

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
 کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

3

1	سمتیاں	4
1.1	مقداری اور سمتیہ	5
1.2	سمتی الجبرا	6
1.3	کارتیسی محدود	7
1.4	اکائی سمتیاں	8
1.5	میدانی سمتیہ	9
1.6	سمتی رقبہ	10
1.7	غیر سمتی ضرب	11
1.8	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	12
1.9	گول نلکی محدود	13
1.9.1	نلکی اکائی سمتیاں کا کارتسی اکائی سمتیاں کے ساتھ غیر سمتی ضرب	14
1.9.2	نلکی اور کارتسی اکائی سمتیاں کا تعلق	15
1.9.3	نلکی لامحدود سطحیں	16
1.10	کروی محدود	17
2	کولومب کا قانون	18
2.1	قوت کشش یا دفع	19
2.2	برقی میدان کی شدت	20
2.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	21
2.4	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	22
2.5	چارج بردار حجم	23
2.6	مزید مثال	24
2.7	برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	25

69 ²⁶	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ	3
69 ²⁷	ساکن چارج	3.1
69 ²⁸	فیراڈے کا تجربہ	3.2
70 ²⁹	گاؤس کا قانون	3.3
72 ³⁰	گاؤس کے قانون کا استعمال	3.4
72 ³¹	نقطہ چارج	3.4.1
74 ³²	یکساں چارج بردار کروی سطح	3.4.2
74 ³³	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر	3.4.3
75 ³⁴	ہم محوری تار	3.5
77 ³⁵	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	3.6
77 ³⁶	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق	3.7
80 ³⁷	پھیلاؤ	3.8
82 ³⁸	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات	3.9
84 ³⁹	پھیلاؤ کی عمومی مساوات	3.10
86 ⁴⁰	مسئلہ پھیلاؤ	3.11
93 ⁴¹	توانائی اور برقی دباؤ	4
93 ⁴²	توانائی اور کام	4.1
94 ⁴³	لکیری تکملہ	4.2
99 ⁴⁴	برقی دباؤ	4.3
100 ⁴⁵	نقطہ چارج کا برقی دباؤ	4.3.1
101 ⁴⁶	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ	4.3.2
102 ⁴⁷	ہم محوری تار کا برقی دباؤ	4.3.3
102 ⁴⁸	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ	4.4
106 ⁴⁹	برقی دباؤ کی ڈھلوان	4.5
109 ⁵⁰	نلکی محدود میں ڈھلوان	4.5.1
110 ⁵¹	کروی محدود میں ڈھلوان	4.5.2
112 ⁵²	جفت قطب	4.6
114 ⁵³	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط	4.6.1
117 ⁵⁴	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی	4.7

5 موصل، ذو برق اور کیپسٹر 117₅₅

- 5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو 117₅₆
- 5.2 استمراری مساوات 119₅₇
- 5.3 موصل 121₅₈
- 5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط 126₅₉
- 5.5 عکس کی ترکیب 129₆₀
- 5.6 نیم موصل 132₆₁
- 5.7 ذو برق 133₆₂
- 5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط 138₆₃
- 5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط 142₆₄
- 5.10 کیپسٹر 142₆₅
- 5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر 144₆₆
- 5.10.2 ہم محوری کیپسٹر 145₆₇
- 5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر 145₆₈
- 5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر 147₆₉
- 5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس 148₇₀

6 پوٹنسن اور لاپلاس مساوات 157₇₁

- 6.1 مسئلہ یکنائی 159₇₂
- 6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے 160₇₃
- 6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات 161₇₄
- 6.4 لاپلاس مساوات کے حل 162₇₅
- 6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال 168₇₆
- 6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل 171₇₇
- 6.7 عددی دہرائے کا طریقہ 178₇₈

185 ⁹	ساکن مقناطیسی میدان	7
185 ¹⁰	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
189 ¹¹	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.2
193 ¹²	گردش	7.3
200 ¹³	نلکی محدود میں گردش	7.3.1
206 ¹⁴	عمومی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.2
208 ¹⁵	کروی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.3
208 ¹⁶	مسئلہ سٹوکس	7.4
212 ¹⁷	مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ	7.5
218 ¹⁸	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	7.6
224 ¹⁹	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	7.7
224 ²⁰	سمتی مقناطیسی دباؤ	7.7.1
225 ²¹	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.7.2
231 ²²	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	8
231 ²³	متحرک چارج پر قوت	8.1
232 ²⁴	تفرقی چارج پر قوت	8.2
235 ²⁵	برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	8.3
236 ²⁶	قوت اور مروڑ	8.4
241 ²⁷	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	8.5
242 ²⁸	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	8.6
245 ²⁹	مقناطیسی سرحدی شرائط	8.7
246 ³⁰	مقناطیسی دور	8.8
249 ³¹	مقناطیسی مخفی توانائی	8.9
250 ³²	خود امالہ اور مشترکہ امالہ	8.10
254 ³³	مشترکہ امالہ	8.11

257 ₁₀₄	9	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات
257 ₁₀₅	9.1	فیراڈے کا قانون
263 ₁₀₆	9.2	انتقالی برقی رو
267 ₁₀₇	9.3	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل
268 ₁₀₈	9.4	میکس ویل مساوات کی تکمل شکل
270 ₁₀₉	9.5	تاخیری دباؤ
275 ₁₁₀	10	مستوی امواج
275 ₁₁₁	10.1	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج
276 ₁₁₂	10.2	برقی و مقناطیسی مستوی امواج
283 ₁₁₃	10.2.1	خالی خلاء میں امواج
285 ₁₁₄	10.2.2	خالص یا کامل ذو برق میں امواج
287 ₁₁₅	10.2.3	ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج
290 ₁₁₆	10.3	پوئنٹنگ سمتیہ
294 ₁₁₇	10.4	موصل میں امواج
300 ₁₁₈	10.5	انعکاس مستوی موج
306 ₁₁₉	10.6	شرح ساکن موج
313 ₁₂₀	11	ترسیلی تار
313 ₁₂₁	11.1	ترسیلی تار کے مساوات
317 ₁₂₂	11.2	ترسیلی تار کے مستقل
318 ₁₂₃	11.2.1	ہم محوری تار کے مستقل
321 ₁₂₄	11.2.2	دو متوازی تار کے مستقل
322 ₁₂₅	11.2.3	سطح مستوی ترسیلی تار
323 ₁₂₆	11.3	ترسیلی تار کے چند مثال
328 ₁₂₇	11.4	ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ
335 ₁₂₈	11.4.1	سمتہ فراوانی نقشہ
336 ₁₂₉	11.5	تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

341 ₁₃₀	12	تقطیب موج
341 ₁₃₁	12.1	خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
344 ₁₃₂	12.2	بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پرنٹنگ سمتیہ
347 ₁₃₃	13	ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار
347 ₁₃₄	13.1	ترچھی آمد
358 ₁₃₅	13.2	ترسیم بائی گن
361 ₁₃₆	14	مویج اور گھمکیا
361 ₁₃₇	14.1	برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ
362 ₁₃₈	14.2	دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج
368 ₁₃₉	14.3	کھوکھلا مستطیلی مویج
377 ₁₄₀	14.3.1	مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور
384 ₁₄₁	14.4	مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج
388 ₁₄₂	14.5	کھوکھلی نالی مویج
395 ₁₄₃	14.6	انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف
397 ₁₄₄	14.7	انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف
399 ₁₄₅	14.8	سطحی موج
404 ₁₄₆	14.9	ذو برق تختی مویج
407 ₁₄₇	14.10	شیش ریشہ
410 ₁₄₈	14.11	پردہ بصارت
412 ₁₄₉	14.12	گھمکی خلاء
415 ₁₅₀	14.13	میکس ویل مساوات کا عمومی حل

423 ⁵¹	
423 ⁵²	15.1 تعارف
423 ⁵³	15.2 تاخیری دباو
425 ⁵⁴	15.3 تکمل
426 ⁵⁵	15.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا
434 ⁵⁶	15.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت
438 ⁵⁷	15.6 ٹھوس زاویہ
439 ⁵⁸	15.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افرائش
446 ⁵⁹	15.8 قطاری ترتیب
446 ⁶⁰	15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع
447 ⁶¹	15.8.2 ضرب نقش
448 ⁶²	15.8.3 ثنائی قطار
450 ⁶³	15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار
452 ⁶⁴	15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار
452 ⁶⁵	15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار
456 ⁶⁶	15.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلنے زاویہ اخراجی اینٹینا
457 ⁶⁷	15.9 تداخل پیمہ
458 ⁶⁸	15.10 مسلسل خطی اینٹینا
459 ⁶⁹	15.11 مستطیل سطحی اینٹینا
462 ⁷⁰	15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریر بدل ہیں
462 ⁷¹	15.13 خطی اینٹینا
467 ⁷²	15.14 چلتے موج اینٹینا
468 ⁷³	15.15 چھوٹا گھیرا اینٹینا
469 ⁷⁴	15.16 پیچ دار اینٹینا
471 ⁷⁵	15.17 دو طرفہ کردار
473 ⁷⁶	15.18 جھری اینٹینا
474 ⁷⁷	15.19 پیپا اینٹینا
476 ⁷⁸	15.20 فرانس ریڈار مساوات
479 ⁷⁹	15.21 ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی
481 ⁸⁰	15.22 حرارت نظام اور حرارت بعید

483 ⁸¹	
483 ⁸²	16.1 توانائی

سمتیات

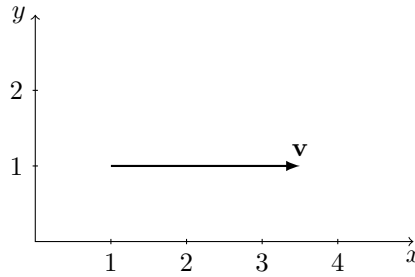
1.1 مقدار کی سمتیہ

وہ طبعی مقدار جس کے مکمل اظہار کے لئے سمت کی ضرورت نہیں ہوتی مقدار کی ¹ کہلاتا ہے۔ کسی چیز کی کمیت m یا اس کا درجہ حرارت T مقدار کی مثالیں ہیں۔ مقدار کی قیمت اٹل یا متغیر ممکن ہے۔ کمیت اٹل مقدار کی مثال ہے۔ متغیر مقدار کی قیمت مختلف اوقات اور نقاط پر مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں کسی بھی نقطے پر درجہ حرارت کی قیمت وقت t کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔ اسی طرح کسی بھی وقت مختلف نقاط پر درجہ حرارت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں اگر صبح کے وقت اسلام آباد میں کسی مقام پر درجہ حرارت 12°C ہو تو دوپہر کو اسی مقام پر درجہ حرارت 30°C ہو سکتا ہے۔ درجہ حرارت T ، وقت t ، کارتیسی محدود ² کے متغیرات x, y, z تمام مقدار کی متغیرات ہیں۔

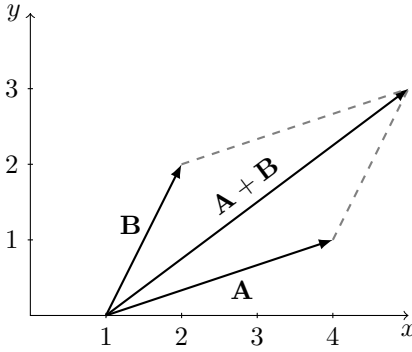
ایسی طبعی مقدار جسے بیان کرنے کے لئے سمت درکار ہو سمتیہ ³ کہلاتا ہے۔ اس کتاب میں سمتیہ کی قیمت (یا طول) کو مثبت تصور کیا جائے گا۔ یوں سمتیہ کی حتمی قیمت ہی اس کی مقدار ہو گی۔ سمتیہ کی مثالیں قوت، سمتی رفتار اور سمتی اسراع ہیں۔

اس کتاب میں مقدار کی متغیرات کو سادہ طرز کی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے حروف مثلاً a, b, α, \dots یا بڑے حروف مثلاً A, B, Ψ, \dots سے ظاہر کیا جائے گا۔ سمتیہ متغیرات کو موٹی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے یا بڑے حروف سے ظاہر کیا جائے گا۔ یوں قوت کو F جبکہ سمتی رفتار کو v سے ظاہر کیا جائے گا۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں قوت کو \vec{F} یا \vec{F} لکھا جاتا ہے۔ سمتیہ کو تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں تیر کی لمبائی سمتیہ کی حتمی قیمت $|F|$ ظاہر کرتی ہے جبکہ سمتیہ کی سمت تیر کی سمت سے ظاہر کی جاتی ہے۔ ¹⁹⁶ سمتیہ کی حتمی قیمت کو سمتیہ ظاہر کرنے والے حرف کو سادہ لکھائی میں لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں قوت F کی حتمی قیمت کو F لکھا جائے گا۔

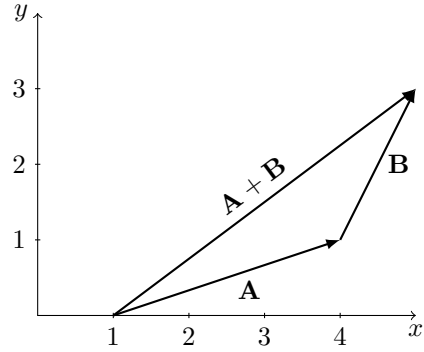
شکل 1.1 میں نقطہ $(1, 1)$ پر پانی کی رفتار کو سمتیہ v سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر مثبت افقی محور کی سمت میں پانی کی رفتار $2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔ سمتیہ کی ذم اس مقام پر رکھی جاتی ہے جہاں سمتیہ کی قیمت بیان کی جا رہی ہو۔ یوں شکل میں سمتیہ کی ذم $(1, 1)$ پر رکھی گئی ہے۔ اس شکل میں 1 cm کی لمبائی $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ کی رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔



شکل 1.1: سمتیہ



(ب) متوازی الاضلاع سے بھی مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔



(ا) سر کے ساتھ دم جوڑ کر مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.2: سمتیوں کے مجموعے کا حصول

1.2 سمتی الجبرا

دو سمتیوں کا ترتیبی مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر ایک سمتیہ کے سر کو دوسری سمتیہ کے دم کے ساتھ ملایا جاتا ہے۔ پہلی سمتیہ کی دم سے دوسری سمتیہ کے سر تک سمتیہ حاصل جمع ہو گا۔ اس عمل کو شکل 1.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔ شکل میں A کے سر کے ساتھ B کی دم ملائی گئی ہے۔ دو سے زیادہ سمتیوں کا مجموعہ بھی اسی عمل کو استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اس عمل کو **سر سے دم جوڑنا**⁴ کہتے ہیں۔ شکل 1.2-ب میں دو سمتیوں کے دم ملا کر سمتیوں کے متوازی الاضلاع⁵ سے ان کا مجموعہ حاصل کرنا دکھایا گیا ہے جسے دیکھ کر صاف ظاہر ہے کہ $A + B = B + A$ ہے یعنی سمتیوں کا مجموعہ قانون تبادل⁶ پر پورا اترتا ہے۔ اسی طرح سمتیوں کا مجموعہ قانون تلازمی⁷

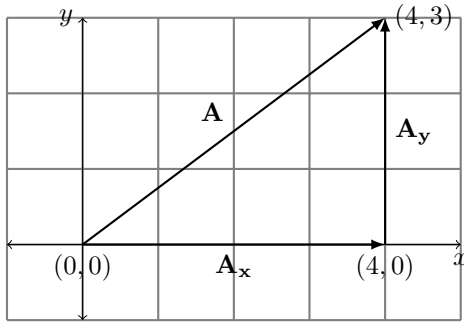
$$(1.1) \quad A + (B + C) = (A + B) + C$$

پر بھی پورا اترتا ہے۔

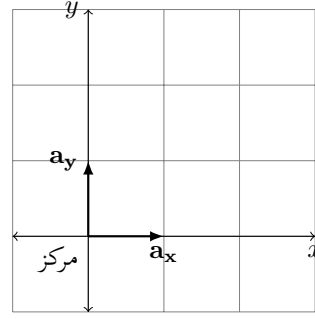
سمتیوں کے تفریق کا اصول جمع کے اصول سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ہم $A - B$ کو $A + (-B)$ لکھ سکتے ہیں جہاں $-B$ سے مراد یہ ہے کہ سمتیہ B کی سمت الٹی کر دی گئی ہے۔ یوں $A - B$ حاصل کرنے کی خاطر B کی سمت الٹی کرتے ہوئے اس نئے سمتیہ کو A کے ساتھ جمع کیا جاتا ہے۔

سمتیہ A کو مثبت مقداری k سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت پر کوئی اثر نہیں ہوتا جبکہ اس کی لمبائی k گنا ہو جاتی ہے۔ اس کے برعکس سمتیہ A کو منفی مقداری k سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت الٹ ہو جاتی ہے اور اس کی لمبائی |k| گنا ہو جاتی ہے۔

head to tail rule⁴
parallelogram law⁵
commutative law⁶
associative law⁷



(ب) اکائی سمتیوں کی مدد سے کسی بھی سمتیہ کو ظاہر کیا جا سکتا ہے۔



(ا) اکائی سمتیہ

شکل 1.3: اکائی سمتیہ اور ان کا استعمال

دو سمتیے اُس صورت میں برابر ہوتے ہیں جب ان کا تفریق صفر کے برابر ہو یعنی $A = B$ تب ہو گا جب $A - B = 0$ ہو۔

207

سمتی میدان کے متغیرات کو ہم آپس میں جمع یا منفی صرف اُس صورت کریں گے جب یہ متغیرات ایک ہی نقطے پر بیان کئے گئے ہوں۔ یوں کسی بھی نقطے پر دو یا دو سے زیادہ مقناطیسوں کا اجتماعی مقناطیسی میدان حاصل کرتے ہوئے اس نقطے پر تمام مقناطیسوں کا علیحدہ علیحدہ مقناطیسی میدان لیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

210

اگر سمتی میدان کی بات نہ ہو رہی ہو تب مختلف مقامات پر پائے جانے والے سمتیوں کا بھی مجموعہ یا فرق لیا جاسکتا ہے۔ یوں سمندر کے پانی میں ڈوبے آب دوز کی اوپر اور چلی سطح پر قوت کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا یہ مزید ڈوبے گا یا نہیں۔

212

1.3 کارتیسی محدود

213

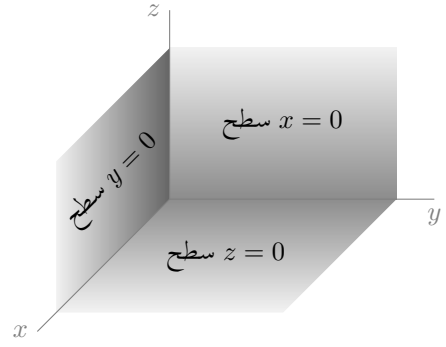
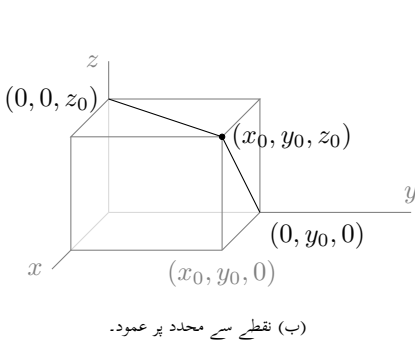
ایسا طریقہ جس سے کسی نقطے کا مقام بیان کیا جائے محدود⁸ کہلاتا ہے۔ سیدھی سطح پر کسی بھی نقطے کو دو محدود سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ خلاء تین طرفہ⁹ ہے لہذا خلاء میں کسی بھی نقطے کو تین محدود سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ شکل 1.3-الف میں دو طرفہ کارتیسی محدود پر اکائی لمبائی کے دو سمتیات a_x اور a_y دکھائے گئے ہیں۔ اکائی سمتیہ a_x کی سمت مثبت x جانب کو ہے جبکہ a_y کی سمت مثبت y جانب کو ہے۔ شکل-ب میں A دکھایا گیا ہے۔ کسی بھی سمتیہ کو دو یا دو سے زیادہ سمتیوں کے مجموعے کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ شکل میں A کو A_x اور A_y کے مجموعے کی شکل میں دکھایا گیا ہے یعنی

(1.2)

$$A = A_x + A_y$$

زمین کی سطح کو لامحدود سیدھی سطح تصور کرتے ہوئے، اس کے ہم سطحی¹⁰ دو عمودی لکیریں کھینچتے ہوئے ایک لکیر کو x محدود اور دوسری لکیر کو y محدود تصور کیا جاسکتا ہے۔ زمین کے ہم سطحی لکیر سے مراد ایسی لکیر ہے جس پر ہر نقطہ اس سطح کو چھوتا ہے۔ x محدود کے مثبت حصے سے گھڑی کی الٹ سمت گھومتے ہوئے نوے درجے پر y محدود کا مثبت حصہ رکھتے ہوئے اونچائی کو z محدود کے مثبت حصے سے ظاہر کیا جائے گا۔ اب اگر اونچائی صفر رکھتے ہوئے x اور y کو تبدیل کیا جائے تو ہم زمین کی سطح پر حرکت کریں گے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ زمین کی سطح پر $z = 0$ جبکہ اس پر x اور y آزاد متغیرات ہیں۔ یوں زمین کی سطح کو $z = 0$ سطح کہتے ہیں جسے

$$z = 0, \quad x \leq |\mp\infty|, \quad y \leq |\mp\infty|$$



شکل 1.4: کارٹیسی نظام میں نقطہ اور تین عمودی سطحیں۔

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 1.4-الف میں اس سطح کی نشاندہی کی گئی ہے۔ ہم بالکل اسی طرح $y = 0$ سطح اور $x = 0$ سطح بھی بیان کر سکتے ہیں۔

شکل 1.4-ب کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ کارٹیسی محدود میں کسی بھی نقطے کو (x_0, y_0, z_0) لکھا جاسکتا ہے۔ اس نقطے تک پہنچنے کی خاطر کارٹیسی محدود کے مرکز سے پہلے x محدود کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0, 0, 0)$ تک پہنچیں۔ اس کے بعد y محدود کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0, y_0, 0)$ تک پہنچیں اور آخر کار z محدود کے متوازی z_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے درکار نقطہ (x_0, y_0, z_0) تک پہنچیں۔ اس عمل میں یہ ضروری نہیں کہ پہلے x محدود کے متوازی ہی چلا جائے۔ آپ مرکز سے پہلے y محدود کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرنے کے بعد z محدود کے متوازی z_0 اور آخر کار x محدود کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے بھی اسی نقطے تک پہنچ سکتے ہیں۔ تینوں فاصلوں کو کسی بھی ترتیب سے طے کیا جاسکتا ہے۔

نقطہ (x_0, y_0, z_0) سے x محدود پر عمود بناتے ہوئے $(x_0, 0, 0)$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح اس نقطے سے y محدود پر عمود $(0, y_0, 0)$ اور z محدود پر عمود $(0, 0, z_0)$ دیتا ہے۔ نقطہ (x_0, y_0, z_0) سے y محدود اور z محدود پر عمودی لکیریں گہری سیاہی میں دکھائے گئے ہیں۔ اگر (x_0, y_0, z_0) سے شروع ہوتے ہوئے z محدود کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $z = 0$ ہو جائے تو نقطہ $(x_0, y_0, 0)$ حاصل ہو گا۔ اب اگر یہاں سے x محدود کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $x = 0$ ہو جائے تو نقطہ $(0, y_0, 0)$ حاصل ہو گا۔ یہ وہی نقطہ ہے جو (x_0, y_0, z_0) سے y محدود پر عمودی لکیر بناتے ہوئے حاصل ہوتا ہے۔ اس عمل میں ہم پہلے x محدود کے متوازی چلتے ہوئے $x = 0$ کرنے کے بعد z محدود کے متوازی چلتے ہوئے $z = 0$ کرتے ہوئے بھی نقطہ $(0, y_0, 0)$ تک پہنچ سکتے تھے۔

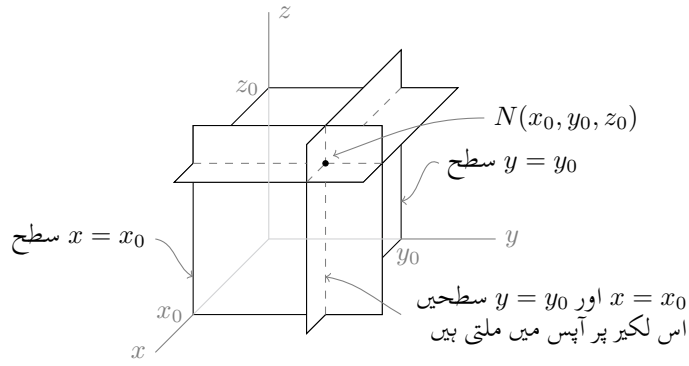
نقطہ (x_0, y_0, z_0) تک قدر مختلف انداز سے بھی پہنچا جاسکتا ہے جسے کارٹیسی محدود میں سمجھنا زیادہ آسان ہے۔ فرض کریں کہ $x = x_0$ پر لامحدود سیدھی سطح بنائی جائے۔ ایسی سطح کو $x = x_0$ سطح کہتے ہیں۔ اس سطح کو

$$x = x_0, \quad y \leq |\mp\infty|, \quad z \leq |\mp\infty|$$

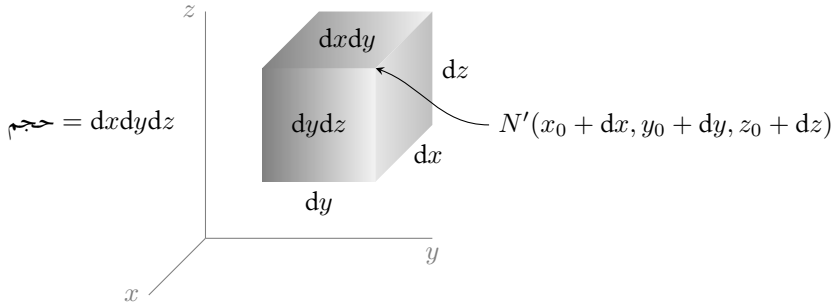
لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں x_0 مقررہ ہے جبکہ y اور z متغیرات ہیں۔ دو متغیرات کی مساوات سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر $y = y_0$ پر لامحدود xz سیدھی سطح بنائی جائے تو یہ دو سطحیں آپس میں سیدھی لکیر پر ملیں گے۔ یہ لکیر

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z \leq |\mp\infty|$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اس مساوات میں x_0 اور y_0 مقررہ ہیں جبکہ z متغیرہ ہے۔ ایک متغیرہ کی مساوات لکیر کو ظاہر کرتی ہے۔ اب اگر $z = z_0$ پر لامحدود xy سیدھی سطح بھی بنائی جائے تب یہ تینوں سطحیں ایک نقطے $N(x_0, y_0, z_0)$ پر آپس کو چھونگیں۔ یہ صورت حال شکل 1.5 میں دکھائی گئی ہے جہاں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ نقطے تک پہنچنے کا یہ طریقہ دیگر محدود میں استعمال کرنا لازمی ثابت ہو گا۔



شکل 1.5: تین عمودی سطحوں سے نقطے کا حصول۔



شکل 1.6: چھ سطحی مکعب گھیرتی ہیں۔

اگر سطح $x = x_0$ کے متوازی $x = x_0 + dx$ پر اور اسی طرح $y = y_0$ کے متوازی $y = y_0 + dy$ اور $z = z_0$ کے متوازی $z = z_0 + dz$ رکھے جائیں تو یہ چھ سطحی ایک چھوٹی مکعب نما حجم کو گھیریں گی جسے شکل 1.6 میں دکھایا گیا ہے جبکہ یہ تین نئی سطحیں آپس میں نقطہ $N'(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ پر ملیں گی۔ اس مکعب نما کے اطراف dx ، dy اور dz ہیں۔ اس کی اوپر والی سطح کا رقبہ $dx dy$ ہے۔ اسی طرح اس کی نچلی سطح کا رقبہ بھی $dx dy$ ہے۔ سامنے سطح اور پچھلی سطح دونوں $dy dz$ رقبہ رکھتے ہیں جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کے رقبے $dx dz$ کے برابر ہیں۔ اس مکعب نما کی حجم $dx dy dz$ ہے۔ نقطہ $N'(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ شکل میں دکھایا گیا ہے جبکہ نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ مکعب نما کا وہ واحد کونا ہے جسے شکل میں نہیں دکھایا گیا۔ ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ $NN' = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ہے۔

234

کار تیزی محدود کے تینوں متغیرات تبدیل کرنے سے ہم N سے N' پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک کی سمتیہ

235

(1.3)

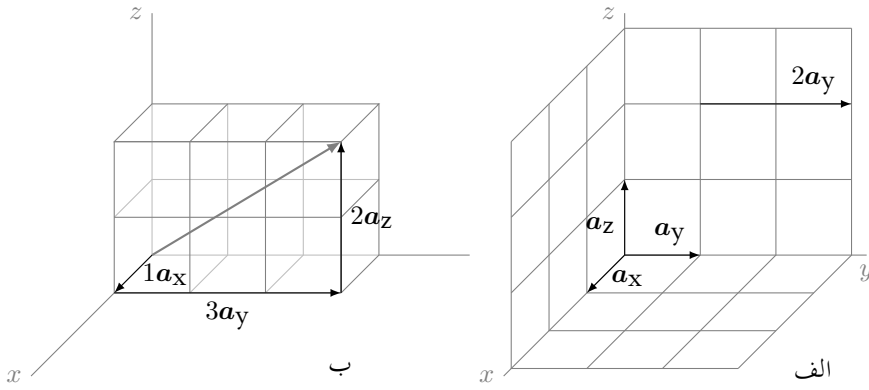
$$dL = dx a_x + dy a_y + dz a_z$$

لکھی جاتی ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتیہ لمبائی دیتی ہے۔

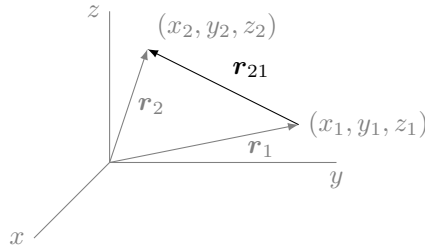
236

237

حصہ 1.3 کے شروع میں دو طرفہ کار تیزی نظام میں سیدھی سطح پر کسی بھی سمتیہ کو دو سمتیات کی صورت میں لکھنا دکھایا گیا۔ یہی طریقہ تین طرفہ کار تیزی نظام کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ تین طرفہ کار تیزی نظام کے تین اکائی سمتیات a_x ، a_y اور a_z لکھے جاتے ہیں۔ یہ تینوں سمتیات آپس میں عمودی



شکل 1.7: کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات اور ان کا استعمال

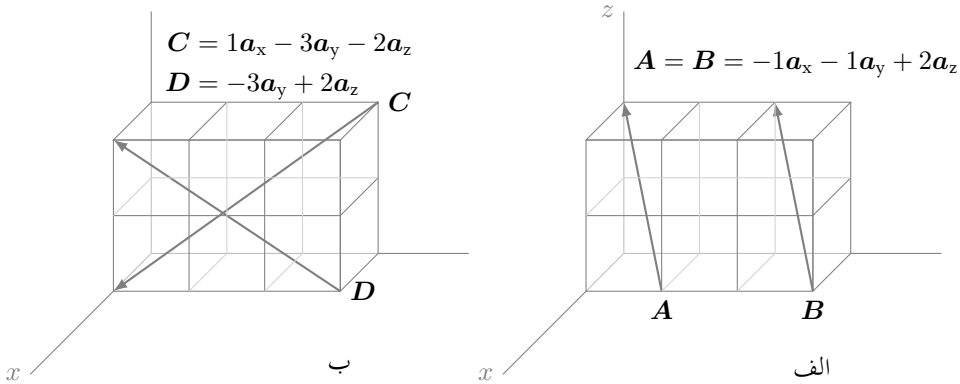


شکل 1.8: کارتیسی نظام میں سمتیہ کی مساوات کا حصول

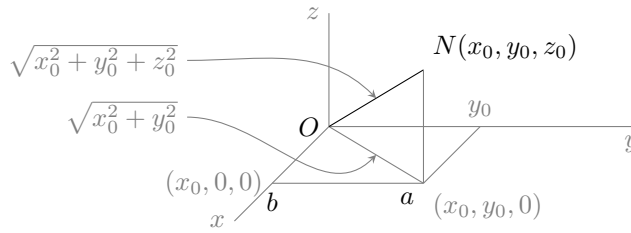
ہیں۔ کسی بھی اکائی سمتیہ کی طرح یہ تین اکائی سمتیات اکائی لمبائی رکھتے ہیں۔ a_x کی سمت x محدود کے بڑھتے جانب کو ہے۔ اسی طرح a_y کی سمت y محدود کے بڑھتے جانب کو اور a_z کی سمت z محدود کے بڑھتے جانب کو ہے۔ شکل 1.7-الف میں یہ تینوں اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ اسی شکل میں نقطہ $(0, 1, 2)$ پر سمتیہ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ یہ اکائی سمتیہ a_y کی سمت میں ہے۔ اس سمتیہ کو $2a_y$ لکھا جاسکتا ہے۔ یاد رہے کہ ایسے دو سمتیات برابر ہوتے ہیں جن کا طول برابر ہو اور جو ایک ہی سمت میں ہوں۔ یوں سمت تبدیل کئے بغیر سمتیہ کو کارتیسی محدود کے مرکز منتقل کھدے ہوئے اس کی قیمت نسبتاً آسانی سے لکھی جاسکتی ہے۔

244

شکل 1.8 میں مرکز سے (x_1, y_1, z_1) تک سمتیہ $r_1 = x_1 a_x + y_1 a_y + z_1 a_z$ اور مرکز سے (x_2, y_2, z_2) تک سمتیہ $r_2 = x_2 a_x + y_2 a_y + z_2 a_z$ دکھائی گئی ہے جس کی ڈم (x_1, y_1, z_1) اور نوک (x_2, y_2, z_2) پر ہے۔ سر سے ڈم جوڑنے



شکل 1.9: کارتیسی نظام میں چند سمتیات۔



شکل 1.10: کارتیسیسی نظام میں سمتیہ کا طول۔

کے اصول کے استعمال سے $r_2 = r_{21} + r_1$ لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$(1.4) \quad \begin{aligned} r_{21} &= r_2 - r_1 \\ &= (x_2 - x_1)a_x + (y_2 - y_1)a_y + (z_2 - z_1)a_z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے استعمال سے سمتیہ کی مساوات باآسانی حاصل ہوتی ہے۔ سمتیہ r_{21} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں سمتیہ کی نوک کو 2 اور اس کی ڈم کو 1 سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کتاب میں سمتیہ لکھتے ہوئے نوک اور ڈم کو اسی ترتیب سے زیر نوشت میں لکھا جائے گا۔ یوں سمتیہ r_{21} کو تین اجزاء $(x_2 - x_1)a_x$ ، $(y_2 - y_1)a_y$ اور $(z_2 - z_1)a_z$ کے مجموعے کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

247

شکل 1.7-ب میں مرکز سے $(1, 3, 2)$ تک سمتیہ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کو تین سمتیات کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے یعنی $1a_x + 3a_y + 2a_z$ جہاں اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے تینوں اجزاء کو لکھا گیا ہے۔ سمتیہ کی ڈم $(0, 0, 0)$ اور اس کی نوک $(1, 3, 2)$ پر لیتے ہوئے یہی جواب مساوات 1.4 سے بھی حاصل ہوتا ہے۔

250

شکل 1.9-الف میں دو متوازی سمتیات A اور B دکھائے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔ چونکہ ان کی لمبائی برابر ہے اور یہ دونوں ایک ہی سمت میں ہیں لہذا $A = B = -1a_x - 1a_y + 2a_z$ لکھا جائے گا۔ شکل 1.9-ب میں C کی ڈم سے a_x جانب ایک قدم اور یہاں سے $-a_y$ جانب تین قدم اور آخر کار $-a_z$ جانب دو قدم چلنے سے اس کی نوک تک پہنچا جاسکتا ہے لہذا $C = 1a_x - 3a_y - 2a_z$ لکھا جائے گا۔ اسی طرح D کی ڈم سے $-a_y$ جانب تین قدم اور پھر a_z جانب دو قدم چلتے ہوئے سمتیہ کی نوک تک پہنچا جاسکتا ہے لہذا $D = -3a_y + 2a_z$ لکھا جائے گا۔ سمتیہ D کو دو اجزاء کی شکل میں لکھا گیا ہے چونکہ اس کے تیسرے جزو کی لمبائی صفر کے برابر ہے۔

255

مشق 1.1: مساوات 1.4 کے استعمال سے شکل 1.9 میں تمام سمتیات لکھیں۔

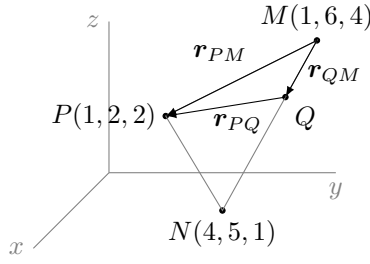
256

جوابات: تمام جوابات شکل میں دئے گئے ہیں۔

257

شکل 1.10 میں مرکز سے نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ تک کا فاصلہ ON مسئلہ **فیثاغورث**¹¹ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس نقطے سے $z = 0$ سطح پر عمود سے نقطہ a حاصل ہوتا ہے۔ نقطہ a سے x محور پر عمود نقطہ b دیتا ہے۔ تینوں O میں O سے b کا فاصلہ x_0 ہے جبکہ b سے a کا فاصلہ y_0 ہے۔ یوں فاصلہ ON مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ کے برابر ہو گا۔ تینوں ON میں a پر 90° کا زاویہ پایا جاتا ہے۔ یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے ON کا فاصلہ $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ حاصل ہوتا ہے۔

262



شکل 1.11: سمتیوں کا استعمال

مساوات 1.4 سمتیہ کی عمومی مساوات ہے۔ اس میں دئے سمتیہ r_{21} کی دُم محدود کے مرکز پر رکھنے سے صاف ظاہر ہے کہ سمتیہ کی مقدار

$$(1.5) \quad |r_{21}| = r_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

کے برابر ہے۔ اگر سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کیا جائے تو حاصل جواب کی مقدار اکائی ہوگی جبکہ اس کی سمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوگی۔ یوں r_{21} کو $|r_{21}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے r_{21} کی سمت میں اکائی سمتیہ $a_{r_{21}}$ حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$(1.6) \quad a_{r_{21}} = \frac{r_{21}}{|r_{21}|} = \frac{(x_2 - x_1)a_x + (y_2 - y_1)a_y + (z_2 - z_1)a_z}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

یاد رہے کہ سمتیہ کی سمت اور طول تبدیل کئے بغیر اسے ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کیا جاسکتا ہے۔ البتہ وہ سمتیہ جو کسی نقطے کی مقام تعین کرتا ہو کو اگر کہیں اور منتقل کیا جائے تو ایسی صورت میں سمتیہ کی نوک درکار نقطے پر نہیں رہے گی۔ اسی حقیقت کی بنا پر میدان ظاہر کرنے والے سمتیہ کو اپنی جگہ سے نہیں ہٹایا جاسکتا۔ میدان سمتیہ کی دُم اس مقام پر پائی جاتی ہے جہاں میدان بیان کی جارہی ہو۔

سمتیات کے استعمال سے نقطہ (x, y, z) کے مقام کو $r = xa_x + ya_y + za_z$ لکھا جاتا ہے۔ کسی بھی سمتیہ مثلاً قوت F کو بالکل ایسی طرح $F = F_x a_x + F_y a_y + F_z a_z$ لکھا جاتا ہے جہاں $F_x a_x$ ، $F_y a_y$ اور $F_z a_z$ اس کے تین اجزاء ہیں۔ اس طرح قوت کی مقدار $|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ کے برابر ہوگی۔

مثال 1.1: نقطہ $(-5, 2, -1)$ کا مقام ظاہر کرنے والا سمتیہ اور اس سمتیہ کا طول حاصل کریں۔ اسی سمتیہ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز سے اس نقطے تک کا سمتیہ $r = -5a_x + 2a_y - 1a_z$ ہے جبکہ اس سمتیہ کا طول $|r| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{30}$ ہے۔ یوں اکائی سمتیہ $a_r = \frac{-5a_x + 2a_y - 1a_z}{\sqrt{30}}$ ہوگا۔

مثال 1.2: شکل 1.11 میں تین نقطے $M(1, 6, 4)$ ، $N(4, 5, 1)$ اور $P(1, 2, 2)$ دئے گئے ہیں۔ M اور N کے درمیان سیدھی لکیر پر M سے کل فاصلے کے $\frac{1}{3}$ پر نقطہ Q پایا جاتا ہے۔ Q سے P تک سمتیہ حاصل کرتے ہوئے ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔ حل: M سے N تک سمتیہ

$$\begin{aligned} r_{NM} &= (4 - 1)a_x + (5 - 6)a_y + (1 - 4)a_z \\ &= 3a_x - 1a_y - 3a_z \end{aligned}$$

ہے۔ M سے Q تک سمتیہ r_{QM} اور r_{NM} ایک ہی سمت میں ہیں جبکہ $|r_{QM}| = \frac{1}{3}|r_{NM}|$ کے برابر ہے۔ یوں

$$r_{QM} = \frac{1}{3}r_{NM} = \frac{1}{3}(3a_x - 1a_y - 3a_z) = 1a_x - \frac{1}{3}a_y - 1a_z$$

ہو گا۔ M سے P تک سمتیہ

$$\begin{aligned} r_{PM} &= (1-1)a_x + (2-6)a_y + (2-4)a_z \\ &= -4a_y - 2a_z \end{aligned}$$

ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں $r_{QM} + r_{PQ} = r_{PM}$ لہذا

$$\begin{aligned} r_{PQ} &= r_{PM} - r_{QM} \\ &= (-4a_y - 2a_z) - (1a_x - \frac{1}{3}a_y - 1a_z) \\ &= -1a_x - \frac{11}{3}a_y - 1a_z \end{aligned}$$

ہو گا۔ Q سے P تک فاصلہ $\sqrt{1^2 + \left(\frac{11}{3}\right)^2 + 1^2} = 3.93$ ہے۔

274

275

276

مشق 1.2: مثال 1.2 میں دئے نقطوں کو استعمال کرتے ہوئے M سے P تک سمتیہ حاصل کریں۔ اسی طرح P سے N تک سمتیہ اور M سے N تک سمتیہ حاصل کریں۔ پہلے دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے **سر سے دُم جوڑنے** کے اصول سے تیسرا سمتیہ دوبارہ حاصل کریں۔

278

جوابات: $-5a_x - 4a_y + 12a_z$ ، $-1a_x + 4a_y + 12a_z$ اور $-6a_x + 12a_z$

279

280

1.5 میدانِی سمتیہ

281

لکھنا ہے

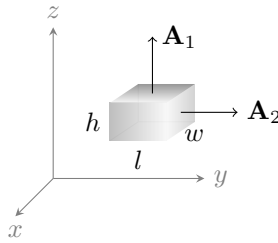
282

1.6 سمتی رقبہ

کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں۔ یوں سطح کے کسی بھی نقطے پر دو آپس میں الٹ سمتوں میں عمود بنائے جاسکتے ہیں۔ سیدھی سطح جس کا رقبہ S_0 ہو کے ایک طرف پر اکائی عمود a_N اور دوسری طرف پر اکائی عمود $-a_N$ بنائے جاسکتے ہیں۔ اگر ان دو عمودوں میں سے ایک عمود مثلاً a_N کو سطح کی سمت 12 تصور کیا جائے تب اس سطح کا **سمتی رقبہ** $^{13}Sa_N$ ہو گا۔ بند سطح کے بیرونی اکائی عمود کو سطح کی سمت تصور کیا جاتا ہے۔ شکل 1.12 میں سمتی رقبہ A_1 اور A_2 دکھائے گئے ہیں جہاں بند سطح کے بیرونی عمود کو ہی سطح کی سمت دکھایا گیا ہے۔

286

¹² عمود سطح کے ساتھ نوئے درجہ زاویہ بناتا ہے۔ a_N کے زیر نوشت میں N ، لفظ نوئے کے پہلے حرف کی آواز کو ظاہر کرتا ہے۔
¹³ vector area



$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= A_1 \mathbf{a}_{N1} = wla_z \\ \mathbf{A}_2 &= A_2 \mathbf{a}_{N2} = wha_y \end{aligned}$$

شکل 1.12: سمتی رقبہ

1.7 غیر سمتی ضرب

دو سمتیات A اور B کے **غیر سمتی ضرب**¹⁴ سے مراد A کی مقدار ضرب B کی مقدار ضرب سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کا کوسائن ہے۔

$$(1.7) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta_{AB}$$

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جاسکتا ہے۔ غیر سمتی ضرب دو سمتیوں کے مابین کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب مقداری ہوتا ہے جس کی وجہ سے اسے **مقداری ضرب**¹⁵ بھی کہا جاتا ہے۔ غیر سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان نقطے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی وجہ سے اسے **ضرب نقطہ**¹⁵ بھی کہا جاتا ہے۔ یوں $A \cdot B$ کو " A نقطہ B " پڑھا جاتا ہے۔ بالکل سادہ ضرب کی طرح $A \cdot B$ کو $B \cdot A$ بھی لکھا جاسکتا ہے یعنی غیر سمتی ضرب میں متغیرات کی ترتیب اہمیت نہیں رکھتی¹⁶۔

کارٹیزی اکائی سمتیات a_x, a_y اور a_z آپس میں عمودی ہیں لہذا ان میں کسی بھی دو سمتیات کے درمیان 90° زاویہ پایا جاتا ہے۔ چونکہ $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے لہذا ان میں کسی بھی دو سمتیوں کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$(1.8) \quad \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = 0, \quad \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = 0, \quad \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = 0$$

ایک ہی سمت میں دو سمتیوں کے درمیان صفر زاویہ ہوتا ہے اور $\cos 0 = 1$ کے برابر ہے۔ اکائی سمتیہ کا طول بھی ایک کے برابر ہے لہذا مساوات 1.7 کے تحت a_x اور a_x کا غیر سمتی ضرب

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = (|\mathbf{a}_x|)(|\mathbf{a}_x|)(\cos 0) = (1)(1)(1) = 1$$

ہوگا۔ بقایا دو کارٹیزی اکائی سمتیات کا خود غیر سمتی ضرب بھی ایک کے برابر ہے۔

$$(1.9) \quad \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = 1, \quad \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = 1, \quad \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کو **کرونیکر ڈیلٹا**¹⁶ δ_{ij} کی مدد سے ایک ہی مساوات کی مدد سے یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.10) \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$$

جہاں

$$(1.11) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases}$$

scalar product¹⁴

dot product¹⁵

¹⁶ یہ لیپولڈ کرونیکر کے نام سے منسوب ہے۔

کے برابر ہے یعنی $i = j$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت ایک جبکہ $j \neq i$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت صفر کے برابر لی جاتی ہے۔ یوں $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y$ کی صورت میں $i = x$ جبکہ $j = y$ کے برابر ہیں۔ یوں i اور j برابر نہیں ہیں لہذا حاصل جواب صفر کے برابر ہو گا۔ اس کے برعکس $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z$ کی صورت میں $i = z$ اور $j = z$ ہیں لہذا $i = j$ ہے اور یوں حاصل جواب ایک کے برابر ہے۔

294

کارٹیزی تین عمودی اکائیوں کی مدد سے سمتیات کا غیر سمتی ضرب نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ یوں اگر $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ اور $\mathbf{B} = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z$ دو سمتیات ہوں تب ان کا غیر سمتی ضرب

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= A_x B_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x + A_x B_y \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y + A_x B_z \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z \\ &\quad + A_y B_x \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_x + A_y B_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y + A_y B_z \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z \\ &\quad + A_z B_x \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x + A_z B_y \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y + A_z B_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

ہو گا۔ مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کا سہارا لیتے ہوئے یوں

$$(1.12) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ سمتیہ \mathbf{A} کا خود غیر سمتی ضرب

$$(1.13) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\mathbf{A}|^2$$

295

اس کے طول کے مربع کے برابر ہے۔ یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جسے عموماً استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کا طول حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 1.7 اور مساوات 1.12 کی مدد سے دو سمتیوں کے مابین زاویہ معلوم کیا جاسکتا ہے یعنی

$$(1.14) \quad \theta_{AB} = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \right)$$

296

مثال 1.3: شکل 1.11 میں نکتوں دکھایا گیا ہے جس کے نوک $M(1, 6, 4)$ ، $N(4, 5, 1)$ اور $P(1, 2, 2)$ ہیں۔ M پر زاویہ حاصل کریں۔

297

حل: مثال 1.2 میں $r_{NM} = 3\mathbf{a}_x - 1\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$ اور $r_{PM} = 0\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$ حاصل کئے گئے۔ $|r_{NM}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{19}$ اور $|r_{PM}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ ہیں جبکہ

$$\mathbf{r}_{NM} \cdot \mathbf{r}_{PM} = 0 + 4 + 6 = 10$$

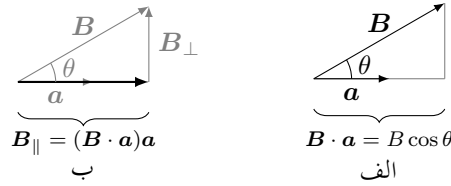
کے برابر ہے۔ یوں ان سمتیوں کے مابین زاویہ

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{10}{\sqrt{19}\sqrt{20}} \right) = 1.0321 \text{ rad}$$

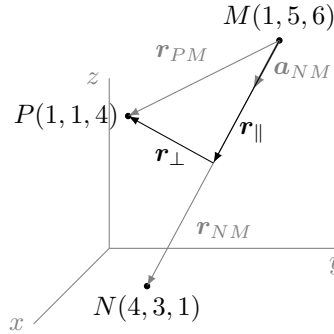
298

یا 59.137° ہے۔

299



شکل 1.13: کسی بھی سمت میں سمتیہ کے جزو کا حصول۔



شکل 1.14: متوازی اور عمودی اجزاء۔

شکل 1.13-الف میں سمتیہ B اور اکائی سمتیہ a دکھائے گئے ہیں۔ ان کا غیر سمتی ضرب

$$B \cdot a = |B||a| \cos \theta = B \cos \theta$$

کے برابر ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ یہی a کی سمت میں B کے جزو کا طول B_{\parallel} ¹⁷ ہے۔ یوں کسی بھی سمت میں B کے جزو کا طول حاصل کرنے کی خاطر B اور اس سمت کی اکائی سمتیہ کا غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔ یوں حاصل طول کا اکائی سمتیہ کے ساتھ ضرب یعنی $(B \cdot a)a$ سے اکائی سمتیہ کی سمت میں B کا سمتی جزو حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.13-ب میں a کی سمت میں B کا سمتی جزو B_{\parallel} دکھایا گیا ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ B سے $B_{\parallel}a$ منفی کرنے سے B_{\perp} حاصل ہوتا ہے جو B کا وہ جزو ہے جو a کے عمودی ہے۔

غیر سمتی ضرب کا حاصل جواب دو صورتوں میں صفر کے برابر ہوتا ہے۔ پہلی صورت وہ ہے جب دونوں سمتیوں میں سے کم از کم ایک سمتیہ کا طول صفر کے برابر ہو۔ دوسری صورت وہ ہے جب دونوں سمتیات آپس میں عمودی ہوں۔ عمودی ہونے کی صورت میں ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہو گا اور $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے۔ یوں دو سمتیوں کے نقطہ ضرب صفر کے برابر ہونے سے اخذ کیا جاتا ہے کہ یہ آپس میں عمودی ہیں۔

مثال 1.4: شکل 1.14 میں تین نقطے $M(1, 5, 6)$ ، $N(4, 3, 1)$ اور $P(1, 1, 4)$ دئے گئے ہیں۔ N اور M سے گزرتی سیدھی لکیر سے P کا عمودی فاصلہ حاصل کریں۔

حل: M سے N تک سمتیہ $r_{NM} = 3a_x - 2a_y - 5a_z$ ہے جس کا طول $|r_{NM}| = \sqrt{38}$ ہے۔ یوں اس سمت میں اکائی سمتیہ $a_{NM} = \frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}}$ ہو گا۔ اسی طرح M سے P تک سمتیہ $r_{PM} = -4a_y - 2a_z$ ہے۔ a_{NM} کی سمت میں r_{PM} کا طول

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= r_{PM} \cdot a_{NM} = (-4a_y - 2a_z) \cdot \left(\frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}} \right) \\ &= \frac{0 + 8 + 10}{\sqrt{38}} = \frac{18}{\sqrt{38}} \end{aligned}$$

¹⁷ B_{\parallel} لکھتے ہوئے زیرنوشت میں دو متوازی لکیریں یہ بتاتی ہیں کہ B کا یہ وہ حصہ ہے جو a کے متوازی ہے۔ اسی طرح عمودی مقدار کو عموماً \perp کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہے یوں a_{NM} سمت میں r_{PM} کا سمتی جزو

$$r_{\parallel} = r_{\parallel} a_{NM} = \frac{18}{\sqrt{38}} \left(\frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}} \right) = \frac{18}{38} (3a_x - 2a_y - 5a_z)$$

ہے۔ r_{PM} سے r_{\parallel} منفی کرنے سے لکیر سے P تک عمودی سمتیہ r_{\perp} حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= r_{PM} - r_{\parallel} = (-4a_y - 2a_z) - \frac{18}{38} (3a_x - 2a_y - 5a_z) \\ &= \frac{-27a_x - 58a_y + 7a_z}{19} \end{aligned}$$

جس کا طول $\frac{\sqrt{27^2 + 58^2 + 7^2}}{19} = 3.3873$ ہے۔ یوں P کا لکیر سے عمودی فاصلہ 3.3873 ہے۔

r_{\parallel} اور r_{\perp} آپس میں عمودی ہیں لہذا ان کا نقطہ ضرب

$$r_{\parallel} \cdot r_{\perp} = \frac{18}{38} (3a_x - 2a_y - 5a_z) \cdot \left(\frac{-27a_x - 58a_y + 7a_z}{19} \right) = \frac{18}{722} (-81 + 116 - 35) = 0$$

صفر کے برابر ہے۔

شکل 1.14 میں اگر M پر r_{NM} کی دُم رکھی جائے تب r_{NM} کی نوک N کا مقام تعین کرتا ہے۔ عموماً کسی بھی نقطے کا مقام محدود کے مرکز $(0,0,0)$ کی نسبت سے طے کیا جاتا ہے۔ ایسا سمتیہ جس کی دُم مرکز پر رکھتے ہوئے اس کی نوک نقطے کا مقام طے کرے **مقام تعین کنندہ** سمتیہ¹⁸ کہلاتا ہے۔ اگر تعین کنندہ سمتیہ کو مرکز سے ہٹایا جائے تب ظاہر ہے اس کی نوک اصل مقام طے کرنے سے قاصر ہوگی۔

مثال 1.5: شکل 1.14 میں M سے شروع ہوتے اور N جانب بڑھتی سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطے کا مقام تعین کرتے تعین کنندہ سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز $(0,0,0)$ سے نقطہ M تک کا سمتیہ $r_M = 1a_x + 5a_y + 6a_z$ ہے جبکہ M سے N جانب اکائی سمتیہ a_{NM} گزشتہ مثال میں حاصل کیا گیا۔ اکائی سمتیہ a_{NM} کی سمت میں M سے s فاصلے پر نقطہ Q تک کا سمتیہ sa_{NM} ہے۔ یوں مرکز سے Q تک سمتیہ $r_Q = r_M + sa_{NM}$ ہوگا۔

$$r_Q = (1a_x + 5a_y + 6a_z) + s \left(\frac{3a_x - 2a_y - 5a_z}{\sqrt{38}} \right)$$

اس مساوات میں s متغیر ہے جسے تبدیل کرتے ہوئے سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطہ Q تک پہنچا جاسکتا ہے۔

مثال 1.6: $z_0 = z$ پر $1a_z$ کے عمودی سیدھی سطح کی مساوات حاصل کریں جہاں z_0 مستقل ہے۔

حل: نقطہ $N_1(0, 0, z_0)$ سے کسی بھی نقطہ $N_2(x, y, z)$ تک کا سمتیہ $r_{21} = xa_x + ya_y + (z - z_0)a_z$ ہے۔ سطح پر کسی بھی سمتیہ اور سطح کے عمودی سمتیہ آپس میں نوے درجے زاویہ پر پائے جاتے ہیں لہذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔ یوں اگر N_2 اسی عمودی سطح پر پایا جائے تب

$$1a_z \cdot [xa_x + ya_y + (z - z_0)a_z] = z - z_0 = 0$$

ہو گا جس سے اس سطح کی مساوات $z = z_0$ حاصل ہوتی ہے۔

اس قیمت کو r_{21} میں پُر کرتے ہوئے $r_{21} = xa_x + ya_y$ حاصل ہوتا ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں۔ چونکہ مرکز سے N_1 کا تعین کنندہ سمتیہ $r_{10} = z_0a_z$ ہے لہذا $z = z_0$ سطح پر کسی بھی نقطہ N_2 کا تعین کنندہ سمتیہ یعنی سطح کی سمتی مساوات $r_{20} = xa_x + ya_y + z_0a_z$ ہو گی۔

324

325

مشق 1.3: مرکز سے $(2, 1, 3)$ تک کی سمتیہ ایک سیدھی سطح کی عمودی سمتیہ ہے۔ اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

326

$$\text{جواب: } 2x + y + 3z = 14$$

327

328

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب

329

دو سمتیات A اور B کے **سمتی ضرب**¹⁹ کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جس کا طول A کی مقدار ضرب B کی مقدار ضرب سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کے سائن کے برابر ہے۔ حاصل سمتیہ A اور B سمتیات کی عمودی سمت میں ہوتا ہے جسے اکائی عمودی سمتیہ a_N سے ظاہر کیا جائیگا۔

$$(1.15) \quad A \times B = |A||B| \sin \theta_{AB} a_N$$

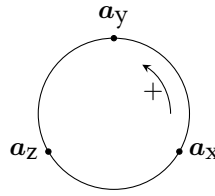
جس سیدھی سطح پر A اور B دونوں پائے جائیں، اس سطح کے دو عمودی سمتیات میں سے ایک ہے۔ a_N کو **دائیں ہاتھ کے قانون**²⁰ سے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

331

دائیں ہاتھ کی ہتھیلی سیدھی اور انگوٹھے کو بقیہ چار انگلیوں کے عمود میں رکھتے ہوئے پہلی انگلی کو A اور دوسری انگلی کو B کی سمت میں رکھیں۔ اس صورت میں انگوٹھا a_N کی سمت میں ہو گا۔

333

اگر دونوں سمتیات کی ڈم ایک ہی جگہ پر نہ ہوتی ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جاسکتا ہے۔ سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان صلیبی نشان \times سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی وجہ سے اسے **صلیبی ضرب**²¹ بھی کہا جاتا ہے اور



شکل 1.15: صلیبی ضرب کا حصول۔

$A \times B$ کو " A صلیب B " پڑھا جاتا ہے۔ سمتی ضرب میں سمتیوں کی ترتیب نہایت اہم ہے اور انہیں الٹانے سے حاصل جواب کی سمت الٹی ہو جاتی ہے۔

$$(1.16) \quad A \times B = -B \times A$$

اکائی سمتیات a_x اور a_y کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\sin 90 = 1$ کے برابر ہے جبکہ دائیں ہاتھ کے قانون سے ان کے صلیبی ضرب کی سمت a_z حاصل ہوتی ہے۔ یوں $a_x \times a_y = a_z$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $a_y \times a_z = a_x$ اور $a_z \times a_x = a_y$ کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 1.16 کے تحت یوں $a_x \times a_x = -a_z$ ، $a_y \times a_y = -a_x$ اور $a_z \times a_z = -a_y$ لکھے جاسکتے ہیں۔ دو متوازی سمتیوں کے درمیان صفر درجے کا زاویہ ہوتا ہے اور $\sin 0 = 0$ کے برابر ہے لہذا $a_x \times a_x = 0$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $a_y \times a_y = 0$ اور $a_z \times a_z = 0$ کے برابر ہیں۔ ان تمام جوابات کو ایک جگہ لکھتے ہیں۔

$$(1.17) \quad \begin{aligned} a_x \times a_y &= a_z & a_y \times a_z &= a_x & a_z \times a_x &= a_y \\ a_x \times a_x &= 0 & a_y \times a_y &= 0 & a_z \times a_z &= 0 \end{aligned}$$

یہی جوابات شکل 1.15 کی مدد سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ اس شکل میں گھڑی کی الٹ سمت مثبت سمت ہے۔ یوں اگر $a_x \times a_y$ حاصل کرنا ہو تو شکل میں a_x سے شروع ہو کر a_y کی جانب کم راستے پر چلتے ہوئے a_z حاصل ہوتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ چونکہ a_x سے a_y جانے کی خاطر مثبت راستہ اختیار کیا گیا لہذا جواب مثبت یعنی a_z ہو گا۔ اس کے برعکس $a_z \times a_y$ حاصل کرنے کی خاطر a_z سے a_y کی جانب کم راستے پر چلتے ہوئے a_x حاصل ہوتا ہے البتہ یہ راستہ گھڑی کے الٹ سمت یعنی منفی سمت میں ہے لہذا جواب $-a_x$ ہو گا۔

337

مساوات 1.17 کی مدد سے $A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ اور $B = B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z$ کی صلیبی ضرب

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z) \times (B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z) \\ &= A_x B_x a_x \times a_x + A_x B_y a_x \times a_y + A_x B_z a_x \times a_z \\ &\quad + A_y B_x a_y \times a_x + A_y B_y a_y \times a_y + A_y B_z a_y \times a_z \\ &\quad + A_z B_x a_z \times a_x + A_z B_y a_z \times a_y + A_z B_z a_z \times a_z \end{aligned}$$

کو

$$(1.18) \quad A \times B = (A_y B_z - A_z B_y) a_x + (A_z B_x - A_x B_z) a_y + (A_x B_y - A_y B_x) a_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس جواب کو قالب کے حتمی قیمت کی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(1.19) \quad A \times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

یوں اگر $A = 2a_x - 3a_y + 1a_z$ اور $B = 6a_x + 5a_y - 4a_z$ ہیں تب

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\ &= [(-3)(-4) - (1)(5)]a_x - [(2)(-4) - (1)(6)]a_y + [(2)(5) - (-3)(6)]a_z \\ &= 7a_x + 14a_y + 28a_z \end{aligned}$$

ہو گا۔

338

مثال 1.7: $N_1(2, 3, 1)$ ، $N_2(1, 6, 5)$ اور $N_3(-2, -3, 2)$ سیدھی سطح پر پائے جاتے ہیں۔ اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

339

حل:

$$\begin{aligned} r_{21} &= (1 - 2)a_x + (6 - 3)a_y + (5 - 1)a_z = -1a_x + 3a_y + 4a_z \\ r_{31} &= (-2 - 2)a_x + (-3 - 3)a_y + (2 - 1)a_z = -4a_x - 6a_y + 1a_z \end{aligned}$$

کے سمتی ضرب سے ان کا عمودی سمتیہ حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} r_N &= (-1a_x + 3a_y + 4a_z) \times (-4a_x - 6a_y + 1a_z) \\ &= 6a_z + 1a_y + 12a_z + 3a_x - 16a_y + 24a_x \\ &= 27a_x - 15a_y + 18a_z \end{aligned}$$

سطح پر دئے گئے تین نقطوں سے سطح پر کسی بھی نقطہ $N_4(x, y, z)$ تک کا سمتیہ اس عمودی سمتیہ کے نوے درجے زاویہ پر ہو گا اور یوں ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔ N_1 سے N_4 تک سمتیہ $r_{41} = (x - 2)a_x + (y - 3)a_y + (z - 1)a_z$ کے استعمال سے

$$r_{41} \cdot r_N = [(x - 2)a_x + (y - 3)a_y + (z - 1)a_z] \cdot (27a_x - 15a_y + 18a_z) = 0$$

لکھ کر

$$27(x - 2) - 15(y - 3) + 18(z - 1) = 0$$

سے

$$27x - 15y + 18z = 27$$

سیدھی سطح کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ ایسی مساوات میں x ، y اور z کے مختلف عمودی سمتیہ میں a_x ، a_y اور a_z کے مختلف 27، 15، اور 18 ہوتے ہیں۔

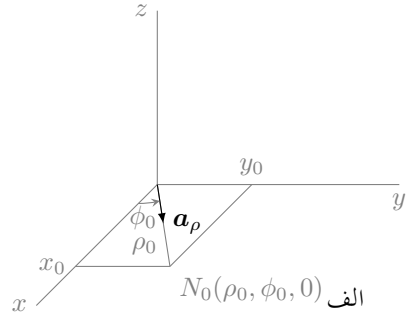
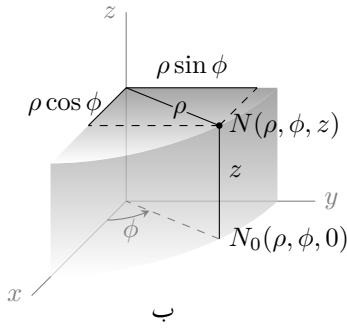
341

سطح کی مساوات سے $z = \frac{9 - 9x + 5y}{6}$ لکھا جاسکتا ہے۔ سطح پر N_4 کی تعین کنندہ مساوات $r = xa_x + ya_y + za_z$ میں z کی قیمت پُر کرتے ہوئے سطح کی سمتی مساوات

$$r = xa_x + ya_y + \left(\frac{9 - 9x + 5y}{6} \right) a_z$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں جبکہ z کو بطور تابع متغیرہ لکھا گیا ہے۔

342



شکل 1.16: نلکی محدد

344

مشق 1.4: $A = 1a_x + 3a_y - 2a_z$ اور $B = 5a_x - 2a_y - 3a_z$ کی صورت میں $A \times A \times A \times B \times A \times A \times A \times A \times A$ حاصل کریں۔

346

347

خلاء میں کسی بھی نقطے کا مقام کارٹیزی محدد کے علاوہ دیگر طرز کے محدد سے بھی تعین کیا جاسکتا ہے۔ ماہرین طبیعیات تقریباً ایک درجن اقسام کے محددی نظام استعمال کرتے ہیں۔ ہم اس کتاب میں کارٹیزی نظام کے علاوہ دو مزید اقسام کے محددی نظام استعمال کریں گے۔ انہیں انہیں پر غور کریں۔

350

1.9 گول نلکی محدد

کارٹیزی نظام میں کسی بھی نقطے کا مقام مرکز سے x, y اور z ستوں میں فاصلوں سے طے کیا جاتا ہے۔ آئیں اب ایسا نظام دیکھیں جس میں ایک عدد زاویہ اور دو عدد فاصلے استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے کا مقام طے ہو۔

352

شکل 1.16-الف میں $z = 0$ سطح پر نقطہ N_0 دکھایا گیا ہے جسے کارٹیزی محدد میں $N_0(x_0, y_0, 0)$ لکھا جائے گا۔ اگر مرکز سے N_0 تک سیدھی لکیر کی لمبائی ρ_0 اور x محدد سے اس لکیر کا زاویہ ϕ_0 ہو تب اسی نقطے کو **گول نلکی محدد**²² کے نظام میں $N_0(\rho_0, \phi_0, 0)$ لکھا جاتا ہے۔ اس کتاب میں گول نلکی محدد کا نام چھوٹا کر کے اسے **نلکی محدد** پکارا جائے گا۔ اگر $z = 0$ سطح پر مرکز سے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ a_ρ ہو تب مرکز سے نقطے تک سمتیہ کو

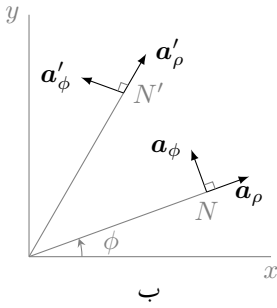
$$\rho = \rho_0 a_\rho \quad (\phi = \phi_0, \quad z = 0) \quad (1.20)$$

353

لکھا جاسکتا ہے۔ نلکی اور کارٹیزی نظام میں z محدد یکساں ہیں۔

شکل 1.16-ب سے کارٹیزی اور نلکی محدد کے تعلق اخذ کئے جاسکتے ہیں۔ یوں نلکی محدد کے متغیرات (ρ, ϕ, z) سے کارٹیزی متغیرات (x, y, z) یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.21)$$



شکل 1.17: نلکی محدد میں متغیرات کے تبدیلی سے فاصلے کا حصول اور اکائی سمتیات۔

اسی طرح (x, y, z) سے (ρ, ϕ, z) یوں حاصل کئے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\rho \geq 0) \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.22)$$

مندرجہ بالا مساوات میں رداس کی صرف مثبت قیمت لی گئی۔ ہم رداس کی قیمت مثبت ہی لیتے ہیں۔

شکل 1.17-الف میں ϕ زاویہ پر ρ رداس کا ہلکی سیاہی میں دکھایا سمتیہ نقطہ N ہے۔ اس شکل میں z تبدیل کئے بغیر ρ کو $\Delta\rho$ بڑھتا دکھایا گیا ہے۔ اس صورت میں سمتیہ کی نوک $\Delta\rho$ فاصلہ طے کرتی ہے۔ نقطہ N سے $\Delta\rho$ کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے a_ρ لکھا جاتا ہے، نلکی محدود کی بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.17-الف میں ρ اور z تبدیل کئے بغیر ϕ کو $\Delta\phi$ بڑھا کر اسی سمتیہ کو گاڑھی سیاہی میں دوبارہ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سمتیہ کی نوک نے ρ رداس کے گول دائرے پر حرکت کرتے ہوئے $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کیا۔ یوں اگر زاویہ کو 2π یا 0 ریڈیئن تبدیل کیا جائے تو سمتیہ کی نوک گول دائرے پر ایک مکمل چکر کاٹے گی۔ جیسے جیسے $\Delta\phi$ کو کم سے کم کیا جائے ویسے ویسے $\rho\Delta\phi$ گول دائرے کے مماس کی صورت اختیار کرے گی حتیٰ کہ $d\phi$ کی صورت میں $\rho d\phi$ گول دائرے کا مماس ہو گا۔ نقطہ N پر بڑھتے ϕ جانب مماس کی سمت میں اکائی سمتیہ کو a_ϕ لکھا جاتا ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح اگر نقطہ N پر صرف z کو Δz تبدیل کیا جائے تب سمتیہ کی نوک Δz فاصلہ طے کرے گی۔ Δz کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے a_z لکھا جاتا ہے، نلکی محدود کی تیسری اور آخری بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔ نلکی محدود کے تین اکائی سمتیات a_ϕ ، a_ρ اور a_z مل کر دائیں ہاتھ کا عمودی نظام دیتے ہیں۔ نقطہ (ρ_1, ϕ_1, z_1) پر نلکی محدود کے اکائی سمتیات کو شکل 1.18 میں دکھایا گیا ہے۔ a_ρ گول سطح $\rho = \rho_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔ اسی طرح a_ϕ سیدھی سطح $\phi = \phi_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $z = z_1$ سطح پر پایا جاتا ہے اور $\rho = \rho_1$ نلکی سطح کا مماس ہے۔ a_z اکائی سمتیہ $z = z_1$ سطح کے عمودی ہے۔ یہ $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔

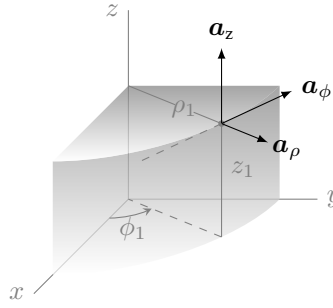
دائیں ہاتھ کے عمودی نظام میں سمتی ضرب کا حاصل جواب صفحہ 14 پر دئے گئے دائیں ہاتھ کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں

$$a_\rho \times a_\phi = a_z, \quad a_\phi \times a_z = a_\rho, \quad a_z \times a_\rho = a_\phi \quad (1.23)$$

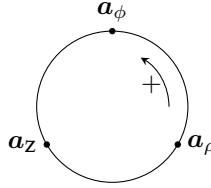
لکھا جاسکتا ہے۔ یہی جوابات شکل 1.19 سے بھی اخذ کئے جاسکتے ہیں۔

کسی سمتیہ کا خود سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا

$$a_\rho \times a_\rho = 0, \quad a_\phi \times a_\phi = 0, \quad a_z \times a_z = 0 \quad (1.24)$$



شکل 1.18: نلکی محدد کے اکائی سمتیات۔



شکل 1.19: صلیبی ضرب کی حاصل اکائی سمتیہ۔

لکھا جاسکتا ہے جبکہ کسی بھی اکائی سمتیہ کا خود غیر سمتی ضرب ایک کے برابر ہوتا ہے لہذا

$$(1.25) \quad a_\rho \cdot a_\rho = 1, \quad a_\phi \cdot a_\phi = 1, \quad a_z \cdot a_z = 1$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح کسی بھی دو عمودی سمتیات کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$(1.26) \quad a_\rho \cdot a_\phi = 0, \quad a_\phi \cdot a_z = 0, \quad a_z \cdot a_\rho = 0$$

غیر سمتی ضرب کو **کرو ٹیکر ڈیلٹا** کی مدد سے یوں لکھا جاسکتا ہے۔

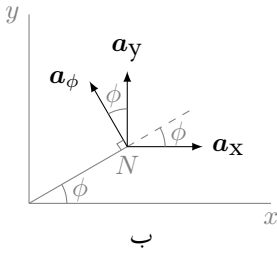
$$(1.27) \quad a_i \cdot a_j = \delta_{ij}$$

جہاں

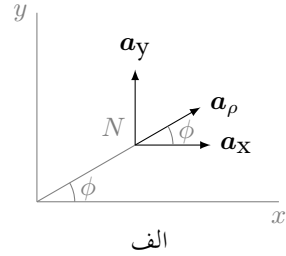
$$(1.28) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases}$$

کے برابر ہے۔

آپ دیکھتے ہیں کہ کسی بھی نقطہ $N(\rho, \phi, z)$ پر اکائی سمتیات حاصل کرنے کی خاطر محدد کے متغیرات ρ, ϕ اور z کو باری باری انتہائی کم بڑھایا جاتا ہے۔ جس سمت میں نقطہ حرکت کرے، اسی سمت میں اکائی سمتیہ ہوگی۔ شکل 1.17-ب میں دو مختلف نقاط N اور N' پر نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات کی سمت کا دار و مدار اس نقطے پر ہے جہاں انہیں حاصل کیا جائے۔ آپ جانتے ہیں کہ کارٹیزی نظام میں نقطے کا مقام تبدیل کرنے سے کارٹیزی اکائی سمتیات تبدیل نہیں ہوتے۔ یوں نلکی محدد کے اکائی سمتیات اٹل نہیں ہیں۔ یہ ایک انتہائی اہم حقیقت ہے جو مکمل لیتے وقت پیچیدگیاں پیدا کرتا ہے۔ مکمل لیتے وقت کارٹیزی اکائی سمتیات اٹل ہونے کی بنا پر مکمل کے باہر لے جائے جاسکتے ہیں جبکہ نلکی محدد کے a_ρ اور a_ϕ اکائی سمتیات کو مکمل کے باہر نہیں لے جایا جاسکتا۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ N پر حاصل کئے گئے a_ρ, a_ϕ اور a_z آپس میں عمودی ہوں گے جبکہ کسی اور نقطہ N' پر حاصل کئے گئے a'_ρ, a'_ϕ اور a'_z آپس میں عمودی ہوں گے۔



ب



الف

شکل 1.20: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

جدول 1.1: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_y	a_x	
0	$\sin \phi$	$\cos \phi$	a_ρ
0	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	a_ϕ
1	0	0	a_z

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب

شکل 1.20-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیات a_ρ اور a_x اور a_y دکھائے گئے ہیں۔ a_ρ اور a_x کے مابین زاویہ ϕ ہے جبکہ اکائی سمتیات کی لمبائی ایک ہوتی ہے لہذا

$$(1.29) \quad a_\rho \cdot a_x = (1)(1)(\cos \phi) = \cos \phi$$

ہے۔ a_ρ اور a_y کے مابین زاویہ $(90^\circ - \phi)$ ہے لہذا

$$(1.30) \quad a_\rho \cdot a_y = (1)(1)[\cos(90^\circ - \phi)] = \sin \phi$$

کے برابر ہے۔ اس مساوات میں $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ کو استعمال کرتے ہوئے $\cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$ لکھا گیا ہے۔ شکل 1.20-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات a_ϕ اور a_x اور a_y دکھائے گئے ہیں۔ a_ϕ اور a_x کے مابین زاویہ $(90^\circ + \phi)$ ہے لہذا

$$(1.31) \quad a_\phi \cdot a_x = (1)(1)[\cos(90^\circ + \phi)] = -\sin \phi$$

ہے۔ a_ϕ اور a_y کے مابین زاویہ ϕ ہے لہذا

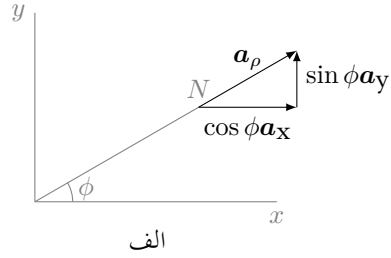
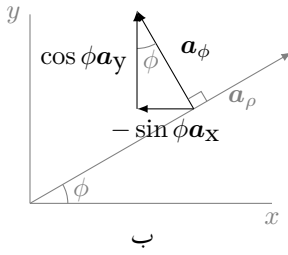
$$(1.32) \quad a_\phi \cdot a_y = (1)(1)(\cos \phi) = \cos \phi$$

کے برابر ہے۔ a_z کا a_x اور a_y کے ساتھ غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہے۔ اس کی وجہ ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے۔ ان تمام غیر سمتی ضرب کو جدول 1.1 میں یکجا کیا گیا ہے۔

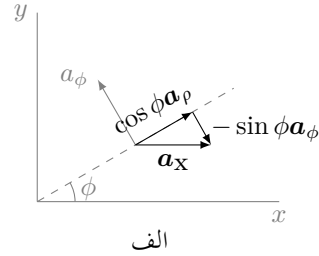
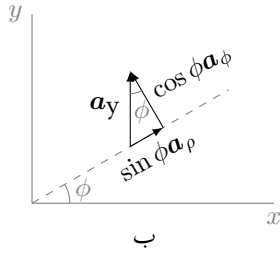
1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق

شکل 1.21-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ a_ρ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدود میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔ a_ρ کی لمبائی ایک کے برابر ہے۔ یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$(1.33) \quad \begin{aligned} a_\rho &= \cos \phi a_x + \sin \phi a_y \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_y \end{aligned}$$



شکل 1.21: a_ρ اور a_ϕ کا کارٹیزیسی نظام میں تبادلہ۔



شکل 1.22: a_x اور a_y کا نلکی محدود میں تبادلہ۔

لکھا جاسکتا ہے جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدود کے متغیرات کو کارٹیزیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔ شکل 1.21-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ a_ϕ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارٹیزیسی محدود میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(1.34) \quad \begin{aligned} a_\phi &= -\sin \phi a_x + \cos \phi a_y \\ &= -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_y \end{aligned}$$

جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدود کے متغیرات کو کارٹیزیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔

شکل 1.22-الف میں a_x کا نلکی محدود میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ جس نقطے پر ایسا درکار ہو، اس نقطے پر a_x کی ڈم رکھیں۔ مرکز سے نقطے تک نقطہ دار سیدھی لکیر کھینچتے ہوئے اسے مزید آگے بڑھائیں۔ اس نقطے پر a_ρ اسی لکیر کی سمت میں ہو گا جبکہ a_ϕ لکیر کے ساتھ نوے درجے کا زاویہ بنائے گا۔ شکل میں a_ϕ دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، a_x کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود بنائیں۔ صاف ظاہر ہے کہ a_x کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جاسکتا ہے۔ ان میں سے ایک سمتیہ a_ρ کی سمت میں اور دوسرا سمتیہ a_ϕ کی الٹ جانب کو ہو گا۔ یوں

$$(1.35) \quad a_x = \cos \phi a_\rho - \sin \phi a_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 1.22-ب میں a_y کا نلکی محدود میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ یہاں نقطہ پر a_y کی ڈم رکھتے ہوئے اس کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود کھینچا گیا ہے۔ یوں

$$(1.36) \quad a_y = \sin \phi a_\rho + \cos \phi a_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔

آئیں مساوات 1.33 تا مساوات 1.36 کو جدول 1.1 کی مدد سے حاصل کریں۔ کسی بھی سمتیہ A کو کارٹیزیسی یا نلکی محدود میں لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(1.37) \quad \begin{aligned} A &= A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z \\ &= A_\rho a_\rho + A_\phi a_\phi + A_z a_z \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ان میں پہلی مساوات کا باری باری a_x, a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_x \cdot A &= A_x a_x \cdot a_x + A_y a_x \cdot a_y + A_z a_x \cdot a_z = A_x \\ a_y \cdot A &= A_x a_y \cdot a_x + A_y a_y \cdot a_y + A_z a_y \cdot a_z = A_y \\ a_z \cdot A &= A_x a_z \cdot a_x + A_y a_z \cdot a_y + A_z a_z \cdot a_z = A_z \end{aligned} \quad (1.38)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ A کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر A_x, A_y اور A_z درکار ہوتے ہیں جنہیں مندرجہ بالا مساوات سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.37 کے نچلے حصے کا باری باری a_ϕ, a_ρ اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_\rho \cdot A &= A_\rho a_\rho \cdot a_\rho + A_\phi a_\rho \cdot a_\phi + A_z a_\rho \cdot a_z = A_\rho \\ a_\phi \cdot A &= A_\rho a_\phi \cdot a_\rho + A_\phi a_\phi \cdot a_\phi + A_z a_\phi \cdot a_z = A_\phi \\ a_z \cdot A &= A_\rho a_z \cdot a_\rho + A_\phi a_z \cdot a_\phi + A_z a_z \cdot a_z = A_z \end{aligned} \quad (1.39)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں A کو نکلی نظام میں لکھنے کی خاطر A_ρ, A_ϕ اور A_z کو مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

آئیں a_ρ کو کارتیسی نظام میں لکھیں۔ یوں $A = a_\rho$ کو کارتیسی نظام میں لکھنا مطلوب ہے۔ مساوات 1.38 کے مطابق A_x حاصل کرنے کی خاطر $a_x \cdot A$ لینا ہو گا۔ جدول 1.1 کے استعمال سے

$$A_x = a_x \cdot A = a_x \cdot a_\rho = \cos \phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح جدول کو استعمال کرتے ہوئے

$$A_y = a_y \cdot A = a_y \cdot a_\rho = \sin \phi$$

اور

$$A_z = a_z \cdot A = a_z \cdot a_\rho = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں کارتیسی نظام میں $A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ لکھتے ہوئے

$$a_\rho = \cos \phi a_x + \sin \phi a_y$$

لکھا جائے گا۔ یہی جواب مساوات 1.33 میں بھی حاصل کیا گیا تھا۔

a_ϕ کو بھی اسی طرح کارتیسی نظام میں لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے اس سمتیہ کا باری باری a_x, a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہیں۔

$$A_x = a_x \cdot a_\phi = -\sin \phi$$

$$A_y = a_y \cdot a_\phi = \cos \phi$$

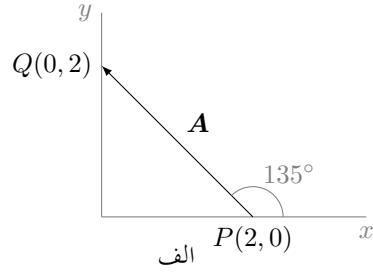
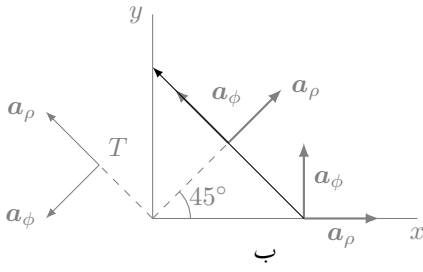
$$A_z = a_z \cdot a_\phi = 0$$

یوں

$$a_\phi = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z = -\sin \phi a_x + \cos \phi a_y$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہی جواب مساوات 1.34 بھی دیتا ہے۔

آپ سے گزارش ہے کہ جدول 1.34 کو یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔ اپنے آپ میں یہ صلاحیت پیدا کریں کہ ان جوابات کو آپ جلد اخذ کر سکیں۔



شکل 1.23: کارتیسی اور نلکی محدد میں سمتیہ۔

مشق 1.5: a_x ، a_y اور a_z کو جدول 1.1 کی مدد سے نلکی محدد میں لکھیں۔

جوابات:

$$a_x = \cos \phi a_\rho - \sin \phi a_\phi$$

$$a_y = \sin \phi a_\rho + \cos \phi a_\phi$$

$$a_z = a_z$$

388

شکل 1.23 میں $P(2, 0)$ سے $Q(0, 2)$ تک سمتیہ A دکھایا گیا ہے۔ کارتیسی نظام میں

(1.40)

$$A = -2a_x + 2a_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس سمتیہ کی حتمی قیمت

$$|A| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{(-2a_x + 2a_y) \cdot (-2a_x + 2a_y)} = \sqrt{8}$$

ہے۔ آئیں اسی سمتیہ کو نلکی محدد میں لکھیں۔ ایسا کرنے کی خاطر a_ρ اور a_ϕ درکار ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے $a_\rho \cdot A$ اور $a_\phi \cdot A$ حاصل کرتے ہیں۔

$$A_\rho = a_\rho \cdot (-2a_x + 2a_y) = -2 \cos \phi + 2 \sin \phi$$

$$A_\phi = a_\phi \cdot (-2a_x + 2a_y) = 2 \sin \phi + 2 \cos \phi$$

یوں

(1.41)

$$A = 2(-\cos \phi + \sin \phi)a_\rho + 2(\sin \phi + \cos \phi)a_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں دیکھیں کہ اس کی حتمی قیمت کیا حاصل ہوتی ہے۔ اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب $a_\rho \cdot a_\rho = 1$ اور $a_\phi \cdot a_\phi = 1$ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} |A| &= \sqrt{A \cdot A} \\ &= \sqrt{2^2(-\cos \phi + \sin \phi)^2 + 2^2(\sin \phi + \cos \phi)^2} \\ &= \sqrt{4(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi - 2 \cos \phi \sin \phi) + 4(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi + 2 \cos \phi \sin \phi)} \\ &= \sqrt{8(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} \\ &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

389

حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ یقیناً سمتیہ کی حتمی قیمت محدود کے نظام پر منحصر نہیں۔

390

مساوات 1.40 اور مساوات 1.41 ایک ہی سمتیہ کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔ یہاں کارتیسی نظام کا استعمال نہایت آسان ثابت ہوا۔ آگے چل کر آپ دیکھیں گے کہ کہیں مسئلوں میں نکتی محدود کا استعمال زیادہ آسان ہوگا۔ آئیں مساوات 1.40 پر مزید غور کریں۔ اس مساوات میں اکائی سمتیات از خود اٹل نہیں ہیں۔ ان کی سمتوں کا دارومدار زاویہ ϕ پر ہے۔ شکل 1.23-ب میں $\phi = 0^\circ$ ، $\phi = 45^\circ$ اور $\phi = 135^\circ$ پر a_ρ اور a_ϕ دکھائے گئے ہیں۔ نقطہ P یعنی $\phi = 0^\circ$ پر مساوات 1.41

$$\begin{aligned} A_{\phi=0^\circ} &= 2(-\cos 0^\circ + \sin 0^\circ)a_\rho + 2(\sin 0^\circ + \cos 0^\circ)a_\phi \\ &= -2a_\rho + 2a_\phi \end{aligned}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اس مساوات کے مطابق $\phi = 0^\circ$ پر A کو دو عدد سمتیات کے مجموعہ کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے جن میں پہلی سمتیہ a_ρ کے الٹ سمت میں ہے اور اس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ دوسری سمتیہ کی مقدار دو اور اس کی سمت a_ϕ کی سمت میں ہی ہے۔ 1.23-ب میں نقطہ P پر A کی سمت واقع بڑھتی a_ϕ اور گھٹتی a_ρ کی سمت میں ہے۔ یاد رہے کہ اس مساوات میں a_ρ اور a_ϕ کو $\phi = 0^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔ $\phi = 0^\circ$ پر a_ρ اور a_ϕ برابر ہوتے ہیں اور اسی طرح a_ϕ اور a_y برابر ہوتے ہیں۔ یہی وجہ ہے کہ مساوات 1.40 میں a_x کی جگہ a_ρ اور a_y کی جگہ a_ϕ پُر کرنے سے مندرجہ بالا مساوات لکھی جاسکتی ہے۔

395

$\phi = 45^\circ$ پر مساوات 1.41

$$\begin{aligned} A_{\phi=45^\circ} &= 2(-\cos 45^\circ + \sin 45^\circ)a_\rho + 2(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)a_\phi \\ &= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_\rho + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_\phi \\ &= \sqrt{8}a_\phi \end{aligned}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اس مساوات کے مطابق $\phi = 45^\circ$ پر A صرف اور صرف a_ϕ کی سمت میں ہے اور اس کی لمبائی $\sqrt{8}$ ہے۔ شکل 1.23-ب میں یہ حقیقت واضح ہے کہ $\phi = 45^\circ$ پر A کی سمت a_ϕ ہی ہے۔ یاد رہے کہ اس مساوات میں a_ρ اور a_ϕ کو $\phi = 45^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔ شکل میں اکائی سمتیات کو عین A کے اوپر کھینچا گیا ہے تاکہ سمتیات کی سمتوں کا موازنہ آسانی سے کیا جاسکے۔

398

آپ نے دیکھا کہ نکتی محدود میں سمتیہ کی مساوات کا دارومدار اس نقطے پر ہے جس نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کئے جائیں۔ آئیں دیکھیں کہ $\phi = 135^\circ$ پر پائے جانے والے نقطہ T کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے A کیسا لکھا جائے گا۔ مساوات 1.41 میں $\phi = 135^\circ$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} A_{\phi=135^\circ} &= 2(-\cos 135^\circ + \sin 135^\circ)a_\rho + 2(\sin 135^\circ + \cos 135^\circ)a_\phi \\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_\rho + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a_\phi \\ &= \sqrt{8}a_\rho \end{aligned}$$

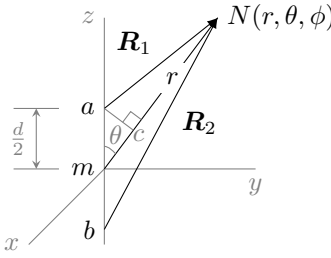
حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے مطابق $\phi = 135^\circ$ کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے A کو a_ρ کی سمت میں $\sqrt{8}$ لمبائی کا سمتیہ لکھا جاسکتا ہے۔ شکل سے یہ حقیقت واضح ہے۔

400

401

مثال 1.8: شکل 1.24 میں z محور پر نقطہ $a(0, 0, \frac{d}{2})$ پر مثبت چارج Q اور نقطہ $b(0, 0, -\frac{d}{2})$ پر منفی چارج $-Q$ پائے جاتے ہیں۔ ایسے دوہرے الٹ علامت کے دو قریب قریب پائے جانے والے چارجوں کے جوڑی کو **جفت قطب**²³ کہتے ہیں۔ دکھائے گئے سمتی فاصلوں R_1 اور R_2 کو کھوئی محدود میں لکھیں۔

404



شکل 1.24: جفت قطب کے چارجوں سے دور نقطے تک فاصلے۔

حل: m : N سے r تک فاصلہ r ہے اور اس سمت میں اکائی سمتیہ a_r ہے۔ نقطہ a سے r پر عمودی لکیر لگائی گئی ہے جو اسے c پر ملتی ہے۔ یوں ac کی سمت کروئی محدود کے اکائی سمتیہ a_θ کی سمت میں ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے $mc = \frac{d}{2} \cos \theta$ اور $ac = \frac{d}{2} \sin \theta$ لکھے جاسکتے ہیں۔ یوں R_1 کو ہم a سے c تک سمتیہ a_θ اور N سے c تک سمتیہ a_r $(r - \frac{d}{2} \cos \theta)$ کے مجموعے کی شکل میں

$$R_1 = \frac{d}{2} \sin \theta a_\theta + (r - \frac{d}{2} \cos \theta) a_r \quad (1.42)$$

لکھ سکتے ہیں۔ ہم اسی طرح شکل 1.24 میں N سے m تک لکیر کو m سے آگے بڑھا کر b سے اس پر عمودی لکیر کھینچ کر شکل کو دیکھتے ہوئے R_2 کی مساوات بھی لکھ سکتے ہیں البتہ ایسا کرنے کی بجائے R_2 کی مساوات تحلیلی طریقے سے حاصل کریں۔ شکل کو دیکھتے ہوئے

$$R_2 = \frac{d}{2} a_z + r a_r$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں کارتیسی محدود کی اکائی سمتیہ a_z اور کروئی محدود کی اکائی سمتیہ a_r استعمال کئے گئے۔ کروئی محدود میں کسی بھی لکیر کی طرح

$$R_2 = A_r a_r + A_\theta a_\theta + A_\phi a_\phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں $A_r = R_2 \cdot a_r$ سے حاصل کریں۔

$$A_r = \left(\frac{d}{2} a_z + r a_r \right) \cdot a_r = \frac{d}{2} \cos \theta + r$$

اسی طرح $A_\theta = R_2 \cdot a_\theta$ سے حاصل کرتے ہیں۔

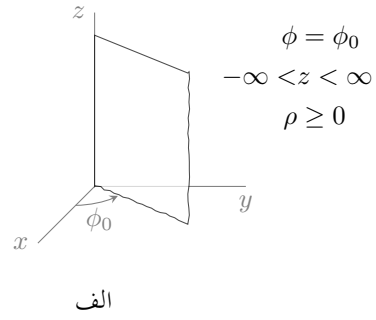
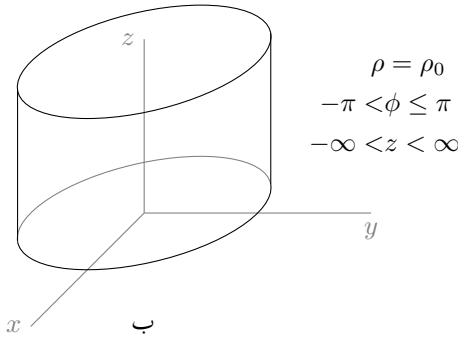
$$A_\theta = \left(\frac{d}{2} a_z + r a_r \right) \cdot a_\theta = -\frac{d}{2} \sin \theta$$

اسی طرح $A_\phi = R_2 \cdot a_\phi$ لکھتے ہوئے $A_\phi = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

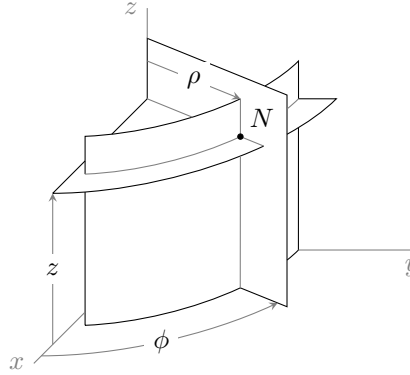
$$R_2 = \left(\frac{d}{2} \cos \theta + r \right) a_r - \frac{d}{2} \sin \theta a_\theta \quad (1.43)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 1.25-الف میں ϕ تبدیل کئے بغیر ρ اور z کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے $\phi = \phi_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا ہے۔ یہ سطح نلکی شکل رکھتی ہے جس کا اوپر والا منہ اور نچلا منہ کھلے ہیں یعنی ان پر ڈھکن نہیں۔ شکل-ب میں ρ تبدیل کئے بغیر ϕ اور z کو تبدیل کرتے ہوئے $\rho = \rho_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا



شکل 1.25: $\phi = \phi_0$ اور $\rho = \rho_0$ سطحیں۔



شکل 1.26: نلکی محدود کے تین سطحیں۔

ہے۔ ان دونوں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے ان اشکال میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-الف میں ρ کی قیمت صرف مثبت جبکہ z کی قیمت مثبت یا منفی 410 ہے۔ شکل-ب میں زاویہ کل 2π ریڈیئن تبدیل ہو سکتا ہے۔ یوں زاویے کا مثبت حد π ریڈیئن یعنی 180 درجہ ہے جبکہ اس کا منفی 24 حد $-\pi$ یعنی 180- درجہ ہے۔ نلکی محدود اور کارٹیزی نظام دونوں میں $z = z_0$ سطح یکساں بنتی ہے۔

412

جیسے شکل 1.26 میں دکھایا گیا ہے، $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحیں a_z کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔ اسی طرح $\rho = \rho_1$ اور $z = z_1$ سطحیں ایک گول دائرے پر ملتے ہیں جبکہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں a_ρ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔ $\rho = \rho_1$ ، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں صرف اور صرف ایک ہی نقطہ N پر اکٹھے ملتے ہیں۔ نلکی محدود میں کسی بھی نقطے کا مقام اسی طرح تین سطحوں کے متقاطع نقطہ سے حاصل کیا جاتا ہے، البتہ $(0, 0, z)$ تک پہنچنے کی خاطر ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔

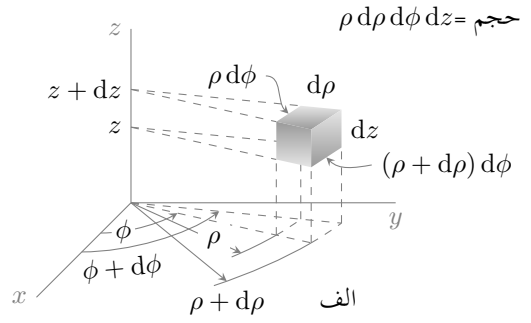
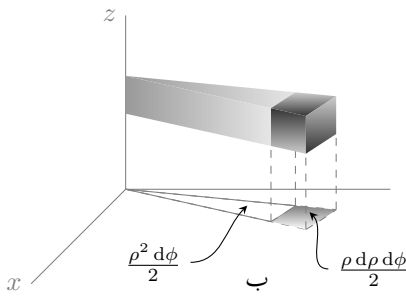
416

کسی بھی نقطہ $N(\rho_1, \phi_1, z_1)$ پر $\rho = \rho_1$ ، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں بنانے کے بعد اگر نلکی محدود کے متغیرات کو $d\phi$ اور dz بڑھا کر مزید تین سطحیں کھینچے جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر منحرف مکعب کو گھیریں گے جسے شکل 1.27-الف میں دکھایا گیا ہے۔ رداسی سمت میں اس منحرف مکعب کے اطراف کی لمبائی $d\rho$ جبکہ a_z سمت کے اطراف کی لمبائی dz ہے۔ a_ϕ سمت میں z محدود کے قریبی گول طرف کی لمبائی $\rho d\phi$ جبکہ محدود سے دور طرف کی گول لمبائی $(\rho + d\rho) d\phi$ ہے۔ جیسے جیسے اس منحرف مکعب کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے یہ ایک درست مکعب کی صورت اختیار کرتا ہے، لہذا نہایت چھوٹے حجم کو مکعب تصور کرتے ہوئے اس کا حجم $\rho d\rho d\phi dz$ لکھا جاسکتا ہے۔

421

شکل 1.27-ب میں چھوٹے منحرف مکعب کو رداسی سمت میں z محدود تک بڑھا کر پچر یا فانہ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر اس کا عمودی سایہ بھی دکھایا گیا ہے۔ ρ رداس کے گول دائرے کے مرکز سے $d\phi$ زاویے پر دو لکیریں دائرے تک کھینچنے سے $\frac{\rho^2 d\phi}{2}$ رقبہ گھیرا جاتا ہے۔ اگر رداس $\rho + d\rho$

24 حقیقت میں منفی حد 180° کو نہیں چھوٹا۔ اگر منفی حد 180° کو چھوٹے تب منفی x محدود دو مرتبہ شامل ہوتا ہے۔



شکل 1.27: نلکی محدود میں انتہائی چھوٹی حجم۔

ہو تب رقبہ $\frac{(\rho+d\rho)^2 d\phi}{2}$ ہو گا۔ یوں شکل-ب میں چھوٹے مکعب کے سایہ کارقبہ dS

$$\begin{aligned} dS &= \frac{(\rho + d\rho)^2 d\phi}{2} - \frac{\rho^2 d\phi}{2} \\ &= \frac{\rho^2 d\phi + 2\rho d\rho d\phi + (d\rho)^2 d\phi}{2} - \frac{\rho^2 d\phi}{2} \\ &= \rho d\rho d\phi + \frac{(d\rho)^2 d\phi}{2} \\ &\approx \rho d\rho d\phi \end{aligned}$$

ہو گا۔ یہاں آخری قدم $d\rho$ کی علامت، مجموعہ کے پہلے رکن میں دو مرتبہ جبکہ دوسرے رکن میں تین مرتبہ ہے۔ یوں دوسرے اور پہلے رکن کی نہایت کم $d\rho$ کو کم سے کم 25 کرتے ہوئے دوسرے رکن کو قابل نظر انداز بناتے ہوئے نظر انداز کیا گیا ہے۔ یوں $\rho d\rho d\phi$ رقبہ اور dz بلندی کے مکعب کا حجم $\rho d\rho d\phi dz$ ہو گا۔

شکل 1.27 کو درست مکعب تصور کرتے ہوئے، اس کے اطراف کی لمبائی $\rho d\phi$ ، $d\rho$ اور dz لی جاتی ہے۔ یوں مکعب کے چٹائی اور اوپر سطح کا رقبہ $\rho d\phi dz$ کے اطراف کو ضرب دیتے ہوئے $\rho d\rho d\phi$ لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح سامنے اور پیچھے سطحوں کا رقبہ $d\rho dz$ جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کا رقبہ $\rho d\phi dz$ لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 1.27-الف میں نلکی محدود کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(\rho, \phi, z)$ کو $N(\rho + d\rho, \phi + d\phi, z + dz)$ کے کونے سے N' کو تبدیل کرتے ہوئے N' تک سمتیہ کو

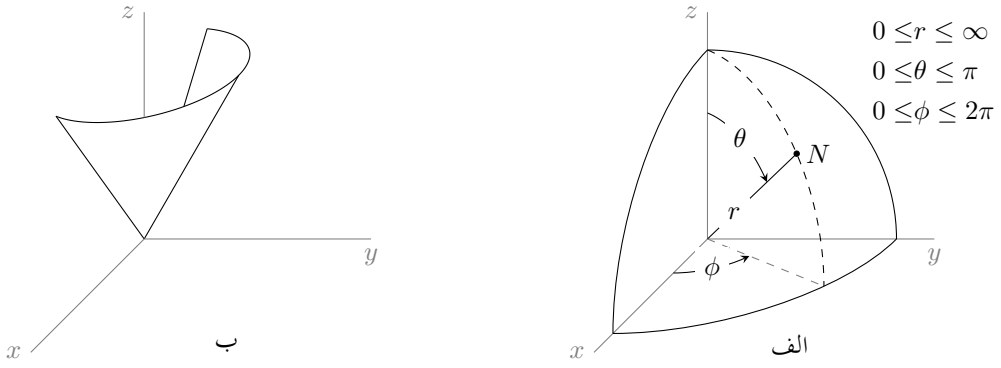
$$dL = d\rho a_\rho + \rho d\phi a_\phi + dz a_z \quad (1.44)$$

لکھا جاتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے مابین سمتی فاصلے کو ظاہر کرتی ہے۔

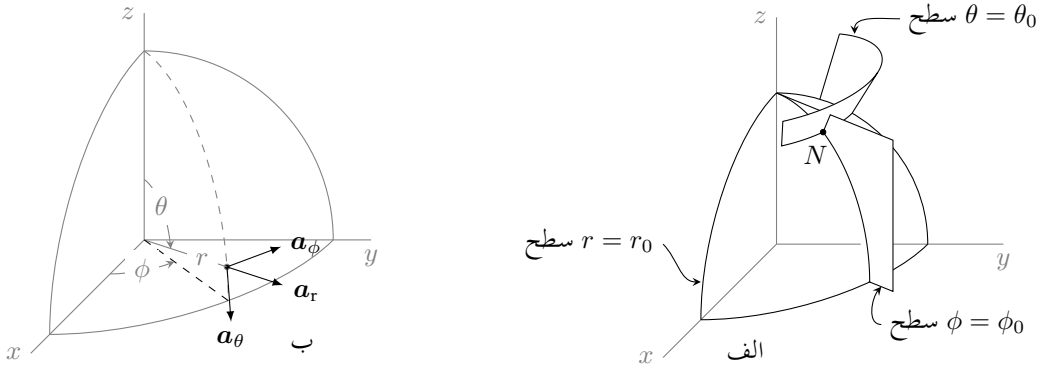
1.10 کروی محدود

سیدھی لکیریوں اور سیدھی سطحوں کو کارتیسی محدود میں زیادہ آسانی سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جبکہ نلکی سطحوں کو ظاہر کرنے کے لئے نلکی محدود بہتر ثابت ہوتا ہے۔ اسی طرح کرہ اشکال کے سطحوں کو کروی محدود میں باآسانی لکھا جاسکتا ہے۔ آئیں کروی نظام پر غور کریں۔

²⁵ کسی بھی متغیر ρ میں چھوٹی سی تبدیلی کو $\Delta\rho$ لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $d\rho$ لکھا جاتا ہے۔ $d\rho$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $d\rho \rightarrow 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.28: الف کروی محدود کے متغیرات۔ ب $\theta = \theta_0$ سطح کا کچھ حصہ۔

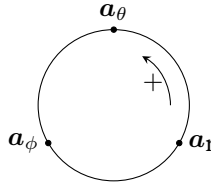


شکل 1.29: (الف) تین عمودی سطحوں کے ملاپ سے نقطہ N کا حصول۔ (ب) کروی محدود کے تین عمودی اکائی سمتیات۔

شکل 1.28-الف میں کروی محدود کے متغیرات r, θ اور ϕ دکھائے گئے ہیں۔ محدود کے مرکز سے نقطہ N تک کے فاصلے r کو کروی رداس پکارا جاتا ہے جبکہ z محدود سے کروی رداس تک زاویے کو θ لکھا جاتا ہے۔ x محدود سے رداس کے عمودی سائے تک زاویہ ϕ ہے۔ کروی اور نیکی نظام میں ϕ یکساں بیان کیا جاتا ہے۔ رداس کی قیمت مثبت لی جاتی ہے۔ یوں $r \geq 0$ ممکن ہے۔ θ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 180° ہے جبکہ ϕ کی کم سے کم قیمت 0° اور زیادہ سے زیادہ قیمت 360° ہے۔

r اور ϕ تبدیل کئے بغیر θ کو 0 سے بڑھاتے ہوئے π ریڈیئن کرنے سے نقطہ N شکل 1.28-الف میں نقطہ دار لکیر پر چلتے ہوئے مثبت z محدود سے شروع ہو کر منفی z محدود پر پہنچتا ہے۔ اسے نقطہ دار لکیر کو کرہ ارض کے خط طول بلد²⁶ تصور کیا جاسکتا ہے۔ شکل-الف میں θ کا 0° تا 90° تبدیل ہوتا دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح r اور θ تبدیل کئے بغیر ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N گول دائرے پر z محدود کے گرد ایک چکر کاٹے گا۔ یہ حرکت کرہ ارض کے خط عرض بلد²⁷ پر چلنے کے مانند ہے۔ θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کو تبدیل کرنے سے نقطہ N مرکز سے سیدھی باہر نکلتی لکیر پر حرکت کرتا ہے۔

r تبدیل کئے بغیر θ کو 0° تا 180° اور ϕ کو 0° تا 360° تبدیل کرنے سے نقطہ N کروی $r = r_0$ سطح پر حرکت کرے گا۔ اس کروی سطح کا رداس r ہو گا۔ شکل 1.28-الف میں θ کو 0° تا 90° اور ϕ کو 0° تا 90° تبدیل کرنے سے حاصل سطح دکھائی گئی ہے۔ شکل 1.28-ب میں θ تبدیل کئے بغیر ϕ تبدیل کرنے سے پیدا مخروط $\theta = \theta_0$ کروی سطح دکھائی گئی ہے۔ ϕ تبدیل کئے بغیر r اور θ تبدیل کرنے سے نیکی محدود کی طرح $\phi = \phi_0$ سطح حاصل ہوتی ہے۔ شکل 1.29-الف میں ان تینوں سطحوں کو دکھایا گیا ہے۔ بالکل کارتیسی اور نیکی محدود کی طرح، کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ کا مقام ان تین



شکل 1.30: کروی نظام میں اکائی سمتیات کی صلیبی ضرب۔

سطحوں کے نقطہ ملاپ سے اخذ کیا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر $r = r_0$ ، $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحیں آپس میں عمودی ہوتی ہے اور یہ صرف اور صرف اسی نقطے پر اکٹھے ملتی ہیں۔

446

شکل 1.29-ب میں کروی نظام کے تین عمودی اکائی سمتیات a_r ، a_θ اور a_ϕ دکھائے گئے ہیں۔ ٹکلی محدود کی طرح کروی محدود کے عمودی اکائی سمتیات بھی مقام تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کے بڑھتے جانب اکائی سمتیہ a_r ہو گی۔ اسی طرح θ بڑھانے سے نقطہ N اکائی سمتیہ a_θ کی جانب حرکت کرے گا جبکہ ϕ بڑھانے سے نقطہ a_ϕ کی جانب حرکت کرے گا۔ کارتیسی اور ٹکلی محدود کی طرح کروی محدود کے اکائی سمتیات کو بھی محدودی نظام کے متغیرات کو کم سے کم بڑھاتے ہوئے نقطے کی حرکت کی جانب اکائی سمتیہ کھینچنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

451

شکل 1.29-الف سے واضح ہے کہ a_r سمتیہ $r = r_0$ سطح کے عمودی جبکہ $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحوں کے متوازی ہے۔ اسی طرح a_θ سمتیہ $\theta = \theta_0$ سطح کے عمودی اور $\phi = \phi_0$ سطح کے متوازی پایا جاتا ہے جبکہ $r = r_0$ سطح کے ساتھ مماس بناتا ہے۔ a_ϕ سمتیہ $\phi = \phi_0$ سطح کے عمودی جبکہ $r = r_0$ اور $\theta = \theta_0$ سطحوں کے ساتھ مماس بناتا ہے۔

454

a_r ، a_θ اور a_ϕ کروی نظام کے اکائی سمتیات ہیں۔ $a_r \times a_\theta = a_\phi$ ، $a_\theta \times a_\phi = a_r$ ، $a_\phi \times a_r = a_\theta$ لکھنے سے دائیں ہاتھ کا کروی نظام حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ کے قانون میں دائیں ہاتھ کا انگوٹھا r جبکہ پہلی انگلی θ اور دوسری انگلی ϕ بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ ٹکلی محدود میں یہ انگلیاں ρ ، ϕ اور z جبکہ کارتیسی محدود میں x ، y اور z بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہیں۔

457

دائیں ہاتھ کے قانون یا شکل 1.30 کی مدد سے یوں اکائی سمتیات کے صلیبی ضرب

458

$$(1.45) \quad a_r \times a_\theta = a_\phi, \quad a_\theta \times a_\phi = a_r, \quad a_\phi \times a_r = a_\theta$$

لکھے جاسکتے ہیں۔ اسی طرح

$$(1.46) \quad a_r \cdot a_r = 1, \quad a_\theta \cdot a_\theta = 1, \quad a_\phi \cdot a_\phi = 1$$

اور

$$(1.47) \quad a_r \cdot a_\theta = 0, \quad a_\theta \cdot a_\phi = 0, \quad a_\phi \cdot a_r = 0$$

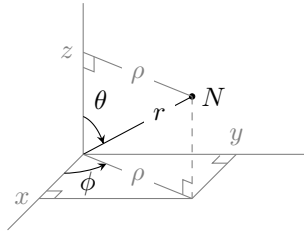
بھی لکھے جاسکتے ہیں۔

459

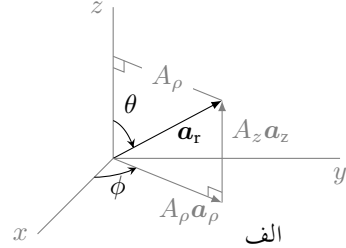
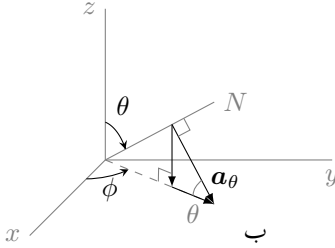
نقطہ N کا z محدود سے فاصلہ ρ ہے جو ٹکلی محدود کا رداس ہے۔ اسے شکل 1.31 میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\rho = r \sin \theta$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $z = 0$ سطح سے N کی اونچائی z ہے جو شکل کو دیکھتے ہوئے $z = r \cos \theta$ لکھی جاسکتی ہے۔ نقطہ N کا عمودی سایہ $z = 0$ سطح پر دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $x = \rho \cos \phi$ اور $y = \rho \sin \phi$ لکھے جاسکتے ہیں۔ $\rho = r \sin \theta$ پُر کرنے سے

(1.48)

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$



شکل 1.31: کروی، نلکی اور کارتیسی متغیرات کا تبادلہ۔



شکل 1.32: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

لکھے جاسکتے ہیں جہاں z کی مساوات بھی ساتھ ہی لکھی گئی ہے۔ مساوات 1.48 کروی سے کارتیسی متغیرات دیتا ہے۔ اسی شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + z^2 \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned} \quad (1.49)$$

لکھتے ہوئے

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.50)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.48 میں z کی مساوات سے

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{r} = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (1.51)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.48 کے y کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (1.52)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.50، مساوات 1.51 اور مساوات 1.52 کارتیسی سے کروی متغیرات دیتے ہیں۔

شکل 1.29-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ a_r کی سمت تبدیل کئے بغیر اسے محد کے مرکز پر منتقل کرتے ہوئے شکل 1.32-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ اسے نلکی محد کے اکائی سمتیات کی مدد سے

$$a_r = A_\rho a_\rho + A_z a_z \quad (1.53)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 1.32-الف میں a_r کی لمبائی ایک لیتے ہوئے $A_\rho = \sin \theta$ اور $A_z = \cos \theta$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$a_r = \sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z \quad (1.54)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا باری باری a_ρ, a_ϕ اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_r \cdot a_\rho &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_\rho = \sin \theta \\ a_r \cdot a_\phi &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_\phi = 0 \\ a_r \cdot a_z &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_z = \cos \theta \end{aligned} \quad (1.55)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $a_z \cdot a_\rho = 0, a_\rho \cdot a_\rho = 1$ وغیرہ کا استعمال کیا گیا۔ یہ مساوات کروی رداسی اکائی سمتیہ اور ٹکلی نظام کے اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔ اسی طرح جدول 1.1 استعمال کرتے ہوئے مساوات 1.54 کا باری باری a_x اور a_y کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_r \cdot a_x &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_x = \sin \theta \cos \phi \\ a_r \cdot a_y &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_y = \sin \theta \sin \phi \\ a_r \cdot a_z &= (\sin \theta a_\rho + \cos \theta a_z) \cdot a_z = \cos \theta \end{aligned} \quad (1.56)$$

حاصل ہوتا ہے۔ مکمل نتائج ایک جگہ لکھنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات میں $a_r \cdot a_z$ کو بھی شامل کیا گیا ہے۔ یہ مساوات کروی رداسی سمتیہ اور کارٹیزی اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

a_r کو کارٹیزی نظام میں لکھنے کی خاطر $a_r = A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ لکھتے ہیں۔ مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = a_x \cdot a_r$ جبکہ $A_y = a_y \cdot a_r$ اور $A_z = a_z \cdot a_r$ ہوں گے۔ یہ تمام مساوات 1.56 میں دئے گئے ہیں۔ یوں

$$a_r = \sin \theta \cos \phi a_x + \sin \theta \sin \phi a_y + \cos \theta a_z \quad (1.57)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

شکل 1.29-ب میں دکھائے a_θ کو $\phi = \phi_0$ سطح پر حرکت دیتے ہوئے مرکز کے اتنے قریب لا کر شکل 1.32-ب میں دکھایا گیا ہے کہ اس کی نوک $x = 0$ سطح کو چھوتی ہے۔ جیسا شکل 1.29-الف سے واضح ہے، $\phi = \phi_0$ سطح پر a_θ کو حرکت دینے سے اس سمتیہ کی سمت تبدیل نہیں ہوتی۔ شکل 1.32-ب کو دیکھتے ہوئے $a_\theta = B_\rho a_\rho - B_z a_z$ لکھا جاسکتا ہے۔ یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ $B_\rho a_\rho$ اور a_θ کے مابین زاویہ θ ہے۔ $B_\rho a_\rho$ اور $-B_z a_z$ مل کر ٹکون بناتے ہیں جسے دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$B_\rho = \cos \theta$$

$$B_z = \sin \theta$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$a_\theta = \cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z \quad (1.58)$$

کے برابر ہے۔ اس مساوات کا باری باری a_ρ, a_ϕ اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned} a_\theta \cdot a_\rho &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_\rho = \cos \theta \\ a_\theta \cdot a_\phi &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_\phi = 0 \\ a_\theta \cdot a_z &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_z = -\sin \theta \end{aligned} \quad (1.59)$$

a_θ اور ٹکلی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح مساوات 1.58 کا باری باری a_x, a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned} a_\theta \cdot a_x &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_x = \cos \theta a_\rho \cdot a_x = \cos \theta \cos \phi \\ a_\theta \cdot a_y &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_y = \cos \theta a_\rho \cdot a_y = \cos \theta \sin \phi \\ a_\theta \cdot a_z &= (\cos \theta a_\rho - \sin \theta a_z) \cdot a_z = -\sin \theta a_z \cdot a_z = -\sin \theta \end{aligned} \quad (1.60)$$

جدول 1.2: کروی اکائی سمتیات کا نلکی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_ϕ	a_ρ	
$\cos \theta$	0	$\sin \theta$	a_r
$-\sin \theta$	0	$\cos \theta$	a_θ
0	1	0	a_ϕ

جدول 1.3: کروی اکائی سمتیات کا کارٹیزیائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_y	a_x	
$\cos \theta$	$\sin \theta \sin \phi$	$\sin \theta \cos \phi$	a_r
$-\sin \theta$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	a_θ
0	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	a_ϕ

حاصل ہوتے ہیں۔ یہ مساوات a_θ اور کارٹیزیائی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

a_θ کو کارٹیزیائی نظام میں لکھنے کی خاطر $A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ لکھتے ہیں۔ مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = a_x \cdot a_\theta$ جبکہ $A_y = a_y \cdot a_\theta$ اور $A_z = a_z \cdot a_\theta$ ہوں گے۔ یہ تمام مساوات 1.60 میں دئے گئے ہیں۔ یوں

$$(1.61) \quad a_\theta = \cos \theta \cos \phi a_x + \cos \theta \sin \phi a_y - \sin \theta a_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔

کروی محدود a_ϕ اور نلکی محدود a_ϕ یکساں ہیں۔ اسے کارٹیزیائی نظام میں

$$(1.62) \quad a_\phi = -\sin \phi a_x + \cos \phi a_y$$

لکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کا a_x ، a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$(1.63) \quad \begin{aligned} a_\phi \cdot a_x &= -\sin \phi \\ a_\phi \cdot a_y &= \cos \phi \\ a_\phi \cdot a_z &= 0 \end{aligned}$$

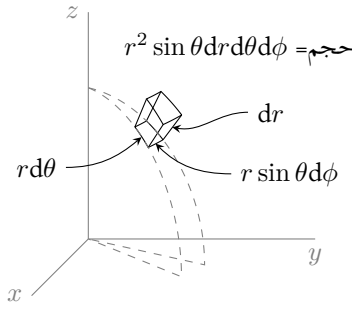
لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 1.55 اور مساوات 1.59 کے نتائج کے ساتھ a_ϕ کے مختلف غیر سمتی ضربوں کو جدول 1.2 میں یکجا کیا گیا ہے۔

مساوات 1.56 اور مساوات 1.60 کے نتائج جدول 1.3 میں یکجا کئے گئے ہیں۔

شکل 1.29 میں $N(r, \theta, \phi)$ پر تین عمودی سطحیں دکھائی گئی ہیں۔ اگر کروی محدود کے متغیرات dr ، $d\theta$ اور $d\phi$ بڑھا کر دوبارہ تین عمودی سطحیں کھینچی جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر چھوٹا مخرف مکعب نما حجم گھیریں گی جسے شکل 1.33 میں دکھایا گیا ہے۔ سمت میں مکعب کے چار اطراف کی لمبائیاں dr ہے۔ سمت میں z محدود کے قریبی دو اطراف کی لمبائیاں $r d\theta$ جبکہ دو دور اطراف کی لمبائیاں $(r + dr) d\theta$ ہے جسے دو اجزاء کی صورت میں یوں $r d\theta + dr d\theta$ لکھا جاسکتا ہے۔ دور اطراف کے لمبائی کا پہلا جزو ہو بہو قریبی اطراف کی لمبائی ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو دور اور قریبی اطراف کے لمبائیوں میں فرق کو ظاہر کرتی ہے۔ ان دو اجزاء کی نسبت $\frac{dr}{r} = \frac{dr d\theta}{r d\theta}$ کے برابر ہے۔ dr کو کم سے کم 29 کرتے ہوئے اس نسبت کو کم سے کم کیا جاسکتا ہے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے ہم $dr d\theta$ کو رد کرتے ہوئے ان چاروں اطراف کی لمبائیاں $r d\theta$ ہی لیتے ہیں۔ اسی طریقہ کار سے a_ϕ اطراف کی

²⁹ کسی بھی متغیرہ r میں چھوٹی سی تبدیلی Δr لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو dr لکھا جاتا ہے۔ dr کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $dr \rightarrow 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.33: کروی نظام میں چھوٹی حجم۔

لمبائیاں $r \sin \theta d\phi$ لکھی جاسکتی ہے۔ منحرف مکعب نما کے اطراف میں معمولی فرق کو نظر انداز کرتے ہوئے اسے مکعب نما تصور کیا جاسکتا ہے جس کے سطحوں کا رقبہ $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ جبکہ $\theta = \theta_0$ سطحوں کا رقبہ $r \sin \theta dr d\phi$ اور $\phi = \phi_0$ سطحوں کا رقبہ $r dr d\theta$ ہو گا۔ اس مکعب کا حجم $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ ہو گا۔

شکل 1.33 میں کروی محدود کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(r, \theta, \phi)$ کو $N'(r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ تک سمتیہ کو $d\phi$ کو نے پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک سمتیہ کو

$$(1.64) \quad dL = dr a_r + r d\theta a_\theta + r \sin \theta d\phi a_\phi$$

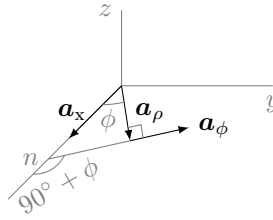
لکھا جاتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی فاصلہ دیتا ہے۔

کسی بھی مکمل بند سطح کی سمت، سطح کے عمودی باہر جانب لی جاتی ہے۔ شکل 1.33 میں $r = r_0$ سطح مرکز کا قریبی سطح ہے۔ اس سطح کے دو آپس میں الٹ عمودی اطراف a_r ہیں جن میں $-a_r$ بند سطح کی بیرونی سمت کو ظاہر کرتا ہے لہذا یہی اس سطح کی درست سمت ہے۔ اس کے برعکس $r = r_0 + dr$ سطح مرکز سے دور تر ہے۔ اس سطح کے بھی دو آپس میں الٹ عمودی سمتیں a_r ہیں جن میں a_r سطح کی درست سمت ہے۔ یوں $r = r_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r^2 \sin \theta d\theta d\phi a_r$ جبکہ $r = r_0 + dr$ سطح کا سمتی رقبہ $r^2 \sin \theta d\theta d\phi a_r$ ہے۔ اسی طرح $\theta = \theta_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r \sin \theta dr d\phi a_\theta$ جبکہ $\theta = \theta_0 + d\theta$ سطح کا سمتی رقبہ $r \sin \theta dr d\phi a_\theta$ ہو گا۔ $\phi = \phi_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r dr d\theta a_\phi$ اور $\phi = \phi_0 + d\phi$ سطح کا سمتی رقبہ $r dr d\theta a_\phi$ ہو گا۔

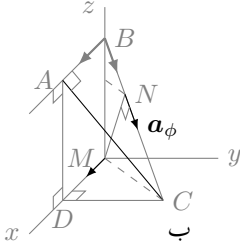
مشق 1.6: شکل 1.33 میں سمت میں مرکز کے قریبی اور دور اطراف کی لمبائیاں لکھیں۔

جوابات: $r \sin(\theta + d\theta) d\phi$, $r \sin \theta d\phi$, $(r + dr) \sin \theta d\phi$ اور $(r + dr) \sin(\theta + d\theta) d\phi$

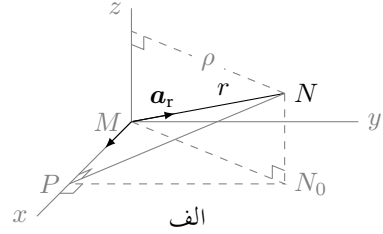
مثال 1.9: دو اکائی سمتیات a_1 اور a_2 کا غیر سمتی ضرب $\cos \alpha_{12} (1)(1) = a_1 \cdot a_2$ یعنی ان کے مابین زاویے α_{12} کے کو سائن کے برابر ہوتا ہے۔ غیر سمتی ضرب کے اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $a_x \cdot a_x$, $a_y \cdot a_y$, $a_z \cdot a_z$, $a_x \cdot a_y$, $a_y \cdot a_z$, $a_z \cdot a_x$ حاصل کریں۔



شکل 1.34: کارتیسی اور نلکی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔



شکل 1.35: کروی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔



حل: شکل 1.34 میں a_x اور a_ρ کے درمیان زاویہ ϕ جبکہ a_y اور a_ρ کے درمیان زاویہ $90^\circ - \phi$ پایا جاتا ہے لہذا $a_x \cdot a_\rho = \cos \phi$ اور $a_y \cdot a_\rho = \cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$ کے برابر ہیں۔ a_x اور a_ϕ کی سمتیں تبدیل کئے بغیر اگر انہیں یوں ہلایا جائے کہ ان کی ڈم نقطہ H پر آ ٹھہرے تو شکل سے ظاہر ہے کہ ان کے مابین زاویہ $90^\circ + \phi$ ہے۔ یوں $a_x \cdot a_\phi = \cos(90^\circ + \phi) = -\sin \phi$ کے برابر ہے۔ اسی طرح a_y اور a_ϕ کے درمیان ϕ زاویہ ہونے کی بنا پر $a_y \cdot a_\phi = \cos \phi$ کے برابر ہے۔ چونکہ a_z ان دونوں نلکی اکائی سمتیات کے عمودی ہے لہذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔

496

497

498

مثال 1.10: مثال 1.9 کے طرز پر a_x, a_y, a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

499

حل: شکل 1.35-الف میں نقطہ $N(r, \theta, \phi)$ دکھایا گیا ہے جسے $N(x, y, z)$ بھی لکھا جاسکتا ہے۔ شکل میں a_r اور a_x بھی دکھائے گئے ہیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ $a_x \cdot a_r = \cos \angle NMP$ کے برابر ہے جہاں N اور P سے M تک لکیریں کھینچنے سے زاویہ $\angle NMP$ بنتا ہے۔ N سے $z = 0$ سطح پر عمود نقطہ N_0 دیتا ہے۔ N_0 سے x محدد پر عمود نقطہ P دیتا ہے۔ N سے N_0 اور یہاں سے P منتقل ہوتے ہوئے a_x سمت میں کسی قسم کی حرکت نہیں کی جاتی لہذا اگر کارتیسی نظام میں $N(x, y, z)$ لکھا جائے تو اسی نظام میں $N_0(x, y, 0)$ اور $P(x, 0, 0)$ لکھے جائیں گے۔ ہم N سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے بھی P تک پہنچ سکتے ہیں۔ تھون NMP میں M سے N تک کا فاصلہ $\overline{MN} = r$ جبکہ M سے P تک کا فاصلہ $\overline{MP} = x$ اور زاویہ $\angle NPM = 90^\circ$ ہیں لہذا $\cos \angle NMP = \frac{x}{r}$ ہو گا۔ یہی a_x اور a_r کے غیر سمتی ضرب کے برابر ہے۔ N سے y محدد پر عمود بناتے ہوئے یوں $a_y \cdot a_r = \frac{y}{r}$ اور N سے z محدد پر عمود سے $a_z \cdot a_r = \frac{z}{r}$ لکھے جاسکتے ہیں۔ چونکہ $x = r \sin \theta \cos \phi$ ، $y = r \sin \theta \sin \phi$ اور $z = r \cos \theta$ کے برابر ہیں لہذا ہم

$$a_r \cdot a_x = \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \phi$$

$$a_r \cdot a_y = \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \phi$$

$$a_r \cdot a_z = \frac{z}{r} = \cos \theta$$

لکھ سکتے ہیں۔

500

501

502

503

مثال 1.11: مثال 1.9 کے طرز پر a_θ کا a_x کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ a_θ جبکہ محدود کے مرکز M پر a_x دکھائے گئے ہیں۔ $a_\theta \cdot a_x$ حاصل کرنے کی خاطر سمتیات کی بہت تبدیل کئے بغیر انہیں z محدود پر نقطہ B منتقل کرتے ہوئے دوبارہ دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $a_\theta \cdot a_x = \cos \angle ABC$ کے برابر ہے۔ اس شکل میں $\angle DMC = \phi$ اور $\angle BMN = \theta$ کر دی محدود کے زاویے ہیں۔ ٹکون $\triangle BMN$ میں زاویہ $\angle MNB$ نوے درجے کا ہے۔ یوں $\angle NBM = 90^\circ - \theta$ ہو گا۔ شکل سے واضح ہے کہ $\angle NBM = \angle CBM$ ہیں۔ اس طرح ٹکون $\triangle BMC$ میں $\angle BMC = 90^\circ$ جبکہ $\angle CBM = 90^\circ - \theta$ ہونے کی بنا پر $\angle MCB = \theta$ ہو گا۔

508

شکل-ب میں $\overline{BM} = l$ لیتے ہوئے ٹکون $\triangle BMC$ کو دیکھتے ہوئے

$$\overline{BC} = \frac{l}{\sin \theta}$$

$$\overline{MC} = \frac{l}{\tan \theta}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ ٹکون $\triangle MDC$ سے

$$\overline{MD} = \overline{MC} \cos \phi = \frac{l \cos \phi}{\tan \theta}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ \overline{MD} اور \overline{AB} برابر ہیں یعنی $\overline{MD} = \overline{AB}$ ۔ یوں ٹکون $\triangle BAC$ سے

$$\cos \angle ABC = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\left(\frac{l \cos \phi}{\tan \theta} \right)}{\left(\frac{l}{\sin \theta} \right)} = \cos \theta \cos \phi$$

509

حاصل ہوتا ہے۔ یوں $a_r \cdot a_x = \cos \theta \cos \phi$ لکھا جاسکتا ہے۔

510

511

512

مشق 1.7: شکل 1.35-ب کے طرز پر شکل بناتے ہوئے $a_\theta \cdot a_y$ اور $a_\theta \cdot a_x$ حاصل کریں۔

513

جوابات: $\sin \phi \cos \theta$ اور $-\sin \theta$

514

517

519

521

522

524

525

528

529

532

533

535

536

537

539

جوابات: 61.74° ، 56.51°

سوال 1.9: نقطے $A(4, 1, 2)$ ، $B(-2, 4, 3)$ اور $C(2, 3, -1)$ دیے گئے ہیں۔ سمتیہ R_{BA} اور R_{CA} حاصل کریں۔ دوسری سمتیہ پر پہلی سمتیہ کے عمودی سائے³⁰ کی لمبائی دریافت کریں۔ لکیر AB کے درمیانے نقطے سے لکیر AC کے درمیانے نقطے تک سیدھا سمتیہ حاصل کریں۔

جوابات: $2a_x - 0.5a_y - 2a_z$ ، 4.12 ، $-2a_x + 2a_y - 3a_z$ ، $-6a_x + 3a_y + a_z$

سوال 1.10: سمتیہ $M = 5a_x - 3a_y + 2a_z$ کا وہ حصہ حاصل کریں جو سمتیہ $P = -7a_x + 2a_y - 6a_z$ کے متوازی ہے۔ وہ حصہ حاصل کریں جو اس کے عمودی ہے۔

جوابات: $0.83a_x - 1.81a_y - 1.57a_z$ ، $4.17a_x - 1.19a_y + 3.57a_z$

سوال 1.11: تین سمتیات $r_1 = 2a_x - 1a_y + 3a_z$ ، $r_2 = -3a_x + 4a_y - 5a_z$ اور $r_3 = 5a_x - 2a_y + 3a_z$ دیے گئے ہیں۔ $r_1 \times r_2$ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ ایسی اکائی سمتیہ حاصل کریں جو r_1 اور r_2 دونوں کو عمودی ہو۔ سمتیہ $r_2 - r_1$ اور r_3 دونوں کو عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ اس ٹکون کا رقبہ حاصل کریں جس کے کونے یہ تین سمتیات دیتے ہیں۔

جوابات: $-0.81a_x + 0.16a_y + 0.58a_z$ ، $\mp(-0.81a_x + 0.16a_y + 0.58a_z)$ ، $\mp(0.29a_x + 0.88a_y + 0.37a_z)$ ، 4.3 ، 13.6

سوال 1.12: نقطہ $N(5, 10, 4)$ پر سمتیات $R_{AN} = -3a_x + 6a_y + 12a_z$ اور $R_{BN} = 12a_x + 20a_y - 5a_z$ مل کر ٹکون بناتی ہیں۔ ٹکون کی عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ سمتیہ R_{BN} کے عمودی اور ٹکون کی سطح کے متوازی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ ٹکون کی سطح پر اس اکائی سمتیہ کو حاصل کریں جو نقطہ N پر ٹکون کے کونے کو نصف زاویہ میں کاٹے۔

جوابات: $0.19a_x + 0.87a_y + 0.45a_z$ ، $\mp(0.26a_x - 0.38a_y - 0.89a_z)$ ، $\mp(-0.83a_x + 0.39a_y - 0.40a_z)$

سوال 1.13: سمتیہ $M = (x^2 + y^2)^{-1}(xa_x + ya_y)$ کو ٹکلی محدود کے متغیرات میں لکھیں۔ نقطہ $(5, 30^\circ, 6)$ پر سمتیہ کی قیمت کارتیسی اور ٹکلی محدود میں حاصل کریں۔

جوابات: $M = \frac{1}{5}a_\rho$ ، $M = 0.41a_x + 0.29a_y$ ، $M = \frac{1}{\rho}a_\rho$

سوال 1.14: نقطہ $N(\rho = 2, \phi = 45^\circ, z = 12)$ اور $P(\rho = 5, \phi = -60^\circ, z = -6)$ دیے گئے ہیں۔ کارتیسی محدود میں، پہلے نقطے سے دوسرے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ اسی اکائی سمتیہ کو پہلے نقطے پر پائے جانے والے ٹکلی محدود کے متغیرات کی صورت میں لکھیں۔ اسی اکائی سمتیہ کو دوسرے نقطے پر پائے جانے والے ٹکلی محدود کے متغیرات کی صورت میں لکھیں۔

جوابات: $0.292a_\rho - 0.180a_\phi - 0.951a_z$ ، $-0.174a_\rho - 0.255a_\phi - 0.951a_z$ ، $0.057a_x - 0.303a_y - 0.951a_z$

سوال 1.15: نقطہ $N(\rho = 5, \phi = 30^\circ, z = 6)$ سے نقطہ $P(\rho = 10, \phi = 75^\circ, z = 12)$ تک سمتیہ کارتیسی محدود میں لکھیں۔ اسی سمت میں اکائی سمتیہ بھی لکھیں۔ کارتیسی محدود میں دوسرے نقطے سے مرکز تک اکائی سمتیہ لکھیں۔

جوابات: $0.166a_x - 0.618a_y - 0.768a_z$ ، $-0.183a_x - 0.618a_y + 0.631a_z$ ، $-1.74a_x + 7.16a_y + 6a_z$

سوال 1.16: نقطہ $M(5, -3, 2)$ سے نقطہ $N(10, 2, -5)$ تک سمتیہ کو نقطہ M پر ٹکلی محدود کے اکائی سمتیات کی مدد سے لکھیں۔ دوسرے نقطے سے پہلے نقطے کی سمت میں اکائی سمتیہ کو دوسرے نقطے پر ٹکلی اکائی سمتیات کی مدد سے لکھیں۔ دوسرے نقطے سے مرکز تک اکائی سمتیہ دوسرے نقطے کے اکائی سمتیات کی صورت میں لکھیں۔

570

$$\text{جوابات: } 0.90a_p + 0.44a_z, 0.59a_p + 0.39a_\phi - 0.7a_z, -1.71a_p - 6.86a_\phi + 7a_z$$

571

سوال 1.17: رداس $\rho = 2$ اور $\rho = 6$ حجم گھیرتے ہیں جو $z = 11$ تا $z = 13$ اور $\phi = 30^\circ$ تا $\phi = 60^\circ$ پایا جاتا ہے۔ اس جسم کے حجم کو تین درجی مکمل سے حاصل کریں۔ اس کی بھی مکمل سے سطح بھی حاصل کریں۔

573

$$\text{جوابات: } 41.1, 16.8$$

574

سوال 1.18: نقطہ $N(5, 3, 8)$ سے نقطہ $P(3, -4, 2)$ تک سمتیہ کارتیسی، ٹکلی اور کروی محدود میں حاصل کریں۔ پہلے نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کریں۔ تینوں سمتیات کی لمبائی حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ تینوں سمتیات کی لمبائی برابر ہے۔

576

$$\text{جوابات: } -5.3165a_p - 4.9735a_\phi - 6.0000a_z, -2a_x - 7a_y - 6a_z, 9.434, -8.6615 - 2.7739a_\theta - 2.5069a_\phi$$

577

578

سوال 1.19: نقطہ N پر سمتیہ $K = 3a_r - 2a_\theta + 8a_\phi$ اور $G = 2a_r + 5a_\theta + 2a_\phi$ دیے گئے ہیں۔ ان کی غیر سمتی ضرب $K \times G$ حاصل کریں۔ دوسری سمتیہ کی پہلی سمتیہ کی سمت میں لمبائی حاصل کریں۔ پہلی سمتیہ کا وہ حصہ دریافت کریں جو دوسری سمتیہ کی سمت میں ہے۔ دونوں سمتیوں کا سمتی ضرب $K \times G$ حاصل کریں۔ اس نقطے پر دونوں سمتیوں کی عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

581

$$\text{جوابات: } 12, 1.3675, 0.46753a_r - 0.31169a_\theta + 1.24675a_\phi, 44a_r - 10a_\theta - 19a_\phi, \mp(0.89871a_r - 0.20425a_\theta - 0.38808a_\phi)$$

582

583

سوال 1.20: ایک جسم $r = 6$ تا $r = 10$ ، $\theta = 30^\circ$ تا $\theta = 70^\circ$ اور $\phi = 25^\circ$ تا $\phi = 100^\circ$ حجم گھیرتا ہے۔ اس جسم کے دھڑور ترین کونوں کے درمیان فاصل حاصل کریں۔ جسم کی سطح کا رقبہ حاصل کریں۔ جسم کی حجم دریافت کریں۔

585

$$\text{جوابات: } 9.27, 198.27, 179.25$$

586

سوال 1.21: نقطہ $N(5, 4, -2)$ اور $P(6, 4, 10)$ دیے گئے ہیں۔ پہلے نقطے کو ٹکلی محدود میں لکھیں۔ پہلے نقطے کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے پہلے نقطے سے دوسرے نقطے تک سمتیہ ٹکلی محدود میں لکھیں۔

588

$$\text{جوابات: } 0.57a_p - 0.82a_\phi + 12a_z, P(6.4031, 38.6598^\circ, -2.0000)$$

589

590

کولومب کا قانون

2.1 قوت کشش یا دفع

نیوٹن کے **کائناتی تجاذب کے قانون**¹ سے آپ بخوبی واقف ہوں گے۔ **کولومب کا قانون**² اس سے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔ کائناتی تجاذب کے قانون کو مساوات 2.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

$$(2.1) \quad F = G \frac{M_1 M_2}{R^2}$$

یہ مساوات کمیت M_1 اور کمیت M_2 کے مابین قوت کشش F دیتا ہے جہاں ایک کمیت کے مرکز سے دوسری کمیت کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ قوت کشش دونوں کمیت کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور ان کے مرکوزوں کے درمیانی فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔ دونوں کمیتوں پر قوت کشش کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں کمیتوں کے مرکوزوں پر کھینچی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔ M_1 پر قوت کشش کی سمت M_1 کے مرکز سے M_2 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے جبکہ M_2 پر قوت کشش کی سمت M_2 کے مرکز سے M_1 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے۔ تناسب کے جزو مستقل G لکھا اور **تجاذبی مستقل**³ پکارا جاتا ہے جس کی قیمت تقریباً $6.674 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ کے برابر ہے۔

کولومب کا قانون مساوات 2.2 میں بیان کیا گیا ہے۔ یہ مساوات چارج Q_1 اور چارج Q_2 کے مابین قوت کشش یا قوت دفع F دیتا ہے جہاں ایک چارج کے مرکز سے دوسری چارج کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ ان چارجوں کا حجم صفر تصور کیا جاتا ہے۔ یوں اگر چارج کو گیند کی شکل کا تصور کیا جائے تو اس گیند کے رداس کی لمبائی صفر ہوگی۔ ایسے چارج کو **نقطہ چارج**⁴ کہا جاتا ہے۔

$$(2.2) \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R^2}$$

قوت کشش یا دفع دونوں چارجوں کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور باہمی فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔ دونوں چارجوں پر قوت کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں چارجوں سے گزرتی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔ دو مختلف اقسام کے چارجوں کے مابین قوت کشش پائی

Law of Universal Gravitation¹
Coulomb's law²
gravitational constant³
point charge⁴

جاتی ہے جبکہ دو یکساں چارجوں کے مابین قوت دفع پائی جاتی ہے۔ مساوات کے جزو مستقل کو $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ لکھا جاتا ہے جہاں ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل^{6.5} ہے جس کی قیمت اٹل ہے۔ خالی خلاء کے برقی مستقل کی قیمت

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \quad (2.3)$$

ہے جہاں c خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اور μ_0 خالی خلاء کی مقناطیسی مستقل⁷ ہے۔ یہ دونوں بھی اٹل مستقل ہیں جن کی قیمتیں

$$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2.4)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad (2.5)$$

ہیں۔ یوں مقناطیسی مستقل کی قیمت تقریباً

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{m}} \quad (2.6)$$

کے برابر ہے۔ اس کتاب میں $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ بار بار استعمال ہو گا جسے عموماً

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9 \times 10^9 \quad (2.7)$$

لیا جائے گا۔ ϵ_0 کی اکائی فی راڈ فی میٹر $\frac{\text{F}}{\text{m}}$ ہے جس کی وضاحت جلد کر دی جائے گی۔

599

600

مثال 2.1: زمین کی سطح پر زمین اور ایک کلو گرام کمیت کے مابین 9.8 N کی قوت کشش پائی جاتی ہے۔ زمین کا رداس 6370 km لیتے ہوئے زمین کی کمیت حاصل کریں۔

602

حل: مساوات 2.1 کی مدد سے

$$9.8 = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times M \times 1}{6\,370\,000 \times 6\,370\,000}$$

603

لکھتے ہوئے زمین کی کمیت $5.959 \times 10^{24} \text{ kg}$ حاصل ہوتی ہے۔

604

605

مثال 2.2: زمین کی مرکز سے تقریباً $42\,000 \text{ km}$ کے فاصلے پر ذرائع ابلاغ کے سیٹلائٹ زمین کے گرد مدار میں گردش کرتے ہیں۔ پوری دنیا میں بے نار⁸ مواصلاتی نظام انہیں کے مرہون منت ہے۔ اس فاصلے پر ایک کلو گرام کی کمیت اور زمین کے مابین قوت کشش کی مقدار حاصل کریں۔

607

حل:

$$F = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times 5.959 \times 10^{24} \times 1}{42\,000\,000 \times 42\,000\,000} = 0.225 \text{ N}$$

608

609

مثال 2.3: ایک ایک کولومب کے دو مثبت چارجوں کے درمیان ایک میٹر کا فاصلہ ہے۔ ان میں قوت دفع حاصل کریں۔

610

حل: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت مساوات 2.7 سے لیتے ہوئے

$$F = 9 \times 10^9 \frac{1 \times 1}{1 \times 1} = 9 \times 10^9 \text{ N}$$

611

مندرجہ بالا مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چارج کی اکائی (کولومب) انتہائی بڑی مقدار ہے۔

612

شکل 2.1 میں چارج Q_1 محدود کے مرکز سے سمتی فاصلہ r_1 پر جبکہ چارج Q_2 مرکز سے سمتی فاصلہ r_2 پر دکھائے گئے ہیں۔ چارج Q_1 سے چارج Q_2 تک کا سمتی فاصلہ R_{21} ہے جہاں

$$(2.8) \quad R_{21} = r_2 - r_1$$

کے برابر ہے۔ سمتیہ R_{21} کی سمت میں اکائی سمتیہ a_{21} یوں حاصل کیا جاتا ہے

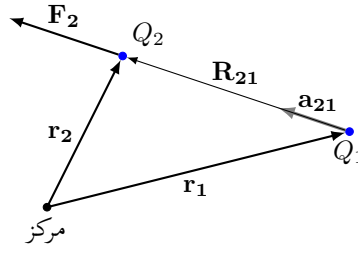
$$(2.9) \quad a_{21} = \frac{R_{21}}{|R_{21}|} = \frac{R_{21}}{R_{21}} = \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|}$$

چارج Q_2 پر قوت F_2 کی حتمی قیمت مساوات 2.2 سے حاصل کی جاسکتی ہے جبکہ اس کی سمت اکائی سمتیہ a_{21} کے سمت میں ہوگی۔ اس طرح یہ قوت

$$(2.10) \quad \begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} a_{21} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3} \end{aligned}$$

لکھا جائے گا۔ مساوات 2.10 کو کولومب کے قانون کی سمتی شکل ہے۔ چونکہ دونوں چارجوں پر برابر مگر الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے لہذا Q_1 پر قوت F_1 یوں لکھا جائے گا

$$(2.11) \quad \begin{aligned} F_1 &= -F_2 = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} a_{21} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R^2} a_{12} \end{aligned}$$



شکل 2.1: دو مثبت چارجوں کے مابین قوت دفع

جہاں دوسری قدم پر $R_{21} = R_{12} = R$ لکھا گیا ہے اور $a_{12} = -a_{21}$ کے برابر ہے۔ دونوں چارج مثبت یا دونوں چارج منفی ہونے کی صورت میں Q_2 پر مساوات 2.10 سے قوت a_{21} کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔ یوں یکساں چارجوں کے مابین قوت دفع پایا جاتا ہے۔ دو الٹ اقسام کے چارجوں کی صورت میں Q_2 پر قوت $-a_{21}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔ یوں الٹ اقسام کے چارجوں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے۔

615

616

مثال 2.4: شکل 2.1 میں نقطہ $A(3, 2, 4)$ پر $20 \mu\text{C}$ کا چارج Q_1 جبکہ نقطہ $B(1, 5, 9)$ پر $50 \mu\text{C}$ کا چارج Q_2 پایا جاتا ہے۔ منفی چارج Q_2 پر سمتی قوت حاصل کریں۔

618

حل:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{21} &= (1 - 3)\mathbf{a}_x + (5 - 2)\mathbf{a}_y + (9 - 4)\mathbf{a}_z \\ &= -2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \\ R_{21} &= |\mathbf{R}_{21}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{38} \\ &= 6.1644 \end{aligned}$$

اور یوں

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{21} &= \frac{\mathbf{R}_{21}}{|\mathbf{R}_{21}|} = \frac{-2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z}{6.1644} \\ &= -0.324\mathbf{a}_x + 0.487\mathbf{a}_y + 0.811\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \frac{36\pi \times 10^9}{4\pi} \frac{(-50 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{-6})}{38} (-0.324\mathbf{a}_x + 0.487\mathbf{a}_y + 0.811\mathbf{a}_z) \\ &= -0.237 (-0.324\mathbf{a}_x + 0.487\mathbf{a}_y + 0.811\mathbf{a}_z) \text{ N} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوت کی سمت \mathbf{a}_{21} کے الٹ سمت میں ہے۔ یوں منفی چارج پر قوت کی سمت مثبت چارج کی جانب ہے یعنی اس پر قوت کشش پایا جاتا ہے۔

620

621

کسی بھی چارج پر ایک سے زیادہ چارجوں سے پیدا مجموعی قوت تمام چارجوں سے پیدا علیحدہ علیحدہ قوتوں کا سمتی مجموعہ ہوتا ہے یعنی

$$F = \sum_{i=1}^n F_i \quad (2.12)$$

اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ کولومب کا قانون **خطی**⁹ ہے۔

2.2 برقی میدان کی شدت

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون میں زمین کی کمیت کو M لکھ کر کمیت m پر قوت F حاصل کی جاسکتی ہے۔ ایک کلوگرام کمیت پر اس قوت کی مقدار $\frac{F}{m}$ ہوگی جسے **زمین کی کشش**¹⁰ یا **ثقلی اسراع** پکارا اور g لکھا جاتا ہے۔ زمین کی سطح پر g کی مقدار تقریباً $9.8 \frac{m}{s^2}$ کے برابر ہے۔

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} \quad (2.13)$$

کسی بھی کمیت M کے گرد **تجاذبی میدان**¹¹ پایا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر اس تجاذبی میدان کو ناپنے کی خاطر اس نقطے پر پیمائشی کمیت m_p ¹² رکھ کر اس پر قوت ناپی جاتی ہے۔ مختلف مقامات پر اس طرح قوت ناپ کر ہم تجاذبی میدان کا جائزہ لے سکتے ہیں۔ تجاذبی قوت کی مقدار کا دار و مدار پیمائشی کمیت m_p پر بھی منحصر ہے۔ مختلف تجاذبی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام تجاذبی میدان جانچتے وقت ایک ہی قیمت کے پیمائشی کمیت استعمال کی جائے۔ ماہرین طبیعیات عموماً m_p کو ایک کلوگرام رکھتے ہیں۔ یہ ضروری نہیں کہ تجاذبی قوت ناپتے وقت ایک کلوگرام کی پیمائشی کمیت ہی استعمال کی جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت F کو m_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک کلوگرام پر تجاذبی قوت حاصل کی جاسکتی ہے۔ زمین کے قریب ایک کلوگرام کمیت پر قوت کشش کو ثقلی اسراع g پکارا جاتا ہے۔

مثال 2.5: زمین کی سطح پر دو سو گرام پیمائشی کمیت پر 1.96 N قوت ناپی جاتی ہے۔ ثقلی اسراع حاصل کریں۔

حل:

$$g = \frac{1.96}{0.2} = 9.8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \quad (2.14)$$

مساوات 2.13 سے ہم

$$F = mg$$

$$w = mg \quad (2.15)$$

linear⁹
gravity¹⁰
gravitational field¹¹
 m_p لکھتے ہوئے زیرنوشت میں p لفظ پیمائشی کے پ کو ظاہر کرتا ہے، یعنی یہ وہ کمیت ہے جسے قوت کی پیمائش کی خاطر استعمال کیا جا رہا ہے۔
test mass¹³

لکھ سکتے ہیں جو زمین کی سطح پر کمیت m پر کشش ثقل F دیتا ہے جسے وزن پکارا اور w لکھا جاتا ہے۔

633

چارجوں پر بھی اسی طرح غور کیا جاتا ہے۔ کسی بھی چارج Q کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے یعنی برقی میدان کا منبع چارج ہے۔ اس برقی میدان میں چارج پر قوت اثر انداز ہوتا ہے۔ چارج Q کے برقی میدان کی شدت کے پیمائش کی خاطر اس میدان میں مختلف مقامات پر پیمائشی چارج q_p پر قوت F ناپ کر برقی میدان کا مطالعہ کیا جاسکتا ہے اور اس کا نقشہ بنایا جاسکتا ہے۔ مختلف چارجوں کے برقی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام صورتوں میں ایک ہی قیمت کے پیمائشی چارج استعمال کئے جائیں۔ ماہرین طبیعیات q_p کو ایک کولومب کا مثبت چارج رکھتے ہیں۔ یہ ضروری نہیں کہ قوت ناپتے وقت ایک کولومب کا مثبت پیمائشی چارج ہی استعمال کیا جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت F کو q_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک مثبت کولومب پر قوت حاصل کی جاتی ہے جسے **برقی میدان کی شدت**¹⁵ یا صرف **برقی میدان** پکارا اور E لکھا جاتا ہے یعنی

$$(2.16) \quad E = \frac{F}{q_p}$$

مختلف مقامات پر موجود مختلف قیمتوں کے چارجوں سے کسی ایک نقطے پر پیدا برقی میدان تمام چارجوں کے مجموعی اثر سے پیدا ہوگا۔ ایسا کولومب کے قانون کے خطی ہونے کی بنا پر ہوتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر n چارجوں کا مجموعی E تمام چارجوں کے علیحدہ علیحدہ پیدا کردہ E_1, E_2, E_3, \dots کا سمتی مجموعہ

$$(2.17) \quad E = \sum_{i=1}^n E_i = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n$$

ہوتا ہے۔ یوں کسی بھی نقطے P پر E ناپتے وقت اس نقطے پر ایک کولومب چارج q_p رکھ کر اس چارج پر قوت ناپی جاتی ہے۔ یہ قوت اس نقطے پر تمام چارجوں کا مجموعی E ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر E ناپتے وقت یہاں رکھے پیمائشی چارج q_p کا اثر شامل نہیں ہوتا۔

635

مساوات 2.10 سے چارج Q سے سمت میں R فاصلے پر برقی میدان کو

$$(2.18) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a_R}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{R^3}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چارج کو کروی محدود کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے اسی مساوات کو یوں لکھا جاسکتا ہے

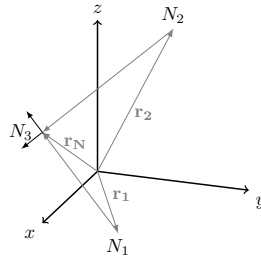
$$(2.19) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r$$

636

جہاں a_r کروی محدود کا رداسی سمت میں اکائی سمتیہ ہے۔

نقطہ (x', y', z') پر موجود چارج Q سے نقطہ (x, y, z) پر برقی شدت یوں حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$(2.20) \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r - r'}{|r - r'|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{[(x - x')a_x + (y - y')a_y + (z - z')a_z]}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$



شکل 2.2: دو چارجوں سے پیدا برقی شدت

جہاں

$$\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{a}_x + y'\mathbf{a}_y + z'\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\mathbf{a}_x + (y - y')\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z$$

کے برابر ہے۔

637

مثال 2.6: نقطہ $N_1(4, 1, 1)$ پر $100 \mu\text{C}$ کا چارج Q_1 جبکہ نقطہ $N_2(1, 4, 2)$ پر $50 \mu\text{C}$ کا چارج Q_2 پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N_3(2, 2, 5)$ پر Q_1 سے چارج E_1 اور Q_2 سے پیدا E_2 حاصل کریں۔ اس نقطے پر دونوں چارجوں کا مجموعی E کیا ہو گا۔

639

حل: شکل 2.2 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ پہلے Q_1 سے پیدا E_1 حاصل کرتے ہیں۔ N_1 سے N_3 تک سمتی فاصلہ

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{31} &= \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 = (2 - 4)\mathbf{a}_x + (2 - 1)\mathbf{a}_y + (5 - 1)\mathbf{a}_z \\ &= -2\mathbf{a}_x + 1\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

ہے جس سے

$$\begin{aligned} R_{31} &= |\mathbf{R}_{31}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{21} = 4.583 \\ \mathbf{a}_{31} &= \frac{\mathbf{R}_{31}}{R_{31}} = \frac{-2\mathbf{a}_x + 1\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z}{\sqrt{21}} \\ &= -0.436\mathbf{a}_x + 0.218\mathbf{a}_y + 0.873\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں مساوات 2.18 سے

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= 9 \times 10^9 \frac{100 \times 10^{-6}}{21} \left(-0.436\mathbf{a}_x + 0.218\mathbf{a}_y + 0.873\mathbf{a}_z \right) \\ &= -18686\mathbf{a}_x + 9343\mathbf{a}_y + 37414\mathbf{a}_z \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 2.7 سے $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت 9×10^9 پر کی گئی۔ اسی طرح Q_2 کے لئے حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{32} &= (2 - 1)\mathbf{a}_x + (2 - 4)\mathbf{a}_y + (5 - 2)\mathbf{a}_z \\ &= 1\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

$$R_{32} = |R_{32}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$a_{32} = \frac{1a_x - 2a_y + 3a_z}{\sqrt{14}}$$

$$= 0.267a_x - 0.535a_y + 0.802a_z$$

سے

$$E_2 = 9 \times 10^9 \frac{50 \times 10^{-6}}{14} (0.267a_x - 0.535a_y + 0.802a_z)$$

$$= 8582a_x - 17196a_y + 25779a_z \quad \frac{V}{m}$$

ملتا ہے۔ ان دو جوابات کا سستی مجموعہ لیتے ہوئے کل E حاصل کرتے ہیں۔

$$E = E_1 + E_2$$

$$= (-18686a_x + 9343a_y + 37414a_z) + (8582a_x - 17196a_y + 25779a_z)$$

$$= -10104a_x - 7853a_y + 63193a_z \quad \frac{V}{m}$$

640

مساوات 2.16 کو

$$(2.21) \quad F = qE$$

641

لکھا جاسکتا ہے جو برقی میدان E کے موجودگی میں چارج q پر قوت F دیتا ہے۔

642

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

شکل 2.3 میں z محدود پر $z = -\infty$ سے $z = +\infty$ تک یکساں چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔ آپ تصور کر سکتے ہیں کہ z محدود پر انتہائی قریب قریب برابر فاصلے پر یکساں نقطہ چارج رکھے گئے ہیں۔ یوں اگر ΔL لمبائی میں کل ΔQ چارج پایا جائے تب اکائی لمبائی میں $\frac{\Delta Q}{\Delta L}$ چارج پایا جائے گا جسے لکیری چارج کثافت ρ_L ¹⁶ کہا جاتا ہے اور جس کی اکائی C/m ہے۔ لکیری چارج کثافت کی تعریف

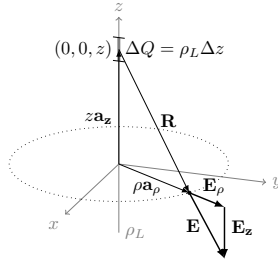
$$(2.22) \quad \rho_L = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

ہے۔ لکیر پر چھوٹی لمبائی اتنی کم نہیں کی جاتی کہ چارج بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ نظر آئیں اور لکیری کثافت کی جگہ نقطہ چارج نظر آئیں۔ اگر لکیر پر چارج کی تقسیم ہر جگہ یکساں نہ ہو تب لکیری چارج کثافت متغیر ہوگی۔ آئیں یکساں لکیری چارج کثافت سے خالی خلاء میں پیدا برقی میدان پر غور کریں۔⁶⁴⁴

پہلے بغیر قلم اٹھائے اس مسئلے کی نوعیت پر توجہ دیتے ہیں۔ مقام $(0, 0, z)$ پر چھوٹی سی لمبائی Δz میں $\rho_L \Delta z$ چارج پایا جاتا ہے جسے نقطہ چارج⁶⁴⁵ تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ z محدود کے گرد $z = 0$ یعنی xy سطح پر شکل 2.3 میں نقطہ دار گول دائرہ بنایا گیا ہے۔ نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ سے دائرے پہلے کسی

¹⁶ line charge density

¹⁷ اس کتاب میں رداس کے لئے بھی ρ استعمال کیا جاتا ہے۔ ρ کو جب بھی کثافت کے لئے استعمال کیا جائے، اس کے زیر نوشت میں S ، L یا h لکھا جائے گا۔



شکل 2.3: یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

بھی مقام پر پیدا برقی میدان پر غور کرتے ہیں۔ برقی میدان کی مقدار کا دارومدار میدان پیدا کرنے والے چارج اور چارج سے فاصلے پر ہے۔ نقطہ دیکھ لکیر پر پائے جانے والے تمام نقطوں کا $(0, 0, z)$ سے فاصلہ برابر ہے۔ یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ اس دائرے پر برقی میدان کی شدت کی حتمی قیمت ہوگی۔ جگہ برابر ہوگی۔ اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ چارج کی نقطہ نظر سے نقطہ دار لکیر پر تمام نقطے بالکل یکساں نظر آتے ہیں۔ اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ دار دائرے پر ہر جگہ برقی میدان یکساں ہوگا۔

آئیں شکل 2.3 کو دیکھتے ہوئے ایک اور مشابہت پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ E سمتی فاصلہ R کی سمت میں ہوتا ہے لہذا دائرے پر کسی بھی نقطے پر نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ سے پیدا E کے دو اجزاء پائے جائیں گے یعنی

$$(2.23) \quad E = E_\rho + E_z$$

مثبت ρ_L کی صورت میں $(0, 0, z)$ پر موجود چارج سے E_z کی سمت منفی z جانب ہوگی۔ اسی طرح $(0, 0, -z)$ پر پائے جانے والے مثبت چارج سے دائرے پر پیدا E کی سمت مثبت z جانب ہوگی۔ دائرے پر یہ دونوں ارکان ایک دونوں کو ختم کریں گے۔ اسی عمل سے دائرے پر کسی بھی نقطے پر مثبت z محدود پر کسی بھی فاصلے پر پائے جانے والے چارج سے پیدا E_z کے اثر کو منفی z محدود پر اتنے ہی فاصلے پر چارج سے پیدا E_z ختم کرتا ہے۔ یوں دائرے پر

$$(2.24) \quad E_z = 0$$

ہوگا۔

ایک آخری مشابہت پر اب غور کرتے ہیں۔ اگر نقطہ دار دائرے کو z محدود پر مثبت یا منفی جانب لے جایا جائے تو کیا ہوگا؟ اب بھی دائرے کے ایک جانب کسی بھی فاصلے پر چارج کا اثر دائرے کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر چارج ختم کرے گا۔ یوں دائرے کے ایک جانب یعنی z محدود پر ∞ تک فاصلے پر چارجوں کے E_z کو دائرے کی دوسری جانب z محدود پر ∞ تک فاصلے پر چارجوں کا E_z ختم کرے گا اور یوں خلاء میں ہر جگہ مساوات 2.24 درست ثابت ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو یوں بہتر بیان کیا جاسکتا ہے کہ لامحدود لکیر پر یکساں کثافت چارج سے خلاء میں برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پیدا ہوگا۔ آئیں اس E کو حاصل کریں۔

شکل 2.3 میں مقام z پر نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ پر دائرے پر E پیدا کرتا ہے۔ محدود کے مرکز سے نقطہ چارج کا مقام سمتیہ $z a_z$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جبکہ دائرے پر کسی بھی نقطے N کو سمتیہ ρa_ρ ظاہر کرتا ہے۔ یوں نقطہ چارج سے N تک کا سمتی فاصلہ اور اسی سمت میں اکائی سمتیہ یوں حاصل کئے جائیں گے۔

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z \\ |\mathbf{R}| &= R = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \mathbf{a}_R &= \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \end{aligned}$$

مساوات 2.19 سے

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{\rho_L \Delta z}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)} \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ &= \frac{\rho_L \Delta z (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تمام چارجوں کے اثرات کو یکجا کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو تکمیل کی شکل دے کر مندرجہ ذیل مساوات میں دکھایا گیا ہے۔ تکملہ کے حدود $-\infty$ اور $+\infty$ ہیں۔

$$(2.25) \quad \mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\rho_L (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dz$$

اس تکمیل کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$(2.26) \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_L \rho \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

جہاں مساوات کی نشان کے دائیں جانب پہلا تکمیل E_ρ اور دوسرا تکمیل E_z دیتا ہے یعنی

$$(2.27) \quad \begin{aligned}E_\rho &= \frac{\rho_L \rho \mathbf{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_z &= -\frac{\rho_L \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

مساوات 2.24 کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دوسرا تکملہ صفر جواب دیگا۔ آئیں دونوں تکمیل کو باری باری حل کریں۔ پہلے E_ρ حل کرتے ہیں۔ اس مساوات میں

$$z = \rho \tan \alpha$$

استعمال کرتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے تکمیل کا ابتدائی حد

$$-\infty = \rho \tan \alpha_{\text{ابتدائی}}$$

$$\alpha_{\text{ابتدائی}} = -\frac{\pi}{2}$$

اور اختتامی حد

$$\infty = \rho \tan \alpha_{\text{اختتامی}}$$

$$\alpha_{\text{اختتامی}} = \frac{\pi}{2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مزید

$$dz = \rho \sec^2 \alpha d\alpha$$

لکھا جائے گا۔ یوں

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{\rho_L \rho a_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, d\alpha}{(\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\rho_L \rho a_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, d\alpha}{\rho^3 (1 + \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

لکھا جائے گا جس میں

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

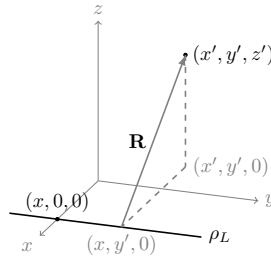
استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{\rho_L \rho a_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, d\alpha}{\rho^3 \sec^3 \alpha} \\ &= \frac{\rho_L a_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha \\ &= \frac{\rho_L a_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \sin \alpha \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} a_\rho \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں دوسری قدم پر $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ کا استعمال کیا گیا۔

آئیں اب مساوات 2.27 کے دوسرے جزو کو حل کریں۔ اس میں بھی $z = \rho \tan \alpha$ استعمال کرتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z \, dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha \, d\alpha}{(\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\tan \alpha \sec^2 \alpha \, d\alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$



شکل 2.4: کسی بھی سمت میں لامحدود لکیر پر چارج کی مثال

سے

$$\begin{aligned}
 E_z &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\tan \alpha \sec^2 \alpha \, d\alpha}{\sec^3 \alpha} \\
 &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \, d\alpha \\
 &= \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0\rho} \cos \alpha \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\
 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.29}$$

ملتا ہے۔ یہی جواب مساوات 2.24 میں حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.28 اور مساوات 2.29 سے مساوات 2.26 کا حل یوں لکھا جائے گا

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho
 \tag{2.30}$$

جس کے مطابق لامحدود سیدھی لکیر پر یکساں چارج سے برقی میدان رداس ρ کے بالعکس متناسب ہے۔ اس نتیجے کا مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں جو نقطہ چارج کی برقی میدان بیان کرتا ہے۔ نقطہ چارج کا برقی میدان کروی رداس کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔ یوں اگر لامحدود لکیر کے چارج سے فاصلہ دگنا کر دیا جائے تو برقی میدان آدھا ہو جائے گا جبکہ نقطہ چارج سے فاصلہ دگنا کرنے سے برقی میدان چار گنا کم ہوتا ہے۔

کسی بھی سمت میں لامحدود سیدھی لکیر پر چارج کا برقی میدان مساوات 2.30 میں بیان خوبیوں پر پورا اترے گا۔ ایسی صورت میں کسی بھی نقطے پر \mathbf{E} حاصل کرنے کی خاطر اس نقطے سے چارج کے لکیر تک کم سے کم فاصلہ R حاصل کریں۔ یہ فاصلہ نقطے سے لکیر پر عمود کھینچنے سے حاصل ہو گا۔ اس فاصلے کو ρ تصور کریں۔ لکیر سے عمودی سمت میں نقطے کی جانب اکائی سمتیہ \mathbf{a}_R کو \mathbf{a}_ρ تصور کریں۔ ایسی صورت میں مساوات 2.30 کو

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R} \mathbf{a}_R
 \tag{2.31}$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 2.7: y محدد کے متوازی اور $(x, 0, 0)$ سے گزرتی لامحدود لکیر پر ρ_L کثافت کا چارج پایا جاتا ہے۔ نقطہ (x', y', z') پر \mathbf{E} حاصل کریں۔

حل: شکل 2.4 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ (x', y', z') سے چارج کے لکیر پر عمود $(x, y', 0)$ پر ٹکراتا ہے۔ ان دو نقطوں کا آپس میں فاصلہ $\sqrt{(x' - x)^2 + z^2}$ ہے جبکہ

$$\mathbf{R} = (x' - x)\mathbf{a}_x + z\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{(x' - x)\mathbf{a}_x + z\mathbf{a}_z}{\sqrt{(x' - x)^2 + z^2}}$$

ہیں۔ یوں

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{(x' - x)^2 + z^2}} \mathbf{a}_R$$

664

ہو گا۔

665

666

مشق 2.1: y محور پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $10 \frac{nC}{m}$ چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0, 0, 6)$ اور نقطہ $N_2(0, 8, 6)$ پر \mathbf{E} حاصل کریں۔
جواب: دونوں نقطوں پر $\mathbf{E} = 30a_z$ کے برابر ہے۔

668

669

670

مشق 2.2: x محور پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $5 \frac{nC}{m}$ چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0, 5, 0)$ اور نقطہ $N_2(7, 3, 4)$ پر \mathbf{E} حاصل کریں۔
جوابات: $E_1 = 18a_z \frac{V}{m}$ اور $E_2 = 18 \left(\frac{3a_y + 4a_z}{5} \right) \frac{V}{m}$

672

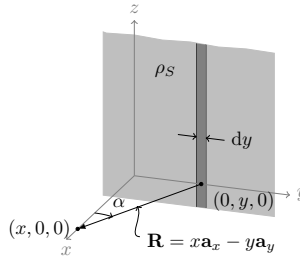
673

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

674

شکل 2.5 میں $z = 0$ پر لامحدود $x - y$ سطح دکھائی گئی ہے۔ تصور کریں کہ اس پوری سطح پر انتہائی قریب قریب نقطہ چارج یوں رکھے گئے ہیں کہ سطح پر کہیں بھی چھوٹی رقبہ ΔS پر یکساں قیمت کا چارج ΔQ پایا جاتا ہے۔ اس طرح اکائی رقبے پر کل چارج $\frac{\Delta Q}{\Delta S}$ پایا جائے گا جسے **سطحی چارج کثافت** ρ_s کہتے ہیں۔ سطحی چارج کثافت کی تعریف

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad (2.32)$$



شکل 2.5: یکساں چارج بردار بمواز لامحدود سطح

ہے۔ چھوٹی سطح اتنی کم نہیں لی جاتی کہ اس پر چارج بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ بطور نقطہ چارج نظر آئیں بلکہ اسے اتنا رکھا جاتا ہے کہ علیحدہ علیحدہ الیکٹران کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ سطح پر ہر جگہ چارج کا تقسیم یکساں نہ ہونے کی صورت میں ρ_s کی قیمت متغیر ہوگی۔ انہیں لامحدود سطح پر یکساں چارج کثافت سے خالی خلاء میں پیدا E حاصل کریں۔

677

پہلے غور کرتے ہیں کہ آیا مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے کچھ اخذ کرنا ممکن ہے۔ اگر اس چارج بردار سطح کے سامنے ہم کھڑے ہو جائیں تو ہمیں سامنے لامحدود چارج بردار سطح نظر آئے گی۔ سطح سے برابر فاصلے پر ہم جہاں بھی جائیں ہمیں صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اسی طرح اگر ہم سطح کی دوسری طرف اتنے ہی فاصلے پر چلے جائیں تو ہمیں صورت حال میں کسی قسم کی کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایسی سطح سے برابر فاصلے پر تمام نقطوں پر یکساں برقی میدان پایا جائے گا۔ اس کے برعکس اگر ہم اس سطح سے دور ہو جائیں تو ہمیں سطح قدر دور نظر آئے گی اور ہو سکتا ہے کہ اس تبدیلی سے E پر اثر ہو۔ آئیں اب مسئلے کو حساب و کتاب سے حل کرتے ہوئے E حاصل کریں۔

682

شکل 2.5 میں چارج بردار سطح پر z محدود کے متوازی دو انتہائی قریب قریب لکیریں کھینچی گئی ہیں جن کے مابین فاصلہ dy ہے۔ اس گھیرے گئے رقبے کی چوڑائی dy ہے۔ یوں ΔL لمبائی اور dy چوڑائی رقبے میں $\rho_s \Delta L dy$ چارج پایا جائے گا۔ لکیروں سے گھیرے رقبے کو چارج کی سیدھی لکیر تصور کیا جا سکتا ہے جس پر اکائی لمبائی کے رقبے پر $\frac{\rho_s \Delta L dy}{\Delta L}$ چارج پایا جائے گا جسے ρ_L تصور کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\rho_L = \rho_s dy \quad (2.33)$$

لامحدود لکیر پر یکساں چارج کی کثافت سے پیدا برقی میدان پر گزشتہ حصے میں غور کیا گیا۔ نقطہ $(x, 0, 0)$ پر E حاصل کرتے ہیں۔ شکل میں لامحدود چارج کی لکیر سے اس نقطے تک کا قریبی سمتی فاصلہ R دکھایا گیا ہے جہاں

$$R = xa_x - ya_y \quad (2.34)$$

کے برابر ہے جس سے

$$R = |R| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.35)$$

$$a_R = \frac{xa_x - ya_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں چارج بردار لکیر سے $(x, 0, 0)$ پر پیدا برقی میدان کو مساوات 2.31 کی مدد سے

$$dE = \frac{\rho_s dy}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{xa_x - ya_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.36)$$

$$= \frac{\rho_s dy (xa_x - ya_y)}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس جواب کو $dE = dE_x + dE_y$ لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(2.37) \quad \begin{aligned} dE_x &= \frac{\rho_S x dy}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)} a_x \\ dE_y &= -\frac{\rho_S y dy}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)} a_y \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔ x محدود کے ایک جانب چارج بردار لکیر مندرجہ بالا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ x محدود کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر چارج بردار لکیر سے پیدا برقی میدان مندرجہ بالا dE_y کو ختم کرے گا۔ یوں کسی بھی مثبت y پر کھینچی لکیر کا dE_y ختم کرے گا۔ x محدود کے دونوں جانب مسئلے کی مشابہت سے یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ

$$(2.38) \quad E_y = 0$$

683

ہو گا۔

آئیں اب حساب و کتاب سے مساوات 2.37 کو حل کریں۔ پہلے E_x حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 2.37 میں دئے dE_x کا تکمل لیتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر

$$(2.39) \quad \begin{aligned} y &= x \tan \alpha \\ dy &= x \sec^2 \alpha d\alpha \end{aligned}$$

کا استعمال کرتے ہیں۔ شکل 2.5 میں α کی نشاندہی کی گئی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = \frac{\rho_S x a_x}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{\rho_S x a_x}{2\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \frac{x \sec^2 \alpha d\alpha}{x^2 (1 + \tan^2 \alpha)} \end{aligned}$$

میں $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ کے استعمال سے

$$(2.40) \quad \begin{aligned} E_x &= \frac{\rho_S a_x}{2\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} d\alpha \\ &= \frac{\rho_S a_x}{2\pi\epsilon_0} \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} a_x \end{aligned}$$

684

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب E_y حاصل کریں۔

مساوات 2.37 میں دئے dE_y کا تکمل لیتے ہیں۔

$$E_y = \int dE_y = -\frac{\rho_S a_y}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{y dy}{(x^2 + y^2)}$$

تکمل کے نشان کے اندر $f(y) = x^2 + y^2$ لیتے ہوئے اسے $\frac{df(y)}{2f(y)}$ لکھا جاسکتا ہے جس کا تکمل $\frac{\ln f(y)}{2}$ ہے۔ یوں

$$(2.41) \quad \begin{aligned} E_y &= -\frac{\rho_S a_y}{2\pi\epsilon_0} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2} \Big|_{y=-\infty}^{y=+\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 2.38 میں یہی جواب حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.40 اور مساوات 2.41 کی مدد سے یکساں چارج بردار لامحدود سطح کی برقی میدان

$$(2.42) \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_N$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں \mathbf{a}_N اس سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطح سے فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے برقی میدان کی شدت پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ سطح کے دونوں جانب برقی میدان اسی مساوات سے حاصل کی جائے گی۔ ظاہر ہے کہ سطح کے دونوں جانب کے اکائی عمودی سمتیہ آپس میں الٹ ہیں۔

اب تصور کریں کہ اس سطح کے متوازی $x = x_1$ پر ایک اور لامحدود سطح رکھی جائے جس پر چارج کی یکساں کثافت ρ_S ہو۔ ان دو متوازی سطحوں کو دو دھاتی چادروں سے بنایا گیا کپیسٹر¹⁹ سمجھا جاسکتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر کل \mathbf{E} دونوں سطحوں پر چارج سے پیدا برقی میدان کا مجموعہ ہو گا۔ پہلے دونوں سطحوں کے دونوں جانب برقی میدان لکھتے ہیں۔

• $x = 0$ پر ρ_S + کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x>0}^+ &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x & x > 0 \\ \mathbf{E}_{x<0}^+ &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x & x < 0 \end{aligned}$$

• $x = x_1$ پر $-\rho_S$ - کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x>x_1}^- &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x & x > x_1 \\ \mathbf{E}_{x<x_1}^- &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x & x < x_1 \end{aligned}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے $x < 0$ ، $x > x_1$ اور $0 < x < x_1$ خطوں میں برقی میدان حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x<0} &= \mathbf{E}_{x<0}^+ + \mathbf{E}_{x<x_1}^- = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x + \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x = 0 \\ \mathbf{E}_{x>x_1} &= \mathbf{E}_{x>0}^+ + \mathbf{E}_{x>x_1}^- = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x - \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x = 0 \\ \mathbf{E}_{0<x<x_1} &= \mathbf{E}_{x>0}^+ + \mathbf{E}_{x<x_1}^- = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x + \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_x = \frac{\rho_S}{\epsilon_0} \mathbf{a}_x \end{aligned} \quad (2.43)$$

اس نتیجے کے مطابق دو متوازی لامحدود سطحوں جن پر الٹ یکساں کثافت پائی جائے کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا جبکہ سطحوں کے درمیانی خطے میں

$$(2.44) \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0} \mathbf{a}_x$$

برقی میدان پایا جاتا ہے۔ اس میدان کی سمت مثبت چارج بردار چادر سے منفی چارج بردار چادر کی جانب ہوتی ہے۔ یہی مساوات ایک ایسے کپیسٹر کے برقی میدان کے لئے بھی استعمال کیا جاسکتا ہے جس میں دھاتی چادروں کی لمبائی اور چوڑائی دونوں چادروں کے درمیانی فاصلے سے کئی گنا زیادہ ہو اور چادروں کے درمیان خالی خلاء یا ہوا پائی جائے۔ چادروں کے کناروں کے قریب کپیسٹر کے اندر اور باہر صورت حال قدر مختلف ہو گی۔

مثال 2.8: خلاء میں تین متوازی لامحدود سطح پائے جاتے ہیں جن پر چارج کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔ پہلی سطح $y = 2$ پر 2 nC/m^2 ، دوسری سطح $y = 5$ پر 4 nC/m^2 اور تیسری سطح $y = 10$ پر -6 nC/m^2 کثافت پائی جاتی ہے۔ $N_1(0, 0, 0)$ ، $N_2(5, 3, 4)$ ، $N_3(-2, 7, 11)$ اور $N_4(-7, 30, 22)$ پر E حاصل کریں۔

697

جوابات: 0 ، $144\pi a_y$ ، $216\pi a_y$ اور 0

698

699

700

2.5 چارج بردار حجم

ہم نقطہ چارج، لامحدود کثیر پر چارج اور لامحدود سطح پر چارج دیکھ چکے ہیں۔ اگلا فطری قدم چارج بردار حجم بنتا ہے لہذا اسی پر غور کرتے ہیں۔ کثیر اور سطح کے چارج پر غور کرتے ہوئے ہر جگہ یکساں کثافت کی بات کی گئی۔ حجم میں چارج کی بات کرتے ہوئے اس شرط کو دور کرتے ہوئے کثافت کو متغیر تصور کرتے ہیں۔ یوں مختلف مقامات پر کثافت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔

703

تصور کریں کہ حجم میں انتہائی قریب قریب نقطہ چارج پائے جاتے ہیں۔ یوں اگر کسی نقطے پر Δh حجم میں ΔQ چارج پایا جائے تب اس نقطے پر اوسط حجمی چارج کثافت $\frac{\Delta Q}{\Delta h}$ ہوگی۔ کسی بھی نقطے پر چارج کی حجمی کثافت یوں بیان کی جاتی ہے۔

$$(2.45) \quad \rho_h = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta h}$$

کسی بھی حجم میں کل چارج تین درجی مکمل سے حاصل کیا جائے گا۔ کارٹیسی محدود میں ایسا مکمل یوں لکھا جائے گا۔

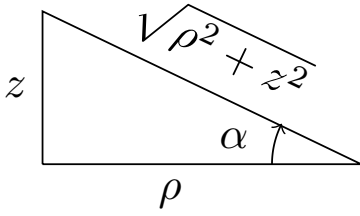
$$(2.46) \quad Q = \iiint_h \rho_h \, dx \, dy \, dz$$

جہاں مکمل کے نشان کے نیچے h حجم کو ظاہر کرتا ہے۔ اس طرز کے مکمل کو عموماً ایک درجی مکمل سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

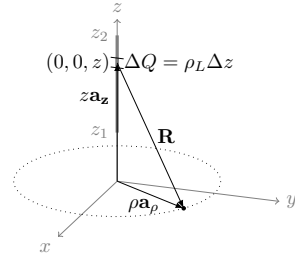
$$(2.47) \quad Q = \int_h \rho_h \, dh$$

حجم میں r' نقطے پر چھوٹی سی حجم $\Delta h'$ میں $\rho'_h \Delta h'$ چارج پایا جائے گا جسے نقطہ چارج تصور کیا جاسکتا ہے۔ نقطہ r پر اس نقطہ چارج کا برقی میدان dE مساوات 2.20 سے یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho'_h \Delta h'}{|r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|}$$



(ب) Z اور α کا تعلق



(ل) محدود لکیر پر چارج کی یکساں کثافت

شکل 2.6: محدود لکیر پر چارج

اس مساوات میں نقطہ r' پر چارج کی کثافت ρ'_h لکھی گئی ہے۔ تمام حجم میں پائے جانے والے چارج کا نقطہ r پر میدان مندرجہ بالا مساوات کے مکمل سے یوں حاصل کیا جائے گا۔

$$(2.48) \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_h \frac{\rho'_h dh'}{|r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|}$$

اس مساوات کی شکل قدر خوف ناک ہے البتہ حقیقت میں ایسا ہر گز نہیں۔ سمتیہ r اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی میدان حاصل کرنا r ہو۔ اس نقطے پر برقی میدان کو $E(r)$ لکھ کر اس حقیقت کی وضاحت کی گئی ہے کہ نقطے کی تبدیلی سے برقی میدان تبدیل ہو سکتا ہے۔ کثافت از خود متغیر ہوتی ہے جس کی قیمت r' پر منحصر ہے۔ r' پر چھوٹی حجم dh' اور چارج کی کثافت ρ'_h لکھے گئے ہیں جہاں r' اس بات کی یاد دہانی کرتا ہے کہ یہ متغیرات نقطہ r' پر پائے جاتے ہیں۔ آخر میں یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر E حاصل کرتے وقت اسی نقطے پر موجود چارج کو نظر انداز کیا جاتا ہے۔

707

2.6 مزید مثال

708

709

مثال 2.9: شکل 2.6 میں $z = z_1$ سے $z = z_2$ تک کی سیدھی لکیر پر یکساں ρ_L پایا جاتا ہے۔ نقطہ دار گول دائرے پر E حاصل کریں۔ اس گول دائرے کا مرکز کارٹیزی محدد کے مرکز $(0, 0, 0)$ پر ہے جبکہ دائرہ از خود $z = 0$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

711

حل: شکل 2.6 سے واضح ہے کہ نکتہ دار گول دائرے پر E کی حتمی قیمت $|E|$ یکساں ہو گی۔ یوں ہم لکھ سکتے ہیں

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{|\rho^2 + z^2|} \frac{\rho a_\rho - z a_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ &= \frac{\rho_L \rho a_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{|\rho^2 + z^2|^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z dz}{|\rho^2 + z^2|^{\frac{3}{2}}} \\ &= E_\rho + E_z \end{aligned}$$

دائیں جانب باری باری تکملہ حل کرتے ہیں۔ تکملہ حل کرنے کی خاطر $z = \rho \tan \alpha$ کا تعلق استعمال کرتے ہیں۔ α کا z کا تعلق شکل 2.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{\rho_L \rho a_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho \sec^2 \alpha d\alpha}{|\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha|^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\rho_L a_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\ &= \frac{\rho_L a_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \tan^{-1} \frac{z_2}{\rho} \\ \alpha_1 &= \tan^{-1} \frac{z_1}{\rho} \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔ شکل 2.6-ب سے $\sin \alpha = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$E_\rho = \frac{\rho_L a_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z dz}{|\rho^2 + z^2|^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha d\alpha}{|\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha|^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

ے

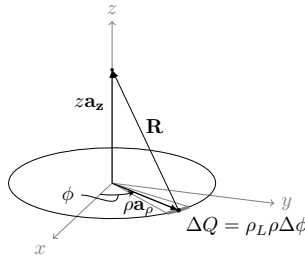
$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \\ &= \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ E_ρ اور E_z کا مجموعہ لیتے ہوئے کل برقی میدان یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$(2.49) \quad E = \frac{\rho_L a_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right) + \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right)$$

اگر نقطہ دار گول دائرہ $z = z_0$ سطح پر پایا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات

$$E = \frac{\rho_L a_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \left(\frac{z_2 - z_0}{\sqrt{\rho^2 + (z_2 - z_0)^2}} - \frac{z_1 - z_0}{\sqrt{\rho^2 + (z_1 - z_0)^2}} \right) + \frac{\rho_L a_z}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z_2 - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z_1 - z_0)^2}} \right)$$



شکل 2.7: چارج بردار گول دائرہ

صورت اختیار کرتا۔

712

713

714

مثال 2.10: شکل 2.7 میں $z = 0$ پر گول دائرہ دکھایا گیا ہے جس پر چارج کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $(0, 0, z)$ پر E حاصل کریں۔⁷¹⁵

حل: نکلی محدود استعمال کرتے ہوئے اسے حل کرتے ہیں۔ کسی بھی زاویہ پر رداس کھینچتے ہوئے دائرے پر کوئی نقطہ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ زاویہ میں باریک تبدیلی $\Delta\phi$ سے لمبائی $\rho\Delta\phi$ حاصل ہوتی ہے جس پر کل چارج $\Delta Q = \rho_L \rho \Delta\phi$ پایا جائے گا۔ یوں چارج ΔQ مقام ρa_ρ پر پایا جاتا ہے جبکہ E مقام $z a_z$ پر درکار ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ E رداس کی سمت میں ممکن نہیں۔ ΔQ سے

$$\Delta E = \frac{\rho_L \rho \Delta\phi}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{3/2}} \frac{z a_z - \rho a_\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

پیدا ہو گا۔ دائرے پر تمام چارج کے اثر کے لئے تکملہ لینا ہو گا۔

$$E = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (z a_z - \rho a_\rho) d\phi$$

تکملہ کا متغیر ϕ ہے جسے تبدیل کرنے سے ρ اور z میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔ اسی لئے انہیں تکملہ کی نشان سے باہر لے جایا گیا ہے۔ حاصل تکملہ کو دو حصوں میں لکھا جاسکتا ہے البتہ معاملہ اتنا سیدھا نہیں جتنا معلوم ہوتا ہے۔ E_z لکھتے ہوئے کارتیسی محدود کی اکائی سمتیہ a_z کو تکملہ کے باہر لے جایا جاسکتا ہے چونکہ ϕ کی تبدیلی سے a_z تبدیل نہیں ہوتا البتہ E_ρ لکھتے ہوئے نکلی محدود کی اکائی سمتیہ a_ρ کو تکملہ کے باہر نہیں لے جایا جاسکتا چونکہ ϕ کی تبدیلی سے a_ρ کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔ چونکہ a_ρ کی سمت تبدیل ہوتی ہے لہذا اس کو مستقل تصور کرنا غلط ہے اور یوں یہ تکملہ کے اندر ہی رہے گا۔

$$E_z = \frac{\rho_L \rho z a_z}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi$$

(2.50)

$$E_\rho = -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} a_\rho d\phi$$

پہلے تکملہ کا جواب اب دیکھ کر ہی

(2.51)

$$E_z = \frac{2\pi \rho_L \rho z a_z}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

لکھا جاسکتا ہے جبکہ دوسرے تکملہ میں $a_\rho = \cos \phi a_x + \sin \phi a_y$ لکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} (\cos \phi a_x + \sin \phi a_y) d\phi \\ &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (\sin \phi a_x - \cos \phi a_y) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

یہی جواب اس طرح بھی حاصل کیا جاسکتا ہے کہ گول دائرے پر تمام چارج کو $Q = 2\pi\rho\rho_L$ لکھیں۔ یہ چارج نقطہ $(0, 0, z)$ سے $\sqrt{\rho^2 + z^2}$ فاصلے پر ہے۔ اگر اس تمام چارج کو ایک ہی نقطے $(\rho, 0, 0)$ پر موجود تصور کیا جائے تو یہ

$$E_R = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)} a_R$$

برقی میدان پیدا کرے گا۔ چارج گول دائرے پر پھیلا ہوا ہے لہذا حقیقت میں صرف a_z جانب ہی E پیدا ہوتا ہے۔ شکل میں اس نکتوں کو دیکھتے ہوئے جس کا R حصہ ہے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ E_R کا $\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ حصہ حقیقت میں پایا جائے گا۔ یوں

$$E_z = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} a_z$$

یہی حاصل ہوتا ہے۔

716

717

718

مثال 2.11: رداس a کرہ کی سطح پر یکساں چارج کثافت ρ_s پایا جاتا ہے۔ کرہ کے باہر اور اس کے اندر برقی میدان E حاصل کریں۔

719

حل: ہم کرہ کو کروی محدود کے مرکز پر رکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ کرہ کی سطح پر نقطہ $M(a, \theta, \phi)$ پر چھوٹی رقبہ $a^2 \sin \theta d\theta d\phi$ میں چارج $\rho_s a^2 \sin \theta d\theta d\phi$ پایا جائے گا جو نقطہ $N(0, 0, b)$ پر برقی میدان dE پیدا کرے گا۔ محدود کے مرکز سے M تک سمتی فاصلہ aa_r جبکہ مرکز سے N تک سمتی فاصلہ ba_z ہے۔ یوں M سے N تک سمتی فاصلہ

(2.52)

$$R = ba_z - aa_r$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں کارتیسی محدود اور کروی محدود کے اکائی سمتیات استعمال کئے گئے ہیں۔ اس طرح

(2.53)

$$\begin{aligned} |R| &= \sqrt{R \cdot R} = \sqrt{(ba_z - aa_r) \cdot (ba_z - aa_r)} \\ &= \sqrt{b^2 + a^2 - 2aba_z \cdot a_r} \\ &= \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta} \end{aligned}$$

اور

(2.54)

$$a_R = \frac{R}{|R|} = \frac{ba_z - aa_r}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta}}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں صفحہ 32 پر جدول 1.3 کے استعمال سے $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \cos \theta$ لکھا گیا ہے۔

کرہ کی سطح z محدود کو $(0, 0, -a)$ اور $(0, 0, a)$ پر چھوتا ہے جہاں بالترتیب $\theta = \pi$ اور $\theta = 0$ کے برابر ہیں۔ یوں $(0, 0, -a)$ سے $N(0, 0, b)$ تک فاصلہ

$$\begin{aligned} \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \pi} &= \sqrt{b^2 + a^2 + 2ab} \\ (2.55) \quad &= \sqrt{(b + a)^2} \\ &= b + a \end{aligned}$$

کے برابر ہے جہاں جذر لیتے وقت مثبت جواب چنا گیا ہے چونکہ فاصلہ مقداری²⁰ ہے جو مثبت قیمت رکھتا ہے۔ اسی طرح $(0, 0, a)$ سے $N(0, 0, b)$ تک فاصلہ

$$(2.56) \quad \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos 0} = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}$$

کے برابر ہے۔ اگر N کرہ کے باہر ہو تب $b > a$ ہو گا اور یہ فاصلہ $b - a$ کے برابر ہو گا جسے مساوات 2.56 سے یوں

$$(2.57) \quad \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} = \sqrt{(b - a)^2} = b - a$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس کے برعکس اگر N کرہ کے اندر ہو تب $a > b$ ہو گا اور یہ فاصلہ $a - b$ کے برابر ہو گا جسے اور مساوات 2.56 سے یوں

$$(2.58) \quad \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} = \sqrt{(a - b)^2} = a - b$$

حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اس طرح N پر

$$dE = \frac{a^2 \sin \theta d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0 R^2} a_R$$

لکھتے ہوئے تمام کرہ پر چارج سے پیدا میدان کو مکمل سے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho_S a^2 \sin \theta d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0 (b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)} \frac{b\mathbf{a}_z - a\mathbf{a}_r}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta}} \\ (2.59) \quad &= \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(b\mathbf{a}_z - a\mathbf{a}_r) \sin \theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta d\phi \end{aligned}$$

اس مساوات میں جدول 1.3 کی مدد سے $\mathbf{a}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_y + \cos \theta \mathbf{a}_z$ لکھتے ہوئے

$$(2.60) \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{[-a \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_x - a \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_y + (b - a \cos \theta) \mathbf{a}_z] \sin \theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta d\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ z محدود سے دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ اس محدود میدان صرف اور صرف \mathbf{a}_z سمت میں ہی ممکن ہے۔ یوں \mathbf{a}_x اور \mathbf{a}_y اجزاء کو صفر لیتے ہوئے

$$(2.61) \quad E_z = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(b - a \cos \theta) \sin \theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta d\phi$$

²⁰ فاصلہ ہر صورت مثبت ہوتا ہے البتہ سمتی فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے جہاں سمتی فاصلے کی مقدار مثبت ہی رہتی ہے جبکہ اس کی سمت مثبت یا منفی ہو سکتی ہے۔

لکھتے ہیں۔ سوال 2.1 میں آپ سے درخواست کی گئی ہے کہ مساوات 2.60 میں a_x اور a_y اجزاء کو صفر ثابت کریں۔ بیرونی تکمیل پہلے لیتے ہوئے

$$(2.62) \quad E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{(b - a \cos \theta) \sin \theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

722

حاصل ہوتا ہے جسے

$$(2.63) \quad E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

723

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 2.63 کے پہلے تکمیل میں $w = \cos \theta$ اور $dw = -\sin \theta d\theta$ پُر کر کے حل کرتے ہوئے

$$(2.64) \quad \int \frac{\sin \theta d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-dw}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{ab(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}}$$

یعنی

$$\frac{-1}{ab\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$(2.65) \quad \begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} &= \left. \frac{-1}{ab\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta}} \right|_0^\pi \\ &= \frac{-1}{ab\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} + \frac{1}{ab\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جو N بیرون کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.57 کے تحت

$$(2.66) \quad \frac{1}{ab} \left[\frac{-1}{b+a} + \frac{1}{b-a} \right] = \frac{1}{ab} \left[\frac{-(b-a) + (b+a)}{(b+a)(b-a)} \right] = \frac{2}{b(b^2 - a^2)}$$

جبکہ N اندرون کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.58 کے تحت

$$(2.67) \quad \frac{1}{ab} \left[\frac{-1}{a+b} + \frac{1}{a-b} \right] = \frac{1}{ab} \left[\frac{-(a-b) + (a+b)}{(a+b)(a-b)} \right] = \frac{2}{a(a^2 - b^2)}$$

724

شکل اختیار کرتا ہے۔

مساوات 2.63 کے دوسرے تکمیل میں $w = \cos \theta$ پُر کرتے ہوئے

$$\int \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-w dw}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

کے کلیہ سے بخوبی واقف ہیں۔ ہم

$$u = w$$

$$dv = \frac{-dw}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$v = \int dv = \int \frac{-dw}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

کے برابر ہے جسے ہم مساوات 2.64 میں حاصل کر چکے ہیں۔ اس طرح

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos \theta \sin \theta \, d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} &= \int w \left[\frac{-dw}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= w \left[\frac{-1}{ab(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}} \right] + \int \frac{dw}{ab(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-w}{ab(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}}{a^2 b^2} \\ &= \frac{-(b^2 + a^2 - abw)}{a^2 b^2 (b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos \theta \sin \theta \, d\theta}{(b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{-(b^2 + a^2 - ab \cos \theta)}{a^2 b^2 (b^2 + a^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{a^2 b^2} \left[\frac{-(b^2 + a^2 + ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} + \frac{(b^2 + a^2 - ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}} \right] \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ N کا کرہ سے باہر ہونے کی صورت میں اس سے

$$(2.68) \quad \frac{1}{a^2 b^2} \left[\frac{-(b^2 + a^2 + ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} + \frac{(b^2 + a^2 - ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}} \right] = \frac{2a}{b^2(b^2 - a^2)}$$

جبکہ N کا کرہ کے اندر ہونے کی صورت میں اس سے

$$(2.69) \quad \frac{1}{a^2 b^2} \left[\frac{-(b^2 + a^2 + ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} + \frac{(b^2 + a^2 - ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}} \right] = \frac{2b}{a^2(a^2 - b^2)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ کرہ کے باہر مساوات 2.66 اور مساوات 2.68 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63 سے

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{b(b^2 - a^2)} \right) - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2a}{b^2(b^2 - a^2)} \right) \\ (2.70) \quad &= \frac{4\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0 b^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کرہ پر کل چارج $4\pi a^2 \rho_S$ کو Q لکھا گیا ہے۔ کرہ کے اندر مساوات 2.67 اور مساوات 2.69 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63

$$(2.71) \quad E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{a(a^2 - b^2)} \right) - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2b}{a^2(a^2 - b^2)} \right) = 0$$

مساوات 2.70 بیرون کرہ z محدود پر میدان دیتا ہے۔ چونکہ ہم کسی بھی سمت میں اس محدود کرہ سے نکلتے تھے اور میدان اسی محدود کی سمت یعنی رداسی سمت میں ہوتا لہذا یہ ایک عمومی جواب ہے جسے کسی بھی بیرونی نقطے کے لئے

$$(2.72) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (r > a)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ وہی میدان ہے جو کرہ کی محدود کے مرکز پر Q نقطہ چارج رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 2.71 کے تحت کرہ کے اندر میدان صفر کے برابر ہے۔ یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ ہم کسی بھی مقام کو کرہ یا کسی بھی مکمل بند موصل سطح میں گھیر کر اس مقام پر صفر برقی میدان یقینی بنا سکتے ہیں۔ ایسی سطح کو **فیراڈے پناہ گاہ**²¹ کہتے ہیں۔

حصہ 3.4.2 میں اسی مسئلے کو انتہائی آسان طریقے سے حل کرنا دکھایا جائے گا۔

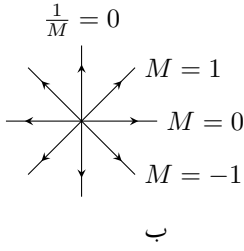
مثال 2.12: مثال 2.11 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے a رداس کرہ جس میں یکساں ρ_h حجمی چارج کثافت پائی جائے گا کرہ کے اندر اور کرہ کے باہر برقی میدان E حاصل کریں۔

حل: کرہ کے اندر رداس r پر dr موٹی جھلی کا حجم $4\pi r^2 dr$ ہوگا جس میں کل $4\pi\rho_h r^2 dr$ چارج پایا جائے گا۔ مثال 2.11 کے مطابق یہ چارج r سے کم رداس کے خطے میں کوئی برقی میدان نہیں پیدا کرتا جبکہ r سے زیادہ رداس پر یہ میدان پیدا کرے گا۔ یوں R سے کم کسی بھی رداس پر جھلی میں پائے جانے والا چارج R پر میدان پیدا کرے گا جسے

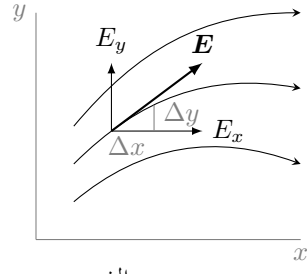
$$(2.73) \quad E = \int_0^R \frac{4\pi\rho_h r^2 dr}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_r = \frac{\rho_h r^3}{3\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_r \Big|_0^R = \frac{\rho_h R}{3\epsilon_0} \mathbf{a}_r \quad (R < a)$$

لکھ کر حاصل کیا جاسکتا ہے۔ چارج کرہ کے باہر یعنی $R > a$ کی صورت میں کرہ میں موجود تمام چارج بطور نقطہ چارج کردار ادا کرتے ہوئے

$$(2.74) \quad E = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_h}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_r = \frac{a^3 \rho_h}{3\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_r \quad (R > a)$$



ب



الف

شکل 2.8: (الف) سمت بہاؤ خط کے مساوات کا حصول۔ (ب) لکیری چارج کثافت کے سمت بہاؤ خط۔

734

2.7 برقی میدان کے سمت بہاؤ خط

ہم نے اب تک جتنے بھی مثال دیکھے ان سب میں E کی شکل سیدھی لکیر کی مانند رہی ہے۔ ایسے میدان کا تصوراتی شکل ذہن میں بنانا آسان ہوتا ہے۔ یوں نقطہ چارج کے میدان کو چارج سے ابتدا کرتے ہوئے ہر طرف سمتیوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اب چارج کے قریب E کی قیمت زیادہ اور چارج سے دور اس کی قیمت کم ہوتی ہے۔ یوں مختلف مقامات پر E کی لمبائی یہاں کے میدان کی نسبت سے ہوگی۔ میدان کو ظاہر کرنے کے دیگر طریقے بھی رائج ہیں۔

738

آئیں ایسے ہی ایک طریقے پر غور کریں جس میں میدان کو **سمت بہاؤ خط** سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طریقے میں کسی بھی نقطے پر E یہاں سے گزرتے سمت بہاؤ خط کا مماس ہوتا ہے۔ جس مقام پر گھنے سمت بہاؤ خطوط پائے جائیں ایسے مقام پر E کی مقدار زیادہ ہوتی ہے اور جہاں ان خطوط کی تعداد کم ہو وہاں میدان کمزور ہوتا ہے۔ سمت بہاؤ خطوط پر تیر کا نشان E کے مثبت سمت کی نشاندہی کرتا ہے۔

741

کار تیزی محدود میں کسی بھی میدان کو

$$E = E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y + E_z \mathbf{a}_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ مساوات ان میدان کو بھی ظاہر کرتا ہے جو سیدھی لکیر کی مانند نہ ہوں۔ آئیں ایسے عمومی میدان پر غور کریں جس میں E_z کی قیمت صفر کے برابر ہو جبکہ E_x اور E_y کی قیمتیں x اور y پر منحصر ہو۔ کسی بھی نقطہ (x, y) پر ایسے میدان کو

(2.75)

$$E = E_x(x, y) \mathbf{a}_x + E_y(x, y) \mathbf{a}_y$$

لکھا جاسکتا ہے۔ شکل 2.8-الف میں ایسے ہی ایک E کے تین **سمت بہاؤ خط** دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں کسی عمومی نقطے پر E دکھایا گیا ہے جو اس نقطے سے گزرتے سمت بہاؤ خط کا مماس ہے۔ میدان کے کار تیزی اجزاء E_x اور E_y بھی دکھائے گئے ہیں۔ اسی نقطے پر سمت بہاؤ خط کی چھوٹی لمبائی لیتے ہوئے Δx اور Δy دکھائے گئے ہیں۔ Δx اور Δy کو کم سے کم کرتے ہوئے ہم شکل کو دیکھتے ہوئے

(2.76)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x}$$

742

لکھ سکتے ہیں۔ اب اگر ہمیں E_x اور E_y کی خاصیت معلوم ہو تب ہم مکمل سے سمت بہاؤ خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

آئیں لامحدود لکیری چارج کثافت کے میدان کو مثال بناتے ہوئے اس کے سمت بہاؤ خط کی مساوات حاصل کریں۔ $\rho_L = 2\pi\epsilon_0$ کی صورت میں z محور پر لامحدود لکیری چارج کثافت کا میدان

(2.77)

$$E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

لکھا جاتا ہے۔ مساوات 2.75 بھی اسی میدان کی مساوات ہے جس سے ظاہر ہے کہ $E_x = E \cdot a_x$ اور $E_y = E \cdot a_y$ سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ یوں مساوات 2.77 کی مدد سے

$$E_x = \frac{1}{\rho} a_\rho \cdot a_x = \frac{\cos \phi}{\rho} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$E_y = \frac{1}{\rho} a_\rho \cdot a_y = \frac{\sin \phi}{\rho} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں لامحدود لکیری چارج کثافت کے میدان کو

$$E = \frac{x}{x^2 + y^2} a_x + \frac{y}{x^2 + y^2} a_y \quad (2.78)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح مساوات 2.76 کو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

یا

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

لکھ کر اس کا تکمیل

$$\ln y = \ln x + M'$$

یعنی

$$y = Mx \quad (2.79)$$

لیتے ہوئے میدان کے سمت بہاؤ خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ یہ سیدھی لکیر کی مساوات ہے جسے مختلف M کے قیمتوں کے لئے شکل 2.8-ب میں کھینچا گیا ہے۔

سوالات

745

746

747

سوال 2.1: صفحہ 60 پر مساوات 2.60 میں a_x اور a_y اجزاء کا تکمیل لیتے ہوئے انہیں صفر کے برابر ثابت کریں۔

سوال 2.2: ٹکون کے تینوں کونوں پر $25 \mu C$ کا چارج پایا جاتا ہے جبکہ تینوں کونوں سے 15 cm فاصلے پر $20 \mu C$ چارج پایا جاتا ہے۔ ٹکون کے اطراف 10 cm ہونے کی صورت میں چوتھے چارج پر قوت دفع کی مقدار حاصل کریں۔

749

750

جواب: 0.553 N

سوال 2.3: $z = 0$ پر 4 nF اور $z = 1 \text{ cm}$ پر -3 nF چارج پائے جاتے ہیں۔ z محدود پر وہ نقطے دریافت کریں جہاں مثبت چارج پر صفر قوت پائی جائے گی۔

752

753

جوابات: $z = 0.92 \text{ cm}$ ، $z = 7.08 \text{ cm}$

سوال 2.4: ایک چکور کے اطراف 25 cm ہیں جبکہ اس کے چاروں کونوں پر 30 nC چارج پایا جاتا ہے۔ کسی ایک کونے کے چارج پر کتنی قوت عمل کرے گی۔

755

756

جواب: 0.248 mN

سوال 2.5: نقطہ $(2, 1, -3)$ پر 15 nC اور نقطہ $(-3, -5, 4)$ پر -6 nC چارج پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(2, 1, -3)$ پر برقی شدت E حاصل کریں۔

758

759

جواب: $-0.191a_x + 1.057a_y + 2.195a_z$

سوال 2.6: نقطہ $(0, 0, 3)$ اور $(0, 0, -3)$ پر $20 \mu C$ چارج پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $N(2, 0, 0)$ پر برقی شدت E حاصل کریں۔ محدود کے مرکز پر کتنا چارج نقطہ N پر اتنی ہی برقی شدت پیدا کرے گا۔

761

762

جوابات: $E = 15339a_x \frac{V}{m}$ ، $6.827 \mu C$

763

سوال 2.7: نقطہ $(4, -2, 7)$ پر $5 \mu C$ اور $(-3, 4, -2)$ پر $12 \mu C$ چارج پایا جاتا ہے۔ y محدود پر کہاں $E_x = 0$ ہو گا۔

764

جواب: $y = -6.89$ ، $y = -22.11$

سوال 2.8: نقطہ $P(6, 3, 7)$ پر $6 \mu C$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N(5, 4, 2)$ پر کارٹیس، ٹنگی اور کروی محدود میں E حاصل کریں۔ نقطہ N کے ایک سمتیت استعمال کریں۔ - جوابات: $E = -384.4a_x + 384.4a_y - 1922a_z$ ، $E = -60a_\rho + 540a_\phi - 1922a_z$ ، $E = -630a_r + 1817a_\theta + 540a_\phi$

766

767

سوال 2.9: نقطہ $(0, 0, 0.25)$ اور $(0, 0, -0.25)$ پر 50 nC جبکہ $(0, 0, 0)$ پر -35 nC پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N(3, 1, 2)$ پر کارٹیس اور کروی محدود میں E حاصل کریں۔

769

770

جواب: $42a_r + 0.39a_\theta$ ، $34a_x + 11a_y + 22a_z$

771

سوال 2.10: محدود کے مرکز پر 1 nC چارج پایا جاتا ہے۔ سطح $z = 0$ پر اس خط کی مساوات حاصل کریں جس پر $E_y = 1 \frac{V}{m}$ ہو گا۔

$$\rho^2 = 8.987 \sin \phi, \quad 80.8y^2 = (x^2 + y^2)^3 \text{ جواب:}$$

سوال 2.11: محدود کے مرکز پر پڑے چکور کے چاروں کونوں پر 5 nC نقطہ چارج پائے جاتے ہیں۔ چکور $z = 0$ سطح پر پایا جاتا ہے جبکہ اس کے اطراف 1 m لمبے ہیں۔ نقطہ $(0, a, 0)$ اور نقطہ $(0, 2a, 0)$ پر برقی شدت کی شرح $a = 2$ ، $a = 10$ اور $a = \infty$ کی صورت میں حاصل کریں۔

جوابات: 4.15، 4.01، 4

سوال 2.12: نقطہ $(0, 0, 0)$ پر Q_1 اور نقطہ $(1, 0, 0)$ پر Q_2 نقطہ چارج پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $(2, 1, 0)$ پر $E_x = 0$ ہونے کی صورت میں چارجوں کا تعلق دریافت کریں۔

$$Q_1 = -1.976Q_2 \text{ جواب:}$$

سوال 2.13: کارٹینیسی محدود کے پہلے آٹھویں حصے $(x > 0, y > 0, z > 0)$ میں حجمی کثافت چارج $\rho_h = 10e^{-2z}(x^2 + 2y^2)$ ہے جبکہ بقایا سات حصوں میں کوئی چارج نہیں پایا جاتا۔ خطہ $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1)$ میں کل چارج حاصل کریں۔ اسی طرح خطہ $(0 \leq x + 2y \leq 1, 0 \leq z \leq 1)$ میں کل چارج حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: پہلا جواب } 4.32 \text{ C ہے۔ دوسرا مکمل } \int_0^{1/2} \int_0^{1-2y} \int_0^1 \rho_h dz dx dy \text{ لکھتے ہوئے } 0.27 \text{ C حاصل ہو گا۔}$$

سوال 2.14: حجمی کثافت چارج $\rho_h = (\rho + 0.002)z^2 \tan \phi \text{ C/m}^3$ خطہ $0 \leq \rho \leq 0.008$ ، $30^\circ \leq \phi \leq 75^\circ$ ، $2 \leq z \leq 5$ میں پایا جاتا ہے۔ کثافت چارج کی زیادہ سے زیادہ قیمت دریافت کریں۔ اس خطے میں کل چارج حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } 11.05 \mu\text{C}، 0.933 \text{ C/m}^3$$

سوال 2.15: نکلی محدود میں z محدود کے گرد یکساں حجمی کثافت چارج $e^{-\rho^2}$ پائی جاتی ہے۔ $z = 0$ تا $z = 1$ کل چارج حاصل کریں۔ z محدود کے گرد کتنے رداس کے اندر کل چارج کا آدھا پایا جاتا ہے۔

$$\text{جوابات: } 0.832 \text{ m}، 3.142 \text{ C}$$

سوال 2.16: کروی محدود میں رداس کے ساتھ بدلتی حجمی کثافت چارج $\rho_h = \sqrt{r}$ پائی جاتی ہے۔ اکائی رداس کے کرہ میں کل چارج حاصل کریں۔ اسی طرح خطہ $(r \leq 0.5, \theta \leq 25^\circ, \phi \leq \frac{\pi}{3})$ میں کل چارج حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } 0.028 \text{ C}، 3.59 \text{ C}$$

سوال 2.17: x محدود پر $\rho_L = 5 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ لکیری کثافت چارج پایا جاتا ہے جبکہ نقطہ $(0, 3, 0)$ پر -2 nC نقطہ چارج پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(4, 8, 1)$ پر E حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } -0.26a_x + 10.73a_y + 1.32a_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

سوال 2.18: نقطہ $(0, 2, 0)$ اور $(0, 0, 4)$ سے گزرتی سیدھی لکیر پر لکیری کثافت چارج $2 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے جبکہ نقطہ $(6, 1, -2)$ پر 7 nC چارج پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(6, 8, 4)$ پر E حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } 2.47a_x + 3.78a_y + 1.65a_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

سوال 2.19: کارتیسی z محدود کے کچھ حصہ $0 \leq z$ پر لکیری کثافت چارج $5 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(0, 0, -2)$ اور نقطہ $(5, -2, 6)$ پر برقی شدت E حاصل کریں۔

799

$$\text{جوابات: } 13.5a_x + 5.4a_y - 5.5a_z \frac{\text{V}}{\text{m}}, -22.5a_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

800

سوال 2.20: کارتیسی z محدود کے کچھ حصہ $2 \leq z \leq 10$ پر لکیری کثافت چارج $2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(2, 12, 8)$ پر برقی شدت E حاصل کریں۔

802

$$147a_x + 881a_y + 133a_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

803

سوال 2.21: سطح $y = 1$ پر $\rho_s = 0.72 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ ، سطح $y = -3$ پر $\rho_s = -0.72 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ ، سطح $x = -6$ پر $0.4 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ اور لکیر $x = 2, z = 3$ پر $0.4\pi \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(1, 3, -1)$ پر E حاصل کریں۔

805

$$\text{جواب: } 21.3a_x - 5.31a_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

806

سوال 2.22: سطح $z = 0$ پر مستطیل خطہ $-2 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 3$ پر $\rho_s = |x| \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(0, 0, 3)$ پر برقی میدان E حاصل کریں۔

808

$$\text{جواب: } 13.36 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

809

سوال 2.23: سطح $z = 0$ پر ٹکلی رداس $\rho = 2$ تا $\rho = 5$ سطحی کثافت چارج $\rho_s = 4 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(0, 0, 5)$ پر برقی شدت E حاصل کریں۔

811

$$\text{جواب: } 50 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

812

سوال 2.24: میدان $E = 3\sqrt{x}y a_x + x^3y^2 a_y$ کا سمت بہا و خط حاصل کریں۔ نقطہ $(4, 1, 7)$ پر میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ لکھیں۔

814

$$\text{جوابات: } 0.093a_x + 0.996a_y, \frac{y^2}{2} = \frac{x^{3.5}}{3.5} + C$$

سوال 2.25: میدان $E = (x + 2)a_x + (4 - y)a_y$ کے اس سمت بہا و خط کی مساوات حاصل کریں جو نقطہ $(5, 7, 2)$ سے گزرتی ہے۔

816

$$\text{جواب: } (y - 4)(x + 2) = 21$$

سوال 2.26: جو میدان z تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتے، ٹکلی محدود میں ان کی سمت بہا و خط $\frac{d\rho}{\rho d\phi} = \frac{E_\rho}{E_\phi}$ حل کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔ نقطہ $(5, 75^\circ, 3)$ سے گزرتے میدان $E = \rho \cos \phi a_\rho + \sin \phi a_\phi$ کی سمت بہا و خط حاصل کریں۔

818

$$\text{جواب: } \frac{1}{\rho} + \ln(\sin \phi) = 0.1653$$

819

820

