

# برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی  
 کامپیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
 khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

3

1	4	سمتیات	1
1.1	5	مقداری اور سمتیہ	1.1
1.2	6	سمتی الجبرا	1.2
1.3	7	کارتیسی محدود	1.3
1.4	8	اکائی سمتیات	1.4
1.5	9	میدانی سمتیہ	1.5
1.6	10	سمتی رقبہ	1.6
1.7	11	غیر سمتی ضرب	1.7
1.8	12	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1.8
1.9	13	گول نلکی محدود	1.9
1.9.1	14	نلکی اکائی سمتیات کا کارتسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	1.9.1
1.9.2	15	نلکی اور کارتسی اکائی سمتیات کا تعلق	1.9.2
1.9.3	16	نلکی لامحدود سطحیں	1.9.3
1.10	17	کروی محدود	1.10
2	18	کولومب کا قانون	2
2.1	19	قوت کشش یا دفع	2.1
2.2	20	برقی میدان کی شدت	2.2
2.3	21	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	2.3
2.4	22	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	2.4
2.5	23	چارج بردار حجم	2.5
2.6	24	مزید مثال	2.6
2.7	25	برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	2.7

69 <sup>26</sup>	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ	3
69 <sup>27</sup>	ساکن چارج	3.1
69 <sup>28</sup>	فیراڈے کا تجربہ	3.2
70 <sup>29</sup>	گاؤس کا قانون	3.3
72 <sup>30</sup>	گاؤس کے قانون کا استعمال	3.4
72 <sup>31</sup>	نقطہ چارج	3.4.1
74 <sup>32</sup>	یکساں چارج بردار کروی سطح	3.4.2
74 <sup>33</sup>	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر	3.4.3
75 <sup>34</sup>	ہم محوری تار	3.5
77 <sup>35</sup>	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	3.6
77 <sup>36</sup>	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق	3.7
80 <sup>37</sup>	پھیلاؤ	3.8
82 <sup>38</sup>	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات	3.9
84 <sup>39</sup>	پھیلاؤ کی عمومی مساوات	3.10
86 <sup>40</sup>	مسئلہ پھیلاؤ	3.11
87 <sup>41</sup>	توانائی اور برقی دباؤ	4
87 <sup>42</sup>	توانائی اور کام	4.1
88 <sup>43</sup>	لکیری تکملہ	4.2
93 <sup>44</sup>	برقی دباؤ	4.3
94 <sup>45</sup>	نقطہ چارج کا برقی دباؤ	4.3.1
95 <sup>46</sup>	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ	4.3.2
96 <sup>47</sup>	ہم محوری تار کا برقی دباؤ	4.3.3
96 <sup>48</sup>	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ	4.4
100 <sup>49</sup>	برقی دباؤ کی ڈھلوان	4.5
104 <sup>50</sup>	نلکی محدود میں ڈھلوان	4.5.1
105 <sup>51</sup>	کروی محدود میں ڈھلوان	4.5.2
106 <sup>52</sup>	جفت قطب	4.6
108 <sup>53</sup>	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط	4.6.1
111 <sup>54</sup>	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی	4.7

117 <sub>55</sub>	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
117 <sub>56</sub>	برقی رو اور کثافت برقی رو	5.1
119 <sub>57</sub>	استمراری مساوات	5.2
121 <sub>58</sub>	موصل	5.3
126 <sub>59</sub>	موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	5.4
129 <sub>60</sub>	عکس کی ترکیب	5.5
132 <sub>61</sub>	نیم موصل	5.6
133 <sub>62</sub>	ذو برق	5.7
138 <sub>63</sub>	کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	5.8
142 <sub>64</sub>	موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	5.9
142 <sub>65</sub>	کیپسٹر	5.10
144 <sub>66</sub>	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
145 <sub>67</sub>	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
145 <sub>68</sub>	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
147 <sub>69</sub>	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
148 <sub>70</sub>	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
157 <sub>71</sub>	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
159 <sub>72</sub>	6.1 مسئلہ یکنائی	
160 <sub>73</sub>	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
161 <sub>74</sub>	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
162 <sub>75</sub>	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
168 <sub>76</sub>	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
171 <sub>77</sub>	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
178 <sub>78</sub>	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

185 <sup>9</sup>	ساکن مقناطیسی میدان	7
185 <sup>10</sup>	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
189 <sup>11</sup>	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.2
193 <sup>12</sup>	گردش	7.3
200 <sup>13</sup>	نلکی محدود میں گردش	7.3.1
206 <sup>14</sup>	عمومی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.2
208 <sup>15</sup>	کروی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.3
208 <sup>16</sup>	مسئلہ سٹوکس	7.4
212 <sup>17</sup>	مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ	7.5
218 <sup>18</sup>	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	7.6
224 <sup>19</sup>	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	7.7
224 <sup>20</sup>	سمتی مقناطیسی دباؤ	7.7.1
225 <sup>21</sup>	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.7.2
231 <sup>22</sup>	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	8
231 <sup>23</sup>	متحرک چارج پر قوت	8.1
232 <sup>24</sup>	تفرقی چارج پر قوت	8.2
235 <sup>25</sup>	برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	8.3
236 <sup>26</sup>	قوت اور مروڑ	8.4
241 <sup>27</sup>	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	8.5
242 <sup>28</sup>	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	8.6
245 <sup>29</sup>	مقناطیسی سرحدی شرائط	8.7
246 <sup>30</sup>	مقناطیسی دور	8.8
249 <sup>31</sup>	مقناطیسی مخفی توانائی	8.9
250 <sup>32</sup>	خود امالہ اور مشترکہ امالہ	8.10
254 <sup>33</sup>	مشترکہ امالہ	8.11

257 <sub>104</sub>	9	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات
257 <sub>105</sub>	9.1	فیراڈے کا قانون
263 <sub>106</sub>	9.2	انتقالی برقی رو
267 <sub>107</sub>	9.3	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل
268 <sub>108</sub>	9.4	میکس ویل مساوات کی تکمیل شکل
270 <sub>109</sub>	9.5	تاخیری دباؤ
275 <sub>110</sub>	10	مستوی امواج
275 <sub>111</sub>	10.1	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج
276 <sub>112</sub>	10.2	برقی و مقناطیسی مستوی امواج
283 <sub>113</sub>	10.2.1	خالی خلاء میں امواج
285 <sub>114</sub>	10.2.2	خالص یا کامل ذو برق میں امواج
287 <sub>115</sub>	10.2.3	ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج
290 <sub>116</sub>	10.3	پوئنٹنگ سمتیہ
294 <sub>117</sub>	10.4	موصل میں امواج
300 <sub>118</sub>	10.5	انعکاس مستوی موج
306 <sub>119</sub>	10.6	شرح ساکن موج
313 <sub>120</sub>	11	ترسیلی تار
313 <sub>121</sub>	11.1	ترسیلی تار کے مساوات
317 <sub>122</sub>	11.2	ترسیلی تار کے مستقل
318 <sub>123</sub>	11.2.1	ہم محوری تار کے مستقل
321 <sub>124</sub>	11.2.2	دو متوازی تار کے مستقل
322 <sub>125</sub>	11.2.3	سطح مستوی ترسیلی تار
323 <sub>126</sub>	11.3	ترسیلی تار کے چند مثال
328 <sub>127</sub>	11.4	ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ
335 <sub>128</sub>	11.4.1	سمتہ فراوانی نقشہ
336 <sub>129</sub>	11.5	تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

341 <sub>130</sub>	12	تقطیب موج
341 <sub>131</sub>	12.1	خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
344 <sub>132</sub>	12.2	بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پرنٹنگ سمتیہ
347 <sub>133</sub>	13	ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار
347 <sub>134</sub>	13.1	ترچھی آمد
358 <sub>135</sub>	13.2	ترسیم بائی گن
361 <sub>136</sub>	14	مویج اور گھمکیا
361 <sub>137</sub>	14.1	برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ
362 <sub>138</sub>	14.2	دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج
368 <sub>139</sub>	14.3	کھوکھلا مستطیلی مویج
377 <sub>140</sub>	14.3.1	مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور
384 <sub>141</sub>	14.4	مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی $TM_{mn}$ موج
388 <sub>142</sub>	14.5	کھوکھلی نالی مویج
395 <sub>143</sub>	14.6	انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف
397 <sub>144</sub>	14.7	انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف
399 <sub>145</sub>	14.8	سطحی موج
404 <sub>146</sub>	14.9	ذو برق تختی مویج
407 <sub>147</sub>	14.10	شیش ریشہ
410 <sub>148</sub>	14.11	پردہ بصارت
412 <sub>149</sub>	14.12	گھمکی خلاء
415 <sub>150</sub>	14.13	میکس ویل مساوات کا عمومی حل



- 423<sup>52</sup> . . . . . تعارف 15.1
- 423<sup>53</sup> . . . . . تاخیری دباؤ 15.2
- 425<sup>54</sup> . . . . . تکمل 15.3
- 426<sup>55</sup> . . . . . مختصر جفت قطبی اینٹینا 15.4
- 434<sup>56</sup> . . . . . مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت 15.5
- 438<sup>57</sup> . . . . . ٹھوس زاویہ 15.6
- 439<sup>58</sup> . . . . . اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش 15.7
- 446<sup>59</sup> . . . . . قطاری ترتیب 15.8
- 446<sup>60</sup> . . . . . 15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع
- 447<sup>61</sup> . . . . . 15.8.2 ضرب نقش
- 448<sup>62</sup> . . . . . 15.8.3 ثنائی قطار
- 450<sup>63</sup> . . . . . 15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار
- 452<sup>64</sup> . . . . . 15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار
- 452<sup>65</sup> . . . . . 15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار
- 456<sup>66</sup> . . . . . 15.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلنے زاویہ اخراجی اینٹینا
- 457<sup>67</sup> . . . . . 15.9 تداخل پیمہ
- 458<sup>68</sup> . . . . . 15.10 مسلسل خطی اینٹینا
- 459<sup>69</sup> . . . . . 15.11 مستطیل سطحی اینٹینا
- 462<sup>70</sup> . . . . . 15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فورویئر بدل ہیں
- 462<sup>71</sup> . . . . . 15.13 خطی اینٹینا
- 467<sup>72</sup> . . . . . 15.14 چلتے موج اینٹینا
- 468<sup>73</sup> . . . . . 15.15 چھوٹا گھیرا اینٹینا
- 469<sup>74</sup> . . . . . 15.16 پیچ دار اینٹینا
- 471<sup>75</sup> . . . . . 15.17 دو طرفہ کردار
- 473<sup>76</sup> . . . . . 15.18 جھری اینٹینا
- 474<sup>77</sup> . . . . . 15.19 پیپا اینٹینا
- 476<sup>78</sup> . . . . . 15.20 فرانس ریڈار مساوات
- 479<sup>79</sup> . . . . . 15.21 ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی
- 481<sup>80</sup> . . . . . 15.22 حرارت نظام اور حرارت بعید



## گائوس کا قانون اور پھیلاؤ

### 3.1 ساکن چارج

### 3.2 فیراڈے کا تجربہ

اس باب کا آغاز جناب مائیکل فیراڈے<sup>1</sup> کے ایک تجربے سے کرتے ہیں جس کے نتیجے کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے۔ چارج  $Q$  کو غیر چارج شدہ موصل سطح میں مکمل طور پر یوں بند کرنے کے بعد، کہ چارج اور سطح کہیں بھی ایک دونوں کو نہ چھوئیں، موصل سطح کو زمین کے ساتھ ایک لمحے کے لئے ملانے سے موصل سطح پر  $Q$  چارج پیدا ہو جاتا ہے۔ دیکھایا گیا ہے کہ چارج اور بیرونی سطح کے درمیان فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسی طرح چارج اور سطح کے درمیان مختلف غیر موصل مواد بھرنے سے بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ مزید یہ کہ سطح کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسی طرح جس چیز پر چارج  $Q$  رکھا گیا ہو، اس کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔

ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے اندرونی چارج سے بیرونی سطح تک چارج کی مقدار اور قطب کی خبر پہنچتی ہے۔ اس حقیقت کو تصوراتی جامع یوں پہنایا جاسکتا ہے کہ ہم سمجھیں کہ مثبت چارج سے ہر جانب یکساں طور پر کچھ خارج ہوتا ہے۔ اس چیز کو ہم **برقی بہاؤ** کہیں گے اور اس کو  $\psi$  سے ظاہر کریں گے۔ برقی بہاؤ کو چارج کے برابر تصور کیا جاتا ہے۔

$$(3.1) \quad \psi = Q$$

برقی بہاؤ کی اکائی کو لومب C ہی تصور کی جاتی ہے۔ منفی چارج کی صورت میں برقی بہاؤ کی سمت الٹی ہوگی اور یہ چارج میں داخل ہوگا۔

تصور کریں کہ اندرونی چارج  $r_1$  داس کی کرہ پر پایا جاتا ہے جبکہ اسے  $r_2$  داس کی کرہ نے گھیرا ہوا ہے۔ کرہ کی سطح  $4\pi r^2$  کے برابر ہوتی ہے۔ اندرونی کرہ سے  $\psi$  برقی بہاؤ خارج ہوتا ہے۔ یوں اندرونی کرہ سے  $\frac{\psi}{4\pi r_1^2}$  برقی بہاؤ فی اکائی رقبہ خارج ہوتا ہے جسے  $\frac{Q}{4\pi r_1^2}$  لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح بیرونی کرہ پر  $\frac{Q}{4\pi r_2^2}$  برقی بہاؤ فی اکائی رقبہ پہنچتی ہے۔ برقی بہاؤ فی اکائی رقبے کو **کشافت برقی بہاؤ**  $D^3$  کہا جائے گا۔ یوں اگر اندرونی کرہ کے رداس کو اتنا کم کر دیا جائے کہ اس کو نقطہ تصور کرنا ممکن ہو اور اس نقطہ چارج کو رداس  $r$  کے کرہ کے مرکز پر رکھا جائے تو کرہ پر

$$(3.2) \quad D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$$

سمتیہ کثافت برقی بہاؤ پائی جائے گی۔ صفحہ 44 پر مساوات 2.19 سے موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ خالی خلاء میں

$$(3.3) \quad D = \epsilon_0 E \quad \text{خالی خلاء}$$

کے برابر ہے۔ اگر نقطہ چارج کو کروی محدود مرکز پر نہ رکھا جائے تب کسی بھی مقام پر کثافت برقی بہاؤ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 3.2 یوں لکھی جائے گی

$$(3.4) \quad D = \frac{Q}{4\pi R^2} a_R$$

جہاں  $a_R$  چارج سے اس مقام کی جانب اکائی سمتیہ ہے اور  $R$  ان کے درمیان فاصلہ ہے۔

کسی بھی حجم میں تغیر پذیر چارج کی کثافت پائی جائے میں مقام  $r'$  پر  $\Delta h'$  حجم میں  $\rho'_h \Delta h'$  چارج پایا جائے گا جو مقام  $r$  پر

$$\Delta D(r) = \frac{\rho'_h \Delta h'}{4\pi |r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|}$$

کثافت برقی بہاؤ پیدا کرے گا۔ قانون کو لو مب خطی ہونے کی بنا پر  $D$  بھی خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہذا حجم کے تمام چارجوں سے

$$(3.5) \quad D(r) = \int_h \frac{\rho'_h dh'}{4\pi |r - r'|^2} \frac{r - r'}{|r - r'|}$$

حاصل ہوگا۔ مساوات 3.5 کا صفحہ 55 پر مساوات 2.48 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ حجمی کثافت کے لئے بھی مساوات 3.3 خالی خلاء میں  $D$  اور  $E$  کا تعلق بیان کرتا ہے۔ اسی طرح  $\rho_S$  اور  $\rho_L$  سے پیدا  $D$  اور  $E$  کا خالی خلاء میں تعلق بھی مساوات 3.3 ہی بیان کرتا ہے۔ یوں مساوات 3.3 ایک عمومی مساوات ہے۔

### 3.3 گاؤس کا قانون

فیراڈے کے تجربے کو قانون کی شکل میں یوں پیش کیا جاسکتا ہے جسے **گاؤس کا قانون**<sup>4</sup> کہتے ہیں۔

کسی بھی مکمل بند سطح سے کل گزرتی برقی بہاؤ سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتی ہے۔

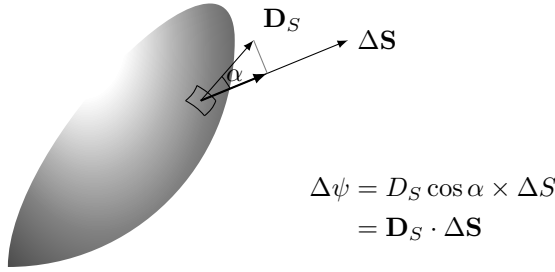
جناب گاؤس<sup>5</sup> نے اس قانون کو ریاضیاتی شکل دی جس کی بنا پر یہ قانون انہیں کے نام سے منسوب ہے۔ آئیں گاؤس کے قانون کی ریاضیاتی شکل حاصل کریں۔

شکل 3.1 میں بند سطح دکھائی گئی ہے جس کی کوئی مخصوص شکل نہیں ہے۔ اس سطح کے اندر یعنی سطح کے گھیرے حجم میں کل  $Q$  چارج پایا جاتا ہے۔ سطح پر کسی بھی مقام سے گزرتا برقی بہاؤ اس مقام پر سطح کی عمودی سمت میں کثافت برقی بہاؤ اور اس مقام کے رقبہ کے حاصل ضرب کے برابر ہوگا۔ یوں شکل کو دیکھتے ہوئے چھوٹے سے رقبہ  $\Delta S$  پر سطح کے عمودی سمت میں برقی بہاؤ کے کثافت کی قیمت  $D_S \cos \alpha$  ہوگی لہذا

$$\Delta \psi = D_S \cos \alpha \Delta S$$

ہوگا۔ کثافت برقی بہاؤ  $D_S$  لکھتے ہوئے زیر نوشت میں  $S$  اس حقیقت کی یاد دہانی کرتا ہے کہ سطح پر کثافت برقی بہاؤ کی قیمت کی بات کی جارہی ہے۔ اس مساوات کو ضرب نقطہ کے استعمال سے

$$\Delta \psi = D_S \cdot \Delta S$$



شکل 3.1: مکمل بند سطح سے گزرتی برقی بہاؤ سطح میں گھیرے کل چارج کے برابر ہے۔

لکھا جاسکتا ہے۔ مکمل سطح سے گزرتے کل برقی بہاؤ تکملہ سے حاصل ہوگی جو گاؤس کے قانون کے مطابق گھیرے ہوئے چارج  $Q$  کے برابر ہے۔ یوں

$$(3.6) \quad \psi = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot \Delta \mathbf{S} = Q$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یہ تکملہ دراصل دو درجی تکملہ ہے جسے ہم عموماً ایک درجی تکملہ سے ہی ظاہر کریں گے۔ تکملہ کے نشان پر گول دائرہ بند تکملہ<sup>6</sup> کو ظاہر کرتا ہے جبکہ بند تکملہ کے نیچے اس بند سطح کو ظاہر کرتا ہے جس پر بند تکملہ حاصل کیا جا رہا ہو۔ اس بند سطح کو عموماً **گاؤس سطح** کہتے ہیں۔

833

جس مقام پر چارج کی کثافت  $\rho_h$  ہو، وہاں چھوٹی سی حجم  $\Delta h$  میں کل چارج  $\rho_h \Delta h$  پایا جاتا ہے۔ یوں کسی بھی حجم کو چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہوئے تمام حصوں میں پائے جانے والے چارجوں کا مجموعہ پوری حجم میں چارج کے برابر ہوگا یعنی

$$(3.7) \quad Q = \int_h \rho_h dh$$

834

جہاں تین درجی حجم کے تکملہ کو ایک درجی تکملہ کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$(3.8) \quad \oint_S \mathbf{D}_S \cdot \Delta \mathbf{S} = \int_h \rho_h dh$$

حاصل ہوتا ہے جو گاؤس کے قانون کی تکملہ شکل ہے۔ اس مساوات کو یوں پڑھا جاتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی کل برقی بہاؤ اس سطح کے اندر گھیرے کل چارج کے برابر ہے۔

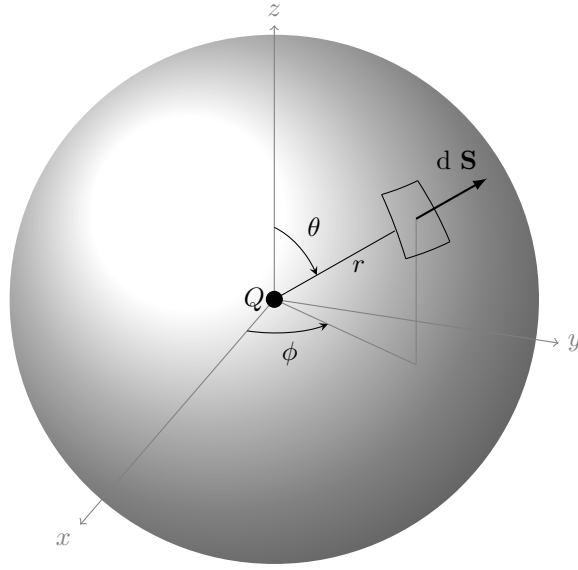
836

یہ ضروری نہیں کہ گھیرے ہوئے حجم یعنی بند حجم میں صحیح کثافت ہی پائی جائے۔ بند حجم کے اندر سطحی کثافت، لکیری کثافت، علیحدہ علیحدہ نقطہ چارج یا ان تینوں اقسام کا مجموعہ پایا جاسکتا ہے۔ حجم گھیرنے والے بند بیرونی سطح کے اندر کسی سطح پر سطحی کثافت کی صورت میں مساوات 3.7 کی جگہ

$$(3.9) \quad Q = \int_S \rho_S dS$$

لکھا جائے گا جہاں چارج بردار سطح از خود بند یا کھلی سطح ہو سکتی ہے۔ لکیری کثافت کی صورت میں

$$(3.10) \quad Q = \int_L \rho_L dL$$



شکل 3.2: کرہ کے مرکز پر نقطہ چارج کا کرہ کے سطح پر کثافتِ برقی بہاو

جبکہ  $n$  عدد نقطہ چارج کی صورت میں

$$(3.11) \quad Q = \sum_n Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$$

لکھا جائے گا، وغیرہ وغیرہ۔ بہر حال مساوات 3.7 سے مراد یہ تمام صورتیں لی جاتی ہیں اور یوں ان تمام صورتوں کے لئے گاؤس کے قانون کی تکملہ شکل مساوات 3.8 ہی ہے۔

838

### 3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال

839

گزشتہ باب میں ہم نے کولومب کے قانون سے نقطہ چارج، لامحدود لکیری چارج اور لامحدود سطحی چارج سے پیدا برقی میدان حاصل کئے۔ انہیں انہیں کو گاؤس کے قانون کی مدد سے بھی حاصل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ان تینوں صورتوں میں گاؤس کے قانون کا استعمال شرم ناک حد تک سادہ ثابت ہو گا۔ یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ ایسے مسائل جن میں گاؤس کا قانون استعمال کیا جاسکے کی تعداد بہت کم ہیں۔

842

#### 3.4.1 نقطہ چارج

843

شکل 3.2 میں کرہ کے مرکز پر نقطہ چارج دکھایا گیا ہے۔ نقطہ چارج کو کروی محدود<sup>8</sup> کے مرکز پر رکھتے ہوئے ہم نے مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے مسئلے کی مشابہت کی بنا پر اخذ کیا تھا کہ کثافتِ برقی میدان صرف  $r$  اس کی سمت میں ممکن ہے اور اس کی حتمی قیمت صرف اور صرف  $r$  تبدیل کرنے سے تبدیل ہوگی۔ اس کا مطلب ہے کہ کروی محدود کے مرکز کے گرد  $r$  اس کے کرہ پر  $D$  تبدیل نہیں ہوگا۔

846

کروی محدود استعمال کرتے ہوئے کرہ پر چھوٹی سی سطح

$$dS = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اسی کی سمتی شکل

$$dS = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \mathbf{a}_r$$

ہوگی۔ اس سطح پر کثافتِ برقی بہاؤ کی قیمت  $D_S$  اور سمت  $\mathbf{a}_r$  ہوگی لہذا سمتی کثافتِ برقی بہاؤ

$$D_S = D_S \mathbf{a}_r$$

لکھی جائے گی۔ یوں اس چھوٹی سی سطح سے گزرتی برقی بہاؤ

$$\begin{aligned} d\psi &= D_S \cdot dS \\ &= (D_S \mathbf{a}_r) \cdot (r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \mathbf{a}_r) \\ &= D_S r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

ہوگی۔ اس طرح پوری کرہ سے گزرتی برقی بہاؤ مکملہ سے یوں حاصل ہوگی۔

$$\begin{aligned} \psi &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \left. -\cos \theta \right|_0^{\pi} d\phi \\ &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} 2 \, d\phi \\ &= 4\pi r^2 D_S \end{aligned}$$

گاؤس کے قانون کے تحت یہ برقی بہاؤ گھیرے گئے چارج  $Q$  کے برابر ہے لہذا

$$4\pi r^2 D_S = Q$$

ہوگا جس سے

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہی جواب بغیر زیادہ حساب و کتاب کے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

کرہ پر کثافتِ برقی بہاؤ  $D_S$  عمودی ہے اور اس کی قیمت کرہ پر تبدیل نہیں ہوتی۔ کرہ کی سطح  $4\pi r^2$  کے برابر ہے لہذا پوری سطح سے  $4\pi r^2 D_S$  برقی بہاؤ گزرے گی جو گاؤس کے قانون کے تحت  $Q$  کے برابر ہے لہذا  $4\pi r^2 D_S = Q$  ہوگا جس سے  $D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$  حاصل ہوتا ہے۔ اس کی سمتی شکل

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad (3.12)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (3.13)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا صفحہ 44 پر مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ جواب کتنی آسانی سے حاصل ہوا۔

## 3.4.2 یکساں چارج بردار کروی سطح

صفحہ 59 پر حصہ 2.11 میں کروی محدود کے مرکز پر  $a$  رداس کی کروی سطح جس پر یکساں  $\rho_S$  چارج کثافت پائی جائے کامیدان بیرون کروہ اور اندرون کروہ حاصل کیا گیا۔ آئیں گاؤس کے قانون سے انہیں جوابات کو دوبارہ حاصل کریں۔

کرہ کے اندر  $r$  رداس کا کرہ لیتے ہیں۔ یوں  $r < a$  رداس کے کرہ میں صفر چارج پایا جائے گا۔ یوں اس کی سطح پر صفر میدان ہوگا۔ اس کے برعکس  $r > a$  رداس کا کرہ  $a$  رداس کے کرہ کو گھیرتا ہے لہذا یہ  $4\pi a^2 \rho_S$  چارج کو گھیرے گا لہذا یہاں

$$D = \frac{4\pi a^2 \rho_S}{4\pi r^2} a_r$$

ہوگا جس سے

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} a_r$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کل چارج کو  $Q$  لکھا گیا ہے۔ یہ نتائج گاؤس کے قانون کے استعمال سے حاصل کئے گئے۔ ساتھ ہی ساتھ اس حقیقت کو مد نظر رکھا گیا کہ میدان صرف رداسی سمت میں ممکن ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس مسئلے کو حل کرنے کا موجودہ طریقہ نہایت آسان ہے۔

## 3.4.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر

ایسی لامحدود لکیر جس پر چارج کی یکساں کثافت پائی جائے کے گرد رداس پر گھومتے ہوئے صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آتی۔ اسی طرح اس لکیر کے ساتھ چلتے ہوئے بھی صورت حال میں کسی قسم کی تبدیلی پیدا نہیں ہوتی۔ لامحدود لکیر کو ٹکلی محدود کی  $z$  محدود تصور کرتے ہوئے ان حقائق کی روشنی میں ہم توقع کرتے ہیں کہ برقی میدان صرف رداس تبدیل کرنے سے ہی تبدیل ہوگا۔ مزید، جیسا کہ پہچانی باب میں بتلایا گیا، کسی بھی نقطے کے ایک جانب لکیر پر چارج سے پیدا ہونے والی برقی میدان کا وہ حصہ جو  $a_z$  کی سمت میں ہو کو لکیر پر نقطے کی دوسری جانب برابر فاصلے پر چارج سے پیدا ہونے والی برقی میدان کا وہ حصہ جو  $a_z$  کی سمت میں ہو ختم کرتا ہے۔ یوں یہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ کثافت برقی بہاؤ صرف رداس کی سمت میں ہی پایا جائے گا۔ آئیں ان معلومات کی روشنی میں گاؤس کے قانون کی مدد سے کثافت برقی بہاؤ حاصل کریں۔

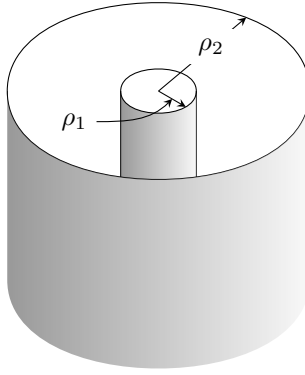
چارج بردار لکیر جس پر یکساں کثافت چارج  $\rho_L$  پایا جائے کی لمبائی  $L$  میں کل چارج  $\rho_L L$  ہوگا۔ اس لمبائی کے گرد  $\rho$  رداس کی ٹکلی سطح تصور کرتے ہیں جس کے دونوں آخری سرے "بند تصور کریں۔ چونکہ برقی بہاؤ صرف رداس کی سمت میں ہے لہذا ان دونوں آخری سروں سے کوئی برقی بہاؤ نہیں ہوگا۔ ٹکلی سطح کا رقبہ  $2\pi \rho L$  ہے جبکہ اس سطح پر ہر جگہ کثافت برقی بہاؤ  $D_\rho$  ہے لہذا پوری سطح سے  $2\pi \rho L D_\rho$  برقی بہاؤ ہوگا جو گاؤس کے قانون کے تحت گھیرے گئے چارج  $\rho_L L$  کے برابر ہوگا۔ اس طرح

$$2\pi \rho L D_\rho = \rho_L L$$

لکھتے ہوئے

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi \rho}$$





شکل 3.3: ہم محوری تار

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$(3.14) \quad D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} a_\rho$$

ے

$$(3.15) \quad E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} a_\rho$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 49 پر مساوات 2.30 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ طریقہ کتنا سادہ ہے۔

862

### 3.5 ہم محوری تار

یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کے قصبے کو آگے بڑھاتے ہوئے تصور کریں کہ اس تار کا رداس  $\rho_1$  ہے۔ اگر تار پر کسی بھی جگہ  $L$  لمبائی میں  $Q$  چارج پایا جائے تو تار پر چارج کی لکیری کثافت  $\rho_L = \frac{Q}{L}$  ہوگی جبکہ اس پر چارج کی سطحی کثافت  $\frac{Q}{2\pi\rho_1 L}$  ہوگی۔ جیسا آپ جانتے ہیں ہیں ٹھوس موصل میں چارجوں کے مابین قوت دفع کی وجہ سے تمام چارج موصل کے بیرونی سطح پر دھکیلے جاتے ہیں۔ یوں چارج  $Q$  تار کے بیرونی سطح، محور سے  $\rho_1$  فاصلے پر پایا جائے گا۔

866

اب تصور کریں کہ پہلی تار کے اوپر نکلی نماد و سری تار چڑھائی جائے جس کا اندرونی رداس  $\rho_2$  ہو جہاں  $\rho_2 > \rho_1$  ہوگا۔ ایسی تار جسے ہم **مخوری تار**<sup>10</sup> کہتے ہیں کو شکل 3.3 میں دکھایا گیا ہے۔ تصور کریں کہ بیرونی تار پر کسی بھی جگہ  $L$  لمبائی پر  $-Q$  چارج پایا جاتا ہے۔ دونوں تاروں پر الٹ اقسام کے چارج ہیں جن میں قوت کشش پائی جائے گی۔ یوں بیرونی تار پر چارج تار کے اندرونی سطح یعنی محور سے  $\rho_2$  رداس پر پایا جائے گا۔ بیرونی تار پر  $\rho_L = \frac{-Q}{L}$  جبکہ  $\rho_S = \frac{-Q}{2\pi\rho_2 L}$  ہوگی۔

دونوں تاروں کے درمیانی فاصلے میں رداس  $\rho$  کی فرضی نکلی سطح صرف اندرونی تار کے چارج کو گھیرتی ہے لہذا  $L$  لمبائی کی ایسی نکلی پر مساوات 3.14 کی طرح

$$(3.16) \quad \begin{aligned} D &= \frac{\rho_L}{2\pi\rho} a_\rho \\ &= \frac{Q}{2\pi\rho L} a_\rho \end{aligned}$$

پایا جائے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بیرونی تار پر چارج کا اس میدان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ یوں اندرونی تار کے بیرونی سطح پر

$$(3.17) \quad D_1 = \frac{Q}{2\pi\rho_1 L} a_\rho$$

جبکہ بیرونی تار کے اندرونی سطح پر

$$(3.18) \quad D_2 = \frac{Q}{2\pi\rho_2 L} a_\rho$$

پایا جائے گا۔ بیرونی تار کے باہر فرضی نکلی سطح میں کل صفر چارج پایا جاتا ہے لہذا ہم محوری تار کے باہر (یعنی بیرونی تار کے باہر)

$$(3.19) \quad D_{\text{تار کے باہر}} = 0$$

ہوگا۔ مساوات 3.14 انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ اس کے مطابق ہم محوری تار کے باہر کسی قسم کا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہذا تار کے باہر سے کسی طرح بھی یہ معلوم نہیں کیا جاسکتا کہ تار پر کس قسم کا چارج پائے جاتے ہیں۔ یوں ہم محوری تار کے ذریعہ اشارات کی منتقلی محفوظ ہوتی ہے۔ ہم محوری تار میں بیرونی تار اندرونی تار کو پناہی دیتا ہے۔ لہذا ہم محوری تار کو **پناہ دار تار**<sup>11</sup> بھی کہا جائے گا۔

872

873

مثال 3.1: ہم محوری تار کے اندرونی تار کا رداس 1 mm جبکہ اس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس 5 mm ہے۔ 3 mm رداس پر کثافت برقی بہاؤ  $-5.4 \frac{\mu\text{Wb}}{\text{m}^2}$  ہے جبکہ تار کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا۔ دونوں تاروں پر چارج کی سطحی کثافت حاصل کریں۔

875

حل: تار کے گرد برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پایا جاتا ہے۔ اگر تار پر چارج کی لکیری کثافت  $\rho_L$  ہو تب مساوات

$$-5 \times 10^{-6} = \frac{\rho_L}{2\pi \times 0.003}$$

سے  $\rho_L = -94.26 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$  حاصل ہوتا ہے۔ یوں اندرونی تار کے ایک میٹر لمبائی پر 94.26 nC چارج پایا جائے گا جس سے اس کی سطحی کثافت

$$\rho_{S1} = \frac{-0.09426 \times 10^{-9}}{2\pi \times 0.001 \times 1} = -15 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔ بیرونی تار کے ایک میٹر فاصلے پر 94.26 nC چارج پایا جائے گا جس سے یہاں

$$\rho_{S2} = \frac{94.26 \times 10^{-9}}{2\pi \times 0.005 \times 1} = 3 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

876

877

## 3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

اگر چارج بردار ہموار لامحدود سطح سے برابر فاصلے پر کسی بھی مقام سے دیکھا جائے تو صورت حال بالکل یکساں معلوم ہوگا۔ کسی بھی نقطے کے ایک جانب چارجوں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو چارج بردار سطح کے متوازی ہو کو ختم کرتا ہے۔ ان حقائق سے ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ ایسی سطح کا برقی میدان سطح کی عمودی سمت میں ہوگا اور سطح سے یکساں فاصلے پر برقی میدان کی حتمی قیمت برابر ہو گی۔ صفحہ 52 پر ایسی لامحدود سطح شکل 2.5 میں دکھائی گئی ہے۔

882

اس شکل میں چارج بردار سطح کے متوازی دونوں اطراف برابر فاصلے پر تصوراتی لامحدود سطح تصور کرتے ہیں۔ ان سطحوں پر آمنے سامنے رقبہ  $S$  لیتے ہوئے انہیں عمودی سطحوں سے بند کرتے ہوئے حجم گھیرتے ہیں۔ سامنے سطح پر  $Da_x$  جبکہ پیچھے سطح پر  $-Da_x$  ہوگا جبکہ ان رقبوں کو  $Sa_x$  اور  $-Sa_x$  لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ برقی میدان سطحوں کے عمودی ہے لہذا دونوں سطحوں کو ملانے والے عمودی سطحوں میں سے کوئی برقی بہاؤ نہیں ہوگا۔ یوں حجم سے برقی بہاؤ صرف ان آمنے سامنے رقبوں سے یعنی

$$\begin{aligned}\psi_{\text{سامنے}} &= Da_x \cdot Sa_x = SD \\ \psi_{\text{پچھے}} &= (-Da_x) \cdot (-Sa_x) = SD\end{aligned}$$

جو گھیرے گئی چارج کے برابر ہوگا۔ اگر چارج بردار سطح پر  $\rho_S$  ہو تب حجم میں  $\rho_S S$  چارج پایا جائے گا۔ یوں

$$\psi_{\text{سامنے}} + \psi_{\text{پچھے}} = 2DS = \rho_S S$$

لکھتے ہوئے

$$D = \frac{\rho_S}{2}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$(3.20) \quad D = \frac{\rho_S}{2} a_N$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں  $a_N$  سے مراد سطح کی اکائی سمتیہ ہے۔ یوں

$$(3.21) \quad E = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} a_N$$

883

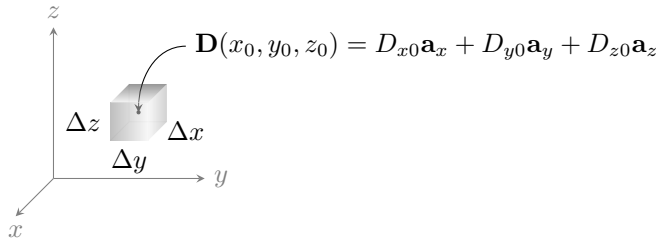
حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 2.42 کے حصول کا موجودہ طریقہ زیادہ آسان ہے۔

884

## 3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق

سی محدود کے نقطہ  $N(x_0, y_0, z_0)$  پر چھوٹا مستطیلی ڈبہ دکھایا گیا ہے جس کے اطراف  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  ہیں۔ یہ ڈبہ برقی میدان  $D = D_x a_x + D_y a_y + D_z a_z$  میں ہے۔ اس چھوٹی ڈبہ پر گاؤس کے قانون

$$(3.22) \quad \oint_S D \cdot dS = Q = \int_h \rho_h dh$$



شکل 3.4: انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق

کا اطلاق کرتے ہیں۔ ڈبئیہ کے چھ اطراف ہیں۔ یوں مندرجہ بالا تکملہ کے بائیں بازو کو

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پچھے}} + \int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} + \int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} \int_{\text{سامنے}} &\doteq \mathbf{D}_{\text{سامنے}} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\text{سامنے}} \\ &\doteq (D_x \mathbf{a}_x + D_y \mathbf{a}_y + D_z \mathbf{a}_z)_{\text{سامنے}} \cdot \Delta y \Delta z \mathbf{a}_x \\ &\doteq D_{x, \text{سامنے}} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

کے برابر ہے۔

ہمیں  $D$  کی قیمت ڈبئیہ کے وسط میں معلوم ہے۔ **ٹیلر تسلسل**<sup>12</sup> کے مطابق کسی بھی تفاعل جس کی قیمت نقطہ  $a$  پر معلوم ہو کو اس نقطے کے قریبی نقطوں پر

$$f(x+a) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \dots$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ڈبئیہ کے وسط میں نقطہ  $N(x_0, y_0, z_0)$  پر

$$\mathbf{D}(x_0, y_0, z_0) = D_{x0} \mathbf{a}_x + D_{y0} \mathbf{a}_y + D_{z0} \mathbf{a}_z$$

کی قیمت سے وسط سے  $\frac{\Delta x}{2}$  فاصلے پر ڈبئیہ کے سامنے سطح پر  $D_x$  ٹیلر تسلسل سے یوں حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} D_{x, \text{سامنے}} &= D_{x0} + \frac{1}{1!} \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\Delta x}{2} \right]^2 \frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2} \dots \\ &\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \end{aligned}$$

جہاں دوسرے قدم پر تسلسل کے صرف پہلے دو اجزاء لئے گئے ہیں۔ تفاعل کے ایک سے زیادہ متغیرات  $x, y$  اور  $z$  ہیں لہذا تسلسل میں جزوی تفرق<sup>13</sup> کا استعمال کیا گیا۔

یوں

$$\int_{\text{سامنے}} \doteq \left( D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔

بند سطح کی سمت باہر جانب ہوتی ہے لہذا پچھلی سطح  $\Delta y \Delta z a_x$  ہے اور یوں ڈبئیہ کی پچھلی سطح کے لئے

$$\begin{aligned} \int_{\text{پچھے}} \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{S} &= (D_x a_x + D_y a_y + D_z a_z) \cdot (-\Delta y \Delta z a_x) \\ &= -D_x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں وسط سے  $-\frac{\Delta x}{2}$  فاصلے پر ڈبئیہ کی پچھلی سطح پر  $D_x$  ٹیلر تسلسل سے

$$D_{x, \text{پچھے}} = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$\int_{\text{پچھے}} \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{S} = - \left( D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

اور

$$\begin{aligned} \int_{\text{سامنے}} \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{S} &= \left( D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z - \left( D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z \\ &= \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی عمل کو دہراتے ہوئے بائیں اور دائیں سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{دائیں}} \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{S} = \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

اور اوپر، نیچے سطحوں کے لئے

$$\int_{\text{نیچے}} \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{S} = \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح

$$(3.23) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر انتہائی چھوٹی حجم  $\Delta h$  میں چارج تقریباً

$$(3.24) \quad Q = \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta h$$

کے برابر ہے۔ حجم کی جسامت جتنی کم کی جائے جواب اتنا زیادہ درست ہو گا۔ اگلے حصے میں حجم کو کم کرتے کرتے نقطہ نما بنادیا جائے گا۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات مکمل طور پر صحیح جواب مہیا کرے گا۔

891

مثال 3.2: اگر  $D = 2xa_x + 3ya_y + 5a_z$  C/m<sup>2</sup> ہو تب کارتیسی محد کے مرکز پر  $10^{-9}$  m<sup>3</sup> کے انتہائی چھوٹی حجم میں چارج حاصل کریں۔

حل:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2 + 3 + 0$$

893

سے اس حجم میں  $5 \times 10^{-9} = 5 \text{ nC}$  چارج پایا جائے گا۔

894

### 3.8 پھیلاؤ

895

مساوات 3.23 میں حجم کو اتنا کم کرتے ہوئے کہ اس کو صفر تصور کرنا ممکن ہو

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S D \cdot dS}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta h}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چارج فی حجم کو حجمی کثافت کہتے ہیں۔ یوں مساوات کا دایاں بازو نقطے پر حجمی کثافت  $\rho_h$  دیتا ہے۔ اس طرح اس مساوات سے دو مساوات حاصل کئے جاسکتے ہیں یعنی

$$(3.25) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_h$$

اور

$$(3.26) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S D \cdot dS}{\Delta h}$$

مساوات 3.25 میکس ویل<sup>14</sup> کی پہلی مساوات ہے جبکہ مساوات 3.26 سمتیہ  $D$  کا پھیلاؤ<sup>16</sup> بیان کرتا ہے۔ اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاؤ کی تعریف جبکہ اس کا بائیں بازو پھیلاؤ حاصل کرنے کا طریقہ دیتا ہے۔ یوں کارتیسی محد میں

$$(3.27) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \text{کارتیسی محد میں پھیلاؤ کی مساوات}$$

896

سے سمتیہ  $D$  کا پھیلاؤ حاصل کیا جاتا ہے۔

<sup>14</sup>Maxwell equation

<sup>15</sup>جناب جیمس کلارک میکس ویل (1831-1879) کے مساوات میکس ویل مساوات کہلاتے ہیں۔

<sup>16</sup>divergence

انجینئرنگ کے شعبے میں ایسے کئی مسئلے پائے جاتے ہیں جن میں چھوٹی سی حجم کو گھیرنے والے بند سطح پر کسی سمتیہ  $K$  کا  $\oint_S K \cdot dS$  درکار ہو۔ گزشتہ حصے میں سمتیہ  $D$  کے لئے ایسا ہی کیا گیا۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ایسا کرتے ہوئے  $D$  کی جگہ  $K$  لکھا جاسکتا ہے جس سے

$$(3.28) \quad \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S K \cdot dS}{\Delta h}$$

حاصل ہوتا۔ سمتیہ  $K$  پانی کا بہاؤ، ایٹموں کی رفتار یا سیلیکان کی پتری میں درجہ حرارت ہو سکتا ہے۔ ہم  $K$  کو سمتی بہاؤ کی کثافت تصور کریں گے۔ مندرجہ بالا مساوات  $K$  کا پھیلاؤ بیان کرتا ہے۔ پھیلاؤ کے عمل سے مراد مساوات کے بائیں بازو کا عمل ہے جبکہ مساوات کا دایاں بازو اس کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے تحت <sup>898</sup>

کسی بھی سمتی کثافتی بہاؤ کے پھیلاؤ سے مراد کسی چھوٹی حجم کو صفر کرتے ہوئے اس سے خارج کل بہاؤ فی اکائی حجم ہے۔

یہ ضروری ہے کہ آپ کو پھیلاؤ کی تعریف کی سمجھ ہو۔ یاد رہے کہ پھیلاؤ کا عمل سمتیہ پر کیا جاتا ہے جبکہ اس سے حاصل جواب مقداری ہوتا ہے۔ کسی نقطے پر چھوٹی حجم سے باہر جانب کل بہاؤ فی چھوٹی حجم کو پھیلاؤ کہتے ہیں۔ پھیلاؤ کی کوئی سمت نہیں ہوتی۔ پھیلاؤ کی تعریف جانتے ہوئے کئی مرتبہ بغیر قلم اٹھائے جواب حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اسی نوعیت کے چند مسئلوں پر اب غور کرتے ہیں۔

پانی سے بھری بالٹی میں پانی میں ڈوبے کسی بھی نقطے پر پانی کی رفتار کا پھیلاؤ صفر ہو گا چونکہ اس نقطے سے نہ پانی باہر نکل رہا ہے اور نہ ہی اس میں داخل ہو رہا ہے۔ اسی طرح دریا میں پانی میں ڈھوبے نقطے پر بھی پانی کی رفتار کا پھیلاؤ صفر ہو گا چونکہ ایسے نقطے سے جتنا پانی نکلتا ہے، اتنا ہی پانی اس میں داخل ہوتا ہے۔ البتہ اگر بھری بالٹی کے تہہ میں سوراخ کر دیا جائے تو جب تک نقطہ پانی میں ڈھوبہ رہا ہے اس وقت تک یہاں پھیلاؤ صفر رہے گا البتہ جیسے ہی نقطہ پانی سے نمودار ہونے لگے یہاں مثبت پھیلاؤ پایا جائے گا اور جب نقطہ پانی سے مکمل طور پر باہر آجائے تب ایک بار پھر یہاں پھیلاؤ صفر ہو جائے گا۔ جتنی دیر نقطہ پانی کی سطح سے باہر نمودار ہو رہا ہوتا ہے اتنی دیر اس نقطے سے پانی کی انخلاء پائی جاتی ہے جس کی وجہ سے یہاں پھیلاؤ پایا جاتا ہے۔

ایک اور دلچسپ مثال سائیکل کے ٹائر میں ہوا کی ہے۔ اگر ٹائر پمپچر ہو جائے اور اس سے ہوا نکلتی شروع ہو جائے تو ٹائر میں کسی بھی نقطے پر سمتی رفتار کا پھیلاؤ پایا جائے گا چونکہ کسی بھی نقطے پر دیکھا جائے تو یہاں سے ہوا پھلتے ہوئے خارج ہو گا۔ یوں مثبت پھیلاؤ سے مراد نقطے سے انخلاء جبکہ منفی پھیلاؤ سے مراد نقطے میں داخل ہونا ہے۔

ریاضیاتی عمل کو بیان کرنے کے لئے عموماً علامت استعمال کی جاتی ہے۔ یوں جمع کے لئے  $+$ ، ضرب کے لئے  $\times$  اور تکملہ کے لئے  $\int$  استعمال کئے جاتے ہیں۔ انہیں ایک نئی علامت جسے نیپلا <sup>17</sup> کہتے ہیں اور  $\nabla$  سے ظاہر کرتے ہیں سیکھیں۔ نیپلا یونانی حروف تہجی کا حرف ہے۔ تصور کریں کہ

$$(3.29) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z$$

لکھا جاتا ہے جہاں مقداری متغیرہ  $f$  کے سامنے لکھنے سے مراد

$$(3.30) \quad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y + \frac{\partial f}{\partial z} a_z$$

جبکہ سمتیہ  $K$  کے ساتھ نقطہ ضرب سے مراد

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot K &= \left( \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z \right) \cdot (K_x a_x + K_y a_y + K_z a_z) \\ &= \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} \end{aligned}$$

لیا جاتا ہے۔ یہ علامت انجنیئرنگ کے شعبے میں انتہائی مقبول ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کو  $\nabla \cdot \mathbf{D}$  لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(3.32) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

کے برابر ہے۔ پھیلاؤ کے عمل کو ہم اسی علامت سے ظاہر کریں گے۔ مساوات 3.25 یعنی میکس ویل کی پہلی مساوات اب یوں لکھی جاسکتی ہے۔

$$(3.33) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h \quad \text{میکس ویل کی پہلی مساوات}$$

911 میکس ویل کی پہلی مساوات درحقیقت گاؤس کے قانون کی تفریق<sup>18</sup> شکل ہے۔ اسی طرح گاؤس کا قانون میکس ویل مساوات کی مکمل<sup>19</sup> شکل ہے۔

912 مساوات 3.30 کے طرز پر مساوات صفحہ 102 پر دیا گیا ہے۔

913 3.9 نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات

حصہ 3.7 میں کارتیسی محدود استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کے اطلاق سے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی گئی۔ اس حصے میں نلکی محدود استعمال کرتے ہوئے شکل میں دکھائے چھوٹی حجم کو استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کی مساوات حاصل کی جائے گی۔ شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{سامنے}} &= -\Delta\rho\Delta z a_\phi \\ \Delta S_{\text{پچھے}} &= +\Delta\rho\Delta z a_\phi \\ \Delta S_{\text{بائیں}} &= -\left(\rho - \frac{\Delta\rho}{2}\right) \Delta\phi\Delta z a_\rho \\ \Delta S_{\text{دائیں}} &= +\left(\rho + \frac{\Delta\rho}{2}\right) \Delta\phi\Delta z a_\rho \\ \Delta S_{\text{اوپر}} &= +\rho\Delta\phi\Delta\rho a_z \\ \Delta S_{\text{نیچے}} &= -\rho\Delta\phi\Delta\rho a_z \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ کارتیسی محدود میں آسنے سامنے رقبے برابر تھے۔ نلکی محدود میں بائیں اور دائیں رقبے برابر نہیں ہیں۔ اس فرق کی بنا پر نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات قدر مختلف حاصل ہوگی۔ چھوٹی حجم کے وسط میں

$$(3.34) \quad \mathbf{D} = D_{\rho 0} \mathbf{a}_\rho + D_{\phi 0} \mathbf{a}_\phi + D_{z0} \mathbf{a}_z$$



کے برابر ہے جس سے ٹیلر تسلسل کی مدد سے

$$D_{\text{سامنے}} = \left( D_{\phi 0} - \frac{\Delta \phi}{2} \frac{\partial D_{\phi}}{\partial \phi} \right) \mathbf{a}_{\phi}$$

$$D_{\text{پچھے}} = \left( D_{\phi 0} + \frac{\Delta \phi}{2} \frac{\partial D_{\phi}}{\partial \phi} \right) \mathbf{a}_{\phi}$$

$$D_{\text{بائیں}} = \left( D_{\rho 0} - \frac{\Delta \rho}{2} \frac{\partial D_{\rho}}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_{\rho}$$

$$D_{\text{دائیں}} = \left( D_{\rho 0} + \frac{\Delta \rho}{2} \frac{\partial D_{\rho}}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_{\rho}$$

$$D_{\text{اوپر}} = \left( D_{z 0} + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \mathbf{a}_z$$

$$D_{\text{نیچے}} = \left( D_{z 0} - \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \mathbf{a}_z$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں

$$\int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پچھے}} = \frac{\partial D_{\phi}}{\partial \phi} \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$\int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} = \left( D_{\rho 0} + \rho \frac{\partial D_{\rho}}{\partial \rho} \right) \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} = \frac{\partial(\rho D_{\rho})}{\partial \rho} \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا لکھتے وقت یاد رہے کہ نقطہ  $N(\rho_0, \phi_0, z_0)$  پر

$$\left. \frac{\partial(\rho D_{\rho})}{\partial \rho} \right|_N = D_{\rho} + \rho \frac{\partial D_{\rho}}{\partial \rho} \Big|_N = D_{\rho 0} + \rho \frac{\partial D_{\rho}}{\partial \rho}$$

کے برابر ہے۔ اسی طرح

$$\int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}} = \rho \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان تمام کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \left( \frac{\partial(\rho D_{\rho})}{\partial \rho} + \frac{\partial D_{\phi}}{\partial \phi} + \rho \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$$

ماتا ہے۔ چھوٹی حجم  $\Delta h = \rho \Delta \rho \Delta \phi \Delta z$  کے استعمال سے

$$(3.35) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}}{\Delta h}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 3.28 کا دایاں بازو پھیلاؤ کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 3.35 نکلی محدود میں پھیلاؤ دیتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نکلی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات سادہ شکل نہیں رکھتی۔ مساوات 3.29 میں دی گئی  $\nabla$  کو استعمال کرتے ہوئے نکلی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات ہر گز حاصل نہیں کی جاسکتی ہے۔ اس کے باوجود نکلی محدود میں بھی پھیلاؤ کے عمل کو  $\nabla \cdot \mathbf{D}$  سے ہی ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں اس سے مراد

$$(3.36) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

لیا جاتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات نکلی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات ہے جو کسی بھی سمتیہ کے لئے درست ہے۔ یوں سمتیہ  $\mathbf{K}$  کے لئے اسے یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$(3.37) \quad \nabla \cdot \mathbf{K} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho K_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial K_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial K_z}{\partial z}$$

### 3.10 پھیلاؤ کی عمومی مساوات

کارٹیزی محدود میں چھوٹی حجم کے آمنے سامنے اطراف کا رقبہ برابر ہوتا ہے جس سے پھیلاؤ کی مساوات آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔ نکلی محدود میں چھوٹی حجم کے رقبہ سمت کے آمنے سامنے رقبہ مختلف ہوتے ہیں جن کا خصوصی خیال رکھتے ہوئے پھیلاؤ کی قدر مشکل مساوات گزشتہ حصے میں حاصل کی گئی۔ اس حصے میں پھیلاؤ کی مساوات حاصل کرنے کا ایسا طریقہ دیکھتے ہیں جسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ کی عمومی مساوات حاصل کی جاسکتی ہے جو تمام محدود کے لئے کارآمد ہے۔

کارٹیزی محدود کے متغیرات  $(x, y, z)$  جبکہ نکلی محدود کے  $(\rho, \phi, z)$  اور کروئی محدود کے متغیرات  $(r, \theta, \phi)$  ہیں۔ اس حصے میں عمومی محدود<sup>20</sup> استعمال کیا جائے گا جس کے متغیرات  $(u, v, w)$  اور تین عمودی اکائی سمتیت  $(a_u, a_v, a_w)$  ہیں۔ عمومی محدود کسی بھی محدود کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ یوں اگر اسے کارٹیزی محدود کے لئے استعمال کیا جا رہا ہو تب  $(u, v, w)$  سے مراد  $(x, y, z)$  ہوگا۔

شکل میں عمومی محدود استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم دکھائی گئی ہے۔ عمومی محدود کے تین اطراف

$$\begin{aligned} dL_1 &= k_1 du \\ dL_2 &= k_2 dv \\ dL_3 &= k_3 dw \end{aligned}$$

ہیں۔ کارٹیزی محدود میں  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$  کے برابر لیا جائے گا اور یوں  $dL_1 = dx$  کے برابر ہوگا۔ نکلی محدود میں

$$(3.38) \quad \begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= \rho \\ k_3 &= 1 \end{aligned}$$

جبکہ کروئی محدود ہیں

$$(3.39) \quad \begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= r \\ k_3 &= r \sin \theta \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔ اسی طرح تین سمتی رقبے

$$\begin{aligned} dL_2 dL_3 a_u \\ dL_1 dL_3 a_v \\ dL_1 dL_2 a_w \end{aligned}$$

ہوں گے۔

گزشتہ حصوں میں چھوٹی حجم کے آمنے سامنے سطحوں پر بہاؤ حاصل کرتے وقت پہلے ان سطحوں پر  $D$  کی قیمت اور ان سطحوں کے رقبے حاصل کئے گئے جن کے نقطہ ضرب سے بہاؤ حاصل کیا گیا۔ یہاں چھوٹی حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کی سمت میں بہاؤ سے ٹیلر تسلسل کے استعمال سے حجم کے سطحوں پر بہاؤ حاصل کیا جائے گا۔ حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کے رخ میں سطحوں پر بہاؤ

$$\begin{aligned} dL_2 dL_3 D_{u0} \\ dL_1 dL_3 D_{v0} \\ dL_1 dL_2 D_{w0} \end{aligned}$$

ہے۔ ٹیلر تسلسل سے سامنے اور پیچھے سطحوں پر ان مساوات سے

$$\begin{aligned} dL_2 dL_3 D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (dL_2 dL_3 D_u) du & \text{ سامنے} \\ -dL_2 dL_3 D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (dL_2 dL_3 D_u) du & \text{ پیچھے} \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} k_2 k_3 dv dw D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) du dv dw & \text{ سامنے} \\ -k_2 k_3 dv dw D_{u0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) du dv dw & \text{ پیچھے} \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے دونوں سطحوں پر بہاؤ کا مجموعہ

$$\frac{\partial}{\partial u} (k_2 k_3 D_u) du dv dw$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح بائیں اور دائیں سطحوں پر کل

$$\frac{\partial}{\partial v} (k_1 k_3 D_v) du dv dw$$

اور اوپر، نیچے کا مجموعہ

$$\frac{\partial}{\partial w} (k_1 k_2 D_w) du dv dw$$

حاصل ہوتا ہے۔ چھوٹی حجم

$$\begin{aligned} dh &= dL_1 dL_2 dL_3 \\ &= k_1 k_2 k_3 du dv dw \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے گاؤس کے قانون سے

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \left[ \frac{\partial}{\partial u}(k_2 k_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v}(k_1 k_3 D_v) + \frac{\partial}{\partial w}(k_1 k_2 D_w) \right] du dv dw$$

یعنی

$$\frac{1}{k_1 k_2 k_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u}(k_2 k_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v}(k_1 k_3 D_v) + \frac{\partial}{\partial w}(k_1 k_2 D_w) \right] = \lim_{dh \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{dh}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاؤ کی تعریف ہے۔ یوں پھیلاؤ کی عمومی مساوات

$$(3.40) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{k_1 k_2 k_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u}(k_2 k_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v}(k_1 k_3 D_v) + \frac{\partial}{\partial w}(k_1 k_2 D_w) \right]$$

حاصل ہوتی ہے۔

924

مثال 3.3: مساوات 3.40 سے نکلی اور کروی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات حاصل کریں۔

925

حل:  $u, v, w$  کی جگہ  $\rho, \phi, z$  اور مساوات 3.38 کے استعمال سے نکلی محدود میں پھیلاؤ

$$(3.41) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{\partial}{\partial \phi}(D_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho D_z) \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}(D_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(D_z) \end{aligned}$$

نکلی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح  $u, v, w$  کی جگہ  $r, \theta, \phi$  اور مساوات 3.39 کے استعمال سے کروی محدود میں پھیلاؤ

$$(3.42) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin \theta D_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin \theta D_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi}(r D_\phi) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(D_\phi) \end{aligned}$$

کروی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات

حاصل ہوتا ہے۔

926

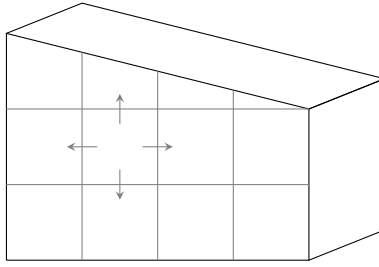
927

### 3.11 مسئلہ پھیلاؤ

928

صفحہ 77 پر مساوات 3.22 میں

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$



شکل 3.5: بند سطح پر سمتیہ کا عمودی حصے کا تکملہ بند حجم میں سمتیہ کے تکملہ کے برابر ہوتا ہے۔

لکھتے ہوئے

$$(3.43) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_h \nabla \cdot \mathbf{D} dh$$

لکھا جاسکتا ہے جو مسئلہ پھیلاؤ<sup>21</sup> بیان کرتا ہے۔ اگرچہ ہم نے اس مسئلے کو برقی بہاؤ  $\mathbf{D}$  کے لئے حاصل کیا حقیقت میں یہ ایک عمومی نتیجہ ہے جو کسی بھی تین درجی تکملہ کو دو درجی تکملہ اور دو درجی تکملہ کو تین درجی تکملہ میں تبدیل کرتا ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے

کسی بھی بند سطح پر سمتیہ کے عمودی حصے کا تکملہ بند حجم میں اسی سمتیہ کے پھیلاؤ کے تکملہ کے برابر ہوتا ہے۔

مسئلہ پھیلاؤ کی سمجھ شکل 3.5 کی مدد سے باآسانی ممکن ہے۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے کہ کسی بھی چھوٹی حجم سے بہاؤ قریبی چھوٹی حجم کی منفی بہاؤ ثابت ہوتی ہے لہذا دونوں کا مجموعی بہاؤ حاصل کرتے ہوئے ان کے درمیانی دیوار پر بہاؤ رد کیا جائے گا۔ یہی سلسلہ تمام حجم پر لاگو کرتے ہوئے ظاہر ہے کہ پوری حجم سے بہاؤ کے حصول میں اندرونی تمام دیواروں پر بہاؤ کا کوئی کردار نہیں ہوتا اور صرف بیرونی سطح پر بہاؤ سے ہی جواب حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 3.4: نقطہ چارج کے  $\mathbf{D}$  سے پھیلاؤ کی مساوات سے مختلف مقامات پر کثافت چارج  $\rho_h$  حاصل کریں۔

حل: کروی محدود کے مرکز پر نقطہ چارج کا

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

ہوتا ہے۔ کروی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات کے تحت

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (D_\phi)$$

کے برابر ہے۔ چونکہ  $D_\theta$  اور  $D_\phi$  صفر کے برابر ہیں لہذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{Q}{4\pi r^2}) = \begin{cases} 0 & r > 0 \\ \infty & r = 0 \end{cases}$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تحت مرکز کے علاوہ تمام خلاء میں کوئی چارج نہیں پایا جاتا۔ مرکز پر لا محدود کثافت کا چارج پایا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ نقطہ چارج سے مراد ایسا چارج ہے جس کا حجم صفر ہو۔ ایسی صورت میں اس نقطے پر نقطہ چارج کی کثافت لا محدود ہی ہوگی۔

## باب 16

## سوالات

گائوس

سوال 16.1: محدود کے مرکز پر  $20 \text{ nC}$  چارج پایا جاتا ہے۔ اس کے علاوہ  $z = 0$  سطح پر  $5 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$  کے لکیری چارج  $y = -1$  اور  $y = -3$  پر پائے جاتے ہیں۔ نقطہ  $(0, -2, 0)$  پر  $D$  حاصل کریں۔  $(0, 1, 0)$  پر رداس  $r = 1.5$  کے کرہ کی سطح پر کل برقی بہا حاصل کریں۔

جوابات:  $20 \text{ nC}$  ،  $-\frac{5}{4\pi} a_y \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$

سوال 16.2: رداس  $\rho = 10 \text{ cm}$  کے نکلی سطح کے  $z > 0$  حصے پر سطحی کثافت چارج  $\rho_s = 2ze^{-z^2} \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$  پائی جاتی ہے۔ سطح پر کل چارج دریافت کریں۔ اس سطح سے  $z = 1$  تا  $z = 2$  زاویہ  $\phi = 45^\circ$  تا  $\phi = 75^\circ$  کتنی برقی بہا خارج ہوتی ہے۔

جوابات:  $18.3 \text{ pC}$  ،  $0.2\pi \text{ nC}$

سوال 16.3: رداس  $\rho = 2$  ،  $\rho = 4$  اور  $\rho = 5$  پر بالترتیب سطحی کثافت چارج  $-3 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$  ،  $1.5 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$  اور  $0.25 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$  پائی جاتی ہے۔  $z_{\text{total}} = 3$  تا  $z = 6$  پر رداس  $\rho = 4.5$  نکلی سطح سے کل کتنی برقی بہا ہوتی ہے۔  $z = 3$  تا  $z = 6$  پر رداس  $\rho = 6$  نکلی سطح سے کل کتنی برقی بہا ہوتی ہے۔ نقطہ  $(6, 8, 2)$  پر  $D$  حاصل کریں۔

$D = 0.09 a_x + 0.15 a_y \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$  ،  $28.27 \text{ nC}$  ،  $0 \text{ C}$

سوال 16.4: بند خطہ  $0 \leq x \leq 2$  ،  $0 \leq y \leq 2$  ،  $0 \leq z \leq 2$  میں  $D = xy^2 a_x + xyz a_y + z(x+y) a_z \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$  ہے۔ اس خطے سے کل برقی بہا کتنی ہے۔

$28 \mu\text{C}$

سوال 16.5: محدود  $z$  پر لکیری کثافت چارج  $50 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$  پایا جاتا ہے۔ محدود کے مرکز پر رداس  $r = 5 \text{ m}$  کی کرہ سے خارج کل برقی بہا حاصل کریں۔ اگر کرہ کے مرکز کو نقطہ  $(0, 2, 2)$  منتقل کیا جائے تب جواب کیا ہوگا۔

جوابات:  $458 \text{ nC}$  ،  $500 \text{ nC}$

سوال 16.6: رداس  $r = 1.1 \text{ m}$  کی کرہ کے اندر حجمی کثافت چارج  $\rho_h = 30e^{-r^3} \text{ nC/m}^3$  پائی جاتی ہے۔ کرہ کے اندر کل چارج حاصل کریں۔ گاؤس کے قانون سے کرہ کی سطح پر برقی بہاؤ کی کثافت حاصل کریں۔

3812

جوابات:  $92.46 \text{ nC}$  ،  $6.08 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$

3813

سوال 16.7: ٹکلی محدود میں کثافت برقی بہاؤ  $D = \frac{\rho a_\rho + z a_z}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$  دیا گیا ہے۔ لامحدود لمبائی کی ٹکلی جس کا رداس  $\rho = 5$  ہے سے کل کتنی برقی بہاؤ خارج ہوگی۔

3815

جواب:  $1 \text{ C}$

3816

سوال 16.8: مرکز پر رداس 5 ، 9 اور 14 کے کرہ پر بالترتیب سطحی کثافت چارج  $20 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$  ،  $-8 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$  اور  $\rho_s \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$  پائے جاتے ہیں۔ نقطہ  $(20, 0, 0)$  پر صفر  $D$  حاصل کرنے کے لئے  $\rho_s$  دریافت کریں۔ تمام خطوں میں  $D$  کی مساوات حاصل کریں۔

3818

جوابات:  $0.7551 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$  ،  $r < 5$  پر  $D_r = 0$  ہے،  $5 < r < 9$  پر  $D_r = \frac{500}{r^2} \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$  ہے،  $9 < r < 14$  پر  $D_r = -\frac{148}{r^2} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$  ہے جبکہ  $r > 14$  پر  $D_r = 0$  ہے۔

3820

سوال 16.9: لامحدود سطح  $z = 4$  پر  $\rho_s = 2 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$  سطحی کثافت پائی جاتی ہے۔ محدود کے مرکز پر  $r = 5$  رداس کا کرہ رکھا جاتا ہے۔ کرہ کتنے چارج کو گھیرے گا۔ کرے سے کتنی برقی بہاؤ خارج ہوگی۔

3822

جوابات:  $56.549 \text{ nC}$  ،  $56.549 \text{ nC}$

3823

سوال 16.10: محدود کے مرکز پر  $r = 5$  رداس کا کرہ جبکہ  $z = 4$  پر لامحدود سطح پائی جاتی ہے۔ لامحدود سطح کے بالائی جانب کرہ کے اندر حجمی کثافت چارج  $\rho_h = 25 \text{ nC/m}^3$  پائی جاتی ہے۔ کرہ سے کل خارج برقی بہاؤ حاصل کریں۔

3825

جواب:  $1.1812 \mu\text{C}$

3826

سوال 16.11: خطہ  $\rho < 3 \text{ mm}$  میں حجمی کثافت چارج  $\rho_h = \frac{\rho^2}{1000} \text{ C/m}^3$  جبکہ خطہ  $3 \text{ mm} < \rho < 5 \text{ mm}$  میں  $\rho_h = 2 \mu\text{C/m}^3$  پائی جاتی ہے۔ موزوں گاؤسی سطحیں چنتے ہوئے رداس  $\rho = 0$  ،  $\rho = 2 \text{ mm}$  ،  $\rho = 4 \text{ mm}$  اور  $6 \text{ mm}$  پر  $D_\rho$  حاصل کریں۔

3828

جوابات:  $0 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$  ،  $2 \frac{\text{pC}}{\text{m}^2}$  ،  $1.756 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$  ،  $2.67 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$

3829

سوال 16.12: خطہ  $r < 3 \text{ mm}$  میں  $\rho_h = 22 \mu\text{C/m}^3$  جبکہ  $5 \text{ mm} < r < 7 \text{ mm}$  خطے میں  $\rho_h = \frac{55}{r} \text{ nC/m}^3$  حجمی کثافت چارج پایا جاتا ہے۔ موزوں گاؤسی سطحیں چنتے ہوئے  $r = 5 \text{ mm}$  اور  $r = 10 \text{ mm}$  پر  $D_r$  دریافت کریں۔

3831

جوابات:  $22 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$  ،  $8.58 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$

3832

سوال 16.13: تفاعل  $D = 2x^2 a_x + (x + z)a_y + za_z$  مکعب  $0 < x, y, z < a$  میں پایا جاتا ہے۔ تفاعل کی پھیلاؤ  $\nabla \cdot D$  حاصل کریں۔ مکعب کے تمام سطحوں پر تفاعل کے سطحی مکمل کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے مکعب میں کل چارج حاصل کریں۔ یہی جواب مسئلہ پھیلاؤ کی مدد سے حاصل کریں۔

3835

جوابات:  $4x + 1$  ،  $\nabla \cdot D = 4x + 1$  ،  $2a^4 + a^3$

سوال 16.14: مکعب  $2 < x, y, z < 5$  میں  $G = \frac{5x^2y}{z} a_y$  ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ کے دونوں اطراف کو مکعب کے لئے حل کریں۔

3836

سوال 16.15: مندرجہ ذیل تفاعل کے پھیلاؤ حاصل کرتے ہوئے پھیلاؤ کی قیمت نقطہ  $N(3, 4, 6)$  پر حاصل کریں۔

$$D = 10(xy - \frac{y}{\sqrt{z}})a_x + y^2(x + 2)a_y - (6z^2 + 3x^2y)a_z$$

$$D = 8\rho \sin \phi a_\rho + 4\rho \cos \phi a_\phi + z^2 a_z$$

$$D = 2r \sin \theta \cos \phi a_r + r \cos \theta \cos \phi a_\theta + r \cos \phi a_\phi$$

جوابات:  $2.0486$  ،  $9.6$  ،  $80$  ،  $6 \sin \theta \sin \phi + \frac{\cos 2\theta \sin \phi}{\sin \theta} - \frac{\sin \phi}{\sin \theta}$  ،  $12 \sin \phi$  ،  $10y + 2y(x + 2) - 12z$

سوال 16.16: مندرجہ ذیل تفاعل کی پھیلاؤ نقطہ  $N(3, 5 - 2)$  پر حاصل کریں۔

$$D = (x + yz)(3xa_x - 5za_y + 2y^2za_z)$$

$$D = \frac{xa_x + ya_y + za_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$D = 0.24a_x - 0.55a_y + 0.12a_z$$

$$D = x^2yz^3(2a_x - 3a_y + a_z)$$

جوابات:  $276$  ،  $0$  ،  $0.324$  ،  $-882$

سوال 16.17: مندرجہ ذیل تفاعل کی پھیلاؤ نقطہ  $N(3, 45^\circ, 30^\circ)$  پر حاصل کریں۔

$$D = (2r \sin \theta \cos \phi + \cos \theta)a_r + (r \cos \theta \cos \phi - \sin \theta)a_\theta - r \sin \phi a_\phi$$

$$D = \sin^2 \theta \sin \phi a_r + \sin 2\theta \sin \phi a_\theta + \sin \theta \cos \phi a_\phi$$

$$D = 0.2a_r - 0.15a_\theta + 0.23a_\phi$$

$$D = 0.2r^3 \phi \sin^2 \theta (a_r + a_\theta + a_\phi)$$

جوابات:  $5.043$  ،  $0$  ،  $0.1667$  ،  $4.899$





