1 # برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی

کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد

2 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1009 باب 4

1010 # توانائی اور برقی دباو

1011 ## 4.1 توانائی اور کام

قوت F کی سمت میں فاصلہ $\mathrm{d}L$ طے کرنے سے

$$\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}L$$

کام کیا جاتا ہے۔ اگر قوت اور طے کردہ فاصلہ ایک ہی سمت میں نہ ہوں تب قوت کا وہ حصہ جو طے کردہ فاصلے کی سمت میں ہو اور طے شدہ فاصلے کے حاصل ضرب کو کام[1] کہتے ہیں۔ شکل 4.1 کو دیکھتے ہوئے سمتیات کے استعمال سے

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W &= F\cos\alpha\,\mathrm{d}L\\ &= \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\end{aligned}$$

1012 لکھا جا سکتا ہے جہاں $F\cos\alpha\,\mathrm{d}L$ کو نقطہ ضرب کی مدد سے $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھا گیا ہے۔

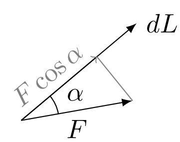
زمین اور کمیت m کے درمیان قوت ثقل $\boldsymbol{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ پایا جاتا ہے[2] جس میں $g = \frac{GM}{r^2}$ لکھتے ہوئے $\boldsymbol{F}_G = -mg\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ لکھا جا سکتا ہے۔ کام کرتے ہوئے کمیت کو $\Delta h\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ اونچائی پر منتقل کرنے کی خاطر قوت ثقل کے خلاف

$$\boldsymbol{F}_{\text{لاگو}} = -\boldsymbol{F}_G$$

لاگو کرتے ہوئے

$$\Delta W = \boldsymbol{F}_{\text{لاگو}}\cdot\Delta h\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = mg\Delta h$$

[1] work
[2] $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ اکائی سمتیہ ہے۔



شکل 4.1: طے فاصلہ اور فاصلے کی سمت میں قوت کا حاصل ضرب کام کہلاتا ہے

توانائی درکار ہو گی۔ کام کرنے کے لئے درکار توانائی کمیت میں منتقل ہو جاتی ہے جسے مخفی توانائی[3] کہتے ہیں۔ اگر Δh کی قیمت r کی نسبت سے بہت کم نہ ہو تب g کو مستقل تصور کرنا ممکن نہ ہو گا اور مخفی توانائی تکملہ کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$W = -\int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{F}_G \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \frac{GMm}{r^2} dr$$

ثقلی میدان میں کمیت کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچاتے ہوئے کوئی بھی راستہ اختیار کیا جا سکتا ہے۔ اختیار کردہ راستے کا مخفی توانائی پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں ہوتا۔ ایسے میدان جن میں دو نقطوں کے مابین مخففی توانائی کا دار و مدار، ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچنے کے راستے، پر نہیں ہوتا قائم میدان[4] کہلاتے ہیں۔

برقی میدان میں چارجوں کے حرکت کے مسئلے کو بھی اسی طرح حل کیا جاتا ہے۔ برقی میدان E میں چارج q پر قوت $\boldsymbol{F}_E = q\boldsymbol{E}$ عمل کرتا ہے۔ چارج کو فاصلہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ ہلانے کی خاطر اس قوت کے خلاف بیرونی

$$\boldsymbol{F}_{\text{لاگو}} = -\boldsymbol{F}_E$$

قوت لاگو کرتے ہوئے

$$\mathrm{d}W = -q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.1}$$

کام[5] کیا جاتا ہے۔ کسی بھی ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک یوں

$$W = -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.2}$$

1015 توانائی درکار ہو گی۔

1016 4.2 لکیری تکملہ

مساوات 4.2 لکیری تکملہ ہے جس پر مزید غور کرتے ہیں۔ شکل 4.2 میں یکساں[6] اور وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے میدان $\boldsymbol{E}$ میں نقطہ O سے نقطہ N تک چارج کی منتقلی دکھائی گئی ہے۔ یکساں میدان سے مراد ایسا میدان ہے جس میں $\boldsymbol{E}$ کی قیمت جگہ جگہ تبدیل نہیں ہوتی بلکہ اس کی قیمت ہر جگہ یکساں ہوتی ہے۔ اسی طرح وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو وقت کے ساتھ تغیر پذیر میدان کہا جائے گا۔ یکساں میدان وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر میدان ہے۔ 1019

شکل 4.2 میں پورے راستے کو چھوٹے چھوٹے ٹکڑے $\Delta\boldsymbol{L}_1$، $\Delta\boldsymbol{L}_2$، ... میں تقسیم کرتے ہوئے ایک ایک ٹکڑے پر حرکت کے لئے درکار توانائی مساوات 4.1 کی مدد سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں $\Delta\boldsymbol{L}_1$ کے ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک چارج q منتقل کرنے کی خاطر $\Delta W = -q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_1$ توانائی درکار ہو گی۔ یہی عمل راستے کے بقایا ٹکڑوں پر بھی لاگو کرتے ہوئے کل درکار توانائی

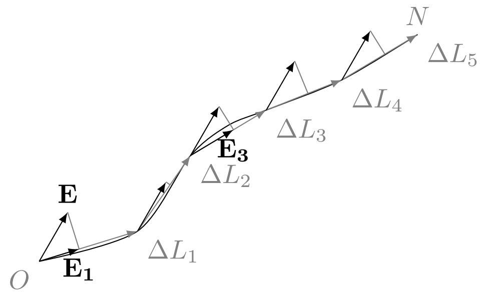
$$\begin{aligned} W &= -q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_1 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_2 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_3 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_4 - q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{L}_5 \\ &= -q\boldsymbol{E} \cdot (\Delta\boldsymbol{L}_1 + \Delta\boldsymbol{L}_2 + \Delta\boldsymbol{L}_3 + \Delta\boldsymbol{L}_4 + \Delta\boldsymbol{L}_5) \end{aligned} \tag{4.3}$$

لکھی جا سکتی ہے۔ قوسین میں بند $\Delta\boldsymbol{L}_1 + \Delta\boldsymbol{L}_2 + \Delta\boldsymbol{L}_3 + \Delta\boldsymbol{L}_4 + \Delta\boldsymbol{L}_5$ در حقیقت نقطہ O سے N تک کا کل سمتی راستہ $\boldsymbol{L}_{ON}$ ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کو

$$W = -q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{L}_{ON} \tag{4.4}$$

---

[3] potential energy
[4] conservative field
[5] work
[6] uniform



شکل 4.2: تکملہ دراصل چھوٹے حصوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔

شکل 4.3: چارج منتقل کرنے کے دو راستے۔

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر شکل 4.2 میں منتقلی کے راستے کے نہایت چھوٹے چھوٹے ٹکڑے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ بنائے جائیں تو مساوات 4.3 کو تکمل کی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$W=\int_O^N -q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.5}$$

چونکہ q اور $\boldsymbol{E}$ کی قیمتیں مستقل ہیں لہٰذا انہیں تکمل کے باہر لکھا جا سکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} W&=-q\boldsymbol{E}\cdot\int_O^N \mathrm{d}\boldsymbol{L}\\ &=-q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{L}_{ON}\end{aligned} \tag{4.6}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس جواب سے ہم دیکھتے ہیں کہ درکار توانائی کا دارومدار q، $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{L}_{ON}$ پر ہے جہاں $\boldsymbol{L}_{ON}$ نقطہ O سے نقطہ N تک سیدھی کھینچی لکیر ہے۔ درکار توانائی کا اس سے کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں کہ ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے جاتے ہوئے کون سا راستہ اختیار کیا گیا۔ جیسا کہ پہلے ذکر کیا گیا، ایسے میدان کو قدامت پسند میدان کہتے ہیں۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ غیر یکساں برقی میدان بھی قدامت پسند میدان ہوتا ہے البتہ تغیر پذیر برقی میدان غیر قدامت پسند ہو سکتا ہے۔

مثال 4.1: غیر یکساں، غیر تغیر پذیر میدان

$$\boldsymbol{E}=(y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(x+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+(x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\quad\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

میں $N_1(1,0,2)$ سے $N_2(0,1,2)$ تک سیدھی لکیر پر $0.1\,\mathrm{C}$ کا چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

حل: شکل 4.3 میں چارج منتقل کرنے کا سیدھا راستہ دکھایا گیا ہے۔ پہلے اس سیدھی لکیر کا مساوات حاصل کرتے ہیں۔ اس لکیر کا ڈھلوان[7]

$$\text{ڈھلوان}=m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-0}{0-1}=-1$$

---

[7] slope

ہے لہٰذا سیدھی لکیر کی مساوات $y = mx + c$ میں نقطہ N_1 پُر کرتے ہوئے $0 = -1 \times 1 + c$ سے $c = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں لکیر کی مساوات

$$y = -x + 1 \tag{4.7}$$

ہے۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی راستے پر حرکت کرتے ہوئے مساوات 1.3 کے مطابق

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{4.8}$$

لکھا جاتا ہے۔ یوں مساوات 4.2 سے حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
W &= -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \\
&= -0.1 \int_{N_1}^{N_2} \Big[(y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + (x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\Big] \cdot (\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}) \\
&= -0.1 \int_1^0 (y+z)\,\mathrm{d}x - 0.1 \int_0^1 (x+z)\,\mathrm{d}y - 0.1 \int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

آخری قدم پر تکمل کو تین حصوں میں لکھا گیا ہے جہاں پہلے حصے میں تکمل کو x کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے جبکہ دوسرے حصے میں تکمل کو y کے ساتھ اور آخری حصے میں اسے z کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے۔ پہلے حصے میں $(y+z)$ کا تکمل x کے ساتھ ہے لہٰذا $(y+z)$ کو x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ منتقلی کے راستے پر $z = 2$ ہے جبکہ مساوات 4.7 میں y کو x کی صورت میں لکھا گیا ہے۔ یوں پہلا تکمل

$$\begin{aligned}
-0.1 \int_1^0 [y+z]\,\mathrm{d}x &= -0.1 \int_1^0 [(-x+1)+2]\,\mathrm{d}x \\
&= -0.1 \left(\frac{-x^2}{2} + 3x\right)\bigg|_1^0 \\
&= 0.25\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

یعنی جاول کے ایک چوتھائی کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ دوسرا تکمل y کے ساتھ ہے لہٰذا تمام متغیرات y کی صورت میں لکھنے ہوں گے۔ سیدھی لکیر کے مساوات سے $x = -y + 1$ لکھا جا سکتا ہے جبکہ پورے راستے پر $z = 2$ کے برابر ہے لہٰذا

$$\begin{aligned}
-0.1 \int_0^1 [x+z]\,\mathrm{d}y &= -0.1 \int_0^1 [(-y+1)+2]\,\mathrm{d}y \\
&= -0.1 \left(\frac{-y^2}{2} + 3y\right)\bigg|_0^1 \\
&= -0.25\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

ہو گا۔ تیسرے تکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لہٰذا یہ تکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1 \int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z = 0\,\mathrm{J}$$

اس طرح کل درکار توانائی تینوں جوابات کا مجموعہ یعنی $0\,\mathrm{J}$ ہو گی۔ مثبت جواب کا مطلب یہ ہے کہ چارج کو منتقل کرنے کی خاطر بیرونی لاگو قوت توانائی فراہم کرے گی۔

1029 مثال 4.2: گزشتہ مثال میں سیدھی لکیر پر چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کرنے کو کہا گیا۔ اس مثال میں شکل 4.3 میں بائیں جانب گول دائرے
1030 کے راستے $(1,0,2)$ سے $(0,1,2)$ تک $\boldsymbol{E} = (y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (x+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ میدان میں $0.1\,\mathrm{C}$ کے چارج کو منتقل کرنے کی خاطر
1031 درکار توانائی حاصل کریں۔ گول دائرے کا راستہ $z=2$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل: اکائی رداس کے گول دائرے کی مساوات $x^2+y^2=1^2$ ہے۔ یوں مساوات 4.2 سے حاصل تین تکملوں

$$W = -0.1\int_1^0 (y+z)\,\mathrm{d}x - 0.1\int_0^1 (x+z)\,\mathrm{d}y - 0.1\int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z$$

میں پہلی تکمل میں $z=2$ اور $y=\sqrt{1-x^2}$ پُر کرنا ہو گا۔ یاد رہے کہ ربع اول[8] میں x اور y دونوں کی قیمتیں مثبت ہوتی ہیں۔ اس طرح کے تکمل حل کرتے وقت ربع کو مد نظر رکھنا ضروری ہے۔

$$\begin{aligned}
-0.1\int_1^0 (y+z)\,\mathrm{d}x &= -0.1\int_1^0 (\sqrt{1-x^2}+2)\,\mathrm{d}x\\
&= -0.1\left(\frac{\sin^{-1}x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+2x\right)\Bigg|_1^0\\
&= -0.025\pi - 0.2
\end{aligned}$$

جاول، دوسرے تکمل میں $z=2$ ہی رہے گا جبکہ $x=\mp\sqrt{1-y^2}$ میں سے $x=\sqrt{1-y^2}$ کا استعمال ہو گا۔ یوں

$$\begin{aligned}
-0.1\int_0^1 (x+z)\,\mathrm{d}y &= -0.1\int_0^1 (\sqrt{1-y^2}+2)\,\mathrm{d}y\\
&= -0.1\left(\frac{\sin^{-1}y}{2}+\frac{y\sqrt{1-y^2}}{2}+2x\right)\Bigg|_0^1\\
&= 0.025\pi + 0.2
\end{aligned}$$

جاول حاصل ہوتا ہے۔ تیسرے تکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں للہذا یہ تکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1\int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z = 0\,\mathrm{J}$$

1032 کل توانائی ان تین جوابات کا مجموعہ یعنی $0\,\mathrm{J}$ ہو گا۔

1033

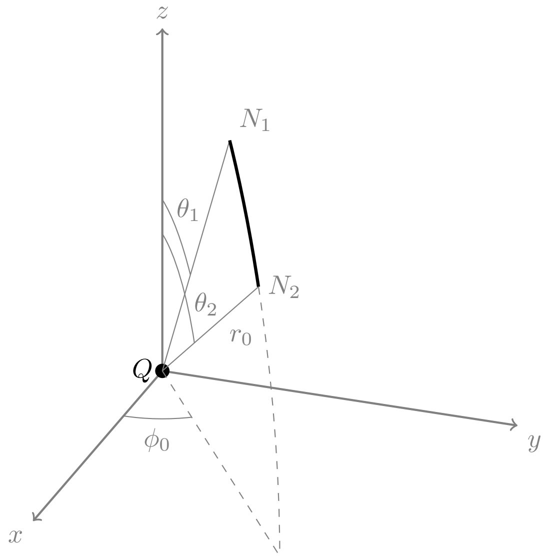
1034

1035 مشق 4.1: گزشتہ دو مثالوں میں ابتدائی نقطہ $(1,0,2)$ اور اختتامی نقطہ $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},2)$ تصور کرتے ہوئے دوبارہ حل کریں۔

1036 جوابات: $-0.1328\,\mathrm{J}$، $-0.1328\,\mathrm{J}$

1037

[8] first quadrant



شکل 4.4: نقطہ چارج کے گرد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے حرکت کا راستہ

محدد کے مرکز پر موجود نقطہ چارج Q کا میدان ہم حاصل کر چکے ہیں جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{4.9}$$

1038 آئیں دیکھیں کہ رداس تبدیل کئے بغیر اس میدان میں چارج q کو حرکت دیتے ہوئے کتنی توانائی درکار ہو گی۔ چونکہ میدان رداس کی سمت میں ہے اور رداس تبدیل
1039 کئے بغیر حرکت صرف اُس صورت ممکن ہے کہ ہم $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ یعنی $\boldsymbol{E}$ کے عمود میں سفر کریں۔ ایسی صورت میں چارج پر میدان سے رونما ہونے والی قوت اور طے فاصلہ
1040 عمودی ہوں گے لہٰذا درکار توانائی صفر کے برابر ہو گی۔ آئیں تکمل کے ذریعہ یہی جواب حاصل کریں۔

تصور کریں کہ $\phi = \phi_0$ اور $r = r_0$ رکھتے ہوئے ہم θ کو θ_1 تا θ_2 ریڈیئن تبدیل کرتے ہوئے چارج کو نقطہ N_1 سے N_2 تک حرکت دیتے ہیں۔ یہ صورت حال شکل 4.4 میں دکھائی گئی ہے۔ مساوات 1.3، مساوات 1.44 اور مساوات 1.64 جنہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\
\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_{\rho} + \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\
\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

کارتیسی، نلکی اور کروی متغیرات تبدیل کرنے سے پیدا چھوٹا فاصلہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ دیتے ہیں۔ یوں درکار توانائی

$$\begin{aligned}
W &= -q\int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\
&= -q\int_{r_0,\theta_1,\phi_0}^{r_0,\theta_2,\phi_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\left(\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi}\right)\\
&= -q\int_{r_0}^{r_0}\frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2}\\
&= 0
\end{aligned}$$

1041 صفر ہی حاصل ہوتی ہے۔ یہاں دوسرے قدم پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = 1$ کے علاوہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_{\theta} = 0$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_{\phi} = 0$ کا استعمال کیا گیا۔

اس کے برعکس اگر نقطہ (r_1, θ_1, ϕ_1) تا نقطہ (r_2, θ_2, ϕ_2) چارج کو حرکت دی جائے تب

$$\begin{aligned}
W &= -q \int_{r_1,\theta_1,\phi_1}^{r_2,\theta_2,\phi_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot (\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_{\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_{\phi}) \\
&= -q \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
&= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)
\end{aligned}$$

ہو گا۔یوں $r_1 > r_2$ کی صورت میں جواب مثبت ہو گا اور چارج کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے منتقل کرنے کے خاطر بیرونی توانائی درکار ہو گی جبکہ $r_2 > r_1$ کی صورت میں جواب منفی حاصل ہوتا ہے لہٰذا چارج کے حرکت سے ہمیں توانائی حاصل ہو گی۔

مشق 4.2: میدان $\boldsymbol{E} = 3x^2yz^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + x^3z^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2x^3yz\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ میں محدد کے مرکز $(0,0,0)$ سے نقطہ $(2,3,5)$ تک دو کولمب کا چارج مندرجہ ذیل راستوں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

- دو نقطوں کے مابین سیدھی لکیر۔
- ایسا راستہ جس پر $y = \frac{3}{4}x^2$ اور $z = \frac{x}{2} + x^2$ ہوں۔

جوابات: سیدھی لکیر پر $y = \frac{3}{2}x$ اور $z = \frac{5}{2}x$ لکھا جائے گا۔جوابات کے مطابق توانائی درکار نہیں بلکہ حاصل ہو گی۔ $-1200\,\mathrm{J}$، $-1200\,\mathrm{J}$

4.3 برقی دباو

چارج q کے منتقلی کے لئے درکار توانائی سے زیادہ اہم اکائی چارج کے منتقلی کے لئے درکار توانائی ہے۔اس توانائی کو برقی دباو[9] کہتے ہیں۔برقی دباو کے اکائی $\mathrm{J/C}$ کو وولٹ[10] کا نام دیا گیا ہے جسے V سے ظاہر کیا جاتا ہے۔چونکہ توانائی غیر سمتی یعنی مقداری ہے لہٰذا برقی دباو بھی مقداری ہے۔مساوات 4.2 سے برقی دباو یوں حاصل ہوتا ہے

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = -\int_B^A \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.11}$$

جہاں ابتدائی نقطے کو B، اختتامی نقطے کو A اور حاصل جواب کو V_{AB} لکھا گیا ہے۔V_{AB} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلے اختتامی نقطہ A اور بعد میں ابتدائی نقطہ B لکھا گیا ہے۔مساوات 4.6 میں فاصلہ $\boldsymbol{L}_{ON}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں ابتدائی نقطہ O پہلے اور اختتامی نقطہ N بعد میں لکھا گیا۔برقی دباو V_{AB} لکھتے ہوئے اس فرق کو مد نظر رکھنا ہو گا۔

برقی دباو دو نقطوں کے مابین ناپی جاتی ہے۔کسی نقطے کی حتمی برقی دباو معنی نہیں رکھتی۔برقی دباو بالکل اونچائی کے مترادف ہے۔یوں کسی پہاڑی کے قریب کھڑے ہو کر اگر اس کی اونچائی تین سو میٹر ناپی جائے تو اسی پہاڑی کی اونچائی سطح سمندر سے ناپتے ہوئے سات سو میٹر حاصل ہو سکتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اونچائی ناپتے ہوئے نقطہ حوالہ[11]، جہاں کی نسبت سے اونچائی ناپی جائے، نہایت اہمیت کا حامل ہے۔نقطہ حوالہ کی اونچائی صفر تصور کی جاتی ہے۔دو یا دو سے زیادہ عمارتوں کی

[9] voltage
[10] volt
[11] reference point

اونچائی کا موازنہ کرتے وقت ان تمام عمارتوں کی اونچائی پہلے کسی ایک نقطے سے ناپی جاتی ہے۔ یہ نقطہ عموماً زمین کی سطح ہوتی ہے۔ اس کے برعکس مختلف شہروں یا پہاڑیوں کی اونچائی عموماً سطح سمندر سے ناپی جاتی ہے۔ اگر تمام افراد کسی ایک نقطہ حوالہ پر اتفاق کریں تب اس نقطے کی نسبت سے کسی مقام کی اونچائی کو اس مقام کی حتمی اونچائی تصور کی جاتی ہے۔ بالکل اسی طرح مختلف نقطوں کے برقی دباو کا موازنہ کرتے ہوئے ان تمام نقطوں کی برقی دباو کسی ایک نقطے کی نسبت سے ناپے جائیں گے۔ ایسے نقطے کو برقی زمین[12]، کہا جاتا ہے جہاں برقی زمین کو صفر برقی دباو پر تصور کیا جاتا ہے۔ عموماً کرہ ارض کی سطح کو ہی برقی زمین تصور کیا جاتا ہے۔

موٹر گاڑی میں نسب بیٹری کے مثبت سرے کی برقی دباو، بیٹری کے منفی سرے کی نسبت سے ناپنا زیادہ مطلب آمیز ہو گا جبکہ گھریلو برقی دباو مہیا کردہ ٹھنڈی اور گرم تار کے مابین ناپنا مطلب رکھتا ہے۔ کبھی کبھار برقی دباو ناپنا نسبتاً مشکل ہوتا ہے، مثلاً کرہ ارض کی برقی دباو کو کس نقطہ حوالہ سے ناپا جائے گا۔ طبیعیات کے میدان میں عموماً ایسے ہی مسئلے در پیش آتے ہیں جہاں نقطہ حوالہ تعین کرنا دشوار ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں نقطہ حوالہ کو لا محدود فاصلے پر تصور کیا جاتا ہے اور نقطہ A کے برقی دباؤ کو V_A لکھا جاتا ہے۔ یوں لا محدود فاصلے سے اکائی چارج کو کرہ ارض تک لانے کے لئے درکار توانائی دریافت کرتے ہوئے کرہ ارض کی برقی دباو حاصل کی جائے گی۔

ہم محوری تار کے مسائل پر غور کرتے ہوئے عموماً اس کی بیرونی نلکی سطح کو نقطہ حوالہ لیا جاتا ہے۔ اسی طرح کروی تناسب رکھنے والے سطحوں کے مابین برقی دباو حاصل کرتے وقت ان میں کسی ایک سطح کو حوالہ سطح چنا جائے گا۔

اگر نقطہ A کی برقی دباو V_A جبکہ نقطہ B کی برقی دباو V_B ہو تب ان کے مابین برقی دباو

$$V_{AB} = V_A - V_B \tag{4.12}$$

ہو گا جہاں نقطہ B کو نقطہ حوالہ تصور کیا گیا ہے۔ یہ مساوات صرف اور صرف اسی صورت درست ہو گی جب V_A اور V_B از خود ایک ہی نقطہ حوالہ سے ناپے گئے ہوں۔

4.3.1 نقطہ چارج کا برقی دباو

شکل 4.5 میں خالی خلاء میں کروی محدد کے مرکز پر پائے جانے والے چارج Q کے میدان میں کسی بھی راستے پر q کولمب کے پیمائشی چارج کو نقطہ B سے نقطہ A لاتا دکھایا گیا ہے۔ Q سے r فاصلے پر اس راستے کے چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر اوسط برقی میدان $\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہو گا۔ یوں اتنا راستہ طے کرنے کے لئے

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= -q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\
&= -q\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right)\cdot\left(\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi\right)\\
&= -\frac{qQ\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2}
\end{aligned}$$

توانائی درکار ہو گی۔ اس طرح پورا راستہ طے کرنے کے لئے

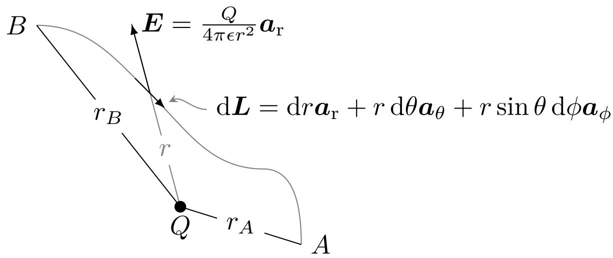
$$W = -\int_{r_B}^{r_A}\frac{qQ\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \left.\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}\right|_{r_B}^{r_A} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

توانائی درکار ہو گی جس سے ان دو نقطوں کے مابین برقی دباو $V_{AB} = \frac{W}{q}$ یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \tag{4.13}$$

---

[12] electrical ground



شکل 4.5: نقطہ چارج کی برقی دباو۔

اس مساوات سے صاف ظاہر ہے کہ نقطہ چارج Q کے میدان میں دو نقطوں کے مابین برقی دباو کا انحصار چارج سے نقطوں کے فاصلوں r_A اور r_B پر ہے نا کہ ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچنے کے راستے پر۔ یوں نقطہ B کے حوالے سے نقطہ A پر برقی دباو مساوات 4.13 سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر رکھا جائے یعنی اگر $r_B=\infty$ لیا جائے تب $\frac{1}{\infty}=0$ ہونے کی وجہ سے یہ مساوات

$$V_A=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \tag{4.14}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اگر ہم حوالہ نقطہ کے لامحدود فاصلے پر ہونے پہ اتفاق کریں تو ایسی صورت میں $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$ کو نقطہ A کی حتمی برقی دباو تصور کیا جا سکتا ہے جسے V_A لکھا جاتا ہے۔ نقطہ حوالے کو لامحدود فاصلے پر رکھنے کا مطلب ہے کہ برقی زمین لامحدود فاصلے پر ہے۔ نقطہ حوالہ پر اتفاق کے بعد برقی دباو کی بات کرتے ہوئے بار بار برقی زمین کی نشاندہی کرنا ضروری نہیں لہٰذا برقی دباو لکھتے ہوئے زیر نوشت میں B لکھنے سے گریز کیا جاتا ہے اور اسے صرف V_A لکھا جاتا ہے۔ مساوات 4.14 نقطہ A کی حتمی برقی دباو دیتا ہے جو Q سے r_A فاصلے پر ہے۔ یہ نقطہ کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے لہٰذا اسے r_A فاصلے پر نقطہ A کی بجائے r فاصلے پر نقطہ کہا جا سکتا ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 4.14 کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$V=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{4.15}$$

1070 جو کروی محدد کے مرکز پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے r فاصلے پر برقی دباو V دیتا ہے جہاں نقطہ حوالہ لامحدود فاصلے پر ہے۔

1071 برقی دباو مقداری ہے لہٰذا مساوات 4.15 میں اکائی سمتیات نہیں پائے جاتے۔

1072 ایسی سطح جس پر حرکت کرنے سے برقی دباو تبدیل نہ ہو کو ہم قوہ سطح[13] کہتے ہیں۔ مساوات 4.15 کے مطابق کروی محدد کے مرکز پر نقطہ چارج کے گرد کسی بھی
1073 رداس کا کرہ ہم قوہ سطح ہو گی۔ ایسی سطح پر حرکت کرنے کی خاطر کسی توانائی کی ضرورت نہیں ہوتی۔

1074 4.3.2 لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو

z محدد پر لامحدود لمبائی کے لکیری چارج کثافت کا میدان صفحہ 75 پر مساوات 3.15

$$\boldsymbol{E}_\rho=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho$$

دیتا ہے۔ اس میدان میں ρ_0 اور ρ_1 سطحوں کے مابین

$$V=-\int_{\rho_0}^{\rho_1}\frac{\rho_L\,\mathrm{d}\rho}{2\pi\epsilon_0\rho}=\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\rho_0}{\rho_1} \tag{4.16}$$

1075 برقی دباو پایا جائے گا۔

[13] equipotential surface

1076 ### 4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباو

ہم محوری تار میں اندرونی اور بیرونی تاروں کے درمیانی جگہ پر برقی میدان صفحہ 75 پر مساوات 3.16 میں دیا گیا ہے جسے $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ کے استعمال سے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho} \boldsymbol{a}_\rho \tag{4.17}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اندرونی تار پر ρ_L لکیری چارج کثافت پایا جاتا ہے۔ اندرونی تار کے اکائی لمبائی پر $+Q$ جبکہ بیرونی تار کے اکائی لمبائی پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔ بیرونی تار کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی تار پر برقی دباو

$$V = -\int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho} \boldsymbol{a}_\rho \cdot \mathrm{d}\rho \boldsymbol{a}_\rho = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

یعنی

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{4.18}$$

1077 ہو گا جہاں اندرونی تار کا رداس ρ_1 اور بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔

1078 ## 4.4 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباو

شکل 4.6-الف میں چارج Q_1 اور Q_2 کے برقی میدان میں B سے A تک پیمائشی چارج q کی حرکت دکھائی گئی ہے۔ Q_1 کو کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے، B سے A تک راستے پر کسی بھی نقطہ N پر اس کا میدان $\boldsymbol{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں r_1 مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔ اسی طرح Q_2 کو ایک اور کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے نقطے N پر اس کا میدان $\boldsymbol{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}2}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں r_2 اس محدد کے مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔ شکل-الف میں B سے A تک راستے پہ نقطہ N پر Q_1 اور Q_2 کے میدان $\boldsymbol{E}_1$ اور $\boldsymbol{E}_2$ دکھائے گئے ہیں۔ یوں N پر کل میدان $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ ہو گا۔ نقطہ N پر B سے A کے راستے چھوٹی سی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر کل میدان یہی ہو گا۔ جس کروی محدد کے مرکز پر Q_1 پایا جاتا ہے اس نظام میں اس چھوٹے فاصلے کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_1 \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1} + r_1 \,\mathrm{d}\theta_1 \boldsymbol{a}_{\theta 1} + r_1 \sin\theta_1 \,\mathrm{d}\phi_1 \boldsymbol{a}_{\phi_1} \tag{4.19}$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ جس کروی محدد کے مرکز پر Q_2 پایا جاتا ہے اس نظام میں اسی چھوٹے فاصلے کو

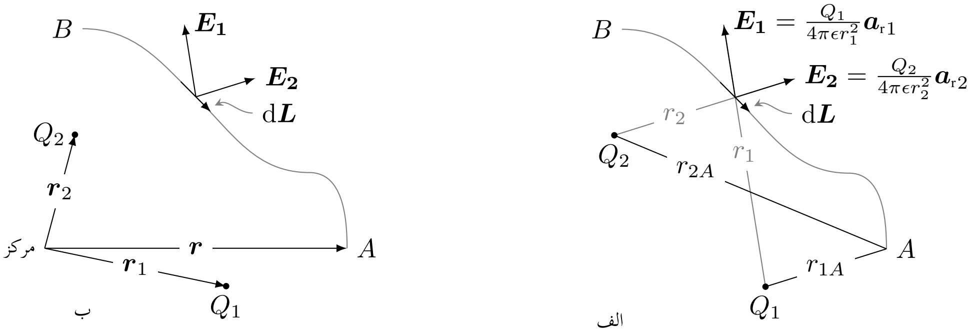
$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_2 \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}2} + r_2 \,\mathrm{d}\theta_2 \boldsymbol{a}_{\theta 2} + r_2 \sin\theta_2 \,\mathrm{d}\phi_2 \boldsymbol{a}_{\phi_2} \tag{4.20}$$

لکھا جائے گا۔ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ فاصلہ طے کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= -q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \\
&= -q(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \\
&- \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}
\end{aligned}$$

توانائی درکار ہو گی۔ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کرتے وقت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت مساوات 4.19 سے لیتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_1$ ملتا ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کرتے وقت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت مساوات 4.20 سے لیتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_2$ ملتا ہے۔ ان قیمتوں کے پُر کرنے سے

$$\mathrm{d}W = -\frac{qQ_1 \,\mathrm{d}r_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} - \frac{qQ_2 \,\mathrm{d}r_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$$



شکل 4.6: دو نقطہ چارج کے میدان میں حتمی برقی دباو۔

حاصل ہوتا ہے۔ یوں B سے A تک کا پورا راستہ طے کرنے کی خاطر

$$
\begin{aligned}
W = \int_B^A \mathrm{d}W &= -\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_{1B}}^{r_{1A}}\frac{\mathrm{d}r_1}{r_1^2} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_{2B}}^{r_{2A}}\frac{\mathrm{d}r_2}{r_2^2} \\
&= \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}}\right) + \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{2A}} - \frac{1}{r_{2B}}\right)
\end{aligned}
$$

توانائی درکار ہو گی۔ نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر لیتے ہوئے یوں نقطہ A پر حتمی برقی دباو

$$
V_A = \frac{W}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_{1A}} + \frac{Q_2}{r_{2A}}\right) \tag{4.21}
$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 4.21 میں دائیں ہاتھ پہلا جزو Q_1 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباو جبکہ دوسرا جزو Q_2 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباو دیتا ہے۔ مساوات 4.21 کے مطابق Q_1 اور Q_2 دونوں کے موجودگی میں نقطہ A کا برقی دباو حاصل کرنے کی خاطر ان دو چارجوں کو باری باری علیحدہ لیتے ہوئے A پر برقی دباو حاصل کیا جاتا ہے اور پھر دونوں برقی دباو کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہی طریقہ کار دو سے زیادہ نقطہ چارجوں کے لئے بھی بروئے کار لایا جا سکتا ہے۔ یوں کسی بھی نقطے کی برقی دباو حاصل کرتے ہوئے مختلف نقطہ چارجوں کے برقی دباو علیحدہ علیحدہ حاصل کرتے ہوئے انہیں جمع کرتے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

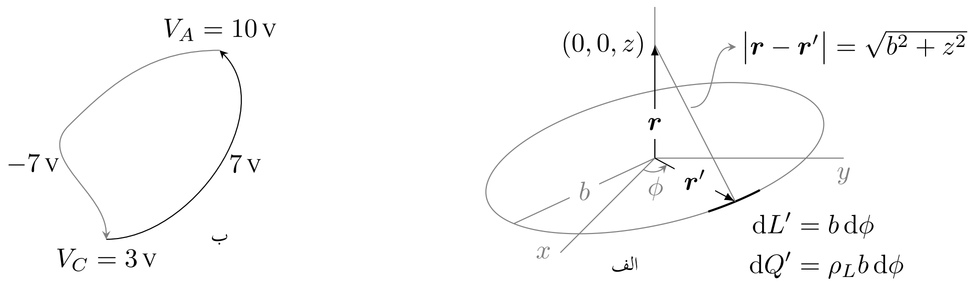
اگر کسی کروی محدد کے مرکز سے Q_1 تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_1$ جبکہ مرکز سے Q_2 تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_2$ اور مرکز سے نقطہ A تک سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہوں تب نقطہ A کے لئے مساوات 4.21 کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$$
V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} + \frac{Q_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}\right) \tag{4.22}
$$

جہاں Q_1 سے A تک فاصلہ $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|$ اور Q_2 سے A تک فاصلہ $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|$ ہے۔ یہ صورت حال شکل 4.6-ب میں دکھائی گئی ہے۔ متعدد نقطہ چارجوں کے لئے مساوات 4.22

$$
\begin{aligned}
V(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} + \frac{Q_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|} + \cdots + \frac{Q_n}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n|}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{Q_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|}
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

لکھی جائے گی جہاں نقطہ A کا مقام زیر نوشت میں A لکھنے کی بجائے $V(\boldsymbol{r})$ میں $\boldsymbol{r}$ سے واضح کیا گیا ہے۔



شکل 4.7: (الف) گول دائرے پر لکیری چارج کثافت سے z محدد پر پیدا برقی دباو۔ (ب)بند دائرے کی برقی دباو صفر ہے۔

متغیر حجمی چارج کثافت ρ_h کے چھوٹے حجم Δh میں پائے جانے والے چارج $\Delta Q = \rho_h \Delta h$ کو نقطہ چارج تصور کیا جا سکتا ہے۔ پورے حجم کے n چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے مساوات 4.23 کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\rho_h(\boldsymbol{r}_1)\Delta h_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} + \frac{\rho_h(\boldsymbol{r}_2)\Delta h_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|} + \cdots + \frac{\rho_h(\boldsymbol{r}_n)\Delta h_n}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n|}\right) \tag{4.24}$$

جہاں $\boldsymbol{r}$ کو کثافت کا آزاد متغیرہ لیتے ہوئے مقام $\boldsymbol{r}_j$ پر کثافت کو $\rho_h(\boldsymbol{r}_j)$ اور چھوٹی حجم کو Δh_j لکھا گیا ہے۔ چھوٹی حجم Δh کو کم سے کم کرتے ہوئے ایسے نقطوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ بناتے ہوئے اس مجموعہ سے مندرجہ ذیل حجمی تکمل حاصل ہوتا ہے۔

$$V(\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\text{حجم}} \frac{\rho_h(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}h'}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.25}$$

یہاں رک کر مندرجہ بالا مساوات کو دوبارہ دیکھتے ہیں۔ ρ_h حجمی چارج کثافت ہے۔ مقام $\boldsymbol{r}'$ پر چھوٹی حجم $\mathrm{d}h'$ میں تھوڑا سا چارج $\rho_h(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}h'$ پایا جاتا ہے جسے نقطہ چارج تصور کیا جاتا ہے۔ مساوات 4.25 نقطہ $\boldsymbol{r}$ پر برقی دباو دیتا ہے جہاں برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا گیا ہے۔ یوں اکائی چارج کو لامحدود فاصلے سے نقطہ $\boldsymbol{r}$ تک کسی بھی راستے لانے کے لئے اس مساوات سے حاصل $V(\boldsymbol{r})$ برابر توانائی درکار ہو گی۔

اگر حجمی چارج کثافت کی جگہ سطحی چارج کثافت ρ_S یا لکیری چارج کثافت ρ_L پایا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$V(\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\text{سطح}} \frac{\rho_S(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S'}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.26}$$

$$V(\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\text{لکیر}} \frac{\rho_L(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}L'}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.27}$$

لکھتے۔ ان مساوات میں $\mathrm{d}h'$، $\mathrm{d}S'$ اور $\mathrm{d}L'$ غیر سمتی یعنی مقداری ہیں۔ تینوں اقسام کے چارج کثافت پائے جانے کی صورت میں باری باری ہر ایک سے پیدا برقی دباو حاصل کرتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

مثال 4.3: $z=0$ سطح پر z محدد کے گرد b رداس کے گول دائرے پر ρ_L چارج کثافت پایا جاتا ہے۔ $N(0,0,z)$ پر برقی دباو حاصل کریں۔

حل: شکل 4.7-الف میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔ $z=0$ سطح پر کروی نظام کا رداس $\boldsymbol{r}$ اور نلکی محدد کا رداس ρ برابر ہوتے ہیں۔ گول دائرے پہ $\boldsymbol{r'}$ کے مقام پر چھوٹی لکیر $\mathrm{d}L' = b\,\mathrm{d}\phi$ لکھی جا سکتی ہے۔ برقی دباو $\boldsymbol{r}$ پر درکار ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثا غورث کی مدد سے $\left|\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r}\right| = \sqrt{b^2+z^2}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 4.27 استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(0,0,z)$ پر

$$V=\int_0^{2\pi}\frac{\rho_L b\,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0\sqrt{b^2+z^2}}=\frac{\rho_L b}{2\epsilon_0\sqrt{b^2+z^2}}$$

1091 برقی دباو پایا جائے گا۔ گول دائرے کے عین وسط یعنی $(0,0,0)$ پر یوں $\frac{\rho_L}{2\epsilon_0}$ وولٹ کا برقی دباو پایا جائے گا۔

1092

مساوات 4.2 میں B کو لا محدود فاصلے پر لیتے ہوئے کسی بھی دو نقطوں A اور C کے حتمی برقی دباو یوں لکھے جا سکتے ہیں۔

$$V_A=-\int_\infty^A \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$
$$V_C=-\int_\infty^C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

شکل 4.7-ب میں یہ نقطے دکھائے گئے ہیں۔ اب اگر V_A دس وولٹ جبکہ V_C تین وولٹ کے برابر ہو تب C کے حوالے سے A پر سات وولٹ ہوں گے یعنی $V_{AC}=7\,\mathrm{V}$ ہو گا۔ اسی طرح A کے حوالے سے C پر منفی سات وولٹ ہوں گے یعنی $V_{CA}=-7\,\mathrm{V}$ ہو گا۔ یوں اگر کسی بھی راستے C سے A جایا جائے تو برقی دباو میں سات وولٹ کا اضافہ ہو گا جبکہ کسی بھی راستے واپس C لوٹنے سے برقی دباو میں سات وولٹ ہی کی کمی رونما ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے سے شروع ہو کر بند دائرے پر چلتے ہوئے واپس اسی نقطے تک پہنچنے سے برقی دباو میں کل کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہو گی۔ اس حقیقت کو یوں لکھا جاتا ہے

$$V_{AC}+V_{CA}=-\int_C^A \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}-\int_A^C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=0$$

جہاں پہلے C سے A اور پھر A سے واپس C پہنچا گیا۔ بند دائرے کے تکمل کو دو ٹکڑوں میں لکھنے کی بجائے اسے بند تکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے اسی مساوات کو یوں بہتر لکھا جا سکتا ہے

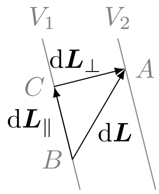
$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=0 \tag{4.28}$$

1093 جہاں تکمل کے نشان پر گول دائرہ بند تکمل کو ظاہر کرتا ہے۔

مساوات 4.28 کہتا ہے کہ کسی بھی طرح پیدا کئے گئے برقی میدان میں بند دائرے پر پورا چکر لگانے کے لئے صفر توانائی درکار ہوتی ہے۔ حقیقت میں یہ مساوات صرف وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے برقی میدان یعنی ساکن برقی میدان[14] کے لئے درست ہے۔ اس کتاب میں وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر بعد میں غور کیا جائے گا۔ ایسے میدان جس میں بند دائرے پر چلنے کی خاطر کوئی توانائی درکار نہ ہو کو بقائی میدان[15] کہتے ہیں۔ ساکن تجاذبی میدان بھی بقائی میدان[16] ہے۔ یوں تجاذبی میدان میں پہاڑی کی چوٹی تک پہنچنے سے مخفی توانائی میں جتنا اضافہ پیدا ہو، چوٹی سے واپس اترنے پر مخفی توانائی میں اتنی ہی کمی رونما ہو گی اور یوں آپ کی ابتدائی
1098 اور اختتامی مخفی توانائی عین برابر ہوں گے۔

---

[14] static electric field
[15] conservative field
[16] یہ جملہ لکھنے کے ٹھیک ایک دن بعد نرگس مولولہ اور ان کے ساتھیوں نے تجاذبی موجیں دریافت کیں۔ اس دریافت سے پہلے کسی بھی تجاذبی میدان کو بقائی میدان تصور کیا جاتا تھا۔ آج سے ہم ساکن تجاذبی میدان کو ہی بقائی میدان کہیں گے۔



شکل 4.8: برقی دباو کی ڈھلوان برقی میدان ہے۔

4.5 برقی دباو کی ڈھلوان 1099

شکل 4.8 میں دو انتہائی قریب ہم قوہ سطحیں دکھائی گئی ہیں جن پر V_1 اور V_2 برقی دباو پایا جاتا ہے۔ ہم قوہ سطح V_1 پر کسی نقطہ B سے ہم قوہ سطح V_2 پر کسی نقطہ A تک کا سمتی فاصلہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لیتے ہوئے B سے A تک حرکت کرنے سے برقی دباو میں $-\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ تبدیلی رونما ہو گی جہاں برقی میدان کو $\boldsymbol{E}$ لکھا گیا ہے۔

$$\mathrm{d}V = V_2 - V_1 = -\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.29}$$

چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر برقی میدان کو غیر تغیر پذیر تصور کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ دو نقطوں کے مابین برقی دباو کا ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے پہنچنے کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہٰذا ہم B سے C اور پھر A بھی جا سکتے تھے۔ B سے C تک فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel$ جبکہ C سے A تک فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp$ لکھتے ہوئے

$$\mathrm{d}V = -\boldsymbol{E}\cdot\left(\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel + \mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp\right) \tag{4.30}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $\boldsymbol{E}$ کو ہم قوہ سطحہ کے متوازی اور اس کے عمودی اجزاء کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\parallel + \boldsymbol{E}_\perp \tag{4.31}$$

جس سے

$$\mathrm{d}V = -(\boldsymbol{E}_\parallel + \boldsymbol{E}_\perp)\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel + \mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp) = -E_\parallel\,\mathrm{d}L_\parallel - E_\perp\,\mathrm{d}L_\perp \tag{4.32}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\boldsymbol{E}_\parallel$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel$ کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{E}_\parallel\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel = E_\parallel\,\mathrm{d}L_\parallel$ لکھا گیا ہے جبکہ $\boldsymbol{E}_\parallel$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp$ کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{E}_\parallel\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp = 0$ ہے۔ اس مساوات کا پہلا جزو $-E_\parallel\,\mathrm{d}L_\parallel$ نقطہ B اور C کے درمیان برقی دباو دیتا ہے۔ ہم قوہ سطح پر ہر جگہ برابر برقی دباو پایا جاتا ہے لہٰذا B اور C کے درمیان کسی قسم کا برقی دباو نہیں پایا جاتا یعنی $-E_\parallel\,\mathrm{d}L_\parallel$ صفر کے برابر ہے۔ اب چونکہ $\mathrm{d}L_\parallel$ صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا کسی بھی ہم قوہ سطح پر

$$\boldsymbol{E}_\parallel = 0 \tag{4.33}$$

ہو گا اور سطح پر صرف اور صرف عمودی برقی میدان پایا جائے گا یعنی

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\perp \tag{4.34}$$

یوں

$$\mathrm{d}V = -E_\perp\,\mathrm{d}L_\perp \tag{4.35}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ ہم قوہ سطح پر صرف عمودی میدان پایا جاتا ہے، مندرجہ بالا مساوات میں $\boldsymbol{E}_\perp$ کی جگہ $\boldsymbol{E}$ لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}V = -E\,\mathrm{d}L_\perp \tag{4.36}$$

اس مساوات سے

$$E=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}L_{\perp}} \tag{4.37}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ E در حقیقت V کے ڈھلوان کے برابر مگر الٹ سمت میں ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}L_{\perp}} \tag{4.38}$$

1100 لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ ہم قوہ سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

کسی نقطہ کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے کسی دوسرے نقطے کی برقی دباو کو حتمی برقی دباو تصور کیا جاتا ہے جو نقطے کے مقام پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا اسے $V(x,y,z)$ لکھا جا سکتا ہے جہاں برقی دباو کے آزاد متغیرات x، y اور z ہیں۔ کسی بھی قابو متغیرہ کی طرح $V(x,y,z)$ کا تفرق

$$\mathrm{d}V=\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y+\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{4.39}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی برقی دباو کو

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+E_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+E_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{4.40}$$

اور چھوٹی لمبائی کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \tag{4.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہاں آپ صفحہ 5 پر دئے مساوات 1.3 پر دوبارہ نظر ڈال سکتے ہیں۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y+\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z=-E_x\,\mathrm{d}x-E_y\,\mathrm{d}y-E_z\,\mathrm{d}z \tag{4.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔ y اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $\mathrm{d}y=0$ اور $\mathrm{d}z=0$ لیتے ہوئے) x تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ اور $-E_x\,\mathrm{d}x$ تبدیل ہوتے ہیں لہٰذا یہ لازم ہے کہ یہ دونوں اجزاء برابر ہوں یعنی $\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x=-E_x\,\mathrm{d}x$ جس سے $E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ اور $-E_x\,\mathrm{d}x$ برابر نہ ہوں تب مساوات کے ایک طرف تبدیلی دوسرے طرف کے تبدیلی کے برابر نہیں ہو گی اور یوں مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہیں گے۔ اسی طرح صرف y اور صرف z تبدیل کئے جا سکتا ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned}E_x&=-\frac{\partial V}{\partial x}\\E_y&=-\frac{\partial V}{\partial y}\\E_z&=-\frac{\partial V}{\partial z}\end{aligned} \tag{4.43}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے مساوت 4.40 میں پُر کرتے

$$\boldsymbol{E}=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right) \tag{4.44}$$

1101 لکھا جا سکتا ہے۔

اگر ہم

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} \qquad \text{کارتیسی محدد میں ڈھلوان کی مساوات} \tag{4.45}$$

لکھیں جہاں کسی بھی مقداری f کے لئے ∇f سے مراد $\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V \tag{4.46}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ∇V کو برقی دباو کی **ڈھلوان**[17] پڑھا جاتا ہے۔ مساوات 4.45 کا بایاں ہاتھ ڈھلوان کی علامت جبکہ اس کا دایاں ہاتھ ڈھلوان کے عمل کو ظاہر کرتا ہے۔ اگرچہ ہم نے ڈھلوان کا عمل برقی دباو اور برقی میدان کے لئے حاصل کیا، حقیقت میں یہ عمل سائنس کے دیگر متغیرات کے لئے بھی درست ثابت ہوتا ہے۔ اس کی مقبولیت اسی حقیقت کی وجہ سے ہے کہ یہ جگہ جگہ پیش آتا ہے۔ ڈھلوان کا عمل مقداری پر کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے۔ صفحہ 82 پر مساوات 3.32 پھیلاو کی تعریف بیان کرتا ہے جہاں پھیلاو کا عمل سمتیہ پر کرتے ہوئے مقداری[18] حاصل کی جاتی ہے۔ پھیلاو کے اس مساوات کو یہاں موازنے کے لئے دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{4.47}$$

1102

1103 مشق 4.3: تفاعل $f(x,y,z)=3+z^2e^y\sin x$ کا ڈھلوان حاصل کریں۔

1104 جواب: $z^2e^y\cos x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+z^2e^y\sin x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+2ze^y\sin x\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

1105

1106

1107 مثال 4.4: نقطہ $N_1(x_1,y_1,z_1)$ سے نقطہ $N_2(x_2,y_2,z_2)$ کا سمتی فاصلہ $\boldsymbol{R}_{21}=(x_2-x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(y_2-y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+(z_2-z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$

1108 ہے جبکہ ان کے مابین فاصلہ $R_{21}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ ہے۔ نقطہ N_2 پر $\frac{1}{R_{21}}$ کی ڈھلوان حاصل کریں۔

حل: نقطہ N_2 پر ڈھلوان حاصل کرتے وقت x_2، y_2 اور z_2 کو متغیرات تصور کیا جاتا ہے جبکہ x_1، y_1 اور z_1 کو اٹل قیمتیں تصور کیا جاتا ہے۔ یوں ڈھلوان کی تعریف

$$\nabla_2=\frac{\partial}{\partial x_2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\partial}{\partial y_2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\frac{\partial}{\partial z_2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

لکھی جائے گی جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 یاد دہانی کراتا ہے کہ نقطہ N_2 کے متغیرات ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے استعمال کئے جائیں گے۔ ڈھلوان کا پہلا جزو

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{R_{21}}&=\frac{\partial}{\partial x_2}\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\\
&=-\frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left[2(x_2-x_1)\right]\\
&=\frac{-(x_2-x_1)}{\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

---

[17] gradient

[18] طلباء و طالبات عموماً ڈھلوان کے حاصل جواب کے اکائی سمتیات کو غائب کرتے ہوئے انہیں پھیلاو کے ساتھ منسلک کر لیتے ہیں۔ ایسا کرنے سے گریز کریں۔

یعنی

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{R_{21}} = \frac{-(x_2 - x_1)}{R_{21}^3}$$

حاصل ہوتا ہے۔ بقایا دو اجزاء بھی بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے

$$\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} = \frac{-(x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - (y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - (z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{R_{21}^3}$$

یعنی

$$\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} = -\frac{\boldsymbol{R}_{21}}{R_{21}^3} = -\frac{\boldsymbol{a}_{R21}}{R_{21}^2} \tag{4.48}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 4.4: مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ N_2 پر ڈھلوان حاصل کی گئی۔ اب آپ نقطہ N_1 پر $\frac{1}{R_{21}}$ کی ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = \frac{\boldsymbol{R}_{21}}{R_{21}^3} \tag{4.49}$$

کے برابر ہے۔ یوں

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} \tag{4.50}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

4.5.1 نلکی محدد میں ڈھلوان

نلکی محدد میں برقی دباو کے آزاد متغیرات نلکی محدد کے متغیرات ہوں گے اور یوں برقی دباو $V(\rho, \phi, z)$ لکھا جائے گا۔ مساوات 4.39، مساوات 4.40 اور مساوات 4.41 کو نلکی محدد میں یوں لکھ سکتے ہیں

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{4.51}$$

$$\boldsymbol{E} = E_\rho \boldsymbol{a}_\rho + E_\phi \boldsymbol{a}_\phi + E_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{4.52}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho\,\boldsymbol{a}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi\,\boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{4.53}$$

جہاں چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو صفحہ 27 پر مساوات 1.44 کی مدد سے لکھا گیا ہے۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho+\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi+\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z=-\left(E_\rho\,\mathrm{d}\rho+E_\phi\rho\,\mathrm{d}\phi+E_z\,\mathrm{d}z\right) \tag{4.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ϕ اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $\mathrm{d}\phi=0$ اور $\mathrm{d}z=0$ لیتے ہوئے) ρ تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho$ اور $-E_\rho\,\mathrm{d}\rho$ تبدیل ہوتے ہیں۔ اگر یہ اجزاء ہر صورت برابر رہیں صرف اور صرف اسی صورت مندرجہ بالا مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہٰذا $\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho=-E_\rho\,\mathrm{d}\rho$ ہو گا جس سے $E_\rho=-\frac{\partial V}{\partial \rho}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح باری باری ϕ اور z تبدیل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}E_\phi\rho\,\mathrm{d}\phi&=-\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi\\E_z\,\mathrm{d}z&=-\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں جس سے E_ϕ اور E_z کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}E_\rho&=-\frac{\partial V}{\partial \rho}\\E_\phi&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\\E_z&=-\frac{\partial V}{\partial z}\end{aligned} \tag{4.55}$$

انہیں مساوات 4.52 میں پُر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E}=-\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right) \tag{4.56}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو مساوات 4.46 کی شکل میں لکھتے ہوئے نلکی محدد میں ڈھلوان کی مساوات

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \qquad \text{نلکی محدد میں ڈھلوان کی مساوات} \tag{4.57}$$

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 4.45 اور مساوات 4.57 کا موازنہ کریں۔ کارتیسی محدد کی مساوات نسبتاً آسان ہے۔ 1117

4.5.2 کروی محدد میں ڈھلوان 1118

صفحہ 33 پر مساوات 1.64 کروی محدد میں چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی مساوات ہے۔ کروی محدد میں کسی بھی نقطے کے برقی دباو کو $V(r,\theta\phi)$ لکھا جا سکتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کی طرح $\boldsymbol{E}$ کو تین عمودی حصوں میں لکھا جا سکتا ہے۔ یوں ہم مساوات 4.39، مساوات 4.40 اور مساوات 4.41 کو کروی محدد میں یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$\mathrm{d}V=\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r+\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta+\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi \tag{4.58}$$

$$\boldsymbol{E}=E_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+E_\theta\boldsymbol{a}_\theta+E_\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{4.59}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta+r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{4.60}$$

ان تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے 1119

$$\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r+\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta+\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi=-\Big(E_r\,\mathrm{d}r+E_\theta r\,\mathrm{d}\theta+E_\phi r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\Big) \tag{4.61}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب اگر ہم صرف r کو تبدیل کریں تب $\mathrm{d}\theta=0$ اور $\mathrm{d}\phi=0$ ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کے بائیں دائیں بازو کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r$ اور $-E_r\,\mathrm{d}r$ تبدیل ہوں گے۔ یہ اجزاء بالکل برابر ہونے کی صورت میں ہی مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہٰذا ہم $\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r=-E_r\,\mathrm{d}r$ لکھ سکتے ہیں جس سے $E_r=-\frac{\partial V}{\partial r}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح باری باری اور تبدیل کرتے ہوئے مساوات کے دونوں بازو کے اجزاء برابر لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta&=-E_\theta r\,\mathrm{d}\theta\\ \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi&=-E_\phi r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے E_θ اور E_ϕ کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}E_r&=-\frac{\partial V}{\partial r}\\ E_\theta&=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\\ E_\phi&=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\end{aligned}$$

ان قیمتوں کو مساوات 4.59 میں پُر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E}=-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi\right) \tag{4.62}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے کروی محدد میں ڈھلوان کی مساوات یوں لکھی جا سکتی ہے۔

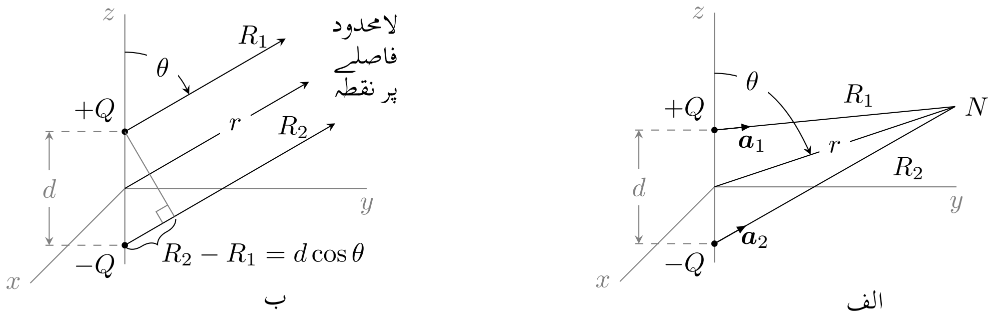
$$\nabla=\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi \qquad \text{کروی محدد میں ڈھلوان کی مساوات} \tag{4.63}$$

مشق 4.5: صفحہ 84 پر حصہ 3.10 میں پھیلاو کی عمومی مساوات کا حصول دکھایا گیا جہاں عمومی محدد کے متغیرات (u, v, w) اور اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u, \boldsymbol{a}_v, \boldsymbol{a}_w)$ لئے گئے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے ڈھلوان کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب:

$$\nabla=\frac{1}{K_1}\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{a}_u+\frac{1}{K_2}\frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{a}_v+\frac{1}{K_3}\frac{\partial}{\partial w}\boldsymbol{a}_w \qquad \text{ڈھلوان کی عمومی مساوات}$$

مثال 4.5: صفحہ 4.15 پر مساوات 4.15 نقطہ چارج کا برقی دباو دیتا ہے۔ مساوات 4.62 کے استعمال سے کروی محدد میں $\boldsymbol{E}$ کی مساوات حاصل کریں۔



شکل 4.9: جفت قطب

حل: برقی دباو $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ کروی محدد کے رداس پر منحصر ہے جبکہ θ اور ϕ کا اس میں کوئی کردار نہیں للذا مساوات 4.62 میں $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ اور $\frac{\partial V}{\partial \phi}$ صفر کے برابر ہوں گے۔اس طرح $\frac{\partial V}{\partial r}$ لیتے ہوئے $\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ حاصل ہوتا ہے۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباو معلوم ہوتی ہے جس سے برقی میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔اس کی مثال بجلی کی دو تاریں ہو سکتی ہیں جن کے درمیان 220 V پایا جاتا ہے اور جن کے درمیان آپ برقی میدان جاننا چاہتے ہوں۔

4.6 جفت قطب

شکل 4.9-الف میں محدد کے مرکز سے $\frac{d}{2}$ فاصلے پہ z محدد پر ایک جانب $+Q$ اور دوسری جانب $-Q$ نقطہ چارج دکھائے گئے ہیں۔یوں برابر مقدار مگر الٹ علامت کے نقطہ چارجوں کے درمیان d فاصلہ ہے۔ایسی جوڑی چارجوں کو **جفت قطب**[19] کہا جاتا ہے۔ہمیں جفت قطب سے دور نقطہ N پر برقی میدان اور برقی دباو کی قیمتیں درکار ہیں۔کسی بھی دور نقطے سے یہ دونوں چارج تقریباً مرکز پر دکھائی دیتے ہیں۔دور نقطے سے ایسا نقطہ مراد ہے جہاں مرکز سے نقطے تک کا فاصلہ r جفت قطب چارجوں کے درمیان فاصلہ d سے بہت زیادہ ہو یعنی جب $d \gg r$ ہو۔ہم دیکھ سکتے ہیں کہ r یا θ تبدیل کرنے سے برقی میدان تبدیل ہو گا جبکہ ϕ تبدیل کرنے سے ایسا نہیں ہو گا۔شکل 4.9-الف میں R_1 اور R_2 دونوں r کی جانب جھک کر N پر آ ملتے ہیں۔نقطہ N کو جتنا دور لے جایا جائے اتنی ہی R_1 اور R_2 دونوں r کے متوازی صورت اختیار کرتے ہیں حتٰی کہ آخر کار یہ شکل 4.9-ب کی طرح نظر آتے ہیں۔آئیں اس شکل کی مدد سے دور نقطے پر برقی دباو اور برقی میدان حاصل کریں۔

شکل 4.9-ب میں R_1، R_2 اور r تینوں z محدد کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔چارج $+Q$ سے R_2 پر عمود بناتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
R_2 - R_1 &= d\cos\theta \\
R_1 &= r - \frac{d}{2}\cos\theta \\
R_2 &= r + \frac{d}{2}\cos\theta
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔شکل 4.9-الف میں N پر برقی دباو V مساوات 4.22 کی مدد سے

$$
V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)
\tag{4.65}
$$

---

[19] dipole

لکھی جا سکتی ہے۔ مساوات 4.64 کی مدد سے اسے

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\cos\theta}{(r-\frac{d}{2}\cos\theta)(r+\frac{d}{2}\cos\theta)}\\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\cos\theta}{(r^2-\frac{d^2}{4}\cos^2\theta)}\\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{d\cos\theta}{(1-\frac{d^2}{4r^2}\cos^2\theta)}
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ نیچے قوسین میں $\cos\theta \leq 1$ اور $r \gg d$ کی وجہ سے $\frac{d^2}{4r^2}\cos^2\theta \ll 1$ ہو گا اور یوں $\frac{d^2}{4r^2}\cos^2\theta$ کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ یوں

$$
V = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{4.66}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.62 کو استعمال کرتے ہوئے اس مساوات سے برقی میدان لکھتے ہیں۔

$$
\boldsymbol{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{4.67}
$$

ہم پہلے برقی دباو اور پھر ڈھلوان کی مدد سے برقی میدان حاصل کرنے کے بجائے پہلے برقی میدان اور پھر تکمل استعمال کرتے ہوئے برقی دباو حاصل کر سکتے ہیں البتہ ایسا کرنا اتنا آسان ثابت نہیں ہوتا۔ شوق رکھنے والوں کے لئے مثال 4.6 میں اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے دور نقطے پر جفت قطب سے پیدا میدان اور برقی دباو حاصل کئے گئے ہیں۔

جفت قطب کا چارج $|Q|$ ضرب چارجوں کے درمیان سمتی فاصلہ $\boldsymbol{d}$ کو **معیار اثر جفت قطب**[20] کہتے ہیں اور اسے $\boldsymbol{p}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں

$$
\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d} \tag{4.68}
$$

کے برابر ہے جہاں سمتی فاصلہ منفی چارج سے مثبت چارج کی سمت میں ہوتا ہے لہٰذا شکل 4.9 میں $\boldsymbol{d} = d\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے۔ اس طرح چونکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \cos\theta$ کے برابر ہے لہٰذا یوں ہم مساوات 4.66 کو

$$
V = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{4.69}
$$

لکھ سکتے ہیں۔ اسی مساوات کو مزید یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

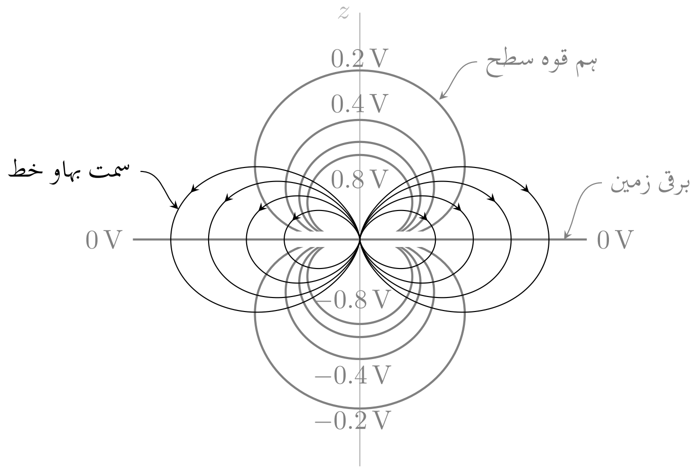
$$
V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.70}
$$

جہاں $\boldsymbol{r}$ اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی دباو حاصل کیا جا رہا ہو جبکہ $\boldsymbol{r}'$ جفت قطب کے مرکز کی نشاندہی کرتا ہے۔ یہ مساوات کسی بھی محدد نظام سے آزاد مساوات ہے۔

مساوات 4.66 کے تحت r بڑھانے سے برقی دباو r^2 گنا کم ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ اکیلے چارج کا برقی دباو ایسی صورت میں r گنا کم ہوتا ہے۔ ہمیں تعجب نہیں ہونا چاہیے چونکہ دور سے جفت قطب کے دو چارج نہایت قریب قریب نظر آتے ہیں جس سے مثبت چارج کا اثر منفی چارج کا اثر تقریباً ختم کرتا ہے۔ یہی حقیقت مساوات 4.67 میں بھی نظر آتا ہے جہاں r بڑھانے سے $\boldsymbol{E}$ کی قیمت r^3 گنا کم ہوتی ہے۔

جب تک Q ضرب d کی قیمت تبدیل نہ ہو اس وقت تک دور کسی بھی نقطے پر جفت قطب کے اثرات میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔ یوں Q کو کم یا زیادہ کرتے ہوئے اگر d کو یوں تبدیل کیا جائے کہ Qd تبدیل نہ ہو تو جفت قطب سے دور نقطے پر جفت قطب کے اثرات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جائے گی۔ اب اگر ہم Qd کی قیمت محدود رکھتے ہوئے d کو اتنا کم کر دیں کہ اسے صفر تصور کیا جا سکے اور ساتھ ہی ساتھ Q کو اتنا بڑھا دیں کہ اسے لامحدود تصور کیا جا سکے تو ایسی صورت میں ہمیں **نقطہ جفت قطب** حاصل ہو گا۔

[20] dipole moment



شکل 4.10: جفت قطب کے ہم قوہ اور سمت بہاو خط۔

4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاو خط

ہم پہلے صفحہ 63 پر حصہ 2.7 میں سمت بہاو خط[21] پر غور کر چکے ہیں۔ آئیں جفت قطب کے سمت بہاو خط کھینچنا دیکھیں۔ برقی دباو کے سمت بہاو خط مساوات 4.66 کی مدد سے کھینچے جا سکتے ہیں۔ اس مساوات میں $\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}$ مستقل ہے جسے ایک کے برابر لیتے ہوئے $V = \frac{\cos\theta}{r^2}$ حاصل ہوتا ہے۔ مختلف برقی دباو کی قیمتوں کے لئے اسے کھینچ کر برقی دباو کے سمت بہاو خط حاصل کئے جاتے ہیں۔ شکل 4.10 میں $V = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ کے لئے اس مساوات کے خط دکھائے گئے ہیں۔ مساوات 4.65 کے تحت دونوں چارج سے برابر فاصلہ پر $V = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں $z = 0$ لامحدود سطح پر برقی دباو صفر ہو گا اور یہ بطور برقی زمین کردار ادا کرے گی۔

جفت قطب کے میدان کے سمت بہاو خط مساوات 4.67 کی مدد سے کھینچے جاتے ہیں۔ اس مساوات کا پہلا جزو کسی بھی نقطے پر a_{r} سمت میں میدان E_r دیتا ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو اسی نقطے پر a_θ سمت میں میدان E_θ دیتا ہے۔ اس طرح اس نقطے پر ہم

$$\frac{E_r}{E_\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{r\,\mathrm{d}\theta} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

لکھ کر تکمل لیتے ہوئے

$$\ln r = 2\ln\sin\theta + \ln M$$

یا

$$r = M\sin^2\theta \tag{4.71}$$

حاصل کرتے ہیں جہاں $\ln M$ تکمل کا مستقل ہے۔ یہ مساوات جفت قطب کے میدان کے سمت بہاو خط دیتا ہے جنہیں شکل 4.10 میں $M = 1, 1.5, 2, 2.5$ کے لئے کھینچا گیا ہے۔ برقی زمین پر برقی میدان عمودی ہے۔

[21] streamlines

مثال 4.6: شکل 4.9-الف میں دکھائے گئے جفت قطب سے دور کسی نقطے N پر پہلے برقی میدان اور پھر اس برقی میدان کو استعمال کرتے ہوئے برقی دباو حاصل کریں۔

صفحہ 24 پر مثال 1.8 میں $\boldsymbol{R}_1 = R_1\boldsymbol{a}_1$ اور $\boldsymbol{R}_2 = R_2\boldsymbol{a}_2$ سمتیوں کو کروی نظام میں لکھنا دکھایا گیا ہے۔ انہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_1 &= (r - \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta \\
\boldsymbol{R}_2 &= (r + \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_\mathrm{r} - \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta
\end{aligned}
$$

جس سے $R_1 = |\boldsymbol{R}_1| = \sqrt{\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{R}_1}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \sqrt{\left(r - \frac{d}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right)^2} \\
&= r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{r^2}} \\
&\approx r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\theta} \qquad (d \ll r)
\end{aligned}
\tag{4.72}
$$

آخری قدم پر $r \gg d$ کی بنا پر $\frac{d^2}{r^2}$ کو رد کیا گیا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$
(a+b)^n = a^n + \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \cdots
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $a = 1$ اور $b = -\frac{d}{r}\cos\theta$ کے برابر ہوں تب مساوات 4.72 میں دئے R_1 کی طاقت تین کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$
R_1^3 = r^3(1 - \tfrac{d}{r}\cos\theta)^{\frac{3}{2}} = r^3\left(1 - \tfrac{3d}{2r}\cos\theta + \cdots\right)
$$

اس مساوات کے پہلے دو جزو دکھائے گئے ہیں۔ اس کے تیسرے جزو میں $\frac{d^3}{r^3}$ چوتھے جزو میں $\frac{d^4}{r^4}$ پائے جاتے ہیں لہٰذا پہلے دو اجزاء کے علاوہ تمام اجزاء کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ یوں

$$
R_1^3 = r^3\left(1 - \frac{3d}{2r}\cos\theta\right)
\tag{4.73}
$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔ یہی عمل R_2^3 کے لئے کرنے سے

$$
R_2^3 = r^3\left(1 + \frac{3d}{2r}\cos\theta\right)
\tag{4.74}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ صفحہ 44 پر مساوات 2.18 کو استعمال کرتے ہوئے دونوں چارجوں سے کل برقی میدان ان کے علیحدہ علیحدہ میدان کے مجموعہ لے کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}_2}{R_2^3} \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\left[(r - \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right]}{r^3(1 - \frac{3d}{2r}\cos\theta)} - \frac{\left[(r + \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_\mathrm{r} - \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right]}{r^3(1 + \frac{3d}{2r}\cos\theta)}\right) \\
&= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(\frac{2\cos\theta\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta}{(1 - \frac{3d}{2r}\cos\theta)(1 + \frac{3d}{2r}\cos\theta)}\right)
\end{aligned}
$$

اس مساوات میں کسر کے نچلے حصے کو ضرب دیتے ہوئے $(1 - \frac{9d^2}{4r^2}\cos^2\theta \approx 1)$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $\frac{d^2}{r^2}$ والے جزو کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ یوں

$$\boldsymbol{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{4.75}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.67 ہی ہے۔

آئیں اب مساوات 4.75 سے نقطہ $N_0(r,\theta,\phi)$ پر برقی دباو حاصل کریں۔ ہم برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر رکھتے ہیں۔ لامحدود فاصلے پر نقطہ $N_3(\infty,\theta',\phi')$ سے کروی محدد کے مرکز کی جانب سیدھا چلتے ہوئے ہم پہلے $N_2(r,\theta',\phi')$ تک پہنچتے ہیں۔ اس کے بعد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے ہم $N_1(r,\theta,\phi')$ پہنچیں گے اور آخر کار r اور θ تبدیل کئے بغیر $N_0(r,\theta,\phi)$ پہنچیں گے۔

صفحہ 33 پر مساوات 1.64 کروی محدد میں چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی مساوات ہے۔ اسے یہاں دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{4.76}$$

N_3 سے N_2 تک چلتے ہوئے $\mathrm{d}\theta = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ ہوں گے لہٰذا N_3 کے حوالے سے N_2 پر برقی دباو V_{23}

$$\begin{aligned}
V_{23} &= -\int_{N_3}^{N_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\int_{N_3}^{N_2}\frac{\left(2\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right)\cdot\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}{r^3}\\
&= -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\int_{N_3}^{N_2}\frac{2\cos\theta\,\mathrm{d}r}{r^3} = \left.\frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right|_{\infty,\theta',\phi'}^{r,\theta',\phi'} = \frac{Qd\cos\theta'}{4\pi\epsilon_0 r^2}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب N_2 سے N_1 چلتے ہیں۔ ہم اس راستے $\mathrm{d}r = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ رکھتے ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned}
V_{12} &= -\int_{N_2}^{N_1}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\int_{N_2}^{N_1}\frac{\left(2\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right)\cdot r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta}{r^3}\\
&= -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\int_{N_2}^{N_1}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{r^2} = \left.\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}\right|_{r,\theta',\phi'}^{r,\theta,\phi'} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\cos\theta - \cos\theta')}{r^2}
\end{aligned}$$

ہو گا۔ اب N_1 سے N چلتے ہیں۔ اس راستے $\mathrm{d}r = 0$ اور $\mathrm{d}\theta = 0$ رکھے گئے ہیں لہٰذا

$$V_{01} = -\int_{N_1}^{N_0}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\int_{N_1}^{N_0}\frac{\left(2\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right)\cdot r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi}{r^3} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 0$ اور $\boldsymbol{a}_\theta\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 0$ کی بدولت تکمل صفر کے برابر لیا گیا ہے۔ یوں V_{23}، V_{12} اور V_{01} جمع کرتے ہوئے N_3 سے N_0 تک کا برقی دباو

$$V_0 = V_{03} = V_{23} + V_{12} + V_{01} = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{4.77}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.66 ہی ہے۔

مندرجہ بالا مثال سے آپ نے دیکھ لیا ہو گا کہ پہلے برقی میدان اور بعد میں برقی دباو حاصل کرنا زیادہ مشکل کام ہے۔ برقی دباو کی افادیت اس مثال سے صاف ظاہر ہے۔ حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباو ہی معلوم ہوتی ہے جیسے دو متوازی دھاتی چادروں کے درمیان برقی دباو یا گھریلو صارفین کے ہاں دو برقی تاروں کے درمیان برقی دباو۔ ہم ایسی برقی دباو جانتے ہوئے اس سے مختلف متغیرات حاصل کرتے ہیں۔

4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

برقی دباو پر غور کرتے ہوئے ہم نے دیکھا کہ برقی میدان میں لا محدود فاصلے سے چارج کو کسی نقطہ منتقل کرنے کے لئے توانائی درکار ہوتی ہے۔ یہ توانائی چارج کو حرکت دینے والا محرک مہیا کرتا ہے۔ چونکہ توانائی اٹل ہے لہٰذا یہ توانائی بصورت مخفی توانائی چارج میں منتقل ہو جاتی ہے۔ جب تک بیرونی قوت چارج کو اس نقطے پر روکے رکھے یہ توانائی چارج میں بطور مخفی توانائی رہے گی۔ اگر چارج کو بیرونی طاقت نہ روکے تو مخفی توانائی حرکی[22] توانائی میں تبدیل ہوتے ہوئے چارج کو حرکت دے گی۔ یوں اب چارج از خود کام کرنے کے قابل ہو گا۔

آئیں دیکھیں کہ اگر اسی طرح مختلف چارج کو لا محدود فاصلے سے مختلف مقامات پر لا کر وہیں روکے رکھا جائے تو اس پورے نظام کی کل مخفی توانائی کتنی ہو گی۔ یہ توانائی ان چارجوں کو اپنی اپنی جگہوں پر منتقل کرنے کے لئے درکار بیرونی توانائی کے مجموعے سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

شروع خالی خلاء سے کرتے ہیں۔ خالی خلاء میں چونکہ کوئی چارج نہیں پایا جاتا لہٰذا اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہو گا۔ یوں پہلے چارج Q_1 کو لا محدود فاصلے سے نقطہ N_1 منتقل کرنے کے لئے صفر توانائی درکار ہو گی۔ اب چونکہ خلاء میں Q_1 موجود ہے لہٰذا دوسرے چارج Q_2 کو نقطہ N_2 منتقل کرنے کے لئے $Q_2V_{2,1}$ توانائی درکار ہو گی جہاں N_2 پر پہلے چارج کی وجہ سے پیدا برقی دباو کو $V_{2,1}$ لکھا گیا ہے۔ $V_{2,1}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلا عدد منتقل کئے جانے والے چارج کی نشاندہی کرتا ہے جبکہ پہلا عدد منتقلی کے نقطے پر برقی دباو پیدا کرنے والے چارج کی نشاندہی کرتا ہے۔ یوں

$$\text{چارج } Q_2 \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی} = Q_2V_{2,1}$$

لکھا جائے گا۔ اب خلاء میں دو عدد چارج پائے جاتے ہیں لہٰذا نقطہ N_3 پر Q_1 سے پیدا $V_{3,1}$ اور Q_2 سے پیدا $V_{3,2}$ برقی دباو ہوں گے۔ یوں N_3 پر کل $V_{3,1}+V_{3,2}$ برقی دباو ہو گا لہٰذا

$$\text{چارج } Q_3 \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی} = Q_3V_{3,1} + Q_3V_{3,2}$$

اور اسی طرح

$$\text{چارج } Q_4 \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی} = Q_4V_{4,1} + Q_4V_{4,2} + Q_4V_{4,3}$$

ہو گا۔ یہی طریقہ کار مزید چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی دریافت کرنے کے لئے استعمال کیا جائے گا۔ کل مخفی توانائی W تمام چارجوں کو منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے برابر ہو گا جو مندرجہ بالا طرز کے تمام جوابات کا مجموعہ ہو گا یعنی

$$\begin{aligned} W &= Q_2V_{2,1} + Q_3V_{3,1} + Q_3V_{3,2} + Q_4V_{4,1} + Q_4V_{4,2} + Q_4V_{4,3} + \cdots \\ &= Q_2(V_{2,1}) + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2}) + Q_4(V_{4,1} + V_{4,2} + V_{4,3}) + \cdots \end{aligned} \tag{4.78}$$

مندرجہ بالا مساوات میں کسی رکن مثلاً $Q_4V_{4,2}$ کو دیکھیں۔ اسے یوں

$$Q_4V_{4,2} = Q_4\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{42}} = Q_2\frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 R_{24}} = Q_2V_{2,4}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں Q_2 اور Q_4 کے درمیان مقداری فاصلے کو R_{42} یا R_{24} لکھا جا سکتا ہے۔ اس طرح $Q_4V_{4,2}$ کو $Q_2V_{2,4}$ لکھا جا سکتا ہے۔ اس طرح مساوات 4.78 کے ہر جزو کو تبدیل کرتے ہوئے اسے

$$\begin{aligned} W &= Q_1V_{1,2} + Q_1V_{1,3} + Q_2V_{2,3} + Q_1V_{1,4} + Q_2V_{2,4} + Q_3V_{3,4} + \cdots \\ &= Q_1(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots) + Q_2(V_{2,3} + V_{2,4} + \cdots) + Q_3(V_{3,4} + \cdots) \end{aligned} \tag{4.79}$$

kinetic energy[22]

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 4.78 اور مساوات 4.79 کو جمع کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
2W = \quad & Q_1(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots) \\
& + Q_2(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \cdots) \\
& + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \cdots) \\
& + \cdots
\end{aligned}
\tag{4.80}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے پہلے قوسین میں $V_{1,2}$ نقطہ N_1 پر Q_2 کا پیدا کردہ برقی دباو ہے۔ اسی طرح $V_{1,3}$ نقطہ N_1 پر Q_3 کا پیدا کردہ برقی دباو ہے جبکہ $V_{1,4}$ یہیں پر Q_4 کا پیدا کردہ برقی دباو ہے۔ یوں قوسین میں بند قیمت نقطہ N_1 پر تمام چارجوں کا مجموعی برقی دباو V_1 ہے۔ یاد رہے کہ N_1 پر برقی دباو حاصل کرتے وقت یہیں پر پائے جاتے چارج Q_1 کو شامل نہیں کیا جاتا۔ یوں

$$
V_1 = V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots
$$

کے برابر ہے۔ اس طرح مندرجہ بالا مساوات سے

$$
W = \frac{1}{2}\left(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3 + \cdots\right) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} Q_mV_m \tag{4.81}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$
\begin{aligned}
V_1 &= V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots \\
V_2 &= V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \cdots \\
V_3 &= V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \cdots
\end{aligned}
$$

1176 لکھے گئے ہیں۔

ایسی حجم جس میں حجمی چارج کثافت ρ_h پائی جائے کی کل مخفی توانائی حاصل کرنے کی غرض سے چھوٹے چھوٹے حجم $\mathrm{d}h$ میں چارج $\mathrm{d}Q = \rho_h \,\mathrm{d}h$ کو نقطہ چارج تصور کرتے ہوئے مساوات 4.81 کا استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ایسی صورت میں یہ مساوات تکمل کی شکل اختیار کر لے گی یعنی

$$
W = \frac{1}{2}\int_h \rho_h V \,\mathrm{d}h \tag{4.82}
$$

1177 جہاں تکمل پورے حجم h کے لئے حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 4.7 میں کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل مساوات کا ثبوت دکھایا گیا ہے۔

$$
\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V) \tag{4.83}
$$

مساوات 4.83 اور صفحہ 82 پر مساوات 3.33 کے استعمال سے مساوات 4.82 کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{D}) V \,\mathrm{d}h \\
&= \frac{1}{2}\int_h \left[\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) - \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V)\right] \mathrm{d}h
\end{aligned}
\tag{4.84}
$$

اس مساوات میں تکمل کے دو اجزاء ہیں۔ پہلے جزو کو مسئلہ پھیلاو، جسے صفحہ 87 پر مساوات 3.43 دیتا ہے، کی مدد سے بند سطحی تکمل کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\frac{1}{2}\int_h \nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) \,\mathrm{d}h = \frac{1}{2}\oint_S (V\boldsymbol{D}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{4.85}
$$

جہاں بائیں جانب حجم h جبکہ دائیں جانب اس حجم کی سطح S پر تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ h اس حجم کو ظاہر کرتا ہے جس میں مساوات 4.82 کے تمام چارج پائے جاتے ہیں۔ مساوات 4.82 میں حجم کے ایسے حصے بھی ہوں گے جہاں چارج کثافت ρ_h کی قیمت صفر ہو گی۔ ایسے حصوں کا تکمل $\rho_h = 0$ کی بنا پر صفر کے برابر ہو گا۔ یوں اگر حجم کو لا محدود کر دیا جائے تب بھی تکمل کی قیمت وہی رہے گی چونکہ ایسی اضافی حجم میں $\rho_h = 0$ ہو گا۔ مساوات 4.85 میں یوں حجم کو لا محدود لیا جا سکتا ہے۔ لا محدود حجم کو گھیرتی سطح کو کرہ شکل کا تصور کرتے ہوئے ایسی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہو گی جہاں $r \to \infty$ ہو گا۔ لا محدود رداس کی سطح سے دیکھتے ہوئے کسی بھی شکل کا چارج کثافت نقطہ مانند چارج Q نظر آئے گا جو سطح پر $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ میدان اور $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ برقی دباو پیدا کرے گا۔ یوں مساوات 4.85 کے دائیں جانب بند تکمل رداس کے ساتھ $\frac{1}{r}$ کا تعلق رکھتا ہے اور $r \to \infty$ کی صورت میں ایسا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ یوں مساوات 4.84 کو

$$W = -\frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{D}\cdot(\nabla V)\,\mathrm{d}h$$

یا

$$W = \frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}h = \frac{\epsilon_0}{2}\int_h E^2\,\mathrm{d}h \tag{4.86}$$

1178 لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 4.46 اور صفحہ 70 پر مساوات 3.3 کی مدد لی گئی ہے۔

1179

مثال 4.7: مساوات 4.83 کو

$$\nabla\cdot(V\boldsymbol{D}) = V(\nabla\cdot\boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D}\cdot(\nabla V)$$

1180 کو ثابت کریں۔

حل: مساوات 4.83 کا بائیں بازو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(V\boldsymbol{D}) &= \nabla\cdot(V[D_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + D_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + D_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}])\\
&= \nabla\cdot(VD_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + VD_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}} + VD_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})\\
&= \frac{\partial(VD_x)}{\partial x} + \frac{\partial(VD_y)}{\partial y} + \frac{\partial(VD_z)}{\partial z}\\
&= \frac{\partial V}{\partial x}D_x + V\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}D_y + V\frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}D_z + V\frac{\partial D_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

ایک جیسے اجزاء کو اکٹھے کرتے ہوئے

$$\nabla\cdot(V\boldsymbol{D}) = V\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial V}{\partial x}D_x + \frac{\partial V}{\partial y}D_y + \frac{\partial V}{\partial z}D_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اب مساوات 4.83 کا دایاں بازو حل کرتے ہیں جہاں

$$V\nabla\cdot\boldsymbol{D} = V\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)$$

اور

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}\cdot\nabla V&=(D_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+D_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+D_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}})\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Y}}+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}\right)\\&=D_x\frac{\partial V}{\partial x}+D_y\frac{\partial V}{\partial y}+D_z\frac{\partial V}{\partial z}\end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔انہیں جمع کرتے ہوئے مساوات 4.83 کا بایاں بازو ہی ملتا ہے۔یاد رہے کہ $D_x\frac{\partial V}{\partial x}$ کو $D_x\frac{\partial V}{\partial x}$ لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 4.8: صفحہ 54 پر مساوات 2.44 دو لا محدود چادروں کے درمیان برقی میدان دیتا ہے جہاں ایک چادر پر ρ_S+ اور دوسری چادر پر ρ_S- سطحی کثافت چارج پایا جاتا ہے۔اگر ان چادروں کے مابین فاصلہ a ہو تب چادروں پر آمنے سامنے S سطح لیتے ہوئے حجم aS میں کل مخفی توانائی حاصل کریں۔

حل: چادروں کے مابین $E=\frac{\rho_S}{\epsilon_0}$ ہے جو اٹل مقدار ہے لہٰذا اسے مساوات 4.86 میں تکمل سے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔یوں

$$W=\frac{\epsilon_0}{2}\frac{\rho_S^2}{\epsilon_0^2}\int_h \mathrm{d}h=\frac{\rho_S^2 Sa}{2\epsilon_0} \tag{4.87}$$

حاصل ہوتا ہے۔آئیں اسی نتیجے کو مساوات 4.82 کی مدد سے حاصل کریں۔منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر $Ea=\frac{\rho_S a}{\epsilon_0}$ برقی دباو ہو گا۔منفی چادر پر برقی دباو چونکہ صفر لیا گیا ہے لہٰذا مساوات 4.82 کا تکمل لیتے ہوئے منفی چادر پر تکمل صفر کے برابر ہو گا۔اسی طرح دونوں چادروں کے درمیان چارج نہیں پایا جاتا لہٰذا اس حجم پر بھی تکمل صفر کے برابر ہو گا۔مثبت چادر پر سطحی چارج کثافت کو حجمی چارج کثافت میں یوں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔الٹ قطب کے چارجوں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے لہٰذا چادروں پر آپس میں قریبی سطحوں پر چارج پایا جائے گا۔یوں مثبت چادر کے S حصے پر چارج $\rho_S S$ کو t موٹائی اور S رقبے کے حجم پر تقسیم کرتے ہوئے $\frac{\rho_S}{t}$ حجمی چارج کثافت تصور کیا جا سکتا ہے جہاں t نہایت کم موٹائی ہے یعنی $t\to 0$ ہے۔اس چارج کو $(a-t/2)$ تا $(a+t/2)$ خطے میں تصور کرتے ہوئے یوں

$$W=\frac{1}{2}\int_S\int_{a-t/2}^{a+t/2}\frac{\rho_S}{t}\frac{\rho_S a}{\epsilon_0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}S=\frac{\rho_S^2 Sa}{2\epsilon_0} \tag{4.88}$$

ہی دوبارہ حاصل ہوتا ہے۔

اس باب میں ہم مخفی توانائی کی بات کرتے رہے لیکن کہیں پر بھی یہ ذکر نہیں کیا کہ مخفی توانائی آخر کہاں ذخیرہ ہوتی ہے۔اس کا جواب آج تک کوئی نہیں بتلا سکا ہے۔آئیں دیکھیں کہ یہ بتلانا اتنا مشکل کیوں ہے۔

مساوات 4.87 سے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ مخفی توانائی دو چادروں کے درمیان برقی میدان میں ذخیرہ ہے البتہ مساوات 4.88 کے حصول کو دیکھتے ہوئے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ منفی چادر اور چادروں کے درمیان صفر توانائی پائی جاتی ہے جبکہ تمام کی تمام مخفی توانائی مثبت چادر پر ہے۔اسی طرح اگر ہم مثبت چادر کو برقی زمین تصور کرتے تب منفی چادر پر برقی دباو $Ea-$ ہوتا اور مخفی توانائی منفی چادر میں نظر آتی۔ہم دو چادروں کے بالکل درمیانی نقطے کو برقی زمین لے سکتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے مثبت چادر پر $\frac{Ea}{2}$ اور منفی چادر پر $\frac{-Ea}{2}$ برقی دباو حاصل ہوتی ہے اور مخفی توانائی برابر دونوں چادروں میں نظر آئے گی۔برقی زمین کو دو چادروں کے درمیان کسی بھی نقطے پر رکھا جا سکتا ہے اور ایسا کرنے سے مثبت اور منفی چادروں میں مخفی توانائی کی تقسیم کے جوابات تبدیل ہوتے رہیں گے۔اگرچہ ان تمام طریقوں سے کل مخفی توانائی کی صحیح قیمت حاصل ہوتی ہے لیکن ان سے کسی صورت یہ معلوم نہیں کیا جا سکتا ہے کہ مخفی توانائی ذخیرہ کہاں ہوتی ہے۔اس حقیقت کے ساتھ ہی زندگی بسر کرنا سیکھ لیں۔

سوالات

سوال 4.1: برقی میدان $\boldsymbol{E}=(y+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}+(x+z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+(x+y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ میں $-0.1\,\mathrm{C}$ کے چارج کو نقطہ $(1,0,2)$ سے نقطہ $(0,0,2)$ اور یہاں سے نقطہ $(0,1,2)$ لایا جاتا ہے۔ دونوں راستوں کا علیحدہ علیحدہ اور کل درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات: $0.2\,\mathrm{J}$، $-0.2\,\mathrm{J}$ اور $0\,\mathrm{J}$

سوال 4.2: مثال 4.8 کے طرز پر L لمبائی ہم محوری تار میں مخفی توانائی حاصل کریں۔ اندرونی تار کا رداس a جبکہ بیرونی تار کا رداس b ہے۔

جواب: $W=\frac{\pi L a^2\rho_S^2}{\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$

باب 16

سوالات

16.1 توانائی