1 برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
2 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1 سمتیات 1

1.1 مقداری اور سمتیہ . . . 1

1.2 سمتی الجبرا . . . 2

1.3 کارتیسی محدد . . . 3

1.4 اکائی سمتیات . . . 5

1.5 میدانی سمتیہ . . . 9

1.6 سمتی رقبہ . . . 9

1.7 غیر سمتی ضرب . . . 10

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب . . . 14

1.9 گول نلکی محدد . . . 17

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب . . . 20

1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق . . . 20

1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں . . . 25

1.10 کروی محدد . . . 27

2 کولومب کا قانون 39

2.1 قوت کشش یا دفع . . . 39

2.2 برقی میدان کی شدت . . . 43

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان . . . 46

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح . . . 51

2.5 چارج بردار حجم . . . 55

2.6 مزید مثال . . . 56

2.7 برقی میدان کے سمت بہاو خط . . . 64

3 گاؤس کا قانون اور پھیلاو 69
3.1 ساکن چارج 69
3.2 فیراڈے کا تجربہ 69
3.3 گاؤس کا قانون 70
3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال 72
3.4.1 نقطہ چارج 72
3.4.2 یکساں چارج بردار کروی سطح 74
3.4.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر 74
3.5 ہم محوری تار 75
3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح 77
3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق 77
3.8 پھیلاو 80
3.9 نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات 82
3.10 پھیلاو کی عمومی مساوات 84
3.11 مسئلہ پھیلاو 86

4 توانائی اور برقی دباو 93
4.1 توانائی اور کام 93
4.2 لکیری تکملہ 94
4.3 برقی دباو 99
4.3.1 نقطہ چارج کا برقی دباو 100
4.3.2 لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو 101
4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباو 102
4.4 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباو 102
4.5 برقی دباو کی ڈھلوان 106
4.5.1 نلکی محدد میں ڈھلوان 110
4.5.2 کروی محدد میں ڈھلوان 111
4.6 جفت قطب 112
4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاو خط 114
4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی 117

5 موصل، ذو برق اور کپیسٹر 125

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو 125

5.2 استمراری مساوات 127

5.3 موصل 129

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط 134

5.5 عکس کی ترکیب 137

5.6 نیم موصل 140

5.7 ذو برق 141

5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط 146

5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط 150

5.10 کپیسٹر 150

5.10.1 متوازی چادر کپیسٹر 152

5.10.2 ہم محوری کپیسٹر 153

5.10.3 ہم محوری کرہ کپیسٹر 153

5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر 155

5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس 156

6 پوئسن اور لاپلاس مساوات 169

6.1 مسئلہ یکتائی 171

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے 173

6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات 173

6.4 لاپلاس مساوات کے حل 174

6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال 181

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل 183

6.7 عددی دہرانے کا طریقہ 191

7 ساکن مقناطیسی میدان 199

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون . . . 199

7.2 ایمپیئر کا دوری قانون . . . 204

7.3 گردش . . . 210

7.3.1 نلکی محدد میں گردش . . . 217

7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات . . . 222

7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات . . . 224

7.4 مسئلہ سٹوکس . . . 225

7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو . . . 228

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو . . . 235

7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول . . . 240

7.7.1 سمتی مقناطیسی دباو . . . 240

7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون . . . 242

8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ 249

8.1 متحرک چارج پر قوت . . . 249

8.2 تفرقی چارج پر قوت . . . 250

8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت . . . 254

8.4 قوت اور مروڑ . . . 255

8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے . . . 261

8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل . . . 262

8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط . . . 265

8.8 مقناطیسی دور . . . 268

8.9 مقناطیسی مخفی توانائی . . . 271

8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ . . . 271

8.11 مشترکہ امالہ . . . 277

9 وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات 283

9.1 فیراڈے کا قانون . . . 283

9.2 انتقالی برقی رو . . . 290

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل . . . 296

9.4 میکس ویل مساوات کی تکمل شکل . . . 298

9.5 تاخیری دباو . . . 303

10 مستوی امواج 311

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج . . . 311

10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج . . . 312

10.2.1 خالی خلاء میں امواج . . . 320

10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج . . . 323

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج . . . 325

10.3 پوئنٹنگ سمتیہ . . . 329

10.4 پوئنٹنگ سمتیہ اور برقی دور . . . 334

10.5 موصل میں امواج . . . 336

10.6 انعکاس مستوی موج . . . 342

10.7 شرح ساکن موج . . . 349

10.8 دو سرحدی انعکاس . . . 354

10.8.1 فیبری-پیروٹ طیف پیما . . . 359

10.8.2 $\eta_1 \neq \eta_3$ کی صورت میں ہم رکاوٹ صورت کا حصول . . . 360

10.8.3 متعدد سرحدی مسئلہ . . . 362

10.9 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب . . . 363

10.10 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئنٹنگ سمتیہ . . . 370

11 ترسیلی تار 379

11.1 ترسیلی تار کے مساوات 379

11.2 ترسیلی تار کے مستقل 383

11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل 384

11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل 387

11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار 388

11.3 ترسیلی تار کے چند مثال 389

11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ 397

11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ 404

11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال 406

11.6 پیما شرح ساکن موج 410

11.7 تجزیہ عارضی حال 411

12 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار 429

12.1 ترچھی آمد 429

12.2 قطبی موج کی ترچھی آمد 441

12.3 ترسیم بائی گن 445

13 مویج اور گھمکیا 449

13.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ 449

13.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج 450

13.3 کھوکھلا مستطیل مویج 456

13.3.1 مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور 465

13.4 مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی $\mathrm{TM}mn$ موج 472

13.5 کھوکھلی نالی مویج 476

13.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف 483

13.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف 484

13.8 سطحی موج 488

13.9 ذو برق تختی مویج 492

13.10 شیش ریشہ 496

13.11 پردہ بصارت 498

13.12 گھمکی خلاء 500

13.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل 504

14 اینٹینا اور شعاعی اخراج 517

14.1 تعارف 517

14.2 تاخیری دباو 517

14.3 تکمل 519

14.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا 520

14.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت 528

14.6 ٹھوس زاویہ 531

14.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش 532

14.8 قطاری ترتیب 539

14.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع 539

14.8.2 ضرب نقش 540

14.8.3 ثنائی قطار 541

14.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار 543

14.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار 545

14.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار 545

14.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا 549

14.9 تداخُل پیما 550

14.10 مستطیل سطحی اینٹینا 551

14.11 درز کا دور میدان بذریعہ فوریئر بدل 554

14.12 خطی اینٹینا 560

14.13 چلتی موج اینٹینا 565

14.14 چھوٹا گھیرا اینٹینا 566

14.15 پیچ دار اینٹینا 567

14.16 دو طرفہ کردار 569

14.17 جھری اینٹینا 571

14.18 پیپا اینٹینا 572

14.19 فرائس ریڈار مساوات 574

14.20 ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی 577

14.21 حرارت نظام اور حرارت بعید 579

15 سوالات 575

باب 14

اینٹینا اور شعاعی اخراج

14.1 تعارف

14.2 تاخیری دباو

کسی بھی اخراج شعاع کے نظام میں موج کے ترسیل کے لئے درکار دورانیہ اہمیت رکھتا ہے۔یوں شکل 14.3 میں دکھائے تار میں برقی رو سے پیدا میدان کا اثر نقطہ N پر کچھ وقفے سے ہو گا۔خالی خلاء میں یہ وقفہ موج کو تار سے نقطے تک پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے جہاں $c = 3 \times 10^8 \, \mathrm{m/s}$ خالی خلاء میں شعاع کی رفتار ہے۔یوں N کے نقطہ نظر سے تار میں برقی رو

$$I = I_0 \cos \omega t \tag{14.1}$$

کی بجائے

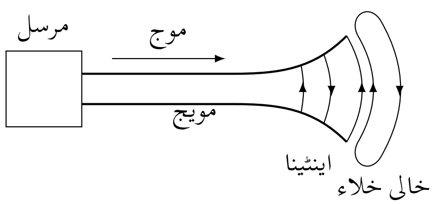
$$[I] = I_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \tag{14.2}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $[I]$ تاخیری برقی رو[1] کہلاتی ہے۔تاخیری تفاعل کو چکور قوسین میں بند لکھا جاتا ہے۔تاخیری برقی رو لکھتے ہوئے وقت t کی جگہ تاخیری وقت ($t - \frac{r}{c}$) استعمال کیا جاتا ہے۔

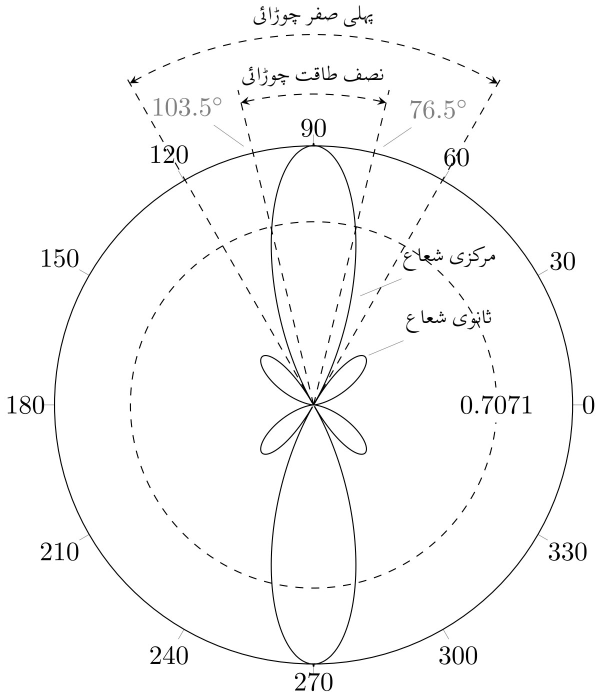
مساوات 14.2 کہتا ہے کہ نقطہ N پر لمحہ t پر پیدا اثر، گزرے لمحے ($t - \frac{r}{c}$) پر تار میں برقی رو کا اثر ہے جہاں تار سے N تک فاصلہ r ہے۔تار سے N تک شعاع پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے۔

---

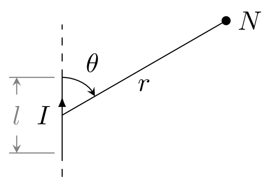
[1] retarded current



شکل 14.1: اینٹینا وہ عبوری خطہ ہے جہاں منضبط موج ترسیلی نظام سے نکل کر خلاء میں بطور آزاد موج خارج ہوتی ہے۔



شکل 14.2: اینٹینا کے شعاع کا نقش



شکل 14.3: برقی رو گزارتی تار کی چھوٹی لمبائی

گزشتہ بابوں میں امواج کی بات کرتے ہوئے $\cos(\omega t - \beta x)$ استعمال کیا گیا جس میں $c = \frac{\omega}{\beta}$ کے استعمال سے

$$\cos(\omega t - \beta x) = \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \tag{14.3}$$

لکھا جا سکتا ہے جو تاخیری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

مساوات 14.2 کی دوری سمتیہ شکل

$$[I] = I_0 e^{j\omega(t - r/c)} = I_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \tag{14.4}$$

ہے۔اسی طرح کثافت برقی رو کی تاخیری دوری سمتیہ شکل

$$[\boldsymbol{J}] = \boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t - r/c)} = \boldsymbol{J}_0 e^{j(\omega t - \beta r)} \tag{14.5}$$

ہو گی جسے استعمال کرتے ہوئے تاخیری مقناطیسی دباو

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{\mu}{4\pi}\int_h \frac{[\boldsymbol{J}]}{r}\,\mathrm{d}h = \frac{\mu}{4\pi}\int_h \frac{\boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t - r/c)}}{r}\,\mathrm{d}h \tag{14.6}$$

لکھا جائے گا۔اسی طرح تاخیری حجمی کثافت چارج

$$[\rho_h] = \rho_0 e^{j\omega(t - r/c)} \tag{14.7}$$

لکھتے ہوئے تاخیری برقی دباو

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_h \frac{[\rho_h]}{r}\,\mathrm{d}h \tag{14.8}$$

لکھا جائے گا۔ باب-9 کے آخر میں مساوات 9.76 اور مساوات 9.75 کے بائیں ہاتھ کے تفاعل کو چکور قوسین میں لکھ کر موج کی رفتار c لیتے ہوئے اور فاصلے کو کروی محدد کے رداس r سے ظاہر کرنے سے یہی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

ہم یہاں اصل موضوع سے ہٹ کر ایک تکمل پر غور کرتے ہیں جو اس باب میں بار بار استعمال کیا جائے گا۔

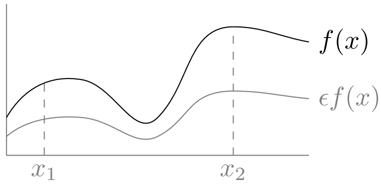
14.3 تکمل

شکل 14.4 میں تفاعل $f(x)$ دکھایا گیا ہے جس کا x_1 تا x_2 تکمل خط کے نیچے دو عمودی نقطہ دار لکیروں کے مابین رقبے کے برابر ہے۔اس رقبے کو K کہتے ہوئے

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = K \tag{14.9}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں $\frac{f(x)}{2}$ بھی دکھایا گیا ہے جسے $\epsilon f(x)$ لکھا گیا ہے جہاں $\epsilon = 0.5$ ہے۔چونکہ x_1 تا x_2 کے ہر نقطے پر تفاعل کی قیمت آدھی ہے لہٰذا ہلکی سیاہی کے خط کے نیچے رقبہ $\frac{K}{2}$ ہو گا لہٰذا

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{K}{2} = \epsilon K \tag{14.10}$$



شکل 14.4: تفاعل کا تکمل

لکھا جائے گا۔ اب فرض کریں کہ $\epsilon(x)$ مستقل نہیں ہے بلکہ اس کی قیمت x پر منحصر ہے۔ مزید یہ کہ $\epsilon(x)$ کی قیمت 0 تا ϵ ممکن ہے۔ ایسی صورت میں x_1 تا x_2 پر $\epsilon(x)f(x)$ کی قیمت 0 تا $\epsilon f(x)$ ممکن ہے لہٰذا $\epsilon(x)f(x)$ کا تکمل ϵK سے کم ہو گا یعنی

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x) f(x)\,\mathrm{d}x \leq \epsilon K \tag{14.11}$$

جہاں ہر جگہ $\epsilon(x) = 1$ کو بھی مد نظر رکھا گیا ہے۔ اگر $\epsilon \to 0$ ہو تب تکمل قابل نظر انداز

$$\int_{x_1}^{x_2} \epsilon(x) f(x)\,\mathrm{d}x \to 0 \qquad (\epsilon \to 0) \tag{14.12}$$

4887 ہو گا۔

آئیں اب $\frac{f(x)}{1+\epsilon}$ کے تکمل

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{1+\epsilon}\,\mathrm{d}x \tag{14.13}$$

پر غور کریں جہاں $\epsilon \to 0$ کے برابر ہے۔ ہم

$$\frac{1}{1+\epsilon} = (1+\epsilon)^{-1} = 1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots \tag{14.14}$$

لکھ سکتے ہیں لہٰذا تکمل

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots\right) f(x)\,\mathrm{d}x \tag{14.15}$$

صورت اختیار کر لے گا۔ مساوات 14.12 کو استعمال کرتے ہوئے $\epsilon \to 0$ کی صورت میں اسے

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{1+\epsilon}\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{\epsilon}{1!} + \frac{\epsilon^2}{2!} - \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots\right) f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{14.16}$$

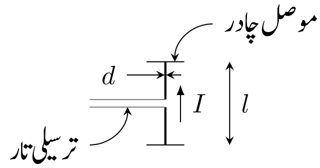
4888 لکھا جا سکتا ہے جو K کے برابر ہے۔

4889 14.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا

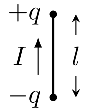
4890 مختصر لمبائی کے سیدھے موصل تار کو عموماً مختصر جفت قطب[2] کہا جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل گفتگو میں مختصر جفت قطب کی لمبائی محدود ہو گی۔ لا محدود حد تک کم لمبائی کی
4891 صورت میں اسے صغاری جفت قطب[3] کہا جائے گا۔

---

[2] short dipole
[3] infinitesimal



الف: متوازن ترسیلی تار سے جفت قطب کو طاقت مہیا کی گئی ہے۔



ب: جفت قطب بطور چھوٹی تار

شکل 14.5: جفت قطب

خطی نوعیت کے کسی بھی اینٹینا کو متعدد تعداد کے سلسلہ وار جڑے مختصر جفت قطبوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے لہٰذا مختصر جفت قطب کی خاصیت جانتے ہوئے 4892
زیادہ لمبے جفت قطب یا مختلف انداز میں جڑے موصل تاروں کی خاصیت جاننے میں مدد ملے گی۔ 4893

آئیں شکل 14.5-الف میں دکھائے مختصر جفت قطب پر غور کریں جس کی لمبائی l طول موج سے بہت کم $\lambda \gg l$ ہے۔ جفت قطب کے سروں پر موصل چادر بطور کپیسٹر بوجھ کردار ادا کرتے ہیں۔ جفت قطب کی مختصر لمبائی اور اس کے سروں پر موصل چادر مل کر جفت قطب کی پوری لمبائی پر تقریباً برابر برقی رو رکھنے میں مدد دیتے ہیں۔ جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کو متوازن ترسیلی تار سے طاقت مہیا کی جا سکتی ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ ترسیلی تار سے شعاعی اخراج نہیں ہوتی، اس کے موجودگی کو نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کے سروں پر نسب موصل چادروں کے شعاعی اخراج کو بھی نظر انداز کیا جائے گا۔ جفت قطب کی موٹائی d اس کے لمبائی سے بہت کم $\lambda \gg d$ ہے۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے تحلیلی تجزیے کی خاطر جفت قطب کو شکل 14.5-ب کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسا جفت قطب یکساں برقی رو I گزارتا، l لمبائی کا تار معلوم ہو گا جس کے دونوں سروں پر برابر مگر الٹ قطب کے چارج $\mp q$ ہوں۔ کپیسٹر پر چارج q اور برقی رو I کا تعلق

$$I = \frac{\partial q}{\partial t} \tag{14.17}$$

ہے۔ 4894

آئیں لامحدود وسعت کی خالی خلاء میں جفت قطب کے میدان حاصل کریں۔ جفت قطب کے وسط کو کروی محدد کے مرکز اور لمبائی کو z محدد پر رکھتے ہوئے آگے 4895
بڑھتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ N پر عموماً آپس میں عمودی تین میدان E_r، E_θ اور $E\phi$ پائے جائیں گے۔ 4896

کسی بھی نقطہ N پر مساوات 9.71 اور مساوات 9.73 بالترتیب مقناطیسی میدان اور برقی میدان دیتے ہیں

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{14.18}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{14.19}$$

جہاں 4897

V نقطہ N پر مقداری برقی دباو 4898

$\boldsymbol{A}$ نقطہ N پر سمتی دباو 4899

ہیں۔ اگر ہمیں کسی بھی نقطے پر مقداری دباو V اور سمتی دباو $\boldsymbol{A}$ معلوم ہوں تب مندرجہ بالا دو مساوات سے اس نقطے پر برقی اور مقناطیسی میدان حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ چونکہ ہمیں جفت قطب سے دور میدان درکار ہیں لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 14.6 اور مساوات 14.8 میں دئے تاخیری دباو قابل استعمال ہوں گے۔ یوں ان مساوات کو

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times [\boldsymbol{A}] \tag{14.20}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla [V] - \frac{\partial [\boldsymbol{A}]}{\partial t} = -\nabla [V] - j\omega [\boldsymbol{A}] \tag{14.21}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 9.59 اور مساوات 9.60 سے تاخیری دباو

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_h \frac{\boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r}\,\mathrm{d}h \tag{14.22}$$

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_h \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r}\,\mathrm{d}h \tag{14.23}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

کسی بھی برقی چارج اور برقی رو سے پیدا میدان مساوات 14.20 اور مساوات 14.21 سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ مساوات 14.23 کے تحت تاخیری مقداری دباو $[V]$ صرف ساکن چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 14.22 کے تحت تاخیری سمتی دباو $[\boldsymbol{A}]$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے۔ مساوات 14.20 کے تحت مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 14.21 کے تحت برقی میدان $\boldsymbol{E}$ ساکن چارج اور برقی رو دونوں پر منحصر ہے۔ ہم جلد مساوات 14.46 میں دیکھیں گے کہ کسی بھی چارج اور برقی رو سے دور پیدا مقناطیسی اور برقی میدانوں کا دارومدار صرف برقی رو پر ہوتا ہے۔ چونکہ اس باب میں تاخیری دباو ہی استعمال کئے جائیں گے لہٰذا انہیں چکور قوسین میں لکھنے سے گریز کیا جائے گا۔ اس باب میں یہاں سے آگے بغیر چکور قوسین کے دباو کو تاخیری دباو ہی سمجھا جائے۔

شکل سے ظاہر ہے کہ سمتی دباو کا صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جزو

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{I_0 e^{j(\omega t-\beta s)}}{s}\,\mathrm{d}z \tag{14.24}$$

پایا جاتا ہے۔ اگر جفت قطب کی لمبائی l، نقطہ N سے جفت قطب تک فاصلہ r سے نہایت کم $r \gg l$ اور طول موج λ سے بھی نہایت کم $\lambda \gg l$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات میں متغیر فاصلہ s کی جگہ مستقل فاصلہ r پر کیا جا سکتا ہے[4] اور ساتھ ہی ساتھ l پر مختلف نقطوں سے N پر پیدا دباو میں زاویائی فرق کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح ان تمام کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔ جفت قطب کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 کی صورت میں I_0 کو بھی تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r} \tag{14.25}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو کروی محدد میں یوں

$$\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + A_\theta\boldsymbol{a}_\theta + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi$$

لکھا جائے گا جہاں

$$\begin{aligned}
A_r &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\cos\theta\\
A_\theta &= \boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\sin\theta\\
A_\phi &= \boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = 0
\end{aligned} \tag{14.26}$$

ہوں گے جہاں اکائی سمتیات کے مقداری ضرب صفحہ 32 پر جدول 1.2 سے حاصل کئے گئے۔ اس طرح

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\left(\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{14.27}$$

لکھا جائے گا۔

[4] جیسے حصہ 14.3 میں دکھایا گیا ہے۔

ساکن چارج جفت قطب کے سروں پر پایا جاتا ہے لہٰذا مقداری دباو

$$V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{e^{j(\omega t-\beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t-\beta s_2)}}{s_2}\right] \tag{14.28}$$

ہو گا جہاں مساوات 14.17 کے تحت

$$q = \int I \,\mathrm{d}t = \frac{I}{j\omega} \tag{14.29}$$

کے برابر ہے جہاں

$$\begin{aligned} I &= I_0 e^{j(\omega t-\beta s)} \\ q &= q_0 e^{j(\omega t-\beta s)} \end{aligned}$$

ہیں۔ مساوات 14.29 سے $q_0 = \frac{I_0}{j\omega}$ حاصل کرتے ہوئے مساوات 14.28 میں پر کرتے ہیں۔

$$V = \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega}\left[\frac{e^{j(\omega t-\beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t-\beta s_2)}}{s_2}\right] \tag{14.30}$$

شکل کو دیکھ کر

$$\begin{aligned} s_1 &= r - \frac{l}{2}\cos\theta \\ s_2 &= r + \frac{l}{2}\cos\theta \end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں مساوات 14.30 میں پر کرتے

$$V = \frac{I_0 e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega}\left[\frac{(r+\frac{l}{2}\cos\theta)e^{j\frac{\beta l}{2}\cos\theta} - (r-\frac{l}{2}\cos\theta)e^{-j\frac{\beta l}{2}\cos\theta}}{r^2 - \frac{l^2}{4}\cos^2\theta}\right] \tag{14.31}$$

ملتا ہے۔ چکور قوسین میں شرح کے نچلے حصے میں $r \gg l$ کی وجہ سے $\frac{l^2}{4}\cos^2\theta$ کو نظرانداز کرتے ہیں۔ مسئلہ ڈی موے ور[5] کے استعمال سے

$$\begin{aligned} V = \frac{I_0 e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2}\Bigg[&\left(r+\frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} + j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right) \\ &- \left(r-\frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} - j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{14.32}$$

لکھا جائے گا۔ چونکہ $\lambda \gg l$ ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} \cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} &= \cos\frac{\pi l\cos\theta}{\lambda} \approx l \\ \sin\frac{\beta l\cos\theta}{2} &\approx \frac{\beta l\cos\theta}{2} \end{aligned}$$

ہوں گے، جنہیں مساوات 14.32 میں پر کرنے سے

$$V = \frac{I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2}\right) \tag{14.33}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

4908

[5] ($e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$) de Moivre's theorem

4909 I_0 برقی رو کا حیطہ یعنی اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت، A

4910 l جفت قطب کی لمبائی، m

4911 ω زاویائی تعدد $(\omega = 2\pi f)$، اکائی rad/s۔ جہاں ہرٹز Hz میں تعدد f ہے

4912 β زاویائی مستقل $(\beta = \frac{2\pi}{\lambda})$، اکائی rad/m

4913 t وقت، s

4914 θ جفت قطب اور جفت قطب سے نقطہ N تک سمتیہ کے مابین زاویہ

4915 ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل، 8.854 pF/m

4916 c خالی خلاء میں شعاع کی رفتار، 3×10^8 m/s

4917 j خیالی عدد $\sqrt{-1}$

4918 r جفت قطب کے وسط سے نقطہ N تک فاصلہ، m

4919 ہیں۔

مختصر جفت قطب کے وسط سے، $\lambda \gg l$ اور $r \gg l$ کی صورت میں، r فاصلے اور θ زاویے پر مساوات 14.27 سمتی دباو اور مساوات 14.33 مقداری دباو دیتے ہیں۔ کروی محدد میں مقداری دباو کی ڈھلوان

$$\begin{aligned}
\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_{\phi} \\
&= \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 c}\left[-\left(\frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{2c\cos\theta}{j\omega r^3}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \left(\frac{\sin\theta}{r^2} + \frac{c\sin\theta}{j\omega r^3}\right)\boldsymbol{a}_{\theta}\right]
\end{aligned} \tag{14.34}$$

کے برابر ہے۔ برقی میدان $\boldsymbol{E} = E_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + E_\theta\boldsymbol{a}_\theta + E_\phi\boldsymbol{a}_\phi$ کے اجزاء مساوات 14.21 کی مدد سے

$$\begin{aligned}
E_r &= -j\omega A_r - \frac{\partial V}{\partial r} \\
E_\theta &= -j\omega A_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\
E_\phi &= -j\omega A_\phi - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں جن میں مطلوبہ تفاعل پر کرنے سے برقی میدان کے عمومی مساوات

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{I_0 l\cos\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right) \\
E_\theta &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right) \qquad \text{عمومی میدان} \\
E_\phi &= 0
\end{aligned} \tag{14.35}$$

4920 حاصل ہوتے ہیں۔

مقناطیسی میدان مساوات 14.20 سے حاصل ہو گی۔ کروی محدد میں سمتی دباو کی گردش

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi \tag{14.36}$$

میں مساوات 14.26 پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی عمومی مساوات

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right) \qquad \text{عمومی میدان}\\ H_r &= 0\\ H_\theta &= 0 \end{aligned} \tag{14.37}$$

4921 حاصل ہوتے ہیں جہاں $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ کا استعمال کیا گیا۔

مساوات 14.35 اور مساوات 14.37 کے تحت جفت قطب سے پیدا میدان کے صرف تین اجزاء E_r، E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں۔ جفت قطب سے زیادہ فاصلے پر میدان کی مساوات میں ایسے اجزاء جن میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ پایا جاتا ہو کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ یوں E_r قابل نظر انداز ہو گا لہٰذا $E_r\approx 0$ تصور کیا جائے گا جبکہ

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\frac{j\omega}{c^2 r}=j\frac{30 I_0\beta l}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}\\ H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\frac{j\omega}{cr}=j\frac{I_0\beta l}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \qquad \text{دور میدان} \end{aligned} \tag{14.38}$$

ہوں گے۔ مساوات 14.38 استعمال کرتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح

$$\frac{E_\theta}{H_\phi}=\frac{1}{\epsilon_0 c}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}=376.7\,\Omega \tag{14.39}$$

4922 حاصل ہوتی ہے جو خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ Z_0 ہے۔

یہاں اس حقیقت پر توجہ دیں کہ خالی خلاء میں TEM موج کی طرح، جفت قطب سے دور E_θ اور H_ϕ آپس میں ہم قدم ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں میدان
4924 $\sin\theta$ کے راست تناسب ہیں یعنی جفت قطب کے محوری سمت $\theta=0^\circ$ پر ان کی قیمت صفر جبکہ $\theta=90^\circ$ پر ان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے۔ اندرسہ[6] شکل کی
4925 ان میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

جفت قطب سے دور میدان حاصل کرتے وقت مساوات 14.35 اور مساوات 14.37 میں $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ رکھتے اجزاء کو نظر انداز کیا گیا یعنی E_θ میں

$$\left|j\frac{\omega}{c^2 r}\right|\gg\frac{1}{cr^2}$$

$$\left|j\frac{\omega}{c^2 r}\right|\gg\left|\frac{1}{j\omega r^3}\right|$$

یا

$$r\gg\frac{c}{\omega} \tag{14.40}$$

[6] doughnut

تصور کیا گیا۔اسی طرح H_ϕ میں بھی

$$\left| j\frac{\omega}{cr} \right| \gg \frac{1}{r^2}$$

یا

$$r \gg \frac{c}{\omega} \tag{14.41}$$

تصور کیا گیا جسے

$$r \gg \frac{1}{\beta} \qquad (\text{دور میدان}) \tag{14.42}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔اگر جفت قطب کے قریب میدان کی بات کی جائے تو $r \ll \frac{c}{\omega}$ یعنی $r \ll \frac{1}{\beta}$ لیا جائے گا۔یوں مساوات 14.35 اور مساوات 14.37 میں

$$\frac{1}{cr^2} \ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right|$$

$$\left| \frac{j\omega}{c^2 r} \right| \ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right|$$

$$\frac{1}{cr^2} \ll \left| \frac{1}{j\omega r^3} \right|$$

$$\left| \frac{j\omega}{cr} \right| \ll \frac{1}{r^2}$$

ہوں گے لہٰذا قریبی میدان

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\
E_\theta &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \\
H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi} \frac{1}{r^2} = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r^2} \qquad \text{قریبی میدان}
\end{aligned} \tag{14.43}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔کل قریبی برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = E_r \boldsymbol{a}_\text{r} + E_\theta \boldsymbol{a}_\theta = \left[\frac{I_0 l \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 \omega r^3} \boldsymbol{a}_\text{r} + \frac{I_0 l \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 \omega r^3} \boldsymbol{a}_\theta \right] e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})} \tag{14.44}$$

ہو گا۔مساوات 14.44 کے برقی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}$ پایا جاتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t-\beta r)}$ پایا جاتا ہے۔یوں جفت قطب کے قریب کسی بھی نقطے پر ہر لمحہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان میں $\frac{\pi}{2}$ زاویے کا فرق پایا جاتا ہے جو ساکن میدان کی نشانی ہے۔

جفت قطب کے قریب برقی اور مقناطیسی میدان میں لمحاتی طور $\frac{\pi}{2}$ ریڈیئن کا زاویہ پایا جاتا ہے جبکہ جفت قطب سے دور دونوں میدان لمحاتی طور پر ہم قدم ہیں لہٰذا کسی درمیانے فاصلے پر ان میدانوں میں $45°$ کا زاویہ ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جفت قطب سے فاصلہ بڑھانے سے برقی میدان وقت کی نسبت سے گھوم کر مقناطیسی میدان کے ہم قدم ہو جاتا ہے۔

مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.38 سے دور میدان میں کثافت توانائی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \right]_{\text{حقیقی}} = \frac{1}{2} E_\theta H_\phi^* \boldsymbol{a}_\text{r} = \frac{15 I_0^2 \beta^2 l^2}{4\pi r^2} \sin^2\theta \boldsymbol{a}_\text{r} \qquad \text{دور کثافت طاقت}$$

حاصل ہوتی ہے جو رداسی r سمت میں منتقل ہوتی حقیقی توانائی ہے۔ یہی اینٹینا کی شعاعی اخراج ہے۔ شعاعی اخراج $\theta = 90^\circ$ پر زیادہ سے زیادہ ہے۔ اسی طرح پوئنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.43 سے قریبی میدان میں کثافت توانائی

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]_{\text{حقیقی}} &= \frac{1}{2}\left[\left(E_r\boldsymbol{a}_\mathrm{r}+E_\theta\boldsymbol{a}_\theta\right)\times H_\phi^*\boldsymbol{a}_\phi\right]_{\text{حقیقی}}\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{I_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\theta+\frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}\right]\frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

4931 حاصل ہوتی ہے جس کا بیشتر حصہ خیالی ہے اور ساتھ ہی ساتھ شعاعی اخراج کے علاوہ یہاں θ سمت میں گھومتی طاقت بھی پائی جاتی ہے۔

آئیں اب نہایت کم تعدد پر صورت حال دیکھیں۔ مساوات 14.35 میں $I_0 = j\omega q_0$ پر کرتے ہوئے اور مساوات 14.37 کو جوں کا توں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}E_r &= \frac{q_0 l\cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{cr^2}+\frac{1}{r^3}\right)\\ E_\theta &= \frac{q_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r}+\frac{j\omega}{cr^2}+\frac{1}{r^3}\right)\\ H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right)\end{aligned}$$

$\left|e^{-j\beta r}\right| = 1$ لیتے ہوئے، صفر کے قریب تر تعدد $\omega \to 0$ پر ان مساوات سے میدان کی حتمی قیمت

$$\begin{aligned}E_r &= \frac{q_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}\\ E_\theta &= \frac{q_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\\ H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2} \qquad \text{نیم ساکن میدان}\end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہیں جن سے برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{a}_\mathrm{r}+\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{14.45}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ان میدان کو نیم ساکن میدان[7] کہا جاتا ہے۔ یہ صفحہ 113 پر حاصل کی گئی مساوات 4.67 ہی ہے۔ اسی طرح مندرجہ بالا مقناطیسی میدان H_ϕ کی قیمت 4932
صفحہ 200 پر مساوات 7.3 ہی ہے۔ چونکہ یہ میدان $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ کے تعلق سے تبدیل ہوتے ہیں لہٰذا یہ جفت قطب کے قریب ہی پائے جاتے ہیں۔ جفت قطب سے دور 4933
ان کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے لہٰذا ان کا شعاعی اخراج میں خاص کردار نہیں ہوتا۔ بلند تعدد پر دور میدان جنہیں مساوات 14.38 پیش کرتی ہے، $\frac{1}{r}$ کے تعلق 4934
4935 سے گھٹتی ہیں لہٰذا یہی شعاعی اخراج کو ظاہر کرتی ہیں اور یوں انہیں اخراجی میدان[8] کہا جاتا ہے۔

4936 مختصر جفت قطب، $r \gg l$ اور $\lambda \gg l$، کے تمام میدان کو جدول 14.1 میں پیش کیا گیا ہے۔ بقایا اجزاء $E_\phi = H_r = H_\theta = 0$ صفر کے برابر ہیں۔

مساوات 14.35 میں دیے E_θ میں $\frac{1}{r^2}$ اور $\frac{1}{r^3}$ رکھنے والے اجزاء برقی دباو V کے پیدا کردہ ہیں جو دور میدان میں قابل نظر انداز ہوتے ہیں۔ اگر ہماری دلچسپی صرف دور میدان میں ہو تب مطلوبہ میدان کو نہایت آسانی کے ساتھ صرف $\boldsymbol{A}$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 14.21 اور مساوات 14.26 سے

$$E_\theta = -j\omega A_\theta = -j\omega\left(-\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\sin\theta\right) = j\frac{30 I_0\beta l}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.46}$$

---

[7] quasi stationary fields
[8] radiation fields

جدول 14.1: مختصر جفت قطب کے میدان

نیم ساکن میدان	دور میدان	عمومی مساوات	جزو
$\dfrac{q_0 l \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$	0	$\dfrac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{cr^2}+\dfrac{1}{j\omega r^3}\right)$	E_r
$\dfrac{q_0 l \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	$\dfrac{j60\pi I_0 \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{r}\dfrac{l}{\lambda}$	$\dfrac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{j\omega}{c^2 r}+\dfrac{1}{cr^2}+\dfrac{1}{j\omega r^3}\right)$	E_θ
$\dfrac{I_0 l \sin\theta}{4\pi r^2}$	$\dfrac{jI_0 \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2r}\dfrac{l}{\lambda}$	$\dfrac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\dfrac{j\omega}{cr}+\dfrac{1}{r^2}\right)$	H_ϕ

حاصل ہوتا ہے۔ مقناطیسی میدان H_ϕ کو مساوات 14.20 سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں $\frac{1}{r^2}$ اجزاء رد کئے جائیں گے۔ مقناطیسی میدان کو نسبتاً زیادہ آسانی سے، لامحدود خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}=120\pi$ استعمال کرتے ہوئے

$$H_\phi=\frac{E_\theta}{Z_0}=j\frac{30I_0\beta l}{120\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}=j\frac{I_0\beta l}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.47}$$

سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ دور میدان کا دارومدار جفت قطب کے چارج q_0 پر ہر گز نہیں لہٰذا ان چارج کا جاننا غیر ضروری ہے۔ کسی بھی اینٹینا کو متعدد مختصر جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں کسی بھی اینٹینا کے میدان تمام جفت قطب کے میدان کو جمع کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 14.38 میں $\beta=\frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے دور برقی میدان کو

$$E_\theta = j\quad \underbrace{60\pi}_{\text{مقدار}}\quad \underbrace{I_0}_{\text{رو}}\quad \underbrace{\frac{l}{\lambda}}_{\text{لمبائی}}\quad \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{فاصلہ}}\quad \underbrace{\sin\theta}_{\text{شکل}}\quad \underbrace{e^{j(\omega t-\beta r)}}_{\text{زاویہ}} \tag{14.48}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں 60π مساوات کا مستقل ہے، I_0 برقی رو، $\frac{l}{\lambda}$ جفت قطب کی لمبائی جسے طول موج میں ناپا گیا ہے، $\frac{1}{r}$ فاصلے کو ظاہر کرتا ہے، $\sin\theta$ میدان کا نقش اور $e^{j(\omega t-\beta r)}$ زاویائی فرق ہے۔ کسی بھی اینٹینا کے میدان کو عموماً ان چھ اجزاء کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

جدول 14.1 مختصر جفت قطب کے میدان دیتا ہے۔

14.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

اینٹینا کے گرد کسی بھی بند سطح پر مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ

$$\boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}}=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s\times\boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} \tag{14.49}$$

کی سطحی تکمل

$$P=\int_S \boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}\qquad (\mathrm{W}) \tag{14.50}$$

کل شعاعی اخراج P دے گی۔ فی سیکنڈ خارج ہونے والی توانائی شعاعی اخراج کہلاتی ہے لہٰذا اس کی اکائی واٹ W ہے۔ سادہ ترین بند سطح کرہ ہے۔ یوں اینٹینا کو کروی محدد کے مرکز پر رکھتے ہوئے تکمل حاصل کیا جائے گا۔ چونکہ دور کے میدان نسبتاً سادہ صورت رکھتے ہیں لہٰذا بند سطح کا رداس جتنا زیادہ رکھا جائے تکمل اتنا آسان ہو گا۔ یوں رداس زیادہ سے زیادہ رکھتے ہوئے دور میدان استعمال کرتے ہوئے جفت قطب کا شعاعی اخراج P حاصل کیا جاتا ہے۔

کامل اینٹینا کی صورت میں شعاعی اخراج اس برقی طاقت کے برابر ہو گا جو اینٹینا کے برقی سروں پر مہیا کی گئی ہو۔ اینٹینا کو مزاحمت R تصور کرتے ہوئے اس برقی طاقت کو $P=\frac{1}{2}I_0^2R$ لکھا جا سکتا ہے جہاں I_0 سائن نما برقی رو کا حیطہ ہے۔ یوں

$$R=\frac{2P}{I_0^2} \qquad (\Omega) \tag{14.51}$$

4946 لکھا جا سکتا ہے جہاں R اینٹینا کی **اخراجی مزاحمت**[9] کہلاتی ہے۔

آئیں مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں لہٰذا شعاعی اخراج

$$P=\frac{1}{2}\int_S\left[E_\theta H_\phi^*\right]_{\text{حقیقی}}\,\mathrm{d}s \tag{14.52}$$

سے حاصل ہو گی جہاں H_ϕ^* مقناطیسی میدان H_ϕ کا جوڑی دار مخلوط ہے۔ اب $E_\theta=Z_0H_\phi$ ہے لہٰذا

$$P=\frac{1}{2}\int_S\left[H_\phi H_\phi^* Z_0\right]_{\text{حقیقی}}\,\mathrm{d}s=\frac{Z_0}{2}\int_S\left|H_\phi\right|^2\mathrm{d}s \tag{14.53}$$

یا

$$P=\frac{1}{2Z_0}\int_S\left|E_\phi\right|^2\mathrm{d}s \tag{14.54}$$

4947 لکھا جا سکتا ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}=120\pi$ اور $\mathrm{d}s=r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ کے برابر ہیں۔

جفت قطب کے میدان حاصل کرتے وقت فرض کیا گیا کہ اس کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 پائی جاتی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ لمبائی l کے مختلف نقطوں کے میدان کا زاویائی فرق نظر انداز کیا گیا۔ جفت قطب کی پوری لمبائی پر برابر برقی رو نہ ہونے کی صورت میں مساوات 14.24 سے مساوات 14.25 حاصل ہونے کی بجائے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\mu_0e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\int_{-l/2}^{l/2}i\,\mathrm{d}z\\&=\frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\mu_0lIe^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\end{aligned}$$

حاصل ہو گا جہاں I اوسط برقی رو ہے۔ اسی حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 14.38 سے مقناطیسی میدان کا حیطہ

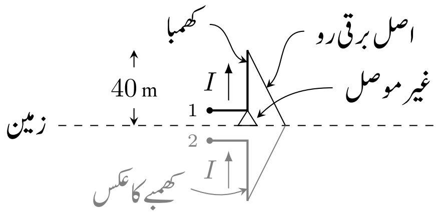
$$H_\phi=\frac{I\beta l}{4\pi r}\sin\theta \tag{14.55}$$

لکھتے ہوئے I_0 کی جگہ اوسط برقی رو I لکھی گئی ہے۔ مقناطیسی میدان کے اس حیطے کو مساوات 14.53 میں پر کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ اخراجی طاقت

$$\begin{aligned}P&=\frac{120\pi}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{I\beta l}{4\pi r}\sin\theta\right)^2r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\&=\frac{120\pi}{2}\left(\frac{\beta Il}{4\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\&=80\pi^2I^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\end{aligned}$$

---

[9] radiation resistance



شکل 14.6: کھمبا اینٹینا

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 14.53 یا مساوات 14.54 برقی رو کی چوٹی I کی صورت میں اخراجی طاقت دیتے ہیں جو سائن نما برقی رو کی صورت میں اوسط اخراجی طاقت کے دگنا ہوتی ہے۔ یوں اوسط اخراجی طاقت

$$P_{\text{اوسط}} = 40\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{14.56}$$

ہو گی۔ مساوات 14.51 سے مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{I}{I_0}\right)^2 \qquad (\Omega) \tag{14.57}$$

حاصل ہوتی ہے۔

کسی بھی اینٹینا کی اخراجی مزاحمت

$$R = \frac{Z_0}{I_0^2} \int_S |H|^2 \, \mathrm{d}s = \frac{1}{Z_0 I_0^2} \int_S |E|^2 \, \mathrm{d}s \tag{14.58}$$

سے حاصل کی جا سکتی ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ کے برابر ہے۔

مثال 14.1: چالیس میٹر لمبے کھمبے اینٹینا کو موصل سطح پر کھڑا کئے $300\,\mathrm{kHz}$ کے تعدد پر استعمال کیا جاتا ہے۔ اسے برقی اشارہ نچلے سرے پر فراہم کیا جاتا ہے۔ اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ اس کھمبے کو شکل 14.6 میں دکھایا گیا ہے۔ کھمبے کو غیر موصل بنیاد پر کھڑا کیا گیا ہے۔

حل: موصل زمین میں کھمبا اینٹینا کا عکس بنتا ہے۔ درکار تعدد پر $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{300000} = 1000\,\mathrm{m}$ ہے جو کھمبے کی لمبائی سے بہت زیادہ ہے۔ یوں اینٹینا اور اس کا عکس بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں۔ چونکہ کھمبے کے سر پر موصل چادر نسب نہیں کیا گیا ہے لہٰذا اس کے پورے لمبائی پر برابر برقی رو تصور کرنا غلط ہو گا۔ حقیقت میں، جیسے شکل میں وضاحت کی گئی ہے، کھمبے کے کھلے سر پر برقی رو صفر ہو گی جبکہ نچلے سر پر اس کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، برقی رو بالمقابل لمبائی l کا خط تکونی ہے۔ یوں اوسطاً برقی رو $I_{\text{اوسط}} = \frac{I_0}{2}$ ہو گی جہاں برقی رو کی زیادہ سے زیادہ قیمت I_0 ہے۔

یوں 40×2 میٹر لمبے فرضی جفت قطب کی اخراجی مزاحمت مساوات 14.57 سے

$$80\pi^2 \left(\frac{2\times 40}{1000}\right)^2 \left(\frac{0.5 I_0}{I_0}\right)^2 = 1.2633\,\Omega$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مزاحمت حقیقی کھمبے کے سر 1 اور عکسی کھمبے کے سر 2 کے مابین ہے۔ یوں اصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت جو زمین اور 1 کے مابین ناپی جائے گی کی قیمت

$$R_{\text{اخراجی}} = \frac{0.63165}{2} = 0.63\,\Omega \tag{14.59}$$

ہو گی۔

حقیقی دھات کامل موصل نہیں ہوتے لہٰذا کسی بھی دھات سے بنائے گئے جفت قطب میں توانائی کا ضیاع ہو گا۔ موصل کے علاوہ اینٹینا کے ساتھ منسلک ذو برق میں بھی طاقت کا ضیاع ہو گا۔ ان ضیاع کو مزاحمت $R_{\text{ضیائی}}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ یوں اینٹینا کے برقی سروں پر کل مزاحمت

$$R=R_{\text{اخراجی}}+R_{\text{ضیائی}} \tag{14.60}$$

ہو گی۔ مندرجہ بالا مثال میں اگر $R_{\text{ضیائی}}=0.63\,\Omega$ ہو تا تب اینٹینا کی کارکزاری k[10]

$$k=\frac{\text{اخراجی طاقت}}{\text{داخلی طاقت}}=\frac{R_{\text{اخراجی}}}{R_{\text{اخراجی}}+R_{\text{ضیائی}}}\frac{0.63}{0.63+0.63}=50\,\% \tag{14.61}$$

پچاس فی صد ہو گی۔ اگر طاقت کا ضیاع بڑھائے بغیر زیادہ لمبائی کا جفت قطب استعمال کیا جائے تو کارکزاری اس سے بہتر کی جا سکتی ہے۔

اگر مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ کا حقیقی حصہ لئے بغیر کسی اینٹینا کو مکمل گھیرے سطح پر اس کا تکمل لیا جائے تو حقیقی طاقت کے ساتھ ساتھ خیالی طاقت بھی حاصل ہو گا۔ حقیقی طاقت اخراجی طاقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ خیالی طاقت متعامل جزو ہے۔ سطح تکمل کی صورت اور مقام کا تکمل کے حقیقی جزو پر کوئی اثر نہیں البتہ خیالی طاقت کا دارومدار سطح کی صورت اور مقام پر ہے۔ اینٹینا سے بہت دور خیالی جزو قابل نظر انداز ہوتا ہے جبکہ اینٹینا کے قریب اس جزو کی مقدار بڑھ جاتی ہے۔ نہایت پتلی ساخت کے خطی اینٹینا کی صورت میں اگر سطح تکمل کو بالکل سطح اینٹینا کے ساتھ ملا لیا جائے تب حاصل مخلوط طاقت تقسیم I_0^2 کا وٹ $R+jX$ دیتا ہے جہاں R اینٹینا کے اخراجی مزاحمت کو ظاہر کرتا ہے۔

14.6 ٹھوس زاویہ

اگلے حصے میں ٹھوس زاویہ[11] درکار ہو گا لہٰذا اسے پہلے سمجھتے ہیں۔

شکل 14.7-الف میں رداس r کے دائرے پر قوس کی لمبائی l اور رداس r کی شرح

$$\theta=\frac{l}{r} \qquad \text{(rad)} \tag{14.62}$$

زاویہ θ دیتی ہے جس کی اکائی ریڈیئن[12] (rad) ہے۔ یوں اکائی رداس کے دائرے پر اکائی لمبی قوس، دائرے کے مرکز پر، ایک ریڈیئن (1 rad) کا زاویہ بنائے گی۔ یہی اکائی ریڈیئن کی تعریف ہے۔ چونکہ دائرے کا محیط $2\pi r$ ہے لہٰذا دائرے کے گرد ایک مکمل چکر 2π ریڈیئن کے زاویے کو ظاہر کرتی ہے۔ اگرچہ مساوات 14.62 کے تحت θ دراصل بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی ریڈیئن میں ناپتے ہیں۔ یوں x rad سے ظاہر ہوتا ہے کہ x زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

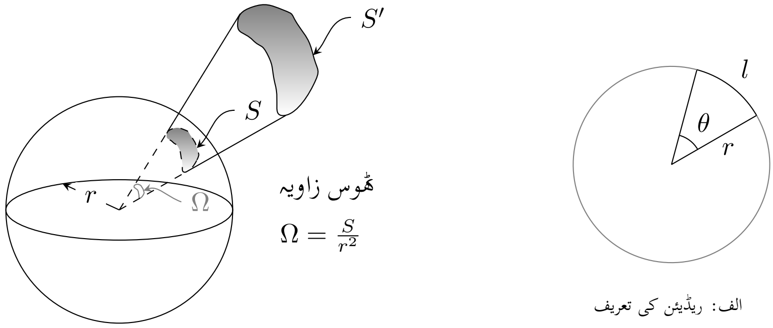
بالکل اسی طرح رداس r کے کرہ کی سطح پر کسی بھی رقبہ S اور کرہ کے رداس کے مربع r^2 کی شرح

$$\Omega=\frac{S}{r^2} \qquad \text{(sr)} \tag{14.63}$$

ٹھوس زاویہ Ω دیتی ہے جسے مربع ریڈیئن یعنی سٹریڈیئن[13] (sr) میں ناپا جاتا ہے۔ اکائی رداس کے کرہ پر اکائی رقبہ، کرہ کے مرکز پر، ایک سٹریڈیئن کا ٹھوس زاویہ بنائے گی۔ یہی سٹریڈیئن کی تعریف ہے۔ چونکہ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہٰذا پوری کرہ 4π سٹریڈیئن کا ٹھوس زاویہ دیتی ہے۔ اگرچہ ٹھوس زاویہ بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی سٹریڈیئن میں ناپتے ہیں۔ یوں مختلف اعداد کی بات کرتے وقت یہ جاننا ممکن ہوتا ہے کہ ٹھوس زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

---

efficiency[10]
solid angle[11]
radian[12]
steradian[13]



الف: ریڈیئن کی تعریف

ب: سٹریڈیئن کی تعریف

شکل 14.7: ریڈیئن اور سٹریڈیئن کی تعریف

شکل 14.7-ب میں عمومی رقبہ S' کا محدد کے مرکز پر ٹھوس زاویہ حاصل کرنے کا طریقہ دکھایا گیا ہے۔ مرکز سے دیکھتے ہوئے S' کا بیرونی خاکہ نظر آئے گا۔ اگر اس خاکے کے بیرونی کناروں سے مرکز تک ربڑی چادر کھینچ کر لگائی جائے تو یہ چادر رداس r کے کرہ کو کاٹے گی۔ کرہ کی سطح پر یوں رقبہ S گھیرا جائے گا۔ ٹھوس زاویہ

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \tag{14.64}$$

4974 کے برابر ہو گا۔ اکائی رداس کے کرہ کی صورت میں رقبہ S کی قیمت ٹھوس زاویے کی قیمت کے برابر ہو گی۔

4975 شکل 14.7-الف میں θ نظارے کے حدود کو ظاہر کرتا ہے۔ اسی طرح شکل 14.7-ب میں Ω نظارے کے حدود تعین کرتا ہے۔

شکل 14.7-الف میں دکھایا گیا زاویہ سطحی نوعیت کا ہے جسے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔ اس کے برعکس شکل 14.7-ب میں دکھایا گیا زاویہ حجمی نوعیت کا ہے جسے سٹریڈیئن یا ریڈیئن کے مربع میں ناپا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ ایک مربع ریڈیئن کو ہی ایک سٹریڈیئن کہتے ہیں۔

$$1\,\mathrm{sr} = 1\,\mathrm{rad}^2 \tag{14.65}$$

کروی محدد میں r رداس کے کرہ کی سطح پر رقبے کو

$$S = \int_\theta \int_\phi r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \tag{14.66}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ رقبہ کرہ کے مرکز پر

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = \int_\theta \int_\phi \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \qquad (\mathrm{sr}) \tag{14.67}$$

4976 ٹھوس زاویہ بنائے گی۔

4977 14.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش

مختصر جفت قطب کے دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں جنہیں مساوات 14.38 میں پیش کیا گیا ہے۔ کسی بھی اینٹینا کی طرح اس کے دور میدان $\frac{1}{r}$ کی شرح سے گھٹتے ہیں لہٰذا پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} = \frac{Z_0}{2}\left|H\right|^2 \boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \frac{1}{2Z_0}\left|E\right|^2 \boldsymbol{a}_\mathrm{r} \tag{14.68}$$

$\frac{1}{r^2}$ کی شرح سے گھٹے گی۔یوں پوئنٹنگ سمتیہ کے رداسی جزو کو r^2 سے ضرب دینے سے $P(\theta,\phi)$

$$P(\theta,\phi) = r^2 \mathscr{P} = \frac{Z_0}{2}\left|H\right|^2 r^2 = \frac{1}{2Z_0}\left|E\right|^2 r^2 \qquad (\mathrm{W/sr}) \tag{14.69}$$

4978 حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت فاصلہ r بڑھانے سے نہیں گھٹتی۔$P(\theta,\phi)$ اخراجی شدت[14] کہلاتی ہے۔اخراجی شدت کے بُعد پر غور کریں۔پوئنٹنگ سمتیہ طاقت
4979 کی کثافت یعنی طاقت فی رقبہ دیتی ہے۔مساوات 14.63 سے رقبے کو $S = \Omega r^2$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں پوئنٹنگ سمتیہ ضرب مربع رداس کا بُعد طاقت فی ٹھوس
4980 زاویہ W/sr بنتی ہے۔

اخراجی شدت کو قابل پذیر[15] بنانے کی خاطر $P(\theta,\phi)$ کو اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت $P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}} = r^2 \mathscr{P}_{\text{بلند تر}}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$P_n(\theta,\phi) = \frac{P(\theta,\phi)}{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}} \qquad \text{بے بُعد} \tag{14.70}$$

4981 بے بُعد[16] مقدار $P_n(\theta,\phi)$ حاصل ہوتی ہے جو اینٹینا کی قابل پذیر نقش طاقت[17] ہے۔

اینٹینا کی کل اخراج

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathscr{P} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{14.71}$$

ہے۔اگر کثافت طاقت $\mathscr{P}_{\text{بلند تر}}$ ہو تب اتنی اخراج مکمل کرہ کی سطح کے بجائے کرہ کی سطح پر رقبہ S سے خارج ہو گی یعنی

$$\mathscr{P}_{\text{بلند تر}} S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathscr{P} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{14.72}$$

ہو گا۔اس میں مساوات 14.63 کی مدد سے کرہ کی سطح پر رقبے کو ٹھوس زاویے کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathscr{P} r^2}{\mathscr{P}_{\text{بلند تر}} r^2} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

یعنی

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n(\theta,\phi) r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \iint_{4\pi} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega \qquad (\mathrm{sr}) \tag{14.73}$$

4982 حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے تحت Ω_A ٹھوس زاویے پر یکساں زیادہ سے زیادہ طاقت خارج کرتے ہوئے اینٹینا پوری طاقت خارج کر سکتی ہے۔Ω_A کو اخراجی
4983 ٹھوس زاویہ[18] کہتے ہیں۔

مرکزی شعاع[19] پر تکمل

$$\Omega_M = \iint_{\text{مرکزی شعاع}} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega \qquad (\mathrm{sr}) \tag{14.74}$$

لیتے ہوئے مرکزی ٹھوس زاویہ[20] حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں ثانوی شعاع[21] کے ٹھوس زاویہ Ω_m کو اخراجی ٹھوس زاویے اور مرکزی ٹھوس زاویے کے فرق

$$\Omega_m = \Omega_A - \Omega_M \tag{14.75}$$

4984 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔غیر سمتی[22] اینٹینا ہر سمت میں برابر اخراج کرتی ہے لہٰذا ہر سمت میں اس کا $P_n(\theta,\phi) = 1$ اور $\Omega_A = 4\pi$ ہو گا۔

radiation intensity[14]
normalized[15]
dimensionless[16]
normalized power pattern[17]
beam solid angle[18]
main lobe[19]
major lobe solid angle[20]
minor lobe[21]
isotropic[22]

اینٹینا کی دوسری اہم خاصیت اس کی **سمتیت**[23] ہے۔ اخراجی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت اور اوسط اخراجی شدت کی شرح

$$D = \frac{\text{زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{اوسط اخراجی شدت}} = \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{P(\theta,\phi)_{\text{اوسط}}} \qquad \text{بے بُعد} \tag{14.76}$$

اس کی **سمتیت** کہلاتی ہے۔ کل اخراج W کو 4π سٹریڈیئن سے تقسیم کرنے سے اوسط اخراجی شدت $P(\theta,\phi)_{\text{اوسط}}$ حاصل ہوتی ہے جبکہ اخراجی شدت $P(\theta,\phi)$ کا 4π سٹریڈیئن پر تکمل لینے سے اینٹینا کی کل اخراج حاصل ہوتی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} D &= \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{W/4\pi} = \frac{4\pi P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{\iint_{4\pi} P(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \\ &= \frac{4\pi}{\iint_{4\pi} \frac{P(\theta,\phi)}{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}\,\mathrm{d}\Omega} \\ &= \frac{4\pi}{\iint_{4\pi} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \end{aligned} \tag{14.77}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ مساوات 14.73 کے ساتھ موازنے کے بعد اسے

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \qquad \text{بے بُعد} \tag{14.78}$$

4985 لکھا جا سکتا ہے۔ یوں اینٹینا کی سمتیت سے مراد، کرہ کا ٹھوس زاویہ 4π تقسیم اینٹینا کی اخراجی ٹھوس زاویہ Ω ہے۔ سمتیت اینٹینا کی ایک منفرد خاصیت ہے۔ مخصوص
4986 ٹھوس زاویے میں طاقت مرکوز کرنے کی صلاحیت کی ناپ سمتیت ہے۔ سمتیت جتنی زیادہ ہو گی اینٹینا اتنی کم ٹھوس زاویے میں طاقت کو مرکوز کر پائے گا۔

4987

4988 مثال 14.2: غیر سمتی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہٰذا اس کا $P_n(\theta,\phi) = 1$ اور $\Omega_A = 1$ ہوں گے۔ یوں

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} = 1 \tag{14.79}$$

4989 حاصل ہو گا۔ کسی بھی اینٹینا کی یہ کم سے کم ممکنہ سمتیت ہے۔

4990

4991

4992 مثال 14.3: مختصر جفت قطب کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.38 استعمال کرتے ہوئے تقابل پذیر نقش طاقت

$$P_n(\theta,\phi) = \frac{H_\phi^2(\theta,\phi)}{H_\phi^2(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}} = \sin^2\theta \tag{14.80}$$

---

[23] directivity

لکھی جاسکتی ہے۔ مساوات 14.73 سے

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = \frac{8\pi}{3} \tag{14.81}$$

اور یوں مساوات سے

$$D = \frac{4\pi}{\Omega} = \frac{3}{2} \tag{14.82}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے مختصر جفت قطب کی زیادہ سے زیادہ اخراج $\frac{3}{2}$ گنا زیادہ ہے۔

سمتیت کا دارومدار صرف اور صرف دور میدان کی نقش پر ہے۔ اس میں اینٹینا کی کارگزاری شامل نہیں ہے۔ اس کے برعکس اینٹینا کی کارگزاری، اینٹینا کی افزائش طاقت یا افزائش[24] پر اثر انداز ہوتی ہے۔ اینٹینا کی افزائش سے مراد

$$\text{افزائش} = G = \frac{\text{آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{حوالہ اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}} \tag{14.83}$$

ہے جہاں دونوں اینٹینوں کی داخلی طاقت برابر ہے۔ کسی بھی اینٹینا کو بطور حوالہ اینٹینا لیا جاسکتا ہے۔ اگر ہم بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کو حوالہ تصور کریں تب

$$G_0 = \frac{P'_m}{P_0} \tag{14.84}$$

ہو گا جہاں

P'_m آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت،

P_0 بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کی اخراجی شدت

ہیں۔ یاد رہے کہ غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہٰذا اس کی زیادہ سے زیادہ شدت اور اوسط اخراجی شدت برابر ہوتے ہیں۔ آزمودہ اینٹینا کی اخراجی شدت P'_m اور کامل اینٹینا کی اخراجی شدت P_m کی شرح اینٹینا کی کارگزاری k دیتی ہے۔ یہ وہی k ہے جسے مساوات 14.61 میں بھی حاصل کیا گیا۔ یوں

$$G_0 = \frac{kP_m}{P_0} = kD \tag{14.85}$$

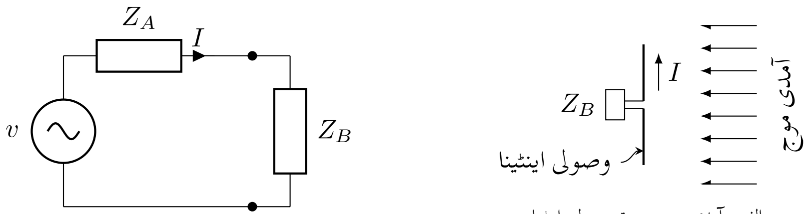
حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی کامل اینٹینا $(k = 100\,\%)$ کی افزائش، کامل غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے، اسی اینٹینا کی سمتیت کے برابر ہوتی ہے۔ غیر کامل $k < 100\,\%$ اینٹینا کی صورت میں افزائش کی قیمت سمتیت سے کم ہو گی۔

سمتیت کی قیمت 1 تا ∞ ممکن ہے۔ سمتیت کی قیمت اکائی سے کم نہیں ہو سکتی۔ اس کے برعکس افزائش کی قیمت صفر تا لا محدود ممکن ہے۔

$$\begin{aligned} 1 &\le D \le \infty \\ 0 &\le G \le \infty \qquad \text{ممکنہ قیمت} \end{aligned}$$

---

[24] gain



الف: آمدی موج میں تر وصولی اینٹینا

ب: اینٹینا کے ساتھ برقی رکاوٹ جوڑا گیا ہے

شکل 14.8: وصولی اینٹینا آمدی موج سے طاقت حاصل کر کے برقی رکاوٹ کو فراہم کرتی ہے۔

اخراجی اینٹینا[25] شعاعی اخراج کرتی ہے۔ اس کے برعکس وصولی اینٹینا[26] شعاع سے طاقت وصول کرتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج جب وصولی اینٹینا پر پہنچتے ہیں تو وصولی اینٹینا ان سے طاقت حاصل کرتی ہے۔ اگر اینٹینا کے برقی سروں پر بیرونی مزاحمت R_B نسب کی جائے تو حاصل کردہ طاقت کا کچھ حصہ اس مزاحمت میں ضائع ہو گا۔ ہم چونکہ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $W = I^2 R_B$ میں دلچسپی رکھتے ہیں لہٰذا اسی کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $I^2 R_B$ کے برابر طاقت آمدی موج کے رقبہ S میں پایا جاتا ہے۔ یوں

$$\mathscr{P} S = I^2 R_B \tag{14.86}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ اینٹینے کا رقبہ S ہی ہے اور اینٹینا اتنے رقبے پر آمدی موج سے مکمل طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی برقی سروں تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ اس فرضی رقبے کو وصولی رقبہ[27] کہا جاتا ہے۔ یوں وصولی رقبے کو

$$S = \frac{I^2 R_B}{\mathscr{P}} \tag{14.87}$$

5000 سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں

5001 S اینٹینا کا فرضی رقبہ، $\mathrm{m^2}$

5002 I موثر برقی رو، A

5003 $\mathscr{P}$ آمدی موج کا پوئنٹنگ سمتیہ، $\mathrm{W/m^2}$

5004 R_L برقی مزاحمت، Ω

5005 ہیں۔ حقیقت میں اینٹینا $I^2 R_B$ سے زیادہ طاقت حاصل کرتی ہے جس کا کچھ حصہ اینٹینا کے اندر ہی ضائع ہو جاتا ہے۔ ہمیں اینٹینا کے اندر ضائع ہونے والے طاقت

5006 سے کوئی دلچسپی نہیں ہے۔

شکل 14.8-الف میں آمدی موج میں تر اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بیرونی برقی رکاوٹ Z_B کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔ اینٹینا کا تھونن[28] مساوی دور استعمال کرتے ہوئے، شکل-ب میں اسی کا مکمل برقی دور دکھایا گیا ہے۔ اس دور میں سلسلہ وار برقی رو

$$I = \frac{v}{Z_A + Z_B} = \frac{v}{R_A + R_B + j(X_A + X_B)}$$

5007 ہو گی جہاں

[25] transmitting antenna
[26] receiving antenna
[27] antenna aperture
[28] Thevenin equivalent circuit

5008 v اینٹینا میں آمدی موج سے پیدا موثر برقی دباو،

5009 R_A اینٹینا کے تھونن مساوی دور میں اینٹینا کی مزاحمت،

5010 X_A تھونن دور میں اینٹینا کی متعاملیت،

5011 R_B بیرونی مزاحمت،

5012 X_B بیرونی متعاملیت

ہیں۔ یوں بیرونی مزاحمت کو مہیا طاقت

$$\left|I\right|^2 R_B = \frac{v^2 R_B}{(R_A+R_B)^2+(X_A+X_B)^2} \tag{14.88}$$

ہو گا جس سے اینٹینے کا رقبہ وصولی

$$S = \frac{v^2 R_B}{\mathscr{P}\left[(R_A+R_B)^2+(X_A+X_B)^2\right]} \tag{14.89}$$

5013 حاصل ہوتا ہے۔

آمدی موج کی نسبت سے ایک مخصوص انداز میں رکھے ہوئے اینٹینا میں زیادہ سے زیادہ برقی دباو پیدا ہو گا۔ اسی جگہ اینٹینا کو رکھتے ہوئے بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت اس صورت منتقل ہو گی جب

$$R_B = R_A \tag{14.90}$$

$$X_B = -X_A \tag{14.91}$$

ہوں۔ بے ضیاع اینٹینا کی تھونن مزاحمت دراصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r ہی ہے۔ اس طرح بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرتے وقت زیادہ سے زیادہ وصولی رقبہ

$$S_{\text{اخراجی}} = \frac{v^2}{4\mathscr{P} R_r} \tag{14.92}$$

5014 حاصل ہو گا جسے اینٹینا کا **اخراجی رقبہ**[29] $S_{\text{اخراجی}}$ پکارا جاتا ہے۔ ہر اینٹینا مخصوص قیمت کا **اخراجی رقبہ** رکھتا ہے۔

5015

5016 مثال 14.4: پورے مختصر جفت قطب پر یکساں برقی رو تصور کرتے ہوئے، اس کا اخراجی رقبہ حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.92 سے ظاہر ہے کہ اخراجی رقبہ دریافت کرنے کے لئے، اینٹینا میں پیدا برقی دباو v، اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r اور آمدی موج میں کثافت طاقت $\mathscr{P}$ درکار ہوں گے۔ جفت قطب میں زیادہ سے زیادہ برقی دباو اس صورت پیدا ہو گی جب اینٹینا کی تار اور آمدی موج کا برقی میدان متوازی ہوں۔ ایسی صورت میں اینٹینا میں

$$v = El \tag{14.93}$$

[29] effective aperture

برقی دباو پیدا ہو گی۔ آمدی موج کی پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P}=\frac{E^2}{Z_0} \qquad (\mathrm{W/m^2}) \tag{14.94}$$

ہے جہاں $Z_0=\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}=120\pi$ خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔ مساوات 14.57 میں $I=I_0$ پر کرنے سے موجودہ جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R_r=80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{14.95}$$

حاصل ہوتی ہے۔ ان تمام کو مساوات 14.92 میں پر کرتے ہوئے

$$S_{\text{اخراجی}}=\frac{E^2l^2}{4\frac{E^2}{Z_0}80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2}=\frac{3\lambda^2}{8\pi}=0.119\lambda^2 \qquad (\mathrm{m^2}) \tag{14.96}$$

یوں کامل مختصر جفت قطب کی لمبائی جتنی بھی کم کیوں نہ ہو یہ ہر صورت $0.119\lambda^2$ اخراجی رقبے پر آمدی موج سے تمام طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی مزاحمت تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ حقیقی جفت قطب غیر کامل ہو گا لہٰذا اس کی مزاحمت $R_{\text{ضائع}}+R_{\text{اخراجی}}$ ہو گی۔ یوں کامل جفت قطب کا اخراجی رقبہ کچھ کم ہو گا۔

آئیں ایسے اینٹینا کی بات کریں جس کا اخراجی رقبہ $S_{\text{اخراجی}}$ اور اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A ہو۔ اخراجی رقبے پر یکساں برقی میدان E_m کی صورت میں اخراجی طاقت

$$P=\frac{E_m^2}{Z}S_{\text{اخراجی}} \tag{14.97}$$

ہو گا جہاں Z انتقالی خطے کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

اگر r فاصلے پر میدان E_r ہو تب اخراجی طاقت

$$P=\frac{E_r^2}{Z}r^2\Omega_A \tag{14.98}$$

ہو گا۔

ہم آگے جا کر مساوات 14.154 حاصل کریں گے جس کے تحت $E_r=\frac{E_mS_{\text{اخراجی}}}{r\lambda}$ ہے۔ اس نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا دو مساوات کو برابر لکھتے ہوئے

$$\lambda^2=S_{\text{اخراجی}}\Omega_A \qquad (\mathrm{m^2}) \tag{14.99}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

- λ طول موج،
- $S_{\text{اخراجی}}$ اینٹینا کا اخراجی رقبہ اور
- Ω_A اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ

ہیں۔اس مساوات کے تحت اینٹینا کا اخراجی رقبہ ضرب اخراجی ٹھوس زاویہ برابر ہوتا ہے طول موج کا مربع۔یوں اگر ہمیں اخراجی رقبہ معلوم ہو تب ہم اخراجی ٹھوس زاویہ حاصل کر سکتے ہیں اور اگر اخراجی ٹھوس زاویہ معلوم ہو تب اخراجی رقبہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 14.78 میں مساوات 14.99 پر کرنے سے

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} S_{\text{اخراجی}} \tag{14.100}$$

لکھا جا سکتا ہے۔سمتیت کی یہ تیسری مساوات ہے۔تینوں کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\begin{aligned} D &= \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{P_{\text{اوسط}}} \\ D &= \frac{4\pi}{\Omega} \\ D &= \frac{4\pi}{\lambda^2} S_{\text{اخراجی}} \end{aligned} \tag{14.101}$$

جہاں پہلی دو مساوات میں سمتیت اخراجی شعاع کے نقش سے حاصل کی گئی ہے جبکہ تیسری مساوات میں اسے اخراجی رقبے سے حاصل کیا گیا ہے۔

14.8 قطاری ترتیب

مسئلہ اینٹینا دراصل اینٹینا کے مختلف حصوں سے پیدا میدانوں کا درست مجموعہ حاصل کرنا ہے۔اینٹینا کے مختلف حصوں کے میدان جمع کرتے ہوئے ان کے انفرادی حیطے اور زاویائی فرق کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

14.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع

دو عدد نقطہ منبع کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔دونوں منبع غیر سمتی ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ d ہے۔نقطہ منبع سے مراد ایسی فرضی منبع ہے جس کا حجم صفر کے برابر ہو۔ ہم آگے چل کر مسئلہ متکافیت[30] دیکھیں گے جس کے تحت نقطہ منبع کے قطاروں کا اخراجی نقش اور انہیں کا وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ دونوں منبع برابر حیطے اور ہم قدم میدان پیدا کرتے ہیں۔دونوں میدان کے خطی تقطیب ہیں۔مزید یہ کہ دونوں کے $\boldsymbol{E}$ میدان صفحے کے عمودی ہیں۔دونوں منبع سے برابر فاصلے پر ان کے بالکل درمیانے مقام پر زاویائی صفر تصور کرتے ہوئے، دور میدان کو

$$E = E_2 e^{j\frac{\psi}{2}} + E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} \tag{14.102}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\psi = \beta d \cos\theta = \frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta \tag{14.103}$$

ہے۔ان مساوات میں

---

[30] reciprocity

E_1 منبع-1 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان،

E_2 منبع-2 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان اور

ψ دونوں اشارات کا زاویہ θ کی سمت میں زاویائی فرق

ہیں۔ دونوں دور میدان برابر $(E_1 = E_2)$ ہونے کی صورت میں یوں

$$E = E_1 \left(e^{j\frac{\psi}{2}} + e^{-j\frac{\psi}{2}} \right) = 2E_1 \cos\frac{\psi}{2} \tag{14.104}$$

ہو گا۔ فاصلہ $d = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اگر زاویائی صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام کی جگہ منبع-1 پر چنا جاتا تب دور میدان

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 e^{j\psi} \\ &= \left(E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} + E_2 e^{j\frac{\psi}{2}} \right) e^{j\frac{\psi}{2}} \end{aligned} \tag{14.105}$$

حاصل ہوتا جو $E_1 = E_2$ کی صورت میں

$$E = 2E_1 \cos\frac{\psi}{2} e^{j\frac{\psi}{2}} = 2E_1 \cos\frac{\psi}{2} \angle \frac{\psi}{2} \tag{14.106}$$

حاصل ہوتا۔ میدان کا نقش چونکہ میدان کے حیطے پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا اس میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوئی البتہ میدان کا زاویہ تبدیل ہو گیا ہے۔ میدان کے زاویے کی تبدیلی کی وجہ یہ ہے کہ ہم نے زاویے کے صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام سے ہٹا کر منبع-1 پر چنا ہے۔

14.8.2 ضرب نقش

گزشتہ حصے میں بالکل یکساں دو عدد غیر سمتی نقطہ منبع کے میدان پر غور کیا گیا۔ اگر نقطہ منبع سمتی ہوں اور دونوں کے نقش بالکل یکساں ہوں تب بھی مساوات 14.104 (یا مساوات 14.106) ہی ان کا مجموعی میدان دے گا پس فرق اتنا ہے کہ اب E_1 از خود θ کا تفاعل $E(\theta)$ ہے۔ انفرادی منبع کے نقش $E(\theta)$ کو انفرادی نقش[31] جبکہ $\cos\frac{\psi}{2}$ کو قطاری نقش[32] کہا جائے گا۔ یوں

$$E = E(\theta) \cos\frac{\psi}{2} \tag{14.107}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 14.107 ضرب نقش[33] کا اصول بیان کرتا ہے جس کے تحت انفرادی منبع کا نقش اور غیر سمتی نقطہ منبع کے قطار کا نقش ضرب دینے سے سمتی منبع کے قطار کا نقش حاصل ہوتا ہے۔ یہاں فرض کیا گیا ہے کہ قطار میں انفرادی نقطہ منبع کا نقش وہی ہے جو اس نقطہ منبع کا تنہائی میں نقش ہوتا ہے۔

---

primary pattern[31]
array pattern[32]
pattern multiplication[33]

14.8.3 ثنائی قطار 5047

مساوات 14.106 دو غیر سمتی زاویائی طور پر ہم قدم نقطہ منبع کے جوڑی کا دور میدان دیتا ہے۔ نقطہ منبع کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ اور $E_1 = \frac{1}{2}$ ہونے کی صورت میں اس مساوات کو

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.108}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نقش کو شکل میں دکھایا گیا ہے جس میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔ اس جوڑی منبع کے سیدھ میں $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر منبع کی دوسری جوڑی رکھنے سے شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔ اس شکل میں دو درمیانے منبع در اصل ایک ہی نقطے پر پائے جائیں گے لیکن وضاحت کی خاطر انہیں اوپر نیچے دکھایا گیا ہے۔ ضرب نقش کے اصول کے تحت ان کا مجموعی میدان

$$E = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.109}$$

ہو گا جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس مساوات پر شق کرنے والوں کے لئے مثال میں تفصیلی ثبوت پیش کیا گیا ہے۔ 5048

اس قطار کو تین عدد منبع کی قطار تصور کیا جا سکتا ہے جہاں قطار میں بالترتیب، منبع کی طاقت $(1 : 2 : 1)$ نسبت سے ہے۔ اس تین رکنی قطار کے سیدھ میں لیکن $\frac{\lambda}{2}$ ہٹ کر بالکل ایسی ہی تین رکنی قطار رکھنے سے شکل حاصل ہوتی ہے۔ اس نئی قطار کو چار رکنی تصور کیا جا سکتا ہے جہاں بالترتیب منبع کی طاقت $(1 : 3 : 3 : 1)$ نسبت سے ہے۔ اس چار رکنی قطار کا میدان

$$E = \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.110}$$

ہے۔ اس نقش میں بھی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔ اسی طرح بڑھتے ہوئے، ثانوی شعاع سے پاک، زیادہ سے زیادہ سمتیت کا نقش حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں زیادہ منبع پر مبنی قطار میں منبع کی طاقت ثنائی تسلسل[34] کے ثنائی سر[35] کی نسبت سے ہوتے ہیں۔ ثنائی سروں کو شکل میں دکھائے گئے پاسکل تکون[36] کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس میں ہر اندرونی عدد، اوپر کے قریبی دو اعداد کا مجموعہ ہوتا ہے۔ متعدد منبع کے قطار کا نقش

$$E = \cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{14.111}$$

کے برابر ہو گا جہاں قطار میں منبع کی تعداد n ہے۔ 5049

اگر چہ مندرجہ بالا n رکنی قطار کے نقش میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا اس کے باوجود اس کی سمتیت برابر طاقت کے n رکنی منبع کے قطار سے کم ہوتی ہے۔ حقیقی 5050
قطار عموماً ان دو صورتوں (ثنائی قطار اور یکساں قطار) کی درمیانی شکل رکھتے ہیں۔ 5051

5052

مثال 14.5: مساوات 14.109 کو ثابت کریں۔ 5053

---

[34] binomial series
[35] binomial coefficient
[36] Pascal triangle

حل: مساوات 14.105 کی طرح زاویائی صفر کو قطار کے پہلی رکن پر چنتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
E &= E_0 + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j2\psi} \\
&= E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right) + E_0 e^{j\psi} \left(1 + e^{j\psi}\right) \\
&= E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right) \left(1 + e^{j\psi}\right) \\
&= E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right)^2
\end{aligned}
$$

جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \frac{\pi}{2}\cos\theta$ پر کرتے ہوئے

$$
E = \left[\left(\frac{e^{-j\frac{\psi}{2}} + e^{j\frac{\psi}{2}}}{2} \right) e^{j\frac{\psi}{2}} \right]^2 = \cos^2 \frac{\psi}{2} \angle \psi
$$

5054 لکھا جا سکتا ہے۔ اس کا حیطہ $\cos^2 \frac{\psi}{2}$ نقش کی مساوات ہے۔

5055

5056

5057 مثال 14.6: مساوات 14.111 کو تفصیل سے ثابت کریں۔

ثنائی قطار میں رکن کے طاقت ثنائی تسلسل کے سر کی نسبت سے ہوتے ہیں۔ یوں $n+1$ رکنی قطار میں بالترتیب رکن کے طاقت $(1+x)^n$ کی ثنائی تسلسل

$$
(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \tag{14.112}
$$

کے سر سے حاصل کئے جاتے ہیں۔ یوں تین رکنی قطار کے سر ثنائی تسلسل

$$
(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \tag{14.113}
$$

کے سر کی نسبت $1 : 2 : 1$ سے ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے تین رکنی قطار کا دور میدان مندرجہ بالا مساوات کے بائیں یا دائیں ہاتھ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$
E = E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right)^2 = E_0 (1 + 2e^{j\psi} + e^{j2\psi}) \tag{14.114}
$$

تین رکنی قطار کو دیکھ کر دور میدان مندرجہ بالا مساوات کی دائیں ہاتھ دیتی ہے جسے ثنائی تسلسل کی مدد سے مساوات کی بائیں ہاتھ کی صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات کے بائیں ہاتھ سے نقش $\cos^2 \frac{\psi}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح n رکنی قطار کو $(1+x)^{n-1}$ کی ثنائی تسلسل کی مدد سے اکٹھے کرتے ہوئے

$$
E = E_0 \left(1 + e^{j\psi}\right)^{n-1} \tag{14.115}
$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \pi \cos\theta$ پر کرتے ہوئے صرف حیطہ لیتے ہوئے قطار کا نقش

$$
E = \cos^{n-1} \left(\frac{\pi}{2} \cos\theta \right) \tag{14.116}
$$

5058 لکھا جا سکتا ہے۔

5059

5060
14.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار

ثنائی قطار غیر یکساں رکنی قطار ہے۔ آئیں شکل میں دکھائے گئے n رکنی، غیر سمتی، یکساں طاقت کے منبع کی قطار کا دور میدان حاصل کریں۔ یہاں فرض کیا جاتا ہے کہ قطار میں ہر دو قریبی منبع میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ یوں

$$\psi = \beta d \cos\theta + \delta \tag{14.117}$$

ہو گا۔ قطار کا دور میدان

$$E = E_0 \left(1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \cdots + e^{j(n-1)\psi}\right) \tag{14.118}$$

5061 لکھا جا سکتا ہے جہاں

5062 d قطار میں رکن کے درمیان فاصلہ،

5063 δ ہر دو قریبی رکن کے درمیان زاویائی فرق اور

5064 ψ دو قریبی رکن میں کل زاویائی فرق یعنی $\psi = \beta d \cos\theta + \delta$

5065 ہیں۔

اس میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے جانی پہچانی تسلسل

$$E_0 \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}\right)$$

حاصل ہوتی ہے جس کا مجموعہ

$$E_0 \left(\frac{1 - x^n}{1 - x}\right)$$

5066 کے برابر ہے۔

مساوات 14.118 کو $e^{j\psi}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$E e^{j\psi} = E_0 \left(e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \cdots + e^{jn\psi}\right) \tag{14.119}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.118 سے مساوات 14.119 منفی کر کے E کے لئے حل کرتے ہوئے

$$E = E_0 \frac{1 - e^{jn\psi}}{1 - e^{j\psi}} = E_0 \frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \underline{/(n-1)\tfrac{\lambda}{2}} \tag{14.120}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر قطار کے درمیانے نقطے کو زاویائی صفر چنا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات میں زاویہ $\underline{/(n-1)\frac{\lambda}{2}}$ نہ پایا جاتا۔ تمام رکن غیر سمتی ہونے کی صورت
5068 میں E_0 ہر رکن کا انفرادی نقش ہو گا جبکہ $\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$ قطاری نقش ہے۔

غیر سمتی منبع اور زاویائی صفر کا مقام قطار کے درمیانے نقطے پر رکھتے ہوئے

$$E = E_0 \frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \tag{14.121}$$

ہو گا۔ قطار کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\psi \to 0$ کی صورت میں پائی جائے گی۔ چونکہ $\psi = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات $E = \frac{0}{0}$ دیتا ہے جو بے معنی[37] ہے لہٰذا ہمیں ال ہوس پٹل[38] کا قاعدہ استعمال کرنا ہو گا جس کے تحت اگر تفاعل $y = \frac{m(x)}{n(x)}$ کی قیمت $x \to a$ پر $y = \frac{0}{0}$ حاصل ہو تب قیمت $y = \frac{\partial m / \partial x}{\partial n / \partial x}$ سے حاصل ہو گی۔ یوں مندرجہ بالا مساوات سے $\psi \to 0$ پر

$$
\begin{aligned}
E &= E_0 \left. \frac{\frac{\partial \sin \frac{n\psi}{2}}{\partial \psi}}{\frac{\partial \sin \frac{\psi}{2}}{\partial \psi}} \right|_{\psi \to 0} \\
&= E_0 \left. \frac{\frac{n}{2} \cos \frac{n\psi}{2}}{\frac{1}{2} \cos \frac{\psi}{2}} \right|_{\psi \to 0}
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
E = nE_0 \tag{14.122}
$$

حاصل ہوتا ہے جو قطار کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ میدان ہے۔ یہ میدان قطار میں انفرادی منبع کے طاقت سے n گنا زیادہ ہے۔ اس قطار کے نقش کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس زاویے پر پائی جائے گی جس پر $\psi = 0$ ہو یعنی

$$
\beta d \cos \theta + \delta = 0 \tag{14.123}
$$

ہو جس سے

$$
\theta_{\text{بلند تر طاقت}} = \cos^{-1} \left(- \frac{\delta}{\beta d} \right) \tag{14.124}
$$

5069 حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح اخراجی نقش کا صفر اس مقام پر ہو گا جہاں مساوات 14.121 صفر کے برابر ہو یعنی جہاں $\frac{n\psi}{2} = \mp k\pi$ کے برابر ہو یعنی

$$
\frac{n}{2} \left(\beta d \cos \theta + \delta \right) = \mp k\pi \tag{14.125}
$$

جس سے صفر اخراج کا زاویہ

$$
\theta_0 = \cos^{-1} \left[\left(\mp \frac{2k\pi}{n} - \delta \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right] \tag{14.126}
$$

5070 حاصل ہوتا ہے جہاں

5071 θ_0 صفر اخراج کا زاویہ،

5072 k اعداد $k = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے جہاں $k \neq mn$ کی شرط لاگو ہے جس میں $m = 1, 2, 3, \cdots$ کے برابر ہے۔

مساوات 14.121 کو مساوات 14.122 سے تقسیم کرتے ہوئے تقابل پذیر میدان E_n

$$
E_n = \frac{E}{nE_0} = \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \tag{14.127}
$$

5073 حاصل ہوتا ہے۔

---

[37] indeterminate
[38] L Hospital's rule

5074 ### 14.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار

نقش کی چوٹی اس مقام پر پائی جاتی ہے جس پر $-\delta = \beta d \cos\theta$ ہو۔ قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر، چوڑائی جانب $(\theta = 90^\circ)$ زیادہ سے زیادہ اخراج $\delta = 0$ کی صورت میں ہو گا یعنی جب تمام انفرادی منبع ہم قدم ہوں۔ اگر θ کی جگہ اس کا **زاویہ تکملہ**[39] γ استعمال کیا جائے تب نقش کے صفر

$$\gamma_0 = \sin^{-1}\left(\mp\frac{k\lambda}{nd}\right) \tag{14.128}$$

پر پائے جائیں گے۔ لمبی قطار $k\lambda \gg nd$ کی صورت میں γ_0 کم قیمت کا ہو گا لہٰذا اسے

$$\gamma_0 = \frac{k}{nd/\lambda} \approx \frac{k}{L/\lambda} \tag{14.129}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں قطار کی لمبائی $L = (n-1)d$ ہے۔ لمبائی کو $n \gg 1$ کی صورت میں

$$L = (n-1)d \approx nd$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 14.129 میں $k = 1$ پر کرتے ہوئے نقش کا پہلا صفر γ_{01} حاصل ہوتا ہے۔ یوں گوشے کے دونوں اطراف پر پہلے صفروں کے درمیان نقش کی چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = \gamma_{01} \approx \frac{2}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{114.6^\circ}{L/\lambda} \tag{14.130}$$

حاصل ہوتی ہے۔ نقش میں زیادہ سے زیادہ طاقت کے زاویے کے دونوں اطراف وہ زاویے پائے جاتے ہیں جن پر طاقت نصف ہوتی ہے۔ ان کے درمیان زاویے کو **نصف طاقت چوڑائی**[40] کہتے ہیں۔ لمبے یکساں **چوڑائی جانب اخراجی قطار**[41] کے نصف طاقت چوڑائی کی قیمت **پہلی صفر چوڑائی**[42] کے تقریباً آدھی ہوتی ہے۔ یوں

$$\text{نصف طاقت چوڑائی} \approx \frac{\text{پہلی صفر چوڑائی}}{2} = \frac{1}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{57.3^\circ}{L/\lambda} \tag{14.131}$$

5075 ہو گی۔

شکل 14.9 میں چوڑائی جانب اخراجی قطار کا قابل پذیر نقش دکھایا گیا ہے۔ یہ نقش مساوات 14.127 سے حاصل کیا گیا ہے۔ اس قطار میں منبع $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر 5076 رکھے گئے ہیں۔ بیس عدد برابر طاقت کے منبع پر مبنی اس قطار کی نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP}^\circ = 5.1^\circ$ ہے۔ شکل میں نقش کا تراش دکھایا گیا ہے۔ یہ حقیقت میں چرخی 5077 مانند ہے لہٰذا $\phi = 0^\circ$ تا $\phi = 360^\circ$ گھومتے ہوئے اس کی صورت یہی نظر آئے گی۔ یوں ϕ زاویے پر اس کی نصف طاقت چوڑائی $\phi_{HP}^\circ = 360^\circ$ ہے 5078

5079 ### 14.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار

زیادہ سے زیادہ اخراج کا زاویہ مساوات 14.123

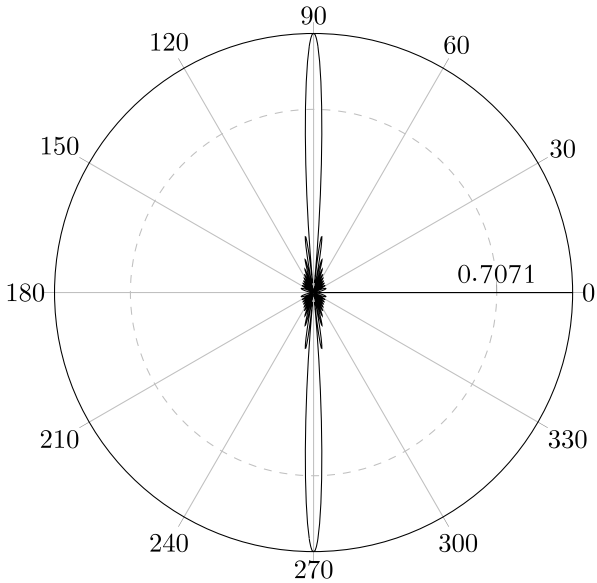
$$\beta d \cos\theta + \delta = 0 \tag{14.132}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر سیدھا آگے $(\theta = 0)$ لمبائی کی جانب زیادہ سے زیادہ اخراج اس صورت ہو گا جب ہر دو قریبی منبع کے مابین

$$\delta = -\beta d \tag{14.133}$$

---

[39] complementary angle
[40] half power beam width, HPBW
[41] broadside array
[42] beam width between first nulls, BWFN



شکل 14.9: چوڑائی جانب اخراجی قطار

زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔ یوں ایسے قطار کے صفر مساوات 14.125 کے تحت

$$\frac{n}{2}\beta d\left(\cos\theta_0-1\right)=\mp k\pi$$

یعنی

$$\cos\theta_0-1=\mp\frac{k}{nd/\lambda}$$

سے حاصل ہوں گے۔ اس سے

$$\frac{\theta_0}{2}=\sin^{-1}\left(\mp\sqrt{\frac{k}{2nd/\lambda}}\right) \tag{14.134}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ لمبی قطار $(nd \gg k\lambda)$ کی صورت میں اسے

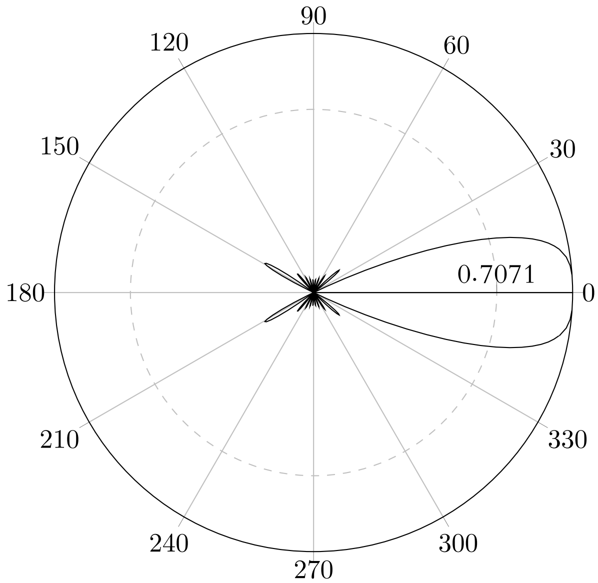
$$\theta_0=\mp\sqrt{\frac{2k}{nd/\lambda}}\approx\mp\sqrt{\frac{2k}{L/\lambda}} \tag{14.135}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمبائی $L=(n-1)d$ کو $(nd \gg k\lambda)$ کی صورت میں $L \approx nd$ لکھا گیا ہے۔ پہلا صفر $k=1$ پر حاصل ہو گا جس سے پہلی صفر چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی}=2\theta_{01}\approx2\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}}\,\text{rad}=114.6^\circ\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}} \tag{14.136}$$

حاصل ہوتی ہے۔

بیس منبع پر مبنی، لمبائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر اخراجی نقش شکل 14.10 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ نقش مساوات 14.127 سے حاصل کیا گیا ہے۔ منبع کے درمیانی فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ ہے۔ مساوات 14.127 سے پہلی صفر چوڑائی 52° اور نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP}^\circ = 34^\circ$ حاصل ہوتی ہے۔ یہ نقش جتنا چوڑا ہے یہ اتنا صفحہ کے عمودی



شکل 14.10: لمبائی جانب اخراجی قطار

جانب موٹا بھی ہے۔یوں ϕ جانب بھی اس کی نصف طاقت چوڑائی $\phi_{HP}^\circ = 34^\circ$ ہی ہے۔لمبائی جانب اخراجی لمبی قطار کی نصف طاقت چوڑائی اس کے پہلے صفر چوڑائی کے تقریباً $\frac{2}{3}$ گنا ہوتی ہے۔

جیسے مثال 14.7 اور مثال 14.8 میں آپ دیکھیں گے کہ n عدد منبع پر مبنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت n عدد منبع پر مبنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت سے زیادہ ہوتی ہے۔

مساوات 14.78 اینٹینا کی سمتیت

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \tag{14.137}$$

دیتا ہے جہاں ٹھوس زاویہ مساوات 14.73 سے حاصل ہوتا ہے۔اگر ثانوی شعاعوں کو نظر انداز کیا جائے تب مرکزی شعاع کے θ سمت میں نصف طاقت زاویے θ_{HP} اور ϕ سمت میں نصف طاقت زاویے ϕ_{HP} کا ضرب تقریباً ٹھوس زاویے کے برابر ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 14.73 حل کرنا ضروری نہیں اور سمتیت کو

$$D \approx \frac{4\pi}{\phi_{HP}\phi_{HP}} \tag{14.138}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں نصف طاقت زاویے ریڈیئن میں ہیں۔اس مساوات میں

$$4\pi \,\mathrm{sr} = 4\pi \,\mathrm{rad}^2 = 4\pi \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \,\mathrm{deg}^2 = 41\,253 \,\mathrm{deg}^2$$

پر کرتے ہوئے

$$D \approx \frac{41\,253}{\theta_{HP}^\circ \phi_{HP}^\circ} \tag{14.139}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 14.7: بیس رکنی، چوڑائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta_{HP}^\circ = 5.1^\circ$ اور $\phi_{HP}^\circ = 360^\circ$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.139 سے

$$D \approx \frac{41\,253}{5.1 \times 360} = 22.5$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 14.8: بیس رکنی، لمبائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta_{HP}^\circ = \phi_{HP}^\circ = 34^\circ$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 14.139 سے

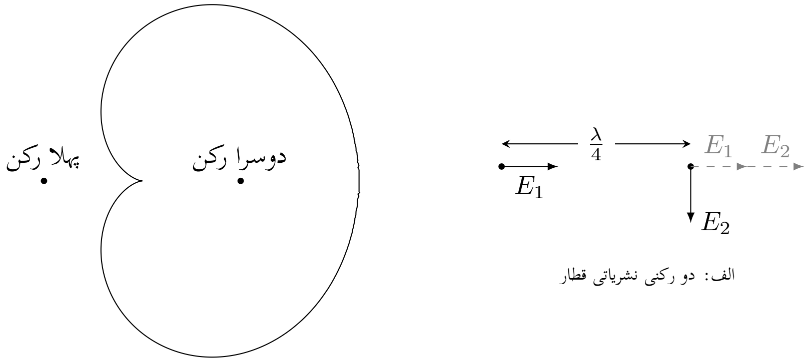
$$D \approx \frac{41\,253}{34 \times 34} = 35.7$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 14.9: دو ارکان پر مبنی قطار میں ارکان کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{4}$ ہے۔ دائیں رکن (دوسرا رکن) کو 90° پیچھے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ دونوں برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہے۔ دونوں ارکان افقی سطح پر سیدھے کھڑے ہیں۔ افقی میدان پر اخراجی نقش حاصل کریں۔

حل: برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہونے کی صورت میں $E = |E_2| = |E_1|$ ہوں گے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر بائیں رکن (پہلا رکن) کا برقی میدان 0° میکانی زاویے پر ہو تب اسی لمحہ دائیں رکن (دوسرا رکن) کا میدان -90° میکانی زاویے پر ہو گا۔ شکل 14.11-الف میں ان میدان (E_1 اور E_2) کو گاڑھی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ چونکہ دونوں ارکان میں $\frac{\lambda}{4}$ کا فاصلہ ہے لہٰذا جتنی دیر میں بائیں رکن کے میدان کی موج E_1 چل کر دائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دوری عرصے کے $\frac{1}{4}$ برابر وقت گزر چکا ہو گا لہٰذا دوسرے رکن میں برقی رو $\frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$ آگے بڑھ چکی ہو گی اور یوں اس لمحہ پر دوسرا رکن 0° میکانی زاویے پر ہی میدان پیدا کرے گا۔ یوں دوسرے رکن کے مقام پر دونوں میدان ہم قدم پائے جائیں گے لہٰذا یہاں برقی میدان $E_1 + E_2$ یعنی دگنا ہو گا۔ شکل 14.11-الف میں کچھ دیر بعد کے ان میدان کو ہلکی سیاہی میں ہم قدم دکھایا گیا ہے۔ دونوں میدان دائیں جانب ہم قدم رہتے ہوئے حرکت کریں گے۔

اس کے برعکس جس لمحہ دائیں رکن کی برقی رو 0° پر ہو اسی لمحہ بائیں رکن کی برقی رو 90° پر ہو گی۔ اس لمحے پر دائیں رکن کا میدان 0° پر ہو گا جبکہ بائیں رکن کا میدان 90° پر ہو گا۔ اب جتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان بائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان مزید 90° آگے بڑھ کر 180° پر پہنچ چکا ہو گا۔ یوں



الف: دو رکنی نشریاتی قطار

دو رکنی قطار کا نقش

شکل 14.11: دو رکنی اشاعتی قطار اور اس کا نقش

دائیں رکن کے مقام پر دونوں میدان آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لٰہذا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔ اس طرح دائیں رکن کے دائیں جانب میدان صفر ہی پایا جائے گا۔ شکل 14.11 میں صفر اور پائے ریڈیئن زاویوں پر دگنا اور صفر میدان دکھایا گیا ہے۔

دونوں رکن کے درمیان عمودی لکیر پر پہنچنے کے لئے دونوں میدان کو برابر دورانیے کی ضرورت ہے لٰہذا اس لکیر پر دونوں میدان آپس میں عمودی رہیں گے۔ یوں اس لکیر پر کل میدان مسئلہ فیثا غورث کی مدد سے $\sqrt{E^2+E^2} = 1.4142E$ حاصل ہو گا۔ شکل 14.11-ب میں اسی طرح مختلف مقامات پر میدان حاصل کرتے ہوئے حاصل کردہ نقش دکھایا گیا ہے۔

مندرجہ بالا مثال کے نقش سے ظاہر ہے کہ یہ اینٹینا بائیں جانب اخراج نہیں کرتا لٰہذا اس کے بائیں جانب دوسرا اینٹینا نسب کیا جا سکتا ہے جس کی اخراجی سمت بائیں رکھی جائے گی تاکہ دونوں علیحدہ علیحدہ نشریات کر سکیں۔

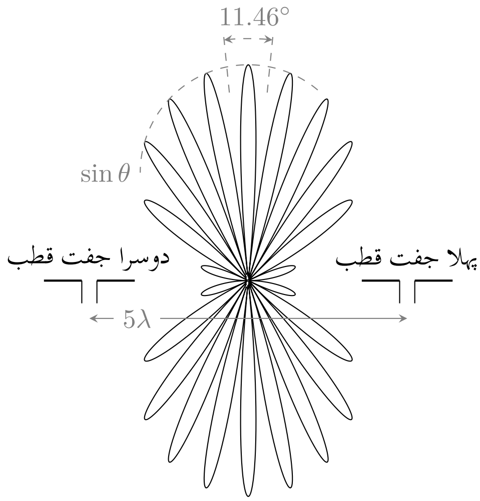
14.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا

مساوات 14.124

$$\theta_{\text{بلند تر طاقت}} = \cos^{-1}\left(-\frac{\delta}{\beta d}\right) \tag{14.140}$$

یکساں ارکان کے قطار کی مرکزی نقش کا زاویہ دیتی ہے۔ چوڑائی جانب اخراجی قطار میں $\theta = 90°$ رکھا جاتا ہے جبکہ لمبائی جانب اخراجی قطار میں $\theta = 0°$ رکھا جاتا ہے۔ اگر شعاع کی سمت تبدیل کرنی ہو تو ایسے اینٹینا کو گھمانا ہو گا۔

مساوات 14.124 کے تحت δ کو تبدیل کرتے ہوئے شعاع کی سمت کسی بھی زاویے پر رکھی جا سکتی ہے۔ یوں δ کو -1 تا $+1$ مسلسل تبدیل کرتے ہوئے شعاع کی سمت کو $0°$ تا $180°$ مسلسل تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ یوں بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا[43] کو ہلائے بغیر اس کی اخراجی سمت تبدیل کی جا سکتی ہے۔



شکل 14.12: دو عدد مختصر جفت قطب جنہیں 5λ فاصلے پر رکھا گیا ہے سے حاصل تداخل پیما کا نقش۔

14.9 تداخُل پیما 5122

5123 فلکیات[44] کے میدان میں اینٹینا کا کلیدی کردار ہے۔ ریڈیائی فلکیات[45] میں استعمال ہونے والے اینٹینا کو تداخل پیما[46] اینٹینا کہتے ہیں۔

شکل 14.12 میں دو عدد مختصر جفت قطب کے درمیان فاصلہ L ہے۔ دونوں کو ہم قدم برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ ضرب نقش کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے اس کا نقش

$$E = 2E_1 \cos\frac{\psi}{2} \tag{14.141}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\cos\theta$ βL $=$ ψ کے برابر ہے۔ ضرب نقش کے تحت E_1 انفرادی رکن کی نقش ہے جبکہ $\cos\frac{\psi}{2}$ دور کنی قطار کا نقش ہے۔ ہمیں میدان بالمقابل زاویہ سے غرض ہے۔ مساوات 14.48 مختصر جفت قطب کا نقش دیتا ہے جس میں میدان اور زاویے کا تعلق $\sin\theta$ ہے۔ اسی کو استعمال کرتے ہوئے تقابل پذیر نقش

$$E = \sin\theta\cos\frac{\psi}{2} = \sin\theta\cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\cos\theta\right) \tag{14.142}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ شکل 14.12 میں $L = 5\lambda$ کے لئے نقش دکھایا گیا ہے۔ زاویہ θ کا زاویہ تکملہ $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ استعمال کرتے ہوئے، پہلا صفر

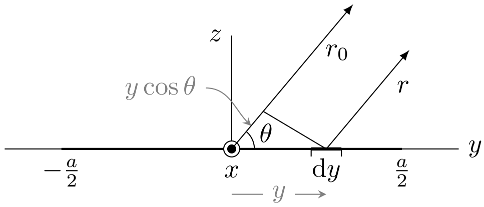
$$\frac{\pi L}{\lambda}\cos\theta = \frac{\pi L}{\lambda}\sin\gamma_{01} = \frac{\pi}{2}$$

کی صورت میں پایا جائے گا جس سے

$$\gamma_{01} = \sin^{-1}\frac{1}{2L/\lambda} \tag{14.143}$$

---

scanning antenna[43]
astronomy[44]
radio astronomy[45]
interferometer[46]



شکل 14.13: مستطیل سطحی اینٹینا

حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\lambda \gg L$ ہو تب پہلی صفر چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\gamma_{01} = \frac{1}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{57.3}{L/\lambda}\,\text{deg} \tag{14.144}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ یہ مساوات 14.130 میں دیے، n رکنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کے پہلی صفر چوڑائی کی آدھی قیمت ہے۔ ہلکی سیاہی کے نقطہ دار لکیر سے شکل میں مختصر جفت قطب کے نقش $\sin\theta$ کو واضح کیا گیا ہے۔

پانچ طول موج برابر L کی صورت میں مساوات 14.144 سے پہلی صفر چوڑائی $11.46°$ حاصل ہوتی ہے۔

ریڈیائی فلکیات میں فلکی اخراجی مادے کی شعاع کو تداخل پیما سے وصول کیا جاتا ہے۔ ان کی جسامت کا بہتر سے بہتر تخمینہ لگانے میں چوڑائی نقش کردار ادا کرتی ہے۔

مشق 14.1: $L = 20\lambda$ کی صورت میں تداخل پیما کی پہلی صفر چوڑائی حاصل کریں۔

جواب: $2.865°$

14.10 مستطیل سطحی اینٹینا

ہم متعدد تعداد کے نقطہ منبع پر مبنی مختلف اقسام کے اینٹینا دیکھ چکے ہیں۔ اگر نقطہ منبع کے صف در صف اتنے قریب قریب فرضی سطح پر رکھے جائیں کہ یہ علیحدہ علیحدہ منبع کی جگہ ایک مسلسل سطح نظر آئے تو ایسی صورت میں سطحی اینٹینا[47] حاصل ہوگا۔ ایسی ہی ایک مستطیلی سطح جس کی x سمت میں لمبائی x_1 اور y سمت میں لمبائی a ہے کو شکل 14.13 میں دکھایا گیا ہے۔ تصور کریں کہ اس سطح پر J_x کثافت برقی رو پائی جاتی ہے۔ یہ تصور کرتے ہوئے کہ سطح کے نیچے یعنی $z < 0$ خطے میں مقناطیسی میدان نہیں پایا جاتا، ایمپیئر کے دوری قانون کی مدد سے

$$H_y = -J_x \tag{14.145}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں H_y سطح کے انتہائی قریب بالائی جانب[48] مقناطیسی میدان ہے۔ سطحی اینٹینا کے دور میدان پر تبصرے سے پہلے ایک حقیقت پر غور کرتے ہیں۔

---

[47] continuous aperture

[48] یہاں فرض کیا گیا ہے کہ سطحی اینٹینا نچلی جانب اخراج نہیں کر رہی۔ اگر اینٹینا نچلی جانب بھی اخراج کرے تب $H_y = -0.5J_x$ لکھا جائے گا۔

فرض کریں کی خالی خلاء میں سطحی برقی و مقناطیسی موج پائی جاتی ہے۔ ہائی گن[49] کے اصول کے تحت محاذ موج پر ہر نقطہ، منبع موج کا کردار ادا کرتا ہے۔ یوں سطح پر چھوٹے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ پر خطی قطبی برقی میدان E_x بطور منبع کردار ادا کرے گا۔ سطح کے برقی میدان E_x سے یہاں کا مقناطیسی میدان

$$H_y = \frac{E_x}{Z_0} \tag{14.146}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں Z_0 خطے کی قدرتی رکاوٹ $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ ہے۔

مساوات 14.145 اور مساوات 14.146 دو مختلف وجوہات کی بنا پر پیدا مقناطیسی میدان ظاہر کرتے ہیں۔ دور سے ان دونوں میں کسی قسم کا کوئی فرق نہیں دیکھا جا سکتا لہٰذا ان دونوں سے پیدا موج میں بھی کوئی فرق نہیں پایا جائے گا۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطحی اینٹینا کا دور میدان اور خلاء میں فرضی سطح پر موج کا دور میدان بالکل یکساں ہوں گے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی سطح پر کثافت برقی رو J_x کو خالی خلاء میں مقناطیسی میدان H_y یا برقی میدان E_x سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$-J_x = H_y = \frac{E_x}{Z_0} \tag{14.147}$$

اس طرح مندرجہ ذیل تبصرہ ان دونوں کے لئے قابل قبول ہے۔

آئیں اب واپس اصل موضوع پر آتے ہیں۔ تصور کریں کہ شکل 14.13 کے سطحی اینٹینا پر x سمت میں نہ تبدیل ہوتی جبکہ y سمت میں تبدیل ہوتی کثافت برقی رو $J_x(y)$ پائی جاتی ہے۔ پوری سطح پر کثافت برقی رو ہم قدم ہے۔

مساوات 14.25 میں $I_0 = J_x\,\mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}l = \mathrm{d}x$ پر کرنے سے A حاصل کرتے ہوئے، چھوٹے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ سے دور تفرق میدان کو $E = -j\omega A$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}E &= -j\omega[\mathrm{d}A_x] \\
&= -j\omega\frac{\mu_0 I_0\,\mathrm{d}l\,e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r} \\
&= -j\omega\frac{\mu_0 J_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r} \\
&= \frac{j\omega\mu_0 E(y)}{4\pi r Z_0}e^{j(\omega t-\beta r)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{14.148}$$

جہاں مساوات 14.147 کا سہارا لیا گیا ہے۔ پورے رقبے سے پیدا میدان سطحی تکمل سے حاصل ہو گا۔ رقبے کے وسط سے r_0 فاصلے اور θ زاویے پر میدان

$$E(\theta) = \frac{j\omega\mu_0 e^{j(\omega t-\beta r_0)}}{4\pi r_0 Z_0}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-x_1/2}^{x_1/2} E(y)e^{j\beta y\cos\theta}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{14.149}$$

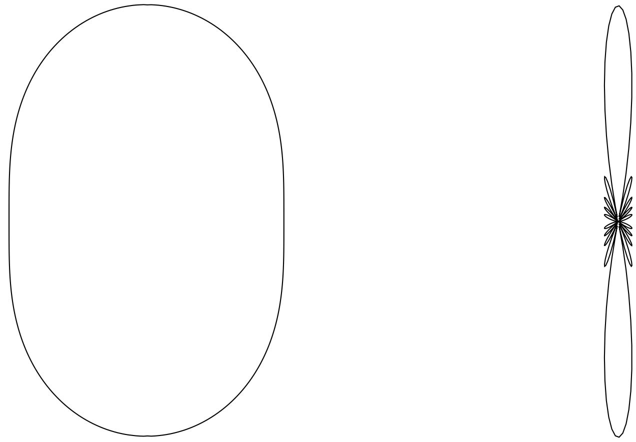
ہو گا جہاں $r \approx r_0$ لیا[50] گیا ہے۔ بیرونی تکمل لیتے اور $\frac{\omega\mu_0}{4\pi Z_0} = \frac{1}{2\lambda}$ پر کرتے ہوئے میدان کی حتمی قیمت $|E|$

$$E(\theta) = \frac{x_1}{2r_0\lambda}\int_{-a/2}^{a/2} E(y)e^{j\beta y\cos\theta}\,\mathrm{d}y \tag{14.150}$$

---

[49] Huygen's principle

[50] جیسے حصہ 14.3 میں دکھایا گیا ہے۔



الف: مستطیل سطحی اینٹینا کا $a=5\lambda$ کی صورت میں نقش   ب: مستطیل سطحی اینٹینا کا $a=\frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں نقش

شکل 14.14: مستطیل سطح کے نقش

حاصل ہوتی ہے جہاں $\left|je^{(\omega t-\beta r_0)}\right|=1$ لیا گیا ہے۔ پوری سطح پر یکساں میدان $E(y)=E_a$ کی صورت میں

$$E(\theta)=\frac{x_1E_a}{2r_0\lambda}\int\limits_{-a/2}^{a/2}e^{j\beta y\cos\theta}\,\mathrm{d}y \tag{14.151}$$

لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}E(\theta)&=\frac{x_1aE_a}{2r_0\lambda}\frac{\sin[(\beta a/2)\cos\theta]}{(\beta a/2)\cos\theta}\\&=\frac{E_aS_{\text{اخراجی}}}{2r_0\lambda}\frac{\sin[(\beta a/2)\cos\theta]}{(\beta a/2)\cos\theta}\end{aligned} \tag{14.152}$$

5139 حاصل ہو گا جہاں $S_{\text{اخراجی}}$ سطح کا رقبہ ہے۔

زیادہ سے زیادہ میدان $\theta=90^\circ$ پر

$$E(\theta)_{\text{بلند تر}}=\frac{E_aS_{\text{اخراجی}}}{2r_0\lambda}\qquad\text{دو رُخی اخراج} \tag{14.153}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\theta=270^\circ$ جانب اخراج صفر ہو تب $\theta=90^\circ$ جانب اخراج دگنی

$$E(\theta)_{\text{بلند تر}}=\frac{E_aS_{\text{اخراجی}}}{r_0\lambda}\qquad\text{یک رُخی اخراج} \tag{14.154}$$

5140 ہو گی۔ اس میدان کو $a=5\lambda$ اور $a=\frac{\lambda}{2}$ کے لئے شکل 14.14 میں دکھایا گیا ہے۔

صفحہ 543 پر مساوات 14.121

$$E(\theta)=E_0\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$$

یکساں غیر سمتی n رکنی قطار کا دور میدان دیتی ہے جہاں $(\psi = \beta d \cos\theta + \delta)$ ہے اور E_0 انفرادی رکن کا میدان ہے۔ چوڑائی جانب اخراجی قطار $\delta = 0$ کی صورت میں حاصل ہوتا ہے جس سے مندرجہ بالا مساوات

$$E(\theta) = E_0 \frac{\sin[(n\beta d/2)\cos\theta]}{\sin[(\beta d/2)\cos\theta]} \tag{14.155}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ قطار کی لمبائی a' لکھتے ہوئے، زیادہ قیمت کی n اور a' کی صورت میں $a' = (n-1)d \approx nd$ ہو گا۔ اگر ہم اپنی توجہ $\theta = 90^\circ$ کے قریب رکھیں تب مساوات 14.155 کو

$$E(\theta) = nE_0 \frac{\sin[(\beta a'/2)\cos\theta]}{(\beta a'/2)\cos\theta} \tag{14.156}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات کا مساوات 14.152 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ a لمبائی کی سطحی اینٹینا اور n رکنی a' لمبی چوڑائی اخراجی قطار کے مرکزی شعاع ایک جیسے ہیں۔ مزید $nE_0 = \frac{E_a S_{\text{اخراجی}}}{2r_0\lambda}$ کی صورت میں دونوں کے میدان بالکل برابر حتمی قیمت رکھتے ہیں۔

14.11 درز کا دور میدان بذریعہ فوریئر بدل

ہم کسی بھی کثافت برقی رو کا پیدا کردہ دور میدان حاصل کرنا دیکھ چکے ہیں۔ بعض اوقات ہمیں کثافت برقی رو معلوم نہیں ہوتی البتہ کسی مخصوص سطح پر میدان معلوم ہوتا ہے۔ اس طرح کے مسئلے کی مثال مستطیل پیپا اینٹینا ہے۔ مستطیل موج کا منہ کھول کر مستطیل پیپا اینٹینا حاصل کیا جاتا ہے۔ اس اینٹینا کے منہ پر کسی قسم کی موصل چادر نہیں نسب کی جاتی لہٰذا اس کے کھلے منہ کے کناروں پر برقی رو پائی جاتی ہے جس کی شکل جاننا دشوار ہے۔ البتہ پیپے کی منہ پر برقی میدان جاننا نسبتاً آسان کام ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ ایسی صورت میں دور میدان قریبی میدان کے فوریئر بدل[51] سے حاصل ہوتا ہے۔ آئیں پہلے فوریئر بدل کی یاد دوبارہ تازہ کریں۔

آپ فوریئر بدل جوڑی سے بخوبی واقف ہوں گے۔ کسی بھی تفاعل $w(x)$ جس کا آزاد متغیرہ x ہو کا فوریئر بدل $W(k_x)$

$$W(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{jk_x x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{فوریئر بدل} \tag{14.157}$$

لکھا[52] جاتا ہے جہاں $W(k_x)$ کا آزاد متغیرہ k_x ہے۔ یوں کسی بھی تفاعل کا آزاد متغیرہ تبدیل کرنا ممکن ہے۔ اسی طرح $W(k_x)$ کا الٹ فوریئر بدل $w(x)$

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(k_x) e^{-jk_x x}\,\mathrm{d}k_x \qquad \text{فوریئر الٹ بدل} \tag{14.158}$$

ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات فوریئر بدل جوڑی کہلاتے ہیں۔ مساوات 14.157 کے دونوں اطراف کا k_x کے ساتھ تفرق

$$\frac{\mathrm{d}W(k_x)}{\mathrm{d}k_x} = jk_x \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{jk_x x}\,\mathrm{d}x = jk_x W(k_x) \tag{14.159}$$

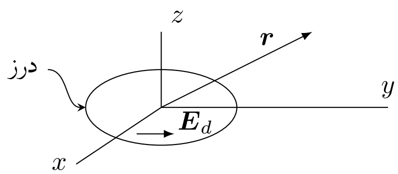
لکھا جا سکتا ہے۔ دائیں ہاتھ تفرق لیتے ہوئے دھیان رہے کہ تکمل کے اندر k_x کا کردار بالکل ایک مستقل کا ہے لہٰذا تفرق کو تکمل کے اندر لے جایا جا سکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 14.158 کا x کے ساتھ تفرق لینے سے

$$\frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{-jk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(k_x) e^{-jk_x x}\,\mathrm{d}k_x = -jk_x w(x) \tag{14.160}$$

---

[51] Fourier transform pair

[52] عموماً مساوات 14.157 میں تکمل کو $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ سے ضرب دے کر لکھا جاتا ہے۔ اسی طرح مساوات 14.158 میں بھی $\frac{1}{2\pi}$ کی جگہ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ سے تکمل کو ضرب دیا جاتا ہے۔ اس طرح جوڑی کے دونوں مساوات تقریباً یکساں شکل اختیار کر لیتے ہیں۔



شکل 14.15: سطح z=0 پر درز میں برقی میدان $\boldsymbol{E}_a$ کو دور میدان فوریئر بدل ہے۔

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$\frac{\mathrm{d}^2 W(k_x)}{\mathrm{d}k_x^2} = (jk_x)^2 W(k_x) = -k_x^2 W(k_x) \tag{14.161}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2} = (-jk_x)^2 w(x) = -k_x^2 w(x) \tag{14.162}$$

5148 بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

دو آزاد متغیرات پر مبنی تفاعل $u(x,y)$ کا فوریئر بدل

$$U(k_x,k_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{jk_x x + jk_y y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{14.163}$$

لکھا جاتا ہے۔ اس کا واپسی فوریئر بدل

$$u(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(k_x,k_y) e^{-jk_x x - jk_y y}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y \tag{14.164}$$

ہو گا۔ مساوات 14.163 کے تفرق لے کر

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial k_x} &= jxU\\
\frac{\partial U}{\partial k_y} &= jyU\\
\frac{\partial^2 U}{\partial k_x^2} &= -x^2 U\\
\frac{\partial^2 U}{\partial k_x \partial k_y} &= -xyU
\end{aligned} \tag{14.165}$$

اور مساوات 14.164 کے تفرق سے

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -jk_x u\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -jk_y u\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -k_x^2 u\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -k_x k_y u
\end{aligned} \tag{14.166}$$

فوریئر بدل کی یاد تازہ کرنے کے بعد اصل موضوع پر واپس آتے ہیں۔ شکل 14.15 میں $z=0$ سطح پر درز دکھایا گیا ہے جس پر برقی میدان $\boldsymbol{E}_d$ ~~ہے~~۔ یہ میدان $z<0$ خطے میں موجود کثافت برقی رو کی وجہ سے پایا جاتا ہے۔ ہمیں اس کثافت برقی رو کی ضرورت نہیں پڑے گی۔ درز کا رقبہ S_d ہے۔ آئیں درز پر
5151 موجود میدان سے خالی خلاء میں کہیں دور پیدا میدان دریافت کریں۔

میکس ویل کی مساوات $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ کے گردش کو

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{E} - \nabla^2 \boldsymbol{E} &= -j\omega\mu_0 \nabla \times \boldsymbol{H}\\ &= -j\omega\mu_0(\boldsymbol{J} + j\omega\epsilon_0 \boldsymbol{E})\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں دوسری قدم پر $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ پر کیا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$ کے علاوہ $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = j\omega \boldsymbol{E}$ اور $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = j\omega \boldsymbol{H}$ کا بھی استعمال کیا گیا ہے۔ شکل 14.15 میں درز سے دور خالی خلاء میں نہ کوئی کثافت چارج پائی جاتی ہے اور نہ ہی کثافت برقی رو۔ یوں مندرجہ بالا مساوات میں دور مقام پر $\boldsymbol{J} = 0$ اور

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{14.167}$$

پر کرتے ہوئے

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k_0^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{14.168}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \tag{14.169}$$

لکھا گیا ہے۔ مساوات 14.167 اور مساوات 14.168 کو کارتیسی محدد میں یوں لکھا جائے گا۔

$$\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z} = 0 \tag{14.170}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\right)\boldsymbol{E}(x,y,z) = 0 \tag{14.171}$$

ان دو مساوات کا فوریئر بدل مساوات 14.166 کی مدد سے لکھتے ہیں

$$k_x E_x(k_x,k_y,k_z) + k_y E_y(k_x,k_y,k_z) + j\frac{\partial E_z(k_x,k_y,k_z)}{\partial z} = 0 \tag{14.172}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k_0^2 - k_x^2 - k_y^2)\right]\boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z) = 0 \tag{14.173}$$

جہاں $u(x,y,z) = E(x,y,z)$ لیتے ہوئے $U(k_x,k_y,k_z) = E(k_x,k_y,k_z)$ لکھا گیا ہے۔ یہاں بہتر ہوتا کہ برقی میدان اور اس کے فوریئر[5152] بدل کے لئے میں علیحدہ علیحدہ علامات استعمال کرتا لیکن امید کی جاتی ہے کہ $E(x,y,z)$ کے آزاد متغیرات (x,y,z) سے $E(x,y,z)$ کو اصل تفاعل[5153] اور $E(k_x,k_y,k_z)$ کے آزاد متغیرات (k_x,k_y,k_z) سے $E(k_x,k_y,k_z)$ کو فوریئر بدل سمجھا جا سکتا ہے۔ [5154]

مندرجہ بالا مساوات میں

$$k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 = k_z^2 \tag{14.174}$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z)}{\partial z^2} + k_z^2 \boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z) = 0 \tag{14.175}$$

حاصل ہوتا ہے جس کے حل $e^{\mp jk_z z}$ صورت رکھتے ہیں۔ ان میں $e^{-jk_z z}$ کارتیسی نظام میں بڑھتے z جانب حرکت کرتی موج ہے جبکہ $e^{jk_z z}$ گھٹتے z جانب حرکت کرتی موج ہے۔ ہم پہلے جواب کو تسلیم کرتے ہیں لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کا حل

$$\boldsymbol{E}(k_x,k_y,k_z) = \boldsymbol{f}(k_x,k_y)e^{-jk_z z} \tag{14.176}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{f}(k_x, k_y)$ دریافت کرنا باقی ہے۔

مساوات 14.176 کو مساوات 14.172 میں پر کرنے سے

$$k_x f_x + k_y f_y + k_z f_z = 0 \tag{14.177}$$

یعنی

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{f} = 0 \tag{14.178}$$

ملتا ہے جہاں $\boldsymbol{k} = k_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + k_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + k_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{f} = f_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + f_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + f_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھے گئے ہیں۔ مساوات 14.178 کے تحت f_x ، f_y اور f_z تینوں آزاد متغیرات نہیں ہو سکتے۔ ان میں کوئی دو آزاد ہونے کی صورت میں تیسرے جزو کو ان دو اجزاء سے حاصل کیا جا سکتا ہے لہٰذا تیسرا جزو تابع متغیرہ ہو گا۔ یہ حقیقت برقی میدان پر بھی لاگو ہوتی ہے جہاں اس حقیقت کو $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ لکھا جاتا ہے۔

اصل برقی میدان $\boldsymbol{E}(x, y, z)$ حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{E}(k_x, k_y, k_z)$ کا الٹ فوریئر بدل لیتے ہیں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(k_x, k_y, k_z) e^{-jk_x x - jk_y y} \, \mathrm{d}k_x \, \mathrm{d}k_y \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(k_x, k_y) e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z} \, \mathrm{d}k_x \, \mathrm{d}k_y\end{aligned}$$

جہاں مساوات 14.176 استعمال کیا گیا ہے۔ کار تیسی محدد میں سمتی فاصلے کو $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$k_x x + k_y y + k_z z = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}$$

لکھتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات کو

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(k_x, k_y) e^{-j\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}} \, \mathrm{d}k_x \, \mathrm{d}k_y \qquad \text{درز کا میدان} \tag{14.179}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں تکمل کے اندر $\boldsymbol{f} e^{-j\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}}$ حرکت کرتی موج کو ظاہر کرتی ہے۔ یوں $z > 0$ خطے میں میدان حرکت کرتی موج ہو گی۔ مساوات 14.174 سے واضح ہے کہ $|\boldsymbol{k}| = k_0$ کے برابر ہے۔ یوں اگر $k_x^2 + k_y^2 > k_0^2$ ہو تب k_z خیالی مقدار ہو گا۔ ایسی صورت میں موج z سمت میں $e^{-k_z z}$ کی رفتار سے گھٹے گی جو فنا پذیر موج کی نشانی ہے۔ یہ فنا پذیر موج درز کے سامنے قریبی میدان کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر k_x اور k_y کو کار تیسی محدد پر دکھایا جائے تو جو قیمت k_0 رداس کے دائرے سے باہر ہو، وہ فنا پذیر موج کو ظاہر کریں گے جبکہ اس دائرے کے اندر قیمتیں دور میدان کو ظاہر کرتی ہیں۔

مساوات 14.179 کے حاصل کردہ میدان کی قیمت سطح $z = 0$ پر عین شکل 14.15 کے میدان برابر ہو گی۔ اس شکل میں میدان $z = 0$ سطح کے متوازی ہے۔ یوں اگر $\boldsymbol{f}$ کے x اور y اجزاء کو $\boldsymbol{f}_m$ سے ظاہر کیا جائے (یعنی $\boldsymbol{f}_m = f_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + f_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$) تب

$$\boldsymbol{E}_d(x, y) = \boldsymbol{E}_m(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}_m(k_x, k_y) e^{-jk_x x - jk_y y} \, \mathrm{d}k_x \, \mathrm{d}k_y \tag{14.180}$$

ہو گا۔ مساوات 14.180 فوریئر بدل کی مساوات ہے لہٰذا اس کا الٹ فوریئر بدل یوں

$$\boldsymbol{f}_m(k_x, k_y) = \iint_{S_d} \boldsymbol{E}_d(x, y) e^{jk_x x + jk_y y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{14.181}$$

لکھنا ممکن ہے۔ اس مساوات کے تحت درز پر میدان کا فوریئر بدل دور میدان کو ظاہر کرتی ہے۔ مساوات 14.178 سے

$$f_z = \frac{-\boldsymbol{k}_m \cdot \boldsymbol{f}_m}{k_z} = \frac{-k_x f_x - k_y f_y}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}} \tag{14.182}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات مل کر $\boldsymbol{f}$ کے تینوں اجزاء دیتے ہیں۔

مساوات 14.181 اور مساوات 14.181 سے حاصل $\boldsymbol{f}(k_x, k_y)$ کو مساوات 14.179 میں پر کرتے ہوئے درز کا میدان حاصل کیا جاتا ہے۔ آئیں اب مساوات 14.179 کا حل حاصل کریں۔

ہمیں دور میدان سے غرض ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 14.179 کو صرف دور میدان کے لئے حل کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر جو ترکیب بروئے کار لائی جائے گی اس کی بنیاد اس حقیقت پر ہے کہ r کی قیمت زیادہ ہونے کی صورت میں $e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ نہایت تیزی سے ارتعاش کرتا تفاعل ہو گا۔ یوں مساوات 14.179 میں k_xk_y سطح کے مختلف نقطوں پر اس تفاعل کی قیمتیں ایک دونوں کو ختم کریں گی۔ اس تفاعل میں r کی قیمت زیادہ ہونے کی وجہ سے k_xk_y سطح پر قریب ترین نقطوں کے درمیان بھی اتنا زاویائی فرق $j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ پایا جاتا ہے کہ تکمل میں ان کا مجموعہ قابل نظر انداز ہوتا ہے۔ البتہ ایسے مقام جہاں زاویائی فرق نہ پایا جاتا ہو، دور میدان میں کردار ادا کرتے ہیں۔ ان مقام جنہیں ساکن نقطے[53] کہا جاتا ہے کو مندرجہ ذیل مساوات سے حاصل کیا جاتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial k_x} &= 0\\
\frac{\partial(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial k_y} &= 0
\end{aligned}
\tag{14.183}
$$

ساکن نقطوں پر $e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ کی قیمت میں ٹھہراو پایا جاتا ہے لہٰذا تکمل میں ایسے مقام کا مجموعہ دور میدان میں کردار ادا کرتا ہے۔ ساکن مقام k_1k_2 سطح پر چھوٹا خطہ ہو گا۔ اس چھوٹے خطے میں $\boldsymbol{f}(k_x, k_y)$ کے قیمت میں تبدیلی کو رد کرتے ہوئے اسے اٹل تصور کیا جاتا ہے۔ اس طرح $\boldsymbol{f}(k_x, k_y)$ کو تکمل کے باہر منتقل کیا جاتا ہے۔ بقایا تکمل میں صرف $e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ رہ جاتا ہے جسے حاصل کرنا ممکن ہے۔

اگر $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_xx + k_yy + k_zz$ میں کروی محدد کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے $x = r\sin\theta\cos\phi$ ، $y = r\sin\theta\sin\phi$ اور $z = r\cos\theta$ پر کئے جائیں تو

$$
\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = r(k_x\sin\theta\cos\phi + k_y\sin\theta\sin\phi + \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}\cos\theta)
\tag{14.184}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.183 استعمال کرتے ہوئے ساکن نقطہ

$$
k_x = k_1 = k_0\sin\theta\cos\phi
\tag{14.185}
$$

$$
k_y = k_2 = k_0\sin\theta\sin\phi
\tag{14.186}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ ساکن نقطے کے قریب ٹیلر تسلسل[54] کے استعمال سے ہم لکھ سکتے ہیں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} &= k_0r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}{\partial k_x^2}(k_x-k_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}{\partial k_y^2}(k_y-k_2)^2 + \frac{\partial^2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}{\partial k_x\partial k_y}(k_x-k_1)(k_y-k_2)\\
&= k_0r - (Au^2 + Bv^2 + Cuv)
\end{aligned}
$$

جہاں $u = k_x - k_1$ ، $v = k_y - k_2$ ہیں جبکہ

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{r}{2}\left(\frac{1}{k_0} + \frac{k_1^2}{k_0^3\cos^2\theta}\right)\\
B &= \frac{r}{2}\left(\frac{1}{k_0} + \frac{k_2^2}{k_0^3\cos^2\theta}\right)\\
C &= \frac{k_1k_2r}{k_0^3\cos^2\theta}
\end{aligned}
\tag{14.187}
$$

---

[53] stationary points
[54] Taylor series

ہیں۔چونکہ $\frac{\partial}{\partial k_x}=0$ اور $\frac{\partial}{\partial k_y}=0$ ہیں لہٰذا انہیں بالا ٹیلر تسلسل میں شامل نہیں کیا گیا۔ 5169

ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.179 کو مندرجہ ذیل صورت میں لکھنا ممکن ہے

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi^2}\boldsymbol{f}(k_0\sin\theta\cos\phi, k_0\sin\theta\sin\phi)\iint\limits_{\Delta s} e^{j(Au^2+Bv^2+Cuv)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{14.188}$$

جہاں تکمل ساکن نقطے پر چھوٹی سطح Δs پر حاصل کیا جاتا ہے اور جہاں $\boldsymbol{f}$ کی قیمت اٹل تصور کرتے ہوئے ساکن نقطے پر $\boldsymbol{f}$ کی قیمت لی گئی ہے۔یہاں ایک مرتبہ دوبارہ اس حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں کہ چونکہ A ، B اور C کی قیمتیں r کے مماثل ہیں لہٰذا یہ قیمتیں بھی بہت بڑی ہوں گی۔یوں u اور v کے تبدیلی سے مندرجہ بالا تکمل میں A ، B اور C پر منحصر تفاعل بھی تیزی سے ارتعاش کرے گی جس کی وجہ سے مختلف نقطوں پر تفاعل آپس میں جمع نہ ہو پائے گا۔اس حقیقت کی بنا پر اگر تکمل کو لامحدود سطح پر لیا جائے تو حاصل جواب پر کوئی اثر نہیں پڑنا چاہیے۔ایسا ہی کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات میں

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{j(Au^2+Bv^2+Cuv)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{14.189}$$

کا حل حاصل کرتے ہیں۔ہم

$$Au^2+Bv^2+Cuv=\left(\sqrt{A}u+\frac{Cv}{2\sqrt{A}}\right)^2-\frac{C^2v^2}{4A}+Bv^2$$

لکھ کر $\sqrt{A}u+\frac{Cv}{2\sqrt{A}}=w$ پر کرتے ہوئے

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{jw^2}e^{\frac{j(4AB-C^2)v^2}{4A}}\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{A}}\,\mathrm{d}v \tag{14.190}$$

لکھ سکتے ہیں۔ہم یہاں پہلے سے معلوم تکمل

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{j\gamma(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}e^{j\frac{\pi}{4}} \tag{14.191}$$

کا استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{jw^2}e^{\frac{j(4AB-C^2)v^2}{4A}}\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{A}}\,\mathrm{d}v&=\frac{j2\pi}{\sqrt{4AB-C^2}}\\&=j2\pi\frac{k_0}{r}\cos\theta\end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں۔مساوات 14.187 میں دئے مستقل پر کرتے ہوئے یوں مساوات 14.179 کا حل

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\approx\frac{jk_0\cos\theta}{2\pi r}e^{-jk_0 r}\boldsymbol{f}(k_0\sin\theta\cos\phi, k_0\sin\theta\sin\phi) \tag{14.192}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\boldsymbol{f}_m(k_x,k_y)=\iint\limits_{S_a}\boldsymbol{E}_d(x,y)e^{jk_x x+jk_y y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{14.193}$$

کے برابر ہے۔

مساوات 14.192 کہتی ہے دور میدان، درز پر میدان کا فوریئر بدل ہے جہاں فوریئر بدل میں k_x کی جگہ $k_0 \sin\theta\cos\phi$ اور k_y کی جگہ $k_0 \sin\theta\sin\phi$ پر کیا جاتا ہے۔

چونکہ $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{f} = 0$ کے برابر ہے لہٰذا $\boldsymbol{k}$ کی سمت میں $\boldsymbol{f}$ کی قیمت صفر کے برابر ہے یعنی z محدد پر صرف f_x اور f_x پایا جائے گا۔ کروی محدد میں یوں

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = jk_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{2\pi r}\left[\boldsymbol{a}_\theta(f_x\cos\phi + f_y\sin\phi) + \boldsymbol{a}_\phi\cos\theta(f_y\cos\phi - f_x\sin\phi)\right] \tag{14.194}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مقناطیسی میدان $\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{H}} = Z_0$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 14.10: مستطیل درز کی x سمت میں لمبائی $2a$ ہے جبکہ y سمت میں اس کی لمبائی $2b$ ہے۔ درز $z = 0$ پر پایا جاتا ہے جبکہ اس پر میدان $\boldsymbol{E}_d = E_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ ہے۔ دور میدان حاصل کریں۔

حل: پہلے $\boldsymbol{f}_m$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_m &= E_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} e^{jk_x x + jk_y y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= 4abE_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\frac{\sin k_x a}{k_x a}\frac{\sin k_y b}{k_y b}\\
&= 4abE_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\frac{\sin k_0 a\sin\theta\cos\phi}{k_0 a\sin\theta\cos\phi}\frac{\sin k_0 b\sin\theta\sin\phi}{k_0 b\sin\theta\sin\phi}\\
&= 4abE_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\frac{\sin u}{u}\frac{\sin v}{v}
\end{aligned}$$

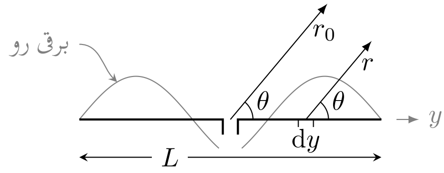
اب دور میدان مساوات 14.194 سے لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{jk_0 4abE_0}{2\pi r}e^{-jk_0 r}\frac{\sin u}{u}\frac{\sin v}{v}(\boldsymbol{a}_\theta\cos\phi - \boldsymbol{a}_\phi\sin\phi\cos\theta)$$

14.12 خطی اینٹینا

مختصر جفت قطب ہم دیکھ چکے ہیں جہاں جفت قطب کی لمبائی طول موج سے بہت کم $l \ll \lambda$ تھی۔ متعدد تعداد کے نقطہ منبع کو سیدھ میں قریب قریب رکھنے سے کسی بھی لمبائی کا اینٹینا حاصل کیا جا سکتا ہے۔ آئیں ایسی لمبی اینٹینا پر غور کریں۔ اینٹینا پر سائن نما برقی رو تصور کی جائے گی۔

شکل 14.16 میں L لمبائی کا اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بالکل درمیان سے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ اینٹینا کے دونوں بالکل یکساں نصف اطراف میں برقی رو بھی ہم شکل ہے۔ ہم L کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں $\mathrm{d}y$ کو انفرادی جفت قطب تصور کرتے ہوئے ان سب کے میدان کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے اس اینٹینا کا دور میدان حاصل کریں گے۔



شکل 14.16: خطی اینٹینا پر سائن نما برقی رو پائی جاتی ہے۔

تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ ایسی اینٹینا میں برقی رو

$$I = \begin{cases} I_0 \sin\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}\left(\dfrac{L}{2}+y\right)\right] & y<0 \\ I_0 \sin\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}\left(\dfrac{L}{2}-y\right)\right] & y>0 \end{cases} \tag{14.195}$$

صورت رکھتی ہے۔ مختصر جفت قطب کی لمبائی کو $\mathrm{d}y$ اور اس کے دور میدان کو $\mathrm{d}E_\theta$ لکھتے ہوئے مساوات 14.38

$$\mathrm{d}E_\theta = j\frac{30I\beta\,\mathrm{d}y}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{14.196}$$

یعنی

$$\mathrm{d}E_\theta = \frac{j60\pi e^{j(\omega t-\beta r_0)}}{r_0\lambda}\sin\theta I e^{j\beta y\cos\theta}\,\mathrm{d}y \tag{14.197}$$

دیتی ہے۔ یوں L لمبے اینٹینا کا میدان

$$E_\theta = k\sin\theta\int\limits_{-L/2}^{L/2} I e^{j\beta y\cos\theta}\,\mathrm{d}y \tag{14.198}$$

ہو گا جہاں

$$k = \frac{j60\pi e^{j(\omega t-\beta r_0)}}{r_0\lambda} \tag{14.199}$$

لکھا گیا ہے۔ مساوات 14.195 استعمال کرتے اور تکمل لیتے ہوئے

$$E_\theta = \frac{j60[I_0]}{r_0}\left\{\frac{\cos[(\beta L\cos\theta)/2]-\cos(\beta L/2)}{\sin\theta}\right\} \quad \text{خطی اینٹینا کی عمومی مساوات} \tag{14.200}$$

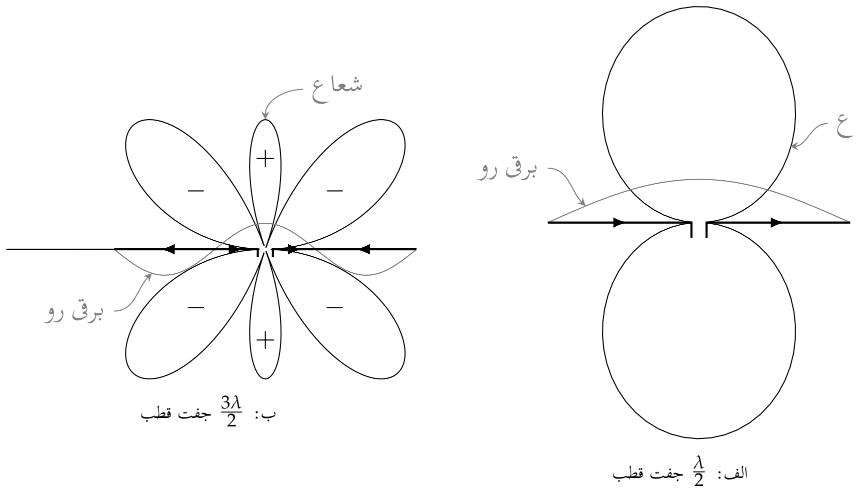
حاصل ہوتا ہے جہاں $[I_0] = I_0 e^{j(\omega t-\beta r_0)}$ تاخیری برقی رو ہے۔ $\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب کی صورت میں اسے

$$E_\theta = \frac{j60[I_0]}{r_0}\frac{\cos[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \quad \frac{\lambda}{2}\ \text{جفت قطب} \tag{14.201}$$

5183 لکھا جا سکتا ہے۔

میدان کی شکل مساوات 14.200 کے دائیں جانب قوسین میں بند جزو پر منحصر ہے جسے $\frac{\lambda}{2}$ جفت قطب کی صورت میں

$$E_\theta = \frac{\cos[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \quad \frac{\lambda}{2}\ \text{جفت قطب} \tag{14.202}$$



شکل 14.17: 0.5λ اور 1.5λ جفت قطب کے دور میدان۔

اور 1.5λ جفت قطب کی صورت میں

$$E_\theta=\frac{\cos[\frac{3\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta}\qquad \frac{3\lambda}{2}\ \text{جفت قطب} \tag{14.203}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 14.17 میں $\frac{\lambda}{2}$ اور $\frac{3\lambda}{2}$ جفت قطب اور ان کے شعاع نلکی محدد پر دکھائے گئے ہیں۔ جفت قطب پر برقی رو کی سمتیں تیر کی نشان سے دکھائے گئے ہیں۔ شکل-ب میں میدان کے شعاعوں میں $180°$ کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔

جفت قطب کو محور لیتے ہوئے دئے گئے نقش کو اس کے گرد گمانے سے تین رُخی نقش حاصل ہو گا۔

اوسط پوئنٹنگ سمتیہ کا بڑی رداس کے کرہ پر سطحی تکمل

$$P=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\lvert E_\theta\rvert^2}{2Z}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{14.204}$$

عددی طریقے سے حاصل کرتے ہوئے کل اخراجی مزاحمت R حاصل کی جاتی ہے۔اس مساوات میں $|E_\theta|$ کو مساوات 14.201 سے پر کرتے ہوئے

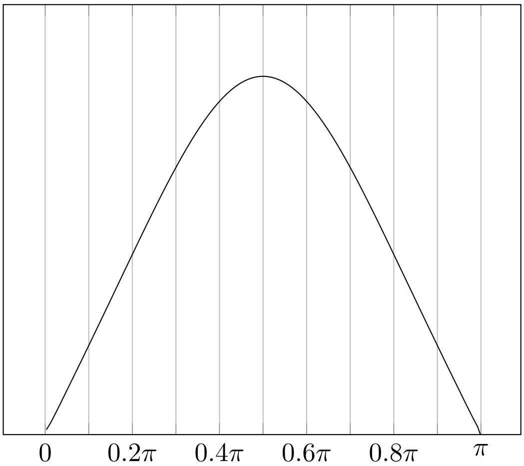
$$P=\frac{15I_0^2}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $Z_0=120\pi$ اور $r=r_0$ لکھے گئے ہیں۔بیرونی تکمل پہلے لیتے ہوئے

$$P=30I_0^2\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{14.205}$$

ملتا ہے۔اس مساوات کو عددی طریقے سے حل کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر اسے مجموعے

$$P=\sum_{i=0}^{n}30I_0^2\frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta}\Delta\theta=\sum_{i=0}^{n}p(\theta)\Delta\theta \tag{14.206}$$



شکل 14.18: اخراجی مزاحمت کا عددی حل۔

جدول 14.2: برابر زاویائی فاصلوں پر تفاعل کے قیمت۔

$30I_0^2\frac{\cos^2[\pi/2\cos\theta]}{\sin\theta}$	θ
0	0.0π
$00.573I_0^2$	0.1π
$04.457I_0^2$	0.2π
$13.492I_0^2$	0.3π
$24.677I_0^2$	0.4π
$30I_0^2$	0.5π
$24.677I_0^2$	0.6π
$13.492I_0^2$	0.7π
$04.457I_0^2$	0.8π
$00.573I_0^2$	0.9π
0	1.0π

کی شکل میں لکھتے ہیں جہاں

$$p(\theta)=30I_0^2\frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin\theta} \tag{14.207}$$

لکھا گیا ہے۔ شکل 14.18 میں کارتیسی محدد پر تفاعل $p(\theta)$ کو دکھایا گیا ہے۔ افقی محدد پر $0=\theta$ تا $\pi=\theta$ ہے جبکہ عمودی محدد پر $p(\theta)$ ہے۔ اگر $0=\theta$ تا 5188
π کو n برابر ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے تو ہر ٹکڑے کی چوڑائی $\frac{\pi}{n}$ ہو گی۔ گراف کے ایسے ہر ٹکڑے کو مستطیل تصور کیا جا سکتا ہے۔ ان تمام مستطیل کے رقبے جمع 5189
کرتے ہوئے تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ اسے کہتے ہیں عددی طریقہ۔ 5190

شکل میں $n=10$ لیا گیا ہے۔ یوں ہمیں دس مستطیل کے رقبے حاصل کرنے ہیں۔ ہر مستطیل کے دونوں اطراف کے قد کی اوسط قیمت کو مستطیل کا قد تصور کیا جائے گا۔ بائیں بازو سے شروع کرتے ہوئے پہلے مستطیل کے بائیں طرف کا قد 0 ہے جبکہ اس کے دائیں طرف کا قد $\theta=0.1\pi$ پر مساوات 14.207 سے

$$p_1(\theta)=30I_0^2\frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos(0.1\pi)]}{\sin(0.1\pi)}=0.573I_0^2 \tag{14.208}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح بقایا تمام نقطوں پر بھی قد حاصل کرتے ہوئے جدول 14.2 میں دیے گئے ہیں۔ 5191

شکل 14.18 میں بائیں سے دوسرے مستطیل ($\theta = 0.1\pi$ تا $\theta = 0.2\pi$) کا رقبہ

$$
\begin{aligned}
\text{رقبہ} &= \text{چوڑائی} \times \text{اوسط قد}\\
&= 0.1\pi \times \left(\frac{0.573I_0^2 + 4.457I_0^2}{2}\right)\\
&= 0.79I_0^2
\end{aligned}
$$

ہے۔

جدول 14.2 کی مدد سے کل رقبہ

$$
\begin{aligned}
P = 0.1\pi I_0^2 \Big(\frac{0}{2} &+ 0.573 + 4.457 + 13.492 + 24.677 + 30\\
&+24.677 + +13.492 + 4.457 + 0.573 + \frac{0}{2}\Big)
\end{aligned}
$$

یعنی

$$P = 36.5675I_0^2 \tag{14.209}$$

حاصل ہوتا ہے۔ سائن نما برقی رو کی چوٹی I_0 ہونے کی صورت میں مزاحمت R میں طاقت کا ضیاع $\frac{1}{2}I_0^2R$ ہوتا ہے لہٰذا ان دونوں کو برابر لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{2}I_0^2R_{\text{اخراجی}} = 36.5675I_0^2$$

$\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کے جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

$$R_{\text{اخراجی}} = 73.13\,\Omega \qquad \frac{\lambda}{2}\ \text{جفت قطب} \tag{14.210}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ وہ مزاحمت ہے جو اینٹینا کو طاقت مہیا کرنے یا اس سے طاقت وصول کرنے والے ترسیلی تار کو نظر آتی ہے۔ $\frac{\lambda}{2}$ اینٹینا کے اخراجی مزاحمت کا موازنہ مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت ($0.63\,\Omega$) کے ساتھ کریں جسے صفحہ 530 پر مثال 14.1 میں حاصل کیا گیا ہے۔

اینٹینا کی رکاوٹ میں $j42.5$ اوہم کا خیالی جزو ($Z = 73.1 + j42.5$) بھی پایا جاتا ہے۔ اینٹینا کی لمبائی چند فی صد کم کرنے سے خیالی جزو صفر کیا جا سکتا ہے، البتہ اس سے حقیقی جزو قدر کم ہو کر $70\,\Omega$ رہ جاتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کے لئے ضروری ہے کہ ایسے اینٹینا کو $70\,\Omega$ قدرتی رکاوٹ کے ترسیلی تار کے ساتھ جوڑا جائے۔ $\frac{3\lambda}{2}$ اینٹینا کا اخراجی مزاحمت $100\,\Omega$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 14.11: $\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کے خطی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

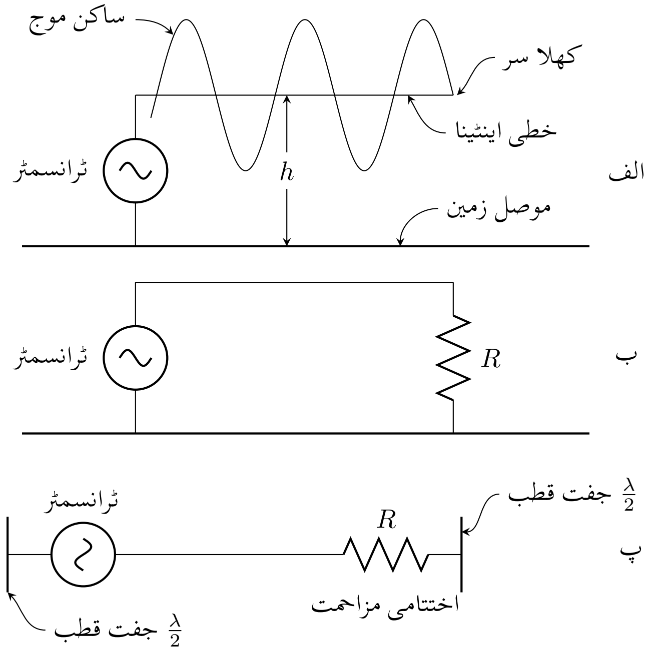
حل: مساوات 14.77 میں مساوات 14.202 پر کرتے ہوئے

$$D = \frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} = \frac{4\pi}{2\pi\int_0^{\pi}\frac{\cos^2[\frac{\pi}{2}\cos\theta]}{\sin^2\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta} \tag{14.211}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کا مساوات 14.205 سے موازنہ کرتے ہوئے، مساوات 14.209 میں حاصل کی گئی قیمت $36.5675I_0^2$ استعمال کرتے ہوئے

$$D = \frac{4\pi}{2\pi\left(\frac{36.5675I_0^2}{30I_0^2}\right)} = 1.64 \tag{14.212}$$

حاصل ہوتا ہے۔



شکل 14.19: مسلسل موج اینٹینا۔

14.13 چلتی موج اینٹینا

گزشتہ حصے میں خطی اینٹینا پر سائن نما برقی رو تصور کیا گیا۔ ایسی دبلی موصل تار، جس کا قطر d طول موج λ سے بہت کم ہو $d < \frac{\lambda}{100}$ اور جس کا آخری سرا کھلے سرے ہو، کے برقی رو کی شکل تقریباً ایسی ہی ہوتی ہے۔

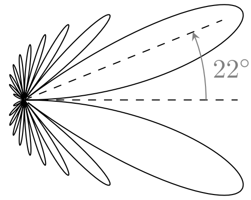
کئی طول موج لمبی خطی اینٹینا موصل زمین کے متوازی h اونچائی پر پائی جاتی ہے۔ جیسے شکل 14.19-الف میں دکھایا گیا ہے، اس کو بائیں جانب سے ٹرانسمٹر[55] طاقت مہیا کرتا ہے۔ خطی اینٹینا اور موصل زمین مل کر کھلے سرے ترسیلی تار کا کردار ادا کرتے ہیں۔ یوں کھلے سر پر آمدی برقی رو اور یہاں سے انعکاسی برقی رو مل کر ساکن موج کو جنم دیتے ہیں جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے۔ تار کے کھلے سر پر برقی رو کے ساکن موج کا صفر پایا جاتا ہے جبکہ $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ یہی برقی رو گزشتہ حصے میں خطی اینٹینا پر فرض کی گئی تھی۔

آئیں اب ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ کے برابر مزاحمت R، تار کے کھلے سر اور زمین کے درمیان جوڑیں۔ ایسا کرنے کے بعد اینٹینا پر انعکاسی موج پیدا نہیں ہو گی۔ تار میں قابل نظر انداز ضیاع کی صورت میں پوری لمبائی پر برقی رو کی قیمت یکساں ہو گی جبکہ لمبائی جانب بڑھتا زاویائی فرق پایا جائے گا۔ اس طرح قدرتی رکاوٹ کے برابر مزاحمت سے اختتام کردہ اینٹینا کو شکل 14.19-ب میں دکھایا گیا ہے۔ زمین سے دور خطی اینٹینا پر ایسی ہی مسلسل موج پیدا کرنے کی ترکیب شکل 14.19-پ میں دکھائی گئی ہے جہاں $\frac{\lambda}{2}$ اینٹینا کے وسطی نقطے کو زمین تصور کیا گیا ہے۔

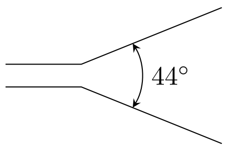
مسلسل موج کے اس خطی اینٹینا کو چھوٹے چھوٹے، سلسلہ وار جڑے، لمبائی جانب اخراجی جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسا شکل میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 14.127 غیر سمتی ارکان کے قطار کا تقابل پذیر نقش

$$E_n = \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$$

[55]transmitter



الف: خطی اختتام کردہ مسلسل موج اینٹینا۔



(ا) ب: دو مسلسل موج اینٹینا کو 44° پر رکھ کر بہتر سمتیت حاصل کی جاتی ہے۔

شکل 14.20

دیتی ہے جہاں لمبائی جانب اخراج کی صورت میں $\psi = \beta d(\cos\theta - 1)$ کے برابر ہے۔ اگر انفرادی رکن کا نقش E_0 ہو تب ضرب نقش کی ترکیب سے قطار کا نقش

$$E(\theta) = \frac{E_0}{n} \frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ انتہائی چھوٹے جفت قطب کا نقش $E_0 = \sin\theta$ ہے لہٰذا لمبے اینٹینا $L = d(n-1) \approx nd$ کے لئے

$$E(\theta) = \frac{\sin\theta}{n} \frac{\sin[\frac{\beta L}{2}(\cos\theta - 1)]}{\sin[\frac{\beta L}{2n}(\cos\theta - 1)]} \tag{14.213}$$

لکھا جائے گا۔ یہ اینٹینا لمبائی جانب اخراج کرتا ہے لہٰذا θ کی قیمت زیادہ نہیں ہو گی۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات کو

$$E(\theta) = \sin\theta \frac{\sin[\beta L/2(\cos\theta - 1)]}{\beta L/2(\cos\theta - 1)} \tag{14.214}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 14.20-الف میں $n = 20$ اور $d = \frac{\lambda}{4}$ کی صورت میں حاصل 4.75λ لمبائی کے اینٹینا کی شعاع دکھائی گئی ہے۔ مرکزی شعاع $\theta = 22^{\circ}$ پر پائی جاتی ہے۔ جیسا شکل-ب میں دکھایا گیا ہے، دو عدد ایسے اینٹینا کو آپس میں 44° کے میکانی زاویے پر رکھنے سے یک سمتی اینٹینا حاصل ہو گا جسے دو تار کے ترسیلی تار سے طاقت مہیا کی جا سکتی ہے۔ دونوں کے قریبی شعاع مل کر بہتر سمتیت دیتی ہے۔

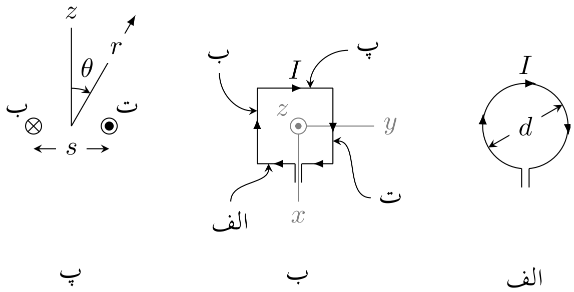
زمین کے متوازی اینٹینا کا عمودی شعاع حاصل کرنے کی خاطر زمین میں اینٹینا کے عکس کو بھی مد نظر رکھا جائے گا۔

14.14 چھوٹا گھیرا اینٹینا

شکل 14.21-الف میں d قطر کا گھیرا اینٹینا[56] دکھایا گیا ہے جس میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ دائرے کا قطر طول موج سے بہت کم $d \ll \lambda$ ہے لہٰذا پورے گول دائرے پر یک قیمت اور ہم قدم برقی رو تصور کی جا سکتی ہے۔ اس چھوٹے گول دائرے کو شکل-ب کا چکور تصور کرتے ہوئے، دور میدان حاصل کرتے ہیں۔ چکور اور گول دائرے کے رقبے برابر

$$S = s^2 = \frac{\pi d^2}{4} \tag{14.215}$$

[56] loop antenna



شکل 14.21: دائرہ اور چکور اینٹینا

لئے جاتے ہیں۔ چکور کے چار اطراف کو چار جفت قطب تصور کرتے ہوئے دور میدان حاصل کیا جائے گا۔ چکور کو کارتیسی محدد کے مرکز پر $z = 0$ سطح پر رکھتے ہوئے $x = 0$ سطح پر دور میدان حاصل کیا جائے گا۔ سطح $x = 0$ پر چکور کے اطراف الف اور پ برابر مگر الٹ سمت میں میدان پیدا کرتے ہیں لہٰذا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہے۔ اطراف ب اور ت بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں جن کا نقش $x = 0$ سطح پر غیر سمتی ہے لہٰذا انہیں دو غیر سمتی جفت قطب تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسا ہی شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے دور میدان

$$E(\theta) = E_2 e^{-j\frac{\psi}{2}} - E_4 e^{j\frac{\psi}{2}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں $E_2 = E_4$ اور $\psi = \beta s \sin\theta$ ہیں۔ یوں

$$E(\theta) = -j2E_2 \sin\left(\frac{\beta s}{2}\sin\theta\right)$$

لکھا جا سکتا ہے جسے $s \ll \lambda$ کی صورت میں

$$E(\theta) = -jE_2\beta s \sin\theta \tag{14.216}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ صفحہ 528 پر دیے گئے جدول 14.1 سے مختصر جفت قطب کے دور میدان E_θ کے حیطے کو E_2 کی جگہ پر کرتے ہوئے

$$E(\theta) = \frac{60\pi I l}{r\lambda}\beta s \sin\theta \tag{14.217}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 14.21-پ میں جفت قطب کی لمبائی $l = s$ ہے جبکہ چکور کا رقبہ $S = s^2$ ہے لہٰذا

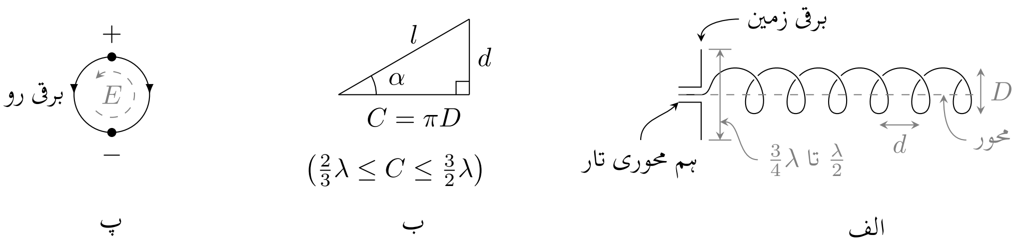
$$E(\theta) = \frac{120\pi^2 I}{r}\frac{S}{\lambda^2}\sin\theta \tag{14.218}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات S رقبے کے چھوٹے دائرے یا چکور کا دور میدان دیتی ہے۔ چکور کا قطر جتنا کم ہو یہ مساوات اتنا ہی زیادہ درست میدان دیتا ہے۔ حقیقت میں S رقبے کے کسی بھی شکل کے چھوٹے بند دائرے کا دور میدان یہی مساوات دیتا ہے۔

14.15 پیچ دار اینٹینا

طول موج برابر محیط کا پیچ دار لچھا لمبائی جانب اخراجی اینٹینا کا کام کرتا ہے۔ ایسے اینٹینا کی شعاع، دائری قطبیت رکھتی ہے۔ لچھے کی لمبائی اور اینٹینا کی سمتیت راست تناسب کا تعلق رکھتے ہیں۔ پیچ دار اینٹینا[57] کا قطر D، اس کا محیط C، چکر کے مابین فاصلہ d، چکر کی لمبائی l اور پیچ دار زاویہ α، اس کے اہم ناپ ہیں۔ ان تمام کو شکل

helical-beam antenna[57]



شکل 14.22: پیچ دار اینٹینا۔

14.22 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسا لچھے جس کا محیط $C = \pi D$ تقریباً ایک طول موج (1λ) لمبا ہو پر ایک مکمل موج پائی جائے گی۔ یوں نصف چکر پر برقی موج کا مثبت حصہ اور بقایا پر موج کا منفی حصہ پایا جائے گا۔ لچھے کے ایک چکر کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں اس پر برقی رو اور چارج دکھائے گئے ہیں جو میدان $\boldsymbol{E}$ پیدا کرتے ہیں۔ جیسے جیسے برقی رو کی موج اینٹینا پر آگے حرکت کرتی ہے ویسے ویسے میدان $\boldsymbol{E}$ گھومے گا جو اینٹینا کے محور پر دائری قطبیت[58] کو جنم دے گی۔ پیچ دار لچھا بطور مسلسل موج اینٹینا کردار ادا کرتا ہے اور اس کی خاصیت یہ ہے کہ اسے کسی مزاحمت سے اختتام پذیر کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ اس پر برقی رو بالکل مسلسل موج اینٹینا کی مانند ہوتی ہے۔ اینٹینا کے کھلے سر سے انعکاسی موج قابل نظر انداز ہونے کے ناطے، اس پر یکساں حیطے کے برقی رو کی موج خارجی جانب حرکت کرتی پائی جاتی ہے۔

پیچ دار اینٹینا کو لمبائی جانب اخراجی قطار تصور کیا جا سکتا ہے جہاں ہر چکر کو انفرادی منبع فرض کیا جاتا ہے۔ ضرب نقش کے اصول سے، انفرادی منبع کا نقش ضرب غیر سمتی ارکان کے قطار کا نقش،

$$E(\theta) = \cos\theta \frac{\sin(n\psi/2)}{\sin(\psi/2)} \tag{14.219}$$

اینٹینے کا نقش دیتا ہے۔ اس مساوات میں انفرادی چکر کے نقش کو $\cos\theta$ کے لگ بھگ تصور کیا گیا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں

$$\psi = \beta d \cos\theta - \frac{c\beta L}{v} \tag{14.220}$$

کے برابر ہے جہاں دو قریبی چکر کے مابین زاویائی فرق $\frac{c\beta L}{v}$ ہو گا جو ایک چکر گولائی L پر v رفتار سے حرکت کرتی موج کا زاویائی فرق ہے۔

مساوات 14.219 اور مساوات 14.214 کے موازنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ قدر مختلف ہیں۔ مساوات 14.219 میں $\cos\theta$ پایا جاتا ہے جس کی قیمت $\theta = 0$ پر زیادہ سے زیادہ ہے جو اینٹینا کا محور یعنی شعاعی اخراج کی سمت ہے۔ اس کے برعکس مساوات 14.214 میں $\sin\theta$ کا جزو ضربی پایا جاتا ہے جو اینٹینا کے محور پر صفر کے برابر ہے لہٰذا اس اینٹینا کی شعاع دو شاخی ہے اور اس کی سمتیت قدر کم ہے۔

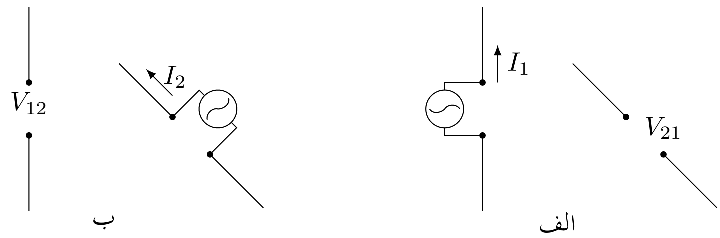
چونکہ میدان دائری قطبی اور محور کے گرد یکساں ہے لہٰذا یہی مساوات $E_\theta(\theta)$ کے علاوہ $E_\phi(\theta)$ کا نقش بھی دیتی ہے۔

کسی بھی لمبائی جانب اخراجی قطار میں تمام منبع کے میدان اینٹینا کے محور پر ہم قدم ہوتے ہیں جو

$$\psi = 0, \mp 2\pi, \mp 4\pi, \cdots \tag{14.221}$$

کی صورت میں ممکن ہوتا ہے۔ پیچ دار اینٹینا میں $\psi = -2\pi$ کے برابر ہے۔ ارکان کے مابین $\psi = -2\pi$ زاویائی فرق کی بنیاد پر حاصل نقش اور اصل پیچ دار اینٹینا کے ناپے گئے نقش میں خاصہ فرق پایا جاتا ہے۔ پیچ دار اینٹینا کی ناپی گئی سمتیت زیادہ ہے۔ ہنسن اور ووڈیارڈ[59] یہ ثابت کر چکے ہیں کہ n رکنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی زیادہ سے زیادہ سمتیت اس صورت حاصل ہوتی ہے جب اس کے ارکان کے مابین $\psi = -2\pi - \frac{\pi}{n}$ زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔ مساوات 14.219

[58] circular polarization
[59] Hansen and Woodyard



شکل 14.23: دو اینٹینا کے مابین باہمیت۔

میں ارکان کے مابین زاویائی فرق $\psi = -2\pi - \frac{\pi}{n}$ پر کرنے سے حقیقی اینٹینا کے ناپے نقش جیسا نقش حاصل ہوتا ہے۔اس سے ثابت ہوتا ہے کہ حقیقی اینٹینا پر دو قریبی چکر کے مابین یہی زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔اس نتیجے کو تسلیم کرتے ہوئے مساوات 14.220 سے

$$\psi = \beta d\cos\theta - \frac{c\beta L}{v} = -2\pi - \frac{\pi}{n} \tag{14.222}$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{d}{\lambda} + \frac{2n+1}{2n}} \tag{14.223}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں $C = \lambda$ ، $\alpha = 12°$ اور $n = 20$ کی صورت میں $\frac{v}{c} = 0.82$ ہو گی۔ حقیقی پیچ دار اینٹینا پر موج کی رفتار یہی ناپی جاتی ہے۔ایسا معلوم ہوتا ہے کہ پیچ دار اینٹینا خود بخود موج کی رفتار کو اس قیمت پر رکھتی ہے جس پر اینٹینا کی سمتیت زیادہ سے زیادہ حاصل ہو۔ تین سے زیادہ چکر پر مبنی پیچ دار اینٹینا یہ عمل $(5° < \alpha < 20°)$ اور $(\frac{3}{4}\lambda < C < \frac{3}{2}\lambda)$ تک حاصل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ چکر کی تعداد بڑھا کر سمتیت بڑھائی جا سکتی ہے۔

پیچ دار اینٹینا کی سمتیت تقریباً

$$D = 15\left(\frac{C}{\lambda}\right)^2 \frac{nd}{\lambda} \tag{14.224}$$

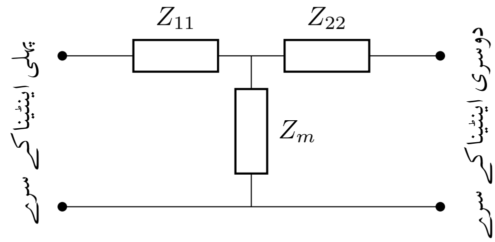
کے برابر ہے۔یوں $C = \lambda$ اور $\alpha = 12°$ کی صورت میں $D = 64$ ہو گی۔

پیچ دار زاویہ $\alpha = 12°$ اور $d = 0.213\lambda$ کی صورت میں طول موج میں تقریباً پانچ چکر پائیں جائیں گے لہٰذا 20 چکر کا اینٹینا $20 \times 0.213\lambda = 4.3\lambda$ لمبائی کا ہو گا۔اتنی لمبائی کے عام لمبائی جانب اخراجی اینٹینا کی سمتیت چار گنا سے بھی قدر کم ہوتی ہے۔

پیچ دار اینٹینا کی سمتیت زیادہ ہونے کا مطلب ہے کہ اس کی اخراجی سطح حقیقی سطح سے بہت زیادہ ہوتی ہے۔ مصنوعی سیاروں پر مبنی ذرائع ابلاغ میں پیچ دار اینٹینا کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

14.16 دو طرفہ کردار

اینٹینا شعاع خارج کرتی ہے اور یا اسے وصول کرتی ہے۔اینٹینا کے تمام خاصیت دو طرفہ ہیں۔یوں اس کی سمتیت، اخراجی رقبہ، نقش اور اخراجی مزاحمت دونوں (اخراجی اور وصولی) صورتوں میں برابر پائے جاتے ہیں۔البتہ اینٹینا پر برقی رو اخراجی اور وصولی صورت میں مختلف صورت رکھتی ہے۔



شکل 14.24: مساوی T دور۔

اینٹینا کی دوطرفہ خاصیت[60] پر شکل 14.23 کی مدد سے غور کرتے ہیں۔ دونوں اینٹینا کے درمیان غیر متحرک، خطی اور غیر سمتی خطہ پایا جاتا ہے۔ شکل-الف میں پہلے اینٹینا کو صفر رکاوٹ اور f تعدد کے منبع سے طاقت مہیا کی جاتی ہے جس سے پہلے اینٹینا کے داخلی سروں پر I_1 برقی رو اور دوسرے اینٹینا کے کھلے برقی سروں پر برقی دباو V_{21} پیدا ہوتی ہے۔ اگر منبع طاقت کو دوسرے اینٹینا کے ساتھ جوڑا جائے تب دوسرے اینٹینا میں I_2 برقی رو اور پہلے اینٹینا کے کھلے برقی سروں پر V_{12} برقی دباو پیدا ہو گا۔ شکل-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ چونکہ کسی بھی چار سروں والے برقی دور کا مساوی T دور بنانا ممکن ہے لٰہذا ان اینٹینا کے چار برقی سروں کے مابین بھی ایسا کرنا ممکن ہو گا۔ شکل 14.24 میں یہ مساوی دور دکھایا گیا ہے جہاں سے

$$
\begin{aligned}
V_{21} &= I_1 Z_m \\
V_{12} &= I_2 Z_m
\end{aligned}
$$

یا

$$\frac{V_{21}}{I_1} = \frac{V_{12}}{I_2} = Z_m \tag{14.225}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ دونوں اینٹینا کو برابر برقی رو $(I_1 = I_2)$ مہیا کرنے کی صورت میں

$$V_{21} = V_{12} \tag{14.226}$$

ہو گا۔

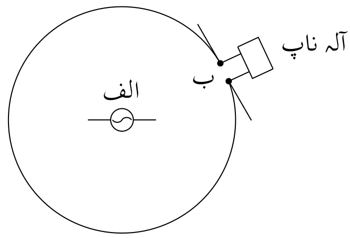
اینٹینا کی دوطرفہ خاصیت کے تحت اگر کسی ایک اینٹینا کو برقی رو I مہیا کی جائے جس سے کسی دوسرے اینٹینا میں برقی دباو V پیدا ہو تب دوسرے اینٹینا کو برقی رو I فراہم کرنے سے پہلے اینٹینا میں برقی دباو V پیدا ہو گا۔

دونوں اینٹینا کے مابین مشترکہ رکاوٹ Z_m دونوں اطراف سے برابر ہے۔

نقش

شکل 14.25 میں اینٹینا-الف شعاع خارج کر رہی ہے جبکہ اینٹینا-ب اس شعاع کو وصول کر رہی ہے۔ اینٹینا-الف ساکن ہے جبکہ اینٹینا-ب اس کے گرد گول دائرے پر گھوم رہی ہے۔ اینٹینا-ب پر پیدا برقی دباو، اینٹینا-الف کی نقش دے گی۔ اب اگر دائرے پر گھومتی اینٹینا شعاع خارج کرے اور ساکن اینٹینا اس شعاع کو وصول کرے تو اینٹینا کے دوطرفہ خاصیت کے تحت وہی نقش دوبارہ حاصل ہو گا۔ یوں کسی بھی اینٹینا کا اخراجی نقش اور وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں۔ اینٹینا کی دوطرفہ خاصیت اس کے نقش کے لئے بھی درست ثابت ہوتی ہے۔

[60] reciprocity



شکل 14.25: نقش کی ناپ۔

سمتیت اور اخراجی رقبہ

مساوات 14.77

$$D=\frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \tag{14.227}$$

کے تحت سمتیت صرف اور صرف نقش پر منحصر ہے اور ہم دیکھ چکے ہیں کہ اینٹینا کا اخراجی نقش اور اس کا وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں لہٰذا اس کی اخراجی سمتیت اور وصولی سمتیت بھی بالکل یکساں ہوں گے۔

اگر اخراجی سمتیت اور وصولی سمتیت برابر ہوں تب مساوات 14.101

$$D=\frac{4\pi}{\lambda^2}S_{\text{اخراجی}} \tag{14.228}$$

کے تحت اخراجی رقبہ اور وصولی رقبہ بھی برابر ہوں گے۔ اینٹینا کی دوطرفہ خاصیت سمتیت اور رقبے کے لئے بھی درست ثابت ہوتی ہے۔

اخراجی مزاحمت اور وصولی مزاحمت

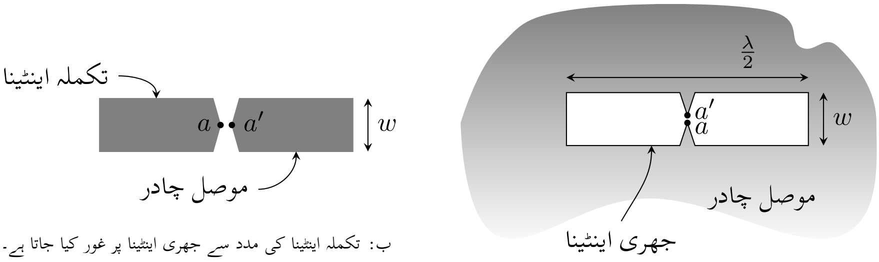
اخراجی اینٹینا کو صرف داخلی برقی سروں سے برقی رو مہیا کی جاسکتی ہے جبکہ وصولی اینٹینا کے تمام جسامت پر برقی دباو پیدا ہوتا ہے جس سے اینٹینا کی برقی رو عموماً اخراجی صورت سے مختلف ہو گی۔

اگر اینٹینا کو مختلف برقی رکاوٹوں کا مجموعہ تصور کیا جائے تب اگرچہ اس کے مختلف حصوں پر برقی رو مختلف ممکن ہے لیکن کسی بھی دو سروں کے مابین رکاوٹ تبدیل نہیں ہوتی۔ یوں اینٹینا کے برقی سروں کے مابین برقی رکاوٹ کا دارومدار اینٹینا میں برقی رو کی صورت پر نہیں ہوتی۔ اس کا اخراجی رکاوٹ اور وصولی رکاوٹ بالکل برابر ہوتے ہیں۔ اینٹینا کی دوطرفہ خاصیت یہاں بھی قابل استعمال ہے۔

14.17 جھری اینٹینا

وسیع موصل چادر میں $\frac{\lambda}{2}$ لمبائی کی جھری شکل 14.26-الف میں دکھائی گئی ہے۔ اگر aa' کو ترسیلی تار سے جوڑا جائے تو جھری کے گرد موصل چادر میں برقی رو کی وجہ سے شعاعی اخراج پیدا ہو گی۔ جھری کو از خود موصل چادر فرض کرتے اینٹینا تصور کیا جاسکتا ہے جس کی مدد سے جھری اینٹینا[61] کا میدان حاصل کیا جاتا ہے۔ شکل-ب میں اسی تکملہ اینٹینا[62] کو دکھایا گیا ہے۔ جھری اینٹینا کو aa' پر طاقت چوڑائی کے اطراف کے مابین فراہم کی جاتی ہے جبکہ تکملہ اینٹینا کو لمبائی جانب کے اطراف

[61] slot antenna
[62] complementary antenna



ب: تکملہ اینٹینا کی مدد سے جھری اینٹینا پر غور کیا جاتا ہے۔

الف: موصل چادر میں جھری بطور اینٹینا کام کرتی ہے۔

شکل 14.26: جھری اینٹینا اور اس کا تکملہ اینٹینا۔

کے مابین طاقت aa' پر مہیا کی جاتی ہے۔یوں ان کے میدان آپس میں $90°$ پر ہوں[63] گے۔ جھری اینٹینا کی اخراجی رکاوٹ Z_g اور تکملہ اینٹینا کی اخراجی رکاوٹ Z_d کا آپس میں تعلق

$$Z_g = \frac{Z_0^2}{4Z_d} \tag{14.229}$$

5271 ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

اس طرح جفت قطب کے خصوصیات جانتے ہوئے جھری کے خصوصیات دریافت کئے جا سکتے ہیں۔یوں اگر جھری کی چوڑائی $\lambda \ll c$ اور اس کی لمبائی $\frac{\lambda}{2}$ کر دی جائے تو تکملہ اینٹینا (صفحہ 564) کی اخراجی رکاوٹ $Z_d = 73 + j42.5$ جانتے ہوئے جھری اینٹینا کی اخراجی رکاوٹ

$$Z_g = \frac{377^2}{4 \times (73 + j42.5)} = 363 - j211\,\Omega \tag{14.230}$$

5272 لکھی جا سکتی ہے۔

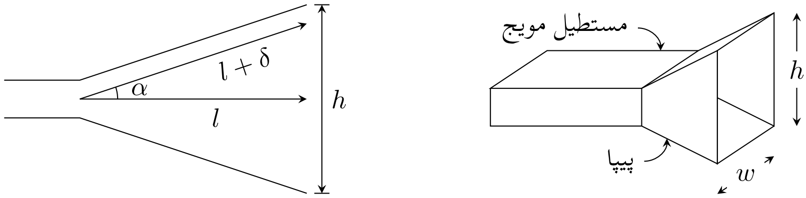
5273 14.18 پیپا اینٹینا

شکل 14.27 میں پیپا اینٹینا[64] دکھایا گیا ہے جسے بائیں جانب سے مستطیلی ترسیلی تار طاقت مہیا کر رہی ہے۔پیپا اینٹینا کو مستطیل ترسیلی تار کا کھلا منہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ مستطیلی ترسیلی تار کا منہ بڑھانے سے اینٹینا کی اخراجی سطح بڑھانا مقصد ہے جس سے سمتیت بڑھتی ہے۔اگرچہ پیپا کے منہ پر ہم قدم میدان ہی سے بہتر سمتیت حاصل ہو گی، حقیقت میں ایسا ہم قدم میدان حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا۔یوں حقیقی اینٹینا میں پیپا کے منہ پر میدان میں فرق کو کسی مخصوص مقدار δ سے کم رکھا جاتا ہے۔ شکل-ب کو دیکھ کر

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{l}{l+\delta}\\
\sin\theta &= \frac{h}{2(l+\delta)}\\
\tan\theta &= \frac{h}{2l}
\end{aligned}$$

---

[63] Booker's theory
[64] horn antenna



الف: پیپا اینٹینا۔ ب: پیپا اینٹینا کے اہم ناپ۔

شکل 14.27: پیپا اینٹینا اور اس کے اہم ناپ۔

لکھے جا سکتے ہیں۔ کم δ کی صورت میں ان مساوات سے

$$l = \frac{h^2}{8\delta} \tag{14.231}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{h}{2l} = \cos^{-1}\frac{l}{l+\delta} \tag{14.232}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ برقی میدان h سمت میں اور مقناطیسی میدان w سمت میں تصور کرتے ہوئے آگے پڑھیں۔ برقی میدان E کے سطح پر اس فرق کو $\delta < \frac{\lambda}{5}$ رکھا جاتا ہے جس سے پیپے کے منہ پر کل فرق $\mp 36^{\circ}$ تک محدود رہتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان H کے سطح پر فرق $\delta < \frac{3\lambda}{8}$ تک محدود رکھا جاتا ہے۔ مقناطیسی میدان کے سطح پیپے کے اطراف پر برقی میدان سطح کے متوازی ہونے کی وجہ سے صفر ہوتا ہے لہٰذا میدان میں زیادہ زاویائی فرق سے دور میدان زیادہ متاثر نہیں ہوتا۔ 5276

5277

5278 مثال 14.12: شکل میں $h = 10\lambda$ ہے جبکہ ترسیلی تار میں TE_{10} موج پائی جاتی ہے۔ شکل میں، w اور نصف زاویے θ اور ϕ حاصل کریں۔

حل: برقی میدان کی سطح پر $\delta < \frac{\lambda}{5}$ لیتے ہوئے

$$l = \frac{h^2}{8\delta} = \frac{100\lambda^2}{8 \times \frac{\lambda}{5}} = 62.5\lambda$$

حاصل ہوتا ہے جس سے E سطح پر

$$\theta = \tan^{-1}\frac{h}{2l} = \tan^{-1}\frac{10\lambda}{2 \times 62.5\lambda} = 4.6^{\circ}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مقناطیسی میدان پر $\delta < \frac{3\lambda}{8}$ لیتے ہوئے

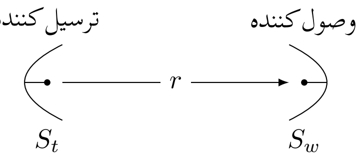
$$\phi = \cos^{-1}\frac{62.5\lambda}{62.5\lambda + \frac{3}{8}\lambda} = 6.26^{\circ}$$

حاصل ہوتا ہے۔ پیپے کی چوڑائی

$$w = 2l\tan\phi = 2 \times 62.5 \times \lambda \times \tan 6.26^{\circ} = 13.7\lambda$$

5279 حاصل ہوتی ہے۔

5280



شکل 14.28: وصول کردہ طاقت کا انحصار ترسیلی اور وصولی اینٹینا کے اخراجی رقبوں پر ہے۔

14.19 فرائس ریڈار مساوات 5281

شکل 14.28 میں S_t اخراجی رقبے کا ترسیل کنندہ اور S_w اخراجی رقبے کا وصول کنندہ اینٹینا آپس میں r فاصلے پر دکھائے گئے ہیں۔ اگر غیر سمتی ترسیل کنندہ P_t طاقت کی شعاع خارج کرے تب وصول کنندہ کے قریب اکائی رقبے پر

$$P = \frac{P_t}{4\pi r^2} \tag{14.233}$$

کثافت طاقت دستیاب ہو گی جس سے وصول کنندہ

$$P'_w = PS_w \tag{14.234}$$

طاقت حاصل کر پائے گا۔ ترسیلی سطح S_t کے سمتی ترسیل کنندہ کی سمتیت $D = \frac{4\pi S_t}{\lambda^2}$ ہے للٰذا اس کی شعاع سے وصول کنندہ

$$P_w = DP'_w = \frac{4\pi S_t}{\lambda^2}\frac{P_t S_w}{4\pi r^2} \tag{14.235}$$

طاقت حاصل کر پائے گا۔ اس مساوات سے

$$\frac{P_w}{P_t} = \frac{S_t S_w}{\lambda^2 r^2} \tag{14.236}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کسی بھی دو اینٹینا کے نظام میں مساوات کا دایاں ہاتھ بے بُعد مستقل ہے۔ یہ مساوات **فرائس ترسیلی مساوات**[65] کہلاتی ہے۔ آئیں اب شکل 14.29-الف پر غور کریں جہاں ترسیل کنندہ اینٹینا شعاع خارج کرتی ہے۔ انعکاسی شعاع کو وصول کنندہ اینٹینا وصول کرتی ہے۔ ریڈار میں عموماً ایک ہی اینٹینا دونوں کام سرانجام دیتی ہے۔ شعاع کا انعکاس ہوا میں اڑتے جہاز سے ممکن ہے۔ شکل 14.29-ب میں عاکس کو دو اینٹینا کی صورت میں دکھایا گیا ہے جہاں ایک اینٹینا شعاع وصول کرتے ہوئے دوسرے اینٹینا سے واپس خارج کرتا ہے۔ یوں مساوات 14.236 کو دو مرتبہ استعمال کرتے ہوئے

$$\frac{P_w}{P_t} = \frac{S_t S_w S_e^2}{\lambda^4 r^4} \tag{14.237}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر ایک ہی اینٹینا بطور ترسیلی اور وصولی اینٹینا استعمال کیا جائے تب

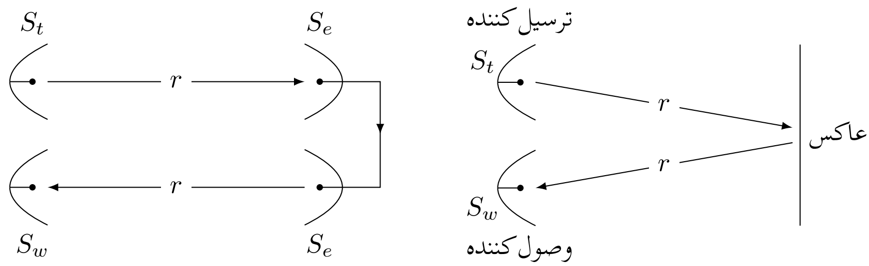
$$\frac{P_w}{P_t} = \frac{S_w^2 S_e^2}{\lambda^4 r^4} \tag{14.238}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں عاکس کا اخراجی رقبہ S_e ہے۔ 5282

اگر عاکس وسیع جسامت کا ہو اور اس سے انعکاسی موج عین ریڈار کی سمت میں ہو تب عاکس کا اخراجی رقبہ اس کے میکانی رقبے جتنا ہو گا۔ عموماً عاکس غیر سمتی اخراج کرتا ہے جس کی وجہ سے اس کا اخراجی رقبہ، اس کے میکانی رقبے سے کم ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں عاکس کے وصولی رقبے کو σ لکھتے ہوئے مساوات 14.236 سے عاکس کی حاصل کردہ طاقت

$$\frac{P}{P_t} = \frac{S_t\sigma}{\lambda^2 r^2} \tag{14.239}$$

[65] Friis transmission equation



الف: عاکس سے انعکاسی موج کی وصولی۔

ب: عاکس کو اینٹینا فرض کیا گیا ہے۔

شکل 14.29: ریڈار اینٹینا شعاع خارج کر کے انعکاسی موج وصول کرتا ہے۔

لکھی جائے گی۔ یہی طاقت غیر سمتی خارج کی جائے گی۔ غیر سمتی اینٹینا کا اخراجی رقبہ $S = \frac{\lambda^2}{4\pi}$ ہوتا ہے۔ یہی عاکس کی اخراجی رقبہ لیتے ہوئے مساوات 14.238 میں $S_e^2 = S\sigma$ لکھتے ہوئے

$$\frac{P_w}{P_t} = \frac{S_w^2 S\sigma}{\lambda^4 r^4} \tag{14.240}$$

یعنی

$$\frac{P_w}{P_t} = \frac{S_w^2 \sigma}{4\pi\lambda^2 r^4} \tag{14.241}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں σ **ریڈار رقبہ تراش**[66] کہلاتا ہے۔ یہ **ریڈار مساوات**[67] کہلاتی ہے۔

بڑی جسامت کی موصل کرہ، جس کا رداس a ہو، کی ریڈار رقبہ تراش اس کے میکانی رقبہ تراش πa^2 کے برابر ہوتی ہے۔ غیر کامل عاکس کی صورت میں ریڈار رقبی تراش نسبتاً کم ہو گا، مثلاً ایک میٹر طول موج پر چاند کا ریڈار رقبہ تراش تقریباً $\frac{1}{10}$ گنا حاصل ہوتا ہے۔

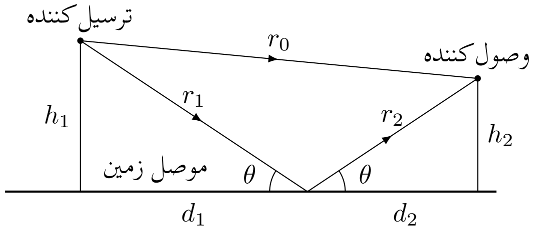
مثال 14.13: ایک ٹی وی اسٹیشن موصل زمین پر کھڑے $200\,\mathrm{m}$ قد کے اینٹینا سے $1\,\mathrm{kW}$ کی طاقت سے نشریات کرتی ہے۔ افقی سطح پر اینٹینا غیر سمتی ہے جبکہ عمودی سمت میں اس کی نصف طاقت چوڑائی $10°$ ہے۔ طول موج $1\,\mathrm{m}$ ہونے کی صورت میں $4\,\mathrm{km}$ دور کتنی اونچائی پر اینٹینا بہترین وصولی کر پائے گا۔ وصول کردہ طاقت کا بھی تخمینہ لگائیں۔ وصولی اینٹینا مندرجہ ذیل فرض کرتے ہوئے حل کریں۔

- عمودی قطبی اینٹینا جس کی سمتیت 4 کے برابر ہے۔
- افقی قطبی اینٹینا جس کی سمتیت 4 کے برابر ہے۔
- دائری قطبی 6 چکر کا پیچ دار اینٹینا جس کا $\alpha = 12.5°$ اور چکر کے مابین فاصلہ 0.22λ ہے۔

حل: شکل میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ موصل زمین سے انعکاس پر زمین کے متوازی برقی میدان میں $180°$ کی تبدیلی رونما ہو گی۔ یوں اگر وصولی اینٹینا زمین کے بالکل قریب ہو تب افقی قطبی میدان کی صورت میں یہ صفر طاقت وصول کر پائے گا جبکہ عمودی قطبیت کی صورت میں اسے سیدھی رسائی کے علاوہ زمین سے انعکاسی میدان بھی میسر ہو گا۔ یوں کل میدان دگنا اور طاقت چار گنا ہو گا۔

---

[66] radar cross section
[67] radar equation



شکل 14.30: سیدھی آمد موج اور انعکاسی موج کے اثرات۔

شکل 14.30 کو دیکھتے ہوئے کہہ سکتے ہیں کہ کسی بھی h پر اگر

$$r_1 + r_2 - r_0 = n\lambda \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{14.242}$$

ہو تب افقی قطبی میدان صفر پایا جائے گا جبکہ عمودی قطبی میدان دگنا ہو گا۔ اسی طرح جب بھی

$$r_1 + r_2 - r_0 = n\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots) \tag{14.243}$$

ہو تب افقی قطبی میدان دگنا اور عمودی قطبی میدان صفر پایا جائے گا۔ ان حقائق سے ظاہر ہے کہ زیادہ سے زیادہ افقی قطبی میدان کے دو قریبی نقطوں کے درمیانی نقطے پر زیادہ سے زیادہ عمودی قطبی میدان پایا جاتا ہے۔

بایاں دائری قطبی موج انعکاس کے بعد دایاں دائری قطبی ہوتا ہے۔ اسی طرح دایاں دائری قطبی موج انعکاس کے بعد بایاں دائری قطبی ہوتا ہے۔ یوں اگر ترسیلی اینٹینا دایاں دائری قطبی ہو تب دایاں دائری قطبی اینٹینا صرف سیدھے آمدی میدان کو وصول کر پائے گا جبکہ بایاں دائری قطبی اینٹینا صرف انعکاسی میدان کو وصول کر پائے گا۔ یوں دونوں اقسام کے دائری قطبی اینٹینا اکائی میدان حاصل کریں گے۔ ترسیلی اینٹینا بایاں قطبی ہونے کی صورت میں بایاں قطبی وصولی اینٹینا سیدھے آمد میدان کو وصول کرے گا جبکہ قطبی دایاں اینٹینا انعکاسی میدان کو وصول کرے گا۔

افقی اور عمودی قطبی اینٹینوں کی صورت میں وصولی اینٹینا کی اونچائی تبدیل کرنے سے میدان صفر تا دگنا حاصل کرنا ممکن ہے جبکہ دائری قطبی اینٹینا کی صورت میں وصول طاقت کا دار و مدار اینٹینا کی اونچائی پر نہیں ہوتا۔ دائری اینٹینا ہر صورت اکائی میدان حاصل کرتی ہے۔

چونکہ آمدی اور انعکاسی زاویے برابر ہوتے ہیں لہٰذا شکل میں آمدی تکون اور انعکاسی تکون یکساں ہیں۔ یوں $(r_1 + r_2 - r_0)$ کی قیمت $\frac{2h_1h_2}{d}$ لکھی جا سکتی ہے۔ یوں عمودی قطب میدان کی زیادہ سے زیادہ قیمت

$$h_2 = \frac{d\lambda}{2h_1} = \frac{4 \times 10^3 \times 1}{2 \times 200} = 10\,\mathrm{m}$$

کی صورت میں حاصل ہو گی جس سے افقی قطبی میدان کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی اونچائی 5، 15، 25، . . . میٹر لکھی جا سکتی ہے۔

فرائس کی مساوات سے، ایک راہ سے موصول طاقت

$$P_w = \frac{P_t A_t A_w}{r^2 \lambda^2} = \frac{10^3 \times 0.32 \times 0.91}{16 \times 10^6 \times 1} = 18\,\mathrm{\mu W}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں ترسیلی اینٹینا کی سمتیت

$$D = \frac{4\pi}{\theta_{HP}\phi_{HP}} = \frac{4\pi}{\frac{360 \times \pi}{180} \times \frac{10 \times \pi}{180}} = 11.459$$

لیتے ہوئے اس کا اخراجی رقبہ

$$A_t = \frac{\lambda^2}{4\pi} D = 0.91\,\mathrm{m}^2$$

اور وصولی اینٹینا کا وصولی رقبہ

$$A_w = \frac{\lambda^2}{4\pi} D = \frac{1^2 \times 4}{4\pi} = 0.32\,\mathrm{m}^2$$

5305 لئے گئے ہیں۔ سیدھی آمد اور انعکاسی آمد میدان مل کر زیادہ سے زیادہ طاقت 4 گنا کر دیتی ہیں۔ یوں افقی قطبی اور عمودی قطبی اینٹینا کی صورت میں زیادہ سے زیادہ
5306 وصول کردہ طاقت $72\,\mu\mathrm{W}$ ہو گا جبکہ دونوں صورتوں میں کم سے کم حاصل کردہ طاقت صفر ہو گا۔

دائری قطبی صورت میں وصولی اینٹینا کی سمتیت

$$D = 15\left(\frac{C}{\lambda}\right)^2 \frac{nd}{\lambda} = 15\left(\frac{\frac{0.22}{\tan 12.5^\circ}}{1}\right)^2 \times \frac{6 \times 0.22}{1} = 19.5$$

اور وصولی رقبہ

$$A_w = \frac{\lambda^2 D}{4\pi} = 1.55\,\mathrm{m}^2$$

ہیں لہٰذا ہر اونچائی پر وصول کردہ طاقت

$$P_w = \frac{1.55}{0.32} \times 18 = 87\,\mu\mathrm{W}$$

5307 ہو گا۔

5308 وصول کردہ طاقت کا تخمینہ لگاتے ہوئے ہم نے اینٹینوں کے درمیان فاصلے کو چار کلو میٹر ہی تصور کیا اگرچہ حقیقی فاصلے قدر مختلف ہیں۔ چار کلو میٹر کے فاصلے
5309 پر چند میٹر کم یا زیادہ سے حاصل جواب میں کوئی خاص تبدیلی پیدا نہیں ہوتی۔

5310

5311 14.20 ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی

کسی بھی برقی مزاحمت R میں حرارت T کی وجہ سے آزاد چارج حرکت کرتے ہیں جس سے مزاحمت میں حراری شور[68] پیدا ہوتا ہے۔ ایسی مزاحمت کے برقی سروں پر B تعددی پٹی پر

$$W = kBT \tag{14.244}$$

طاقت شور[69] پایا جاتا ہے۔ اکائی تعددی پٹی پر یوں

$$w = kT \tag{14.245}$$

5312 طاقت شور پایا جائے گا جہاں

---

[68] thermal noise
[69] noise power

w اکائی تعددی پٹی پر شور کی طاقت، $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Hz}}$

k بولٹزمن کا مستقل، $1.38 \times 10^{-23} \, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

B تعددی پٹی، Hz

T مزاحمت کی حتمی حرارت، K

ہیں۔ T کو حرارت شور[70] کہا جاتا ہے۔ برابر تعددی پٹی پر برابر طاقت شور پایا جاتا ہے۔

اگر برقی مزاحمت R کے برابر اخراجی مزاحمت $(R = R_{\text{اخراجی}})$ کے اینٹینا کے برقی سروں پر طاقت شور ناپی جائے تو یہ مزاحمت پر ناپی گئی طاقت شور سے مختلف ہو گی۔ اینٹینا کے سروں پر طاقت شور، خلاء کے اس خطے کی حرارت T سے پیدا شور ہو گا جہاں سے اینٹینا طاقت وصول کر رہا ہو۔ اس طاقت شور کا اینٹینا کی حرارت سے کوئی تعلق نہیں۔ یوں اینٹینا کو بطور بعید پیما حرارت[71] استعمال کیا جا سکتا ہے۔

ایک سنٹی میٹر طول موج کے ریڈیائی دوربین کی مرکز نگاہ آسمان کے ایسے خطوں پر رکھی جا سکتی ہے جہاں حتمی حرارت 0 K کے قریب قریب ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں طاقت شور آسمان کی حرارت سے پیدا ہو گا نا کہ اینٹینا کے حرارت سے جو 300 K کے لگ بھگ ہو گی۔ ریڈیائی دوربین کی طاقت شور فی تعدد

$$w = kT_A \qquad \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Hz}}\right) \tag{14.246}$$

لکھی جاتی ہے جہاں T_A اینٹینا کی حراری شور ہے جسے عموماً حرارت اینٹینا[72] یا اخراجی مزاحمت کی حرارت کہا جاتا ہے۔ حرارت اینٹینا وہ خطہ کرتی ہے جس پر اینٹینا کے نقش کی نظر ہو۔ یوں اینٹینا کی مدد سے دور آسمان کے خطوں کی حرارت ناپنا ممکن ہے۔ ہم نے اس پورے بحث میں یہ فرض کر رکھا ہے کہ اینٹینا بے ضیاع ہے اور یہ آسمان کی طرف نظر رکھے ہوئے ہے۔ یوں انعکاسی شعاع اور ثانوی شعاع کو رد کیا گیا ہے۔

ریڈیائی دوربین کو استعمال کرتے ہوئے کثافت طاقت شور فی تعدد

$$p = \frac{w}{S_e} = \frac{kT_A}{S_e} \qquad \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,Hz}}\right) \tag{14.247}$$

کا استعمال زیادہ سودمند ثابت ہوتا ہے جسے پوئنٹنگ سمتیہ فی تعدد تصور کیا جا سکتا ہے۔

اگر ہمیں منبع شور کی زاویائی وسعت Ω_M معلوم ہو اور یہ Ω_A کی نسبت سے کم ہو تب منبع کی حرارت

$$\frac{T_A}{T_M} = \frac{\Omega_M}{\Omega_A} \tag{14.248}$$

سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ یاد رہے کہ T_A کا اینٹینا کی حرارت سے کوئی تعلق نہیں۔

مثال 14.14: مریخ[73] پر مرکز نگاہ رکھتے ہوئے 15 m لمبی ریڈیائی دوربین کی اینٹینا حرارت 31.5 mm طول موج پر 0.24 K ناپی جاتی ہے۔ اینٹینا پر مریخ 0.005° زاویہ بناتا ہے اور اینٹینا کا نصف طاقت زاویہ 0.116° ہے۔ مریخ کی حرارت دریافت کریں۔

---

noise temperature[70]
remote temperature sensor[71]
antenna temperature[72]
Mars[73]

حل: مساوات 14.248 سے مریخ کی حرارت

$$T_M=\frac{\Omega_A}{\Omega_M}T_A\approx\frac{0.116^2}{\pi(0.005^2/4)}0.24=164\,\mathrm{K}$$

حاصل ہوتی ہے۔

14.21 حرارت نظام اور حرارت بعید

حرارت اینٹینا سے اس خطے کی حرارت حاصل کی جا سکتی ہے جس پر اینٹینا کا مرکز نگاہ ہو۔ یوں اینٹینا کو بعید پیما حرارت استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ایک سنٹی میٹر طول موج کے ریڈیائی دوربین کی نگاہ، ستاروں سے خالی آسمان کے خطے پر رکھتے ہوئے انتہائی کم اینٹینا حرارت حاصل کی جا سکتی ہے۔ آسمان کو دیکھتے ہوئے کم تر حرارت $3\,\mathrm{K}$ حاصل ہوتی جو کائنات کی ابتدائی دھماکے[74] کی بقیہ حرارت[75] ہے۔ اگر اینٹینا کے سامنے ستارہ موجود ہو تب بقیہ حرارت سے زیادہ حرارت ناپی جائے گی۔ ایک میٹر طول موج پر ہماری کہکشاں کی حرارت کئی ہزار کیلون ناپی جاتی ہے۔ ہم حراری[76] شور کی حرارت ناپنے کی بات کر رہے ہیں۔ یہ کامل اخراجی-وصولی خاصیت کے جسم کی حرارت ہے۔ ایسے جسم کو سیاہ جسم[77] کہا جاتا ہے۔ یوں اگر اینٹینا کی پوری وصولی نقش کے خطے میں گرم کوئلے یا سیاہ دھات کا کرہ پایا جائے، تو اینٹینا سے کرہ کی ناپی گئی حرارت وہی ہو گی جو تھرمامیٹر[78] سے ناپی جائے گی۔ اس کے برعکس ترسیلی اینٹینا کی ناپی گئی اینٹینا حرارت غیر یقینی طور پر زیادہ حاصل ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر اگر قریب ریڈیو اسٹیشن کی نشریات، $10\,\mathrm{m^2}$ وصولی رقبے اور $10\,\mathrm{kHz}$ تعددی پٹی کے وصولی اینٹینا کے قریب $10\,\frac{\mu\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کا میدان پیدا کرے تو وصولی اینٹینا کی کل وصول کردہ طاقت

$$W=\frac{E^2}{Z_0}S_e=\frac{10^{-10}}{377}\times10=2.65\,\mathrm{pW}$$

ہو گی جسے مساوات 14.244 میں پر کرتے ہوئے

$$T=\frac{W}{kB}=\frac{2.65\times10^{-12}}{1.38\times10^{-23}\times10^4}=1.9\times10^7\,\mathrm{K}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ صرف $10\,\frac{\mu\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کا میدان $1.9\times10^7\,\mathrm{K}$ کی اینٹینا حرارت پیدا کر سکتا ہے۔ یہ اتنی بڑی مقدار ہے کہ اس کی موجودگی میں بقایا نظام کی حرارت، جسے حرارت نظام[79] پکارا جاتا ہے، کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ البتہ، ریڈیائی دوربین اتنی کم طاقت کے اشارات پر کام کرتے ہیں کہ ان میں حرارت نظام انتہائی اہم ہوتا ہے۔ اس کا اندازہ آپ یوں کر سکتے ہیں کہ ریڈیائی دوربین کے استعمال میں کثافت طاقت فی ہرٹز کی اکائی جانسکی[80] ہے جہاں $1\,\mathrm{Ja}=10^{-26}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,Hz}}$ کے برابر ہے۔

---

[74] big bang
[75] residual temperature
[76] thermal
[77] blackbody
[78] thermometer
[79] system temperature
[80] Jansky

سوالات

سوال 14.1: غیر سمتی اینٹینا $E=\frac{25I}{r}$ میدان پیدا کرتی ہے جہاں اینٹینا کا داخلی موثر برقی رو I اور اینٹینا سے فاصلہ r ہے۔ اس اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔

جواب: $20.8\,\Omega$

سوال 14.2: اینٹینا کی شعاع $0<\theta<30^\circ$ ، $0<\phi<2\pi$ خطے میں یکساں میدان پیدا کرتی ہے جبکہ $30^\circ<\theta<180^\circ$ خطے میں میدان صفر کے برابر ہے۔ الف) اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A حاصل کریں۔ ب) شعاع کی سمتیت D دریافت کریں۔

جوابات: $0.842\,\mathrm{sr}$ ، 14.9

سوال 14.3:

اینٹینا کی شعاع $0<\theta<60^\circ$ ، $0<\phi<2\pi$ خطے میں یکساں میدان پیدا کرتی ہے جبکہ $60^\circ<\theta<180^\circ$ خطے میں میدان صفر کے برابر ہے۔ الف) اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A حاصل کریں۔ ب) شعاع کی سمتیت D دریافت کریں۔ پ) اینٹینا کا اخراجی رقبہ A_e حاصل کریں۔ ت) اینٹینا کا داخلی موثر برقی رو $12\,\mathrm{A}$ ہونے کی صورت میں اینٹینا سے $164\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر موثر برقی میدان $7\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ اینٹینا کا اخراجی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}}$ دریافت کریں۔

جوابات: $3.142\,\mathrm{sr}$ ، 4 ، $0.318\lambda^2$ ، $76.3\,\Omega$

سوال 14.4: اینٹینا کی شعاع $45^\circ<\theta<60^\circ$ ، $0^\circ<\phi<120^\circ$ خطے میں یکساں ہے۔ بقایا خطے میں میدان صفر کے برابر ہے۔ اینٹینا سے $1000\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر اس خطے میں $2\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ برقی میدان حاصل کرنے کی خاطر $4\,\mathrm{A}$ موثر داخلی برقی رو درکار ہے۔ اینٹینا کی اخراجی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}}$ دریافت کریں۔

جواب: $288\,\Omega$

سوال 14.5: اینٹینا کی مرکزی شعاع $0^\circ<\theta<45^\circ$ خطے میں یکساں پائی جاتی ہے جبکہ اس کی ثانوی شعاع $120^\circ<\theta<180^\circ$ خطے میں یکساں پائی جاتی ہے۔ میدان ϕ کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا۔ مرکزی شعاع میں میدان ثانوی شعاع کے میدان کے چار گنا ہے۔ الف) اینٹینا کی سمتیت D دریافت کریں۔ ب) مرکزی شعاع میں اینٹینا سے $350\,\mathrm{m}$ فاصلے پر $E_{\text{موثر}}=6\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ برقی میدان کے حصول کے لئے اینٹینا کو $6\,\mathrm{A}$ موثر داخلی برقی رو مہیا کیا جاتا ہے۔ اینٹینا کی اخراجی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}}$ دریافت کریں۔

جوابات: $D=6.17$ ، $662\,\Omega$

سوال 14.6: دو عدد غیر سمتی، ہم قدم منبع کے درمیان فاصل 2λ ہے۔ الف) نقش کے صفر حاصل کریں۔ ب) نقش کی چوٹیاں حاصل کریں۔

جوابات: الف) $\mp41.4^\circ$ ، $\mp75.5^\circ$ ، $\mp104.5^\circ$ ، $\mp138.6^\circ$؛ ب) 0° ، $\mp60^\circ$ ، $\mp90^\circ$ ، $\mp120^\circ$ ، 180°

سوال 14.7: دو عدد غیر سمتی، منبع کے درمیان فاصل $\frac{3\lambda}{2}$ ہے جبکہ ان میں زاویائی فرق 180° ہے۔ الف) نقش کے صفر حاصل کریں۔ ب) نقش کی چوٹیاں حاصل کریں۔

جوابات: الف) $\mp90^\circ$ ، $\mp48.2^\circ$ ، $\mp131.8^\circ$؛ ب) 0° ، $\mp70.5^\circ$ ، $\mp109.5^\circ$

سوال14.8: چار رکنی قطار میں غیر سمتی، یکساں طاقت کے منبع پائے جاتے ہیں۔ قطار میں ہر دو قریبی منبع میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ منبع کے درمیان فاصلہ نصف طول موج سے کم $d < \frac{\lambda}{2}$ ہے۔ زیادہ سے زیادہ میدان $\theta = 45°$ پر اور نقش کا صفر $\theta = 90°$ پر حاصل کرنے کے لئے درکار δ اور d حاصل کریں۔

جوابات: $d = 0.354\lambda$ ، $\delta = -90°$

سوال14.9: گھریلو ریڈیو سے 585 kHz تعدد کی نشریات سنی جا رہی ہے۔ الف) ریڈیو اینٹینا کو غیر سمتی تصور کرتے ہوئے اس کا اخراجی رقبہ دریافت کریں۔ ب) گھر سے ریڈیو اسٹیشن کا فاصلہ 10 km جبکہ اسٹیشن کی اخراجی طاقت 5 kW کی صورت میں ریڈیو کتنی طاقت وصول کر پاتا ہے۔ اسٹیشن کی اخراج غیر سمتی تصور کریں۔ پ) ریڈیو کی داخلی مزاحمت 300 Ω ہے۔ ریڈیو کو صرف 1 µV موثر داخلی اشارہ درکار ہے۔ درکار داخلی طاقت کی قیمت حاصل کریں۔

جوابات: $20\,928\,\mathrm{m}^2$ ، 83.3 mW ، 3.33 fW

سوال14.10: 1.5λ لمبے خطی اینٹینا کا اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر آپ کو صفحہ 563 پر دیے جدول 14.2 کے طرز کا جدول حاصل کرنا ہو گا۔

جواب: 100 Ω

سوال14.11: یکساں غیر سمتی منبع پر مبنی قطار میں ارکان کے درمیان $d = \frac{\lambda}{4}$ ہے۔ مرکزی شعاع $\theta = 30°$ پر حاصل کرنے کی خاطر ارکان کے مابین زاویائی فرق δ حاصل کریں۔

جواب: 1.36 rad

سوال14.12: تداخل پیما میں جفت قطب کے مابین فاصلہ 10λ ہونے کی صورت میں پہلے صفر چوڑائی حاصل کریں۔

جواب: $5.7°$

سوال14.13: خلاء میں دو مصنوعی سیاروں کے درمیان $2 \times 10^8\,\mathrm{m}$ کا فاصلہ ہے۔ یہ آپس میں 2.5 GHz تعدد پر اشارات کا تبادلہ کرتے ہیں۔ دونوں سیارے $D = 1500$ سمتیت کے اینٹینا استعمال کرتے ہیں۔ اطلاعات صحیح موصول ہونے کے لئے ضروری ہے کہ حاصل کردہ اشارے کی طاقت برقی شور سے قدر زیادہ ہو۔ یوں ضروری ہے کہ حاصل کردہ برقی اشارے کی طاقت کم از کم 1 pW ہو۔ اخراجی اینٹینا کی درکار طاقت حاصل کریں۔

جواب: 195 W

ڈھلوان، پھیلاو، گردش اور لاپلاسی 5388

کارتیسی محدد 5389

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & az \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

نلکی محدد 5390

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_{\rho} & \boldsymbol{a}_{\phi} & \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

کروی محدد 5391

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_{\phi} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\boldsymbol{a}_{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{a}_{\phi} \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}
\end{aligned}
$$

5392 عمومی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{1}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}\boldsymbol{a}_v + \frac{1}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w}\boldsymbol{a}_w \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{k_1k_2k_3}\left(\frac{\partial(k_2k_3A_u)}{\partial u} + \frac{\partial(k_3k_1A_v)}{\partial v} + \frac{\partial(k_1k_2A_w)}{\partial w}\right) \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{k_2k_3}\left[\frac{\partial(k_3A_w)}{\partial v} - \frac{\partial(k_2A_v)}{\partial w}\right]\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_3k_1}\left[\frac{\partial(k_1A_u)}{\partial w} - \frac{\partial(k_3A_w)}{\partial u}\right]\boldsymbol{a}_v \\
&\quad + \frac{1}{k_1k_2}\left[\frac{\partial(k_2A_v)}{\partial u} - \frac{\partial(k_1A_u)}{\partial v}\right]\boldsymbol{a}_w \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_2k_3}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_3k_1}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{k_1k_2}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]
\end{aligned}
$$

5393 سمتی مماثل

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G} = FG\cos\theta \qquad \text{غیر سمتی (نقطہ) ضرب}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}}{FG}\right)$$

$$\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G} = FG\sin\theta\boldsymbol{a}_N \qquad \text{سمتی (صلیبی) ضرب}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left[\frac{(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{a}_N}{FG}\right]$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) &= 0 \\
\nabla\cdot\nabla f &= \nabla^2 f \\
\nabla\times\nabla f &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla(f+g) &= \nabla f + \nabla g \\
\nabla\cdot(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) &= \nabla\cdot\boldsymbol{F} + \nabla\cdot\boldsymbol{G} \\
\nabla\times(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) &= \nabla\times\boldsymbol{F} + \nabla\times\boldsymbol{G}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\
\nabla\cdot(f\boldsymbol{G}) &= f(\nabla\cdot\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G}\cdot(\nabla f) \\
\nabla\times(f\boldsymbol{G}) &= f(\nabla\times\boldsymbol{G}) + (\nabla f)\times\boldsymbol{G}
\end{aligned}
$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) - \nabla^2\boldsymbol{F}$$

جہاں $\nabla^2\boldsymbol{F}$ سے مراد

$$\nabla^2\boldsymbol{F} = \nabla^2 F_x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + \nabla^2 F_y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + \nabla^2 F_z\boldsymbol{a}_{\text{z}}$$

ہے۔

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{G} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{G}) \\
\boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{H}) &= \boldsymbol{G} \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{H} \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) \\
\nabla \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{F}(\nabla \cdot \boldsymbol{G}) - \boldsymbol{G}(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} \\
\nabla(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) &= (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \times (\nabla \times \boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G} \times (\nabla \times \boldsymbol{F})
\end{aligned}
$$

5394 سطحی اور حجمی تکمل کے تعلق

مندرجہ ذیل تین مساوات میں دائیں جانب حجمی تکمل کے حجم کو بائیں جانب سطحی تکمل کی سطح گھیرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\oint_S f \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_h \nabla f \,\mathrm{d}h \\
\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_h \nabla \cdot \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}h && \text{مسئلہ پھیلاو} \\
\oint_S \boldsymbol{a}_N \times \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}S &= \int_h \nabla \times \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}h
\end{aligned}
$$

5395 خطی اور سطحی تکمل کے تعلق

مندرجہ ذیل دو مساوات میں دائیں جانب سطحی تکمل کی سطح کو بائیں جانب خطی تکمل کی بند راہ گھیرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\oint_l f \,\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_S \boldsymbol{a}_N \times \nabla f \,\mathrm{d}S \\
\oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} && \text{مسئلہ سٹوکس}
\end{aligned}
$$

complex permitivity
dispersion
try to resolve the issue of using k and γ as propagation constants
kraus p473 fig 10-60 sec 10.18 and 10.19, 10.17,10.16,10.15,10.11 or do the entire chap9 and 10 transmission from kraus too
fourier transform sec 14.8 of kraus must draw the figures
charge is barqi bar and let the reader figure out which bar is meant
degree angle and degree celcius, ohm, micro etc not showing
kraus p581 mentions three types of impedances: intrinsic, characteristic and transverse. ensure that i too have these distinctions
kraus fig-13.28 and fig 13.29 and table 13.3 (on p577) are v. impt
Huygens improvements
figTransmissionSmithFromInternet.tex is not giving the figure of the book
the answers should be at the end of the book
handle all side notes ( ) and remove the corresponding text
read chapter 9 onwards (proof reading)
antenna chapter, 3D figure at start and complete the start section.
house completion certificate.
zaryab fish
F=-dW/dT to include in inductance chapter plus a question or two
magnetizartion curve and an iteration example. fig 8.10, 11 of hayt.
add questions to machine book too.

when giving fields always remember the following rules:
always ensure that divergence of magnetic field is zero.
moving waves must be of the form $E = E0\cos(wt - kz)$ where $c = (\mu * \epsilon)^{-0.5}$ and $k = 2 * \pi/\lambda$
include complex permitivity (7th ed Q12.18 says sigma=omega*epsilon")
include 4th ed fig 11.11 of page 422

جدول 15.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیر	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	مقطر پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹس	10^{-17}

جدول 15.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 15.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 15.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$