1 # برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
2 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 9

وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

گزشتہ بابوں میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے میدانوں پر غور کیا گیا۔ بقایا کتاب میں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں پر غور کیا جائے گا۔

اس باب میں دو نئے اصولوں پر غور کیا جائے گا۔ پہلا اصول مائکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ دوسرا قانون جیمس کلارک میکس ویل کے کاوشوں سے حاصل ہوا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اس باب میں برقی و مقناطیسیات کے چار ایسے مساوات پیش کئے جائیں گے جو میکس ویل مساوات کہلاتے ہیں۔

9.1 فیراڈے کا قانون

جناب مائکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا کہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ قانون فیراڈے[1] کو مندرجہ ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$\text{محرک برقی دباو} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{9.1}$$

اس قانون کے تحت کسی بھی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاو کی قیمت میں تبدیلی، اس سطح کے محیط پر برقی دباو پیدا کرتی ہے۔ ایسی برقی دباو روایتی طور پر محرک برقی دباو[2] کہلاتی ہے۔ کسی بھی سطح کے محیط پر محرک برقی دباو[3] کی قیمت، اس سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاو کے قیمت میں تبدیلی کی شرح کے برابر ہوتی ہے۔ محرک برقی دباو کی اکائی وولٹ V ہے۔ سطح کے محیط کو بند دائرہ تصور کرتے ہوئے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ کسی بھی بند دائرے پر محرک برقی دباو کی قیمت اس دائرے کے اندر سے گزرتی مقناطیسی بہاو کے قیمت میں تبدیلی کی شرح کے برابر ہو گی۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ بند دائرہ فرضی لکیر بھی ہو سکتا ہے۔

ابتدائی مقناطیسی بہاو میں تبدیلی، محرک برقی دباو پیدا کرتی ہے۔ محرک برقی دباو مکمل برقی دور میں برقی رو پیدا کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ محرک برقی دباو سے پیدا برقی رو، بند دائرے میں ثانوی مقناطیسی بہاو پیدا کرے گی۔ ثانوی مقناطیسی بہاو، ابتدائی مقناطیسی بہاو میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ مساوات 9.1 میں منفی کی علامت اسی اصول کو بیان کرتی ہے، یعنی کہ، بند دائرے میں محرک برقی دباو سے پیدا برقی رو، پہلے سے موجود مقناطیسی بہاو میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ یہ اصول لینز[5][4] کا اصول پکارا جاتا ہے۔

کسی بھی بند دائرے سے گزرتی مقناطیسی بہاو میں تبدیلی مندرجہ ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہے۔

---

[1] Faraday's law

[2] electromotive force, emf

[3] محرک برقی دباو کی اصطلاح روایتی طور پر ہر قسم کے منبع برقی دباو کے لئے استعمال کی جاتی ہے۔

[4] یہ قانون 1834 میں جناب لینز نے پیش کیا۔

[5] Lenz's law

- مقناطیسی بہاو کے کثافت میں تبدیلی،
- ساکن مقناطیسی میدان اور بند دائرے کا آپس میں اضافی حرکت، یا
- مندرجہ بالا دونوں وجوہات۔

اگر بند دائرہ N چکر کے لچھے پر مشتمل ہو جہاں ہر چکر میں سے Φ مقناطیسی بہاو گزرتی ہو تب فیراڈے کے قانون کو

$$\text{محرک برقی دباو} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{9.2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

برقی دباو کے طرز پر محرک برقی دباو کی تعریف

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.3}$$

لکھی جاتی ہے جہاں تکمل پورے بند دائرے پر لینا لازم ہے۔ برقی دباو کے تعریف کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے ہم مندرجہ بالا مساوات میں منفی کی علامت $(-)$ لگانا بھول گئے ہیں۔ ایسا بالکل نہیں ہے اور اس کی وضاحت جلد شکل 9.2 کی مدد سے کر دی جائے گی۔ محرک برقی دباو بند دائرے پر پائی جاتی ہے۔ صفحہ 105 پر مساوات 4.28 کے تحت کسی بھی بند دائرے پر ساکن برقی میدان $\boldsymbol{E}$ کا لکیری تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے۔ مساوات 9.3 کہتا ہے کہ غیر ساکن مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہوتا اور کسی بھی بند دائرے پر $\boldsymbol{E}$ کا لکیری تکمل اس دائرے پر پیدا محرک برقی دباو دیتا ہے۔

مساوات 9.1 اور مساوات 9.3 سے

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.4}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں Φ کی جگہ کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ کا سطحی تکمل استعمال کیا گیا۔

مندرجہ بالا مساوات میں ایک جانب سطح S کے محیط پر لکیری تکمل اور دوسری جانب اسی سطح پر سطحی تکمل لیا گیا ہے۔ کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں جیسے کتاب کے اس صفحے کی بالائی سطح اور اس کی نچلی سطح۔ یوں ہر سطحی تکمل کے دو ممکنہ جواب ہیں۔ اسی طرح کسی بھی سطح کے محیط پر لکیری تکمل یا تو سطح کر گرد گھڑی کی سمت میں اور یا اس کے الٹ گھوم کر لی جا سکتی ہے۔ یہاں ذرہ رک کر، کسی بھی سطح پر سطحی تکمل اور اس کے محیط پر لکیری تکمل کی درست سمت کا تعین دائیں ہاتھ کے قانون[6] سے کرتے ہیں۔

کرہ کی مانند مکمل بند سطح[7] کی بیرونی سطح کو مثبت سطح تصور کیا جاتا ہے۔ مکمل بند سطح کا کوئی محیط نہیں ہوتا۔ اس کے برعکس کھلی سطح[8] پر تکمل لیتے ہوئے مسئلے کے مطابقت سے مثبت سطح چنی جاتی ہے۔ ایسی سطح کو دائیں ہاتھ میں یوں پکڑیں کہ ہاتھ کی انگلیاں محیط کے گرد لپٹی ہوں اور انگوٹھا سطح کی مثبت سمت میں ہو۔ انگلیوں کے لپٹنے کی سمت ہی سطح کے گرد مثبت سمت ہے۔ یوں محیط پر لکیری تکمل، محیط کے گرد انگلیوں کے لپٹنے کی سمت میں حاصل کی جائے گی۔

مندرجہ بالا مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی سمتی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاو اگر بڑھ رہی ہو تب محرک برقی دباو سطح کے محیط پر منفی جانب برقی رو پیدا کرے گا۔ مساوات 9.4 استعمال کرتے ہوئے دائیں ہاتھ کا قانون یاد رکھیں جو آپ کو محرک دباو کی صحیح سمت دے گا۔

---

[6] right hand rule
[7] closed surface
[8] open surface

آئیں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی وجہ سے پیدا ساکن بند دائرے میں محرک برقی دباو پر پہلے غور کریں اور بعد میں ساکن مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے دائرے کی وجہ سے پیدا محرک برقی دباو پر غور کریں۔ 2762

ساکن دائرے کی صورت میں مساوات 9.4 میں دائیں ہاتھ S ساکن ہے جبکہ B وقت کے ساتھ تبدیل ہو رہی ہے یوں اس مساوات میں تفرق کے عمل کو تکمل کے اندر لے جایا جا سکتا ہے یعنی

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.5}$$

آگے بڑھنے سے پہلے اس مساوات کی نقطہ شکل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات کے بائیں ہاتھ پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.6}$$

حاصل ہوتا ہے۔ 2763

مساوات 9.5 میں بائیں جانب محیط پر لکیری تکمل لی گئی ہے جبکہ دائیں جانب سطحی تکمل لی گئی ہے۔ فرض کریں کہ کسی سطح کا محیط مستطیل شکل کو ہو۔ اس مستطیل 2764 پر ربڑ کی جھلی چسپاں کرتے ہیں۔ یہ جھلی ایک ممکنہ سطح ہے جس پر سطحی تکمل لی جا سکتی ہے۔ اب جھلی کو کسی درمیانے نقطے سے اگر کھینچا جائے تو سطح کی صورت تبدیل ہو جائے گی جبکہ اس کا محیط تبدیل نہیں ہو گا۔ آپ مختلف نقطوں سے جھلی کو کھینچ کر یا دبا کر مختلف سطحیں پیدا کر سکتے ہیں۔ ایسی تمام سطحوں کا محیط وہی مستطیل ہو گا۔ مساوات 9.5 میں دائیں جانب ایسی تمام سطحوں پر سطحی تکمل، بائیں جانب محیط پر لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔ اب چونکہ محیط تبدیل نہیں ہوا لہٰذا ایسی تمام سطحوں 2767 پر سطحی تکمل برابر ہوں گے۔ 2768

مساوات 9.5 سے مساوات 9.6 حاصل کرتے ہوئے یاد رہے کہ ان مساوات میں سطح کی محیط تبدیل نہیں کی جا رہی۔ یوں مساوات 9.6 میں دونوں جانب کے سطحوں کا محیط ایک ہونا چاہیے جبکہ سطحیں از خود مختلف ہو سکتی ہیں۔ چونکہ یہ مساوات کسی بھی سطح کے لئے درست ہے لہٰذا یہ تفرقی سطح $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کے لئے بھی درست ہے۔ تفرقی سطح کے لئے اسے یوں

$$(\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

یعنی

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.7}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ 2769

مساوات 9.7 میکس ویل کے چار مساواتوں میں سے پہلی مساوات ہے۔ یہ میکس ویل کے پہلی مساوات کی نقطہ شکل ہے۔ اس مساوات کی نقطہ شکل ہی عموماً استعمال ہوتی ہے۔ میکس ویل کے پہلی مساوات کی تکمل شکل مساوات 9.5 بیان کرتی ہے۔ وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی صورت میں مساوات 9.7 اور مساوات 9.5 ساکن میدان کے مساوات کی صورت اختیار کرتے ہیں یعنی

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0 \qquad (\text{برقی سکون}) \tag{9.8}$$

اور

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad (\text{برقی سکون})$$

آئیں مساوات 9.5 اور مساوات 9.7 کو استعمال کر کے دیکھیں۔ تصور کریں کہ $\rho < \rho_2$ نلکی خطے میں وقت کے ساتھ مسلسل بڑھتی

$$\boldsymbol{B} = B_0 e^{kt} \boldsymbol{a}_{\text{z}} \qquad (\rho < \rho_2) \tag{9.9}$$

کثافت مقناطیسی بہاو پائی جاتی ہے جہاں B_0 ایک مستقل ہے۔ ہم $z = 0$ سطح پر ρ_1 رداس کا گول دائرہ لیتے ہیں۔ مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس پورے دائرے پر E_ϕ کی قیمت تبدیل نہیں ہو سکتی للہذا مساوات 9.5 سے

$$\text{محرک برقی دباو} = 2\pi\rho_1 E_\phi = -kB_0 e^{kt} \pi \rho_1^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں کسی بھی رداس پر برقی میدان کی شدت

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{2} k B_0 e^{kt} \rho \boldsymbol{a}_\phi \tag{9.10}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ 2770

آئیں اب یہی جواب مساوات 9.7 سے حاصل کریں۔ چونکہ اس مساوات کے دائیں جانب صرف $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ جزو پایا جاتا ہے للہذا بائیں ہاتھ بھی صرف یہی جزو ہو گا للہذا اس مساوات سے

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho E_\phi)}{\partial \rho} = -kB_0 e^{kt}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ دونوں اطراف کو ρ سے ضرب دیتے ہوئے 0 تا ρ تکمل لے کر

$$\rho E_\phi = -kB_0 e^{kt} \frac{\rho^2}{2}$$

یعنی

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{2} k B_0 e^{kt} \rho \boldsymbol{a}_\phi \tag{9.11}$$

ہی دوبارہ حاصل ہوتا ہے جہاں رداسی تکمل میں t مستقل کا کردار ادا کرتا ہے۔ 2771

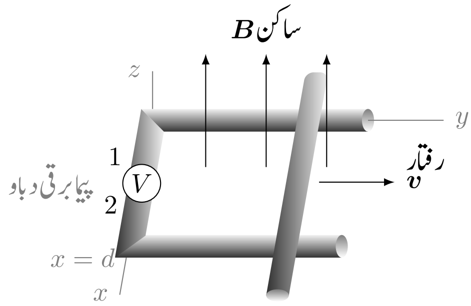
مثبت B_0 کی صورت میں اس دائرے پر $\boldsymbol{a}_\phi$ کی الٹ سمت میں برقی رو گزرے گی جو $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ کی الٹ سمت میں کثافت مقناطیسی بہاو پیدا کرتے ہوئے پہلے سے موجود 2772
مقناطیسی میدان میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ 2773

اس مثال کے آخر میں یہ بتلانا ضروری ہے کہ مساوات 9.9 میں دیا گیا میدان غیر حقیقی ہے چونکہ یہ میکس ویل کے دیگر مساوات پر پورا نہیں اترتا۔ آپ سے 2774
سوال 16.18 میں گزارش کی گئی ہے کہ اس حقیقت کو ثابت کریں۔ 2775

آئیں اب ایسی مثال دیکھیں جس میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے مقناطیسی میدان میں بند دائرہ حرکت کر رہا ہو۔ شکل 9.1 میں ایسی صورت حال دکھائی 2777
گئی ہے۔ اس شکل میں v سمتی رفتار کو ظاہر کرتی ہے جبکہ پیما برقی دباو[9] کو V سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس شکل میں دو افقی اور دو متوازی موصل سلاخ بند دائرہ یا بند دور
بناتے ہیں۔ متوازی افقی سلاخوں کو بائیں طرف عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے جس میں قابل نظر انداز جسامت اور لا محدود مزاحمت والا پیما برقی دباو نسب ہے جبکہ 2778
دائیں جانب انہیں v سمتی رفتار سے حرکت کرتے عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے۔ وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتا اور ہر جگہ یکساں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ بند دائرے 2779
کی گھیرے سطح کے عمودی ہے۔ 2780

---

[9] voltmeter



شکل 9.1: وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے یکساں مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے موصل سلاخ پر محرک برقی دباو پیدا ہوتی ہے۔

مثبت $\boldsymbol{B}$ کی صورت میں $\boldsymbol{B}$ کی سمت ہی بند دائرے سے گھیری گئی سطح کی سمت ہو گی اور بند دائرے کی سمت گھڑی کے الٹ ہو گی۔ یوں دائرے کے مثبت سمت میں دائیں ہاتھ کی انگلیاں رکھتے ہوئے گھیری سطح کی سمت انگوٹھے سے حاصل کی جاتی ہے۔

کسی بھی لمحہ t پر حرکت کرتے سلاخ کے مقام کو y سے ظاہر کرتے ہوئے ہم $y = vt$ لکھ سکتے ہیں جہاں v سلاخ کے رفتار کی قیمت ہے۔ یوں لمحہ t پر بند دور کا ارتباط بہاو

$$\Phi = Bdy = Bdvt$$

ہو گا جو مساوات 9.1 کے تحت بند دور میں

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -Bdv$$

محرک برقی دباو e پیدا کرے گا۔

اب محرک برقی دباو $\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو کہتے ہیں لہٰذا مندرجہ بالا جواب دائرے پر گھڑی کے الٹ سمت میں اس بند لکیری تکمل سے بھی حاصل ہونا چاہیے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ برقی سکون کی صورت میں موصل کی سطح پر سطح کے متوازی E صفر رہتی ہے۔ ہم آگے دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان میں بھی موصل کی سطح پر متوازی E صفر ہی رہتی ہے۔ یوں شکل 9.1 پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تمام سلاخوں پر تکمل کی قیمت صفر کے برابر ہو گی۔ پیما برقی دباو کی مزاحمت صفر نہیں ہے لہٰذا تکمل کی قیمت پیما برقی دباو پر مندرجہ بالا قیمت کے برابر ہونا ہو گا۔ گھڑی کی الٹ سمت چلتے ہوئے پیما برقی دباو کی لمبائی کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -Bdv$ ہونا ہو گا۔ چونکہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}L\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کے برابر ہے لہٰذا $\boldsymbol{E}$ کی سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کے الٹ ہو گی۔ یوں پیما برقی دباو پر $\boldsymbol{E}$ کی سمت پیما کے دوسرے سرے سے پہلے سرے کی جانب ہے اور پیما پر برقی دباو کا مثبت سرا پیما کا دوسرا سرا ہے۔

پیما کی جگہ مزاحمت جوڑنے سے دور میں گھڑی کے الٹ برقی رو گزرے گی جو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے الٹ سمت میں مقناطیسی بہاو پیدا کرے گی۔ یہ لورنز کے قانون کے عین مطابق ہے۔

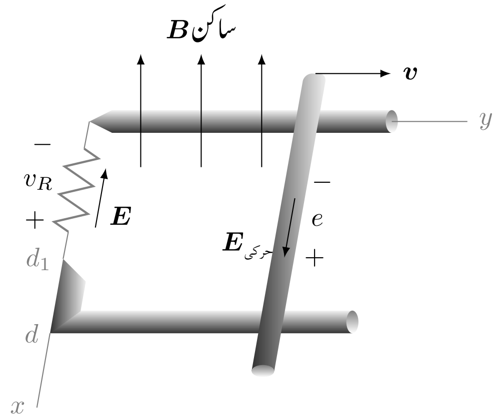
آئیں اب اسی شکل میں دئے مسئلے کو حرکی برقی دباو تصور کرتے ہوئے حل کریں۔ مقناطیسی میدان میں $\boldsymbol{v}$ سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہوئے چارج Q پر قوت

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

یا حرکی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$

$$\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{9.12}$$

عمل کرتی ہے۔ حرکی شدت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ سمت میں ہے۔ حرکت کرتے سلاخ میں ساکن مثبت ایٹم اور آزاد منفی الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ ان تمام چارجوں پر ایسی قوت پائی جائے گی البتہ ساکن ایٹم مقید ہونے کی بنا حرکت نہیں کریں گے۔ اگر محرک سلاخ کو متوازی سلاخوں سے اٹھایا جائے تو اس میں آزاد الیکٹران پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کے الٹ جانب



شکل 9.2: محرک برقی دباو اور برقی دباو کا موازنہ۔

قوت انہیں سلاخ کے پرلے سرے پر انبار کرنا شروع کردے گی۔ الیکٹرانوں کا انبار سلاخ میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-$ جانب برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{ساکن}}$ پیدا کرے گا۔ الیکٹران 2794
کا انبار بڑھتا رہے گا حتیٰ کہ $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$ اور $\boldsymbol{E}_{\text{ساکن}}$ برابر ہو جائیں۔ ایسا ہوتے ہی سلاخ میں کل برقی میدان کی شدت صفر ہو جائے گی اور اس میں چارج کا حرکت رک جائے 2795
گا۔ 2796

یوں حرکی برقی دباو

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.13}$$

سے حاصل ہو گی۔ مساوات کے دائیں ہاتھ بند دائرے کے ساکن حصوں پر تکمل کی قیمت صفر ہو گی لہٰذا محرک برقی دباو صرف حرکت کرتے حصوں کی وجہ سے پیدا ہو گی۔ یوں حرکت کرتے سلاخ پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تکمل سے

$$\oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_d^0 vB \,\mathrm{d}x = -Bvd$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $\boldsymbol{B}$ از خود وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو رہا لہٰذا یہی کل محرک برقی دباو ہو گا۔ 2797

یوں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے بند دائرے میں محرک برقی دباو حاصل کرتے وقت حرکت کرتے حصوں پر حرکی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$ کے استعمال سے محرک برقی دباو یوں

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \oint \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.14}$$

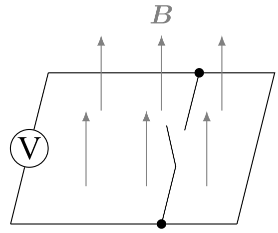
حاصل کی جا سکتی ہے۔ البتہ وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان میں محرک برقی دباو کے حصول میں مساوات 9.5 کا حصہ شامل کرنا ضروری ہے یوں محرک برقی دباو

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.15}$$

سے حاصل ہو گی۔ یہ مساوات دراصل مساوات 9.1

$$\text{محرک برقی دباو} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

ہی ہے۔ 2798



شکل 9.3: محرک برقی دباو یا تا وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان اور یا حرکت کرتے بند دائرے سے ہی پیدا ہو سکتی ہے۔

آئیں شکل 9.1 میں پیما برقی دباو کی جگہ مزاحمت نسب کرتے ہوئے اس کی مدد سے مساوات 9.3 جو محرک برقی دباو کی تعریف بیان کرتا ہے پر دوبارہ غور کریں۔ نئی شکل کو شکل 9.2 میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 9.12 محرک سلاخ پر پیدا $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$ دیتا ہے جو سلاخ میں مثبت چارج کو سلاخ کے اُرلے سرے کی طرف دھکیلے گا۔ اس کے برعکس مزاحمت پر برقی دباو v_R پایا جاتا ہے جس کی وجہ سے اس میں برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ پائی جائے گی جو مزاحمت میں مثبت چارج کو مزاحمت کے پہلے سرے کی جانب دھکیلے گی۔

آپ شکل کو دیکھ کر تسلی کر لیں کہ مزاحمت پر میدان کی شدت $\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ سے برقی دباو v_R یوں

$$v_R = -\int_0^{d_1} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^{d_1} E \,\mathrm{d}x = Ed_1 \tag{9.16}$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ متحرک سلاخ پر حرکی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} = E_{\text{حرکی}}\boldsymbol{a}_{\text{X}}$ سے حرکی دباو e یوں

$$e = \oint \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^{d} \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^{d} E_{\text{حرکی}} \,\mathrm{d}x = E_{\text{حرکی}} d \tag{9.17}$$

حاصل ہوتی ہے۔ شکل میں دو افقی موصل سلاخوں کے مابین برقی دباو کو سلاخوں کے بائیں سروں پر v_R جبکہ ان کے دائیں سروں پر e کہا گیا ہے لہٰذا v_R اور e دونوں مثبت اور برابر قیمت رکھتے ہیں۔ یہاں ضرورت اس بات کی ہے کہ آپ دیکھ سکیں کہ v_R کی مثبت قیمت حاصل کرنے کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں منفی کی علامت استعمال کی جائے جبکہ e کے مثبت قیمت کے حصول کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں جمع کی علامت استعمال کی جائے۔ حرکی دباو کے بند تکمل میں دائرے کے بقایا اطراف پر تکمل کی قیمت صفر ہونے کے ناطے صرف متحرک سلاخ پر تکمل لیا گیا ہے۔

اگرچہ مساوات 9.1 انتہائی سادہ شکل رکھتی ہے لیکن اس کا استعمال کبھی کبھار مشکل ہو جاتا ہے۔ ایسا اس وقت ہوتا ہے جب دور کے کسی حصے کو تبدیل کرتے ہوئے دوسرا حصہ نسب کیا جائے۔ یہ بات شکل 9.3 پر غور کرنے سے بہتر سمجھ آئے گی۔ اس شکل میں نا تو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا مقناطیسی میدان ہے اور نا ہی بند دائرے کا کوئی حصہ متحرک ہے۔ البتہ شکل میں دکھائے سوئچ کو چالو یا غیر چالو کرتے ہوئے بند دائرے میں مقناطیسی بہاو کم اور زیادہ کیا جا سکتا ہے۔ یہاں بغیر سوچے مساوات 9.1 استعمال کرتے ہوئے غلط نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ یاد رہے کہ برقی دباو یا تو وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان اور یا پھر بند دائرے کے کسی حصے کے حرکت سے ہی پیدا ہو گا۔

مشق 9.1: خطہ $\rho < 4\,\text{cm}$ میں میدان $\boldsymbol{B} = \frac{2\cos 1000t\boldsymbol{a}_{\text{z}}}{5+\rho^2}\,\text{T}$ پایا جاتا ہے۔ الف) سطح $z = 1.5\,\text{cm}$ ، $\rho < 2\,\text{cm}$ سے گزرتی مقناطیسی بہاو حاصل کریں۔ ب) نقطہ $N(0.02, 10°, 3)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ پ) سطح $z = 0$ پر رداس $\rho = 2\,\text{cm}$ اور مزاحمت $4\,\frac{\Omega}{\text{cm}}$ کی موصل تار کا دائرہ پایا جاتا ہے۔ اس تار میں برقی رو حاصل کریں۔

جوابات: $502.6\cos 1000t\,\mu\text{Wb}$ ، $4\sin 1000t\boldsymbol{a}_{\phi}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $10\sin 1000t\,\text{mA}$

مشق 9.2: شکل 9.3 میں $\boldsymbol{B} = 0.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ٹسلا، رفتار $100y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ میٹر فی سیکنڈ جبکہ $d = 0.5$ میٹر ہے۔ اگر $t = 0$ پر $y = 0.2$ میٹر ہو تب $t = 15$ ملی سیکنڈ پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- سلاخ کی رفتار،
- محرک برقی دباو V_{21}،
- پیما برقی دباو کی اندرونی مزاحمت دس میگا اوہم کی صورت میں دور میں برقی رو۔

جوابات: $4.017\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$، $100\,\mathrm{V}$، $10\,\mu\mathrm{A}$

9.2 انتقالی برقی رو

فیراڈے کے تجرباتی نتیجے سے میکس ویل کی پہلی مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.18}$$

حاصل ہوئی جو کہتا ہے کہ بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے برقی دباو۔ گردش کے عمل کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں ایسے پیدا کردہ برقی دباو کا بند لکیری تکمل صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ آئیں اب وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر غور کریں۔

ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{9.19}$$

ساکن مقناطیسی میدان پر لاگو ہوتی ہے۔ اس مساوات کی پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = 0 = \nabla \cdot \boldsymbol{J}$$

لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ گردش کی پھیلاو ہر صورت صفر کے برابر ہوتی ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کا بایاں ہاتھ ہر صورت صفر دے گا اور یوں اگر یہ مساوات درست ہو تب اس کا دایاں ہاتھ بھی ہر صورت صفر ہونا چاہیے۔ مگر ہم استمراری مساوات سے جانتے ہیں کہ

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{9.20}$$

ہوتا ہے۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 9.19 صرف اس صورت درست ہو گا جب $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ہو۔ یہ ایک غیر ضروری اور غیر حقیقی شرط ہے لہٰذا وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر استعمال کے قابل بنانے کی خاطر مساوات 9.19 کو تبدیل کرنا لازم ہے۔ تصور کریں کہ مساوات 9.19 میں نامعلوم جزو $\boldsymbol{G}$ کی شمولیت سے یہ مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر بھی لاگو کرنے کے قابل ہو جاتا ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 9.19 یوں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{G}$$

لکھی جائے گی۔آئیں دوبارہ اس کی پھیلاو حاصل کریں جس سے

$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \nabla \cdot \boldsymbol{G}$$

یا

$$\nabla \cdot \boldsymbol{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں استمراری مساوات کا سہارا لیا گیا۔اس مساوات میں ρ کی جگہ $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{G} = \frac{\partial \left(\nabla \cdot \boldsymbol{D}\right)}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

یعنی

$$\boldsymbol{G} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی درست شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{9.21}$$

ہے۔مندرجہ بالا مساوات برقی و مقناطیسیات کے اب تک تمام دریافت کردہ اصولوں پر پورا اترتی آئی ہے۔جب تک یہ غلط ثابت نہ ہو جائے، ہم اسے درست ہی
2830 تصور کریں گے۔

مساوات 9.21 میکس ویل کے مساوات میں سے ایک مساوات ہے۔اس مساوات میں $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ کی بُعد ایمپیئر فی مربع میٹر حاصل ہوتی ہے جو کثافت برقی رو کا بُعد ہے۔میکس ویل نے اس مساوات میں دائیں ہاتھ نئے جزو کو کثافت انتقالی رو[10] کا نام دیا اور $\boldsymbol{J}_d$ سے ظاہر کیا یعنی

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_d \\ \boldsymbol{J}_d &= \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{aligned} \tag{9.22}$$

ہم تین اقسام کے کثافت رو دیکھ چکے جن میں کثافت انتقالی رو کے علاوہ غیر چارج شدہ خطے میں عموماً الیکٹران کے حرکت سے پیدا کثافت ایصالی رو

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{9.23}$$

اور چارج کے حجم کے حرکت سے پیدا کثافت اتصالی رو

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{9.24}$$

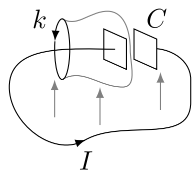
شامل ہیں۔مساوات 9.21 میں $\boldsymbol{J}$ سے مراد ایصالی اور اتصالی رو کے کثافتوں کا مجموعہ ہے جبکہ مقید چارج $\boldsymbol{H}$ کا حصہ ہیں۔غیر موصل خطے میں جہاں کثافت چارج پائی ہی نہیں جاتی $\boldsymbol{J} = 0$ ہوتا ہے لہٰذا غیر موصل میں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (\boldsymbol{J} = 0) \tag{9.25}$$

ہو گا۔مساوات 9.25 اور مساوات 9.18 میں مشابہت دیکھیں۔

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

[10] displacement current density



شکل 9.4: موصل تار میں ایصالی رو کپیسٹر کے چادروں کے درمیان انتقالی رو کے برابر ہے۔

مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ اور برقی شدت $\boldsymbol{E}$ کافی مشابہت رکھتے ہیں۔اسی طرح کثافت رو $\boldsymbol{D}$ اور کثافت بہاو $\boldsymbol{B}$ بھی کافی مشابہت رکھتے ہیں۔اس مشابہت کو یہیں تک رکھیں چونکہ جیسے ہی میدان میں چارج پر قوت کی بات کی جائے، دونوں اقسام کے میدان بالکل مختلف طریقوں سے عمل کرتے ہیں۔ 2832

کسی بھی سطح سے کل انتقالی رو سطحی تکمل

$$I_d = \int_S \boldsymbol{J}_d \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.26}$$

سے حاصل ہو گی۔مساوات 9.21 کے سطحی تکمل

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.27}$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل حاصل ہوتی ہے۔ 2833

انتقالی رو کو شکل 9.4 کی مدد سے سمجھتے ہیں جہاں موصل تار سے کپیسٹر C کے دوسرے جوڑتے ہوئے بند دور بنایا گیا ہے جس میں وقت کے ساتھ بدلتی سائن نما مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ محرک برقی دباو

$$e = V_0 \cos \omega t$$

پیدا کرتی ہے۔یہ سادہ برقی دور ہے جس میں مزاحمت اور امالہ کو نظر انداز کرتے ہوئے برقی رو

$$\begin{aligned} i &= -\omega C V_0 \sin \omega t \\ &= -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں ϵ، S اور d کپیسٹر سے متعلق ہیں۔آئیں انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے تار کے گرد بند دائرے k پر ایمپیئر کا دوری قانون لاگو کریں۔

$$\oint_k \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I_k$$

اب بند دائرہ k اور اس دائرے پر $\boldsymbol{H}$ حقیقی مقدار ہیں اور تکمل سے حاصل رو I_k اس دائرے سے گھیرے کسی بھی سطح سے گزرتی رو کو ظاہر کرتی ہے۔اگر ہم k کو سیدھی سطح کا سرحد تصور کریں تب موصل تار اس سطح کو چھیدتا ہوا گزرے گا۔یوں اس سطح سے I رو ہی گزرے گی جو ایصالی رو ہے۔اس کے برعکس اگر ہم k کو تھیلے کا منہ تصور کریں جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے تب ایصالی رو ایسی سطح سے نہیں گزرتی چونکہ تھیلا کپیسٹر کے دو چادروں کے درمیان سے گزرتا ہے اور تار اسے چھوتی تک نہیں۔ایسی صورت میں تھیلے سے گزرتی ایصالی رو صفر کے برابر ہے۔ایسی صورت میں ہمیں انتقالی رو کا سہارا لینا ہو گا۔کپیسٹر کے چادروں کے درمیان

$$D = \epsilon E = \epsilon \left(\frac{V_0}{d} \cos \omega t \right)$$

ہے لہٰذا

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = -\omega\epsilon \frac{V_0}{d} \sin\omega t$$

اور یوں

$$I_d = SJ_d = -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin\omega t$$

ہو گی۔

یہ وہی جواب ہے جو ایصالی رو سے حاصل ہوا تھا۔اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایمپیئر کے دوری قانون کو استعمال کرتے ہوئے سطح سے گزرتی ایصالی رو اور انتقالی رو دونوں کا خیال رکھنا ہو گا۔ کہیں پر سطح سے صرف ایصالی رو گزرے گی تو کہیں اس سے صرف انتقالی رو گزرے گی اور کبھی کبھار دونوں کا مجموعہ۔

انتقالی رو وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا ہوتے ہیں لہٰذا یہ ایسے تمام غیر موصل یا نیم موصل خطوں میں پائی جاتی ہے جہاں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ایصالی رو پائی جائے۔اگرچہ موصل خطے میں بھی انتقالی رو پائی جاتی ہے لیکن، جیسے آپ مندرجہ ذیل مشق میں دیکھیں گے،اس کی قیمت ایصالی رو کی نسبت اتنی کم ہوتی ہے کہ یہ قابل نظر انداز ہوتی ہے۔یہی وجہ ہے کہ انتقالی رو تجرباتی طور دریافت نہیں کی گئی بلکہ اس تک منطق کے ذریعہ سے پہنچا گیا۔

مثال 9.1: ایک خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\mu_R = 2.5$ اور $\epsilon_R = 1.2$ ہیں۔اس میں کثافت انتقالی برقی رو $\boldsymbol{J}_d = 10\cos(2\times 10^8 t - kx)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\ \frac{\mathrm{\mu A}}{\mathrm{m^2}}$ ہے۔الف) $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ب) فیراڈے کے قانون کی نقطہ شکل اور تکمل کے استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔پ) مساوات 9.22 استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{J}_d$ حاصل کریں۔ت) حاصل $\boldsymbol{J}_d$ اور سوال میں دیے گئے $\boldsymbol{J}_d$ کا آپس میں موازنہ کرتے ہوئے k کی مثبت قیمت حاصل کریں۔

حل: الف) چونکہ $\boldsymbol{J}_d = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ کے برابر ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{D} = \int \boldsymbol{J}_d \,\mathrm{d}t = 5\times 10^{-14}\sin(2\times 10^8 t - kx)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + M \quad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔ساکن میدان صفر ہونے کی صورت میں تکمل کا مستقل $M = 0$ ہو گا۔یوں

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\epsilon_R \epsilon_0} = 4.7\times 10^{-3}\sin(2\times 10^8 t - kx)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

ہو گا۔

ب) فیراڈے کے قانون سے

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -4.70587111\times 10^{-3} k\cos(2\times 10^8 t - kx)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

لکھتے ہوئے تکمل لے کر

$$\boldsymbol{B} = \int 4.70587111\times 10^{-3} k\cos(2\times 10^8 t - kx)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\mathrm{d}t = 2.3529\times 10^{-11} k\sin(2\times 10^8 t - kx)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_R \mu_0} = 7.4896\times 10^{-6} k\sin(2\times 10^8 t - kx)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

2845 لکھا جا سکتا ہے۔

پ) چونکہ $\sigma = 0$ ہے لہٰذا کثافت ایصالی برقی رو صفر ہو گی۔ یوں مساوات 9.22 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 7.4896 \times 10^{-6} k^2 \cos(2 \times 10^8 t - kx)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2} = \boldsymbol{J}_d$$

ت) حاصل کردہ اور سوال میں دیا گیا $\boldsymbol{J}_d$ برابر پر کرتے ہوئے

$$k = \sqrt{\frac{10 \times 10^{-6}}{7.4896 \times 10^{-6}}} = 1.155\,\mathrm{m}^{-1}$$

2846 حاصل ہوتا ہے۔

2847

2848

2849 مثال 9.2: رداس a اور b کے موصل ہم محوری کرہ، جہاں $b > a$ ہے، کو برقی دباو $v = V_0 \cos \omega t$ مہیا کی جاتی ہے۔ دونوں کرہ کے درمیانی
2850 خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\epsilon_R = 1$ اور $\mu_R = 1$ ہیں۔ بیرونی کرہ کو برقی زمین تصور کریں۔ الف) کرہ کپیسٹر کو مہیا برقی رو حاصل کریں۔ ب) دونوں
2851 کرہ کے مابین انتقالی برقی رو حاصل کریں۔ پ) کیا بیرون کپیسٹر ایصالی برقی رو اور اندرون کپیسٹر انتقالی برقی رو برابر ہیں؟

حل: الف) صفحہ 153 پر مساوات 5.60 کرہ کپیسٹر کی کپیسٹنس دیتی ہے جس سے مہیا کردہ ایصالی برقی رو یوں

$$I = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{4\pi\epsilon\omega V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \sin \omega t$$

2852 حاصل کی جا سکتی ہے۔

ب) صفحہ 179 پر مساوات 6.24 استعمال کرتے ہوئے دونوں کرہ کے درمیان خطے میں برقی دباو کو

$$V = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} V_0 \cos \omega t$$

لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = \frac{V_0 \cos \omega t}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} = \frac{\epsilon V_0 \cos \omega t}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے کثافت انتقالی برقی رو

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = -\frac{\omega\epsilon V_0 \sin \omega t}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

لکھی جا سکتی ہے۔یوں انتقالی برقی رو

$$I_d = 4\pi r^2 J_d = -\frac{4\pi\omega\epsilon V_0 \sin\omega t}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

ہو گی۔

پ) بیرون کپیسٹر ایصالی برقی رو اور اندرون کپیسٹر انتقالی برقی رو برابر ہیں۔

مشق 9.3: ٹھوس تانبے کی تار میں سائن نما، پچاس ہرٹز کی ایصالی رو $I_0 \cos\omega t$ گزر رہی ہے۔اس میں انتقالی رو حاصل کریں۔پچاس ہرٹز رو کی صورت میں ایصالی اور انتقالی رو کے موثر قیمت کی شرح حاصل کریں۔

حل: $I_d = -\frac{\omega\epsilon_0}{\sigma} I_0 \sin\omega t$ جبکہ ان کے موثر قیمت کی شرح $\frac{I}{I_d} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} = 2.08\times10^{16}$ ہے۔

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل

ہم وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں میں میکس ویل کے دو مساوات کے نقطہ اشکال

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.28}$$

اور

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{9.29}$$

حاصل کر چکے ہیں۔میکس ویل کے بقایا دو مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی جوں کے توں

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_h \tag{9.30}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{9.31}$$

رہتے ہیں۔

مساوات 9.30 کہتا ہے کہ کثافت برقی رو کا منبع کثافت چارج ہے۔وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان میں برقی میدان پیدا ہوتا ہے جو بند دائرے پر چلتا ہے۔ایسے برقی میدان کا نا تو کسی چارج سے اخراج ہوتا ہے اور نا ہی یہ کسی چارج پر ختم ہوتا ہے۔اس کے برعکس ہر مثبت چارج سے اس کے برابر برقی بہاو کا اخراج ہوتا ہے اور ہر منفی چارج پر اس کے برابر برقی بہاو کا اختتام ہوتا ہے۔

مساوات 9.31 کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے سے کل مقناطیسی بہاو کا اخراج صفر ہے یعنی مقناطیسی بہاو نا تو کسی نقطے سے خارج ہوتا ہے اور نا ہی یہ کسی نقطے پر اختتام پذیر ہوتا ہے۔سادہ زبان میں اس کا مطلب ہے کہ مقناطیس کا یک قطب ممکن نہیں جس سے مقناطیسی بہاو کا اخراج ہو یا اس پر مقناطیسی بہاو اختتام ہو۔

مندرجہ بالا چار مساوات پر برقی و مقناطیسیات کی بنیاد کھڑی ہے جنہیں استعمال کرنے کی خاطر چار معاون مساوات

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{9.32}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{9.33}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{9.34}$$

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{9.35}$$

بھی درکار ہوتے ہیں۔

ایسے ذو برق اور مقناطیسی اشیاء جن میں متغیرات سادہ تعلق نہ رکھتے ہوں، ان میں مساوات 9.32 اور مساوات 9.33 کی جگہ

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{9.36}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}\right) \tag{9.37}$$

استعمال ہوتے ہیں۔ خطی اشیاء میں

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \boldsymbol{E} \tag{9.38}$$

اور

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{9.39}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آخر میں لورنز قوت کی مساوات

$$\boldsymbol{F} = \rho_h \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{9.40}$$

بھی شامل کرتے ہیں۔

غیر سمتی مقناطیسی دباو V اور سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ انتہائی اہم ہیں البتہ ان کی شمولیت لازم نہیں۔

مثال 9.3: ایک خطے میں $\rho_h = 0$ ہے۔ اگر اس خطے میں $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ ہو تب خطے کی برقی مستقل ϵ پر کیا شرط لاگو ہوتی ہے۔

حل: مساوات 9.30 کے تحت $\rho_h = 0$ کی صورت میں $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$ ہو گا۔ یوں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \nabla \cdot (\epsilon \boldsymbol{E}) == \boldsymbol{E} \cdot \nabla \epsilon + \epsilon \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

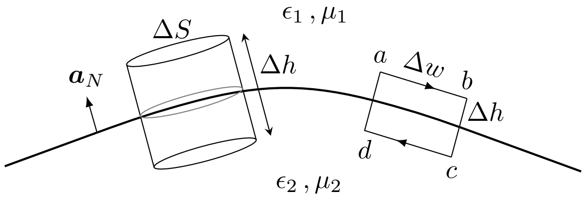
یا

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ اس صورت ہو گا اگر $\nabla \epsilon = 0$ ہو۔

مشق 9.4: ایک خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\epsilon_R = 2.5$ اور $\mu_R = 10$ ہیں۔ کیا اس خطے میں میدان $\boldsymbol{D} = (z + 6 \times 10^7 t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{B} = (-754z - 4.52 \times 10^{10} t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی جوڑی میکس ویل کے مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

جواب: چونکہ برقی میدان سے حاصل $\nabla \times \boldsymbol{E}$ مقناطیسی میدان سے حاصل $-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ کے برابر ہے اور اسی طرح مقناطیسی میدان سے حاصل $\nabla \times \boldsymbol{H}$ مقناطیسی میدان سے حاصل $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ کے برابر ہے لہٰذا یہ جوڑی میکس ویل کے مساوات پر پورا اترتی ہے۔



شکل 9.5: وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط۔

9.4 میکس ویل مساوات کی تکمل شکل 2881

مساوات 9.28 کے سطحی تکمل پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے فیراڈے کے قانون کو

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح مساوات 9.29 سے ایمپیئر کے دوری قانون کی تکمل صورت

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.42}$$

حاصل ہوتی ہے۔ 2882

برقی اور مقناطیسی میدان کے تکمل اشکال، گاؤس کے قوانین مساوات 9.30 اور مساوات 9.31 کے حجمی تکمل اور مسئلہ پھیلاو کی مدد سے یوں لکھے جا سکتے ہیں۔

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{9.43}$$

اور

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{9.44}$$

مندرجہ بالا چار مساوات سے $\boldsymbol{E}$، $\boldsymbol{H}$، $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے سرحدی شرائط حاصل ہوتے ہیں جن سے میکس ویل کے جزوی تفرقی مساوات کے مستقل حاصل کئے 2883
جاتے ہیں۔وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کے سرحدی شرائط عموماً ساکن میدان کے سرحدی شرائط ہی ہوتے ہیں لہٰذا ساکن میدان کے طریقہ کار سے وقت 2884
کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط بھی حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ 2885

آئیں شکل 9.5 کی مدد سے سرحد کے متوازی برقی اور مقناطیسی شرائط حاصل کریں۔ شکل میں مستطیل دائرے پر مساوات 9.41 کے اطلاق سے

$$\left(E_{m1} - E_{m2}\right) \Delta w = -\frac{\partial B_n}{\partial t} \Delta w \Delta h$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\frac{\partial B_n}{\partial t}$ سے مراد دائرے کے گھیرے سطح سے گزرتی مجموعی میدان کی تبدیلی ہے جس کا کچھ حصہ خطہ 1 اور کچھ حصہ خطہ 2 سے گزرتا ہے۔اس مساوات کے دائیں ہاتھ کی قیمت $\Delta h \to 0$ کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کی جا سکتی ہے۔ایسی صورت میں دائیں ہاتھ کو صفر ہی تصور کرتے ہوئے

$$E_{m1} = E_{m2} \tag{9.45}$$

یعنی

$$\boldsymbol{a}_N \times \left(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2\right) = 0 \tag{9.46}$$

حاصل ہوتا ہے۔ 2886

سرحد پر انتہائی کم موٹائی کے خطے میں کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ تصور کرتے ہوئے کسی بھی چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر برقی رو کو $I = \boldsymbol{K}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں شکل 9.5 میں مستطیل دائرے پر مساوات 9.42 کے اطلاق سے

$$(H_{m1} - H_{m2})\,\Delta w = K_{\perp}\Delta w + \frac{\partial D}{\partial t}\Delta w \Delta h$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $K_{\perp}$ سے مراد K کا وہ حصہ ہے جو H_{m1} اور H_{m2} کے عمودی ہے۔ دائیں ہاتھ دوسرے جزو کی قیمت $\Delta h \to 0$ کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کی جا سکتی ہے لہٰذا اس جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$H_{m1} - H_{m2} = K_{\perp} \tag{9.47}$$

حاصل ہوتا ہے جسے یوں

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{K}_{\perp} \tag{9.48}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ 2887

کسی بھی حقیقی دو مختلف اشیاء کے سرحد، مثلاً سمندر کے پانی اور ہوا کے سرحد یا ہوا اور دیوار کے سرحد، پر کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ صفر ہوتی ہے۔ لہٰذا حقیقی مسائل میں $K = 0$ کی بنا پر

$$H_{m1} = H_{m2} \tag{9.49}$$

ہو گا۔ صفحہ 266 پر شکل 8.9 میں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ دکھائی گئی ہے جبکہ یہاں شکل 9.5 میں اسے صفر تصور کرتے ہوئے نہیں دکھایا گیا۔ 2888

مساوات 9.43 اور مساوات 9.44 سے سرحدی عمودی شرائط

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S \tag{9.50}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0 \tag{9.51}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ 2889

موصل کو ایسا کامل موصل تصور کرتے ہوئے جس کی موصلیت لامحدود مگر $\boldsymbol{J}$ محدود ہو سے موصل کے اندر اوہم کے قانون سے

$$\boldsymbol{E} = 0 \tag{9.52}$$

اور یوں فیراڈے کے قانون کی نقطہ شکل سے، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کی صورت میں

$$\boldsymbol{H} = 0 \tag{9.53}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اس طرح ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل سے محدود $\boldsymbol{J}$ کی قیمت

$$\boldsymbol{J} = 0 \tag{9.54}$$

حاصل ہوتی ہے لہٰذا برقی رو صرف موصل کی سطح پر بطور سطحی کثافت رو $\boldsymbol{K}$ ممکن ہے۔ یوں اگر خطہ 2 کامل موصل ہو تب مساوات 9.45 تا مساوات 9.51 سے

$$E_{m1} = 0 \tag{9.55}$$

$$H_{m1} = 0 \tag{9.56}$$

$$D_{n1} = \rho_S \tag{9.57}$$

$$B_{n1} = 0 \tag{9.58}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یاد رہے کہ سطحی کثافت چارج کی موجودگی ذو برق، کامل موصل اور غیر کامل موصل تمام پر ممکن ہے جبکہ سطحی کثافت رو $\boldsymbol{K}$ صرف کامل موصل کی صورت میں ممکن ہے۔

مندرجہ بالا سرحدی شرائط میکس ویل کے مساوات کے حل کے لئے لازم ہیں۔ حقیقت میں پیش آنے والے تمام مسائل میں مختلف اشیاء کے سرحدیں پائی جاتی ہیں اور ایسے ہر سرحد کے دونوں اطراف پر مختلف متغیرات کے تعلق سرحدی شرائط سے ہی حاصل کرنا ممکن ہے۔ کامل موصل کی صورت میں موصل کے اندر، وقت کے ساتھ بدلتے، تمام متغیرات صفر ہوتے ہیں البتہ ایسی صورت میں مساوات 9.55 تا مساوات 9.58 میں دئے شرائط کا اطلاق نہایت مشکل ہوتا ہے۔

لامحدود خطے کو بے سرحد خطہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ سرحد کی غیر موجودگی میں متحرک لہروں کے چند بنیادی خاصیت لہر کی حرکت پر غور سے واضح ہوتے ہیں۔ اگلا باب انہیں متحرک لہروں پر ہے۔ چونکہ لامحدود خطے میں سرحد نہیں پایا جاتا للہذا سرحدی شرائط کی ضرورت نہیں پڑتی۔ اسی وجہ سے لامحدود خطے میں میکس ویل مساوات کا حل نہایت آسان ہوتا ہے۔

مثال 9.4: موصل سطح پر نقطہ $N(2,3-1)$ پایا جاتا ہے جہاں میدان $\boldsymbol{E}=(15\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+6\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\cos 10^6 t\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ موصل سطح کے گرد خطے کے مستقل $\mu_R=2.2$ ، $\epsilon_R=1.6$ اور $\sigma=0$ ہیں۔ الف) نقطہ N پر موصل سطح کی عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_N$ حاصل کریں۔ ب) اس نقطے پر کثافت چارج حاصل کریں۔

حل: الف) چونکہ نقطہ N پر برقی میدان دیا گیا ہے اور موصل سطح پر برقی میدان سطح کے عمودی ہوتا ہے للہذا عمودی سمتیہ $\boldsymbol{E}$ کے سمت میں ہی ہو گا۔ یوں لمحہ $t=0$ پر میدان کی قیمت استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{a}_N$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a}_N=\frac{\boldsymbol{E}_{t=0}}{|\boldsymbol{E}_{t=0}|}=\frac{15\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+6\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{15^2+20^2+6^2}}=0.58\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-0.78\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.23\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

ب) موصل سطح پر عمودی میدان اور کثافت چارج کے تعلق سے

$$\begin{aligned}\rho_S=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{a}_N&=1.6\epsilon_0(15\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+6\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\cos 10^6 t\cdot(0.58\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-0.78\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.23\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\\&=1.138\cos(10^6 t)\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9.5: خطہ-1 کے مستقل $\sigma_1=0$ ، $\epsilon_{R1}=5.2$ اور $\mu_{R1}=6$ ہیں جبکہ خطہ-2 کے مستقل $\sigma_2=0$ ، $\epsilon_{R2}=1.5$ اور $\mu_{R2}=2.2$ ہیں۔ ان کے سرحد پر کوئی کثافت چارج نہیں پایا جاتا۔ سمتیہ $10\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+15\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ خطہ-2 سے خطہ-1 کی جانب ہے۔ خطہ الف میں سرحد کے قریب نقطہ N پر میدان $\boldsymbol{E}_1=(100\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-50\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+80\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\cos 3600t\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ الف) اسی نقطے کے قریب E_{t1} ، E_{n2} اور E_2 حاصل کریں۔

جوابات: $41.8\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $454\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $456\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

مثال 9.6: $z < 0$ خطہ-1 ہے جہاں $\epsilon_1 = 1.5 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ ، $\mu_1 = 2.2 \times 10^{-6}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$ اور $\sigma_1 = 6 \times 10^{-3}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ خطہ-2 جو $z > 0$ پر پایا جاتا ہے میں $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$ ، $\mu_2 = \frac{\mu_1}{2}$ اور $\sigma_2 = 4\sigma_1$ ہیں۔ نقطہ $N(0,0,0^-)$ سرحد پر خطہ-1 میں پایا جاتا ہے جہاں میدان $\boldsymbol{E}_1 = (30\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 10\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cos 10^9 t\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ الف) اس نقطے پر $\boldsymbol{E}_{n1}$ ، $\boldsymbol{E}_{m1}$ ، $\boldsymbol{D}_{n1}$ اور $\boldsymbol{D}_{m1}$ حاصل کریں۔ ب) اس نقطے پر $\boldsymbol{J}_{n1}$ اور $\boldsymbol{J}_{m1}$ حاصل کریں۔ پ) اسی نقطے پر $\boldsymbol{E}_{m2}$ ، $\boldsymbol{D}_{m2}$ اور $\boldsymbol{J}_{m2}$ حاصل کریں۔ ت) استمراری مساوات کی مدد سے $J_{n1} - J_{n2} = -\frac{\partial D_{n1}}{\partial t} + \frac{\partial D_{n2}}{\partial t}$ لکھتے ہوئے D_{n2} ، J_{n2} اور E_{n2} حاصل کریں۔

حل: الف) خطہ-1 سے خطہ-2 جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے۔ یوں

$$E_{n1} = \boldsymbol{a}_N \cdot \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot [30\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 10\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}] \cos(10^9 t) = 10\cos(10^9 t)$$

ہو گا جس سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{n1} &= E_{n1}\boldsymbol{a}_N = 10\cos(10^9 t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{E}_{m1} &= \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_{n1} = [30\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}] \cos(10^9 t) \\
\boldsymbol{D}_{n1} &= \epsilon_1 \boldsymbol{E}_{n1} = 1.5 \times 10^{-10} \cos(10^9 t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{D}_{m1} &= \epsilon_1 \boldsymbol{E}_{m1} = 10^{-10}[4.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}] \cos(10^9 t)
\end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

ب)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_{n1} &= \sigma_1 \boldsymbol{E}_{n1} = (6 \times 10^{-3}) 10 \cos(10^9 t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \frac{3}{50}\cos(10^9 t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{J}_{m1} &= \sigma_1 \boldsymbol{E}_{m1} = (6 \times 10^{-3})[30\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}] \cos(10^9 t) = \left[\frac{9}{50}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{3}{25}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right] \cos(10^9 t)
\end{aligned}$$

پ) سرحد پر متوازی برقی میدان بے جوڑ ہوتا ہے لہٰذا اس سرحدی شرط کی بنا پر

$$\boldsymbol{E}_{m2} = \boldsymbol{E}_{m1} = [30\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}] \cos(10^9 t)$$

ہو گا جس سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_{m2} &= \epsilon_2 \boldsymbol{E}_{m2} = (3 \times 10^{-11})[30\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}] \cos(10^9 t) = 10^{-10}[9\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}] \cos(10^9 t) \\
\boldsymbol{J}_{m2} &= \sigma_2 \boldsymbol{E}_{m2} = (24 \times 10^{-3})[30\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}] \cos(10^9 t) = \left[\frac{18}{25}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{12}{25}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right] \cos(10^9 t)
\end{aligned}$$

حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

ت) مساوات 9.50 سرحد پر سطحی کثافت چارج ρ_S اور عمودی میدان کا تعلق بیان کرتی ہے۔ شکل 9.5 کی طرح سرحد پر کم سے کم قد $(\Delta h \to 0)$ کی چھوٹی ڈبیا میں کل $\rho_S \Delta S$ چارج پایا جائے گا۔ اس ڈبیا سے برقی رو کی اخراج سے ڈبیا میں موجود چارج میں کمی پیدا ہو گی جسے استمراری مساوات پیش کرتی ہے

$$(\boldsymbol{J}_{n1} - \boldsymbol{J}_{n2}) \cdot \Delta \boldsymbol{S} = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t}\Delta S$$

جہاں $\rho_S = J_{n1} - J_{n2}$ کے برابر ہے۔اس مساوات کو

$$J_{n1} - J_{n2} = -\frac{\partial}{\partial t}(D_{n1} - D_{n2})$$

یا

$$\sigma_1 E_{n1} - \sigma_2 E_{n2} = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_1 E_{n1} - \epsilon_2 E_{n2})$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس تفرقی مساوات میں $E_{n1} = 10\cos 10^9 t$ پر کرتے ہوئے E_{n2} کے لئے حل کرتے ہیں۔ایسا نا معلوم مستقل کے طریقے سے کرتے ہیں۔یہ طریقہ استعمال کرتے ہوئے ہم تصور کرتے ہیں کہ

$$E_{n2} = A\cos 10^9 t + B\sin 10^9 t$$

کے برابر ہے جہاں A اور B درکار مستقل ہیں۔ہم E_{n1} اور E_{n2} کو استمراری مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
(6\times 10^{-3})10\cos 10^9 t - 24\times 10^{-3}[A\cos 10^9 t + B\sin 10^9 t]\\
= 1.5\times 10^{-11}\times 10\times 10^9 \sin 10^9 t + 3\times 10^{-11}[-10^9 A\sin 10^9 t + 10^9 B\cos 10^9 t]
\end{aligned}$$

اس مساوات میں دونوں جانب $\cos$ اجزاء کے سر برابر ہوں گے۔یوں

$$(6\times 10^{-3})10 - 24\times 10^{-3} A = 3\times 10^{-11}[10^9 B]$$

ہو گا۔اسی طرح مساوات کے دونوں جانب $\sin$ اجزاء کے سر برابر ہوں گے لہٰذا

$$-24\times 10^{-3}[B] = 1.5\times 10^{-11}\times 10\times 10^9 + 3\times 10^{-11}[-10^9 A]$$

ہو گا۔مندرجہ بالا دو مساوات کو آپس میں حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
A &= \frac{165}{41}\\
B &= -\frac{50}{41}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$E_{n2} = \frac{165}{41}\cos 10^9 t - \frac{50}{41}\sin 10^9 t = 4.21\cos(10^9 t - 16.9^\circ)$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{n2} &= 4.21\cos(10^9 t - 16.9^\circ)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\
\boldsymbol{D}_{n2} &= \epsilon_2 \boldsymbol{E}_{n2} = (3\times 10^{-11})4.21\cos(10^9 t - 16.9^\circ)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 1.26\times 10^{-10}\cos(10^9 t - 16.9^\circ)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\
\boldsymbol{J}_{n2} &= \sigma_2 \boldsymbol{E}_{n2} = (24\times 10^{-3})4.21\cos(10^9 t - 16.9^\circ)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0.1\cos(10^9 t - 16.9^\circ)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}
\end{aligned}$$

ہوں گے۔

9.5 تاخیری دباو 2920

وقت کے ساتھ بدلتے دباو، جنہیں تاخیری دباو[11] کہا جاتا ہے، اشعاعی اخراج[12] کے مسائل حل کرنے میں نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو V کو خطے میں تقسیم ساکن چارج کی صورت

$$V=\int_h \frac{\rho_h \,\mathrm{d}h}{4\pi\epsilon R} \qquad (\text{برقی سکون}) \tag{9.59}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کو وقت کے ساتھ نہ بدلتے یعنی یک سمتی برقی رو کے تقسیم کی صورت

$$\boldsymbol{A}=\int_h \frac{\mu \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h}{4\pi R} \qquad (\text{یک سمتی رو}) \tag{9.60}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔ انہیں مساوات کے نقطہ اشکال بالترتیب

$$\nabla^2 V=-\frac{\rho_h}{\epsilon} \qquad (\text{برقی سکون}) \tag{9.61}$$

اور

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}=-\mu \boldsymbol{J} \qquad (\text{یک سمتی رو}) \tag{9.62}$$

ہیں۔ 2921

غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو کے حصول کے بعد میدان کے بنیادی متغیرات ڈھلوان

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V \qquad (\text{برقی سکون}) \tag{9.63}$$

اور گردش

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad (\text{یک سمتی رو}) \tag{9.64}$$

کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔ 2922

آئیں اب ساکن چارج اور یک سمتی رو سے متعلق، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایسے دباو حاصل کریں جو مندرجہ بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔ 2923

میکس ویل کے مساوات کے تحت $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ ہو گا۔ صفحہ 227 پر مساوات 7.66 کے تحت گردش کی پھیلاو لازماً صفر ہوتی ہے لہٰذا مساوات 9.64 میکس ویل 2924
کی مساوات $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ پر پورا اترتی ہے۔ یوں ہم مساوات 9.64 کو بدلتے میدان کے لئے بھی درست تصور کرتے ہیں۔ 2925

صفحہ 237 پر مشق 7.7 میں آپ نے ثابت کیا کہ ڈھلوان کی گردش لازماً صفر ہوتی ہے یوں مساوات 9.63 کی گردش لینے سے دایاں ہاتھ صفر حاصل ہوتا ہے جبکہ بایاں ہاتھ $\nabla\times\boldsymbol{E}$ حاصل ہوتا ہے جو مساوات 9.28 کے تحت صفر نہیں ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ مساوات 9.63 وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے درست نہیں ہے۔ آئیں اس توقع سے مساوات 9.63 کے دائیں جانب متغیرہ $\boldsymbol{N}$ جمع کریں

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V+\boldsymbol{N}$$

کہ وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے ایسی مساوات درست ثابت ہو گی۔ فی الحال $\boldsymbol{N}$ ایک نامعلوم متغیرہ ہے۔ گردش لینے سے

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}&=-\nabla\times(\nabla V)+\nabla\times\boldsymbol{N}\\&=0+\nabla\times\boldsymbol{N}\end{aligned}$$

---

[11] retarded potentials
[12] radiation

یعنی 2926

$$\nabla \times \boldsymbol{N} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 9.64 کے استعمال سے یوں

$$\nabla \times \boldsymbol{N} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \boldsymbol{A}\right)$$

یا

$$\nabla \times \boldsymbol{N} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جس کا سادہ ترین حل

$$\boldsymbol{N} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

ہے لٰہذا اب ہم

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{9.65}$$

لکھ سکتے ہیں۔ 2927

ہمیں اب بھی دیکھنا ہو گا کہ آیا مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 میکس ویل کے بقایا دو مساوات یعنی مساوات 9.29

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

اور مساوات 9.30

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h$$

پر پورا اترتے ہیں کہ نہیں۔ یہاں پہلی مساوات میں $\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{J} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\ &= \boldsymbol{J} + \epsilon\left(-\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right)\end{aligned}$$

یا

$$\nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A}\right) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu \boldsymbol{J} - \mu\epsilon\left(\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right) \tag{9.66}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 9.65 کا سہارا لیا گیا۔ اسی طرح مساوات 9.30 سے

$$\epsilon\left(-\nabla \cdot \nabla V - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{A}\right) = \rho_h$$

یا

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A}\right) = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{9.67}$$

2928 حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 9.66 اور مساوات 9.67 میں کوئی تضاد نہیں پایا جاتا۔ ساکن یا یک سمتی حالات میں $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ کی وجہ سے مساوات 9.66 اور مساوات 9.67 سے بالترتیب مساوات 9.62 اور مساوات 9.61 حاصل ہوتے ہیں۔ یوں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ وقت کے ساتھ بدلتے دباو کی تعریف یوں کی جا سکتی ہے کہ ان سے $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{E}$ بذریعہ مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 حاصل کئے جا سکتے ہوں۔ البتہ $\boldsymbol{A}$ اور V کو مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 از خود مکمل طور پر بیان نہیں کرتے۔ یہ
2932 دو مساوات لازمی لیکن نامکمل شرائط ہیں جن پر $\boldsymbol{A}$ اور V کا پورا اترنا ضروری ہے۔ آئیں ایک مثال سے اس حقیقت کو سمجھیں۔

تصور کریں کہ ہمارے پاس سادہ سمتی مقناطیسی دباو ہے جس کے A_y اور A_z اجزاء صفر کے برابر ہیں۔ یوں مساوات 9.64 کی مدد سے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$B_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 0\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

اس سے ظاہر ہے کہ x محدد کے ساتھ A_x کے تبدیلی کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن نہیں ہے۔ یہ مساوات $\frac{\partial A_x}{\partial x}$ کا ذکر تک نہیں کرتا۔ ہاں اگر ہمیں $\boldsymbol{A}$ کے پھیلاو کے بارے میں بھی معلومات فراہم ہوتی تب x محدد کے ساتھ A_x کے تبدیلی کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہوتا چونکہ دئے گئے سمتی دباو سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آخر میں یہ بھی بتانا ضروری ہے کہ $\boldsymbol{A}$ کے بارے میں ہماری تمام معلومات جزوی تفرقی مساوات کی صورت میں ہیں جن سے $\boldsymbol{A}$ کے حصول کے وقت تکمل کا مستقل شامل کرنا ضروری ہے۔ کسی بھی حقیقی مسئلہ جس میں مکمل خلاء کے لئے حل درکار ہو میں ایسا مستقل صفر کے برابر ہو گا چونکہ کوئی بھی میدان
2935 لامحدود فاصلے پر صفر ہی ہو گا۔

اس مثال سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر ہمیں لامحدود خلاء میں کسی بھی نقطے پر سمتی میدان کی قیمت معلوم ہو تب اس سمتی میدان کو تمام خلاء میں میدان کے گردش اور پھیلاو سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ہمیں مکمل آزادی ہے کہ جیسے چاہیں $\boldsymbol{A}$ کی پھیلاو بیان کریں۔ ہم مساوات 9.66 اور مساوات 9.67 کو مد نظر رکھتے ہوئے یوں $\boldsymbol{A}$ کے پھیلاو کے لئے سادہ ترین تفاعل

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t} \tag{9.68}$$

لکھتے ہیں جس سے مساوات 9.66

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} + \mu\epsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \tag{9.69}$$

صورت اختیار کر لے گی جبکہ مساوات 9.67

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} + \mu\epsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{9.70}$$

2936 صورت اختیار کر لے گی۔

مندرجہ بالا دو مساوات متحرک امواج سے متعلق ہیں جن پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔ان مساوات کی مشابہت بھی حیرت انگیز ہے۔باب کے اس حصے میں، وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے، حاصل کئے گئے نتائج یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{9.71}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \tag{9.72}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{9.73}$$

اگلے باب میں متحرک امواج پر غور کیا جائے گا۔آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتے برقی و مقناطیسی میدان متحرک امواج پیدا کرتے ہیں جن کی رفتار v

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{9.74}$$

کے برابر ہوتی ہے۔خالی خلاء میں یہ رفتار تقریباً $3 \times 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ کے برابر ہوتی ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔اس سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ نقطہ N_1 پر کثافت چارج سے دور کسی نقطے N_2 پر دباو کی قیمت اسی لمحے کثافت چارج کے قیمت پر منحصر نہیں ہوتی بلکہ کچھ دیر قبل کے کثافت چارج پر منحصر ہوتی ہے۔کثافت چارج میں تبدیلی کی خبر N_1 سے N_2 تک رفتار v سے پہنچتی ہے لہٰذا ان نقطوں کے درمیان فاصلہ R ہونے کی صورت میں یہ خبر $\frac{R}{v}$ سیکنڈ تاخیر سے پہنچے گی۔اس طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.59 کی نئی شکل

$$V = \int_h \frac{[\rho_h]}{4\pi\epsilon R} \,\mathrm{d}h \tag{9.75}$$

ہو گی جہاں $[\rho_h]$ سے مراد یہ ہے کہ مساوات میں وقت t کی جگہ تاخیری وقت t' استعمال کیا جائے یعنی

$$t' = t - \frac{R}{v}$$

یوں اگر خلاء میں کثافت چارج

$$\rho_h = e^{-r} \cos \omega t$$

ہو تب

$$[\rho_h] = e^{-r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) \right]$$

ہو گا جہاں R تفرقی چارج سے اس نقطے تک فاصلہ ہے جہاں اس تفرقی چارج سے پیدا دباو کا حصول درکار ہو۔

اسی طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.60 کی نئی شکل یعنی تاخیری سمتی مقناطیسی دباو کی مساوات

$$\boldsymbol{A} = \int_h \frac{\mu[\boldsymbol{J}]}{4\pi R} \,\mathrm{d}h \tag{9.76}$$

ہو گی۔

تاخیری وقت کے استعمال کی بنا پر ایسے دباو کو **تاخیری دباو**[13] کہا جاتا ہے۔

تاخیری برقی اور تاخیری مقناطیسی دباو کے استعمال سے برقی و مقناطیسی مسئلے نسبتاً زیادہ آسانی سے حل ہوتے ہیں۔یوں اگر ہمیں ρ اور $\boldsymbol{J}$ معلوم ہوں تب ہم مساوات 9.75 اور مساوات 9.76 سے V اور $\boldsymbol{A}$ حاصل کر سکتے ہیں جن سے مقناطیسی میدان بذریعہ مساوات 9.71 اور برقی میدان بذریعہ مساوات 9.73 حاصل کئے جا سکتے ہیں۔اگر ہمیں ρ اور $\boldsymbol{J}$ کی قیمتیں معلوم نہ ہوں اور نا ہی ان کے قیمتوں کا اندازہ لگانا ممکن ہو تب تاخیری دباو، میکس ویل مساوات کے حل سے زیادہ، مدد گار ثابت نہیں ہوتے۔

[13]retarded potential

put comsat’s time table here.
energy travels along the wire and not in the wire.
antenna chapter, 3D figure at start and complete the start section.
house completion certificate.
zaryab’s tooth
zaryab fish
F=-dW/dT to include in inductance chapter plus a question or two
magnetizartion curve and an iteration example. fig 8.10, 11 of hayt.
charge is barqi bar.
add questions to machine book too.
take print outs for myself.

when giving fields always remember the following rules:
always ensure that divergence of magnetic field is zero.
moving waves must be of the form $E = E0\cos(wt - kz)$ where $c = (\mu * \epsilon)^{-0.5}$ and $k = 2 * \pi / \lambda$

الباب 16

سوالات

میکس ویل مساوات

سوال 16.1: رداس $\rho = 12\,\text{cm}$ کے گول دائرے میں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا، یکساں مقناطیسی میدان $B(t) = 0.15 \sin 1000t\,\text{Wb}$ ہے جو دائرے میں محرک برقی دباو $e(t)$ پیدا کرتا ہے۔گول دائرے کی مزاحمت $55\,\Omega$ ہے۔محرک برقی دباو، گول دائرے میں برقی رو $i(t)$ پیدا کرتی ہے۔برقی رو $i(t)$ سے پیدا مقناطیسی بہاو کو نظر انداز کرتے ہوئے $e(t)$ اور $i(t)$ حاصل کریں۔صورت حال شکل 16.1 میں دکھائی گئی ہے جہاں صفحہ سے اوپر کی جانب باہر نکلتی مقناطیسی میدان کو چھوٹے دائروں میں بند نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

جوابات: $-6.78\cos 1000t\,\text{V}$ ، $-123\cos 1000t\,\text{mA}$

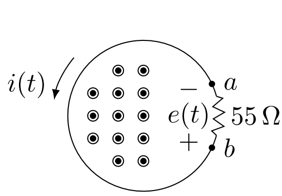
سوال 16.2: سطح $z = 0$ پر موصل تار کے مستطیل کے اطراف $x = \mp 2\,\text{m}$ ، $y = \mp 1.5\,\text{m}$ پر ہیں۔وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B} = (0.25\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 0.55\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 0.1\boldsymbol{a}_{\text{z}})\sin 1200t\,\text{T}$ ہے۔مستطیل کی کل مزاحمت $R = 4200\,\Omega$ ہے۔مثبت z محدد کی جانب سے دیکھتے ہوئے، گھڑی کی سمت میں برقی رو حاصل کریں۔برقی رو سے پیدا ثانوی مقناطیسی میدان کو نظر انداز کرتے ہوئے حل کریں۔

جواب: $343\cos 1200t\,\text{mA}$

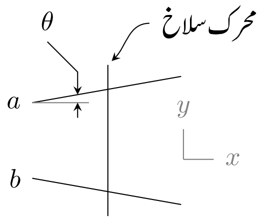
سوال 16.3: مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B} = 5\cos(1.2\times 10^8\pi t - \pi y)\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\mu\text{T}$ ہے۔مندرجہ ذیل فرضی یا غیر موصل دائروں پر $\boldsymbol{a}_\phi$ سمت میں بڑھتا محرک برقی دباو حاصل کریں۔الف) $(0,0,0)$ تا $(1,0,0)$ تا $(1,1,0)$ تا $(0,1,0)$ تا $(0,0,0)$ ؛ ب) $(0,0,0)$ تا $(2,0,0)$ تا $(2,2,0)$ تا $(0,2,0)$ تا $(0,0,0)$

جوابات: $600[\cos(1.2\times 10^8\pi t - \pi) - \cos(1.2\times 10^8\pi t)]\,\text{V}$ ، $0\,\text{V}$

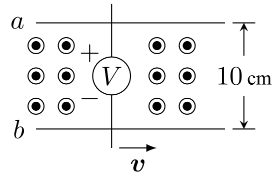
سوال 16.4: رداس $\rho = 1\,\text{mm}$ اور $\rho = 3\,\text{mm}$ کے ہم محوری تار میں $\boldsymbol{H} = \frac{0.122}{\rho}\cos 5\times 10^8\pi t\cos 0.5\pi z\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔مستطیل $(0.001,0^\circ,0)$ تا $(0.003,0^\circ,0)$ تا $(0.003,0^\circ,1.5)$ تا $(0.001,0^\circ,1.5)$ تا $(0.001,0^\circ,0)$ میں محرک برقی دباو حاصل کریں۔



شکل 16.1: دائرے میں یکساں مقناطیسی بہاو، محرک برقی دباو پیدا کرتا ہے۔



شکل 16.2: محرک سلاخ پر مقناطیسی میدان محرک دباو پیدا کرتا ہے۔



شکل 16.3: کھلے دور اور بند دور میں محرک برقی دباو۔

جواب: $119\sin(5\times10^8\pi t)\,\mathrm{V}$

سوال 16.5: لمحہ $t=0$ پر موصل تار کے مستطیل کے اطراف $x=\mp0.4\,\mathrm{m}$ اور $y=\mp0.6\,\mathrm{m}$ پر ہیں۔یہ مستطیل $6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ کی سمتی رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔غیر یکساں مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}=3x^2y\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\mathrm{T}$ ہے۔مستطیل کی مزاحمت $R=100\,\Omega$ ہے۔مستطیل میں طاقت کی اخراج حاصل کریں۔ساکن سلاخوں میں کتنی محرک برقی دباو پیدا ہوتی ہے۔

جواب: $P=2.12\,\mathrm{mW}$ ، $0\,\mathrm{V}$

سوال 16.6: شکل 16.2 میں دو ساکن موصل سلاخ x محدد کے ساتھ $\theta=\mp10^\circ$ کا زاویہ بناتے ہیں۔صفحہ کے بالائی سطح سے نکلتی مقناطیسی میدان $B=0.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\mathrm{T}$ ہے۔ محرک سلاخ کی رفتار $v=8\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے۔ ساکن سلاخوں کے بائیں سروں کے درمیان فاصلہ $2\,\mathrm{cm}$ ہے۔ان کے مابین آلہ پیما برقی دباو v_{ab} ناپتا ہے۔ الف) محرک سلاخ کے مقام کو $t=0$ پر $x=0$ لیتے ہوئے آلہ پیمائش پر حاصل برقی دباو کو مساوات 9.1 سے حاصل کریں۔ب) اسی محرک دباو کو مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ کی مدد سے حاصل کریں۔ پ) محرک سلاخ کا مقام $x=50t^2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہونے کی صورت میں جواب حاصل کریں۔

جوابات:الف اور ب: $v_{ab}=-11.285t-0.08\,\mathrm{V}$ ، پ) $v_{ab}=-881.6t^3-t\,\mathrm{V}$

سوال 16.7: رداس $\rho=0.5\,\mathrm{cm}$ اور $\rho=4\,\mathrm{cm}$ کی ہم محوری تار میں میدان $H_\phi=\frac{5}{\rho}\cos(2\pi\times10^7t-5z)$ اور $E_\rho=\frac{8\pi^2}{\rho}\cos(2\pi\times10^7t-5z)$ پائے جاتے ہیں۔ الف) مساوات 9.28 کے دونوں اطراف حل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ ہم محوری تار میں موجود میدان اس پر پورا اترتے ہیں۔ ب) سمتی سطح $\phi=0$ ، $0.5\,\mathrm{cm}<\rho<4\,\mathrm{cm}$ ، $0<z<1\,\mathrm{cm}$ اور اس کے محیط پر مساوات 9.4 کے دونوں اطراف حل کرتے ہوئے محرک برقی دباو حاصل کریں۔سمتی سطح کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ لیں۔یوں محیط پر چلتے ہوئے $z=1\,\mathrm{cm}$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ سمت میں چلنا ہو گا۔

جوابات: $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{40\pi^2}{\rho}\sin(2\pi\times10^7t-5z)\boldsymbol{a}_\phi$ ،

$$\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=52.26[\cos(2\pi\times10^7t-0.05)-\cos(2\pi\times10^7t)]\,\mathrm{V}$$

سوال 16.8: شکل 16.3 میں $\boldsymbol{B}=0.55\boldsymbol{a}_z\,\mathrm{T}$ اور $\boldsymbol{v}=6\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہیں۔محرک سلاخ میں انتہائی زیادہ مزاحمت رکھتا پیما برقی دباو V نسب ہے۔ الف) ساکن سلاخوں کے بائیں اور دائیں سرے آزاد رکھتے ہوئے پیما پر کیا برقی دباو حاصل ہو گی۔ ب) ساکن سلاخوں کے بائیں سرے a اور b آپس میں موصل تار سے جوڑنے کے بعد پیما پر کیا حاصل ہو گا۔ پ) ساکن سلاخوں کے دائیں سرے آپس میں موصل تار سے جوڑنے کے بعد پیما پر کیا حاصل ہو گا۔ ت) ساکن سلاخ کے بائیں سرے آپس میں اور ان کے دائیں سرے آپس میں جوڑ کر پیما کیا پڑھے گا۔

جوابات: $3.3\,\mathrm{V}$ ، $3.3\,\mathrm{V}$ ، $3.3\,\mathrm{V}$ ، $0\,\mathrm{V}$

سوال 16.9: برقی میدان $E=E_0\cos1500t\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں مندرجہ ذیل اشیاء میں ایصالی برقی رو اور انتقالی برقی رو کی شرح حاصل کریں۔ الف) تانبا جس کے مستقل $\epsilon_R=1$ اور $\sigma=5.8\times10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ ب) مقطر پانی جس کے مستقل $\epsilon_R=80$ اور $\sigma=10^{-4}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ پ) کوارٹس جس کے مستقل $\epsilon_R=3.8$ اور $\sigma=10^{-17}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔

جوابات: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ ، 4.4×10^{15} ، 94 ، 2×10^{-10}

سوال 16.10: برقی میدان $E=E_0e^{\frac{t}{\tau}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں مندرجہ ذیل اشیاء میں ایصالی برقی رو اور انتقالی برقی رو کی شرح حاصل کریں جہاں $\tau=10^{-7}$ کے برابر ہے۔ الف) تانبا جس کے مستقل $\epsilon_R=1$ اور $\sigma=5.8\times10^{7}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ ب) مقطر پانی جس کے مستقل $\epsilon_R=80$ اور $\sigma=10^{-4}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ پ) کوارٹس جس کے مستقل $\epsilon_R=3.8$ اور $\sigma=10^{-17}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔

جوابات: $\frac{\sigma\tau}{\epsilon}$ ، 6.5×10^{11} ، 0.014 ، 2.97×10^{-11}

سوال 16.11: محدد z پر موجود ہم محوری تار کی لمبائی $12\,\mathrm{cm}$ جبکہ اس کے رداس $2\,\mathrm{mm}$ اور $6\,\mathrm{mm}$ ہیں۔ دونوں تاروں کے درمیان مادے کے مستقل $\mu=5\times10^{-6}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$ ، $\epsilon=2\times10^{-11}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ اور $\sigma=4\times10^{-5}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔تار میں $\boldsymbol{E}=\frac{10^4}{\rho}\cos(10^6t)\boldsymbol{a}_\rho\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں $\boldsymbol{J}$ ، I_c ، $\boldsymbol{J}_d$ ، I_d اور $\frac{|I_d|}{|I_c|}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{0.5}{\rho}\cos(10^6t)\boldsymbol{a}_\rho\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$ ، $0.12\pi\cos10^6t\,\mathrm{A}$ ، $-\frac{0.1}{\rho}\sin10^6t\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$ ، $-0.024\pi\sin10^6t\,\mathrm{A}$ ، 0.2

سوال 16.12: رداس ρ_1 اور ρ_2 کے ہم محوری تار کی لمبائی l ہے۔تار کو بیرونی دور $V_0\cos\omega t$ برقی دباو فراہم کرتی ہے۔تار میں برقی میدان $\boldsymbol{E}$ کی مساوات لکھتے ہوئے $\boldsymbol{J}_d$ اور I_d حاصل کریں۔ثابت کریں کہ انتقالی برقی رو بیرونی دور میں پائی جانے والی ایصالی برقی رو کے برابر ہے۔

جوابات: $\boldsymbol{E}=\frac{V_0\cos\omega t}{\rho\ln\frac{b}{a}}\boldsymbol{a}_\rho\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{J}_d=\frac{-\omega\epsilon V_0\sin\omega t}{\rho\ln\frac{b}{a}}\boldsymbol{a}_\rho$ ، $I_d=-\frac{2\pi l\omega\epsilon V_0\sin\omega t}{\ln\frac{b}{a}}$ ، $I_c=C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{2\pi l\omega\epsilon V_0\sin\omega t}{\ln\frac{b}{a}}$

سوال 16.13: مساوات 9.22 کی پہلی مساوات کے دونوں اطراف پھیلاو کا عمل استعمال کرتے ہوئے استمراری مساوات حاصل کریں۔

جواب: $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}=0=\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho_h}{\partial t}$

سوال 16.14: ایک خطہ جہاں $\boldsymbol{E}=32\sin ax\cos5y\cos(2\times10^{10}t)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے کے مستقل $\mu_R=2.5$ ، $\epsilon_R=1.2$ اور $\sigma=0$ ہیں۔میکس ویل کے مساوات استعمال کرتے ہوئے a کی مثبت قیمت دریافت کریں۔تمام تکمل کے مستقل کو صفر لیں۔

جواب: $a=115.44\,\mathrm{m}^{-1}$

سوال 16.15: ایک ترسیلی تار میں مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}=15\cos(4\times10^9t-\beta z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ترسیلی تار کے درکار مستقل $\mu_R=1$ ، $\epsilon_R=5$ اور $\sigma=0$ ہیں۔میکس ویل کے مساوات استعمال کرتے ہوئے β کی مثبت قیمت دریافت کریں۔

جواب: $\beta=29.83\,\mathrm{m}^{-1}$

سوال 16.16: موصل سطح محدد کے مرکز سے گزرتی ہے جہاں میدان $\boldsymbol{E}=(33\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+12\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+25\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\cos(10^7t)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔سطح کے قریب خطے کے مستقل $\sigma=0$ ، $\epsilon_R=12$ اور $\mu_R=1.6$ ہیں۔نقطہ $(0,0,0)$ پر موصل سطح پہ کثافت چارج حاصل کریں۔اس نقطے پر سطح کے متوازی میدان حاصل کریں۔

جوابات: $4.58\cos(10^7t)\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ ، 0

سوال 16.17: خطہ $z<0$ میں $\epsilon_{R1}=1$ ، $\mu_{R1}=1$ اور $\sigma_1=0$ ہیں جبکہ خطہ $z>0$ میں $\epsilon_{R2}=9$ ، $\mu_{R2}=4$ اور $\sigma_2=0$ ہیں۔پہلے خطے میں میدان $\boldsymbol{E}_1=[10\cos(10^9t-3.336z)-2\cos(10^9t+3.336z)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور دوسرے خطے میں $\boldsymbol{E}_2=(A\cos(10^9t-20.014z))\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ہیں۔ الف) مستقل A کی قیمت دریافت کریں۔ ب) مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_1$ اور $\boldsymbol{H}_2$ حاصل کریں۔ پ) ثابت کریں کہ مقناطیسی میدان سرحدی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔

جوابات: $A=8$ ، $\boldsymbol{H}_1=[-0.0265\cos(10^9t-3.336z)-0.0053\cos(10^9t+3.336z)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ، $\boldsymbol{H}_2=-0.0318\cos(10^9t-20.014z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ، $H_{m1}=H_{m2}$

سوال 16.18: خالی خلاء میں مساوات 9.9 نلکی محدد میں میدان دیتی ہے۔خالی خلاء میں $\boldsymbol{J}=0$ لیتے ہوئے میکس ویل کی مساوات $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔حاصل $\boldsymbol{E}$ سے میکس ویل کی مساوات $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ کی مدد سے واپس $\boldsymbol{B}$ حاصل کریں۔یوں ثابت کریں کہ دی گئی میدان میکس ویل کی مساوات پر پورا نہیں اترتا۔

جواب:چونکہ ہمیں واپس ابتدائی میدان حاصل نہیں ہوتا لہٰذا یہ میدان میکس ویل کی مساوات پر پورا نہیں اترتا۔

جدول 16.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیر	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	مقطر پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹس	10^{-17}

جدول 16.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 16.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 16.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$