برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 2

کولومب کا قانون

2.1 قوت کشش یا دفع

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون[1] سے آپ بخوبی واقف ہوں گے۔ کولومب کا قانون[2] اس سے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔ کائناتی تجاذب کے قانون کو مساوات 2.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

$$F = G\frac{M_1 M_2}{R^2} \tag{2.1}$$

یہ مساوات کمیت M_1 اور کمیت M_2 کے مابین قوت کشش F دیتا ہے جہاں ایک کمیت کے مرکز سے دوسری کمیت کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ قوت کشش دونوں کمیت کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔ دونوں کمیتوں پر قوت کشش کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں کمیتوں کے مرکزوں پر کھینچی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔ M_1 پر قوت کشش کی سمت M_1 کے مرکز سے M_2 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے جبکہ M_2 پر قوت کشش کی سمت M_2 کے مرکز سے M_1 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے۔ تناسب کے جزو مستقل کو G لکھا اور تجاذبی مستقل[3] پکارا جاتا ہے جس کی قیمت تقریباً $6.674 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\,s^2}}$ کے برابر ہے۔

کولومب کا قانون مساوات 2.2 میں بیان کیا گیا ہے۔ یہ مساوات چارج Q_1 اور چارج Q_2 کے مابین قوت کشش یا قوت دفع F دیتا ہے جہاں ایک چارج کے مرکز سے دوسری چارج کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ ان چارجوں کا حجم صفر تصور کیا جاتا ہے۔ یوں اگر چارج کو گیند کی شکل کا تصور کیا جائے تو اس گیند کے رداس کی لمبائی صفر ہو گی۔ ایسے چارج کو نقطہ چارج[4] کہا جاتا ہے۔

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{R^2} \tag{2.2}$$

قوت کشش یا دفع دونوں چارجوں کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور باہمی فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔ دونوں چارجوں پر قوت کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں چارجوں سے گزرتی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔ دو مختلف اقسام کے چارجوں کے مابین قوت کشش پائی جاتی ہے جبکہ دو یکساں

Law of Universal Gravitation[1]
Coulomb's law[2]
gravitational constant[3]
point charge[4]

چارجوں کے مابین قوت دفع پائی جاتی ہے۔مساوات کے جزو مستقل کو $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ لکھا جاتا ہے جہاں ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل[5,6] ہے جس کی قیمت اٹل ہے۔خالی خلاء کے برقی مستقل کی قیمت

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \tag{2.3}$$

ہے جہاں c خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اور μ_0 خالی خلاء کی مقناطیسی مستقل[7] ہے۔یہ دونوں بھی اٹل مستقل ہیں جن کی قیمتیں

$$c = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 3\times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{2.4}$$

$$\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{2.5}$$

ہیں۔یوں مقناطیسی مستقل کی قیمت تقریباً

$$\epsilon_0 = 8.854\times 10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi}10^{-9}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \tag{2.6}$$

کے برابر ہے۔اس کتاب میں $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ بار بار استعمال ہو گا جسے عموماً

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9\times 10^9 \tag{2.7}$$

لیا جائے گا۔ϵ_0 کی اکائی فیراڈ فی میٹر $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ ہے جس کی وضاحت جلد کر دی جائے گی۔

مثال 2.1: زمین کی سطح پر زمین اور ایک کلو گرام کمیت کے مابین $9.8\,\mathrm{N}$ کی قوت کشش پائی جاتی ہے۔زمین کا رداس $6370\,\mathrm{km}$ لیتے ہوئے زمین کی کمیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 2.1 کی مدد سے

$$9.8 = \frac{6.674\times 10^{-11}\times M\times 1}{6\,370\,000\times 6\,370\,000}$$

لکھتے ہوئے زمین کی کمیت $5.959\times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال 2.2: زمین کی مرکز سے تقریباً $42\,000\,\mathrm{km}$ کے فاصلے پر ذرائع ابلاغ کے سیٹلائٹ زمین کے گرد مدار میں گردش کرتے ہیں۔پوری دنیا میں بے تار[8] مواصلاتی نظام انہیں کے مرہون منت ہے۔اس فاصلے پر ایک کلو گرام کی کمیت اور زمین کے مابین قوت کشش کی مقدار حاصل کریں۔

---

[5] permittivity
[6] electric constant
[7] permeability
[8] wireless

حل:

$$F=\frac{6.674\times10^{-11}\times5.959\times10^{24}\times1}{42\,000\,000\times42\,000\,000}=0.225\,\mathrm{N}$$

608

609

610 مثال 2.3: ایک ایک کولومب کے دو مثبت چارجوں کے درمیان ایک میٹر کا فاصلہ ہے۔ان میں قوت دفع حاصل کریں۔

حل: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت مساوات 2.7 سے لیتے ہوئے

$$F=9\times10^9\frac{1\times1}{1\times1}=9\times10^9\,\mathrm{N}$$

611

612 مندرجہ بالا مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چارج کی اکائی (کولومب) انتہائی بڑی مقدار ہے۔

شکل 2.1 میں چارج Q_1 محدد کے مرکز سے سمتی فاصلہ $\mathbf{r_1}$ پر جبکہ چارج Q_2 مرکز سے سمتی فاصلہ $\mathbf{r_2}$ پر دکھائے گئے ہیں۔چارج Q_1 سے چارج Q_2 تک کا سمتی فاصلہ $\mathbf{R_{21}}$ ہے جہاں

$$\boldsymbol{R_{21}}=\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1} \tag{2.8}$$

کے برابر ہے۔سمتیہ $\mathbf{R_{21}}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\mathbf{a_{21}}$ یوں حاصل کیا جاتا ہے

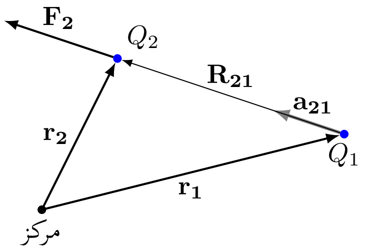
$$\boldsymbol{a_{21}}=\frac{\boldsymbol{R_{21}}}{|\boldsymbol{R_{21}}|}=\frac{\boldsymbol{R_{21}}}{R_{21}}=\frac{\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|} \tag{2.9}$$

چارج Q_2 پر قوت $\mathbf{F_2}$ کی حتمی قیمت مساوات 2.2 سے حاصل کی جا سکتی ہے جبکہ اس کی سمت اکائی سمتیہ $\mathbf{a_{21}}$ کے سمت میں ہو گی۔اس طرح یہ قوت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F_2}&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R_{21}^2}\boldsymbol{a_{21}}\\&=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|^3}\end{aligned} \tag{2.10}$$

لکھا جائے گا۔مساوات 2.10 کولومب کے قانون کی سمتی شکل ہے۔چونکہ دونوں چارجوں پر برابر مگر الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے لہٰذا Q_1 پر قوت $\mathbf{F_1}$ یوں لکھا جائے گا

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F_1}=-\boldsymbol{F_2}&=\frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R_{21}^2}\boldsymbol{a_{21}}\\&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R^2}\boldsymbol{a_{12}}\end{aligned} \tag{2.11}$$



شکل 2.1: دو مثبت چارجوں کے مابین قوت دفع

جہاں دوسری قدم پر $R_{21} = R_{12} = R$ لکھا گیا ہے اور $\boldsymbol{a_{12}} = -\boldsymbol{a_{21}}$ کے برابر ہے۔ دونوں چارج مثبت یا دونوں چارج منفی ہونے کی صورت میں Q_2 پر مساوات 2.10 سے قوت $\mathbf{a_{21}}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔ یوں یکساں چارجوں کے مابین قوت دفع پایا جاتا ہے۔ دو الٹ اقسام کے چارجوں کی صورت میں Q_2 پر قوت $-\mathbf{a_{21}}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔ یوں الٹ اقسام کے چارجوں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے۔

مثال 2.4: شکل 2.1 میں نقطہ $A(3,2,4)$ پر $20\,\mu\text{C}$ کا چارج Q_1 جبکہ نقطہ $B(1,5,9)$ پر $-50\,\mu\text{C}$ کا چارج Q_2 پایا جاتا ہے۔ منفی چارج Q_2 پر سمتی قوت حاصل کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R_{21}} &= (1-3)\boldsymbol{a}_{\text{X}} + (5-2)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + (9-4)\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \\
&= -2\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{Z}} \\
R_{21} &= |\boldsymbol{R_{21}}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 5^2} \\
&= \sqrt{38} \\
&= 6.1644
\end{aligned}
$$

اور یوں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a_{21}} = \frac{\boldsymbol{R_{21}}}{|\boldsymbol{R}_{21}|} &= \frac{-2\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 3\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\text{Z}}}{6.1644} \\
&= -0.324\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 0.487\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 0.811\boldsymbol{a}_{\text{Z}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F_2} &= \frac{36\pi \times 10^9}{4\pi} \frac{\left(-50 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{-6}\right)}{38} \left(-0.324\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 0.487\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 0.811\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right) \\
&= -0.237 \left(-0.324\boldsymbol{a}_{\text{X}} + 0.487\boldsymbol{a}_{\text{y}} + 0.811\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\right) \text{ N}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوت کی سمت $\mathbf{a_{21}}$ کے الٹ سمت میں ہے۔ یوں منفی چارج پر قوت کی سمت مثبت چارج کی جانب ہے یعنی اس پر قوت کشش پایا جاتا ہے۔

کسی بھی چارج پر ایک سے زیادہ چارجوں سے پیدا مجموعی قوت تمام چارجوں سے پیدا علیحدہ علیحدہ قوتوں کا سمتی مجموعہ ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \tag{2.12}$$

اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ کولومب کا قانون خطی[9] ہے۔

2.2 برقی میدان کی شدت

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون میں زمین کی کمیت کو M لکھ کر کمیت m پر قوت F حاصل کی جا سکتی ہے۔ایک کلو گرام کمیت پر اس قوت کی مقدار $\frac{F}{m}$ ہو گی جسے زمین کی کشش[10] یا ثقلی اسراع پکارا اور g لکھا جاتا ہے۔زمین کی سطح پر g کی مقدار تقریباً $9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ کے برابر ہے۔

$$g=\frac{F}{m}=\frac{GM}{R^2} \tag{2.13}$$

کسی بھی کمیت M کے گرد تجاذبی میدان[11] پایا جاتا ہے۔کسی بھی نقطے پر اس تجاذبی میدن کو ناپنے کی خاطر اس نقطے پر پیمائشی کمیت m_p[12] رکھ کر اس پر قوت ناپی جاتی ہے۔مختلف مقامات پر اس طرح قوت ناپ کر ہم تجاذبی میدان کا جائزہ لے سکتے ہیں۔تجاذبی قوت کی مقدار کا دارو مدار پیمائشی کمیت m_p[13] پر بھی منحصر ہے۔مختلف تجاذبی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام تجاذبی میدان جانچتے وقت ایک ہی قیمت کے پیمائشی کمیت استعمال کی جائے۔ماہرین طبیعیات عموماً m_p کو ایک کلو گرام رکھتے ہیں۔یہ ضروری نہیں کہ تجاذبی قوت ناپتے وقت ایک کلو گرام کی پیمائشی کمیت ہی استعمال کی جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت $\mathbf{F}$ کو m_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک کلو گرام پر تجاذبی قوت حاصل کی جا سکتی ہے۔زمین کے قریب ایک کلو گرام کمیت پر قوت کشش کو ثقلی اسراع g پکارا جاتا ہے۔

مثال 2.5: زمین کی سطح پر دو سو گرام پیمائشی کمیت پر $1.96\,\mathrm{N}$ قوت ناپی جاتی ہے۔ثقلی اسراع حاصل کریں۔

حل:

$$g=\frac{1.96}{0.2}=9.8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \tag{2.14}$$

مساوات 2.13 سے ہم

$$\begin{aligned}F&=mg\\ w&=mg\end{aligned} \tag{2.15}$$

---

[9] linear
[10] gravity
[11] gravitational field
[12] m_p لکھتے ہوئے زیرنوشت میں p لفظ پیمائشی کے پ کو ظاہر کرتا ہے، یعنی یہ وہ کمیت ہے جسے قوت کی پیمائش کی خاطر استعمال کیا جا رہا ہے۔
[13] test mass

633 لکھ سکتے ہیں جو زمین کی سطح پر کمیت m پر کشش ثقل F دیتا ہے جسے وزن پکارا اور w لکھا جاتا ہے۔

چارجوں پر بھی اسی طرح غور کیا جاتا ہے۔ کسی بھی چارج Q کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے یعنی برقی میدان کا منبع چارج ہے۔ اس برقی میدان میں چارج پر قوت اثر انداز ہوتا ہے۔ چارج Q کے برقی میدان کی شدت کے پیمائش کی خاطر اس میدان میں مختلف مقامات پر پیمائشی چارج[14] q_p پر قوت $\mathbf{F}$ ناپ کر برقی میدان کا مطالعہ کیا جا سکتا ہے اور اس کا نقشہ بنایا جا سکتا ہے۔ مختلف چارجوں کے برقی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام صورتوں میں ایک ہی قیمت کے پیمائشی چارج استعمال کئے جائیں۔ ماہرین طبیعیات q_p کو ایک کولومب کا مثبت چارج رکھتے ہیں۔ یہ ضروری نہیں کہ قوت ناپتے وقت ایک کولومب کا مثبت پیمائشی چارج ہی استعمال کیا جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت $\mathbf{F}$ کو q_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک مثبت کولومب پر قوت حاصل کی جاتی ہے جسے برقی میدان کی شدت[15] یا صرف برقی میدان پکارا اور $\mathbf{E}$ لکھا جاتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q_p} \tag{2.16}$$

مختلف مقامات پر موجود مختلف قیمتوں کے چارجوں سے کسی ایک نقطے پر پیدا برقی میدان تمام چارجوں کے مجموعی اثر سے پیدا ہو گا۔ ایسا کولومب کے قانون کے خطی ہونے کی بنا پر ہوتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر n چارجوں کا مجموعی $\mathbf{E}$ تمام چارجوں کے علیحدہ علیحدہ پیدا کردہ $\boldsymbol{E}_1$، $\boldsymbol{E}_2$، $\boldsymbol{E}_3$، . . . کا سمتی مجموعہ

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \cdots + \boldsymbol{E}_n \tag{2.17}$$

634 ہوتا ہے۔ یوں کسی بھی نقطے P پر $\mathbf{E}$ ناپتے وقت اس نقطے پر ایک کولومب چارج q_p رکھ کر اس چارج پر قوت ناپی جاتی ہے۔ یہ قوت اس نقطے پر تمام چارجوں کا مجموعی
635 $\mathbf{E}$ ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ ناپتے وقت یہاں رکھے پیمائشی چارج q_p کا اثر شامل نہیں ہوتا۔

مساوات 2.10 سے چارج Q سے $\boldsymbol{a}_R$ سمت میں R فاصلے پر برقی میدان کو

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{a}_R}{R^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \end{aligned} \tag{2.18}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چارج کو کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے اسی مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{2.19}$$

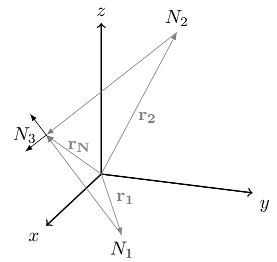
636 جہاں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کروی محدد کا رداسی سمت میں اکائی سمتیہ ہے۔

نقطہ (x',y',z') پر موجود چارج Q سے نقطہ (x,y,z) پر برقی شدت یوں حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left[(x-x')\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y-y')\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-z')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right]}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{2.20}$$

---

[14] test charge
[15] electric field intensity



شکل 2.2: دو چارجوں سے پیدا برقی شدت

جہاں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{r'} &= x'\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + y'\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + z'\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'} &= (x - x')\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (y - y')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (z - z')\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

کے برابر ہے۔ 637

چارج کا جوابات

مثال 2.6: نقطہ $(4, 1, 1)$ N_1 پر $100\,\mu\mathrm{C}$ کا چارج Q_1 جبکہ نقطہ $(1, 4, 2)$ N_2 پر $50\,\mu\mathrm{C}$ کا چارج Q_2 پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(2, 2, 5)$ N_3 پر Q_1 سے پیدا $\boldsymbol{E}_1$ 638 اور Q_2 سے پیدا $\boldsymbol{E}_2$ حاصل کریں۔ اس نقطے پر دونوں چارجوں کا مجموعی $\boldsymbol{E}$ کیا ہو گا۔ 639

حل: شکل 2.2 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ پہلے Q_1 سے پیدا $\boldsymbol{E}_1$ حاصل کرتے ہیں۔ N_1 سے N_3 تک سمتی فاصلہ

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{31} = \boldsymbol{R}_3 - \boldsymbol{R}_1 &= (2-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (2-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (5-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

ہے جس سے

$$
\begin{aligned}
R_{31} &= \left|\boldsymbol{R}_{31}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4^2} \\
&= \sqrt{21} = 4.583 \\
\boldsymbol{a}_{31} &= \frac{\boldsymbol{R}_{31}}{R_{31}} = \frac{-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{21}} \\
&= -0.436\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.218\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 0.873\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں مساوات 2.18 سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1 &= 9 \times 10^9 \frac{100 \times 10^{-6}}{21} \left(-0.436\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 0.218\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 0.873\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \\
&= -18\,686\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 9343\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 37\,414\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 2.7 سے $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت 9×10^9 پر کی گئی۔ اسی طرح Q_2 کے لئے حل کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{32} &= (2-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (2-4)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (5-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \\
&= 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

اور

$$
\begin{aligned}
R_{32} &= \left|\boldsymbol{R}_{32}\right| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}\\
\boldsymbol{a}_{32} &= \frac{1\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{14}}\\
&= 0.267\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 0.535\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.802\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_2 &= 9\times10^9\,\frac{50\times10^{-6}}{14}\left(0.267\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 0.535\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 0.802\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)\\
&= 8582\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 17\,196\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 25\,779\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

ملتا ہے۔ان دو جوابات کا سمتی مجموعہ لیتے ہوئے کل $\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2\\
&= \left(-18\,686\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 9343\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 37\,414\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) + \left(8582\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 17\,196\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 25\,779\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)\\
&= -10\,104\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - 7853\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 63\,193\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

640

مساوات 2.16 کو

$$
\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{2.21}
$$

لکھا جا سکتا ہے جو برقی میدان E کے موجودگی میں چارج q پر قوت F دیتا ہے۔ 641

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان 642

شکل 2.3 میں z محدد پر $z=-\infty$ سے $z=+\infty$ تک یکساں چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔آپ تصور کر سکتے ہیں کہ z محدد پر انتہائی قریب برابر فاصلے پر یکساں نقطہ چارج رکھے گئے ہیں۔یوں اگر ΔL لمبائی میں کل ΔQ چارج پایا جائے تب اکائی لمبائی میں $\frac{\Delta Q}{\Delta L}$ چارج پایا جائے گا جسے **لکیری چارج کثافت**[16] ρ_L[17] کہا جاتا ہے اور جس کی اکائی C/m ہے۔لکیری چارج کثافت کی تعریف

$$
\rho_L = \lim_{\Delta L\to0}\frac{\Delta Q}{\Delta L} \tag{2.22}
$$

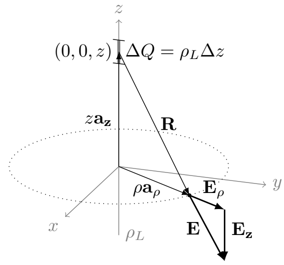
ہے۔لکیر پر چھوٹی لمبائی اتنی کم نہیں کی جاتی کہ چارج بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ نظر آئیں اور لکیری کثافت کی جگہ نقطہ چارج نظر آئیں۔اگر لکیر پر چارج کی تقسیم 643
ہر جگہ یکساں نہ ہو تب لکیری چارج کثافت متغیر ہو گی۔آئیں یکساں لکیری چارج کثافت سے خالی خلاء میں پیدا برقی میدان پر غور کریں۔ 644

پہلے بغیر قلم اٹھائے اس مسئلے کی نوعیت پر توجہ دیتے ہیں۔مقام $(0,0,z)$ پر چھوٹی سی لمبائی Δz میں $\rho_L\Delta z$ چارج پایا جاتا ہے جسے نقطہ چارج تصور کرتے ہوئے 645
آگے بڑھتے ہیں۔z محدد کے گرد $z=0$ یعنی xy سطح پر شکل 2.3 میں نقطہ دار گول دائرہ بنایا گیا ہے۔نقطہ چارج $\rho_L\Delta z$ سے دائرے پر کسی بھی مقام پر پیدا برقی 646

---

[16] line charge density

[17] اس کتاب میں رداس کے لئے بھی ρ استعمال کیا جاتا ہے۔ρ کو جب بھی کثافت کے لئے استعمال کیا جائے،اس کے زیر نوشت میں L، S یا h لکھا جائے گا۔



شکل 2.3: یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

647 میدان پر غور کرتے ہیں۔ برقی میدان کی مقدار کا دار و مدار میدان پیدا کرنے والے چارج اور چارج سے فاصلے پر ہے۔ نقطہ دار لکیر پر پائے جانے والے تمام نقطوں کا $(0,0,z)$ سے فاصلہ برابر ہے۔ یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ اس دائرے پر برقی میدان کی شدت کی حتمی قیمت ہر جگہ برابر ہو گی۔ اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ چارج کی نقطہ نظر سے نقطہ دار لکیر پر تمام نقطے بالکل یکساں نظر آتے ہیں۔ اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ دار دائرے پر ہر جگہ برقی میدان یکساں
650 ہو گا۔

آئیں شکل 2.3 کو دیکھتے ہوئے ایک اور مشابہت پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ $\mathbf{E}$ سمتی فاصلہ $\mathbf{R}$ کی سمت میں ہوتا ہے لہٰذا دائرے پر کسی بھی نقطے پر نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ سے پیدا $\boldsymbol{E}$ کے دو اجزاء پائے جائیں گے یعنی

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\rho + \boldsymbol{E}_z \tag{2.23}$$

مثبت ρ_L کی صورت میں $(0,0,z)$ پر موجود چارج سے $\boldsymbol{E}_z$ کی سمت منفی z جانب ہو گی۔ اسی طرح $(0,0,-z)$ پر پائے جانے والے مثبت چارج سے دائرے پر پیدا $\boldsymbol{E}$ کی سمت مثبت z جانب ہو گی۔ دائرے پر یہ دونوں ارکان ایک دونوں کو ختم کریں گے۔ اسی عمل سے دائرے پر کسی بھی نقطے پر مثبت z محدد پر کسی بھی فاصلے پر پائے جانے والے چارج سے پیدا $\boldsymbol{E}_z$ کے اثر کو منفی z محدد پر اتنے ہی فاصلے پر چارج سے پیدا $\boldsymbol{E}_z$ ختم کرتا ہے۔ یوں دائرے پر

$$\boldsymbol{E}_z = 0 \tag{2.24}$$

651 ہو گا۔

ایک آخری مشابہت پر اب غور کرتے ہیں۔ اگر نقطہ دار دائرے کو z محدد پر مثبت یا منفی جانب لے جایا جائے تو کیا ہو گا؟ اب بھی دائرے کے ایک جانب کسی بھی فاصلے پر چارج کا اثر دائرے کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر چارج ختم کرے گا۔ یوں دائرے کے ایک جانب یعنی z محدد پر ∞ تک فاصلے پر چارجوں کے $\boldsymbol{E}_z$ کو دائرے کی دوسری جانب z محدد پر $-\infty$ تک فاصلے پر چارجوں کا $\boldsymbol{E}_z$ ختم کرے گا اور یوں خلاء میں ہر جگہ مساوات 2.24 درست ثابت ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو یوں بہتر بیان کیا جا سکتا ہے کہ لامحدود لکیر پر یکساں کثافت چارج سے خلاء میں برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پیدا ہو گا۔ آئیں اس $\mathbf{E}$ کو حاصل کریں۔ 655

شکل 2.3 میں مقام z پر نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ دائرے پر $\Delta \boldsymbol{E}$ پیدا کرتا ہے۔ محدد کے مرکز سے نقطہ چارج کا مقام سمتیہ $z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ دائرے پر کسی بھی نقطے N کو سمتیہ $\rho \boldsymbol{a}_\rho$ ظاہر کرتا ہے۔ یوں نقطہ چارج سے N تک کا سمتی فاصلہ اور اسی سمت میں اکائی سمتیہ یوں حاصل کئے جائیں گے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \\
|\boldsymbol{R}| &= R = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\
\boldsymbol{a}_R &= \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}
\end{aligned}$$

مساوات 2.19 سے

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{E} &= \frac{\rho_L \Delta z}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)} \frac{\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\
&= \frac{\rho_L \Delta z \left(\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}\right)}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تمام چارجوں کے اثرات کو یکجا کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو تکمل کی شکل دے کر مندرجہ ذیل مساوات میں دکھایا گیا ہے۔ تکملہ کے حدود $-\infty$ اور $+\infty$ ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\rho_L \left(\rho \boldsymbol{a}_\rho - z \boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \right)}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right] \mathrm{d}z \tag{2.25}$$

اس تکمل کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.26}$$

جہاں مساوات کی نشان کے دائیں جانب پہلا تکمل $\boldsymbol{E}_\rho$ اور دوسرا تکمل $\boldsymbol{E}_z$ دیتا ہے یعنی

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ \boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{Z}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{2.27}$$

مساوات 2.24 کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دوسرا تکملہ صفر جواب دیگا۔ آئیں دونوں تکمل کو باری باری حل کریں۔ پہلے $\boldsymbol{E}_\rho$ حل کرتے ہیں۔ اس مساوات میں

$$z = \rho \tan \alpha$$

استعمال کرتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے تکمل کا ابتدائی حد

$$\begin{aligned} -\infty &= \rho \tan \alpha_{\text{ابتدائی}} \\ \alpha_{\text{ابتدائی}} &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

اور اختتامی حد

$$\begin{aligned} \infty &= \rho \tan \alpha_{\text{اختتامی}} \\ \alpha_{\text{اختتامی}} &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مزید

$$\mathrm{d}z = \rho \sec^2 \alpha \,\mathrm{d}\alpha$$

لکھا جائے گا۔ یوں

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \,\mathrm{d}\alpha}{\left(\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \,\mathrm{d}\alpha}{\rho^3 \left(1 + \tan^2 \alpha \right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

لکھا جائے گا جس میں

$$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\rho\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\rho^3\sec^3\alpha}\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\sin\alpha\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}}\\
&= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho
\end{aligned}\tag{2.28}$$

656 ملتا ہے جہاں دوسری قدم پر $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$ کا استعمال کیا گیا۔

آئیں اب مساوات 2.27 کے دوسرے جزو کو حل کریں۔ اس میں بھی $z=\rho\tan\alpha$ استعمال کرتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^2\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left(\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{4\pi\epsilon_0\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left(1+\tan^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

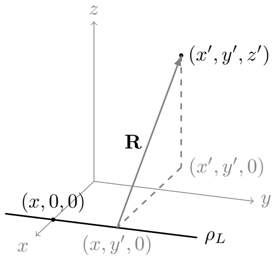
سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{4\pi\epsilon_0\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\sec^3\alpha}\\
&= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{4\pi\epsilon_0\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\\
&= \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{4\pi\epsilon_0\rho}\cos\alpha\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\\
&= 0
\end{aligned}\tag{2.29}$$

657 ملتا ہے۔ یہی جواب مساوات 2.24 میں حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.28 اور مساوات 2.29 سے مساوات 2.26 کا حل یوں لکھا جائے گا

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_\rho=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho\tag{2.30}$$



شکل 2.4: کسی بھی سمت میں لامحدود لکیر پر چارج کی مثال

جس کے مطابق لامحدود سیدھی لکیر پر یکساں چارج سے برقی میدان رداس ρ کے بالعکس متناسب ہے۔اس نتیجے کا مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں جو نقطہ چارج کی برقی میدان بیان کرتا ہے۔نقطہ چارج کا برقی میدان کروی رداس کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔یوں اگر لامحدود لکیر کے چارج سے فاصلہ دگنا کر دیا جائے
660 تو برقی میدان آدھا ہو جائے گا جبکہ نقطہ چارج سے فاصلہ دگنا کرنے سے برقی میدان چار گنا کم ہوتا ہے۔

کسی بھی سمت میں لامحدود سیدھی لکیر پر چارج کا برقی میدان مساوات 2.30 میں بیان خوبیوں پر پورا اترے گا۔ایسی صورت میں کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ حاصل کرنے کی خاطر اس نقطے سے چارج کے لکیر تک کم سے کم فاصلہ R حاصل کریں۔یہ فاصلہ نقطے سے لکیر پر عمود کھینچنے سے حاصل ہو گا۔اس فاصلے کو ρ تصور کریں۔لکیر سے عمودی سمت میں نقطے کی جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_R$ کو $\boldsymbol{a}_\rho$ تصور کریں۔ایسی صورت میں مساوات 2.30 کو

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R}\boldsymbol{a}_R \tag{2.31}$$

661 لکھ سکتے ہیں۔

---

662 مثال 2.7: y محدد کے متوازی اور $(x, 0, 0)$ سے گزرتی لامحدود لکیر پر ρ_L کثافت کا چارج پایا جاتا ہے۔نقطہ (x', y', z') پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

حل: شکل 2.4 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔(x', y', z') سے چارج کے لکیر پر عمود $(x, y', 0)$ پر ٹکراتا ہے۔ان دو نقطوں کا آپس میں فاصلہ $\sqrt{(x'-x)^2+z^2}$ ہے جبکہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} &= (x'-x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\\ \boldsymbol{a}_R &= \frac{(x'-x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{(x'-x)^2+z^2}}\end{aligned}$$

ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\sqrt{(x'-x)^2+z^2}}\boldsymbol{a}_R$$

663 ہو گا۔

664

665

---

666 مشق 2.1: y محدد پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $10\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔نقطہ $N_1(0, 0, 6)$ اور نقطہ $N_2(0, 8, 6)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جواب: دونوں نقطوں پر $\boldsymbol{E}=30\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے برابر ہے۔

مشق 2.2: x محدد پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0,5,0)$ اور نقطہ $N_2(7,3,4)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{E}_1=18\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $\boldsymbol{E}_2=18\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{5}\right)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

شکل 2.5 میں $z=0$ پر لامحدود $x-y$ سطح دکھائی گئی ہے۔ تصور کریں کہ اس پوری سطح پر انتہائی قریب قریب نقطہ چارج یوں رکھے گئے ہیں کہ سطح پر کہیں بھی چھوٹی رقبہ ΔS پر یکساں قیمت کا چارج ΔQ پایا جاتا ہے۔ اس طرح اکائی رقبے پر کل $\frac{\Delta Q}{\Delta S}$ چارج پایا جائے گا جسے سطحی چارج کثافت[18] ρ_S کہتے ہیں۔ سطحی چارج کثافت کی تعریف

$$\rho_S=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta S} \tag{2.32}$$

ہے۔ چھوٹی سطح اتنی کم نہیں لی جاتی کہ اس پر چارج بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ بطور نقطہ چارج نظر آئیں بلکہ اسے اتنا رکھا جاتا ہے کہ علیحدہ علیحدہ الیکٹران کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ سطح پر ہر جگہ چارج کا تقسیم یکساں نہ ہونے کی صورت میں ρ_S کی قیمت متغیر ہو گی۔ آئیں لامحدود سطح پر یکساں چارج کثافت سے خالی خلاء میں پیدا $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

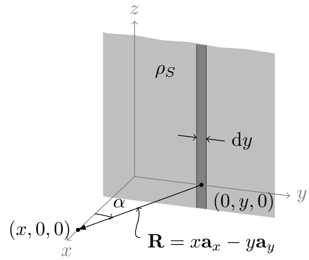
پہلے غور کرتے ہیں کہ آیا مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے کچھ اخذ کرنا ممکن ہے۔ اگر اس چارج بردار سطح کے سامنے ہم کھڑے ہو جائیں تو ہمیں سامنے لامحدود چارج بردار سطح نظر آئے گی۔ سطح سے برابر فاصلے پر ہم جہاں بھی جائیں ہمیں صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اسی طرح اگر ہم سطح کی دوسری طرف اتنے ہی فاصلے پر چلے جائیں تو ہمیں صورت حال میں کسی قسم کی کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔ اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایسی سطح سے برابر فاصلے پر تمام نقطوں پر یکساں برقی میدان پایا جائے گا۔ اس کے برعکس اگر ہم اس سطح سے دور ہو جائیں تو ہمیں سطح قدر دور نظر آئے گی اور ہو سکتا ہے کہ اس تبدیلی سے $\mathbf{E}$ پر اثر ہو۔ آئیں اب مسئلے کو حساب و کتاب سے حل کرتے ہوئے $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

شکل 2.5 میں چارج بردار سطح پر z محدد کے متوازی دو انتہائی قریب قریب لکیریں کھینچی گئی ہیں جن کے مابین فاصلہ $\mathrm{d}y$ ہے۔ اس گھیرے گئے رقبے کی چوڑائی $\mathrm{d}y$ ہے۔ یوں ΔL لمبائی اور $\mathrm{d}y$ چوڑائی رقبے میں $\rho_S\Delta L\,\mathrm{d}y$ چارج پایا جائے گا۔ لکیروں سے گھیرے رقبے کو چارج کی سیدھی لکیر تصور کیا جا سکتا ہے جس پر اکائی لمبائی کے رقبے پر $\frac{\rho_S\Delta L\,\mathrm{d}y}{\Delta L}$ چارج پایا جائے گا جسے ρ_L تصور کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\rho_L=\rho_S\,\mathrm{d}y \tag{2.33}$$

---

[18] surface charge density



شکل 2.5: یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

لامحدود لکیر پر یکساں چارج کی کثافت سے پیدا برقی میدان پر گزشتہ حصے میں غور کیا گیا۔ نقطہ $(x, 0, 0)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کرتے ہیں۔ شکل میں لامحدود چارج کی لکیر سے اس نقطے تک کا قریبی سمتی فاصلہ $\mathbf{R}$ دکھایا گیا ہے جہاں

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \tag{2.34}$$

کے برابر ہے جس سے

$$\begin{aligned} R &= |\boldsymbol{R}| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \boldsymbol{a}_R &= \frac{x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \tag{2.35}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں چارج بردار لکیر سے $(x, 0, 0)$ پر پیدا برقی میدان کو مساوات 2.31 کی مدد سے

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_S \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{\rho_S \,\mathrm{d}y \left(x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + y^2\right)} \end{aligned} \tag{2.36}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس جواب کو $\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x + \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S x \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + y^2\right)} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y &= -\frac{\rho_S y \,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + y^2\right)} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \end{aligned} \tag{2.37}$$

کے برابر ہیں۔ x محدد کے ایک جانب چارج بردار لکیر مندرجہ بالا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ x محدد کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر چارج بردار لکیر سے پیدا برقی میدان مندرجہ بالا $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کو ختم کرے گا۔ یوں کسی بھی مثبت y پر کھینچی لکیر کے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کو منفی y پر کھینچی لکیر کا $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ ختم کرے گا۔ x محدد کے دونوں جانب مسئلے کی مشابہت سے یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ

$$\boldsymbol{E}_y = 0 \tag{2.38}$$

ہو گا۔

682

آئیں اب حساب و کتاب سے مساوات 2.37 کو حل کریں۔ پہلے $\boldsymbol{E}_x$ حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 2.37 میں دئے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_x$ کا تکمل لیتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned} y &= x \tan\alpha \\ \mathrm{d}y &= x \sec^2\alpha \,\mathrm{d}\alpha \end{aligned} \tag{2.39}$$

کا استعمال کرتے ہیں۔ شکل 2.5 میں α کی نشاندہی کی گئی ہے۔ یوں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_x = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)} \\
&= \frac{\rho_S x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}}{2\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \frac{x \sec^2\alpha \,\mathrm{d}\alpha}{x^2\left(1+\tan^2\alpha\right)}
\end{aligned}
$$

میں $\sec^2\alpha = 1+\tan^2\alpha$ کے استعمال سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}}{2\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}}{2\pi\epsilon_0} \,\alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب $\boldsymbol{E}_y$ حاصل کریں۔

مساوات 2.37 میں دئے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کا تکمل لیتے ہیں۔

$$
\boldsymbol{E}_y = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y = -\frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{y\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)}
$$

تکمل کے نشان کے اندر $f(y) = x^2+y^2$ لیتے ہوئے اسے $\frac{\mathrm{d}f(y)}{2f(y)}$ لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل $\frac{\ln f(y)}{2}$ ہے۔ یوں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_y &= -\frac{\rho_S \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{2\pi\epsilon_0} \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} \Bigg|_{y=-\infty}^{y=+\infty} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 2.38 میں یہی جواب حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.40 اور مساوات 2.41 کی مدد سے یکساں چارج بردار لامحدود سطح کی برقی میدان

$$
\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \boldsymbol{a}_N \tag{2.42}
$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ اس سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطح سے فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے برقی میدان کی شدت پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ سطح کے دونوں جانب برقی میدان اسی مساوات سے حاصل کی جائے گی۔ ظاہر ہے کہ سطح کے دونوں جانب کے اکائی عمودی سمتیہ آپس میں الٹ ہیں۔

اب تصور کریں کہ اس سطح کے متوازی $x = x_1$ پر ایک اور لامحدود سطح رکھی جائے جس پر چارج کی یکساں کثافت $-\rho_S$ ہو۔ ان دو متوازی سطحوں کو دو دھاتی چادروں سے بنایا گیا کپیسٹر[19] سمجھا جا سکتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر کل $\mathbf{E}$ دونوں سطحوں پر چارج سے پیدا برقی میدان کا مجموعہ ہو گا۔ پہلے دونوں سطحوں کے دونوں جانب برقی میدان لکھتے ہیں۔

---

[19] capacitor

- $x = 0$ پر $+\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{x>0}^{+} &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} && x > 0 \\
\boldsymbol{E}_{x<0}^{+} &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} && x < 0
\end{aligned}
$$

- $x = x_1$ پر $-\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{x>x_1}^{-} &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} && x > x_1 \\
\boldsymbol{E}_{x<x_1}^{-} &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} && x < x_1
\end{aligned}
$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے $x < 0$، $x > x_1$ اور $0 < x < x_1$ خطوں میں برقی میدان حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{x<0} &= \boldsymbol{E}_{x<0}^{+} + \boldsymbol{E}_{x<x_1}^{-} = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = 0 \\
\boldsymbol{E}_{x>x_1} &= \boldsymbol{E}_{x>0}^{+} + \boldsymbol{E}_{x>x_1}^{-} = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = 0 \\
\boldsymbol{E}_{0<x<x_1} &= \boldsymbol{E}_{x>0}^{+} + \boldsymbol{E}_{x<x_1}^{-} = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

اس نتیجے کے مطابق دو متوازی لامحدود سطحوں جن پر الٹ یکساں کثافت پائی جائے کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا جبکہ سطحوں کے درمیانی خطے میں

$$
\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \tag{2.44}
$$

برقی میدان پایا جاتا ہے۔ اس میدان کی سمت مثبت چارج بردار چادر سے منفی چارج بردار چادر کی جانب ہوتی ہے۔ یہی مساوات ایک ایسے کپیسٹر کے برقی میدان کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جس میں دھاتی چادروں کی لمبائی اور چوڑائی دونوں چادروں کے درمیانی فاصلے سے کئی گنا زیادہ ہو اور چادروں کے درمیان خالی خلاء یا ہوا پائی جائے۔ چادروں کے کناروں کے قریب کپیسٹر کے اندر اور باہر صورت حال قدر مختلف ہو گی۔

مثال 2.8: خلاء میں تین متوازی لامحدود سطح پائے جاتے ہیں جن پر چارج کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔ پہلی سطح $y = 2$ پر $2\,\mathrm{nC/m^2}$، دوسری سطح $y = 5$ پر $4\,\mathrm{nC/m^2}$ اور تیسری سطح $y = 10$ پر $-6\,\mathrm{nC/m^2}$ کثافت پائی جاتی ہے۔ $N_1(0,0,0)$، $N_2(5,3,4)$، $N_3(-2,7,11)$ اور $N_4(-7,30,22)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: 0، $144\pi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$، $216\pi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور 0

2.5 چارج بردار حجم

ہم نقطہ چارج، لامحدود لکیر پر چارج اور لامحدود سطح پر چارج دیکھ چکے ہیں۔ اگلا فطری قدم چارج بردار حجم بنتا ہے لہٰذا اسی پر غور کرتے ہیں۔ لکیر اور سطح کے چارج پر غور کرتے ہوئے ہر جگہ یکساں کثافت کی بات کی گئی۔ حجم میں چارج کی بات کرتے ہوئے اس شرط کو دور کرتے ہوئے کثافت کو متغیرہ تصور کرتے ہیں۔ یوں مختلف مقامات پر کثافت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔

تصور کریں کہ حجم میں انتہائی قریب قریب نقطہ چارج پائے جاتے ہیں۔ یوں اگر کسی نقطے پر Δh حجم میں ΔQ چارج پایا جائے تب اس نقطے پر اوسط حجمی چارج کثافت $\frac{\Delta Q}{\Delta h}$ ہو گی۔ کسی بھی نقطے پر چارج کی حجمی کثافت یوں بیان کی جاتی ہے۔

$$\rho_h = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta h} \tag{2.45}$$

کسی بھی حجم میں کل چارج تین درجی تکمل سے حاصل کیا جائے گا۔ کارتیسی محدد میں ایسا تکمل یوں لکھا جائے گا۔

$$Q = \iiint\limits_{\mathrm{h}} \rho_h \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \tag{2.46}$$

جہاں تکمل کے نشان کے نیچے h حجم کو ظاہر کرتا ہے۔ اس طرز کے تکمل کو عموماً ایک درجی تکمل سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$Q = \int\limits_{\mathrm{h}} \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{2.47}$$

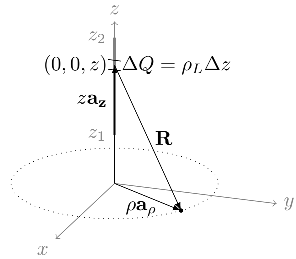
حجم میں $\mathbf{r}'$ نقطے پر چھوٹی سی حجم $\Delta h'$ میں $\Delta Q = \rho_h' \Delta h'$ چارج پایا جائے گا جسے نقطہ چارج تصور کیا جا سکتا ہے۔ نقطہ $\mathbf{r}$ پر اس نقطہ چارج کا برقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ مساوات 2.20 سے یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_h' \Delta h'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|}$$

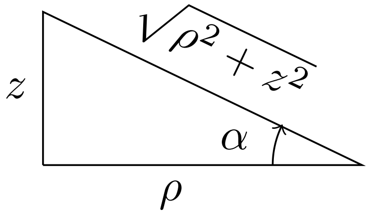
اس مساوات میں نقطہ r' پر چارج کی کثافت ρ_h' لکھی گئی ہے۔ تمام حجم میں پائے جانے والے چارج کا نقطہ $\mathbf{r}$ پر میدان مندرجہ بالا مساوات کے تکمل سے یوں حاصل کیا جائے گا۔

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{\mathrm{h}} \frac{\rho_h' \,\mathrm{d}h'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|} \tag{2.48}$$

اس مساوات کی شکل قدر خوفناک ہے البتہ حقیقت میں ایسا ہرگز نہیں۔ سمتیہ $\mathbf{r}$ اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی میدان حاصل کرنا درکار ہو۔ اس نقطے پر برقی میدان کو $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ لکھ کر اس حقیقت کی وضاحت کی گئی ہے کہ نقطے کی تبدیلی سے برقی میدان تبدیل ہو سکتا ہے۔ کثافت از خود متغیرہ ہے جس کی قیمت $\mathbf{r}'$ پر منحصر ہے۔ $\mathbf{r}'$ پر چھوٹی حجم $\mathrm{d}h'$ اور چارج کی کثافت ρ_h' لکھے گئے ہیں جہاں $'$ اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ یہ متغیرات نقطہ r' پر پائے جاتے ہیں۔ آخر میں یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ حاصل کرتے وقت اسی نقطے پر موجود چارج کو نظر انداز کیا جاتا ہے۔



(ا) محدود لکیر پر چارج کی یکساں کثافت



(ب) z اور α کا تعلق

شکل 2.6: محدود لکیر پر چارج

2.6 مزید مثال

مثال 2.9: شکل 2.6 میں $z = z_1$ سے $z = z_2$ تک کی سیدھی لکیر پر یکساں ρ_L پایا جاتا ہے۔ نقطہ دار گول دائرے پر E حاصل کریں۔ اس گول دائرے کا مرکز کارتیسی محدد کے مرکز $(0,0,0)$ پر ہے جبکہ دائرہ ازخود $z = 0$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل: شکل 2.6 سے واضح ہے کہ نکتہ دار گول دائرے پر E کی حتمی قیمت $|\boldsymbol{E}|$ یکساں ہو گی۔ یوں ہم لکھ سکتے ہیں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2} \frac{\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|} \frac{\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\
&= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2} \frac{\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}} \\
&= \boldsymbol{E}_\rho + \boldsymbol{E}_z
\end{aligned}
$$

دائیں جانب باری باری تکملہ حل کرتے ہیں۔ تکملہ حل کرنے کی خاطر $z = \rho \tan\alpha$ کا تعلق استعمال کرتے ہیں۔ α کا z کا تعلق شکل 2.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho \sec^2\alpha \,\mathrm{d}\alpha}{\left|\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right|^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho} \sin\alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\
&= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= \tan^{-1}\frac{z_2}{\rho} \\
\alpha_1 &= \tan^{-1}\frac{z_1}{\rho}
\end{aligned}
$$

کے برابر ہے۔ شکل 2.6-ب سے $\sin\alpha = \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{E}_\rho = \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho}\left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{z\,\mathrm{d}z}{\left|\rho^2+z^2\right|^{\frac{3}{2}}}\\ &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\rho^2\tan\alpha\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left|\rho^2+\rho^2\tan^2\alpha\right|^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_z &= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right)\\ &= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right)\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ $\boldsymbol{E}_\rho$ اور $\boldsymbol{E}_z$ کا مجموعہ لیتے ہوئے کل برقی میدان یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho}\left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right) + \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right) \tag{2.49}$$

اگر نقطہ دار گول دائرہ $z = z_0$ سطح پر پایا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات

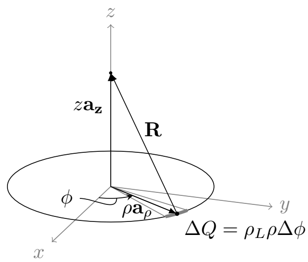
$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho}\left(\frac{z_2 - z_0}{\sqrt{\rho^2+(z_2-z_0)^2}} - \frac{z_1 - z_0}{\sqrt{\rho^2+(z_1-z_0)^2}}\right) + \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z_2-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z_1-z_0)^2}}\right)$$

صورت اختیار کرتا۔

مثال 2.10: شکل 2.7 میں $z = 0$ پر گول دائرہ دکھایا گیا ہے جس پر چارج کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $(0, 0, z)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

حل: نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے اسے حل کرتے ہیں۔ کسی بھی زاویہ پر رداس کھینچتے ہوئے دائرے پر کوئی نقطہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ زاویہ میں باریک تبدیلی $\Delta\phi$ سے لمبائی $\rho\Delta\phi$ حاصل ہوتی ہے جس پر کل چارج $\Delta Q = \rho_L\rho\Delta\phi$ پایا جائے گا۔ یوں چارج ΔQ مقام $\rho\boldsymbol{a}_\rho$ پر پایا جاتا ہے جبکہ $\mathbf{E}$ مقام $z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ پر درکار ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\mathbf{E}$ رداس کی سمت میں ممکن نہیں۔ ΔQ سے

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L\rho\Delta\phi}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)}\frac{z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} - \rho\boldsymbol{a}_\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$



شکل 2.7: چارج بردار گول دائرہ

پیدا ہو گا۔ دائرے پر تمام چارج کے اثر کے لئے تکملہ لینا ہو گا۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - \rho \boldsymbol{a}_\rho\right) \mathrm{d}\phi$$

تکملہ کا متغیرہ ϕ ہے جسے تبدیل کرنے سے ρ اور z میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔ اسی لئے انہیں تکملہ کی نشان سے باہر لے جایا گیا ہے۔ حاصل تکملہ کو دو حصوں میں لکھا جا سکتا ہے البتہ معاملہ اتنا سیدھا نہیں جتنا معلوم ہوتا ہے۔ $\boldsymbol{E}_z$ لکھتے ہوئے کارتیسی محدد کی اکائی سمتیہ $\mathbf{a}_{\mathrm{Z}}$ کو تکملہ کے باہر لے جایا جا سکتا ہے چونکہ ϕ کی تبدیلی سے $\mathbf{a}_{\mathrm{Z}}$ تبدیل نہیں ہوتا البتہ $\boldsymbol{E}_\rho$ لکھتے ہوئے نلکی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کو تکملہ کے باہر نہیں لے جایا جا سکتا چونکہ ϕ کی تبدیلی سے $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔ چونکہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت تبدیل ہوتی ہے لہٰذا اس کو مستقل تصور کرنا غلط ہے اور یوں یہ تکملہ کے اندر ہی رہے گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= \frac{\rho_L \rho z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \\
\boldsymbol{E}_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{a}_\rho \,\mathrm{d}\phi
\end{aligned} \tag{2.50}$$

پہلے تکملہ کا جواب اب دیکھ کر ہی

$$\boldsymbol{E}_z = \frac{2\pi\rho_L \rho z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.51}$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ دوسرے تکملہ میں $\boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ لکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(\cos\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\right) \mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\sin\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \cos\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}\right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

یہی جواب اس طرح بھی حاصل کیا جا سکتا ہے کہ گول دائرے پر تمام چارج کو $Q = 2\pi\rho\rho_L$ لکھیں۔ یہ چارج نقطہ $(0, 0, z)$ سے $\sqrt{\rho^2 + z^2}$ فاصلے پر ہے۔ اگر اس تمام چارج کو ایک ہی نقطے $(\rho, 0, 0)$ پر موجود تصور کیا جائے تو یہ

$$\boldsymbol{E}_R = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2 + z^2\right)} \boldsymbol{a}_R$$

برقی میدان پیدا کرے گا۔ چارج گول دائرے پر پھیلا ہوا ہے لہٰذا حقیقت میں صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ جانب ہی $\boldsymbol{E}$ پیدا ہوتا ہے۔ شکل میں اس تکون کو دیکھتے ہوئے جس کا $\boldsymbol{R}$ حصہ ہے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{E}_R$ کا $\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ حصہ حقیقت میں پایا جائے گا۔ یوں

$$\boldsymbol{E}_z = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)}\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہی حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2.11: رداس a کرہ کی سطح پر یکساں چارج کثافت ρ_S پایا جاتا ہے۔ کرہ کے باہر اور اس کے اندر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

حل: ہم کرہ کو کروی محدد کے مرکز پر رکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ کرہ کی سطح پر نقطہ $M(a,\theta,\phi)$ پر چھوٹی رقبہ $a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ میں چارج $\rho_S a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ پایا جائے گا جو نقطہ $N(0,0,b)$ پر برقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ پیدا کرے گا۔ محدد کے مرکز سے M تک سمتی فاصلہ $a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ جبکہ مرکز سے N تک سمتی فاصلہ $b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہے۔ یوں M سے N تک سمتی فاصلہ

$$\boldsymbol{R} = b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{2.52}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد اور کروی محدد کے اکائی سمتیات استعمال کئے گئے ہیں۔ اس طرح

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{R}| = \sqrt{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}} &= \sqrt{(b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})\cdot(b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})}\\
&= \sqrt{b^2+a^2-2ab\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}\\
&= \sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}
\end{aligned} \tag{2.53}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_R = \frac{\boldsymbol{R}}{|R|} = \frac{b\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} - a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}{\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}} \tag{2.54}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں صفحہ 32 پر جدول 1.3 کے استعمال سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \cos\theta$ لکھا گیا ہے۔

کرہ کی سطح z محدد کو $(0,0,-a)$ اور $(0,0,a)$ پر چھوتا ہے جہاں بالترتیب $\theta = \pi$ اور $\theta = 0$ کے برابر ہیں۔ یوں $(0,0,-a)$ سے $N(0,0,b)$ تک فاصلہ

$$\begin{aligned}
\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\pi} &= \sqrt{b^2+a^2+2ab}\\
&= \sqrt{(b+a)^2}\\
&= b+a
\end{aligned} \tag{2.55}$$

کے برابر ہے جہاں جذر لیتے وقت مثبت جواب چنا گیا ہے چونکہ فاصلہ مقداری[20] ہے جو مثبت قیمت رکھتا ہے۔ اسی طرح $(0,0,a)$ سے $N(0,0,b)$ تک فاصلہ

$$\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos 0} = \sqrt{b^2+a^2-2ab} \tag{2.56}$$

---

[20] فاصلہ ہر صورت مثبت ہوتا ہے البتہ سمتی فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے جہاں سمتی فاصلے کی مقدار مثبت ہی رہتی ہے جبکہ اس کی سمت مثبت یا منفی ہو سکتی ہے۔

کے برابر ہے۔اگر N کرہ کے باہر ہو تب $b > a$ ہو گا اور یہ فاصلہ $b - a$ کے برابر ہو گا جسے مساوات 2.56 سے یوں

$$\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} = \sqrt{(b-a)^2} = b - a \tag{2.57}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس کے برعکس اگر N کرہ کے اندر ہو تب $a > b$ ہو گا اور یہ فاصلہ $a - b$ کے برابر ہو گا جسے اور مساوات 2.56 سے یوں

$$\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab} = \sqrt{(a-b)^2} = a - b \tag{2.58}$$

719 حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اس طرح N پر

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0 R^2} \boldsymbol{a}_R$$

لکھتے ہوئے تمام کرہ پر چارج سے پیدا میدان کو تکمل سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho_S a^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0 (b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta)} \frac{b\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} - a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta}} \\ &= \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(b\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} - a\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}) \sin\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi\end{aligned} \tag{2.59}$$

اس مساوات میں جدول 1.3 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \cos\theta\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left[-a\sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - a\sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (b - a\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right]\sin\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \tag{2.60}$$

حاصل ہوتا ہے۔ z محدد سے دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ اس محدد پر میدان صرف اور صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت میں ہی ممکن ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اجزاء کو صفر لیتے ہوئے

$$E_z = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(b - a\cos\theta)\sin\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \tag{2.61}$$

لکھتے ہیں۔ سوال 2.1 میں آپ سے درخواست کی گئی ہے کہ مساوات 2.60 میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اجزاء کو صفر ثابت کریں۔بیرونی تکمل پہلے لیتے ہوئے

$$E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{(b - a\cos\theta)\sin\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\theta \tag{2.62}$$

720 حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta\sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.63}$$

721 لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 2.63 کے پہلے تکمل میں $w = \cos\theta$ اور $\mathrm{d}w = -\sin\theta \,\mathrm{d}\theta$ پُر کر کے حل کرتے ہوئے

$$\int \frac{\sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-\,\mathrm{d}w}{\left(b^2 + a^2 - 2abw\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{ab\left(b^2 + a^2 - 2abw\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.64}$$

یعنی

$$\frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \left.\frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}\right|_0^\pi \\ &= \frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2+2ab}}+\frac{1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\end{aligned} \tag{2.65}$$

حاصل ہوتا ہے جو N بیرونِ کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.57 کے تحت

$$\frac{1}{ab}\left[\frac{-1}{b+a}+\frac{1}{b-a}\right]=\frac{1}{ab}\left[\frac{-(b-a)+(b+a)}{(b+a)(b-a)}\right]=\frac{2}{b(b^2-a^2)} \tag{2.66}$$

جبکہ N اندرونِ کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.58 کے تحت

$$\frac{1}{ab}\left[\frac{-1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right]=\frac{1}{ab}\left[\frac{-(a-b)+(a+b)}{(a+b)(a-b)}\right]=\frac{2}{a(a^2-b^2)} \tag{2.67}$$

722 شکل اختیار کرتا ہے۔

مساوات 2.63 کے دوسرے تکمل میں $w=\cos\theta$ پُر کرتے ہوئے

$$\int \frac{\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{-w\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

حاصل ہوتا ہے۔ آپ

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv-\int v\,\mathrm{d}u$$

کے کلیہ سے بخوبی واقف ہیں۔ ہم

$$\begin{aligned}u&=w\\ \mathrm{d}v&=\frac{-\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$v=\int \mathrm{d}v=\int\frac{-\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

کے برابر ہے جسے ہم مساوات 2.64 میں حاصل کر چکے ہیں۔اس طرح

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \int w \left[\frac{-\,\mathrm{d}w}{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{3}{2}}}\right] \\
&= w\left[\frac{-1}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}\right] + \int \frac{\mathrm{d}w}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{-w}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}{a^2b^2} \\
&= \frac{-(b^2+a^2-abw)}{a^2b^2(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

سے

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \left.\frac{-(b^2+a^2-ab\cos\theta)}{a^2b^2(b^2+a^2-2ab\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\right|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2+a^2+ab)}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}} + \frac{(b^2+a^2-ab)}{\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\right]
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ N کا کرہ سے باہر ہونے کی صورت میں اس سے

$$
\frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2+a^2+ab)}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}} + \frac{(b^2+a^2-ab)}{\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\right] = \frac{2a}{b^2(b^2-a^2)} \tag{2.68}
$$

جبکہ N کا کرہ کے اندر ہونے کی صورت میں اس سے

$$
\frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2+a^2+ab)}{\sqrt{b^2+a^2+2ab}} + \frac{(b^2+a^2-ab)}{\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\right] = \frac{2b}{a^2(a^2-b^2)} \tag{2.69}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ کرہ کے باہر مساوات 2.66 اور مساوات 2.68 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63 سے

$$
\begin{aligned}
E_z &= \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{b(b^2-a^2)}\right) - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2a}{b^2(b^2-a^2)}\right) \\
&= \frac{4\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0 b^2} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2}
\end{aligned} \tag{2.70}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کرہ پر کل چارج $4\pi a^2\rho_S$ کو Q لکھا گیا ہے۔ کرہ کے اندر مساوات 2.67 اور مساوات 2.69 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63

$$
\begin{aligned}
E_z &= \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{a(a^2-b^2)}\right) - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2b}{a^2(a^2-b^2)}\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.71}
$$

مساوات 2.70 بیرون کرہ z محدد پر میدان دیتا ہے۔ چونکہ ہم کسی بھی سمت میں اس محدد کو رکھ سکتے تھے اور میدان اسی محدد کی سمت یعنی رداسی سمت میں ہوتا لہٰذا یہ ایک عمومی جواب ہے جسے کسی بھی بیرونی نقطے کے لئے

$$
\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \qquad (r > a) \tag{2.72}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ وہی میدان ہے جو کروی محدد کے مرکز پر Q نقطہ چارج رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 2.71 کے تحت کرہ کے اندر میدان صفر کے برابر ہے۔ یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ ہم کسی بھی مقام کو کرہ یا کسی بھی مکمل بند موصل سطح میں گھیر کر اس مقام پر صفر برقی میدان یقینی بنا سکتے ہیں۔ ایسی سطح کو فیراڈے پناہ گاہ[21] کہتے ہیں۔

حصہ 3.4.2 میں اسی مسئلے کو انتہائی آسان طریقے سے حل کر نا دکھایا جائے گا۔

مثال 2.12: مثال 2.11 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے a رداس کرہ جس میں یکساں ρ_h حجمی چارج کثافت پائی جائے کا کرہ کے اندر اور کرہ کے باہر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

حل: کرہ کے اندر رداس r پر $\mathrm{d}r$ موٹی جھلی کا حجم $4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ ہو گا جس میں کل $4\pi\rho_h r^2\,\mathrm{d}r$ چارج پایا جائے گا۔ مثال 2.11 کے مطابق یہ چارج r سے کم رداس کے خطے میں کوئی برقی میدان نہیں پیدا کرتا جبکہ r سے زیادہ رداس پر یہ میدان پیدا کرے گا۔ یوں R سے کم کسی بھی رداس پر جھلی میں پائے جانے والا چارج R پر میدان پیدا کرے گا جسے

$$\boldsymbol{E} = \int_0^R \frac{4\pi\rho_h r^2\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \left.\frac{\rho_h r^3}{3\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right|_0^R = \frac{\rho_h R}{3\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \qquad (R < a) \tag{2.73}$$

لکھ کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔ چارج کرہ کے باہر یعنی $R > a$ کی صورت میں کرہ میں موجود تمام چارج بطور نقطہ چارج کردار ادا کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3\rho_h}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \frac{a^3\rho_h}{3\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \qquad (R > a) \tag{2.74}$$

2.7 برقی میدان کے سمت بہاو خط

ہم نے اب تک جتنے بھی مثال دیکھے ان سب میں $\boldsymbol{E}$ کی شکل سیدھی لکیر کی مانند رہی ہے۔ ایسے میدان کا تصوراتی شکل ذہن میں بنانا آسان ہوتا ہے۔ یوں نقطہ چارج کے میدان کو چارج سے ابتدا کرتے ہوئے ہر طرف سمتیوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ اب چارج کے قریب $\boldsymbol{E}$ کی قیمت زیادہ اور چارج سے دور اس کی قیمت کم ہوتی ہے۔ یوں مختلف مقامات پر $\boldsymbol{E}$ کی لمبائی یہاں کے میدان کی نسبت سے ہو گی۔ میدان کو ظاہر کرنے کے دیگر طریقے بھی رائج ہیں۔

آئیں ایسے ہی ایک طریقے پر غور کریں جس میں میدان کو سمت بہاو خط سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طریقے میں کسی بھی نقطے پر $\boldsymbol{E}$ یہاں سے گزرتے سمت بہاو خط کا مماس ہوتا ہے۔ جس مقام پر گھنے سمت بہاو خطوط پائے جائیں ایسے مقام پر $\boldsymbol{E}$ کی مقدار زیادہ ہوتی ہے اور جہاں ان خطوط کی تعداد کم ہو وہاں میدان کمزور ہوتا ہے۔ سمت بہاو خطوط پر تیر کا نشان $\boldsymbol{E}$ کے مثبت سمت کی نشاندہی کرتا ہے۔

---

[21] Faraday shield

شکل 2.8: الف) سمت بہاو خط کے مساوات کا حصول۔ ب) لکیری چارج کثافت کے سمت بہاو خط۔

کارتیسی محدد میں کسی بھی میدان کو

$$\boldsymbol{E} = E_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + E_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + E_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ مساوات ان میدان کو بھی ظاہر کرتا ہے جو سیدھی لکیر کی مانند نہ ہوں۔ آئیں ایسے عمومی میدان پر غور کریں جس میں E_z کی قیمت صفر کے برابر ہو جبکہ E_x اور E_y کی قیمتیں x اور y پر منحصر ہو۔ کسی بھی نقطہ (x, y) پر ایسے میدان کو

$$\boldsymbol{E} = E_x(x, y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + E_y(x, y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \tag{2.75}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 2.8-الف میں ایسے ہی ایک $\boldsymbol{E}$ کے تین سمت بہاو خط دکھائے گئے ہیں۔ شکل میں کسی عمومی نقطے پر $\boldsymbol{E}$ دکھایا گیا ہے جو اس نقطے سے گزرتے سمت بہاو خط کا مماس ہے۔ میدان کے کارتیسی اجزاء E_x اور E_y بھی دکھائے گئے ہیں۔ اسی نقطے پر سمت بہاو خط کی چھوٹی لمبائی لیتے ہوئے Δx اور Δy دکھائے گئے ہیں۔ Δx اور Δy کو کم سے کم کرتے ہوئے ہم شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{E_y}{E_x} \tag{2.76}$$

لکھ سکتے ہیں۔ اب اگر ہمیں E_x اور E_y کی خاصیت معلوم ہو تب ہم تکمل سے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ 739

آئیں لامحدود لکیری چارج کثافت کے میدان کو مثال بناتے ہوئے اس کے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کریں۔ $\rho_L = 2\pi\epsilon_0$ کی صورت میں محدد z پر لامحدود لکیری چارج کثافت کا میدان

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{a}_\rho}{\rho} \tag{2.77}$$

لکھا جاتا ہے۔ مساوات 2.75 بھی اسی میدان کی مساوات ہے جس سے ظاہر ہے کہ $E_x = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $E_y = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}$ سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ یوں مساوات 2.77 کی مدد سے

$$E_x = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} = \frac{\cos\phi}{\rho} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$
$$E_y = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} = \frac{\sin\phi}{\rho} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں لامحدود لکیری چارج کثافت کے میدان کو

$$\boldsymbol{E} = \frac{x}{x^2 + y^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \frac{y}{x^2 + y^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} \tag{2.78}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس طرح مساوات 2.76 کو

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

یا

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

لکھ کر اس کا تکمل

$$\ln y = \ln x + M'$$

یعنی

$$y = Mx \tag{2.79}$$

لیتے ہوئے میدان کے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ یہ سیدھی لکیر کی مساوات ہے جسے مختلف M کے قیمتوں کے لئے شکل 2.8-ب میں کھینچا گیا ہے۔

سوالات

سوال 2.1: صفحہ 60 پر مساوات 2.60 میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اجزاء کا تکمل لیتے ہوئے انہیں صفر کے برابر ثابت کریں۔

سوال 2.2: تکون کے تینوں کونوں پر $25\,\mathrm{\mu C}$ کا چارج پایا جاتا ہے جبکہ تینوں کونوں سے $15\,\mathrm{cm}$ فاصلے پر $20\,\mathrm{\mu C}$ چارج پایا جاتا ہے۔ تکون کے اطراف $10\,\mathrm{cm}$ ہونے کی صورت میں چوتھے چارج پر قوت دفع کی مقدار حاصل کریں۔

جواب: $0.553\,\mathrm{N}$

سوال 2.3: $z = 0$ پر $4\,\mathrm{nF}$ اور $z = 1\,\mathrm{cm}$ پر $-3\,\mathrm{nF}$ چارج پائے جاتے ہیں۔ z محدد پر وہ نقطے دریافت کریں جہاں مثبت چارج پر صفر قوت پائی جائے گی۔

جوابات: $z = 0.92\,\mathrm{cm}$ ، $z = 7.08\,\mathrm{cm}$

سوال 2.4: ایک چکور کے اطراف $25\,\mathrm{cm}$ ہیں جبکہ اس کے چاروں کونوں پر $30\,\mathrm{nC}$ چارج پایا جاتا ہے۔ کسی ایک کونے کے چارج پر کتنی قوت عمل کرے گی۔

جواب: $0.248\,\mathrm{mN}$

سوال 2.5: نقطہ $(2, 1, -3)$ پر $15\,\mathrm{nC}$ اور نقطہ $(-3, -5, 4)$ پر $-6\,\mathrm{nC}$ چارج پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(2, 1, -3)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $-0.191\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 1.057\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2.195\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

سوال 2.6: نقطہ $(0, 0, 3)$ اور $(0, 0, -3)$ پر $20\,\mathrm{\mu C}$ چارج پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $N(2, 0, 0)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ محدد کے مرکز پر کتنا چارج نقطہ N پر اتنی ہی برقی شدت پیدا کرے گا۔

جوابات: $\boldsymbol{E} = 15\,339\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $6.827\,\mathrm{\mu C}$

سوال 2.7: نقطہ $(4, -2, 7)$ پر $5\,\mathrm{\mu C}$ اور $(-3, 4, -2)$ پر $12\,\mathrm{\mu C}$ چارج پایا جاتا ہے۔ y محدد پر کہاں $E_x = 0$ ہو گا۔

جواب: $y = -6.89$ ، $y = -22.11$

سوال 2.8: نقطہ $P(6, 3, 7)$ پر $6\,\mathrm{\mu C}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N(5, 4, 2)$ پر کارتیسی، نلکی اور کروی محدد میں $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ نقطہ N کے اکائی سمتیات استعمال کریں۔-جوابات: $\boldsymbol{E} = -384.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 384.4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 1922\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $\boldsymbol{E} = -60\boldsymbol{a}_{\rho} + 540\boldsymbol{a}_{\phi} - 1922\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $\boldsymbol{E} = -630\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + 1817\boldsymbol{a}_{\theta} + 540\boldsymbol{a}_{\phi}$

سوال 2.9: نقطہ $(0, 0, 0.25)$ اور $(0, 0, -0.25)$ پر $50\,\mathrm{nC}$ جبکہ $(0, 0, 0)$ پر $-35\,\mathrm{nC}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N(3, 1, 2)$ پر کارتیسی اور کروی محدد میں $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $34\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + 11\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 22\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ، $42\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + 0.39\boldsymbol{a}_{\theta}$

سوال 2.10: محدد کے مرکز پر $1\,\mathrm{nC}$ چارج پایا جاتا ہے۔ سطح $z = 0$ پر اس خط کی مساوات حاصل کریں جس پر $E_y = 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہو گا۔

جواب: $80.8y^2 = (x^2 + y^2)^3$ ، $\rho^2 = 8.987 \sin\phi$

سوال 2.11: محدد کے مرکز پر پڑے چکور کے چاروں کونوں پر $5\,\mathrm{nC}$ نقطہ چارج پائے جاتے ہیں۔ چکور $z = 0$ سطح پر پایا جاتا ہے جبکہ اس کے اطراف $1\,\mathrm{m}$ لمبے ہیں۔ نقطہ $(0, a, 0)$ اور نقطہ $(0, 2a, 0)$ پر برقی شدت کی شرح $a = 2$ ، $a = 10$ اور $a = \infty$ کی صورت میں حاصل کریں۔

جوابات: 4.15 ، 4.01 ، 4

سوال 2.12: نقطہ $(0, 0, 0)$ پر Q_1 اور نقطہ $(1, 0, 0)$ پر Q_2 نقطہ چارج پائے جاتے ہیں۔ نقطہ $(2, 1, 0)$ پر $E_x = 0$ ہونے کی صورت میں چارجوں کا تعلق دریافت کریں۔

جواب: $Q_1 = -1.976Q_2$

سوال 2.13: کارتیسی محدد کے پہلے آٹھویں حصے $(x > 0, y > 0, z > 0)$ میں حجمی کثافت چارج $\rho_h = 10e^{-2z}(x^2 + 2y^2)$ ہے جبکہ بقایا سات حصوں میں کوئی چارج نہیں پایا جاتا۔ خطہ $(0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1)$ میں کل چارج حاصل کریں۔ اسی طرح خطہ $(0 \le x + 2y \le 1, 0 \le z \le 1)$ میں کل چارج حاصل کریں۔

جوابات: پہلا جواب $4.32\,\mathrm{C}$ ہے۔ دوسرا تکمل $\int_0^{1/2} \int_0^{1-2y} \int_0^1 \rho_h \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ لکھتے ہوئے $0.27\,\mathrm{C}$ حاصل ہو گا۔

سوال 2.14: حجمی کثافت چارج $\rho_h = (\rho + 0.002)z^2 \tan\phi \,\mathrm{C/m^3}$ خطہ $0 \le \rho \le 0.008$ ، $30° \le \phi \le 75°$ ، $2 \le z \le 5$ میں پایا جاتا ہے۔ کثافت چارج کی زیادہ سے زیادہ قیمت دریافت کریں۔ اس خطے میں کل چارج حاصل کریں۔

جوابات: $0.933\,\mathrm{C/m^3}$ ، $11.05\,\mathrm{\mu C}$

سوال 2.15: نلکی محدد میں z محدد کے گرد یکساں حجمی کثافت چارج $e^{-\rho^2}$ پائی جاتی ہے۔ $z = 0$ تا $z = 1$ کل چارج حاصل کریں۔ z محدد کے گرد کتنے رداس کے اندر کل چارج کا آدھا پایا جاتا ہے۔

جوابات: $3.142\,\mathrm{C}$ ، $0.832\,\mathrm{m}$

سوال 2.16: کروی محدد میں رداس کے ساتھ بدلتی حجمی کثافت چارج $\rho_h = \sqrt{r}$ پائی جاتی ہے۔ اکائی رداس کے کرہ میں کل چارج حاصل کریں۔ اسی طرح خطہ $(r \le 0.5, \theta \le 25°, \phi \le \frac{\pi}{3})$ میں کل چارج حاصل کریں۔

جوابات: $3.59\,\mathrm{C}$ ، $0.028\,\mathrm{C}$

سوال 2.17: x محدد پر $\rho_L = 5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ لکیری کثافت چارج پایا جاتا ہے جبکہ نقطہ $(0, 3, 0)$ پر $-2\,\mathrm{nC}$ نقطہ چارج پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(4, 8, 1)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $-0.26\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 10.73\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1.32\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.18: نقطہ $(0, 2, 0)$ اور $(0, 0, 4)$ سے گزرتی سیدھی لکیر پر لکیری کثافت چارج $2\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے جبکہ نقطہ $(6, 1, -2)$ پر $7\,\mathrm{nC}$ چارج پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(6, 8, 4)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $2.47\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 3.78\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1.65\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 2.19: کارتیسی z محدد کے کچھ حصہ $z \le 0$ پر لکیری کثافت چارج $5\,\frac{\mathrm{\mu C}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(0, 0, -2)$ اور نقطہ $(5, -2, 6)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $-22.5\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ، $13.5\boldsymbol{a}_{\text{x}}+5.4\boldsymbol{a}_{\text{y}}-5.5\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال2.20: کارتیسی z محدد کے کچھ حصہ $2 \le z \le 10$ پر لکیری کثافت چارج $2\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(2,12,8)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

$$147\boldsymbol{a}_{\text{x}}+881\boldsymbol{a}_{\text{y}}+133\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

سوال2.21: سطح $y=1$ پر $\rho_S=0.72\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ ، سطح $y=-3$ پر $\rho_S=-0.72\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ ، سطح $x=-6$ پر $0.4\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ اور لکیر $x=2,\ z=3$ پر $0.4\pi\,\frac{\text{nC}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(1,3,-1)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $21.3\boldsymbol{a}_{\text{x}}-5.31\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال2.22: سطح $z=0$ پر مستطیل خطہ $-2\le x\le 2,\ -3\le y\le 3$ پر $\rho_S=|x|\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(0,0,3)$ پر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $13.36\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال2.23: سطح $z=0$ پر نلکی رداس $\rho=2$ تا $\rho=5$ سطحی کثافت چارج $\rho_S=4\,\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $(0,0,5)$ پر برقی شدت $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جواب: $50\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

سوال2.24: میدان $\boldsymbol{E}=3\sqrt{x}y\boldsymbol{a}_{\text{x}}+x^3y^2\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کا سمت بہاو خط حاصل کریں۔ نقطہ $(4,1,7)$ پر میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ لکھیں۔

جوابات: $\frac{y^2}{2}=\frac{x^{3.5}}{3.5}+C$ ، $0.093\boldsymbol{a}_{\text{x}}+0.996\boldsymbol{a}_{\text{y}}$

سوال2.25: میدان $\boldsymbol{E}=(x+2)\boldsymbol{a}_{\text{x}}+(4-y)\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کے اس سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کریں جو نقطہ $(5,7,2)$ سے گزرتی ہے۔

جواب: $(y-4)(x+2)=21$

سوال2.26: جو میدان z تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتے، نلکی محدد میں ان کی سمت بہاو خط $\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho\,\mathrm{d}\phi}=\frac{E_\rho}{E_\phi}$ حل کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔ نقطہ $(5,75^\circ,3)$ سے گزرتے میدان $\boldsymbol{E}=\rho\cos\phi\boldsymbol{a}_\rho+\sin\phi\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت بہاو خط حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1}{\rho}+\ln(\sin\phi)=0.1653$

3792 # باب 16

3793 # سوالات

3794 گاوس