1 # برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی

کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد

2 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 14

اینٹینا اور شعاعی اخراج

14.1 تعارف

14.2 تاخیری دباو

کسی بھی اخراج شعاع کے نظام میں موج کے ترسیل کے لئے درکار دورانیہ اہمیت رکھتا ہے۔یوں شکل 14.3 میں دکھائے تار میں برقی رو سے پیدا میدان کا اثر نقطہ N پر کچھ وقفے سے ہو گا۔ خالی خلاء میں یہ وقفہ موج کو تار سے نقطے تک پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے جہاں $c = 3 \times 10^8 \,\mathrm{m/s}$ خالی خلاء میں شعاع کی رفتار ہے۔یوں N کے نقطہ نظر سے تار میں برقی رو

$$I = I_0 \cos \omega t \tag{14.1}$$

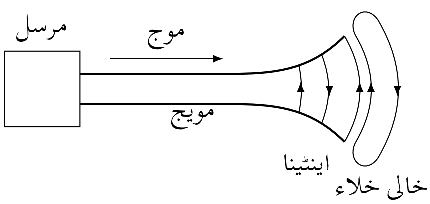
کی بجائے

$$[I] = I_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \tag{14.2}$$

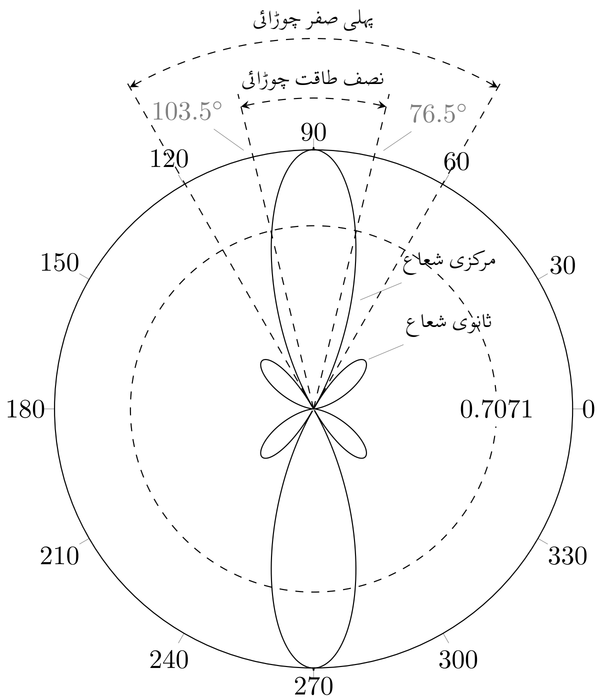
لکھی جا سکتی ہے جہاں $[I]$ تاخیری برقی رو[1] کہلاتی ہے۔تاخیری تفاعل کو چکور قوسین میں بند لکھا جاتا ہے۔تاخیری برقی رو لکھتے ہوئے وقت t کی جگہ تاخیری وقت ($t - \frac{r}{c}$) استعمال کیا جاتا ہے۔

مساوات 14.2 کہتا ہے کہ نقطہ N پر لمحہ t پر پیدا اثر، گزرے لمحے $(t - \frac{r}{c})$ پر تار میں برقی رو کا اثر ہے جہاں تار سے N تک فاصلہ r ہے۔تار سے N تک شعاع پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے۔

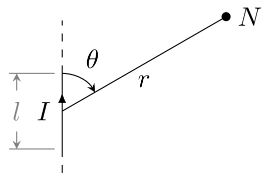
[1] retarded current



شکل 14.1: اینٹینا وہ عبوری خطہ ہے جہاں منضبط موج ترسیلی نظام سے نکل کر خلاء میں بطور آزاد موج خارج ہوتی ہے۔



شکل 14.2: اینٹینا کے شعاع کا نقش



شکل 14.3: برقی رو گزارتی تار کی چھوٹی لمبائی

گزشتہ بابوں میں امواج کی بات کرتے ہوئے $\cos(\omega t - \beta x)$ استعمال کیا گیا جس میں $c = \frac{\omega}{\beta}$ کے استعمال سے

$$\cos(\omega t - \beta x) = \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \tag{14.3}$$

لکھا جا سکتا ہے جو تاخیری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

مساوات 14.2 کی دوری سمتیہ شکل

$$[I] = I_0 e^{j\omega(t-r/c)} = I_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \tag{14.4}$$

ہے۔اسی طرح کثافت برقی رو کی تاخیری دوری سمتیہ شکل

$$[\boldsymbol{J}] = \boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)} = \boldsymbol{J}_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \tag{14.5}$$

ہو گی جسے استعمال کرتے ہوئے تاخیری مقناطیسی دباو

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{\mu}{4\pi}\int_h \frac{[\boldsymbol{J}]}{r}\,\mathrm{d}h = \frac{\mu}{4\pi}\int_h \frac{\boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r}\,\mathrm{d}h \tag{14.6}$$

لکھا جائے گا۔اسی طرح تاخیری حجمی کثافت چارج

$$[\rho_h] = \rho_0 e^{j\omega(t-r/c)} \tag{14.7}$$

لکھتے ہوئے تاخیری برقی دباو

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_h \frac{[\rho_h]}{r}\,\mathrm{d}h \tag{14.8}$$

لکھا جائے گا۔ باب-9 کے آخر میں مساوات 9.76 اور مساوات 9.75 کے بائیں ہاتھ کے تفاعل کو چکور قوسین میں لکھ کر موج کی رفتار c لیتے ہوئے اور فاصلے کو کروی محدد کے رداس r سے ظاہر کرنے سے یہی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

ہم یہاں اصل موضوع سے ہٹ کر ایک تکمل پر غور کرتے ہیں جو اس باب میں بار بار استعمال کیا جائے گا۔

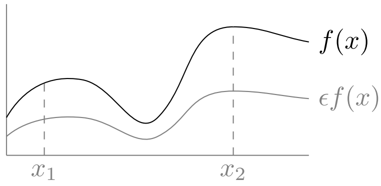
14.3 تکمل

شکل 14.4 میں تفاعل $f(x)$ دکھایا گیا ہے جس کا x_1 تا x_2 تکمل خط کے نیچے دو عمودی نقطہ دار لکیروں کے مابین رقبے کے برابر ہے۔اس رقبے کو K کہتے ہوئے

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = K \tag{14.9}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں $\frac{f(x)}{2}$ بھی دکھایا گیا ہے جسے $\epsilon f(x)$ لکھا گیا ہے جہاں $\epsilon = 0.5$ ہے۔چونکہ x_1 تا x_2 کے ہر نقطے پر تفاعل کی قیمت آدھی ہے لہٰذا ہلکی سیاہی کے خط کے نیچے رقبہ $\frac{K}{2}$ ہو گا لہٰذا

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{K}{2} = \epsilon K \tag{14.10}$$



شکل 14.4: تفاعل کا تکمل

لکھا جائے گا۔ اب فرض کریں کہ $\epsilon(x)$ مستقل نہیں ہے بلکہ اس کی قیمت x پر منحصر ہے۔ مزید یہ کہ $\epsilon(x)$ کی قیمت 0 تا ϵ ممکن ہے۔ ایسی صورت میں x_1 تا x_2 پر $\epsilon(x)f(x)$ کی قیمت 0 تا $\epsilon f(x)$ ممکن ہے لہٰذا $\epsilon(x)f(x)$ کا تکمل ϵK سے کم ہو گا یعنی

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x) f(x) \,\mathrm{d}x \leq \epsilon K \tag{14.11}$$

جہاں ہر جگہ $\epsilon(x) = 1$ کو بھی مد نظر رکھا گیا ہے۔ اگر $\epsilon \to 0$ ہو تب تکمل قابل نظر انداز

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x) f(x) \,\mathrm{d}x \to 0 \qquad (\epsilon \to 0) \tag{14.12}$$

4857 ہو گا۔

آئیں اب $\frac{f(x)}{1+\epsilon}$ کے تکمل

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{1+\epsilon} \,\mathrm{d}x \tag{14.13}$$

پر غور کریں جہاں $\epsilon \to 0$ کے برابر ہے۔ ہم

$$\frac{1}{1+\epsilon} = (1+\epsilon)^{-1} = 1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots \tag{14.14}$$

لکھ سکتے ہیں لہٰذا تکمل

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots\right) f(x) \,\mathrm{d}x \tag{14.15}$$

صورت اختیار کر لے گا۔ مساوات 14.12 کو استعمال کرتے ہوئے $\epsilon \to 0$ کی صورت میں اسے

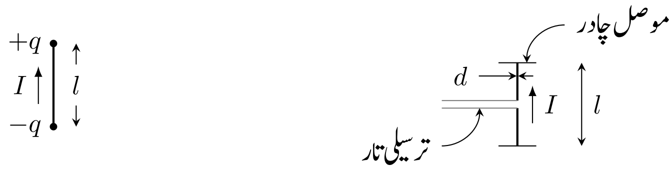
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{1+\epsilon} \,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots\right) f(x) \,\mathrm{d}x \approx \int_{x_1}^{x_2} f(x) \,\mathrm{d}x \tag{14.16}$$

4858 لکھا جا سکتا ہے جو K کے برابر ہے۔

4859 ## 14.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا

4860 مختصر لمبائی کے سیدھے موصل تار کو عموماً مختصر جفت قطب[2] کہا جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل گفتگو میں مختصر جفت قطب کی لمبائی محدود ہو گی۔ لا محدود حد تک کم لمبائی کی
4861 صورت میں اسے صغاری جفت قطب[3] کہا جائے گا۔

[2] short dipole
[3] infinitesimal



ب: جفت قطب بطور چھوٹی تار

الف: متوازن ترسیلی تار سے جفت قطب کو طاقت مہیا کی گئی ہے۔

شکل 14.5: جفت قطب

4862 خطی نوعیت کے کسی بھی اینٹینا کو متعدد تعداد کے سلسلہ وار جڑے مختصر جفت قطبوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے لہٰذا مختصر جفت قطب کی خاصیت جانتے ہوئے
4863 زیادہ لمبے جفت قطب یا مختلف انداز میں جڑے موصل تاروں کی خاصیت جاننے میں مدد ملے گی۔

آئیں شکل 14.5-الف میں دکھائے مختصر جفت قطب پر غور کریں جس کی لمبائی l طول موج سے بہت کم $\lambda \gg l$ ہے۔ جفت قطب کے سروں پر موصل چادر بطور کپیسٹر بوجھ کردار ادا کرتے ہیں۔ جفت قطب کی مختصر لمبائی اور اس کے سروں پر موصل چادر مل کر جفت قطب کی پوری لمبائی پر تقریباً برابر برقی رو رکھنے میں مدد دیتے ہیں۔ جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کو متوازن ترسیلی تار سے طاقت مہیا کی جا سکتی ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ ترسیلی تار سے شعاعی اخراج نہیں ہوتی، اس کے موجودگی کو نظرانداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کے سروں پر نسب موصل چادروں کے شعاعی اخراج کو بھی نظرانداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کی موٹائی d اس کے لمبائی سے بہت کم $\lambda \gg d$ ہے۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے تحلیلی تجزیے کی خاطر جفت قطب کو شکل 14.5-ب کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسا جفت قطب یکساں برقی رو I گزارتا، l لمبائی کا تار معلوم ہو گا جس کے دونوں سروں پر برابر مگر الٹ قطب کے چارج $\mp q$ ہوں۔ کپیسٹر پر چارج q اور برقی رو I کا تعلق

$$I = \frac{\partial q}{\partial t} \tag{14.17}$$

4864 ہے۔

4865 آئیں لامحدود وسعت کی خالی خلاء میں جفت قطب کے میدان حاصل کریں۔ جفت قطب کے وسط کو کروی محدد کے مرکز اور لمبائی کو z محدد پر رکھتے ہوئے آگے
4866 بڑھتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ N پر عموماً آپس میں عمودی تین میدان E_r، E_θ اور $E\phi$ پائے جائیں گے۔

کسی بھی نقطہ N پر مساوات 9.71 اور مساوات 9.73 بالترتیب مقناطیسی میدان اور برقی میدان دیتے ہیں

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{A} \tag{14.18}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{14.19}$$

4867 جہاں

4868 V نقطہ N پر مقداری برقی دباو

4869 $\boldsymbol{A}$ نقطہ N پر سمتی دباو

ہیں۔ اگر ہمیں کسی بھی نقطے پر مقداری دباو V اور سمتی دباو $\boldsymbol{A}$ معلوم ہوں تب مندرجہ بالا دو مساوات سے اس نقطے پر برقی اور مقناطیسی میدان حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ چونکہ ہمیں جفت قطب سے دور میدان درکار ہیں لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 14.6 اور مساوات 14.8 میں دئے تاخیری دباو قابل استعمال ہوں گے۔ یوں ان مساوات کو

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times [\boldsymbol{A}] \tag{14.20}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla [V] - \frac{\partial [\boldsymbol{A}]}{\partial t} = -\nabla [V] - j\omega [\boldsymbol{A}] \tag{14.21}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 9.59 اور مساوات 9.60 سے تاخیری دباو

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_h \frac{\boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r}\,\mathrm{d}h \tag{14.22}$$

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_h \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r}\,\mathrm{d}h \tag{14.23}$$

4870 لکھے جا سکتے ہیں۔

کسی بھی برقی چارج اور برقی رو سے پیدا میدان مساوات 14.20 اور مساوات 14.21 سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ مساوات 14.23 کے تحت تاخیری مقداری دباو $[V]$ صرف ساکن چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 14.22 کے تحت تاخیری سمتی دباو $[\boldsymbol{A}]$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے۔ مساوات 14.20 کے تحت مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 14.21 کے تحت برقی میدان $\boldsymbol{E}$ ساکن چارج اور برقی رو دونوں پر منحصر ہے۔ ہم جلد مساوات 14.46 میں دیکھیں گے کہ کسی بھی چارج اور برقی رو سے دور پیدا مقناطیسی اور برقی میدانوں کا دارومدار صرف برقی رو پر ہوتا ہے۔ چونکہ اس باب میں تاخیری دباو ہی استعمال کئے جائیں گے لہٰذا انہیں چکور قوسین میں لکھنے سے گریز کیا جائے گا۔ اس باب میں یہاں سے آگے بغیر چکور قوسین کے دباو کو
4876 تاخیری دباو ہی سمجھا جائے۔

شکل سے ظاہر ہے کہ سمتی دباو کا صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جزو

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{I_0 e^{j(\omega t-\beta s)}}{s}\,\mathrm{d}z \tag{14.24}$$

پایا جاتا ہے۔ اگر جفت قطب کی لمبائی l، نقطہ N سے جفت قطب تک فاصلہ r سے نہایت کم $r \gg l$ اور طول موج λ سے بھی نہایت کم $\lambda \gg l$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات میں متغیر فاصلہ s کی جگہ مستقل فاصلہ r پر کیا جا سکتا ہے[4] اور ساتھ ہی ساتھ l پر مختلف نقطوں سے N پر پیدا دباو میں زاویائی فرق کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح ان تمام کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔ جفت قطب کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 کی صورت میں I_0 کو بھی تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r} \tag{14.25}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو کروی محدد میں یوں

$$\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + A_\theta\boldsymbol{a}_\theta + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi$$

لکھا جائے گا جہاں

$$\begin{aligned}
A_r &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\cos\theta\\
A_\theta &= \boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\sin\theta\\
A_\phi &= \boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0
\end{aligned} \tag{14.26}$$

ہوں گے جہاں اکائی سمتیات کے مقداری ضرب صفحہ 32 پر جدول 1.2 سے حاصل کئے گئے۔ اس طرح

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\left(\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{14.27}$$

4877 لکھا جائے گا۔

[4]جیسے حصہ 14.3 میں دکھایا گیا ہے۔

ساکن چارج جفت قطب کے سروں پر پایا جاتا ہے لہٰذا مقداری دباو

$$V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{e^{j(\omega t-\beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t-\beta s_2)}}{s_2}\right] \tag{14.28}$$

ہو گا جہاں مساوات 14.17 کے تحت

$$q = \int I\,\mathrm{d}t = \frac{I}{j\omega} \tag{14.29}$$

کے برابر ہے جہاں

$$I = I_0 e^{j(\omega t-\beta s)}$$
$$q = q_0 e^{j(\omega t-\beta s)}$$

ہیں۔ مساوات 14.29 سے $q_0 = \frac{I_0}{j\omega}$ حاصل کرتے ہوئے مساوات 14.28 میں پر کرتے ہیں۔

$$V = \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega}\left[\frac{e^{j(\omega t-\beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t-\beta s_2)}}{s_2}\right] \tag{14.30}$$

شکل کو دیکھ کر

$$s_1 = r - \frac{l}{2}\cos\theta$$
$$s_2 = r + \frac{l}{2}\cos\theta$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں مساوات 14.30 میں پر کرتے

$$V = \frac{I_0 e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega}\left[\frac{(r+\frac{l}{2}\cos\theta)e^{j\frac{\beta l}{2}\cos\theta} - (r-\frac{l}{2}\cos\theta)e^{-j\frac{\beta l}{2}\cos\theta}}{r^2 - \frac{l^2}{4}\cos^2\theta}\right] \tag{14.31}$$

ملتا ہے۔ چکور قوسین میں شرح کے نچلے حصے میں $r \gg l$ کی وجہ سے $\frac{l^2}{4}\cos^2\theta$ کو نظر انداز کرتے ہیں۔ مسئلہ ڈی موے ور[5] کے استعمال سے

$$\begin{aligned} V = \frac{I_0 e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2}\Bigg[\left(r+\frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} + j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right) \\ - \left(r-\frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} - j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{14.32}$$

لکھا جائے گا۔ چونکہ $l \ll \lambda$ ہے لہٰذا

$$\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} = \cos\frac{\pi l\cos\theta}{\lambda} \approx l$$
$$\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2} \approx \frac{\beta l\cos\theta}{2}$$

ہوں گے، جنہیں مساوات 14.32 میں پر کرنے سے

$$V = \frac{I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2}\right) \tag{14.33}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

4878

[5] $(e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha)$ de Moivre's theorem

I_0 برقی رو کا حیطہ یعنی اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت، A

l جفت قطب کی لمبائی، m

ω زاویائی تعدد ($\omega = 2\pi f$)، اکائی rad/s۔ جہاں ہرٹز Hz میں تعدد f ہے

β زاویائی مستقل ($\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$)، اکائی rad/m

t وقت، s

θ جفت قطب اور جفت قطب سے نقطہ N تک سمتیہ کے مابین زاویہ

ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل، $8.854\,\mathrm{pF/m}$

c خالی خلاء میں شعاع کی رفتار، $3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

j خیالی عدد $\sqrt{-1}$

r جفت قطب کے وسط سے نقطہ N تک فاصلہ، m

ہیں۔

مختصر جفت قطب کے وسط سے، $\lambda \gg l$ اور $r \gg l$ کی صورت میں، r فاصلے اور θ زاویے پر مساوات 14.27 سمتی دباو اور مساوات 14.33 مقداری دباو دیتے ہیں۔ کروی محدد میں مقداری دباو کی ڈھلوان

$$\begin{aligned}
\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_{\phi} \\
&= \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 c}\left[-\left(\frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{2c\cos\theta}{j\omega r^3}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \left(\frac{\sin\theta}{r^2} + \frac{c\sin\theta}{j\omega r^3}\right)\boldsymbol{a}_{\theta}\right]
\end{aligned} \tag{14.34}$$

کے برابر ہے۔ برقی میدان $\boldsymbol{E} = E_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + E_\theta\boldsymbol{a}_\theta + E_\phi\boldsymbol{a}_\phi$ کے اجزاء مساوات 14.21 کی مدد سے

$$\begin{aligned}
E_r &= -j\omega A_r - \frac{\partial V}{\partial r} \\
E_\theta &= -j\omega A_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\
E_\phi &= -j\omega A_\phi - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں جن میں مطلوبہ تفاعل پر کرنے سے برقی میدان کے عمومی مساوات

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{I_0 l\cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right) \\
E_\theta &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right) \qquad \text{عمومی میدان} \\
E_\phi &= 0
\end{aligned} \tag{14.35}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مقناطیسی میدان مساوات 14.20 سے حاصل ہو گی۔ کروی محدد میں سمتی دباو کی گردش

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi \tag{14.36}$$

میں مساوات 14.26 پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی عمومی مساوات

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2}\right) \qquad \text{عمومی میدان} \\ H_r &= 0 \\ H_\theta &= 0 \end{aligned} \tag{14.37}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ کا استعمال کیا گیا۔ 4891

مساوات 14.35 اور مساوات 14.37 کے تحت جفت قطب سے پیدا میدان کے صرف تین اجزاء E_r، E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں۔ جفت قطب سے زیادہ فاصلے پر میدان کی مساوات میں ایسے اجزاء جن میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ پایا جاتا ہو کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ یوں E_r قابل نظرانداز ہو گا لٰہذا $E_r \approx 0$ تصور کیا جائے گا جبکہ

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\frac{j\omega}{c^2 r} = j\frac{30 I_0 \beta l}{r}\sin\theta e^{j(\omega t - \beta r)} \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi}\frac{j\omega}{cr} = j\frac{I_0 \beta l}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t - \beta r)} \qquad \text{دور میدان} \end{aligned} \tag{14.38}$$

ہوں گے۔ مساوات 14.38 استعمال کرتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7\,\Omega \tag{14.39}$$

حاصل ہوتی ہے جو خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ Z_0 ہے۔ 4892

یہاں اس حقیقت پر توجہ دیں کہ خالی خلاء میں TEM موج کی طرح، جفت قطب سے دور E_θ اور H_ϕ آپس میں ہم قدم ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں میدان $\sin\theta$ کے راست تناسب ہیں یعنی جفت قطب کے محوری سمت $\theta = 0°$ پر ان کی قیمت صفر جبکہ $\theta = 90°$ پر ان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے۔ اندرسہ[6] شکل کی 4894
ان میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ 4895

جفت قطب سے دور میدان حاصل کرتے وقت مساوات 14.35 اور مساوات 14.37 میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ رکھتے اجزاء کو نظرانداز کیا گیا یعنی E_θ میں

$$\begin{aligned} \left|j\frac{\omega}{c^2 r}\right| &\gg \frac{1}{cr^2} \\ \left|j\frac{\omega}{c^2 r}\right| &\gg \left|\frac{1}{j\omega r^3}\right| \end{aligned}$$

یا

$$r \gg \frac{c}{\omega} \tag{14.40}$$

[6] doughnut

تصور کیا گیا۔اسی طرح H_ϕ میں بھی

$$\left| j\frac{\omega}{cr} \right| \gg \frac{1}{r^2}$$

یا

$$r \gg \frac{c}{\omega} \tag{14.41}$$

تصور کیا گیا جسے

$$r \gg \frac{1}{\beta} \qquad (\text{دور میدان}) \tag{14.42}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ اگر جفت قطب کے قریب میدان کی بات کی جائے تو $r \ll \frac{c}{\omega}$ یعنی $r \ll \frac{1}{\beta}$ لیا جائے گا۔ یوں مساوات 14.35 اور مساوات 14.37 میں

$$\begin{aligned}
\frac{1}{cr^2} &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\
\left| \frac{j\omega}{c^2 r} \right| &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\
\frac{1}{cr^2} &\ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right| \\
\left| \frac{j\omega}{cr} \right| &\ll \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

ہوں گے لہٰذا قریبی میدان

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\
E_\theta &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\
H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi} \frac{1}{r^2} = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r^2} \qquad \text{قریبی میدان}
\end{aligned} \tag{14.43}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ کل قریبی برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = E_r \boldsymbol{a}_\mathrm{r} + E_\theta \boldsymbol{a}_\theta = \left[\frac{I_0 l \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{I_0 l \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \boldsymbol{a}_\theta \right] e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})} \tag{14.44}$$

ہو گا۔ مساوات 14.44 کے برقی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}$ پایا جاتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t-\beta r)}$ پایا جاتا ہے۔ یوں جفت قطب کے قریب کسی بھی نقطے پر ہر لمحہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان میں $\frac{\pi}{2}$ زاویے کا فرق پایا جاتا ہے جو ساکن میدان کی نشانی ہے۔

جفت قطب کے قریب برقی اور مقناطیسی میدان میں لمحاتی طور $\frac{\pi}{2}$ ریڈیئن کا زاویہ پایا جاتا ہے جبکہ جفت قطب سے دور دونوں میدان لمحاتی طور پر ہم قدم ہیں لہٰذا کسی درمیانے فاصلے پر ان میدانوں میں $45°$ کا زاویہ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جفت قطب سے فاصلہ بڑھانے سے برقی میدان وقت کی نسبت سے گھوم کر مقناطیسی میدان کے ہم قدم ہو جاتا ہے۔

مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.38 سے دور میدان میں کثافت توانائی

$$\boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \right]_{\text{حقیقی}} = \frac{1}{2} E_\theta H_\phi^* \boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \frac{15 I_0^2 \beta^2 l^2}{4\pi r^2} \sin^2\theta \boldsymbol{a}_\mathrm{r} \qquad \text{دور کثافت طاقت}$$

حاصل ہوتی ہے جو رداسی r سمت میں منتقل ہوتی حقیقی توانائی ہے۔یہی اینٹینا کی شعاعی اخراج ہے۔شعاعی اخراج $\theta = 90^\circ$ پر زیادہ سے زیادہ ہے۔اسی طرح پوئنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.43 سے قریبی میدان میں کثافت توانائی

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]_{\text{حقیقی}} &= \frac{1}{2}\left[\left(E_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + E_\theta\boldsymbol{a}_\theta\right)\times H_\phi^*\boldsymbol{a}_\phi\right]_{\text{حقیقی}} \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{I_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right]\frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2}e^{-j\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتی ہے جس کا بیشتر حصہ خیالی ہے اور ساتھ ہی ساتھ شعاعی اخراج کے علاوہ یہاں θ سمت میں گھومتی طاقت بھی پائی جاتی ہے۔

آئیں اب نہایت کم تعدد پر صورت حال دیکھیں۔مساوات 14.35 میں $I_0 = j\omega q_0$ پر کرتے ہوئے اور مساوات 14.37 کو جوں کا توں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{q_0 l\cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{cr^2}+\frac{1}{r^3}\right) \\
E_\theta &= \frac{q_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r}+\frac{j\omega}{cr^2}+\frac{1}{r^3}\right) \\
H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right)
\end{aligned}
$$

$\left|e^{-j\beta r}\right| = 1$ لیتے ہوئے، صفر کے قریب تر تعدد $\omega \to 0$ پر ان مساوات سے میدان کی حتمی قیمت

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{q_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \\
E_\theta &= \frac{q_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\
H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2} \qquad \text{نیم ساکن میدان}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتی ہیں جن سے برقی میدان

$$
\boldsymbol{E} = \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{14.45}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان میدان کو نیم ساکن میدان[7] کہا جاتا ہے۔یہ صفحہ 113 پر حاصل کی گئی مساوات 4.67 ہی ہے۔اسی طرح مندرجہ بالا مقناطیسی میدان H_ϕ کی قیمت صفحہ 200 پر مساوات 7.3 ہی ہے۔چونکہ یہ میدان $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ کے تعلق سے تبدیل ہوتے ہیں لہٰذا یہ جفت قطب کے قریب ہی پائے جاتے ہیں۔جفت قطب سے دور ان کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے لہٰذا ان کا شعاعی اخراج میں خاص کردار نہیں ہوتا۔بلند تعدد پر دور میدان جنہیں مساوات 14.38 پیش کرتی ہے، $\frac{1}{r}$ کے تعلق سے گھٹتی ہیں لہٰذا یہی شعاعی اخراج کو ظاہر کرتی ہیں اور یوں انہیں اخراجی میدان[8] کہا جاتا ہے۔

مختصر جفت قطب، $l \ll r$ اور $l \ll \lambda$، کے تمام میدان کو جدول 14.1 میں پیش کیا گیا ہے۔بقایا اجزاء $E_\phi = H_r = H_\theta = 0$ صفر کے برابر ہیں۔

مساوات 14.35 میں دیے E_θ میں $\frac{1}{r^2}$ اور $\frac{1}{r^3}$ رکھنے والے اجزاء برقی دباو V کے پیدا کردہ ہیں جو دور میدان میں قابل نظر انداز ہوتے ہیں۔اگر ہماری دلچسپی صرف دور میدان میں ہو تب مطلوبہ میدان کو نہایت آسانی کے ساتھ صرف $\boldsymbol{A}$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 14.21 اور مساوات 14.26 سے

$$
E_\theta = -j\omega A_\theta = -j\omega\left(-\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\sin\theta\right) = j\frac{30 I_0\beta l}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.46}
$$

---

[7] quasi stationary fields
[8] radiation fields

جدول 14.1: مختصر جفت قطب کے میدان

جزو	عمومی مساوات	دور میدان	نیم ساکن میدان
E_r	$\frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right)$	0	$\frac{q_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$
E_θ	$\frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{c^2 r}+\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right)$	$\frac{j60\pi I_0\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{r}\frac{l}{\lambda}$	$\frac{q_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
H_ϕ	$\frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right)$	$\frac{jI_0\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2r}\frac{l}{\lambda}$	$\frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2}$

حاصل ہوتا ہے۔ مقناطیسی میدان H_ϕ کو مساوات 14.20 سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں $\frac{1}{r^2}$ اجزاء رد کئے جائیں گے۔ مقناطیسی میدان کو نسبتاً زیادہ آسانی سے، لامحدود خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ استعمال کرتے ہوئے

$$H_\phi = \frac{E_\theta}{Z_0} = j\frac{30 I_0 \beta l}{120\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} = j\frac{I_0\beta l}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.47}$$

سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ دور میدان کا دارومدار جفت قطب کے چارج q_0 پر ہرگز نہیں لہٰذا ان چارج کا جاننا غیر ضروری ہے۔ کسی بھی اینٹینا کو متعدد مختصر جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں کسی بھی اینٹینا کے میدان تمام جفت قطب کے میدان کو جمع کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 14.38 میں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے دور برقی میدان کو

$$E_\theta = j \quad \underset{\text{مقدار}}{60\pi} \quad \underset{\text{رو}}{I_0} \quad \underset{\text{لمبائی}}{\frac{l}{\lambda}} \quad \underset{\text{فاصلہ}}{\frac{1}{r}} \quad \underset{\text{شکل}}{\sin\theta} \quad \underset{\text{زاویہ}}{e^{j(\omega t-\beta r)}} \tag{14.48}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں 60π مساوات کا مستقل ہے، I_0 برقی رو، $\frac{l}{\lambda}$ جفت قطب کی لمبائی جسے طول موج میں ناپا گیا ہے، $\frac{1}{r}$ فاصلے کو ظاہر کرتا ہے، $\sin\theta$ میدان کا نقش اور $e^{j(\omega t-\beta r)}$ زاویائی فرق ہے۔ کسی بھی اینٹینا کے میدان کو عموماً ان چھ اجزاء کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

جدول 14.1 مختصر جفت قطب کے میدان دیتا ہے۔

14.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

اینٹینا کے گرد کسی بھی بند سطح پر مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} \tag{14.49}$$

کی سطحی تکمل

$$P = \int_S \mathscr{P}_{\text{اوسط}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad (\mathrm{W}) \tag{14.50}$$

کل شعاعی اخراج P دے گی۔ فی سیکنڈ خارج ہونے والی توانائی شعاعی اخراج کہلاتی ہے لہٰذا اس کی اکائی واٹ W ہے۔ سادہ ترین بند سطح کرہ ہے۔ یوں اینٹینا کو کروی محدد کے مرکز پر رکھتے ہوئے تکمل حاصل کیا جائے گا۔ چونکہ دور کے میدان نسبتاً سادہ صورت رکھتے ہیں لہٰذا بند سطح کا رداس جتنا زیادہ رکھا جائے تکمل اتنا آسان ہو گا۔ یوں رداس زیادہ سے زیادہ رکھتے ہوئے دور میدان استعمال کرتے ہوئے جفت قطب کا شعاعی اخراج P حاصل کیا جاتا ہے۔

کامل اینٹینا کی صورت میں شعاعی اخراج اس برقی طاقت کے برابر ہو گا جو اینٹینا کے برقی سروں پر مہیا کی گئی ہو۔ اینٹینا کو مزاحمت R تصور کرتے ہوئے اس برقی طاقت کو $P = \frac{1}{2} I_0^2 R$ لکھا جا سکتا ہے جہاں I_0 سائن نما برقی رو کا حیطہ ہے۔ یوں

$$R = \frac{2P}{I_0^2} \qquad (\Omega) \tag{14.51}$$

4916 لکھا جا سکتا ہے جہاں R اینٹینا کی اخراجی مزاحمت[9] کہلاتی ہے۔

آئیں مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں لہٰذا شعاعی اخراج

$$P = \frac{1}{2} \int_S \left[E_\theta H_\phi^* \right]_{\text{حقیقی}} \mathrm{d}s \tag{14.52}$$

سے حاصل ہو گی جہاں H_ϕ^* مقناطیسی میدان H_ϕ کا جوڑی دار مخلوط ہے۔ اب $E_\theta = Z_0 H_\phi$ ہے لہٰذا

$$P = \frac{1}{2} \int_S \left[H_\phi H_\phi^* Z_0 \right]_{\text{حقیقی}} \mathrm{d}s = \frac{Z_0}{2} \int_S \left| H_\phi \right|^2 \mathrm{d}s \tag{14.53}$$

یا

$$P = \frac{1}{2Z_0} \int_S \left| E_\phi \right|^2 \mathrm{d}s \tag{14.54}$$

4917 لکھا جا سکتا ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ اور $\mathrm{d}s = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$ کے برابر ہیں۔

جفت قطب کے میدان حاصل کرتے وقت فرض کیا گیا کہ اس کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 پائی جاتی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ لمبائی l کے مختلف نقطوں کے میدان کا زاویائی فرق نظر انداز کیا گیا۔ جفت قطب کی پوری لمبائی پر برابر برقی رو نہ ہونے کی صورت میں مساوات 14.24 سے مساوات 14.25 حاصل ہونے کی بجائے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \mu_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \int_{-l/2}^{l/2} i \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \mu_0 l I e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \end{aligned}$$

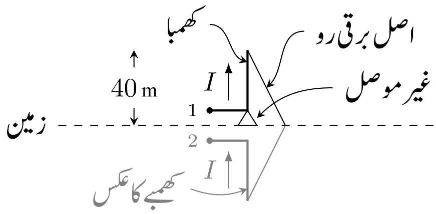
حاصل ہو گا جہاں I اوسط برقی رو ہے۔ اسی حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 14.38 سے مقناطیسی میدان کا حیطہ

$$H_\phi = \frac{I\beta l}{4\pi r} \sin\theta \tag{14.55}$$

لکھتے ہوئے I_0 کی جگہ اوسط برقی رو I لکھی گئی ہے۔ مقناطیسی میدان کے اس حیطے کو مساوات 14.53 میں پر کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ اخراجی طاقت

$$\begin{aligned} P &= \frac{120\pi}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{I\beta l}{4\pi r} \sin\theta \right)^2 r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{120\pi}{2} \left(\frac{\beta I l}{4\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \\ &= 80\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \end{aligned}$$

[9] radiation resistance



شکل 14.6: کھمبا اینٹینا

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 14.53 یا مساوات 14.54 برقی رو کی چوٹی I کی صورت میں اخراجی طاقت دیتے ہیں جو سائن نما برقی رو کی صورت میں اوسط اخراجی طاقت کے دگنا ہوتی ہے۔ یوں اوسط اخراجی طاقت

$$P_{\text{اوسط}} = 40\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{14.56}$$

ہو گی۔ مساوات 14.51 سے مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{I}{I_0}\right)^2 \qquad (\Omega) \tag{14.57}$$

حاصل ہوتی ہے۔

کسی بھی اینٹینا کی اخراجی مزاحمت

$$R = \frac{Z_0}{I_0^2} \int_S |H|^2 \, \mathrm{d}s = \frac{1}{Z_0 I_0^2} \int_S |E|^2 \, \mathrm{d}s \tag{14.58}$$

سے حاصل کی جا سکتی ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ کے برابر ہے۔

مثال 14.1: چالیس میٹر لمبے کھمبے اینٹینا کو موصل سطح پر کھڑا کئے $300\,\mathrm{kHz}$ کے تعدد پر استعمال کیا جاتا ہے۔ اسے برقی اشارہ نچلے سرے پر فراہم کیا جاتا ہے۔ اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ اس کھمبے کو شکل 14.6 میں دکھایا گیا ہے۔ کھمبے کو غیر موصل بنیاد پر کھڑا کیا گیا ہے۔

حل: موصل زمین میں کھمبا اینٹینا کا عکس بنتا ہے۔ درکار تعدد پر $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{300000} = 1000\,\mathrm{m}$ ہے جو کھمبے کی لمبائی سے بہت زیادہ ہے۔ یوں اینٹینا اور اس کا عکس بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں۔ چونکہ کھمبے کے سر پر موصل چادر نسب نہیں کیا گیا ہے لہٰذا اس کے پورے لمبائی پر برابر برقی رو تصور کرنا غلط ہو گا۔ حقیقت میں، جیسے شکل میں وضاحت کی گئی ہے، کھمبے کے کھلے سر پر برقی رو صفر ہو گی جبکہ نچلے سر پر اس کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، برقی رو بالمقابل لمبائی l کا خط تکونی ہے۔ یوں اوسطاً برقی رو $I_{\text{اوسط}} = \frac{I_0}{2}$ ہو گی جہاں برقی رو کی زیادہ سے زیادہ قیمت I_0 ہے۔

یوں 40×2 میٹر لمبے فرضی جفت قطب کی اخراجی مزاحمت مساوات 14.57 سے

$$80\pi^2 \left(\frac{2\times 40}{1000}\right)^2 \left(\frac{0.5 I_0}{I_0}\right)^2 = 1.2633\,\Omega$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مزاحمت حقیقی کھمبے کے سر 1 اور عکسی کھمبے کے سر 2 کے مابین ہے۔ یوں اصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت جو زمین اور 1 کے مابین ناپی جائے گی کی قیمت

$$R_{\text{اخراجی}} = \frac{0.63165}{2} = 0.63\,\Omega \tag{14.59}$$

ہو گی۔

حقیقی دھات کامل موصل نہیں ہوتے لہٰذا کسی بھی دھات سے بنائے گئے جفت قطب میں توانائی کا ضیاع ہو گا۔ موصل کے علاوہ اینٹینا کے ساتھ منسلک ذو برق میں بھی طاقت کا ضیاع ہو گا۔ ان ضیاع کو مزاحمت ضیائی R سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ یوں اینٹینا کے برقی سروں پر کل مزاحمت

$$R = R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیائی}} \tag{14.60}$$

ہو گی۔ مندرجہ بالا مثال میں اگر $R_{\text{ضیائی}} = 0.63\,\Omega$ ہو تا تب اینٹینا کی کارکزاری[10] k

$$k = \frac{\text{اخراجی طاقت}}{\text{داخلی طاقت}} = \frac{R_{\text{اخراجی}}}{R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیائی}}}\frac{0.63}{0.63 + 0.63} = 50\,\% \tag{14.61}$$

پچاس فی صد ہو گی۔ اگر طاقت کا ضیاع بڑھائے بغیر زیادہ لمبائی کا جفت قطب استعمال کیا جائے تو کارکزاری اس سے بہتر کی جا سکتی ہے۔

اگر مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ کا حقیقی حصہ لئے بغیر کسی اینٹینا کو مکمل گھیرے سطح پر اس کا تکمل لیا جائے تو حقیقی طاقت کے ساتھ ساتھ خیالی طاقت بھی حاصل ہو گا۔ حقیقی طاقت اخراجی طاقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ خیالی طاقت متعامل جزو ہے۔ سطح تکمل کی صورت اور مقام کا تکمل کے حقیقی جزو پر کوئی اثر نہیں البتہ خیالی طاقت کا دارومدار سطح کی صورت اور مقام پر ہے۔ اینٹینا سے بہت دور خیالی جزو قابل نظر انداز ہوتا ہے جبکہ اینٹینا کے قریب اس جزو کی مقدار بڑھ جاتی ہے۔ نہایت پتلی ساخت کے خطی اینٹینا کی صورت میں اگر سطح تکمل کو بالکل سطح اینٹینا کے ساتھ ملا لیا جائے تب حاصل مخلوط طاقت تقسیم I_0^2 رکاوٹ $R + jX$ دیتا ہے جہاں R اینٹینا کے اخراجی مزاحمت کو ظاہر کرتا ہے۔

14.6 ٹھوس زاویہ

اگلے حصے میں ٹھوس زاویہ[11] درکار ہو گا لہٰذا اسے پہلے سمجھتے ہیں۔

شکل 14.7-الف میں رداس r کے دائرے پر قوس کی لمبائی l اور رداس r کی شرح

$$\theta = \frac{l}{r} \qquad (\text{rad}) \tag{14.62}$$

زاویے θ دیتی ہے جس کی اکائی ریڈیئن[12] (rad) ہے۔ یوں اکائی رداس کے دائرے پر اکائی لمبی قوس، دائرے کے مرکز پر، ایک ریڈیئن $(1\,\text{rad})$ کا زاویہ بنائے گی۔ یہی اکائی ریڈیئن کی تعریف ہے۔ چونکہ دائرے کا محیط $2\pi r$ ہے لہٰذا دائرے کے گرد ایک مکمل چکر 2π ریڈیئن کے زاویے کو ظاہر کرتی ہے۔ اگرچہ مساوات 14.62 کے تحت θ دراصل بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی ریڈیئن میں ناپتے ہیں۔ یوں $x\,\text{rad}$ سے ظاہر ہوتا ہے کہ x زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

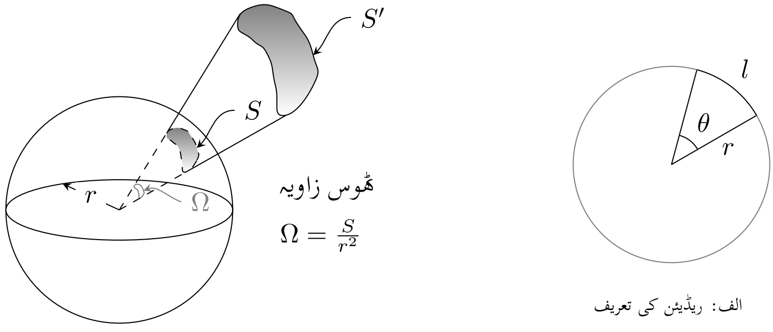
بالکل اسی طرح رداس r کے کرہ کی سطح پر کسی بھی رقبہ S اور کرہ کے رداس کے مربع r^2 کی شرح

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \qquad (\text{sr}) \tag{14.63}$$

ٹھوس زاویہ Ω دیتی ہے جسے مربع ریڈیئن یعنی سٹریڈیئن[13] (sr) میں ناپا جاتا ہے۔ اکائی رداس کے کرہ پر اکائی رقبہ، کرہ کے مرکز پر، ایک سٹریڈیئن کا ٹھوس زاویہ بنائے گی۔ یہی سٹریڈیئن کی تعریف ہے۔ چونکہ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہٰذا پوری کرہ 4π سٹریڈیئن کا ٹھوس زاویہ دیتی ہے۔ اگرچہ ٹھوس زاویہ بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی سٹریڈیئن میں ناپتے ہیں۔ یوں مختلف اعداد کی بات کرتے وقت یہ جاننا ممکن ہوتا ہے کہ ٹھوس زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

---

efficiency[10]
solid angle[11]
radian[12]
steradian[13]



الف: ریڈیئن کی تعریف

ب: سٹریڈیئن کی تعریف

شکل 14.7: ریڈیئن اور سٹریڈیئن کی تعریف

شکل 14.7-ب میں عمومی رقبہ S' کا محدد کے مرکز پر ٹھوس زاویہ حاصل کرنے کا طریقہ دکھایا گیا ہے۔ مرکز سے دیکھتے ہوئے S' کا بیرونی خاکہ نظر آئے گا۔ اگر اس خاکے کے بیرونی کناروں سے مرکز تک ربڑی چادر کھینچ کر لگائی جائے تو یہ چادر رداس r کے کرہ کو کاٹے گی۔ کرہ کی سطح پر یوں رقبہ S گھیرا جائے گا۔ ٹھوس زاویے

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \tag{14.64}$$

کے برابر ہو گا۔ اکائی رداس کے کرہ کی صورت میں رقبہ S کی قیمت ٹھوس زاویے کی قیمت کے برابر ہو گی۔ 4944

شکل 14.7-الف میں θ نظارے کے حدود کو ظاہر کرتا ہے۔ اسی طرح شکل 14.7-ب میں Ω نظارے کے حدود تعین کرتا ہے۔ 4945

شکل 14.7-الف میں دکھایا گیا زاویہ سطحی نوعیت کا ہے جسے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔ اس کے برعکس شکل 14.7-ب میں دکھایا گیا زاویہ حجمی نوعیت کا ہے جسے سٹریڈیئن یا ریڈیئن کے مربع میں ناپا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ ایک مربع ریڈیئن کو ہی ایک سٹریڈیئن کہتے ہیں۔

$$1\,\text{sr} = 1\,\text{rad}^2 \tag{14.65}$$

کروی محدد میں r رداس کے کرہ کی سطح پر رقبے کو

$$S = \int_\theta \int_\phi r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \tag{14.66}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ رقبہ کرہ کے مرکز پر

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = \int_\theta \int_\phi \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \qquad (\text{sr}) \tag{14.67}$$

ٹھوس زاویہ بنائے گی۔ 4946

14.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش 4947

مختصر جفت قطب کے دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں جنہیں مساوات 14.38 میں پیش کیا گیا ہے۔ کسی بھی اینٹینا کی طرح اس کے دور میدان $\frac{1}{r}$ کی شرح سے گھٹتے ہیں لہٰذا پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} = \frac{Z_0}{2}|H|^2\,\boldsymbol{a}_\text{r} = \frac{1}{2Z_0}|E|^2\,\boldsymbol{a}_\text{r} \tag{14.68}$$

$\frac{1}{r^2}$ کی شرح سے گھٹے گی۔ یوں پوئنٹنگ سمتیہ کے رداسی جزو کو r^2 سے ضرب دینے سے $P(\theta,\phi)$

$$P(\theta,\phi)=r^2\mathscr{P}=\frac{Z_0}{2}\left|H\right|^2r^2=\frac{1}{2Z_0}\left|E\right|^2r^2\qquad(\mathrm{W/sr})\tag{14.69}$$

4948 حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت فاصلہ r بڑھانے سے نہیں گھٹتی۔ $P(\theta,\phi)$ اخراجی شدت[14] کہلاتی ہے۔ اخراجی شدت کے بُعد پر غور کریں۔ پوئنٹنگ سمتیہ طاقت
4949 کی کثافت یعنی طاقت فی رقبہ دیتی ہے۔ مساوات 14.63 سے رقبے کو $S=\Omega r^2$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں پوئنٹنگ سمتیہ ضرب مربع رداس کا بُعد طاقت فی ٹھوس
4950 زاویہ W/sr بنتی ہے۔

اخراجی شدت کو قابل پذیر[15] بنانے کی خاطر $P(\theta,\phi)$ کو اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت $P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}=r^2\mathscr{P}_{\text{بلند تر}}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$P_n(\theta,\phi)=\frac{P(\theta,\phi)}{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}\qquad\text{بے بُعد}\tag{14.70}$$

4951 بے بُعد[16] مقدار $P_n(\theta,\phi)$ حاصل ہوتی ہے جو اینٹینا کی قابل پذیر نقش طاقت[17] ہے۔

اینٹینا کی کل اخراج

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathscr{P}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\tag{14.71}$$

ہے۔ اگر کثافت طاقت $\mathscr{P}_{\text{بلند تر}}$ ہو تب اتنی اخراج مکمل کرہ کی سطح کے بجائے کرہ کی سطح پر رقبہ S سے خارج ہو گی یعنی

$$\mathscr{P}_{\text{بلند تر}}S=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathscr{P}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\tag{14.72}$$

ہو گا۔ اس میں مساوات 14.63 کی مدد سے کرہ کی سطح پر رقبے کو ٹھوس زاویے کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$\Omega_A=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathscr{P}r^2}{\mathscr{P}_{\text{بلند تر}}r^2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

یعنی

$$\Omega_A=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}P_n(\theta,\phi)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\iint_{4\pi}P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega\qquad(\mathrm{sr})\tag{14.73}$$

4952 حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے تحت Ω_A ٹھوس زاویے پر یکساں زیادہ سے زیادہ طاقت خارج کرتے ہوئے اینٹینا پوری طاقت خارج کر سکتی ہے۔ Ω_A کو اخراجی
4953 ٹھوس زاویہ[18] کہتے ہیں۔

مرکزی شعاع[19] پر تکمل

$$\Omega_M=\iint_{\text{مرکزی شعاع}}P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega\qquad(\mathrm{sr})\tag{14.74}$$

لیتے ہوئے مرکزی ٹھوس زاویہ[20] حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں ثانوی شعاع[21] کے ٹھوس زاویہ Ω_m کو اخراجی ٹھوس زاویے اور مرکزی ٹھوس زاویے کے فرق

$$\Omega_m=\Omega_A-\Omega_M\tag{14.75}$$

4954 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ غیر سمتی[22] اینٹینا ہر سمت میں برابر اخراج کرتی ہے لہٰذا ہر سمت میں اس کا $P_n(\theta,\phi)=1$ اور $\Omega_A=4\pi$ ہو گا۔

---

[14] radiation intensity
[15] normalized
[16] dimensionless
[17] normalized power pattern
[18] beam solid angle
[19] main lobe
[20] major lobe solid angle
[21] minor lobe
[22] isotropic

اینٹینا کی دوسری اہم خاصیت اس کی **سمتیت**[23] ہے۔ اخراجی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت اور اوسط اخراجی شدت کی شرح

$$D = \frac{\text{زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{اوسط اخراجی شدت}} = \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{P(\theta,\phi)_{\text{اوسط}}} \qquad \text{بے بُعد} \tag{14.76}$$

اس کی **سمتیت** کہلاتی ہے۔ کل اخراج W کو 4π سٹریڈیئن سے تقسیم کرنے سے اوسط اخراجی شدت $P(\theta,\phi)_{\text{اوسط}}$ حاصل ہوتی ہے جبکہ اخراجی شدت $P(\theta,\phi)$ کا 4π سٹریڈیئن پر تکمل لینے سے اینٹینا کی کل اخراج حاصل ہوتی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned}
D = \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{W/4\pi} &= \frac{4\pi P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{\underset{4\pi}{\iint} P(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \\
&= \frac{4\pi}{\underset{4\pi}{\iint} \frac{P(\theta,\phi)}{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}\,\mathrm{d}\Omega} \\
&= \frac{4\pi}{\underset{4\pi}{\iint} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega}
\end{aligned} \tag{14.77}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ مساوات 14.73 کے ساتھ موازنے کے بعد اسے

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \qquad \text{بے بُعد} \tag{14.78}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں اینٹینا کی سمتیت سے مراد، کرہ کا ٹھوس زاویہ 4π تقسیم اینٹینا کی اخراجی ٹھوس زاویہ Ω ہے۔ سمتیت اینٹینا کی ایک منفرد خاصیت ہے۔ مخصوص ٹھوس زاویے میں طاقت مرکوز کرنے کی صلاحیت کی ناپ سمتیت ہے۔ سمتیت جتنی زیادہ ہو گی اینٹینا اتنی کم ٹھوس زاویے میں طاقت کو مرکوز کر پائے گا۔

مثال 14.2: غیر سمتی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہٰذا اس کا $P_n(\theta,\phi) = 1$ اور $\Omega_A = 1$ ہوں گے۔ یوں

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} = 1 \tag{14.79}$$

حاصل ہو گا۔ کسی بھی اینٹینا کی یہ کم سے کم ممکنہ سمتیت ہے۔

مثال 14.3: مختصر جفت قطب کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.38 استعمال کرتے ہوئے تقابل پذیر نقش طاقت

$$P_n(\theta,\phi) = \frac{H_\phi^2(\theta,\phi)}{H_\phi^2(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}} = \sin^2\theta \tag{14.80}$$

---

[23] directivity

لکھی جا سکتی ہے۔ مساوات 14.73 سے

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \frac{8\pi}{3} \tag{14.81}$$

اور یوں مساوات سے

$$D = \frac{4\pi}{\Omega} = \frac{3}{2} \tag{14.82}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے مختصر جفت قطب کی زیادہ سے زیادہ اخراج $\frac{3}{2}$ گنا زیادہ ہے۔

سمتیت کا دار و مدار صرف اور صرف دور میدان کی نقش پر ہے۔ اس میں اینٹینا کی کار گزاری شامل نہیں ہے۔ اس کے بر عکس اینٹینا کی کار گزاری، اینٹینا کی افزائش طاقت یا **افزائش**[24] پر اثر انداز ہوتی ہے۔ اینٹینا کی افزائش سے مراد

$$\text{افزائش} = G = \frac{\text{آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{حوالہ اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}} \tag{14.83}$$

ہے جہاں دونوں اینٹینوں کی داخلی طاقت برابر ہے۔ کسی بھی اینٹینا کو بطور حوالہ اینٹینا لیا جا سکتا ہے۔ اگر ہم بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کو حوالہ تصور کریں تب

$$G_0 = \frac{P'_m}{P_0} \tag{14.84}$$

ہو گا جہاں

P'_m آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت،

P_0 بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کی اخراجی شدت

ہیں۔ یاد رہے کہ غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہٰذا اس کی زیادہ سے زیادہ شدت اور اوسط اخراجی شدت برابر ہوتے ہیں۔ آزمودہ اینٹینا کی اخراجی شدت P'_m اور کامل اینٹینا کی اخراجی شدت P_m کی شرح اینٹینا کی کار گزاری k دیتی ہے۔ یہ وہی k ہے جسے مساوات 14.61 میں بھی حاصل کیا گیا۔ یوں

$$G_0 = \frac{kP_m}{P_0} = kD \tag{14.85}$$

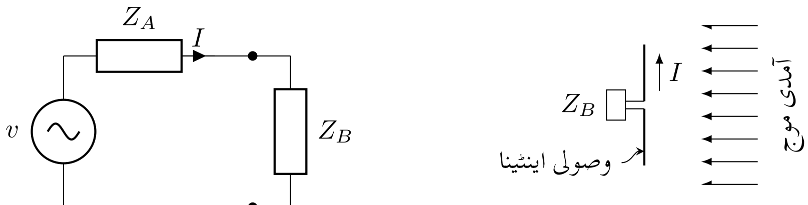
حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی کامل اینٹینا ($k = 100\,\%$) کی افزائش، کامل غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے، اسی اینٹینا کی سمتیت کے برابر ہوتی ہے۔ غیر کامل $k < 100\,\%$ اینٹینا کی صورت میں افزائش کی قیمت سمتیت سے کم ہو گی۔

سمتیت کی قیمت 1 تا ∞ ممکن ہے۔ سمتیت کی قیمت اکائی سے کم نہیں ہو سکتی۔ اس کے بر عکس افزائش کی قیمت صفر تا لا محدود ممکن ہے۔

$$\begin{aligned} 1 &\le D \le \infty \\ 0 &\le G \le \infty \qquad \text{ممکنہ قیمت} \end{aligned}$$

---

[24] gain



الف: آمدی موج میں تر وصولی اینٹینا

ب: اینٹینا کے ساتھ برقی رکاوٹ جوڑا گیا ہے

شکل 14.8: وصولی اینٹینا آمدی موج سے طاقت حاصل کر کے برقی رکاوٹ کو فراہم کرتی ہے۔

اخراجی اینٹینا[25] شعاعی اخراج کرتی ہے۔اس کے برعکس وصولی اینٹینا[26] شعاع سے طاقت وصول کرتی ہے۔ برقی ومقناطیسی امواج جب وصولی اینٹینا پر پہنچتے ہیں تو وصولی اینٹینا ان سے طاقت حاصل کرتی ہے۔ اگر اینٹینا کے برقی سروں پر بیرونی مزاحمت R_B نسب کی جائے تو حاصل کردہ طاقت کا کچھ حصہ اس مزاحمت میں ضائع ہو گا۔ ہم چونکہ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $W = I^2 R_B$ میں دلچسپی رکھتے ہیں لہٰذا اسی کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $I^2 R_B$ کے برابر طاقت آمدی موج کے رقبہ S میں پایا جاتا ہے۔یوں

$$\mathscr{P} S = I^2 R_B \tag{14.86}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ اینٹینے کا رقبہ S ہی ہے اور اینٹینا اتنے رقبے پر آمدی موج سے مکمل طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی برقی سروں تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔اس فرضی رقبے کو وصولی رقبہ[27] کہا جاتا ہے۔یوں وصولی رقبے کو

$$S = \frac{I^2 R_B}{\mathscr{P}} \tag{14.87}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں

S اینٹینا کا فرضی رقبہ، $\mathrm{m^2}$

I موثر برقی رو، A

$\mathscr{P}$ آمدی موج کا پوئنٹنگ سمتیہ، $\mathrm{W/m^2}$

R_L برقی مزاحمت، Ω

ہیں۔ حقیقت میں اینٹینا $I^2 R_B$ سے زیادہ طاقت حاصل کرتی ہے جس کا کچھ حصہ اینٹینا کے اندر ہی ضائع ہو جاتا ہے۔ ہمیں اینٹینا کے اندر ضائع ہونے والے طاقت سے کوئی دلچسپی نہیں ہے۔

شکل 14.8-الف میں آمدی موج میں تر اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بیرونی برقی رکاوٹ Z_B کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔اینٹینا کا تھونن[28] مساوی دور استعمال کرتے ہوئے، شکل-ب میں اسی کا مکمل برقی دور دکھایا گیا ہے۔اس دور میں سلسلہ وار برقی رو

$$I = \frac{v}{Z_A + Z_B} = \frac{v}{R_A + R_B + j(X_A + X_B)}$$

ہو گی جہاں

[25] transmitting antenna
[26] receiving antenna
[27] antenna aperture
[28] Thevenin equivalent circuit

v اینٹینا میں آمدی موج سے پیدا موثر برقی دباو،

R_A اینٹینا کے تھونن مساوی دور میں اینٹینا کی مزاحمت،

X_A تھونن دور میں اینٹینا کی متعاملیت،

R_B بیرونی مزاحمت،

X_B بیرونی متعاملیت

ہیں۔یوں بیرونی مزاحمت کو مہیا طاقت

$$|I|^2 R_B = \frac{v^2 R_B}{(R_A+R_B)^2+(X_A+X_B)^2} \tag{14.88}$$

ہو گا جس سے اینٹینے کا رقبہ وصولی

$$S = \frac{v^2 R_B}{\mathscr{P}\left[(R_A+R_B)^2+(X_A+X_B)^2\right]} \tag{14.89}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آمدی موج کی نسبت سے ایک مخصوص انداز میں رکھے ہوئے اینٹینا میں زیادہ سے زیادہ برقی دباو پیدا ہو گا۔اسی جگہ اینٹینا کو رکھتے ہوئے بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت اس صورت منتقل ہو گی جب

$$R_B = R_A \tag{14.90}$$

$$X_B = -X_A \tag{14.91}$$

ہوں۔بے ضیاع اینٹینا کی تھونن مزاحمت دراصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r ہی ہے۔اس طرح بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرتے وقت زیادہ سے زیادہ وصولی رقبہ

$$S_{\text{اخراجی}} = \frac{v^2}{4\mathscr{P} R_r} \tag{14.92}$$

حاصل ہو گا جسے اینٹینا کا **اخراجی رقبہ**[29] $S_{\text{اخراجی}}$ پکارا جاتا ہے۔ہر اینٹینا مخصوص قیمت کا **اخراجی رقبہ** رکھتا ہے۔

مثال 14.4: پورے مختصر جفت قطب پر یکساں برقی رو تصور کرتے ہوئے، اس کا اخراجی رقبہ حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.92 سے ظاہر ہے کہ اخراجی رقبہ دریافت کرنے کے لئے، اینٹینا میں پیدا برقی دباو v، اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r اور آمدی موج میں کثافت طاقت $\mathscr{P}$ درکار ہوں گے۔جفت قطب میں زیادہ سے زیادہ برقی دباو اس صورت پیدا ہو گی جب اینٹینا کی تار اور آمدی موج کا برقی میدان متوازی ہوں۔ایسی صورت میں اینٹینا میں

$$v = El \tag{14.93}$$

[29] effective aperture

برقی دباو پیدا ہو گی۔ آمدی موج کی پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P} = \frac{E^2}{Z_0} \qquad (\mathrm{W/m^2}) \tag{14.94}$$

ہے جہاں $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔ مساوات 14.57 میں $I = I_0$ پر کرنے سے موجودہ جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{14.95}$$

حاصل ہوتی ہے۔ ان تمام کو مساوات 14.92 میں پر کرتے ہوئے

$$S_{\text{اخراجی}} = \frac{E^2 l^2}{4\frac{E^2}{Z_0}80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2} = \frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0.119\lambda^2 \qquad (\mathrm{m^2}) \tag{14.96}$$

یوں کامل مختصر جفت قطب کی لمبائی جتنی بھی کم کیوں نہ ہو یہ ہر صورت $0.119\lambda^2$ اخراجی رقبے پر آمدی موج سے تمام طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی مزاحمت تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ حقیقی جفت قطب غیر کامل ہو گا لہٰذا اس کی مزاحمت $R_{\text{ضائع}} + R_{\text{اخراجی}}$ ہو گی۔ یوں کامل جفت قطب کا اخراجی رقبہ کچھ کم ہو گا۔

آئیں ایسے اینٹینا کی بات کریں جس کا اخراجی رقبہ $S_{\text{اخراجی}}$ اور اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A ہو۔ اخراجی رقبے پر یکساں برقی میدان E_m کی صورت میں اخراجی طاقت

$$P = \frac{E_m^2}{Z} S_{\text{اخراجی}} \tag{14.97}$$

ہو گا جہاں Z انتقالی خطے کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

اگر r فاصلے پر میدان E_r ہو تب اخراجی طاقت

$$P = \frac{E_r^2}{Z} r^2 \Omega_A \tag{14.98}$$

ہو گا۔

ہم آگے جا کر مساوات 14.154 حاصل کریں گے جس کے تحت $E_r = \frac{E_m S_{\text{اخراجی}}}{r\lambda}$ ہے۔ اس نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا دو مساوات کو برابر لکھتے ہوئے

$$\lambda^2 = S_{\text{اخراجی}} \Omega_A \qquad (\mathrm{m^2}) \tag{14.99}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

- λ طول موج،
- $S_{\text{اخراجی}}$ اینٹینا کا اخراجی رقبہ اور
- Ω_A اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ

ہیں۔اس مساوات کے تحت اینٹینا کا اخراجی رقبہ ضرب اخراجی ٹھوس زاویہ برابر ہوتا ہے طول موج کا مربع۔یوں اگر ہمیں اخراجی رقبہ معلوم ہو تب ہم اخراجی ٹھوس زاویہ حاصل کر سکتے ہیں اور اگر اخراجی ٹھوس زاویہ معلوم ہو تب اخراجی رقبہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 14.78 میں مساوات 14.99 پر کرنے سے

$$D=\frac{4\pi}{\lambda^2}S_{\text{اخراجی}} \tag{14.100}$$

لکھا جا سکتا ہے۔سمتیت کی یہ تیسری مساوات ہے۔تینوں کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\begin{aligned}D&=\frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{P_{\text{اوسط}}}\\D&=\frac{4\pi}{\Omega}\\D&=\frac{4\pi}{\lambda^2}S_{\text{اخراجی}}\end{aligned} \tag{14.101}$$

جہاں پہلی دو مساوات میں سمتیت اخراجی شعاع کے نقش سے حاصل کی گئی ہے جبکہ تیسری مساوات میں اسے اخراجی رقبے سے حاصل کیا گیا ہے۔

14.8 قطاری ترتیب

مسئلہ اینٹینا دراصل اینٹینا کے مختلف حصوں سے پیدا میدانوں کا درست مجموعہ حاصل کرنا ہے۔اینٹینا کے مختلف حصوں کے میدان جمع کرتے ہوئے ان کے انفرادی حیطے اور زاویائی فرق کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

14.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع

دو عدد نقطہ منبع کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔دونوں منبع غیر سمتی ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ d ہے۔نقطہ منبع سے مراد ایسی فرضی منبع ہے جس کا حجم صفر کے برابر ہو۔ہم آگے چل کر مسئلہ متکافیت[30] دیکھیں گے جس کے تحت نقطہ منبع کے قطاروں کا اخراجی نقش اور انہیں کا وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ دونوں منبع برابر حیطے اور ہم قدم میدان پیدا کرتے ہیں۔دونوں میدان کے خطی تقطیب ہیں۔مزید یہ کہ دونوں کے $\boldsymbol{E}$ میدان صفحے کے عمودی ہیں۔دونوں منبع سے برابر فاصلے پر ان کے بالکل درمیانے مقام پر زاویائی صفر تصور کرتے ہوئے، دور میدان کو

$$E=E_2e^{j\frac{\psi}{2}}+E_1e^{-j\frac{\psi}{2}} \tag{14.102}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\psi=\beta d\cos\theta=\frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta \tag{14.103}$$

ہے۔ان مساوات میں

[30] reciprocity

E_1 منبع-1 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان،

E_2 منبع-2 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان اور

ψ دونوں اشارات کا زاویہ θ کی سمت میں زاویائی فرق

ہیں۔ دونوں دور میدان برابر $(E_1 = E_2)$ ہونے کی صورت میں یوں

$$E = E_1 \left(e^{j\frac{\psi}{2}} + e^{-j\frac{\psi}{2}} \right) = 2E_1 \cos\frac{\psi}{2} \tag{14.104}$$

ہو گا۔ فاصلہ $d = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اگر زاویائی صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام کی جگہ منبع-1 پر چنا جاتا تب دور میدان

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 e^{j\psi} \\ &= \left(E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} + E_2 e^{j\frac{\psi}{2}} \right) e^{j\frac{\psi}{2}} \end{aligned} \tag{14.105}$$

حاصل ہوتا جو $E_1 = E_2$ کی صورت میں

$$E = 2E_1 \cos\frac{\psi}{2} e^{j\frac{\psi}{2}} = 2E_1 \cos\frac{\psi}{2} \angle\frac{\psi}{2} \tag{14.106}$$

حاصل ہوتا۔ میدان کا نقش چونکہ میدان کے حیطے پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا اس میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوئی البتہ میدان کا زاویہ تبدیل ہو گیا ہے۔ میدان کے زاویے کی تبدیلی کی وجہ یہ ہے کہ ہم نے زاویے کے صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام سے ہٹا کر منبع-1 پر چنا ہے۔

14.8.2 ضرب نقش

گزشتہ حصے میں بالکل یکساں دو عدد غیر سمتی نقطہ منبع کے میدان پر غور کیا گیا۔ اگر نقطہ منبع سمتی ہوں اور دونوں کے نقش بالکل یکساں ہوں تب بھی مساوات 14.104 (یا مساوات 14.106) ہی ان کا مجموعی میدان دے گا پس فرق اتنا ہے کہ اب E_1 از خود θ کا تفاعل $E(\theta)$ ہے۔ انفرادی منبع کے نقش $E(\theta)$ کو انفرادی نقش[31] جبکہ $\cos\frac{\psi}{2}$ کو قطاری نقش[32] کہا جائے گا۔ یوں

$$E = E(\theta) \cos\frac{\psi}{2} \tag{14.107}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 14.107 ضرب نقش[33] کا اصول بیان کرتا ہے جس کے تحت انفرادی منبع کا نقش اور غیر سمتی نقطہ منبع کے قطار کا نقش ضرب دینے سے سمتی منبع کے قطار کا نقش حاصل ہوتا ہے۔ یہاں فرض کیا گیا ہے کہ قطار میں انفرادی نقطہ منبع کا نقش وہی ہے جو اس نقطہ منبع کا تنہائی میں نقش ہوتا ہے۔

[31] primary pattern
[32] array pattern
[33] pattern multiplication

5017
14.8.3 ثنائی قطار

مساوات 14.106 دو غیر سمتی زاویائی طور پر ہم قدم نقطہ منبع کے جوڑی کا دور میدان دیتا ہے۔ نقطہ منبع کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ اور $E_1 = \frac{1}{2}$ ہونے کی صورت میں اس مساوات کو

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.108}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نقش کو شکل میں دکھایا گیا ہے جس میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔ اس جوڑی منبع کے سیدھ میں $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر منبع کی دوسری جوڑی رکھنے سے شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔ اس شکل میں دو درمیانے منبع دراصل ایک ہی نقطے پر پائے جائیں گے لیکن وضاحت کی خاطر انہیں اوپر نیچے دکھایا گیا ہے۔ ضرب نقش کے اصول کے تحت ان کا مجموعی میدان

$$E = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.109}$$

5018 ہو گا جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس مساوات پر شق کرنے والوں کے لئے مثال میں تفصیلی ثبوت پیش کیا گیا ہے۔

اس قطار کو تین عدد منبع کی قطار تصور کیا جا سکتا ہے جہاں قطار میں بالترتیب، منبع کی طاقت $(1 \;:\; 2 \;:\; 1)$ نسبت سے ہے۔ اس تین رکنی قطار کے سیدھ میں لیکن $\frac{\lambda}{2}$ ہٹ کر بالکل ایسی ہی تین رکنی قطار رکھنے سے شکل حاصل ہوتی ہے۔ اس نئی قطار کو چار رکنی تصور کیا جا سکتا ہے جہاں بالترتیب منبع کی طاقت $(1 \;:\; 3 \;:\; 3 \;:\; 1)$ نسبت سے ہے۔ اس چار رکنی قطار کا میدان

$$E = \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.110}$$

ہے۔ اس نقش میں بھی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔ اسی طرح بڑھتے ہوئے، ثانوی شعاع سے پاک، زیادہ سے زیادہ سمتیت کا نقش حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں زیادہ منبع پر مبنی قطار میں منبع کی طاقت ثنائی تسلسل[34] کے ثنائی سر[35] کی نسبت سے ہوتے ہیں۔ ثنائی سروں کو شکل میں دکھائے گئے پاسکل تکون[36] کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس میں ہر اندرونی عدد، اوپر کے قریبی دو اعداد کا مجموعہ ہوتا ہے۔ متعدد منبع کے قطار کا نقش

$$E = \cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.111}$$

5019 کے برابر ہو گا جہاں قطار میں منبع کی تعداد n ہے۔

5020 اگرچہ مندرجہ بالا n رکنی قطار کے نقش میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا اس کے باوجود اس کی سمتیت برابر طاقت کے n رکنی منبع کے قطار سے کم ہوتی ہے۔ حقیقی
5021 قطار عموماً ان دو صورتوں (ثنائی قطار اور یکساں قطار) کی درمیانی شکل رکھتے ہیں۔

5022

5023 **مثال 14.5:** مساوات 14.109 کو ثابت کریں۔

---

binomial series[34]
binomial coefficient[35]
Pascal triangle[36]

حل: مساوات 14.105 کی طرح زاویائی صفر کو قطار کے پہلی رکن پر چنتے ہوئے

$$\begin{aligned}
E &= E_0 + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j2\psi} \\
&= E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right) + E_0 e^{j\psi} \left(1 + e^{j\psi}\right) \\
&= E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right) \left(1 + e^{j\psi}\right) \\
&= E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right)^2
\end{aligned}$$

جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \frac{\pi}{2} \cos\theta$ پر کرتے ہوئے

$$E = \left[\left(\frac{e^{-j\frac{\psi}{2}} + e^{j\frac{\psi}{2}}}{2} \right) e^{j\frac{\psi}{2}} \right]^2 = \cos^2 \frac{\psi}{2} \angle \psi$$

5024 لکھا جا سکتا ہے۔ اس کا حیطہ $\cos^2 \frac{\psi}{2}$ نقش کی مساوات ہے۔

5025

5026

5027 مثال 14.6: مساوات 14.111 کو تفصیل سے ثابت کریں۔

ثنائی قطار میں رکن کے طاقت ثنائی تسلسل کے سر کی نسبت سے ہوتے ہیں۔ یوں $n+1$ رکنی قطار میں بالترتیب رکن کے طاقت $(1+x)^n$ کی ثنائی تسلسل

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \tag{14.112}$$

کے سر سے حاصل کئے جاتے ہیں۔ یوں تین رکنی قطار کے سر ثنائی تسلسل

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \tag{14.113}$$

کے سر کی نسبت $1:2:1$ سے ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے تین رکنی قطار کا دور میدان مندرجہ بالا مساوات کے بائیں یا دائیں ہاتھ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$E = E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right)^2 = E_0(1 + 2e^{j\psi} + e^{j2\psi}) \tag{14.114}$$

تین رکنی قطار کو دیکھ کر دور میدان مندرجہ بالا مساوات کی دائیں ہاتھ دیتی ہے جسے ثنائی تسلسل کی مدد سے مساوات کی بائیں ہاتھ کی صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات کے بائیں ہاتھ سے نقش $\cos^2 \frac{\psi}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح n رکنی قطار کو $(1+x)^{n-1}$ کی ثنائی تسلسل کی مدد سے اکھٹے کرتے ہوئے

$$E = E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right)^{n-1} \tag{14.115}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \pi \cos\theta$ پر کرتے ہوئے صرف حیطہ لیتے ہوئے قطار کا نقش

$$E = \cos^{n-1} \left(\frac{\pi}{2} \cos\theta \right) \tag{14.116}$$

5028 لکھا جا سکتا ہے۔

5029

5030 14.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار

ثنائی قطار غیر یکساں رکنی قطار ہے۔ آئیں شکل میں دکھائے گئے n رکنی، غیر سمتی، یکساں طاقت کے منبع کی قطار کا دور میدان حاصل کریں۔ یہاں فرض کیا جاتا ہے کہ قطار میں ہر دو قریبی منبع میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ یوں

$$\psi=\beta d\cos\theta+\delta \tag{14.117}$$

ہو گا۔ قطار کا دور میدان

$$E=E_0\left(1+e^{j\psi}+e^{j2\psi}+e^{j3\psi}+\cdots+e^{j(n-1)\psi}\right) \tag{14.118}$$

5031 لکھا جا سکتا ہے جہاں

5032 d قطار میں رکن کے درمیان فاصلہ،

5033 δ ہر دو قریبی رکن کے درمیان زاویائی فرق اور

5034 ψ دو قریبی رکن میں کل زاویائی فرق یعنی $\psi=\beta d\cos\theta+\delta$

5035 ہیں۔

اس میں $x=e^{j\psi}$ پر کرنے سے جانی پہچانی تسلسل

$$E_0\left(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}\right)$$

حاصل ہوتی ہے جس کا مجموعہ

$$E_0\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$$

5036 کے برابر ہے۔

مساوات 14.118 کو $e^{j\psi}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$Ee^{j\psi}=E_0\left(e^{j\psi}+e^{j2\psi}+e^{j3\psi}+\cdots+e^{jn\psi}\right) \tag{14.119}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.118 سے مساوات 14.119 منفی کر کے E کے لئے حل کرتے ہوئے

$$E=E_0\frac{1-e^{jn\psi}}{1-e^{j\psi}}=E_0\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}\,\underline{/(n-1)\frac{\lambda}{2}} \tag{14.120}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر قطار کے درمیانے نقطے کو زاویائی صفر چنا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات میں زاویہ $\underline{/(n-1)\frac{\lambda}{2}}$ نہ پایا جاتا۔ تمام رکن غیر سمتی ہونے کی صورت
5038 میں E_0 ہر رکن کا انفرادی نقش ہو گا جبکہ $\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$ قطاری نقش ہے۔

غیر سمتی منبع اور زاویائی صفر کا مقام قطار کے درمیانے نقطے پر رکھتے ہوئے

$$E=E_0\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \tag{14.121}$$

ہو گا۔ قطار کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\psi \to 0$ کی صورت میں پائی جائے گی۔ چونکہ $\psi = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات $E = \frac{0}{0}$ دیتا ہے جو بے معنی[37] ہے لہٰذا ہمیں ال ہوس پٹل[38] کا قاعدہ استعمال کرنا ہو گا جس کے تحت اگر تفاعل $y = \frac{m(x)}{n(x)}$ کی قیمت $x \to a$ پر $y = \frac{0}{0}$ حاصل ہو تب قیمت $y = \frac{\partial m/\partial x}{\partial n/\partial x}$ سے حاصل ہو گی۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے $\psi \to 0$ پر

$$
\begin{aligned}
E &= E_0 \left. \frac{\frac{\partial \sin \frac{n\psi}{2}}{\partial \psi}}{\frac{\partial \sin \frac{\psi}{2}}{\partial \psi}} \right|_{\psi \to 0} \\
&= E_0 \left. \frac{\frac{n}{2} \cos \frac{n\psi}{2}}{\frac{1}{2} \cos \frac{\psi}{2}} \right|_{\psi \to 0}
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
E = nE_0 \tag{14.122}
$$

حاصل ہوتا ہے جو قطار کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ میدان ہے۔ یہ میدان قطار میں انفرادی منبع کے طاقت سے n گنا زیادہ ہے۔ اس قطار کے نقش کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس زاویے پر پائی جائے گی جس پر $\psi = 0$ ہو یعنی

$$
\beta d \cos \theta + \delta = 0 \tag{14.123}
$$

ہو جس سے

$$
\theta_{\text{بلند تر طاقت}} = \cos^{-1} \left(-\frac{\delta}{\beta d} \right) \tag{14.124}
$$

5039 حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح اخراجی نقش کا صفر اس مقام پر ہو گا جہاں مساوات 14.121 صفر کے برابر ہو یعنی جہاں $\frac{n\psi}{2} = \mp k\pi$ کے برابر ہو یعنی

$$
\frac{n}{2} \left(\beta d \cos \theta + \delta \right) = \mp k\pi \tag{14.125}
$$

جس سے صفر اخراج کا زاویہ

$$
\theta_0 = \cos^{-1} \left[\left(\mp \frac{2k\pi}{n} - \delta \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right] \tag{14.126}
$$

5040 حاصل ہوتا ہے جہاں

5041 θ_0 صفر اخراج کا زاویہ،

5042 k اعداد $k = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے جہاں $k \neq mn$ کی شرط لاگو ہے جس میں $m = 1, 2, 3, \cdots$ کے برابر ہے۔

مساوات 14.121 کو مساوات 14.122 سے تقسیم کرتے ہوئے تقابل پذیر میدان E_n

$$
E_n = \frac{E}{nE_0} = \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \tag{14.127}
$$

5043 حاصل ہوتا ہے۔

[37] indeterminate
[38] L Hospital's rule

14.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار 5044

نقش کی چوٹی اس مقام پر پائی جاتی ہے جس پر $-\delta = \beta d \cos\theta$ ہو۔ قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر، چوڑائی جانب $(\theta = 90°)$ زیادہ سے زیادہ اخراج $\delta = 0$ کی صورت میں ہو گا یعنی جب تمام انفرادی منبع ہم قدم ہوں۔ اگر θ کی جگہ اس کا زاویہ تکملہ[39] γ استعمال کیا جائے تب نقش کے صفر

$$\gamma_0 = \sin^{-1}\left(\mp\frac{k\lambda}{nd}\right) \tag{14.128}$$

پر پائے جائیں گے۔ لمبی قطار $nd \gg k\lambda$ کی صورت میں γ_0 کم قیمت کا ہو گا لہٰذا اسے

$$\gamma_0 = \frac{k}{nd/\lambda} \approx \frac{k}{L/\lambda} \tag{14.129}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں قطار کی لمبائی $L = (n-1)d$ ہے۔ لمبائی کو $n \gg 1$ کی صورت میں

$$L = (n-1)d \approx nd$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 14.129 میں $k = 1$ پر کرتے ہوئے نقش کا پہلا صفر γ_{01} حاصل ہوتا ہے۔ یوں گوشے کے دونوں اطراف پر پہلے صفروں کے درمیان نقش کی چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = \gamma_{01} \approx \frac{2}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{114.6°}{L/\lambda} \tag{14.130}$$

حاصل ہوتی ہے۔ نقش میں زیادہ سے زیادہ طاقت کے زاویے کے دونوں اطراف وہ زاویے پائے جاتے ہیں جن پر طاقت نصف ہوتی ہے۔ ان کے درمیان زاویے کو نصف طاقت چوڑائی[40] کہتے ہیں۔ لمبے یکساں چوڑائی جانب اخراجی قطار[41] کے نصف طاقت چوڑائی کی قیمت پہلی صفر چوڑائی[42] کے تقریباً آدھی ہوتی ہے۔ یوں

$$\text{نصف طاقت چوڑائی} \approx \frac{\text{پہلی صفر چوڑائی}}{2} = \frac{1}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{57.3°}{L/\lambda} \tag{14.131}$$

ہو گی۔ 5045

شکل 14.9 میں چوڑائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر نقش دکھایا گیا ہے۔ یہ نقش مساوات 14.127 سے حاصل کیا گیا ہے۔ اس قطار میں منبع $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر رکھے 5046
گئے ہیں۔ بیس عدد برابر طاقت کے منبع پر مبنی اس قطار کی نصف طاقت چوڑائی $5.1° = \theta^{\circ}_{HP}$ ہے۔ شکل میں نقش کا تراش دکھایا گیا ہے۔ یہ حقیقت میں چرخی 5047
مانند ہے لہٰذا $\phi = 0°$ تا $\phi = 360°$ گھومتے ہوئے اس کی صورت یہی نظر آئے گی۔ یوں ϕ زاویے پر اس کی نصف طاقت چوڑائی $360° = \phi^{\circ}_{HP}$ ہے 5048

14.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار 5049

زیادہ سے زیادہ اخراج کا زاویہ مساوات 14.123

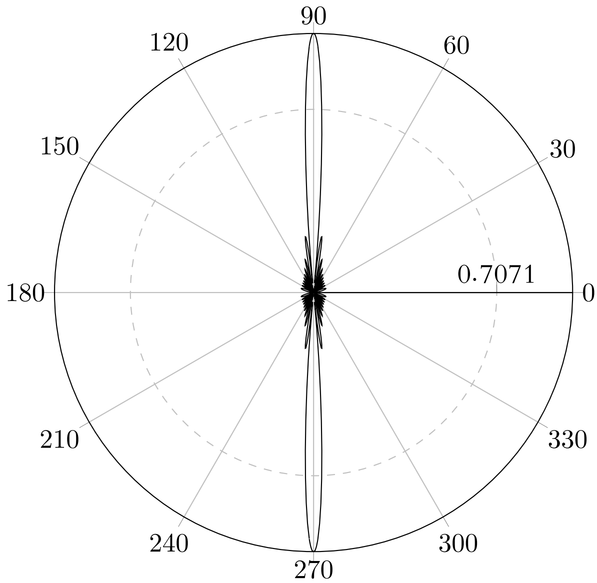
$$\beta d \cos\theta + \delta = 0 \tag{14.132}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر سیدھا آگے $(\theta = 0)$ لمبائی کی جانب زیادہ سے زیادہ اخراج اس صورت ہو گا جب ہر دو قریبی منبع کے مابین

$$\delta = -\beta d \tag{14.133}$$

---

[39] complementary angle
[40] half power beam width, HPBW
[41] broadside array
[42] beam width between first nulls, BWFN



شکل 14.9: چوڑائی جانب اخراجی قطار

زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔ یوں ایسے قطار کے صفر مساوات 14.125 کے تحت

$$\frac{n}{2}\beta d\left(\cos\theta_0 - 1\right) = \mp k\pi$$

یعنی

$$\cos\theta_0 - 1 = \mp\frac{k}{nd/\lambda}$$

سے حاصل ہوں گے۔ اس سے

$$\frac{\theta_0}{2} = \sin^{-1}\left(\mp\sqrt{\frac{k}{2nd/\lambda}}\right) \tag{14.134}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ لمبی قطار ($nd \gg k\lambda$) کی صورت میں اسے

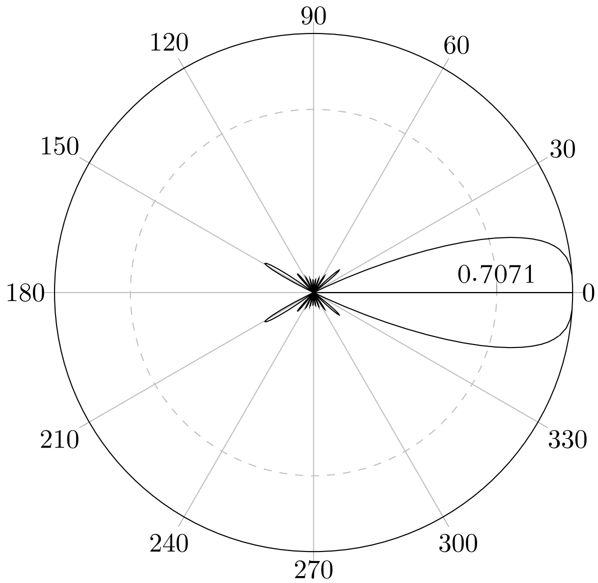
$$\theta_0 = \mp\sqrt{\frac{2k}{nd/\lambda}} \approx \mp\sqrt{\frac{2k}{L/\lambda}} \tag{14.135}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمبائی $(n-1)d = L$ کو ($nd \gg k\lambda$) کی صورت میں $nd \approx L$ لکھا گیا ہے۔ پہلا صفر $k = 1$ پر حاصل ہو گا جس سے پہلی صفر چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\theta_{01} \approx 2\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}}\,\text{rad} = 114.6^\circ\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}} \tag{14.136}$$

حاصل ہوتی ہے۔

بیس منبع پر مبنی، لمبائی جانب اخراجی قطار کا قابل پذیر اخراجی نقش شکل 14.10 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ نقش مساوات 14.127 سے حاصل کیا گیا ہے۔ منبع کے درمیانی فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ ہے۔ مساوات 14.127 سے پہلی صفر چوڑائی 52° اور نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP}^\circ = 34^\circ$ حاصل ہوتی ہے۔ یہ نقش جتنا چوڑا ہے یہ اتنا صفحہ کے عمودی



شکل 14.10: لمبائی جانب اخراجی قطار

جانب موٹا بھی ہے۔ یوں ϕ جانب بھی اس کی نصف طاقت چوڑائی $\phi_{HP}^{\circ} = 34^{\circ}$ ہی ہے۔ لمبائی جانب اخراجی لمبی قطار کی نصف طاقت چوڑائی اس کے پہلے صفر چوڑائی کے تقریباً $\frac{2}{3}$ گنا ہوتی ہے۔

جیسے مثال 14.7 اور مثال 14.8 میں آپ دیکھیں گے کہ n عدد منبع پر مبنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت n عدد منبع پر مبنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت سے زیادہ ہوتی ہے۔

مساوات 14.78 اینٹینا کی سمتیت

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \tag{14.137}$$

دیتا ہے جہاں ٹھوس زاویہ مساوات 14.73 سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر ثانوی شعاعوں کو نظر انداز کیا جائے تب مرکزی شعاع کے θ سمت میں نصف طاقت زاویے θ_{HP} اور ϕ سمت میں نصف طاقت زاویے ϕ_{HP} کا ضرب تقریباً ٹھوس زاویے کے برابر ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 14.73 حل کرنا ضروری نہیں اور سمتیت کو

$$D \approx \frac{4\pi}{\phi_{HP}\phi_{HP}} \tag{14.138}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں نصف طاقت زاویے ریڈیئن میں ہیں۔ اس مساوات میں

$$4\pi \,\mathrm{sr} = 4\pi \,\mathrm{rad}^2 = 4\pi \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \,\mathrm{deg}^2 = 41\,253 \,\mathrm{deg}^2$$

پر کرتے ہوئے

$$D \approx \frac{41\,253}{\theta_{HP}^{\circ}\phi_{HP}^{\circ}} \tag{14.139}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 14.7: بیس رکنی، چوڑائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta_{HP}^{\circ} = 5.1^{\circ}$ اور $\phi_{HP}^{\circ} = 360^{\circ}$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.139 سے

$$D \approx \frac{41\,253}{5.1 \times 360} = 22.5$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 14.8: بیس رکنی، لمبائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta_{HP}^{\circ} = \phi_{HP}^{\circ} = 34^{\circ}$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.139 سے

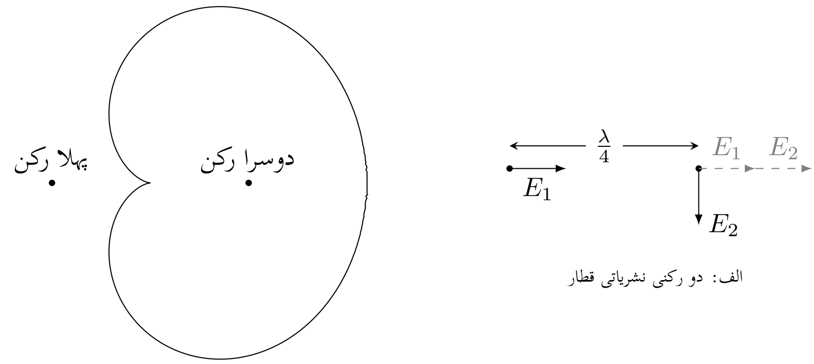
$$D \approx \frac{41\,253}{34 \times 34} = 35.7$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 14.9: دو ارکان پر مبنی قطار میں ارکان کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{4}$ ہے۔ دائیں رکن (دوسرا رکن) کو 90° پیچھے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ دونوں برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہے۔ دونوں ارکان افقی سطح پر سیدھے کھڑے ہیں۔ افقی میدان پر اخراجی نقش حاصل کریں۔

حل: برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہونے کی صورت میں $E = |E_2| = |E_1|$ ہوں گے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر بائیں رکن (پہلا رکن) کا برقی میدان 0° میکانی زاویے پر ہو تب اسی لمحہ دائیں رکن (دوسرا رکن) کا میدان -90° میکانی زاویے پر ہو گا۔ شکل 14.11-الف میں ان میدان (E_1 اور E_2) کو گاڑھی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ چونکہ دونوں ارکان میں $\frac{\lambda}{4}$ کا فاصلہ ہے لہٰذا جتنی دیر میں بائیں رکن کے میدان کی موج E_1 چل کر دائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دوری عرصے کے $\frac{1}{4}$ برابر وقت گزر چکا ہو گا لہٰذا دوسرے رکن میں برقی رو $\frac{1}{4} \times 360^{\circ} = 90^{\circ}$ آگے بڑھ چکی ہو گی اور یوں اس لمحہ پر دوسرا رکن 0° میکانی زاویے پر ہی میدان پیدا کرے گا۔ یوں دوسرے رکن کے مقام پر دونوں میدان ہم قدم پائے جائیں گے لہٰذا یہاں برقی میدان $E_1 + E_2$ یعنی دگنا ہو گا۔ شکل 14.11-الف میں کچھ دیر بعد کے ان میدان کو ہلکی سیاہی میں ہم قدم دکھایا گیا ہے۔ دونوں میدان دائیں جانب ہم قدم رہتے ہوئے حرکت کریں گے۔

اس کے برعکس جس لمحہ دائیں رکن کی برقی رو 0° پر ہو اسی لمحہ بائیں رکن کی برقی رو 90° پر ہو گی۔ اس لمحے پر دائیں رکن کا میدان 0° پر ہو گا جبکہ بائیں رکن کا میدان 90° پر ہو گا۔ اب جتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان بائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان مزید 90° آگے بڑھ کر 180° پر پہنچ چکا ہو گا۔ یوں



الف: دو رکنی نشریاتی قطار

دو رکنی قطار کا نقش

شکل 14.11: دو رکنی اشاعتی قطار اور اس کا نقش

دائیں رکن کے مقام پر دونوں میدان آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لہٰذا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔ اس طرح دائیں رکن کے دائیں جانب میدان صفر ہی پایا جائے گا۔ شکل 14.11 میں صفر اور پائے ریڈیئن زاویوں پر دگنا اور صفر میدان دکھایا گیا ہے۔

دونوں رکن کے درمیان عمودی لکیر پر پہنچنے کے لئے دونوں میدان کو برابر دورانیے کی ضرورت ہے لہٰذا اس لکیر پر دونوں میدان آپس میں عمودی رہیں گے۔ یوں اس لکیر پر کل میدان مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{E^2+E^2} = 1.4142E$ حاصل ہو گا۔ شکل 14.11-ب میں اسی طرح مختلف مقامات پر میدان حاصل کرتے ہوئے حاصل کردہ نقش دکھایا گیا ہے۔

مندرجہ بالا مثال کے نقش سے ظاہر ہے کہ یہ اینٹینا بائیں جانب اخراج نہیں کرتا لہٰذا اس کے بائیں جانب دوسرا اینٹینا نسب کیا جا سکتا ہے جس کی اخراجی سمت بائیں رکھی جائے گی تاکہ دونوں علیحدہ علیحدہ نشریات کر سکیں۔

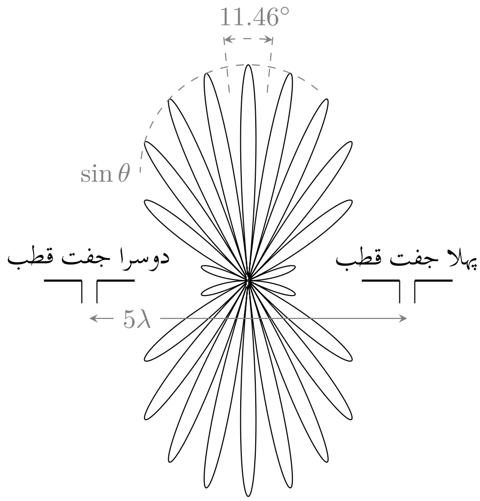
14.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا

مساوات 14.124

$$\theta_{\text{بلند تر طاقت}} = \cos^{-1}\left(-\frac{\delta}{\beta d}\right) \tag{14.140}$$

یکساں ارکان کے قطار کی مرکزی نقش کا زاویہ دیتی ہے۔ چوڑائی جانب اخراجی قطار میں $\theta = 90^\circ$ رکھا جاتا ہے جبکہ لمبائی جانب اخراجی قطار میں $\theta = 0^\circ$ رکھا جاتا ہے۔ اگر شعاع کی سمت تبدیل کرنی ہو تو ایسے اینٹینا کو گھمانا ہو گا۔

مساوات 14.124 کے تحت δ کو تبدیل کرتے ہوئے شعاع کی سمت کسی بھی زاویے پر رکھی جا سکتی ہے۔ یوں δ کو -1 تا $+1$ مسلسل تبدیل کرتے ہوئے شعاع کی سمت کو 0° تا 180° مسلسل تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ یوں بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا[43] کو ہلائے بغیر اس کی اخراجی سمت تبدیل کی جا سکتی ہے۔



شکل 14.12: دو عدد مختصر جفت قطب جنہیں 5λ فاصلے پر رکھا گیا ہے سے حاصل تداخل پیما کا نقش۔

5092
14.9 تداخُل پیما

5093 فلکیات[44] کے میدان میں اینٹینا کا کلیدی کردار ہے۔ ریڈیائی فلکیات[45] میں استعمال ہونے والے اینٹینا کو تداخل پیما[46] اینٹینا کہتے ہیں۔

شکل 14.12 میں دو عدد مختصر جفت قطب کے درمیان فاصلہ L ہے۔ دونوں کو ہم قدم برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ ضرب نقش کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے اس کا نقش

$$E = 2E_1 \cos \frac{\psi}{2} \tag{14.141}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\psi = \beta L \cos\theta$ کے برابر ہے۔ ضرب نقش کے تحت E_1 انفرادی رکن کی نقش ہے جبکہ $\cos\frac{\psi}{2}$ دو رکنی قطار کا نقش ہے۔ ہمیں میدان بالمقابل زاویہ سے غرض ہے۔ مساوات 14.48 مختصر جفت قطب کا نقش دیتا ہے جس میں میدان اور زاویے کا تعلق $\sin\theta$ ہے۔ اسی کو استعمال کرتے ہوئے تقابل پذیر نقش

$$E = \sin\theta \cos\frac{\psi}{2} = \sin\theta\cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\cos\theta\right) \tag{14.142}$$

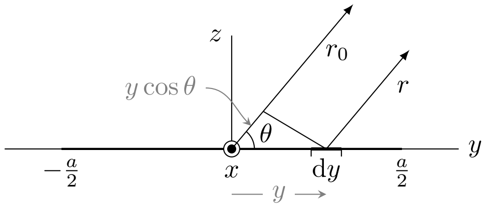
لکھا جا سکتا ہے جہاں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ شکل 14.12 میں $L = 5\lambda$ کے لئے نقش دکھایا گیا ہے۔ زاویہ θ کا زاویہ تکملہ $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ استعمال کرتے ہوئے، پہلا صفر

$$\frac{\pi L}{\lambda}\cos\theta = \frac{\pi L}{\lambda}\sin\gamma_{01} = \frac{\pi}{2}$$

کی صورت میں پایا جائے گا جس سے

$$\gamma_{01} = \sin^{-1}\frac{1}{2L/\lambda} \tag{14.143}$$

---
scanning antenna[43]
astronomy[44]
radio astronomy[45]
interferometer[46]



شکل 14.13: مستطیل سطحی اینٹینا

حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\lambda \gg L$ ہو تب پہلی صفر چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\gamma_{01} = \frac{1}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{57.3}{L/\lambda}\,\text{deg} \tag{14.144}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ یہ مساوات 14.130 میں دیے، n رکنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کے پہلی صفر چوڑائی کی آدھی قیمت ہے۔ ہلکی سیاہی کے نقطہ دار لکیر سے شکل میں مختصر جفت قطب کے نقش $\sin\theta$ کو واضح کیا گیا ہے۔

پانچ طول موج برابر L کی صورت میں مساوات 14.144 سے پہلی صفر چوڑائی $11.46°$ حاصل ہوتی ہے۔

ریڈیائی فلکیات میں فلکی اخراجی مادے کی شعاع کو تداخل پیما سے وصول کیا جاتا ہے۔ ان کی جسامت کا بہتر سے بہتر تخمینہ لگانے میں چوڑائی نقش کردار ادا کرتی ہے۔

مشق 14.1: $L = 20\lambda$ کی صورت میں تداخل پیما کی پہلی صفر چوڑائی حاصل کریں۔

جواب: $2.865°$

14.10 مستطیل سطحی اینٹینا

ہم متعدد تعداد کے نقطہ منبع پر مبنی مختلف اقسام کے اینٹینا دیکھ چکے ہیں۔ اگر نقطہ منبع کے صف در صف اتنے قریب قریب فرضی سطح پر رکھے جائیں کہ یہ علیحدہ علیحدہ منبع کی جگہ ایک مسلسل سطح نظر آئے تو ایسی صورت میں سطحی اینٹینا[47] حاصل ہو گا۔ ایسی ہی ایک مستطیلی سطح جس کی x سمت میں لمبائی x_1 اور y سمت میں لمبائی a ہے کو شکل 14.13 میں دکھایا گیا ہے۔ تصور کریں کہ اس سطح پر J_x کثافت برقی رو پائی جاتی ہے۔ یہ تصور کرتے ہوئے کہ سطح کے نیچے یعنی $z < 0$ خطے میں مقناطیسی میدان نہیں پایا جاتا، ایمپیئر کے دوری قانون کی مدد سے

$$H_y = -J_x \tag{14.145}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں H_y سطح کے انتہائی قریب بالائی جانب[48] مقناطیسی میدان ہے۔ سطحی اینٹینا کے دور میدان پر تبصرے سے پہلے ایک حقیقت پر غور کرتے ہیں۔

[47] continuous aperture

[48] یہاں فرض کیا گیا ہے کہ سطحی اینٹینا نچلی جانب اخراج نہیں کر رہی۔ اگر اینٹینا نچلی جانب بھی اخراج کرے تب $H_y = -0.5J_x$ لکھا جائے گا۔

فرض کریں کی خالی خلاء میں سطحی برقی و مقناطیسی موج پائی جاتی ہے۔ ہائی گن[49] کے اصول کے تحت محاذ موج پر ہر نقطہ، منبع موج کا کردار ادا کرتا ہے۔ یوں سطح پر چھوٹے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ پر خطی قطبی برقی میدان E_x بطور منبع کردار ادا کرے گا۔ سطح کے برقی میدان E_x سے یہاں کا مقناطیسی میدان

$$H_y = \frac{E_x}{Z_0} \tag{14.146}$$

5105 لکھا جا سکتا ہے جہاں Z_0 خطے کی قدرتی رکاوٹ $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ ہے۔

مساوات 14.145 اور مساوات 14.146 دو مختلف وجوہات کی بنا پر پیدا مقناطیسی میدان ظاہر کرتے ہیں۔ دور سے ان دونوں میں کسی قسم کا کوئی فرق نہیں دیکھا جا سکتا لہٰذا ان دونوں سے پیدا موج میں بھی کوئی فرق نہیں پایا جائے گا۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطحی اینٹینا کا دور میدان اور خلاء میں فرضی سطح پر موج کا دور میدان بالکل یکساں ہوں گے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی سطح پر کثافت برقی رو J_x کو خالی خلاء میں مقناطیسی میدان H_y یا برقی میدان E_x سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$-J_x = H_y = \frac{E_x}{Z_0} \tag{14.147}$$

5106 اس طرح مندرجہ ذیل تبصرہ ان دونوں کے لئے قابل قبول ہے۔

آئیں اب واپس اصل موضوع پر آتے ہیں۔ تصور کریں کہ شکل 14.13 کے سطحی اینٹینا پر x سمت میں نہ تبدیل ہوتی جبکہ y سمت میں تبدیل ہوتی کثافت
5108 برقی رو $J_x(y)$ پائی جاتی ہے۔ پوری سطح پر کثافت برقی رو ہم قدم ہے۔

مساوات 14.25 میں $I_0 = J_x\,\mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}l = \mathrm{d}x$ پر کرنے سے A حاصل کرتے ہوئے، چھوٹے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ سے دور تفرق میدان کو $E = -j\omega A$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}E &= -j\omega[\mathrm{d}A_x] \\
&= -j\omega \frac{\mu_0 I_0\,\mathrm{d}l\, e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r} \\
&= -j\omega \frac{\mu_0 J_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\, e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r} \\
&= \frac{j\omega\mu_0 E(y)}{4\pi r Z_0} e^{j(\omega t-\beta r)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{14.148}$$

جہاں مساوات 14.147 کا سہارا لیا گیا ہے۔ پورے رقبے سے پیدا میدان سطحی تکمل سے حاصل ہو گا۔ رقبے کے وسط سے r_0 فاصلے اور θ زاویے پر میدان

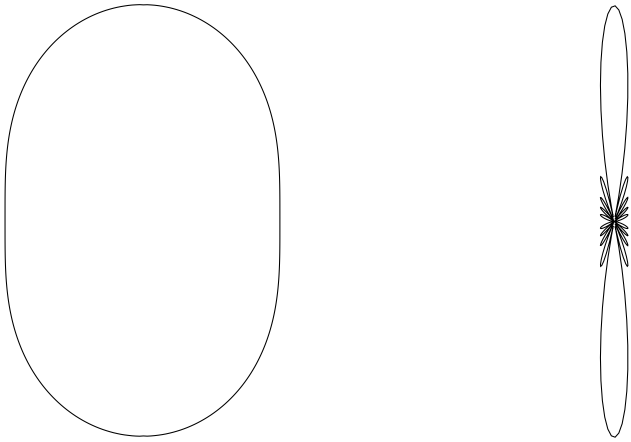
$$E(\theta) = \frac{j\omega\mu_0 e^{j(\omega t-\beta r_0)}}{4\pi r_0 Z_0} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-x_1/2}^{x_1/2} E(y) e^{j\beta y\cos\theta}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{14.149}$$

ہو گا جہاں $r \approx r_0$ لیا[50] گیا ہے۔ بیرونی تکمل لیتے اور $\frac{\omega\mu_0}{4\pi Z_0} = \frac{1}{2\lambda}$ پر کرتے ہوئے میدان کی حتمی قیمت $|E|$

$$E(\theta) = \frac{x_1}{2r_0\lambda} \int_{-a/2}^{a/2} E(y) e^{j\beta y\cos\theta}\,\mathrm{d}y \tag{14.150}$$

---

[49] Huygen's principle
[50] جیسے حصہ 14.3 میں دکھایا گیا ہے۔



الف: مستطیل سطحی اینٹینا کا $a = 5\lambda$ کی صورت میں نقش ب: مستطیل سطحی اینٹینا کا $a = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں نقش

شکل 14.14: مستطیل سطح کے نقش

حاصل ہوتی ہے جہاں $\left| je^{(\omega t - \beta r_0)} \right| = 1$ لیا گیا ہے۔ پوری سطح پر یکساں میدان $E(y) = E_a$ کی صورت میں

$$E(\theta) = \frac{x_1 E_a}{2 r_0 \lambda} \int\limits_{-a/2}^{a/2} e^{j\beta y \cos\theta} \,\mathrm{d}y \tag{14.151}$$

لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \frac{x_1 a E_a}{2 r_0 \lambda} \frac{\sin[(\beta a/2)\cos\theta]}{(\beta a/2)\cos\theta} \\ &= \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2 r_0 \lambda} \frac{\sin[(\beta a/2)\cos\theta]}{(\beta a/2)\cos\theta} \end{aligned} \tag{14.152}$$

5109 حاصل ہو گا جہاں $S_{\text{اخراجی}}$ سطح کا رقبہ ہے۔

زیادہ سے زیادہ میدان $\theta = 90^\circ$ پر

$$E(\theta)_{\text{بلند تر}} = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2 r_0 \lambda} \qquad \text{دو رُخی اخراج} \tag{14.153}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\theta = 270^\circ$ جانب اخراج صفر ہو تب $\theta = 90^\circ$ جانب اخراج دگنی

$$E(\theta)_{\text{بلند تر}} = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{r_0 \lambda} \qquad \text{یک رُخی اخراج} \tag{14.154}$$

5110 ہو گی۔ اس میدان کو $a = 5\lambda$ اور $a = \frac{\lambda}{2}$ کے لئے شکل 14.14 میں دکھایا گیا ہے۔

صفحہ 543 پر مساوات 14.121

$$E(\theta) = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$$

یکساں غیر سمتی n رکنی قطار کا دور میدان دیتی ہے جہاں $(\psi = \beta d \cos\theta + \delta)$ ہے اور E_0 انفرادی رکن کا میدان ہے۔ چوڑائی جانب اخراجی قطار $\delta = 0$ کی صورت میں حاصل ہوتا ہے جس سے مندرجہ بالا مساوات

$$E(\theta) = E_0 \frac{\sin[(n\beta d/2)\cos\theta]}{\sin[(\beta d/2)\cos\theta]} \tag{14.155}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ قطار کی لمبائی a' لکھتے ہوئے، زیادہ قیمت کی n اور a' کی صورت میں $a' = (n-1)d \approx nd$ ہو گا۔ اگر ہم اپنی توجہ $\theta = 90^\circ$ کے قریب رکھیں تب مساوات 14.155 کو

$$E(\theta) = nE_0 \frac{\sin[(\beta a'/2)\cos\theta]}{(\beta a'/2)\cos\theta} \tag{14.156}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات کا مساوات 14.152 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ a لمبائی کی سطحی اینٹینا اور n رکنی a' لمبی چوڑائی اخراجی قطار کے مرکزی شعاع ایک جیسے ہیں۔ مزید $nE_0 = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2r_0\lambda}$ کی صورت میں دونوں کے میدان بالکل برابر حتمی قیمت رکھتے ہیں۔

14.11 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریئر بدل ہیں

مساوات 14.150 میں دور میدان کی نقش تکمل سے حاصل ہوتی ہے جبکہ اس مساوات میں $\frac{x_1}{2r_0\lambda}$ جزو ضربی ہے جس کا نقش کی شکل پر کوئی اثر نہیں۔ یوں دور میدان کی نقش کو صرف تکمل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے یعنی

$$E(\theta) = \int_{-a/2}^{a/2} E(y) e^{j\beta y\cos\theta} \, \mathrm{d}y \tag{14.157}$$

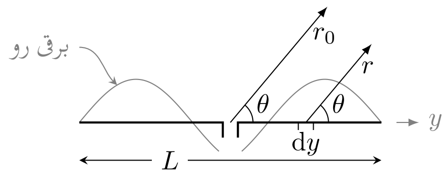
مساوات 14.157 فوریئر بدل[51] کہلاتی ہے۔ فوریئر بدل کی خاصیت یہ ہے کہ اگر $E(y)$ کا فوریئر بدل $E(\theta)$ ہو تب $E(\theta)$ کا فوریئر بدل $E(y)$ ہو گا۔

شکل میں کئی $E(y)$ اور اس سے پیدا $E(\theta)$ آمنے سامنے دکھائے گئے ہیں۔ سطح پر یکساں میدان اور اس کا پیدا کردہ دُور میدان شکل-الف میں دکھائے گئے ہیں جن کے حوالے سے بقایا پر تبصرہ کرتے ہیں۔ تکونی اور سائن نما سطحی تقسیم کے مرکزی شعاع کی چوڑائی زیادہ ہے البتہ ان کے ثانوی شعاعیں کمزور ہیں۔ مربع کوسائن اور گاوسی تقسیم[52] کے مرکزی شعاع مزید زیادہ چوڑی ہے جبکہ ان میں ثانوی شعاع نہیں پائی جاتی۔ اس کے برعکس منفی ڈھلوان کی تقسیم مثلاً شکل-ث کم چوڑائی کی مرکزی شعاع پیدا کرتی ہے البتہ اس کی ثانوی شعاعیں بھی زیادہ طاقتور ہوتی ہیں۔ منفی ڈھلوان کی انتہا شکل-ٹ میں دکھائی گئی ہے جو دو رکنی تداخل پیما ہی ہے۔ اس کی چوڑائی شکل-الف کی آدھی ہے البتہ اس کے ثانوی شعاعیں عین مرکزی شعاع جتنی طاقتور ہیں۔

14.12 خطی اینٹینا

مختصر جفت قطب ہم دیکھ چکے ہیں جہاں جفت قطب کی لمبائی طول موج سے بہت کم $\lambda \ll l$ تھی۔ متعدد تعداد کے نقطہ منبع کو سیدھ میں قریب قریب رکھنے سے کسی بھی لمبائی کا اینٹینا حاصل کیا جا سکتا ہے۔ آئیں ایسی لمبی اینٹینا پر غور کریں۔ اینٹینا پر سائن نما برقی رو تصور کی جائے گی۔

[51] Fourier transform
[52] Gaussian distribution



شکل 14.15: خطی اینٹینا پر سائن نما برقی رو پائی جاتی ہے۔

شکل 14.15 میں L لمبائی کا اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بالکل درمیان سے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ اینٹینا کے دونوں بالکل یکساں نصف اطراف میں برقی رو بھی ہم شکل ہے۔ ہم L کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں $\mathrm{d}y$ کو انفرادی جفت قطب تصور کرتے ہوئے ان سب کے میدان کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے اس اینٹینا کا دور میدان حاصل کریں گے۔ 5125

تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ ایسی اینٹینا میں برقی رو

$$I = \begin{cases} I_0 \sin\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}\left(\dfrac{L}{2}+y\right)\right] & y<0 \\ I_0 \sin\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}\left(\dfrac{L}{2}-y\right)\right] & y>0 \end{cases} \tag{14.158}$$

صورت رکھتی ہے۔ مختصر جفت قطب کی لمبائی کو $\mathrm{d}y$ اور اس کے دور میدان کو $\mathrm{d}E_\theta$ لکھتے ہوئے مساوات 14.38

$$\mathrm{d}E_\theta = j\frac{30 I\beta\,\mathrm{d}y}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.159}$$

یعنی

$$\mathrm{d}E_\theta = \frac{j60\pi e^{j(\omega t-\beta r_0)}}{r_0\lambda}\sin\theta I e^{j\beta y\cos\theta}\,\mathrm{d}y \tag{14.160}$$

دیتی ہے۔ یوں L لمبے اینٹینا کا میدان

$$E_\theta = k\sin\theta\int_{-L/2}^{L/2} I e^{j\beta y\cos\theta}\,\mathrm{d}y \tag{14.161}$$

ہو گا جہاں

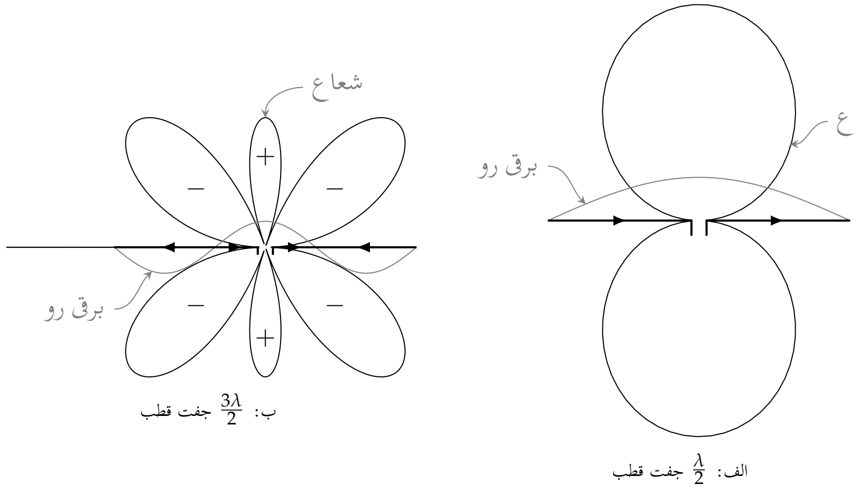
$$k = \frac{j60\pi e^{j(\omega t-\beta r_0)}}{r_0\lambda} \tag{14.162}$$

لکھا گیا ہے۔ مساوات 14.158 استعمال کرتے اور تکمل لیتے ہوئے

$$E_\theta = \frac{j60[I_0]}{r_0}\left\{\frac{\cos[(\beta L\cos\theta)/2]-\cos(\beta L/2)}{\sin\theta}\right\} \quad \text{خطی اینٹینا کی عمومی مساوات} \tag{14.163}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $[I_0] = I_0 e^{j(\omega t-\beta r_0)}$ تاخیری برقی رو ہے۔ $\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب کی صورت میں اسے

$$E_\theta = \frac{j60[I_0]}{r_0}\frac{\cos[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \quad \frac{\lambda}{2}\ \text{جفت قطب} \tag{14.164}$$



شکل 14.16: 0.5λ اور 1.5λ جفت قطب کے دور میدان۔

لکھا جا سکتا ہے۔

میدان کی شکل مساوات 14.163 کے دائیں جانب قوسین میں بند جزو پر منحصر ہے جسے $\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب کی صورت میں

$$E_\theta = \frac{\cos[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \qquad \frac{\lambda}{2} \text{ جفت قطب} \tag{14.165}$$

اور 1.5λ جفت قطب کی صورت میں

$$E_\theta = \frac{\cos[\frac{3\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \qquad \frac{3\lambda}{2} \text{ جفت قطب} \tag{14.166}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

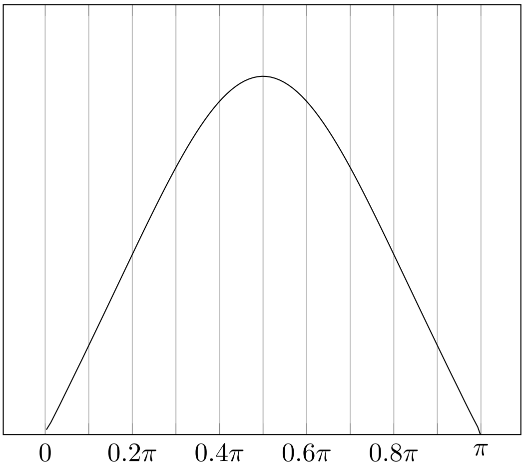
شکل 14.16 میں $\frac{\lambda}{2}$ اور $\frac{3\lambda}{2}$ جفت قطب اور ان کے شعاع نلکی محدد پر دکھائے گئے ہیں۔ جفت قطب پر برقی رو کی سمتیں تیر کی نشان سے دکھائے گئے ہیں۔ شکل-ب میں میدان کے شعاعوں میں 180° کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ جفت قطب کو محور لیتے ہوئے دئے گئے نقش کو اس کے گرد گمانے سے تین رُخی نقش حاصل ہو گا۔

اوسط پوئنٹنگ سمتیہ کا بڑی رداس کے کرہ پر سطحی تکمل

$$P = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{|E_\theta|^2}{2Z} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \tag{14.167}$$

عددی طریقے سے حاصل کرتے ہوئے کل اخراجی مزاحمت R حاصل کی جاتی ہے۔ اس مساوات میں $|E_\theta|$ کو مساوات 14.164 سے پر کرتے ہوئے

$$P = \frac{15 I_0^2}{\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi$$



شکل 14.17: اخراجی مزاحمت کا عددی حل۔

حاصل ہوتا ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ اور $r = r_0$ لکھے گئے ہیں۔ بیرونی تکمل پہلے لیتے ہوئے

$$P = 30 I_0^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{14.168}$$

ملتا ہے۔ اس مساوات کو عددی طریقے سے حل کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر اسے مجموعے

$$P = \sum_{i=0}^{n} 30 I_0^2 \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta}\Delta\theta = \sum_{i=0}^{n} p(\theta)\Delta\theta \tag{14.169}$$

کی شکل میں لکھتے ہیں جہاں

$$p(\theta) = 30 I_0^2 \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \tag{14.170}$$

5131 لکھا گیا ہے۔ شکل 14.17 میں کارتیسی محدد پر تفاعل $p(\theta)$ کو دکھایا گیا ہے۔ افقی محدد پر $0 = \theta$ تا $\theta = \pi$ ہے جبکہ عمودی محدد پر $p(\theta)$ ہے۔ اگر $\theta = 0$ تا π کو n برابر ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے تو ہر ٹکڑے کی چوڑائی $\frac{\pi}{n}$ ہو گی۔ گراف کے ایسے ہر ٹکڑے کو مستطیل تصور کیا جا سکتا ہے۔ ان تمام مستطیل کے رقبے جمع
5133 کرتے ہوئے تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ اسے کہتے ہیں عددی طریقہ۔

شکل میں $n = 10$ لیا گیا ہے۔ یوں ہمیں دس مستطیل کے رقبے حاصل کرنے ہیں۔ ہر مستطیل کے دونوں اطراف کے قد کی اوسط قیمت کو مستطیل کا قد تصور کیا جائے گا۔ بائیں بازو سے شروع کرتے ہوئے پہلے مستطیل کے بائیں طرف کا قد 0 ہے جبکہ اس کے دائیں طرف کا قد $\theta = 0.1\pi$ پر مساوات 14.170 سے

$$p_1(\theta) = 30 I_0^2 \frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos(0.1\pi)]}{\sin(0.1\pi)} = 0.573 I_0^2 \tag{14.171}$$

5134 حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح بقایا تمام نقطوں پر بھی قد حاصل کرتے ہوئے جدول 14.2 میں دیے گئے ہیں۔

شکل 14.17 میں بائیں سے دوسرے مستطیل ($\theta = 0.1\pi$ تا $\theta = 0.2\pi$) کا رقبہ

$$\begin{aligned}
\text{رقبہ} &= \text{چوڑائی} \times \text{اوسط قد}\\
&= 0.1\pi \times \left(\frac{0.573 I_0^2 + 4.457 I_0^2}{2}\right)\\
&= 0.79 I_0^2
\end{aligned}$$

جدول 14.2: برابر زاویائی فاصلوں پر تفاعل کے قیمت۔

$30I_0^2 \frac{\cos^2[\pi/2\cos\theta]}{\sin\theta}$	θ
0	0.0π
$00.573I_0^2$	0.1π
$04.457I_0^2$	0.2π
$13.492I_0^2$	0.3π
$24.677I_0^2$	0.4π
$30I_0^2$	0.5π
$24.677I_0^2$	0.6π
$13.492I_0^2$	0.7π
$04.457I_0^2$	0.8π
$00.573I_0^2$	0.9π
0	1.0π

ہے۔

جدول 14.2 کی مدد سے کل رقبہ

$$P = 0.1\pi I_0^2 \left(\frac{0}{2} + 0.573 + 4.457 + 13.492 + 24.677 + 30 \right.$$
$$\left. +24.677 + +13.492 + 4.457 + 0.573 + \frac{0}{2}\right)$$

یعنی

$$P = 36.5675 I_0^2 \tag{14.172}$$

حاصل ہوتا ہے۔ سائن نما برقی رو کی چوٹی I_0 ہونے کی صورت میں مزاحمت R میں طاقت کا ضیاع $\frac{1}{2}I_0^2R$ ہوتا ہے لہٰذا ان دونوں کو برابر لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{2}I_0^2 R_{\text{اخراجی}} = 36.5675 I_0^2$$

$\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کے جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

$$R_{\text{اخراجی}} = 73.13\,\Omega \qquad \text{جفت قطب } \frac{\lambda}{2} \tag{14.173}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ وہ مزاحمت ہے جو اینٹینا کو طاقت مہیا کرنے یا اس سے طاقت وصول کرنے والے ترسیلی تار کو نظر آتی ہے۔ $\frac{\lambda}{2}$ اینٹینا کے اخراجی مزاحمت کا موازنہ مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت ($0.63\,\Omega$) کے ساتھ کریں جسے صفحہ 530 پر مثال 14.1 میں حاصل کیا گیا ہے۔

اینٹینا کی رکاوٹ میں $j42.5$ اوہم کا خیالی جزو ($Z = 73.1 + j42.5$) بھی پایا جاتا ہے۔ اینٹینا کی لمبائی چند فی صد کم کرنے سے خیالی جزو صفر کیا جا سکتا ہے، البتہ اس سے حقیقی جزو قدر کم ہو کر $70\,\Omega$ رہ جاتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کے لئے ضروری ہے کہ ایسے اینٹینا کو $70\,\Omega$ قدرتی رکاوٹ کے ترسیلی تار کے ساتھ جوڑا جائے۔ $\frac{3\lambda}{2}$ اینٹینا کا اخراجی مزاحمت $100\,\Omega$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 14.10: $\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کے خطی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.77 میں مساوات 14.165 پر کرتے ہوئے

$$D=\frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi}P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega}=\frac{4\pi}{2\pi\int_0^{\pi}\frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin^2\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta} \tag{14.174}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مساوات 14.168 سے موازنہ کرتے ہوئے، مساوات 14.172 میں حاصل کی گئی قیمت $36.5675I_0^2$ استعمال کرتے ہوئے

$$D=\frac{4\pi}{2\pi\left(\frac{36.5675I_0^2}{30I_0^2}\right)}=1.64 \tag{14.175}$$

حاصل ہوتا ہے۔

14.13 چلتی موج اینٹینا

گزشتہ حصے میں خطی اینٹینا پر سائن نما برقی رو تصور کیا گیا۔ ایسی دبلی موصل تار، جس کا قطر d طول موج λ سے بہت کم ہو $d<\frac{\lambda}{100}$ اور جس کا آخری سرا کھلے سرے ہو، کے برقی رو کی شکل تقریباً ایسی ہی ہوتی ہے۔

کئی طول موج لمبی خطی اینٹینا موصل زمین کے متوازی h اونچائی پر پائی جاتی ہے۔ جیسے شکل 14.18-الف میں دکھایا گیا ہے، اس کو بائیں جانب سے ٹرانسمٹر[53] طاقت مہیا کرتا ہے۔ خطی اینٹینا اور موصل زمین مل کر کھلے سرے ترسیلی تار کا کردار ادا کرتے ہیں۔ یوں کھلے سر پر آمدی برقی رو اور یہاں سے انعکاسی برقی رو مل کر ساکن موج کو جنم دیتے ہیں جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے۔ تار کے کھلے سر پر برقی رو کے ساکن موج کا صفر پایا جاتا ہے جبکہ $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ یہی برقی رو گزشتہ حصے میں خطی اینٹینا پر فرض کی گئی تھی۔

آئیں اب ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ کے برابر مزاحمت R، تار کے کھلے سر اور زمین کے درمیان جوڑیں۔ ایسا کرنے کے بعد اینٹینا پر انعکاسی موج پیدا نہیں ہو گی۔ تار میں قابل نظر انداز ضیاع کی صورت میں پوری لمبائی پر برقی رو کی قیمت یکساں ہو گی جبکہ لمبائی جانب بڑھتا زاویائی فرق پایا جائے گا۔ اس طرح قدرتی رکاوٹ کے برابر مزاحمت سے اختتام کردہ اینٹینا کو شکل 14.18-ب میں دکھایا گیا ہے۔ زمین سے دور خطی اینٹینا پر ایسی ہی مسلسل موج پیدا کرنے کی ترکیب شکل 14.18-پ میں دکھائی گئی ہے جہاں $\frac{\lambda}{2}$ اینٹینا کے وسطی نقطے کو زمین تصور کیا گیا ہے۔

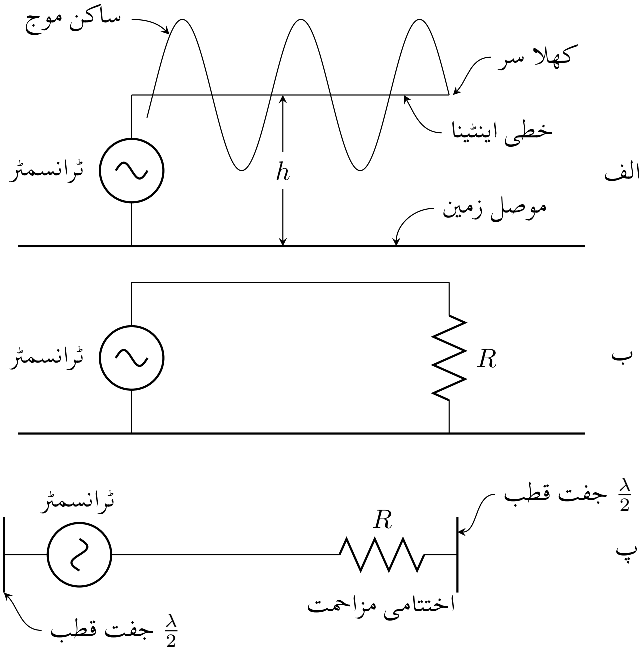
مسلسل موج کے اس خطی اینٹینا کو چھوٹے چھوٹے، سلسلہ وار جڑے، لمبائی جانب اخراجی جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسا شکل میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 14.127 غیر سمتی ارکان کے قطار کا تقابل پذیر نقش

$$E_n=\frac{1}{n}\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$$

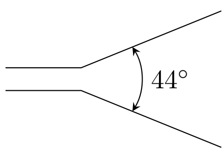
دیتی ہے جہاں لمبائی جانب اخراج کی صورت میں $\psi=\beta d(\cos\theta-1)$ کے برابر ہے۔ اگر انفرادی رکن کا نقش E_0 ہو تب ضرب نقش کی ترکیب سے قطار کا نقش

$$E(\theta)=\frac{E_0}{n}\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$$

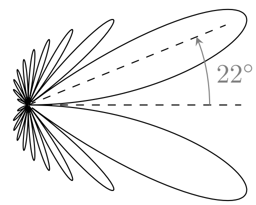
[53] transmitter



شکل 14.18: مسلسل موج اینٹینا۔



(ا) ب: دو مسلسل موج اینٹینا کو 44° پر رکھ کر بہتر سمتیت حاصل کی جاتی ہے۔



الف: خطی اختتام کردہ مسلسل موج اینٹینا۔

شکل 14.19

لکھا جا سکتا ہے۔ انتہائی چھوٹے جفت قطب کا نقش $E_0 = \sin\theta$ ہے لہٰذا لمبے اینٹینا $L = d(n-1) \approx nd$ کے لئے

$$E(\theta) = \frac{\sin\theta}{n} \frac{\sin[\frac{\beta L}{2}(\cos\theta - 1)]}{\sin[\frac{\beta L}{2n}(\cos\theta - 1)]} \tag{14.176}$$

لکھا جائے گا۔ یہ اینٹینا لمبائی جانب اخراج کرتا ہے لہٰذا θ کی قیمت زیادہ نہیں ہو گی۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات کو

$$E(\theta) = \sin\theta \frac{\sin[\beta L/2(\cos\theta - 1)]}{\beta L/2(\cos\theta - 1)} \tag{14.177}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 14.19-الف میں $n = 20$ اور $d = \frac{\lambda}{4}$ کی صورت میں حاصل 4.75λ لمبائی کے اینٹینا کی شعاع دکھائی گئی ہے۔ مرکزی شعاع $\theta = 22^\circ$ پر پائی جاتی ہے۔ جیسا شکل-ب میں دکھایا گیا ہے، دو عدد ایسے اینٹینا کو آپس میں 44° کے میکانی زاویے پر رکھنے سے یک سمتی اینٹینا حاصل ہو گا جسے دو تار کے ترسیلی تار سے طاقت مہیا کی جا سکتی ہے۔ دونوں کے قریبی شعاع مل کر بہتر سمتیت دیتی ہے۔

زمین کے متوازی اینٹینا کا عمودی شعاع حاصل کرنے کی خاطر زمین میں اینٹینا کے عکس کو بھی مد نظر رکھا جائے گا۔

5161 14.14 چھوٹا گھیرا اینٹینا

شکل 14.20-الف میں d قطر کا گھیرا اینٹینا[54] دکھایا گیا ہے جس میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ دائرے کا قطر طول موج سے بہت کم $d \ll \lambda$ ہے لہٰذا پورے گول دائرے پر یک قیمت اور ہم قدم برقی رو تصور کی جا سکتی ہے۔ اس چھوٹے گول دائرے کو شکل-ب کا چکور تصور کرتے ہوئے، دور میدان حاصل کرتے ہیں۔ چکور اور گول دائرے کے رقبے برابر

$$S = s^2 = \frac{\pi d^2}{4} \tag{14.178}$$

لئے جاتے ہیں۔ چکور کے چار اطراف کو چار جفت قطب تصور کرتے ہوئے دور میدان حاصل کیا جائے گا۔ چکور کو کارتیسی محدد کے مرکز پر $z = 0$ سطح پر رکھتے ہوئے $x = 0$ سطح پر دور میدان حاصل کیا جائے گا۔ سطح $x = 0$ پر چکور کے اطراف الف اور پ برابر مگر الٹ سمت میں میدان پیدا کرتے ہیں لہٰذا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہے۔ اطراف ب اور ت بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں جن کا نقش $x = 0$ سطح پر غیر سمتی ہے لہٰذا انہیں دو غیر سمتی جفت قطب تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسا ہی شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے دور میدان

$$E(\theta) = E_2 e^{-j\frac{\psi}{2}} - E_4 e^{j\frac{\psi}{2}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں $E_2 = E_4$ اور $\psi = \beta s \sin\theta$ ہیں۔ یوں

$$E(\theta) = -j2E_2 \sin\left(\frac{\beta s}{2}\sin\theta\right)$$

لکھا جا سکتا ہے جسے $s \ll \lambda$ کی صورت میں

$$E(\theta) = -jE_2 \beta s \sin\theta \tag{14.179}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ صفحہ 528 پر دیے گئے جدول 14.1 سے مختصر جفت قطب کے دور میدان E_θ کے حیطے کو E_2 کی جگہ پر کرتے ہوئے

$$E(\theta) = \frac{60\pi I l}{r\lambda}\beta s \sin\theta \tag{14.180}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 14.20-پ میں جفت قطب کی لمبائی $s = l$ ہے جبکہ چکور کا رقبہ $S = s^2$ ہے لہٰذا

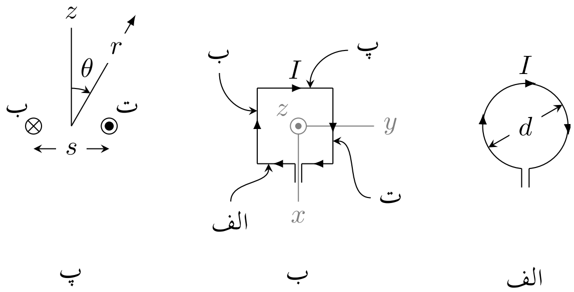
$$E(\theta) = \frac{120\pi^2 I}{r}\frac{S}{\lambda^2}\sin\theta \tag{14.181}$$

5162 لکھا جا سکتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات S رقبے کے چھوٹے دائرے یا چکور کا دور میدان دیتی ہے۔ چکور کا قطر جتنا کم ہو یہ مساوات اتنا ہی زیادہ درست میدان دیتا ہے۔ حقیقت
5163 میں S رقبے کے کسی بھی شکل کے چھوٹے بند دائرے کا دور میدان یہی مساوات دیتا ہے۔

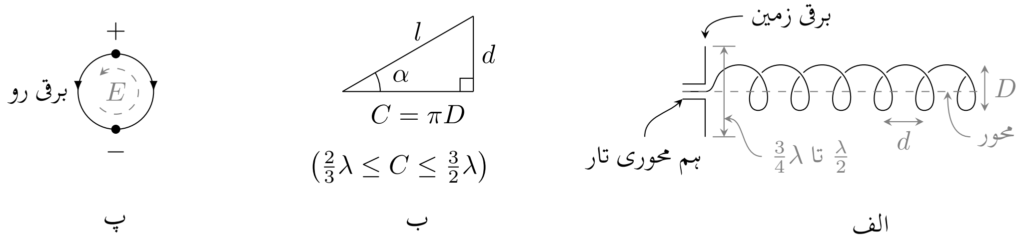
5164 14.15 پیچ دار اینٹینا

5165 طول موج برابر محیط کا پیچ دار لچھا لمبائی جانب اخراجی اینٹینا کا کام کرتا ہے۔ ایسے اینٹینا کی شعاع، دائری قطبیت رکھتی ہے۔ لچھے کی لمبائی اور اینٹینا کی سمتیت راست
5166 تناسب کا تعلق رکھتے ہیں۔ پیچ دار اینٹینا[55] کا قطر D، اس کا محیط C، چکر کے مابین فاصلہ d، چکر کی لمبائی l اور پیچ دار زاویہ α، اس کے اہم ناپ ہیں۔ ان تمام کو شکل

---
[54] loop antenna
[55] helical-beam antenna



شکل 14.20: دائرہ اور چکور اینٹینا



شکل 14.21: پیچ دار اینٹینا۔

14.21 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسا لچھے جس کا محیط $C=\pi D$ تقریباً ایک طول موج (1λ) لمبا ہو پر ایک مکمل موج پائی جائے گی۔ یوں نصف چکر پر برقی موج کا مثبت حصہ اور بقایا پر موج کا منفی حصہ پایا جائے گا۔ لچھے کے ایک چکر کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں اس پر برقی رو اور چارج دکھائے گئے ہیں جو میدان $\boldsymbol{E}$ پیدا کرتے ہیں۔ جیسے جیسے برقی رو کی موج اینٹینا پر آگے حرکت کرتی ہے ویسے ویسے میدان $\boldsymbol{E}$ گھومے گا جو اینٹینا کے محور پر دائری قطبیت[56] کو جنم دے گی۔ پیچ دار لچھا بطور مسلسل موج اینٹینا کردار ادا کرتا ہے اور اس کی خاصیت یہ ہے کہ اسے کسی مزاحمت سے اختتام پذیر کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ اس پر برقی رو بالکل مسلسل موج اینٹینا کی مانند ہوتی ہے۔ اینٹینا کے کھلے سر سے انعکاسی موج قابل نظر انداز ہونے کے ناطے، اس پر یکساں حیطے کے برقی رو کی موج خارجی جانب حرکت کرتی پائی جاتی ہے۔

پیچ دار اینٹینا کو لمبائی جانب اخراجی قطار تصور کیا جا سکتا ہے جہاں ہر چکر کو انفرادی منبع فرض کیا جاتا ہے۔ ضرب نقش کے اصول سے، انفرادی منبع کا نقش ضرب غیر سمتی ارکان کے قطار کا نقش،

$$E(\theta)=\cos\theta\frac{\sin(n\psi/2)}{\sin(\psi/2)} \tag{14.182}$$

اینٹینے کا نقش دیتا ہے۔ اس مساوات میں انفرادی چکر کے نقش کو $\cos\theta$ کے لگ بھگ تصور کیا گیا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں

$$\psi=\beta d\cos\theta-\frac{c\beta L}{v} \tag{14.183}$$

کے برابر ہے جہاں دو قریبی چکر کے مابین زاویائی فرق $\frac{c\beta L}{v}$ ہو گا جو ایک چکر گولائی L پر v رفتار سے حرکت کرتی موج کا زاویائی فرق ہے۔

مساوات 14.182 اور مساوات 14.177 کے موازنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ قدر مختلف ہیں۔ مساوات 14.182 میں $\cos\theta$ پایا جاتا ہے جس کی قیمت $\theta=0$ پر زیادہ سے زیادہ ہے جو اینٹینا کا محور یعنی شعاعی اخراج کی سمت ہے۔ اس کے برعکس مساوات 14.177 میں $\sin\theta$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے جو اینٹینا کے محور پر صفر کے برابر ہے لہٰذا اس اینٹینا کی شعاع دو شاخی ہے اور اس کی سمتیت قدر کم ہے۔

---

[56] circular polarization

چونکہ میدان دائری قطبی اور محور کے گرد یکساں ہے لہٰذا یہی مساوات $E_\theta(\theta)$ کے علاوہ $E_\phi(\theta)$ کا نقش بھی دیتی ہے۔

کسی بھی لمبائی جانب اخراجی قطار میں تمام منبع کے میدان اینٹینا کے محور پر ہم قدم ہوتے ہیں جو

$$\psi = 0, \mp 2\pi, \mp 4\pi, \cdots \tag{14.184}$$

کی صورت میں ممکن ہوتا ہے۔ پیچ دار اینٹینا میں $\psi = -2\pi$ کے برابر ہے۔ ارکان کے مابین $\psi = -2\pi$ زاویائی فرق کی بنیاد پر حاصل نقش اور اصل پیچ دار اینٹینا کے ناپے گئے نقش میں خاصہ فرق پایا جاتا ہے۔ پیچ دار اینٹینا کی ناپی گئی سمتیت زیادہ ہے۔ ہنسن اور ووڈیارڈ[57] یہ ثابت کر چکے ہیں کہ n رکنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی زیادہ سے زیادہ سمتیت اس صورت حاصل ہوتی ہے جب اس کے ارکان کے مابین $\psi = -2\pi - \frac{\pi}{n}$ زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔ مساوات 14.182 میں ارکان کے مابین زاویائی فرق $\psi = -2\pi - \frac{\pi}{n}$ پر کرنے سے حقیقی اینٹینا کے ناپے نقش جیسا نقش حاصل ہوتا ہے۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ حقیقی اینٹینا پر دو قریبی چکر کے مابین یہی زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ اس نتیجے کو تسلیم کرتے ہوئے مساوات 14.183 سے

$$\psi = \beta d \cos\theta - \frac{c\beta L}{v} = -2\pi - \frac{\pi}{n} \tag{14.185}$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{d}{\lambda} + \frac{2n+1}{2n}} \tag{14.186}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں $C = \lambda$ ، $\alpha = 12^\circ$ اور $n = 20$ کی صورت میں $\frac{v}{c} = 0.82$ ہو گی۔ حقیقی پیچ دار اینٹینا پر موج کی رفتار یہی ناپی جاتی ہے۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ پیچ دار اینٹینا خود بخود موج کی رفتار کو اس قیمت پر رکھتی ہے جس پر اینٹینا کی سمتیت زیادہ سے زیادہ حاصل ہو۔ تین سے زیادہ چکر پر مبنی پیچ دار اینٹینا یہ عمل ($5^\circ < \alpha < 20^\circ$) اور ($\frac{3}{4}\lambda < C < \frac{3}{2}\lambda$) تک حاصل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ چکر کی تعداد بڑھا کر سمتیت بڑھائی جا سکتی ہے۔

پیچ دار اینٹینا کی سمتیت تقریباً

$$D = 15 \left(\frac{C}{\lambda}\right)^2 \frac{nd}{\lambda} \tag{14.187}$$

کے برابر ہے۔ یوں $C = \lambda$ اور $\alpha = 12^\circ$ کی صورت میں $D = 64$ ہو گی۔

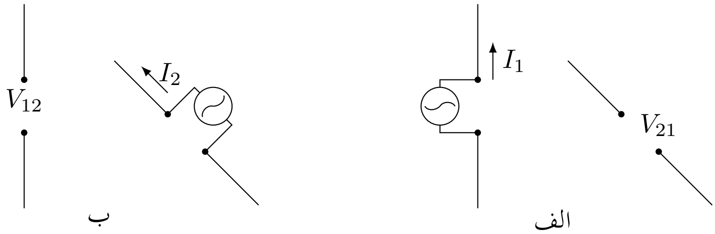
پیچ دار زاویہ $\alpha = 12^\circ$ اور $d = 0.213\lambda$ کی صورت میں طول موج میں تقریباً پانچ چکر پائیں جائیں گے لہٰذا 20 چکر کا اینٹینا $20 \times 0.213\lambda = 4.3\lambda$ لمبائی کا ہو گا۔ اتنی لمبائی کے عام لمبائی جانب اخراجی اینٹینا کی سمتیت چار گنا سے بھی قدر کم ہوتی ہے۔

پیچ دار اینٹینا کی سمتیت زیادہ ہونے کا مطلب ہے کہ اس کی اخراجی سطح حقیقی سطح سے بہت زیادہ ہوتی ہے۔ مصنوعی سیاروں پر مبنی ذرائع ابلاغ میں پیچ دار اینٹینا کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

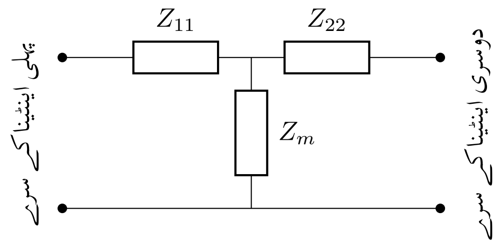
14.16 دو طرفہ کردار

اینٹینا شعاع خارج کرتی ہے اور یا اسے وصول کرتی ہے۔ اینٹینا کے تمام خاصیت دو طرفہ ہیں۔ یوں اس کی سمتیت، اخراجی رقبہ، نقش اور اخراجی مزاحمت دونوں (اخراجی اور وصولی) صورتوں میں برابر پائے جاتے ہیں۔ البتہ اینٹینا پر برقی رو اخراجی اور وصولی صورت میں مختلف صورت رکھتی ہے۔

[57] Hansen and Woodyard



شکل 14.22: دو اینٹینا کے مابین باہمیت۔



شکل 14.23: مساوی T دور۔

اینٹینا کی دوطرفہ خاصیت[58] پر شکل 14.22 کی مدد سے غور کرتے ہیں۔ دونوں اینٹینا کے درمیان غیر متحرک، خطی اور غیر سمتی خطہ پایا جاتا ہے۔ شکل-الف میں پہلے اینٹینا کو صفر رکاوٹ اور f تعدد کے منبع سے طاقت مہیا کی جاتی ہے جس سے پہلے اینٹینا کے داخلی سروں پر I_1 برقی رو اور دوسرے اینٹینا کے کھلے برقی سروں پر برقی دباو V_{21} پیدا ہوتی ہے۔ اگر منبع طاقت کو دوسرے اینٹینا کے ساتھ جوڑا جائے تب دوسرے اینٹینا میں I_2 برقی رو اور پہلے اینٹینا کے کھلے برقی سروں پر V_{12} برقی دباو پیدا ہو گا۔ شکل-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ چونکہ کسی بھی چار سروں والے برقی دور کا مساوی T دور بنانا ممکن ہے لہٰذا ان اینٹینا کے چار برقی سروں کے مابین بھی ایسا کرنا ممکن ہو گا۔ شکل 14.23 میں یہ مساوی دور دکھایا گیا ہے جہاں سے

$$
\begin{aligned}
V_{21} &= I_1 Z_m \\
V_{12} &= I_2 Z_m
\end{aligned}
$$

یا

$$\frac{V_{21}}{I_1} = \frac{V_{12}}{I_2} = Z_m \tag{14.188}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ دونوں اینٹینا کو برابر برقی رو $(I_1 = I_2)$ مہیا کرنے کی صورت میں

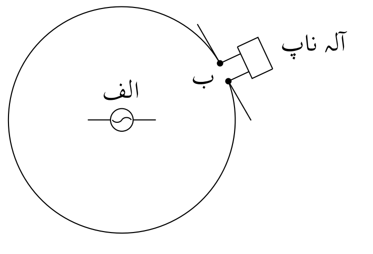
$$V_{21} = V_{12} \tag{14.189}$$

ہو گا۔

اینٹینا کی دوطرفہ خاصیت کے تحت اگر کسی ایک اینٹینا کو برقی رو I مہیا کی جائے جس سے کسی دوسرے اینٹینا میں برقی دباو V پیدا ہو تب دوسرے اینٹینا کو برقی رو I فراہم کرنے سے پہلے اینٹینا میں برقی دباو V پیدا ہو گا۔

دونوں اینٹینا کے مابین مشترکہ رکاوٹ Z_m دونوں اطراف سے برابر ہے۔

[58] reciprocity



شکل 14.24: نقش کی ناپ۔

نقش

شکل 14.24 میں اینٹینا-الف شعاع خارج کر رہی ہے جبکہ اینٹینا-ب اس شعاع کو وصول کر رہی ہے۔ اینٹینا-الف ساکن ہے جبکہ اینٹینا-ب اس کے گرد گول دائرے پر گھوم رہی ہے۔ اینٹینا-ب پر پیدا برقی دباو، اینٹینا-الف کی نقش دے گی۔ اب اگر دائرے پر گھومتی اینٹینا شعاع خارج کرے اور ساکن اینٹینا اس شعاع کو وصول کرے تو اینٹینا کے دو طرفہ خاصیت کے تحت وہی نقش دوبارہ حاصل ہو گا۔ یوں کسی بھی اینٹینا کا اخراجی نقش اور وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں۔ اینٹینا کی دو طرفہ خاصیت اس کے نقش کے لئے بھی درست ثابت ہوتی ہے۔

سمتیت اور اخراجی رقبہ

مساوات 14.77

$$D=\frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \tag{14.190}$$

کے تحت سمتیت صرف اور صرف نقش پر منحصر ہے اور ہم دیکھ چکے ہیں کہ اینٹینا کا اخراجی نقش اور اس کا وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں لہٰذا اس کی اخراجی سمتیت اور وصولی سمتیت بھی بالکل یکساں ہوں گے۔

اگر اخراجی سمتیت اور وصولی سمتیت برابر ہوں تب مساوات 14.101

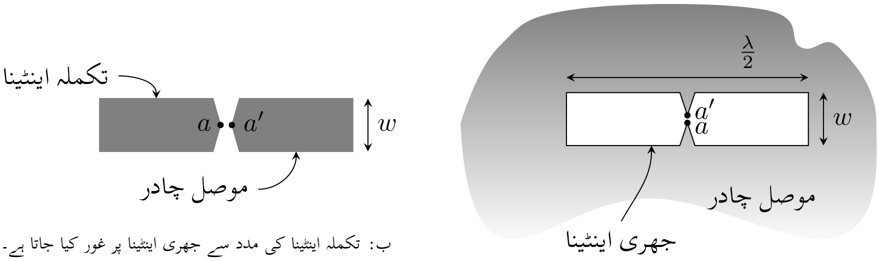
$$D=\frac{4\pi}{\lambda^2}S_{\text{اخراجی}} \tag{14.191}$$

کے تحت اخراجی رقبہ اور وصولی رقبہ بھی برابر ہوں گے۔ اینٹینا کی دو طرفہ خاصیت سمتیت اور رقبے کے لئے بھی درست ثابت ہوتی ہے۔

اخراجی مزاحمت اور وصولی مزاحمت

اخراجی اینٹینا کو صرف داخلی برقی سروں سے برقی رو مہیا کی جا سکتی ہے جبکہ وصولی اینٹینا کے تمام جسامت پر برقی دباو پیدا ہوتا ہے جس سے اینٹینا کی برقی رو عموماً اخراجی صورت سے مختلف ہو گی۔

اگر اینٹینا کو مختلف برقی رکاوٹوں کا مجموعہ تصور کیا جائے تب اگرچہ اس کے مختلف حصوں پر برقی رو مختلف ممکن ہے لیکن کسی بھی دو سروں کے مابین رکاوٹ تبدیل نہیں ہوتی۔ یوں اینٹینا کے برقی سروں کے مابین برقی رکاوٹ کا دار و مدار اینٹینا میں برقی رو کی صورت پر نہیں ہوتی۔ اس کا اخراجی رکاوٹ اور وصولی رکاوٹ بالکل برابر ہوتے ہیں۔ اینٹینا کی دو طرفہ خاصیت یہاں بھی قابل استعمال ہے۔



ب: تکملہ اینٹینا کی مدد سے جھری اینٹینا پر غور کیا جاتا ہے۔

الف: موصل چادر میں جھری بطور اینٹینا کام کرتی ہے۔

شکل 14.25: جھری اینٹینا اور اس کا تکملہ اینٹینا۔

5213

14.17 جھری اینٹینا

وسیع موصل چادر میں $\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کی جھری شکل 14.25-الف میں دکھائی گئی ہے۔ اگر aa' کو ترسیلی تار سے جوڑا جائے تو جھری کے گرد موصل چادر میں برقی رو کی وجہ سے شعاعی اخراج پیدا ہو گی۔ جھری کو از خود موصل چادر فرض کرتے اینٹینا تصور کیا جا سکتا ہے جس کی مدد سے جھری اینٹینا[59] کا میدان حاصل کیا جاتا ہے۔ شکل-ب میں اسی تکملہ اینٹینا[60] کو دکھایا گیا ہے۔ جھری اینٹینا کو aa' پر طاقت چوڑائی کے اطراف کے مابین فراہم کی جاتی ہے جبکہ تکملہ اینٹینا کو لمبائی جانب کے اطراف کے مابین طاقت aa' پر مہیا کی جاتی ہے۔ یوں ان کے میدان آپس میں $90°$ پر ہوں[61] گے۔ جھری اینٹینا کی اخراجی رکاوٹ Z_g اور تکملہ اینٹینا کی اخراجی رکاوٹ Z_d کا آپس میں تعلق

$$Z_g = \frac{Z_0^2}{4Z_d} \tag{14.192}$$

5214 ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

اس طرح جفت قطب کے خصوصیات جانتے ہوئے جھری کے خصوصیات دریافت کئے جا سکتے ہیں۔ یوں اگر جھری کی چوڑائی $\lambda \ll c$ اور اس کی لمبائی $\frac{\lambda}{2}$ کر دی جائے تو تکملہ اینٹینا (صفحہ 558) کی اخراجی رکاوٹ $Z_d = 73 + j42.5$ جانتے ہوئے جھری اینٹینا کی اخراجی رکاوٹ

$$Z_g = \frac{377^2}{4 \times (73 + j42.5)} = 363 - j211\,\Omega \tag{14.193}$$

5215 لکھی جا سکتی ہے۔

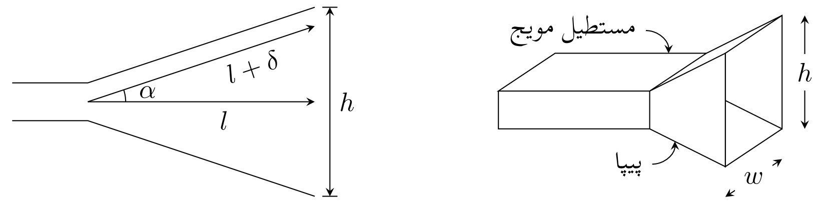
5216

14.18 پیپا اینٹینا

شکل 14.26 میں پیپا اینٹینا[62] دکھایا گیا ہے جسے بائیں جانب سے مستطیلی ترسیلی تار طاقت مہیا کر رہی ہے۔ پیپا اینٹینا کو مستطیل ترسیلی تار کا کھلا منہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ مستطیلی ترسیلی تار کا منہ بڑھانے سے اینٹینا کی اخراجی سطح بڑھانا مقصد ہے جس سے سمتیت بڑھتی ہے۔ اگرچہ پیپا کے منہ پر ہم قدم میدان ہی سے بہتر سمتیت حاصل ہو

---

[59] slot antenna
[60] complementary antenna
[61] Booker's theory
[62] horn antenna



الف: پیپا اینٹینا۔ ب: پیپا اینٹینا کے اہم ناپ۔

شکل 14.26: پیپا اینٹینا اور اس کے اہم ناپ۔

گی، حقیقت میں ایسا ہم قدم میدان حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا۔ یوں حقیقی اینٹینا میں پیپا کے منہ پر میدان میں فرق کو کسی مخصوص مقدار δ سے کم رکھا جاتا ہے۔ شکل-ب کو دیکھ کر

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{l}{l+\delta}\\
\sin\theta &= \frac{h}{2(l+\delta)}\\
\tan\theta &= \frac{h}{2l}
\end{aligned}
$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ کم δ کی صورت میں ان مساوات سے

$$l = \frac{h^2}{8\delta} \tag{14.194}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{h}{2l} = \cos^{-1}\frac{l}{l+\delta} \tag{14.195}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ برقی میدان h سمت میں اور مقناطیسی میدان w سمت میں تصور کرتے ہوئے آگے پڑھیں۔ برقی میدان E کے سطح پر اس فرق کو $\delta < \frac{\lambda}{5}$ رکھا جاتا ہے جس سے پیپے کے منہ پر کل فرق $\mp 36^\circ$ تک محدود رہتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان H کے سطح پر فرق $\delta < \frac{3\lambda}{8}$ تک محدود رکھا جاتا ہے۔ مقناطیسی میدان کے سطح پیپے کے اطراف پر برقی میدان سطح کے متوازی ہونے کی وجہ سے صفر ہوتا ہے لہٰذا میدان میں زیادہ زاویائی فرق سے دور میدان زیادہ متاثر نہیں ہوتا۔

مثال 14.11: شکل میں $h = 10\lambda$ ہے جبکہ ترسیلی تار میں TE_{10} موج پائی جاتی ہے۔ شکل میں، w اور نصف زاویے θ اور ϕ حاصل کریں۔

حل: برقی میدان کی سطح پر $\delta < \frac{\lambda}{5}$ لیتے ہوئے

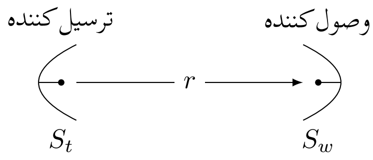
$$l = \frac{h^2}{8\delta} = \frac{100\lambda^2}{8\times\frac{\lambda}{5}} = 62.5\lambda$$

حاصل ہوتا ہے جس سے E سطح پر

$$\theta = \tan^{-1}\frac{h}{2l} = \tan^{-1}\frac{10\lambda}{2\times 62.5\lambda} = 4.6^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔ مقناطیسی میدان پر $\delta < \frac{3\lambda}{8}$ لیتے ہوئے

$$\phi = \cos^{-1}\frac{62.5\lambda}{62.5\lambda+\frac{3}{8}\lambda} = 6.26^\circ$$



شکل 14.27: وصول کردہ طاقت کا انحصار ترسیلی اور وصولی اینٹینا کے اخراجی رقبوں پر ہے۔

حاصل ہوتا ہے۔ پیپے کی چوڑائی

$$w = 2l \tan\phi = 2 \times 62.5 \times \lambda \times \tan 6.26^\circ = 13.7\lambda$$

حاصل ہوتی ہے۔

14.19 فرائس ریڈار مساوات

شکل 14.27 میں S_t اخراجی رقبے کا ترسیل کنندہ اور S_w اخراجی رقبے کا وصول کنندہ اینٹینا آپس میں r فاصلے پر دکھائے گئے ہیں۔ اگر غیر سمتی ترسیل کنندہ P_t طاقت کی شعاع خارج کرے تب وصول کنندہ کے قریب اکائی رقبے پر

$$P = \frac{P_t}{4\pi r^2} \tag{14.196}$$

کثافت طاقت دستیاب ہو گی جس سے وصول کنندہ

$$P'_w = P S_w \tag{14.197}$$

طاقت حاصل کر پائے گا۔ ترسیلی سطح S_t کے سمتی ترسیل کنندہ کی سمتیت $D = \frac{4\pi S_t}{\lambda^2}$ ہے لہٰذا اس کی شعاع سے وصول کنندہ

$$P_w = D P'_w = \frac{4\pi S_t}{\lambda^2} \frac{P_t S_w}{4\pi r^2} \tag{14.198}$$

طاقت حاصل کر پائے گا۔ اس مساوات سے

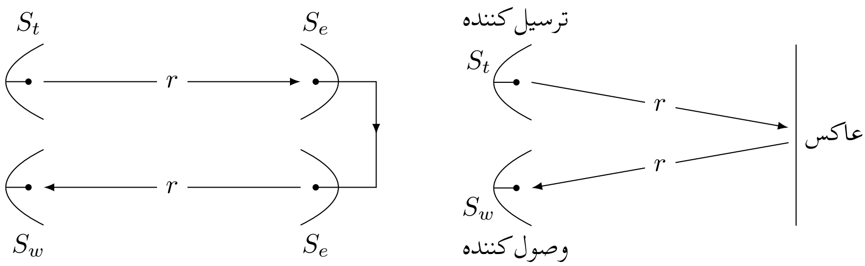
$$\frac{P_w}{P_t} = \frac{S_t S_w}{\lambda^2 r^2} \tag{14.199}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کسی بھی دو اینٹینا کے نظام میں مساوات کا دایاں ہاتھ بے بُعد مستقل ہے۔ یہ مساوات فرائس ترسیلی مساوات[63] کہلاتی ہے۔ آئیں اب شکل 14.28-الف پر غور کریں جہاں ترسیل کنندہ اینٹینا شعاع خارج کرتی ہے۔ انعکاسی شعاع کو وصول کنندہ اینٹینا وصول کرتی ہے۔ ریڈار میں عموماً ایک ہی اینٹینا دونوں کام سرانجام دیتی ہے۔ شعاع کا انعکاس ہوا میں اڑتے جہاز سے ممکن ہے۔ شکل 14.28-ب میں عاکس کو دو اینٹینا کی صورت میں دکھایا گیا ہے جہاں ایک اینٹینا شعاع وصول کرتے ہوئے دوسرے اینٹینا سے واپس خارج کرتا ہے۔ یوں مساوات 14.199 کو دو مرتبہ استعمال کرتے ہوئے

$$\frac{P_w}{P_t} = \frac{S_t S_w S_e^2}{\lambda^4 r^4} \tag{14.200}$$

---

[63] Friis transmission equation



الف: عاکس سے انعکاسی موج کی وصولی۔

ب: عاکس کو اینٹینا فرض کیا گیا ہے۔

شکل 14.28: ریڈار اینٹینا شعاع خارج کر کے انعکاسی موج وصول کرتا ہے۔

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر ایک ہی اینٹینا بطور ترسیلی اور وصولی اینٹینا استعمال کیا جائے تب

$$\frac{P_w}{P_t}=\frac{S_w^2 S_e^2}{\lambda^4 r^4} \tag{14.201}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں عاکس کا اخراجی رقبہ S_e ہے۔

اگر عاکس وسیع جسامت کا ہو اور اس سے انعکاسی موج عین ریڈار کی سمت میں ہو تب عاکس کا اخراجی رقبہ اس کے میکانی رقبے جتنا ہو گا۔ عموماً عاکس غیر سمتی اخراج کرتا ہے جس کی وجہ سے اس کا اخراجی رقبہ، اس کے میکانی رقبے سے کم ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں عاکس کے وصولی رقبے کو σ لکھتے ہوئے مساوات 14.199 سے عاکس کی حاصل کردہ طاقت

$$\frac{P}{P_t}=\frac{S_t \sigma}{\lambda^2 r^2} \tag{14.202}$$

لکھی جائے گی۔ یہی طاقت غیر سمتی خارج کی جائے گی۔ غیر سمتی اینٹینا کا اخراجی رقبہ $S=\frac{\lambda^2}{4\pi}$ ہوتا ہے۔ یہی عاکس کی اخراجی رقبہ لیتے ہوئے مساوات 14.201 میں $S_e^2=S\sigma$ لکھتے ہوئے

$$\frac{P_w}{P_t}=\frac{S_w^2 S \sigma}{\lambda^4 r^4} \tag{14.203}$$

یعنی

$$\frac{P_w}{P_t}=\frac{S_w^2 \sigma}{4\pi \lambda^2 r^4} \tag{14.204}$$

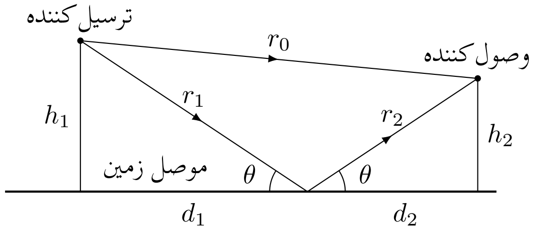
حاصل ہوتا ہے جہاں σ **ریڈار رقبہ تراش**[64] کہلاتا ہے۔ یہ **ریڈار مساوات**[65] کہلاتی ہے۔

بڑی جسامت کی موصل کرہ، جس کا رداس a ہو، کی ریڈار رقبہ تراش اس کے میکانی رقبہ تراش πa^2 کے برابر ہوتی ہے۔ غیر کامل عاکس کی صورت میں ریڈار رقبی تراش نسبتاً کم ہو گا، مثلاً ایک میٹر طول موج پر چاند کا ریڈار رقبہ تراش تقریباً $\frac{1}{10}$ گنا حاصل ہوتا ہے۔

مثال 14.12: ایک ٹی وی اسٹیشن موصل زمین پر کھڑے 200 m قد کے اینٹینا سے 1 kW کی طاقت سے نشریات کرتی ہے۔ افقی سطح پر اینٹینا غیر سمتی ہے جبکہ عمودی سمت میں اس کی نصف طاقت چوڑائی $10°$ ہے۔ طول موج 1 m ہونے کی صورت میں 4 km دور کتنی اونچائی پر اینٹینا بہترین وصولی کر پائے گا۔ وصول کردہ طاقت کا بھی تخمینہ لگائیں۔ وصولی اینٹینا مندرجہ ذیل فرض کرتے ہوئے حل کریں۔

---

radar cross section[64]
radar equation[65]



شکل 14.29: سیدھی آمد موج اور انعکاسی موج کے اثرات۔

- عمودی قطبی اینٹینا جس کی سمتیت 4 کے برابر ہے۔
- افقی قطبی اینٹینا جس کی سمتیت 4 کے برابر ہے۔
- دائری قطبی 6 چکر کا پیچ دار اینٹینا جس کا $\alpha = 12.5°$ اور چکر کے مابین فاصلہ 0.22λ ہے۔

حل: شکل میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ موصل زمین سے انعکاس پر زمین کے متوازی برقی میدان میں $180°$ کی تبدیلی رونما ہو گی۔ یوں اگر وصولی اینٹینا زمین کے بالکل قریب ہو تب افقی قطبی میدان کی صورت میں یہ صفر طاقت وصول کر پائے گا جبکہ عمودی قطبیت کی صورت میں اسے سیدھی رسائی کے علاوہ زمین سے انعکاسی میدان بھی میسر ہو گا۔ یوں کل میدان دگنا اور طاقت چار گنا ہو گا۔

شکل 14.29 کو دیکھتے ہوئے کہہ سکتے ہیں کہ کسی بھی h پر اگر

$$r_1 + r_2 - r_0 = n\lambda \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{14.205}$$

ہو تب افقی قطبی میدان صفر پایا جائے گا جبکہ عمودی قطبی میدان دگنا ہو گا۔ اسی طرح جب بھی

$$r_1 + r_2 - r_0 = n\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots) \tag{14.206}$$

ہو تب افقی قطبی میدان دگنا اور عمودی قطبی میدان صفر پایا جائے گا۔ ان حقائق سے ظاہر ہے کہ زیادہ سے زیادہ افقی قطبی میدان کے دو قریبی نقطوں کے درمیانی نقطے پر زیادہ سے زیادہ عمودی قطبی میدان پایا جاتا ہے۔

بایاں دائری قطبی موج انعکاس کے بعد دایاں دائری قطبی ہوتا ہے۔ اسی طرح دایاں دائری قطبی موج انعکاس کے بعد بایاں دائری قطبی ہوتا ہے۔ یوں اگر ترسیلی اینٹینا دایاں دائری قطبی ہو تب دایاں دائری قطبی اینٹینا صرف سیدھے آمدی میدان کو وصول کر پائے گا جبکہ بایاں دائری قطبی اینٹینا صرف انعکاسی میدان کو وصول کر پائے گا۔ یوں دونوں اقسام کے دائری قطبی اینٹینا اکائی میدان حاصل کریں گے۔ ترسیلی اینٹینا بایاں قطبی ہونے کی صورت میں بایاں قطبی وصولی اینٹینا سیدھے آمد میدان کو وصول کرے گا جبکہ دایاں قطبی اینٹینا انعکاسی میدان کو وصول کرے گا۔

افقی اور عمودی قطبی اینٹینوں کی صورت میں وصولی اینٹینا کی اونچائی تبدیل کرنے سے میدان صفر تا دگنا حاصل کرنا ممکن ہے جبکہ دائری قطبی اینٹینا کی صورت میں وصول طاقت کا دار و مدار اینٹینا کی اونچائی پر نہیں ہوتا۔ دائری اینٹینا ہر صورت اکائی میدان حاصل کرتی ہے۔

چونکہ آمدی اور انعکاسی زاویے برابر ہوتے ہیں لہٰذا شکل میں آمدی تکون اور انعکاسی تکون یکساں ہیں۔ یوں $(r_1 + r_2 - r_0)$ کی قیمت $\frac{2h_1h_2}{d}$ لکھی جا سکتی ہے۔ یوں عمودی قطب میدان کی زیادہ سے زیادہ قیمت

$$h_2 = \frac{d\lambda}{2h_1} = \frac{4 \times 10^3 \times 1}{2 \times 200} = 10\,\mathrm{m}$$

کی صورت میں حاصل ہو گی جس سے افقی قطبی میدان کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی اونچائی 5، 15، 25، . . . میٹر لکھی جا سکتی ہے۔ 5247

فرائس کی مساوات سے، ایک راہ سے موصول طاقت

$$P_w=\frac{P_t A_t A_w}{r^2\lambda^2}=\frac{10^3\times 0.32\times 0.91}{16\times 10^6\times 1}=18\,\mu\text{W}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں ترسیلی اینٹینا کی سمتیت

$$D=\frac{4\pi}{\theta_{HP}\phi_{HP}}=\frac{4\pi}{\frac{360\times\pi}{180}\times\frac{10\times\pi}{180}}=11.459$$

لیتے ہوئے اس کا اخراجی رقبہ

$$A_t=\frac{\lambda^2}{4\pi}D=0.91\,\text{m}^2$$

اور وصولی اینٹینا کا وصولی رقبہ

$$A_w=\frac{\lambda^2}{4\pi}D=\frac{1^2\times 4}{4\pi}=0.32\,\text{m}^2$$

لئے گئے ہیں۔ سیدھی آمد اور انعکاسی آمد میدان مل کر زیادہ سے زیادہ طاقت 4 گنا کر دیتی ہیں۔ یوں افقی قطبی اور عمودی قطبی اینٹینا کی صورت میں زیادہ سے زیادہ وصول کردہ طاقت $72\,\mu\text{W}$ ہو گا جبکہ دونوں صورتوں میں کم سے کم حاصل کردہ طاقت صفر ہو گا۔ 5249

دائری قطبی صورت میں وصولی اینٹینا کی سمتیت

$$D=15\left(\frac{C}{\lambda}\right)^2\frac{nd}{\lambda}=15\left(\frac{\frac{0.22}{\tan 12.5^\circ}}{1}\right)^2\times\frac{6\times 0.22}{1}=19.5$$

اور وصولی رقبہ

$$A_w=\frac{\lambda^2 D}{4\pi}=1.55\,\text{m}^2$$

ہیں لہٰذا ہر اونچائی پر وصول کردہ طاقت

$$P_w=\frac{1.55}{0.32}\times 18=87\,\mu\text{W}$$

ہو گا۔ 5250

وصول کردہ طاقت کا تخمینہ لگاتے ہوئے ہم نے اینٹینوں کے درمیان فاصلے کو چار کلو میٹر ہی تصور کیا اگرچہ حقیقی فاصلے قدر مختلف ہیں۔ چار کلو میٹر کے فاصلے پر چند میٹر کم یا زیادہ سے حاصل جواب میں کوئی خاص تبدیلی پیدا نہیں ہوتی۔ 5252

5253

14.20 ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی

کسی بھی برقی مزاحمت R میں حرارت T کی وجہ سے آزاد چارج حرکت کرتے ہیں جس سے مزاحمت میں حراری شور[66] پیدا ہوتا ہے۔ایسی مزاحمت کے برقی سروں پر B تعددی پٹی پر

$$W = kBT \tag{14.207}$$

طاقت شور[67] پایا جاتا ہے۔اکائی تعددی پٹی پر یوں

$$w = kT \tag{14.208}$$

طاقت شور پایا جائے گا جہاں

w اکائی تعددی پٹی پر شور کی طاقت، $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Hz}}$

k بولٹزمن کا مستقل، $1.38 \times 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

B تعددی پٹی، Hz

T مزاحمت کی حتمی حرارت، K

ہیں۔ T کو حرارت شور[68] کہا جاتا ہے۔برابر تعددی پٹی پر برابر طاقت شور پایا جاتا ہے۔

اگر برقی مزاحمت R کے برابر اخراجی مزاحمت $(R = R_{\text{اخراجی}})$ کے اینٹینا کے برقی سروں پر طاقت شور ناپی جائے تو یہ مزاحمت پر ناپی گئی طاقت شور سے مختلف ہو گی۔اینٹینا کے سروں پر طاقت شور، خلاء کے اس خطے کی حرارت T سے پیدا شور ہو گا جہاں سے اینٹینا طاقت وصول کر رہا ہو۔اس طاقت شور کا اینٹینا کی حرارت سے کوئی تعلق نہیں۔یوں اینٹینا کو بطور بعید پیا حرارت[69] استعمال کیا جا سکتا ہے۔

ایک سنٹی میٹر طول موج کے ریڈیائی دوربین کی مرکز نگاہ آسمان کے ایسے خطوں پر رکھی جا سکتی ہے جہاں حتمی حرارت $0\,\mathrm{K}$ کے قریب قریب ہوتی ہے۔ایسی صورت میں طاقت شور آسمان کی حرارت سے پیدا ہو گا نا کہ اینٹینا کے حرارت سے جو $300\,\mathrm{K}$ کے لگ بھگ ہو گی۔ریڈیائی دوربین کی طاقت شور فی تعدد

$$w = kT_A \qquad \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Hz}}\right) \tag{14.209}$$

لکھی جاتی ہے جہاں T_A اینٹینا کی حراری شور ہے جسے عموماً حرارت اینٹینا[70] یا اخراجی مزاحمت کی حرارت کہا جاتا ہے۔حرارت اینٹینا وہ خطہ کرتی ہے جس پر اینٹینا کے نقش کی نظر ہو۔یوں اینٹینا کی مدد سے دور آسمان کے خطوں کی حرارت ناپنا ممکن ہے۔ہم نے اس پورے بحث میں یہ فرض کر رکھا ہے کہ اینٹینا بے ضیاع ہے اور یہ آسمان کی طرف نظر رکھے ہوئے ہے۔یوں انعکاسی شعاع اور ثانوی شعاع کو رد کیا گیا ہے۔

ریڈیائی دوربین کو استعمال کرتے ہوئے کثافت طاقت شور فی تعدد

$$p = \frac{w}{S_e} = \frac{kT_A}{S_e} \qquad \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,Hz}}\right) \tag{14.210}$$

---

thermal noise[66]
noise power[67]
noise temperature[68]
remote temperature sensor[69]
antenna temperature[70]

کا استعمال زیادہ سود مند ثابت ہوتا ہے جسے پوئنٹنگ سمتیہ فی تعدد تصور کیا جا سکتا ہے۔

اگر ہمیں منبع شور کی زاویائی وسعت Ω_M معلوم ہو اور یہ Ω_A کی نسبت سے کم ہو تب منبع کی حرارت

$$\frac{T_A}{T_M}=\frac{\Omega_M}{\Omega_A} \tag{14.211}$$

سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ یاد رہے کہ T_A کا اینٹینا کی حرارت سے کوئی تعلق نہیں۔

مثال 14.13: مریخ[71] پر مرکز نگاہ رکھتے ہوئے 15 m لمبی ریڈیائی دوربین کی اینٹینا حرارت 31.5 mm طول موج پر 0.24 K ناپی جاتی ہے۔ اینٹینا پر مریخ 0.005° زاویہ بناتا ہے اور اینٹینا کا نصف طاقت زاویہ 0.116° ہے۔ مریخ کی حرارت دریافت کریں۔

حل: مساوات 14.211 سے مریخ کی حرارت

$$T_M=\frac{\Omega_A}{\Omega_M}T_A\approx\frac{0.116^2}{\pi(0.005^2/4)}0.24=164\,\mathrm{K}$$

حاصل ہوتی ہے۔

14.21 حرارت نظام اور حرارت بعید

حرارت اینٹینا سے اس خطے کی حرارت حاصل کی جا سکتی ہے جس پر اینٹینا کا مرکز نگاہ ہو۔ یوں اینٹینا کو بعید پیما حرارت استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ایک سنٹی میٹر طول موج کے ریڈیائی دوربین کی نگاہ، ستاروں سے خالی آسمان کے خطے پر رکھتے ہوئے انتہائی کم اینٹینا حرارت حاصل کی جا سکتی ہے۔ آسمان کو دیکھتے ہوئے کم تر حرارت 3 K حاصل ہوتی جو کائنات کی ابتدائی دھماکے[72] کی بقیہ حرارت[73] ہے۔ اگر اینٹینا کے سامنے ستارہ موجود ہو تب بقیہ حرارت سے زیادہ حرارت ناپی جائے گی۔ ایک میٹر طول موج پر ہماری کہکشاں کی حرارت کئی ہزار کیلون ناپی جاتی ہے۔ ہم حراری[74] شور کی حرارت ناپنے کی بات کر رہے ہیں۔ یہ کامل اخراجی-وصولی خاصیت کے جسم کی حرارت ہے۔ ایسے جسم کو سیاہ جسم[75] کہا جاتا ہے۔ یوں اگر اینٹینا کی پوری وصولی نقش کے خطے میں گرم کوئلے یا سیاہ دھات کا کرہ پایا جائے، تو اینٹینا سے کرہ کی ناپی گئی حرارت وہی ہو گی جو تھرمامیٹر[76] سے ناپی جائے گی۔ اس کے برعکس ترسیلی اینٹینا کی ناپی گئی اینٹینا حرارت غیر یقینی طور پر زیادہ حاصل ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر اگر قریب ریڈیو اسٹیشن کی نشریات، $10\,\mathrm{m^2}$ وصولی رقبے اور 10 kHz تعددی پٹی کے وصولی اینٹینا کے قریب $10\,\frac{\mathrm{\mu V}}{\mathrm{m}}$ کا میدان پیدا کرے تو وصولی اینٹینا کی کل وصول کردہ طاقت

$$W=\frac{E^2}{Z_0}S_e=\frac{10^{-10}}{377}\times 10=2.65\,\mathrm{pW}$$

---

[71] Mars
[72] big bang
[73] residual temperature
[74] thermal
[75] blackbody
[76] thermometer

ہو گی جسے مساوات 14.207 میں پر کرتے ہوئے

$$T = \frac{W}{kB} = \frac{2.65 \times 10^{-12}}{1.38 \times 10^{-23} \times 10^4} = 1.9 \times 10^7\,\mathrm{K}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ صرف $10\,\frac{\mu\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کا میدان $1.9 \times 10^7\,\mathrm{K}$ کی اینٹینا حرارت پیدا کر سکتا ہے۔ یہ اتنی بڑی مقدار ہے کہ اس کی موجودگی میں بقایا نظام کی حرارت، جسے حرارت نظام[77] پکارا جاتا ہے، کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ البتہ، ریڈیائی دوربین اتنی کم طاقت کے اشارات پر کام کرتے ہیں کہ ان میں حرارت نظام انتہائی اہم ہوتا ہے۔ اس کا اندازہ آپ یوں کر سکتے ہیں کہ ریڈیائی دوربین کے استعمال میں کثافت طاقت فی ہرٹز کی اکائی جانسکی[78] ہے جہاں $1\,\mathrm{Ja} = 10^{-26}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,Hz}}$ کے برابر ہے۔

system temperature[77]
Jansky[78]

سوالات

سوال14.1: غیر سمتی اینٹینا $E=\frac{25I}{r}$ میدان پیدا کرتی ہے جہاں اینٹینا کا داخلی موثر برقی رو I اور اینٹینا سے فاصلہ r ہے۔اس اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔

جواب: $20.8\,\Omega$

سوال14.2: اینٹینا کی شعاع $0<\theta<30°$، $0<\phi<2\pi$ خطے میں یکساں میدان پیدا کرتی ہے جبکہ $30°<\theta<180°$ خطے میں میدان صفر کے برابر ہے۔الف) اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A حاصل کریں۔ب) شعاع کی سمتیت D دریافت کریں۔

جوابات: $0.842\,\mathrm{sr}$ ، 14.9

سوال14.3:

اینٹینا کی شعاع $0<\theta<60°$، $0<\phi<2\pi$ خطے میں یکساں میدان پیدا کرتی ہے جبکہ $60°<\theta<180°$ خطے میں میدان صفر کے برابر ہے۔الف) اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A حاصل کریں۔ب) شعاع کی سمتیت D دریافت کریں۔پ) اینٹینا کا اخراجی رقبہ A_e حاصل کریں۔ت) اینٹینا کا داخلی موثر برقی رو $12\,\mathrm{A}$ ہونے کی صورت میں اینٹینا سے $164\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر موثر برقی میدان $7\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔اینٹینا کا اخراجی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}}$ دریافت کریں۔

جوابات: $3.142\,\mathrm{sr}$ ، 4 ، $0.318\lambda^2$ ، $76.3\,\Omega$

سوال14.4: اینٹینا کی شعاع $45°<\theta<60°$، $0°<\phi<120°$ خطے میں یکساں ہے۔بقایا خطے میں میدان صفر کے برابر ہے۔اینٹینا سے $1000\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر اس خطے میں $2\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ برقی میدان حاصل کرنے کی خاطر $4\,\mathrm{A}$ موثر داخلی برقی رو درکار ہے۔اینٹینا کی اخراجی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}}$ دریافت کریں۔

جواب: $288\,\Omega$

سوال14.5: اینٹینا کی مرکزی شعاع $0°<\theta<45°$ خطے میں یکساں پائی جاتی ہے جبکہ اس کی ثانوی شعاع $120°<\theta<180°$ خطے میں یکساں پائی جاتی ہے۔میدان ϕ کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا۔مرکزی شعاع میں میدان ثانوی شعاع کے میدان کے چار گنا ہے۔الف) اینٹینا کی سمتیت D دریافت کریں۔ب) مرکزی شعاع میں اینٹینا سے $350\,\mathrm{m}$ فاصلے پر $E_{\text{موثر}}=6\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ برقی میدان کے حصول کے لئے اینٹینا کو $6\,\mathrm{A}$ موثر داخلی برقی رو مہیا کیا جاتی ہے۔اینٹینا کی اخراجی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}}$ دریافت کریں۔

جوابات: $D=6.17$ ، $662\,\Omega$

سوال14.6: دو عدد غیر سمتی، ہم قدم منبع کے درمیان فاصل 2λ ہے۔الف) نقش کے صفر حاصل کریں۔ب) نقش کی چوٹیاں حاصل کریں۔

جوابات: الف) $\mp41.4°$ ، $\mp75.5°$ ، $\mp104.5°$ ، $\mp138.6°$؛ ب) $0°$ ، $\mp60°$ ، $\mp90°$ ، $\mp120°$ ، $180°$

سوال14.7: دو عدد غیر سمتی، منبع کے درمیان فاصل $\frac{3\lambda}{2}$ ہے جبکہ ان میں زاویائی فرق $180°$ ہے۔الف) نقش کے صفر حاصل کریں۔ب) نقش کی چوٹیاں حاصل کریں۔

جوابات: الف) $\mp90°$ ، $\mp48.2°$ ، $\mp131.8°$؛ ب) $0°$ ، $\mp70.5°$ ، $\mp109.5°$

سوال 14.8: چار رکنی قطار میں غیر سمتی، یکساں طاقت کے منبع پائے جاتے ہیں۔ قطار میں ہر دو قریبی منبع میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ منبع کے درمیان فاصلہ نصف طول موج سے کم $d < \frac{\lambda}{2}$ ہے۔ زیادہ سے زیادہ میدان $\theta = 45^\circ$ پر اور نقش کا صفر $\theta = 90^\circ$ پر حاصل کرنے کے لئے درکار δ اور d حاصل کریں۔

جوابات: $\delta = -90^\circ$ ، $d = 0.354\lambda$

سوال 14.9: گھریلو ریڈیو سے 585 kHz تعدد کی نشریات سنی جا رہی ہے۔ الف) ریڈیو اینٹینا کو غیر سمتی تصور کرتے ہوئے اس کا اخراجی رقبہ دریافت کریں۔ ب) گھر سے ریڈیو اسٹیشن کا فاصلہ 10 km جبکہ اسٹیشن کی اخراجی طاقت 5 kW کی صورت میں ریڈیو کتنی طاقت وصول کر پاتا ہے۔ اسٹیشن کی اخراج غیر سمتی تصور کریں۔ پ) ریڈیو کی داخلی مزاحمت 300 Ω ہے۔ ریڈیو کو صرف 1 μV موثر داخلی اشارہ درکار ہے۔ درکار داخلی طاقت کی قیمت حاصل کریں۔

جوابات: $20\,928\,\mathrm{m^2}$ ، 83.3 mW ، 3.33 fW

سوال 14.10: 1.5λ لمبے خطی اینٹینا کا اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر آپ کو صفحہ 558 پر دیے جدول 14.2 کے طرز کا جدول حاصل کرنا ہو گا۔

جواب: 100 Ω

سوال 14.11: یکساں غیر سمتی منبع پر مبنی قطار میں ارکان کے درمیان $d = \frac{\lambda}{4}$ ہے۔ مرکزی شعاع $\theta = 30^\circ$ پر حاصل کرنے کی خاطر ارکان کے مابین زاویائی فرق δ حاصل کریں۔

جواب: 1.36 rad

سوال 14.12: تداخل پیما میں جفت قطب کے مابین فاصلہ 10λ ہونے کی صورت میں پہلے صفر چوڑائی حاصل کریں۔

جواب: 5.7°

سوال 14.13: خلاء میں دو مصنوعی سیاروں کے درمیان 2×10^8 m کا فاصلہ ہے۔ یہ آپس میں 2.5 GHz تعدد پر اشارات کا تبادلہ کرتے ہیں۔ دونوں سیارے $D = 1500$ سمتیت کے اینٹینا استعمال کرتے ہیں۔ اطلاعات صحیح موصول ہونے کے لئے ضروری ہے کہ حاصل کردہ اشارے کی طاقت برقی شور سے قدر زیادہ ہو۔ یوں ضروری ہے کہ حاصل کردہ برقی اشارے کی طاقت کم از کم 1 pW ہو۔ اخراجی اینٹینا کی درکار طاقت حاصل کریں۔

جواب: 195 W

5331 ## ڈھلوان، پھیلاو، گردش اور لاپلاسی

5332 کارتیسی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & az \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

5333 نلکی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_{\rho} & \boldsymbol{a}_{\phi} & \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

5334 کروی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_{\phi} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\boldsymbol{a}_{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{a}_{\phi} \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}
\end{aligned}
$$

5335 عمومی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{1}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}\boldsymbol{a}_v + \frac{1}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w}\boldsymbol{a}_w \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{k_1 k_2 k_3}\left(\frac{\partial (k_2 k_3 A_u)}{\partial u} + \frac{\partial (k_3 k_1 A_v)}{\partial v} + \frac{\partial (k_1 k_2 A_w)}{\partial w}\right) \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{k_2 k_3}\left[\frac{\partial (k_3 A_w)}{\partial v} - \frac{\partial (k_2 A_v)}{\partial w}\right]\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_3 k_1}\left[\frac{\partial (k_1 A_u)}{\partial w} - \frac{\partial (k_3 A_w)}{\partial u}\right]\boldsymbol{a}_v \\
&\quad + \frac{1}{k_1 k_2}\left[\frac{\partial (k_2 A_v)}{\partial u} - \frac{\partial (k_1 A_u)}{\partial v}\right]\boldsymbol{a}_w \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{k_1 k_2 k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_2 k_3}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_3 k_1}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{k_1 k_2}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]
\end{aligned}
$$

5336 سمتی مماثل

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G} = FG\cos\theta \qquad \text{غیر سمتی (نقطہ) ضرب}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}}{FG}\right)$$

$$\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G} = FG\sin\theta\boldsymbol{a}_N \qquad \text{سمتی (صلیبی) ضرب}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}}{\boldsymbol{a}_N FG}\right)$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) &= 0 \\
\nabla \cdot \nabla f &= \nabla^2 f \\
\nabla \times \nabla f &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla (f + g) &= \nabla f + \nabla g \\
\nabla \cdot (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) &= \nabla \cdot \boldsymbol{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{G} \\
\nabla \times (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) &= \nabla \times \boldsymbol{F} + \nabla \times \boldsymbol{G}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla (fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\
\nabla \cdot (f\boldsymbol{G}) &= f(\nabla \cdot \boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G} \cdot (\nabla f) \\
\nabla \times (f\boldsymbol{G}) &= f(\nabla \times \boldsymbol{G}) + (\nabla f) \times \boldsymbol{G}
\end{aligned}
$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}$$

جہاں $\nabla^2 \boldsymbol{F}$ سے مراد

$$\nabla^2 \boldsymbol{F} = \nabla^2 F_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \nabla^2 F_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \nabla^2 F_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہے۔

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{G} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{G}) \\
\boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{H}) &= \boldsymbol{G} \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{H} \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) \\
\nabla \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{F}(\nabla \cdot \boldsymbol{G}) - \boldsymbol{G}(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} \\
\nabla(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) &= (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \times (\nabla \times \boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G} \times (\nabla \times \boldsymbol{F})
\end{aligned}
$$

5337 سطحی اور حجمی تکمل کے تعلق

مندرجہ ذیل تین مساوات میں دائیں جانب حجمی تکمل کے حجم کو بائیں جانب سطحی تکمل کی سطح گھیرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\oint_S f \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_h \nabla f \,\mathrm{d}h \\
\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_h \nabla \cdot \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}h \qquad \text{مسئلہ پھیلاو} \\
\oint_S \boldsymbol{a}_N \times \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}S &= \int_h \nabla \times \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}h
\end{aligned}
$$

5338 خطی اور سطحی تکمل کے تعلق

مندرجہ ذیل دو مساوات میں دائیں جانب سطحی تکمل کی سطح کو بائیں جانب خطی تکمل کی بند راہ گھیرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\oint_l f \,\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_S \boldsymbol{a}_N \times \nabla f \,\mathrm{d}S \\
\oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \text{مسئلہ سٹوکس}
\end{aligned}
$$

complex permitivity
dispersion
try to resolve the issue of using k and γ as propagation constants
kraus p473 fig 10-60 sec 10.18 and 10.19, 10.17,10.16,10.15,10.11 or do the entire chap9 and 10 transmission from kraus too
in the continuous aperture i have said Hy=Jx where as it is Hy=-Jx. have been unable to correct this. need to speak to someone in engg deptt knowing this topic
fourier transform sec 14.8 of kraus must draw the figures
charge is barqi bar and let the reader figure out which bar is meant
degree angle and degree celcius, ohm, micro etc not showing
kraus p581 mentions three types of impedances: intrinsic, characteristic and transverse. ensure that i too have these distinctions
kraus fig-13.28 and fig 13.29 and table 13.3 (on p577) are v. impt
Huygens improvements
figTransmissionSmithFromInternet.tex is not giving the figure of the book
the answers should be at the end of the book
handle all side notes (   ) and remove the corresponding text
read chapter 9 onwards (proof reading)
energy travels along the wire and not in the wire.
antenna chapter, 3D figure at start and complete the start section.
house completion certificate.
zaryab fish
F=-dW/dT to include in inductance chapter plus a question or two
magnetizartion curve and an iteration example. fig 8.10, 11 of hayt.
add questions to machine book too.

when giving fields always remember the following rules:
always ensure that divergence of magnetic field is zero.
moving waves must be of the form $E = E0\cos(wt - kz)$ where $c = (\mu * \epsilon)^{-0.5}$ and $k = 2 * \pi / \lambda$
include complex permitivity (7th ed Q12.18 says sigma=omega*epsilon")
include 4th ed fig 11.11 of page 422

15.1 فوریئر بدل 5363

ہم کسی بھی کثافت برقی رو کا پیدا کردہ دور میدان حاصل کرنا دیکھ چکے ہیں۔بعض اوقات ہمیں کثافت برقی رو معلوم نہیں ہوتی البتہ کسی مخصوص سطح پر میدان معلوم 5364
ہوتا ہے۔اس طرح کے مسئلے کی مثال مستطیل پیپا اینٹینا ہے۔مستطیل مویج کا منہ کھول کر مستطیل پیپا اینٹینا حاصل کیا جاتا ہے۔اس اینٹینا کے منہ پر کسی قسم کی موصل 5365
چادر نہیں نسب کی جاتی لہٰذا اس کے کھلے منہ کے کناروں پر برقی رو پائی جاتی ہے جس کی شکل جاننا دشوار ہے۔البتہ پیپے کی منہ پر برقی میدان جاننا نسبتاً آسان کام 5366
ہے۔ہم دیکھیں گے کہ ایسی صورت میں دور میدان قریبی میدان کے فوریئر بدل[1] سے حاصل ہوتا ہے۔ آئیں پہلے فوریئر بدل کی یاد دوبارہ تازہ کریں۔ 5367

آپ فوریئر بدل جوڑی سے بخوبی واقف ہوں گے۔کسی بھی تفاعل $w(x)$ جس کا آزاد متغیرہ x ہو کا فوریئر بدل $W(k_x)$

$$W(k_x)=\int_{-\infty}^{\infty} w(x)e^{jk_x x}\,\mathrm{d}x \tag{15.1}$$

لکھا[2] جاتا ہے جہاں $W(k_x)$ کا آزاد متغیرہ k_x ہے۔یوں کسی بھی تفاعل کا آزاد متغیرہ تبدیل کرنا ممکن ہے۔اسی طرح $W(k_x)$ کا فوریئر بدل $w(x)$

$$w(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(k_x)e^{-jk_x x}\,\mathrm{d}k_x \tag{15.2}$$

ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات فوریئر بدل جوڑی کہلاتے ہیں۔ مساوات 15.1 کے دونوں اطراف کا k_x کے ساتھ تفرق

$$\frac{\mathrm{d}W(k_x)}{\mathrm{d}k_x}=jk_x\int_{-\infty}^{\infty} w(x)e^{jk_x x}\,\mathrm{d}x=jk_x W(k_x) \tag{15.3}$$

لکھا جا سکتا ہے۔دائیں ہاتھ تفرق لیتے ہوئے دھیان رہے کہ تکمل کے اندر k_x کا کردار بالکل ایک مستقل کا ہے لہٰذا تفرق کو تکمل کے اندر لے جایا جا سکتا ہے۔اسی طرح مساوات 15.2 کا تفرق x کے ساتھ لینے سے

$$\frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{-jk_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(k_x)e^{-jk_x x}\,\mathrm{d}k_x=-jk_x w(x) \tag{15.4}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح

$$\frac{\mathrm{d}^2 W(k_x)}{\mathrm{d}k_x^2}=(jk_x)^2 W(k_x)=-k_x^2 W(k_x) \tag{15.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2}=(-jk_x)^2 w(x)=-k_x^2 w(x) \tag{15.6}$$

بھی لکھے جا سکتے ہیں۔ 5368

دو آزاد متغیرات پر مبنی تفاعل $u(x,y)$ کا فوریئر بدل

$$U(k_x,k_y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{jk_x x+jk_y y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{15.7}$$

لکھا جاتا ہے۔اس کا واپسی فوریئر بدل

$$u(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(k_x,k_y)e^{-jk_x x-jk_y y}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y \tag{15.8}$$

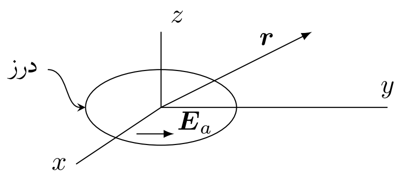
ہو گا۔مساوات 15.7 کے تفرق لے کر

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial k_x}&=jxU\\ \frac{\partial U}{\partial k_y}&=jyU\\ \frac{\partial^2 U}{\partial k_x^2}&=-x^2 U\\ \frac{\partial^2 U}{\partial k_x \partial k_y}&=-xyU\end{aligned} \tag{15.9}$$

---

[1] Fourier transform pair

[2] عموماً مساوات 15.1 میں تکمل کو $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ سے ضرب دے کر لکھا جاتا ہے۔اسی طرح مساوات 15.2 میں بھی $\frac{1}{2\pi}$ کی جگہ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ سے تکمل کو ضرب دیا جاتا ہے۔اس طرح جوڑی کے دونوں مساوات تقریباً یکساں شکل اختیار کر لیتے ہیں۔



شکل 15.1: سطح z=0 پر درز میں برقی میدان $\boldsymbol{E}_a$ کو دور میدان فوریئر بدل ہے۔

اور مساوات 15.8 کے تفرق سے

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -jk_x u \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -jk_y u \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -k_x^2 u \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -k_x k_y u
\end{aligned}
\tag{15.10}
$$

فوریئر بدل کی یاد تازہ کرنے کے بعد اصل موضوع پر واپس آتے ہیں۔شکل 15.1 میں $z = 0$ سطح پر درز دکھایا گیا ہے جس پر برقی میدان $\boldsymbol{E}_a$ ہے۔یہ[5369]میدان $z < 0$ خطے میں موجود کثافت برقی رو کی وجہ سے پایا جاتا ہے۔ہمیں اس کثافت برقی رو کی ضرورت نہیں پڑے گی۔درز کا رقبہ S_a ہے۔آئیں درز پر موجود[5370]میدان سے خالی خلاء میں کہیں دور پیدا میدان دریافت کریں۔[5371]

میکس ویل کی مساوات $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ کے گردش کو

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{E} - \nabla^2 \boldsymbol{E} &= -j\omega\mu_0 \nabla \times \boldsymbol{H} \\
&= -j\omega\mu_0 (\boldsymbol{J} + j\omega\epsilon_0 \boldsymbol{E})
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں دوسری قدم پر $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ پر کیا گیا ہے۔ساتھ ہی ساتھ $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$ کے علاوہ $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = j\omega \boldsymbol{E}$ اور $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = j\omega \boldsymbol{H}$ کا بھی استعمال کیا گیا ہے۔ شکل 15.1 میں درز سے دور خالی خلاء میں نہ کوئی کثافت چارج پائی جاتی ہے اور نہ ہی کثافت برقی رو۔یوں مندرجہ بالا مساوات میں دور مقام پر $\boldsymbol{J} = 0$ اور

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{15.11}
$$

پر کرتے ہوئے

$$
\nabla^2 \boldsymbol{E} + k_0^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{15.12}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$
k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \tag{15.13}
$$

لکھا گیا ہے۔مساوات 15.11 اور مساوات 15.12 کو کارتیسی محدد میں یوں لکھا جائے گا۔

$$
\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z} = 0 \tag{15.14}
$$

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \boldsymbol{E}(x,y,z) = 0 \tag{15.15}
$$

ان دو مساوات کا فوریئر بدل مساوات 15.10 کی مدد سے لکھتے ہیں

$$
k_x E_x(k_x,k_y,k_z) + k_y E_y(k_x,k_y,k_z) + j\frac{\partial E_z(k_x,k_y,k_z)}{\partial z} = 0 \tag{15.16}
$$

$$
\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k_0^2 - k_x^2 - k_y^2) \right] \boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z) = 0 \tag{15.17}
$$

جہاں $u(x,y,z)=E(x,y,z)$ لیتے ہوئے $U(k_x,k_y,k_z)=E(k_x,k_y,k_z)$ لکھا گیا ہے۔یہاں بہتر ہوتا کہ برقی میدان اور اس کے فوریئر بدل 5372
کے لئے میں علیحدہ علیحدہ علامات استعمال کرتا لیکن امید کی جاتی ہے کہ $E(x,y,z)$ کے آزاد متغیرات (x,y,z) سے $E(x,y,z)$ کو اصل تفاعل 5373
اور $E(k_x,k_y,k_z)$ کے آزاد متغیرات (k_x,k_y,k_z) سے $E(k_x,k_y,k_z)$ کو فوریئر بدل سمجھا جا سکتا ہے۔ 5374

مندرجہ بالا مساوات میں

$$k_0^2-k_x^2-k_y^2=k_z^2 \tag{15.18}$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z)}{\partial z^2}+k_z^2\boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z)=0 \tag{15.19}$$

حاصل ہوتا ہے جس کے حل $e^{\mp jk_z z}$ صورت رکھتے ہیں۔ان میں $e^{-jk_z z}$ کارتیسی نظام میں بڑھتے z جانب حرکت کرتی موج ہے جبکہ $e^{jk_z z}$ گھٹتے z جانب حرکت کرتی موج ہے۔ہم پہلے جواب کو تسلیم کرتے ہیں لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کا حل

$$\boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z)=\boldsymbol{f}(k_x,k_y)e^{-jk_z z} \tag{15.20}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{f}(k_x,k_y)$ دریافت کرنا باقی ہے۔ 5375

مساوات 15.20 کو مساوات 15.16 میں پر کرنے سے

$$k_x f_x+k_y f_y+k_z f_z=0 \tag{15.21}$$

یعنی

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{f}=0 \tag{15.22}$$

ملتا ہے جہاں $\boldsymbol{f}=f_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+f_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+f_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+k_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+k_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھے گئے ہیں۔ 5376

برقی میدان $\boldsymbol{E}(x,y,z)$ حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z)$ کا فوریئر بدل لیتے ہیں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(x,y,z)&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z)e^{-jk_x x-jk_y y}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y\\&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(k_x,k_y)e^{-jk_x x-jk_y y-jk_z z}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y\end{aligned}$$

جہاں مساوات 15.20 استعمال کیا گیا ہے۔کروی محدد کے رداس کو کارتیسی محدد میں $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $k_x x+k_y y+k_z z=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ لکھتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات کو

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(k_x,k_y)e^{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y \tag{15.23}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ 5377

جدول 15.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^{7}	گریفائٹ	7×10^{4}
تانبا	5.80×10^{7}	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^{7}	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^{7}	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^{7}	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^{7}	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^{7}	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^{7}	مقطر پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^{7}	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^{7}	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^{7}	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^{7}	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^{7}	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^{7}	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^{7}	کوارٹس	10^{-17}

جدول 15.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 15.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 15.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$