باب 2

کولمب کا قانون

2.1 قوت کشش یا دفع

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون[1] سے آپ بخوبی واقف ہوں گے۔کولمب کا قانون[2] اس سے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔کائناتی تجاذب کے قانون کو مساوات 1.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

$$F = G\frac{M_1 M_2}{R^2} \tag{2.1}$$

یہ مساوات کمیت M_1 اور کمیت M_2 کے مابین قوت کشش F دیتا ہے جہاں ایک کمیت کے مرکز سے دوسری کمیت کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔قوت کشش دونوں کمیت کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔دونوں کمیتوں پر قوت کشش کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں کمیتوں کے مرکزوں پر کھینچی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔M_1 پر قوت کشش کی سمت M_1 کے مرکز سے M_2 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے جبکہ M_2 پر قوت کشش کی سمت M_2 کے مرکز سے M_1 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے۔تناسب کے جزو مستقل کو G لکھا اور تجاذبی مستقل[3] پکارا جاتا ہے جس کی قیمت تقریباً

[1] Law of Universal Gravitation
[2] Coulomb's law
[3] gravitational constant

$6.674 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\,s^2}}$ کے برابر ہے۔ کرہ ارض کے ثقلی میدان میں میکانی بار m کو اٹھانے کی خاطر $F = mg$ قوت درکار ہوتی ہے جہاں $g = 9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$ کے برابر ہے۔

کولمب کا قانون مساوات 1.2 میں بیان کیا گیا ہے۔یہ مساوات برقی بار[4] Q_1 اور برقی بار Q_2 کے مابین قوت کشش یا قوت دفع F دیتا ہے جہاں ایک برقی بار کے مرکز سے دوسری برقی بار کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ان برقی باروں کا حجم صفر تصور کیا جاتا ہے۔یوں اگر برقی بار کو گیند کی شکل کا تصور کیا جائے تو اس گیند کے رداس کی لمبائی صفر ہو گی۔ایسے برقی بار کو **نقطہ برقی بار**[5] کہا جاتا ہے۔برقی بار کو برق یا بار کہا جائے گا۔

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{R^2} \tag{2.2}$$

قوت کشش یا دفع دونوں برقی باروں کے حاصل ضرب کے راست تناسب اور باہمی فاصلہ کے مربع کے بالعکس تناسب ہوتی ہے۔دونوں برقی باروں پر قوت کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں برقی باروں سے گزرتی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔دو مختلف اقسام کے برقی باروں کے مابین قوت کشش پائی جاتی ہے جبکہ دو یکساں برقی باروں کے مابین قوت دفع پائی جاتی ہے۔مساوات کے جزو مستقل کو $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ لکھا جاتا ہے جہاں ϵ_0 خالی خلاء کا **برقی مستقل**[6] [7] ہے جس کی قیمت اٹل ہے۔خالی خلاء کے برقی مستقل کی قیمت

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \tag{2.3}$$

ہے جہاں c خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اور μ_0 خالی خلاء کی **مقناطیسی مستقل**[8] ہے۔یہ دونوں بھی اٹل مستقل ہیں جن کی قیمتیں

$$c = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 3 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{2.4}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{2.5}$$

ہیں۔یوں مقناطیسی مستقل کی قیمت تقریباً

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi}10^{-9}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \tag{2.6}$$

---

charge[4]
point charge[5]
permittivity[6]
electric constant[7]
permeability[8]

کے برابر ہے۔اس کتاب میں $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ بار بار استعمال ہو گا جسے عموماً

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9 \times 10^9 \tag{2.7}$$

لیا جائے گا۔ϵ_0 کی اکائی فیراڈ فی میٹر $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ ہے جس کی وضاحت جلد کر دی جائے گی۔

مثال 2.1: زمین کی سطح پر زمین اور ایک کلو گرام کمیت کے مابین $9.8\,\mathrm{N}$ کی قوت کشش پائی جاتی ہے۔زمین کا رداس $6370\,\mathrm{km}$ لیتے ہوئے زمین کی کمیت حاصل کریں۔

حل:مساوات 1.1 کی مدد سے

$$9.8 = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times M \times 1}{6\,370\,000 \times 6\,370\,000}$$

لکھتے ہوئے زمین کی کمیت $5.959 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال 2.2: زمین کی مرکز سے تقریباً $42\,000\,\mathrm{km}$ کے فاصلے پر ذرائع ابلاغ کے سیٹلائٹ زمین کے گرد مدار میں گردش کرتے ہیں۔پوری دنیا میں بے تار[9] مواصلاتی نظام انہیں کے مرہون منت ہے۔اس فاصلے پر ایک کلو گرام کی کمیت اور زمین کے مابین قوت کشش کی مقدار حاصل کریں۔

حل:

$$F = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times 5.959 \times 10^{24} \times 1}{42\,000\,000 \times 42\,000\,000} = 0.225\,\mathrm{N}$$

---

[9] wireless

مثال 2.3: ایک ایک کولمب کے دو مثبت برقی باروں کے درمیان ایک میٹر کا فاصلہ ہے۔ان میں قوت دفع حاصل کریں۔

حل: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت مساوات 1.7 سے لیتے ہوئے

$$F = 9 \times 10^9 \frac{1 \times 1}{1 \times 1} = 9 \times 10^9 \,\mathrm{N}$$

مندرجہ بالا مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ برقی بار کی اکائی (کولمب) انتہائی بڑی مقدار ہے۔

شکل 1.1 میں بار Q_1 محدد کے مرکز سے سمتی فاصلہ $\mathbf{r_1}$ پر جبکہ بار Q_2 مرکز سے سمتی فاصلہ $\mathbf{r_2}$ پر دکھائے گئے ہیں۔بار Q_1 سے بار Q_2 تک کا سمتی فاصلہ $\mathbf{R_{21}}$ ہے جہاں

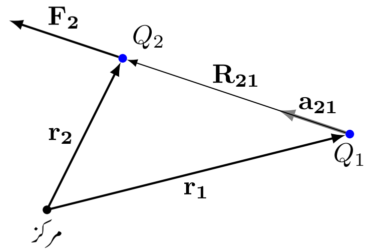
$$\boldsymbol{R_{21}} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1} \tag{2.8}$$

کے برابر ہے۔سمتیہ $\mathbf{R_{21}}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\mathbf{a_{21}}$ یوں حاصل کیا جاتا ہے

$$\boldsymbol{a_{21}} = \frac{\boldsymbol{R_{21}}}{|\boldsymbol{R_{21}}|} = \frac{\boldsymbol{R_{21}}}{R_{21}} = \frac{\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|} \tag{2.9}$$

بار Q_2 پر قوت $\mathbf{F_2}$ کی حتمی قیمت مساوات 1.2 سے حاصل کی جا سکتی ہے جبکہ اس کی سمت اکائی سمتیہ $\mathbf{a_{21}}$ کے سمت میں ہو گی۔اس طرح یہ قوت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F_2} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2}\boldsymbol{a_{21}} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|^3}\end{aligned} \tag{2.10}$$



شکل 2.1: دو مثبت باروں کے مابین قوت دفع

لکھا جائے گا۔ مساوات 1.10 کولمب کے قانون کی سمتی شکل ہے۔ چونکہ دونوں باروں پر برابر مگر الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے لہٰذا Q_1 پر قوت $\mathbf{F_1}$ یوں لکھا جائے گا

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F_1} = -\boldsymbol{F_2} &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R_{21}^2}\boldsymbol{a_{21}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R^2}\boldsymbol{a_{12}}\end{aligned} \tag{2.11}$$

جہاں دوسری قدم پر $R_{21} = R_{12} = R$ لکھا گیا ہے اور $-\boldsymbol{a_{21}} = \boldsymbol{a_{12}}$ کے برابر ہے۔ دونوں بار مثبت یا دونوں بار منفی ہونے کی صورت میں Q_2 پر مساوات 1.10 سے قوت $\mathbf{a_{21}}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔ یوں یکساں باروں کے مابین قوت دفع پایا جاتا ہے۔ دو الٹ اقسام کے باروں کی صورت میں Q_2 پر قوت $-\mathbf{a_{21}}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔ یوں الٹ اقسام کے باروں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے۔

مثال 2.4: شکل 1.1 میں نقطہ $A(3,2,4)$ پر $20\,\mu\text{C}$ کا بار Q_1 جبکہ نقطہ $B(1,5,9)$ پر $-50\,\mu\text{C}$ کا بار Q_2 پایا جاتا ہے۔ منفی بار Q_2 پر سمتی قوت حاصل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R_{21}} &= (1-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (5-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (9-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ &= -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ R_{21} &= |\boldsymbol{R_{21}}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{38} \\ &= 6.1644\end{aligned}$$

اور یوں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{21} &= \frac{\boldsymbol{R}_{21}}{|\boldsymbol{R}_{21}|} = \frac{-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{6.1644} \\
&= -0.324\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.487\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 0.811\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F_2} &= \frac{36\pi \times 10^9}{4\pi} \frac{\left(-50 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{-6}\right)}{38} \left(-0.324\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.487\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 0.811\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \\
&= -0.237 \left(-0.324\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.487\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 0.811\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوت کی سمت $\mathbf{a_{21}}$ کے الٹ سمت میں ہے۔یوں منفی بار پر قوت کی سمت مثبت بار کی جانب ہے یعنی اس پر قوت کشش پایا جاتا ہے۔

کسی بھی بار پر ایک سے زیادہ باروں سے پیدا مجموعی قوت تمام باروں سے پیدا علیحدہ علیحدہ قوتوں کا سمتی مجموعہ ہوتا ہے یعنی

$$
\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \tag{2.12}
$$

اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ کولمب کا قانون خطی[10] ہے۔

2.2 برقی میدان کی شدت

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون میں زمین کی کمیت کو M لکھ کر کمیت m پر قوت F حاصل کی جا سکتی ہے۔ایک کلو گرام کمیت پر اس قوت کی مقدار $\frac{F}{m}$ ہو گی جسے زمین کی کشش[11] یا ثقلی اسراع پکارا اور g لکھا جاتا ہے۔زمین کی سطح پر g کی مقدار تقریباً $9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ کے برابر ہے۔

$$
g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} \tag{2.13}
$$

---

[10] linear
[11] gravity

کسی بھی کمیت M کے گرد تجاذبی میدان[12] پایا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر اس تجاذبی میدان کو ناپنے کی خاطر اس نقطے پر پیمائشی کمیت m_p[13] رکھ کر اس پر قوت ناپی جاتی ہے۔ مختلف مقامات پر اس طرح قوت ناپ کر ہم تجاذبی میدان کا جائزہ لے سکتے ہیں۔ تجاذبی قوت کی مقدار کا دارومدار پیمائشی کمیت[14] m_p پر بھی منحصر ہے۔ مختلف تجاذبی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام تجاذبی میدان جانچتے وقت ایک ہی قیمت کے پیمائشی کمیت استعمال کی جائے۔ ماہرین طبیعیات عموماً m_p کو ایک کلو گرام رکھتے ہیں۔ یہ ضروری نہیں کہ تجاذبی قوت ناپتے وقت ایک کلو گرام کی پیمائشی کمیت ہی استعمال کی جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت $\mathbf{F}$ کو m_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک کلو گرام پر تجاذبی قوت حاصل کی جا سکتی ہے۔ زمین کے قریب ایک کلو گرام کمیت پر قوت کشش کو ثقلی اسراع g پکارا جاتا ہے۔

مثال 2.5: زمین کی سطح پر دو سو گرام پیمائشی کمیت پر 1.96 N قوت ناپی جاتی ہے۔ ثقلی اسراع حاصل کریں۔

حل:

$$g = \frac{1.96}{0.2} = 9.8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \tag{2.14}$$

مساوات 1.13 سے ہم

$$\begin{aligned} F &= mg \\ w &= mg \end{aligned} \tag{2.15}$$

لکھ سکتے ہیں جو زمین کی سطح پر کمیت m پر کشش ثقل F دیتا ہے جسے وزن پکارا اور w لکھا جاتا ہے۔

باروں پر بھی اسی طرح غور کیا جاتا ہے۔ کسی بھی بار Q کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے یعنی برقی میدان کا منبع بار ہے۔ اس برقی میدان میں بار پر قوت اثر انداز ہوتا ہے۔ بار Q کے برقی میدان کی شدت کے پیمائش کی خاطر اس

[12] gravitational field
[13] m_p لکھتے ہوئے زیر نوشت میں p لفظ پیمائشی کے پ کو ظاہر کرتا ہے، یعنی یہ وہ کمیت ہے جسے قوت کی پیمائش کی خاطر استعمال کیا جا رہا ہے۔
[14] test mass

میدان میں مختلف مقامات پر پیمائشی بار [15] q_p پر قوت $\mathbf{F}$ ناپ کر برقی میدان کا مطالعہ کیا جا سکتا ہے اور اس کا نقشہ بنایا جا سکتا ہے۔مختلف باروں کے برقی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام صورتوں میں ایک ہی قیمت کے پیمائشی بار استعمال کئے جائیں۔ماہرین طبیعیات q_p کو ایک کولمب کا مثبت بار رکھتے ہیں۔یہ ضروری نہیں کہ قوت ناپتے وقت ایک کولمب کا مثبت پیمائشی بار ہی استعمال کیا جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت $\mathbf{F}$ کو q_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک مثبت کولمب کے بار پر قوت حاصل کی جاتی ہے جسے **برقی میدان کی شدت**[16] یا صرف **برقی میدان** پکارا اور $\mathbf{E}$ لکھا جاتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q_p} \tag{2.16}$$

مختلف مقامات پر موجود مختلف قیمتوں کے باروں سے کسی ایک نقطے پر پیدا برقی میدان تمام باروں کے مجموعی اثر سے پیدا ہو گا۔ایسا کولمب کے قانون کے خطی ہونے کی بنا پر ہوتا ہے۔کسی بھی نقطے پر n باروں کا مجموعی $\mathbf{E}$ تمام باروں کے علیحدہ علیحدہ پیدا کردہ $\boldsymbol{E}_1$، $\boldsymbol{E}_2$، $\boldsymbol{E}_3$، $\cdots$ کا سمتی مجموعہ

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \cdots + \boldsymbol{E}_n \tag{2.17}$$

ہوتا ہے۔یوں کسی بھی نقطے P پر $\mathbf{E}$ ناپتے وقت اس نقطے پر ایک کولمب بار q_p رکھ کر اس بار پر قوت ناپی جاتی ہے۔یہ قوت اس نقطے پر تمام باروں کا مجموعی $\mathbf{E}$ ہوتا ہے۔یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ ناپتے وقت یہاں رکھے پیمائشی بار q_p کا اثر شامل نہیں ہوتا۔

مساوات 1.10 سے بار Q سے $\boldsymbol{a}_R$ سمت میں R فاصلے پر برقی میدان کو

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{a_R}}{R^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \end{aligned} \tag{2.18}$$

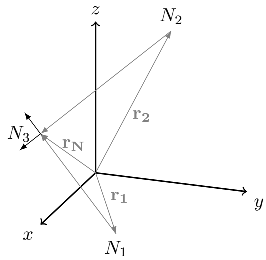
لکھا جا سکتا ہے۔بار کو کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے اسی مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{2.19}$$

جہاں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کروی محدد کا رداسی سمت میں اکائی سمتیہ ہے۔

---

[15] test charge
[16] electric field intensity



شکل 2.2: دو باروں سے پیدا برقی شدت

نقطہ (x', y', z') پر موجود بار Q سے نقطہ (x, y, z) پر برقی شدت یوں حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^3}\\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left[(x-x')\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(y-y')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+(z-z')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right]}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned} \tag{2.20}$$

جہاں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ \boldsymbol{r'} &= x'\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+y'\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+z'\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'} = (x-x')\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(y-y')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+(z-z')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔

مثال 2.6: نقطہ $N_1(4,1,1)$ پر $100\,\mu\mathrm{C}$ کا بار Q_1 جبکہ نقطہ $N_2(1,4,2)$ پر $50\,\mu\mathrm{C}$ کا بار Q_2 پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N_3(2,2,5)$ پر Q_1 سے پیدا $\boldsymbol{E}_1$ اور Q_2 سے پیدا $\boldsymbol{E}_2$ حاصل کریں۔ اس نقطے پر دونوں باروں کا مجموعی $\boldsymbol{E}$ کیا ہو گا۔

حل: شکل 1.2 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ پہلے Q_1 سے پیدا $\boldsymbol{E}_1$ حاصل کرتے ہیں۔ N_1 سے N_3 تک سمتی فاصلہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{31} = \boldsymbol{R}_3 - \boldsymbol{R}_1 &= (2-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(2-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+(5-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ &= -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

ہے جس سے

$$
\begin{aligned}
R_{31} &= \left|\boldsymbol{R}_{31}\right| = \sqrt{(-2)^2+1^2+4^2}\\
&= \sqrt{21} = 4.583\\
\boldsymbol{a}_{31} &= \frac{\boldsymbol{R}_{31}}{R_{31}} = \frac{-2\boldsymbol{a}_{\text{X}}+1\boldsymbol{a}_{\text{y}}+4\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{\sqrt{21}}\\
&= -0.436\boldsymbol{a}_{\text{X}}+0.218\boldsymbol{a}_{\text{y}}+0.873\boldsymbol{a}_{\text{Z}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں مساوات 1.18 سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1 &= 9\times10^9\frac{100\times10^{-6}}{21}\left(-0.436\boldsymbol{a}_{\text{X}}+0.218\boldsymbol{a}_{\text{y}}+0.873\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right)\\
&= -18\,686\boldsymbol{a}_{\text{X}}+9343\boldsymbol{a}_{\text{y}}+37\,414\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 1.7 سے $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت 9×10^9 پر کی گئی۔اسی طرح Q_2 کے لئے حل کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{32} &= (2-1)\boldsymbol{a}_{\text{X}}+(2-4)\boldsymbol{a}_{\text{y}}+(5-2)\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\\
&= 1\boldsymbol{a}_{\text{X}}-2\boldsymbol{a}_{\text{y}}+3\boldsymbol{a}_{\text{Z}}
\end{aligned}
$$

اور

$$
\begin{aligned}
R_{32} &= \left|\boldsymbol{R}_{32}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}\\
\boldsymbol{a}_{32} &= \frac{1\boldsymbol{a}_{\text{X}}-2\boldsymbol{a}_{\text{y}}+3\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{\sqrt{14}}\\
&= 0.267\boldsymbol{a}_{\text{X}}-0.535\boldsymbol{a}_{\text{y}}+0.802\boldsymbol{a}_{\text{Z}}
\end{aligned}
$$

سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_2 &= 9\times10^9\frac{50\times10^{-6}}{14}\left(0.267\boldsymbol{a}_{\text{X}}-0.535\boldsymbol{a}_{\text{y}}+0.802\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right)\\
&= 8582\boldsymbol{a}_{\text{X}}-17\,196\boldsymbol{a}_{\text{y}}+25\,779\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}}
\end{aligned}
$$

ملتا ہے۔ان دو جوابات کا سمتی مجموعہ لیتے ہوئے کل $\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\\
&= \left(-18\,686\boldsymbol{a}_{\text{X}}+9343\boldsymbol{a}_{\text{y}}+37\,414\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right)+\left(8582\boldsymbol{a}_{\text{X}}-17\,196\boldsymbol{a}_{\text{y}}+25\,779\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right)\\
&= -10\,104\boldsymbol{a}_{\text{X}}-7853\boldsymbol{a}_{\text{y}}+63\,193\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}}
\end{aligned}
$$

مساوات 1.16 کو

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{2.21}$$

لکھا جا سکتا ہے جو برقی میدان $\mathbf{E}$ کے موجودگی میں بار q پر قوت $\mathbf{F}$ دیتا ہے۔

2.3 یکساں بار بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

شکل 1.3 میں z محدد پر $z = -\infty$ سے $z = +\infty$ تک یکساں بار کی کثافت پائی جاتی ہے۔آپ تصور کر سکتے ہیں کہ z محدد پر انتہائی قریب قریب برابر فاصلے پر یکساں نقطہ بار رکھے گئے ہیں۔یوں اگر ΔL لمبائی میں کل ΔQ بار پایا جائے تب اکائی لمبائی میں $\frac{\Delta Q}{\Delta L}$ بار پایا جائے گا جسے **لکیری کثافتِ بار**[17] ρ_L[18] کہا جاتا ہے اور جس کی اکائی $\mathrm{C/m}$ ہے۔لکیری کثافتِ بار کی تعریف

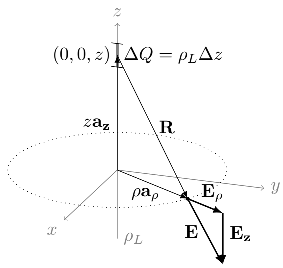
$$\rho_L = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L} \tag{2.22}$$

ہے۔لکیر پر چھوٹی لمبائی اتنی کم نہیں کی جاتی کہ بار بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ نظر آئیں اور لکیری کثافت کی جگہ نقطہ بار نظر آئیں۔اگر لکیر پر بار کی تقسیم ہر جگہ یکساں نہ ہو تب لکیری کثافتِ بار متغیر ہو گی۔آئیں یکساں لکیری کثافتِ بار سے خالی خلاء میں پیدا برقی میدان پر غور کریں۔

پہلے بغیر قلم اٹھائے اس مسئلے کی نوعیت پر توجہ دیتے ہیں۔مقام $(0, 0, z)$ پر چھوٹی سی لمبائی Δz میں $\rho_L \Delta z$ بار پایا جاتا ہے جسے نقطہ بار تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔z محدد کے گرد $z = 0$ یعنی xy سطح پر شکل 1.3 میں نقطہ دار گول دائرہ بنایا گیا ہے۔نقطہ بار $\rho_L \Delta z$ سے دائرے پر کسی بھی مقام پر پیدا برقی میدان پر غور کرتے ہیں۔برقی میدان کی مقدار کا دارومدار میدان پیدا کرنے والے بار اور بار سے فاصلے پر ہے۔نقطہ دار لکیر پر پائے جانے والے تمام نقطوں کا $(0, 0, z)$ سے فاصلہ برابر ہے۔یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ اس دائرے پر برقی میدان کی شدت کی حتمی قیمت ہر جگہ برابر ہو گی۔اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ بار کی نقطہ نظر سے نقطہ دار لکیر پر تمام نقطے بالکل یکساں نظر آتے ہیں۔اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ دار دائرے پر ہر جگہ برقی میدان یکساں ہو گا۔

[17] line charge density

[18] اس کتاب میں رداس کے لئے بھی ρ استعمال کیا جاتا ہے۔ρ کو جب بھی کثافت کے لئے استعمال کیا جائے،اس کے زیر نوشت میں L،S یا h لکھا جائے گا۔



شکل 2.3: یکساں بار بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

آئیں شکل 1.3 کو دیکھتے ہوئے ایک اور مشابہت پر غور کرتے ہیں۔چونکہ $\mathbf{E}$ سمتی فاصلہ $\mathbf{R}$ کی سمت میں ہوتا ہے لہٰذا دائرے پر کسی بھی نقطے پر نقطہ بار $\rho_L \Delta z$ سے پیدا $\boldsymbol{E}$ کے دو اجزاء پائے جائیں گے یعنی

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\rho + \boldsymbol{E}_z \tag{2.23}$$

مثبت ρ_L کی صورت میں $(0,0,z)$ پر موجود بار سے $\boldsymbol{E}_z$ کی سمت منفی z جانب ہو گی۔اسی طرح $(0,0,-z)$ پر پائے جانے والے مثبت بار سے دائرے پر پیدا $\boldsymbol{E}$ کی سمت مثبت z جانب ہو گی۔دائرے پر یہ دونوں ارکان ایک دونوں کو ختم کریں گے۔اسی عمل سے دائرے پر کسی بھی نقطے پر مثبت z محدد پر کسی بھی فاصلے پر پائے جانے والے بار سے پیدا $\boldsymbol{E}_z$ کے اثر کو منفی z محدد پر اتنے ہی فاصلے پر بار سے پیدا $\boldsymbol{E}_z$ ختم کرتا ہے۔یوں دائرے پر

$$\boldsymbol{E}_z = 0 \tag{2.24}$$

ہو گا۔

ایک آخری مشابہت پر اب غور کرتے ہیں۔اگر نقطہ دار دائرے کو z محدد پر مثبت یا منفی جانب لے جایا جائے تو کیا ہو گا؟ اب بھی دائرے کے ایک جانب کسی بھی فاصلے پر بار کا اثر دائرے کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر بار ختم کرے گا۔یوں دائرے کے ایک جانب یعنی z محدد پر ∞ تک فاصلے پر باروں کے $\boldsymbol{E}_z$ کو دائرے کی دوسری جانب z محدد پر $-\infty$ تک فاصلے پر باروں کا $\boldsymbol{E}_z$ ختم کرے گا اور یوں خلاء میں ہر جگہ مساوات 1.24 درست ثابت ہوتا ہے۔اس حقیقت کو یوں بہتر بیان کیا جا سکتا ہے کہ لامحدود لکیر پر یکساں کثافت بار سے خلاء میں برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پیدا ہو گا۔آئیں اس $\mathbf{E}$ کو حاصل کریں۔

شکل 1.3 میں مقام z پر نقطہ بار $\rho_L \Delta z$ دائرے پر $\Delta\boldsymbol{E}$ پیدا کرتا ہے۔محدد کے مرکز سے نقطہ بار کا مقام سمتیہ $z\boldsymbol{a}_z$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ دائرے پر کسی بھی نقطے N کو سمتیہ $\rho\boldsymbol{a}_\rho$ ظاہر کرتا ہے۔یوں نقطہ بار سے N تک کا سمتی

فاصلہ اور اسی سمت میں اکائی سمتیہ یوں حاصل کئے جائیں گے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \\
|\boldsymbol{R}| &= R = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\
\boldsymbol{a}_R &= \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}
\end{aligned}
$$

مساوات 1.19 سے

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{E} &= \frac{\rho_L \Delta z}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)} \frac{\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\
&= \frac{\rho_L \Delta z \left(\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right)}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ تمام باروں کے اثرات کو یکجا کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو تکمل کی شکل دے کر مندرجہ ذیل مساوات میں دکھایا گیا ہے۔ تکملہ کے حدود $-\infty$ اور $+\infty$ ہیں۔

$$
\boldsymbol{E} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\rho_L \left(\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right)}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \mathrm{d}z \tag{2.25}
$$

اس تکمل کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$
\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.26}
$$

جہاں مساوات کی نشان کے دائیں جانب پہلا تکمل $\boldsymbol{E}_\rho$ اور دوسرا تکمل $\boldsymbol{E}_z$ دیتا ہے یعنی

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

مساوات 1.24 کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دوسرا تکملہ صفر جواب دیگا۔ آئیں دونوں تکمل کو باری باری حل کریں۔ پہلے $\boldsymbol{E}_\rho$ حل کرتے ہیں۔ اس مساوات میں

$$
z = \rho \tan \alpha
$$

استعمال کرتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے تکمل کا ابتدائی حد

$$
\begin{aligned}
-\infty &= \rho \tan \alpha_{\text{ابتدائی}} \\
\alpha_{\text{ابتدائی}} &= -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

اور اختتامی حد

$$
\begin{aligned}
\infty &= \rho \tan \alpha_{\text{اختتامی}} \\
\alpha_{\text{اختتامی}} &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔مزید

$$
\mathrm{d}z = \rho \sec^2 \alpha \,\mathrm{d}\alpha
$$

لکھا جائے گا۔یوں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \,\mathrm{d}\alpha}{\left(\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \,\mathrm{d}\alpha}{\rho^3 \left(1 + \tan^2 \alpha\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

لکھا جائے گا جس میں

$$
1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha
$$

استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \,\mathrm{d}\alpha}{\rho^3 \sec^3 \alpha} \\
&= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \sin \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \\
&= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \boldsymbol{a}_\rho
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

ملتا ہے جہاں دوسری قدم پر $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ کا استعمال کیا گیا۔

آئیں اب مساوات 1.27 کے دوسرے جزو کو حل کریں۔اس میں بھی $z = \rho\tan\alpha$ استعمال کرتے ہیں۔یوں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^2\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left(\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

سے

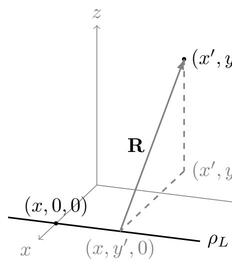
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\sec^3\alpha}\\
&= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\\
&= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\cos\alpha\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

ملتا ہے۔یہی جواب مساوات 1.24 میں حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 1.28 اور مساوات 1.29 سے مساوات 1.26 کا حل یوں لکھا جائے گا

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho \tag{2.30}$$

جس کے مطابق لامحدود سیدھی لکیر پر یکساں بار سے برقی میدان رداس ρ کے بالعکس متناسب ہے۔اس نتیجے کا مساوات 1.19 کے ساتھ موازنہ کریں جو نقطہ بار کی برقی میدان بیان کرتا ہے۔نقطہ بار کا برقی میدان کروی رداس



شکل 2.4: کسی بھی سمت میں لا محدود لکیر پر بار کی مثال

کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔یوں اگر لامحدود لکیر کے بار سے فاصلہ دگنا کر دیا جائے تو برقی میدان آدھا ہو جائے گا جبکہ نقطہ بار سے فاصلہ دگنا کرنے سے برقی میدان چار گنا کم ہوتا ہے۔

کسی بھی سمت میں لامحدود سیدھی لکیر پر بار کا برقی میدان مساوات 1.30 میں بیان خوبیوں پر پورا اترے گا۔ایسی صورت میں کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ حاصل کرنے کی خاطر اس نقطے سے بار کے لکیر تک کم سے کم فاصلہ R حاصل کریں۔یہ فاصلہ نقطے سے لکیر پر عمود کھینچنے سے حاصل ہو گا۔اس فاصلے کو ρ تصور کریں۔لکیر سے عمودی سمت میں نقطے کی جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_R$ کو $\boldsymbol{a}_\rho$ تصور کریں۔ایسی صورت میں مساوات 1.30 کو

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R}\boldsymbol{a}_R \tag{2.31}$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 2.7: y محدد کے متوازی اور $(x, 0, 0)$ سے گزرتی لامحدود لکیر پر ρ_L کثافت کا بار پایا جاتا ہے۔نقطہ (x', y', z') پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔شکل 1.4 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔

حل: (x', y', z') سے بار کے لکیر پر عمود $(x, y', 0)$ پر ٹکراتا ہے۔ان دو نقطوں کا آپس میں فاصلہ

$$\sqrt{(x'-x)^2 + z^2}$$

ہے جبکہ

$$\boldsymbol{R} = (x'-x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$
$$\boldsymbol{a}_R = \frac{(x'-x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{(x'-x)^2 + z^2}}$$

ہیں۔ یوں

$$E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\sqrt{(x'-x)^2+z^2}} a_R$$

ہو گا۔

مشق 2.1: y محدد پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $10 \,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ بار کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0,0,6)$ اور نقطہ $N_2(0,8,6)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جواب: دونوں نقطوں پر $E = 30a_{\mathrm{Z}}$ کے برابر ہے۔

مشق 2.2: x محدد پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $5 \,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ کثافت بار پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0,5,0)$ اور نقطہ $N_2(7,3,4)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $E_1 = 18a_{\mathrm{Z}} \,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $E_2 = 18\left(\frac{3a_{\mathrm{y}}+4a_{\mathrm{Z}}}{5}\right) \,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

2.4 یکساں بار بردار ہموار لا محدود سطح

شکل 1.5 میں $z = 0$ پر لا محدود $x - y$ سطح دکھائی گئی ہے۔تصور کریں کہ اس پوری سطح پر انتہائی قریب قریب نقطہ بار یوں رکھے گئے ہیں کہ سطح پر کہیں بھی چھوٹی رقبہ ΔS پر یکساں قیمت کا بار ΔQ پایا جاتا ہے۔اس طرح اکائی رقبے پر کل $\frac{\Delta Q}{\Delta S}$ بار پایا جائے گا جسے **سطحی کثافتِ بار**[19] ρ_S کہتے ہیں۔ سطحی کثافتِ بار کی تعریف

$$\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \tag{2.32}$$

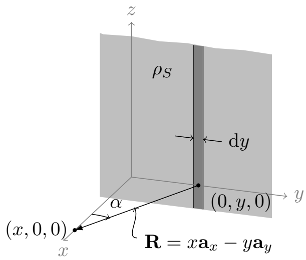
ہے۔چھوٹی سطح اتنی کم نہیں لی جاتی کہ اس پر بار بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ بطور نقطہ بار نظر آئیں بلکہ اسے اتنا رکھا جاتا ہے کہ علیحدہ علیحدہ الیکٹران کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ سطح پر ہر جگہ بار کا تقسیم یکساں نہ ہونے کی صورت میں ρ_S کی قیمت متغیر ہو گی۔آئیں لا محدود سطح پر یکساں کثافتِ بار سے خالی خلاء میں پیدا $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

پہلے غور کرتے ہیں کہ آیا مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے کچھ اخذ کرنا ممکن ہے۔اگر اس بار بردار سطح کے سامنے ہم کھڑے ہو جائیں تو ہمیں سامنے لا محدود بار بردار سطح نظر آئے گی۔ سطح سے برابر فاصلے پر ہم جہاں بھی جائیں ہمیں صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔اسی طرح اگر ہم سطح کی دوسری طرف اتنے ہی فاصلے پر چلے جائیں تو ہمیں صورت حال میں کسی قسم کی کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایسی سطح سے برابر فاصلے پر تمام نقطوں پر یکساں برقی میدان پایا جائے گا۔اس کے برعکس اگر ہم اس سطح سے دور ہو جائیں تو ہمیں سطح قدر دور نظر آئے گی اور ہو سکتا ہے کہ اس تبدیلی سے $\mathbf{E}$ پر اثر ہو۔آئیں اب مسئلے کو حساب و کتاب سے حل کرتے ہوئے $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

شکل 1.5 میں بار بردار سطح پر z محدد کے متوازی دو انتہائی قریب قریب لکیریں کھینچی گئی ہیں جن کے مابین فاصلہ $\mathrm{d}y$ ہے۔اس گھیرے گئے رقبے کی چوڑائی $\mathrm{d}y$ ہے۔یوں ΔL لمبائی اور $\mathrm{d}y$ چوڑائی رقبے میں $\rho_S \Delta L \,\mathrm{d}y$ بار پایا جائے گا۔لکیروں سے گھیرے رقبے کو بار کی سیدھی لکیر تصور کیا جا سکتا ہے جس پر اکائی لمبائی کے رقبے پر $\frac{\rho_S \Delta L \,\mathrm{d}y}{\Delta L}$ بار پایا جائے گا جسے ρ_L تصور کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\rho_L = \rho_S \,\mathrm{d}y \tag{2.33}$$

[19] surface charge density



شکل 2.5: یکساں بار بردار ہموار لامحدود سطح

لامحدود لکیر پر یکساں بار کی کثافت سے پیدا برقی میدان پر گزشتہ حصے میں غور کیا گیا۔نقطہ $(x, 0, 0)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کرتے ہیں۔ شکل میں لامحدود بار کی لکیر سے اس نقطے تک کا قریبی سمتی فاصلہ $\mathbf{R}$ دکھایا گیا ہے جہاں

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \tag{2.34}$$

کے برابر ہے جس سے

$$\begin{aligned} R &= |\boldsymbol{R}| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \boldsymbol{a}_R &= \frac{x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \tag{2.35}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں بار بردار لکیر سے $(x, 0, 0)$ پر پیدا برقی میدان کو مساوات 1.31 کی مدد سے

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_S \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{\rho_S \,\mathrm{d}y \left(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + y^2\right)} \end{aligned} \tag{2.36}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس جواب کو $\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x + \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S x \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + y^2\right)} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y &= -\frac{\rho_S y \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + y^2\right)} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \end{aligned} \tag{2.37}$$

کے برابر ہیں۔x محدد کے ایک جانب بار بردار لکیر مندرجہ بالا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ x محدد کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر بار بردار لکیر سے پیدا برقی میدان مندرجہ بالا $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کو ختم کرے

گا۔یوں کسی بھی مثبت y پر کھینچی لکیر کے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کو منفی y پر کھینچی لکیر کا $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ ختم کرے گا۔ x محدد کے دونوں جانب مسئلے کی مشابہت سے یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ

$$\boldsymbol{E}_y = 0 \tag{2.38}$$

ہو گا۔

آئیں اب حساب و کتاب سے مساوات 1.37 کو حل کریں۔پہلے $\boldsymbol{E}_x$ حاصل کرتے ہیں۔مساوات 1.37 میں دئے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_x$ کا تکمل لیتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned}
y &= x \tan\alpha \\
\mathrm{d}y &= x \sec^2\alpha \,\mathrm{d}\alpha
\end{aligned} \tag{2.39}$$

کا استعمال کرتے ہیں۔شکل 1.5 میں α کی نشاندہی کی گئی ہے۔یوں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_x = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)} \\
&= \frac{\rho_S x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}}{2\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \frac{x \sec^2\alpha \,\mathrm{d}\alpha}{x^2\left(1+\tan^2\alpha\right)}
\end{aligned}$$

میں $\sec^2\alpha = 1+\tan^2\alpha$ کے استعمال سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}}{2\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}}{2\pi\epsilon_0} \,\alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

حاصل ہوتا ہے۔آئیں اب $\boldsymbol{E}_y$ حاصل کریں۔

مساوات 1.37 میں دئے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E}_y = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y = -\frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{y \,\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)}$$

تکمل کے نشان کے اندر $f(y) = x^2 + y^2$ لیتے ہوئے اسے $\frac{\mathrm{d}f(y)}{2f(y)}$ لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل $\frac{\ln f(y)}{2}$ ہے۔یوں

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_y &= -\frac{\rho_S \boldsymbol{a}_\mathrm{y}}{2\pi\epsilon_0} \left.\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}\right|_{y=-\infty}^{y=+\infty} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.41}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 1.38 میں یہی جواب حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 1.40 اور مساوات 1.41 کی مدد سے یکساں بار بردار لامحدود سطح کی برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_N \tag{2.42}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ اس سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطح سے فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے برقی میدان کی شدت پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔سطح کے دونوں جانب برقی میدان اسی مساوات سے حاصل کی جائے گی۔ظاہر ہے کہ سطح کے دونوں جانب کے اکائی عمودی سمتیہ آپس میں الٹ ہیں۔

اب تصور کریں کہ اس سطح کے متوازی $x = x_1$ پر ایک اور لامحدود سطح رکھی جائے جس پر بار کی یکساں کثافت $-\rho_S$ ہو۔ان دو متوازی سطحوں کو دو دھاتی چادروں سے بنایا گیا برق گیر[20] (کپیسٹر) سمجھا جا سکتا ہے۔کسی بھی نقطے پر کل E دونوں سطحوں پر بار سے پیدا برقی میدان کا مجموعہ ہو گا۔پہلے دونوں سطحوں کے دونوں جانب برقی میدان لکھتے ہیں۔

- $x = 0$ پر $+\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^+_{x>0} &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} && x > 0 \\ \boldsymbol{E}^+_{x<0} &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} && x < 0 \end{aligned}$$

- $x = x_1$ پر $-\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^-_{x>x_1} &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} && x > x_1 \\ \boldsymbol{E}^-_{x<x_1} &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} && x < x_1 \end{aligned}$$

[20] capacitor

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے $x < 0$، $x > x_1$ اور $0 < x < x_1$ خطوں میں برقی میدان حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{x<0} &= \boldsymbol{E}^+_{x<0} + \boldsymbol{E}^-_{x<x_1} = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{X} = 0 \\ \boldsymbol{E}_{x>x_1} &= \boldsymbol{E}^+_{x>0} + \boldsymbol{E}^-_{x>x_1} = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{X} - \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{X} = 0 \\ \boldsymbol{E}_{0<x<x_1} &= \boldsymbol{E}^+_{x>0} + \boldsymbol{E}^-_{x<x_1} = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{X} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{X} \end{aligned} \tag{2.43}$$

اس نتیجے کے مطابق دو متوازی لامحدود سطحوں جن پر الٹ یکساں کثافت پائی جائے کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا جبکہ سطحوں کے درمیانی خطے میں

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{X} \tag{2.44}$$

برقی میدان پایا جاتا ہے۔اس میدان کی سمت مثبت بار بردار چادر سے منفی بار بردار چادر کی جانب ہوتی ہے۔یہی مساوات ایک ایسے برق گیر (کپیسٹر) کے برقی میدان کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جس میں دھاتی چادروں کی لمبائی اور چوڑائی دونوں چادروں کے درمیانی فاصلے سے کئی گنا زیادہ ہو اور چادروں کے درمیان خالی خلاء یا ہوا پائی جائے۔چادروں کے کناروں کے قریب برق گیر (کپیسٹر) کے اندر اور باہر صورت حال قدر مختلف ہو گی۔

مثال 2.8: خلاء میں تین متوازی لامحدود سطح پائے جاتے ہیں جن پر بار کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔پہلی سطح $y = 2$ پر $2\,\mathrm{nC/m^2}$، دوسری سطح $y = 5$ پر $4\,\mathrm{nC/m^2}$ اور تیسری سطح $y = 10$ پر $-6\,\mathrm{nC/m^2}$ کثافت پائی جاتی ہے۔$N_1(0,0,0)$، $N_2(5,3,4)$، $N_3(-2,7,11)$ اور $N_4(-7,30,22)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: 0، $144\pi\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$، $216\pi\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ اور 0

2.5 بار بردار حجم

ہم نقطہ بار، لامحدود لکیر پر بار اور لامحدود سطح پر بار دیکھ چکے ہیں۔اگلا فطری قدم بار بردار حجم بنتا ہے لہٰذا اسی پر غور کرتے ہیں۔لکیر اور سطح کے بار پر غور کرتے ہوئے ہر جگہ یکساں کثافت کی بات کی گئی۔حجم میں بار کی بات کرتے

ہوئے اس شرط کو دور کرتے ہوئے کثافت کو متغیرہ تصور کرتے ہیں۔یوں مختلف مقامات پر کثافت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔

تصور کریں کہ حجم میں انتہائی قریب قریب نقطہ بار پائے جاتے ہیں۔یوں اگر کسی نقطے پر Δh حجم میں ΔQ بار پایا جائے تب اس نقطے پر اوسط حجمی کثافتِ بار $\frac{\Delta Q}{\Delta h}$ ہو گی۔کسی بھی نقطے پر بار کی حجمی کثافت یوں بیان کی جاتی ہے۔

$$\rho_h = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta h} \tag{2.45}$$

کسی بھی حجم میں کل بار تین درجی تکمل سے حاصل کیا جائے گا۔کارتیسی محدد میں ایسا تکمل یوں لکھا جائے گا۔

$$Q = \iiint\limits_{\mathrm{h}} \rho_h \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \tag{2.46}$$

جہاں تکمل کے نشان کے نیچے h حجم کو ظاہر کرتا ہے۔اس طرز کے تکمل کو عموماً ایک درجی تکمل سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$Q = \int\limits_{\mathrm{h}} \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{2.47}$$

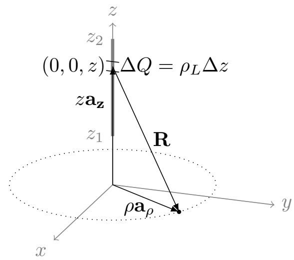
حجم میں $\mathbf{r}'$ نقطے پر چھوٹی سی حجم $\Delta h'$ میں $\Delta Q = \rho_h' \Delta h'$ بار پایا جائے گا جسے نقطہ بار تصور کیا جا سکتا ہے۔نقطہ $\mathbf{r}$ پر اس نقطہ بار کا برقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ مساوات 1.20 سے یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_h' \Delta h'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^2} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}$$

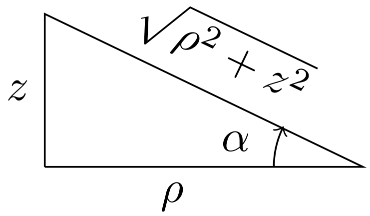
اس مساوات میں نقطہ r' پر بار کی کثافت ρ_h' لکھی گئی ہے۔تمام حجم میں پائے جانے والے بار کا نقطہ $\mathbf{r}$ پر میدان مندرجہ بالا مساوات کے تکمل سے یوں حاصل کیا جائے گا۔

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{\mathrm{h}} \frac{\rho_h' \,\mathrm{d}h'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^2} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{2.48}$$

اس مساوات کی شکل قدر خوف ناک ہے البتہ حقیقت میں ایسا ہر گز نہیں۔سمتیہ $\mathbf{r}$ اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی میدان حاصل کرنا درکار ہو۔اس نقطے پر برقی میدان کو $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ لکھ کر اس حقیقت کی وضاحت کی گئی ہے کہ



(ا) محدود لکیر پر بار کی یکساں کثافت



(ب) z اور α کا تعلق

شکل 2.6: محدود لکیر پر بار

نقطے کی تبدیلی سے برقی میدان تبدیل ہو سکتا ہے۔کثافت از خود متغیرہ ہے جس کی قیمت $\mathbf{r}'$ پر منحصر ہے۔ $\mathbf{r}'$ پر چھوٹی حجم $\mathrm{d}h'$ اور بار کی کثافت ρ'_h لکھے گئے ہیں جہاں $'$ اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ یہ متغیرات نقطہ r' پر پائے جاتے ہیں۔آخر میں یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ حاصل کرتے وقت اسی نقطے پر موجود بار کو نظرانداز کیا جاتا ہے۔

2.6 مزید مثال

مثال 2.9: شکل 1.6 میں $z=z_1$ سے $z=z_2$ تک کی سیدھی لکیر پر یکساں ρ_L پایا جاتا ہے۔نقطہ دار گول دائرے پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔اس گول دائرے کا مرکز کارتیسی محدد کے مرکز $(0,0,0)$ پر ہے جبکہ دائرہ از خود $z=0$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل: شکل 1.6 سے واضح ہے کہ نکتہ دار گول دائرے پر $\mathbf{E}$ کی حتمی قیمت $|\boldsymbol{E}|$ یکساں ہو گی۔یوں ہم لکھ سکتے ہیں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|}\frac{\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\\
&= \frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}}\\
&= \boldsymbol{E}_\rho + \boldsymbol{E}_z
\end{aligned}$$

دائیں جانب باری باری تکملہ حل کرتے ہیں۔تکملہ حل کرنے کی خاطر $z=\rho\tan\alpha$ کا تعلق استعمال کرتے ہیں۔ α کا z کا تعلق شکل 1.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\rho\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left|\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right|^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\sin\alpha\Bigg|_{\alpha_1}^{\alpha_2}\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1\right)
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= \tan^{-1}\frac{z_2}{\rho}\\
\alpha_1 &= \tan^{-1}\frac{z_1}{\rho}
\end{aligned}
$$

کے برابر ہے۔شکل 1.6-ب سے $\sin\alpha=\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں

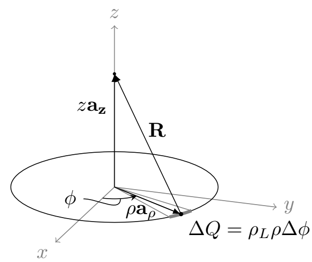
$$
\boldsymbol{E}_\rho = \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}}-\frac{z_1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right)
$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}}\\
&= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\rho^2\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left|\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right|^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\right)\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right)
\end{aligned}
$$



شکل 2.7: بار بردار گول دائرہ

حاصل ہوتا ہے۔ E_ρ اور E_z کا مجموعہ لیتے ہوئے کل برقی میدان یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$
\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho}\left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right) + \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right) \tag{2.49}
$$

اگر نقطہ دار گول دائرہ $z = z_0$ سطح پر پایا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho}&\left[\frac{z_2 - z_0}{\sqrt{\rho^2+(z_2-z_0)^2}} - \frac{z_1 - z_0}{\sqrt{\rho^2+(z_1-z_0)^2}}\right] \\
&+ \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z_2-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z_1-z_0)^2}}\right]
\end{aligned}
$$

صورت اختیار کرتا۔

مثال 2.10: شکل 1.7 میں $z = 0$ پر گول دائرہ دکھایا گیا ہے جس پر بار کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $(0, 0, z)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

حل: نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے اسے حل کرتے ہیں۔کسی بھی زاویہ پر رداس کھینچتے ہوئے دائرے پر کوئی نقطہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔زاویہ میں باریک تبدیلی $\Delta\phi$ سے لمبائی $\rho\Delta\phi$ حاصل ہوتی ہے جس پر کل بار $\Delta Q = \rho_L \rho \Delta\phi$ پایا جائے گا۔یوں بار ΔQ مقام $\rho \boldsymbol{a}_\rho$ پر پایا جاتا ہے جبکہ $\mathbf{E}$ مقام $z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ پر درکار ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\mathbf{E}$ رداس کی سمت میں ممکن نہیں۔ΔQ سے

$$\Delta \boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \rho \Delta\phi}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)} \frac{z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} - \rho\boldsymbol{a}_\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

پیدا ہو گا۔دائرے پر تمام بار کے اثر کے لئے تکملہ لینا ہو گا۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} - \rho\boldsymbol{a}_\rho\right) \mathrm{d}\phi$$

تکملہ کا متغیرہ ϕ ہے جسے تبدیل کرنے سے ρ اور z میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔اسی لئے انہیں تکملہ کی نشان سے باہر لے جایا گیا ہے۔حاصل تکملہ کو دو حصوں میں لکھا جا سکتا ہے البتہ معاملہ اتنا سیدھا نہیں جتنا معلوم ہوتا ہے۔$\boldsymbol{E}_z$ لکھتے ہوئے کارتیسی محدد کی اکائی سمتیہ $\mathbf{a}_\mathrm{Z}$ کو تکملہ کے باہر لے جایا جا سکتا ہے چونکہ ϕ کی تبدیلی سے $\mathbf{a}_\mathrm{Z}$ تبدیل نہیں ہوتا البتہ $\boldsymbol{E}_\rho$ لکھتے ہوئے نلکی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کو تکملہ کے باہر نہیں لے جایا جا سکتا چونکہ ϕ کی تبدیلی سے $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔چونکہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت تبدیل ہوتی ہے لہٰذا اس کو مستقل تصور کرنا غلط ہے اور یوں یہ تکملہ کے اندر ہی رہے گا۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_z &= \frac{\rho_L \rho z \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \\ \boldsymbol{E}_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{a}_\rho \, \mathrm{d}\phi \end{aligned} \tag{2.50}$$

پہلے تکملہ کا جواب اب دیکھ کر ہی

$$\boldsymbol{E}_z = \frac{2\pi\rho_L \rho z \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.51}$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ دوسرے تکملہ میں $\boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi \boldsymbol{a}_\mathrm{X} + \sin\phi \boldsymbol{a}_\mathrm{Y}$ لکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E}_\rho = -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(\cos\phi \boldsymbol{a}_\mathrm{X} + \sin\phi \boldsymbol{a}_\mathrm{Y}\right) \mathrm{d}\phi$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\sin\phi \boldsymbol{a}_{\text{X}} - \cos\phi \boldsymbol{a}_{\text{Y}}\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

یہی جواب اس طرح بھی حاصل کیا جا سکتا ہے کہ گول دائرے پر تمام بار کو $Q = 2\pi\rho\rho_L$ لکھیں۔یہ بار نقطہ $(0,0,z)$ سے $\sqrt{\rho^2+z^2}$ فاصلے پر ہے۔اگر اس تمام بار کو ایک ہی نقطے $(\rho,0,0)$ پر موجود تصور کیا جائے تو یہ

$$
\boldsymbol{E}_R = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)} \boldsymbol{a}_R
$$

برقی میدان پیدا کرے گا۔بار گول دائرے پر پھیلا ہوا ہے لہٰذا حقیقت میں صرف $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ جانب ہی $\boldsymbol{E}$ پیدا ہوتا ہے۔شکل میں اس تکون کو دیکھتے ہوئے جس کا $\boldsymbol{R}$ حصہ ہے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{E}_R$ کا $\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ حصہ حقیقت میں پایا جائے گا۔یوں

$$
\boldsymbol{E}_z = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)} \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \boldsymbol{a}_{\text{Z}}
$$

ہی حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2.11: رداس a کرہ کی سطح پر یکساں کثافتِ بار ρ_S پایا جاتا ہے۔کرہ کے باہر اور اس کے اندر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔کرہ کو کروی محدد کے مرکز پر رکھتے ہوئے حل کریں۔

حل:کرہ کی سطح پر نقطہ $M(a,\theta,\phi)$ پر چھوٹی رقبہ $a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi$ میں بار $\rho_S a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi$ پایا جائے گا جو نقطہ $N(0,0,b)$ پر برقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ پیدا کرے گا۔محدد کے مرکز سے M تک سمتی فاصلہ $a\boldsymbol{a}_{\text{r}}$ جبکہ مرکز سے N تک سمتی فاصلہ $b\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ہے۔یوں M سے N تک سمتی فاصلہ

$$
\boldsymbol{R} = b\boldsymbol{a}_{\text{Z}} - a\boldsymbol{a}_{\text{r}} \tag{2.52}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد اور کروی محدد کے اکائی سمتیات استعمال کئے گئے ہیں۔اس طرح

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{R}| = \sqrt{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}} &= \sqrt{(b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})\cdot(b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})} \\ &= \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}} \\ &= \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta}\end{aligned} \tag{2.53}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_R = \frac{\boldsymbol{R}}{|R|} = \frac{b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta}} \tag{2.54}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں صفحہ 46 پر جدول 1.3 کے استعمال سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \cos\theta$ لکھا گیا ہے۔

کرہ کی سطح z محدد کو $(0,0,-a)$ اور $(0,0,a)$ پر چھوتا ہے جہاں بالترتیب $\theta = \pi$ اور $\theta = 0$ کے برابر ہیں۔یوں $(0,0,-a)$ سے $N(0,0,b)$ تک فاصلہ

$$\begin{aligned}\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos\pi} &= \sqrt{b^2 + a^2 + 2ab} \\ &= \sqrt{(b+a)^2} \\ &= b + a\end{aligned} \tag{2.55}$$

کے برابر ہے جہاں جذر لیتے وقت مثبت جواب چنا گیا ہے چونکہ فاصلہ مقداری[21] ہے جو مثبت قیمت رکھتا ہے۔اسی طرح $(0,0,a)$ سے $N(0,0,b)$ تک فاصلہ

$$\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos 0} = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} \tag{2.56}$$

کے برابر ہے۔اگر N کرہ کے باہر ہو تب $b > a$ ہو گا اور یہ فاصلہ $b - a$ کے برابر ہو گا جسے مساوات 1.56 سے یوں

$$\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} = \sqrt{(b-a)^2} = b - a \tag{2.57}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس کے برعکس اگر N کرہ کے اندر ہو تب $b < a$ ہو گا اور یہ فاصلہ $a - b$ کے برابر ہو گا جسے اور مساوات 1.56 سے یوں

$$\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} = \sqrt{(a-b)^2} = a - b \tag{2.58}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔

[21] فاصلہ ہر صورت مثبت ہوتا ہے البتہ سمتی فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے جہاں سمتی فاصلے کی مقدار مثبت ہی رہتی ہے جبکہ اس کی سمت مثبت یا منفی ہو سکتی ہے۔

اس طرح N پر

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_R$$

لکھتے ہوئے تمام کرہ پر بار سے پیدا میدان کو تکمل سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\rho_S a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0 (b^2+a^2-2ab\cos\theta)} \frac{b\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} - a\boldsymbol{a}_\mathrm{r}}{\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}} \\ &= \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(b\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} - a\boldsymbol{a}_\mathrm{r})\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\end{aligned} \tag{2.59}$$

اس مساوات میں جدول 1.3 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \cos\theta\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{[-a\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{X} - a\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (b-a\cos\theta)\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}]\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{2.60}$$

حاصل ہوتا ہے۔z محدد سے دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ اس محدد پر میدان صرف اور صرف $\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ سمت میں ہی ممکن ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_\mathrm{X}$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ اجزاء کو صفر لیتے ہوئے

$$E_z = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(b-a\cos\theta)\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{2.61}$$

لکھتے ہیں۔سوال 1.1 میں آپ سے درخواست کی گئی ہے کہ مساوات 1.60 میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{X}$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ اجزاء کو صفر ثابت کریں۔بیرونی تکمل پہلے لیتے ہوئے

$$E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{(b-a\cos\theta)\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta \tag{2.62}$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.63}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 1.63 کے پہلے تکمل میں θ $w = \cos\theta$ اور $\mathrm{d}w = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ پُر کر کے حل کرتے ہوئے

$$\int \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-\,\mathrm{d}w}{\left(b^2+a^2-2abw\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.64}$$

یعنی

$$\frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \left.\frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}\right|_0^{\pi} \\ &= \frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2+2ab}} + \frac{1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\end{aligned} \tag{2.65}$$

حاصل ہوتا ہے جو N بیرونِ کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 1.55 اور مساوات 1.57 کے تحت

$$\frac{1}{ab}\left[\frac{-1}{b+a}+\frac{1}{b-a}\right] = \frac{1}{ab}\left[\frac{-(b-a)+(b+a)}{(b+a)(b-a)}\right] = \frac{2}{b(b^2-a^2)} \tag{2.66}$$

جبکہ N اندرونِ کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 1.55 اور مساوات 1.58 کے تحت

$$\frac{1}{ab}\left[\frac{-1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right] = \frac{1}{ab}\left[\frac{-(a-b)+(a+b)}{(a+b)(a-b)}\right] = \frac{2}{a(a^2-b^2)} \tag{2.67}$$

شکل اختیار کرتا ہے۔

مساوات 1.63 کے دوسرے تکمل میں θ $w = \cos\theta$ پُر کرتے ہوئے

$$\int \frac{\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-w\,\mathrm{d}w}{\left(b^2+a^2-2abw\right)^{\frac{3}{2}}}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

کے کلیہ سے بخوبی واقف ہیں۔ہم

$$\begin{aligned} u &= w \\ \mathrm{d}v &= \frac{-\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

لیتے ہیں۔یوں

$$v = \int \mathrm{d}v = \int \frac{-\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

کے برابر ہے جسے ہم مساوات 1.64 میں حاصل کر چکے ہیں۔اس طرح

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \int w\left[\frac{-\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}\right] \\ &= w\left[\frac{-1}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}\right] + \int \frac{\mathrm{d}w}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-w}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}{a^2b^2} \\ &= \frac{-(b^2+a^2-abw)}{a^2b^2(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \left.\frac{-(b^2+a^2-ab\cos\theta)}{a^2b^2(b^2+a^2-2ab\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\right|_0^\pi \\ &= \frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2+a^2+ab)}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}} + \frac{(b^2+a^2-ab)}{\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\right] \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔N کا کرہ سے باہر ہونے کی صورت میں اس سے

$$\frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2+a^2+ab)}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}} + \frac{(b^2+a^2-ab)}{\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\right] = \frac{2a}{b^2(b^2-a^2)} \tag{2.68}$$

جبکہ N کا کرہ کے اندر ہونے کی صورت میں اس سے

$$\frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2+a^2+ab)}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}}+\frac{(b^2+a^2-ab)}{\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\right]=\frac{2b}{a^2(a^2-b^2)} \tag{2.69}$$

حاصل ہوتا ہے۔کرہ کے باہر مساوات 1.66 اور مساوات 1.68 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 1.63 سے

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{b(b^2-a^2)}\right)-\frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2a}{b^2(b^2-a^2)}\right)\\ &= \frac{4\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0 b^2}\\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \end{aligned} \tag{2.70}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کرہ پر کل بار $4\pi a^2\rho_S$ کو Q لکھا گیا ہے۔کرہ کے اندر مساوات 1.67 اور مساوات 1.69 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 1.63

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{a(a^2-b^2)}\right)-\frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2b}{a^2(a^2-b^2)}\right)\\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.71}$$

مساوات 1.70 بیرون کرہ z محدد پر میدان دیتا ہے۔چونکہ ہم کسی بھی سمت میں اس محدد کو رکھ سکتے تھے اور میدان اسی محدد کی سمت یعنی رداسی سمت میں ہوتا لٰہذا یہ ایک عمومی جواب ہے جسے کسی بھی بیرونی نقطے کے لئے

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \qquad (r>a) \tag{2.72}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ وہی میدان ہے جو کروی محدد کے مرکز پر Q نقطہ بار رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 1.71 کے تحت کرہ کے اندر میدان صفر کے برابر ہے۔یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ہم کسی بھی مقام کو کرہ یا کسی بھی مکمل بند موصل سطح میں گھیر کر اس مقام پر صفر برقی میدان یقینی بنا سکتے ہیں۔ایسی سطح کو **فیراڈے پردہ**[22] کہتے ہیں۔

[22]Faraday shield

حصہ 3.4.2 میں اسی مسئلے کو انتہائی آسان طریقے سے حل کرنا دکھایا جائے گا۔

مثال 2.12: مثال 1.11 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے a رداس کرہ جس میں یکساں ρ_h حجمی کثافتِ بار پائی جائے کا کرہ کے اندر اور کرہ کے باہر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

حل: کرہ کے اندر رداس r پر $\mathrm{d}r$ موٹی جھلی کا حجم $4\pi r^2 \,\mathrm{d}r$ ہو گا جس میں کل $4\pi\rho_h r^2 \,\mathrm{d}r$ بار پایا جائے گا۔ مثال 1.11 کے مطابق یہ بار r سے کم رداس کے خطے میں کوئی برقی میدان نہیں پیدا کرتا جبکہ r سے زیادہ رداس پر یہ میدان پیدا کرے گا۔ یوں R سے کم کسی بھی رداس پر جھلی میں پائے جانے والا بار R پر میدان پیدا کرے گا جسے

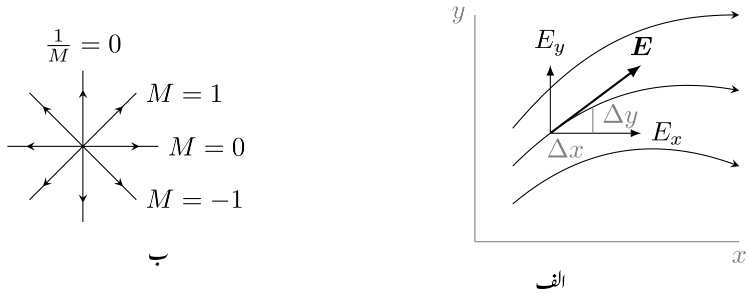
$$\boldsymbol{E} = \int_0^R \frac{4\pi\rho_h r^2 \,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \left.\frac{\rho_h r^3}{3\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right|_0^R = \frac{\rho_h R}{3\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \qquad (R < a) \tag{2.73}$$

لکھ کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔ بار کرہ کے باہر یعنی $R > a$ کی صورت میں کرہ میں موجود تمام بار بطور نقطہ بار کردار ادا کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3\rho_h}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{a^3\rho_h}{3\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \qquad (R > a) \tag{2.74}$$

2.7 برقی میدان کے سمت بہاو خط

ہم نے اب تک جتنے بھی مثال دیکھے ان سب میں $\boldsymbol{E}$ کی شکل سیدھی لکیر کی مانند رہی ہے۔ ایسے میدان کا تصوراتی شکل ذہن میں بنانا آسان ہوتا ہے۔ یوں نقطہ بار کے میدان کو بار سے ابتدا کرتے ہوئے ہر طرف سمتیوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ اب بار کے قریب $\boldsymbol{E}$ کی قیمت زیادہ اور بار سے دور اس کی قیمت کم ہوتی ہے۔ یوں مختلف مقامات پر $\boldsymbol{E}$ کی لمبائی یہاں کے میدان کی نسبت سے ہو گی۔ میدان کو ظاہر کرنے کے دیگر طریقے بھی رائج ہیں۔



شکل 2.8: الف) سمت بہاو خط کے مساوات کا حصول۔ب) لکیری کثافتِ بار کے سمت بہاو خط۔

آئیں ایسے ہی ایک طریقے پر غور کریں جس میں میدان کو **سمت بہاو خط** سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس طریقے میں کسی بھی نقطے پر $\boldsymbol{E}$ یہاں سے گزرتے سمت بہاو خط کا مماس ہوتا ہے۔جس مقام پر گھنے سمت بہاو خطوط پائے جائیں ایسے مقام پر $\boldsymbol{E}$ کی مقدار زیادہ ہوتی ہے اور جہاں ان خطوط کی تعداد کم ہو وہاں میدان کمزور ہوتا ہے۔سمت بہاو خطوط پر تیر کا نشان $\boldsymbol{E}$ کے مثبت سمت کی نشاندہی کرتا ہے۔

کارتیسی محدد میں کسی بھی میدان کو

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+E_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+E_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ مساوات ان میدان کو بھی ظاہر کرتا ہے جو سیدھی لکیر کی مانند نہ ہوں۔آئیں ایسے عمومی میدان پر غور کریں جس میں E_z کی قیمت صفر کے برابر ہو جبکہ E_x اور E_y کی قیمتیں x اور y پر منحصر ہو۔کسی بھی نقطہ (x,y) پر ایسے میدان کو

$$\boldsymbol{E}=E_x(x,y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+E_y(x,y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \tag{2.75}$$

لکھا جا سکتا ہے۔شکل 1.8-الف میں ایسے ہی ایک $\boldsymbol{E}$ کے تین سمت بہاو خط دکھائے گئے ہیں۔شکل میں کسی عمومی نقطے پر $\boldsymbol{E}$ دکھایا گیا ہے جو اس نقطے سے گزرتے سمت بہاو خط کا مماس ہے۔میدان کے کارتیسی اجزاء E_x اور E_y بھی دکھائے گئے ہیں۔اسی نقطے پر سمت بہاو خط کی چھوٹی لمبائی لیتے ہوئے Δx اور Δy دکھائے گئے ہیں۔Δx اور Δy کو کم سے کم کرتے ہوئے ہم شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{E_y}{E_x} \tag{2.76}$$

لکھ سکتے ہیں۔اب اگر ہمیں E_x اور E_y کی خاصیت معلوم ہو تب ہم تکمل سے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

آئیں لامحدود لکیری کثافتِ بار کے میدان کو مثال بناتے ہوئے اس کے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کریں۔ $\rho_L = 2\pi\epsilon_0$ کی صورت میں z محدد پر لامحدود لکیری کثافتِ بار کا میدان

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{a}_\rho}{\rho} \tag{2.77}$$

لکھا جاتا ہے۔مساوات 1.75 بھی اسی میدان کی مساوات ہے جس سے ظاہر ہے کہ $E_x = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{a}_\text{x}$ اور $E_y = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{a}_\text{y}$ سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔یوں مساوات 1.77 کی مدد سے

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\text{x} = \frac{\cos\phi}{\rho} = \frac{x}{x^2+y^2} \\
E_y &= \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\text{y} = \frac{\sin\phi}{\rho} = \frac{y}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں لامحدود لکیری کثافتِ بار کے میدان کو

$$\boldsymbol{E} = \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{a}_\text{x} + \frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{a}_\text{y} \tag{2.78}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح مساوات 1.76 کو

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

لکھ کر اس کا تکمل

$$\ln y = \ln x + M'$$

یعنی

$$y = Mx \tag{2.79}$$

لیتے ہوئے میدان کے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔یہ سیدھی لکیر کی مساوات ہے جسے مختلف M کے قیمتوں کے لئے شکل 1.8-ب میں کھینچا گیا ہے۔

سوالات

سوال 2.1: صفحہ 30 پر مساوات 1.60 میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اجزاء کا تکمل لیتے ہوئے انہیں صفر کے برابر ثابت کریں۔

سوال 2.2: تکون کے تینوں کونوں پر $25\,\mu\mathrm{C}$ کا بار پایا جاتا ہے جبکہ تینوں کونوں سے $15\,\mathrm{cm}$ فاصلے پر $20\,\mu\mathrm{C}$ بار پایا جاتا ہے۔ تکون کے اطراف $10\,\mathrm{cm}$ ہونے کی صورت میں چوتھے بار پر قوت دفع کی مقدار حاصل کریں۔

جواب: $0.553\,\mathrm{N}$

سوال 2.3: $z=0$ پر $4\,\mathrm{nF}$ اور $z=1\,\mathrm{cm}$ پر $-3\,\mathrm{nF}$ بار پائے جاتے ہیں۔ z محدد پر وہ نقطے دریافت کریں جہاں مثبت بار پر صفر قوت پائی جائے گی۔

جوابات: $z=0.92\,\mathrm{cm}$ ، $z=7.08\,\mathrm{cm}$

سوال 2.4: ایک چکور کے اطراف $25\,\mathrm{cm}$ ہیں جبکہ اس کے چاروں کونوں پر $30\,\mathrm{nC}$ بار پایا جاتا ہے۔ کسی ایک کونے کے بار پر کتنی قوت عمل کرے گی۔

جواب: $0.248\,\mathrm{mN}$

سوال 2.5: نقطہ $(2,1,-3)$ پر $15\,\mathrm{nC}$ اور نقطہ $(-3,-5,4)$ پر $-6\,\mathrm{nC}$ بار پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(2,1,-3)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $-0.191\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+1.057\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+2.195\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

سوال 2.6: نقطہ $(0,0,3)$ اور $(0,0,-3)$ پر $20\,\mu\mathrm{C}$ بار پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $N(2,0,0)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ محدد کے مرکز پر کتنا بار نقطہ N پر اتنی ہی برقی شدت پیدا کرے گا۔

جوابات: $\boldsymbol{E}=15\,339\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $6.827\,\mu\mathrm{C}$

سوال 2.7: نقطہ $(4,-2,7)$ پر $5\,\mu\mathrm{C}$ اور $(-3,4,-2)$ پر $12\,\mu\mathrm{C}$ بار پایا جاتا ہے۔ y محدد پر کہاں $E_x=0$ ہو گا۔

جواب: $y=-6.89$ ، $y=-22.11$

سوال 2.8: نقطہ $P(6,3,7)$ پر $6\,\mu\text{C}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $N(5,4,2)$ پر کارتیسی، نلکی اور کروی محدد میں $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔نقطہ N کے اکائی سمتیات استعمال کریں۔ - جوابات: $\boldsymbol{E} = -384.4\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 384.4\boldsymbol{a}_{\text{Y}} - 1922\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $\boldsymbol{E} = -60\boldsymbol{a}_{\rho} + 540\boldsymbol{a}_{\phi} - 1922\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $\boldsymbol{E} = -630\boldsymbol{a}_{\text{r}} + 1817\boldsymbol{a}_{\theta} + 540\boldsymbol{a}_{\phi}$

سوال 2.9: نقطہ $(0,0,0.25)$ اور $(0,0,-0.25)$ پر $50\,\text{nC}$ جبکہ $(0,0,0)$ پر $-35\,\text{nC}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $N(3,1,2)$ پر کارتیسی اور کروی محدد میں $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $34\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 11\boldsymbol{a}_{\text{Y}} + 22\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ، $42\boldsymbol{a}_{\text{r}} + 0.39\boldsymbol{a}_{\theta}$

سوال 2.10: محدد کے مرکز پر $1\,\text{nC}$ بار پایا جاتا ہے۔ سطح $z = 0$ پر اس خط کی مساوات حاصل کریں جس پر $E_y = 1\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہو گا۔

جواب: $80.8y^2 = (x^2 + y^2)^3$ ، $\rho^2 = 8.987 \sin\phi$

سوال 2.11: محدد کے مرکز پر پڑے چکور کے چاروں کونوں پر $5\,\text{nC}$ نقطہ بار پائے جاتے ہیں۔چکور $z = 0$ سطح پر پایا جاتا ہے جبکہ اس کے اطراف $1\,\text{m}$ لمبے ہیں۔نقطہ $(0,a,0)$ اور نقطہ $(0,2a,0)$ پر برقی شدت کی شرح $a = 2$ ، $a = 10$ اور $a = \infty$ کی صورت میں حاصل کریں۔

جوابات: 4.15 ، 4.01 ، 4

سوال 2.12: نقطہ $(0,0,0)$ پر Q_1 اور نقطہ $(1,0,0)$ پر Q_2 نقطہ بار پائے جاتے ہیں۔نقطہ $(2,1,0)$ پر $E_x = 0$ ہونے کی صورت میں باروں کا تعلق دریافت کریں۔

جواب: $Q_1 = -1.976Q_2$

سوال 2.13: کارتیسی محدد کے پہلے آٹھویں حصے $(x > 0, y > 0, z > 0)$ میں حجمی کثافت بار $\rho_h = 10e^{-2z}(x^2 + 2y^2)$ ہے جبکہ بقایا سات حصوں میں کوئی بار نہیں پایا جاتا۔خطہ $(0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1,\, 0 \le z \le 1)$ میں کل بار حاصل کریں۔اسی طرح خطہ $(0 \le x + 2y \le 1,\, 0 \le z \le 1)$ میں کل بار حاصل کریں۔

جوابات: پہلا جواب $4.32\,\text{C}$ ہے۔دوسرا تکمل $\int_0^{1/2}\int_0^{1-2y}\int_0^1 \rho_h \,\text{d}z\,\text{d}x\,\text{d}y$ لکھتے ہوئے $0.27\,\text{C}$ حاصل ہو گا۔

سوال 2.14: حجمی کثافت بار $\rho_h = (\rho + 0.002)z^2 \tan\phi \, \mathrm{C/m^3}$ خطہ $0 \le \rho \le 0.008$ ، $30° \le \phi \le 75°$ ، $2 \le z \le 5$ میں پایا جاتا ہے۔ کثافت بار کی زیادہ سے زیادہ قیمت دریافت کریں۔اس خطے میں کل بار حاصل کریں۔

جوابات: $0.933 \, \mathrm{C/m^3}$ ، $11.05 \, \mathrm{\mu C}$

سوال 2.15: نلکی محدد میں z محدد کے گرد یکساں حجمی کثافت بار $e^{-\rho^2}$ پائی جاتی ہے۔ $z = 0$ تا $z = 1$ کل بار حاصل کریں۔ z محدد کے گرد کتنے رداس کے اندر کل بار کا آدھا پایا جاتا ہے۔

جوابات: $3.142 \, \mathrm{C}$ ، $0.832 \, \mathrm{m}$

سوال 2.16: کروی محدد میں رداس کے ساتھ بدلتی حجمی کثافت بار $\rho_h = \sqrt{r}$ پائی جاتی ہے۔اکائی رداس کے کرہ میں کل بار حاصل کریں۔اسی طرح خطہ $(r \le 0.5, \theta \le 25°, \phi \le \frac{\pi}{3})$ میں کل بار حاصل کریں۔

جوابات: $3.59 \, \mathrm{C}$ ، $0.028 \, \mathrm{C}$

سوال 2.17: x محدد پر $\rho_L = 5 \, \frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ لکیری کثافت بار پایا جاتا ہے جبکہ نقطہ $(0, 3, 0)$ پر $-2 \, \mathrm{nC}$ نقطہ بار پایا جاتا ہے۔نقطہ $(4, 8, 1)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $-0.26\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 10.73\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 1.32\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.18: نقطہ $(0, 2, 0)$ اور $(0, 0, 4)$ سے گزرتی سیدھی لکیر پر لکیری کثافت بار $2 \, \frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے جبکہ نقطہ $(6, 1, -2)$ پر $7 \, \mathrm{nC}$ بار پایا جاتا ہے۔نقطہ $(6, 8, 4)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $2.47\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3.78\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 1.65\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.19: کارتیسی z محدد کے کچھ حصہ $z \le 0$ پر لکیری کثافت بار $5 \, \frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $(-2, 0, 0)$ اور نقطہ $(5, -2, 6)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $-22.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $13.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 5.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 5.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.20: کارتیسی z محدد کے کچھ حصہ $2 \le z \le 10$ پر لکیری کثافت بار $2 \, \frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $(2, 12, 8)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

$147\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 881\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 133\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.21: سطح $y = 1$ پر $\rho_S = 0.72\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$، سطح $y = -3$ پر $\rho_S = -0.72\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$، سطح $x = -6$ پر $0.4\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ اور لکیر $x = 2, z = 3$ پر $0.4\pi\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $(1, 3, -1)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $21.3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 5.31\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.22: سطح $z = 0$ پر مستطیل خطہ $-2 \le x \le 2, -3 \le y \le 3$ پر $\rho_S = |x|\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $(0, 0, 3)$ پر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $13.36\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.23: سطح $z = 0$ پر نلکی رداس $\rho = 2$ تا $\rho = 5$ سطحی کثافت بار $\rho_S = 4\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔نقطہ $(0, 0, 5)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $50\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.24: میدان $\boldsymbol{E} = 3\sqrt{x}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + x^3y^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کا سمت بہاو خط حاصل کریں۔نقطہ $(4, 1, 7)$ پر میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ لکھیں۔

جوابات: $\frac{y^2}{2} = \frac{x^{3.5}}{3.5} + C$ ، $0.093\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.996\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$

سوال 2.25: میدان $\boldsymbol{E} = (x + 2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (4 - y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے اس سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کریں جو نقطہ $(5, 7, 2)$ سے گزرتی ہے۔

جواب: $(y - 4)(x + 2) = 21$

سوال 2.26: جو میدان z تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتے، نلکی محدد میں ان کی سمت بہاو خط $\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho\,\mathrm{d}\phi} = \frac{E_\rho}{E_\phi}$ حل کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔نقطہ $(5, 75°, 3)$ سے گزرتے میدان $\boldsymbol{E} = \rho\cos\phi\boldsymbol{a}_\rho + \sin\phi\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت بہاو خط حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1}{\rho} + \ln(\sin\phi) = 0.1653$