 کو  $E_{x10}^-$  کی خاطر حل کرنے کی غرض سے مساوات 10.78 کو مساوات میں پر کرتے

$$\frac{E_{x10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{x10}^+ + E_{x10}^-}{\eta_2}$$

ہوئے یوں

$$E_{x10}^- = E_{x10}^+ \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ انعکاسی اور آمدی برقی میدان کے حیطوں کی شرح کو **شرح انعکاس**<sup>56</sup> پکارا اور  $\Gamma$  سے ظاہر<sup>57</sup> کیا جاتا ہے۔

$$(10.80) \quad \Gamma = \frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

مخلوط شرح انعکاس کی صورت میں انعکاسی اور آمدی میدان میں زاویائی فرق پایا جائے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شرح انعکاس کی حتمی قیمت صفر تا ایک ممکن ہے۔

$$(10.81) \quad |\Gamma| \leq 1$$

اسی طرح مساوات 10.78 اور مساوات 10.79 سے  $E_{x10}^-$  ختم کرنے سے

$$(10.82) \quad \tau = \frac{E_{x20}^+}{E_{x10}^+} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

حاصل ہوتا ہے جو **شرح ترسیل**<sup>58</sup> کہلایا اور  $\tau$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مساوات 10.80 اور مساوات 10.82 سے

$$(10.83) \quad \tau = 1 + \Gamma$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں ان نتائج کو چند مخصوص صورتوں میں استعمال کرتے ہیں۔ تصور کریں کہ پہلا خطہ کامل ذوب برق جبکہ دوسرا خطہ کامل موصل ہے۔ ایسی صورت میں  $\sigma_2$  لامحدود ہوگا لہذا

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = 0$$

ہوگا۔ یوں مساوات 10.82 سے

$$E_{x20}^+ = 0$$

حاصل ہوتا ہے یعنی کامل موصل میں کسی صورت بھی وقت کے ساتھ بدلتا میدان نہیں پایا جاسکتا۔ اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ کامل موصل کی گہرائی جلد صفر کے برابر ہے۔

مساوات 10.80 میں  $\eta_2 = 0$  پر کرنے سے

$$\Gamma = -1$$

یعنی

$$E_{x10}^- = -E_{x10}^+$$

<sup>56</sup> reflection coefficient

<sup>57</sup>  $\Gamma$  یونانی حروف تہجی گیمائے۔

<sup>58</sup> transmission coefficient

حاصل ہوتا ہے۔ انعکاسی موج کا حیطہ بالکل آمدی موج کے حیطے کے برابر ہے لیکن ان میں  $180^\circ$  کا زاویہ پایا جاتا ہے۔ موصل سطح آمدی توانائی کو واپس کرتی ہے اور یوں پہلے خطے میں کل برقی میدان

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- \\ &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہوگا جہاں کامل ذوب برق میں  $\gamma_1 = 0 + j\beta_1$  لیا گیا ہے۔ اس کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^+ (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) \\ &= -j2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جو دوری سمتیہ کی صورت میں ہے جسے  $e^{j\omega t}$  سے ضرب دے کر حقیقی جزو لیتے ہوئے اصل موج کی مساوات

$$(10.84) \quad E_{x1} = 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مساوات ساکن میدان کو ظاہر کرتی ہے۔ یاد رہے کہ اسے دو آپس میں الٹ سمت میں حرکت کرتے امواج سے حاصل کیا گیا ہے۔ اس کا موازنہ آمدی موج

$$E_{x1}^+ = E_{x10}^+ \cos(\omega t - \beta_1 z)$$

سے کریں۔ حرکت کرتے موج کی پہچان جزو  $\omega t - \beta_1 z$  ہے جو مثبت سمت میں موج کو ظاہر کرتی ہے۔ مساوات 10.84 میں  $\omega t$  اور  $\beta_1 z$  علیحدہ علیحدہ پائے جاتے ہیں۔

مساوات 10.84 میں جس لمحہ  $\omega t = n\pi$  کے برابر ہو اس لمحہ میدان ہر نقطے پر صفر کے برابر ہوگا۔ اس کے علاوہ جس نقطے پر  $\beta_1 z = n\pi$  کے برابر ہو، اس نقطے پر ہر وقت میدان صفر ہی رہتا ہے۔ مساوات 10.84 کو **ساکن موج**<sup>59</sup> کہا جاتا ہے۔ برقی میدان ان سطحوں پر ہر وقت صفر رہتا ہے جہاں

$$\beta_1 z = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ہو جس سے

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = n\pi$$

یعنی

$$z = n \frac{\lambda_1}{2}$$

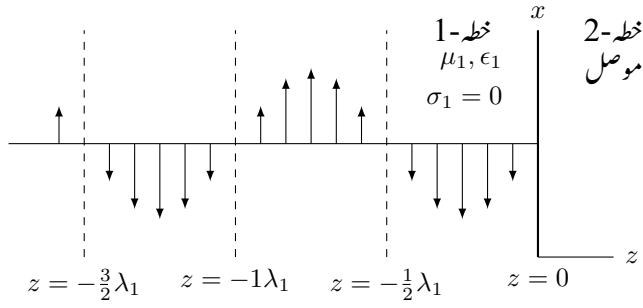
حاصل ہوتا ہے۔ یوں سرحد یعنی  $z = 0$  پر برقی میدان صفر ہوگا اور پہلے خطے میں سرحد سے دور چلتے ہوئے ہر آدھے طول موج پر صفر برقی میدان پایا جائے گا۔ یہ صورت حال شکل 10.7 میں دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں نقطہ دار لکیر ان سطحوں کو ظاہر کرتی ہیں جہاں میدان صفر رہتا ہے۔ برقی میدان کو وقت  $t = \frac{\pi}{2}$  پر دکھایا گیا ہے جب اس کا حیطہ زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے۔

چونکہ  $E_{xs1}^+ = \eta_1 H_{ys1}^+$  اور  $E_{xs1}^- = -\eta_1 H_{ys1}^-$  ہیں لہذا مقناطیسی میدان

$$H_{ys1} = \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z})$$

یا

$$(10.85) \quad H_{y1} = 2 \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} \cos \beta_1 z \cos \omega t$$



شکل 10.7: ساکن موج، برقی میدان۔

ہوگا۔ یہ بھی ساکن موج ہے لیکن جس سطح پر برقی میدان صفر رہتا ہے وہاں مقناطیسی ساکن موج کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ اس کے علاوہ برقی اور مقناطیسی ساکن امواج میں  $90^\circ$  کا وقتی فرق پایا جاتا ہے لہذا یہ امواج کسی بھی سمت میں اوسطاً صفر طاقت منتقل کرتی ہیں۔

3275

آئیں اب دو کامل ذوبرق کی سرحد پر صورت حال دیکھیں۔ اب ان دو خطوں میں قدرتی رکاوٹ  $\eta_1$  اور  $\eta_2$  جبکہ  $\alpha_1 = 0$  اور  $\alpha_2 = 0$  ہوں گے۔ عددی قیمتیں لے کر آگے چلتے ہیں۔ فرض کریں کہ

$$\eta_1 = 50 \Omega$$

$$\eta_2 = 377 \Omega$$

$$E_{x10}^+ = 10 \frac{V}{m}$$

ہیں۔ یوں

$$\Gamma = \frac{377 - 50}{377 + 50} = 0.7658$$

ہے لہذا

$$E_{x10}^- = 0.7658 \times 10 = 7.658 \frac{V}{m}$$

ہوگا۔ پہلے خطے میں مقناطیسی میدان

$$H_{y10}^+ = \frac{10}{50} = 0.2 \frac{A}{m}$$

$$H_{y10}^- = -\frac{7.658}{50} = -0.153 \frac{A}{m}$$

ہیں۔ آمدی اوسط سطحی کثافت طاقت مساوات 10.55 سے

$$P_{1, \text{اوسط}}^+ = \frac{1}{2} \frac{(E_{x10}^+)^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha_1 z} \cos \theta_{\eta_1} = 1 \frac{W}{m^2}$$

جبکہ انعکاسی اوسط سطحی کثافت طاقت

$$P_{1, \text{اوسط}}^- = \frac{1}{2} \frac{(E_{x10}^-)^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha_1 z} \cos \theta_{\eta_1} = 0.5864 \frac{W}{m^2}$$

ہے۔ ان مساوات میں  $\alpha_1 = 0$  اور  $\eta_1 = 50/0$  استعمال کئے گئے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور آمدی کثافت طاقت کی شرح

$$(10.86) \quad \frac{\frac{(E_{x10}^-)^2}{2\eta_0}}{\frac{(E_{x10}^+)^2}{2\eta_0}} = |\Gamma|^2$$

کے برابر ہے۔

دوسرے خطے میں

$$E_{x20}^+ = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{x10}^+ = 17.658 \frac{V}{m}$$

$$H_{y20}^+ = \frac{17.658}{377} = 0.04684 \frac{A}{m}$$

ہیں لہذا

$$P_{2,وسط}^+ = \frac{1}{2} \frac{(E_{x20}^+)^2}{|\eta_2|} e^{-2\alpha_2 z} \cos \theta_{\eta_2} = 0.4135 \frac{W}{m^2}$$

ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور ترسیلی طاقت کا مجموعہ آمدی طاقت کے عین برابر ہے۔

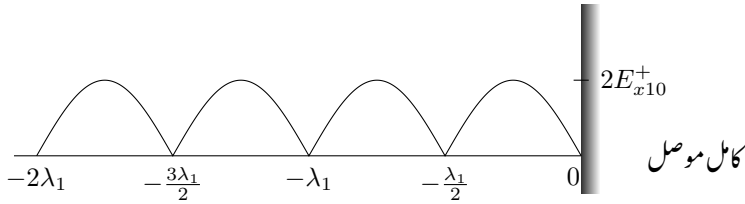
$$P_{1,وسط}^+ = P_{1,وسط}^- + P_{2,وسط}^+$$

## 10.6 شرح ساکن موج

کسی بھی ترسیلی نظام میں مختلف مقامات پر برقی یا مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارہ یا آسانی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ محوری تار کا اندرونی تار ذرہ زیادہ لمبا دیکھتے ہوئے برقی میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح تار کا ایک چھوٹا دائرہ مقناطیسی میدان کا نمونہ حاصل کرنے میں کام آتا ہے۔ ان آلات سے حاصل اشارات کو **سمت کار**<sup>60</sup> سے گزارتے ہوئے مائیکرو میٹر سے ناپا جاسکتا ہے۔ مائیکرو میٹر میدان کے حیطے کے راست تناسب جواب دیتا ہے۔ ان آلات کو عموماً درکار اشارات کے **ہمسر**<sup>61</sup> رکھا جاتا ہے تاکہ یہ زیادہ حساس ہوں۔

اگر بغیر ضیاع خطے میں یکساں مستوی موج حرکت کر رہی ہو اور اس خطے میں انعکاسی موج نہ پائی جاتی ہو تب میدان ناپنے والا آلہ تمام مقامات پر یکساں حیطہ دکھائے گا۔ ایسا آلہ تیزی سے تبدیل ہوتے حیطے کو دکھانے سے قاصر ہوتا ہے۔ ہر جگہ برابر حیطہ اس بات کی نشانی ہے کہ خطے میں طاقت ضائع نہیں ہوتا اور یہ کہ انعکاسی موج بھی غیر موجود ہے۔

اس کے برعکس کامل ذوبرق میں آمدی موج کا کامل موصل سے انعکاس، ساکن موج پیدا کرتا ہے۔ ایسے خطے میں میدان ناپنا آلہ مختلف مقامات پر مختلف حیطے دکھائے گا۔ چونکہ سرحد سے ہر آدھے طول موج کے فاصلے پر میدان صفر رہتا ہے لہذا ان نقطوں پر آلہ صفر حیطہ ناپے گا جبکہ عین ایسے دو قریبی نقطوں کے درمیان آلہ زیادہ سے زیادہ حیطہ دکھائے گا۔ آلے کو سرحد کے قریب اور دور کرنے سے ناپے گئے حیطے کی شکل  $|\sin \beta z|$  کی طرح حاصل ہوگی جہاں سرحد سے فاصلہ  $z$  ہے۔ اسے شکل 10.8 میں دکھایا گیا ہے۔ سائن نما حیطے کا تبدیل ہونا ساکن موج کی پہچان ہے۔



شکل 10.8: کامل موصل سے انعکاس، کامل ذو برق میں ساکن موج پیدا کرتا ہے۔

مثال 10.6: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں کامل ذو برق میں ساکن موج کی مساوات حاصل کریں۔

3290

حل: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں  $\Gamma = -1$  حاصل ہوتا ہے لہذا  $E_{xs1}^- = -E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z}$  ہوگا۔ یوں آمدی اور انعکاسی امواج کا مجموعہ

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \\ &= -2jE_{x10}^+ \sin \beta_1 z \end{aligned}$$

ہوگا۔ اس دوری سمتیہ سے حقیقی ساکن موج کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر اسے  $e^{j\omega t}$  سے ضرب دیتے ہوئے

$$E_{xs1} e^{j\omega t} = -2jE_{x10}^+ \sin \beta_1 z \cos \omega t + 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

حقیقی جزو

$$E_{x1} = 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

3291

لیتے ہیں۔ یہی ساکن موج کی مساوات ہے۔ شکل 10.8 میں آلہ ناپ سے حاصل  $|E_{x1}|$  دکھایا گیا ہے۔

3292

اب ایسی صورت پر غور کرتے ہیں جہاں تمام کی تمام موج سرحد سے واپس نہیں لوٹتی بلکہ اس کا کچھ حصہ سرحد پار کرتے ہوئے دوسری جانب چلے جاتی ہے۔ پہلے خطے میں اب آمدی موج کے علاوہ ایسی انعکاسی موج پائی جاتی ہے جس کا حیثہ آمدی موج سے کم ہوتا ہے۔ اگرچہ اب پہلے خطے میں ساکن موج کے ساتھ ساتھ حرکت کرتی موج بھی پائی جاتی ہے لیکن اس کے باوجود اس کو ساکن موج ہی پکارا جاتا ہے۔ اب کسی بھی نقطے پر میدان ہر وقت صفر نہیں رہتا۔ ساکن اور حرکت کرتے حصوں کا اندازہ حیثے کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور اس کے کم سے کم قیمت کی شرح سے بیان کی جاتی ہے۔ اس شرح کو **شرح ساکن موج**<sup>62</sup> کہا اور  $S$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے جبکہ دوسرا خطہ کوئی بھی مادہ ہو سکتا ہے۔ یوں  $\alpha_1 = 0$  ہوگا۔ اب

$$\begin{aligned} E_{xs1}^+ &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} \\ E_{xs1}^- &= \Gamma E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہوں گے جہاں

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

ہے۔ چونکہ کامل ذو برق میں  $\sigma = 0$  ہوتا ہے لہذا  $\eta_1$  مثبت حقیقی عدد ہے جبکہ  $\eta_2$  مخلوط عدد ہو سکتا ہے لہذا  $\Gamma$  بھی مخلوط ہو سکتا ہے۔ یوں اسے

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\phi}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$E_{xs1}^- = |\Gamma| E_{x10}^+ e^{j(\beta_1 z + \phi)}$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے ساکن موج کی مساوات

$$(10.87) \quad E_{xs1} = \left( e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| e^{j(\beta_1 z + \phi)} \right) E_{x10}^+$$

حاصل ہوتی ہے۔

3297

اب آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط عدد  $e^{j\theta}$  کو

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  ہوتا ہے لہذا اس کی حتمی قیمت ایک (1) ہی رہتی ہے۔ اس عدد کی زیادہ سے زیادہ قیمت  $\theta = 0$  کی صورت میں حاصل ہوتی ہے۔ یہی قیمت  $\theta = \pm 2\pi$  یا  $\theta = \pm 4\pi$  کی صورت میں بھی حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح اس عدد کی کم سے کم قیمت  $\theta = \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$  پر 1- حاصل ہوتی ہے۔ اس طرح مساوات 10.87 کو

$$E_{xs1} = \left( 1 + |\Gamma| e^{j(2\beta_1 z + \phi)} \right) e^{-j\beta_1 z} E_{x10}^+$$

لکھتے ہوئے اگر  $2\beta_1 z + \phi$  کو  $\theta$  تصور کیا جائے تو  $e^{j(2\beta_1 z + \phi)}$  کی زیادہ سے زیادہ قیمت یعنی 1+

$$2\beta_1 z + \phi = 0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \dots$$

یا

$$-\beta_1 z = \left( \frac{\phi}{2} \right), \left( \frac{\phi}{2} - \pi \right), \left( \frac{\phi}{2} + \pi \right), \left( \frac{\phi}{2} - 2\pi \right), \dots$$

پر حاصل ہوگی جسے

$$(10.88) \quad -\beta_1 z_{\text{بلندتر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ایسی صورت میں

$$(10.89) \quad |E_{xs1}|_{\text{بلندتر}} = (1 + |\Gamma|) E_{x10}^+$$

ہوگا۔ اسی طرح  $e^{j(2\beta_1 z + \phi)}$  کی کم سے کم قیمت یعنی 1-

$$2\beta_1 z + \phi = \pi, -\pi, 3\pi, -3\pi, \dots$$

یا

$$-\beta_1 z = \left( \frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{2} \right), \left( \frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{2} \right), \left( \frac{\phi}{2} - \frac{3\pi}{2} \right), \dots$$



پر حاصل ہوگی جسے

$$(10.90) \quad -\beta_1 z_{\text{سمتر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

لکھا جاسکتا ہے اور ایسی صورت میں

$$(10.91) \quad |E_{xs1}|_{\text{سمتر}} = (1 - |\Gamma|) E_{x10}^+$$

ہوگا۔

موج کی کم تر قیمت ہر آدھے طول موج پر پائی جاتی ہے۔ موج کی بلند تر قیمت دو کم تر قیمتوں کے مقام کے عین وسط میں پائی جاتی ہیں۔ کامل موصل کی صورت میں پہلا کم تر میدان  $-\beta_1 z = 0$  یعنی سرحد پر پایا جائے گا۔ اگر  $\eta_2 < \eta_1$  ہو اور دونوں قدرتی رکاوٹوں کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں تب  $\phi = \pi$  ہو گا اور ایسی صورت میں سرحد یعنی  $-\beta_1 z = 0$  پر برقی دباؤ کی کم تر قیمتیں پائی جائے گی۔ اس کے برعکس اگر  $\eta_2 > \eta_1$  ہو اور دونوں رکاوٹ حقیقی ہوں تب سرحد پر برقی میدان کی قیمت بلند تر ہوگی۔

ان معلومات کو زیر استعمال لانے کی غرض سے  $10 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  اور  $1 \text{ GHz}$  تعداد کے موج پر غور کرتے ہیں جو خطہ اول میں سرحد کی طرف عمودی آمد ہے۔ پہلے خطے کے مستقل  $\sigma_1 = 0$  اور  $\mu_{R1} = 1$ ، جبکہ دوسرے خطے کے مستقل  $\sigma_1 = 0$  اور  $\mu_{R1} = 1$ ،  $\epsilon_{R1} = 3$  اور  $\sigma_1 = 0$  ہیں۔

یوں

$$\omega = 2\pi 10^9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \beta_1 = 36.28 \frac{\text{rad}}{\text{m}}, \quad \beta_2 = 51.3 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اگرچہ خالی خلاء میں اس موج کی طول  $30 \text{ cm}$  ہوگی، یہاں  $\lambda_1 = 17.32 \text{ cm}$  اور  $\lambda_2 = 12.25 \text{ cm}$  ہیں۔ قدرتی رکاوٹ  $\eta_1 = 153.91 \Omega$  اور  $\eta_2 = 217.66 \Omega$  ہیں جن سے شرح انعکاس  $\Gamma = -0.17$  حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ دونوں رکاوٹ حقیقی اعداد ہیں اور  $\eta_2 < \eta_1$  ہے لہذا سرحد پر کم تر برقی میدان پایا جائے گا۔ پہلے خطے، یعنی  $z < 0$ ، میں سرحد سے دور ہر  $8.66 \text{ cm}$  فاصلے پر برقی میدان کی کم تر قیمت پائی جائے گی۔ مساوات (10.91) سے ساکن موج کی کم تر قیمت  $|E_{xs1}|_{\text{سمتر}} = 8.3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے لہذا اس میں طاقت کا ضیاع نہیں ہوتا اور یوں اس خطے میں تمام کم تر قیمتیں برابر ہوں گی۔

میدان کی بلند تر قیمت  $11.7 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  پہلے خطے میں سرحد سے  $4.33$ ،  $12.99$ ،  $21.65$ ، ... سنٹی میٹر کے فاصلوں پر پائی جائیں گی۔

چونکہ دوسرے خطے میں انعکاسی موج نہیں پائی جاتی لہذا اس میں ساکن موج بھی نہیں پائی جائے گی۔

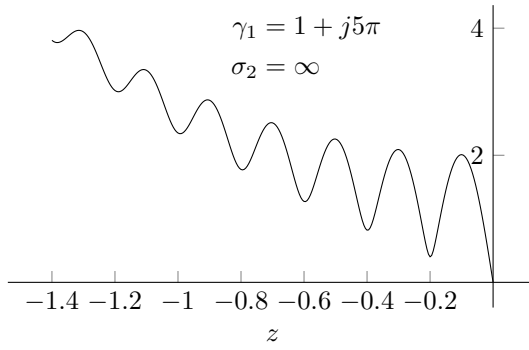
ساکن موج کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کی شرح کو **شرح ساکن موج**<sup>63</sup> کہا اور  $s$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(10.92) \quad s = \frac{|E_{xs1}|_{\text{بلند تر}}}{|E_{xs1}|_{\text{کم تر}}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

چونکہ  $|\Gamma| \leq 1$  ہوتا ہے لہذا شرح ساکن موج ہر صورت مثبت اور اکائی کے برابر یا اس سے زیادہ قیمت کا ہو گا یعنی

$$(10.93) \quad s \geq 1$$

مندرجہ بالا مثال میں  $s = \frac{1+0.17}{1-0.17} = 1.409$  ہے۔



شکل 10.9: غیر کامل ذو برق میں ساکن موج کی بلند تر اور کم تر قیمتوں میں فرق سرحد سے دور کم ہوتا ہے۔

اگر  $| \Gamma | = 1$  ہو تب انعکاسی اور آمدی امواج برابر ہوں گے لہذا تمام کی تمام آمدی توانائی سرحد سے واپس لوٹتی ہے اور ایسی صورت میں  $s$  لامحدود ہو گا۔ پہلے خطے میں ہر  $\frac{\lambda}{2}$  فاصلے پر ایسی سطح پائی جائے گی جس پر برقی میدان ہر وقت صفر رہتا ہے۔ ان سطحوں کے درمیان ایسی سطحیں ہوں گی جہاں آمدی موج کے دگنے جیسے کا برقی میدان ہو گا۔

3315

اگر  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  ہو تب  $\Gamma = 0$  ہو گا۔ ایسی صورت میں توانائی سرحد سے واپس نہیں لوٹتی،  $s = 1$  ہو تا ہے اور برقی میدان کی بلند تر اور کم تر قیمتیں برابر ہوتی ہیں۔

3317

آدھی طاقت کے انعکاس کی صورت میں  $|\Gamma|^2 = 0.5$  یعنی  $|\Gamma| = 0.707$  اور  $s = 5.83$  ہو گا۔

3318

چونکہ برقی اور مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارات باآسانی حاصل کئے جاسکتے ہیں  $s$  کی قیمت حاصل کرنے کے لئے راست تناسب اشارات ہی دو کار ہیں لہذا شرح ساکن موج کو تجرباتی طور حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہی اس کی اہمیت کا راز ہے۔ یاد رہے کہ  $s$  حاصل کرنے کے لئے میدان کی اصل قیمت درکار نہیں ہوتی۔ صرف اتنا ضروری ہوتا ہے کہ تمام اشارات اصل میدان کے تناسب سے ہوں۔

3321

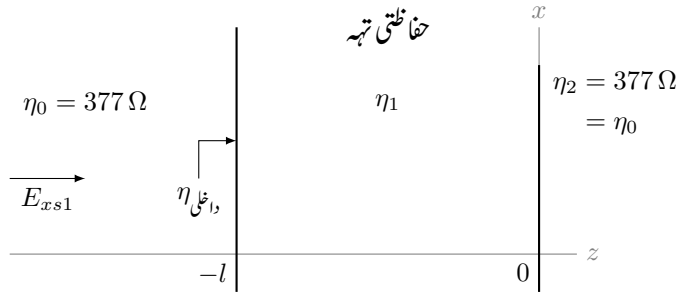
آئیں اب پہلے خطے کو غیر کامل ذو برق تصور کریں جس کا  $\alpha$  صفر کے برابر نہیں ہو گا۔ اب بائیں سے آتی آمدی موج مثبت  $z$  جانب چلتے ہوئے گھٹے گی۔ انعکاسی موج منفی  $z$  جانب چلتے ہوئے گھٹتے جائے گی حتیٰ کہ آخر کار اس کی قیمت قابل نظر انداز ہوگی۔ یوں اگرچہ سرحد کے قریب بلند تر اور کم تر میدان میں فرق واضح ہو سکتا ہے لیکن سرحد سے دوران میں فرق نہیں رہ پاتا۔ پہلے خطے کا حرکی مستقل  $\gamma_1 = 1 + j5\pi$  اور دوسرا خطہ کامل موصل ہونے کی صورت میں ایسی ہی ایک ساکن موج شکل 10.9 میں دکھائی گئی ہے جہاں موصل  $z = 0$  کے دائیں ہاتھ پر ہے۔ اس شکل میں عین سرحد پر آمدی موج کی قیمت  $E_{x10}^+ = 1 \frac{V}{m}$  ہے۔ چونکہ ذو برق کا سرحد موصل کے ساتھ ہے اور موصل میں برقی میدان صفر ہوتا ہے لہذا شکل میں سرحد پر برقی میدان صفر ہے۔ سرحد سے  $\frac{2\pi}{\beta_1} = 0.2m$  فاصلے پر دوبارہ کم تر میدان پایا جاتا ہے۔ اسی طرح پہلی چوٹی سرحد پر آمدی میدان کے تقریباً دگنی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو چوٹیاں یا دو نشیب برابر نہیں ہیں۔ یہاں شرح ساکن موج کی قیمت اس صورت مطلب رکھتی ہے جب اسے ناپنے کا مقام یعنی  $z$  بھی ساتھ بتلایا جائے۔ ایسی صورت میں انعکاسی شرح اور نقصانی مستقل زیادہ کا رآمد معلومات ہیں۔

3329

اگرچہ مندرجہ بالا مثال زیادہ انتہا درجے کا تھا لیکن یہ بھی نہیں بھولنا چاہئے کہ حقیقت میں کامل تر سیلی تار بھی نہیں پائے جاتے۔ حقیقت میں شرح ساکن موج ہر صورت سرحد سے فاصلے پر منحصر ہوگی اور اس کا استعمال اسی وقت ممکن ہو گا جب ہماری دلچسپی کے خطے میں اس کی قیمت زیادہ تبدیل نہ ہو۔

3331

آئیں دوبارہ پہلا خطہ کامل ذو برق لیتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح حاصل کریں۔ لامحدود حجم میں آزاد موج کی صورت میں یہ شرح  $\eta_1 \mp \eta_2$  تھی جہاں منفی قیمت بڑھتے  $z$  جانب حرکت کی صورت میں ہوتی ہے۔ انعکاسی موج کی موجودگی میں برقی اور مقناطیسی میدان صفر بھی ممکن ہیں لہذا ان کی شرح صفر سے لامحدود



شکل 10.10: ریڈار اینٹینا پر ایسی شفاف حفاظتی تہ چڑھائی جاتی ہے جو برقی و مقناطیسی امواج کو نہیں گھٹاتی۔

قیمت کی ہو سکتی ہے۔ سرحد سے  $z = -l$  فاصلے پر میدان

$$E_{xs1} = (e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}) E_{x10}^+$$

$$H_{ys1} = (e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}) \frac{E_{x10}^+}{\eta_1}$$

ہیں۔ ان کی شرح کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے ہیں اور  $\eta$  داغلی سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\eta داغلی = \left. \frac{E_{xs1}}{H_{ys1}} \right|_{z=-l} = \eta_1 \frac{e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}}{e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}}$$

اس میں  $\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$  پر کرتے ہوئے اور **یولر مماثل**<sup>64</sup> استعمال کرتے ہوئے

$$\eta داغلی = \eta_1 \frac{(\eta_2 + \eta_1)(\cos \beta_1 l + j \sin \beta_1 l) + (\eta_2 - \eta_1)(\cos \beta_1 l - j \sin \beta_1 l)}{(\eta_2 + \eta_1)(\cos \beta_1 l + j \sin \beta_1 l) - (\eta_2 - \eta_1)(\cos \beta_1 l - j \sin \beta_1 l)}$$

حاصل ہوتا ہے جسے با آسانی یوں

$$(10.94) \quad \eta داغلی = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

جب  $\eta_2$  اور  $\eta_1$  برابر ہوں تب داخلی قدرتی رکاوٹ  $\eta داغلی$  پہلے خطے کی قدرتی رکاوٹ  $\eta_1$  کے برابر ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں انعکاس پیدا نہیں ہوتی اور ترسیلی نظام **ہم رکاوٹی**<sup>65</sup> کہلاتا ہے۔ ہم رکاوٹی نظام میں انعکاس کے غیر موجودگی کی بنا تو انائی ایک ہی سمت میں منتقل ہوتی ہے۔ اگر دوسرا خطہ کامل موصل ہو تب  $\eta_2 = 0$  ہوگا۔ ایسی صورت میں

$$(10.95) \quad \eta داغلی = j\eta_1 \tan \beta_1 l \quad (\eta_2 = 0)$$

ہوگا لہذا ان مقامات پر جہاں  $E_{xs1} = 0$  ہو، یعنی جب  $\beta_1 l = n\pi$  ہو، داخلی قدرتی رکاوٹ صفر کے برابر ہوگی جبکہ ان مقامات پر جہاں  $H_{ys1} = 0$  ہو وہاں داخلی قدرتی رکاوٹ لامحدود ہوگی۔

مساوات 10.94 ترسیلی نظام پر غور کرنے کے لئے انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha^{64}$$

matched<sup>65</sup>

اس باب کے آخر میں ریڈار اینٹینا کو موسمی اثرات سے بچانے کی خاطر استعمال کئے جانے والی ایسی تہہ کی بات کرتے ہیں جو ریڈار کے شعاعوں کے لئے بالکل شفاف ثابت ہوتی ہے۔ یہ تہہ عموماً اینٹینا پر گنبد کی شکل میں ہوتی ہے۔ شکل 10.10 میں ریڈار اینٹینا  $l = -1$  کے بائیں جانب خلاء میں ہے جبکہ  $z = 0$  تا  $z = -l$  خطے میں حفاظتی تہہ ہے۔ یوں  $z = 0$  کے دائیں جانب خلاء ہے جس میں ریڈار اشارات بھیجتا ہے۔ خلاء کی قدرتی رکاوٹ  $377 \Omega$  ہوتی ہے۔ ذو برق کی بنی حفاظتی تہہ کی موٹائی زیادہ نہیں رکھی جاتی تاکہ اس میں طاقت کا ضیاع کم سے کم ہو۔ حفاظتی تہہ سے انعکاس قابل قبول نہیں چونکہ اس طرح ریڈار کے امواج واپس اینٹینا کی طرف لوٹیں گے۔ ہم چاہتے ہیں کہ اینٹینا، دائیں جانب کے پورے نظام کے لئے ہم رکاوٹی ہو۔ ایسا تب ہوگا جب  $\eta_2 = \eta_1$ ، اعلیٰ ہو یعنی

$$377 = \eta_1 \frac{377 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j377 \tan \beta_1 l}$$

یا

$$j377^2 \tan \beta_1 l = j\eta_1^2 \tan \beta_1 l$$

اب تمام غیر مقناطیسی اشیاء کی  $377 < \eta_1$  ہے لہذا اس مساوات پر پورا صرف اس صورت اتر جاسکتا ہے جب  $\beta_1 l = n\pi$  ہو۔ کم سے کم موٹائی یوں  $n = 1$  کی صورت میں  $l = \frac{\lambda_1}{2}$  یعنی  $l = \frac{\pi}{\beta_1}$  حاصل ہوتی ہے۔ اگر ریڈار  $10 \text{ GHz}$  کی شعاعیں پیدا کرتا ہو تب ہم حفاظتی تہہ کو کم ضیاع اور ہلکے وزن کے ایسے پلاسٹک سے بنا سکتے ہیں جس کا  $\epsilon_R = 2.25$  ہے۔ ہمیں تہہ کی موٹائی

$$l = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{v_1}{2f_1} = \frac{3 \times 10^8}{2\sqrt{2.25} \times 10^{10}} = 1 \text{ cm}$$

رکھنی ہوگی۔

اگر  $10 \text{ GHz}$  پر چلنے والے ریڈار پر چڑھائی حفاظتی تہہ کی موٹائی  $0.5 \text{ cm}$  کر دی جائے تب  $\beta_1 = 314.2$  اور  $\eta_1 = 251.33$  لیتے ہوئے

$$\eta_{\text{اغلی}} = 251.33 \times \frac{377 + j251.33 \tan(314.2 \times 0.005)}{251.33 + j377 \tan(314.2 \times 0.005)} \\ \approx 167.6 \Omega$$

ہوگی۔ یوں شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{167.6 - 377}{167.6 + 377} = -0.3845$$

ہوگا اور انعکاسی طاقت کی فی صد شرح

$$\frac{\left(\frac{E_{x10}^-}{2\eta_0}\right)^2}{\left(\frac{E_{x10}^+}{2\eta_0}\right)^2} \times 100 = |\Gamma|^2 \times 100 = 14.78 \%$$

ہوگی۔

مشق 10.7: دو خطے آپس میں  $z = 0$  پر ملتے ہیں۔ سرحد کے بائیں جانب پہلا خطہ ہے جس کے مستقل  $\epsilon_{R1} = 5$ ،  $\mu_{R1} = 1$  اور  $\sigma_1 = 0$  ہیں۔ دوسرے جانب مستقل  $\epsilon_{R2} = 2$ ،  $\mu_{R2} = 10$  اور  $\sigma_2 = 0$  ہیں۔ پہلے خطے میں  $s$  حاصل کریں۔ دوسرے خطے میں  $s$  حاصل کریں اور آخر میں  $z = -0.6 \text{ cm}$  پر، اعلیٰ  $\eta$  حاصل کریں۔

جوابات: 5، 1 اور  $-61.8^\circ/86.9$

the answers should be at the end of the book  
 include the DC switch on case as multiple reflections before settling down  
 read chapter 9 onwards (proof reading)  
 put comsat's time table here.  
 energy travels along the wire and not in the wire.  
 antenna chapter, 3D figure at start and complete the start section.  
 house completion certificate.  
 zaryab's tooth  
 zaryab fish  
 $F = \frac{dW}{dT}$  to include in inductance chapter plus a question or two  
 magnetization curve and an iteration example. fig 8.10, 11 of hayt.  
 charge is barqi bar.  
 add questions to machine book too.  
 take print outs for myself.

4456

4457

when giving fields always remember the following rules:  
 always ensure that divergence of magnetic field is zero.  
 moving waves must be of the form  $E = E_0 \cos(\omega t - kz)$  where  $c = (\mu * \epsilon)^{-0.5}$  and  $k = 2 * \pi / \lambda$   
 include complex permittivity (7th ed Q12.18 says  $\sigma = \omega \epsilon''$ )  
 include 4th ed fig 11.11 of page 422  
 rename lossless and lossy dielectrics as



## الباب 16

## سوالات

### مستوی امواج

سوال 16.1: خالی خلاء میں  $\mathbf{a}_z$  سمت میں حرکت کرتی،  $600 \text{ MHz}$  تعدد کے مستوی برقی موج  $\mathbf{E}$  کی چوٹی لمحہ  $t = 1 \text{ ns}$  پر  $z = 0.3 \text{ m}$  پر پائی جاتی ہے۔ یہ چوٹی  $\frac{V}{m}$  کے برابر ہے۔ الف) برقی میدان  $\mathbf{a}_x$  سمت میں ہونے کی صورت میں سائن نما  $\mathbf{E}$  اور  $\mathbf{H}$  امواج کے مساوات لکھیں۔ ب) میدان سمتیہ  $5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y$  کی سمت میں ہونے کی صورت میں سائن نما  $\mathbf{E}_s$  اور  $\mathbf{H}_s$  امواج کی مساوات لکھیں۔

جواب:  $\mathbf{E} = 310\mathbf{a}_x \cos(12\pi \times 10^8 t - 4\pi z)$  ،  $\mathbf{H} = \frac{31}{12\pi}\mathbf{a}_y \cos(12\pi \times 10^8 t - 4\pi z)$  ،  
 $\mathbf{E}_s = 310 \left[ \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{a}_x - \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{a}_y \right] e^{-j4\pi z}$  ،  $\mathbf{H}_s = \frac{31}{12\pi} \left[ \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{a}_x + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{a}_y \right] e^{-j4\pi z}$

سوال 16.2: خالی خلاء میں نقطہ  $N(3, -2, 5)$  پر  $\mathbf{a}_z$  جانب حرکت کرتی،  $200 \text{ MHz}$  تعدد کے برقی میدان کی سائن نما مستوی موج کی چوٹی لمحہ  $t = 0$  پر  $\frac{V}{m}$   $\mathbf{E}_0 = 150\mathbf{a}_x + 210\mathbf{a}_y$  پائی جاتی ہے۔ الف)  $\lambda$  ،  $\beta$  ،  $\mathbf{a}_E$  ،  $\mathbf{a}_H$  ،  $H_0$  اور مقناطیسی موج  $\mathbf{H}_s$  حاصل کریں۔ ب) لمحہ  $t = 0$  پر نقطہ  $N$  پر برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔ پ) لمحہ  $t = 1.5 \text{ ns}$  پر نقطہ  $N$  پر برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔ ت) نقطہ  $P(5, 3, 7)$  پر لمحہ  $t = 2 \text{ ns}$  پر برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔

جوابات:  $\lambda = \frac{3}{2} \text{ m}$  ،  $\beta = 4.2 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$  ،  $\mathbf{a}_E = 0.51\mathbf{a}_x + 0.86\mathbf{a}_y$  ،  $\mathbf{a}_H = -0.86\mathbf{a}_x + 0.51\mathbf{a}_y$  ،  
 $H_0 = 0.7733 \frac{\text{A}}{\text{m}}$  ،  $\mathbf{H}_s = 0.7733(-0.86\mathbf{a}_x + 0.51\mathbf{a}_y)e^{-j4.2z}$  ،  $292 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $-90 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $266 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 16.3: خالی خلاء میں مستوی موج  $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_0 e^{-j6z}$  دی گئی ہے۔ الف) موج کی تعدد  $\omega$  حاصل کریں۔ ب) برقی میدان کا محیطہ بالقریب  $\mathbf{E}_0 = 50\mathbf{a}_x$  ،  $\mathbf{E}_0 = (5 + j10)\mathbf{a}_x$  ،  $\mathbf{E}_0 = 50\mathbf{a}_x + 80\mathbf{a}_y$  اور  $\mathbf{E}_0 = (30/45^\circ)\mathbf{a}_x$  ہونے کی صورت میں لمحہ  $t = 0$  پر نقطہ  $N(0, 0, 0)$  پر  $|\mathbf{E}|$  حاصل کریں۔

جوابات:  $1.8 \frac{\text{Grad}}{\text{s}}$  ،  $50 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $11.18 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $94.3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $11.18 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $21.2 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،

سوال 16.4: خالی خلاء میں  $350 \text{ MHz}$  تعدد کی مستوی موج  $\mathbf{E}_s = (5 + j2)(3\mathbf{a}_x - j4\mathbf{a}_y)e^{j\beta z} \frac{V}{m}$  پائی جاتی ہے۔  $\lambda$  اور  $\beta$  کی قیمتیں دریافت کریں۔ لمحہ  $t = 1.4 \text{ ns}$  پر نقطہ  $z = 40 \text{ cm}$  پر  $\mathbf{E}$  حاصل کریں۔ موج کا محیطہ حاصل کریں۔

جواب:  $\lambda = \frac{6}{7} \text{ m}$  ،  $\beta = \frac{7\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$  ،  $\mathbf{E}(z = 40 \text{ cm}, t = 1.4 \text{ ns}) = 13.96\mathbf{a}_x - 10.84\mathbf{a}_y \frac{V}{m}$  ،  $26.9 \frac{V}{m}$  بلندتر

سوال 16.5: ایسا خطہ جس کے مستقل  $\mu_R = 1$  ،  $\epsilon_R = 4.4$  اور  $\sigma = 0$  ہیں میں بڑھتے  $x$  محدود کی جانب حرکت کرتی،  $250 \text{ MHz}$  تعدد کی مستوی برقی موج پائی جاتی ہے۔ برقی میدان  $\mathbf{a}_y$  سمت میں ہے۔ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔  $v_p$  ،  $\beta$  ،  $\lambda$  ،  $\eta$  ،  $\mathbf{E}_s$  ،  $\mathbf{H}_s$  اور اوسط  $\mathcal{P}$  ؛

جوابات:  $E_0 = 10.99 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$  ،  $v_p = 1.429 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ،  $\beta = 10.99 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$  ،  $\lambda = 57.2 \text{ cm}$  ،  $\eta = 179.6 \Omega$  ،  $a_y \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $E_{\text{g488}} = E_0 e^{-j10.99x}$  ،  $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{E_0^2}{359.2} a_x \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$  ،  $H_s = \frac{E_0}{179.6} e^{-j10.99x} a_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$  ،

سوال 16.6: مستوی برقی موج  $E = E_0 e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z) a_y \frac{\text{V}}{\text{m}}$  اور  $\eta = |\eta_0| e^{j\phi}$  دئے گئے ہیں۔ الف) دوری سمتیات  $E_s$  اور  $H_{\text{g490}}$  حاصل کریں۔ ب)  $\mathcal{P}$  حاصل کریں۔

جوابات:  $E_s = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z + \pi)} a_y \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $H_s = -\frac{E_0}{|\eta_0|} e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z + \pi + \phi)} a_x \frac{\text{A}}{\text{m}}$  ،  $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{E_0^2}{2|\eta_0|} e^{-2\alpha z} \cos \phi a_z \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$  ،

سوال 16.7: خالی خلاء میں  $E = (30a_y + 22a_z) \cos(\omega t - 60x) \frac{\text{V}}{\text{m}}$  پایا جاتا ہے۔ الف)  $\lambda$  اور  $\omega$  حاصل کریں۔ ب) دوری سمتیات  $E_s$  اور  $H_s$  لکھیں۔ پ)  $\mathcal{P}$  حاصل کریں۔

جوابات:  $\omega = 1.8 \times 10^{10} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  ،  $\lambda = \frac{\pi}{30} \text{ m}$  ،  $E_s = (30a_y + 22a_z) e^{-j60x} \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{173}{30\pi} a_x \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$  ،  $H_s = \frac{1}{120\pi} (-22a_y + 30a_z) e^{-j60x} \frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 16.8: مستوی مقناطیسی موج کا دوری سمتیہ  $H_s = (5a_x + j4a_z) e^{j20y} \frac{\text{V}}{\text{m}}$  اور تعدد  $200 \text{ MHz}$  ہے۔ برقی موج کا زیادہ سے زیادہ  $\mathcal{P}_{\text{اوسط}}$   $1200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$  ہے۔ حاصل کریں  $\beta$  ،  $\lambda$  ،  $\eta$  ،  $v_p$  ،  $\epsilon_R$  ،  $\mu_R$  اور  $H(x, y, z, t)$  ؛

جوابات:  $\beta = 20 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$  ،  $\lambda = \frac{\pi}{10} \text{ m}$  ،  $\eta = 187.4 \Omega$  ،  $v_p = 6.28 \times 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ،  $\epsilon_R = 9.6$  ،  $\mu_R = 2.4$  ،  $H = 5 \cos(2\pi \times 200 \times 10^6 t + 20y) a_x - 4 \sin(2\pi \times 200 \times 10^6 t + 20y) a_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 16.9: میدان  $E(y, t) = 700 \cos(2.5 \times 10^7 t - \beta y) a_x \frac{\text{V}}{\text{m}}$  اور  $H(y, t) = 1.5 \cos(2.5 \times 10^7 t - \beta y) a_y \frac{\text{A}}{\text{m}}$  موج کو ظاہر کرتے ہیں۔ یہ موج  $1.7 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔ حاصل کریں  $\beta$  ،  $\lambda$  ،  $\eta$  ،  $\epsilon_R$  اور  $\mu_R$  ؛

جوابات:  $\beta = 0.147 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$  ،  $\lambda = 42.7 \text{ m}$  ،  $\eta = 467 \Omega$  ،  $\epsilon_R = 1.4$  ،  $\mu_R = 2.2$

سوال 16.10: بے ضیاع خطے کے مستقل  $\mu_R = 1.2$  اور  $\epsilon_R = 5.4$  ہیں۔ لمحہ  $t = 10 \text{ ns}$  پر نقطہ  $N(2, 0.5, 1.5)$  پہ  $15 \text{ MHz}$  تعدد اور  $E_x = 350 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $E_y = 0$  ،  $E_z = 0$  کی خطی قطبی موج  $a_y$  سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ حاصل کریں  $\beta$  ،  $\lambda$  ،  $v_p$  اور  $E(x, y, z, t)$  ،  $E_0$  ،

جوابات:  $\beta = 0.25\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$  ،  $\lambda = 7.85 \text{ m}$  ،  $v_p = 1.18 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ،  $E_0 = 408.6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $E(x, y, z, t) = 408.6 \cos(3\pi \times 10^7 t - 0.25\pi y) a_x$

سوال 16.11: خطی قطبی موج  $E_s = (E_{y0} a_y + E_{z0} a_z) e^{\alpha x} e^{j\beta x} \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ایسے خطے میں پائی جاتی ہے جہاں  $\eta = |\eta_0| e^{j\phi}$  ہے۔  $H_s$  ،  $E(x, y, z, t)$  اور  $H(x, y, z, t)$  کے مساوات لکھیں۔

جوابات:  $H_s = \frac{1}{|\eta_0|} (E_{z0} a_y - E_{y0} a_z) e^{\alpha x} e^{j(\beta x - \phi)} \frac{\text{A}}{\text{m}}$  ،  $E(x, y, z, t) = (E_{y0} a_y + E_{z0} a_z) e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x) \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2|\eta_0|} (E_{y0}^2 + E_{z0}^2) e^{2\alpha x} \cos \phi a_x \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$  ،  $H(x, y, z, t) = \frac{1}{|\eta_0|} (E_{z0} a_y - E_{y0} a_z) e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x - \phi) \frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 16.12: کامل موصل سے بنی  $\rho = 5 \text{ mm}$  اور  $\rho = 12 \text{ mm}$  رداں کے نلکیوں کا محور  $Z$  محدود ہے۔ دو نلکیوں کے درمیان ذو برق کے مستقل  $\epsilon_R = 3.2$  اور  $\mu_R = 1$  ہیں۔ اس ذو برق میں میدان  $E = \frac{1200}{\rho} \cos(\omega t - 5z) a_\rho \frac{\text{V}}{\text{m}}$  پایا جاتا ہے۔ الف) میکس ویل کے مساوات استعمال کرتے ہوئے  $\omega$  حاصل کریں۔ ب)  $H$  کی مساوات حاصل کریں۔ پ)  $\mathcal{P}$  اور  $\mathcal{P}_{\text{اوسط}}$  حاصل کریں۔ ت) دونوں نلکیوں کے درمیانی خطے میں  $a_z$  کی سمت کی توانی منتقل ہو رہی ہے۔

جوابات:  $\omega = 8.38 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  ،  $H = \frac{5.7}{\rho} \cos(8.38 \times 10^8 t - 5z) a_\phi \frac{\text{A}}{\text{m}}$  ،  $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{3418.6}{\rho^2} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$  ،  $\mathcal{P} = \frac{6837}{\rho^2} \cos^2(8.38 \times 10^8 t - 5z) a_z \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$  ،  $2.5 \text{ MW}$



سوال 16.13: کروی محدود میں  $E_s = \frac{60}{r} \sin \theta e^{-j2r} a_\theta \frac{V}{m}$  اور  $H_s = \frac{1}{4\pi r} \sin \theta e^{-j2r} a_\phi \frac{A}{m}$  دیے گئے ہیں۔ الف) اوسط  $\mathcal{P}$  حاصل کریں۔ ب) رداس  $r = 5 \text{ cm}$  پر سطح  $0 < \phi < 2\pi$  ،  $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$  سے خارج طاقت حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } \mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{15 \sin^2 \theta}{2\pi r^2} a_r \frac{W}{m^2} , 3.13 \text{ W}$$

سوال 16.14:  $12 \text{ GHz}$  تعدد پر ایک فیراٹ کے مستقل  $\mu_R = 5$  ،  $\epsilon_R = 8$  اور  $\sigma = 15 \frac{\text{mS}}{\text{m}}$  ہیں۔ آپ سے گزارش ہے کہ  $\alpha$  ،  $\beta$  ،  $\lambda$  اور  $\eta$  حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } \eta = 297.83 + j0.418 \Omega , \lambda = 3.95 \text{ mm} , v = 4.74 \times 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} , \beta = 1590 \frac{\text{rad}}{\text{m}} , \alpha = 2.23 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$$

سوال 16.15: ایسے خطے کے مستقل  $\mu_R$  ،  $\epsilon_R$  اور  $\sigma$  حاصل کریں جس میں  $100 \text{ MHz}$  تعدد پر طول موج  $1 \text{ m}$  ، قدرتی رکاوٹ کی قیمت  $200 \Omega$  اور تضعیفی مستقل  $2 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$  ہو۔

$$\text{جوابات: } \sigma = 19.06 \frac{\text{mS}}{\text{m}} , \epsilon_R = 4.84 , \mu_R = 1.67$$

سوال 16.16:  $330 \text{ MHz}$  تعدد کی مستوی موج ایسے غیر مقناطیسی خطے میں حرکت کر رہی ہے جس کے مستقل  $\epsilon_R = 2.8$  اور  $\sigma = 3.6 \times 10^{-4}$  ہیں۔ الف) اس خطے کی  $\sigma$  حاصل کریں۔ ب)  $\alpha$  ،  $\beta$  اور  $\lambda$  حاصل کریں۔ پ) موج کی چوٹی کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد آدھی رہ جائے گی؟ ت) موج کی طاقت کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد آدھا رہ جائے گا؟ ث) کتنے فاصلے پر موج کے زاویے میں  $30^\circ$  تبدیلی رونما ہو گی؟

$$\text{جوابات: } \sigma = 1.85 \times 10^{-5} \frac{\text{S}}{\text{m}} , \alpha = 0.04 \frac{\text{Np}}{\text{m}} , \beta = 11.57 \frac{\text{rad}}{\text{m}} , \lambda = 0.54 \text{ m} , 17.1 \text{ m} , 8.55 \text{ m} , 4.52 \text{ cm}$$

سوال 16.17: کیپسٹر  $C$  میں طاقت کے ضیاع کو کیپسٹر کے متوازی مزاحمت  $R$  سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایسے متوازی دور کی برقی رکاوٹ  $Z$  برقی رکاوٹ کے زاویہ  $\theta$  کا کوسائن، یعنی  $\cos \theta$  ، جزو ضربی طاقت کہلاتا ہے جبکہ کیپسٹر کی خاصیت  $Q$  سے مراد  $\omega RC$  ہے۔ متوازی چادر کیپسٹرز جس کے مستقل  $\sigma$  ،  $\epsilon$  اور  $\mu$  ہیں کے جزو ضربی طاقت اور  $Q$  کے مساوات کو مماس ضیاع  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$  استعمال کرتے ہوئے لکھیں۔

$$\text{جوابات: } Q = \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^{-1} , \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^{-2}}}$$

سوال 16.18: تانبے کی ہم محوری تار کے اندرونی تار کا رداس  $5 \text{ mm}$  اور بیرونی تار کا اندرونی رداس  $8 \text{ mm}$  ہیں۔ دونوں تار گہرائی جلد  $\delta$  سے بہت زیادہ موٹائی رکھتے ہیں جبکہ دو برق ہے ضیاع ہے۔  $550 \text{ MHz}$  تعدد پر فی میٹر اندرونی تار، فی میٹر بیرونی تار اور فی میٹر مکمل ترسیلی تار کی مزاحمت دریافت کریں۔ تانبے کے مستقل کتاب کے آخر میں جدول 16.1 سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

$$\text{جوابات: } 195 \frac{\text{m}\Omega}{\text{m}} , 122 \frac{\text{m}\Omega}{\text{m}} , 316 \frac{\text{m}\Omega}{\text{m}}$$

سوال 16.19: المونیم سے نلکی نما تار بنائی جاتی ہے جس کا اندرونی رداس  $5 \text{ mm}$  اور بیرونی رداس  $6 \text{ mm}$  ہیں۔ ایک کلو میٹر تار کی مزاحمت مندرجہ ذیل تعدد پر حاصل کریں۔ الف) یک سمتی رو۔ ب)  $30 \text{ MHz}$  پ)  $1.2 \text{ GHz}$

$$\text{جوابات: } 295 \Omega , 46.7 \Omega , 758 \text{ m}\Omega$$

سوال 16.20: کھانا جلد گرم کرنے کی خاطر عموماً برقی **خرد موج چولہا**<sup>1</sup> (مائیکرو ویو اون) استعمال کیا جاتا ہے جو عموماً  $2.45 \text{ GHz}$  کے تعدد پر کام کرتا ہے۔ اس چولہے کے دیوار سٹینلس سٹیل کے بنے ہوتے ہیں۔ سٹینلس سٹیل کے مستقل  $\frac{\text{S}}{\text{m}}$   $\sigma = 1.1 \times 10^6$  ،  $\mu_R = 1$  اور  $\epsilon_R = 1$  لیتے ہوئے گہرائی جلد  $\delta$  حاصل کریں۔ سٹینلس سٹیل چادر کی سطح پر  $E_s = 64 \angle 0^\circ \frac{\text{V}}{\text{m}}$  لیتے ہوئے چادر کے اندر میدان کی مساوات لکھیں۔

$$\text{جوابات: } E_s(z) = 64e^{-1.03 \times 10^{-7} z(1+j)} \frac{\text{V}}{\text{m}} , \delta = 9.69 \mu\text{m}$$

سوال 16.21: ایک غیر مقناطیسی موصل میں رفتار موج  $4.5 \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  اور طول موج  $0.25 \text{ mm}$  ہے۔ تعدد  $f$  ، گہرائی جلد  $\delta$  اور موصل کی مزاحمت  $\sigma$  حاصل کریں۔

جوابات:  $\sigma = 8.89 \times 10^4 \frac{\text{S}}{\text{m}}$  ،  $\delta = 39.8 \mu\text{m}$  ،  $f = 1.8 \text{GHz}$

سوال 16.22: برقی موج  $E = \frac{270}{r} \sin \theta \cos[\omega(t - \frac{r}{c})] a_\theta \frac{\text{V}}{\text{m}}$  دی گئی ہے۔ رداس  $r$  کے کرہ سے کتنی طاقت خارج ہو رہی ہے۔

جواب:  $810 \text{W}$

سوال 16.23: برقی موج  $E_s = 3a_x - 5a_y + 2a_z \frac{\text{kV}}{\text{m}}$  اور مقناطیسی موج  $H_s = 14a_x + 13a_y - 16a_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$  ہیں۔ (الف) حرکتی موج کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ (ب) موج کی اوسط کثافت طاقت حاصل کریں۔ (پ)  $\mu_R = 1$  کی صورت میں  $\epsilon_R$  حاصل کریں۔

جوابات:  $\epsilon_R = 2.32$  ،  $71.7 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$  ،  $a = 0.38a_x + 0.53a_y + 0.76a_z$

سوال 16.24: خطہ  $x < 0$  کے مستقل  $\mu_R = 1$  ،  $\epsilon_R = 1$  اور  $\sigma = 1500 \frac{\text{S}}{\text{m}}$  میں جبکہ  $x > 0$  خالی خلاء ہے۔ خلاء میں  $N(0^+, 0, 0)$  پر مقناطیسی میدان  $H = 300 \cos 5 \times 10^8 t a_y \frac{\text{A}}{\text{m}}$  پایا جاتا ہے۔ (الف) نقطہ  $(0^-, 0, 0)$  پر  $H$  حاصل کریں۔ (ب) خالی خلاء میں  $a_z$  سمت حرکت کرتی موج تصور کرتے ہوئے نقطہ  $(0^+, 0, 0)$  پر  $E$  حاصل کریں۔ خطہ  $z < 0$  میں  $-a_x$  جانب حرکت کرتی موج تصور کرتے ہوئے نقطہ  $(0^-, 0, 0)$  پر  $E$  حاصل کریں۔

جوابات:  $E_s = 238 \cos(5 \times 10^8 t - 45^\circ) a_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $E = 113 \cos 5 \times 10^8 t a_x \frac{\text{kV}}{\text{m}}$  ،  $H = 300 \cos 5 \times 10^8 t a_y \frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 16.25: آمدی مستوی موج جس کی تعدد  $\omega = 4.2 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  ہے خطہ-1،  $z < 0$  ،  $\sigma_1 = 0$  ،  $\mu_{R1} = 1$  ،  $\epsilon_{R1} = 3.2$  سے خطہ-2،  $z > 0$  ،  $\sigma_2 = 0$  ،  $\mu_{R2} = 2.6$  ،  $\epsilon_{R2} = 12$  میں داخل ہوتی ہے۔ آمدی برقی موج کا محیطہ  $t = 0$  ،  $z = 0$  پر  $5.6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ہے۔ (الف)  $\eta_1$  ،  $\eta_2$  ،  $\beta_1$  اور  $\beta_2$  حاصل کریں۔ (ب)  $\Gamma$  اور  $\tau$  حاصل کریں۔ (پ)  $E_1(t)$  اور  $E_2(t)$  حاصل کریں۔ (ت)  $H_1(t)$  حاصل کریں۔ (ث) لمحہ  $t = 4 \text{ns}$  پر نقطہ  $(0, 0, -1.5)$  پر  $H_1$  حاصل کریں۔

جوابات:  $\epsilon_{R1} = 0.9087$  ،  $\Gamma = -0.0913$  ،  $\beta_2 = 7.8 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$  ،  $\beta_1 = 2.5 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$  ،  $\eta_2 = 175 \Omega$  ،  $\eta_1 = 211 \Omega$  ،  $E_2 = 5.09 \cos(4.2 \times 10^8 t - 7.8z) \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $E_1 = 5.6 \cos(4.2 \times 10^8 t - 2.5z) - 0.511 \cos(4.2 \times 10^8 t + 2.5z) \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $H_1 = 16.49 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$  ،  $H_2 = 26.59 \cos(4.2 \times 10^8 t - 2.5z) + 2.43 \cos(4.2 \times 10^8 t + 2.5z) \frac{\text{mA}}{\text{m}}$

سوال 16.26: تھیلیا بنانے والے پلاسٹک میں  $14 \text{GHz}$  تعدد کی مستوی موج  $a_x$  سمت میں حرکت کرتے ہوئے  $x = 0.3 \text{cm}$  پر پائے جانے والے مکمل موصل سطح سے انعکاس پذیر ہوتی ہے۔ (الف) وہ سطحیں دریافت کریں جن پر  $E = 0$  ہو گا۔ (ب) اس پلاسٹک میں بلند تر برقی چوٹی اور بلند تر مقناطیسی چوٹی کی شرح حاصل کریں۔

جوابات:  $x = 0.3 - 0.71n \text{cm}$  جہاں  $n = 0, 1, 2, \dots$  ہے ،  $\eta = 251 \Omega$

سوال 16.27: خطہ  $z < 0$  خالی خلاء ہے جبکہ خطہ  $z > 0$  کے مستقل  $\epsilon = 30 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$  ،  $\mu = 4.2 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$  اور  $\sigma = 4.6 \frac{\text{mS}}{\text{m}}$  ہیں۔ (الف)  $E_{x1}^+ = 340 e^{-\alpha_1 z} \cos(2 \times 10^8 t - \beta_1 z) \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ہے۔ (الف)  $\alpha_1$  اور  $\beta_1$  حاصل کریں۔ (ب) انعکاسی مستقل حاصل کریں۔ (پ) انعکاسی موج  $E_{x1}^-$  کی مساوات حاصل کریں۔ (ت) ترسیلی موج  $E_{x2}^+$  کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات:  $E_{x1}^- = 59.8 \cos(2 \times 10^8 t + 0.667z + 111^\circ) \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ،  $\Gamma = 0.176 \angle 111^\circ$  ،  $\beta_1 = 0.667 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$  ،  $\alpha_1 = 0$  ،  $E_{x2}^+ = 324 \cos(2 \times 10^8 t - 2.39z + 9.9^\circ) \frac{\text{V}}{\text{m}}$

جدول 16.1:  $\sigma$ 

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
$7 \times 10^4$	گرفتار	$6.17 \times 10^7$	چاندی
1200	سلیکان	$5.80 \times 10^7$	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	$4.10 \times 10^7$	سونا
5	سمندری پانی	$3.82 \times 10^7$	المونیم
$10^{-2}$	چھونا پتھر	$1.82 \times 10^7$	ٹنگسٹن
$5 \times 10^{-3}$	چکنی مٹی	$1.67 \times 10^7$	جست
$10^{-3}$	تازہ پانی	$1.50 \times 10^7$	پیتل
$10^{-4}$	مقطر پانی	$1.45 \times 10^7$	نکل
$10^{-5}$	ریتیلی مٹی	$1.03 \times 10^7$	لوہا
$10^{-8}$	سنگ مرمر	$0.70 \times 10^7$	قلعی
$10^{-9}$	بیک لائٹ	$0.60 \times 10^7$	کاربن سٹیل
$10^{-10}$	چینی مٹی	$0.227 \times 10^7$	مینگنیز
$2 \times 10^{-13}$	بیرا	$0.22 \times 10^7$	جرمینیم
$10^{-16}$	پولیسٹرن پلاسٹک	$0.11 \times 10^7$	سٹینلس سٹیل
$10^{-17}$	کوارٹس	$0.10 \times 10^7$	نائیکروم

جدول 16.2:  $\sigma/\omega\epsilon$  and  $\epsilon_R$ 

$\sigma/\omega\epsilon$	$\epsilon_R$	چیز
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا $\text{SiO}_2$
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 16.3:  $\mu_R$ 

$\mu_R$	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 16.4: اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	e	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	$\epsilon_0$	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	$\mu_0$	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

