

برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
 کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

3

1	سمتیات	1
1	4	
1.1	مقداری اور سمتیہ	1
1	5	
1.2	سمتی الجبرا	1
2	6	
1.3	کارتیسی محدود	1
3	7	
1.4	اکائی سمتیات	1
5	8	
1.5	میدانی سمتیہ	1
9	9	
1.6	سمتی رقبہ	1
9	10	
1.7	غیر سمتی ضرب	1
10	11	
1.8	سمتی ضرب یا صلیبی ضرب	1
14	12	
1.9	گول نلکی محدود	1
17	13	
1.9.1	نلکی اکائی سمتیات کا کارتسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب	1
20	14	
1.9.2	نلکی اور کارتسی اکائی سمتیات کا تعلق	1
20	15	
1.9.3	نلکی لامحدود سطحیں	1
25	16	
1.10	کروی محدود	1
27	17	
2	کولومب کا قانون	2
39	18	
2.1	قوت کشش یا دفع	2
39	19	
2.2	برقی میدان کی شدت	2
43	20	
2.3	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان	2
46	21	
2.4	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	2
51	22	
2.5	چارج بردار حجم	2
55	23	
2.6	مزید مثال	2
56	24	
2.7	برقی میدان کے سمت بہاؤ خط	2
64	25	

69 ²⁶	گاؤس کا قانون اور پھیلاؤ	3
69 ²⁷	ساکن چارج	3.1
69 ²⁸	فیراڈے کا تجربہ	3.2
70 ²⁹	گاؤس کا قانون	3.3
72 ³⁰	گاؤس کے قانون کا استعمال	3.4
72 ³¹	نقطہ چارج	3.4.1
74 ³²	یکساں چارج بردار کروی سطح	3.4.2
74 ³³	یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر	3.4.3
75 ³⁴	ہم محوری تار	3.5
77 ³⁵	یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح	3.6
77 ³⁶	انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق	3.7
80 ³⁷	پھیلاؤ	3.8
82 ³⁸	نلکی محدود میں پھیلاؤ کی مساوات	3.9
84 ³⁹	پھیلاؤ کی عمومی مساوات	3.10
86 ⁴⁰	مسئلہ پھیلاؤ	3.11
93 ⁴¹	توانائی اور برقی دباؤ	4
93 ⁴²	توانائی اور کام	4.1
94 ⁴³	لکیری تکملہ	4.2
99 ⁴⁴	برقی دباؤ	4.3
100 ⁴⁵	نقطہ چارج کا برقی دباؤ	4.3.1
101 ⁴⁶	لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ	4.3.2
102 ⁴⁷	ہم محوری تار کا برقی دباؤ	4.3.3
102 ⁴⁸	متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباؤ	4.4
106 ⁴⁹	برقی دباؤ کی ڈھلوان	4.5
110 ⁵⁰	نلکی محدود میں ڈھلوان	4.5.1
111 ⁵¹	کروی محدود میں ڈھلوان	4.5.2
112 ⁵²	جفت قطب	4.6
114 ⁵³	جفت قطب کے سمت بہاؤ خط	4.6.1
117 ⁵⁴	ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی	4.7

125 _s	موصل، ذو برق اور کیپسٹر	5
125 _{s6}	برقی رو اور کثافت برقی رو	5.1
127 _{s7}	استمراری مساوات	5.2
129 _{s8}	موصل	5.3
134 _{s9}	موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط	5.4
137 _{s10}	عکس کی ترکیب	5.5
140 _{s11}	نیم موصل	5.6
141 _{s12}	ذو برق	5.7
146 _{s13}	کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط	5.8
150 _{s14}	موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط	5.9
150 _{s15}	کیپسٹر	5.10
151 _{s16}	5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر	
152 _{s17}	5.10.2 ہم محوری کیپسٹر	
153 _{s18}	5.10.3 ہم کوہ کیپسٹر	
154 _{s19}	5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کیپسٹر	
155 _{s20}	5.12 دو متوازی تاروں کا کیپسٹنس	
163 _{s21}	پوٹنسن اور لاپلاس مساوات	6
165 _{s22}	6.1 مسئلہ یکنائی	
166 _{s23}	6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے	
167 _{s24}	6.3 نلکی اور کروی محدود میں لاپلاس کی مساوات	
168 _{s25}	6.4 لاپلاس مساوات کے حل	
174 _{s26}	6.5 پوٹنسن مساوات کے حل کی مثال	
177 _{s27}	6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل	
184 _{s28}	6.7 عددی دہرائے کا طریقہ	

191 ⁷⁹	ساکن مقناطیسی میدان	7
191 ⁸⁰	بایوٹ-سیوارٹ کا قانون	7.1
195 ⁸¹	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.2
200 ⁸²	گردش	7.3
207 ⁸³	نلکی محدود میں گردش	7.3.1
212 ⁸⁴	عمومی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.2
214 ⁸⁵	کروی محدود میں گردش کی مساوات	7.3.3
215 ⁸⁶	مسئلہ سٹوکس	7.4
218 ⁸⁷	مقناطیسی بہاؤ اور کثافت مقناطیسی بہاؤ	7.5
225 ⁸⁸	غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباؤ	7.6
230 ⁸⁹	ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول	7.7
230 ⁹⁰	سمتی مقناطیسی دباؤ	7.7.1
232 ⁹¹	ایمپیٹر کا دوری قانون	7.7.2
237 ⁹²	مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ	8
237 ⁹³	متحرک چارج پر قوت	8.1
238 ⁹⁴	تفرقی چارج پر قوت	8.2
241 ⁹⁵	برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت	8.3
242 ⁹⁶	قوت اور مروڑ	8.4
247 ⁹⁷	فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے	8.5
248 ⁹⁸	مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل	8.6
251 ⁹⁹	مقناطیسی سرحدی شرائط	8.7
252 ¹⁰⁰	مقناطیسی دور	8.8
255 ¹⁰¹	مقناطیسی مخفی توانائی	8.9
256 ¹⁰²	خود امالہ اور مشترکہ امالہ	8.10
260 ¹⁰³	مشترکہ امالہ	8.11

263 ₀₄	وقت کے ساتھ بدلنے میدان اور میکس ویل کے مساوات	9
263 ₀₅	فیراڈے کا قانون	9.1
269 ₀₆	انتقالی برقی رو	9.2
273 ₀₇	میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل	9.3
274 ₀₈	میکس ویل مساوات کی تکمل شکل	9.4
276 ₀₉	تاخیری دباؤ	9.5
281 ₁₀	مستوی امواج	10
281 ₁₁	خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج	10.1
282 ₁₂	برقی و مقناطیسی مستوی امواج	10.2
289 ₁₃	10.2.1 خالی خلاء میں امواج	
291 ₁₄	10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج	
293 ₁₅	10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج	
296 ₁₆	10.3 پوئنٹنگ سمتیہ	
300 ₁₇	10.4 موصل میں امواج	
306 ₁₈	10.5 انعکاس مستوی موج	
312 ₁₉	10.6 شرح ساکن موج	
319 ₂₀	11 ترسیلی تار	
319 ₂₁	11.1 ترسیلی تار کے مساوات	
323 ₂₂	11.2 ترسیلی تار کے مستقل	
324 ₂₃	11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل	
327 ₂₄	11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل	
328 ₂₅	11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار	
329 ₂₆	11.3 ترسیلی تار کے چند مثال	
334 ₂₇	11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتیہ نقشہ	
341 ₂₈	11.4.1 سمتیہ فراوانی نقشہ	
342 ₂₉	11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال	

347 ₁₃₀	12	تقطیب موج
347 ₁₃₁	12.1	خطی، بیضوی اور دائری تقطیب
350 ₃₂	12.2	بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پرنٹنگ سمتیہ
353 ₃₃	13	ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار
353 ₃₄	13.1	ترچھی آمد
364 ₃₅	13.2	ترسیم بائی گن
367 ₁₃₆	14	مویج اور گھمکیا
367 ₁₃₇	14.1	برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ
368 ₃₈	14.2	دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج
374 ₃₉	14.3	کھوکھلا مستطیلی مویج
383 ₄₀	14.3.1	مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور
390 ₄₁	14.4	مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج
394 ₄₂	14.5	کھوکھلی نالی مویج
401 ₄₃	14.6	انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف
403 ₄₄	14.7	انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف
405 ₄₅	14.8	سطحی موج
410 ₄₆	14.9	ذو برق تختی مویج
413 ₄₇	14.10	شیش ریشہ
416 ₄₈	14.11	پردہ بصارت
418 ₄₉	14.12	گھمکی خلاء
421 ₁₅₀	14.13	میکس ویل مساوات کا عمومی حل

429 ^{s1}	
429 ^{s2}	15.1 تعارف
429 ^{s3}	15.2 تاخیری دباو
431 ^{l54}	15.3 تکمل
432 ^{s5}	15.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا
440 ^{s6}	15.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت
444 ^{s7}	15.6 ٹھوس زاویہ
445 ^{s8}	15.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افرائش
452 ^{s9}	15.8 قطاری ترتیب
452 ^{s60}	15.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع
453 ^{s61}	15.8.2 ضرب نقش
454 ^{s62}	15.8.3 ثنائی قطار
456 ^{s63}	15.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار
458 ^{s64}	15.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار
458 ^{s65}	15.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار
462 ^{s66}	15.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلنے زاویہ اخراجی اینٹینا
463 ^{s67}	15.9 تداخل پیمہ
464 ^{s68}	15.10 مسلسل خطی اینٹینا
465 ^{s69}	15.11 مستطیل سطحی اینٹینا
468 ^{s70}	15.12 اخراجی سطح پر میدان اور دور میدان آپس کے فوریر بدل ہیں
468 ^{s71}	15.13 خطی اینٹینا
473 ^{s72}	15.14 چلتے موج اینٹینا
474 ^{s73}	15.15 چھوٹا گھیرا اینٹینا
475 ^{s74}	15.16 پیچ دار اینٹینا
477 ^{s75}	15.17 دو طرفہ کردار
479 ^{s76}	15.18 جھری اینٹینا
480 ^{s77}	15.19 پیپا اینٹینا
482 ^{s78}	15.20 فرانس ریڈار مساوات
485 ^{s79}	15.21 ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیل کارکردگی
487 ^{s80}	15.22 حرارت نظام اور حرارت بعید
489 ^{s81}	16 سوالات
489 ^{s82}	16.1 موصل

موصل، ذو برق اور کپیسٹر

اس باب میں ہم برقی رو اور کثافت برقی رو سے شروع ہو کر بنیادی **استمراری مساوات**¹ حاصل کریں گے۔ اس کے بعد اوہم کے قانون کی نقطہ شکل اور اس کی ہڈی شکل حاصل کریں گے۔ دو اجسام کے سرحد پر **سرحدی شرائط**² حاصل کرتے ہوئے **عکس**³ کے طریقے کا استعمال دیکھیں گے۔

ذو برق⁴ کی تقطیب⁵ پر غور کرتے ہوئے جزو برقی مستقل حاصل کریں گے۔ اس کے بعد کپیسٹر پر غور کیا جائے گا۔ سادہ شکل و صورت رکھنے والے کپیسٹر کی قیمتیں حاصل کی جائیں گی۔ ایسا گزشتہ بابوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے کیا جائے گا۔

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو

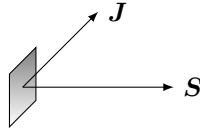
جیسے پانی کے حرکت کو پانی کا بہاؤ کہتے ہیں، اسی طرح برقی چارج کے حرکت کو برقی رو کہتے ہیں۔ برقی رو کو I اور i سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ برقی رو کی اکائی ایمپیر (A) ہے۔ کسی نقطے یا سطح سے ایک کولمب چارج فی سیکنڈ کے گزر کو ایک ایمپیر کہتے ہیں۔ یوں

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (5.1)$$

لکھا جائے گا۔

ایسی موصل تار جس کی ایک سرے سے دوسری سرے تک موٹائی مسلسل کم ہوتی ہو کے بالکل محور پر برقی چارج محوری سمت میں حرکت کرے گا جبکہ محور سے دور چارج کی حرکت تار کی موٹائی کم یا زیادہ ہونے کی وجہ سے قدرِ ترجیحی ہوگی۔ یوں اگرچہ تار میں ہر مقام پر برقی رو کی مقدار برابر ہے لیکن برقی رو کی سمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ اسی بنا پر ہم برقی رو کو مقداری تصور کریں گے۔ اگر تار کی موٹائی انتہائی کم ہو تب برقی رو سمتیہ مانند ہوگا لیکن ایسی صورت میں بھی ہم اسے مقداری ہی تصور کرتے ہوئے تار کی لمبائی کو سمتیہ لیں گے۔

continuity equation¹
boundary conditions²
images³
dielectric⁴
polarization⁵



شکل 5.1: سطح سے گزرتی برقی رو۔

تثبت کثافت برقی رو⁶ سے مراد برقی رونی اکائی مربع سطح ($\frac{A}{m^2}$) ہے اور اسے J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر چھوٹی سطح ΔS سے عمودی سمت میں ΔI برقی رو گزرے

$$(5.2) \quad \Delta I = J_n \Delta S$$

کے برابر ہوگا۔ اگر کثافت برقی رو اور سمتی رقبہ کی سمتیں مختلف ہوں تب

$$(5.3) \quad \Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

لکھا جائے گا اور پوری سطح سے کل گزرتی برقی رو مکمل کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$(5.4) \quad I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

1314

مثال 5.1: شکل 5.1 میں سیدھی سطح $S = 2a_x$ دکھائی گئی ہے جہاں کثافت برقی رو $\mathbf{J} = 1a_x + 1a_y$ پائی جاتی ہے۔ سطح سے گزرتی برقی رو اور اس کی سمت دریافت کریں۔ اگر سطح کی دوسری سمت کو سطح کی سمت لی جائے تب برقی رو کی مقدار اور اس کی سمت کیا ہوں گے۔

1316

حل: چونکہ یہاں J مستقل مقدار ہے لہذا اسے مساوات 5.4 میں مکمل کے باہر لایا جاسکتا ہے اور یوں اس مکمل سے

$$I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = 2A$$

1317

حاصل ہوتا ہے۔ برقی رو چونکہ مثبت ہے لہذا یہ سطح کی سمت میں ہی سطح سے گزر رہی ہے۔

اگر سطح کی دوسری طرف کو سطح کی سمت لی جائے تب $S = -2a_x$ لکھا جائے گا اور یوں

$$I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = -2A$$

حاصل ہوگا۔ برقی رو کی مقدار اب بھی دو ایمپیر ہی ہے البتہ اس کی علامت منفی ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ برقی رو سطح کے سمت کی الٹی سمت میں ہے۔ یوں اب بھی برقی رو بائیں سے دائیں ہی گزر رہی ہے۔

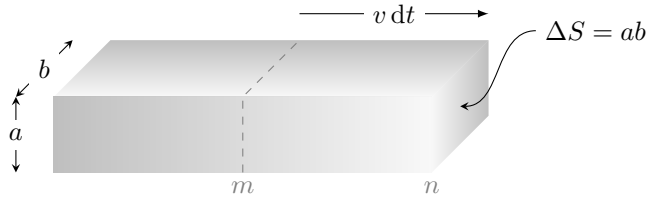
1319

1320

اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ S کی سمت میں برقی رو کو مثبت برقی رو کہا جاتا ہے۔

1321

شکل 5.2 میں a اور b اطراف کی تار میں لمبائی کی سمت میں v رفتار سے چارج حرکت کر رہا ہے۔ شکل میں اس تار کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔ یوں dt دورانیہ میں چارج $v dt$ فاصلہ طے کرے گا۔ اس طرح اس دورانیہ میں m پر لگائی گئی نقطہ دار لکیر n پہنچ جائے گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیہ میں m اور n کے درمیان



شکل 5.2: حرکت کرتے چارج کی رفتار اور کثافت برقی رو۔

موجود چارج سطح ΔS سے گزر جائے گا۔ m سے n تک حجم $abv dt$ کے برابر ہے۔ اگر تار میں چارج کی حجمی کثافت ρ_h ہو تب اس حجم میں کل چارج $\rho_h abv dt$ ہو گا۔ یوں برقی رو

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_h abv dt}{dt} = \rho_h \Delta S v$$

لکھتے ہوئے کثافت برقی رو

$$J = \frac{I}{\Delta S} = \rho_h v$$

حاصل ہوتی ہے جس کی سمتی شکل

$$(5.5) \quad J = \rho_h v$$

ہے۔ اس مساوات میں J کثافت اتصالی رو⁷ کو ظاہر کرتی ہے۔

یہ مساوات کہتا ہے کہ حجمی چارج کثافت بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ اسی طرح چارج کی رفتار بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔ یہ ایک عمومی نتیجہ ہے۔ یوں سڑک پر زیادہ لوگ گزارنے کا ایک طریقہ انہیں تیز چلنے پر مجبور کرنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ دوسرا طریقہ یہ ہے کہ انہیں قریب قریب کر دیا جائے۔

5.2 استمراری مساوات

قانون بقائے چارج کہتا ہے کہ چارج کو نہ تو پیدا اور نہ ہی اسے ختم کیا جاسکتا ہے، اگرچہ برابر مقدار میں مثبت اور منفی چارج کو ملا کی انہیں ختم کیا جاسکتا ہے اور اسی طرح برابر مقدار میں انہیں پیدا بھی کیا جاسکتا ہے۔

یوں اگر ڈبے میں ایک جانب 5 C اور دوسری جانب 3 C – چارج موجود ہو تو اس ڈبے میں کل 2 C چارج ہے۔ اگر ہم 3 C کو 3 C – کے ساتھ ملا کر ختم کر دیں تب بھی ڈبے میں کل 2 C ہی چارج رہے گا۔

مثال 5.2: ایک ڈبے جس کا حجم 5 m^3 ہے میں حجمی کثافت چارج 3 C/m^3 ہے۔ اس ڈبے سے چارج کی نکاسی ہو رہی ہے۔ دو سیکنڈ میں حجمی کثافت چارج 1 C/m^3 رہ جاتی ہے۔ ان دو سیکنڈوں میں ڈبے سے خارج برقی رو کا تخمینہ لگائیں۔

حل: شروع میں ڈبے میں $Q_1 = 3 \times 5 = 15 \text{ C}$ چارج ہے جبکہ دو سیکنڈ بعد اس میں $Q_1 = 1 \times 5 = 5 \text{ C}$ رہ جاتا ہے۔ یوں دو سیکنڈ میں ڈبے سے 10 C چارج خارج ہوتا ہے۔ اس طرح ڈبے سے خارج برقی رو $5 \text{ A} = \frac{10}{2}$ ہے۔ اسی کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{(5 - 15)}{2} = 5 \text{ A}$$

1334

اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ ڈبے میں ΔQ منفی ہونے کی صورت میں خارجی برقی رو کی قیمت مثبت ہوتی ہے۔ آپ اس حقیقت کو بہتر شکل دیں۔

جسم کو مکمل طور پر گھیرتی سطح کو بند سطح کہتے ہیں۔ کسی بھی مقام پر ایسی سطح کی سمت سطح کے عمودی باہر کو ہوتی ہے۔ مساوات 5.4 کے تحت برقی رو کو کثافت برقی رو کے سطحی مکمل سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یوں

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad (5.6)$$

1336

لکھا جاسکتا ہے جہاں جسم کی سطح بند سطح ہونے کی بنا پر بند مکمل کی علامت استعمال کی گئی ہے اور Q جسم میں کل چارج ہے۔

1337

مساوات 5.6 **استمراری مساوات**⁸ کی مکمل شکل ہے۔ آپ اس کی نقطہ شکل حاصل کریں۔

مسئلہ پھیلاؤ کو صفحہ 87 پر مساوات 3.43 میں بیان کیا گیا ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ کسی بھی سمتی تفاعل کے لئے درست ہے لہذا اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.6 میں بند سطحی مکمل کو حجمی مکمل میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_h (\nabla \cdot \mathbf{J}) dh$$

اگر جسم میں حجمی کثافت چارج ρ_h ہو تب اس میں کل چارج

$$Q = \int_h \rho_h dh$$

ہو گا۔ ان دو نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \mathbf{J}) dh = -\frac{d}{dt} \int_h \rho_h dh$$

1338

لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات میں $\frac{d}{dt}$ دو متغیرات پر لاگو ہو گا۔ یہ متغیرات مکمل کے اندر حجمی چارج کثافت ρ_h اور جسم h ہے۔

آپ جانتے ہیں کہ دو متغیرات کے تفرق کو جزوی تفرق کی شکل میں

$$\frac{d(uv)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} v + u \frac{\partial v}{\partial t}$$

1339

لکھا جاسکتا ہے جہاں v کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial u}{\partial t}$ اور u کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial v}{\partial t}$ حاصل کیا جاتا ہے۔

اگر ہم یہ شرط لاگو کریں کہ حجم کی سطح تبدیل نہیں ہوگی تب حجم بھی تبدیل نہیں ہوگا اور یوں $\frac{d}{dt}$ کو جزوی تفرق میں تبدیل کرتے ہوئے مکمل کے اندر لکھتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \mathbf{J}) dh = \int_h -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} dh$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات ہر ممکنہ حجم کے لئے درست ہے لہذا یہ نہایت چھوٹی حجم کے لئے بھی درست ہے۔ نہایت چھوٹی حجم dh کے لئے مکمل

$$(\nabla \cdot \mathbf{J}) dh = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} dh$$

ہی ہے جس سے

$$(5.7) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 5.7 استمراری مساوات کی نقطہ شکل ہے۔

پھیلاؤ کی تعریف کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.7 کہتا ہے کہ ہر نقطے پر چھوٹی سی حجم سے فی سینڈ چارج کا اخراج، یعنی برقی رو، فی اکائی حجم مساوی ہے چارج کے گھٹاؤ فی سینڈ فی اکائی حجم۔

5.3 موصل

غیر چارج شدہ موصل میں منفی الیکٹران اور مثبت ساکن ایٹموں کی تعداد برابر ہوتی ہے البتہ اس میں برقی رو آزاد الیکٹران کے حرکت سے پیدا ہوتا ہے۔ موصل میں الیکٹران آزادی سے بے ترتیب حرکت کرتا رہتا ہے۔ یہ حرکت کرتا ہوا لمحہ بہ لمحہ ساکن ایٹم سے ٹکراتا ہے اور ہر ٹکراتے اس کے حرکت کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔ ایسے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر کے برابر ہوتی ہے۔ آئیں دیکھیں کہ برقی میدان کے موجودگی میں کیا ہوتا ہے۔

برقی میدان E میں الیکٹران پر قوت

$$(5.8) \quad F = -eE$$

عمل کرے گی جہاں الیکٹران کا چارج $-e$ ہے۔ الیکٹران کی رفتار اس قوت کی وجہ سے اسراع کے ساتھ قوت کی سمت میں بڑھنے شروع ہو جائے گی۔ یوں بلا ترتیب رفتار کے ساتھ ساتھ قوت کے سمت میں الیکٹران رفتار پکڑے گا۔ موصل میں پائے جانے والا الیکٹران جلد کسی ایٹم سے ٹکرا جاتا ہے اور یوں اس کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔ جس لمحہ الیکٹران کسی ایٹم سے ٹکراتا ہے اگر لاگو میدان کو صفر کر دیا جائے تو الیکٹران دوبارہ بلا ترتیب حرکت کرتا رہے گا اور اس کی اوسط رفتار دوبارہ صفر ہی ہوگی، البتہ اس کی رفتار اب پہلے سے زیادہ ہوگی۔ اگر الیکٹران ایٹم سے نہ ٹکراتا تب برقی میدان صفر کرنے کے بعد یہ برقرار قوت کی سمت میں حاصل کردہ رفتار سے حرکت کرتا رہتا۔ یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہر ٹکراتے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر ہو جاتی ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ E کے موجودگی میں موصل میں الیکٹران کی رفتار مسلسل نہیں بڑھتی بلکہ یہ قوت کی سمت میں اوسط رفتار v_d حاصل کرتا ہے اور جیسے ہی میدان صفر کر دیا جائے الیکٹران کی اوسط رفتار بھی صفر ہو جاتی ہے۔ v_d کو **رفتار بہاؤ** کہتے ہیں۔ رفتار بہاؤ کا دار و مدار E کی قیمت پر ہے لہذا ہم

$$(5.9) \quad v_d = -\mu_e E$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات کے مستقل μ_e کو الیکٹران کی **حرکت پذیری**¹⁰ کہتے ہیں۔ حرکت پذیری کی مقدار مثبت ہے۔ چونکہ v_d کو میٹر فی سینڈ اور E کو وولٹ فی میٹر میں ناپا جاتا ہے لہذا حرکت پذیری کو $\frac{m^2}{Vs}$ میں ناپا جائے گا۔

مساوات 5.9 کو صفحہ 127 پر دئے مساوات 5.5 میں پر کرتے ہوئے

$$(5.10) \quad J = -\rho_e \mu_e E$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موصل میں آزاد الیکٹران کی حجمی چارج کثافت کو ρ_e لکھا گیا ہے۔ ρ_e منفی مقدار ہے۔ یاد رہے کہ غیر چارج شدہ موصل میں حجمی کثافت چارج صفر کے برابر ہے چونکہ اس میں منفی الیکٹران اور مثبت ایٹم کے چارج برابر ہوتے ہیں۔ اس مساوات کو عموماً

$$(5.11) \quad J = \sigma E$$

لکھا جاتا ہے جو اوہم کے قانون کی نقطہ شکل ہے اور جہاں

$$(5.12) \quad \sigma = -\rho_e \mu_e$$

لکھا گیا ہے۔ مساوات 5.11 میں J کو **کثافت ایصال برقی** ¹¹ رویا ¹¹ ہے جبکہ σ کو **موصلیت کا مستقل** ¹² کہتے ہیں اور اس کی اکائی $13 \text{ سیمینز فی میٹر } \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہے۔ سیمینز کو بڑے S سے جبکہ سینڈ کو چھوٹے s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ آپ ان میں غلطی نہیں کریں گے۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 495 پر جدول 16.1 میں کئی موصل اور غیر موصل اشیاء کی موصلیت پیش کی گئی ہیں۔

1351

مثال 5.3: بتانے ¹⁴ کی موصلیت کے مستقل کی قیمت $5.8 \times 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہے جبکہ اس کی کمیتی کثافت 8940 kg/m^3 اور ایٹمی کمیت 63.5 g ہیں۔ اگر ہوا ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہو تب تانبے میں الیکٹران کی حرکت پذیری حاصل کریں۔ برقی میدان $E = 0.1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ کی صورت میں الیکٹران کا رفتار بہا حاصل کریں۔

1354

حل: ایٹمی کمیت 6.023×10^{23} یعنی ایک مول ¹⁵ ایٹم کی کمیت کو کہتے ہیں۔ چونکہ ایک مربع میٹر میں 8940 kg ہیں لہذا ایک مربع میٹر میں

$$\frac{8940 \times 6.023 \times 10^{23}}{0.0635} = 8.48 \times 10^{28}$$

ایٹم پائیں جائیں گے۔ ہر ایٹم ایک الیکٹران آزاد کرتا ہے لہذا 0.1 nm اطراف کے مربع میں اوسطاً 0.848 یعنی تقریباً ایک عدد آزاد الیکٹران پایا جائے گا۔ اس طرح ایک مربع میٹر میں کل آزاد الیکٹران چارج یعنی حجمی آزاد چارج کثافت

$$(5.13) \quad \rho_e = -1.6 \times 10^{-19} \times 8.48 \times 10^{28} = -1.36 \times 10^{10} \text{ C/m}^3$$

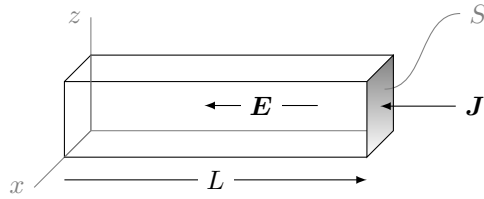
ہوگی۔ ایک مربع میٹر میں یوں انتہائی زیادہ آزاد چارج پایا جاتا ہے۔ اس طرح مساوات 5.12 کی مدد سے

$$\mu_e = -\frac{\sigma}{\rho_e} = \frac{5.8 \times 10^7}{-1.36 \times 10^{10}} = 0.00427 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $0.00427 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$ کو $0.00427 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$ لکھا گیا ہے۔ آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ یہ برابر مقدار ہیں۔ اب مساوات 5.9 استعمال کرتے ہوئے الیکٹران کی رفتار بہا

$$v_d = -0.00427 \times 0.1 = -0.000427 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

conduction current density¹¹conductivity¹²¹³ یہ اکائی جرمنی کے جناب ارنست ورنر وان سیمینز (1816-1892) کے نام پر جنہوں نے موجودہ سیمینز ادارے کی بنیاد رکھی۔copper¹⁴mole¹⁵



شکل 5.3: اوہم کے قانون کی بڑی شکل۔

حاصل ہوتی ہے۔ منفی رفتار کا مطلب ہے کہ الیکٹران E کے الٹ سمت حرکت کر رہا ہے۔ اس رفتار 16 سے الیکٹران ایک کلومیٹر کا فاصلہ ستائیس دن وراستہ چل کر طے کرے گا۔ یہاں یہ بتلاتا چلوں کہ عام درجہ حرارت مثلاً 300 K پر تانبے میں حرارتی توانائی سے حرکت کرتے الیکٹران کی رفتار تقریباً $1000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ہوتی ہے۔

یوں موصل میں آزاد الیکٹرانوں کو نئی جگہ منتقل ہوتے شہد کے کھیوں کا جھنڈ سمجھا جاسکتا ہے۔ ایسے جھنڈ میں کوئی ایک کبھی نہایت تیز رفتار سے آگے پیچھے اڑتی ہے جبکہ پورا جھنڈ نسبتاً آہستہ رفتار سے ایک سمت میں حرکت کرتا ہے۔ موصل میں بھی کوئی ایک الیکٹران نہایت تیز رفتار سے ایٹموں سے ٹکراتا ہوا حرارتی توانائی کی وجہ سے نہایت تیزی سے ادھر ادھر حرکت کرتا ہے جبکہ بیرونی لاگو میدان کی وجہ سے ایسے تمام الیکٹران نہایت آہستہ رفتار سے میدان کی سمت میں حرکت کرتے ہیں۔

1360

اگر موصل میں آزاد الیکٹران اتنے کم رفتار سے بیرونی لاگو میدان کی سمت میں صفر کرتے ہیں تب بجلی چالو کرتے ہی بلب کس طرح روشن ہوتا ہے۔ ایس کو سمجھنے کی خاطر برقی تار کو پانی بھرے ایک لمبے پائپ مانند سمجھیں۔ ایسے پائپ میں جیسے ہی ایک جانب سے مزید پانی داخل کیا جائے، اسی وقت پائپ کے دوسرے سرے سے برابر پانی خارج ہو گا۔ امید ہی سمجھ آئی ہو گی۔

1363

1364

مندرجہ بالا مثال میں بتلایا گیا کہ تانبے کا ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہے۔ اس حقیقت کو یوں سمجھا جاسکتا ہے کہ تانبے کا ایٹمی عدد 29 ہے۔ ایٹم کے کسی بھی مدار میں $2n^2$ الیکٹران ہو سکتے ہیں جہاں پہلے مدار کے لئے $n = 1$ ، دوسرے مدار کے لئے $n = 2$ وغیرہ لیا جاتا ہے۔ یوں اس کے پہلے مدار میں 2، دوسرے مدار میں 8، تیسرے مدار میں 18 اور آخری مدار 17 میں 1 الیکٹران ہو گا۔ ایٹم آخری مدار میں واحد الیکٹران کو آزاد کرتا ہے۔ انہیں اب بڑی شکل میں اوہم کا قانون حاصل کریں۔

1368

شکل 5.3 میں موصل سلاخ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L اور رقبہ عمودی تراش S ہیں۔ سلاخ کو ay سمت میں لیٹا تصور کریں۔ سلاخ میں لمبائی کی سمت میں مستقل اور یکساں برقی میدان $E = -Eay$ اور کشاف برقی $J = -Jay$ پائے جاتے ہیں۔ یوں اگر سلاخ کا بایاں سر برقی زمین تصور کیا جائے تب اس کے دائیں سرے پر برقی دباؤ کو صفحہ 99 پر دئے مساوات 4.11 سے یوں

$$V = - \int_0^L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^L E a_y \cdot dy a_y = \int_0^L E dy = E \int_0^L dy = EL$$

حاصل کرتے ہیں۔ رقبہ عمودی تراش کو شکل میں گہرے رنگ سے اجاگر کیا گیا ہے۔ سمتی رقبہ عمودی تراش بند سطح نہیں ہے لہذا اس کے دو ممکنہ رخ ہیں۔ سلاخ کے دائیں سرے سے داخل برقی رو حاصل کرنے کی غرض سے رقبہ عمودی تراش کو $S = -Sa_y$ لکھتے ہیں۔ یوں دائیں سرے سے داخل برقی رو کی مقدار مثبت ہو گی۔ برقی رو

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JS$$

¹⁶ کھودا پہاڑ، نکلا چوہا۔ آزاد الیکٹران تو کچھوے سے بھی آہستہ چلتا ہے۔

¹⁷ چونہے مدار میں 32 الیکٹران ممکن ہیں لیکن تانبے کے ایٹم میں اس مدار کے لئے صرف ایک عدد الیکٹران بچتا ہے۔

حاصل ہوتی ہے۔ ان معلومات کو شکل 5.11 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V}{L}$$

یا

$$V = I \frac{L}{\sigma S}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$(5.14) \quad R = \frac{L}{\sigma S}$$

کو مزاحمت لکھتے ہوئے

$$(5.15) \quad V = IR$$

حاصل ہوتا ہے جو اوہم کے قانون کی جانی پہچانی شکل ہے۔

مساوات 5.14 یکساں رقبہ عمودی تراش رکھنے والے موصل سلاخ کی **مزاحمت**¹⁸ دیتا ہے جہاں مزاحمت کی اکائی **اوہم**¹⁹ ہے جسے Ω سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یکساں رقبہ عمودی تراش کے سلاخ میں برقی میدان یکساں ہوتا ہے۔ اگر سلاخ کا رقبہ عمودی تراش یکساں نہ ہو تب اس میں برقی میدان بھی یکساں نہ ہو گا اور ایسی صورت میں مساوات 5.14 استعمال نہیں کیا جاسکتا البتہ ایسی صورت میں بھی مزاحمت کو مساوات 5.15 کی مدد سے برقی دباؤنی اکائی برقی رو سے بیان کیا جاتا ہے۔ یوں مساوات 4.11 اور مساوات 5.4 استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے b سے a سرے تک مزاحمت

$$(5.16) \quad R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

سے حاصل ہوگی جہاں برقی رو سلاخ کے مثبت برقی دباؤ والے سرے سے سلاخ میں داخل ہوتے برقی رو کو کہتے ہیں۔ یوں مندرجہ بالا مساوات میں سطحی کھلم سلاخ کے مثبت سرے پر حاصل کیا جائے گا جہاں سطح عمودی تراش کی سمت سلاخ کی جانب لی جائے گی۔

1371

مثال 5.4: تانبے کی ایک کلو میٹر لمبی اور تین ملی میٹر رداس کے تار کی مزاحمت حاصل کریں۔

1372

حل: یہاں $L = 1000 \text{ m}$ جبکہ $S = \pi r^2 = 2.83 \times 10^{-7} \text{ m}^2$ اور $\sigma = 5.8 \times 10^7$ ہے لہذا

$$R = \frac{1000}{5.8 \times 10^7 \times 2.83 \times 10^{-7}} = 0.61 \Omega$$

حاصل ہوتا ہے۔

1373

1374

1375

مشق 5.1: المونیم میں کثافت برقی رومندر جہ ذیل صورتوں میں حاصل کریں۔ (الف) برقی میدان کی شدت $50 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$ ہے۔ (ب) آزاد الیکٹران کی رفتار، بہاؤ $0.12 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ ہے۔ (پ) ایک ملی میٹر موٹی تار جس میں 2 A برقی رو گزر رہی ہے۔

1377

1378

جوابات: $1.91 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$ ، $3.82 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$ اور $2.55 \frac{\text{MA}}{\text{m}^2}$

1379

ہم دیکھ چکے ہیں کہ موصل کے اندر داخل کیا گیا چارج جلد موصل کے سطح پر پہنچ کر سطحی چارج کثافت پیدا کرتا ہے۔ یہ جاننے ہوئے کہ حقیقت میں موصل کے اندر چارج کا پیدا ہونا یا وہاں چارج داخل کرنا معمول کی بات ہر گز نہیں، ہم ایسے داخل کئے گئے چارج کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔

1381

اوہم کے قانون

$$J = \sigma E$$

اور استمراری مساوات

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

دونوں میں صرف آزاد چارج کی بات کی جاتی ہے۔ ان مساوات سے

$$\nabla \cdot \sigma E = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

یا

$$\nabla \cdot \frac{\sigma}{\epsilon} D = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر موصل میں σ اور ϵ کی قیمتیں اٹل ہوں تب اس مساوات کو

$$\nabla \cdot D = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ صفحہ 82 پر مساوات 3.33 جو میکس ویل کی پہلی مساوات ہے کی مدد سے یوں

$$\rho_h = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 5.12 کہتا ہے کہ موصلیت کی قیمت آزاد الیکٹران کی جمعی چارج کثافت ρ_e اور الیکٹران کی حرکت پذیری پر منحصر ہے۔ مساوات 5.13 بتانے میں $\rho_e = -1.36 \times 10^{10} \text{ C/m}^3$ دیتا ہے جو انتہائی بڑی مقدار ہے۔ اتنے چارج میں بیرونی داخل چارج نمک برابر بھی حیثیت نہیں رکھتا لہذا σ کی قیمت کو اٹل تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کو نئی شکل

$$\frac{\partial \rho_h}{\rho_h} = -\frac{\sigma}{\epsilon} dt$$

میں لکھتے ہوئے، اس کا مکمل

$$\rho_h = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

حاصل کرتے ہیں جہاں وقت $t = 0$ پر داخل کئے گئے چارج کا حجمی چارج کثافت ρ_0 ہے۔ اس مساوات کے تحت حجمی چارج کثافت σ_c **وقتی مستقل**²⁰ رکھتا ہے۔ تقطیر شدہ پانی کا وقتی مستقل جدول 16.1 اور جدول 16.2 کی مدد سے

$$\frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{80}{36\pi \times 10^9 \times 10^{-4}} = 7.07 \mu s$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگرچہ تقطیر شدہ پانی انتہائی کم موصل ہے لیکن اس میں بھی کثافت چارج صرف سات مائیکرو سینڈ میں ابتدائی قیمت کے صرف 37 فی صد رہ جاتا ہے۔ یوں کسی بھی موصل کے اندر انتہائی کم دورانیے کے لئے اضافی چارج پایا جاسکتا ہے۔ اس لحاظی چارج کثافت کے علاوہ اندرون موصل کو چارج سے پاک تصور کیا جاسکتا ہے۔

1384

ذو برق میں مختلف وجوہات کی بنا پر لگاتار آزاد چارج پیدا ہوتے رہتے ہیں جس کی بنا پر ذو برق صفر سے زیادہ موصلیت رکھتے ہوئے برقی رو گزارتا ہے۔ ذو برق کے اندر چارج بھی آخر کار سطح پر پہنچ جاتا ہے۔

1386

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط

1387

غیر چارج شدہ موصل میں کل آزاد الیکٹران اور مثبت ایٹم برابر تعداد میں پائے جاتے ہیں۔ یوں اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔ فرض کریں کہ غیر چارج شدہ موصل کے اندر کسی طرح چند الیکٹران نمودار ہو جاتے ہیں۔ یہ الیکٹران برقی میدان E پیدا کریں گے جس کی وجہ سے موصل میں آزاد الیکٹران موصل کے سطح کی جانب چل پڑیں گے۔ سطح کے باہر غیر موصل خلاء پائی جاتی ہے جس میں الیکٹران حرکت نہیں کر سکتے لہذا الیکٹران موصل کے سطح پر پہنچ کر رک جائیں گے۔ موصل میں نمودار ہونے والے الیکٹران کے برابر تعداد میں الیکٹران موصل کے سطح پر منتقل ہوں گے جس کے بعد موصل میں دوبارہ منفی الیکٹران اور مثبت ایٹموں کی تعداد برابر ہو جائے گی اور یہ غیر چارج شدہ صورت اختیار کر لے گا۔

1392

آپ نے دیکھا کہ اضافی چارج موصل میں زیادہ دیر نہیں رہ سکتا اور یہ جلد سطح پر منتقل ہو جاتا ہے۔ یوں اضافی چارج موصل کے سطح پر بیرونی جانب چٹا رہتا ہے۔ یہ موصل کی پہلی اہم خاصیت ہے۔

1394

موصل کی دوسری خاصیت **برقی سکون**²¹ کی حالت کے لئے بیان کرتے ہیں۔ برقی سکون سے مراد ایسی صورت ہے جب چارج حرکت نہ کر رہا ہو یعنی جب برقی رو صفر کے برابر ہو۔ برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر ساکن برقی میدان صفر رہتا ہے۔ اگر ایسا نہ ہوتا تو میدان کی وجہ سے اس میں آزاد الیکٹران حرکت کر کے برقی رو کو جنم دیتے جو غیر ساکن حالت ہے۔

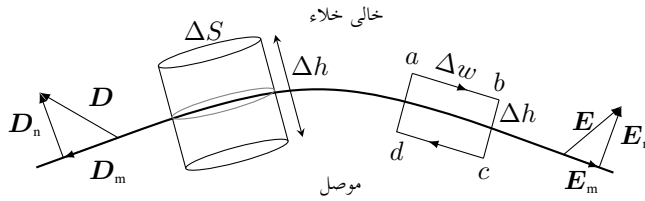
1397

یوں برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر اضافی چارج اور برقی میدان دونوں صفر کے برابر ہوتے ہیں البتہ اس کے سطح پر بیرونی جانب چارج پایا جاسکتا ہے۔ ہمیں دیکھیں کہ سطح پر پائے جانے والا چارج موصل کے باہر کس قسم کا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔

1399

موصل کے سطح پر چارج، موصل کے باہر برقی میدان پیدا کرتا ہے۔ سطح پر کسی بھی نقطے پر ایسے میدان کو دو اجزاء کے مجموعے کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ پہلا جزو سطح کے مماسی اور دوسرا جزو سطح کے عمودی رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مماسی جزو صفر ہو گا۔ اگر ایسا نہ ہوتا تو اس میدان کی وجہ سے سطح پر پائے جانے والے آزاد الیکٹران حرکت میں آئیں گے جو غیر ساکن حالت ہو گی۔ یوں ہم

$$(5.17) \quad E_{\text{مماسی}} = 0$$



شکل 5.4: موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی شرائط۔

لکھ سکتے ہیں۔ سطح پر عمودی برقی میدان گاوس کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاسکتا ہے جو کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے کل برقی بہاؤ کا اخراج، سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتا ہے۔ چونکہ سطح پر مماسی برقی میدان صفر ہے اور موصل کے اندر بھی برقی میدان صفر ہے لہذا سطح پر چارج سے برقی بہاؤ کا اخراج صرف عمودی سمت میں ہو سکتا ہے۔ یوں ΔS سطح سے عمودی اخراج $D \Delta S$ اسی سطح پر چارج $\rho_S \Delta S$ کے برابر ہوگا جس سے

$$D_{\text{عمودی}} = \rho_S \quad (5.18)$$

حاصل ہوتا ہے۔ انہیں اسی بحث کو بہتر جامہ پہنائیں۔ ایسا کرتے ہوئے ہم ایک عمومی ترکیب سیکھ لیں گے جو مختلف اقسام کے اشیاء کے سرحد پر میدان کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے درمیان سرحد موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ اس سرحد پر خلاء میں E اور D دکھائے گئے ہیں۔ خلاء میں E کو E_m اور E_n کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جو بالترتیب سرحد کے مماسی اور عمودی اجزاء ہیں۔ اسی طرح D کو بھی مماسی اور عمودی اجزاء کے مجموعے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ ہم صرف اس حقیقت کو لے کر آگے بڑھتے ہیں کہ موصل کے اندر E اور D دونوں صفر کے برابر ہیں۔ انہیں اس حقیقت کی بنا پر خلاء میں E کی قیمت حاصل کریں۔ ہم E کے مجموعے E_m اور E_n حاصل کریں گے۔ پہلے E_m حاصل کرتے ہیں۔

سرحد پر $abcd$ مستطیل بنایا گیا ہے جہاں ab اور cd سرحد کے مماسی جبکہ bc اور da سرحد کے عمودی ہیں۔ ab خالی خلاء میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر جبکہ cd موصل میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر ہیں۔ ab اور cd کی لمبائیاں Δw ہیں جبکہ bc اور da کی لمبائیاں Δh ہیں۔ صفحہ 105 پر دئے مساوات 4.28

$$\oint E \cdot dL = 0$$

کو $abcd$ پر لاگو کرتے ہیں۔ اس تکمل کو چار ٹکڑوں کا مجموعہ لکھا جاسکتا ہے۔

$$\oint E \cdot dL = \int_a^b E \cdot dL + \int_b^c E \cdot dL + \int_c^d E \cdot dL + \int_d^a E \cdot dL = 0$$

اب a سے b تک

$$\int_a^b E \cdot dL = E_m \Delta w$$

حاصل ہوتا ہے۔ خلاء میں نقطہ b پر عمودی میدان کو $E_{n,b}$ لکھتے ہوئے b سے c تک

$$\int_b^c E \cdot dL = -E_{n,b} \frac{\Delta h}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ bc کی آدھی لمبائی موصل کے اندر ہے جہاں $E = 0$ ہے۔ c سے d تک تکمل صفر کے برابر ہے چونکہ یہ راستہ موصل کے اندر ہے جہاں $E = 0$ ہے۔

$$\int_c^d E \cdot dL = 0$$

خلاء میں نقطہ a پر عمودی میدان کو $E_{n,a}$ لکھتے ہوئے d سے a تک

$$\int_d^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_{n,a} \frac{\Delta h}{2}$$

ان چار نتائج سے

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_m \Delta w + (E_{n,a} - E_{n,b}) \frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔ سرحد کے قریب میدان حاصل کرنے کی خاطر ہمیں سرحد کے قریب تر ہونا ہوگا یعنی Δh کو تقریباً صفر کے برابر کرنا ہوگا۔ ایسا کرنے سے $(E_{n,a} - E_{n,b}) \frac{\Delta h}{2}$ کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ ہم Δw کو اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ اس کی پوری لمبائی پر میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ ایسا کرتے ہوئے اس مساوات سے

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = E_m \Delta w = 0$$

یعنی

$$(5.19) \quad E_m = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئیں اب E_n حاصل کریں۔ E_n کی بجائے گاوس کے قانون

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

کی مدد سے D_n کا حصول زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے لہذا ہم اسی کو حاصل کرتے ہیں۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر Δh لمبائی کا بیلن دکھایا گیا ہے۔ اس بیلن کے ڈھکنوں کا رقبہ ΔS ہے۔ اگر سرحد پر ρ_S پایا جائے تب بیلن $\rho_S \Delta S$ چارج کو گھیرے گا۔ گاوس کے قانون کے تحت بیلن سے اسی مقدار کے برابر برقی بہاؤ کا اخراج ہوگا۔ برقی بہاؤ کا اخراج بیلن کے دونوں سروں اور اس کے نکلی نما سطح سے ممکن ہے۔ یوں

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{نچلا ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{بالائی ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{نکلی سطح}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \rho_S \Delta S$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اب بیلن کی نکلی سطح موصل کے اندر ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے لہذا

$$\int_{\text{نچلا ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

ہوگا۔ مساوات 5.19 کے تحت سرحد پر خلاء میں مماسی میدان صفر ہوتا ہے۔ موصل میں بھی میدان صفر ہوتا ہے لہذا

$$\int_{\text{نکلی سطح}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

ہوگا۔ بیلن کے بالائی سرے پر

$$\int_{\text{بالائی ڈھکن}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_n \Delta S$$

ہوگا۔ ان تین نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_n \Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$D_n = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $D = \epsilon_0 E$ ہوتا ہے لہذا یوں

$$(5.20) \quad D_n = \epsilon_0 E_n = \rho_S$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 5.19 اور مساوات 5.20 موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر برقی میدان کے شرائط بیان کرتے ہیں۔ موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی میدان موصل سے عمودی خارج ہوتا ہے جبکہ اس کے سرحد کے مماسی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔ نتیجتاً موصل کی سطح ہم قویہ سطح ہوتی ہے۔ یوں موصل کی سطح پر دو نقطوں کے مابین کسی بھی راستے پر برقی میدان کا مکمل صفر کے برابر ہوگا یعنی $\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ ہوگا۔ یاد رہے کہ برقی میدان کا مکمل برقی دباؤ دیتا ہے جو مکمل کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہذا اس راستے کو موصل کی سطح پر ہی رکھا جاسکتا ہے جہاں E ہمسای ہونے کی وجہ سے مکمل صفر کے برابر ہوگا۔

مشق 5.2: نقطہ $N(2, -3, 5)$ موصل کی سطح پر پایا جاتا ہے جہاں $\mathbf{E} = 210\mathbf{a}_x - 350\mathbf{a}_y + 99\mathbf{a}_z \frac{V}{m}$ کے برابر ہے۔ اس نقطے پر E_n, E_m اور ρ_S حاصل کریں۔

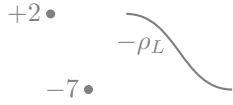
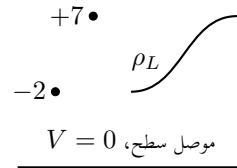
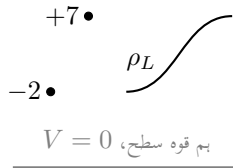
جوابات: $0, 420 \frac{V}{m}$ اور $3.71 \frac{nC}{m^2}$

5.5 عکس کی ترکیب

جفت قطب کے خطوط صفحہ 115 پر شکل 4.10 میں دکھائے گئے ہیں جہاں دونوں چارجوں سے برابر فاصلے پر لامحدود برقی زمینی سطح دکھائی گئی ہے۔ برقی زمین پر انتہائی باریک موٹائی کی لامحدود موصل سطح رکھی جاسکتی ہے۔ ایسی موصل سطح پر برقی دباؤ صفر وولٹ ہوگا اور اس پر میدان عمودی ہوگا۔ موصل کے اندر برقی میدان صفر رہتا ہے اور اس سے برقی میدان گزر نہیں پاتا۔

اگر اس موصل سطح کے نیچے سے جفت قطب کا منفی چارج ہٹا دیا جائے تب بھی سطح کے بالائی جانب میدان عمودی ہی ہوگا۔ یاد رہے برقی زمین صفر وولٹ پر ہوتی ہے۔ موصل سطح سے اوپر میدان جوں کا توں رہے گا جبکہ اس سے نیچے میدان صفر ہو جائے گا۔ اسی طرح سطح سے اوپر جفت قطب کا مثبت چارج ہٹانے سے سطح کے نچلے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ سطح سے اوپر میدان صفر ہو جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو دوسری نقطہ نظر سے دیکھیں۔ فرض کریں کہ لامحدود موصل سطح یا برقی زمین سے $\frac{Q}{2}$ فاصلے پر اوپر مثبت نقطہ چارج $+Q$ پایا جاتا ہے۔ چونکہ ایسی صورت میں سطح سے اوپر برقی میدان بالکل جفت قطب کے میدان کی طرح ہوگا لہذا ہم $\frac{Q}{2}$ فاصلے پر برقی زمین سے نیچے عین مثبت چارج کے نیچے منفی چارج $-Q$ ۔



شکل 5.5: عکس کی ترکیب۔

رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹا سکتے ہیں۔ اوپر جانب کے میدان پر ان اقدام کا کوئی اثر نہیں ہوگا۔ یوں جفت قطب کے تمام مساوات بروئے کار لاتے ہوئے زمین کے اوپر جانب کا میدان حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یاد رہے کہ سطح کے نیچے برقی زمین کو صفر ہی تصور کیا جائے گا۔ اگر برقی زمین کی سطح کو آئینہ تصور کیا جائے تب مثبت چارج کا عکس اس آئینہ میں اسی مقام پر نظر آئے گا جہاں ہم نے تصوراتی منفی چارج رکھا۔ یوں اس منفی چارج کو حقیقی چارج کا عکس²² کہتے ہیں۔

1428

ایسی ہی ترکیب لامحدود زمینی سطح کے ایک جانب منفی چارج سے پیدا میدان حاصل کرنے کی خاطر بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں زمین کی دوسری جانب عین منفی چارج کے سامنے، اتنے ہی فاصلے پر برابر مقدار مگر مثبت چارج رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹایا جاسکتا ہے۔

1430

کسی بھی چارج کو نقطہ چارجوں کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ لہذا لامحدود برقی زمین یا لامحدود موصل سطح کی ایک جانب کسی بھی شکل کے چارجوں کا میدان، سطح کی دوسری جانب چارجوں کا عکس رکھتے اور زمین کو ہٹاتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اس ترکیب کو **عکس کی ترکیب** کہتے ہیں۔ یاد رہے کہ کسی بھی لامحدود موصل سطح جس کے ایک جانب چارج پایا جاتا ہو پر سطحی چارج پایا جائے گا۔ عموماً مسئلے میں لامحدود سطح اور سطح کے باہر چارج معلوم ہوں گے۔ ایسے مسئلے کو حل کر سنے کی خاطر سطح پر سطحی چارجوں کا علم بھی ضروری ہوتا ہے۔ سطحی چارج دریافت کرنا نسبتاً مشکل کام ہے جس سے چھٹکارا حاصل کرنا عقلمندی ہوگی۔ عکس کی ترکیب میں سطحی چارج کا جاننا ضروری نہیں لہذا اس ترکیب سے مسئلہ کو حل کرنا عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

1435

شکل 5.5 میں لامحدود موصل سطح سے اوپر مختلف اقسام کے چارج دکھائے گئے ہیں۔ اسی شکل میں مسئلے کو عکس کے ترکیب کی نقطہ نظر سے بھی دکھایا گیا ہے۔ موصل سطح کے مقام پر دونوں صورتوں میں صفر وولٹ ہی رہتے ہیں۔

1437

1438

مثال 5.5: لامحدود موصل سطح $z = 3$ کے قریب $N(5, 7, 8)$ پر $5 \mu C$ چارج پایا جاتا ہے۔ موصل کی سطح پر نقطہ $M(2, 4, 3)$ پر E حاصل کرتے ہوئے اسی مقام پر موصل کی سطحی کثافت چارج حاصل کریں۔

1440

حل: $5 \mu C$ کا عکس $5 \mu C$ لامحدود سطح کے دوسری جانب نقطہ $P(5, 7, -2)$ پر رکھتے ہوئے موصل سطح ہٹاتے ہیں۔ اب N سے M تک سمتیہ R_{MN} ہے جبکہ P سے M تک سمتیہ $R_{MP} = -3a_x - 3a_y + 5a_z$ ہے۔ یوں $5 \mu C$ نقطہ M پر

$$E_+ = \frac{5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y - 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(3^2 + 3^2 + 5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y - 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

پیدا کرے گا۔ اسی طرح $5 \mu\text{C}$ چارج نقطہ M پر

$$E_- = \frac{-5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y + 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(3^2 + 3^2 + 5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-5 \times 10^{-6}(-3a_x - 3a_y + 5a_z)}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کرے گا۔ چونکہ برقی میدان خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہذا کسی بھی نقطے پر مختلف چارجوں کے پیدا کردہ میدان جمع کرتے ہوئے کل میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں نقطہ M پر کل میدان

$$E_{\text{کل}} = E_+ + E_- = \frac{-50 \times 10^{-6}a_z}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

ہوگا۔ موصل کی سطح پر میدان عمودی ہوتا ہے۔ موجودہ جواب اس حقیقت کی تصدیق کرتا ہے۔ یوں موصل کی سطح پر

$$D = \epsilon_0 E = \frac{-50 \times 10^{-6}a_z}{4\pi(43)^{\frac{3}{2}}} = -14.13 \times 10^{-9}a_z$$

حاصل ہوتا ہے جو سطح میں داخل ہونے کی سمت میں ہے۔ یوں مساوات 5.20 کے تحت سطح پر

$$\rho_s = -14.3 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$$

پایا جاتا ہے۔

1441

1442

مندرجہ بالا مثال میں اگر $N(5, 7, 8)$ پر $5 \mu\text{C}$ پایا جاتا اور لا محدود سطح موجود نہ ہوتا تب $M(2, 4, 3)$ پر میدان E_+ ہوتا۔ لا محدود موصل سطح کی موجودگی میں یہ قیمت تبدیل ہو کر مثال میں حاصل کی گئی E ہو جاتی ہے۔ درحقیقت سطح کے قریب چارج کی وجہ سے سطح پر سطحی چارج کثافت پیدا ہو جاتا ہے۔ کئی بھی نقطے پر بیرونی چارج اور سطحی چارج دونوں کے میدان کا مجموعہ حقیقی میدان ہوتا ہے۔

1445

مثال 5.6: لا محدود موصل سطح $z = 0$ میں Q پر نقطہ چارج سے پیدا کثافت سطحی چارج حاصل کریں۔

1446

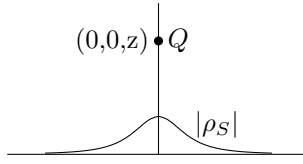
حل: اس مسئلے کو عکس کے ترکیب سے حل کرنے کی خاطر Q پر $(0, 0, -z)$ چارج رکھتے ہوئے موصل سطح کو ہٹا کر حل کرتے ہیں۔ ایسی صورت میں سطح کے مقام پر عمومی نقطہ $(\rho, \phi, 0)$ پر Q اور $-Q$ چارج

$$E_+ = \frac{Q(\rho a_\rho - z a_z)}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_- = \frac{-Q(\rho a_\rho + z a_z)}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کریں گے۔ $D = \epsilon_0 E$ استعمال کرتے ہوئے کل

$$D = \frac{-2Qz a_z}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



شکل 5.6: نقطہ چارج سے لامحدود موصل سطح میں پیدا سطحی کثافت چارج۔

حاصل ہوتا ہے جس کی سمت $-a_z$ ہے جو موصل میں اوپر سے داخل ہونے کی سمت ہے۔ یوں موصل سطح پر

$$(5.21) \quad \rho_S = \frac{-2Qz}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{C}{m^2}$$

پایا جائے گا۔ شکل 5.6 میں چارج Q اور موصل سطح پر ρ_S دکھائے گئے ہیں۔

1447

1448

مساوات 5.21 کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود موصل سطح پر کل چارج حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یقینی طور پر اس کی مقدار Q ہی حاصل ہوگی۔

1449

5.6 نیم موصل

1450

نیم موصل اشیاء مثلاً خالص سیلیکان اور جرمنیم میں آزاد چارجوں کی تعداد موصل کی نسبت سے کم جبکہ غیر موصل کی نسبت سے زیادہ ہوتی ہے۔ یوں ان کی موصلیت موصل اور غیر موصل کے موصلیت کے درمیان میں ہوتی ہے۔ نیم موصل کی خاص بات یہ ہے کہ ان میں انتہائی کم مقدار کے ملاوٹ ²³ سے ان کی موصلیت پر انتہائی گہرا اثر پڑتا ہے۔ نیم موصل **دوری جدول** ²⁴ کے چوتھے جماعت ²⁵ سے تعلق رکھتے ہیں۔ دوری جدول کے پانچویں جماعت کے عناصر مثلاً نائٹروجن اور فاسفورس کا ایٹم ایک عدد الیکٹران عطا کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں انہیں **عطا کنندہ** ²⁶ عناصر کہتے ہیں۔ نیم موصل میں ایسا ہر عطا کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد الیکٹران کو جنم دیتا ہے۔ ایسے عنصر کی نہایت کم مقدار کی ملاوٹ سے نیم موصل میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھ جاتی ہے جس سے ان کی موصلیت بہت بڑھ جاتی ہے۔ ایسے نیم موصل جن میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھادی گئی ہو کو n نیم موصل کہتے ہیں۔ اس کے برعکس تیسرے جماعت کے عناصر مثلاً المونیم کا ایٹم ایک عدد الیکٹران قبول کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔ یوں المونیم کو **قبول کنندہ** ²⁷ عنصر کہا جاتا ہے۔ ملاوٹی المونیم کا ایٹم نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران حاصل کرتے ہوئے الیکٹران کی جگہ خالی جگہ پیدا کر دیتا ہے جسے **خول** ²⁸ کہا جاتا ہے۔ نیم موصل میں ایسا ہر قبول کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد خول کو جنم دیتا ہے۔ ایسا آزاد خول مثبت ذرے کی مانند معلوم ہوتا ہے جس کا چارج e الیکٹران کے چارج $-e$ کے برابر مگر الٹ قطب کا ہوتا ہے اور جس کی کمیت m_h لی جاسکتی ہے۔ اسی طرح آزاد خول کی حرکت پذیر μ_h لکھی جاتی ہے۔ بالکل آزاد الیکٹران کی طرح برقی میدان کی موجودگی میں آزاد خول رفتار $v_d = \mu_h E$ سے حرکت کرتا ہے جو موصلیت $\sigma = \rho_h \mu_h$ کو جنم دیتا ہے۔ یاد رہے کہ مثبت خول E کی سمت میں ہی حرکت کرے گا لہذا اس کے رفتار بہاؤ کی سمت E کی سمت ہی ہوگی۔ تیسرے جماعت کے عناصر کی ملاوٹ کردہ نیم موصل کو p نیم موصل کہا جاتا ہے۔ آزاد الیکٹران اور آزاد خول مل کر

$$(5.22) \quad \sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h$$

doping²³
periodic table²⁴
group²⁵
donor²⁶
acceptor²⁷
hole²⁸

موصلیت پیدا کرتے ہیں جہاں ρ_{th} آزاد خول کی صحیح چارج کثافت ہے۔ خالص نیم موصل میں حرارتی توانائی سے نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران خارج ہو کہ آزاد الیکٹران کی حیثیت اختیار کرتا ہے جبکہ ایسے الیکٹران کا خالی کردہ مقام آزاد خول کی حیثیت اختیار کرتا ہے۔ یوں خالص نیم موصل میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد برابر ہوتی ہے۔

1453

خالص نیم موصل اوہم کے قانون کی نقطہ شکل پر پورا اترتا ہے۔ یوں کسی ایک درجہ حرارت پر نیم موصل کی موصلیت تقریباً ثلاً قیمت رکھتی ہے۔

1454

آپ کو یاد ہو گا کہ درجہ حرارت بڑھانے سے موصل میں آزاد الیکٹران کی رفتار بہاؤ کم ہوتی ہے جس سے موصلیت کم ہو جاتی ہے۔ درجہ حرارت کا موصل میں آزاد الیکٹران کے صحیح چارج کثافت پر خاص اثر نہیں ہوتا۔ اگرچہ نیم موصل میں بھی درجہ حرارت بڑھانے سے آزاد چارج کی رفتار بہاؤ کم ہوتی ہے لیکن ساتھ ہی ساتھ آزاد چارج کی مقدار نسبتاً زیادہ مقدار میں بڑھتی ہے جس کی وجہ سے نیم موصل کی موصلیت درجہ حرارت بڑھانے سے بڑھتی ہے۔ یہ موصل اور نیم موصل کے خصوصیات میں واضح فرق ہے۔

1458

مشق 5.3: 300 K درجہ حرارت پر خالص سیلیکان میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد 1.5×10^{16} فی مربع میٹر، الیکٹران کی رفتار بہاؤ $0.12 \frac{m}{s}$ جبکہ خول کی رفتار بہاؤ $0.025 \frac{m}{s}$ ہے۔ جرمنیم کے لئے یہی قیمتیں بالترتیب 2.4×10^{19} فی مربع میٹر، $0.36 \frac{m}{s}$ اور $0.17 \frac{m}{s}$ ہیں۔ خالص سیلیکان اور خالص جرمنیم کی موصلیت دریافت کریں۔

1461

1462

جوابات: $0.348 \frac{mS}{m}$ اور $2 \frac{S}{m}$

1463

5.7 ذو برق

اس باب میں اب تک ہم موصل اور نیم موصل کی بات کر چکے ہیں جن میں آزاد چارج پائے جاتے ہیں۔ یوں ایسے اشیاء پر برقی دباؤ لاگو کرنے سے ان میں بہت قدر برقی رو پیدا کی جاسکتی ہے۔ آئیں ایسی اشیاء کی بات کریں جن میں آزاد چارج نہیں پائے جاتے لہذا ان میں برقرار برقی رو پیدا کرنا ممکن نہیں ہوتا۔

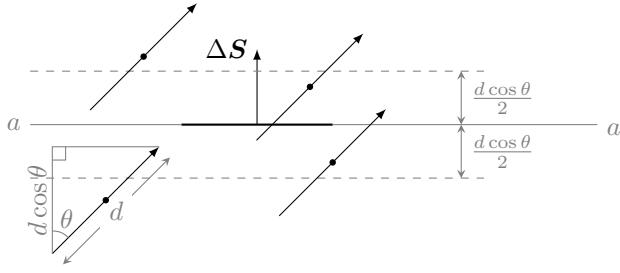
1466

بعض اشیاء مثلاً پانی کے مالیکیول میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز پائے جاتے ہیں۔ ایسے مالیکیول کو **قطبی** ²⁹ مالیکیول کہتے ہیں۔ قطبی مالیکیول کو جفت قطب تصور کیا جاسکتا ہے۔ بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں کسی بھی چیز میں قطبی مالیکیول بلا ترتیب پائے جاتے ہیں۔ بیرونی میدان E لاگو کرنے سے مالیکیول کے مثبت سرے پر میدان کی سمت میں جبکہ منفی سرے پر میدان کی الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے۔ ان قوتوں کی وجہ سے مالیکیول کے مثبت اور منفی مراکز ان قوتوں کی سمتوں میں حرکت کرتے ہوئے گھوم جاتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ مراکز کے درمیان فاصلہ بھی بڑھ جاتا ہے۔ ٹھوس قطبی اشیاء میں ایٹموں اور مالیکیول کے درمیان قوتیں ان حرکات کو روکنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اسی طرح مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش ان کے درمیان فاصلہ بڑھنے کو روکتا ہے۔ جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہوں وہاں مثبت اور منفی مراکز رک جاتے ہیں۔ بیرونی میدان ان تمام بلا ترتیب جفت قطب کو ایک سمت میں لانے کی کوشش کرتا ہے۔

1472

بعض اشیاء میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز نہیں پائے جاتے البتہ انہیں بیرونی میدان میں رکھنے سے ان میں ایسے مراکز پیدا ہو جاتے ہیں۔ ایسے اشیاء کو **غیر قطبی** ³⁰ کہتے ہیں۔ بیرونی میدان مالیکیول کے الیکٹرانوں کو ایک جانب کھینچ کر منفی مرکز جبکہ بقایا ایٹم کو مثبت چھوڑ کر مثبت مرکز پیدا کرتا ہے۔ مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش اس طرح مراکز پیدا ہونے کے خلاف عمل کرتا ہے۔ جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہو جائیں وہیں پر چارج کے حرکت کا سلسلہ رک جاتا ہے۔ یہ اشیاء قدرتی طور پر غیر قطبی ہیں البتہ انہیں بیرونی میدان قطبی بنا دیتا ہے۔ پیدا کردہ جفت قطب بیرونی میدان کی سمت میں ہی ہوں گے۔

1476



شکل 5.7: بیرونی میدان کی موجودگی میں مقید چارج کی حرکت۔

ایسے تمام اشیاء جو یا تو پہلے سے قطبی ہوں اور یا انہیں بیرونی میدان کی مدد سے قطبی بنایا جاسکے **ذو برقی**³¹ کہلاتے ہیں۔

ذو برقی میں بیرونی میدان سے مالیکیول کے اندر حرکت پیدا ہوتی ہے البتہ مالیکیول از خود اسی جگہ رہتا ہے۔ ایسا چارج جو بیرونی میدان کی وجہ سے اپنی جگہ پر معمولی حرکت کرتا ہو کو **مقید چارج**³² کہتے ہیں۔ اس کے برعکس آزاد چارج بیرونی میدان میں مسلسل حرکت کرتا ہے۔

ذو برقی کے جفت قطب کا معیار اثر کو صفحہ 113 میں دئے مساوات 4.68

$$(5.23) \quad p = Qd$$

سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں Q ذو برقی کے جفت قطب میں مثبت مرکز کا چارج ہے۔

اگر اکائی حجم میں n جفت قطب پائے جائیں تب Δv حجم میں $n\Delta v$ جفت قطب ہوں گے جن کا اجتماعی معیار اثر جفت قطب تمام کے سمتی مجموعے

$$(5.24) \quad p_{کل} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} p_i$$

کے برابر ہوگا جہاں انفرادی p مختلف ہو سکتے ہیں۔ **تقطیب**³³ سے مراد اکائی حجم میں کل معیار اثر جفت قطب ہے یعنی

$$(5.25) \quad P = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} p_i$$

جس کی اکائی کولمب فی مربع میٹر ہے۔ Δv کو کم سے کم³⁴ کرتے ہوئے نقطے پر تقطیب حاصل کی گئی ہے۔ حقیقت میں Δv کو اتنا رکھا جاتا ہے کہ اس میں جفت قطب کی تعداد ($n\Delta v$) اتنی ہو کہ انفرادی جفت قطب کے اثر کو نظر انداز کرنا ممکن ہو۔ یوں تقطیب کو یکساں تفاعل تصور کیا جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔

شکل 5.7 کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ تصور کریں کہ ذو برقی میں غیر قطبی مالیکیول پائے جاتے ہیں جن کا مقام بیرونی میدان کی غیر موجودگی میں دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں $P = 0$ ہوگا۔ ذو برقی کے اندر تصوراتی سطح ΔS لیتے ہیں جسے موٹی گہری سیاہی کی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کے دونوں جانب ہلکی سیاہی سے aa' تا $a'a'$ لکیر بھی دکھائی گئی ہے۔ بیرونی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب $p = Qd$ پیدا ہوتے ہیں جن کا d اور سطح ΔS کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ ان جفت قطب کو سمتیوں سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں سمتیہ کی نوک مثبت جبکہ اس کی دم منفی چارج کا مقام دیتی ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ aa' سے $\frac{d \cos \theta}{2}$ فاصلے نیچے تک تمام مثبت چارج بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے اوپر چلے جائیں گے۔ اسی طرح $a'a'$ سے

³¹ dielectric
³² bound charge
³³ polarization

³⁴ یہ ایسے ہی ہے جیسے لمحاتی رفتار $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ حاصل کرنے وقت $\Delta t \rightarrow 0$ لیا جاتا ہے۔

$\frac{d \cos \theta}{2}$ فاصلے اوپر تک تمام منفی چارج بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے نیچے چلے جائیں گے۔ یوں $\Delta S \cos \theta$ رقبہ اور $d \cos \theta$ گہرائی کے حجم $d \Delta S \cos \theta$ میں جتنے بھی جفت قطب ہوں ان تمام کا ایک سر ΔS سے گزرے گا۔ چونکہ اکائی حجم میں n جفت قطب ہیں لہذا اتنی حجم میں $n d \Delta S \cos \theta$ جفت قطب ہوں گے۔ یوں $\frac{n Q d \Delta S \cos \theta}{2}$ چارج ΔS سے گزر کر اوپر جبکہ $\frac{-n Q d \Delta S \cos \theta}{2}$ چارج ΔS سے گزر کر نیچے جائے گا۔ مثبت چارج کا اوپر جانب حرکت اور منفی چارج کا نیچے جانب حرکت ایک ہی معنی رکھتے ہیں لہذا کل

$$\Delta Q_m = n Q d \Delta S \cos \theta = n Q d \cdot \Delta S \quad (5.26)$$

چارج سطح سے گزرتے ہوئے اوپر جانب جائے گا جہاں ΔQ_m لکھتے ہوئے اس حقیقت کی یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ ہم مقید چارج کی بات کر رہے ہیں۔ چونکہ تمام جفت قطب ایک ہی سمت میں ہیں لہذا اس حجم کی تقطیب

$$P = n Q d \quad (5.27)$$

ہوگی۔ یوں مساوات 5.26 کو

$$\Delta Q_m = P \cdot \Delta S \quad (5.28)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر ΔS کو بند سطح کا ٹکڑا سمجھا جائے جہاں a_s بیرونی سمت کو ہو تب اس بند سطح سے کل چارج کا اخراج

$$\oint_S P \cdot dS$$

کے برابر ہوگا۔ یوں بند سطح میں مقید چارج کا اضافہ

$$Q_m = - \oint_S P \cdot dS \quad (5.29)$$

ہوگا۔ یہ مساوات گاوس کے قانون کی شکل رکھتی ہے لہذا ہم کثافت برقی بہاؤ کی تعریف یوں تبدیل کرتے ہیں کہ یہ خالی خلاء کے علاوہ دیگر صورتوں میں بھی قابل استعمال ہو۔ گاوس کا قانون صفحہ 71 پر مساوات 3.6 میں دیا گیا ہے۔ ہم پہلے اس قانون کو $\epsilon_0 E$ اور کل گھیرے چارج کی Q کی شکل میں لکھتے ہیں

$$Q_{کل} = \oint_S \epsilon_0 E \cdot dS \quad (5.30)$$

جہاں

$$Q_{کل} = Q + Q_m \quad (5.31)$$

کے برابر ہے۔ مساوات 5.30 میں بند سطح S آزاد چارج Q اور مقید چارج Q_m کو گھیرے ہوئے ہے۔ مساوات 5.31 میں مساوات 5.29 اور مساوات 5.30 پر کرتے ہوئے

$$Q = Q_{کل} - Q_m = \oint_S (\epsilon_0 E + P) \cdot dS \quad (5.32)$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم کثافت برقی بہاؤ کو اب

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (5.33)$$

بیان کرتے ہیں جو زیادہ کارآمد اور عمومی مساوات ہے۔ یوں ذوب برق اشیاء کے لئے کثافت برقی بہاؤ میں اضافی جز P شامل ہو جاتا ہے۔ اس طرح

$$Q = \oint_S D \cdot dS \quad (5.34)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں Q گھیرا ہوا آزاد چارج ہے۔

ہم آزاد، مقید اور کل چارجوں کے لئے آزاد، مقید اور کل حجمی کثافت بیان کرتے ہوئے

$$Q = \int_h \rho_h dh$$

$$Q_m = \int_h \rho_m dh$$

$$Q_{کل} = \int_h \rho_{کل} dh$$

لکھ سکتے ہیں۔

مسئلہ پھیلاؤ کے استعمال سے مساوات 5.29، مساوات 5.30 اور مساوات 5.34 کے نقطہ اشکال

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_m$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{کل}$$

اور

$$(5.35) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_h$$

لکھے جاسکتے ہیں۔

قلم میں دہراتے طرز پر ایٹم پائے جاتے ہیں۔ قلم میں عموماً کسی ایک سمت میں باآسانی جبکہ بقایا سمتوں میں مشکل سے تقطیب پیدا کرنا ممکن ہوتا ہے۔ جس بہت میں باآسانی تقطیب پیدا کی جاسکے اسے **آسان محور**³⁵ یا **آسان سمت** یا **زم محور** کہتے ہیں۔ ایسے اشیاء جو مختلف اطراف میں مختلف خصوصیات رکھتے ہوں **سمتی**³⁶ اشیاء کہلاتے ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ یہ ضروری نہیں کہ بیرونی لاگو میدان اور تقطیب ایک ہی سمت میں ہوں۔ کچھ ایسے اشیاء بھی پائے جاتے ہیں جو **برقی چال**³⁷ کی خاصیت رکھتے ہیں۔ ان میں تقطیب کی قیمت ان اشیاء کی گزشتہ تاریخ پر مبنی ہوتی ہے۔ یہ عمل بالکل مقناطیسی مادے کی مقناطیسی چال کے طرز کی خصوصیت ہے۔¹⁴⁹¹

کچھ ذو برقی اشیاء میں لاگو بیرونی میدان \mathbf{E} اور تقطیب \mathbf{P} ہر صورت ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں۔ ان اشیاء کی خصوصیات ہر طرف بالکل ایک ہی طرح ہوتی ہیں۔ ایسے اشیاء **غیر سمی**³⁸ اشیاء کہلاتے ہیں۔ انجنیئرنگ میں استعمال ہونے والے ذو برقی اشیاء عموماً ایسے ہی ہوتے ہیں۔ اس کتاب میں صرف انہیں پر تبصرہ کیا جائے گا۔ ایسے اشیاء میں تقطیب اور لاگو برقی میدان راست تناسب تعلق

$$(5.36) \quad \mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$= (\epsilon_R - 1) \epsilon_0 \mathbf{E}$$

رکھتا ہے جہاں مساوات کے مستقل کو $\chi_e \epsilon_0$ یا $(\epsilon_R - 1) \epsilon_0$ لکھا جاتا ہے۔ یوں مساوات 5.33

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + (\epsilon_R - 1) \epsilon_0 \mathbf{E}$$

یا

$$(5.37) \quad \mathbf{D} = \epsilon_R \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

شکل اختیار کرتا ہے جہاں ذو برق کا برقی مستقل

$$\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0 \quad (5.38)$$

کے برابر ہے۔ ماہر طبیعیات عموماً χ_e جبکہ انجینئر عموماً ϵ_R استعمال کرتے ہیں۔ ان کا تعلق

$$\chi_e = \epsilon_R - 1 \quad (5.39)$$

1492

ہے۔

χ_e برقی اثر پذیری ϵ_R ، ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل⁴⁰ جبکہ ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل⁴¹ کہلاتے ہیں۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 496 پر چند مخصوص اشیاء کے برقی مستقل جدول 16.2 میں دئے گئے ہیں۔

1494

غیر یکساں⁴² خاصیت رکھنے والے اشیاء اتنے سادہ مساوات سے نہیں بنے جاتے۔ ان اشیاء میں E کا ہر کارتیسی جزو D کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہذا ان کا تعلق یوں

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned} \quad (5.40)$$

لکھا جاتا ہے جہاں نواعدادی ϵ_{ij} کو مجموعی طور پر **تناوی مستقل**⁴³ کہا جاتا ہے۔ اسی طرح مساوات 5.40 کے طرز کے مساوات **تناوی** مساوات کہلاتے ہیں۔ غیر سستی اشیاء میں D اور E (اور P) آپس میں متوازی نہیں ہوتے اور اگرچہ $D = \epsilon_0 E + P$ ان کے لئے بھی درست ہے، $D = \epsilon E$ استعمال کرتے وقت اس حقیقت کا خیال رکھنا ہو گا کہ ϵ اب تناوی مستقل ہے۔ غیر سستی اشیاء پر ایک مثال کے بعد بحث روکتے ہیں۔

1497

1498

مثال 5.7: ایک غیر سستی ذو برق کا تناوی مستقل

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

1499

ہے۔ برقی میدان $E = \sqrt{3}a_x$ ، $E = \sqrt{3}a_y$ اور $E = 1a_x + 1a_y + 1a_z$ کی صورت میں D حاصل کریں۔

1500

جوابات: $D = \epsilon_0(4a_x + 9a_y + 9a_z)$ اور $D = 9\epsilon_0 a_y$ ، $D = 4\sqrt{3}\epsilon_0 a_x$

1501

1502

اس مثال میں تینوں $|E| = \sqrt{3}$ جبکہ D کی قیمتیں خاصی مختلف ہیں۔ یہی غیر سستی ذو برق کی پہچان ہے۔

1503

electric susceptibility³⁹
relative electric constant, relative permittivity⁴⁰
permittivity of vacuum, electric constant of vacuum⁴¹
non homogeneous⁴²
tensor⁴³

مشق 5.4: مندرجہ ذیل صورتوں میں تقطیب حاصل کریں۔ (الف) ذو برقی میں $E = 5 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ کی صورت میں $D = 1.2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔ (ب) $D = 1.2 \times 10^{-26} \text{ C m}$ اور $\chi_e = 1.5$ ہیں۔ (پ) ذو برقی میں 6×10^{20} مالیکیوں فی مربع میٹر ہیں جہاں $E = 100 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ پر ہر مالیکیول کا معیار جفت قطب $1.2 \times 10^{-26} \text{ C m}$ ہے۔

جوابات: $7.2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ اور $1.2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ ، $1.156 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$

5.8 کامل ذو برقی کے سرحد پر برقی شرائط

دو مختلف ذو برقی کے سرحدی برقی شرائط⁴⁴ شکل 5.8 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں پہلے ذو برقی کا برقی مستقل ϵ_1 جبکہ دوسرے ذو برقی کا برقی مستقل ϵ_2 ہے۔ پہلے مماسی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر مستطیلی راستہ $abcd$ پر

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

یعنی

$$E_{m1}\Delta w - E_{n1,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{n2,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{m2}\Delta w + E_{n2,a}\frac{\Delta h}{2} + E_{n1,a}\frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھتے ہیں جس سے

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w + (E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ Δw اتنا چھوٹا لیا جاتا ہے کہ اس پر مماسی میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ مستطیل کے بائیں اور دائیں اطراف کے میدان کو زیر نوشت میں a اور b سے ظاہر کیا گیا ہے۔ سرحدی شرائط حاصل کرنے کی خاطر سطح کے قریب تر جانا ہوگا۔ ایسا کرنے سے $\Delta h \rightarrow 0$ ہوگا جس سے

$$(E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} \rightarrow 0$$

ہو کر قابل نظر انداز ہوگا۔ یوں

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w = 0$$

رہ جاتا ہے جس سے

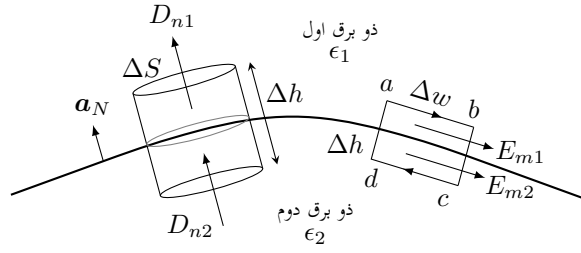
$$(5.41) \quad E_{m1} = E_{m2}$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$(5.42) \quad \mathbf{a}_N \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ اس مساوات سے

$$\frac{D_{m1}}{\epsilon_1} = E_{m1} = E_{m2} = \frac{D_{m2}}{\epsilon_2}$$



شکل 5.8: دو مختلف ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط۔

یعنی

$$(5.43) \quad \frac{D_{m1}}{D_{m2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

یا

$$(5.44) \quad \mathbf{a}_N \times \left(\mathbf{D}_1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \mathbf{D}_2 \right) = 0$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات 5.41 کہتا ہے کہ ایک ذو برقی سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے سرحد پر مماسی برقی شدت **بلا جواز**⁴⁵ ہوتا ہے۔ اس کے برعکس مساوات 5.43 کہتا ہے کہ دو ذو برق کے سرحد پر مماسی برقی بہا **جواز دار**⁴⁶ ہوتا ہے۔ یوں ایک ذو برق سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے مماسی برقی بہا میں **سیڑھی نما**⁴⁷ تبدیلی پائی جاتی ہے۔

عمودی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر گاؤس کا قانون شکل میں رقبہ ΔS گھیرتے بیلن پر لاگو کرتے ہوئے

$$(5.45) \quad \int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n1} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n2} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{نکی سطح}} \mathbf{D}_m \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta S} \rho_s dS$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چھوٹے رقبہ پر میدان کو یکساں تصور کرتے ہوئے مکمل کے باہر لے جاتے ہوئے مساوات 5.45 کے پہلے جزو سے

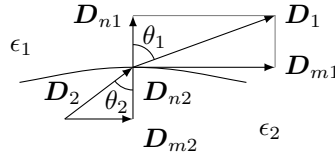
$$\int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n1} \cdot d\mathbf{S} = D_{n1} \Delta S$$

حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ بند سطح کی سمت باہر کو ہوتی ہے لہذا D_{n1} اور بیلن کا بالائی ڈھکن ایک ہی سمت رکھتے ہیں جبکہ D_{n2} اور بیلن کا نچلا ڈھکن الٹ سمت میں ہیں۔ مساوات 5.45 کا دوسرا جزو

$$\int_{\Delta S} \mathbf{D}_{n2} \cdot d\mathbf{S} = -D_{n2} \Delta S$$

دیتا ہے۔ سطح کے قریب سے قریب ہونے سے $0 \rightarrow \Delta h$ ہوگا جس سے نکی سطح کا رقبہ قابل نظر انداز ہوگا جس سے مساوات 5.45 کا تیسرا جزو صفر ہو جاتا ہے جبکہ

$$\int_{\Delta S} \rho_s dS = \rho_s \Delta S$$



شکل 5.9: $\epsilon_1 > \epsilon_2$ کی صورت میں $D_1 > D_2$ ہو گا۔ اسی طرح $\theta_1 > \theta_2$ جبکہ $E_1 < E_2$ ہو گا۔

کے برابر ہے۔ ان تمام نتائج سے

$$D_{n1}\Delta S - D_{n2}\Delta S = \rho_S\Delta S$$

یعنی

$$(5.46) \quad D_{n1} - D_{n2} = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$(5.47) \quad a_N \cdot (D_1 - D_2) = \rho_S$$

بھی لکھا جاسکتا ہے۔ یوں $D = \epsilon E$ کے استعمال سے

$$(5.48) \quad a_N \cdot (\epsilon_1 E_1 - \epsilon_2 E_2) = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے۔

1515

جزوی برقی مستقل کی مدد سے مقید چارج کا حساب رکھا جاتا ہے۔ اس طرح مقید چارج کا علیحدہ طور پر خیال رکھنے کی ضرورت نہیں رہتی۔ یوں مندرجہ بالا مساوات میں ρ_S مقید چارج نہیں ہے۔ ρ_S سرحد پر با مقصد طور رکھی گئی سطحی چارج کثافت ہے۔ اس منفرد صورت، جہاں سرحد پر از خود چارج رکھا جائے، کے علاوہ دو ذو برقی کی سرحد پر کبھی چارج نہیں پایا جاتا۔ انجینئرنگ مسائل میں عموماً $\rho_S = 0$ ہی ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات نسبتاً سادہ شکل

$$(5.49) \quad D_{n1} = D_{n2}$$

اختیار کر لیتی ہے جس سے

$$(5.50) \quad \epsilon_1 E_{n1} = D_{n1} = D_{n2} = \epsilon_2 E_{n2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں سرحد پار کرتے وقت E_n میں سیڑھی نمائندگی پائے جاتی ہے۔ اس حقیقت کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ سرحد پر E_n **جوڑدار**⁴⁸ ہے۔ اس کے برعکس D_n سرحد پر **بلا جوڑ** ہے۔

1517

آئیں ان جوابات کی مدد سے سرحد کے دونوں جانب برقی میدان کا تعلق حاصل کریں۔ شکل 5.9 کو دیکھتے ہوئے ہم

$$D_{m1} = D_1 \sin \theta_1$$

$$D_{n1} = D_1 \cos \theta_1$$

$$D_{m2} = D_2 \sin \theta_2$$

$$D_{n2} = D_2 \cos \theta_2$$

لکھ سکتے ہیں جن سے

$$\frac{D_{n1}}{D_{n2}} = \frac{D_1 \cos \theta_1}{D_2 \cos \theta_2} = 1$$

$$\frac{D_{m1}}{D_{m2}} = \frac{D_1 \sin \theta_1}{D_2 \sin \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں مساوات 5.49 اور مساوات 5.43 کا استعمال کیا گیا ہے۔ انہیں

$$(5.51) \quad \begin{aligned} D_1 \cos \theta_1 &= D_2 \cos \theta_2 \\ \epsilon_2 D_1 \sin \theta_1 &= \epsilon_1 D_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں۔ ان میں دوسری مساوات کو پہلی مساوات سے تقسیم کرتے ہیں

$$\frac{\epsilon_2 D_1 \sin \theta_1}{D_1 \cos \theta_1} = \frac{\epsilon_1 D_2 \sin \theta_2}{D_2 \cos \theta_2}$$

جس سے

$$(5.52) \quad \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساوات سرحد کے دونوں جانب میدان کے زاویوں کا تعلق بیان کرتا ہے۔ چونکہ $D = \epsilon E$ لہذا سرحد کے کسی بھی طرف اس طرف کا E اور D ایک ہی سمت رکھتے ہیں۔ شکل میں $\epsilon_1 > \epsilon_2$ تصور کیا گیا ہے لہذا اس میں $\theta_1 > \theta_2$ ہے۔

1519

مساوات 5.51 کے پہلے جزو کا مربع لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} D_1^2 \cos^2 \theta_1 &= D_2^2 \cos^2 \theta_2 \\ &= D_2^2 (1 - \sin^2 \theta_2) \\ &= D_2^2 - D_2^2 \sin^2 \theta_2 \end{aligned}$$

اس میں مساوات 5.51 کے دوسرے جزو سے $D_2 \sin \theta_2$ کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$D_1^2 \cos^2 \theta_1 = D_2^2 - D_1^2 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$(5.53) \quad D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1}$$

ماتا ہے۔ چونکہ $E = \frac{D}{\epsilon}$ ہے لہذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{D_1}{\epsilon_2} \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1} \\ &= \frac{\epsilon_1 E_1}{\epsilon_2} \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \sin^2 \theta_1} \end{aligned}$$

یعنی

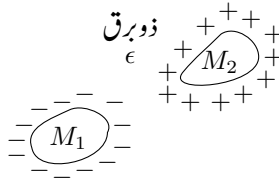
$$(5.54) \quad E_2 = E_1 \sqrt{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^2 \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1}$$

1520

حاصل ہوتا ہے۔

جس جانب برقی مستقل کی قیمت زیادہ ہو، سرحد کے اسی طرف D کی قیمت بھی زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ہوں جس صورت میں $D_{2\text{نرم}}$ D_1 ہوتا ہے۔ اسی طرح کم ϵ جانب E کی قیمت زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1 = \theta_2 = 90$ ہوں جس صورت میں $E_2 = E_1$ ہوتا ہے۔

1522



شکل 5.10: کپیسٹنس کی تعریف۔

5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط

موصل اور ذو برقی کے سرحد پر صورت حال تقریباً ویسے ہی ہے جیسے موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر تھی۔ موصل میں $E = 0$ ہونے کی وجہ سے سرحد پر مستطیلی راستے پر کرچاف کے قانون سے ذو برقی میں $E_m = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح $D_m = \frac{E_m}{\epsilon} = 0$ ہوگا۔

اسی طرح سرحد پر چھوٹا بیلن $\rho_S \Delta S$ چارج کو گھیرے گا جو گاؤس کے قانون کی مدد سے بیلن کے ذو برقی جانب ڈھکن پر عمودی بہاؤ $D_n \Delta S$ پیدا کرے گا۔ یوں $D_n = \rho_S$ حاصل ہوتا ہے جس سے $E_n = \frac{D_n}{\epsilon} = \frac{\rho_S}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔

ان نتائج سے صاف ظاہر ہے کہ موصل اور ذو برقی کے سرحد پر برقی میدان کے جوابات موصل اور خالی خلاء کے سرحد کے جوابات میں ϵ_0 کی جگہ ϵ پر کرنے سے حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} D_m &= E_m = 0 \\ D_n &= \epsilon E_n = \rho_S \end{aligned} \quad (5.55)$$

5.10 کپیسٹر

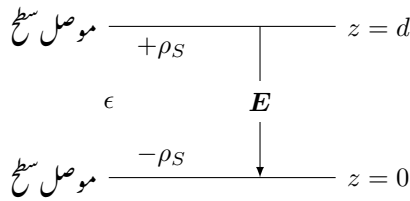
شکل 5.10 میں دو عدد موصل M_1 اور M_2 دکھائے گئے ہیں جن کے گرد ذو برقی پایا جاتا ہے۔ M_1 پر کل Q اور M_2 پر کل $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔ ان چارجوں کے علاوہ پورے نظام میں کوئی اور چارج نہیں پایا جاتا۔ یوں پورا نظام غیر چارج شدہ ہے۔ چونکہ موصل پر صرف سطحی چارج پایا جاتا ہے لہذا دونوں موصل پر چارج سطحی چارج کثافت کی صورت میں پایا جائے گا۔

گاؤس کے قانون کے تحت M_2 سے عمودی سمت میں $+Q$ کے برابر برقی بہاؤ کا اخراج M_1 پر عمودی سمت میں اتنی ہی برقی بہاؤ کا دخول ہوگا۔ یوں موصل کے گرد ذو برقی میں کثافت برقی بہاؤ D اور برقی میدان کی شدت E پائی جائے گی۔ D اور E کی ابتدا M_2 سے ہوگی اور ان کا اختتام M_1 پر ہوگا۔

اس برقی میدان میں کسی بھی راستے ایک کولمب کا چارج M_2 تا M_1 منتقل کرنے کی خاطر V_0 توانائی درکار ہوگی۔ موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے لہذا پہلے موصل کی سطح سے کسی بھی نقطے سے دوسرے موصل کی سطح پر کسی بھی نقطے تک چارج منتقل کرنے کی خاطر برابر توانائی درکار ہوتی ہے۔

کپیسٹنس C^{49} کی تعریف

$$C = \frac{Q}{V_0} \quad (5.56)$$



شکل 5.11: متوازی چادر کیپسٹر۔

ہے جہاں M_1 کو صفر برقی دباؤ پر تصور کرتے ہوئے M_2 کی برقی دباؤ V_0 اور مثبت موصل یعنی M_2 کا چارج Q ہے۔ منفی موصل سے مثبت موصل تک اکائی مثبت چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی V_0 کو مکمل کے ذریعے حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح مثبت موصل پر چارج Q کو گاوس کے قانون کی مدد سے بذریعہ سطحی مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں صفحہ 71 پر مساوات 3.6 اور صفحہ 99 پر مساوات 4.11 کی مدد سے کیپسٹنس کی عمومی مساوات

$$C = \frac{\oint_S \epsilon E \cdot dS}{\int_{-}^{+} E \cdot dL} \quad (5.57)$$

لکھی جاسکتی ہے۔

دونوں موصل پر چارج دگنا کرنے سے گاوس کے قانون کے تحت برقی بہاؤ بھی دگنی ہو جائے گی۔ یوں D اور E بھی دگنے ہوں گے جس سے دونوں موصل کے مابین برقی دباؤ بھی دگنا ہو گا۔ اس طرح دگنا چارج تقسیم دگنا دباؤ ایک بار پھر وہی کیپسٹنس دے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کیپسٹنس کی قیمت کا دار و مدار موصل کے اشکال، ان کے درمیان فاصلہ اور برقی مستقل پر منحصر ہے ناکہ موصل پر کل چارج کے۔

کیپسٹنس کی اکائی **فیراڈ**⁵⁰ ہے جسے F سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایک کولمب فی ولٹ ایک فیراڈ⁵¹ کے برابر ہے۔ ایک فیراڈ نہایت بڑی قیمت ہے اور عام طور پر کیپسٹنس کو مائیکرو فیراڈ μF یا پیکو فیراڈ pF میں ناپا جاتا ہے۔

5.10.1 متوازی چادر کیپسٹر

شکل 5.11 میں دو لامحدود متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں۔ چلی چادر $z = 0$ پر ہے اور اس پر سطحی چارج کثافت $-\rho_S$ پائی جاتی ہے جبکہ بالائی چادر $z = d$ پر ہے اور اس پر سطحی چارج کثافت $+\rho_S$ پائی جاتی ہے۔ اس مسئلے کو ہم پہلے تفصیلی طور پر دیکھ چکے ہیں۔ دو چادروں کے درمیان میدان صفحہ 54 پر مساوات 2.44 دیتا ہے جہاں مثبت چادر $x = 0$ اور منفی چادر $x = x_1$ پر رکھے گئے تھے۔ یوں موجودہ شکل کے مطابق مساوات 2.44 کی صورت

$$E = -\frac{\rho_S}{\epsilon} a_z$$

ہوگی۔ میدان مثبت سے منفی چادر کی سمت میں ہے۔ مثبت سطح سے خارج برقی بہاؤ کی کثافت مثبت ہے یعنی اس سطح پر عمودی $D_+ = \rho_S$ کے برابر ہے جبکہ منفی چادر پر برقی بہاؤ داخل ہوتا ہے لہذا یہاں $D_- = -\rho_S$ ہوگا۔

منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر

$$V = - \int_0^d E \cdot dL = \int_0^d \frac{\rho_S a_z}{\epsilon} \cdot dz a_z = \int_0^d \frac{\rho_S}{\epsilon} dz = \frac{\rho_S d}{\epsilon}$$

⁵⁰ Farad

⁵¹ یہ اکائی انگریزی ماہر طبیعیات مائیکل فیراڈے کے نام سے منسوب ہے۔

برقی دباؤ ہوگا۔ لامحدود چادر پر لامحدود چارج پایا جائے گا جس سے چادر لامحدود کپیسٹنس کا حامل ہوگا۔ حقیقی کپیسٹر محدود رقبے کے چادر سے بنائے جاتے ہیں۔ اگر محدود رقبے کے متوازی چادروں کے اطراف کی لمبائیاں سطحوں کے مابین فاصلے سے زیادہ ہو تو ایسی صورت میں چادروں کے درمیانی خطے میں برقی میدان لامحدود چادروں کے میدان کی مانند ہی ہوگا۔ S رقبے کے چادروں کے کپیسٹر کو لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مثبت چادر پر کل

$$Q = \int_S \rho_S dS = \rho_S S$$

چارج پایا جائے گا۔ یوں اس کی کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon S}{d} \quad (5.58)$$

ہوگی۔ کپیسٹر کے کناروں کے قریب میدان پھول کر کپیسٹر سے باہر نکلے گا۔ میدان کے پھولنے⁵² کو ہم نے نظر انداز کیا ہے۔ کپیسٹنس کی قیمت رقبہ بڑھا کر اور چادروں کے درمیان فاصلہ کم کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح چادروں کے درمیان زیادہ سے زیادہ برقی مستقل کا ذوبرق استعمال کرتے ہوئے کپیسٹنس¹⁵⁴⁷ بڑھائی جاسکتی ہے۔

بلند تر تعدد پر چلنے والے کپیسٹر ابرق استعمال کرتے ہوئے بنائے جاتے ہیں۔ **ابرق کپیسٹر**⁵³ انتہائی کم برقی طاقت ضائع کرتا ہے۔ ابرق کی پتری کے دونوں جانب موصل مادے کی تہہ چڑھا⁵⁴ کر کپیسٹر تیار کیا جاتا ہے۔

مثال 5.8: ایک ملی میٹر کے ایک چوتھائی موٹا اور ایک سنٹی میٹر اطراف کے مربع ابرق کے پتری کے دونوں جانب المونیم کی تہہ چڑھا کر کپیسٹر تیار کیا گیا ہے اس کی کپیسٹنس دریافت کریں۔

حل: کتاب کے آخر میں جدول 16.2 سے ابرق کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_R = 5.4$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$C = \frac{5.4 \times 0.01^2}{36\pi \times 10^9 \times 0.25 \times 10^{-3}} = 19.1 \text{ pF}$$

حاصل ہوتا ہے۔

1551

1554

5.10.2 ہم محوری کپیسٹر

صفحہ 102 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہم محوری تار کے دو تاروں کے درمیان برقی دباؤ دیتا ہے جہاں اندرونی تار پر لکیری چارج کثافت ρ_L ہے۔ بیرونی تار کو برقی زمین تصور کیا گیا ہے۔ L لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی تار پر یوں $Q = \rho_L L$ چارج پایا جائے گا۔ اس طرح اتنی تار کا کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_L L}{\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (5.59)$$

ہوگا جہاں اندرونی تار کا رداس ρ_1 جبکہ بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔

محدد کے مرکز پر r_A اور r_B داس کے موصل کرہ سطح ہیں جہاں $r_B > r_A$ ہے۔ اندرونی سطح پر Q اور بیرونی سطح پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔ گاوس کے قانون کے تحت اندرونی سطح کے اندر یعنی $r < r_A$ اور بیرونی سطح باہر یعنی $r > r_B$ پر میدان صفر ہوگا۔ دونوں سطحوں کے درمیان میدان بالکل ایسا ہی ہوگا جیسے محدود کے مرکز پر نقطہ چارج Q کا میدان ہوتا ہے۔ یوں بیرونی سطح کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی سطح پر برقی دباؤ صفحہ 101 پر مساوات 4.13

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح ان سطحوں کا کیپسٹنس

$$(5.60) \quad C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}}$$

1557

ہوگا۔

ایک دلچسپ صورت حال کو دیکھتے ہیں۔ اگر r_B کو لا محدود کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات سے

$$(5.61) \quad C = 4\pi\epsilon R \quad \text{کرہ کی کیپسٹنس}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں r_A کی جگہ R لکھا گیا ہے۔ یہ مساوات رداس R کرہ کی کیپسٹنس دیتا ہے۔ یاد رہے کہ اس کیپسٹر کی دوسری سطح لا محدود فاصلے پر ہے۔

1559

مثال 5.9: آپ نے بچپن میں بلور تو تھیلیں ہوں گے۔ بلور کا قطر تقریباً ایک سنٹی میٹر ہوتا ہے۔ خالی خلاء میں موصل بلور کی کیپسٹنس حاصل کریں۔

حل:

$$C = \frac{0.5 \times 10^{-2}}{9 \times 10^9} = 0.55 \text{ pF}$$

1561

r_A رداس کے چارج بردار موصل بلور کے اوپر r_A تا r_1 برقی مستقل ϵ_1 کے ذریعہ کی تہہ چھڑانے سے $D = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$ کی بدولت

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \mathbf{a}_r & (r_A < r < r_1) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r & (r > r_1) \end{cases}$$

ہوگا۔ برقی زمین کو لا محدود فاصلے پر رکھتے ہوئے بلور کا برقی دباؤ

$$V = - \int_{\infty}^{r_1} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_1 r^2} - \int_{r_1}^{r_A} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_1 r^2} \\ = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1} \right)$$

ہوگا جس سے کیپسٹنس

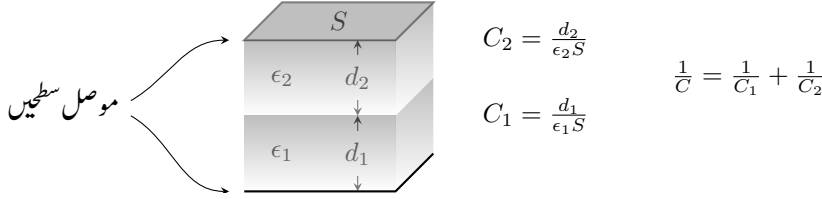
$$(5.62) \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1} \right)}$$

1562

حاصل ہوتی ہے۔

5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر

متوازی چادر کپیسٹر میں دو مختلف ذو برقی بھرنے کا کپیسٹنس پراثر دیکھتے ہیں۔ ایسا کپیسٹر شکل 5.12 میں دکھایا گیا ہے۔ چادروں کے درمیان فاصلہ چادر کے اطراف کی لمبائیوں سے نہایت کم ہونے کی صورت میں انہیں لامحدود چادروں کی طرح تصور کیا جاسکتا ہے۔ منفی چادر پر ϵ_1 برقی مستقل کی d_1 موٹائی کی تہہ اور مثبت چادر پر ϵ_2 برقی مستقل کی d_2 موٹائی کی تہہ ہیں۔ نفی چادر پر ρ_S جبکہ مثبت چادر پر ρ_S سطحی چارج کثافت کی صورت میں چادروں کے درمیان $D = \rho_S$ ہوگا۔ یوں ϵ_1 ذو برقی کے خطے میں



شکل 5.12: سلسلہ وار کپیسٹر۔

$$E_1 = \frac{\rho_S}{\epsilon_1}$$

جبکہ ϵ_2 ذو برقی کے خطے میں

$$E_2 = \frac{\rho_S}{\epsilon_2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\rho_S d_1}{\epsilon_1} + \frac{\rho_S d_2}{\epsilon_2}$$

ہوگا جبکہ مثبت چادر پر چارج $Q = \rho_S S$ ہوگا جس سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

یعنی

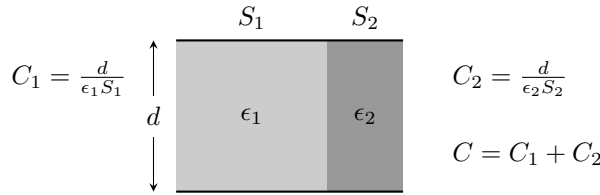
$$(5.63) \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

لکھی جاسکتی ہے جہاں

$$(5.64) \quad C_1 = \frac{d_1}{\epsilon_1 S} \\ C_2 = \frac{d_2}{\epsilon_2 S}$$

کے برابر ہیں۔ یہی جواب شکل 5.12 میں سلسلہ وار جڑے C_1 اور C_2 کی نشاندہی کرتے ہوئے لکھا جاسکتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل متوازی دو چادروں کے درمیان تیسرے اور چوتھے ذو برقی کے تہہ دئے جاسکتے ہیں۔ انہیں سلسلہ وار کپیسٹر تصور کرتے ہوئے حل کیا جاسکتا ہے۔



شکل 5.13: متوازی جڑے کپیسٹر۔

شکل 5.13 میں دو چادروں کے درمیان دو مختلف ذوبرق اس طرح بھرے گئے ہیں کہ یہ متوازی جڑے کپیسٹر کو جنم دیں۔ ہم شکل کو دیکھ کر ہی

$$(5.65) \quad C = C_1 + C_2$$

لکھ سکتے ہیں۔ آئیں اتنی جلدی کرنے کی بجائے اس مسئلے کا ریاضیاتی حل نکالیں۔ دونوں موصل چادر ہم توہ ہیں لہذا انچلی چادر کو برقی زمین یعنی صفروولٹ اور دوسری چادر کو \$V_0\$ برقی دباؤ پر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ یوں چادروں کے درمیان خطے میں $E = \frac{V_0}{d}$ ہوگا جس سے بائیں ہاتھ، یعنی ϵ_1 برقہ مستقل کے ذوبرق میں $D_1 = \epsilon_1 E$ جبکہ دائیں ہاتھ کے ذوبرق میں $D_2 = \epsilon_2 E$ ہوں گے۔ D_1 اور D_2 موصل چادروں کے عمودی ہیں لہذا سرحدی شرائط کے تحت مثبت چادر کے S_1 حصے پر D_1 جبکہ اس کے S_2 حصے پر D_2 ہوگا۔ یوں مثبت چادر پر کل چارج

$$Q = \rho_1 S_1 + \rho_2 S_2 = \epsilon_1 \frac{V_0}{d} S_1 + \epsilon_2 \frac{V_0}{d} S_2$$

سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d}$$

یعنی

$$(5.66) \quad C = C_1 + C_2$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$(5.67) \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{\epsilon_1 S_1}{d} \\ C_2 &= \frac{\epsilon_2 S_2}{d} \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔

1567

1568

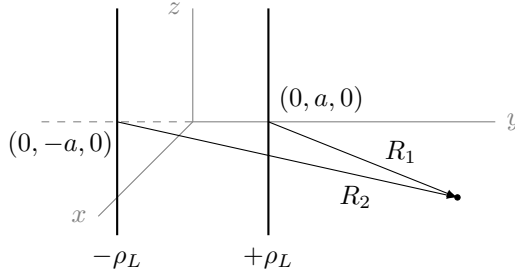
5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس

شکل 5.14 میں دو لامحدود لمبائی کے تار \$z\$ محدود کے متوازی دکھائے گئے ہیں۔ ہم ایسے متوازی جوڑی کی کپیسٹنس حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ ہم توہ تار کی طرح دو متوازی تار بھی انتہائی اہم ہیں اور ان سے زندگی میں بار بار واسطہ پڑتا ہے۔

1570

ایک تار جو \$(0, a, 0)\$ سے گزرتی ہے پر مثبت لکیری چارج کثافت \$\rho_L\$ پایا جاتا ہے جبکہ دوسری تار جو \$(0, -a, 0)\$ سے گزرتی ہے پر منفی لکیری چارج کثافت \$-\rho_L\$ پایا جاتا ہے۔ \$z\$ محدود پر لامحدود لمبائی کے لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباؤ صفحہ 102 پر مساوات 4.16

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1}$$



شکل 5.14: دو متوازی تاروں کی کپیسٹنس۔

دیتا ہے جہاں برقی میدان کو ρ_0 پر تصور کیا گیا۔ اس مساوات کو شکل 5.14 کے لئے ترتیب دیتے ہوئے دونوں تاروں کا مجموعی برقی دباؤ

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{R_{10}}{R_1} - \ln \frac{R_{20}}{R_2} \right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_{10}R_2}{R_{20}R_1}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اگر $R_{10} = R_{20}$ رکھا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ سطح $y = 0$ پر $R_{10} = R_{20}$ ہو گا لہذا دراصل ہم برقی زمین کو $y = 0$ سطح پر رکھ رہے ہیں۔ اب R_1 اور R_2 کو x اور y کی صورت

$$R_1 = x a_x + (y - a) a_y$$

$$R_2 = x a_x + (y + a) a_y$$

میں لکھتے ہوئے

$$(5.68) \quad V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}$$

یا

$$(5.69) \quad e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V}{\rho_L}} = \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

ہم قوہ سطحیں حاصل کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو کسی اٹل برقی دباؤ مثلاً V_1 کے لئے لکھ کر حل کرتے ہیں۔ چونکہ V_1 اٹل یا مستقل قیمت ہے جو تبدیل نہیں ہوتا لہذا مندرجہ بالا مساوات میں

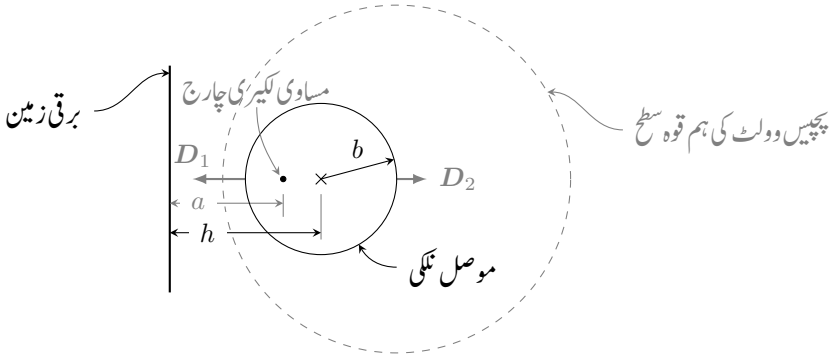
$$(5.70) \quad K_1 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\rho_L}}$$

لکھ کر اسے

$$K_1 = \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}$$

لکھا جاسکتا ہے جسے حل کرتے ہوئے

$$x^2 + y^2 - 2ay \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} = -a^2$$



شکل 5.15: زمین کے قریب موٹی تار کا کپیسٹنس۔

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات کے دونوں جانب $a^2 \frac{(K_1+1)^2}{(K_1-1)^2}$ جمع کرتے ہوئے یوں

$$(5.71) \quad x^2 + \left[y - a \left(\frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} \right) \right]^2 = \left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1} \right)^2$$

لکھا جاسکتا ہے جو رداس $\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}$ کے گول دائرے کی مساوات ہے جس کا مرکز $\left[0, \frac{a(K_1+1)}{K_1-1}\right]$ پر ہے۔ یہ مساوات کہتا ہے کہ ہم قوہ سطح z کی قیمت پر منحصر نہیں ہے یعنی یہ ٹکلی شکل رکھتی ہے۔ مساوات 5.71 میں

$$(5.72) \quad \begin{aligned} b &= \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1} \\ h &= a \left(\frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} \right) \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے اسے

$$(5.73) \quad x^2 + (y - h)^2 = b^2$$

لکھا جاسکتا ہے۔ انہیں ان نتائج پر غور کریں۔

شکل 5.14 کو عکس کے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے $y = 0$ پر برقی زمین رکھتے ہوئے منفی چارج کثافت کے تار کو ہٹانے سے زمین کے دائیں جانب میدان میں کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہوگی۔ دائیں جانب اب بھی ہم قوہ سطحیں b رداس کے دائرے بنائے گئے ہیں جن کا مرکز زمین سے h فاصلے پر ہوگا۔ ہم قوہ سطح کے رداس h کا دار و مدار K_1 پر ہے جو از خود V_1 پر منحصر ہے۔ ہم مختلف برقی دباؤ V_2, V_3, \dots کے لئے K_2, K_3, \dots حاصل کرتے ہوئے ایسے ہم قوہ سطحوں کے رداس اور زمین سے ان کے مرکز کے فاصلے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم V_1 ہم قوہ سطح کی جگہ V_1 برقی دباؤ کی موصل سطح رکھ سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے میدان پر کہیں بھی کوئی اثر نہیں آئے گا۔

انہیں ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود سیدھی موصل سطح سے h فاصلے پر b رداس کے موصل ٹکلی کی کپیسٹنس حاصل کریں۔ یہ صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔ یہاں h اور b دئے گئے ہیں جن سے مساوات 5.72 کی مدد سے K_1, a اور V_1 معلوم کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 5.72 کو حل کرتے ہوئے

$$(5.74) \quad \begin{aligned} a &= \sqrt{h^2 - b^2} \\ K_1 &= \left(\frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} \right)^2 \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اس سے

$$V_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ زمین صفر وولٹ اور موصل نکلی V_1 وولٹ پر ہے لہذا ان کے درمیان V_1 برقی دباؤ ہوگا۔

شکل 5.14 میں مثبت تار کے لمبائی پر کل چارج $Q = \rho_L L$ پایا جاتا ہے۔ شکل 5.15 میں بھی برقی زمین کے اتنے ہی لمبائی پر اتنے ہی مقدار مگر منفی چارج ہو گا جبکہ b داس کے موصل نکلی پر یہی $Q = \rho_L L$ چارج ہوگا۔ یوں L لمبائی کے موصل نکلی اور زمین کے درمیان

$$C = \frac{Q}{V_1} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\cosh^{-1} \frac{h}{b}} \quad (5.75)$$

کپیسٹنس پایا جائے گا۔

زمین سے دور کم موٹائی کے تار کی صورت میں $b \gg h$ ہوگا لہذا مساوات 5.75

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{2h}{b}} \quad h \gg b \quad (5.76)$$

صورت اختیار کر لے گا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔ شکل 5.14 میں دو تاروں کے درمیان کپیسٹنس مساوات 5.75 کے جواب کا نصف ہوگا چونکہ مثبت تار اور زمین کے مابین کپیسٹر اور منفی تار اور زمین کے مابین کپیسٹر کو سلسلہ وار جڑا تصور کیا جاسکتا ہے۔

کچھ حقائق مثال کی مدد سے بہتر سمجھ آتے ہیں۔ انہیں مثال 5.10 کی مدد سے ایسی چند باتیں سیکھیں۔

1583

مثال 5.10: برقی زمین کے متوازی خالی خلاء میں دس میٹر کے فاصلے پر پانچ میٹر داس کی موصل نکلی پائی جاتی ہے جس پر پچاس وولٹ کا برقی دباؤ ہے۔

1585

• نکلی پر لکیری چارج کثافت حاصل کریں۔

1586

• ایک میٹر لمبائی کے لئے نکلی اور زمین کے مابین کپیسٹنس حاصل کریں۔

1587

• پچیس وولٹ ہم قوہ سطح کار داس اور زمین سے اس کے مرکز کا فاصلہ حاصل کریں۔

1588

• زمین سے ایسی لکیری چارج کثافت کا فاصلہ دریافت کریں جو ہو بہو ایسی ہی ہم قوہ سطحیں پیدا کرے گا۔

1589

• نکلی پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

1590

حل: صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔

- یہاں $h = 10$ جبکہ $b = 5$ ہیں لہذا مساوات 5.74 کی مدد سے

$$a = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8.66 \text{ m}$$

$$K_1 = \left(\frac{10 + \sqrt{10^2 - 5^2}}{5} \right)^2 = 13.92$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 5.70 کے استعمال سے یوں

$$\rho_L = \frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\ln K_1} = \frac{50}{9 \times 10^9 \times \ln 13.92} = 2.11 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

- مساوات 5.75 یا کپیسٹنس کی تعریف سے فی میٹر کپیسٹنس حاصل کرتے ہیں۔

$$C = \frac{\rho_L L}{V_1} = \frac{2.11 \times 10^{-9} \times 1}{50} = 4.22 \text{ nF}$$

- پچیس وولٹ ہم قوہ سطح کے لئے مساوات 5.70 سے

$$K_2 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_2}{\rho_L}} = e^{\frac{25}{9 \times 10^9 \times 2.11 \times 10^{-9}}} = 3.73$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مساوات 5.72 سے پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح کے لئے

$$b = \frac{2 \times 8.66 \times \sqrt{3.73}}{3.73 - 1} = 12.25 \text{ m}$$

$$h = 8.66 \times \left(\frac{3.73 + 1}{3.73 - 1} \right) = 15 \text{ m}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح جس کا رداس سوا بارہ میٹر اور جو زمین سے پندرہ میٹر کے فاصلے پر ہے کو شکل میں ہلکی سیاہی سے نقطہ دائرہ گول دائرے سے دکھایا گیا ہے۔

- برقی زمین سے 8.66 m فاصلے پر $2.11 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ لکیری چارج کثافت کی باریک تار بالکل اسی طرز کے ہم قوہ سطحیں پیدا کرے گا۔

- کسی بھی جگہ E کو مساوات 5.68

$$V = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(x^2 + (y + a)^2) - \ln(x^2 + (y - a)^2) \right]$$

کے ڈھلوان $E = -\nabla V$ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جس سے

$$D = \epsilon_0 E = -\epsilon_0 \nabla V = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y \right)$$

بھی حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2x}{x^2 + (y + a)^2} - \frac{2x}{x^2 + (y - a)^2} \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2(y + a)}{x^2 + (y + a)^2} - \frac{2(y - a)}{x^2 + (y - a)^2} \right]$$

کے برابر ہیں۔

چونکہ موصل کے سطح پر D عمودی ہوتا ہے اور اس کی قیمت سطحی چارج کثافت کے برابر ہوتی ہے لہذا ہم موصل نکلی پر برقی زمین کے قریبی جانب D_1 اور اس سے دور جانب D_2 کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ انہیں شکل 5.15 میں دکھایا گیا ہے۔ زمین سے نکلی کا قریبی فاصلہ $h - b = 5 \text{ m}$ ہے۔ یوں $x = 0$ اور $y = 5$ ہوگا جس سے

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2 \times 0}{0^2 + (5 + 8.66)^2} - \frac{2 \times 0}{0^2 + (5 - 8.66)^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2(5 + 8.66)}{0^2 + (5 + 8.66)^2} - \frac{2(5 - 8.66)}{0^2 + (5 - 8.66)^2} \right] = \frac{0.693\rho_L}{4\pi\epsilon_0}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

$$D_1 = -\frac{0.693\rho_L}{4\pi} a_y$$

ہوگا۔ زمین سے دور نکلی پر $x = 0$ اور $y = h + b = 10 + 5 = 15 \text{ m}$ ہیں جس سے

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2 \times 0}{0^2 + (15 + 8.66)^2} - \frac{2 \times 0}{0^2 + (15 - 8.66)^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2(15 + 8.66)}{0^2 + (15 + 8.66)^2} - \frac{2(15 - 8.66)}{0^2 + (15 - 8.66)^2} \right] = -\frac{0.231\rho_L}{4\pi\epsilon_0}$$

یا

$$D_2 = \frac{0.231\rho_L}{4\pi} a_y$$

حاصل ہوتا ہے۔ دونوں جوابات سے ظاہر ہے کہ بہاد کا اخراج سطح کے عمودی ہے۔ یوں موصل نکلی پر

$$\rho_{S \text{ قریبی}} = \frac{0.693\rho_L}{4\pi}$$

$$\rho_{S \text{ دور}} = \frac{0.231\rho_L}{4\pi}$$

پایا جائے گا۔ یاد رہے کہ قریبی جانب منفی جواب کا مطلب ہے کہ اخراج زمین کی جانب ہے جبکہ دور جانب مثبت جواب کا مطلب ہے کہ اخراج a_y جانب ہے۔ دونوں جانب اخراج ہی ہے لہذا سطحی چارج کثافت دونوں جگہوں پر مثبت ہی ہے۔

1598

1599

اس مثال سے صاف ظاہر ہے کہ نکلی کا چارج بالکل اس طرح عمل کرتا ہے جیسے برقی زمین سے 8.66 m فاصلے پر باریک چارج بردار تار جس پر $2.011 \frac{\text{nC}}{\text{m}}$ پایا جاتا ہو۔ نکلی سے پیدا ہونے والا قوتہ سطحیں اسی فرضی کیری چارج کثافت کے تار سے حاصل کی جاتی ہیں۔

1601

1602

1603

مشق 5.5: مساوات 5.74 کو ثابت کریں۔

1604

باب 16

سوالات

16.1 موصل

سوال 16.1: کئی محدود میں کثافت برقی رو $J = 50e^{-1.5z}(\rho^2 a_\rho + a_z) \frac{A}{m^2}$ دی گئی ہے۔ الف) سطح $z = 0$ اور $z = 1$ پر رداس $0 \leq \rho < 1$ کی ٹکڑی سے a_z سمت میں گزرتی برقی رو دریافت کریں۔ ب) بندیلین $0 \leq \rho \leq 1$ ، $0 \leq z \leq 1$ سے خارج کل برقی رو حاصل کریں۔

جوابات: 157 A ، 35 A ، 41 A

سوال 16.2: کثافت برقی رو $J = \frac{550 \sin 2\theta}{r^2 + 6} \frac{A}{m^2}$ دی گئی ہے۔ کر دی سطح $r = 0.5$ ، $0.1\pi \leq \theta \leq 2\pi$ ، $0 \leq \phi \leq 2\pi$ سے اس سمت میں خارج کل برقی رو حاصل کریں۔ اس سطح پر اوسط کثافت برقی رو دریافت کریں۔

جوابات: 29.86 A ، $77.9 \frac{A}{m^2}$

سوال 16.3: دو متوازی سطحیں $z = 0$ اور $z = 10 \text{ mm}$ پر پائے جاتے ہیں جن کے درمیان 1000 V کا برقی دباؤ ہے۔ غلی سطح سے الیکٹران صفر ابتدائی رفتار کے ساتھ خارج ہو کر بالائی سطح کی جانب اسراع پذیر ہوتے ہیں جہاں انہیں وصول کیا جاتا ہے۔ الیکٹران کا چارج $-1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ جبکہ اس کی کمیت $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ہے۔ غلی سطح سے کل $50 \mu\text{A}$ برقی رو 0.1 mm رداس کے شعاع کی صورت میں خارج ہوتی ہے۔ چادروں کے درمیان E حاصل کریں۔ اسراع پذیر الیکٹران کی رفتار $v(t)$ کی مساوات حاصل کریں۔ اسی طرح $z(t)$ اور $v(z)$ بھی حاصل کریں۔ کثافت برقی رو اور حجمی کثافت چارج کے مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $v(\infty) = 1.87 \times 10^8 \sqrt{z} \frac{m}{s}$ ، $z(t) = 8.792 \times 10^{15} t^2 \text{ m}$ ، $v(t) = 1.758 \times 10^{16} t \frac{m}{s}$ ، $a(t) = -10^5 a_z \frac{V}{m}$ ، $\frac{-8.51 \times 10^{-6}}{\sqrt{z}} \text{ C/m}^3$ ، $1592 \frac{A}{m^2}$ ،

سوال 16.4: کثافت برقی رو $J = \frac{J_0 e^{-az}}{(y+1)(x+1)} a_z$ کی صورت میں سطح $z = 0$ ، $0 < x < 1$ ، $0 < y < 1$ سے گزرتی برقی رو حاصل کریں۔

جواب: $0.48 J_0$

سوال 16.5: کثافت برقی رو $J = 3xyz a_x + 2x^2 yz^2 a_y - 5xy^2 z^2 a_z$ کی صورت میں نقطہ $N(7, -4, 2)$ پر 1 m لمبائی اطراف کے مکعب سے کتنی برقی رو خارج ہوتی ہے؟ مکعب کے اطراف کارتیسی محدود کے متوازی ہیں جبکہ نقطہ N اس کا وسطی نقطہ ہے۔ مکعب میں چارج کس شرح سے بڑھ رہی ہے؟

جواب: 1875 A ، $\frac{C}{s}$ -1875

سوال 16.6: سیلیکان کی موصلیت $\frac{S}{m}$ 1200 ہے۔ سیلیکان کا پیچر $0 \leq z \leq 0.08$ ، $0 \leq \rho \leq 0.07$ ، $0 \leq \phi \leq 0.3\pi$ شکل رکھتا ہے۔ برقی شدت $E = \frac{0.005}{\rho} a_\phi \frac{V}{m}$ کی صورت میں پیچر میں برقی رواج اس کی مزاحمت حاصل کریں۔

جوابات: 0.6 A ، $6 m\Omega$

سوال 16.7: برقی شدت $E = \frac{0.005}{\rho} a_\rho \frac{V}{m}$ ہونے کی صورت میں سوال 16.6 کو دوبارہ حل کریں۔

جوابات: 0.3468 A ، $18 m\Omega$

سوال 16.8: پاکستان میں برقی طاقت کی پیداوار اور منتقلی واچڈ¹ کے ذمہ ہے۔ اگرچہ تانبہ کی موصلیت نہایت عمدہ ہے لیکن تانبہ مہنگا عنصر ہے لہذا برقی طاقت کے منتقلی کے لئے المونیم کی تار استعمال کی جاتی ہے۔ المونیم از خود کمزور عنصر ہے لہذا المونیم کے تاروں کو سٹیل کے تار کے گرد لپیٹا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ $2 mm$ کے لوہے کی تار پر $3 mm$ المونیم کی تہہ چڑھائی جاتی ہے۔ ایسی ایک کلو میٹر لمبی تار کی مزاحمت حاصل کریں۔ المونیم اور لوہے کی موصلیت بالترتیب $3.82 \times 10^7 \frac{S}{m}$ اور $1.03 \times 10^7 \frac{S}{m}$ ہیں۔

جواب: $377.4 m\Omega$

سوال 16.9: ایک خطے میں کثافت برقی رو کو $J = 0.02re^{-1000t} a_r \frac{A}{m^2}$ لکھا جاسکتا ہے۔ لمحہ $t = 1 ms$ پر رداس $r = 3$ کے کرہ سے کتنی برقی رواج ہوگی۔ استمراری مساوات $\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$ استعمال کرتے ہوئے ρ_h حاصل کریں۔ ایسا کرتے ہوئے $t \rightarrow \infty$ پر $\rho_h \rightarrow 0$ لیں۔

جوابات: 2.5 A ، $60e^{-1000t} \mu C/m^3$ ، $333ra_r \frac{m}{s}$ ، ρ_h

سوال 16.10: برقی ہیٹر² عموماً نائیکروم کی تار سے بنائے جاتے ہیں۔ گھریلو $220 V$ اور $50 Hz$ پر چلنے والے $1 kW$ طاقت کے ہیٹر کے تار کا قطر حاصل کریں۔ اگر تار کی لمبائی $4 m$ ہو۔ اس طاقت پر تار میں کثافت برقی رواج حاصل کریں۔ صفحہ 16.1 پر جدول 16.1 کی مدد لیں۔

جواب: $0.324 mm$ ، $55 \frac{MA}{m^2}$

سوال 16.11: $N(0, 0, 2)$ سے گزرتی y محور کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5 \frac{nC}{m} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

سے $M(5, 3, 1)$ پر حاصل کریں۔

$$D = \frac{5 \times 10^{-9} (5a_x - 1a_z)}{2\pi \times 26}$$

سوال 16.12: لامحدود موصل زمینی سطح $z = 0$ رکھتے ہوئے سوال 16.11 کو دوبارہ حل کریں۔

$$D = \frac{5 \times 10^{-9} (40a_x - 112a_z)}{2\pi \times 884}$$

سوال 16.13: $N(0, 0, 2)$ سے گزرتی y محدود کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5 \frac{nC}{m} \quad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

پایا جاتا ہے جبکہ $z = 0$ پر لا محدود موصل زمینی سطح موجود ہے۔ سطح کے $M(5, 3, 0)$ مقام پر سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } -0.1097 \frac{nC}{m^2}$$

سوال 16.14: مشق 5.3 میں $300 K$ درجہ حرارت پر سیلیکان اور جرمنیم کے مستقل دئے گئے ہیں۔ اگر سیلیکان میں المونیم کا ایک ایٹم فی $10^7 \times$ سیلیکان ایٹم ملاوٹ شامل کی جائے تو سیلیکان کی موصلیت کیا ہوگی۔ سیلیکان کی تعدادی کثافت 5×10^{28} ایٹم فی مربع میٹر ہے۔ (ہر ملاوٹی المونیم کا ایٹم ایک عدد آزاد خول پیدا کرتا ہے جن کی تعداد مشق میں دئے خالص سیلیکان میں آزاد خول کی تعداد سے بہت زیادہ ہوتی ہے لہذا ایسی صورت میں موصلیت صرف ملاوٹی ایٹموں کے پیدا کردہ آزاد خول ہی تعین کرتے ہیں۔)

$$\text{جواب: } 800 \frac{S}{m}$$

سوال 16.15: صفحہ 139 پر مثال 5.6 میں لا محدود موصل سطح $z = 0$ میں $(0, 0, z)$ پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے پیدا سطحی چارج کثافت ρ_s حاصل کیا گیا۔ موصل سطح میں پائے جانے والا کل چارج سطحی مکمل سے حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } -Q$$

سوال 16.16: صفحہ 130 پر تانبے کے ایک مربع میٹر میں کل آزاد چارج مساوات 5.13 میں حاصل کیا گیا۔ ایک ایمپیر کی برقی رو کتنے وقت میں اتنے چارج کا انچارج کرے گا۔

$$\text{جواب: چار سو اکتیس (431) سال۔}$$

$$\text{سوال 16.17: مساوات 5.75 میں } \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} = \cosh^{-1} \frac{h}{b} \text{ لکھا گیا ہے۔ اسے ثابت کریں۔}$$

سوال 16.18: پانچ میٹر داس کی موصل نلکی کا محور برقی زمین سے تیرہ میٹر پر ہے۔ نلکی پر ایک سو وولٹ کا برقی دباؤ ہے۔

• ایسی لکیری چارج کثافت کا زمین سے فاصلہ اور اس کا ρ_L حاصل کریں جو ایسی ہم قوہ سطح پیدا کرے۔

• موصل نلکی سے پیدا پچاس وولٹ کے ہم قوہ سطح کار داس اور اس کے محور کا زمین سے فاصلہ دریافت کریں۔

• نلکی پر زمین کے قریب اور اس سے دور سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

جوابات: 12 m، 3.46 $\frac{nC}{m}$ ، 13.4 m، 18 m، 1.65 $\frac{PF}{m^2}$ اور 0.73 $\frac{PF}{m^2}$

سوال 16.19: مندرجہ ذیل صورتوں میں موصل میں $|J|$ حاصل کریں۔ الف) حرکت پذیری $5.2 \times 10^{-3} \frac{m^2}{Vs}$ ، حجمی کثافت چارج $4 \times 10^9 C/m^3$ اور برقی شدت $72 \frac{mV}{m}$ ہے۔ ب) رفتار بہاؤ $30 \frac{mm}{s}$ ہے جبکہ الیکٹران کی تعدادی کثافت 5.5×10^{28} فی مربع میٹر ہے۔ پ) موصلیت $2.5 \times 10^6 \frac{S}{m}$ جبکہ برقی شدت 50 mV ہے۔

جوابات: $1.5 \frac{MA}{m^2}$ ، $0.26 \frac{MA}{m^2}$ ، $0.125 \frac{MA}{m^2}$

سوال 16.20: نکلی محدود میں رداس $\rho = 0.2$ اور $\rho = 0.5$ پر موصل نکلی چادر پائے جاتے ہیں جبکہ ان چادروں کے درمیان خالی خلاء میں $V = 150\rho^3$ برقی دباؤ پایا جاتا ہے۔ الف) اندرونی اور بیرونی نکلی چادر پر سطحی کثافت چارج دریافت کریں۔ دونوں چادروں کے درمیان خطہ $0 < z < 1$ ، $0 < \rho < 0.5$ میں کل چارج حاصل کریں۔ پ) خطہ $0 < z < 1$ میں کل چارج حاصل کریں۔ یہاں چادروں پر اور خلاء میں پائے جانے والے تمام کثافتیں کریں۔ یاد رہے کہ مثبت موصل چادر سے برقی بہاؤ کا اخراج ہوتا ہے۔

جوابات: $0.159 \frac{nC}{m^2}$ ، $0.996 \frac{nC}{m^2}$ ، $-2.93 nC$ ، 0

سوال 16.21: گریفائٹ سے بنی نکلی جس کی لمبائی 4 cm، اندرونی رداس $\rho = 5$ cm اور بیرونی رداس $\rho = 7$ cm ہے میں 2 A کی برقی رو بہاؤ سی سمت میں گزر رہی ہے۔ گریفائٹ کی موصلیت $7 \times 10^4 \frac{S}{m}$ ہے۔ نکلی میں J ، E حاصل کریں۔ نکلی کے اندرونی اور بیرونی گول سطحوں کے درمیان برقی دباؤ V حاصل کرتے ہوئے ان کے درمیان مزاحمت R حاصل کریں۔ نکلی میں طاقت کا ضیاع $V \times I$ اور حجمی کثافت $\iiint J \cdot E dh$ سے حاصل کریں۔

جوابات: $J = \frac{7.96}{\rho} a_\rho$ ، $E = \frac{1.14e-4}{\rho} a_\rho$ ، $R = 19.12 \mu\Omega$ ، $V = 38.25 \mu V$ ، $76 \mu W$ ، $76 \mu W$

سوال 16.22: رقبہ A کی ایک موصل چادر $z = 0$ اور دوسری $z = d$ پر رکھی گئی ہے۔ چادروں کے درمیانی خطے میں موصلیت $\sigma_0 e^{-z}$ ہے جہاں σ_0 مستقل ہے۔ چادر $z = 0$ کو صفر وولٹ پر رکھا جاتا ہے جبکہ چادر $z = d$ کو V_0 برقی دباؤ پر رکھا جاتا ہے۔ الف) دونوں چادروں کے درمیان مزاحمت حاصل کریں۔ ب) چادروں کے مابین برقی رو حاصل کریں۔ پ) چادروں کے درمیان کثافت برقی رو اور برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔

جوابات: $R = \frac{e^d - 1}{A\sigma_0}$ ، $I = \frac{A\sigma_0 V_0}{e^d - 1}$ ، $J = -\frac{V_0\sigma_0}{e^d - 1} a_z$ ، $E = -\frac{V_0 e^z}{e^d - 1} a_z$

سوال 16.23: خالی خلاء میں برقی دباؤ $V = 50(\rho^2 + 1)z \sin \phi$ دی گئی ہے۔ ہم توہ سطح $V = 100$ موصل سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔ اس سطح پر نقطہ $(0.65, 0.25\pi, z)$ دیا گیا ہے۔ اس نقطے پر E حاصل کرتے ہوئے سطحی کثافت چارج $|\rho_s|$ حاصل کریں۔

جوابات: $2 = (\rho^2 + 1)z \sin \phi$ ، $E = -91a_\rho - 154a_\phi - 50a_z$ ، $|\rho_s| = 1.65 \frac{nC}{m^2}$

سوال 16.24: مثبت z خطے میں برقی دباؤ $V = \frac{50z(x+y)}{x^2+9}$ دی گئی ہے۔ موصل سطح $z = 0$ پر E حاصل کریں۔ موصل سطح پر سطحی کثافت چارج حاصل کریں۔ سطح پر $2 < x < 5$ ، $3 < y < 6$ کل چارج حاصل کریں۔

جوابات: $E = -\frac{50e_0(x+y)}{x^2+9} \frac{C}{m^2}$ ، $\rho_s = -1.52 nC$

سوال 16.25: خالی خلاء میں $V = 50 \ln \frac{(x+1)^2 + (y+1)^2}{x^2 + (y-1)^2}$ پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N(3, 1, 2)$ پر موصل سطح ہے۔ اس سطح پر E اور ρ_s حاصل کریں۔ سطح پر عمودی اکائی سمتیہ a_N حاصل کریں۔

جوابات: $a_N = \frac{4}{5}a_x - \frac{3}{5}a_y$ ، $\rho_s = 148 \frac{\mu C}{m^2}$ ، $E = 13.33a_x - 10a_y \frac{V}{m}$ ؛ چونکہ ہمیں یہ نہیں معلوم کہ موصل سطحی کثافت N_{4074} کے کس جانب ہے لہذا سطحی کثافت چارج مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔ یوں اکائی سمتیہ کی سمت الٹ بھی ممکن ہے۔

سوال 16.26: نقطہ چارج $Q = 8\pi \mu C$ موصل زمین $z = 0$ کے قریب نقطہ $(2, 0, 4)$ اور $(-2, 0, 4)$ پر پائے جاتے ہیں۔ الف) محدود y پر D_{4076} کی مساوات حاصل کریں۔ یاد رہے کہ برقی زمین میں چارج کے عکس بھی کردار ادا کریں گے۔ ب) نقطہ $(0, 0, 0)$ پر سطحی کثافت چارج حاصل کریں۔

$$\rho_s = -0.36 \frac{\mu C}{m^2} , D = -16 \left[\frac{1}{[(x+2)^2+16]^{3/2}} + \frac{1}{[(x-2)^2+16]^{3/2}} \right] a_z \frac{\mu C}{m^2} \text{ جوابات:}$$

سوال 16.27: سطح $x = 0$ برقی زمین ہے۔ لکیری کثافت چارج $2 \frac{nC}{m}$ مقام $x = 2$ ، $y = 3$ پر z محدود کے متوازی پایا جاتا ہے جبکہ لکیری کثافت چارج $-5 \frac{nC}{m}$ مقام $x = 4$ ، $y = 5$ پر z محدود کے متوازی پایا جاتا ہے۔ نقطہ $N(7, 2, 3)$ پر برقی دباؤ حاصل کریں۔ 4079

جواب: $46.4 V$ 4080

سوال 16.28: نیم موصل ٹکڑے کی لمبائی 15 mm ، چوڑائی 5 mm اور موٹائی 2 mm ہے۔ اگر الیکٹران اور خول کی تعدادی کثافت بالترتیب $1.5 \times 10^{18} / m^3$ اور $2 \times 10^{15} / m^3$ ہوں جبکہ ان کی حرکت پذیری $\mu_e = 0.08 \frac{m^2}{Vs}$ اور $\mu_h = 0.0025 \frac{m^2}{Vs}$ ہوں تب لمبائی جانب نیم موصل ٹکڑے کی مزاحمت حاصل کریں۔ 4083

جواب: $78 \text{ k}\Omega$ 4084

سوال 16.29: کوارٹس میں $E = -20a_x + 35a_y + 15a_z \frac{V}{m}$ میدان پایا جاتا ہے۔ الف) کتاب کے آخر میں جدول 16.2 سے کوارٹس کا مستقل ϵ_{R4086} دریافت کرتے ہوئے χ_e حاصل کریں۔ ب) کوارٹس میں D اور P حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } \epsilon_R = 3.8 , \chi_e = 2.8 , D = -0.67a_x + 1.18a_y + 0.50a_z \frac{nC}{m^2} , P = -0.50a_x + 0.87a_y + 0.37a_z \frac{nC}{m^2}$$

سوال 16.30: کسی مخصوص حرارت اور میکانی دباؤ پر ہائیڈروجن گیس کی تعددی کثافت $6 \times 10^{25} / m^3$ ہے۔ اگر اسے $2400 \frac{V}{m}$ کے برقی میدان میں رکھا جائے تو ہر قطبی ایٹم میں مثبت اور منفی خطوں کے درمیان اوسطاً $6.6 \times 10^{-19} \text{ m}$ فاصلہ پایا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں ہائیڈروجن کے مستقل χ_e اور ϵ_{R4090} حاصل کریں۔

$$\text{جوابات: } \epsilon_R = 1.000298 , \chi_e = 0.000298$$

سوال 16.31: خطہ -الف میں $E_1 = 25a_x + 10a_y - 15a_z \frac{V}{m}$ پایا جاتا ہے۔ یہ خطہ محدود کے مرکز کو چھوتا ہے۔ برقی مستقل $\epsilon_{R1} = 1$ اور $\epsilon_{R2} = 2.5$ ہیں۔ مرکز پر سمتیہ $A = 45a_x - 20a_y + 10a_z$ خطہ -الف کا عمودی سمتیہ ہے جس کی سمت خطہ -الف سے خطہ -ب کی جانب ہے۔ سمتیہ A کا E_1 اور E_2 کے ساتھ زاویہ حاصل کریں۔ دونوں خطوں کے سرحدی سطح کے عمودی اور متوازی، E_1 کے اجزاء حاصل کریں۔ خطہ -ب میں E_2 بھی حاصل کریں۔ 4096

$$\text{جوابات: } 60^\circ , 77^\circ , E_2 = 16.7a_x + 13.7a_y - 16.8a_z \frac{V}{m} , 11.2a_x + 16.1a_y - 18a_z , 13.8a_x - 6.1a_y + 3.1a_z$$

سوال 16.32: ہم محوری تار کے اندرونی تار کا بیرونی رداس 6 mm ہے جبکہ بیرونی تار کا اندرونی رداس 15 mm ہے۔ موصل تاروں کے درمیان دو مختلف ذو برق استعمال کئے جاتے ہیں۔ اندرونی تار پر 4 mm کی پہلی تہہ کا $\epsilon_{R1} = 1.5$ ہے جبکہ بقایا حصے میں ذو برق کا $\epsilon_{R2} = 2.5$ ہے۔ اندرونی تار پر $15 \frac{nC}{m^2}$ ہونے کی صورت میں دونوں تاروں کے درمیان برقی دباؤ حاصل کریں۔ 4101

جواب: 5.11 V

4102

سوال 16.33: رد اس 6 mm کے موصل کرہ پر $\epsilon_{R1} = 1.5$ برقی مستقل کے ذوبرق کی 4 mm موٹی تہہ پہلی چڑھائی۔ اس کے اوپر $\epsilon_{R2} = 2.5$ برقی مستقل کے ذوبرق کی 5 mm موٹی دوسری تہہ چڑھائی جاتی ہے۔ بیرونی موصل کرہ کا اندرونی رد اس 15 mm ہے۔ اندرونی کرہ پر $15 \frac{nC}{m^2}$ ہوسنے کی صورت میں دونوں موصل کرہ کے درمیان برقی دباو حاصل کریں۔

4105

جواب: 3.52 V

4106

سوال 16.34: متوازی چادر کپیسٹر کے چادروں کے درمیان فاصلہ 1 mm ہے جبکہ چادر کا رقبہ 100 cm^2 ہے۔ چادروں کے درمیان ذوبرق کا $\epsilon_{R1} = 4$ ہے۔ کپیسٹر کا C حاصل کریں۔ کپیسٹر کے چادروں کے مابین 50 V کی صورت میں E، D، Q اور کپیسٹر میں موجود توانائی W حاصل کریں۔ اب اگر چادروں کے درمیان سے ذوبرق ہٹا دیا جائے تب Q کتنا ہوگا۔ E، D، Q اور کپیسٹر میں موجود توانائی W دوبارہ حاصل کریں۔ ساتھ ہی ساتھ برقی دباو بھی حاصل کریں۔

4110

جوابات:

4111

4112

جدول 16.1: σ

$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\text{S}}{\text{m}}$	چیز
7×10^4	گرفتار	6.17×10^7	چاندی
1200	سلیکان	5.80×10^7	تانبا
100	فیرائٹ (عمومی قیمت)	4.10×10^7	سونا
5	سمندری پانی	3.82×10^7	المونیم
10^{-2}	چھونا پتھر	1.82×10^7	ٹنگسٹن
5×10^{-3}	چکنی مٹی	1.67×10^7	جست
10^{-3}	تازہ پانی	1.50×10^7	پیتل
10^{-4}	تقطیر شدہ پانی	1.45×10^7	نکل
10^{-5}	ریتیلی مٹی	1.03×10^7	لوہا
10^{-8}	سنگ مرمر	0.70×10^7	قلعی
10^{-9}	بیک لائٹ	0.60×10^7	کاربن سٹیل
10^{-10}	چینی مٹی	0.227×10^7	مینگنیز
2×10^{-13}	بیرا	0.22×10^7	جرمینیم
10^{-16}	پولیسٹرین پلاسٹک	0.11×10^7	سٹینلس سٹیل
10^{-17}	کوارٹس	0.10×10^7	نائیکروم

جدول 16.2 : $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیز
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم آکسائیڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائیڈ
	16	جرمنیم
0.001	4 تا 7	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابر
0.02	3.5	نائیلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	2.5 تا 3	ریڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائیڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	1.5 تا 4	خشک لکڑی

جدول 16.3: μ_R

μ_R	چیز
0.999 998 6	بسمت
0.999 999 42	پیرافین
0.999 999 5	لکڑی
0.999 999 81	چاندی
1.000 000 65	المونیم
1.000 000 79	بیریلم
50	نکل
60	ڈھلوان لوہا
300	مشین سٹیل
1000	فیرائٹ (عمومی قیمت)
2500	پریم بھرت (permalloy)
3000	ٹرانسفارمر پتری
3500	سیلکان لوہا
4000	خالص لوہا
20 000	میو میٹل (mumetal)
30 000	سنڈسٹ (sendust)
100 000	سوپریم بھرت (supermalloy)

جدول 16.4: اہم مستقل

قیمت	علامت	چیز
$(1.602\,189\,2 \pm 0.000\,004\,6) \times 10^{-19} \text{ C}$	c	الیکٹران چارج
$(9.109\,534 \pm 0.000\,047) \times 10^{-31} \text{ kg}$	m	الیکٹران کمیت
$(8.854\,187\,818 \pm 0.000\,000\,071) \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$	ϵ_0	برقی مستقل (خالی خلاء)
$4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$	μ_0	مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)
$(2.997\,924\,574 \pm 0.000\,000\,011) \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	c	روشنی کی رفتار (خالی خلاء)

