1 # برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
2 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 10

مستوی امواج

لا محدود خطہ جس کا کوئی سرحد نہ ہو میں میکس ویل مساوات کا حل سادہ ترین مسئلہ ہے البتہ اس سے حاصل نتائج انتہائی دلچسپ اور معلوماتی ثابت ہوتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے جبکہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ چونکہ برقی میدان چارج کی بدولت جبکہ مقناطیسی میدان برقی رو کی بدولت ہے لہٰذا چارج یا رو میں کسی بھی تبدیل سے باہمی تعاون سے بدلتا برقی اور بدلتا مقناطیسی میدان یعنی **برقی و مقناطیسی**[1] موج پیدا ہوتی ہے۔ ایسے امواج کی **تعدد**[2] کا دار و مدار چارج یا رو (یا دونوں) میں تبدیلی کی شرح پر منحصر ہے۔ یوں ω **زاویائی تعدد**[3] پر سائن نما شکل میں ارتعاش کرتا چارج ω زاویائی تعدد کی سائن نما موج ہی پیدا کرتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج روشنی کی رفتار سے حرکت کرتی ہیں۔ انسانی آنکھ مخصوص تعدد کی برقی و مقناطیسی امواج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج کے تعدد کی وہ پٹی جو ہمیں نظر آتی ہیں **روشنی**[4] کہلاتی ہے۔ سائن نما موج کو اس کی تعدد f یا **دوری عرصے**[5] λ سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ ہم 380 nm تا 750 nm کے دوری عرصے کے برقی و مقناطیسی امواج دیکھ سکتے ہیں۔

دو اشیاء کے سرحد پر برقی و مقناطیسی موج پر غور کرنے سے شعاعی **انعکاس**[6]، شعاعی **انحراف**[7] اور **انکسار امواج**[8] کے حقائق دریافت ہوتے ہیں۔ مختصراً شعاع کے تمام خصوصیات میکس ویل کے مساوات سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی جسم کے اندر کسی بھی طرح پہنچایا گیا اضافی چارج باہمی قوت دفع سے آخر کار جسم کے سطح پر پہنچ جاتا ہے۔ اگر ان لمحات کو نظر انداز کیا جائے جتنی دیر آزاد چارج سطح تک پہنچتا ہے تو جسم کے حجم میں $\rho_h = 0$ تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس کتاب میں $\rho_h = 0$ ہی تصور کرتے ہوئے برقی و مقناطیسی

---

electromagnetic[1]
frequency[2]
angular frequency[3]
light[4]
time period[5]
reflection[6]
refraction[7]
diffraction[8]

امواج پر غور کیا جائے گا للہذا ایسا ہی تصور کرتے ہوئے صفحہ 296 پر دئے گئے میکس ویل مساوات یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{10.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{10.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{10.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{10.4}$$

جہاں $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ کے علاوہ قانون اوہم کی نقطہ شکل $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$ کے استعمال سے تمام مساوات صرف دو متغیرات $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ کی صورت میں لکھے گئے ہیں۔

اس سے پہلے کہ ہم ان مساوات کو حل کریں، آئیں انہیں صرف دیکھ کر فیصلہ کریں کہ خالی خلاء میں ان سے کیا نتائج اخذ کئے جا سکتے ہیں۔ خالی خلاء میں کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ صفر کے برابر ہوتی ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ مساوات 10.1 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد برقی میدان کی گردش پیدا ہوتی ہے۔ گردش سے مراد ایسا میدان ہے جو بند دائرے پر اس نقطے کے گرد گھومتی ہو۔ اگر مقناطیسی میدان کی قیمت زیادہ ہو تب برقی گردش کی قیمت بھی زیادہ ہو گی اور اگر مقناطیسی میدان کی قیمت کم ہو تب گردش بھی کم ہو گی۔ یوں دو حقائق سامنے آتے ہیں۔ پہلی حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی نقطے پر بدلتا مقناطیسی میدان اس نقطے کے گرد، یعنی نقطے سے ذرہ دور، برقی میدان پیدا کرتی ہے اور دوسری حقیقت یہ کہ پہلی میدان کی قیمت کم یا زیادہ کرنے سے پیدا میدان کی قیمت بھی تبدیل ہوتی ہے یعنی بدلتا مقناطیسی میدان، بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اسی طرح مساوات 10.2 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد مقناطیسی گردش پیدا ہوتی ہے۔ یہاں بھی صاف واضح ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی، اس نقطے سے ذرہ دور، بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ بدلتا مقناطیسی میدان کچھ فاصلے پر آگے کر کے بدلتا برقی میدان پیدا کرتا ہے جو مزید آگے مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے اور یہ سلسلہ چلتے جاتا ہے۔ جیسا کہ ہم جلد دیکھیں گے، ایسے جڑواں، ہاتھ میں ہاتھ ڈالے، حرکت کرتے بدلتے برقی اور بدلتے مقناطیسی میدان کی رفتار $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ یعنی تقریباً $3 \times 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔

10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج

میکس ویل مساوات کے حل دوری سمتیات[9] کی مدد سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں للہذا پہلے دوری سمتیہ پر غور کرتے ہیں جو آپ نے برقی ادوار حل کرتے وقت ضرور استعمال کئے ہوں گے۔

سائن نما لہر کی عمومی شکل

$$E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) \tag{10.5}$$

ہے جہاں

$$\omega = 2\pi f \tag{10.6}$$

زاویائی تعدد[10] اور ψ زاویائی فاصلہ[11] ہیں جبکہ E_{xyz} از خود x، y، z اور ω کا تابع تفاعل[12] ہو سکتا ہے۔ تعدد f کی اکائی ہرٹز[13] ہے۔ یہاں دھیان رہے کہ E_{xyz} وقت t کا تابع نہیں ہے۔

[9] phasor
[10] angular frequency
[11] phase angle
[12] dependent function
[13] Hertz

کسی بھی متغیرہ x کے لئے **یولر مماثل**[14] کو $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ لکھا جاتا ہے جہاں $j = \sqrt{-1}$ **خیالی عدد**[15] ہے۔ آزاد متغیرہ $\omega t + \psi$ کے لئے یولر مماثل

$$e^{j(\omega t+\psi)} = \cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)$$

لکھا جا سکتا ہے جو **حقیقی**[16] اور **خیالی**[17] اجزاء پر مشتمل **مخلوط تفاعل**[18] ہے۔ یوں $\cos(\omega t + \psi)$ کو $e^{j(\omega t+\psi)}$ کا حقیقی جزو تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح

$$E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) = \left[E_{xyz} e^{j(\omega t+\psi)}\right]_{\text{حقیقی}} = \left[E_{xyz} e^{j\omega t} e^{j\psi}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں زیر نوشت میں حقیقی لکھنے سے مراد یہ ہے کہ پورے تفاعل کا حقیقی جزو لیا جائے۔ مندرجہ بالا مساوات کو بطور دوری سمتیہ یوں

$$E_{ys} = E_{xyz} e^{j\psi}$$

3077 لکھا جاتا ہے جہاں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کے بائیں ہاتھ E_{ys} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات
3078 دوری سمتیہ کی شکل میں لکھی گئی ہے لہٰذا یاد رہے کہ اصل تفاعل میں $e^{j\omega t}$ پایا جاتا ہے اور پورے تفاعل کا صرف حقیقی جزو ہی لیا جائے۔ تفاعل E_{ys} کے زیر نوشت
3079 میں s در اصل اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ اس تفاعل کا آزاد متغیرہ، **مخلوط تعدد**[19] ہے۔ ہمارے استعمال میں s خیالی عدد یعنی $s = j\omega$ ہو گا۔

اب $E_y = 10.5 \cos(10^6 t - 0.35z)$ کو دوری سمتیہ کی شکل میں لکھنے کی خاطر اسے یولر مماثل کے حقیقی جزو

$$E_y = \left[10.5 e^{j(10^6 t - 0.35z)}\right]_{\text{حقیقی}} = \left[10.5 e^{j10^6 t} e^{-j0.35z}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھنے کے بعد $e^{j10^6 t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے یوں

$$E_{ys} = 10.5 e^{-j0.35z}$$

3080 لکھا جائے گا جہاں بائیں ہاتھ E_{ys} میں زیر نوشت میں s کا اضافہ کیا گیا۔ یاد رہے کہ E_y حقیقی تفاعل ہے جبکہ E_{ys} عموماً مخلوط تفاعل ہوتا ہے۔

3081 دوری سمتیہ سے اصل تفاعل حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے حاصل جواب کا حقیقی جزو لیا جاتا ہے۔

مساوات 10.5 کا وقت کے ساتھ جزوی تفرق

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)\right] = -\omega E_{xyz} \sin(\omega t + \psi) \\ &= \left[j\omega E_{xyz} e^{j(\omega t+\psi)}\right]_{\text{حقیقی}}\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ یہ عمومی نتیجہ ہے جس کے تحت وقت کے ساتھ تفاعل کا تفرق، دوری سمتیہ کو $j\omega$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔ یوں مثال کے طور پر اگر

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

ہو تب اسی کی دوری سمتیہ شکل

$$j\omega E_{xs} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

[14] Euler's identity
[15] imaginary number
[16] real
[17] imaginary
[18] complex function
[19] complex frequency

ہو گی۔اسی طرح سائن نما میدان کے لئے میکس ویل کے مساوات بھی باآسانی دوری سمتیہ کی شکل میں لکھے جا سکتے ہیں لہٰذا

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

کو دوری سمتیہ کی صورت میں

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_s \tag{10.7}$$

لکھا جائے گا۔ میکس ویل کے بقایا مساوات کو بھی دوری سمتیہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\, \boldsymbol{E}_s \tag{10.8}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_s = 0 \tag{10.9}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H}_s = 0 \tag{10.10}$$

آئیں ان مساوات سے امواج کی مساوات حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات 10.7 کی گردش

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_s = \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{E}_s\right) - \nabla^2 \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu\nabla \times \boldsymbol{H}_s$$

میں مساوات 10.8 اور مساوات 10.9 پر کرنے سے

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}_s = j\omega\mu\left(\sigma + j\omega\epsilon\right) \boldsymbol{E}_s = \gamma^2 \boldsymbol{E}_s \tag{10.11}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\gamma = \mp\sqrt{j\omega\mu\left(\sigma + j\omega\epsilon\right)} \tag{10.12}$$

حرکی مستقل[20] کہلاتا ہے۔چونکہ $j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$ مخلوط عدد ہے لہٰذا اس کا جزر γ بھی مخلوط عدد ہو گا جسے

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{10.13}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں α اور β مثبت اور حقیقی اعداد ہیں۔ مساوات 10.12 کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \tag{10.14}$$

3082 جہاں کسی وجہ سے صرف مثبت قیمت لی گئی ہے۔یہ وجہ آپ کو جلد بتلا دی جائے گی۔

مساوات 10.11 سمتی ہلم ہولٹز مساوات[21][22] کہلاتی ہے۔کارتیسی محدد میں بھی سمتی ہلم ہولٹز مساوات کی بڑی شکل کافی خوفناک نظر آتی ہے چونکہ اس سے چار چار اجزاء پر مشتمل تین عدد مساوات نکلتے ہیں۔کارتیسی محدد میں اس کی x مساوات

$$\nabla^2 E_{xs} = \gamma^2 E_{xs} \tag{10.15}$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs} \tag{10.16}$$

---

[20] propagation constant
[21] vector Helmholtz equation
[22] ہرمن لڈوگ فرڈینانڈ ون ہلم ہولٹز جرمنی کے عالم طبیعیات تھے۔

ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ جن امواج پر ہم غور کرنا چاہتے ہیں ان میں نا تو x اور نا ہی y کے ساتھ میدان تبدیل ہوتے ہیں۔ایسی صورت میں $0 = \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2}$ اور $0 = \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2}$ ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs} \tag{10.17}$$

صورت اختیار کر لے گی۔اس طرح کے دو درجی تفرقی مساوات آپ نے پڑھے ہوں گا لہٰذا میں توقع رکھتا ہوں کہ آپ اس کے حل

$$E_{xs} = Ae^{-\gamma z} \tag{10.18}$$

اور

$$E_{xs} = Be^{\gamma z} \tag{10.19}$$

3083 لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $\gamma = \alpha + j\beta$ پر کرتے ہوئے ان جوابات میں سے مساوات 10.18 پر غور کریں۔مساوات 10.18 در حقیقت دوری سمتیہ ہے لہٰذا اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر

$$\begin{aligned} E_x &= \left[Ae^{j\omega t} e^{-(\alpha + j\beta)z} \right]_{\text{حقیقی}} \\ &= \left[Ae^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \right]_{\text{حقیقی}} \end{aligned}$$

حقیقی جزو

$$E_x = Ae^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

لیتے ہیں۔مساوات کے مستقل A کی جگہ $t = 0$ اور $z = 0$ پر میدان کی قیمت E_0 پر کرتے ہوئے اصل حل

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \tag{10.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ مستوی موج[23] کی وہ مساوات ہے جس کی تلاش میں ہم نکلے تھے۔اگر ہم مساوات 10.19 کو لے کر آگے بڑھتے تو مساوات 10.20 کی جگہ موج کی مساوات

$$E_x = E_0 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) \tag{10.21}$$

3084 حاصل ہوتی۔

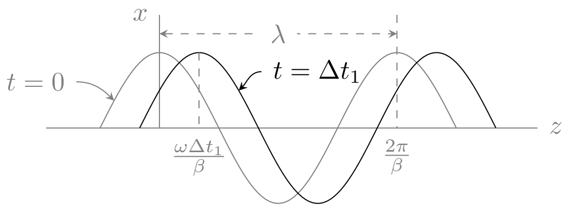
مساوات 10.18 میں $A = E_0$ پر کرتے ہوئے اس کی سمتیہ شکل

$$\boldsymbol{E}_s = E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \tag{10.22}$$

3085 لکھی جا سکتی ہے جو صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جزو پر مشتمل ہے۔آئیں مساوات 10.20 میں دیئے متحرک موج[24] پر اب غور کریں۔

3086 مساوات 10.20 کہتی ہے کہ برقی میدان ہر نقطے پر x محدد کے متوازی ہے۔اگر z کی قیمت تبدیل نہ کی جائے تب x اور y تبدیل کرنے سے میدان تبدیل نہیں
3087 ہوتا۔

---
[23] plane wave
[24] travelling wave



شکل 10.1: وقت $t=0$ اور $t=t_1$ پر خلاء میں موج کا مقام۔

مساوات 10.20 میں z بڑھانے سے α کی وجہ سے موج کی چوٹی گھٹتی ہے لہٰذا α تضعیفی مستقل[25] کہلاتا ہے۔ موج کی چوٹی طاقت کے ضیاع کی وجہ سے گھٹتی ہے۔ یوں 3088
بے ضیاع[26] خطے میں $\alpha = 0$ ہو گا جبکہ ضیاع کار[27] خطے میں $\alpha \neq 0$ ہو گا۔ تضعیفی مستقل کو نیپر[28] فی میٹر $\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ میں ناپا[29] جاتا ہے۔ یوں مساوات 10.20 میں 3089
e کی طاقت یعنی αz بے بعد[30] مقدار نیپر Np میں ہو گی۔ موج کے مساوات میں βz زاویائی فاصلہ ہے جسے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے لہٰذا β زاویائی مستقل[31] کہلاتا 3090
ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈیئن فی میٹر $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ 3091

موج کی مساوات میں $\alpha = 0$ تصور کرتے ہوئے اسے وقت $t = 0$ پر شکل 10.1 میں ہلکی سیاہی سے دکھایا گیا ہے۔ یہاں دھیان رہے کہ شکل میں z محدد کو افقی دکھایا گیا ہے۔ جیسے آپ دیکھ سکتے ہیں $t = 0$ پر موج کی دو آپس میں قریبی چوٹیاں $z = 0$ اور $z = \frac{2\pi}{\beta}$ پر پائی جاتی ہیں۔ دو آپس میں قریبی چوٹیوں کے درمیان فاصلے کو طول موج[32] پکارا اور λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں اس موج کی طول موج

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{10.23}$$

ہے جس سے

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{10.24}$$

لکھا جا سکتا ہے جو انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ 3092

موج کی مساوات ہی کو وقت $t = \Delta t_1$ پر شکل 10.1 میں دوبارہ گاڑھی سیاہی میں بھی دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیے میں موج نے دائیں جانب یعنی z بڑھنے کی طرف حرکت کی ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ یہ موج وقت کے ساتھ مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے۔ دورانیہ Δt_1 میں موج کی چوٹی نے $\frac{\omega \Delta t_1}{\beta}$ فاصلہ طے کیا ہے لہٰذا موج کے رفتار کو

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega \Delta t_1}{\beta} \frac{1}{\Delta t_1} = \frac{\omega}{\beta} \tag{10.25}$$

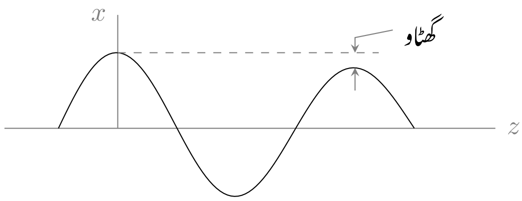
لکھا جا سکتا ہے۔ 3093

مساوات 10.24 کو مساوات 10.25 میں پر کرنے سے

$$v = f\lambda \tag{10.26}$$

---

[25] attenuation constant
[26] loss less
[27] lossy
[28] neper
[29] تضعیفی مستقل کی اکائی جان نیپر کے نام سے منسوب ہے۔
[30] dimensionless
[31] phase constant
[32] wavelength



شکل 10.2: موج چلتے ہوئے آہستہ آہستہ کمزور ہوتی رہتی ہے۔

حاصل ہوتا ہے جو λ طول موج اور f تعدد رکھنے والے موج کی رفتار v دیتی ہے۔ 3094

مساوات 10.20 میں مساوات 10.25 استعمال کرتے ہوئے

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] \tag{10.27}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 10.25 اور مساوات 10.24 کی مدد سے

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) \tag{10.28}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ 3095

موج کی رفتار کو مساوات 10.20 سے دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ اس مساوات کے تحت کسی بھی لمحہ t پر موج کی چوٹی اس مقام پر ہو گی جہاں

$$\omega t - \beta z = 0$$

ہو۔ چونکہ رفتار $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کو کہتے ہیں لہٰذا اس مساوات کے تفرق

$$\omega \,\mathrm{d}t - \beta \,\mathrm{d}z = 0$$

سے رفتار

$$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{\beta} \tag{10.29}$$

حاصل ہوتی ہے۔ 3096

شکل 10.2 میں α کو صفر تصور نہیں کیا گیا ہے۔ جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں، ایسی صورت میں موج کی چوٹی، z کے ساتھ بتدریج گھٹتی ہے لہٰذا $\alpha = 0.001\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ 3097
کی صورت میں $1\,\mathrm{km}$ کے فاصلے پر موج کی چوٹی، ابتدائی چوٹی کے $0.368 = \frac{e^{-1}}{e^{-0}}$ گنا رہ گئی ہو گی جہاں ابتدائی چوٹی $z = 0$ پر لی گئی ہے۔ 3098

برقی موج $\boldsymbol{E}_s$ سے مساوات 10.7

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_s$$

کی مدد سے مقناطیسی موج باآسانی حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 10.22 استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات سے

$$-\gamma E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_s$$

یا

$$\boldsymbol{H}_s = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 10.12 سے مثبت γ کی قیمت پر کرنے سے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_s &= \sqrt{\frac{\sigma + j\omega\epsilon}{j\omega\mu}} E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \\ &= \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \end{aligned} \tag{10.30}$$

ملتا ہے جہاں دوسرے قدم پر

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \tag{10.31}$$

لکھی[33] گئی[34] ہے۔ اس مساوات کو

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}} \tag{10.32}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ 3099

مساوات 10.22 کی غیر سمتی صورت یعنی $E_{xs} = E_0 e^{-\gamma z}$ کو مساوات 10.30 کے غیر سمتی صورت یعنی $H_{ys} = \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{E_{xs}}{H_{ys}} = \eta \tag{10.33}$$

ملتا ہے۔ 3100

یہاں ذرہ رک کر ایک برقی دور پر غور کرتے ہیں۔ منبع برقی دباو $V_0 \cos(\omega t - \psi)$ جسے دوری سمتیہ $V_0 e^{-j\psi}$ لکھا جا سکتا ہے کے ساتھ سلسلہ وار مزاحمت R، امالہ L اور کپیسٹر C جڑے ہیں جن کی رکاوٹ Z

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX = |Z| e^{j\theta_Z} = |Z| \underline{/\theta_Z}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں X مثبت ہو گا جبکہ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں یہ منفی ہو گا۔ مزید $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں دور خالص مزاحمتی رکاوٹ پیش کرے گا اور $\theta_Z = 0$ ہو گا۔ اس دور میں برقی رو دوری سمتیہ کی مدد سے

$$I_s = \frac{V_s}{Z_s} = \frac{V_0 e^{-j\psi}}{|Z| e^{j\theta_Z}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{-j(\psi + \theta_Z)}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$i = \frac{V_0}{|Z|} \cos\left(\omega t - \psi - \theta_Z\right)$$

---

[33] یونانی حروف تہجی η ایٹا پڑھا جاتا ہے۔

[34] eta η

لکھا جا سکتا ہے۔ برقی دباو اور برقی رو ایک ہی تعدد رکھتے ہیں البتہ ان میں زاویائی فاصلہ θ_Z پایا جاتا ہے۔ مثبت X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباو کے پیچھے رہتی ہے جبکہ منفی X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباو کے آگے رہتی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ برقی دباو اور برقی رو کی شرح

$$\frac{V_s}{I_s} = |Z| \, e^{j\theta_Z} = Z$$

کے برابر ہے جسے رکاوٹ کہتے ہیں۔

آئیں اب دوبارہ امواج کی بات کریں۔ برقی موج کو اس مثال کے برقی دباو کی جگہ اور مقناطیسی موج کو مثال کے رو کی جگہ رکھتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ دونوں مسائل ہو بہو یکساں ہیں۔اسی وجہ سے برقی موج E_{xs} اور مقناطیسی موج H_{ys} کی شرح η، قدرتی رکاوٹ[35] کہلاتی ہے۔ بالکل برقی رکاوٹ کی طرح قدرتی رکاوٹ حقیقی یا خیالی اور یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی اکائی اوہم Ω ہے۔

مساوات 10.30 سے مقناطیسی موج

$$H_y = \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|\eta|} \cos\left(\omega t - \beta z - \theta_\eta\right) \tag{10.34}$$

لکھی جائے گی جہاں قدرتی رکاوٹ کو

$$\eta = |\eta| \, e^{j\theta_\eta} \tag{10.35}$$

لکھا گیا۔

مساوات 10.20 کے تحت برقی میدان x محدد کے متوازی ہے جبکہ مساوات 10.34 کے تحت مقناطیسی میدان y محدد کے متوازی ہے لہٰذا یہ میدان آپس میں ہر وقت عمودی رہتے ہیں۔اس کے علاوہ دونوں امواج z سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ یوں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت بھی آپس میں عمودی ہیں۔ ایسے امواج جن میں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت عمودی ہوں عرضی امواج[36] کہلاتے ہیں۔ پانی کی سطح پر لہریں بھی عرضی امواج ہوتے ہیں۔ اسی طرح رسی کو کھینچ کر رکھتے ہوئے اسے جھٹکے سے ہلانے سے رسی میں عرضی موج پیدا ہوتی ہے۔ عرضی برقی و مقناطیسی موج[37] میں برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں حرکت کے سمت کے عمودی ہوتے ہیں۔ باب 14 میں ایسے امواج پر غور کیا جائے گا جن میں صرف ایک میدان سمت حرکت کے عمودی ہو گا۔ انہیں عرضی برقی موج[38] یا عرضی مقناطیسی موج[39] کا نام دیا گیا ہے۔

آئیں اب چند مخصوص صورتوں میں ان مساوات کو استعمال کرنا سیکھیں۔

10.2.1 خالی خلاء میں امواج

خالی خلاء میں $\sigma = 0$، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 1$ ہیں لہٰذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_R\mu_0\left(\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0\right)} = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

---

[35] intrinsic impedance
[36] transverse waves
[37] transverse electromagnetic, TEM
[38] transverse electric wave, TE wave
[39] transverse magnetic wave, TM wave

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = 0$$
$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ چونکہ خالی خلاء میں $\alpha = 0$ ہے لہٰذا خالی خلاء بے ضیاع خطہ ہے۔ یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، جسے روایتی طور پر c سے ظاہر کیا جاتا ہے، مساوات 10.25 سے

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \tag{10.36}$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت

$$c = \frac{1}{\sqrt{4\times\pi\times10^{-7}\times8.854\times10^{-12}}} = 2.99\times10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$\approx 3\times10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ہے۔

مساوات 10.31 سے خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu_R\mu_0}{\sigma+j\omega\epsilon_R\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہم $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\times10^9$ سے $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi10^9}$ لکھتے ہوئے

$$\eta = 120\pi \approx 377\,\Omega \tag{10.37}$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں خالی خلاء میں کسی بھی لمحے، کسی بھی نقطے پر برقی میدان کی قیمت اس نقطے پر مقناطیسی میدان کے 377 گنا ہو گی۔

حر کی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے خالی خلاء میں متحرک موج کے میدان

$$E_x = E_0\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]$$
$$H_y = \frac{E_0}{120\pi}\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]$$

لکھے جائیں گے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں میدان ہم زاویہ ہیں۔ یوں کسی بھی نقطے پر بڑھتے برقی میدان کی صورت میں اس نقطے پر مقناطیسی میدان بھی بڑھتا ہے۔ ان مساوات کے تحت امواج بالکل سیدھے حرکت کرتے ہیں اور نا وقت اور نا ہی فاصلے کے ساتھ ان کی طاقت میں کسی قسم کی کمی رونما ہوتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ کائنات کے دور ترین کہکشاؤں سے ہم تک برقی و مقناطیسی امواج پہنچتی ہیں اور ہمیں رات کے چمکتے اور خوبصورت تارے نظر آتے ہیں۔

مشق 10.1: بے تار[40] ذرائع ابلاغ میں 36 000 km کی اونچائی پر پرواز کرتے مصنوعی سیارے اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ یہ سیارے زمین کے اوپر ایک ہی نقطے پر آویزاں نظر آتے ہیں۔ ان سیاروں سے زمین کے قریبی نقطے تک برقی اشارہ کتنی دیر میں پہنچے گا۔

---

[40] wireless

جواب: $0.12\,\mathrm{s}$

مثال 10.1: خالی خلاء میں $240\,\mathrm{MHz}$ تعدد کی موج بڑھتے a_{z} سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ الف) λ ، β اور ω دریافت کریں۔ ب) لمحہ $t = 0$ پہ موج کی $128\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ چوٹی محدد کے مرکز پر پائی جاتی ہے۔ موج کی حقیقی اور دوری مساوات لکھیں۔ پ) اگر موج کی چوٹی لمحہ $t = 1.2\,\mathrm{ns}$ پر نقطہ $z = 25\,\mathrm{cm}$ پہ ہو تب موج کی مساوات کیا ہو گی؟

حل: الف) موج کی رفتار $c = 3 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ لیتے ہوئے

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{240 \times 10^6} = \frac{5}{4}\mathrm{m}$$

اور یوں

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{8\pi}{5}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اب زاویائی تعدد حاصل کرتے ہیں۔

$$\omega = 2\pi f = 4.8\pi \times 10^8 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

ب) حقیقی مساوات

$$E = 128\cos\left(4.8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{5}z\right)$$

ہے جبکہ دوری مساوات مندرجہ ذیل ہے۔

$$E = 128 e^{-j\frac{8\pi}{5}z}$$

پ) اب موج تاخیر سے محدد کے مرکز پر پہنچتی ہے۔ موج کا تاخیری زاویہ θ لکھتے ہوئے موج کی مساوات

$$E = 128\cos\left(4.8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{5}z + \theta\right)$$

ہو گی۔ موج کی چوٹی $(4.8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{5}z + \theta) = 0$ پر ہو گی لہٰذا $t = 1.2\,\mathrm{ns}$ اور $z = 0.25\,\mathrm{m}$ پر کرتے ہوئے $\theta = -0.176\pi$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ قیمت مندرجہ بالا مساوات میں استعمال کی جائے گی۔ موج کی دوری مساوات مندرجہ ذیل ہے۔

$$E_s = 128 e^{-j\pi(\frac{8}{5}z + 0.176)}$$

مثال 10.2: لمحہ $t=0$ پہ محدد کے مرکز پر موج کی چوٹی $340\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پائی جاتی ہے جبکہ $z=1.5\,\mathrm{m}$ وہ قریب ترین نقطہ ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے۔ موج گھٹتے z کی سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ اس لمحہ برقی میدان اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_E=\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت میں ہے۔ برقی موج کی مساوات لکھیں۔

حل: موج کی چوٹی اور صفر کے درمیان فاصلے سے $\frac{\lambda}{4}=1.5$ لکھ کر $\lambda=6\,\mathrm{m}$ حاصل ہوتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم $\beta=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\pi}{3}$ اور $f=\frac{3\times10^8}{6}=50\,\mathrm{MHz}$ حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ موج گھٹتے z جانب حرکت کر رہی ہے اور لمحہ $t=0$ پر اس کی چوٹی محدد کے مرکز پر پائی جاتی ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cos\left(2\pi\times50\times10^6t+\frac{\pi}{3}z\right)$$

لکھا جائے گا۔ لمحہ $t=0$ پر محدد کے مرکز پر میدان $340\boldsymbol{a}_E$ پایا جاتا ہے لہٰذا موج کی مکمل خاصیت مندرجہ ذیل مساوات بیان کرے گی۔

$$\boldsymbol{E}=340\left[\tfrac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\tfrac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right]\cos\left(2\pi\times50\times10^6t+\frac{\pi}{3}z\right)$$

اس کی دوری شکل مندرجہ ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{E}_s=340\left[\tfrac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\tfrac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right]e^{j\frac{\pi}{3}z}$$

مثال 10.3: خالی خلاء میں برقی موج $\boldsymbol{E}_s=340\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right]e^{j\frac{\pi}{3}z}$ پائی جاتی ہے۔ مقناطیسی موج کی مساوات لکھیں۔

حل: خالی خلاء میں

$$\frac{E_0}{H_0}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}=120\pi$$

سے مقناطیسی چوٹی کی قیمت

$$H_0=\frac{340}{120\pi}=\frac{17}{6\pi}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ حقیقی عدد ہے لہٰذا برقی اور مقناطیسی میدان ہم قدم ہیں۔ خالی خلاء میں موج کے برقی اور مقناطیسی میدان آپس میں عمودی ہوتے ہیں۔ یوں مقناطیسی موج کی سمت میں سمتیہ $x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور برقی موج کی سمت میں سمتیہ $\boldsymbol{a}_E$ کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا یعنی

$$\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)\cdot(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})=0$$

ہو گا جس سے

$$2x+3y=0 \tag{10.38}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس میں x کی کوئی بھی قیمت پر کرتے ہوئے y کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔یوں $x = 1$ پر کرنے سے $y = -\frac{2}{3}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مقناطیسی میدان $1\boldsymbol{a}_{\text{x}} - \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ سمتیہ کی سمت میں ہو گی۔اس طرح مقناطیسی میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ

$$\boldsymbol{a}_H = \frac{\boldsymbol{a}_{\text{x}} - \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\text{y}}}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\text{x}} - \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\text{y}}$$

ہو گی۔یاد رہے کہ $\boldsymbol{a}_E \times \boldsymbol{a}_H$ سے موج کے حرکت کی سمت حاصل ہوتی ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\boldsymbol{a}_E \times \boldsymbol{a}_H = (\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\text{y}}) \times (\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\text{x}} - \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\text{y}}) = -\boldsymbol{a}_{\text{z}}$$

کے برابر ہے جو موج کی درست سمت ہے۔اب ہم مساوات 10.38 میں x کی قیمت منفی بھی پر کر سکتے تھے۔آئیں ایسا بھی کر کے دیکھ لیں۔اگر ہم $x = -1$ پر کرتے تب $y = \frac{2}{3}$ حاصل ہوتا جس سے اکائی سمتیہ $-1\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ حاصل ہوتی۔اس اکائی سمتیہ اور $\boldsymbol{a}_E$ کے سمتی ضرب سے $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ حاصل ہوتا ہے جو بالکل الٹ سمت میں حرکت کرتی موج کی سمت ہے۔ظاہر ہے کہ ہم ان دو جوابات میں سے پہلی جواب کو ہی یہاں درست تسلیم کریں گے۔یوں مقناطیسی موج کی دوری مساوات مندرجہ ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{H}_s = H_0 \boldsymbol{a}_H e^{j\frac{\pi}{3}z} = \frac{17}{6\pi}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\text{x}} - \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\text{y}}\right)e^{j\frac{\pi}{3}z}$$

3136

3137
10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج

خالص یا کامل ذو برقی سے مراد ایسا ذو برق ہے جس میں متحرک برقی و مقناطیسی امواج کی توانائی ضائع نہیں ہوتی۔خالص ذو برق میں $\sigma = 0$ جبکہ اس کا جزوی مقناطیسی مستقل μ_R اور جزوی برقی مستقل ϵ_R ہے لہٰذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = 0 \tag{10.39}$$
$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{10.40}$$

حاصل ہوتے ہیں۔کامل ذو برق میں $\alpha = 0$ ہے لہٰذا کامل ذو برق بے ضیاع ہے۔یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار مساوات 10.25 سے

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_R\mu_0\epsilon_R\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} \tag{10.41}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ کو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار c لکھا گیا ہے۔چونکہ ذو برق میں $\mu_R\epsilon_R > 1$ ہے لہٰذا ذو برق میں روشنی کی رفتار خالی خلاء میں روشنی
3139 کے رفتار سے کم ہو گی۔خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اس کی زیادہ سے زیادہ رفتار ہے۔

موج کی رفتار اور تعدد سے طول موج

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} \tag{10.42}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کے طول موج کو λ_0 لکھا گیا ہے۔اس مساوات سے ذو برق میں روشنی کی رفتار کم ہونے کی وجہ سامنے آتی ہے۔چونکہ $\mu_R \epsilon_R > 1$ ہے لہٰذا ذو برق میں طول موج کم ہو جاتا ہے جس سے روشنی کی رفتار کم ہو جاتی ہے۔

مساوات 10.31 سے ذو برقی کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ کو η_0 لکھا گیا ہے۔

یوں ذو برق میں امواج کے مساوات

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \tag{10.43}$$

$$H_y = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z) \tag{10.44}$$

ہیں۔

مثال 10.4: پانی کے لئے $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 78.4$ اور $\sigma = 0$ لیتے ہوئے $300\,\mathrm{MHz}$ تعدد کے برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، طول موج اور قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ برقی میدان $50\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ ہونے کی صورت میں برقی اور مقناطیسی امواج کے مساوات لکھیں۔ہم $\sigma = 0$ لیتے ہوئے در حقیقت پانی میں توانائی کے ضیاع کو نظر انداز کر رہے ہیں۔

حل:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{78.4}} = 0.3388 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.3388 \times 10^8}{300 \times 10^6} = 11.29\,\mathrm{cm}$$

ہیں جبکہ خالی خلاء میں $\lambda = 1\,\mathrm{m}$ ہے۔بقایا مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 55.7\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

اور

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \frac{377}{\sqrt{78.4}} = 42.58\,\Omega$$

ہیں۔امواج کے مساوات

$$E_x = 0.05 \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$
$$H_y = \frac{0.05}{42.58} \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z) = 0.00117 \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$

ہیں۔

مشق 10.2: کتاب کے آخر میں مختلف اشیاء کے مستقل دیے گئے ہیں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے ابرق میں، طاقت کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے، 5.6 GHz اور $10\,\frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{m}}$ حیطے کی مقناطیسی میدان پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- موج کی رفتار،
- طول موج،
- زاویائی مستقل،
- قدرتی رکاوٹ،
- برقی میدان کا حیطہ۔

جوابات: $1.29 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$، $23\,\mathrm{cm}$، $272.6\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$، $162.1\,\Omega$ اور $1.62\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج

کامل ذو برق میں امواج پر غور کے بعد فطری طور ناقص ذو برق پر بات کرنا ضروری ہے لہٰذا صاف پانی کو مثال بناتے ہوئے 20 GHz تعدد پر ایسا ہی کرتے ہیں۔ صفحہ 328 پر شکل 10.4 میں صاف پانی کے مستقل دیے گئے ہیں۔

اس تعدد پر صاف پانی کے مستقل $\epsilon_R = 41$ اور $\sigma = 36.7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ چونکہ پانی غیر مقناطیسی ہے لہٰذا اس کا $\mu_R = 1$ ہو گا۔ یوں

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0.8$$

اور

$$\begin{aligned}\gamma &= j2 \times \pi \times 20 \times 10^9 \times \frac{\sqrt{1 \times 41}}{3 \times 10^8}\sqrt{1 - j0.8}\\ &= 3035\underline{/70.67^\circ}\\ &= 1005 + j2864 \quad \mathrm{m}^{-1}\end{aligned}$$

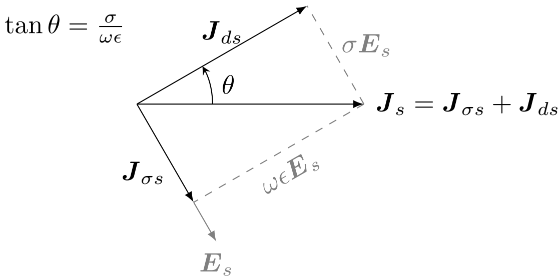
حاصل ہوتے ہیں۔ یوں پانی کا تضعیفی مستقل

$$\alpha = 1005\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$$

ہے جس کا مطلب ہے کہ پانی میں ہر $\frac{1}{1005}$ میٹر یعنی 1 mm فاصلہ طے کرنے پر برقی اور مقناطیسی امواج 0.368 گنا گھٹ جائیں گے۔ پانی میں $\alpha \neq 0$ ہے لہٰذا پانی ضیاع کار ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں ریڈار[41] پانی میں کیوں کام نہیں کرتا۔ اسی طرح بارش کی صورت میں بھی ریڈار کی کارکردگی بری طرح متاثر ہوتی ہے۔ پانی میں دیکھنے کی خاطر موج آواز استعمال کی جاتی ہیں۔

---

[41] radar



شکل 10.3: طاقت کے ضیاع کا تکون۔

زاویائی مستقل

$$\beta = 2864 \, \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

ہے جو $\sigma = 0$ کی صورت میں $2682 \, \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا پانی کے موصلیت سے زاویائی مستقل زیادہ متاثر نہیں ہوا۔ اس تعدد پر خالی خلاء میں طول موج $1.5 \, \text{cm}$ ہے جبکہ پانی میں $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ سے طول موج $2.19 \, \text{mm}$ ہے۔

قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \frac{377}{\sqrt{41}} \frac{1}{\sqrt{1 - j0.8}} = 52\underline{/19.33^\circ} = 49.1 + j17.2 \quad \Omega$$

ہے لہٰذا E_x ہر نقطے پر H_y سے 19.33° آگے ہے۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\boldsymbol{E}_s = \boldsymbol{J}_{\sigma s} + \boldsymbol{J}_{ds}$$

میں ایصالی اور انتقالی کثافت برقی رو کے سمتی مجموعے کو شکل 10.3 میں بطور مجموعی کثافت رو $\boldsymbol{J}_s$ دکھایا گیا ہے۔ ایصالی رو اور انتقالی رو آپس میں 90° درجے کا زاویہ بناتے ہیں۔ انتقالی رو 90° آگے رہتا ہے۔ یہ بالکل متوازی جڑے مزاحمت اور کپیسٹر کے رو کی طرح صورت حال ہے۔ کپیسٹر کی رو، مزاحمت کی رو سے 90° آگے رہتی ہے۔ مزید یہ کہ مزاحمت کی رو سے برقی طاقت کا ضیاع پیدا ہوتا ہے جبکہ کپیسٹر کی رو سے ایسا نہیں ہوتا۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے شکل 10.3 میں زاویہ θ (جس کا کروی محدد کے زاویہ θ کے ساتھ کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں ہے) کو دیکھیں جس کے لئے

$$\tan\theta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \tag{10.45}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں اس تکون کو طاقت کے ضیاع کا تکون پکارا جاتا ہے اور $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی شرح کو ضیاعی ٹینجنٹ[42] یا مماس ضیاع کہا جاتا ہے۔

مساوات 10.14 اور مساوات 10.32 کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ استعمال کرتے ہوئے لکھا گیا۔ کسی ذو برق کے کامل یا غیر کامل ہونے کا فیصلہ اس کے مماس ضیاع کی قیمت کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔ اگر اس شرح کی قیمت اکائی کے قریب ہو تب ذو برق غیر کامل قرار دیا جاتا ہے جبکہ $1 \ll \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی صورت میں ذو برق کو کامل تصور کیا جاتا ہے۔

کم مماس ضیاع کی صورت میں حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کے کارآمد مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

[42] loss tangent

کو مسئلہ ثنائی[43]

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

جہاں $|x| < 1$ ہے، کی مدد سے تسلسل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ اگر ہم $x = -\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ اور $n = \frac{1}{2}$ لیں تو حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + \cdots\right]$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\alpha \doteq j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(-j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{10.46}$$

اور

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right] \tag{10.47}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اگر $1 \ll \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ ہو تب

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{10.48}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ بالکل اسی طرح قدرتی رکاوٹ کو

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left[1 - \frac{3}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right] \tag{10.49}$$

یا

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(1 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) \tag{10.50}$$

3172 لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ ان مساوات سے حاصل جواب اصل مساوات کے جوابات کے کتنے قریب ہیں۔ ایسا صاف پانی کی مثال کو دوبارہ حل کر کے دیکھتے ہیں۔ صاف پانی کے مستقل $20\,\text{GHz}$ تعدد پر $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 41$ اور $\sigma = 36.7\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں لہٰذا مساوات 10.46 سے

$$\alpha = 1080\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$$

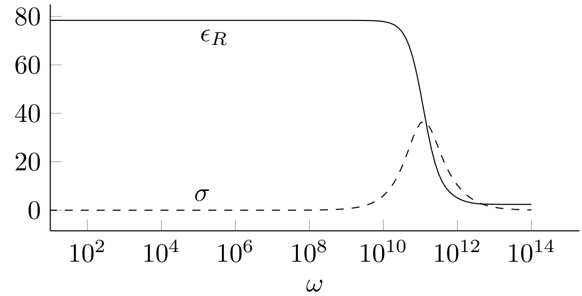
حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ حاصل کردہ قیمت $1005\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ کے کافی قریب ہے۔ مساوات 10.47 سے

$$\beta = 2897\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ جواب $2864\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ کے بہت قریب ہے۔ مساوات 10.48 سے حاصل جواب

$$\beta = 2682\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

[43] binomial theorem



شکل 10.4: صاف پانی کا جزوی برقی مستقل بالمقابل زاویائی تعدد اور موصلیت بالمقابل زاویائی تعدد۔

درست جواب سے نسبتاً زیادہ مختلف ہے۔ قدرتی رکاوٹ مساوات 10.49 سے

$$\eta = 44.75 + j23.55$$

حاصل ہوتا ہے جو $49.1 + j17.2$ کے بہت قریب ہے البتہ مساوات 10.50 سے حاصل جواب

$$\eta = 58.88 + j23.55$$

قدر مختلف ہے۔ صاف پانی کی اس مثال میں مماس ضیاع 0.8 ہے جو اکائی سے بہت کم نہیں ہے، اسی لئے جوابات پہلے سے قدر مختلف حاصل ہوئے۔ چونکہ موصلیت اور برقی مستقل کی بالکل درست قیمتیں عموماً ہمیں معلوم نہیں ہوتیں لہٰذا سادہ مساوات سے حاصل جوابات کے اس فرق کو زیادہ اہمیت نہیں دینی چاہئے۔ بہتر یہی ہوتا ہے کہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 0.1$ ہی کی صورت میں سادہ مساوات استعمال کئے جائیں۔

عموماً ذو برق کی موصلیت تعدد بڑھانے سے غیر خطی طور پر بڑھتی ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کے قیمت میں تبدیلی نسبتاً کم ہوتی ہے۔ یہی وجہ مماس ضیاع کی اہمیت کا راز ہے۔ یاد رہے کہ مختلف تعدد پر موصلیت، برقی مستقل اور مماس ضیاع نہایت تیزی سے تبدیل ہو سکتے ہیں۔ ایسا عموماً نظر آنے والی روشنی سے قدر کم یا قدر زیادہ تعدد پر ہوتا ہے۔

شکل 10.4 میں صاف پانی کا جزوی برقی مستقل ϵ_R بالمقابل زاویائی تعدد ω ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے جبکہ موصلیت بالمقابل تعدد نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ افقی محدد تعدد کا لاگ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تقریباً $10\,\frac{\text{Grad}}{\text{s}}$ تعدد تک $\epsilon_R = 78.4$ رہتا ہے جبکہ اس سے بلند تعدد پر اس کی قیمت گھٹ کر 2.4 ہو جاتی ہے۔ موصلیت کی چوٹی تقریباً $36.7\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔ دیگر ذو برق کے خط مختلف اشکال کے ہوں گے۔

مشق 10.3: ایک مادے کے مستقل 1 MHz تعدد پر $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 2.8$ اور $\sigma = 10\,\frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔ اس مادے کے مماس ضیاع، تضعیفی مستقل اور زاویائی مستقل حاصل کریں۔

جوابات: 0.0642، $1.13 \times 10^{-3}\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ اور $3.51 \times 10^{-4}\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$

مشق 10.4: ایک غیر مقناطیسی مادے کا مماس ضیاع 0.07 جبکہ $\mu_R = 4.7$ ہیں۔ ان قیمتوں کو 1 MHz تا 80 MHz تعدد کے درمیان اٹل تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس کا تضعیفی مستقل اور مادے میں طول موج 20 MHz اور 60 MHz تعدد پر حاصل کریں۔

جوابات: $0.031\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$، 6.9 m، $0.095\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$، 2.3 m

---

3192
10.3 پوئنٹنگ سمتیہ

3193 امواج کی طاقت جاننے کے لئے مسلہ پوئنٹنگ[44] درکار ہو گا لہٰذا پہلے اسے[45] حاصل کرتے ہیں۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

کا $\boldsymbol{E}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

لیتے ہوئے سمتی مماثل (جسے آپ با آسانی کار تیسی محدد میں ثابت کر سکتے ہیں)

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E}$$

کے ذریعہ

$$\boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E} - \nabla (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس میں $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ پر کرنے سے

$$-\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

یا

$$-\nabla (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \epsilon \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب

$$\epsilon \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right)$$

اور

$$\mu \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھے جا سکتے ہیں لہٰذا

$$-\nabla (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کے حجمی تکمل

$$-\int_h \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \, \mathrm{d}h = \int_h \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \, \mathrm{d}h + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) \mathrm{d}h$$

---

[44] Poynting theorem

[45] جان ہینری پوئنٹنگ نے 1884 میں پہلی بار اس مسئلے کو پیش کیا۔

پر مسئلہ پھیلاو کے اطلاق سے

$$-\oint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h + \frac{\partial}{\partial t}\int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}\right)\mathrm{d}h \tag{10.51}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو کی بات کرتے ہیں۔ اگر پورے حجم میں کہیں پر بھی منبع طاقت موجود نہ ہو تب یہ تکمل حجم میں کل لمحاتی مزاحمتی طاقت کا ضیاع دیتا ہے۔ اگر حجم میں منبع طاقت پایا جاتا ہو تب ان منبع کے حجم پر تکمل کی قیمت مثبت ہو گی اگر منبع کو طاقت فراہم کی جا رہی ہو اور یہ تکمل منفی ہو گا اگر منبع طاقت فراہم کر رہا ہو۔

مساوات کے دائیں ہاتھ دوسرا تکمل حجم میں توانائی کا کل ذخیرہ دیتا ہے جس کا وقت کے ساتھ تفرق حجم میں ذخیرہ توانائی میں لمحاتی تبدیلی یعنی طاقت دیتا ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ حجم میں داخل ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔ یوں حجم سے کل خارجی طاقت

$$\oint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{S}$$

ہو گا جہاں حجم گھیرتی سطح پر تکمل لیا گیا ہے۔ سمتی ضرب $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ **پوئنٹنگ سمتیہ**[46] $\mathscr{P}$ پکارا جاتا ہے

$$\mathscr{P} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{10.52}$$

جس سے مراد لمحاتی طاقت کی کثافت لی جاتی ہے جو واٹ فی مربع میٹر $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ میں ناپی جاتی ہے۔ یہاں بھی برقی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}$ یا مقناطیسی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$ کے استعمال کی طرح یاد رہے کہ پوئنٹنگ سمتیہ کا بند سطح پر تکمل ہی حقیقی معنی رکھتا ہے اور ایسا تکمل سطح سے خارج ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر $\mathscr{P}$ کی سمت اس نقطے پر لمحاتی طاقت کے بہاو کی سمت دیتا ہے۔

چونکہ $\mathscr{P}$ برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں کے عمودی ہے لہٰذا طاقت کی بہاو بھی دونوں میدان کے عمودی سمت میں ہو گی۔ ہم نے برقی و مقناطیسی امواج پر تبصرے کے دوران دیکھا کہ امواج کے حرکت کی سمت $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ کے عمودی ہوتی ہے لہٰذا $\mathscr{P}$ کی سمت ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔ مزید کامل ذو برق میں

$$E_x = E_0\cos(\omega t-\beta z)$$
$$H_y = \frac{E_0}{\eta}\cos(\omega t-\beta z)$$

سے لمحاتی کثافت سطحی بہاو طاقت

$$E_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\times H_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \frac{E_0^2}{\eta}\cos^2(\omega t-\beta z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \mathscr{P}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اوسط کثافت طاقت حاصل کرنے کی خاطر ہم ایک پھیرے یعنی $T=\frac{1}{f}$ دورانیے کا تکمل لیتے ہوئے دوری عرصہ T پر تقسیم

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= f\int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{\eta}\cos^2(\omega t-\beta z)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{f}{2}\frac{E_0^2}{\eta}\int_0^{\frac{1}{f}}\left[1+\cos(2\omega t-2\beta z)\right]\mathrm{d}t\\
&= \frac{f}{2}\frac{E_0^2}{\eta}\left[t+\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t-2\beta z)\right]_0^{\frac{1}{f}}
\end{aligned}$$

[46] Poynting vector

کرتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\eta} \quad \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \tag{10.53}$$

حاصل کرتے ہیں جو z سمت میں کثافت طاقت کی بہاو دیتا ہے۔ اگر میدان کی چوٹی E_0 کی جگہ اس کی موثر قیمت $E_{\text{موثر}}$ استعمال کی جائے تب مندرجہ بالا مساوات
3202 میں $\frac{1}{2}$ کا جزو ضربی نہیں لکھا جائے گا۔

موج کی سمت کے عمودی سطح S سے یوں

$$P_{z,\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\eta} S \quad \mathrm{W}$$

3203 طاقت گزرے گی۔

غیر کامل ذو برق کی صورت میں

$$\eta = |\eta|\, e^{j\theta_\eta}$$

لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) \\ H_y &= \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|\eta|}\cos\left(\omega t - \beta z - \theta_\eta\right) \end{aligned} \tag{10.54}$$

ہوں گے جن سے

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= f\int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)\cos\left(\omega t - \beta z - \theta_\eta\right)\mathrm{d}t \\ &= f\int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z}\left[\cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_\eta) + \cos\theta_\eta\right]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

یعنی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z}\cos\theta_\eta \tag{10.55}$$

3204 حاصل ہوتا ہے۔

کثافت طاقت کی اوسط قیمت *مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ*

$$\boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} \tag{10.56}$$

سے بھی حاصل کی جا سکتی ہے جہاں *جوڑی دار مخلوط*[47] مقناطیسی موج استعمال کی جاتی ہے۔ آئیں مساوات 10.55 کو اس ترکیب سے دوبارہ حاصل کریں۔ مساوات 10.54 کی دوری سمتی شکل

$$\begin{aligned} E_{sx} &= E_0 e^{-\alpha z - j\beta z} \\ H_{sy} &= \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z - j\beta z - j\theta_\eta} \\ H_{sy}^* &= \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z + j\beta z + j\theta_\eta} \end{aligned}$$

[47]complex conjugate

ہے جہاں جوڑی دار مخلوط مقناطیسی موج H_{sy}^* بھی لکھی گئی ہے۔یوں

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^* &= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z + j\theta_\eta} \\
&= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\left(\cos\theta_\eta + j\sin\theta_\eta\right)
\end{aligned}
$$

کا حقیقی حصہ لیتے ہوئے

$$
\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\cos\theta_\eta
$$

کثافت اوسط توانائی کی مطلوبہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

اس کتاب میں اوسط کثافت توانائی حاصل کرتے وقت مساوات 10.56 استعمال کی جائے گی۔

مشق 10.5: ایک میگاہرٹز، تین سو میگاہرٹز اور تین گیگاہرٹز کے تعدد پر صاف پانی کے برف کے جزو برقی مستقل بالترتیب 4.15، 3.45 اور 3.2 ہیں جبکہ اس کے مماس ضیاع بالترتیب 0.12، 0.035 اور 0.0009 ہیں۔ یکساں سطحی موج جس کی چوٹی $z = 0$ پر $100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہو برف سے گزر رہی ہے۔ایک مربع میٹر سطح سے اوسط طاقت کا بہاو $z = 0$ اور $z = 5\,\mathrm{m}$ پر حاصل کریں۔

جوابات: 27.1 W، 26.4 W، 24.7 W، 12.48 W، 23.7 W، 14.31 W

مثال 10.5: z محدد پر $\sigma = 3.2 \times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ موصلیت کے غیر مقناطیسی مادے سے بنی لامحدود لمبائی کی سلاخ پائی جاتی ہے جس کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_R = 1$ ہے۔اس سلاخ میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ سمت $250\,\mathrm{A}$ کی یکساں یک سمتی برقی رو گزر رہی ہے اور سلاخ کا رداس $2\,\mathrm{cm}$ ہے۔الف) سلاخ کی فی میٹر مزاحمت حاصل کریں۔ب) سلاخ میں فی میٹر طاقت کا ضیاع I^2R سے حاصل کریں۔پ) سلاخ میں $\boldsymbol{J}$ ، $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔ت) سلاخ کی سطح پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل لیتے ہوئے فی میٹر سلاخ میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔ٹ) رداس $5\,\mathrm{cm}$ کے نلکی سطح پر پوئنٹنگ سمتیہ کے سطحی تکمل کے استعمال سے سلاخ کے قریب برقی میدان حاصل کریں۔

حل: الف) فی میٹر سلاخ کی مزاحمت حاصل کرتے ہیں۔

$$
R = \frac{1}{3.2 \times 10^7 \times \pi \times 0.02^2} = 24.87\,\frac{\mu\Omega}{\mathrm{m}}
$$

ب) فی میٹر سلاخ میں طاقت کا مزاحمتی ضیاع یوں حاصل ہو گا۔

$$
P = I^2R = 250^2 \times 24.87 \times 10^{-6} = 1.554\,247\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}
$$

پ)سلاخ کا رقبہ عمودی تراش $A=\pi \times 0.02^2$ مربع میٹر ہے۔یوں سلاخ میں کثافت برقی رو

$$\boldsymbol{J}=\frac{I}{A}\boldsymbol{a}_{\text{z}}=\frac{250}{\pi \times 0.02^2}\boldsymbol{a}_{\text{z}}=198949\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

ہو گی جس سے سلاخ میں برقی شدت $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ سے

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma}=\frac{198949\boldsymbol{a}_{\text{z}}}{3.2\times 10^7}=6.217\times 10^{-3}\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتی ہے۔دو سنٹی میٹر سے کم رداس $\rho<2\,\text{cm}$ کا دائرہ کل

$$\frac{250\times\pi\times\rho^2}{\pi\times 0.02^2}=625000\rho^2$$

ایمپیئر کی برقی رو گھیرے گی۔یوں ایمپیئر کا دوری قانون استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے اندر رداس ρ پر مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{H}_\phi=\frac{625000\rho^2}{2\pi\rho}=99472\rho\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$$

3219 حاصل ہو گا۔

ت)پوئنٹنگ سمتیہ

$$\boldsymbol{\mathscr{P}}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=-618.42\rho\boldsymbol{a}_\rho\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

ہے۔ہم $2\,\text{cm}$ کے انتہائی قریب لیکن اس سے ذرہ کم رداس اور $1\,\text{m}$ لمبائی کی تصوراتی سطح پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل لیتے ہوئے فی میٹر سلاخ میں مزاحمتی ضیاع حاصل کرتے ہیں۔اس ڈبی نما تصوراتی سطح کی نچلی اور بالائی سیدھی سمتی سطح بالترتیب $-\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ سمت میں ہیں جبکہ پوئنٹنگ سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ سمت میں ہے لہٰذا ان سطحوں پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل صفر کے برابر ہو گا۔یوں سطحی تکمل حقیقت میں صرف تصوراتی سطح کے گول حصے پر لینا ضروری ہے۔سطح میں داخل ہوتا طاقت

$$\int_S -\boldsymbol{\mathscr{P}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^1\int_0^{2\pi}618.42\rho^2\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{dz}=1.554\,247\,\frac{\text{W}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\rho=2\,\text{cm}$ پر کیا گیا ہے۔یاد رہے کہ ہم نے دو سنٹی میٹر سے ذرہ کم رداس چنا تا کہ سلاخ کے اندر حاصل کردہ برقی میدان اور مقناطیسی 3220
3221 میدان قابل استعمال ہوں۔

ٹ)سلاخ کے رداس سے زیادہ رداس پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل وہی طاقت دے گا جو سلاخ کے سطح پر تکمل لیتے ہوئے حاصل ہوا تھا۔مزاحمتی طاقت کا ضیاع ہمارے چنے گئے سطح پر منحصر نہیں ہے۔ $5\,\text{cm}$ رداس اور $1\,\text{m}$ لمبائی کی تصوراتی سطح لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ $5\,\text{cm}$ کا گول دائرہ پورے $250\,\text{A}$ کی برقی رو کو گھیرے گا۔یوں اس دائرے پر

$$\boldsymbol{H}=\frac{250}{2\pi\times 0.05}\boldsymbol{a}_\phi=795.7747\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$$

ہو گا۔سلاخ کے گول سطح پر برقی میدان $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ سمت میں ہے۔سرحدی شرائط کے مطابق کسی بھی دو مختلف اجسام کے سرحد پر متوازی برقی میدان برابر ہوتے ہی۔یوں لامحدود لمبائی کے سلاخ کے بالکل قریب برقی میدان $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ سمت میں ہی ہو گا۔ایسا کوئی جواز نظر نہیں آتا کہ سلاخ سے دور میدان کیوں $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ سمت میں نہ ہو۔یوں ہم $\boldsymbol{E}=E_0\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ لیتے ہیں۔اس طرح تصوراتی سطح کی نچلی اور بالائی سطحوں پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل صفر کے برابر ہو گا۔سلاخ میں داخل ہوتا طاقت تصوراتی سطح کے گول حصے پر تکمل سے حاصل ہو گا یعنی

$$\int_S -\boldsymbol{\mathscr{P}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^1\int_0^{2\pi}795.7747E_0\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{dz}=250E_0\,\text{W}$$

جہاں $\rho = 5\,\mathrm{cm}$ پر کیا گیا ہے۔حاصل جواب کو $1.554\,247\,\mathrm{W}$ کے برابر پر کرتے ہوئے سلاخ کے باہر

$$\boldsymbol{E} = 6.217 \times 10^{-3} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مثال میں سلاخ کے باہر اور سلاخ کے اندر برابر برقی میدان پایا جاتا ہے۔

10.4 موصل میں امواج

موصل میں امواج پر غور کی خاطر ہم تصور کرتے ہیں کہ موصل سے جڑے ذو برق میں امواج پیدا کئے جاتے ہیں۔ہم جاننا چاہتے ہیں کہ ایسے موج ذو برق اور موصل کے سرحد پر موصل میں کیسے داخل ہوتے ہیں اور موصل میں ان کی کیا کارکردگی ہوتی ہے۔

ایصالی اور انتقالی رو کی شرح $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کو مماس ضیاع کہتے ہیں۔یوں ناقص موصل کی مماس ضیاع بلند تعدد پر کم ہو گی۔نائیکروم[48] ناقص موصل ہے جس کا مماس ضیاع $100\,\mathrm{MHz}$ تعدد پر تقریباً 2×10^8 ہے۔یوں کسی بھی موصل کے لئے $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ ہوتا ہے۔اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے چند سادہ مساوات حاصل کرتے ہیں۔حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی بنا پر

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

یا

$$\gamma = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب

$$-j = 1\underline{/-90^\circ}$$

کے برابر ہے جس کا جزر

$$\sqrt{1\underline{/-90^\circ}} = 1\underline{/-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ہے لہٰذا

$$\gamma = j\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

یا

$$\gamma = (j+1)\sqrt{\pi f \mu\sigma} \tag{10.57}$$

---

[48] nichrome

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \tag{10.58}$$

3227 ملتا ہے۔

ان معلومات کے بعد کہا جا سکتا ہے کہ کسی بھی μ اور σ مستقل رکھنے والے موصل کے α اور β ہر تعدد پر برابر ہی رہتے ہیں۔ یوں z سمت میں دوبارہ امواج فرض کرتے ہوئے موصل میں برقی میدان کی موج کو

$$E_x = E_0 e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma}) \tag{10.59}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $z < 0$ کامل ذو برق اور $z > 0$ موصل خطے ہوں تب ان کے سرحد $z = 0$ پر برقی سرحدی شرائط کے مطابق متوازی برقی میدان سرحد کے دونوں اطراف پر برابر ہوں گے۔ مساوات 10.59 کے تحت سرحد پر موصل میں

$$E_x = E_0 \cos \omega t \qquad (z = 0) \tag{10.60}$$

ہو گا اور یوں سرحد پر ذو برق میں بھی برقی میدان یہی ہو گا۔ اب اسی حقیقت کو یوں بھی دیکھا جا سکتا ہے کہ سرحد پر ذو برق میں برقی میدان مساوات 10.60 دیتا ہے جو موصل میں سرحد پر اسی قیمت کا میدان پیدا کرتا ہے۔ ایسا تصور کرنے کا مطلب یہ ہے کہ ہم ذو برق میں میدان کو منبع میدان تصور کرتے ہیں جو موصل میں مساوات 10.59 میں دی موج پیدا کرتا ہے۔ موصل میں $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی بنا پر انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{10.61}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا موصل میں ہر نقطے پر کثافت رو اور برقی میدان راہ تناسب کا تعلق رکھتے ہیں اور یوں موصل میں

$$J_x = \sigma E_0 e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma}) \tag{10.62}$$

3228 لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 10.5 میں J_x دکھایا گیا ہے جہاں عین سرحد یعنی $z = 0$ پر کثافت رو کے قیمت σE_0 کو J_0 لکھا گیا ہے۔

مساوات 10.59 اور مساوات 10.62 میں بہت معلومات پائی جاتی ہے۔ پہلے ان مساوات میں $e^{z\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$ جزو پر غور کریں۔ سرحد پر اس کی قیمت $e^0 = 1$ کے برابر ہے جو سرحد سے

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

فاصلے پر $e^{-1} = 0.368$ رہ جاتی ہے۔ یہ فاصلہ گہرائی جلد[49] کہلایا اور δ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \tag{10.63}$$

برقی رو کا سطحی تہہ تک محدود رہنے کو اثر جلد[50] کہا جاتا ہے۔ یوں موصل میں

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta} \tag{10.64}$$

3229 ہو گا۔ اسی طرح سرحد سے 2δ فاصلے پر میدان $e^{-2} = 0.135$ اور 4δ فاصلے پر میدان $e^{-4} = 0.018$ یعنی صرف 1.8 % رہ جائے گا۔

تانبے کی $\sigma = 5.8 \times 10^7 \, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے لہٰذا اس میں گہرائی جلد

$$\delta_{\text{تانبہ}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times f \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}}$$

skin depth[49]
skin effect[50]

میٹر کے برابر ہے۔یوں $50\,\mathrm{Hz}$ کا میدان سرحد سے $\frac{0.0661}{\sqrt{50}} = 9.35\,\mathrm{mm}$ فاصلے پر کم ہو کر صرف 0.368 گنا رہ جائے گا۔ برقی ادوار میں مزاحمت میں طاقت کا ضیاع رو کے مربع کے راست تناسب ہوتا ہے لہٰذا ہر ایک گہرائی جلد کے فاصلے پر کثافت طاقت $0.135 = 0.368^2$ گنا کم ہو گی۔ خرد امواج[51] کے تعدد یعنی $10\,\mathrm{GHz}$ پر گہرائی جلد $0.661\,\mathrm{\mu m}$ یعنی نظر آنے والے روشنی کے طول کے آٹھویں حصے کے برابر ہے۔ 3232

ان تعدد پر کسی بھی موصل مثلاً تانبے میں سرحد سے چند ہی گہرائی جلد کے فاصلے پر تمام میدان تقریباً صفر کے برابر ہوتے ہیں۔ موصل کے سرحد پر پیدا کئے گئے برقی میدان یا کثافت رو، سرحد سے دوری کے ساتھ تیزی سے کم ہوتے ہیں۔ برقی و مقناطیسی طاقت موصل کے اندر نہیں بلکہ اس کے باہر صفر کرتی ہے۔ موصل کا کام صرف اتنا ہے کہ یہ ان امواج کو راستہ دکھاتی ہے۔ موصل کے سرحد پر پیدا کثافت رو، موصل میں موج کے حرکت کے عمودی سمت میں داخل ہوتی ہے جس سے موصل میں مزاحمتی ضیاع پیدا ہوتا ہے۔یوں موصل بطور راہ گیر کردار ادا کرتے ہوئے مزاحمتی ضیاع بطور اجرت حاصل کرتا ہے۔ 3236

اگر آپ کسی بجلی گھر میں $50\,\mathrm{Hz}$ کے برقی رو کو منتقل کرنے کی خاطر پانچ سنٹی میٹر رداس کے تانبے کی ٹھوس تار استعمال کر رہے ہوں تو یہ سراسر تانبہ ضائع کرنا ہو گا چونکہ کثافت رو تار کے بیرونی سطح پر ہی پائی جائے گی۔ اندرونی تار، سطح سے دور، کثافت رو قابل نظر انداز ہو گی لہٰذا اس سے بہتر ہو گا کہ زیادہ رداس کی نلکی نما تار استعمال کی جائے جس کی موٹائی تقریباً 1.5δ یعنی $1.4\,\mathrm{cm}$ ہو۔ اگرچہ یہ فیصلہ لا محدود جسامت کے سرحد کے نتائج پر بنیاد ہے، حقیقت میں محدود سرحد پر بھی میدان اسی نسبت سے گھٹتے ہیں۔ 3240

بلند تعدد پر گہرائی جلد کا فاصلہ اتنا کم ہوتا ہے کہ راہ گیر موصل کی سطحی تہہ ہی اہمیت رکھتی ہے۔یوں خرد امواج کی منتقلی کے لئے شیشے پر $0.661\,\mathrm{\mu m}$ موٹی چاندی کی تہہ کافی ہے۔ 3242

آئیں اب موصل میں طول موج اور رفتار موج کے مساوات حاصل کریں۔ ہم

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

سے شروع کرتے ہوئے مساوات 10.64 استعمال کرتے ہوئے

$$\lambda = 2\pi\delta$$

لکھ سکتے ہیں۔ اسی طرح مساوات 10.25

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

سے

$$v = \omega\delta \tag{10.65}$$

ملتا ہے۔ 3243

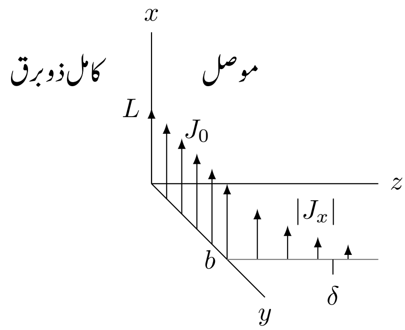
تانبے میں $50\,\mathrm{Hz}$ پر $\lambda = 5.8\,\mathrm{cm}$ اور $v = 2.94\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ یا $10.6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ حاصل ہوتے ہیں۔ میں تقریباً $6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ کی رفتار سے چلتا ہوں۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تانبے میں برقی و مقناطیسی امواج انتہائی آہستہ چلتے ہیں۔ یاد رہے کہ اسی $50\,\mathrm{Hz}$ کے موج کی خالی خلاء میں $\lambda = 6000\,\mathrm{km}$ اور رفتار $3 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہو گی۔ 3246

موصل میں H_y کی مساوات لکھنے کی خاطر موصل کی قدرتی رکاوٹ درکار ہو گی۔ مساوات 10.31

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

---

[51] microwave



شکل 10.5: موصل میں طاقت کے ضیاع اور گہرائی جلد۔

کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی وجہ سے

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

یا

$$\eta = \frac{\sqrt{2}\underline{/45^\circ}}{\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} + j\frac{1}{\sigma\delta} \tag{10.66}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 10.60 کو گہرائی جلد کی صورت

$$E_x = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \tag{10.67}$$

میں لکھتے ہوئے مقناطیسی موج کو

$$H_y = \frac{\sigma\delta E_0}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{10.68}$$

3247 لکھا جا سکتا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی موج، برقی موج سے پھیرے کے آٹھویں حصے پیچھے ہے۔

مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے پوئنٹنگ مساوات

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma\delta E_0^2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{2z}{\delta}} \cos\frac{\pi}{4}$$

یا

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{\sigma\delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}}$$

3248 دیتا ہے۔ آپ دوبارہ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک گہرائی جلد کی گہرائی پر کثافت طاقت، سرحد کے کثافت طاقت کے $e^{-2} = 0.135$ گنا رہ گئی ہے۔

شکل 10.5 پر دوبارہ نظر ڈالیں۔ مسئلہ پوئنٹنگ کہتا ہے کہ سرحد پر L اور b اطراف کے مستطیل میں جتنی برقی و مقناطیسی طاقت داخل ہوتی ہے، وہ تمام کی تمام موصل میں ضائع ہو جاتی ہے۔ یہ طاقت

$$\begin{aligned}
P_{L,\text{اوسط}} &= \int_0^b \int_0^L \mathscr{P}_{\text{اوسط}}\big|_{z=0} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^b \int_0^L \left.\frac{\sigma\delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}}\right|_{z=0} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sigma\delta b L E_0^2}{4}
\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ سرحدی کثافت رو

$$J_0 = \sigma E_0$$

کی صورت میں اسے

$$P_{L,\text{اوسط}} = \frac{1}{4\sigma}\delta b L J_0^2 \tag{10.69}$$

3249 لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ اگر b چوڑائی میں کل برقی رو کو δ گہرائی تک محدود کر دیا جائے تو مزاحمتی ضیاع کتنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر پہلے اس چوڑائی میں کل رو

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$

حاصل کرتے ہیں جہاں تکمل آسان بنانے کی غرض سے

$$J_x = J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

کو دوری سمتیہ کی شکل

$$\begin{aligned} J_{xs} &= J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} \\ &= J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \end{aligned}$$

میں لکھ کر تکمل حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^b J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \\ &= \frac{J_0 b\delta}{1+j} \end{aligned}$$

اس سے

$$I = \frac{J_0 b\delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

لکھا جائے گا۔ اگر اس رو کو $b > y > 0$ اور $\delta > z > 0$ میں محدود کر دیا جائے تب نئی کثافت رو

$$J_x' = \frac{J_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

ہو گی۔ مزاحمتی طاقت کا ضیاع فی اکائی حجم $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$ کے برابر ہے لہٰذا اس حجم میں کل ضیاع

$$P_L = \frac{1}{\sigma}\left(J_x'\right)^2 bL\delta = \frac{J_0^2}{2\sigma} bL\delta \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

ہو گا۔ مربع کوسائن موج کی اوسط قیمت $\frac{1}{2}$ کے برابر ہوتی ہے لہٰذا اوسط طاقت کے ضیاع کو

$$P_L = \frac{J_0^2 bL\delta}{4\sigma} \tag{10.70}$$

3250 لکھا جا سکتا ہے جو عین مساوات 10.69 ہے۔

اس نتیجے کو دیکھ کر اب کسی بھی موصل، جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو، میں کل رو کو ایک جلد گہرائی میں یکساں تقسیم شدہ تصور کرتے ہوئے سلاخ کی مزاحمتی ضیاع حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں b چوڑائی، L لمبائی اور لا محدود گہرائی سلاخ جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو اور b چوڑائی، L لمبائی اور δ گہرائی سلاخ جس میں یکساں تقسیم شدہ رو ہو کے مزاحمت بالکل برابر ہوں گے۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے رداس r کے ٹھوس نلکی سلاخ کی مزاحمت بلند تعدد پر حاصل کی جا سکتی ہے۔ اگر گہرائی جلد سلاخ کے رداس سے بہت کم ہو تب اس طرح حاصل کردہ مزاحمت کی قیمت تقریباً بالکل درست ہو گی۔ ایسی تعدد جس پر اثر جلد پایا جاتا ہو کی صورت میں سلاخ کی بیرونی جلد ہی رو گزارے گی لہٰذا مزاحمت کی قیمت حاصل کرتے وقت اس نلکی نما جھلی کو ہی موصل تصور کیا جائے گا لہٰذا مزاحمت R

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{\sigma 2\pi r \delta} \tag{10.71}$$

ایک ملی میٹر رداس اور دس میٹر لمبی تانبے کے تار کی یک سمتی مزاحمت

$$R_{\text{یک سمتی}} = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times \pi \times 0.001^2} = 54.88\,\mathrm{m\Omega}$$

ہے۔ ایک سو میگا ہرٹز کی تعدد پر تانبے کی $\delta = 6.61\,\mathrm{\mu m}$ ہو گی لہٰذا اس تعدد پر اسی تار کی مزاحمت

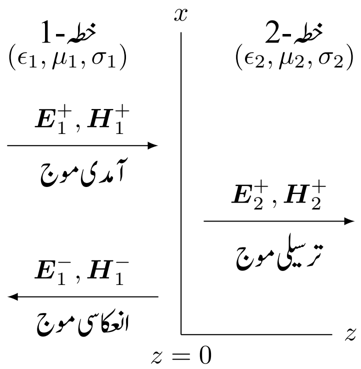
$$R = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times 2 \times \pi \times 0.001 \times 6.61 \times 10^{-6}} = 4.15\,\Omega$$

ہو گی۔

مشق 10.6: ٹھوس نلکی نما لوہے کی تار جس کا رداس $5\,\mathrm{mm}$ اور جس کی لمبائی $2.5\,\mathrm{m}$ ہے میں $2\cos 10000t$ ایمپیئر کی برقی رو گزر رہی ہے۔ کتاب کے آخر میں ضمیمے سے $\sigma = 1.03 \times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ اور $\mu_R = 4000$ دئے گئے ہیں۔ یاد رہے کہ موصل کا $\epsilon_R = 1$ ہوتا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- یک سمتی رو مزاحمت،
- گہرائی جلد،
- بدلتی رو مزاحمت یا موثر مزاحمت،
- مزاحمتی طاقت کا ضیاع۔

جوابات: $3.09\,\mathrm{m\Omega}$، $62\,\mathrm{\mu m}$، $1.25\,\Omega$ اور $2.49\,\mathrm{W}$



شکل 10.6: آمدی موج سرحد سے گزرتی ترسیلی اور اس سے لوٹتی انعکاسی امواج پیدا کرتی ہے۔

10.5 انعکاس مستوی موج

لامحدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج ہم دیکھ چکے۔ایسے حجم میں کبھی بھی موج دو مختلف اقسام کے اشیاء کے درمیان پائی جانے والی سرحد نہیں چھوتی۔آئیں محدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج پر غور کریں جہاں امواج کو ایک قسم کے مادے سے دوسرے قسم کے مادے میں داخل ہونا ہو گا۔آپ دیکھیں گے کہ ایسی صورت میں موج کا کچھ حصہ پہلے خطے سے دوسرے خطے میں داخل ہو پاتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ سرحد سے ٹکرا کر واپس پہلے خطے میں لوٹ جاتا ہے۔اس حصے میں ہم سرحد سے گزرتے اور اس سے ٹکرا کر واپس لوٹتے حصوں کے مساوات حاصل کریں گے۔یہ نتائج ترسیلی تاروں[52] اور رہبر موج[53] کے مسائل میں جوں کے توں قابل استعمال ہوں گے۔

ہم $z < 0$ کو خطہ-1 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ ہیں جبکہ $z > 0$ کو خطہ-2 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ ہیں۔یہ صورت حال شکل 10.6 میں دکھائی گئی ہے۔ہم بڑھتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشت $+$ جبکہ گھٹتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشت $-$ سے ظاہر کریں گے۔اب تصور کریں کہ پہلے خطے میں سرحد کی جانب برقی موج

$$E_{xs1}^+ = E_{x10}^+ e^{-\gamma_1 z} \tag{10.72}$$

آتی ہے۔آپ جانتے ہیں کہ اس برقی موج کے ساتھ لازماً مقناطیسی موج

$$H_{ys1}^+ = \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} \tag{10.73}$$

بھی ہو گی۔سرحد کی طرف آتے موج کو آمدی موج[54] کہا جاتا ہے۔چونکہ یہ موج سرحد کے عمودی حرکت کر رہا ہے لہٰذا اس کے حرکت کو عمودی آمد[55] کہتے ہیں۔

اس آمدی موج کا کچھ حصہ جسے ترسیلی موج[56] کہتے ہیں، سرحد سے گزرتے ہوئے سیدھا چلے جائے گا۔ترسیلی امواج

$$E_{xs2}^+ = E_{x20}^+ e^{-\gamma_2 z} \tag{10.74}$$

$$H_{ys2}^+ = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z} \tag{10.75}$$

ہیں۔سرحد کے دوسرے جانب حرکی مستقل γ_2 اور قدرتی رکاوٹ η_2 ہیں جو پہلے خطے سے مختلف ہیں۔ترسیلی امواج سرحد سے دور چلتی جاتی ہیں۔

[52] transmission lines
[53] waveguide
[54] incident wave
[55] normal incidence
[56] transmitted wave

آمدی اور ترسیلی برقی امواج x محدد کے متوازی جبکہ مقناطیسی امواج y محدد کے متوازی ہیں لہٰذا یہ چاروں امواج سرحد کے بھی متوازی ہیں۔ صفحہ 298 پر مساوات 9.45 اور اس کے قریب ہی مساوات 9.47 متوازی امواج کے سرحدی شرائط بیان کرتے ہیں۔ اب کائنات میں کبھی بھی دو اشیاء کے سرحد پر سطحی کثافت رو نہیں پائی جاتی۔ یوں $K_\perp = 0$ لیتے ہوئے ان شرائط کو

$$
\begin{aligned}
E_{m1} &= E_{m2} \\
H_{m1} &= H_{m2} \qquad (K_\perp = 0)
\end{aligned}
$$

لکھا جاتا ہے۔ 3272

اب اگر پہلی شرط پوری کی جائے تو سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی برقی میدان برابر ہوں گے لہٰذا $z = 0$ پر مساوات 10.72 اور مساوات 10.74 برابر ہوں گے۔ یوں $E_{x10}^+ = E_{x20}^+$ حاصل ہوتا ہے لیکن دوسری شرط کے مطابق سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان بھی برابر ہونا ہو گا لہٰذا $z = 0$ پر مساوات 10.73 اور مساوات 10.75 بھی برابر ہوں گے جس سے $\frac{E_{x10}^+}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2}$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ دونوں تب ممکن ہے جب $\eta_1 = \eta_2$ ہو جو حقیقت میں کبھی بھی نہیں ہو گا لہٰذا صرف آمدی اور ترسیلی امواج کی صورت میں سرحدی شرائط پر پورا نہیں اترا جا سکتا۔ مندرجہ بالا دونوں سرحدی شرائط صرف اس صورت میں پورا ہوتے ہیں جب سرحد سے ٹکرا کر واپس لوٹتے امواج

$$E_{xs1}^- = E_{x10}^- e^{\gamma_1 z} \tag{10.76}$$

$$H_{ys1}^- = -\frac{E_{x10}^-}{\eta_1} e^{\gamma_1 z} \tag{10.77}$$

بھی پائے جائیں جنہیں **انعکاسی امواج**[57] کہا جاتا ہے۔ انعکاسی موج کا حرکی مستقل γ_1 ہی ہے جبکہ یہ موج گھٹتے z جانب حرکت کر رہی ہے۔ انعکاسی موج میں E_{x10}^- مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ چونکہ انعکاسی امواج گھٹتے z جانب حرکت کرتی ہیں لہٰذا مسئلہ پوئنٹنگ کے تحت $E_{xs1}^- = -\eta_1 H_{ys1}^-$ ہو گا تاکہ $\boldsymbol{E}_1^- \times \boldsymbol{H}_1^-$ کی سمت $-\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ہو۔ 3275

آمدی، ترسیلی اور انعکاسی امواج کی صورت میں دونوں سرحدی شرائط پورے ہوتے ہیں اور ان کی مدد سے E_{x10}^+ کی صورت میں بقایا تمام امواج کے طول بھی حاصل ہوتے ہیں۔ آئیں دیکھیں کہ ایسا کس طرح ہوتا ہے۔ 3277

اب پہلے خطے میں آمدی امواج کے علاوہ انعکاسی امواج بھی پائے جاتے ہیں لہٰذا سرحدی شرائط میں دونوں کا مجموعہ استعمال کیا جائے گا۔ یوں $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی برقی میدان برابر ہونے سے

$$E_{xs1} = E_{xs2} \qquad (z = 0)$$

یعنی

$$E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- = E_{xs2}^+ \qquad (z = 0)$$

یا

$$E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{x20}^+ \tag{10.78}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان کے برابری سے

$$H_{ys1} = H_{ys2} \qquad (z = 0, K_\perp = 0)$$

یعنی

$$H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2}^+ \qquad (z = 0, K_\perp = 0)$$

---

[57] reflected wave

یا

$$\frac{E^+_{x10}}{\eta_1} - \frac{E^-_{x10}}{\eta_1} = \frac{E^+_{x20}}{\eta_2} \tag{10.79}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 10.78 اور مساوات 10.79 کو E^-_{x10} کی خاطر حل کرنے کی غرض سے مساوات 10.78 کو مساوات میں پر کرتے

$$\frac{E^+_{x10}}{\eta_1} - \frac{E^-_{x10}}{\eta_1} = \frac{E^+_{x10} + E^-_{x10}}{\eta_2}$$

ہوئے یوں

$$E^-_{x10} = E^+_{x10} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔انعکاسی اور آمدی برقی میدان کے حیطوں کی شرح کو **شرح انعکاس**[58] پکارا اور Γ سے ظاہر[59] کیا جاتا ہے۔

$$\Gamma = \frac{E^-_{x10}}{E^+_{x10}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \tag{10.80}$$

مخلوط شرح انعکاس کی صورت میں انعکاسی اور آمدی میدان میں زاویائی فرق پایا جائے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شرح انعکاس کی حتمی قیمت صفر تا ایک ممکن ہے۔

$$|\Gamma| \leq 1 \tag{10.81}$$

اسی طرح مساوات 10.78 اور مساوات 10.79 سے E^-_{x10} ختم کرنے سے

$$\tau = \frac{E^+_{x20}}{E^+_{x10}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \tag{10.82}$$

حاصل ہوتا ہے جو **شرح ترسیل**[60] کہلایا اور τ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔مساوات 10.80 اور مساوات 10.82 سے

$$\tau = 1 + \Gamma \tag{10.83}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں ان نتائج کو چند مخصوص صورتوں میں استعمال کرتے ہیں۔تصور کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق جبکہ دوسرا خطہ کامل موصل ہے۔ایسی صورت میں σ_2 لا محدود ہو گا لہٰذا

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = 0$$

ہو گا۔یوں مساوات 10.82 سے

$$E^+_{x20} = 0$$

حاصل ہوتا ہے یعنی کامل موصل میں کسی صورت بھی وقت کے ساتھ بدلتا میدان نہیں پایا جا سکتا۔اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ کامل موصل کی گہرائی جلد صفر کے برابر ہے۔

---

[58] reflection coefficient
[59] Γ یونانی حروف تہجی گیما ہے۔
[60] transmission coefficient

مساوات 10.80 میں $\eta_2 = 0$ پر کرنے سے

$$\Gamma = -1$$

یعنی

$$E_{x10}^{-} = -E_{x10}^{+}$$

حاصل ہوتا ہے۔انعکاسی موج کا حیطہ بالکل آمدی موج کے حیطے کے برابر ہے لیکن ان میں $180°$ کا زاویہ پایا جاتا ہے۔موصل سطح آمدی توانائی کو واپس کرتی ہے اور یوں پہلے خطے میں کل برقی میدان

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^{+} + E_{xs1}^{-} \\ &= E_{x10}^{+} e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^{+} e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہو گا جہاں کامل ذو برق میں $\gamma_1 = 0 + j\beta_1$ لیا گیا ہے۔اس کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^{+} \left(e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z} \right) \\ &= -j2E_{x10}^{+} \sin \beta_1 z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جو دوری سمتیہ کی صورت میں ہے جسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر حقیقی جزو لیتے ہوئے اصل موج کی مساوات

$$E_{x1} = 2E_{x10}^{+} \sin \beta_1 z \sin \omega t \tag{10.84}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ مساوات ساکن میدان کو ظاہر کرتی ہے۔یاد رہے کہ اسے دو آپس میں الٹ سمت میں حرکت کرتے امواج سے حاصل کیا گیا ہے۔اس کا موازنہ آمدی موج

$$E_{x1}^{+} = E_{x10}^{+} \cos(\omega t - \beta_1 z)$$

سے کریں۔حرکت کرتے موج کی پہچان جزو $\omega t - \beta_1 z$ ہے جو مثبت سمت میں موج کو ظاہر کرتی ہے۔مساوات 10.84 میں ωt اور $\beta_1 z$ علیحدہ علیحدہ پائے جاتے ہیں۔

مساوات 10.84 میں جس لمحہ $\omega t = n\pi$ کے برابر ہو اس لمحہ میدان ہر نقطے پر صفر کے برابر ہو گا۔اس کے علاوہ جس نقطے پر $\beta_1 z = n\pi$ کے برابر ہو، اس نقطے پر ہر وقت میدان صفر ہی رہتا ہے۔مساوات 10.84 کو ساکن موج[61] کہا جاتا ہے۔برقی میدان ان سطحوں پر ہر وقت صفر رہتا ہے جہاں

$$\beta_1 z = n\pi \qquad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots)$$

ہو جس سے

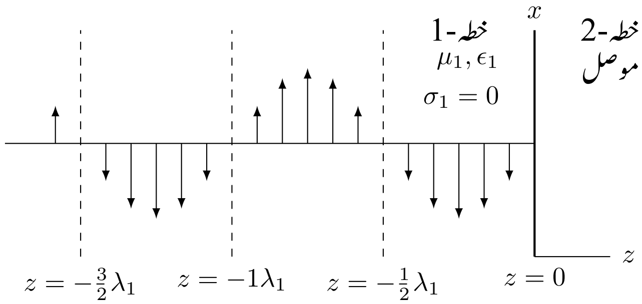
$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = n\pi$$

یعنی

$$z = n\frac{\lambda_1}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں سرحد یعنی $z = 0$ پر برقی میدان صفر ہو گا اور پہلے خطے میں سرحد سے دور چلتے ہوئے ہر آدھے طول موج پر صفر برقی میدان پایا جائے گا۔یہ صورت حال شکل 10.7 میں دکھائی گئی ہے۔اس شکل میں نقطہ دار لکیر ان سطحوں کو ظاہر کرتی ہیں جہاں میدان صفر رہتا ہے۔برقی میدان کو وقت $t = \frac{\pi}{2}$ پر دکھایا گیا ہے جب اس کا حیطہ زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے۔

[61] standing wave



شکل 10.7: ساکن موج، برقی میدان۔

چونکہ $E^+_{xs1} = \eta_1 H^+_{ys1}$ اور $E^-_{xs1} = -\eta_1 H^-_{ys1}$ ہوتے ہیں لہٰذا مقناطیسی میدان

$$H_{ys1} = \frac{E^+_{x10}}{\eta_1}\left(e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z}\right)$$

یا

$$H_{y1} = 2\frac{E^+_{x10}}{\eta_1}\cos\beta_1 z\cos\omega t \tag{10.85}$$

ہو گا۔ یہ بھی ساکن موج ہے لیکن جس سطح پر برقی میدان صفر رہتا ہے وہاں مقناطیسی ساکن موج کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ اس کے علاوہ برقی اور مقناطیسی ساکن امواج 286
میں $90°$ کا وقتی فرق پایا جاتا ہے لہٰذا یہ امواج کسی بھی سمت میں اوسطاً صفر طاقت منتقل کرتی ہیں۔ 3287

آئیں اب دو کامل ذو برق کی سرحد پر صورت حال دیکھیں۔ اب ان دو خطوں میں قدرتی رکاوٹ η_1 اور η_2 جبکہ $\alpha_1 = 0$ اور $\alpha_2 = 0$ ہوں گے۔ عددی قیمتیں لے کر آگے چلتے ہیں۔ فرض کریں کہ

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= 50\,\Omega\\
\eta_2 &= 377\,\Omega\\
E^+_{x10} &= 10\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}$$

ہیں۔ یوں

$$\Gamma = \frac{377-50}{377+50} = 0.7658$$

ہے لہٰذا

$$E^-_{x10} = 0.7658 \times 10 = 7.658\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

ہو گا۔ پہلے خطے میں مقناطیسی میدان

$$\begin{aligned}
H^+_{y10} &= \frac{10}{50} = 0.2\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\\
H^-_{y10} &= -\frac{7.658}{50} = -0.153\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}$$

ہیں۔ آمدی اوسط سطحی کثافت طاقت مساوات 10.55 سے

$$P^+_{1,\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{\left(E^+_{x10}\right)^2}{|\eta_1|}e^{-2\alpha_1 z}\cos\theta_{\eta 1} = 1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

جبکہ انعکاسی اوسط سطحی کثافت طاقت

$$P^{-}_{1,\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{\left(E^{-}_{x10}\right)^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha_1 z}\cos\theta_{\eta 1} = 0.5864\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

ہے۔ان مساوات میں $\alpha_1 = 0$ اور $\eta_1 = 50\underline{/0}$ استعمال کئے گئے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور آمدی کثافت طاقت کی شرح

$$\frac{\frac{\left(E^{-}_{x10}\right)^2}{2\eta_0}}{\frac{\left(E^{+}_{x10}\right)^2}{2\eta_0}} = |\Gamma|^2 \tag{10.86}$$

کے برابر ہے۔

دوسرے خطے میں

$$E^{+}_{x20} = \frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}E^{+}_{x10} = 17.658\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$
$$H^{+}_{y20} = \frac{17.658}{377} = 0.046\,84\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$$

ہیں لہٰذا

$$P^{+}_{2,\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{\left(E^{+}_{x20}\right)^2}{|\eta_2|} e^{-2\alpha_2 z}\cos\theta_{\eta 2} = 0.4135\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور ترسیلی طاقت کا مجموعہ آمدی طاقت کے عین برابر ہے۔

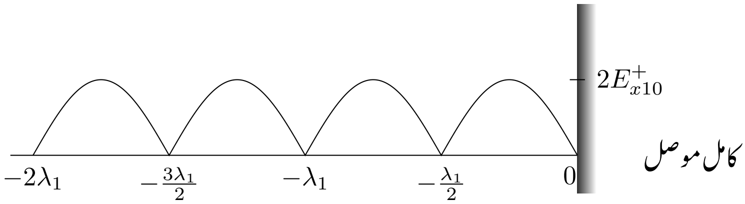
$$P^{+}_{1,\text{اوسط}} = P^{-}_{1,\text{اوسط}} + P^{+}_{2,\text{اوسط}}$$

10.6 شرح ساکن موج

کسی بھی ترسیلی نظام میں مختلف مقامات پر برقی یا مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارہ باآسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔محوری تار کا اندرونی تار ذرہ زیادہ لمبا رکھتے ہوئے برقی میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح تار کا ایک چھوٹا دائرہ مقناطیسی میدان کا نمونہ حاصل کرنے میں کام آتا ہے۔ان آلات سے حاصل اشارات کو سمت کار[62] سے گزارتے ہوئے مائیکرو میٹر سے ناپا جا سکتا ہے۔مائیکرو میٹر میدان کے حیطے کے راست تناسب جواب دیتا ہے۔ان آلات کو عموماً درکار اشارات کے ہمسر[63] رکھا جاتا ہے تاکہ یہ زیادہ حساس ہوں۔

اگر بغیر ضیاع خطے میں یکساں مستوی موج حرکت کر رہی ہو اور اس خطے میں انعکاسی موج نہ پائی جاتی ہو تب میدان ناپنے والا آلہ تمام مقامات پر یکساں حیطہ دکھائے گا۔ایسا آلہ تیزی سے تبدیل ہوتے حیطے کو دکھانے سے قاصر ہوتا ہے۔ہر جگہ برابر حیطہ اس بات کی نشانی ہے کہ خطے میں طاقت ضائع نہیں ہوتا اور یہ کہ انعکاسی موج بھی غیر موجود ہے۔

اس کے برعکس کامل ذو برق میں آمدی موج کا کامل موصل سے انعکاس، ساکن موج پیدا کرتا ہے۔ایسے خطے میں میدان ناپتا آلہ مختلف مقامات پر مختلف حیطے ناپے گا۔چونکہ سرحد سے ہر آدھے طول موج کے فاصلے پر میدان صفر رہتا ہے لہٰذا ان نقطوں پر آلہ صفر حیطہ ناپے گا جبکہ عین ایسے دو قریبی نقطوں کے درمیان آلہ



شکل 10.8: کامل موصل سے انعکاس، کامل ذو برق میں ساکن موج پیدا کرتا ہے۔

زیادہ سے زیادہ حیطہ دکھائے گا۔ آلے کو سرحد کے قریب اور دور کرنے سے ناپے گئے حیطے کی شکل $|\sin \beta z|$ کی طرح حاصل ہو گی جہاں سرحد سے فاصلہ z ہے۔ اسے شکل 10.8 میں دکھایا گیا ہے۔ سائن نما حیطے کا تبدیل ہونا ساکن موج کی پہچان ہے۔

مثال 10.6: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں کامل ذو برق میں ساکن موج کی مساوات حاصل کریں۔

حل: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں $\Gamma = -1$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا $E^-_{xs1} = -E^+_{x10}e^{j\beta_1 z}$ ہو گا۔ یوں آمدی اور انعکاسی امواج کا مجموعہ

$$\begin{aligned}
E_{xs1} &= E^+_{x10}e^{-j\beta_1 z} - E^+_{x10}e^{j\beta_1 z} \\
&= -2jE^+_{x10}\sin\beta_1 z
\end{aligned}$$

ہو گا۔ اس دوری سمتیہ سے حقیقی ساکن موج کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$E_{xs1}e^{j\omega t} = -2jE^+_{x10}\sin\beta_1 z\cos\omega t + 2E^+_{x10}\sin\beta_1 z\sin\omega t$$

حقیقی جزو

$$E_{x1} = 2E^+_{x10}\sin\beta_1 z\sin\omega t$$

لیتے ہیں۔ یہی ساکن موج کی مساوات ہے۔ شکل 10.8 میں آلہ ناپ سے حاصل $|E_{x1}|$ دکھایا گیا ہے۔

اب ایسی صورت پر غور کرتے ہیں جہاں تمام کی تمام موج سرحد سے واپس نہیں لوٹتی بلکہ اس کا کچھ حصہ سرحد پار کرتے ہوئے دوسری جانب چلے جاتی ہے۔ پہلے خطے میں اب آمدی موج کے علاوہ ایسی انعکاسی موج پائی جاتی ہے جس کا حیطہ آمدی موج سے کم ہوتا ہے۔ اگرچہ اب پہلے خطے میں ساکن موج کے ساتھ ساتھ حرکت کرتی موج بھی پائی جاتی ہے لیکن اس کے باوجود اس کو ساکن موج ہی پکارا جاتا ہے۔ اب کسی بھی نقطے پر میدان ہر وقت صفر نہیں رہتا۔ ساکن اور حرکت کرتے حصوں کا اندازہ حیطے کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور اس کے کم سے کم قیمت کی شرح سے بیان کی جاتی ہے۔ اس شرح کو شرح ساکن موج[64] کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے جبکہ دوسرا خطہ کوئی بھی مادہ ہو سکتا ہے۔ یوں $\alpha_1 = 0$ ہو گا۔ اب

$$\begin{aligned}
E^+_{xs1} &= E^+_{x10}e^{-j\beta_1 z} \\
E^-_{xs1} &= \Gamma E^+_{x10}e^{j\beta_1 z}
\end{aligned}$$

---

[62] rectifier
[63] tuned
[64] standing wave ratio

ہوں گے جہاں

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

ہے۔چونکہ کامل ذو برق میں $\sigma = 0$ ہوتا ہے لہٰذا η_1 مثبت حقیقی عدد ہے جبکہ η_2 مخلوط عدد ہو سکتا ہے لہٰذا Γ بھی مخلوط ہو سکتا ہے۔یوں اسے

$$\Gamma = |\Gamma| \, e^{j\phi}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$E^-_{xs1} = |\Gamma| \, E^+_{x10} e^{j(\beta_1 z + \phi)}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ساکن موج کی مساوات

$$E_{xs1} = \left(e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| \, e^{j(\beta_1 z + \phi)}\right) E^+_{x10} \tag{10.87}$$

حاصل ہوتی ہے۔ 3309

اب آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط عدد $e^{j\theta}$ کو

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ہوتا ہے لہٰذا اس کی حتمی قیمت ایک (1) ہی رہتی ہے۔اس عدد کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\theta = 0$ کی صورت میں $+$ حاصل ہوتی ہے۔یہی قیمت $\theta = \mp 2\pi$ یا $\theta = \mp 4\pi$ کی صورت میں بھی حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح اس عدد کی کم سے کم قیمت $\theta = \mp\pi, \mp 3\pi, \mp 5\pi \cdots$ پر -1 حاصل ہوتی ہے۔اس طرح مساوات 10.87 کو

$$E_{xs1} = \left(1 + |\Gamma| \, e^{j(2\beta_1 z + \phi)}\right) e^{-j\beta_1 z} E^+_{x10}$$

لکھتے ہوئے اگر $2\beta_1 z + \phi$ کو θ تصور کیا جائے تو $e^{j(2\beta_1 z + \phi)}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت یعنی $+1$

$$2\beta_1 z + \phi = 0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \cdots$$

یا

$$-\beta_1 z = \left(\frac{\phi}{2}\right), \left(\frac{\phi}{2} - \pi\right), \left(\frac{\phi}{2} + \pi\right), \left(\frac{\phi}{2} - 2\pi\right), \cdots$$

پر حاصل ہو گی جسے

$$-\beta_1 z_{\text{بلند تر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi \qquad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots) \tag{10.88}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ایسی صورت میں

$$|E_{xs1}|_{\text{بلند تر}} = (1 + |\Gamma|) \, E^+_{x10} \tag{10.89}$$

ہو گا۔اسی طرح $e^{j(2\beta_1 z + \phi)}$ کی کم سے کم قیمت یعنی -1

$$2\beta_1 z + \phi = \pi, -\pi, 3\pi, -3\pi, \cdots$$

یا

$$-\beta_1 z = \left(\frac{\phi}{2}-\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\phi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right), \cdots$$

پر حاصل ہو گی جسے

$$-\beta_1 z_{\text{کمتر}} = \frac{\phi}{2}+n\pi+\frac{\pi}{2} \qquad (n=0,\mp1,\mp2,\cdots) \tag{10.90}$$

لکھا جا سکتا ہے اور ایسی صورت میں

$$\left|E_{xs1}\right|_{\text{کمتر}} = (1-|\Gamma|)\,E_{x10}^{+} \tag{10.91}$$

ہو گا۔

مساوات 10.88 سے $z_{\text{بلند تر}}$ اور مساوات 10.90 سے $z_{\text{کمتر}}$ حاصل کرتے ہوئے دھیان رہے کہ صرف ان قیمتوں کو درست تصور کیا جائے جو شکل 10.9 میں ٹھیک طرف پائے جاتے ہوں یعنی $z_{\text{بلند تر}}$ اور $z_{\text{کمتر}}$ کی قیمت منفی ہونی چاہیے۔

موج کی کم تر قیمت ہر آدھے طول موج پر پائی جاتی ہے۔ موج کی بلند تر قیمت دو کم تر قیمتوں کے مقام کے عین وسط میں پائی جاتی ہیں۔ کامل موصل کی صورت میں پہلا کمتر میدان $-\beta_1 z = 0$ یعنی سرحد پر پایا جائے گا۔ اگر $\eta_2 < \eta_1$ ہو اور دونوں قدرتی رکاوٹوں کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں تب $\phi = \pi$ ہو گا اور ایسی صورت میں سرحد یعنی $-\beta_1 z = 0$ پر برقی دباو کی کمتر قیمتیں پائی جائے گی۔ اس کے برعکس اگر $\eta_2 > \eta_1$ ہو اور دونوں رکاوٹ حقیقی ہوں تب سرحد پر برقی میدان کی قیمت بلند تر ہو گی۔

ان معلومات کو زیر استعمال لانے کی غرض سے $10\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $1\,\mathrm{GHz}$ تعدد کے موج پر غور کرتے ہیں جو خطہ اول میں سرحد کی طرف عمودی آمد ہے۔ پہلے خطے کے مستقل $\epsilon_{R1} = 3$، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ جبکہ دوسرے خطے کے مستقل $\epsilon_{R1} = 6$، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں۔

یوں

$$\omega = 2\pi 10^9\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}, \qquad \beta_1 = 36.28\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}, \qquad \beta_2 = 51.3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اگرچہ خالی خلاء میں اس موج کی طول $30\,\mathrm{cm}$ ہو گی، یہاں $\lambda_1 = 17.32\,\mathrm{cm}$ اور $\lambda_2 = 12.25\,\mathrm{cm}$ ہیں۔ قدرتی رکاوٹ $\eta_1 = 217.66\,\Omega$ اور $\eta_2 = 153.91\,\Omega$ ہیں جن سے شرح انعکاس $\Gamma = -0.17$ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ دونوں رکاوٹ حقیقی اعداد ہیں اور $\eta_2 < \eta_1$ ہے لہٰذا سرحد پر کمتر برقی میدان پایا جائے گا۔ پہلے خطے، یعنی $z < 0$، میں سرحد سے دور ہر $8.66\,\mathrm{cm}$ فاصلے پر برقی میدان کی کمتر قیمت پائی جائے گی۔ مساوات 10.91 سے ساکن موج کی کمتر قیمت $\left|Exs1\right|_{\text{کمتر}} = 8.3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے لہٰذا اس میں طاقت کا ضیاع نہیں ہوتا اور یوں اس خطے میں تمام کمتر قیمتیں برابر ہوں گی۔

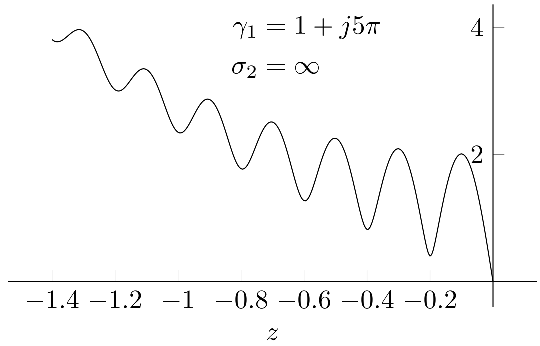
میدان کی بلند تر قیمت $11.7\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پہلے خطے میں سرحد سے 4.33، 12.99، 21.65، $\cdots$ سنٹی میٹر کے فاصلوں پر پائی جائیں گی۔

چونکہ دوسرے خطے میں انعکاسی موج نہیں پائی جاتی لہٰذا اس میں ساکن موج بھی نہیں پائی جائے گی۔

ساکن موج کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کی شرح کو شرح ساکن موج[65] کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$s = \frac{\left|E_{xs1}\right|_{\text{بلند تر}}}{\left|E_{xs1}\right|_{\text{کمتر}}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \tag{10.92}$$

[65]standing wave ration



شکل 10.9: غیر کامل ذو برق میں ساکن موج کی بلند تر اور کم تر قیمتوں میں فرق سرحد سے دور کم ہوتا ہے۔

چونکہ $|\Gamma| \le 1$ رہتا ہے لہٰذا شرح ساکن موج ہر صورت مثبت اور اکائی کے برابر یا اس سے زیادہ قیمت کا ہو گا یعنی

$$s \ge 1 \tag{10.93}$$

مندرجہ بالا مثال میں $s = \frac{1+0.17}{1-0.17} = 1.409$ ہے۔

اگر $|\Gamma| = 1$ ہو تب انعکاسی اور آمدی امواج برابر ہوں گے لہٰذا تمام آمدی توانائی سرحد سے واپس لوٹتی ہے اور ایسی صورت میں s لا محدود ہو گا۔ پہلے خطے میں ہر $\frac{\lambda_1}{2}$ فاصلے پر ایسی سطح پائی جائے گی جس پر برقی میدان ہر وقت صفر رہتا ہے۔ ان سطحوں کے درمیان ایسی سطحیں ہوں گی جہاں آمدی موج کے دگنے حیطے کا برقی میدان ہو گا۔

اگر $\eta_2 = \eta_1$ ہو تب $\Gamma = 0$ ہو گا۔ ایسی صورت میں توانائی سرحد سے واپس نہیں لوٹتی، $s = 1$ ہوتا ہے اور برقی میدان کی بلند تر اور کم تر قیمتیں برابر ہوتی ہیں۔

آدھی طاقت کے انعکاس کی صورت میں $|\Gamma|^2 = 0.5$ یعنی $|\Gamma| = 0.707$ اور $s = 5.83$ ہو گا۔

چونکہ برقی اور مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارات با آسانی حاصل کئے جا سکتے ہیں اور s کی قیمت حاصل کرنے کے لئے راست تناسب اشارات ہی درکار ہیں لہٰذا شرح ساکن موج کو تجرباتی طور حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہی اس کی اہمیت کا راز ہے۔ یاد رہے کہ s حاصل کرنے کے لئے میدان کی اصل قیمت درکار نہیں ہوتی۔ صرف اتنا ضروری ہوتا ہے کہ تمام اشارات اصل میدان کے تناسب سے ہوں۔

آئیں اب پہلے خطے کو غیر کامل ذو برق تصور کریں جس کا α صفر کے برابر نہیں ہو گا۔ اب بائیں سے آتی آمدی موج مثبت z جانب چلتے ہوئے گھٹے گی۔ انعکاسی موج منفی z جانب چلتے ہوئے گھٹتے جائے گی حتٰی کہ آخر کار اس کی قیمت قابل نظر انداز ہو گی۔ یوں اگرچہ سرحد کے قریب بلند تر اور کم تر میدان میں فرق واضح ہو سکتا ہے لیکن سرحد سے دور ان میں فرق نہیں رہ پاتا۔ پہلے خطے کا حرکی مستقل $\gamma_1 = 1 + j5\pi$ اور دوسرا خطہ کامل موصل ہونے کی صورت میں ایسی ہی ایک ساکن موج شکل 10.9 میں دکھائی گئی ہے جہاں موصل $z = 0$ کے دائیں ہاتھ پر ہے۔ اس شکل میں عین سرحد پر آمدی موج کی قیمت $E^+_{x10} = 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ چونکہ ذو برق کا سرحد موصل کے ساتھ ہے اور موصل میں برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا شکل میں سرحد پر برقی میدان صفر ہی ہے۔ سرحد سے $\frac{2\pi}{\beta_1} = 0.2\,\mathrm{m}$ فاصلے پر دوبارہ کم تر میدان پایا جاتا ہے۔ اسی طرح پہلی چوٹی سرحد پر آمدی میدان کے تقریباً دگنی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو چوٹیاں یا دو نشیب برابر نہیں ہیں۔ یہاں شرح ساکن موج کی قیمت اس صورت مطلب رکھتی ہے جب اسے ناپنے کا مقام یعنی z بھی ساتھ بتلایا جائے۔ ایسی صورت میں انعکاسی شرح اور تضعیفی مستقل زیادہ کار آمد معلومات ہیں۔

اگرچہ مندرجہ بالا مثال زیادہ انتہا درجے کا تھا لیکن یہ بھی نہیں بھولنا چاہئے کہ حقیقت میں کامل ترسیلی تار بھی نہیں پائے جاتے۔ حقیقت میں شرح ساکن موج ہر صورت سرحد سے فاصلے پر منحصر ہو گی اور اس کا استعمال اسی وقت ممکن ہو گا جب ہماری دلچسپی کے خطے میں اس کی قیمت زیادہ تبدیل نہ ہو۔

آئیں دوبارہ پہلا خطہ کامل ذو برق لیتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح حاصل کریں۔ لامحدود حجم میں آزاد موج کی صورت میں یہ شرح $\mp\eta_1$ تھی جہاں منفی قیمت بڑھتے z جانب حرکت کی صورت میں ہوتی ہے۔ انعکاسی موج کی موجودگی میں برقی اور مقناطیسی میدان صفر بھی ممکن ہیں لہٰذا ان کی شرح صفر سے لامحدود قیمت کی ہو سکتی ہے۔ سرحد سے $z=-l$ فاصلے پر میدان

$$
\begin{aligned}
E_{xs1} &= \left(e^{j\beta_1 l}+\Gamma e^{-j\beta_1 l}\right)E_{x10}^{+}\\
H_{ys1} &= \left(e^{j\beta_1 l}-\Gamma e^{-j\beta_1 l}\right)\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1}
\end{aligned}
$$

ہیں۔ ان کی شرح کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے اور $\eta_{\text{داخلی}}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$
\eta_{\text{داخلی}}=\left.\frac{E_{xs1}}{H_{ys1}}\right|_{z=-l}=\eta_1\frac{e^{j\beta_1 l}+\Gamma e^{-j\beta_1 l}}{e^{j\beta_1 l}-\Gamma e^{-j\beta_1 l}}
$$

اس میں $\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$ پر کرتے ہوئے اور یولر مماثل[66] استعمال کرتے ہوئے

$$
\eta_{\text{داخلی}}=\eta_1\frac{(\eta_2+\eta_1)(\cos\beta_1 l+j\sin\beta_1 l)+(\eta_2-\eta_1)(\cos\beta_1 l-j\sin\beta_1 l)}{(\eta_2+\eta_1)(\cos\beta_1 l+j\sin\beta_1 l)-(\eta_2-\eta_1)(\cos\beta_1 l-j\sin\beta_1 l)}
$$

حاصل ہوتا ہے جسے باآسانی یوں

$$
\eta_{\text{داخلی}}=\eta_1\frac{\eta_2+j\eta_1\tan\beta_1 l}{\eta_1+j\eta_2\tan\beta_1 l} \tag{10.94}
$$

3346 لکھا جا سکتا ہے۔

جب η_2 اور η_1 برابر ہوں تب داخلی قدرتی رکاوٹ $\eta_{\text{داخلی}}$ پہلے خطے کی قدرتی رکاوٹ η_1 کے برابر ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں انعکاس پیدا نہیں ہوتی اور ترسیلی نظام ہم رکاوٹی[67] کہلاتا ہے۔ ہم رکاوٹی نظام میں انعکاس کے غیر موجودگی کی بنا توانائی ایک ہی سمت میں منتقل ہوتی ہے۔ اگر دوسرا خطہ کامل موصل ہو تب $\eta_2=0$ ہو گا۔ ایسی صورت میں

$$
\eta_{\text{داخلی}}=j\eta_1\tan\beta_1 l\qquad(\eta_2=0) \tag{10.95}
$$

ہو گا لہٰذا ان مقامات پر جہاں $E_{xs1}=0$ ہو، یعنی جب $\beta_1 l=n\pi$ ہو، داخلی قدرتی رکاوٹ صفر کے برابر ہو گی جبکہ ان مقامات پر جہاں $H_{ys1}=0$ ہو وہاں
3348 داخلی قدرتی رکاوٹ لامحدود ہو گی۔

3349 مساوات 10.94 ترسیلی نظام پر غور کرنے کے لئے انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔

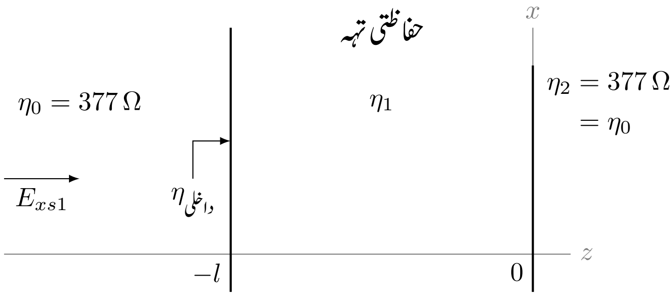
اس باب کے آخر میں ریڈار اینٹینا کو موسمی اثرات سے بچانے کی خاطر استعمال کئے جانے والی ایسی تہہ کی بات کرتے ہیں جو ریڈار کے شعاعوں کے لئے بالکل شفاف ثابت ہوتی ہے۔ یہ تہہ عموماً اینٹینا پر گنبد کی شکل میں ہوتی ہے۔ شکل 10.10 میں ریڈار اینٹینا $z=-l$ کے بائیں جانب خلاء میں ہے جبکہ $z=0$ تا $z=-l$ خطے میں حفاظتی تہہ ہے۔ یوں $z=0$ کے دائیں جانب خلاء ہے جس میں ریڈار اشارات بھیجتا ہے۔ خلاء کی قدرتی رکاوٹ $377\,\Omega$ ہوتی ہے۔ ذو برق کی بنی حفاظتی تہہ کی موٹائی زیادہ نہیں رکھی جاتی تاکہ اس میں طاقت کا ضیاع کم سے کم ہو۔ حفاظتی تہہ سے انعکاس قابل قبول نہیں چونکہ اس طرح ریڈار کے امواج واپس اینٹینا کی طرف لوٹیں گے۔ ہم چاہتے ہیں کہ اینٹینا، دائیں جانب کے پورے نظام کے لئے ہم رکاوٹی ہو۔ ایسا تب ہو گا جب $\eta_{\text{داخلی}}=\eta_2$ ہو یعنی

$$
377=\eta_1\frac{377+j\eta_1\tan\beta_1 l}{\eta_1+j377\tan\beta_1 l}
$$

---

[66] $e^{j\alpha}=\cos\alpha+j\sin\alpha$

[67] matched



شکل 10.10: ریڈار اینٹینا پر ایسی شفاف حفاظتی تہہ چڑھائی جاتی ہے جو برقی و مقناطیسی امواج کو نہیں گھٹاتی۔

یا

$$j377^2 \tan \beta_1 l = j\eta_1^2 \tan \beta_1 l$$

اب تمام غیر مقناطیسی اشیاء کی $377 > \eta_1$ ہے لہٰذا اس مساوات پر پورا صرف اس صورت اترا جا سکتا ہے جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو۔ کم سے کم موٹائی یوں $n = 1$ کی صورت میں $l = \frac{\pi}{\beta_1}$ یعنی $l = \frac{\lambda_1}{2}$ حاصل ہوتی ہے۔ اگر ریڈار 10 GHz کی شعاعیں پیدا کرتا ہو تب ہم حفاظتی تہہ کو کم ضیاع اور ہلکے وزن کے ایسے پلاسٹک سے بنا سکتے ہیں جس کا $\epsilon_R = 2.25$ ہے۔ ہمیں تہہ کی موٹائی

$$l = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{v_1}{2f_1} = \frac{3 \times 10^8}{2\sqrt{2.25} \times 10^{10}} = 1\,\text{cm}$$

3350 رکھنی ہو گی۔

اگر 10 GHz پر چلنے والے ریڈار پر چڑھائی حفاظتی تہہ کی موٹائی 0.5 cm کر دی جائے تب $\beta_1 = 314.2$ اور $\eta_1 = 251.33$ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\eta_{\text{داخلی}} &= 251.33 \times \frac{377 + j251.33 \tan(314.2 \times 0.005)}{251.33 + j377 \tan(314.2 \times 0.005)} \\ &\approx 167.6\,\Omega\end{aligned}$$

ہو گی۔ یوں شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{167.6 - 377}{167.6 + 377} = -0.3845$$

ہو گا اور انعکاسی طاقت کی فی صد شرح

$$\frac{\frac{\left(E_{x10}^-\right)^2}{2\eta_0}}{\frac{\left(E_{x10}^+\right)^2}{2\eta_0}} \times 100 = |\Gamma|^2 \times 100 = 14.78\,\%$$

3351 ہو گی۔

3352 مشق 10.7: دو خطے آپس میں $z = 0$ پر ملتے ہیں۔ سرحد کے بائیں جانب پہلا خطہ ہے جس کے مستقل $\epsilon_{R1} = 5$، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں۔ سرحد
3353 کے دوسری جانب مستقل $\epsilon_{R2} = 2$، $\mu_{R2} = 10$ اور $\sigma_2 = 0$ ہیں۔ پہلے خطے میں s حاصل کریں۔ دوسرے خطے میں s حاصل کریں اور آخر میں $z =$
3354 $-0.6\,\text{cm}$ پر $\eta_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔

3355 جوابات: 5، 1 اور $86.9\underline{/-61.8^\circ}$

3356

---

the answers should be at the end of the book
include the DC switch on case as multiple reflections before settling down
read chapter 9 onwards (proof reading)
put comsat's time table here.
energy travels along the wire and not in the wire.
antenna chapter, 3D figure at start and complete the start section.
house completion certificate.
zaryab's tooth
zaryab fish
F=-dW/dT to include in inductance chapter plus a question or two
magnetizartion curve and an iteration example. fig 8.10, 11 of hayt.
charge is barqi bar.
add questions to machine book too.
take print outs for myself.

when giving fields always remember the following rules:
always ensure that divergence of magnetic field is zero.
moving waves must be of the form $E = E0\cos(wt - kz)$ where $c = (\mu * \epsilon)^{-0.5}$ and $k = 2 * \pi/\lambda$
include complex permitivity (7th ed Q12.18 says sigma=omega*epsilon")
include 4th ed fig 11.11 of page 422
rename lossless and lossy dielectrics as

الباب 16

سوالات

مستوی امواج

سوال 16.1: خالی خلاء میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت میں حرکت کرتی، $600\,\mathrm{MHz}$ تعدد کے مستوی برقی موج $\boldsymbol{E}$ کی چوٹی لمحہ $t = 1\,\mathrm{ns}$ پر $z = 0.3\,\mathrm{m}$ پر پائی جاتی ہے۔یہ چوٹی $310\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کے برابر ہے۔الف) برقی میدان $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت میں ہونے کی صورت میں سائن نما $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ امواج کے مساوات لکھیں۔ب) میدان سمتیہ $5\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت میں ہونے کی صورت میں سائن نما $\boldsymbol{E}_s$ اور $\boldsymbol{H}_s$ امواج کی مساوات لکھیں۔

جواب: $\boldsymbol{E} = 310\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cos(12\pi \times 10^8 t - 4\pi z)$ ، $\boldsymbol{H} = \frac{31}{12\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cos(12\pi \times 10^8 t - 4\pi z)$ ، $\boldsymbol{E}_s = 310\left[\frac{5}{\sqrt{29}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{2}{\sqrt{29}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right]e^{-j4\pi z}$ ، $\boldsymbol{H}_s = \frac{31}{12\pi}\left[\frac{2}{\sqrt{29}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{5}{\sqrt{29}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right]e^{-j4\pi z}$

سوال 16.2: خالی خلاء میں نقطہ $N(3,-2,5)$ پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب حرکت کرتی، $200\,\mathrm{MHz}$ تعدد کے برقی میدان کی سائن نما مستوی موج کی چوٹی لمحہ $t = 0$ پر $\boldsymbol{E}_0 = 150\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 210\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پائی جاتی ہے۔ الف) λ ، β ، $\boldsymbol{a}_E$ ، $\boldsymbol{a}_H$ ، H_0 اور مقناطیسی موج $\boldsymbol{H}_s$ حاصل کریں۔ ب) لمحہ $t = 0$ پر نقطہ N پہ برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔ پ) لمحہ $t = 1.5\,\mathrm{ns}$ پر نقطہ N پہ برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔ ت) نقطہ $P(5,3,7)$ پہ لمحہ $t = 2\,\mathrm{ns}$ پر برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔

جوابات: $\lambda = \frac{3}{2}\,\mathrm{m}$ ، $\beta = 4.2\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{a}_E = 0.51\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 0.86\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ، $\boldsymbol{a}_H = -0.86\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 0.51\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ، $H_0 = 0.7733\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{H}_s = 0.7733(-0.86\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 0.51\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})e^{-j4.2z}$ ، $292\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $-90\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $266\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 16.3: خالی خلاء میں مستوی موج $\boldsymbol{E}_s = \boldsymbol{E}_0 e^{-j6z}$ دی گئی ہے۔ الف) موج کی تعدد ω حاصل کریں۔ ب) برقی میدان کا حیطہ بالترتیب $\boldsymbol{E}_0 = 50\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ، $\boldsymbol{E}_0 = (5 + j10)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ، $\boldsymbol{E}_0 = 50\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 80\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{E}_0 = (30\underline{/45^\circ})\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ہونے کی صورت میں لمحہ $t = 0$ پر نقطہ $N(0,0,0)$ پہ $|\boldsymbol{E}|$ حاصل کریں۔

جوابات: $1.8\,\frac{\mathrm{Grad}}{\mathrm{s}}$ ، $50\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $11.18\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $94.3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $11.18\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $21.2\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ،

سوال 16.4: خالی خلاء میں $350\,\mathrm{MHz}$ تعدد کی مستوی موج $\boldsymbol{E}_s = (5 + j2)(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - j4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})e^{j\beta z}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پائی جاتی ہے۔ λ اور β کی قیمتیں دریافت کریں۔لمحہ $t = 1.4\,\mathrm{ns}$ پر نقطہ $z = 40\,\mathrm{cm}$ پہ $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔موج کا حیطہ حاصل کریں۔

جواب: $\lambda = \frac{6}{7}\,\mathrm{m}$ ، $\beta = \frac{7\pi}{3}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{E}(z = 40\mathrm{cm}, t = 1.4\,\mathrm{ns}) = 13.96\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 10.84\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $|\boldsymbol{E}|_{\text{بلندتر}} = 26.9\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 16.5: ایسا خطہ جس کے مستقل $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 4.4$ اور $\sigma = 0$ ہیں میں بڑھتے x محدد کی جانب حرکت کرتی، $250\,\mathrm{MHz}$ تعدد کی مستوی برقی موج پائی جاتی ہے۔برقی میدان $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں ہے۔مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ v_p ، β ، λ ، η ، $\boldsymbol{E}_s$ ، $\boldsymbol{H}_s$ اور $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ ؛

جوابات: $v_p = 1.429 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ، $\beta = 10.99\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\lambda = 57.2\,\mathrm{cm}$ ، $\eta = 179.6\,\Omega$ ، $\boldsymbol{E}_s = E_0 e^{-j10.99x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{H}_s = \frac{E_0}{179.6}e^{-j10.99x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{E_0^2}{359.2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 16.6: مستوی برقی موج $\boldsymbol{E} = E_0 e^{-\alpha z}\sin(\omega t - \beta z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $\eta = \left|\eta_0\right| e^{j\phi}$ دئے گئے ہیں۔ الف) دوری سمتیات $\boldsymbol{E}_s$ اور $\boldsymbol{H}_s$ حاصل کریں۔ ب) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{E}_s = E_0 e^{-\alpha z}e^{-j(\beta z + \pi)}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{H}_s = -\frac{E_0}{\left|\eta_0\right|}e^{-\alpha z}e^{-j(\beta z + \pi + \phi)}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{E_0^2}{2\left|\eta_0\right|}e^{-2\alpha z}\cos\phi\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 16.7: خالی خلاء میں $\boldsymbol{E} = (30\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 22\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\cos(\omega t - 60x)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ الف) λ اور ω حاصل کریں۔ ب) دوری سمتیات $\boldsymbol{E}_s$ اور $\boldsymbol{H}_s$ لکھیں۔ پ) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\lambda = \frac{\pi}{30}\,\mathrm{m}$ ، $\omega = 1.8 \times 10^{10}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ ، $\boldsymbol{E}_s = (30\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 22\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})e^{-j60x}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{H}_s = \frac{1}{120\pi}(-22\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 30\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})e^{-j60x}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{173}{30\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 16.8: مستوی مقناطیسی موج کا دوری سمتیہ $\boldsymbol{H}_s = (5\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + j4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})e^{j20y}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور تعدد $200\,\mathrm{MHz}$ ہے۔ برقی موج کا زیادہ سے زیادہ حیطہ $1200\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔حاصل کریں β ، λ ، η ، v_p ، ϵ_R ، μ_R اور $\boldsymbol{H}(x,y,z,t)$ ؛

جوابات: $\beta = 20\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\lambda = \frac{\pi}{10}\,\mathrm{m}$ ، $\eta = 187.4\,\Omega$ ، $v_p = 6.28 \times 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ، $\epsilon_R = 9.6$ ، $\mu_R = 2.4$ ، $\boldsymbol{H} = 5\cos(2\pi \times 200 \times 10^6 t + 20y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 4\sin(2\pi \times 200 \times 10^6 t + 20y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$

سوال 16.9: میدان $\boldsymbol{E}(y,t) = 700\cos(2.5 \times 10^7 t - \beta y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $\boldsymbol{H}(y,t) = 1.5\cos(2.5 \times 10^7 t - \beta y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ مستوی موج کو ظاہر کرتے ہیں۔یہ موج $1.7 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔حاصل کریں β ، λ ، η ، ϵ_R اور μ_R ؛

جوابات: $\beta = 0.147\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\lambda = 42.7\,\mathrm{m}$ ، $\eta = 467\,\Omega$ ، $\epsilon_R = 1.4$ ، $\mu_R = 2.2$

سوال 16.10: بے ضیاع خطے کے مستقل $\mu_R = 1.2$ اور $\epsilon_R = 5.4$ ہیں۔لمحہ $t = 10\,\mathrm{ns}$ پر نقطہ $N(2, 0.5, 1.5)$ پہ $15\,\mathrm{MHz}$ تعدد اور $E_x = 350\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $E_y = 0$ ، $E_z = 0$ کی خطی قطبی موج $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں حرکت کر رہی ہے۔حاصل کریں β ، λ ، v_p ، η ، E_0 ، $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$ ؛

جوابات: $v_p = 1.18 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ، $\lambda = 7.85\,\mathrm{m}$ ، $\beta = 0.25\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\eta = 178\,\Omega$ ، $E_0 = 408.6\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = 408.6\cos(3\pi \times 10^7 t - 0.25\pi y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$

سوال 16.11: خطی قطبی موج $\boldsymbol{E}_s = (E_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + E_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})e^{\alpha x}e^{j\beta x}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ایسے ضیاع کار خطے میں پائی جاتی ہے جہاں $\eta = \left|\eta_0\right| e^{j\phi}$ ہے۔ $\boldsymbol{H}_s$ ، $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$ ، $\boldsymbol{H}(x,y,z,t)$ اور $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ کے مساوات لکھیں۔

جوابات: $\boldsymbol{H}_s = \frac{1}{\left|\eta_0\right|}(E_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - E_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})e^{\alpha x}e^{ej(\beta x - \phi)}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = (E_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + E_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})e^{\alpha x}\cos(\omega t + \beta x)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{H}(x,y,z,t) = \frac{1}{\left|\eta_0\right|}(E_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - E_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})e^{\alpha x}\cos(\omega t + \beta x - \phi)\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2\left|\eta_0\right|}(E_{y0}^2 + E_{z0}^2)e^{2\alpha x}\cos\phi\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 16.12: کامل موصل سے بنی $\rho = 5\,\mathrm{mm}$ اور $\rho = 12\,\mathrm{mm}$ رداس کے نلکیوں کا محور z محدد ہے۔دو نلکیوں کے درمیان ذو برق کے مستقل $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 3.2$ ہیں۔اس ذو برق میں میدان $\boldsymbol{E} = \frac{1200}{\rho}\cos(\omega t - 5z)\boldsymbol{a}_\rho\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ الف) میکس ویل کے مساوات استعمال کرتے ہوئے ω حاصل کریں۔ ب) $\boldsymbol{H}$ کی مساوات حاصل کریں۔ پ) $\mathscr{P}$ اور $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔ ت) دونوں نلکیوں کے درمیانی خطے میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب کتنی طاقت منتقل ہو رہی ہے۔

جوابات: $\omega = 8.38 \times 10^8\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ ، $\boldsymbol{H} = \frac{5.7}{\rho}\cos(8.38 \times 10^8 t - 5z)\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\mathscr{P} = \frac{6837}{\rho^2}\cos^2(8.38 \times 10^8 t - 5z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{3418.6}{\rho^2}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ ، $2.5\,\mathrm{MW}$

سوال 16.13: کروی محدد میں $\boldsymbol{E}_s=\frac{60}{r}\sin\theta e^{-j2r}\boldsymbol{a}_\theta\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $\boldsymbol{H}_s=\frac{1}{4\pi r}\sin\theta e^{-j2r}\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ دیے گئے ہیں۔ الف) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔ ب) رداس $r=5\,\mathrm{cm}$ پر سطح $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ ، $0<\phi<2\pi$ سے خارج طاقت حاصل کریں۔

جوابات: $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}=\frac{15\sin^2\theta}{2\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ ، $3.13\,\mathrm{W}$

سوال 16.14: $12\,\mathrm{GHz}$ تعدد پر ایک فیرائٹ کے مستقل $\mu_R=5$ ، $\epsilon_R=8$ اور $\sigma=15\,\frac{\mathrm{mS}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ آپ سے گزارش ہے کہ α ، β ، v ، λ اور η حاصل کریں۔

جوابات: $\alpha=2.23\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ ، $\beta=1590\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $v=4.74\times10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ، $\lambda=3.95\,\mathrm{mm}$ ، $\eta=297.83+j0.418\,\Omega$

سوال 16.15: ایسے خطے کے مستقل μ_R ، ϵ_R اور σ حاصل کریں جس میں $100\,\mathrm{MHz}$ تعدد پر طول موج $1\,\mathrm{m}$ ، قدرتی رکاوٹ کی حتمی قیمت $200\,\Omega$ اور تضعیفی مستقل $2\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ ہو۔

جوابات: $\mu_R=1.67$ ، $\epsilon_R=4.84$ ، $\sigma=19.06\,\frac{\mathrm{mS}}{\mathrm{m}}$

سوال 16.16: $330\,\mathrm{MHz}$ تعدد کی مستوی موج ایسے غیر مقناطیسی خطے میں حرکت کر رہی ہے جس کے مستقل $\epsilon_R=2.8$ اور $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}=3.6\times10^{-4}$ ہیں۔ الف) اس خطے کی σ حاصل کریں۔ ب) α ، β اور λ حاصل کریں۔ پ) موج کی چوٹی کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد آدھی رہ جائے گی؟ ت) موج کی طاقت کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد آدھا رہ جائے گا؟ ٹ) کتنے فاصلے پر موج کے زاویے میں 30° تبدیلی رونما ہو گی؟

جوابات: $\sigma=1.85\times10^{-5}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ، $\alpha=0.04\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ ، $\beta=11.57\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\lambda=0.54\,\mathrm{m}$ ، $17.1\,\mathrm{m}$ ، $8.55\,\mathrm{m}$ ، $4.52\,\mathrm{cm}$

سوال 16.17: کپیسٹر C میں طاقت کے ضیاع کو کپیسٹر کے متوازی مزاحمت R سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایسے متوازی دور کی برقی رکاوٹ Z ہے۔ برقی رکاوٹ کے زاویہ θ کا کوسائن، یعنی $\cos\theta$ ، جزو ضربی طاقت کہلاتا ہے جبکہ کپیسٹر کی خاصیت Q سے مراد ωRC ہے۔ متوازی چادر کپیسٹر جس کے مستقل σ ، ϵ اور μ ہیں کے جزو ضربی طاقت اور Q کے مساوات کو مماس ضیاع $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ استعمال کرتے ہوئے لکھیں۔

جوابات: $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-2}}}$ ، $Q=\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-1}$

سوال 16.18: تانبے کی ہم محوری تار کے اندرونی تار کا رداس $5\,\mathrm{mm}$ اور بیرونی تار کا اندرونی رداس $8\,\mathrm{mm}$ ہیں۔دونوں تار گہرائی جلد δ سے بہت زیادہ موٹائی رکھتے ہیں جبکہ ذو برق بے ضیاع ہے۔ $550\,\mathrm{MHz}$ تعدد پر فی میٹر اندرونی تار، فی میٹر بیرونی تار اور فی میٹر مکمل ترسیلی تار کی مزاحمت دریافت کریں۔تانبے کے مستقل کتاب کے آخر میں جدول 16.1 سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

جوابات: $195\,\frac{\mathrm{m}\Omega}{\mathrm{m}}$ ، $122\,\frac{\mathrm{m}\Omega}{\mathrm{m}}$ ، $316\,\frac{\mathrm{m}\Omega}{\mathrm{m}}$

سوال 16.19: المونیم سے نلکی نما تار بنائی جاتی ہے جس کا اندرونی رداس $5\,\mathrm{mm}$ اور بیرونی رداس $6\,\mathrm{mm}$ ہیں۔ایک کلو میٹر تار کی مزاحمت مندرجہ ذیل تعدد پر حاصل کریں۔ الف) یک سمتی رو۔ ب) $30\,\mathrm{MHz}$ پ) $1.2\,\mathrm{GHz}$

جوابات: $758\,\mathrm{m}\Omega$ ، $46.7\,\Omega$ ، $295\,\Omega$

سوال 16.20: کھانا جلد گرم کرنے کی خاطر عموماً برقی خرد موج چولھا[1] (مائیکرو ویو اون) استعمال کیا جاتا ہے جو عموماً $2.45\,\mathrm{GHz}$ کے تعدد پر کام کرتا ہے۔اس چولھے کے دیوار سٹینلس سٹیل کے بنے ہوتے ہیں۔ سٹینلس سٹیل کے مستقل $\sigma=1.1\times10^6\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ، $\mu_R=1$ اور $\epsilon_R=1$ لیتے ہوئے گہرائی جلد δ حاصل کریں۔سٹینلس سٹیل چادر کی سطح پر $E_s=64\underline{/0^\circ}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ لیتے ہوئے چادر کے اندر میدان کی مساوات لکھیں۔

جوابات: $\delta=9.69\,\mathrm{\mu m}$ ، $E_s(z)=64e^{-1.03\times10^{-7}z(1+j)}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 16.21: ایک غیر مقناطیسی موصل میں رفتار موج $4.5\times10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ اور طول موج $0.25\,\mathrm{mm}$ ہے۔تعدد f ، گہرائی جلد δ اور موصل کی موصلیت σ حاصل کریں۔

[1] micro wave oven

جوابات: $f = 1.8\,\text{GHz}$ ، $\delta = 39.8\,\mu\text{m}$ ، $\sigma = 8.89 \times 10^4\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$

سوال 16.22: برقی موج $\boldsymbol{E} = \frac{270}{r}\sin\theta\cos[\omega(t-\frac{r}{c})]\boldsymbol{a}_\theta\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ دی گئی ہے۔ رداس r کے کرہ سے کتنی طاقت خارج ہو رہی ہے۔

جواب: $810\,\text{W}$

سوال 16.23: برقی موج $\boldsymbol{E}_S = 3\boldsymbol{a}_\text{x} - 5\boldsymbol{a}_\text{y} + 2\boldsymbol{a}_\text{z}\,\frac{\text{kV}}{\text{m}}$ اور مقناطیسی موج $\boldsymbol{H}_S = 14\boldsymbol{a}_\text{x} + 13\boldsymbol{a}_\text{y} - 16\boldsymbol{a}_\text{z}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ہیں۔ الف) حرکت موج کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ ب) موج کی اوسط کثافت طاقت حاصل کریں۔ پ) $\mu_R = 1$ کی صورت میں ϵ_R حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{a} = 0.38\boldsymbol{a}_\text{x}0.53\boldsymbol{a}_\text{y} + 0.76\boldsymbol{a}_\text{z}$ ، $71.7\,\frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$ ، $\epsilon_R = 2.32$

سوال 16.24: ضیاع کار خطہ $x < 0$ کے مستقل $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 1$ اور $\sigma = 1500\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں جبکہ $x > 0$ خالی خلاء ہے۔ خلاء میں نقطہ $N(0^+, 0, 0)$ پر مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H} = 300\cos 5\times10^8 t\boldsymbol{a}_\text{y}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ الف) نقطہ $(0^-, 0, 0)$ پر $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔ ب) خالی خلاء میں $\boldsymbol{a}_\text{z}$ سمت حرکت کرتی موج تصور کرتے ہوئے نقطہ $(0^+, 0, 0,)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ خطہ $z < 0$ میں $-\boldsymbol{a}_\text{x}$ جانب حرکت کرتی موج تصور کرتے ہوئے نقطہ $(0^-, 0, 0)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{H} = 300\cos 5\times10^8 t\boldsymbol{a}_\text{y}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $\boldsymbol{E} = 113\cos 5\times10^8 t\boldsymbol{a}_\text{x}\,\frac{\text{kV}}{\text{m}}$ ، $\boldsymbol{E} = 238\cos(5\times10^8 t - 45^\circ)\boldsymbol{a}_\text{z}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 16.25: آمدی مستوی موج جس کی تعدد $\omega = 4.2\times10^8\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ہے خطہ-1، $z < 0$ ، $\sigma_1 = 0$ ، $\mu_{R1} = 1$ ، $\epsilon_{R1} = 3.2$ سے خطہ-2، $z > 0$ ، $\sigma_2 = 0$ ، $\mu_{R2} = 2.6$ ، $\epsilon_{R2} = 12$ میں داخل ہوتی ہے۔آمدی برقی موج کا حیطہ $z = 0$ ، $t = 0$ پر $5.6\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ الف) η_1 ، η_2 ، β_1 اور β_2 حاصل کریں۔ ب) Γ اور τ حاصل کریں۔ پ) $E_1(t)$ اور $E_2(t)$ حاصل کریں۔ ت) $H_1(t)$ حاصل کریں۔ ٹ) لمحہ $t = 4\,\text{ns}$ پر نقطہ $(0, 0, -1.5)$ پہ H_1 حاصل کریں۔

جوابات: $\eta_1 = 211\,\Omega$ ، $\eta_2 = 175\,\Omega$ ، $\beta_1 = 2.5\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\beta_2 = 7.8\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\Gamma = -0.0913$ ، $\tau = 0.9087$ ، $E_1 = 5.6\cos(4.2\times10^8 t - 2.5z) - 0.511\cos(4.2\times10^8 t + 2.5z)\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $E_2 = 5.09\cos(4.2\times10^8 t - 7.8z)\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $H_1 = 26.59\cos(4.2\times10^8 t - 2.5z) + 2.43\cos(4.2\times10^8 t + 2.5z)\,\frac{\text{mA}}{\text{m}}$ ، $H_1 = 16.49\,\frac{\text{mA}}{\text{m}}$

سوال 16.26: تھیلا بنانے والے پلاسٹک میں $14\,\text{GHz}$ تعدد کی مستوی موج $\boldsymbol{a}_\text{x}$ سمت میں حرکت کرتے ہوئے $x = 0.3\,\text{cm}$ پر پائے جانے والے کامل موصل سطح سے انعکاس پذیر ہوتی ہے۔ الف) وہ سطحیں دریافت کریں جن پر $\boldsymbol{E} = 0$ ہو گا۔ ب) اس پلاسٹک میں بلند تر برقی چوٹی اور بلند تر مقناطیسی چوٹی کی شرح حاصل کریں۔

جوابات: $x = 0.3 - 0.71n\,\text{cm}$ جہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ہے، $\eta = 251\,\Omega$

سوال 16.27: خطہ $z < 0$ بے ضیاع خالی خلاء ہے جبکہ ضیاع کار خطہ $z > 0$ کے مستقل $\epsilon = 30\,\frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ، $\mu = 4.2\,\frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ اور $\sigma = 4.6\,\frac{\text{mS}}{\text{m}}$ ہیں۔ خالی خلاء سے سرحد پر آمدی موج کی مساوات $E^+_{x1} = 340e^{-\alpha_1 z}\cos(2\times10^8 t - \beta_1 z)\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ الف) α_1 اور β_1 حاصل کریں۔ ب) انعکاسی مستقل حاصل کریں۔ پ) انعکاسی موج E^-_{x1} کی مساوات حاصل کریں۔ ت) ترسیلی موج E^+_{x2} کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $\alpha_1 = 0$ ، $\beta_1 = 0.667\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\Gamma = 0.176\underline{/111^\circ}$ ، $E^-_{x1} = 59.8\cos(2\times10^8 t + 0.667z + 111^\circ)\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $E^+_{x2} = 324e^{-0.81z}\cos(2\times10^8 t - 2.39z + 9.9^\circ)\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 16.28: المونیم کی سطح $y = 0$ پر خالی خلاء سے عمودی آمدی موج $E^+_{x1} = E^+_{x10}\cos(4\times10^8 t - \beta y)\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔آمدی طاقت کا کتنا فی صد سطح سے انعکاس پذیر ہوتا ہے۔

جواب: $99.997\,\%$

سوال 16.29: مستوی موج خطہ-1 سے خطہ-2 پر عمودی پڑتی ہے۔ان خطوں کے مستقل $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ، $\epsilon_{R1} = \mu^3_{R1}$ ، اور $\epsilon_{R2} = \mu^3_{R2}$ ہیں۔آمدی طاقت کا $40\,\%$ سرحد سے واپس لوٹتا ہے۔ $\frac{\mu_{R2}}{\mu_{R1}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{\mu_{R2}}{\mu_{R1}} = 0.225$ اور $\frac{\mu_{R2}}{\mu_{R1}} = 4.442$

سوال 16.30: خالی خلاء سے مستوی موج ضیاع کار خطہ $\sigma = 0.002\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ ، $\epsilon_R = 8.2$ اور $\mu_R = 1.8$ پر عمودی پڑتی ہے۔آمد موج کی تعدد $100\,\text{MHz}$ اور کثافت طاقت $12\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ہے۔الف) ابتدائی ترسیلی کثافت طاقت حاصل کریں۔ ب) ضیاع کار خطے میں کی قیمت حاصل کریں۔ پ) دوسرے خطے میں کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد ترسیلی کثافت طاقت $0.2\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ رہ جائے گی۔

جوابات: $10.42\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، $\alpha_2 = 0.1765\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ، $11.2\,\text{m}$

سوال 16.31: خالی خلاء $z < 0$ میں برقی موج $\boldsymbol{E}_s = 100e^{-j15z}\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 28\underline{/30^\circ}e^{j15z}\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔ الف) موج کی تعدد حاصل کریں۔ ب) خطہ $z > 0$ کی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں ۔ پ) دو خطوں کے سرحد کے قریب کس مقام پر برقی موج کی چوٹی پائی جاتی ہے؟

جوابات: $715.7\,\text{MHz}$ ، $\eta = 585 + j178$ ، $z = -1.75\,\text{cm}$

سوال 16.32: بے ضیاع خطہ $z < 0$ کے مستقل $\sigma_1 = 0$ ، $\mu_1 = 30\,\frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ اور $\epsilon_1 = 120\,\frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ہیں جبکہ ضیاع کار خطہ $z > 0$ کے مستقل $\sigma_1 = 0.02\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ ، $\mu_1 = 50\,\frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ اور $\epsilon_1 = 260\,\frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ہیں۔آمدی موج $\boldsymbol{E}_s = 10e^{-\alpha_1 z}\cos(9\times10^8 t - \beta_1 z)\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ الف) α_1 اور β_1 حاصل کریں۔ ب) $\mathscr{P}^+_{1\text{اوسط}}$ اور $\mathscr{P}^-_{1\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔ پ) $\mathscr{P}^+_{2\text{اوسط}}$ کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $\alpha_1 = 0\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ، $\beta_1 = 54\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\mathscr{P}^+_{1\text{اوسط}} = 100\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$ ، $\mathscr{P}^-_{1\text{اوسط}} = -0.486\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$ ، $\mathscr{P}^+_{2\text{اوسط}} = 99.514e^{-8.76z}\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$

سوال 16.33: خطہ $0 < z < 1.5\,\text{m}$ میں بے ضیاع ذو برق پایا جاتا ہے جس کے مستقل $\sigma_2 = 0$ ، $\mu_{R2} = 1$ اور $\epsilon_{R2} = 6$ ہیں۔اس خطے کو دونوں جانب خالی خلاء پائی جاتی ہے۔مستوی موج جس کی تعدد $\omega = 6\times10^8\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ہے سرحد $z = 0$ کی جانب $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ الف) ذو برق میں β_2 حاصل کرتے ہوئے سرحد $z = 0$ پر $\eta_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔ ب) خطہ $z < 0$ میں Γ_1 اور s_1 حاصل کریں۔ پ) ذو برقی میں $z = 1.5\,\text{m}$ پر سرحد سے منعکس موج کو استعمال کرتے ہوئے Γ_2 اور s_2 حاصل کریں۔ ت) خطہ $z > 1.5\,\text{m}$ میں s_3 حاصل کریں۔ ٹ) خطہ $z < 0$ میں سرحد کے قریب ترین ایسا نقطہ حاصل کریں جہاں بلند تر برقی میدان پایا جاتا ہے۔

جوابات: $\beta_2 = 2\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\eta_{\text{داخلی}} = 77.69 - j66.76\,\Omega$ ، $\Gamma_1 = -0.623 - j0.238 = 0.667e^{-j2.776}$ ، $s_1 = 5$ ، $\Gamma_2 = 0.42$ ، $s_2 = 2.45$ ، $s_3 = 1$ ، $z = -0.924\,\text{m}$

سوال 16.34: ضیاع کار خطہ جہاں $\alpha = 0.4\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ہو میں موج $100\,\text{m}$ چلنے کے بعد سرحد سے منعکس ہو کر واپس اسی ابتدائی نقطے تک پہنچتی ہے۔انعکاسی مستقل $\Gamma = 0.4 - j0.5$ ہے۔واپس آتی موج اور ابتدائی موج کے طاقت کی شرح حاصل کریں۔

جواب: 1.33×10^{-70}

سوال 16.35: خطہ $z < 0$ اور خطہ $z > 0$ کامل ذو برق پر مشتمل ہیں جہاں $\sigma = 0$ اور $\mu_R = 1$ ہیں۔تعدد $2\times10^{10}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ کی موج $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ سمت میں حرکت کرتے ہوئے دونوں خطوں سے گزرتی ہے۔ان خطوں میں طول موج بالترتیب $8\,\text{cm}$ اور $6\,\text{cm}$ ہیں۔الف) Γ حاصل کریں۔ ب) کتنی فی صد طاقت منعکس پذیر ہوتی ہے۔ پ) کتنی فی صد طاقت ترسیل ہوتی ہے۔ ت) شرح ساکن موج s حاصل کریں۔

جوابات: $\Gamma = 0.143e^{j\pi}$ ، $2.04\,\%$ ، $97.96\,\%$ ، $s = 1.333$

سوال 16.36: کامل ذو برقی $\sigma = 0$ سے خالی خلاء میں موج داخل ہوتی ہے۔مندرجہ ذیل صورتوں میں ذو برق کی جزوی برقی مستقل ϵ_R حاصل کریں۔ الف) منعکس موج کی چوٹی آمدی موج کے چوٹی کی آدھی ہے۔ ب) منعکس موج کا طاقت آمدی موج کے طاقت کا آدھا ہے۔ پ) ذو برقی میں $|\boldsymbol{E}|_{\text{کمتر}}$ کی قیمت $|\boldsymbol{E}|_{\text{بلندتر}}$ کی آدھی ہے۔

جوابات: $\epsilon_R = 9$ ، $\epsilon_R = 34$ ، $\epsilon_R = 4$

جدول 16.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	مقطر پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹس	10^{-17}

جدول 16.2: ϵ_R and $\sigma/\omega\epsilon$

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 16.3: μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلیم
50	نکل
60	ڈھلواں لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پرم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپرم بھرت (supermalloy)

جدول 16.4: اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$	e	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)