

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
 کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

3

1	سمتیات	4
1.1	مقداری اور سمتیہ	5
1.2	سمتی الجبرا	6
1.3	کارتیسی محدود	7
1.4	اکائی سمتیات	8
1.5	میدانی سمتیہ	9
1.6	سمتی رقبہ	10
1.7	غیر سمتی ضرب	11
1.8	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	12
1.9	گول نلکی محدود	13
1.9.1	نلکی اکائی سمتیات کا کارتسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	14
1.9.2	نلکی اور کارتسی اکائی سمتیات کا تعلق	15
1.9.3	نلکی لامحدود سطحیں	16
1.10	کروی محدود	17
2	کولومب کا قانون	18
2.1	قوت کشش یا دفع	19
2.2	برقی میدان کی شدت	20
2.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	21
2.4	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	22
2.5	چارج بردار حجم	23
2.6	مزید مثال	24
2.7	برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	25

69 ²⁶	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ	3
69 ²⁷	ساکن چارج	3.1
69 ²⁸	فیراڈے کا تجربہ	3.2
70 ²⁹	گاؤس کا قانون	3.3
72 ³⁰	گاؤس کے قانون کا استعمال	3.4
72 ³¹	نقطہ چارج	3.4.1
74 ³²	یکساں چارج بردار کروی سطح	3.4.2
74 ³³	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر	3.4.3
75 ³⁴	ہم محوری تار	3.5
77 ³⁵	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	3.6
77 ³⁶	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق	3.7
80 ³⁷	پھیلاؤ	3.8
82 ³⁸	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات	3.9
84 ³⁹	پھیلاؤ کی عمومی مساوات	3.10
86 ⁴⁰	مسئلہ پھیلاؤ	3.11
93 ⁴¹	توانائی اور برقی دباؤ	4
93 ⁴²	توانائی اور کام	4.1
94 ⁴³	لکیری تکملہ	4.2
99 ⁴⁴	برقی دباؤ	4.3
100 ⁴⁵	نقطہ چارج کا برقی دباؤ	4.3.1
101 ⁴⁶	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ	4.3.2
102 ⁴⁷	ہم محوری تار کا برقی دباؤ	4.3.3
102 ⁴⁸	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ	4.4
106 ⁴⁹	برقی دباؤ کی ڈھلوان	4.5
110 ⁵⁰	نلکی محدود میں ڈھلوان	4.5.1
111 ⁵¹	کروی محدود میں ڈھلوان	4.5.2
112 ⁵²	جفت قطب	4.6
114 ⁵³	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط	4.6.1
117 ⁵⁴	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی	4.7

125 _s	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
125 _{s6}	برقی رو اور کثافت برقی رو	5.1
127 _{s7}	استمراری مساوات	5.2
129 _{s8}	موصل	5.3
134 _{s9}	موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	5.4
137 _{s10}	عکس کی ترکیب	5.5
140 _{s11}	نیم موصل	5.6
141 _{s12}	ذو برق	5.7
146 _{s13}	کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	5.8
150 _{s14}	موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	5.9
150 _{s15}	کیپسٹر	5.10
152 _{s16}	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
153 _{s17}	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
153 _{s18}	5.10.3 ہم محوری کرہ کیپسٹر	
155 _{s19}	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
156 _{s20}	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
169 _{s21}	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
171 _{s22}	6.1 مسئلہ یکنائی	
173 _{s23}	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
173 _{s24}	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
174 _{s25}	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
181 _{s26}	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
183 _{s27}	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
191 _{s28}	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

199 ₉	ساکن مقناطیسی میدان	7
199 ₀	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
204 ₁	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.2
210 ₂	گردش	7.3
217 ₃	نلکی محدود میں گردش	7.3.1
222 ₄	عمومی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.2
224 ₅	کروی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.3
225 ₆	مسئلہ سٹوکس	7.4
228 ₇	مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو	7.5
235 ₈	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	7.6
240 ₉	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	7.7
240 ₀	سمتی مقناطیسی دباؤ	7.7.1
242 ₁	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.7.2
249 ₂	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	8
249 ₃	متحرک چارج پر قوت	8.1
250 ₄	تفرقی چارج پر قوت	8.2
254 ₅	برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	8.3
255 ₆	قوت اور مروڑ	8.4
261 ₇	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	8.5
262 ₈	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	8.6
265 ₉	مقناطیسی سرحدی شرائط	8.7
268 ₀₀	مقناطیسی دور	8.8
271 ₀₁	مقناطیسی مخفی توانائی	8.9
271 ₀₂	خود امالہ اور مشترکہ امالہ	8.10
277 ₀₃	مشترکہ امالہ	8.11

283 ₀₄	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات	9
283 ₀₅	فیراڈے کا قانون	9.1
289 ₀₆	انتقالی برقی رو	9.2
295 ₀₇	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل	9.3
296 ₀₈	میکس ویل مساوات کی تکمیل شکل	9.4
298 ₀₉	تاخیری دباؤ	9.5
305 ₁₀	مستوی امواج	10
305 ₁₁	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج	10.1
306 ₁₂	برقی و مقناطیسی مستوی امواج	10.2
313 ₁₃	10.2.1 خالی خلاء میں امواج	
315 ₁₄	10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج	
317 ₁₅	10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج	
320 ₁₆	10.3 پوئنٹنگ سمتیہ	
324 ₁₇	10.4 موصل میں امواج	
330 ₁₈	10.5 انعکاس مستوی موج	
336 ₁₉	10.6 شرح ساکن موج	
343 ₂₀	11 ترسیلی تار	
343 ₂₁	11.1 ترسیلی تار کے مساوات	
347 ₂₂	11.2 ترسیلی تار کے مستقل	
348 ₂₃	11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل	
351 ₂₄	11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل	
352 ₂₅	11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار	
353 ₂₆	11.3 ترسیلی تار کے چند مثال	
358 ₂₇	11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ	
365 ₂₈	11.4.1 سمتیہ فراوانی نقشہ	
366 ₂₉	11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال	

371 ₁₃₀	12	تقطیب موج
371 ₁₃₁	12.1	خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
374 ₁₃₂	12.2	بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پرنٹنگ سمتیہ
377 ₁₃₃	13	ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار
377 ₁₃₄	13.1	ترچھی آمد
388 ₁₃₅	13.2	ترسیم بائی گن
391 ₁₃₆	14	مویج اور گھمکیا
391 ₁₃₇	14.1	برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ
392 ₁₃₈	14.2	دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج
398 ₁₃₉	14.3	کھوکھلا مستطیلی مویج
407 ₁₄₀	14.3.1	مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور
414 ₁₄₁	14.4	مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج
418 ₁₄₂	14.5	کھوکھلی نالی مویج
425 ₁₄₃	14.6	انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف
427 ₁₄₄	14.7	انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف
429 ₁₄₅	14.8	سطحی موج
434 ₁₄₆	14.9	ذو برق تختی مویج
437 ₁₄₇	14.10	شیش ریشہ
440 ₁₄₈	14.11	پردہ بصارت
442 ₁₄₉	14.12	گھمکی خلاء
445 ₁₅₀	14.13	میکس ویل مساوات کا عمومی حل

- 15.1 تعارف 453⁵²
- 15.2 تاخیری دباؤ 453⁵³
- 15.3 تکمل 455⁵⁴
- 15.4 مختصر جفت قطبی ایٹینا 456⁵⁵
- 15.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت 464⁵⁶
- 15.6 ٹھوس زاویہ 468⁵⁷
- 15.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش 469⁵⁸
- 15.8 قطاری ترتیب 476⁵⁹
- 15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع 476⁶⁰
- 15.8.2 ضرب نقش 477⁶¹
- 15.8.3 ثنائی قطار 478⁶²
- 15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار 480⁶³
- 15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار 482⁶⁴
- 15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار 482⁶⁵
- 15.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلنے زاویہ اخراجی ایٹینا 486⁶⁶
- 15.9 تداخل پیمہ 487⁶⁷
- 15.10 مسلسل خطی ایٹینا 488⁶⁸
- 15.11 مستطیل سطحی ایٹینا 489⁶⁹
- 15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریر بدل ہیں 492⁷⁰
- 15.13 خطی ایٹینا 492⁷¹
- 15.14 چلتے موج ایٹینا 497⁷²
- 15.15 چھوٹا گھیرا ایٹینا 498⁷³
- 15.16 پیچ دار ایٹینا 499⁷⁴
- 15.17 دو طرفہ کردار 501⁷⁵
- 15.18 جھری ایٹینا 503⁷⁶
- 15.19 پیپا ایٹینا 504⁷⁷
- 15.20 فرانس ریڈار مساوات 506⁷⁸
- 15.21 ریڈیائی دوربین، ایٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی 509⁷⁹
- 15.22 حرارت نظام اور حرارت بعید 511⁸⁰

وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

گزشتہ بابوں میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے میدانوں پر غور کیا گیا۔ اب وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں پر غور کیا جائے گا۔

اس باب میں دو نئے اصولوں پر غور کیا جائے گا۔ پہلا اصول مائیکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ دوسرا قانون جیمس کلارک میکس ویل کے کاوشوں سے حاصل ہوا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اس باب میں برقی و مقناطیسیات کے چار ایسے مساوات پیش کئے جائیں گے جو میکس ویل کے نام سے منسوب ہیں۔

9.1 فیراڈے کا قانون

جناب مائیکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا کہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ **قانون فیراڈے** کو مندرجہ ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$(9.1) \quad \text{محرك برقي دباو} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

اس قانون کے تحت کسی بھی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ کی قیمت میں تبدیلی، اس سطح کے محیط پر برقی دباؤ پیدا کرتی ہے۔ ایسی برقی دباؤ روایتی طور پر **محرك برقي دباؤ** پکاری جاتی ہے۔ کسی بھی سطح کے محیط پر **محرك برقي دباؤ** کی قیمت، اس سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ کی قیمت میں تبدیلی کی شرح کے برابر ہوتی ہے۔ **محرك برقي دباؤ** کی اکائی ولٹ V ہے۔ سطح کے محیط کو بند دائرہ تصور کرتے ہوئے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ کسی بھی بند دائرے پر **محرك برقي دباؤ** کی قیمت اس دائرے کے اندر سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ کی قیمت میں تبدیلی کی شرح کے برابر ہوگی۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ بند دائرہ فرضی لکیر بھی ہو سکتا ہے۔

ابتدائی مقناطیسی بہاؤ میں تبدیلی، **محرك برقي دباؤ** پیدا کرتی ہے۔ **محرك برقي دباؤ** مکمل برقی دور میں برقی رو پیدا کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ **محرك برقي دباؤ** سے پیدا برقی رو، بند دائرے میں ثانوی مقناطیسی بہاؤ پیدا کرے گی۔ ثانوی مقناطیسی بہاؤ، ابتدائی مقناطیسی بہاؤ میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ مساوات 9.1 منفی کی علامت اسی اصول کو بیان کرتی ہے، یعنی کہ، بند دائرے میں **محرك برقي دباؤ** سے پیدا برقی رو، پہلے سے موجود مقناطیسی بہاؤ میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ یہ اصول **لینز**⁵⁴ کا اصول پکارا جاتا ہے۔

کسی بھی بند دائرے سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ میں تبدیلی مندرجہ ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہے۔

Faraday's law¹
electromotive force, emf²

³ **محرك برقي دباؤ** کی اصطلاح روایتی طور پر ہر قسم کے منبع برقی دباؤ کے لئے استعمال کی جاتی ہے۔
⁴ یہ قانون 1834 میں جناب لینز نے پیش کیا۔

Lenz's law⁵

• مقناطیسی بہاؤ کے کثافت میں تبدیلی،

• ساکن مقناطیسی میدان اور بند دائرے کا آپس میں اضافی حرکت، یا

• مندرجہ بالا دونوں وجوہات۔

اگر بند دائرہ N چکر کے لچھے پر مشتمل ہو جہاں ہر چکر میں سے Φ مقناطیسی بہاؤ گزرتی ہو تب فیراڈے کے قانون کو

$$(9.2) \quad \text{محرك برقي دباو} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

برقی دباؤ کے طرز پر محرک برقی دباؤ کی تعریف

$$(9.3) \quad \text{محرك برقي دباو} = \oint E \cdot dL$$

لکھی جاتی ہے جہاں مکمل پورے بند دائرے پر لینا لازم ہے۔ برقی دباؤ کے تعریف کے ساتھ موازنہ کرتے ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے ہم مندرجہ بالا مساوات میں منفی کی علامت (−) لگانا بھول گئے ہیں۔ ایسا بالکل نہیں ہے اور اس کی وضاحت جلد شکل 9.2 کی مدد سے کر دی جائے گی۔ محرک برقی دباؤ بند دائرے پر بیان کی جاتی ہے صفحہ 105 پر مساوات 4.28 کے تحت ساکن برقی میدان میں کسی بھی بند دائرے پر E کا لکیری مکمل صفر کے برابر ہوتا ہے۔ مساوات 9.3 کہتا ہے کہ غیر ساکن مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہوتا اور کسی بھی بند دائرے پر E کا لکیری مکمل اس دائرے پر پیدا محرک برقی دباؤ دیتا ہے۔

مساوات 9.1 اور مساوات 9.3 سے

$$(9.4) \quad \text{محرك برقي دباو} = \oint E \cdot dL = -\frac{d}{dt} \int_S B \cdot dS$$

حاصل ہوتا ہے جہاں Φ کی جگہ کثافت مقناطیسی بہاؤ B کا سطحی مکمل استعمال کیا گیا۔

اگر بند دائرے کو دائیں ہاتھ میں یوں پکڑا جائے کہ انگلیاں دائرے پر چلنے کی سمت میں ہوں تب انگوٹھا دائرے سے گھیرے سمتی سطح کی سمت میں ہوگا۔ مندرجہ بالا مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی سمتی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ اگر بڑھ رہی ہو تب محرک برقی دباؤ سطح کے سرحد پر مثبت سمت کے الٹ جانب برقی رو پیدا کرے گا۔ مساوات 9.4 استعمال کرتے ہوئے دائیں ہاتھ کے اس قانون کو یاد رکھیں۔

آئیں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی وجہ سے پیدا ساکن بند دائرے میں محرک برقی دباؤ پر پہلے غور کریں اور بعد میں ساکن مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے دائرے کی وجہ سے پیدا محرک برقی دباؤ پر غور کریں۔

ساکن دائرے کی صورت میں مساوات 9.4 میں دائیں ہاتھ پر B ہی وقت کے ساتھ تبدیل ہو رہی ہے یوں اس مساوات میں تفرق کے عمل کو مکمل کے اندر لے جایا جاسکتا ہے یعنی

$$(9.5) \quad \text{محرك برقي دباو} = \oint E \cdot dL = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$

آگے بڑھنے سے پہلے اس مساوات کی نقطہ شکل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات کے بائیں ہاتھ پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$\int_S (\nabla \times E) \cdot dS = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ سطح ایسی کوئی بھی سطح ہو سکتی ہے جس کا سرحد بند دائرہ ہو۔ یوں ہم مندرجہ بالا مساوات میں دونوں جانب مختلف سطحیں لے سکتے ہیں، پس ان سطحوں کا سرحد بھی بند دائرہ ہونا لازم ہے۔ اسی طرح ہم ایک ہی سطح کو دونوں جانب مکمل میں استعمال کر سکتے ہیں۔ یہ مساوات کسی بھی سطح کے لئے درست ہے لہذا یہ تفرقی سطح dS کے لئے بھی درست ہے۔ تفرقی سطح کے لئے اسے یوں

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

یعنی

$$(9.6) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 9.6 میکس ویل کے چار مساواتوں میں سے پہلی مساوات ہے۔ یہ میکس ویل کے پہلی مساوات کی نقطہ شکل ہے۔ اس مساوات کی نقطہ شکل ہی عموماً استعمال ہوتی ہے۔ میکس ویل کے پہلی مساوات کی مکمل شکل مساوات 9.5 بیان کرتی ہے۔ وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی صورت میں مساوات 9.6 اور مساوات 9.5 ساکن میدان کے مساوات کی صورت اختیار کرتے ہیں یعنی

$$(9.7) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (\text{برقی سکون})$$

اور

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{برقی سکون})$$

آئیں مساوات 9.5 اور مساوات 9.6 کو استعمال کر کے دیکھیں۔ تصور کریں کہ $\rho < \rho_2$ نکلی خطے میں وقت کے ساتھ مسلسل بڑھتی

$$(9.8) \quad \mathbf{B} = B_0 e^{kt} \mathbf{a}_z \quad (\rho < \rho_2)$$

کثافت مقناطیسی بہاؤ پائی جاتی ہے جہاں B_0 ایک مستقل ہے۔ ہم $z = 0$ سطح پر ρ_1 رداس کی گول دائرہ لیتے ہیں۔ مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس پورے دائرے پر E_ϕ کی قیمت تبدیل نہیں ہو سکتی لہذا مساوات 9.5 سے

$$\text{محرك برقی دباو} = 2\pi\rho_1 E_\phi = -kB_0 e^{kt} \pi\rho_1^2$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں کسی بھی رداس پر برقی میدان کی شدت

$$(9.9) \quad E = -\frac{1}{2}kB_0 e^{kt} \rho a_\phi$$

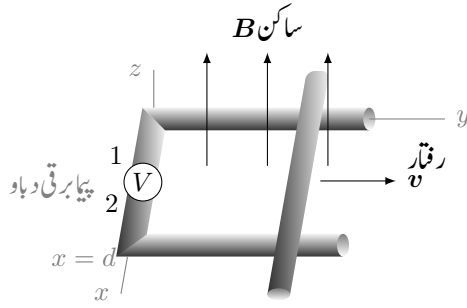
لکھی جاسکتی ہے۔

آئیں اب یہی جواب مساوات 9.6 سے حاصل کریں۔ چونکہ اس مساوات کے دائیں جانب صرف a_z جزو پایا جاتا ہے لہذا بائیں ہاتھ بھی صرف یہی جزو ہوگا لہذا اس مساوات سے

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} = -kB_0 e^{kt}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ دونوں اطراف کو ρ سے ضرب دیتے ہوئے ρ تکمیل لے کر

$$\rho E_\phi = -kB_0 e^{kt} \frac{\rho^2}{2}$$



شکل 9.1: وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے یکساں مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے موصل سلاخ پر محرک برقی دباؤ پیدا ہوتی ہے۔

یعنی

$$(9.10) \quad E = -\frac{1}{2}kB_0 e^{kt} \rho a_\phi$$

2759

یہ دوبارہ حاصل ہوتا ہے جہاں رداسی مکمل میں t مستقل کا کردار ادا کرتا ہے۔

مثبت B_0 کی صورت میں اس دائرے پر a_ϕ کی الٹ سمت میں برقی رو گزرے گی جو a_z کی الٹ سمت میں کثافت مقناطیسی بہاؤ پیدا کرتے ہوئے پہلے سے موجود مقناطیسی میدان میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔

2761

اس مثال کے آخر میں یہ بتانا ضروری ہے کہ مساوات 9.8 میں دیا گیا میدان غیر حقیقی ہے چونکہ یہ میکس ویل کے دیگر مساوات پر پورا نہیں اترتا۔

2762

آئیں اب ایسی مثال دیکھیں جس میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے مقناطیسی میدان میں بند دائرہ حرکت کر رہا ہو۔ شکل 9.1 میں ایسی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں v سمتی رفتار کو جبکہ V برقی دباؤ نانپے کی آلہ⁶ یعنی پیا برقی دباؤ⁷ کو ظاہر کرتی ہے۔ اس شکل میں دو افقی اور دو متوازی موصل سلاخ بند دائرہ یا بند دور بناتے ہیں۔ متوازی افقی سلاخوں کو بائیں طرف عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے جس میں قابل نظر انداز جسامت اور لامحدود مزاحمت والا پیا برقی دباؤ⁸ منسوب ہے، جبکہ دائیں جانب انہیں v سمتی رفتار سے حرکت کرتے عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے۔ وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتا اور ہر جگہ یکساں کثافت مقناطیسی بہاؤ B بند دائرے کی گھیرے سطح کے عمودی ہے۔

2767

مثبت B کی صورت میں B کی سمت ہی بند دائرے سے گھیری گئی سطح کی سمت ہوگی اور بند دائرے کی سمت گھڑی کے الٹ ہوگی۔ یوں دائرے کے مثبت سمت میں دائیں ہاتھ کی انگلیاں رکھتے ہوئے گھیری سطح کی سمت انگوٹھے سے حاصل کی جاتی ہے۔

2769

کسی بھی لمحہ t پر حرکت کرتے سلاخ کے مقام کو y سے ظاہر کرتے ہوئے ہم $y = vt$ لکھ سکتے ہیں جہاں v سلاخ کے رفتار کی قیمت ہے۔ یوں لمحہ t پر بند دور کا ارتباط بہاؤ

$$\Phi = Bdy = Bdvdt$$

ہو گا جو مساوات 9.1 کے تحت بند دور میں

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bdv$$

محرک برقی دباؤ پیدا کرے گا۔

2770

اب محرک برقی دباؤ $E \cdot dL$ کو کہتے ہیں لہذا مندرجہ بالا جواب دائرے پر گھڑی کے الٹ سمت میں اس بند لکیری مکمل سے بھی حاصل ہونا چاہیے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ برقی سکون کی صورت میں موصل کی سطح پر سطح کے متوازی E صفر رہتی ہے۔ ہم آگے دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان میں بھی موصل کی سطح پر متوازی E صفر ہی رہتی ہے۔ یوں شکل 9.1 پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تمام سلاخوں پر مکمل کی قیمت صفر کے برابر ہوگی۔ پیا برقی دباؤ کی مزاحمت صفر نہیں ہے لہذا مکمل کی قیمت پیا برقی دباؤ پر مندرجہ بالا قیمت کے برابر ہونا ہوگا۔ گھڑی کی الٹ سمت چلتے ہوئے پیا برقی دباؤ کی لمبائی کو dL لکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $E \cdot dL = -Bdv$ چونکہ $dL = dLa_x$ کے برابر ہے لہذا E کی سمت a_x کے الٹ ہوگی۔ یوں پیا برقی دباؤ پر E کی سمت پیا کے دوسرے سرے سے پہلے سرے کی جانب ہے اور پیا پر برقی دباؤ کا مثبت سر ایسا کا دوسرا سر ہے۔

2776

پیا کی جگہ مزاحمت جوڑنے سے دور میں گھڑی کے الٹ برقی رو گزرے گی جو a_z کے الٹ سمت میں مقناطیسی بہاؤ پیدا کرے گی۔ یہ لورنز کے قانون کے عین مطابق ہے۔

2778

آپس اب اسی شکل میں دئے مسئلے کو حرکی برقی دباؤ تصور کرتے ہوئے حل کریں۔ مقناطیسی میدان میں v سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہوئے چارج Q پر قوت

$$F = Qv \times B$$

یا حرکی شدت E حرکی

$$(9.11) \quad E_{\text{حرکی}} = \frac{F}{Q} = v \times B$$

عمل کرتی ہے۔ حرکی شدت a_x سمت میں ہے۔ حرکت کرتے سلاخ میں ساکن مثبت ایٹم اور آزاد منفی الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ ان تمام چارجوں پر ایسی قوت پائی جائے گی البتہ ساکن ایٹم مقید ہونے کی بنا حرکت نہیں کریں گے۔ اگر محرک سلاخ کو متوازی سلاخوں سے اٹھایا جائے تو اس میں آزاد الیکٹران پر a_x کے الٹ جانب قوت انہیں سلاخ کے پرلے سرے پر انبار کرنا شروع کر دے گی۔ الیکٹرانوں کا انبار سلاخ میں a_x - جانب برقی میدان کی شدت E پیدا کرے گا۔ الیکٹران کا انبار بڑھتا رہے گا حتیٰ کہ حرکی E اور E برابر ہو جائیں۔ ایسا ہوتے ہی سلاخ میں کل برقی میدان کی شدت صفر ہو جائے گی اور اس میں چارج کا حرکت رک جائے گا۔

2783

یوں حرکی برقی دباؤ

$$(9.12) \quad \oint E_{\text{حرکی}} \cdot dL = \oint (v \times B) \cdot dL = \text{محرک برقی دباؤ}$$

سے حاصل ہوگی۔ مساوات کے دائیں ہاتھ بند دائرے کے ساکن حصوں پر مکمل کی قیمت صفر ہوگی لہذا محرک برقی دباؤ صرف حرکت کرتے حصوں کی وجہ سے پیدا ہوگی۔ یوں حرکت کرتے سلاخ پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے مکمل سے

$$\oint (v \times B) \cdot dL = \int_a^0 vB dx = -Bvd$$

2784

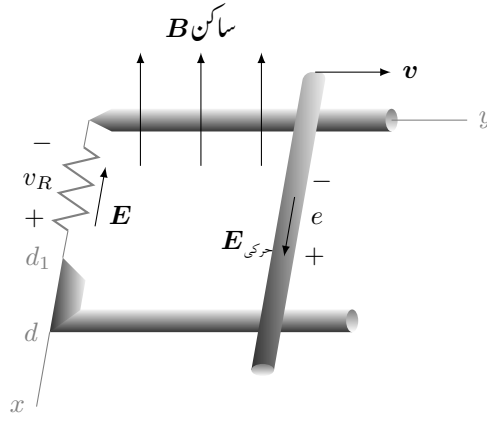
حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ B از خود وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو رہا لہذا یہی کل محرک برقی دباؤ ہوگا۔

یوں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے بند دائرے میں محرک برقی دباؤ حاصل کرتے وقت حرکت کرتے حصوں پر حرکی شدت E حرکی کے استعمال سے محرک برقی دباؤ یوں

$$(9.13) \quad \oint E \cdot dL = \oint E_{\text{حرکی}} \cdot dL = \oint (v \times B) \cdot dL = \text{محرک برقی دباؤ}$$

حاصل کی جاسکتی ہے۔ البتہ وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان میں محرک برقی دباؤ کے حصول میں مساوات 9.5 کا حصہ شامل کرنا ضروری ہے یوں محرک برقی دباؤ

$$(9.14) \quad \oint E \cdot dL = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS + \oint (v \times B) \cdot dL = \text{محرک برقی دباؤ}$$



شکل 9.2: محرک برقی دباؤ اور برقی دباؤ کا موازنہ۔

سے حاصل ہوگی۔ یہ مساوات دراصل مساوات 9.1

$$\text{محرک برقی دباؤ} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

ہی ہے۔

آئیں شکل 9.1 میں پیمائش برقی دباؤ کی جگہ مزاحمت نسب کرتے ہوئے اس کی مدد سے مساوات 9.3 جو محرک برقی دباؤ کی تعریف بیان کرتا ہے پر دوبارہ غور کریں۔ نئی شکل کو شکل 9.2 میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 9.11 محرک سلاخ پر پیدا ہونے والی $E_{\text{حرکی}}$ دیتا ہے جو سلاخ میں مثبت چارج کو سلاخ کے اُگلے سرے کی طرف دھکیلے گا۔ اس کے برعکس مزاحمت پر برقی دباؤ v_R پایا جاتا ہے جس کی وجہ سے اس میں برقی میدان کی شدت E پائی جائے گی جو مزاحمت میں مثبت چارج کو مزاحمت کے پچھلے سرے کی جانب دھکیلے گی۔

آپ شکل کو دیکھ کر تسلی کر لیں کہ مزاحمت پر میدان کی شدت $E = -E a_x$ سے برقی دباؤ v_R یوں

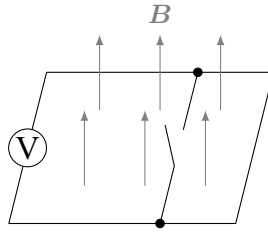
$$(9.15) \quad v_R = -\int_0^{d_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{d_1} E dx = E d_1$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ متحرک سلاخ پر حرکی شدت $E_{\text{حرکی}} = E a_x$ سے حرکی دباؤ یوں

$$(9.16) \quad e = \oint \mathbf{E}_{\text{حرکی}} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^d \mathbf{E}_{\text{حرکی}} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^d E_{\text{حرکی}} dx = E_{\text{حرکی}} d$$

حاصل ہوتی ہے۔ شکل میں دو افقی موصل سلاخوں کے مابین برقی دباؤ کو سلاخوں کے بائیں سروں پر v_R جبکہ ان کے دائیں سروں پر e کہا گیا ہے لہذا v_R اور e دونوں مثبت اور برابر قیمت رکھتے ہیں۔ یہاں ضرورت اس بات کی ہے کہ آپ دیکھ سکیں کہ v_R کی مثبت قیمت حاصل کرنے کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں منفی کی علامت استعمال کی جائے جبکہ e کے مثبت قیمت کے حصول کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں جمع کی علامت استعمال کی جائے۔ حرکی دباؤ کے بند تکمیل میں دائرے کے بقایا اطراف پر تکمیل کی قیمت صفر ہونے کے ناطے صرف متحرک سلاخ پر تکمیل لیا گیا ہے۔

اگرچہ مساوات 9.1 انتہائی سادہ شکل رکھتی ہے لیکن اس کا استعمال کبھی کبھار مشکل ہو جاتا ہے۔ ایسا اس وقت ہوتا ہے جب دور کے کسی حصے کو تبدیل کرتے ہوئے دوسرا حصہ نسب کیا جائے۔ یہ بات شکل 9.3 پر غور کرنے سے بہتر سمجھ آئے گی۔ اس شکل میں نا تو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا مقناطیسی میدان ہے اور مقناطیسی بند دائرے کا کوئی حصہ متحرک ہے۔ البتہ شکل میں دکھائے سوئچ کو چالو یا غیر چالو کرتے ہوئے بند دائرے میں مقناطیسی بہاؤ کم اور زیادہ کیا جاسکتا ہے۔ یہاں بغیر



شکل 9.3: محرک برقی دباؤ یا تا وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان اور یا حرکت کرتے بند دائرے سے بی پیدا ہو سکتی ہے۔

سوچے مساوات 9.1 استعمال کرتے ہوئے غلط نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ یاد رہے کہ برقی دباؤ یا تو وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان اور یا پھر بند دائرے کے کسی حصے کے حرکت سے ہی پیدا ہوگا۔

2798

2799

مشق 9.1: شکل 9.3 میں $B = 0.5a_z$ ٹسلا، رفتار $100y a_y$ میٹر فی سیکنڈ جبکہ $d = 0.5$ میٹر ہے۔ اگر $t = 0$ پر $y = 0.2$ میٹر ہو تب $t_{800} = 15$ ملی سیکنڈ پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

2801

2802

2803

2804

2805

2806

• سلاخ کی رفتار،

• محرک برقی دباؤ V_{21} ،

• پیمائش برقی دباؤ کی اندرونی مزاحمت دس میگا اوہم کی صورت میں دور میں برقی رو۔

جوابات: $10 \mu A$ ، $100 V$ ، $4.017 \frac{m}{s}$

2807

9.2 انتقالی برقی رو

فیراڈے کے تجرباتی نتیجے سے میکس ویل کی پہلی مساوات

$$(9.17) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

حاصل ہوئی جو کہتا ہے کہ بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے برقی دباؤ۔ گردش کے عمل کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں ایسے پیدا کردہ برقی دباؤ کا بند لکیری مکمل صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ آئیں اب وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر غور کریں۔

2809

امپیر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$(9.18) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

ساکن مقناطیسی میدان پر لاگو ہوتی ہے۔ اس مساوات کی پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ گردش کی پھیلاؤ ہر صورت صفر کے برابر ہوتی ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات کا بائیں ہاتھ ہر صورت صفر دے گا اور یوں اگر یہ مساوات درست ہو تب اس کا دایاں ہاتھ بھی ہر صورت صفر ہونا چاہیے۔ مگر ہم استمراری مساوات سے جانتے ہیں کہ

$$(9.19) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ہوتا ہے۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 9.18 صرف اس صورت درست ہو گا جب $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ہو۔ یہ ایک غیر ضروری اور غیر حقیقی شرط ہے لہذا وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر استعمال کے قابل بنانے کی خاطر مساوات 9.18 کو تبدیل کرنا لازم ہے۔ تصور کریں کہ مساوات 9.18 میں نامعلوم جزو G کی شمولیت سے یہ مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر بھی لاگو کرنے کے قابل ہو جاتا ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 9.18 یوں

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G}$$

لکھی جائے گی۔ انہیں دوبارہ اس کی پھیلاؤ حاصل کریں جس سے

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{G}$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں استمراری مساوات کا سہارا لیا گیا۔ اس مساوات میں ρ کی جگہ $\nabla \cdot \mathbf{D}$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

یعنی

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں ایمپیر کے دوری قانون کی درست شکل

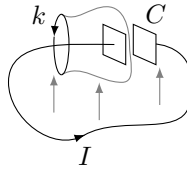
$$(9.20) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

ہے۔ مندرجہ بالا مساوات برقی و مقناطیسیات کے اب تک تمام دریافت کردہ اصولوں پر پورا اترتی آئی ہے۔ جب تک یہ غلط ثابت نہ ہو جائے، ہم اسے درست ہی تصور کریں گے۔

2811

مساوات 9.20 میکس ویل کے مساوات میں سے ایک مساوات ہے۔ اس مساوات میں $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ کی بجائے ایمپیر فی مربع میٹر حاصل ہوتی ہے جو کثافت برقی رو کا بُعد ہے۔ میکس ویل نے اس مساوات میں دائیں ہاتھ نئے جزو کو **کثافت انتقالی رو**⁸ کا نام دیا اور \mathbf{J}_d سے ظاہر کیا یعنی

$$(9.21) \quad \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \mathbf{J}_d \\ \mathbf{J}_d &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned}$$



شکل 9.4: موصل تار میں ایصالی رو کیپسٹر کے چادروں کے درمیان انتقالی رو کے برابر ہے۔

ہم تین اقسام کے کثافت رو دیکھ چکے جن میں کثافت انتقالی رو کے علاوہ غیر چارج شدہ خطے میں عموماً لیکٹران کے حرکت سے پیدا کثافت ایصالی رو

$$(9.22) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

اور چارج کے حجم کے حرکت سے پیدا کثافت ایصالی رو

$$(9.23) \quad \mathbf{J} = \rho_h \mathbf{v}$$

شامل ہیں۔ مساوات 9.20 میں \mathbf{J} سے مراد ایصالی اور انتقالی رو کے کثافتوں کا مجموعہ ہے جبکہ مقید چارج \mathbf{H} کا حصہ ہیں۔ غیر موصل خطے میں جہاں کثافت چارج پائی ہی نہیں جاتی $\mathbf{J} = 0$ ہوتا ہے لہذا غیر موصل میں

$$(9.24) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\mathbf{J} = 0)$$

ہو گا۔ مساوات 9.24 اور مساوات 9.17 میں مشابہت دیکھیں۔

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

مقتناطیسی شدت \mathbf{H} اور برقی شدت \mathbf{E} کافی مشابہت رکھتے ہیں۔ اسی طرح کثافت رو \mathbf{D} اور کثافت بہاؤ \mathbf{B} بھی کافی مشابہت رکھتے ہیں۔ اس مشابہت کو ہمیں تک رکھیں چونکہ جیسے ہی میدان میں چارج پر قوت کی بات کی جائے، دونوں اقسام کے میدان بالکل مختلف طریقوں سے عمل کرتے ہیں۔

2813

کسی بھی سطح سے کل انتقالی رو سطحی مکمل

$$(9.25) \quad I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

سے حاصل ہوگی۔ مساوات 9.20 کے سطحی مکمل

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$(9.26) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

2814

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایکسپیر کے دوری قانون کی نقطہ شکل حاصل ہوتی ہے۔

انتقالی رو کو شکل 9.4 کی مدد سے سمجھتے ہیں جہاں موصل تار سے کیپسٹر C کے دوسرے جوڑتے ہوئے بند دور بنایا گیا ہے جس میں وقت کے ساتھ بدلتی سائن نما مقتناطیسی میدان \mathbf{B} محرک برقی دباؤ

$$e = V_0 \cos \omega t$$

پیدا کرتی ہے۔ یہ سادہ برقی دور ہے جس میں مزاحمت اور امالہ کو نظر انداز کرتے ہوئے برقی رو

$$\begin{aligned} i &= -\omega C V_0 \sin \omega t \\ &= -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں ϵ ، S اور d کپیسٹر سے متعلق ہیں۔ آئیں انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے تار کے گرد بند دائرے k پر ایمپیر کادوری قانون لاگو کریں۔

$$\oint_k \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_k$$

اب بند دائرہ k اور اس دائرے پر \mathbf{H} حقیقی مقدار ہیں اور مکمل سے حاصل رو I_k اس دائرے سے گھیرے کسی بھی سطح سے گزرتی رو کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر ہم k کو سیدھی سطح کا سرحد تصور کریں تب موصل تار اس سطح کو چھیدتا ہوا گزرے گا۔ یوں اس سطح سے I رو ہی گزرے گی جو ایصالی رو ہے۔ اس کے برعکس اگر ہم k کو تھیلے کا منہ تصور کریں جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے تب ایصالی رو ایسی سطح سے نہیں گزرتی چونکہ تھیلہ کپیسٹر کے دو چادروں کے درمیان سے گزرتا ہے اور تار اسے چھوتی تک نہیں۔ ایسی صورت میں تھیلے سے گزرتی ایصالی رو صفر کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں ہمیں انتقالی رو کا سہارا لینا ہوگا۔ کپیسٹر کے چادروں کے درمیان

$$D = \epsilon E = \epsilon \left(\frac{V_0}{d} \cos \omega t \right)$$

ہے لہذا

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = -\omega \epsilon \frac{V_0}{d} \sin \omega t$$

اور یوں

$$I_d = S J_d = -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t$$

ہوگی۔

یہ وہی جواب ہے جو ایصالی رو سے حاصل ہوا تھا۔ اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایمپیر کے دوری قانون کو استعمال کرتے ہوئے سطح سے گزرتی ایصالی رو اور انتقالی رو دونوں کا خیال رکھنا ہوگا۔ کہیں پر سطح سے صرف ایصالی رو گزرے گی تو کہیں اس سے صرف انتقالی رو گزرے گی اور کبھی کبھار دونوں کا مجموعہ۔

انتقالی رو وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا ہوتے ہیں لہذا یہ ایسے تمام غیر موصل یا نیم موصل خطوں میں پائی جاتی ہے جہاں وقت کے ساتھ تبدیلی ہوتی ایصالی رو پائی جائے۔ اگرچہ موصل خطے میں بھی انتقالی رو پائی جاتی ہے لیکن، جیسے آپ مندرجہ ذیل مشق میں دیکھیں گے، اس کی قیمت ایصالی رو کی نسبت سے اتنی کم ہوتی ہے کہ یہ قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ انتقالی رو تجرباتی طور دریافت نہیں کی گئی بلکہ اس تک منطق کے ذریعہ سے پہنچا گیا۔

مثال 9.1: ایک خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\mu_R = 2.5$ اور $\epsilon_R = 1.2$ ہیں۔ اس میں کثافت انتقالی برقی رو $\mathbf{J}_d = 10 \cos(2 \times 10^8 t - kx) \mathbf{a}_y \frac{\mu A}{m^2}$ ہے۔ الف) D اور E حاصل کریں۔ ب) فیراڈے کے قانون کی نقطہ شکل اور مکمل کے استعمال کرتے ہوئے B اور H حاصل کریں۔ پ) مساوات 9.21 استعمال کرتے ہوئے J_d حاصل کریں۔ ت) حاصل J_d اور سوال میں دیے گئے J_d کا آپس میں موازنہ کرتے ہوئے k کی مثبت قیمت حاصل کریں۔

حل: الف) چونکہ $J_d = \frac{\partial D}{\partial t}$ کے برابر ہے لہذا

$$D = \int J_d dt = 5 \times 10^{-14} \sin(2 \times 10^8 t - kx) \mathbf{a}_y + M \frac{C}{m^2}$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ساکن میدان صفر ہونے کی صورت میں مکمل کا مستقل $M = 0$ ہوگا۔ یوں

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_R \epsilon_0} = 4.7 \times 10^{-3} \sin(2 \times 10^8 t - kx) \mathbf{a}_y \quad \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

ہوگا۔

(ب) فیراڈے کے قانون سے

$$\nabla \times \mathbf{E} = -4.70587111 \times 10^{-3} k \cos(2 \times 10^8 t - kx) \mathbf{a}_z = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

لکھتے ہوئے مکمل لے کر

$$\mathbf{B} = \int 4.70587111 \times 10^{-3} k \cos(2 \times 10^8 t - kx) \mathbf{a}_z dt = 2.3529 \times 10^{-11} k \sin(2 \times 10^8 t - kx) \mathbf{a}_z$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_R \mu_0} = 7.4896 \times 10^{-6} k \sin(2 \times 10^8 t - kx) \mathbf{a}_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔

(پ) چونکہ $\sigma = 0$ ہے لہذا کثافت ایصال برقی رو صفر ہوگی۔ یوں مساوات 9.21 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\nabla \times \mathbf{H} = 7.4896 \times 10^{-6} k^2 \cos(2 \times 10^8 t - kx) \mathbf{a}_y \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = \mathbf{J}_d$$

(ت) حاصل کردہ اور سوال میں دیا گیا \mathbf{J}_d برابر کرتے ہوئے

$$k = \sqrt{\frac{10 \times 10^{-6}}{7.4896 \times 10^{-6}}} = 1.155 \text{ m}^{-1}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9.2: رداس a اور b کے موصل ہم محوری کرہ، جہاں $b > a$ ہے، کو برقی دباؤ $v = V_0 \cos \omega t$ مہیا کی جاتی ہے۔ دونوں کرہ کے درمیانی خطے کے مستقل $\epsilon_R = 1$ اور $\mu_R = 1$ ہیں۔ بیرونی کرہ کو برقی زمین تصور کریں۔ الف) کرہ کپیسٹر کو مہیا برقی رو حاصل کریں۔ ب) دونوں کرہ کے مابین انتقالی برقی رو حاصل کریں۔ پ) کیا بیرون کپیسٹر ایصال برقی رو اور اندرون کپیسٹر انتقالی برقی رو برابر ہیں؟

حل: الف) صفحہ 153 پر مساوات 5.60 کرہ کپیسٹر کی کپیسٹنس دیتی ہے جس سے مہیا کردہ ایصال برقی رو یوں

$$I = C \frac{dv}{dt} = -\frac{4\pi\epsilon\omega V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \sin \omega t$$

حاصل کی جاسکتی ہے۔

(ب) صفحہ 179 پر مساوات 6.24 استعمال کرتے ہوئے دونوں کرہ کے درمیان خطے میں برقی دباؤ کو

$$V = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} V_0 \cos \omega t$$

لکھتے ہوئے

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{V_0 \cos \omega t}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \frac{\epsilon V_0 \cos \omega t}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \mathbf{a}_r$$

حاصل ہوتا ہے جس سے کثافت انتقالی برقی رو

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \mathbf{a}_r$$

لکھی جاسکتی ہے۔ یوں انتقالی برقی رو

$$I_d = 4\pi r^2 J_d = -\frac{4\pi \omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

ہوگی۔

(پ) بیرون کپیسٹر ایصالی برقی رو اور اندرون کپیسٹر انتقالی برقی رو برابر ہیں۔

مشق 9.2: ٹھوس تانبے کی تار میں سائن نما، پچاس ہرٹز کی ایصالی رو $I_0 \cos \omega t$ گزر رہی ہے۔ اس میں انتقالی رو حاصل کریں۔ پچاس ہرٹز رو کی صورت میں ایصالی اور انتقالی رو کے موثر قیمت کی شرح حاصل کریں۔

حل: $I_d = -\frac{\omega \epsilon_0}{\sigma} I_0 \sin \omega t$ جبکہ ان کے موثر قیمت کی شرح $2.08 \times 10^{16} \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = \frac{I}{I_d}$ ہے۔

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل

ہم وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں میں میکس ویل کے دو مساوات کے نقطہ اشکال

$$(9.27) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

اور

$$(9.28) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

حاصل کر چکے ہیں۔ میکس ویل کے بقایا دو مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی جوں کے توں

$$(9.29) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

$$(9.30) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

رہتے ہیں۔

مساوات 9.29 کہتا ہے کہ کثافت برقی رو کا منبع کثافت چارج ہے۔ وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان میں برقی میدان پیدا ہوتا ہے جو بند دائرے پر چلتا ہے۔ ایسے برقی میدان کا ناتو کسی چارج سے اخراج ہوتا ہے اور نہ ہی یہ کسی چارج پر ختم ہوتا ہے۔ اس کے برعکس ہر مثبت چارج سے اس کے برابر برقی بہاؤ کا اخراج ہوتا ہے اور ہر منفی چارج پر اس کے برابر برقی بہاؤ کا اختتام ہوتا ہے۔

مساوات 9.30 کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے سے کل مقناطیسی بہاؤ کا اخراج صفر ہے یعنی مقناطیسی بہاؤ ناتو کسی نقطے سے خارج ہوتا ہے اور نہ ہی یہ کسی نقطے پر اختتام پذیر ہوتا ہے۔ سادہ زبان میں اس کا مطلب ہے کہ مقناطیس کا ایک قطب ممکن نہیں جس سے مقناطیسی بہاؤ کا اخراج ہو یا اس پر مقناطیسی بہاؤ اختتام ہو۔

مندرجہ بالا چار مساوات پر برقی و مقناطیسیات کی بنیاد کھڑی ہے جنہیں استعمال کرنے کی خاطر چار معاون مساوات

$$(9.31) \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$(9.32) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$(9.33) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$(9.34) \quad \mathbf{J} = \rho_h \mathbf{v}$$

بھی درکار ہوتے ہیں۔

ایسے ذوبرق اور مقناطیسی اشیاء جن میں متغیرات سادہ تعلق نہ رکھتے ہوں، ان میں مساوات 9.31 اور مساوات 9.32 کی جگہ

$$(9.35) \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$(9.36) \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

استعمال ہوتے ہیں۔ خطی اشیاء میں

$$(9.37) \quad \mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$$

اور

$$(9.38) \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

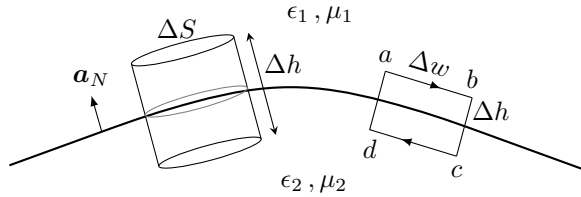
لکھا جاسکتا ہے۔

آخر میں لورنز قوت کی مساوات

$$(9.39) \quad \mathbf{F} = \rho_h (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

بھی شامل کرتے ہیں۔

غیر سمتی مقناطیسی دباؤ V اور سمتی مقناطیسی دباؤ A انتہائی اہم ہیں البتہ ان کی شمولیت لازم نہیں۔



شکل 9.5: وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط۔

9.4 میکس ویل مساوات کی تکمیل شکل

مساوات 9.27 کے سطحی تکمیل پر مسئلہ سٹوکس کا اطلاق کرتے ہوئے فیڑے کا قانون

$$(9.40) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 9.28 اسی طریقہ کار سے ایکپیئر کا دوری قانون

$$(9.41) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔

برقی اور مقناطیسی میدان کے لئے گاؤس کے قوانین مساوات 9.29 اور مساوات 9.30 کے تمام حجم پر حجمی تکمیل اور مسئلہ پھیلاؤ کی مدد سے

$$(9.42) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_h \rho_h dh$$

اور

$$(9.43) \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مندرجہ بالا چار مساوات سے \mathbf{E} ، \mathbf{H} ، \mathbf{D} اور \mathbf{B} کے سرحدی شرائط حاصل ہوتے ہیں جن سے میکس ویل کے جزوی تفرقی مساوات کے مستقل حاصل کئے جاتے ہیں۔ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کے سرحدی شرائط عموماً ساکن میدان کے سرحدی شرائط ہی ہوتے ہیں لہذا ساکن میدان کے طریقہ کار سے وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط بھی حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

آئیں شکل 9.5 کی مدد سے سرحد کے متوازی برقی اور مقناطیسی شرائط حاصل کریں۔ شکل میں مستطیل دائرے پر مساوات 9.40 کے اطلاق سے

$$(E_{m1} - E_{m2}) \Delta w = - \frac{\partial B_n}{\partial t} \Delta w \Delta h$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $\frac{\partial B_n}{\partial t}$ سے مراد دائرے کے گھیرے سطح سے گزرتی مجموعی میدان کی تبدیلی ہے جس کا کچھ حصہ خطہ 1 اور کچھ حصہ خطہ 2 سے گزرتا ہے۔ اس مساوات کے دائیں ہاتھ کی قیمت $0 \rightarrow \Delta h$ کرتے ہوئے صفر کے قریب ترکی جاسکتی ہے۔ ایسی صورت میں دائیں ہاتھ کو صفر ہی تصور کرتے ہوئے

$$(9.44) \quad E_{m1} = E_{m2}$$

یعنی

$$(9.45) \quad \mathbf{a}_N \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔

سرحد پر انتہائی کم موٹائی کے خطے میں کثافت برقی رو K تصور کرتے ہوئے کسی بھی چھوٹی لمبائی dL پر برقی رو کو $I = K \cdot dL$ لکھی جاسکتی ہے۔ یوں شکل 9.5 میں مستطیل دائرے پر مساوات 9.42 کے اطلاق سے

$$(H_{m1} - H_{m2}) \Delta w = K_{\perp} \Delta w + \frac{\partial D}{\partial t} \Delta w \Delta h$$

حاصل ہوتا ہے جہاں K_{\perp} سے مراد K کا وہ حصہ ہے جو H_{m1} اور H_{m2} کے عمودی ہے۔ دائیں ہاتھ دوسرے جزو کی قیمت $0 \rightarrow \Delta h$ کرتے ہوئے صفر کے قریب ترکی جاسکتی ہے لہذا اس جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$(9.46) \quad H_{m1} - H_{m2} = K_{\perp}$$

حاصل ہوتا ہے جسے یوں

$$(9.47) \quad \alpha_N \times (H_1 - H_2) = K_{\perp}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

کسی بھی حقیقی دو مختلف اشیاء کے سرحد، مثلاً سمندر کے پانی اور ہوا کے سرحد یا ہوا اور دیوار کے سرحد، پر کثافت برقی رو K صفر ہوتی ہے۔ لہذا حقیقی مسائل میں $K = 0$ کی بنا پر

$$(9.48) \quad H_{m1} = H_{m2}$$

ہوگا۔ صفحہ 266 پر شکل 8.9 میں سطحی کثافت برقی رو K دکھائی گئی ہے جبکہ یہاں شکل 9.5 میں اسے صفر تصور کرتے ہوئے نہیں دکھایا گیا۔

مساوات 9.42 اور مساوات 9.43 سے سرحدی عمودی شرائط

$$(9.49) \quad \alpha_N \cdot (D_1 - D_2) = \rho_S$$

اور

$$(9.50) \quad \alpha_N \cdot (B_1 - B_2) = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔

موصل کو ایسا کامل موصل تصور کرتے ہوئے جس کی موصلیت لامحدود مگر J محدود ہو سے موصل کے اندر اوہم کے قانون سے

$$(9.51) \quad E = 0$$

اور یوں فیراڈے کے قانون کی نقطہ شکل سے، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کی صورت میں

$$(9.52) \quad H = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اس طرح ایمپیر کے دوری قانون کی نقطہ شکل سے محدود J کی قیمت

$$(9.53) \quad J = 0$$

حاصل ہوتی ہے لہذا برقی رو صرف موصل کی سطح پر بطور سطحی کثافت برقی رو K ممکن ہے۔ یوں اگر خطہ 2 کامل موصل ہو تب مساوات 9.44 تا مساوات 9.50 سے

$$(9.54) \quad E_{m1} = 0$$

$$(9.55) \quad H_{m1} = 0$$

$$(9.56) \quad D_{n1} = \rho_S$$

$$(9.57) \quad B_{n1} = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یاد رہے کہ سطحی کثافت چارج کی موجودگی ذوبرق، کامل موصل اور غیر کامل موصل تمام پر ممکن ہے جبکہ سطحی کثافت رو K صرف کامل موصل کی صورت میں ممکن ہے۔

2864

مندرجہ بالا سرحدی شرائط میکس ویل کے مساوات کے حل کے لئے لازم ہیں۔ حقیقت میں پیش آنے والے تمام مسائل میں مختلف اشیاء کے سرحدی شرائط پائی جاتی ہیں اور ایسے ہر سرحد کے دونوں اطراف پر مختلف متغیرات کے تعلق سرحدی شرائط سے ہی حاصل کرنا ممکن ہے۔ کامل موصل کی صورت میں موصل کے اندر، وقت کے ساتھ بدلتے، تمام متغیرات صفر ہوتے ہیں البتہ ایسی صورت میں مساوات 9.54 تا مساوات 9.57 میں دئے شرائط کا اطلاق نہایت مشکل ہوتا ہے۔

متحرک لہروں کے چند بنیادی خاصیت بغیر سرحد کے خطے میں لہر کی حرکت پر غور سے واضح ہوتے ہیں۔ اگلا باب انہیں متحرک لہروں پر ہے۔ میکس ویل مساوات کا یہ سب سے آسان استعمال ہے چونکہ ان میں کسی قسم کے سرحدی شرائط لاگو نہیں ہوتے۔

2869

مثال 9.3: موصل سطح پر نقطہ $N(2, 3 - 1)$ پایا جاتا ہے جہاں میدان $E = (15a_x - 20a_y + 6a_z) \cos 10^6 t \frac{V}{m}$ ہے۔ موصل سطح کے گرد خطے کے مستقل $\epsilon_R = 1.6$ ، $\mu_R = 2.2$ اور $\sigma = 0$ ہیں۔ الف) نقطہ N پر موصل سطح کی عمودی اکائی سمتیہ a_N حاصل کریں۔ ب) اس نقطے پر کثافت چارج حاصل کریں۔

2872

حل: الف) چونکہ نقطہ N پر برقی میدان دیا گیا ہے اور موصل سطح پر برقی میدان سطح کے عمودی ہوتا ہے لہذا عمودی سمتیہ E کے سمت میں ہی ہوگا۔ یوں $t = 0$ پر میدان کی قیمت استعمال کرتے ہوئے a_N حاصل کرتے ہیں۔

$$a_N = \frac{E_{t=0}}{|E_{t=0}|} = \frac{15a_x - 20a_y + 6a_z}{\sqrt{15^2 + 20^2 + 6^2}} = 0.58a_x - 0.78a_y + 0.23a_z$$

ب) موصل سطح پر عمودی میدان اور کثافت چارج کے تعلق سے

$$\begin{aligned} \rho_S &= D \cdot a_N = 1.6\epsilon_0(15a_x - 20a_y + 6a_z) \cos 10^6 t \cdot (0.58a_x - 0.78a_y + 0.23a_z) \\ &= 1.138 \cos(10^6 t) \frac{nC}{m^2} \end{aligned}$$

2873

حاصل ہوتا ہے۔

2874

2875

9.5 تاخیری دباو

وقت کے ساتھ بدلتے دباو، جنہیں **تاخیری دباو**⁹ کہا جاتا ہے، **اشعاعی اخراج**¹⁰ کے مسائل حل کرنے میں نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ آپ کو یاد ہوگا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو V کو خطے میں تقسیم ساکن چارج کی صورت

$$(9.58) \quad V = \int_h \frac{\rho_h dh}{4\pi\epsilon R} \quad (\text{برقی سکون})$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح سمتی مقناطیسی دباؤ A کو وقت کے ساتھ نہ بدلتے یعنی یک سمتی برقی رو کے تقسیم کی صورت

$$(9.59) \quad A = \int_h \frac{\mu J dh}{4\pi R} \quad (\text{یک سمتی رو})$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں مساوات کے نقطہ اشکال بالترتیب

$$(9.60) \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \quad (\text{برقی سکون})$$

اور

$$(9.61) \quad \nabla^2 A = -\mu J \quad (\text{یک سمتی رو})$$

ہیں۔

غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ کے حصول کے بعد میدان کے بنیادی متغیرات ڈھلوان

$$(9.62) \quad E = -\nabla V \quad (\text{برقی سکون})$$

اور گردش

$$(9.63) \quad B = \nabla \times A \quad (\text{یک سمتی رو})$$

کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔

آئیں اب ساکن چارج اور یک سمتی رو سے متعلق، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایسے دباؤ حاصل کریں جو مندرجہ بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔

میکس ویل کے مساوات کے تحت $\nabla \cdot B = 0$ ہوگا۔ صفحہ 227 پر مساوات 7.66 کے تحت گردش کی پھیلاؤ لازماً صفر ہوتی ہے لہذا مساوات 9.63 میکس ویل کی مساوات $\nabla \cdot B = 0$ پر پورا اترتی ہے۔ یوں ہم مساوات 9.63 کو بدلتے میدان کے لئے بھی درست تصور کرتے ہیں۔

صفحہ 237 پر مشق 7.7 میں آپ نے ثابت کیا کہ ڈھلوان کی گردش لازماً صفر ہوتی ہے یوں مساوات 9.62 کی گردش لینے سے دایاں ہاتھ صفر حاصل ہوتا ہے جبکہ بائیں ہاتھ $\nabla \times E$ حاصل ہوتا ہے جو مساوات 9.27 کے تحت صفر نہیں ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ مساوات 9.62 وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے درست نہیں ہے۔ آئیں اس توقع سے مساوات 9.62 کے دائیں جانب متغیرہ N جمع کریں

$$E = -\nabla V + N$$

کہ وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے ایسی مساوات درست ثابت ہوگی۔ فی الحال N ایک نامعلوم متغیرہ ہے۔ گردش لینے سے

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla V) + \nabla \times N \\ &= 0 + \nabla \times N \end{aligned}$$

یعنی

$$\nabla \times N = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 9.63 کے استعمال سے یوں

$$\nabla \times N = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times A)$$

یا

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جس کا سادہ ترین حل

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

ہے لہذا اب ہم

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (9.64)$$

لکھ سکتے ہیں۔

ہمیں اب بھی دیکھنا ہو گا کہ آیا مساوات 9.63 اور مساوات 9.64 میکس ویل کے بقایا دو مساوات یعنی مساوات 9.28

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

اور مساوات 9.29

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

پر پورا اترتے ہیں کہ نہیں۔ یہاں پہلی مساوات میں $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$ اور $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \mathbf{J} + \epsilon \left(-\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

یا

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu \epsilon \left(\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \quad (9.65)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 9.64 کا سہارا لیا گیا۔ اسی طرح مساوات 9.29 سے

$$\epsilon \left(-\nabla \cdot \nabla V - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \rho_h$$

یا

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \quad (9.66)$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 9.65 اور مساوات 9.66 میں کوئی تضاد نہیں پایا جاتا۔ ساکن یا یک سمتی حالات میں $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ کی وجہ سے مساوات 9.65 اور مساوات 9.66 سے بالترتیب مساوات 9.61 اور مساوات 9.60 حاصل ہوتے ہیں۔ یوں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ وقت کے ساتھ بدلتے دباؤ کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے کہ ان سے B

اور E بذریعہ مساوات 9.63 اور مساوات 9.64 حاصل کئے جاسکتے ہوں۔ البتہ A اور V کو مساوات 9.63 اور مساوات 9.64 از خود مکمل طور پر بیان نہیں کرتے۔ یہ دو مساوات لازمی لیکن نامکمل شرائط ہیں جن پر A اور V کا پورا اثر نا ضروری ہے۔ آئیں ایک مثال سے اس حقیقت کو سمجھیں۔

تصور کریں کہ ہمارے پاس سادہ سمتی مقناطیسی دباؤ ہے جس کے A_y اور A_z اجزاء صفر کے برابر ہیں۔ یوں مساوات 9.63 کی مدد سے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z = 0 a_x + \frac{\partial A_x}{\partial z} a_y - \frac{\partial A_x}{\partial y} a_z$$

اس سے ظاہر ہے کہ x محدد کے ساتھ A_x کے تبدیلی کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن نہیں ہے۔ یہ مساوات $\frac{\partial A_x}{\partial x}$ کا ذکر تک نہیں کرتا۔ ہاں اگر ہمیں A کے پھیلاؤ کے بارے میں بھی معلومات فراہم ہوتی تب x محدد کے ساتھ A_x کے تبدیلی کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہوتا چونکہ دئے گئے سمتی دباؤ سے

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آخر میں یہ بھی بتانا ضروری ہے کہ A کے بارے میں ہماری تمام معلومات جزوی تفرقی مساوات کی صورت میں ہیں جن سے A کے حصول کے وقت مکمل کا مستقل شامل کرنا ضروری ہے۔ کسی بھی حقیقی مسئلہ جس میں مکمل خلاء کے لئے حل درکار ہو میں ایسا مستقل صفر کے برابر ہو گا چونکہ کوئی بھی میدان لا محدود فاصلے پر صفر ہی ہو گا۔

اس مثال سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر ہمیں لا محدود خلاء میں کسی بھی نقطے پر سمتی میدان کی قیمت معلوم ہو تب اس سمتی میدان کو تمام خلاء میں میدان کے گردش اور پھیلاؤ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ہمیں مکمل آزادی ہے کہ جیسے چاہیں A کی پھیلاؤ بیان کریں۔ ہم مساوات 9.65 اور مساوات 9.66 کو مد نظر رکھتے ہوئے یوں A کے پھیلاؤ کے لئے سادہ ترین تفاعل

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (9.67)$$

لکھتے ہیں جس سے مساوات 9.65

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad (9.68)$$

صورت اختیار کر لے گی جبکہ مساوات 9.66

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (9.69)$$

صورت اختیار کر لے گی۔

مندرجہ بالا دو مساوات متحرک امواج سے متعلق ہیں جن پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔ ان مساوات کی مشابہت بھی حیرت انگیز ہے۔ باب کے اس حصے میں، وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے، حاصل کئے گئے نتائج یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (9.70)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (9.71)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (9.72)$$

اگلے باب میں متحرک امواج پر غور کیا جائے گا۔ آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتے برقی و مقناطیسی میدان متحرک امواج پیدا کرتے ہیں جن کی رفتار

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (9.73)$$

کے برابر ہوتی ہے۔ خالی خلاء میں یہ رفتار تقریباً $3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ کے برابر ہوتی ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔ اس سے اخذ کیا جاسکتا ہے کہ نقطہ N_1 پر کثافت چارج سے دور کسی نقطہ N_2 پر دباؤ کی قیمت اسی لمحے کثافت چارج کے قیمت پر منحصر نہیں ہوتی بلکہ کچھ دیر قبل کے کثافت چارج پر منحصر ہوتی ہے۔ کثافت چارج میں تبدیلی کی خبر N_1 سے N_2 تک رفتار v سے پہنچتی ہے لہذا ان نقطوں کے درمیان فاصلہ R ہونے کی صورت میں یہ خبر $\frac{R}{v}$ سیکنڈ تاخیر سے پہنچے گی۔ اس طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.58 کی نئی شکل

$$V = \int_h \frac{[\rho_h]}{4\pi\epsilon R} dh \quad (9.74)$$

ہوگی جہاں $[\rho_h]$ سے مراد یہ ہے کہ مساوات میں وقت t کی جگہ تاخیری وقت t' استعمال کیا جائے یعنی

$$t' = t - \frac{R}{v}$$

یوں اگر خلاء میں کثافت چارج

$$\rho_h = e^{-r} \cos \omega t$$

ہو تب

$$[\rho_h] = e^{-r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) \right]$$

ہوگا جہاں R تفرقی چارج سے اس نقطے تک فاصلہ ہے جہاں اس تفرقی چارج سے پیدا دباؤ کا حصول درکار ہو۔

2892

اسی طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.59 کی نئی شکل یعنی تاخیری سمتی مقناطیسی دباؤ کی مساوات

$$A = \int_h \frac{\mu[J]}{4\pi R} dh \quad (9.75)$$

2893

ہوگی۔

تاخیری وقت کے استعمال کی بنا پر ایسے دباؤ کو **تاخیری دباؤ**¹¹ کہا جاتا ہے۔

2894

تاخیری برقی اور تاخیری مقناطیسی دباؤ کے استعمال سے برقی و مقناطیسی مسئلے نسبتاً زیادہ آسانی سے حل ہوتے ہیں۔ یوں اگر ہمیں ρ اور J معلوم ہوں تب ہم مساوات 9.74 اور مساوات 9.75 سے V اور A حاصل کر سکتے ہیں جن سے مقناطیسی میدان بذریعہ مساوات 9.70 اور برقی میدان بذریعہ مساوات 9.72 حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ اگر ہمیں ρ اور J کی قیمتیں معلوم نہ ہوں اور نہ ہی ان کے قیمتوں کا اندازہ لگانا ممکن ہو تب تاخیری دباؤ، میکس ویل مساوات کے حل سے زیادہ مددگار ثابت نہیں ہوتے۔

2898

4414 put comsat's time table here.
4415 energy travels along the wire and not in the wire.
4416 antenna chapter, 3D figure at start and complete the start section.
4417 house completion certificate.
4418 zaryab's tooth
4419 zaryab fish
4420 $F = -dW/dT$ to include in inductance chapter plus a question or two
4421 magnetization curve and an iteration example. fig 8.10, 11 of hayt.
4422 charge is barqi bar.
4423 add questions to machine book too.
4424 take print outs for myself.
4425

الباب 16

سوالات

میکس ویل مساوات

سوال 16.1: رداس $\rho = 12 \text{ cm}$ کے گول دائرے میں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا، یکساں مقناطیسی میدان $B(t) = 0.15 \sin 1000t \text{ Wb}$ پیدا کرتی ہے۔ برقی رو $i(t)$ سے پیدا مقناطیسی بہاو کو نظر انداز کرتے ہوئے $e(t)$ اور $i(t)$ حاصل کریں۔ صورت حال شکل 16.1 میں دکھائی گئی ہے جہاں صفحہ سے اوپر کی جانب باہر نکلتی مقناطیسی میدان کو چھوٹے دائروں میں بند نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

جوابات: $-6.78 \cos 1000t \text{ V}$ ، $-123 \cos 1000t \text{ mA}$

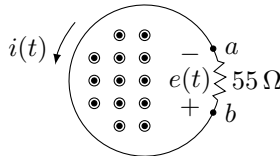
سوال 16.2: سطح $z = 0$ پر موصل تار کے مستطیل کے اطراف $x = \pm 2 \text{ m}$ ، $y = \pm 1.5 \text{ m}$ پر ہیں۔ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا مقناطیسی میدان $B = (0.25a_x - 0.55a_y + 0.1a_z) \sin 1200t \text{ T}$ ہے۔ مستطیل کی کل مزاحمت $R = 4200 \Omega$ ہے۔ مثبت z محدود کی جانب سے دیکھتے ہوئے، گھڑی کی سمت میں برقی رو حاصل کریں۔ برقی رو سے پیدا ثنائی مقناطیسی میدان کو نظر انداز کرتے ہوئے حل کریں۔

جواب: $343 \cos 1200t \text{ mA}$

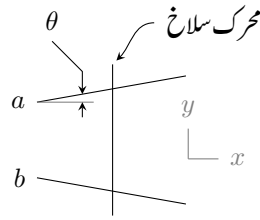
سوال 16.3: مقناطیسی میدان $B = 5 \cos(1.2 \times 10^8 \pi t - \pi y) a_z \mu\text{T}$ ہے۔ مندرجہ ذیل فرضی یا غیر موصل دائروں پر a_ϕ سمت میں بڑھتا متحرک برقی دباؤ حاصل کریں۔ الف) $(0,0,0)$ تا $(1,0,0)$ تا $(1,1,0)$ تا $(0,1,0)$ تا $(0,0,0)$ ؛ ب) $(0,0,0)$ تا $(2,0,0)$ تا $(0,2,0)$ تا $(0,0,0)$

جوابات: 0 V ، $600[\cos(1.2 \times 10^8 \pi t - \pi) - \cos(1.2 \times 10^8 \pi t)] \text{ V}$

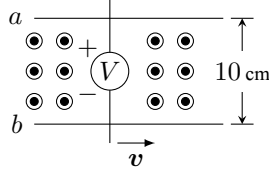
سوال 16.4: رداس $\rho = 1 \text{ mm}$ اور $\rho = 3 \text{ mm}$ کے ہم محوری تار میں $H = \frac{0.122}{\rho} \cos 5 \times 10^8 \pi t \cos 0.5 \pi z a_\phi \frac{\text{A}}{\text{m}}$ پایلاہ جاتا ہے۔ مستطیل $(0.001, 0^\circ, 0)$ تا $(0.003, 0^\circ, 0)$ تا $(0.003, 0^\circ, 1.5)$ تا $(0.001, 0^\circ, 1.5)$ میں محرکہ برقی دباؤ حاصل کریں۔



شکل 16.1: دائرے میں یکساں مقناطیسی بہاو، محرک برقی دباؤ پیدا کرتا ہے۔



شکل 16.2: محرک سلاخ پر مقناطیسی میدان محرک دباؤ پیدا کرتا ہے۔



شکل 16.3: کھلے دور اور بند دور میں محرک برقی دباؤ۔

جواب: $119 \sin(5 \times 10^8 \pi t) \text{ V}$

سوال 16.5: لمحہ $t = 0$ پر موصل تار کے مستطیل کے اطراف $x = \pm 0.4 \text{ m}$ اور $y = \pm 0.6 \text{ m}$ پر ہیں۔ یہ مستطیل $6a_y \frac{\text{m}}{\text{s}}$ کی سمتی رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔ غیر یکساں مقناطیسی میدان $B = 3x^2 y a_z \text{ T}$ ہے۔ مستطیل کی مزاحمت $R = 100 \Omega$ ہے۔ مستطیل میں طاقت کی اخراج حاصل کریں۔ ساکن سلاخوں میں کتنی محرک برقی دباؤ پیدا ہوتی ہے۔

جواب: 0 V ، $P = 2.12 \text{ mW}$

سوال 16.6: شکل 16.2 میں دو ساکن موصل سلاخ x محدد کے ساتھ $\theta = \pm 10^\circ$ کا زاویہ بناتے ہیں۔ صفحہ کے بالائی سطح سے نکلتی مقناطیسی میدان $B = 0.5 a_z \text{ T}$ ہے۔ محرک سلاخ کی رفتار $v = 8a_x \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔ ساکن سلاخوں کے بائیں سروں کے درمیان فاصلہ 2 cm ہے۔ ان کے مابین آہ پیما برقی دباؤ v_{ab} ناپتا ہے۔ الف) محرک سلاخ کے مقام کو $t = 0$ پر $x = 0$ لیتے ہوئے آہ پیمائش پر حاصل برقی دباؤ کو مساوات 9.1 سے حاصل کریں۔ ب) اسی محرک دباؤ کو مساوات 9.12 کے دائیں ہاتھ کی مدد سے حاصل کریں۔ پ) محرک سلاخ کا مقام $x = 50t^2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہونے کی صورت میں جواب حاصل کریں۔

جوابات: الف اور ب: $v_{ab} = -11.285t - 0.08 \text{ V}$ (پ) $v_{ab} = -881.6t^3 - t \text{ V}$

سوال 16.7: رداس $\rho = 0.5 \text{ cm}$ اور $\rho = 4 \text{ cm}$ کی ہم محوری تار میں میدان $H_\phi = \frac{5}{\rho} \cos(2\pi \times 10^7 t - 5z)$ اور $E_\rho = \frac{8\pi^2}{\rho} \cos(2\pi \times 10^7 t - 5z)$ پائے جاتے ہیں۔ الف) مساوات 9.27 کے دونوں اطراف حل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ ہم محوری تار میں موجود میدان اس پر پورا اترتے ہیں۔ ب) سمتی سطح $\phi = 0$ ، $0.5 \text{ cm} < \rho < 4 \text{ cm}$ ، $0 < z < 1 \text{ cm}$ اور اس کے محیط پر مساوات 9.4 کے دونوں اطراف حل کرتے ہوئے محرک برقی دباؤ حاصل کریں۔ سمتی سطح کی سمت a_ϕ لیں۔ یوں محیط پر چلتے ہوئے $Z = 1 \text{ cm}$ پر a_ρ سمت میں چلنا ہو گا۔

جوابات: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{40\pi^2}{\rho} \sin(2\pi \times 10^7 t - 5z) a_\phi$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 52.26 [\cos(2\pi \times 10^7 t - 0.05) - \cos(2\pi \times 10^7 t)] \text{ V}$$

سوال 16.8: شکل 16.3 میں $B = 0.55 a_z \text{ T}$ اور $v = 6a_x \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہیں۔ محرک سلاخ میں انتہائی زیادہ مزاحمت رکھتا پیما برقی دباؤ V نسیب ہے۔ الف) ساکن سلاخوں کے بائیں اور دائیں سرے آزاد رکھتے ہوئے پیما پر کیا برقی دباؤ حاصل ہو گی۔ ب) ساکن سلاخوں کے بائیں سرے a اور b آپس میں موصل تار سے جوڑنے کے بعد پیما پر کیا حاصل ہو گا۔ پ) ساکن سلاخوں کے دائیں سرے آپس میں آپس میں موصل تار سے جوڑنے کے بعد پیما پر کیا حاصل ہو گا۔ ت) ساکن سلاخوں کے بائیں سرے آپس میں اور ان کے دائیں سرے آپس میں جوڑ کر پیما کیا پڑھے گا۔

جوابات: 0 V ، 3.3 V ، 3.3 V ، 3.3 V

سوال 16.9: برقی میدان $E = E_0 \cos 1500t \frac{\text{V}}{\text{m}}$ کی صورت میں مندرجہ ذیل اشیاء میں ایضالی برقی رو اور انتقالی برقی رو کی شرح حاصل کریں۔ الف) تابنا جس کے مستقل $\epsilon_R = 1$ اور $\sigma = 5.8 \times 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔ ب) مقطر پانی جس کے مستقل $\epsilon_R = 80$ اور $\sigma = 10^{-4} \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔ پ) کواٹس جس کے مستقل $\epsilon_R = 3.8$ اور $\sigma = 10^{-17} \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔

جوابات: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ ، 4.4×10^{15} ، 94 ، 2×10^{-10}

سوال 16.10: برقی میدان $E = E_0 e^{\frac{t}{\tau}} \frac{V}{m}$ کی صورت میں مندرجہ ذیل اشیاء میں ایضالی برقی رو اور انتقالی برقی رو کی شرح حاصل کریں جہاں $\tau = 10^{-7}$ کے برابر ہے۔ الف) تانبا جس کے مستقل $\epsilon_R = 1$ اور $\sigma = 5.8 \times 10^7 \frac{S}{m}$ ہیں۔ ب) مقطر پانی جس کے مستقل $\epsilon_R = 80$ اور $\sigma = 10^{-4} \frac{S}{m}$ ہیں۔ پ) کوارٹس جس کے مستقل $\epsilon_R = 3.8$ اور $\sigma = 10^{-17} \frac{S}{m}$ ہیں۔

جوابات: $\frac{\sigma\tau}{\epsilon}$ ، 6.5×10^{11} ، 0.014 ، 2.97×10^{-11}

سوال 16.11: محدود Z پر موجود ہم محوری تار کی لمبائی 12 cm جبکہ اس کے رداس 2 mm اور 6 mm ہیں۔ دونوں تاروں کے درمیان مادے کے مستقل $\mu = 5 \times 10^{-6} \frac{H}{m}$ ، $\epsilon = 2 \times 10^{-11} \frac{F}{m}$ اور $\sigma = 4 \times 10^{-5} \frac{S}{m}$ ہیں۔ تار میں $E = \frac{10^4}{\rho} \cos(10^6 t) a_\rho \frac{V}{m}$ کی صورت میں J ، I_c ، J_d اور I_d حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{0.5}{\rho} \cos(10^6 t) a_\rho \frac{A}{m^2}$ ، $0.12\pi \cos 10^6 t A$ ، $-\frac{0.1}{\rho} \sin 10^6 t \frac{A}{m^2}$ ، $-0.024\pi \sin 10^6 t A$ ، 0.2

سوال 16.12: رداس ρ_1 اور ρ_2 کے ہم محوری تار کی لمبائی l ہے۔ تار کو بیرونی دور $V_0 \cos \omega t$ برقی دباؤ فراہم کرتی ہے۔ تار میں برقی میدان E کی مساوات لکھتے ہوئے J_d اور I_d حاصل کریں۔ ثابت کریں کہ انتقالی برقی رو بیرونی دور میں پائی جانے والی ایضالی برقی رو کے برابر ہے۔

جوابات: $E = \frac{V_0 \cos \omega t}{\rho \ln \frac{b}{a}} a_\rho \frac{V}{m}$ ، $J_d = \frac{-\omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{\rho \ln \frac{b}{a}} a_\rho$ ، $I_d = -\frac{2\pi l \omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{\ln \frac{b}{a}}$ ، $I_c = C \frac{dV}{dt} = -\frac{2\pi l \omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{\ln \frac{b}{a}}$

سوال 16.13: مساوات 9.21 کی پہلی مساوات کے دونوں اطراف پھیلاؤ کا عمل استعمال کرتے ہوئے استمراری مساوات حاصل کریں۔

جواب: $\nabla \cdot \nabla \times H = 0 = \nabla \cdot J + \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$

سوال 16.14: ایک خطہ جہاں $E = 32 \sin ax \cos 5y \cos(2 \times 10^{10} t) a_z$ ہے کے مستقل $\mu_R = 2.5$ ، $\epsilon_R = 1.2$ اور $\sigma = 0$ ہیں۔ میکس ویل کے مساوات استعمال کرتے ہوئے a کی مثبت قیمت دریافت کریں۔ تمام تکمل کے مستقل کو صفر لیں۔

جواب: $a = 115.44 m^{-1}$

سوال 16.15: ایک ترسیلی تار میں مقناطیسی میدان $H = 15 \cos(4 \times 10^9 t - \beta z) a_x \frac{A}{m}$ پایا جاتا ہے۔ ترسیلی تار کے درکار مستقل $\epsilon_R = 1$ ، $\sigma = 0$ اور $\epsilon_R = 5$ ہیں۔ میکس ویل کے مساوات استعمال کرتے ہوئے β کی مثبت قیمت دریافت کریں۔

جواب: $\beta = 29.83 m^{-1}$

سوال 16.16: موصل سطح محدود کے مرکز سے گزرتی ہے جہاں میدان $E = (33a_x + 12a_y + 25a_z) \cos(10^7 t) \frac{V}{m}$ پایا جاتا ہے۔ سطح کے قریب خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\epsilon_R = 12$ اور $\mu_R = 1.6$ ہیں۔ نقطہ $(0, 0, 0)$ پر موصل سطح پہ کثافت چارج حاصل کریں۔ اس نقطے پر سطح پر متوازی میدان حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{nC}{m^2}$ ، $4.58 \cos(10^7 t)$ ، 0

جدول 16.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	مقطر پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوبا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمینیم
10^{-16}	پولیسٹرن پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 16.2 : $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیز
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 16.3: μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 16.4: اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	c	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

