

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
 کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

3

1	4	سمتیات	1
1.1	5	مقداری اور سمتیہ	1.1
1.2	6	سمتی الجبرا	1.2
1.3	7	کارتیسی محدود	1.3
1.4	8	اکائی سمتیات	1.4
1.5	9	میدانی سمتیہ	1.5
1.6	10	سمتی رقبہ	1.6
1.7	11	غیر سمتی ضرب	1.7
1.8	12	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
1.9	13	گول نلکی محدود	1.9
1.9.1	14	نلکی اکائی سمتیات کا کارتسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	1.9.1
1.9.2	15	نلکی اور کارتسی اکائی سمتیات کا تعلق	1.9.2
1.9.3	16	نلکی لامحدود سطحیں	1.9.3
1.10	17	کروی محدود	1.10
2	18	کولومب کا قانون	2
2.1	19	قوت کشش یا دفع	2.1
2.2	20	برقی میدان کی شدت	2.2
2.3	21	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	2.3
2.4	22	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	2.4
2.5	23	چارج بردار حجم	2.5
2.6	24	مزید مثال	2.6
2.7	25	برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	2.7

69 ²⁶	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ	3
69 ²⁷	ساکن چارج	3.1
69 ²⁸	فیراڈے کا تجربہ	3.2
70 ²⁹	گاؤس کا قانون	3.3
72 ³⁰	گاؤس کے قانون کا استعمال	3.4
72 ³¹	نقطہ چارج	3.4.1
74 ³²	یکساں چارج بردار کروی سطح	3.4.2
74 ³³	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر	3.4.3
75 ³⁴	ہم محوری تار	3.5
77 ³⁵	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	3.6
77 ³⁶	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق	3.7
80 ³⁷	پھیلاؤ	3.8
82 ³⁸	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات	3.9
84 ³⁹	پھیلاؤ کی عمومی مساوات	3.10
86 ⁴⁰	مسئلہ پھیلاؤ	3.11
93 ⁴¹	توانائی اور برقی دباؤ	4
93 ⁴²	توانائی اور کام	4.1
94 ⁴³	لکیری تکملہ	4.2
99 ⁴⁴	برقی دباؤ	4.3
100 ⁴⁵	نقطہ چارج کا برقی دباؤ	4.3.1
101 ⁴⁶	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ	4.3.2
102 ⁴⁷	ہم محوری تار کا برقی دباؤ	4.3.3
102 ⁴⁸	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ	4.4
106 ⁴⁹	برقی دباؤ کی ڈھلوان	4.5
109 ⁵⁰	نلکی محدود میں ڈھلوان	4.5.1
110 ⁵¹	کروی محدود میں ڈھلوان	4.5.2
112 ⁵²	جفت قطب	4.6
114 ⁵³	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط	4.6.1
117 ⁵⁴	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی	4.7

5 موصل، ذو برق اور کیپسٹر 117₅₅

- 5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو 117₅₆
- 5.2 استمراری مساوات 119₅₇
- 5.3 موصل 121₅₈
- 5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط 126₅₉
- 5.5 عکس کی ترکیب 129₆₀
- 5.6 نیم موصل 132₆₁
- 5.7 ذو برق 133₆₂
- 5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط 138₆₃
- 5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط 142₆₄
- 5.10 کیپسٹر 142₆₅
- 5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر 144₆₆
- 5.10.2 ہم محوری کیپسٹر 145₆₇
- 5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر 145₆₈
- 5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر 147₆₉
- 5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس 148₇₀

6 پوٹنسن اور لاپلاس مساوات 157₇₁

- 6.1 مسئلہ یکنائی 159₇₂
- 6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے 160₇₃
- 6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات 161₇₄
- 6.4 لاپلاس مساوات کے حل 162₇₅
- 6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال 168₇₆
- 6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل 171₇₇
- 6.7 عددی دہرائے کا طریقہ 178₇₈

185 ⁹	ساکن مقناطیسی میدان	7
185 ¹⁰	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
189 ¹¹	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.2
193 ¹²	گردش	7.3
200 ¹³	نلکی محدود میں گردش	7.3.1
206 ¹⁴	عمومی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.2
208 ¹⁵	کروی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.3
208 ¹⁶	مسئلہ سٹوکس	7.4
212 ¹⁷	مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ	7.5
218 ¹⁸	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	7.6
224 ¹⁹	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	7.7
224 ²⁰	سمتی مقناطیسی دباؤ	7.7.1
225 ²¹	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.7.2
231 ²²	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	8
231 ²³	متحرک چارج پر قوت	8.1
232 ²⁴	تفرقی چارج پر قوت	8.2
235 ²⁵	برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	8.3
236 ²⁶	قوت اور مروڑ	8.4
241 ²⁷	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	8.5
242 ²⁸	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	8.6
245 ²⁹	مقناطیسی سرحدی شرائط	8.7
246 ³⁰	مقناطیسی دور	8.8
249 ³¹	مقناطیسی مخفی توانائی	8.9
250 ³²	خود امالہ اور مشترکہ امالہ	8.10
254 ³³	مشترکہ امالہ	8.11

257 ₁₀₄	9	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات
257 ₁₀₅	9.1	فیراڈے کا قانون
263 ₁₀₆	9.2	انتقالی برقی رو
267 ₁₀₇	9.3	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل
268 ₁₀₈	9.4	میکس ویل مساوات کی تکمل شکل
270 ₁₀₉	9.5	تاخیری دباؤ
275 ₁₁₀	10	مستوی امواج
275 ₁₁₁	10.1	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج
276 ₁₁₂	10.2	برقی و مقناطیسی مستوی امواج
283 ₁₁₃	10.2.1	خالی خلاء میں امواج
285 ₁₁₄	10.2.2	خالص یا کامل ذو برق میں امواج
287 ₁₁₅	10.2.3	ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج
290 ₁₁₆	10.3	پوئنٹنگ سمتیہ
294 ₁₁₇	10.4	موصل میں امواج
300 ₁₁₈	10.5	انعکاس مستوی موج
306 ₁₁₉	10.6	شرح ساکن موج
313 ₁₂₀	11	ترسیلی تار
313 ₁₂₁	11.1	ترسیلی تار کے مساوات
317 ₁₂₂	11.2	ترسیلی تار کے مستقل
318 ₁₂₃	11.2.1	ہم محوری تار کے مستقل
321 ₁₂₄	11.2.2	دو متوازی تار کے مستقل
322 ₁₂₅	11.2.3	سطح مستوی ترسیلی تار
323 ₁₂₆	11.3	ترسیلی تار کے چند مثال
328 ₁₂₇	11.4	ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ
335 ₁₂₈	11.4.1	سمتہ فراوانی نقشہ
336 ₁₂₉	11.5	تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

341 ₁₃₀	12	تقطیب موج
341 ₁₃₁	12.1	خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
344 ₁₃₂	12.2	بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پرنٹنگ سمتیہ
347 ₁₃₃	13	ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار
347 ₁₃₄	13.1	ترچھی آمد
358 ₁₃₅	13.2	ترسیم بائی گن
361 ₁₃₆	14	مویج اور گھمکیا
361 ₁₃₇	14.1	برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ
362 ₁₃₈	14.2	دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج
368 ₁₃₉	14.3	کھوکھلا مستطیلی مویج
377 ₁₄₀	14.3.1	مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور
384 ₁₄₁	14.4	مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج
388 ₁₄₂	14.5	کھوکھلی نالی مویج
395 ₁₄₃	14.6	انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف
397 ₁₄₄	14.7	انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف
399 ₁₄₅	14.8	سطحی موج
404 ₁₄₆	14.9	ذو برق تختی مویج
407 ₁₄₇	14.10	شیش ریشہ
410 ₁₄₈	14.11	پردہ بصارت
412 ₁₄₉	14.12	گھمکی خلاء
415 ₁₅₀	14.13	میکس ویل مساوات کا عمومی حل

423 ^{s1}	
423 ^{s2}	15.1 تعارف
423 ^{s3}	15.2 تاخیری دباو
425 ^{s4}	15.3 تکمل
426 ^{s5}	15.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا
434 ^{s6}	15.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت
438 ^{s7}	15.6 ٹھوس زاویہ
439 ^{s8}	15.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افرائش
446 ^{s9}	15.8 قطاری ترتیب
446 ^{s10}	15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع
447 ^{s11}	15.8.2 ضرب نقش
448 ^{s12}	15.8.3 ثنائی قطار
450 ^{s13}	15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار
452 ^{s14}	15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار
452 ^{s15}	15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار
456 ^{s16}	15.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلنے زاویہ اخراجی اینٹینا
457 ^{s17}	15.9 تداخل پیمائش
458 ^{s18}	15.10 مسلسل خطی اینٹینا
459 ^{s19}	15.11 مستطیل سطحی اینٹینا
462 ^{s20}	15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریر بدل ہیں
462 ^{s21}	15.13 خطی اینٹینا
467 ^{s22}	15.14 چلتے موج اینٹینا
468 ^{s23}	15.15 چھوٹا گھیرا اینٹینا
469 ^{s24}	15.16 پیچ دار اینٹینا
471 ^{s25}	15.17 دو طرفہ کردار
473 ^{s26}	15.18 جھری اینٹینا
474 ^{s27}	15.19 پیپا اینٹینا
476 ^{s28}	15.20 فرانس ریڈار مساوات
479 ^{s29}	15.21 ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیل کارکردگی
481 ^{s30}	15.22 حرارت نظام اور حرارت بعید

483 ^{s31}	
483 ^{s32}	16.1 توانائی

توانائی اور برقی دباؤ

4.1 توانائی اور کام

قوت F کی سمت میں فاصلہ dL طے کرنے سے

$$dW = F dL$$

کام کیا جاتا ہے۔ اگر قوت اور طے کردہ فاصلہ ایک ہی سمت میں نہ ہوں تب قوت کا وہ حصہ جو طے کردہ فاصلے کی سمت میں ہو اور طے شدہ فاصلے کے حاصل ضرب کو **کام**¹ کہتے ہیں۔ شکل 4.1 کو دیکھتے ہوئے سمتیات کے استعمال سے

$$\begin{aligned} dW &= F \cos \alpha dL \\ &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں $F \cos \alpha dL$ کو نقطہ ضرب کی مدد سے $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$ لکھا گیا ہے۔

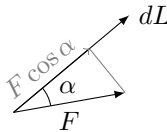
زمین اور کمیت m کے درمیان قوت ثقل $\mathbf{F}_G = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{a}_r$ پایا جاتا ہے² جس میں $g = \frac{GM}{r^2}$ لکھتے ہوئے $\mathbf{F}_G = -mg \mathbf{a}_r$ لکھا جاسکتا ہے۔ کام کرتے ہوئے کمیت کو $\Delta h \mathbf{a}_r$ اونچائی پر منتقل کرنے کی خاطر قوت ثقل کے خلاف

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\mathbf{F}_G$$

لاگو کرتے ہوئے

$$\Delta W = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \Delta h \mathbf{a}_r = mg \Delta h$$

¹work
² \mathbf{a}_r اکائی سمتیہ ہے۔



شکل 4.1: طے فاصلہ اور فاصلے کی سمت میں قوت کا حاصل ضرب کام کہلاتا ہے

توانائی درکار ہوگی۔ کام کرنے کے لئے درکار توانائی کمیت میں منتقل ہو جاتی ہے جسے **مخفی توانائی**³ کہتے ہیں۔ اگر Δh کی قیمت r کی نسبت سے بہت کم نہ ہو تب g کو مستقل تصور کرنا ممکن نہ ہو گا اور مخفی توانائی مکملہ کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$W = - \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \mathbf{F}_G \cdot d\mathbf{r} = \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \frac{GMm}{r^2} dr$$

ثقلی میدان میں کمیت کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچاتے ہوئے کوئی بھی راستہ اختیار کیا جاسکتا ہے۔ اختیار کردہ راستے کا مخفی توانائی پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں ہوتا۔ ایسے میدان جن میں دو نقطوں کے مابین مختلف مخفی توانائی کا دار و مدار، ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچنے کے راستے، پر نہیں ہوتا **قائم میدان**⁴ کہلاتے ہیں۔

برقی میدان میں چارجوں کے حرکت کے مسئلے کو بھی اسی طرح حل کیا جاتا ہے۔ برقی میدان E میں چارج q پر قوت $F_E = qE$ عمل کرتا ہے۔ چارج کو فاصلہ dL ہلانے کی خاطر اس قوت کے خلاف بیرونی

$$\mathbf{F}_{\text{بیرونی}} = -\mathbf{F}_E$$

قوت لاگو کرتے ہوئے

$$(4.1) \quad dW = -qE \cdot dL$$

کام⁵ کیا جاتا ہے۔ کسی بھی ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک یوں

$$(4.2) \quad W = -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} E \cdot dL$$

توانائی درکار ہوگی۔

1015

1016

4.2 لکیری تکملہ

کار ہے۔

مساوات 4.2 لکیری تکملہ ہے جس پر مزید غور کرتے ہیں۔ شکل 4.2 میں **یکساں**⁶ اور وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے میدان E میں نقطہ O سے نقطہ N تک چارج کی منتقلی دکھائی گئی ہے۔ یکساں میدان سے مراد ایسا میدان ہے جس میں E کی قیمت جگہ جگہ تبدیل نہیں ہوتی بلکہ اس کی قیمت ہر جگہ یکساں ہوتی ہے۔ اسی طرح وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو وقت کے ساتھ تغیر پذیر میدان کہا جائے گا۔ یکساں میدان وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر میدان ہے۔

1019

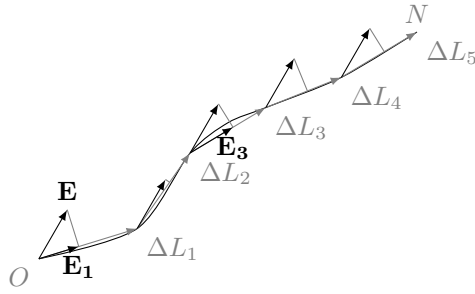
شکل 4.2 میں پورے راستے کو چھوٹے چھوٹے ٹکڑے $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots$ میں تقسیم کرتے ہوئے ایک ایک ٹکڑے پر حرکت کے لئے درکار توانائی مساوات 4.1 کی مدد سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ یوں ΔL_1 کے ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک چارج q منتقل کرنے کی خاطر $\Delta W = -qE \cdot \Delta L_1$ توانائی درکار ہو گی۔ یہی عمل راستے کے بقایا ٹکڑوں پر بھی لاگو کرتے ہوئے کل درکار توانائی

$$(4.3) \quad \begin{aligned} W &= -qE \cdot \Delta L_1 - qE \cdot \Delta L_2 - qE \cdot \Delta L_3 - qE \cdot \Delta L_4 - qE \cdot \Delta L_5 \\ &= -qE \cdot (\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 + \Delta L_5) \end{aligned}$$

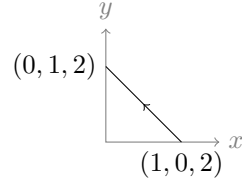
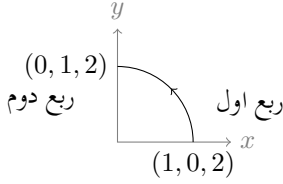
لکھی جاسکتی ہے۔ تو سین میں بند $\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 + \Delta L_5$ درحقیقت نقطہ O سے N تک کا کل سمتی راستہ L_{ON} ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کو

$$(4.4) \quad W = -qE \cdot L_{ON}$$

potential energy³
conservative field⁴
work⁵
uniform⁶



شکل 4.2: تکملہ دراصل چھوٹے حصوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔



شکل 4.3: چارج منتقل کرنے کے دو راستے۔

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر شکل 4.2 میں منتقلی کے راستے کے نہایت چھوٹے چھوٹے ٹکڑے dL بنائے جائیں تو مساوات 4.3 کو مکمل کی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(4.5) \quad W = \int_O^N -qE \cdot dL$$

چونکہ q اور E کی قیمتیں مستقل ہیں لہذا انہیں مکمل کے باہر لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے

$$(4.6) \quad \begin{aligned} W &= -qE \cdot \int_O^N dL \\ &= -qE \cdot L_{ON} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس جواب سے ہم دیکھتے ہیں کہ درکار توانائی کا دار و مدار q ، E اور L_{ON} پر ہے جہاں L_{ON} نقطہ O سے نقطہ N تک سیدھی کھینچی لکیر ہے۔ درکار توانائی کا اس سے کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں کہ ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے جاتے ہوئے کون سا راستہ اختیار کیا گیا۔ جیسا کہ پہلے ذکر کیا گیا، ایسے میدان کو قدامت پسند میدان کہتے ہیں۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ غیر یکساں برقی میدان بھی قدامت پسند میدان ہوتا ہے البتہ تغیر پذیر برقی میدان غیر قدامت پسند ہو سکتا ہے۔

1023

مثال 4.1: غیر یکساں، غیر تغیر پذیر میدان

$$E = (y + z)a_x + (x + z)a_y + (x + y)a_z \quad \frac{V}{m}$$

میں $N_1(1, 0, 2)$ سے $N_2(0, 1, 2)$ تک سیدھی لکیر پر 0.1 C کا چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

1024

حل: شکل 4.3 میں چارج منتقل کرنے کا سیدھا راستہ دکھایا گیا ہے۔ پہلے اس سیدھی لکیر کا مساوات حاصل کرتے ہیں۔ اس لکیر کا ڈھلوان⁷

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1$$

ہے لہذا سیدھی لکیر کی مساوات $y = mx + c$ میں نقطہ N_1 پڑھتے ہوئے $c = -1 \times 1 + 0 = -1$ سے $c = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں لکیر کی مساوات

$$(4.7) \quad y = -x + 1$$

ہے۔ کارتیسی محد میں کسی بھی راستے پر حرکت کرتے ہوئے مساوات 1.3 کے مطابق

$$(4.8) \quad dL = dx a_x + dy a_y + dz a_z$$

لکھا جاتا ہے۔ یوں مساوات 4.2 سے حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -0.1 \int_{N_1}^{N_2} [(y+z)a_x + (x+z)a_y + (x+y)a_z] \cdot (dx a_x + dy a_y + dz a_z) \\ &= -0.1 \int_1^0 (y+z) dx - 0.1 \int_0^1 (x+z) dy - 0.1 \int_2^0 (x+y) dz \end{aligned}$$

آخری قدم پر تکمیل کو تین حصوں میں لکھا گیا ہے جہاں پہلے حصے میں تکمیل کو x کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے جبکہ دوسرے حصے میں تکمیل کو y کے ساتھ اور آخری حصے میں اسے z کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے۔ پہلے حصے میں $(y+z)$ کا تکمیل x کے ساتھ ہے لہذا $(y+z)$ کو x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ منتقلی کے راستے پر $z = 2$ ہے جبکہ مساوات 4.7 میں y کو x کی صورت میں لکھا گیا ہے۔ یوں پہلا تکمیل

$$\begin{aligned} -0.1 \int_1^0 [y+z] dx &= -0.1 \int_1^0 [(-x+1)+2] dx \\ &= -0.1 \left(\frac{-x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^0 \\ &= 0.25 \text{ J} \end{aligned}$$

یعنی جاول کے ایک چوتھائی کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ دوسرا تکمیل y کے ساتھ ہے لہذا تمام متغیرات y کی صورت میں لکھنے ہوں گے۔ سیدھی لکیر کے مساوات سے $x = -y + 1$ لکھا جاسکتا ہے جبکہ پورے راستے پر $z = 2$ کے برابر ہے لہذا

$$\begin{aligned} -0.1 \int_0^1 [x+z] dy &= -0.1 \int_0^1 [(-y+1)+2] dy \\ &= -0.1 \left(\frac{-y^2}{2} + 3y \right) \Big|_0^1 \\ &= -0.25 \text{ J} \end{aligned}$$

ہو گا۔ تیسرے تکمیل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لہذا یہ تکمیل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1 \int_2^0 (x+y) dz = 0 \text{ J}$$

اس طرح کل درکار توانائی تینوں جوابات کا مجموعہ یعنی 0 J ہو گی۔ مثبت جواب کا مطلب یہ ہے کہ چارج کو منتقل کرنے کی خاطر بیرونی لاگو قوت توانائی فراہم کئے گی۔

مثال 4.2: گزشتہ مثال میں سیدھی لکیر پر چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کرنے کو کہا گیا۔ اس مثال میں شکل 4.3 میں بائیں جانب گول دائرے کے راستے $(1, 0, 2)$ سے $(0, 1, 2)$ تک $\frac{V}{m}$ تک $E = (y + z)a_x + (x + z)a_y + (x + y)a_z$ میدان میں 0.1 C کے چارج کو منتقل کرنے کی خاطر درکار توانائی حاصل کریں۔ گول دائرے کا راستہ $z = 2$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

1031

حل: اکائی رداس کے گول دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = 1^2$ ہے۔ یوں مساوات 4.2 سے حاصل تین تکملوں

$$W = -0.1 \int_1^0 (y + z) dx - 0.1 \int_0^1 (x + z) dy - 0.1 \int_2^2 (x + y) dz$$

میں پہلی تکمل میں $z = 2$ اور $y = \sqrt{1 - x^2}$ پڑ کر ناہوگا۔ یاد رہے کہ ربع اول⁸ میں x اور y دونوں کی قیمتیں مثبت ہوتی ہیں۔ اس طرح کے تکمل حل کرتے وقت ربع کو مد نظر رکھنا ضروری ہے۔

$$\begin{aligned} -0.1 \int_1^0 (y + z) dx &= -0.1 \int_1^0 (\sqrt{1 - x^2} + 2) dx \\ &= -0.1 \left(\frac{\sin^{-1} x}{2} + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + 2x \right) \Big|_1^0 \\ &= -0.025\pi - 0.2 \end{aligned}$$

جاوے، دوسرے تکمل میں $z = 2$ ہی رہے گا جبکہ $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$ میں سے $x = \sqrt{1 - y^2}$ کا استعمال ہوگا۔ یوں

$$\begin{aligned} -0.1 \int_0^1 (x + z) dy &= -0.1 \int_0^1 (\sqrt{1 - y^2} + 2) dy \\ &= -0.1 \left(\frac{\sin^{-1} y}{2} + \frac{y\sqrt{1 - y^2}}{2} + 2y \right) \Big|_0^1 \\ &= 0.025\pi + 0.2 \end{aligned}$$

جاوے حاصل ہوتا ہے۔ تیسرے تکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لہذا یہ تکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1 \int_2^2 (x + y) dz = 0 \text{ J}$$

1032

کل توانائی ان تین جوابات کا مجموعہ یعنی 0 J ہوگا۔

1033

1034

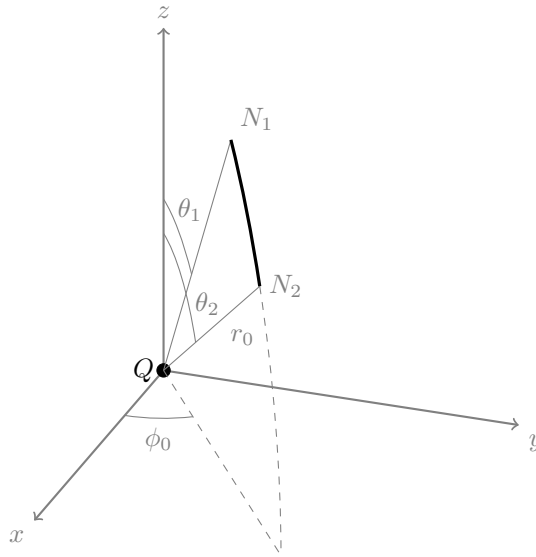
1035

مشق 4.1: گزشتہ دو مثالوں میں ابتدائی نقطہ $(1, 0, 2)$ اور اختتامی نقطہ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ تصور کرتے ہوئے دوبارہ حل کریں۔

1036

جوابات: -0.1328 J ، -0.1328 J

1037



شکل 4.4: نقطہ چارج کے گرد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے حرکت کا راستہ

محدد کے مرکز پر موجود نقطہ چارج Q کا میدان ہم حاصل کر چکے ہیں جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(4.9) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

آئیں دیکھیں کہ رداس تبدیل کئے بغیر اس میدان میں چارج q کو حرکت دیتے ہوئے کتنی توانائی درکار ہوگی۔ چونکہ میدان رداس کی سمت میں ہے اور رداس تبدیل کئے بغیر حرکت صرف اُس صورت ممکن ہے کہ ہم \mathbf{a}_r یعنی E کے عمود میں سفر کریں۔ ایسی صورت میں چارج پر میدان سے رونما ہونے والی قوت اور طے فاصلہ عمودی ہوں گے لہذا درکار توانائی صفر کے برابر ہوگی۔ آئیں مکمل کے ذریعہ یہی جواب حاصل کریں۔

1040

تصور کریں کہ $\phi = \phi_0$ اور $r = r_0$ رکھتے ہوئے ہم θ کو θ_1 تا θ_2 ریڈیئن تبدیل کرتے ہوئے چارج کو نقطہ N_1 سے N_2 تک حرکت دیتے ہیں۔ یہ صورت حال شکل 4.4 میں دکھائی گئی ہے۔ مساوات 1.3، مساوات 1.44 اور مساوات 1.64 جنہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$(4.10) \quad \begin{aligned} dL &= dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z \\ dL &= \rho d\mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z \\ dL &= dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

کار تیس، نکلی اور کرومی متغیرات تبدیل کرنے سے پیدا چھوٹا فاصلہ dL دیتے ہیں۔ یوں درکار توانائی

$$\begin{aligned} W &= -q \int_{\text{نقطہ 1}}^{\text{نقطہ 2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -q \int_{r_0, \theta_1, \phi_0}^{r_0, \theta_2, \phi_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot (dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi) \\ &= -q \int_{r_0}^{r_0} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

صفر ہی حاصل ہوتی ہے۔ یہاں دوسرے قدم پر $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = 1$ کے علاوہ $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\theta = 0$ اور $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$ کا استعمال کیا گیا۔

1041

اس کے برعکس اگر نقطہ (r_1, θ_1, ϕ_1) تا نقطہ (r_2, θ_2, ϕ_2) چارج کو حرکت دی جائے تب

$$\begin{aligned} W &= -q \int_{r_1, \theta_1, \phi_1}^{r_2, \theta_2, \phi_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot (d\mathbf{r} \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi) \\ &= -q \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned}$$

ہوگا۔ یوں $r_1 > r_2$ کی صورت میں جواب مثبت ہوگا اور چارج کو ابتدائی نقطہ سے اختتامی نقطہ منتقل کرنے کے خاطر بیرونی توانائی درکار ہوگی جبکہ $r_2 > r_1$ کی صورت میں جواب منفی حاصل ہوتا ہے لہذا چارج کے حرکت سے ہمیں توانائی حاصل ہوگی۔

1043

مشق 4.2: میدان $\mathbf{E} = 3x^2yz^2\mathbf{a}_x + x^3z^2\mathbf{a}_y + 2x^3yz\mathbf{a}_z$ V/m میں محدود کے مرکز $(0, 0, 0)$ سے نقطہ $(2, 3, 5)$ تک دو کولمب کا چارج منسلک کر کے ذیل راستوں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

1045

• دو نقطوں کے مابین سیدھی لکیر۔

1046

• ایسا راستہ جس پر $z = \frac{x}{2} + x^2$ اور $y = \frac{3}{4}x^2$ ہوں۔

1047

جوابات: سیدھی لکیر پر $y = \frac{3}{2}x$ اور $z = \frac{5}{2}x$ لکھا جائے گا۔ جوابات کے مطابق توانائی درکار نہیں بلکہ حاصل ہوگی۔ $-1200 \text{ J}, -1200 \text{ J}$

1048

1049

4.3 برقی دباؤ

1050

چارج q کے منتقلی کے لئے درکار توانائی سے زیادہ اہم اکائی چارج کے منتقلی کے لئے درکار توانائی ہے۔ اس توانائی کو **برقی دباؤ**⁹ کہتے ہیں۔ برقی دباؤ کے اکائی J/C کو **وولٹ**¹⁰ کا نام دیا گیا ہے جسے V سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چونکہ توانائی غیر سمتی یعنی مقدار ہے لہذا برقی دباؤ بھی مقدار ہے۔ مساوات 4.2 سے برقی دباؤ یوں حاصل ہوتا ہے

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (4.11)$$

جہاں ابتدائی نقطہ کو B ، اختتامی نقطہ کو A اور حاصل جواب کو V_{AB} لکھا گیا ہے۔ V_{AB} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلے اختتامی نقطہ A اور بعد میں ابتدائی نقطہ B لکھا گیا ہے۔ مساوات 4.6 میں فاصلہ L_{ON} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں ابتدائی نقطہ O پہلے اور اختتامی نقطہ N بعد میں لکھا گیا۔ برقی دباؤ V_{AB} لکھتے ہوئے اس فرق کو مد نظر رکھنا ہوگا۔

1053

برقی دباؤ دو نقطوں کے مابین ناپی جاتی ہے۔ کسی نقطہ کی حتمی برقی دباؤ معنی نہیں رکھتی۔ برقی دباؤ بالکل اونچائی کے مترادف ہے۔ یوں کسی پہاڑی کے قعر پہ کھڑے ہو کر اگر اس کی اونچائی تین سو میٹر ناپی جائے تو اسی پہاڑی کی اونچائی سطح سمندر سے ناپتے ہوئے سات سو میٹر حاصل ہو سکتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اونچائی ناپتے ہوئے **نقطہ حوالہ**¹¹، جہاں کی نسبت سے اونچائی ناپی جائے، نہایت اہمیت کا حامل ہے۔ **نقطہ حوالہ** کی اونچائی صفر تصور کی جاتی ہے۔ دو یا دو سے زیادہ عمارتوں کی

اونچائی کا موازنہ کرتے وقت ان تمام عمارتوں کی اونچائی پہلے کسی ایک نقطے سے ناپی جاتی ہے۔ یہ نقطہ عموماً زمین کی سطح ہوتی ہے۔ اس کے برعکس مختلف شہروں یا پہاڑیوں کی اونچائی عموماً سطح سمندر سے ناپی جاتی ہے۔ اگر تمام افراد کسی ایک نقطہ حوالہ پر اتفاق کریں تب اس نقطے کی نسبت سے کسی مقام کی اونچائی کو اس مقام کی حتمی اونچائی تصور کی جاتی ہے۔ بالکل اسی طرح مختلف نقطوں کے برقی دباؤ کا موازنہ کرتے ہوئے ان تمام نقطوں کی برقی دباؤ کسی ایک نقطے کی نسبت سے ناپے جائیں گے۔ ایسے نقطے کو **برقی زمین**¹²، کہا جاتا ہے جہاں برقی زمین کو صفر برقی دباؤ پر تصور کیا جاتا ہے۔ عموماً گرہ ارض کی سطح کو ہی برقی زمین تصور کیا جاتا ہے۔

1060

موٹر گاڑی میں نسب بیٹری کے مثبت سرے کی برقی دباؤ، بیٹری کے منفی سرے کی نسبت سے ناپنا زیادہ مطلب آمیز ہو گا جبکہ گھریلو برقی دباؤ مہیا کردہ ٹھنڈی اور گرم تار کے مابین ناپنا مطلب رکھتا ہے۔ کبھی کبھار برقی دباؤ ناپنا نسبتاً مشکل ہوتا ہے، مثلاً گرہ ارض کی برقی دباؤ کو کس نقطہ حوالہ سے ناپا جائے گا۔ طبیعیات کے میدان میں عموماً ایسے ہی مسئلے درپیش آتے ہیں جہاں نقطہ حوالہ تعین کرنا دشوار ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں نقطہ حوالہ کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا جاتا ہے اور نقطہ A کے برقی دباؤ کو V_A لکھا جاتا ہے۔ یوں لامحدود فاصلے سے اکائی چارج کو کرہ ارض تک لانے کے لئے درکار توانائی دریافت کرتے ہوئے کرہ ارض کی برقی دباؤ حاصل کی جائے گی۔

1065

ہمہ محوری تار کے مسائل پر غور کرتے ہوئے عموماً اس کی بیرونی نلکی سطح کو نقطہ حوالہ لیا جاتا ہے۔ اسی طرح کر دی تناسب رکھنے والے سطحوں کے مابین، برقی دباؤ حاصل کرتے وقت ان میں کسی ایک سطح کو حوالہ سطح چنا جائے گا۔

1067

اگر نقطہ A کی برقی دباؤ V_A جبکہ نقطہ B کی برقی دباؤ V_B ہو تب ان کے مابین برقی دباؤ

(4.12)

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

ہو گا جہاں نقطہ B کو نقطہ حوالہ تصور کیا گیا ہے۔ یہ مساوات صرف اور صرف اسی صورت درست ہوگی جب V_A اور V_B از خود ایک ہی نقطہ حوالہ سے ناپے گئے ہوں۔

1069

4.3.1 نقطہ چارج کا برقی دباؤ

شکل 4.5 میں خالی خلاء میں کر دی محد کے مرکز پر پائے جانے والے چارج Q کے میدان میں کسی بھی راستے پر q کولمب کے پیمائشی چارج کو نقطہ B سے نقطہ A لانا دکھایا گیا ہے۔ Q سے r فاصلے پر اس راستے کے چھوٹی لمبائی dL پر اوسط برقی میدان $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$ ہو گا۔ یوں اتنا راستہ طے کرنے کے لئے

$$\begin{aligned} dW &= -q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \\ &= -q \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \right) \cdot (dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi) \\ &= -\frac{qQ dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

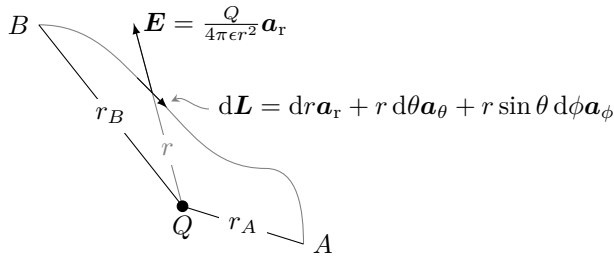
توانائی درکار ہوگی۔ اس طرح پورا راستہ طے کرنے کے لئے

$$W = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{qQ dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r_B}^{r_A} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

توانائی درکار ہوگی جس سے ان دو نقطوں کے مابین برقی دباؤ $V_{AB} = \frac{W}{q}$ یوں حاصل ہوتا ہے۔

(4.13)

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$



شکل 4.5: نقطہ چارج کی برقی دباؤ۔

اس مساوات سے صاف ظاہر ہے کہ نقطہ چارج Q کے میدان میں دو نقطوں کے مابین برقی دباؤ کا انحصار چارج سے نقطوں کے فاصلوں r_A اور r_B پر ہے تاکہ ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچنے کے راستے پر۔ یوں نقطہ B کے حوالے سے نقطہ A پر برقی دباؤ مساوات 4.13 سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر رکھا جائے یعنی اگر $r_B = \infty$ ہوئے کی وجہ سے یہ مساوات

$$(4.14) \quad V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اگر ہم حوالہ نقطہ کے لامحدود فاصلے پر ہونے پر اتفاق کریں تو ایسی صورت میں $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$ کو نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ تصور کیا جاسکتا ہے جسے V_A لکھا جاتا ہے۔ نقطہ حوالے کو لامحدود فاصلے پر رکھنے کا مطلب ہے کہ برقی زمین لامحدود فاصلے پر ہے۔ نقطہ حوالہ پر اتفاق کے بعد برقی دباؤ کی بات کرتے ہوئے بار بار برقی زمین کی نشاندہی کرنا ضروری نہیں لہذا برقی دباؤ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں B لکھنے سے گریز کیا جاتا ہے اور اسے صرف V_A لکھا جاتا ہے۔ مساوات 4.14 نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ دیتا ہے جو Q سے r_A فاصلے پر ہے۔ یہ نقطہ کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے لہذا اسے r_A فاصلے پر نقطہ A کی بجائے r فاصلے پر نقطہ کہا جاسکتا ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 4.14 کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(4.15) \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

جو کروی محدود کے مرکز پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے r فاصلے پر برقی دباؤ V دیتا ہے جہاں نقطہ حوالہ لامحدود فاصلے پر ہے۔

برقی دباؤ مقداری ہے لہذا مساوات 4.15 میں اکائی سمتیات نہیں پائے جاتے۔

ایسی سطح جس پر حرکت کرنے سے برقی دباؤ تبدیل نہ ہو کو ہم **قوہ سطح**¹³ کہتے ہیں۔ مساوات 4.15 کے مطابق کروی محدود کے مرکز پر نقطہ چارج کے گرد کئی بھی رداس کا کرہ ہم قوہ سطح ہوگی۔ ایسی سطح پر حرکت کرنے کی خاطر کسی توانائی کی ضرورت نہیں ہوتی۔

4.3.2 لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ

z محدود پر لامحدود لمبائی کے لکیری چارج کثافت کا میدان صفحہ 75 پر مساوات 3.15

$$E_p = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} a_p$$

دیتا ہے۔ اس میدان میں ρ_0 اور ρ_1 سطحوں کے مابین

$$(4.16) \quad V = - \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{\rho_L d\rho}{2\pi\epsilon_0 \rho} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

برقی دباؤ پایا جائے گا۔

4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباؤ

ہم محوری تار میں اندرونی اور بیرونی تاروں کے درمیانی جگہ پر برقی میدان صفحہ 75 پر مساوات 3.16 میں دیا گیا ہے جسے $D = \epsilon E$ کے استعمال سے

$$(4.17) \quad E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho} a_\rho$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں اندرونی تار پر ρ_L لکیری چارج کثافت پایا جاتا ہے۔ اندرونی تار کے اکائی لمبائی پر Q جبکہ بیرونی تار کے اکائی لمبائی پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔ بیرونی تار کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی تار پر برقی دباؤ

$$V = - \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho} a_\rho \cdot d\rho a_\rho = - \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

یعنی

$$(4.18) \quad V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہوگا جہاں اندرونی تار کا رداس ρ_1 اور بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔

1077

4.4 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ

شکل 4.6- الف میں چارج Q_1 اور Q_2 کے برقی میدان میں B سے A تک پیمائشی چارج q کی حرکت دکھائی گئی ہے۔ Q_1 کو کروی محدود کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے، B سے A تک راستے پر کسی بھی نقطہ N پر اس کا میدان $E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} a_{r1}$ لکھا جاسکتا ہے جہاں r_1 مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔ اسی طرح Q_2 کو ایک اور کروی محدود کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے نقطہ N پر اس کا میدان $E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} a_{r2}$ لکھا جاسکتا ہے جہاں r_2 اس محدود کے مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔ شکل- الف میں B سے A تک راستے پر نقطہ N پر Q_1 اور Q_2 کے میدان E_1 اور E_2 دکھائے گئے ہیں۔ یوں N پر کل میدان $E = E_1 + E_2$ ہوگا۔ نقطہ N پر B سے A کے راستے چھوٹی سی لمبائی dL پر کل میدان یہی ہوگا۔ جس کروی محدود کے مرکز پر Q_1 پایا جاتا ہے اس نظام میں اس چھوٹے فاصلے کو

$$(4.19) \quad dL = dr_1 a_{r1} + r_1 d\theta_1 a_{\theta1} + r_1 \sin \theta_1 d\phi_1 a_{\phi1}$$

لکھا جاسکتا ہے جبکہ جس کروی محدود کے مرکز پر Q_2 پایا جاتا ہے اس نظام میں اسی چھوٹے فاصلے کو

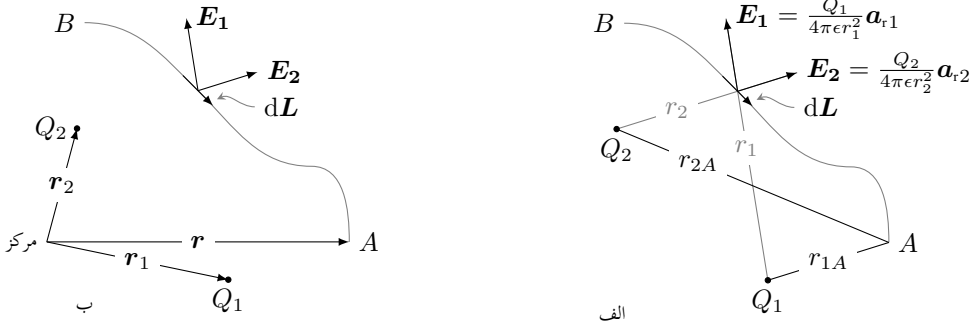
$$(4.20) \quad dL = dr_2 a_{r2} + r_2 d\theta_2 a_{\theta2} + r_2 \sin \theta_2 d\phi_2 a_{\phi2}$$

لکھا جائے گا۔ dL فاصلہ طے کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned} dW &= -qE \cdot dL \\ &= -q(E_1 + E_2) \cdot dL \\ &= -\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} a_{r1} \cdot dL - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} a_{r2} \cdot dL \end{aligned}$$

توانائی درکار ہوگی۔ اس مساوات میں $a_{r1} \cdot dL$ حاصل کرتے وقت dL کی قیمت مساوات 4.19 سے لیتے ہوئے dr_1 ملتا ہے۔ اسی طرح $a_{r2} \cdot dL$ حاصل کرتے وقت dL کی قیمت مساوات 4.20 سے لیتے ہوئے dr_2 ملتا ہے۔ ان قیمتوں کے پُر کرنے سے

$$dW = -\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} dr_1 - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} dr_2$$



شکل 4.6: دو نقطہ چارج کے میدان میں حتمی برقی دباؤ۔

حاصل ہوتا ہے۔ یوں B سے A تک کا پورا راستہ طے کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned} W &= \int_B^A dW = -\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{1B}}^{r_{1A}} \frac{dr_1}{r_1^2} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{2B}}^{r_{2A}} \frac{dr_2}{r_2^2} \\ &= \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}} \right) + \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{2A}} - \frac{1}{r_{2B}} \right) \end{aligned}$$

توانائی درکار ہوگی۔ نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر لیتے ہوئے یوں نقطہ A پر حتمی برقی دباؤ

$$(4.21) \quad V_A = \frac{W}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_{1A}} + \frac{Q_2}{r_{2A}} \right)$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 4.21 میں دائیں ہاتھ پہلا جزو Q_1 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ جبکہ دوسرا جزو Q_2 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباؤ دیتا ہے۔ مساوات 4.21 کے مطابق Q_1 اور Q_2 دونوں کے موجودگی میں نقطہ A کا برقی دباؤ حاصل کرنے کی خاطر ان دو چارجوں کو باری باری علیحدہ لیتے ہوئے A پر برقی دباؤ حاصل کیا جاتا ہے اور پھر دونوں برقی دباؤ کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہی طریقہ کار دوسرے زیادہ نقطہ چارجوں کے لئے بھی بروئے کار لایا جاسکتا ہے۔ یوں کسی بھی نقطہ کی برقی دباؤ حاصل کرتے ہوئے مختلف نقطہ چارجوں کے برقی دباؤ علیحدہ علیحدہ حاصل کرتے ہوئے انہیں جمع کرتے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

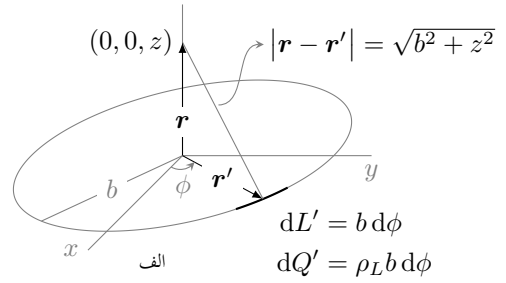
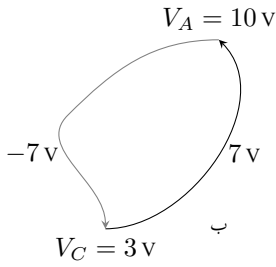
اگر کسی کروی محدود کے مرکز سے Q_1 تک کا سمتیہ r_1 جبکہ مرکز سے Q_2 تک کا سمتیہ r_2 اور مرکز سے نقطہ A تک سمتیہ r ہوں تب نقطہ A کے لئے مساوات 4.21 کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$$(4.22) \quad V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{|r - r_1|} + \frac{Q_2}{|r - r_2|} \right)$$

جہاں Q_1 سے A تک فاصلہ $|r - r_1|$ اور Q_2 سے A تک فاصلہ $|r - r_2|$ ہے۔ یہ صورت حال شکل 4.6-ب میں دکھائی گئی ہے۔ متعدد نقطہ چارجوں کے لئے مساوات 4.22

$$\begin{aligned} (4.23) \quad V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{|r - r_1|} + \frac{Q_2}{|r - r_2|} + \cdots + \frac{Q_n}{|r - r_n|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{|r - r_j|} \end{aligned}$$

لکھی جائے گی جہاں نقطہ A کا مقام زیر نوشت میں A لکھنے کی بجائے $V(r)$ میں r سے واضح کیا گیا ہے۔



شکل 4.7: (الف) گول دائرے پر لکیری چارج کثافت سے Z محدد پر پیدا برقی دباؤ۔ (ب) بند دائرے کی برقی دباؤ صفر ہے۔

متغیر حجمی چارج کثافت ρ_h کے چھوٹے حجم Δh میں پائے جانے والے چارج $\Delta Q = \rho_h \Delta h$ کو نقطہ چارج تصور کیا جاسکتا ہے۔ پورے حجم n کے چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے مساوات 4.23 کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(4.24) \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\rho_h(r_1)\Delta h_1}{|r - r_1|} + \frac{\rho_h(r_2)\Delta h_2}{|r - r_2|} + \dots + \frac{\rho_h(r_n)\Delta h_n}{|r - r_n|} \right)$$

جہاں r کو کثافت کا آزاد متغیر لیتے ہوئے مقام r_j پر کثافت کو $\rho_h(r_j)$ اور چھوٹی حجم Δh_j لکھا گیا ہے۔ چھوٹی حجم Δh کو کم سے کم کرتے ہوئے ایسے نقطوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ بناتے ہوئے اس مجموعہ سے مندرجہ ذیل حجمی مکمل حاصل ہوتا ہے۔

$$(4.25) \quad V(r) = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho_h(r') dh'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

یہاں رک کر مندرجہ بالا مساوات کو دوبارہ دیکھتے ہیں۔ ρ_h حجمی چارج کثافت ہے۔ مقام r' پر چھوٹی حجم dh' میں تھوڑا سا چارج $\rho_h(r') dh'$ پایا جاتا ہے جسے نقطہ چارج تصور کیا جاتا ہے۔ مساوات 4.25 نقطہ r پر برقی دباؤ دیتا ہے جہاں برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا گیا ہے۔ یوں اکائی چارج کو لامحدود فاصلے سے نقطہ r تک کسی بھی راستے لانے کے لئے اس مساوات سے حاصل $V(r)$ برابر توانائی درکار ہوگی۔

1087

اگر حجمی چارج کثافت کی جگہ سطحی چارج کثافت ρ_s یا لکیری چارج کثافت ρ_L پایا جاتا ہے مندرجہ بالا مساوات کو

$$(4.26) \quad V(r) = \int_{\text{سطح}} \frac{\rho_s(r') ds'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

$$(4.27) \quad V(r) = \int_{\text{لکیر}} \frac{\rho_L(r') dL'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

لکھتے۔ ان مساوات میں dh' ، ds' اور dL' غیر مستقیم یعنی مقداری ہیں۔ تینوں اقسام کے چارج کثافت پائے جانے کی صورت میں باری باری ہر ایک سے پیدا ہونے والے دباؤ حاصل کرتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

1089

مثال 4.3: $z = 0$ سطح پر z محدد کے گرد b رداس کے گول دائرے پر ρ_L چارج کثافت پایا جاتا ہے۔ $N(0, 0, z)$ پر برقی دباؤ حاصل کریں۔

1090

حل: شکل 4.7-الف میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر کروئی نظام کار داس r اور نکلی محدود کار داس p برابر ہوتے ہیں۔ گول دائرے پہ r' کے مقام پر چھوٹی لکیر $dL' = b d\phi$ لکھی جاسکتی ہے۔ برقی دباؤ r پر درکار ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثا غورث کی مدد سے $|r' - r| = \sqrt{b^2 + z^2}$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 4.27 استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(0, 0, z)$ پر

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L b d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{b^2 + z^2}} = \frac{\rho_L b}{2\epsilon_0 \sqrt{b^2 + z^2}}$$

برقی دباؤ پایا جائے گا۔ گول دائرے کے عین وسط یعنی $(0, 0, 0)$ پر یوں $\frac{\rho_L}{2\epsilon_0}$ وولٹ کا برقی دباؤ پایا جائے گا۔

1091

1092

مساوات 4.2 میں B کو لا محدود فاصلے پر لیتے ہوئے کسی بھی دو نقطوں A اور C کے حتمی برقی دباؤ یوں لکھے جاسکتے ہیں۔

$$V_A = - \int_{\infty}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$V_C = - \int_{\infty}^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

شکل 4.7-ب میں یہ نقطے دکھائے گئے ہیں۔ اب اگر V_A دس وولٹ جبکہ V_C تین وولٹ کے برابر ہو تب C کے حوالے سے A پر سات وولٹ ہوں گے یعنی $V_{AC} = 7V$ ہو گا۔ اسی طرح A کے حوالے سے C پر منفی سات وولٹ ہوں گے یعنی $V_{CA} = -7V$ ہو گا۔ یوں اگر کسی بھی راستے C سے A جایا جائے تو برقی دباؤ میں سات وولٹ کا اضافہ ہو گا جبکہ کسی بھی راستے واپس C لوٹنے سے برقی دباؤ میں سات وولٹ ہی کی کمی رونما ہوگی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے سے شروع ہو کر بند دائرے پر چلتے ہوئے واپس اسی نقطے تک پہنچنے سے برقی دباؤ میں کل کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہوگی۔ اس حقیقت کو یوں لکھا جاتا ہے

$$V_{AC} + V_{CA} = - \int_C^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} - \int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

جہاں پہلے C سے A اور پھر A سے واپس C پہنچا گیا۔ بند دائرے کے مکمل کو دو ٹکڑوں میں لکھنے کی بجائے اسے بند مکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے اسی مساوات کو یوں بہتر لکھا جاسکتا ہے

$$(4.28) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

1093

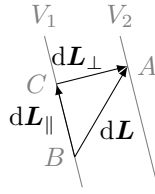
جہاں مکمل کے نشان پر گول دائرہ بند مکمل کو ظاہر کرتا ہے۔

مساوات 4.28 کہتا ہے کہ کسی بھی طرح پیدا کئے گئے برقی میدان میں بند دائرے پر پورا پکڑ لگانے کے لئے صفر توانائی درکار ہوتی ہے۔ حقیقت میں یہ مساوات صرف وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے برقی میدان یعنی **ساکن برقی میدان**¹⁴ کے لئے درست ہے۔ اس کتاب میں وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر بعد میں غور کیا جائے گا۔ ایسے میدان جس میں بند دائرے پر چلنے کی خاطر کوئی توانائی درکار نہ ہو کو **بقائے میدان**¹⁵ کہتے ہیں۔ ساکن تجاذبی میدان بھی بقائی میدان¹⁶ ہے۔ یوں تجاذبی میدان میں پہاڑی کی چوٹی تک پہنچنے سے مخفی توانائی میں جتنا اضافہ پیدا ہو، چوٹی سے واپس اترنے پر مخفی توانائی میں اتنی ہی کمی رونما ہوگی اور یوں آپ کی اہمائی اور اختتامی مخفی توانائی عین برابر ہوں گے۔

1098

static electric field¹⁴
conservative field¹⁵

¹⁶ یہ جملہ لکھنے کے ٹھیک ایک دن بعد نرگس مولود اور ان کے ساتھیوں نے تجاذبی موجیں دریافت کیں۔ اس دریافت سے پہلے کسی بھی تجاذبی میدان کو بقائی میدان تصور کیا جاتا تھا۔ آج سے ہم ساکن تجاذبی میدان کو ہی بقائی میدان کہیں گے۔



شکل 4.8: برقی دباؤ کی ڈھلوان برقی میدان ہے۔

4.5 برقی دباؤ کی ڈھلوان

1099

شکل 4.8 میں دو انتہائی قریب ہم قوہ سطحیں دکھائی گئی ہیں جن پر V_1 اور V_2 برقی دباؤ پایا جاتا ہے۔ ہم قوہ سطح V_1 پر کسی نقطہ B سے ہم قوہ سطح V_2 پر کسی نقطہ A تک کا سمتی فاصلہ dL لیتے ہوئے B سے A تک حرکت کرنے سے برقی دباؤ میں $-E \cdot dL$ تبدیلی رونما ہوگی جہاں برقی میدان کو E لکھا گیا ہے۔

$$(4.29) \quad dV = V_2 - V_1 = -E \cdot dL$$

چھوٹی لمبائی dL پر برقی میدان کو غیر تغیر پذیر تصور کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ دو نقطوں کے مابین برقی دباؤ کا ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے پہنچنے کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہذا ہم B سے C اور پھر A بھی جاسکتے تھے۔ B سے C تک فاصلے کو dL_{\parallel} جبکہ C سے A تک فاصلے کو dL_{\perp} لکھتے ہوئے

$$(4.30) \quad dV = -E \cdot (dL_{\parallel} + dL_{\perp})$$

لکھا جاسکتا ہے۔ E کو ہم قوہ سطح کے متوازی اور اس کے عمودی اجزاء کی صورت میں یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(4.31) \quad E = E_{\parallel} + E_{\perp}$$

جس سے

$$(4.32) \quad dV = -(E_{\parallel} + E_{\perp}) \cdot (dL_{\parallel} + dL_{\perp}) = -E_{\parallel} dL_{\parallel} - E_{\perp} dL_{\perp}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں E_{\parallel} اور dL_{\parallel} کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $E_{\parallel} \cdot dL_{\parallel} = E_{\parallel} dL_{\parallel}$ لکھا گیا ہے جبکہ E_{\perp} اور dL_{\perp} کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $E_{\perp} \cdot dL_{\perp} = 0$ ہے۔ اس مساوات کا پہلا جزو $-E_{\parallel} dL_{\parallel}$ نقطہ B اور C کے درمیان برقی دباؤ دیتا ہے۔ ہم قوہ سطح پر ہر جگہ برابر برقی دباؤ پایا جاتا ہے لہذا B اور C کے درمیان کسی قسم کا برقی دباؤ نہیں پایا جاتا یعنی $-E_{\parallel} dL_{\parallel}$ صفر کے برابر ہے۔ اب چونکہ dL_{\parallel} صفر کے برابر نہیں ہے لہذا کسی بھی ہم قوہ سطح پر

$$(4.33) \quad E_{\parallel} = 0$$

ہو گا اور سطح پر صرف اور صرف عمودی برقی میدان پایا جائے گا یعنی

$$(4.34) \quad E = E_{\perp}$$

یوں

$$(4.35) \quad dV = -E_{\perp} dL_{\perp}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ ہم قوہ سطح پر صرف عمودی میدان پایا جاتا ہے، مندرجہ بالا مساوات میں E_{\perp} کی جگہ E لکھتے ہیں۔

$$(4.36) \quad dV = -E dL_{\perp}$$

اس مساوات سے

$$(4.37) \quad E = -\frac{dV}{dL_{\perp}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ E درحقیقت V کے ڈھلوان کے برابر مگر الٹ سمت میں ہے۔ یوں

$$(4.38) \quad E = -\frac{dV}{dL_{\perp}}$$

1100

لکھا جاسکتا ہے جہاں a_N ہم قوتہ سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

کسی نقطہ کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے کسی دوسرے نقطے کی برقی دباؤ کو حتمی برقی دباؤ تصور کیا جاتا ہے جو نقطے کے مقام پر منحصر ہوتا ہے لہذا اسے $V(x, y, z)$ لکھا جاسکتا ہے جہاں برقی دباؤ کے آزاد متغیرات x, y اور z ہیں۔ کسی بھی قابو متغیرہ کی طرح $V(x, y, z)$ کا تفرق

$$(4.39) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

لکھا جاسکتا ہے۔ کارتیسی محدود میں کسی بھی برقی دباؤ کو

$$(4.40) \quad \mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y + E_z \mathbf{a}_z$$

اور چھوٹی لمبائی کو

$$(4.41) \quad d\mathbf{L} = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں آپ صفحہ 5 پر دئے مساوات 1.3 پر دوبارہ نظر ڈال سکتے ہیں۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.42) \quad \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

حاصل ہوتا ہے۔ y اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $dy = 0$ اور $dz = 0$ لیتے ہوئے) x تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $E_x dx$ اور $\frac{\partial V}{\partial x} dx$ تبدیل ہوتے ہیں لہذا یہ لازم ہے کہ یہ دونوں اجزاء برابر ہوں یعنی $-E_x dx = \frac{\partial V}{\partial x} dx$ جس سے $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\frac{\partial V}{\partial x} dx$ اور $-E_x dx$ برابر نہ ہوں تب مساوات کے ایک طرف تبدیلی دوسرے طرف کے تبدیلی کے برابر نہیں ہوگی اور یوں مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہیں گے۔ اسی طرح صرف y اور صرف z تبدیل کئے جاسکتا ہیں۔ یوں

$$(4.43) \quad \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جسے مساوات 4.40 میں پُر کرتے

$$(4.44) \quad \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

اگر ہم

$$(4.45) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad \text{کارتیسی محدود میں ڈھلوان کی مساوات}$$

لکھیں جہاں کسی بھی مقداری f کے لئے ∇f سے مراد $\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{a}_z$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$(4.46) \quad E = -\nabla V$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ∇V کو برقی دباؤ کی ڈھلوان¹⁷ پڑھا جاتا ہے۔ مساوات 4.45 کا بایاں ہاتھ ڈھلوان کی علامت جبکہ اس کا دایاں ہاتھ ڈھلوان کے عمل کو ظاہر کرتا ہے۔ اگرچہ ہم نے ڈھلوان کا عمل برقی دباؤ اور برقی میدان کے لئے حاصل کیا، حقیقت میں یہ عمل سائنس کے دیگر متغیرات کے لئے بھی درست ثابت ہوتا ہے۔ اس کی مقبولیت اسی حقیقت کی وجہ سے ہے کہ یہ جگہ جگہ پیش آتا ہے۔ ڈھلوان کا عمل مقداری پر کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے۔ صفحہ 82 پر مساوات 3.32 پھیلاؤ کی تعریف بیان کرتا ہے جہاں پھیلاؤ کا عمل سمتیہ پر کرتے ہوئے مقداری¹⁸ حاصل کی جاتی ہے۔ پھیلاؤ کے اس مساوات کو یہاں موازنے کے لئے دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(4.47) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

1102

1103

مشق 4.3: تقابل $f(x, y, z) = 3 + z^2 e^y \sin x$ کا ڈھلوان حاصل کریں۔

1104

جواب: $z^2 e^y \cos x \mathbf{a}_x + z^2 e^y \sin x \mathbf{a}_y + 2ze^y \sin x \mathbf{a}_z$

1105

1106

مثال 4.4: نقطہ $N_1(x_1, y_1, z_1)$ سے نقطہ $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کا سمتی فاصلہ $R_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ہے۔ نقطہ N_2 پر $\frac{1}{R_{21}}$ کی ڈھلوان حاصل کریں۔

1108

حل: نقطہ N_2 پر ڈھلوان حاصل کرتے وقت x_2, y_2 اور z_2 کو متغیرات تصور کیا جاتا ہے جبکہ x_1, y_1 اور z_1 کو اٹل قیمتیں تصور کیا جاتا ہے۔ یوں ڈھلوان کی تعریف

$$\nabla_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y_2} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z_2} \mathbf{a}_z$$

لکھی جائے گی جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 یاد دہانی کرتا ہے کہ نقطہ N_2 کے متغیرات ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے استعمال کئے جائیں گے۔ ڈھلوان کا پہلا جزو

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{R_{21}} &= \frac{\partial}{\partial x_2} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{-\frac{3}{2}} [2(x_2 - x_1)] \\ &= \frac{-(x_2 - x_1)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

¹⁷ gradient¹⁸ طلباء و طالبات عموماً ڈھلوان کے حاصل جواب کے اکائی سمتیات کو غائب کرتے ہوئے انہیں پھیلاؤ کے ساتھ منسلک کر لیتے ہیں۔ ایسا کرنے سے گریز کریں۔

یعنی

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{R_{21}} = \frac{-(x_2 - x_1)}{R_{21}^3}$$

حاصل ہوتا ہے۔ بقایا دو اجزاء بھی بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے

$$\nabla^2 \frac{1}{R_{21}} = \frac{-(x_2 - x_1)\mathbf{a}_x - (y_2 - y_1)\mathbf{a}_y - (z_2 - z_1)\mathbf{a}_z}{R_{21}^3}$$

یعنی

$$(4.48) \quad \nabla^2 \frac{1}{R_{21}} = -\frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}^3} = -\frac{\mathbf{a}_{R21}}{R_{21}^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

1109

1110

1111

مشق 4.4: مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ N_2 پر ڈھلوان حاصل کی گئی۔ اب آپ نقطہ N_1 پر $\frac{1}{R_{21}}$ کی ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ

$$(4.49) \quad \nabla^2 \frac{1}{R_{21}} = \frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}^3}$$

کے برابر ہے۔ یوں

$$(4.50) \quad \nabla^2 \frac{1}{R_{21}} = -\nabla^2 \frac{1}{R_{21}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

1112

1113

4.5.1 نلکی محدود میں ڈھلوان

1114

نلکی محدود میں برقی دباؤ کے آزاد متغیرات نلکی محدود کے متغیرات ہوں گے اور یوں برقی دباؤ $V(\rho, \phi, z)$ لکھا جائے گا۔ مساوات 4.39، مساوات 4.40 اور مساوات 4.41 کو نلکی محدود میں لکھ سکتے ہیں

1116

$$(4.51) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$(4.52) \quad \mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho + E_\phi \mathbf{a}_\phi + E_z \mathbf{a}_z$$

$$(4.53) \quad dL = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z$$

جہاں چھوٹی لمبائی dL کو صفحہ 27 پر مساوات 1.44 کی مدد سے لکھا گیا ہے۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.54) \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial V}{\partial z} dz = - \left(E_\rho d\rho + E_\phi d\phi + E_z dz \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ ϕ اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $d\phi = 0$ اور $dz = 0$ لیتے ہوئے) ρ تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho$ اور $-E_\rho d\rho$ تبدیل ہوتے ہیں۔ اگر یہ اجزاء ہر صورت برابر رہیں صرف اور صرف اسی صورت مندرجہ بالا مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہذا $\frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho = -E_\rho d\rho$ ہوگا جس سے $E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح باری باری ϕ اور z تبدیل کرتے ہوئے

$$E_\phi d\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi$$

$$E_z dz = -\frac{\partial V}{\partial z} dz$$

لکھے جاسکتے ہیں جس سے E_ϕ اور E_z کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$(4.55) \quad \begin{aligned} E_\rho &= -\frac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_\phi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

انہیں مساوات 4.52 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.56) \quad \mathbf{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو مساوات 4.46 کی شکل میں لکھتے ہوئے نلکی محدود میں ڈھلوان کی مساوات

$$(4.57) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad \text{نلکی محدود میں ڈھلوان کی مساوات}$$

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 4.45 اور مساوات 4.57 کا موازنہ کریں۔ کارتیسی محدود کی مساوات نسبتاً آسان ہے۔

1117

1118

4.5.2 کروی محدود میں ڈھلوان

صفحہ 33 پر مساوات 1.64 کروی محدود میں چھوٹی لمبائی dL کی مساوات ہے۔ کروی محدود میں کسی بھی نقطے کے برقی دباؤ کو $V(r, \theta, \phi)$ لکھا جاسکتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کی طرح \mathbf{E} کو تین عمودی حصوں میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں ہم مساوات 4.39، مساوات 4.40 اور مساوات 4.41 کو کروی محدود میں یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$(4.58) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi$$

$$(4.59) \quad \mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r + E_\theta \mathbf{a}_\theta + E_\phi \mathbf{a}_\phi$$

$$(4.60) \quad d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$$

1119

ان تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.61) \quad \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi = - \left(E_r dr + E_\theta r d\theta + E_\phi r \sin \theta d\phi \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب اگر ہم صرف r کو تبدیل کریں تب $d\theta = 0$ اور $d\phi = 0$ ہوں گے لہذا مندرجہ بالا مساوات کے بائیں دائیں بازو کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial r} dr$ اور $-E_r dr$ تبدیل ہوں گے۔ یہ اجزاء بالکل برابر ہونے کی صورت میں ہی مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہذا ہم $\frac{\partial V}{\partial r} dr = -E_r dr$ لکھ سکتے ہیں جس سے $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح باری باری اور تبدیل کرتے ہوئے مساوات کے دونوں بازو کے اجزاء برابر لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta &= -E_\theta r d\theta \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi &= -E_\phi r \sin \theta d\phi \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے E_θ اور E_ϕ کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{aligned}$$

ان قیمتوں کو مساوات 4.59 میں پُر کرتے ہوئے

$$(4.62) \quad \mathbf{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \right)$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے کروی محدود ڈھلوان کی مساوات یوں لکھی جاسکتی ہے۔

$$(4.63) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \quad \text{کروی محدود میں ڈھلوان کی مساوات}$$

1120

مشق 4.5: صفحہ 84 پر حصہ 3.10 میں پھیلاؤ کی عمومی مساوات کا حصول دکھایا گیا جہاں عمومی محدود کے متغیرات (u, v, w) اور اکائی سمتیات $(\mathbf{a}_u, \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_w)$ لئے گئے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے ڈھلوان کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

1122

جواب:

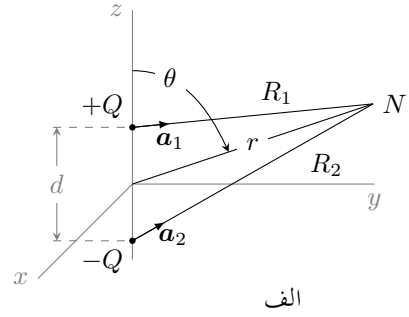
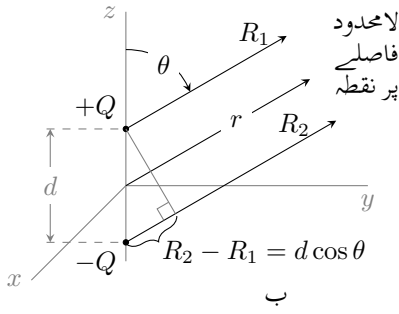
$$\nabla = \frac{1}{K_1} \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{a}_u + \frac{1}{K_2} \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{a}_v + \frac{1}{K_3} \frac{\partial}{\partial w} \mathbf{a}_w \quad \text{ڈھلوان کی عمومی مساوات}$$

1123

1124

مثال 4.5: صفحہ 4.15 پر مساوات 4.15 نقطہ چارج کا برقی دباؤ دیتا ہے۔ مساوات 4.62 کے استعمال سے کروی محدود میں \mathbf{E} کی مساوات حاصل کریں۔

1125



شکل 4.9: جفت قطب

حل: برقی دباؤ $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ کے محدود کے رداس پر منحصر ہے جبکہ θ اور ϕ کا اس میں کوئی کردار نہیں لہذا مساوات 4.62 میں $\frac{\partial V}{\partial \phi}$ اور $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ صفر کے برابر ہوں گے۔ اس طرح $\frac{\partial V}{\partial r}$ لیتے ہوئے $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$ حاصل ہوتا ہے۔

1127

1128

یہاں بتلاتا چلوں کہ حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباؤ معلوم ہوتی ہے جس سے برقی میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔ اس کی مثال بجلی کی دو تاریں ہوسکتی ہیں جن کے درمیان 220 V پایا جاتا ہے اور جن کے درمیان آپ برقی میدان جاننا چاہتے ہوں۔

1130

1131

4.6 جفت قطب

شکل 4.9-الف میں محدود کے مرکز سے $\frac{d}{2}$ فاصلے پہ z محدود پر ایک جانب $+Q$ اور دوسری جانب $-Q$ نقطہ چارج دکھائے گئے ہیں۔ یوں برابر مقدار مگر الٹ علامت کے نقطہ چارجوں کے درمیان d فاصلہ ہے۔ ایسی جوڑی چارجوں کو **جفت قطب**¹⁹ کہا جاتا ہے۔ ہمیں جفت قطب سے دور نقطہ N پر برقی میدان اور برقی دباؤ کی قیمتیں درکار ہیں۔ کسی بھی دور نقطے سے یہ دونوں چارج تقریباً مرکز پر دکھائی دیتے ہیں۔ دور نقطے سے ایسا نقطہ مراد ہے جہاں مرکز سے نقطے تک کا فاصلہ r جفت قطب چارجوں کے درمیان فاصلہ d سے بہت زیادہ ہو یعنی جب $d \gg r$ ہو۔ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ r یا θ تبدیل کرنے سے برقی میدان تبدیل ہوگا جبکہ ϕ تبدیل کرنے سے ایسا نہیں ہوگا۔ شکل 4.9-الف میں R_1 اور R_2 دونوں کی جانب جھک کر N پر آ ملتے ہیں۔ نقطہ N کو جتنا دور لے جایا جائے اتنی ہی R_1 اور R_2 دونوں r کے متوازی صورت اختیار کرتے ہیں حتیٰ کہ آخر کار یہ شکل 4.9-ب کی طرح نظر آتے ہیں۔ آئیں اس شکل کی مدد سے دور نقطے پر برقی دباؤ اور برقی میدان حاصل کریں۔

1137

شکل 4.9-ب میں R_1 اور R_2 تینوں z محدود کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ چارج $+Q$ سے R_2 پر عمود بناتے ہوئے

$$R_2 - R_1 = d \cos \theta$$

$$R_1 = r - \frac{d}{2} \cos \theta \quad (4.64)$$

$$R_2 = r + \frac{d}{2} \cos \theta$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 4.9-الف میں N پر برقی دباؤ V مساوات 4.22 کی مدد سے

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) \quad (4.65)$$

لکھی جاسکتی ہے۔ مساوات 4.64 کی مدد سے اسے

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{\left(r - \frac{d}{2} \cos \theta\right)\left(r + \frac{d}{2} \cos \theta\right)} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{\left(r^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta\right)} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{d \cos \theta}{\left(1 - \frac{d^2}{4r^2} \cos^2 \theta\right)} \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ نیچے قوسین میں $\cos \theta \leq 1$ اور $d \gg r$ کی وجہ سے $\frac{d^2}{4r^2} \cos^2 \theta \gg 1$ ہوگا اور یوں $\frac{d^2}{4r^2} \cos^2 \theta$ کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(4.66) \quad V = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.62 کو استعمال کرتے ہوئے اس مساوات سے برقی میدان لکھتے ہیں۔

$$(4.67) \quad \mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

ہم پہلے برقی دباؤ اور پھر ڈھلوان کی مدد سے برقی میدان حاصل کرنے کے بجائے پہلے برقی میدان اور پھر مکمل استعمال کرتے ہوئے برقی دباؤ حاصل کر سکتے ہیں البتہ ایسا کرنا آسان ثابت نہیں ہوتا۔ شوق رکھنے والوں کے لئے مثال 4.6 میں اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے دو نقطے پر جفت قطب سے پیدا میلان اور برقی دباؤ حاصل کئے گئے ہیں۔

1140

جفت قطب کا چارج Q انضرب چارجوں کے درمیان سمتی فاصلہ d کو معیار اثر جفت قطب²⁰ کہتے ہیں اور اسے p سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں

$$(4.68) \quad p = Qd$$

کے برابر ہے جہاں سمتی فاصلہ منفی چارج سے مثبت چارج کی سمت میں ہوتا ہے لہذا شکل 4.9 میں $d = d \mathbf{a}_z$ ہے۔ اس طرح چونکہ $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \cos \theta$ برابر ہے لہذا یوں ہم مساوات 4.66 کو

$$(4.69) \quad V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

لکھ سکتے ہیں۔ اسی مساوات کو مزید یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$(4.70) \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

جہاں r اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی دباؤ حاصل کیا جا رہا ہو جبکہ r' جفت قطب کے مرکز کی نشاندہی کرتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی محدود نظام سے آزاد مساوات ہے۔

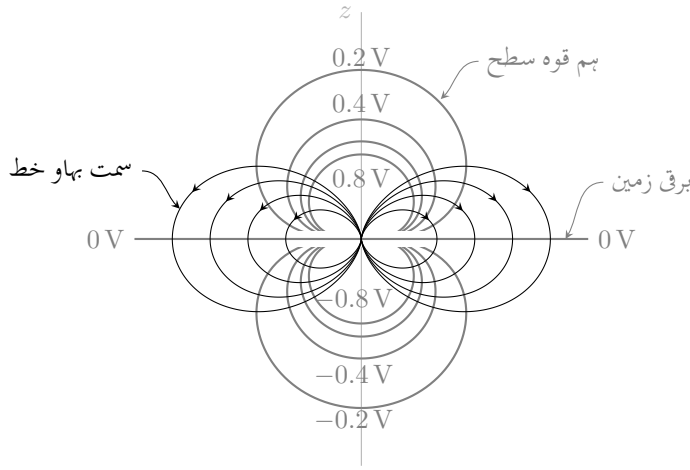
1142

مساوات 4.66 کے تحت r بڑھانے سے برقی دباؤ r^2 گنا کم ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ اکیلے چارج کا برقی دباؤ ایسی صورت میں r گنا کم ہوتا ہے۔ ہمیں تعجب نہیں ہونا چاہیے چونکہ دور سے جفت قطب کے دو چارج نہایت قریب قریب نظر آتے ہیں جس سے مثبت چارج کا اثر منفی چارج کا اثر تقریباً ختم کرتا ہے۔ یہی حقیقت مساوات 4.67 میں بھی نظر آتا ہے جہاں r بڑھانے سے E کی قیمت r^3 گنا کم ہوتی ہے۔

1145

جب تک Q ضرب d کی قیمت تبدیل نہ ہو اس وقت تک دور کسی بھی نقطے پر جفت قطب کے اثرات میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔ یوں Q کو کم یا زیادہ کر سکتے ہوئے d کو یوں تبدیل کیا جائے کہ Qd تبدیل نہ ہو تو جفت قطب سے دور نقطے پر جفت قطب کے اثرات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جائے گی۔ اب اگر ہم Qd کی قیمت محدود رکھتے ہوئے d کو اتنا کم کر دیں کہ اسے صفر تصور کیا جاسکے اور ساتھ ہی ساتھ Q کو اتنا بڑھا دیں کہ اسے لامحدود تصور کیا جاسکے تو ایسی صورت میں ہمیں **نقطہ جفت قطب** حاصل ہوگا۔

1149



شکل 4.10: جفت قطب کے ہم قوتہ اور سمت بہاؤ خط۔

1150

4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاؤ خط

ہم پہلے صفحہ 63 پر حصہ 2.7 میں **سمت بہاؤ خط**²¹ پر غور کر چکے ہیں۔ انہیں جفت قطب کے سمت بہاؤ خط کھینچنا دیکھیں۔ برقی دباؤ کے سمت بہاؤ خط مساوات 4.66 کی مدد سے کھینچے جاسکتے ہیں۔ اس مساوات میں $\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}$ مستقل ہے جسے ایک کے برابر لیتے ہوئے $V = \frac{\cos\theta}{r^2}$ حاصل ہوتا ہے۔ مختلف برقی دباؤ کی قیمتوں کے لئے اسے کھینچ کر برقی دباؤ کے سمت بہاؤ خط حاصل کئے جاتے ہیں۔ شکل 4.10 میں $V = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ کے لئے اس مساوات کے خط دکھائے گئے ہیں۔ مساوات 4.65 کے تحت دونوں چارج سے برابر فاصلہ پر $V = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں $z = 0$ لا محدود سطح پر برقی دباؤ صفر ہو گا اور یہ بطور برقی زمین کردار ادا کرے گی۔

جفت قطب کے میدان کے سمت بہاؤ خط مساوات 4.67 کی مدد سے کھینچے جاتے ہیں۔ اس مساوات کا پہلا جزو کسی بھی نقطے پر a_r سمت میں میدان E_r دیتا ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو ای نقطے پر a_θ سمت میں میدان E_θ دیتا ہے۔ اس طرح اس نقطے پر ہم

$$\frac{E_r}{E_\theta} = \frac{dr}{r d\theta} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta}$$

یا

$$\frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

لکھ کر مکمل لیتے ہوئے

$$\ln r = 2 \ln \sin \theta + \ln M$$

یا

$$(4.71) \quad r = M \sin^2 \theta$$

حاصل کرتے ہیں جہاں $\ln M$ مکمل کا مستقل ہے۔ یہ مساوات جفت قطب کے میدان کے سمت بہاؤ خط دیتا ہے جنہیں شکل 4.10 میں 1, 1.5, 2, 2.5 میں $M_{\text{نقص}}$ کے لئے کھینچا گیا ہے۔ برقی زمین پر برقی میدان عمودی ہے۔

1156

1157

مثال 4.6: شکل 4.9-الف میں دکھائے گئے جفت قطب سے دور کسی نقطے N پر پہلے برقی میدان اور پھر اس برقی میدان کو استعمال کرتے ہوئے برقی دباؤ حاصل کریں۔

صفحہ 24 پر مثال 1.8 میں $\mathbf{R}_1 = R_1 \mathbf{a}_1$ اور $\mathbf{R}_2 = R_2 \mathbf{a}_2$ سمتیوں کو کروئی نظام میں لکھنا دکھایا گیا ہے۔ انہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\mathbf{R}_1 = \left(r - \frac{d}{2} \cos \theta\right) \mathbf{a}_r + \frac{d}{2} \sin \theta \mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{R}_2 = \left(r + \frac{d}{2} \cos \theta\right) \mathbf{a}_r - \frac{d}{2} \sin \theta \mathbf{a}_\theta$$

جس سے $R_1 = |\mathbf{R}_1| = \sqrt{\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_1}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{\left(r - \frac{d}{2} \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{d}{2} \sin \theta\right)^2} \\ &= r \sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{r^2}} \\ &\approx r \sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos \theta} \quad (d \ll r) \end{aligned} \quad (4.72)$$

آخری قدم پر $r \ll d$ کی بنا پر $\frac{d^2}{r^2}$ کو رد کیا گیا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$(a + b)^n = a^n + \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \dots$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $a = 1$ اور $b = -\frac{d}{r} \cos \theta$ کے برابر ہوں تب مساوات 4.72 میں دئے R_1 کی طاقت تین کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$R_1^3 = r^3 \left(1 - \frac{d}{r} \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}} = r^3 \left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta + \dots\right)$$

اس مساوات کے پہلے دو جزو دکھائے گئے ہیں۔ اس کے تیسرے جزو میں $\frac{d^3}{r^3}$ چوتھے جزو میں $\frac{d^4}{r^4}$ پائے جاتے ہیں لہذا پہلے دو اجزاء کے علاوہ تمام اجزاء کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$R_1^3 = r^3 \left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta\right) \quad (4.73)$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔ یہی عمل R_2^3 کے لئے کرنے سے

$$R_2^3 = r^3 \left(1 + \frac{3d}{2r} \cos \theta\right) \quad (4.74)$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 44 پر مساوات 2.18 کو استعمال کرتے ہوئے دونوں چارجوں سے کل برقی میدان ان کے علیحدہ علیحدہ میدان کے مجموعہ لے کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\left[\left(r - \frac{d}{2} \cos \theta\right) \mathbf{a}_r + \frac{d}{2} \sin \theta \mathbf{a}_\theta\right]}{r^3 \left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)} - \frac{\left[\left(r + \frac{d}{2} \cos \theta\right) \mathbf{a}_r - \frac{d}{2} \sin \theta \mathbf{a}_\theta\right]}{r^3 \left(1 + \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)} \right) \\ &= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta}{\left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \theta\right) \left(1 + \frac{3d}{2r} \cos \theta\right)} \right) \end{aligned}$$

اس مساوات میں کسر کے نچلے حصے کو ضرب دیتے ہوئے $(1 - \frac{9d^2}{4r^2} \cos^2 \theta \approx 1)$ لکھا جاسکتا ہے جہاں $\frac{d^2}{r^2}$ والے جزو کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ یوں

$$(4.75) \quad E = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.67 ہی ہے۔

آئیں اب مساوات 4.75 سے نقطہ $N_0(r, \theta, \phi)$ پر برقی دباؤ حاصل کریں۔ ہم برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر رکھتے ہیں۔ لامحدود فاصلے پر نقطہ $N_3(\infty, \theta', \phi')$ سے کردی محدود کے مرکز کی جانب سیدھا چلتے ہوئے ہم پہلے $N_2(r, \theta', \phi')$ تک پہنچتے ہیں۔ اس کے بعد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے ہم $N_1(r, \theta, \phi')$ پہنچیں گے اور آخر کار r اور θ تبدیل کئے بغیر $N_0(r, \theta, \phi)$ پہنچیں گے۔

صفحہ 33 پر مساوات 1.64 کردی محدود میں چھوٹی لمبائی dL کی مساوات ہے۔ اسے یہاں دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$(4.76) \quad dL = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$$

N_2 سے N_3 تک چلتے ہوئے $d\phi = 0$ اور $d\theta = 0$ ہوں گے لہذا N_3 کے حوالے سے N_2 پر برقی دباؤ

$$\begin{aligned} V_{23} &= - \int_{N_3}^{N_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_3}^{N_2} \frac{(2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \cdot d\mathbf{a}_r}{r^3} \\ &= - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_3}^{N_2} \frac{2 \cos \theta dr}{r^3} = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Big|_{\infty, \theta', \phi'}^{r, \theta', \phi'} = \frac{Qd \cos \theta'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب N_2 سے N_1 چلتے ہیں۔ ہم اس راستے $dr = 0$ اور $d\phi = 0$ رکھتے ہیں لہذا

$$\begin{aligned} V_{12} &= - \int_{N_2}^{N_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_2}^{N_1} \frac{(2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \cdot r d\theta \mathbf{a}_\theta}{r^3} \\ &= - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_2}^{N_1} \frac{\sin \theta d\theta}{r^2} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \Big|_{r, \theta', \phi'}^{r, \theta, \phi'} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\cos \theta - \cos \theta')}{r^2} \end{aligned}$$

ہوگا۔ اب N_1 سے N چلتے ہیں۔ اس راستے $dr = 0$ اور $d\theta = 0$ رکھے گئے ہیں لہذا

$$V_{01} = - \int_{N_1}^{N_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_1}^{N_0} \frac{(2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \cdot r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi}{r^3} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$ اور $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$ کی بدولت مکمل صفر کے برابر لیا گیا ہے۔ یوں V_{23}, V_{12}, V_{01} جمع کرتے ہوئے N_3 سے N_0 تک کا برقی دباؤ

$$(4.77) \quad V_0 = V_{03} = V_{23} + V_{12} + V_{01} = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.66 ہی ہے۔

مندرجہ بالا مثال سے آپ نے دیکھ لیا ہوگا کہ پہلے برقی میدان اور بعد میں برقی دباؤ حاصل کرنا زیادہ مشکل کام ہے۔ برقی دباؤ کی افادیت اس مثال سے صاف ظاہر ہے۔ حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباؤ ہی معلوم ہوتی ہے جیسے دو متوازی دھاتی چادروں کے درمیان برقی دباؤ یا گھریلو صارفین کے ہاں دو برقی تاروں کے درمیان برقی دباؤ۔ ہم ایسی برقی دباؤ جانتے ہوئے اس سے مختلف متغیرات حاصل کرتے ہیں۔

4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

برقی دباؤ پر غور کرتے ہوئے ہم نے دیکھا کہ برقی میدان میں لامحدود فاصلے سے چارج کو کسی نقطہ منتقل کرنے کے لئے توانائی درکار ہوتی ہے۔ یہ توانائی چارج کو حرکت دینے والا محرک مہیا کرتا ہے۔ چونکہ توانائی اٹل ہے لہذا یہ توانائی بصورت مخفی توانائی چارج میں منتقل ہو جاتی ہے۔ جب تک بیر ونی قوت چارج کو اس نقطہ پر روکے رکھے یہ توانائی چارج میں بطور مخفی توانائی رہے گی۔ اگر چارج کو بیر ونی طاقت نہ روکے تو مخفی توانائی **حرکی** ²²توانائی میں تبدیل ہوتے ہوئے چارج کو حرکت دے گی۔ یوں اب چارج از خود کام کرنے کے قابل ہو گا۔

آئیں دیکھیں کہ اگر اسی طرح مختلف چارج کو لامحدود فاصلے سے مختلف مقامات پر لا کر وہیں روکے رکھا جائے تو اس پورے نظام کی کل مخفی توانائی کتنی ہو گی۔ یہ توانائی ان چارجوں کو اپنی اپنی جگہوں پر منتقل کرنے کے لئے درکار بیر ونی توانائی کے مجموعے سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

شروع خالی خلاء سے کرتے ہیں۔ خالی خلاء میں چونکہ کوئی چارج نہیں پایا جاتا لہذا اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہو گا۔ یوں پہلے چارج Q_1 کو لامحدود فاصلے سے نقطہ N_1 منتقل کرنے کے لئے صفر توانائی درکار ہو گی۔ اب چونکہ خلاء میں Q_1 موجود ہے لہذا دوسرے چارج Q_2 کو نقطہ N_2 منتقل کرنے کے لئے $Q_2 V_{2,1}$ توانائی درکار ہو گی جہاں N_2 پہلے چارج کی وجہ سے پیدا ہونے والی دباؤ کو $V_{2,1}$ لکھا گیا ہے۔ $V_{2,1}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلا عدد منتقل کئے جانے والے چارج کی نشاندہی کرتا ہے جبکہ پہلا عدد منتقلی کے نقطہ پر برقی دباؤ پیدا کرنے والے چارج کی نشاندہی کرتا ہے۔ یوں

$$Q_2 \text{ چارج} = Q_2 V_{2,1} \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی}$$

لکھا جائے گا۔ اب خلاء میں دو عدد چارج پائے جاتے ہیں لہذا نقطہ N_3 پر Q_1 سے پیدا $V_{3,1}$ اور Q_2 سے پیدا $V_{3,2}$ برقی دباؤ ہوں گے۔ یوں N_3 پر کل $V_{3,1} + V_{3,2}$ برقی دباؤ ہو گا لہذا

$$Q_3 \text{ چارج} = Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی}$$

اور اسی طرح

$$Q_4 \text{ چارج} = Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3}$$

ہو گا۔ یہی طریقہ کار مزید چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی دریافت کرنے کے لئے استعمال کیا جائے گا۔ کل مخفی توانائی W تمام چارجوں کو منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے برابر ہو گا جو مندرجہ بالا طرز کے تمام جوابات کا مجموعہ ہو گا یعنی

$$(4.78) \quad W = Q_2 V_{2,1} + Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} + Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} + \dots \\ = Q_2 (V_{2,1}) + Q_3 (V_{3,1} + V_{3,2}) + Q_4 (V_{4,1} + V_{4,2} + V_{4,3}) + \dots$$

مندرجہ بالا مساوات میں کسی رکن مثلاً $Q_4 V_{4,2}$ کو دیکھیں۔ اسے یوں

$$Q_4 V_{4,2} = Q_4 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{42}} = Q_2 \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 R_{24}} = Q_2 V_{2,4}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں Q_2 اور Q_4 کے درمیان مقداری فاصلے کو R_{42} یا R_{24} لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح $Q_4 V_{4,2}$ کو $Q_2 V_{2,4}$ لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح مساوات 4.78 کے ہر جزو کو تبدیل کرتے ہوئے اسے

$$(4.79) \quad W = Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} + Q_3 V_{3,4} + \dots \\ = Q_1 (V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots) + Q_2 (V_{2,3} + V_{2,4} + \dots) + Q_3 (V_{3,4} + \dots)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 4.78 اور مساوات 4.79 کو جمع کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} 2W = & Q_1(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots) \\ & + Q_2(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \dots) \\ & + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \dots) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (4.80)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے پہلے قوسین میں $V_{1,2}$ نقطہ N_1 پر Q_2 کا پیدا کردہ برقی دباؤ ہے۔ اسی طرح $V_{1,3}$ نقطہ N_1 پر Q_3 کا پیدا کردہ برقی دباؤ ہے جبکہ $V_{1,4}$ یہیں پر Q_4 کا پیدا کردہ برقی دباؤ ہے۔ یوں قوسین میں بند قیمت نقطہ N_1 پر تمام چارجوں کا مجموعی برقی دباؤ V_1 ہے۔ یاد رہے کہ N_1 پر برقی دباؤ حاصل کرتے وقت یہیں پر پائے جاتے چارج Q_1 کو شامل نہیں کیا جاتا۔ یوں

$$V_1 = V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots$$

کے برابر ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا مساوات سے

$$W = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m V_m \quad (4.81)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots \\ V_2 &= V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \dots \\ V_3 &= V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \dots \end{aligned}$$

لکھے گئے ہیں۔

ایسی حجم جس میں حجمی چارج کثافت ρ_h پائی جائے کی کل مخفی توانائی حاصل کرنے کی غرض سے چھوٹے چھوٹے حجم dh میں چارج $dQ = \rho_h dh$ کو نقطہ چارج تصور کرتے ہوئے مساوات 4.81 کا استعمال کیا جاسکتا ہے۔ ایسی صورت میں یہ مساوات مکمل کی شکل اختیار کر لے گی یعنی

$$W = \frac{1}{2} \int_h \rho_h V dh \quad (4.82)$$

جہاں مکمل پورے حجم h کے لئے حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 4.7 میں کارتیسی محدود استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل مساوات کا ثبوت دکھایا گیا ہے۔

$$\nabla \cdot (VD) = V(\nabla \cdot D) + D \cdot (\nabla V) \quad (4.83)$$

مساوات 4.83 اور صفحہ 82 پر مساوات 3.33 کے استعمال سے مساوات 4.82 کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_h (\nabla \cdot D) V dh \\ &= \frac{1}{2} \int_h [\nabla \cdot (VD) - D \cdot (\nabla V)] dh \end{aligned} \quad (4.84)$$

اس مساوات میں مکمل کے دو اجزاء ہیں۔ پہلے جزو کو مسئلہ پھیلاؤ، جسے صفحہ 87 پر مساوات 3.43 دیتا ہے، کی مدد سے بند سطحی مکمل کی صورت میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{1}{2} \int_h \nabla \cdot (VD) dh = \frac{1}{2} \oint_S (VD) \cdot dS \quad (4.85)$$

ہاں بائیں جانب حجم h جبکہ دائیں جانب اس حجم کی سطح S پر مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ اس h حجم کو ظاہر کرتا ہے جس میں مساوات 4.82 کے تمام چارج پائے جاتے ہیں۔ مساوات 4.82 میں حجم کے ایسے حصے بھی ہوں گے جہاں چارج کثافت ρ_h کی قیمت صفر ہوگی۔ ایسے حصوں کا مکمل $\rho_h = 0$ کی بنا پر صفر کے برابر ہوگا۔ یوں اگر حجم کو لامحدود کر دیا جائے تب بھی مکمل کی قیمت وہی رہے گی چونکہ ایسی اضافی حجم میں $\rho_h = 0$ ہوگا۔ مساوات 4.85 میں یوں حجم کو لامحدود لیا جاسکتا ہے۔ لامحدود حجم کو گھیرتی سطح کو کرہ شکل کا تصور کرتے ہوئے ایسی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہوگی جہاں $r \rightarrow \infty$ ہوگا۔ لامحدود رداس کی سطح سے دیکھتے ہوئے کسی بھی شکل کا چارج کثافت نقطہ مانند چارج Q نظر آئے گا جو سطح پر $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ میدان اور $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ برقی دباؤ پیدا کرے گا۔ یوں مساوات 4.85 کے دائیں جانب بند مکمل رداس کے ساتھ $\frac{1}{r}$ کا تعلق رکھتا ہے اور $r \rightarrow \infty$ کی صورت میں ایسا مکمل صفر کے برابر ہوگا۔ یوں مساوات 4.84 کو

$$W = -\frac{1}{2} \int_h \mathbf{D} \cdot (\nabla V) dh$$

یا

$$(4.86) \quad W = \frac{1}{2} \int_h \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dh = \frac{\epsilon_0}{2} \int_h E^2 dh$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 4.46 اور صفحہ 70 پر مساوات 3.3 کی مدد لی گئی ہے۔

1178

1179

مثال 4.7: مساوات 4.83

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{D}) = \mathbf{V}(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla \mathbf{V})$$

کو ثابت کریں۔

1180

حل: مساوات 4.83 کا بائیں بازو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{D}) &= \nabla \cdot (V[D_x \mathbf{a}_x + D_y \mathbf{a}_y + D_z \mathbf{a}_z]) \\ &= \nabla \cdot (VD_x \mathbf{a}_x + VD_y \mathbf{a}_y + VD_z \mathbf{a}_z) \\ &= \frac{\partial(VD_x)}{\partial x} + \frac{\partial(VD_y)}{\partial y} + \frac{\partial(VD_z)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} D_x + V \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} D_y + V \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} D_z + V \frac{\partial D_z}{\partial z} \end{aligned}$$

ایک جیسے اجزاء کو اکٹھے کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{D}) = V \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} D_x + \frac{\partial V}{\partial y} D_y + \frac{\partial V}{\partial z} D_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب مساوات 4.83 کا دایاں بازو حل کرتے ہیں جہاں

$$\mathbf{V} \nabla \cdot \mathbf{D} = V \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} D \cdot \nabla V &= (D_x a_x + D_y a_y + D_z a_z) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z \right) \\ &= D_x \frac{\partial V}{\partial x} + D_y \frac{\partial V}{\partial y} + D_z \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔ انہیں جمع کرتے ہوئے مساوات 4.83 کا بائیں بازو ہی ملتا ہے۔ یاد رہے کہ $D_x \frac{\partial V}{\partial x}$ کو $D_x \frac{\partial V}{\partial x}$ لکھا جاسکتا ہے۔

1181

1182

1183

مثال 4.8: صفحہ 54 پر مساوات 2.44 دو لا محدود چادروں کے درمیان برقی میدان دیتا ہے جہاں ایک چادر پر ρ_S اور دوسری چادر پر $-\rho_S$ سطحی کثافت چارج پایا جاتا ہے۔ اگر ان چادروں کے مابین فاصلہ a ہو تب چادروں پر آنے والے S سطح لیتے ہوئے حجم aS میں کل مخفی توانائی حاصل کریں۔

1185

حل: چادروں کے مابین $E = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}$ ہے جو اٹل مقدار ہے لہذا اسے مساوات 4.86 میں مکمل سے باہر لے جایا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(4.87) \quad W = \frac{\epsilon_0 \rho_S^2}{2 \epsilon_0^2} \int_h dh = \frac{\rho_S^2 S a}{2 \epsilon_0}$$

حاصل ہوتا ہے۔ انہیں اسی نتیجے کو مساوات 4.82 کی مدد سے حاصل کریں۔ منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر $Ea = \frac{\rho_S a}{\epsilon_0}$ برقی دباؤ ہوگا۔ منفی چادر پر برقی دباؤ چونکہ صفر لیا گیا ہے لہذا مساوات 4.82 کا مکمل لیتے ہوئے منفی چادر پر مکمل صفر کے برابر ہوگا۔ اسی طرح دونوں چادروں کے درمیان چارج نہیں پایا جاتا لہذا اس حجم پر بھی مکمل صفر کے برابر ہوگا۔ مثبت چادر پر سطحی چارج کثافت کو حجمی چارج کثافت میں یوں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ الٹ قطب کے چارجوں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے لہذا چادروں پر آپس میں قریبی سطحوں پر چارج پایا جائے گا۔ یوں مثبت چادر کے S حصے پر چارج $\rho_S S$ کو t موٹائی اور S رقبے کے حجم پر تقسیم کرتے ہوئے $\frac{\rho_S}{t}$ حجمی چارج کثافت تصور کیا جاسکتا ہے جہاں t نہایت کم موٹائی ہے یعنی $t \rightarrow 0$ ہے۔ اس چارج کو $(a - t/2)$ تا $(a + t/2)$ خطے میں تصور کرتے ہوئے یوں

$$(4.88) \quad W = \frac{1}{2} \int_S \int_{a-t/2}^{a+t/2} \frac{\rho_S}{t} \frac{\rho_S a}{\epsilon_0} dx ds = \frac{\rho_S^2 S a}{2 \epsilon_0}$$

1186

یہ دوبارہ حاصل ہوتا ہے۔

1187

اس باب میں ہم مخفی توانائی کی بات کرتے رہے لیکن کہیں پر بھی یہ ذکر نہیں کیا کہ مخفی توانائی آخر کہاں ذخیرہ ہوتی ہے۔ اس کا جواب آج تک کوئی نہیں بتا سکا ہے۔ آپس دیکھیں کہ یہ بتلانا اتنا مشکل کیوں ہے۔

1189

مساوات 4.87 سے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ مخفی توانائی دو چادروں کے درمیان برقی میدان میں ذخیرہ ہے البتہ مساوات 4.88 کے حصول کو دیکھتے ہوئے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ منفی چادر اور چادروں کے درمیان صفر توانائی پائی جاتی ہے جبکہ تمام کی تمام مخفی توانائی مثبت چادر پر ہے۔ اسی طرح اگر ہم مثبت چادر کو برقی زمین تصور کرتے تب منفی چادر پر برقی دباؤ Ea ہوتا اور مخفی توانائی منفی چادر میں نظر آتی۔ ہم دو چادروں کے بالکل درمیانی نقطے کو برقی زمین لے سکتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے مثبت چادر پر $\frac{Ea}{2}$ اور منفی چادر پر $-\frac{Ea}{2}$ برقی دباؤ حاصل ہوتی ہے اور مخفی توانائی برابر دونوں چادروں میں نظر آئے گی۔ برقی زمین کو دو چادروں کے درمیان کچھ بھی نقطے پر رکھا جاسکتا ہے اور ایسا کرنے سے مثبت اور منفی چادروں میں مخفی توانائی کی تقسیم کے جوہات تبدیل ہوتے رہیں گے۔ اگرچہ ان تمام طریقوں سے کل مخفی توانائی کی صحیح قیمت حاصل ہوتی ہے لیکن ان سے کسی صورت یہ معلوم نہیں کیا جاسکتا ہے کہ مخفی توانائی ذخیرہ کہاں ہوتی ہے۔ اس حقیقت کے ساتھ ہی زندگی بسر کرنا سیکھ لیں۔

1196

سوالات

سوال 4.1: برقی میدان $E = (y + z)a_x + (x + z)a_y + (x + y)a_z$ میں -0.1 C کے چارج کو نقطہ $(1, 0, 2)$ سے نقطہ $(0, 0, 2)$ اور یہاں سے نقطہ $(0, 1, 2)$ لایا جاتا ہے۔ دونوں راستوں کا علیحدہ علیحدہ اور کل درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات: 0 J ، -0.2 J اور 0 J

سوال 4.2: مثال 4.8 کے طرز پر L لمبائی ہم محوری تار میں مختفی توانائی حاصل کریں۔ اندرونی تار کا رداس a جبکہ بیرونی تار کا رداس b ہے۔

جواب: $W = \frac{\pi L a^2 \rho_s^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$

باب 16

سوالات

16.1 توانائی

سوال 16.1: میدان $E = 5a_x - 3a_y + 2a_z$ میں $1 \mu C$ چارج کو نقطہ $N(5, 45^\circ, 4)$ سے نقطہ $M(5, 45^\circ, 6)$ کی جانب نہایت کم فاصلہ $1 \mu m$ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی دریافت کریں۔ اسی طرح $(5, 45.3^\circ, 4)$ ، $(7, 45^\circ, 4)$ اور $(10, 66^\circ, 12)$ کی جانب منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی بھی حاصل کریں۔

جوابات: $-2 pJ$ ، $3.013 pJ$ ، $-2.753 pJ$ ، $3.013 pJ$

سوال 16.2: میدان $E = 100a_x - 250a_y + 50a_z$ $\frac{V}{m}$ دیا گیا ہے۔ چارج $25 C$ کو نہایت کم فاصلہ $1 mm$ نقطہ $(3, 4, 6)$ سے نقطہ $(5, 10, -2)$ کی سمت میں منتقل کرنے کے لئے کتنی توانائی درکار ہے۔ اسی طرح a_x ، a_y اور $a_x + a_y + 2a_z$ سمت میں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی بھی حاصل کریں۔

جوابات: $-0.2 J$ ، $0.5 J$ ، $0.115 J$

سوال 16.3: میدان $E = 0.2x(\sin 0.1za_x - 2 \cos 0.15xa_y + 0.02za_z)$ $\frac{V}{m}$ دیا گیا ہے۔ نقطہ $N(3, 2, 4)$ پر E حاصل کریں۔ اس نقطے سے $(5, 6, -2)$ جانب $12 C$ چارج نہایت کم فاصلہ $2.5 \mu m$ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات: $17.06 \mu J$ ، $0.177a_x - 1.081a_y + 0.048a_z$

سوال 16.4: میدان $E = (2x^3 + yz^2)a_x - 3z^2a_y + xy^2za_z$ $\frac{V}{m}$ کا کیری مکمل $\int E \cdot dL$ نقطہ $N(1, 2, 3)$ تا نقطہ $P(6, 1, 2)$ مندرجہ ذیل دو راستوں پر حاصل کریں۔ (الف) پہلے x محدود کے متوازی چلیں، اس کے بعد y محدود کے متوازی چلیں اور آخر میں z محدود کے متوازی چلیں۔ (ب) پہلے نقطہ سے بالکل سیدھا دوسرے نقطے کی طرف چلتے ہوئے مکمل حاصل کریں۔ ایسا مساوات $z = y + 1$ اور مساوات $x = 11 - 5y$ پر ایک وقت چلتے ہوئے ممکن ہو گا۔

جوابات: 698.9 ، 749.5

سوال 16.5: میدان $E = 2xa_x - 3za_y + 2a_z$ $\frac{V}{m}$ میں $5 \mu C$ کا چارج نقطہ $(0, 2, -4)$ تا نقطہ $(2, 4, -12)$ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔ (الف) باری باری x ، y اور z محدود کے متوازی چلیں۔ (ب) ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک بہ راستہ $z = x^2 - y^2$ ، $y = x + 2$ ، $z = x^2 - y^2$ چلیں۔

جوابات: $-60 \mu J$ ، $-180 \mu J$

