1 # برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
2 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1 سمتیات 1

1.1 مقداری اور سمتیہ 1

1.2 سمتی الجبرا 2

1.3 کارتیسی محدد 3

1.4 اکائی سمتیات 5

1.5 میدانی سمتیہ 9

1.6 سمتی رقبہ 9

1.7 غیر سمتی ضرب 10

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب 14

1.9 گول نلکی محدد 17

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب 20

1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق 20

1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں 25

1.10 کروی محدد 27

2 کولمب کا قانون 39

2.1 قوت کشش یا دفع 39

2.2 برقی میدان کی شدت 43

2.3 یکساں بار بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان 46

2.4 یکساں بار بردار ہموار لامحدود سطح 51

2.5 بار بردار حجم 55

2.6 مزید مثال 56

2.7 برقی میدان کے سمت بہاو خط 63

3 گاؤس کا قانون اور پھیلاو 69
3.1 ساکن برقی بار 69
3.2 فیراڈے کا تجربہ 69
3.3 گاؤس کا قانون 70
3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال 72
3.4.1 نقطہ بار 72
3.4.2 یکساں بار بردار کروی سطح 74
3.4.3 یکساں بار بردار سیدھی لامحدود لکیر 74
3.5 ہم محوری تار 75
3.6 یکساں بار بردار ہموار لامحدود سطح 77
3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق 77
3.8 پھیلاو 80
3.9 نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات 82
3.10 پھیلاو کی عمومی مساوات 84
3.11 مسئلہ پھیلاو 86

4 توانائی اور برقی دباو 93
4.1 توانائی اور کام 93
4.2 لکیری تکملہ 94
4.3 برقی دباو 99
4.3.1 نقطہ بار کا برقی دباو 100
4.3.2 لکیری بار کثافت سے پیدا برقی دباو 101
4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباو 102
4.4 متعدد نقطہ باروں کی برقی دباو 102
4.5 برقی دباو کی ڈھلوان 106
4.5.1 نلکی محدد میں ڈھلوان 110
4.5.2 کروی محدد میں ڈھلوان 111
4.6 جفت قطب 112
4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاو خط 114
4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی 117

5 موصل، ذو برق اور کپیسٹر 125

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو 125

5.2 استمراری مساوات 127

5.3 موصل 129

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط 134

5.5 عکس کی ترکیب 137

5.6 نیم موصل 140

5.7 ذو برق 141

5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط 146

5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط 150

5.10 کپیسٹر 150

5.10.1 متوازی چادر کپیسٹر 151

5.10.2 ہم محوری کپیسٹر 153

5.10.3 ہم محوری کرہ کپیسٹر 153

5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر 154

5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس 156

6 پوئسن اور لاپلاس مساوات 169

6.1 مسئلہ یکتائی 171

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے 173

6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات 173

6.4 لاپلاس مساوات کے حل 174

6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال 181

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل 183

6.7 عددی دہرانے کا طریقہ 191

7 ساکن مقناطیسی میدان 199

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون 199

7.2 ایمپیئر کا دوری قانون 204

7.3 گردش 210

7.3.1 نلکی محدد میں گردش 217

7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات 222

7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات 224

7.4 مسئلہ سٹوکس 225

7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو 228

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو 235

7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول 240

7.7.1 سمتی مقناطیسی دباو 240

7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون 242

8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ 249

8.1 متحرک بار پر قوت 249

8.2 تفرقی بار پر قوت 250

8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت 253

8.4 قوت اور مروڑ 255

8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے 261

8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل 262

8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط 265

8.8 مقناطیسی دور 267

8.9 مقناطیسی مخفی توانائی 270

8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ 271

8.11 مشترکہ امالہ 276

9 وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات 283
9.1 فیراڈے کا قانون 283
9.2 انتقالی برقی رو 290
9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل 296
9.4 میکس ویل مساوات کی تکمل شکل 298
9.5 تاخیری دباو 303

10 مستوی امواج 311
10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج 311
10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج 312
10.2.1 خالی خلاء میں امواج 320
10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج 323
10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج 325
10.3 پوئنٹنگ سمتیہ 329
10.4 پوئنٹنگ سمتیہ اور برقی دور 334
10.5 موصل میں امواج 336
10.6 انعکاس مستوی موج 342
10.7 شرح ساکن موج 349
10.8 دو سرحدی انعکاس 354
10.8.1 فیبری-پیروٹ طیف پیما 359
10.8.2 $\eta_1 \neq \eta_3$ کی صورت میں ہم رکاوٹ صورت کا حصول 360
10.8.3 متعدد سرحدی مسئلہ 362
10.9 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب 363
10.10 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئنٹنگ سمتیہ 370

11 ترسیلی تار 379

11.1 ترسیلی تار کے مساوات 379

11.2 ترسیلی تار کے مستقل 383

11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل 384

11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل 387

11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار 388

11.3 ترسیلی تار کے چند مثال 389

11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ 397

11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ 404

11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال 406

11.6 پیما شرح ساکن موج 410

11.7 تجزیہ عارضی حال 411

12 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار 429

12.1 ترچھی آمد 429

12.2 قطبی موج کی ترچھی آمد 441

12.3 ترسیم بائی گن 445

13 مویج اور گھمکیا 449

13.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ 449

13.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج 450

13.3 کھوکھلا مستطیل مویج 456

13.3.1 مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور 465

13.4 مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی $\text{TM}mn$ موج 472

13.5 کھوکھلی نالی مویج 476

13.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف 483

13.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف 484

13.8 سطحی موج 488

13.9 ذو برق تختی مویج 492

13.10 شیش ریشہ 496

13.11 پردہ بصارت 498

13.12 گھمکی خلاء 500

13.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل 504

14 اینٹینا اور شعاعی اخراج 517

14.1 تعارف 517

14.2 تاخیری دباو 517

14.3 تکمل 519

14.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا 520

14.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت 530

14.6 ٹھوس زاویہ 533

14.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش 534

14.8 قطاری ترتیب 541

14.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع 541

14.8.2 ضرب نقش 542

14.8.3 ثنائی قطار 543

14.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار 545

14.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار 547

14.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار 547

14.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا 551

14.9 تداخُل پیما 552

14.10 مستطیل سطحی اینٹینا 553

14.11 درز کا دور میدان بذریعہ فوریئر بدل 556

14.12 خطی اینٹینا 562

14.13 چلتی موج اینٹینا 567

14.14 چھوٹا گھیرا اینٹینا 569

14.15 پیچ دار اینٹینا 569

14.16 دو طرفہ کردار 571

14.17 جھری اینٹینا 574

14.18 پیپا اینٹینا 574

14.19 فرائس ریڈار مساوات 576

14.20 ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی 580

14.21 حرارت نظام اور حرارت بعید 581

15 سوالات 575

باب 1

سمتیات

1.1 مقداری اور سمتیہ

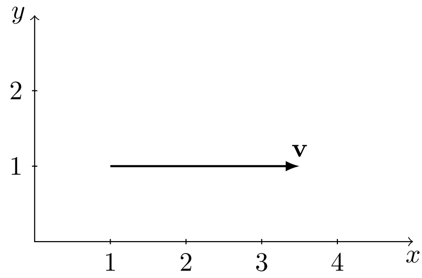
وہ طبعی مقدار جس کے مکمل اظہار کے لئے سمت کی ضرورت نہیں ہوتی مقداری[1] کہلاتا ہے۔کسی چیز کی کمیت m یا اس کا درجہ حرارت T مقداری کی مثالیں ہیں۔ مقداری کی قیمت اٹل یا متغیر ممکن ہے۔ کمیت اٹل مقداری کی مثال ہے۔ متغیر مقداری کی قیمت مختلف اوقات اور نقاط پر مختلف ہو سکتی ہے۔یوں کسی بھی نقطے پر درجہ حرارت کی قیمت وقت t کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔اسی طرح کسی بھی وقت مختلف نقاط پر درجہ حرارت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔یوں اگر صبح کے وقت اسلام آباد میں کسی مقام پر درجہ حرارت $12\,^\circ\mathrm{C}$ ہو تو دوپہر کو اسی مقام پر درجہ حرارت $30\,^\circ\mathrm{C}$ ہو سکتا ہے۔درجہ حرارت T، وقت t، کارتیسی محدد[2] کے متغیرات x، y اور z تمام مقداری متغیرات ہیں۔

ایسی طبعی مقدار جسے بیان کرنے کے لئے سمت درکار ہو سمتیہ[3] کہلاتا ہے۔اس کتاب میں سمتیہ کی قیمت (یا طول) کو مثبت تصور کیا جائے گا۔یوں سمتیہ کی حتمی قیمت ہی اس کی مقدار ہو گی۔ سمتیہ کی مثالیں قوت، سمتی رفتار اور سمتی اسراع ہیں۔

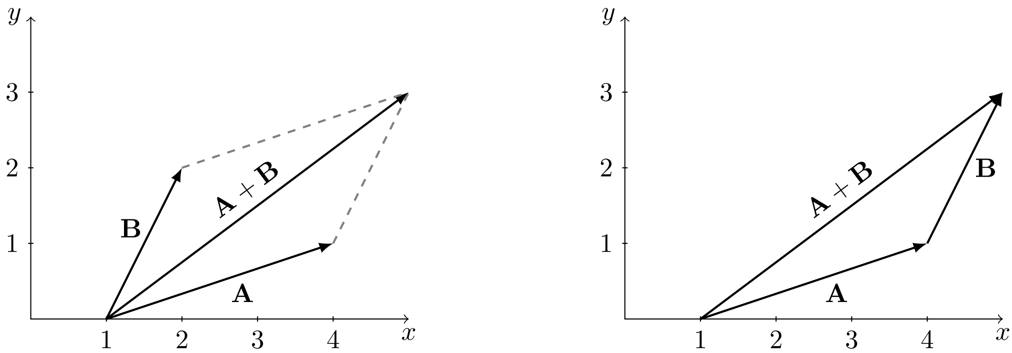
اس کتاب میں مقداری متغیرات کو سادہ طرز کی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے حروف مثلاً a، b، α، . . . یا بڑے حروف مثلاً A، B، Ψ، . . . سے ظاہر کیا جائے گا۔سمتیہ متغیرات کو موٹی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے یا بڑے حروف سے ظاہر کیا جائے گا۔یوں قوت کو $\mathbf{F}$ جبکہ سمتی رفتار کو $\mathbf{v}$ سے ظاہر کیا جائے گا۔قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں قوت کو $\vec{F}$ یا $\overrightarrow{F}$ لکھا جاتا ہے۔سمتیہ کو تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں تیر کی لمبائی سمتیہ کی حتمی قیمت $|\mathbf{F}|$ ظاہر کرتی ہے جبکہ سمتیہ کی سمت تیر کی سمت سے ظاہر کی جاتی ہے۔سمتیہ کی حتمی قیمت کو سمتیہ ظاہر کرنے والے حرف کو سادہ لکھائی میں لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں قوت $\mathbf{F}$ کی حتمی قیمت کو F لکھا جائے گا۔

شکل 1.1 میں نقطہ $(1,1)$ پر پانی کی رفتار کو سمتیہ $\mathbf{v}$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس نقطے پر مثبت افقی محور کی سمت میں پانی کی رفتار $2.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے۔سمتیہ کی دُم اس مقام پر رکھی جاتی ہے جہاں سمتیہ کی قیمت بیان کی جا رہی ہو۔یوں شکل میں سمتیہ کی دُم $(1,1)$ پر رکھی گئی ہے۔اس شکل میں $1\,\mathrm{cm}$ کی لمبائی $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ کی رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔

[1] scalar
[2] Cartesian coordinates
[3] vector



شکل 1.1: سمتیہ



(ا) سر کے ساتھ دُم جوڑ کر مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

(ب) متوازی الاضلاع سے بھی مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.2: سمتیوں کے مجموعے کا حصول

1.2 سمتی الجبرا 206

دو سمتیوں کا ترسیمی مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر ایک سمتیہ کے سر کو دوسری سمتیہ کے دُم کے ساتھ ملایا جاتا ہے۔پہلی سمتیہ کی دُم سے دوسری سمتیہ کے سر تک سمتیہ حاصل جمع ہو گا۔اس عمل کو شکل 1.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔شکل میں $\mathbf{A}$ کے سر کے ساتھ $\mathbf{B}$ کی دُم ملائی گئی ہے۔دو سے زیادہ سمتیوں کا مجموعہ بھی اسی عمل کو استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔اس عمل کو سر سے دُم جوڑنا[4] کہتے ہیں۔شکل 1.2-ب میں دو سمتیوں کے دُم ملا کر سمتیوں کے متوازی الاضلاع[5] سے ان کا مجموعہ حاصل کرنا دکھایا گیا ہے جسے دیکھ کر صاف ظاہر ہے کہ $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ ہے یعنی سمتیوں کا مجموعہ قانون تبادل[6] پر پورا اترتا ہے۔اسی طرح سمتیوں کا مجموعہ قانون تلازمی[7]

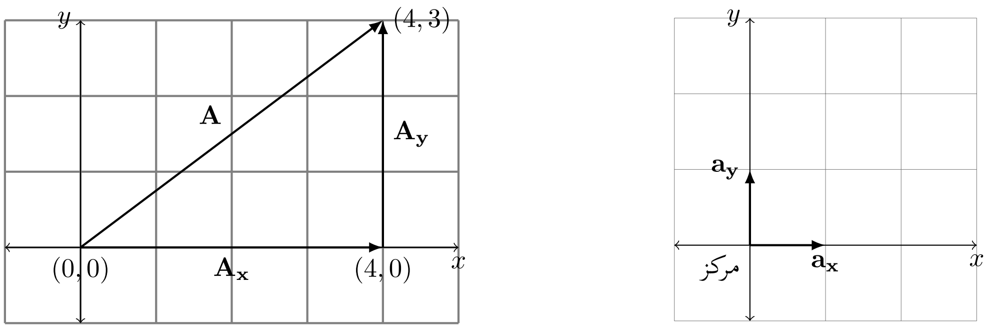
$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} \tag{1.1}$$

پر بھی پورا اترتا ہے۔ 207

سمتیوں کے تفریق کا اصول جمع کے اصول سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ہم $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ کو $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$ لکھ سکتے ہیں جہاں $-\mathbf{B}$ سے مراد یہ ہے کہ سمتیہ $\mathbf{B}$ کی سمت الٹی کر دی گئی ہے۔یوں $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ حاصل کرنے کی خاطر $\mathbf{B}$ کی سمت الٹی کرتے ہوئے اس نئے سمتیہ کو $\mathbf{A}$ کے ساتھ جمع کیا جاتا ہے۔

سمتیہ $\mathbf{A}$ کو مثبت مقداری k سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت پر کوئی اثر نہیں ہوتا جبکہ اس کی لمبائی k گنا ہو جاتی ہے۔اس کے برعکس سمتیہ $\mathbf{A}$ کو منفی مقداری $-k$ سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت الٹ ہو جاتی ہے اور اس کی لمبائی $|k|$ گنا ہو جاتی ہے۔ 211

[4] head to tail rule
[5] parallelogram law
[6] commutative law
[7] associative law



(ب) اکائی سمتیوں کی مدد سے کسی بھی سمتیہ کو ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

(ا) اکائی سمتیہ

شکل 1.3: اکائی سمتیہ اور ان کا استعمال

دو سمتیے اُس صورت میں برابر ہوتے ہیں جب ان کا تفریق صفر کے برابر ہو یعنی $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ تب ہو گا جب $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = 0$ ہو۔

سمتی میدان کے متغیرات کو ہم آپس میں جمع یا منفی صرف اُس صورت کریں گے جب یہ متغیرات ایک ہی نقطے پر بیان کئے گئے ہوں۔یوں کسی بھی نقطے پر دو یا دو سے زیادہ مقناطیسوں کا اجتماعی مقناطیسی میدان حاصل کرتے ہوئے اس نقطے پر تمام مقناطیسوں کا علیحدہ علیحدہ مقناطیسی میدان لیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

اگر سمتی میدان کی بات نہ ہو رہی ہو تب مختلف مقامات پر پائے جانے والے سمتیوں کا بھی مجموعہ یا فرق لیا جا سکتا ہے۔یوں سمندر کے پانی میں ڈوبے آب دوز کی اوپر اور نچلی سطح پر قوت کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا یہ مزید ڈوبے گا یا نہیں۔

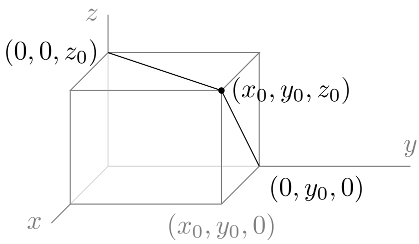
1.3 کارتیسی محدد

ایسا طریقہ جس سے کسی نقطے کا مقام بیان کیا جائے محدد[8] کہلاتا ہے۔سیدھی سطح پر کسی بھی نقطے کو دو محدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔خلاء تین طرفہ[9] ہے لہٰذا خلاء میں کسی بھی نقطے کو تین محدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔شکل 1.3-الف میں دو طرفہ کارتیسی محدد پر اکائی لمبائی کے دو سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ دکھائے گئے ہیں۔اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کی سمت مثبت x جانب کو ہے جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت مثبت y جانب کو ہے۔شکل-ب میں $\mathbf{A}$ دکھایا گیا ہے۔کسی بھی سمتیہ کو دو یا دو سے زیادہ سمتیوں کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔شکل میں $\boldsymbol{A}$ کو $\boldsymbol{A}_x$ اور $\boldsymbol{A}_y$ کے مجموعے کی شکل میں دکھایا گیا ہے یعنی

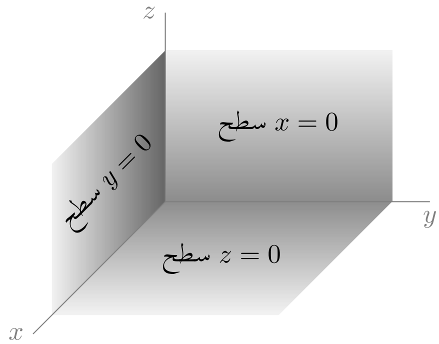
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_x + \boldsymbol{A}_y \tag{1.2}$$

زمین کی سطح کو لامحدود سیدھی سطح تصور کرتے ہوئے، اس کے ہم سطحی[10] دو عمودی لکیریں کھینچتے ہوئے ایک لکیر کو x محدد اور دوسری لکیر کو y محدد تصور کیا جا سکتا ہے۔زمین کے ہم سطحی لکیر سے مراد ایسی لکیر ہے جس پر ہر نقطہ اس سطح کو چھوتا ہے۔x محدد کے مثبت حصے سے گھڑی کی الٹ سمت گھومتے ہوئے نوے درجے پر y محدد کا مثبت حصہ رکھتے ہوئے اونچائی کو z محدد کے مثبت حصے سے ظاہر کیا جائے گا۔اب اگر اونچائی صفر رکھتے ہوئے x اور y کو تبدیل کیا جائے تو ہم زمین کی سطح پر حرکت کریں گے۔اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ زمین کی سطح پر $z = 0$ جبکہ اس پر x اور y آزاد متغیرات ہیں۔یوں زمین کی سطح کو $z = 0$ سطح کہتے ہیں جسے

$$z = 0, \quad x \leq |\mp\infty|, \quad y \leq |\mp\infty|$$



(ب) نقطے سے محدد پر عمود۔



(ا) کارتیسی محدد میں عمودی سیدھی سطحیں۔

شکل 1.4: کارتیسی نظام میں نقطہ اور تین عمودی سطحیں۔

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.4-الف میں اس سطح کی نشاندہی کی گئی ہے۔ہم بالکل اسی طرح $y=0$ سطح اور $x=0$ سطح بھی بیان کر سکتے ہیں۔

شکل 1.4-ب کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی نقطے کو (x_0,y_0,z_0) لکھا جا سکتا ہے۔اس نقطے تک پہنچنے کی خاطر کارتیسی محدد کے مرکز سے پہلے x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0,0,0)$ تک پہنچیں۔اس کے بعد y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0,y_0,0)$ تک پہنچیں اور آخر کار z محدد کے متوازی z_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے درکار نقطہ (x_0,y_0,z_0) تک پہنچیں۔اس عمل میں یہ ضروری نہیں کہ پہلے x محدد کے متوازی ہی چلا جائے۔آپ مرکز سے پہلے y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرنے کے بعد z محدد کے متوازی z_0 اور آخر کار x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے بھی اسی نقطے تک پہنچ سکتے ہیں۔تینوں فاصلوں کو کسی بھی ترتیب سے طے کیا جا سکتا ہے۔

نقطہ (x_0,y_0,z_0) سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے $(x_0,0,0)$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح اس نقطے سے y محدد پر عمود $(0,y_0,0)$ اور z محدد پر عمود $(0,0,z_0)$ دیتا ہے۔نقطہ (x_0,y_0,z_0) سے y محدد اور z محدد پر عمودی لکیریں گہری سیاہی میں دکھائے گئے ہیں۔ اگر (x_0,y_0,z_0) سے شروع ہوتے ہوئے z محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $z=0$ ہو جائے تو نقطہ $(x_0,y_0,0)$ حاصل ہو گا۔اب اگر یہاں سے x محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخر کار $x=0$ ہو جائے تو نقطہ $(0,y_0,0)$ حاصل ہو گا۔یہ وہی نقطہ ہے جو (x_0,y_0,z_0) سے y محدد پر عمودی لکیر بناتے ہوئے حاصل ہوتا ہے۔اس عمل میں ہم پہلے x محدد کے متوازی چلتے ہوئے $x=0$ کرنے کے بعد z محدد کے متوازی چلتے ہوئے $z=0$ کرتے ہوئے بھی نقطہ $(0,y_0,0)$ تک پہنچ سکتے تھے۔

نقطہ (x_0,y_0,z_0) تک قدر مختلف انداز سے بھی پہنچا جا سکتا ہے جسے کارتیسی محدد میں سمجھنا زیادہ آسان ہے۔فرض کریں کہ $x=x_0$ پر لامحدود yz سیدھی سطح بنائی جائے۔ایسی سطح کو $x=x_0$ سطح کہتے ہیں۔اس سطح کو

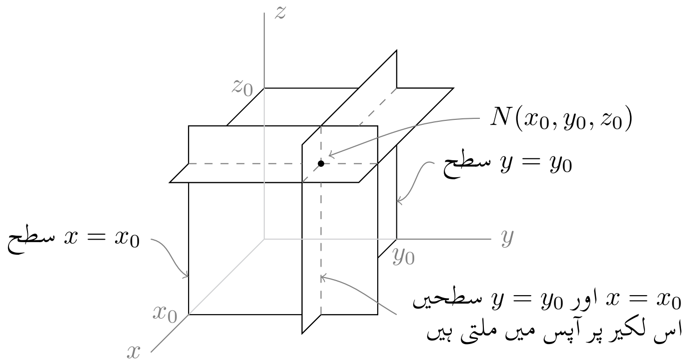
$$x=x_0,\quad y\leq|\mp\infty|,\quad z\leq|\mp\infty|$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں x_0 مقررہ ہے جبکہ y اور z متغیرات ہیں۔دو متغیرات کی مساوات سطح کو ظاہر کرتی ہے۔اگر $y=y_0$ پر لامحدود xz سیدھی سطح بنائی جائے تو یہ دو سطحے آپس میں سیدھی لکیر پر ملیں گے۔یہ لکیر

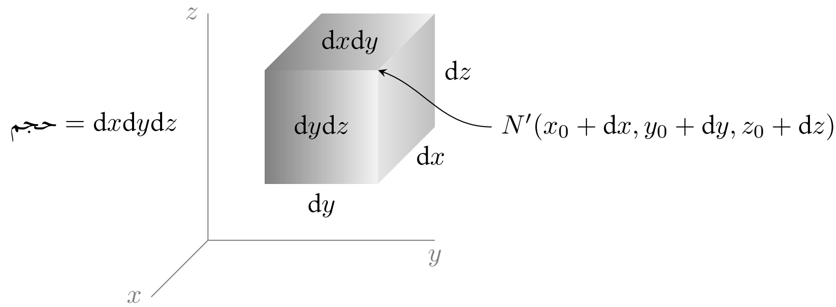
$$x=x_0,\quad y=y_0,\quad z\leq|\mp\infty|$$

لکھی جا سکتی ہے۔اس مساوات میں x_0 اور y_0 مقررہ ہیں جبکہ z متغیرہ ہے۔ایک متغیرہ کی مساوات لکیر کو ظاہر کرتی ہے۔اب اگر $z=z_0$ پر لامحدود xy سیدھی سطح بھی بنائی جائے تب یہ تینوں سطحے ایک نقطے $N(x_0,y_0,z_0)$ پر آپس کو چھوئینگے۔یہ صورت حال شکل 1.5 میں دکھائی گئی ہے جہاں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھیں گے کہ نقطے تک پہنچنے کا یہ طریقہ دیگر محدد میں استعمال کرنا لازمی ثابت ہو گا۔

coordinates[8]
three dimensional[9]
coplanar[10]



شکل 1.5: تین عمودی سطحوں سے نقطے کا حصول۔



شکل 1.6: چھ سطحے مکعب گھیرتی ہیں۔

اگر سطح $x = x_0$ کے متوازی $x = x_0 + \mathrm{d}x$ پر اور اسی طرح $y = y_0$ کے متوازی $y = y_0 + \mathrm{d}y$ اور $z = z_0$ کے متوازی $z = z_0 + \mathrm{d}z$ سطح رکھے جائیں تو یہ چھ سطحے ایک چھوٹی مکعب نما حجم کو گھیریں گی جسے شکل 1.6 میں دکھایا گیا ہے جبکہ یہ تین نئی سطحیں آپس میں نقطہ $N'(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y, z_0 + \mathrm{d}z)$ پر ملیں گی۔ اس مکعب نما کے اطراف $\mathrm{d}x$، $\mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}z$ ہیں۔ اس کی اوپر والی سطح کا رقبہ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہے۔ اسی طرح اس کی نچلی سطح کا رقبہ بھی $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہے۔ سامنے سطح اور پچھلی سطح دونوں $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ رقبے رکھتے ہیں جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ کے برابر ہیں۔ اس مکعب نما کی حجم $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ہے۔ نقطہ $N'(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y, z_0 + \mathrm{d}z)$ شکل میں دکھایا گیا ہے جبکہ نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ مکعب نما کا وہ واحد کونا ہے جسے شکل میں نہیں دکھایا گیا۔ ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ $NN' = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$ ہے۔

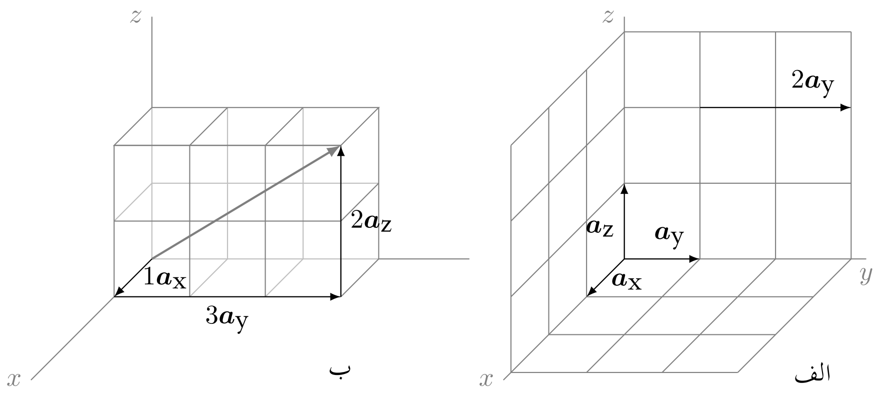
کارتیسی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرنے سے ہم N سے N' پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک کی سمتیہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{1.3}$$

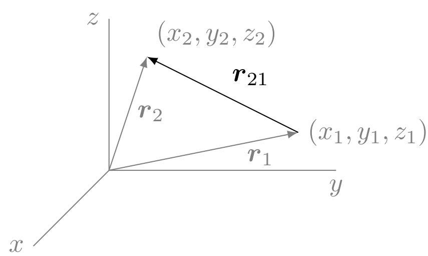
لکھی جاتی ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی لمبائی دیتی ہے۔

1.4 اکائی سمتیات

حصہ 1.3 کے شروع میں دو طرفہ کارتیسی نظام میں سیدھی سطح پر کسی بھی سمتیہ کو دو سمتیات کی صورت میں لکھنا دکھایا گیا۔ یہی طریقہ تین طرفہ کارتیسی نظام کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ تین طرفہ کارتیسی نظام کے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھے جاتے ہیں۔ یہ تینوں سمتیات آپس میں عمودی



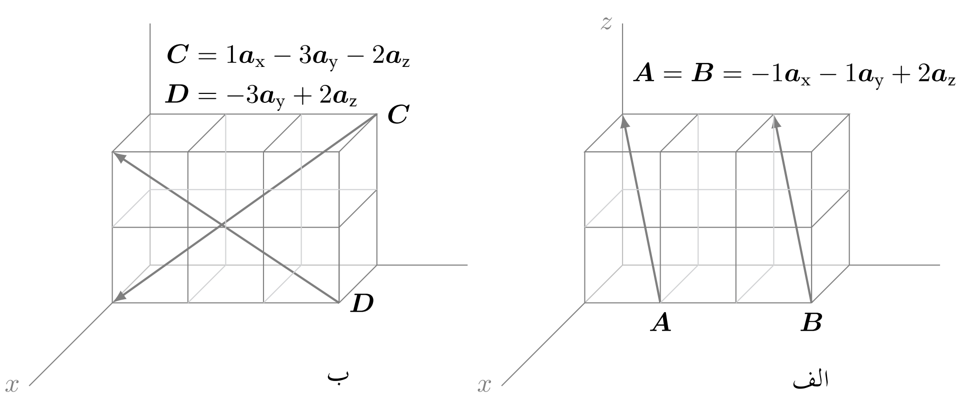
شکل 1.7: کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات اور ان کا استعمال



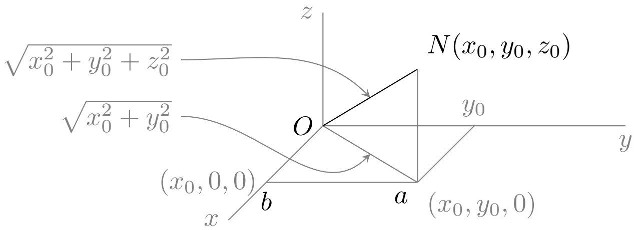
شکل 1.8: کارتیسی نظام میں سمتیہ کی مساوات کا حصول

ہیں۔ کسی بھی اکائی سمتیہ کی طرح یہ تین اکائی سمتیات اکائی لمبائی رکھتے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کی سمت x محدد کے بڑھتے جانب کو ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت y محدد کے بڑھتے جانب کو اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی سمت z محدد کے بڑھتے جانب کو ہے۔ شکل 1.7-الف میں یہ تینوں اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ اسی شکل میں نقطہ $(0,1,2)$ پر سمتیہ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ یہ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت میں ہے۔ اس سمتیہ کو $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یاد رہے کہ ایسے دو سمتیات برابر ہوتے ہیں جن کا طول برابر ہو اور جو ایک ہی سمت میں ہوں۔ یوں سمت تبدیل کئے بغیر سمتیہ کو کارتیسی محدد کے مرکز منتقل کرتے ہوئے اس کی قیمت نسبتاً آسانی سے لکھی جا سکتی ہے۔

شکل 1.8 میں مرکز سے (x_1, y_1, z_1) تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور مرکز سے (x_2, y_2, z_2) تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z_2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ بھی دکھائی گئی ہے جس کی دُم (x_1, y_1, z_1) اور نوک (x_2, y_2, z_2) پر ہے۔ سر سے دُم جوڑنے



شکل 1.9: کارتیسی نظام میں چند سمتیات۔



شکل 1.10: کارتیسی نظام میں سمتیہ کا طول۔

کے اصول کے استعمال سے $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_{21}+\boldsymbol{r}_1$ لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{21}&=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(y_2-y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+(z_2-z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned}\tag{1.4}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے استعمال سے سمتیہ کی مساوات باآسانی حاصل ہوتی ہے۔سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں سمتیہ کی نوک کو 2 اور اس کی دُم کو 1 سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس کتاب میں سمتیہ لکھتے ہوئے نوک اور دُم کو اسی ترتیب سے زیر نوشت میں لکھا جائے گا۔یوں سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ کو تین اجزاء $(x_2-x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $(y_2-y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $(z_2-z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.7-ب میں مرکز سے $(1,3,2)$ تک سمتیہ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کو تین سمتیات کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے یعنی $1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جہاں اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے تینوں اجزاء کو لکھا گیا ہے۔سمتیہ کی دُم $(0,0,0)$ اور اس کی نوک $(1,3,2)$ پر لیتے ہوئے یہی جواب مساوات 1.4 سے بھی حاصل ہوتا ہے۔

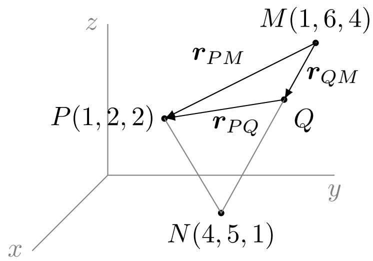
شکل 1.9-الف میں دو متوازی سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دکھائے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔چونکہ ان کی لمبائی برابر ہے اور یہ دونوں ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھا جائے گا۔شکل 1.9-ب میں $\boldsymbol{C}$ کی دُم سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جانب ایک قدم اور یہاں سے $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب تین قدم اور آخر کار $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب دو قدم چلنے سے اس کی نوک تک پہنچا جا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{C}=1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھا جائے گا۔اسی طرح $\boldsymbol{D}$ کی دُم سے $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب تین قدم اور پھر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب دو قدم چلتے ہوئے سمتیہ کی نوک تک پہنچا جایا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{D}=-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھا جائے گا۔سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کو دو اجزاء کی شکل میں لکھا گیا ہے چونکہ اس کے تیسرے جزو کی لمبائی صفر کے برابر ہے۔

مشق 1.1: مساوات 1.4 کے استعمال سے شکل 1.9 میں تمام سمتیات لکھیں۔

جوابات: تمام جوابات شکل میں دئے گئے ہیں۔

شکل 1.10 میں مرکز سے نقطہ $N(x_0,y_0,z_0)$ تک کا فاصلہ ON مسئلہ فیثاغورث[11] سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس نقطے سے $z=0$ سطح پر عمود سے نقطہ a حاصل ہوتا ہے۔نقطہ a سے x محدد پر عمود نقطہ b دیتا ہے۔تکون Oba میں O سے b کا فاصلہ x_0 ہے جبکہ b سے a کا فاصلہ y_0 ہے۔یوں فاصلہ Oa مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ کے برابر ہو گا۔تکون OaN میں a پر $90°$ کا زاویہ پایا جاتا ہے۔یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے ON کا فاصلہ $\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$ حاصل ہوتا ہے۔

[11] Pythagoras theorem



شکل 1.11: سمتیوں کا استعمال

مساوات 1.4 سمتیہ کی عمومی مساوات ہے۔اس میں دئے سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ کی دُم محدد کے مرکز پر رکھنے سے صاف ظاہر ہے کہ سمتیہ کی مقدار

$$|\boldsymbol{r}_{21}| = r_{21} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1.5}$$

کے برابر ہے۔اگر سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کیا جائے تو حاصل جواب کی مقدار اکائی ہو گی جبکہ اس کی سمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی۔یوں $\boldsymbol{r}_{21}$ کو $|\boldsymbol{r}_{21}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{r}_{21}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{r21}$ حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\boldsymbol{a}_{r21} = \frac{\boldsymbol{r}_{21}}{|\boldsymbol{r}_{21}|} = \frac{(x_2-x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(y_2-y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+(z_2-z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \tag{1.6}$$

یاد رہے کہ سمتیہ کی سمت اور طول تبدیل کئے بغیر اسے ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کیا جا سکتا ہے۔البتہ وہ سمتیہ جو کسی نقطے کی مقام تعین کرتا ہو کو اگر کہیں اور منتقل کیا جائے تو ایسی صورت میں سمتیہ کی نوک درکار نقطے پر نہیں رہے گی۔اسی حقیقت کی بنا پر میدان ظاہر کرنے والے سمتیہ کو اپنی جگہ سے نہیں ہٹایا جا سکتا۔میدانی سمتیہ کی دُم اس مقام پر پائی جاتی ہے جہاں میدان بیان کی جا رہی ہو۔

سمتیات کے استعمال سے نقطہ (x,y,z) کے مقام کو $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جاتا ہے۔کسی بھی سمتیہ مثلاً قوت $\boldsymbol{F}$ کو بالکل اسی طرح $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+F_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+F_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھا جاتا ہے جہاں $F_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $F_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $F_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اس کے تین اجزاء ہیں۔اس طرح قوت کی مقدار $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}$ کے برابر ہو گی۔

مثال 1.1: نقطہ $(-5,2,-1)$ کا مقام ظاہر کرنے والا سمتیہ اور اس سمتیہ کا طول حاصل کریں۔اسی سمتیہ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز سے اس نقطے تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r} = -5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے جبکہ اس سمتیہ کا طول $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{5^2+2^2+1^1} = \sqrt{30}$ ہے۔یوں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_r = \frac{-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{30}}$ ہو گا۔

مثال 1.2: شکل 1.11 میں تین نقطے $M(1,6,4)$، $N(4,5,1)$ اور $P(1,2,2)$ دئے گئے ہیں۔M اور N کے درمیان سیدھی لکیر پر M سے کل فاصلے کے $\frac{1}{3}$ پر نقطہ Q پایا جاتا ہے۔Q سے P تک سمتیہ حاصل کرتے ہوئے ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔ حل: M سے N تک سمتیہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{NM} &= (4-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(5-6)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+(1-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ &= 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned}$$

ہے۔ M سے Q تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{QM}$ اور $\boldsymbol{r}_{NM}$ ایک ہی سمت میں ہیں جبکہ $\left|\boldsymbol{r}_{QM}\right| = \frac{1}{3}\left|\boldsymbol{r}_{NM}\right|$ کے برابر ہے۔یوں

$$\boldsymbol{r}_{QM} = \frac{1}{3}\boldsymbol{r}_{NM} = \frac{1}{3}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

ہو گا۔ M سے P تک سمتیہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{PM} &= (1-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (2-6)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (2-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\ &= -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned}$$

ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں $\boldsymbol{r}_{QM} + \boldsymbol{r}_{PQ} = \boldsymbol{r}_{PM}$ للہٰذا

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{PQ} &= \boldsymbol{r}_{PM} - \boldsymbol{r}_{QM}\\ &= (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) - (1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\\ &= -1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{11}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned}$$

ہو گا۔ Q سے P تک فاصلہ $\sqrt{1^1 + \left(\frac{11}{3}\right)^2 + 1^2} = 3.93$ ہے۔

مشق 1.2: مثال 1.2 میں دیئے نقطوں کو استعمال کرتے ہوئے M سے P تک سمتیہ حاصل کریں۔اسی طرح P سے N تک سمتیہ اور M سے N تک سمتیہ حاصل کریں۔پہلے دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے سر سے دُم جوڑنے کے اصول سے تیسرا سمتیہ دوبارہ حاصل کریں۔

جوابات: $-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$، $-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $-6\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

1.5 میدانی سمتیہ

لکھنا ہے

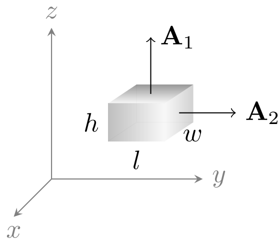
1.6 سمتی رقبہ

کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں۔یوں سطح کے کسی بھی نقطے پر دو آپس میں الٹ سمتوں میں عمود بنائے جا سکتے ہیں۔سیدھی سطح جس کا رقبہ S ہو کے ایک طرف پر اکائی عمود $\boldsymbol{a}_N$ اور دوسری طرف پر اکائی عمود $-\boldsymbol{a}_N$ بنائے جا سکتے ہیں۔اگر ان دو عمود میں سے ایک عمود مثلاً $\boldsymbol{a}_N$ کو سطح کی سمت[12] تصور کیا جائے تب اس سطح کا سمتی رقبہ[13] $S\boldsymbol{a}_N$ ہو گا۔بند سطح کے بیرونی اکائی عمود کو سطح کی سمت تصور کیا جاتا ہے۔شکل 1.12 میں سمتی رقبے $\boldsymbol{A}_1$ اور $\boldsymbol{A}_2$ دکھائے گئے ہیں جہاں بند سطح کے بیرونی عمود کو ہی سطح کی سمت دکھایا گیا ہے۔

---

[12] عمود سطح کے ساتھ نوے درجہ زاویہ بناتا ہے۔ $\boldsymbol{a}_N$ کے زیر نوشت میں N، لفظ نوے کے پہلے حرف کی آواز کو ظاہر کرتا ہے۔

[13] vector area



$$\mathbf{A}_1 = A_1\mathbf{a}_{N1} = wl\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{A}_2 = A_2\mathbf{a}_{N2} = wh\mathbf{a}_y$$

شکل 1.12: سمتی رقبہ

1.7 غیر سمتی ضرب 292

دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے غیر سمتی ضرب[14] سے مراد $\boldsymbol{A}$ کی مقدار ضربِ $\boldsymbol{B}$ کی مقدار ضربِ سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کا کوسائن ہے۔

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta_{AB} \tag{1.7}$$

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔ غیر سمتی ضرب دو سمتیوں کے مابین کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب مقداری ہوتا ہے جس کی وجہ سے اسے مقداری ضرب بھی کہا جاتا ہے۔ غیر سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان نقطے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی وجہ سے اسے ضرب نقطہ[15] بھی کہا جاتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ کو "$\boldsymbol{A}$ نقطہ $\boldsymbol{B}$" پڑھا جاتا ہے۔ بالکل سادہ ضرب کی طرح $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ کو $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ بھی لکھا جا سکتا ہے یعنی غیر سمتی ضرب میں متغیرات کی ترتیب اہمیت نہیں رکھتی۔

کارتیسی اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ آپس میں عمودی ہیں لہٰذا ان میں کسی بھی دو سمتیات کے درمیان 90 زاویہ پایا جاتا ہے۔ چونکہ $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ان میں کسی بھی دو سمتیوں کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0 \tag{1.8}$$

ایک ہی سمت میں دو سمتیوں کے درمیان صفر زاویہ ہوتا ہے اور $\cos 0 = 1$ کے برابر ہے۔ اکائی سمتیہ کا طول بھی ایک کے برابر ہے لہٰذا مساوات 1.7 کے تحت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کا غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = (|\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}|)(|\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}|)(\cos 0) = (1)(1)(1) = 1$$

ہو گا۔ بقایا دو کارتیسی اکائی سمتیات کا خود غیر سمتی ضرب بھی ایک کے برابر ہے۔

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 1 \tag{1.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کو کرونیکر ڈیلٹا[16] δ_{ij} کی مدد سے ایک ہی مساوات کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \tag{1.10}$$

جہاں

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases} \tag{1.11}$$

---

[14] scalar product
[15] dot product
[16] یہ لیوپولڈ کرونیکر کے نام سے منسوب ہے۔

کے برابر ہے یعنی $j = i$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت ایک جبکہ $j \neq i$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت صفر کے برابر لی جاتی ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ کی صورت میں $i = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جبکہ $j = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ کے برابر ہیں۔یوں i اور j برابر نہیں ہیں لہٰذا حاصل جواب صفر کے برابر ہو گا۔اس کے برعکس $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کی صورت میں $i = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $j = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہیں لہٰذا $i = j$ ہے اور یوں حاصل جواب ایک کے برابر ہے۔ 299

کارتیسی تین عمودی اکائیوں کی مدد سے سمتیات کا غیر سمتی ضرب نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔یوں اگر $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ دو سمتیات ہوں تب ان کا غیر سمتی ضرب

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \cdot (B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \\
&= A_xB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_xB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_xB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&\quad + A_yB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_yB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_yB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&\quad + A_zB_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_zB_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_zB_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}$$

ہو گا۔مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کا سہارا لیتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.12}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کا خود غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\boldsymbol{A}|^2 \tag{1.13}$$

اس کے طول کے مربع کے برابر ہے۔یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جسے عموماً استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کا طول حاصل کیا جاتا ہے۔ 300

مساوات 1.7 اور مساوات 1.12 کی مدد سے دو سمتیوں کے مابین زاویہ معلوم کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B})}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}\right) \tag{1.14}$$

301

مثال 1.3: شکل 1.11 میں تکون دکھایا گیا ہے جس کے نوک $M(1,6,4)$، $N(4,5,1)$ اور $P(1,2,2)$ ہیں۔M پر زاویہ حاصل کریں۔ 302

حل: مثال 1.2 میں $\boldsymbol{r}_{NM} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{r}_{PM} = 0\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ حاصل کئے گئے۔ $|\boldsymbol{r}_{NM}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{19}$ اور $|\boldsymbol{r}_{PM}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ ہیں جبکہ

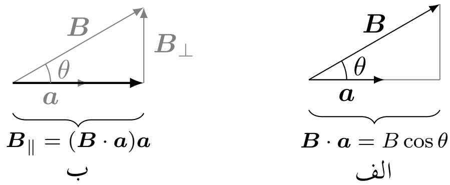
$$\boldsymbol{r}_{NM}\cdot\boldsymbol{r}_{PM} = 0 + 4 + 6 = 10$$

کے برابر ہے۔یوں ان سمتیوں کے مابین زاویہ

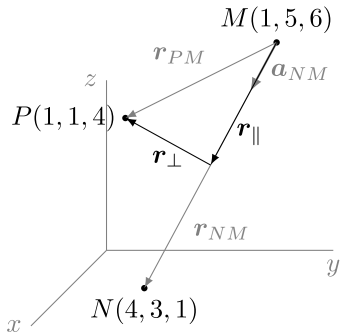
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{19}\sqrt{20}}\right) = 1.0321 \quad \mathrm{rad}$$

یا $59.137°$ ہے۔ 303

304



شکل 1.13: کسی بھی سمت میں سمتیہ کے جزو کا حصول۔



شکل 1.14: متوازی اور عمودی اجزاء۔

شکل 1.13-الف میں سمتیہ $\boldsymbol{B}$ اور اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}$ دکھائے گئے ہیں۔ان کا غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{a}|\cos\theta = B\cos\theta$$

کے برابر ہے۔شکل سے واضح ہے کہ یہی $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کے جزو کا طول $B_{\parallel}$[17] ہے۔یوں کسی بھی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کے جزو کا طول حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{B}$ اور اس سمت کی اکائی سمتیہ کا غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔یوں حاصل طول کا اکائی سمتیہ کے ساتھ ضرب یعنی $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a})$ سے اکائی سمتیہ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کا سمتی جزو حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.13-ب میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کا سمتی جزو $\boldsymbol{B}_{\parallel}$ دکھایا گیا ہے۔شکل سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{B}$ سے $\boldsymbol{a}B_{\parallel}$ منفی کرنے سے $B_{\perp}$ حاصل ہوتا ہے جو $\boldsymbol{B}$ کا وہ جزو ہے جو $\boldsymbol{a}$ کے عمودی ہے۔

غیر سمتی ضرب کا حاصل جواب دو صورتوں میں صفر کے برابر ہوتا ہے۔پہلی صورت وہ ہے جب دونوں سمتیوں میں سے کم از کم ایک سمتیہ کا طول صفر کے برابر ہو۔دوسری صورت وہ ہے جب دونوں سمتیات آپس میں عمودی ہوں۔ عمودی ہونے کی صورت میں ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہو گا اور $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے۔یوں دو سمتیوں کے نقطہ ضرب صفر کے برابر ہونے سے اخذ کیا جاتا ہے کہ یہ آپس میں عمودی ہیں۔

مثال 1.4: شکل 1.14 میں تین نقطے $M(1,5,6)$، $N(4,3,1)$ اور $P(1,1,4)$ دئے گئے ہیں۔M اور N سے گزرتی سیدھی لکیر سے P کا عمودی فاصلہ حاصل کریں۔

حل: M سے N تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{NM} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے جس کا طول $|\boldsymbol{r}_{NM}| = \sqrt{38}$ ہے۔یوں اس سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM} = \frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}}$ ہو گا۔اسی طرح M سے P تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{PM} = -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے۔$\boldsymbol{a}_{NM}$ کی سمت میں $\boldsymbol{r}_{PM}$ کا طول

$$r_{\parallel} = \boldsymbol{r}_{PM}\cdot\boldsymbol{a}_{NM} = (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\cdot\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}}\right)$$
$$= \frac{0+8+10}{\sqrt{38}} = \frac{18}{\sqrt{38}}$$

---

[17] $B_{\parallel}$ لکھتے ہوئے زیرنوشت میں دو متوازی لکیریں یہ بتلاتی ہیں کہ $\boldsymbol{B}$ کا یہ وہ حصہ ہے جو $\boldsymbol{a}$ کے متوازی ہے۔اسی طرح عمودی مقدار کو عموماً $\perp$ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہے یوں $\boldsymbol{a}_{NM}$ سمت میں $\boldsymbol{r}_{PM}$ کا سمتی جزو

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} = r_{\parallel}\boldsymbol{a}_{NM} = \frac{18}{\sqrt{38}}\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}}\right) = \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})$$

ہے۔ $\boldsymbol{r}_{PM}$ سے $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ منفی کرنے سے لکیر سے P تک عمودی سمتیہ $\boldsymbol{r}_{\perp}$ حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{\perp} = \boldsymbol{r}_{PM} - \boldsymbol{r}_{\parallel} &= (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) - \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \\ &= \frac{-27\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 58\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{19}\end{aligned}$$

جس کا طول $\frac{\sqrt{27^2+58^2+7^2}}{19} = 3.3873$ ہے۔یوں P کا لکیر سے عمودی فاصلہ 3.3873 ہے۔

$\boldsymbol{r}_{\parallel}$ اور $\boldsymbol{r}_{\perp}$ آپس میں عمودی ہیں لہٰذا ان کا نقطہ ضرب

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{r}_{\perp} = \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \left(\frac{-27\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 58\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{19}\right) = \frac{18}{722}(-81 + 116 - 35) = 0$$

صفر کے برابر ہے۔

شکل 1.14 میں اگر M پر $\boldsymbol{r}_{NM}$ کی دُم رکھی جائے تب $\boldsymbol{r}_{NM}$ کی نوک N کا مقام تعین کرتا ہے۔عموماً کسی بھی نقطے کا مقام محدد کے مرکز $(0,0,0)$ کی نسبت سے طے کیا جاتا ہے۔ایسا سمتیہ جس کی دُم مرکز پر رکھتے ہوئے اس کی نوک نقطے کا مقام طے کرے مقام تعین کنندہ سمتیہ[18] کہلاتا ہے۔اگر تعین کنندہ سمتیہ کو مرکز سے ہٹایا جائے تب ظاہر ہے اس کی نوک اصل مقام طے کرنے سے قاصر ہو گی۔

مثال 1.5: شکل 1.14 میں M سے شروع ہوتے اور N جانب بڑھتی سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطے کا مقام تعین کرتے تعین کنندہ سمتیہ حاصل کریں۔

حل: مرکز $(0,0,0)$ سے نقطہ M تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_{M} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے جبکہ M سے N جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM}$ گزشتہ مثال میں حاصل کیا گیا۔اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM}$ کی سمت میں M سے s فاصلے پر نقطہ Q تک کا سمتیہ $s\boldsymbol{a}_{NM}$ ہے۔یوں مرکز سے Q تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{Q} = \boldsymbol{r}_{M} + s\boldsymbol{a}_{NM}$ ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}_{Q} = (1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) + s\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}}\right)$$

اس مساوات میں s متغیرہ ہے جسے تبدیل کرتے ہوئے سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطہ Q تک پہنچا جا سکتا ہے۔

مثال 1.6: $z = z_0$ پر $1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے عمودی سیدھی سطح کی مساوات حاصل کریں جہاں z_0 مستقل ہے۔

[18] displacement vector

حل: نقطہ $N_1(0,0,z_0)$ سے کسی بھی نقطہ $N_2(x,y,z)$ تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21} = x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + (z-z_0)\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہے۔ سطح پر کسی بھی سمتیہ اور سطح کے عمودی سمتیہ آپس میں نوے درجے زاویہ پر پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔ یوں اگر N_2 اسی عمودی سطح پر پایا جائے تب

$$1\boldsymbol{a}_{\text{z}} \cdot [x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + (z-z_0)\boldsymbol{a}_{\text{z}}] = z - z_0 = 0$$

ہو گا جس سے اس سطح کی مساوات $z = z_0$ حاصل ہوتی ہے۔

اس قیمت کو $\boldsymbol{r}_{21}$ میں پُر کرتے ہوئے $\boldsymbol{r}_{21} = x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + y\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ حاصل ہوتا ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں۔ چونکہ مرکز سے N_1 کا تعین کنندہ سمتیہ $\boldsymbol{r}_{10} = z_0\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہے لہٰذا $z = z_0$ سطح پر کسی بھی نقطہ N_2 کا تعین کنندہ سمتیہ یعنی سطح کی سمتی مساوات $\boldsymbol{r}_{20} = x\boldsymbol{a}_{\text{x}} + y\boldsymbol{a}_{\text{y}} + z_0\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہو گی۔

مشق 1.3: مرکز سے $(2,1,3)$ تک کی سمتیہ ایک سیدھی سطح کی عمودی سمتیہ ہے۔ اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $2x + y + 3z = 14$

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب

دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے سمتی ضرب[19] کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جس کا طول $\boldsymbol{A}$ کی مقدار ضربِ $\boldsymbol{B}$ کی مقدار ضربِ سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کے سائن کے برابر ہے۔ حاصل سمتیہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سمتیات کی عمودی سمت میں ہوتا ہے جسے اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{a}_N$ سے ظاہر کیا جائیگا۔

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta_{AB} \boldsymbol{a}_N \tag{1.15}$$

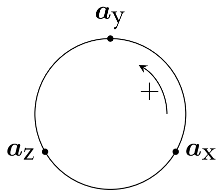
جس سیدھی سطح پر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں پائے جائیں، $\boldsymbol{a}_N$ اس سطح کے دو عمودی سمتیات میں سے ایک ہے۔ $\boldsymbol{a}_N$ کو دائیں ہاتھ کے قانون[20] سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

دائیں ہاتھ کی ہتھیلی سیدھی اور انگوٹھے کو بقایا چار انگلیوں کے عمود میں رکھتے ہوئے پہلی انگلی کو $\boldsymbol{A}$ اور دوسری انگلی کو $\boldsymbol{B}$ کی سمت میں رکھیں۔ اس صورت میں انگوٹھا $\boldsymbol{a}_N$ کی سمت میں ہو گا۔

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔ سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان صلیبی نشان $\times$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی وجہ سے اسے صلیبی ضرب[21] بھی کہا جاتا ہے اور

---

[19] vector product
[20] right hand rule
[21] cross product



شکل 1.15: صلیبی ضرب کا حصول۔

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ کو "$\boldsymbol{A}$ صلیب $\boldsymbol{B}$" پڑھا جاتا ہے۔ سمتی ضرب میں سمتیوں کی ترتیب نہایت اہم ہے اور انہیں الٹانے سے حاصل جواب کی سمت الٹی ہو جاتی ہے۔

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \tag{1.16}$$

اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\sin 90 = 1$ کے برابر ہے جبکہ دائیں ہاتھ کے قانون سے ان کے صلیبی ضرب کی سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ حاصل ہوتی ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 1.16 کے تحت یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھے جا سکتے ہیں۔ دو متوازی سمتیوں کے درمیان صفر درجے کا زاویہ ہوتا ہے اور $\sin 0 = 0$ کے برابر ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = 0$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = 0$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0$ کے برابر ہیں۔ ان تمام جوابات کو ایک جگہ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \quad & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \quad & \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \\ \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} &= 0 & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} &= 0 & \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

یہی جوابات شکل 1.15 کی مدد سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ اس شکل میں گھڑی کی الٹ سمت مثبت سمت ہے۔ یوں اگر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل کرنا[339] ہو تو شکل میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سے شروع ہو کر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی جانب کم راستے پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ حاصل ہوتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ چونکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانے کی خاطر مثبت[340] راستہ اختیار کیا گیا لہٰذا جواب مثبت یعنی $+\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہو گا۔ اس کے برعکس $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب کم راستے پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ حاصل[341] ہوتا ہے البتہ یہ راستہ گھڑی کے الٹ سمت یعنی منفی سمت میں ہے لہٰذا جواب $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ہو گا۔[342]

مساوات 1.17 کی مدد سے $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + B_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + B_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی صلیبی ضرب

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \times (B_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + B_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + B_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \\ &= A_x B_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_x B_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_x B_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ &\quad + A_y B_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y B_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_y B_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ &\quad + A_z B_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_z B_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z B_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \end{aligned}$$

کو

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (A_z B_x - A_x B_z) \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (A_x B_y - A_y B_x) \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.18}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس جواب کو قالب کے حتمی قیمت کی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.19}$$

یوں اگر $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہوں تب

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\
&= [(-3)(-4) - (1)(5)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - [(2)(-4) - (1)(6)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + [(2)(5) - (-3)(6)]\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 14\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 28\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

ہو گا۔ 343

مثال 1.7: $N_1(2,3,1)$، $N_2(1,6,5)$ اور $N_3(-2,-3,2)$ سیدھی سطح پر پائے جاتے ہیں۔اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔ 344

حل:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{21} &= (1-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (6-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (5-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{r}_{31} &= (-2-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (-3-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (2-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

کے سمتی ضرب سے ان کا عمودی سمتیہ حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_N &= (-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \times (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \\
&= 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 16\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 24\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\
&= 27\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 15\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

سطح پر دئے گئے تین نقطوں سے سطح پر کسی بھی نقطہ $N_4(x,y,z)$ تک کا سمتیہ اس عمودی سمتیہ کے نوے درجے زاویہ پر ہو گا اور یوں ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔N_1 سے N_4 تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{41} = (x-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے استعمال سے

$$
\boldsymbol{r}_{41} \cdot \boldsymbol{r}_N = [(x-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}] \cdot (27\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 15\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) = 0
$$

لکھ کر

$$
27(x-2) - 15(y-3) + 18(z-1) = 0
$$

سے

$$
27x - 15y + 18z = 27
$$

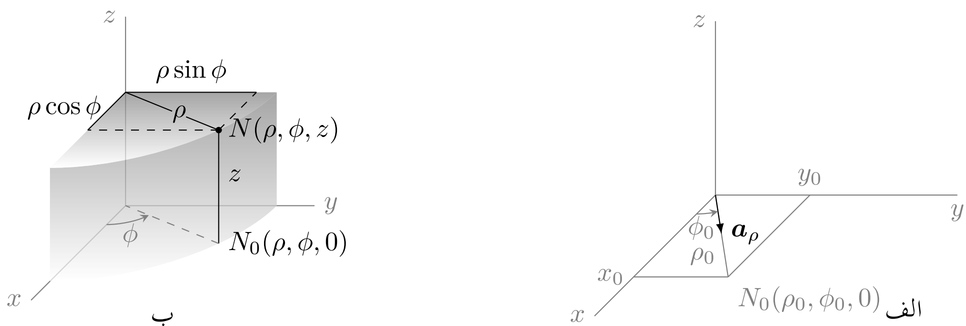
سیدھی سطح کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ایسی مساوات میں x، y اور z کے مخفف عمودی سمتیہ میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے مخفف 27، 15− اور 18 ہوتے ہیں۔ 346

سطح کی مساوات سے $z = \frac{9-9x+5y}{6}$ لکھا جا سکتا ہے۔ سطح پر N_4 کی تعین کنندہ مساوات $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ میں z کی قیمت پُر کرتے ہوئے سطح کی سمتی مساوات

$$
\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{9-9x+5y}{6}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں جبکہ z کو بطور تابع متغیرہ لکھا گیا ہے۔ 347

348



شکل 1.16: نلکی محدد

مشق 1.4: $\boldsymbol{A} = 1\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ اور $\boldsymbol{B} = 5\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ کی صورت میں $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$، $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{a}_B\times\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{a}_{\text{z}}\times(\boldsymbol{a}_{\text{y}}\times\boldsymbol{B})$ حاصل کریں۔

خلاء میں کسی بھی نقطے کا مقام کارتیسی محدد کے علاوہ دیگر طرز کے محدد سے بھی تعین کیا جا سکتا ہے۔ماہرین طبیعیات تقریباً ایک درجن اقسام کے محددی نظام استعمال کرتے ہیں۔ہم اس کتاب میں کارتیسی نظام کے علاوہ دو مزید اقسام کے محددی نظام استعمال کریں گے۔آئیں انہیں پر غور کریں۔

1.9 گول نلکی محدد

کارتیسی نظام میں کسی بھی نقطے کا مقام مرکز سے x، y اور z سمتوں میں فاصلوں سے طے کیا جاتا ہے۔آئیں اب ایسا نظام دیکھیں جس میں ایک عدد زاویہ اور دو عدد فاصلے استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے کا مقام طے ہو۔

شکل 1.16-الف میں $z=0$ سطح پر نقطہ N_0 دکھایا گیا ہے جسے کارتیسی محدد میں $N_0(x_0,y_0,0)$ لکھا جائے گا۔اگر مرکز سے N_0 تک سیدھی لکیر کی لمبائی ρ_0 اور x محدد سے اس لکیر کا زاویہ ϕ_0 ہو تب اسی نقطے کو گول نلکی محدد[22] کے نظام میں $N_0(\rho_0,\phi_0,0)$ لکھا جاتا ہے۔اس کتاب میں گول نلکی محدد کا نام چھوٹا کر کے اسے نلکی محدد پکارا جائے گا۔اگر $z=0$ سطح پر مرکز سے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ ہو تب مرکز سے نقطے تک سمتیہ کو

$$\boldsymbol{\rho} = \rho_0\boldsymbol{a}_\rho \qquad (\phi=\phi_0,\quad z=0) \tag{1.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔نلکی اور کارتیسی نظام میں z محدد یکساں ہیں۔

شکل 1.16-الف یا شکل-ب سے کارتیسی اور نلکی محدد کے تعلق اخذ کئے جا سکتے ہیں۔یوں نلکی محدد کے متغیرات (ρ,ϕ,z) سے کارتیسی متغیرات (x,y,z) یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi \\ z &= z \end{aligned} \tag{1.21}$$

---

[22] cylindrical coordinate system

شکل 1.17: نلکی محدد میں متغیرات کے تبدیلی سے فاصلے کا حصول اور اکائی سمتیات۔

اسی طرح (x, y, z) سے (ρ, ϕ, z) یوں حاصل کئے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2+y^2} \qquad (\rho \geq 0)\\
\phi &= \tan^{-1}\frac{y}{x}\\
z &= z
\end{aligned} \tag{1.22}$$

مندرجہ بالا مساوات میں رداس کی صرف مثبت قیمت لی گئی۔ ہم رداس کی قیمت مثبت ہی لیتے ہیں۔

شکل 1.17-الف میں ϕ زاویہ پر ρ رداس کا ہلکی سیاہی میں دکھایا سمتیہ نقطہ N ہے۔ اس شکل میں ϕ اور z تبدیل کئے بغیر ρ کو $\Delta\rho$ بڑھتا دکھایا گیا ہے۔ اس صورت میں سمتیہ کی نوک $\Delta\rho$ فاصلہ طے کرتی ہے۔ نقطہ N سے $\Delta\rho$ کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے a_ρ لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.17-الف میں ρ اور z تبدیل کئے بغیر ϕ کو $\Delta\phi$ بڑھا کر اسی سمتیہ کو گاڑھی سیاہی میں دوبارہ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سمتیہ کی نوک نے ρ رداس کے گول دائرے پر حرکت کرتے ہوئے $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کیا۔ یوں اگر زاویہ کو 0 تا 2π ریڈیئن تبدیل کیا جائے تو سمتیہ کی نوک گول دائرے پر ایک مکمل چکر کاٹے گی۔ جیسے جیسے $\Delta\phi$ کو کم سے کم کیا جائے ویسے ویسے $\rho\Delta\phi$ گول دائرے کے مماس کی صورت اختیار کرے گی حتیٰ کہ $\mathrm{d}\phi$ کی صورت میں $\rho\,\mathrm{d}\phi$ گول دائرے کا مماس ہو گا۔ نقطہ N پر بڑھتے ϕ جانب مماس کی سمت میں اکائی سمتیہ کو a_ϕ لکھا جاتا ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح اگر نقطہ N پر صرف z کو Δz تبدیل کیا جائے تب سمتیہ کی نوک Δz فاصلہ طے کرے گی۔ Δz کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے a_z لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی تیسری اور آخری بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔ نلکی محدد کے تین اکائی سمتیات a_ρ، a_ϕ اور a_z مل کر دائیں ہاتھ کا عمودی نظام دیتے ہیں۔ نقطہ (ρ_1, ϕ_1, z_1) پر نلکی محدد کے اکائی سمتیات کو شکل 1.18 میں دکھایا گیا ہے۔ a_ρ گول سطح $\rho = \rho_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔ اسی طرح a_ϕ سیدھی سطح $\phi = \phi_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $z = z_1$ سطح پر پایا جاتا ہے اور $\rho = \rho_1$ نلکی سطح کا مماس ہے۔ a_z اکائی سمتیہ $z = z_1$ سطح کے عمودی ہے۔ یہ $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔

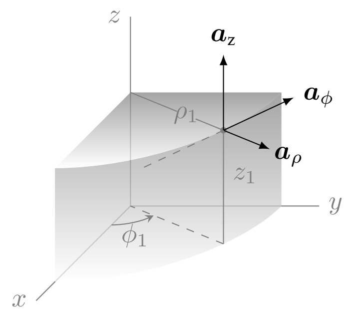
دائیں ہاتھ کے عمودی نظام میں سمتی ضرب کا حاصل جواب صفحہ 14 پر دئے گئے دائیں ہاتھ کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں

$$a_\rho \times a_\phi = a_z, \quad a_\phi \times a_z = a_\rho, \quad a_z \times a_\rho = a_\phi \tag{1.23}$$

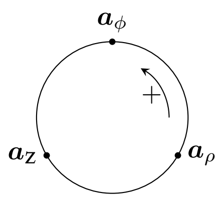
لکھا جا سکتا ہے۔ یہی جوابات شکل 1.19 سے بھی اخذ کئے جا سکتے ہیں۔

کسی سمتیہ کا خود سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$a_\rho \times a_\rho = 0, \quad a_\phi \times a_\phi = 0, \quad a_z \times a_z = 0 \tag{1.24}$$



شکل 1.18: نلکی محدد کے اکائی سمتیات۔



شکل 1.19: صلیبی ضرب کی حاصل اکائی سمتیہ۔

لکھا جا سکتا ہے جبکہ کسی بھی اکائی سمتیہ کا خود غیر سمتی ضرب ایک کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 1 \tag{1.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح کسی بھی دو عمودی سمتیات کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} = 0 \tag{1.26}$$

غیر سمتی ضرب کو کرونیکر ڈیلٹا کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \tag{1.27}$$

جہاں

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases} \tag{1.28}$$

کے برابر ہے۔

آپ دیکھتے ہیں کہ کسی بھی نقطہ $N(\rho, \phi, z)$ پر اکائی سمتیات حاصل کرنے کی خاطر محدد کے متغیرات ρ، ϕ اور z کو باری باری انتہائی کم بڑھایا جاتا ہے۔جس سمت میں نقطہ حرکت کرے، اسی سمت میں اکائی سمتیہ ہو گی۔شکل 1.17-ب میں دو مختلف نقاط N اور N' پر نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات کی سمت کا دارومدار اس نقطے پر ہے جہاں انہیں حاصل کیا جائے۔آپ جانتے ہیں کہ کارتیسی نظام میں نقطے کا مقام تبدیل کرنے سے کارتیسی اکائی سمتیات تبدیل نہیں ہوتے۔یوں نلکی محدد کے اکائی سمتیات اٹل نہیں ہیں۔یہ ایک انتہائی اہم حقیقت ہے جو تکمل لیتے وقت پیچیدگیاں پیدا کرتا ہے۔تکمل لیتے وقت کارتیسی اکائی سمتیات اٹل ہونے کی بنا پر تکمل کے باہر لے جائے جا سکتے ہیں جبکہ نلکی محدد کے $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اکائی سمتیات کو تکمل کے باہر نہیں لے جایا جا سکتا۔یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ N پر حاصل کئے گئے $\boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ آپس میں عمودی ہوں گے جبکہ کسی اور نقطہ N' پر حاصل کئے گئے $\boldsymbol{a}'_{\rho}$، $\boldsymbol{a}'_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ آپس میں عمودی ہوں گے۔

شکل 1.20: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

جدول 1.1: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$	
0	$\sin\phi$	$\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_{\rho}$
0	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	$\boldsymbol{a}_{\phi}$
1	0	0	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

382 1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب

شکل 1.20-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے مابین زاویہ ϕ ہے جبکہ اکائی سمتیات کی لمبائی ایک ہوتی ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = (1)(1)(\cos\phi) = \cos\phi \tag{1.29}$$

ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے مابین زاویہ $(90^\circ - \phi)$ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_{\rho} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = (1)(1)[\cos(90^\circ - \phi)] = \sin\phi \tag{1.30}$$

کے برابر ہے۔ اس مساوات میں $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ کو استعمال کرتے ہوئے $\cos(90^\circ - \phi) = \sin\phi$ لکھا گیا ہے۔ شکل 1.20-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\phi}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے مابین زاویہ $(90^\circ + \phi)$ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = (1)(1)[\cos(90^\circ + \phi)] = -\sin\phi \tag{1.31}$$

ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے مابین زاویہ ϕ ہے لہٰذا

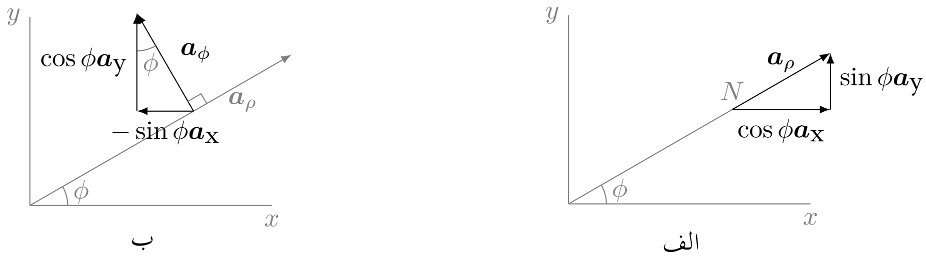
$$\boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = (1)(1)(\cos\phi) = \cos\phi \tag{1.32}$$

383 کے برابر ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہے۔ اس کی وجہ ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے۔ ان تمام غیر سمتی ضرب
384 کو جدول 1.1 میں یکجا کیا گیا ہے۔

385 1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق

شکل 1.21-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدد میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ کی لمبائی ایک کے برابر ہے۔ یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\rho} &= \cos\phi\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \sin\phi\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\end{aligned} \tag{1.33}$$



شکل 1.21: $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اور $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

شکل 1.22: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدد کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔ شکل 1.21-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدد میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\phi} &= -\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\ &= -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\end{aligned} \tag{1.34}$$

جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدد کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔ 386

شکل 1.22-الف میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ جس نقطے پر ایسا درکار ہو، اس نقطے پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کی دُم رکھیں۔ مرکز سے نقطے تک نقطہ دار سیدھی لکیر کھینچتے ہوئے اسے مزید آگے بڑھائیں۔ اس نقطے پر $\boldsymbol{a}_{\rho}$ اسی لکیر کی سمت میں ہو گا جبکہ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ لکیر کے ساتھ نوے درجے کا زاویہ بنائے گا۔ شکل میں $\boldsymbol{a}_{\phi}$ دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود بنائیں۔ صاف ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔ ان میں سے ایک سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\rho}$ کی سمت میں اور دوسرا سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کی الٹ جانب کو ہو گا۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = \cos\phi\boldsymbol{a}_{\rho} - \sin\phi\boldsymbol{a}_{\phi} \tag{1.35}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.22-ب میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔ یہاں نقطہ پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی دُم رکھتے ہوئے اس کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود کھینچا گیا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \sin\phi\boldsymbol{a}_{\rho} + \cos\phi\boldsymbol{a}_{\phi} \tag{1.36}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ 387

آئیں مساوات 1.33 تا مساوات 1.36 کو جدول 1.1 کی مدد سے حاصل کریں۔ کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کو کارتیسی یا نلکی محدد میں لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ &= A_\rho\boldsymbol{a}_{\rho} + A_\phi\boldsymbol{a}_{\phi} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\end{aligned} \tag{1.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان میں پہلی مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_x \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_y \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_z
\end{aligned} \tag{1.38}$$

حاصل ہوتے ہیں۔$\boldsymbol{A}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر A_x، A_y اور A_z درکار ہوتے ہیں جنہیں مندرجہ بالا مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح مساوات 1.37 کے نچلے حصے کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{A} &= A_\rho \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\rho + A_\phi \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\phi + A_z \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_\rho \\
\boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{A} &= A_\rho \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\rho + A_\phi \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\phi + A_z \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_\phi \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{A} &= A_\rho \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho + A_\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = A_z
\end{aligned} \tag{1.39}$$

388 حاصل ہوتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{A}$ کو نلکی نظام میں لکھنے کی خاطر A_ρ، A_ϕ اور A_z کو مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

آئیں $\boldsymbol{a}_\rho$ کو کارتیسی نظام میں لکھیں۔یوں $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_\rho$ کو کارتیسی نظام میں لکھنا مطلوب ہے۔مساوات 1.38 کے مطابق A_x حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ لینا ہو گا۔جدول 1.1 کے استعمال سے

$$A_x = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح جدول کو استعمال کرتے ہوئے

$$A_y = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \sin\phi$$

اور

$$A_z = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$$

389 لکھا جائے گا۔یہی جواب مساوات 1.33 میں بھی حاصل کیا گیا تھا۔

$\boldsymbol{a}_\phi$ کو بھی اسی طرح کارتیسی نظام میں لکھا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے اس سمتیہ کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
A_x &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = -\sin\phi \\
A_y &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = \cos\phi \\
A_z &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0
\end{aligned}$$

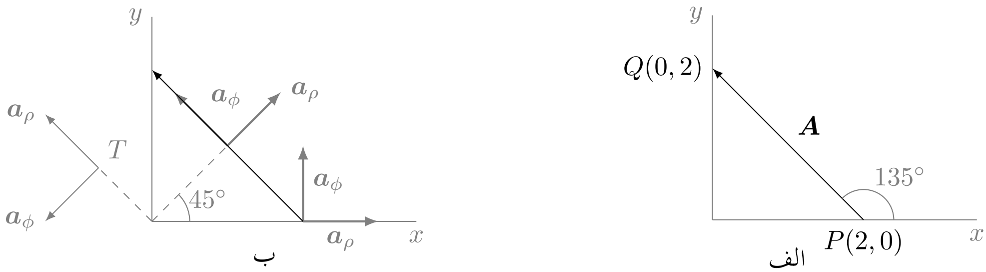
یوں

$$\boldsymbol{a}_\phi = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = -\sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$$

390 حاصل ہوتا ہے۔یہی جواب مساوات 1.34 بھی دیتا ہے۔

391 آپ سے گزارش ہے کہ جدول 1.34 کو یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔اپنے آپ میں یہ صلاحیت پیدا کریں کہ ان جوابات کو آپ جلد اخذ کر سکیں۔

392



شکل 1.23: کارتیسی اور نلکی محدد میں سمتیہ۔

---

393 **مشق 1.5:** $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کو جدول 1.1 کی مدد سے نلکی محدد میں لکھیں۔

جوابات:

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = \cos\phi\boldsymbol{a}_\rho - \sin\phi\boldsymbol{a}_\phi$$
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} = \sin\phi\boldsymbol{a}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{a}_\phi$$
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

394

شکل 1.23 میں $P(2,0)$ سے $Q(0,2)$ تک سمتیہ $\boldsymbol{A}$ دکھایا گیا ہے۔کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \tag{1.40}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس سمتیہ کی حتمی قیمت

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} = \sqrt{(-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})\cdot(-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}})} = \sqrt{8}$$

ہے۔آئیں اسی سمتیہ کو نلکی محدد میں لکھیں۔ایسا کرنے کی خاطر A_ρ اور A_ϕ درکار ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_\phi$ حاصل کرتے ہیں۔

$$A_\rho = \boldsymbol{a}_\rho\cdot(-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}) = -2\cos\phi + 2\sin\phi$$
$$A_\phi = \boldsymbol{a}_\phi\cdot(-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}) = 2\sin\phi + 2\cos\phi$$

یوں

$$\boldsymbol{A} = 2(-\cos\phi + \sin\phi)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin\phi + \cos\phi)\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ اس کی حتمی قیمت کیا حاصل ہوتی ہے۔اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\rho = 1$، $\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 1$ اور $\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 0$ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\\
&= \sqrt{2^2(-\cos\phi + \sin\phi)^2 + 2^2(\sin\phi + \cos\phi)^2}\\
&= \sqrt{4(\cos^2\phi + \sin^2\phi - 2\cos\phi\sin\phi) + 4(\cos^2\phi + \sin^2\phi + 2\cos\phi\sin\phi)}\\
&= \sqrt{8(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}\\
&= \sqrt{8}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یقیناً سمتیہ کی حتمی قیمت محدد کے نظام پر منحصر نہیں۔

مساوات 1.40 اور مساوات 1.41 ایک ہی سمتیہ کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔یہاں کارتیسی نظام کا استعمال نہایت آسان ثابت ہوا۔آگے چل کر آپ دیکھیں گے کہ کہیں مسئلوں میں نلکی محدد کا استعمال زیادہ آسان ہو گا۔آئیں مساوات 1.40 پر مزید غور کریں۔اس مساوات میں اکائی سمتیات از خود اٹل نہیں ہیں۔ان کی سمتوں کا دارومدار زاویہ ϕ پر ہے۔شکل 1.23-ب میں $\phi=0^\circ$، $\phi=45^\circ$ اور $\phi=135^\circ$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھائے گئے ہیں۔نقطہ P یعنی $\phi=0^\circ$ پر مساوات 1.41

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\phi=0^\circ}&=2(-\cos 0^\circ+\sin 0^\circ)\boldsymbol{a}_\rho+2(\sin 0^\circ+\cos 0^\circ)\boldsymbol{a}_\phi\\
&=-2\boldsymbol{a}_\rho+2\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}
$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi=0^\circ$ پر $\boldsymbol{A}$ کو دو عدد سمتیات کے مجموعہ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے جن میں پہلی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کے الٹ سمت میں ہے اور اس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ دوسری سمتیہ کی مقدار دو اور اس کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت میں ہی ہے۔1.23-ب میں نقطہ P پر $\boldsymbol{A}$ کی سمت واقع بڑھتی $\boldsymbol{a}_\phi$ اور گھٹتی $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں ہے۔یاد رہے کہ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کو $\phi=0^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔$\phi=0^\circ$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\text{x}$ برابر ہوتے ہیں اور اسی طرح $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_\text{y}$ برابر ہوتے ہیں۔یہی وجہ ہے کہ مساوات 1.40 میں $\boldsymbol{a}_\text{x}$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\text{y}$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\phi$ پُر کرنے سے مندرجہ بالا مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$\phi=45^\circ$ پر مساوات 1.41

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\phi=45^\circ}&=2(-\cos 45^\circ+\sin 45^\circ)\boldsymbol{a}_\rho+2(\sin 45^\circ+\cos 45^\circ)\boldsymbol{a}_\phi\\
&=2(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\rho+2(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\phi\\
&=\sqrt{8}\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}
$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi=45^\circ$ پر $\boldsymbol{A}$ صرف اور صرف $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت میں ہے اور اس کی لمبائی $\sqrt{8}$ ہے۔شکل 1.23-ب میں یہ حقیقت واضح ہے کہ $\phi=45^\circ$ پر $\boldsymbol{A}$ کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ ہی ہے۔یاد رہے کہ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کو $\phi=45^\circ$ پر حاصل کیا گیا ہے۔شکل میں اکائی سمتیات کو عین $\boldsymbol{A}$ کے اوپر کھینچا گیا ہے تاکہ سمتیات کی سمتوں کا موازنہ آسانی سے کیا جا سکے۔

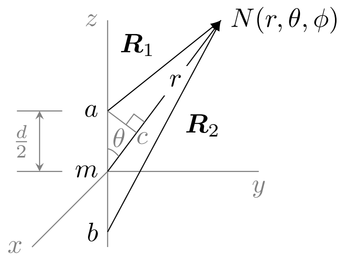
آپ نے دیکھا کہ نلکی محدد میں سمتیہ کی مساوات کا دارومدار اس نقطے پر ہے جس نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کئے جائیں۔آئیں دیکھیں کہ $\phi=135^\circ$ پر پائے جانے والے نقطہ T کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کیسا لکھا جائے گا۔مساوات 1.41 میں $\phi=135^\circ$ پُر کرنے سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\phi=135^\circ}&=2(-\cos 135^\circ+\sin 135^\circ)\boldsymbol{a}_\rho+2(\sin 135^\circ+\cos 135^\circ)\boldsymbol{a}_\phi\\
&=2(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\rho+2(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\phi\\
&=\sqrt{8}\boldsymbol{a}_\rho
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi=135^\circ$ کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کو $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں $\sqrt{8}$ لمبائی کا سمتیہ لکھا جا سکتا ہے۔شکل سے یہ حقیقت واضح ہے۔

مثال 1.8: شکل 1.24 میں z محدد پر نقطہ $a(0,0,\frac{d}{2})$ پر مثبت برقی بار[23] $+Q$ اور نقطہ $b(0,0,-\frac{d}{2})$ پر منفی برقی بار $-Q$ پائے جاتے ہیں۔ایسے دو برابر لیکن الٹ علامت کے دو قریب قریب پائے جانے والے برقی باروں کے جوڑی کو جفت قطب[24] کہتے ہیں۔دکھائے گئے سمتی فاصلوں $\boldsymbol{R}_1$ اور $\boldsymbol{R}_2$ کو کروی محدد میں لکھیں۔

[23] electric charge
[24] dipole



شکل 1.24: جفت قطب کے برقی بار سے دور نقطے تک فاصلے۔

حل: m سے N تک فاصلہ r ہے اور اس سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔ نقطہ a سے r پر عمودی لکیر لگائی گئی ہے جو اسے c پر ملتی ہے۔ یوں ac کی سمت کروی محدد کے اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ کی سمت میں ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے $mc = \frac{d}{2}\cos\theta$ اور $ac = \frac{d}{2}\sin\theta$ لکھے جا سکتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{R}_1$ کو ہم a سے c تک سمتیہ $\frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$ اور c سے N تک سمتیہ $(r-\frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کے مجموعے کی شکل میں

$$\boldsymbol{R}_1 = \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta + (r - \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{1.42}$$

لکھ سکتے ہیں۔ ہم اسی طرح شکل 1.24 میں N سے m تک لکیر کو m سے آگے بڑھا کر b سے اس پر عمودی لکیر کھینچ کر شکل کو دیکھتے ہوئے $\boldsymbol{R}_2$ کی مساوات بھی لکھ سکتے ہیں البتہ ایسا کرنے کی بجائے آئیں $\boldsymbol{R}_2$ کی مساوات تحلیلی طریقے سے حاصل کریں۔ شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{R}_2 = \frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور کروی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ استعمال کئے گئے۔ کروی محدد میں کسی بھی لکیر کی طرح

$$\boldsymbol{R}_2 = A_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + A_\theta\boldsymbol{a}_\theta + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں $A_r = \boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سے حاصل کریں۔

$$A_r = \left(\frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right)\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{d}{2}\cos\theta + r$$

اسی طرح $A_\theta = \boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{a}_\theta$ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$A_\theta = \left(\frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right)\cdot\boldsymbol{a}_\theta = -\frac{d}{2}\sin\theta$$

اسی طرح $A_\phi = \boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{a}_\phi$ لکھتے ہوئے $A_\phi = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

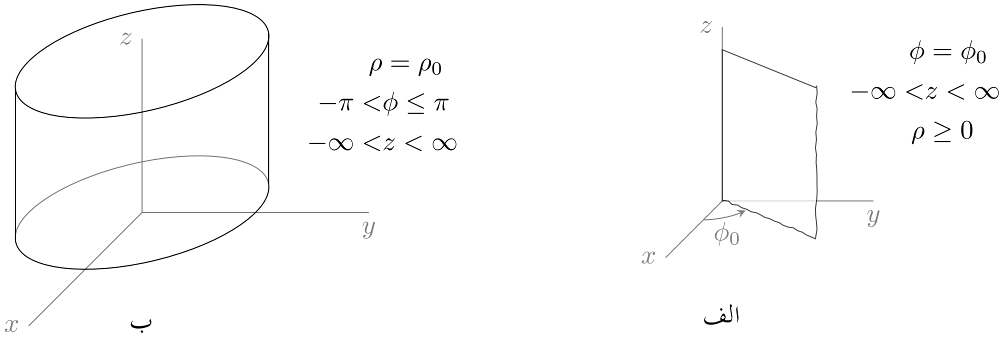
$$\boldsymbol{R}_2 = \left(\frac{d}{2}\cos\theta + r\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta \tag{1.43}$$

410 لکھا جا سکتا ہے۔

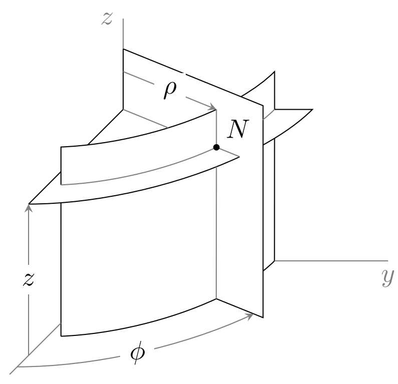
411

412
1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں

413 شکل 1.25-الف میں ϕ تبدیل کئے بغیر ρ اور z کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے $\phi = \phi_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا ہے۔ یہ سطح نلکی شکل رکھتی ہے جس کا اوپر والا منہ اور نچلا منہ کھلے ہیں یعنی ان پر ڈھکن نہیں۔ شکل-ب میں ρ تبدیل کئے بغیر ϕ اور z کو تبدیل کرتے ہوئے $\rho = \rho_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا



شکل 1.25: $\phi = \phi_0$ اور $\rho = \rho_0$ سطحیں۔



شکل 1.26: نلکی محدد کے تین سطحیں۔

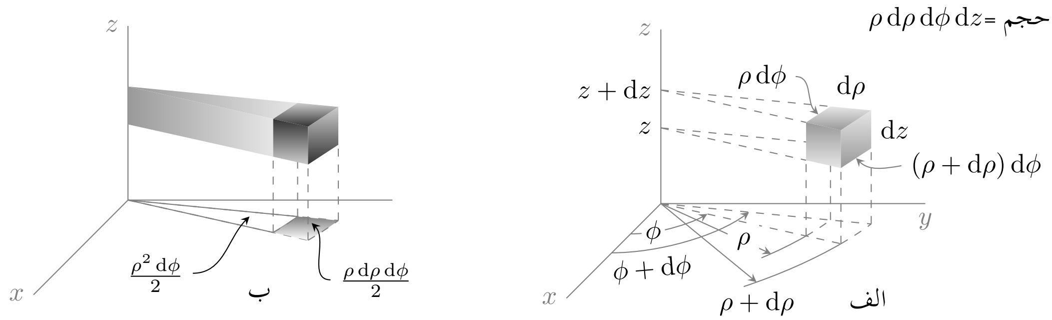
ہے۔ان دونوں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے ان اشکال میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-الف میں ρ کی قیمت صرف مثبت جبکہ z کی قیمت مثبت یا منفی ممکن ہے۔ شکل-ب میں زاویہ کل 2π ریڈیئن تبدیل ہو سکتا ہے۔یوں زاویے کا مثبت حد π ریڈیئن یعنی 180 درجہ ہے جبکہ اس کا منفی[25] حد $-\pi$ یعنی -180 درجے ہے۔ نلکی محدد اور کارتیسی نظام دونوں میں $z = z_0$ سطح یکساں بنتی ہے۔

جیسے شکل 1.26 میں دکھایا گیا ہے، $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحیں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔اسی طرح $\rho = \rho_1$ اور $z = z_1$ سطحیں ایک گول دائرے پر ملتے ہیں جبکہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔ $\rho = \rho_1$، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں صرف اور صرف ایک ہی نقطہ N پر اکٹھے ملتے ہیں۔ نلکی محدد میں کسی بھی نقطے کا مقام اسی طرح تین سطحوں کے متقاطع نقطہ سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ $(0,0,z)$ تک پہنچنے کی خاطر ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔

کسی بھی نقطہ $N(\rho_1, \phi_1, z_1)$ پر $\rho = \rho_1$، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں بنانے کے بعد اگر نلکی محدد کے متغیرات کو $\mathrm{d}\rho$، $\mathrm{d}\phi$ اور $\mathrm{d}z$ بڑھا کر مزید تین سطحیں کھینچے جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر منحرف مکعب کو گھیریں گے جسے شکل 1.27-الف میں دکھایا گیا ہے۔رداسی سمت میں اس منحرف مکعب کے اطراف کی لمبائی $\mathrm{d}\rho$ جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت کے اطراف کی لمبائی $\mathrm{d}z$ ہے۔ $\boldsymbol{a}_\phi$ سمت میں z محدد کے قریبی گول طرف کی لمبائی $\rho\,\mathrm{d}\phi$ جبکہ محدد سے دور طرف کی گول لمبائی $(\rho + \mathrm{d}\rho)\,\mathrm{d}\phi$ ہے۔جیسے جیسے اس منحرف مکعب کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے یہ ایک درست مکعب کی صورت اختیار کرتا ہے لہٰذا نہایت چھوٹے حجم کو مکعب تصور کرتے ہوئے اس کا حجم $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.27-ب میں چھوٹے منحرف مکعب کو رداسی سمت میں z محدد تک بڑھا کر پچر یا فانہ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ $z = 0$ سطح پر اس کا عمودی سایہ بھی دکھایا گیا ہے۔ ρ رداس کے گول دائرے کے مرکز سے $\mathrm{d}\phi$ زاویے پر دو لکیریں دائرے تک کھینچنے سے $\frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2}$ رقبہ گھیرا جاتا ہے۔اگر رداس $\rho + \mathrm{d}\rho$

[25]حقیقت میں منفی حد $-180°$ کو نہیں چھوتا۔اگر منفی حد $-180°$ کو چھوئے تب منفی x محدد دو مرتبہ شامل ہوتا ہے۔



شکل 1.27: نلکی محدد میں انتہائی چھوٹی حجم۔

ہو تب رقبہ $\frac{(\rho+\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2}$ ہو گا۔یوں شکل-ب میں چھوٹے مکعب کے سایہ کا رقبہ $\mathrm{d}S$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \frac{(\rho+\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} - \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2} \\
&= \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi + 2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi + (\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} - \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2} \\
&= \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi + \frac{(\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} \\
&\approx \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

ہو گا۔یہاں آخری قدم پر d کی علامت، مجموعہ کے پہلے رکن میں دو مرتبہ جبکہ دوسرے رکن میں تین مرتبہ ہے۔یوں دوسرے اور پہلے رکن کی نسبت $\frac{0.5(\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi} = \frac{\mathrm{d}\rho}{2\rho}$ ہو گی۔$\mathrm{d}\rho$ کو کم سے کم[26] کرتے ہوئے دوسرے رکن کو قابل نظر انداز بناتے ہوئے نظر انداز کیا گیا ہے۔یوں $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ رقبہ اور $\mathrm{d}z$ بلندی کے مکعب کا حجم $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ ہو گا۔

شکل 1.27 کو درست مکعب تصور کرتے ہوئے، اس کے اطراف کی لمبائی $\rho\,\mathrm{d}\phi$، $\mathrm{d}\rho$ اور $\mathrm{d}z$ لی جاتی ہے۔یوں مکعب کے نچلی اور اوپر سطح کا رقبہ مستطیل کے اطراف کو ضرب دیتے ہوئے $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح سامنے اور پیچھے سطحوں کا رقبہ $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$ جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کا رقبہ $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.27-الف میں نلکی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(\rho,\phi,z)$ کونے سے $N'(\rho+\mathrm{d}\rho,\phi+\mathrm{d}\phi,z+\mathrm{d}z)$ کونے پہنچتے ہیں۔N سے N' تک سمتیہ کو

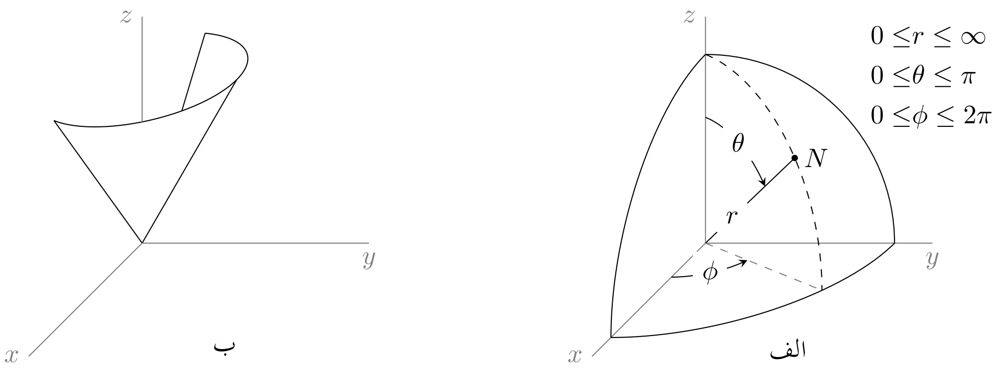
$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{1.44}$$

لکھا جاتا ہے۔یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے مابین سمتی فاصلے کو ظاہر کرتی ہے۔

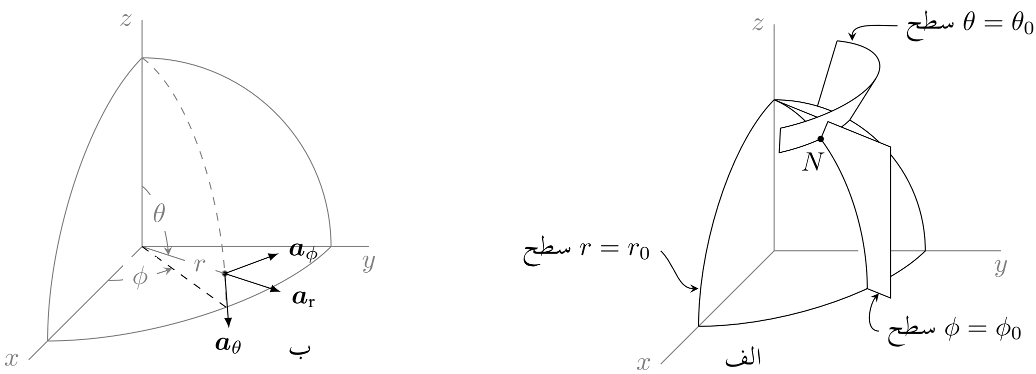
1.10 کروی محدد

سیدھی لکیروں اور سیدھی سطحوں کو کارتیسی محدد میں زیادہ آسانی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ نلکی سطحوں کو ظاہر کرنے کے لئے نلکی محدد بہتر ثابت ہوتا ہے۔اسی طرح کرہ اشکال کے سطحوں کو کروی محدد میں باآسانی لکھا جا سکتا ہے۔آئیں کروی نظام پر غور کریں۔

[26]کسی بھی متغیرہ مثلاً ρ میں چھوٹی سی تبدیلی کو $\Delta\rho$ لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $\mathrm{d}\rho$ لکھا جاتا ہے۔$\mathrm{d}\rho$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $\mathrm{d}\rho \to 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.28: (الف) کروی محدد کے متغیرات۔ (ب) $\theta = \theta_0$ سطح کا کچھ حصہ۔



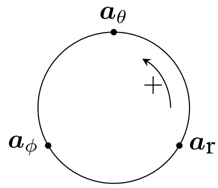
شکل 1.29: (الف) تین عمودی سطحوں کے ملاپ سے نقطہ N کا حصول۔ (ب) کروی محدد کے تین عمودی اکائی سمتیات۔

شکل 1.28-الف میں کروی محدد کے متغیرات r، θ اور ϕ دکھائے گئے ہیں۔ محدد کے مرکز سے نقطہ N تک کے فاصلے r کو کروی رداس پکارا جاتا ہے جبکہ z محدد سے کروی رداس تک زاویے کو θ لکھا جاتا ہے۔ x محدد سے رداس کے عمودی سائے تک زاویہ ϕ ہے۔ کروی اور نلکی نظام میں ϕ یکساں بیان کیا جاتا ہے۔ رداس کی قیمت مثبت لی جاتی ہے۔ یوں $r \geq 0$ ممکن ہے۔ θ کی کم سے کم قیمت $0°$ اور زیادہ سے زیادہ قیمت $180°$ ہے جبکہ ϕ کی کم سے کم قیمت $0°$ اور زیادہ سے زیادہ قیمت $360°$ ہے۔

r اور ϕ تبدیل کئے بغیر θ کو 0 سے بڑھاتے ہوئے π ریڈیئن کرنے سے نقطہ N شکل 1.28-الف میں نقطہ دار لکیر پر چلتے ہوئے مثبت z محدد سے شروع ہو کر منفی z محدد پر پہنچتا ہے۔ اسے نقطہ دار لکیر کو کرہ ارض کے خط طول بلد[27] تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل-الف میں θ کا $0°$ تا $90°$ تبدیل ہوتا دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح r اور θ تبدیل کئے بغیر ϕ کو $0°$ تا $360°$ تبدیل کرنے سے نقطہ N گول دائرے پر z محدد کے گرد ایک چکر کاٹے گا۔ یہ حرکت کرہ ارض کے خط عرض بلد[28] پر چلنے کے مانند ہے۔ θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کو تبدیل کرنے سے نقطہ N مرکز سے سیدھی باہر نکلتی لکیر پر حرکت کرتا ہے۔

r تبدیل کئے بغیر θ کو $0°$ تا $180°$ اور ϕ کو $0°$ تا $360°$ تبدیل کرنے سے نقطہ N کروی $r = r_0$ سطح پر حرکت کرے گا۔ اس کروی سطح کا رداس r ہو گا۔ شکل 1.28-الف میں θ کو $0°$ تا $90°$ اور ϕ کو $0°$ تا $90°$ تبدیل کرنے سے حاصل سطح دکھائی گئی ہے۔ شکل 1.28-ب میں θ تبدیل کئے بغیر r اور ϕ تبدیل کرنے سے پیدا مخروط[29] $\theta = \theta_0$ کروی سطح دکھائی گئی ہے۔ ϕ تبدیل کئے بغیر r اور θ تبدیل کرنے سے نلکی محدد کی طرح $\phi = \phi_0$ سطح حاصل ہوتی ہے۔ شکل 1.29-الف میں ان تینوں سطحوں کو دکھایا گیا ہے۔ بالکل کارتیسی اور نلکی محدد کی طرح، کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ کا مقام ان تین

longitude[27]
latitude[28]
cone[29]



شکل 1.30: کروی نظام میں اکائی سمتیات کی صلیبی ضرب۔

سطحوں کے نقطہ ملاپ سے اخذ کیا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر $r = r_0$، $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحیں آپس میں عمودی ہوتی ہے اور یہ صرف اور صرف اسی نقطے پر اکھٹے ملتی ہیں۔

شکل 1.29-ب میں کروی نظام کے تین عمودی اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$، $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھائے گئے ہیں۔ نلکی محدد کی طرح کروی محدد کے عمودی اکائی سمتیات بھی مقام تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتے ہیں۔ کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کے بڑھتے جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہو گی۔ اسی طرح θ بڑھانے سے نقطہ N اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ کی جانب حرکت کرے گا جبکہ ϕ بڑھانے سے نقطہ $\boldsymbol{a}_\phi$ کی جانب حرکت کرے گا۔ کارتیسی اور نلکی محدد کی طرح کروی محدد کے اکائی سمتیات کو بھی محددی نظام کے متغیرات کو کم سے کم بڑھاتے ہوئے نقطے کی حرکت کی جانب اکائی سمتیہ کھینچنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.29-الف سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سمتیہ $r = r_0$ سطح کے عمودی جبکہ $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحوں کے متوازی ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_\theta$ سمتیہ $\theta = \theta_0$ سطح کے عمودی اور $\phi = \phi_0$ سطح کے متوازی پایا جاتا ہے جبکہ $r = r_0$ سطح کے ساتھ مماس بناتا ہے۔ $\boldsymbol{a}_\phi$ سمتیہ $\phi = \phi_0$ سطح کے عمودی جبکہ $r = r_0$ اور $\theta = \theta_0$ سطحوں کے ساتھ مماس بناتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$، $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کروی نظام کے اکائی سمتیات ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_\phi$ لکھنے سے دائیں ہاتھ کا کروی نظام حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ کے قانون میں دائیں ہاتھ کا انگوٹھا r جبکہ پہلی انگلی θ اور دوسری انگلی ϕ بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتے ہیں۔ نلکی محدد میں یہ انگلیاں ρ، ϕ اور z جبکہ کارتیسی محدد میں x، y اور z بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہیں۔

دائیں ہاتھ کے قانون یا شکل 1.30 کی مدد سے یوں اکائی سمتیات کے صلیبی ضرب

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_\phi\,, \quad \boldsymbol{a}_\theta \times \boldsymbol{a}_\phi = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\,, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{a}_\theta \tag{1.45}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ اسی طرح

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = 1\,, \quad \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\theta = 1\,, \quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 1 \tag{1.46}$$

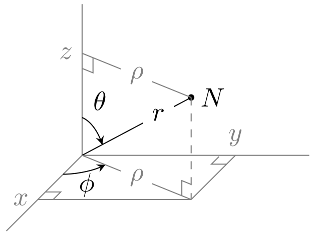
اور

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_\theta = 0\,, \quad \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0\,, \quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = 0 \tag{1.47}$$

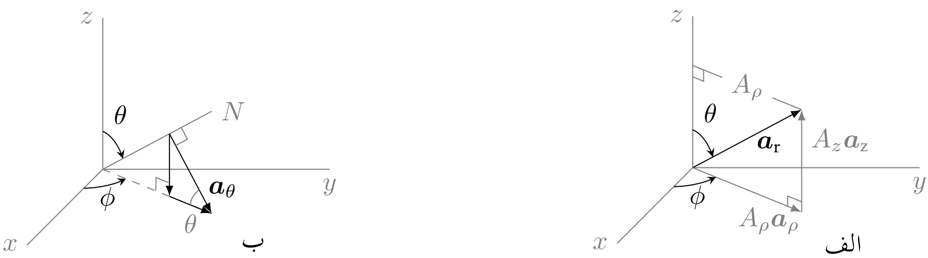
بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

نقطہ N کا z محدد سے فاصلہ ρ ہے جو نلکی محدد کا رداس ہے۔ اسے شکل 1.31 میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\rho = r \sin\theta$ کے برابر ہے۔ اسی طرح $z = 0$ سطح سے N کی اونچائی z ہے جو شکل کو دیکھتے ہوئے $z = r\cos\theta$ لکھی جا سکتی ہے۔ نقطہ N کا عمودی سایہ $z = 0$ سطح پر دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $x = \rho\cos\phi$ اور $y = \rho\sin\phi$ لکھے جا سکتے ہیں۔ $\rho = r\sin\theta$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{1.48}$$



شکل 1.31: کروی، نلکی اور کارتیسی متغیرات کا تبادلہ۔



شکل 1.32: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

لکھے جا سکتے ہیں جہاں z کی مساوات بھی ساتھ ہی لکھی گئی ہے۔ مساوات 1.48 کروی سے کارتیسی متغیرات دیتا ہے۔ اسی شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + z^2 \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned} \tag{1.49}$$

لکھتے ہوئے

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.50}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.48 میں z کی مساوات سے

$$\theta = \cos^{-1}\frac{z}{r} = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{1.51}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح مساوات 1.48 کے y کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{1.52}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 1.50، مساوات 1.51 اور مساوات 1.52 کارتیسی سے کروی متغیرات دیتے ہیں۔ 465

شکل 1.29-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کی سمت تبدیل کئے بغیر اسے محدد کے مرکز پر منتقل کرتے ہوئے شکل 1.32-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ اسے نلکی محدد کے اکائی سمتیات کی مدد سے

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = A_\rho\boldsymbol{a}_\rho + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.53}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.32-الف میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کی لمبائی ایک لیتے ہوئے $A_\rho = \sin\theta$ اور $A_z = \cos\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \sin\theta\boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \sin\theta \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_\phi &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0 \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \cos\theta
\end{aligned} \tag{1.55}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 1$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 0$ وغیرہ کا استعمال کیا گیا۔یہ مساوات کروی رداسی اکائی سمتیہ اور نلکی نظام کے اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔اسی طرح جدول 1.1 استعمال کرتے ہوئے مساوات 1.54 کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \sin\theta\cos\phi \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \sin\theta\sin\phi \\
\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= (\sin\theta \boldsymbol{a}_\rho + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \cos\theta
\end{aligned} \tag{1.56}$$

حاصل ہوتا ہے۔مکمل نتائج ایک جگہ لکھنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کو بھی شامل کیا گیا ہے۔ یہ مساوات کروی اکائی رداسی سمتیہ اور کارتیسی اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔ 467

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھتے ہیں۔مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ جبکہ $A_y = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ اور $A_z = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہوں گے۔یہ تمام مساوات 1.56 میں دئے گئے ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \sin\theta\cos\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \sin\theta\sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \cos\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.57}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ 468

شکل 1.29-ب میں دکھائے $\boldsymbol{a}_\theta$ کو $\phi = \phi_0$ سطح پر حرکت دیتے ہوئے مرکز کے اتنے قریب لا کر شکل 1.32-ب میں دکھایا گیا ہے کہ اس کی نوک $x = 0$ سطح کو چھوتی ہے۔جیسا شکل 1.29-الف سے واضح ہے، $\phi = \phi_0$ سطح پر $\boldsymbol{a}_\theta$ کو حرکت دینے سے اس سمتیہ کی سمت تبدیل نہیں ہوتی۔شکل 1.32-ب کو دیکھتے ہوئے $\boldsymbol{a}_\theta = B_\rho\boldsymbol{a}_\rho - B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھا جا سکتا ہے۔یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ $B_\rho\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\theta$ کے مابین زاویہ θ ہے۔$\boldsymbol{a}_\theta$، $B_\rho\boldsymbol{a}_\rho$ اور $-B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ مل کر تکون بناتے ہیں جسے دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned}
B_\rho &= \cos\theta \\
B_z &= \sin\theta
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{a}_\theta = \cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{1.58}$$

کے برابر ہے۔اس مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\rho &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos\theta \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\phi &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0 \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\sin\theta
\end{aligned} \tag{1.59}$$

$\boldsymbol{a}_\theta$ اور نلکی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح مساوات 1.58 کا باری باری ax، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos\theta \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos\theta\cos\phi \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \cos\theta \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \cos\theta\sin\phi \\
\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\sin\theta
\end{aligned} \tag{1.60}$$

جدول 1.2: کروی اکائی سمتیات کا نلکی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$	$\boldsymbol{a}_{\phi}$	$\boldsymbol{a}_{\rho}$	
$\cos\theta$	0	$\sin\theta$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$
$-\sin\theta$	0	$\cos\theta$	$\boldsymbol{a}_{\theta}$
0	1	0	$\boldsymbol{a}_{\phi}$

جدول 1.3: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$	
$\cos\theta$	$\sin\theta\sin\phi$	$\sin\theta\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$
$-\sin\theta$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_{\theta}$
0	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	$\boldsymbol{a}_{\phi}$

حاصل ہوتے ہیں۔یہ مساوات $\boldsymbol{a}_{\theta}$ اور کارتیسی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_{\theta}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\theta} = \boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھتے ہیں۔مساوات 1.38 کے مطابق $\boldsymbol{a}_{\theta}$ جبکہ $A_x = \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\cdot\boldsymbol{a}_{\theta}$، $A_y = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\theta}$ اور $A_z = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\theta}$ ہوں گے۔یہ تمام مساوات 1.60 میں دئے گئے ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{a}_{\theta} = \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} - \sin\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{1.61}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

کروی محدد کا $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اور نلکی محدد کا $\boldsymbol{a}_{\phi}$ یکساں ہیں۔اسے کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{a}_{\phi} = -\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \tag{1.62}$$

لکھا جاتا ہے۔اس مساوات کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\phi}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} &= -\sin\phi\\
\boldsymbol{a}_{\phi}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} &= \cos\phi\\
\boldsymbol{a}_{\phi}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} &= 0
\end{aligned} \tag{1.63}$$

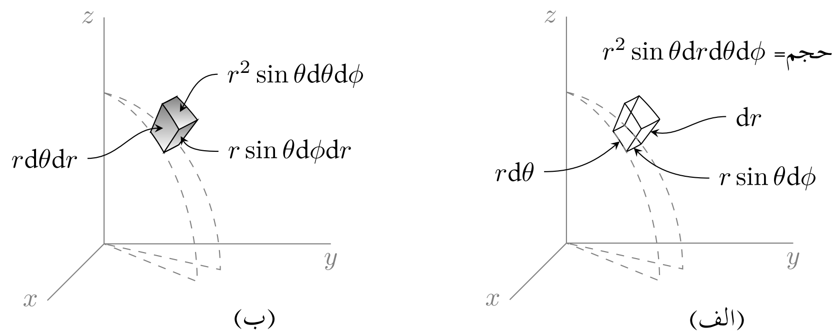
لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 1.55 اور مساوات 1.59 کے نتائج کے ساتھ $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کے مختلف غیر سمتی ضربوں کو جدول 1.2 میں یکجا کیا گیا ہے۔

مساوات 1.56 اور مساوات 1.60 کے نتائج جدول 1.3 میں یکجا کئے گئے ہیں۔

شکل 1.29 میں $N(r,\theta,\phi)$ پر تین عمودی سطحیں دکھائی گئی ہیں۔اگر کروی محدد کے متغیرات $\mathrm{d}r$، $\mathrm{d}\theta$ اور $\mathrm{d}\phi$ بڑھا کر دوبارہ تین عمودی سطحیں کھینچی جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر چھوٹا منحرف مکعب نما حجم گھیریں گی جسے شکل 1.33 میں دکھایا گیا ہے۔$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سمت میں مکعب کے چار اطراف کی لمبائیاں $\mathrm{d}r$ ہے۔$\boldsymbol{a}_{\theta}$ سمت میں z محدد کے قریبی دو اطراف کی لمبائیاں $r\,\mathrm{d}\theta$ جبکہ دو دور اطراف کی لمبائیاں $(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta$ ہے جسے دو اجزاء کی صورت میں یوں $r\,\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔دور اطراف کے لمبائی کا پہلا جزو ہوبہو قریبی اطراف کی لمبائی ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو دور اور قریبی اطراف کے لمبائیوں میں فرق کو ظاہر کرتی ہے۔ان دو اجزاء کی نسبت $\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{r\,\mathrm{d}\theta}$ کے برابر ہے۔$\mathrm{d}r$ کو کم سے کم[30] کرتے ہوئے اس نسبت کو کم سے کم کیا جا سکتا ہے۔ایسا ہی کرتے ہوئے ہم $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ کو رد کرتے ہوئے ان چاروں اطراف کی لمبائیاں $r\,\mathrm{d}\theta$ ہی لیتے ہیں۔اسی طریقہ کار سے $\boldsymbol{a}_{\phi}$ اطراف کی

[30]کسی بھی متغیرہ مثلاً r میں چھوٹی سی تبدیلی کو Δr لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $\mathrm{d}r$ لکھا جاتا ہے۔$\mathrm{d}r$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $\mathrm{d}r \to 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.33: (الف) کروی نظام میں چھوٹی لمبائیاں اور چھوٹی حجم۔ (ب) کروی محدد میں چھوٹی سطحیں۔

لمبائیاں $r \sin\theta \, \mathrm{d}\phi$ لکھی جا سکتی ہے۔ منحرف مکعب نما کے اطراف میں معمولی فرق کو نظرانداز کرتے ہوئے اسے مکعب نما تصور کیا جا سکتا ہے جس کے $r = r_0$ سطحوں کا رقبہ $r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$ جبکہ $\theta = \theta_0$ سطحوں کا رقبہ $r \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi$ اور $\phi = \phi_0$ سطحوں کا رقبہ $r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$ ہو گا۔ اس مکعب کا حجم $r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$ ہو گا۔

شکل 1.33 میں کروی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(r,\theta,\phi)$ کونے سے $N'(r+\mathrm{d}r, \theta+\mathrm{d}\theta, \phi+\mathrm{d}\phi)$ کونے پہنچتے ہیں۔ N سے N' تک سمتیہ کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi} \tag{1.64}$$

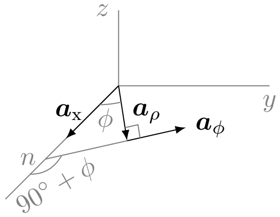
لکھا جاتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی فاصلہ دیتا ہے۔

کسی بھی مکمل بند سطح کی سمت، سطح کے عمودی باہر جانب لی جاتی ہے۔ شکل 1.33 میں $r = r_0$ سطح مرکز کا قریبی سطح ہے۔ اس سطح کے دو آپس میں الٹ عمودی اطراف $\mp\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہیں جن میں $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ بند سطح کی بیرونی سمت کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا یہی اس سطح کی درست سمت ہے۔ اس کے برعکس $r = r_0 + \mathrm{d}r$ سطح مرکز سے دور تر ہے۔ اس سطح کے بھی دو آپس میں الٹ عمودی سمتیں $\mp\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہیں جن میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سطح کی درست سمت ہے۔ یوں $r = r_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ جبکہ $r = r_0 + \mathrm{d}r$ سطح کا سمتی رقبہ $r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔ اسی طرح $\theta = \theta_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\theta}$ جبکہ $\theta = \theta_0 + \mathrm{d}\theta$ سطح کا سمتی رقبہ $r \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\theta}$ ہو گا۔ $\phi = \phi_0$ سطح کا $-r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\phi = \phi_0 + \mathrm{d}\phi$ سطح کا سمتی رقبہ $r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \boldsymbol{a}_{\phi}$ ہو گا۔

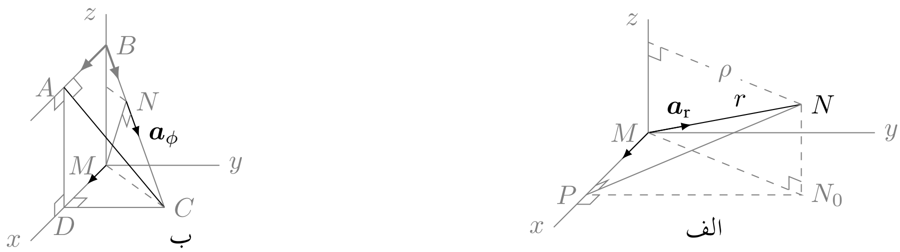
مشق 1.6: شکل 1.33 میں سمت میں مرکز کے قریبی اور دور اطراف کی لمبائیاں لکھیں۔

جوابات: $r \sin\theta \, \mathrm{d}\phi$، $r \sin(\theta + \mathrm{d}\theta) \, \mathrm{d}\phi$، $(r + \mathrm{d}r) \sin\theta \, \mathrm{d}\phi$ اور $(r + \mathrm{d}r) \sin(\theta + \mathrm{d}\theta) \, \mathrm{d}\phi$

مثال 1.9: دو اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_1$ اور $\boldsymbol{a}_2$ کا غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = (1)(1)\cos\alpha_{12}$ یعنی ان کے مابین زاویے α_{12} کے کوسائن کے برابر ہوتا ہے۔ غیر سمتی ضرب کے اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi}$ حاصل کریں۔



شکل 1.34: کارتیسی اور نلکی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔



شکل 1.35: کروی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔

حل: شکل 1.34 میں a_x اور a_ρ کے درمیان زاویہ ϕ جبکہ a_y اور a_ρ کے درمیان زاویہ $90° - \phi$ پایا جاتا ہے لہٰذا $a_x \cdot a_\rho = \cos\phi$ اور $a_y \cdot a_\rho = \cos(90° - \phi) = \sin\phi$ کے برابر ہیں۔ a_x اور a_ϕ کی سمتیں تبدیل کئے بغیر اگر انہیں یوں ہلایا جائے کہ ان کی دُم نقطہ n پر آ ٹھہرے تو شکل سے ظاہر ہے کہ ان کے مابین زاویہ $90° + \phi$ ہے۔ یوں $a_x \cdot a_\phi = \cos(90° + \phi) = -\sin\phi$ کے برابر ہے۔ اسی طرح a_y اور a_ϕ کے درمیان ϕ زاویہ ہونے کی بنا پر $a_y \cdot a_\phi = \cos\phi$ کے برابر ہے۔ چونکہ a_z ان دونوں نلکی اکائی سمتیات کے عمودی ہے لہٰذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔

مثال 1.10: مثال 1.9 کے طرز پر a_r کا a_x، a_y اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-الف میں نقطہ $N(r, \theta, \phi)$ دکھایا گیا ہے جسے $N(x, y, z)$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔ شکل میں a_x اور a_r بھی دکھائے گئے ہیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ $a_x \cdot a_r = \cos \angle NMP$ کے برابر ہے جہاں N اور P سے M تک لکیریں کھینچنے سے زاویہ $\angle NMP$ بنتا ہے۔ N سے $z = 0$ سطح پر عمود نقطہ N_0 دیتا ہے۔ N_0 سے x محدد پر عمود نقطہ P دیتا ہے۔ N سے N_0 اور یہاں سے P منتقل ہوتے ہوئے a_x سمت میں کسی قسم کی حرکت نہیں کی جاتی لہٰذا اگر کارتیسی نظام میں $N(x, y, z)$ لکھا جائے تو اسی نظام میں $N_0(x, y, 0)$ اور $P(x, 0, 0)$ لکھے جائیں گے۔ ہم N سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے بھی P تک پہنچ سکتے ہیں۔ تکون NMP میں M سے N تک کا فاصلہ $\overline{MN} = r$ جبکہ M سے P تک کا فاصلہ $\overline{MP} = x$ اور زاویہ $\angle NPM = 90°$ ہیں لہٰذا $\cos \angle NMP = \frac{x}{r}$ ہو گا۔ یہی a_x اور a_r کے غیر سمتی ضرب کے برابر ہے۔ N سے y محدد پر عمود بناتے ہوئے یوں $a_y \cdot a_r = \frac{y}{r}$ اور N سے z محدد پر عمود سے $a_z \cdot a_r = \frac{z}{r}$ لکھے جا سکتے ہیں۔ چونکہ $x = r\sin\theta\cos\phi$، $y = r\sin\theta\sin\phi$ اور $z = r\cos\theta$ کے برابر ہیں لہٰذا ہم

$$a_r \cdot a_x = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\phi$$
$$a_r \cdot a_y = \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\phi$$
$$a_r \cdot a_z = \frac{z}{r} = \cos\theta$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 1.11: مثال 1.9 کے طرز پر $\boldsymbol{a}_\theta$ کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ جبکہ محدد کے مرکز M پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ دکھائے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ حاصل کرنے کی خاطر سمتیات کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں z محدد پر نقطہ B منتقل کرتے ہوئے دوبارہ دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos \underline{\angle ABC}$ کے برابر ہے۔ اس شکل میں $\underline{\angle DMC} = \phi$ اور $\underline{\angle BMN} = \theta$ کروی محدد کے زاویے ہیں۔ تکون ΔBMN میں زاویہ $\underline{\angle MNB}$ نوے درجے کا ہے۔ یوں $\underline{\angle NBM} = 90^\circ - \theta$ ہو گا۔ شکل سے واضح ہے کہ $\underline{\angle CBM} = \underline{\angle NBM}$ ہیں۔ اس طرح تکون ΔBMC میں $\underline{\angle BMC} = 90^\circ$ جبکہ $\underline{\angle CBM} = 90^\circ - \theta$ ہونے کی بنا پر $\underline{\angle MCB} = \theta$ ہو گا۔

شکل-ب میں $\overline{BM} = l$ لیتے ہوئے تکون ΔBMC کو دیکھتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\overline{BC} &= \frac{l}{\sin\theta} \\
\overline{MC} &= \frac{l}{\tan\theta}
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ تکون ΔMDC سے

$$
\overline{MD} = \overline{MC}\cos\phi = \frac{l\cos\phi}{\tan\theta}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل سے واضح ہے کہ $\overline{MD}$ اور $\overline{AB}$ برابر ہیں یعنی $\overline{MD} = \overline{AB}$۔ یوں تکون ΔBAC سے

$$
\cos\underline{\angle ABC} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\left(\frac{l\cos\phi}{\tan\theta}\right)}{\left(\frac{l}{\sin\theta}\right)} = \cos\theta\cos\phi
$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos\theta\cos\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 1.7: شکل 1.35-ب کے طرز پر شکل بناتے ہوئے $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\cos\theta\sin\phi$ اور $-\sin\theta$

سوالات

سوال 1.1: سمتیہ $\boldsymbol{A}=-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+7\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہیں۔مندرجہ ذیل حاصل کریں: (الف) $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$ اور اسی کی سمت میں اکائی سمتیہ؛ (ب) $2\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ؛ (پ) $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$ $|3\boldsymbol{A}||2\boldsymbol{B}|$

جوابات: $-13\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-13\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+8\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $-0.648\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-0.648\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-0.399\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، 28.3 ، $1359\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+1087\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+1359\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

سوال 1.2: نقطہ $A(1,-2,3)$ ، $B(3,-1,2)$ اور $C(7,5,-4)$ دیے گئے ہیں۔(الف) محدد کے مرکز سے A تک سمتیہ لکھیں؛ (ب) مرکز سے لکیر AB کے وسط تک سمتیہ لکھیں؛ (پ) اسی سمت میں اکائی سمتیہ لکھیں؛ (ت) تکون ABC کا احاطہ دریافت کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+3\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-1.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+2.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $0.566\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-0.424\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-0.707\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، 23.4

سوال 1.3: مرکز سے نقطہ A تک سمتیہ $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+3\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے جبکہ مرکز سے $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اکائی سمتیہ کی سمت میں نقطہ B پایا جاتا ہے۔دونوں نقطوں کے درمیان 4 فاصلہ ہونے کی صورت میں نقطہ B دریافت کریں۔

جوابات: $(2.57,-2.57,1.28)$

سوال 1.4: سمتی میدان $\boldsymbol{M}=(x+y^2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+2(xy+3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+4z^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ دیا گیا ہے۔نقطہ $A(2,-3,1)$ پر اس میدان کی قیمت حاصل کریں۔اسی نقطے پر میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ دریافت کریں۔ایسی سطح جس پر $|\boldsymbol{M}|=5$ ہو کی مساوات حاصل کریں۔اس سطح پر $y=2$ اور $z=-1$ ہونے کی صورت میں حاصل لکیر کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{M}=11\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $(0.836\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-0.456\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.304\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})$ ، $x^2+y^2+2xy^2+4x^2y^2+24xy+16z^4-11=0$ ، $17x^2+56x+9=0$

سوال 1.5: سمتی میدان $\boldsymbol{B}=2x^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-3y(x+2z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{M}=(x+y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{y}{x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+xy\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ دیے گئے ہیں۔نقطہ $N(2,-3,-1)$ پر $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{M}$ حاصل کریں۔اسی نقطے پر سمتیہ $2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{B}=8\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $\boldsymbol{M}=-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-1.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $0.830\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+0.069\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.553\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

سوال 1.6: نقطہ $N(2,-3,7)$ پر میدان $\boldsymbol{M}=\frac{16}{x^2+y^2}(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_M$ دریافت کریں۔نقطہ N پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{M}$ کے درمیان زاویہ حاصل کریں۔اسی طرح نقطہ N پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{M}$ کے درمیان زاویہ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{a}_M=0.555\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-0.832\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ، 56.3° ، 33.7°

سوال 1.7: میدان $\boldsymbol{M}=\frac{16}{x^2+y^2}(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})$ کا مندرجہ ذیل دو درجی تکمل $y=3$ سطح پر حاصل کریں۔

$$\int_0^3\int_0^2 \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$$

جواب: $24\ln\frac{13}{9}$

سوال 1.8: غیر سمتی ضرب استعمال کرتے ہوئے تکون ABC میں زاویہ A اور C حاصل کریں۔تکون کے کونے $A(3,1,2)$ ، $B(4,6,2)$ اور $C(1,4,-2)$ ہیں۔

جوابات: 61.74° ، 56.51°

سوال 1.9: نقطے $A(4,1,2)$، $B(-2,4,3)$ اور $C(2,3,-1)$ دیے گئے ہیں۔ سمتیہ $\boldsymbol{R}_{BA}$ اور $\boldsymbol{R}_{CA}$ حاصل کریں۔ دوسری سمتیہ پر پہلی سمتیہ کے عمودی سائے[31] کی لمبائی دریافت کریں۔ لکیر AB کے درمیانے نقطے سے لکیر AC کے درمیانے نقطے تک سیدھا سمتیہ حاصل کریں۔

جوابات: $-6\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، 4.12 ، $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-0.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

سوال 1.10: سمتیہ $\boldsymbol{M}=5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کا وہ حصہ حاصل کریں جو سمتیہ $\boldsymbol{P}=-7\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-6\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ کے متوازی ہے۔ وہ حصہ حاصل کریں جو اس کے عمودی ہے۔

جوابات: $4.17\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-1.19\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+3.57\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $0.83\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-1.81\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-1.57\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

سوال 1.11: تین سمتیات $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $\boldsymbol{r}_2=-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{r}_3=5\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ دیے گئے ہیں۔ $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ ایسی اکائی سمتیہ حاصل کریں جو $\boldsymbol{r}_1$ اور $\boldsymbol{r}_2$ دونوں کو عمودی ہو۔ سمتیہ $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ اور $\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2$ دونوں کو عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ اس تکون کا رقبہ حاصل کریں جس کے اطراف $\boldsymbol{r}_1$ اور $\boldsymbol{r}_2$ ہوں۔ اس تکون کا رقبہ حاصل کریں جس کے کونے یہ تین سمتیات دیتے ہیں۔

جوابات: $-0.81\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+0.16\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.58\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $\mp(-0.81\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+0.16\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.58\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})$ ، $\mp(0.29\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+0.88\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.37\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})$ ، 4.3 ، 13.6

سوال 1.12: نقطہ $N(5,10,4)$ پر سمتیات $\boldsymbol{R}_{AN}=-3\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+12\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ اور $\boldsymbol{R}_{BN}=12\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ مل کر تکون بناتی ہیں۔ تکون کی عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ سمتیہ $\boldsymbol{R}_{BN}$ کے عمودی اور تکون کی سطح کے متوازی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ تکون کی سطح پر اس اکائی سمتیہ کو حاصل کریں جو نقطہ N پر تکون کے کونے کو نصف زاویہ میں کاٹے۔

جوابات: $\mp(-0.83\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+0.39\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-0.40\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})$ ، $\mp(0.26\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-0.38\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-0.89\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})$ ، $0.19\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+0.87\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.45\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

سوال 1.13: سمتیہ $\boldsymbol{M}=(x^2+y^2)^{-1}(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})$ کو نلکی محدد کے متغیرات میں لکھیں۔ نقطہ $(5,30^\circ,6)$ پر سمتیہ کی قیمت کارتیسی اور نلکی محدد میں حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{M}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_{\rho}$ ، $\boldsymbol{M}=0.41\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+0.29\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ، $\boldsymbol{M}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}_{\rho}$

سوال 1.14: نقطہ $N(\rho=2,\phi=45^\circ,z=12)$ اور $P(\rho=5,\phi=-60^\circ,z=-6)$ دئے گئے ہیں۔ کارتیسی محدد میں، پہلے نقطے سے دوسرے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ اسی اکائی سمتیہ کو پہلے نقطے پر پائے جانے والے نلکی محدد کے متغیرات کی صورت میں لکھیں۔ اسی اکائی سمتیہ کو دوسرے نقطے پر پائے جانے والے نلکی محدد کے متغیرات کی صورت میں لکھیں۔

جوابات: $0.057\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-0.303\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-0.951\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $-0.174\boldsymbol{a}_{\rho}-0.255\boldsymbol{a}_{\phi}-0.951\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $0.292\boldsymbol{a}_{\rho}-0.180\boldsymbol{a}_{\phi}-0.951\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

سوال 1.15: نقطہ $N(\rho=5,\phi=30^\circ,z=6)$ سے نقطہ $P(\rho=10,\phi=75^\circ,z=12)$ تک سمتیہ کارتیسی محدد میں لکھیں۔ اسی سمت میں اکائی سمتیہ بھی لکھیں۔ کارتیسی محدد میں دوسرے نقطے سے مرکز تک اکائی سمتیہ لکھیں۔

جوابات: $-1.74\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+7.16\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+6\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $-0.183\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-0.618\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+0.631\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $0.166\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-0.618\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-0.768\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

[31] projection

سوال 1.16: نقطہ $M(5,-3,2)$ سے نقطہ $N(10,2,-5)$ تک سمتیہ کو نقطہ M پر نلکی محدد کے اکائی سمتیات کی مدد سے لکھیں۔ دوسرے نقطے سے پہلے نقطے کی سمت میں اکائی سمتیہ کو دوسرے نقطے پر نلکی اکائی سمتیات کی مدد سے لکھیں۔ دوسرے نقطے سے مرکز تک اکائی سمتیہ دوسرے نقطے کے اکائی سمتیات کی صورت میں لکھیں۔

جوابات: $-1.71\boldsymbol{a}_\rho - 6.86\boldsymbol{a}_\phi + 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $0.59\boldsymbol{a}_\rho + 0.39\boldsymbol{a}_\phi - 0.7\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $0.90\boldsymbol{a}_\rho + 0.44\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

سوال 1.17: رداس $\rho = 2$ اور $\rho = 6$ حجم گھیرتے ہیں جو $z = 11$ تا $z = 13$ اور $\phi = 30^\circ$ تا $\phi = 60^\circ$ پایا جاتا ہے۔ اس جسم کے حجم کو تین درجی تکمل سے حاصل کریں۔ اس کی بھی تکمل سے سطح بھی حاصل کریں۔

جوابات: 16.8 ، 41.1

سوال 1.18: نقطہ $N(5,3,8)$ سے نقطہ $P(3,-4,2)$ تک سمتیہ کارتیسی، نلکی اور کروی محدد میں حاصل کریں۔ پہلے نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کریں۔ تینوں سمتیات کی لمبائی حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ تینوں سمتیات کی لمبائی برابر ہے۔

جوابات: $-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $-5.3165\boldsymbol{a}_\rho - 4.9735\boldsymbol{a}_\phi - 6.0000\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ، $-8.6615 - 2.7739\boldsymbol{a}_\theta - 2.5069\boldsymbol{a}_\phi$ ، 9.434

سوال 1.19: نقطہ N پر سمتیہ $\boldsymbol{K} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - 2\boldsymbol{a}_\theta + 8\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{G} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + 5\boldsymbol{a}_\theta + 2\boldsymbol{a}_\phi$ دیے گئے ہیں۔ ان کی غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{G}$ حاصل کریں۔ دوسری سمتیہ کی پہلی سمتیہ کی سمت میں لمبائی حاصل کریں۔ پہلی سمتیہ کا وہ حصہ دریافت کریں جو دوسری سمتیہ کی سمت میں ہے۔ دونوں سمتیوں کا سمتی ضرب $\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{G}$ حاصل کریں۔ اس نقطے پر دونوں سمتیوں کی عمودی اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

جوابات: 12 ، 1.3675 ، $0.46753\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - 0.31169\boldsymbol{a}_\theta + 1.24675\boldsymbol{a}_\phi$ ، $44\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - 10\boldsymbol{a}_\theta - 19\boldsymbol{a}_\phi$ ، $\mp(0.89871\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - 0.20425\boldsymbol{a}_\theta - 0.38808\boldsymbol{a}_\phi)$

سوال 1.20: ایک جسم $r = 6$ تا $r = 10$ ، $\theta = 30^\circ$ تا $\theta = 70^\circ$ اور $\phi = 25^\circ$ تا $\phi = 100^\circ$ حجم گھیرتا ہے۔ اس جسم کے دو دور ترین کونوں کے درمیان فاصل حاصل کریں۔ جسم کی سطح کا رقبہ حاصل کریں۔ جسم کی حجم دریافت کریں۔

جوابات: 9.27 ، 198.27 ، 179.25

سوال 1.21: نقطہ $N(5,4,-2)$ اور $P(6,4,10)$ دیے گئے ہیں۔ پہلے نقطے کو نلکی محدد میں لکھیں۔ پہلے نقطے کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے پہلے نقطے سے دوسرے نقطے تک سمتیہ نلکی محدد میں لکھیں۔

جوابات: $P(6.4031, 38.6598^\circ, -2.0000)$ ، $0.57\boldsymbol{a}_\rho - 0.82\boldsymbol{a}_\phi + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

باب 2

کولمب کا قانون

2.1 قوت کشش یا دفع

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون[1] سے آپ بخوبی واقف ہوں گے۔کولمب کا قانون[2] اس سے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔کائناتی تجاذب کے قانون کو مساوات 2.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

$$F = G\frac{M_1 M_2}{R^2} \tag{2.1}$$

یہ مساوات کمیت M_1 اور کمیت M_2 کے مابین قوت کشش F دیتا ہے جہاں ایک کمیت کے مرکز سے دوسری کمیت کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔قوت کشش دونوں کمیت کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔دونوں کمیتوں پر قوت کشش کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں کمیتوں کے مرکزوں پر کھینچی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔M_1 پر قوت کشش کی سمت M_1 کے مرکز سے M_2 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے جبکہ M_2 پر قوت کشش کی سمت M_2 کے مرکز سے M_1 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے۔تناسب کے جزو مستقل کو G لکھا اور تجاذبی مستقل[3] پکارا جاتا ہے جس کی قیمت تقریباً $6.674 \times 10^{-11} \ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\,s^2}}$ کے برابر ہے۔

کولمب کا قانون مساوات 2.2 میں بیان کیا گیا ہے۔یہ مساوات برقی بار Q_1 اور برقی بار Q_2 کے مابین قوت کشش یا قوت دفع F دیتا ہے جہاں ایک برقی بار کے مرکز سے دوسری برقی بار کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ان برقی باروں کا حجم صفر تصور کیا جاتا ہے۔یوں اگر برقی بار کو گیند کی شکل کا تصور کیا جائے تو اس گیند کے رداس کی لمبائی صفر ہو گی۔ایسے برقی بار کو نقطہ برقی بار[4] کہا جاتا ہے۔

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{R^2} \tag{2.2}$$

قوت کشش یا دفع دونوں برقی باروں کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور باہمی فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔دونوں برقی باروں پر قوت کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں برقی باروں سے گزرتی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔دو مختلف اقسام کے برقی باروں کے مابین

---

[1] Law of Universal Gravitation
[2] Coulomb's law
[3] gravitational constant
[4] point charge

قوت کشش پائی جاتی ہے جبکہ دو یکساں برقی باروں کے مابین قوت دفع پائی جاتی ہے۔مساوات کے جزو مستقل کو $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ لکھا جاتا ہے جہاں ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل[5][6] ہے جس کی قیمت اٹل ہے۔خالی خلاء کے برقی مستقل کی قیمت

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \tag{2.3}$$

ہے جہاں c خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اور μ_0 خالی خلاء کی مقناطیسی مستقل[7] ہے۔یہ دونوں بھی اٹل مستقل ہیں جن کی قیمتیں

$$c = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 3 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{2.4}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{2.5}$$

ہیں۔یوں مقناطیسی مستقل کی قیمت تقریباً

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi} 10^{-9}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \tag{2.6}$$

کے برابر ہے۔اس کتاب میں $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ بار بار استعمال ہو گا جسے عموماً

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9 \times 10^9 \tag{2.7}$$

لیا جائے گا۔ϵ_0 کی اکائی فیراڈ فی میٹر $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ ہے جس کی وضاحت جلد کر دی جائے گی۔

مثال 2.1: زمین کی سطح پر زمین اور ایک کلو گرام کمیت کے مابین $9.8\,\mathrm{N}$ کی قوت کشش پائی جاتی ہے۔زمین کا رداس $6370\,\mathrm{km}$ لیتے ہوئے زمین کی کمیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 2.1 کی مدد سے

$$9.8 = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times M \times 1}{6\,370\,000 \times 6\,370\,000}$$

لکھتے ہوئے زمین کی کمیت $5.959 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال 2.2: زمین کی مرکز سے تقریباً $42\,000\,\mathrm{km}$ کے فاصلے پر ذرائع ابلاغ کے سیٹلائٹ زمین کے گرد مدار میں گردش کرتے ہیں۔پوری دنیا میں بے تار[8] مواصلاتی نظام انہیں کے مرہون منت ہے۔اس فاصلے پر ایک کلو گرام کی کمیت اور زمین کے مابین قوت کشش کی مقدار حاصل کریں۔

[5] permittivity
[6] electric constant
[7] permeability
[8] wireless

حل:

$$F=\frac{6.674\times10^{-11}\times5.959\times10^{24}\times1}{42\,000\,000\times42\,000\,000}=0.225\,\mathrm{N}$$

613

614

---

615 مثال 2.3: ایک ایک کولمب کے دو مثبت برقی باروں کے درمیان ایک میٹر کا فاصلہ ہے۔ان میں قوت دفع حاصل کریں۔

حل: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت مساوات 2.7 سے لیتے ہوئے

$$F=9\times10^9\frac{1\times1}{1\times1}=9\times10^9\,\mathrm{N}$$

616

---

617 مندرجہ بالا مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ برقی بار کی اکائی (کولمب) انتہائی بڑی مقدار ہے۔

شکل 2.1 میں بار Q_1 محدد کے مرکز سے سمتی فاصلہ $\mathbf{r_1}$ پر جبکہ بار Q_2 مرکز سے سمتی فاصلہ $\mathbf{r_2}$ پر دکھائے گئے ہیں۔بار Q_1 سے بار Q_2 تک کا سمتی فاصلہ $\mathbf{R_{21}}$ ہے جہاں

$$\boldsymbol{R_{21}}=\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1} \tag{2.8}$$

کے برابر ہے۔سمتیہ $\mathbf{R_{21}}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\mathbf{a_{21}}$ یوں حاصل کیا جاتا ہے

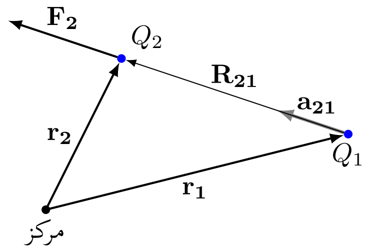
$$\boldsymbol{a_{21}}=\frac{\boldsymbol{R_{21}}}{|\boldsymbol{R_{21}}|}=\frac{\boldsymbol{R_{21}}}{R_{21}}=\frac{\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|} \tag{2.9}$$

بار Q_2 پر قوت $\mathbf{F_2}$ کی حتمی قیمت مساوات 2.2 سے حاصل کی جا سکتی ہے جبکہ اس کی سمت اکائی سمتیہ $\mathbf{a_{21}}$ کے سمت میں ہو گی۔اس طرح یہ قوت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F_2}&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R_{21}^2}\boldsymbol{a_{21}}\\&=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|^3}\end{aligned} \tag{2.10}$$

لکھا جائے گا۔مساوات 2.10 کولمب کے قانون کی سمتی شکل ہے۔چونکہ دونوں باروں پر برابر مگر الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے لہٰذا Q_1 پر قوت $\mathbf{F_1}$ یوں لکھا جائے گا

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F_1}=-\boldsymbol{F_2}&=\frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R_{21}^2}\boldsymbol{a_{21}}\\&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R^2}\boldsymbol{a_{12}}\end{aligned} \tag{2.11}$$



شکل 2.1: دو مثبت باروں کے مابین قوت دفع

جہاں دوسری قدم پر $R_{21} = R_{12} = R$ لکھا گیا ہے اور $\boldsymbol{a_{12}} = -\boldsymbol{a_{21}}$ کے برابر ہے۔ دونوں بار مثبت یا دونوں بار منفی ہونے کی صورت میں Q_2 پر مساوات 2.10 سے قوت $\mathbf{a_{21}}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔ یوں یکساں باروں کے مابین قوت دفع پایا جاتا ہے۔ دو الٹ اقسام کے باروں کی صورت میں Q_2 پر قوت $-\mathbf{a_{21}}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔ یوں الٹ اقسام کے باروں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے۔

مثال 2.4: شکل 2.1 میں نقطہ $A(3,2,4)$ پر $20\,\mu\mathrm{C}$ کا بار Q_1 جبکہ نقطہ $B(1,5,9)$ پر $-50\,\mu\mathrm{C}$ کا بار Q_2 پایا جاتا ہے۔ منفی بار Q_2 پر سمتی قوت حاصل کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R_{21}} &= (1-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (5-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (9-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
R_{21} &= |\boldsymbol{R_{21}}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 5^2} \\
&= \sqrt{38} \\
&= 6.1644
\end{aligned}
$$

اور یوں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a_{21}} = \frac{\boldsymbol{R_{21}}}{|\boldsymbol{R}_{21}|} &= \frac{-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{6.1644} \\
&= -0.324\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.487\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.811\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F_2} &= \frac{36\pi \times 10^9}{4\pi} \frac{\left(-50 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{-6}\right)}{38} \left(-0.324\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.487\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.811\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \\
&= -0.237 \left(-0.324\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.487\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.811\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوت کی سمت $\mathbf{a_{21}}$ کے الٹ سمت میں ہے۔ یوں منفی بار پر قوت کی سمت مثبت بار کی جانب ہے یعنی اس پر قوت کشش پایا جاتا ہے۔

کسی بھی بار پر ایک سے زیادہ باروں سے پیدا مجموعی قوت تمام باروں سے پیدا علیحدہ علیحدہ قوتوں کا سمتی مجموعہ ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \tag{2.12}$$

اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ کولمب کا قانون خطی[9] ہے۔

2.2 برقی میدان کی شدت

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون میں زمین کی کمیت کو M لکھ کر کمیت m پر قوت F حاصل کی جا سکتی ہے۔ایک کلو گرام کمیت پر اس قوت کی مقدار $\frac{F}{m}$ ہو گی جسے زمین کی کشش[10] یا ثقلی اسراع پکارا اور g لکھا جاتا ہے۔زمین کی سطح پر g کی مقدار تقریباً $9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ کے برابر ہے۔

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} \tag{2.13}$$

کسی بھی کمیت M کے گرد تجاذبی میدان[11] پایا جاتا ہے۔کسی بھی نقطے پر اس تجاذبی میدن کو ناپنے کی خاطر اس نقطے پر پیمائشی کمیت m_p[12] رکھ کر اس پر قوت ناپی جاتی ہے۔مختلف مقامات پر اس طرح قوت ناپ کر ہم تجاذبی میدان کا جائزہ لے سکتے ہیں۔تجاذبی قوت کی مقدار کا دارومدار پیمائشی کمیت[13] m_p پر بھی منحصر ہے۔مختلف تجاذبی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام تجاذبی میدان جانچتے وقت ایک ہی قیمت کے پیمائشی کمیت استعمال کی جائے۔ماہرین طبیعیات عموماً m_p کو ایک کلو گرام رکھتے ہیں۔یہ ضروری نہیں کہ تجاذبی قوت ناپتے وقت ایک کلو گرام کی پیمائشی کمیت ہی استعمال کی جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت $\mathbf{F}$ کو m_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک کلو گرام پر تجاذبی قوت حاصل کی جا سکتی ہے۔زمین کے قریب ایک کلو گرام کمیت پر قوت کشش کو ثقلی اسراع g پکارا جاتا ہے۔

مثال 2.5: زمین کی سطح پر دو سو گرام پیمائشی کمیت پر $1.96\,\mathrm{N}$ قوت ناپی جاتی ہے۔ثقلی اسراع حاصل کریں۔

حل:

$$g = \frac{1.96}{0.2} = 9.8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \tag{2.14}$$

مساوات 2.13 سے ہم

$$\begin{aligned} F &= mg \\ w &= mg \end{aligned} \tag{2.15}$$

---

[9] linear
[10] gravity
[11] gravitational field
[12] m_p لکھتے ہوئے زیرنوشت میں p لفظ پیمائشی کے پ کو ظاہر کرتا ہے، یعنی یہ وہ کمیت ہے جسے قوت کی پیمائش کی خاطر استعمال کیا جا رہا ہے۔
[13] test mass

638 لکھ سکتے ہیں جو زمین کی سطح پر کمیت m پر کشش ثقل F دیتا ہے جسے وزن پکارا اور w لکھا جاتا ہے۔

باروں پر بھی اسی طرح غور کیا جاتا ہے۔کسی بھی بار Q کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے یعنی برقی میدان کا منبع بار ہے۔اس برقی میدان میں بار پر قوت اثر انداز ہوتا ہے۔بار Q کے برقی میدان کی شدت کے پیمائش کی خاطر اس میدان میں مختلف مقامات پر پیمائشی بار[14] q_p پر قوت $\mathbf{F}$ ناپ کر برقی میدان کا مطالعہ کیا جا سکتا ہے اور اس کا نقشہ بنایا جا سکتا ہے۔مختلف باروں کے برقی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام صورتوں میں ایک ہی قیمت کے پیمائشی بار استعمال کئے جائیں۔ماہرین طبیعیات q_p کو ایک کولمب کا مثبت بار رکھتے ہیں۔یہ ضروری نہیں کہ قوت ناپتے وقت ایک کولمب کا مثبت پیمائشی بار ہی استعمال کیا جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت $\mathbf{F}$ کو q_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک مثبت کولمب پر قوت حاصل کی جاتی ہے جسے برقی میدان کی شدت[15] یا صرف برقی میدان پکارا اور $\mathbf{E}$ لکھا جاتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q_p} \tag{2.16}$$

مختلف مقامات پر موجود مختلف قیمتوں کے باروں سے کسی ایک نقطے پر پیدا برقی میدان تمام باروں کے مجموعی اثر سے پیدا ہو گا۔ایسا کولمب کے قانون کے خطی ہونے کی بنا پر ہوتا ہے۔کسی بھی نقطے پر n باروں کا مجموعی $\mathbf{E}$ تمام باروں کے علیحدہ علیحدہ پیدا کردہ $\boldsymbol{E}_1$، $\boldsymbol{E}_2$، $\boldsymbol{E}_3$، $\cdots$ کا سمتی مجموعہ

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \cdots + \boldsymbol{E}_n \tag{2.17}$$

ہوتا ہے۔یوں کسی بھی نقطے P پر $\mathbf{E}$ ناپتے وقت اس نقطے پر ایک کولمب بار q_p رکھ کر اس بار پر قوت ناپی جاتی ہے۔یہ قوت اس نقطے پر تمام باروں کا مجموعی 639
640 $\mathbf{E}$ ہوتا ہے۔یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ ناپتے وقت یہاں رکھے پیمائشی بار q_p کا اثر شامل نہیں ہوتا۔

مساوات 2.10 سے بار Q سے $\boldsymbol{a}_R$ سمت میں R فاصلے پر برقی میدان کو

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{a}_R}{R^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \end{aligned} \tag{2.18}$$

لکھا جا سکتا ہے۔بار کو کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے اسی مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{2.19}$$

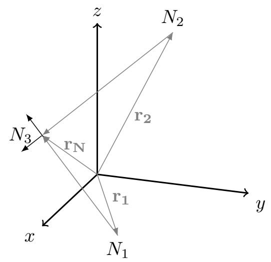
641 جہاں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کروی محدد کا رداسی سمت میں اکائی سمتیہ ہے۔

نقطہ (x',y',z') پر موجود بار Q سے نقطہ (x,y,z) پر برقی شدت یوں حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}\right|^2} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}\right|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}\right|^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left[(x-x')\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y-y')\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-z')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right]}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{2.20}$$

---

[14] test charge
[15] electric field intensity



شکل 2.2: دو باروں سے پیدا برقی شدت

جہاں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{r'} &= x'\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y'\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z'\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'} = (x - x')\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y - y')\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z - z')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

642 کے برابر ہے۔

بار کم جوابات 644 مثال 2.6: نقطہ $N_1(4,1,1)$ پر $100\,\mathrm{\mu C}$ کا بار Q_1 جبکہ نقطہ $N_2(1,4,2)$ پر $50\,\mathrm{\mu C}$ کا بار Q_2 پایا جاتا ہے۔نقطہ $N_3(2,2,5)$ پر Q_1 سے پیدا $\boldsymbol{E}_1$ اور Q_2 سے پیدا $\boldsymbol{E}_2$ حاصل کریں۔اس نقطے پر دونوں باروں کا مجموعی $\boldsymbol{E}$ کیا ہو گا۔

حل: شکل 2.2 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔پہلے Q_1 سے پیدا $\boldsymbol{E}_1$ حاصل کرتے ہیں۔N_1 سے N_3 تک سمتی فاصلہ

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{31} = \boldsymbol{R}_3 - \boldsymbol{R}_1 &= (2-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (2-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (5-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

ہے جس سے

$$
\begin{aligned}
R_{31} &= \left|\boldsymbol{R}_{31}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4^2} \\
&= \sqrt{21} = 4.583 \\
\boldsymbol{a}_{31} &= \frac{\boldsymbol{R}_{31}}{R_{31}} = \frac{-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{21}} \\
&= -0.436\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.218\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.873\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں مساوات 2.18 سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1 &= 9 \times 10^9 \frac{100 \times 10^{-6}}{21} \left(-0.436\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.218\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.873\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \\
&= -18\,686\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 9343\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 37\,414\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 2.7 سے $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت 9×10^9 پر کی گئی۔اسی طرح Q_2 کے لئے حل کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{32} &= (2-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (2-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (5-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

اور

$$
\begin{aligned}
R_{32} &= \left|\boldsymbol{R}_{32}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14} \\
\boldsymbol{a}_{32} &= \frac{1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{14}} \\
&= 0.267\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 0.535\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.802\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_2 &= 9\times 10^9 \frac{50\times 10^{-6}}{14}\left(0.267\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 0.535\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.802\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \\
&= 8582\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 17\,196\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 25\,779\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

ملتا ہے۔ان دو جوابات کا سمتی مجموعہ لیتے ہوئے کل $\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \\
&= \left(-18\,686\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 9343\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 37\,414\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) + \left(8582\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 17\,196\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 25\,779\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \\
&= -10\,104\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 7853\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 63\,193\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

مساوات 2.16 کو

$$
\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{2.21}
$$

لکھا جا سکتا ہے جو برقی میدان $\mathbf{E}$ کے موجودگی میں بار q پر قوت $\mathbf{F}$ دیتا ہے۔

2.3 یکساں بار بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

شکل 2.3 میں z محدد پر $z=-\infty$ سے $z=+\infty$ تک یکساں بار کی کثافت پائی جاتی ہے۔آپ تصور کر سکتے ہیں کہ z محدد پر انتہائی قریب قریب برابر فاصلے پر یکساں نقطہ بار رکھے گئے ہیں۔یوں اگر ΔL لمبائی میں کل ΔQ بار پایا جائے تب اکائی لمبائی میں $\frac{\Delta Q}{\Delta L}$ بار پایا جائے گا جسے لکیری بار کثافت[16] ρ_L[17] کہا جاتا ہے اور جس کی اکائی $\mathrm{C/m}$ ہے۔لکیری بار کثافت کی تعریف

$$
\rho_L = \lim_{\Delta L\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta L} \tag{2.22}
$$

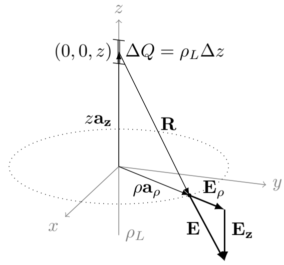
ہے۔لکیر پر چھوٹی لمبائی اتنی کم نہیں کی جاتی کہ بار بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ نظر آئیں اور لکیری کثافت کی جگہ نقطہ بار نظر آئیں۔اگر لکیر پر بار کی تقسیم ہر جگہ یکساں نہ ہو تب لکیری بار کثافت متغیر ہو گی۔آئیں یکساں لکیری بار کثافت سے خالی خلاء میں پیدا برقی میدان پر غور کریں۔

پہلے بغیر قلم اٹھائے اس مسئلے کی نوعیت پر توجہ دیتے ہیں۔مقام $(0,0,z)$ پر چھوٹی سی لمبائی Δz میں $\rho_L\Delta z$ بار پایا جاتا ہے جسے نقطہ بار تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔z محدد کے گرد $z=0$ یعنی xy سطح پر شکل 2.3 میں نقطہ دار گول دائرہ بنایا گیا ہے۔نقطہ بار $\rho_L\Delta z$ سے دائرے پر کسی بھی مقام پر

---

[16] line charge density

[17] اس کتاب میں رداس کے لئے بھی ρ استعمال کیا جاتا ہے۔ρ کو جب بھی کثافت کے لئے استعمال کیا جائے،اس کے زیر نوشت میں L، S یا h لکھا جائے گا۔



شکل 2.3: یکساں بار بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

پیدا برقی میدان پر غور کرتے ہیں۔ برقی میدان کی مقدار کا دار و مدار میدان پیدا کرنے والے بار اور بار سے فاصلے پر ہے۔ نقطہ دار لکیر پر پائے جانے والے تمام نقطوں کا $(0,0,z)$ سے فاصلہ برابر ہے۔ یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ اس دائرے پر برقی میدان کی شدت کی حتمی قیمت ہر جگہ برابر ہو گی۔ اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ بار کی نقطہ نظر سے نقطہ دار لکیر پر تمام نقطے بالکل یکساں نظر آتے ہیں۔ اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ دار دائرے پر ہر جگہ برقی میدان یکساں ہو گا۔

آئیں شکل 2.3 کو دیکھتے ہوئے ایک اور مشابہت پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ $\mathbf{E}$ سمتی فاصلہ $\mathbf{R}$ کی سمت میں ہوتا ہے لہٰذا دائرے پر کسی بھی نقطے پر نقطہ بار $\rho_L \Delta z$ سے پیدا $\boldsymbol{E}$ کے دو اجزاء پائے جائیں گے یعنی

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\rho + \boldsymbol{E}_z \tag{2.23}$$

مثبت ρ_L کی صورت میں $(0,0,z)$ پر موجود بار سے $\boldsymbol{E}_z$ کی سمت منفی z جانب ہو گی۔ اسی طرح $(0,0,-z)$ پر پائے جانے والے مثبت بار سے دائرے پر پیدا $\boldsymbol{E}$ کی سمت مثبت z جانب ہو گی۔ دائرے پر یہ دونوں ارکان ایک دونوں کو ختم کریں گے۔ اسی عمل سے دائرے پر کسی بھی نقطے پر مثبت z محدد پر کسی بھی فاصلے پر پائے جانے والے بار سے پیدا $\boldsymbol{E}_z$ کے اثر کو منفی z محدد پر اتنے ہی فاصلے پر بار سے پیدا $\boldsymbol{E}_z$ ختم کرتا ہے۔ یوں دائرے پر

$$\boldsymbol{E}_z = 0 \tag{2.24}$$

ہو گا۔

ایک آخری مشابہت پر اب غور کرتے ہیں۔ اگر نقطہ دار دائرے کو z محدد پر مثبت یا منفی جانب لے جایا جائے تو کیا ہو گا؟ اب بھی دائرے کے ایک جانب کسی بھی فاصلے پر بار کا اثر دائرے کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر بار ختم کرے گا۔ یوں دائرے کے ایک جانب یعنی z محدد پر ∞ تک فاصلے پر باروں کے $\boldsymbol{E}_z$ کو دائرے کی دوسری جانب z محدد پر $-\infty$ تک فاصلے پر باروں کا $\boldsymbol{E}_z$ ختم کرے گا اور یوں خلاء میں ہر جگہ مساوات 2.24 درست ثابت ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو یوں بہتر بیان کیا جا سکتا ہے کہ لامحدود لکیر پر یکساں کثافت بار سے خلاء میں برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پیدا ہو گا۔ آئیں اس $\mathbf{E}$ کو حاصل کریں۔

شکل 2.3 میں مقام z پر نقطہ بار $\rho_L \Delta z$ دائرے پر $\Delta \boldsymbol{E}$ پیدا کرتا ہے۔ محدد کے مرکز سے نقطہ بار کا مقام سمتیہ $z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ دائرے پر کسی بھی نقطے N کو سمتیہ $\rho\boldsymbol{a}_\rho$ ظاہر کرتا ہے۔ یوں نقطہ بار سے N تک کا سمتی فاصلہ اور اسی سمت میں اکائی سمتیہ یوں حاصل کئے جائیں گے۔

$$\boldsymbol{R} = \rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$
$$|\boldsymbol{R}| = R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$
$$\boldsymbol{a}_R = \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

مساوات 2.19 سے

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \Delta z}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)} \frac{\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$
$$= \frac{\rho_L \Delta z \left(\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

حاصل ہوتا ہے۔تمام باروں کے اثرات کو یکجا کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو تکمل کی شکل دے کر مندرجہ ذیل مساوات میں دکھایا گیا ہے۔تکملہ کے حدود $-\infty$ اور $+\infty$ ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\rho_L \left(\rho \boldsymbol{a}_\rho - z \boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \right)}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right] \mathrm{d}z \tag{2.25}$$

اس تکمل کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.26}$$

جہاں مساوات کی نشان کے دائیں جانب پہلا تکمل $\boldsymbol{E}_\rho$ اور دوسرا تکمل $\boldsymbol{E}_z$ دیتا ہے یعنی

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ \boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{2.27}$$

مساوات 2.24 کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دوسرا تکملہ صفر جواب دیگا۔آئیں دونوں تکمل کو باری باری حل کریں۔پہلے $\boldsymbol{E}_\rho$ حل کرتے ہیں۔اس مساوات میں

$$z = \rho \tan \alpha$$

استعمال کرتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے تکمل کا ابتدائی حد

$$\begin{aligned} -\infty &= \rho \tan \alpha_{\text{ابتدائی}} \\ \alpha_{\text{ابتدائی}} &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

اور اختتامی حد

$$\begin{aligned} \infty &= \rho \tan \alpha_{\text{اختتامی}} \\ \alpha_{\text{اختتامی}} &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔مزید

$$\mathrm{d}z = \rho \sec^2 \alpha \,\mathrm{d}\alpha$$

لکھا جائے گا۔یوں

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \,\mathrm{d}\alpha}{\left(\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \,\mathrm{d}\alpha}{\rho^3 \left(1 + \tan^2 \alpha \right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

لکھا جائے گا جس میں

$$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\rho\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\rho^3\sec^3\alpha}\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\sin\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}}\\
&= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho
\end{aligned}\tag{2.28}$$

662 ملتا ہے جہاں دوسری قدم پر $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$ کا استعمال کیا گیا۔

آئیں اب مساوات 2.27 کے دوسرے جزو کو حل کریں۔اس میں بھی $z=\rho\tan\alpha$ استعمال کرتے ہیں۔یوں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^2\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left(\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

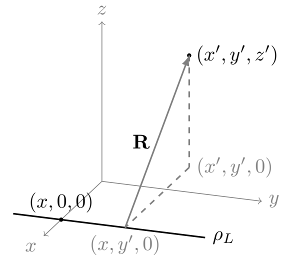
سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\sec^3\alpha}\\
&= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\cos\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\\
&= 0
\end{aligned}\tag{2.29}$$

663 ملتا ہے۔یہی جواب مساوات 2.24 میں حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.28 اور مساوات 2.29 سے مساوات 2.26 کا حل یوں لکھا جائے گا

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_\rho=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho\tag{2.30}$$



شکل 2.4: کسی بھی سمت میں لامحدود لکیر پر بار کی مثال

جس کے مطابق لامحدود سیدھی لکیر پر یکساں بار سے برقی میدان رداس ρ کے بالعکس متناسب ہے۔اس نتیجے کا مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں جو نقطہ بار کی برقی میدان بیان کرتا ہے۔نقطہ بار کا برقی میدان کروی رداس کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔یوں اگر لامحدود لکیر کے بار سے فاصلہ دگنا کر دیا جائے تو برقی میدان آدھا ہو جائے گا جبکہ نقطہ بار سے فاصلہ دگنا کرنے سے برقی میدان چار گنا کم ہوتا ہے۔ 666

کسی بھی سمت میں لامحدود سیدھی لکیر پر بار کا برقی میدان مساوات 2.30 میں بیان خوبیوں پر پورا اترے گا۔ایسی صورت میں کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ حاصل کرنے کی خاطر اس نقطے سے بار کے لکیر تک کم سے کم فاصلہ R حاصل کریں۔یہ فاصلہ نقطے سے لکیر پر عمود کھینچنے سے حاصل ہو گا۔اس فاصلے کو ρ تصور کریں۔لکیر سے عمودی سمت میں نقطے کی جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_R$ کو $\boldsymbol{a}_\rho$ تصور کریں۔ایسی صورت میں مساوات 2.30 کو

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R}\boldsymbol{a}_R \tag{2.31}$$

لکھ سکتے ہیں۔ 667

مثال 2.7: y محدد کے متوازی اور $(x, 0, 0)$ سے گزرتی لامحدود لکیر پر ρ_L کثافت کا بار پایا جاتا ہے۔نقطہ (x', y', z') پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔ 668

حل: شکل 2.4 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔(x', y', z') سے بار کے لکیر پر عمود $(x, y', 0)$ پر ٹکراتا ہے۔ان دو نقطوں کا آپس میں فاصلہ $\sqrt{(x'-x)^2+z^2}$ ہے جبکہ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= (x'-x)\boldsymbol{a}_\text{X} + z\boldsymbol{a}_\text{Z} \\ \boldsymbol{a}_R &= \frac{(x'-x)\boldsymbol{a}_\text{X} + z\boldsymbol{a}_\text{Z}}{\sqrt{(x'-x)^2+z^2}} \end{aligned}$$

ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\sqrt{(x'-x)^2+z^2}}\boldsymbol{a}_R$$

ہو گا۔ 669

670

671

مشق 2.1: y محدد پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $10\,\frac{\text{nC}}{\text{m}}$ بار کی کثافت پائی جاتی ہے۔نقطہ $N_1(0, 0, 6)$ اور نقطہ $N_2(0, 8, 6)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔ 672

جواب: دونوں نقطوں پر $\boldsymbol{E} = 30\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے برابر ہے۔

مشق 2.2: x محدد پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ بار کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0,5,0)$ اور نقطہ $N_2(7,3,4)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{E}_1 = 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $\boldsymbol{E}_2 = 18\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{5}\right)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

2.4 یکساں بار بردار ہموار لامحدود سطح

شکل 2.5 میں $z = 0$ پر لامحدود $x - y$ سطح دکھائی گئی ہے۔ تصور کریں کہ اس پوری سطح پر انتہائی قریب قریب نقطہ باریوں رکھے گئے ہیں کہ سطح پر کہیں بھی چھوٹی رقبہ ΔS پر یکساں قیمت کا بار ΔQ پایا جاتا ہے۔ اس طرح اکائی رقبے پر کل $\frac{\Delta Q}{\Delta S}$ بار پایا جائے گا جسے سطحی بار کثافت[18] ρ_S کہتے ہیں۔ سطحی بار کثافت کی تعریف

$$\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \tag{2.32}$$

ہے۔ چھوٹی سطح اتنی کم نہیں لی جاتی کہ اس پر بار بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ بطور نقطہ بار نظر آئیں بلکہ اسے اتنا رکھا جاتا ہے کہ علیحدہ علیحدہ الیکٹران کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ سطح پر ہر جگہ بار کا تقسیم یکساں نہ ہونے کی صورت میں ρ_S کی قیمت متغیر ہو گی۔ آئیں لامحدود سطح پر یکساں بار کثافت سے خالی خلاء میں پیدا $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

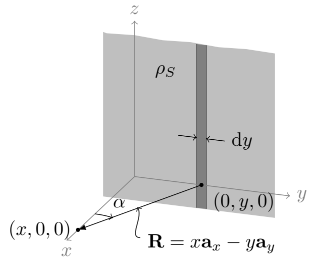
پہلے غور کرتے ہیں کہ آیا مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے کچھ اخذ کرنا ممکن ہے۔ اگر اس بار بردار سطح کے سامنے ہم کھڑے ہو جائیں تو ہمیں سامنے لامحدود بار بردار سطح نظر آئے گی۔ سطح سے برابر فاصلے پر ہم جہاں بھی جائیں ہمیں صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اسی طرح اگر ہم سطح کی دوسری طرف اتنے ہی فاصلے پر چلے جائیں تو ہمیں صورت حال میں کسی قسم کی کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایسی سطح سے برابر فاصلے پر تمام نقطوں پر یکساں برقی میدان پایا جائے گا۔ اس کے برعکس اگر ہم اس سطح سے دور ہو جائیں تو ہمیں سطح قدر دور نظر آئے گی اور ہو سکتا ہے کہ اس تبدیلی سے $\mathbf{E}$ پر اثر ہو۔ آئیں اب مسئلے کو حساب و کتاب سے حل کرتے ہوئے $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

شکل 2.5 میں بار بردار سطح پر z محدد کے متوازی دو انتہائی قریب قریب لکیریں کھینچی گئی ہیں جن کے مابین فاصلہ $\mathrm{d}y$ ہے۔ اس گھیرے گئے رقبے کی چوڑائی $\mathrm{d}y$ ہے۔ یوں ΔL لمبائی اور $\mathrm{d}y$ چوڑائی رقبے میں $\rho_S \Delta L\,\mathrm{d}y$ بار پایا جائے گا۔ لکیروں سے گھیرے رقبے کو بار کی سیدھی لکیر تصور کیا جا سکتا ہے جس پر اکائی لمبائی کے رقبے پر $\frac{\rho_S \Delta L\,\mathrm{d}y}{\Delta L}$ بار پایا جائے گا جسے ρ_L تصور کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\rho_L = \rho_S\,\mathrm{d}y \tag{2.33}$$

---

[18] surface charge density



شکل 2.5: یکساں بار بردار ہموار لامحدود سطح

لامحدود لکیر پر یکساں بار کی کثافت سے پیدا برقی میدان پر گزشتہ حصے میں غور کیا گیا۔نقطہ $(x,0,0)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کرتے ہیں۔شکل میں لامحدود بار کی لکیر سے اس نقطے تک کا قریبی سمتی فاصلہ $\mathbf{R}$ دکھایا گیا ہے جہاں

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \tag{2.34}$$

کے برابر ہے جس سے

$$\begin{aligned} R &= |\boldsymbol{R}| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \boldsymbol{a}_R &= \frac{x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned} \tag{2.35}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں بار بردار لکیر سے $(x,0,0)$ پر پیدا برقی میدان کو مساوات 2.31 کی مدد سے

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_S \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{\rho_S \,\mathrm{d}y \left(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)}{2\pi\epsilon_0\left(x^2+y^2\right)} \end{aligned} \tag{2.36}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس جواب کو $\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x + \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S x \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0\left(x^2+y^2\right)}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y &= -\frac{\rho_S y \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0\left(x^2+y^2\right)}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \end{aligned} \tag{2.37}$$

کے برابر ہیں۔x محدد کے ایک جانب بار بردار لکیر مندرجہ بالا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ x محدد کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر بار بردار لکیر سے پیدا برقی میدان مندرجہ بالا $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کو ختم کرے گا۔یوں کسی بھی مثبت y پر کھینچی لکیر کے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کو منفی y پر کھینچی لکیر کا $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ ختم کرے گا۔x محدد کے دونوں جانب مسئلے کی مشابہت سے یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ

$$\boldsymbol{E}_y = 0 \tag{2.38}$$

ہو گا۔ 688

آئیں اب حساب و کتاب سے مساوات 2.37 کو حل کریں۔پہلے $\boldsymbol{E}_x$ حاصل کرتے ہیں۔مساوات 2.37 میں دئے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_x$ کا تکمل لیتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned} y &= x\tan\alpha \\ \mathrm{d}y &= x\sec^2\alpha \,\mathrm{d}\alpha \end{aligned} \tag{2.39}$$

کا استعمال کرتے ہیں۔ شکل 2.5 میں α کی نشاندہی کی گئی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_x = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S x \boldsymbol{a}_\mathrm{X}}{2\pi\epsilon_0}\int_{y=-\infty}^{y=+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)}\\ &= \frac{\rho_S x \boldsymbol{a}_\mathrm{X}}{2\pi\epsilon_0}\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}}\frac{x\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{x^2\left(1+\tan^2\alpha\right)}\end{aligned}$$

میں $\sec^2\alpha = 1+\tan^2\alpha$ کے استعمال سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_\mathrm{X}}{2\pi\epsilon_0}\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\alpha\\ &= \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_\mathrm{X}}{2\pi\epsilon_0}\,\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{X}\end{aligned} \tag{2.40}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب $\boldsymbol{E}_y$ حاصل کریں۔

مساوات 2.37 میں دئے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E}_y = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y = -\frac{\rho_S \boldsymbol{a}_\mathrm{y}}{2\pi\epsilon_0}\int_{y=-\infty}^{y=+\infty}\frac{y\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)}$$

تکمل کے نشان کے اندر $f(y) = x^2+y^2$ لیتے ہوئے اسے $\frac{\mathrm{d}f(y)}{2f(y)}$ لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل $\frac{\ln f(y)}{2}$ ہے۔ یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_y &= -\frac{\rho_S \boldsymbol{a}_\mathrm{y}}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}\Bigg|_{y=-\infty}^{y=+\infty}\\ &= 0\end{aligned} \tag{2.41}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 2.38 میں یہی جواب حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.40 اور مساوات 2.41 کی مدد سے یکساں بار بردار لامحدود سطح کی برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_N \tag{2.42}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ اس سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطح سے فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے برقی میدان کی شدت پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ سطح کے دونوں جانب برقی میدان اسی مساوات سے حاصل کی جائے گی۔ ظاہر ہے کہ سطح کے دونوں جانب کے اکائی عمودی سمتیہ آپس میں الٹ ہیں۔

اب تصور کریں کہ اس سطح کے متوازی $x = x_1$ پر ایک اور لامحدود سطح رکھی جائے جس پر بار کی یکساں کثافت $-\rho_S$ ہو۔ ان دو متوازی سطحوں کو دو دھاتی چادروں سے بنایا گیا کپیسٹر[19] سمجھا جا سکتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر کل $\mathbf{E}$ دونوں سطحوں پر بار سے پیدا برقی میدان کا مجموعہ ہو گا۔ پہلے دونوں سطحوں کے دونوں جانب برقی میدان لکھتے ہیں۔

---

[19] capacitor

- $x=0$ پر $+\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^{+}_{x>0} &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} && x>0\\
\boldsymbol{E}^{+}_{x<0} &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} && x<0
\end{aligned}
$$

- $x=x_1$ پر $-\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^{-}_{x>x_1} &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} && x>x_1\\
\boldsymbol{E}^{-}_{x<x_1} &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} && x<x_1
\end{aligned}
$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے $x<0$، $x>x_1$ اور $0<x<x_1$ خطوں میں برقی میدان حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{x<0} &= \boldsymbol{E}^{+}_{x<0}+\boldsymbol{E}^{-}_{x<x_1} = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = 0\\
\boldsymbol{E}_{x>x_1} &= \boldsymbol{E}^{+}_{x>0}+\boldsymbol{E}^{-}_{x>x_1} = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}-\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = 0\\
\boldsymbol{E}_{0<x<x_1} &= \boldsymbol{E}^{+}_{x>0}+\boldsymbol{E}^{-}_{x<x_1} = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

اس نتیجے کے مطابق دو متوازی لامحدود سطحوں جن پر الٹ یکساں کثافت پائی جائے کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا جبکہ سطحوں کے درمیانی خطے میں

$$
\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}
\tag{2.44}
$$

برقی میدان پایا جاتا ہے۔اس میدان کی سمت مثبت بار بردار چادر سے منفی بار بردار چادر کی جانب ہوتی ہے۔یہی مساوات ایک ایسے کپیسٹر کے برقی میدان کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جس میں دھاتی چادروں کی لمبائی اور چوڑائی دونوں چادروں کے درمیانی فاصلے سے کئی گنا زیادہ ہو اور چادروں کے درمیان خالی خلاء یا ہوا پائی جائے۔چادروں کے کناروں کے قریب کپیسٹر کے اندر اور باہر صورت حال قدر مختلف ہو گی۔

مثال 2.8: خلاء میں تین متوازی لامحدود سطح پائے جاتے ہیں جن پر بار کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔پہلی سطح $y=2$ پر $2\,\mathrm{nC/m^2}$، دوسری سطح $y=5$ پر $4\,\mathrm{nC/m^2}$ اور تیسری سطح $y=10$ پر $-6\,\mathrm{nC/m^2}$ کثافت پائی جاتی ہے۔$N_1(0,0,0)$، $N_2(5,3,4)$، $N_3(-2,7,11)$ اور $N_4(-7,30,22)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: 0، $144\pi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$، $216\pi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور 0

2.5 بار بردار حجم

ہم نقطہ بار، لامحدود لکیر پر بار اور لامحدود سطح پر بار دیکھ چکے ہیں۔اگلا فطری قدم بار بردار حجم بنتا ہے لہٰذا اسی پر غور کرتے ہیں۔لکیر اور سطح کے بار پر غور کرتے ہوئے ہر جگہ یکساں کثافت کی بات کی گئی۔حجم میں بار کی بات کرتے ہوئے اس شرط کو دور کرتے ہوئے کثافت کو متغیرہ تصور کرتے ہیں۔یوں مختلف مقامات پر کثافت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔

تصور کریں کہ حجم میں انتہائی قریب قریب نقطہ بار پائے جاتے ہیں۔یوں اگر کسی نقطے پر Δh حجم میں ΔQ بار پایا جائے تب اس نقطے پر اوسط حجمی بار کثافت $\frac{\Delta Q}{\Delta h}$ ہو گی۔کسی بھی نقطے پر بار کی حجمی کثافت یوں بیان کی جاتی ہے۔

$$\rho_h = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta h} \tag{2.45}$$

کسی بھی حجم میں کل بار تین درجی تکمل سے حاصل کیا جائے گا۔کارتیسی محدد میں ایسا تکمل یوں لکھا جائے گا۔

$$Q = \iiint\limits_{\mathrm{h}} \rho_h \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \tag{2.46}$$

جہاں تکمل کے نشان کے نیچے h حجم کو ظاہر کرتا ہے۔اس طرز کے تکمل کو عموماً ایک درجی تکمل سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$Q = \int\limits_{\mathrm{h}} \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{2.47}$$

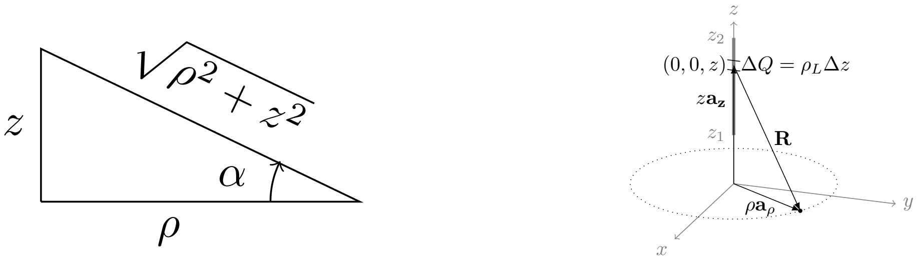
حجم میں $\mathbf{r}'$ نقطے پر چھوٹی سی حجم $\Delta h'$ میں $\Delta Q = \rho_h' \Delta h'$ بار پایا جائے گا جسے نقطہ بار تصور کیا جا سکتا ہے۔نقطہ $\mathbf{r}$ پر اس نقطہ بار کا برقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ مساوات 2.20 سے یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_h' \Delta h'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|}$$

اس مساوات میں نقطہ r' پر بار کی کثافت ρ_h' لکھی گئی ہے۔تمام حجم میں پائے جانے والے بار کا نقطہ $\mathbf{r}$ پر میدان مندرجہ بالا مساوات کے تکمل سے یوں حاصل کیا جائے گا۔

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{\mathrm{h}} \frac{\rho_h' \,\mathrm{d}h'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|} \tag{2.48}$$

اس مساوات کی شکل قدر خوف ناک ہے البتہ حقیقت میں ایسا ہر گز نہیں۔سمتیہ $\mathbf{r}$ اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی میدان حاصل کرنا درکار ہو۔اس نقطے پر برقی میدان کو $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ لکھ کر اس حقیقت کی وضاحت کی گئی ہے کہ نقطے کی تبدیلی سے برقی میدان تبدیل ہو سکتا ہے۔کثافت از خود متغیرہ ہے جس کی قیمت $\mathbf{r}'$ پر منحصر ہے۔$\mathbf{r}'$ پر چھوٹی حجم $\mathrm{d}h'$ اور بار کی کثافت ρ_h' لکھے گئے ہیں جہاں $'$ اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ یہ متغیرات نقطہ r' پر پائے جاتے ہیں۔آخر میں یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ حاصل کرتے وقت اسی نقطے پر موجود بار کو نظرانداز کیا جاتا ہے۔



(ا) محدود لکیر پر بار کی یکساں کثافت

(ب) z اور α کا تعلق

شکل 2.6: محدود لکیر پر بار

2.6 مزید مثال

مثال 2.9: شکل 2.6 میں $z = z_1$ سے $z = z_2$ تک کی سیدھی لکیر پر یکساں ρ_L پایا جاتا ہے۔نقطہ دار گول دائرے پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔اس گول دائرے کا مرکز کارتیسی محدد کے مرکز $(0,0,0)$ پر ہے جبکہ دائرہ از خود $z = 0$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل: شکل 2.6 سے واضح ہے کہ نکتہ دار گول دائرے پر $\mathbf{E}$ کی حتمی قیمت $|\boldsymbol{E}|$ یکساں ہو گی۔یوں ہم لکھ سکتے ہیں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|}\frac{\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\\
&= \frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}}\\
&= \boldsymbol{E}_\rho + \boldsymbol{E}_z
\end{aligned}
$$

دائیں جانب باری باری تکملہ حل کرتے ہیں۔تکملہ حل کرنے کی خاطر $z = \rho\tan\alpha$ کا تعلق استعمال کرتے ہیں۔α کا z کا تعلق شکل 2.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\rho\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left|\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right|^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\sin\alpha\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= \tan^{-1}\frac{z_2}{\rho}\\
\alpha_1 &= \tan^{-1}\frac{z_1}{\rho}
\end{aligned}
$$

کے برابر ہے۔ شکل 2.6-ب سے $\sin\alpha = \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{E}_\rho = \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}}\\ &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\rho^2\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left|\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right|^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_z &= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right)\\ &= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right)\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ $\boldsymbol{E}_\rho$ اور $\boldsymbol{E}_z$ کا مجموعہ لیتے ہوئے کل برقی میدان یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right) + \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right) \tag{2.49}$$

اگر نقطہ دار گول دائرہ $z = z_0$ سطح پر پایا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات

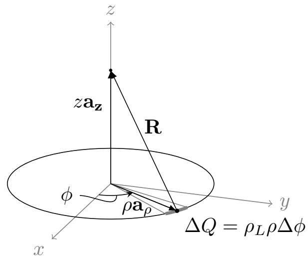
$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\frac{z_2-z_0}{\sqrt{\rho^2+(z_2-z_0)^2}} - \frac{z_1-z_0}{\sqrt{\rho^2+(z_1-z_0)^2}}\right) + \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z_2-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z_1-z_0)^2}}\right)$$

صورت اختیار کرتا۔

مثال 2.10: شکل 2.7 میں $z = 0$ پر گول دائرہ دکھایا گیا ہے جس پر بار کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $(0, 0, z)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

حل: نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے اسے حل کرتے ہیں۔ کسی بھی زاویہ پر رداس کھینچتے ہوئے دائرے پر کوئی نقطہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ زاویہ میں باریک تبدیلی $\Delta\phi$ سے لمبائی $\rho\Delta\phi$ حاصل ہوتی ہے جس پر کل بار $\Delta Q = \rho_L\rho\Delta\phi$ پایا جائے گا۔ یوں بار ΔQ مقام $\rho\boldsymbol{a}_\rho$ پر پایا جاتا ہے جبکہ $\mathbf{E}$ مقام $z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ پر درکار ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\mathbf{E}$ رداس کی سمت میں ممکن نہیں۔ ΔQ سے

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L\rho\Delta\phi}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)}\frac{z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} - \rho\boldsymbol{a}_\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$



شکل 2.7: بار بردار گول دائرہ

پیدا ہو گا۔دائرے پر تمام بار کے اثر کے لئے تکملہ لینا ہو گا۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - \rho\boldsymbol{a}_\rho\right) \mathrm{d}\phi$$

تکملہ کا متغیرہ ϕ ہے جسے تبدیل کرنے سے ρ اور z میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔اسی لئے انہیں تکملہ کی نشان سے باہر لے جایا گیا ہے۔حاصل تکملہ کو دو حصوں میں لکھا جا سکتا ہے البتہ معاملہ اتنا سیدھا نہیں جتنا معلوم ہوتا ہے۔$\boldsymbol{E}_z$ لکھتے ہوئے کارتیسی محدد کی اکائی سمتیہ $\mathbf{a_Z}$ کو تکملہ کے باہر لے جایا جا سکتا ہے چونکہ ϕ کی تبدیلی سے $\mathbf{a_Z}$ تبدیل نہیں ہوتا البتہ $\boldsymbol{E}_\rho$ لکھتے ہوئے نلکی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کو تکملہ کے باہر نہیں لے جایا جا سکتا چونکہ ϕ کی تبدیلی سے $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔چونکہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت تبدیل ہوتی ہے لہٰذا اس کو مستقل تصور کرنا غلط ہے اور یوں یہ تکملہ کے اندر ہی رہے گا۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_z &= \frac{\rho_L \rho z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \\ \boldsymbol{E}_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{a}_\rho \, \mathrm{d}\phi \end{aligned} \tag{2.50}$$

پہلے تکملہ کا جواب اب دیکھ کر ہی

$$\boldsymbol{E}_z = \frac{2\pi\rho_L \rho z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.51}$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ دوسرے تکملہ میں $\boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ لکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(\cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\right) \mathrm{d}\phi \\ &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

یہی جواب اس طرح بھی حاصل کیا جا سکتا ہے کہ گول دائرے پر تمام بار کو $Q = 2\pi\rho\rho_L$ لکھیں۔یہ بار نقطہ $(0,0,z)$ سے $\sqrt{\rho^2+z^2}$ فاصلے پر ہے۔اگر اس تمام بار کو ایک ہی نقطے $(\rho,0,0)$ پر موجود تصور کیا جائے تو یہ

$$\boldsymbol{E}_R = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)} \boldsymbol{a}_R$$

برقی میدان پیدا کرے گا۔ بار گول دائرے پر پھیلا ہوا ہے لہٰذا حقیقت میں صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جانب ہی $\boldsymbol{E}$ پیدا ہوتا ہے۔ شکل میں اس تکون کو دیکھتے ہوئے جس $\boldsymbol{R}$ کا حصہ ہے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{E}_R$ کا $\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ حصہ حقیقت میں پایا جائے گا۔ یوں

$$\boldsymbol{E}_z = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)}\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہی حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2.11: رداس a کرہ کی سطح پر یکساں بار کثافت ρ_S پایا جاتا ہے۔ کرہ کے باہر اور اس کے اندر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

حل: ہم کرہ کو کروی محدد کے مرکز پر رکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ کرہ کی سطح پر نقطہ $M(a,\theta,\phi)$ پر چھوٹی رقبہ $a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ میں بار $\rho_S a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ پایا جائے گا جو نقطہ $N(0,0,b)$ پر برقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ پیدا کرے گا۔ محدد کے مرکز سے M تک سمتی فاصلہ $a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ جبکہ مرکز سے N تک سمتی فاصلہ $b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے۔ یوں M سے N تک سمتی فاصلہ

$$\boldsymbol{R} = b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{2.52}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد اور کروی محدد کے اکائی سمتیات استعمال کئے گئے ہیں۔ اس طرح

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{R}| = \sqrt{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}} &= \sqrt{(b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}-a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})\cdot(b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}-a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})}\\ &= \sqrt{b^2+a^2-2ab\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}\\ &= \sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}\end{aligned} \tag{2.53}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_R = \frac{\boldsymbol{R}}{|R|} = \frac{b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}-a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}{\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}} \tag{2.54}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں صفحہ 32 پر جدول 1.3 کے استعمال سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \cos\theta$ لکھا گیا ہے۔

کرہ کی سطح z محدد کو $(0,0,-a)$ اور $(0,0,a)$ پر چھوتا ہے جہاں بالترتیب $\theta = \pi$ اور $\theta = 0$ کے برابر ہیں۔ یوں $(0,0,-a)$ سے $N(0,0,b)$ تک فاصلہ

$$\begin{aligned}\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\pi} &= \sqrt{b^2+a^2+2ab}\\ &= \sqrt{(b+a)^2}\\ &= b+a\end{aligned} \tag{2.55}$$

کے برابر ہے جہاں جذر لیتے وقت مثبت جواب چنا گیا ہے چونکہ فاصلہ مقداری[20] ہے جو مثبت قیمت رکھتا ہے۔ اسی طرح $(0,0,a)$ سے $N(0,0,b)$ تک فاصلہ

$$\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos 0} = \sqrt{b^2+a^2-2ab} \tag{2.56}$$

[20] فاصلہ ہر صورت مثبت ہوتا ہے البتہ سمتی فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے جہاں سمتی فاصلے کی مقدار مثبت ہی رہتی ہے جبکہ اس کی سمت مثبت یا منفی ہو سکتی ہے۔

کے برابر ہے۔اگر N کرہ کے باہر ہو تب $b > a$ ہو گا اور یہ فاصلہ $b - a$ کے برابر ہو گا جسے مساوات 2.56 سے یوں

$$\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} = \sqrt{(b-a)^2} = b - a \tag{2.57}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس کے بر عکس اگر N کرہ کے اندر ہو تب $a > b$ ہو گا اور یہ فاصلہ $a - b$ کے برابر ہو گا جسے اور مساوات 2.56 سے یوں

$$\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} = \sqrt{(a-b)^2} = a - b \tag{2.58}$$

726 حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اس طرح N پر

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0 R^2} \boldsymbol{a}_R$$

لکھتے ہوئے تمام کرہ پر بار سے پیدا میدان کو تکمل سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho_S a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0 (b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta)} \frac{b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta}} \\ &= \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})\sin\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi\end{aligned} \tag{2.59}$$

اس مساوات میں جدول 1.3 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{[-a\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - a\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (b - a\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}]\sin\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \tag{2.60}$$

حاصل ہوتا ہے۔z محدد سے دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ اس محدد پر میدان صرف اور صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ سمت میں ہی ممکن ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اجزاء کو صفر لیتے ہوئے

$$E_z = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(b - a\cos\theta)\sin\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \tag{2.61}$$

لکھتے ہیں۔سوال 2.1 میں آپ سے درخواست کی گئی ہے کہ مساوات 2.60 میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اجزاء کو صفر ثابت کریں۔بیرونی تکمل پہلے لیتے ہوئے

$$E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{(b - a\cos\theta)\sin\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\theta \tag{2.62}$$

727 حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta\sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.63}$$

728 لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 2.63 کے پہلے تکمل میں $w = \cos\theta$ اور $\mathrm{d}w = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ پُر کر کے حل کرتے ہوئے

$$\int \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-\,\mathrm{d}w}{\left(b^2+a^2-2abw\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.64}$$

یعنی

$$\frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \left.\frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}\right|_0^{\pi} \\ &= \frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2+2ab}} + \frac{1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\end{aligned} \tag{2.65}$$

حاصل ہوتا ہے جو N بیرونِ کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.57 کے تحت

$$\frac{1}{ab}\left[\frac{-1}{b+a}+\frac{1}{b-a}\right] = \frac{1}{ab}\left[\frac{-(b-a)+(b+a)}{(b+a)(b-a)}\right] = \frac{2}{b(b^2-a^2)} \tag{2.66}$$

جبکہ N اندرونِ کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.58 کے تحت

$$\frac{1}{ab}\left[\frac{-1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right] = \frac{1}{ab}\left[\frac{-(a-b)+(a+b)}{(a+b)(a-b)}\right] = \frac{2}{a(a^2-b^2)} \tag{2.67}$$

729 شکل اختیار کرتا ہے۔

مساوات 2.63 کے دوسرے تکمل میں $w = \cos\theta$ پُر کرتے ہوئے

$$\int \frac{\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-w\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

کے کلیہ سے بخوبی واقف ہیں۔ ہم

$$\begin{aligned}u &= w \\ \mathrm{d}v &= \frac{-\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$v = \int \mathrm{d}v = \int \frac{-\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

کے برابر ہے جسے ہم مساوات 2.64 میں حاصل کر چکے ہیں۔اس طرح

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \int w\left[\frac{-\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}\right]\\
&= w\left[\frac{-1}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}\right]+\int\frac{\mathrm{d}w}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{-w}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}{a^2b^2}\\
&= \frac{-(b^2+a^2-abw)}{a^2b^2(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \left.\frac{-(b^2+a^2-ab\cos\theta)}{a^2b^2(b^2+a^2-2ab\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\right|_0^{\pi}\\
&= \frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2+a^2+ab)}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}}+\frac{(b^2+a^2-ab)}{\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\right]
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔N کا کرہ سے باہر ہونے کی صورت میں اس سے

$$\frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2+a^2+ab)}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}}+\frac{(b^2+a^2-ab)}{\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\right]=\frac{2a}{b^2(b^2-a^2)} \tag{2.68}$$

جبکہ N کا کرہ کے اندر ہونے کی صورت میں اس سے

$$\frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2+a^2+ab)}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}}+\frac{(b^2+a^2-ab)}{\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\right]=\frac{2b}{a^2(a^2-b^2)} \tag{2.69}$$

حاصل ہوتا ہے۔کرہ کے باہر مساوات 2.66 اور مساوات 2.68 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63 سے

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{b(b^2-a^2)}\right)-\frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2a}{b^2(b^2-a^2)}\right)\\
&= \frac{4\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0 b^2}\\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2}
\end{aligned} \tag{2.70}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کرہ پر کل بار $4\pi a^2\rho_S$ کو Q لکھا گیا ہے۔کرہ کے اندر مساوات 2.67 اور مساوات 2.69 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{a(a^2-b^2)}\right)-\frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2b}{a^2(a^2-b^2)}\right)\\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.71}$$

مساوات 2.70 بیرون کرہ z محدد پر میدان دیتا ہے۔چونکہ ہم کسی بھی سمت میں اس محدد کو رکھ سکتے تھے اور میدان اسی محدد کی سمت یعنی رداسی سمت میں ہوتا لہٰذا یہ ایک عمومی جواب ہے جسے کسی بھی بیرونی نقطے کے لئے

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \qquad (r>a) \tag{2.72}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ وہی میدان ہے جو کروی محدد کے مرکز پر Q نقطہ بار رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 2.71 کے تحت کرہ کے اندر میدان صفر کے برابر ہے۔یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ہم کسی بھی مقام کو کرہ یا کسی بھی مکمل بند موصل سطح میں گھیر کر اس مقام پر صفر برقی میدان یقینی بنا سکتے ہیں۔ایسی سطح کو فیراڈے پردہ[21] کہتے ہیں۔

حصہ 3.4.2 میں اسی مسئلے کو انتہائی آسان طریقے سے حل کرنا دکھایا جائے گا۔

مثال 2.12: مثال 2.11 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے a رداس کرہ جس میں یکساں ρ_h حجمی بار کثافت پائی جائے کا کرہ کے اندر اور کرہ کے باہر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

حل: کرہ کے اندر رداس r پر $\mathrm{d}r$ موٹی جھلی کا حجم $4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ ہو گا جس میں کل $4\pi\rho_h r^2\,\mathrm{d}r$ بار پایا جائے گا۔مثال 2.11 کے مطابق یہ بار r سے کم رداس کے خطے میں کوئی برقی میدان نہیں پیدا کرتا جبکہ r سے زیادہ رداس پر یہ میدان پیدا کرے گا۔یوں R سے کم کسی بھی رداس پر جھلی میں پائے جانے والا بار R پر میدان پیدا کرے گا جسے

$$\boldsymbol{E}=\int_0^R \frac{4\pi\rho_h r^2\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}=\left.\frac{\rho_h r^3}{3\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}\right|_0^R=\frac{\rho_h R}{3\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}\qquad (R<a) \tag{2.73}$$

لکھ کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔بار کرہ کے باہر یعنی $R>a$ کی صورت میں کرہ میں موجود تمام بار بطور نقطہ بار کردار ادا کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E}=\frac{\frac{4}{3}\pi a^3\rho_h}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}=\frac{a^3\rho_h}{3\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}\qquad (R>a) \tag{2.74}$$

2.7 برقی میدان کے سمت بہاو خط

ہم نے اب تک جتنے بھی مثال دیکھے ان سب میں $\boldsymbol{E}$ کی شکل سیدھی لکیر کی مانند رہی ہے۔ایسے میدان کا تصوراتی شکل ذہن میں بنانا آسان ہوتا ہے۔یوں نقطہ بار کے میدان کو بار سے ابتدا کرتے ہوئے ہر طرف سمتیوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔اب بار کے قریب $\boldsymbol{E}$ کی قیمت زیادہ اور بار سے دور اس کی قیمت کم ہوتی ہے۔یوں مختلف مقامات پر $\boldsymbol{E}$ کی لمبائی یہاں کے میدان کی نسبت سے ہو گی۔میدان کو ظاہر کرنے کے دیگر طریقے بھی رائج ہیں۔

آئیں ایسے ہی ایک طریقے پر غور کریں جس میں میدان کو سمت بہاو خط سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس طریقے میں کسی بھی نقطے پر $\boldsymbol{E}$ یہاں سے گزرتے سمت بہاو خط کا مماس ہوتا ہے۔جس مقام پر گھنے سمت بہاو خطوط پائے جائیں ایسے مقام پر $\boldsymbol{E}$ کی مقدار زیادہ ہوتی ہے اور جہاں ان خطوط کی تعداد کم ہو وہاں میدان کمزور ہوتا ہے۔سمت بہاو خطوط پر تیر کا نشان $\boldsymbol{E}$ کے مثبت سمت کی نشاندہی کرتا ہے۔

[21] Faraday shield

شکل 2.8: الف) سمت بہاو خط کے مساوات کا حصول۔ ب) لکیری بار کثافت کے سمت بہاو خط۔

کارتیسی محدد میں کسی بھی میدان کو

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+E_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+E_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ مساوات ان میدان کو بھی ظاہر کرتا ہے جو سیدھی لکیر کی مانند نہ ہوں۔آئیں ایسے عمومی میدان پر غور کریں جس میں E_z کی قیمت صفر کے برابر ہو جبکہ E_x اور E_y کی قیمتیں x اور y پر منحصر ہو۔کسی بھی نقطہ (x,y) پر ایسے میدان کو

$$\boldsymbol{E}=E_x(x,y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+E_y(x,y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \tag{2.75}$$

لکھا جا سکتا ہے۔شکل 2.8-الف میں ایسے ہی ایک $\boldsymbol{E}$ کے تین سمت بہاو خط دکھائے گئے ہیں۔شکل میں کسی عمومی نقطے پر $\boldsymbol{E}$ دکھایا گیا ہے جو اس نقطے سے گزرتے سمت بہاو خط کا مماس ہے۔میدان کے کارتیسی اجزاء E_x اور E_y بھی دکھائے گئے ہیں۔اسی نقطے پر سمت بہاو خط کی چھوٹی لمبائی لیتے ہوئے Δx اور Δy دکھائے گئے ہیں۔Δx اور Δy کو کم سے کم کرتے ہوئے ہم شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{E_y}{E_x} \tag{2.76}$$

لکھ سکتے ہیں۔اب اگر ہمیں E_x اور E_y کی خاصیت معلوم ہو تب ہم تکمل سے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ 746

آئیں لامحدود لکیری بار کثافت کے میدان کو مثال بناتے ہوئے اس کے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کریں۔$\rho_L=2\pi\epsilon_0$ کی صورت میں z محدد پر لامحدود لکیری بار کثافت کا میدان

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{a}_\rho}{\rho} \tag{2.77}$$

لکھا جاتا ہے۔مساوات 2.75 بھی اسی میدان کی مساوات ہے جس سے ظاہر ہے کہ $E_x=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $E_y=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔یوں مساوات 2.77 کی مدد سے

$$E_x=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}=\frac{\cos\phi}{\rho}=\frac{x}{x^2+y^2}$$
$$E_y=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}=\frac{\sin\phi}{\rho}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں لامحدود لکیری بار کثافت کے میدان کو

$$\boldsymbol{E}=\frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \tag{2.78}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح مساوات 2.76 کو

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

لکھ کر اس کا تکمل

$$\ln y = \ln x + M'$$

یعنی

$$y = Mx \tag{2.79}$$

لیتے ہوئے میدان کے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔یہ سیدھی لکیر کی مساوات ہے جسے مختلف M کے قیمتوں کے لئے شکل 2.8-ب میں کھینچا گیا ہے۔ 748

سوالات

سوال 2.1: صفحہ 60 پر مساوات 2.60 میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اجزاء کا تکمل لیتے ہوئے انہیں صفر کے برابر ثابت کریں۔

سوال 2.2: تکون کے تینوں کونوں پر $25\,\mathrm{\mu C}$ کا بار پایا جاتا ہے جبکہ تینوں کونوں سے $15\,\mathrm{cm}$ فاصلے پر $20\,\mathrm{\mu C}$ بار پایا جاتا ہے۔ تکون کے اطراف $10\,\mathrm{cm}$ ہونے کی صورت میں چوتھے بار پر قوت دفع کی مقدار حاصل کریں۔

جواب: $0.553\,\mathrm{N}$

سوال 2.3: $z=0$ پر $4\,\mathrm{nF}$ اور $z=1\,\mathrm{cm}$ پر $-3\,\mathrm{nF}$ بار پائے جاتے ہیں۔ z محدد پر وہ نقطے دریافت کریں جہاں مثبت بار پر صفر قوت پائی جائے گی۔

جوابات: $z=0.92\,\mathrm{cm}$ ، $z=7.08\,\mathrm{cm}$

سوال 2.4: ایک چکور کے اطراف $25\,\mathrm{cm}$ ہیں جبکہ اس کے چاروں کونوں پر $30\,\mathrm{nC}$ بار پایا جاتا ہے۔ کسی ایک کونے کے بار پر کتنی قوت عمل کرے گی۔

جواب: $0.248\,\mathrm{mN}$

سوال 2.5: نقطہ $(2,1,-3)$ پر $15\,\mathrm{nC}$ اور نقطہ $(-3,-5,4)$ پر $-6\,\mathrm{nC}$ بار پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(2,1,-3)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $-0.191\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+1.057\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+2.195\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

سوال 2.6: نقطہ $(0,0,3)$ اور $(0,0,-3)$ پر $20\,\mathrm{\mu C}$ بار پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $N(2,0,0)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ محدد کے مرکز پر کتنا بار نقطہ N پر اتنی ہی برقی شدت پیدا کرے گا۔

جوابات: $\boldsymbol{E}=15\,339\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $6.827\,\mathrm{\mu C}$

سوال 2.7: نقطہ $(4,-2,7)$ پر $5\,\mathrm{\mu C}$ اور $(-3,4,-2)$ پر $12\,\mathrm{\mu C}$ بار پایا جاتا ہے۔ y محدد پر کہاں $E_x=0$ ہو گا۔

جواب: $y=-6.89$ ، $y=-22.11$

سوال 2.8: نقطہ $P(6,3,7)$ پر $6\,\mathrm{\mu C}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N(5,4,2)$ پر کارتیسی، نلکی اور کروی محدد میں $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ نقطہ N کے اکائی سمتیات استعمال کریں۔ - جوابات: $\boldsymbol{E}=-384.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+384.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-1922\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $\boldsymbol{E}=-60\boldsymbol{a}_{\rho}+540\boldsymbol{a}_{\phi}-1922\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $\boldsymbol{E}=-630\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+1817\boldsymbol{a}_{\theta}+540\boldsymbol{a}_{\phi}$

سوال 2.9: نقطہ $(0,0,0.25)$ اور $(0,0,-0.25)$ پر $50\,\mathrm{nC}$ جبکہ $(0,0,0)$ پر $-35\,\mathrm{nC}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N(3,1,2)$ پر کارتیسی اور کروی محدد میں $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $34\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+11\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+22\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $42\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+0.39\boldsymbol{a}_{\theta}$

سوال 2.10: محدد کے مرکز پر $1\,\mathrm{nC}$ بار پایا جاتا ہے۔ سطح $z=0$ پر اس خط کی مساوات حاصل کریں جس پر $E_y=1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہو گا۔

جواب: $\rho^2 = 8.987 \sin\phi$ ، $80.8y^2 = (x^2+y^2)^3$

سوال 2.11: محدد کے مرکز پر پڑے چکور کے چاروں کونوں پر $5\,\mathrm{nC}$ نقطہ بار پائے جاتے ہیں۔ چکور $z=0$ سطح پر پایا جاتا ہے جبکہ اس کے اطراف $1\,\mathrm{m}$ لمبے ہیں۔ نقطہ $(0,a,0)$ اور نقطہ $(0,2a,0)$ پر برقی شدت کی شرح $a=2$ ، $a=10$ اور $a=\infty$ کی صورت میں حاصل کریں۔

جوابات: 4.15 ، 4.01 ، 4

سوال 2.12: نقطہ $(0,0,0)$ پر Q_1 اور نقطہ $(1,0,0)$ پر Q_2 نقطہ بار پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $(2,1,0)$ پر $E_x = 0$ ہونے کی صورت میں باروں کا تعلق دریافت کریں۔

جواب: $Q_1 = -1.976Q_2$

سوال 2.13: کارتیسی محدد کے پہلے آٹھویں حصے $(x>0, y>0, z>0)$ میں حجمی کثافت بار $\rho_h = 10e^{-2z}(x^2+2y^2)$ ہے جبکہ بقایا سات حصوں میں کوئی بار نہیں پایا جاتا۔ خطہ $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1)$ میں کل بار حاصل کریں۔ اسی طرح خطہ $(0 \le x+2y \le 1,\ 0 \le z \le 1)$ میں کل بار حاصل کریں۔

جوابات: پہلا جواب $4.32\,\mathrm{C}$ ہے۔ دوسرا تکمل $\int_0^{1/2}\int_0^{1-2y}\int_0^1 \rho_h \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ لکھتے ہوئے $0.27\,\mathrm{C}$ حاصل ہو گا۔

سوال 2.14: حجمی کثافت بار $\rho_h = (\rho + 0.002)z^2\tan\phi\,\mathrm{C/m^3}$ خطہ $0 \le \rho \le 0.008$ ، $30^\circ \le \phi \le 75^\circ$ ، $2 \le z \le 5$ میں پایا جاتا ہے۔ کثافت بار کی زیادہ سے زیادہ قیمت دریافت کریں۔ اس خطے میں کل بار حاصل کریں۔

جوابات: $0.933\,\mathrm{C/m^3}$ ، $11.05\,\mathrm{\mu C}$

سوال 2.15: نلکی محدد میں z محدد کے گرد یکساں حجمی کثافت بار $e^{-\rho^2}$ پائی جاتی ہے۔ $z=0$ تا $z=1$ کل بار حاصل کریں۔ z محدد کے گرد کتنے رداس کے اندر کل بار کا آدھا پایا جاتا ہے۔

جوابات: $3.142\,\mathrm{C}$ ، $0.832\,\mathrm{m}$

سوال 2.16: کروی محدد میں رداس کے ساتھ بدلتی حجمی کثافت بار $\rho_h = \sqrt{r}$ پائی جاتی ہے۔ اکائی رداس کے کرہ میں کل بار حاصل کریں۔ اسی طرح خطہ $(r \le 0.5, \theta \le 25^\circ, \phi \le \frac{\pi}{3})$ میں کل بار حاصل کریں۔

جوابات: $3.59\,\mathrm{C}$ ، $0.028\,\mathrm{C}$

سوال 2.17: x محدد پر $\rho_L = 5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ لکیری کثافت بار پایا جاتا ہے جبکہ نقطہ $(0,3,0)$ پر $-2\,\mathrm{nC}$ نقطہ بار پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(4,8,1)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $-0.26\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 10.73\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1.32\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.18: نقطہ $(0,2,0)$ اور $(0,0,4)$ سے گزرتی سیدھی لکیر پر لکیری کثافت بار $2\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے جبکہ نقطہ $(6,1,-2)$ پر $7\,\mathrm{nC}$ بار پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(6,8,4)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $2.47\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 3.78\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1.65\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.19: کارتیسی z محدد کے کچھ حصہ $z \le 0$ پر لکیری کثافت بار $5\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(0,0,-2)$ اور نقطہ $(5,-2,6)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $-22.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $13.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+5.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-5.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.20: کارتیسی z محدد کے کچھ حصہ $2 \le z \le 10$ پر لکیری کثافت بار $2\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(2,12,8)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

$147\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+881\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+133\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.21: سطح $y=1$ پر $\rho_S=0.72\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ ، سطح $y=-3$ پر $\rho_S=-0.72\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ ، سطح $x=-6$ پر $0.4\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ اور لکیر $x=2,\, z=3$ پر $0.4\pi\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(1,3,-1)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $21.3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-5.31\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.22: سطح $z=0$ پر مستطیل خطہ $-2\le x\le 2,\, -3\le y\le 3$ پر $\rho_S=|x|\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(0,0,3)$ پر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $13.36\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.23: سطح $z=0$ پر نلکی رداس $\rho=2$ تا $\rho=5$ سطحی کثافت بار $\rho_S=4\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(0,0,5)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $50\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.24: میدان $\boldsymbol{E}=3\sqrt{x}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+x^3y^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کا سمت بہاو خط حاصل کریں۔ نقطہ $(4,1,7)$ پر میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ لکھیں۔

جوابات: $\frac{y^2}{2}=\frac{x^{3.5}}{3.5}+C$ ، $0.093\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+0.996\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$

سوال 2.25: میدان $\boldsymbol{E}=(x+2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+(4-y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کے اس سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کریں جو نقطہ $(5,7,2)$ سے گزرتی ہے۔

جواب: $(y-4)(x+2)=21$

سوال 2.26: جو میدان z تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتے، نلکی محدد میں ان کی سمت بہاو خط $\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho\,\mathrm{d}\phi}=\frac{E_\rho}{E_\phi}$ حل کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔ نقطہ $(5,75^\circ,3)$ سے گزرتے میدان $\boldsymbol{E}=\rho\cos\phi\,\boldsymbol{a}_\rho+\sin\phi\,\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت بہاو خط حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1}{\rho}+\ln(\sin\phi)=0.1653$

5401 ## ڈھلوان، پھیلاو، گردش اور لاپلاسی

5402 کارتیسی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & az \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

5403 نلکی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho & \boldsymbol{a}_\phi & \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

5404 کروی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{a}_\phi \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}
\end{aligned}
$$

عمومی محدد 5405

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{1}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}\boldsymbol{a}_v + \frac{1}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w}\boldsymbol{a}_w \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{k_1k_2k_3}\left(\frac{\partial(k_2k_3A_u)}{\partial u} + \frac{\partial(k_3k_1A_v)}{\partial v} + \frac{\partial(k_1k_2A_w)}{\partial w}\right) \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{k_2k_3}\left[\frac{\partial(k_3A_w)}{\partial v} - \frac{\partial(k_2A_v)}{\partial w}\right]\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_3k_1}\left[\frac{\partial(k_1A_u)}{\partial w} - \frac{\partial(k_3A_w)}{\partial u}\right]\boldsymbol{a}_v \\
&\quad + \frac{1}{k_1k_2}\left[\frac{\partial(k_2A_v)}{\partial u} - \frac{\partial(k_1A_u)}{\partial v}\right]\boldsymbol{a}_w \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_2k_3}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_3k_1}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{k_1k_2}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]
\end{aligned}
$$

سمتی مماثل 5406

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G} = FG\cos\theta \qquad \text{غیر سمتی (نقطہ) ضرب}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}}{FG}\right)$$

$$\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G} = FG\sin\theta\boldsymbol{a}_N \qquad \text{سمتی (صلیبی) ضرب}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left[\frac{(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{a}_N}{FG}\right]$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) &= 0 \\
\nabla\cdot\nabla f &= \nabla^2 f \\
\nabla\times\nabla f &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla(f+g) &= \nabla f + \nabla g \\
\nabla\cdot(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) &= \nabla\cdot\boldsymbol{F} + \nabla\cdot\boldsymbol{G} \\
\nabla\times(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) &= \nabla\times\boldsymbol{F} + \nabla\times\boldsymbol{G}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\
\nabla\cdot(f\boldsymbol{G}) &= f(\nabla\cdot\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G}\cdot(\nabla f) \\
\nabla\times(f\boldsymbol{G}) &= f(\nabla\times\boldsymbol{G}) + (\nabla f)\times\boldsymbol{G}
\end{aligned}
$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) - \nabla^2\boldsymbol{F}$$

جہاں $\nabla^2\boldsymbol{F}$ سے مراد

$$\nabla^2\boldsymbol{F} = \nabla^2F_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \nabla^2F_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \nabla^2F_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہے۔

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{G} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{G}) \\
\boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{H}) &= \boldsymbol{G} \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{H} \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) \\
\nabla \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{F}(\nabla \cdot \boldsymbol{G}) - \boldsymbol{G}(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} \\
\nabla(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) &= (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \times (\nabla \times \boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G} \times (\nabla \times \boldsymbol{F})
\end{aligned}
$$

5407 سطحی اور حجمی تکمل کے تعلق

مندرجہ ذیل تین مساوات میں دائیں جانب حجمی تکمل کے حجم کو بائیں جانب سطحی تکمل کی سطح گھیرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\oint_S f \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_h \nabla f \,\mathrm{d}h \\
\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_h \nabla \cdot \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}h \qquad \text{مسئلہ پھیلاو} \\
\oint_S \boldsymbol{a}_N \times \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}S &= \int_h \nabla \times \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}h
\end{aligned}
$$

5408 خطی اور سطحی تکمل کے تعلق

مندرجہ ذیل دو مساوات میں دائیں جانب سطحی تکمل کی سطح کو بائیں جانب خطی تکمل کی بند راہ گھیرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\oint_l f \,\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_S \boldsymbol{a}_N \times \nabla f \,\mathrm{d}S \\
\oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \text{مسئلہ سٹوکس}
\end{aligned}
$$

complex permitivity
dispersion
try to resolve the issue of using k and γ as propagation constants
kraus p473 fig 10-60 sec 10.18 and 10.19, 10.17,10.16,10.15,10.11 or do the entire chap9 and 10 transmission from kraus too
fourier transform sec 14.8 of kraus must draw the figures
charge is barqi bar and let the reader figure out which bar is meant
degree angle and degree celcius, ohm, micro etc not showing
kraus p581 mentions three types of impedances: intrinsic, characteristic and transverse. ensure that i too have these distinctions
kraus fig-13.28 and fig 13.29 and table 13.3 (on p577) are v. impt
Huygens improvements
figTransmissionSmithFromInternet.tex is not giving the figure of the book
the answers should be at the end of the book
handle all side notes ( ) and remove the corresponding text
read chapter 9 onwards (proof reading)
antenna chapter, 3D figure at start and complete the start section.
house completion certificate.
zaryab fish
F=-dW/dT to include in inductance chapter plus a question or two
magnetizartion curve and an iteration example. fig 8.10, 11 of hayt.
add questions to machine book too.

when giving fields always remember the following rules:
always ensure that divergence of magnetic field is zero.
moving waves must be of the form $E = E0\cos(wt - kz)$ where $c = (\mu * \epsilon)^{-0.5}$ and $k = 2 * \pi/\lambda$
include complex permitivity (7th ed Q12.18 says sigma=omega*epsilon")
include 4th ed fig 11.11 of page 422

جدول 15.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^{7}	گریفائٹ	7×10^{4}
تانبا	5.80×10^{7}	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^{7}	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^{7}	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^{7}	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^{7}	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^{7}	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^{7}	مقطر پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^{7}	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^{7}	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^{7}	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^{7}	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^{7}	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^{7}	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^{7}	کوارٹس	10^{-17}

جدول 15.2: ϵ_R and $\sigma/\omega\epsilon$

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 15.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 15.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران بار	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$