1 # برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
2 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 13

مویج اور گھمکیا

اب تک ہم صرف عرضی برقی و مقناطیسی[1] TEM امواج کی بات کرتے آرہے ہیں جن میں برقی اور مقناطیسی دونوں میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔ اس باب میں ترسیلی تار پر بحث کو آگے بڑھاتے ہوئے ایسے امواج پر غور کیا جائے گا جن میں برقی یا مقناطیسی میدان سمت حرکت کی جانب بھی جزو رکھتے ہوں۔ وہ ترسیلی تار جو صرف اس طرح کے امواج کو گزار سکیں مویج[2] کہلاتے ہیں۔

دولا محدود جسامت کے مستوی سطحوں کے مویج سے بات شروع کرتے ہوئے کھوکھلے مستطیلی اور نلکی مویج تک بات بڑھائی جائے گی۔ ان مویج میں میدان کے اشکال، ان کے منقطع طول موج اور تضعیفی مستقل حاصل کئے جائیں گے۔ اس کے بعد ایک تار پر بیرونی موج اور دیگر اقسام کے مویج پر غور کیا جائے گا۔ آخر میں موصل کے بند ڈبوں میں مقید امواج پر غور کیا جائے گا۔ ان ڈبوں کو گھمکیا کہتے ہیں۔

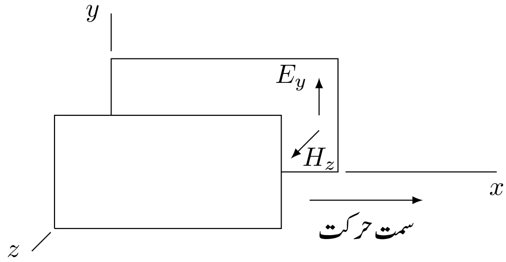
13.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ

کم تعدد پر برقی دباو، برقی رو، مزاحمت وغیرہ وہ متغیرات ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے برقی ادوار حل کئے جاتے ہیں۔ ان تعدد پر تمام مزاحمت یا رکاوٹ کو نقطہ نما تصور کیا جاتا ہے۔ یوں تار کے ایک سرے پر منبع برقی دباو لاگو کرتے ہوئے تار کے دوسرے سرے پر مزاحمت میں برقی رو حاصل کی جا سکتی ہے۔

قدر زیادہ تعدد پر انہیں حقائق کو ترسیلی تار پر لاگو کیا جا سکتا ہے۔ ایسا کرتے وقت ترسیلی تار کی مزاحمت یا امالہ تار کی لمبائی پر تقسیم شدہ تصور کرنا لازم ہے۔ ساتھ ہی ساتھ ترسیلی تار پر برقی دباو کی رفتار پر بھی نظر رکھنی ہوتی ہے۔

اب موصل کھوکھلے نلکی یا مستطیلی نالی پر مبنی نظام کی بات کرتے ہیں۔ کیا ایسی نالی برقی و مقناطیسی طاقت منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے؟ اگر ہماری معلومات برقی ادوار یا ترسیلی تار تک محدود ہوتی تب اس سوال کا جواب یہ ہے کہ ایسا ممکن نہیں ہے کیونکہ برقی طاقت کے منتقلی کے لئے دو عدد تار ضروری ہیں۔ البتہ اگر ہم شعاعوں کا علم رکھتے تب جواب ہوتا کہ ایسا ممکن ہے چونکہ شعاعیں سیدھی کھوکھلے نلکی سے گزر سکتی ہیں اور شعاعیں بلند تعدد (10^{16} Hz) کی برقی و مقناطیسی امواج ہی ہیں۔

[1] transverse electromagnetic, TEM
[2] waveguide



شکل 13.1: دو لامحدود وسعت کے متوازی موصل چادروں کا نظام۔

اصل جواب ہے کہ ایسا موج کے تعدد پر منحصر ہے۔ کم تعدد کے امواج نالی سے نہیں گزر سکتے جبکہ بلند تعدد کے امواج اس سے گزر سکتے ہیں۔ تعدد کے ان دو خطوں کے درمیان ایسی تعدد ہو گی جس سے کم تعدد نالی سے نہیں گزرے گی اور جس سے زیادہ تعدد نالی سے گزرے گی۔ اس تعدد کو پست انقطاعی تعدد[3] کہا جاتا ہے۔

کھوکھلے نالی سے برقی و مقناطیسی طاقت کی منتقلی برقی ادوار حل کرنے کے علم سے ناقابل سمجھ مسئلہ ہے۔ کھوکھلے نالی میں طاقت کی منتقلی، نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی میدان پر غور سے سمجھا جا سکتا ہے جنہیں استعمال کرتے ہوئے پوئنٹنگ سمتیہ سے موج کی طاقت حاصل ہوتی ہے۔ دراصل برقی و مقناطیسی طاقت نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی امواج سے منتقل ہوتا ہے ناکہ نالی کے موصل حصے میں۔ برقی دباو اور برقی رو اس منتقلی کے محض اضافی اثرات ہیں۔

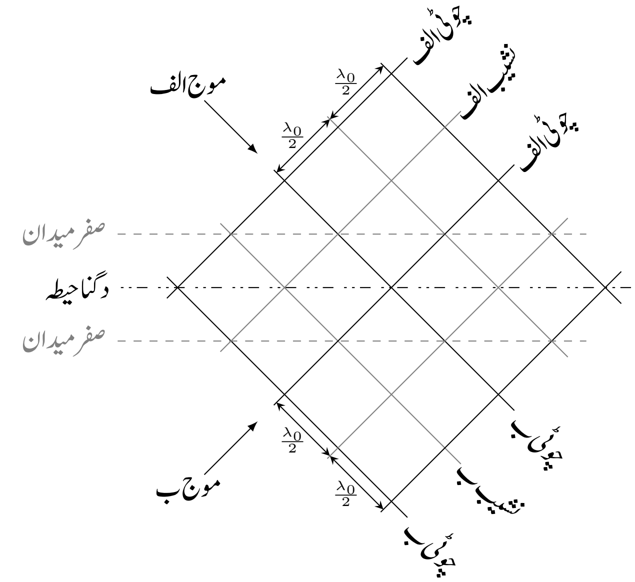
13.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج

شکل 13.1 میں دو لامحدود وسعت کے متوازی چادروں پر مبنی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے جو y سمتی عرضی برقی و مقناطیسی موج گزار سکتی ہے۔ اس تار کی خاص خاصیت یہ ہے کہ ایک مخصوص تعدد کے اوپر یہ دیگر بلند درجی انداز[4] کے امواج بھی گزار سکتی ہے۔ یوں ترسیلی تار سے شروع کرتے ہوئے مویج تک بحث کو پہنچانے کے لئے یہ بہترین مثال ہے۔

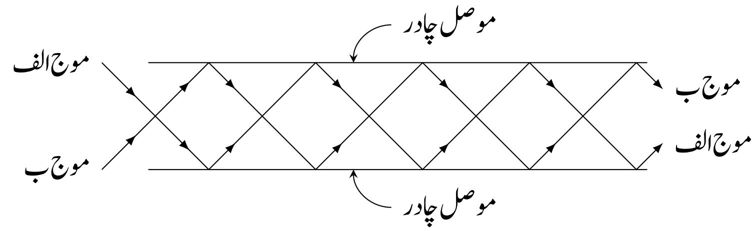
ایسی بلند درجی انداز کی بات کرتے ہیں جس میں برقی میدان ہر نقطے پر y سمتی ہے جبکہ سمت حرکت a_{X} ہے۔ چونکہ برقی میدان سمت حرکت کے عمودی ہے لہٰذا اس انداز کو عرضی برقی انداز[5] (TE) کہا جائے گا۔ اگرچہ اس موج میں برقی میدان عرضی ہے، مقناطیسی میدان عرضی اور طولی اجزاء پر مشتمل ہے۔ کامل موصل چادروں کی صورت میں چادروں پر برقی میدان صفر ہو گا البتہ چادر سے دور اس کی کچھ بھی قیمت ممکن ہے۔ ایسی عرضی برقی انداز موج کے خصوصیات باآسانی یوں حاصل کئے جا سکتے ہیں کہ اسے دو عرضی برقی و مقناطیسی انداز TEM امواج کا مجموعہ تصور کیا جائے جو موصل چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی ہوں۔

آئیں پہلے شکل 13.2 پر غور کریں جہاں خالی خلاء میں ایک ہی تعدد کے دو سطحی TEM امواج کے ملاپ کی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں امواج خطی قطبی تصور کئے گئے ہیں جن کا برقی میدان صفحہ کے عمودی فرض کیا گیا ہے۔ موج الف کی شعاع اوپر بائیں ہاتھ سے نیچے دائیں ہاتھ کی طرف جبکہ موج ب کی شعاع نیچے بائیں ہاتھ سے اوپر دائیں ہاتھ کی جانب گامزن ہے۔ یوں ان کا آپس میں ملاپ کسی زاویے پر ہوتا ہے۔ شکل میں گہری سیاہی کی ٹھوس لکیر سے موج کی چوٹی جبکہ ہلکی سیاہی کے ٹھوس لکیر سے اس کا نشیب دکھایا گیا ہے۔ یوں سطحی موج الف کی چوٹیاں اور نشیب، شعاع الف کے عمودی دکھائے گئے ہیں۔ گہری سیاہی کے ٹھوس لکیر کو برقی میدان کی چوٹی تصور کیا جائے۔ یوں اس لکیر پر برقی میدان زیادہ سے زیادہ قیمت رکھتا ہے اور اس کی سمت صفحہ سے عمودی باہر جانب کو ہے۔ اسی طرح ہلکی ٹھوس لکیر میدان کی نشیب کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا یہاں میدان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی البتہ اس کی سمت صفحہ کے عمودی اندر جانب کو ہو گی۔ چوٹی اور نشیب کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda_0}{2}$ کے برابر ہے۔

[3] low cutoff frequency
[4] higher order mode
[5] transverse electric mode, TE mode



شکل 13.2: دو عرضی برقی و مقناطیسی امواج خلاء میں مختلف سمتوں میں حرکت کر رہی ہیں۔

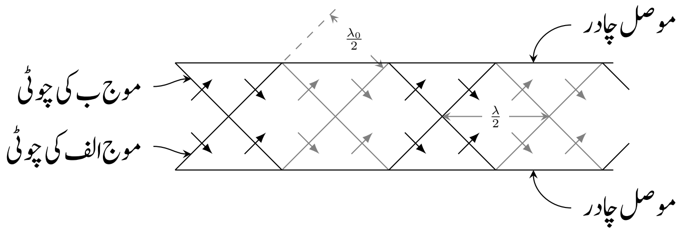


شکل 13.3: شعاعیں دو چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کرتی ہیں۔

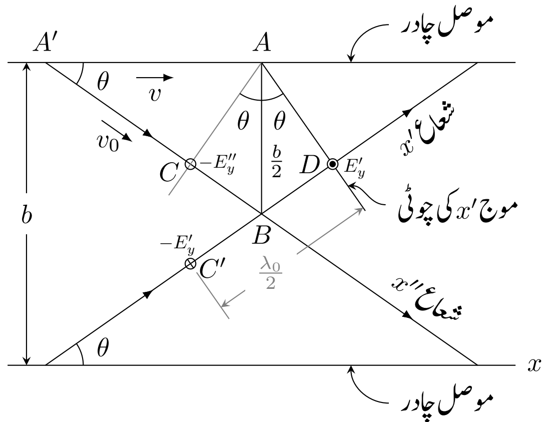
جس نقطے پر ایک موج کی چوٹی اور دوسری موج کا نشیب ملتے ہیں اس نقطے پر کل میدان صفر کے برابر ہو گا۔ یوں جہاں گہری سیاہی اور ہلکی سیاہی کے لکیر ملتے ہیں وہاں میدان صفر ہو گا۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں ایسی دو نقطہ دار لکیریں کھینچی گئی ہیں جن پر میدان صفر کے برابر ہے۔ آپ غور کر کے تسلی کر لیں کہ ان لکیروں کے ہر نقطے پر برقی میدان صفر ہی ہے۔ مزید آپ ذہن میں دونوں امواج کو حرکت دیتے ہوئے تسلی کر لیں کہ امواج کے حرکت کے باوجود ان دو لکیروں پر میدان صفر ہی رہتا ہے۔ اسی طرح جن نقطوں پر دونوں امواج کی چوٹیاں آپس میں ملتی ہوں یا دونوں کے نشیب آپس میں ملتے ہوں وہاں میدان دگنا ہو گا۔ شکل میں ہلکی سیاہی اور دو نقطوں والی ایسی ایک عدد لکیر دکھائی گئی ہے جہاں میدان دگنا پایا جائے گا۔

صفر میدان دکھاتے نقطہ دار لکیر پر برقی میدان صفر کے برابر ہے لہٰذا ان پر موصل سطح کے سرحدی برقی میدان کا شرط پورا اترتا ہے۔ یوں ان لکیروں پر صفحہ کے عمودی موصل چادر رکھے جا سکتے ہیں۔ البتہ ایسا کرنے سے موج کی سیدھی حرکت متاثر ہو گی چونکہ آمدی زاویے کے برابر، موصل سطح پر، انعکاسی زاویے سے موج انعکاس کرے گی۔ یوں موج موصل سطح سے گزر نہیں پائے گی۔ ہاں اگر دو موصل چادروں کے درمیان ان امواج کو بھیجا جائے، تب یہ دونوں موصل سطحوں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کریں گی۔ شکل 13.3 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ شکل 13.4 میں مویج میں موج کی چوٹی اور نشیب دکھائے گئے ہیں۔ خالی خلاء میں طول موج اور مویج میں طول موج کا تعلق بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں موصل چادروں کے درمیان میدان ہو بہو شکل 13.2 میں دو متوازی نقطہ دار لکیروں کے درمیان میدان ہے۔ یہاں بھی گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر $\boldsymbol{E}$ کی چوٹی اور ہلکی سیاہی میں لکیر اس کا نشیب ہے۔ موصل چادر پر یہ دونوں مل کر صفر برقی میدان پیدا کرتے ہیں۔

اگرچہ ہم دو عدد عرضی برقی و مقناطیسی TEM امواج کی بات کرتے آرہے ہیں، درحقیقت ان کا مجموعہ بلند درجی TE انداز کی موج ہے۔ بلند درجی انداز کے



شکل 13.4: موجوں کی چوٹیاں، نشیب، خالی خلاء اور مویج میں طول موج۔



شکل 13.5: متوازی لامحدود وسعت کے چادروں کے مویج میں میدان کے اجزاء۔

موج کی اہم خصوصیت یہ ہے کہ اس کا طول موج ایک مخصوص حد سے کم ہونا لازم ہے۔ایسا نہ ہونے کی صورت میں یہ مویج سے نہیں گزر سکتی۔طول کی یہ حد انقطاعی طول[6] پکاری جاتی ہے۔آئیں انقطاعی طول حاصل کریں۔
4355

شکل 13.5 میں TE موج کے دو TEM اجزاء دکھائے گئے ہیں جو x' اور x'' سمت میں گامزن ہیں۔دونوں جزو موصل چادر یعنی x محدد کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔برقی میدان صفحہ کے عمودی y محدد کی سمت میں ہے۔چادروں کے درمیان فاصلہ b ہے۔نقطہ D پر موج x' کی چوٹی ہے لہٰذا یہاں برقی میدان E'_y مثبت قیمت رکھتا ہے جو صفحہ کے عمودی باہر کو ہے اور جسے گول دائرے میں بند نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس نقطے پر لکیر AD لہر کی چوٹی ظاہر کرتی ہے۔عین اسی لمحہ نقطہ C پر موج x'' کا نشیب ہے جسے گول دائرے میں بند صلیبی نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس لہر کے نشیب کو ہلکی سیاہی میں لکیر AC سے ظاہر کیا گیا ہے۔ایک لہر کی چوٹی اور دوسرے لہر کا نشیب نقطہ A پر مل کر صفر میدان پیدا کرتے ہیں۔ہم جانتے ہیں کہ عین دو چادروں کے درمیان دونوں امواج کی چوٹیاں مل کر دگنا میدان پیدا کرتی ہیں۔اس نقطے کو شکل میں B سے ظاہر کیا گیا ہے۔یوں موج x'' کا نشیب C پر جبکہ اس کی چوٹی B پر ہے۔اس طرح ان نقطوں کے درمیان فاصلہ طول موج کا چوتھا حصہ ہو گا۔اسی طرح BD اور $C'B$ بھی طول موج کے چوتھائی برابر ہیں

$$BC = BC' = BD = \frac{\lambda_0}{4} \tag{13.1}$$

جہاں لامحدود خلاء میں TEM موج کا طول موج λ_0 ہے اور یہ خلاء اسی مادے سے بھری ہے جو دو چادروں کے درمیان پایا جاتا ہے۔موصل چادر پر ایک موج کی کوئی بھی چوٹی اور دوسری موج کا کوئی بھی نشیب مل کر صفر میدان پیدا کر سکتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات کی عمومی شکل

$$BC = \frac{n\lambda_0}{4} \tag{13.2}$$

[6] cutoff wavelength

ہے جہاں $n = 1, 2, 3, \cdots$ ہو سکتے ہیں۔ جفت n کی صورت میں دو چادروں کے عین درمیان برقی میدان صفر حاصل ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں یہاں میدان دگنا ہو گا۔ ان حقائق پر تفصیلاً جلد بات کی جائے گی۔ شکل 13.5 میں تکون ABC سے

$$AB\sin\theta = \frac{b}{2}\sin\theta = \frac{n\lambda_0}{4}$$

یعنی

$$\lambda_0 = \frac{2b}{n}\sin\theta \tag{13.3}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمبائی BC کے لئے مساوات 13.2 استعمال کیا گیا۔ اس مساوات کے تحت زیادہ سے زیادہ طول موج λ_{0c} کی قیمت $\sin\theta = 1$ یعنی $\theta = 90^\circ$ پر

$$\lambda_{0c} = \frac{2b}{n} \tag{13.4}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے n کی ہر قیمت کے مقابل طول کی انقطاعی قیمت حاصل کی جا سکتی ہے۔ جب $n = 1$ ہو تب

$$\lambda_{0c} = 2b \tag{13.5}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ کم تر درجے کی TE موج کا انقطاعی طول ہے جو ان چادروں کے درمیان صفر کر سکتی ہے۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ چادروں کے درمیان فاصلہ کم از کم آدھے طول کے برابر ہو گا تو موج چادروں کے درمیان سے گزر پائے گی۔

$n = 1$ کو بلند درجی TE امواج کا کم تر درجہ کہا جاتا ہے۔ $n = 2$ اس سے ایک قدم بلند درجے کی موج کہلائے گی اور اس کا انقطاعی طول

$$\lambda_{0c} = b \tag{13.6}$$

ہو گا۔ یوں $n = 2$ درجے کی TE موج کے گزرنے کے لئے چادروں کے درمیان کم از کم فاصل موج کے طول کے برابر ضروری ہے۔ اسی طرح $n = 3$ کے لئے $\lambda_{0c} = \frac{2b}{3}$ حاصل ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔

مساوات 13.4 اور مساوات 13.3 کو ملا کر

$$\lambda_0 = \lambda_{0c}\sin\theta \tag{13.7}$$

یا

$$\theta = \sin^{-1}\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}} \tag{13.8}$$

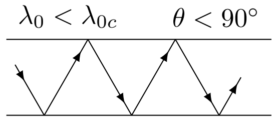
لکھا جا سکتا ہے۔ یوں کسی بھی درجے کی موج کا انقطاعی زاویہ $\theta = 90^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔ اس زاویے پر موج دونوں چادروں کے مابین، x تبدیل کئے بغیر، انعکاس کرتی رہتی ہے۔ یوں چادروں کے درمیان ساکن موج پیدا ہوتی ہے جو x سمت میں طاقت منتقل نہیں کر سکتی۔ اگر طول موج λ_0 انقطاعی طول موج λ_{0c} سے قدر کم ہو تب θ کی قیمت 90° سے کم ہو گی اور موج، بار بار انعکاس کرتی ہوئی، چادروں کے درمیان x سمت میں حرکت کر پائے گی۔ جیسے شکل 13.6 میں دکھایا گیا ہے، طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ مزید کم ہوتا ہے۔ آخر کار انتہائی کم طول موج پر صورت حال لامحدود خلاء میں موج کے حرکت مانند ہو جاتی ہے اور یہ شعاع کی طرح چادروں کے درمیان سیدھا گزرنے کے قابل ہو جاتی ہے۔

شکل 13.5 میں TEM امواج کی دوری رفتار[7] v_0 لامحدود خلاء میں آزاد موج کی دوری رفتار

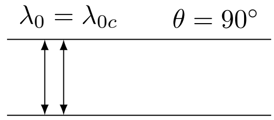
$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \tag{13.9}$$

---

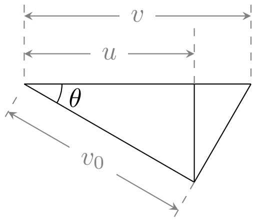
phase velocity[7]



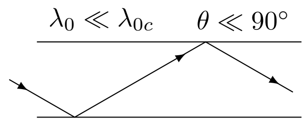
(ب) طول موج، انقطاعی طول موج سے قدر کم ہے۔



(ا) طول موج، عین انقطاعی طول موج کے برابر ہے۔



(د) مختلف اقسام کے رفتار کا تعلق۔



(ج) طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ بھی مزید کم ہوتا ہے۔

شکل 13.6: طول موج اور انعکاس موج کے زاویے۔ مختلف اقسام کے رفتاروں کا آپس میں تعلق۔

ہی ہے جہاں خلاء کا مقناطیسی مستقل μ اور اس کا برقی مستقل ϵ ہیں۔ شکل 13.6-د میں TE موج کی x سمت میں دوری رفتار v ہے۔ TE موج کی چوٹی یا نشیب یا کوئی اور زاویائی نقطہ اس رفتار سے x سمت میں حرکت کرتا نظر آئے گا۔ ان دو اقسام کے رفتار کا تعلق شکل 13.6-د سے

$$\frac{v_0}{v} = \cos\theta \tag{13.10}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$v = \frac{v_0}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}\cos\theta} \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{13.11}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے تحت جیسے جیسے طول موج کو انقطاعی طول موج کے قریب لایا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار کی قیمت بڑھتی ہے حتٰی کہ عین λ_{0c} پر دوری رفتار لا محدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔ اس کے برعکس جیسے جیسے طول موج کو کم کیا جائے، یعنی جیسے جیسے θ کو کم کیا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار TEM کے دوری رفتار کے قریب ہو گی حتٰی کہ انتہائی کم طول موج یعنی انتہائی بلند تعدد کے موج کی صورت میں یہ قیمت v_0 کے برابر ہو جائے گی۔ یوں مویج میں بند، بلند درجی موج کا دوری رفتار TEM موج کے دوری رفتار سے زیادہ یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کی منتقلی انعکاس کرتی موج کے مجموعی رفتار[8] سے ہوتی ہے جسے شکل میں u سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل 13.6-د سے

$$u = v_0 \cos\theta \tag{13.12}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا طاقت کی منتقلی کی رفتار TEM کے رفتار سے کم یا اس کے برابر ممکن ہے۔ طاقت کسی صورت بھی TEM موج کی رفتار سے زیادہ رفتار پر منتقل کرنا ممکن نہیں ہے۔ یہ حقیقت آئن سٹائن کے قانون کے عین مطابق ہے جس کے تحت کوئی بھی چیز رفتار شعاع سے تجاوز نہیں کر سکتی۔ یاد رہے کہ TE موج کی دوری رفتار در حقیقت کسی چیز کی منتقلی نہیں کرتی لہٰذا اس کی قیمت v_0 سے بڑھ سکتی ہے۔ مساوات 13.11 اور مساوات 13.12 کو ملا کر

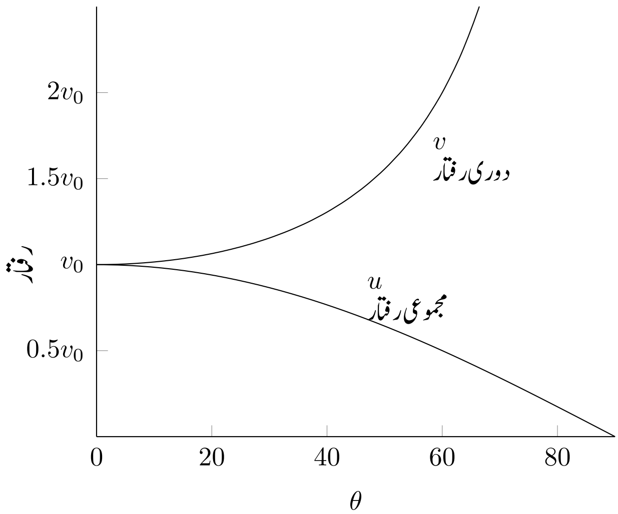
$$uv = v_0^2 \tag{13.13}$$

حاصل ہوتا ہے۔ 4365

دو چادروں میں بند ہونے سے TEM موج کا تعدد تبدیل نہیں ہوتا۔ اسی طرح ایسے دو یکساں تعدد کے امواج سے حاصل TE موج کا تعدد بھی وہی رہتا ہے۔ چونکہ طول موج ضرب تعدد کا حاصل رفتار کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مساوات 13.11 کو

$$f\lambda = \frac{f\lambda_0}{\cos\theta}$$

[8]group velocity



شکل 13.7: دوری اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج۔

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\cos\theta}$$

حاصل ہوتا ہے جو بلند درجہ موج کے طول λ اور آزاد موج کے طول λ_0 کا تعلق ہے۔

شکل 13.7 میں دوری رفتار بالمقابل زاویہ موج اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج دکھائے گئے ہیں۔ جیسے جیسے θ کی قیمت $90°$ کے قریب آتی ہے ویسے ویسے دوری رفتار کی قیمت لامحدود جبکہ مجموعی رفتار کی قیمت صفر کے قریب تر ہوتی ہے۔

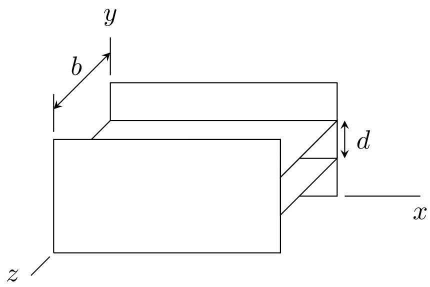
حقیقت میں دو متوازی لامحدود وسعت[9] کے چادروں پر مبنی مویج کہیں نہیں پایا جاتا۔ حقیقی مویج عموماً کھوکھلے مستطیل یا کھوکھلے نالی کے اشکال رکھتے ہیں۔ چونکہ برقی میدان کے عمودی موصل چادر رکھنے سے میدان متاثر نہیں ہوتا للہذا دو لامحدود وسعت کے متوازی چادر، جن کے درمیان فاصلہ b ہو، میں TE موج کے عمودی دو چادر رکھنے سے میدان میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی، لیکن ایسا کرنے سے مستطیل مویج حاصل ہوتا ہے۔ شکل 13.8-الف میں مستطیلی مویج بنتا دکھایا گیا ہے جہاں d فاصلے پر دو متوازی چادر رکھے گئے ہیں۔ مستطیل شکل کے علاوہ بقایا چادر ہٹانے سے مستطیل مویج حاصل ہوتا ہے جیسے شکل 13.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ دو لامحدود چادروں کا مویج تو استعمال نہیں ہوتا لیکن اس کے TE امواج جوں کے توں مستطیل مویج کے لئے استعمال کئے جا سکتے ہیں۔ موجودہ TE امواج کے نقطہ نظر سے مستطیل کی d لمبائی کچھ بھی ممکن ہے۔

لامحدود چادر کے مویج پر غور کرنے سے انقطاعی طول موج کے علاوہ دوری رفتار اور مجموعی رفتار کے مساوات بھی حاصل کئے گئے۔ دیگر بلند درجے کے امواج پر معلومات حاصل کرنے کی خاطر میکس ویل کے مساوات حل کرنا لازم ہے۔ آئیں مستطیل مویج کے لئے میکس ویل مساوات حل کرتے ہیں۔

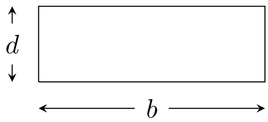
13.3 کھوکھلا مستطیل مویج

مستطیل مویج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط، کارتیسی محدد میں نہایت آسانی سے لاگو کئے جا سکتے ہیں۔ اسی لئے مستطیلی مویج کو کارتیسی نظام میں حل کیا جائے گا۔ ہم کارتیسی نظام میں میکس ویل کے مساوات سے موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ مویج کو x محدد پر رکھتے ہوئے ہم سمت موج کو اسی سمت

[9] حقیقی دنیا میں لامحدود وسعت کے چادر نہیں پائے جاتے۔



(ا) لامحدود متوازی چادر مویج سے مستطیلی مویج کا حصول۔



(ب) مستطیلی مویج کا رقبہ عمودی تراش۔

شکل 13.8: مستطیلی مویج کا حصول اور اس کا رقبہ عمودی تراش۔

حرکت کے پابند بناتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ اسے سائن نما تصور کرتے ہیں۔ اس کے بعد بلند درجے موج کی قسم کا انتخاب کرتے ہیں۔ یوں ہم برقی میدان E کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی برقی TE[10] موج پر غور کر سکتے ہیں یا مقناطیسی میدان کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی مقناطیسی TM[11] موج پر غور کر سکتے ہیں۔ TEM موج میں برقی اور مقناطیسی میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔ بلند درجی موج میں میدان، سمت حرکت کی سمت میں بھی پائے جاتے ہیں۔ اب عرضی برقی TE موج کی صورت میں $E_x = 0$ ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں H_x صفر کے برابر نہیں ہو سکتا۔ اگر H_x بھی صفر کے برابر ہو تب موج TEM قسم کی ہو گی نا کہ TE قسم کی۔ TE کی صورت میں تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ حاصل موج پر سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے اسے H_x کے لئے حل کیا جاتا ہے۔ حاصل H_x کو بقایا مساوات میں پر کرتے ہوئے E_y، E_z، H_y اور H_z حاصل کئے جاتے ہیں۔ یوں برقی اور مقناطیسی میدان کے تمام کارتیسی اجزاء کی مکمل معلومات حاصل ہوتی ہے۔ یہ عمومی طریقہ کار ہے جسے دیگر مسائل حل کرنے کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

اس طریقے کو مستطیلی مویج میں TE موج کے لئے تفصیلاً استعمال کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر مندرجہ ذیل قدم سلسلہ وار اٹھائے جائیں گے۔

- میکس ویل مساوات سے شروع کریں۔
- موج کو وقت کے ساتھ سائن نما رہنے کا پابند بنائیں۔
- موج کو x سمت کے ساتھ سائن نما رہنے کا پابند بناتے ہوئے حرکی مستقل بروئے کار لائیں۔
- بلند درجی موج کا انتخاب کریں۔ ہم TE موج کا انتخاب کرتے ہوئے $E_x = 0$ اور $H_x \neq 0$ رکھیں گے۔
- بقایا چار اجزاء یعنی E_y، E_z، H_y اور H_z کے مساوات H_x کی صورت میں لکھیں۔
- موج کی مساوات H_x کی صورت میں حاصل کریں۔
- مستطیلی مویج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کی اس مساوات کو H_x کے لئے حل کریں۔
- E_y، E_z، H_y اور H_z کے مساوات میں حاصل H_x پر کرتے ہوئے ان کی مساوات بھی حاصل کریں۔

ان قدموں پر چلتے ہوئے مکمل حل حاصل ہو گا۔

[10] transverse electric, TE
[11] transverse magnetic, TM

آئیں پہلے قدم سے شروع کرتے ہوئے میکس ویل کے مساوات کو کارتیسی نظام میں لکھتے ہیں۔ صفحہ 296 پر مساوات 9.28 اور مساوات 9.29

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{13.14}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{13.15}$$

کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \tag{13.16}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0 \tag{13.17}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \tag{13.18}$$

اور

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x - \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \tag{13.19}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y - \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0 \tag{13.20}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z - \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \tag{13.21}$$

لکھے جائیں گے جہاں $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ اسی طرح خالی خلاء میں $\rho_h = 0$ لیتے ہوئے مساوات 9.30 اور مساوات 9.31 کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{13.22}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{13.23}$$

4398 لکھے جائیں گے۔

اب دوسرا قدم کہتا ہے کہ موج وقت کے ساتھ سائن نما تعلق رکھتا ہے جبکہ تیسرا قدم کہتا ہے کہ موج x فاصلے کے ساتھ بھی سائن نما تعلق رکھتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ x سمت میں حرکی مستقل بھی بروئے کار لانا ہے۔ ان دو اقدام کو استعمال کرتے ہوئے میدان کے تمام اجزاء لکھتے ہیں۔ یوں E_y اور H_x کو مثال بناتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_y &= E_1 e^{j\omega t - \gamma x} \\ H_x &= H_1 e^{j\omega t - \gamma x} \end{aligned} \tag{13.24}$$

4399 لکھے جائیں گے جہاں

4400 γ حرکی مستقل $(\gamma = \alpha + j\beta)$

4401 α تضعیفی مستقل

4402 β زاویائی مستقل

ہیں۔ مساوات 13.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 13.16

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x\right] e^{j\omega t - \gamma z} = 0$$

یا

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x = 0 \tag{13.25}$$

لکھا جائے۔ اسی طرح مساوات 13.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 13.17 تا مساوات 13.23 یوں لکھے جائیں گے۔

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z + j\omega\mu H_y = 0 \tag{13.26}$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} + j\omega\mu H_z = 0 \tag{13.27}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - (\sigma + j\omega\epsilon)E_x = 0 \tag{13.28}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - (\sigma + j\omega\epsilon)E_y = 0 \tag{13.29}$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (\sigma + j\omega\epsilon)E_z = 0 \tag{13.30}$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{13.31}$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{13.32}$$

مندرجہ بالا آٹھ مساوات میں ترسیلی تار کے برقی رکاوٹ Z اور برقی فراوانی Y کی طرز کے مستقل

$$Z = -j\omega\mu \qquad (\Omega/\mathrm{m}) \tag{13.33}$$

$$Y = \sigma + j\omega\epsilon \qquad (\mathrm{S/m}) \tag{13.34}$$

استعمال کرتے ہوئے انہیں قدر چھوٹا لکھتے ہیں۔

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0 \tag{13.35}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - ZH_y = 0 \tag{13.36}$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - ZH_z = 0 \tag{13.37}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - YE_x = 0 \tag{13.38}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0 \tag{13.39}$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0 \tag{13.40}$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{13.41}$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{13.42}$$

4403 یہ x سمت میں حرکت کرتی موج کی عمومی مساوات ہیں۔

ابھی تک ناتو مویج کی شکل اور ناہی بلند درجی موج کا انتخاب کیا گیا ہے لہٰذا چوتھے قدم کا اطلاق کرتے ہوئے TE قسم کا انتخاب کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ $E_x = 0$ لیا جائے گا۔ایسا کرنے سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0 \tag{13.43}$$

$$\gamma E_z - ZH_y = 0 \tag{13.44}$$

$$-\gamma E_y - ZH_z = 0 \tag{13.45}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \tag{13.46}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0 \tag{13.47}$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0 \tag{13.48}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{13.49}$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{13.50}$$

4404 صورت اختیار کر لیتے ہیں۔

پانچویں قدم پر تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ایسا کرنے کی خاطر پہلے مساوات 13.44 اور 13.45 سے

$$\frac{E_z}{H_y} = -\frac{E_y}{H_z} = \frac{Z}{\gamma} \tag{13.51}$$

لکھتے ہیں۔اب $\frac{E_z}{H_y}$ یا $\frac{E_y}{H_z}$ کی شرح قدرتی رکاوٹ کی مانند ہے۔چونکہ مساوات 13.51 میں صرف عرضی اجزاء پائے جاتے ہیں لہٰذا اس شرح کو عرضی-موج کی قدرتی رکاوٹ[12] Z_{yz} کہا جائے گا جہاں

$$Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \qquad (\Omega) \tag{13.52}$$

کے برابر ہے۔مساوات 13.52 کو مساوات 13.48 میں پر کرتے ہوئے H_y کے لئے حل کرنے سے

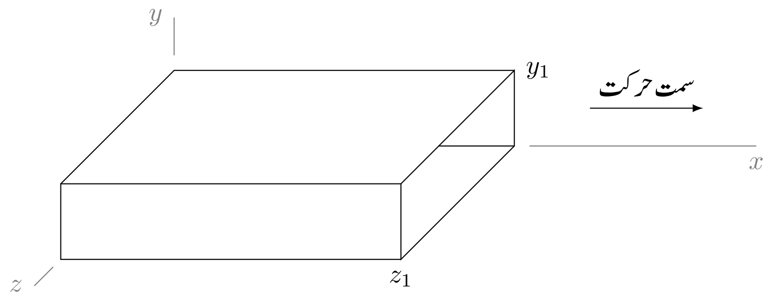
$$H_y = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{13.53}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 13.52 کو مساوات 13.47 میں پر کرتے ہوئے H_z کے لئے حل کرنے سے

$$H_z = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z} \tag{13.54}$$

---

[12] transverse-wave impedance



شکل 13.9: مستطیل مویج۔

حاصل ہوتا ہے۔اب مساوات 13.53 کو مساوات 13.52 میں پر کرتے ہوئے

$$E_z=\frac{Z_{yz}}{\gamma-YZ_{yz}}\frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{13.55}$$

اور مساوات 13.54 کو مساوات 13.52 میں پر کرتے ہوئے

$$E_y=\frac{-Z_{yz}}{\gamma-YZ_{yz}}\frac{\partial H_x}{\partial z} \tag{13.56}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 13.53 تا مساوات 13.56 تمام اجزاء کو H_x کی صورت میں پیش کرتے ہیں۔ 4405

چھٹے قدم پر ان مساوات سے موج کی مساوات کا حصول ہے۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات 13.53 کا y کے ساتھ تفرق اور مساوات 13.54 کا z کے ساتھ تفرق لیتے ہوئے دونوں حاصل جواب کو مساوات 13.50 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma H_x-\frac{1}{\gamma-YZ_{yz}}\left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}\right)=0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}+\gamma\left(\gamma-YZ_{yz}\right)H_x=0$$

حاصل کرتے ہیں جس میں

$$k^2=\gamma\left(\gamma-YZ_{yz}\right) \tag{13.57}$$

پر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}+k^2H_x=0 \tag{13.58}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 13.58 مویج کے عرضی برقی موج کی عمومی مساوات ہے۔ مویج کا عمودی تراش کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے۔ یہاں چھٹا قدم پورا ہوتا ہے۔

ساتویں قدم میں مویج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کو حل کرنا ہے۔ شکل 13.9 میں کامل موصل چادروں سے بنایا گیا مستطیلی مویج دکھایا گیا ہے جس کی چوڑائی z_1 اور اونچائی y_1 ہے۔ موصل اور ہوا کے سرحدی برقی شرائط کے مطابق سرحد پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لٰہذا مویج کے اطراف پر متوازی E صفر ہو گا۔ یوں مویج کے نچلی اور بالائی سطحوں پر $E_z=0$ ہو گا۔ اسی طرح مویج کے بائیں اور دائیں کھڑے سطحوں پر $E_y=0$ ہو گا۔ اب ان شرائط

پر پورا اترتا مساوات 13.58 کا حل درکار ہے۔ علیحدگی متغیرات کا طریقہ یہاں قابل استعمال ہے جس میں H_x کو دو متغیرات کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے یعنی

$$H_x = YZ \tag{13.59}$$

جہاں Y ایسا متغیر ہے جو صرف y پر منحصر ہے جبکہ Z ایسا متغیر ہے جو صرف z پر منحصر ہے۔ اصل میں ان متغیرات کو $Y(y)$ اور $Z(z)$ لکھنا چاہیے لیکن غیر ضروری علامات کم کرنے کی غرض سے انہیں Y اور Z ہی لکھا جائے گا۔ مساوات 13.59 کے استعمال سے مساوات 13.58

$$Z\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 YZ = 0 \tag{13.60}$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔ دونوں اطراف کو YZ سے تقسیم کرتے ہوئے اسے یوں

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2 \tag{13.61}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب بائیں ہاتھ پہلا جزو صرف y پر منحصر ہے جبکہ دوسرا جزو صرف z پر منحصر ہے۔ یوں y کی تبدیلی سے صرف پہلے جزو میں تبدیلی کا امکان ہے لیکن پہلے جزو میں کسی بھی تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہ سکتے۔ اس طرح صاف ظاہر ہے کہ پہلے جزو میں y کے تبدیلی سے کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو سکتی یعنی یہ جزو ناقابل تبدیل مستقل قیمت رکھتا ہے جسے ہم $-A_1$ لکھتے ہیں۔ اسی منطق سے دوسرا جزو بھی اٹل قیمت رکھتا ہے جسے ہم $-A_2$ لکھتے ہیں۔ یوں

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -A_1 \tag{13.62}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -A_2 \tag{13.63}$$

ہوں گے لہٰذا مساوات 13.61 سے

$$A_1 + A_2 = k^2 \tag{13.64}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 13.62 اور مساوات 13.63 ایک متغیرہ پر مبنی دو درجی تفرقی مساوات ہیں جن کا حل آپ جانتے ہی ہوں گے۔ مساوات 13.62 کا حل تجربے سے

$$Y = c_1 \cos b_1 y + c_2 \sin b_1 y \tag{13.65}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں m_1، c_2 اور b_1 مساوات کے مستقل ہیں۔ مساوات 13.65 کو واپس مساوات 13.62 میں پر کرنے سے

$$b_1 = \sqrt{A_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 13.62 کا حل

$$Y = c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y \tag{13.66}$$

ہے۔ اسی طرح مساوات 13.63 کا حل

$$Z = c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \tag{13.67}$$

ہے۔ ان دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.59 کو

$$H_x = \left(c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y\right)\left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right) \tag{13.68}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسے مساوات 13.55 میں پر کرنے سے

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}}\sqrt{A_1}\left(-c_1\sin\sqrt{A_1}y + c_2\cos\sqrt{A_1}y\right)\left(c_3\cos\sqrt{A_2}z + c_4\sin\sqrt{A_2}z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا نچلا چادر $y = 0$ پر پایا جاتا ہے جس پر، برقی سرحدی شرط کے مطابق، $E_z = 0$ ہو گا لہٰذا $y = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات صفر کے برابر ہو گا، جس سے

$$0 = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}}\sqrt{A_1}c_2\left(c_3\cos\sqrt{A_2}z + c_4\sin\sqrt{A_2}z\right)$$

یعنی

$$c_2 = 0 \tag{13.69}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$E_z = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}}\sqrt{A_1}c_1\sin\sqrt{A_1}y\left(c_3\cos\sqrt{A_2}z + c_4\sin\sqrt{A_2}z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا بالائی چادر $y = y_1$ پر پایا جاتا ہے جس پر برقی سرحدی شرط کے مطابق متوازی برقی دباو صفر کے برابر ہو گا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں y_1 پر $E_z = 0$ پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}}\sqrt{A_1}c_1\sin\sqrt{A_1}y_1\left(c_3\cos\sqrt{A_2}z + c_4\sin\sqrt{A_2}z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_1 مساوی صفر ہے جس سے $H_x = 0$ حاصل ہو گا۔اگرچہ یہ درست جواب ہے لیکن ہمیں زیادہ غرض حرکت کرتے موج سے ہے نا کہ ہر قسم کے میدان سے خالی مویج سے، لہٰذا ہم

$$c_1 \neq 0 \tag{13.70}$$

لیتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_1}y_1 = n\pi$$

یعنی

$$\sqrt{A_1} = \frac{n\pi}{y_1} \tag{13.71}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔یوں

$$H_x = n_1\cos\frac{n\pi y}{y_1}\left(c_3\cos\sqrt{A_2}z + c_4\sin\sqrt{A_2}z\right) \tag{13.72}$$

ہو گا۔اس مساوات کو مساوات 13.56 میں پر کرنے سے

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}}c_1\sqrt{A_2}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\left(-c_3\sin\sqrt{A_2}z + c_4\cos\sqrt{A_2}z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستطیل کا دایاں کھڑا چادر $z = 0$ پر ہے، جہاں سرحدی شرط کے تحت متوازی برقی میدان صفر ہو گا لہٰذا

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}}c_1c_4\sqrt{A_2}\cos\frac{n\pi y}{y_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب چونکہ $c_1 \neq 0$ ہے للذا

$$c_4 = 0 \tag{13.73}$$

حاصل ہوتا ہے اور یوں

$$E_y = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z$$

ہو گا۔ مستطیل کا بایاں کھڑا چادر $z = z_1$ پر پایا جاتا ہے جہاں سرحدی شرائط کے تحت E_y ہو گا للذا مندرجہ بالا مساوات میں یہ حقائق پر کرتے ہوئے

$$0 \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z_1$$

لکھا جائے گا۔ اب $c_1 \neq 0$ اور اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_3 برابر صفر ہے جس سے H_x کے علاوہ تمام میدان صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ ہم چونکہ حرکت کرتے موج کی تلاش میں ہیں للذا ہم اس ممکنہ جواب کو رد کرتے ہوئے

$$c_3 \neq 0 \tag{13.74}$$

چنتے ہیں۔ اس شرط کے ساتھ مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_2} z_1 = m\pi \tag{13.75}$$

یعنی

$$\sqrt{A_2} = \frac{m\pi}{z_1} \tag{13.76}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $m = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔ یوں $c_1 c_3 = H_0$ لکھتے ہوئے

$$H_x(y, z) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} \tag{13.77}$$

حاصل ہوتا ہے جو مقداری مساوات ہے۔ اس مساوات میں وقت t اور x سمت میں حرکت کا کوئی ذکر نہیں ہے۔ یاد رہے کہ اصل میدان مساوات 13.24 کی طرز کا ہے جس میں یہ معلومات بھی شامل ہیں للذا

$$H_x(x, y, z, t) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{13.78}$$

4407 لکھا جائے گا جو مکمل جواب ہے۔

آٹھویں قدم میں H_x کو مساوات 13.53 تا مساوات 13.56 میں پر کرتے ہوئے بقایا میدان حاصل کرتے ہیں یعنی

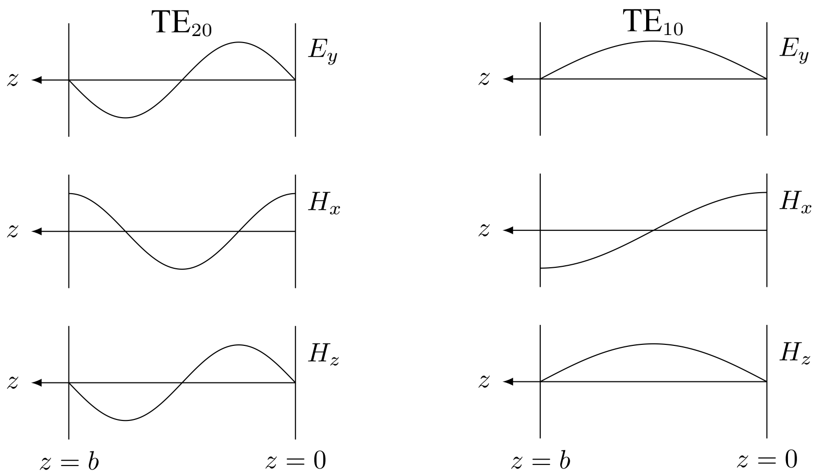
$$H_y = \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{13.79}$$

$$H_z = \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{13.80}$$

$$E_z = -\frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{n\pi}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{13.81}$$

$$E_y = \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{m\pi}{z_1} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{13.82}$$

$$E_x = 0 \tag{13.83}$$



ب: $m=2, n=0$ الف: $m=1, n=0$

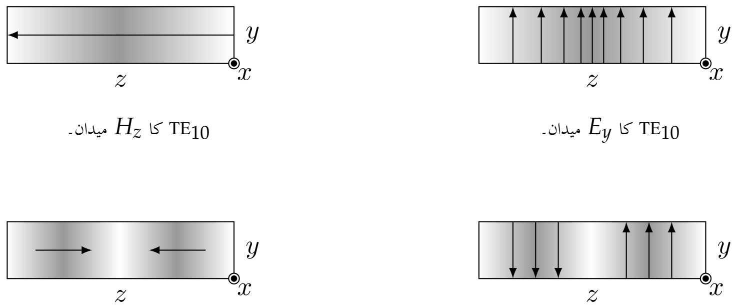
شکل 13.10: بلند انداز TE امواج۔

جہاں آخر میں $E_x=0$ بھی شامل کیا گیا ہے۔ مساوات 13.78 تا مساوات 13.83 مستطیلی مویج میں TE موج کا مکمل حل ہے۔ یہاں آٹھواں قدم پورا ہوتا ہے۔

آئیں مستطیلی مویج میں m اور n مستقل پر غور کریں۔ اگر $m=1$ اور $n=0$ ہوں تب مندرجہ بالا مساوات میں E_x اور E_z، H_y صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ یوں مویج میں صرف E_y اور H_z، H_x میدان پائے جاتے ہیں۔ دائیں چادر، یعنی $z=0$، پر $E_y=0$ پایا جاتا ہے جبکہ دونوں چادروں کے عین درمیان $z=\frac{z_1}{2}$ پر میدان کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ شکل 13.10-الف میں پہلا خط E_y ہی ہے۔ اگر H_x کی بات کی جائے تو دائیں چادر، یعنی $z=0$، پر H_x کی چوٹی جبکہ بائیں چادر، یعنی $z=z_1$، پر H_x کا نشیب پایا جاتا ہے۔ ان دو اطراف کے عین درمیان $z=\frac{z_1}{2}$ پر $H_x=0$ پایا جاتا ہے۔ شکل 13.10-الف میں دوسرا خط H_x ہے۔ مقناطیسی میدان H_z بھی دائیں اور بائیں چادروں پر صفر کے برابر ہے جبکہ ان کے عین درمیان اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ یوں $m=1$ اور $n=0$ کی صورت میں میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا آدھا چکر پایا جاتا ہے۔

$m=2$ اور $n=0$ کی صورت میں میدان شکل 13.10-ب میں دکھائے گئے ہیں۔ اب بھی میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا مکمل چکر، یعنی دو آدھے چکر، پائے جاتے ہیں۔ ان سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ m کی قیمت z پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔ آپ جلد دیکھیں گے کہ n بالکل اسی طرح y پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔ ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے بلند درجی TE موج کو m اور n سے پہچانا جاتا ہے۔ یوں شکل 13.10-الف کے امواج TE$_{10}$ جبکہ شکل 13.10-ب کے امواج TE$_{20}$ کہلاتے ہیں۔ یوں عمومی بلند درجی عرضی برقی موج TE$_{mn}$ کہلائے گی جہاں z پر آدھے چکروں کی تعداد m ہے جبکہ y پر آدھے چکروں کی تعداد n ہے۔ مستطیلی مویج میں عموماً z سے لمبی طرف کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح مقناطیسی امواج TM$_{mn}$ کہلائے جاتے ہیں۔

آئیں TE پر تفصیلاً غور کریں۔



TE_{10} کا H_z میدان۔ TE_{10} کا E_y میدان۔

TE_{20} کا H_z میدان۔ TE_{20} کا E_y میدان۔

شکل 13.11: TE_{10} اور TE_{20} کے E_y اور H_z میدان۔

13.3.1 مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور

بلند درجی TE_{10} موج:

مساوات 13.78 تا مساوات 13.83 میں $m = 1$ اور $n = 0$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE_{10} امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \qquad\qquad \text{TE کا بنیادی شرط}\\
E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
E_z &= 0\\
H_x &= H_0\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_y &= 0\\
H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}
\end{aligned}
\tag{13.84}
$$

ان میں پہلی مساوات، یعنی $E_x = 0$، در حقیقت TE موج کی تعریف ہے۔ ان امواج کو شکل 13.10-الف میں $t = 0$ اور $x = 0$ کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ ان اشکال میں میدان بالمقابل z دکھایا گیا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں کوئی میدان بھی y پر منحصر نہیں ہے لہٰذا y کے تبدیلی سے یہ میدان تبدیل نہیں ہوں گے۔ TE_{10} تمام اقسام کے بلند درجی امواج میں سب سے لمبی انقطاعی طول موج رکھتی ہے لہٰذا اس کی انقطاعی تعدد سب سے کم ہے۔ شکل 13.11 میں E_y اور H_z کو بطور سمتیہ دکھایا گیا ہے۔ شکل-الف میں $z = \frac{z_1}{2}$ پر سمتیوں کی تعداد زیادہ دکھا کر گھنے میدان کو ظاہر کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ اس خطے کو گہرا رنگ بھی دے کر گھنے میدان کو ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں مقناطیسی میدان کی سمت کو سمتیہ سے جبکہ میدان کو گہرے رنگ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

بلند درجی TE_{20} موج:

شکل 13.11 میں TE_{20} کے E_y اور H_z اشکال بھی دکھائے گئے ہیں۔

بلند درجی TE_{11} موج:

مساوات 13.78 تا مساوات 13.83 میں $m=1$ اور $n=1$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE_{11} امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \qquad\qquad \text{TE کا بنیادی شرط}\\
E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\cos\frac{\pi y}{y_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
E_z &= -\frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2}\frac{\pi}{y_1}\sin\frac{\pi y}{y_1}\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_x &= H_0\cos\frac{\pi y}{y_1}\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_y &= \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{\pi}{y_1}\sin\frac{\pi y}{y_1}\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}\\
H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\cos\frac{\pi y}{y_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}
\end{aligned}
\tag{13.85}
$$

اس بلند درجی انداز میں صرف E_x ہر نقطے پر تمام اوقات صفر کے برابر رہتا ہے۔ان میدان کو شکل 13.12 میں دکھایا گیا ہے۔

مستطیل مویج کے حاصل حل میدان تمام ممکنہ میدان ہیں جو کسی مویج میں پائے جا سکتے ہیں۔حقیقت میں کسی بھی مویج میں پائے جانے والے امواج کا دارومدار مویج کی جسامت، موج پیدا کرنے کا طریقہ اور مویج میں ناہمواریوں پر ہے۔کسی بھی نقطے پر موجود تمام میدانوں کا مجموعی میدان پایا جائے گا۔

واپس اپنی گفتگو پر آتے ہوئے مساوات 13.64، مساوات 13.71 اور مساوات 13.76 کو ملا کر

$$
k^2=\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{13.86}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 13.33، مساوات 13.52 اور مساوات 13.57 سے

$$
k^2=\gamma^2-j\omega\mu(\sigma+j\omega\epsilon) \tag{13.87}
$$

کے برابر ہے۔بے ضیاع ذو برق میں $\sigma=0$ لیا جا سکتا ہے۔اس طرح مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$
\gamma=\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2-\omega^2\mu\epsilon} \tag{13.88}
$$

حاصل ہوتا ہے۔

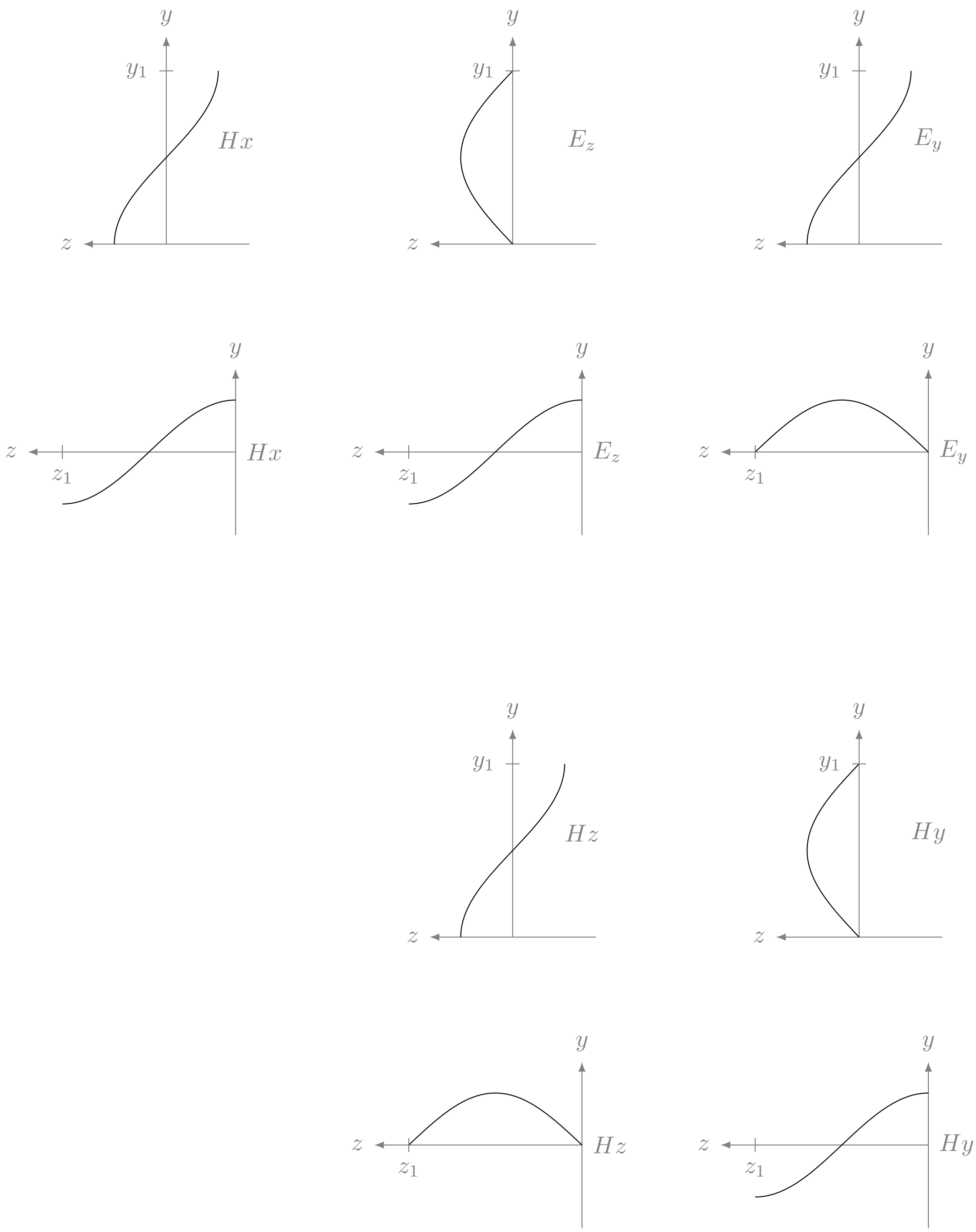
ایک مخصوص قیمت سے کم تعدد پر جزر میں آخری جزو پہلے دو اجزاء کے مجموعے سے کم ہو گا لہٰذا γ حقیقی ہو گا۔حقیقی γ کی صورت میں موج گھٹے گی اور یہ مویج میں صفر نہیں کر پائے گی۔

اسی طرح اس مخصوص قیمت سے زیادہ تعدد پر γ خیالی عدد ہو گا لہٰذا مویج میں موج صفر کرے گی۔

ان دو قیمتوں کے درمیان تعدد کی وہ قیمت ہو گی جس پر $\gamma=0$ حاصل ہوتا ہے۔اس تعدد کو انقطاعی تعدد[13] کہتے ہیں۔انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج، بغیر گھٹے، مویج میں صفر کر سکتے ہیں جبکہ اس سے کم تعدد کے امواج گھٹتے ہیں لہٰذا یہ مویج میں صفر نہیں کر پاتے۔

ان تین تعددی خطوں کو ایک جگہ دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

---
[13] cutoff frequency



شکل 13.12: TE_{11} میدان۔

4442 • کم تعدد یعنی کم ω پر γ حقیقی ہوتا ہے۔ مویج غیر شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر نہیں کر سکتے۔

4443 • مخصوص درمیانی تعدد پر $\gamma = 0$ ہوتا ہے۔ یہ انقطاعی تعدد ہے۔

4444 • زیادہ تعدد پر γ خیالی ہوتا ہے۔ مویج شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر کر سکتے ہیں۔

مساوات 13.88 میں $\sqrt{\omega^2\mu\epsilon}$ در حقیقت ایسی لامحدود خطے کا زاویائی مستقل β_0 ہے جس میں وہی ذو برق ہو جو مویج میں پایا جاتا ہے۔ یوں ہم

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} \tag{13.89}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں

$$\beta_0 = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad \text{لامحدود خطے کا زاویائی مستقل}$$
$$\lambda_0 \quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$
$$k = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}$$

ہیں۔ یوں انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر $k > \beta_0$ ہو گا لہٰذا

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = j\beta \tag{13.90}$$

ہو گا جہاں

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \quad \text{مویج میں زاویائی مستقل}$$
$$\lambda \quad \text{مویج میں طول موج}$$

ہیں۔ کافی بلند تعدد پر $k \gg \beta_0$ ہو گا اور یوں مویج کے زاویائی مستقل β کی قیمت لامحدود خطے کے زاویائی مستقل β_0 کے قیمت کے قریب ہو گی۔ اس کے برعکس انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر $k < \beta_0$ ہو گا جس سے

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = \alpha \tag{13.91}$$

4445 حاصل ہوتا ہے جہاں α تضعیفی مستقل ہے۔

4446 کافی کم تعدد پر $k \ll \beta_0$ ہو گا لہٰذا تضعیفی مستقل کی قیمت k کے قریب ہو گی۔

عین انقطاعی تعدد پر $k = \beta_0$ ہو گا لہٰذا $\gamma = 0$ ہو گا۔ یوں انقطاعی تعدد پر

$$\omega^2\mu\epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{13.92}$$

ہو گا جس سے انقطاعی تعدد[14]

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2} \qquad \text{(Hz)} \tag{13.93}$$

---

[14] cutoff frequency

اور انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c}=\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m}{z_1}\right)^2}}=\frac{2\pi}{k}\qquad (\mathrm{m}) \tag{13.94}$$

یا

$$k=\frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \tag{13.95}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں λ_{0c} لا محدود خطے میں انقطاعی تعدد پر طول موج ہے جسے چھوٹا کر کہ انقطاعی طول موج[15] پکارا جاتا ہے۔ مساوات 13.93 اور مساوات 13.94 سے کھوکھلے مستطیلی مویج کے کسی بھی TE_{mn} موج کا انقطاعی تعدد اور انقطاعی طول موج حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر TE_{10} موج کا انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c}=2z_1 \tag{13.96}$$

4447 حاصل ہوتا ہے جو وہی قیمت ہے جو مساوات 13.5 میں حاصل کی گئی تھی جہاں $z_1=b$ کے برابر ہے۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $(\beta_0>k)$ پر

$$\beta=\sqrt{\beta_0^2-k^2}=\sqrt{\omega^2\mu\epsilon-\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2} \tag{13.97}$$

کے برابر ہے۔ اب $\beta_0=\frac{2\pi}{\lambda_0}$ اور مساوات 13.95 مندرجہ بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$\beta=\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2-\left(\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}\right)^2}=\beta_0\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{13.98}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مویج میں طول موج

$$\lambda_{\text{مویج}}=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{13.99}$$

اور مویج میں دوری رفتار[16] v_p

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2-\left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}} \tag{13.100}$$

یا

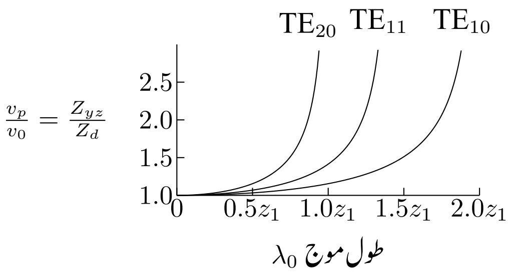
$$v_p=\frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{13.101}$$

4448 حاصل ہوتے ہیں جہاں

4449 v_0 لا محدود خطے میں دوری رفتار $v_0=\frac{\omega}{\beta_0}=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ ہے،

4450 λ_0 لا محدود خطے میں طول موج،

4451 λ_{0c} انقطاعی طول موج



شکل 13.13: مختلف بلند درجی امواج کے مستطیلی مویج میں دوری رفتار بالمقابل طول موج λ_0۔

ہیں۔

شکل 13.13 میں مختلف بلند انداز امواج کے دوری رفتار بالمقابل طول موج λ_0 دکھائے گئے ہیں۔ دوری رفتار کو لامحدود خطے کے دوری رفتار v_0 کی نسبت سے دکھایا گیا ہے۔ ان اشکال میں مستطیلی مویج کے دونوں اطراف برابر لمبائی $(y_1 = z_1)$ کے تصور کئے گئے ہیں۔

مندرجہ بالا تجزیے میں مویج کے اطراف کامل موصل کے تصور کئے گئے اور ساتھ ہی ساتھ مویج میں بے ضیاع ذو برق بھرا تصور کیا گیا۔ اسی لئے انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر امواج بغیر گھٹے مویج میں صفر کرتے ہیں۔ حقیقت میں مویج کے اطراف کے موصل کی موصلیت اور ذو برق میں طاقت کی ضیاع سے $\gamma = \alpha + j\beta$ ہو گا لہٰذا انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج بھی صفر کے دوران کچھ نہ کچھ گھٹتے ہیں۔

کھوکھلے مویج جس میں صرف ہوا بھری ہو میں ذو برق یعنی ہوا کا ضیاع قابل نظر انداز ہوتا ہے۔ ایسے مویج میں طاقت کا ضیاع صرف مویج کے چادروں کی موصلیت کی بنا ہے۔ موصل چادر مکمل طور پر کامل نہ ہونے کا مطلب لے کہ حقیقت میں چادر کے متوازی برقی میدان E_m صفر نہیں ہو گا۔ اچھے موصل مثلاً تانبے کی بنی چادر میں E_m کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ یوں تانبے یا دیگر اچھے موصل کے چادر سے بنی مویج کے طول موج λ، زاویائی مستقل β یا دوری رفتار v_p حاصل کرتے وقت مویج کے چادر کو کامل ہی تصور کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں تضعیفی مستقل α کا تخمینہ علیحدہ طور پر لگایا جاتا ہے۔

آخر میں مستطیلی مویج میں عرضی برقی موج کی رکاوٹ Z_{yz} مساوات 13.52 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$Z_{yz} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \tag{13.102}$$

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر $\gamma = j\beta$ ہوتا ہے لہٰذا

$$Z_{yz} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{Z_z}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad (\Omega) \tag{13.103}$$

ہو گا جہاں

Z_z مویج کے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ $Z_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ جبکہ

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج،

λ_{0c} انقطاعی طول موج

cutoff wavelength[15]
phase velocity[16]

ہیں۔ ہوا کے لئے $Z_z = 120\pi = 376.7\,\Omega$ کے برابر ہے۔ چونکہ Z_{yz} اور Z_z کی شرح بالقل v_p اور v_0 کی شرح کے برابر ہے لہٰذا شکل 13.13 $\frac{Z_{yz}}{Z_z}$ بالمقابل λ_0 بھی دیتا ہے۔

مشق 13.1: TE_{10}، TE_{20} اور TE_{11} امواج کی انقطاعی طول موج مندرجہ ذیل مستطیلی مویج کے لئے حاصل کریں۔

- ہوا سے بھرا مویج جس کے اطراف چار سنٹی میٹر اور دو سنٹی میٹر ہیں۔
- ہوا سے بھرا مویج جس کے دونوں اطراف چار سنٹی میٹر کے برابر ہیں۔

جوابات: پہلا مویج 8 cm، 4 cm، 3.577 cm۔ دوسرا مویج 8 cm، 4 cm، 5.656 cm

---

13.4 مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج

عرضی برقی امواج حل کرنے کے آٹھ قدم صفحہ 454 پر بتلائے گئے۔ انہیں آٹھ قدم سے شکل 13.9 کے مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی موج TM_{mn} بھی حاصل کئے جاتے ہیں۔ فرق صرف اتنا ہے کہ یہاں $H_x = 0$ فرض کر کے مسئلہ حل کیا جاتا ہے۔ TM_{mn} موج کہتے ہی اس موج کو ہیں جن میں $H_x = 0$ ہو۔ آئیں TM_{mn} حاصل کرنے کے اہم نکات کا تذکرہ کریں۔

موج حاصل کرنے کے پہلے تین قدم میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی لہٰذا مساوات 13.14 تا مساوات 13.42 جوں کے توں استعمال کئے جائیں گے۔ چوتھے قدم میں $H_x = 0$ پر کرنے سے

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \tag{13.104}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - Z H_y = 0 \tag{13.105}$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - Z H_z = 0 \tag{13.106}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - Y E_x = 0 \tag{13.107}$$

$$\gamma H_z - Y E_y = 0 \tag{13.108}$$

$$-\gamma H_y - Y E_z = 0 \tag{13.109}$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{13.110}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{13.111}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 13.108 اور مساوات 13.109 سے

$$Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = \frac{\gamma}{Y} \tag{13.112}$$

4478 لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات کا مساوات 13.52 کے ساتھ موازنہ کریں۔ اگرچہ دونوں جگہ Z_{yz} کی تعریف $\frac{E_y}{H_z}$ ہی ہے لیکن دونوں جگہ اس شرح کی قیمت مختلف
4479 ہے۔ یہیں سے آپ توقع کر سکتے ہیں کہ TM_{mn} موج کی رکاوٹ TE_{mn} کے رکاوٹ سے مختلف ہو گی۔

پانچویں قدم میں تمام میدان کو E_x کی صورت میں حاصل کرنا ہے۔ مساوات 13.112 کو مساوات 13.105 میں پر کرتے ہوئے H_y کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_y = \frac{Y}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{13.113}$$

اور اسی طرح مساوات 13.112 کو مساوات 13.106 میں پر کرتے ہوئے H_z کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_z = \frac{-Y}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{13.114}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان دو مساوات اور مساوات 13.112 سے

$$E_y = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{13.115}$$

$$E_z = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{13.116}$$

4480 لکھا جا سکتا ہے۔ یوں پانچواں قدم پورا ہوتا ہے۔

چھٹے قدم میں E_x کے موج کی مساوات حاصل کرنے کی غرض سے مساوات 13.115 کا y کے ساتھ تفرق اور مساوات 13.116 کا z کے ساتھ تفرق مساوات 13.110 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma E_x - \frac{\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\gamma}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + (\gamma^2 + YZ) E_x = 0$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \tag{13.117}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$k^2 = \gamma^2 + YZ = \gamma \left(\gamma + \frac{Z}{Z_{yz}} \right) \tag{13.118}$$

4481 کے برابر ہے۔ مساوات 13.57 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کے k^2 مختلف قیمت رکھتے ہیں۔

ساتویں قدم پر مساوات 13.117 کا ایسا حل درکار ہے جو مستطیلی مویج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط پر پورا اترتا ہو۔ بالکل پہلے کی طرح حل کرتے ہوئے

$$k^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{13.119}$$

اور میدان

$$E_x = E_0 \sin\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{13.120}$$

حاصل ہوتا ہے جسے باری باری مساوات 13.113 تا مساوات 13.116 میں پر کرتے ہوئے

$$H_y = \frac{YE_0}{\gamma^2+YZ}\frac{m\pi}{z_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{13.121}$$
$$H_z = \frac{-YE_0}{\gamma^2+YZ}\frac{n\pi}{y_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{13.122}$$
$$E_y = \frac{-\gamma E_0}{\gamma^2+YZ}\frac{n\pi}{y_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{13.123}$$
$$E_z = \frac{-\gamma E_0}{\gamma^2+YZ}\frac{m\pi}{z_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{13.124}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان جوابات کے ساتھ

$$H_x = 0 \qquad \text{TM}_{mn}\ \text{موج ہونے کا شرط} \tag{13.125}$$

شامل کرتے ہوئے تمام میدان حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 13.120 تا مساوات 13.125 کے TM_{mn} امواج میں m یا n صفر کے برابر ہونے سے تمام میدان صفر ہو جاتے ہیں لہٰذا TM_{mn} کا کم سے کم تعددی موج TM_{11} ہے۔

بے ضیاع $\sigma = 0$ ذو برق تصور کرتے ہوئے، مساوات 13.118، مساوات 13.119 اور مساوات 13.33 سے

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}\\ &= \sqrt{k^2-\beta_0^2}\end{aligned} \tag{13.126}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ لا محدود وسعت کے خطے میں موج کا زاویائی مستقل β_0 ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں $k > \beta_0$ کی صورت میں $\gamma = \alpha + j\beta$ سے

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{k^2-\beta_0^2} \qquad (k > \beta_0)\\ \beta &= 0\end{aligned} \tag{13.127}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس صورت میں موج صفر نہیں کر پائے گی۔ اس کے برعکس $k < \beta_0$ کی صورت میں

$$\begin{aligned}\alpha &= 0\\ \beta &= \sqrt{\beta_0^2-k^2} \qquad (k < \beta_0)\end{aligned} \tag{13.128}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اس صورت میں موج، بغیر گھٹے مویج میں صفر کرے گی۔انقطاعی تعدد ان دو تعددی خطوں کے عین درمیان پایا جائے گا جہاں γ کی قیمت حقیقی سے خیالی ہوتے ہوئے صفر سے گزرے گی۔ مساوات 13.126 میں $\gamma = 0$ پر کرنے سے انقطاعی تعدد

$$\omega_c^2 \mu \epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{13.129}$$

یا

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2} \tag{13.130}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس طرح انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}} = \frac{2\pi}{k} \tag{13.131}$$

یا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \tag{13.132}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کے انقطاعی تعدد کے مساوات ہو بہو ایک جیسے ہیں۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد k $\beta_0 >$ کی صورت میں

$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} = \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2} \tag{13.133}$$

ہو گا جس سے مویج میں طول موج

$$\lambda_{\text{مویج}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{13.134}$$

اور مویج میں دوری رفتار

$$\begin{aligned} v_p = \frac{\omega}{\beta} &= \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}} \\ &= \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \end{aligned} \tag{13.135}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

v_0 لامحدود خطے میں دوری رفتار $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ جبکہ

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

4490 ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} کے دوری رفتار کے مساوات بھی ہو بہو یکساں ہیں۔

عرضی مقناطیسی موج کی رکاوٹ مساوات 13.112 سے

$$Z_{yz} = \frac{\gamma}{Y}$$

ہے جو انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $\gamma = j\beta$ کی صورت میں

$$Z_{yz} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = Z_z\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{13.136}$$

4491 ہو گا جہاں

4492 Z_z موتیج کے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ $Z_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ جبکہ

4493 λ_0 لامحدود خطے میں طول موج اور

4494 λ_{0c} انقطاعی طول موج

4495 کے برابر ہیں۔ مساوات 13.136 کا مساوات 13.103 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کی رکاوٹ مختلف ہیں۔

4496 ہم نے دیکھا کہ ہر بلند درجی انداز کا اپنا مخصوص انقطاعی تعدد، رفتار اور رکاوٹ ہوتے ہیں۔ اگر تعدد اتنی ہو کہ مختلف بلند انداز موتیج میں صفر کر سکتے ہوں تب
4497 میدان ان تمام میدانوں کا مجموعہ ہو گا جو موتیج میں پائے جاتے ہوں۔

4498 جدول 13.1 مستطیلی موتیج میں TE_{mn} موج کے متغیرات کے تعلق دیتا ہے۔ Z_{yz} کے علاوہ یہی تعلق TM_{mn} کے لئے بھی درست ہیں۔

جدول 13.1: مستطیلی مویج میں $\mathrm{TE}mn$ امواج کے متغیرات کے تعلق۔

نام تفاعل	اکائی	تعلق
انقطاعی تعدد	Hz	$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m}{z_1}\right)^2}$
انقطاعی طول موج	m	$\lambda_{0c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m}{z_1}\right)^2}}$
مویج میں طول موج	m	$\lambda_{\text{مویج}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$
دوری رفتار	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$v_p = \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$
عرضی موج کی رکاوٹ	Ω	$Z_{yz} = \frac{Z_z}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$

4499
13.5 کھوکھلی نالی مویج

4500 کھوکھلی نالی جس کا اندرونی رداس ρ ہو کے مسائل نلکی محدد میں باآسانی حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ایسے مویج میں TE_{mn} یا TM_{mn} امواج حاصل کرنے کی خاطر نلکی محدد ہی استعمال کرتے ہیں۔ یہاں بھی صفحہ 454 پر دیے آٹھ قدم لیتے ہوئے جواب حاصل کیا جائے گا۔ نلکی مویج z محدد پر رکھا گیا ہے لہٰذا اس میں امواج z جانب
4502 حرکت کریں گے۔

میکس ویل کے گردش کے دو مساوات کو نلکی محدد میں لکھ کر

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi}-\frac{\partial E_\phi}{\partial z}\right]\boldsymbol{a}_\rho+\left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi+\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(E_\phi \rho)}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_\text{z} = -\mu\left(\frac{\partial H_\rho}{\partial t}\boldsymbol{a}_\rho+\frac{\partial H_\phi}{\partial t}\boldsymbol{a}_\phi+\frac{\partial H_z}{\partial t}\boldsymbol{a}_\text{z}\right)$$

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}-\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]\boldsymbol{a}_\rho+\left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi+\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_\text{z} = \sigma\left(E_\rho\boldsymbol{a}_\rho+E_\phi\boldsymbol{a}_\phi+E_z\boldsymbol{a}_\text{z}\right)+\epsilon\left(\frac{\partial E_\rho}{\partial t}\boldsymbol{a}_\rho+\frac{\partial E_\phi}{\partial t}\boldsymbol{a}_\phi+\frac{\partial E_z}{\partial t}\boldsymbol{a}_\text{z}\right)$$

محددی اجزاء علیحدہ علیحدہ لکھتے ہوئے مندرجہ ذیل چھ مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi}-\frac{\partial E_\phi}{\partial z}=-\mu\frac{\partial H_\rho}{\partial t} \tag{13.137}$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial \rho}=-\mu\frac{\partial H_\phi}{\partial t} \tag{13.138}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(E_\phi \rho)}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi}=-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{13.139}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}-\frac{\partial H_\phi}{\partial z}=\sigma E_\rho+\epsilon\frac{\partial E_\rho}{\partial t} \tag{13.140}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial \rho}=\sigma E_\phi+\epsilon\frac{\partial E_\phi}{\partial t} \tag{13.141}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(H_\phi \rho)}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}=\sigma E_z+\epsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{13.142}$$

4503 حاصل ہوتے ہیں جن کے ساتھ چارج سے خالی $\rho_h=0$ خطے میں پھیلاو کے دو مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \tag{13.143}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0 \tag{13.144}$$

4504 شامل کرتے ہیں۔

مساوات 13.137 تا مساوات 13.144 کو وقت کے ساتھ اور z فاصلے کے ساتھ سائن نما تعلق کا پابند $(E_{\phi}=E_1 e^{j\omega t-\gamma z})$ بناتے ہوئے

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi}+\gamma E_{\phi}-ZH_{\rho}=0 \tag{13.145}$$

$$-\gamma E_{\rho}-\frac{\partial E_z}{\partial \rho}-ZH_{\phi}=0 \tag{13.146}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (E_{\phi}\rho)}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{\rho}}{\partial \phi}-ZH_z=0 \tag{13.147}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}+\gamma H_{\phi}-YE_{\rho}=0 \tag{13.148}$$

$$-\gamma H_{\rho}-\frac{\partial H_z}{\partial \rho}-YE_{\phi}=0 \tag{13.149}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (H_{\phi}\rho)}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi}-YE_z=0 \tag{13.150}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho E_{\rho})}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{\phi}}{\partial \phi}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \tag{13.151}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho H_{\rho})}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_{\phi}}{\partial \phi}-\gamma H_z=0 \tag{13.152}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$Z=-j\omega\mu \quad (\Omega/\mathrm{m})$ سلسلہ وار رکاوٹ

$Y=\sigma+j\omega\epsilon \quad (\mathrm{S/m})$ متوازی فراوانی

$\gamma=\alpha+j\beta$ حرکی مستقل

4505 ہیں۔

یہاں ہم عرضی برقی یا عرضی مقناطیسی موج منتخب کرتے ہوئے آگے بڑھ سکتے ہیں۔ ہم TE_{mn} منتخب کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں $E_z=0$ ہو گا جس سے

$$\gamma E_{\phi}-ZH_{\rho}=0 \tag{13.153}$$

$$-\gamma E_{\rho}-ZH_{\phi}=0 \tag{13.154}$$

$$\frac{E_{\phi}}{\rho}+\frac{\partial E_{\phi}}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{\rho}}{\partial \phi}-ZH_z=0 \tag{13.155}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi}+\gamma H_{\phi}-YE_{\rho}=0 \tag{13.156}$$

$$-\gamma H_{\rho}-\frac{\partial H_z}{\partial \rho}-YE_{\phi}=0 \tag{13.157}$$

$$\frac{H_{\phi}}{\rho}+\frac{\partial H_{\phi}}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_{\rho}}{\partial \phi}=0 \tag{13.158}$$

$$\frac{E_{\rho}}{\rho}+\frac{\partial E_{\rho}}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{\phi}}{\partial \phi}=0 \tag{13.159}$$

$$\frac{H_{\rho}}{\rho}+\frac{\partial H_{\rho}}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_{\phi}}{\partial \phi}-\gamma H_z=0 \tag{13.160}$$

4506 حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 13.147 میں $\frac{\partial (E_{\phi}\rho)}{\partial \rho}$ تفرق کو کھول کر $E_{\phi}+\rho\frac{\partial E_{\phi}}{\partial \rho}$ لکھا گیا ہے۔ ایسا ہی بقایا تفرق کے ساتھ بھی کیا گیا ہے۔

تمام میدان کو H_z کی صورت میں لکھنے کی خاطر مساوات 13.153 اور مساوات 13.154 سے عرضی موج کی رکاوٹ $Z_{\rho\phi}$

$$Z_{\rho\phi}=\frac{E_\rho}{H_\phi}=-\frac{E_\phi}{H_\rho}=-\frac{Z}{\gamma}=\frac{j\omega\mu}{\gamma} \tag{13.161}$$

لیتے ہیں۔ مساوات 13.161 سے E_ρ مساوات 13.156 میں پر کرتے ہوئے H_ϕ کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_\phi=-\frac{1}{\gamma-YZ_{\rho\phi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} \tag{13.162}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 13.161 سے E_ϕ مساوات 13.157 میں پر کرتے ہوئے H_ρ کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_\rho=-\frac{1}{\gamma-YZ_{\rho\phi}}\frac{\partial H_z}{\partial\rho} \tag{13.163}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات اور مساوات 13.161 سے

$$E_\rho=-\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma-YZ_{\rho\phi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} \tag{13.164}$$

$$E_\phi=\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma-YZ_{\rho\phi}}\frac{\partial H_z}{\partial\rho} \tag{13.165}$$

4507 لکھے جا سکتے ہیں۔ یہ مساوات تمام میدان کو H_z کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

مساوات 13.164 کا ϕ تفرق، مساوات 13.165 کا ρ تفرق اور مساوات 13.165 کو مساوات 13.155 میں پر کرتے ہوئے

$$\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma-YZ_{\rho\phi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\rho}+\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma-YZ_{\rho\phi}}\frac{\partial^2 H_z}{\partial\rho^2}+\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma-YZ_{\rho\phi}}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial\phi^2}-ZH_z=0 \tag{13.166}$$

موج کی مقداری مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اس میں

$$\frac{Z\left(\gamma-YZ_{\rho\phi}\right)}{Z_{\rho\phi}}=-k^2 \tag{13.167}$$

یعنی

$$k^2=\gamma^2+YZ \tag{13.168}$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial\phi^2}+k^2H_z=0$$

یا

$$\rho^2\frac{\partial^2 H_z}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial H_z}{\partial\rho}+k^2\rho^2H_z=-\frac{\partial^2 H_z}{\partial\phi^2} \tag{13.169}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں

$$H_z(\rho,\phi)=M(\rho)N(\phi) \tag{13.170}$$

لکھ کر متغیرات کی علیحدگی ممکن ہے۔ایسا کرتے ہوئے

$$\rho^2 N \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \rho N \frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 MN = -M \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔دونوں اطراف کو MN سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\rho^2}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{M} \frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 = -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں بایاں ہاتھ کا متغیرہ ρ ہے جبکہ دائیں ہاتھ کا متغیرہ ϕ ہے۔یوں دونوں اطراف کو مستقل n^2 کے برابر پر کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\frac{\rho^2}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{M} \frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 = n^2 \tag{13.171}$$

$$-\frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2} = n^2 \tag{13.172}$$

مندرجہ بالا میں نچلی مساوات کا حل

$$N = c_1 \cos n\phi + c_2 \sin n\phi \tag{13.173}$$

ہے جہاں c_1 اور c_2 مساوات کے مستقل ہیں۔ 4508

مساوات 13.171 کو

$$\rho^2 \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial M}{\partial \rho} + (k^2 \rho^2 - n^2) M = 0 \tag{13.174}$$

لکھا جا سکتا ہے جو بیسل مساوات[17] کہلاتی ہے اور جس کا حل

$$M = c_3 J_n(k\rho) + c_4 N_n(k\rho) \tag{13.175}$$

لکھا جاتا ہے جہاں c_3 اور c_4 مساوات کے مستقل ہیں۔ 4509

یوں مساوات 13.170 سے

$$H_z = \left[c_3 J_n(k\rho) + c_4 Y_n(k\rho) \right] \left(c_1 \cos n\phi + c_2 \sin n\phi \right) \tag{13.176}$$

حاصل ہوتا ہے جس پر مندرجہ ذیل دو عدد سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ 4510

کائنات میں کہیں پر بھی لا محدود میدان نہیں پایا جاتا لہٰذا نلکی مویج میں بھی میدان کی قیمت محدود ہو گی۔اس کے علاوہ موصل نلکی سطح پر برقی میدان صفر ہو 4511
گا، یعنی $(E_\phi(\rho_0) = 0)$، جہاں نلکی کا رداس ρ_0 کے برابر ہے۔ 4512

پہلے شرط کے تحت نلکی محدد میں میدان کی قیمت محدود ہے، لیکن $\rho = 0$ پر $Y_n \to \infty$ کی قیمت لا محدود ہوتی ہے لہٰذا مساوات 13.176 میں

$$c_4 = 0 \tag{13.177}$$

---

[17] Bessel's equation

ہو گا۔ اگر $c_2=0$ ہو تب میدان کی چوٹی $\phi=0^{\circ}$ پر ہو گی اور اگر $c_1=0$ ہو تب میدان کی چوٹی $n\phi=90^{\circ}$ پر ہو گی۔ کسی اور زاویے پر چوٹی کی صورت میں دونوں مستقل پائے جائیں گے۔ ہم چوٹی کو صفر زاویے پر تصور کرتے ہیں۔ یوں

$$H_z=H_0\cos n\phi J_n(k\rho) \tag{13.178}$$

ہو گا جہاں H_0 = c_1c_3 لکھا گیا ہے۔ اب چونکہ $\phi=0$ اور $\phi=2\pi$ ریڈیئن نلکی موتیج میں ایک ہی نقطے کو ظاہر کرتے ہیں لہٰذا دونوں زاویوں سے میدان برابر حاصل ہونا چاہیے۔ یوں

$$n=0,1,2,\cdots$$

4515 حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n=1$ کی صورت میں نلکی میں $\phi=0$ تا $\phi=2\pi$ یعنی ایک چکر کاٹتے ہوئے H_z کی موج بوجہ $\cos n\phi$ کے ایک چکر کاٹے گا۔ اسی طرح $n=2$ کی صورت میں نلکی کے گرد ایک چکر کاٹتے ہوئے میدان دو چکر کاٹتا ہے۔ یوں نلکی کے گرد ایک چکر کاٹتے ہوئے میدان کے چکر کی تعداد n دیتا ہے۔

نلکی موتیج میں موج کی مساوات

$$H_z=H_0\cos n\phi J_n(k\rho)e^{j\omega t-\gamma z} \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{13.179}$$

ہو گی جہاں میدان کا وقت اور فاصلے کے ساتھ سائن نما تبدیلی کو بھی شامل کیا گیا ہے۔ اس کو مساوات 13.165 میں پر کرتے ہوئے

$$E_\phi=\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma-YZ_{\rho\phi}}H_0\cos n\phi\frac{\mathrm{d}J_n(k\rho)}{\mathrm{d}\rho}e^{j\omega t-\gamma z} \tag{13.180}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسری سرحدی شرط کے تحت موصل نلکی سطح پر متوازی برقی میدان صفر ہو گا لہٰذا مساوات 13.180 میں ρ_0 پر $E_\rho=0$ پر کرتے ہوئے

$$\left.\frac{\mathrm{d}J_n(k\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho_0}=0 \tag{13.181}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$k\rho_0=\alpha'_{nm} \tag{13.182}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں α'_{nm} بیسل تفاعل کے تفرق کے صفر کہلاتے ہیں یعنی

$$\frac{\mathrm{d}J_n(\alpha'_{nm})}{\mathrm{d}\rho}=0 \tag{13.183}$$

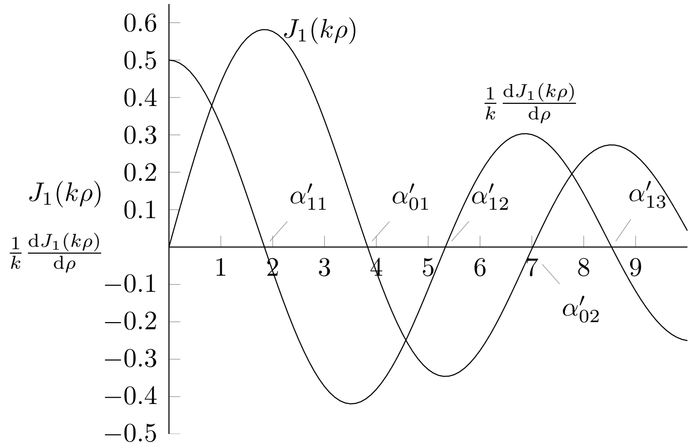
4516 مساوات 13.182 سے حاصل k کو k'_{nm} لکھتے ہوئے یوں

$$k'_{nm}=\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0} \qquad (m=1,2,3,\cdots) \tag{13.184}$$

4517 حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 13.184 کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$H_z=H_0\cos n\phi J_n(k'_{nm}\rho)e^{j\omega t-\gamma z} \tag{13.185}$$



شکل 13.14: بیسل تفاعل۔

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 13.162 تا مساوات 13.165 میں پر کرتے ہوئے بقایا تمام میدان

$$H_\phi = \frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{n}{\rho} H_0 \sin n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \tag{13.186}$$

$$H_\rho = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{\mathrm{d}J_n(k'_{nm}\rho)}{\mathrm{d}\rho} e^{j\omega t - \gamma z} \tag{13.187}$$

$$E_\rho = -\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{n}{\rho} H_0 \sin n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \tag{13.188}$$

$$E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{\mathrm{d}J_n(k'_{nm}\rho)}{\mathrm{d}\rho} e^{j\omega t - \gamma z} \tag{13.189}$$

$$E_z = 0 \tag{13.190}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں E_z بھی شامل کیا گیا ہے۔

آئیں k'_{nm} کو سمجھیں۔ اگر $n = 1$ ہو تب بیسل تفاعل J_1 اور اس کا تفرق $\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}\rho}$ استعمال کئے جائیں گے۔ $\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}\rho}$ کے پہلے تین صفر $\alpha'_{11} = 1.84$، $\alpha'_{12} = 5.33$ اور $\alpha'_{13} = 8.54$ ہیں جو بالترتیب TE_{11}، TE_{12} اور TE_{13} بلند عرضی برقی امواج کے مستقل ہیں۔ شکل 13.14 میں انہیں دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح TE_{01} اور TE_{02} میں $n = 0$ ہے جبکہ $\alpha'_{01} = 3.832$ اور $\alpha'_{02} = 7.016$ ہیں۔ بیسل تفاعل کے تفرق $\frac{\mathrm{d}J_0}{\mathrm{d}\rho}$ اور J_1 کے صفر عین برابر ہوتے ہیں۔ شکل میں یوں $\frac{\mathrm{d}J_0}{\mathrm{d}\rho}$ کے صفر کو J_1 کے صفر سے حاصل کیا گیا دکھایا گیا ہے۔

کامل ذو برق کی صورت میں $\sigma = 0$ لیتے ہوئے مساوات 13.184 کو مساوات 13.168 میں پر کرنے سے

$$\left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

یا

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \tag{13.191}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات سے تین صورتیں ممکن ہیں۔

- کم تعدد پر γ حقیقی ہو گا لہٰذا مویج غیر شفاف ہو گا اور موج اس میں صفر نہیں کر پائے گی۔
- مخصوص درمیانے تعدد پر $\gamma=0$ حاصل ہو گا۔ یہ انقطاعی تعدد ہو گی۔
- بلند تعدد پر γ خیالی عدد ہو گا لہٰذا مویج شفاف ہو گا اور موج اس میں صفر کر پائے گی۔

مساوات 13.191 کو صفر کے برابر پر کرنے سے انقطاعی تعدد

$$f_c=\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}\frac{k'_{nm}}{\rho_0} \qquad \text{(Hz)} \tag{13.192}$$

اور انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c}=\frac{2\pi\rho_0}{k'_{nm}} \qquad \text{(m)} \tag{13.193}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں TE_{11} کے لئے $\alpha'_{11}=1.84$ سے $\lambda_{0c}=\frac{2\pi\rho_0}{1.84}=3.41\rho_0$ حاصل ہو گا۔
انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر γ خیالی ہو گا لہٰذا اسے

$$\beta=\sqrt{\omega^2\mu\epsilon-\left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2} \qquad \text{(rad/m)} \tag{13.194}$$

لکھا جائے گا۔ مندرجہ بالا دو مساوات کو ملا کر z سمت میں مویج میں طول موج

$$\lambda_g=\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad \text{(m)} \tag{13.195}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں

λ_0 مویج کے ذو برق سے بھرے لا محدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

ہیں۔ مویج میں دوری رفتار $v_p=f\lambda_g$

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad \text{(m/s)} \tag{13.196}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$v_0=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

ہے۔

مساوات 13.195 اور مساوات 13.196 ہو بہو مستطیلی مویج کے مساوات ہیں۔ یہی مساوات ہر شکل کے کھوکھلے مویج کے لئے درست ثابت ہوتے ہیں۔
بیسل تفاعل کے صفر برابر فاصلوں پر نہیں پائے جاتے لہٰذا نلکی مویج میں ممکنہ بلند انداز امواج برابر تعدد کے فاصلے پر نہیں پائے جاتے۔ اس کے برعکس مستطیلی مویج میں یہ بلند انداز امواج برابر تعدد کے فاصلوں پر پائے جاتے ہیں۔ نلکی مویج میں TE_{11} تمام امواج، بشمول TM_{nm}، سے کم انقطاعی تعدد رکھتی ہے لہٰذا اسے **غالب بلند درجی انداز**[18] کہتے ہیں۔ TE_{01} بلند درجی انداز نہایت کم تضعیف کا حامل ہے لہٰذا کم موصلیت کے چادر کی بنی مویج میں اس کی اہمیت مزید بڑھ جاتی ہے۔

[18] dominant mode

13.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف

ہم دیکھ چکے ہیں کہ انقطاعی تعدد سے کم تعدد کی موج تضعیف کا شکار ہوتی ہے اور یہ موج میں صفر کے قابل نہیں ہوتی۔ آئیں تضعیف کی مقدار کا حساب لگائیں۔ مستطیلی موج میں مساوات 13.127

$$\alpha=\sqrt{k^2-\beta_0^2}=\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2-\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2} \tag{13.197}$$

انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیفی مستقل دیتا ہے جسے مساوات 13.131 کی مدد سے

$$\alpha=\frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2-1}=\beta_0\sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2-1}\quad(\mathrm{Np/m}) \tag{13.198}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

ہیں۔ مساوات 13.198 ہر قسم کے شکل کے کھوکھلے موج کے لئے درست ہے۔

انقطاعی تعدد سے بہت کم تعدد $(\lambda_0 \gg \lambda_{0c})$ کی صورت میں مساوات 13.198 سے

$$\alpha\approx\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}\,\mathrm{Np/m} \tag{13.199}$$

$$=\frac{2\pi\times 8.69}{\lambda_{0c}}=\frac{54.6}{\lambda_{0c}}\,\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}} \tag{13.200}$$

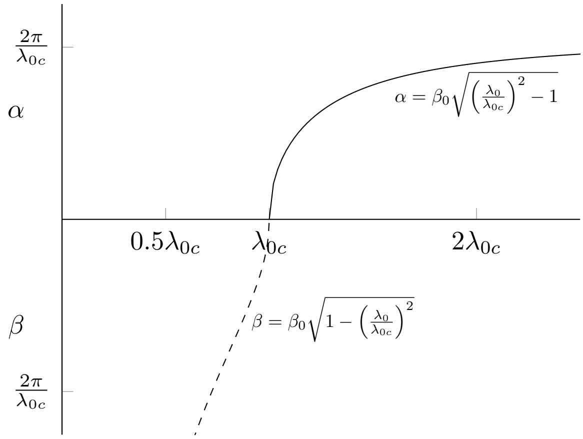
حاصل ہوتا ہے۔ شکل 13.15 میں تضعیفی مستقل α بالمقابل لامحدود خطے میں طول موج λ_0 کو ٹھوس خط سے دکھایا گیا ہے۔ انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر $\alpha=0$ ہے۔

مثال 13.1: ایک موج کا انقطاعی طول موج $\lambda_{0c}=50\,\mathrm{mm}$ ہے۔ اس موج میں $\lambda_0=2\,\mathrm{m}$ کے موج کی فی میٹر صفر کے دوران تضعیف دریافت کریں۔

حل: چونکہ $\lambda_0 \gg \lambda_{0c}$ ہے لہٰذا

$$\alpha=\frac{2\pi}{50\times10^{-3}}=125.68\,\mathrm{Np/m}\qquad\left(1092\,\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}\right)$$

ہو گا۔ یوں موج میں بہت کم فاصلے پر موج کی قیمت انتہائی گھٹ جائے گی۔



شکل 13.15: حرکی مستقل بالمقابل طول موج۔انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر تضعیفی مستقل صفر ہے جبکہ اس سے زیادہ طول موج پر زاویائی مستقل صفر ہے۔

13.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف

کامل موصل چادر سے بنا اور کامل ذو برق سے بھرا مویج بے ضیاع ہوتا ہے لہٰذا انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر $\alpha = 0$ ہو گا۔ مساوات 13.128 سے

$$\begin{aligned}
\beta &= \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}\right)^2} \\
&= \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}
\end{aligned}$$

یا

$$\beta = \beta_0\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{13.201}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 13.201 ہر قسم کے شکل کے کھوکھلے مویج کے لئے درست ہے۔ شکل 13.15 میں نقطہ دار خط سے β دکھایا گیا ہے۔ انقطاعی طول موج سے زیادہ طول موج پر $\beta = 0$ ہے۔

شکل 13.15 میں طول موج کو افقی محدد اور حرکی مستقل کو عمودی محدد پر رکھا گیا ہے۔ عین انقطاعی طول موج λ_{0c} پر $\gamma = 0$ یعنی $\alpha = 0$ اور $\beta = 0$ ہیں۔ انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر $\alpha = 0$ رہتا ہے جبکہ β کی قیمت طول موج کم کرنے سے لا محدود قیمت کی جانب بڑھتی ہے۔ انقطاعی طول موج سے زیادہ طول موج پر $\beta = 0$ رہتا ہے جبکہ α کی قیمت $\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}$ تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے۔

حقیقی مویج کامل نہیں ہوتے لہٰذا ان میں α صفر نہیں ہوتا۔ بہتر موصل، مثلاً تانبہ، کی چادر سے بنے اور ہوا سے بھرے مویج میں α کی قیمت نہایت کم ہوتی ہے جبکہ β مندرجہ بالا مساوات کے عین مطابق ہوتا ہے۔ آئیں حقیقی مویج میں α کی قیمت حاصل کریں۔

صفحہ 332 پر مساوات 10.56

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}}$$

موج کی اوسط طاقت دیتی ہے۔ کسی بھی موتج میں میدان، مثلاً صفحہ 464 پر مساوات 13.85، میں حرکت کرتے میدان $e^{-\alpha x} e^{j(\omega t-\beta x)}$ خاصیت رکھتے ہیں۔ یوں $Z = \frac{E}{H}$ لیتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{|E|^2}{Z_h} e^{-2\alpha x} = \frac{1}{2} Z_h |H|^2 e^{-2\alpha x} = P_0 e^{-2\alpha x} \tag{13.202}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $x = 0$ پر اوسط طاقت P_0 کے برابر ہے، قدرتی رکاوٹ Z کے حقیقی جزو کو Z_h اور $|E|^2 = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}^*$ لکھے گئے ہیں۔ اس مساوات سے

$$\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}}{P} \qquad (\mathrm{Np/m}) \tag{13.203}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ کو P لکھا گیا ہے۔ مساوات 13.203 میں کسی بھی نقطے پر x سمت میں P طاقت منتقل ہو رہا ہے جبکہ اسی نقطے پر $-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ طاقت کے ضیاع کو ظاہر کرتا ہے۔ تضعیفی مستقل کی اس مساوات میں طاقت کا ضیاع، موتج کی دیواروں میں پیدا برقی رو سے مزاحمتی برقی ضیاع $(I^2 R_c)$ ہے جو حرارت میں تبدیل ہوتا ہے۔ انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر موتج کے تضعیفی مستقل پر طاقت کا ضیاع عمل در آمد نہیں ہوتا۔ انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر امواج نہ گزارنے کی معذوری کو α سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں موتج میں موج نہیں گزر پاتی بلکہ یہ انعکاس پذیر ہوتی ہے۔

مساوات 13.203 کو یوں پڑھا جا سکتا ہے

$$\alpha = \frac{\text{طاقت کا ضیاع فی اکائی لمبائی}}{\text{منتقل طاقت کا دگنا}}$$

کامل ذو برق سے بھرے موتج میں ذو برق کا ضیاع صفر ہو گا۔ ایسی صورت میں صرف موتج کے چادروں میں مزاحمتی ضیاع پایا جائے گا لہٰذا اکائی لمبائی میں طاقت کا ضیاع

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{d}x}\int\int \mathscr{P}_{\text{چادر}}\,\mathrm{d}S = \int \mathscr{P}_{\text{چادر}}\,\mathrm{d}l \tag{13.204}$$

ہو گا جہاں $\mathscr{P}_{\text{چادر}}$ سے مراد وہ اوسط طاقت (وقت کے مطابقت سے اوسط) ہے جو موتج کے دیواروں کے موصل چادروں میں منتقل ہو رہا ہے۔ مساوات 13.204 میں سطح کا چھوٹا رقبہ $\mathrm{d}S$ موتج کے اندرونی سطح پر لیا جاتا ہے۔ اس رقبے کی لمبائی $\mathrm{d}x$ اور چوڑائی $\mathrm{d}l$ ہے جہاں l اندرونی سطح پر ایک چکر کے برابر ہے۔ شکل 13.9 کے مستطیلی موتج کی صورت میں $l = 2(y_1 + z_1)$ کے برابر ہو گا۔ مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ سے موصل چادر میں منتقل طاقت کو

$$\mathscr{P}_{\text{چادر}} = \frac{1}{2} Z_{c,h} |H_m|^2 \tag{13.205}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں H_m چادر کے متوازی میدان اور Z_c چادر کے موصل کا قدرتی رکاوٹ ہے جس کا حقیقی جزو $Z_{c,h}$ ہے۔ چادر کے متوازی میدان کی حتمی قیمت $|H_m|$ ہے۔ چونکہ موصل میں $\sigma \gg j\omega\epsilon$ ہوتا ہے لہٰذا

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} =\approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

ہو گا جس سے

$$Z_{c,h} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 13.204 کو

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{Z_{c,h}}{2}\int |H_m|^2\,\mathrm{d}l \tag{13.206}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مویج میں کسی بھی نقطے پر لمبائی کے جانب منتقل طاقت کو

$$P=\frac{Z_{yz,h}}{1}\int\int\left|H_{\perp}\right|^2\mathrm{d}S \tag{13.207}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $H_{\perp}$ سے مراد وہ میدان ہے جو موج کے حرکت کے عمودی ہے۔اس میدان کو مویج کے سطح عمودی تراش کے متوازی بھی لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں Z_{yz} مویج کا قدرتی رکاوٹ ہے جس کے حقیقی جزو کو $Z_{yz,h}$ لکھا گیا ہے۔اس طرح تضعیفی مستقل کو

$$\alpha=\frac{Z_{c,h}\int\left|H_m\right|^2\mathrm{d}l}{2Z_{yz,h}\int\int\left|H_{\perp}\right|^2\mathrm{d}S}\qquad(\mathrm{Np/m}) \tag{13.208}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 13.208 تمام مویج کے تمام بلند انداز کے لئے درست ہے۔کسی بھی بلند انداز کا تضعیفی مستقل حاصل کرتے وقت اسی بلند انداز کے میدان مساوات 13.208 میں پر کئے جائیں گے۔بہتر موصل سے بنے مویج کی صورت میں کامل موصل کے لئے حاصل کردہ میدان ہی استعمال کئے جاتے ہیں۔مساوات 13.208 کا استعمال مندرجہ ذیل مثال میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 13.2: دو متوازی چادروں کے مویج کو صفحہ 448 پر شکل 13.1 میں دکھایا گیا ہے۔اس مویج میں 450 Hz کے TEM موج کا تضعیفی مستقل حاصل کریں۔چادروں کے درمیان فاصلہ 20 cm ہے۔

حل: مساوات 13.208 سے

$$\alpha=\frac{2Z_{c,h}\int_0^{y_1}\left|H_m\right|^2\mathrm{d}y}{2Z_{yz,h}\int_0^{y_1}\int_0^{z_1}\left|H_{\perp}\right|^2\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y}$$

لکھا جائے گا جہاں کسر کے بالائی حصے میں دونوں اطراف کے چادروں میں طاقت کے ضیاع کی وجہ سے ضرب دو لکھا گیا ہے۔اس مویج میں TEM موج کے میدان حرکت کے سمت کے عمودی اور چادروں کے متوازی ہیں۔یوں مقناطیسی میدان $H\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ہے جو چادروں کے متوازی اور موج کے حرکت کے عمودی ہے۔یوں H_m اور $H_{\perp}$ دونوں $H\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ہی ہیں لہٰذا

$$\alpha=\frac{Z_{c,h}y_1}{Z_{yz,h}y_1z_1}=\frac{Z_{c,h}}{z_1Z_{yz,h}}$$

ہو گا۔تانبے میں 450 MHz پر

$$\begin{aligned}Z_c&=\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma+j\omega\epsilon}}\\&=\sqrt{\frac{j2\times\pi\times450\times10^6\times4\times\pi\times10^{-7}}{5.8\times10^7+j2\times\pi\times450\times10^6\times8.854\times10^{-12}}}\\&=0.0055+j0.0055\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کا حقیقی جزو $Z_{c,h} = 0.0055$ اوہم ہے۔ ہوا کے لئے $Z_{yz,h} = Z_{yz} = 376.7\,\Omega$ ہے۔ ان نتائج کے تحت

$$\alpha = \frac{0.0055}{0.2 \times 376.7} = 73\,\mu\mathrm{Np/m}$$

ہو گا۔ یوں ایک کلو میٹر فاصلہ طے کرنے پر میدان کی قیمت ابتدائی قیمت کے $e^{-0.073} = 0.9296$ یعنی 92.96 فی صد ہو گی۔

مثال 13.3: تانبے کی وسیع چادر کے متوازی $2\,\mathrm{cm}$ چوڑائی تانبے کی پٹی $1\,\mathrm{mm}$ کے فاصلے پر پائی جاتی ہے۔ پٹی اور چادر کے درمیان $\epsilon_R = 2.7$ کا ذو برق بھرا گیا ہے۔ اس ذو برق میں $E_{\text{موثر}} = 200\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ برقی شدت اور $600\,\mathrm{MHz}$ تعدد کی TEM موج پائی جاتی ہے۔ الف) اوسط منتقل طاقت دریافت کریں۔ ب) فی میٹر فاصلہ طے کرتے ہوئے تانبے میں کل توانائی کا ضیاع دریافت کریں۔ پ) تضعیفی مستقل حاصل کریں۔

حل: ذو برق اور تانبے کے قدرتی رکاوٹ بالترتیب

$$Z_z = \frac{\mu_0}{2.7\epsilon_0} = 227\,\Omega$$
$$Z_c = \sqrt{\frac{j2 \times \pi \times 600 \times 10^6 \times 4 \times \pi \times 10^{-7}}{5.8 \times 10^7 + j2 \times \pi \times 600 \times 10^6 \times 8.854 \times 10^{-12}}} = 0.00639(1+j)\,\Omega$$

ہیں۔ برقی میدان تانبے کے عمودی ہو گا لہٰذا تانبے کے متوازی مقناطیسی میدان کی موثر قیمت

$$H_{\text{موثر}} = \frac{E_{\text{موثر}}}{Z_z} = \frac{0.2}{227} = 0.881\,\frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{m}}$$

ہو گی۔ موج کا رقبہ عمودی تراش $S = 2\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{mm}$ ہے۔ یوں منتقل طاقت

$$P_{\text{منتقل}} = \frac{E^2}{2Z_z}S = \frac{E_{\text{موثر}}}{Z_z}S = \frac{0.2^2}{227} \times 0.02 \times 0.001 = 3.49\,\mathrm{nW}$$

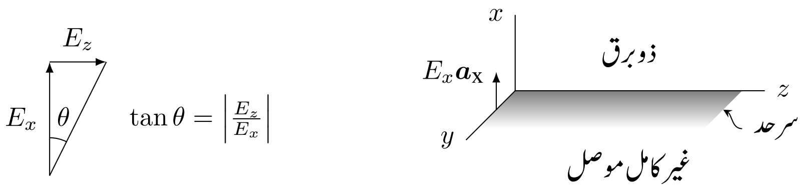
ہو گا جبکہ تانبے کی پٹی اور تانبے کی چادر میں پٹی کے برابر حصے میں مل کر کل طاقت کا ضیاع

$$P_{\text{ضیاع}} = 2\frac{Z_{c,h}H^2}{2}S = 2Z_{c,h}H^2_{\text{موثر}}S = 2 \times 0.00639 \times \left(0.881 \times 10^{-3}\right)^2 \times 0.02 \times 0.001 = 0.195\,\frac{\mathrm{nW}}{\mathrm{m}}$$

ہو گا۔ اس طرح تضعیفی مستقل

$$\alpha = \frac{0.195 \times 10^{-9}}{3.49 \times 10^{-9}} = 55\,\frac{\mathrm{mNp}}{\mathrm{m}} \qquad \left(0.48\,\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔



ب: زاویہ جھکاو

الف: غیر کامل موصل اور ذو برق کی سرحد

شکل 13.16: دو خطوں کے سرحد پر امواج۔

13.8 سطحی موج

غیر کامل موصل اور ذو برق کی سطح شکل 13.16-الف میں $x = 0$ پر دکھائی گئی ہے۔ سطح کے نیچے $(x < 0)$ غیر کامل موصل جبکہ اس کے اوپر $(x > 0)$ ذو برق ہے۔ سطح کے ساتھ ساتھ TEM موج z سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ آئیں اس مسئلے کو حل کریں۔

اس مسئلے کو حل کرتے ہوئے تصور کیا جائے گا کہ موج میں y کے تبدیلی سے کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔ یوں $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ہو گا۔ چونکہ موج z سمت حرکت کر رہی ہے لہٰذا تمام میدان

$$H = H_0 e^{j\omega t - \gamma z} \tag{13.209}$$

خاصیت رکھتے ہیں۔ ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے، سطح سے اوپر ذو برق میں مساوات 13.16 تا مساوات 13.23 مندرجہ ذیل صورت اختیار کر لیتے ہیں

$$\gamma_1 E_y + j\omega\mu_1 H_x = 0 \tag{13.210}$$

$$-\gamma_1 E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu_1 H_y = 0 \tag{13.211}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} + j\omega\mu_1 H_z = 0 \tag{13.212}$$

$$\gamma_1 H_y - j\omega\epsilon_1 E_x = 0 \tag{13.213}$$

$$-\gamma_1 H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\omega\epsilon_1 E_y = 0 \tag{13.214}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - j\omega\epsilon_1 E_z = 0 \tag{13.215}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_1 E_z = 0 \tag{13.216}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} - \gamma_1 H_z = 0 \tag{13.217}$$

جہاں زیر نوشت میں 1 سرحد سے اوپر ذو برق کے خطے کو ظاہر کرتا ہے۔ مساوات 13.213 سے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ Z_z

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\gamma_1}{j\omega\epsilon_1} = Z_z \tag{13.218}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ موج کی مقداری مساوات حاصل کرنے کی خاطر مساوات 13.213 سے E_x اور مساوات 13.215 سے E_z کو مساوات 13.211 میں پر کرتے ہوئے

$$-\frac{\gamma_1^2}{j\omega\epsilon_1} H_y - \frac{1}{j\omega\epsilon_1}\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + j\omega\mu_1 H_y = 0$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \left(\gamma_1^2 + \omega^2\mu_1\epsilon_1\right) H_y = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = k_1^2 H_y \tag{13.219}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$k_1^2 = -\left(\gamma_1^2 + \omega^2 \mu_1 \epsilon_1\right) \tag{13.220}$$

کے برابر ہے۔ مساوات 13.219 کا حل

$$H_y = c_1 e^{-k_1 x} + c_2 e^{k_1 x}$$

ہے۔ ذو برق میں x کی قیمت 0 تا ∞ ممکن ہے۔ اس مساوات میں سرحد سے دور لا محدود فاصلے $x \to \infty$ پر میدان کی قیمت لا محدود حاصل ہوتی ہے جو نا قابل قبول نتیجہ ہے لہٰذا اسے رد کرتے ہوئے $c_2 = 0$ لیا جاتا ہے۔ اور یوں

$$H_y = c_1 e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \qquad \text{ذو برق خطہ} \tag{13.221}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موج کو مساوات 13.209 کے طرز پر لکھا گیا ہے۔ 4579

موصل خطے کے لئے میکس ویل کے مساوات مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\gamma_2 E_y + j\omega\mu_2 H_x = 0 \tag{13.222}$$
$$-\gamma_2 E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu_2 H_y = 0 \tag{13.223}$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} + j\omega\mu_2 H_z = 0 \tag{13.224}$$
$$\gamma_2 H_y - \left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) E_x = 0 \tag{13.225}$$
$$-\gamma_2 H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) E_y = 0 \tag{13.226}$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) E_z = 0 \tag{13.227}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_2 E_z = 0 \tag{13.228}$$
$$\frac{\partial H_x}{\partial x} - \gamma_2 H_z = 0 \tag{13.229}$$

موج کی مقداری مساوات حاصل کرنے کی خاطر مساوات 13.225 سے E_x اور مساوات 13.227 سے E_Z کو مساوات 13.223 میں پر کرتے ہوئے

$$-\frac{\gamma_2^2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} H_y - \frac{1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + j\omega\mu_2 H_y = 0$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \left[\gamma_2^2 - j\omega\mu_2\left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right)\right] H_y = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = k_2^2 H_y \tag{13.230}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$k_2^2 = -\gamma_2^2 + \gamma_m^2 \tag{13.231}$$

$$\gamma_m^2 = j\omega\mu_2\left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) \tag{13.232}$$

کے برابر ہیں۔ 4580

مساوات 13.230 کا حل

$$H_y = c_3 e^{-k_2 x} + c_4 e^{k_2 x}$$

ہے۔ موصل میں x کی قیمت 0 تا $-\infty$ ممکن ہے۔ اس مساوات میں سرحد سے دور لامحدود فاصلے $x \to -\infty$ پر میدان کی قیمت لامحدود حاصل ہوتی ہے جو ناقابل قبول نتیجہ ہے لہٰذا اسے رد کرتے ہوئے $c_3 = 0$ لیا جاتا ہے اور یوں

$$H_y = c_4 e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_2 z} \qquad \text{موصل خطہ} \tag{13.233}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موج کو مساوات 13.209 کے طرز پر لکھا گیا ہے۔ 4581

مقناطیسی سرحدی شرط کے تحت سرحد کے دونوں اطراف تمام اوقات متوازی مقناطیسی میدان برابر ہوں گے لہٰذا $x = 0$ پر کسی بھی z پر تمام t کے لئے مساوات 13.221 اور مساوات 13.233 برابر ہوں گے جس سے

$$\gamma_1 = \gamma_2 \tag{13.234}$$

$$c_1 = c_4 = H_{y0} \tag{13.235}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں مستقل c_1 اور مستقل c_4 کو H_{y0} لکھا گیا ہے۔ ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے ذو برق میں مساوات 13.213 سے E_x اور مساوات 13.215 سے E_z یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\gamma_1 H_{y0}}{j\omega\epsilon_1} e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \\ E_z &= \frac{-k_1 H_{y0}}{j\omega\epsilon_1} e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \qquad \text{ذو برق خطہ} \end{aligned} \tag{13.236}$$

اسی طرح ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے موصل میں مساوات 13.225 سے E_x اور مساوات 13.227 سے E_z یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\gamma_1 H_{y0}}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \\ E_z &= \frac{k_2 H_{y0}}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \qquad \text{موصل خطہ} \end{aligned} \tag{13.237}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $c_4 = c_1 = H_{y0}$ اور $\gamma_2 = \gamma_1$ پر کئے گئے ہیں۔ 4582

سرحد کے دونوں اطراف متوازی برقی میدان برابر ہونے کی شرط سے $x = 0$ پر دونوں اطراف E_z برابر ہوں گے جس سے

$$\frac{-k_1}{j\omega\epsilon_1} = \frac{k_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}$$

یعنی

$$k_1 = \frac{-j\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} k_2 \tag{13.238}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 13.220 سے

$$\begin{aligned}
\gamma_1^2 &= -\omega^2\mu_1\epsilon_1 - k_1^2\\
&= -\omega^2\mu_1\epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}\right)^2 k_2^2\\
&= -\omega^2\mu_1\epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}\right)^2 \left(-\gamma_2^2 + \gamma_m^2\right)
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں پہلے قدم پر مساوات 13.238 اور دوسرے قدم پر مساوات 13.231 کا استعمال کیا گیا ہے۔ اس میں مساوات 13.234 سے $\gamma_1 = \gamma_2$ پر کرتے ہوئے

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{-\omega^2\mu_1\epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}\right)^2 \gamma_m^2}{1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}\right)^2}} \tag{13.239}$$

4583 حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 13.236 میں E_x سرحد کے عمودی ہے جبکہ E_z سرحد کے متوازی ہے۔ کل برقی میدان ان دونوں کا سمتی مجموعہ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کل میدان حرکت کی سمت میں جھکا ہو گا۔ شکل 13.16-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ جھکنے کا زاویہ

$$\theta = \tan^{-1}\frac{|E_z|}{|E_x|} = \tan^{-1}\left|\frac{-k_1}{\gamma_1}\right| \tag{13.240}$$

4584 ہو گا۔

4585 آئیں چند مخصوص سرحدوں پر موج کے جھکاو کا زاویہ حاصل کریں۔

ہوا اور تانبے کے سرحد پر $\omega = 100\,\mathrm{Mrad/s}$ تعدد کے موج کی بات کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_2 = \epsilon_0\\
\mu_1 &= \mu_2 = \mu_0\\
\sigma_2 &= 5.8 \times 10^7
\end{aligned}$$

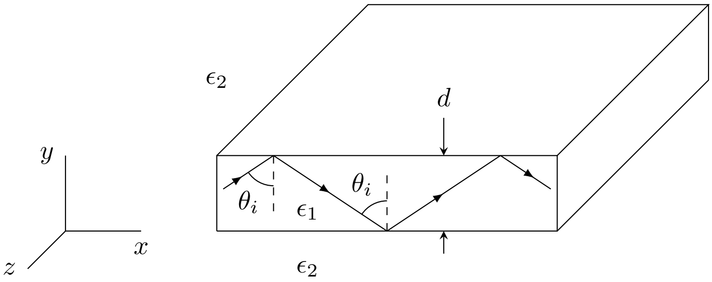
سے

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = \gamma_2 &= j0.33356\\
k_1 &= 0.9215(1-j) \times 10^{-6}\\
k_2 &= 6.038(1-j) \times 10^4
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{0.9215(1-j)\times 10^{-6}}{j0.33356}\right| = 0.00022385^\circ$$

4586 زاویہ حاصل ہوتا ہے۔ اس نتیجے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل کے سرحد پر برقی میدان تقریباً عمودی ہی ہوتا ہے۔ برقی میدان کا عمودی یعنی E_x حصہ حرکت
4587 موج کی سمت میں طاقت منتقل کرتا ہے جبکہ E_z حصہ موصل میں طاقت منتقل کرتا ہے جو ضائع ہو جاتا ہے۔



شکل 13.17: ذو برق تختی مویج میں اندرونی مکمل انعکاس سے موج صفر کرتی ہے۔

ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر $\omega = 100\,\mathrm{Mrad/s}$ تعدد کے موج کی بات کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_0\\
\epsilon_2 &= 78\epsilon_0\\
\mu_1 &= \mu_2 = \mu_0\\
\sigma_2 &= 0
\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = \gamma_2 &= j0.33144\\
k_1 &= j0.037528\\
k_2 &= 2.9272
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جو

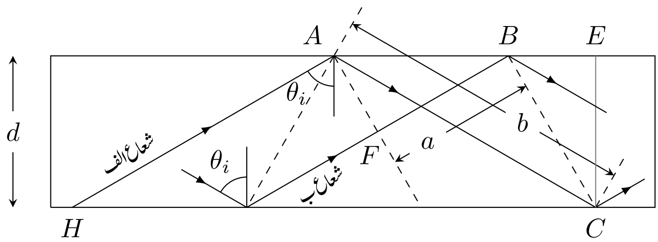
$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{j0.037528}{j0.33144}\right| = 6.46^\circ$$

زاویہ دیتا ہے۔ ہوا اور پانی کے سرحد پر برقی میدان کی جھکاو با آسانی ناپی جا سکتی ہے۔

13.9 ذو برق تختی مویج

اب تک ہم موصل چادروں سے بنائے گئے مویج پر غور کرتے رہے ہیں۔ اس حصے میں ذو برق سے بنائے گئے مویج پر غور کیا جائے گا۔ شکل 13.17 میں d موٹائی اور لا محدود وسعت کے ذو برق کا تختہ دکھایا گیا ہے۔ اس تختے میں بائیں طرف سے TEM موج داخلی کی جاتی ہے۔ ہم تختے میں پیدا کردہ موج کی حرکت پر غور کریں گے۔ یہ موج تختے میں بائیں سے دائیں یعنی بڑھتے x جانب حرکت کرے گی۔ جب تک ذو برق کے نچلے اور بالائی سطحوں پر آمدی زاویہ کی قیمت فاصل زاویے سے زیادہ ہو، موج مکمل اندرونی انعکاس کرے گی۔ یوں ذو برق میں بار بار انعکاس کرتے ہوئے موج صفر کرے گی۔ ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے دو متوازی موصل چادروں کے درمیان موج انعکاس کر رہی ہے۔ حقیقت میں موصل چادروں کی صورت میں چادر پر متوازی برقی میدان صفر ہو گا جبکہ ذو برق میں مکمل اندرونی انعکاس کی صورت میں ایسا نہیں ہوتا۔ ذو برق کے باہر میدان لا محدود فاصلے تک پہنچتا ہے البتہ ایسا میدان سرحد سے دور جلد قابل نظر انداز حد تک گھٹ جاتا ہے۔ یوں میدان ذو برق کے انتہائی قریب ہی رہتا ہے۔

اگرچہ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جب تک آمدی زاویہ، فاصل زاویے سے زیادہ ہو، موج ذو برق میں صفر کر پائے گی، حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا۔ موج مخصوص زاویوں پر ہی صفر کر پاتی ہے۔ آئیں اس کی وجہ پر غور کریں۔ شکل کو دیکھتے ہوئے، دو TEM امواج پر نظر رکھیں جن کی تعدد برابر ہے۔ دونوں فاصل زاویے سے زیادہ زاویے



شکل 13.18: ذو برق تختے کے اندرونی سطح پر ممکنہ آمدی زاویے۔

پر آمد ہیں یعنی $\theta > \theta_{ic}$ ہے۔ یوں

$$\theta_i > \theta_{ic} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sin^{-1}\frac{n_2}{n_1} \tag{13.241}$$

4597 ہوگا جہاں

4598 $\epsilon_1 > \epsilon_2$ اور

4599 ϵ_1 ذو برق تختے کا برقی مستقل،

4600 ϵ_2 ذو برق تختے کے اوپر اور نیچے خطوں کا برقی مستقل

4601 ہیں۔

شکل 13.18 میں شعاعوں کو ٹھوس لکیر جبکہ موج کی چوٹیوں کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ موج کی ترسیل کے لئے ضروری شرط یہ ہے کہ پہلی موج کا زاویائی فاصلہ a دوسری موج کے زاویائی فاصلے b کے برابر ہو اور یا ان میں فرق $2m\pi$ ہو جہاں $m = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔ زاویائی فاصلے ناپتے وقت انعکاس سے پیدا زاویائی فرق کا بھی حساب رکھا جائے گا۔ اس شرط کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 (b - a) + \phi = 2m\pi \tag{13.242}$$

4602 جہاں

4603 $m = 0, 1, 2, \cdots$

4604 n_1 پہلے خطے کا انحرافی مستقل $n_1 = \sqrt{\epsilon_{R1}}$ جبکہ

4605 ϕ سطح سے انعکاس پر زاویائی فرق،

4606 λ_0 خالی خلاء میں طول موج

ہیں۔ شکل 13.18 کو دیکھ کر

$$b = \frac{d}{\cos\theta_i} \tag{13.243}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح تکون ΔAEC، تکون ΔBEC اور تکون ΔAFB سے بالترتیب

$$
\begin{aligned}
AB + BE &= d \tan\theta_i \\
\tan\theta_i &= \frac{d}{BE} \\
\sin\theta_i &= \frac{a}{AB}
\end{aligned}
$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ یوں مساوات 13.242 کو

$$\frac{2\pi n_1 d}{\lambda_0}\left[\frac{1}{\cos\theta_i} - \sin\theta_i\left(\tan\theta_i - \frac{1}{\tan\theta_i}\right)\right] + \phi = 2m\pi \tag{13.244}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کی سادہ صورت

$$\frac{4\pi n_1 d\cos\theta_i}{\lambda_0} + \phi = 2m\pi \tag{13.245}$$

ہے۔ عمودی برقی میدان $\boldsymbol{E}_\perp$ کو لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ صفحہ 433 پر مساوات 12.30 کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos\theta_i - j\sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{\cos\theta_i + j\sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}} = 1\underline{/\phi} \tag{13.246}$$

جہاں

$$\phi = -2\tan^{-1}\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{\cos\theta_i} \tag{13.247}$$

4607 کے برابر ہے۔

اس طرح شرح انعکاس Γ کی حتمی قیمت اکائی ہے جبکہ انعکاس سے پیدا زاویائی فرق ϕ ہے۔ مساوات 13.246 کو مساوات 13.245 میں پر کرتے ہوئے

$$\frac{4\pi n_1 d\cos\theta_i}{\lambda_0} - 2m\pi = 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon - 1}}}{\cos\theta_i} \tag{13.248}$$

یا

$$\tan\left(\frac{2\pi n_1 d\cos\theta_i}{\lambda_0} - m\pi\right) = \frac{\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_i - n_2^2}}{n_1\cos\theta_i} \tag{13.249}$$

4608 حاصل ہوتا ہے جہاں

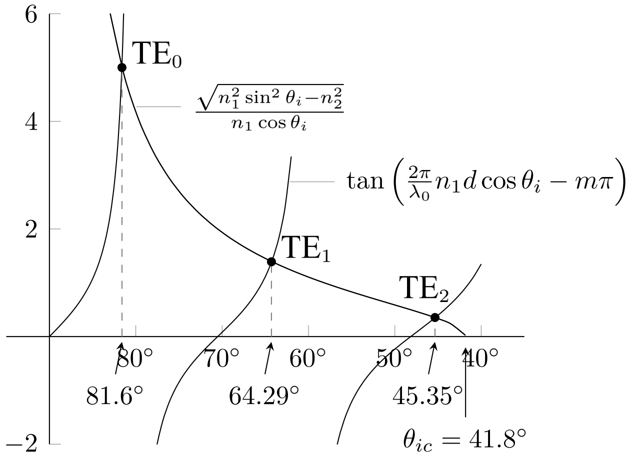
4609 $m = 0, 1, 2, 3, \cdots$ جبکہ

4610 n_1 پہلے خطے کا انحرافی مستقل $n_1 = \sqrt{\epsilon_{R1}}$ ہے،

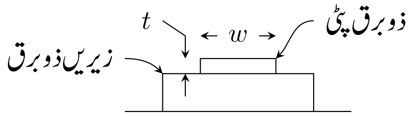
4611 n_2 ذو برق تختے سے اوپر اور اس سے نیچے خطے کا انحرافی مستقل $n_2 = \sqrt{\epsilon_{R2}}$ ہے،

4612 d ذو برق تختے کی موٹائی،

4613 θ_i آمدی زاویہ اور



شکل 13.19: تختی موتج میں شعاع کے ممکن زاویے۔



شکل 13.20: ذو برق پٹی موتج

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج

ہیں۔

چادر کی چوڑائی کم کرتے ہوئے w کرنے سے ذو برق پٹی موتج حاصل ہوتا ہے جسے شکل 13.20 میں دکھایا گیا ہے جہاں $w \gg t$ ہے۔ ذو برق پٹی سے کم انحرافی مستقل کے زیریں ذو برق[19] پر عموماً یہ نسب کئے جاتے ہیں۔

مثال 13.4: ذو برق کے 10 mm موٹی تختے کو بطور موتج استعمال کیا جا رہا ہے۔ اس تختے کا انحرافی مستقل $n_1 = 1.5$ ہے جبکہ تختے سے اوپر اور نیچے خطے کا انحرافی مستقل $n_2 = 1$ ہے۔ برقی میدان تختے کے متوازی ہے یعنی شکل 13.17 میں x سمت کو ہے۔ طول موج $\lambda_0 = 10\,\text{mm}$ کی صورت میں آمدی زاویہ θ_i حاصل کریں۔

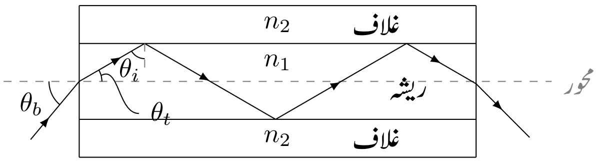
حل: برقی میدان تختے کے متوازی لیکن موج کے حرکت کی سمت کے عمودی ہے۔ مساوات 13.241 سے زاویہ فاصل

$$\theta_{ic} = \sin^{-1}\frac{1}{1.5} = 41.8° \tag{13.250}$$

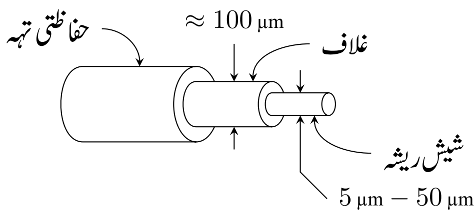
حاصل ہوتا ہے۔ زاویے کو θ_{ic} سے زیادہ رکھتے ہوئے، مساوات 13.249 کے بائیں اور دائیں ہاتھ کو شکل 13.19 میں کھینچا گیا ہے جس سے ممکنہ زاویے 45.35°، 64.29° اور 81.6° حاصل ہوتے ہیں۔ یہ زاویے TE$_0$، TE$_1$ اور TE$_2$ امواج کے لئے ہیں۔ تینوں امواج بیک وقت موتج میں پائے جا سکتے ہیں۔ تختے کی موٹائی کم یا زیادہ کرنے سے امواج کی ممکنہ تعداد بالترتیب زیادہ یا کم ہو گی۔ اسی طرح طول موج زیادہ (کم) کرنے سے ممکنہ امواج کی تعداد کم (زیادہ) ہو گی۔ ہاں کسی بھی صورت کم از کم ایک موج ضرور ممکن ہو گی لہٰذا تعداد کم کرتے کرتے صفر تک پہنچتے ہوئے بھی کوئی نہ کوئی موج ضرور ممکن ہو گی۔

---

[19] dielectric substrate



ب: شیش ریشے میں شعاع کے زاویے



الف: شیش ریشے کی بنیادی ساخت

شکل 13.21: شیش ریشے کی ساخت اور ممکنہ آمدی زاویے

13.10 شیش ریشہ

ذو برق تختی مویج پر غور کے بعد ذو برق نلکی مویج پر غور کرتے ہیں۔ ذرائع ابلاغ کے نظام میں اس طرز کے نلکی مویج جنہیں **شیش ریشہ**[20] کہتے ہیں، عام استعمال ہوتا ہے۔ بصری طول موج یا اس کے قریب طول موج پر استعمال کئے جانے والے نلکی مویج کا رداس انتہائی کم ہوتا ہے۔ یہ n_1 شرح انحراف کے انتہائی شفاف شیشے سے بنایا جاتا ہے جسے قدر کم شرح انحراف n_2 کے شیشے کا غلاف پہنایا جاتا ہے۔ ان دونوں پر غیر شفاف حفاظتی تہہ چڑھائی جاتی ہے۔ شیش ریشے کے مرکزی ریشے کا عمومی قطر $25\,\mu\text{m}$ ہے جو انسانی سر کے بال جتنی موٹائی ہے۔ ایک شیش ریشہ ہزار سے زائد دو طرفہ گفتگو کی ترسیل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ روشنی یا زیریں بصری[21] شعاعوں کے لئے شیش ریشے کی تضعیفی مستقل $1.15 \times 10^{-4}\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ کے برابر ہوتی ہے جو ایک انتہائی کم مقدار ہے۔ بصری اور زیریں بصری شعاعوں کے طول موج تقریباً $400\,\text{nm}$ تا $1000\,\text{nm}$ ہے۔

شکل 13.21-الف میں شیش ریشے کی ساخت دکھائی گئی ہے۔ اندرونی شفاف ریشے کا انحرافی مستقل n_1 جبکہ غلاف کا انحرافی مستقل n_2 ہے۔ ارد گرد خلاء کا انحرافی مستقل n_0 ہے۔ جیسے شکل 13.21-ب میں دکھایا گیا ہے، بیرون تار محور کے ساتھ θ_b زاویے پر آمدی شعاع تار کے اندر θ_t زاویے پر داخل ہو گا۔ یوں شفاف ریشے اور غلاف کی سرحد پر شعاع کا زاویہ θ_i ہو گا۔ بیرونی اور اندرونی زاویوں کا تعلق ابن سہل کا قانون

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_b}=\frac{n_0}{n_1} \tag{13.251}$$

دیتا ہے۔ جب تک مرکزی ریشے اور غلاف کے سرحد پر آمدی زاویہ θ_i، فاصل زاویے θ_{ic} سے زیادہ ہو، شعاع مکمل اندرونی انعکاس کرے گی۔ شیش ریشے اور غلاف کی سرحد پر قانون ابن سہل

$$\sin\theta_{ic}=\frac{n_2}{n_1} \tag{13.252}$$

سے فاصل زاویہ θ_{ic} حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$\sin\theta_b=\frac{n_1}{n_0}\sin\theta_t=\frac{n_1}{n_0}\sin(90^\circ-\theta_{ic})=\frac{n_1}{n_0}\cos\theta_{ic}$$

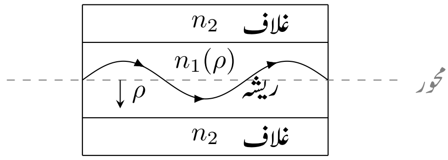
یا

$$\sin\theta_b=\frac{\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{n_0} \tag{13.253}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

θ_b بیرون تار، محور کے ساتھ آمدی زاویہ،

[20] optical fiber
[21] infrared



شکل 13.22: رداسی سمت ρ میں انحرافی مستقل مسلسل کم ہونے سے موج ہمواری کے ساتھ مڑتی ہے۔

n_1 شیش ریشے کا انحرافی مستقل،

n_2 شیش ریشے پر چڑھائی تہہ کا انحرافی مستقل اور

n_0 تار کے گرد خطے کا انحرافی مستقل

ہیں۔ خالی خلاء یا ہوا کی صورت میں $n_0 = 1$ ہو گا لہٰذا

$$\sin\theta_b = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{13.254}$$

ہو گا۔

شیش ریشے اور غلاف کے انحرافی مستقل تقریباً $n_1 = 1.5$ اور $n_2 = 1.485$ ہوتے ہیں جس سے $\theta_b = 12.2°$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں جو شعاع شیش ریشے کے محور پر $\theta_b < 12.2°$ زاویے سے آمد ہو شیش ریشے میں پھنس جائے گی۔ یہ شعاع شیش ریشے میں بار بار مکمل اندرونی انعکاس کرتے ہوئے صفر کرے گی۔ شیش ریشے میں کئی بلند انداز شعاع ممکن ہیں اور تختی موج کی طرح یہاں بھی ایک عدد بلند درجی انداز ایسا ہے جس کا کوئی انقطاعی تعدد نہیں پایا جاتا۔ یوں اگر

$$\lambda_0 > \frac{2\pi a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{k_{01}} = \frac{2\pi a n_1\cos\theta_{ic}}{k_{01}} \tag{13.255}$$

ہو جہاں

k_{01} صفر درجی بیسل تفاعل J_0 کا پہلا صفر $k_{01} = 2.405$ ہے،

λ_0 لامحدود خلاء میں طول موج

a شیش ریشے کا رداس

n_1 شیش ریشے کا انحرافی مستقل

n_2 شیش ریشے پر چڑھی تہہ کا انحرافی مستقل

θ_{ic} شیش ریشے اور اس پر چڑھی تہہ کے سرحد پر فاصل آمدی زاویہ

کے برابر ہیں تب صرف ایک عدد بلند درجی موج شیش ریشے میں پائی جائے گی۔ اس صورت میں شیش ریشہ اکائی بلند درجی انداز رکھتی ہے۔

اگر شفاف ریشے کا انحرافی مستقل محور سے رداسی ρ سمت گھٹتا ہو تب شعاع کی راہ سرحد پر انعکاس سے اچانک تبدیل ہونے کی بجائے ہمواری کے ساتھ مڑے گی۔ یوں شعاع کبھی بھی ریشے اور غلاف کے سرحد کو نہیں چھوئے گی۔ شکل 13.21-ب اور شکل 13.22 میں دونوں صورت حال دکھائے ہیں۔

شیش ریشے پر مبنی ذرائع ابلاغ کا نظام شکل میں دکھایا گیا ہے۔ایک جانب نوری ڈایوڈ[22] یا لیزر[23] برقی اشارے کو شعاع میں تبدیل کرتے ہوئے شیش ریشے میں خارج کرتا ہے۔دوسری جانب یہی شعاع شیش ریشے سے خارج ہو کر نوری ٹرانزسٹر پر چمکتی ہے جو اسے واپس برقی اشارے میں تبدیل کرتا ہے۔

عمومی شیش ریشے میں کم سے کم تضعیف 700 nm تا 1100 nm زیریں بصری طول موج پر پائی جاتی ہے۔انسانی آنکھ 400 nm تا 700 nm طول موج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔

شیش ریشے 5 µm تا 50 µm قطر کے پائے جاتے ہیں جو کئی زیریں بصری طول موج کے برابر ہے لہٰذا اس سے شعاعی اخراج نہایت کم ہوتا ہے۔قطر کم کرنے یا طول موج بڑھانے سے شعاعی اخراج بڑھتا ہے۔ایسے شیش ریشے جن کا انحرافی مستقل 1.5 کے لگ بھگ ہو اور ان کا قطر اکائی طول موج سے زیادہ ہو بطور مویج کردار ادا کرتے ہیں جبکہ اکائی طول موج سے کم قطر کے شیش ریشوں میں توانائی بیرون ریشہ سطح کے قریب رہتے ہوئے صفر کرتی ہے لہٰذا ان سے زیادہ شعاعی اخراج ہوتا ہے۔یوں اگر اکائی طول موج سے زیادہ قطر کے شیش ریشے کا قطر کم ہوتے ہوتے اکائی طول موج سے کم ہو جائے تو توانائی شیش ریشے کے اندر سے باہر منتقل ہو گی اور ساتھ ہی ساتھ محوری سمت میں شعاعی اخراج بھی پایا جائے گا۔ایسا شیش ریشہ بطور محوری اینٹینا[24] کردار ادا کرے گا۔

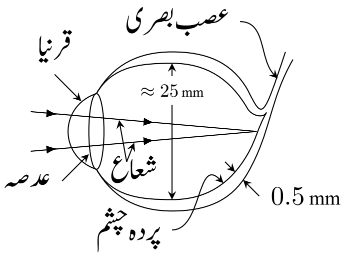
13.11 پردہ بصارت

انسانی آنکھ میں 10^8 سے زائد شیش ریشے پائے جاتے ہیں جو نا صرف بطور مویج کام کرتے ہیں بلکہ یہ ضیائی ذرے یعنی فوٹان[25] پکڑنے کا کام بھی سر انجام دیتے ہیں۔آنکھ میں دو اقسام کے شیش ریشے پائے جاتے ہیں۔آنکھ کے درمیانے خطے میں مخروط شکل کے جبکہ اطراف پر نسبتاً زیادہ تعداد میں سلاخ نما شیش ریشے پائے جاتے ہیں جنہیں بالترتیب مخروطے[26] اور سلاخ[27] کہا جاتا ہے۔تقریباً ہر مخروط علیحدہ علیحدہ انفرادی ترسیلی عصبی ریشے[28] کے ذریعہ دماغ کے ساتھ منسلک ہوتا ہے جہاں تصویر کشی کا عمل ہوتا ہے۔مخروطے ہمیں باریک بینی اور رنگ پہچانے کی صلاحیت مہیا کرتے ہیں۔مخروطوں کے برعکس اشکال پہچانے میں سلاخ کم مدد کرتے ہیں لیکن ان کی زیادہ تعداد اور حساس پن تاریکی میں دیکھنا ممکن بناتی ہے۔دماغ سے جڑی ایک عدد ترسیلی تار کے ساتھ متوازی کئی سلاخ جڑے ہوتے ہیں جس سے کم روشنی میں بینائی مزید بہتر کرتی ہے۔مرکز نگاہ سے ہٹ کر اطراف کی بینائی بھی سلاخ مہیا کرتے ہیں۔

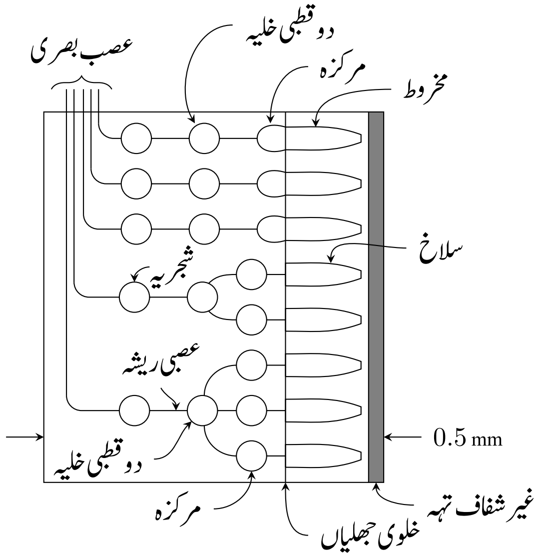
شکل 13.23-الف میں آنکھ کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے جس میں عدسہ چشم[29]، پردہ بصارت[30] اور دماغ کو جاتا عصب بصری[31] دکھائے گئے ہیں۔شکل 13.23-ب میں پردہ آنکھ کی زیادہ تفصیل دکھائی گئی ہے۔آنکھ کا پردہ شفاف ہوتا ہے۔اس میں مخروطے، سلاخ، دو قطبی خلیے[32] اور عصبی خلیے[33] پائے جاتے ہیں۔عصبی خلیہ کے دو اہم جزو شجریہ[34] اور عصبی ریشہ کہلاتے ہیں۔پردے کے پچھلی سطح پر غیر شفاف تہہ پائی جاتی ہے۔شکل 13.23-پ میں مخروط کی مزید وضاحت کی گئی ہے۔مخروط اور سلاخ کے پچھلے دبلے سر کا قطر تقریباً 1 µm، لمبائی بیس گنا زیادہ اور اس کا انحرافی مستقل $n_1 = 1.39$ جبکہ گرد مواد کا انحرافی مستقل n_2 اس سے چند فی صد کم ہوتا ہے۔یاد رہے کہ ذرائع ابلاغ میں استعمال شیش ریشوں کے انحرافی مستقل $n_1 = 1.46$ اور $n_2 = 1.44$ تقریباً یہی قیمتیں ہیں البتہ مخروط اور سلاخ کے دبلے سر کا قطر 1.5λ تا 2λ ہے جو شیش ریشے کے قطر سے نسبتاً کم ہے لہٰذا ان سے شعاعی اخراج زیادہ ہو گا۔

---

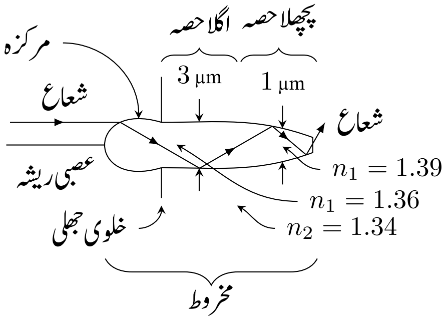
[22] light emitting diode, LED
[23] laser
[24] end-fire antenna
[25] photon
[26] cones
[27] rods
[28] axon
[29] lens
[30] retina
[31] optic nerve
[32] bipolar cells
[33] nerve cells
[34] dendrite



الف: انسانی آنکھ



ب: آنکھ کا پردہ



پ: مخروط

شکل 13.23: انسانی آنکھ اور اس کی تفصیل

مخروط یا سلاخ کا **مرکزہ**[35] بطور عدسہ چشم کردار ادا کرتا ہے۔ شعاع مخروط یا سلاخ میں بار بار مکمل اندرونی انعکاس سے صفر کرتی ہے اور جو فوٹان پچھلے دبلے حصے میں جذب نہ ہو پائے وہ پردے پر غیر شفاف تہہ تک پہنچتی ہے۔ انسانی آنکھ میں غیر شفاف تہہ فوٹان جذب کرتی ہے جبکہ رات کی تاریکی میں شکار کرنے والے جانور، مثلاً بلی، کی آنکھ میں غیر شفاف تہہ کی جگہ انعکاسی مادے کی تہہ پائی جاتی ہے جو فوٹان کو واپس مخروط یا سلاخ میں بھیجتی ہے جس سے ان کی بینائی مزید بہتر ہوتی ہے۔

مخروط کے اگلے حصے میں $n_1 = 1.36$ جبکہ پچھلے حصے میں $n_1 = 1.39$ ہے۔ یوں اگرچہ مخروط میں لمبائی کی جانب انحرافی مستقل تبدیل ہوتا ہے لیکن یاد رہے کہ اس کی قیمت بیرونی مادے کی انحرافی مستقل سے زیادہ رہتی ہے۔

مخروط یا سلاخ کے پچھلے حصے کے مالیکیول ضیائی ذرہ پکڑتے ہیں۔ فوٹان پکڑنے سے برقی رو پیدا ہوتی ہے جو دو قطبی خلیے تک پہنچتی ہے۔ دو قطبی خلیہ مختصر دورانیے کی موج پیدا کرتی ہے جو عصب بصری کے ذریعہ دماغ تک اشارہ پہنچاتی ہے۔ یوں مخروط یا سلاخ محوری اینٹینا کی طرح ہیں البتہ ان میں 10^{15} Hz تعدد کے فوٹان پکڑنے اور اس کے عوض مختصر دورانیے کا عددی اشارہ پیدا کرنے کی صلاحیت بھی پائی جاتی ہے۔

13.12 گھمکی خلاء

موج کا مقصد طاقت کی منتقلی ہے۔ اس کے برعکس گھمکیا طاقت ذخیرہ کرتا ہے۔ گھمکیا کو امالہ اور کپیسٹر کے **گھمکی دور**[36] کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل میں امالہ اور کپیسٹر کا دور دکھایا گیا ہے جس کی گھمکی تعدد $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ہے۔ اس دور کے گھمکی تعدد کو بڑھانے کی خاطر امالہ اور کپیسٹر کی قیمت کم کرنی ہو گی۔ شکل-ب میں امالہ کے چکر کم کرتے کرتے ایک تک پہنچ گئے ہیں۔ اسی طرح کپیسٹر کی قیمت کم کرنے کی خاطر اس کے دو چادروں کو دور کر دیا گیا ہے۔ متوازی امالہ جوڑنے سے کل امالہ کم ہوتی ہے۔ شکل-پ میں مزید امالہ متوازی جوڑ کر یہی کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ متوازی امالہ جوڑنے کی حد شکل-ت میں دکھائی گئی ہے جہاں کپیسٹر اور امالہ مل کر بند ڈبے کی شکل اختیار کر گئے ہیں۔ یہی بند ڈبی **گھمکی خلاء**[37] کہلاتی ہے۔

آئیں مستطیلی گھمکی خلاء پر تفصیلی بحث کریں۔ صفحہ 461 پر مساوات 13.78 تا مساوات 13.83 مستطیلی موج میں تمام میدان دیتے ہیں۔ ان میں $\gamma = j\beta$ لیتے ہوئے یہاں دوبارہ پیش کیا گیا ہے جہاں H_y کے مساوات میں $H_{y0} = \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{n\pi}{y_1}$ لکھا گیا ہے اور یہی طریقہ کار باقی مساوات پر بھی لاگو کیا گیا ہے تاکہ صرف ضروری معلومات پر توجہ رہے۔ مثبت x جانب حرکت کرتے میدان مثلاً H_x^+ پر زیر بالا + لکھ کر حرکت کی سمت بتلائی گئی ہے۔

$$H_x^+ = H_{x0}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t-\beta x)} \tag{13.256}$$

$$H_y^+ = H_{y0}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t-\beta x)} \tag{13.257}$$

$$H_z^+ = H_{z0}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t-\beta x)} \tag{13.258}$$

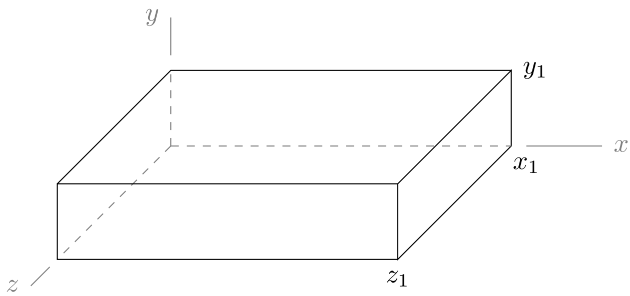
$$E_z^+ = -E_{z0}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t-\beta x)} \tag{13.259}$$

$$E_y^+ = E_{y0}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j(\omega t-\beta x)} \tag{13.260}$$

$$E_x^+ = 0 \tag{13.261}$$

---

[35] nucleus
[36] resonant circuit
[37] cavity resonator



شکل 13.24: مستطیلی گھمکیا

اگر موج کو دائیں جانب موصل چادر سے بند کر دیا جائے تو امواج اس بند سرے پر عمودی آمد ہوں گے۔ برقی میدان E_y^+ بند سرے کی چادر کے متوازی ہے لہٰذا انعکاسی مستقل $\Gamma_\parallel = -1$ ہے۔ یوں یہ برقی میدان انعکاس کے بعد منفی x جانب حرکت کرے گا۔ انعکاسی برقی میدان

$$E_y^- = -E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t + \beta x)} \tag{13.262}$$

ہے۔ آمدی اور انعکاسی میدان مل کر ساکن موج

$$\begin{aligned}
E_y^+ + E_y^- &= E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} - E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t + \beta x)} \\
&= E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t} \left(e^{-j\beta x} - e^{j\beta x} \right)
\end{aligned}$$

یعنی

$$E_y = -j2E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} \sin \beta x e^{j\omega t} \tag{13.263}$$

کو جنم دیتے ہیں۔ موصل پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا مساوات 13.263 کا برقی میدان موج کے دائیں بند سرے پر صفر کے برابر ہو گا۔ اسی طرح بند سرے سے $\frac{\lambda}{2}$ یا $\frac{l\lambda}{2}$ فاصلے پر بھی میدان صفر ہو گا جہاں $l = 1, 2, \cdots$ ہے۔ یوں بند سرے سے $\frac{l\lambda}{2}$ فاصلے پر موصل چادر رکھنے سے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑے گا، البتہ E_y^- موج کے بائیں بند سرے سے انعکاس پذیر ہو گا۔ شکل 13.24 میں مستطیلی موج کے دائیں اور بائیں سرے بند کرتے ہوئے بقایا موج کو ہٹا لیا گیا ہے۔ یہ بند ڈبہ **مستطیلی گھمکیا**[38] ہے۔

شکل 13.24 میں گھمکیا کا بایاں سرا $x = 0$ اور دایاں سرا $x = x_1$ پر ہیں جہاں دونوں بند سروں کے درمیان فاصلہ

$$x_1 = \frac{l\lambda}{2} \qquad (l = 1, 2, 3, \cdots) \tag{13.264}$$

ہے۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے

$$\beta x_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l\lambda}{2} = l\pi$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\beta = \frac{l\pi}{x_1} \tag{13.265}$$

[38] rectangular resonator

ملتا ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.263

$$E_y = -j2E_{y0}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}\sin\frac{l\pi x}{x_1}e^{j\omega t} \tag{13.266}$$

4690 لکھا جائے گا۔اس مساوات میں گھمکیا کے x سمت میں l آدھے طول موج پائے جاتے ہیں، y سمت میں n آدھے طول موج پائے جاتے ہیں اور z سمت میں m آدھے
4691 طول موج پائے جاتے ہیں۔

4692 مساوات 13.266 میں $x = 0$ یا $x = x_1$ پر کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں بند سطحوں پر برقی میدان صفر کے برابر ہے۔

مساوات 13.86 میں دئے k کو k_{yz} لکھتے

$$k_{yz}^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{13.267}$$

ہوئے اور کامل ذو برق کے لئے $\sigma = 0$ لیتے ہوئے مساوات 13.87

$$k_{yz}^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

لکھا جائے گا جہاں $\alpha = 0$ کی صورت میں $\gamma = j\beta$ ہو گا لہٰذا

$$k_{yz}^2 = -\beta^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

یا

$$\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 = -\left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2 + (2\pi f)^2\frac{1}{(f\lambda)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے گھمکی طول موج

$$\lambda_{\text{گھمکی}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2}} \tag{13.268}$$

حاصل ہوتی ہے۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے گھمکیا کا مستقل k یوں

$$k_{xyz}^2 = \left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{13.269}$$

بیان کیا جاتا ہے جس سے

$$\lambda_{\text{گھمکی}} = \frac{2\pi}{k_{xyz}} \tag{13.270}$$

4693 لکھا جا سکتا ہے۔

4694 یوں گھمکی کے مندرجہ بالا امواج بلند درجی TE_{lnm} کہلائیں گے اور گھمکی طول موج λ_{lnm} لکھی جائے گی۔

4695 ## 13.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل

4696 اس حصے میں مستطیلی گھمکی مکمل طور پر حل کی جائے گی۔امید کی جاتی ہے کہ آپ اس طریقے کو پسند کریں گے۔

کثافت چارج سے خالی $\rho_h = 0$ خطے کے میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{13.271}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{13.272}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{13.273}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{13.274}$$

سے شروع کرتے ہیں۔مساوات 13.272 کی گردش لیتے ہوئے حاصل جواب میں مساوات 13.271 اور مساوات 13.274 پر کرنے سے موج کی مساوات

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{E}\right) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \boldsymbol{H}\right)$$

$$-\nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ سمتی مساوات حقیقت میں تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ان میں سے E_x کی مساوات یوں

$$\nabla^2 E_x = \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

یا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{13.275}$$

لکھی جائے گی جہاں برقی میدان $E_x(x, y, z, t)$ کے چار آزاد متغیرات ہیں۔علیحدگی متغیرات[39] استعمال کرتے ہوئے برقی میدان کو دو تفاعل کے حاصل ضرب کے برابر لکھا جاتا ہے

$$E_x(x, y, z, t) = M(x, y, z) T(t) \tag{13.276}$$

جہاں پہلے تفاعل M کے تین آزاد متغیرات x، y اور z ہیں جبکہ دوسرے تفاعل T کا صرف t آزاد متغیرہ ہے۔یوں مساوات 13.275 سے

$$T \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right) = M \left(\mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔دونوں اطراف کو MT سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{M} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{T} \left(\mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا بایاں ہاتھ خلاء کے متغیرات x، y اور z پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ وقت t پر منحصر ہے۔یوں خلاء کے متغیرات تبدیل کرنے سے صرف بایاں ہاتھ تبدیل ہونے کا امکان ہے لیکن بائیں ہاتھ میں تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں ہوں گے لہٰذا یہ لازم ہے کہ مساوات کے دونوں اطراف قابل تبدیل نہ ہوں۔یوں انہیں مستقل k^2 کے برابر لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$\frac{1}{M} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{T} \left(\mu\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = -k^2$$

---

[39] separation of variables

جس سے دو مساوات

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial T}{\partial t}+k^2 T=0 \tag{13.277}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}+k^2 M=0 \tag{13.278}$$

4697 حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 13.277 کا حل $T=e^{pt}$ فرض کرتے ہوئے

$$\left(\mu\epsilon p^2+\mu\sigma p+k^2 T\right)e^{pt}=0$$

سے

$$p=\frac{-\sigma\mp\sqrt{\sigma^2-4\frac{\epsilon}{\mu}k^2}}{2\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے۔ کامل ذو برق کی صورت میں $\sigma=0$ ہو گا جس سے

$$p=\mp\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{13.279}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$T(t)=c_{t1}e^{-\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}t}+c_{t2}e^{+\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}t}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں c_{t1}، c_{t2} مساوات کے مستقل ہیں۔ اس میں

$$\omega=\frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{13.280}$$

لیتے ہوئے مساوات کی جانی پہچانی شکل

$$T(t)=c_{t1}e^{-j\omega t}+c_{t2}e^{j\omega t} \tag{13.281}$$

4698 حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 13.278 کو بھی علیحدگی متغیرات کے طریقے سے حل کرتے ہیں۔ یوں

$$M(x,y,z)=X(x)N(y,z) \tag{13.282}$$

لیتے ہوئے

$$N\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+X\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+X\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}+k^2 XN=0$$

یا

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=-\frac{1}{N}\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)-k^2$$

حاصل ہوتا ہے جسے نئے مستقل $-k_x^2$ کے برابر لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+k_x^2 X=0 \tag{13.283}$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}+(k^2-k_x^2)N=0 \tag{13.284}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ان میں دوسرے مساوات میں N کو مزید دو تفاعل کا حاصل ضرب

$$N(y,z)=Y(y)Z(z) \tag{13.285}$$

لکھتے ہوئے

$$Z\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+Y\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+(k^2-k_x^2)YZ=0$$

یا

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}-k^2+k_x^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس کو نئے مستقل $-k_y^2$ کے برابر پر کرتے ہوئے دو مساوات

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=-k_y^2 Y \tag{13.286}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=-(k^2-k_x^2-k_y^2)Z=-k_z^2 Z \tag{13.287}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں آخری قدم پر $(k^2-k_x^2-k_y^2=k_z^2)$ یا

$$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2 \tag{13.288}$$

لیا گیا ہے۔ مساوات 13.283، مساوات 13.286 اور مساوات 13.287 کے حل

$$X(x)=c_{x1}e^{-jk_x x}+c_{x2}e^{jk_x x}=c'_{x1}\cos k_x x+c'_{x2}\sin k_x x \tag{13.289}$$

$$Y(y)=c_{y1}e^{-jk_y y}+c_{y2}e^{jk_y y}=c'_{y1}\cos k_y y+c'_{y2}\sin k_y y \tag{13.290}$$

$$Z(z)=c_{z1}e^{-jk_z z}+c_{z2}e^{jk_z z}=c'_{z1}\cos k_z z+c'_{z2}\sin k_z z \tag{13.291}$$

ہیں۔

مساوات 13.282، مساوات 13.285 اور مساوات 13.276 سے ظاہر ہے کہ

$$E_x(x,y,z,t)=TXYZ \tag{13.292}$$

کے برابر ہے۔ مساوات 13.292 میکس ویل مساوات کا عمومی حل ہے جو کسی ایک خطے میں ہر ممکنہ E_x موج کو ظاہر کرتی ہے۔ اصل موج اس مساوات کا حقیقی جزو ہو گا۔

اب تک k پر کوئی شرط عائد نہیں کی گئی۔ یوں $k_x=0.32$ یا $k_x=-7.59$ ہو سکتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات لامحدود خطے میں مکمل آزاد موج کو ظاہر کرتی ہے۔ آئیں اب موج کو پابند کر کے دیکھیں۔

تصور کریں کہ لامحدود وسعت کے دو متوازی موصل چادروں کے درمیان موج پیدا کی جاتی ہے۔ صفحہ 448 پر شکل 13.1 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ ان موصل چادروں پر متوازی برقی دباو صفر ہو گا۔ یوں $z = 0$ اور $z = z_0$ پر E_x صفر ہو گا۔ ہم اس ترکیب کو کئی مرتبہ استعمال کر چکے ہیں۔ مساوات 13.291 میں ان شرائط کو پر کرتے ہوئے

$$c'_{z1} = 0 \tag{13.293}$$

$$k_z = \frac{m\pi}{z_1} \tag{13.294}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$m = 1, 2, 3 \cdots \tag{13.295}$$

کے برابر ممکن ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ k_z اب صرف چنی گئی قیمت کا ہو سکتا ہے۔ یوں $k_z = \frac{\pi}{z_1}$ یا $k_z = \frac{2\pi}{z_1}$ ہو سکتا ہے لیکن ان دو قیمتوں کے درمیان یہ کسی اور قیمت کا نہیں ہو سکتا۔ یہی خصوصیت مقید موج کی نشانی ہے۔ 4705

اسی طرح $y = 0$ اور $y = y_0$ پر بھی دو متوازی موصل چادر نسب کرنے سے صفحہ 454 پر دکھایا شکل 13.8 حاصل ہوتا ہے۔ ان سطحوں پر بھی متوازی برقی میدان صفر ہو گا۔ اس طرح مساوات 13.290 سے

$$c'_{y1} = 0 \tag{13.296}$$

$$k_y = \frac{n\pi}{y_1} \tag{13.297}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

$$n = 1, 2, 3, \cdots \tag{13.298}$$

کے برابر ممکن ہیں۔ اب موج y اطراف سے بھی پابند ہے جس کی وجہ سے k_y بھی آزادانہ قیمت رکھنے سے قاصر ہے۔ یوں مستطیلی مویج میں موج کی مساوات

$$E_x = E_{x0} \sin \frac{n\pi y}{y_0} \sin \frac{m\pi z}{z_0} e^{j(\omega t \mp k_x x)} \tag{13.299}$$

ہو گی جہاں $e^{j(\omega t - k_x x)}$ بڑھتے x جانب موج جبکہ $e^{j(\omega t + k_x x)}$ گھٹتے x جانب موج ہے۔ k_y اور k_z کی قیمتیں مساوات 13.294 اور مساوات 13.297 کے تحت ہوں گی۔ جیسے آپ جلد مساوات 13.313 میں دیکھیں گے، طول موج اور k کا ایک خاص تعلق ہے۔ یوں جس تعدد کی موج مستطیلی مویج سے گزر رہی ہو مساوات 13.313 اس کا k دیتی ہے جو ایک اٹل قیمت ہو گی۔ اب کسی بھی k_y اور k_z کے لئے مساوات 13.288 سے k_x کی قیمت مخصوص تعدد کے موج کے لئے حاصل کی جا سکتی ہے۔ جب تک k_x کی قیمت حقیقی عدد حاصل ہو اس وقت تک مساوات 13.289 سے حرکت کرتی موج ہی حاصل ہو گی البتہ اگر k_y اور k_z کی جوڑی سے k_x کی قیمت خیالی حاصل ہو تب مساوات 13.289 سے

$$X(x) = c_{x1} e^{k_x x} + c_{x2} e^{-k_x x}$$

حاصل ہو گا۔ بڑھتے x جانب موج کی صورت میں $x \to \infty$ کی صورت میں اس مساوات سے لامحدود میدان حاصل ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں $c_{x1} = 0$ 4706 لیا جائے گا۔ مساوات کا بقایا حصہ حرکت کرتے موج کو ظاہر نہیں کرتا بلکہ یہ گھٹتے میدان کو ظاہر کرتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی مخصوص تعدد، k_x اور k_y سے 13.288 k_x کی مخصوص قیمت دیتا ہے۔ 4708

اگر $x = 0$ اور $x = x_0$ پر بھی موصل چادر نسب کئے جائیں تو صفحہ 499 پر دکھایا شکل 13.24 حاصل ہو گا۔ چونکہ E_x ان چادروں کے عمودی ہے لہٰذا ہمیں E_y یا E_z کی مساوات درکار ہو گی۔ میں لکھتے لکھتے بہت تھک چکا ہوں۔ آپ بھی پڑھ پڑھ کر بہت تھکے ہوں گے لہٰذا میں ان چادروں سے حاصل نتیجہ لکھ لیتا ہوں

$$c'_{x2} = 0 \tag{13.300}$$

$$k_x = \frac{l\pi}{x_0} \tag{13.301}$$

جہاں

$$l = 1, 2, 3, \cdots \tag{13.302}$$

کے برابر ممکن ہے۔

ان نتائج کو جمع کرتے ہوئے شکل 13.24 میں دکھائے مستطیلی گھمکیا کی مساوات

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z e^{j\omega t} \\ &= E_{x0} \cos \frac{l\pi x}{x_0} \sin \frac{n\pi y}{y_0} \sin \frac{m\pi z}{z_0} e^{j\omega t} \end{aligned} \tag{13.303}$$

حاصل ہوتی ہے جو ساکن موج ہے۔

آئیں ایک بار پھر مکمل آزاد موج کی بات کریں۔ مساوات 13.289 دراصل دو ممکنہ جوابات $e^{-jk_x x}$ اور $e^{jk_x x}$ کا مجموعہ ہے۔ اسی طرح مساوات 13.290 اور مساوات 13.291 بھی مجموعے ہیں۔ مساوات 13.292 میں X، Y اور Z کے مختلف اجزاء پر کرتے ہوئے مختلف امواج کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ یوں مساوات 13.289، مساوات 13.290 اور مساوات 13.291 کے پہلے جز وچنتے ہوئے ایک ممکنہ حل

$$E_x = E_{x0} e^{j(\omega t - k_x \boldsymbol{a}_\mathrm{x} - k_y \boldsymbol{a}_\mathrm{y} - k_z \boldsymbol{a}_\mathrm{z})} \tag{13.304}$$

حاصل ہوتا ہے۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی نقطہ (x, y, z) کو سمتیہ

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{13.305}$$

ظاہر کرتی ہے۔ ہم k_x، k_y، k_z اور k کو سمتیہ

$$\boldsymbol{k} = k_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + k_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + k_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{13.306}$$

لکھ سکتے ہیں جو مساوات 13.288 کے شرط پر پورا اترتی ہے۔ اس طرح

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = k_x x + k_y y + k_z z \tag{13.307}$$

ہو گا لہٰذا مساوات 13.304 کو نہایت عمدگی کے ساتھ

$$E_x = E_{x0} e^{j(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})} \tag{13.308}$$

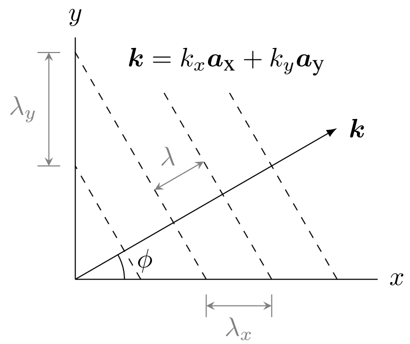
لکھا جا سکتا ہے جس کا حقیقی جزو

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) \tag{13.309}$$

اصل موج دیتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات لامحدود خطے میں موج کی عمومی مساوات ہے جو بڑھتے $\boldsymbol{k}$ کی جانب حرکت کرے گی۔

شکل 13.25 میں موج کے حرکت کی سمت، x محدد کے ساتھ ϕ زاویہ بناتی ہے۔ یہ موج xy سطح پر پائی جاتی ہے یعنی $k_z = 0$ کے برابر ہے۔ موج کی چوٹیوں کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ کسی بھی نقطے پر ان چوٹیوں کو گن کر تعداد دریافت کی جا سکتی ہے۔ یوں x محدد پر نقطہ $(x_0, 0)$ سے فی سیکنڈ گزرتے چوٹیوں کی تعداد موج کی تعداد f ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ y محدد پر نقطہ $(0, y_0)$ سے بھی فی سیکنڈ اتنی ہی چوٹیاں گزریں گی۔ اسی طرح $\boldsymbol{k}$ پر بھی کسی نقطے پر چوٹیاں گنتے ہوئے یہی تعداد حاصل ہوتی ہے۔

دو متواتر چوٹیوں کے درمیان فاصلہ طول موج کہلاتا ہے۔ وقت t کو روک کر x محدد پر رہتے ہوئے موج کی دو متواتر چوٹیوں کے درمیان فاصلہ λ_x ناپا جائے گا۔ اسی طرح y محدد پر طول موج λ_y ناپی جائے گی جبکہ حرکت کی سمت میں طول موج λ ناپی جائے گی۔ ان تمام کو شکل 13.25 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 13.25: مختلف طول موج کا آپس میں تعلق

کسی بھی موج کی تعدد f اور طول موج λ جانتے ہوئے اس کی رفتار $f\lambda \quad = \quad v$ لکھی جا سکتی ہے۔ سمت حرکت کی جانب موج کی رفتار $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ کے برابر ہوتی ہے لہٰذا

$$f\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{13.310}$$

ہو گا۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کو 2π سے ضرب دیتے ہوئے

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{13.311}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 13.280 پر کرنے سے

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{13.312}$$

یا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{13.313}$$

حاصل ہوتا ہے لیکن ہم جانتے ہیں کہ $\beta \;=\; \frac{2\pi}{\lambda}$ ہوتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات کامل ذو برق $\sigma \;=\; 0$ کے لئے حاصل کئے گئے لہٰذا $\alpha \;=\; 0$ اور

$$\gamma = 0 + j\beta = jk \tag{13.314}$$

4718 کے برابر ہے۔ اس طرح k کو β جبکہ k_x، k_y اور k_z کو بالترتیب β_x، β_y اور β_z لکھا جا سکتا ہے۔

ہم توقع کرتے ہیں کہ مساوات 13.313 کی طرح $\lambda_x \;=\; \frac{2\pi}{k_x}$ لکھنا ممکن ہو گا۔ آئیں اس حقیقت کو ثابت کریں۔ شکل 13.25 کو دیکھ کر $\lambda_x \;=\; \frac{\lambda}{\cos\phi}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں شکل کو دیکھتے ہوئے $\cos\phi \;=\; \frac{k_x}{k}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos\phi} = \frac{\lambda k}{k_x}$$

لکھ کر $k \;=\; \frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} \tag{13.315}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح ہم

$$\lambda_y = \frac{2\pi}{k_y} \tag{13.316}$$

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} \tag{13.317}$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں۔ 4719

سمت حرکت کی جانب رفتار جسے **مجموعی رفتار**[40] کہتے ہیں

$$v = f\lambda = \frac{\omega}{k} \tag{13.318}$$

کے برابر ہے۔موج اس رفتار سے توانائی ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرتی ہے۔اس کے برعکس کارتیسی محدد پر **دوری رفتار**[41]

$$\begin{aligned} v_x &= f\lambda_x = \frac{\omega}{k_x} \\ v_y &= f\lambda_y = \frac{\omega}{k_y} \\ v_z &= f\lambda_z = \frac{\omega}{k_z} \end{aligned}$$

ہوں گے۔ شکل 13.25 میں ϕ کی قیمت کم کرنے سے λ_y اور یوں v_y کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ $\phi = 0$ پر $v_y = \infty$ حاصل ہوتا ہے۔یوں دوری رفتار، روشنی کے رفتار سے زیادہ ہو سکتی ہے۔دوری رفتار صرف آنکھوں کا دھوکہ ہے،اس رفتار سے موج کا کوئی حصہ حرکت نہیں کرتا لہٰذا یہ آئن سٹائن کے قانون کی خلاف ورزی نہیں کرتا۔آئن سٹائن کا قانون کہتا ہے کہ کوئی چیز روشنی سے زیادہ تیز صفر نہیں کر سکتی۔ 4722

سوالات 4723

group velocity[40]
phase velocity[41]

complex permitivity
dispersion
wave over a conducting surface needs revisit. may have to discard it and take the basic explanation as given in kraus. READ field theory of guided waves by collins
divergence, curl formulae at end page
degree, ohm, micro etc not showing
kraus p581 mentions three types of impedances: intrinsic, characteristic and transverse. ensure that i too have these distinctions
kraus fig-13.28 and fig 13.29 and table 13.3 (on p577) are v. impt
Huygens improvements
figTransmissionSmithFromInternet.tex is not giving the figure of the book
the answers should be at the end of the book
handle all side notes ( ) and remove the corresponding text
read chapter 9 onwards (proof reading)
energy travels along the wire and not in the wire.
antenna chapter, 3D figure at start and complete the start section.
house completion certificate.
zaryab fish
F=-dW/dT to include in inductance chapter plus a question or two
magnetizartion curve and an iteration example. fig 8.10, 11 of hayt.
charge is barqi bar.
add questions to machine book too.
take print outs for myself.

when giving fields always remember the following rules:
always ensure that divergence of magnetic field is zero.
moving waves must be of the form $E = E0\cos(wt - kz)$ where $c = (\mu * \epsilon)^{-0.5}$ and $k = 2 * \pi/\lambda$
include complex permitivity (7th ed Q12.18 says sigma=omega*epsilon")
include 4th ed fig 11.11 of page 422
rename lossless and lossy dielectrics as

الباب 15

سوالات

مویج

سوال 15.1: ہوا سے بھرے مستطیل مویج کے اطراف کی لمبائی $25\,\mathrm{mm}$ اور $50\,\mathrm{mm}$ ہے۔اس میں کمتر انقطاعی تعدد کے 1.7 گنا تعدد کی موج پائی جاتی ہے۔ الف) کم تر انقطاعی طول موج دریافت کریں۔ ب) مویج میں دوری رفتار حاصل کریں۔

جوابات: $100\,\mathrm{mm}$ ، $3.843\times10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

سوال 15.2: ہوا سے بھرے $50\,\mathrm{mm}$ لمبائی کے اطراف کے چکور مویج میں $40\,\mathrm{mm}$ سے زیادہ طول موج کے تمام ممکنہ TE اور TM امواج دریافت کریں۔

جوابات: TE_{10} ، TE_{01} ، TE_{11} ، TE_{20} ، TE_{02} ، TE_{21} ، TE_{12} ، TM_{11} ، TM_{21} ، TM_{12}

سوال 15.3: ہوا سے بھرے $20\,\mathrm{mm}$ اور $100\,\mathrm{mm}$ لمبائی کے اطراف کے مستطیل مویج میں $150\,\mathrm{mm}$ سے زیادہ طول موج کے تمام ممکنہ TE اور TM امواج دریافت کریں۔

جوابات: TE_{10}

سوال 15.4: ہوا سے بھرے نلکی مویج کا رداس $75\,\mathrm{mm}$ ہے۔اس میں کم ضیاعی TE_{01} موج کی انقطاعی طول موج اور غالب TE_{11} موج کی انقطاعی طول موج دریافت کریں۔

جوابات: $123\,\mathrm{mm}$ ، $256\,\mathrm{mm}$

سوال 15.5: ہوا سے بھرے نلکی مویج کا رداس $100\,\mathrm{mm}$ ہے۔ اس میں مندرجہ ذیل بلند درجی امواج کے انقطاعی طول موج دریافت کریں۔ TM_{01} ، TM_{02} ، TM_{11} ، TM_{12} ، TM_{21} ، TM_{31} ، TM_{41}

جوابات: $261\,\mathrm{mm}$ ، $114\,\mathrm{mm}$ ، $164\,\mathrm{mm}$ ، $89\,\mathrm{mm}$ ، $122\,\mathrm{mm}$ ، $98\,\mathrm{mm}$ ، $83\,\mathrm{mm}$

سوال 15.6: ہوا سے بھرے نلکی مویج کا رداس $100\,\mathrm{mm}$ ہے۔ اس میں مندرجہ ذیل بلند درجی امواج کے انقطاعی طول موج دریافت کریں۔ TE_{01} ، TE_{02} ، TE_{11} ، TE_{12} ، TE_{21} ، TE_{22} ، TE_{31} ، TE_{41}

جوابات: $164\,\mathrm{mm}$ ، $89\,\mathrm{mm}$ ، $341\,\mathrm{mm}$ ، $118\,\mathrm{mm}$ ، $206\,\mathrm{mm}$ ، $94\,\mathrm{mm}$ ، $149\,\mathrm{mm}$ ، $118\,\mathrm{mm}$

سوال 15.7: ثابت کریں کہ کامل موصل کے نلکی مویج میں TE_{11} بلند درجی انداز اوسطاً $\frac{\omega\mu\beta\rho_0^4|H_0|^2}{82}$ واٹ کی طاقت ترسیل کرتی ہے۔

سوال 15.8: ثابت کریں کہ متوازی دو عدد لامحدود موصل چادروں کے مویج میں انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر TE_{10} موج کی تضعیفی مستقل

$$\alpha = \frac{2}{d}\frac{Z_{c,h}}{Z_{d,h}}\frac{\left(\frac{\lambda_0}{2d}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2d}\right)^2}} \qquad (\mathrm{Np/m})$$

ہے جہاں

$Z_{c,h}$ مویجی موصل چادر کی قدرتی رکاوٹ کا حقیقی جزو،

$Z_{d,h}$ مویج میں بھرے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ کا حقیقی جزو،

d دو لامحدود چادروں میں فاصلہ اور

λ_0 خالی خلاء میں طول موج ہیں

سوال 15.9: ثابت کریں کہ متوازی دو عدد لامحدود موصل چادروں کے مویج میں انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر TE_{m0} موج کی تضعیفی مستقل

$$\alpha = \frac{2}{d}\frac{Z_{c,h}}{Z_{d,h}}\frac{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad (\mathrm{Np/m})$$

ہے جہاں

$Z_{c,h}$ مویجی موصل چادر کے قدرتی رکاوٹ کا حقیقی جزو،

$Z_{d,h}$ مویج میں بھرے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ کا حقیقی جزو،

d دو لامحدود چادروں میں فاصلہ اور

λ_0 خالی خلاء میں طول موج ہیں

سوال 15.10: لامحدود جسامت کے تانبے کے دو چادروں کے درمیان $18\,\mathrm{mm}$ کا فاصلہ ہے۔اس میں $10\,\mathrm{MHz}$ تعدد کی TEM موج کا تضعیفی مستقل اور TE_{10} موج کا تضعیفی مستقل دریافت کریں۔

جواب: $\alpha = 3.85\,\frac{\mathrm{mNp}}{\mathrm{m}}$ ، $\alpha = 9.67\,\frac{\mathrm{mNp}}{\mathrm{m}}$

سوال 15.11: ثابت کریں کہ متوازی دو عدد لامحدود موصل چادروں کے مویج میں انقطاعی طول موج سے کم طول موج λ_0 پر TM_{10} موج کی تضعیفی مستقل

$$\alpha' = \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2d}\right)^2}}$$

ہے جہاں

α مویج میں TEM موج کی تضعیفی مستقل اور

d چادروں کے درمیان فاصلہ ہے۔

سوال 15.12: ثابت کریں کہ ایسے مستطیل مویج جس کی چوڑائی z_1 اور اونچائی y_1 ہو میں انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر TE_{m0} موج کی تضعیفی مستقل مندرجہ ذیل ہے۔

$$\alpha = \frac{2Z_{c,h}}{z_1 Z_{d,h}} \frac{\left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2 + \frac{z_1}{2y_1}\right]}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{15.1}$$

سوال 15.13: تانبے کی $1\,\mathrm{cm}$ چوڑی پٹی تانبے کی وسیع چادر کے متوازی $1.2\,\mathrm{mm}$ فاصلے پر پائی جاتی ہے۔ ان کے درمیان $\epsilon_R = 2.6$ کا ذو برقی بھرا گیا ہے۔اس مویج میں $450\,\mathrm{MHz}$ تعدد کی TEM موج حرکت کرتی ہے۔مویج میں برقی میدان کا حیطہ $300\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ الف) مویج کتنی طاقت منتقل کر رہا ہے۔ ب) فی میٹر مویج میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔ پ) مویج کا تضعیفی مستقل دریافت کریں۔

جوابات: $2.3\,\mathrm{nW}$ ، $91\,\frac{\mathrm{pW}}{\mathrm{m}}$ ، $39.5\,\frac{\mathrm{mNp}}{\mathrm{m}}$ یا $0.343\,\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}$

سوال 15.14: موصل چادر $\sigma = 10^6\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ اور $3\,\mathrm{cm}$ چوڑی موصل پٹی $\sigma = 10^6\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ کے مابین $2\,\mathrm{mm}$ موٹائی کا ذو برق $\epsilon_R = 7$ پایا جاتا ہے۔برقی میدان $E_{\text{موثر}} = 3.2\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور تعدد $500\,\mathrm{MHz}$ ہے۔ منتقل طاقت اور مویج کا تضعیفی مستقل حاصل کریں۔

جوابات: $4.3\,\mu\mathrm{W}$ ، $0.312\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ یا $2.7\,\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}$

سوال 15.15: کامل موصل سے بنے مستطیل مویج میں TE_{10} کے لئے ثابت کریں کہ اوسط منتقل طاقت مندرجہ ذیل ہے۔

$$P_{\text{اوسط}} = \frac{\omega\mu\beta\left|H_0\right|^2 y_1 z_1^3}{4\pi^2} \tag{15.2}$$

سوال 15.16: ہوا اور تانبے کے سرحد پر $1\,\mathrm{GHz}$ تعدد کے موج کا جھکاو حاصل کریں۔

جواب: 0.00177°

سوال 15.17: ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر $1\,\mathrm{GHz}$ تعدد کے موج کا جھکاو حاصل کریں۔

جواب: 6.46°

سوال 15.18: تانبے کی چادر کے متوازی $150\,\mathrm{MHz}$ تعدد کی موج حرکت کر رہی ہے۔برقی میدان $E_{\text{موثر}} = 50\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ چادر کی سطح کے عمودی ہے۔ الف) چادر کے متوازی منتقل طاقت کا پوئنٹنگ سمتیہ دریافت کریں۔ ب) مقناطیسی میدان کی موثر قیمت حاصل کریں۔ پ) چادر کی سطح پر برقی میدان حاصل کریں۔ ت) چادر میں داخل طاقت کا پوئنٹنگ سمتیہ دریافت کریں۔

جوابات: $6.636\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ ، $0.133\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $56.3\,\frac{\mu\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 15.19: موصل کی لامحدود سطح کے متوازی موج حرکت کر رہی ہے۔سطح کے عمودی برقی میدان $E_{\text{موثر}} = 150\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ موصل کی قدرتی رکاوٹ کی حتمی قیمت $\left|Z_c\right| = 0.012\,\Omega$ ہے۔ الف) سرحد کے متوازی فی میٹر رقبے سے گزرتی طاقت دریافت کریں۔ ب) موصل سطح کے فی میٹر رقبے میں داخل طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $59.7\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ ، $1.9\,\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 15.20: موصل $\sigma = 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ کی سطح کے متوازی خالی خلاء میں $1.2\,\mathrm{GHz}$ تعدد اور $E_{\text{موثر}} = 50\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ کی موج حرکت کر رہی ہے۔مقناطیسی میدان سرحد کے متوازی ہے جبکہ برقی میدان سرحد کے عمودی ہے۔ فی مربع میٹر موصل رقبے میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔

جواب: $0.38\,\frac{\mathrm{nW}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 15.21: موصل سطح کے متوازی TEM موج حرکت کر رہی ہے۔ ثابت کریں کہ $K = \rho_S v_S$ کی صورت میں، جہاں K ایمپیئر فی میٹر میں سطحی کثافت برقی رو، ρ_S کولومب فی مربع میٹر میں سطحی کثافت چارج اور v_S میٹر فی سیکنڈ میں موج کی رفتار ہو، $K = H$ ہو گا جہاں H موج کے مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ کا حیطہ ہے۔

جدول 15.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیر	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	مقطر پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹس	10^{-17}

جدول 15.2: ϵ_R and $\sigma/\omega\epsilon$

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 15.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 15.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$