

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
 کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

3

1	سمتیاں	4
1.1	مقداری اور سمتیہ	5
1.2	سمتی الجبرا	6
1.3	کارتیسی محدود	7
1.4	اکائی سمتیاں	8
1.5	میدانی سمتیہ	9
1.6	سمتی رقبہ	10
1.7	غیر سمتی ضرب	11
1.8	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	12
1.9	گول نلکی محدود	13
1.9.1	نلکی اکائی سمتیاں کا کارتسی اکائی سمتیاں کے ساتھ غیر سمتی ضرب	14
1.9.2	نلکی اور کارتسی اکائی سمتیاں کا تعلق	15
1.9.3	نلکی لامحدود سطحیں	16
1.10	کروی محدود	17
2	کولومب کا قانون	18
2.1	قوت کشش یا دفع	19
2.2	برقی میدان کی شدت	20
2.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	21
2.4	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	22
2.5	چارج بردار حجم	23
2.6	مزید مثال	24
2.7	برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	25

69 ²⁶	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ	3
69 ²⁷	ساکن چارج	3.1
69 ²⁸	فیراڈے کا تجربہ	3.2
70 ²⁹	گاؤس کا قانون	3.3
72 ³⁰	گاؤس کے قانون کا استعمال	3.4
72 ³¹	نقطہ چارج	3.4.1
74 ³²	یکساں چارج بردار کروی سطح	3.4.2
74 ³³	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر	3.4.3
75 ³⁴	ہم محوری تار	3.5
77 ³⁵	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	3.6
77 ³⁶	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق	3.7
80 ³⁷	پھیلاؤ	3.8
82 ³⁸	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات	3.9
84 ³⁹	پھیلاؤ کی عمومی مساوات	3.10
86 ⁴⁰	مسئلہ پھیلاؤ	3.11
93 ⁴¹	توانائی اور برقی دباؤ	4
93 ⁴²	توانائی اور کام	4.1
94 ⁴³	لکیری تکملہ	4.2
99 ⁴⁴	برقی دباؤ	4.3
100 ⁴⁵	نقطہ چارج کا برقی دباؤ	4.3.1
101 ⁴⁶	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ	4.3.2
102 ⁴⁷	ہم محوری تار کا برقی دباؤ	4.3.3
102 ⁴⁸	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ	4.4
106 ⁴⁹	برقی دباؤ کی ڈھلوان	4.5
110 ⁵⁰	نلکی محدود میں ڈھلوان	4.5.1
111 ⁵¹	کروی محدود میں ڈھلوان	4.5.2
112 ⁵²	جفت قطب	4.6
114 ⁵³	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط	4.6.1
117 ⁵⁴	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی	4.7

125 _s	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
125 _{s6}	برقی رو اور کثافت برقی رو	5.1
127 _{s7}	استمراری مساوات	5.2
129 _{s8}	موصل	5.3
134 _{s9}	موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	5.4
137 _{s10}	عکس کی ترکیب	5.5
140 _{s11}	نیم موصل	5.6
141 _{s12}	ذو برق	5.7
146 _{s13}	کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	5.8
150 _{s14}	موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	5.9
150 _{s15}	کیپسٹر	5.10
152 _{s16}	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
153 _{s17}	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
153 _{s18}	5.10.3 ہم محوری کرہ کیپسٹر	
155 _{s19}	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
156 _{s20}	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
169 _{s21}	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
171 _{s22}	6.1 مسئلہ یکنائی	
173 _{s23}	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
173 _{s24}	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
174 _{s25}	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
181 _{s26}	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
183 _{s27}	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
191 _{s28}	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

199 ₉	ساکن مقناطیسی میدان	7
199 ₀	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
204 ₁	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.2
210 ₂	گردش	7.3
217 ₃	نلکی محدود میں گردش	7.3.1
222 ₄	عمومی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.2
224 ₅	کروی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.3
225 ₆	مسئلہ سٹوکس	7.4
228 ₇	مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو	7.5
235 ₈	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	7.6
240 ₉	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	7.7
240 ₀	سمتی مقناطیسی دباؤ	7.7.1
242 ₁	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.7.2
249 ₂	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	8
249 ₃	متحرک چارج پر قوت	8.1
250 ₄	تفرقی چارج پر قوت	8.2
254 ₅	برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	8.3
255 ₆	قوت اور مروڑ	8.4
261 ₇	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	8.5
262 ₈	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	8.6
265 ₉	مقناطیسی سرحدی شرائط	8.7
268 ₀₀	مقناطیسی دور	8.8
271 ₀₁	مقناطیسی مخفی توانائی	8.9
271 ₀₂	خود امالہ اور مشترکہ امالہ	8.10
277 ₀₃	مشترکہ امالہ	8.11

283 ₀₄	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات	9
283 ₀₅	فیراڈے کا قانون	9.1
290 ₀₆	انتقالی برقی رو	9.2
295 ₀₇	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل	9.3
297 ₀₈	میکس ویل مساوات کی تکمیل شکل	9.4
302 ₀₉	تاخیری دباؤ	9.5
307 ₁₀	مستوی امواج	10
307 ₁₁	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج	10.1
308 ₁₂	برقی و مقناطیسی مستوی امواج	10.2
315 ₁₃	10.2.1 خالی خلاء میں امواج	
317 ₁₄	10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج	
319 ₁₅	10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج	
322 ₁₆	10.3 پوئنٹنگ سمتیہ	
326 ₁₇	10.4 موصل میں امواج	
332 ₁₈	10.5 انعکاس مستوی موج	
338 ₁₉	10.6 شرح ساکن موج	
345 ₂₀	11 ترسیلی تار	
345 ₂₁	11.1 ترسیلی تار کے مساوات	
349 ₂₂	11.2 ترسیلی تار کے مستقل	
350 ₂₃	11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل	
353 ₂₄	11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل	
354 ₂₅	11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار	
355 ₂₆	11.3 ترسیلی تار کے چند مثال	
360 ₂₇	11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ	
367 ₂₈	11.4.1 سمتیہ فراوانی نقشہ	
368 ₂₉	11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال	

373 ₃₀	12	تقطیب موج
373 ₃₁	12.1	خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
376 ₃₂	12.2	بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پرنٹنگ سمتیہ
379 ₃₃	13	ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار
379 ₃₄	13.1	ترچھی آمد
390 ₃₅	13.2	ترسیم بائی گن
393 ₃₆	14	مویج اور گھمکیا
393 ₃₇	14.1	برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ
394 ₃₈	14.2	دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج
400 ₃₉	14.3	کھوکھلا مستطیلی مویج
409 ₄₀	14.3.1	مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور
416 ₄₁	14.4	مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج
420 ₄₂	14.5	کھوکھلی نالی مویج
427 ₄₃	14.6	انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف
429 ₄₄	14.7	انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف
431 ₄₅	14.8	سطحی موج
436 ₄₆	14.9	ذو برق تختی مویج
439 ₄₇	14.10	شیش ریشہ
442 ₄₈	14.11	پردہ بصارت
444 ₄₉	14.12	گھمکی خلاء
447 ₅₀	14.13	میکس ویل مساوات کا عمومی حل

- 15.1 تعارف 455⁵²
- 15.2 تاخیری دباؤ 455⁵³
- 15.3 تکمل 457⁵⁴
- 15.4 مختصر جفت قطبی ایٹینا 458⁵⁵
- 15.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت 466⁵⁶
- 15.6 ٹھوس زاویہ 470⁵⁷
- 15.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش 471⁵⁸
- 15.8 قطاری ترتیب 478⁵⁹
- 15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع 478⁶⁰
- 15.8.2 ضرب نقش 479⁶¹
- 15.8.3 ثنائی قطار 480⁶²
- 15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار 482⁶³
- 15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار 484⁶⁴
- 15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار 484⁶⁵
- 15.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلنے زاویہ اخراجی ایٹینا 488⁶⁶
- 15.9 تداخل پیمہ 489⁶⁷
- 15.10 مسلسل خطی ایٹینا 490⁶⁸
- 15.11 مستطیل سطحی ایٹینا 491⁶⁹
- 15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریئر بدل ہیں 494⁷⁰
- 15.13 خطی ایٹینا 494⁷¹
- 15.14 چلتے موج ایٹینا 499⁷²
- 15.15 چھوٹا گھیرا ایٹینا 500⁷³
- 15.16 پیچ دار ایٹینا 501⁷⁴
- 15.17 دو طرفہ کردار 503⁷⁵
- 15.18 جھری ایٹینا 505⁷⁶
- 15.19 پیپا ایٹینا 506⁷⁷
- 15.20 فرانس ریڈار مساوات 508⁷⁸
- 15.21 ریڈیائی دوربین، ایٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی 511⁷⁹
- 15.22 حرارت نظام اور حرارت بعید 513⁸⁰

وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

2728

گزشتہ بابوں میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے میدانوں پر غور کیا گیا۔ بقایا کتاب میں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں پر غور کیا جائے گا۔
اس باب میں دو نئے اصولوں پر غور کیا جائے گا۔ پہلا اصول مائیکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ دوسرا قانون جیمس کلارک میکس ویل کے کاوشوں سے حاصل ہوا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اس باب میں برقی و مقناطیسیات کے چار ایسے مساوات پیش کئے جائیں گے جو **میکس ویل مساوات** کہلاتے ہیں۔

2732

2733

9.1 فیراڈے کا قانون

جناب مائیکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا کہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ **قانون فیراڈے** کو مندرجہ ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$(9.1) \quad \text{محرك برقي دباو} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

اس قانون کے تحت کسی بھی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ کی قیمت میں تبدیلی، اس سطح کے محیط پر برقی دباؤ پیدا کرتی ہے۔ ایسی برقی دباؤ روایتی طور پر **محرك برقي دباؤ**² کہلاتی ہے۔ کسی بھی سطح کے محیط پر **محرك برقي دباؤ** کی قیمت، اس سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ کے قیمت میں تبدیلی کی شرح کے برابر ہوتی ہے۔ **محرك برقي دباؤ** کی اکائی ولٹ V ہے۔ سطح کے محیط کو بند دائرہ تصور کرتے ہوئے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ کسی بھی بند دائرے پر **محرك برقي دباؤ** کی قیمت اس دائرے کے اندر سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ کے قیمت میں تبدیلی کی شرح کے برابر ہوگی۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ بند دائرہ فرضی لکیر بھی ہو سکتا ہے۔

2737

ابتدائی مقناطیسی بہاؤ میں تبدیلی، **محرك برقي دباؤ** پیدا کرتی ہے۔ **محرك برقي دباؤ** مکمل برقی دور میں برقی رو پیدا کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ **محرك برقي دباؤ** سے پیدا برقی رو، بند دائرے میں ثانوی مقناطیسی بہاؤ پیدا کرے گی۔ ثانوی مقناطیسی بہاؤ، ابتدائی مقناطیسی بہاؤ میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ مساوات 9.1 میں منفی کی علامت اسی اصول کو بیان کرتی ہے، یعنی کہ، بند دائرے میں **محرك برقي دباؤ** سے پیدا برقی رو، پہلے سے موجود مقناطیسی بہاؤ میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔ یہ اصول **لینز**⁵⁴ کا اصول پکارا جاتا ہے۔

2741

کسی بھی بند دائرے سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ میں تبدیلی مندرجہ ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہے۔

2742

Faraday's law¹
electromotive force, emf²

³محرك برقي دباؤ کی اصطلاح روایتی طور پر ہر قسم کے منبع برقی دباؤ کے لئے استعمال کی جاتی ہے۔

⁴یہ قانون 1834 میں جناب لینز نے پیش کیا۔

Lenz's law⁵

• مقناطیسی بہاؤ کے کثافت میں تبدیلی،

• ساکن مقناطیسی میدان اور بند دائرے کا آپس میں اضافی حرکت، یا

• مندرجہ بالا دونوں وجوہات۔

اگر بند دائرہ N چکر کے لچھے پر مشتمل ہو جہاں ہر چکر میں سے Φ مقناطیسی بہاؤ گزرتی ہو تب فیراڈے کے قانون کو

$$(9.2) \quad \text{محرك برقي دباو} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

برقی دباؤ کے طرز پر محرک برقی دباؤ کی تعریف

$$(9.3) \quad \text{محرك برقي دباو} = \oint E \cdot dL$$

لکھی جاتی ہے جہاں مکمل پورے بند دائرے پر لینا لازم ہے۔ برقی دباؤ کے تعریف کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے ہم مندرجہ بالا مساوات میں منفی کی علامت (−) لگانا بھول گئے ہیں۔ ایسا بالکل نہیں ہے اور اس کی وضاحت جلد شکل 9.2 کی مدد سے کر دی جائے گی۔ محرک برقی دباؤ بند دائرے پر پیمائش کی جاتی ہے۔ صفحہ 105 پر مساوات 4.28 کے تحت کسی بھی بند دائرے پر ساکن برقی میدان E کا لکیری مکمل صفر کے برابر ہوتا ہے۔ مساوات 9.3 کہتا ہے کہ غیر ساکن مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہوتا اور کسی بھی بند دائرے پر E کا لکیری مکمل اس دائرے پر پیدا محرک برقی دباؤ دیتا ہے۔

مساوات 9.1 اور مساوات 9.3 سے

$$(9.4) \quad \text{محرك برقي دباو} = \oint E \cdot dL = - \frac{d}{dt} \int_S B \cdot dS$$

حاصل ہوتا ہے جہاں Φ کی جگہ کثافت مقناطیسی بہاؤ B کا سطحی مکمل استعمال کیا گیا۔

مندرجہ بالا مساوات میں ایک جانب سطح S کے محیط پر لکیری مکمل اور دوسری جانب اسی سطح پر سطحی مکمل لیا گیا ہے۔ کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں جیسے کتاب کے اس صفحے کی بالائی سطح اور اس کی چلی سطح۔ یوں ہر سطحی مکمل کے دو ممکنہ جواب ہیں۔ اسی طرح کسی بھی سطح کے محیط پر لکیری مکمل یا تو سطح کر گرد گھڑی کی سمت میں اور یا اس کے الٹ گھوم کر لی جاسکتی ہے۔ یہاں ذرہ رک کر، کسی بھی سطح پر سطحی مکمل اور اس کے محیط پر لکیری مکمل کی درست سمت کا تعین دائیں ہاتھ کے قانون⁶ سے کرتے ہیں۔

کرہ کی مانند مکمل بند سطح⁷ کی بیرونی سطح کو مثبت سطح تصور کیا جاتا ہے۔ مکمل بند سطح کا کوئی محیط نہیں ہوتا۔ اس کے برعکس کھلی سطح⁸ پر مکمل لیتے ہوئے مسئلے کے مطابقت سے مثبت سطح چنی جاتی ہے۔ ایسی سطح کو دائیں ہاتھ میں یوں پکڑیں کہ ہاتھ کی انگلیاں محیط کے گرد لپٹی ہوں اور انگوٹھا سطح کی مثبت سمت میں ہو۔ انگلیوں کے لپٹنے کی سمت ہی سطح کے گرد مثبت سمت ہے۔ یوں محیط پر لکیری مکمل، محیط کے گرد انگلیوں کے لپٹنے کی سمت میں حاصل کی جائے گی۔

مندرجہ بالا مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی سمتی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ اگر بڑھ رہی ہو تب محرک برقی دباؤ سطح کے محیط پر منفی جانب برقی رو پیدا کرے گا۔ مساوات 9.4 استعمال کرتے ہوئے دائیں ہاتھ کا قانون یاد رکھیں جو آپ کو محرک دباؤ کی صحیح سمت دے گا۔

⁶right hand rule
⁷closed surface
⁸open surface

انہیں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی وجہ سے پیدا ساکن بند دائرے میں محرک برقی دباؤ پر پہلے غور کریں اور بعد میں ساکن مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے دائرے کی وجہ سے پیدا محرک برقی دباؤ پر غور کریں۔

2762

ساکن دائرے کی صورت میں مساوات 9.4 میں دائیں ہاتھ S ساکن ہے جبکہ B وقت کے ساتھ تبدیل ہو رہی ہے یوں اس مساوات میں تفرق کے عمل کو مکمل کے اندر لے جایا جاسکتا ہے یعنی

$$(9.5) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{محرک برقی دباؤ}$$

آگے بڑھنے سے پہلے اس مساوات کی نقطہ شکل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات کے بائیں ہاتھ پر مسئلہ سنوکس کے اطلاق سے

$$(9.6) \quad \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

2763

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 9.5 میں بائیں جانب محیط پر لکیری عمل لی گئی ہے جبکہ دائیں جانب سطحی عمل لی گئی ہے۔ فرض کریں کہ کسی سطح کا محیط مستطیل شکل کو ہو۔ اس مستطیل پر بڑی جھلی چسپاں کرتے ہیں۔ یہ جھلی ایک ممکنہ سطح ہے جس پر سطحی عمل لی جاسکتی ہے۔ اب جھلی کو کسی درمیانے نقطے سے اگر کھینچا جائے تو سطح کی صورت تبدیل ہو جائے گی جبکہ اس کا محیط تبدیل نہیں ہوگا۔ آپ مختلف نقطوں سے جھلی کو کھینچ کر یاد کر مختلف سطحیں پیدا کر سکتے ہیں۔ ایسی تمام سطحوں کا محیط وہی مستطیل ہو گا۔ مساوات 9.5 میں دائیں جانب ایسی تمام سطحوں پر سطحی عمل، بائیں جانب محیط پر لکیری عمل کے برابر ہوگا۔ اب چونکہ محیط تبدیل نہیں ہوا لہذا ایسی تمام سطحوں پر سطحی عمل برابر ہوں گے۔

2768

مساوات 9.5 سے مساوات 9.6 حاصل کرتے ہوئے یاد رہے کہ ان مساوات میں سطح کی محیط تبدیل نہیں کی جارہی۔ یوں مساوات 9.6 میں دونوں جانب کے سطحوں کا محیط ایک ہونا چاہیے جبکہ سطحیں اذخود مختلف ہو سکتی ہیں۔ چونکہ یہ مساوات کسی بھی سطح کے لئے درست ہے لہذا یہ تفرق dS کے لئے بھی درست ہے۔ تفرق dS کے لئے اسے یوں

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

یعنی

$$(9.7) \quad \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

2769

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 9.7 میکس ویل کے چار مساواتوں میں سے پہلی مساوات ہے۔ یہ میکس ویل کے پہلی مساوات کی نقطہ شکل ہے۔ اس مساوات کی نقطہ شکل ہی عموماً استعمال ہوتی ہے۔ میکس ویل کے پہلی مساوات کی مکمل شکل مساوات 9.5 بیان کرتی ہے۔ وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی صورت میں مساوات 9.7 اور مساوات 9.5 ساکن میدان کے مساوات کی صورت اختیار کرتے ہیں یعنی

$$(9.8) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (\text{برقی سکون})$$

اور

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{برقی سکون})$$

آئیں مساوات 9.5 اور مساوات 9.7 کو استعمال کر کے دیکھیں۔ تصور کریں کہ $\rho < \rho_2$ نکلی خطے میں وقت کے ساتھ مسلسل بڑھتی

$$(9.9) \quad B = B_0 e^{kt} a_z \quad (\rho < \rho_2)$$

کثافت مقناطیسی بہاوپائی جاتی ہے جہاں B_0 ایک مستقل ہے۔ ہم $z = 0$ سطح پر ρ_1 رداس کا گول دائرہ لیتے ہیں۔ مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس پورے دائرے پر E_ϕ کی قیمت تبدیل نہیں ہو سکتی لہذا مساوات 9.5 سے

$$\text{محکمہ برقی دباؤ} = 2\pi\rho_1 E_\phi = -kB_0 e^{kt} \pi\rho_1^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں کسی بھی رداس پر برقی میدان کی شدت

$$(9.10) \quad E = -\frac{1}{2}kB_0 e^{kt} \rho a_\phi$$

لکھی جاسکتی ہے۔

آئیں اب یہی جواب مساوات 9.7 سے حاصل کریں۔ چونکہ اس مساوات کے دائیں جانب صرف a_z جزو پایا جاتا ہے لہذا بائیں ہاتھ بھی صرف یہی جزو ہوگا لہذا اس مساوات سے

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} = -kB_0 e^{kt}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ دونوں اطراف کو ρ سے ضرب دیتے ہوئے ρ تک مکمل لے کر

$$\rho E_\phi = -kB_0 e^{kt} \frac{\rho^2}{2}$$

یعنی

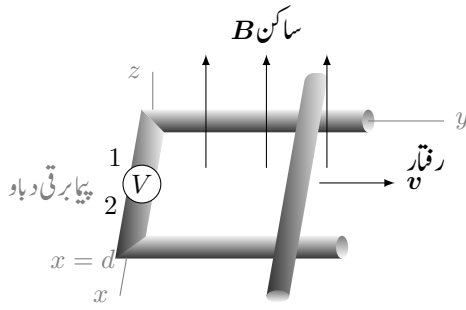
$$(9.11) \quad E = -\frac{1}{2}kB_0 e^{kt} \rho a_\phi$$

یہ دوبارہ حاصل ہوتا ہے جہاں رداسی مکمل میں t مستقل کا کردار ادا کرتا ہے۔

مثبت B_0 کی صورت میں اس دائرے پر a_ϕ کی الٹ سمت میں برقی رو گزرے گی جو a_z کی الٹ سمت میں کثافت مقناطیسی بہاوپیدا کرتے ہوئے پہلے سے موجود مقناطیسی میدان میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔

اس مثال کے آخر میں یہ بتلانا ضروری ہے کہ مساوات 9.9 میں دیا گیا میدان غیر حقیقی ہے چونکہ یہ میکس ویل کے دیگر مساوات پر پورا نہیں اترتا۔ آپ سے سوال 9.18 میں گزارش کی گئی ہے کہ اس حقیقت کو ثابت کریں۔

آئیں اب ایسی مثال دیکھیں جس میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے مقناطیسی میدان میں ہند دائرہ حرکت کر رہا ہو۔ شکل 9.1 میں ایسی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں v سمتی رفتار کو ظاہر کرتی ہے جبکہ **چپا برقی دباؤ** v کو V سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس شکل میں دو افقی اور دو متوازی موصل سلاخ ہند دائرہ یا ہندوور بناتے ہیں۔ متوازی افقی سلاخوں کو بائیں طرف عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے جس میں قابل نظر انداز جسامت اور لامحدود مزاحمت والا پیا برقی دباؤ نسب ہے، جبکہ دائیں جانب انہیں v سمتی رفتار سے حرکت کرتے عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے۔ وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتا اور ہر جگہ یکساں کثافت مقناطیسی بہاؤ B ہند دائرے کی گھیرے سطح کے عمودی ہے۔



شکل 9.1: وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے یکساں مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے موصل سلاخ پر محرک برقی دباؤ پیدا ہوتی ہے۔

مثبت B کی صورت میں B کی سمت ہی بند دائرے سے گھیری گئی سطح کی سمت ہوگی اور بند دائرے کی سمت گھڑی کے الٹ ہوگی۔ یوں دائرے کے مثبت سمت میں دائیں ہاتھ کی انگلیاں رکھتے ہوئے گھیری سطح کی سمت انگوٹھے سے حاصل کی جاتی ہے۔

کسی بھی لمحہ t پر حرکت کرتے سلاخ کے مقام کو y سے ظاہر کرتے ہوئے ہم $y = vt$ لکھ سکتے ہیں جہاں v سلاخ کے رفتار کی قیمت ہے۔ یوں لمحہ t پر بند دور کا ارتباط بہاؤ

$$\Phi = Bdy = Bdv$$

ہوگا جو مساوات 9.1 کے تحت بند دور میں

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bdv$$

محرک برقی دباؤ پیدا کرے گا۔

اب محرک برقی دباؤ $E \cdot dL$ کو کہتے ہیں لہذا مندرجہ بالا جواب دائرے پر گھڑی کے الٹ سمت میں اس بند لکیری مکمل سے بھی حاصل ہونا چاہیے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ برقی سکون کی صورت میں موصل کی سطح پر سطح کے متوازی E صفر رہتی ہے۔ ہم آگے دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان میں بھی موصل کی سطح پر متوازی E صفر ہی رہتی ہے۔ یوں شکل 9.1 پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تمام سلاخوں پر مکمل کی قیمت صفر کے برابر ہوگی۔ پیا برقی دباؤ کی مزاحمت صفر نہیں ہے لہذا مکمل کی قیمت پیا برقی دباؤ پر مندرجہ بالا قیمت کے برابر ہونا ہوگا۔ گھڑی کی الٹ سمت چلتے ہوئے پیا برقی دباؤ کی لمبائی کو dL لکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $E \cdot dL = -Bdv$ چونکہ $dL = dLa_x$ کے الٹ ہوگی۔ یوں پیا برقی دباؤ پر E کی سمت پیا کے دوسرے سرے سے پہلے سرے کی جانب ہے اور پیا پر برقی دباؤ کا مثبت سراپا کا دوسرا سرا ہے۔

پیا کی جگہ مزاحمت جوڑنے سے دور میں گھڑی کے الٹ برقی رو گزرے گی جو a_z کے الٹ سمت میں مقناطیسی بہاؤ پیدا کرے گی۔ یہ لورنز کے قانون کے عین مطابق ہے۔

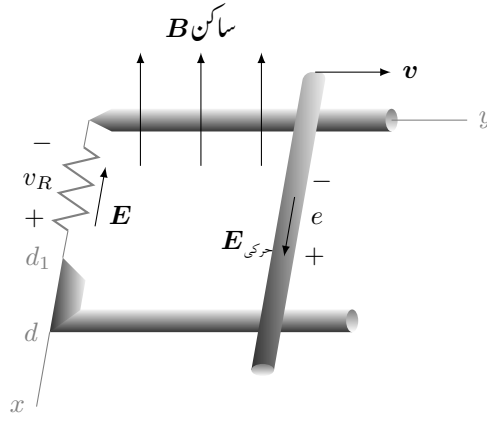
آئیں اب اسی شکل میں دئے مسئلے کو حرکی برقی دباؤ تصور کرتے ہوئے حل کریں۔ مقناطیسی میدان میں سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہوئے چارج Q پر قوت

$$F = Qv \times B$$

یا حرکی شدت $E_{حرکی}$

$$E_{حرکی} = \frac{F}{Q} = v \times B \quad (9.12)$$

عمل کرتی ہے۔ حرکی شدت a_x سمت میں ہے۔ حرکت کرتے سلاخ میں ساکن مثبت ایٹم اور آزاد منفی الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ ان تمام چارجوں پر ایسی قوت پائی جائے گی البتہ ساکن ایٹم مقید ہونے کی بنا حرکت نہیں کریں گے۔ اگر محرک سلاخ کو متوازی سلاخوں سے اٹھایا جائے تو اس میں آزاد الیکٹران پر a_x کے الٹ جانب



شکل 9.2: محرک برقی دباؤ اور برقی دباؤ کا موازنہ۔

قوت انہیں سلاخ کے پرلے سرے پر انبار کرنا شروع کر دے گی۔ الیکٹرانوں کا انبار سلاخ میں $-a_x$ جانب برقی میدان کی شدت E پیدا کرے گا۔ الیکٹرانوں کا انبار بڑھتا رہے گا حتیٰ کہ E اور E برابر ہو جائیں۔ ایسا ہوتے ہی سلاخ میں کل برقی میدان کی شدت صفر ہو جائے گی اور اس میں چارج کا حرکت رک چلے گا۔

2796

یوں حرکی برقی دباؤ

$$(9.13) \quad \oint E_{\text{حرکی}} \cdot dL = \oint (v \times B) \cdot dL = \text{محرک برقی دباؤ}$$

سے حاصل ہوگی۔ مساوات کے دائیں ہاتھ بند دائرے کے ساکن حصوں پر مکمل کی قیمت صفر ہوگی لہذا محرک برقی دباؤ صرف حرکت کرتے حصوں کی وجہ سے پیدا ہوگی۔ یوں حرکت کرتے سلاخ پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے مکمل سے

$$\oint (v \times B) \cdot dL = \int_d^0 vB \, dx = -Bvd$$

2797

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ B از خود وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو رہا لہذا یہی کل محرک برقی دباؤ ہوگا۔

یوں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے بند دائرے میں محرک برقی دباؤ حاصل کرتے وقت حرکت کرتے حصوں پر حرکی شدت E کے استعمال سے محرک برقی دباؤ یوں

$$(9.14) \quad \oint E \cdot dL = \oint E_{\text{حرکی}} \cdot dL = \oint (v \times B) \cdot dL = \text{محرک برقی دباؤ}$$

حاصل کی جاسکتی ہے۔ البتہ وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان میں محرک برقی دباؤ کے حصول میں مساوات 9.5 کا حصہ شامل کرنا ضروری ہے یوں محرک برقی دباؤ

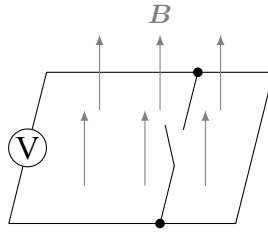
$$(9.15) \quad \oint E \cdot dL = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS + \oint (v \times B) \cdot dL = \text{محرک برقی دباؤ}$$

سے حاصل ہوگی۔ یہ مساوات دراصل مساوات 9.1

$$\text{محرک برقی دباؤ} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

2798

ہی ہے۔



شکل 9.3: محرک برقی دباؤ یا تا وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان اور یا حرکت کرتے بند دائرے سے بی پیدا ہو سکتی ہے۔

آئیں شکل 9.1 میں پیا برقی دباؤ کی جگہ مزاحمت نسب کرتے ہوئے اس کی مدد سے مساوات 9.3 جو محرک برقی دباؤ کی تعریف بیان کرتا ہے پر دوبارہ غور کریں۔ نئی شکل کو شکل 9.2 میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 9.12 محرک سلاخ پر پیدا E دیتا ہے جو سلاخ میں مثبت چارج کو سلاخ کے اُزلے سے کی طرف دھکیلے گا۔ اس کے برعکس مزاحمت پر برقی دباؤ v_R پایا جاتا ہے جس کی وجہ سے اس میں برقی میدان کی شدت E پائی جائے گی جو مزاحمت میں مثبت چارج کو مزاحمت کے پزلے سے کی جانب دھکیلے گی۔

2802

آپ شکل کو دیکھ کر تسلی کر لیں کہ مزاحمت پر میدان کی شدت $E = -E a_x$ سے برقی دباؤ v_R یوں

$$(9.16) \quad v_R = - \int_0^{d_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{d_1} E dx = E d_1$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ متحرک سلاخ پر حرکی شدت $a_x = E$ E سے حرکی دباؤ یوں

$$(9.17) \quad e = \oint \mathbf{E}_{\text{حرکی}} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^d \mathbf{E}_{\text{حرکی}} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^d E_{\text{حرکی}} dx = E_{\text{حرکی}} d$$

حاصل ہوتی ہے۔ شکل میں دو افقی موصل سلاخوں کے مابین برقی دباؤ کو سلاخوں کے بائیں سروں پر v_R جبکہ ان کے دائیں سروں پر e کہا گیا ہے لہذا v_R اور e دونوں مثبت اور برابر قیمت رکھتے ہیں۔ یہاں ضرورت اس بات کی ہے کہ آپ دیکھ سکیں کہ v_R کی مثبت قیمت حاصل کرنے کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں منفی کی علامت استعمال کی جائے جبکہ e کے مثبت قیمت کے حصول کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں جمع کی علامت استعمال کی جائے۔ حرکی دباؤ کے بند تکمیل میں دائرے کے بقایا اطراف پر تکمیل کی قیمت صفر ہونے کے ناطے صرف متحرک سلاخ پر تکمیل لیا گیا ہے۔

2806

اگرچہ مساوات 9.1 انتہائی سادہ شکل رکھتی ہے لیکن اس کا استعمال کبھی کبھار مشکل ہو جاتا ہے۔ ایسا اس وقت ہوتا ہے جب دور کے کسی حصے کو تبدیل کرتے ہوئے دوسرا حصہ نسب کیا جائے۔ یہ بات شکل 9.3 پر غور کرنے سے بہتر سمجھ آئے گی۔ اس شکل میں نا تو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا مقناطیسی میدان ہے اور مقناطیسی بند دائرے کا کوئی حصہ متحرک ہے۔ البتہ شکل میں دکھائے سوچ کو چالو یا غیر چالو کرتے ہوئے بند دائرے میں مقناطیسی بہاؤ کم اور زیادہ کیا جاسکتا ہے۔ یہاں بغیر سوچے مساوات 9.1 استعمال کرتے ہوئے غلط نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ یاد رہے کہ برقی دباؤ یا تو وقت کے ساتھ بدلنے مقناطیسی میدان اور یا پھر بند دائرے کے کسی حصے کے حرکت سے ہی پیدا ہوگا۔

2811

2812

مشق 9.1: خطہ $\rho < 4 \text{ cm}$ میں میدان $B = \frac{2 \cos 1000t a_z}{5 + \rho^2} \text{ T}$ پایا جاتا ہے۔ الف) سطح $z = 1.5 \text{ cm}$ ، $\rho < 2 \text{ cm}$ سے گزرتی مقناطیسی بہاؤ حاصل کریں۔ ب) نقطہ $N(0.02, 10^\circ, 3)$ پر E حاصل کریں۔ پ) سطح $z = 0$ پر $\rho = 2 \text{ cm}$ اور مزاحمت $4 \frac{\Omega}{\text{cm}}$ کی موصل تار کا دائرہ پایا جاتا ہے۔ اس تار میں برقی رو حاصل کریں۔

2815

جوابات: $10 \sin 1000t \text{ mA}$ ، $4 \sin 1000t a_\phi \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $502.6 \cos 1000t \mu\text{Wb}$

2816

2817

2818

مشق 9.2: شکل 9.3 میں $B = 0.5a_z$ ٹسلا، رفتار $100y a_y$ میٹر فی سیکنڈ جبکہ $d = 0.5$ میٹر ہے۔ اگر $t = 0$ پر $y = 0.2$ میٹر ہو تب $t = 15$ ملی سیکنڈ پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

2820

2821

2822

2823

2824

جوابات: $10 \mu A, 100 V, 4.017 \frac{m}{s}$

2825

2826

9.2 انتقالی برقی رو

فیراڈے کے تجرباتی نتیجے سے میکس ویل کی پہلی مساوات

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9.18)$$

حاصل ہوئی جو کہتا ہے کہ بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے برقی دباؤ۔ گردش کے عمل کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں ایسے پیدا کردہ برقی دباؤ کا بند لکیری مکمل صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ آئیں اب وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر غور کریں۔

2828

اسپیسر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (9.19)$$

ساکن مقناطیسی میدان پر لاگو ہوتی ہے۔ اس مساوات کی پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ گردش کی پھیلاؤ ہر صورت صفر کے برابر ہوتی ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات کا بائیں ہاتھ ہر صورت صفر دے گا اور یوں اگر یہ مساوات درست ہو تب اس کا بائیں ہاتھ بھی ہر صورت صفر ہونا چاہیے۔ مگر ہم استمراری مساوات سے جانتے ہیں کہ

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (9.20)$$

ہوتا ہے۔ اس سے ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 9.19 صرف اس صورت درست ہوگا جب $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ہو۔ یہ ایک غیر ضروری اور غیر حقیقی شرط ہے لہذا وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر استعمال کے قابل بنانے کی خاطر مساوات 9.19 کو تبدیل کرنا لازم ہے۔ تصور کریں کہ مساوات 9.19 میں نامعلوم جزو G کی شمولیت سے یہ مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر بھی لاگو کرنے کے قابل ہو جاتا ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 9.19 یوں

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G}$$

لکھی جائے گی۔ انہیں دوبارہ اس کی پھیلاؤ حاصل کریں جس سے

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{G}$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں استمراری مساوات کا سہارا لیا گیا۔ اس مساوات میں ρ کی جگہ $\nabla \cdot \mathbf{D}$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

یعنی

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں ایمپیر کے دوری قانون کی درست شکل

$$(9.21) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

ہے۔ مندرجہ بالا مساوات برقی و مقناطیسیات کے اب تک تمام دریافت کردہ اصولوں پر پورا اترتی آئی ہے۔ جب تک یہ غلط ثابت نہ ہو جائے، ہم اسے درست ہی تصور کریں گے۔

2830

مساوات 9.21 میکس ویل کے مساوات میں سے ایک مساوات ہے۔ اس مساوات میں $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ کی بُد ایمپیر فی مربع میٹر حاصل ہوتی ہے جو کثافت برقی رو کا بُد ہے۔ میکس ویل نے اس مساوات میں دائیں ہاتھ نئے جزو کو **کثافت انتقالی رو**¹⁰ کا نام دیا اور \mathbf{J}_d سے ظاہر کیا یعنی

$$(9.22) \quad \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \mathbf{J}_d \\ \mathbf{J}_d &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

ہم تین اقسام کے کثافت رو دیکھ چکے جن میں کثافت انتقالی رو کے علاوہ غیر چارج شدہ خطے میں عموماً لیکٹران کے حرکت سے پیدا کثافت ایصالی رو

$$(9.23) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

اور چارج کے حجم کے حرکت سے پیدا کثافت ایصالی رو

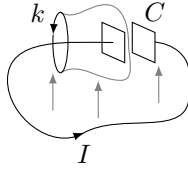
$$(9.24) \quad \mathbf{J} = \rho_h \mathbf{v}$$

شامل ہیں۔ مساوات 9.21 میں \mathbf{J} سے مراد ایصالی اور انتقالی رو کے کثافتوں کا مجموعہ ہے جبکہ مقید چارج \mathbf{H} کا حصہ ہیں۔ غیر موصل خطے میں جہاں کثافت چارج پائی ہی نہیں جاتی $\mathbf{J} = 0$ ہوتا ہے لہذا غیر موصل میں

$$(9.25) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\mathbf{J} = 0)$$

ہوگا۔ مساوات 9.25 اور مساوات 9.18 میں مشابہت دیکھیں۔

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$



شکل 9.4: موصل تار میں ایصالی رو کپیسٹر کے چادروں کے درمیان انتقالی رو کے برابر ہے۔

مقناطیسی شدت H اور برقی شدت E کافی مشابہت رکھتے ہیں۔ اسی طرح کثافت D اور کثافت بہاؤ B بھی کافی مشابہت رکھتے ہیں۔ اس مشابہت کو ہمیں تک رکھیں چونکہ جیسے ہی میدان میں چارج پر قوت کی بات کی جائے، دونوں اقسام کے میدان بالکل مختلف طریقوں سے عمل کرتے ہیں۔

کسی بھی سطح سے کل انتقالی رو سطحی مکمل

$$(9.26) \quad I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

سے حاصل ہوگی۔ مساوات 9.21 کے سطحی مکمل

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$(9.27) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایمپیسٹر کے دوری قانون کی نقطہ شکل حاصل ہوتی ہے۔

انتقالی رو کو شکل 9.4 کی مدد سے سمجھتے ہیں جہاں موصل تار سے کپیسٹر C کے دوسرے جوڑے ہوئے بند دور بنایا گیا ہے جس میں وقت کے ساتھ بدلتی سائن نما مقناطیسی میدان B محرک برقی دباؤ

$$e = V_0 \cos \omega t$$

پیدا کرتی ہے۔ یہ سادہ برقی دور ہے جس میں مزاحمت اور امالہ کو نظر انداز کرتے ہوئے برقی رو

$$\begin{aligned} i &= -\omega C V_0 \sin \omega t \\ &= -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں ϵ, S, d کپیسٹر سے متعلق ہیں۔ آئیں انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے تار کے گرد بند دائرے k پر ایمپیسٹر کا دوری قانون لاگو کریں۔

$$\oint_k \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_k$$

اب بند دائرہ k اور اس دائرے پر \mathbf{H} حقیقی مقدار ہیں اور مکمل سے حاصل رو I_k اس دائرے سے گھیرے کسی بھی سطح سے گزرتی رو کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر ہم k کو سیدھی سطح کا سرحد تصور کریں تب موصل تار اس سطح کو چھیدنا ہوا گزرے گا۔ یوں اس سطح سے I رو ہی گزرے گی جو ایصالی رو ہے۔ اس کے برعکس اگر ہم k کو تھیلے کا منہ تصور کریں جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے تب ایصالی رو ایسی سطح سے نہیں گزرتی چونکہ تھیلہ کپیسٹر کے دو چادروں کے درمیان سے گزرتا ہے اور تار اسے چھوتی تک نہیں۔ ایسی صورت میں تھیلے سے گزرتی ایصالی رو صفر کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں ہمیں انتقالی رو کا سہارا لینا ہوگا۔ کپیسٹر کے چادروں کے درمیان

$$D = \epsilon E = \epsilon \left(\frac{V_0}{d} \cos \omega t \right)$$

ہے لہذا

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = -\omega \epsilon \frac{V_0}{d} \sin \omega t$$

اور یوں

$$I_d = S J_d = -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t$$

ہوگی۔

یہ وہی جواب ہے جو ایصالی رو سے حاصل ہوا تھا۔ اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایمپیئر کے دوری قانون کو استعمال کرتے ہوئے سطح سے گزرتی ایصالی رو اور انتقالی رو دونوں کا خیال رکھنا ہوگا۔ کہیں پر سطح سے صرف ایصالی رو گزرے گی تو کہیں اس سے صرف انتقالی رو گزرے گی اور کبھی کبھار دونوں کا مجموعہ۔

انتقالی رو وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا ہوتے ہیں لہذا یہ ایسے تمام غیر موصل یا نیم موصل خطوں میں پائی جاتی ہے جہاں وقت کے ساتھ تبدیلی ہوتی ایصالی رو پائی جائے۔ اگرچہ موصل خطے میں بھی انتقالی رو پائی جاتی ہے لیکن، جیسے آپ مندرجہ ذیل مشق میں دیکھیں گے، اس کی قیمت ایصالی رو کی نسبت سے اتنی کم ہوتی ہے کہ یہ قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ انتقالی رو تجرباتی طور دریافت نہیں کی گئی بلکہ اس تک منطق کے ذریعہ سے پہنچا گیا۔

مثال 9.1: ایک خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\mu_R = 2.5$ اور $\epsilon_R = 1.2$ ہیں۔ اس میں کثافت انتقالی برقی رو $J_d = 10 \cos(2 \times 10^8 t - kx) a_y \frac{\mu A}{m^2}$ ہے۔ (الف) D اور E حاصل کریں۔ (ب) فیراڈے کے قانون کی نقطہ شکل اور مکمل کے استعمال کرتے ہوئے B اور H حاصل کریں۔ (پ) مساوات 9.23 استعمال کرتے ہوئے J_d حاصل کریں۔ (ت) حاصل J_d اور سوال میں دیے گئے J_d کا آپس میں موازنہ کرتے ہوئے k کی مثبت قیمت حاصل کریں۔

حل: (الف) چونکہ $J_d = \frac{\partial D}{\partial t}$ کے برابر ہے لہذا

$$D = \int J_d dt = 5 \times 10^{-14} \sin(2 \times 10^8 t - kx) a_y + M \quad \frac{C}{m^2}$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ساکن میدان صفر ہونے کی صورت میں مکمل کا مستقل $M = 0$ ہوگا۔ یوں

$$E = \frac{D}{\epsilon_R \epsilon_0} = 4.7 \times 10^{-3} \sin(2 \times 10^8 t - kx) a_y \quad \frac{V}{m}$$

ہوگا۔

(ب) فیراڈے کے قانون سے

$$\nabla \times E = -4.70587111 \times 10^{-3} k \cos(2 \times 10^8 t - kx) a_z = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

لکھتے ہوئے مکمل لے کر

$$B = \int 4.70587111 \times 10^{-3} k \cos(2 \times 10^8 t - kx) a_z dt = 2.3529 \times 10^{-11} k \sin(2 \times 10^8 t - kx) a_z$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$H = \frac{B}{\mu_R \mu_0} = 7.4896 \times 10^{-6} k \sin(2 \times 10^8 t - kx) a_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔

پ) چونکہ $\sigma = 0$ ہے لہذا کثافت ایصالی برقی رو صفر ہوگی۔ یوں مساوات 9.22 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\nabla \times \mathbf{H} = 7.4896 \times 10^{-6} k^2 \cos(2 \times 10^8 t - kx) \mathbf{a}_y \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = \mathbf{J}_d$$

ت) حاصل کردہ اور سوال میں دیا گیا \mathbf{J}_d برابر پر کرتے ہوئے

$$k = \sqrt{\frac{10 \times 10^{-6}}{7.4896 \times 10^{-6}}} = 1.155 \text{ m}^{-1}$$

حاصل ہوتا ہے۔

2846

2847

2848

مثال 9.2: رداس a اور b کے موصل ہم محوری کرہ، جہاں $b > a$ ہے، کو برقی دباؤ $v = V_0 \cos \omega t$ مہیا کی جاتی ہے۔ دونوں کرہ کے درمیان خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\epsilon_R = 1$ اور $\mu_R = 1$ ہیں۔ بیرونی کرہ کو برقی زمین تصور کریں۔ الف) کرہ کپیسٹر کو مہیا برقی رو حاصل کریں۔ ب) دونوں کرہ کے مابین انتقالی برقی رو حاصل کریں۔ پ) کیا بیرون کپیسٹر ایصالی برقی رو اور اندرون کپیسٹر انتقالی برقی رو برابر ہیں؟

2851

حل: الف) صفحہ 153 پر مساوات 5.60 کرہ کپیسٹر کی کپیسٹنس دیتی ہے جس سے مہیا کردہ ایصالی برقی رویوں

$$\mathbf{I} = C \frac{dv}{dt} = -\frac{4\pi\epsilon\omega V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \sin \omega t$$

حاصل کی جاسکتی ہے۔

2852

ب) صفحہ 179 پر مساوات 6.24 استعمال کرتے ہوئے دونوں کرہ کے درمیان خطے میں برقی دباؤ کو

$$V = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} V_0 \cos \omega t$$

لکھتے ہوئے

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{V_0 \cos \omega t}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \frac{\epsilon V_0 \cos \omega t}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \mathbf{a}_r$$

حاصل ہوتا ہے جس سے کثافت انتقالی برقی رو

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \mathbf{a}_r$$

لکھی جاسکتی ہے۔ یوں انتقالی برقی رو

$$I_d = 4\pi r^2 J_d = - \frac{4\pi\omega\epsilon V_0 \sin \omega t}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

ہوگی۔

(پ) بیرون کپیسٹر ایصالی برقی رو اور اندرون کپیسٹر انتقالی برقی رو برابر ہیں۔

مشق 9.3: ٹھوس تانبے کی تار میں سائن نما، پچاس ہرٹز کی ایصالی رو $I_0 \cos \omega t$ گزر رہی ہے۔ اس میں انتقالی رو حاصل کریں۔ پچاس ہرٹز رو کی صورت میں ایصالی اور انتقالی رو کے موثر قیمت کی شرح حاصل کریں۔

$$\text{حل: } I_d = -\frac{\omega\epsilon_0}{\sigma} I_0 \sin \omega t \text{ جبکہ ان کے موثر قیمت کی شرح } \frac{I}{I_d} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} = 2.08 \times 10^{16} \text{ ہے۔}$$

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل

ہم وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں میں میکس ویل کے دو مساوات کے نقطہ اشکال

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

اور

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

حاصل کر چکے ہیں۔ میکس ویل کے بقایا دو مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی جوں کے توں

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

رہتے ہیں۔

مساوات 9.30 کہتا ہے کہ کثافت برقی رو کا منبع کثافت چارج ہے۔ وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان میں برقی میدان پیدا ہوتا ہے جو بند دائرے پر چلتا ہے۔ ایسے برقی میدان کا ناتو کسی چارج سے اخراج ہوتا ہے اور نا ہی یہ کسی چارج پر ختم ہوتا ہے۔ اس کے برعکس ہر مثبت چارج سے اس کے برابر برقی بہاؤ کا اخراج ہوتا ہے اور ہر منفی چارج پر اس کے برابر برقی بہاؤ کا اختتام ہوتا ہے۔

مساوات 9.31 کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے سے کل مقناطیسی بہاؤ کا اخراج صفر ہے یعنی مقناطیسی بہاؤ نا تو کسی نقطے سے خارج ہوتا ہے اور نا ہی یہ کسی نقطے پر اختتام پذیر ہوتا ہے۔ سادہ زبان میں اس کا مطلب ہے کہ مقناطیس کا ایک قطب ممکن نہیں جس سے مقناطیسی بہاؤ کا اخراج ہو یا اس پر مقناطیسی بہاؤ اختتام ہو۔

مندرجہ بالا چار مساوات پر برقی و مقناطیسیات کی بنیاد کھڑی ہے جنہیں استعمال کرنے کی خاطر چار معاون مساوات

$$\begin{aligned} (9.32) \quad D &= \epsilon E \\ (9.33) \quad B &= \mu H \\ (9.34) \quad J &= \sigma E \\ (9.35) \quad J &= \rho_h v \end{aligned}$$

2868

بھی درکار ہوتے ہیں۔

ایسے ذوبرق اور مقناطیسی اشیاء جن میں متغیرات سادہ تعلق نہ رکھتے ہوں، ان میں مساوات 9.32 اور مساوات 9.33 کی جگہ

$$\begin{aligned} (9.36) \quad D &= \epsilon_0 E + P \\ (9.37) \quad B &= \mu_0 (H + M) \end{aligned}$$

استعمال ہوتے ہیں۔ خطی اشیاء میں

$$(9.38) \quad P = \chi_e E$$

اور

$$(9.39) \quad M = \chi_m H$$

2869

لکھا جاسکتا ہے۔

آخر میں لورنز قوت کی مساوات

$$(9.40) \quad F = \rho_h (E + v \times B)$$

2870

بھی شامل کرتے ہیں۔

2871

غیر سمتی مقناطیسی دباؤ V اور سمتی مقناطیسی دباؤ A انتہائی اہم ہیں البتہ ان کی شمولیت لازم نہیں۔

2872

مثال 9.3: ایک خطے میں $\rho_h = 0$ ہے۔ اگر اس خطے میں $\nabla \cdot E = 0$ ہو تب خطے کی برقی مستقل ϵ پر کیا شرط لاگو ہوتی ہے۔

حل: مساوات 9.30 کے تحت $\rho_h = 0$ کی صورت میں $\nabla \cdot D = 0$ ہوگا۔ یوں

$$\nabla \cdot D = \nabla \cdot (\epsilon E) = E \cdot \nabla \epsilon + \epsilon \nabla \cdot E = 0$$

یا

$$\nabla \cdot E + E \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} = 0$$

2873

لکھا جاسکتا ہے۔ اب $\nabla \cdot E = 0$ اس صورت ہوگا اگر $\nabla \epsilon = 0$ ہو۔

2874

2875

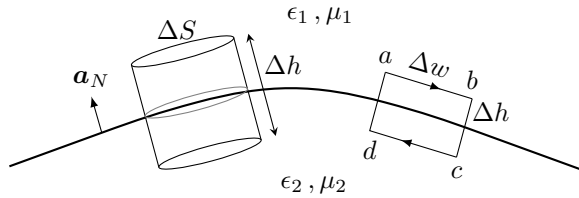
مشق 9.4: ایک خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\epsilon_R = 2.5$ اور $\mu_R = 10$ ہیں۔ کیا اس خطے میں میدان $D = (z + 6 \times 10^7 t) a_x$ اور $B = (-754z - 4.52 \times 10^{10} t) a_y$ کی جوڑی میکس ویل کے مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

2877

جواب: چونکہ برقی میدان سے حاصل $\nabla \times E$ مقناطیسی میدان سے حاصل $-\frac{\partial B}{\partial t}$ کے برابر ہے اور اسی طرح مقناطیسی میدان سے حاصل $\nabla \times H$ مقناطیسی میدان سے حاصل $\frac{\partial D}{\partial t}$ کے برابر ہے لہذا یہ جوڑی میکس ویل کے مساوات پر پورا اترتی ہے۔

2879

2880



شکل 9.5: وقت کے ساتھ بدلنے میدان کے سرحدی شرائط۔

9.4 میکس ویل مساوات کی تکمیل شکل

مساوات 9.28 کے سطحی تکمیل پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے فیراڈے کے قانون کو

$$(9.41) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 9.29 سے ایمپیئر کے دوری قانون کی تکمیل صورت

$$(9.42) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

حاصل ہوتی ہے۔

برقی اور مقناطیسی میدان کے تکمیل اشکال، گاؤس کے قوانین مساوات 9.30 اور مساوات 9.31 کے حجمی تکمیل اور مسئلہ پھیلاؤ کی مدد سے یوں لکھے جاسکتے ہیں۔

$$(9.43) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_h \rho_h dh$$

اور

$$(9.44) \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

مندرجہ بالا چار مساوات سے \mathbf{E} ، \mathbf{H} ، \mathbf{D} اور \mathbf{B} کے سرحدی شرائط حاصل ہوتے ہیں جن سے میکس ویل کے جزوی تفرقی مساوات کے مستقل حاصل کئے جاتے ہیں۔ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کے سرحدی شرائط عموماً ساکن میدان کے سرحدی شرائط ہی ہوتے ہیں لہذا ساکن میدان کے طریقہ کار سے وقت کے ساتھ بدلنے میدان کے سرحدی شرائط بھی حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

آئیں شکل 9.5 کی مدد سے سرحد کے متوازی برقی اور مقناطیسی شرائط حاصل کریں۔ شکل میں مستطیل دائرے پر مساوات 9.41 کے اطلاق سے

$$(E_{m1} - E_{m2}) \Delta w = - \frac{\partial B_n}{\partial t} \Delta w \Delta h$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $\frac{\partial B_n}{\partial t}$ سے مراد دائرے کے گھیرے سطح سے گزرتی مجموعی میدان کی تبدیلی ہے جس کا کچھ حصہ خطہ 1 اور کچھ حصہ خطہ 2 سے گزرتا ہے۔ اس مساوات کے دائیں ہاتھ کی قیمت $0 \rightarrow \Delta h$ کرتے ہوئے صفر کے قریب ترکی جاسکتی ہے۔ ایسی صورت میں دائیں ہاتھ کو صفر ہی تصور کرتے ہوئے

$$(9.45) \quad E_{m1} = E_{m2}$$

یعنی

$$(9.46) \quad \mathbf{a}_N \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔

سرحد پر انتہائی کم موٹائی کے خطے میں کثافت برقی رو K تصور کرتے ہوئے کسی بھی چھوٹی لمبائی dL پر برقی رو کو $dL \cdot K = I$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں شکل 9.5 میں مستطیل دائرے پر مساوات 9.42 کے اطلاق سے

$$(H_{m1} - H_{m2}) \Delta w = K_{\perp} \Delta w + \frac{\partial D}{\partial t} \Delta w \Delta h$$

حاصل ہوتا ہے جہاں K_{\perp} سے مراد K کا وہ حصہ ہے جو H_{m1} اور H_{m2} کے عمودی ہے۔ دائیں ہاتھ دوسرے جزو کی قیمت $0 \rightarrow \Delta h$ کرتے ہوئے صفر کے قریب ترکی جاسکتی ہے لہذا اس جزو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$(9.47) \quad H_{m1} - H_{m2} = K_{\perp}$$

حاصل ہوتا ہے جسے یوں

$$(9.48) \quad a_N \times (H_1 - H_2) = K_{\perp}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔

کسی بھی حقیقی دو مختلف اشیاء کے سرحد، مثلاً سمندر کے پانی اور ہوا کے سرحد یا ہوا اور دیوار کے سرحد، پر کثافت برقی رو K صفر ہوتی ہے۔ لہذا حقیقی مسائل میں $K = 0$ کی بنا پر

$$(9.49) \quad H_{m1} = H_{m2}$$

ہوگا۔ صفحہ 266 پر شکل 8.9 میں سطحی کثافت برقی رو K دکھائی گئی ہے جبکہ یہاں شکل 9.5 میں اسے صفر تصور کرتے ہوئے نہیں دکھایا گیا۔

مساوات 9.43 اور مساوات 9.44 سے سرحدی عمودی شرائط

$$(9.50) \quad a_N \cdot (D_1 - D_2) = \rho_s$$

اور

$$(9.51) \quad a_N \cdot (B_1 - B_2) = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔

موصل کو ایسا کامل موصل تصور کرتے ہوئے جس کی موصلیت لامحدود مگر J محدود ہو سے موصل کے اندر اوہم کے قانون سے

$$(9.52) \quad E = 0$$

اور یوں فیراڈے کے قانون کی نقطہ شکل سے، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کی صورت میں

$$(9.53) \quad H = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اس طرح ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل سے محدود J کی قیمت

$$(9.54) \quad J = 0$$

حاصل ہوتی ہے لہذا برقی رو صرف موصل کی سطح پر بطور سطحی کثافت برقی رو K ممکن ہے۔ یوں اگر خطہ 2 کامل موصل ہو تب مساوات 9.45، 9.49، 9.50 اور 9.51 کی جگہ

$$(9.55) \quad E_{m1} = 0$$

$$(9.56) \quad H_{m1} = K$$

$$(9.57) \quad D_{n1} = \rho_s$$

$$(9.58) \quad B_{n1} = 0$$

لکھا جائے گا۔ یاد رہے کہ سطحی کثافت چارج کی موجودگی ذوبرق، کامل موصل اور غیر کامل موصل تمام پر ممکن ہے جبکہ سطحی کثافت رو K صرف کامل موصل کی صورت میں ممکن ہے۔

2891

مندرجہ بالا سرحدی شرائط میکس ویل کے مساوات کے حل کے لئے لازم ہیں۔ حقیقت میں پیش آنے والے تمام مسائل میں مختلف اشیاء کے سرحدی شرائط پائی جاتی ہیں اور ایسے ہر سرحد کے دونوں اطراف پر مختلف متغیرات کے تعلق سرحدی شرائط سے ہی حاصل کرنا ممکن ہے۔ کامل موصل کی صورت میں موصل کے اندر، وقت کے ساتھ بدلتے، تمام متغیرات صفر ہوتے ہیں البتہ ایسی صورت میں مساوات 9.55 تا مساوات 9.58 میں دئے شرائط کا اطلاق نہایت مشکل ہوتا ہے۔

لا محدود خطے کو بے سرحد خطہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ سرحد کی غیر موجودگی میں متحرک لہروں کے چند بنیادی خاصیت لہر کی حرکت پر غور سے واضح ہوتے ہیں۔ اگلا باب انہیں متحرک لہروں پر ہے۔ چونکہ لا محدود خطے میں سرحد نہیں پایا جاتا لہذا سرحدی شرائط کی ضرورت نہیں پڑتی۔ اسی وجہ سے لا محدود خطے میں میکس ویل مساوات کا حل نہایت آسان ہوتا ہے۔

2897

مثال 9.4: موصل سطح پر نقطہ $N(2, 3 - 1)$ پایا جاتا ہے جہاں میدان $E = (15a_x - 20a_y + 6a_z) \cos 10^6 t \frac{V}{m}$ ہے۔ موصل سطح کے گرد خطے کے مستقل $\epsilon_R = 1.6$ ، $\mu_R = 2.2$ اور $\sigma = 0$ ہیں۔ الف) نقطہ N پر موصل سطح کی عمودی اکائی سمتیہ a_N حاصل کریں۔ ب) اس نقطے پر کثافت چارج حاصل کریں۔

2900

حل: الف) چونکہ نقطہ N پر برقی میدان دیا گیا ہے اور موصل سطح پر برقی میدان سطح کے عمودی ہوتا ہے لہذا عمودی سمتیہ E کے سمت میں ہی ہوگا۔ یوں لمحہ $t = 0$ پر میدان کی قیمت استعمال کرتے ہوئے a_N حاصل کرتے ہیں۔

$$a_N = \frac{E_{t=0}}{|E_{t=0}|} = \frac{15a_x - 20a_y + 6a_z}{\sqrt{15^2 + 20^2 + 6^2}} = 0.58a_x - 0.78a_y + 0.23a_z$$

ب) موصل سطح پر عمودی میدان اور کثافت چارج کے تعلق سے

$$\begin{aligned} \rho_S = D \cdot a_N &= 1.6\epsilon_0(15a_x - 20a_y + 6a_z) \cos 10^6 t \cdot (0.58a_x - 0.78a_y + 0.23a_z) \\ &= 1.138 \cos(10^6 t) \frac{nC}{m^2} \end{aligned}$$

2901

حاصل ہوتا ہے۔

2902

2903

مثال 9.5: خطہ-1 کے مستقل $\sigma_1 = 0$ ، $\epsilon_{R1} = 5.2$ اور $\mu_{R1} = 6$ ہیں جبکہ خطہ-2 کے مستقل $\sigma_2 = 0$ ، $\epsilon_{R2} = 1.5$ اور $\mu_{R2} = 2.2$ ہیں۔ ان کے سرحد پر کوئی کثافت چارج نہیں پایا جاتا۔ سمتیہ $10a_x - 5a_y + 15a_z$ خطہ-2 سے خطہ-1 کی جانب ہے۔ خطہ الف) میں سرحد کے قریب نقطہ N پر میدان $E_1 = (100a_x - 50a_y + 80a_z) \cos 3600t \frac{V}{m}$ پایا جاتا ہے۔ الف) اسی نقطے کے قریب E_{t1} ، E_{t2} اور E_2 حاصل کریں۔

2907

2908

جوابات: $456 \frac{V}{m}$ ، $454 \frac{V}{m}$ ، $41.8 \frac{V}{m}$

2909

مثال 9.6: $z < 0$ خطہ-1 ہے جہاں $\epsilon_1 = 1.5 \times 10^{-11} \frac{F}{m}$ ، $\mu_1 = 2.2 \times 10^{-6} \frac{H}{m}$ اور $\sigma_1 = 6 \times 10^{-3} \frac{S}{m}$ ہیں۔ خطہ-2 جو $z > 0$ پر پایا جاتا ہے میں $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$ ، $\mu_2 = \frac{\mu_1}{2}$ اور $\sigma_2 = 4\sigma_1$ ہیں۔ نقطہ $N(0, 0, 0^-)$ سرحد پر خطہ-1 میں پایا جاتا ہے جہاں میدان $E_1 = (30a_x + 20a_y + 10a_z) \cos 10^9 t \frac{V}{m}$ ہے۔ الف) اس نقطے پر E_{n1} ، E_{m1} ، D_{n1} اور D_{m1} حاصل کریں۔ ب) اس نقطے پر J_{n1} اور J_{m1} حاصل کریں۔ پ) اسی نقطے پر E_{m2} ، D_{m2} اور J_{m2} حاصل کریں۔ ت) استمراری مساوات کی مدد سے $J_{n1} - J_{n2} = -\frac{\partial D_{n1}}{\partial t} + \frac{\partial D_{n2}}{\partial t}$ لکھتے ہوئے J_{n2} ، D_{n2} اور E_{n2} حاصل کریں۔

حل: الف) خطہ-1 سے خطہ-2 جانب اکائی سمتیہ a_z ہے۔ یوں

$$E_{n1} = a_N \cdot E_1 = a_z \cdot [30a_x + 20a_y + 10a_z] \cos(10^9 t) = 10 \cos(10^9 t)$$

ہوگا جس سے

$$E_{n1} = E_{n1} a_N = 10 \cos(10^9 t) a_z$$

$$E_{m1} = E_1 - E_{n1} = [30a_x + 20a_y] \cos(10^9 t)$$

$$D_{n1} = \epsilon_1 E_{n1} = 1.5 \times 10^{-10} \cos(10^9 t) a_z$$

$$D_{m1} = \epsilon_1 E_{m1} = 10^{-10} [4.5a_x + 3a_y] \cos(10^9 t)$$

لکھے جاسکتے ہیں۔

ب)

$$J_{n1} = \sigma_1 E_{n1} = (6 \times 10^{-3}) 10 \cos(10^9 t) a_z = \frac{3}{50} \cos(10^9 t) a_z$$

$$J_{m1} = \sigma_1 E_{m1} = (6 \times 10^{-3}) [30a_x + 20a_y] \cos(10^9 t) = \left[\frac{9}{50} a_x + \frac{3}{25} a_y \right] \cos(10^9 t)$$

پ) سرحد پر متوازی برقی میدان بے جوڑ ہوتا ہے لہذا اس سرحدی شرط کی بنا پر

$$E_{m2} = E_{m1} = [30a_x + 20a_y] \cos(10^9 t)$$

ہوگا جس سے

$$D_{m2} = \epsilon_2 E_{m2} = (3 \times 10^{-11}) [30a_x + 20a_y] \cos(10^9 t) = 10^{-10} [9a_x + 6a_y] \cos(10^9 t)$$

$$J_{m2} = \sigma_2 E_{m2} = (24 \times 10^{-3}) [30a_x + 20a_y] \cos(10^9 t) = \left[\frac{18}{25} a_x + \frac{12}{25} a_y \right] \cos(10^9 t)$$

حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

ت) مساوات 9.50 سرحد پر سطحی کثافت چارج ρ_s اور عمودی میدان کا تعلق بیان کرتی ہے۔ شکل 9.5 کی طرح سرحد پر کم سے کم قد $(\Delta h \rightarrow 0)$ کی چھوٹی ڈبیا میں کل $\rho_s \Delta S$ چارج پایا جائے گا۔ اس ڈبیا سے برقی رو کی اخراج سے ڈبیا میں موجود چارج میں کمی پیدا ہوگی جسے استمراری مساوات پیش کرتی ہے

$$(J_{n1} - J_{n2}) \cdot \Delta S = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \Delta S$$

جہاں $\rho_S = J_{n1} - J_{n2}$ کے برابر ہے۔ اس مساوات کو

$$J_{n1} - J_{n2} = -\frac{\partial}{\partial t}(D_{n1} - D_{n2})$$

یا

$$\sigma_1 E_{n1} - \sigma_2 E_{n2} = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_1 E_{n1} - \epsilon_2 E_{n2})$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس تفرقی مساوات میں $E_{n1} = 10 \cos 10^9 t$ پر کرتے ہوئے E_{n2} کے لئے حل کرتے ہیں۔ ایسا نامعلوم مستقل کے طریقے سے کرتے ہیں۔ یہ طریقہ استعمال کرتے ہوئے ہم تصور کرتے ہیں کہ

$$E_{n2} = A \cos 10^9 t + B \sin 10^9 t$$

کے برابر ہے جہاں A اور B درکار مستقل ہیں۔ ہم E_{n1} اور E_{n2} کو استمراری مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} (6 \times 10^{-3})10 \cos 10^9 t - 24 \times 10^{-3}[A \cos 10^9 t + B \sin 10^9 t] \\ = 1.5 \times 10^{-11} \times 10 \times 10^9 \sin 10^9 t + 3 \times 10^{-11}[-10^9 A \sin 10^9 t + 10^9 B \cos 10^9 t] \end{aligned}$$

اس مساوات میں دونوں جانب \cos اجزاء کے سر برابر ہوں گے۔ یوں

$$(6 \times 10^{-3})10 - 24 \times 10^{-3}A = 3 \times 10^{-11}[10^9 B]$$

ہوگا۔ اسی طرح مساوات کے دونوں جانب \sin اجزاء کے سر برابر ہوں گے لہذا

$$-24 \times 10^{-3}[B] = 1.5 \times 10^{-11} \times 10 \times 10^9 + 3 \times 10^{-11}[-10^9 A]$$

ہوگا۔ مندرجہ بالا دو مساوات کو آپس میں حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} A &= \frac{165}{41} \\ B &= -\frac{50}{41} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$E_{n2} = \frac{165}{41} \cos 10^9 t - \frac{50}{41} \sin 10^9 t = 4.21 \cos(10^9 t - 16.9^\circ)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$E_{n2} = 4.21 \cos(10^9 t - 16.9^\circ) \mathbf{a}_Z$$

$$D_{n2} = \epsilon_2 E_{n2} = (3 \times 10^{-11})4.21 \cos(10^9 t - 16.9^\circ) \mathbf{a}_Z = 1.26 \times 10^{-10} \cos(10^9 t - 16.9^\circ) \mathbf{a}_Z$$

$$J_{n2} = \sigma_2 E_{n2} = (24 \times 10^{-3})4.21 \cos(10^9 t - 16.9^\circ) \mathbf{a}_Z = 0.1 \cos(10^9 t - 16.9^\circ) \mathbf{a}_Z$$

ہوں گے۔

9.5 تاخیری دباو

وقت کے ساتھ بدلتے دباو، جنہیں **تاخیری دباو**¹¹ کہا جاتا ہے، **اشعاعی اخراج**¹² کے مسائل حل کرنے میں نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ آپ کو یاد ہوگا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو V کو خطے میں تقسیم ساکن چارج کی صورت

$$V = \int_h \frac{\rho_h dh}{4\pi\epsilon R} \quad (\text{برقی سکون}) \quad (9.59)$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح سمتی مقناطیسی دباو A کو وقت کے ساتھ نہ بدلتے یعنی یک سمتی برقی رو کے تقسیم کی صورت

$$A = \int_h \frac{\mu J dh}{4\pi R} \quad (\text{یک سمتی رو}) \quad (9.60)$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں مساوات کے نقطہ اشکال بالترتیب

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \quad (\text{برقی سکون}) \quad (9.61)$$

اور

$$\nabla^2 A = -\mu J \quad (\text{یک سمتی رو}) \quad (9.62)$$

ہیں۔

غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو کے حصول کے بعد میدان کے بنیادی متغیرات ڈھلوان

$$E = -\nabla V \quad (\text{برقی سکون}) \quad (9.63)$$

اور گردش

$$B = \nabla \times A \quad (\text{یک سمتی رو}) \quad (9.64)$$

کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔

آئیں اب ساکن چارج اور یک سمتی رو سے متعلق، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایسے دباو حاصل کریں جو مندرجہ بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔

میکس ویل کے مساوات کے تحت $\nabla \cdot B = 0$ ہوگا۔ صفحہ 227 پر مساوات 7.66 کے تحت گردش کی پھیلاؤ لازماً صفر ہوتی ہے لہذا مساوات 9.64 میکس ویل کی مساوات $\nabla \cdot B = 0$ پر پورا اترتی ہے۔ یوں ہم مساوات 9.64 کو بدلتے میدان کے لئے بھی درست تصور کرتے ہیں۔

صفحہ 237 پر مشق 7.7 میں آپ نے ثابت کیا کہ ڈھلوان کی گردش لازماً صفر ہوتی ہے یوں مساوات 9.63 کی گردش لینے سے دایاں ہاتھ صفر حاصل ہوتا ہے جبکہ بائیں ہاتھ $\nabla \times E$ حاصل ہوتا ہے جو مساوات 9.28 کے تحت صفر نہیں ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ مساوات 9.63 وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے درست نہیں ہے۔ آئیں اس توقع سے مساوات 9.63 کے دائیں جانب متغیر N جمع کریں

$$E = -\nabla V + N$$

کہ وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے ایسی مساوات درست ثابت ہوگی۔ فی الحال N ایک نامعلوم متغیر ہے۔ گردش لینے سے

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla V) + \nabla \times N \\ &= 0 + \nabla \times N \end{aligned}$$

یعنی

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 9.64 کے استعمال سے یوں

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A})$$

یا

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جس کا سادہ ترین حل

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

ہے لہذا اب ہم

$$(9.65) \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

لکھ سکتے ہیں۔

ہمیں اب بھی دیکھنا ہو گا کہ آیا مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 میکس ویل کے بقایادو مساوات یعنی مساوات 9.29

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

اور مساوات 9.30

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

پر پورا اترتے ہیں کہ نہیں۔ یہاں پہلی مساوات میں $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$ اور $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \mathbf{J} + \epsilon \left(-\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

یا

$$(9.66) \quad \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu \epsilon \left(\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 9.65 کا سہارا لیا گیا۔ اسی طرح مساوات 9.30 سے

$$\epsilon \left(-\nabla \cdot \nabla V - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \rho_h$$

$$(9.67) \quad \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 9.66 اور مساوات 9.67 میں کوئی تضاد نہیں پایا جاتا۔ ساکن یا یک سمتی حالات میں $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ کی وجہ سے مساوات 9.66 اور مساوات 9.67 سے بالترتیب مساوات 9.62 اور مساوات 9.61 حاصل ہوتے ہیں۔ یوں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ وقت کے ساتھ بدلتے دباؤ کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے کہ ان سے B اور E بذریعہ مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 حاصل کئے جاسکتے ہوں۔ البتہ A اور V کو مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 از خود مکمل طور پر بیان نہیں کرتے۔ یہ دو مساوات لازمی لیکن نامکمل شرائط ہیں جن پر A اور V کا پورا اثرنا ضروری ہے۔ آئیں ایک مثال سے اس حقیقت کو سمجھیں۔

تصور کریں کہ ہمارے پاس سادہ سمتی مقناطیسی دباؤ ہے جس کے A_y اور A_z اجزاء صفر کے برابر ہیں۔ یوں مساوات 9.64 کی مدد سے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z = 0 a_x + \frac{\partial A_x}{\partial z} a_y - \frac{\partial A_x}{\partial y} a_z$$

اس سے ظاہر ہے کہ x محدد کے ساتھ A_x کے تبدیلی کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن نہیں ہے۔ یہ مساوات $\frac{\partial A_x}{\partial x}$ کا ذکر تک نہیں کرتا۔ ہاں اگر ہمیں A کے پھیلاؤ کے بارے میں بھی معلومات فراہم ہوتی تب x محدد کے ساتھ A_x کے تبدیلی کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہوتا چونکہ دئے گئے سمتی دباؤ سے

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آخر میں یہ بھی بتانا ضروری ہے کہ A کے بارے میں ہماری تمام معلومات جزوی تفرقی مساوات کی صورت میں ہیں جن سے A کے حصول کے وقت مکمل کا مستقل شامل کرنا ضروری ہے۔ کسی بھی حقیقی مسئلہ جس میں مکمل خلاء کے لئے حل درکار ہو میں ایسا مستقل صفر کے برابر ہو گا چونکہ کوئی بھی میدان لامحدود فاصلے پر صفر ہی ہو گا۔

اس مثال سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر ہمیں لامحدود خلاء میں کسی بھی نقطے پر سمتی میدان کی قیمت معلوم ہو تب اس سمتی میدان کو تمام خلاء میں میدان کے گردش اور پھیلاؤ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ہمیں مکمل آزادی ہے کہ جیسے چاہیں A کی پھیلاؤ بیان کریں۔ ہم مساوات 9.66 اور مساوات 9.67 کو مد نظر رکھتے ہوئے یوں A کے پھیلاؤ کے لئے سادہ ترین تفاعل

$$(9.68) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

لکھتے ہیں جس سے مساوات 9.66

$$(9.69) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

صورت اختیار کر لے گی جبکہ مساوات 9.67

$$(9.70) \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

صورت اختیار کر لے گی۔

مندرجہ بالا دو مساوات متحرک امواج سے متعلق ہیں جن پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔ ان مساوات کی مشابہت بھی حیرت انگیز ہے۔ باب کے اس حصے میں، وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے، حاصل کئے گئے نتائج یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(9.71) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$(9.72) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$(9.73) \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

اگلے باب میں متحرک امواج پر غور کیا جائے گا۔ آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتے برقی و مقناطیسی میدان متحرک امواج پیدا کرتے ہیں جن کی رفتار v

$$(9.74) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

کے برابر ہوتی ہے۔ خالی خلاء میں یہ رفتار تقریباً $3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ کے برابر ہوتی ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔ اس سے اخذ کیا جاسکتا ہے کہ نقطہ N_1 پر کثافت چارج سے دور کسی نقطہ N_2 پر دباؤ کی قیمت اسی لمحے کثافت چارج کے قیمت پر منحصر نہیں ہوتی بلکہ کچھ دیر قبل کے کثافت چارج پر منحصر ہوتی ہے۔ کثافت چارج میں تبدیلی کی خبر N_1 سے N_2 تک رفتار v سے پہنچتی ہے لہذا ان نقطوں کے درمیان فاصلہ R ہونے کی صورت میں یہ خبر $\frac{R}{v}$ سیکنڈ تاخیر سے پہنچے گی۔ اس طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.59 کی نئی شکل

$$(9.75) \quad V = \int_h \frac{[\rho_h]}{4\pi\epsilon R} dh$$

ہوگی جہاں $[\rho_h]$ سے مراد یہ ہے کہ مساوات میں وقت t کی جگہ تاخیری وقت t' استعمال کیا جائے یعنی

$$t' = t - \frac{R}{v}$$

یوں اگر خلاء میں کثافت چارج

$$\rho_h = e^{-r} \cos \omega t$$

ہو تب

$$[\rho_h] = e^{-r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) \right]$$

2937 ہوگا جہاں R تفرقی چارج سے اس نقطے تک فاصلہ ہے جہاں اس تفرقی چارج سے پیدا دباؤ کا حصول درکار ہو۔

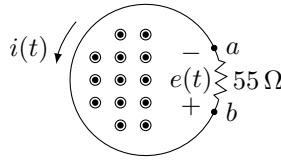
اسی طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.60 کی نئی شکل یعنی تاخیری سمتی مقناطیسی دباؤ کی مساوات

$$(9.76) \quad \mathbf{A} = \int_h \frac{\mu[J]}{4\pi R} dh$$

2938 ہوگی۔

2939 تاخیری وقت کے استعمال کی بنا پر ایسے دباؤ کو تاخیری دباؤ¹³ کہا جاتا ہے۔

تاخیری برقی اور تاخیری مقناطیسی دباؤ کے استعمال سے برقی و مقناطیسی مسئلے نسبتاً زیادہ آسانی سے حل ہوتے ہیں۔ یوں اگر ہمیں ρ اور J معلوم ہوں تب ہم مساوات 9.75 اور مساوات 9.76 سے V اور A حاصل کر سکتے ہیں جن سے مقناطیسی میدان بذریعہ مساوات 9.71 اور برقی میدان بذریعہ مساوات 9.73 حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ اگر ہمیں ρ اور J کی قیمتیں معلوم نہ ہوں اور نہ ہی ان کے قیمتوں کا اندازہ لگانا ممکن ہو تب تاخیری دباؤ، میکس ویل مساوات کے حل سے زیادہ، مددگار ثابت نہیں ہوتے۔



شکل 9.6: دائرے میں یکساں مقناطیسی بہاؤ، محرک برقی دباؤ پیدا کرتا ہے۔

سوالات

سوال 9.1: رداس $\rho = 12 \text{ cm}$ کے گول دائرے میں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا، یکساں مقناطیسی میدان $B(t) = 0.15 \sin 1000t \text{ Wb}$ ہے جو دائرے میں محرک برقی دباؤ $e(t)$ پیدا کرتا ہے۔ گول دائرے کی مزاحمت 55Ω ہے۔ محرک برقی دباؤ، گول دائرے میں برقی رو $i(t)$ پیدا کرتی ہے۔ برقی رو $i(t)$ سے پیدا مقناطیسی بہاؤ کو نظر انداز کرتے ہوئے $e(t)$ اور $i(t)$ حاصل کریں۔ صورت حال شکل 9.6 میں دکھائی گئی ہے جہاں صفحہ سے اوپر کی جانب باہر نکلتی مقناطیسی میدان کو چھوٹے دائروں میں بند نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

جوابات: $-6.78 \cos 1000t \text{ V}$ ، $-123 \cos 1000t \text{ mA}$

سوال 9.2: سطح $z = 0$ پر موصل تار کے مستطیل کے اطراف $x = \pm 2 \text{ m}$ ، $y = \pm 1.5 \text{ m}$ پر ہیں۔ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا مقناطیسی میدان $B = (0.25a_x - 0.55a_y + 0.1a_z) \sin 1200t \text{ T}$ ہے۔ مستطیل کی کل مزاحمت $R = 4200 \Omega$ ہے۔ مثبت z محدود کی جانب سے دیکھتے ہوئے، گھڑی کی سمت میں برقی رو حاصل کریں۔ برقی رو سے پیدا ثنائی مقناطیسی میدان کو نظر انداز کرتے ہوئے حل کریں۔

جواب: $343 \cos 1200t \text{ mA}$

سوال 9.3: مقناطیسی میدان $B = 5 \cos(1.2 \times 10^8 \pi t - \pi y) a_z \mu\text{T}$ ہے۔ مندرجہ ذیل فرضی یا غیر موصل دائروں پر a_ϕ سمت میں بڑھتا محرک برقی دباؤ حاصل کریں۔ الف) $(0, 0, 0)$ تا $(1, 0, 0)$ تا $(0, 1, 0)$ تا $(0, 0, 0)$ ؛ ب) $(0, 0, 0)$ تا $(2, 0, 0)$ تا $(0, 2, 0)$ تا $(0, 0, 0)$

جوابات: 0 V ، $600[\cos(1.2 \times 10^8 \pi t - \pi) - \cos(1.2 \times 10^8 \pi t)] \text{ V}$

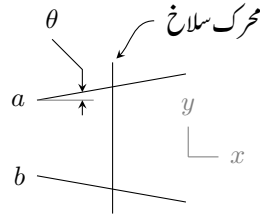
سوال 9.4: رداس $\rho = 1 \text{ mm}$ اور $\rho = 3 \text{ mm}$ کے ہم محوری تار میں $H = \frac{0.122}{\rho} \cos 5 \times 10^8 \pi t \cos 0.5 \pi z a_\phi \frac{\text{A}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ مستطیل $(0.001, 0^\circ, 0)$ تا $(0.003, 0^\circ, 0)$ تا $(0.003, 0^\circ, 1.5)$ تا $(0.001, 0^\circ, 1.5)$ تا $(0.001, 0^\circ, 0)$ میں محرک برقی دباؤ حاصل کریں۔

جواب: $119 \sin(5 \times 10^8 \pi t) \text{ V}$

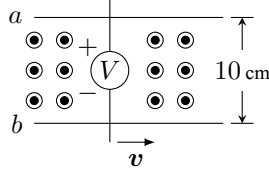
سوال 9.5: لمحہ $t = 0$ پر موصل تار کے مستطیل کے اطراف $x = \pm 0.4 \text{ m}$ اور $y = \pm 0.6 \text{ m}$ پر ہیں۔ یہ مستطیل $6a_y \frac{\text{m}}{\text{s}}$ کی سمتی رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔ غیر یکساں مقناطیسی میدان $B = 3x^2 y a_z \text{ T}$ ہے۔ مستطیل کی مزاحمت $R = 100 \Omega$ ہے۔ مستطیل میں طاقت کی اخراج حاصل کریں۔ ساکن سلاخوں میں کتنی محرک برقی دباؤ پیدا ہوتی ہے۔

جواب: 0 V ، $P = 2.12 \text{ mW}$

سوال 9.6: شکل 9.7 میں دو ساکن موصل سلاخ x محدود کے ساتھ $\theta = \pm 10^\circ$ کا زاویہ بناتے ہیں۔ صفحہ کے بالائی سطح سے نکلتی مقناطیسی میدان $B = 0.5a_z \text{ T}$ ہے۔ محرک سلاخ کی رفتار $v = 8a_x \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔ ساکن سلاخوں کے بائیں سروں کے درمیان فاصلہ 2 cm ہے۔ ان کے مابین آلہ پیا برقی دباؤ



شکل 9.7: محرک سلاخ پر مقناطیسی میدان محرک دباؤ پیدا کرتا ہے۔



شکل 9.8: کھلے دور اور بند دور میں محرک برقی دباؤ۔

سوال 9.7: (الف) محرک سلاخ کے مقام کو $t = 0$ پر $x = 0$ لیتے ہوئے آلہ پیمائش پر حاصل برقی دباؤ کو مساوات 9.1 سے حاصل کریں۔ (ب) اسی محرک دباؤ کو مساوات 9.13 کے دائیں ہاتھ کی مدد سے حاصل کریں۔ (پ) محرک سلاخ کا مقام $x = 50t^2 \frac{m}{s}$ ہونے کی صورت میں جواب حاصل کریں۔

2969

جوابات: الف اور ب: $v_{ab} = -11.285t - 0.08 \text{ V}$ (پ) $v_{ab} = -881.6t^3 - t \text{ V}$

سوال 9.7: رداس $\rho = 0.5 \text{ cm}$ اور $\rho = 4 \text{ cm}$ کی ہم محوری تار میں میدان $H_\phi = \frac{5}{\rho} \cos(2\pi \times 10^7 t - 5z)$ اور $E_\rho = \frac{8\pi^2}{\rho} \cos(2\pi \times 10^7 t - 5z)$ پائے جاتے ہیں۔ (الف) مساوات 9.28 کے دونوں اطراف حل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ ہم محوری تار میں موجود میدان اس پر پورا اترتے ہیں۔ (ب) سمتی سطح $\phi = 0$ ، $0.5 \text{ cm} < \rho < 4 \text{ cm}$ ، $0 < z < 1 \text{ cm}$ اور اس کے محیط پر مساوات 9.4 کے دونوں اطراف حل کرتے ہوئے محرک برقی دباؤ حاصل کریں۔ سمتی سطح کی سمت a_ϕ لیں۔ یوں محیط پر چلتے ہوئے $z = 1 \text{ cm}$ پر a_ρ سمت میں چلنا ہوگا۔

2973

جوابات: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{40\pi^2}{\rho} \sin(2\pi \times 10^7 t - 5z) \mathbf{a}_\phi$

2974

$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 52.26 [\cos(2\pi \times 10^7 t - 0.05) - \cos(2\pi \times 10^7 t)] \text{ V}$

2975

سوال 9.8: شکل 9.8 میں $B = 0.55 \mathbf{a}_z \text{ T}$ اور $v = 6 \mathbf{a}_x \frac{m}{s}$ ہیں۔ محرک سلاخ میں انتہائی زیادہ مزاحمت رکھتا پیمائش برقی دباؤ V (نسب ہے۔ الف) سلاخ کے بائیں اور دائیں سرے آزاد رکھتے ہوئے پیمائش کیا برقی دباؤ حاصل ہوگی۔ (ب) ساکن سلاخوں کے بائیں سرے a اور b آپس میں موصل تار سے جوڑنے کے بعد پیمائش کیا حاصل ہوگا۔ (پ) ساکن سلاخوں کے دائیں سرے آپس میں موصل تار سے جوڑنے کے بعد پیمائش کیا حاصل ہوگا۔ (ت) ساکن سلاخ کے بائیں سرے آپس میں اور ان کے دائیں سرے آپس میں جوڑ کر پیمائش کیا ہوگی۔

2979

جوابات: 3.3 V ، 3.3 V ، 3.3 V ، 0 V

2980

سوال 9.9: برقی میدان $E = E_0 \cos 1500t \frac{V}{m}$ کی صورت میں مندرجہ ذیل اشیاء میں ایصال برقی روادور انتقالی برقی رو کی شرح حاصل کریں۔ الف) تانبا جس کے مستقل $\epsilon_R = 1$ اور $\sigma = 5.8 \times 10^7 \frac{S}{m}$ ہیں۔ (ب) مقطر پانی جس کے مستقل $\epsilon_R = 80$ اور $\sigma = 10^{-4} \frac{S}{m}$ ہیں۔ (پ) کوارٹس جس کے مستقل $\epsilon_R = 3.8$ اور $\sigma = 10^{-17} \frac{S}{m}$ ہیں۔

2983

جوابات: $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ ، 4.4×10^{15} ، 94 ، 2×10^{-10}

2984

2985

سوال 9.10: برقی میدان $E = E_0 e^{\frac{t}{\tau}} \frac{V}{m}$ کی صورت میں مندرجہ ذیل اشیاء میں ایصالی برقی رد اور انتقالی برقی رو کی شرح حاصل کریں جہاں $\tau = 10^{-7}$ کے برابر ہے۔ الف) تابنا جس کے مستقل $\epsilon_R = 1$ اور $\sigma = 5.8 \times 10^7 \frac{S}{m}$ ہیں۔ ب) مقطر پانی جس کے مستقل $\epsilon_R = 80$ اور $\sigma = 10^{-4} \frac{S}{m}$ ہیں۔ پ) کوارٹس جس کے مستقل $\epsilon_R = 3.8$ اور $\sigma = 10^{-17} \frac{S}{m}$ ہیں۔

جوابات: $\frac{\sigma\tau}{\epsilon}$ ، 6.5×10^{11} ، 0.014 ، 2.97×10^{-11}

سوال 9.11: محدود z پر موجود ہم محوری تاریکی لمبائی 12 cm جبکہ اس کے رداس 2 mm اور 6 mm ہیں۔ دونوں تاروں کے درمیان مادے کے مستقل J کی صورت میں $E = \frac{10^4}{\rho} \cos(10^6 t) a_\rho \frac{V}{m}$ ہیں۔ تار میں $\sigma = 4 \times 10^{-5} \frac{S}{m}$ اور $\epsilon = 2 \times 10^{-11} \frac{F}{m}$ ، $\mu = 5 \times 10^{-6} \frac{H}{m}$ اور I_d ، J_d ، I_c ، J_c حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{0.5}{\rho} \cos(10^6 t) a_\rho \frac{A}{m^2}$ ، $0.12\pi \cos 10^6 t A$ ، $-\frac{0.1}{\rho} \sin 10^6 t \frac{A}{m^2}$ ، $-0.024\pi \sin 10^6 t A$ ، 0.2

سوال 9.12: رداس ρ_1 اور ρ_2 کے ہم محوری تاریکی لمبائی l ہے۔ تار کو بیرونی دور $V_0 \cos \omega t$ برقی دباؤ فراہم کرتی ہے۔ تار میں برقی میدان E کی مساوات لکھتے ہوئے J_d اور I_d حاصل کریں۔ ثابت کریں کہ انتقالی برقی رو بیرونی دور میں پائی جانے والی ایصالی برقی رو کے برابر ہے۔

جوابات: $J_c = C \frac{dV}{dt} = -\frac{2\pi l \omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{\ln \frac{b}{a}}$ ، $I_d = -\frac{2\pi l \omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{\ln \frac{b}{a}}$ ، $J_d = \frac{-\omega \epsilon V_0 \sin \omega t}{\rho \ln \frac{b}{a}} a_\rho$ ، $E = \frac{V_0 \cos \omega t}{\rho \ln \frac{b}{a}} a_\rho \frac{V}{m}$

سوال 9.13: مساوات 9.22 کی پہلی مساوات کے دونوں اطراف پھیلاؤ کا عمل استعمال کرتے ہوئے استمراری مساوات حاصل کریں۔

جواب: $\nabla \cdot \nabla \times H = 0 = \nabla \cdot J + \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$

سوال 9.14: ایک خطہ جہاں $E = 32 \sin ax \cos 5y \cos(2 \times 10^{10} t) a_z$ ہے کے مستقل $\mu_R = 2.5$ ، $\epsilon_R = 1.2$ اور $\sigma = 0$ ہیں۔ میکس ویل کے مساوات استعمال کرتے ہوئے a کی مثبت قیمت دریافت کریں۔ تمام مکمل کے مستقل کو صفر لیں۔

جواب: $a = 115.44 \text{ m}^{-1}$

سوال 9.15: ایک تریسلی تار میں مقناطیسی میدان $H = 15 \cos(4 \times 10^9 t - \beta z) a_x \frac{A}{m}$ پایا جاتا ہے۔ تریسلی تار کے درکار مستقل $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 5$ اور $\sigma = 0$ ہیں۔ میکس ویل کے مساوات استعمال کرتے ہوئے β کی مثبت قیمت دریافت کریں۔

جواب: $\beta = 29.83 \text{ m}^{-1}$

سوال 9.16: موصل سطح محدود کے مرکز سے گزرتی ہے جہاں میدان $E = (33a_x + 12a_y + 25a_z) \cos(10^7 t) \frac{V}{m}$ پایا جاتا ہے۔ سطح کے قریب خطے کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\epsilon_R = 12$ اور $\mu_R = 1.6$ ہیں۔ نقطہ $(0, 0, 0)$ پر موصل سطح پہ کثافت چارج حاصل کریں۔ اس نقطے پر سطح کے متنازی میدان حاصل کریں۔

جوابات: 0 ، $4.58 \cos(10^7 t) \frac{nC}{m^2}$

سوال 9.17: خطہ $z < 0$ میں $\epsilon_{R1} = 1$ ، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں جبکہ خطہ $z > 0$ میں $\epsilon_{R2} = 9$ ، $\mu_{R2} = 4$ اور $\sigma_2 = 0$ ہیں۔ پہلے خطے میں میدان $E_1 = [10 \cos(10^9 t - 3.336z) - 2 \cos(10^9 t + 3.336z)] a_y$ اور دوسرے خطے میں $E_2 = (A \cos(10^9 t - 20.014z)) a_y$ (الف) مستقل A کی قیمت دریافت کریں۔ ب) مقناطیسی میدان H_1 اور H_2 حاصل کریں۔ پ) ثابت کریں کہ مقناطیسی میدان سرحدی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔

جوابات: $H_1 = [-0.0265 \cos(10^9 t - 3.336z) - 0.0053 \cos(10^9 t + 3.336z)] a_x$ ، $A = 8$ ، $H_{m1} = H_{m2}$ ، $H_2 = -0.0318 \cos(10^9 t - 20.014z) a_x$

سوال 9.18: خالی خلاء میں مساوات 9.9 نکلی محدود میدان دیتی ہے۔ خالی خلاء میں $J = 0$ لیتے ہوئے میکس ویل کی مساوات $\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$ استعمال کرتے ہوئے E حاصل کریں۔ حاصل E سے میکس ویل کی مساوات $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ کی مدد سے واپس B حاصل کریں۔ ثابت کریں کہ دی گئی میدان میکس ویل کی مساوات پر پورا نہیں اترتا۔

جواب: چونکہ ہمیں واپس ابتدائی میدان حاصل نہیں ہوتا لہذا یہ میدان میکس ویل کی مساوات پر پورا نہیں اترتا۔

سوال 9.19: دو عدد ہم محوری موصل نکلی $\rho = 1 \text{ cm}$ اور $\rho = 10 \text{ cm}$ کے ساتھ سطح $z = 0$ اور $z = 50 \text{ cm}$ مل کر ڈیبیا بناتے ہیں۔ اس ڈیبیا میں موجود ذرو برق کے مستقل $\sigma = 0$ ، $\epsilon_R = 1.5$ اور $\mu_R = 2.5$ ہیں جبکہ اس میں میدان $H = \frac{10}{\rho} \cos 2\pi z \sin(6\pi 10^7 t) a_\phi \frac{\text{A}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ الف) نقطہ $N(0.01, 30^\circ, 0.02)$ پر سطحی کثافت برقی رو حاصل کریں۔ ب) برقی میدان E حاصل کریں۔ پ) نقطہ $M(0.015, 0^\circ, 0.2)$ پر سطحی کثافت چارج حاصل کریں۔ ت) نقطہ $N(0.015, 0^\circ, 0.2)$ پر انتقالی برقی رو حاصل کریں۔

جوابات: $E = -\frac{25098}{\rho} \sin 2\pi z \cos(6\pi 10^7 t) a_\rho \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $K = 992 \sin(6\pi 10^7 t) \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $J = 3984 \sin(6\pi 10^7 t) a_\rho \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ ، $\rho_S = -21.1 \cos(6\pi 10^7 t) a_\rho \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$

سوال 9.20: خالی خلاء میں $V = x(z - ct) \text{ V}$ اور $A = x(\frac{z}{c} - t) a_z \frac{\text{Wb}}{\text{m}}$ پائے جاتے ہیں جہاں $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ کے برابر ہے۔ الف) ثابت کریں کہ $\nabla \cdot A = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$ کے برابر ہے۔ ب) میدان B ، H ، E اور D حاصل کریں۔ پ) ثابت کریں کہ $J = 0$ اور $\rho_f = 0$ کی صورت میں حاصل میدان میکس ویل کے چار مساواتوں پر پورا اترتے ہیں۔

جوابات: الف) چونکہ $\nabla \cdot A = x \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ اور $\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{x}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ ہیں لہذا $\nabla \cdot A = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$ ہو گا۔ ب) $B = (t - \frac{z}{c}) a_y \text{ T}$ ، $H = \frac{1}{\mu_0} (t - \frac{z}{c}) a_y \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ، $E = (ct - z) a_x \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $D = \epsilon_0 (ct - z) a_x \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پ) حاصل میدان مساوات 9.28 تا مساوات 9.31 پر پورا اترتے ہیں۔

سوال 9.21: خالی خلاء میں دو عدد موصل چادر $y = 0$ اور $y = y_0$ پر پائے جاتے ہیں۔ ان کے درمیان میدان $E = 10^4 \cos(10^7 t - 6z) a_y \frac{\text{V}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ الف) B حاصل کریں۔ ب) $A(x, 0, z, t) = 0$ کی صورت میں $A(x, y, z, t)$ حاصل کریں۔ پ) $V(x, 0, z, t) = 0$ کی صورت میں $V(x, y, z, t)$ حاصل کریں۔

جواب: $A(x, y, z, t) = -\frac{3y}{500} \cos(10^7 t - 6z) a_z \frac{\text{Wb}}{\text{m}}$ ، $B = -\frac{3}{500} \cos(10^7 t - 6z) a_x \frac{\text{Wb}}{\text{m}}$ ، $V(x, y, z, t) = -3.21 \times 10^8 y \cos(10^7 t - 6z) \text{ V}$

4442 put comsat's time table here.
4443 energy travels along the wire and not in the wire.
4444 antenna chapter, 3D figure at start and complete the start section.
4445 house completion certificate.
4446 zaryab's tooth
4447 zaryab fish
4448 $F = -dW/dT$ to include in inductance chapter plus a question or two
4449 magnetization curve and an iteration example. fig 8.10, 11 of hayt.
4450 charge is barqi bar.
4451 add questions to machine book too.
4452 take print outs for myself.
4453
4454
4455 when giving fields always remember the following rules:
4456 always ensure that divergence of magnetic field is zero.
4457 moving waves must be of the form $E = E_0 \cos(\omega t - kz)$ where $c = (\mu * \epsilon)^{-0.5}$ and $k = 2 * \pi / \lambda$

الباب 16

سوالات

میکس ویل مساوات

جدول 16.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	مقطر پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوبا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمینیم
10^{-16}	پولیسٹرن پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 16.2 : $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیز
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابرق
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	ہائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 16.3 : μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلیم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 16.4 : اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	c	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

