برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1 سمتیات 1

1.1 مقداری اور سمتیہ 1

1.2 سمتی الجبرا 2

1.3 کارتیسی محدد 3

1.4 اکائی سمتیات 5

1.5 میدانی سمتیہ 9

1.6 سمتی رقبہ 9

1.7 غیر سمتی ضرب 10

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب 14

1.9 گول نلکی محدد 17

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب 20

1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق 20

1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں 25

1.10 کروی محدد 27

2 کولومب کا قانون 39

2.1 قوت کشش یا دفع 39

2.2 برقی میدان کی شدت 43

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان 46

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح 51

2.5 چارج بردار حجم 55

2.6 مزید مثال 56

2.7 برقی میدان کے سمت بہاو خط 63

3 گاؤس کا قانون اور پھیلاو 69
3.1 ساکن چارج 69
3.2 فیراڈے کا تجربہ 69
3.3 گاؤس کا قانون 70
3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال 72
3.4.1 نقطہ چارج 72
3.4.2 یکساں چارج بردار کروی سطح 74
3.4.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر 74
3.5 ہم محوری تار 75
3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح 77
3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق 77
3.8 پھیلاو 80
3.9 نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات 82
3.10 پھیلاو کی عمومی مساوات 84
3.11 مسئلہ پھیلاو 86

4 توانائی اور برقی دباو 87
4.1 توانائی اور کام 87
4.2 لکیری تکملہ 88
4.3 برقی دباو 93
4.3.1 نقطہ چارج کا برقی دباو 94
4.3.2 لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو 95
4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباو 96
4.4 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباو 96
4.5 برقی دباو کی ڈھلوان 100
4.5.1 نلکی محدد میں ڈھلوان 104
4.5.2 کروی محدد میں ڈھلوان 105
4.6 جفت قطب 106
4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاو خط 108
4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی 111

5 موصل، ذو برق اور کپیسٹر 117

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو 117

5.2 استمراری مساوات 119

5.3 موصل 121

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط 126

5.5 عکس کی ترکیب 129

5.6 نیم موصل 132

5.7 ذو برق 133

5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط 138

5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط 142

5.10 کپیسٹر 142

5.10.1 متوازی چادر کپیسٹر 144

5.10.2 ہم محوری کپیسٹر 145

5.10.3 ہم کوہ کپیسٹر 145

5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر 147

5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس 148

6 پوئسن اور لاپلاس مساوات 157

6.1 مسئلہ یکتائی 159

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے 160

6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات 161

6.4 لاپلاس مساوات کے حل 162

6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال 168

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل 171

6.7 عددی دہرانے کا طریقہ 178

7 ساکن مقناطیسی میدان 185[79]

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون 185[80]

7.2 ایمپیئر کا دوری قانون 189[81]

7.3 گردش 194[82]

7.3.1 نلکی محدد میں گردش 201[83]

7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات 206[84]

7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات 208[85]

7.4 مسئلہ سٹوکس 209[86]

7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو 212[87]

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو 219[88]

7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول 224[89]

7.7.1 سمتی مقناطیسی دباو 224[90]

7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون 226[91]

8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ 231[92]

8.1 متحرک چارج پر قوت 231[93]

8.2 تفرقی چارج پر قوت 232[94]

8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت 235[95]

8.4 قوت اور مروڑ 236[96]

8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے 241[97]

8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل 242[98]

8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط 245[99]

8.8 مقناطیسی دور 246[100]

8.9 مقناطیسی مخفی توانائی 249[101]

8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ 250[102]

8.11 مشترکہ امالہ 254[103]

9 وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات 257 104

9.1 فیراڈے کا قانون 257 105

9.2 انتقالی برقی رو 263 106

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل 267 107

9.4 میکس ویل مساوات کی تکمل شکل 268 108

9.5 تاخیری دباو 270 109

10 مستوی امواج 275 110

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج 275 111

10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج 276 112

10.2.1 خالی خلاء میں امواج 283 113

10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج 285 114

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج 287 115

10.3 پوئنٹنگ سمتیہ 290 116

10.4 موصل میں امواج 294 117

10.5 انعکاس مستوی موج 300 118

10.6 شرح ساکن موج 306 119

11 ترسیلی تار 313 120

11.1 ترسیلی تار کے مساوات 313 121

11.2 ترسیلی تار کے مستقل 317 122

11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل 318 123

11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل 321 124

11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار 322 125

11.3 ترسیلی تار کے چند مثال 323 126

11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ 328 127

11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ 335 128

11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال 336 129

12 تقطیب موج 341 130

12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب . . . 341 131

12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئنٹنگ سمتیہ . . . 344 132

13 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار 347 133

13.1 ترچھی آمد . . . 347 134

13.2 ترسیم بائی گن . . . 358 135

14 مویج اور گھمکیا 361 136

14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ . . . 361 137

14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج . . . 362 138

14.3 کھوکھلا مستطیلی مویج . . . 368 139

14.3.1 مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور . . . 377 140

14.4 مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی $\mathrm{TM}mn$ موج . . . 384 141

14.5 کھوکھلی نالی مویج . . . 388 142

14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف . . . 395 143

14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف . . . 397 144

14.8 سطحی موج . . . 399 145

14.9 ذو برق تختی مویج . . . 404 146

14.10 شیش ریشہ . . . 407 147

14.11 پردہ بصارت . . . 410 148

14.12 گھمکی خلاء . . . 412 149

14.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل . . . 415 150

15 اینٹینا اور شعاعی اخراج 423 151

15.1 تعارف 423 152

15.2 تاخیری دباو 423 153

15.3 تکمل 425 154

15.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا 426 155

15.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت 434 156

15.6 ٹھوس زاویہ 438 157

15.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش 439 158

15.8 قطاری ترتیب 446 159

15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع 446 160

15.8.2 ضرب نقش 447 161

15.8.3 ثنائی قطار 448 162

15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار 450 163

15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار 452 164

15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار 452 165

15.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا 456 166

15.9 تداخُل پیما 457 167

15.10 مسلسل خطی اینٹینا 458 168

15.11 مستطیل سطحی اینٹینا 459 169

15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریئر بدل ہیں 462 170

15.13 خطی اینٹینا 462 171

15.14 چلتے موج اینٹینا 467 172

15.15 چھوٹا گھیرا اینٹینا 468 173

15.16 پیچ دار اینٹینا 469 174

15.17 دو طرفہ کردار 471 175

15.18 جھری اینٹینا 473 176

15.19 پیپا اینٹینا 474 177

15.20 فرائس ریڈار مساوات 476 178

15.21 ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی 479 179

15.22 حرارت نظام اور حرارت بعید 481 180

16 سوالات 483 181

باب 3

گاؤس کا قانون اور پھیلاو

3.1 ساکن چارج

3.2 فیراڈے کا تجربہ

اس باب کا آغاز جناب مائکل فیراڈے[1] کے ایک تجربے سے کرتے ہیں جس کے نتیجے کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے۔ چارج Q کو غیر چارج شدہ موصل سطح میں مکمل طور پر یوں بند کرنے کے بعد، کہ چارج اور سطح کہیں بھی ایک دونوں کو نہ چھوئیں، موصل سطح کو زمین کے ساتھ ایک لمحے کے لئے ملانے سے موصل سطح پر $-Q$ چارج پیدا ہو جاتا ہے۔ دیکھا یہ گیا ہے کہ چارج اور بیرونی سطح کے درمیان فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسی طرح چارج اور سطح کے درمیان مختلف غیر موصل مواد بھرنے سے بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ مزید یہ کہ سطح کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسی طرح جس چیز پر چارج Q رکھا گیا ہو، اس کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔

ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے اندرونی چارج سے بیرونی سطح تک چارج کی مقدار اور قطب کی خبر پہنچتی ہے۔ اس حقیقت کو تصوراتی جامع یوں پہنایا جا سکتا ہے کہ ہم سمجھیں کہ مثبت چارج سے ہر جانب یکساں طور پر کچھ خارج ہوتا ہے۔ اس چیز کو ہم برقی بہاو[2] کہیں گے اور اس کو ψ سے ظاہر کریں گے۔ برقی بہاو کو چارج کے برابر تصور کیا جاتا ہے۔

$$\psi = Q \tag{3.1}$$

برقی بہاو کی اکائی کولمب C ہی تصور کی جاتی ہے۔ منفی چارج کی صورت میں برقی بہاو کی سمت الٹی ہو گی اور یہ چارج میں داخل ہو گا۔

تصور کریں کہ اندرونی چارج r_1 رداس کی کرہ پر پایا جاتا ہے جبکہ اسے r_2 رداس کی کرہ نے گھیرا ہوا ہے۔ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہوتی ہے۔ اندرونی کرہ سے ψ برقی بہاو خارج ہوتا ہے۔ یوں اندرونی کرہ سے $\frac{\psi}{4\pi r_1^2}$ برقی بہاو فی اکائی رقبہ خارج ہوتا ہے جسے $\frac{Q}{4\pi r_1^2}$ لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح بیرونی کرہ پر $\frac{Q}{4\pi r_2^2}$ برقی بہاو فی اکائی رقبہ پہنچتی ہے۔ برقی بہاو فی اکائی رقبے کو کثافت برقی بہاو[3] D کہا جائے گا۔ یوں اگر اندرونی کرہ کے رداس کو اتنا کم کر دیا جائے کہ اس کو نقطہ تصور کرنا ممکن ہو اور اس نقطہ چارج کو رداس r کے کرہ کے مرکز پر رکھا جائے تو کرہ پر

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{3.2}$$

Michael Faraday[1]
electric flux[2]
electric flux density[3]

سمتیہ کثافت برقی بہاو پائی جائے گی۔ صفحہ 44 پر مساوات 2.19 سے موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ خالی خلاء میں

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad \text{خالی خلاء} \tag{3.3}$$

کے برابر ہے۔ اگر نقطہ چارج کو کروی محدد کے مرکز پر نہ رکھا جائے تب کسی بھی مقام پر کثافت برقی بہاو حاصل کرنے کی خاطر مساوات 3.2 یوں لکھی جائے گی

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi R^2}\boldsymbol{a}_R \tag{3.4}$$

824 جہاں $\boldsymbol{a}_R$ چارج سے اس مقام کی جانب اکائی سمتیہ ہے اور R ان کے درمیان فاصلہ ہے۔

کسی بھی حجم جس میں تغیر پذیر چارج کی کثافت پائی جائے میں مقام $\mathbf{r}'$ پر $\Delta h'$ حجم میں $\rho_h' \Delta h'$ چارج پایا جائے گا جو مقام $\mathbf{r}$ پر

$$\Delta \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_h' \Delta h'}{4\pi |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}$$

کثافت برقی بہاو پیدا کرے گا۔ قانون کولومب خطی ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{D}$ بھی خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہٰذا حجم کے تمام چارجوں سے

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \int_h \frac{\rho_h' \,\mathrm{d}h'}{4\pi |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{3.5}$$

حاصل ہو گا۔ مساوات 3.5 کا صفحہ 55 پر مساوات 2.48 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ حجمی کثافت کے لئے بھی مساوات 3.3 خالی خلاء میں $\mathbf{D}$ اور $\mathbf{E}$ کا تعلق بیان کرتا ہے۔ اسی طرح ρ_S اور ρ_L سے پیدا $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ کا خالی خلاء میں تعلق بھی مساوات 3.3 ہی بیان کرتا ہے۔ یوں مساوات 3.3 ایک عمومی مساوات ہے۔

827 3.3 گاؤس کا قانون

828 فیراڈے کے تجربے کو قانون کی شکل میں یوں پیش کیا جا سکتا ہے جسے گاؤس کا قانون[4] کہتے ہیں۔

829 کسی بھی مکمل بند سطح سے کل گزرتی برقی بہاو سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتی ہے۔

جناب گاؤس[5] نے اس قانون کو ریاضیاتی شکل دی جس کی بنا پر یہ قانون انہیں کے نام سے منسوب ہے۔ آئیں گاؤس کے قانون کی ریاضیاتی شکل حاصل کریں۔
831

شکل 3.1 میں بند سطح دکھائی گئی ہے جس کی کوئی مخصوص شکل نہیں ہے۔ اس سطح کے اندر یعنی سطح کے گھیرے حجم میں کل Q چارج پایا جاتا ہے۔ سطح پر کسی بھی مقام سے گزرتا برقی بہاو اس مقام پر سطح کی عمودی سمت میں کثافت برقی بہاو اور اس مقام کے رقبہ کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا۔ یوں شکل کو دیکھتے ہوئے چھوٹے سے رقبہ ΔS پر سطح کے عمودی سمت میں برقی بہاو کے کثافت کی قیمت $D_S \cos\alpha$ ہو گی لہٰذا

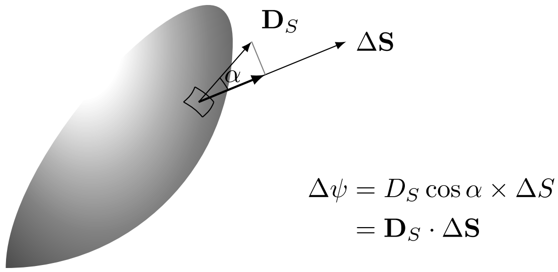
$$\Delta\psi = D_S \cos\alpha \Delta S$$

ہو گا۔ کثافتِ برقی بہاو D_S لکھتے ہوئے زیر نوشت میں S اس حقیقت کی یاد دہانی کراتا ہے کہ سطح پر کثافتِ برقی بہاو کی قیمت کی بات کی جا رہی ہے۔ اس مساوات کو ضرب نقطہ کے استعمال سے

$$\Delta\psi = \boldsymbol{D}_S \cdot \Delta\boldsymbol{S}$$

---

[4] Gauss's law
[5] Carl Friedrich Gauss



شکل 3.1: مکمل بند سطح سے گزرتی برقی بہاو سطح میں گھیرے کل چارج کے برابر ہے۔

لکھا جا سکتا ہے۔ مکمل سطح سے گزرتے کل برقی بہاو تکملہ سے حاصل ہو گی جو گاؤس کے قانون کے مطابق گھیرے ہوئے چارج Q کے برابر ہے۔ یوں

$$\psi = \oint_S \boldsymbol{D}_S \cdot \Delta\boldsymbol{S} = Q \tag{3.6}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ تکملہ دراصل دو درجی تکملہ ہے جسے ہم عموماً ایک درجی تکملہ سے ہی ظاہر کریں گے۔ تکملہ کے نشان پر گول دائرہ بند تکملہ[6] کو ظاہر کرتا ہے جبکہ بند تکملہ کے نیچے S اس بند سطح کو ظاہر کرتا ہے جس پر بند تکملہ حاصل کیا جا رہا ہو۔ اس بند سطح کو عموماً گاؤس سطح[7] کہتے ہیں۔

جس مقام پر چارج کی کثافت ρ_h ہو، وہاں چھوٹی سی حجم Δh میں کل چارج $\rho_h \Delta h$ پایا جاتا ہے۔ یوں کسی بھی حجم کو چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہوئے تمام حصوں میں پائے جانے والے چارجوں کا مجموعہ پوری حجم میں چارج کے برابر ہو گا یعنی

$$Q = \int_h \rho_h \, \mathrm{d}h \tag{3.7}$$

جہاں تین درجی حجم کے تکملہ کو ایک درجی تکملہ کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$\oint_S \boldsymbol{D}_S \cdot \Delta\boldsymbol{S} = \int_h \rho_h \, \mathrm{d}h \tag{3.8}$$

حاصل ہوتا ہے جو گاؤس کے قانون کی تکملہ شکل ہے۔ اس مساوات کو یوں پڑھا جاتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی کل برقی بہاو اس سطح کے اندر گھیرے کل چارج کے برابر ہے۔

یہ ضروری نہیں کہ گھیرے ہوئے حجم یعنی بند حجم میں حجمی کثافت ہی پائی جائے۔ بند حجم کے اندر سطحی کثافت، لکیری کثافت، علیحدہ علیحدہ نقطہ چارج یا ان تینوں اقسام کا مجموعہ پایا جا سکتا ہے۔ حجم گھیرنے والے بند بیرونی سطح کے اندر کسی سطح پر سطحی کثافت کی صورت میں مساوات 3.7 کی جگہ

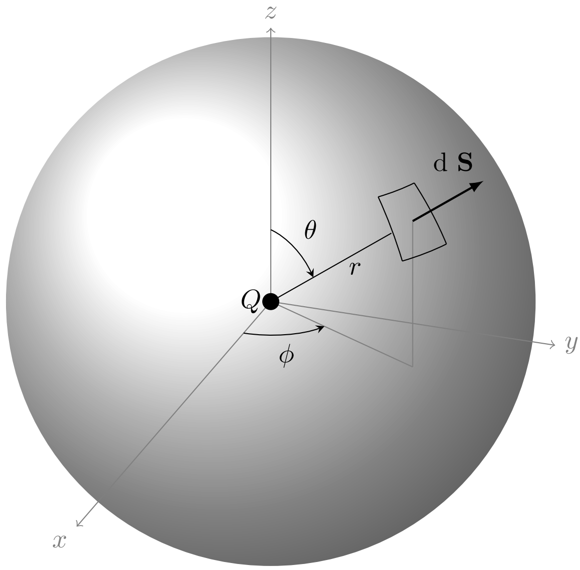
$$Q = \int_S \rho_S \, \mathrm{d}S \tag{3.9}$$

لکھا جائے گا جہاں چارج بردار سطح از خود بند یا کھلی سطح ہو سکتی ہے۔ لکیری کثافت کی صورت میں

$$Q = \int_L \rho_L \, \mathrm{d}L \tag{3.10}$$

---

closed integral[6]
gaussian surface[7]



شکل 3.2: کرہ کے مرکز پر نقطہ چارج کا کرہ کے سطح پر کثافتِ برقی بہاو

جبکہ n عدد نقطہ چارج کی صورت میں

$$Q = \sum_{n} Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_n \tag{3.11}$$

لکھا جائے گا، وغیرہ وغیرہ۔ بہر حال مساوات 3.7 سے مراد یہ تمام صورتیں لی جاتی ہیں اور یوں ان تمام صورتوں کے لئے گاؤس کے قانون کی تکملہ شکل مساوات 3.8 ہی ہے۔

3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال

گزشتہ باب میں ہم نے کولومب کے قانون سے نقطہ چارج، لامحدود لکیری چارج اور لامحدود سطحی چارج سے پیدا برقی میدان حاصل کئے۔ آئیں انہیں کو گاؤس کے قانون کی مدد سے بھی حاصل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ان تینوں صورتوں میں گاؤس کے قانون کا استعمال شرمناک حد تک سادہ ثابت ہو گا۔ یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ ایسے مسائل جن میں گاؤس کا قانون استعمال کیا جا سکے کی تعداد بہت کم ہیں۔

3.4.1 نقطہ چارج

شکل 3.2 میں کرہ کے مرکز پر نقطہ چارج دکھایا گیا ہے۔ نقطہ چارج کو کروی محدد[8] کے مرکز پر رکھتے ہوئے ہم نے مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے مسئلے کی مشابہت کی بنا پر اخذ کیا تھا کہ کثافتِ برقی میدان صرف رداس کی سمت میں ممکن ہے اور اس کی حتمی قیمت صرف اور صرف رداس r تبدیل کرنے سے تبدیل ہو گی۔ اس کا مطلب ہے کہ کروی محدد کے مرکز کے گرد رداس r کے کرہ پر $\mathbf{D}$ تبدیل نہیں ہو گا۔

کروی محدد استعمال کرتے ہوئے کرہ پر چھوٹی سی سطح

$$\mathrm{d}S = r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi$$

[8]spherical coordinates

لکھی جا سکتی ہے۔اسی کی سمتی شکل

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

ہو گی۔اس سطح پر کثافتِ برقی بہاو کی قیمت D_S اور سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہو گی لہٰذا سمتی کثافتِ برقی بہاو

$$\boldsymbol{D}_S = D_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

لکھی جائے گی۔یوں اس چھوٹی سی سطح سے گزرتی برقی بہاو

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\psi &= \boldsymbol{D}_S \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= (D_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}) \cdot \left(r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right) \\
&= D_S r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

ہو گی۔اس طرح پوری کرہ سے گزرتی برقی بہاو تکملہ سے یوں حاصل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\psi &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \\
&= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} -\cos\theta \bigg|_0^{\pi} \mathrm{d}\phi \\
&= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} 2 \,\mathrm{d}\phi \\
&= 4\pi r^2 D_S
\end{aligned}$$

گاؤس کے قانون کے تحت یہ برقی بہاو گھیرے گئے چارج Q کے برابر ہے لہٰذا

$$4\pi r^2 D_S = Q$$

ہو گا جس سے

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہی جواب بغیر زیادہ حساب و کتاب کے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔ 847

کرہ پر کثافتِ برقی بہاو D_S عمودی ہے اور اس کی قیمت کرہ پر تبدیل نہیں ہوتی۔کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہٰذا پوری سطح سے $4\pi r^2 D_S$ برقی بہاو گزرے گی جو گاؤس کے قانون کے تحت Q کے برابر ہے لہٰذا $4\pi r^2 D_S = Q$ ہو گا جس سے $D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$ حاصل ہوتا ہے۔اس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{D}_S = \frac{Q}{4\pi r^2} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{3.12}$$

اور $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$ سے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{3.13}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا صفحہ 44 پر مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ جواب کتنی آسانی سے حاصل ہوا۔ 848

3.4.2 یکساں چارج بردار کروی سطح

صفحہ 59 پر حصہ 2.11 میں کروی محدد کے مرکز پر a رداس کی کروی سطح جس پر یکساں ρ_S چارج کثافت پائی جائے کا میدان بیرونِ کرہ اور اندرونِ کرہ حاصل کیا گیا۔ آئیں گاوس کے قانون سے انہیں جوابات کو دوبارہ حاصل کریں۔

کرہ کے اندر r رداس کا کرہ لیتے ہیں۔ یوں $r < a$ رداس کے کرہ میں صفر چارج پایا جائے گا۔ یوں اس کی سطح پر صفر میدان ہو گا۔ اس کے برعکس $r > a$ رداس کا کرہ a رداس کے کرہ کو گھیرتا ہے لہٰذا یہ $4\pi a^2 \rho_S$ چارج کو گھیرے گا لہٰذا یہاں

$$\boldsymbol{D} = \frac{4\pi a^2 \rho_S}{4\pi r^2} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

ہو گا جس سے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کل چارج کو Q لکھا گیا ہے۔ یہ نتائج گاوس کے قانون کے استعمال سے حاصل کئے گئے۔ ساتھ ہی ساتھ اس حقیقت کو مد نظر رکھا گیا کہ میدان صرف رداسی سمت میں ممکن ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس مسئلے کو حل کرنے کا موجودہ طریقہ نہایت آسان ہے۔

3.4.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر

ایسی لامحدود لکیر جس پر چارج کی یکساں کثافت پائی جائے کے گرد رداس پر گھومتے ہوئے صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آتی۔ اسی طرح اس لکیر کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے بھی صورت حال میں کسی قسم کی تبدیلی پیدا نہیں ہوتی۔ لامحدود لکیر کو نلکی محدد کی z محدد تصور کرتے ہوئے ان حقائق کی روشنی میں ہم توقع کرتے ہیں کہ برقی میدان صرف رداس تبدیل کرنے سے ہی تبدیل ہو گا۔ مزید، جیسا کہ پچھلی باب میں بتلایا گیا، کسی بھی نقطے کے ایک جانب لکیر پر چارج سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کی سمت میں ہو کو لکیر پر نقطے کی دوسری جانب برابر فاصلے پر چارج سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کی سمت میں ہو ختم کرتا ہے۔ یوں یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ کثافتِ برقی بہاو صرف رداس کی سمت میں ہی پایا جائے گا۔ آئیں ان معلومات کی روشنی میں گاوس کے قانون کی مدد سے کثافتِ برقی بہاو حاصل کریں۔

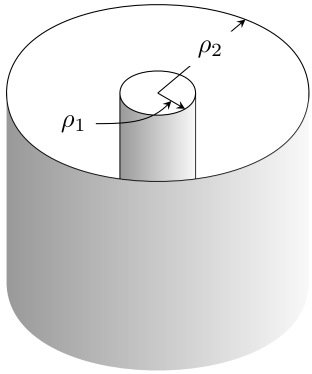
چارج بردار لکیر جس پر یکساں کثافتِ چارج ρ_L پایا جائے کی لمبائی L میں کل چارج $\rho_L L$ ہو گا۔ اس لمبائی کے گرد ρ رداس کی نلکی سطح تصور کرتے ہیں جس کے دونوں آخری سرے[9] بند تصور کریں۔ چونکہ برقی بہاو صرف رداس کی سمت میں ہے لہٰذا ان دونوں آخری سروں سے کوئی برقی بہاو نہیں ہو گا۔ نلکی سطح کا رقبہ $2\pi\rho L$ ہے جبکہ اس سطح پر ہر جگہ کثافتِ برقی بہاو D_ρ ہے لہٰذا پوری سطح سے $2\pi\rho L D_\rho$ برقی بہاو ہو گا جو گاوس کے قانون کے تحت گھیرے گئے چارج $\rho_L L$ کے برابر ہو گا۔ اس طرح

$$2\pi\rho D_\rho = \rho_L L$$

لکھتے ہوئے

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}$$

[9] آخری سروں کو غیر موصل چادر سے بند کیا جا سکتا ہے۔ یوں اس نلکی سطح تک چارج نہیں پہنچ پائے گا۔



شکل 3.3: ہم محوری تار

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{D}_\rho=\frac{\rho_L}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.14}$$

سے

$$\boldsymbol{E}_\rho=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.15}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 49 پر مساوات 2.30 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ طریقہ کتنا سادہ ہے۔

3.5 ہم محوری تار

یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کے قصے کو آگے بڑھاتے ہوئے تصور کریں کہ اس تار کا رداس ρ_1 ہے۔ اگر تار پر کسی بھی جگہ L لمبائی میں Q چارج پایا جائے تو تار پر چارج کی لکیری کثافت $\rho_L=\frac{Q}{L}$ ہو گی جبکہ اس پر چارج کی سطحی کثافت $\frac{Q}{2\pi\rho_1 L}$ ہو گی۔ جیسا آپ جانتے ہیں ہیں ٹھوس موصل میں چارجوں کے مابین قوت دفع کی وجہ سے تمام چارج موصل کے بیرونی سطح پر دھکیلے جاتے ہیں۔ یوں چارج Q تار کے بیرونی سطح، محور سے ρ_1 فاصلے، پر پایا جائے گا۔

اب تصور کریں کہ پہلی تار کے اوپر نلکی نما دوسری تار چڑھائی جائے جس کا اندرونی رداس ρ_2 ہو جہاں $\rho_2>\rho_1$ ہو گا۔ ایسی تار جسے ہم محوری تار[10] کہتے ہیں کو شکل 3.3 میں دکھایا گیا ہے۔ تصور کریں کہ بیرونی تار پر کسی بھی جگہ L لمبائی پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔ دونوں تاروں پر الٹ اقسام کے چارج ہیں جن میں قوت کشش پائی جائے گی۔ یوں بیرونی تار پر چارج تار کے اندرونی سطح یعنی محور سے ρ_2 رداس پر پایا جائے گا۔ بیرونی تار پر $\rho_L=\frac{-Q}{L}$ جبکہ $\rho_S=\frac{-Q}{2\pi\rho_2 L}$ ہو گی۔

دونوں تاروں کے درمیانی فاصلے میں رداس ρ کی فرضی نلکی سطح صرف اندرونی تار کے چارج کو گھیرتی ہے لہٰذا L لمبائی کی ایسی نلکی پر مساوات 3.14 کی طرح

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\frac{\rho_L}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\rho\\&=\frac{Q}{2\pi\rho L}\boldsymbol{a}_\rho\end{aligned} \tag{3.16}$$

[10] coaxial cable

پایا جائے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بیرونی تار پر چارج کا اس میدان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ یوں اندرونی تار کے بیرونی سطح پر

$$\boldsymbol{D}_1 = \frac{Q}{2\pi\rho_1 L}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.17}$$

جبکہ بیرونی تار کے اندرونی سطح پر

$$\boldsymbol{D}_2 = \frac{Q}{2\pi\rho_2 L}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.18}$$

پایا جائے گا۔ بیرونی تار کے باہر فرضی نلکی سطح میں کل صفر چارج پایا جاتا ہے للہٰذا ہم محوری تار کے باہر (یعنی بیرونی تار کے باہر)

$$\boldsymbol{D}_{\text{تار کے باہر}} = 0 \tag{3.19}$$

ہو گا۔ مساوات 3.14 انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ اس کے مطابق ہم محوری تار کے باہر کسی قسم کا برقی میدان نہیں پایا جاتا للہٰذا تار کے باہر سے کسی طرح بھی یہ معلوم نہیں کیا جا سکتا کہ تار پر کس قسم کا چارج پائے جاتے ہیں۔ یوں ہم محوری تار کے ذریعہ اشارات کی منتقلی محفوظ ہوتی ہے۔ ہم محوری تار میں بیرونی تار اندرونی تار کو پناہ ہی دیتا ہے۔ للہٰذا ہم محوری تار کو **پناہ دار تار**[11] بھی کہا جائے گا۔

مثال 3.1: ہم محوری تار کے اندرونی تار کا رداس 1 mm جبکہ اس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس 5 mm ہے۔ 3 mm رداس پر کثافتِ برقی بہاو $-5\,\frac{\mathrm{\mu Wb}}{\mathrm{m^2}}$ ہے جبکہ تار کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا۔ دونوں تاروں پر چارج کی سطحی کثافت حاصل کریں۔

حل: تار کے گرد برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پایا جاتا ہے۔ اگر تار پر چارج کی لکیری کثافت ρ_L ہو تب مساوات

$$-5\times10^{-6} = \frac{\rho_L}{2\pi\times0.003}$$

سے $\rho_L = -94.26\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں اندرونی تار کے ایک میٹر لمبائی پر $-94.26\,\mathrm{nC}$ چارج پایا جائے گا جس سے اس کی سطحی کثافت

$$\rho_{S1} = \frac{-0.09426\times10^{-9}}{2\pi\times0.001\times1} = -15\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ بیرونی تار کے ایک میٹر فاصلے پر $94.26\,\mathrm{nC}$ چارج پایا جائے گا جس سے یہاں

$$\rho_{S2} = \frac{94.26\times10^{-9}}{2\pi\times0.005\times1} = 3\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

---

shielded[11]

878 3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

اگر چارج بردار ہموار لامحدود سطح سے برابر فاصلے پر کسی بھی مقام سے دیکھا جائے تو صورت حال بالکل یکساں معلوم ہو گا۔ کسی بھی نقطے کے ایک جانب چارجوں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو چارج بردار سطح کے متوازی ہو کو نقطے کے دوسری جانب چارجوں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو چارج بردار سطح کے متوازی ہو کو ختم کرتا ہے۔ ان حقائق سے ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ ایسی سطح کا برقی میدان سطح کی عمودی سمت میں ہو گا اور سطح سے یکساں فاصلے پر برقی میدان کی حتمی قیمت برابر ہو گی۔ صفحہ 52 پر ایسی لامحدود سطح شکل 2.5 میں دکھائی گئی ہے۔ 882

اس شکل میں چارج بردار سطح کے متوازی دونوں اطراف برابر فاصلے پر تصوراتی لامحدود سطح تصور کرتے ہیں۔ ان سطحوں پر آمنے سامنے رقبہ S لیتے ہوئے انہیں عمودی سطحوں سے بند کرتے ہوئے حجم گھیرتے ہیں۔ سامنے سطح پر $D\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جبکہ پیچھے سطح پر $-D\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ ہو گا جبکہ ان رقبوں کو $S\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $-S\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ برقی میدان سطحوں کے عمودی ہے لہٰذا دونوں سطحوں کو ملانے والے عمودی سطحوں میں سے کوئی برقی بہاو نہیں ہو گا۔ یوں حجم سے برقی بہاو صرف ان آمنے سامنے رقبوں سے یعنی

$$\psi_{\text{سامنے}} = D\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot S\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = SD$$
$$\psi_{\text{پیچھے}} = (-D\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}) \cdot (-S\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}) = SD$$

جو گھیرے گئی چارج کے برابر ہو گا۔ اگر چارج بردار سطح پر ρ_S ہو تب حجم میں $\rho_S S$ چارج پایا جائے گا۔ یوں

$$\psi_{\text{سامنے}} + \psi_{\text{پیچھے}} = 2DS = \rho_S S$$

لکھتے ہوئے

$$D = \frac{\rho_S}{2}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{D} = \frac{\rho_S}{2}\boldsymbol{a}_N \tag{3.20}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ سے مراد سطح کی اکائی سمتیہ ہے۔ یوں

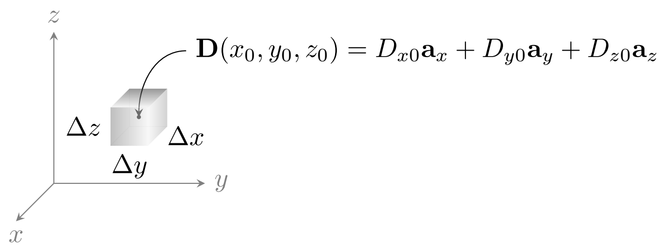
$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_N \tag{3.21}$$

883 حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 2.42 کے حصول کا موجودہ طریقہ زیادہ آسان ہے۔

884 3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق

ی محدد کے نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر چھوٹا مستطیلی ڈبہ دکھایا گیا ہے جس کے اطراف Δx، Δy اور Δz ہیں۔ یہ ڈبہ برقی میدان $\boldsymbol{D} = D_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + D_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + D_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ میں ہے۔ اس چھوٹی ڈبیہ پر گاؤس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{3.22}$$



شکل 3.4: انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق

کا اطلاق کرتے ہیں۔ ڈبیہ کے چھ اطراف ہیں۔ یوں مندرجہ بالا تکملہ کے بائیں بازو کو

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پیچھے}} + \int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} + \int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned}\int_{\text{سامنے}} &\doteq \boldsymbol{D}_{\text{سامنے}} \cdot \Delta \boldsymbol{S}_{\text{سامنے}} \\ &\doteq \left(D_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + D_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + D_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)_{\text{سامنے}} \cdot \Delta y \Delta z \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\ &\doteq D_{x,\text{سامنے}} \Delta y \Delta z\end{aligned}$$

885 کے برابر ہے۔

ہمیں $\boldsymbol{D}$ کی قیمت ڈبیہ کے وسط میں معلوم ہے۔ ٹیلر تسلسل[12] کے مطابق کسی بھی تفاعل جس کی قیمت نقطہ a پر معلوم ہو کو اس نقطے کے قریبی نقطوں پر

$$f(x+a) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \cdots$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ڈبیہ کے وسط میں نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر

$$\boldsymbol{D}(x_0, y_0, z_0) = D_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + D_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + D_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

کی قیمت سے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر ڈبیہ کے سامنے سطح پر D_x ٹیلر تسلسل سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}D_{x,\text{سامنے}} &= D_{x0} + \frac{1}{1!}\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{1}{2!}\left[\frac{\Delta x}{2}\right]^2 \frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2} \cdots \\ &\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\end{aligned}$$

886 جہاں دوسرے قدم پر تسلسل کے صرف پہلے دو اجزاء لئے گئے ہیں۔ تفاعل کے ایک سے زیادہ متغیرات x، y اور z ہیں لہٰذا تسلسل میں جزوی تفرق[13] کا استعمال کیا
887 گیا۔

یوں

$$\int_{\text{سامنے}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z$$

[12] Taylor series
[13] partial differential

888 حاصل ہوتا ہے۔

بند سطح کی سمت باہر جانب ہوتی ہے لہٰذا پچھلی سطح $\Delta y \Delta z \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-$ ہے اور یوں ڈبیہ کی پچھلی سطح کے لئے

$$\begin{aligned}\int_{\text{پیچھے}} &\doteq \boldsymbol{D}_{\text{پیچھے}} \cdot \Delta \boldsymbol{S}_{\text{پیچھے}} \\ &\doteq \left(D_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + D_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + D_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)_{\text{پیچھے}} \cdot \left(-\Delta y \Delta z \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\right) \\ &\doteq -D_{x,\text{پیچھے}} \Delta y \Delta z\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں وسط سے $\frac{\Delta x}{2}-$ فاصلے پر ڈبیہ کی پچھلی سطح پر D_x ٹیلر تسلسل سے

$$D_{x,\text{پیچھے}} = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$\int_{\text{پیچھے}} \doteq -\left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z$$

اور

$$\begin{aligned}\int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پیچھے}} &\doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z - \left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z \\ &\doteq \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی عمل کو دہراتے ہوئے بائیں اور دائیں سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} \doteq \frac{\partial D_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z$$

اور اوپر، نیچے سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}} \doteq \frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔اس طرح

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z \tag{3.23}$$

889 حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر انتہائی چھوٹی حجم Δh میں چارج تقریباً

$$Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta h \tag{3.24}$$

کے برابر ہے۔ حجم کی جسامت جتنی کم کی جائے جواب اتنا زیادہ درست ہو گا۔ اگلے حصے میں حجم کو کم کرتے کرتے نقطہ نما بنا دیا جائے گا۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات مکمل طور صحیح جواب مہیا کرے گا۔

مثال 3.2: اگر $\boldsymbol{D} = 2x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 3y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\mathrm{C/m^2}$ ہو تب کارتیسی محدد کے مرکز پر $10^{-9}\,\mathrm{m^3}$ کے انتہائی چھوٹی حجم میں چارج حاصل کریں۔

حل:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2 + 3 + 0$$

سے اس حجم میں $5 \times 10^{-9} = 5\,\mathrm{nC}$ چارج پایا جائے گا۔

3.8 پھیلاو

مساوات 3.23 میں حجم کو اتنا کم کرتے ہوئے کہ اس کو صفر تصور کرنا ممکن ہو

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{Q}{\Delta h}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چارج فی حجم کو حجمی کثافت کہتے ہیں۔ یوں مساوات کا دایاں بازو نقطے پر حجمی کثافت ρ_h دیتا ہے۔ اس طرح اس مساوات سے دو مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں یعنی

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_h \tag{3.25}$$

اور

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} \tag{3.26}$$

مساوات 3.25 میکس ویل[14][15] کی پہلی مساوات ہے جبکہ مساوات 3.26 سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کا پھیلاو[16] بیان کرتا ہے۔ اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاو کی تعریف جبکہ اس کا بایاں بازو پھیلاو حاصل کرنے کا طریقہ دیتا ہے۔ یوں کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \text{کارتیسی محدد میں پھیلاو کی مساوات} \tag{3.27}$$

سے سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کا پھیلاو حاصل کیا جاتا ہے۔

---

[14] Maxwell equation

[15] جناب جیمس کلارک میکس ویل (1831-1879) کے مساوات میکس ویل مساوات کہلاتے ہیں۔

[16] divergence

انجنیئرنگ کے شعبے میں ایسے کئی مسئلے پائے جاتے ہیں جن میں چھوٹی سی حجم کو گھیرنے والے بند سطح پر کسی سمتیہ $\boldsymbol{K}$ کا $\oint_S \boldsymbol{K}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ درکار ہو۔ گزشتہ حصے میں سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کے لئے ایسا ہی کیا گیا۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ایسا کرتے ہوئے $\boldsymbol{D}$ کی جگہ $\boldsymbol{K}$ لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\frac{\partial K_x}{\partial x}+\frac{\partial K_y}{\partial y}+\frac{\partial K_z}{\partial z}=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{K}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} \tag{3.28}$$

حاصل ہوتا۔ سمتیہ $\boldsymbol{K}$ پانی کا بہاو، ایٹموں کی رفتار یا سیلیکان کی پتری میں درجہ حرارت ہو سکتا ہے۔ ہم $\boldsymbol{K}$ کو سمتی بہاو کی کثافت تصور کریں گے۔ مندرجہ بالا مساوات $\boldsymbol{K}$ کا پھیلاو بیان کرتا ہے۔ پھیلاو کے عمل سے مراد مساوات کے بائیں بازو کا عمل ہے جبکہ مساوات کا دایاں بازو اس کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے تحت

کسی بھی سمتی کثافتی بہاو کے پھیلاو سے مراد کسی چھوٹی حجم کو صفر کرتے ہوئے اس سے خارج کل بہاو فی اکائی حجم ہے۔

یہ ضروری ہے کہ آپ کو پھیلاو کی تعریف کی سمجھ ہو۔ یاد رہے کہ پھیلاو کا عمل سمتیہ پر کیا جاتا ہے جبکہ اس سے حاصل جواب مقداری ہوتا ہے۔ کسی نقطے پر چھوٹی حجم سے باہر جانب کل بہاو فی چھوٹی حجم کو پھیلاو کہتے ہیں۔ پھیلاو کی کوئی سمت نہیں ہوتی۔ پھیلاو کی تعریف جانتے ہوئے کئی مرتبہ بغیر قلم اٹھائے جواب حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اسی نوعیت کے چند مسئلوں پر اب غور کرتے ہیں۔

پانی سے بھری بالٹی میں پانی میں ڈوبے کسی بھی نقطے پر پانی کی رفتار کا پھیلاو صفر ہو گا چونکہ اس نقطے سے نہ پانی باہر نکل رہا ہے اور نا ہی اس میں داخل ہو رہا ہے۔ اسی طرح دریا میں پانی میں ڈھوبے نقطے پر بھی پانی کے رفتار کا پھیلاو صفر ہو گا چونکہ ایسے نقطے سے جتنا پانی نکلتا ہے، اتنا ہی پانی اس میں داخل ہوتا ہے۔ البتہ اگر بھری بالٹی کے تہہ میں سوراخ کر دیا جائے تو جب تک نقطہ پانی میں ڈھوبا ہے اس وقت تک یہاں پھیلاو صفر رہے گا البتہ جیسے ہی نقطہ پانی سے نمودار ہونے لگے یہاں مثبت پھیلاو پایا جائے گا اور جب نقطہ پانی سے مکمل طور باہر آ جائے تب ایک بار پھر یہاں پھیلاو صفر ہو جائے گا۔ جتنی دیر نقطہ پانی کی سطح سے باہر نمودار ہو رہا ہوتا ہے اتنی دیر اس نقطے سے پانی کی انخلاء پائی جاتی ہے جس کی وجہ سے یہاں پھیلاو پایا جاتا ہے۔

ایک اور دلچسپ مثال سائیکل کے ٹائر میں ہوا کی ہے۔ اگر ٹائر پنکچر ہو جائے اور اس سے ہوا نکلنی شروع ہو جائے تو ٹائر میں کسی بھی نقطے پر سمتی رفتار کا پھیلاو پایا جائے گا چونکہ کسی بھی نقطے پر دیکھا جائے تو یہاں سے ہوا پھیلتے ہوئے خارج ہو گا۔ یوں مثبت پھیلاو سے مراد نقطے سے انخلاء جبکہ منفی پھیلاو سے مراد نقطے میں داخل ہونا ہے۔

ریاضیاتی عمل کو بیان کرنے کے لئے عموماً علامت استعمال کی جاتی ہے۔ یوں جمع کے لئے $+$، ضرب کے لئے $\times$ اور تکملہ کے لئے $\int$ استعمال کئے جاتے ہیں۔ آئیں ایک نئی علامت جسے نیبلا[17] کہتے اور ∇ سے ظاہر کرتے ہیں سیکھیں۔ نیبلا یونانی حروف تہجی کا حرف ہے۔ تصور کریں کہ

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{3.29}$$

لکھا جاتا ہے جہاں مقداری متغیرہ f کے سامنے لکھنے سے مراد

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{3.30}$$

جبکہ سمتیہ $\boldsymbol{K}$ کے ساتھ نقطہ ضرب سے مراد

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{K}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\cdot\left(K_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+K_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+K_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\\&=\frac{\partial K_x}{\partial x}+\frac{\partial K_y}{\partial y}+\frac{\partial K_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{3.31}$$

[17]nabla, del

لیا جاتا ہے۔ یہ علامت انجنیئرنگ کے شعبے میں انتہائی مقبول ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کو $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{3.32}$$

کے برابر ہے۔ پھیلاو کے عمل کو ہم اسی علامت سے ظاہر کریں گے۔ مساوات 3.25 یعنی میکس ویل کی پہلی مساوات اب یوں لکھی جا سکتی ہے۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \quad \text{میکس ویل کی پہلی مساوات} \tag{3.33}$$

میکس ویل کی پہلی مساوات در حقیقت گاؤس کے قانون کی تفرق[18] شکل ہے۔ اسی طرح گاؤس کا قانون میکس ویل مساوات کی تکمل[19] شکل ہے۔ 911

مساوات 3.30 کے طرز پر مساوات صفحہ 102 پر دیا گیا ہے۔ 912

3.9 نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات 913

حصہ 3.7 میں کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کے اطلاق سے پھیلاو کی مساوات حاصل کی گئی۔ اس حصے میں نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے شکل میں دکھائے چھوٹی حجم کو استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی جائے گی۔ شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\Delta_{S_{\text{سامنے}}} &= -\Delta\rho\Delta z \boldsymbol{a}_\phi \\
\Delta_{S_{\text{پیچھے}}} &= +\Delta\rho\Delta z \boldsymbol{a}_\phi \\
\Delta_{S_{\text{بائیں}}} &= -\left(\rho - \frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\Delta z \boldsymbol{a}_\rho \\
\Delta_{S_{\text{دائیں}}} &= +\left(\rho + \frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\Delta z \boldsymbol{a}_\rho \\
\Delta_{S_{\text{اوپر}}} &= +\rho\Delta\phi\Delta\rho \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
\Delta_{S_{\text{نیچے}}} &= -\rho\Delta\phi\Delta\rho \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ کارتیسی محدد میں آمنے سامنے رقبے برابر تھے۔ نلکی محدد میں بائیں اور دائیں رقبے برابر نہیں ہیں۔ اس فرق کی بنا پر نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات قدر مختلف حاصل ہو گی۔ چھوٹی حجم کے وسط میں

$$\boldsymbol{D} = D_{\rho 0}\boldsymbol{a}_\rho + D_{\phi 0}\boldsymbol{a}_\phi + D_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{3.34}$$

[18] differential
[19] integral

کے برابر ہے جس سے ٹیلر تسلسل کی مدد سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_{\text{سامنے}} &= \left(D_{\phi 0} - \frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{a}_\phi \\
\boldsymbol{D}_{\text{پیچھے}} &= \left(D_{\phi 0} + \frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{a}_\phi \\
\boldsymbol{D}_{\text{بائیں}} &= \left(D_{\rho 0} - \frac{\Delta\rho}{2}\frac{\partial D_\rho}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\rho \\
\boldsymbol{D}_{\text{دائیں}} &= \left(D_{\rho 0} + \frac{\Delta\rho}{2}\frac{\partial D_\rho}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\rho \\
\boldsymbol{D}_{\text{اوپر}} &= \left(D_{z 0} + \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{D}_{\text{نیچے}} &= \left(D_{z 0} - \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پیچھے}} = \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$\int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} = \left(D_{\rho 0} + \rho\frac{\partial D_\rho}{\partial \rho}\right)\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} = \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ ایسا لکھتے وقت یاد رہے کہ نقطہ $N(\rho_0, \phi_0, z_0)$ پر

$$\left.\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho}\right|_N = \left. D_\rho + \rho\frac{\Delta D_\rho}{\Delta \rho}\right|_N = D_{\rho 0} + \rho\frac{\partial D_\rho}{\partial \rho}$$

کے برابر ہے۔ اسی طرح

$$\int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}} = \rho\frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان تمام کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \boldsymbol{D}_S \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \rho\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

ملتا ہے۔ چھوٹی حجم $\Delta h = \rho \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$ کے استعمال سے

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{D}_S\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} \tag{3.35}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 3.28 کا دایاں بازو پھیلاو کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 3.35 نلکی محدد میں پھیلاو 915
دیتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات سادہ شکل نہیں رکھتی۔ مساوات 3.29 میں دی گئی ∇ کو استعمال کرتے ہوئے نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات ہر گز حاصل نہیں کی جا سکتی ہے۔ اس کے باوجود نلکی محدد میں بھی پھیلاو کے عمل کو $\nabla\cdot\boldsymbol{D}$ سے ہی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں اس سے مراد

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{3.36}$$

لیا جاتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات ہے جو کسی بھی سمتیہ کے لئے درست ہے۔ یوں سمتیہ $\boldsymbol{K}$ کے لئے اسے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nabla\cdot\boldsymbol{K}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho K_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial K_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial K_z}{\partial z} \tag{3.37}$$

3.10 پھیلاو کی عمومی مساوات 916

کارتیسی محدد میں چھوٹی حجم کے آمنے سامنے اطراف کا رقبہ برابر ہوتا ہے جس سے پھیلاو کی مساوات آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔ نلکی محدد میں چھوٹی حجم کے رداسی سمت کے آمنے سامنے رقبے مختلف ہوتے ہیں جن کا خصوصی خیال رکھتے ہوئے پھیلاو کی قدر مشکل مساوات گزشتہ حصے میں حاصل کی گئی۔ اس حصے میں پھیلاو کی مساوات حاصل کرنے کا ایسا طریقہ دیکھتے ہیں جسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کی عمومی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے جو تمام محدد کے لئے کارآمد ہے۔ 919

کارتیسی محدد کے متغیرات (x, y, z) جبکہ نلکی محدد کے (ρ, ϕ, z) اور کروی محدد کے متغیرات (r, θ, ϕ) ہیں۔ اس حصے میں **عمومی محدد**[20] استعمال کیا جائے گا جس کے متغیرات (u, v, w) اور تین عمودی اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u, \boldsymbol{a}_v, \boldsymbol{a}_w)$ ہیں۔ عمومی محدد کسی بھی محدد کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ یوں اگر اسے کارتیسی 921
محدد کے لئے استعمال کیا جا رہا ہو تب (u, v, w) سے مراد (x, y, z) ہو گا۔ 922

شکل میں عمومی محدد استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم دکھائی گئی ہے۔ عمومی محدد کے تین اطراف

$$\begin{aligned}\mathrm{d}L_1&=k_1\,\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}L_2&=k_2\,\mathrm{d}v\\ \mathrm{d}L_3&=k_3\,\mathrm{d}w\end{aligned}$$

ہیں۔ کارتیسی محدد میں $k_1=k_2=k_3=1$ کے برابر لیا جائے گا اور یوں $\mathrm{d}L_1=\mathrm{d}x$ کے برابر ہو گا۔ نلکی محدد میں

$$\begin{aligned}k_1&=1\\ k_2&=\rho\\ k_3&=1\end{aligned} \tag{3.38}$$

[20] generalized coordinates

جبکہ کروی محدد میں

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 1\\
k_2 &= r \\
k_3 &= r\sin\theta
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

کے برابر ہیں۔اسی طرح تین سمتی رقبے

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3\boldsymbol{a}_u\\
&\mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_3\boldsymbol{a}_v\\
&\mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_2\boldsymbol{a}_w
\end{aligned}
$$

ہوں گے۔ 923

گزشتہ حصوں میں چھوٹی حجم کے آمنے سامنے سطحوں پر بہاو حاصل کرتے وقت پہلے ان سطحوں پر $\boldsymbol{D}$ کی قیمت اور ان سطحوں کے رقبے حاصل کئے گئے جن کے نقطہ ضرب سے بہاو حاصل کیا گیا۔ یہاں چھوٹی حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کی سمت میں بہاو سے ٹیلر تسلسل کے استعمال سے حجم کے سطحوں پر بہاو حاصل کیا جائے گا۔ حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کے رخ میں سطحوں پر بہاو

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3 D_{u0}\\
&\mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_3 D_{v0}\\
&\mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_2 D_{w0}
\end{aligned}
$$

ہے۔ ٹیلر تسلسل سے سامنے اور پیچھے سطحوں پر ان مساوات سے

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3 D_{u0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3 D_u)\,\mathrm{d}u &\quad \text{سامنے}\\
-\,\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3 D_{u0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3 D_u)\,\mathrm{d}u &\quad \text{پیچھے}
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
\begin{aligned}
k_2k_3\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w D_{u0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3 D_u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w &\quad \text{سامنے}\\
-k_2k_3\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w D_{u0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3 D_u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w &\quad \text{پیچھے}
\end{aligned}
$$

لکھتے ہوئے دونوں سطحوں پر بہاو کا مجموعہ

$$
\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3 D_u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w
$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح بائیں اور دائیں سطحوں پر کل

$$
\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3 D_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w
$$

اور اوپر، نیچے کا مجموعہ

$$
\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2 D_w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w
$$

حاصل ہوتا ہے۔ چھوٹی حجم

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}h &= \mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3\\
&= k_1k_2k_3\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

لکھتے ہوئے گاؤس کے قانون سے

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)+\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v)+\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

یعنی

$$\frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)+\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v)+\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\right]=\lim_{\mathrm{d}h\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}h}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاو کی تعریف ہے۔یوں پھیلاو کی عمومی مساوات

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)+\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v)+\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\right] \tag{3.40}$$

924 حاصل ہوتی ہے۔

---

925 مثال 3.3: مساوات 3.40 سے نلکی اور کروی محدد میں پھیلاو کی مساوات حاصل کریں۔

حل: u, v, w کی جگہ ρ, ϕ, z اور مساوات 3.38 کے استعمال سے نلکی محدد میں پھیلاو

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D}&=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_\rho)+\frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho D_z)\right]\\&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(D_z)\qquad \text{نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات}\end{aligned} \tag{3.41}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح u, v, w کی جگہ r, θ, ϕ اور مساوات 3.39 کے استعمال سے کروی محدد میں پھیلاو

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D}&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta D_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta D_\theta)+\frac{\partial}{\partial\phi}(rD_\phi)\right]\\&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2D_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta D_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi)\qquad \text{کروی محدد میں پھیلاو کی مساوات}\end{aligned} \tag{3.42}$$

926 حاصل ہوتا ہے۔

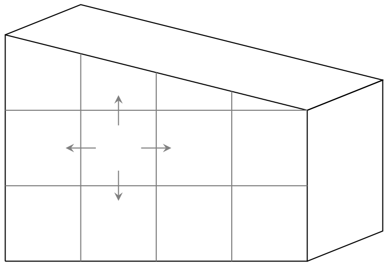
927

928

3.11 مسئلہ پھیلاو

صفحہ 77 پر مساوات 3.22 میں

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_h$$



شکل 3.5: بند سطح پر سمتیہ کا عمودی حصے کا تکملہ بند حجم میں سمتیہ کے تکملہ کے برابر ہوتا ہے۔

لکھتے ہوئے

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h \nabla \cdot \boldsymbol{D} \, \mathrm{d}h \tag{3.43}$$

لکھا جا سکتا ہے جو مسئلہ پھیلاو[21] بیان کرتا ہے۔ اگرچہ ہم نے اس مسئلے کو برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ کے لئے حاصل کیا حقیقت میں یہ ایک عمومی نتیجہ ہے جو کسی بھی تین درجی تکملہ کو دو درجی تکملہ اور دو درجی تکملہ کو تین درجی تکملہ میں تبدیل کرتا ہے۔ مسئلہ پھیلاو کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے

کسی بھی بند سطح پر سمتیہ کے عمودی حصے کا تکملہ بند حجم میں اسی سمتیہ کے پھیلاو کے تکملہ کے برابر ہوتا ہے۔

مسئلہ پھیلاو کی سمجھ شکل 3.5 کی مدد سے با آسانی ممکن ہے۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے کہ کسی بھی چھوٹی حجم سے بہاو قریبی چھوٹی حجم کی منفی بہاو ثابت ہوتی ہے لہٰذا دونوں کا مجموعی بہاو حاصل کرتے ہوئے ان کے درمیانی دیوار پر بہاو رد کیا جائے گا۔ یہی سلسلہ تمام حجم پر لاگو کرتے ہوئے ظاہر ہے کہ پوری حجم سے بہاو کے حصول میں اندرونی تمام دیواروں پر بہاو کا کوئی کردار نہیں ہوتا اور صرف بیرونی سطح پر بہاو سے ہی جواب حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 3.4: نقطہ چارج کے $\boldsymbol{D}$ سے پھیلاو کی مساوات سے مختلف مقامات پر کثافت چارج ρ_h حاصل کریں۔

حل: کروی محدد کے مرکز پر نقطہ چارج کا

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

ہوتا ہے۔ کروی محدد میں پھیلاو کی مساوات کے تحت

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(D_\phi)$$

کے برابر ہے۔ چونکہ D_θ اور D_ϕ صفر کے برابر ہیں لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{Q}{4\pi r^2}) = \begin{cases} 0 & r > 0 \\ \infty & r = 0 \end{cases}$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تحت مرکز کے علاوہ تمام خلاء میں کوئی چارج نہیں پایا جاتا۔ مرکز پر لا محدود کثافت کا چارج پایا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ نقطہ چارج سے مراد ایسا چارج ہے جس کا حجم صفر ہو۔ ایسی صورت میں اس نقطے پر نقطہ چارج کی کثافت لا محدود ہی ہو گی۔

---

[21] divergence theorem

باب 16

سوالات

گاؤس

سوال 16.1: محدد کے مرکز پر $20\,\mathrm{nC}$ چارج پایا جاتا ہے۔ اس کے علاوہ $z=0$ سطح پر $5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ کے لکیری چارج $y=-1$ اور $y=-3$ پر پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $(0,-2,0)$ پر $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔ $(0,1,0)$ پر رداس $r=1.5$ کے کرہ کی سطح پر کل برقی بہاو حاصل کریں۔

جوابات: $-\frac{5}{4\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$ ، $20\,\mathrm{nC}$

سوال 16.2: رداس $\rho=10\,\mathrm{cm}$ کے نلکی سطح کے $z>0$ حصے پر سطحی کثافت چارج $\rho_S=2ze^{-z^2}\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ پائی جاتی ہے۔ سطح پر کل چارج دریافت کریں۔ اس سطح سے $z=1$ تا $z=2$ زاویہ $\phi=45^\circ$ تا $\phi=75^\circ$ کتنی برقی بہاو خارج ہوتی ہے۔

جوابات: $0.2\pi\,\mathrm{nC}$ ، $18.3\,\mathrm{pC}$

سوال 16.3: رداس $\rho=2$ ، $\rho=4$ اور $\rho=5$ پر بالترتیب سطحی کثافت چارج $-3\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ ، $1.5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ اور $0.25\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ پائی جاتی ہے۔ $z=3$ تا $z=6$ پر رداس $\rho=4.5$ نلکی سطح سے کل کتنی برقی بہاو ہوتی ہے۔ $z=3$ تا $z=6$ پر رداس $\rho=6$ نلکی سطح سے کل کتنی برقی بہاو ہوتی ہے۔ نقطہ $(6,8,2)$ پر $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔

$\boldsymbol{D}=0.09\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+0.15\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ ، $28.27\,\mathrm{nC}$ ، $0\,\mathrm{C}$

سوال 16.4: بند خطہ $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 2$ میں $\boldsymbol{D}=xy^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+xyz\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+z(x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$ ہے۔ اس خطے سے کل برقی بہاو کتنی ہے۔

$28\,\mu\mathrm{C}$

سوال 16.5: محدد z پر لکیری کثافت چارج $50\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ محدد کے مرکز پر رداس $r=5\,\mathrm{m}$ کی کرہ سے خارج کل برقی بہاو حاصل کریں۔ اگر کرہ کے مرکز کو نقطہ $(0,2,2)$ منتقل کیا جائے تب جواب کیا ہو گا۔

جوابات: $500\,\mathrm{nC}$ ، $458\,\mathrm{nC}$

سوال16.6: رداس $r = 1.1\,\mathrm{m}$ کی کرہ کے اندر حجمی کثافت چارج $\rho_h = 30e^{-r^3}\,\mathrm{nC/m^3}$ پائی جاتی ہے۔ کرہ کے اندر کل چارج حاصل کریں۔ گاؤس کے قانون سے کرہ کی سطح پر برقی بہاو کی کثافت حاصل کریں۔

جوابات: $92.46\,\mathrm{nC}$ ، $6.08\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m^2}}$

سوال16.7: نلکی محدد میں کثافت برقی بہاو $\boldsymbol{D} = \frac{\rho\boldsymbol{a}_\rho + z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi(\rho^2+z^2)^{3/2}}$ دیا گیا ہے۔ لامحدود لمبائی کی نلکی جس کا رداس $\rho = 5$ ہے سے کل کتنی برقی بہاو خارج ہو گی۔

جواب: $1\,\mathrm{C}$

سوال16.8: مرکز پر رداس 5 ، 9 اور 14 کے کرہ پر بالترتیب سطحی کثافت چارج $20\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ ، $-8\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ اور $\rho_S\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}$ پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $(20,0,0)$ پر صفر $\boldsymbol{D}$ حاصل کرنے کے لئے ρ_S دریافت کریں۔ تمام خطوں میں D کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $0.7551\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ ، $r < 5$ پر $D_r = 0$ ہے، $5 < r < 9$ پر $D_r = \frac{500}{r^2}\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m^2}}$ ہے، $9 < r < 14$ پر $D_r = -\frac{148}{r^2}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}$ ہے جبکہ $r > 14$ پر $D_r = 0$ ہے۔

سوال16.9: لامحدود سطح $z = 4$ پر $\rho_S = 2\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m^2}}$ سطحی کثافت پائی جاتی ہے۔ محدد کے مرکز پر $r = 5$ رداس کا کرہ رکھا جاتا ہے۔ کرہ کتنے چارج کو گھیرے گا۔ کرے سے کتنی برقی بہاو خارج ہو گی۔

جوابات: $56.549\,\mathrm{nC}$ ، $56.549\,\mathrm{nC}$

سوال16.10: محدد کے مرکز پر $r = 3$ رداس کا کرہ جبکہ $z = 2$ پر لامحدود سطح پائی جاتی ہے۔ لامحدود سطح کے بالائی جانب کرہ کے اندر حجمی کثافت چارج $\rho_h = 25\,\mathrm{nC/m^3}$ پائی جاتی ہے۔ کرہ سے کل خارج برقی بہاو حاصل کریں۔

جواب: $1.1812\,\mathrm{\mu C}$