برقی و مقناطیسیات 1

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk 2

عنوان

باب 8

مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ

برقی چارج کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے جس میں موجود ساکن یا حرکت کرتے چارج پر قوت دفع یا قوت کشش پایا جاتا ہے۔ مقناطیسی میدان برقی رو یعنی حرکت کرتے چارج سے پیدا ہوتا ہے اور اس میدان میں حرکت کرتے چارج پر قوت پائی جاتی ہے۔ مقناطیسی میدان ساکن چارج پر قوت پیدا نہیں کرتا۔

اس باب میں برقی رو گزارتی تار پر قوت اور مروڑ کا جائزہ لیا جائے گا۔ اس کے بعد مقناطیسی اشیاء اور آخر میں امالہ پر غور کیا جائے گا۔

8.1 متحرک چارج پر قوت

تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ برقی میدان میں چارج بردار ذرے پر

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E} \tag{8.1}$$

قوت اثر انداز ہوتی ہے۔ مثبت چارج کی صورت میں یہ قوت برقی میدان کے شدت $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں ہوتی ہے۔ قوت کی قیمت چارج Q اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے۔ چارج ساکن ہو یا حرکت کر رہا ہو، اس پر قوت کی مقدار اسی مساوات سے حاصل ہوتی ہے۔

اسی طرح تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ مقناطیسی میدان میں ساکن چارج بردار ذرے پر مقناطیسی میدان کوئی قوت پیدا نہیں کرتا البتہ متحرک چارج بردار ذرے پر مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{8.2}$$

قوت پیدا کرتا ہے۔ یہ قوت چارج کے براہ راست متناسب ہوتی ہے۔ اسی طرح قوت چارج کے رفتار $\boldsymbol{v}$، کثافت مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ اور ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے بھی براہ راست متناسب ہوتی ہے۔ قوت کی سمت $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں کے عمودی یعنی $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ سمت میں ہوتی ہے۔

مقناطیسی قوت رفتار کے عمودی ہے لہٰذا یہ رفتار کے قیمت پر اثر انداز نہیں ہوتا البتہ یہ اس کی سمت پر ضرور اثر ڈالتا ہے۔ اس طرح مقناطیسی قوت چارج بردار ذرے کے متحرک توانائی میں تبدیلی لانے سے قاصر ہے۔ اس کے برعکس برقی قوت جسے مساوات 8.1 بیان کرتا ہے چارج بردار ذرے کی رفتار میں تبدیلی پیدا کرتے ہوئے حرکی توانائی میں تبدیلی پیدا کرتا ہے۔ دونوں میدانوں میں یہ بنیادی فرق ہے کہ برقی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا کرتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا نہیں کرتا۔

دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں چارج بردار ذرے پر کل قوت

$$\boldsymbol{F} = Q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{8.3}$$

دونوں میدانوں سے علیحدہ علیحدہ پیدا قوتوں کے مجموعے کے برابر ہے۔ مساوات 8.3 **لورنز مساوات قوت**[1][2] کہلاتی ہے۔ برقی اور مقناطیسی میدانوں میں چارج بردار ذرے، مثلاً الیکٹران، کے راہ اسی مساوات کو حل کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔

مشق 8.1: ایک عدد نقطہ چارج جس کی قیمت $-3\,\mathrm{C}$ اور رفتار $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو پر مندرجہ ذیل میدانوں میں قوت کی حتمی قیمت حاصل کریں۔ (الف) $\boldsymbol{E} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$، (ب) $\boldsymbol{B} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$، (پ) دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں۔

جوابات: $18.49\,\mathrm{N}$ ، $71.3\,\mathrm{N}$ ، $78.7\,\mathrm{N}$

8.2 تفرقی چارج پر قوت

مقناطیسی میدان میں متحرک تفرقی چارج $\mathrm{d}Q$ پر تفرقی قوت $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ عمل کرے گی۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{8.4}$$

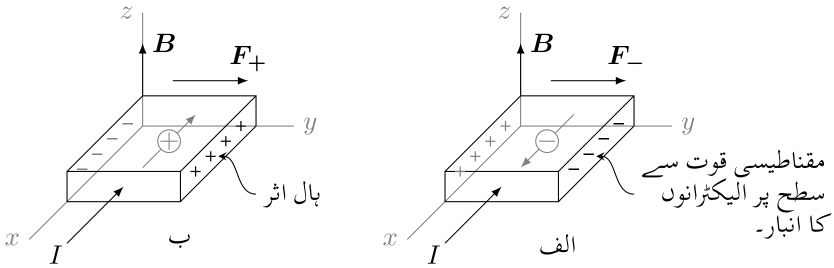
آپ جانتے ہیں کہ منفی چارج کی باریک ترین مقدار الیکٹران کا چارج ہے۔ مثبت چارج کی باریک ترین قیمت بھی اتنی ہی لیکن مثبت قطب کی ہے۔ منفی چارج کو مثال بناتے ہوئے، یوں مندرجہ بالا مساوات میں تفرقی چارج سے مراد کم از کم اتنا چارج ہے جس میں الیکٹرانوں کی تعداد اتنی ہو کہ کسی ایک الیکٹران کے چارج کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ اسی طرح اس تفرقی چارج کا حجم اگرچہ چھوٹا ہے لیکن اس حجم کی جسامت الیکٹرانوں کے مابین اوسط فاصلے سے بہت زیادہ ہے۔ مساوات 8.4 تفرقی چارج پر کل قوت دیتا ہے۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ یہ قوت کسی ایک الیکٹران پر اثر انداز نہیں ہوتا بلکہ یہ تمام الیکٹرانوں پر علیحدہ علیحدہ قوتوں کا مجموعہ ہے۔

موصل تار میں برقی رو، الیکٹران کے حرکت کی بدولت ہے۔ برقی رو گزارتے تار کو مقناطیسی میدان میں رکھنے سے تار میں ہر الیکٹران پر مقناطیسی قوت کا اثر پایا جائے گا۔ اگرچہ کسی ایک الیکٹران پر انتہائی کم قیمت کا قوت پایا جاتا ہے لیکن موصل تار میں الیکٹرانوں کی تعداد انتہائی زیادہ ہوتی ہے۔ یوں انتہائی زیادہ تعداد میں انتہائی کم قوتوں کا مجموعہ معقول قیمت کی قوت پیدا کرتا ہے۔ آئیں دیکھتے ہیں کہ یہ مجموعی قوت تار تک کس طرح منتقل ہوتی ہے۔

موصل میں مثبت ایٹم یا آئن ساکن ہوتے ہیں جبکہ الیکٹران آزادی سے حرکت کر سکتے ہیں۔ مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے موصل تار میں حرکت پذیر منفی الیکٹران پر مقناطیسی قوت عمل کرتی ہے جس سے مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین فاصلوں میں تبدیلی رونما ہوتی ہے۔ اب مثبت اور منفی چارج کے مابین کولومب قوتیں ایسی تبدیلی کو روکتے ہیں لہٰذا حرکت پذیر الیکٹران پر مقناطیسی قوت یوں ساکن آئن تک پہنچ پاتی ہیں جو بطور تار پر مقناطیسی قوت کی صورت میں رونما ہوتی ہے۔

---

[1] یہ مساوات ہینڈرک لورنز کے نام ہے۔
[2] Lorentz force equation



شکل 8.1: ہال اثر سے متحرک چارج کا قطب دریافت کیا جا سکتا ہے۔

مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین کولمب قوتیں انتہائی طاقتور ہوتی ہیں لہٰذا مقناطیسی میدان سے پیدا فاصلوں میں تبدیلی قابل ناپ نہیں ہوتی۔ مثبت اور منفی چارجوں کے مابین فاصلے کی بنا پر انہیں دو چادر کپیسٹر تصور کیا جا سکتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ ایسے کپیسٹر کے چادروں کے مابین برقی دباو پایا جاتا ہے۔ یوں الیکٹران کے حرکت اور مقناطیسی میدان دونوں کی سمتوں کے عمودی دو والٹ اطراف کے مابین تار پر معمولی برقی دباو پایا جاتا ہے جسے ہال اثر[3] کے نام[4] سے جانا جاتا ہے۔

ہال اثر کو شکل 8.1 کی مدد سے با آسانی سمجھا جا سکتا ہے۔ شکل-الف میں موصل یا n قسم کے نیم موصل برقی رو گزارتا تار دکھایا گیا ہے۔ تار میں برقی رو I کی سمت $-a_X$ ہے لہٰذا تار میں آزاد منفی چارج اس کے الٹ یعنی a_X سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ تار میں آزاد الیکٹران کو ہلکی سیاہی میں تیر کے نشان پر دائرے میں بند $-$ علامت سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں تیر اس کے حرکت کی سمت ظاہر کرتا ہے۔ یہ تار a_Z سمت کے مقناطیسی میدان میں پڑی ہے۔ تار میں آزاد چارج منفی قطب کے ہیں لہٰذا ان پر مساوات 8.2 کے تحت a_Y سمت میں قوت F_- عمل کرے گا۔ قوت کی علامت پر زیر نوشت میں منفی کی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ یہ قوت متحرک منفی چارج پر اثر انداز ہوتا ہے۔ یوں تار کے دائیں طرف پر منفی الیکٹرانوں کا انبار جمع ہوتا ہے جبکہ تار کے بائیں طرف پر الیکٹران کی تعداد کم ہو جاتی ہے جس سے اس جانب ساکن مثبت آئن بے پردہ[5] ہو جاتے ہیں۔ شکل 8.1-الف میں تار کے دائیں طرف $-$ اور بائیں طرف $+$ کے علامات انہیں کو ظاہر کرتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ مثبت اور منفی چارج کے مابین برقی میدان کی شدت E اور یوں برقی دباو پایا جاتا ہے لہٰذا تار کے دائیں اور بائیں اطراف کے مابین ہال برقی دباو[6] پایا جائے گا۔ تار کا بایاں طرف ہال برقی دباو کا مثبت سرا ہو گا۔

آئیں ایسی صورت دیکھیں جہاں متحرک مثبت چارج کی بدولت برقی رو پائی جائے۔ شکل 8.1-ب میں بقایا صورت حال بالکل شکل-الف کی طرح ہے البتہ یہاں تار p قسم کے نیم موصل کا بنا ہوا ہے جس میں برقی رو مثبت آزاد خول[7] کے حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔ یوں اگر برقی رو $-a_X$ سمت میں ہو تب آزاد خول بھی اسی سمت میں حرکت کریں گے۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے یہاں بھی مقناطیسی قوت آزاد چارج کو دائیں جانب دھکیل رہے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس بار ہال برقی دباو کا مثبت سرا تار کا دائیں طرف پایا جاتا ہے جو شکل-الف کے عین الٹ ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے یہ معلوم کیا جا سکتا ہے کہ آیا نیم موصل n یا p قسم کا ہے۔

ہال اثر استعمال کرتے ہوئے مختلف پیمائشی آلات بنائے جاتے ہیں مثلاً یک سمتی رو پیما، مقناطیسی بہاو پیما[8] وغیرہ۔

سمتی رفتار v سے حرکت کرتا ہوا حجمی کثافت چارج ρ_h کثافت برقی رو J

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{8.5}$$

کو جنم دیتا ہے۔ اس مساوات کو صفحہ 127 پر حاصل کیا گیا۔ چھوٹے حجم $\mathrm{d}h$ میں تھوڑے سے چارج کو

$$\mathrm{d}Q = \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{8.6}$$

[3] Hall effect
[4] ایڈون ہال نے اس اثر کو 1879 میں دریافت کیا۔
[5] uncovered
[6] Hall voltage
[7] free holes
[8] magnetic flux meter

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 8.4 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \rho_h \,\mathrm{d}h \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \,\mathrm{d}h \tag{8.7}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہم مساوات 7.6 میں دیکھ چکے ہیں کہ $\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h$ کو برقی رو گزارتے تار کا تفرقی حصہ تصور کیا جا سکتا ہے جسے

$$\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h = \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ اس طرح مساوات 8.7 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B} \,\mathrm{d}S \tag{8.8}$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.9}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 8.7، مساوات 8.8 اور مساوات 8.9 کے تکمل سے انہیں یوں

$$\boldsymbol{F} = \int_h \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \,\mathrm{d}h \tag{8.10}$$

$$\boldsymbol{F} = \int_S \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B} \,\mathrm{d}S \tag{8.11}$$

$$\boldsymbol{F} = \oint I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.12}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 8.12 میں اگر سیدھی تار لی جائے جس کی لمبائی L ہو تو تکمل سے

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.13}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں قوت کی قیمت

$$F = ILB \sin\alpha \tag{8.14}$$

ہے جہاں تار اور مقناطیسی میدان کے درمیان زاویہ α ہے۔ مساوات 8.13 اور مساوات 8.14 پورے دور کے کچھ حصے پر قوت دیتے ہیں۔ دور کے بقایا حصوں پر بھی اسی طرح قوت حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 8.1: محدد z پر لامحدود لمبائی کی تار میں $1.5\,\mathrm{A}$ کی برقی رو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب گزر رہی ہے۔ اس کے قریب نقطہ $N_1(3,2,5)$ تا $N_2(4,6,1)$ کے درمیان سیدھی موصل تار میں $2.3\,\mathrm{A}$ کی برقی رو N_1 سے N_2 کی جانب گزر رہی ہے۔ اس تار پر مقناطیسی قوت حاصل کریں۔

حل: پہلی تار مقناطیسی میدان

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \frac{1.5\mu_0}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi \\
&= \frac{1.5\mu_0}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_\text{X} + \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{a}_\text{y}\right) \\
&= \frac{1.5\mu_0}{2\pi(x^2+y^2)}(-y\boldsymbol{a}_\text{X} + x\boldsymbol{a}_\text{y})
\end{aligned}
$$

پیدا کرتا ہے جو دوسری تار کے چھوٹے حصے $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\text{X} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\text{y} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\text{Z}$ پر قوت

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 2.3\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B} \tag{8.15}
$$

پیدا کرے گی۔ تار کی مساوات $\boldsymbol{L} = x\boldsymbol{a}_\text{X} + y\boldsymbol{a}_\text{y} + z\boldsymbol{a}_\text{Z}$ میں x ، y اور z متغیرات کو ایک ہی متغیرہ t کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
x &= 3 + (4-3)t = 3 + t \\
y &= 2 + (6-2)t = 2 + 4t \\
z &= 5 + (1-5)t = 5 - 4t
\end{aligned}
$$

جہاں $t = 0$ پر کرنے سے ابتدائی نقطہ $N_1(3,2,5)$ اور $t = 1$ پر کرنے سے اختتامی نقطہ $N_2(4,6,1)$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$
\boldsymbol{L} = (3+t)\boldsymbol{a}_\text{X} + (2+4t)\boldsymbol{a}_\text{y} + (5-4t)\boldsymbol{a}_\text{Z}
$$

لکھ کر $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}t\boldsymbol{a}_\text{X} + 4\,\mathrm{d}t\boldsymbol{a}_\text{y} - 4\,\mathrm{d}t\boldsymbol{a}_\text{Z}$ لکھا جا سکتا ہے۔ اس طرح پوری تار پر قوت مساوات 8.15 کے تکمل سے یوں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \int_0^1 2.3(\boldsymbol{a}_\text{X} + 4\boldsymbol{a}_\text{y} - 4\boldsymbol{a}_\text{Z})\,\mathrm{d}t \times \frac{1.5\mu_0}{2\pi[(3+t)^2 + (2+4t)^2]}[-(2+4t)\boldsymbol{a}_\text{X} + (3+t)\boldsymbol{a}_\text{y}] \\
&= \int_0^1 \frac{3.45\mu_0}{2\pi(17t^2 + 22t + 13)}[4(t+3)\boldsymbol{a}_\text{X} + 8(2t+1)\boldsymbol{a}_\text{y} + (17t+11)\boldsymbol{a}_\text{Z}]\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

لکھی جا سکتی ہے جس سے

$$
\boldsymbol{F} = 369\boldsymbol{a}_\text{X} + 386\boldsymbol{a}_\text{y} + 478\boldsymbol{a}_\text{Z}\,\text{nN}
$$

حاصل ہوتا ہے۔

8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت

شکل میں نقطہ N_1 پر تار کا ایک چھوٹا ٹکڑا $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1$ دکھایا گیا ہے جس میں I_1 برقی رو گزر رہی ہے جبکہ نقطہ N_2 پر تار کا دوسرا چھوٹا ٹکڑا $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$ دکھایا گیا ہے جس میں I_2 برقی رو گزر رہی ہے۔ نقطہ N_2 پر تار کے پہلے ٹکڑے سے پیدا مقناطیسی میدان مساوات 7.2 دیتا ہے۔

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 = \frac{I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}
$$

مساوات 8.9 مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_2$ میں تار کے تفرقی حصے پر تفرقی قوت دیتا ہے۔ یہاں تفرقی مقناطیسی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ سے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$ پر پیدا قوت درکار ہے۔ اس قوت کو تفرقی قوت کا تفرقی حصہ $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2)$ لکھتے ہوئے مساوات 8.9 کو

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) = I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times \mathrm{d}\boldsymbol{B}_2$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2 = \mu_0\,\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ کے برابر ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{21}^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}) \tag{8.16}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان حاصل کرتے وقت ضروری ہے کہ پورے تار پر تکمل حاصل کیا جائے۔ مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ N_2 پر مکمل تکمل لیتے ہوئے میدان $\boldsymbol{H}_2$ استعمال نہیں کیا گیا بلکہ تفرقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ استعمال کیا گیا ہے۔ یوں اگر اس مساوات سے قوتیں حاصل کی جائیں تو یہ درست نہیں ہوں گی۔ یہ دیکھنے کے لئے تصور کریں کہ نقطہ $(1,2,3)$ پر $I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\mathrm{A\,m}$ جبکہ نقطہ $(-1,3,2)$ پر $I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 = -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\mathrm{A\,m}$ پایا جاتا ہے۔ دوسرے نقطے پر قوت حاصل کرتے ہیں۔ یہاں $\boldsymbol{R}_{21} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے لہٰذا دوسرے تار پر قوت

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi\left(2^2+1^1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}(-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \times \left[(2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) \times \left(-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\right] \\ &= -108.86\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\mathrm{nN}\end{aligned}$$

ہو گا۔ اب بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے پہلے نقطے پر

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi\left(2^2+1^1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}(2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) \times \left[(-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \times \left(2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\right] \\ &= 54.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\mathrm{nN}\end{aligned}$$

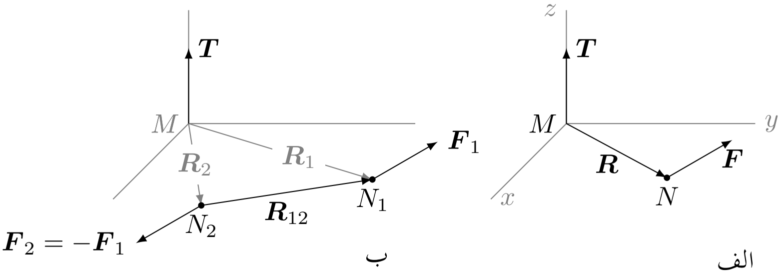
قوت حاصل ہوتی ہے جہاں $\boldsymbol{R}_{12} = -\boldsymbol{R}_{21}$ استعمال کیا گیا۔ آپ کو یاد ہو گا کہ چھوٹے سے چھوٹے مقدار کے دو چارجوں کے مابین ہر صورت قیمت میں برابر اور سمت میں الٹ قوتیں پائی جاتی ہیں۔ مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہے اور برقی رو گزارتے دو چھوٹے حصوں پر نا تو قوت کی قیمتیں برابر ہیں اور نا ہی ان کی سمتوں کا آپس میں کوئی تعلق ہے۔ یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ مقناطیسی میدان میں مکمل بند دور حل کرتے ہوئے ہی صحیح جوابات حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ایسا ہی کرتے ہیں۔

مساوات 8.16 کا دو درجی تکمل لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_2 &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{R_{21}^2}\right] \\ &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\oint \frac{\boldsymbol{a}_{R21} \times \mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R_{21}^2}\right] \times \mathrm{d}\boldsymbol{L}_2\end{aligned} \tag{8.17}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مساوات میں اندرونی تکمل نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان حاصل کرنے کے لئے درکار ہے جبکہ بیرونی تکمل اسی نقطے پر تار پر کل قوت حاصل کرنے کے لئے درکار ہے۔



شکل 8.2: قوت کا معیار اثر۔

8.4 قوت اور مروڑ

مساوات 8.12 مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے تار پر قوت دیتا ہے جسے یکساں میدان میں $\boldsymbol{B}$ کو تکمل کے باہر لے جاتے ہوئے

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{B} \times \oint \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب کوئی بھی برقی دور مکمل بند دائرہ بناتا ہے۔ کسی بھی شکل کے بند دائرے کا لکیری تکمل $\oint \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$ ہوتا ہے لہٰذا یکساں میدان میں برقی دور کے پورے تار پر کل صفر قوت پایا جائے گا۔ البتہ اگر میدان یکساں نہ ہو تب ضروری نہیں کہ پورے دور پر قوت صفر ہو۔

مساوات 8.10 اور مساوات 8.11 کے برقی رو کو بھی متعدد متوازی جڑے باریک تار نما ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ ایسے ہر باریک تار پر بھی یکساں میدان میں صفر قوت ہو گا لہٰذا ان اشکال کے برقی رو کے ادوار پر بھی کل صفر قوت ہی پایا جائے گا۔

یکساں میدان میں پورے دور پر صفر قوت پایا جاتا ہے البتہ دور پر مروڑ[9] یعنی قوت کا معیار اثر[10] عموماً صفر نہیں ہوتا۔ قوت کا معیار اثر حاصل کرنے کی خاطر قوت اور مروڑ کے محور یعنی چُول[11] کا جاننا ضروری ہے۔ شکل 8.2-الف میں نقطہ N پر قوت $\boldsymbol{F}$ عمل کر رہا ہے۔ ہم نقطہ M کو محور چنتے ہیں۔ نقطہ M سے N تک سمتی فاصلہ $\boldsymbol{R}$ قوت کا بازو[12] کہلاتا ہے۔ قوت کا معیار اثر $\boldsymbol{T}$

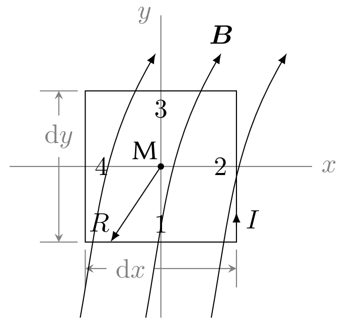
$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{F} \tag{8.18}$$

کے برابر ہے۔ مروڑ کی قیمت، قوت کے بازو کی لمبائی ضرب قوت کی قیمت ضرب ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے برابر ہے جبکہ اس کی سمت دونوں کے عمودی ہے جسے صلیبی ضرب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

شکل 8.2-ب میں پختہ شکل کے جسم پر دو مختلف نقطوں پر برابر مگر الٹ سمت کے قوت لاگو کئے گئے ہیں۔ چونکہ اس جسم پر کل قوت صفر کے برابر ہے لہٰذا یہ کسی بھی سمت میں سیدھی حرکت نہیں کرے گی۔ محور M پر ان قوتوں کے مروڑ کا مجموعہ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \\
&= (\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2) \times \boldsymbol{F}_1 \\
&= \boldsymbol{R}_{12} \times \boldsymbol{F}_1
\end{aligned}$$

ہو گا جہاں دوسرے قدم پر $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$ پر کیا گیا ہے۔ اس مساوات میں قوتوں کے محور کا $\boldsymbol{R}_{12}$ پر کوئی اثر نہیں ہے لہٰذا کل قوت صفر ہونے کی صورت میں مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے۔ اسی عمل کو زیادہ قوتوں پر بھی لاگو کیا جا سکتا ہے۔



شکل 8.3: مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے تفرقی بند دائرے پر مروڑ۔

چونکہ مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے لہٰذا ہم محور اس مقام پر چن سکتے ہیں جس پر مروڑ کا حصول زیادہ آسان ہو۔ ہم سطحی قوتوں کی صورت میں ایسا[12] محور عموماً قوتوں کے ہم سطحی، جسم کے دھرے پر پایا جاتا ہے۔ 2436

آئیں شکل 8.3 میں دئے برقی رو گزارتے تار پر غیر یکساں مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{a}_\mathrm{x} + B_y \boldsymbol{a}_\mathrm{y} + B_z \boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ میں مروڑ حاصل کریں۔ تصور کریں کہ تار چول M پر صرف گھوم سکتا ہے۔ اس تار کے اطراف $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ ہیں جبکہ اس میں برقی رو I کی سمت تیر کے نشان سے ظاہر کی گئی ہے۔ اس چھوٹے رقبے کے وسط M پر مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{B}_0 = B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{8.19}$$

کے برابر ہے۔ یوں وسط سے $-\frac{\mathrm{d}y}{2}$ جانب نقطہ 1 پر مقناطیسی میدان ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_0 - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} + \cdots$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔ صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{B}_1 = \left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \boldsymbol{B}_1$$

یا

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 &= I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \left[\left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right] \\
&= I\,\mathrm{d}x\left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z} - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right]
\end{aligned}$$

---

[9] torque
[10] moment of force
[11] pivot
[12] moment arm

ہو گی۔اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیانے نقطے تک ہو گا یعنی $\boldsymbol{R}_1 = -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لہٰذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 &= \boldsymbol{R}_1 \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 \\
&= -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times I\,\mathrm{d}x \left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right] \\
&= -\frac{I}{2}\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}
\end{aligned}$$

2437 ہو گا۔

اسی طرح وسط سے $+\frac{\mathrm{d}y}{2}$ جانب نقطہ 3 پر مقناطیسی میدان مکلارن تسلسل سے

$$\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{B}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} + \cdots$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{B}_3 = \left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 = -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{B}_3$$

یا

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 &= -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \left[\left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right] \\
&= I\,\mathrm{d}x\left[-\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right]
\end{aligned}$$

ہو گی۔اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیان تک یعنی $\boldsymbol{R}_3 = \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ہے لہٰذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 &= \boldsymbol{R}_3 \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 \\
&= \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times I\,\mathrm{d}x\left[-\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right] \\
&= -\frac{I}{2}\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}
\end{aligned}$$

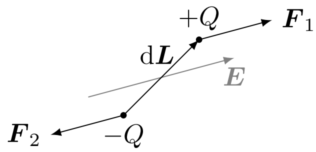
2438 ہو گا۔

ان دو قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 = -IB_{y0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$$

کے برابر ہے۔بالکل اسی طرح تیسرے اور چھوتے اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_2 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_4 = IB_{x0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$



شکل 8.4: برقی جفت قطب پر برقی میدان میں مروڑ۔

حاصل ہوتا ہے۔یوں تمام اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(B_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - B_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔قوسین میں بند حصے کو صلیبی ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{B}_0\right)$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B} \tag{8.20}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں بند راہ سمتی رقبے $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کو گھیرتی ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت نہیں لکھا گیا۔

بند دائرے میں برقی رو ضرب چھوٹے سمتی رقبے کا حاصل ضرب تفرقی مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر[13] $\mathrm{d}\boldsymbol{m}$ کی تعریف ہے جس کی اکائی $\mathrm{A\,m^2}$ ہے۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.21}$$

اور

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = \mathrm{d}\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \tag{8.22}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

مساوات 8.20، مساوات 8.21 اور مساوات 8.22 عمومی مساوات ہیں جن میں چھوٹا رقبہ $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ مربع کے علاوہ کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے اور اس کی سمت کچھ بھی ہو سکتی ہے۔

غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں تار پر کل قوت صفر نہیں ہو گی۔

شکل 8.4 میں برقی میدان میں برقی جفت قطب دکھایا گیا ہے۔مثبت چارج پر قوت $\boldsymbol{F}_1 = Q\boldsymbol{E}$ اور منفی چارج پر قوت $\boldsymbol{F}_2 = -Q\boldsymbol{E}$ ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس جفت قطب پر تفرقی مروڑ

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T} &= \mathrm{d}\boldsymbol{L} \times Q\boldsymbol{E}\\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}\end{aligned}$$

کے برابر ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = Q\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ برقی جفت قطب ہے۔مروڑ کی سمت صفحہ کے اندر جانب کو ہے۔آپ نے دیکھا کہ مقناطیسی اور برقی جفت قطب پر مروڑ کے مساوات یکساں ہیں۔بالکل مقناطیسی جفت قطب کی طرح یہاں بھی مروڑ کا تخمینہ لگاتے وقت جفت قطب کے احاطے میں میدان $\boldsymbol{E}$ کے تبدیلی کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

[13] differential magnetic dipole moment

2448 مثال 8.2: شکل 8.3 میں چھوٹے رقبے کو اتنا چھوٹا تصور کریں کہ اس پر مقناطیسی میدان یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ایسی صورت میں تفرقی مروڑ حاصل کریں۔

حل: یکساں میدان کی صورت میں

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 &= I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\times\left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}+B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right)\\ &= I\,\mathrm{d}x\left(B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}-B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 &= -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\times I\,\mathrm{d}x\left(B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}-B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)\\ &= -\frac{I}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 &= -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\times\left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}+B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right)\\ &= I\,\mathrm{d}x\left(-B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}+B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 &= \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\times I\,\mathrm{d}x\left(-B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}+B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)\\ &= -\frac{I}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1+\mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 = -I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_2+\mathrm{d}\boldsymbol{T}_4 = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$$

حاصل ہوتا ہے۔ان نتائج سے کل مروڑ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}-B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\right)$$

2449 ہی حاصل ہوتا ہے۔

2450

مندرجہ بالا مثال سے ثابت ہوتا ہے کہ غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں مروڑ حاصل کرتے وقت چھوٹے رقبے پر میدان کی تبدیلی کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔اس مثال سے یہ بھی ظاہر ہے کہ یکساں مقناطیسی میدان میں تار پر کل قوت صفر کے برابر ہوتی ہے۔اگر مقناطیسی میدان حقیقت میں یکساں ہی ہو تب کسی بھی بڑے رقبے پر بھی مروڑ بالکل اسی مساوات

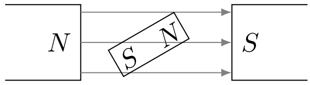
$$\boldsymbol{T} = I\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B} \qquad \text{یکساں مقناطیسی میدان} \tag{8.23}$$

2451 سے حاصل ہو گا۔

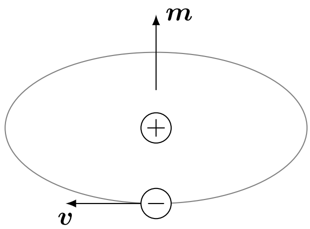
2452 غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ برقی رو گزارتے بند دائرے پر مروڑ اس سمت میں دائرے کو گھمانے کی کوشش کرتا ہے جس میں دائرے سے پیدا مقناطیسی

2453 میدان اور بیرونی لاگو مقناطیسی میدان کی سمتیں ایک ہی ہوں۔اس حقیقت کو شکل 8.5 کی مدد سے یاد رکھا جا سکتا ہے جہاں برقی رو گزارتے تار کی جگہ چھوٹا مقناطیس

2454 بیرونی میدان میں دکھایا گیا ہے۔چھوٹا مقناطیس اس سمت میں گھومتا ہے جہاں دونوں میدان متوازی ہوں۔



شکل 8.5: مروڑ دونوں مقناطیسی میدان کو متوازی بنانے کی کوشش کرتا ہے۔



شکل 8.6: مدار میں گھومتے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر کو بیرونی میدان کے متوازی دکھایا گیا ہے۔

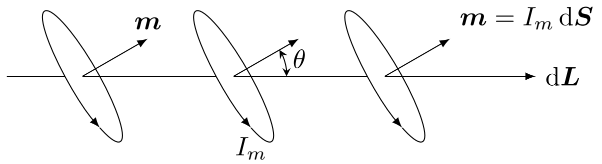
8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے

شکل 8.6 میں ایٹمی مرکز کے گرد مدار میں گھومتا الیکٹران دکھایا گیا ہے۔ حرکت کرتا چارج برقی رو پیدا کرتا ہے۔ ایسی برقی رو جو مقید الیکٹران کی بنا ہو مقید برقی رو[14] I_m کہلائی جاتی ہے۔ اس الیکٹران کو بند گول دائرے پر مقید برقی رو تصور کیا جا سکتا ہے جو مقناطیسی جفت قطب $\boldsymbol{m}$ کو جنم دیتی ہے۔ الیکٹران منفی ہونے کی وجہ سے مقید برقی رو $\boldsymbol{v}$ کے الٹ سمت میں ہو گی۔ ایٹمی مسائل صرف کوانٹم میکانیات[15] سے ہی سمجھے جا سکتے ہیں۔ یہاں صرف اتنا بتانا ضروری ہے کہ لوہا، نِکل[16] اور کوبالٹ[17] ایسے عناصر ہیں جن کا $\boldsymbol{m}$ قدر زیادہ قیمت رکھتا ہے۔ یہ اشیاء فولادی مقناطیسی اشیاء[18] کہلاتے ہیں۔ ہم انہیں اشیاء پر غور کرتے ہیں۔

فولادی مقناطیسی اشیاء میں ایٹموں کے باہمی قوتوں کی وجہ سے قریبی جفت قطب ایک ہی سمت میں رخ کر لیتے ہیں۔ ایسے ہم صف[19] خطوں میں متعدد ایٹم شامل ہوتے ہیں۔ ان خطوں کو مقناطیسی خطے[20] کہتے ہیں۔ مقناطیسی خطے مختلف شکل کے ہو سکتے ہیں اور ان کی جسامت ایک مائیکرو میٹر تا کئی سنٹی میٹر ممکن ہے۔ کسی بھی قدرتی مقناطیسی شہ میں انفرادی مقناطیسی خطے کے مقناطیسی جفت قطب کا معیار اثر انتہائی بڑی مقدار کا ہوتا ہے البتہ مختلف مقناطیسی خطوں کے جفت قطب کے رخ مختلف سمتوں میں ہوتے ہیں۔ اسی وجہ سے پورا حجم از خود کوئی مقناطیسی معیار اثر نہیں رکھتا۔ ہاں بیرونی مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}_0$ لاگو کرنے سے وہ مقناطیسی خطے جو $\boldsymbol{B}_0$ کے ہی سمت میں رخ کئے ہوں کا حجم بڑھ جاتا ہے جبکہ بقایا مقناطیسی خطوں کا حجم کم ہو جاتا ہے۔ یوں اندرونی مقناطیسی میدان بیرونی میدان سے کئی گنا بڑھ جاتا ہے۔ بیرونی میدان ہٹا دینے سے تمام مقناطیسی خطے اپنی پرانی صورت اختیار نہیں کر پاتے۔ یوں تمام مقناطیسی خطوں کا مجموعی بقایا مقناطیسی معیار اثر رہ جاتا ہے۔ یہ حقیقت کہ مقناطیسی اشیاء کے خصوصیات گزشتہ حالات پر منحصر ہے، مقناطیسی چال[21] کہلاتا ہے۔

---

[14] bound current
[15] quantum mechanics
[16] nickel
[17] cobolt
[18] ferromagnetic
[19] aligned
[20] magnetic domain
[21] hysteresis



شکل 8.7: بیرونی مقناطیسی میدان جفت قطب کو صف بستہ کئے ہوئے ہے جس سے بند راہ سے گھیرے گئے سطح میں مقید برقی رو سے اضافہ پایا جاتا ہے۔

8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل 2467

تصور کریں کہ کسی مادے کے اکائی حجم میں n مقناطیسی جفت قطب پائے جاتے ہوں۔اس مادے کے Δh حجم میں $n\Delta h$ جفت قطب ہوں گے جن کا اجتماعی مقناطیسی معیار اثر ان کا سمتی مجموعہ

$$\boldsymbol{m}_{\text{کل}}=\sum_{i=1}^{n\Delta h}\boldsymbol{m}_i \tag{8.24}$$

ہو گا۔انفرادی $\boldsymbol{m}$ مختلف قیمت اور سمت کے ہو سکتے ہیں۔اجتماعی مقناطیسی معیار اثر فی اکائی حجم

$$\boldsymbol{M}=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{1}{\Delta h}\sum_{i=1}^{n\Delta h}\boldsymbol{m}_i \tag{8.25}$$

کو مقناطیسیت[22] پکارا اور $\boldsymbol{M}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔مقناطیسیت کی اکائی بالکل $\boldsymbol{H}$ کے اکائی کی طرح ایمپیئر فی میٹر $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ہے۔مندرجہ بالا مساوات کا صفحہ 142 پر دئے 2468 مساوات 5.25 کے ساتھ موازنہ کریں جو تقطیب کی تعریف بیان کرتی ہے۔مندرجہ ذیل پڑھتے ہوئے بھی تقطیب پر تبصرے کو ساتھ ساتھ دیکھتے رہیں۔ 2469

شکل 8.7 میں بند راہ کا کچھ حصہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ دکھایا گیا ہے جس پر مقناطیسی جفت قطب دکھائے گئے ہیں۔چھوٹے رقبے $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کے گرد گھومتی مقید برقی رو I_m مقناطیسی معیار اثر $\boldsymbol{m}=I_m\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کو جنم دیتی ہے۔بیرونی مقناطیسی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب ہم صف ہو کر $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کے ساتھ θ کا زاویہ بناتے ہیں۔یوں چھوٹے حجم $\mathrm{d}S\cos\theta\,\mathrm{d}L$ یعنی $\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں جفت قطب کی کل تعداد $n\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ ہو گی۔آئیں دیکھتے ہیں کہ بند راہ سے گھیری سطح سے گزرتی برقی رو میں بیرونی میدان لاگو کرنے سے کیا تبدیلی رونما ہوتی ہے۔اگر بند راہ پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{L}}$ جانب چلا جائے تو گھیری گئی سطح بائیں ہاتھ کو ہے۔بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں تمام جفت قطب بلا ترتیب پائے جاتے۔بیرونی میدان $\boldsymbol{B}$ لاگو کرنے کی صورت میں تمام کے تمام $n\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ جفت قطب ہم صف ہو جاتے ہیں جس کی وجہ سے گھیرے سطح سے کل مقید گزرتی برقی رو بڑھ جاتی ہے۔ہر انفرادی جفت قطب گھیری گئی سطح سے گزرتی برقی رو میں I_m کا اضافہ کرتا ہے لہٰذا تمام ہم صف جفت قطب مل کر

$$\mathrm{d}I_m=nI_m\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.26}$$

اضافہ پیدا کرتے ہیں۔پورے بند راہ کے گرد چلتے ہوئے یوں کل اضافہ

$$I_m=\oint\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.27}$$

ہو گا۔ 2470

مندرجہ بالا مساوات ایمپیئر کے دوری قانون کی مساوات کے ساتھ قریبی مشابہت رکھتا ہے۔یوں $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{H}$ کے تعلق پر نظر ثانی کرتے ہوئے یوں بیان کیا جا سکتا ہے کہ یہ خالی خلاء کے علاوہ دیگر اشیاء میں بھی کار آمد ہو۔ہمارا موجودہ تبصرہ بیرونی میدان $\boldsymbol{B}$ میں جفت قطب پر قوت اور مروڑ پر رہا ہے۔آئیں $\boldsymbol{B}$ کو ہی بنیادی متغیرہ تصور کرتے ہوئے $\boldsymbol{H}$ کی بہتر تعریف حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر ایمپیئر کے دوری قانون کو آزاد برقی رو I اور مقید برقی رو I_m کے مجموعے $I_{\text{کل}}$ کی صورت

$$\oint\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=I_{\text{کل}} \tag{8.28}$$

[22] magnetization

میں لکھتے ہیں جہاں

$$I_{\text{کل}} = I + I_m \tag{8.29}$$

کے برابر ہے۔ مندرجہ بالا تین مساوات سے

$$I = I_{\text{کل}} - I_m = \oint \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.30}$$

حاصل ہوتا ہے۔ قوسین میں بند حصے کو $\boldsymbol{H}$ کی بہتر تعریف لیتے ہیں یعنی

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \tag{8.31}$$

جسے یوں

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} \right) \tag{8.32}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ خالی خلاء میں $\boldsymbol{M}$ صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے خالی خلاء میں $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ ہی حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 8.30 میں $\boldsymbol{H}$ کی نئی تعریف پر کرنے سے ایمپیئر کے دوری قانون کو آزاد برقی رو کی صورت

$$I = \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.33}$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ 2471

مختلف اقسام کے برقی رو کے لئے

$$\begin{aligned} I_m &= \oint_S \boldsymbol{J}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ I_{\text{کل}} &= \oint_S \boldsymbol{J}_{\text{کل}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ I &= \oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں جن سے بذریعہ مسئلہ سٹوکس مساوات 8.27، مساوات 8.33 اور مساوات 8.28 کے گردش

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{J}_m \\ \nabla \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} &= \boldsymbol{J}_{\text{کل}} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} \end{aligned} \tag{8.34}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ ہمیں یہاں سے آگے مساوات 8.33 اور مساوات 8.34 سے غرض رہے گا۔ یہ دونوں مساوات آزاد برقی رو کے تعلق پیش کرتے ہیں۔ 2472

مساوات 8.32 کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$، مقناطیسی میدان کی شدت $\boldsymbol{H}$ اور مقناطیسیت $\boldsymbol{M}$ کے تعلق کو بیان کرتی ہے۔ خطی[23] اور غیر سمتی خاصیت[24] کے اشیاء میں مقناطیسیت اور میدان کے شدت کا خطی تعلق

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{8.35}$$

---

[23] linear
[24] isotropic

پایا جاتا ہے جہاں χ_m کو مقناطیسی اثر پذیری[25] کہا جاتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \chi_m \boldsymbol{H}\right) \\ &= \mu_0 (1 + \chi_m) \boldsymbol{H} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ قوسین میں بند حصے کو جزوی مقناطیسی مستقل[26] پکارا اور μ_R سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$\mu_R = 1 + \chi_m \tag{8.36}$$

یوں

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_R \boldsymbol{H}$$

یا

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{8.37}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں μ

$$\mu = \mu_0 \mu_R \tag{8.38}$$

مقناطیسی مستقل[27] پکارا جاتا ہے۔ جزوی مقناطیسی مستقل μ_R کے استعمال سے بایوٹ سیوارٹ کا قانون اور ایمپیئر کے دوری قانون کو خالی خلاء کے علاوہ ان تمام اشیاء میں بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جو خطی اور غیر سمتی خاصیت رکھتے ہوں۔ ایسے اشیاء مساوات 8.35 پر پورا اترتے ہیں۔

فولادی مقناطیسی اشیاء کے μ_R کی قیمت 10 تا 100 000 پائی جاتی ہے۔

سمتی خاصیت[28] کے اشیاء میں $\boldsymbol{H}$ کا ہر کارتیسی جزو $\boldsymbol{B}$ کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہٰذا ان کا تعلق تناوی شکل

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z \\ B_y &= \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z \\ B_z &= \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z \end{aligned} \tag{8.39}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔ یہ مساوات صفحہ 145 پر دیے مساوات 5.40 کی طرح ہے۔ یوں سمتی خاصیت کے اشیاء میں $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ کے تعلق میں μ تناوی مستقل ہے۔ مساوات $\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$ اب بھی درست ہے اگرچہ $\boldsymbol{B}$، $\boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{M}$ عموماً غیر متوازی ہوں گے۔

مقناطیسی اثر پذیری کی بات کرتے ہوئے خطی تعلق تصور کیا گیا ہے۔ حقیقت میں ایسا خطی تعلق صرف غیر مقناطیسی اشیاء میں ہی پایا جاتا ہے۔

8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط

ہم موصل اور ذو برق کے سرحدی شرائط دیکھ چکے ہیں۔ انہیں دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ بالکل انہیں کی طرح شکل 8.8 کی مدد سے مقناطیسی سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں جہاں دو مقناطیسی اشیاء کا سرحد دکھایا گیا ہے جن کے مقناطیسی مستقل μ_1 اور μ_2 ہیں۔ سرحد پر چھوٹے نلکی ڈبے کی لمبائی کم سے کم کرتے ہوئے گاؤس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

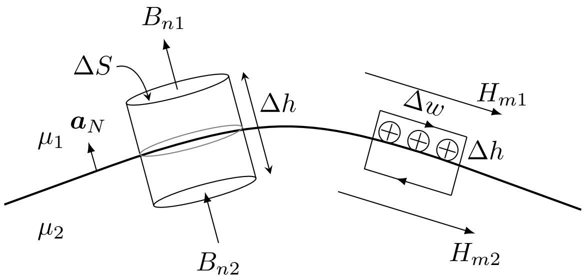
---

[25] magnetic susceptibility

[26] relative magnetic constant, relative permeability

[27] magnetic constant, permeability

[28] anisotropic



شکل 8.8: مقناطیسی سرحدی شرائط۔

کے اطلاق سے

$$B_{n1}\Delta S - B_{n2}\Delta S = 0$$

یعنی

$$B_{n2} = B_{n1} \tag{8.40}$$

یا

$$H_{n2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n1} \tag{8.41}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں عمودی $\boldsymbol{B}$ سرحد پر بلا جوڑ ہے جبکہ عمودی $\boldsymbol{H}$ سرحد پر $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ کی شرح سے جوڑ دار ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات کو یوں

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0 \tag{8.42}$$

$$\boldsymbol{a}_N \cdot \left(\boldsymbol{H}_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \boldsymbol{H}_1 \right) = 0 \tag{8.43}$$

2480 بھی لکھا جا سکتا ہے۔

سرحد پر عمودی $\boldsymbol{M}$ کا تعلق سرحد پر عمودی $\boldsymbol{H}$ کے تعلق سے حاصل ہوتا ہے۔خطی خاصیت کے مقناطیسی اشیاء کے لئے یوں

$$M_{n2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} \frac{\mu_1}{\mu_2} M_{n1} \tag{8.44}$$

2481 لکھا جا سکتا ہے۔

سرحد پر انتہائی کم موٹائی کے خطے میں کثافت برقی رو K تصور کرتے ہوئے کثافت کے عمودی ΔL چوڑائی پر برقی رو $I_{\Delta L} = K\Delta L$ لکھی جا سکتی ہے۔یوں سرحد پر متوازی اجزاء کا شرط شکل میں مستطیل راہ پر ایمپیئر کے دوری قانون

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

کے اطلاق سے

$$H_{m1}\Delta w - H_{m2}\Delta w = K_\perp \Delta w$$

یعنی

$$H_{m1} - H_{m2} = K_\perp \tag{8.45}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $K_\perp$ سے مراد K کا وہ حصہ ہے جو H_{m1} اور H_{m2} کے عمودی ہے۔ سمتی ضرب کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات کو

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{K}_\perp \tag{8.46}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ سرحد پر عمودی اکائی سمتیہ ہے۔ سرحد کے متوازی $\boldsymbol{B}$ کے لئے یوں

$$\frac{B_{m1}}{\mu_1} - \frac{B_{m2}}{\mu_2} = K_\perp \tag{8.47}$$

یا

$$\boldsymbol{a}_N \times \left(\frac{B_{m1}}{\mu_1} - \frac{B_{m2}}{\mu_2}\right) = \boldsymbol{K}_\perp \tag{8.48}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح خطی خاصیت کے اشیاء کے لئے سرحد کے متوازی $\boldsymbol{M}$ کے لئے

$$M_{m2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} M_{m1} - \chi_{m2} K_\perp \tag{8.49}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ سرحد پر صفر کثافت برقی رو کی صورت میں مندرجہ بالا تین مساوات سادہ صورت اختیار کر لیتے ہیں۔ دونوں اشیاء غیر موصل ہونے کی صورت میں سرحد پر کثافت برقی رو صفر ہی ہوتی ہے۔

8.8 مقناطیسی دور

یک سمتی برقی ادوار حل کرنے سے آپ بخوبی آگاہ ہوں گے۔ کئی مقناطیسی مسائل بالکل انہیں کی طرح حل ہوتے ہیں۔ برقی مشین مثلاً موٹر اور ٹرانسفارمر کے کارکردگی پر غور کرتے وقت انہیں مقناطیسی ادوار سمجھا جاتا ہے۔ میری کتاب "برقی آلات" میں اس ترکیب پر پورا باب ہے اور پوری کتاب میں اسی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے مختلف برقی مشین پر غور کیا گیا ہے۔ آئیں اس ترکیب کو دیکھیں۔

سب سے پہلے ان برقی اور مقناطیسی مساوات کو پاس پاس لکھتے ہیں جن کی مدد سے مقناطیسی ادوار کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ برقی دباو اور برقی میدان کی شدت کا تعلق

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{8.50}$$

ہے۔ غیر سمتی مقناطیسی دباو اور مقناطیسی میدان کی شدت کے تعلق

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m \tag{8.51}$$

سے بھی آپ بخوبی واقف ہیں۔ منبع برقی دباو کو محرک برقی دباو پکارا جاتا ہے۔ اسی مشابہت کی بنا پر غیر مقناطیسی دباو کو محرک مقناطیسی دباو پکارا جائے گا۔ متحرک مقناطیسی دباو کی اکائی ایمپیئر ہے۔ حقیقت میں عموماً متعدد چکر کے لچھے کو بطور متحرک مقناطیسی دباو استعمال کیا جاتا ہے اور یوں اس کی اکائی ایمپیئر-چکر[29] لی جاتی ہے۔ یاد رہے کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو صرف اس خطے میں معنی رکھتا ہے جہاں برقی رو موجود نہ ہو۔

دو نقطوں کے درمیان برقی دباو کے فرق کو

$$V_{AB} = -\int_B^A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.52}$$

[29] ampere-turns

لکھا جاتا ہے۔ بالکل اسی طرح دو نقطوں کے درمیان مقناطیسی دباو کے فرق کو

$$V_{mAB} = -\int_B^A \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.53}$$

لکھا جاتا ہے۔ صفحہ 234 پر مساوات 7.80 میں بتلایا گیا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو کے حصول کے دوران مندرجہ بالا تکمل میں $\phi = \pi$ پر سے نہیں گزرا جائے گا۔ اس حقیقت کا خیال رکھنا ضروری ہے۔ 2492

برقی ادوار میں اوہم کے قانون کی نقطہ شکل

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{8.54}$$

سے کون خبردار نہیں ہے۔ یہ مساوات کثافت برقی رو اور برقی میدان کے شدت کا تعلق بیان کرتی ہے۔ مقناطیسی ادوار میں اس کا مقابل

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{8.55}$$

ہے جو کثافت مقناطیسی بہاو اور مقناطیسی میدان کے شدت کا تعلق پیش کرتی ہے۔ 2493

کل برقی رو بذریعہ سطحی تکمل

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.56}$$

حاصل ہوتی ہے۔ کل مقناطیسی بہاو بھی ایسے ہی تکمل سے حاصل ہو گا لہٰذا

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.57}$$

لکھا جائے گا۔ یوں برقی ادوار میں I اور مقناطیسی ادوار میں Φ اہمیت کے حامل ہیں۔ 2494

برقی ادوار میں برقی دباو اور برقی رو کی شرح کو برقی مزاحمت پکارا اور R سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$V = IR \tag{8.58}$$

ہم بالکل اسی طرح متحرک مقناطیسی دباو اور مقناطیسی بہاو کی شرح کو ہچکچاہٹ کا نام دیتے ہیں جسے $\Re$ سے ظاہر کیا جائے گا لہٰذا مقناطیس ادوار کے لئے

$$V_m = \Phi \Re \tag{8.59}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہچکچاہٹ کی اکائی ایمپیئر۔چکر فی ویبر $(\mathrm{A \cdot t/Wb})$ ہے۔ 2495

خطی اور غیر سمتی خاصیت کے یکساں مادہ جس کی موصلیت σ ہو سے بنایا گیا برقی مزاحمت

$$R = \frac{d}{\sigma S} \tag{8.60}$$

کے برابر ہے جہاں مزاحمت کی لمبائی d اور اس کا رقبہ عمودی تراش پورے لمبائی پر یکساں S کے برابر ہے۔ اگر خطی اور غیر سمتی خاصیت کے یکساں مادہ سے ہچکچاہٹ بنایا جائے تو اس کی قیمت

$$\Re = \frac{d}{\mu S} \tag{8.61}$$

ہو گی جہاں ہچکچاہٹ کی لمبائی d اور اس کا رقبہ عمودی تراش پورے لمبائی پر یکساں S کے برابر ہے۔ حقیقت میں ہوا کے علاوہ ایسا کوئی مادہ نہیں پایا جاتا جس سے اٹل قیمت کی ہچکچاہٹ بنائی جا سکے۔

مثال 8.3: ایک سلاخ جس کی لمبائی $15\,\mathrm{cm}$ اور رداس $1\,\mathrm{mm}$ ہے کی موصلیت $1200\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے پر $220\,\mathrm{V}$ برقی دباو لاگو کی جاتی ہے۔ سلاخ کی مزاحمت اور اس میں برقی رو حاصل کریں۔ سلاخ میں کثافت برقی رو بھی حاصل کریں۔

حل: مزاحمت

$$R = \frac{d}{\sigma A} = \frac{0.15}{7 \times 10^4 \times \pi \times 0.001^2} = 39.8\,\Omega$$

اور برقی رو

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{39.8} = 5.5\,\mathrm{A}$$

اور یوں کثافت برقی رو ہو گا

$$J = \frac{I}{A} = \frac{5.5}{\pi \times 0.001^2} = 1.75\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$$

مثال 8.4: ایک سلاخ کی لمبائی $15\,\mathrm{cm}$ اور رداس $2\,\mathrm{cm}$ ہے کی جزو مقناطیسی مستقل 1000 ہے۔ اس پر 100 چکر کا لچھا جس میں $0.5\,\mathrm{A}$ برقی رو ہو مقناطیسی دباو لاگو کرتا ہے۔ سلاخ کی ہچکچاہٹ اور اس میں مقناطیسی بہاو حاصل کریں۔ سلاخ میں کثافت مقناطیسی بہاو بھی حاصل کریں۔

حل: ہچکچاہٹ

$$\Re = \frac{d}{\mu_R \mu_0 A} = \frac{0.15}{1000 \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times \pi \times 0.02^2} = 94\,988\,\mathrm{A \cdot t/Wb}$$

اور مقناطیسی بہاو

$$\Phi = \frac{V_m}{\Re} = \frac{100 \times 0.5}{94988} = 0.53\,\mathrm{mWb}$$

اور یوں کثافت مقناطیسی بہاو ہو گی

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0.00053}{\pi \times 0.02^2} = 0.42\,\mathrm{T}$$

8.9 مقناطیسی مخفی توانائی

ساکن برقی میدان پر غور کے دوران ہم نے نقطہ چارج پر قوت کے تجرباتی نتائج سے کولومب کا قانون اخذ کیا۔اس قانون کو استعمال کرتے ہوئے مختلف نقطہ چارج کو لامحدود فاصلے سے مختلف اختتامی مقامات پر رکھنے کی خاطر کل درکار توانائی حاصل کی گئی۔یہی ساکن برقی میدان کی مخفی توانائی تھی۔اس مخفی توانائی کی عمومی مساوات

$$W_{\text{برقی}} = \frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}h \tag{8.62}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ کا تعلق راست تناسب تصور کیا گیا ہے۔

یہاں خیال آتا ہے کہ مقناطیسی میدان کی مخفی توانائی بھی اسی طرز پر حاصل کی جاسکتی ہے جیسے برقی میدان کی مخفی توانائی حاصل کی گئی تھی،یعنی،ایک برقی رو گزارتے تار کے قریب دوسرے برقی رو گزارتے تار کو قریب لاتے ہوئے درکار توانائی معلوم کر کے۔حقیقت میں معاملہ اتنا سادہ نہیں ہے۔جیسے کہ اگلے باب میں بتلایا جائے گا،مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے حصے میں برقی دباو پیدا ہوتا ہے جس میں معاملہ خاصہ تبدیل ہو جاتا ہے۔

مقناطیسی میدان کی مخفی توانائی اگلے باب میں پوئنٹنگ سمتیہ[30] سے حاصل کی جائے گی۔یہاں مقناطیسی مخفی توانائی کی مساوات صرف پیش کرتے ہیں

$$W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}h \tag{8.63}$$

جو شکل سے برقی مخفی توانائی کے مساوات کے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔اس میں $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ پر کرنے سے

$$W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2}\int_h \mu H^2\,\mathrm{d}h \tag{8.64}$$

اور

$$W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2}\int_h \frac{B^2}{\mu}\,\mathrm{d}h \tag{8.65}$$

بھی حاصل ہوتے ہیں۔

برقی مخفی توانائی کی طرح یہاں بھی یہ بتلانا کہ مخفی توانائی در حقیقت کہاں پر ہے ناممکن ثابت ہوتا ہے البتہ حساب و کتاب آسان بنانے کی خاطر ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہ توانائی پورے حجم میں بطور کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$ پائی جاتی ہے جسے جاول فی مربع میٹر $\mathrm{J/m^3}$ میں ناپا جائے گا۔

8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ

برقی ادوار میں مزاحمت، کپیسٹر اور امالہ کردار ادا کرتے ہیں۔مزاحمت اور کپیسٹر پر ہم بات کر چکے ہیں۔برقی دباو اور برقی رو کی شرح کو مزاحمت کہا گیا۔ہم نے دیکھا کہ مزاحمت کے قیمت کا دارو مدار مزاحمت کے لمبائی، رقبہ عمودی تراش اور موصلیت پر ہے۔اسی طرح دو چادروں میں سے کسی ایک پر چارج کی حتمی قیمت اور ان چادروں کے درمیان برقی دباو کی شرح کو کپیسٹنس کہا گیا۔ہم نے دیکھا کہ کپیسٹر کے قیمت کا دارو مدار کپیسٹر کے چادروں کے رقبے، ان چادروں کے درمیان فاصلے اور چادروں کے درمیان مادے کی برقی مستقل پر ہے۔یوں مزاحمت اور کپیسٹر کے قیمت ان کے شکل، جسامت اور مادے کے مستقل پر ہے۔اس حصے میں ہم امالہ L پر غور کریں گے جس کی اکائی ہینری[31] H ہے۔نیچے کئی مساوات میں امالہ اور فاصلہ دونوں کے لئے ایک ہی علامت یعنی L استعمال کیا گیا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ متن سے ان کا فرق کرنا ممکن ہو گا۔ہم دیکھیں گے کہ اس کے قیمت کا دارو مدار امالہ کی شکل، جسامت اور مقناطیسی مستقل پر ہے۔

---

[30] Poynting vector
[31] Henry

امالہ سمجھنے کی خاطر ارتباط بہاو[32] کا ذکر ضروری ہے۔ تصور کریں کہ N چکر لا لچھا جس میں I برقی رو گزر رہا ہے کل Φ مقناطیسی بہاو پیدا کرتا ہے۔ تصور کریں کہ Φ ان تمام N چکر سے گزرتی ہے۔ یوں تمام کا تمام مقناطیسی بہاو ہر چکر سے گزرتی ہے۔ یوں پہلے چکر سے Φ بہاو گزرتی ہے، دوسرے چکر سے بھی Φ بہاو گزرتی ہے اور اسی طرح بقایا ہر چکر سے بھی اتنی ہی بہاو گزرتی ہے۔ ارتباط بہاو سے مراد $N\Phi$ ہے یعنی تمام چکر سے گزرتی بہاو کا مجموعہ۔

ارتباط بہاو اور برقی رو کی شرح کو امالہ کہا جاتا ہے۔ اگر ارتباط بہاو اسی برقی رو سے پیدا ہو تب ان کی شرح کو خود امالہ[33] کہتے ہیں جسے عموماً چھوٹا کر کے صرف امالہ پکارا جاتا ہے۔ اس کے برعکس اگر برقی رو ایک تار میں ہو اور ارتباط بہاو دوسری تار کی ہو تب ان کے شرح کو مشترکہ امالہ[34] کہتے ہیں۔ اس حصے میں خود امالہ پر ہی غور کیا جائے گا۔ اگلے حصے میں مشترکہ امالہ پر غور کیا جائے گا۔

$$L = \frac{N\Phi}{I} \tag{8.66}$$

اس مساوات میں تصور کیا گیا ہے کہ پورا مقناطیسی بہاو تمام چکر سے گزرتی ہے۔ امالہ کی یہ تعریف صفر خطی مقناطیسی اشیاء کے لئے معنی رکھتی ہے۔ خطی مقناطیسی اشیاء سے مراد ایسے مقناطیسی اشیاء ہیں جن میں مقناطیسی بہاو اور برقی رو راست تناسب کا تعلق رکھتے ہیں۔ فولادی مقناطیسی اشیاء میں مقناطیسی چال کی بنا پر امالہ کی کوئی ایک تعریف تمام موقعوں کے لئے کار آمد ثابت نہیں ہوتا۔ ہم خطی مقناطیسی اشیاء تک ہی بحث کو محدود رکھیں گے۔

آئیں ہم محوری تار کے اکائی لمبائی کی امالہ حاصل کریں۔ صفحہ 205 پر مساوات 7.13

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

ہم محوری تار میں تاروں کے درمیانی خطے میں مقناطیسی شدت دیتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے اس خطے میں z_0 لمبائی پر کل مقناطیسی بہاو

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_S B_\phi \, \mathrm{d}S \\
&= \int_0^{z_0} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu I \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}z}{2\pi\rho} \\
&= \frac{\mu I z_0}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}
\end{aligned}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہ مقناطیسی بہاو دونوں تاروں کے درمیانے خطے میں اندرونی تار کے گرد گھومتی ہے لہٰذا تکمل میں کسی بھی زاویہ پر z_0 لمبی ρ_1 تا ρ_2 رداسی سطح لی جا سکتی ہے۔ یوں اکائی لمبائی پر ہم محوری تار کی امالہ

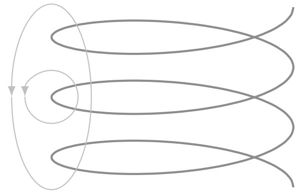
$$L = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{8.67}$$

ہو گی۔ یہاں $N = 1$ یعنی ایک ہی چکر ہے اور تمام کا تمام مقناطیسی بہاو پورے برقی رو کے گرد چکر کاٹتی ہے۔

اب تصور کریں کہ پیچدار لچھے کی امالہ درکار ہو جسے شکل 8.9 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسے لچھے کے پہلے چکر کا پورا بہاو پہلے چکر سے گزرتی ہے البتہ اس کا کچھ ہی حصہ دوسرے یا تیسرے چکر سے گزرتی ہے۔ یہی کچھ بقایا چکر کے بارے میں بھی کہا جا سکتا ہے۔ ایسی صورت میں لچھے کی ارتباط بہاو حاصل کرنے کی خاطر ہر چکر سے گزرتی انفرادی بہاو لیتے ہوئے تمام کا مجموعہ حاصل کیا جائے گا یعنی

$$\text{ارتباط بہاو} = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_N = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i$$

[32] flux linkage
[33] self inductance
[34] mutual inductance



شکل 8.9: متعدد چکر کے لچھے میں ہر چکر سے گزرتی مقناطیسی بہاو مختلف ہو سکتی ہے۔

آئیں اب امالہ کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

کسی بھی بند راہ پر یک سمتی برقی رو I گزرنے سے کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

پیدا ہوتی ہے جہاں $\boldsymbol{A}$ سمتی مقناطیسی دباو ہے جسے

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{R}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ایسی بند راہ سطح S کو گھیرتی ہے جس میں سے گزرتی کل مقناطیسی بہاو Φ کو تکمل

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس تکمل میں $\boldsymbol{B}$ پر کرنے سے

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مسئلہ بایوٹ سیوارٹ کی مدد سے اسے

$$\Phi = \oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں بند تکمل سطح کے سرحد یعنی برقی رو گزارتے بند راہ پر حاصل کیا جائے گا۔ اس مساوات میں $\boldsymbol{A}$ پر کرنے سے

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں امالہ کی عمومی مساوات

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.68}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہاں تکمل کے اندر L فاصلے کو ظاہر کرتی ہے جبکہ مساوات کے بائیں ہاتھ یہی علامت امالہ کو ظاہر کرتی ہے۔

امالہ کی مساوات سے ظاہر ہے کہ امالہ کی قیمت کا دار و مدار صرف اور صرف تار یا لچھے کی شکل و جسامت اور مقناطیسی مستقل پر منحصر ہے۔

امالہ کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر سطحی تکمل لیا گیا۔ ایک چکر کے بند راہ جس سطح کو گھیرتی ہے، اس کی شکل ذہن میں آسانی سے بن جاتی ہے البتہ پیچدار لچھا جس سطح کو گھیرتا ہے اس کی شکل ذہن میں ذرہ مشکل[35] سے بنتی ہے۔ سطحی تکمل لیتے وقت ایسی تمام ممکنہ سطح استعمال کی جا سکتی ہیں جن کا سرحد پیچدار لچھے کی تار ہو۔

[35] آپ لچھے کے محور پر سلاخ تصور کرتے ہوئے اس کے گرد گول گھومتی اور اوپر جاتی سطح تصور کر سکتے ہیں۔

برقی رو گزارتے تار کی رداس صفر کرنے سے بایوٹ سیوارٹ کے قانون کے تحت لا محدود کثافت مقناطیسی بہاو حاصل ہو گی جس سے لا محدود توانائی اور لا محدود امالہ حاصل ہوتا ہے۔ حقیقت میں قابل استعمال جوابات حاصل کرنے کی خاطر تار کے رداس چھوٹا ضرور لیکن صفر کبھی تصور نہیں کیا جاتا۔

کسی بھی برقی رو گزارتے تار کے اندر بھی زاویائی مقناطیسی بہاو پایا جاتا ہے۔ تار کے محور کے قریب گھومتی اندرونی بہاو کم برقی رو کو گھیرتی ہے جبکہ محور سے دور زاویائی اندرونی بہاو زیادہ برقی رو گھیرتی ہے۔ جیسا آپ اگلے بابوں میں پڑھیں گے، زیادہ تعدد پر تار کے بیرونی سطح کے قریب زیادہ برقی رو گزرتی ہے لہٰذا زیادہ تعدد پر تار کی اندرونی امالہ کا کردار قابل نظر انداز ہوتا ہے البتہ کم تعدد پر اس کا حساب رکھنا ضروری ہوتا ہے۔

مثال 8.5: لا محدود لمبائی کے تار کی اندرونی امالہ حاصل کریں۔

حل: رداس ρ_1 کے تار کو z محدد پر تصور کرتے ہیں۔ تار میں کثافت برقی رو یکساں تصور کرتے ہوئے $J = \frac{I}{\pi\rho_1^2}$ حاصل ہوتا ہے۔ رداس ρ پر گول دائرہ $\frac{I\rho^2}{\rho_1^2}$ برقی رو گھیرتا ہے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اس دائرے پر زاویائی شدت $H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi\rho_1^2}$ ہو گی۔ رداس ρ پر $\mathrm{d}\rho$ چوڑائی اور z_0 لمبائی کی مستطیل سطح سے

$$\mathrm{d}\Phi = B_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho = \mu H_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho$$

بہاو گزرے گی۔ اگر تار کو متعدد باریک متوازی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جائے تو مندرجہ بالا تفرقی بہاو صفر ρ کے اندر تاروں کو گھیرتی ہے جو ایک چکر کا صرف $\frac{\rho^2}{\rho_1^2}$ حصہ ہیں لہٰذا یہ تفرقی بہاو صرف

$$\text{تفرقی ارتباط بہاو} = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}\,\mathrm{d}\Phi = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}\mu H_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho = \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho_1^4}\rho^3 \,\mathrm{d}\rho$$

دیتی ہے۔ اگر تفرقی بہاو تمام فرضی باریک تاروں کو گھیرتی تب یہ ایک چکر شمار ہوتا۔ یوں تکمل سے اندرونی ارتباط بہاو

$$\text{ارتباط بہاو} = \int_0^{\rho_1} \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho_1^4}\rho^3 \,\mathrm{d}\rho = \frac{\mu I z_0}{8\pi}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے اندرونی امالہ

$$L_{\text{اندرونی}} = \frac{\mu z_0}{8\pi}$$

یا فی میٹر امالہ

$$L_{\text{اندرونی فی میٹر}} = \frac{\mu}{8\pi} \tag{8.69}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مشق 8.2: صفحہ 205 میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے۔ بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کریں۔

جوابات: تار کی لمبائی z_0 لیتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
I_{\text{گھیرا}} &= \left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right) I \\
H_\phi &= \frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right) \\
\mathrm{d}\Phi &= \mu H_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ تفرقی بہاو ایک چکر کے $\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}$ حصے کے گرد گھومتی ہے لہٰذا تفرقی ارتباط بہاو

$$
\text{تفرقی ارتباط بہاو} = \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right)^2 \mathrm{d}\rho
$$

اور یوں $z_0 = 1$ پر کرتے ہوئے فی میٹر امالہ

$$
L_{\text{بیرونی تار}} = \frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)^2}\left(\rho_3^4\ln\frac{\rho_3}{\rho_2}-\frac{\rho_2^4}{4}-\frac{3\rho_3^4}{4}+\rho_2^2\rho_3^2\right) \tag{8.70}
$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 8.69 ہی ہم محوری تار کے اندرونی تار کی امالہ دیتا ہے۔ یوں کم تعدد پر مساوات 8.67، مساوات 8.69 اور مساوات 8.70 کا مجموعہ

$$
L = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}+\frac{\mu}{8\pi}+\frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)^2}\left(\rho_3^4\ln\frac{\rho_3}{\rho_2}-\frac{\rho_2^4}{4}-\frac{3\rho_3^4}{4}+\rho_2^2\rho_3^2\right) \tag{8.71}
$$

فی میٹر ہم محوری تار کا کل امالہ ہوگا۔ جیسے اگلے بابوں میں بتلایا جائے گا، بلند تعدد پر تار میں کثافت برقی رو یکساں نہیں رہتی جس کی وجہ سے تار کی اندرونی امالہ قابل نظر انداز ہو جاتی ہے۔ یوں بلند تعدد پر مساوات 8.67 ہی فی میٹر تار کی امالہ دے گا۔

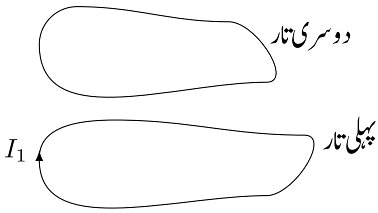
آپ امالہ کے مخفی توانائی

$$
W = \frac{LI^2}{2} \tag{8.72}
$$

سے بخوبی واقف ہیں جہاں مخفی توانائی مساوات 8.63، مساوات 8.64 یا مساوات 8.65 سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے امالہ یوں بھی حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
L = \frac{2W}{I^2} &= \frac{1}{I^2}\int_h \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}h \\
&= \frac{1}{I^2}\int_h \mu H^2\,\mathrm{d}h \\
&= \frac{1}{I^2}\int_h \frac{B^2}{\mu}\,\mathrm{d}h
\end{aligned} \tag{8.73}
$$

آپ سے مندرجہ بالا مساوات استعمال کرتے ہوئے، سوال 8.2 میں لامحدود لمبائی کے سیدھی تار کی امالہ اور سوال 8.3 میں ہم محوری تار کے بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔



شکل 8.10: مشترکہ امالہ۔

2551 8.11 مشترکہ امالہ

شکل 8.10 میں دو تار دکھائے گئے ہیں۔ آئیں پہلی تار میں برقی رو I سے پیدا مقناطیسی بہاو کا وہ حصہ حاصل کریں جو دوسرے تار سے گزرتا ہے۔ ان معلومات سے دونوں تاروں کے مابین **مشترکہ امالہ** حاصل کیا جائے گا۔ خود امالہ حاصل کرنے کے طرز پر دوسرے تار سے گزرتی بہاو کو

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اندرونی تکمل پہلی تار پر ہے اور یہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان دیتا ہے جبکہ دوسری تکمل دوسرے تار پر ہے جس میں سے گزرتی بہاو کا حصول درکار ہے۔ مشترکہ امالہ M_{21} کی تعریف

$$M_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1} \tag{8.74}$$

ہے جس سے

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \tag{8.75}$$

2552 حاصل ہوتا ہے۔

اگر دوسری تار میں برقی رو لی جاتی اور پہلی سے گزرتی بہاو حاصل کی جاتی تب

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \tag{8.76}$$

حاصل ہوتا۔ مندرجہ بالا دو درجی تکمل میں اندرونی تکمل دوسری راہ پر ہے جبکہ بیرونی تکمل پہلی راہ پر ہے۔ تکمل لینے کی ترتیب بدلتے ہوئے اگر پہلا تکمل پہلی راہ پر لیا جائے اور بعد میں دوسری راہ پر تکمل لیا جائے تو تکمل کی قیمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی لیکن ایسا کرنے سے ہمیں ہو بہو مساوات 8.75 ملتا ہے لہٰذا

$$M_{21} = M_{12} \tag{8.77}$$

2553 حاصل ہوتا ہے۔ یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کسی بھی دو لچھوں کے درمیان مشترکہ امالہ دونوں جانب سے برابر حاصل ہوتی ہے۔

2554 سوالات

2555 سوال 8.1: صفحہ 205 میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے۔ تصور کریں کہ اس ہم محوری تار کے اندرونی تار میں برقی رو صفر کے برابر ہے جبکہ بیرونی تار میں برقی رو I کے
2556 برابر ہے۔ بیرونی تار کی فی میٹر اندرونی امالہ مثال 8.2 کی طرز پر حاصل کریں۔

جواب: $\frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)^2}\left[\rho_2^4 \ln\frac{\rho_3}{\rho_2}+\frac{\rho_3^4-\rho_2^4}{4}-\rho_2^2\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)\right]$

سوال 8.2: لامحدود لمبائی کے سیدھی تار کی امالہ مساوات 8.73 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 8.3: صفحہ 269 پر مثال 8.2 میں ہم محوری تار کے بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کی گئی۔اسی کو دوبارہ مساوات 8.73 کی مدد سے حاصل کریں۔

جواب: بیرونی تار میں $H=\frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right)$ استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔

باب 16

سوالات

سوال 16.1: میدان $\boldsymbol{E} = 1.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ میں الیکٹران حرکت کرتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر الیکٹران نقطہ $(0, 0, 0)$ پر پایا جاتا ہے جبکہ اس کی سمتی رفتار $\boldsymbol{v} = 3 \times 10^{5}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے۔ الیکٹران کا چارج $-1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ اور اس کی کمیت $3.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ ہے۔ نیوٹن کے قوانین حرکت سے تفرقی مساوات لکھ کر اسے حل کرتے ہوئے لمحہ $t = 150\,\mathrm{ns}$ پر الیکٹران کی سمتی رفتار، مقام اور حرکی توانائی دریافت کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{v} = 300\,000\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 116\,129\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ، $(0.045, 0, -3.48)$ ، $1.63 \times 10^{-20}\,\mathrm{J}$

سوال 16.2: مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B} = 0.3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 0.2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 0.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\mathrm{T}$ میں لمحہ $t = 0$ پر الیکٹران کی سمتی رفتار $\boldsymbol{v} = 10^{6}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے۔ الیکٹران پر قوت دریافت کریں۔ ایسا برقی میدان حاصل کریں جس کی موجودگی میں مقناطیسی اور برقی میدان مل کر اس الیکٹران پر صفر قوت پیدا کرتے ہیں۔

جواب: $\boldsymbol{F} = -32\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 48\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\mathrm{fN}$ ، $\boldsymbol{E} = -200\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 300\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 16.3: میدان $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\mathrm{T}$ اور $\boldsymbol{E} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ میں چارج $1.2\,\mu\mathrm{C}$ حرکت کر رہا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر اس کی رفتار $\boldsymbol{v} = 10\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 30\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 20\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ ہے۔ یہ چارج $5\,\mu\mathrm{g}$ کے کمیت پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر چارج کی اسراع حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{a} = -16.8\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\frac{\mathrm{Mm}}{\mathrm{s}^2}$

سوال 16.4: محدد z پر پڑی لا محدود لمبائی کے تار میں $5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\mathrm{A}$ برقی رو گزر رہی ہے۔ اس کے قریب سطح $x = 0$ پر موصل تار $N_1(0, 1, 0)$ ، $N_2(0, 4, 0)$ ، $N_3(0, 4, 2)$ اور $N_4(0, 1, 2)$ نقطوں کو جوڑ کر مستطیل بناتی ہے جس میں N_1 سے N_2 جانب $2\,\mathrm{A}$ برقی رو چکر لگا رہی ہے۔ چکور کے چاروں اطراف پر قوت دریافت کرتے ہوئے پورے چکور پر قوت حاصل کریں۔

جوابات: تار $N_1(0, 1, 0)$ تا $N_2(0, 4, 0)$ پر قوت $2.77\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\mu\mathrm{N}$ ہے۔ گھڑی کے الٹ سمت چلتے ہوئے بقایا قوت $-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\mu\mathrm{N}$ ، $-2.77\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\mu\mathrm{N}$ اور $4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\mu\mathrm{N}$ ہیں۔ یوں مستطیل پر کل قوت $3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\mu\mathrm{N}$ ہے۔

سوال 16.5: محدد z پر پڑی لا محدود لمبائی کے تار میں $10\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\mathrm{A}$ برقی رو گزر رہی ہے۔ اس کے قریب نقطہ $N_1(2, 1, 3)$ سے $N_2(5, 4, 7)$ تک سیدھی موصل تار میں N_1 سے N_2 جانب $4\,\mathrm{A}$ برقی رو گزر رہی ہے۔ چھوٹی تار پر قوت حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{F} = -6.74\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 4.49\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 8.42\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\,\mu\mathrm{N}$

سوال16.6: سطح $x = 0$ پر مقناطیسی میدان کا z جزو $B_z = \frac{200}{z^2+1}\,\mu\text{T}$ پایا جاتا ہے۔اس مقناطیسی جزو سے خطہ $1 < y < 3$ ، $-\infty < z < \infty$ میں کثافت $\boldsymbol{K} = 0.2\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ پر قوت حاصل کریں۔

جواب: $251\boldsymbol{a}_{\text{X}}\,\mu\text{N}$

سوال16.7: z محدد پر پڑی لامحدود لمبائی کے تار میں $2.2\,\text{A}$ برقی رو پائی جاتی ہے۔ سطح $y = 0$ پر خطہ $1\,\text{mm} < x < 5\,\text{mm}$ پر $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ سمت میں کل $8\,\text{A}$ برقی رو گزر رہی ہے۔اس خطے کی فی میٹر لمبائی پر مقناطیسی قوت حاصل کریں۔ محدد z پر پڑی تار پر بھی فی میٹر قوت حاصل کریں۔

جواب: $-1.4\boldsymbol{a}_{\text{X}}\,\text{mN}$ ، $1.4\boldsymbol{a}_{\text{X}}\,\text{mN}$

سوال16.8: موصل تار نقطہ $N_1(2,0,0)$ ، $N_2(5,0,0)$ ، $N_3(5,0,4)$ اور $N_4(2,0,4)$ کو جوڑ کر مستطیل بناتی ہے۔ مثبت y محدد کی جانب سے دیکھتے ہوئے، اس مستطیل میں $6\,\text{A}$ برقی رو سمت گھڑی گردش کر رہی ہے۔ الف) یکساں میدان $\boldsymbol{B} = 5\boldsymbol{a}_{\text{X}}\,\text{T}$ کی صورت میں z محدد کو محور لیتے ہوئے مروڑ حاصل کریں۔ ب) سطح $y = 0$ پر لکیر $x = 3$ کو محور لیتے ہوئے اسی یکساں میدان میں دوبارہ مروڑ حاصل کریں۔ پ) یکساں میدان کی جگہ اگر z محدد پر لامحدود لمبائی کے تار میں $\boldsymbol{a}_{\text{Z}}$ جانب $25\,\text{A}$ برقی رو میدان پیدا کرے تب محدد کے مرکز $(0,0,0)$ کو محور لیتے ہوئے مروڑ حاصل کریں۔

جوابات: $360\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\text{N m}$ ، $360\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\,\text{N m}$ ، $72\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\mu\text{N m}$

جدول 16.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیر	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	تقطیر شدہ پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹس	10^{-17}

جدول 16.2: ϵ_R and $\sigma/\omega\epsilon$

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 16.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 16.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$