

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
 کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

3

1	سمتیات	1
1	4	
1.1	مقداری اور سمتیہ	1
1	5	
1.2	سمتی الجبرا	1
2	6	
1.3	کارتیسی محدود	1
3	7	
1.4	اکائی سمتیات	1
5	8	
1.5	میدانی سمتیہ	1
9	9	
1.6	سمتی رقبہ	1
9	10	
1.7	غیر سمتی ضرب	1
10	11	
1.8	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1
14	12	
1.9	گول نلکی محدود	1
17	13	
1.9.1	نلکی اکائی سمتیات کا کارتسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	1
20	14	
1.9.2	نلکی اور کارتسی اکائی سمتیات کا تعلق	1
20	15	
1.9.3	نلکی لامحدود سطحیں	1
25	16	
1.10	کروی محدود	1
27	17	
2	کولومب کا قانون	2
39	18	
2.1	قوت کشش یا دفع	2
39	19	
2.2	برقی میدان کی شدت	2
43	20	
2.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	2
46	21	
2.4	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	2
51	22	
2.5	چارج بردار حجم	2
55	23	
2.6	مزید مثال	2
56	24	
2.7	برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	2
64	25	

69 ²⁶	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ	3
69 ²⁷	ساکن چارج	3.1
69 ²⁸	فیراڈے کا تجربہ	3.2
70 ²⁹	گاؤس کا قانون	3.3
72 ³⁰	گاؤس کے قانون کا استعمال	3.4
72 ³¹	نقطہ چارج	3.4.1
74 ³²	یکساں چارج بردار کروی سطح	3.4.2
74 ³³	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر	3.4.3
75 ³⁴	ہم محوری تار	3.5
77 ³⁵	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	3.6
77 ³⁶	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق	3.7
80 ³⁷	پھیلاؤ	3.8
82 ³⁸	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات	3.9
84 ³⁹	پھیلاؤ کی عمومی مساوات	3.10
86 ⁴⁰	مسئلہ پھیلاؤ	3.11
93 ⁴¹	توانائی اور برقی دباؤ	4
93 ⁴²	توانائی اور کام	4.1
94 ⁴³	لکیری تکملہ	4.2
99 ⁴⁴	برقی دباؤ	4.3
100 ⁴⁵	نقطہ چارج کا برقی دباؤ	4.3.1
101 ⁴⁶	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ	4.3.2
102 ⁴⁷	ہم محوری تار کا برقی دباؤ	4.3.3
102 ⁴⁸	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ	4.4
106 ⁴⁹	برقی دباؤ کی ڈھلوان	4.5
110 ⁵⁰	نلکی محدود میں ڈھلوان	4.5.1
111 ⁵¹	کروی محدود میں ڈھلوان	4.5.2
112 ⁵²	جفت قطب	4.6
114 ⁵³	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط	4.6.1
117 ⁵⁴	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی	4.7

125 _s	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
125 _{s6}	برقی رو اور کثافت برقی رو	5.1
127 _{s7}	استمراری مساوات	5.2
129 _{s8}	موصل	5.3
134 _{s9}	موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	5.4
137 _{s10}	عکس کی ترکیب	5.5
140 _{s11}	نیم موصل	5.6
141 _{s12}	ذو برق	5.7
146 _{s13}	کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	5.8
150 _{s14}	موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	5.9
150 _{s15}	کیپسٹر	5.10
152 _{s16}	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
153 _{s17}	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
153 _{s18}	5.10.3 ہم محوری کرہ کیپسٹر	
155 _{s19}	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
156 _{s20}	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
169 _{s21}	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
171 _{s22}	6.1 مسئلہ یکنائی	
173 _{s23}	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
173 _{s24}	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
174 _{s25}	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
181 _{s26}	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
183 _{s27}	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
191 _{s28}	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

199 ₉	ساکن مقناطیسی میدان	7
199 ₀	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
204 ₁	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.2
210 ₂	گردش	7.3
217 ₃	نلکی محدود میں گردش	7.3.1
222 ₄	عمومی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.2
224 ₅	کروی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.3
225 ₆	مسئلہ سٹوکس	7.4
228 ₇	مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو	7.5
235 ₈	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	7.6
240 ₉	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	7.7
240 ₀	سمتی مقناطیسی دباؤ	7.7.1
242 ₁	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.7.2
249 ₂	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	8
249 ₃	متحرک چارج پر قوت	8.1
250 ₄	تفرقی چارج پر قوت	8.2
254 ₅	برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	8.3
255 ₆	قوت اور مروڑ	8.4
261 ₇	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	8.5
262 ₈	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	8.6
265 ₉	مقناطیسی سرحدی شرائط	8.7
268 ₀₀	مقناطیسی دور	8.8
271 ₀₁	مقناطیسی مخفی توانائی	8.9
271 ₀₂	خود امالہ اور مشترکہ امالہ	8.10
277 ₀₃	مشترکہ امالہ	8.11

283 ₀₄	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات	9
283 ₀₅	فیراڈے کا قانون	9.1
290 ₀₆	انتقالی برقی رو	9.2
295 ₀₇	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل	9.3
297 ₀₈	میکس ویل مساوات کی تکمیل شکل	9.4
302 ₀₉	تاخیری دباؤ	9.5
311 ₁₀	مستوی امواج	10
311 ₁₁	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج	10.1
312 ₁₂	برقی و مقناطیسی مستوی امواج	10.2
319 ₁₃	10.2.1 خالی خلاء میں امواج	
323 ₁₄	10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج	
325 ₁₅	10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج	
328 ₁₆	10.3 پوئنٹنگ سمتیہ	
333 ₁₇	10.4 موصل میں امواج	
339 ₁₈	10.5 انعکاس مستوی موج	
345 ₁₉	10.6 شرح ساکن موج	
345 ₂₀	11 ترسیلی تار	
345 ₂₁	11.1 ترسیلی تار کے مساوات	
349 ₂₂	11.2 ترسیلی تار کے مستقل	
350 ₂₃	11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل	
353 ₂₄	11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل	
354 ₂₅	11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار	
355 ₂₆	11.3 ترسیلی تار کے چند مثال	
360 ₂₇	11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ	
367 ₂₈	11.4.1 سمتیہ فراوانی نقشہ	
368 ₂₉	11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال	

373 ₃₀	12	تقطیب موج
373 ₃₁	12.1	خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
376 ₃₂	12.2	بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پرنٹنگ سمتیہ
379 ₃₃	13	ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار
379 ₃₄	13.1	ترچھی آمد
390 ₃₅	13.2	ترسیم بائی گن
393 ₃₆	14	مویج اور گھمکیا
393 ₃₇	14.1	برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ
394 ₃₈	14.2	دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج
400 ₃₉	14.3	کھوکھلا مستطیلی مویج
409 ₄₀	14.3.1	مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور
416 ₄₁	14.4	مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج
420 ₄₂	14.5	کھوکھلی نالی مویج
427 ₄₃	14.6	انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف
429 ₄₄	14.7	انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف
431 ₄₅	14.8	سطحی موج
436 ₄₆	14.9	ذو برق تختی مویج
439 ₄₇	14.10	شیش ریشہ
442 ₄₈	14.11	پردہ بصارت
444 ₄₉	14.12	گھمکی خلاء
447 ₅₀	14.13	میکس ویل مساوات کا عمومی حل

- 15.1 تعارف 455⁵²
- 15.2 تاخیری دباؤ 455⁵³
- 15.3 تکمل 457⁵⁴
- 15.4 مختصر جفت قطبی ایٹینا 458⁵⁵
- 15.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت 466⁵⁶
- 15.6 ٹھوس زاویہ 470⁵⁷
- 15.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش 471⁵⁸
- 15.8 قطاری ترتیب 478⁵⁹
- 15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع 478⁶⁰
- 15.8.2 ضرب نقش 479⁶¹
- 15.8.3 ثنائی قطار 480⁶²
- 15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار 482⁶³
- 15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار 484⁶⁴
- 15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار 484⁶⁵
- 15.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلنے زاویہ اخراجی ایٹینا 488⁶⁶
- 15.9 تداخل پیمہ 489⁶⁷
- 15.10 مسلسل خطی ایٹینا 490⁶⁸
- 15.11 مستطیل سطحی ایٹینا 491⁶⁹
- 15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریئر بدل ہیں 494⁷⁰
- 15.13 خطی ایٹینا 494⁷¹
- 15.14 چلتے موج ایٹینا 499⁷²
- 15.15 چھوٹا گھیرا ایٹینا 500⁷³
- 15.16 پیچ دار ایٹینا 501⁷⁴
- 15.17 دو طرفہ کردار 503⁷⁵
- 15.18 جھری ایٹینا 505⁷⁶
- 15.19 پیپا ایٹینا 506⁷⁷
- 15.20 فرانس ریڈار مساوات 508⁷⁸
- 15.21 ریڈیائی دوربین، ایٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی 511⁷⁹
- 15.22 حرارت نظام اور حرارت بعید 513⁸⁰

مستوی امواج

لامحدود خطہ جس کا کوئی سرحد نہ ہو میں میکس ویل مساوات کا حل سادہ ترین مسئلہ ہے البتہ اس سے حاصل نتائج انتہائی دلچسپ اور معلوماتی ثابت ہوتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے جبکہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ چونکہ برقی میدان چارج کی بدولت جبکہ مقناطیسی میدان برقی رو کی بدولت ہے لہذا چارج یارو میں کسی بھی تبدیلی سے باہمی تعاون سے بدلتا برقی اور بدلتا مقناطیسی میدان یعنی **برقی و مقناطیسی** اموج پیدا ہوتی ہے۔ ایسے امواج کی **تعدد** کا دار و مدار چارج یارو (یادونوں) میں تبدیلی کی شرح پر منحصر ہے۔ یوں ω **زاویائی تعدد** پر سائن نمائش میں ارتعاش کرتا چارج ω زاویائی تعدد کی سائن نمائش ہی پیدا کرتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج روشنی کی رفتار سے حرکت کرتی ہیں۔ انسانی آنکھ مخصوص تعدد کی برقی و مقناطیسی امواج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج کے تعدد کی وہ پٹی جو ہمیں نظر آتی ہیں **روشنی** کہلاتی ہے۔ سائن نمائش کو اس کی تعدد **دور** **عری** λ سے بیان کیا جاسکتا ہے۔ ہم 380 nm تا 750 nm کے دوری عرصے کے برقی و مقناطیسی امواج دیکھ سکتے ہیں۔

دو اشیاء کے سرحد پر برقی و مقناطیسی موج پر غور کرنے سے شعاعی **انعکاس**⁶، شعاعی **انحراف**⁷ اور **انکسار امواج**⁸ کے حقائق دریافت ہوتے ہیں۔ مختصر اشعاع کے تمام خصوصیات میکس ویل کے مساوات سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی جسم کے اندر کسی بھی طرح پہنچایا گیا اضافی چارج باہمی قوت دفع سے آخر کار حجم کے سطح پر پہنچ جاتا ہے۔ اگر ان لحاظ کو نظر انداز کیا جائے جتنی دیر آزاد چارج سطح تک پہنچتا ہے تو جسم کے حجم میں $\rho_h = 0$ تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس کتاب میں $\rho_h = 0$ ہی تصور کرتے ہوئے برقی و مقناطیسی

electromagnetic¹
frequency²
angular frequency³
light⁴
time period⁵
reflection⁶
refraction⁷
diffraction⁸

امواج پر غور کیا جائے گا لہذا ایسا ہی تصور کرتے ہوئے صفحہ 295 پر دئے گئے میکس ویل مساوات یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$(10.1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$(10.2) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$(10.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$(10.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

جہاں $D = \epsilon E$ اور $B = \mu H$ کے علاوہ قانون اوہم کی نقطہ شکل $J = \sigma E$ کے استعمال سے تمام مساوات صرف دو متغیرات E اور H کی صورت میں لکھے گئے ہیں۔

3051

اس سے پہلے کہ ہم ان مساوات کو حل کریں، انہیں انہیں صرف دیکھ کر فیصلہ کریں کہ خالی خلاء میں ان سے کیا نتائج اخذ کئے جاسکتے ہیں۔ خالی خلاء میں کشافیت برقی J صفر کے برابر ہوتی ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ مساوات 10.1 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد برقی میدان کی گردش پیدا ہوتی ہے۔ گردش سے مراد ایسا میدان ہے جو بند دائرے پر اس نقطے کے گرد گھومتی ہو۔ اگر مقناطیسی میدان کی قیمت زیادہ ہو تب برقی گردش کی قیمت بھی زیادہ ہوگی اور اگر مقناطیسی میدان کی قیمت کم ہو تب گردش بھی کم ہوگی۔ یوں دو حقائق سامنے آتے ہیں۔ پہلی حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی نقطے پر بدلتا مقناطیسی میدان اس نقطے کے گرد، یعنی نقطے سے ذرہ دور، برقی میدان پیدا کرتی ہے اور دوسری حقیقت یہ کہ پہلی میدان کی قیمت کم یا زیادہ کرنے سے پیدا میدان کی قیمت بھی تبدیل ہوتی ہے یعنی بدلتا مقناطیسی میدان، بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اسی طرح مساوات 10.2 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد مقناطیسی گردش پیدا ہوتی ہے۔ یہاں بھی صاف واضح ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی، اس نقطے سے ذرہ دور، بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ بدلتا مقناطیسی میدان کچھ فاصلے پر آگے کر کے بدلتا برقی میدان پیدا کرتا ہے جو مزید آگے مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے اور یہ سلسلہ چلے جاتا ہے۔ جیسا کہ ہم جلد دیکھیں گے، ایسے جڑواں، ہاتھ میں ہاتھ ڈالے، حرکت کرتے بدلتے برقی اور بدلتے مقناطیسی میدان کی رفتار $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ یعنی تقریباً $3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔

3061

3062

10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج

میکس ویل مساوات کے حل **دوری سمتیت**⁹ کی مدد سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں لہذا پہلے دوری سمتیت پر غور کرتے ہیں جو آپ نے برقی ادوار حل کرتے وقت ضرور استعمال کئے ہوں گے۔

3064

سائن نمائندگی کی عمومی شکل

$$(10.5) \quad E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)$$

ہے جہاں

$$(10.6) \quad \omega = 2\pi f$$

زاویائی تعدد¹⁰ اور ϕ **زاویائی فاصلہ**¹¹ ہیں جبکہ E_{xyz} از خود x, y, z اور ω **کاتالغ تفاعل**¹² ہو سکتا ہے۔ تعدد f کی اکائی ہرٹز¹³ ہے۔ یہاں دھیان رہے کہ E_{xyz} وقت t **کاتالغ** نہیں ہے۔

3066

⁹ phasor
¹⁰ angular frequency
¹¹ phase angle
¹² dependent function
¹³ Hertz

کسی بھی متغیر x کے لئے یولر مماثل¹⁴ کو $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ لکھا جاتا ہے جہاں $j = \sqrt{-1}$ خیالی عدد¹⁵ ہے۔ آزاد متغیر $\psi + \omega t$ کے لئے یولر مماثل

$$e^{j(\omega t + \psi)} = \cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)$$

لکھا جاسکتا ہے جو حقیقی¹⁶ اور خیالی¹⁷ اجزاء پر مشتمل مخلوط تفاعل¹⁸ ہے۔ یوں $\cos(\omega t + \psi)$ کو $e^{j(\omega t + \psi)}$ کا حقیقی جزو تصور کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح

$$E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) = \left[E_{xyz} e^{j(\omega t + \psi)} \right]_{\text{حقیقی}} = \left[E_{xyz} e^{j\omega t} e^{j\psi} \right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں زیر نوشت میں حقیقی لکھنے سے مراد یہ ہے کہ پورے تفاعل کا حقیقی جزو لیا جائے۔ مندرجہ بالا مساوات کو بطور دوری سمتیہ یوں

$$E_{ys} = E_{xyz} e^{j\psi}$$

لکھا جاتا ہے جہاں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کے بائیں ہاتھ E_{ys} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں لکھی گئی ہے لہذا یاد رہے کہ اصل تفاعل میں $e^{j\omega t}$ پایا جاتا ہے اور پورے تفاعل کا صرف حقیقی جزو ہی لیا جائے۔ تفاعل E_{ys} کے زیر نوشت میں s دراصل اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ اس تفاعل کا آزاد متغیر، مخلوط تعدد¹⁹ ہے۔ ہمارے استعمال میں s خیالی عدد یعنی $j\omega$ ہو گا۔

اب $E_y = 10.5 \cos(10^6 t - 0.35z)$ کو دوری سمتیہ کی شکل میں لکھنے کی خاطر اسے یولر مماثل کے حقیقی جزو

$$E_y = \left[10.5 e^{j(10^6 t - 0.35z)} \right]_{\text{حقیقی}} = \left[10.5 e^{j10^6 t} e^{-j0.35z} \right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھنے کے بعد $e^{j10^6 t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے یوں

$$E_{ys} = 10.5 e^{-j0.35z}$$

لکھا جائے گا جہاں بائیں ہاتھ E_{ys} میں زیر نوشت میں s کا اضافہ کیا گیا۔ یاد رہے کہ E_y حقیقی تفاعل ہے جبکہ E_{ys} عموماً مخلوط تفاعل ہوتا ہے۔

دوری سمتیہ سے اصل تفاعل حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے حاصل جواب کا حقیقی جزو لیا جاتا ہے۔

مساوات 10.5 کا وقت کے ساتھ جزوی تفرق

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)] = -\omega E_{xyz} \sin(\omega t + \psi) \\ &= \left[j\omega E_{xyz} e^{j(\omega t + \psi)} \right]_{\text{حقیقی}} \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ یہ عمومی نتیجہ ہے جس کے تحت وقت کے ساتھ تفاعل کا تفرق، دوری سمتیہ کو $j\omega$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔ یوں مثال کے طور پر اگر

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

ہو تب اسی کی دوری سمتیہ شکل

$$j\omega E_{xs} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_{ys}}{\partial z}$$

Euler's identity¹⁴
imaginary number¹⁵
real¹⁶
imaginary¹⁷
complex function¹⁸
complex frequency¹⁹

ہوگی۔ اسی طرح سائن نمائیدان کے لئے میکس ویل کے مساوات بھی باآسانی دوری سمتیہ کی شکل میں لکھے جاسکتے ہیں لہذا

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

کو دوری سمتیہ کی صورت میں

$$(10.7) \quad \nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu \mathbf{H}_s$$

لکھا جائے گا۔ میکس ویل کے بقایا مساوات کو بھی دوری سمتیہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(10.8) \quad \nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s$$

$$(10.9) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0$$

$$(10.10) \quad \nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0$$

آئیں ان مساوات سے امواج کی مساوات حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر مساوات 10.7 کی گردش

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla^2 \mathbf{E}_s = -j\omega\mu \nabla \times \mathbf{H}_s$$

میں مساوات 10.8 اور مساوات 10.9 پر کرنے سے

$$(10.11) \quad \nabla^2 \mathbf{E}_s = j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s = \gamma^2 \mathbf{E}_s$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(10.12) \quad \gamma = \pm \sqrt{j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon)}$$

حرکی مستقل²⁰ کہلاتا ہے۔ چونکہ $j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon)$ مخلوط عدد ہے لہذا اس کا جزر γ بھی مخلوط عدد ہوگا جسے

$$(10.13) \quad \gamma = \alpha + j\beta$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں α اور β مثبت اور حقیقی اعداد ہیں۔ مساوات 10.12 کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$(10.14) \quad \gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

جہاں کسی وجہ سے صرف مثبت قیمت لی گئی ہے۔ یہ وجہ آپ کو جلد بتلا دی جائے گی۔

مساوات 10.11 **سمتی ہولتز** مساوات²²²¹ کہلاتی ہے۔ کارتیسی محدود بھی سمتی ہولتز مساوات کی بڑی شکل کافی خوفناک نظر آتی ہے چونکہ اس سے چار چار اجزاء پر مشتمل تین عدد مساوات نکلتے ہیں۔ کارتیسی محدود میں اس کی x مساوات

$$(10.15) \quad \nabla^2 E_{xs} = \gamma^2 E_{xs}$$

یعنی

$$(10.16) \quad \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs}$$

²⁰propagation constant
²¹vector Helmholtz equation

²²برمن لڈوگ فرڈینانڈ ون ہلم ہولتز جرمنی کے عالم طبیعیات تھے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ جن امواج پر ہم غور کرنا چاہتے ہیں ان میں ناتواخ اور ناہی y کے ساتھ میدان تبدیل ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} = 0$ اور $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} = 0$ ہوں گے لہذا مندرجہ بالا مساوات

$$(10.17) \quad \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ اس طرح کے دو درجی تفرقی مساوات آپ نے پڑھے ہوں گا لہذا میں توقع رکھتا ہوں کہ آپ اس کے حل

$$(10.18) \quad E_{xs} = Ae^{-\gamma z}$$

اور

$$(10.19) \quad E_{xs} = Be^{\gamma z}$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $\gamma = \alpha + j\beta$ پر کرتے ہوئے ان جوابات میں سے مساوات 10.18 پر غور کریں۔ مساوات 10.18 درحقیقت دوری سمتیہ ہے لہذا اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر

$$E_x = \left[Ae^{j\omega t} e^{-(\alpha + j\beta)z} \right]_{\text{حقیقی}} \\ = \left[Ae^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \right]_{\text{حقیقی}}$$

حقیقی جزو

$$E_x = Ae^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

لیتے ہیں۔ مساوات کے مستقل A کی جگہ $t = 0$ اور $z = 0$ پر میدان کی قیمت E_0 پر کرتے ہوئے اصل حل

$$(10.20) \quad E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ **مستوی موج** 23 کی وہ مساوات ہے جس کی تلاش میں ہم نکلے تھے۔ اگر ہم مساوات 10.19 کو لے کر آگے بڑھتے تو مساوات 10.20 کی جگہ موج کی مساوات

$$(10.21) \quad E_x = E_0 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$$

حاصل ہوتی۔

مساوات 10.18 میں $A = E_0$ پر کرتے ہوئے اس کی سمتیہ شکل

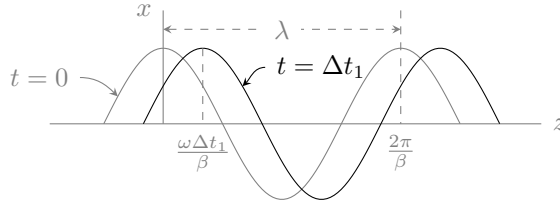
$$(10.22) \quad \mathbf{E}_s = E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_x$$

لکھی جاسکتی ہے جو صرف αx جزو پر مشتمل ہے۔ آئیں مساوات 10.20 میں دئے **متحرک موج** 24 پر اب غور کریں۔

مساوات 10.20 کہتی ہے کہ برقی میدان ہر نقطے پر x محدد کے متوازی ہے۔ اگر z کی قیمت تبدیل نہ کی جائے تب x اور y تبدیل کرنے سے میدان تبدیل نہیں ہوتا۔

مساوات 10.20 میں z بڑھانے سے α کی وجہ سے موج کی چوٹی گھٹتی ہے لہذا α **تضعیفی مستقل** 25 کہلاتا ہے۔ تضعیفی مستقل کو **نپیر** 26 فی میٹر $\frac{\text{NP}}{\text{m}}$ میں ناپا جاتا ہے۔ مساوات 10.20 میں e کی طاقت یعنی αz بے بعد 28 مقدار **نپیر** Np میں ہوگی۔ موج کے مساوات میں βz - زاویائی فاصلہ ہے جسے ریڈین میں ناپا جاتا ہے لہذا β **زاویائی مستقل** 29 کہلاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈین فی میٹر $\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ہے۔

²³ plane wave
²⁴ travelling wave
²⁵ attenuation constant
²⁶ neper
²⁷ تضعیفی مستقل کی اکائی جان نپیر کے نام سے منسوب ہے۔
²⁸ dimensionless
²⁹ phase constant



شکل 10.1: وقت $t = 0$ اور $t = t_1$ پر خلاء میں موج کا مقام۔

موج کی مساوات میں $\alpha = 0$ تصور کرتے ہوئے اسے وقت $t = 0$ پر شکل 10.1 میں ہلکی سیاہی سے دکھایا گیا ہے۔ یہاں دھیان رہے کہ شکل میں z محدود کو افقی دکھایا گیا ہے۔ جیسے آپ دیکھ سکتے ہیں $t = 0$ پر موج کی دو آپس میں قریبی چوٹیاں $z = 0$ اور $z = \frac{2\pi}{\beta}$ پر پائی جاتی ہیں۔ دو آپس میں قریبی چوٹیوں کے درمیان فاصلے کو **طول موج**³⁰ پکارا اور λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں اس موج کی طول موج

$$(10.23) \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

ہے جس سے

$$(10.24) \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

لکھا جاسکتا ہے جو انتہائی اہم نتیجہ ہے۔

موج کی مساوات ہی کو وقت $t = \Delta t_1$ پر شکل 10.1 میں دوبارہ گاڑھی سیاہی میں بھی دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیے میں موج نے دائیں جانب یعنی z بڑھنے کی طرف حرکت کی ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ یہ موج وقت کے ساتھ مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے۔ دورانیہ Δt_1 میں موج کی چوٹی نے $\frac{\omega \Delta t_1}{\beta}$ فاصلہ طے کیا ہے لہذا موج کے رفتار کو

$$(10.25) \quad v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega \Delta t_1}{\beta} \frac{1}{\Delta t_1} = \frac{\omega}{\beta}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 10.24 کو مساوات 10.25 میں پر کرنے سے

$$(10.26) \quad v = f\lambda$$

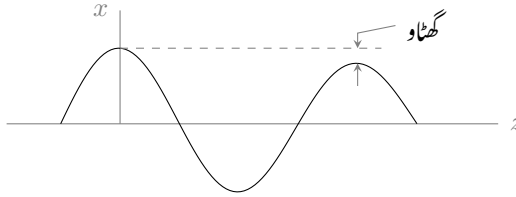
حاصل ہوتا ہے جو λ طول موج اور f تعدد رکھنے والے موج کی رفتار v دیتی ہے۔

مساوات 10.20 میں مساوات 10.25 استعمال کرتے ہوئے

$$(10.27) \quad E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right]$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 10.25 اور مساوات 10.24 کی مدد سے

$$(10.28) \quad E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right)$$



شکل 10.2: موج چلتے ہوئے آہستہ آہستہ کمزور ہوتی رہتی ہے۔

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

موج کی رفتار کو مساوات 10.20 سے دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ اس مساوات کے تحت کسی بھی لمحہ t پر موج کی چوٹی اس مقام پر ہوگی جہاں

$$\omega t - \beta z = 0$$

ہو۔ چونکہ رفتار $\frac{dz}{dt}$ کو کہتے ہیں لہذا اس مساوات کے تفرق

$$\omega dt - \beta dz = 0$$

سے رفتار

$$(10.29) \quad v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

حاصل ہوتی ہے۔

شکل 10.2 میں α کو صفر تصور نہیں کیا گیا ہے۔ جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں، ایسی صورت میں موج کی چوٹی، z کے ساتھ بتدریج گھٹتی ہے لہذا $\alpha = 0.001 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ کی صورت میں 1 km کے فاصلے پر موج کی چوٹی، ابتدائی چوٹی کے $\frac{e^{-1}}{e^0} = 0.368$ گنا رہ گئی ہوگی جہاں ابتدائی چوٹی $z = 0$ پر ملی گئی ہے۔

برقی موج E_s سے مساوات 10.7

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

کی مدد سے مقناطیسی موج باآسانی حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 10.22 استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات سے

$$-\gamma E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

یا

$$\mathbf{H}_s = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 10.12 سے مثبت γ کی قیمت پر کرنے سے

$$(10.30) \quad \begin{aligned} \mathbf{H}_s &= \sqrt{\frac{\sigma + j\omega\epsilon}{j\omega\mu}} E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y \\ &= \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں دوسرے قدم پر

$$(10.31) \quad \eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

لکھی گئی³² ہے۔ اس مساوات کو

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}}} \quad (10.32)$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 10.22 کی غیر سمتی صورت یعنی $E_{xs} = E_0 e^{-\gamma z}$ کو مساوات 10.30 کے غیر سمتی صورت یعنی $H_{ys} = \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{E_{xs}}{H_{ys}} = \eta \quad (10.33)$$

ملتا ہے۔

یہاں ذرہ رک کرایک برقی دور پر غور کرتے ہیں۔ منبع برقی دباؤ $V_0 \cos(\omega t - \psi)$ جسے دوری سمتیہ $V_0 e^{-j\psi}$ لکھا جاسکتا ہے کے ساتھ سلسلہ وار مزاحمت R ، امالہ L اور کپیسٹر C جڑے ہیں جن کی رکاوٹ Z

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX = |Z| e^{j\theta_Z} = |Z| \angle \theta_Z$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں X مثبت ہوگا جبکہ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں یہ منفی ہوگا۔ مزید $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں دور خالص مزاحمتی رکاوٹ پیش کرے گا اور $\theta_Z = 0$ ہوگا۔ اس دور میں برقی رودوری سمتیہ کی مدد سے

$$I_s = \frac{V_s}{Z_s} = \frac{V_0 e^{-j\psi}}{|Z| e^{j\theta_Z}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{-j(\psi + \theta_Z)}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$i = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \psi - \theta_Z)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ برقی دباؤ اور برقی روا یک ہی تعدد رکھتے ہیں البتہ ان میں زاویائی فاصلہ θ_Z پایا جاتا ہے۔ مثبت X کی صورت میں برقی روا س زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباؤ کے پیچھے رہتی ہے جبکہ منفی X کی صورت میں برقی روا س زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباؤ کے آگے رہتی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ برقی دباؤ اور برقی روا کی شرح

$$\frac{V_s}{I_s} = |Z| e^{j\theta_Z} = Z$$

کے برابر ہے جسے رکاوٹ کہتے ہیں۔

آئیں اب دوبارہ امواج کی بات کریں۔ برقی موج کو اس مثال کے برقی دباؤ کی جگہ اور مقناطیسی موج کو مثال کے روا کی جگہ رکھتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ دونوں مسائل ہو ہو یکساں ہیں۔ اسی وجہ سے برقی موج E_{xs} اور مقناطیسی موج H_{ys} کی شرح η ، **قدرتی رکاوٹ**³³ کہلاتی ہے۔ بالکل برقی رکاوٹ کی طرح قدرتی رکاوٹ حقیقی یا خیالی اور یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی اکائی اوہم Ω ہے۔

مساوات 10.30 سے مقناطیسی موج

$$H_y = \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|\eta|} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \quad (10.34)$$

³¹ یونانی حروف تہجی η ایٹا پڑھا جاتا ہے۔

³² eta

³³ intrinsic impedance

لکھی جائے گی جہاں قدرتی رکاوٹ کو

$$\eta = |\eta| e^{j\theta_\eta} \quad (10.35)$$

3094

لکھا گیا۔

مساوات 10.20 کے تحت برقی میدان x محدود کے متوازی ہے جبکہ مساوات 10.34 کے تحت مقناطیسی میدان y محدود کے متوازی ہے لہذا یہ میدان آپس میں ہر وقت عمودی رہتے ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں امواج z سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ یوں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت بھی آپس میں عمودی ہیں۔ ایسے امواج جن میں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت عمودی ہوں **عرضی امواج**³⁴ کہلاتے ہیں۔ پانی کی سطح پر لہریں بھی عرضی امواج ہوتے ہیں۔ اسی طرح رسی کو کھینچ کر رکھتے ہوئے اسے جھٹکے سے ہلانے سے رسی میں عرضی موج پیدا ہوتی ہے۔ **عرضی برقی و مقناطیسی موج**³⁵ میں برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں حرکت کے سمت کے عمودی ہوتے ہیں۔ باب 14 میں ایسے امواج پر غور کیا جائے گا جن میں صرف ایک میدان سمت حرکت کے عمودی ہوگا۔ انہیں **عرضی برقی موج**³⁶ یا **عرضی مقناطیسی موج**³⁷ کا نام دیا گیا ہے۔

3100

آئیں اب چند مخصوص صورتوں میں ان مساوات کو استعمال کرنا سیکھیں۔

3101

10.2.1 خالی خلاء میں امواج

3102

خالی خلاء میں $\epsilon_R = 1$ اور $\mu_R = 1$ ، $\sigma = 0$ ہیں لہذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_R\mu_0(\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0)} = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، جسے روایتی طور پر c سے ظاہر کیا جاتا ہے، مساوات 10.25 سے

(10.36)

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت

$$c = \frac{1}{\sqrt{4 \times \pi \times 10^{-7} \times 8.854 \times 10^{-12}}} = 2.99 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3103

ہے۔

مساوات 10.31 سے خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu_R\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

³⁴transverse waves

³⁵transverse electromagnetic, TEM

³⁶transverse electric wave, TE wave

³⁷transverse magnetic wave, TM wave

حاصل ہوتی ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہم $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9}$ سے $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ حاصل کرتے ہوئے

$$\eta = 120\pi \approx 377 \Omega \quad (10.37)$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں خالی خلاء میں کسی بھی لمحے، کسی بھی نقطے پر برقی میدان کی قیمت اس نقطے پر مقناطیسی میدان کے 377 گنا ہوگی۔

حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے خالی خلاء میں متحرک موج کے میدان

$$E_x = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]$$

$$H_y = \frac{E_0}{120\pi} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]$$

لکھے جائیں گے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں میدان ہم زاویہ ہیں۔ یوں کسی بھی نقطے پر بڑھتے برقی میدان کی صورت میں اس نقطے پر مقناطیسی میدان بھی بڑھتا ہے۔ ان مساوات کے تحت امواج بالکل سیدھے حرکت کرتے ہیں اور ناوقت اور ناہی فاصلے کے ساتھ ان کی طاقت میں کسی قسم کی کمی رونما ہوتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ کائنات کے دور ترین کہکشاؤں سے ہم تک برقی و مقناطیسی امواج پہنچتی ہیں اور ہمیں رات کے چمکتے اور خوبصورت تارے نظر آتے ہیں۔

مشق 10.1: **بے تار**³⁸ ذرائع ابلاغ میں 36 000 km کی اونچائی پر پرواز کرتے مصنوعی سیارے اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ یہ سیارے زمین کے اوپر ایک ہی نقطے پر آویزاں نظر آتے ہیں۔ ان سیاروں سے زمین کے قریبی نقطے تک برقی اشارہ کتنی دیر میں پہنچے گا۔

جواب: 0.12 s

مثال 10.1: خالی خلاء میں 240 MHz تعدد کی موج بڑھتے a_z سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ الف) λ ، β اور ω دریافت کریں۔ ب) لمحہ $t = 0$ پر موج کی $128 \frac{V}{m}$ چوٹی محدود کے مرکز پر پائی جاتی ہے۔ موج کی حقیقی اور دوری مساوات لکھیں۔ پ) اگر موج کی چوٹی لمحہ $t = 1.2 \text{ ns}$ پر نقطہ $z = 25 \text{ cm}$ پہ ہو تب موج کی مساوات کیا ہوگی؟

حل: الف) موج کی رفتار $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ لیتے ہوئے

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{240 \times 10^6} = \frac{5}{4} \text{ m}$$

اور یوں

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{8\pi}{5} \text{ rad/m}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اب زاویائی تعدد حاصل کرتے ہیں۔

$$\omega = 2\pi f = 4.8\pi \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(ب) حقیقی مساوات

$$E = 128 \cos \left(4.8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{5} z \right)$$

ہے جبکہ دوری مساوات مندرجہ ذیل ہے۔

$$E = 128e^{-j\frac{8\pi}{5}z}$$

(پ) اب موج تاخیر سے محدود کے مرکز پر پہنچتی ہے۔ موج کا تاخیری زاویہ θ لکھتے ہوئے موج کی مساوات

$$E = 128 \cos \left(4.8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{5} z + \theta \right)$$

ہوگی۔ موج کی چوٹی $(4.8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{5} z + \theta) = 0$ پر ہوگی لہذا $t = 1.2 \text{ ns}$ اور $z = 0.25 \text{ m}$ پر کرتے ہوئے $\theta = -0.176\pi$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ قیمت مندرجہ بالا مساوات میں استعمال کی جائے گی۔ موج کی دوری مساوات مندرجہ ذیل ہے۔

$$E_s = 128e^{-j\pi(\frac{8}{5}z + 0.176)}$$

3117

3118

مثال 10.2: لمحہ $t = 0$ پر محدود کے مرکز پر موج کی چوٹی $340 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے جبکہ $z = 1.5 \text{ m}$ وہ قریب ترین نقطہ ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے۔ موج گھٹے z کی سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ اس لمحہ برقی میدان اکائی سمتیہ $\mathbf{a}_E = \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{a}_x + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{a}_y$ کی سمت میں ہے۔ برقی موج کی مساوات لکھیں۔

3121

حل: موج کی چوٹی اور صفر کے درمیان فاصلے سے $\frac{\lambda}{4} = 1.5$ لکھ کر $\lambda = 6 \text{ m}$ حاصل ہوتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3}$ اور $f = \frac{3 \times 10^8}{6} = 50 \text{ MHz}$ حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ موج گھٹے z جانب حرکت کر رہی ہے اور لمحہ $t = 0$ پر اس کی چوٹی محدود کے مرکز پر پائی جاتی ہے لہذا

$$E = E_0 \cos \left(2\pi \times 50 \times 10^6 t + \frac{\pi}{3} z \right)$$

لکھا جائے گا۔ لمحہ $t = 0$ پر محدود کے مرکز پر میدان 340 a_E پایا جاتا ہے لہذا موج کی مکمل خاصیت مندرجہ ذیل مساوات بیان کرے گی۔

$$E = 340 \left[\frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{a}_x + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{a}_y \right] \cos \left(2\pi \times 50 \times 10^6 t + \frac{\pi}{3} z \right)$$

اس کی دوری شکل مندرجہ ذیل ہے۔

$$E_s = 340 \left[\frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{a}_x + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{a}_y \right] e^{j\frac{\pi}{3}z}$$

مثال 10.3: خالی خلاء میں برقی موج $e^{j\frac{\pi}{3}z}$ $E_s = 340 \left[\frac{2}{\sqrt{13}}a_x + \frac{3}{\sqrt{13}}a_y \right]$ پائی جاتی ہے۔ مقناطیسی موج کی مساوات لکھیں۔

حل: خالی خلاء میں

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

سے مقناطیسی چوٹی کی قیمت

$$H_0 = \frac{340}{120\pi} = \frac{17}{6\pi}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ حقیقی عدد ہے لہذا برقی اور مقناطیسی میدان ہم قدم ہیں۔ خالی خلاء میں موج کے برقی اور مقناطیسی میدان آپس میں عمودی ہوتے ہیں۔ یوں مقناطیسی موج کی سمت میں سمتیہ $xa_x + ya_y$ اور برقی موج کی سمت میں سمتیہ a_E کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوگا یعنی

$$\left(\frac{2}{\sqrt{13}}a_x + \frac{3}{\sqrt{13}}a_y \right) \cdot (xa_x + ya_y) = 0$$

ہوگا جس سے

$$(10.38) \quad 2x + 3y = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس میں x کی کوئی بھی قیمت پر کرتے ہوئے y کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔ یوں $x = 1$ پر کرنے سے $y = -\frac{2}{3}$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں مقناطیسی میدان $1a_x - \frac{2}{3}a_y$ سمتیہ کی سمت میں ہوگی۔ اس طرح مقناطیسی میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ

$$a_H = \frac{a_x - \frac{2}{3}a_y}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{13}}a_x - \frac{2}{\sqrt{13}}a_y$$

ہوگی۔ یاد رہے کہ $a_E \times a_H$ سے موج کے حرکت کی سمت حاصل ہوتی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ

$$a_E \times a_H = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}a_x + \frac{3}{\sqrt{13}}a_y \right) \times \left(\frac{3}{\sqrt{13}}a_x - \frac{2}{\sqrt{13}}a_y \right) = -a_z$$

کے برابر ہے جو موج کی درست سمت ہے۔ اب ہم مساوات 10.38 میں x کی قیمت منفی بھی کر سکتے تھے۔ آئیں ایسا بھی کر کے دیکھ لیں۔ اگر ہم $x = -1$ پر کرتے تب $y = \frac{2}{3}$ حاصل ہوتا جس سے اکائی سمتیہ $-1a_x + \frac{2}{3}a_y$ حاصل ہوتی۔ اس اکائی سمتیہ اور a_E کے سمتی ضرب سے a_z حاصل ہوتا ہے جو بالکل الٹ سمت میں حرکت کرتی موج کی سمت ہے۔ ظاہر ہے کہ ہم ان دو جوابات میں سے پہلی جواب کو ہی یہاں درست تسلیم کریں گے۔ یوں مقناطیسی موج کی دوری مساوات مندرجہ ذیل ہوگی۔

$$H_s = H_0 a_H e^{j\frac{\pi}{3}z} = \frac{17}{6\pi} \left(\frac{3}{\sqrt{13}}a_x - \frac{2}{\sqrt{13}}a_y \right) e^{j\frac{\pi}{3}z}$$

10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج

خالص یا کامل ذو برقی سے مراد ایسا ذو برق ہے جس میں متحرک برقی و مقناطیسی امواج کی توانائی ضائع نہیں ہوتی۔ خالص ذو برق میں $\sigma = 0$ جبکہ اس کا جزوی مقناطیسی مستقل μ_R اور جزوی برقی مستقل ϵ_R ہے لہذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(10.39)$$

$$\alpha = 0$$

$$(10.40)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار مساوات 10.25 سے

$$(10.41)$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_R\mu_0\epsilon_R\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ کو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار c لکھا گیا ہے۔ چونکہ ذو برق میں $\mu_R\epsilon_R > 1$ ہے لہذا ذو برق میں روشنی کی رفتار خالی خلاء میں روشنی کے رفتار سے کم ہوگی۔ خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اس کی زیادہ سے زیادہ رفتار ہے۔

موج کی رفتار اور تعدد سے طول موج

$$(10.42)$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کے طول موج کو λ_0 لکھا گیا ہے۔ اس مساوات سے ذو برق میں روشنی کی رفتار کم ہونے کی وجہ سامنے آتی ہے۔ چونکہ $\mu_R\epsilon_R > 1$ ہے لہذا ذو برق میں طول موج کم ہو جاتا ہے جس سے روشنی کی رفتار کم ہو جاتی ہے۔

مساوات 10.31 سے ذو برقی کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ کو η_0 لکھا گیا ہے۔

یوں ذو برق میں امواج کے مساوات

$$(10.43)$$

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$(10.44)$$

$$H_y = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

ہیں۔

مثال 10.4: پانی کے لئے $\epsilon_R = 78.4$ ، $\mu_R = 1$ اور $\sigma = 0$ لیتے ہوئے 300 MHz تعدد کے برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، طول موج اور تعدد کی رکاوٹ حاصل کریں۔ برقی میدان $\frac{mV}{m}$ 50 ہونے کی صورت میں برقی اور مقناطیسی امواج کے مساوات لکھیں۔ ہم $\sigma = 0$ لیتے ہوئے درحقیقت پانی میں توانائی کے ضیاع کو نظر انداز کر رہے ہیں۔

حل:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{78.4}} = 0.3388 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.3388 \times 10^8}{300 \times 10^6} = 11.29 \text{ cm}$$

ہیں جبکہ خالی خلاء میں $\lambda = 1 \text{ m}$ ہے۔ بقایا مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 55.7 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

اور

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \frac{377}{\sqrt{78.4}} = 42.58 \Omega$$

ہیں۔ امواج کے مساوات

$$E_x = 0.05 \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$

$$H_y = \frac{0.05}{42.58} \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z) = 0.00117 \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$

ہیں۔

3137

3138

3139

مشق 10.2: کتاب کے آخر میں مختلف اشیاء کے مستقل دئے گئے ہیں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے ابرق میں، طاقت کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے، 5.6 GHz اور $10 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$ حیطے کی مقناطیسی میدان پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

3141

3142

3143

3144

3145

3146

3147

3148

• موج کی رفتار،

• طول موج،

• زاویائی مستقل،

• قدرتی رکاوٹ،

• برقی میدان کا حیطہ۔

جوابات: $1.62 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور 162.1Ω ، $272.6 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، 23 cm ، $1.29 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

کامل ذو برقی میں امواج پر غور کے بعد فطری طور ناقص ذو برقی پر بات کرنا ضروری ہے لہذا صاف پانی کو مثال بناتے ہوئے 20 GHz تعدد پر ایسا ہی کرتے ہیں۔³¹⁵¹ صفحہ 328 پر شکل 10.4 میں صاف پانی کے مستقل دئے گئے ہیں۔

اس تعدد پر صاف پانی کے مستقل $\epsilon_R = 41$ اور $\frac{S}{m} = 36.7$ σ ہیں۔ چونکہ پانی غیر مقناطیسی ہے لہذا اس کا $\mu_R = 1$ ہوگا۔ یوں

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0.8$$

اور

$$\begin{aligned}\gamma &= j2 \times \pi \times 20 \times 10^9 \times \frac{\sqrt{1 \times 41}}{3 \times 10^8} \sqrt{1 - j0.8} \\ &= 3035 / 70.67^\circ \\ &= 1005 + j2864 \quad m^{-1}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں پانی کا تضعیفی مستقل

$$\alpha = 1005 \frac{Np}{m}$$

ہے جس کا مطلب ہے کہ پانی میں ہر $\frac{1}{1005}$ میٹر یعنی 1 mm فاصلہ طے کرنے پر برقی اور مقناطیسی امواج 0.368 گنا گھٹ جائیں گے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں **ریڈار**³⁹ پانی میں کیوں کام نہیں کرتا۔ اسی طرح بارش کی صورت میں بھی ریڈار کی کارکردگی بری طرح متاثر ہوتی ہے۔ پانی میں دیکھنے کی خاطر موج آواز استعمال کی جاتی ہیں۔

زاویائی مستقل

$$\beta = 2864 \frac{rad}{m}$$

ہے جو $\sigma = 0$ کی صورت میں $\frac{rad}{m}$ 2682 حاصل ہوتا ہے لہذا پانی کے موصلیت سے زاویائی مستقل زیادہ متاثر نہیں ہوا۔ اس تعدد پر خالی خلاء میں طول موج ³¹⁵⁶ 1.5 cm ہے جبکہ پانی میں $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ سے طول موج 2.19 mm ہے۔

قدرتی رکاوٹ

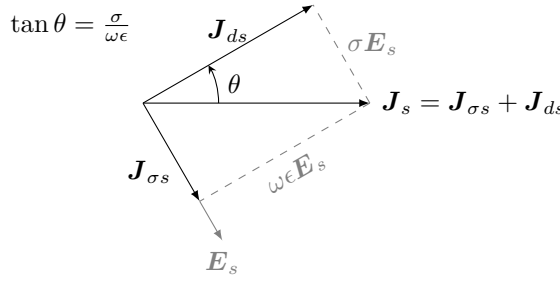
$$\eta = \frac{377}{\sqrt{41}} \frac{1}{\sqrt{1 - j0.8}} = 52 / 19.33^\circ = 49.1 + j17.2 \quad \Omega$$

ہے لہذا E_x ہر نقطے پر H_y سے 19.33° آگے ہے۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_s = \mathbf{J}_{vs} + \mathbf{J}_{ds}$$

میں ایصال اور انتقالی کثافت برقی رو کے سمتی مجموعے کو شکل 10.3 میں بطور مجموعی کثافت \mathbf{J}_s دکھایا گیا ہے۔ ایصال رو اور انتقالی رو آپس میں 90° درجے کا زاویہ بناتے ہیں۔ انتقالی رو 90° آگے رہتا ہے۔ یہ بالکل متوازی جڑے مزاحمت اور کپیسٹر کے رو کی طرح صورت حال ہے۔ کپیسٹر کی رو، مزاحمت کی رو سے 90° آگے



شکل 10.3: طاقت کے ضیاع کا ٹکون۔

رہتی ہے۔ مزید یہ کہ مزاحمت کی رو سے برقی طاقت کا ضیاع پیدا ہوتا ہے جبکہ کپیسٹر کی رو سے ایسا نہیں ہوتا۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے شکل 10.3 میں زاویہ θ (جس کا کروئی محدود کے زاویہ θ کے ساتھ کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں ہے) کو دیکھیں جس کے لئے

$$\tan \theta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \quad (10.45)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں اس ٹکون کو طاقت کے ضیاع کا ٹکون پکارا جاتا ہے اور $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ کی شرح کو ضیاعی ٹینجینٹ⁴⁰ یا مماس ضیاع کہا جاتا ہے۔

مساوات 10.14 اور مساوات 10.32 استعمال کرتے ہوئے لکھا گیا۔ کسی ذوبرق کے کامل یا غیر کامل ہونے کا فیصلہ اس کے مماس ضیاع کی قیمت کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔ اگر اس شرح کی قیمت اکائی کے قریب ہو تب ذوبرق غیر کامل قرار دیا جاتا ہے جبکہ $1 \ll \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ کی صورت میں ذوبرق کو کامل تصور کیا جاتا ہے۔³¹⁵⁹

کم مماس ضیاع کی صورت میں حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کے کارآمد مساوات حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}}$$

کو مسئلہ ثنائی⁴¹

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

جہاں $|x| < 1$ ہے، کی مدد سے تسلسل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ اگر ہم $x = -j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ اور $n = \frac{1}{2}$ لیں تو حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 - j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 + \dots \right]$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$\alpha \doteq j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \left(-j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (10.46)$$

اور

$$\beta \doteq \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right] \quad (10.47)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اگر $1 \ll \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ ہو تب

$$\beta \doteq \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (10.48)$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ بالکل اسی طرح قدرتی رکاوٹ کو

$$(10.49) \quad \eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 + j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right]$$

یا

$$(10.50) \quad \eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

انہیں دیکھیں کہ ان مساوات سے حاصل جواب اصل مساوات کے جوابات کے کتنے قریب ہیں۔ ایسا صاف پانی کی مثال کو دوبارہ حل کر کے دیکھتے ہیں۔ صاف پانی کے مستقل 20 GHz تعدد پر $\epsilon_R = 41$, $\mu_R = 1$ اور $\sigma = 36.7 \frac{S}{m}$ ہیں لہذا مساوات 10.46 سے

$$\alpha = 1080 \frac{Np}{m}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ حاصل کردہ قیمت $1005 \frac{Np}{m}$ کے کافی قریب ہے۔ مساوات 10.47 سے

$$\beta = 2897 \frac{rad}{m}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ جواب $2864 \frac{rad}{m}$ کے بہت قریب ہے۔ مساوات 10.48 سے حاصل جواب

$$\beta = 2682 \frac{rad}{m}$$

درست جواب سے نسبتاً زیادہ مختلف ہے۔ قدرتی رکاوٹ مساوات 10.49 سے

$$\eta = 44.75 + j23.55$$

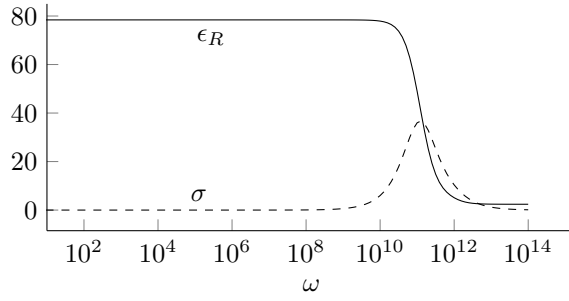
حاصل ہوتا ہے جو $49.1 + j17.2$ کے بہت قریب ہے البتہ مساوات 10.50 سے حاصل جواب

$$\eta = 58.88 + j23.55$$

قدر مختلف ہے۔ صاف پانی کی اس مثال میں مماس ضیاع 0.8 ہے جو اکائی سے بہت کم نہیں ہے، اسی لئے جوابات پہلے سے قدر مختلف حاصل ہوئے۔ چونکہ موصلیت اور برقی مستقل کی بالکل درست قیمتیں عموماً ہمیں معلوم نہیں ہوتیں لہذا سادہ مساوات سے حاصل جوابات کے اس فرق کو زیادہ اہمیت نہیں دینی چاہئے۔ بہتر یہی ہوتا ہے کہ $0.1 < \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ ہی کی صورت میں سادہ مساوات استعمال کئے جائیں۔

عموماً ذوق برقی کی موصلیت تعدد بڑھانے سے غیر خطی طور پر بڑھتی ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ قیمت میں تبدیلی نسبتاً کم ہوتی ہے۔ یہی وجہ مماس ضیاع کی اہمیت کا راز ہے۔ یاد رہے کہ مختلف تعدد پر موصلیت، برقی مستقل اور مماس ضیاع نہایت تیزی سے تبدیل ہو سکتے ہیں۔ ایسا عموماً نظر آنے والی روشنی سے قدر کم یا قدر زیادہ تعدد پر ہوتا ہے۔

شکل 10.4 میں صاف پانی کا جزوی برقی مستقل ϵ_R بالمقابل زاویائی تعدد ω ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے جبکہ موصلیت بالمقابل تعدد نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ افقی محد تعدد کالا لگ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تقریباً $10 \frac{Grad}{s}$ تعدد تک $\epsilon_R = 78.4$ رہتا ہے جبکہ اس سے بلند تعدد پر اس کی قیمت گھٹ کر 2.4 ہو جاتی ہے۔ موصلیت کی چوٹی تقریباً $36.7 \frac{S}{m}$ پائی جاتی ہے۔ دیگر ذوق برقی کے خط مختلف اشکال کے ہوں گے۔



شکل 10.4: صاف پانی کا جزوی برقی مستقل بالمقابل زاویائی تعدد اور موصلیت بالمقابل زاویائی تعدد۔

مشق 10.3: ایک مادے کے مستقل 1 MHz تعدد پر $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 2.8$ اور $\sigma = 10 \frac{\mu S}{m}$ ہیں۔ اس مادے کے مماس ضیاع، تضعیفی مستقل اور زاویائی مستقل حاصل کریں۔

جوابات: 0.0642 ، $1.13 \times 10^{-3} \frac{Np}{m}$ اور $3.51 \times 10^{-4} \frac{rad}{m}$

مشق 10.4: ایک غیر مقناطیسی مادے کا مماس ضیاع 0.07 جبکہ $\mu_R = 4.7$ ہیں۔ ان قیمتوں کو 1 MHz تا 80 MHz تعدد کے درمیان اٹل تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس کا تضعیفی مستقل اور مادے میں طول موج 20 MHz اور 60 MHz تعدد پر حاصل کریں۔

جوابات: $0.031 \frac{Np}{m}$ ، $6.9 m$ ، $0.095 \frac{Np}{m}$ ، $2.3 m$

10.3 پوینٹنگ سمتیہ

امواج کی طاقت جاننے کے لئے مسئلہ پوینٹنگ⁴² درکار ہو گا لہذا پہلے اسے⁴³ حاصل کرتے ہیں۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

کا \mathbf{E} کے ساتھ غیر سمتی ضرب

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

⁴²Poynting theorem

⁴³جان پیٹری پوینٹنگ نے 1884 میں پہلی بار اس مسئلے کو پیش کیا۔

لیتے ہوئے سمتی ممال (جسے آپ با آسانی کار تئسی محد میں ثابت کر سکتے ہیں)

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}$$

کے ذریعہ

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس میں $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ پر کرنے سے

$$-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

یا

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب

$$\epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right)$$

اور

$$\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھے جاسکتے ہیں لہذا

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس کے صحیحی مکمل

$$-\int_h \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dh = \int_h \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dh + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dh$$

پر مسئلہ پھیلاؤ کے اطلاق سے

$$(10.51) \quad -\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_h \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dh + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dh$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو کی بات کرتے ہیں۔ اگر پورے حجم میں کہیں پر بھی منبع طاقت موجود نہ ہو تب یہ مکمل حجم میں کل لمحاتی مزاحمتی طاقت کا ضیاع دیتا ہے۔ اگر حجم میں منبع طاقت پایا جاتا ہو تب ان منبع کے حجم پر مکمل کی قیمت مثبت ہوگی اگر منبع کو طاقت فراہم کی جارہی ہو اور یہ مکمل منفی ہوگا اگر منبع طاقت فراہم کر رہا ہو۔

مساوات کے دائیں ہاتھ دوسرا مکمل حجم میں توانائی کا کل ذخیرہ دیتا ہے جس کا وقت کے ساتھ تفرق حجم میں ذخیرہ توانائی میں لمحاتی تبدیل یعنی طاقت دیتا ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ حجم میں داخل ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔ یوں حجم سے کل خارجی طاقت

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

ہوگا جہاں حجم گھیرتی سطح پر مکمل لیا گیا ہے۔ سمتی ضرب $H \times E$ پوائنٹنگ سمتیہ \mathcal{P} پکارا جاتا ہے

$$\mathcal{P} = E \times H \quad (10.52)$$

جس سے مراد لمحاتی طاقت کی کثافت لی جاتی ہے جو واٹ فی مربع میٹر $\frac{W}{m^2}$ میں ناپی جاتی ہے۔ یہاں بھی برقی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2} D \cdot E$ یا مقناطیسی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2} B \cdot H$ کے استعمال کی طرح یاد رہے کہ پوائنٹنگ سمتیہ کا بند سطح پر مکمل ہی حقیقی معنی رکھتا ہے اور ایسا مکمل سطح سے خارج ہوتا مکمل طاقت دیتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر \mathcal{P} کی سمت اس نقطے پر لمحاتی طاقت کے بہاؤ کی سمت دیتا ہے۔

چونکہ \mathcal{P} برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں کے عمودی ہے لہذا طاقت کی بہاؤ بھی دونوں میدان کے عمودی سمت میں ہوگی۔ ہم نے برقی و مقناطیسی امواج پر تبصرے کے دوران دیکھا کہ امواج کے حرکت کی سمت E اور H کے عمودی ہوتی ہے لہذا \mathcal{P} کی سمت ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔ مزید کامل ذو برق میں

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

سے لمحاتی کثافت سطحی بہاؤ طاقت

$$E_x \mathbf{a}_x \times H_y \mathbf{a}_y = \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_z = \mathcal{P} \mathbf{a}_z$$

حاصل ہوتی ہے۔ اوسط کثافت طاقت حاصل کرنے کی خاطر ہم ایک پھیرے یعنی $T = \frac{1}{f}$ دورانیے کا مکمل لیتے ہوئے دوری عرصہ T پر تقسیم

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{اوسط}} &= f \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) dt \\ &= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \int_0^{\frac{1}{f}} [1 + \cos(2\omega t - 2\beta z)] dt \\ &= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t - 2\beta z) \right]_0^{\frac{1}{f}} \end{aligned}$$

کرتے ہوئے

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \quad \frac{W}{m^2} \quad (10.53)$$

حاصل کرتے ہیں جو z سمت میں کثافت طاقت کی بہاؤ دیتا ہے۔ اگر میدان کی چوٹی E_0 کی جگہ اس کی موثر قیمت $E_{\text{موز}}$ استعمال کی جائے تب مندرجہ بالا مساوات میں $\frac{1}{2}$ کا جزو ضروری نہیں لکھا جائے گا۔

موج کی سمت کے عمودی سطح S سے یوں

$$P_{z, \text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} S \quad W$$

طاقت گزرے گی۔

غیر کامل ذو برق کی صورت میں

$$\eta = |\eta| e^{j\theta_\eta}$$

لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \\ H_y &= \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|\eta|} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \end{aligned} \quad (10.54)$$

ہوں گے جن سے

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{اوسط}} &= f \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) dt \\ &= f \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} [\cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_\eta) + \cos \theta_\eta] dt \end{aligned}$$

یعنی

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta \quad (10.55)$$

حاصل ہوتا ہے۔

کثافت طاقت کی اوسط قیمت مخلوط پونٹنگ سمتیہ

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]_{\text{حقیقی}} \quad (10.56)$$

سے بھی حاصل کی جاسکتی ہے جہاں جوڑی دار مخلوط⁴⁵ مقناطیسی موج استعمال کی جاتی ہے۔ انہیں مساوات 10.55 کو اس ترکیب سے دوبارہ حاصل کریں۔ مساوات 10.54 کی دوری سمتی شکل

$$\begin{aligned} E_{sx} &= E_0 e^{-\alpha z - j\beta z} \\ H_{sy} &= \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z - j\beta z - j\theta_\eta} \\ H_{sy}^* &= \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z + j\beta z + j\theta_\eta} \end{aligned}$$

ہے جہاں جوڑی دار مخلوط مقناطیسی موج H_{sy}^* بھی لکھی گئی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^* &= \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z + j\theta_\eta} \\ &= \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} (\cos \theta_\eta + j \sin \theta_\eta) \end{aligned}$$

کا حقیقی حصہ لیتے ہوئے

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta$$

کثافت اوسط توانائی کی مطلوبہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

اس کتاب میں اوسط کثافت توانائی حاصل کرتے وقت مساوات 10.56 استعمال کی جائے گی۔

3195

مشق 10.5: ایک میگاہرٹز، تین سو میگاہرٹز اور تین گیگاہرٹز کے تعدد پر صاف پانی کے برف کے جزو برقی مستقل بالترتیب 3.2، 3.45، 4.15 اور 3.2 ہیں جبکہ اس کے مماس ضیاع بالترتیب 0.12، 0.035 اور 0.0009 ہیں۔ یکساں سطحی موج جس کی چوٹی $z = 100 \frac{V}{m}$ ہو برف سے گزر رہی ہے۔ ایک مربع میٹر سطح سے اوسط طاقت کا بہاؤ $z = 5 \text{ m}$ اور $z = 5 \text{ m}$ پر حاصل کریں۔

3198

3199

جوابات: 14.31 W، 23.7 W، 12.48 W، 24.7 W، 26.4 W، 27.1 W

3200

3201

مثال 10.5: z محدود پر $\sigma = 3.2 \times 10^7 \frac{S}{m}$ موصلیت کے غیر مقناطیسی مادے سے بنی لا محدود لمبائی کی سلاخ پائی جاتی ہے جس کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_R = 1$ ہے۔ اس سلاخ میں a_z سمت 250 A کی یکساں یک سمتی برقی رو گزر رہی ہے اور سلاخ کا رداس 2 cm ہے۔ الف) سلاخ کی فی میٹر مزاحمت حاصل کریں۔ ب) سلاخ میں فی میٹر طاقت کا ضیاع $I^2 R$ سے حاصل کریں۔ پ) سلاخ میں J ، E اور H حاصل کریں۔ ت) سلاخ کی سطح پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی نکل لیتے ہوئے فی میٹر سلاخ میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔ ث) رداس 5 cm کے ٹکڑی سطح پر پونٹنگ سمتیہ کے سطحی نکل کے استعمال سے سلاخ کے قریب برقی میدان حاصل کریں۔

3206

حل: الف) فی میٹر سلاخ کی مزاحمت حاصل کرتے ہیں۔

$$R = \frac{1}{3.2 \times 10^7 \times \pi \times 0.02^2} = 24.87 \frac{\mu\Omega}{m}$$

ب) فی میٹر سلاخ میں طاقت کا مزاحمتی ضیاع یوں حاصل ہو گا۔

$$P = I^2 R = 250^2 \times 24.87 \times 10^{-6} = 1.554247 \frac{W}{m}$$

پ) سلاخ کا رقبہ عمودی تراش $A = \pi \times 0.02^2$ مربع میٹر ہے۔ یوں سلاخ میں کثافت برقی رو

$$J = \frac{I}{A} a_z = \frac{250}{\pi \times 0.02^2} a_z = 198949 a_z \frac{A}{m^2}$$

ہوگی جس سے سلاخ میں برقی شدت $J = \sigma E$ سے

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{198949 a_z}{3.2 \times 10^7} = 6.217 \times 10^{-3} a_z \frac{V}{m}$$

حاصل ہوتی ہے۔ دو سنٹی میٹر سے کم رداس $\rho < 2 \text{ cm}$ کا دائرہ کل

$$\frac{250 \times \pi \times \rho^2}{\pi \times 0.02^2} = 625000 \rho^2$$

ایمپیر کی برقی رو گھیرے گی۔ یوں ایمپیر کا دوری قانون استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے اندر رداس ρ پر مقناطیسی میدان

$$H_\phi = \frac{625000 \rho^2}{2\pi\rho} = 99472 \rho a_\phi \frac{A}{m}$$

حاصل ہوگا۔

ت) پونٹنگ سمتیہ

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -618.42 \rho a_\rho \frac{W}{m^2}$$

ہے۔ ہم 2 cm کے انتہائی قریب لیکن اس سے ذرہ کم رداس اور 1 m لمبائی کی تصوراتی سطح پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی نکل لیتے ہوئے فی میٹر سلاخ میں مزاحمتی ضیاع حاصل کرتے ہیں۔ اس ڈبی نما تصوراتی سطح کی چلی اور بالائی سیدھی سمتی سطح بالترتیب $-a_z$ اور a_z سمت میں ہیں جبکہ پونٹنگ سمتیہ a_ρ سمت میں ہے لہذا ان سطحوں پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی نکل صفر کے برابر ہوگا۔ یوں سطحی نکل حقیقت میں صرف تصوراتی سطح کے گول حصے پر لینا ضروری ہے۔ سطح میں داخل ہوتا طاقت

$$\int_S -\mathcal{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 618.42 \rho^2 d\phi dz = 1.554247 \frac{W}{m}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\rho = 2 \text{ cm}$ پر کیا گیا ہے۔ یاد رہے کہ ہم نے دو سنٹی میٹر سے ذرہ کم رداس چننا کہ سلاخ کے اندر حاصل کردہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان قابل استعمال ہوں۔

ٹ) سلاخ کے رداس سے زیادہ رداس پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی نکل وہی طاقت دے گا جو سلاخ کے سطح پر نکل لیتے ہوئے حاصل ہوا تھا۔ مزاحمتی طاقت کا ضیاع ہمارے چنے گئے سطح پر منحصر نہیں ہے۔ 5 cm رداس اور 1 m لمبائی کی تصوراتی سطح لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ 5 cm کا گول دائرہ پورے 250 A کی برقی رو کو گھیرے گا۔ یوں اس دائرے پر

$$\mathbf{H} = \frac{250}{2\pi \times 0.05} a_\phi = 795.7747 a_\phi \frac{A}{m}$$

ہوگا۔ سلاخ کے گول سطح پر برقی میدان a_z سمت میں ہے۔ سرحدی شرائط کے مطابق کسی بھی دو مختلف اجسام کے سرحد پر متوازی برقی میدان برابر ہوتے ہیں۔ یوں لامحدود لمبائی کے سلاخ کے بالکل قریب برقی میدان a_z سمت میں ہی ہوگا۔ ایسا کوئی جواز نظر نہیں آتا کہ سلاخ سے دور میدان کیوں a_z سمت میں نہ ہو۔ یوں ہم $\mathbf{E} = E_0 a_z$ لیتے ہیں۔ اس طرح تصوراتی سطح کی چلی اور بالائی سطحوں پر پونٹنگ سمتیہ کا سطحی نکل صفر کے برابر ہوگا۔ سلاخ میں داخل ہوتا طاقت تصوراتی سطح کے گول حصے پر نکل سے حاصل ہوگا یعنی

$$\int_S -\mathcal{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 795.7747 E_0 \rho d\phi dz = 250 E_0 W$$

جہاں $\rho = 5 \text{ cm}$ پر کیا گیا ہے۔ حاصل جواب کو 1.554247 W کے برابر کرتے ہوئے سلاخ کے باہر

$$\mathbf{E} = 6.217 \times 10^{-3} a_z \frac{V}{m}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مثال میں سلاخ کے باہر اور سلاخ کے اندر برابر برقی میدان پایا جاتا ہے۔

موصل میں امواج پر غور کی خاطر ہم تصور کرتے ہیں کہ موصل سے جڑے ذو برق میں امواج پیدا کئے جاتے ہیں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ ایسے موج ذو برق اور موصل کے سرحد پر موصل میں کیسے داخل ہوتے ہیں اور موصل میں ان کی کیا کارکردگی ہوتی ہے۔

ایصالی اور انتقالی رو کی شرح $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کو مماس ضیاع کہتے ہیں۔ یوں ناقص موصل کی مماس ضیاع بلند تعدد پر کم ہوگی۔ نائیکروم⁴⁶ ناقص موصل ہے جس کا مماس ضیاع 100 MHz تعدد پر تقریباً 2×10^8 ہے۔ یوں کسی بھی موصل کے لئے $1 \gg \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے چند سادہ مساوات حاصل کرتے ہیں۔ حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

کو $1 \gg \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی بنا پر

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

یا

$$\gamma = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب

$$-j = 1/\underline{-90^\circ}$$

کے برابر ہے جس کا جزر

$$\sqrt{1/\underline{-90^\circ}} = 1/\underline{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ہے لہذا

$$\gamma = j\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

یا

$$(10.57) \quad \gamma = (j+1)\sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(10.58) \quad \alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

ملتا ہے۔

ان معلومات کے بعد کہا جاسکتا ہے کہ کسی بھی μ اور σ مستقل رکھنے والے موصل کے α اور β ہر تعدد پر برابر ہی رہتے ہیں۔ یوں z سمت میں دوبارہ امواج فرض کرتے ہوئے موصل میں برقی میدان کی موج کو

$$(10.59) \quad E_x = E_0 e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma})$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $z < 0$ کا ل ذو برق اور $z > 0$ موصل خطے ہوں تب ان کے سرحد $z = 0$ پر برقی سرحدی شرائط کے مطابق متوازی برقی میدان سرحد کے دونوں اطراف پر برابر ہوں گے۔ مساوات 10.59 کے تحت سرحد پر موصل میں

$$(10.60) \quad E_x = E_0 \cos \omega t \quad (z = 0)$$

ہو گا اور یوں سرحد پر ذو برق میں بھی برقی میدان یہی ہو گا۔ اب اسی حقیقت کو یوں بھی دیکھا جاسکتا ہے کہ سرحد پر ذو برق میں برقی میدان مساوات 10.60 دیتا ہے جو موصل میں سرحد پر اسی قیمت کا میدان پیدا کرتا ہے۔ ایسا تصور کرنے کا مطلب یہ ہے کہ ہم ذو برق میں میدان کو منبع میدان تصور کرتے ہیں جو موصل میں مساوات 10.59 میں دی موج پیدا کرتا ہے۔ موصل میں $1 \gg \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ کی بنا پر انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$J = \sigma E \quad (10.61)$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا موصل میں ہر نقطے پر کثافت رو اور برقی میدان راہ تناسب کا تعلق رکھتے ہیں اور یوں موصل میں

$$J_x = \sigma E_0 e^{-z} \sqrt{\pi f \mu \sigma} \cos(\omega t - z \sqrt{\pi f \mu \sigma}) \quad (10.62)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 10.5 میں J_x دکھایا گیا ہے جہاں عین سرحد یعنی $z = 0$ پر کثافت رو کے قیمت $J_0 \sigma E_0$ لکھا گیا ہے۔

مساوات 10.59 اور مساوات 10.62 میں بہت معلومات پائی جاتی ہے۔ پہلے ان مساوات میں $e^{z \sqrt{\pi f \mu \sigma}}$ جزو پر غور کریں۔ سرحد پر اس کی قیمت $e^0 = 1$ کے برابر ہے جو سرحد سے

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

فاصلے پر $e^{-1} = 0.368$ رہ جاتی ہے۔ یہ فاصلہ **گہرائی جلد**⁴⁷ کہلایا اور δ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (10.63)$$

برقی رو کا سطحی تہہ تک محدود رہنے کو **اثر جلد**⁴⁸ کہا جاتا ہے۔ یوں موصل میں

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta} \quad (10.64)$$

ہو گا۔ اسی طرح سرحد سے 2δ فاصلے پر میدان $e^{-2} = 0.135$ اور 4δ فاصلے پر میدان $e^{-4} = 0.018$ یعنی صرف % 1.8 رہ جائے گا۔

تانبے کی $\sigma = 5.8 \times 10^7 \frac{S}{m}$ ہے لہذا اس میں گہرائی جلد

$$\delta_{\text{تانبہ}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times f \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}}$$

میٹر کے برابر ہے۔ یوں 50 Hz کا میدان سرحد سے $\frac{0.0661}{\sqrt{50}} = 9.35 \text{ mm}$ فاصلے پر کم ہو کر صرف 0.368 گنا رہ جائے گا۔ برقی ادوار میں مزاحمت میں طاقت کا ضیاع رو کے مربع کے راست تناسب ہوتا ہے لہذا ہر ایک گہرائی جلد کے فاصلے پر کثافت طاقت $0.135 = 0.368^2$ گنا کم ہوگی۔ **خرد امواج**⁴⁹ کے تعدد یعنی 10 GHz پر گہرائی جلد $0.661 \mu m$ یعنی نظر آنے والے روشنی کے طول کے آٹھویں حصے کے برابر ہے۔

ان تعدد پر کسی بھی موصل مثلاً تانبے میں سرحد سے چند ہی گہرائی جلد کے فاصلے پر تمام میدان تقریباً صفر کے برابر ہوتے ہیں۔ موصل کے سرحد پر پیدا کئے گئے برقی میدان یا کثافت رو، سرحد سے دوری کے ساتھ تیزی سے کم ہوتے ہیں۔ برقی و مقناطیسی طاقت موصل کے اندر نہیں بلکہ اس کے باہر صفر کرتی ہے۔ موصل کا کام صرف اتنا ہے کہ یہ ان امواج کو راستہ دکھاتی ہے۔ موصل کے سرحد پر پیدا کثافت رو، موصل میں موج کے حرکت کے عمودی سمت میں داخل ہوتی ہے جس سے موصل میں مزاحمتی ضیاع پیدا ہوتا ہے۔ یوں موصل بطور راہ گیر کردار ادا کرتے ہوئے مزاحمتی ضیاع بطور اجرت حاصل کرتا ہے۔

اگر آپ کسی بجلی گھر میں 50 Hz کے برقی رو کو منتقل کرنے کی خاطر پانچ سٹی میٹر داس کے تانبے کی ٹھوس تار استعمال کر رہے ہوں تو یہ سراسر تانبہ ضائع کرنا ہوگا چونکہ کثافت روتار کے بیرونی سطح پر ہی پائی جائے گی۔ اندرونی تار، سطح سے دور، کثافت رو قابل نظر انداز ہوگی لہذا اس سے بہتر ہوگا کہ زیادہ داس کی نکلی نمائندگی استعمال کی جائے جس کی موٹائی تقریباً 1.58 cm یعنی 1.4 cm ہو۔ اگرچہ یہ فیصلہ لامحدود جسامت کے سرحد کے نتائج پر بنیاد ہے، حقیقت میں محدود سرحد پر بھی میدان اسی نسبت سے گھٹے ہیں۔

3228

بلند تعدد پر گہرائی جلد کا فاصلہ اتنا کم ہوتا ہے کہ راہ گیر موصل کی سطحی تہہ ہی اہمیت رکھتی ہے۔ یوں خرد امواج کی منتقلی کے لئے شیشے پر 0.661 μm موٹی چاندی کی تہہ کافی ہے۔

3230

آئیں اب موصل میں طول موج اور رفتار موج کے مساوات حاصل کریں۔ ہم

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

سے شروع کرتے ہوئے مساوات 10.64 استعمال کرتے ہوئے

$$\lambda = 2\pi\delta$$

لکھ سکتے ہیں۔ اسی طرح مساوات 10.25

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

سے

$$(10.65) \quad v = \omega\delta$$

3231

ملتا ہے۔

تانبے میں 50 Hz پر $\lambda = 5.8 \text{ cm}$ اور $v = 2.94 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ یا $10.6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ حاصل ہوتے ہیں۔ میں تقریباً $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ کی رفتار سے چلتا ہوں۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تانبے میں برقی و مقناطیسی امواج انتہائی آہستہ چلتے ہیں۔ یاد رہے کہ اسی 50 Hz کے موج کی خالی خلاء میں $\lambda = 6000 \text{ km}$ اور رفتار $3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہو گی۔

3234

موصل میں H_y کی مساوات لکھنے کی خاطر موصل کی قدرتی رکاوت درکار ہوگی۔ مساوات 10.31

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

کو $1 \gg \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی وجہ سے

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

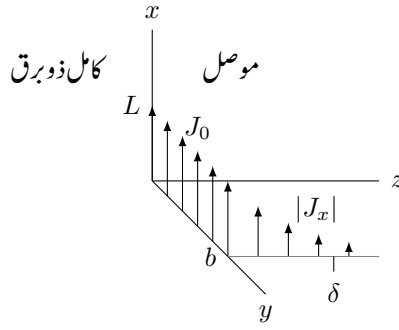
یا

$$(10.66) \quad \eta = \frac{\sqrt{2}/45^\circ}{\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} + j\frac{1}{\sigma\delta}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 10.60 کو گہرائی جلد کی صورت

(10.67)

$$E_x = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$



شکل 10.5: موصل میں طاقت کے ضیاع اور گہرائی جلد۔

میں لکھتے ہوئے مقناطیسی موج کو

$$(10.68) \quad H_y = \frac{\sigma \delta E_0}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی موج، برقی موج سے پھیرے کے آٹھویں حصے پیچھے ہے۔

مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے پونینگ مساوات

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma \delta E_0^2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{2z}{\delta}} \cos \frac{\pi}{4}$$

یا

$$\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{\sigma \delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}}$$

دیتا ہے۔ آپ دوبارہ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک گہرائی جلد کی گہرائی پر کثافت طاقت، سرحد کے کثافت طاقت کے $e^{-2} = 0.135$ گنا رہ گئی ہے۔

شکل 10.5 پر دوبارہ نظر ڈالیں۔ مسئلہ پونینگ کہتا ہے کہ سرحد پر L اور b اطراف کے مستطیل میں جتنی برقی و مقناطیسی طاقت داخل ہوتی ہے، وہ تمام کی تمام موصل میں ضائع ہو جاتی ہے۔ یہ طاقت

$$\begin{aligned} P_{L, \text{اوسط}} &= \int_0^b \int_0^L \mathcal{P}_{\text{اوسط}}|_{z=0} dx dy \\ &= \int_0^b \int_0^L \frac{\sigma \delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}} \Big|_{z=0} dx dy \\ &= \frac{\sigma \delta b L E_0^2}{4} \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ سرحدی کثافت رو

$$J_0 = \sigma E_0$$

کی صورت میں اسے

$$(10.69) \quad P_{L, \text{اوسط}} = \frac{1}{4\sigma} \delta b L J_0^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ اگر b چوڑائی میں کل برقی رو کو δ گہرائی تک محدود کر دیا جائے تو مزاحمتی ضیاع کتنا ہوگا۔ ایسا کرنے کی خاطر پہلے اس چوڑائی میں کل رو

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x dy dz$$

حاصل کرتے ہیں جہاں مکمل آسان بنانے کی غرض سے

$$J_x = J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

کو دوری سمتیہ کی شکل

$$\begin{aligned} J_{xs} &= J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} \\ &= J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \end{aligned}$$

میں لکھ کر مکمل حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^b J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} dy dz \\ &= \frac{J_0 b \delta}{1+j} \end{aligned}$$

اس سے

$$I = \frac{J_0 b \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

لکھا جائے گا۔ اگر اس رو کو $b < y < \delta$ اور $0 < z < \delta$ میں محدود کر دیا جائے تب نئی کثافت رو

$$J'_x = \frac{J_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

ہوگی۔ مزاحمتی طاقت کا ضیاع فی اکائی حجم $J \cdot E$ کے برابر ہے لہذا اس حجم میں کل ضیاع

$$P_L = \frac{1}{\sigma} (J'_x)^2 b L \delta = \frac{J_0^2}{2\sigma} b L \delta \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

ہوگا۔ مربع کو سائن موج کی اوسط قیمت $\frac{1}{2}$ کے برابر ہوتی ہے لہذا اوسط طاقت کے ضیاع کو

$$P_L = \frac{J_0^2 b L \delta}{4\sigma} \quad (10.70)$$

لکھا جاسکتا ہے جو عین مساوات 10.69 ہے۔

اس نتیجے کو دیکھ کر اب کسی بھی موصل، جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو، میں کل رو کو ایک جلد گہرائی میں یکساں تقسیم شدہ تصور کرتے ہوئے سلاخ کی مزاحمتی ضیاع حاصل کی جاسکتی ہے۔ یوں b چوڑائی، L لمبائی اور لا محدود گہرائی سلاخ جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو اور b چوڑائی، L لمبائی اور δ گہرائی سلاخ جس میں یکساں تقسیم شدہ ³⁴⁶ تقسیم شدہ رو ہو کے مزاحمت بالکل برابر ہوں گے۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے رداس r کے ٹھوس نکلی سلاخ کی مزاحمت بلند تعدد پر حاصل کی جاسکتی ہے۔ اگر گہرائی جلد سلاخ کے رداس سے بہت کم ہو تب اس طرح حاصل کردہ مزاحمت کی قیمت تقریباً بالکل درست ہوگی۔ ایسی تعدد جس پر اثر جلد پایا جاتا ہو کی صورت میں سلاخ کی بیرونی جلد ہی رو گزارے گی لہذا مزاحمت کی قیمت حاصل کرتے وقت اس نکلی نماجی کو ہی موصول تصور کیا جائے گا لہذا مزاحمت R

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{\sigma 2\pi r \delta} \quad (10.71)$$

ایک ملی میٹر رداس اور دس میٹر لمبی تانبے کے تار کی یک سمتی مزاحمت

$$R_{\text{یک سمتی}} = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times \pi \times 0.001^2} = 54.88 \text{ m}\Omega$$

ہے۔ ایک سو میگا ہرٹز کی تعدد پر تانبے کی $\delta = 6.61 \mu\text{m}$ ہوگی لہذا اس تعدد پر اسی تار کی مزاحمت

$$R = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times 2 \times \pi \times 0.001 \times 6.61 \times 10^{-6}} = 4.15 \Omega$$

ہوگی۔

مشق 10.6: ٹھوس نکلی نمالو ہے کی تار جس کا رداس 5 mm اور جس کی لمبائی 2.5 m ہے میں $2 \cos 10000t$ ایمپیئر کی برقی رو گزر رہی ہے۔ کتاب کے آخر میں ضمیمے سے $\sigma = 1.03 \times 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ اور $\mu_R = 4000$ دئے گئے ہیں۔ یاد رہے کہ موصول کا $\epsilon_R = 1$ ہوتا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ منہدم جہ ذیل حاصل کریں۔

• یک سمتی رو مزاحمت،

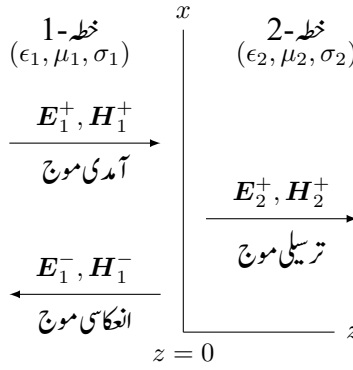
• گہرائی جلد،

• بدلتی رو مزاحمت یا موثر مزاحمت،

• مزاحمتی طاقت کا ضیاع۔

جوابات: 2.49 W اور 1.25Ω ، $62 \mu\text{m}$ ، $3.09 \text{ m}\Omega$

لامحدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج ہم دیکھ چکے۔ ایسے حجم میں کبھی بھی موج دو مختلف اقسام کے اشیاء کے درمیان پائی جانے والی سرحد نہیں چھوتی۔ یہیں محدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج پر غور کریں جہاں امواج کو ایک قسم کے مادے سے دوسرے قسم کے مادے میں داخل ہونا ہوگا۔ آپ دیکھیں گے کہ ایسی صورت میں موج کا کچھ حصہ پہلے خطے سے دوسرے خطے میں داخل ہوتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ سرحد سے ٹکرا کر واپس پہلے خطے میں لوٹ جاتا ہے۔ اس حصے میں



شکل 10.6: آمدی موج سرحد سے گزرتی ترسیلی اور اس سے لوٹتی انعکاسی امواج پیدا کرتی ہے۔

ہم سرحد سے گزرتے اور اس سے ٹکرا کر واپس لوٹنے حصوں کے مساوات حاصل کریں گے۔ یہ نتائج **ترسیلی تاروں**⁵⁰ اور **رہبر موج**⁵¹ کے مسائل میں جوں کے توں قابل استعمال ہوں گے۔

3257

ہم $z < 0$ کو خطہ-1 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ ہیں جبکہ $z > 0$ کو خطہ-2 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ ہیں۔ یہ صورت حال شکل 10.6 میں دکھائی گئی ہے۔ ہم بڑھتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالا نوشت + جبکہ گھٹتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالا نوشت - سے ظاہر کریں گے۔ اب تصور کریں کہ پہلے خطے میں سرحد کی جانب برقی موج

$$E_{xs1}^+ = E_{x10}^+ e^{-\gamma_1 z} \quad (10.72)$$

آتی ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ اس برقی موج کے ساتھ لازماً مقناطیسی موج

$$H_{ys1}^+ = \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} \quad (10.73)$$

بھی ہوگی۔ سرحد کی طرف آتے موج کو **آمدی موج**⁵² کہا جاتا ہے۔ چونکہ یہ موج سرحد کے عمودی حرکت کر رہا ہے لہذا اس کے حرکت کو **عمودی آمد**⁵³ کہتے ہیں۔

اس آمدی موج کا کچھ حصہ جسے **ترسیلی موج**⁵⁴ کہتے ہیں، سرحد سے گزرتے ہوئے سیدھا چلے جائے گا۔ ترسیلی امواج

$$E_{xs2}^+ = E_{x20}^+ e^{-\gamma_2 z} \quad (10.74)$$

$$H_{ys2}^+ = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z} \quad (10.75)$$

3259

ہیں۔ سرحد کے دوسرے جانب حرکی مستقل γ_2 اور قدرتی رکاوٹ η_2 ہیں جو پہلے خطے سے مختلف ہیں۔ ترسیلی امواج سرحد سے دور چلتی جاتی ہیں۔

آمدی اور ترسیلی برقی امواج x محدود کے متوازی جبکہ مقناطیسی امواج y محدود کے متوازی ہیں لہذا یہ چاروں امواج سرحد کے بھی متوازی ہیں۔ صفحہ 297 پر مساوات 9.45 اور اس کے قریب ہی مساوات 9.47 متوازی امواج کے سرحدی شرائط بیان کرتے ہیں۔ اب کائنات میں کبھی بھی دواشیاء کے سرحد پر سطحی کثافت رو نہیں پائی جاتی۔ یوں $K_{\perp} = 0$ لیتے ہوئے ان شرائط کو

$$\begin{aligned} E_{m1} &= E_{m2} \\ H_{m1} &= H_{m2} \quad (K_{\perp} = 0) \end{aligned}$$

لکھا جاتا ہے۔

اب اگر پہلی شرط پوری کی جائے تو سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی برقی میدان برابر ہوں گے لہذا $z = 0$ پر مساوات 10.72 اور مساوات 10.74 برابر ہوں گے۔ یوں $E_{x10}^+ = E_{x20}^+$ حاصل ہوتا ہے لیکن دوسری شرط کے مطابق سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان بھی برابر ہونا ہوگا لہذا $z = 0$ پر مساوات 10.73 اور مساوات 10.75 بھی برابر ہوں گے جس سے $\frac{E_{x10}^+}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2}$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ دونوں تب ممکن ہے جب $\eta_1 = \eta_2$ ہو جو حقیقت میں کبھی بھی نہیں ہوگا لہذا صرف آمدی اور ترسیلی امواج کی صورت میں سرحدی شرائط پورا نہیں اتر جاسکتا۔ مندرجہ بالا دونوں سرحدی شرائط صرف اس صورت میں پورا ہوتے ہیں جب سرحد سے ٹکرا کر واپس لوٹتے امواج

$$(10.76) \quad E_{xs1}^- = E_{x10}^- e^{\gamma_1 z}$$

$$(10.77) \quad H_{ys1}^- = -\frac{E_{x10}^-}{\eta_1} e^{\gamma_1 z}$$

بھی پائے جائیں جنہیں **انعکاسی امواج** ⁵⁵ کہا جاتا ہے۔ انعکاسی موج کا حرکت مستقل γ_1 ہی ہے جبکہ یہ موج گھٹتے z جانب حرکت کر رہی ہے۔ انعکاسی موج میں E_{x10}^- مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ چونکہ انعکاسی امواج گھٹتے z جانب حرکت کرتی ہیں لہذا مسئلہ پونٹنگ کے تحت $E_{xs1}^- = -\eta_1 H_{ys1}^-$ ہوگا تاکہ $\mathbf{E}_1^- \times \mathbf{H}_1^-$ کی سمت $-\mathbf{a}_z$ ہو۔

آمدی، ترسیلی اور انعکاسی امواج کی صورت میں دونوں سرحدی شرائط پورے ہوتے ہیں اور ان کی مدد سے E_{x10}^+ کی صورت میں بقایا تمام امواج کے طول بھی حاصل ہوتے ہیں۔ انہیں دیکھیں کہ ایسا کس طرح ہوتا ہے۔

اب پہلے خطے میں آمدی امواج کے علاوہ انعکاسی امواج بھی پائے جاتے ہیں لہذا سرحدی شرائط میں دونوں کا مجموعہ استعمال کیا جائے گا۔ یوں $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی برقی میدان برابر ہونے سے

$$E_{xs1} = E_{xs2} \quad (z = 0)$$

یعنی

$$E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- = E_{xs2}^+ \quad (z = 0)$$

یا

$$(10.78) \quad E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{x20}^+$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان کے برابری سے

$$H_{ys1} = H_{ys2} \quad (z = 0, K_{\perp} = 0)$$

یعنی

$$H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2}^+ \quad (z = 0, K_{\perp} = 0)$$

یا

$$(10.79) \quad \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 10.78 اور مساوات 10.79 کو E_{x10}^- کی خاطر حل کرنے کی غرض سے مساوات 10.78 کو مساوات میں پر کرتے

$$\frac{E_{x10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{x10}^+ + E_{x10}^-}{\eta_2}$$

ہوئے یوں

$$E_{x10}^- = E_{x10}^+ \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ انعکاسی اور آمدی برقی میدان کے حیطوں کی شرح کو **شرح انعکاس**⁵⁶ پکارا اور Γ سے ظاہر⁵⁷ کیا جاتا ہے۔

$$(10.80) \quad \Gamma = \frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

مخلوط شرح انعکاس کی صورت میں انعکاسی اور آمدی میدان میں زاویائی فرق پایا جائے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شرح انعکاس کی حتمی قیمت صفر تا ایک ممکن ہے۔

$$(10.81) \quad |\Gamma| \leq 1$$

اسی طرح مساوات 10.78 اور مساوات 10.79 سے E_{x10}^- ختم کرنے سے

$$(10.82) \quad \tau = \frac{E_{x20}^+}{E_{x10}^+} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

حاصل ہوتا ہے جو **شرح ترسیل**⁵⁸ کہلایا اور τ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مساوات 10.80 اور مساوات 10.82 سے

$$(10.83) \quad \tau = 1 + \Gamma$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں ان نتائج کو چند مخصوص صورتوں میں استعمال کرتے ہیں۔ تصور کریں کہ پہلا خطہ کامل ذوب برق جبکہ دوسرا خطہ کامل موصل ہے۔ ایسی صورت میں σ_2 لامحدود ہوگا لہذا

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = 0$$

ہوگا۔ یوں مساوات 10.82 سے

$$E_{x20}^+ = 0$$

حاصل ہوتا ہے یعنی کامل موصل میں کسی صورت بھی وقت کے ساتھ بدلتا میدان نہیں پایا جاسکتا۔ اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ کامل موصل کی گہرائی جلد صفر کے برابر ہے۔

مساوات 10.80 میں $\eta_2 = 0$ پر کرنے سے

$$\Gamma = -1$$

یعنی

$$E_{x10}^- = -E_{x10}^+$$

⁵⁶ reflection coefficient

⁵⁷ Γ یونانی حروف تہجی گیمائے۔

⁵⁸ transmission coefficient

حاصل ہوتا ہے۔ انعکاسی موج کا حیطہ بالکل آمدی موج کے حیطے کے برابر ہے لیکن ان میں 180° کا زاویہ پایا جاتا ہے۔ موصل سطح آمدی توانائی کو واپس کرتی ہے اور یوں پہلے خطے میں کل برقی میدان

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- \\ &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہوگا جہاں کامل ذوب برق میں $\gamma_1 = 0 + j\beta_1$ لیا گیا ہے۔ اس کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^+ (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) \\ &= -j2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جو دوری سمتیہ کی صورت میں ہے جسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر حقیقی جزو لیتے ہوئے اصل موج کی مساوات

$$(10.84) \quad E_{x1} = 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مساوات ساکن میدان کو ظاہر کرتی ہے۔ یاد رہے کہ اسے دو آپس میں الٹ سمت میں حرکت کرتے امواج سے حاصل کیا گیا ہے۔ اس کا موازنہ آمدی موج

$$E_{x1}^+ = E_{x10}^+ \cos(\omega t - \beta_1 z)$$

سے کریں۔ حرکت کرتے موج کی پہچان جزو $\omega t - \beta_1 z$ ہے جو مثبت سمت میں موج کو ظاہر کرتی ہے۔ مساوات 10.84 میں ωt اور $\beta_1 z$ علیحدہ علیحدہ پائے جاتے ہیں۔

مساوات 10.84 میں جس لمحہ $\omega t = n\pi$ کے برابر ہو اس لمحہ میدان ہر نقطے پر صفر کے برابر ہوگا۔ اس کے علاوہ جس نقطے پر $\beta_1 z = n\pi$ کے برابر ہو، اس نقطے پر ہر وقت میدان صفر ہی رہتا ہے۔ مساوات 10.84 کو **ساکن موج**⁵⁹ کہا جاتا ہے۔ برقی میدان ان سطحوں پر ہر وقت صفر رہتا ہے جہاں

$$\beta_1 z = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ہو جس سے

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = n\pi$$

یعنی

$$z = n \frac{\lambda_1}{2}$$

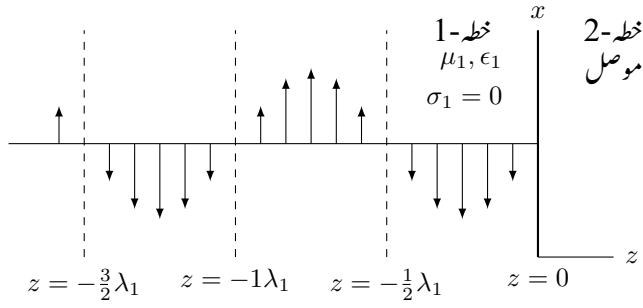
حاصل ہوتا ہے۔ یوں سرحد یعنی $z = 0$ پر برقی میدان صفر ہوگا اور پہلے خطے میں سرحد سے دور چلتے ہوئے ہر آدھے طول موج پر صفر برقی میدان پایا جائے گا۔ یہ صورت حال شکل 10.7 میں دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں نقطہ دار لکیر ان سطحوں کو ظاہر کرتی ہیں جہاں میدان صفر رہتا ہے۔ برقی میدان کو وقت $t = \frac{\pi}{2}$ پر دکھایا گیا ہے جب اس کا حیطہ زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے۔

چونکہ $E_{xs1}^+ = \eta_1 H_{ys1}^+$ اور $E_{xs1}^- = -\eta_1 H_{ys1}^-$ ہیں لہذا مقناطیسی میدان

$$H_{ys1} = \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z})$$

یا

$$(10.85) \quad H_{y1} = 2 \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} \cos \beta_1 z \cos \omega t$$



شکل 10.7: ساکن موج، برقی میدان۔

ہوگا۔ یہ بھی ساکن موج ہے لیکن جس سطح پر برقی میدان صفر رہتا ہے وہاں مقناطیسی ساکن موج کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ اس کے علاوہ برقی اور مقناطیسی ساکن امواج میں 90° کا وقتی فرق پایا جاتا ہے لہذا یہ امواج کسی بھی سمت میں اوسطاً صفر طاقت منتقل کرتی ہیں۔

3275

آئیں اب دو کامل ذوبرق کی سرحد پر صورت حال دیکھیں۔ اب ان دو خطوں میں قدرتی رکاوٹ η_1 اور η_2 جبکہ $\alpha_1 = 0$ اور $\alpha_2 = 0$ ہوں گے۔ عددی قیمتیں لے کر آگے چلتے ہیں۔ فرض کریں کہ

$$\eta_1 = 50 \Omega$$

$$\eta_2 = 377 \Omega$$

$$E_{x10}^+ = 10 \frac{V}{m}$$

ہیں۔ یوں

$$\Gamma = \frac{377 - 50}{377 + 50} = 0.7658$$

ہے لہذا

$$E_{x10}^- = 0.7658 \times 10 = 7.658 \frac{V}{m}$$

ہوگا۔ پہلے خطے میں مقناطیسی میدان

$$H_{y10}^+ = \frac{10}{50} = 0.2 \frac{A}{m}$$

$$H_{y10}^- = -\frac{7.658}{50} = -0.153 \frac{A}{m}$$

ہیں۔ آمدی اوسط سطحی کثافت طاقت مساوات 10.55 سے

$$P_{1, اوسط}^+ = \frac{1}{2} \frac{(E_{x10}^+)^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha_1 z} \cos \theta_{\eta_1} = 1 \frac{W}{m^2}$$

جبکہ انعکاسی اوسط سطحی کثافت طاقت

$$P_{1, اوسط}^- = \frac{1}{2} \frac{(E_{x10}^-)^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha_1 z} \cos \theta_{\eta_1} = 0.5864 \frac{W}{m^2}$$

ہے۔ ان مساوات میں $\alpha_1 = 0$ اور $\eta_1 = 50/0$ استعمال کئے گئے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور آمدی کثافت طاقت کی شرح

$$(10.86) \quad \frac{\frac{(E_{x10}^-)^2}{2\eta_0}}{\frac{(E_{x10}^+)^2}{2\eta_0}} = |\Gamma|^2$$

کے برابر ہے۔

دوسرے خطے میں

$$E_{x20}^+ = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{x10}^+ = 17.658 \frac{V}{m}$$

$$H_{y20}^+ = \frac{17.658}{377} = 0.04684 \frac{A}{m}$$

ہیں لہذا

$$P_{2,وسط}^+ = \frac{1}{2} \frac{(E_{x20}^+)^2}{|\eta_2|} e^{-2\alpha_2 z} \cos \theta_{\eta_2} = 0.4135 \frac{W}{m^2}$$

ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور ترسیلی طاقت کا مجموعہ آمدی طاقت کے عین برابر ہے۔

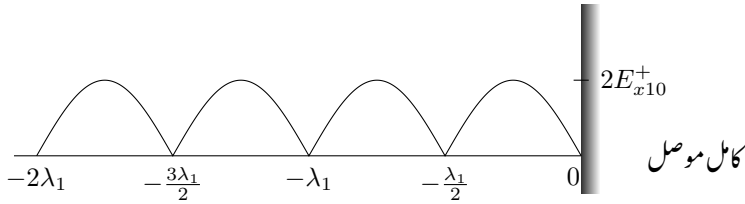
$$P_{1,وسط}^+ = P_{1,وسط}^- + P_{2,وسط}^+$$

10.6 شرح ساکن موج

کسی بھی ترسیلی نظام میں مختلف مقامات پر برقی یا مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارہ یا آسانی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ محوری تار کا اندرونی تار ذرہ زیادہ لمبا دیکھتے ہوئے برقی میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح تار کا ایک چھوٹا دائرہ مقناطیسی میدان کا نمونہ حاصل کرنے میں کام آتا ہے۔ ان آلات سے حاصل اشارات کو **سمت کار**⁶⁰ سے گزارتے ہوئے مائیکرو میٹر سے ناپا جاسکتا ہے۔ مائیکرو میٹر میدان کے حیطے کے راست تناسب جواب دیتا ہے۔ ان آلات کو عموماً درکار اشارات کے **ہمسر**⁶¹ رکھا جاتا ہے تاکہ یہ زیادہ حساس ہوں۔

اگر بغیر ضیاع خطے میں یکساں مستوی موج حرکت کر رہی ہو اور اس خطے میں انعکاسی موج نہ پائی جاتی ہو تب میدان ناپنے والا آلہ تمام مقامات پر یکساں حیطہ دکھائے گا۔ ایسا آلہ تیزی سے تبدیل ہوتے حیطے کو دکھانے سے قاصر ہوتا ہے۔ ہر جگہ برابر حیطہ اس بات کی نشانی ہے کہ خطے میں طاقت ضائع نہیں ہوتا اور یہ کہ انعکاسی موج بھی غیر موجود ہے۔

اس کے برعکس کامل ذوبرق میں آمدی موج کا کامل موصل سے انعکاس، ساکن موج پیدا کرتا ہے۔ ایسے خطے میں میدان ناپنا آلہ مختلف مقامات پر مختلف حیطے دکھائے گا۔ چونکہ سرحد سے ہر آدھے طول موج کے فاصلے پر میدان صفر رہتا ہے لہذا ان نقطوں پر آلہ صفر حیطہ ناپے گا جبکہ عین ایسے دو قریبی نقطوں کے درمیان آلہ زیادہ سے زیادہ حیطہ دکھائے گا۔ آلے کو سرحد کے قریب اور دور کرنے سے ناپے گئے حیطے کی شکل $|\sin \beta z|$ کی طرح حاصل ہوگی جہاں سرحد سے فاصلہ z ہے۔ اسے شکل 10.8 میں دکھایا گیا ہے۔ سائن نما حیطے کا تبدیل ہونا ساکن موج کی پہچان ہے۔



شکل 10.8: کامل موصل سے انعکاس، کامل ذو برق میں ساکن موج پیدا کرتا ہے۔

مثال 10.6: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں کامل ذو برق میں ساکن موج کی مساوات حاصل کریں۔

3290

حل: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں $\Gamma = -1$ حاصل ہوتا ہے لہذا $E_{xs1}^- = -E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z}$ ہوگا۔ یوں آمدی اور انعکاسی امواج کا مجموعہ

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \\ &= -2jE_{x10}^+ \sin \beta_1 z \end{aligned}$$

ہوگا۔ اس دوری سمتیہ سے حقیقی ساکن موج کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$E_{xs1} e^{j\omega t} = -2jE_{x10}^+ \sin \beta_1 z \cos \omega t + 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

حقیقی جزو

$$E_{x1} = 2E_{x10}^+ \sin \beta_1 z \sin \omega t$$

3291

لیتے ہیں۔ یہی ساکن موج کی مساوات ہے۔ شکل 10.8 میں آلہ ناپ سے حاصل $|E_{x1}|$ دکھایا گیا ہے۔

3292

اب ایسی صورت پر غور کرتے ہیں جہاں تمام کی تمام موج سرحد سے واپس نہیں لوٹتی بلکہ اس کا کچھ حصہ سرحد پار کرتے ہوئے دوسری جانب چلے جاتی ہے۔ پہلے خطے میں اب آمدی موج کے علاوہ ایسی انعکاسی موج پائی جاتی ہے جس کا حیثہ آمدی موج سے کم ہوتا ہے۔ اگرچہ اب پہلے خطے میں ساکن موج کے ساتھ ساتھ حرکت کرتی موج بھی پائی جاتی ہے لیکن اس کے باوجود اس کو ساکن موج ہی پکارا جاتا ہے۔ اب کسی بھی نقطے پر میدان ہر وقت صفر نہیں رہتا۔ ساکن اور حرکت کرتے حصوں کا اندازہ حیثے کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور اس کے کم سے کم قیمت کی شرح سے بیان کی جاتی ہے۔ اس شرح کو **شرح ساکن موج**⁶² کہا اور S سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے جبکہ دوسرا خطہ کوئی بھی مادہ ہو سکتا ہے۔ یوں $\alpha_1 = 0$ ہوگا۔ اب

$$\begin{aligned} E_{xs1}^+ &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} \\ E_{xs1}^- &= \Gamma E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہوں گے جہاں

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

ہے۔ چونکہ کامل ذو برق میں $\sigma = 0$ ہوتا ہے لہذا η_1 مثبت حقیقی عدد ہے جبکہ η_2 مخلوط عدد ہو سکتا ہے لہذا Γ بھی مخلوط ہو سکتا ہے۔ یوں اسے

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\phi}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$E_{xs1}^- = |\Gamma| E_{x10}^+ e^{j(\beta_1 z + \phi)}$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے ساکن موج کی مساوات

$$(10.87) \quad E_{xs1} = \left(e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| e^{j(\beta_1 z + \phi)} \right) E_{x10}^+$$

حاصل ہوتی ہے۔

3297

اب آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط عدد $e^{j\theta}$ کو

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ہوتا ہے لہذا اس کی حتمی قیمت ایک (1) ہی رہتی ہے۔ اس عدد کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\theta = 0$ کی صورت میں حاصل ہوتی ہے۔ یہی قیمت $\theta = \pm 2\pi$ یا $\theta = \pm 4\pi$ کی صورت میں بھی حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح اس عدد کی کم سے کم قیمت $\theta = \mp \pi, \mp 3\pi, \mp 5\pi, \dots$ پر 1- حاصل ہوتی ہے۔ اس طرح مساوات 10.87 کو

$$E_{xs1} = \left(1 + |\Gamma| e^{j(2\beta_1 z + \phi)} \right) e^{-j\beta_1 z} E_{x10}^+$$

لکھتے ہوئے اگر $2\beta_1 z + \phi$ کو θ تصور کیا جائے تو $e^{j(2\beta_1 z + \phi)}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت یعنی 1+

$$2\beta_1 z + \phi = 0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \dots$$

یا

$$-\beta_1 z = \left(\frac{\phi}{2} \right), \left(\frac{\phi}{2} - \pi \right), \left(\frac{\phi}{2} + \pi \right), \left(\frac{\phi}{2} - 2\pi \right), \dots$$

پر حاصل ہوگی جسے

$$(10.88) \quad -\beta_1 z_{\text{بلندتر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ایسی صورت میں

$$(10.89) \quad |E_{xs1}|_{\text{بلندتر}} = (1 + |\Gamma|) E_{x10}^+$$

ہوگا۔ اسی طرح $e^{j(2\beta_1 z + \phi)}$ کی کم سے کم قیمت یعنی 1-

$$2\beta_1 z + \phi = \pi, -\pi, 3\pi, -3\pi, \dots$$

یا

$$-\beta_1 z = \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{2} \right), \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{2} \right), \left(\frac{\phi}{2} - \frac{3\pi}{2} \right), \dots$$

پر حاصل ہوگی جسے

$$(10.90) \quad -\beta_1 z_{\text{سمتر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

لکھا جاسکتا ہے اور ایسی صورت میں

$$(10.91) \quad |E_{xs1}|_{\text{سمتر}} = (1 - |\Gamma|) E_{x10}^+$$

ہوگا۔

موج کی کم تر قیمت ہر آدھے طول موج پر پائی جاتی ہے۔ موج کی بلند تر قیمت دو کم تر قیمتوں کے مقام کے عین وسط میں پائی جاتی ہیں۔ کامل موصل کی صورت میں پہلا کم تر میدان $-\beta_1 z = 0$ یعنی سرحد پر پایا جائے گا۔ اگر $\eta_2 < \eta_1$ ہو اور دونوں قدرتی رکاوٹوں کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں تب $\phi = \pi$ ہو گا اور ایسی صورت میں سرحد یعنی $-\beta_1 z = 0$ پر برقی دباؤ کی کم تر قیمتیں پائی جائے گی۔ اس کے برعکس اگر $\eta_2 > \eta_1$ ہو اور دونوں رکاوٹ حقیقی ہوں تب سرحد پر برقی میدان کی قیمت بلند تر ہوگی۔

ان معلومات کو زیر استعمال لانے کی غرض سے $10 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور 1 GHz تعداد کے موج پر غور کرتے ہیں جو خطہ اول میں سرحد کی طرف عمودی آمد ہے۔ پہلے خطے کے مستقل $\sigma_1 = 0$ اور $\mu_{R1} = 1$ ، جبکہ دوسرے خطے کے مستقل $\sigma_1 = 0$ اور $\mu_{R1} = 1$ ، $\epsilon_{R1} = 3$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں۔

یوں

$$\omega = 2\pi 10^9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \beta_1 = 36.28 \frac{\text{rad}}{\text{m}}, \quad \beta_2 = 51.3 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اگرچہ خالی خلاء میں اس موج کی طول 30 cm ہوگی، یہاں $\lambda_1 = 17.32 \text{ cm}$ اور $\lambda_2 = 12.25 \text{ cm}$ ہیں۔ قدرتی رکاوٹ $\eta_1 = 153.91 \Omega$ اور $\eta_2 = 217.66 \Omega$ ہیں جن سے شرح انعکاس $\Gamma = -0.17$ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ دونوں رکاوٹ حقیقی اعداد ہیں اور $\eta_2 < \eta_1$ ہے لہذا سرحد پر کم تر برقی میدان پایا جائے گا۔ پہلے خطے، یعنی $z < 0$ ، میں سرحد سے دور ہر 8.66 cm فاصلے پر برقی میدان کی کم تر قیمت پائی جائے گی۔ مساوات 10.91 سے ساکن موج کی کم تر قیمت $|E_{xs1}|_{\text{سمتر}} = 8.3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے لہذا اس میں طاقت کا ضیاع نہیں ہوتا اور یوں اس خطے میں تمام کم تر قیمتیں برابر ہوں گی۔

میدان کی بلند تر قیمت $11.7 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پہلے خطے میں سرحد سے 4.33 ، 12.99 ، 21.65 ، ... سنٹی میٹر کے فاصلوں پر پائی جائیں گی۔

چونکہ دوسرے خطے میں انعکاسی موج نہیں پائی جاتی لہذا اس میں ساکن موج بھی نہیں پائی جائے گی۔

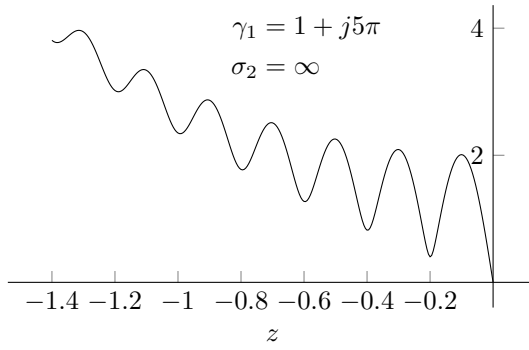
ساکن موج کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کی شرح کو **شرح ساکن موج**⁶³ کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(10.92) \quad s = \frac{|E_{xs1}|_{\text{بلند تر}}}{|E_{xs1}|_{\text{کم تر}}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

چونکہ $|\Gamma| \leq 1$ ہوتا ہے لہذا شرح ساکن موج ہر صورت مثبت اور اکائی کے برابر یا اس سے زیادہ قیمت کا ہو گا یعنی

$$(10.93) \quad s \geq 1$$

مندرجہ بالا مثال میں $s = \frac{1+0.17}{1-0.17} = 1.409$ ہے۔



شکل 10.9: غیر کامل ذو برق میں ساکن موج کی بلند تر اور کم تر قیمتوں میں فرق سرحد سے دور کم ہوتا ہے۔

اگر $| \Gamma | = 1$ ہو تب انعکاسی اور آمدی امواج برابر ہوں گے لہذا تمام کی تمام آمدی توانائی سرحد سے واپس لوٹتی ہے اور ایسی صورت میں s لامحدود ہو گا۔ پہلے خطے میں ہر $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ایسی سطح پائی جائے گی جس پر برقی میدان ہر وقت صفر رہتا ہے۔ ان سطحوں کے درمیان ایسی سطحیں ہوں گی جہاں آمدی موج کے دگنے جیسے کا برقی میدان ہو گا۔

3315

اگر $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ہو تب $\Gamma = 0$ ہو گا۔ ایسی صورت میں توانائی سرحد سے واپس نہیں لوٹتی، $s = 1$ ہو تا ہے اور برقی میدان کی بلند تر اور کم تر قیمتیں ہر بار ہوتی ہیں۔

3317

آدھی طاقت کے انعکاس کی صورت میں $|\Gamma|^2 = 0.5$ یعنی $|\Gamma| = 0.707$ اور $s = 5.83$ ہو گا۔

3318

چونکہ برقی اور مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارات باآسانی حاصل کئے جاسکتے ہیں s کی قیمت حاصل کرنے کے لئے راست تناسب اشارات ہی درکار ہیں لہذا شرح ساکن موج کو تجرباتی طور حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہی اس کی اہمیت کا راز ہے۔ یاد رہے کہ s حاصل کرنے کے لئے میدان کی اصل قیمت درکار نہیں ہوتی۔ صرف اتنا ضروری ہوتا ہے کہ تمام اشارات اصل میدان کے تناسب سے ہوں۔

3321

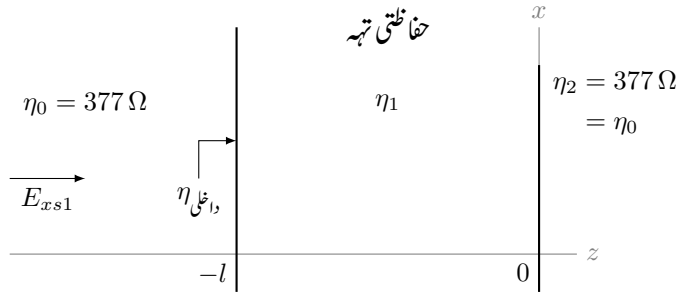
آئیں اب پہلے خطے کو غیر کامل ذو برق تصور کریں جس کا α صفر کے برابر نہیں ہو گا۔ اب بائیں سے آتی آمدی موج مثبت z جانب چلتے ہوئے گھٹے گی۔ انعکاسی موج منفی z جانب چلتے ہوئے گھٹتے جائے گی حتیٰ کہ آخر کار اس کی قیمت قابل نظر انداز ہوگی۔ یوں اگرچہ سرحد کے قریب بلند تر اور کم تر میدان میں فرق واضح ہو سکتا ہے لیکن سرحد سے دوران میں فرق نہیں رہ پاتا۔ پہلے خطے کا حرکی مستقل $\gamma_1 = 1 + j5\pi$ اور دوسرا خطہ کامل موصل ہونے کی صورت میں ایسی ہی ایک ساکن موج شکل 10.9 میں دکھائی گئی ہے جہاں موصل $z = 0$ کے دائیں ہاتھ پر ہے۔ اس شکل میں عین سرحد پر آمدی موج کی قیمت $E_{x10}^+ = 1 \frac{V}{m}$ ہے۔ چونکہ ذو برق کا سرحد موصل کے ساتھ ہے اور موصل میں برقی میدان صفر ہوتا ہے لہذا شکل میں سرحد پر برقی میدان صفر ہی ہے۔ سرحد سے $\frac{2\pi}{\beta_1} = 0.2m$ فاصلے پر دوبارہ کم تر میدان پایا جاتا ہے۔ اسی طرح پہلی چوٹی سرحد پر آمدی میدان کے تقریباً دگنی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو چوٹیاں یا دو نشیب برابر نہیں ہیں۔ یہاں شرح ساکن موج کی قیمت اس صورت مطلب رکھتی ہے جب اسے ناپنے کا مقام یعنی z بھی ساتھ بتلایا جائے۔ ایسی صورت میں انعکاسی شرح اور نقصانی مستقل زیادہ کا رآمد معلومات ہیں۔

3329

اگرچہ مندرجہ بالا مثال زیادہ انتہا درجے کا تھا لیکن یہ بھی نہیں بھولنا چاہئے کہ حقیقت میں کامل تر سیلی تار بھی نہیں پائے جاتے۔ حقیقت میں شرح ساکن موج ہر صورت سرحد سے فاصلے پر منحصر ہوگی اور اس کا استعمال اسی وقت ممکن ہو گا جب ہماری دلچسپی کے خطے میں اس کی قیمت زیادہ تبدیل نہ ہو۔

3331

آئیں دوبارہ پہلا خطہ کامل ذو برق لیتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح حاصل کریں۔ لامحدود حجم میں آزاد موج کی صورت میں یہ شرح $\eta_1 \mp \eta_2$ تھی جہاں منفی قیمت بڑھتے z جانب حرکت کی صورت میں ہوتی ہے۔ انعکاسی موج کی موجودگی میں برقی اور مقناطیسی میدان صفر بھی ممکن ہیں لہذا ان کی شرح صفر سے لامحدود



شکل 10.10: ریڈار اینٹینا پر ایسی شفاف حفاظتی تہ چڑھائی جاتی ہے جو برقی و مقناطیسی امواج کو نہیں گھٹاتی۔

قیمت کی ہو سکتی ہے۔ سرحد سے $z = -l$ فاصلے پر میدان

$$E_{xs1} = (e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}) E_{x10}^+$$

$$H_{ys1} = (e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}) \frac{E_{x10}^+}{\eta_1}$$

ہیں۔ ان کی شرح کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے ہیں اور $\eta داغلی$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\eta داغلی = \left. \frac{E_{xs1}}{H_{ys1}} \right|_{z=-l} = \eta_1 \frac{e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}}{e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}}$$

اس میں $\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ پر کرتے ہوئے اور **یولر مماثل**⁶⁴ استعمال کرتے ہوئے

$$\eta داغلی = \eta_1 \frac{(\eta_2 + \eta_1)(\cos \beta_1 l + j \sin \beta_1 l) + (\eta_2 - \eta_1)(\cos \beta_1 l - j \sin \beta_1 l)}{(\eta_2 + \eta_1)(\cos \beta_1 l + j \sin \beta_1 l) - (\eta_2 - \eta_1)(\cos \beta_1 l - j \sin \beta_1 l)}$$

حاصل ہوتا ہے جسے باآسانی یوں

$$(10.94) \quad \eta داغلی = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

جب η_2 اور η_1 برابر ہوں تب داخلی قدرتی رکاوٹ $\eta داغلی$ پہلے خطے کی قدرتی رکاوٹ η_1 کے برابر ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں انعکاس پیدا نہیں ہوتی اور ترسیلی نظام **ہم رکاوٹی**⁶⁵ کہلاتا ہے۔ ہم رکاوٹی نظام میں انعکاس کے غیر موجودگی کی بنا تو انائی ایک ہی سمت میں منتقل ہوتی ہے۔ اگر دوسرا خطہ کامل موصل ہو تب $\eta_2 = 0$ ہوگا۔ ایسی صورت میں

$$(10.95) \quad \eta داغلی = j\eta_1 \tan \beta_1 l \quad (\eta_2 = 0)$$

ہوگا لہذا ان مقامات پر جہاں $E_{xs1} = 0$ ہو، یعنی جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو، داخلی قدرتی رکاوٹ صفر کے برابر ہوگی جبکہ ان مقامات پر جہاں $H_{ys1} = 0$ ہو وہاں داخلی قدرتی رکاوٹ لامحدود ہوگی۔

مساوات 10.94 ترسیلی نظام پر غور کرنے کے لئے انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha^{64}$$

matched⁶⁵

اس باب کے آخر میں ریڈار اینٹینا کو موسمی اثرات سے بچانے کی خاطر استعمال کئے جانے والی ایسی تہہ کی بات کرتے ہیں جو ریڈار کے شعاعوں کے لئے بالکل شفاف ثابت ہوتی ہے۔ یہ تہہ عموماً اینٹینا پر گنبد کی شکل میں ہوتی ہے۔ شکل 10.10 میں ریڈار اینٹینا $l = -1$ کے بائیں جانب خلاء میں ہے جبکہ $z = 0$ تا $z = -l$ خطے میں حفاظتی تہہ ہے۔ یوں $z = 0$ کے دائیں جانب خلاء ہے جس میں ریڈار اشارات بھیجتا ہے۔ خلاء کی قدرتی رکاوٹ 377Ω ہوتی ہے۔ ذو برق کی بنی حفاظتی تہہ کی موٹائی زیادہ نہیں رکھی جاتی تاکہ اس میں طاقت کا ضیاع کم سے کم ہو۔ حفاظتی تہہ سے انعکاس قابل قبول نہیں چونکہ اس طرح ریڈار کے امواج واپس اینٹینا کی طرف لوٹیں گے۔ ہم چاہتے ہیں کہ اینٹینا، دائیں جانب کے پورے نظام کے لئے ہم رکاوٹی ہو۔ ایسا تب ہوگا جب $\eta_2 = \eta_1$ ، یعنی

$$377 = \eta_1 \frac{377 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j377 \tan \beta_1 l}$$

یا

$$j377^2 \tan \beta_1 l = j\eta_1^2 \tan \beta_1 l$$

اب تمام غیر مقناطیسی اشیاء کی $377 < \eta_1$ ہے لہذا اس مساوات پر پورا صرف اس صورت اتر جاسکتا ہے جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو۔ کم سے کم موٹائی یوں $n = 1$ کی صورت میں $l = \frac{\lambda_1}{2}$ یعنی $l = \frac{\pi}{\beta_1}$ حاصل ہوتی ہے۔ اگر ریڈار 10 GHz کی شعاعیں پیدا کرتا ہو تب ہم حفاظتی تہہ کو کم ضیاع اور ہلکے وزن کے ایسے پلاسٹک سے بنا سکتے ہیں جس کا $\epsilon_R = 2.25$ ہے۔ ہمیں تہہ کی موٹائی

$$l = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{v_1}{2f_1} = \frac{3 \times 10^8}{2\sqrt{2.25} \times 10^{10}} = 1 \text{ cm}$$

رکھنی ہوگی۔

اگر 10 GHz پر چلنے والے ریڈار پر چڑھائی حفاظتی تہہ کی موٹائی 0.5 cm کر دی جائے تب $\beta_1 = 314.2$ اور $\eta_1 = 251.33$ لیتے ہوئے

$$\eta_{\text{داخلی}} = 251.33 \times \frac{377 + j251.33 \tan(314.2 \times 0.005)}{251.33 + j377 \tan(314.2 \times 0.005)} \\ \approx 167.6 \Omega$$

ہوگی۔ یوں شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{167.6 - 377}{167.6 + 377} = -0.3845$$

ہوگا اور انعکاسی طاقت کی فی صد شرح

$$\frac{\left(\frac{E_{x10}^-}{2\eta_0}\right)^2}{\left(\frac{E_{x10}^+}{2\eta_0}\right)^2} \times 100 = |\Gamma|^2 \times 100 = 14.78 \%$$

ہوگی۔

مشق 10.7: دو خطے آپس میں $z = 0$ پر ملتے ہیں۔ سرحد کے بائیں جانب پہلا خطہ ہے جس کے مستقل $\epsilon_{R1} = 5$ ، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں۔ دوسری جانب مستقل $\epsilon_{R2} = 2$ ، $\mu_{R2} = 10$ اور $\sigma_2 = 0$ ہیں۔ پہلے خطے میں s حاصل کریں۔ دوسرے خطے میں s حاصل کریں اور آخر میں $z = -0.6 \text{ cm}$ پر داخلی η حاصل کریں۔

جوابات: 5 ، 1 اور $-61.8^\circ/86.9$

the answers should be at the end of the book
 include the DC switch on case as multiple reflections before settling down
 read chapter 9 onwards (proof reading)
 put comsat's time table here.
 energy travels along the wire and not in the wire.
 antenna chapter, 3D figure at start and complete the start section.
 house completion certificate.
 zaryab's tooth
 zaryab fish
 $F = \frac{dW}{dT}$ to include in inductance chapter plus a question or two
 magnetization curve and an iteration example. fig 8.10, 11 of hayt.
 charge is barqi bar.
 add questions to machine book too.
 take print outs for myself.

4456

4457

when giving fields always remember the following rules:
 always ensure that divergence of magnetic field is zero.
 moving waves must be of the form $E = E_0 \cos(\omega t - kz)$ where $c = (\mu * \epsilon)^{-0.5}$ and $k = 2 * \pi / \lambda$
 include complex permittivity (7th ed Q12.18 says $\sigma = \omega \epsilon''$)
 include 4th ed fig 11.11 of page 422
 rename lossless and lossy dielectrics as

الباب 16

سوالات

مستوی امواج

سوال 16.1: خالی خلاء میں \mathbf{a}_z سمت میں حرکت کرتی، 600 MHz تعدد کے مستوی برقی موج \mathbf{E} کی چوٹی لمحہ $t = 1 \text{ ns}$ پر $z = 0.3 \text{ m}$ پر پائی جاتی ہے۔ یہ چوٹی $310 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ کے برابر ہے۔ الف) برقی میدان \mathbf{a}_x سمت میں ہونے کی صورت میں سائن نما \mathbf{E} اور \mathbf{H} امواج کے مساوات لکھیں۔ ب) میدان سمتیہ $5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y$ کی سمت میں ہونے کی صورت میں سائن نما \mathbf{E}_s اور \mathbf{H}_s امواج کی مساوات لکھیں۔

جواب: $\mathbf{E} = 310\mathbf{a}_x \cos(12\pi \times 10^8 t - 4\pi z)$ ، $\mathbf{H} = \frac{31}{12\pi} \mathbf{a}_y \cos(12\pi \times 10^8 t - 4\pi z)$ ،
 $\mathbf{E}_s = 310 \left[\frac{5}{\sqrt{29}} \mathbf{a}_x - \frac{2}{\sqrt{29}} \mathbf{a}_y \right] e^{-j4\pi z}$ ، $\mathbf{H}_s = \frac{31}{12\pi} \left[\frac{2}{\sqrt{29}} \mathbf{a}_x + \frac{5}{\sqrt{29}} \mathbf{a}_y \right] e^{-j4\pi z}$

سوال 16.2: خالی خلاء میں نقطہ $N(3, -2, 5)$ پر \mathbf{a}_z جانب حرکت کرتی، 200 MHz تعدد کے برقی میدان کی سائن نما مستوی موج کی چوٹی لمحہ $t = 0$ پر $\mathbf{E}_0 = 150\mathbf{a}_x + 210\mathbf{a}_y \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔ الف) λ ، β ، \mathbf{a}_E ، \mathbf{a}_H ، H_0 اور مقناطیسی موج \mathbf{H}_s حاصل کریں۔ ب) لمحہ $t = 0$ پر نقطہ N پر برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔ پ) لمحہ $t = 1.5 \text{ ns}$ پر نقطہ N پر برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔ ت) نقطہ $P(5, 3, 7)$ پر لمحہ $t = 2 \text{ ns}$ پر برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔

جوابات: $\lambda = \frac{3}{2} \text{ m}$ ، $\beta = 4.2 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\mathbf{a}_E = 0.51\mathbf{a}_x + 0.86\mathbf{a}_y$ ، $\mathbf{a}_H = -0.86\mathbf{a}_x + 0.51\mathbf{a}_y$ ،
 $H_0 = 0.7733 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $\mathbf{H}_s = 0.7733(-0.86\mathbf{a}_x + 0.51\mathbf{a}_y)e^{-j4.2z}$ ، $292 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $-90 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $266 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال 16.3: خالی خلاء میں مستوی موج $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_0 e^{-j6z}$ دی گئی ہے۔ الف) موج کی تعدد ω حاصل کریں۔ ب) برقی میدان کا محیطہ بالعموم $\mathbf{E}_0 = 50\mathbf{a}_x$ ، $\mathbf{E}_0 = (5 + j10)\mathbf{a}_x$ ، $\mathbf{E}_0 = 50\mathbf{a}_x + 80\mathbf{a}_y$ اور $\mathbf{E}_0 = (30/45^\circ)\mathbf{a}_x$ ہونے کی صورت میں لمحہ $t = 0$ پر نقطہ $N(0, 0, 0)$ پر $|\mathbf{E}|$ حاصل کریں۔

جوابات: $1.8 \frac{\text{Grad}}{\text{s}}$ ، $50 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $11.18 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $94.3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $11.18 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $21.2 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ،

سوال 16.4: خالی خلاء میں 350 MHz تعدد کی مستوی موج $\mathbf{E}_s = (5 + j2)(3\mathbf{a}_x - j4\mathbf{a}_y)e^{j\beta z} \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔ λ اور β کی قیمتیں دریافت کریں۔ لمحہ $t = 1.4 \text{ ns}$ پر نقطہ $z = 40 \text{ cm}$ پر \mathbf{E} حاصل کریں۔ موج کا محیطہ حاصل کریں۔

جواب: $\lambda = \frac{6}{7} \text{ m}$ ، $\beta = \frac{7\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\mathbf{E}(z = 40 \text{ cm}, t = 1.4 \text{ ns}) = 13.96\mathbf{a}_x - 10.84\mathbf{a}_y \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $26.9 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ بلندتر

سوال 16.5: ایسا خطہ جس کے مستقل $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 4.4$ اور $\sigma = 0$ ہیں میں بڑھتے x محدود کی جانب حرکت کرتی، 250 MHz تعدد کی مستوی برقی موج پائی جاتی ہے۔ برقی میدان \mathbf{a}_y سمت میں ہے۔ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ v_p ، β ، λ ، η ، \mathbf{E}_s ، \mathbf{H}_s اور اوسط \mathcal{P} ؛

جوابات: $E_0 = 10.99 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $v_p = 1.429 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $\beta = 10.99 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\lambda = 57.2 \text{ cm}$ ، $\eta = 179.6 \Omega$ ، $a_y = \frac{V}{m}$ ، $E_{\text{g488}} = E_0 e^{-j10.99x}$ ، $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{E_0^2}{359.2} a_x \frac{W}{m^2}$ ، $H_s = \frac{E_0}{179.6} e^{-j10.99x} a_z \frac{A}{m}$ ،

سوال 16.6: مستوی برقی موج $E = E_0 e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z) a_y \frac{V}{m}$ اور $\eta = |\eta_0| e^{j\phi}$ دئے گئے ہیں۔ الف) دوری سمتیات E_s اور H_{g490} حاصل کریں۔ ب) \mathcal{P} حاصل کریں۔

جوابات: $E_s = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z + \pi)} a_y \frac{V}{m}$ ، $H_s = -\frac{E_0}{|\eta_0|} e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z + \pi + \phi)} a_x \frac{A}{m}$ ، $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{E_0^2}{2|\eta_0|} e^{-2\alpha z} \cos \phi a_z \frac{W}{m^2}$ ،

سوال 16.7: خالی خلاء میں $E = (30a_y + 22a_z) \cos(\omega t - 60x) \frac{V}{m}$ پایا جاتا ہے۔ الف) λ اور ω حاصل کریں۔ ب) دوری سمتیات E_s اور H_s لکھیں۔ پ) \mathcal{P} حاصل کریں۔

جوابات: $\omega = 1.8 \times 10^{10} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ، $\lambda = \frac{\pi}{30} \text{ m}$ ، $E_s = (30a_y + 22a_z) e^{-j60x} \frac{V}{m}$ ، $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{173}{30\pi} a_x \frac{W}{m^2}$ ، $H_s = \frac{1}{120\pi} (-22a_y + 30a_z) e^{-j60x} \frac{A}{m}$

سوال 16.8: مستوی مقناطیسی موج کا دوری سمتیہ $H_s = (5a_x + j4a_z) e^{j20y} \frac{V}{m}$ اور تعدد 200 MHz ہے۔ برقی موج کا زیادہ سے زیادہ $\mathcal{P}_{\text{اوسط}}$ $1200 \frac{W}{m^2}$ ہے۔ حاصل کریں β ، λ ، η ، v_p ، ϵ_R ، μ_R اور $H(x, y, z, t)$ ؛

جوابات: $\beta = 20 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\lambda = \frac{\pi}{10} \text{ m}$ ، $\eta = 187.4 \Omega$ ، $v_p = 6.28 \times 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $\epsilon_R = 9.6$ ، $\mu_R = 2.4$ ، $H = 5 \cos(2\pi \times 200 \times 10^6 t + 20y) a_x - 4 \sin(2\pi \times 200 \times 10^6 t + 20y) a_z \frac{A}{m}$

سوال 16.9: میدان $E(y, t) = 700 \cos(2.5 \times 10^7 t - \beta y) a_x \frac{V}{m}$ اور $H(y, t) = 1.5 \cos(2.5 \times 10^7 t - \beta y) a_y \frac{A}{m}$ موج کو ظاہر کرتے ہیں۔ یہ موج $1.7 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔ حاصل کریں β ، λ ، η ، ϵ_R اور μ_R ؛

جوابات: $\beta = 0.147 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\lambda = 42.7 \text{ m}$ ، $\eta = 467 \Omega$ ، $\epsilon_R = 1.4$ ، $\mu_R = 2.2$

سوال 16.10: بے ضیاع خطے کے مستقل $\mu_R = 1.2$ اور $\epsilon_R = 5.4$ ہیں۔ لمحہ $t = 10 \text{ ns}$ پر نقطہ $N(2, 0.5, 1.5)$ پہ 15 MHz تعدد اور $E_x = 350 \frac{V}{m}$ ، $E_y = 0$ ، $E_z = 0$ کی خطی قطبی موج a_y سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ حاصل کریں β ، λ ، v_p اور $E(x, y, z, t)$ ، E_0 ،

جوابات: $\beta = 0.25\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\lambda = 7.85 \text{ m}$ ، $v_p = 1.18 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ، $E_0 = 408.6 \frac{V}{m}$ ، $E(x, y, z, t) = 408.6 \cos(3\pi \times 10^7 t - 0.25\pi y) a_x$

سوال 16.11: خطی قطبی موج $E_s = (E_{y0} a_y + E_{z0} a_z) e^{\alpha x} e^{j\beta x} \frac{V}{m}$ ایسے خطے میں پائی جاتی ہے جہاں $\eta = |\eta_0| e^{j\phi}$ ہے۔ H_s ، $E(x, y, z, t)$ اور $H(x, y, z, t)$ کے مساوات لکھیں۔

جوابات: $H_s = \frac{1}{|\eta_0|} (E_{z0} a_y - E_{y0} a_z) e^{\alpha x} e^{j(\beta x - \phi)} \frac{A}{m}$ ، $E(x, y, z, t) = (E_{y0} a_y + E_{z0} a_z) e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x) \frac{V}{m}$ ، $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2|\eta_0|} (E_{y0}^2 + E_{z0}^2) e^{2\alpha x} \cos \phi a_x \frac{W}{m^2}$ ، $H(x, y, z, t) = \frac{1}{|\eta_0|} (E_{z0} a_y - E_{y0} a_z) e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x - \phi) \frac{A}{m}$

سوال 16.12: کامل موصل سے بنی $\rho = 5 \text{ mm}$ اور $\rho = 12 \text{ mm}$ رداں کے نلکیوں کا محور Z محدود ہے۔ دو نلکیوں کے درمیان ذو برق کے مستقل $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 3.2$ ہیں۔ اس ذو برق میں میدان $E = \frac{1200}{\rho} \cos(\omega t - 5z) a_\rho \frac{V}{m}$ پایا جاتا ہے۔ الف) میکس ویل کے مساوات استعمال کرتے ہوئے ω حاصل کریں۔ ب) H کی مساوات حاصل کریں۔ پ) \mathcal{P} اور $\mathcal{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔ ت) دونوں نلکیوں کے درمیانی خطے میں a_z کی سمت کی توانی منتقل ہو رہی ہے۔

جوابات: $\omega = 8.38 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ، $H = \frac{5.7}{\rho} \cos(8.38 \times 10^8 t - 5z) a_\phi \frac{A}{m}$ ، $\mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{3418.6}{\rho^2} \frac{W}{m^2}$ ، $\mathcal{P} = \frac{6837}{\rho^2} \cos^2(8.38 \times 10^8 t - 5z) a_z \frac{W}{m^2}$ ، 2.5 MW

سوال 16.13: کروی محدود میں $E_s = \frac{60}{r} \sin \theta e^{-j2r} a_\theta \frac{V}{m}$ اور $H_s = \frac{1}{4\pi r} \sin \theta e^{-j2r} a_\phi \frac{A}{m}$ دیے گئے ہیں۔ الف) اوسط \mathcal{P} حاصل کریں۔ ب) رداس $r = 5 \text{ cm}$ پر سطح $0 < \phi < 2\pi$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ سے خارج طاقت حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } \mathcal{P}_{\text{اوسط}} = \frac{15 \sin^2 \theta}{2\pi r^2} a_r \frac{W}{m^2} , 3.13 \text{ W}$$

سوال 16.14: 12 GHz تعدد پر ایک فیراٹ کے مستقل $\mu_R = 5$ ، $\epsilon_R = 8$ اور $\sigma = 15 \frac{\text{mS}}{\text{m}}$ ہیں۔ آپ سے گزارش ہے کہ α ، β ، λ اور η حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } \eta = 297.83 + j0.418 \Omega , \lambda = 3.95 \text{ mm} , v = 4.74 \times 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} , \beta = 1590 \frac{\text{rad}}{\text{m}} , \alpha = 2.23 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$$

سوال 16.15: ایسے خطے کے مستقل μ_R ، ϵ_R اور σ حاصل کریں جس میں 100 MHz تعدد پر طول موج 1 m ، قدرتی رکاوٹ کی قیمت 200Ω اور تضعیفی مستقل $2 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$ ہو۔

$$\text{جوابات: } \sigma = 19.06 \frac{\text{mS}}{\text{m}} , \epsilon_R = 4.84 , \mu_R = 1.67$$

سوال 16.16: 330 MHz تعدد کی مستوی موج ایسے غیر مقناطیسی خطے میں حرکت کر رہی ہے جس کے مستقل $\epsilon_R = 2.8$ اور $\sigma = 3.6 \times 10^{-4}$ ہیں۔ الف) اس خطے کی σ حاصل کریں۔ ب) α ، β اور λ حاصل کریں۔ پ) موج کی چوٹی کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد آدھی رہ جائے گی؟ ت) موج کی طاقت کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد آدھا رہ جائے گا؟ ث) کتنے فاصلے پر موج کے زاویے میں 30° تبدیلی رونما ہو گی؟

$$\text{جوابات: } \sigma = 1.85 \times 10^{-5} \frac{\text{S}}{\text{m}} , \alpha = 0.04 \frac{\text{Np}}{\text{m}} , \beta = 11.57 \frac{\text{rad}}{\text{m}} , \lambda = 0.54 \text{ m} , 17.1 \text{ m} , 8.55 \text{ m} , 4.52 \text{ cm}$$

سوال 16.17: کیپسٹر C میں طاقت کے ضیاع کو کیپسٹر کے متوازی مزاحمت R سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایسے متوازی دور کی برقی رکاوٹ Z برقی رکاوٹ کے زاویہ θ کا کوسائن، یعنی $\cos \theta$ ، جزو ضربی طاقت کہلاتا ہے جبکہ کیپسٹر کی خاصیت Q سے مراد ωRC ہے۔ متوازی چادر کیپسٹرز جس کے مستقل σ ، ϵ اور μ ہیں کے جزو ضربی طاقت اور Q کے مساوات کو مماس ضیاع $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ استعمال کرتے ہوئے لکھیں۔

$$\text{جوابات: } Q = \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^{-1} , \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^{-2}}}$$

سوال 16.18: تانبے کی ہم محوری تار کے اندرونی تار کا رداس 5 mm اور بیرونی تار کا اندرونی رداس 8 mm ہیں۔ دونوں تار گہرائی جلد δ سے بہت زیادہ موٹائی رکھتے ہیں جبکہ دو برق ہے ضیاع ہے۔ 550 MHz تعدد پر فی میٹر اندرونی تار، فی میٹر بیرونی تار اور فی میٹر مکمل ترسیلی تار کی مزاحمت دریافت کریں۔ تانبے کے مستقل کتاب کے آخر میں جدول 16.1 سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

$$\text{جوابات: } 195 \frac{\text{m}\Omega}{\text{m}} , 122 \frac{\text{m}\Omega}{\text{m}} , 316 \frac{\text{m}\Omega}{\text{m}}$$

سوال 16.19: المونیم سے نلکی نما تار بنائی جاتی ہے جس کا اندرونی رداس 5 mm اور بیرونی رداس 6 mm ہیں۔ ایک کلو میٹر تار کی مزاحمت مندرجہ ذیل تعدد پر حاصل کریں۔ الف) یک سمتی رو۔ ب) 30 MHz پ) 1.2 GHz

$$\text{جوابات: } 758 \text{ m}\Omega , 46.7 \Omega , 295 \Omega$$

سوال 16.20: کھانا جلد گرم کرنے کی خاطر عموماً برقی **خرد موج چولہا**¹ (مائیکرو ویو اون) استعمال کیا جاتا ہے جو عموماً 2.45 GHz کے تعدد پر کام کرتا ہے۔ اس چولہے کے دیوار سٹینلس سٹیل کے بنے ہوتے ہیں۔ سٹینلس سٹیل کے مستقل $\frac{\text{S}}{\text{m}}$ $\sigma = 1.1 \times 10^6$ ، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 1$ لیتے ہوئے گہرائی جلد δ حاصل کریں۔ سٹینلس سٹیل چادر کی سطح پر $E_s = 64 \angle 0^\circ \frac{\text{V}}{\text{m}}$ لیتے ہوئے چادر کے اندر میدان کی مساوات لکھیں۔

$$\text{جوابات: } E_s(z) = 64 e^{-1.03 \times 10^{-7} z(1+j)} \frac{\text{V}}{\text{m}} , \delta = 9.69 \mu\text{m}$$

سوال 16.21: ایک غیر مقناطیسی موصل میں رفتار موج $4.5 \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ اور طول موج 0.25 mm ہے۔ تعدد f ، گہرائی جلد δ اور موصل کی مزاحمت σ حاصل کریں۔

جوابات: $\sigma = 8.89 \times 10^4 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ، $\delta = 39.8 \mu\text{m}$ ، $f = 1.8 \text{GHz}$

4551

سوال 16.22: برقی موج $E = \frac{270}{r} \sin \theta \cos[\omega(t - \frac{r}{c})] a_\theta \frac{\text{V}}{\text{m}}$ دی گئی ہے۔ رداس r کے کرہ سے کتنی طاقت خارج ہو رہی ہے۔

4552

جواب: 810W

4553

سوال 16.23: برقی موج $E_s = 3a_x - 5a_y + 2a_z \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ اور مقناطیسی موج $H_s = 14a_x + 13a_y - 16a_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ہیں۔ (الف) حرکت میں موج کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ (ب) موج کی اوسط کثافت طاقت حاصل کریں۔ (پ) $\mu_R = 1$ کی صورت میں ϵ_R حاصل کریں۔

4555

جوابات: $\epsilon_R = 2.32$ ، $71.7 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$ ، $a = 0.38a_x + 0.53a_y + 0.76a_z$

4556

سوال 16.24: خطہ $x < 0$ کے مستقل $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 1$ اور $\sigma = 1500 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں جبکہ $x > 0$ خالی خلاء ہے۔ خلاء میں نقطہ $N(0^+, 0, 0)$ پر مقناطیسی میدان $H = 300 \cos 5 \times 10^8 t a_y \frac{\text{A}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ (الف) نقطہ $(0^-, 0, 0)$ پر H حاصل کریں۔ (ب) خالی خلاء میں a_z سمت حرکت کرتی موج تصور کرتے ہوئے نقطہ $(0^+, 0, 0)$ پر E حاصل کریں۔ خطہ $z < 0$ میں $-a_x$ جانب حرکت کرتی موج تصور کرتے ہوئے نقطہ $(0^-, 0, 0)$ پر E حاصل کریں۔

4560

جوابات: $E_z = 238 \cos(5 \times 10^8 t - 45^\circ) a_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $E = 113 \cos 5 \times 10^8 t a_x \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ ، $H = 300 \cos 5 \times 10^8 t a_y \frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال 16.25: آمدی مستوی موج جس کی تعدد $\omega = 4.2 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ہے خطہ-1، $z < 0$ ، $\sigma_1 = 0$ ، $\mu_{R1} = 1$ ، $\epsilon_{R1} = 3.2$ سے خطہ-2، $z > 0$ ، $\sigma_2 = 0$ ، $\mu_{R2} = 2.6$ ، $\epsilon_{R2} = 12$ میں داخل ہوتی ہے۔ آمدی برقی موج کا حیطہ $z = 0$ ، $t = 0$ پر $5.6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ (الف) η_1 ، η_2 ، β_1 اور β_2 حاصل کریں۔ (ب) Γ اور τ حاصل کریں۔ (پ) $E_1(t)$ اور $E_2(t)$ حاصل کریں۔ (ت) $H_1(t)$ حاصل کریں۔ (ث) لمحہ $t = 4 \text{ns}$ پر نقطہ $(0, 0, -1.5)$ پر H_1 حاصل کریں۔

4565

جوابات: $\eta_1 = 211 \Omega$ ، $\eta_2 = 175 \Omega$ ، $\beta_1 = 2.5 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\beta_2 = 7.8 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\Gamma = -0.0913$ ، $\tau = 0.9087$ ، $E_2 = 5.09 \cos(4.2 \times 10^8 t - 7.8z) \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $E_1 = 5.6 \cos(4.2 \times 10^8 t - 2.5z) - 0.511 \cos(4.2 \times 10^8 t + 2.5z) \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $H_1 = 16.49 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$ ، $H_2 = 26.59 \cos(4.2 \times 10^8 t - 2.5z) + 2.43 \cos(4.2 \times 10^8 t + 2.5z) \frac{\text{mA}}{\text{m}}$

4568

سوال 16.26: تھیلیا بنانے والے پلاسٹک میں 14GHz تعدد کی مستوی موج a_x سمت میں حرکت کرتے ہوئے $x = 0.3 \text{cm}$ پر پائے جانے والے کامل موصل سطح سے انعکاس پذیر ہوتی ہے۔ (الف) وہ سطحیں دریافت کریں جن پر $E = 0$ ہو گا۔ (ب) اس پلاسٹک میں بلند تر برقی چوٹی اور بلند تر مقناطیسی چوٹی کی شرح حاصل کریں۔

4571

جوابات: $x = 0.3 - 0.71n \text{cm}$ جہاں $n = 0, 1, 2, \dots$ ہے ، $\eta = 251 \Omega$

4572

سوال 16.27: خطہ $z < 0$ خالی خلاء ہے جبکہ خطہ $z > 0$ کے مستقل $\epsilon = 30 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ، $\mu = 4.2 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$ اور $\sigma = 4.6 \frac{\text{mS}}{\text{m}}$ ہیں۔ (الف) α_1 اور β_1 حاصل کریں۔ (ب) انعکاسی مستقل حاصل کریں۔ (پ) انعکاسی موج E_{x1}^- کی مساوات حاصل کریں۔ (ت) ترسیلی موج E_{x2}^+ کی مساوات حاصل کریں۔

4575

جوابات: $\alpha_1 = 0$ ، $\beta_1 = 0.667 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ، $\Gamma = 0.176/111^\circ$ ، $E_{x1}^- = 59.8 \cos(2 \times 10^8 t + 0.667z + 111^\circ) \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $E_{x2}^+ = 324 \cos(2 \times 10^8 t - 2.39z + 9.9^\circ) \frac{\text{V}}{\text{m}}$

4577

سوال 16.28: المونیم کی سطح $y = 0$ پر خالی خلاء سے عمودی آمدی موج $E_{x1}^+ = E_{x10}^+ \cos(4 \times 10^8 t - \beta y) \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ آمدی طاقت کا کتنا فی صد سطح سے انعکاس پذیر ہوتا ہے۔

4579

جواب: 99.997%

4580

سوال 16.29: مستوی موج خطہ-1 سے خطہ-2 پر عمودی پڑتی ہے۔ ان خطوں کے مستقل $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ، $\epsilon_{R1} = \mu_{R1}^3$ اور $\epsilon_{R2} = \mu_{R2}^3$ ہیں۔ آمدی طاقت کا 40% سرحد سے واپس لوٹتا ہے۔ $\frac{\mu_{R2}}{\mu_{R1}}$ حاصل کریں۔

4582

جوابات: 0.225 اور 4.442

4583

سوال 16.30: خالی خلاء سے مستوی موج ضیاع کار خطہ $\sigma = 0.002 \frac{S}{m}$ ، $\epsilon_R = 8.2$ اور $\mu_R = 1.8$ پر عمودی پڑتی ہے۔ آمد موج کی تعداد 100 MHz اور کثافت طاقت $12 \frac{W}{m^2}$ ہے۔ الف) ابتدائی ترسیلی کثافت طاقت حاصل کریں۔ ب) ضیاع کار خطے میں کی قیمت حاصل کریں۔ پ) دو قطرے خطے میں کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد ترسیلی کثافت طاقت $0.2 \frac{W}{m^2}$ رہ جائے گی۔

4586

$$\text{جوابات: } 10.42 \frac{W}{m^2} , \alpha_2 = 0.1765 \frac{Np}{m} , 11.2 m$$

4587

سوال 16.31: خالی خلاء $Z < 0$ میں برقی موج $E_s = 100e^{-j15z}a_y + 28/30^\circ e^{j15z}a_y \frac{V}{m}$ پائی جاتی ہے۔ الف) موج کی تعدد حاصل کریں۔ ب) خطہ $Z > 0$ کی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ پ) دو خطوں کے سرحد کے قریب کس مقام پر برقی موج کی چوٹی پائی جاتی ہے؟

4589

$$\text{جوابات: } 715.7 \text{ MHz} , \eta = 585 + j178 , z = -1.75 \text{ cm}$$

4590

سوال 16.32: خطہ $Z < 0$ کے مستقل $\sigma_1 = 0$ ، $\mu_1 = 30 \frac{\mu H}{m}$ اور $\epsilon_1 = 120 \frac{pF}{m}$ میں جبکہ خطہ $Z > 0$ کے مستقل $\sigma_1 = 0.02 \frac{S}{m}$ ، $\mu_1 = 50 \frac{\mu H}{m}$ اور $\epsilon_1 = 260 \frac{pF}{m}$ ہیں۔ آمدی موج $E_s = 10e^{-\alpha_1 z} \cos(9 \times 10^8 t - \beta_1 z) \frac{V}{m}$ ہے۔ الف) α_1 اور β_1 حاصل کریں۔ ب) $\mathcal{P}_{1\text{اوسط}}^+$ اور $\mathcal{P}_{1\text{اوسط}}^-$ حاصل کریں۔ پ) $\mathcal{P}_{2\text{اوسط}}^+$ کی مساوات حاصل کریں۔

4593

$$\text{جوابات: } \alpha_1 = 0 \frac{Np}{m} , \beta_1 = 54 \frac{\text{rad}}{m} , \mathcal{P}_{1\text{اوسط}}^+ = 100a_z \frac{\text{mW}}{m^2} , \mathcal{P}_{1\text{اوسط}}^- = -0.486a_z \frac{\text{mW}}{m^2} , \mathcal{P}_{2\text{اوسط}}^+ = 99.514e^{-8.76z}a_z \frac{\text{mW}}{m^2}$$

4594

4595

سوال 16.33: خطہ $0 < Z < 1.5 m$ میں یہ ضیاع ذو برق پایا جاتا ہے جس کے مستقل $\sigma_2 = 0$ ، $\mu_{R2} = 1$ اور $\epsilon_{R2} = 6$ ہیں۔ اس خطے کو دونوں جانب خالی خلاء پائی جاتی ہے۔ مستوی موج جس کی تعدد $\omega = 6 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{m}$ ہے سرحد $Z = 0$ کی جانب a_z سمت میں حرکت کرتی رہی ہے۔ الف) ذو برق میں β_2 حاصل کرتے ہوئے سرحد $Z = 0$ پر داخلی η حاصل کریں۔ ب) خطہ $Z < 0$ میں Γ_1 اور s_1 حاصل کریں۔ پ) فوہر برقی میں $Z = 1.5 m$ پر سرحد سے منعکس موج کو استعمال کرتے ہوئے Γ_2 اور s_2 حاصل کریں۔ ت) خطہ $Z > 1.5 m$ میں s_3 حاصل کریں۔

4599

$$\text{جوابات: } \beta = 2 \frac{\text{rad}}{m} , \eta_{\text{داخلی}} = 77.69 - j66.76 \Omega , \Gamma_1 = -0.623 - j0.238 = 0.667e^{-j2.776} , \alpha_1 = 5 , s_3 = 1 , s_2 = 2.45 , \Gamma_2 = 0.42$$

4601

4602

جدول 16.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	مقطر پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوبا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمینیم
10^{-16}	پولیسٹرین پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 16.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیز
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 16.3 : μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 16.4 : اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	c	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

