

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
 کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

3

1	4	سمتیات	1
1.1	5	مقداری اور سمتیہ	1.1
1.2	6	سمتی الجبرا	1.2
1.3	7	کارتیسی محدود	1.3
1.4	8	اکائی سمتیات	1.4
1.5	9	میدانی سمتیہ	1.5
1.6	10	سمتی رقبہ	1.6
1.7	11	غیر سمتی ضرب	1.7
1.8	12	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
1.9	13	گول نلکی محدود	1.9
1.9.1	14	نلکی اکائی سمتیات کا کارتسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	1.9.1
1.9.2	15	نلکی اور کارتسی اکائی سمتیات کا تعلق	1.9.2
1.9.3	16	نلکی لامحدود سطحیں	1.9.3
1.10	17	کروی محدود	1.10
2	18	کولومب کا قانون	2
2.1	19	قوت کشش یا دفع	2.1
2.2	20	برقی میدان کی شدت	2.2
2.3	21	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	2.3
2.4	22	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	2.4
2.5	23	چارج بردار حجم	2.5
2.6	24	مزید مثال	2.6
2.7	25	برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	2.7

69 ²⁶	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ	3
69 ²⁷	ساکن چارج	3.1
69 ²⁸	فیراڈے کا تجربہ	3.2
70 ²⁹	گاؤس کا قانون	3.3
72 ³⁰	گاؤس کے قانون کا استعمال	3.4
72 ³¹	نقطہ چارج	3.4.1
74 ³²	یکساں چارج بردار کروی سطح	3.4.2
74 ³³	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر	3.4.3
75 ³⁴	ہم محوری تار	3.5
77 ³⁵	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	3.6
77 ³⁶	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق	3.7
80 ³⁷	پھیلاؤ	3.8
82 ³⁸	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات	3.9
84 ³⁹	پھیلاؤ کی عمومی مساوات	3.10
86 ⁴⁰	مسئلہ پھیلاؤ	3.11
93 ⁴¹	توانائی اور برقی دباؤ	4
93 ⁴²	توانائی اور کام	4.1
94 ⁴³	لکیری تکملہ	4.2
99 ⁴⁴	برقی دباؤ	4.3
100 ⁴⁵	نقطہ چارج کا برقی دباؤ	4.3.1
101 ⁴⁶	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ	4.3.2
102 ⁴⁷	ہم محوری تار کا برقی دباؤ	4.3.3
102 ⁴⁸	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ	4.4
106 ⁴⁹	برقی دباؤ کی ڈھلوان	4.5
110 ⁵⁰	نلکی محدود میں ڈھلوان	4.5.1
111 ⁵¹	کروی محدود میں ڈھلوان	4.5.2
112 ⁵²	جفت قطب	4.6
114 ⁵³	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط	4.6.1
117 ⁵⁴	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی	4.7

125 ₈₅	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
125 ₈₆	5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو	
127 ₈₇	5.2 استمراری مساوات	
129 ₈₈	5.3 موصل	
134 ₈₉	5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	
137 ₉₀	5.5 عکس کی ترکیب	
140 ₉₁	5.6 نیم موصل	
141 ₉₂	5.7 ذو برق	
146 ₉₃	5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	
150 ₉₄	5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	
150 ₉₅	5.10 کیپسٹر	
152 ₉₆	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
153 ₉₇	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
153 ₉₈	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
155 ₉₉	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
156 ₀₀	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
169 ₀₁	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
171 ₀₂	6.1 مسئلہ یکنائی	
173 ₀₃	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
173 ₀₄	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
174 ₀₅	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
181 ₀₆	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
183 ₀₇	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
191 ₀₈	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

199 ₉	ساکن مقناطیسی میدان	7
199 ₀	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
203 ₁	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.2
207 ₂	گردش	7.3
214 ₃	7.3.1 نلکی محدود میں گردش	
220 ₄	7.3.2 عمومی محدود میں گردش کی مساوات	
222 ₅	7.3.3 کروی محدود میں گردش کی مساوات	
222 ₆	7.4 مسئلہ سٹوکس	
226 ₇	7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو	
232 ₈	7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	
238 ₉	7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	
238 ₀	7.7.1 سمتی مقناطیسی دباؤ	
239 ₁	7.7.2 ایمپیٹر کا دوری قانون	
245 ₂	8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	
245 ₃	8.1 متحرک چارج پر قوت	
246 ₄	8.2 تفرقی چارج پر قوت	
249 ₅	8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	
250 ₆	8.4 قوت اور مروڑ	
255 ₇	8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	
256 ₈	8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	
259 ₉	8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط	
260 ₀₀	8.8 مقناطیسی دور	
263 ₀₁	8.9 مقناطیسی مخفی توانائی	
264 ₀₂	8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ	
268 ₀₃	8.11 مشترکہ امالہ	

271 ₁₀₄	9	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات
271 ₁₀₅	9.1	فیراڈے کا قانون
277 ₁₀₆	9.2	انتقالی برقی رو
281 ₁₀₇	9.3	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل
282 ₁₀₈	9.4	میکس ویل مساوات کی تکمل شکل
284 ₁₀₉	9.5	تاخیری دباؤ
289 ₁₁₀	10	مستوی امواج
289 ₁₁₁	10.1	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج
290 ₁₁₂	10.2	برقی و مقناطیسی مستوی امواج
297 ₁₁₃	10.2.1	خالی خلاء میں امواج
299 ₁₁₄	10.2.2	خالص یا کامل ذو برق میں امواج
301 ₁₁₅	10.2.3	ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج
304 ₁₁₆	10.3	پوئنٹنگ سمتیہ
308 ₁₁₇	10.4	موصل میں امواج
314 ₁₁₈	10.5	انعکاس مستوی موج
320 ₁₁₉	10.6	شرح ساکن موج
327 ₁₂₀	11	ترسیلی تار
327 ₁₂₁	11.1	ترسیلی تار کے مساوات
331 ₁₂₂	11.2	ترسیلی تار کے مستقل
332 ₁₂₃	11.2.1	ہم محوری تار کے مستقل
335 ₁₂₄	11.2.2	دو متوازی تار کے مستقل
336 ₁₂₅	11.2.3	سطح مستوی ترسیلی تار
337 ₁₂₆	11.3	ترسیلی تار کے چند مثال
342 ₁₂₇	11.4	ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ
349 ₁₂₈	11.4.1	سمتہ فراوانی نقشہ
350 ₁₂₉	11.5	تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

355 ₃₀	12 تقطیب موج
355 ₃₁	12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
358 ₃₂	12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پرنٹنگ سمتیہ
361 ₃₃	13 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار
361 ₃₄	13.1 ترچھی آمد
372 ₃₅	13.2 ترسیم بائی گن
375 ₃₆	14 موج اور گھمکیا
375 ₃₇	14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور موج کا موازنہ
376 ₃₈	14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے موج میں عرضی برقی موج
382 ₃₉	14.3 کھوکھلا مستطیلی موج
391 ₄₀	14.3.1 مستطیلی موج کے میدان پر تفصیلی غور
398 ₄₁	14.4 مستطیلی موج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج
402 ₄₂	14.5 کھوکھلی نالی موج
409 ₄₃	14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف
411 ₄₄	14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف
413 ₄₅	14.8 سطحی موج
418 ₄₆	14.9 ذو برق تختی موج
421 ₄₇	14.10 شیش ریشہ
424 ₄₈	14.11 پردہ بصارت
426 ₄₉	14.12 گھمکی خلاء
429 ₅₀	14.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل

- 437¹⁵¹ تعارف 15.1
- 437¹⁵² تاخیری دباؤ 15.2
- 439¹⁵³ تکمل 15.3
- 440¹⁵⁴ مختصر جفت قطبی اینٹینا 15.4
- 448¹⁵⁵ مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت 15.5
- 452¹⁵⁶ ٹھوس زاویہ 15.6
- 453¹⁵⁷ اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش 15.7
- 460¹⁵⁸ قطاری ترتیب 15.8
- 460^{158.1} غیر سمتی، دو نقطہ منبع 15.8.1
- 461^{158.2} ضرب نقش 15.8.2
- 462^{158.3} ثنائی قطار 15.8.3
- 464^{158.4} یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار 15.8.4
- 466^{158.5} یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار 15.8.5
- 466^{158.6} یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار 15.8.6
- 470^{158.7} یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلنے زاویہ اخراجی اینٹینا 15.8.7
- 471¹⁵⁹ تداخل پیمہ 15.9
- 472¹⁶⁰ مسلسل خطی اینٹینا 15.10
- 473¹⁶¹ مستطیل سطحی اینٹینا 15.11
- 476¹⁶² اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریئر بدل ہیں 15.12
- 476¹⁶³ خطی اینٹینا 15.13
- 481¹⁶⁴ چلتے موج اینٹینا 15.14
- 482¹⁶⁵ چھوٹا گھیرا اینٹینا 15.15
- 483¹⁶⁶ پیچ دار اینٹینا 15.16
- 485¹⁶⁷ دو طرفہ کردار 15.17
- 487¹⁶⁸ جھری اینٹینا 15.18
- 488¹⁶⁹ پیپا اینٹینا 15.19
- 490¹⁷⁰ فرانس ریڈار مساوات 15.20
- 493¹⁷¹ ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی 15.21
- 495¹⁷² حرارت نظام اور حرارت بعید 15.22

ساکن مقناطیسی میدان

برقی میدان کا منبع برقی چارج ہے جس پر باب 2 میں تفصیلی غور کیا گیا۔ مقناطیسی میدان کا منبع یا تو مقناطیس ہو سکتا ہے، یا وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان اور یا پھر برقی رو۔ اس کتاب میں مقناطیس سے پیدا ہونے والے مقناطیسی میدان پر غور نہیں کیا جائے گا۔ وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا مقناطیسی میدان پر یا ایک اور باب میں غور کیا جائے گا جبکہ اس باب میں برقی رو سے پیدا ساکن مقناطیسی میدان پر غور کیا جائے گا۔

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون

برقی رو اور اس سے پیدا مقناطیسی میدان کا تعلق **بایوٹ-سیوارٹ**¹ کا قانون²

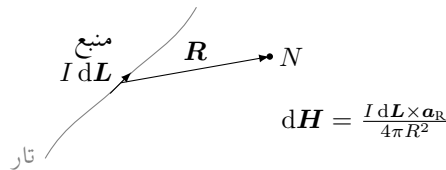
$$(7.1) \quad dH = \frac{I dL \times a_R}{4\pi R^2}$$

بیان کرتا ہے جہاں سے مقناطیسی شدت H کی اکائی ایمپیر فی میٹر ($\frac{A}{m}$) حاصل ہوتی ہے۔ آئیں شکل 7.1 کی مدد سے اس قانون کا مطلب سمجھیں۔

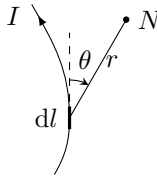
یہ قانون باریک تار کے انتہائی چھوٹے حصے dL جس میں I برقی رو گزر رہی ہو سے نقطہ N پر پیدا اسمتی برقی میدان H دیتا ہے۔ نقطہ N باریک تار کے چھوٹے حصے R فاصلے پر ہے۔ باریک تار سے مراد ایسی ٹھوس نکلی نما موصل تار ہے جس کے رقبہ عمودی تراش کا رداس کم سے کمتر ہو۔ چھوٹے لمبائی dL کی سمت برقی رو کی سمت میں ہے جبکہ $I dL$ منبع مقناطیسی میدان ہے۔

Biot-Savart law¹

² یہ قانون فرانس کے بایوٹ اور سیوارٹ نے 1820 میں پیش کیا۔ یہ دونوں ایمپیر کے ساتھی تھے۔



شکل 7.1: بایوٹ سیوارٹ کا قانون۔



شکل 7.2: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا میدان۔

مقناطیسی شدت کی قیمت برقی رو ضرب باریک چھوٹی تار کی لمبائی $I dL$ اور a_R کے سمتی ضرب کے برائے راست تناسب جبکہ ان کے مابین فاصلہ R کے مربع کے بالعکس تناسب رکھتی ہے۔ تناسبی مستقل $\frac{1}{4\pi}$ ہے۔

1993

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کا موازنہ کولومب کے قانون کے ساتھ کرنے کی غرض سے دونوں مساوات کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} dH_2 &= \frac{I_1 dL_1 \times a_{R21}}{4\pi R_{21}^2} \\ dE_2 &= \frac{dQ_1 a_{R21}}{4\pi \epsilon_0 R_{21}^2} \end{aligned} \quad (7.2)$$

ان مساوات میں زیر نوشت میں 2 اس مقام کو ظاہر کرتی ہے جہاں میدان کی قیمت حاصل کی گئی ہے جبکہ زیر نوشت میں 1 میدان کے منبع کے مقام کو ظاہر کرتی ہے۔ دونوں میدان فاصلے کے مربع کا بالعکس تناسب رکھتے ہیں۔ دونوں اقسام کے میدان کی شدت اور میدان کی منبع کا خطی تعلق ہے۔ دونوں میں فرق میدان کی سمت کا ہے۔ برقی میدان کی سمت منبع سے اس نقطہ کی جانب ہے جس پر میدان حاصل کیا جا رہا ہو۔ مقناطیسی میدان کی سمت سمتی ضرب کے دائیں ہاتھ کے قانون سے حاصل ہوتی ہے۔

1997

شکل 7.2 میں تار کے چھوٹے حصے dl سے نقطہ N پر مقناطیسی میدان کی مقدار

$$dH = \frac{I dl \sin \theta}{4\pi r^2} \quad (7.3)$$

1998

ہوگا۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مساوات 7.1 کی شکل میں تجرباتی طور پر ثابت نہیں کیا جاسکتا چونکہ باریک تار کی چھوٹی لمبائی میں برقی رو تب گزرے گی جب برقی رو اس چھوٹی تار تک پہنچائی جائے۔ جو تار اس تک برقی رو پہنچائے گی، وہ بھی مقناطیسی میدان پیدا کرے گی۔ انہیں علیحدہ علیحدہ نہیں کیا جاسکتا۔ ہم فی الحال صرف یک سمتی برقی رو کی بات کر رہے ہیں۔ یک سمتی برقی رو کی صورت میں وقت کے ساتھ حجمی چارج کثافت تبدیل نہیں ہوگا لہذا صفحہ 129 پر دئے استمراری مساوات

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

سے

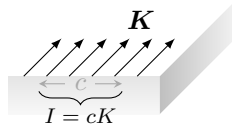
$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (7.4)$$

حاصل ہوگا جسے مسئلہ پھیلاؤ کی مدد سے

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی ہوئی برقی رو صفر کے برابر ہے۔ یہ صرف اس صورت ممکن ہے جب برقی رو کسی بند راہ پر گزر رہی ہو۔ ہمیں ایسی ہی مکمل بند راہ کے برقی رو کے اثر کو دیکھنا ہوگا ناکہ تار کے کسی چھوٹے حصے کے برقی رو کو۔

2000



شکل 7.3: سطحی کثافت برقی رو کے c چوڑائی میں کل cK برقی رو ہو گا۔

یوں بايوٹ-سيوارٹ قانون کی مکمل شکل

$$(7.5) \quad H = \oint \frac{I dL \times a_R}{4\pi R^2}$$

2001

ہی تجرباتی طور ثابت کی جاسکتی ہے۔

مساوات 7.1 سے مساوات 7.5 لکھی جاسکتی ہے۔ البتہ مساوات 7.5 میں مکمل کے اندر کوئی بھی ایسی اضافی تفاعل شامل کیا جاسکتا ہے جس کا بند مکمل صفر کے برابر ہو۔ مقداری میدان کا ڈھلوان ہر صورت بقائی میدان ہوتا ہے لہذا مساوات 7.5 میں ∇G کے شمول سے اس کے جواب میں کوئی فرق نہیں پڑے گا۔ G کوئی بھی مقداری میدان ہو سکتا ہے۔

2004

واقع رہے کہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان مکمل برقی دور کے اثر کو شامل کرنے سے ہی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ برقی رو گزارتی تار کے کچھ حصے کے میدان یا ایسے میدان سے پیدا قوت کی بات بے معنی ہوگی۔

2006

شکل 7.3 میں یکساں سطحی کثافت برقی رو K دکھایا گیا ہے۔ سطحی کثافت برقی رو کو ایمپیر فی اکائی چوڑائی پیش کیا جاتا ہے لہذا c چوڑائی کے حصے میں

$$I = cK$$

برقی رو ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو یکساں نہ ہو تب کسی بھی چوڑائی میں کل برقی تو بذریعہ مکمل

$$I = \int K dc$$

حاصل ہوگی جہاں dc چوڑائی کا چھوٹا حصہ ہے۔ یوں dL کو سطحی کثافت برقی رو K یا جمعی کثافت برقی رو J کی صورت میں

(7.6)

$$I dL = K dS = J dh$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں بايوٹ-سيوارٹ کے قانون کو

(7.7)

$$H = \int_S \frac{K \times a_R dS}{4\pi R^2}$$

یا

(7.8)

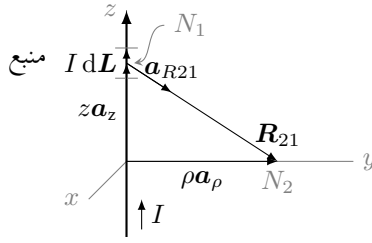
$$H = \int_h \frac{J \times a_R dh}{4\pi R^2}$$

2007

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں سیدھی لامحدود لمبائی کی تار جس میں سے برقی رو گزر رہی ہو کی مقناطیسی میدان بايوٹ-سيوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔ شکل 7.4 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس تار کے دونوں سرے لامحدود فاصلے پر ہیں۔ تار کے قریب نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان کا بیشتر حصہ تار کے اس حصے کی وجہ سے ہوگا جہاں N_2 کے قریب ہو۔ یوں لامحدود فاصلے پر تار کے سروں تک برقی رو پہنچانے والی تار کا نقطہ N_2 پر اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

2010



شکل 7.4: سیدھی لامحدود تار سے پیدا مقناطیسی میدان

نقطہ N_1 پر تار کے چھوٹے حصے dL میں برقی رو کو منبع مقناطیسی میدان تصور کرتے ہوئے مساوات 7.1 کی مدد سے نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان لکھی جاسکتی ہے۔ چونکہ

$$\mathbf{R}_{21} = \rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z$$

کے برابر ہے لہذا

$$R_{21} = |\mathbf{R}_{21}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}_{21}}{|\mathbf{R}_{21}|} = \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ نکلی محدود میں چھوٹی لمبائی

$$dL = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z$$

لکھی جاتی ہے۔ چونکہ یہاں $d\rho = 0$ اور $d\phi = 0$ ہیں لہذا $dL = dz \mathbf{a}_z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.1 کو

$$dH_2 = \frac{I dz \mathbf{a}_z \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ پورے تار کا مقناطیسی میدان اس مساوات کے مکمل سے حاصل ہوگا جہاں مکمل $-\infty$ تا $+\infty$ حاصل کیا جائے گا۔ اس طرح

$$H_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dz \mathbf{a}_z \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{a}_\phi dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں صفحہ 18 پر مساوات 1.23 کی مدد سے $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi$ جبکہ مساوات 1.24 کی مدد سے $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = 0$ لکھے گئے ہیں۔

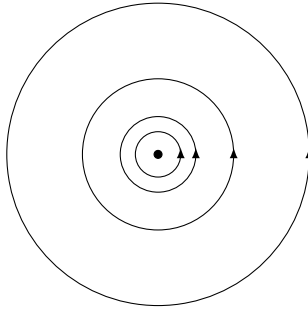
مندرجہ بالا مساوات میں مکمل کے اندر \mathbf{a}_ϕ پر نظر رکھنی ہوگی۔ اگرچہ \mathbf{a}_ϕ کا کئی سمتیہ ہے لہذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہو سکتی البتہ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ آیا مکمل کا متغیر یعنی z تبدیل کرنے سے \mathbf{a}_ϕ کی سمت تو تبدیل نہیں ہوتی۔ صفحہ 21 پر مساوات 1.34 کے تحت

$$\mathbf{a}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_y$$

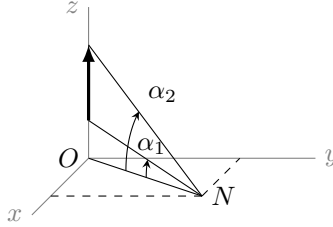
لکھا جاسکتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ z تبدیل کرنے سے \mathbf{a}_ϕ پر کوئی اثر نہیں پڑتا لہذا \mathbf{a}_ϕ کو مکمل کے باہر منتقل کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$H_2 = \frac{I\rho \mathbf{a}_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I\rho \mathbf{a}_\phi}{4\pi} \frac{z}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + z^2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$



شکل 7.5: سیدھی لمبی تار کا مقناطیسی میدان تار کے گرد دائرے بناتا ہے۔ برقی رو صفحے سے باہر نکل رہی ہے۔



شکل 7.6: سیدھی محدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت۔

سے

$$(7.10) \quad H_2 = \frac{I}{2\pi\rho} a_\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 7.5 میں برقی رو صفحے سے باہر نکل رہی ہے جبکہ گول دائرے مقناطیسی میدان کو ظاہر کرتے ہیں۔ اگر تار کو دائیں ہاتھ سے یوں پکڑا جائے کہ انگوٹھا برقی رو کی سمت میں ہو تب اس ہاتھ کی انگلیاں تار کے گرد مقناطیسی میدان کی سمت میں لپٹی ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مقناطیسی میدان نا تو z اور ϕ زاویہ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ اس کی قیمت صرف تار سے فاصلے پر منحصر ہے۔

2014

اگر شکل 7.4 میں تار لا محدود نہ ہو تب مساوات 7.6 میں مکمل کے محدود حد وپر کرنے سے مقناطیسی میدان کی شدت

$$(7.11) \quad H = \frac{I}{4\pi\rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) a_\phi$$

حاصل ہوتی ہے جہاں شکل 7.6 میں α_1 اور α_2 کی نشاندہی کی گئی ہے۔ تار کا نچلا سرا xy سطح یعنی $z = 0$ سطح سے نیچے ہونے کی صورت میں α_1 کی قیمت منفی ہوگی۔ کچھ تار کے دوسرے سرے اور α_2 کے لئے بھی درست ہے۔

2016

7.2 ایمپیٹر کا دوری قانون

کولومب کے قانون کی مدد سے مختلف طرز پر پائے جانے والے چارج کے برقی میدان حاصل کرنے کے بعد ہم نے گاؤس کا قانون اخذ کیا جس سے ہماری زندگی نہایت آسان ہو گئی۔ گاؤس کے قانون کی مدد سے متشکل چارج سے پیدا برقی میدان انتہائی آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ متشکل برقی رو کے مقناطیسی میدان حاصل کرنے کا بھی انتہائی آسان طریقہ موجود ہے جسے **ایمپیٹر کا دوری قانون**³ کہتے ہیں۔ اس قانون کو بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حصہ 7.7.2 میں حاصل کیا گیا ہے۔ فی الحال

ہم اس قانون کو استعمال کرنا سیکھتے ہیں۔ اس قانون کے استعمال کے وقت مسئلے پر غور کرتے ہوئے بغیر حساب و کتاب کے فیصلہ کیا جاتا ہے کہ مقناطیسی میدان کے کون کون سے اجزاء موجود نہیں ہونے چاہئے۔ یہ فیصلہ برقی رو کے راستے کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔

2022

ایمپیر کادوری قانون کہتا ہے کہ یک سمتی برقی رو کے گرد کسی بھی راہ H کا لکیری بند مکمل گھیرے برقی رو کے برابر ہوگا یعنی

$$\oint H \cdot dL = I \quad (7.12)$$

لکیری بند مکمل کی سمت میں برقی رو کے گرد دائیں ہاتھ کی انگلیاں گھمانے سے اسی ہاتھ کا انگوٹھا مثبت برقی رو کی سمت دے گا۔ ایسا کرتے وقت انگوٹھے کی ہاتھ کی چار انگلیوں کے عمودی رکھا جاتا ہے۔

2024

کسی بھی راہ H کے لکیری مکمل سے مراد اس راہ کو انتہائی چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں dL میں تقسیم کر کے ہر ٹکڑے پر H کی قیمت استعمال کرتے ہوئے H_{2025} dL حاصل کر کے تمام $H \cdot dL$ کا مجموعہ حاصل کرنا ہے۔ مقناطیسی شدت H کی قیمت مختلف مقامات پر عموماً مختلف ہوگی۔ یوں کسی ایک نقطے پر $H_{206} dL$ کی قیمت کسی دوسرے نقطے کے $H \cdot dL$ سے مختلف ہوگی۔ ایمپیر کادوری قانون کہتا ہے کہ اگرچہ یک سمتی برقی رو کے گرد دو مختلف بند راہوں پر جگہ جگہ $H \cdot dL$ کی قیمتیں مختلف ہوں گی لیکن دونوں راہ پر ان کا مجموعہ عین برقی رو کے برابر ہوگا۔

2028

کسی بھی سطح کا محیط، بند راہ ہوتی ہے۔ اسی طرح کوئی بھی بند راہ، لامحدود سطحوں کا محیط ہوتا ہے۔ یوں بند راہ کا گھیرا ہوا برقی روان تمام سطحوں کو چھیرتا ہوا گردشے گا جن کا محیط یہ بند راہ ہو۔

2030

گاؤس کے قانون کا استعمال تب ممکن ہوتا ہے جب بند سطح میں کل برقی چارج معلوم ہو۔ ایمپیر کادوری قانون اس صورت استعمال کیا جاسکتا ہے جب بند راہ میں گھیرا کل یک سمتی برقی رو معلوم ہو۔

2032

آئیں شکل 7.4 میں دکھائے گئے برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت ایمپیر کے دوری قانون یعنی مساوات 7.12 کی مدد سے دوبارہ حاصل کریں۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے برقی رو کے گرد راہ یوں چنی جاتی ہے کہ اس پر H اور dL یا تو آپس میں عمودی ہوں اور یا H کی قیمت قطعاً اور اس کی سمت dL کے متوازی ہو۔ پہلی صورت میں دونوں متغیرات کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 90 = 0$ ہوتا ہے لہذا $H \cdot dL$ صفر کے برابر ہو گا اور یوں راہ کے اس حصے پر مکمل صفر کے برابر ہوگا۔ دوسری صورت میں متغیرات کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 0 = 1$ ہوتا ہے لہذا $H_{206} dL$ کو $H dL$ لکھا جاسکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ مقناطیسی شدت کی قیمت قطعی ہونے کی وجہ سے H کو مکمل کے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔ یوں راہ کے اس راستے پر مکمل کی قیمت HL کے برابر ہوگی جہاں L راہ کے اس حصے کی لمبائی ہے۔

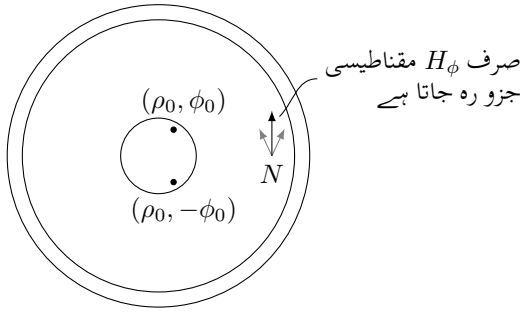
2038

تار کے گرد اور اس کے ساتھ ساتھ حرکت کرنے سے واضح ہوتا ہے کہ مسئلے کی نوعیت نا تو تار کے گرد زاویہ ϕ پر اور نہ ہی محدود ϕ پر منحصر ہے۔ تار سے دور یا اس کے قریب ہونے سے ہی مسئلے کی نوعیت میں تبدیلی آتی ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ مقناطیسی شدت صرف ρ پر منحصر ہو سکتی ہے۔ اسی طرح با یوٹ۔ سیوارٹ کے قانون کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی شدت α_ϕ سمت رکھتی ہے یعنی اس کا صرف H_ϕ جزو پایا جائے گا۔ یوں اگر ρ تبدیل کئے بغیر تار کے گرد چلا جائے تو ہم یقین رکھ سکتے ہیں کہ H کی حتمی قیمت H_ϕ تبدیل نہیں ہوگی۔ ساتھ ہی ساتھ اس راہ پر کسی بھی نقطے پر $dL = \rho d\alpha_\phi$ اور $H_\phi \alpha_\phi$ آپس میں متوازی ہوں گے لہذا ایمپیر کے دوری قانون سے

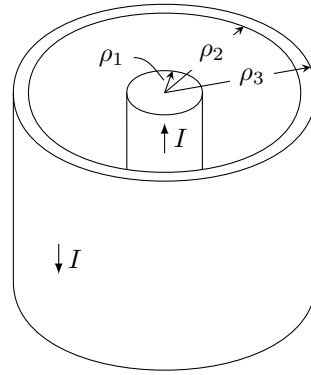
$$\oint H \cdot dL = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = H_\phi 2\pi \rho = I$$

یا

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$



(ب) رداسی اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں اور یوں صرف زاویائی جزو رہ جاتا ہے۔



(ا) ہم محوری تار کے اندرونی تار میں مثبت جبکہ بیرونی تار میں منفی برقی رو ہے۔

شکل 7.7: ہم محوری تار۔

حاصل ہوتا ہے جو ہم پہلے بھی حاصل کر چکے ہیں۔

ایمپیر کے دوری قانون کے استعمال کی دوسری مثال کی خاطر ہم شکل 7.7 میں دکھائے گئے ہم محوری تار لیتے ہیں۔ فرض کریں کہ z محدود پڑی ایسی لامحدود لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی حصے میں I اور اس کے بیرونی سطح میں $-I$ برقی رو گزر رہی ہے۔ اندرونی موصل موٹی ساخت کے تار کو نہایت پتلی فرضی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ آئیں ان پتلی فرضی تاروں سے نقطہ N پر پیدا مقناطیسی شدت پر غور کریں۔ نقطہ N کو کارٹیزی محدد کے x محدود پر رکھتے ہوئے مسئلے کی نوعیت شکل 7.7-ب میں دکھائی گئی ہے۔ پچھلی مثال سے یہ واضح ہے کہ ایسی کسی بھی پتلی تار کی مقناطیسی شدت میں H_z جزو نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ایسی تار کی مقناطیسی شدت تار کے گرد گول دائرہ بناتی ہے۔ کسی بھی فرضی تار جو (ρ_0, ϕ_0) پر پائی جاتی ہو N پر ΔH_ρ اور ΔH_ϕ اجزاء پیدا کرے گی جیسا طرح $(\rho_0, -\phi_0)$ پر پتلی تار سے پیدا مقناطیسی شدت کے بھی ایسے رداسی اور زاویائی اجزاء ہوں گے۔ ان دونوں پتلی تاروں کے رداسی اجزاء آپس میں الٹ بیست میں ہوں گے لہذا یہ ایک دوسرے کو ختم کریں گے جبکہ زاویائی اجزاء ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں لہذا N پر صرف زاویائی جزو پایا جائے گا۔

اندرونی ٹھوس موصل تار کے گرد ایسا گول دائرہ لیتے ہیں جس کا رداس ρ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے زیادہ مگر بیرونی تار کے اندرونی رداس ρ_2 سے کم ہو۔ اس راہ پر ہم ایمپیر کے دوری قانون کی مدد سے

$$(7.13) \quad H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

لکھ سکتے ہیں۔

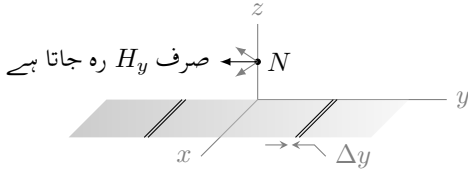
اندرونی تار کا رقبہ عمودی تراش $\pi\rho_1^2$ ہے لہذا اس میں کثافت برقی رو $\frac{I}{\pi\rho_1^2}$ ہوگی۔ اگر ρ کو اندرونی ٹھوس موصل تار کے رداس ρ_1 سے کم رکھا جائے تب یہ

راہ

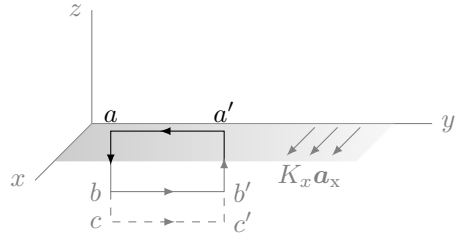
$$I_{\text{ہم}} = \frac{I}{\pi\rho_1^2} \pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{\rho_1^2} I$$

برقی رو کو گھیرے گا لہذا ایمپیر کے دوری قانون کے تحت اندرونی ٹھوس تار میں

$$H_\phi = \frac{\rho I}{2\pi\rho_1^2} \quad (\rho < \rho_1)$$



(ب) کسی بھی نقطے کے دونوں جانب فرضی تاروں کے H_z اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں جبکہ ان کے H_y اجزاء جمع ہوتے ہیں۔



(ا) لامحدود جسمات کے موصل سطح پر سطحی کثافت برقی رو۔

شکل 7.8: لامحدود سطحی کثافت برقی رو۔

مقناطیسی شدت پایا جائے گا۔ اسی طرح اگر ρ کو بیرونی تار کے بیرونی رداس ρ_3 سے زیادہ رکھا جائے تب یہ راہ اندرونی تار کے $I + I$ اور بیرونی تار کے $I - I$ کو گھیرے گی لہذا یہ کل $I - I = 0$ برقی رو کو گھیرے گا لہذا

$$H_\phi = 0 \quad (\rho_3 < \rho)$$

ہوگا۔ آخر میں اس صورت کو بھی دیکھتے ہیں جب ρ بیرونی تار کے اندر پایا جائے۔ ایسی صورت میں یہ راہ

$$I_{\text{گھیر}} = I - \left(\frac{\rho^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) I = \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) I$$

برقی رو گھیرے گی لہذا بیرونی تار میں

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right) \quad (\rho_2 < \rho < \rho_3)$$

ہوگا۔

ہم محوری تار کے باہر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ تار کے باہر کوئی بھی بند گول دائرہ اندرونی تار کی برقی رو I اور بیرونی تار کی برقی رو $-I$ دونوں کو گھیرتا ہے۔ یہ دونوں برابر مقدار مگر الٹ سمت کے برقی رو ہر نقطے پر برابر مگر الٹ سمت میں مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ ہم محوری تار کی یہ خاصیت کہ یہ بیرون تار کسی قسم کا مقناطیسی میدان نہیں پیدا کرتا انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔ ہم محوری تار کی خاصیت کی بنا پر ہر ایسی جگہ پر استعمال کیا جاتا ہے جہاں تار میں پائے گئے برقی اشارات سے بیرونی تار کسی قسم کا اثر ناقابل برداشت ہو۔

ایمپیر کے دوری قانون کے استعمال کی تیسری مثال کو شکل 7.8-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں $z = 0$ لامحدود چوڑائی اور لامحدود لمبائی کے موصل سطح پر $K_x a_x$ سطحی کثافت برقی رو گزر رہی ہے۔ ہمیں اس سطح کے قریب نقطہ N پر مقناطیسی شدت حاصل کرنے سے دلچسپی ہے۔ سطح کے $x = +\infty$ سے $x = -\infty$ تک برقی رو بذریعہ دو لامحدود چوڑائی کے موصل سطحوں سے واپس پہنچتی ہے۔ یہ سطحیں $z = +\infty$ اور $z = -\infty$ پر پائی جاتی ہیں۔ ساتنی دور سطحوں کے اثر کو نقطہ N پر نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

موصل سطح کو Δy چوڑائی کی فرضی تاروں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ ایسا شکل 7.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔ یوں ہر ایسی فرضی تار $K_x \Delta y a_x$ برقی رو گزارتی ہے۔ لامحدود تار کے مقناطیسی میدان سے ہم بخوبی واقف ہیں۔ ایسی کسی بھی فرضی تار کی برقی رو H_x جزو پیدا نہیں کرے گا۔ سطح پر N کے ایک جانب فرضی تار کا H_z جزو سطح پر N کے دوسری جانب فرضی تار کے H_z جزو کو ختم کرتا ہے جبکہ ان کے H_y اجزاء مل کر دو گنی مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں۔ اس طرح مقناطیسی شدت کا صرف اور صرف H_y جزو ممکن ہے۔

شکل 7.8-الف میں موصل سطح کے کچھ حصے کو گھیرتی ہوئی مستطیلی راہ $a'abb'$ دکھائی گئی ہے جس کے اطراف y_1 اور $2z_1$ لمبائی رکھتے ہیں۔ اس راہ کے z_1 حصوں پر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے لہذا اس حصے پر مقناطیسی شدت کا مکمل بھی صفر کے برابر ہوگا۔ راہ کے y_1 اطراف سطح سے دونوں جانب z_1 فاصلے پر ہیں۔ سطح

کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں۔ بائوٹ-سیوارٹ کے قانون سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطحی کثافت برقی رو موصل سطح کے اوپر جانب $-H_{ya}a_y$ جبکہ اس کے نیچے جانب $+H_{yb}a_y$ مقناطیسی شدت پیدا کرتا ہے۔ مستطیلی راہ Ky_1 برقی رو کو گھیرتی ہے لہذا ایمپیر کے دوری قانون کے تحت

$$H_{ya}y_1 + H_{yb}y_1 = K_x y_1$$

یا

$$(7.14) \quad H_{ya} + H_{yb} = K_x$$

ہوگا۔ اب اگر موصل سطح کے ایک جانب مستطیلی راہ کا y_1 حصہ قدر دور کرتے ہوئے z_2 فاصلے پر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$H_{ya} + H_{yc} = K_x$$

صورت اختیار کر لے گی جس سے صاف ظاہر ہے کہ H_{yb} اور H_{yc} عین برابر ہیں یعنی مقناطیسی شدت کا دار و مدار سطح سے فاصلے پر ہر گز نہیں ہے۔ اس طرح تمام ایسے نقطے جو مثبت z پر پائے جاتے ہوں پر مقناطیسی شدت یک برابر ہوگی۔ یہی کچھ تمام ایسے نقطوں کے لئے بھی درست ہے جو منفی z پر پائے جاتے ہوں۔²⁰⁶³

سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں لہذا دونوں جانب مقناطیسی شدت بھی برابر ہوگا یعنی $|H_{ya}| = |H_{yb}|$ ہوگا۔ اس طرح مساوات 7.14 سے $H_{ya} = H_{yb} = H_y = \frac{K_x}{2}$ لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} H_y &= -\frac{1}{2}K_x a_x & (z > 0) \\ H_y &= +\frac{1}{2}K_x a_x & (z < 0) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جسے بہتر طور پر

$$(7.15) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{K} \times \mathbf{a}_N$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں \mathbf{a}_N موصل سطح کی عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

اگر $z = -h$ پر دوسری لامحدود موصل سطح رکھی جائے جس میں سطحی کثافت برقی رو $-K_x a_x$ ہو تب دونوں سطحی کثافت برقی رو کی مجموعی مقناطیسی شدت

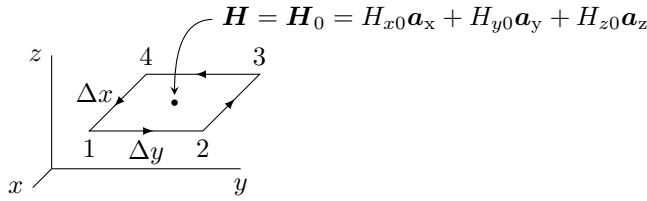
$$(7.16) \quad \begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{K} \times \mathbf{a}_N & (-h < z < 0) \\ \mathbf{H} &= 0 & (z < -h, \quad z > 0) \end{aligned}$$

ہوگی۔

ایمپیر کے دوری قانون کے استعمال میں سب سے مشکل کام ایسی راہ تلاش کرنا ہے جس پر مقناطیسی میدان یا راہ کے عمودی ہو اور یا پھر اس کی قیمت مستقل ہو۔ جہاں قبل از وقت ایسا جاننا ممکن نہ ہو وہاں بائوٹ-سیوارٹ کا قانون ہی قابل استعمال ہوگا۔²⁰⁶⁶

7.3 گردش

آپ کو یاد ہو گا کہ ہم نے گاؤس کے قانون کو انتہائی چھوٹے حجم پر لاگو کرتے ہوئے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی تھی۔ اس حصے میں ہم ایمپیر کے دوری قانون کو انتہائی چھوٹی بند راہ پر استعمال کرتے ہوئے گردش⁴ کی مساوات حاصل کریں گے۔



شکل 7.9: گردش کی تعریف۔

کار تیزی محدود میں ہم کسی نقطے پر $N\Delta x\Delta y$ اطراف کی چھوٹی بند راہ لیتے ہیں۔ شکل 7.9 میں اس چھوٹی بند راہ کو دکھایا گیا ہے جو رقبہ $\Delta x\Delta y$ کو گھیرتی ہے۔ یہ راہ مقناطیسی میدان $H = H_x a_x + H_y a_y + H_z a_z$ میں پائی جاتی ہے۔ شکل میں راہ پر تیر کے نشان راہ پر چلنے کی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس رقبے کے عین وسط میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر مقناطیسی شدت

$$\begin{aligned} H_0 &= H_x(x_0, y_0, z_0)a_x + H_y(x_0, y_0, z_0)a_y + H_z(x_0, y_0, z_0)a_z \\ &= H_{x0}a_x + H_{y0}a_y + H_{z0}a_z \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ ایمپیر کے دوری قانون کے تحت اس بند راہ کے گرد مقناطیسی شدت کا مکمل رقبہ $\Delta x\Delta y$ سے گزرتی برقی رو کے برابر ہوگا۔ آئیں اس مکمل کو حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم بند راہ پر 1 سے 2 کی طرف چلتے ہوئے پورا چکر کاٹیں گے۔

2071

کار تیزی محدود میں کسی بھی چھوٹے فاصلے کو $dL = dx a_x + dy a_y + dz a_z$ لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 7.9 میں 1 تا 2 پر $dx = 0$ اور $dz = 0$ ہیں لہذا اس چھوٹے فاصلے کو $dL = dy a_y$ لکھا جاسکتا ہے۔ چھوٹے چکر کا وسط (x_0, y_0, z_0) ہے۔ یوں چکر کا 1 کو $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 - \frac{\Delta y}{2})$ پر اور 2 کو $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2})$ پر ہوگا۔ یوں راہ کے پہلے حصے 1 تا 2 پر لکیری مکمل

$$\int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} (H_x a_x + H_y a_y + H_z a_z) \cdot dy a_y = \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} H_y dy = H_{y21} \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} dy = H_{y21} \Delta y$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کو H_y کے بجائے H_{y21} لکھتے ہوئے اور اس راہ پر مقناطیسی شدت میں تبدیلی کو نظر انداز کرتے ہوئے مکمل کے باہر لے جایا گیا۔ ہمیں اس طرح کے مکمل بار بار حاصل کرنے ہوں گے لہذا اس پورے عمل کو ہم

$$(7.17) \quad (H \cdot dL)_{21} = H_{y21} \Delta y$$

لکھیں گے۔ ہمیں رقبے کے عین وسط میں مقناطیسی شدت معلوم ہے البتہ راہ کے پہلے حصے پر ہمیں اس کے بارے میں معلومات فراہم نہیں ہے۔ ایسی صورت میں ہمیں **ٹیلر تسلسل**⁵ بروئے کار لانا ہوگا۔

2073

ٹیلر تسلسل

$$f(x + \delta x) = f(x) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\delta x)^2 + \dots$$

سے آپ بخوبی واقف ہیں جہاں $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور دیگر تفرق کو نقطہ x پر حاصل کیا جاتا ہے۔ اگر اس میں $\delta x = \frac{\Delta x}{2}$ پر کیا جائے تو اس کی نئی شکل

$$f(x + \frac{\Delta x}{2}) = f(x) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 + \dots$$

حاصل ہوتی ہے جسے ہم اب استعمال کرتے ہیں۔

اگر نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر تعامل H_y کی قیمت $H_y(x_0, y_0, z_0)$ ہو تب نقطہ $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)$ پر اس کی قیمت مسئلہ ٹیلر سے

$$\begin{aligned} H_y(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) &= H_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \dots \\ &= H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \dots \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں کو نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر حاصل کیا جاتا ہے۔ راہ 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کی قیمت ٹیلر تسلسل کے پہلے دو اجزاء سے حاصل کرتے ہوئے

$$(7.18) \quad H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

لکھ کر مساوات 7.17 کو

$$(7.19) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{21} \doteq \left(H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 7.18 کو یوں بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ چھوٹے رقبے کے وسط میں x کے ساتھ H_y تبدیل ہونے کی شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔ یوں اگر x میں تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x$ ہوگی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x$ ہوگی۔ اسی طرح اگر x میں $\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$ ہوگی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$ ہوگی۔ اب رقبے کے وسط سے $\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر 1 تا 2 راہ کا درمیانہ نقطہ ہے لہذا یہاں

$$(7.20) \quad H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$

ہوگا جو عین مساوات 7.18 ہی ہے۔

راہ کے اگلے حصے یعنی 2 تا 3 کی کچھ کرتے ہوئے

$$(7.21) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{32} = H_{x32}(-\Delta x) \doteq - \left(H_{x0} + \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x$$

جبکہ 3 تا 4 پر

$$(7.22) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{43} = H_{43}(-\Delta y) \doteq - \left(H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y$$

اور 4 تا 1 پر

$$(7.23) \quad (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{14} = H_{x14} \Delta x \doteq \left(H_{x0} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 7.19، مساوات 7.21، مساوات 7.22 اور مساوات 7.23 کو جمع کرتے ہوئے پورے بند راستے کا مکمل

$$(7.24) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر اس چھوٹے بند راہ کے گھیرے رقبے پر کثافت برقی رو

$$\mathbf{J} = J_x \mathbf{a}_x + J_y \mathbf{a}_y + J_z \mathbf{a}_z$$

ہو تب اس رقبے سے $J_z \Delta x \Delta y$ برقی رو گزرے گی۔ ایمپیر کے دوری قانون کے تحت بند راہ کا مکمل اور رقبے سے گزرتی برقی رو برابر ہوں گے یعنی

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \doteq J_z \Delta x \Delta y$$

ہو گا جسے

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \doteq J_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ رقبے کو جتنا چھوٹا کیا جائے مندرجہ بالا مساوات اتنی ہی زیادہ درست ہوگی حتیٰ کہ $\Delta x \rightarrow 0$ اور $\Delta y \rightarrow 0$ کی صورت میں یہ مکمل طور پر درست ہوگا اور یوں مساوات میں تقریباً برابر کی علامت \doteq کی جگہ بالکل برابر $=$ کی علامت استعمال کی جائے گی یعنی

$$(7.25) \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z$$

لکھا جائے گا۔

اگر ہم کارٹیزی محدد کے بقایادو محدد کے عمودی چھوٹے رقبے لیں اور مندرجہ بالا عمل دہرائیں تو ہمیں

$$(7.26) \quad \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x$$

اور

$$(7.27) \quad \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta z \Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y$$

حاصل ہوں گے۔ مساوات 7.26 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δy اور Δz ہیں جس سے $J_x \Delta y \Delta z$ برقی رو گزرتی ہے۔ اسی طرح مساوات 7.27 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δz اور Δx ہیں جس سے $J_y \Delta z \Delta x$ برقی رو گزرتی ہے۔

ایمپیر کے دوری قانون سے شروع کرتے ہوئے ہم نے مساوات 7.25، مساوات 7.26 اور مساوات 7.27 حاصل کئے جو مقناطیسی شدت کے بند مکمل فی اکائی رقبے کو گھیرے گئے کثافت برقی رو کے برابر ٹہراتے ہیں۔ کسی بھی متغیرہ کے بند مکمل فی اکائی رقبے کو اس متغیرہ کی گردش⁶ کہتے ہیں۔ انتہائی چھوٹے رقبے کے گردش کرتے ہوئے کسی بھی متغیرہ کے بند مکمل کو اس نقطے پر متغیرہ کے گھومنے یا گردش کی ناپ تصور کی جاسکتی ہے۔ اسی لئے اس عمل کو گردش کہا جاتا ہے۔

کسی بھی سمتیہ کی گردش بھی سمتیہ ہوگی۔ گردش کا کوئی بھی جزو انتہائی چھوٹے سیدھے رقبے کے گردش کے بند مکمل فی اکائی رقبے کے برابر ہوگا جہاں بند مکمل کی راہ درکار جزو کے عمودی سطح میں پایا جاتا ہو اور رقبے کی قیمت صفر کے قریب سے قریب تر ہو۔ گردش کی یہ تعریف کسی بھی محدد پر مبنی نہیں ہے۔ اس تعریف کی حسابی شکل

$$H_{\text{گردش}} = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S_n}$$

ہے جہاں H کی گردش حاصل کی گئی ہے۔ اس مساوات میں ΔS_n وہ چھوٹا سیدھا رقبہ ہے جس کے گردش H کا بند تکمل حاصل کیا گیا ہے۔ گردش از خود سیدھے سطح کے عمودی ہوگا۔ رقبہ ΔS_n لکھتے ہوئے زیر نوشت میں n اسی حقیقت کی یاد دہانی کرتا ہے کہ رقبہ اور گردش کے درمیان نوے درجے کا زاویہ پایا جاتا ہے۔²⁰⁸⁴

کارٹیزی محدود میں گردش H کے x, y, z اجزاء مساوات 7.26، مساوات 7.27 اور مساوات 7.25 بالترتیب دیتے ہیں لہذا

$$(7.28) \quad H \text{ گردش} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) a_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) a_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) a_z = J$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات کو قالب کے **حتمی قیمت**⁷ کی شکل میں

$$(7.29) \quad H \text{ گردش} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = J$$

لکھا جاسکتا ہے۔ صفحہ 81 پر مساوات 3.29 نیپلا ∇ کے عمل کو بیان کرتا ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z$$

اور صفحہ 15 پر مساوات 1.19 دو سمتیات کا سمتی ضرب دیتا ہے۔ ان سے گردش نہایت خوبصورتی سے

$$(7.30) \quad H \text{ گردش} = \nabla \times H$$

لکھی جاسکتی ہے۔ آپ جلد دیکھیں گے کہ صرف کارٹیزی محدود میں ہی گردش ∇ اور H کے صلیبی ضرب سے حاصل ہوتا ہے۔ اس کے باوجود کسی بھی محدود میں گردش کو $\nabla \times H$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں کارٹیزی محدود میں H کی گردش یوں لکھی جائے گی۔

$$(7.31) \quad \nabla \times H = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) a_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) a_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) a_z$$

ایمپیر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$(7.32) \quad \nabla \times H = J$$

لکھی جاسکتی ہے جو میکس ویل کی دوسری مساوات ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے میدان کے لئے درست ہے۔ یہاں میکس ویل کے تیسری مساوات کا بھی ذکر کر لیتے ہیں جو $E \cdot dL$ کی نقطہ شکل

$$(7.33) \quad \nabla \times E = 0$$

ہے۔ میکس ویل کے چوتھی مساوات پر اس کتاب میں آگے غور کیا جائے گا۔

آپ جانتے ہیں کہ ساکن برقی میدان بقائی میدان ہے لہذا اس میں چارج q کو کسی بھی بند راہ پر پورا پکڑ گھمانے کے لئے صفر توانائی درکار ہوگی۔ یوں $q \oint E \cdot dL$ صفر کے برابر ہوگا جس سے E کا گردش بھی صفر ہوگا۔ مساوات 7.33 یہی کہتا ہے۔ اس کے برعکس وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر مقناطیسی میدان غیر بقائی میدان ہے جس میں چارج کو برقی رو گھیرتی کسی بھی بند راہ پر پورا پکڑ گھمانے کے لئے توانائی درکار ہوگی۔ اسی لئے اس کا گردش صفر نہیں ہوگا۔ مساوات 7.32 یہی کہتا ہے۔

مشق 7.1: گردش یعنی $\nabla \times \mathbf{H}$ کو

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \times (H_x \mathbf{a}_x + H_y \mathbf{a}_y + H_z \mathbf{a}_z)$$

لکھ کر سمتی ضرب سے مساوات 7.28 حاصل کریں۔

2090

2091

2092

مشق 7.2: اگر $\mathbf{H} = (x^2y + 2z)\mathbf{a}_x + (xz - y)\mathbf{a}_y + (e^xyz)\mathbf{a}_z$ تب $\nabla \times \mathbf{H}$ کیا ہوگا اور اس کی قیمت نقطہ $(0, 1, 2)$ پر کیا ہوگی؟

جوابات: $\nabla \times \mathbf{H} = (e^xz - x)\mathbf{a}_x + (2 - e^xyz)\mathbf{a}_y + (z - x^2)\mathbf{a}_z$ گردش کی قیمت $2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_z$ ہوگی۔

2094

2095

2096

مثال 7.1: سمتیہ $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ کے گردش کی گردش یعنی $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 7.31 سے

$$(7.34) \quad \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

لکھتے ہیں۔ مساوات 7.31 دوبارہ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = & \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] \mathbf{a}_x \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] \mathbf{a}_y \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right] \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

تمام تفرق حاصل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = & \left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right] \mathbf{a}_x \\ & + \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} \right] \mathbf{a}_y \\ & + \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} \right] \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

2097

اس مساوات کے پہلے جزو میں $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$ ، دوسرے جزو میں $\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}$ اور تیسرے میں $\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$ شامل کرتے ہوئے ذرہ مختلف ترتیب سے لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = & \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right] \mathbf{a}_x - \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_x \\ (7.35) \quad & + \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} \right] \mathbf{a}_y - \left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_y \\ & + \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_z - \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

یہاں رک کر \mathbf{A} کے پھیلاؤ کی ڈھلوان یعنی $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ حاصل کرتے ہیں۔ پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = & \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{a}_x \\ (7.36) \quad & + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{a}_y \\ & + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر ہم

$$\begin{aligned} (7.37) \quad \nabla^2 \mathbf{A} \equiv & \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z \\ = & \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

لکھیں تب مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے مساوات 7.35 کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.38) \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

مساوات 7.37 سمتیہ کی لاپلاسی⁸ ہے۔

2098

2099

2100

مثال 7.2: سمتیہ \mathbf{S} اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش کے لئے ثابت کریں کہ

$$(7.39) \quad \nabla \times (M\mathbf{S}) \equiv (\nabla M) \times \mathbf{S} + M(\nabla \times \mathbf{S})$$

کے برابر ہے۔

2101

حل: سمتیہ اور مقداری کے حاصل ضرب کو

$$MS = M(S_x \mathbf{a}_x + S_y \mathbf{a}_y + S_z \mathbf{a}_z) = MS_x \mathbf{a}_x + MS_y \mathbf{a}_y + MS_z \mathbf{a}_z$$

لکھتے ہوئے اس کی گردش مساوات 7.31 کی طرح لکھ کر

$$\nabla \times MS = \left(\frac{\partial MS_z}{\partial y} - \frac{\partial MS_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial MS_x}{\partial z} - \frac{\partial MS_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial MS_y}{\partial x} - \frac{\partial MS_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

تفرق کھولتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nabla \times MS &= \left(\frac{\partial M}{\partial y} S_z + M \frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} S_y - M \frac{\partial S_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x \\ &+ \left(\frac{\partial M}{\partial z} S_x + M \frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial x} S_z - M \frac{\partial S_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y \\ &+ \left(\frac{\partial M}{\partial x} S_y + M \frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} S_x - M \frac{\partial S_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

اس کو یوں ترتیب دیتے ہیں

$$\begin{aligned} \nabla \times MS &= \left[\left(\frac{\partial M}{\partial y} S_z - \frac{\partial M}{\partial z} S_y \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial M}{\partial z} S_x - \frac{\partial M}{\partial x} S_z \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial M}{\partial x} S_y - \frac{\partial M}{\partial y} S_x \right) \mathbf{a}_z \right] \\ &+ M \left[\left(\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial S_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \right] \end{aligned}$$

اس مساوات کا دوسرا جزو $M(\nabla \times S)$ کے برابر ہے جبکہ اس کا پہلا جزو $(\nabla M) \times S$ کے برابر ہے جسے

$$(\nabla M) \times S = \left(\frac{\partial M}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial M}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial M}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \times (S_x \mathbf{a}_x + S_y \mathbf{a}_y + S_z \mathbf{a}_z)$$

لکھ کر صلیبی ضرب کے بعد ترتیب دینے سے

$$(\nabla M) \times S = \left(\frac{\partial M}{\partial y} S_z - \frac{\partial M}{\partial z} S_y \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial M}{\partial z} S_x - \frac{\partial M}{\partial x} S_z \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial M}{\partial x} S_y - \frac{\partial M}{\partial y} S_x \right) \mathbf{a}_z$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔

2102

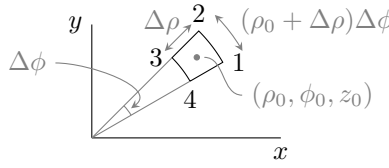
2103

2104

7.3.1 نلکی محدود میں گردش

نلکی محدود میں J_z کثافت برقی رو کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جسے شکل 7.10 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسے رقبے کے اطراف $\Delta \rho$ اور $\Delta \phi$ ہوں گے جبکہ اس سطح پر z کی قیمت تبدیل نہیں ہوگی۔ اس رقبے کے وسط میں

$$H_0(\rho_0, \phi_0, z_0) = H_{\rho 0} \mathbf{a}_\rho + H_{\phi 0} \mathbf{a}_\phi + H_{z 0} \mathbf{a}_z$$



شکل 7.10: نلکی محدد میں چھوٹا رقبہ۔

ہوگا۔ کارتیسی محدود میں رقبے کے وسط سے $\frac{\Delta x}{2}$ اور $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر اطراف کی لمبائیاں عین برابر تھیں۔ نلکی محدود میں رقبے کے وسط سے $\frac{\Delta \rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $(\rho_0 + \frac{\Delta \rho}{2}) \Delta \phi$ جبکہ وسط سے $-\frac{\Delta \rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $(\rho_0 - \frac{\Delta \rho}{2}) \Delta \phi$ ہے۔ انہیں اطراف پر مقناطیسی شدت بالترتیب

$$H_{\phi 21} \doteq H_{\phi 0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2}$$

اور

$$H_{\phi 43} \doteq H_{\phi 0} - \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2}$$

ہوگی جہاں $\frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho}$ چھوٹے رقبے کے وسط میں حاصل کیا جائے گا۔ یوں 1 سے 2 جانب چھوٹے رقبے کے گرد چکر کاٹتے ہوئے ان دو اطراف پر مکمل

$$\begin{aligned} (H \cdot dL)_{21} &\doteq \left(H_{\phi 0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} \right) \left(\rho_0 + \frac{\Delta \rho}{2} \right) \Delta \phi \\ &\doteq \left[H_{\phi 0} \rho_0 + H_{\phi 0} \frac{\Delta \rho}{2} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \left(\frac{\Delta \rho}{2} \right)^2 \right] \Delta \phi \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} (H \cdot dL)_{43} &\doteq \left(H_{\phi 0} - \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} \right) \left[- \left(\rho_0 - \frac{\Delta \rho}{2} \right) \Delta \phi \right] \\ &\doteq \left[-H_{\phi 0} \rho_0 + H_{\phi 0} \frac{\Delta \rho}{2} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} - \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} \left(\frac{\Delta \rho}{2} \right)^2 \right] \Delta \phi \end{aligned}$$

ہوں گے۔

چھوٹے رقبے کے وسط سے $\frac{\Delta \phi}{2}$ یا $-\frac{\Delta \phi}{2}$ پر اطراف $\Delta \rho$ لمبائی رکھتے ہیں جبکہ ان پر اوسط شدت بالترتیب

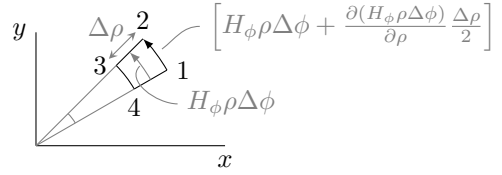
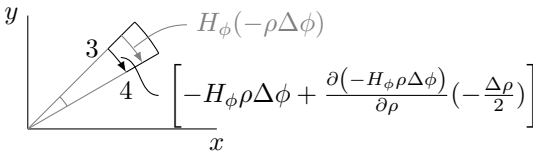
$$H_{\phi 32} \doteq H_{\rho 0} + \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2}$$

اور

$$H_{\phi 14} \doteq H_{\rho 0} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2}$$

ہیں۔ یوں ان اطراف پر مکمل

$$(H \cdot dL)_{32} \doteq \left(H_{\rho 0} + \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2} \right) (-\Delta \rho)$$



(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے بیرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔ (ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے اندرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.11: زاویائی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

اور

$$(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L})_{14} \doteq \left(H_{\rho 0} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2} \right) \Delta \rho$$

2106

ہوں گے۔

یوں پورا تکمل ان چار جوابات کا مجموعہ

$$(7.40) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) \Delta \rho \Delta \phi$$

ہوگا۔ اس چھوٹے رقبے سے $J_z \rho_0 \Delta \rho \Delta \phi$ برقی رو گزرے گی۔ یوں ایمپیر کے دوری قانون سے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) \Delta \rho \Delta \phi \doteq J_z \rho_0 \Delta \rho \Delta \phi$$

یعنی

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\rho_0 \Delta \rho \Delta \phi} \doteq \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) \doteq J_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $\Delta \rho$ اور $\Delta \phi$ کو کم سے کم کرتے ہوئے صفر کے قریب ترکر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات بالکل درست ہوگا اور تقریباً برابر کی علامت \doteq کی جگہ برابر کی علامت $=$ استعمال کی جائے گی۔ اس طرح گردش کا پہلا جزو

$$(7.41) \quad \lim_{\substack{\Delta \rho \rightarrow 0 \\ \Delta \phi \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\rho_0 \Delta \rho \Delta \phi} = \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi} \right) = J_z$$

2107

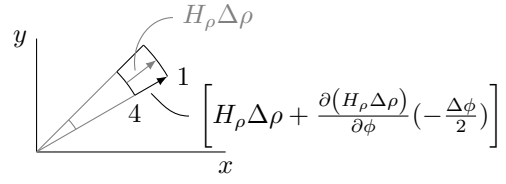
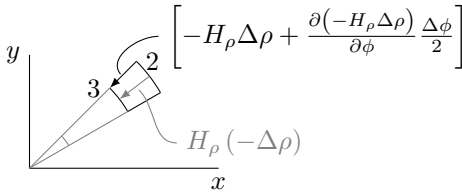
لکھا جاسکتا ہے۔

اس سے پہلے کہ ہم گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں، انہیں مساوات 7.40 کو قدر مختلف اور بہتر طریقے سے حاصل کریں۔ شکل 7.11-الف کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ اگر ہم کسی نقطے کے $-\frac{\Delta \phi}{2}$ سے نقطے کے $+\frac{\Delta \phi}{2}$ تک حرکت کریں تو ہم $\rho \Delta \phi$ فاصلہ طے کریں گے۔ اس راہ پر تکمل تقریباً

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_{\phi} \rho \Delta \phi$$

کے برابر ہوگا۔ اس تکمل کو تفاعل g تصور کرتے ہوئے یعنی $g = H_{\phi} \rho \Delta \phi$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم چھوٹے رقبے کے وسط سے رداسی سمت میں $+\frac{\Delta \rho}{2}$ حرکت کریں تو اس تفاعل کی قیمت میں تبدیلی

$$\Delta(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}) = \frac{\partial g}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} = \frac{\partial(H_{\phi} \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2}$$



(۱) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے کم زاویہ پر تکمل کی قیمت کا (ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے زیادہ زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.12: رداسی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

لکھی جاسکتی ہے جہاں $\frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \rho}$ کو چھوٹے رقبے کے وسط پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں رداس ρ_0 کے برابر ہے۔ چونکہ چھوٹے رقبے کے عین وسط پر اس تکمل کی قیمت $H_{\phi 0} \rho_0 \Delta \phi$ کے برابر ہے لہذا وسط سے $\frac{\Delta \rho}{2}$ فاصلے پر تکمل کی قیمت

$$(7.42) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} = H_\phi \rho \Delta \phi + \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2}$$

ہوگی۔ اسی طرح، جیسا شکل 7.11-ب میں دکھایا گیا ہے، اگر ہم کسی نقطے کے $+\frac{\Delta \phi}{2}$ سے نقطے کے $-\frac{\Delta \phi}{2}$ تک حرکت کریں تو اس راہ پر تکمل

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_\phi(-\rho \Delta \phi)$$

کے برابر ہوگا۔ اگر اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کیا جائے تب وسط سے $-\frac{\Delta \rho}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل

$$(7.43) \quad \begin{aligned} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} &= -H_\phi \rho \Delta \phi + \frac{\partial(-H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \left(-\frac{\Delta \rho}{2}\right) \\ &= -H_\phi \rho \Delta \phi + \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \rho} \frac{\Delta \rho}{2} \end{aligned}$$

ہوگا۔

اسی طرح، جیسے شکل 7.12-الف میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $-\frac{\Delta \rho}{2}$ تا $+\frac{\Delta \rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت $H_\phi \rho \Delta \phi$ ہوگی۔ اس نقطے سے $-\frac{\Delta \phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت میں تبدیلی رونما ہوگی جسے

$$\Delta(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}) = \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial \phi} \left(-\frac{\Delta \phi}{2}\right)$$

لکھا جاسکتا ہے اور یوں تکمل کی نئی قیمت

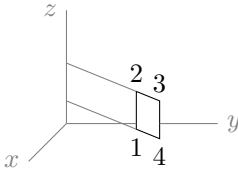
$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_\phi \Delta \rho - \frac{\partial(H_\phi \Delta \rho)}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2}$$

ہوگی۔ اگر چھوٹے رقبے کے عین وسط کو یہی نقطہ تصور کیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات 1 تا 4 پر تکمل دیتا ہے یعنی

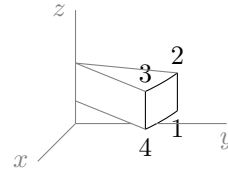
$$(7.44) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} = H_\phi \Delta \rho - \frac{\partial(H_\phi \Delta \rho)}{\partial \phi} \frac{\Delta \phi}{2}$$

اسی طرح، جیسے شکل 7.12-ب میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $+\frac{\Delta \rho}{2}$ تا $-\frac{\Delta \rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_\phi(-\Delta \rho)$$



(ب) نلکی محدد میں شدت کا زاویائی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔



(ا) نلکی محدد میں شدت کا رداسی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔

شکل 7.13: نلکی محدد میں گردش کے رداسی اور زاویائی اجزاء کے رقبے۔

ہوگی۔ اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کرتے ہوئے وسط سے $\frac{\Delta\phi}{2}$ پر یہی مکمل

$$(7.45) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} = -H_\rho \Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta\rho)}{\partial\phi} \frac{\Delta\phi}{2}$$

کے برابر ہوگا۔

مساوات 7.42، مساوات 7.43، مساوات 7.44 اور مساوات 7.45 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد پورا مکمل دیتا ہے یعنی

$$(7.46) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta\phi)}{\partial\rho} \Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho \Delta\rho)}{\partial\phi} \Delta\phi$$

$$= \left[\frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi} \right] \Delta\rho \Delta\phi$$

جہاں تفرق رقبے کے وسط پر حاصل کئے جاتے ہیں۔ اس مساوات کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \left[H_{\phi 0} + \rho_0 \frac{\partial H_\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi} \right] \Delta\rho \Delta\phi$$

جو بالکل مساوات 7.40 ہی ہے۔ یاد رہے کہ $\frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial\rho}$ کو اجزاء کی صورت میں لکھتے ہوئے رقبے کے وسط کی قیمتیں پر کی جاتی ہیں۔ یوں رداس ρ_0 اور مقناطیسی شدت $H_{\phi 0}$ کے برابر ہوں گے۔ مساوات 7.46 سے گردش

$$(7.47) \quad \lim_{\substack{\Delta\rho \rightarrow 0 \\ \Delta\phi \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta\rho \Delta\phi} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi} \right] = J_z$$

آئیں اب نلکی محدد میں گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں۔ گردش کا رداسی جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم $\rho = \rho_0$ سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف Δz اور $\rho_0 \Delta\phi$ لمبائی رکھیں گے۔ اس رقبے کو شکل 7.13-الف میں دکھایا گیا ہے۔ اس پر 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے کالکیری مکمل حاصل کیا جائے گا۔ مستقل رداس کے سطح پر کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta z}{2}$ تا $+\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے مکمل $H_z \Delta z$ حاصل ہوتا ہے۔ اس نقطے سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر اس مکمل کی قیمت ٹیلر تسلسل سے

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} = H_z \Delta z + \frac{\partial(H_z \Delta z)}{\partial\phi} \left(+\frac{\Delta\phi}{2} \right)$$

حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta z}{2}$ تا $-\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے مکمل $-H_z \Delta z$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} = -H_z \Delta z + \frac{\partial(-H_z \Delta z)}{\partial\phi} \left(-\frac{\Delta\phi}{2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان دو جوابات سے رقبے کے اطراف کا مکمل

$$(7.48) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} = + \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \Delta z \Delta \phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta \phi}{2}$ تا $+\frac{\Delta \phi}{2}$ پر مکمل کی قیمت $H_\phi \rho \Delta \phi$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی مکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} = H_\phi \rho \Delta \phi + \frac{\partial(H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial z} \left(-\frac{\Delta z}{2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta \phi}{2}$ تا $-\frac{\Delta \phi}{2}$ پر مکمل کی قیمت $-H_\phi \rho \Delta \phi$ جبکہ نقطے سے $+\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی مکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} = -H_\phi \rho \Delta \phi + \frac{\partial(-H_\phi \rho \Delta \phi)}{\partial z} \left(+\frac{\Delta z}{2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان دو جوابات کے مجموعے سے چھوٹے رقبے کے گرد گھومتے ہوئے زاویائی حصے کا مکمل

$$(7.49) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} = -\rho \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \Delta z \Delta \phi$$

حاصل ہوتا ہے۔

2110

مساوات 7.48 اور مساوات 7.49 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد مکمل نکمل دیتا ہے جو رقبے سے گزرتی برقی $J_\rho \rho \Delta \phi \Delta z$ کے برابر ہوگا یعنی

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \left[\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \rho \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right] \Delta z \Delta \phi = J_\rho \rho \Delta \phi \Delta z$$

جس سے گردش کا رداسی جزو

$$(7.50) \quad \lim_{\substack{\Delta \phi \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\rho \Delta \phi \Delta z} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right] = J_\rho$$

2111

ملتا ہے۔

شکل 7.13-ب میں 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے \mathbf{H} کے لکیری مکمل مندرجہ ذیل ہیں

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} &= H_z \Delta z + \frac{\partial(H_z \Delta z)}{\partial \rho} \left(-\frac{\Delta \rho}{2} \right) \\ \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} &= -H_z \Delta z + \frac{\partial(-H_z \Delta z)}{\partial \rho} \left(+\frac{\Delta \rho}{2} \right) \\ \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} &= H_\rho \Delta \rho + \frac{\partial(H_\rho \Delta \rho)}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \\ \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} &= -H_\rho \Delta \rho + \frac{\partial(-H_\rho \Delta \rho)}{\partial z} \left(-\frac{\Delta z}{2} \right) \end{aligned}$$

اور یوں ایمپیر کے دوری قانون سے

$$(7.51) \quad \lim_{\substack{\Delta \rho \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta \rho \Delta z} = \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) = J_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔

2112

مساوات 7.51، مساوات 7.50 اور مساوات 7.47 کا مجموعہ نکلی محدود میں گردش دیتا ہے یعنی

$$(7.52) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z$$

یہاں ایک بار پھر یہ بتانا ضروری ہے کہ نکلی محدود میں ∇ اور H کا صلیبی ضرب کسی صورت مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ نہیں دیتا۔ اس کے باوجود H کے گردش کو $\nabla \times H$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔

2114

مشق 7.3: اگر $\mathbf{H} = (3\rho \cos \phi + 5)\mathbf{a}_\rho + 6 \sin \phi \mathbf{a}_\phi + 2\mathbf{a}_z$ ہو تب $\nabla \times \mathbf{H}$ کیا ہوگا۔

2115

جواب: $\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{6}{\rho} + 3 \right) \sin \phi \mathbf{a}_z$

2116

2117

7.3.2 عمومی محدود میں گردش کی مساوات

2118

صفحہ 84 پر حصہ 3.10 میں عمومی محدود استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی گئی۔ یہاں عمومی محدود میں گردش کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ عمومی محدود کے متغیرات (u, v, w) جبکہ اکائی سمتیت $(\mathbf{a}_u, \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_w)$ ہیں۔ ان میں تین اطراف

$$dL_u = k_1 du$$

$$dL_v = k_2 dv$$

$$dL_w = k_3 dw$$

2119

لکھے جاتے ہیں۔

گردش کا پہلا جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم نقطہ (u, v, w) پر u کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف $k_2 \Delta v$ اور $k_3 \Delta w$ ہوں گے۔ اب $v - \frac{\Delta v}{2}$ سے $v + \frac{\Delta v}{2}$ تک فاصلہ $k_2 \Delta v$ کے برابر ہے لہذا اس پر چلتے ہوئے مکمل $H_v k_2 \Delta v$ کے برابر ہوگا۔ نقطہ (u, v, w) سے $-\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی مکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} = H_v k_2 \Delta v + \frac{\partial (H_v k_2 \Delta v)}{\partial w} \left(-\frac{\Delta w}{2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $v + \frac{\Delta v}{2}$ سے $v - \frac{\Delta v}{2}$ تک مکمل $-H_v k_2 \Delta v$ کے برابر ہوگا۔ نقطہ (u, v, w) سے $+\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی مکمل

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} = -H_v k_2 \Delta v + \frac{\partial (-H_v k_2 \Delta v)}{\partial w} \left(\frac{\Delta w}{2} \right)$$

ہوگا۔ یوں ان اطراف پر کل مکمل

(7.53)

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{21} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{43} = -\frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w} \Delta v \Delta w$$

ہوگا۔ یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} &= H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial(H_w k_3 \Delta w)}{\partial v} \left(\frac{\Delta v}{2} \right) \\ \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} &= -H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial(-H_w k_3 \Delta w)}{\partial v} \left(-\frac{\Delta v}{2} \right) \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$(7.54) \quad \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{32} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{14} = \frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} \Delta v \Delta w$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں چھوٹے رقبے کے گرد کل مکمل

$$(7.55) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] \Delta v \Delta w$$

لکھتے ہوئے ایمپیر کے دوری قانون سے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] \Delta v \Delta w = J_u k_2 k_3 \Delta v \Delta w$$

لکھ کر گردش کا پہلا جزو

$$(7.56) \quad \lim_{\substack{\Delta v \rightarrow 0 \\ \Delta w \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{k_2 k_3 \Delta v \Delta w} = \frac{1}{k_2 k_3} \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] = J_u$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ اسی مساوات میں متغیرات ذرہ دیکھ کر تبدیل کرتے ہوئے گردش کے بقایا دو اجزاء

$$(7.57) \quad \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta w \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{k_1 k_3 \Delta u \Delta w} = \frac{1}{k_1 k_3} \left[\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial w} - \frac{\partial(H_w k_3)}{\partial u} \right] = J_v$$

اور

$$(7.58) \quad \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{k_1 k_2 \Delta u \Delta v} = \frac{1}{k_1 k_2} \left[\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial u} - \frac{\partial(H_u k_1)}{\partial v} \right] = J_w$$

لکھ سکتے ہیں۔ عمومی محدود میں گردش کے ان اجزاء کو

$$(7.59) \quad \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{k_2 k_3} \left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w} \right] \mathbf{a}_u + \frac{1}{k_1 k_3} \left[\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial w} - \frac{\partial(H_w k_3)}{\partial u} \right] \mathbf{a}_v \\ &\quad + \frac{1}{k_1 k_2} \left[\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial u} - \frac{\partial(H_u k_1)}{\partial v} \right] \mathbf{a}_w \end{aligned}$$

یا قالب کا حتمی قیمت

$$(7.60) \quad \mathbf{H} \text{ گردش} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{a}_u}{k_2 k_3} & \frac{\mathbf{a}_v}{k_3 k_1} & \frac{\mathbf{a}_w}{k_1 k_2} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ k_1 H_u & k_2 H_v & k_3 H_w \end{vmatrix}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

7.3.3 کروی محدود میں گردش کی مساوات

جیسے صفحہ 84 پر حصہ 3.10 میں بتلایا گیا عمومی محدود میں

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= r \\ k_3 &= r \sin \theta \end{aligned}$$

اور a_u کی جگہ a_r ، a_v کی جگہ a_θ اور a_w کی جگہ a_ϕ پر کرنے سے کروی محدود حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.59 میں یہی کچھ پر کرتے ہوئے یوں کروی محدود میں گردش کی مساوات

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(H_\phi r \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(H_\theta r)}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(H_\phi r \sin \theta)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} (7.61) \quad \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r H_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے۔

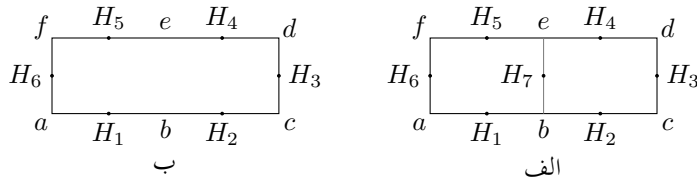
مشق 7.4: میدان $\mathbf{H} = 3\rho^2 \cos \phi \mathbf{a}_\rho - 2\rho \sin \phi \mathbf{a}_\phi + \frac{z}{\rho} \mathbf{a}_z$ اور $\mathbf{H} = 2r^2 \cos \theta \mathbf{a}_r - 5r \sin \theta \mathbf{a}_\theta$ کے لئے $\nabla \times \mathbf{H}$ حاصل کریں۔

$$\nabla \times \mathbf{H} = (2r - 10) \sin \theta \mathbf{a}_\phi, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{z}{\rho^2} \mathbf{a}_\phi + (3\rho - 4) \sin \phi \mathbf{a}_z$$

7.4 مسئلہ سٹوکس

شکل 7.14- الف میں ایک رقبہ دکھایا گیا ہے جسے دو چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ بائیں چھوٹے رقبے کے لئے گردش

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B)_N$$



شکل 7.14: چھوٹے رقبوں کے گرد لکیری مکمل پورے رقبے کے گرد لکیری مکمل کے برابر ہے۔

لکھی جاسکتی ہے جہاں زیر نوشت میں N اس بات کی یاد دہانی کرتا ہے کہ گردش رقبے ΔS_B کے عمودی ہے اور زیر نوشت میں B بائیں رقبے کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں dL_B سے مراد بائیں رقبے کے سرحد پر چھوٹا فاصلہ ہے جبکہ H_B سے مراد بائیں چھوٹے رقبے کے وسط میں مقناطیسی شدت ہے۔ اس طرح اسی مساوات کو

$$\oint \frac{\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \mathbf{a}_N$$

یا

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B \doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \mathbf{a}_N \Delta S_B = (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \Delta S_B$$

بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں \mathbf{a}_N اس رقبے کی اکائی عمودی سمتیہ ہے۔ اب شکل کو دیکھ کر

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B \doteq H_1 \cdot \Delta L_{ba} + H_7 \cdot \Delta L_{eb} + H_5 \cdot \Delta L_{fe} + H_6 \cdot \Delta L_{af}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

اسی طرح دائیں چھوٹے رقبے کے لئے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_D \doteq (\nabla \times \mathbf{H}_D) \cdot \Delta S_D$$

اور

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_D \doteq H_2 \cdot \Delta L_{cb} + H_3 \cdot \Delta L_{dc} + H_4 \cdot \Delta L_{ed} + H_7 \cdot \Delta L_{be}$$

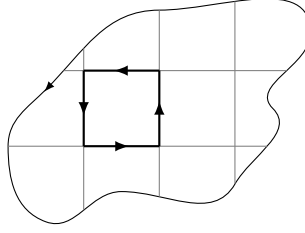
لکھا جاسکتا ہے۔

دائیں رقبے کے لکیری مکمل میں $H_7 \cdot \Delta L_{be} = -H_7 \cdot \Delta L_{eb}$ لکھ کر دونوں رقبوں کے لکیری مکمل جمع کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_B + \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_D &\doteq H_1 \cdot \Delta L_{ba} + H_2 \cdot \Delta L_{cb} + H_3 \cdot \Delta L_{dc} + H_4 \cdot \Delta L_{ed} + H_5 \cdot \Delta L_{fe} + H_6 \cdot \Delta L_{af} \\ &\doteq (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \Delta S_B + (\nabla \times \mathbf{H}_D) \cdot \Delta S_D \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹے رقبوں کے مشترک طرف ΔL_{be} پر دونوں کے لکیری مکمل آپس میں کٹ گئے ہیں۔ یہاں پہلی مساوات پورے رقبے کے گرد لکیری مکمل کے برابر ہے جو شکل 7.14-ب کو دیکھ کر لکھی جاسکتی ہے۔ ہم نے شکل 7.14-الف میں رقبے کے صرف دو ٹکڑے لئے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رقبے کے زیادہ ٹکڑے کرتے ہوئے بھی یہی طریقہ کار استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح اگر کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ایک کے گرد لکیری مکمل لیا جائے تو ان کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر گھومتے لکیری مکمل کے برابر ہوگا۔ شکل 7.15 میں بڑے رقبے کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کیا دکھایا گیا ہے۔ ہر دو بڑے چھوٹے رقبوں کے مشترک طرف پر لکیری مکمل آپس میں کٹ جائیں گے۔ یوں تمام چھوٹے رقبوں کے لکیری مکمل کے مجموعے کو بڑے رقبے کا لکیری مکمل لیتے ہوئے اور تمام چھوٹے رقبوں کے $(\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot \Delta S$ کے مجموعے کو مکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے

$$(7.62) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}_B) \cdot d\mathbf{S}$$



شکل 7.15: کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر کے گرد لکیری تکمل لیں۔ ان تمام کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔

2131

لکھا جاسکتا ہے جہاں dL کو صرف بڑے رقبے S کے سرحد پر لیا جاتا ہے۔

اگرچہ ہم نے مساوات 7.62 مقناطیسی میدان کے لئے حاصل کیا، درحقیقت یہ ایک عمومی مساوات ہے جو کسی بھی سمتی میدان کے لئے درست ہے۔ یہ مساوات **مسئلہ سٹوکس**⁹ بیان کرتا ہے۔

2133

مسئلہ سٹوکس سے ایمپیئر کا دوری قانون باآسانی حاصل ہوتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ کے دونوں اطراف کا dS کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے دونوں اطراف کا کھلے سطح S پر سطحی تکمل لیتے ہوئے مسئلہ سٹوکس کا استعمال کریں گے۔

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

کثافت برقی رو کا سطحی تکمل سطح S سے گزرتی برقی رو کے برابر ہے لہذا مندرجہ بالا سے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

حاصل ہوتا ہے جو ایمپیئر کا دوری قانون ہے۔ ایمپیئر کے دوری قانون کے اس مختصر حصول سے یہ حقیقت بھی واضح ہوتی ہے کہ I ان تمام سطحوں سے گزرتی برقی رو ہے جن کا سرحد تکمل میں استعمال بند راہ ہے۔

2135

مسئلہ سٹوکس سطحی تکمل اور بند لکیری تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ مسئلہ پھیلاؤ حجمی تکمل اور بند سطحی تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔ یہ دونوں مسئلے عمومی سمتی ثبوت پیش کرنے میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ آئیں ایسی ایک مثال دیکھتے ہیں جس میں ہم $\nabla \cdot \mathbf{A}$ کو بیان کرنے کا مختلف طریقہ حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں جہاں \mathbf{A} کوئی بھی عمومی سمتی میدان ہو سکتا ہے۔

2138

شروع کرنے سے پہلے یاد رہے کہ گردش کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جبکہ پھیلاؤ کا حاصل جواب غیر سمتی ہوتا ہے۔ کسی بھی عمومی سمتیہ میدان \mathbf{A} کا گردش $\nabla \times \mathbf{A}$ بھی سمتیہ ہو گا جبکہ اس گردش کا پھیلاؤ $\nabla \cdot \mathbf{A}$ غیر سمتی ہو گا جسے ہم T کہتے ہیں یعنی

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = T$$

دونوں اطراف کا حجمی تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}) dh = \int_{\text{حجم}} T dh$$

بائیں ہاتھ پر مسئلہ پھیلا دلاگو کرتے ہوئے

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{حجم}} T dh$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات کا بائیں ہاتھ حجم کو گھیرتے بند سطح پر $\nabla \times \mathbf{A}$ کا مکمل ہے۔ مسئلہ سٹوکس کسی بھی سطح پر سطحی مکمل اور اس سطح کے سرحد پر لکیری مکمل کا تعلق بیان کرتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ میں اگر سطح کو تھیلا سمجھا جائے تو تھیلے کا منہ سطح کا سرحد ہوگا جس پر لکیری مکمل لیا جائے گا۔ جیسے جیسے تھیلے کے منہ کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے تھیلا بند سطح کی شکل اختیار کرے گا جبکہ سطح کا سرحد چھوٹے سے چھوٹا ہوتا جائے گا حتیٰ کہ جب تھیلے کا منہ مکمل بند ہو جائے تو تھیلا مکمل بند سطح ہوگا جبکہ اس کا سرحد صفر کے برابر ہوگا۔ صفر لمبائی کے راہ پر مکمل صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\int_0^0 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

یوں

$$\int_{\text{حجم}} T dh = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ یہ مساوات کسی بھی حجم کے لئے درست ہے لہذا یہ تفرقی حجم dh کے لئے بھی درست ہے یعنی

$$T dh = 0$$

جس سے

$$T = 0$$

یا

$$(7.63) \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.63 انتہائی اہم ثبوت ہے جس کے تحت کسی بھی عمومی سمتی میدان کے گردش کا پھیلا صفر کے برابر ہوتا ہے۔ اس ثبوت کو مندرجہ ذیل مثال میں کارٹینسی محدود استعمال کرتے ہوئے بھی حاصل کیا گیا ہے۔

2140

مثال 7.3: کسی بھی عمومی سمتی میدان $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ کا گردش اور گردش کا پھیلا کارٹینسی محدود میں حاصل کرتے ہوئے ثبوت کریں کہ گردش کا پھیلا صفر کے برابر ہوگا۔

2142

حل: پہلے گردش حاصل کرتے ہیں

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

جس کا پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

2143

کے برابر ہے جہاں $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}$ اور $\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z}$ کی طرح بقایا اجزاء بھی آپس میں کٹ جاتے ہیں۔

2144

ساکن مقناطیسی میدان یعنی وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان کے لئے ایمپیر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

ہے۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کا پھیلاؤ حاصل کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 7.63 کے تحت گردش کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (7.64)$$

ہوگا۔ اس سے ظاہر ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف ایسی برقی رو سے حاصل ہوتا ہے جس کے لئے مساوات 7.64 درست ہو۔ یہی نتیجہ ہم پہلے بھی مساوات 7.4 میں حاصل کر چکے ہیں جہاں ہم دیکھ چکے کہ $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ سے مراد بند راہ سے کل صفریک سمتی برقی رو کا گزرنا ہے۔

2146

2147

7.5 مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ

خالی خلاء میں کثافت مقناطیسی بہاؤ B کی تعریف

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (7.65)$$

ہے جہاں B کی اکائی ویبر فی مربع میٹر Wb/m^2 ہے جسے ¹⁰پکارا اور T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس مساوات میں μ_0 خالی خلاء کا **مقناطیسی مستقل**¹¹ ہے جسے ہینری فی میٹر $\frac{H}{m}$ میں ناپا جاتا ہے۔ خالی خلاء میں

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{m} \quad (7.66)$$

2148

کے برابر ہے۔

چونکہ H کی اکائی ایمپیر فی میٹر ہے لہذا ویبر کی اکائی ہینری ضرب ایمپیر ہے۔ ہینری کو اکائی تصور کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ہینری ضرب ایمپیر کو ویبر لکھا جاتا ہے۔ وقت کے ساتھ بدلنے میدان پر غور کے دوران ہم دیکھیں گے کہ ویبر سے مراد ولٹ ضرب سیکنڈ بھی لیا جاسکتا ہے۔

2150

خالی خلاء میں کثافت برقی بہاؤ D اور برقی میدان کی شدت E کا تعلق

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

ہو بہو مساوات 7.65 کی طرح ہے۔ کثافت برقی بہاؤ کا سطحی مکمل برقی بہاؤ ψ دیتا ہے۔

$$\psi = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

کسی بھی بند سطح سے گزرتی برقی بہاؤ اس سطح میں گھیرے چارج Q کے برابر ہوتا ہے۔

$$\psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

¹⁰Tesla

magnetic constant, permeability¹¹

مثبت چارج سے برقی بہاؤ کا اخراج ہوتا ہے جبکہ منفی چارج پر برقی بہاؤ کا اختتام ہوتا ہے۔ یوں برقی بہاؤ کا منبع برقی چارج ہے۔ مقناطیسی قطب ہر صورت جوڑی کی شکل میں پائے جاتے ہیں۔ آج تک تنہا مقناطیسی قطب نہیں پایا گیا۔ یوں آج تک ایسی صورت دیکھنے کو نہیں ملی جہاں تنہا مقناطیسی قطب سے مقناطیسی بہاؤ کا اخراج ہو یا مقناطیسی بہاؤ اس پر اختتام پذیر ہو۔ مقناطیسی بہاؤ کا منبع برقی رو ہے۔ یاد رہے کہ نا تو مقناطیسی بہاؤ اس برقی رو سے خارج اور نا ہی اس پر اختتام پذیر ہوتی ہے بلکہ یہ بند دائرے کی شکل میں برقی رو کو گھیرتی ہے۔ کثافت مقناطیسی بہاؤ کا سطحی مکمل **مقناطیسی بہاؤ** Φ^{12} دیتا ہے جسے **ویبر** Wb^{13} میں ناپا جاتا ہے۔

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad Wb \quad (7.67)$$

چونکہ مقناطیسی بہاؤ بند دائرہ بناتا ہے لہذا کسی بھی بند سطح میں جتنا مقناطیسی بہاؤ داخل ہوتا ہے، اتنا ہی مقناطیسی بہاؤ اس سطح سے خارج بھی ہوتا ہے لہذا کسی بھی بند سطح پر مقناطیسی بہاؤ کا مکمل صفر کے برابر ہوگا۔

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (7.68)$$

مسئلہ پھیلاؤ کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.69)$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم نے مساوات 7.68 کو ثابت نہیں کیا بلکہ حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے اسے لکھا ہے۔ اس کو آگے ثابت کیا جائے گا۔ فی الحال اس کو قبول کر لیں اور یوں مساوات 7.69 کو بھی درست تصور کریں۔

ساکن مقناطیسی اور ساکن برقی میدان کے لئے مساوات 7.69 میکس ویل کی چوتھی اور آخری مساوات ہے۔ ان تمام کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (7.70)$$

ان کے ساتھ

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned} \quad (7.71)$$

کو بھی شامل کرتے ہیں۔ ہم برقی میدان کی شدت اور ساکن برقی دباؤ کا تعلق بھی پیش کرتے ہیں۔

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (7.72)$$

مساوات 7.70 برقی اور مقناطیسی میدان کے پھیلاؤ اور گردش بیان کرتے ہیں جو ان میدان کی خاصیت کے نقطہ اشکال ہیں۔ انہیں کی مکمل اشکال مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= Q = \int_{\text{حجم}} \rho_h dh \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} &= 0 \\ \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} &= I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \end{aligned} \quad (7.73)$$

ہم جلد ساکن مقناطیسی میدان کے مقناطیسی دباؤ پر بھی غور کریں گے۔ ہم نے برقی میدان پر غور کے دوران موصل اجزاء کے اثر کو بھی تقطیب P کی صورت میں شامل کیا۔ ایسا کرتے ہوئے جزو برقی مستقل کا سہارا لیا گیا۔ اگلے باب میں اسی طرح دیگر اجزاء کا مقناطیسی میدان پر اثر دیکھا جائے گا۔

2155

آئیں مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ کا استعمال ہم محوری تار کے اندر بہاؤ کے مثال کی صورت میں دیکھیں۔ ایسی ہم محوری تار جسے شکل 7.7 میں دکھایا گیا ہے میں مقناطیسی شدت

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں۔ یوں کثافت مقناطیسی بہاؤ

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} a_\phi$$

ہو گا۔ اندرونی اور بیرونی تار کے درمیان مقناطیسی بہاؤ وہی ہو گا جو ان تاروں کے درمیان رداسی سیدھی سطح سے گزرے گا۔ تار کو z محور پر تصور کرتے ہوئے $z = 0$ تک رداسی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ

$$\Phi = \int_S B \cdot dS = \int_0^d \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} a_\phi \cdot (d\rho dz a_\phi)$$

یعنی

$$(7.74) \quad \Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

2156

ہو گی۔ یہ مساوات آگے جا کر ہم محوری تار کے امالہ کے حصول میں کام آئے گی۔

2157

مشق 7.5: تانبے کی تار کو پانی سے ٹھنڈا کرتے ہوئے اس میں زیادہ کثافت برقی رو گزاری جاسکتی ہے۔ ایک ایسی ہم محوری تار جس کے اندرونی تار کا اندرونی رداس 25 mm جبکہ اس کا بیرونی رداس 28 mm ہے اور جس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس 35 mm اور بیرونی رداس 37 mm ہے میں 10 000 A کا ایک سمتی برقی روتاروں میں الٹ سمت میں گزر رہا ہے۔ ٹھنڈا پانی اندرونی تار کے اندر اور تاروں کے درمیان فاصلے سے گزار کر انہیں ٹھنڈا رکھا جاتا ہے۔ دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین H اور B حاصل کرنے کے بعد 1 m لمبائی کے لئے دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین مقناطیسی بہاؤ حاصل کریں۔

2161

جوابات: اندرونی تار میں $J = 20 \frac{A}{mm^2}$ اور $\Phi = 109 \mu Wb$ ہیں۔ بیرونی تار میں $J = 22.1 \frac{A}{mm^2}$ اور $\Phi = 56.6 \mu Wb$ ہیں۔ تاروں کے درمیانی فاصلے میں $\Phi = 446 \mu Wb$ ہے۔

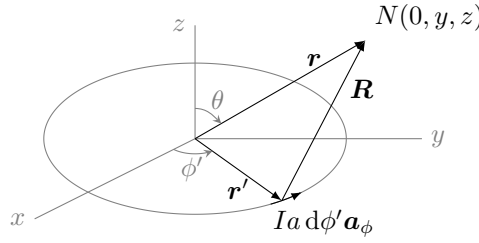
2163

2164

2165

مشق 7.6: $z = 0$ سطح پر ρ رداس کے گول بند دائرے میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ گول دائرے کا مرکز کارٹیزی محدد کے $(0, 0, 0)$ پر ہے۔ اگر ٹھنڈی z جانب سے دیکھا جائے تو برقی رو گھڑی کے الٹ سمت میں گھوم رہی ہے۔ باپوٹ سیوارٹ کے قانون سے دائرے کے عین وسط میں H حاصل کریں۔

2167



شکل 7.16: گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو سے محور پر ہٹ کر مقناطیسی میدان۔

$$H = \frac{I}{2\rho} a_z \text{ جواب:}$$

2168

2169

مندرجہ بالا مشتق میں آپ نے دائرے کے مرکز پر مقناطیسی میدان حاصل کیا۔ یہی طریقہ استعمال کرتے ہوئے دائرے کے محور پر کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ البتہ جیسے ہی محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان مطلوب ہو مسئلہ خاصہ مشکل ہو جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل مثال میں اس حقیقت کو سامنے رکھا جائے گا کہ محور سے ہٹ کر برقی رو گزارتے گول دائرے کا مقناطیسی میدان حاصل کرنا کیوں ممکن نہیں ہوگا۔ اس کے بعد اس مسئلے کا عددی حل¹⁴ حاصل کرنا دکھایا جائے گا۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کسی بھی مسئلے کا عددی حل حاصل کیا جاسکتا ہے۔

2173

2174

مثال 7.4: شکل 7.16 میں $x = 0$ سطح یعنی yz سطح پر نقطہ $N(0, y, z)$ پر گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو سے پیدا ہونے والا مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کریں۔

2176

حل: رداس a کے گول دائرے پر نقطہ $N'(a, \frac{\pi}{2}, \phi')$ پر چھوٹی سمتی لمبائی کو $a'_{\phi} d\phi'$ لکھا جاسکتا ہے جہاں اکائی سمتیہ a'_{ϕ} کو کارتیسی محدود میں

$$a'_{\phi} = -\sin \phi' a_x + \cos \phi' a_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$dL' = a d\phi' (-\sin \phi' a_x + \cos \phi' a_y)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ چھوٹی لمبائی خود $(a \cos \phi', a \sin \phi')$ پر پائی جاتی ہے یعنی

$$r' = a a'_{\rho} = a \cos \phi' a_x + a \sin \phi' a_y$$

کے برابر ہے۔ نقطہ N کا مقام کارتیسی محدود میں

$$r = y a_y + z a_z$$

ہے۔ یوں

$$R = r - r' = -a \cos \phi' a_x + (y - a \sin \phi') a_y + z a_z$$

لکھتے ہوئے

$$|R| = R = \sqrt{(-a \cos \phi')^2 + (y - a \sin \phi')^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi'}$$

اور

$$a_R = \frac{R}{|R|} = \frac{-a \cos \phi' a_x + (y - a \sin \phi') a_y + z a_z}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi'}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ بائیوٹ سیوارٹ قانون میں $\frac{R}{R}$ پر کرتے ہوئے

$$H = \oint \frac{I dL' \times R}{4\pi R^3}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں پہلے R کی سادہ شکل حاصل کریں۔

$$dL' \times R = a d\phi' (-\sin \phi' a_x + \cos \phi' a_y) \times [-a \cos \phi' a_x + (y - a \sin \phi') a_y + z a_z]$$

$$= a d\phi' [z \cos \phi' a_x + z \sin \phi' a_y + (a - y \sin \phi') a_z]$$

یوں بائیوٹ سیوارٹ کے قانون کو

$$H = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \phi' a_x + z \sin \phi' a_y + (a - y \sin \phi') a_z}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}} d\phi'$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں H_x جزو صفر کے برابر ہے۔ یہ حقیقت سیدھی منطق سے ثابت ہوتی ہے۔ کسی بھی زاویہ ϕ' پر چھوٹی لمبائی سے پیدا میدان کو زاویہ پر چھوٹی لمبائی کا میدان ختم کرتا ہے۔ یوں یہ جزو صفر کے برابر ہے۔ جن کا منطق پر پورا عقیدہ نہیں ہے وہ H_x جزو میں نیا متغیر $w = a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi'$ لے کر دیکھیں کہ

$$H_x = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \phi' d\phi'}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}} = 0$$

یہی ہے۔ بقایا دو اجزاء

$$H_y = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \sin \phi' d\phi'}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}}$$

(7.75)

$$H_z = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a - y \sin \phi') d\phi'}{(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay \sin \phi')^{\frac{3}{2}}}$$

ہیں۔ یہ دونوں بیضوی تکمل¹⁵ ہیں جنہیں الجبرائی طریقے سے حل کرنا ممکن نہیں ہے۔

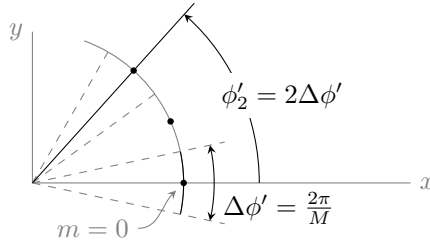
2177

2178

بیضوی تکمل کا عددی حل¹⁶ بذریعہ کمپیوٹر حاصل کیا جاتا ہے۔ آئیں قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے بیضوی تکمل کا عددی حل حاصل کریں۔

2179

2180



شکل 7.17: تکمل کے راہ کو متعدد چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

مثال 7.5: مندرجہ بالا مثال میں H_y اور H_z کے حل بیضوی تکمل کی صورت میں حاصل ہوئے۔ نقطہ $N(0, a, a)$ پر H_y کا عددی حل حاصل کریں۔²¹⁸⁶

حل: اس نقطے پر

$$H_y = \frac{aI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \sin \phi' d\phi'}{(a^2 + a^2 + a^2 - 2a^2 \sin \phi')^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi' d\phi'}{(3 - 2 \sin \phi')^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جائے گا۔ اس تکمل کو مجموعے کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 7.17 کو دیکھ کر آگے پڑھیں۔ تکمل کے راہ کو M برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑے پر $\Delta \phi' = \frac{2\pi}{M}$ کے برابر ہوگا۔ ان ٹکڑوں کے گنتی کا حساب ہم m سے رکھتے ہیں جہاں m کی قیمت 0 تا $(M-1)$ ہے۔ یوں پہلے ٹکڑے کو $m=0$ سے ظاہر کیا جائے گا اور اس ٹکڑے کے عین وسط میں زاویہ $\phi'_0 = 0$ ہوگا۔ شکل میں راہ کے چھوٹے ٹکڑوں کے عین وسط کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ دوسرے ٹکڑے پر $m=1$ اور زاویہ $\phi'_1 = \Delta \phi' = \frac{2\pi}{M}$ ہوگا۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے، تیسرے پر $m=2$ اور زاویہ $\phi'_2 = 2\Delta \phi' = \frac{2 \times 2\pi}{M}$ ہوگا۔ یوں عمومی ٹکڑے m پر زاویہ $\phi'_m = m\Delta \phi' = \frac{2m\pi}{M}$ ہوگا۔²¹⁸⁶

اگر ان چھوٹے ٹکڑوں پر تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کو رد کرنا ممکن ہو تب ہر چھوٹے ٹکڑے پر تکمل تقریباً

$$\Delta H_y = \frac{I}{4\pi a} \frac{\sin \phi'_m \Delta \phi'}{(3 - 2 \sin \phi'_m)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I}{4\pi a} \frac{\sin(\frac{2m\pi}{M}) \frac{2\pi}{M}}{(3 - 2 \sin \frac{2m\pi}{M})^{\frac{3}{2}}}$$

کے برابر ہوگا۔ یوں تمام ٹکڑوں کا مجموعہ

$$H_y = \frac{I}{4\pi a} \frac{2\pi}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\sin \frac{2m\pi}{M}}{(3 - 2 \sin \frac{2m\pi}{M})^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{\sin \frac{2m\pi}{M}}{(3-2\sin \frac{2m\pi}{M})^{\frac{3}{2}}}$	m
0.00000	0
0.23852	1
0.82674	2
0.82674	3
0.23852	4
0.00000	5
-0.06889	6
-0.08763	7
-0.08763	8
-0.06889	9

جدول 7.1: دائرے پر برقی رو سے حاصل مقناطیسی میدان کی شدت بذریعہ عددی حل۔

ہوگا۔ جدول 7.1 میں $M = 10$ کی صورت میں m کے تمام قیمتوں پر حاصل $\frac{\sin \frac{2m\pi}{M}}{(3-2\sin \frac{2m\pi}{M})^{\frac{3}{2}}}$ اجزاء دئے گئے ہیں۔ ان تمام کا مجموعہ

$$\begin{aligned}
 H_y &= \frac{I}{4\pi a} \frac{2\pi}{M} (0.00000 + 0.23852 + 0.82674 + 0.82674 + 0.23852 + 0.00000 \\
 &\quad - 0.06889 - 0.08763 - 0.08763 - 0.06889) \\
 &= \frac{I}{4\pi a} \frac{2\pi}{10} (1.8175) \\
 &= 1.1420 \left(\frac{I}{4\pi a} \right)
 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ ٹکڑے لیتے ہوئے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔ اگر $M = 100$ کر دیا جائے تب $H_y = \frac{1.1433I}{4\pi a}$ حاصل ہوتا ہے۔

جدول کو دیکھتے ہوئے ظاہر ہے کہ $m = 0$ اور $m = 5$ برابر حصہ ڈالتے ہیں۔ اسی طرح $m = 1$ اور $m = 4$ بھی برابر حصہ ڈالتے ہیں۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے پورے جدول کو حل کرنا درکار نہیں ہے۔ درحقیقت موجودہ مثال میں جدول کے صرف پانچ یعنی آدھے خانوں کا حل درکار ہے۔ موجودہ مسئلے میں صرف دس چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے تقریباً درست جواب حاصل ہوتا ہے۔ دس اور سو ٹکڑوں کے جوابات میں صرف

$$\left(\frac{1.1433 - 1.1420}{1.1433} \right) \times 100 = 0.11 \%$$

کا فرق ہے۔

2188

2189

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ

برقی میدان کے مسائل برقی دباؤ کے استعمال سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں۔ گھریلو 220 کے برقی دباؤ سے آپ بخوبی واقف ہیں۔ اگرچہ برقی دباؤ سے ہمیں روزمرہ زندگی میں عموماً واسطہ پڑتا ہے اور یہ ہمارے لئے ایک حقیقت رکھتا ہے، مقناطیس و برقیات کے میدان میں برقی دباؤ کی اہمیت صرف اس وجہ سے ہے کہ لیکن کی مدد سے برقی مسائل باآسانی حل ہو جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم کسی بھی چارج سے پہلے برقی دباؤ اور پھر برقی دباؤ سے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

2193

برقی دباو غیر سمتی مقدار ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ برقی دباو کے طرز پر **غیر سمتی مقناطیسی دباو**¹⁷ بیان کیا جاسکتا ہے۔ البتہ یہ صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر قابل بیان ہوتا ہے۔ یوں اس کا استعمال ہر جگہ ممکن نہیں ہوگا۔ اس کے برعکس **سمتی مقناطیسی دباو**¹⁸ بھی بیان کیا جاسکتا ہے جو انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔ سمتی مقناطیسی دباو **اینٹینا**¹⁹، **موج**²⁰ اور مائیکروویو چولھے (خرد موج چولھے)²¹ پر غور کرنے میں مدد دیتا ہے۔ یہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی قابل استعمال ہوگا اور یہ ان مقامات پر بھی قابل بیان ہوگا جہاں برقی رو پائی جائے۔ انہیں پہلے غیر سمتی مقناطیس دباو دیکھیں۔

2197

برقی دباو اور برقی میدان کی شدت کا تعلق صفحہ 108 پر مساوات 4.46 میں بیان کیا گیا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں بالکل اسی طرح غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m کی ڈھلوان منفی مقناطیسی شدت دیتا ہے یعنی

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m$$

یہ نیا تفاعل مقناطیسی میدان کے دیگر تفاعل کے ساتھ ہم آہنگ ہونا چاہیے لہذا اسے ایمپیر کے دوری قانون کے نقطہ صورت پر پورا اترنا ہوگا۔ اس طرح

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \nabla \times (-\nabla V_m) \quad (7.76)$$

ہوگا۔ البتہ جیسے آپ مشق 7.7 میں دیکھیں گے، کسی بھی متغیرہ کی ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے۔ یوں مقناطیسی میدان کے شدت اور غیر سمتی مقناطیسی دباو کا تعلق صرف اس صورت درست ہو سکتا ہے جب $\mathbf{J} = 0$ ہو یعنی

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \quad (\mathbf{J} = 0) \quad (7.77)$$

اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر مقناطیسی دباو پر لاگو شرط کہ کثافت برقی رو صفر ہونا ضروری ہے ناقابل قبول شرط ہے۔ اگرچہ کئی صورتوں میں کثافت برقی رو صفر ہوگی اور V_m کا استعمال ممکن ہوگا لیکن ہمیں ایسے مسائل بھی درپیش ہوں گے جہاں کثافت برقی رو صفر نہ ہوگا۔ ایسی صورت میں V_m ہمارے کسی کام کا نہ ہوگا۔ غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اسے ایمپیر میں ناپا جائے گا۔

2200

خالی خلاء میں

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

سے

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0$$

یا

$$\nabla^2 V_m = 0 \quad (\mathbf{J} = 0) \quad (7.78)$$

جو لاپلاس مساوات ہے حاصل ہوتا ہے۔ یوں غیر سمتی مقناطیسی دباو لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر طرف یکساں خاصیت کے مقناطیسی اشیاء میں بھی V_m لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ یاد رہے کہ V_m صرف اور صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر درست ثابت ہوتا ہے۔

2202

اگلے باب میں V_m پر تفصیلی غور کیا جائے گا۔ یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ چونکہ مقناطیسی میدان بقائی میدان نہیں ہے لہذا V_m کی قیمت اٹل نہیں ہوگی۔ آپ کو یاد ہوگا کہ برقی میدان میں کسی نقطے کو برقی زمین رکھتے ہوئے کسی دوسرے نقطے پر برقی دباو اٹل قیمت رکھتی ہے۔ مقناطیسی میدان میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ ایسی ایک مثال دیکھنے کی خاطر z محور پر رکھی لا محدود لمبائی کے تار پر غور کرتے ہیں جس میں a_z جانب I برقی رو گزر رہی ہو۔ ایسی تار کے گرد جہاں $\mathbf{J} = 0$ ہے

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

scalar magnetic potential¹⁷

vector magnetic potential¹⁸

antenna¹⁹

waveguide²⁰

microwave oven²¹

ہوگا اور غیر سمتی مقناطیسی دباؤ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 7.77 اور نکلی محدود میں V_m کے ڈھلوان کا زاویائی جزو لیتے ہوئے

$$\frac{I}{2\pi\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_m}{\partial \phi}$$

یا

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = -\frac{I}{2\pi}$$

سے

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مکمل کے مستقل کو صفر چنا گیا ہے تاکہ $\phi = 0$ پر مقناطیسی زمین ہو۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہے لہذا یہی مقناطیسی زمین ہے۔ اب اگر ہم تار کے گرد پورا چکر کاٹیں تو ہم اسی مقناطیسی زمین پر دوبارہ پہنچتے ہیں لیکن مندرجہ بالا مساوات کے تحت $\phi = 2\pi$ پر $V_m = -I$ کے برابر ہے تاکہ صفر۔ تار کے گرد دو چکر کے بعد اسی نقطے پر $V_m = -2I$ حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے پر غیر سمتی مقناطیسی دباؤ کے متعدد قیمتیں ممکن ہیں۔ آپ کو یاد ہوگا کہ برقی میدان میں ایک مرتبہ برقی زمین چنے کے بعد کسی بھی ایک نقطے پر ایک ہی برقی دباؤ کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

آئیں غیر سمتی مقناطیسی دباؤ کے متعدد قیمتوں کا ممکن ہونا سمجھیں۔ ساکن برقی میدان میں

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

ہوتا ہے لہذا دو نقطوں کے مابین لکیری مکمل

$$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

کا دار و مدار مکمل کے راہ پر منحصر نہیں ہوتا۔ ساکن مقناطیسی میدان میں

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (\mathbf{J} = 0)$$

لیکن ہوتا ہے

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

کے برابر ہوتا ہے اگرچہ مکمل کے راہ پر $\mathbf{J} = 0$ ہے۔ یوں مکمل لیتے ہوئے جب بھی ایک چکر پورا ہو، مکمل کے قیمت میں I برابر اضافہ آئے گا۔ ہاں اگر مکمل کی راہ صفر برقی رو گھیرے تب غیر سمتی مقناطیسی دباؤ بھی ایک قیمت رکھے گا۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے غیر سمتی مقناطیسی دباؤ

$$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (\text{قیمت راہ پر منحصر ہے}) \quad (7.79)$$

بیان کی جاتی ہے۔ ہم یہ فیصلہ کر سکتے ہیں کہ غیر سمتی مقناطیسی دباؤ حاصل کرتے وقت صرف ایک چکر کا ناجائز ہے۔ اس شرط پر چلتے ہوئے V_m ایک قیمت رکھے گا۔ یہ آپ مندرجہ بالا مثال سے دیکھ سکتے ہیں یعنی

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi \quad (-\pi < \phi \leq \pi) \quad (7.80)$$

کی صورت میں $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہی حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات میں چکر کی وضاحت ضروری ہے۔ صفر زاویہ سے شروع ہو کر اگر زاویہ ϕ مثبت جانب بڑھایا جائے تو $\phi = \pi$ تک پہنچا جاسکتا ہے۔ اس کے برعکس اگر صفر زاویہ سے شروع ہو کر زاویہ ϕ منفی کرتے ہوئے $\phi = \pi$ تک پہنچنے کی کوشش کی جائے تو ایسا ممکن نہیں ہے۔ یوں $\phi = \pi$ پر V_m کی ایک عدد قیمت ہوگی۔

مشق 7.7: کارٹیزی محدود استعمال کرتے ہوئے مثال 7.3 کے طرز پر ثابت کریں کہ کسی بھی غیر سمتی متغیرہ کے ڈھلوان کی گردش صفر کے برابر ہوگی یعنی

$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \quad (7.81)$$

2210

آئیں اب سمتی مقناطیسی دباؤ پر غور کرتے ہیں۔ ہم شروع

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.82)$$

سے کرتے ہیں۔ سمتی مقناطیسی دباؤ کو اس مساوات کے ہم آہنگ ہونا ہوگا۔ مساوات 7.63 میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا اگر \mathbf{B} سمتی متغیرہ \mathbf{A} کا گردش

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (7.83)$$

ہو تب بھی \mathbf{B} کا پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

ہی ہوگا۔ ہم مساوات 7.83 میں دے \mathbf{A} کو **سمتی مقناطیسی دباؤ** کی تعریف مان کر آگے بڑھتے ہیں۔ یوں سمتی مقناطیسی دباؤ خود بخود مساوات 7.82 کے ہم آہنگ ہوگا۔ یوں

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}$$

اور

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا گردش عموماً صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ سمتی مقناطیسی دباؤ \mathbf{A} کی اکائی ویبر فی میٹر $\frac{\text{Wb}}{\text{m}}$ ہے۔ گردش کے گہوش کی قدر مختلف صورت صفحہ 213 پر مساوات 7.38 میں حاصل کی گئی ہے۔

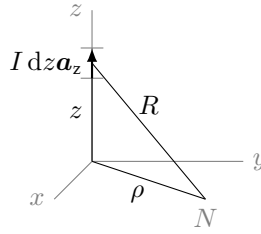
2212

ہم حصہ 7.7.1 میں دیکھیں گے کہ \mathbf{A} اور \mathbf{B} کے تعریف اور بائیوٹ سیوارٹ کے قانون سے

$$\mathbf{A} = \oint \frac{\mu_0 I d\mathbf{L}}{4\pi R} \quad (7.84)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ہم نے \mathbf{A} کی تعریف اس کے گردش کے ذریعے کی ہے۔ چونکہ ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا ہم مندرجہ بالا مساوات کے ساتھ کسی غیر سمتی متغیرہ کا ڈھلوان بھی جمع کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے \mathbf{B} یا \mathbf{H} کے قیمتوں پر کوئی اثر نہ پڑتا۔ ساکن مقناطیسی میدان میں عموماً ڈھلوان جمع نہیں کیا جاتا اور اس مساوات کو یوں ہی رکھا جاتا ہے۔

2215



شکل 7.18: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا سمتی مقناطیسی دباؤ۔

ساکن برقی دباؤ کے مساوات

$$V = \int \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R}$$

کے ساتھ مساوات 7.84 کا موازنہ کرنے سے یہ بات بہتر سمجھ میں آتی ہے کہ A واقع سمتی مقناطیسی دباؤ ہی ہے۔ یہ دونوں مساوات لکیری مکمل دیتے ہیں۔ ایک برقی رو اور دوسرا کثافت چارج کا لکیری مکمل دیتا ہے۔ دونوں میں تفرقی فاصلے dL کا اثر R کے بالعکس متناسب ہے اور دونوں مساوات میں خالی خلاء کے خاصیت یعنی μ_0 اور ϵ_0 استعمال ہوتے ہیں۔

2218

مساوات 7.84 کی تفرق شکل

$$(7.85) \quad dA = \frac{\mu_0 I dL}{4\pi R}$$

بھی لکھی جاسکتی ہے جب تک dL سے حاصل dA کا کوئی مطلب نہ لیا جائے۔ یاد رہے کہ جب تک بند مکمل پورا نہ لیا جائے، حاصل A کوئی معنی نہیں رکھتا۔

شکل 7.18 میں z محدد پر لا محدود لمبائی کے برقی رو گزرتے تار کا چھوٹا حصہ dL دکھایا گیا ہے۔ نقطہ N پر یہ

$$dA = \frac{\mu_0 I dz a_z}{4\pi \sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

یا

$$(7.86) \quad dA_z = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi \sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad dA_\rho = 0, \quad dA_\phi = 0$$

سمتی مقناطیسی دباؤ پیدا کرے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تار کے ہر چھوٹے حصے کا پیدا کردہ سمتی مقناطیسی دباؤ تار کے اسی حصے کی سمت میں ہوگا۔

2220

مقناطیسی شدت تکلی محدود میں مندرجہ بالا مساوات کے گردش

$$\begin{aligned} dH &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times dA = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial dA_z}{\partial \rho} \right) a_\phi \\ &= \frac{I dz}{4\pi} \frac{\rho a_\phi}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

سے حاصل ہوگا۔ یہی مساوات شکل 7.18 کو دیکھتے ہوئے بایوٹ سیوارٹ کے مساوات سے لکھی جاسکتی ہے۔

2221

سمتی مقناطیسی دباؤ A کے کلیات دیگر اشکال کے کثافت برقی رو کے لئے بھی لکھا جاسکتے ہیں۔ یوں سطحی کثافت برقی رو K کے لئے برقی رو کے چھوٹے حصے کو

$$I dL = K dS$$

اور حجمی کثافت برقی رو J کے لئے

$$I dL = J dh$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ لکیری برقی رو کے چھوٹے حصے کو عموماً $I dL$ لکھا جاتا ہے۔ یوں برقی رو کو غیر سمتی تصور کرتے ہوئے فاصلے کو سمتی تصور کیا جاتا ہے۔ اس کے برعکس مندرجہ بالا دو مساوات میں کثافت برقی رو کو سمتی مقدار تصور کیا گیا جبکہ تفرقی سطح dS اور تفرقی حجم dh کو غیر سمتی تصور کیا گیا۔ یوں A کے دیگر کلیے

$$(7.87) \quad A = \int_S \frac{\mu_0 \mathbf{K} dS}{4\pi R}$$

اور

$$(7.88) \quad A = \int_h \frac{\mu_0 \mathbf{J} dh}{4\pi R}$$

ہیں۔

سمتی مقناطیسی دباؤ مختلف اشکال کے برقی رو اور کثافت برقی رو سے مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔ برقی دباؤ کی طرح سمتی مقناطیسی دباؤ کا زمین بھی لامحدود فاصلے پر رکھا جاتا ہے یعنی $R \rightarrow 0$ پر $A \rightarrow 0$ تصور کیا جاتا ہے۔ لامحدود فاصلے پر کوئی بھی برقی رو $R \rightarrow \infty$ کی بنا پر سمتی مقناطیسی دباؤ پر کوئی اثر نہیں ڈال سکتا۔

2226

2227

مثال 7.6: رداس a کے موصل تار میں یکساں برقی رو I گزر رہی ہے۔ تار کے اندر B حاصل کرتے ہوئے A بھی حاصل کریں۔

حل: تار کو z محدد پر پڑا تصور کرتے ہیں۔ تار کے اندر ρ رداس کا بند دائرہ $\frac{I\pi\rho^2}{\pi a^2}$ برقی رو گھیرے گی لہذا اس دائرے پر $B = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} a_\phi$ ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ B کا صرف زاویائی جزو پایا جاتا ہے۔ یوں A کے گردش کو مساوات 7.52 کی مدد سے لکھتے ہوئے صرف زاویائی جزو لیتے ہیں۔ اس طرح

$$B_\phi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ برقی رو a_z سمت میں ہے لہذا A کا صرف A_z جزو متوقع ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات

$$B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

یعنی

$$-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$$

صورت اختیار کر لے گا جس سے

$$A_z = \frac{\mu_0 I \rho^2}{4\pi a^2} + M$$

حاصل ہوتا ہے جہاں M تکمیل کا مستقل ہے۔

2228

2229

7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول

ساکن مقناطیس میدان کے تمام قوانین بائوٹ سیوارٹ کے قانون،

$$(7.89) \quad H = \oint \frac{I dL \times a_R}{4\pi R^2}$$

سمتی مقناطیسی دباؤ کے تعریف

$$(7.90) \quad B = \nabla \times A$$

اور مقناطیسی میدان کی شدت اور کثافت مقناطیسی بہاؤ کے تعلق

$$(7.91) \quad B = \mu_0 H$$

سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔ امید کی جاتی ہے کہ طلبہ و طالبات مندرجہ ذیل ثبوت کو سمجھتے ہوئے پڑھیں گے۔ آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ انہیں یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔

2232

2233

7.7.1 سمتی مقناطیسی دباؤ

سمتی مقناطیسی دباؤ کی مساوات

$$(7.92) \quad A = \int_h \frac{\mu_0 J dh}{4\pi R}$$

ثابت کرنے کی خاطر ہم اس سے بائوٹ سیوارٹ کا قانون یعنی مساوات 7.89 حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 7.88 میں (x_2, y_2, z_2) پر سمتی مقناطیسی دباؤ دی گئی ہے جبکہ (x_1, y_1, z_1) وہ مقام ہے جہاں برقی رو گزارنا ہمارا چھوٹا حصہ پایا جاتا ہے۔ یوں چھوٹے حجم کو dh_1 لکھیں گے جو $dx_1 dy_1 dz_1$ کے برابر ہوگا۔ مکمل کے متغیرات x_1, y_1, z_1 اور x_2, y_2, z_2 ہیں۔ یوں

$$(7.93) \quad A_2 = \int_h \frac{\mu_0 J_1 dh_1}{4\pi R_{21}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{\nabla_2 \times A_2}{\mu_0}$$

کے برابر ہے جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 لکھ کر یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ گردش نقطہ (x_2, y_2, z_2) پر حاصل کیا جائے گا لہذا گردش کے متغیرات بھی x_2, y_2, z_2 اور x_1, y_1, z_1 ہوں گے۔ آپ کو یاد ہوگا کہ صفحہ 108 پر مثال 4.4 میں ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے بالکل اسی طرح کیا گیا تھا۔ یوں موجودہ مسئلے میں گردش حاصل کرتے وقت تمام تفرق x_2, y_2, z_2 اور x_1, y_1, z_1 کے ساتھ لئے جائیں گے۔

2236

اس طرح مساوات 7.93 سے A_2 پر کرتے ہوئے

$$H_2 = \frac{1}{\mu_0} \nabla_2 \times \int_h \frac{\mu_0 J_1 dh_1}{4\pi R_{21}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ گردش بنیادی طور پر تفرق کا عمل ہے۔ اس مساوات میں مکمل کا گردش حاصل کیا جا رہا ہے۔ مکمل اور تفرق جس ترتیب سے حاصل کئے جائیں، اس کا حاصل جواب پر کوئی اثر نہیں ہے لہذا ہم تفرق کے عمل کو مکمل کے اندر لے جاسکتے ہیں جبکہ $\frac{\mu_0}{4\pi}$ مستقل ہے جسے مکمل کے باہر لایا جاسکتا ہے۔ یوں

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \nabla_2 \times \frac{\mathbf{J}_1 dh_1}{R_{21}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں $dh_1 = dx_1 dy_1 dz_1$ پہلے تو مقداری ہے جس کا گردش حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ اس کے علاوہ اس کا y_2, x_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہے لہذا اسے گردش کے عمل سے باہر لکھا جاسکتا ہے یعنی

$$(7.94) \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \left(\nabla_2 \times \frac{\mathbf{J}_1}{R_{21}} \right) dh_1$$

یہاں سمتیہ \mathbf{J} ضرب مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ کا گردش لیا جا رہا ہے۔ مثال 7.2 میں کسی بھی سمتیہ \mathbf{S} اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش

$$(7.95) \quad \nabla \times (M\mathbf{S}) \equiv (\nabla M) \times \mathbf{S} + M(\nabla \times \mathbf{S})$$

حاصل کی گئی۔ اس کی مدد سے مساوات 7.94 کو کھولتے ہیں جہاں سمتیہ \mathbf{J}_1 اور مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں۔

$$(7.96) \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} \right) \times \mathbf{J}_1 + \frac{1}{R_{21}} (\nabla_2 \times \mathbf{J}_1) \right] dh_1$$

اس مساوات کے دوسرے جزو میں \mathbf{J}_1 صرف y_1, x_1 اور z_1 پر منحصر ہے۔ نقطہ (x_2, y_2, z_2) کا اس پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں لہذا \mathbf{J}_1 کے تمام تفرق جو y_2, x_2 اور z_2 کے ساتھ لئے جائیں صفر کے برابر ہوں گے۔ یوں $\nabla_2 \times \mathbf{J}_1 = 0$ ہو گا۔

2238

صفحہ 109 پر مساوات 4.48 کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_h \frac{\mathbf{a}_{R21} \times \mathbf{J}_1}{R_{21}^2} dh_1$$

یا

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_h \frac{\mathbf{J}_1 \times \mathbf{a}_{R21}}{R_{21}^2} dh_1$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اس میں $\mathbf{J}_1 dh_1$ کی جگہ لکیری انداز میں $I_1 d\mathbf{L}_1$ پر کرتے ہوئے اور بند مکمل لکھ کر جانی پہچانی بایوٹ سیوارٹ مساوات

$$\mathbf{H}_2 = \oint_h \frac{I d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یوں ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 7.93 درست ہے اور یہ مساوات، مساوات — اور مساوات پر پورا اترتا ہے۔

2239

7.7.2 ایمپیر کا دوری قانون

2240

آئیں اب ایمپیر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$(7.97) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

کو بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔

2241

شروع کرتے ہیں مساوات 7.90 اور مساوات 7.91 سے جن سے

$$(7.98) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ صفحہ 213 پر مساوات 7.38 استعمال کرتے ہوئے یوں

$$(7.99) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}]$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں پھیلاؤ اور لاپلاسی کے عمل درکار ہیں۔

پھیلاؤ کو پہلے حل کرتے ہیں۔ مساوات 7.93 کی پھیلاؤ

$$(7.100) \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_2 \cdot \frac{\mathbf{J}_1}{R_{21}} dh_1$$

لکھی جاسکتی ہے۔ صفحہ 120 پر مثال 4.7 میں سمتیہ \mathbf{D} اور مقداری V کے لئے

$$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) = V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V)$$

ثابت کیا گیا۔ یہاں سمتیہ \mathbf{J}_1 جبکہ مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں لہذا اس مساوات کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(7.101) \quad \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_1}{R_{21}} \right) = \frac{1}{R_{21}} (\nabla \cdot \mathbf{J}_1) + \mathbf{J}_1 \cdot \left(\nabla \frac{1}{R_{21}} \right)$$

جس کی مدد سے

$$(7.102) \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}} (\nabla_2 \cdot \mathbf{J}_1) + \mathbf{J}_1 \cdot \left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} \right) \right] dh_1$$

ہوگا۔

چونکہ \mathbf{J}_1 صرف متغیرات x_1, y_1 اور z_1 پر منحصر ہے لہذا اس کے x_2, y_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہوں گے لہذا $\nabla_2 \cdot \mathbf{J}_1 = 0$ ہوگا۔

ہم صفحہ 109 پر مساوات 4.50

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}$$

کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$(7.103) \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[-\mathbf{J}_1 \cdot \left(\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} \right) \right] dh_1$$

لکھ سکتے ہیں۔ مساوات 7.101 کے دوبارہ استعمال سے

$$(7.104) \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}} (\nabla_1 \cdot \mathbf{J}_1) - \nabla_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_1}{R_{21}} \right) \right] dh_1$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.64 کہتا ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف اس صورت پیدا ہوگا جب $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ہو۔ چونکہ ہمیں ساکن مقناطیسی میدان سے ہی غرض ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات میں سے

$$(7.105) \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_1}{R_{21}} \right) dh_1$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 87 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلا و بیان کرتا ہے جس کے تحت حجمی مکمل کو سطحی مکمل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے یوں

$$(7.106) \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{\mathbf{J}_1}{R_{21}} \cdot d\mathbf{S}_1$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سطح S_1 اس تمام حجم کو گھیرتی ہے جس پر حجمی مکمل حاصل کیا گیا تھا۔ چونکہ حجمی مکمل اس غرض سے حاصل کیا گیا تھا کہ ساکن مقناطیسی میدان پیدا کرنے والے برقی رو کو مکمل طور پر شامل کیا جائے لہذا اس حجم کے باہر کسی قسم کا کوئی برقی رو نہیں پایا جاتا۔ اگر حجم سے باہر کوئی بھی برقی رو ہوتی تب ہمیں حجم کو بڑھا کر اس برقی رو کے اثر کو بھی شامل کرنا ہوتا۔ ہم مکمل لیتے ہوئے حجم کو قدر اور بڑھا سکتے ہیں تاکہ اس کی سطح کو برقی رو نہ چھوئے۔ ہم ایسا اس لئے کر سکتے ہیں کہ برقی رو سے خالی حجم کے شمول سے مکمل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔ یوں ضرورت سے زیادہ حجم پر مکمل سے مراد یہ بھی ہے کہ سطحی مکمل ایسی سطح پر لی جائے جس پر کثافت برقی رو صفر کے برابر ہو۔ صفر کثافت برقی رو کا سطحی مکمل صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$(7.107) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جو کہتا ہے کہ سمتی مقناطیسی دباؤ کا پھیلاؤ صفر کے برابر ہے۔ اس مساوات میں زیر نوشت میں 2 نہیں لکھا گیا ہے جو اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں مقناطیسی میدان کی بات ہو رہی ہو۔ پھیلاؤ بھی اسی نقطے پر حاصل کیا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم مساوات 7.99 حل کرنے کی خاطر پھیلاؤ اور لاپلاسی حاصل کرنے نکلے تھے۔ پھیلاؤ حاصل ہو چکا ہے آئیں اب لاپلاسی حاصل کریں۔

2247

برقی دباؤ اور سمتی مقناطیسی دباؤ کے ایک جزو

$$V = \int_h \frac{\rho dh}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$A_x = \int_h \frac{\mu_0 J_x dh}{4\pi R}$$

کا موازنہ کرنے سے صاف ظاہر ہے کہ ρ اور J_x کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے اور $\frac{1}{\epsilon_0}$ اور μ_0 کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے ایک مساوات سے دوسری مساوات حاصل کی جاسکتی ہے۔ اب ہم پوکسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

میں یہی تبدیلیاں کرتے ہوئے

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

اور

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

لکھ سکتے ہیں جنہیں یوں

$$(7.108) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

2248

مساوات 7.99 میں مساوات 7.107 اور مساوات 7.108 استعمال کرتے ہوئے یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

(7.109)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

2249

حاصل ہوتی ہے۔

2250

مثال 7.7: مندرجہ بالا حصے میں برقی دباؤ کے لاپلاسی سے سمتی مقناطیسی دباؤ کی لاپلاسی اخذ کی گئی۔ سمتی مقناطیسی دباؤ کے لاپلاسی کو ایمپیئر کے دوری قانون اور \mathbf{A} کی تعریف سے حاصل کریں۔

2252

حل: ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل اور \mathbf{A} کی تعریف

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}$$

سے

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ صفحہ 213 پر مساوات 7.38 استعمال کرتے ہوئے

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 7.107 کی مدد سے

(7.110)

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

2253

لکھا جاسکتا ہے۔

2254

2255

سوالات

2256

سوال 7.1: مساوات 7.11 حاصل کریں۔

2257

سوال 7.2: شکل 7.8 کے لامحدود سطح سے پیدا مقناطیسی میدان بائوٹ-سیوارٹ کے قانون کی مدد سے حاصل کریں۔

2258

سوال 7.3: مساوات 7.20 حاصل کرنے کے طرز پر شکل 7.9 میں H_y 34 پر 43 حاصل کریں۔

2259

جواب: شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔ یوں $-\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی سے $\frac{\partial H_y}{\partial x} (-\frac{\Delta x}{2})$ تبدیلی رونما ہوگی اور یوں نئی قیمت $H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$ ہوگی۔

2260

سوال 7.4: عمومی محدود میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے کارتیسی محدود میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

2261

سوال 7.5: عمومی محدود میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے نیکی محدود میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

2262

سوال 7.6: گول دائرے پر برقی رو کا دائرے کے محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کرتے ہوئے مساوات 7.75 میں دئے بینوی تکمل حاصل کئے گئے۔ ان میں H_y کا عددی حل مثال 7.5 میں حاصل کیا گیا۔ بالکل اسی طرز پر تکمل کو دس ٹکڑوں میں کرتے ہوئے H_z کی عددی قیمت نقطہ $N(0, a, a)$ پر حاصل کریں۔

2265

2266

جواب: $0.96525 \left(\frac{I}{4\pi a} \right)$

2267

باب 16

سوالات

سوال 16.1: لا محدود لمبائی کی سیدھی تار y محدود پڑی ہے۔ اس میں a_y جانب 5 mA برقی رو گزر رہی ہے۔ نقطہ $N(2, 5, 3)$ پر مقناطیسی میدان H اور $|H|$ حاصل کریں۔ اگر تار $x = 3$ ، $z = -1$ پر ہو تب جوابات کیا ہوں گے۔ دونوں تاروں کی موجودگی میں جوابات حاصل کریں۔

جوابات: $H = 371a_x - 75a_z \frac{\mu A}{m}$ ، $|H| = 193 \frac{\mu A}{m}$ ، $H = 187a_x + 47a_z \frac{\mu A}{m}$ ، $|H| = 221 \frac{\mu A}{m}$ ، $H = 184a_x - 122a_z \frac{\mu A}{m}$ ، $|H| = 378 \frac{\mu A}{m}$ ،

سوال 16.2: سطح $z = 0$ پر y محدود کے متوازی لا محدود لمبائی کے آٹھ عدد تار پڑے ہیں جن میں a_y جانب 1 A برقی رو گزر رہی ہے۔ یہ تار $y = -3.5$ ، $y = -2.5$ ، $y = 2.5$ ، $y = 3.5$ پر پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $(0, 0, 1)$ اور $(0, 0, 50)$ پر H حاصل کریں۔

جوابات: $0.0254a_x$ ، $0.421a_x$ ؛ محدود پچاس گنا دور میدان صرف سترہ گنا کم ہے۔

سوال 16.3: چار میٹر لمبے تار کو چکور کی شکل دی جاتی ہے جس کا رقبہ 1 m^2 ہے۔ اس چکور کو $z = 0$ سطح پر رکھا جاتا ہے۔ تار میں برقی رو 10 mA گزرنے کی صورت میں چکور کے وسط $N(0, 0, 0)$ میں مقناطیسی میدان H حاصل کریں۔ نقطہ $P(0, 0, 1)$ پر بھی میدان حاصل کریں۔

جوابات: $2.3 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$ ، $9 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$

سوال 16.4: ایک تار کو دائری شکل دے کر سطح $z = 0$ پر رکھا جاتا ہے۔ دائرے کا رقبہ 1 m^2 ہے۔ تار میں 10 mA گزرنے کی صورت میں دائرے کے وسط $N(0, 0, 0)$ میں مقناطیسی میدان H حاصل کریں۔ نقطہ $P(0, 0, 1)$ پر بھی میدان حاصل کریں۔

جوابات: $1.86 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$ ، $2.82 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$

سوال 16.5: محدود x اور y میں بڑھتے جانب 55 mA برقی رو گزر رہی ہے۔ نقطہ $N(5, 6, 4)$ پر H حاصل کریں۔

جواب: $854a_x - 673a_y - 57a_z \frac{\mu A}{m}$

سوال 16.6: سطحی رو $K = \frac{8}{\rho} a_\phi \frac{A}{m}$ خطہ $\rho = 3 \text{ m}$ تا $\rho = 7 \text{ m}$ میں پائی جاتی ہے۔ سطح $\phi = 0$ سے گزرتی کل برقی رو حاصل کریں۔ نقطہ $N(0, 0, z)$ پر H حاصل کرتے ہوئے میدان کی قیمت $z = 10$ پر دریافت کریں۔

جوابات: $I = 8 \ln \frac{7}{3} \text{ A}$ ، $\mathbf{H} = \left[\frac{4}{\sqrt{z^2+3^2}} - \frac{4}{\sqrt{z^2+7^2}} \right] \mathbf{a}_z$ ، $55.4 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$

سوال 16.7: سطحی رو $\frac{\text{A}}{\text{m}} = 8\rho a_\phi$ ، خطہ $\rho = 3 \text{ m}$ تا $\rho = 7 \text{ m}$ میں پائی جاتی ہے۔ سطح $\phi = 0$ سے گزرتی کل برقی رو حاصل کریں۔ نقطہ $N(0,0,z)$ پر \mathbf{H} حاصل کرتے ہوئے میدان کی قیمت $z = 10$ پر دریافت کریں۔

جوابات: $I = 160 \text{ A}$ ، $\mathbf{H} = 4 \left[\frac{2z^2+49}{\sqrt{(z^2+49)}} - \frac{2z^2+9}{\sqrt{z^2+9}} \right] \mathbf{a}_z$ ، $1.52 \frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 16.8: رداس a کے دائری چادر پر یکساں سطحی کثافت چارج ρ_s پائی جاتی ہے۔ چادر کے محور کو محدود کے مرکز پر رکھتے ہوئے چادر کو سطح $z = 0$ پر رکھا جاتا ہے۔ اگر چادر محور کے گرد زاویائی رفتار ω سے گھوم رہی ہو تب نقطہ $N(0,0,z)$ پر مقناطیسی میدان \mathbf{H} کیا ہوگا؟ میدان کی قیمت $\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2} = 5$ پر $\rho_s = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ اور $\omega = 100\pi$ کی صورت میں $(0,0,0.1)$ پر حاصل کریں۔

جوابات: $\left[\frac{2z^2+4}{\sqrt{z^2+4}} - 2z \right] \frac{\omega\rho_s}{2}$ ، $1.42 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$

سوال 16.9: سطح $z = 0$ پر خطہ $x = -3 \text{ m}$ تا $x = 3 \text{ m}$ پر سطحی برقی رو $\frac{\text{A}}{\text{m}} = 4a_y$ ، \mathbf{K} پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N(0,0,5)$ پر مقناطیسی میدان حاصل کریں۔

جواب: $0.688a_x \frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 16.10: سطح $x = 0$ پر سطحی برقی رو $\frac{\text{A}}{\text{m}} = 1200a_z$ پائی جاتی ہے۔ خطہ $0 < z < \infty$ ، $5 < y < 15$ پر برقی رو سے نقطہ $N(10,0,0)$ پر پیدا مقناطیسی میدان \mathbf{H} حاصل کریں۔

جواب: $\mathbf{H} = 45.6a_x + 49.6a_y \frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 16.11: خطہ $0 < z < 5$ میں یکساں کثافت برقی رو $\frac{\text{A}}{\text{m}^2} = 15a_y$ پائی جاتی ہے۔ ایمپیر کے دوری قانون کی مدد سے ثابت کریں کہ $\mathbf{H}_{z>5} = -\mathbf{H}_{z<0}$ کے برابر ہے۔ نقطہ $(2,5,7)$ اور نقطہ $(4,12,2)$ پر \mathbf{H} حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{\text{A}}{\text{m}} = 37.5a_x$ ، $\frac{\text{A}}{\text{m}} = -7.5a_x$

سوال 16.12: محدود کے مرکز پر رداس a کا موصل کرہ پایا جاتا ہے۔ منفی z محدود پر $10a_z \text{ A}$ کی برقی رو، کرہ کی سطح پر نقطہ $(0,0,-a)$ تک پہنچتی ہے جہاں سے یہ کرہ کے سطح پر یکساں پھیل کر نقطہ $(0,0,a)$ تک پہنچتی ہے اور اس کے بعد مثبت z محدود پر بڑھتے جانب چلے جاتی ہے۔ کرہ کے اندر اور اس کے باہر مقناطیسی میدان حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{\text{A}}{\text{m}} = 0$ ، $\frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{10}{2\pi\rho} a_\phi$

سوال 16.13: منفی z محدود سے برقی رو I موصل $\theta = 30^\circ$ سطح تک پہنچ کر سطح پر یکساں پھیل کر چلے جاتی ہے۔ نقطہ $(0,0,z)$ اور نقطہ $(5,5,5)$ پر مقناطیسی میدان \mathbf{H} حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{\text{A}}{\text{m}} = 0$ ، $\frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{I}{2\pi\sqrt{50}}$

سوال 16.14: تفاعل $\mathbf{G} = (5x + yz)\mathbf{a}_x + 3xyz\mathbf{a}_y + \frac{x^2y}{z}\mathbf{a}_z$ نقطہ $N(0.6,0.4,0.2)$ اور اس کے قریب پایا جاتا ہے۔ سطح $z = 0.2$ پر $2a$ لمبائی کے اطراف کے مربع لکیر پر $\oint \mathbf{G} \cdot d\mathbf{L}$ حاصل کریں جہاں مربع کا مرکز نقطہ N پر ہے۔ لکیری مکمل کو مربع کے رقبے سے تقسیم کریں اور a لیتے ہوئے $\nabla \times \mathbf{G}_z$ حاصل کریں۔

جوابات: چاروں اطراف کے لکیری کھل $0.48a^2 + 0.288a$ ، $0.48a^2 - 0.288a$ ، $-0.4a^2 + 6.16a$ اور $-0.4a^2 - 6.16a$ ہیں۔
 $\nabla \times \mathbf{G}_z = 0.04$ ہے۔

سوال 16.15: مساوات 17.31 استعمال کرتے ہوئے تفاعل $\mathbf{G} = (5x + yz)\mathbf{a}_x + 3xyz\mathbf{a}_y + \frac{x^2y}{z}\mathbf{a}_z$ کا نقطہ $N(0.6, 0.4, 0.2)$ پر $\nabla \times \mathbf{G}$ حاصل کریں۔ سوال 16.14 میں حاصل کئے گئے $\nabla \times \mathbf{G}_z$ کے ساتھ موازنہ کریں۔

جواب: $1.08\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 0.04\mathbf{a}_z$

سوال 16.16: ہم محوری تار میں $\mathbf{E} = 3000\rho^{1.3} \cos(\omega t - 0.3z)\mathbf{a}_\rho \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ تار میں $\nabla \times \mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $900\rho^{1.3} \sin(\omega t - 0.3z)\mathbf{a}_\phi$

سوال 16.17: میدان $V = 5(x^2 + y^2)$ اور $V = 10x^3 + y^2 + xz^4$ کے لئے $\nabla^2 V$ اور $\nabla \times \mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: 0 ، $60x + 2 + 12xz^2$ ، 0 ، 20

سوال 16.18: میدان $\mathbf{H} = x^2y^2z\mathbf{a}_x - xy^2z^2\mathbf{a}_z$ دیا گیا ہے۔ مسئلہ سٹوکس کے دونوں اطراف باری باری استعمال کرتے ہوئے، سطح $y = 1$ میں خطہ $1 < x < 2$ ، $1 < z < 3$ سے \mathbf{a}_y جانب گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: 13.3 A

سوال 16.19: میدان $\mathbf{H} = \frac{2xy}{z^2}\mathbf{a}_x - \frac{y^2}{z^2}\mathbf{a}_y + x^2y^2\mathbf{a}_z$ دیا گیا ہے۔ سطح $x = 0.5$ میں خطہ $1 < y < 2$ ، $2 < z < 3$ سے \mathbf{a}_x جانب گزرتی برقی رو درکار ہے۔ الف) برقی رو کو بذریعہ سطحی کھل حاصل کریں۔ ب) برقی رو کو بذریعہ لکیری کھل حاصل کریں۔

جواب: 0.426 A

سوال 16.20: کروئی محدود میں میدان $\mathbf{H} = \frac{50r}{\sin \theta}\mathbf{a}_\phi$ دیا گیا ہے۔ مسئلہ سٹوکس کے دونوں اطراف باری باری استعمال کرتے ہوئے کروئی خطہ $r = 0.2$ ، $0 < \phi < 2\pi$ ، $0 < \theta < 60^\circ$ سے گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: 5.44 A

سوال 16.21: میدان $\mathbf{H} = \frac{4r^2}{\sin \theta}\mathbf{a}_\theta + 50r \sin \theta \mathbf{a}_\phi$ دیا گیا ہے۔ سطح $\theta = 45^\circ$ میں خطہ $0 < r < 3$ ، $0 < \phi < 2\pi$ سے \mathbf{a}_θ جانب گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: -1414 A

سوال 16.22: پاکستان میں کل زمینی مقناطیسی میدان $45 \mu\text{T}$ تا $50 \mu\text{T}$ پایا جاتا ہے جس کا افقی جزو اوسطاً $30 \mu\text{T}$ کے لگ بھگ ہے۔ ایک تار جس میں 1 A کی برقی رو گزر رہی ہو، کتنے فاصلے پر زمینی میدان کے افقی جزو برابر مقناطیسی میدان پیدا کرے گی۔

جواب: 4.2 cm

سوال 16.23: تیس سنٹی میٹر لمبائی اور پانچ سنٹی میٹر رداس کا بیچدار لچھا جس میں برقی رو گزر رہی ہو میں مقناطیسی میدان $H = 200a_z \frac{A}{m}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $\nabla \times B = A$ سے حاصل کرتے ہوئے $\rho = 0$ پر $A = 0$ لیتے ہوئے انہیں دو نقطوں کے مابین A_{21} حاصل کریں۔ یہ مساوات استعمال کرتے وقت A کا دائرہ سمت جزو اپنے علم سے چنیں۔

4241

جوابات: $-8 A$ ، $2.5a_\phi \frac{\mu Wb}{m}$

4242

سوال 16.24: نیکی کثافت برقی رو $50a_z \frac{A}{m}$ رداس $\rho = 2 m$ پر پائی جاتی ہے جبکہ رداس $\rho = 4 m$ پر $25a_z \frac{A}{m}$ اور رداس $\rho_{43} = 5 m$ پر $-40a_z \frac{A}{m}$ پائے جاتے ہیں۔ زاویہ $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ لیتے اور $\phi = 180^\circ$ کو رکاوٹ تصور کرتے ہوئے نقطہ $N_1(3.5, 60^\circ, 0)$ غیر سمتی مقناطیسی دباؤ V_m حاصل کریں۔

4245

جوابات: $-66.6 A$

4246

سوال 16.25: سطح $z = 0$ پر تاہر $x = 4$ میں $0.2 A$ کی برقی رو a_y جانب پائی جاتی ہے جبکہ تاہر $x = -4$ میں $0.2 A$ برقی رو $-a_y$ جانب پائی جاتی ہے۔ محدود کے مرکز پر $V_m = 0$ لیتے ہوئے z محدود پر غیر سمتی مقناطیسی دباؤ V_m حاصل کریں۔

4248

جواب: $-\frac{0.1}{\pi} \tan^{-1} \frac{z}{4} A$

4249

4250

جدول 16.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوہا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمنیم
10^{-16}	پولیسٹرن پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 16.2 : $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیز
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 16.3 : μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 16.4 : اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	c	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

