1 # برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
2 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1 سمتیات 1

1.1 مقداری اور سمتیہ . . . 1

1.2 سمتی الجبرا . . . 2

1.3 کارتیسی محدد . . . 3

1.4 اکائی سمتیات . . . 5

1.5 میدانی سمتیہ . . . 9

1.6 سمتی رقبہ . . . 9

1.7 غیر سمتی ضرب . . . 10

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب . . . 14

1.9 گول نلکی محدد . . . 17

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب . . . 20

1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق . . . 20

1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں . . . 25

1.10 کروی محدد . . . 27

2 کولومب کا قانون 39

2.1 قوت کشش یا دفع . . . 39

2.2 برقی میدان کی شدت . . . 43

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان . . . 46

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح . . . 51

2.5 چارج بردار حجم . . . 55

2.6 مزید مثال . . . 56

2.7 برقی میدان کے سمت بہاو خط . . . 64

3 گاؤس کا قانون اور پھیلاو 69
3.1 ساکن چارج 69
3.2 فیراڈے کا تجربہ 69
3.3 گاؤس کا قانون 70
3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال 72
3.4.1 نقطہ چارج 72
3.4.2 یکساں چارج بردار کروی سطح 74
3.4.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر 74
3.5 ہم محوری تار 75
3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح 77
3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق 77
3.8 پھیلاو 80
3.9 نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات 82
3.10 پھیلاو کی عمومی مساوات 84
3.11 مسئلہ پھیلاو 86

4 توانائی اور برقی دباو 93
4.1 توانائی اور کام 93
4.2 لکیری تکملہ 94
4.3 برقی دباو 99
4.3.1 نقطہ چارج کا برقی دباو 100
4.3.2 لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو 101
4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباو 102
4.4 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباو 102
4.5 برقی دباو کی ڈھلوان 106
4.5.1 نلکی محدد میں ڈھلوان 110
4.5.2 کروی محدد میں ڈھلوان 111
4.6 جفت قطب 112
4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاو خط 114
4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی 117

5 موصل، ذو برق اور کپیسٹر 125 55

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو 125 56

5.2 استمراری مساوات 127 57

5.3 موصل 129 58

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط 134 59

5.5 عکس کی ترکیب 137 60

5.6 نیم موصل 140 61

5.7 ذو برق 141 62

5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط 146 63

5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط 150 64

5.10 کپیسٹر 150 65

5.10.1 متوازی چادر کپیسٹر 151 66

5.10.2 ہم محوری کپیسٹر 152 67

5.10.3 ہم کوہ کپیسٹر 153 68

5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر 154 69

5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس 155 70

6 پوئسن اور لاپلاس مساوات 167 71

6.1 مسئلہ یکتائی 169 72

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے 170 73

6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات 171 74

6.4 لاپلاس مساوات کے حل 172 75

6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال 178 76

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل 180 77

6.7 عددی دہرانے کا طریقہ 188 78

7 ساکن مقناطیسی میدان 195[79]

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون . . . . 195[80]

7.2 ایمپیئر کا دوری قانون . . . . 199[81]

7.3 گردش . . . . 203[82]

7.3.1 نلکی محدد میں گردش . . . . 210[83]

7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات . . . . 216[84]

7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات . . . . 218[85]

7.4 مسئلہ سٹوکس . . . . 218[86]

7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو . . . . 222[87]

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو . . . . 228[88]

7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول . . . . 234[89]

7.7.1 سمتی مقناطیسی دباو . . . . 234[90]

7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون . . . . 235[91]

8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ 243[92]

8.1 متحرک چارج پر قوت . . . . 243[93]

8.2 تفرقی چارج پر قوت . . . . 244[94]

8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت . . . . 247[95]

8.4 قوت اور مروڑ . . . . 248[96]

8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے . . . . 253[97]

8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل . . . . 254[98]

8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط . . . . 257[99]

8.8 مقناطیسی دور . . . . 258[100]

8.9 مقناطیسی مخفی توانائی . . . . 261[101]

8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ . . . . 262[102]

8.11 مشترکہ امالہ . . . . 266[103]

9 وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات 269
9.1 فیراڈے کا قانون 269
9.2 انتقالی برقی رو 275
9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل 279
9.4 میکس ویل مساوات کی تکمل شکل 280
9.5 تاخیری دباو 282

10 مستوی امواج 287
10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج 287
10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج 288
10.2.1 خالی خلاء میں امواج 295
10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج 297
10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج 299
10.3 پوئنٹنگ سمتیہ 302
10.4 موصل میں امواج 306
10.5 انعکاس مستوی موج 312
10.6 شرح ساکن موج 318

11 ترسیلی تار 325
11.1 ترسیلی تار کے مساوات 325
11.2 ترسیلی تار کے مستقل 329
11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل 330
11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل 333
11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار 334
11.3 ترسیلی تار کے چند مثال 335
11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ 340
11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ 347
11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال 348

12 تقطیب موج 353 130

12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب . . . 353 131

12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئنٹنگ سمتیہ . . . 356 132

13 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار 359 133

13.1 ترچھی آمد . . . 359 134

13.2 ترسیم بائی گن . . . 370 135

14 مویج اور گھمکیا 373 136

14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ . . . 373 137

14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج . . . 374 138

14.3 کھوکھلا مستطیلی مویج . . . 380 139

14.3.1 مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور . . . 389 140

14.4 مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی $\text{TM}mn$ موج . . . 396 141

14.5 کھوکھلی نالی مویج . . . 400 142

14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف . . . 407 143

14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف . . . 409 144

14.8 سطحی موج . . . 411 145

14.9 ذو برق تختی مویج . . . 416 146

14.10 شیش ریشہ . . . 419 147

14.11 پردہ بصارت . . . 422 148

14.12 گھمکی خلاء . . . 424 149

14.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل . . . 427 150

15 اینٹینا اور شعاعی اخراج 435

15.1 تعارف 435

15.2 تاخیری دباو 435

15.3 تکمل 437

15.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا 438

15.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت 446

15.6 ٹھوس زاویہ 450

15.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش 451

15.8 قطاری ترتیب 458

15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع 458

15.8.2 ضرب نقش 459

15.8.3 ثنائی قطار 460

15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار 462

15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار 464

15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار 464

15.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا 468

15.9 تداخُل پیما 469

15.10 مسلسل خطی اینٹینا 470

15.11 مستطیل سطحی اینٹینا 471

15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریئر بدل ہیں 474

15.13 خطی اینٹینا 474

15.14 چلتے موج اینٹینا 479

15.15 چھوٹا گھیرا اینٹینا 480

15.16 پیچ دار اینٹینا 481

15.17 دو طرفہ کردار 483

15.18 جھری اینٹینا 485

15.19 پیپا اینٹینا 486

15.20 فرائس ریڈار مساوات 488

15.21 ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی 491

15.22 حرارت نظام اور حرارت بعید 493

16 سوالات 495

16.1 لاپلاس 495

1735 # باب 6

1736 # پوئسن اور لاپلاس مساوات

گاوس کے قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{6.1}$$

میں $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ اور حاصل جواب میں $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot (\epsilon \boldsymbol{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_h$$

یعنی

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{6.2}$$

1737 حاصل ہوتا ہے جہاں ہر طرف یکساں[1] خاصیت کے خطے میں ϵ اٹل قیمت رکھتا ہے۔ مساوات 6.2 پوئسن[2] مساوات کہلاتا ہے۔

آئیں کارتیسی محدد میں پوئسن مساوات کی شکل حاصل کریں۔ یاد رہے کہ کسی بھی متغیرہ $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے لئے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

کے برابر ہوتا ہے۔ اب چونکہ

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\partial V}{\partial y} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \frac{\partial V}{\partial z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

کے برابر ہے لہٰذا

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla V &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{6.3}$$

1738 ہو گا۔

[1] homogeneous
[2] Poisson equation

عموماً $\nabla \cdot \nabla$ کو ∇^2 لکھا جاتا ہے۔اس طرح پوئسن مساوات کی کارتیسی شکل

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{6.4}$$

حاصل ہوتی ہے۔

حجمی چارج کثافت کی غیر موجودگی، یعنی $\rho_h = 0$ کی صورت میں مساوات 6.2

$$\nabla^2 V = 0 \tag{6.5}$$

صورت اختیار کر لے گی جسے لاپلاس[3] مساوات کہتے ہیں۔ جس حجم کے لئے لاپلاس کی مساوات لکھی گئی ہو اس حجم میں حجمی چارج کثافت صفر ہوتا ہے البتہ اس حجم کی سرحد پر نقطہ چارج یا سطحی چارج کثافت پائی جا سکتیں ہیں۔ عموماً سطح پر موجود چارج سے حجم میں پیدا میدان ہی حاصل کرنا مطلوب ہوتا ہے۔کارتیسی محدد میں لاپلاس کی مساوات

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{6.6}$$

صورت رکھتی ہے۔ ∇^2 کو لاپلاسی عامل[4] کہا جاتا ہے۔

لاپلاس مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی چارج سے خالی حجم میں ہر صورت $\nabla^2 V = 0$ ہو گا۔ حجم کی شکل کچھ بھی ہو سکتی ہے اور اس کے سرحد پر کسی بھی قسم کا چارج ہو سکتا ہے۔ یہ ایک دلچسپ حقیقت ہے۔ حجم کے سرحد پر عموماً ایک یا ایک سے زیادہ موصل سطحیں ہوتی ہیں جن پر برقی دباو V_0، V_1، V_2 وغیرہ پایا جاتا ہے اور حجم کے اندر میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔ کبھی کبھار موصل سطح پر چارج یا $\boldsymbol{E}$ معلوم ہو گا جس سے حجم کے اندر میدان درکار ہو گا۔اسی طرح کبھی کبھار سرحد پر ایک جگہ چارج اور اس پر دوسری جگہ برقی دباو اور اس پر تیسرے جگہ عمودی بہاو دیا گیا ہو گا جبکہ حجم کے اندر کے متغیرات درکار ہوں گے۔اس کے برعکس ایسا بھی ممکن ہے کہ حجم میں میدان یا برقی دباو معلوم ہو اور ان معلومات سے سرحد پر چارج یا بہاو یا برقی دباو حاصل کرنا ضروری ہو گا۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ $V = 0$ لاپلاس مساوات کا حل ہے۔ یہ حل برقی دباو کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ ہمیں عموماً ایسے مسئلوں سے دلچسپی ہوتی ہے جہاں برقی دباو پائی جائے۔اس لئے لاپلاس مساوات کے اس حل کو ہم عموماً نظر انداز کریں گے۔

ہم نے لاپلاس کی مساوات برقی دباو کے لئے حاصل کی۔ دیکھا یہ گیا ہے کہ انجینئری کے دیگر شعبوں میں کئی متغیرات لاپلاس کے مساوات پر پورا اترتے ہیں۔ یہ مساوات حقیقی اہمیت کا حامل ہے۔

اس باب میں ہم ایسی کئی مثالیں دیکھیں گے لیکن پہلے یہ حقیقت جاننا ضروری ہے کہ مساوات 6.6 کا کوئی بھی جواب ان تمام اقسام کے سرحدی معلومات کے لئے درست ہو گا۔ یہ انتہائی تشویشناک بات ہو گی اگر دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے جوابات حاصل کرنے کے بعد معلوم ہو کہ ان میں سے ایک ٹھیک اور دوسرا غلط جواب ہے۔ آئیں اس حقیقت کا ثبوت دیکھیں کہ کسی بھی سرحدی حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا صرف اور صرف ایک ہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

---

[3] Laplace equation
[4] Laplacian operator

1754 6.1 مسئلہ یکتائی

تصور کریں کہ ہم دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 حاصل کرتے ہیں۔ یہ دونوں جوابات لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا

$$\nabla^2 V_1 = 0$$
$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0 \tag{6.7}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب اگر سرحد پر برقی دباو V_s ہو تب دونوں جوابات سرحد پر یہی جواب دیں گے یعنی سرحد پر

$$V_{1s} = V_{2s} = V_s$$

یا

$$V_{1s} - V_{2s} = 0$$

ہو گا۔ صفحہ 119 پر مساوات 4.83

$$\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V)$$

کا ذکر کیا گیا جو کسی بھی مقداری V اور کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کے لئے درست ہے۔ موجودہ استعمال کے لئے ہم $V_1 - V_2$ کو مقداری اور $\nabla(V_1 - V_2)$ کو سمتیہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] &= (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2) \\ &= (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] + [\nabla(V_1 - V_2)]^2\end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں جس کا تکمل پورے حجم کے لئے

$$\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] \,\mathrm{d}h = \int_{\text{حجم}} (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] \,\mathrm{d}h + \int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 \,\mathrm{d}h \tag{6.8}$$

ہو گا۔ صفحہ 87 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاو بیان کرتا ہے جس کے مطابق کسی بھی حجمی تکمل کو بند سطحی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جہاں حجم کی سطح پر سطحی تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ کو سطحی تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے

$$\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] \,\mathrm{d}h = \oint_{\text{سطح}} [(V_{1s} - V_{2s})\nabla(V_{1s} - V_{2s})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سرحدی سطح پر $V_{1s} = V_{2s}$ ہونے کی بنا پر $V_{1s} - V_{2s} = 0$ ہے اور صفر کا تکمل صفر ہی ہوتا ہے۔ مساوات 6.8 میں دائیں ہاتھ پہلے جزو میں مساوات 6.7 کے تحت $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ ہے اور صفر کا تکمل صفر ہی ہوتا ہے۔ اس طرح مساوات 6.8 سے

$$\int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 \,\mathrm{d}h = 0$$

1755 حاصل ہوتا ہے۔

کسی بھی تکمل کا جواب صرف دو صورتوں میں صفر کے برابر ہو سکتا ہے۔ پہلی صورت یہ ہے کہ کچھ خطے میں تکمل کی قیمت مثبت اور کچھ خطے میں اس کی قیمت منفی ہو۔ اگر مثبت اور منفی حصے بالکل برابر ہوں تب تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ موجودہ صورت میں $[\nabla(V_1-V_2)]^2$ کا تکمل لیا جا رہا ہے اور کسی بھی متغیر کا مربع کسی صورت منفی نہیں ہو سکتا لہٰذا موجودہ تکمل میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ تکمل صفر ہونے کی دوسری صورت یہ ہے کہ صفر کا تکمل حاصل کیا جا رہا ہو لہٰذا

$$[\nabla(V_1-V_2)]^2=0$$

ہی ہو گا یعنی

$$\nabla(V_1-V_2)=0$$

1756 کے برابر ہے۔

اب $\nabla(V_1-V_2)=0$ کا مطلب ہے کہ V_1-V_2 کی ڈھلوان ہر صورت صفر کے برابر ہے۔ یہ تب ہی ممکن ہے جب V_1-V_2 کی قیمت کسی بھی محدد کے ساتھ تبدیل نہ ہو یعنی اگر تکمل کے پورے خطے میں

$$V_1-V_2=\text{اٹل قیمت}$$

ہو۔ حجم کے سرحد پر بھی یہ درست ہو گا۔ مگر سرحد پر

$$V_1-V_2=V_{1s}-V_{2s}=0$$

کے برابر ہے لہٰذا یہ اٹل قیمت از خود صفر ہے۔ یوں

$$V_1=V_2 \tag{6.9}$$

1757 ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ دونوں جوابات بالکل برابر ہیں۔

1758 مسئلہ یکتائی کو پوئسن مساوات کے لئے بھی بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔ پوئسن مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 پوئسن مساوات پر پورا اتریں گے لہٰذا
1759 $\nabla^2 V_1=-\frac{\rho_h}{\epsilon}$ اور $\nabla^2 V_2=-\frac{\rho_h}{\epsilon}$ لکھے جا سکتے ہیں جن سے $\nabla^2(V_1-V_2)=0$ حاصل ہوتا ہے۔ سرحد پر اب بھی $V_{1s}-V_{2s}=0$ ہو
1760 گا۔ یہاں سے آگے ثبوت بالکل یکتائی لاپلاس کی ثبوت کی طرح ہے۔

مسئلہ یکتائی کے تحت سرحدی حقائق کے لئے حاصل کئے گئے پوئسن یا لاپلاس مساوات کے جوابات ہر صورت برابر ہوں گے۔ یہ ممکن نہیں کہ دو مختلف جوابات
1762 حاصل کئے جائیں۔

1763 6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے

تصور کریں کہ سرحدی شرائط لاگو کرنے کے بغیر لاپلاس مساوات کے دو حل V_1 اور V_2 حاصل کئے جائیں۔ یوں

$$\nabla^2 V_1=0$$
$$\nabla^2 V_2=0$$

لکھا جا سکتا ہے جن سے

$$\nabla^2(c_1V_1+c_2V_2)=0$$

1764 بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل ہیں۔ اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ لاپلاس مساوات خطی[5] ہے۔

[5] linear

1765 6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات

نلکی محدد میں ڈھلوان کی مساوات صفحہ 110 پر مساوات 4.57 دیتا ہے جس سے

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ &= -E_\rho \boldsymbol{a}_\rho - E_\phi \boldsymbol{a}_\phi - E_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned} \tag{6.10}$$

لکھتے ہیں جہاں $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ کا استعمال کیا گیا۔ نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات صفحہ 84 پر مساوات 3.37 دیتا ہے۔ اسی مساوات کو سمتیہ $\boldsymbol{E}$ کے لئے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

لکھتے ہیں۔ اس میں بائیں ہاتھ $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ اور دائیں ہاتھ مساوات 6.10 سے قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں دونوں جانب منفی علامت کٹ جاتے ہیں۔ اس کو یوں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{نلکی} \tag{6.11}$$

1766 لکھا جا سکتا ہے جو نلکی محدد میں لاپلاسی مساوات ہے۔

کروی محدد میں بالکل اسی

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad \text{کروی} \tag{6.12}$$

جبکہ عمومی محدد میں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{k_1 k_2 k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_2 k_3}{k_1}\frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_1 k_3}{k_2}\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{k_1 k_2}{k_3}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\right] \quad \text{عمومی} \tag{6.13}$$

1767 حاصل کی جا سکتی ہے۔

1768

1769 مشق 6.1: مساوات 6.12 حاصل کریں۔

1770

6.4 لاپلاس مساوات کے حل

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔ سادہ ترین مسئلے، سادہ تکمل سے ہی حل ہو جاتے ہیں۔ ہم اسی سادہ تکمل کے طریقے سے کئی مسئلے حل کریں گے۔ یہ طریقہ صرف اس صورت قابل استعمال ہوتا ہے جب میدان یک سمتی ہو یعنی جب یہ محدد کے تین سمتوں میں سے صرف ایک سمت میں تبدیل ہوتا ہو۔ چونکہ اس کتاب میں محدد کے تین نظام استعمال کئے جا رہے ہیں لہٰذا معلوم ایسا ہوتا ہے کہ کل نو مسئلے ممکن ہیں۔ در حقیقت ایسا نہیں ہے۔ کارتیسی محدد میں x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل بالکل ویسا ہی ہے جیسے y یا z سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل۔ اسی طرح x محدد سے کسی زاویے پر سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتا میدان بھی بالکل اسی طرح حل ہو گا۔ یوں کارتیسی محدد میں کسی بھی سمت میں تبدیل ہوتے میدان اور x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کے حل بالکل ایک جیسے ہوں گے لہٰذا کارتیسی محدد میں صرف ایک مسئلہ حل کرنا درکار ہے۔ نلکی محدد میں z محدد کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو ہم کارتیسی محدد میں دیکھ لیں گے لہٰذا یہاں کل دو مسئلے حل کرنا درکار ہے جبکہ کروی محدد میں بھی دو مسئلے پائے جاتے ہیں۔ آئیں ان تمام کو باری باری حل کریں۔

مثال 6.1: تصور کریں کہ V صرف x محدد کے ساتھ تبدیل ہوتی ہو۔ دیکھتے ہیں کہ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات کا حل کیا ہو گا۔ اس پر بعد میں غور کریں گے کہ حقیقت میں ایسی کون سی صورت ہو گی کہ V صرف x محدد کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0$$

شکل اختیار کرے گا۔ چونکہ V کی قیمت صرف x پر منحصر ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کو

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}=0$$

لکھا جا سکتا ہے۔ پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=A$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوبارہ تکمل لیتے ہوئے

$$V=Ax+B \tag{6.14}$$

حاصل ہوتا ہے جو لاپلاس مساوات کا حل ہے۔ یہ کسی بھی سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتے برقی دباو کے مسئلے کو ظاہر کرتا ہے جہاں اس لکیر کو x کہا جائے گا۔ A اور B دو درجی تکمل کے مستقل ہیں جن کی قیمتیں سرحدی شرائط کی مدد سے حاصل کی جاتی ہیں۔

آئیں مساوات 6.14 کا مطلب سمجھیں۔ اس کے مطابق برقی دباو کا دارومدار صرف x پر ہے جبکہ y اور z کا اس کی قیمت پر کوئی اثر نہیں۔ x کی کسی بھی قیمت پر یعنی $x=x_0$ سطح پر V کی قیمت اٹل ہو گی۔ ایسی ہم قوہ سطحیں x محدد کے عمودی ہوں گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 6.14 یہ متوازی چادر کپیسٹر کا حل ہے۔

ہم ایسے کپیسٹر کے دونوں چادروں پر برقی دباو اور چادروں کا x محدد پر مقام بیان کرتے ہوئے A اور B کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں اگر کپیسٹر کی پہلی چادر x_1 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباو V_1 ہے اور اسی طرح دوسری چادر x_2 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباو V_2 ہے تب

$$\begin{aligned}V_1&=Ax_1+B\\V_2&=Ax_2+B\end{aligned}$$

ہو گا جس سے

$$A = \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2}$$
$$B = \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں چادروں کے درمیان

$$V = \left(\frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2}\right) x + \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2} \tag{6.15}$$

ہو گا۔

اگر ہم پہلی چادر کو $x = 0$ اور دوسری چادر کو d پر تصور کرتے جبکہ اسی ترتیب سے ان کی برقی دباو کو صفر اور V_0 کہتے تب ہمیں

$$V = \frac{V_0 x}{d} \tag{6.16}$$

حاصل ہوتا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔

باب 5 میں ہم نے سطحی چارج کثافت سے بالترتیب برقی میدان، برقی دباو اور کپیسٹنس حاصل کئے۔موجودہ باب میں ہم پہلے لاپلاس کے مساوات کے حل سے برقی دباو حاصل کرتے ہیں۔برقی دباو سے میدان بذریعہ $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ اور بہاو بذریعہ $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہوئے سطحی چارج کثافت حاصل کرتے ہیں جو عمودی بہاو کے برابر ہے۔سطحی چارج کثافت سے سطح پر کل چارج حاصل کرتے ہوئے $C = \frac{Q}{V}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ان اقدام کو بالترتیب دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

- لاپلاس مساوات حل کرتے ہوئے برقی دباو V حاصل کریں۔
- تکمل کے سرحدی شرائط سے تکمل کے مستقل کی قیمتیں حاصل کریں۔
- برقی دباو سے برقی میدان اور برقی بہاو بذریعہ $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔
- کپیسٹر کے کسی ایک چادر پر برقی بہاو کی قیمت $\boldsymbol{D}_S = D_n \boldsymbol{a}_N$ حاصل کریں جو سطح کے عمودی ہو گا۔
- چونکہ سطح پر سطحی چارج کثافت اور عمودی برقی بہاو برابر ہوتے ہیں لہٰذا $\rho_S = D_n$ ہو گا۔مثبت چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاو کا موصل چادر سے اخراج جبکہ منفی چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاو کا چادر میں دخول ہو گا۔
- سطح پر چارج بذریعہ سطحی تکمل حاصل کریں۔
- کپیسٹنس $C = \frac{Q}{V}$ ہو گا۔

آئیں ان اقدام کو موجودہ مثال پر لاگو کریں۔

چونکہ موجودہ مثال میں مساوات 6.16 کے تحت

$$V = \frac{V_0 x}{d}$$

ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$

اور

$$\boldsymbol{D} = -\epsilon\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$

چونکہ بہاو کی سمت مثبت سے منفی چادر کی جانب ہوتی ہے لہٰذا مثبت چادر $x = d$ پر جبکہ منفی چادر $x = 0$ پر ہے۔ مثبت چادر پر

$$\boldsymbol{D}_S = \boldsymbol{D}\bigg|_{x=d} = -\epsilon\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$

کے برابر ہے۔ چونکہ مثبت چادر کا

$$\boldsymbol{a}_N = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$$

ہے لہٰذا برقی بہاو چادر سے خارج ہو رہا ہے۔ یوں

$$\rho_S = \epsilon\frac{V_0}{d}$$

ہو گا۔ اگر چادر کی سطح کا رقبہ S ہو تب

$$Q = \int_S \rho_S \,\mathrm{d}S = \int \epsilon\frac{V_0}{d}\,\mathrm{d}S = \frac{\epsilon V_0 S}{d}$$

ہو گا جس سے

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 152 پر مساوات 5.58 یہی جواب دیتا ہے۔

اگر مندرجہ بالا مثال میں کپیسٹر کو y یا z محدد پر رکھا جاتا تو کپیسٹنس کی قیمت یہی حاصل ہوتی لہٰذا کارتیسی محدد کے لئے ایک مثال حل کر لینا کافی ہے۔ نلکی محدد میں z کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کو حل کرنے سے کوئی نئی بات سامنے نہیں آتی۔ یہ بالکل کارتیسی محدد کے مثال کی طرح ہی ہے لہٰذا ہم باری باری ρ اور ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کے مسئلے حل کرتے ہیں۔

مثال 6.2: اس مثال میں صرف ρ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو پر غور کرتے ہیں۔ ایسی صورت میں لاپلاس کی مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = 0$$

یا

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \tag{6.17}$$

صورت اختیار کر لے گی۔یوں یا

$$\frac{1}{\rho}=0$$

ہو گا جس سے

$$\rho=\infty \tag{6.18}$$

حاصل ہوتا ہے اور یا

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \tag{6.19}$$

ہو گا۔اس تفرقی مساوات کو بار بار تکمل لے کر حل کرتے ہیں۔پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}=A$$

یا

$$\mathrm{d}V=A\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسری بار تکمل سے

$$V=A\ln\rho+B$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ ہم قوہ سطحیں نلکی شکل کے ہیں۔یوں یہ مساوات محوری تار کا برقی دباو دیتی ہے۔ہم محوری تار کے بیرونی تار $\rho=b$ کو برقی زمین اور اندرونی تار $\rho=a$ کو V_0 برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے

$$V=V_0\frac{\ln\frac{b}{\rho}}{\ln\frac{b}{a}} \tag{6.20}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی شکل کے چارج سے لامحدود فاصلے پر برقی دباو صفر ہی ہوتا ہے۔اسی وجہ سے ہم لامحدود فاصلے کو ہی برقی زمین کہتے آرہے ہیں۔یوں لاپلاس مساوات کا پہلا حل یعنی مساوات 6.18 ہمارے امید کے عین مطابق ہے۔

مساوات 6.20 کو لے کر آگے بڑھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=\frac{V_0}{\rho}\frac{1}{\ln\frac{b}{a}}\boldsymbol{a}_\rho$$

اور

$$D_n=D\bigg|_{\rho=a}=\frac{\epsilon V_0}{a\ln\frac{b}{a}}$$

$$Q=\frac{\epsilon V_0 2\pi a L}{a\ln\frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$C=\frac{2\pi\epsilon L}{\ln\frac{b}{a}} \tag{6.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 152 پر مساوات 5.59 یہی جواب دیتا ہے۔ 1807

مساوات 6.17 کو ρ سے ضرب دینے سے بھی مساوات 6.19 حاصل ہوتا ہے۔ البتہ یہ ضرب صرف اور صرف اس صورت ممکن ہے جب $\rho\neq 0$ ہو۔ یاد رہے کہ $\rho=0$ کی صورت میں $\frac{\rho}{\rho}=\frac{0}{0}$ ہو گا جو غیر معین[6] ہے۔ یوں مساوات 6.20 صرف اس صورت مساوات 6.19 کا حل ہو گا اگر $\rho\neq 0$ ہو۔ ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا حل

$$V=V_0\frac{\ln\frac{b}{\rho}}{\ln\frac{b}{a}}\qquad \rho\neq 0 \tag{6.22}$$

لکھنا زیادہ درست ہو گا۔ 1808

1809

1810

مثال 6.3: اب تصور کرتے ہیں کہ برقی دباو نلکی محدد کے متغیرہ ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ اس صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0$$

صورت اختیار کرے گا۔ یہاں بھی پہلا حل $\rho=\infty$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم یہاں بھی $\rho=0$ کو جواب کا حصہ تصور نہ کرتے ہوئے مساوات کو ρ^2 سے ضرب دیتے ہوئے اس سے جان چھڑاتے ہیں۔ یوں

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\phi^2}=0\qquad \rho\neq 0$$

رہ جاتا ہے۔ دو مرتبہ تکمل لینے سے

$$V=A\phi+B$$

حاصل ہوتا ہے۔ ایسی دو ہم قوہ سطحیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\rho=0$ کی صورت میں دونوں چادر آپس میں مل جائیں گی اور ان پر مختلف برقی دباو ممکن نہ ہو گا۔ یوں $\rho=0$ قابل قبول جواب نہیں ہے۔ یہاں $\phi=0$ کو برقی زمین جبکہ $\phi=\phi_0$ پر V_0 برقی دباو کی صورت میں

$$V=\frac{V_0\phi}{\phi_0}\qquad \rho\neq 0 \tag{6.23}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس سے

$$\boldsymbol{E}=-\frac{V_0}{\phi_0\rho}\boldsymbol{a}_\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان چادروں کے کپیسٹنس کا حصول آپ سے حاصل کرنے کو سوال میں کہا گیا ہے۔ 1811

---

undefined[6]

مثال 6.4: کروی محدد میں ϕ کے ساتھ تبدیلی کو مندرجہ بالا مثال میں دیکھا گیا لہٰذا اسے دوبارہ حل کرنے کی ضرورت نہیں۔ ہم پہلے r اور بعد میں θ کے ساتھ تبدیلی کے مسئلوں کو دیکھتے ہیں۔

یہ زیادہ مشکل مسئلہ نہیں ہے لہٰذا آپ ہی سے سوالات کے حصے میں درخواست کی گئی ہے کہ اسے حل کرتے ہوئے برقی دباو کی مساوات

$$V = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \tag{6.24}$$

اور کپیسٹنس کی مساوات

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \tag{6.25}$$

حاصل کریں جہاں $r = b$ پر برقی زمین اور $r = a$ پر V_0 برقی دباو ہے اور $b > a$ ہے۔

مثال 6.5: کروی محدد میں θ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} \right) = 0 \tag{6.26}$$

صورت اختیار کرے گی۔ اگر $r \neq 0$ اور $\sin\theta \neq 0$ ہوں تب اس مساوات کو $r^2 \sin\theta$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} \right) = 0 \tag{6.27}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $\sin\theta$ اس صورت صفر کے برابر ہو گا جب $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ ہوں۔ اس کے پہلی بار تکمل سے

$$\sin\theta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = A$$

یا

$$\mathrm{d}V = \frac{A\,\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسری بار تکمل سے

$$V = A \int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} + B = A \ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + B \tag{6.28}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ ہم قوہ سطحیں مخروطی شکل رکھتے ہیں۔اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ پر $V = 0$ اور $\theta = \theta_0$ پر $V = V_0$ ہوں جہاں $\frac{\pi}{2} > \theta_0$ ہے تب ہمیں

$$V = V_0 \frac{\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}{\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)} \tag{6.29}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آئیں ایسی مخروط اور سیدھی سطح کے مابین کپیسٹنس حاصل کریں جہاں مخروط کی نوک سے انتہائی باریک فاصلے پر سیدھی سطح ہو اور مخروط کا محور اس سطح کے عمود میں ہو۔پہلے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta = -\frac{V_0}{r\sin\theta\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}\boldsymbol{a}_\theta \tag{6.30}$$

مخروط کی سطح پر سطحی چارج کثافت یوں

$$\rho_S = D_n = -\frac{\epsilon V_0}{r\sin\theta_0\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

ہو گا جس سے اس پر چارج

$$Q = -\frac{\epsilon V_0}{\sin\theta_0\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{r\sin\theta_0\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{r}$$

ہو گا۔تکمل میں رداس کا حد لامحدود ہونے کی وجہ سے چارج کی قیمت بھی لامحدود حاصل ہوتی ہے جس سے لامحدود کپیسٹنس حاصل ہو گا۔حقیقت میں محدود جسامت کے سطحیں ہی پائی جاتی ہیں لہٰذا ہم رداس کے حدود 0 تا r_1 لیتے ہیں۔ایسی صورت میں

$$C = \frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln\left(\cot\frac{\theta_0}{2}\right)} \tag{6.31}$$

حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ ہم نے لامحدود سطح سے شروع کیا تھا لہٰذا چارج کی مساوات بھی صرف لامحدود سطح کے لئے درست ہے۔اس طرح مندرجہ بالا مساوات کپیسٹنس کی قریبی قیمت ہو گی ناکہ بالکل درست قیمت۔

6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال

پوئسن مساوات تب حل کیا جا سکتا ہے جب ρ_h معلوم ہو۔حقیقت میں عموماً سرحدی برقی دباو وغیرہ معلوم ہوتے ہیں اور ہمیں ρ_h ہی درکار ہوتی ہے۔ہم پوئسن مساوات حل کرنے کی خاطر ایسی مثال لیتے ہیں جہاں ہمیں ρ_h معلوم ہو۔

سلیکان[7] کی پتری میں p اور n اقسام کے مواد کی ملاوٹ سے p اور n سلیکان پیدا کیا جاتا ہے۔ایک ہی سلیکان پتری پر آپس میں جڑے ہوئے p اور n خطے ڈایوڈ[8] کو جنم دیتے ہیں۔x محدد پر رکھے ایسے ہی ایک ڈایوڈ کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔تصور کریں کہ $x < 0$ خطہ p اور $x > 0$ خطہ n قسم کا ہے۔مزید یہ

---

[7] silicon
[8] diode

کہ دونوں جانب ملاوٹ کی مقدار یکساں ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ p یا n خطہ از خود غیر چارج شدہ ہوتا ہے البتہ p خطے میں آزاد خول[9] اور n خطے میں آزاد الیکٹران[10] پائے جاتے ہیں۔ آزاد خول اور آزاد الیکٹران حرکت کر سکتے ہیں۔ جس لمحہ یہ آپس میں جڑے خطے وجود میں آتے ہیں، اس وقت آزاد خول صرف p جانب جبکہ آزاد الیکٹران صرف n جانب پائے جاتے ہیں۔ یوں اس لمحے ہی آزاد خول p سے n جانب اور آزاد الیکٹران n سے p جانب نفوذ[11] کے ذریعے حرکت کرنا شروع کر دیتے ہیں۔ چارج کے اس حرکت سے جلد p اور n کے سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کا چارج جمع ہونے شروع ہو جاتا ہے۔ یوں دو چادر کپیسٹر پر چارج کی طرح، سرحد کے دائیں یعنی $x > 0$ جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج جمع ہو جاتا ہے۔ یہ چارج کپیسٹر کے چادروں کے درمیان برقی میدان کی طرح $\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ پیدا کرتا ہے جو بائیں سے دائیں جانب آزاد خول کے حرکت اور دائیں سے بائیں جانب آزاد الیکٹران کے حرکت کو روکتا ہے۔ جب تک برقی میدان $\boldsymbol{E}$ چارج کے اس حرکت کو نہ روک سکے اس وقت تک چارج کا نفوذ جاری رہے گا جس سے سرحد کے دونوں جانب چارج کا انبار بڑھتا رہے گا جس سے $\boldsymbol{E}$ بڑھتی رہے گی۔ آخر کار $\boldsymbol{E}$ کی قیمت اتنی ہو جائے گی کہ یہ نفوذ کو مکمل طور پر روک دے گا۔ آئیں برقی سکون کے اس حال پر غور کریں۔ ابتدا میں p اور n خطے دونوں غیر چارج شدہ تھے البتہ برقی سکون کی حالت اختیار کرنے کے بعد صاف ظاہر ہے کہ سرحد کے دائیں جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج پایا جاتا ہے۔ سرحد کے دائیں جانب مثبت چارج دو وجوہات کی بنا ہے۔ کچھ تو آزاد خول اس جانب منتقل ہوئے ہیں اور کچھ یہاں سے آزاد الیکٹران کی نفوذ سے مثبت ایٹم یہاں رہ گئے ہیں۔ اسی طرح سرحد کے دوسری جانب منفی چارج کچھ تو آزاد الیکٹران کی آمد اور کچھ یہاں سے آزاد خول کے اخراج سے منفی ایٹموں کے رہ جانے کی وجہ سے ہے۔ سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کے چارج میں قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں سرحد کے قریب ہی رکھتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب چارج کے انبار کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس طرح کے انبار کو کئی مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے جن میں غالباً سب سے سادہ مساوات

$$\rho = 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} \tag{6.32}$$

ہے جہاں زیادہ سے زیادہ چارج کثافت ρ_0 ہے جو $x = 0.881a$ پر پائی جاتی ہے۔ آئیں اس چارج کثافت کے لئے پوئسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

حل کریں۔ پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} + A$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} - A$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ تکمل کے مستقل A کی قیمت اس حقیقت سے حاصل کی جا سکتی ہے کہ سرحد سے دور کسی قسم کا چارج کثافت یا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہٰذا $x \to \mp\infty$ پر $E_x \to 0$ ہو گا جس سے $A = 0$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -\frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tag{6.33}$$

کے برابر ہے۔ دوسری بار تکمل لیتے ہوئے

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} + B$$

[9] free holes
[10] free electrons
[11] diffusion

حاصل ہوتا ہے۔ ہم برقی زمین کو عین سرحد پر لیتے ہیں۔ ایسا کرنے سے $B = -\frac{\rho_0 a^2 \pi}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon}\left(\tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{6.34}$$

کے برابر ہو گا۔

شکل میں مساوات 6.32، مساوات 6.33 اور مساوات 6.34 دکھائے گئے ہیں جو بالترتیب حجمی چارج کثافت، برقی میدان کی شدت اور برقی دباو دیتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب کے مابین برقی دباو V_0 کو مساوات 6.34 کی مدد سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$V_0 = V_{x\to+\infty} - V_{x\to-\infty} = \frac{2\pi\rho_0 a^2}{\epsilon} \tag{6.35}$$

سرحد کے ایک جانب کل چارج کو مساوات 6.32 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں کل مثبت چارج

$$Q = S\int_0^\infty 2\rho_0 \operatorname{sech}\frac{x}{a}\tanh\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = 2\rho_0 a S \tag{6.36}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ڈایوڈ کا رقبہ عمودی تراش[12] S ہے۔ مساوات 6.35 سے a کی قیمت مساوات 6.36 میں پر کرنے سے

$$Q = S\sqrt{\frac{2\rho_0\epsilon V_0}{\pi}} \tag{6.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات سے کپیسٹنس کی قیمت $C = \frac{Q}{V_0}$ لکھ کر نہیں حاصل کی جا سکتی البتہ

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}t}$$

سے

$$C = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V_0}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 6.37 کا تفرق لیتے ہوئے

$$C = \sqrt{\frac{\rho_0\epsilon}{2\pi V_0}}\,S = \frac{\epsilon S}{2\pi a}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے پہلے جزو سے ظاہر ہے کہ برقی دباو بڑھانے سے کپیسٹنس کم ہو گی۔ مساوات کے دوسرے جزو سے یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ ڈایوڈ بالکل ایسے دو چادر کپیسٹر کی طرح ہے جس کے چادر کا رقبہ S اور چادروں کے مابین فاصلہ $2\pi a$ ہو۔ یوں برقی دباو سے کپیسٹنس کے گھٹنے کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ برقی دباو بڑھانے سے a بڑھتا ہے۔

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل

گزشتہ حصے میں صرف ایک محدد کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کے لاپلاس مساوات پر غور کیا گیا۔ اس حصے میں ایسے میدان پر غور کیا جائے گا جہاں برقی دباو ایک سے زیادہ محدد کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ تصور کریں کہ V کارتیسی محدد کے x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{6.38}$$

[12] cross sectional area

صورت اختیار کرے گا۔ تصور کریں کہ ایسی مساوات کے حل کو دو تفاعل $X(x)$ اور $Y(y)$ کے حاصل ضرب $X(x)Y(y)$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جہاں X تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف x اور Y تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف y ہو۔ یہاں آپ کو ایسا معلوم ہو رہا ہو گا کہ یہ شرط زیادہ تر ممکنہ جوابات کو پہلے سے ہی رد کرتا ہے۔ ایسا ہی ایک سادہ حل $V = x + y$ اور دوسرا نسبتاً مشکل حل $V = G(x) + H(y)$ ہو سکتے ہیں جنہیں ہم انجانے طور پر رد کر رہے ہو سکتے ہیں۔ ہم $V = x + y$ کو $V = V_1 + V_2$ لکھ سکتے ہیں جہاں

$$
\begin{aligned}
V_1 &= X_1(x)Y_1(y) = 1x \\
V_2 &= X_2(x)Y_2(y) = 1y
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $Y_1(y) = 1$ اور $X_2(x) = 1$ کے برابر ہیں۔ یوں ہم دیکھتے ہیں کہ ہم x کو دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں اور اسی 1847 طرح y کو بھی دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔ لاپلاس مساوات خطی ہونے کی بنا پر ان جوابات کا مجموعہ $x + y$ بھی لاپلاس مساوات کا حل ہو گا۔ 1848 یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہم نے $V = x + y$ جواب کو ہرگز رد نہیں کیا۔ ایسے ہی ثبوت سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $V = G(x) + H(y)$ جواب کو بھی رد 1849 نہیں کیا گیا۔

1850

اب آتے ہیں اصل مسئلے پر۔ اگر $V = XY$ مساوات 6.38 کا حل ہو تب

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

ہو گا جسے

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \tag{6.39}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہاں آنکھیں کھول دینے والی دلیل پیش کرتے ہیں۔ مساوات 6.39 میں بائیں جانب صرف x متغیرہ پایا جاتا ہے جبکہ دائیں جانب صرف y متغیرہ پایا جاتا ہے۔ یوں x تبدیل کرنے سے صرف بائیاں ہاتھ تبدیل ہو سکتا ہے جبکہ دایاں ہاتھ جوں کا توں رہے گا۔ اب مساوات کہتا ہے کہ بائیں اور دائیں ہاتھ برابر ہیں۔ ایسا صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا کہ نا تو x تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو اور نا ہی y تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو یعنی اگر دونوں ہاتھ کسی مستقل کے برابر ہوں جہاں اس مستقل کو m^2 لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ m^2 کو علیحدگی مستقل[13] کہا جاتا ہے۔

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = m^2 \tag{6.40}$$

اس مساوات کو دو اجزاء

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} &= m^2 \\
\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} &= -m^2
\end{aligned}
$$

یا

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - m^2 X(x) &= 0 \\
\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + m^2 Y(y) &= 0
\end{aligned}
\tag{6.41}
$$

1851 کی صورت میں لکھتے ہوئے باری باری حل کرتے ہیں۔

[13] separation constant

اس طرز کے مساوات آپ پہلے حل کر چکے ہوں گے جہاں جواب اندازے سے لکھتے ہوئے مساوات کو حل کیا جاتا ہے۔اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں

$$X(x) = e^{\omega x}$$

پر کرتے ہیں۔یوں $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \omega^2 e^{\omega x}$ ہو گا لہٰذا

$$\omega^2 e^{\omega x} - m^2 e^{\omega x} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے

$$\omega = \mp m$$

حاصل ہو گا۔ω کے دونوں قیمتیں استعمال کرتے ہوئے یوں اصل جواب

$$X(x) = A' e^{mx} + B' e^{-mx} \tag{6.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا جواب اسی طرح

$$Y(y) = C \cos my + D \sin my \tag{6.43}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 6.38 کا پورا حل

$$V = XY = \left(A' e^{mx} + B' e^{-mx} \right) (C \cos my + D \sin my) \tag{6.44}$$

لکھا جائے گا۔

آئیں مساوات 6.41 کے حل کو ایک مرتبہ دوبارہ حاصل کریں۔البتہ اس مرتبہ جواب کا اندازہ لگانے کی بجائے ہم ایک ایسی ترکیب استعمال کریں گے جو انتہائی زیادہ طاقتور ثابت ہو گا اور جو آگے بار بار استعمال آئے گا۔

اس ترکیب میں ہم تصور کرتے ہیں کہ $X(x)$ تفاعل کو طاقتی سلسلے[14]

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \tag{6.45}$$

کی شکل میں لکھنا ممکن ہے جہاں a_0، a_1، a_2 وغیرہ طاقتی سلسلے کے مستقل ہیں۔یوں

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 + a_1 + 2a_2 x^1 + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

اور

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 + 0 + 2 \times 1 a_2 + 3 \times 2 a_3 x^1 + 4 \times 3 a_4 x^2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{6.46}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔مساوات 6.45 اور مساوات 6.46 کو مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں پر کرتے ہیں

$$2 \times 1 a_2 + 3 \times 2 a_3 x^1 + 4 \times 3 a_4 x^2 + \cdots = m^2 \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \right)$$

[14] power series

جہاں ہم $m^2 X$ کو دائیں ہاتھ لے گئے ہیں۔ یہاں بائیں اور دائیں ہاتھ کے طاقتی سلسلے صرف اس صورت x کے ہر قیمت کے لئے برابر ہو سکتے ہیں جب دونوں جانب x کے برابر طاقت کے ضربیہ[15] عین برابر ہوں یعنی جب

$$\begin{aligned}
2 \times 1 a_2 &= m^2 a_0 \\
3 \times 2 a_3 &= m^2 a_1 \\
4 \times 3 a_4 &= m^2 a_2
\end{aligned}$$

یا

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = m^2 a_n$$

ہوں۔ جفت ضربیہ کو a_0 کی صورت میں یوں

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{m^2}{2 \times 1} a_0 \\
a_4 &= \frac{m^2}{4 \times 3} a_2 = \left(\frac{m^2}{4 \times 3}\right)\left(\frac{m^2}{2 \times 1} a_0\right) = \frac{m^4}{m!} a_0 \\
a_6 &= \frac{m^6}{6!} a_0
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے عمومی طور پر

$$a_n = \frac{m^n}{n!} a_0 \qquad (\text{جفت } n)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ طاق ضربیہ کو a_1 کی صورت میں

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{m^2}{3 \times 2} a_1 = \frac{m^3}{3!} \frac{a_1}{m} \\
a_5 &= \frac{m^5}{5!} \frac{a_1}{m}
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ان کی عمومی مساوات

$$a_n = \frac{m^n}{n!} \frac{a_1}{m} \qquad (\text{طاق } n)$$

لکھی جا سکتی ہے۔ انہیں واپس طاقتی سلسلے میں پر کرتے ہوئے

$$X = a_0 \sum_{0, \text{جفت}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n + \frac{a_1}{m} \sum_{1, \text{طاق}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n$$

یا

$$X = a_0 \sum_{0, \text{جفت}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} + \frac{a_1}{m} \sum_{1, \text{طاق}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!}$$

حاصل ہوتا ہے۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مندرجہ بالا مساوات میں پہلا طاقتی سلسلہ دراصل $\cosh mx$ کے برابر

$$\cosh mx = \sum_{0, \text{جفت}}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} = 1 + \frac{(mx)^2}{2!} + \frac{(mx)^4}{4!} + \cdots$$

[15] coefficient

اور دوسرا طاقتی سلسلہ $\sinh mx$

$$\sinh mx = \sum_{1,\text{طاق}}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n = mx + \frac{(mx)^3}{3!} + \frac{(mx)^5}{5!} + \cdots$$

کے برابر ہے۔ یوں

$$X = a_0 \cosh mx + \frac{a_1}{m} \sinh mx$$

یا

$$X = A \cosh mx + B \sinh mx$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں a_0 اور $\frac{a_1}{m}$ یا ان کی جگہ لکھے گئے A اور B کو سرحدی شرائط سے حاصل کیا جائے گا۔

$\cosh mx$ اور $\sinh mx$ کو

$$\cosh mx = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}$$
$$\sinh mx = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2}$$

لکھ کر

$$X = A' e^{mx} + B' e^{-mx}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں A' اور B' دو نئے مستقل ہیں۔ یہ مساوات 6.42 ہی ہے۔

اسی طاقتی سلسلے کے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل بھی دو طاقتی سلسلوں کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے جہاں ایک طاقتی سلسلہ $\cos my$ اور دوسرا $\sin my$ کے برابر ہوتا ہے۔ یوں

$$Y = C \cos my + D \sin my \tag{6.47}$$

لکھا جا سکتا ہے جو عین مساوات 6.43 ہی ہے۔ یوں

$$V = XY = (A \cosh mx + B \sinh mx)\left(C \cos my + D \sin my\right) \tag{6.48}$$

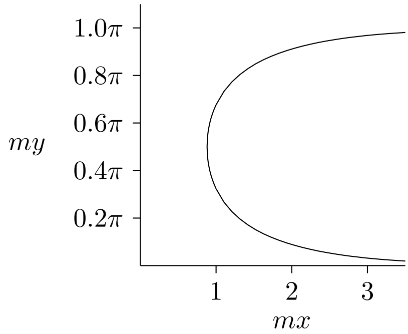
یا

$$V = XY = \left(A' e^{mx} + B' e^{-mx}\right)\left(C \cos my + D \sin my\right) \tag{6.49}$$

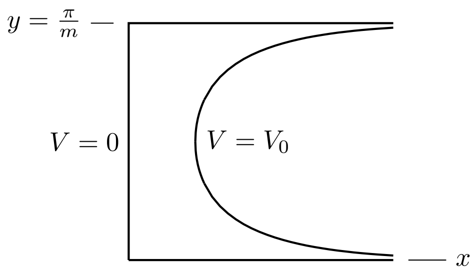
حاصل ہوتا ہے۔ اس آخری مساوات کا مساوات 6.44 کے ساتھ موازنہ کریں۔

مساوات 6.48 میں کل چار مستقل پائے جاتے ہیں جنہیں سرحدی شرائط سے حاصل کیا جاتا ہے۔ آئیں ان مستقل کو دو مختلف سرحدی شرائط کے لئے حاصل کریں۔ پہلی صورت میں بجائے یہ کہ سرحدی شرائط سے ان مستقل کو حاصل کریں، ہم مستقل پہلے چنتے ہیں اور بعد میں ان چنے گئے مستقل کے مطابق سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں۔

تصور کریں کہ مساوات 6.48 میں A اور B دونوں یا C اور D دونوں صفر کے برابر ہیں۔ ایسی صورت میں $V = 0$ حاصل ہو گا جو برقی دباو کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ ہمیں عموماً برقی دباو کی موجودگی سے زیادہ دلچسپی ہوتی ہے۔ آئیں ایک اور صورت دیکھیں۔



شکل 6.1: $my = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sinh mx}\right)$ کی مساوات۔



شکل 6.2: ہم قوہ سطحیں اور ان پر برقی دباو۔

تصور کریں کہ A اور C صفر کے برابر ہے۔ایسی صورت میں مساوات 6.48 کو

$$V = V_0 \sinh mx \sin my \tag{6.50}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $BD = V_0$ لکھا گیا ہے۔چونکہ

$$\sinh mx = \frac{1}{2}\left(e^{mx} - e^{-mx}\right)$$

ہے لہٰذا $x = 0$ پر $\sinh mx = 0$ ہو گا جبکہ بڑھتے x کے ساتھ اس کی قیمت تقریباً e^{mx} کے تعلق سے بڑھتی ہے۔$\sin my$ کی قیمت $y = 0$، $y = \frac{\pi}{m}$، $y = \frac{2\pi}{m}$ وغیرہ پر صفر کے برابر ہو گی۔یوں صفر برقی دباو کے ہم قوہ سطحیں $x = 0$ اور $y = \frac{n\pi}{m}$ پر رکھی جا سکتیں ہیں جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہو سکتا ہے۔ہم ایسی ہم قوہ سطحیں $x = 0$، $y = 0$ اور $y = \frac{\pi}{m}$ پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔آخر میں V_0 ہم قوہ سطح مساوات 6.50 میں $V = V_0$ پر کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$V_0 = V_0 \sinh mx \sin my$$

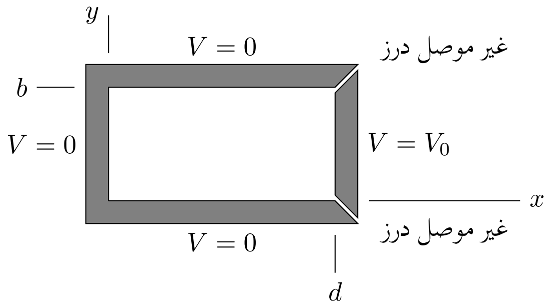
یا

$$my = \sin^{-1}\frac{1}{\sinh mx}$$

x کے مختلف قیمتوں کے لئے اس مساوات سے y کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے اس مساوات کے خط کو شکل 6.1 میں کھینچا گیا ہے۔

ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے موصل ہم قوہ سطحیں شکل 6.2 میں دکھائی گئی ہیں۔یہ سطحیں z محدد کی سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں اور ان سے پیدا برقی دباو مساوات 6.50 دیتا ہے۔

ہم نے لاپلاس مساوات کے حل یعنی مساوات 6.50 کو لیتے ہوئے ان ہم قوہ سطحوں کو دریافت کیا جو ایسی برقی دباو پیدا کرے گی۔حقیقت میں عموماً موصل ہم قوہ سطحیں معلوم ہوں گی جن کا پیدا کردہ برقی دباو درکار ہو گا۔آئیں ایسی ایک مثال دیکھیں۔



شکل 6.3: موصل سطحوں سے گھیرے خطے میں لاپلاس مساوات متعدد اجزاء کے مجموعے سے حاصل ہوتا ہے۔

شکل 6.3 میں موصل سطحیں اور ان پر برقی دباو دیا گیا ہے۔ یہ سطحیں z سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں۔ سطحوں کے گھیرے خطے میں برقی دباو حاصل کرنا درکار
1869 ہے۔

یہاں سرحدی شرائط کچھ یوں ہیں۔ $x = 0$، $y = 0$ اور $y = b$ پر برقی دباو صفر ہے جبکہ $x = d$ پر برقی دباو V_0 ہے۔ دونوں ہم قوہ سطحوں کے مابین
1871 انتہائی باریک غیر موصل درز ہیں جن کی بنا پر ان کے برقی دباو مختلف ہو سکتے ہیں۔ ان درز کے اثر کو نظر انداز کیا جائے گا۔

موجودہ مسئلے میں بھی برقی دباو صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لہٰذا مساوات 6.38 ہی اس مسئلے کا لاپلاس مساوات ہے جس کا حل مساوات 6.48 ہے۔ ہم سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 6.38 میں $x = 0$ پر برقی دباو صفر پر کرنے سے

$$
\begin{aligned}
0 &= (A\cosh 0 + B\sinh 0)\left(C\cos my + D\sin my\right)\\
0 &= A\left(C\cos my + D\sin my\right)
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ y کے تمام قیمتوں کے لئے یہ مساوات صرف

$$A = 0$$

کی صورت میں درست ہو سکتا ہے لہٰذا پہلا مستقل صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ $y = 0$ پر صفر برقی دباو پر کرنے سے

$$
\begin{aligned}
0 &= B\sinh mx\,(C\cos 0 + D\sin 0)\\
0 &= BC\sinh mx
\end{aligned}
$$

لکھا جائے گا جو x کی ہر قیمت کے لئے صرف $BC = 0$ کی صورت میں درست ہو گا۔ اب چونکہ $A = 0$ ہے لہٰذا B صفر نہیں ہو سکتا چونکہ ایسی صورت میں مساوات 6.38 سے برقی دباو صفر حاصل ہو گا۔ یہ جواب ہمیں مطلوب نہیں ہے۔ ہم وہ جواب چاہتے ہیں جس سے برقی دباو کے بارے میں علم حاصل ہو۔ اس لئے $C = 0$ کے برابر ہے۔ اس طرح مساوات 6.48

$$V = BD\sinh mx\sin my \tag{6.51}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ اس مساوات میں $y = b$ پر صفر برقی دباو پر کرتے ہیں۔

$$0 = BD\sinh mx\sin mb$$

ہم B یا D کو صفر کے برابر نہیں لے سکتے چونکہ ایسی صورت میں $V = 0$ جواب حاصل ہوتا ہے جس میں ہمیں کوئی دلچسپی نہیں۔ یہ مساوات x کی ہر قیمت کے لئے صرف اس صورت درست ہو گا اگر

$$\sin mb = 0$$

ہو جس سے

$$mb = n\pi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

کے برابر ہو سکتا ہے۔اس طرح $m = \frac{n\pi}{b}$ لکھتے ہوئے مساوات 6.51

$$V = V_1 \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.52}$$

صورت اختیار کر لے گا جہاں BD کو V_1 لکھا گیا ہے۔مساوات 6.52 تین اطراف کے سطحوں پر صفر برقی دباو کے شرائط پر پورا اترتا حل ہے۔البتہ $x = d$ پر V_0 برقی دباو کے شرط کو مندرجہ بالا مساوات سے پورا کرنا ممکن نہیں۔ہمیں عموماً بالکل اسی طرز کے مسئلوں سے واسطہ پڑتا ہے جہاں آخری قدم پر معلوم ہوتا ہے کہ ہماری قمر دیوار کے ساتھ لگ گئی ہے جہاں سے ظاہری طور پر نکلنے کا کوئی راستہ نہیں۔گھبرائیں نہیں۔ہمیں در پیش مسئلے کے تمام ممکنہ جوابات کو مساوات 6.52 کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں ان تمام جوابات کا مجموعہ بھی قابل قبول حل ہو گا یعنی ہم

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad (0 < y < b, n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{6.53}$$

بھی لکھ سکتے ہیں جہاں n کی ہر قیمت پر منفرد V_1 کو V_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔n اور V_n کی قیمتیں ایسی رکھی جاتی ہیں کہ $x = d$ پر V_0 برقی دباو کے شرط کو پورا کیا جائے۔اس آخری شرط کو مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi d}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

یعنی

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.54}$$

ملتا ہے جہاں

$$c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$$

1872 لکھا گیا ہے۔

مساوات 6.54 فوریئر تسلسل[16] ہے جس کے مستقل با آسانی حاصل کئے جا سکتے ہیں۔چونکہ ہمیں $0 < y < b$ کے خطے سے غرض ہے لہٰذا اس خطے کے باہر ہمیں برقی دباو سے کوئی غرض نہیں۔ایسی صورت میں ہم فوریئر تسلسل کے طاق یا جفت جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔طاق جوابات اس صورت حاصل ہوں گے اگر ہم $0 < y < b$ کو آدھا میعاد تصور کرتے ہوئے بقایا آدھے میعاد $b < y < 2b$ پر برقی دباو کو $-V_0$ تصور کریں یعنی

$$\begin{aligned} V &= +V_0 \qquad (0 < y < b) \\ V &= -V_0 \qquad (b < y < 2b) \end{aligned}$$

اسی صورت میں فوریئر تسلسل کے مستقل

$$c_n = \frac{1}{b}\left[\int_0^b V_0 \sin \frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}y + \int_b^{2b} (-V_0) \sin \frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}y\right]$$

---

[16] Fourier series

سے

$$c_n = \frac{4V_0}{n\pi} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots)$$
$$c_n = 0 \qquad (n = 2, 4, 6, \cdots)$$

حاصل ہوتے ہیں۔اب چونکہ $c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$ کے برابر ہے لٰہذا

$$V_n = \frac{4V_0}{n\pi \sinh(\frac{n\pi d}{b})} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots)$$

ہو گا اور یوں مساوات 6.53 کو

$$V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,\text{طاق}}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sinh \frac{n\pi x}{b}}{\sinh \frac{n\pi d}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.55}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات سے مختلف نقطوں پر برقی دباو $V(x, y)$ حاصل کرتے ہوئے ان میں برابر برقی دباو رکھنے والے نقطوں سے گزرتی سطح ہم قوہ سطح ہو گی۔

مثال 6.6: شکل 6.3 میں $d = b$ اور $V_0 = 90\,\mathrm{V}$ ہونے کی صورت میں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباو حاصل کریں۔

حل: ڈبے کا وسط $(\frac{b}{2}, \frac{b}{2})$ ہے۔مساوات 6.55 کے پہلے چند اجزاء لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} V &= \frac{4 \times 90}{\pi} \left(\frac{\sinh \frac{\pi}{2}}{\sinh \pi} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \frac{\sinh \frac{3\pi}{2}}{\sinh 3\pi} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \frac{\sinh \frac{5\pi}{2}}{\sinh 5\pi} \sin \frac{5\pi}{2} \right) \\ &= \frac{4 \times 90}{\pi} (0.199268 - 0.0029941887 + 0.0000776406) \\ &= 22.5\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

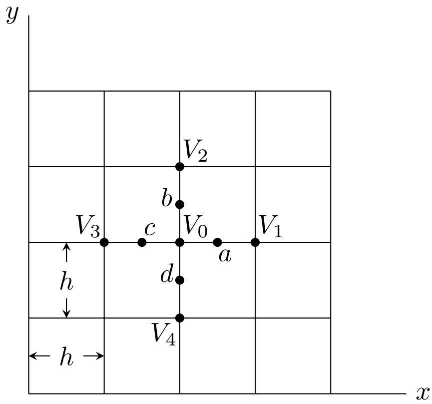
6.7 عددی دہرانے کا طریقہ

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی ترکیب ہم دیکھ چکے۔کمپیوٹر کی مدد سے **عددی دہرانے**[17] کے طریقے سے مساوات حل کئے جاتے ہیں۔آئیں لاپلاس مساوات اسی ترکیب سے حل کریں۔

تصور کرتے ہیں کہ کسی خطے میں برقی میدان صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔شکل 6.4 میں ایسی سطح دکھائی گئی ہے جسے h چوڑائی اور اتنے ہی لمبائی کے مربع کے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔اس میدان میں آپس میں قریبی پانچ نقطوں پر برقی دباو V_0، V_1، V_2، V_3 اور V_4 ہیں۔اگر یہ خطہ ہر جانب یکساں خاصیت رکھتا ہو اور یہ چارج سے پاک ہو تب $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$ اور $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ ہوں گے جس سے دو محدد میں

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

[17] numerical iteration



شکل 6.4: لاپلاس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر برقی دباو قریبی نقطوں کے برقی دباو کا اوسط ہوتا ہے۔

لکھا جا سکتا ہے۔اب $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ہونے کی وجہ سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

صورت اختیار کر لیتی ہے جو لاپلاس مساوات ہے۔ شکل 6.4 میں نقطہ a اور نقطہ c پر $\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $\frac{\partial V}{\partial y}$ کی قیمتیں تقریباً

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a \doteq \frac{V_1 - V_0}{h}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c \doteq \frac{V_0 - V_3}{h}$$

ہوں گیں۔یوں ہم

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_0 \doteq \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c}{h} \doteq \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

لکھ سکتے ہیں۔ بالکل اسی طرح ہم

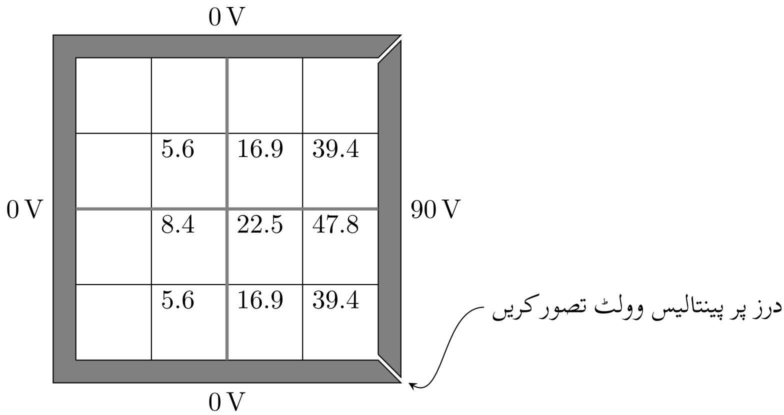
$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_0 \doteq \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_b - \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_d}{h} \doteq \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2}$$

بھی لکھ سکتے ہیں۔ان دو جوابات کو لاپلاس مساوات میں پر کرنے

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \doteq \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} = 0$$

سے

$$V_0 \doteq \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4} \tag{6.56}$$



شکل 6.5: رقبہ عمودی تراش کو خانوں میں تقسیم کرتے ہوئے، ہر کونے پر گرد کے چار نقطوں کے اوسط برابر برقی دباو ہو گا۔

حاصل ہوتا ہے۔ h لمبائی جتنی کم ہو مندرجہ بالا مساوات اتنا زیادہ درست ہو گا۔ h کی لمبائی انتہائی چھوٹی کرنے سے مندرجہ بالا مساوات بالکل صحیح ہو گا۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی دباو اس نقطے کے گرد چار نقطوں کے برقی دباو کا اوسط ہوتا ہے۔

عددی دہرانے کے طریقے میں تمام خطے کو شکل 6.4 کی طرز پر مربعوں میں تقسیم کرتے ہوئے مربع کے ہر کونے پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباو حاصل کیا جاتا ہے۔ تمام خطے پر بار بار اسی طریقے سے برقی دباو حاصل کی جاتی ہے حتٰی کہ کسی بھی نقطے پر متواتر جوابات میں تبدیلی نہ پائی جائے۔ اس طریقے کو مثال سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے۔

شکل 6.5 میں مربع شکل کے لا محدود لمبائی کے ڈبے کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔ اس کے چار اطراف صفر برقی دباو پر ہیں جبکہ نہایت باریک غیر موصل فاصلے پر چوتھی طرف نوے وولٹ پر ہے۔ اس ڈبے کو یوں خانوں میں تقسیم کیا گیا ہے کہ یا تو انہیں سولہ چھوٹے خانے تصور کیا جا سکتا ہے اور یا چار درمیانے جسامت کے خانے۔ اس کے علاوہ پورے ڈبے کو ایک ہی بڑا خانہ بھی تصور کیا جا سکتا ہے۔ آئیں ان خانوں کے کونوں پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباو حاصل کریں۔

اگرچہ کمپیوٹر پر ایسے مسائل حل کرتے ہوئے تمام کونوں پر ابتدائی برقی دباو صفر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھا جاتا ہے۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ذرہ سوچ کر چلنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ ہم پورے مربع شکل کو ایک ہی بڑا خانہ تصور کرتے ہوئے اس کے عین وسط میں برقی دباو حاصل کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم بڑے خانے کے چار کونوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔ یوں بڑے خانے کے چار کونوں کی برقی دباو زیر استعمال آئے گی۔ اب دو کونوں پر صفر برقی دباو ہے جبکہ دو کونے غیر موصل درز پر مشتمل ہیں۔ درز کے ایک جانب صفر جبکہ اس کی دوسری جانب نوے وولٹ ہیں، للٰذا درز میں ان دو قیمتوں کا اوسط یعنی پینتالیس وولٹ برقی دباو تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح بڑے خانے کے وسط میں

$$V = \frac{45 + 45 + 0 + 0}{4} = 22.5\,\mathrm{V}$$

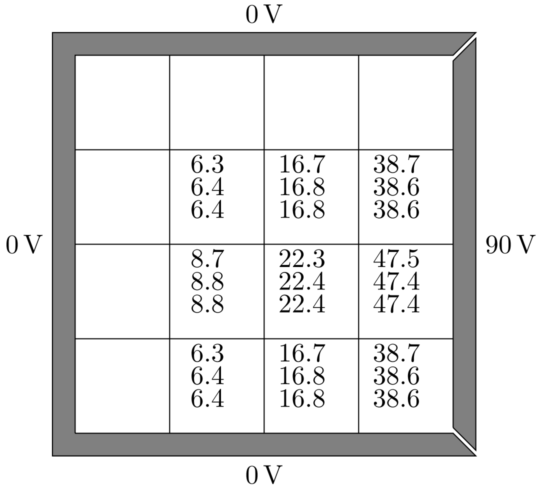
حاصل ہوتا ہے۔ شکل 6.5 میں یہ قیمت دکھائی گئی ہے۔

آئیں اب چار درمیانے جسامت کے خانوں کے کونوں پر برقی دباو حاصل کریں۔ یہاں بھی ہم ان خانوں کے کونوں کو چار قریبی نقطے چنتے ہیں۔ اوپر دائیں بڑے خانے کے وسط میں برقی دباو حاصل کرنے کی خاطر اس خانے کے چار کونوں کے برقی دباو زیر استعمال لائے جائیں گے۔ یوں درز پر پینتالیس وولٹ تصور کرتے ہوئے

$$V = \frac{90 + 45 + 0 + 22.5}{4} = 39.4\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح دائیں نچلے بڑے خانے کے وسط میں بھی

$$V = \frac{90 + 45 + 0 + 22.5}{4} = 39.4\,\mathrm{V}$$



شکل 6.6: چار بار دہرانے کے بعد جوابات تبدیل ہونا بند ہو جاتے ہیں۔یہی اصل جواب ہیں۔

حاصل ہوتا ہے۔ ہم اس قیمت کو بغیر حل کئے شکل کو دیکھ کر ہی لکھ سکتے تھے چونکہ شکل کا اوپر والا آدھا حصہ اور اس کا نچلا آدھا حصہ بالکل یکساں ہیں لہٰذا ان دونوں حصوں میں بالکل یکساں برقی دباو ہو گا۔ اس حقیقت کو یہاں سے استعمال کرنا شروع کرتے ہیں۔ اوپر اور نیچے بائیں بڑے خانے بالکل یکساں ہیں لہٰذا دونوں کے وسط میں

$$V=\frac{22.5+0+0+0}{4}=5.6\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ بقایا کونوں پر برقی دباو حاصل کرتے ہوئے نقطے کے بائیں، دائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔ یوں

$$\frac{90+39.4+22.5+39.4}{4}=47.8\,\mathrm{V}$$
$$\frac{39.4+0+5.6+22.5}{4}=16.9\,\mathrm{V}$$
$$\frac{22.5+5.6+0+5.6}{4}=8.4\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ شکل 6.5 میں یہ تمام قیمت دکھائی گئی ہے۔

آئیں شکل میں اوپر سے نیچے چلتے ہوئے پہلے دائیں، پھر درمیانے اور آخر میں بائیں قطار کے تمام کونوں پر برقی دباو حاصل کریں۔ ہم یہی سلسلہ بار بار دہرائیں گے حتٰی کہ کسی بھی کونے پر متواتر حاصل کردہ جوابات تبدیل ہونا بند کر دیں۔ ہر کونے پر برقی دباو مساوات 6.56 کے استعمال سے حاصل کیا جائے گا جہاں کونے کے اوپر، نیچے، دائیں اور بائیں نقطوں کے برقی دباو کو استعمال کیا جائے گا۔ یاد رہے کہ موصل سطحوں پر برقی دباو ہمیں پہلے سے ہی معلوم ہے لہٰذا ان پر برقی دباو حاصل کرنے کی کوشش نہیں کی جائے گی۔

اس طرح دائیں قطار کے اوپر جانب 39.4 V کی نئی قیمت

$$\frac{90+0+16.9+47.8}{4}=38.7\,\mathrm{V}$$

ہو جائے گی۔ اوپر اور نچلے آدھے حصوں کی مشابہت سے ہم قطار کی نچلی قیمت بھی یہی لکھتے ہیں۔ شکل 6.6 میں یہ قیمتیں دکھائی گئی ہیں۔ مساوات 6.56 میں نئی سے نئی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ یوں 47.8 V کی نئی قیمت

$$\frac{90+38.7+22.5+38.7}{4}=47.5\,\mathrm{V}$$

ہو گی۔

درمیانے قطار پر آتے ہیں۔ یہاں اوپر 16.9 V کی نئی قیمت

$$\frac{38.7+0+5.6+22.5}{4}=16.7\,\mathrm{V}$$

ہو گی جو قطار کے نچلے کونے کی بھی قیمت ہے۔ اس قطار کے درمیانے نقطے کی نئی قیمت

$$\frac{47.5+16.7+8.4+16.7}{4}=22.3\,\mathrm{V}$$

ہو گی۔

اسی طرح بائیں قطار کی نئی قیمتیں بھی حاصل کی جاتی ہیں۔ ان تمام کو شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے۔ یہی سلسلہ دوبارہ دہرانے سے مزید نئے اور بہتر جوابات حاصل ہوں گے جنہیں گزشتہ جوابات کے نیچے لکھا گیا ہے۔ شکل میں اس طرح تین بار دہرانے سے حاصل کئے گئے جوابات دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے کے آخری دو حاصل کردہ جوابات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی۔ اسی لئے ان آخری جوابات کو حتمی جوابات تسلیم کیا جاتا ہے۔

یہاں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباو 22.4 V حاصل ہوا ہے۔ مثال 6.6 میں ڈبے کے وسط پر برقی دباو طاقتی سلسلے کی مدد سے 22.5 V حاصل ہوئی تھی جو تقریباً اتنی ہی قیمت ہے۔ یاد رہے کہ یہاں ہم نے اشاریہ کے بعد صرف ایک ہندسہ رکھتے ہوئے برقی دباو حاصل کئے۔ اسی وجہ سے دونوں جوابات میں معمولی فرق ہے۔

اگر ہم سوچ سے کام نہ لیتے ہوئے سیدھ وسیدھ مساوات 6.56 میں شروع سے دائیں، بائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کی قیمتیں استعمال کرتے، تب ہمیں قطعی جوابات دس مرتبہ دہرانے کے بعد حاصل ہوتے۔ اگرچہ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے آپ ضرور سوچ سمجھ سے ہی کام لیں گے البتہ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی۔ کمپیوٹر کے لئے کیا ایک مرتبہ اور کیا دس ہزار مرتبہ۔

اس مثال میں ہم نے بہت کم نقطوں پر برقی دباو حاصل کی تاکہ دہرانے کا طریقہ باآسانی سمجھا جا سکے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے آپ زیادہ سے زیادہ نقطے چن سکتے ہیں۔ بہتر سے بہتر نتائج، زیادہ سے زیادہ نقطے چننے سے حاصل ہوتا ہے ناکہ کم نقطوں پر زیادہ ہندسوں پر مبنی جوابات سے۔ دہرانے کا طریقہ اس مرتبہ تک دہرایا جاتا ہے جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر حاصل کردہ جوابات میں فرق اتنی کم ہو کہ اسے رد کرنا ممکن ہو۔ یوں ایک مائیکرو وولٹ تک درست جوابات حاصل کرنے کی خاطر اس وقت تک دہرائی کی جائے گی جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر جوابات میں فرق ایک مائیکرو وولٹ سے کم نہ ہو جائے۔

سوالات

سوال 6.1: صفحہ 171 پر مساوات 6.13 عمومی محدد میں لاپلاسی دیتا ہے۔ اس مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 6.2: مثال 6.3 کو حتمی نتیجے تک پہنچاتے ہوئے اس کا کپیسٹنس حاصل کریں۔

سوال 6.3: مثال 6.4 میں دیے مساوات 6.24 اور مساوات 6.25 حاصل کریں۔

سوال 6.4: مساوات 6.28 کے تکمل کو حل کریں۔

سوال 6.5: مساوات 6.29 حاصل کریں۔

سوال 6.6: مساوات 6.31 حل کریں۔

سوال 6.7: مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل طاقتی سلسلے کے طریقے سے حاصل کریں۔ ثابت کریں کہ اس حل کو مساوات 6.47 کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 6.8: دہرانے کے طریقے میں اشاریہ کے نشان کے بعد دو ہندسوں تک درستگی استعمال کرتے ہوئے شکل 6.5 میں دئے تمام نقطوں پر برقی دباو چار مرتبہ دہرانے سے حاصل کریں۔ ڈبے کے وسط میں برقی دباو کیا حاصل ہوتی ہے۔

جواب: 22.49 V

باب 16

سوالات

16.1 لاپلاس

سوال 16.1: برقی دباو $V = 0.002x^2yz^3\,\mathrm{V}$ ہے۔ نقطہ $N(2,-3,-4)$ پر V ، $\boldsymbol{E}$ اور $|\rho_h|$ حاصل کریں۔ نقطہ N پر ہم قوہ سطح اور سمت بہاو خط کے مساوات حاصل کریں۔ کیا برقی دباو لاپلاس کی مساوات پر پورا اترتا ہے؟

جوابات: $1.536\,\mathrm{V}$ ، $\boldsymbol{E} = -1.536\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.512\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1.152\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $|\rho_h| = 1.344\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$ ، $x^2yz^3 - 768 = 0$ ؛ سمت بہاو خط ان مساوات سے ظاہر ہو گی: $2y^2 - x^2 = 14$ اور $2z^2 - 3x^2 = 6$ ؛ چونکہ حاصل کردہ حجمی کثافت چارج صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا لاپلاس کی مساوات پر برقی دباو پورا نہیں اترتا۔

سوال 16.2: دباو کا میدان $V = xy^2z - kxz^3$ لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ اس میں مستقل k کی قیمت حاصل کرتے ہوئے نقطہ $N(5,2,4)$ پر $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

جوابات: $k = \frac{1}{3}$ ، $0.053\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 0.799\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.599\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

سوال 16.3: خلاء میں نقطہ $N(2,-3,1)$ پر میدان $V = x + y^2(z^3 - x^2)$ اور $V = 3x^2 + y^2 - 4z^2$ میں ρ_h حاصل کریں۔

جوابات: $-0.265\,\mathrm{nC/m^3}$ ، $0\,\mathrm{C/m^3}$

سوال 16.4: محدد کے مرکز $(0,0,0)$ پر $V = 3x^3 + y^4 + 2z$ اور $V = e^{2x}\sin 2y$ کے لاپلاس کی قیمت حاصل کریں۔ کیا یہ تفاعل لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں؟ جوابات: 0 ، 0 ، نہیں، جی ہاں

سوال 16.5: میدان $V = 5\rho^2\sin 2\phi$ کا لاپلاس حاصل کریں۔

جواب: $\nabla^2 V = 0$

سوال 16.6: ثابت کریں کہ $V = \rho V_0\cos\phi$ لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ اسی برقی دباو کو کارتیسی محدد میں لکھتے ہوئے $V = 0$ اور $V = V_0$ سطحیں دریافت کریں۔

جوابات: $V = V_0x$ ، $x = 0$ ، $x = 1$

سوال 16.7: متوازی چادر کپیسٹر میں $V = 10x + 15y - 30z + 55$ ہے۔ چادر کا رقبہ $100\,\mathrm{cm}^2$ جبکہ ان کے درمیان فاصلہ $0.5\,\mathrm{mm}$ ہے۔ کپیسٹر پر برقی دباو کی قیمت حاصل کریں۔ اس کی کپیسٹنس بھی حاصل کریں۔

جوابات: $17.5\,\mathrm{mV}$ ، $177\,\mathrm{pF}$

جدول 16.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	تقطیر شدہ پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹس	10^{-17}

جدول 16.2: ϵ_R and $\sigma/\omega\epsilon$

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 16.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 16.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$