برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 7

ساکن مقناطیسی میدان

برقی میدان کا منبع برقی چارج ہے جس پر باب 2 میں تفصیل سے بات کی گئی۔ مقناطیسی میدان کا منبع یا تو مقناطیس ہو سکتا ہے، یا وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان اور یا پھر برقی رو۔ اس کتاب میں مقناطیس سے پیدا ہونے والے مقناطیسی میدان پر غور نہیں کیا جائے گا۔ وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا مقناطیسی میدان پر ایک اور باب میں غور کیا جائے گا جبکہ اس باب میں برقی رو سے پیدا ساکن مقناطیسی میدان پر غور کیا جائے گا۔

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون

برقی رو اور اس سے پیدا مقناطیسی میدان کا تعلق **بایوٹ-سیوارٹ**[1] کا قانون[2]

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}=\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}}{4\pi R^2} \tag{7.1}$$

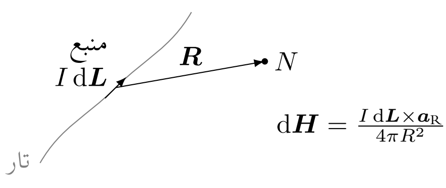
بیان کرتا ہے جہاں سے مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ کی اکائی ایمپیئر فی میٹر $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)$ حاصل ہوتی ہے۔ آئیں شکل 7.1 کی مدد سے اس قانون کا مطلب سمجھیں۔

یہ قانون باریک تار کی انتہائی چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ جس میں برقی رو I گزر رہی ہو کی وجہ سے نقطہ N پر پیدا سمتی برقی میدان $\boldsymbol{H}$ دیتا ہے۔ نقطہ N باریک تار کے چھوٹے حصے سے $\boldsymbol{R}$ فاصلے پر ہے۔ باریک تار سے مراد ایسی ٹھوس نلکی نما موصل تار ہے جس کی موٹائی کم سے کم ہو۔ چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی سمت برقی رو کی سمت میں ہے اور $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ مقناطیسی میدان کا منبع ہے۔

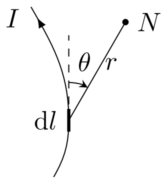
---

[1] Biot-Savart law

[2] یہ قانون فرانس کے بایوٹ اور سیوارٹ نے 1820 میں پیش کیا۔ یہ دونوں ایمپیئر کے ساتھی تھے۔



شکل 7.1: بایوٹ سیوارٹ کا قانون۔



شکل 7.2: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا میدان۔

مقناطیسی شدت کی قیمت برقی رو ضرب باریک چھوٹی تار کی لمبائی $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}$ کے سمتی ضرب کے براہ راست تناسب جبکہ ان کے مابین فاصلہ R کے مربع کے بالعکس تناسب رکھتی ہے۔ تناسبی مستقل $\frac{1}{4\pi}$ ہے۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کا موازنہ کولمب کے قانون کے ساتھ کرنے کی غرض سے دونوں مساوات کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 &= \frac{I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2} \\
\mathrm{d}\boldsymbol{E}_2 &= \frac{\mathrm{d}Q_1 \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^2}
\end{aligned} \tag{7.2}
$$

ان مساوات میں زیر نوشت میں 2 اس مقام کو ظاہر کرتی ہے جہاں میدان کی قیمت حاصل کی گئی ہے جبکہ زیر نوشت میں 1 میدان کے منبع کے مقام کو ظاہر کرتی ہے۔ دونوں میدان فاصلے کے مربع کا بالعکس تناسب رکھتے ہیں۔ دونوں اقسام کے میدان کی شدت اور میدان کی منبع کا خطی تعلق ہے۔ دونوں میں فرق میدان کی سمت کا ہے۔ برقی میدان کی سمت منبع سے اس نقطہ کی جانب ہے جس پر میدان حاصل کیا جا رہا ہو۔ مقناطیسی میدان کی سمت سمتی ضرب کے دائیں ہاتھ کے قانون سے حاصل ہوتی ہے۔

شکل 7.2 میں تار کے چھوٹے حصے $\mathrm{d}l$ سے نقطہ N پر مقناطیسی میدان کی مقدار

$$
\mathrm{d}H = \frac{I\,\mathrm{d}l \sin\theta}{4\pi r^2} \tag{7.3}
$$

ہو گا۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مساوات 7.1 کی شکل میں تجرباتی طور پر ثابت نہیں کیا جا سکتا چونکہ باریک تار کی چھوٹی لمبائی میں برقی رو تب گزرے گی جب برقی رو اس چھوٹی تار تک پہنچائی جائے۔ جو تار اس تک برقی رو پہنچائے گی، وہ بھی مقناطیسی میدان پیدا کرے گی۔ انہیں علیحدہ علیحدہ نہیں کیا جا سکتا۔ ہم فی الحال صرف یک سمتی برقی رو کی بات کر رہے ہیں۔ یک سمتی برقی رو کی صورت میں وقت کے ساتھ حجمی چارج کثافت تبدیل نہیں ہو گا لہٰذا صفحہ 129 پر دئے استمراری مساوات

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}
$$

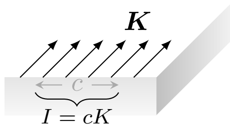
سے

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{7.4}
$$

حاصل ہو گا جسے مسئلہ پھیلاو کی مدد سے

$$
\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی ہوئی برقی رو صفر کے برابر ہے۔ یہ صرف اس صورت ممکن ہے جب برقی رو کسی بند راہ پر گزر رہی ہو۔ ہمیں ایسی ہی مکمل بند راہ کے برقی رو کے اثر کو دیکھنا ہو گا نا کہ تار کے کسی چھوٹے حصے کے برقی رو کو۔



شکل 7.3: سطحی کثافت برقی رو کے c چوڑائی میں کل cK برقی رو ہو گا۔

یوں بایوٹ-سیوارٹ قانون کی تکمل شکل

$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}}{4\pi R^2} \tag{7.5}$$

ہی تجرباتی طور پر ثابت کی جا سکتی ہے۔

مساوات 7.1 سے مساوات 7.5 لکھی جا سکتی ہے۔ البتہ مساوات 7.5 میں تکمل کے اندر کوئی بھی ایسی اضافی تفاعل شامل کیا جا سکتا ہے جس کا بند تکمل صفر کے برابر ہو۔ مقداری میدان کا ڈھلوان ہر صورت بقائی میدان ہوتا ہے لہٰذا مساوات 7.5 میں ∇G کے شمول سے اس کے جواب میں کوئی فرق نہیں پڑے گا۔ G کوئی بھی مقداری میدان ہو سکتا ہے۔

واضح رہے کہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان مکمل برقی دور کے اثر کو شامل کرنے سے ہی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ برقی رو گزارتی تار کے کچھ حصے کے میدان یا ایسے میدان سے پیدا قوت کی بات بے معنی ہو گی۔

شکل 7.3 میں یکساں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ دکھایا گیا ہے۔ سطحی کثافت برقی رو کو ایمپیئر فی اکائی چوڑائی پیش کیا جاتا ہے لہٰذا c چوڑائی کے حصے میں

$$I = cK$$

برقی رو ہو گا۔ اگر کثافت برقی رو یکساں نہ ہو تب کسی بھی چوڑائی میں کل برقی رو بذریعہ تکمل

$$I = \int K\,\mathrm{d}c$$

حاصل ہو گی جہاں $\mathrm{d}c$ چوڑائی کا چھوٹا حصہ ہے۔ یوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ یا حجمی کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ کی صورت میں

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h \tag{7.6}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو

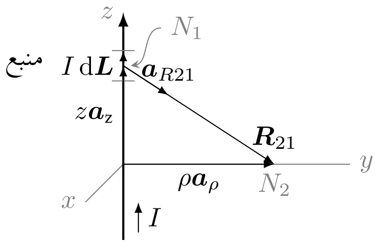
$$\boldsymbol{H} = \int_S \frac{\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}S}{4\pi R^2} \tag{7.7}$$

یا

$$\boldsymbol{H} = \int_h \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}h}{4\pi R^2} \tag{7.8}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں سیدھی لامحدود لمبائی کی تار جس میں سے برقی رو گزر رہی ہو کی مقناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔ شکل 7.4 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس تار کے دونوں سرے لامحدود فاصلے پر ہیں۔ تار کے قریب نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان کا بیشتر حصہ تار کے اس حصے کی وجہ سے ہو گا جو N_2 کے قریب ہو۔ یوں لامحدود فاصلے پر تار کے سروں تک برقی رو پہنچانے والی تار کا نقطہ N_2 پر اثر کو نظر انداز کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔



شکل 7.4: سیدھی لامحدود تار سے پیدا مقناطیسی میدان

نقطہ N_1 پر تار کے چھوٹے حصے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں برقی رو کو منبع مقناطیسی میدان تصور کرتے ہوئے مساوات 7.1 کی مدد سے نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ

$$\boldsymbol{R}_{21} = \rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$$

کے برابر ہے لہٰذا

$$R_{21} = |\boldsymbol{R}_{21}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$
$$\boldsymbol{a}_\mathrm{R} = \frac{\boldsymbol{R}_{21}}{|\boldsymbol{R}_{21}|} = \frac{\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ نلکی محدد میں چھوٹی لمبائی

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$$

لکھی جاتی ہے۔ چونکہ یہاں $\mathrm{d}\rho = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ ہیں لہٰذا $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ لکھتے ہوئے مساوات 7.1 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 = \frac{I\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \times (\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z})}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ پورے تار کا مقناطیسی میدان اس مساوات کے تکمل سے حاصل ہو گا جہاں تکمل $-\infty$ تا $+\infty$ حاصل کیا جائے گا۔ اس طرح

$$\boldsymbol{H}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \times (\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z})}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{I\rho}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{a}_\phi\,\mathrm{d}z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

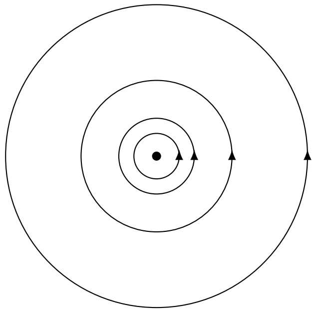
لکھا جا سکتا ہے جہاں صفحہ 18 پر مساوات 1.23 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \times \boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_\phi$ جبکہ مساوات 1.24 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{Z} = 0$ لکھے گئے ہیں۔ 2027

مندرجہ بالا مساوات میں تکمل کے اندر $\boldsymbol{a}_\phi$ پر نظر رکھنی ہو گی۔ اگرچہ $\boldsymbol{a}_\phi$ اکائی سمتیہ ہے لہٰذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہو سکتی البتہ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ آیا تکمل کا متغیرہ یعنی z تبدیل کرنے سے $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت تو تبدیل نہیں ہوتی۔ صفحہ 21 پر مساوات 1.34 کے تحت

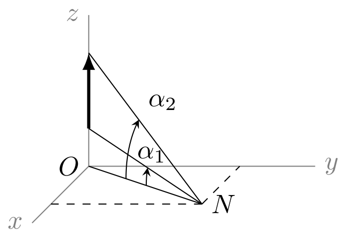
$$\boldsymbol{a}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\boldsymbol{a}_\mathrm{Y}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ z تبدیل کرنے سے $\boldsymbol{a}_\phi$ پر کوئی اثر نہیں پڑتا لہٰذا $\boldsymbol{a}_\phi$ کو تکمل کے باہر منتقل کیا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{I\rho\boldsymbol{a}_\phi}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{I\rho\boldsymbol{a}_\phi}{4\pi}\frac{z}{\rho^2\sqrt{\rho^2 + z^2}}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} \tag{7.9}$$



شکل 7.5: سیدھی لمبی تار کا مقناطیسی میدان تار کے گرد دائرے بناتا ہے۔برقی رو صفحے سے باہر نکل رہی ہے۔



شکل 7.6: سیدھی محدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت۔

سے

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi \tag{7.10}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 7.5 میں برقی رو صفحہ سے باہر نکل رہی ہے جبکہ گول دائرے مقناطیسی میدان کو ظاہر کرتے ہیں۔ اگر تار کو دائیں ہاتھ سے یوں پکڑا جائے کہ انگوٹھا برقی رو کی سمت میں ہو تب اس ہاتھ کی انگلیاں تار کے گرد مقناطیسی میدان کی سمت میں لپٹی ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مقناطیسی میدان نا تو z تبدیل کرنے اور نا ہی زاویہ ϕ تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتا ہے۔ اس کی قیمت صرف تار سے فاصلے پر منحصر ہے۔

اگر شکل 7.4 میں تار لا محدود نہ ہو تب مساوات 7.6 میں تکمل کے محدود حدود پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی شدت

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi\rho}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)\boldsymbol{a}_\phi \tag{7.11}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں شکل 7.6 میں α_1 اور α_2 کی نشاندہی کی گئی ہے۔ تار کا نچلا سرا xy سطح یعنی $z=0$ سطح سے نیچے ہونے کی صورت میں α_1 کی قیمت منفی ہو گی۔ یہی کچھ تار کے دوسرے سرے اور α_2 کے لئے بھی درست ہے۔

7.2 ایمپیئر کا دوری قانون

کولمب کے قانون کی مدد سے مختلف طرز پر پائے جانے والے چارج کے برقی میدان حاصل کرنے کے بعد ہم نے گاؤس کا قانون اخذ کیا جس سے ہماری زندگی نہایت آسان ہو گئی۔ گاؤس کے قانون کی مدد سے متشاکل چارج سے پیدا برقی میدان انتہائی آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ متشاکل برقی رو کے مقناطیسی میدان حاصل کرنے کا بھی اتنا ہی آسان طریقہ موجود ہے جسے ایمپیئر کا دوری قانون[3] کہتے ہیں۔ اس قانون کو بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حصہ 7.7.2 میں حاصل کیا گیا ہے۔ فی الحال

[3]Ampere's circuital law

ہم اس قانون کو استعمال کرنا سیکھتے ہیں۔اس قانون کے استعمال کے وقت مسئلے پر غور کرتے ہوئے بغیر حساب و کتاب کے فیصلہ کیا جاتا ہے کہ مقناطیسی میدان کے کون کون سے اجزاء موجود نہیں ہونے چاہئے۔یہ فیصلہ برقی رو کے راستے کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔

ایمپیئر کا دوری قانون کہتا ہے کہ یک سمتی برقی رو کے گرد کسی بھی راہ $\boldsymbol{H}$ کا لکیری بند تکمل گھیرے برقی رو کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I \tag{7.12}$$

لکیری بند تکمل کی سمت میں برقی رو کے گرد دائیں ہاتھ کی انگلیاں گھمانے سے اسی ہاتھ کا انگوٹھا مثبت برقی رو کی سمت دے گا۔ایسا کرتے وقت انگوٹھے کو باقی چار انگلیوں کے عمودی رکھا جاتا ہے۔

کسی بھی راہ $\boldsymbol{H}$ کے لکیری تکمل سے مراد اس راہ کو انتہائی چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں تقسیم کر کے ہر ٹکڑے پر $\boldsymbol{H}$ کی قیمت استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کر کے تمام $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کا مجموعہ حاصل کرنا ہے۔مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ کی قیمت مختلف مقامات پر عموماً مختلف ہو گی۔یوں کسی ایک نقطے پر $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت کسی دوسرے نقطے کے $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ سے مختلف ہو گی۔ایمپیئر کا دوری قانون کہتا ہے کہ اگرچہ یک سمتی برقی رو کے گرد دو مختلف بند راہوں پر جگہ جگہ $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمتیں مختلف ہوں گی لیکن دونوں راہ پر ان کا مجموعہ عین برقی رو کے برابر ہو گا۔

کسی بھی سطح کا محیط، بند راہ ہوتی ہے۔اسی طرح کوئی بھی بند راہ، لا محدود سطحوں کا محیط ہوتا ہے۔یوں بند راہ کا گھیرا ہوا برقی روان تمام سطحوں کو چھیرتا ہوا گزرے گا جن کا محیط یہ بند راہ ہو۔

گاؤس کے قانون کا استعمال تب ممکن ہوتا ہے جب بند سطح میں کل برقی چارج معلوم ہو۔ایمپیئر کا دوری قانون اس صورت استعمال کیا جا سکتا ہے جب بند راہ میں گھیرا کل یک سمتی برقی رو معلوم ہو۔

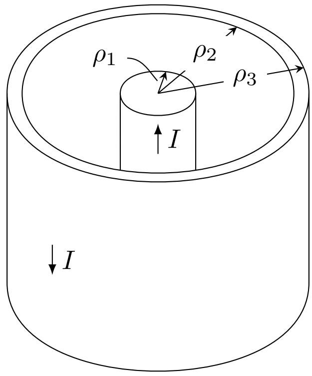
آئیں شکل 7.4 میں دکھائے گئے برقی رو گزارتے سیدھی لا محدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت ایمپیئر کے دوری قانون یعنی مساوات 7.12 کی مدد سے دوبارہ حاصل کریں۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے برقی رو کے گرد راہ یوں چنی جاتی ہے کہ اس پر $\boldsymbol{H}$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ یا تو آپس میں عمودی ہوں اور یا $\boldsymbol{H}$ کی قیمت قطعی اور اس کی سمت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کے متوازی ہو۔پہلی صورت میں دونوں متغیرات کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 90 = 0$ ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ صفر کے برابر ہو گا اور یوں راہ کے اس حصے پر تکمل صفر کے برابر ہو گا۔دوسری صورت میں متغیرات کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 0 = 1$ ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو $H\,\mathrm{d}L$ لکھا جا سکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ مقناطیسی شدت کی قیمت قطعی ہونے کی وجہ سے H کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔یوں راہ کے اس راستے پر تکمل کی قیمت HL کے برابر ہو گی جہاں L راہ کے اس حصے کی لمبائی ہے۔

تار کے گرد اور اس کے ساتھ ساتھ حرکت کرنے سے واضح ہوتا ہے کہ مسئلے کی نوعیت نا تو تار کے گرد زاویہ ϕ پر اور نا ہی محدد z پر منحصر ہے۔تار سے دور یا اس کے قریب ہونے سے ہی مسئلے کی نوعیت میں تبدیلی آتی ہے۔یوں صاف ظاہر ہے کہ مقناطیسی شدت صرف ρ پر منحصر ہو سکتی ہے۔اسی طرح بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی شدت $\boldsymbol{a}_\phi$ سمت رکھتی ہے یعنی اس کا صرف H_ϕ جزو پایا جائے گا۔یوں اگر ρ تبدیل کئے بغیر تار کے گرد چلا جائے تو ہم یقین رکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{H}$ کی حتمی قیمت H_ϕ تبدیل نہیں ہو گی۔ساتھ ہی ساتھ اس راہ پر کسی بھی نقطے پر $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi$ اور $H_\phi\boldsymbol{a}_\phi$ آپس میں متوازی ہوں گے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون سے

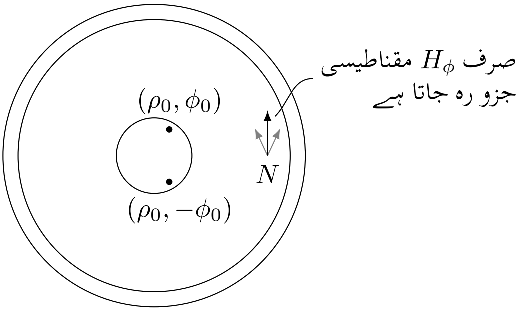
$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho\,\mathrm{d}\phi = H_\phi \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = H_\phi 2\pi\rho = I$$

یا

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$



(ا) ہم محوری تار کے اندرونی تار میں مثبت جبکہ بیرونی تار میں منفی برقی رو ہے۔



(ب) رداسی اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں اور یوں صرف زاویائی جزو رہ جاتا ہے۔

شکل 7.7: ہم محوری تار۔

حاصل ہوتا ہے جو ہم پہلے بھی حاصل کر چکے ہیں۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال کی دوسری مثال کی خاطر ہم شکل 7.7 میں دکھائے گئے ہم محوری تار لیتے ہیں۔ فرض کریں کہ z محدد پر پڑی ایسی لامحدود لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی حصے میں I اور اس کے بیرونی سطح میں $-I$ برقی رو گزر رہی ہے۔ اندرونی موصل موٹی ساخت کے تار کو نہایت پتلی فرضی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ آئیں ان پتلی فرضی تاروں سے نقطہ N پر پیدا مقناطیسی شدت پر غور کریں۔ نقطہ N کو کارتیسی محدد کے x محدد پر رکھتے ہوئے مسئلے کی نوعیت شکل 7.7-ب میں دکھائی گئی ہے۔ پچھلی مثال سے یہ واضح ہے کہ ایسی کسی بھی پتلی تار کی مقناطیسی شدت میں H_z جزو نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ایسی تار کی مقناطیسی شدت تار کے گرد گول دائرہ بناتی ہے۔ کسی بھی فرضی تار جو (ρ_0, ϕ_0) پر پائی جاتی ہو N پر ΔH_ρ اور ΔH_ϕ اجزاء پیدا کرے گی۔ اسی طرح $(\rho_0, -\phi_0)$ پر پتلی تار سے پیدا مقناطیسی شدت کے بھی ایسے رداسی اور زاویائی اجزاء ہوں گے۔ ان دونوں پتلی تاروں کے رداسی اجزاء آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لہٰذا یہ ایک دوسرے کو ختم کریں گے جبکہ زاویائی اجزاء ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں لہٰذا N پر صرف زاویائی جزو پایا جائے گا۔

اندرونی ٹھوس موصل تار کے گرد ایسا گول دائرہ لیتے ہیں جس کا رداس ρ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے زیادہ مگر بیرونی تار کے اندرونی رداس ρ_2 سے کم ہو۔ اس راہ پر ہم ایمپیئر کے دوری قانون کی مدد سے

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho_1 < \rho < \rho_2) \tag{7.13}$$

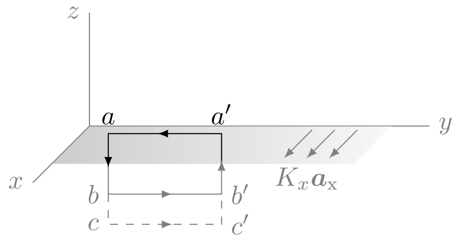
لکھ سکتے ہیں۔

اندرونی تار کا رقبہ عمودی تراش $\pi\rho_1^2$ ہے لہٰذا اس میں کثافت برقی رو $\frac{I}{\pi\rho_1^2}$ ہو گی۔ اگر ρ کو اندرونی ٹھوس موصل تار کے رداس ρ_1 سے کم رکھا جائے تب یہ راہ

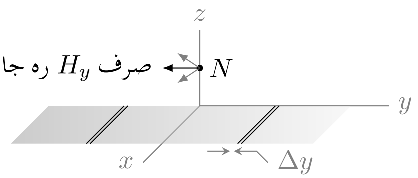
$$I_{\text{گھیرا}} = \frac{I}{\pi\rho_1^2}\pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}I$$

برقی رو کو گھیرے گا لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اندرونی ٹھوس تار میں

$$H_\phi = \frac{\rho I}{2\pi\rho_1^2} \qquad (\rho < \rho_1)$$



(ا) لامحدود جسامت کے موصل سطح پر سطحی کثافت برقی رو۔



(ب) کسی بھی نقطے کے دونوں جانب فرضی تاروں کے H_z اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں جبکہ ان کے H_y اجزاء جمع ہوتے ہیں۔

شکل 7.8: لامحدود سطحی کثافت برقی رو۔

مقناطیسی شدت پایا جائے گا۔ اسی طرح اگر ρ کو بیرونی تار کے بیرونی رداس ρ_3 سے زیادہ رکھا جائے تب یہ راہ اندرونی تار کے $+I$ اور بیرونی تار کے $-I$ کو گھیرے گی لہٰذا یہ کل $I - I = 0$ برقی رو کو گھیرے گا لہٰذا

$$H_\phi = 0 \qquad (\rho_3 < \rho)$$

ہو گا۔ آخر میں اس صورت کو بھی دیکھتے ہیں جب ρ بیرونی تار کے اندر پایا جائے۔ ایسی صورت میں یہ راہ

$$I_{\text{گھیرا}} = I - \left(\frac{\rho^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) I = \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) I$$

برقی رو گھیرے گی لہٰذا بیرونی تار میں

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) \qquad (\rho_2 < \rho < \rho_3)$$

ہو گا۔

ہم محوری تار کے باہر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ تار کے باہر کوئی بھی بند گول دائرہ اندرونی تار کی برقی رو I اور بیرونی تار کی برقی رو $-I$ دونوں کو گھیرتا ہے۔ یہ دونوں برابر مقدار مگر الٹ سمت کے برقی رو ہر نقطے پر برابر مگر الٹ سمت میں مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ ہم محوری تار کی یہ خاصیت کہ یہ بیرون تار کسی قسم کا مقناطیسی میدان نہیں پیدا کرتا انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔ ہم محوری تار اسی خاصیت کی بنا پر ہر ایسی جگہ پر استعمال کیا جاتا ہے جہاں تار میں پائے گئے برقی اشارات سے بیرونی تار کسی قسم کا اثر نا قابل برداشت ہو۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال کی تیسری مثال کو شکل 7.8-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں $z = 0$ لامحدود چوڑائی اور لامحدود لمبائی کے موصل سطح پر $K_x \boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ سطحی کثافت برقی رو گزر رہی ہے۔ ہمیں اس سطح کے قریب نقطہ N پر مقناطیسی شدت حاصل کرنے سے دلچسپی ہے۔ سطح کے $x = +\infty$ سرے سے $x = -\infty$ سرے تک برقی رو بذریعہ دو لامحدود چوڑائی کے موصل سطحوں سے واپس پہنچتی ہے۔ یہ سطحیں $z = +\infty$ اور $z = -\infty$ پر ہیں۔ اتنی دور سطحوں کے اثر کو نقطہ N پر نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

موصل سطح کو Δy چوڑائی کی فرضی تاروں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ ایسا شکل 7.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔ یوں ہر ایسی فرضی تار $K_x \Delta y \boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ برقی رو گزارے گی۔ لامحدود تار کے مقناطیسی میدان سے ہم بخوبی واقف ہیں۔ ایسی کسی بھی فرضی تار کی برقی رو H_x جزو پیدا نہیں کرے گا۔ سطح پر N کے ایک جانب فرضی تار کا H_z جزو، سطح پر N کے دوسری جانب فرضی تار کے H_z جزو کو ختم کرتا ہے جبکہ ان کے H_y اجزاء مل کر دگنی مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں۔ اس طرح مقناطیسی شدت کا صرف اور صرف H_y جزو ممکن ہے۔

شکل 7.8-الف میں موصل سطح کے کچھ حصے کو گھیرتی ہوئی مستطیلی راہ $a'abb'$ دکھائی گئی ہے۔ aa' یا bb' کی لمبائی y_1 ہے جبکہ ab یا $a'b'$ کی لمبائی $2z_1$ ہے۔ اس راہ کے z_1 حصوں پر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے لہٰذا اس حصے پر مقناطیسی شدت کا تکمل بھی صفر کے برابر ہو گا۔ راہ کے y_1 اطراف سطح سے

دونوں جانب z_1 فاصلے پر ہیں۔ سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں۔ بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطحی کثافت برقی رو موصل سطح کے اوپر جانب $-H_{ya}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جبکہ اس کے نچلی جانب $+H_{yb}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ مقناطیسی شدت پیدا کرتا ہے۔ مستطیلی راہ Ky_1 برقی رو کو گھیرتی ہے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت

$$H_{ya}y_1 + H_{yb}y_1 = K_x y_1$$

یا

$$H_{ya} + H_{yb} = K_x \tag{7.14}$$

ہو گا۔اب اگر موصل سطح کے ایک جانب مستطیلی راہ کا y_1 حصہ قدر دور کرتے ہوئے z_2 فاصلے پر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$H_{ya} + H_{yc} = K_x$$

صورت اختیار کرلے گی جس سے صاف ظاہر ہے کہ H_{yb} اور H_{yc} عین برابر ہیں یعنی مقناطیسی شدت کا دارومدار سطح سے فاصلے پر ہر گز نہیں ہے۔اس طرح تمام 2077
ایسے نقطے جو مثبت z پر پائے جاتے ہوں پر مقناطیسی شدت برابر ہو گی۔ یہی کچھ تمام ایسے نقطوں کے لئے بھی درست ہے جو منفی z پر پائے جاتے ہوں۔ 2078

سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں لہٰذا دونوں جانب مقناطیسی شدت بھی برابر ہو گا یعنی $\left|\boldsymbol{H}_{yb}\right| = \left|\boldsymbol{H}_{ya}\right|$ ہو گا۔اس طرح مساوات 7.14 سے $H_{ya} = H_{yb} = H_y = \frac{K_x}{2}$ لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_y &= -\frac{1}{2}K_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \qquad (z > 0) \\ \boldsymbol{H}_y &= +\frac{1}{2}K_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \qquad (z < 0) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جسے بہتر طور پر

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_N \tag{7.15}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ موصل سطح کی عمودی اکائی سمتیہ ہے۔ 2079

اگر $z = -h$ پر دوسری لامحدود موصل سطح رکھی جائے جس میں سطحی کثافت برقی رو $-K_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ہو تب دونوں سطحی کثافت برقی رو کی مجموعی مقناطیسی شدت

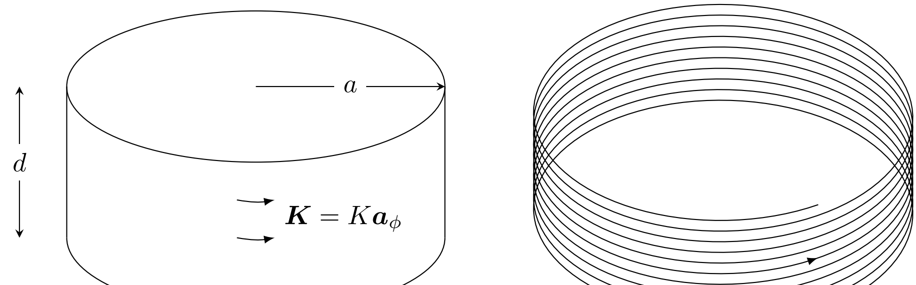
$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_N \qquad (-h < z < 0) \\ \boldsymbol{H} &= 0 \qquad (z < -h, \quad z > 0) \end{aligned} \tag{7.16}$$

ہو گی۔ 2080

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال میں سب سے مشکل کام ایسی راہ تلاش کرنا ہے جس پر مقناطیسی میدان یا راہ کے عمودی ہو اور یا پھر اس کی قیمت مستقل 2081
ہو۔ جہاں قبل از وقت ایسا جاننا ممکن نہ ہو وہاں بایوٹ-سیوارٹ کا قانون ہی قابل استعمال ہو گا۔ 2082

آئیں ایمپیئر کے دوری قانون کو استعمال کرتے ہوئے شکل 7.9-الف میں دکھائے گئے، لامحدود لمبائی کے پیچدار لچھے[4] کا مقناطیسی میدان حاصل کریں۔ لچھے 2083
کا رداس a جبکہ اس میں لمبائی جانب d فاصلے پر N چکر پائے جاتے ہیں جن میں برقی رو I گزر رہی ہے۔ لچھے کا محور عین z محدد پر پایا جاتا ہے۔ 2084

[4] solenoid



(ب) پیچدار لچھے کو سطحی کثافت تصور کیا جا سکتا ہے۔

(ا) پیچ دار لچھا۔

شکل 7.9: پیچدار لچھے کے میدان کا حصول۔

لچھے کے چکر انتہائی قریب قریب ہونے کی صورت میں لچھے کے تاروں میں برقی رو کو سطحی کثافت رو تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل 7.9-ب میں ایسا ہی کرتے ہوئے لچھے کو نلکی سطحی کثافت

$$\boldsymbol{K} = K\boldsymbol{a}_\phi = \frac{NI}{d}\boldsymbol{a}_\phi$$

2085 تصور کیا گیا ہے۔ سطحی کثافت برقی رو کی صورت میں سطح کے باہر مقناطیسی میدان صفر کے برابر ہو گا جبکہ اس کے اندر میدان نہ تو ρ اور نا ہی ϕ پر منحصر ہے۔ لامحدود
2086 لمبائی کی نلکی میں میدان z پر بھی منحصر نہیں ہو گا۔ ساتھ ہی ساتھ میدان صرف اور صرف $\boldsymbol{a}_\text{z}$ سمت میں ہو گا۔

نلکی کے اندر اور باہر، z محدد کے متوازی لمبائی d کے فرضی لکیروں کے سرے آپس میں جوڑنے سے بند راہ پر ایمپیئر کا دوری قانون لاگو کرتے ہوئے میدان

$$\boldsymbol{H} = K\boldsymbol{a}_\text{z} = \frac{NI}{d}\boldsymbol{a}_\text{z} \qquad \text{نلکی کے اندر} \tag{7.17}$$

$$\boldsymbol{H} = 0 \qquad \text{نلکی کے باہر} \tag{7.18}$$

2087 حاصل ہوتا ہے۔

2088 محدود لمبائی کی پیچدار لچھا جس کے چکر قریب قریب ہوں کا میدان مساوات 7.17 ہی دیتی ہے۔ یہ مساوات لچھے کے سروں اور تار سے دور میدان کی صحیح قیمت
2089 دیتی ہے۔

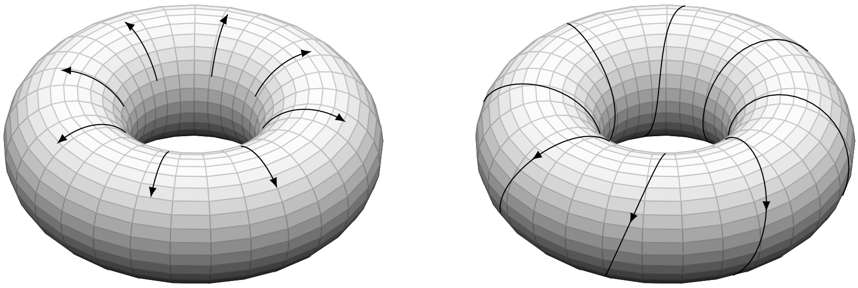
2090 آئیں ایمپیئر کے دوری قانون کی ایک اور مثال دیکھیں۔ شکل 7.9-الف کے پیچدار لچھے کو دائری شکل دے کر شکل 7.10-الف حاصل ہوتا ہے۔

شکل 7.10-الف میں اندرسہ[5][6] شکل کی سطح پر N چکر کی لپٹی تار میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ اندرسہ $z = 0$ سطح پر پڑی ہے جبکہ z محدد اس کے محور سے گزرتا ہے۔ لپٹی تار کے چکر قریب قریب ہونے کی صورت میں اندرسے کی سطح پر K کثافت برقی رو تصور کی جا سکتی ہے۔ اندرسے کا عمودی تراش رداس a کا دائرہ ہے جبکہ اندرسے کا اوسط رداس b ہے۔ اس طرح اندرسے کا اندرونی رداس $b - a$ جبکہ اس کا بیرونی رداس $b + a$ ہو گا۔ یوں اندرسے کے محور کے قریبی سطح پر کثافت برقی رو

$$K = \frac{NI}{2\pi(b-a)} \quad \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

[5] بچپن میں اندرسہ کس نے نہیں کھایا۔ یہ شکل اندرسہ کی طرح ہے لہٰذا اس کتاب میں اسے اندرسہ ہی پکارا جائے گا۔ اگر آپ کو مٹھائی پسند نہیں تو اسے سائیکل کے ٹائر میں موجود ٹیوب تصور کر سکتے ہیں۔

[6] toroid



(ب) اندرسہ کی سطح پر کثافت برقی رو پائی جاتی ہے۔   (ا) اندرسہ لچھا۔

شکل 7.10: اندرسہ کی سطح پر تار میں برقی رو کو کثافت برقی رو تصور کیا جا سکتا ہے۔

ہو گی۔ایمپیئر کا دوری قانون استعمال کرنے کی غرض سے ہم اندرسے کے اندر رداس $(b-a) < \rho < (b+a)$ کا دائرہ لیتے ہیں۔یہ فرضی دائرہ اندرسے کے محور کے قریبی سطح پر کثافت K کو گھیرے گا لہٰذا یہ

$$2\pi(b-a)K$$

برقی رو کو گھیرے گا۔یوں ایمپیئر کے دوری قانون سے اس رداس پر مقناطیسی میدان

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \frac{2\pi(b-a)K}{2\pi\rho} = \frac{NI}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_{\phi} && \text{اندرسے کے اندر} \\ \boldsymbol{H} &= 0 && \text{اندرسے کے باہر} \end{aligned} \tag{7.19}$$

ہو گا۔

شکل 7.10-الف میں تار کے چکر قریب قریب نہ ہونے کی صورت میں جب تک ہم دو چکر کے مابین فاصلے سے چند گنا زیادہ دور، تار سے ہٹ کر رہیں، یہی مساوات اصل میدان کی قیمت کے قریب قریب جواب دے گی۔

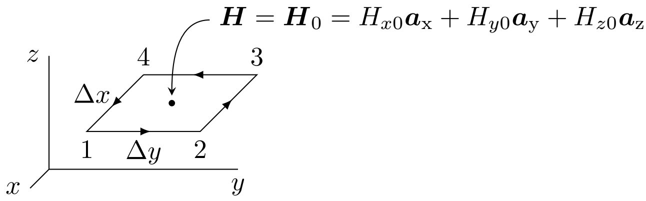
7.3 گردش

آپ کو یاد ہو گا کہ ہم نے گاؤس کے قانون کو انتہائی چھوٹی حجم پر لاگو کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی تھی۔اس حصے میں ہم ایمپیئر کے دوری قانون کو انتہائی چھوٹی بند راہ پر استعمال کرتے ہوئے گردش[7] کی مساوات حاصل کریں گے۔

کارتیسی محدد میں ہم کسی نقطے N پر Δx اور Δy اطراف کی چھوٹی بند راہ لیتے ہیں۔شکل 7.11 میں اس چھوٹی بند راہ کو دکھایا گیا ہے جو رقبہ $\Delta x \Delta y$ کو گھیرتی ہے۔یہ راہ مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H} = H_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + H_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + H_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ میں پائی جاتی ہے۔شکل میں راہ پر تیر کے نشان راہ پر چلنے کی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔اس رقبے کے عین وسط میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر مقناطیسی شدت

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_0 &= H_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + H_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + H_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ &= H_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + H_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + H_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \end{aligned}$$

[7] curl



شکل 7.11: گردش کی تعریف۔

کے برابر ہے۔ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اس بند راہ کے گرد مقناطیسی شدت کا تکمل رقبہ $\Delta x \Delta y$ سے گزرتی برقی رو کے برابر ہوگا۔آئیں اس تکمل کو حاصل 2097
کریں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم بند راہ پر 1 سے 2 کی طرف چلتے ہوئے پورا چکر کاٹیں گے۔ 2098

کارتیسی محدد میں کسی بھی چھوٹے فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھا جا سکتا ہے۔شکل 7.11 میں 1 تا 2 پر $\mathrm{d}x = 0$ اور $\mathrm{d}z = 0$ ہیں لہٰذا اس چھوٹے فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھا جا سکتا ہے۔چھوٹے چکور کا وسط (x_0, y_0, z_0) ہے۔یوں چکور کا 1 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 - \frac{\Delta y}{2})$ پر اور 2 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2})$ پر ہوگا۔یوں راہ کے پہلے حصے 1 تا 2 پر لکیری تکمل

$$\int\limits_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \left(H_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + H_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + H_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right) \cdot \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \int\limits_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} H_y \,\mathrm{d}y = H_{y21} \int\limits_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \mathrm{d}y = H_{y21}\Delta y$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کو H_y کے بجائے H_{y21} لکھتے ہوئے اور اس راہ پر مقناطیسی شدت میں تبدیلی کو نظر انداز کرتے ہوئے تکمل کے باہر لے جایا گیا۔ہمیں اس طرح کے تکمل بار بار حاصل کرنے ہوں گے لہٰذا اس پورے عمل کو ہم

$$(\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21} = H_{y21}\Delta y \tag{7.20}$$

لکھیں گے۔ہمیں رقبے کے عین وسط میں مقناطیسی شدت معلوم ہے البتہ راہ کے پہلے حصے پر ہمیں اس کے بارے میں معلومات فراہم نہیں ہے۔ایسی صورت میں
ہمیں ٹیلر تسلسل[8] کو بروئے کار لانا ہوگا۔ 2100

ٹیلر تسلسل

$$f(x+\delta x) = f(x) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\delta x)^2 + \cdots$$

سے آپ بخوبی واقف ہیں جہاں $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور دیگر تفرق کو نقطہ x پر حاصل کیا جاتا ہے۔اگر اس میں $\delta x = \frac{\Delta x}{2}$ پر کیا جائے تو اس کی نئی شکل

$$f(x+\tfrac{\Delta x}{2}) = f(x) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \cdots$$

حاصل ہوتی ہے جسے ہم اب استعمال کرتے ہیں۔ 2101

اگر نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر تفاعل H_y کی قیمت $H_y(x_0, y_0, z_0)$ ہو تب نقطہ $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)$ پر اس کی قیمت مسئلہ ٹیلر سے

$$\begin{aligned} H_y(x_0 + \tfrac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) &= H_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \cdots \\ &= H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \cdots \end{aligned}$$

[8] Taylor series

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ کو نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر حاصل کیا جاتا ہے۔ راہ 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کی قیمت ٹیلر تسلسل کے پہلے دو اجزاء سے حاصل کرتے ہوئے

$$H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \tag{7.21}$$

لکھ کر مساوات 7.20 کو

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21} \doteq \left(H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \tag{7.22}$$

2102 لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.21 کو یوں بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ چھوٹے رقبے کے وسط میں x کے ساتھ H_y میں تبدیل ہونے کی شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔ یوں اگر x میں Δx تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x}\Delta x$ ہو گی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}\Delta x$ ہو گی۔ اسی طرح اگر x میں $\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی۔ اب رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر 1 تا 2 راہ کا درمیانہ نقطہ ہے لہٰذا یہاں

$$H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \tag{7.23}$$

2103 ہو گا جو عین مساوات 7.21 ہی ہے۔

راہ کے اگلے حصے یعنی 2 تا 3 یہی کچھ کرتے ہوئے

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{32} = H_{x32}(-\Delta x) \doteq -\left(H_{x0} + \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \tag{7.24}$$

جبکہ 3 تا 4 پر

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{43} = H_{43}(-\Delta y) \doteq -\left(H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \tag{7.25}$$

اور 4 تا 1 پر

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{14} = H_{x14}\Delta x \doteq \left(H_{x0} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \tag{7.26}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 7.22، مساوات 7.24، مساوات 7.25 اور مساوات 7.26 کو جمع کرتے ہوئے پورے بند راستے کا تکمل

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y \tag{7.27}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر اس چھوٹے بند راہ کے گھیرے رقبے پر کثافت برقی رو

$$\boldsymbol{J} = J_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + J_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + J_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

ہو تب اس رقبے سے $J_z\Delta x\Delta y$ برقی رو گزرے گی۔ ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت بند راہ کا تکمل اور رقبے سے گزرتی برقی رو برابر ہوں گے یعنی

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y \doteq J_z \Delta x \Delta y$$

ہو گا جسے

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta x \Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \doteq J_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ رقبے کو جتنا چھوٹا کیا جائے مندرجہ بالا مساوات اتنی ہی زیادہ درست ہو گی حتیٰ کہ $\Delta x \to 0$ اور $\Delta y \to 0$ کی صورت میں یہ مکمل طور پر درست ہو گا اور یوں مساوات میں تقریباً برابر کی علامت $\doteq$ کی جگہ بالکل برابر $=$ کی علامت استعمال کی جائے گی یعنی

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \tag{7.28}$$

لکھا جائے گا۔

اگر ہم کارتیسی محدد کے بقایا دو محدد کے عمودی چھوٹے رقبے لیں اور مندرجہ بالا عمل دہرائیں تو ہمیں

$$\lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \tag{7.29}$$

اور

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta z \Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \tag{7.30}$$

حاصل ہوں گے۔ مساوات 7.29 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δy اور Δz ہیں جس سے $J_x \Delta y \Delta z$ برقی رو گزرتی ہے۔ اسی طرح مساوات 7.30 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δz اور Δx ہیں جس سے $J_y \Delta z \Delta x$ برقی رو گزرتی ہے۔

ایمپیئر کے دوری قانون سے شروع کرتے ہوئے ہم نے مساوات 7.28، مساوات 7.29 اور مساوات 7.30 حاصل کئے جو مقناطیسی شدت کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو گھیرے گئے کثافت برقی رو کے برابر ٹھہراتے ہیں۔ کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو اس متغیرہ کی گردش[9] کہتے ہیں۔ انتہائی چھوٹے رقبے کے گرد گردش کرتے ہوئے کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل کو اس نقطے پر متغیرہ کے گھومنے یا گردش کی ناپ تصور کی جا سکتی ہے۔ اسی لئے اس عمل کو گردش کہا جاتا ہے۔

کسی بھی سمتیہ کی گردش بھی سمتیہ ہو گی۔ گردش کا کوئی بھی جزو انتہائی چھوٹے سیدھے رقبے کے گرد سمتیہ کے بند تکمل فی یہی رقبہ کے برابر ہو گا جہاں بند تکمل کی راہ درکار جزو کے عمودی سطح میں پایا جاتا ہو اور رقبے کی قیمت صفر کے قریب سے قریب تر ہو۔ گردش کی یہ تعریف کسی بھی محدد پر مبنی نہیں ہے۔ اس تعریف کی حسابی شکل

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \lim_{\Delta S_n \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta S_n}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{H}$ کی گردش حاصل کی گئی ہے۔ اس مساوات میں ΔS_n وہ چھوٹا سیدھا رقبہ ہے جس کے گرد $\boldsymbol{H}$ کا بند تکمل حاصل کیا گیا ہے۔ گردش از خود سیدھے سطح کے عمودی ہو گا۔ رقبہ ΔS_n لکھتے ہوئے زیر نوشت میں n اسی حقیقت کی یاد دہانی کراتا ہے کہ رقبے اور گردش کے درمیان نوے درجے کا زاویہ پایا جاتا ہے۔

کارتیسی محدد میں گردش $\boldsymbol{H}$ کے x، y اور z اجزاء مساوات 7.29، مساوات 7.30 اور مساوات 7.28 بالترتیب دیتے ہیں لہٰذا

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \boldsymbol{J} \tag{7.31}$$

---

[9] curl

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کو قالب کے حتمی قیمت[10] کی شکل میں

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{J} \tag{7.32}$$

لکھا جا سکتا ہے۔صفحہ 81 پر مساوات 3.29 نیبلا ∇ کے عمل کو بیان کرتا ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

اور صفحہ 15 پر مساوات 1.19 دو سمتیات کا سمتی ضرب دیتا ہے۔ان سے گردش نہایت خوبصورتی سے

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \nabla \times \boldsymbol{H} \tag{7.33}$$

لکھی جا سکتی ہے۔آپ جلد دیکھیں گے کہ صرف کارتیسی محدد میں ہی گردش ∇ اور $\boldsymbol{H}$ کے صلیبی ضرب سے حاصل ہوتا ہے۔اس کے باوجود کسی بھی محدد میں گردش کو $\nabla \times \boldsymbol{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں کارتیسی محدد میں H کی گردش یوں لکھی جائے گی۔

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{7.34}$$

ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.35}$$

لکھی جا سکتی ہے جو میکس ویل کی دوسری مساوات ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے میدان کے لئے درست ہے۔یہاں میکس ویل کی تیسری مساوات کا بھی ذکر کر لیتے ہیں جو $\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{7.36}$$

ہے۔میکس ویل کے چوتھی مساوات پر اس کتاب میں آگے غور کیا جائے گا۔

آپ جانتے ہیں کہ ساکن برقی میدان بقائی میدان ہوتا ہے لہٰذا اس میں چارج q کو کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے صفر توانائی درکار ہو گی۔یوں $q\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ صفر کے برابر ہو گا جس سے $\boldsymbol{E}$ کا گردش بھی صفر ہو گا۔مساوات 7.36 یہی کہتی ہے۔اس کے برعکس وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر مقناطیسی میدان غیر بقائی میدان ہے جس میں چارج کو برقی رو گھیرتی ہوئی کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے توانائی درکار ہو گی۔اسی لئے اس کی گردش صفر نہیں ہو گی۔مساوات 7.35 یہی کہتی ہے۔

مشق 7.1: گردش یعنی $\nabla \times \boldsymbol{H}$ کو

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \times \left(H_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + H_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + H_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)$$

[10] determinant

لکھ کر سمتی ضرب سے مساوات 7.31 حاصل کریں۔

مشق 7.2: اگر $\boldsymbol{H} = (x^2y+2z)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + (xz-y)\boldsymbol{a}_{\text{Y}} + (e^x yz)\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ تب $\nabla \times \boldsymbol{H}$ کیا ہو گا اور اس کی قیمت نقطہ $(0,1,2)$ پر کیا ہو گی۔

جوابات: $\nabla \times \boldsymbol{H} = (e^x z - x)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + (2 - e^x yz)\boldsymbol{a}_{\text{Y}} + (z - x^2)\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ اور نقطے پر گردش کی قیمت $2\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ ہو گی۔

مثال 7.1: سمتیہ $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\text{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\text{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ کے گردش کی گردش یعنی $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A}$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 7.34 سے

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\text{Y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \tag{7.37}$$

لکھتے ہیں۔ مساوات 7.34 دوبارہ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = &\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]\boldsymbol{a}_{\text{X}} \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{a}_{\text{Y}} \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{a}_{\text{Z}}
\end{aligned}$$

تمام تفرق حاصل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = &\left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}\right]\boldsymbol{a}_{\text{X}} \\
&+ \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y}\right]\boldsymbol{a}_{\text{Y}} \\
&+ \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z}\right]\boldsymbol{a}_{\text{Z}}
\end{aligned}$$

اس مساوات کے پہلے جزو میں $\mp\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$، دوسرے جزو میں $\mp\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}$ اور تیسرے میں $\mp\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$ شامل کرتے ہوئے ذرہ مختلف ترتیب سے لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A} &= \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial x}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-\left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\\ &+\left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial y}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}-\left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\\ &+\left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}-\left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}\tag{7.38}$$

یہاں رک کر $\boldsymbol{A}$ کے پھیلاو کی ڈھلوان یعنی $\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)$ حاصل کرتے ہیں۔ پھیلاو

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right) &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\\ &+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\\ &+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}\tag{7.39}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر ہم

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{A} &\equiv \nabla^2 A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\nabla^2 A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\nabla^2 A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ &=\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}\tag{7.40}$$

لکھیں تب مندرجہ بالا دو مساواتوں کی مدد سے مساوات 7.38 کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}\equiv\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)-\nabla^2\boldsymbol{A}\tag{7.41}$$

2126 مساوات 7.40 سمتیہ کی لاپلاسی[11] ہے۔

2127

2128

مثال 7.2: سمتیہ $\boldsymbol{S}$ اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش کے لئے ثابت کریں کہ

$$\nabla\times\left(M\boldsymbol{S}\right)\equiv\left(\nabla M\right)\times\boldsymbol{S}+M\left(\nabla\times\boldsymbol{S}\right)\tag{7.42}$$

2129 کے برابر ہے۔

---

[11] vector Laplacian

حل: سمتیہ اور مقداری کے حاصل ضرب کو

$$MS = M\left(S_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + S_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + S_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) = MS_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + MS_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + MS_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھتے ہوئے اس کی گردش مساوات 7.34 کی طرح لکھ کر

$$\nabla \times M\boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial MS_z}{\partial y} - \frac{\partial MS_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial MS_x}{\partial z} - \frac{\partial MS_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial MS_y}{\partial x} - \frac{\partial MS_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

تفرق کھولتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\nabla \times M\boldsymbol{S} = &\left(\frac{\partial M}{\partial y}S_z + M\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}S_y - M\frac{\partial S_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\\ &+ \left(\frac{\partial M}{\partial z}S_x + M\frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial x}S_z - M\frac{\partial S_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\\ &+ \left(\frac{\partial M}{\partial x}S_y + M\frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}S_x - M\frac{\partial S_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

اس کو یوں ترتیب دیتے ہیں

$$\begin{aligned}\nabla \times M\boldsymbol{S} = &\left[\left(\frac{\partial M}{\partial y}S_z - \frac{\partial M}{\partial z}S_y\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}S_x - \frac{\partial M}{\partial x}S_z\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}S_y - \frac{\partial M}{\partial y}S_x\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right]\\ &+ M\left[\left(\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial S_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right]\end{aligned}$$

اس مساوات کا دوسرا جزو $M(\nabla \times \boldsymbol{S})$ کے برابر ہے جبکہ اس کا پہلا جزو $(\nabla M) \times \boldsymbol{S}$ کے برابر ہے جسے

$$(\nabla M) \times \boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial M}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \frac{\partial M}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \times \left(S_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + S_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + S_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)$$

لکھ کر صلیبی ضرب کے بعد ترتیب دینے سے

$$(\nabla M) \times \boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial y}S_z - \frac{\partial M}{\partial z}S_y\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}S_x - \frac{\partial M}{\partial x}S_z\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}S_y - \frac{\partial M}{\partial y}S_x\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

2130 حاصل کیا جا سکتا ہے۔

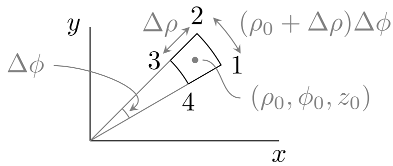
2131

2132

7.3.1 نلکی محدد میں گردش

نلکی محدد میں J_z کثافت برقی رو کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جسے شکل 7.12 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسے رقبے کے اطراف $\Delta\rho$ اور $\rho\Delta\phi$ ہوں گے جبکہ اس سطح پر z کی قیمت تبدیل نہیں ہو گی۔ اس رقبے کے وسط میں

$$\boldsymbol{H}_0(\rho_0, \phi_0, z_0) = H_{\rho 0}\boldsymbol{a}_\rho + H_{\phi 0}\boldsymbol{a}_\phi + H_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$



شکل 7.12: نلکی محدد میں چھوٹا رقبہ۔

ہو گا۔ کارتیسی محدد میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ اور $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر اطراف کی لمبائیاں عین برابر تھیں۔ نلکی محدد میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $\left(\rho_0+\frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi$ جبکہ وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $\left(\rho_0-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi$ ہے۔ انہیں اطراف پر مقناطیسی شدت بالترتیب

$$H_{\phi21} \doteq H_{\phi0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

اور

$$H_{\phi43} \doteq H_{\phi0} - \frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

ہو گی جہاں $\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}$ چھوٹے رقبے کے وسط میں حاصل کیا جائے گا۔ یوں 1 سے 2 جانب چھوٹے رقبے کے گرد چکر کاٹتے ہوئے ان دو اطراف پر تکمل

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21} &\doteq \left(H_{\phi0}+\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}\right)\left(\rho_0+\frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\\ &\doteq \left[H_{\phi0}\rho_0 + H_{\phi0}\frac{\Delta\rho}{2} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2} + \frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\left(\frac{\Delta\rho}{2}\right)^2\right]\Delta\phi\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})_{43} &\doteq \left(H_{\phi0}-\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}\right)\left[-\left(\rho_0-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\right]\\ &\doteq \left[-H_{\phi0}\rho_0 + H_{\phi0}\frac{\Delta\rho}{2} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2} - \frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\left(\frac{\Delta\rho}{2}\right)^2\right]\Delta\phi\end{aligned}$$

2133 ہوں گے۔

چھوٹے رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ یا $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر اطراف $\Delta\rho$ لمبائی رکھتے ہیں جبکہ ان پر اوسط شدت بالترتیب

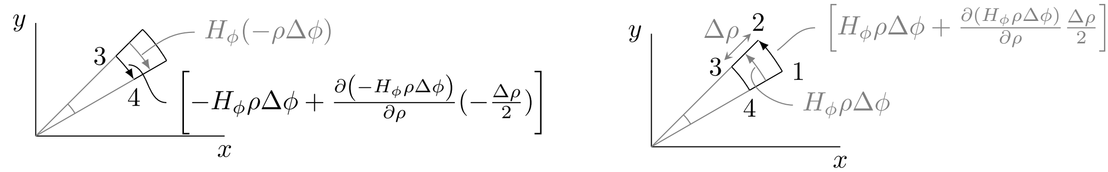
$$H_{\phi32} \doteq H_{\rho0} + \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

اور

$$H_{\phi14} \doteq H_{\rho0} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

ہیں۔ یوں ان اطراف پر تکمل

$$(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})_{32} \doteq \left(H_{\rho0}+\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}\right)(-\Delta\rho)$$



(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے اندرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔ (ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے بیرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.13: زاویائی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

اور

$$(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})_{14}\doteq\left(H_{\rho 0}-\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}\right)\Delta\rho$$

ہوں گے۔ 2134

یوں پورا تکمل ان چار جوابات کا مجموعہ

$$\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\doteq\left(H_{\phi 0}+\rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}-\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right)\Delta\rho\Delta\phi \tag{7.43}$$

ہو گا۔ اس چھوٹے رقبے سے $J_z\rho_0\Delta\rho\Delta\phi$ برقی رو گزرے گی۔ یوں ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\doteq\left(H_{\phi 0}+\rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}-\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right)\Delta\rho\Delta\phi\doteq J_z\rho_0\Delta\rho\Delta\phi$$

یعنی

$$\frac{\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho_0\Delta\rho\Delta\phi}\doteq\left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0}+\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right)\doteq J_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $\Delta\rho$ اور $\Delta\phi$ کو کم سے کم کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات بالکل درست ہو گی اور تقریباً برابر کی علامت $\doteq$ کی جگہ برابر کی علامت $=$ استعمال کی جائے گی۔ اس طرح گردش کا پہلا جزو

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta\phi\to 0}}\frac{\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho_0\Delta\rho\Delta\phi}=\left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0}+\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right)=J_z \tag{7.44}$$

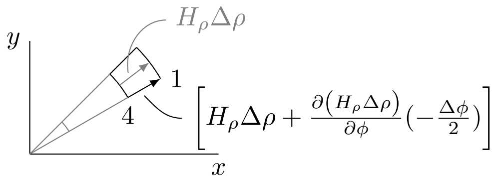
لکھا جا سکتا ہے۔ 2135

اس سے پہلے کہ ہم گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں، آئیں مساوات 7.43 کو قدر مختلف اور بہتر طریقے سے حاصل کریں۔ شکل 7.13-الف کو دیکھتے ہوئے آگے بڑھیں۔ اگر ہم کسی نقطے کے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ سے نقطے کے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ تک حرکت کریں تو ہم $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کریں گے۔ اس راہ پر تکمل تقریباً

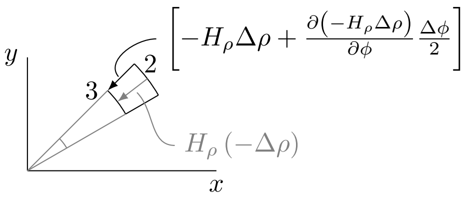
$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=H_\phi\rho\Delta\phi$$

کے برابر ہو گا۔ اس تکمل کو تفاعل g تصور کرتے ہوئے یعنی $g=H_\phi\rho\Delta\phi$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم چھوٹے رقبے کے وسط سے رداسی سمت میں $+\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کریں تو اس تفاعل کی قیمت میں تبدیلی

$$\Delta(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})=\frac{\partial g}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}=\frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$



(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے کم زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔



(ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے زیادہ زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.14: رداسی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}$ کو چھوٹے رقبے کے وسط پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں رداس ρ_0 کے برابر ہے۔ چونکہ چھوٹے رقبے کے عین وسط پر اس تکمل کی قیمت $H_{\phi0}\rho_0\Delta\phi$ کے برابر ہے لہٰذا وسط سے $\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر تکمل کی قیمت

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} = H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2} \tag{7.45}$$

ہو گی۔ اسی طرح، جیسا شکل 7.13-ب میں دکھایا گیا ہے، اگر ہم کسی نقطے کے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ سے نقطے کے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ تک حرکت کریں تو اس راہ پر تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\phi(-\rho\Delta\phi)$$

کے برابر ہو گا۔ اگر اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کیا جائے تب وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} &= -H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(-H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\left(-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\ &= -H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}\end{aligned} \tag{7.46}$$

2136 ہو گا۔

اسی طرح، جیسے شکل 7.14-الف میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $-\frac{\Delta\rho}{2}$ تا $+\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت $H_\rho\Delta\rho$ ہو گی۔ اس نقطے سے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت میں تبدیلی رونما ہو گی جسے

$$\Delta(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}) = \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\left(-\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

لکھا جا سکتا ہے اور یوں تکمل کی نئی قیمت

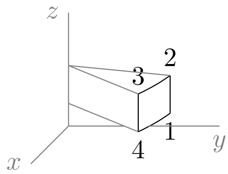
$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\rho\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

ہو گی۔ اگر چھوٹے رقبے کے عین وسط کو یہی نقطہ تصور کیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات 4 تا 1 پر تکمل دیتا ہے یعنی

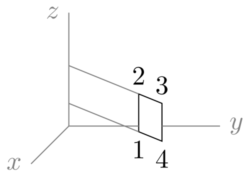
$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} = H_\rho\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2} \tag{7.47}$$

اسی طرح، جیسے شکل 7.14-ب میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $+\frac{\Delta\rho}{2}$ تا $-\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\rho(-\Delta\rho)$$



(ا) نلکی محدد میں شدت کا رداسی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔



(ب) نلکی محدد میں شدت کا زاویائی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔

شکل 7.15: نلکی محدد میں گردش کے رداسی اور زاویائی اجزاء کے رقبے۔

ہو گی۔اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کرتے ہوئے وسط سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ پر یہی تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}=-H_\rho\Delta\rho-\frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2} \tag{7.48}$$

2137 کے برابر ہو گا۔

مساوات 7.45، مساوات 7.46، مساوات 7.47 اور مساوات 7.48 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد پورا تکمل دیتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}&=\frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\Delta\rho-\frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\Delta\phi\\&=\left[\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho}-\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]\Delta\rho\Delta\phi\end{aligned} \tag{7.49}$$

جہاں تفرق رقبے کے وسط پر حاصل کئے جاتے ہیں۔اس مساوات کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=\left[H_{\phi0}+\rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}-\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]\Delta\rho\Delta\phi$$

بالکل مساوات 7.43 ہی ہے۔یاد رہے کہ $\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho}$ کو چھوٹے رقبے کے وسط میں حاصل کیا جائے گا۔یوں رداس ρ_0 اور مقناطیسی شدت $H_{\phi0}$ کے برابر ہوں گے۔مساوات 7.49 سے گردش

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to0\\ \Delta\phi\to0}}\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta\rho\rho\Delta\phi}=\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]=J_z \tag{7.50}$$

آئیں اب نلکی محدد میں گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں۔گردش کا رداسی جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم $\rho=\rho_0$ سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف Δz اور $\rho_0\Delta\phi$ لمبائی رکھیں گے۔اس رقبے کو شکل 7.15-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس پر 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے کا لکیری تکمل حاصل کیا جائے گا۔مستقل رداس کے سطح پر کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta z}{2}$ تا $+\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے تکمل $H_z\Delta z$ حاصل ہوتا ہے۔اس نقطے سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر اس تکمل کی قیمت ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21}=H_z\Delta z+\frac{\partial(H_z\Delta z)}{\partial\phi}\left(+\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta z}{2}$ تا $-\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے تکمل $-H_z\Delta z$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43}=-H_z\Delta z+\frac{\partial(-H_z\Delta z)}{\partial\phi}\left(-\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان دو جوابات سے رقبے کے z اطراف کا تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21}+\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43}=+\frac{\partial H_z}{\partial \phi}\Delta z\Delta\phi \tag{7.51}$$

حاصل ہوتا ہے۔ کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta\phi}{2}$ تا $+\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت $H_\phi\rho\Delta\phi$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}=H_\phi\rho\Delta\phi+\frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial z}\left(-\frac{\Delta z}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta\phi}{2}$ تا $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت $-H_\phi\rho\Delta\phi$ جبکہ نقطے سے $+\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}=-H_\phi\rho\Delta\phi+\frac{\partial(-H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial z}\left(+\frac{\Delta z}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان دو جوابات کے مجموعے سے چھوٹے رقبے کے گرد گھومتے ہوئے زاویائی حصے کا تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}+\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}=-\rho\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\Delta z\Delta\phi \tag{7.52}$$

2138 حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 7.51 اور مساوات 7.52 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد کل تکمل دیتا ہے جو رقبے سے گزرتی برقی رو $J_\rho\rho\Delta\phi\Delta z$ کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=\left[\frac{\partial H_z}{\partial \phi}-\rho\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]\Delta z\Delta\phi=J_\rho\rho\Delta\phi\Delta z$$

جس سے گردش کا رداسی جزو

$$\lim_{\substack{\Delta\phi\to 0\\ \Delta z\to 0}}\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho\Delta\phi\Delta z}=\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}-\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]=J_\rho \tag{7.53}$$

2139 ملتا ہے۔

شکل 7.15-ب میں 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے $\boldsymbol{H}$ کے لکیری تکمل مندرجہ ذیل ہیں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21}&=H_z\Delta z+\frac{\partial(H_z\Delta z)}{\partial \rho}\left(-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43}&=-H_z\Delta z+\frac{\partial(-H_z\Delta z)}{\partial \rho}\left(+\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}&=H_\rho\Delta\rho+\frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\\
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}&=-H_\rho\Delta\rho+\frac{\partial(-H_\rho\Delta\rho)}{\partial z}\left(-\frac{\Delta z}{2}\right)
\end{aligned}$$

اور یوں ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta z\to 0}}\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta\rho\Delta z}=\left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)=J_\phi \tag{7.54}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.54، مساوات 7.53 اور مساوات 7.50 کا مجموعہ نلکی محدد میں گردش دیتا ہے یعنی

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{7.55}$$

یہاں ایک بار پھر یہ بتلانا ضروری ہے کہ نلکی محدد میں ∇ اور $\boldsymbol{H}$ کا صلیبی ضرب کسی صورت مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ نہیں دیتا۔ اس کے باوجود $\boldsymbol{H}$ کے گردش کو $\nabla \times \boldsymbol{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 7.3: اگر $\boldsymbol{H} = (3\rho\cos\phi + 5)\boldsymbol{a}_\rho + 6\sin\phi\boldsymbol{a}_\phi + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ ہو تب $\nabla \times \boldsymbol{H}$ کیا ہو گا۔

جواب: $\nabla \times \boldsymbol{H} = (\frac{6}{\rho} + 3)\sin\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$

7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات

صفحہ 84 پر حصہ 3.10 میں عمومی محدد استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی گئی۔ یہاں عمومی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ عمومی محدد کے متغیرات (u, v, w) جبکہ اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u, \boldsymbol{a}_v, \boldsymbol{a}_w)$ ہیں۔ ان میں تین اطراف

$$\begin{aligned}\mathrm{d}L_u &= k_1\,\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}L_v &= k_2\,\mathrm{d}v\\ \mathrm{d}L_w &= k_3\,\mathrm{d}w\end{aligned}$$

لکھے جاتے ہیں۔

گردش کا پہلا جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم نقطہ (u, v, w) پر u کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف $k_2\Delta v$ اور $k_3\Delta w$ ہوں گے۔ اب $v - \frac{\Delta v}{2}$ سے $v + \frac{\Delta v}{2}$ تک فاصلہ $k_2\Delta v$ کے برابر ہے لہٰذا اس پر چلتے ہوئے تکمل $H_v k_2 \Delta v$ کے برابر ہو گا۔ نقطہ (u, v, w) سے $-\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} = H_v k_2\Delta v + \frac{\partial (H_v k_2 \Delta v)}{\partial w}\left(-\frac{\Delta w}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $v + \frac{\Delta v}{2}$ سے $v - \frac{\Delta v}{2}$ تک تکمل $-H_v k_2 \Delta v$ کے برابر ہو گا۔ نقطہ (u, v, w) سے $+\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} = -H_v k_2\Delta v + \frac{\partial (-H_v k_2 \Delta v)}{\partial w}\left(\frac{\Delta w}{2}\right)$$

ہو گا۔ یوں ان اطراف پر کل تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} + \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} = -\frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w}\Delta v \Delta w \tag{7.56}$$

ہو گا۔یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} = H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial (H_w k_3 \Delta w)}{\partial v}\left(\frac{\Delta v}{2}\right)$$
$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} = -H_w k_3 \Delta w + \frac{\partial (-H_w k_3 \Delta w)}{\partial v}\left(-\frac{\Delta v}{2}\right)$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} + \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} = \frac{\partial (H_w k_3)}{\partial v}\Delta v \Delta w \tag{7.57}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں چھوٹے رقبے کے گرد کل تکمل

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \left[\frac{\partial (H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w}\right]\Delta v \Delta w \tag{7.58}$$

لکھتے ہوئے ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \left[\frac{\partial (H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w}\right]\Delta v \Delta w = J_u k_2 k_3 \Delta v \Delta w$$

لکھ کر گردش کا پہلا جزو

$$\lim_{\substack{\Delta v \to 0\\ \Delta w \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_2 k_3 \Delta v \Delta w} = \frac{1}{k_2 k_3}\left[\frac{\partial (H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w}\right] = J_u \tag{7.59}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ اسی مساوات میں متغیرات ذرہ دیکھ کر تبدیل کرتے ہوئے گردش کے بقایا دو اجزاء

$$\lim_{\substack{\Delta u \to 0\\ \Delta w \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_1 k_3 \Delta u \Delta w} = \frac{1}{k_1 k_3}\left[\frac{\partial (H_u k_1)}{\partial w} - \frac{\partial (H_w k_3)}{\partial u}\right] = J_v \tag{7.60}$$

اور

$$\lim_{\substack{\Delta u \to 0\\ \Delta v \to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_1 k_2 \Delta u \Delta v} = \frac{1}{k_1 k_2}\left[\frac{\partial (H_v k_2)}{\partial u} - \frac{\partial (H_u k_1)}{\partial v}\right] = J_w \tag{7.61}$$

لکھ سکتے ہیں۔عمومی محدد میں گردش کے ان اجزاء کو

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{k_2 k_3}\left[\frac{\partial (H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial (H_v k_2)}{\partial w}\right]\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_1 k_3}\left[\frac{\partial (H_u k_1)}{\partial w} - \frac{\partial (H_w k_3)}{\partial u}\right]\boldsymbol{a}_v\\ + \frac{1}{k_1 k_2}\left[\frac{\partial (H_v k_2)}{\partial u} - \frac{\partial (H_u k_1)}{\partial v}\right]\boldsymbol{a}_w\end{aligned} \tag{7.62}$$

یا قالب کا حتمی قیمت

$$\boldsymbol{H}_{\text{گردش}} = \begin{vmatrix} \frac{\boldsymbol{a}_u}{k_2 k_3} & \frac{\boldsymbol{a}_v}{k_3 k_1} & \frac{\boldsymbol{a}_w}{k_1 k_2}\\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w}\\ k_1 H_u & k_2 H_v & k_3 H_w \end{vmatrix} \tag{7.63}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

2148

2149 7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات

جیسے صفحہ 84 پر حصہ 3.10 میں بتلایا گیا عمومی محدد میں

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 1\\
k_2 &= r\\
k_3 &= r\sin\theta
\end{aligned}
$$

اور $\boldsymbol{a}_u$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$، $\boldsymbol{a}_v$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_w$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\phi$ پر کرنے سے کروی محدد حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.62 میں یہی کچھ پر کرتے ہوئے یوں کروی محدد میں گردش کی مساوات

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi r\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_\mathrm{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial H_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(H_\phi r\sin\theta)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta\\
+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}
$$

یا

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_\mathrm{r}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta\\
+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}
\tag{7.64}
$$

2150 حاصل ہوتی ہے۔

2151

2152 مشق 7.4: میدان $\boldsymbol{H}=3\rho^2\cos\phi\boldsymbol{a}_\rho-2\rho\sin\phi\boldsymbol{a}_\phi+\frac{z}{\rho}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ اور $\boldsymbol{H}=2r^2\cos\theta\boldsymbol{a}_\mathrm{r}-5r\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$ کے لئے $\nabla\times\boldsymbol{H}$ حاصل

2153 کریں۔

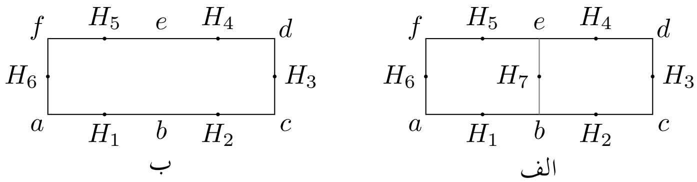
2154 جوابات: $\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{z}{\rho^2}\boldsymbol{a}_\phi+(3\rho-4)\sin\phi\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$، $\nabla\times\boldsymbol{H}=(2r-10)\sin\theta\boldsymbol{a}_\phi$

2155

2156 7.4 مسئلہ سٹوکس

شکل 7.16-الف میں ایک رقبہ دکھایا گیا ہے جسے دو چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ بائیں چھوٹے رقبے کے لئے گردش

$$\frac{\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_B}{\Delta S_B}\doteq(\nabla\times\boldsymbol{H}_B)_N$$



شکل 7.16: چھوٹے رقبوں کے گرد لکیری تکمل پورے رقبے کے گرد لکیری تکمل کے برابر ہے۔

لکھی جا سکتی ہے جہاں زیر نوشت میں N اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ گردش رقبے ΔS_B کے عمودی ہے اور زیر نوشت میں B بائیں رقبے کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_B$ سے مراد بائیں رقبے کی سرحد پر چھوٹا فاصلہ ہے جبکہ $\boldsymbol{H}_B$ سے مراد بائیں چھوٹے رقبے کے وسط میں مقناطیسی شدت ہے۔ اس طرح اسی مساوات کو

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B)\cdot \boldsymbol{a}_N$$

یا

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B)\cdot \boldsymbol{a}_N \Delta S_B = (\nabla \times \boldsymbol{H})\cdot \Delta \boldsymbol{S}_B$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ اس رقبے کی اکائی عمودی سمتیہ ہے۔ اب شکل کو دیکھ کر

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B \doteq \boldsymbol{H}_1\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ba} + \boldsymbol{H}_7\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{eb} + \boldsymbol{H}_5\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{fe} + \boldsymbol{H}_6\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{af}$$

2157 لکھا جا سکتا ہے۔

اسی طرح دائیں چھوٹے رقبے کے لئے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D \doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_D)\cdot \Delta \boldsymbol{S}_D$$

اور

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D \doteq \boldsymbol{H}_2\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{cb} + \boldsymbol{H}_3\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{dc} + \boldsymbol{H}_4\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ed} + \boldsymbol{H}_7\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{be}$$

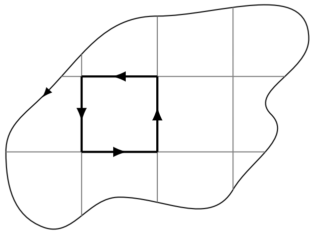
2158 لکھا جا سکتا ہے۔

دائیں رقبے کے لکیری تکمل میں $\boldsymbol{H}_7\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{be} = -\boldsymbol{H}_7\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{eb}$ لکھ کر دونوں رقبوں کے لکیری تکمل جمع کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B + \oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D &\doteq \boldsymbol{H}_1\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ba} + \boldsymbol{H}_2\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{cb} + \boldsymbol{H}_3\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{dc} + \boldsymbol{H}_4\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ed} + \boldsymbol{H}_5\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{fe} + \boldsymbol{H}_6\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{af}\\ &\doteq (\nabla \times \boldsymbol{H}_B)\cdot \Delta \boldsymbol{S}_B + (\nabla \times \boldsymbol{H}_D)\cdot \Delta \boldsymbol{S}_D\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹے رقبوں کے مشترک طرف ΔL_{be} پر دونوں کے لکیری تکمل آپس میں کٹ گئے ہیں۔ یہاں پہلی مساوات پورے رقبے کے گرد لکیری تکمل کے برابر ہے جو شکل 7.16-ب کو دیکھ کر لکھی جا سکتی ہے۔ ہم نے شکل 7.16-الف میں رقبے کے صرف دو ٹکڑے لئے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رقبے کے زیادہ ٹکڑے کرتے ہوئے بھی یہی طریقہ کار استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح اگر کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ایک کے گرد لکیری تکمل لیا جائے تو ان کا مجموعہ پورے رقبے کی سرحد پر گھومتے لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔ شکل 7.17 میں بڑے رقبے کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کیا دکھایا گیا ہے۔ ہر دو جڑے چھوٹے رقبوں کے مشترکہ طرف پر لکیری تکمل آپس میں کٹ جائیں گے۔ یوں تمام چھوٹے رقبوں کے لکیری تکمل کے مجموعے کو بڑے رقبے کا لکیری تکمل لیتے ہوئے اور تمام چھوٹے رقبوں کے $(\nabla \times \boldsymbol{H}_B)\cdot \Delta \boldsymbol{S}$ کے مجموعے کو تکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}_B)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{7.65}$$



شکل 7.17: کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر کے گرد لکیری تکمل لیں۔ان تمام کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو صرف بڑے رقبے S کی سرحد پر لیا جاتا ہے۔

اگرچہ ہم نے مساوات 7.65 مقناطیسی میدان کے لئے حاصل کیا، در حقیقت یہ ایک عمومی مساوات ہے جو کسی بھی سمتی میدان کے لئے درست ہے۔ یہ مساوات مسئلہ سٹوکس[12] بیان کرتا ہے۔

مسئلہ سٹوکس سے ایمپیئر کا دوری قانون با آسانی حاصل ہوتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ کے دونوں اطراف کا $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے دونوں اطراف کھلی سطح S پر سطحی تکمل لیتے ہوئے مسئلہ سٹوکس کا استعمال کریں گے۔

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

کثافت برقی رو کی سطحی تکمل سطح S سے گزرتی برقی رو کے برابر ہے لہٰذا مندرجہ بالا سے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

حاصل ہوتا ہے جو ایمپیئر کا دوری قانون ہے۔ ایمپیئر کے دوری قانون کے اس مختصر حصول سے یہ حقیقت بھی واضح ہوتی ہے کہ I ان تمام سطحوں سے گزرتی برقی رو ہے جن کی سرحد تکمل میں استعمال بند راہ ہے۔

مسئلہ سٹوکس سطحی تکمل اور بند لکیری تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ مسئلہ پھیلاو حجمی تکمل اور بند سطحی تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔ یہ دونوں مسئلے عمومی سمتیاتی ثبوت پیش کرنے میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ آئیں ایسی ایک مثال دیکھتے ہیں جس میں ہم $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}$ کو بیان کرنے کا مختلف طریقہ حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں جہاں $\boldsymbol{A}$ کوئی بھی عمومی سمتی میدان ہو سکتا ہے۔

شروع کرنے سے پہلے یاد رہے کہ گردش کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جبکہ پھیلاو کا حاصل جواب غیر سمتی ہوتا ہے۔ کسی بھی عمومی سمتیہ میدان $\boldsymbol{A}$ کا گردش $\nabla \times \boldsymbol{A}$ بھی سمتیہ ہو گا جبکہ اس گردش کا پھیلاو $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}$ غیر سمتی ہو گا جسے ہم T کہتے ہیں یعنی

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = T$$

دونوں اطراف کا حجمی تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}) \,\mathrm{d}h = \int_{\text{حجم}} T \,\mathrm{d}h$$

[12] Stokes theorem

بائیں ہاتھ پر مسئلہ پھیلاو لاگو کرتے ہوئے

$$\oint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{حجم}} T \,\mathrm{d}h$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات کا بایاں ہاتھ حجم کو گھیرتے بند سطح پر $\nabla \times \boldsymbol{A}$ کا تکمل ہے۔ مسئلہ سٹوکس کسی بھی سطح پر سطحی تکمل اور اس سطح کے سرحد پر لکیری تکمل کا تعلق بیان کرتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ میں اگر سطح کو تھیلا سمجھا جائے تو تھیلے کا منہ سطح کی سرحد ہو گا جس پر لکیری تکمل لیا جائے گا۔ جیسے جیسے تھیلے کے منہ کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے تھیلا بند سطح کی شکل اختیار کرے گا جبکہ سطح کی سرحد چھوٹی سے چھوٹی ہوتی جائے گی حتٰی کہ جب تھیلے کا منہ مکمل بند ہو جائے تو تھیلا مکمل بند سطح ہو گا جبکہ اس کی سرحد صفر کے برابر ہو گی۔ صفر لمبائی کے راہ پر تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\int_0^0 \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

یوں

$$\int_{\text{حجم}} T \,\mathrm{d}h = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ یہ مساوات کسی بھی حجم کے لئے درست ہے لہٰذا یہ تفرقی حجم $\mathrm{d}h$ کے لئے بھی درست ہے یعنی

$$T \,\mathrm{d}h = 0$$

جس سے

$$T = 0$$

یا

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0 \tag{7.66}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.66 انتہائی اہم ثبوت ہے جس کے تحت کسی بھی عمومی سمتی میدان کے گردش کا پھیلا صفر کے برابر ہوتا ہے۔ اس ثبوت کو مندرجہ ذیل مثال میں کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے بھی حاصل کیا گیا ہے۔ 2168

مثال 7.3: کسی بھی عمومی سمتی میدان $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کا گردش اور گردش کا پھیلا کارتیسی محدد میں حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہو گا۔ 2170

حل: پہلے گردش حاصل کرتے ہیں

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

جس کا پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

کے برابر ہے جہاں $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}$ اور $-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}$ کی طرح بقایا اجزاء بھی آپس میں کٹ جاتے ہیں۔ 2171

2172

ساکن مقناطیسی میدان یعنی وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان کے لئے ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

ہے۔اس مساوات کے دونوں اطراف کا پھیلاو حاصل کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \cdot \boldsymbol{J}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 7.66 کے تحت گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{7.67}$$

ہو گا۔اس سے ظاہر ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف ایسی برقی رو سے حاصل ہوتا ہے جس کے لئے مساوات 7.67 درست ہو۔یہی نتیجہ ہم پہلے بھی مساوات 7.4 میں حاصل کر چکے ہیں جہاں ہم دیکھ چکے کہ $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ سے مراد بند راہ سے کل صفر یک سمتی برقی رو کا گزرنا ہے۔ 2174

7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو 2175

خالی خلاء میں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ کی تعریف

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{7.68}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{B}$ کی اکائی ویبر فی مربع میٹر $\mathrm{Wb/m^2}$ ہے جسے ٹسلا[13] پکارا اور T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس مساوات میں μ_0 خالی خلاء کا مقناطیسی مستقل[14] ہے جسے ہینری فی میٹر $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$ میں ناپا جاتا ہے۔خالی خلاء میں

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{7.69}$$

کے برابر ہے۔ 2176

چونکہ $\boldsymbol{H}$ کی اکائی ایمپیئر فی میٹر ہے لہٰذا ویبر کی اکائی ہینری ضرب ایمپیئر ہے۔ہینری کو اکائی تصور کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ہینری ضرب ایمپیئر کو ویبر لکھا جاتا ہے۔وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر غور کے دوران ہم دیکھیں گے کہ ویبر سے مراد وولٹ ضرب سیکنڈ بھی لیا جا سکتا ہے۔ 2178

خالی خلاء میں کثافت برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ کا تعلق

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$$

ہو بہو مساوات 7.68 کی طرح ہے۔کثافت برقی بہاو کا سطحی تکمل برقی بہاو ψ دیتا ہے۔

$$\psi = \int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

کسی بھی بند سطح سے گزرتی برقی بہاو اس سطح میں گھیرے چارج Q کے برابر ہوتا ہے۔

$$\psi = \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

[13] Tesla

[14] magnetic constant, permeability

مثبت چارج سے برقی بہاو کا اخراج ہوتا ہے جبکہ منفی چارج پر برقی بہاو کا اختتام ہوتا ہے۔یوں برقی بہاو کا منبع برقی چارج ہے۔مقناطیسی قطب ہر صورت جوڑی کی شکل میں پائے جاتے ہیں۔آج تک تنہا مقناطیسی قطب نہیں پایا گیا۔یوں آج تک ایسی صورت دیکھنے کو نہیں ملی جہاں تنہا مقناطیسی قطب سے مقناطیسی بہاو کا اخراج ہو یا مقناطیسی بہاو اس پر اختتام پذیر ہو۔مقناطیسی بہاو کا منبع برقی رو ہے۔یاد رہے کہ نا تو مقناطیسی بہاو اس برقی رو سے خارج اور نا ہی اس پر اختتام پذیر ہوتی ہے بلکہ یہ بند دائرے کی شکل میں برقی رو کو گھیرتی ہے۔کثافت مقناطیسی بہاو کا سطحی تکمل **مقناطیسی بہاو**[15] Φ دیتا ہے جسے **ویبر**[16] Wb میں ناپا جاتا ہے۔

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \mathrm{Wb} \tag{7.70}$$

چونکہ مقناطیسی بہاو بند دائرہ بناتا ہے لہٰذا کسی بھی بند سطح میں جتنا مقناطیسی بہاو داخل ہوتا ہے، اتنا ہی مقناطیسی بہاو اس سطح سے خارج بھی ہوتا ہے لہٰذا کسی بھی بند سطح پر مقناطیسی بہاو کا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{7.71}$$

مسئلہ پھیلاو کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.72}$$

2179 حاصل ہوتا ہے۔

ہم نے مساوات 7.71 کو ثابت نہیں کیا بلکہ حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے اسے لکھا ہے۔اس کو آگے ثابت کیا جائے گا۔فی الحال اس کو قبول کر لیں اور یوں مساوات
2181 7.72 کو بھی درست تصور کریں۔

ساکن مقناطیسی اور ساکن برقی میدان کے لئے مساوات 7.72 میکس ویل کی چوتھی اور آخری مساوات ہے۔ان تمام کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho \\ \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \end{aligned} \tag{7.73}$$

ان کے ساتھ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \epsilon_0 \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} \end{aligned} \tag{7.74}$$

کو بھی شامل کرتے ہیں۔ہم برقی میدان کی شدت اور ساکن برقی دباو کا تعلق بھی پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{7.75}$$

مساوات 7.73 برقی اور مقناطیسی میدان کے پھیلاو اور گردش بیان کرتے ہیں جو ان میدان کی خاصیت کے نقطہ اشکال ہیں۔ان کی تکمل اشکال مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} &\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q = \int_{\text{حجم}} \rho_h \, \mathrm{d}h \\ &\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0 \\ &\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \end{aligned} \tag{7.76}$$

---

[15] magnetic flux
[16] Weber

ہم جلد ساکن مقناطیسی میدان کے مقناطیسی دباو پر بھی غور کریں گے۔ ہم نے برقی میدان پر غور کے دوران موصل اجزاء کے اثر کو بھی تقطیب $\boldsymbol{P}$ کی صورت میں شامل کیا۔ ایسا کرتے ہوئے جزو برقی مستقل کا سہارا لیا گیا۔ اگلے باب میں اسی طرح دیگر اجزاء کا مقناطیسی میدان پر اثر دیکھا جائے گا۔

آئیں مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو کا استعمال ہم محوری تار کے اندر بہاو کے مثال کی صورت میں دیکھیں۔ ایسی ہم محوری تار جسے شکل 7.7 میں دکھایا گیا ہے میں مقناطیسی شدت

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں۔ یوں کثافت مقناطیسی بہاو

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \boldsymbol{a}_\phi$$

ہو گا۔ اندرونی اور بیرونی تار کے درمیان مقناطیسی بہاو وہی ہو گا جو ان تاروں کے درمیان رداسی سیدھی سطح سے گزرے گا۔ تار کو z محدد پر تصور کرتے ہوئے $z = 0$ تا $z = d$ تک رداسی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاو

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^d \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \boldsymbol{a}_\phi \cdot (\mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}z \boldsymbol{a}_\phi)$$

یعنی

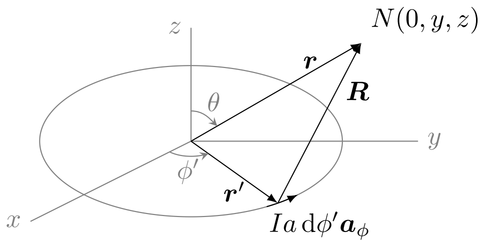
$$\Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{7.77}$$

ہو گی۔ یہ مساوات آگے جا کر ہم محوری تار کے امالہ کے حصول میں کام آئے گی۔

مشق 7.5: تانبے کی تار کو پانی سے ٹھنڈا کرتے ہوئے اس میں زیادہ کثافت برقی رو گزاری جا سکتی ہے۔ ایک ایسی ہم محوری تار جس کے اندرونی تار کا اندرونی رداس 25 mm جبکہ اس کا بیرونی رداس 28 mm ہے اور جس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس 35 mm اور بیرونی رداس 37 mm ہے میں 10 000 A کا یک سمتی برقی رو تاروں میں الٹ سمت میں گزر رہی ہے۔ ٹھنڈا پانی اندرونی تار کے اندر اور تاروں کے درمیان فاصلے سے گزار کر انہیں ٹھنڈا رکھا جاتا ہے۔ دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین $\boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{B}$ حاصل کرنے کے بعد 1 m لمبائی کے لئے دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین مقناطیسی بہاو حاصل کریں۔

جوابات: اندرونی تار میں $J = 20\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2}$ اور $\Phi = 109\,\mu\mathrm{Wb}$ ہیں۔ بیرونی تار میں $J = 22.1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2}$ اور $\Phi = 56.6\,\mu\mathrm{Wb}$ ہیں۔ تاروں کے درمیانی فاصلے میں $\Phi = 446\,\mu\mathrm{Wb}$ ہے۔

مشق 7.6: $z = 0$ سطح پر ρ رداس کے گول بند دائرے میں I برقی رو گزر رہی ہے۔ گول دائرے کا مرکز کارتیسی محدد کے $(0,0,0)$ پر ہے۔ اگر مثبت z جانب سے دیکھا جائے تو برقی رو گھڑی کے الٹ سمت میں گھوم رہی ہے۔ بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے دائرے کے عین وسط میں $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔



شکل 7.18: گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو کا محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان۔

جواب: $\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\rho}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ 2196

2197

مندرجہ بالا مشق میں آپ نے دائرے کے مرکز پر مقناطیسی میدان حاصل کیا۔ یہی طریقہ استعمال کرتے ہوئے دائرے کے محور پر کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔ البتہ جیسے ہی محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان مطلوب ہو مسئلہ خاصہ مشکل ہو جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل مثال میں اس حقیقت کو سامنے رکھا جائے گا کہ محور سے ہٹ کر برقی رو گزارتے گول دائرے کا مقناطیسی میدان حاصل کرنا کیوں ممکن نہیں ہو گا۔ اس کے بعد اس مسئلے کا عددی حل[17] حاصل کرنا دکھایا جائے گا۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کسی بھی مسئلے کا عددی حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ 2201

2202

مثال 7.4: شکل 7.18 میں $x = 0$ سطح یعنی yz سطح پر نقطہ $N(0, y, z)$ پر گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کریں۔ 2204

حل: رداس a کے گول دائرے پر نقطہ $N'(a, \frac{\pi}{2}, \phi')$ پر چھوٹی سمتی لمبائی کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}' = a\,\mathrm{d}\phi' \boldsymbol{a}'_\phi$ لکھا جا سکتا ہے جہاں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}'_\phi$ کو کار تیسی محدد میں

$$\boldsymbol{a}'_\phi = -\sin\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}' = a\,\mathrm{d}\phi' \left(-\sin\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ چھوٹی لمبائی خود $(a\cos\phi', a\sin\phi')$ پر پائی جاتی ہے یعنی

$$\boldsymbol{r}' = a\boldsymbol{a}'_\rho = a\cos\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + a\sin\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

کے برابر ہے۔ نقطہ N کا مقام کار تیسی محدد میں

$$\boldsymbol{r} = y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = -a\cos\phi' \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y - a\sin\phi')\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

---

[17] numerical solution

لکھتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{R}| = R &= \sqrt{(-a\cos\phi')^2 + (y - a\sin\phi')^2 + z^2} \\
&= \sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'}
\end{aligned}
$$

اور

$$
\boldsymbol{a}_{\text{R}} = \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{-a\cos\phi'\boldsymbol{a}_{\text{X}} + (y - a\sin\phi')\boldsymbol{a}_{\text{y}} + z\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'}}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔ بایوٹ سیوارٹ قانون میں $\boldsymbol{a}_{\text{R}} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}$ پر کرتے ہوئے

$$
\boldsymbol{H} = \oint \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}' \times \boldsymbol{R}}{4\pi R^3}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں پہلے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}' \times \boldsymbol{R}$ کی سادہ شکل حاصل کریں۔

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{L}' \times \boldsymbol{R} &= a\,\mathrm{d}\phi' \left(-\sin\phi'\boldsymbol{a}_{\text{X}} + \cos\phi'\boldsymbol{a}_{\text{y}}\right) \times \left[-a\cos\phi'\boldsymbol{a}_{\text{X}} + (y - a\sin\phi')\boldsymbol{a}_{\text{y}} + z\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right] \\
&= a\,\mathrm{d}\phi' \left[z\cos\phi'\boldsymbol{a}_{\text{X}} + z\sin\phi'\boldsymbol{a}_{\text{y}} + (a - y\sin\phi')\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right]
\end{aligned}
$$

یوں بایوٹ سیوارٹ کے قانون کو

$$
\boldsymbol{H} = \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\cos\phi'\boldsymbol{a}_{\text{X}} + z\sin\phi'\boldsymbol{a}_{\text{y}} + (a - y\sin\phi')\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\phi'
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں H_x جزو صفر کے برابر ہے۔ یہ حقیقت سیدھی منطق سے ثابت ہوتی ہے۔ کسی بھی زاویہ ϕ' پر چھوٹی لمبائی سے پیدا میدان کو زاویہ $\pi - \phi'$ پر چھوٹی لمبائی کا میدان ختم کرتا ہے۔ یوں یہ جزو صفر کے برابر ہے۔ یہی نتیجہ تحلیلی طور پر حاصل کرنے کی خاطر، H_x جزو میں نیا متغیرہ $w = a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'$ پر کرتے ہوئے تکمل

$$
H_x = \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}} = 0
$$

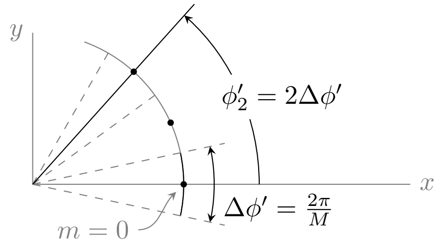
سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ بقایا دو اجزاء

$$
\begin{aligned}
H_y &= \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}} \\
H_z &= \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(a - y\sin\phi')\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{7.78}
$$

2205 ہیں۔ یہ دونوں بیضوی تکمل[18] ہیں جنہیں الجبرائی طریقے سے حل کرنا ممکن نہیں ہے۔

2206

2207 بیضوی تکمل کا عددی حل[19] بذریعہ کمپیوٹر حاصل کیا جاتا ہے۔ آئیں قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے بیضوی تکمل کا عددی حل حاصل کریں۔



شکل 7.19: تکمل کے راہ کو متعدد چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

مثال 7.5: مندرجہ بالا مثال میں H_y اور H_z کے حل بیضوی تکمل[18] کی صورت میں حاصل ہوئے۔ نقطہ $N(0,a,a)$ پر H_y کا عددی حل[19] حاصل کریں۔

حل: اس نقطے پر

$$H_y = \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2+a^2+a^2-2a^2\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{I}{4\pi a}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(3-2\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}$$

لکھا جائے گا۔ اس تکمل کو مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 7.19 کو دیکھ کر آگے پڑھیں۔ تکمل کے راہ کو M برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑا $\Delta\phi' = \frac{2\pi}{M}$ کے برابر ہو گا۔ ان ٹکڑوں کی گنتی کا حساب ہم m سے رکھتے ہیں جہاں m کی قیمت 0 تا $(M-1)$ ہے۔ یوں پہلے ٹکڑے کو $m = 0$ سے ظاہر کیا جائے گا اور اس ٹکڑے کے عین وسط میں زاویہ $\phi'_0 = 0$ ہو گا۔ شکل میں راہ کے چھوٹے ٹکڑوں کے عین وسط کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ دوسرے ٹکڑے پر $m = 1$ اور زاویہ $\phi'_1 = \Delta\phi' = \frac{2\pi}{M}$ ہو گا۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے، تیسرے پر $m = 2$ اور زاویہ $\phi'_2 = 2\Delta\phi' = \frac{2\times2\pi}{M}$ ہو گا۔ یوں عمومی ٹکڑے m پر زاویہ $\phi'_m = m\Delta\phi' = \frac{2m\pi}{M}$ ہو گا۔

اگر ان چھوٹے ٹکڑوں پر تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کو رد کرنا ممکن ہو تب ہر چھوٹے ٹکڑے پر تکمل تقریباً

$$\Delta H_y = \frac{I}{4\pi a}\frac{\sin\phi'_m\Delta\phi'}{\left(3-2\sin\phi'_m\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{I}{4\pi a}\frac{\sin\left(\frac{2m\pi}{M}\right)\frac{2\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

کے برابر ہو گا۔ یوں تمام ٹکڑوں کا مجموعہ

$$H_y = \frac{I}{4\pi a}\frac{2\pi}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\frac{\sin\frac{2m\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

[18] elliptic integral
[19] numerical solution

$\frac{\sin\frac{2m\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$	m
0.00000	0
0.23852	1
0.82674	2
0.82674	3
0.23852	4
0.00000	5
−0.06889	6
−0.08763	7
−0.08763	8
−0.06889	9

جدول 7.1: دائرے پر برقی رو سے حاصل مقناطیسی میدان کی شدت بذریعہ عددی حل۔

ہو گا۔ جدول 7.1 میں $M=10$ کی صورت میں m کے تمام قیمتوں پر حاصل $\frac{\sin\frac{2m\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$ اجزاء دئے گئے ہیں۔ ان تمام کا مجموعہ

$$\begin{aligned}
H_y &= \frac{I}{4\pi a}\frac{2\pi}{M}\,(0.00000+0.23852+0.82674+0.82674+0.23852+0.00000\\
&\qquad -0.06889-0.08763-0.08763-0.06889)\\
&= \frac{I}{4\pi a}\frac{2\pi}{10}(1.8175)\\
&= 1.1420\left(\frac{I}{4\pi a}\right)
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ ٹکڑے لیتے ہوئے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔ اگر $M=100$ کر دیا جائے تب $H_y=\frac{1.1433I}{4\pi a}$ حاصل ہوتا ہے۔

جدول کو دیکھتے ہوئے ظاہر ہے کہ $m=0$ اور $m=5$ برابر حصہ ڈالتے ہیں۔ اسی طرح $m=1$ اور $m=4$ بھی برابر حصہ ڈالتے ہیں۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے پورے جدول کو حل کرنا درکار نہیں ہے۔ در حقیقت موجودہ مثال میں جدول کے صرف پانچ یعنی آدھے خانوں کا حل درکار ہے۔ موجودہ مسئلے میں صرف دس چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے تقریباً درست جواب حاصل ہوتا ہے۔ دس اور سو ٹکڑوں کے جوابات میں صرف

$$\left(\frac{1.1433-1.1420}{1.1433}\right)\times 100 = 0.11\,\%$$

کا فرق ہے۔

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو

برقی میدان کے مسائل برقی دباو کے استعمال سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں۔ گھریلو 220 V کے برقی دباو سے آپ بخوبی واقف ہیں۔ اگرچہ برقی دباو سے ہمیں روز مرہ زندگی میں عموماً واسطہ پڑتا ہے اور یہ ہمارے لئے ایک حقیقت رکھتا ہے، مقناطیس و برقیات کے میدان میں برقی دباو کی اہمیت صرف اس وجہ سے ہے کہ اس کی مدد سے برقی مسائل با آسانی حل ہو جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم کسی بھی چارج سے پہلے برقی دباو اور پھر برقی دباو سے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

برقی دباو غیر سمتی مقدار ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ برقی دباو کے طرز پر غیر سمتی مقناطیسی دباو[20] بیان کیا جا سکتا ہے۔ البتہ یہ صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر قابل بیان ہوتا ہے۔ یوں اس کا استعمال ہر جگہ ممکن نہیں ہو گا۔ اس کے بر عکس سمتی مقناطیسی دباو[21] بھی بیان کیا جا سکتا ہے جو انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔ سمتی مقناطیسی دباو اینٹینا[22]، موتج[23] اور مائیکرو ویو چولھے (خرد موج چولھے)[24] پر غور کرنے میں مدد دیتا ہے۔ یہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی قابل استعمال ہو گا اور یہ ان مقامات پر بھی قابل بیان ہو گا جہاں برقی رو پائی جائے۔ آئیں پہلے غیر سمتی مقناطیس دباو دیکھیں۔

برقی دباو اور برقی میدان کی شدت کا تعلق صفحہ 108 پر مساوات 4.46 میں بیان کیا گیا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں بالکل اسی طرح غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m کی ڈھلوان منفی مقناطیسی شدت دیتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m$$

یہ نیا تفاعل مقناطیسی میدان کے دیگر تفاعل کے ساتھ ہم آہنگ ہونا چاہیے لہٰذا اسے ایمپیئر کے دوری قانون کے نقطہ صورت پر پورا اترنا ہو گا۔ اس طرح

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} = \nabla \times (-\nabla V_m) \tag{7.79}$$

ہو گا۔ البتہ جیسے آپ مشق 7.7 میں دیکھیں گے، کسی بھی متغیرہ کی ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے۔ یوں مقناطیسی میدان کے شدت اور غیر سمتی مقناطیسی دباو کا تعلق صرف اس صورت درست ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{J} = 0$ ہو یعنی

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m \qquad (\boldsymbol{J} = 0) \tag{7.80}$$

اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر مقناطیسی دباو پر لاگو شرط کہ کثافت برقی رو صفر ہو ناضروری ہے ناقابل قبول شرط ہے۔ اگرچہ کئی صورتوں میں کثافت برقی رو صفر ہو گی اور V_m کا استعمال ممکن ہو گا لیکن ہمیں ایسے مسائل بھی درپیش ہوں گے جہاں کثافت برقی رو صفر نہ ہو گی۔ ایسی صورت میں V_m ہمارے کسی کام کا نہ ہو گا۔ غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اسے ایمپیئر میں ناپا جائے گا۔

خالی خلاء میں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

سے

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0$$

یا

$$\nabla^2 V_m = 0 \qquad (\boldsymbol{J} = 0) \tag{7.81}$$

جو لاپلاس مساوات ہے حاصل ہوتا ہے۔ یوں غیر سمتی مقناطیسی دباو لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر طرف یکساں خاصیت کے مقناطیسی اشیاء میں بھی V_m لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ یاد رہے کہ V_m صرف اور صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر درست ثابت ہوتا ہے۔

اگلے باب میں V_m پر تفصیلی غور کیا جائے گا۔ یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ چونکہ مقناطیسی میدان بقائی میدان نہیں ہے لہٰذا V_m کی قیمت اٹل نہیں ہو گی۔ آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں کسی نقطے کو برقی زمین رکھتے ہوئے کسی دوسرے نقطے پر برقی دباو اٹل قیمت رکھتی ہے۔ مقناطیسی میدان میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ ایسی ایک مثال دیکھنے کی خاطر z محدد پر رکھی لامحدود لمبائی کے تار پر غور کرتے ہیں جس میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب I برقی رو گزر رہی ہو۔ ایسی تار کے گرد جہاں $\boldsymbol{J} = 0$ ہے

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi$$

---

[20] scalar magnetic potential
[21] vector magnetic potential
[22] antenna
[23] waveguide
[24] microwave oven

ہو گا اور غیر سمتی مقناطیسی دباو حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 7.80 اور نلکی محدد میں V_m کے ڈھلوان کا زاویائی جزو لیتے ہوئے

$$\frac{I}{2\pi\rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_m}{\partial \phi}$$

یا

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = -\frac{I}{2\pi}$$

سے

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں تکمل کے مستقل کو صفر چننا گیا ہے تا کہ $\phi = 0$ پر مقناطیسی زمین ہو۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہے لہٰذا یہی مقناطیسی زمین ہے۔ اب اگر ہم تار کے گرد پورا چکر کاٹیں تو ہم اسی مقناطیسی زمین پر دوبارہ پہنچتے ہیں لیکن مندرجہ بالا مساوات کے تحت $\phi = 2\pi$ پر $V_m = -I$ کے برابر ہے ناکہ صفر۔ تار کے گرد دو چکر کے بعد اسی نقطے پر $V_m = -2I$ حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے پر غیر سمتی مقناطیسی دباو کے متعدد قیمتیں ممکن ہیں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں ایک مرتبہ برقی زمین چننے کے بعد کسی بھی ایک نقطے پر ایک ہی برقی دباو کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

آئیں غیر سمتی مقناطیسی دباو کے متعدد قیمتوں کا ممکن ہونا سمجھیں۔ ساکن برقی میدان میں

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$
$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

ہوتا ہے لہٰذا دو نقطوں کے مابین لکیری تکمل

$$V_{ab} = -\int_b^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

کا دارومدار تکمل کے راہ پر منحصر نہیں ہوتا۔ ساکن مقناطیسی میدان میں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \qquad (\boldsymbol{J} = 0)$$

ہوتا ہے لیکن

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

کے برابر ہوتا ہے اگرچہ تکمل کے راہ پر $\boldsymbol{J} = 0$ ہے۔ یوں تکمل لیتے ہوئے جب بھی ایک چکر پورا ہو، تکمل کی قیمت میں I برابر اضافہ آئے گا۔ ہاں اگر تکمل کی راہ صفر برقی رو گھیرے تب غیر سمتی مقناطیسی دباو بھی ایک قیمت رکھے گا۔ ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے غیر سمتی مقناطیسی دباو

$$V_{ab} = -\int_b^a \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \qquad (\text{قیمت راہ پر منحصر ہے}) \tag{7.82}$$

بیان کی جاتی ہے۔ ہم یہ فیصلہ کر سکتے ہیں کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو حاصل کرتے وقت صرف ایک چکر کاٹا جائے گا۔ اس شرط پر چلتے ہوئے V_m ایک قیمت رکھے گا۔ یہ آپ مندرجہ بالا مثال سے دیکھ سکتے ہیں یعنی

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi \qquad (-\pi < \phi \leq \pi) \tag{7.83}$$

کی صورت میں 0 $\phi = 0$ پر V_m ہی حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات میں چکر کی وضاحت ضروری ہے۔صفر زاویہ سے شروع ہو کر اگر زاویہ ϕ مثبت جانب بڑھایا جائے تو $\phi = \pi$ تک پہنچا جا سکتا ہے۔اس کے برعکس اگر صفر زاویہ سے شروع ہو کر زاویہ ϕ منفی کرتے ہوئے $\phi = \pi$ تک پہنچنے کی کوشش کی جائے تو ایسا ممکن نہیں ہے۔یوں $\phi = \pi$ پر V_m کی ایک عدد قیمت ہو گی۔ 2237

مشق 7.7: کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے مثال 7.3 کے طرز پر ثابت کریں کہ کسی بھی غیر سمتی متغیرہ کے ڈھلوان کی گردش صفر کے برابر ہو گی یعنی

$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \tag{7.84}$$

2238

آئیں اب سمتی مقناطیسی دباو پر غور کرتے ہیں۔ہم شروع

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.85}$$

سے کرتے ہیں۔سمتی مقناطیسی دباو کو اس مساوات کے ہم آہنگ ہونا ہو گا۔مساوات 7.66 میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا اگر $\boldsymbol{B}$ سمتی متغیرہ $\boldsymbol{A}$ کا گردش

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.86}$$

ہو تب بھی $\boldsymbol{B}$ کا پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0$$

ہی ہو گا۔ہم مساوات 7.86 میں دیے $\boldsymbol{A}$ کو سمتی مقناطیسی دباو کی تعریف مان کر آگے بڑھتے ہیں۔یوں سمتی مقناطیسی دباو خود بخود مساوات 7.85 کے ہم آہنگ ہو گا۔یوں

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{A}$$

اور

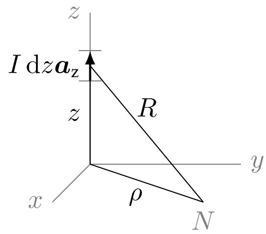
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A}$$

حاصل ہوتے ہیں۔کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا گردش عموماً صفر کے برابر نہیں ہوتا۔سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کی اکائی ویبر فی میٹر $\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}}$ ہے۔گردش کے گردش کی قدر مختلف صورت صفحہ 215 پر مساوات 7.41 میں حاصل کی گئی ہے۔ 2240

ہم حصہ 7.7.1 میں دیکھیں گے کہ $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{A}$ کے تعریف اور بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے

$$\boldsymbol{A} = \oint \frac{\mu_0 I \,\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi R} \tag{7.87}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم نے $\boldsymbol{A}$ کی تعریف اس کے گردش کے ذریعے کی ہے۔چونکہ ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ہم مندرجہ بالا مساوات کے ساتھ کسی غیر سمتی متغیرہ کا ڈھلوان بھی جمع کر سکتے ہیں۔ایسا کرنے سے $\boldsymbol{B}$ یا $\boldsymbol{H}$ کے قیمتوں پر کوئی اثر نہ پڑتا۔ساکن مقناطیسی میدان میں عموماً ڈھلوان جمع نہیں کیا جاتا اور اس مساوات کو یوں ہی رکھا جاتا ہے۔ 2243



شکل 7.20: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا سمتی مقناطیسی دباو۔

ساکن برقی دباو کے مساوات

$$V = \int \frac{\rho_L \,\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi\epsilon_0 R}$$

کے ساتھ مساوات 7.87 کا موازنہ کرنے سے یہ بات بہتر سمجھ میں آتی ہے کہ $\boldsymbol{A}$ واقع سمتی مقناطیسی دباو ہی ہے۔ یہ دونوں مساوات لکیری تکمل دیتے ہیں۔ ایک برقی رو اور دوسرا کثافت چارج کا لکیری تکمل دیتا ہے۔ دونوں میں تفرقی فاصلے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کا اثر R کے بالعکس متناسب ہے اور دونوں مساوات میں خالی خلاء کے خاصیت یعنی μ_0 اور ϵ_0 استعمال ہوتے ہیں۔

مساوات 7.87 کی تفرق شکل

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I \,\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi R} \tag{7.88}$$

بھی لکھی جا سکتی ہے جب تک $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ سے حاصل $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ کا کوئی مطلب نہ لیا جائے۔ یاد رہے کہ جب تک بند تکمل پورا نہ لیا جائے، حاصل $\boldsymbol{A}$ کوئی معنی نہیں رکھتا۔

شکل 7.20 میں z محدد پر لامحدود لمبائی کے برقی رو گزارتے تار کا چھوٹا حصہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ دکھایا گیا ہے۔ نقطہ N پر یہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I \,\mathrm{d}z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

یا

$$\mathrm{d}A_z = \frac{\mu_0 I \,\mathrm{d}z}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}\,, \quad \mathrm{d}A_\rho = 0, \quad \mathrm{d}A_\phi = 0 \tag{7.89}$$

سمتی مقناطیسی دباو پیدا کرے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تار کے ہر چھوٹے حصے کا پیدا کردہ سمتی مقناطیسی دباو تار کے اسی حصے کی سمت میں ہو گا۔

مقناطیسی شدت نلکی محدد میں مندرجہ بالا مساوات کے گردش

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathrm{d}\boldsymbol{A} &= \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\partial \,\mathrm{d}A_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi \\
&= \frac{I \,\mathrm{d}z}{4\pi}\frac{\rho \boldsymbol{a}_\phi}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

سے حاصل ہو گا۔ یہی مساوات شکل 7.20 کو دیکھتے ہوئے بایوٹ سیوارٹ کے مساوات سے لکھی جا سکتی ہے۔

سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کے کلیات دیگر اشکال کے کثافت برقی رو کے لئے بھی لکھا جا سکتے ہیں۔ یوں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ کے لئے برقی رو کے چھوٹے حصے کو

$$I \,\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S$$

اور حجمی کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ کے لئے

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ لکیری برقی رو کے چھوٹے حصے کو عموماً $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھا جاتا ہے۔ یوں برقی رو کو غیر سمتی تصور کرتے ہوئے فاصلے کو سمتی تصور کیا جاتا ہے۔ اس کے برعکس مندرجہ بالا دو مساوات میں کثافت برقی رو کو سمتی مقدار تصور کیا گیا جبکہ تفرقی سطح $\mathrm{d}S$ اور تفرقی حجم $\mathrm{d}h$ کو غیر سمتی تصور کیا گیا۔ یوں $\boldsymbol{A}$ کے دیگر کلیے

$$\boldsymbol{A}=\int_S \frac{\mu_0 \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S}{4\pi R} \tag{7.90}$$

اور

$$\boldsymbol{A}=\int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h}{4\pi R} \tag{7.91}$$

ہیں۔

سمتی مقناطیسی دباو مختلف اشکال کے برقی رو اور کثافت برقی رو سے مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔ برقی دباو کی طرح سمتی مقناطیسی دباو کا زمین بھی لامحدود فاصلے پر رکھا جاتا ہے یعنی $R\to\infty$ پر $\boldsymbol{A}\to 0$ تصور کیا جاتا ہے۔ لامحدود فاصلے پر کوئی بھی برقی رو $R\to\infty$ کی بنا پر سمتی مقناطیسی دباو پر کوئی اثر نہیں ڈال سکتا۔

مثال 7.6: رداس a کے موصل تار میں یکساں برقی رو I گزر رہی ہے۔ تار کے اندر $\boldsymbol{B}$ حاصل کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ بھی حاصل کریں۔

حل: تار کو z محدد پر پڑا تصور کرتے ہیں۔ تار کے اندر ρ رداس کا بند دائرہ $\frac{I\pi\rho^2}{\pi a^2}$ برقی رو گھیرے گی لہٰذا اس دائرے پر $\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}\boldsymbol{a}_\phi$ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{B}$ کا صرف زاویائی جزو پایا جاتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{A}$ کے گردش کو مساوات 7.55 کی مدد سے لکھتے ہوئے صرف زاویائی جزو لیتے ہیں۔ اس طرح

$$B_\phi=\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ برقی رو $\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ سمت میں ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}$ کا صرف A_z جزو متوقع ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات

$$B_\phi=-\frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

یعنی

$$-\frac{\partial A_z}{\partial \rho}=\frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}$$

صورت اختیار کرے گا جس سے

$$A_z=\tfrac{\mu_0 I\rho^2}{4\pi a^2}+M$$

حاصل ہوتا ہے جہاں M تکمل کا مستقل ہے۔

7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول

ساکن مقناطیسی میدان کے تمام قوانین بایوٹ سیوارٹ کے قانون،

$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I \, \mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}}{4\pi R^2} \tag{7.92}$$

سمتی مقناطیسی دباو کے تعریف

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.93}$$

اور مقناطیسی میدان کی شدت اور کثافت مقناطیسی بہاو کے تعلق

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{7.94}$$

سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔ امید کی جاتی ہے کہ طلبہ و طالبات مندرجہ ذیل ثبوت کو سمجھتے ہوئے پڑھیں گے۔ آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ انہیں یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔

7.7.1 سمتی مقناطیسی دباو

سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کی مساوات

$$\boldsymbol{A} = \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J} \, \mathrm{d}h}{4\pi R} \tag{7.95}$$

ثابت کرنے کی خاطر ہم اس سے بایوٹ سیوارٹ کا قانون یعنی مساوات 7.92 حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 7.91 میں (x_2, y_2, z_2) پر سمتی مقناطیسی دباو دی گئی ہے جبکہ (x_1, y_1, z_1) وہ مقام ہے جہاں برقی رو گزار تا تار کا چھوٹا حصہ پایا جاتا ہے۔ یوں چھوٹے حجم کو $\mathrm{d}h_1$ لکھیں گے جو $\mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}y_1 \, \mathrm{d}z_1$ کے برابر ہو گا۔ تکمل کے متغیرات x_1، y_1 اور z_1 ہیں۔ یوں

$$\boldsymbol{A}_2 = \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}_1 \, \mathrm{d}h_1}{4\pi R_{21}} \tag{7.96}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{\boldsymbol{B}_2}{\mu_0} = \frac{\nabla_2 \times \boldsymbol{A}_2}{\mu_0}$$

کے برابر ہے جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 لکھ کر یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ گردش نقطہ (x_2, y_2, z_2) پر حاصل کیا جائے گا لہٰذا گردش کے متغیرات بھی x_2، y_2 اور z_2 ہی ہوں گے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ صفحہ 108 پر مثال 4.4 میں ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے بالکل اسی طرح کیا گیا تھا۔ یوں موجودہ مسئلے میں گردش حاصل کرتے وقت تمام تفرق x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ لئے جائیں گے۔

اس طرح مساوات 7.96 سے $\boldsymbol{A}_2$ پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{\mu_0} \nabla_2 \times \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}_1 \, \mathrm{d}h_1}{4\pi R_{21}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ گردش بنیادی طور پر تفرق کا عمل ہے۔ اس مساوات میں تکمل کا گردش حاصل کیا جا رہا ہے۔ تکمل اور تفرق جس ترتیب سے حاصل کئے جائیں، اس کا حاصل جواب پر کوئی اثر نہیں ہے لہٰذا ہم تفرق کے عمل کو تکمل کے اندر لے جا سکتے ہیں جبکہ $\frac{\mu_0}{4\pi}$ مستقل ہے جسے تکمل کے باہر لایا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_h \nabla_2 \times \frac{\boldsymbol{J}_1\,\mathrm{d}h_1}{R_{21}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہاں $\mathrm{d}h_1 = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}z_1$ پہلے تو مقداری ہے جس کی گردش حاصل نہیں کی جا سکتی۔ اس کے علاوہ اس کا x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہے لہٰذا اسے گردش کے عمل سے باہر لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_h \left(\nabla_2 \times \frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}}\right)\mathrm{d}h_1 \tag{7.97}$$

یہاں سمتیہ $\boldsymbol{J}$ ضرب مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ کا گردش لیا جا رہا ہے۔ مثال 7.2 میں کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{S}$ اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش

$$\nabla \times (M\boldsymbol{S}) \equiv (\nabla M) \times \boldsymbol{S} + M(\nabla \times \boldsymbol{S}) \tag{7.98}$$

حاصل کی گئی۔ اس کی مدد سے مساوات 7.97 کو کھولتے ہیں جہاں سمتیہ $\boldsymbol{J}_1$ اور مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں۔

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_h \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}\right) \times \boldsymbol{J}_1 + \frac{1}{R_{21}}(\nabla_2 \times \boldsymbol{J}_1)\right]\mathrm{d}h_1 \tag{7.99}$$

اس مساوات کے دوسرے جزو میں $\boldsymbol{J}_1$ صرف x_1، y_1 اور z_1 پر منحصر ہے۔ نقطہ (x_2, y_2, z_2) کا اس پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں لہٰذا $\boldsymbol{J}_1$ کے تمام تفرق جو x_2، y_2
2266 اور z_2 کے ساتھ لئے جائیں صفر کے برابر ہوں گے۔ یوں $\nabla_2 \times \boldsymbol{J}_1 = 0$ ہو گا۔

صفحہ 109 پر مساوات 4.48 کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات

$$\boldsymbol{H}_2 = -\frac{1}{4\pi}\int_h \frac{\boldsymbol{a}_{R21} \times \boldsymbol{J}_1}{R_{21}^2}\,\mathrm{d}h_1$$

یا

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_h \frac{\boldsymbol{J}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{R_{21}^2}\,\mathrm{d}h_1$$

لکھی جا سکتی ہے۔ اس میں $\boldsymbol{J}_1\,\mathrm{d}h_1$ کی جگہ لکیری انداز میں $I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1$ پر کرتے ہوئے اور بند تکمل لکھ کر جانی پہچانی بایوٹ سیوارٹ مساوات

$$\boldsymbol{H}_2 = \oint_h \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

2267 حاصل ہوتی ہے۔ یوں ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 7.96 درست ہے اور یہ مساوات ، مساوات — اور مساوات پر پورا اترتا ہے۔

2268 7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون

آئیں اب ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.100}$$

2269 کو بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔

شروع کرتے ہیں مساوات 7.93 اور مساوات 7.94 سے جن سے

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.101}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ صفحہ 215 پر مساوات 7.41 استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \left[\nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} \right) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \right] \tag{7.102}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں پھیلاو اور لاپلاسی کے عمل درکار ہیں۔ 2270

پھیلاو کو پہلے حل کرتے ہیں۔ مساوات 7.96 کی پھیلاو

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_2 \cdot \frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \, \mathrm{d}h_1 \tag{7.103}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ صفحہ 120 پر مثال 4.7 میں سمتیہ $\boldsymbol{D}$ اور مقداری V کے لئے

$$\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V)$$

ثابت کیا گیا۔ یہاں سمتیہ $\boldsymbol{J}_1$ جبکہ مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں لہٰذا اس مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \right) = \frac{1}{R_{21}} (\nabla \cdot \boldsymbol{J}_1) + \boldsymbol{J}_1 \cdot \left(\nabla \frac{1}{R_{21}} \right) \tag{7.104}$$

جس کی مدد سے

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}} (\nabla_2 \cdot \boldsymbol{J}_1) + \boldsymbol{J}_1 \cdot \left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} \right) \right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.105}$$

ہو گا۔ 2271

چونکہ $\boldsymbol{J}_1$ صرف متغیرات x_1، y_1 اور z_1 پر منحصر ہے لہٰذا اس کے x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہوں گے لہٰذا $\nabla_2 \cdot \boldsymbol{J}_1 = 0$ ہو گا۔ 2272

ہم صفحہ 109 پر مساوات 4.50

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}$$

کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[-\boldsymbol{J}_1 \cdot \left(\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} \right) \right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.106}$$

لکھ سکتے ہیں۔ مساوات 7.104 کے دوبارہ استعمال سے

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}} (\nabla_1 \cdot \boldsymbol{J}_1) - \nabla_1 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \right) \right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.107}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.67 کہتی ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف اس صورت پیدا ہو گا جب $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ ہو۔ چونکہ ہمیں ساکن مقناطیسی میدان سے ہی غرض ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں سے

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_1 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \right) \mathrm{d}h_1 \tag{7.108}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 87 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاو بیان کرتا ہے جس کے تحت حجمی تکمل کو سطحی تکمل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \tag{7.109}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سطح S_1 اس تمام حجم کو گھیرتی ہے جس پر حجمی تکمل حاصل کیا گیا تھا۔ چونکہ حجمی تکمل اس غرض سے حاصل کیا گیا تھا کہ ساکن مقناطیسی میدان پیدا کرنے والے برقی رو کو مکمل طور پر شامل کیا جائے لہٰذا اس حجم کے باہر کسی قسم کا کوئی برقی رو نہیں پایا جاتا۔ اگر حجم سے باہر کوئی بھی برقی رو ہوتی تب ہمیں حجم کو بڑھا کر اس برقی رو کے اثر کو بھی شامل کرنا ہوتا۔ ہم تکمل لیتے ہوئے حجم کو مزید بڑھا سکتے ہیں تا کہ اس کی سطح کو برقی رو نہ چھوئے۔ ہم ایسا اس لئے کر سکتے ہیں کہ برقی رو سے خالی حجم کے شمول سے تکمل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔ یوں ضرورت سے زیادہ حجم پر تکمل سے مراد یہ بھی ہے کہ سطحی تکمل ایسی سطح پر لی جائے جس پر کثافت برقی رو صفر کے برابر ہو۔ صفر کثافت برقی رو کا سطحی تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{7.110}$$

حاصل ہوتا ہے جو کہتا ہے کہ سمتی مقناطیسی دباو کا پھیلاو صفر کے برابر ہے۔ اس مساوات میں زیر نوشت میں 2 نہیں لکھا گیا ہے جو اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں مقناطیسی میدان کی بات ہو رہی ہو۔ پھیلاو بھی اسی نقطے پر حاصل کیا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم مساوات 7.102 حل کرنے کی خاطر پھیلاو اور لاپلاسی حاصل کرنے نکلے تھے۔ پھیلاو حاصل ہو چکا ہے آئیں اب لاپلاسی حاصل کریں۔

2275

برقی دباو اور سمتی مقناطیسی دباو کے ایک جزو

$$V = \int_h \frac{\rho \, \mathrm{d}h}{4\pi\epsilon_0 R}$$
$$A_x = \int_h \frac{\mu_0 J_x \, \mathrm{d}h}{4\pi R}$$

کا موازنہ کرنے سے صاف ظاہر ہے کہ ρ اور J_x کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے اور $\frac{1}{\epsilon_0}$ اور μ_0 کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے ایک مساوات سے دوسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔ اب ہم پوئسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

میں یہی تبدیلیاں کرتے ہوئے

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

اور

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$
$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

لکھ سکتے ہیں جنہیں یوں

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{7.111}$$

2276 بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.102 میں مساوات 7.110 اور مساوات 7.111 استعمال کرتے ہوئے یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.112}$$

2277 حاصل ہوتی ہے۔

2278

مثال 7.7: مندرجہ بالا حصے میں برقی دباو کے لاپلاسی سے سمتی مقناطیسی دباو کی لاپلاسی اخذ کی گئی۔ سمتی مقناطیسی دباو کے لاپلاسی کو ایمپیئر کے دوری قانون 2279 اور
2280 $\boldsymbol{A}$ کی تعریف سے حاصل کریں۔

حل: ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل اور $\boldsymbol{A}$ کی تعریف

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \end{aligned}$$

سے

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ صفحہ 215 پر مساوات 7.41 استعمال کرتے ہوئے

$$\nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} \right) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 7.110 کی مدد سے

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{7.113}$$

2281 لکھا جا سکتا ہے۔

2282

سوالات

سوال 7.1: لامحدود لمبائی کی سیدھی تار y محدد پر پڑی ہے۔اس میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب $5\,\mathrm{mA}$ برقی رو گزر رہی ہے۔نقطہ $N(2,5,3)$ پر مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ اور $|\boldsymbol{H}|$ حاصل کریں۔اگر تار $x = 3$ ، $z = -1$ پر ہو تب جوابات کیا ہوں گے۔دونوں تاروں کی موجودگی میں جوابات حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{H} = 184\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 122\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{\mu A}}{\mathrm{m}}$ ، $|\boldsymbol{H}| = 221\,\frac{\mathrm{\mu A}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{H} = 187\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 47\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{\mu A}}{\mathrm{m}}$ ، $|\boldsymbol{H}| = 193\,\frac{\mathrm{\mu A}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{H} = 371\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 75\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{\mu A}}{\mathrm{m}}$ ، $|\boldsymbol{H}| = 378\,\frac{\mathrm{\mu A}}{\mathrm{m}}$

سوال 7.2: مساوات 7.11 حاصل کریں۔

سوال 7.3: سطح $z = 0$ پر y محدد کے متوازی لامحدود لمبائی کے آٹھ عدد تار پڑے ہیں جن میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب $1\,\mathrm{A}$ برقی رو گزر رہی ہے۔یہ تار $y = -3.5$ ، $y = -2.5$ ، $\cdots$ ، $y = 2.5$ ، $y = 3.5$ پر پائے جاتے ہیں۔نقطہ $(0,0,1)$ اور $(0,0,50)$ پر $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔

جوابات: $0.421\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ، $0.0254\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ؛ محدد پر پچاس گنا دور میدان صرف سترہ گنا کم ہے۔

سوال 7.4: چار میٹر لمبے تار کو چکور کی شکل دی جاتی ہے جس کا رقبہ $1\,\mathrm{m}^2$ ہے۔اس چکور کو $z = 0$ سطح پر رکھا جاتا ہے۔تار میں برقی رو $10\,\mathrm{mA}$ گزرنے کی صورت میں چکور کے وسط $N(0,0,0)$ میں مقناطیسی میدان H حاصل کریں۔نقطہ $P(0,0,1)$ پر بھی میدان حاصل کریں۔

جوابات: $9\,\frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{m}}$ ، $2.3\,\frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{m}}$

سوال 7.5: شکل 7.8ا کے لامحدود سطح سے پیدا مقناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 7.6: ایک تار کو دائری شکل دے کر سطح $z = 0$ پر رکھا جاتا ہے۔دائرے کا رقبہ $1\,\mathrm{m}^2$ ہے۔تار میں $10\,\mathrm{mA}$ گزرنے کی صورت میں دائرے کے وسط $N(0,0,0)$ میں مقناطیسی میدان H حاصل کریں۔نقطہ $P(0,0,1)$ پر بھی میدان حاصل کریں۔

جوابات: $2.82\,\frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{m}}$ ، $1.86\,\frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{m}}$

سوال 7.7: محدد x اور y میں بڑھتے جانب $55\,\mathrm{mA}$ برقی رو گزر رہی ہے۔نقطہ $N(5,6,4)$ پر $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔

جواب: $854\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 673\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 57\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{\mu A}}{\mathrm{m}}$

سوال 7.8: مساوات 7.23 حاصل کرنے کے طرز پر شکل 7.11 میں 3 تا 4 پر H_{y34} حاصل کریں۔

جواب: شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔یوں $-\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی سے $\frac{\partial H_y}{\partial x}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)$ تبدیلی رونما ہو گی اور یوں نئی قیمت $H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی۔

سوال 7.9: عمومی محدد میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے کارتیسی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال7.10: سطحی رو $\boldsymbol{K} = \frac{8}{\rho}\boldsymbol{a}_\phi \, \frac{\text{A}}{\text{m}}$ خطہ $\rho = 3\,\text{m}$ تا $\rho = 7\,\text{m}$ میں پائی جاتی ہے۔ سطح $\phi = 0$ سے گزرتی کل برقی رو حاصل کریں۔ نقطہ $N(0,0,z)$ پر $\boldsymbol{H}$ حاصل کرتے ہوئے میدان کی قیمت $z = 10$ پر دریافت کریں۔

جوابات: $I = 8 \ln \frac{7}{3}\,\text{A}$ ، $\boldsymbol{H} = \left[\frac{4}{\sqrt{z^2+3^2}} - \frac{4}{\sqrt{z^2+7^2}}\right] \boldsymbol{a}_\text{Z}$ ، $55.4\,\frac{\text{mA}}{\text{m}}$

سوال7.11: سطحی رو $\boldsymbol{K} = 8\rho\boldsymbol{a}_\phi \, \frac{\text{A}}{\text{m}}$ خطہ $\rho = 3\,\text{m}$ تا $\rho = 7\,\text{m}$ میں پائی جاتی ہے۔ سطح $\phi = 0$ سے گزرتی کل برقی رو حاصل کریں۔ نقطہ $N(0,0,z)$ پر $\boldsymbol{H}$ حاصل کرتے ہوئے میدان کی قیمت $z = 10$ پر دریافت کریں۔

جوابات: $I = 160\,\text{A}$ ، $\boldsymbol{H} = 4\left[\frac{2z^2+49}{\sqrt{(z^2+49)}} - \frac{2z^2+9}{\sqrt{z^2+9}}\right] \boldsymbol{a}_\text{Z}$ ، $1.52\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال7.12: عمومی محدد میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے نلکی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال7.13: رداس a کے دائری چادر پر یکساں سطحی کثافت چارج ρ_S پائی جاتی ہے۔ چادر کے محور کو محدد کے مرکز پر رکھتے ہوئے چادر کو سطح $z = 0$ پر رکھا جاتا ہے۔ اگر چادر محور کے گرد زاویائی رفتار ω سے گھوم رہی ہو تب نقطہ $N(0,0,z)$ پر مقناطیسی میدان H کیا ہو گا؟ میدان کی قیمت $\rho_S = 5\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ اور $\omega = 100\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ کی صورت میں $(0,0,0.1)$ پر حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{\omega\rho_S}{2}\left[\frac{2z^2+4}{\sqrt{z^2+4}} - 2z\right]$ ، $1.42\,\frac{\text{mA}}{\text{m}}$

سوال7.14: سطح $z = 0$ پر خطہ $x = -3\,\text{m}$ تا $x = 3\,\text{m}$ پر سطحی برقی رو $\boldsymbol{K} = 4\boldsymbol{a}_\text{y}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N(0,0,5)$ پر مقناطیسی میدان حاصل کریں۔

جواب: $0.688\boldsymbol{a}_\text{X}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال7.15: گول دائرے پر برقی رو کا دائرے کے محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کرتے ہوئے مساوات 7.78 میں دئے بیضوی تکمل حاصل کئے گئے۔ ان میں H_y کا عددی حل مثال 7.5 میں حاصل کیا گیا۔ بالکل اسی طرز پر تکمل کو دس ٹکڑوں میں کرتے ہوئے H_z کی عددی قیمت نقطہ $N(0,a,a)$ پر حاصل کریں۔

جواب: $0.96525\left(\frac{I}{4\pi a}\right)$

سوال7.16: سطح $x = 0$ پر سطحی برقی رو $1200\boldsymbol{a}_\text{Z}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔ خطہ $0 < z < \infty$ ، $5 < y < 15$ پر برقی رو سے نقطہ $N(10,0,0)$ پر پیدا مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{H} = 45.6\boldsymbol{a}_\text{X} + 49.6\boldsymbol{a}_\text{Y}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$

سوال7.17: خطہ $0 < z < 5$ میں یکساں کثافت برقی رو $15\boldsymbol{a}_\text{y}\,\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ پائی جاتی ہے۔ ایمپیئر کے دوری قانون کی مدد سے ثابت کریں کہ $\boldsymbol{H}_{z<0} = -\boldsymbol{H}_{z>5}$ کے برابر ہے۔ نقطہ $(2,5,7)$ اور نقطہ $(4,12,2)$ پر $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔

جوابات: $37.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $-7.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$

سوال7.18: محدد کے مرکز پر رداس a کا موصل کرہ پایا جاتا ہے۔ منفی z محدد پر $10\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\mathrm{A}$ کی برقی رو، کرہ کی سطح پر نقطہ $(0,0,-a)$ تک پہنچتی ہے جہاں سے یہ کرہ کے سطح پر یکساں پھیل کر نقطہ $(0,0,a)$ تک پہنچتی ہے اور اس کے بعد مثبت z محدد پر بڑھتے جانب چلے جاتی ہے۔ کرہ کے اندر اور اس کے باہر مقناطیسی میدان حاصل کریں۔

جوابات: $0\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\frac{10}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_{\phi}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$

سوال7.19: منفی z محدد سے برقی رو I موصل $\theta = 30°$ سطح تک پہنچ کر سطح پر یکساں پھیل کر چلے جاتی ہے۔ نقطہ $(0,0,z)$ اور نقطہ $(5,5,5)$ پر مقناطیسی میدان H حاصل کریں۔

جوابات: $0\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\frac{I}{2\pi\sqrt{50}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$

سوال7.20: تفاعل $\boldsymbol{G} = (5x+yz)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3xyz\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \frac{x^2y}{z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ نقطہ $N(0.6,0.4,0.2)$ اور اس کے قریب پایا جاتا ہے۔ سطح $z = 0.2$ پر $2a$ لمبائی کے اطراف کے مربع لکیر پر $\oint \boldsymbol{G}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کریں جہاں مربع کا مرکز نقطہ N پر ہے۔ لکیری تکمل کو مربع کے رقبے سے تقسیم کریں اور $a \to 0$ لیتے ہوئے $\nabla \times \boldsymbol{G}_z$ حاصل کریں۔

جوابات: چاروں اطراف کے لکیری تکمل $0.48a^2 + 0.288a$ ، $0.48a^2 - 0.288a$ ، $-0.4a^2 + 6.16a$ اور $-0.4a^2 - 6.16a$ ہیں یوں $\nabla \times \boldsymbol{G}_z = 0.04$ ہے۔

سوال7.21: مساوات7.34 استعمال کرتے ہوئے تفاعل $\boldsymbol{G} = (5x+yz)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3xyz\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \frac{x^2y}{z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کا نقطہ $N(0.6,0.4,0.2)$ پر $\nabla \times \boldsymbol{G}$ حاصل کریں۔ سوال7.20 میں حاصل کئے گئے $\nabla \times \boldsymbol{G}_z$ کے ساتھ موازنہ کریں۔

جواب: $1.08\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 0.04\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

سوال7.22: ہم محوری تار میں $\boldsymbol{E} = 3000\rho^{1.3}\cos(\omega t - 0.3z)\boldsymbol{a}_{\rho}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ تار میں $\nabla \times \boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $900\rho^{1.3}\sin(\omega t - 0.3z)\boldsymbol{a}_{\phi}$

سوال7.23: میدان $V = 5(x^2+y^2)$ اور $V = 10x^3 + y^2 + xz^4$ کے لئے $\nabla^2 V$ اور $\nabla \times \boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: 20 ، 0 ، $60x + 2 + 12xz^2$ ، 0

سوال7.24: میدان $\boldsymbol{H} = x^2y^2z\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - xy^2z^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ دیا گیا ہے۔ مسئلہ سٹوکس کے دونوں اطراف باری باری استعمال کرتے ہوئے، سطح $y = 1$ میں خطہ $1 < x < 2$ ، $1 < z < 3$ سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ جانب گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: $13.3\,\mathrm{A}$

سوال7.25: میدان $\boldsymbol{H} = \frac{2xy}{z^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{y^2}{z^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + x^2y^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ دیا گیا ہے۔ سطح $x = 0.5$ میں خطہ $1 < y < 2$ ، $2 < z < 3$ سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ جانب گزرتی برقی رو درکار ہے۔ الف) برقی رو کو بذریعہ سطحی تکمل حاصل کریں۔ ب) برقی رو کو بذریعہ لکیری تکمل حاصل کریں

جواب: $0.426\,\mathrm{A}$

سوال7.26: کروی محدد میں میدان $\boldsymbol{H} = \frac{50r}{\sin\theta}\boldsymbol{a}_{\phi}$ دیا گیا ہے۔ مسئلہ سٹوکس کے دونوں اطراف باری باری استعمال کرتے ہوئے کروی خطہ $r = 0.2$ ، $0 < \phi < 2\pi$ ، $0 < \theta < 60^\circ$ سے گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: $5.44\,\mathrm{A}$

سوال7.27: میدان $\boldsymbol{H} = \frac{4r^2}{\sin\theta}\boldsymbol{a}_{\theta} + 50r\sin\theta\boldsymbol{a}_{\phi}$ دیا گیا ہے۔ سطح $\theta = 45^\circ$ میں خطہ $0 < \phi < 2\pi$ ، $0 < r < 3$ سے $\boldsymbol{a}_{\theta}$ جانب گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: $-1414\,\mathrm{A}$

سوال7.28: پاکستان میں کل زمینی مقناطیسی میدان $45\,\mathrm{\mu T}$ تا $50\,\mathrm{\mu T}$ پایا جاتا ہے جس کا افقی جزو اوسطاً $30\,\mathrm{\mu T}$ کے لگ بھگ ہے۔ ایک تار جس میں $1\,\mathrm{A}$ کی برقی رو گزر رہی ہو، کتنے فاصلے پر زمینی میدان کے افقی جزو برابر مقناطیسی میدان پیدا کرے گی۔

جواب: $4.2\,\mathrm{cm}$

سوال7.29: بیس سنٹی میٹر لمبائی اور پانچ سنٹی میٹر رداس کا پیچدار لچھا جس میں برقی رو گزر رہی ہو میں مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H} = 200\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N_1(0.02, 0^\circ, 0.02)$ اور $N_2(0.04, 50^\circ, 0.06)$ کے درمیان غیر سمتی مقناطیسی دباو V_{m21} حاصل کریں۔ سمتی مقناطیسی دباو $\nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ سے حاصل کرتے ہوئے $\rho = 0$ پر $\boldsymbol{A} = 0$ لیتے ہوئے انہیں دو نقطوں کے مابین $\boldsymbol{A}_{21}$ حاصل کریں۔ یہ مساوات استعمال کرتے وقت $\boldsymbol{A}$ کا درست جزو اپنے علم سے چنیں۔

جوابات: $-8\,\mathrm{A}$ ، $2.5\boldsymbol{a}_{\phi}\,\frac{\mathrm{\mu Wb}}{\mathrm{m}}$

سوال7.30: نلکی کثافت برقی رو $50\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ رداس $\rho = 2\,\mathrm{m}$ پر پائی جاتی ہے جبکہ رداس $\rho = 4\,\mathrm{m}$ پر $25\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ اور رداس $\rho = 5\,\mathrm{m}$ پر $-40\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ پائے جاتے ہیں۔ زاویہ $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ لیتے اور $\phi = 180^\circ$ کو رکاوٹ تصور کرتے ہوئے نقطہ $N_1(3.5, 60^\circ, 0)$ پر غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m حاصل کریں۔

جوابات: $-66.6\,\mathrm{A}$

سوال7.31: سطح $z = 0$ پر تار $x = 4$ میں $0.2\,\mathrm{A}$ کی برقی رو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب پائی جاتی ہے جبکہ تار $x = -4$ میں $0.2\,\mathrm{A}$ برقی رو $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب پائی جاتی ہے۔ محدد کے مرکز پر $V_m = 0$ لیتے ہوئے z محدد پر غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m حاصل کریں۔

جواب: $-\frac{0.2}{\pi}\tan^{-1}\frac{z}{4}\,\mathrm{A}$

ڈھلوان، پھیلاو، گردش اور لاپلاسی

کارتیسی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} & az \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

نلکی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho & \boldsymbol{a}_\phi & \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

کروی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{a}_\phi \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}
\end{aligned}
$$

5410 عمومی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{1}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}\boldsymbol{a}_v + \frac{1}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w}\boldsymbol{a}_w \\
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{1}{k_1k_2k_3}\left(\frac{\partial(k_2k_3A_u)}{\partial u} + \frac{\partial(k_3k_1A_v)}{\partial v} + \frac{\partial(k_1k_2A_w)}{\partial w}\right) \\
\nabla\times\boldsymbol{A} &= \frac{1}{k_2k_3}\left[\frac{\partial(k_3A_w)}{\partial v} - \frac{\partial(k_2A_v)}{\partial w}\right]\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_3k_1}\left[\frac{\partial(k_1A_u)}{\partial w} - \frac{\partial(k_3A_w)}{\partial u}\right]\boldsymbol{a}_v \\
&\quad + \frac{1}{k_1k_2}\left[\frac{\partial(k_2A_v)}{\partial u} - \frac{\partial(k_1A_u)}{\partial v}\right]\boldsymbol{a}_w \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_2k_3}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_3k_1}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{k_1k_2}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]
\end{aligned}
$$

5411 سمتی مماثل

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G} &= FG\cos\theta \qquad \text{غیر سمتی (نقطہ) ضرب} \\
\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}}{FG}\right) \\
\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G} &= FG\sin\theta\boldsymbol{a}_N \qquad \text{سمتی (صلیبی) ضرب} \\
\theta &= \sin^{-1}\left[\frac{(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{a}_N}{FG}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) &= 0 \\
\nabla\cdot\nabla f &= \nabla^2 f \\
\nabla\times\nabla f &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla(f+g) &= \nabla f + \nabla g \\
\nabla\cdot(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) &= \nabla\cdot\boldsymbol{F} + \nabla\cdot\boldsymbol{G} \\
\nabla\times(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) &= \nabla\times\boldsymbol{F} + \nabla\times\boldsymbol{G}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\
\nabla\cdot(f\boldsymbol{G}) &= f(\nabla\cdot\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G}\cdot(\nabla f) \\
\nabla\times(f\boldsymbol{G}) &= f(\nabla\times\boldsymbol{G}) + (\nabla f)\times\boldsymbol{G}
\end{aligned}
$$

$$
\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) - \nabla^2\boldsymbol{F}
$$

جہاں $\nabla^2\boldsymbol{F}$ سے مراد

$$
\nabla^2\boldsymbol{F} = \nabla^2 F_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \nabla^2 F_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \nabla^2 F_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
$$

ہے۔

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{G}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})-\boldsymbol{F}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{G})\\
\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{H}) &= \boldsymbol{G}\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{F})=\boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})\\
\nabla\times(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{F}(\nabla\cdot\boldsymbol{G})-\boldsymbol{G}(\nabla\cdot\boldsymbol{F})+(\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F}-(\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{G}\\
\nabla(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}) &= (\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{G}+(\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}\times(\nabla\times\boldsymbol{G})+\boldsymbol{G}\times(\nabla\times\boldsymbol{F})
\end{aligned}
$$

سطحی اور حجمی تکمل کے تعلق 5412

مندرجہ ذیل تین مساوات میں دائیں جانب حجمی تکمل کے حجم کو بائیں جانب سطحی تکمل کی سطح گھیرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\oint_S f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_h \nabla f\,\mathrm{d}h\\
\oint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_h \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}h \qquad \text{مسئلہ پھیلاو}\\
\oint_S \boldsymbol{a}_N\times\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}S &= \int_h \nabla\times\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}h
\end{aligned}
$$

خطی اور سطحی تکمل کے تعلق 5413

مندرجہ ذیل دو مساوات میں دائیں جانب سطحی تکمل کی سطح کو بائیں جانب خطی تکمل کی بند راہ گھیرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\oint_l f\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_S \boldsymbol{a}_N\times\nabla f\,\mathrm{d}S\\
\oint_l \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \text{مسئلہ سٹوکس}
\end{aligned}
$$

complex permitivity
dispersion
try to resolve the issue of using k and γ as propagation constants
kraus p473 fig 10-60 sec 10.18 and 10.19, 10.17,10.16,10.15,10.11 or do the entire chap9 and 10 transmission from kraus too
fourier transform sec 14.8 of kraus must draw the figures
charge is barqi bar and let the reader figure out which bar is meant
degree angle and degree celcius, ohm, micro etc not showing
kraus p581 mentions three types of impedances: intrinsic, characteristic and transverse. ensure that i too have these distinctions
kraus fig-13.28 and fig 13.29 and table 13.3 (on p577) are v. impt
Huygens improvements
figTransmissionSmithFromInternet.tex is not giving the figure of the book
the answers should be at the end of the book
handle all side notes (   ) and remove the corresponding text
read chapter 9 onwards (proof reading)
antenna chapter, 3D figure at start and complete the start section.
house completion certificate.
zaryab fish
F=-dW/dT to include in inductance chapter plus a question or two
magnetizartion curve and an iteration example. fig 8.10, 11 of hayt.
add questions to machine book too.

when giving fields always remember the following rules:
always ensure that divergence of magnetic field is zero.
moving waves must be of the form $E = E0\cos(wt - kz)$ where $c = (\mu * \epsilon)^{-0.5}$ and $k = 2 * \pi/\lambda$
include complex permitivity (7th ed Q12.18 says sigma=omega*epsilon")
include 4th ed fig 11.11 of page 422

جدول 15.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^{7}	گریفائٹ	7×10^{4}
تانبا	5.80×10^{7}	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^{7}	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^{7}	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^{7}	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^{7}	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^{7}	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^{7}	مقطر پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^{7}	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^{7}	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^{7}	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنیز	0.227×10^{7}	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^{7}	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^{7}	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^{7}	کوارٹس	10^{-17}

جدول 15.2: ϵ_R and $\sigma/\omega\epsilon$

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 15.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 15.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$