1 برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
2 khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1 سمتیات 1

1.1 مقداری اور سمتیہ 1

1.2 سمتی الجبرا 2

1.3 کارتیسی محدد 3

1.4 اکائی سمتیات 5

1.5 میدانی سمتیہ 9

1.6 سمتی رقبہ 9

1.7 غیر سمتی ضرب 10

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب 14

1.9 گول نلکی محدد 17

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب 20

1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق 20

1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں 25

1.10 کروی محدد 27

2 کولومب کا قانون 39

2.1 قوت کشش یا دفع 39

2.2 برقی میدان کی شدت 43

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان 46

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح 51

2.5 چارج بردار حجم 55

2.6 مزید مثال 56

2.7 برقی میدان کے سمت بہاو خط 64

3 گاؤس کا قانون اور پھیلاو 69

3.1 ساکن چارج 69

3.2 فیراڈے کا تجربہ 69

3.3 گاؤس کا قانون 70

3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال 72

3.4.1 نقطہ چارج 72

3.4.2 یکساں چارج بردار کروی سطح 74

3.4.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر 74

3.5 ہم محوری تار 75

3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح 77

3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق 77

3.8 پھیلاو 80

3.9 نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات 82

3.10 پھیلاو کی عمومی مساوات 84

3.11 مسئلہ پھیلاو 86

4 توانائی اور برقی دباو 93

4.1 توانائی اور کام 93

4.2 لکیری تکملہ 94

4.3 برقی دباو 99

4.3.1 نقطہ چارج کا برقی دباو 100

4.3.2 لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو 101

4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباو 102

4.4 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباو 102

4.5 برقی دباو کی ڈھلوان 106

4.5.1 نلکی محدد میں ڈھلوان 110

4.5.2 کروی محدد میں ڈھلوان 111

4.6 جفت قطب 112

4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاو خط 114

4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی 117

5 موصل، ذو برق اور کپیسٹر 125 55

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو 125 56

5.2 استمراری مساوات 127 57

5.3 موصل 129 58

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط 134 59

5.5 عکس کی ترکیب 137 60

5.6 نیم موصل 140 61

5.7 ذو برق 141 62

5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط 146 63

5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط 150 64

5.10 کپیسٹر 150 65

5.10.1 متوازی چادر کپیسٹر 152 66

5.10.2 ہم محوری کپیسٹر 153 67

5.10.3 ہم محوری کرہ کپیسٹر 153 68

5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر 155 69

5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس 156 70

6 پوئسن اور لاپلاس مساوات 169 71

6.1 مسئلہ یکتائی 171 72

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے 173 73

6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات 173 74

6.4 لاپلاس مساوات کے حل 174 75

6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال 181 76

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل 183 77

6.7 عددی دہرانے کا طریقہ 191 78

7 ساکن مقناطیسی میدان 199
7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون 199
7.2 ایمپیئر کا دوری قانون 204
7.3 گردش 210
7.3.1 نلکی محدد میں گردش 217
7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات 222
7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات 224
7.4 مسئلہ سٹوکس 225
7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو 228
7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو 235
7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول 240
7.7.1 سمتی مقناطیسی دباو 240
7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون 242

8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ 249
8.1 متحرک چارج پر قوت 249
8.2 تفرقی چارج پر قوت 250
8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت 254
8.4 قوت اور مروڑ 255
8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے 261
8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل 262
8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط 265
8.8 مقناطیسی دور 268
8.9 مقناطیسی مخفی توانائی 271
8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ 271
8.11 مشترکہ امالہ 277

9 وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات 283

9.1 فیراڈے کا قانون 283

9.2 انتقالی برقی رو 290

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل 296

9.4 میکس ویل مساوات کی تکمل شکل 298

9.5 تاخیری دباو 303

10 مستوی امواج 311

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج 311

10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج 312

10.2.1 خالی خلاء میں امواج 320

10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج 323

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج 325

10.3 پوئنٹنگ سمتیہ 329

10.4 پوئنٹنگ سمتیہ اور برقی دور 334

10.5 موصل میں امواج 336

10.6 انعکاس مستوی موج 342

10.7 شرح ساکن موج 349

10.8 دو سرحدی انعکاس 354

10.8.1 فیبری-پیروٹ طیف پیما 359

10.8.2 $\eta_1 \neq \eta_3$ کی صورت میں ہم رکاوٹ صورت کا حصول 360

10.8.3 متعدد سرحدی مسئلہ 361

10.9 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب 362

10.10 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئنٹنگ سمتیہ 370

11 ترسیلی تار 379

11.1 ترسیلی تار کے مساوات . . . 379

11.2 ترسیلی تار کے مستقل . . . 383

11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل . . . 384

11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل . . . 387

11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار . . . 388

11.3 ترسیلی تار کے چند مثال . . . 389

11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ . . . 397

11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ . . . 404

11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال . . . 406

11.6 تجزیہ عارضی حال . . . 410

12 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار 429

12.1 ترچھی آمد . . . 429

12.2 قطبی موج کی ترچھی آمد . . . 441

12.3 ترسیم بائی گن . . . 445

13 مویج اور گھمکیا 449

13.1 برقی دور، ترسیلی تار اور مویج کا موازنہ . . . 449

13.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے مویج میں عرضی برقی موج . . . 450

13.3 کھوکھلا مستطیل مویج . . . 456

13.3.1 مستطیلی مویج کے میدان پر تفصیلی غور . . . 465

13.4 مستطیلی مویج میں عرضی مقناطیسی $\text{TM}mn$ موج . . . 472

13.5 کھوکھلی نالی مویج . . . 476

13.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف . . . 483

13.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف . . . 484

13.8 سطحی موج . . . 488

13.9 ذو برق تختی مویج . . . 492

13.10 شیش ریشہ . . . 496

13.11 پردہ بصارت . . . 498

13.12 گھمکی خلاء . . . 500

13.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل . . . 504

14 اینٹینا اور شعاعی اخراج 517 157

14.1 تعارف . . . 517 158

14.2 تاخیری دباو . . . 517 159

14.3 تکمل . . . 519 160

14.4 مختصر جفت قطبی اینٹینا . . . 520 161

14.5 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت . . . 528 162

14.6 ٹھوس زاویہ . . . 531 163

14.7 اخراجی رقبہ، سمتیت اور افزائش . . . 532 164

14.8 قطاری ترتیب . . . 539 165

14.8.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع . . . 539 166

14.8.2 ضرب نقش . . . 540 167

14.8.3 ثنائی قطار . . . 541 168

14.8.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار . . . 543 169

14.8.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار . . . 545 170

14.8.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار . . . 545 171

14.8.7 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: بدلتے زاویہ اخراجی اینٹینا . . . 549 172

14.9 تداخُل پیما . . . 550 173

14.10 درز کا دور میدان بذریعہ فوریئر بدل . . . 551 174

14.11 مستطیل سطحی اینٹینا . . . 555 175

14.12 خطی اینٹینا . . . 558 176

14.13 چلتی موج اینٹینا . . . 562 177

14.14 چھوٹا گھیرا اینٹینا . . . 564 178

14.15 پیچ دار اینٹینا . . . 565 179

14.16 دو طرفہ کردار . . . 566 180

14.17 جھری اینٹینا . . . 569 181

14.18 پیپا اینٹینا . . . 569 182

14.19 فرائس ریڈار مساوات . . . 571 183

14.20 ریڈیائی دوربین، اینٹینا کی حرارت اور تحلیلی کارکردگی . . . 575 184

14.21 حرارت نظام اور حرارت بعید . . . 576 185

15 سوالات 575 186

باب 10

مستوی امواج

لا محدود خطہ جس کا کوئی سرحد نہ ہو میں میکس ویل مساوات کا حل سادہ ترین مسئلہ ہے البتہ اس سے حاصل نتائج انتہائی دلچسپ اور معلوماتی ثابت ہوتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے جبکہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ چونکہ برقی میدان چارج کی بدولت جبکہ مقناطیسی میدان برقی رو کی بدولت ہے لٰہذا چارج یا رو میں کسی بھی تبدیل سے باہمی تعاون سے بدلتا برقی اور بدلتا مقناطیسی میدان یعنی برقی و مقناطیسی[1] موج پیدا ہوتی ہے۔ ایسے امواج کی تعدد[2] کا دار و مدار چارج یا رو (یا دونوں) میں تبدیلی کی شرح پر منحصر ہے۔ یوں ω زاویائی تعدد[3] پر سائن نما شکل میں ارتعاش کرتا چارج ω زاویائی تعدد کی سائن نما موج ہی پیدا کرتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج روشنی کی رفتار سے حرکت کرتی ہیں۔ انسانی آنکھ مخصوص تعدد کی برقی و مقناطیسی امواج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ برقی و مقناطیسی امواج کے تعدد کی وہ پٹی جو ہمیں نظر آتی ہیں روشنی[4] کہلاتی ہے۔ سائن نما موج کو اس کی تعدد f یا دوری عرصے[5] λ سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ ہم 380 nm تا 750 nm کے دوری عرصے کے برقی و مقناطیسی امواج دیکھ سکتے ہیں۔

دو اشیاء کے سرحد پر برقی و مقناطیسی موج پر غور کرنے سے شعاعی انعکاس[6]، شعاعی انحراف[7] اور انکسار امواج[8] کے حقائق دریافت ہوتے ہیں۔ مختصراً شعاع کے تمام خصوصیات میکس ویل کے مساوات سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی جسم کے اندر کسی بھی طرح پہنچایا گیا اضافی چارج باہمی قوت دفع سے آخر کار جحم کے سطح پر پہنچ جاتا ہے۔ اگر ان لمحات کو نظر انداز کیا جائے جتنی دیر آزاد چارج سطح تک پہنچتا ہے تو جسم کے جحم میں $\rho_h = 0$ تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس کتاب میں $\rho_h = 0$ ہی تصور کرتے ہوئے برقی و مقناطیسی

---

electromagnetic[1]
frequency[2]
angular frequency[3]
light[4]
time period[5]
reflection[6]
refraction[7]
diffraction[8]

امواج پر غور کیا جائے گا لہٰذا ایسا ہی تصور کرتے ہوئے صفحہ 296 پر دئے گئے میکس ویل مساوات یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{10.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{10.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{10.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{10.4}$$

جہاں $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ کے علاوہ قانون اوہم کی نقطہ شکل $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$ کے استعمال سے تمام مساوات صرف دو متغیرات $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ کی صورت میں لکھے گئے ہیں۔

اس سے پہلے کہ ہم ان مساوات کو حل کریں، آئیں انہیں صرف دیکھ کر فیصلہ کریں کہ خالی خلاء میں ان سے کیا نتائج اخذ کئے جا سکتے ہیں۔ خالی خلاء میں کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ صفر کے برابر ہوتی ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ مساوات 10.1 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد برقی میدان کی گردش پیدا ہوتی ہے۔ گردش سے مراد ایسا میدان ہے جو بند دائرے پر اس نقطے کے گرد گھومتی ہو۔ اگر مقناطیسی میدان کی قیمت زیادہ ہو تب برقی گردش کی قیمت بھی زیادہ ہو گی اور اگر مقناطیسی میدان کی قیمت کم ہو تب گردش بھی کم ہو گی۔ یوں دو حقائق سامنے آتے ہیں۔ پہلی حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی نقطے پر بدلتا مقناطیسی میدان اس نقطے کے گرد، یعنی نقطے سے ذرہ دور، برقی میدان پیدا کرتی ہے اور دوسری حقیقت یہ کہ پہلی میدان کی قیمت کم یا زیادہ کرنے سے پیدا میدان کی قیمت بھی تبدیل ہوتی ہے یعنی بدلتا مقناطیسی میدان، بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اسی طرح مساوات 10.2 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد مقناطیسی گردش پیدا ہوتی ہے۔ یہاں بھی صاف واضح ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی، اس نقطے سے ذرہ دور، بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ بدلتا مقناطیسی میدان کچھ فاصلے پر آگے کر کے بدلتا برقی میدان پیدا کرتا ہے جو مزید آگے مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے اور یہ سلسلہ چلے جاتا ہے۔ جیسا کہ ہم جلد دیکھیں گے، ایسے جڑواں، ہاتھ میں ہاتھ ڈالے، حرکت کرتے بدلتے برقی اور بدلتے مقناطیسی میدان کی رفتار $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ یعنی تقریباً $3 \times 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔

10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج

میکس ویل مساوات کے حل دوری سمتیات[9] کی مدد سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں لہٰذا پہلے دوری سمتیہ پر غور کرتے ہیں جو آپ نے برقی ادوار حل کرتے وقت ضرور استعمال کئے ہوں گے۔

سائن نما لہر کی عمومی شکل

$$E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) \tag{10.5}$$

ہے جہاں

$$\omega = 2\pi f \tag{10.6}$$

زاویائی تعدد[10] اور ψ زاویائی فاصلہ[11] ہیں جبکہ E_{xyz} از خود x، y، z اور ω کا تابع تفاعل[12] ہو سکتا ہے۔ تعدد f کی اکائی ہرٹز[13] ہے۔ یہاں دھیان رہے کہ E_{xyz} وقت t کا تابع نہیں ہے۔

---

[9] phasor
[10] angular frequency
[11] phase angle
[12] dependent function
[13] Hertz

کسی بھی متغیرہ x کے لئے یولر مماثل[14] کو $e^{jx}=\cos x+j\sin x$ لکھا جاتا ہے جہاں $j=\sqrt{-1}$ خیالی عدد[15] ہے۔آزاد متغیرہ $\omega t+\psi$ کے لئے یولر مماثل

$$e^{j(\omega t+\psi)}=\cos(\omega t+\psi)+j\sin(\omega t+\psi)$$

لکھا جا سکتا ہے جو حقیقی[16] اور خیالی[17] اجزاء پر مشتمل مخلوط تفاعل[18] ہے۔یوں $\cos(\omega t+\psi)$ کو $e^{j(\omega t+\psi)}$ کا حقیقی جزو تصور کیا جا سکتا ہے۔اس طرح

$$E_y=E_{xyz}\cos(\omega t+\psi)=\left[E_{xyz}e^{j(\omega t+\psi)}\right]_{\text{حقیقی}}=\left[E_{xyz}e^{j\omega t}e^{j\psi}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں زیر نوشت میں حقیقی لکھنے سے مراد یہ ہے کہ پورے تفاعل کا حقیقی جزو لیا جائے۔مندرجہ بالا مساوات کو بطور دوری سمتیہ یوں

$$E_{ys}=E_{xyz}e^{j\psi}$$

لکھا جاتا ہے جہاں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھا جاتا ہے۔اس مساوات کے بائیں ہاتھ E_{ys} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں لکھی گئی ہے لہٰذا یاد رہے کہ اصل تفاعل میں $e^{j\omega t}$ پایا جاتا ہے اور پورے تفاعل کا صرف حقیقی جزو ہی لیا جائے۔تفاعل E_{ys} کے زیر نوشت میں s در اصل اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ اس تفاعل کا آزاد متغیرہ، مخلوط تعدد[19] ہے۔ہمارے استعمال میں s خیالی عدد یعنی $s=j\omega$ ہو گا۔ 3083

اب $E_y=10.5\cos(10^6t-0.35z)$ کو دوری سمتیہ کی شکل میں لکھنے کی خاطر اسے یولر مماثل کے حقیقی جزو

$$E_y=\left[10.5e^{j(10^6t-0.35z)}\right]_{\text{حقیقی}}=\left[10.5e^{j10^6t}e^{-j0.35z}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھنے کے بعد e^{j10^6t} اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے یوں

$$E_{ys}=10.5e^{-j0.35z}$$

لکھا جائے گا جہاں بائیں ہاتھ E_{ys} میں زیر نوشت میں s کا اضافہ کیا گیا۔یاد رہے کہ E_y حقیقی تفاعل ہے جبکہ E_{ys} عموماً مخلوط تفاعل ہوتا ہے۔ 3084

دوری سمتیہ سے اصل تفاعل حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے حاصل جواب کا حقیقی جزو لیا جاتا ہے۔ 3085

مساوات 10.5 کا وقت کے ساتھ جزوی تفرق

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}\left[E_{xyz}\cos(\omega t+\psi)\right]=-\omega E_{xyz}\sin(\omega t+\psi)\\&=\left[j\omega E_{xyz}e^{j(\omega t+\psi)}\right]_{\text{حقیقی}}\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔یہ عمومی نتیجہ ہے جس کے تحت وقت کے ساتھ تفاعل کا تفرق، دوری سمتیہ کو $j\omega$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔یوں مثال کے طور پر اگر

$$\frac{\partial E_x}{\partial t}=-\frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

ہو تب اسی کی دوری سمتیہ شکل

$$j\omega E_{xs}=-\frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

[14] Euler's identity
[15] imaginary number
[16] real
[17] imaginary
[18] complex function
[19] complex frequency

ہو گی۔اسی طرح سائن نما میدان کے لئے میکس ویل کے مساوات بھی با آسانی دوری سمتیہ کی شکل میں لکھے جا سکتے ہیں للذا

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

کو دوری سمتیہ کی صورت میں

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_s \tag{10.7}$$

لکھا جائے گا۔ میکس ویل کے بقایا مساوات کو بھی دوری سمتیہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_s = \left(\sigma + j\omega\epsilon\right) \boldsymbol{E}_s \tag{10.8}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_s = 0 \tag{10.9}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H}_s = 0 \tag{10.10}$$

آئیں ان مساوات سے امواج کی مساوات حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات 10.7 کی گردش

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_s = \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{E}_s\right) - \nabla^2 \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu \nabla \times \boldsymbol{H}_s$$

میں مساوات 10.8 اور مساوات 10.9 پر کرنے سے

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}_s = j\omega\mu \left(\sigma + j\omega\epsilon\right) \boldsymbol{E}_s = \gamma^2 \boldsymbol{E}_s \tag{10.11}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\gamma = \mp \sqrt{j\omega\mu \left(\sigma + j\omega\epsilon\right)} \tag{10.12}$$

حرکی مستقل[20] کہلاتا ہے۔چونکہ $j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$ مخلوط عدد ہے للذا اس کا جزر γ بھی مخلوط عدد ہو گا جسے

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{10.13}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں α اور β مثبت اور حقیقی اعداد ہیں۔ مساوات 10.12 کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \tag{10.14}$$

3086 جہاں کسی وجہ سے صرف مثبت قیمت لی گئی ہے۔ یہ وجہ آپ کو جلد بتلا دی جائے گی۔

مساوات 10.11 سمتی ہلم ہولٹز مساوات[21][22] کہلاتی ہے۔کار تیسی محدد میں بھی سمتی ہلم ہولٹز مساوات کی بڑی شکل کافی خوفناک نظر آتی ہے چونکہ اس سے چار چار اجزاء پر مشتمل تین عدد مساوات نکلتے ہیں۔کار تیسی محدد میں اس کی x مساوات

$$\nabla^2 E_{xs} = \gamma^2 E_{xs} \tag{10.15}$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs} \tag{10.16}$$

---

[20] propagation constant
[21] vector Helmholtz equation
[22] ہرمن لڈوگ فرڈینانڈ ون ہلم ہولٹز جرمنی کے عالم طبیعیات تھے۔

ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ جن امواج پر ہم غور کرنا چاہتے ہیں ان میں نا تو x اور نا ہی y کے ساتھ میدان تبدیل ہوتے ہیں۔ایسی صورت میں $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2}=0$ اور $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2}=0$ ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2}=\gamma^2 E_{xs} \tag{10.17}$$

صورت اختیار کرلے گی۔اس طرح کے دو درجی تفرقی مساوات آپ نے پڑھے ہوں گا لہٰذا میں توقع رکھتا ہوں کہ آپ اس کے حل

$$E_{xs}=Ae^{-\gamma z} \tag{10.18}$$

اور

$$E_{xs}=Be^{\gamma z} \tag{10.19}$$

3087 لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $\gamma=\alpha+j\beta$ پر کرتے ہوئے ان جوابات میں سے مساوات 10.18 پر غور کریں۔مساوات 10.18 درحقیقت دوری سمتیہ ہے لہٰذا اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر

$$\begin{aligned}E_x&=\left[Ae^{j\omega t}e^{-(\alpha+j\beta)z}\right]_{\text{حقیقی}}\\&=\left[Ae^{-\alpha z}e^{j(\omega t-\beta z)}\right]_{\text{حقیقی}}\end{aligned}$$

حقیقی جزو

$$E_x=Ae^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)$$

لیتے ہیں۔مساوات کے مستقل A کی جگہ $t=0$ اور $z=0$ پر میدان کی قیمت E_0 پر کرتے ہوئے اصل حل

$$E_x=E_0e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z) \tag{10.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ مستوی موج[23] کی وہ مساوات ہے جس کی تلاش میں ہم نکلے تھے۔اگر ہم مساوات 10.19 کو لے کر آگے بڑھتے تو مساوات 10.20 کی جگہ موج کی مساوات

$$E_x=E_0e^{\alpha z}\cos(\omega t+\beta z) \tag{10.21}$$

3088 حاصل ہوتی۔

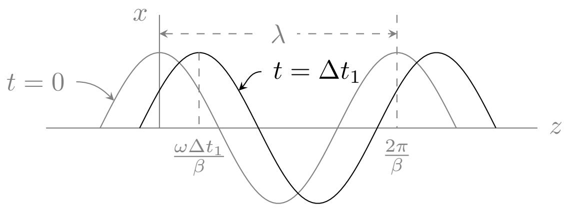
مساوات 10.18 میں $A=E_0$ پر کرتے ہوئے اس کی سمتیہ شکل

$$\boldsymbol{E}_s=E_0e^{-\gamma z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \tag{10.22}$$

3089 لکھی جا سکتی ہے جو صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}}$ جزو پر مشتمل ہے۔آئیں مساوات 10.20 میں دیئے متحرک موج[24] پر اب غور کریں۔

3090 مساوات 10.20 کہتی ہے کہ برقی میدان ہر نقطے پر x محدد کے متوازی ہے۔اگر z کی قیمت تبدیل نہ کی جائے تب x اور y تبدیل کرنے سے میدان تبدیل نہیں
3091 ہوتا۔

[23] plane wave
[24] travelling wave



شکل 10.1: وقت $t = 0$ اور $t = t_1$ پر خلاء میں موج کا مقام۔

مساوات 10.20 میں z بڑھانے سے α کی وجہ سے موج کی چوٹی گھٹتی ہے لہٰذا α تضعیفی مستقل[25] کہلاتا ہے۔ موج کی چوٹی طاقت کے ضیاع کی وجہ سے گھٹتی ہے یوں بے ضیاع[26] خطے میں $\alpha = 0$ ہو گا جبکہ ضیاع کار[27] خطے میں $\alpha > 0$ ہو گا۔ تضعیفی مستقل کو نیپر[28] فی میٹر $\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ میں ناپا[29] جاتا ہے۔ یوں مساوات 10.20 میں e کی طاقت یعنی αz بے بعد[30] مقدار نیپر Np میں ہو گی۔ موج کے مساوات میں $-\beta z$ زاویائی فاصلہ ہے جسے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے لہٰذا β زاویائی مستقل[31] کہلاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈیئن فی میٹر $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ہے۔

بے ضیاع خطے میں $\alpha = 0$ جبکہ ضیاع کار خطے میں $\alpha > 0$ ہو گا۔ اس کتاب میں انہیں غیر عامل[32] خطوں پر بحث کی جائے گی۔ یہاں بتلاتا چلوں کہ $\alpha < 0$ بھی ممکن ہے۔ ایسی صورت میں موج کا حیطہ مسلسل بڑھتا جائے گا۔ منفی α کی صورت میں α کو افزائشی مستقل[33] کہا جاتا ہے۔ لیزر[34] میں $\alpha < 0$ حاصل کرتے ہوئے شعاع کی طاقت بڑھائی جاتی ہے۔ لیزر عامل[35] خطہ ہے۔

موج کی مساوات میں $\alpha = 0$ تصور کرتے ہوئے اسے وقت $t = 0$ پر شکل 10.1 میں ہلکی سیاہی سے دکھایا گیا ہے۔ یہاں دھیان رہے کہ شکل میں z محدد کو افقی دکھایا گیا ہے۔ جیسے آپ دیکھ سکتے ہیں $t = 0$ پر موج کی دو آپس میں قریبی چوٹیاں $z = 0$ اور $z = \frac{2\pi}{\beta}$ پر پائی جاتی ہیں۔ دو آپس میں قریبی چوٹیوں کے درمیان فاصلے کو طول موج[36] پکارا اور λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں اس موج کی طول موج

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{10.23}$$

ہے جس سے

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{10.24}$$

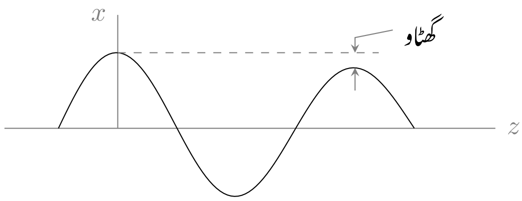
لکھا جا سکتا ہے جو انتہائی اہم نتیجہ ہے۔

موج کی مساوات ہی کو وقت $t = \Delta t_1$ پر شکل 10.1 میں دوبارہ گاڑھی سیاہی میں بھی دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیے میں موج نے دائیں جانب یعنی z بڑھنے کی طرف حرکت کی ہے۔ یوں صاف ظاہر ہے کہ یہ موج وقت کے ساتھ مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے۔ دورانیہ Δt_1 میں موج کی چوٹی نے $\frac{\omega \Delta t_1}{\beta}$ فاصلہ طے کیا ہے لہٰذا موج کے رفتار کو

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega \Delta t_1}{\beta} \frac{1}{\Delta t_1} = \frac{\omega}{\beta} \tag{10.25}$$

---

[25] attenuation constant
[26] loss less
[27] lossy
[28] neper
[29] تضعیفی مستقل کی اکائی جان نیپر کے نام سے منسوب ہے۔
[30] dimensionless
[31] phase constant
[32] passive
[33] gain coefficient
[34] laser
[35] active region
[36] wavelength



شکل 10.2: موج چلتے ہوئے آہستہ آہستہ کمزور ہوتی رہتی ہے۔

لکھا جا سکتا ہے۔ 3100

مساوات 10.24 کو مساوات 10.25 میں پر کرنے سے

$$v = f\lambda \tag{10.26}$$

حاصل ہوتا ہے جو λ طول موج اور f تعدد رکھنے والے موج کی رفتار v دیتی ہے۔ 3101

مساوات 10.20 میں مساوات 10.25 استعمال کرتے ہوئے

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] \tag{10.27}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 10.25 اور مساوات 10.24 کی مدد سے

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) \tag{10.28}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ 3102

موج کی رفتار کو مساوات 10.20 سے دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ اس مساوات کے تحت کسی بھی لمحہ t پر موج کی چوٹی اس مقام پر ہو گی جہاں

$$\omega t - \beta z = 0$$

ہو۔ چونکہ رفتار $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کو کہتے ہیں لہٰذا اس مساوات کے تفرق

$$\omega \,\mathrm{d}t - \beta \,\mathrm{d}z = 0$$

سے رفتار

$$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{\beta} \tag{10.29}$$

حاصل ہوتی ہے۔ 3103

شکل 10.2 میں α کو صفر تصور نہیں کیا گیا ہے۔ جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں، ایسی صورت میں موج کی چوٹی، z کے ساتھ بتدریج گھٹتی ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ 0.001 $= \alpha$ 3104
کی صورت میں $1\,\mathrm{km}$ کے فاصلے پر موج کی چوٹی، ابتدائی چوٹی کے $0.368 = \frac{e^{-1}}{e^{-0}}$ گنا رہ گئی ہو گی جہاں ابتدائی چوٹی $z = 0$ پر لی گئی ہے۔ 3105

برقی موج $\boldsymbol{E}_s$ سے مساوات 10.7

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_s$$

کی مدد سے مقناطیسی موج با آسانی حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 10.22 استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات سے

$$-\gamma E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_\text{y} = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_s$$

یا

$$\boldsymbol{H}_s = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_\text{y}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 10.12 سے مثبت γ کی قیمت پر کرنے سے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_s &= \sqrt{\frac{\sigma + j\omega\epsilon}{j\omega\mu}} E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_\text{y} \\ &= \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_\text{y} \end{aligned} \tag{10.30}$$

ملتا ہے جہاں دوسرے قدم پر

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \tag{10.31}$$

لکھی[37] گئی[38] ہے۔ اس مساوات کو

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}} \tag{10.32}$$

3106 بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 10.22 کی غیر سمتی صورت یعنی $E_{xs} = E_0 e^{-\gamma z}$ کو مساوات 10.30 کے غیر سمتی صورت یعنی $H_{ys} = \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{E_{xs}}{H_{ys}} = \eta \tag{10.33}$$

3107 ملتا ہے۔

یہاں ذرہ رک کر ایک برقی دور پر غور کرتے ہیں۔ منبع برقی دباو $V_0 \cos(\omega t - \psi)$ جسے دوری سمتیہ $V_0 e^{-j\psi}$ لکھا جا سکتا ہے کے ساتھ سلسلہ وار مزاحمت R، امالہ L اور کپیسٹر C جڑے ہیں جن کی رکاوٹ Z

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX = |Z|\, e^{j\theta_Z} = |Z| \underline{/\theta_Z}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں X مثبت ہو گا جبکہ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں یہ منفی ہو گا۔ مزید $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں دور خالص مزاحمتی رکاوٹ پیش کرے گا اور $\theta_Z = 0$ ہو گا۔ اس دور میں برقی رو دوری سمتیہ کی مدد سے

$$I_s = \frac{V_s}{Z_s} = \frac{V_0 e^{-j\psi}}{|Z|\, e^{j\theta_Z}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{-j(\psi + \theta_Z)}$$

---

[37] یونانی حروف تہجی η ایٹا پڑھا جاتا ہے۔
[38] eta η

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$i=\frac{V_0}{|Z|}\cos\left(\omega t-\psi-\theta_Z\right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ برقی دباو اور برقی رو ایک ہی تعدد رکھتے ہیں البتہ ان میں زاویائی فاصلہ θ_Z پایا جاتا ہے۔ مثبت X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباو کے پیچھے رہتی ہے جبکہ منفی X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباو کے آگے رہتی ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ برقی دباو اور برقی رو کی شرح

$$\frac{V_s}{I_s}=|Z|\,e^{j\theta_Z}=Z$$

کے برابر ہے جسے رکاوٹ کہتے ہیں۔

آئیں اب دوبارہ امواج کی بات کریں۔ برقی موج کو اس مثال کے برقی دباو کی جگہ اور مقناطیسی موج کو مثال کے رو کی جگہ رکھتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ دونوں مسائل ہو بہو یکساں ہیں۔ اسی وجہ سے برقی موج E_{xs} اور مقناطیسی موج H_{ys} کی شرح η، قدرتی رکاوٹ[39] کہلاتی ہے۔ بالکل برقی رکاوٹ کی طرح قدرتی رکاوٹ حقیقی یا خیالی اور یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی اکائی اوہم Ω ہے۔

مساوات 10.30 سے مقناطیسی موج

$$H_y=\frac{E_0e^{-\alpha z}}{|\eta|}\cos\left(\omega t-\beta z-\theta_\eta\right) \tag{10.34}$$

لکھی جائے گی جہاں قدرتی رکاوٹ کو

$$\eta=|\eta|\,e^{j\theta_\eta} \tag{10.35}$$

لکھا گیا۔

مساوات 10.20 کے تحت برقی میدان x محدد کے متوازی ہے جبکہ مساوات 10.34 کے تحت مقناطیسی میدان y محدد کے متوازی ہے لہٰذا یہ میدان آپس میں ہر وقت عمودی رہتے ہیں۔ اس کے علاوہ دونوں امواج z سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔ یوں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت بھی آپس میں عمودی ہیں۔ ایسے امواج جن میں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت عمودی ہوں عرضی امواج[40] کہلاتے ہیں۔ پانی کی سطح پر لہریں بھی عرضی امواج ہوتے ہیں۔ اسی طرح رسی کو کھینچ کر رکھتے ہوئے اسے جھٹکے سے ہلانے سے رسی میں عرضی موج پیدا ہوتی ہے۔ عرضی برقی و مقناطیسی موج[41] میں برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں حرکت کے سمت کے عمودی ہوتے ہیں۔ باب 13 میں ایسے امواج پر غور کیا جائے گا جن میں صرف ایک میدان سمت حرکت کے عمودی ہو گا۔ انہیں عرضی برقی موج[42] یا عرضی مقناطیسی موج[43] کا نام دیا گیا ہے۔

آئیں اب چند مخصوص صورتوں میں ان مساوات کو استعمال کرنا سیکھیں۔

---

[39] intrinsic impedance
[40] transverse waves
[41] transverse electromagnetic, TEM
[42] transverse electric wave, TE wave
[43] transverse magnetic wave, TM wave

3120
10.2.1 خالی خلاء میں امواج

خالی خلاء میں $\sigma = 0$، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 1$ ہیں لہٰذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_R\mu_0\left(\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0\right)} = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ چونکہ خالی خلاء میں $\alpha = 0$ ہے لہٰذا خالی خلاء بے ضیاع خطہ ہے۔ یوں خالی خلاء میں برقی ومقناطیسی امواج کی رفتار، جسے روایتی طور پر c سے ظاہر کیا جاتا ہے، مساوات 10.25 سے

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \tag{10.36}$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\sqrt{4\times\pi\times10^{-7}\times8.854\times10^{-12}}} = 2.99\times10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ &\approx 3\times10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

3121 ہے۔

مساوات 10.31 سے خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu_R\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ قدرتی رکاوٹ کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہم $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\times10^9$ سے $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi10^9}$ لکھتے ہوئے

$$\eta = 120\pi \approx 377\,\Omega \tag{10.37}$$

3122 حاصل کرتے ہیں۔ یوں خالی خلاء میں کسی بھی لمحے، کسی بھی نقطے پر برقی میدان کی قیمت اس نقطے پر مقناطیسی میدان کے 377 گنا ہو گی۔

حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے خالی خلاء میں متحرک موج کے میدان

$$\begin{aligned} E_x &= E_0\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \\ H_y &= \frac{E_0}{120\pi}\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \end{aligned}$$

لکھے جائیں گے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں میدان ہم زاویہ ہیں۔ یوں کسی بھی نقطے پر بڑھتے برقی میدان کی صورت میں اس نقطے پر مقناطیسی میدان بھی بڑھتا ہے۔ ان مساوات کے تحت امواج بالکل سیدھے حرکت کرتے ہیں اور نا وقت اور نا ہی فاصلے کے ساتھ ان کی طاقت میں کسی قسم کی کمی رونما ہوتی ہے۔ یہی وجہ ہے
3125 کہ کائنات کے دور ترین کہکشاؤں سے ہم تک برقی ومقناطیسی امواج پہنچتی ہیں اور ہمیں رات کے چمکتے اور خوبصورت تارے نظر آتے ہیں۔

مشق 10.1: بے تار[44] ذرائع ابلاغ میں 36 000 km کی اونچائی پر پرواز کرتے مصنوعی سیارے اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ یہ سیارے زمین کے اوپر ایک ہی نقطے پر آویزاں نظر آتے ہیں۔ ان سیاروں سے زمین کے قریبی نقطے تک برقی اشارہ کتنی دیر میں پہنچے گا۔

جواب: 0.12 s

مثال 10.1: خالی خلاء میں 240 MHz تعدد کی موج بڑھتے a_{z} سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ الف) λ ، β اور ω دریافت کریں۔ ب) لمحہ $t = 0$ پہ موج کی $128\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ چوٹی محدد کے مرکز پر پائی جاتی ہے۔ موج کی حقیقی اور دوری مساوات لکھیں۔ پ) اگر موج کی چوٹی لمحہ $t = 1.2\,\mathrm{ns}$ پر نقطہ $z = 25\,\mathrm{cm}$ پہ ہو تب موج کی مساوات کیا ہو گی؟

حل: الف) موج کی رفتار $c = 3 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ لیتے ہوئے

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{240 \times 10^6} = \frac{5}{4}\mathrm{m}$$

اور یوں

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{8\pi}{5}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اب زاویائی تعدد حاصل کرتے ہیں۔

$$\omega = 2\pi f = 4.8\pi \times 10^8 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

ب) حقیقی مساوات

$$E = 128 \cos\left(4.8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{5} z\right)$$

ہے جبکہ دوری مساوات مندرجہ ذیل ہے۔

$$E = 128 e^{-j\frac{8\pi}{5}z}$$

پ) اب موج تاخیر سے محدد کے مرکز پر پہنچتی ہے۔ موج کا تاخیری زاویہ θ لکھتے ہوئے موج کی مساوات

$$E = 128 \cos\left(4.8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{5} z + \theta\right)$$

ہو گی۔ موج کی چوٹی $\left(4.8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{5} z + \theta\right) = 0$ پر ہو گی لہٰذا $t = 1.2\,\mathrm{ns}$ اور $z = 0.25\,\mathrm{m}$ پر کرتے ہوئے $\theta = -0.176\pi$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ قیمت مندرجہ بالا مساوات میں استعمال کی جائے گی۔ موج کی دوری مساوات مندرجہ ذیل ہے۔

$$E_s = 128 e^{-j\pi\left(\frac{8}{5}z + 0.176\right)}$$

---

[44] wireless

مثال 10.2: لمحہ $t = 0$ پہ محدد کے مرکز پر موج کی چوٹی $340\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پائی جاتی ہے جبکہ $z = 1.5\,\mathrm{m}$ وہ قریب ترین نقطہ ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے۔ موج گھٹتے z کی سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ اس لمحہ برقی میدان اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_E = \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت میں ہے۔ برقی موج کی مساوات لکھیں۔

حل: موج کی چوٹی اور صفر کے درمیان فاصلے سے $1.5 = \frac{\lambda}{4}$ لکھ کر $\lambda = 6\,\mathrm{m}$ حاصل ہوتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3}$ اور $f = \frac{3\times10^8}{6} = 50\,\mathrm{MHz}$ حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ موج گھٹتے z جانب حرکت کر رہی ہے اور لمحہ $t = 0$ پر اس کی چوٹی محدد کے مرکز پر پائی جاتی ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos\left(2\pi \times 50 \times 10^6 t + \frac{\pi}{3}z\right)$$

لکھا جائے گا۔ لمحہ $t = 0$ پر محدد کے مرکز پر میدان $340\boldsymbol{a}_E$ پایا جاتا ہے لہٰذا موج کی مکمل خاصیت مندرجہ ذیل مساوات بیان کرے گی۔

$$\boldsymbol{E} = 340\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right]\cos\left(2\pi \times 50 \times 10^6 t + \frac{\pi}{3}z\right)$$

اس کی دوری شکل مندرجہ ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{E}_s = 340\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right] e^{j\frac{\pi}{3}z}$$

مثال 10.3: خالی خلاء میں برقی موج $\boldsymbol{E}_s = 340\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right] e^{j\frac{\pi}{3}z}$ پائی جاتی ہے۔ مقناطیسی موج کی مساوات لکھیں۔

حل: خالی خلاء میں

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

سے مقناطیسی چوٹی کی قیمت

$$H_0 = \frac{340}{120\pi} = \frac{17}{6\pi}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ حقیقی عدد ہے لہٰذا برقی اور مقناطیسی میدان ہم قدم ہیں۔ خالی خلاء میں موج کے برقی اور مقناطیسی میدان آپس میں عمودی ہوتے ہیں۔ یوں مقناطیسی موج کی سمت میں سمتیہ $x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور برقی موج کی سمت میں سمتیہ $\boldsymbol{a}_E$ کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا یعنی

$$\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right) \cdot (x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) = 0$$

ہو گا جس سے

$$2x + 3y = 0 \tag{10.38}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس میں x کی کوئی بھی قیمت پر کرتے ہوئے y کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔یوں $x = 1$ پر کرنے سے $y = -\frac{2}{3}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مقناطیسی میدان $1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمتیہ کی سمت میں ہو گی۔اس طرح مقناطیسی میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ

$$\boldsymbol{a}_H = \frac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

ہو گی۔یاد رہے کہ $\boldsymbol{a}_E \times \boldsymbol{a}_H$ سے موج کے حرکت کی سمت حاصل ہوتی ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\boldsymbol{a}_E \times \boldsymbol{a}_H = (\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) \times (\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}) = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

کے برابر ہے جو موج کی درست سمت ہے۔اب ہم مساوات 10.38 میں x کی قیمت منفی بھی پر کر سکتے تھے۔آئیں ایسا بھی کر کے دیکھ لیں۔اگر ہم $x = -1$ پر کرتے تب $y = \frac{2}{3}$ حاصل ہوتا جس سے اکائی سمتیہ $-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل ہوتی۔اس اکائی سمتیہ اور $\boldsymbol{a}_E$ کے سمتی ضرب سے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ حاصل ہوتا ہے جو بالکل الٹ سمت میں حرکت کرتی موج کی سمت ہے۔ظاہر ہے کہ ہم ان دو جوابات میں سے پہلی جواب کو ہی یہاں درست تسلیم کریں گے۔یوں مقناطیسی موج کی دوری مساوات مندرجہ ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{H}_s = H_0\boldsymbol{a}_H e^{j\frac{\pi}{3}z} = \frac{17}{6\pi}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)e^{j\frac{\pi}{3}z}$$

3143

3144

10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج

خالص یا کامل ذو برق سے مراد ایسا ذو برق ہے جس میں متحرک برقی و مقناطیسی امواج کی توانائی ضائع نہیں ہوتی۔خالص ذو برق میں $\sigma = 0$ جبکہ اس کا جزوی مقناطیسی مستقل μ_R اور جزوی برقی مستقل ϵ_R ہے لہٰذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = 0 \tag{10.39}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{10.40}$$

حاصل ہوتے ہیں۔کامل ذو برق میں $\alpha = 0$ ہے لہٰذا کامل ذو برق بے ضیاع ہے۔یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار مساوات 10.25 سے

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_R\mu_0\epsilon_R\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} \tag{10.41}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ کو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار c لکھا گیا ہے۔چونکہ ذو برق میں $\mu_R\epsilon_R > 1$ ہے لہٰذا ذو برق میں روشنی کی رفتار خالی خلاء میں روشنی کی رفتار سے کم ہو گی۔خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اس کی زیادہ سے زیادہ رفتار ہے۔
3146

موج کی رفتار اور تعدد سے طول موج

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} \tag{10.42}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کے طول موج کو λ_0 لکھا گیا ہے۔ اس مساوات سے ذو برق میں روشنی کی رفتار کم ہونے کی وجہ سامنے آتی ہے۔ چونکہ $\mu_R \epsilon_R > 1$ ہے لہٰذا ذو برق میں طول موج کم ہو جاتا ہے جس سے روشنی کی رفتار کم ہو جاتی ہے۔

مساوات 10.31 سے ذو برقی کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ کو η_0 لکھا گیا ہے۔

یوں ذو برق میں امواج کے مساوات

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \tag{10.43}$$

$$H_y = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z) \tag{10.44}$$

ہیں۔

مثال 10.4: پانی کے لئے $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 78.4$ اور $\sigma = 0$ لیتے ہوئے 300 MHz تعدد کے برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، طول موج اور قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ برقی میدان $50\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ ہونے کی صورت میں برقی اور مقناطیسی امواج کے مساوات لکھیں۔ ہم $\sigma = 0$ لیتے ہوئے در حقیقت پانی میں توانائی کے ضیاع کو نظر انداز کر رہے ہیں۔

حل:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{78.4}} = 0.3388 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.3388 \times 10^8}{300 \times 10^6} = 11.29\,\mathrm{cm}$$

ہیں جبکہ خالی خلاء میں $\lambda = 1\,\mathrm{m}$ ہے۔ بقایا مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 55.7\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

اور

$$\eta = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \frac{377}{\sqrt{78.4}} = 42.58\,\Omega$$

ہیں۔ امواج کے مساوات

$$E_x = 0.05\cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$
$$H_y = \frac{0.05}{42.58}\cos(6\pi 10^8 t - 55.7z) = 0.00117\cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$

ہیں۔

مشق 10.2: کتاب کے آخر میں مختلف اشیاء کے مستقل دئے گئے ہیں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے ابرق میں، طاقت کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے، 5.6 GHz اور $10\,\frac{\text{mA}}{\text{m}}$ حیطے کی مقناطیسی میدان پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- موج کی رفتار،
- طول موج،
- زاویائی مستقل،
- قدرتی رکاوٹ،
- برقی میدان کا حیطہ۔

جوابات: $1.29\times10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$، $23\,\text{cm}$، $272.6\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$، $162.1\,\Omega$ اور $1.62\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج

کامل ذو برق میں امواج پر غور کے بعد فطری طور ناقص ذو برق پر بات کرنا ضروری ہے لہٰذا صاف پانی کو مثال بناتے ہوئے 20 GHz تعدد پر ایسا ہی کرتے ہیں۔ صفحہ 328 پر شکل 10.4 میں صاف پانی کے مستقل دئے گئے ہیں۔

اس تعدد پر صاف پانی کے مستقل $\epsilon_R = 41$ اور $\sigma = 36.7\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔ چونکہ پانی غیر مقناطیسی ہے لہٰذا اس کا $\mu_R = 1$ ہو گا۔ یوں

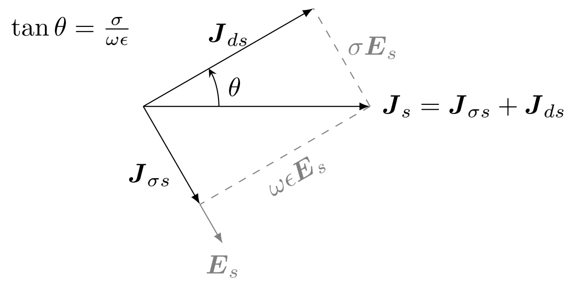
$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0.8$$

اور

$$\begin{aligned}\gamma &= j2\times\pi\times 20\times10^{9}\times\frac{\sqrt{1\times41}}{3\times10^{8}}\sqrt{1-j0.8}\\ &= 3035\underline{/70.67^{\circ}}\\ &= 1005+j2864 \quad \text{m}^{-1}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں پانی کا تضعیفی مستقل

$$\alpha = 1005\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$$



شکل 10.3: طاقت کے ضیاع کا تکون۔

ہے جس کا مطلب ہے کہ پانی میں ہر $\frac{1}{1005}$ میٹر یعنی $1\,\mathrm{mm}$ فاصلہ طے کرنے پر برقی اور مقناطیسی امواج 0.368 گنا گھٹ جائیں گے۔ پانی میں $\alpha \neq 0$ ہے لہٰذا پانی ضیاع کار ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں ریڈار[45] پانی میں کیوں کام نہیں کرتا۔ اسی طرح بارش کی صورت میں بھی ریڈار کی کارکردگی بری طرح متاثر ہوتی ہے۔ پانی میں دیکھنے کی خاطر موج آواز استعمال کی جاتی ہیں۔

تضعیفی مستقل کو عموماً ڈیسی بیل[46] فی میٹر میں ناپا جاتا ہے جہاں $1\,\mathrm{Np} = 8.69\,\mathrm{dB}$ کے برابر ہے۔ یوں مندرجہ بالا جواب کو

$$\alpha = 1005 \times 8.69 = 8733\,\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

زاویائی مستقل

$$\beta = 2864\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

ہے جو $\sigma = 0$ کی صورت میں $2682\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا پانی کے موصلیت سے زاویائی مستقل زیادہ متاثر نہیں ہوا۔ اس تعدد پر خالی خلاء میں طول موج $1.5\,\mathrm{cm}$ ہے جبکہ پانی میں $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ سے طول موج $2.19\,\mathrm{mm}$ ہے۔

قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \frac{377}{\sqrt{41}}\frac{1}{\sqrt{1-j0.8}} = 52\underline{/19.33^\circ} = 49.1 + j17.2 \quad \Omega$$

ہے لہٰذا E_x ہر نقطے پر H_y سے 19.33° آگے ہے۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\boldsymbol{E}_s = \boldsymbol{J}_{\sigma s} + \boldsymbol{J}_{ds}$$

میں ایصالی اور انتقالی کثافت برقی رو کے سمتی مجموعے کو شکل 10.3 میں بطور مجموعی کثافت رو $\boldsymbol{J}_s$ دکھایا گیا ہے۔ ایصالی رو اور انتقالی رو آپس میں 90° درجے کا زاویہ بناتے ہیں۔ انتقالی رو 90° آگے رہتا ہے۔ یہ بالکل متوازی جڑے مزاحمت اور کپیسٹر کے رو کی طرح صورت حال ہے۔ کپیسٹر کی رو، مزاحمت کی رو سے 90° آگے رہتی ہے۔ مزید یہ کہ مزاحمت کی رو سے برقی طاقت کا ضیاع پیدا ہوتا ہے جبکہ کپیسٹر کی رو سے ایسا نہیں ہوتا۔ ان حقائق کو مدنظر رکھتے ہوئے شکل 10.3 میں زاویہ θ (جس کا کروی محدد کے زاویہ θ کے ساتھ کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں ہے) کو دیکھیں جس کے لئے

$$\tan\theta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \tag{10.45}$$

[45] radar
[46] decibel, dB

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں اس تکون کو طاقت کے ضیاع کا تکون پکارا جاتا ہے اور $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی شرح کو **ضیاعی ٹینجنٹ**[47] یا **مماس ضیاع** کہا جاتا ہے۔ 3177

مساوات 10.14 اور مساوات 10.32 کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ استعمال کرتے ہوئے لکھا گیا۔ کسی ذو برق کے کامل یا غیر کامل ہونے کا فیصلہ اس کے مماس ضیاع کی قیمت کو دیکھ کر 3178
کیا جاتا ہے۔ اگر اس شرح کی قیمت اکائی کے قریب ہو تب ذو برق غیر کامل قرار دیا جاتا ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ کی صورت میں ذو برق کو کامل تصور کیا جاتا ہے۔ 3179

کم مماس ضیاع کی صورت میں حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کے کارآمد مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

کو **مسئلہ ثنائی**[48]

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

جہاں $|x| < 1$ ہے، کی مدد سے تسلسل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ اگر ہم $x = -\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ اور $n = \frac{1}{2}$ لیں تو حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + \cdots\right]$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\alpha \doteq j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(-j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{10.46}$$

اور

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right] \tag{10.47}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اگر $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ ہو تب

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{10.48}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ بالکل اسی طرح قدرتی رکاوٹ کو

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left[1 - \frac{3}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right] \tag{10.49}$$

یا

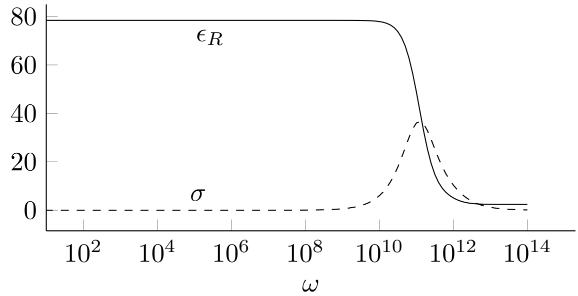
$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(1 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) \tag{10.50}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ 3180

آئیں دیکھیں کہ ان مساوات سے حاصل جواب اصل مساوات کے جوابات کے کتنے قریب ہیں۔ ایسا صاف پانی کی مثال کو دوبارہ حل کر کے دیکھتے ہیں۔ صاف پانی کے مستقل $20\,\mathrm{GHz}$ تعدد پر $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 41$ اور $\sigma = 36.7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں لہٰذا مساوات 10.46 سے

$$\alpha = 1080\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}} \qquad \left(9385\,\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}\right)$$

[47] loss tangent
[48] binomial theorem



شکل 10.4: صاف پانی کا جزوی برقی مستقل بالمقابل زاویائی تعدد اور موصلیت بالمقابل زاویائی تعدد۔

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ حاصل کردہ قیمت $1005\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ کے کافی قریب ہے۔ مساوات 10.47 سے

$$\beta = 2897\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ جواب $2864\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ کے بہت قریب ہے۔ مساوات 10.48 سے حاصل جواب

$$\beta = 2682\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

درست جواب سے نسبتاً زیادہ مختلف ہے۔ قدرتی رکاوٹ مساوات 10.49 سے

$$\eta = 44.75 + j23.55$$

حاصل ہوتا ہے جو $49.1 + j17.2$ کے بہت قریب ہے البتہ مساوات 10.50 سے حاصل جواب

$$\eta = 58.88 + j23.55$$

قدر مختلف ہے۔ صاف پانی کی اس مثال میں مماس ضیاع 0.8 ہے جو اکائی سے بہت کم نہیں ہے، اسی لئے جوابات پہلے سے قدر مختلف حاصل ہوئے۔ چونکہ موصلیت اور برقی مستقل کی بالکل درست قیمتیں عموماً ہمیں معلوم نہیں ہوتیں لہٰذا سادہ مساوات سے حاصل جوابات کے اس فرق کو زیادہ اہمیت نہیں دینی چاہئے۔ بہتر یہی ہوتا ہے کہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 0.1$ ہی کی صورت میں سادہ مساوات استعمال کئے جائیں۔

عموماً ذو برق کی موصلیت تعدد بڑھانے سے غیر خطی طور پر بڑھتی ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کے قیمت میں تبدیلی نسبتاً کم ہوتی ہے۔ یہی وجہ مماس ضیاع کی اہمیت کا راز ہے۔ یاد رہے کہ مختلف تعدد پر موصلیت، برقی مستقل اور مماس ضیاع نہایت تیزی سے تبدیل ہو سکتے ہیں۔ ایسا عموماً نظر آنے والی روشنی سے قدر کم یا قدر زیادہ تعدد پر ہوتا ہے۔

شکل 10.4 میں صاف پانی کا جزوی برقی مستقل ϵ_R بالمقابل زاویائی تعدد ω ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے جبکہ موصلیت بالمقابل تعدد نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ افقی محدد تعدد کا لاگ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تقریباً $10\,\frac{\mathrm{Grad}}{\mathrm{s}}$ تعدد تک $\epsilon_R = 78.4$ رہتا ہے جبکہ اس سے بلند تعدد پر اس کی قیمت گھٹ کر 2.4 ہو جاتی ہے۔ موصلیت کی چوٹی تقریباً $36.7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ پائی جاتی ہے۔ دیگر ذو برق کے خط مختلف اشکال کے ہوں گے۔

مشق 10.3: ایک مادے کے مستقل $1\,\mathrm{MHz}$ تعدد پر $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 2.8$ اور $\sigma = 10\,\frac{\mathrm{\mu S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ اس مادے کے مماس ضیاع، تضعیفی مستقل اور زاویائی مستقل حاصل کریں۔ تضعیفی مستقل کی قیمت $\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}$ میں کیا ہے۔

جوابات: 0.0642، $1.13 \times 10^{-3} \, \frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ اور $3.51 \times 10^{-4} \, \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$، $9.8 \times 10^{-3} \, \frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}$

مشق 10.4: ایک غیر مقناطیسی مادے کا مماس ضیاع 0.07 جبکہ $\mu_R = 4.7$ ہیں۔ان قیمتوں کو 1 MHz تا 80 MHz تعدد کے درمیان اٹل تصور کیا جا سکتا ہے۔اس کا تضعیفی مستقل اور مادے میں طول موج 20 MHz اور 60 MHz تعدد پر حاصل کریں۔

جوابات: $0.031 \, \frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ یا $0.269 \, \frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}$، 6.9 m، $0.095 \, \frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ یا $0.826 \, \frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}$، 2.3 m

---

10.3 پوئنٹنگ سمتیہ

امواج کی طاقت جاننے کے لئے مسئلہ پوئنٹنگ[49] درکار ہو گا لہٰذا پہلے اسے[50] حاصل کرتے ہیں۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

کا $\boldsymbol{E}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

لیتے ہوئے سمتی مماثل (جسے آپ باآسانی کارتیسی محدد میں ثابت کر سکتے ہیں)

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E}$$

کے ذریعہ

$$\boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E} - \nabla (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس میں $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ پر کرنے سے

$$-\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

یا

$$-\nabla (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \epsilon \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

---

[49] Poynting theorem

[50] جان ہینری پوئنٹنگ نے 1884 میں پہلی بار اس مسئلے کو پیش کیا۔

حاصل ہوتا ہے۔اب

$$\epsilon \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right)$$

اور

$$\mu \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھے جا سکتے ہیں لہٰذا

$$-\nabla \left(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \right) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کے حجمی تکمل

$$-\int_h \nabla \cdot \left(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \right) \mathrm{d}h = \int_h \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \, \mathrm{d}h + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) \mathrm{d}h$$

پر مسئلہ پھیلاو کے اطلاق سے

$$-\oint_S \left(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \, \mathrm{d}h + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) \mathrm{d}h \tag{10.51}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو کی بات کرتے ہیں۔اگر پورے حجم میں کہیں پر بھی منبع طاقت موجود نہ ہو تب یہ تکمل حجم میں کل لمحاتی مزاحمتی طاقت کا ضیاع دیتا ہے۔اگر حجم میں منبع طاقت پایا جاتا ہو تب ان منبع کے حجم پر تکمل کی قیمت مثبت ہو گی اگر منبع کو طاقت فراہم کی جا رہی ہو اور یہ تکمل منفی ہو گا اگر منبع طاقت فراہم کر رہا ہو۔

مساوات کے دائیں ہاتھ دوسرا تکمل حجم میں توانائی کا کل ذخیرہ دیتا ہے جس کا وقت کے ساتھ تفرق حجم میں ذخیرہ توانائی میں لمحاتی تبدیلی یعنی طاقت دیتا ہے۔اس طرح مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ حجم میں داخل ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔یوں حجم سے کل خارجی طاقت

$$\oint_S \left(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \right) \cdot \boldsymbol{S}$$

ہو گا جہاں حجم گھیرتی سطح پر تکمل لیا گیا ہے۔سمتی ضرب $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ **پوئنٹنگ سمتیہ**[51] $\mathscr{P}$ پکارا جاتا ہے

$$\mathscr{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{10.52}$$

جس سے مراد لمحاتی طاقت کی کثافت لی جاتی ہے جو واٹ فی مربع میٹر $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ میں ناپی جاتی ہے۔یہاں بھی برقی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}$ یا مقناطیسی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}$ کے استعمال کی طرح یاد رہے کہ پوئنٹنگ سمتیہ کا بند سطح پر تکمل ہی حقیقی معنی رکھتا ہے اور ایسا تکمل سطح سے خارج ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔کسی بھی نقطے پر $\mathscr{P}$ کی سمت اس نقطے پر لمحاتی طاقت کے بہاو کی سمت دیتا ہے۔

[51] Poynting vector

چونکہ $\mathscr{P}$ برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں کے عمودی ہے لٰہذا طاقت کی بہاو بھی دونوں میدان کے عمودی سمت میں ہو گی۔ ہم نے برقی و مقناطیسی امواج پر تبصرے کے دوران دیکھا کہ امواج کے حرکت کی سمت $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ کے عمودی ہوتی ہے لٰہذا $\mathscr{P}$ کی سمت ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔ مزید کامل ذو برق میں

$$
\begin{aligned}
E_x &= E_0 \cos(\omega t - \beta z)\\
H_y &= \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)
\end{aligned}
$$

سے لمحاتی کثافت سطحی بہاو طاقت

$$E_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \times H_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}} = \mathscr{P} \boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اوسط کثافت طاقت حاصل کرنے کی خاطر ہم ایک پھیرے یعنی $T = \frac{1}{f}$ دورانیے کا تکمل لیتے ہوئے دوری عرصہ T پر تقسیم

$$
\begin{aligned}
\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= f \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) \,\mathrm{d}t\\
&= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \int_0^{\frac{1}{f}} \left[1 + \cos(2\omega t - 2\beta z)\right] \mathrm{d}t\\
&= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t - 2\beta z)\right]_0^{\frac{1}{f}}
\end{aligned}
$$

کرتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \quad \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \tag{10.53}$$

3209 حاصل کرتے ہیں جو z سمت میں کثافت طاقت کی بہاو دیتا ہے۔ اگر میدان کی چوٹی E_0 کی جگہ اس کی موثر قیمت $E_{\text{موثر}}$ استعمال کی جائے تب مندرجہ بالا مساوات
3210 میں $\frac{1}{2}$ کا جزو ضربی نہیں لکھا جائے گا۔

موج کی سمت کے عمودی سطح S سے یوں

$$P_{z,\text{اوسط}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} S \quad \mathrm{W}$$

3211 طاقت گزرے گی۔

غیر کامل ذو برق کی صورت میں

$$\eta = |\eta| \, e^{j\theta_\eta}$$

لیتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
E_x &= E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)\\
H_y &= \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|\eta|} \cos\left(\omega t - \beta z - \theta_\eta\right)
\end{aligned}
\tag{10.54}
$$

ہوں گے جن سے

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= f\int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z}\cos(\omega t-\beta z)\cos\left(\omega t-\beta z-\theta_\eta\right)\mathrm{d}t\\
&= f\int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z}\left[\cos(2\omega t-2\beta z-\theta_\eta)+\cos\theta_\eta\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

یعنی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\cos\theta_\eta \tag{10.55}$$

حاصل ہوتا ہے۔

کثافت طاقت کی اوسط قیمت مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ

$$\boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} \tag{10.56}$$

سے بھی حاصل کی جا سکتی ہے جہاں جوڑی دار مخلوط[52] مقناطیسی موج استعمال کی جاتی ہے۔ آئیں مساوات 10.55 کو اس ترکیب سے دوبارہ حاصل کریں۔ مساوات 10.54 کی دوری سمتی شکل

$$\begin{aligned}
E_{sx} &= E_0 e^{-\alpha z-j\beta z}\\
H_{sy} &= \frac{E_0}{|\eta|}e^{-\alpha z-j\beta z-j\theta_\eta}\\
H_{sy}^* &= \frac{E_0}{|\eta|}e^{-\alpha z+j\beta z+j\theta_\eta}
\end{aligned}$$

ہے جہاں جوڑی دار مخلوط مقناطیسی موج H_{sy}^* بھی لکھی گئی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^* &= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z+j\theta_\eta}\\
&= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\left(\cos\theta_\eta + j\sin\theta_\eta\right)
\end{aligned}$$

کا حقیقی حصہ لیتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\cos\theta_\eta$$

کثافت اوسط توانائی کی مطلوبہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

اس کتاب میں اوسط کثافت توانائی حاصل کرتے وقت مساوات 10.56 استعمال کی جائے گی۔

[52] complex conjugate

مشق 10.5: ایک میگاہرٹز، تین سو میگاہرٹز اور تین گیگاہرٹز کے تعدد پر صاف پانی کے برف کے جزو برقی مستقل بالترتیب 4.15، 3.45 اور 3.2 ہیں جبکہ اس کے مماس ضیاع بالترتیب 0.12، 0.035 اور 0.0009 ہیں۔ یکساں سطحی موج جس کی چوٹی $z = 0$ پر $100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہو برف سے گزر رہی ہے۔ ایک مربع میٹر سطح سے اوسط طاقت کا بہاو $z = 0$ اور $z = 5\,\mathrm{m}$ پر حاصل کریں۔

جوابات: 27.1 W، 26.4 W، 24.7 W، 12.48 W، 23.7 W، 14.31 W

مثال 10.5: z محدد پر $\sigma = 3.2 \times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ موصلیت کے غیر مقناطیسی مادے سے بنی لامحدود لمبائی کی سلاخ پائی جاتی ہے جس کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_R = 1$ ہے۔ اس سلاخ میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت 250 A کی یکساں یک سمتی برقی رو گزر رہی ہے اور سلاخ کا رداس 2 cm ہے۔ الف) سلاخ کی فی میٹر مزاحمت حاصل کریں۔ ب) سلاخ میں فی میٹر طاقت کا ضیاع I^2R سے حاصل کریں۔ پ) سلاخ میں $\boldsymbol{J}$ ، $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔ ت) سلاخ کی سطح پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل لیتے ہوئے فی میٹر سلاخ میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔ ٹ) رداس 5 cm کے نلکی سطح پر پوئنٹنگ سمتیہ کے سطحی تکمل کے استعمال سے سلاخ کے قریب برقی میدان حاصل کریں۔

حل: الف) فی میٹر سلاخ کی مزاحمت حاصل کرتے ہیں۔

$$R = \frac{1}{3.2 \times 10^7 \times \pi \times 0.02^2} = 24.87\,\frac{\mu\Omega}{\mathrm{m}}$$

ب) فی میٹر سلاخ میں طاقت کا مزاحمتی ضیاع یوں حاصل ہو گا۔

$$P = I^2R = 250^2 \times 24.87 \times 10^{-6} = 1.554\,247\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}$$

پ) سلاخ کا رقبہ عمودی تراش $A = \pi \times 0.02^2$ مربع میٹر ہے۔ یوں سلاخ میں کثافت برقی رو

$$\boldsymbol{J} = \frac{I}{A}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \frac{250}{\pi \times 0.02^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = 198949\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$

ہو گی جس سے سلاخ میں برقی شدت $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$ سے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{J}}{\sigma} = \frac{198949\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{3.2 \times 10^7} = 6.217 \times 10^{-3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتی ہے۔ دو سنٹی میٹر سے کم رداس $\rho < 2\,\mathrm{cm}$ کا دائرہ کل

$$\frac{250 \times \pi \times \rho^2}{\pi \times 0.02^2} = 625000\rho^2$$

ایمپیئر کی برقی رو گھیرے گی۔ یوں ایمپیئر کا دوری قانون استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے اندر رداس ρ پر مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{H}_{\phi} = \frac{625000\rho^2}{2\pi\rho} = 99472\rho\boldsymbol{a}_{\phi}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہو گا۔

ت) پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=-618.42\rho\boldsymbol{a}_\rho\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

ہے۔ہم $2\,\mathrm{cm}$ کے انتہائی قریب لیکن اس سے ذرہ کم رداس اور $1\,\mathrm{m}$ لمبائی کی تصوراتی سطح پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل لیتے ہوئے فی میٹر سلاخ میں مزاحمتی ضیاع حاصل کرتے ہیں۔اس ڈبی نما تصوراتی سطح کی نچلی اور بالائی سیدھی سمتی سطح بالترتیب $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت میں ہیں جبکہ پوئنٹنگ سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ سمت میں ہے لہٰذا ان سطحوں پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل صفر کے برابر ہو گا۔یوں سطحی تکمل حقیقت میں صرف تصوراتی سطح کے گول حصے پر لینا ضروری ہے۔ سطح میں داخل ہوتا طاقت

$$\int_S -\mathscr{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^1\int_0^{2\pi}618.42\rho^2\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z=1.554\,247\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\rho=2\,\mathrm{cm}$ پر کیا گیا ہے۔یاد رہے کہ ہم نے دو سنٹی میٹر سے ذرہ کم رداس چنا تا کہ سلاخ کے اندر حاصل کردہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان قابل استعمال ہوں۔

ٹ) سلاخ کے رداس سے زیادہ رداس پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل وہی طاقت دے گا جو سلاخ کے سطح پر تکمل لیتے ہوئے حاصل ہوا تھا۔مزاحمتی طاقت کا ضیاع ہمارے چنے گئے سطح پر منحصر نہیں ہے۔ $5\,\mathrm{cm}$ رداس اور $1\,\mathrm{m}$ لمبائی کی تصوراتی سطح لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ $5\,\mathrm{cm}$ کا گول دائرہ پورے $250\,\mathrm{A}$ کی برقی رو کو گھیرے گا۔یوں اس دائرے پر

$$\boldsymbol{H}=\frac{250}{2\pi\times0.05}\boldsymbol{a}_\phi=795.7747\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

ہو گا۔سلاخ کے گول سطح پر برقی میدان $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت میں ہے۔سرحدی شرائط کے مطابق کسی بھی دو مختلف اجسام کے سرحد پر متوازی برقی میدان برابر ہوتے ہی۔یوں لامحدود لمبائی کے سلاخ کے بالکل قریب برقی میدان $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت میں ہی ہو گا۔ایسا کوئی جواز نظر نہیں آتا کہ سلاخ سے دور میدان کیوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت میں نہ ہو۔یوں ہم $\boldsymbol{E}=E_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لیتے ہیں۔اس طرح تصوراتی سطح کی نچلی اور بالائی سطحوں پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل صفر کے برابر ہو گا۔سلاخ میں داخل ہوتا طاقت تصوراتی سطح کے گول حصے پر تکمل سے حاصل ہو گا یعنی

$$\int_S -\mathscr{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^1\int_0^{2\pi}795.7747E_0\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z=250E_0\,\mathrm{W}$$

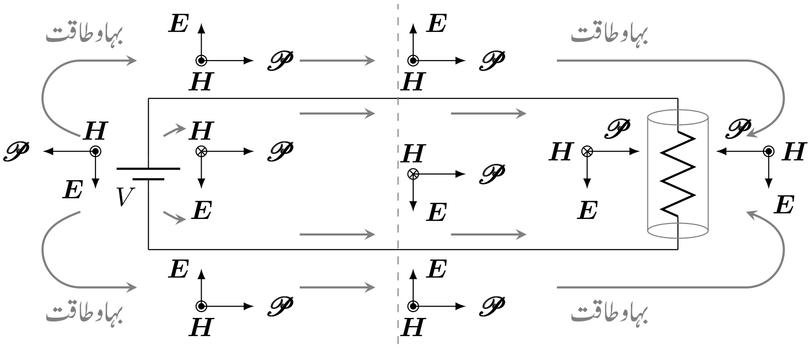
جہاں $\rho=5\,\mathrm{cm}$ پر کیا گیا ہے۔حاصل جواب کو $1.554\,247\,\mathrm{W}$ کے برابر پر کرتے ہوئے سلاخ کے باہر

$$\boldsymbol{E}=6.217\times10^{-3}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مثال میں سلاخ کے باہر اور سلاخ کے اندر برابر برقی میدان پایا جاتا ہے۔

10.4 پوئنٹنگ سمتیہ اور برقی دور

شکل 10.5 میں منبع طاقت کے ساتھ مزاحمت R جوڑی گئی ہے۔اس برقی دور کو ہم عموماً حل کرتے ہوئے تصور کرتے ہیں کہ منبع طاقت برقی دباو V پیدا کرتی ہے جس سے دور میں برقی رو $I=\frac{V}{R}$ پیدا ہوتا ہے۔مزاحمت اور منبع طاقت جوڑنے والی تاروں میں یہ برقی رو گزرتی ہے۔یوں منبع سے مزاحمت تک $P=VI$ طاقت بذریعہ تار پہنچتی ہے۔آئیں پوئنٹنگ سمتیہ کیا کہتی ہے۔



شکل 10.5: برقی دور میں طاقت کا بہاو۔

شکل 10.5 میں مثبت اور منفی تاروں کے مابین

$$V=-\int \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{10.57}$$

برقی دباو پایا جاتا ہے جہاں دو تاروں کے درمیان اس تکمل کو کسی بھی راستے پر حاصل کیا جا سکتا ہے۔ برقی میدان $\boldsymbol{E}$ کی سمت مثبت تار سے منفی تار کی جانب ہے۔ اسی طرح تار یا منبع یا مزاحمت کے گرد میدان کا تکمل

$$I=\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{10.58}$$

برقی رو دیتا ہے۔ شکل میں مختلف مقامات پر $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ دکھائے گئے ہیں۔ ان مقامات پر پوئنٹنگ سمتیہ $\mathscr{P}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ منبع طاقت پر پوئنٹنگ سمتیہ باہر کی جانب کو ہے جبکہ مزاحمت پر اس کی سمت اندر جانب کو ہے۔ منبع طاقت اور مزاحمت کے درمیان نقطہ دار سطح پر پوئنٹنگ سمتیہ منبع سے مزاحمت کی جانب کو ہے۔ جگہ جگہ پوئنٹنگ سمتیات دریافت کرتے ہوئے طاقت کے بہاو کو دیکھا جا سکتا ہے۔ شکل میں طاقت کے بہاو کو ہلکی سیاہی کے موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔

مزاحمت میں منتقل ہوتی طاقت دریافت کرنے کی خاطر مزاحمت کو مکمل گھیرتی ہوئی کسی بھی بند سطح پر پوئنٹنگ سمتیہ کے سطحی تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ شکل میں مزاحمت کے گرد فرضی ڈبیا دکھائی گئی ہے۔ آئیں اس ڈبیا کے سطح پر تکمل

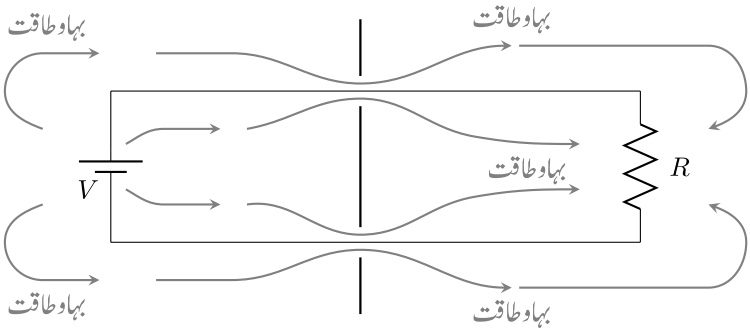
$$P=\oint(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{10.59}$$

حاصل کریں۔ برقی میدان $\boldsymbol{E}$ اور مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ ہر جگہ آپس میں عمودی ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ دونوں میدان نلکی گول سطح کے مماسی ہیں۔ فرضی ڈبیا کے بالائی اور نچلی ڈھکن پر سطحی تکمل صفر کے برابر ہے۔ یوں مندرجہ بالا تکمل مندرجہ ذیل صورت اختیار کر لیتا ہے

$$P=\int \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=VI \tag{10.60}$$

جو عین ہمارے توقع کے مطابق جواب ہے۔

شکل 10.6 میں منبع طاقت اور مزاحمت کے درمیان کسی مقام پر لا محدود زمینی سطح نسب کر دی گئی ہے۔ اس سطح میں دو باریک سوراخ ہیں جن میں سے برقی تار گزر رہے ہیں۔ زمینی سطح پر برقی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا زمینی سطح پر پوئنٹنگ سمتیہ صفر کے برابر ہو گا۔ یوں اس سطح سے کوئی طاقت نہیں گزر سکتی۔ اس شکل میں بھی طاقت کی بہاو دکھائی گئی ہے۔ کسی بھی مقام پر پوئنٹنگ سمتیہ کا سطحی تکمل لیتے ہوئے ثابت ہوتا ہے کہ منتقل طاقت کی قیمت جوں کی توں رہتی ہے۔ زیادہ دلچسپ صورت حال زمینی سطح میں ان سوراخ پر پائی جاتی ہے۔ آپ دیکھیں گے کہ ان سوراخ میں برقی میدان کی قیمت اتنی بڑھ جاتی ہے کہ سوراخ میں سے گزرتی طاقت ہی مزاحمت کو منتقل ہوتی ہے۔



شکل 10.6: برقی دور میں زمینی سطح سے طاقتی بہاو پر اثرات۔

آپ نے دیکھا کہ طاقت دراصل برقی تاروں میں سے نہیں گزرتی بلکہ تاروں کے گرد خلاء میں سے گزرتی ہے۔اس عجیب مگر درست نتیجے تک صرف برقی و مقناطیسیت کی مدد سے ہی ہم پہنچ پائیں ہیں۔

اگرچہ $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ عموماً طاقت ہی ظاہر کرتی ہے لیکن یہ ممکن ہے کہ ایسا نہ ہو۔مثلاً اگر زمینی مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ اور ساکن چارج کی برقی میدان $\boldsymbol{E}$ کو لیا جائے $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ سے ایسا ظاہر ہوتا ہے جیسے طاقت کا بہاو پایا جاتا ہے جبکہ ایسا ہر گز درست نہیں ہے۔پوئنٹنگ سمتیہ کے صحیح استعمال کے لئے ضروری ہے کہ جن مقناطیسی اور برقی میدان کی بات کی جائے، وہ دونوں آپس میں تعلق رکھتے ہوں۔ایسے تعلق رکھنے والے میدان کی صورت میں پوئنٹنگ سمتیہ ہر صورت طاقت کے بہاو کو ظاہر کرے گی۔

10.5 موصل میں امواج

موصل میں امواج پر غور کی خاطر ہم تصور کرتے ہیں کہ موصل سے جڑے ذو برق میں امواج پیدا کئے جاتے ہیں۔ہم جاننا چاہتے ہیں کہ ایسے موج ذو برق اور موصل کے سرحد پر موصل میں کیسے داخل ہوتے ہیں اور موصل میں ان کی کیا کارکردگی ہوتی ہے۔

ایصالی اور انتقالی رو کی شرح $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کو مماس ضیاع کہتے ہیں۔یوں ناقص موصل کی مماس ضیاع بلند تعدد پر کم ہو گی۔نائیکروم[53] ناقص موصل ہے جس کا مماس ضیاع 100 MHz تعدد پر تقریباً 2×10^8 ہے۔یوں کسی بھی موصل کے لئے $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ ہوتا ہے۔اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے چند سادہ مساوات حاصل کرتے ہیں۔حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی بنا پر

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

یا

$$\gamma = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

---
[53] nichrome

لکھا جا سکتا ہے۔ اب

$$-j = 1\underline{/-90^\circ}$$

کے برابر ہے جس کا جزر

$$\sqrt{1\underline{/-90^\circ}} = 1\underline{/-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ہے لہٰذا

$$\gamma = j\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

یا

$$\gamma = (j+1)\sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{10.61}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{10.62}$$

3255 ملتا ہے۔

ان معلومات کے بعد کہا جا سکتا ہے کہ کسی بھی μ اور σ مستقل رکھنے والے موصل کے α اور β ہر تعدد پر برابر ہی رہتے ہیں۔ یوں z سمت میں دوبارہ امواج فرض کرتے ہوئے موصل میں برقی میدان کی موج کو

$$E_x = E_0 e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}}\cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \tag{10.63}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $0 > z$ کامل ذو برق اور $0 < z$ موصل خطے ہوں تب ان کے سرحد $z = 0$ پر برقی سرحدی شرائط کے مطابق متوازی برقی میدان سرحد کے دونوں اطراف پر برابر ہوں گے۔ مساوات 10.63 کے تحت سرحد پر موصل میں

$$E_x = E_0\cos\omega t \qquad (z=0) \tag{10.64}$$

ہو گا اور یوں سرحد پر ذو برق میں بھی برقی میدان یہی ہو گا۔ اب اسی حقیقت کو یوں بھی دیکھا جا سکتا ہے کہ سرحد پر ذو برق میں برقی میدان مساوات 10.64 دیتا ہے جو موصل میں سرحد پر اسی قیمت کا میدان پیدا کرتا ہے۔ ایسا تصور کرنے کا مطلب یہ ہے کہ ہم ذو برق میں میدان کو منبع میدان تصور کرتے ہیں جو موصل میں مساوات 10.63 میں دی موج پیدا کرتا ہے۔ موصل میں $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی بنا پر انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} \tag{10.65}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا موصل میں ہر نقطے پر کثافت رو اور برقی میدان راہ تناسب کا تعلق رکھتے ہیں اور یوں موصل میں

$$J_x = \sigma E_0 e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}}\cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \tag{10.66}$$

3256 لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 10.7 میں J_x دکھایا گیا ہے جہاں عین سرحد یعنی $z = 0$ پر کثافت رو کے قیمت σE_0 کو J_0 لکھا گیا ہے۔

مساوات 10.63 اور مساوات 10.66 میں بہت معلومات پائی جاتی ہے۔ پہلے ان مساوات میں $e^{z\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$ جزو پر غور کریں۔ سرحد پر اس کی قیمت $e^0 = 1$ کے برابر ہے جو سرحد سے

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$$

فاصلے پر $e^{-1} = 0.368$ رہ جاتی ہے۔ یہ فاصلہ گہرائی جلد[54] کہلایا اور δ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \tag{10.67}$$

برقی رو کا سطحی تہہ تک محدود رہنے کو اثر جلد[55] کہا جاتا ہے۔ یوں موصل میں

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta} \tag{10.68}$$

ہو گا۔ اسی طرح سرحد سے 2δ فاصلے پر میدان $e^{-2} = 0.135$ اور 4δ فاصلے پر میدان $e^{-4} = 0.018$ یعنی صرف $1.8\,\%$ رہ جائے گا۔

تانبے کی $\sigma = 5.8 \times 10^7 \, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے لہٰذا اس میں گہرائی جلد

$$\delta_{\text{تانبہ}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times f \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}}$$

میٹر کے برابر ہے۔ یوں 50 Hz کا میدان سرحد سے $\frac{0.0661}{\sqrt{50}} = 9.35\,\mathrm{mm}$ فاصلے پر کم ہو کر صرف 0.368 گنا رہ جائے گا۔ برقی ادوار میں مزاحمت میں طاقت کا ضیاع رو کے مربع کے راست تناسب ہوتا ہے لہٰذا ایک گہرائی جلد کے فاصلے پر کثافت طاقت $0.368^2 = 0.135$ گنا کم ہو گی۔ خرد امواج[56] کے تعدد یعنی 10 GHz پر گہرائی جلد 0.661 µm یعنی نظر آنے والے روشنی کے طول کے آٹھویں حصے کے برابر ہے۔

ان تعدد پر کسی بھی موصل مثلاً تانبے میں سرحد سے چند ہی گہرائی جلد کے فاصلے پر تمام میدان تقریباً صفر کے برابر ہوتے ہیں۔ موصل کے سرحد پر پیدا کئے گئے برقی میدان یا کثافت رو، سرحد سے دوری کے ساتھ تیزی سے کم ہوتے ہیں۔ برقی و مقناطیسی طاقت موصل کے اندر نہیں بلکہ اس کے باہر صفر کرتی ہے۔ موصل کا کام صرف اتنا ہے کہ یہ ان امواج کو راستہ دکھاتی ہے۔ موصل کے سرحد پر پیدا کثافت رو، موصل میں موج کے حرکت کے عمودی سمت میں داخل ہوتی ہے جس سے موصل میں مزاحمتی ضیاع پیدا ہوتا ہے۔ یوں موصل بطور راہ گیر کردار ادا کرتے ہوئے مزاحمتی ضیاع بطور اجرت حاصل کرتا ہے۔

اگر آپ کسی بجلی گھر میں 50 Hz کے برقی رو کو منتقل کرنے کی خاطر پانچ سنٹی میٹر رداس کے تانبے کی ٹھوس تار استعمال کر رہے ہوں تو یہ سراسر تانبہ ضائع کرنا ہو گا چونکہ کثافت رو تار کے بیرونی سطح پر ہی پائی جائے گی۔ اندرونی تار، سطح سے دور، کثافت رو قابل نظر انداز ہو گی لہٰذا اس سے بہتر ہو گا کہ زیادہ رداس کی نلکی نما تار استعمال کی جائے جس کی موٹائی تقریباً 1.5δ یعنی 1.4 cm ہو۔ اگرچہ یہ فیصلہ لامحدود جسامت کے سرحد کے نتائج پر بنیاد ہے، حقیقت میں محدود سرحد پر بھی میدان اسی نسبت سے گھٹتے ہیں۔

بلند تعدد پر گہرائی جلد کا فاصلہ اتنا کم ہوتا ہے کہ راہ گیر موصل کی سطحی تہہ ہی اہمیت رکھتی ہے۔ یوں خرد امواج کی منتقلی کے لئے شیشے پر 0.661 µm موٹی چاندی کی تہہ کافی ہے۔

آئیں اب موصل میں طول موج اور رفتار موج کے مساوات حاصل کریں۔ ہم

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

سے شروع کرتے ہوئے مساوات 10.68 استعمال کرتے ہوئے

$$\lambda = 2\pi\delta$$

---

[54] skin depth
[55] skin effect
[56] microwave

لکھ سکتے ہیں۔اسی طرح مساوات 10.25

$$v=\frac{\omega}{\beta}$$

سے

$$v=\omega\delta \tag{10.69}$$

ملتا ہے۔ 3271

تانبے میں 50 Hz پر $\lambda = 5.8\,\text{cm}$ اور $v = 2.94\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ یا $10.6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ حاصل ہوتے ہیں۔ میں تقریباً $6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ کی رفتار سے چلتا ہوں۔ یوں آپ دیکھ سکتے 3272
ہیں کہ تانبے میں برقی و مقناطیسی امواج انتہائی آہستہ چلتے ہیں۔ یاد رہے کہ اسی 50 Hz کے موج کی خالی خلاء میں $\lambda = 6000\,\text{km}$ اور رفتار $3\times10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہو 3273
گی۔ 3274

موصل میں H_y کی مساوات لکھنے کی خاطر موصل کی قدرتی رکاوٹ درکار ہو گی۔ مساوات 10.31

$$\eta=\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma+j\omega\epsilon}}$$

کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\gg 1$ کی وجہ سے

$$\eta=\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

یا

$$\eta=\frac{\sqrt{2}\angle 45^\circ}{\sigma\delta}=\frac{1}{\sigma\delta}+j\frac{1}{\sigma\delta} \tag{10.70}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 10.64 کو گہرائی جلد کی صورت

$$E_x=E_0e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t-\frac{z}{\delta}\right) \tag{10.71}$$

میں لکھتے ہوئے مقناطیسی موج کو

$$H_y=\frac{\sigma\delta E_0}{\sqrt{2}}e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t-\frac{z}{\delta}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{10.72}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی موج، برقی موج سے پھیرے کے آٹھویں حصے پیچھے ہے۔ 3275

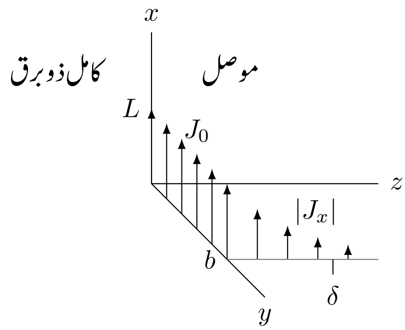
مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے پوئنٹنگ مساوات

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}}=\frac{1}{2}\frac{\sigma\delta E_0^2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{2z}{\delta}}\cos\frac{\pi}{4}$$

یا

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}}=\frac{\sigma\delta E_0^2}{4}e^{-\frac{2z}{\delta}}$$

دیتا ہے۔ آپ دوبارہ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک گہرائی جلد کی گہرائی پر کثافت طاقت، سرحد کے کثافت طاقت کے $e^{-2}=0.135$ گنا رہ گئی ہے۔ 3276



شکل 10.7: موصل میں طاقت کے ضیاع اور گہرائی جلد۔

شکل 10.7 پر دوبارہ نظر ڈالیں۔ مسئلہ پوئنٹنگ کہتا ہے کہ سرحد پر L اور b اطراف کے مستطیل میں جتنی برقی و مقناطیسی طاقت داخل ہوتی ہے، وہ تمام کی تمام موصل میں ضائع ہو جاتی ہے۔ یہ طاقت

$$
\begin{aligned}
P_{L,\text{اوسط}} &= \int_0^b \int_0^L \mathscr{P}_{\text{اوسط}}\big|_{z=0} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^b \int_0^L \left.\frac{\sigma\delta E_0^2}{4} e^{-\frac{2z}{\delta}}\right|_{z=0} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sigma\delta b L E_0^2}{4}
\end{aligned}
$$

کے برابر ہے۔ سرحدی کثافت رو

$$
J_0 = \sigma E_0
$$

کی صورت میں اسے

$$
P_{L,\text{اوسط}} = \frac{1}{4\sigma}\delta b L J_0^2 \tag{10.73}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ 3277

آئیں دیکھیں کہ اگر b چوڑائی میں کل برقی رو کو δ گہرائی تک محدود کر دیا جائے تو مزاحمتی ضیاع کتنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر پہلے اس چوڑائی میں کل رو

$$
I = \int_0^\infty \int_0^b J_x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z
$$

حاصل کرتے ہیں جہاں تکمل آسان بنانے کی غرض سے

$$
J_x = J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)
$$

کو دوری سمتیہ کی شکل

$$
\begin{aligned}
J_{xs} &= J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} \\
&= J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}}
\end{aligned}
$$

میں لکھ کر تکمل حل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\infty} \int_0^{b} J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{J_0 b \delta}{1+j}
\end{aligned}
$$

اس سے

$$
I = \frac{J_0 b \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)
$$

لکھا جائے گا۔ اگر اس رو کو $0 < y < b$ اور $0 < z < \delta$ میں محدود کر دیا جائے تب نئی کثافت رو

$$
J_x' = \frac{J_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)
$$

ہو گی۔ مزاحمتی طاقت کا ضیاع فی اکائی حجم $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}$ کے برابر ہے لہٰذا اس حجم میں کل ضیاع

$$
P_L = \frac{1}{\sigma}\left(J_x'\right)^2 bL\delta = \frac{J_0^2}{2\sigma} bL\delta \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)
$$

ہو گا۔ مربع کو سائن موج کی اوسط قیمت $\frac{1}{2}$ کے برابر ہوتی ہے لہٰذا اوسط طاقت کے ضیاع کو

$$
P_L = \frac{J_0^2 bL\delta}{4\sigma} \tag{10.74}
$$

لکھا جا سکتا ہے جو عین مساوات 10.73 ہے۔ 3278

اس نتیجے کو دیکھ کر اب کسی بھی موصل، جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو، میں کل رو کو ایک جلد گہرائی میں یکساں تقسیم شدہ تصور کرتے ہوئے سلاخ کی مزاحمتی ضیاع 3279
حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں b چوڑائی، L لمبائی اور لا محدود گہرائی سلاخ جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو اور b چوڑائی، L لمبائی اور δ گہرائی سلاخ جس میں یکساں تقسیم شدہ 3280
رو ہو کے مزاحمت بالکل برابر ہوں گے۔ 3281

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے رداس r کے ٹھوس نلکی سلاخ کی مزاحمت بلند تعدد پر حاصل کی جا سکتی ہے۔ اگر گہرائی جلد سلاخ کے رداس سے بہت کم ہو تب اس طرح حاصل کردہ مزاحمت کی قیمت تقریباً بالکل درست ہو گی۔ ایسی تعدد جس پر اثر جلد پایا جاتا ہو کی صورت میں سلاخ کی بیرونی جلد ہی رو گزارے گی لہٰذا مزاحمت کی قیمت حاصل کرتے وقت اس نلکی نما جھلی کو ہی موصل تصور کیا جائے گا لہٰذا مزاحمت R

$$
R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{\sigma 2\pi r \delta} \tag{10.75}
$$

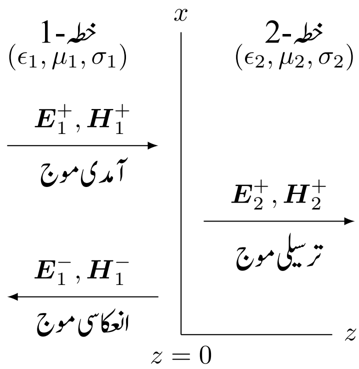
ایک ملی میٹر رداس اور دس میٹر لمبی تانبے کے تار کی یک سمتی مزاحمت

$$
R_{\text{یک سمتی}} = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times \pi \times 0.001^2} = 54.88\,\mathrm{m\Omega}
$$

ہے۔ ایک سو میگا ہرٹز کی تعدد پر تانبے کی $\delta = 6.61\,\mathrm{\mu m}$ ہو گی لہٰذا اس تعدد پر اسی تار کی مزاحمت

$$
R = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times 2 \times \pi \times 0.001 \times 6.61 \times 10^{-6}} = 4.15\,\Omega
$$

ہو گی۔ 3282



شکل 10.8: آمدی موج سرحد سے گزرتی ترسیلی اور اس سے لوٹتی انعکاسی امواج پیدا کرتی ہے۔

مشق 10.6: ٹھوس نلکی نما لوہے کی تار جس کا رداس 5 mm اور جس کی لمبائی 2.5 m ہے میں $2\cos 10000t$ ایمپیئر کی برقی رو گزر رہی ہے۔ کتاب کے آخر میں ضمیمے سے $\sigma = 1.03 \times 10^7 \, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ اور $\mu_R = 4000$ دئے گئے ہیں۔ یاد رہے کہ موصل کا $\epsilon_R = 1$ ہوتا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- یک سمتی رو مزاحمت،
- گہرائی جلد،
- بدلتی رو مزاحمت یا موثر مزاحمت،
- مزاحمتی طاقت کا ضیاع۔

جوابات: $3.09\,\mathrm{m\Omega}$، $62\,\mu\mathrm{m}$، $1.25\,\Omega$ اور $2.49\,\mathrm{W}$

10.6 انعکاس مستوی موج

لامحدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج ہم دیکھ چکے۔ ایسے حجم میں کبھی بھی موج دو مختلف اقسام کے اشیاء کے درمیان پائی جانے والی سرحد نہیں چھوتی۔ آئیں محدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج پر غور کریں جہاں امواج کو ایک قسم کے مادے سے دوسرے قسم کے مادے میں داخل ہونا ہو گا۔ آپ دیکھیں گے کہ ایسی صورت میں موج کا کچھ حصہ پہلے خطے سے دوسرے خطے میں داخل ہو پاتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ سرحد سے ٹکرا کر واپس پہلے خطے میں لوٹ جاتا ہے۔ اس حصے میں ہم سرحد سے گزرتے اور اس سے ٹکرا کر واپس لوٹتے حصوں کے مساوات حاصل کریں گے۔ یہ نتائج ترسیلی تاروں[57] اور رہبر موج[58] کے مسائل میں جوں کے توں قابل استعمال ہوں گے۔

---

[57] transmission lines
[58] waveguide

ہم $z<0$ کو خطہ-1 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_1,\mu_1,\sigma_1)$ ہیں جبکہ $z>0$ کو خطہ-2 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_2,\mu_2,\sigma_2)$ ہیں۔ یہ صورت حال شکل 10.8 میں دکھائی گئی ہے۔ ہم بڑھتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشت $+$ جبکہ گھٹتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشت $-$ سے ظاہر کریں گے۔ اب تصور کریں کہ پہلے خطے میں سرحد کی جانب برقی موج

$$E_{xs1}^{+}=E_{x10}^{+}e^{-\gamma_1 z} \tag{10.76}$$

آتی ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ اس برقی موج کے ساتھ لازماً مقناطیسی موج

$$H_{ys1}^{+}=\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1}e^{-\gamma_1 z} \tag{10.77}$$

بھی ہو گی۔ سرحد کی طرف آتے موج کو آمدی موج[59] کہا جاتا ہے۔ چونکہ یہ موج سرحد کے عمودی حرکت کر رہا ہے لہٰذا اس کے حرکت کو عمودی آمد[60] کہتے ہیں۔

اس آمدی موج کا کچھ حصہ جسے ترسیلی موج[61] کہتے ہیں، سرحد سے گزرتے ہوئے سیدھا چلے جائے گا۔ ترسیلی امواج

$$E_{xs2}^{+}=E_{x20}^{+}e^{-\gamma_2 z} \tag{10.78}$$

$$H_{ys2}^{+}=\frac{E_{x20}^{+}}{\eta_2}e^{-\gamma_2 z} \tag{10.79}$$

ہیں۔ سرحد کے دوسرے جانب حرکی مستقل γ_2 اور قدرتی رکاوٹ η_2 ہیں جو پہلے خطے سے مختلف ہیں۔ ترسیلی امواج سرحد سے دور چلتی جاتی ہیں۔ 3299

آمدی اور ترسیلی برقی امواج x محدد کے متوازی جبکہ مقناطیسی امواج y محدد کے متوازی ہیں لہٰذا یہ چاروں امواج سرحد کے بھی متوازی ہیں۔ صفحہ 298 پر مساوات 9.45 اور اس کے قریب ہی مساوات 9.47 متوازی امواج کے سرحدی شرائط بیان کرتے ہیں۔ اب کائنات میں کبھی بھی دو اشیاء کے سرحد پر سطحی کثافت رو نہیں پائی جاتی۔ یوں $K_\perp=0$ لیتے ہوئے ان شرائط کو

$$\begin{aligned}E_{m1}&=E_{m2}\\H_{m1}&=H_{m2}\qquad(K_\perp=0)\end{aligned}$$

لکھا جاتا ہے۔ 3300

اب اگر پہلی شرط پوری کی جائے تو سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی برقی میدان برابر ہوں گے لہٰذا $z=0$ پر مساوات 10.76 اور مساوات 10.78 برابر ہوں گے۔ یوں $E_{x10}^{+}=E_{x20}^{+}$ حاصل ہوتا ہے لیکن دوسری شرط کے مطابق سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان بھی برابر ہونا ہو گا لہٰذا $z=0$ پر مساوات 10.77 اور مساوات 10.79 بھی برابر ہوں گے جس سے $\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1}=\frac{E_{x20}^{+}}{\eta_2}$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ دونوں تب ممکن ہے جب $\eta_1=\eta_2$ ہو جو حقیقت میں کبھی بھی نہیں ہو گا لہٰذا صرف آمدی اور ترسیلی امواج کی صورت میں سرحدی شرائط پر پورا نہیں اترا جا سکتا۔ مندرجہ بالا دونوں سرحدی شرائط صرف اس صورت میں پورا ہوتے ہیں جب سرحد سے ٹکرا کر واپس لوٹتے امواج

$$E_{xs1}^{-}=E_{x10}^{-}e^{\gamma_1 z} \tag{10.80}$$

$$H_{ys1}^{-}=-\frac{E_{x10}^{-}}{\eta_1}e^{\gamma_1 z} \tag{10.81}$$

بھی پائے جائیں جنہیں انعکاسی امواج[62] کہا جاتا ہے۔ انعکاسی موج کا حرکی مستقل γ_1 ہی ہے جبکہ یہ موج گھٹتے z جانب حرکت کر رہی ہے۔ انعکاسی موج میں E_{x10}^{-} 3301 مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔ چونکہ انعکاسی امواج گھٹتے z جانب حرکت کرتی ہیں لہٰذا مسئلہ پوئنٹنگ کے تحت $E_{xs1}^{-}=-\eta_1 H_{ys1}^{-}$ ہو گا تا کہ $\boldsymbol{E}_1^{-}\times\boldsymbol{H}_1^{-}$ کی سمت 3302 $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$ ہو۔ 3303

---

[59] incident wave
[60] normal incidence
[61] transmitted wave
[62] reflected wave

آمدی، ترسیلی اور انعکاسی امواج کی صورت میں دونوں سرحدی شرائط پورے ہوتے ہیں اور ان کی مدد سے E_{x10}^{+} کی صورت میں بقایا تمام امواج کے طول بھی حاصل ہوتے ہیں۔ آئیں دیکھیں کہ ایسا کس طرح ہوتا ہے۔

اب پہلے خطے میں آمدی امواج کے علاوہ انعکاسی امواج بھی پائے جاتے ہیں لہٰذا سرحدی شرائط میں دونوں کا مجموعہ استعمال کیا جائے گا۔ یوں $z=0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی برقی میدان برابر ہونے سے

$$E_{xs1} = E_{xs2} \qquad (z=0)$$

یعنی

$$E_{xs1}^{+} + E_{xs1}^{-} = E_{xs2}^{+} \qquad (z=0)$$

یا

$$E_{x10}^{+} + E_{x10}^{-} = E_{x20}^{+} \tag{10.82}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $z=0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان کے برابری سے

$$H_{ys1} = H_{ys2} \qquad (z=0, K_{\perp}=0)$$

یعنی

$$H_{ys1}^{+} + H_{ys1}^{-} = H_{ys2}^{+} \qquad (z=0, K_{\perp}=0)$$

یا

$$\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^{-}}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^{+}}{\eta_2} \tag{10.83}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 10.82 اور مساوات 10.83 کو E_{x10}^{-} کی خاطر حل کرنے کی غرض سے مساوات 10.82 کو مساوات میں پر کرتے

$$\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^{-}}{\eta_1} = \frac{E_{x10}^{+} + E_{x10}^{-}}{\eta_2}$$

ہوئے یوں

$$E_{x10}^{-} = E_{x10}^{+} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ انعکاسی اور آمدی برقی میدان کے حیطوں کی شرح کو شرح انعکاس[63] پکارا اور Γ سے ظاہر[64] کیا جاتا ہے۔

$$\Gamma = \frac{E_{x10}^{-}}{E_{x10}^{+}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \tag{10.84}$$

مخلوط شرح انعکاس کی صورت میں انعکاسی اور آمدی میدان میں زاویائی فرق پایا جائے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شرح انعکاس کی حتمی قیمت صفر تا ایک ممکن ہے۔

$$|\Gamma| \leq 1 \tag{10.85}$$

اسی طرح مساوات 10.82 اور مساوات 10.83 سے E_{x10}^{-} ختم کرنے سے

$$\tau = \frac{E_{x20}^{+}}{E_{x10}^{+}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \tag{10.86}$$

[63] reflection coefficient
[64] Γ یونانی حروف تہجی گیما ہے۔

حاصل ہوتا ہے جو شرح ترسیل[65] کہلایا اور τ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مساوات 10.84 اور مساوات 10.86 سے

$$\tau = 1 + \Gamma \tag{10.87}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں ان نتائج کو چند مخصوص صورتوں میں استعمال کرتے ہیں۔ تصور کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق جبکہ دوسرا خطہ کامل موصل ہے۔ ایسی صورت میں σ_2 لامحدود ہو گا لہٰذا

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = 0$$

ہو گا۔ یوں مساوات 10.86 سے

$$E_{x20}^{+} = 0$$

حاصل ہوتا ہے یعنی کامل موصل میں کسی صورت بھی وقت کے ساتھ بدلتا میدان نہیں پایا جا سکتا۔ اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ کامل موصل کی گہرائی جلد صفر کے برابر ہے۔

مساوات 10.84 میں $\eta_2 = 0$ پر کرنے سے

$$\Gamma = -1$$

یعنی

$$E_{x10}^{-} = -E_{x10}^{+}$$

حاصل ہوتا ہے۔ انعکاسی موج کا حیطہ بالکل آمدی موج کے حیطے کے برابر ہے لیکن ان میں $180°$ کا زاویہ پایا جاتا ہے۔ موصل سطح آمدی توانائی کو واپس کرتی ہے اور یوں پہلے خطے میں کل برقی میدان

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^{+} + E_{xs1}^{-} \\ &= E_{x10}^{+} e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^{+} e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہو گا جہاں کامل ذو برق میں $\gamma_1 = 0 + j\beta_1$ لیا گیا ہے۔ اس کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^{+} \left(e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z} \right) \\ &= -j2E_{x10}^{+} \sin \beta_1 z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جو دوری سمتیہ کی صورت میں ہے جسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر حقیقی جزو لیتے ہوئے اصل موج کی مساوات

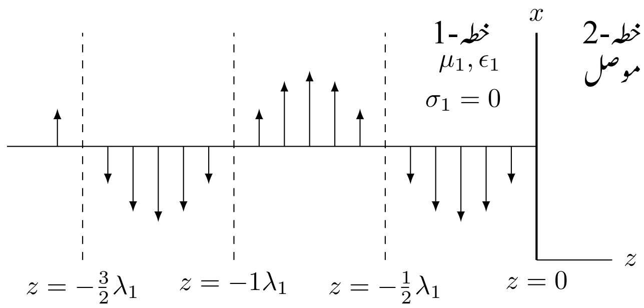
$$E_{x1} = 2E_{x10}^{+} \sin \beta_1 z \sin \omega t \tag{10.88}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مساوات ساکن میدان کو ظاہر کرتی ہے۔ یاد رہے کہ اسے دو آپس میں الٹ سمت میں حرکت کرتے امواج سے حاصل کیا گیا ہے۔ اس کا موازنہ آمدی موج

$$E_{x1}^{+} = E_{x10}^{+} \cos(\omega t - \beta_1 z)$$

سے کریں۔ حرکت کرتے موج کی پہچان جزو $\omega t - \beta_1 z$ ہے جو مثبت سمت میں موج کو ظاہر کرتی ہے۔ مساوات 10.88 میں ωt اور $\beta_1 z$ علیحدہ علیحدہ پائے جاتے ہیں۔

[65] transmission coefficient



شکل 10.9: ساکن موج، برقی میدان۔

مساوات 10.88 میں جس لمحہ $\omega t = n\pi$ کے برابر ہو اس لمحہ میدان ہر نقطے پر صفر کے برابر ہو گا۔ اس کے علاوہ جس نقطے پر $\beta_1 z = n\pi$ کے برابر ہو، اس نقطے پر ہر وقت میدان صفر ہی رہتا ہے۔ مساوات 10.88 کو ساکن موج[66] کہا جاتا ہے۔ برقی میدان ان سطحوں پر ہر وقت صفر رہتا ہے جہاں

$$\beta_1 z = n\pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots)$$

ہو جس سے

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = n\pi$$

یعنی

$$z = n\frac{\lambda_1}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں سرحد یعنی $z = 0$ پر برقی میدان صفر ہو گا اور پہلے خطے میں سرحد سے دور چلتے ہوئے ہر آدھے طول موج پر صفر برقی میدان پایا جائے گا۔ یہ صورت حال شکل 10.9 میں دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں نقطہ دار لکیر ان سطحوں کو ظاہر کرتی ہیں جہاں میدان صفر رہتا ہے۔ برقی میدان کو وقت $t = \frac{\pi}{2}$ پر دکھایا گیا ہے جب اس کا حیطہ زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے۔ 3313

چونکہ $E_{xs1}^{+} = \eta_1 H_{ys1}^{+}$ اور $E_{xs1}^{-} = -\eta_1 H_{ys1}^{-}$ ہوتے ہیں لہٰذا مقناطیسی میدان

$$H_{ys1} = \frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1}\left(e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z}\right)$$

یا

$$H_{y1} = 2\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1}\cos\beta_1 z\cos\omega t \tag{10.89}$$

ہو گا۔ یہ بھی ساکن موج ہے لیکن جس سطح پر برقی میدان صفر رہتا ہے وہاں مقناطیسی ساکن موج کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ اس کے علاوہ برقی اور مقناطیسی ساکن امواج 3314
میں $90°$ کا وقتی فرق پایا جاتا ہے لہٰذا یہ امواج کسی بھی سمت میں اوسطاً صفر طاقت منتقل کرتی ہیں۔ 3315

آئیں اب دو کامل ذو برق کی سرحد پر صورت حال دیکھیں۔ اب ان دو خطوں میں قدرتی رکاوٹ η_1 اور η_2 جبکہ $\alpha_1 = 0$ اور $\alpha_2 = 0$ ہوں گے۔ عددی قیمتیں لے کر آگے چلتے ہیں۔ فرض کریں کہ

$$\eta_1 = 50\,\Omega$$
$$\eta_2 = 377\,\Omega$$
$$E_{x10}^{+} = 10\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

---

[66] standing wave

ہیں۔یوں

$$\Gamma = \frac{377-50}{377+50} = 0.7658$$

ہے لہٰذا

$$E_{x10}^{-} = 0.7658 \times 10 = 7.658\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

ہو گا۔پہلے خطے میں مقناطیسی میدان

$$\begin{aligned} H_{y10}^{+} &= \frac{10}{50} = 0.2\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \\ H_{y10}^{-} &= -\frac{7.658}{50} = -0.153\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

ہیں۔آمدی اوسط سطحی کثافت طاقت مساوات 10.55 سے

$$P_{1,\text{اوسط}}^{+} = \frac{1}{2}\frac{\left(E_{x10}^{+}\right)^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha_1 z}\cos\theta_{\eta 1} = 1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

جبکہ انعکاسی اوسط سطحی کثافت طاقت

$$P_{1,\text{اوسط}}^{-} = \frac{1}{2}\frac{\left(E_{x10}^{-}\right)^2}{|\eta_1|} e^{-2\alpha_1 z}\cos\theta_{\eta 1} = 0.5864\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

ہے۔ان مساوات میں $\alpha_1 = 0$ اور $\eta_1 = 50\underline{/0}$ استعمال کئے گئے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور آمدی کثافت طاقت کی شرح

$$\frac{\frac{\left(E_{x10}^{-}\right)^2}{2\eta_0}}{\frac{\left(E_{x10}^{+}\right)^2}{2\eta_0}} = |\Gamma|^2 \tag{10.90}$$

3316 کے برابر ہے۔

دوسرے خطے میں

$$\begin{aligned} E_{x20}^{+} &= \frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}E_{x10}^{+} = 17.658\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \\ H_{y20}^{+} &= \frac{17.658}{377} = 0.046\,84\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

ہیں لہٰذا

$$P_{2,\text{اوسط}}^{+} = \frac{1}{2}\frac{\left(E_{x20}^{+}\right)^2}{|\eta_2|} e^{-2\alpha_2 z}\cos\theta_{\eta 2} = 0.4135\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور ترسیلی طاقت کا مجموعہ آمدی طاقت کے عین برابر ہے۔

$$P_{1,\text{اوسط}}^{+} = P_{1,\text{اوسط}}^{-} + P_{2,\text{اوسط}}^{+}$$

3317

مثال 10.6: ہوا سے سمندری پانی $(\epsilon_R = 78, \mu_R = 1, \sigma = 5)$ کی سطح پر 50 MHz تعدد کی بائیں دائری برقی موج عمودی آمد ہے۔ حرکی 3318
مستقل، انعکاسی مستقل اور ترسیلی مستقل حاصل کریں۔ 3319

حل: ہوا کی قدرت رکاوٹ $\eta_1 = 377\,\Omega$ ہے۔ سمندری پانی کی قدرتی رکاوٹ

$$
\begin{aligned}
\eta_2 &= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5 + j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 78 \times 8.85 \times 10^{-12}}} \\
&= 6.41 + j6.14 \quad \Omega
\end{aligned}
$$

اور حرکی مستقل

$$
\begin{aligned}
\gamma_2 &= \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \\
&= \sqrt{j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}(5 + j2\pi \times 50 \times 10^6 \times 78 \times 8.85 \times 10^{-12})} \\
&= 30.7 + j32.1 \quad \mathrm{m}^{-1}
\end{aligned}
$$

ہیں۔ سمندری پانی میں $\sigma \gg \omega\epsilon$ ہے لہٰذا سمندری پانی کو موصل تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسا کرنے سے حرکی مستقل

$$
\gamma_2 = \sqrt{\pi f \mu \sigma}(1 + j) = 31.4 + j31.4
$$

حاصل ہوتا ہے جو مکمل درست جواب $(30.7 + j32.1)$ کے انتہائی قریب جواب ہے۔ 3320

شرح انعکاس

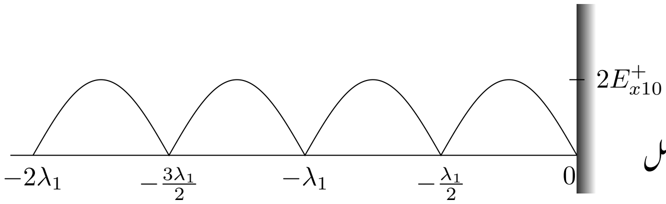
$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{6.41 + j6.14 - 377}{6.41 + j6.14 + 377} \\
&= -0.966 + j0.031 \\
&= 0.9665\underline{/178^\circ}
\end{aligned}
$$

اور شرح ترسیل

$$
\begin{aligned}
\tau = 1 + \Gamma &= 0.034 + j0.031 \\
&= 0.046\underline{/53^\circ}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔ 3321

3322



شکل 10.10: کامل موصل سے انعکاس، کامل ذو برق میں ساکن موج پیدا کرتا ہے۔

10.7 شرح ساکن موج

کسی بھی ترسیلی نظام میں مختلف مقامات پر برقی یا مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارہ باآسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ محوری تار کا اندرونی تار ذرہ زیادہ لمبا رکھتے ہوئے برقی میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح تار کا ایک چھوٹا دائرہ مقناطیسی میدان کا نمونہ حاصل کرنے میں کام آتا ہے۔ ان آلات سے حاصل اشارات کو سمت کار[67] سے گزارتے ہوئے مائیکرو میٹر سے ناپا جا سکتا ہے۔ مائیکرو میٹر میدان کے حیطے کے راست تناسب جواب دیتا ہے۔ ان آلات کو عموماً در کار اشارات کے ہمسر[68] رکھا جاتا ہے تاکہ یہ زیادہ حساس ہوں۔

اگر بغیر ضیاع خطے میں یکساں مستوی موج حرکت کر رہی ہو اور اس خطے میں انعکاسی موج نہ پائی جاتی ہو تب میدان ناپنے والا آلہ تمام مقامات پر یکساں حیطہ دکھائے گا۔ ایسا آلہ تیزی سے تبدیل ہوتے حیطے کو دکھانے سے قاصر ہوتا ہے۔ ہر جگہ برابر حیطہ اس بات کی نشانی ہے کہ خطے میں طاقت ضائع نہیں ہوتا اور یہ کہ انعکاسی موج بھی غیر موجود ہے۔

اس کے برعکس کامل ذو برق میں آمدی موج کا کامل موصل سے انعکاس، ساکن موج پیدا کرتا ہے۔ ایسے خطے میں میدان ناپتا آلہ مختلف مقامات پر مختلف حیطے ناپے گا۔ چونکہ سرحد سے ہر آدھے طول موج کے فاصلے پر میدان صفر رہتا ہے لہٰذا ان نقطوں پر آلہ صفر حیطہ ناپے گا جبکہ عین ایسے دو قریبی نقطوں کے درمیان آلہ زیادہ سے زیادہ حیطہ دکھائے گا۔ آلے کو سرحد کے قریب اور دور کرنے سے ناپے گئے حیطے کی شکل $|\sin\beta z|$ کی طرح حاصل ہو گی جہاں سرحد سے فاصلہ z ہے۔ اسے شکل 10.10 میں دکھایا گیا ہے۔ سائن نما حیطے کا تبدیل ہونا ساکن موج کی پہچان ہے۔

مثال 10.7: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں کامل ذو برق میں ساکن موج کی مساوات حاصل کریں۔

حل: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں $\Gamma = -1$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا $E_{xs1}^{-} = -E_{x10}^{+}e^{j\beta_1 z}$ ہو گا۔ یوں آمدی اور انعکاسی امواج کا مجموعہ

$$\begin{aligned}E_{xs1} &= E_{x10}^{+}e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^{+}e^{j\beta_1 z}\\ &= -2jE_{x10}^{+}\sin\beta_1 z\end{aligned}$$

ہو گا۔ اس دوری سمتیہ سے حقیقی ساکن موج کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$E_{xs1}e^{j\omega t} = -2jE_{x10}^{+}\sin\beta_1 z\cos\omega t + 2E_{x10}^{+}\sin\beta_1 z\sin\omega t$$

حقیقی جزو

$$E_{x1} = 2E_{x10}^{+}\sin\beta_1 z\sin\omega t$$

---

[67] rectifier
[68] tuned

لیتے ہیں۔یہی ساکن موج کی مساوات ہے۔شکل 10.10 میں آلہ ناپ سے حاصل $|E_{x1}|$ دکھایا گیا ہے۔

اب ایسی صورت پر غور کرتے ہیں جہاں تمام کی تمام موج سرحد سے واپس نہیں لوٹتی بلکہ اس کا کچھ حصہ سرحد پار کرتے ہوئے دوسری جانب چلے جاتی ہے۔پہلے خطے میں اب آمدی موج کے علاوہ ایسی انعکاسی موج پائی جاتی ہے جس کا حیطہ آمدی موج سے کم ہوتا ہے۔اگرچہ اب پہلے خطے میں ساکن موج کے ساتھ ساتھ حرکت کرتی موج بھی پائی جاتی ہے لیکن اس کے باوجود اس کو ساکن موج ہی پکارا جاتا ہے۔اب کسی بھی نقطے پر میدان ہر وقت صفر نہیں رہتا۔ساکن اور حرکت کرتے حصوں کا اندازہ حیطے کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور اس کے کم سے کم قیمت کی شرح سے بیان کی جاتی ہے۔اس شرح کو **شرح ساکن موج**[69] کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے جبکہ دوسرا خطہ کوئی بھی مادہ ہو سکتا ہے۔یوں $\alpha_1 = 0$ ہو گا۔اب

$$
\begin{aligned}
E_{xs1}^{+} &= E_{x10}^{+} e^{-j\beta_1 z} \\
E_{xs1}^{-} &= \Gamma E_{x10}^{+} e^{j\beta_1 z}
\end{aligned}
$$

ہوں گے جہاں

$$
\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}
$$

ہے۔چونکہ کامل ذو برق میں $\sigma = 0$ ہوتا ہے لہٰذا η_1 مثبت حقیقی عدد ہے جبکہ η_2 مخلوط عدد ہو سکتا ہے لہٰذا Γ بھی مخلوط ہو سکتا ہے۔یوں اسے

$$
\Gamma = |\Gamma| \, e^{j\phi}
$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$
E_{xs1}^{-} = |\Gamma| \, E_{x10}^{+} e^{j(\beta_1 z + \phi)}
$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ساکن موج کی مساوات

$$
E_{xs1} = \left(e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| \, e^{j(\beta_1 z + \phi)} \right) E_{x10}^{+} \tag{10.91}
$$

حاصل ہوتی ہے۔

اب آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط عدد $e^{j\theta}$ کو

$$
e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta
$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ہوتا ہے لہٰذا اس کی حتمی قیمت ایک (1) ہی رہتی ہے۔اس عدد کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\theta = 0$ کی صورت میں $+1$ حاصل ہوتی ہے۔یہی قیمت $\theta = \mp 2\pi$ یا $\theta = \mp 4\pi$ کی صورت میں بھی حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح اس کی کم سے کم قیمت $\theta = \mp\pi, \mp 3\pi, \mp 5\pi \cdots$ پر -1 حاصل ہوتی ہے۔اس طرح مساوات 10.91 کو

$$
E_{xs1} = \left(1 + |\Gamma| \, e^{j(2\beta_1 z + \phi)} \right) e^{-j\beta_1 z} E_{x10}^{+}
$$

لکھتے ہوئے اگر $2\beta_1 z + \phi$ کو θ تصور کیا جائے تو $e^{j(2\beta_1 z + \phi)}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت یعنی $+1$

$$
2\beta_1 z + \phi = 0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \cdots
$$

---

[69] standing wave ratio

پر حاصل ہو گی۔اس مساوات کو

$$-\beta_1 z_{\text{بلند تر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots) \tag{10.92}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ایسی صورت میں

$$|E_{xs1}|_{\text{بلند تر}} = (1 + |\Gamma|)\, E^{+}_{x10} \tag{10.93}$$

ہو گا۔

$\eta_2 \gg \eta_1$ کی صورت میں $\Gamma = 1\underline{/0^\circ}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں سرحد پر ساکن موج کی چوٹی پائی جائے گی۔اگلی چوٹی سرحد سے $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہو گی۔ η_2 اور η_1 کے کسی بھی اور قیمت کی صورت میں سرحد اور پہلی چوٹی کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ سے کم ہو گا۔

اسی طرح $e^{j(2\beta_1 z+\phi)}$ کی کم سے کم قیمت یعنی -1

$$2\beta_1 z + \phi = \pi, -\pi, 3\pi, -3\pi, \cdots$$

پر حاصل ہو گی۔اس مساوات کو

$$-\beta_1 z_{\text{کمتر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots) \tag{10.94}$$

لکھا جا سکتا ہے اور ایسی صورت میں

$$|E_{xs1}|_{\text{کمتر}} = (1 - |\Gamma|)\, E^{+}_{x10} \tag{10.95}$$

ہو گا۔

$\eta_2 \ll \eta_1$ کی صورت میں سرحد پر ساکن موج کی کمتر قیمت پائی جائے گی۔اگلی کمتر قیمت سرحد سے $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہو گی۔ η_2 اور η_1 کے کسی بھی اور قیمت کی صورت میں سرحد اور پہلی کمتر نقطے کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ سے کم ہو گا۔

مساوات 10.92 سے $z_{\text{بلند تر}}$ اور مساوات 10.94 سے $z_{\text{کمتر}}$ حاصل کرتے ہوئے دھیان رہے کہ صرف ان قیمتوں کو درست تصور کیا جائے جو شکل 10.11 میں ٹھیک طرف پائے جاتے ہوں یعنی $z_{\text{بلند تر}}$ اور $z_{\text{کمتر}}$ کی قیمت منفی ہونی چاہیے۔

موج کی کم تر قیمت ہر آدھے طول موج پر پائی جاتی ہے۔موج کی بلند تر قیمت دو کم تر قیمتوں کے مقام کے عین وسط میں پائی جاتی ہیں۔کامل موصل کی صورت میں پہلا کمتر میدان $-\beta_1 z = 0$ یعنی سرحد پر پایا جائے گا۔اگر $\eta_2 < \eta_1$ ہو اور دونوں قدرتی رکاوٹوں کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں تب $\phi = \pi$ ہو گا اور ایسی صورت میں سرحد یعنی $-\beta_1 z = 0$ پر برقی دباو کی کمتر قیمتیں پائی جائے گی۔اس کے برعکس اگر $\eta_2 > \eta_1$ ہو اور دونوں رکاوٹ حقیقی ہوں تب سرحد پر برقی میدان کی قیمت بلند تر ہو گی۔

ان معلومات کو زیر استعمال لانے کی غرض سے $10\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور $1\,\text{GHz}$ تعدد کے موج پر غور کرتے ہیں جو خطہ اول میں سرحد کی طرف عمودی آمد ہے۔پہلے خطے کے مستقل $\epsilon_{R1} = 3$، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ جبکہ دوسرے خطے کے مستقل $\epsilon_{R1} = 6$، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں۔

یوں

$$\omega = 2\pi 10^9\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \beta_1 = 36.28\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}, \quad \beta_2 = 51.3\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ اگرچہ خالی خلاء میں اس موج کی طول 30 cm ہو گی، یہاں $\lambda_1 = 17.32\,\text{cm}$ اور $\lambda_2 = 12.25\,\text{cm}$ ہیں۔ قدرتی رکاوٹ $\eta_1 = 217.66\,\Omega$ اور $\eta_2 = 153.91\,\Omega$ ہیں جن سے شرح انعکاس $\Gamma = -0.17$ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ دونوں رکاوٹ حقیقی اعداد ہیں اور $\eta_2 < \eta_1$ ہے لہٰذا سرحد پر کمتر برقی میدان پایا جائے گا۔ پہلے خطے، یعنی $z < 0$، میں سرحد سے دور ہر $8.66\,\text{cm}$ فاصلے پر برقی میدان کی کمتر قیمت پائی جائے گی۔ مساوات 10.95 سے ساکن موج کی کمتر قیمت $|Exs1|_{\text{کمتر}} = 8.3\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے لہٰذا اس میں طاقت کا ضیاع نہیں ہوتا اور یوں اس خطے میں تمام کمتر قیمتیں برابر ہوں گی۔

میدان کی بلند تر قیمت $11.7\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ پہلے خطے میں سرحد سے 4.33 ، 12.99 ، 21.65 ، $\cdots$ سنٹی میٹر کے فاصلوں پر پائی جائیں گی۔

چونکہ دوسرے خطے میں انعکاسی موج نہیں پائی جاتی لہٰذا اس میں ساکن موج بھی نہیں پائی جائے گی۔

ساکن موج کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کی شرح کو شرح ساکن موج[70] کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$s = \frac{|E_{xs1}|_{\text{بلند تر}}}{|E_{xs1}|_{\text{کمتر}}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \tag{10.96}$$

چونکہ $|\Gamma| \le 1$ رہتا ہے لہٰذا شرح ساکن موج ہر صورت مثبت اور اکائی کے برابر یا اس سے زیادہ قیمت کا ہو گا یعنی

$$s \ge 1 \tag{10.97}$$

مندرجہ بالا مثال میں $s = \frac{1+0.17}{1-0.17} = 1.409$ ہے۔

اگر $|\Gamma| = 1$ ہو تب انعکاسی اور آمدی امواج برابر ہوں گے لہٰذا تمام کی تمام آمدی توانائی سرحد سے واپس لوٹتی ہے اور ایسی صورت میں s لا محدود ہو گا۔ پہلے خطے میں ہر $\frac{\lambda_1}{2}$ فاصلے پر ایسی سطح پائی جائے گی جس پر برقی میدان ہر وقت صفر رہتا ہے۔ ان سطحوں کے درمیان ایسی سطحیں ہوں گی جہاں آمدی موج کے دگنے حیطے کا برقی میدان ہو گا۔

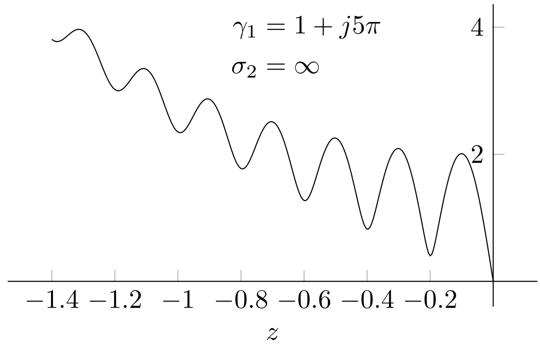
اگر $\eta_1 = \eta_2$ ہو تب $\Gamma = 0$ ہو گا۔ ایسی صورت میں توانائی سرحد سے واپس نہیں لوٹتی، $s = 1$ ہوتا ہے اور برقی میدان کی بلند تر اور کم تر قیمتیں برابر ہوتی ہیں۔

آدھی طاقت کے انعکاس کی صورت میں $|\Gamma|^2 = 0.5$ یعنی $|\Gamma| = 0.707$ اور $s = 5.83$ ہو گا۔

چونکہ برقی اور مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارات با آسانی حاصل کئے جا سکتے ہیں اور s کی قیمت حاصل کرنے کے لئے راست تناسب اشارات ہی درکار ہیں لہٰذا شرح ساکن موج کو تجرباتی طور حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہی اس کی اہمیت کا راز ہے۔ یاد رہے کہ s حاصل کرنے کے لئے میدان کی اصل قیمت درکار نہیں ہوتی۔ صرف اتنا ضروری ہوتا ہے کہ تمام اشارات اصل میدان کے تناسب سے ہوں۔

آئیں اب پہلے خطے کو غیر کامل ذو برق تصور کریں جس کا α صفر کے برابر نہیں ہو گا۔ اب بائیں سے آتی آمدی موج مثبت z جانب چلتے ہوئے گھٹے گی۔ انعکاسی موج منفی z جانب چلتے ہوئے گھٹتے جائے گی حتٰی کہ آخر کار اس کی قیمت قابل نظر انداز ہو گی۔ یوں اگرچہ سرحد کے قریب بلند تر اور کم تر میدان میں فرق واضح ہو سکتا ہے لیکن سرحد سے دور ان میں فرق نہیں رہ پاتا۔ پہلے خطے کا حرکی مستقل $\gamma_1 = 1 + j5\pi$ اور دوسرا خطہ کامل موصل ہونے کی صورت میں ایسی ہی ایک ساکن موج شکل 10.11 میں دکھائی گئی ہے جہاں موصل $z = 0$ کے دائیں ہاتھ پر ہے۔ اس شکل میں عین سرحد پر آمدی موج کی قیمت $E^+_{x10} = 1\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ چونکہ ذو برق کا سرحد موصل کے ساتھ ہے اور موصل میں برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا شکل میں سرحد پر برقی میدان صفر ہی ہے۔ سرحد سے $\frac{2\pi}{\beta_1} = 0.2\,\text{m}$ فاصلے پر دوبارہ کم تر میدان پایا جاتا ہے۔ اسی طرح پہلی چوٹی سرحد پر آمدی میدان کے تقریباً دگنی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو چوٹیاں یا دو نشیب برابر نہیں ہیں۔ یہاں

[70] standing wave ration



شکل 10.11: غیر کامل ذو برق میں ساکن موج کی بلند تر اور کم تر قیمتوں میں فرق سرحد سے دور کم ہوتا ہے۔

شرح ساکن موج کی قیمت اس صورت مطلب رکھتی ہے جب اسے ناپنے کا مقام یعنی z بھی ساتھ بتلایا جائے۔ ایسی صورت میں انعکاسی شرح اور تضعیفی مستقل زیادہ کار آمد معلومات ہیں۔

اگرچہ مندرجہ بالا مثال زیادہ انتہا درجے کا تھا لیکن یہ بھی نہیں بھولنا چاہئے کہ حقیقت میں کامل ترسیلی تار بھی نہیں پائے جاتے۔ حقیقت میں شرح ساکن موج ہر صورت سرحد سے فاصلے پر منحصر ہو گی اور اس کا استعمال اسی وقت ممکن ہو گا جب ہماری دلچسپی کے خطے میں اس کی قیمت زیادہ تبدیل نہ ہو۔

آئیں دوبارہ پہلا خطہ کامل ذو برق لیتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح حاصل کریں۔ لامحدود حجم میں آزاد موج کی صورت میں یہ شرح η_1 تھی۔ انعکاسی موج کی موجودگی میں برقی اور مقناطیسی میدان صفر بھی ممکن ہیں لہٰذا ان کی شرح صفر سے لامحدود قیمت کی ہو سکتی ہے۔ سرحد سے $z=-l$ فاصلے پر میدان

$$E_{xs1} = \left(e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}\right) E_{x10}^{+}$$
$$H_{ys1} = \left(e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}\right) \frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1}$$

ہیں۔ ان کی شرح کو داخلی قدرتی رکاوٹ[71] کہتے اور $\eta_{\text{داخلی}}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\eta_{\text{داخلی}} = \left.\frac{E_{xs1}}{H_{ys1}}\right|_{z=-l} = \eta_1 \frac{e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}}{e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}}$$

اس میں $\Gamma = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$ پر کرتے ہوئے اور یولر مماثل[72] استعمال کرتے ہوئے

$$\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1 \frac{(\eta_2+\eta_1)(\cos\beta_1 l + j\sin\beta_1 l) + (\eta_2-\eta_1)(\cos\beta_1 l - j\sin\beta_1 l)}{(\eta_2+\eta_1)(\cos\beta_1 l + j\sin\beta_1 l) - (\eta_2-\eta_1)(\cos\beta_1 l - j\sin\beta_1 l)}$$

حاصل ہوتا ہے جسے باآسانی یوں

$$\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan\beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan\beta_1 l} \tag{10.98}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

جب η_2 اور η_1 برابر ہوں تب داخلی قدرتی رکاوٹ $\eta_{\text{داخلی}}$ پہلے خطے کی قدرتی رکاوٹ η_1 کے برابر ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں انعکاس پیدا نہیں ہوتی اور ترسیلی نظام ہم رکاوٹی[73] کہلاتا ہے۔ ہم رکاوٹی نظام میں انعکاس کے غیر موجودگی کی بنا توانائی ایک ہی سمت میں منتقل ہوتی ہے۔ اگر دوسرا خطہ کامل موصل ہو تب $\eta_2 = 0$

[71] intrinsic input impedance
[72] $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$
[73] matched

ہو گا۔ایسی صورت میں

$$\eta_{\text{داخلی}} = j\eta_1 \tan\beta_1 l \quad (\eta_2 = 0) \tag{10.99}$$

ہو گا لہٰذا ان مقامات پر جہاں $E_{xs1} = 0$ ہو، یعنی جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو، داخلی قدرتی رکاوٹ صفر کے برابر ہو گی جبکہ ان مقامات پر جہاں $H_{ys1} = 0$ ہو وہاں داخلی قدرتی رکاوٹ لامحدود ہو گی۔

مساوات 10.98 ترسیلی نظام پر غور کرنے کے لئے انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔

10.8 دو سرحدی انعکاس

اب تک ہم دو ایسے خطوں کے سرحد پر موج کی انعکاس پر غور کرتے رہے ہیں جن میں دونوں خطے نیم لامحدود جسامت کے تھے۔ نیم لامحدود خطے[74] سے مراد ایسا خطہ ہے جس کی ایک سرحد محدود فاصلے پر اور دوسری سرحد لامحدود فاصلے پر ہو۔ایسی صورت میں سرحد پار کرنے کے بعد ترسیلی موج دوسرے خطے میں مسلسل آگے ہی بڑھتے ہے اور ایسا کوئی امکان نہیں پایا جاتا کہ یہ لامحدود فاصلے پر موجود سرحد سے انعکاس پذیر ہو کر واپس پہلی سرحد تک آن پہنچے۔اس حصے میں ہم محدود جسامت کے خطے میں ترسیلی موج پر غور کرتے ہیں جہاں دوسرے خطے کی محدود جسامت کی بنا پر ترسیلی موج کا کچھ حصہ واپس پہلی سرحد پر پہنچ سکتا ہے۔

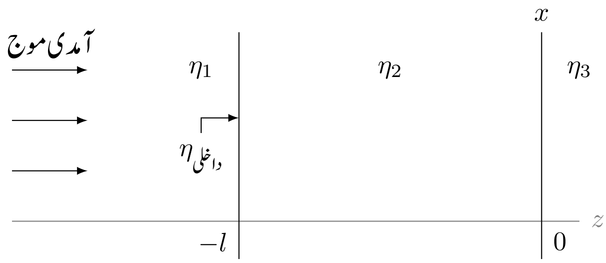
شکل 10.12 میں دو سرحدی مسئلہ دکھایا گیا ہے جہاں پہلے نیم لامحدود خطے کی قدرتی رکاوٹ η_1 ، دوسرے محدود موٹائی کے خطے کی قدرتی رکاوٹ η_2 اور تیسرے نیم لامحدود خطے کی قدرتی رکاوٹ η_3 ہے۔ محدود خطے کی موٹائی l ہے۔یہاں پہلا سرحد خطہ-1 اور خطہ-2 کے درمیان $z = -l$ پر جبکہ دوسرا سرحد خطہ-2 اور خطہ-3 کے درمیان $z = 0$ پر پایا جاتا ہے۔پہلے خطے میں موج دائیں جانب (یعنی بڑھتے z جانب) حرکت کرتے ہوئے پہلی سرحد پر عمودی آن پہنچتی ہے جس کے بعد یہ مسلسل چلی آتی ہے۔

پہلی سرحد پر آمدی موج کا کچھ حصہ انعکاس پذیر ہو کر واپس پہلے خطے میں بائیں جانب لوٹتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ دوسرے خطے میں داخل ہو کر دائیں جانب حرکت کرتے ہوئے دوسری سرحد پر پہنچتا ہے۔اس موج کا کچھ حصہ دوسری سرحد سے بھی گزر پاتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ دوسرے سرحد سے انعکاس پذیر ہو کر واپس پہلی سرحد جانب چل پڑتا ہے جہاں انعکاس اور ترسیل کا عمل ایک مرتبہ دوبارہ دہرایا جاتا ہے۔یوں دوسرے سرحد سے واپس لوٹتی موج کا کچھ حصہ پہلی سرحد سے گزر کر پہلے خطے میں داخل ہو کر تازہ انعکاسی موج کے ساتھ مل کر بائیں چلے جاتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ پہلی سرحد سے انعکاس پذیر ہو کر اسی سرحد سے تازہ ترسیلی موج کے ساتھ مل کر دوسری سرحد کے جانب چل پڑتا ہے۔یہی عمل بار بار دہرایا جاتا ہے۔

یوں ہر لمحہ پہلے خطے سے تازہ ترسیلی موج دوسرے خطے میں داخل ہو کر، اس خطے میں پہلے سے موجود، متعدد مرتبہ انعکاس پذیر اجزاء کے ساتھ مل کر دوسری سرحد کی جانب ایک نئی کارواں روانہ کرتی ہے۔اسی طرح دوسرے خطے میں بار بار انعکاس پذیر اور پہلی سرحد سے دو مرتبہ ترسیل کے بعد متعدد حصے مل کر پہلے خطے میں مجموعی انعکاسی موج کو جنم دیتے ہیں۔ہم اسی طرح تمام امواج کو مدنظر رکھتے ہوئے مسئلے کو حل کر سکتے ہیں۔ صفحہ 410 پر حصہ 11.6 میں ایسا ہی کرتے ہوئے عارضی حالت دریافت کی گئی ہے۔

اگر آمدی موج برقرار آتی رہے تب تینوں خطوں میں جلد برقرار صورت حال پیدا ہو جاتی ہے جہاں پہلے خطے میں آمدی موج کی نسبت سے کوئی خاص مقدار کی موج بطور انعکاسی موج پائی جاتی ہے۔اس انعکاسی موج کا مخصوص حیطہ اور دوری زاویہ پایا جاتا ہے۔اسی طرح دونوں سرحد سے گزرتے ہوئے، تیسرے خطے میں بھی آمدی موج کی نسبت سے کوئی خاص مقدار کی موج بطور ترسیلی موج پائی جاتی ہے جس کا مخصوص حیطہ اور دوری زاویہ پایا جاتا ہے۔دوسرے خطے میں پہلی سرحد سے تازہ ترسیلی اور دوسرے خطے میں واپس انعکاسی امواج مل کر مخصوص حیطے اور دوری زاویے کی موج کو جنم دیتے ہیں جو پہلی سرحد سے دوسری سرحد کی جانب گامزن پائی جاتی ہے۔اسی طرح دوسرے خطے میں دوسری سرحد سے تمام انعکاس پذیر امواج کا مجموعہ بطور انفرادی موج ابھرتا ہے جس کا مخصوص حیطہ اور دوری

[74] semi-infinity region



شکل 10.12: دو سرحدی مسئلے میں دوسرے اور تیسرے خطے کے قدرتی رکاوٹ اور دوسرے خطے کی موٹائی کے اثرات پہلی سرحد پر داخلی قدرتی رکاوٹ کی صورت میں نمودار ہوتے ہیں۔

زاویہ ہوتا ہے۔ یوں برقرار صورت حال حاصل کرنے کے بعد کل پانچ عدد امواج پائے جاتے ہیں یعنی پہلے خطے میں آمدی اور انعکاسی موج، تیسرے خطے میں ترسیلی 3412
موج اور دوسرے خطے میں دائیں حرکت کرتی موج اور بائیں حرکت کرتی موج۔ آئیں ان پانچ عدد امواج کی مدد سے مسئلے کو حل کریں۔ 3413

ہم تصور کرتے ہیں کہ تینوں خطے بے ضیاع، غیر مقناطیسی ہیں اور برقی میدان x سمت میں ہے۔ یوں دوسرے خطے میں دائیں اور بائیں جانب حرکت کرتے ہوئے امواج مل کر برقی میدان

$$E_{xs2}=E^{+}_{x20}e^{-j\beta_2 z}+E^{-}_{x20}e^{j\beta_2 z} \tag{10.100}$$

پیدا کرتے ہیں جہاں $\beta_2=\frac{\omega\sqrt{\epsilon_{R2}}}{c}$ ہے جبکہ E^{+}_{x20} اور E^{-}_{x20} مخلوط مقدار ہیں۔ مقناطیسی میدان y سمت میں ہو گا۔ یوں مقناطیسی میدان

$$H_{ys2}=H^{+}_{y20}e^{-j\beta_2 z}+H^{-}_{y20}e^{j\beta_2 z} \tag{10.101}$$

لکھا جائے گا۔ دوسرے خطے میں بائیں اور دائیں حرکت کرتے برقی امواج دوسری سرحد کے انعکاسی مستقل Γ_{23} سے وابستہ ہیں جہاں

$$\Gamma_{23}=\frac{\eta_3-\eta_2}{\eta_3+\eta_2} \tag{10.102}$$

کے برابر ہے۔ یوں

$$E^{-}_{x20}=\Gamma_{23}E^{+}_{x20} \tag{10.103}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مقناطیسی اجزاء کو یوں

$$H^{+}_{y20}=\frac{E^{+}_{x20}}{\eta_2} \tag{10.104}$$

$$H^{-}_{y20}=-\frac{E^{-}_{x20}}{\eta_2}=-\frac{\Gamma_{23}E^{+}_{20}}{\eta_2} \tag{10.105}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ 3414

برقی میدان تقسیم مقناطیسی میدان کو رکاوٹ موج[75] η_m کہا جاتا ہے۔

$$\eta_m(z)=\frac{E_{xs2}}{H_{ys2}}=\frac{E^{+}_{x20}e^{-j\beta_2 z}+E^{-}_{x20}e^{j\beta_2 z}}{H^{+}_{y20}e^{-j\beta_2 z}+H^{-}_{y20}e^{j\beta_2 z}} \tag{10.106}$$

---

[75] wave impedance

مساوات 10.103 اور مساوات 10.104 استعمال کرتے ہوئے اسے

$$\eta_m(z) = \eta_2 \left[\frac{e^{-j\beta_2 z} + \Gamma_{23} e^{j\beta_2 z}}{e^{-j\beta_2 z} - \Gamma_{23} e^{j\beta_2 z}} \right] \tag{10.107}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 10.102 اور یولر مماثل[76] کے استعمال سے اسے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\eta_m(z) = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos \beta_2 z - j\eta_2 \sin \beta_2 z}{\eta_2 \cos \beta_2 z - j\eta_3 \sin \beta_2 z} \tag{10.108}$$

مندرجہ بالا مساوات دوسرے خطے میں موج کی رکاوٹ دیتی ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے پہلی سرحد پر کل انعکاسی موج حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ سرحد پر متوازی برقی میدان $\boldsymbol{E}$ اور متوازی مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ ہموار ہیں لہٰذا

$$E^+_{xs1} + E^-_{xs1} = E_{xs2} \qquad (z = -l) \tag{10.109}$$

$$H^+_{ys1} + H^-_{ys1} = H_{ys2} \qquad (z = -l) \tag{10.110}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ان مساوات کو

$$E^+_{x10} + E^-_{x10} = E_{xs2} \qquad (z = -l) \tag{10.111}$$

$$\frac{E_{x10}}{\eta_1} - \frac{E^-_{x10}}{\eta_1} = \frac{E_{xs2}}{\eta_m(-l)} \qquad (z = -l) \tag{10.112}$$

لکھا[77] جا سکتا ہے جہاں پہلے خطے میں آمدی موج کا حیطہ E^+_{x10} اور مجموعی انعکاسی موج کو حیطہ E^-_{x10} ہے۔ ان دونوں مساوات میں دائیں ہاتھ E_{xs2} کو جوں کا توں لکھا گیا ہے جبکہ $z = -l$ پر موج کے رکاوٹ کی قیمت استعمال کی گئی ہے۔ $z = -l$ پر موج کے رکاوٹ کو پہلی سرحد پر داخلی قدرتی رکاوٹ $\eta_{\text{داخلی}}$ لکھتے ہوئے مندرجہ بالا دو مساوات کو حل کرتے ہوئے E_{xs2} سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں۔ یوں

$$\frac{E^-_{x10}}{E^+_{x10}} = \Gamma = \frac{\eta_{\text{داخلی}} - \eta_1}{\eta_{\text{داخلی}} + \eta_1} \tag{10.113}$$

حاصل ہوتا ہے۔ پہلی سرحد پر داخلی قدرتی رکاوٹ مساوات 10.108 میں $z = -l$ پر کرنے سے

$$\eta_{\text{داخلی}} = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos \beta_2 l + j\eta_2 \sin \beta_2 l}{\eta_2 \cos \beta_2 l + j\eta_3 \sin \beta_2 l} \tag{10.114}$$

یا

$$\eta_{\text{داخلی}} = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \tan \beta_2 l}{\eta_2 + j\eta_3 \tan \beta_2 l} \tag{10.115}$$

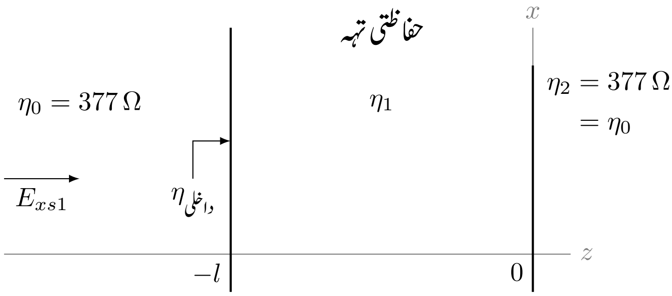
حاصل ہوتا ہے۔ یہاں رک کر ایک مرتبہ مساوات 10.115 کا مساوات 10.98 کے ساتھ موازنہ کریں۔

مساوات 10.113 اور مساوات 10.114 عمومی مساوات ہیں جن سے بے ضیاع، دو متوازی سرحد سے مجموعی انعکاسی موج کا حیطہ اور دوری زاویہ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ پہلے خطے میں آمدی طاقت کا Γ^2 حصہ مجموعی انعکاسی طاقت ہو گا۔ آمدی طاقت کا $1 - \Gamma^2$ حصہ دوسرے خطے سے ہوتا ہوا تیسرے خطے میں ترسیل ہو گا۔ دوسرے خطے میں بائیں جانب سے جتنی طاقت داخل ہوتی ہے، اس سے اتنی ہی طاقت دائیں جانب خارج ہوتی ہے۔

---

[76] Euler's identity

[77] ایسا اس لمحے لکھا جا سکتا ہے جب آمدی موج کا حیطہ عین پہلی سرحد پر پایا جاتا ہو۔



شکل 10.13: ریڈار اینٹینا پر ایسی شفاف حفاظتی تہہ چڑھائی جاتی ہے جو برقی و مقناطیسی امواج کو نہیں گھٹاتی۔

مساوات 10.113 میں $\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1$ کی صورت میں $\Gamma = 0$ حاصل ہوتا ہے جس سے انعکاسی طاقت صفر کے برابر ہو جاتی ہے۔ایسی صورت میں تمام کی تمام آمدی طاقت تیسرے خطے میں داخل ہو پاتی ہے۔ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے دوسرا خطہ موجود ہی نہیں ہے۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ داخلی قدرتی رکاوٹ اور پہلا خطہ ہم رکاوٹ[78] ہیں۔ہم رکاوٹ صورت کئی طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہے۔یہاں $\eta_3 = \eta_1$ کی صورت میں ہم رکاوٹی حالت حاصل کرتے ہیں۔حصہ 10.8.2 میں $\eta_3 \neq \eta_1$ کی صورت میں ہم رکاوٹی حالت اختیار کرنا دکھایا جائے گا۔

اگر پہلے اور تیسرے خطے کے قدرتی رکاوٹ برابر ہوں، یعنی $\eta_1 = \eta_3$ ہوں، تب $\beta_2 l = m\pi$ جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ ہو کی صورت میں مساوات 10.114 سے $\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1$ حاصل ہوتا ہے۔چونکہ $\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$ کے برابر ہے جہاں λ_2 دوسرے خطے میں طول موج ہے لہٰذا

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} = m\pi$$

یا

$$l = \frac{m\lambda_2}{2} \tag{10.116}$$

درکار شرط ہے۔مساوات 10.116 کے مطابق دوسرے خطے کی موٹائی دوسری خطے میں طول موج کی آدھی یا اس کے m گنا درکار ہے۔ایسی صورت میں $\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1$ حاصل ہوتا ہے۔اس ترکیب سے ہم رکاوٹ صورت حال حاصل کرنے کو نصف طول موج[79] کی ترکیب کہا جاتا ہے۔

نصف طول موج ترکیب سے تمام آمدی طاقت تیسرے خطے میں منتقل کی جا سکتی ہے۔آمدی موج کی تعدد یعنی اس کی طول موج تبدیل کرنے سے ہم رکاوٹی شرط پوری نہیں ہو پاتی لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 10.114 سے حاصل $\eta_{\text{داخلی}}$ کی قیمت η_1 سے قدر مختلف ہو گی جس سے Γ صفر نہیں رہ پاتا۔طول موج جتنی زیادہ تبدیل کی جائے Γ کی قیمت اتنی زیادہ حاصل ہوتی ہے۔ایسی صورت میں دو سرحدی جوڑ بطور پٹی گزار فلٹر[80] کردار ادا کرتا ہے۔

آئیں دو سرحدی مسئلے کے حقیقی مثال پر غور کریں۔

ریڈار اینٹینا کو موسمی اثرات سے بچانے کی خاطر استعمال کئے جانے والی ایسی تہہ کی بات کرتے ہیں جو ریڈار کے شعاعوں کے لئے بالکل شفاف ثابت ہوتی ہے۔یہ تہہ عموماً اینٹینا پر گنبد کی شکل میں ہوتی ہے۔شکل 10.13 میں ریڈار اینٹینا $z = -l$ کے بائیں جانب خلاء میں ہے جبکہ $z = 0$ تا $z = -l$ خطے میں حفاظتی تہہ ہے۔یوں $z = 0$ کے دائیں جانب خلاء ہے جس میں ریڈار اشارات بھیجتا ہے۔خلاء کی قدرتی رکاوٹ $377\,\Omega$ ہوتی ہے۔ذو برق کی بنی حفاظتی تہہ کی موٹائی زیادہ نہیں رکھی جاتی تاکہ اس میں طاقت کا ضیاع کم سے کم ہو۔حفاظتی تہہ سے انعکاس قابل قبول نہیں چونکہ اس طرح ریڈار کے امواج واپس اینٹینا کی طرف لوٹیں گے۔ہم چاہتے ہیں کہ اینٹینا، دائیں جانب کے پورے نظام کے لئے ہم رکاوٹی ہو۔ایسا $\eta_{\text{داخلی}} = \eta_2$ کی صورت میں ہو گا یعنی

$$377 = \eta_1 \frac{377 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j377 \tan \beta_1 l}$$

---

[78] matched
[79] half-wave matching
[80] band pass filter

یا

$$j377^2 \tan \beta_1 l = j\eta_1^2 \tan \beta_1 l$$

اب تمام غیر مقناطیسی اشیاء کی $377 < \eta_1$ ہے لہٰذا اس مساوات پر پورا صرف اس صورت اترا جا سکتا ہے جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو۔ کم سے کم موٹائی یوں $n = 1$ کی صورت میں $l = \frac{\pi}{\beta_1}$ یعنی $l = \frac{\lambda_1}{2}$ حاصل ہوتی ہے۔ اگر ریڈار 10 GHz کی شعاعیں پیدا کرتا ہو تب ہم حفاظتی تہہ کو کم ضیاع اور ہلکے وزن کے ایسے پلاسٹک سے بنا سکتے ہیں جس کا $\epsilon_R = 2.25$ ہے۔ ہمیں تہہ کی موٹائی

$$l = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{v_1}{2f_1} = \frac{3 \times 10^8}{2\sqrt{2.25} \times 10^{10}} = 1\,\text{cm}$$

رکھنی ہو گی۔ 3429

اگر 10 GHz پر چلنے والے ریڈار پر چڑھائی حفاظتی تہہ کی موٹائی 0.5 cm کر دی جائے تب $\beta_1 = 314.2$ اور $\eta_1 = 251.33$ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} \eta_{\text{داخلی}} &= 251.33 \times \frac{377 + j251.33 \tan(314.2 \times 0.005)}{251.33 + j377 \tan(314.2 \times 0.005)} \\ &\approx 167.6\,\Omega \end{aligned}$$

ہو گی۔ یوں شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{167.6 - 377}{167.6 + 377} = -0.3845$$

ہو گا اور انعکاسی طاقت کی فی صد شرح

$$\frac{\frac{\left(E_{x10}^-\right)^2}{2\eta_0}}{\frac{\left(E_{x10}^+\right)^2}{2\eta_0}} \times 100 = |\Gamma|^2 \times 100 = 14.78\,\%$$

ہو گی۔ 3430

مشق 10.7: دو خطے آپس میں $z = 0$ پر ملتے ہیں۔ سرحد کے بائیں جانب پہلا خطہ ہے جس کے مستقل $\epsilon_{R1} = 5$، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں۔ سرحد 3431
کے دوسری جانب مستقل $\epsilon_{R2} = 2$، $\mu_{R2} = 10$ اور $\sigma_2 = 0$ ہیں۔ پہلے خطے میں s حاصل کریں۔ دوسرے خطے میں s حاصل کریں اور آخر میں $z =$ 3432
$-0.6\,\text{cm}$ پر $\eta_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔ 3433

جوابات: 5، 1 اور $86.9\underline{/-61.8^\circ}$ 3434

3435

10.8.1 فیبری-پیروٹ طیف پیما 3436

بصریات کے میدان میں عموماً انحرافی مستقل[81] n استعمال کیا جاتا ہے جہاں

$$n=\sqrt{\epsilon_R} \tag{10.117}$$

کے برابر ہے۔ چونکہ فیبری-پیروٹ طیف پیما[82] بصریات میں استعمال کیا جاتا ہے لہٰذا ہم انحرافی مستقل استعمال کرتے ہوئے اس کی کارکردگی پر غور کرتے ہیں۔ خالی خلاء میں $\beta_0=\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ جبکہ شیشے[83] میں $\beta=\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_R}$ ہیں۔ یوں

$$\frac{\lambda_0}{\lambda}=\frac{\beta}{\beta_0}=\sqrt{\epsilon_R}=n \tag{10.118}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ 3437

سادہ ترین صورت میں فیبری-پیروٹ طیف پیما n انحرافی مستقل کے سادہ شیشے (یا کسی دوسرے شفاف مادے) کا تختہ ہوتا ہے جس کی موٹائی l کو یوں رکھا جاتا ہے کہ درکار طول موج پر یہ مساوات 10.116

$$\lambda=\frac{\lambda_0}{n}=\frac{2l}{m}\qquad (m=1,2,3\cdots) \tag{10.119}$$

پر پورا اترے جہاں خالی خلاء میں طول موج λ_0 جبکہ شیشے کے تختے میں طول موج λ ہے۔ مندرجہ بالا مساوات سے حاصل تمام طول موج، شیشے کے تختے سے بغیر گھٹے گزرتی ہیں۔ عموماً ہم چاہتے ہیں کہ شیشے کے تختے سے صرف اور صرف ایک مخصوص طول موج گزر پائے نا کہ ایسے تمام امواج جو مندرجہ بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔ ایسا یوں ممکن بنایا جا سکتا ہے کہ درکار طول موج اور مساوات 10.119 سے حاصل قریبی طول موج میں طویل فاصلہ ہو۔ مندرجہ بالا مساوات میں m کی مختلف قیمتیں مختلف طول موج دیتی ہیں۔ ایسے دو عدد قریبی طول موج جنہیں اس مساوات میں m اور $m-1$ پر کرنے سے حاصل کیا گیا ہو میں فرق

$$\lambda_{m-1}-\lambda_m=\Delta\lambda=\frac{2l}{m-1}-\frac{2l}{m}=\frac{2l}{m(m-1)}\approx\frac{2l}{m^2} \tag{10.120}$$

ہو گا۔ یاد رہے کہ m شیشے میں نصف طول موج کی گنتی

$$m=\frac{2l}{\lambda}=\frac{2ln}{\lambda_0} \tag{10.121}$$

ہے۔ یوں

$$\Delta\lambda=\frac{\lambda^2}{2l} \tag{10.122}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے خالی خلاء میں طول موج λ_0 کی صورت میں

$$\Delta\lambda_0=\frac{\lambda_0^2}{2ln} \tag{10.123}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ درکار طول موج λ_0 سے قریب تر طول موج، جو شیشے سے گزر پائے گا، کا فاصلہ $\Delta\lambda_0$ ہے جو طیفی حد[84] کہلاتی ہے۔ اگر کسی طرح اس فاصلے پر پائے جانے والے طول موج کو علیحدہ کرنا ممکن ہو تب ہم λ_0 کو علیحدہ کرنے میں کامیاب ہوں گے۔ طیف پیما کو بطور پٹی گزار فلٹر بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جہاں درکار طول موج کے قریبی طول موج شیشے سے گزر پاتے ہیں جبکہ اس سے دور طول موج نہیں گزر پاتے۔ 3440

---

[81] refractive index
[82] Fabry-Perot interferometer
[83] شیشہ غیر مقناطیسی ہے لہٰذا اس کی $\mu_R=1$ ہے۔
[84] free spectral range

مثال 10.8: سرخ رنگ کی خالی خلاء میں طول موج $600\,\mathrm{nm}$ ہے۔ ہمیں اس طول موج پر $100\,\mathrm{nm} = \Delta\lambda_0$ فاصلے تک طول موج علیحدہ کرنے ہیں۔ فیبری-پیروٹ طیف پیما میں استعمال کردہ شیشے کا انحرافی مستقل $n = 1.45$ ہے۔ شیشے کی موٹائی حاصل کریں۔

حل: ہم چاہیں گے کہ طیف پیما کی $\Delta\lambda_0$ درکار قیمت سے قدر زیادہ ہو یعنی

$$l < \frac{\lambda_0^2}{2n\Delta\lambda_0} = \frac{600\times10^{-9}\times600\times10^{-9}}{2\times1.45\times100\times10^{-9}} = 1.241\,\mathrm{\mu m}$$

اتنی باریک موٹائی کا شیشہ بنانا یا اسے استعمال کرنا ناممکن سی بات ہے۔ اس کا بہتر حل یہ ہو گا کہ دو شیشوں کے درمیان تقریباً یہی فاصلہ رکھا جائے۔ ان دو عدد شیشوں کے قریبی سطحوں کے مابین فاصلہ کم یا زیادہ کرتے ہوئے کسی بھی طول موج کو گزارہ جا سکتا ہے۔ شیشوں کے بیرونی جانب سطحوں پر انعکاس مخالف تہہ[85] چڑھائی جاتی ہے۔

10.8.2 $\eta_1 \neq \eta_3$ کی صورت میں ہم رکاوٹ صورت کا حصول

اس حصے میں ہم مساوات 10.114 میں $\eta_1 \neq \eta_3$ کی صورت میں $\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1$ کے حصول پر غور کرتے ہیں جس سے $\Gamma = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\beta_2 l = (2m-1)\frac{\pi}{2} \qquad (m = 1,2,3,\cdots)$$

یعنی

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} l = (2m-1)\frac{\pi}{2} \qquad (m = 1,2,3,\cdots)$$

کی صورت میں

$$l = (2m-1)\frac{\lambda_2}{4} \tag{10.124}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کے مطابق دوسرے خطے کی موٹائی، طول موج کے چوتھائی حصے کے طاق گنا ہے۔ ایسی صورت میں مساوات 10.114 سے

$$\eta_{\text{داخلی}} = \frac{\eta_2^2}{\eta_3} \tag{10.125}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم دوسرے خطے کی موٹائی کے ذریعہ پہلے خطے کو تیسرے خطے کے ہم رکاوٹ بنا سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں $\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1$ ہو گا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\eta_2 = \sqrt{\eta_1\eta_3} \tag{10.126}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 10.124 اور مساوات 10.126 چوتھائی طول موج[86] سے ہم رکاوٹ بنانا ممکن بناتا ہے۔ انعکاس مخالف تہہ[87] کا دارومدار اسی اصول پر ہے۔

---

[85] antireflective coating
[86] quarter-wave matching
[87] antireflective coating

مثال 10.9: ہم 660 nm طول موج کی شعاع کے لئے $n_3 = 1.45$ انحرافی مستقل کے شیشے کو خالی خلاء $n_1 = 1$ کے ہم رکاوٹ بذریعہ انعکاس مخالف تہہ بنانا چاہتے ہیں۔ اس تہہ کی کم سے کم موٹائی اور انحرافی مستقل n_2 دریافت کریں۔

حل: خالی خلاء اور شیشے کے قدرتی رکاوٹ

$$\eta_1 = 377\,\Omega$$
$$\eta_3 = \frac{377}{1.45} = 260\,\Omega$$

ہیں۔ یوں مساوات 10.126 سے انعکاس مخالف تہہ کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta_2 = \sqrt{377 \times 260} = 313\,\Omega$$

حاصل ہوتی ہے۔ یوں تہہ کا انحرافی مستقل

$$n = \frac{377}{313} = 1.2$$

ہو گا۔ دوسرے خطے یعنی ذو برق تہہ میں طول موج

$$\lambda_2 = \frac{660}{1.2} = 550\,\text{nm}$$

ہو گا جس سے تہہ کی کم سے کم موٹائی

$$l = \frac{\lambda_2}{4} = \frac{0.1375}{\mu\text{m}}$$

حاصل ہوتی ہے۔

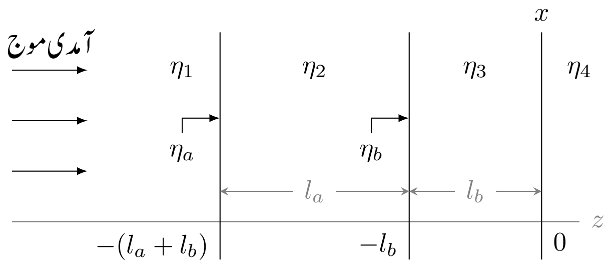
10.8.3 متعدد سرحدی مسئلہ

ہم تو مختلف خطوں کے درمیان سرحد پر انعکاس کو تفصیلاً دیکھ چکے ہیں۔ اسی طرح ہم نے دو سرحدی صورت حال پر بھی غور کیا۔ آئیں اس حصے میں متعدد سرحدی صورت میں شرح انعکاس حاصل کریں۔ شکل 10.14 میں تین سرحدی مسئلہ دکھایا گیا ہے جس پر غور کرتے ہوئے متعدد سرحدی مسئلے کا حل تلاش کیا جائے گا۔

ہمیں آمدی طاقت کا وہ حصہ دریافت کرنا ہے جو تین سرحدی تہہ سے گزر نہیں پاتا بلکہ یہ انعکاس پذیر ہو کر آمدی موج کے الٹ سمت میں واپس چلے جاتا ہے۔ اسی طرح ہمیں آمدی طاقت کا وہ حصہ دریافت کرنا ہے جو تینوں سرحدوں کو عبور کرتے ہوئے چوتھے خطے میں ترسیل کر پاتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں پہلی سرحد پر داخلی قدرتی رکاوٹ η_a درکار ہو گی۔ مسئلے کو حل کرنے کی خاطر ہمیں اختتامی سرحد سے ابتدائی سرحد کی جانب چلتے ہوئے ہر سرحد پر داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کرنے ہوں گے۔ یوں ہم پہلے η_b حاصل کریں گے۔ یوں تیسرے اور چوتھے خطے کے اثرات کو η_b سے ظاہر کرتے ہوئے ہم پہلی سرحد پر پہنچیں گے۔

مساوات 10.114 استعمال کرتے ہوئے

$$\eta_b = \eta_3 \frac{\eta_4 \cos \beta_3 l_b + j\eta_3 \sin \beta_3 l_b}{\eta_3 \cos \beta_3 l_b + j\eta_4 \sin \beta_3 l_b} \tag{10.127}$$



شکل 10.14: متعدد سرحدی صورت میں شرح انعکاس۔

لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح ہم تبادلہ رکاوٹ[88] کی مدد سے تین سرحدی مسئلے کو دو سرحدی مسئلہ بنا پائے ہیں جہاں دوسری سرحد کے دائیں جانب جو کچھ بھی ہے اسے η_b سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اب پہلے سرحد پر مساوات 10.114 کے استعمال سے

$$\eta_a = \eta_2 \frac{\eta_b \cos \beta_2 l_a + j\eta_2 \sin \beta_2 l_a}{\eta_2 \cos \beta_2 l_a + j\eta_b \sin \beta_2 l_a} \tag{10.128}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آمدی طاقت کا Γ^2 حصہ انعکاسی طاقت ہو گا جہاں

$$\Gamma = \frac{\eta_a - \eta_1}{\eta_a + \eta_1} \tag{10.129}$$

کے برابر ہے۔آمدی طاقت کا بقایا حصہ یعنی $1-\Gamma^2$ حصہ چوتھے خطے میں ترسیل ہو گا۔تبادلہ رکاوٹ کی ترکیب متعدد سرحدی مسئلے پر لاگو کیا جا سکتا ہے۔

کیمرے[89] کے عدسہ[90] پر متعدد تہہ چڑھا کر اس کی کارکردگی بہتر کی جاتی ہے۔یوں عدسہ پر پہلی تہہ کا انحرافی مستقل عدسے کے شیشے کے انحرافی مستقل کے برابر ہو گا۔اگلی تہہ کا انحرافی مستقل قدر کم ہو گا۔اسی طرح آخری تہہ کا انحرافی مستقل عین خالی خلاء کے انحرافی مستقل کے برابر ہو گا۔یوں ایک تہہ سے دوسرے تہہ میں موج بغیر انعکاس کے داخل ہو گی۔موج کو سرحد نظر ہی نہیں آتا۔

10.9 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب

اس حصے میں تقطیب موج[91] پر غور کیا جائے گا۔خطی تقطیب اور بیضوی تقطیب کے بعد دائری تقطیب پر تبصرہ کیا جائے گا۔

اب تک اٹل سمت کے امواج پر غور کیا گیا۔یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب حرکت کرتا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت کا میدان

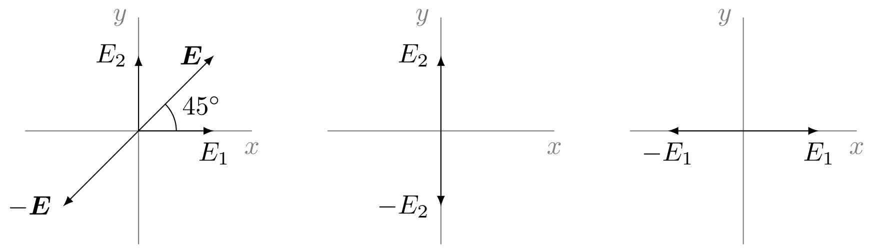
$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) \tag{10.130}$$

لکھا گیا۔یہ مساوات خطی تقطیب کی مثال ہے جہاں میدان تمام اوقات صرف x سمت میں پایا جاتا ہے۔عموماً $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب حرکت کرتے موج میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے علاوہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جزو بھی پایا جائے گا۔ایسی صورت میں موج کے اجزاء

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(\omega t - \beta z) \\ E_y &= E_2 \cos(\omega t - \beta z - \delta) \end{aligned} \tag{10.131}$$

---

[88] impedance transformation
[89] camera
[90] lens
[91] wave polarization



پ: $45°$ خطی قطبیت   ب: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ خطی قطبیت   الف: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ خطی قطبیت

شکل 10.15: خطی، دائری اور بیضوی قطبیت۔

ہو سکتے ہیں جہاں دونوں اجزاء کے حیطے مختلف ممکن ہیں جبکہ ان میں زاویائی فاصلہ δ بھی پایا جا سکتا ہے۔ ان اجزاء کا مجموعہ

$$\boldsymbol{E} = E_1 \cos(\omega t - \beta z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + E_2 \cos(\omega t - \beta z - \delta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \tag{10.132}$$

ایسی موج کو ظاہر کرے گا۔ یہ مساوات غور طلب ہے۔ آئیں خلاء میں کسی بھی اٹل نقطے پر وقت تبدیل ہونے سے ایسی میدان پر غور کریں۔ ہم خلاء میں $z = 0$ کو اٹل نقطہ لیتے ہوئے میدان حاصل کرتے ہیں۔

اگر $E_2 = 0$ ہو تب وقت t کے تبدیلی سے میدان کی قیمت $-E_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ تا $+E_1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ تبدیل ہوتی ہے۔ اس میدان کو تمام t کے لئے شکل 10.15-الف میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میدان کی نوک $-E_1$ تا $+E_1$ خطی لکیر پر رہتی ہے۔ اسی حقیقت سے ایسے موج کی قطبیت کو خطی قطبیت[92] کہتے ہیں۔ یہ موج $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت میں خطی قطبیت رکھتی ہے۔ اس کے برعکس اگر مساوات 10.132 میں $E_1 = 0$ ہو تب یہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ خطی قطبیت کی موج ہو گی جسے شکل 10.15-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اگر $E_1 = E_2 = E_{12}$ اور $\delta = 0$ ہوں تب بھی خطی قطبیت کی موج حاصل ہوتی ہے البتہ یہ موج افقی محدد کے ساتھ $45°$ کا زاویہ بناتی ہے۔ شکل 10.15-پ میں اس موج کو دکھایا گیا ہے۔

آئیں اب ذرہ دلچسپ صورت حال دیکھیں۔ نقطہ $z = 0$ پر مساوات 10.131

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos \omega t \\ E_y &= E_2 \cos(\omega t - \delta) \end{aligned} \tag{10.133}$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں جس میں E_y کو

$$E_y = E_2 \left(\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta\right)$$

لکھنا ممکن ہے۔ اس مساوات میں، E_x کی مساوات استعمال کرتے ہوئے، $\cos \omega t = \frac{E_x}{E_1}$ اور $\sin \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2}$ پر کر کے

$$E_y = E_2 \left[\frac{E_x}{E_1} \cos \delta + \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2} \sin \delta\right]$$

ملتا ہے جسے

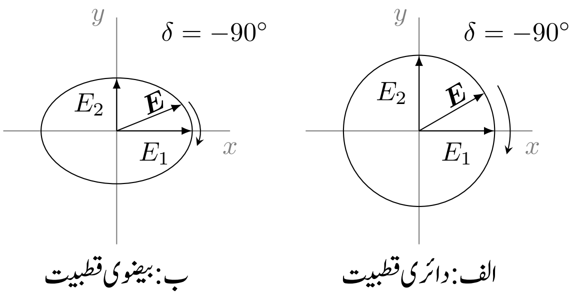
$$\frac{E_x^2}{E_1^2} - 2\frac{E_x}{E_1}\frac{E_y}{E_2} \cos \delta + \frac{E_y^2}{E_2^2} = \sin^2 \delta \tag{10.134}$$

یا

$$aE_x^2 - bE_xE_y + cE_y^2 = 1 \tag{10.135}$$

---

[92] linear polarization



شکل 10.16: دائری اور بیضوی قطبیت۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$a = \frac{1}{E_1^2 \sin^2 \delta} \qquad b = \frac{2\cos\delta}{E_1 E_2 \sin^2 \delta} \qquad c = \frac{1}{E_2^2 \sin^2 \delta} \tag{10.136}$$

لئے گئے ہیں۔ مساوات 10.135 بیضوی قطبیت[93] کی عمومی مساوات ہے۔

مساوات 10.134 میں $E_1 = E_2 = E_0$ اور $\delta = \mp 90^\circ$ کی صورت میں

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 \tag{10.137}$$

حاصل ہوتا ہے جو دائرے کی مساوات ہے اور جسے شکل 10.16-الف میں دکھایا گیا ہے۔ شکل میں E_1 اور E_2 بھی ظاہر کئے گئے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔ مساوات 10.133 سے $\delta = +90^\circ$ کی صورت میں $\omega t = 0$ پر

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos 0 = E_0 \\ E_y &= E_0 \cos(0 - 90^\circ) = 0 \qquad (\delta = +90^\circ) \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جبکہ کچھ ہی لمحے بعد $\omega t = 30^\circ$ کی صورت میں

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos 30^\circ = 0.866 E_0 \\ E_y &= E_0 \cos(30^\circ - 90^\circ) = 0.5 E_0 \qquad (\delta = +90^\circ) \end{aligned}$$

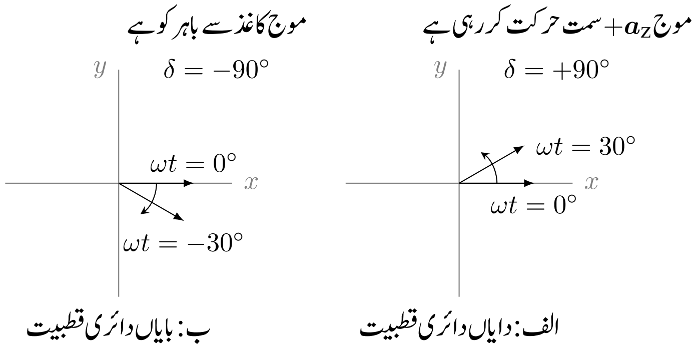
حاصل ہوتا ہے۔ شکل 10.17-الف میں دونوں اوقات پر موج دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بڑھتے وقت کے ساتھ میدان کی نوک دائرے پر گھڑی کے الٹ سمت میں حرکت کرتی ہے۔ اس شکل میں موج کے حرکت کی سمت a_z کاغذ سے باہر کو ہے۔ اگر دائیں ہاتھ کے انگوٹھے کو موج کے حرکت کی سمت میں رکھا جائے تو اس ہاتھ کی بقایا چار انگلیاں دائرے پر میدان کی نوک کی حرکت کا سمت دیتی ہیں۔ یوں $\delta = +90^\circ$ کی صورت میں مساوات 10.137 دائیں دائری قطبیت[94] کی موج کو ظاہر کرتا ہے۔

اسی طرح $\delta = -90^\circ$ کی صورت میں بائیں دائری قطبیت[95] حاصل ہوتی ہے جسے شکل 10.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

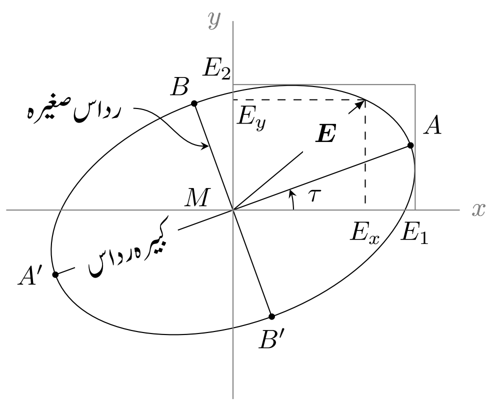
دائیں ہاتھ قطبی موج سے مراد وہ موج ہے جو آپ کی طرف حرکت کرتے ہوئے آپ کو گھڑی کے الٹ گھومتی نظر آئے۔ کسی موج کی قطبیت سے مراد وہ قطبیت ہے جو دیکھنے والے کی طرف حرکت کرتی موج کی قطبیت ہو گی۔

جہاں بھی غلطی کی گنجائش ہو وہاں بہتر ہوتا ہے کہ قطبیت کا ذکر کرتے وقت حرکت کی سمت کا بھی ذکر کیا جائے۔

مساوات 10.134 میں $\delta = \mp 90^\circ$ اور $E_1 \neq E_2$ کی صورت میں بیضوی موج حاصل ہوتی ہے جسے شکل 10.16-ب میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 10.17: دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ کی دائری قطبیت۔



شکل 10.18: عمومی بیضوی قطبیت۔

شکل 10.18 میں مساوات 10.134 کی عمومی شکل دکھائی گئی ہے جس میں $E_1 \neq E_2$ اور $\delta \neq 90^\circ$ ہیں۔ اس شکل میں ترخیم[96] افقی محدد کے ساتھ τ زاویہ بناتا ہے۔ یوں $\tau = 15^\circ$ کی صورت میں یہ 15° قطبی موج کہلائے گی۔ شکل 10.18 میں رداس کبیرہ MA اور رداس صغیرہ MB کی شرح کو شرح رداس[97]

$$\text{شرح رداس} = \frac{AA'}{BB'} \tag{10.138}$$

کہا جاتا ہے جبکہ τ موج کا زاویہ جھکاو[98] کہلاتا ہے۔ AA' محور کبیرہ اور BB' محور صغیرہ کہلاتے ہیں۔

مثال 10.10: برقی موج $\boldsymbol{E} = 3\cos(\omega t - \beta z - 45^\circ)\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 4\cos(\omega t - \beta z + 30^\circ)\boldsymbol{a}_{\text{y}}$ کا شرح رداس اور $z = 0$ پر زاویہ جھکاو حاصل کریں۔

حل: پہلے موج کا زیادہ سے زیادہ حیطہ اور کم سے کم حیطہ دریافت کرتے ہیں۔ کسی بھی تفاعل $f(x)$ کی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت دریافت کرنے کی خاطر پہلے وہ نقطہ x_0 دریافت کیا جاتا ہے جہاں درکار قیمت پائی جائے گی۔ یہ نقطہ $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0$ سے حاصل ہوتا ہے۔

دی گئی برقی موج کی عمومی صورت

$$\boldsymbol{E} = E_x \cos\theta + E_y \cos(\theta + \delta) \tag{10.139}$$

ہے جس سے

$$|\boldsymbol{E}|^2 = E_x^2 \cos^2\theta + E_y^2 \cos^2(\theta + \delta)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہمیں متغیرہ θ کی وہ قیمت درکار ہے جس پر $|\boldsymbol{E}|^2$ زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم پایا جائے گا۔ اس تفاعل کا تفرق صفر کے برابر کرتے ہیں۔

$$-2E_x^2 \cos\theta \sin\theta - 2E_y^2 \cos(\theta + \delta)\sin(\theta + \delta) = 0$$

اس میں $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ استعمال کرتے ہوئے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$E_x^2 \sin 2\theta + E_y^2 \sin[2(\theta + \delta)] = 0$$

اب $\sin(2\theta + 2\delta) = \sin 2\theta \cos 2\delta + \cos 2\theta \sin 2\delta$ پر کرتے ہیں۔

$$E_x^2 \sin 2\theta + E_y^2 [\sin 2\theta \cos 2\delta + \cos 2\theta \sin 2\delta] = 0$$

اس سے یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-E_y^2 \sin 2\delta}{E_x^2 + E_y^2 \cos 2\delta}$$

جس سے

$$\theta_{01} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-E_y^2 \sin 2\delta}{E_x^2 + E_y^2 \cos 2\delta}\right) \tag{10.140}$$

---

[93] elliptic polarization
[94] right circular polarization
[95] left circular polarization
[96] ellipse
[97] axial ratio
[98] tilt angle

حاصل ہوتا ہے۔ محور کبیرہ اور محور صغیرہ میں $90°$ کا فرق پایا جاتا ہے لہٰذا دوسرا محور

$$\theta_{02} = 90° + \theta_{01} \tag{10.141}$$

3489 پر ہو گا۔ ان میں ایک نقطے پر تفاعل کی کم سے کم قیمت حاصل ہو گی جبکہ دوسرے نقطے پر تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل ہو گی۔

سوال میں دی گئی موج میں $\omega t - \beta z - 45° = \theta$ پر کرنے سے اسے

$$\boldsymbol{E} = 3\cos\theta - 4\cos(\theta + 75°)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 10.140 اور مساوات 10.141 سے

$$\theta_{01} = \omega t - \beta z - 45° = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-(-4)^2\sin(2\times 75°)}{3^2 + (-4^2\cos(2\times 75°)}\right) = 29.37°$$
$$\theta_{02} = 90° + 29.37 = 119.37°$$

حاصل ہوتے ہیں۔ پہلے نقطے پر محور

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= 3\cos 29.37°\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 4\cos(29.37° + 75°)\boldsymbol{a}_{\text{y}}\\ &= 2.6144\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 0.9927\boldsymbol{a}_{\text{y}}\\ &= 2.797\underline{/20.792°}\end{aligned}$$

جبکہ دوسرے نقطے پر محور

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -1.471\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 3.875\boldsymbol{a}_{\text{y}}\\ &= 4.145\underline{/110.79°}\end{aligned}$$

پایا جائے گا۔ دوسرے محور کی لمبائی زیادہ ہے لہٰذا یہ محور کبیرہ ہے۔ شرح رداس

$$\frac{4.145}{2.797} = 1.42$$

3490 ہے جبکہ محور کبیرہ کا زاویہ جھکاو $110.79°$ یا $-69.11°$ دیتا ہے۔ شکل 10.19 میں نتائج دکھائے گئے ہیں۔

3491

3492

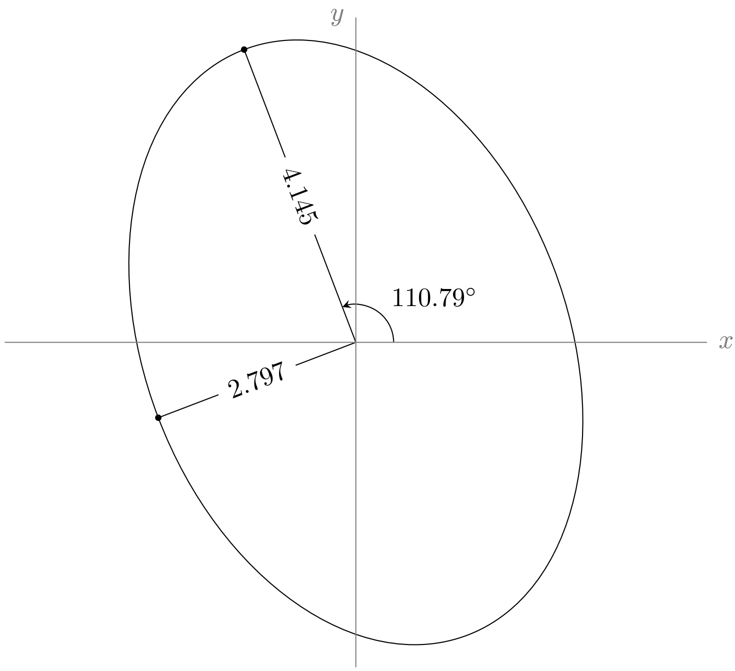
3493 مثال 10.11: صفحہ کتاب کے عمودی باہر کی جانب موج کے اجزاء $E_x = 5\cos\omega t$ اور $E_y = 15\cos(\omega t + 90°)$ ہیں۔ موج کی شرح
3494 رداس، تقطیب اور زاویہ جھکاو حاصل کریں۔

حل:

$$\text{شرح رداس} = \frac{15}{5} = 3$$

کبیرہ اور صغیرہ رداس برابر نہ ہونے کی وجہ سے بیضوی موج پائی جائے گی۔ گھومنے کی سمت دریافت کرنے کی خاطر ہم کسی بھی دو قریبی لمحات پر موج کو دیکھتے ہیں۔ یوں لمحہ $\omega t = 0$ پر

$$\begin{aligned}E_x &= 5\cos 0° = 5\\ E_y &= 15\cos 90° = 0\end{aligned}$$



شکل 10.19: مثال 10.10 کی بیضوی قطبی موج۔

ہوں گے جبکہ $\omega t = 30^\circ$ پر

$$E_x = 5\cos 30^\circ = 4.33$$
$$E_y = 15\cos(30^\circ + 90^\circ) = -7.5$$

3495 ہوں گے۔ ان نتائج سے صاف ظاہر ہے کہ موج گھڑی کی سمت گھوم رہی ہے لہٰذا یہ بائیں بیضوی قطبی موج کہلائے گی۔

3496 چونکہ کبیرہ رداس y محدد جبکہ صغیرہ رداس x محدد پر ہیں لہٰذا زاویہ جھکاو 90° ہے۔

3497

3498

3499 مثال 10.12: موج کی دوری سمتی مساوات $\boldsymbol{E}_s = E_0(\boldsymbol{a}_\text{X} - j\boldsymbol{a}_\text{Y})e^{-j\beta z}$ ہے۔ موج کی حقیقی مساوات حاصل کرتے ہوئے اس کی قطبیت دریافت

3500 کریں۔

حل: موج کو حقیقی شکل میں لکھنے کی خاطر دوری سمتی مساوات کو $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے یولر مماثل کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= E_0(\boldsymbol{a}_\text{X} - j\boldsymbol{a}_\text{Y})e^{j(\omega t-\beta z)}\\
&= E_0(\boldsymbol{a}_\text{X} - j\boldsymbol{a}_\text{Y})[\cos(\omega t-\beta z) + j\sin(\omega t-\beta z)]\\
&= E_0[\boldsymbol{a}_\text{X}\cos(\omega t-\beta z) + \boldsymbol{a}_\text{Y}\sin(\omega t-\beta z)] + jE_0[\boldsymbol{a}_\text{X}\sin(\omega t-\beta z) - \boldsymbol{a}_\text{Y}\cos(\omega t-\beta z)]
\end{aligned}$$

اس کا حقیقی جزو

$$\boldsymbol{E} = E_0[\boldsymbol{a}_\text{X}\cos(\omega t-\beta z) + \boldsymbol{a}_\text{Y}\sin(\omega t-\beta z)]$$

یعنی

$$\boldsymbol{E} = E_0[\boldsymbol{a}_\text{x} \cos(\omega t - \beta z) + \boldsymbol{a}_\text{y} \cos(\omega t - \beta z - 90^\circ)] \quad \text{دایاں دائری قطبی} \tag{10.142}$$

ہے جو حقیقی موج کی مساوات ہے۔

کسی بھی نقطے مثلاً $z = 0$ پر دو قریبی لمحات پر موج کو دیکھتے ہوئے، اس کے گھومنے کی سمت دیکھی جا سکتی ہے۔ لمحہ $\omega t = 0$ پر موج $\boldsymbol{a}_\text{x}$ سمت میں ہے جبکہ لمحہ $\omega t = 90^\circ$ پر موج $\boldsymbol{a}_\text{y}$ سمت میں ہے۔ یوں موج الٹ گھڑی گھوم رہی ہے۔ چونکہ رداس کبیرہ اور رداس صغیرہ برابر ہیں لہٰذا یہ دائری موج ہے۔ اس موج کو دائیں دائری قطبی موج کہا جائے گا۔ سوال 10.48 میں آپ سے گزارش کی گئی ہے کہ بایاں دائری قطبی موج کی مساوات

$$\boldsymbol{E} = E_0[\boldsymbol{a}_\text{x} \cos(\omega t - \beta z) + \boldsymbol{a}_\text{y} \cos(\omega t - \beta z + 90^\circ)] \quad \text{بایاں دائری قطبی} \tag{10.143}$$

حاصل کریں۔

مشق 10.8: موج کی دوری سمتی مساوات $\boldsymbol{E}_s = E_0(\boldsymbol{a}_\text{x} - j\boldsymbol{a}_\text{y})e^{j\beta z}$ ہے۔ موج کی حقیقی مساوات حاصل کرتے ہوئے اس کی قطبیت دریافت کریں۔

جواب: دھیان رہے کہ یہ موج منفی z محدد کی جانب حرکت کر رہی ہے۔ یوں یہ بائیں دائری قطبی موج ہے۔

مثال 10.13: دائیں دائری قطبی موج $E_0(\boldsymbol{a}_\text{x} + j\boldsymbol{a}_\text{y})e^{-j\beta z}e^{j\delta}$ اور بائیں دائری قطبی موج $E_0(\boldsymbol{a}_\text{x} - j\boldsymbol{a}_\text{y})e^{-j\beta z}$ میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ ان کا مجموعہ دریافت کریں۔

حل: ان کا مجموعہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= E_0(\boldsymbol{a}_\text{x} - j\boldsymbol{a}_\text{y})e^{-j\beta z} + E_0(\boldsymbol{a}_\text{x} + j\boldsymbol{a}_\text{y})e^{-j\beta z}e^{j\delta} \\ &= E_0[(1 + e^{j\delta})\boldsymbol{a}_\text{x} - j(1 - e^{j\delta})\boldsymbol{a}_\text{y}]e^{-j\beta z}\end{aligned}$$

ہو گا۔ اس سے $e^{j\frac{\delta}{2}}$ باہر نکالتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = E_0 e^{j\frac{\delta}{2}}[(e^{-j\frac{\delta}{2}} + e^{j\frac{\delta}{2}})\boldsymbol{a}_\text{x} - j(e^{-j\frac{\delta}{2}} - e^{j\frac{\delta}{2}})\boldsymbol{a}_\text{y}]e^{-j\beta z}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $e^{j\frac{\delta}{2}} - e^{j\frac{\delta}{2}} = j2\sin\frac{\delta}{2}$ اور $e^{j\frac{\delta}{2}} + e^{j\frac{\delta}{2}} = 2\cos\frac{\delta}{2}$ پر کرنے سے

$$\boldsymbol{E} = 2E_0\left[\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\boldsymbol{a}_\text{x} + \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\boldsymbol{a}_\text{y}\right]e^{-j(\beta z - \frac{\delta}{2})} \tag{10.144}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 10.144 خطی قطبی موج ہے جو x محدد کے ساتھ $\frac{\delta}{2}$ زاویے پر ہے۔ اس مثال سے ثابت ہوا کہ کسی بھی خطی قطبی موج کو دو عدد دائری قطبی امواج کا مجموعی تصور کیا جا سکتا ہے۔

3515

10.10 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئنٹنگ سمتیہ

کسی بھی موج کی اوسط طاقت مساوات 10.56

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}}$$

سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ شکل 10.18 کے عمومی بیضوی قطبی موج کے x اور y اجزاء

$$E_{sx} = E_1 e^{j(\omega t - \beta z)} \tag{10.145}$$

$$E_{sy} = E_2 e^{j(\omega t - \beta z + \delta)} \tag{10.146}$$

میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر کل برقی میدان ان اجزاء کا سمتی مجموعہ ہو گا جسے نقطہ $z = 0$ پر

$$\boldsymbol{E}_s = \boldsymbol{a}_{\text{X}} E_1 e^{j\omega t} + \boldsymbol{a}_{\text{Y}} E_2 e^{j(\omega t + \delta)} \tag{10.147}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{H}} = \eta = |\eta|\, e^{j\theta_\eta}$$

ہوتا ہے لہٰذا مساوات 10.145 کی جوڑی مقناطیسی موج

$$H_{sy} = \frac{E_{sx}}{|\eta|} e^{-j\theta_\eta} = \frac{E_1}{|\eta|} e^{j(\omega t - \beta z - \theta_\eta)} = H_1 e^{j(\omega t - \beta z - \theta_\eta)}$$

ہو گی۔ اسی طرح مساوات 10.146 کی جوڑی

$$H_{sx} = -H_2 e^{j(\omega t - \beta z + \delta - \theta_\eta)} \tag{10.148}$$

ہو گی۔ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان ان اجزاء کا سمتی مجموعہ ہو گا جسے نقطہ $z = 0$ پر

$$\boldsymbol{H}_s = -\boldsymbol{a}_{\text{X}} H_2 e^{j(\omega t + \delta - \theta_\eta)} + \boldsymbol{a}_{\text{Y}} H_1 e^{j(\omega t - \theta_\eta)} \tag{10.149}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ جوڑی دار مخلوط $\boldsymbol{H}_s$ کی قیمت مندرجہ بالا مساوات میں مثبت j کو منفی اور منفی j کو مثبت لکھ کر حاصل ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H}_s^* = -\boldsymbol{a}_{\text{X}} H_2 e^{-j(\omega t + \delta - \theta_\eta)} + \boldsymbol{a}_{\text{Y}} H_1 e^{-j(\omega t - \theta_\eta)} \tag{10.150}$$

مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ سے اوسط طاقت

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2}\left[\left(\boldsymbol{a}_{\text{X}} E_1 e^{j\omega t} + \boldsymbol{a}_{\text{Y}} E_2 e^{j(\omega t + \delta)}\right) \times \left(-\boldsymbol{a}_{\text{X}} H_2 e^{-j(\omega t + \delta - \theta_\eta)} + \boldsymbol{a}_{\text{Y}} H_1 e^{-j(\omega t - \theta_\eta)}\right)\right]_{\text{حقیقی}} \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\left[E_1 H_1 e^{j\theta_\eta} + E_2 H_2 e^{j\theta_\eta}\right]_{\text{حقیقی}}
\end{aligned}$$

یعنی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\text{Z}}\left(E_1 H_1 + E_2 H_2\right)\cos\theta_\eta \tag{10.151}$$

3516 حاصل ہوتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ طاقت δ پر بالکل منحصر نہیں ہے۔

بے ضیاع خطے میں برقی اور مقناطیسی میدان ہم قدم ہوتے ہیں۔ان میں $\frac{E_1}{H_1} = \frac{E_2}{H_2} = \eta_0$ کے برابر ہوتا ہے جہاں حقیقی قدرتی رکاوٹ کا زاویہ $\theta_\eta = 0$ ہے۔ایسے خطے میں

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\left(E_1H_1 + E_2H_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\left(H_1^2 + H_2^2\right)\eta_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}H^2\eta_0\end{aligned} \tag{10.152}$$

ہو گا جہاں $H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2}$ کے برابر ہے۔اس مساوات کو

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\left(E_1H_1 + E_2H_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\frac{E_1^2 + E_2^2}{\eta_0} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{\eta_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned} \tag{10.153}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$ کے برابر ہے۔

جس بیضوی موج کے اجزاء مساوات 10.145 اور مساوات 10.146 میں دئے گئے ہیں، اس موج کی طاقت مساوات 10.153 دیتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مجموعی بیضوی موج کی طاقت دونوں اجزاء کی علیحدہ علیحدہ طاقت $\frac{E_1^2}{2\eta_0}$ اور $\frac{E_2^2}{2\eta_0}$ کے مجموعے کے برابر ہے۔

مثال 10.14: خلاء میں بیضوی قطبی موج کے اجزاء

$$\begin{aligned}E_x &= 2\cos(\omega t - \beta z) \\ E_y &= 3\cos(\omega t - \beta z + 75^\circ)\end{aligned}$$

وولٹ فی میٹر ہیں۔موج کی فی مربع میٹر اوسط طاقت دریافت کریں۔

حل: خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ $\eta = 120\pi$ لیتے ہوئے مساوات 10.153 سے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{2^2 + 3^2}{120\pi} = 17.24\,\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{m}^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سوالات

سوال 10.1: خالی خلاء میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت میں حرکت کرتی، $600\,\mathrm{MHz}$ تعدد کے مستوی برقی موج $\boldsymbol{E}$ کی چوٹی لمحہ $t = 1\,\mathrm{ns}$ پر $z = 0.3\,\mathrm{m}$ پہ پائی جاتی ہے۔ یہ چوٹی $310\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کے برابر ہے۔ الف) برقی میدان $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت میں ہونے کی صورت میں سائن نما $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ امواج کے مساوات لکھیں۔ ب) میدان سمتیہ $5\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت میں ہونے کی صورت میں سائن نما $\boldsymbol{E}_s$ اور $\boldsymbol{H}_s$ امواج کی مساوات لکھیں۔

جواب: $\boldsymbol{E} = 310\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cos(12\pi\times10^8 t - 4\pi z)$ ، $\boldsymbol{H} = \frac{31}{12\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cos(12\pi\times10^8 t - 4\pi z)$ ،
$\boldsymbol{E}_s = 310\left[\frac{5}{\sqrt{29}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{2}{\sqrt{29}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right]e^{-j4\pi z}$ ، $\boldsymbol{H}_s = \frac{31}{12\pi}\left[\frac{2}{\sqrt{29}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{5}{\sqrt{29}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right]e^{-j4\pi z}$

سوال 10.2: خالی خلاء میں نقطہ $N(3,-2,5)$ پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب حرکت کرتی، $200\,\mathrm{MHz}$ تعدد کے برقی میدان کی سائن نما مستوی موج کی چوٹی لمحہ $t = 0$ پر $\boldsymbol{E}_0 = 150\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 210\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پائی جاتی ہے۔ الف) λ ، β ، $\boldsymbol{a}_E$ ، $\boldsymbol{a}_H$ ، H_0 اور مقناطیسی موج $\boldsymbol{H}_s$ حاصل کریں۔ ب) لمحہ $t = 0$ پر نقطہ N پہ برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔ پ) لمحہ $t = 1.5\,\mathrm{ns}$ پر نقطہ N پہ برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔ ت) نقطہ $P(5,3,7)$ پہ لمحہ $t = 2\,\mathrm{ns}$ پر برقی میدان کی شدت حاصل کریں۔

جوابات: $\lambda = \frac{3}{2}\,\mathrm{m}$ ، $\beta = 4.2\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{a}_E = 0.51\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 0.86\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ، $\boldsymbol{a}_H = -0.86\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 0.51\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ ،
$H_0 = 0.7733\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{H}_s = 0.7733(-0.86\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 0.51\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})e^{-j4.2z}$ ، $292\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $-90\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $266\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 10.3: خالی خلاء میں مستوی موج $\boldsymbol{E}_s = \boldsymbol{E}_0 e^{-j6z}$ دی گئی ہے۔ الف) موج کی تعدد ω حاصل کریں۔ ب) برقی میدان کا حیطہ بالترتیب $\boldsymbol{E}_0 = 50\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ، $\boldsymbol{E}_0 = (5+j10)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ، $\boldsymbol{E}_0 = 50\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 80\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{E}_0 = (30\underline{/45^\circ})\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ہونے کی صورت میں لمحہ $t = 0$ پر نقطہ $N(0,0,0)$ پہ $|\boldsymbol{E}|$ حاصل کریں۔

جوابات: $1.8\,\frac{\mathrm{Grad}}{\mathrm{s}}$ ، $50\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $11.18\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $94.3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $11.18\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $21.2\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ،

سوال 10.4: خالی خلاء میں $350\,\mathrm{MHz}$ تعدد کی مستوی موج $\boldsymbol{E}_s = (5+j2)(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - j4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})e^{j\beta z}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پائی جاتی ہے۔ λ اور β کی قیمتیں دریافت کریں۔ لمحہ $t = 1.4\,\mathrm{ns}$ پر نقطہ $z = 40\,\mathrm{cm}$ پہ $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ موج کا حیطہ حاصل کریں۔

جواب: $\lambda = \frac{6}{7}\,\mathrm{m}$ ، $\beta = \frac{7\pi}{3}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{E}(z = 40\mathrm{cm}, t = 1.4\,\mathrm{ns}) = 13.96\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 10.84\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $|\boldsymbol{E}|_{\text{بلندتر}} = 26.9\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 10.5: ایسا خطہ جس کے مستقل $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 4.4$ اور $\sigma = 0$ ہیں میں بڑھتے x محدد کی جانب حرکت کرتی، $250\,\mathrm{MHz}$ تعدد کی مستوی برقی موج پائی جاتی ہے۔ برقی میدان $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں ہے۔ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ v_p ، β ، λ ، η ، $\boldsymbol{E}_s$ ، $\boldsymbol{H}_s$ اور $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ ؛

جوابات: $v_p = 1.429\times10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ، $\beta = 10.99\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\lambda = 57.2\,\mathrm{cm}$ ، $\eta = 179.6\,\Omega$ ، $\boldsymbol{E}_s = E_0 e^{-j10.99x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ،
$\boldsymbol{H}_s = \frac{E_0}{179.6}e^{-j10.99x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{E_0^2}{359.2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 10.6: مستوی برقی موج $\boldsymbol{E} = E_0 e^{-\alpha z}\sin(\omega t - \beta z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $\eta = |\eta_0|\,e^{j\phi}$ دئے گئے ہیں۔ الف) دوری سمتیات $\boldsymbol{E}_s$ اور $\boldsymbol{H}_s$ حاصل کریں۔ ب) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{E}_s = E_0 e^{-\alpha z}e^{-j(\beta z + \pi)}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{H}_s = -\frac{E_0}{|\eta_0|}e^{-\alpha z}e^{-j(\beta z + \pi + \phi)}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{E_0^2}{2|\eta_0|}e^{-2\alpha z}\cos\phi\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

سوال10.7: خالی خلاء میں $\boldsymbol{E} = (30\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 22\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\cos(\omega t - 60x)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ الف) λ اور ω حاصل کریں۔ ب) دوری سمتیات $\boldsymbol{E}_s$ اور $\boldsymbol{H}_s$ لکھیں۔ پ) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\lambda = \frac{\pi}{30}\,\mathrm{m}$ ، $\omega = 1.8\times 10^{10}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ ، $\boldsymbol{E}_s = (30\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 22\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})e^{-j60x}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{H}_s = \frac{1}{120\pi}(-22\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 30\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})e^{-j60x}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{173}{30\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

سوال10.8: مستوی مقناطیسی موج کا دوری سمتیہ $\boldsymbol{H}_s = (5\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + j4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})e^{j20y}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور تعدد $200\,\mathrm{MHz}$ ہے۔ برقی موج کا زیادہ سے زیادہ حیطہ $1200\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ حاصل کریں β ، λ ، η ، v_p ، ϵ_R ، μ_R اور $\boldsymbol{H}(x,y,z,t)$ ؛

جوابات: $\beta = 20\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\lambda = \frac{\pi}{10}\,\mathrm{m}$ ، $\eta = 187.4\,\Omega$ ، $v_p = 6.28\times 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ، $\epsilon_R = 9.6$ ، $\mu_R = 2.4$ ، $\boldsymbol{H} = 5\cos(2\pi\times 200\times 10^6 t + 20y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 4\sin(2\pi\times 200\times 10^6 t + 20y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$

سوال10.9: میدان $\boldsymbol{E}(y,t) = 700\cos(2.5\times 10^7 t - \beta y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $\boldsymbol{H}(y,t) = 1.5\cos(2.5\times 10^7 t - \beta y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ مستوی موج کو ظاہر کرتے ہیں۔ یہ موج $1.7\times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔ حاصل کریں β ، λ ، η ، ϵ_R اور μ_R ؛

جوابات: $\beta = 0.147\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\lambda = 42.7\,\mathrm{m}$ ، $\eta = 467\,\Omega$ ، $\epsilon_R = 1.4$ ، $\mu_R = 2.2$

سوال10.10: بے ضیاع خطے کے مستقل $\mu_R = 1.2$ اور $\epsilon_R = 5.4$ ہیں۔ لمحہ $t = 10\,\mathrm{ns}$ پر نقطہ $N(2, 0.5, 1.5)$ پہ $15\,\mathrm{MHz}$ تعدد اور $E_x = 350\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $E_y = 0$ ، $E_z = 0$ کی خطی قطبی موج $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ حاصل کریں β ، λ ، v_p ، η ، E_0 ، $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$ ؛

جوابات: $v_p = 1.18\times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ، $\lambda = 7.85\,\mathrm{m}$ ، $\beta = 0.25\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\eta = 178\,\Omega$ ، $E_0 = 408.6\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = 408.6\cos(3\pi\times 10^7 t - 0.25\pi y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$

سوال10.11: خطی قطبی موج $\boldsymbol{E}_s = (E_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + E_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})e^{\alpha x}e^{j\beta x}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ایسے ضیاع کار خطے میں پائی جاتی ہے جہاں $\eta = |\eta_0|\,e^{j\phi}$ ہے۔ $\boldsymbol{H}_s$ ، $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$ ، $\boldsymbol{H}(x,y,z,t)$ اور $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ کے مساوات لکھیں۔

جوابات: $\boldsymbol{H}_s = \frac{1}{|\eta_0|}(E_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - E_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})e^{\alpha x}e^{j(\beta x - \phi)}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = (E_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + E_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})e^{\alpha x}\cos(\omega t + \beta x)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ، $\boldsymbol{H}(x,y,z,t) = \frac{1}{|\eta_0|}(E_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - E_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})e^{\alpha x}\cos(\omega t + \beta x - \phi)\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2|\eta_0|}(E_{y0}^2 + E_{z0}^2)e^{2\alpha x}\cos\phi\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

سوال10.12: کامل موصل سے بنی $\rho = 5\,\mathrm{mm}$ اور $\rho = 12\,\mathrm{mm}$ رداس کے نلکیوں کا محور z محدد ہے۔ دو نلکیوں کے درمیان ذو برق کے مستقل $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 3.2$ ہیں۔ اس ذو برق میں میدان $\boldsymbol{E} = \frac{1200}{\rho}\cos(\omega t - 5z)\boldsymbol{a}_\rho\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ الف) میکس ویل کے مساوات استعمال کرتے ہوئے ω حاصل کریں۔ ب) $\boldsymbol{H}$ کی مساوات حاصل کریں۔ پ) $\mathscr{P}$ اور $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔ ت) دونوں نلکیوں کے درمیانی خطے میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ جانب کتنی طاقت منتقل ہو رہی ہے۔

جوابات: $\omega = 8.38\times 10^8\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ ، $\boldsymbol{H} = \frac{5.7}{\rho}\cos(8.38\times 10^8 t - 5z)\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\mathscr{P} = \frac{6837}{\rho^2}\cos^2(8.38\times 10^8 t - 5z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{3418.6}{\rho^2}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ ، $2.5\,\mathrm{MW}$

سوال10.13: کروی محدد میں $\boldsymbol{E}_s = \frac{60}{r}\sin\theta e^{-j2r}\boldsymbol{a}_\theta\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $\boldsymbol{H}_s = \frac{1}{4\pi r}\sin\theta e^{-j2r}\boldsymbol{a}_\phi\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ دیے گئے ہیں۔ الف) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔ ب) رداس $r = 5\,\mathrm{cm}$ پر سطح $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ ، $0 < \phi < 2\pi$ سے خارج طاقت حاصل کریں۔

جوابات: $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{15\sin^2\theta}{2\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ ، $3.13\,\mathrm{W}$

سوال10.14: 12 GHz تعدد پر ایک فیرائٹ کے مستقل $\mu_R=5$ ، $\epsilon_R=8$ اور $\sigma=15\,\frac{\mathrm{mS}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ آپ سے گزارش ہے کہ α ، β ، v ، λ اور η حاصل کریں۔

جوابات: $\alpha=2.23\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ یا $19.4\,\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{m}}$ ، $\beta=1590\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $v=4.74\times10^{7}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ، $\lambda=3.95\,\mathrm{mm}$ ، $\eta=297.83+j0.418\,\Omega$

سوال10.15: ایسے خطے کے مستقل μ_R ، ϵ_R اور σ حاصل کریں جس میں 100 MHz تعدد پر طول موج 1 m ، قدرتی رکاوٹ کی حتمی قیمت $200\,\Omega$ اور تضعیفی مستقل $2\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ ہو۔

جوابات: $\mu_R=1.67$ ، $\epsilon_R=4.84$ ، $\sigma=19.06\,\frac{\mathrm{mS}}{\mathrm{m}}$

سوال10.16: 330 MHz تعدد کی مستوی موج ایسے غیر مقناطیسی خطے میں حرکت کر رہی ہے جس کے مستقل $\epsilon_R=2.8$ اور $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}=3.6\times10^{-4}$ ہیں۔ الف) اس خطے کی σ حاصل کریں۔ ب) α ، β اور λ حاصل کریں۔ پ) موج کی چوٹی کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد آدھی رہ جائے گی؟ ت) موج کی طاقت کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد آدھا رہ جائے گا؟ ٹ) کتنے فاصلے پر موج کے زاویے میں 30° تبدیلی رونما ہو گی؟

جوابات: $\sigma=1.85\times10^{-5}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ، $\alpha=0.04\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ ، $\beta=11.57\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\lambda=0.54\,\mathrm{m}$ ، 17.1 m ، 8.55 m ، 4.52 cm

سوال10.17: کپیسٹر C میں طاقت کے ضیاع کو کپیسٹر کے متوازی مزاحمت R سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایسے متوازی دور کی برقی رکاوٹ Z ہے۔ برقی رکاوٹ کے زاویہ θ کا کوسائن، یعنی $\cos\theta$ ، جزو ضربی طاقت کہلاتا ہے جبکہ کپیسٹر کی خاصیت Q سے مراد ωRC ہے۔ متوازی چادر کپیسٹر جس کے مستقل σ ، ϵ اور μ ہیں کے جزو ضربی طاقت اور Q کے مساوات کو مماس ضیاع $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ استعمال کرتے ہوئے لکھیں۔

جوابات: $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-2}}}$ ، $Q=\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-1}$

سوال10.18: تانبے کی ہم محوری تار کے اندرونی تار کا رداس 5 mm اور بیرونی تار کا اندرونی رداس 8 mm ہیں۔ دونوں تار گہرائی جلد δ سے بہت زیادہ موٹائی رکھتے ہیں جبکہ ذو برق بے ضیاع ہے۔ 550 MHz تعدد پر فی میٹر اندرونی تار، فی میٹر بیرونی تار اور فی میٹر مکمل ترسیلی تار کی مزاحمت دریافت کریں۔ تانبے کے مستقل کتاب کے آخر میں جدول 15.1 سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

جوابات: $195\,\frac{\mathrm{m\Omega}}{\mathrm{m}}$ ، $122\,\frac{\mathrm{m\Omega}}{\mathrm{m}}$ ، $316\,\frac{\mathrm{m\Omega}}{\mathrm{m}}$

سوال10.19: المونیم سے نلکی نما تار بنائی جاتی ہے جس کا اندرونی رداس 5 mm اور بیرونی رداس 6 mm ہیں۔ ایک کلو میٹر تار کی مزاحمت مندرجہ ذیل تعدد پر حاصل کریں۔ الف) یک سمتی رو۔ ب) 30 MHz پ) 1.2 GHz

جوابات: $758\,\mathrm{m\Omega}$ ، $46.7\,\Omega$ ، $295\,\Omega$

سوال10.20: کھانا جلد گرم کرنے کی خاطر عموماً برقی خرد موج چولھا[99] (مائیکروویو اون) استعمال کیا جاتا ہے جو عموماً 2.45 GHz کے تعدد پر کام کرتا ہے۔ اس چولھے کے دیوار سٹینلس سٹیل کے بنے ہوتے ہیں۔ سٹینلس سٹیل کے مستقل $\sigma=1.1\times10^{6}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ، $\mu_R=1$ اور $\epsilon_R=1$ لیتے ہوئے گہرائی جلد δ حاصل کریں۔ سٹینلس سٹیل چادر کی سطح پر $E_s=64\underline{/0^\circ}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ لیتے ہوئے چادر کے اندر میدان کی مساوات لکھیں۔

جوابات: $\delta=9.69\,\mathrm{\mu m}$ ، $E_s(z)=64e^{-1.03\times10^{-7}z(1+j)}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

[99]micro wave oven

سوال10.21: ایک غیر مقناطیسی موصل میں رفتار موج $4.5 \times 10^5 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ اور طول موج $0.25\,\mathrm{mm}$ ہے۔ تعدد f، گہرائی جلد δ اور موصل کی موصلیت σ حاصل کریں۔

جوابات: $f = 1.8\,\mathrm{GHz}$، $\delta = 39.8\,\mathrm{\mu m}$، $\sigma = 8.89 \times 10^4 \,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

سوال10.22: برقی موج $\boldsymbol{E} = \frac{270}{r} \sin\theta \cos[\omega(t - \frac{r}{c})]\boldsymbol{a}_\theta \,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ دی گئی ہے۔ رداس r کے کرہ سے کتنی طاقت خارج ہو رہی ہے۔

جواب: $810\,\mathrm{W}$

سوال10.23: برقی موج $\boldsymbol{E}_s = 3\boldsymbol{a}_\mathrm{X} - 5\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$ اور مقناطیسی موج $\boldsymbol{H}_s = 14\boldsymbol{a}_\mathrm{X} + 13\boldsymbol{a}_\mathrm{y} - 16\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ الف) حرکت موج کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔ ب) موج کی اوسط کثافت طاقت حاصل کریں۔ پ) $\mu_R = 1$ کی صورت میں ϵ_R حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{a} = 0.38\boldsymbol{a}_\mathrm{X} 0.53\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 0.76\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$، $71.7 \,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2}$، $\epsilon_R = 2.32$

سوال10.24: ضیاع کار خطہ $x < 0$ کے مستقل $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 1$ اور $\sigma = 1500 \,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں جبکہ $x > 0$ خالی خلاء ہے۔ خلاء میں نقطہ $N(0^+, 0, 0)$ پر مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H} = 300 \cos 5 \times 10^8 t\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہے۔ الف) نقطہ $(0^-, 0, 0)$ پر $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔ ب) خالی خلاء میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{Z}$ سمت حرکت کرتی موج تصور کرتے ہوئے نقطہ $(0^+, 0, 0,)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔ خطہ $z < 0$ میں $-\boldsymbol{a}_\mathrm{X}$ جانب حرکت کرتی موج تصور کرتے ہوئے نقطہ $(0^-, 0, 0)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{H} = 300 \cos 5 \times 10^8 t\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$، $\boldsymbol{E} = 113 \cos 5 \times 10^8 t\boldsymbol{a}_\mathrm{X} \,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$، $\boldsymbol{E} = 238 \cos(5 \times 10^8 t - 45^\circ)\boldsymbol{a}_\mathrm{Z} \,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال10.25: آمدی مستوی موج جس کی تعدد $\omega = 4.2 \times 10^8 \,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ ہے خطہ-ا، $z < 0$، $\sigma_1 = 0$، $\mu_{R1} = 1$، $\epsilon_{R1} = 3.2$ سے خطہ-2، $z > 0$، $\sigma_2 = 0$، $\mu_{R2} = 2.6$، $\epsilon_{R2} = 12$ میں داخل ہوتی ہے۔ آمدی برقی موج کا حیطہ $z = 0$، $t = 0$ پر $5.6 \,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ الف) η_1، η_2، β_1 اور β_2 حاصل کریں۔ ب) Γ اور τ حاصل کریں۔ پ) $E_1(t)$ اور $E_2(t)$ حاصل کریں۔ ت) $H_1(t)$ حاصل کریں۔ ٹ) لمحہ $t = 4\,\mathrm{ns}$ پر نقطہ $(0, 0, -1.5)$ پہ H_1 حاصل کریں۔

جوابات: $\eta_1 = 211\,\Omega$، $\eta_2 = 175\,\Omega$، $\beta_1 = 2.5 \,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$، $\beta_2 = 7.8 \,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$، $\Gamma = -0.0913$، $\tau = 0.9087$، $E_1 = 5.6 \cos(4.2 \times 10^8 t - 2.5z) - 0.511 \cos(4.2 \times 10^8 t + 2.5z) \,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$، $E_2 = 5.09 \cos(4.2 \times 10^8 t - 7.8z) \,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$، $H_1 = 26.59 \cos(4.2 \times 10^8 t - 2.5z) + 2.43 \cos(4.2 \times 10^8 t + 2.5z) \,\frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{m}}$، $H_1 = 16.49 \,\frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{m}}$

سوال10.26: تھیلا بنانے والے پلاسٹک میں $14\,\mathrm{GHz}$ تعدد کی مستوی موج $\boldsymbol{a}_\mathrm{X}$ سمت میں حرکت کرتے ہوئے $x = 0.3\,\mathrm{cm}$ پر پائے جانے والے کامل موصل سطح سے انعکاس پذیر ہوتی ہے۔ الف) وہ سطحیں دریافت کریں جن پر $\boldsymbol{E} = 0$ ہو گا۔ ب) اس پلاسٹک میں بلند تر برقی چوٹی اور بلند تر مقناطیسی چوٹی کی شرح حاصل کریں۔

جوابات: $x = 0.3 - 0.71n\,\mathrm{cm}$ جہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ہے، $\eta = 251\,\Omega$

سوال10.27: خطہ $z < 0$ بے ضیاع خالی خلاء ہے جبکہ ضیاع کار خطہ $z > 0$ کے مستقل $\epsilon = 30 \,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}}$، $\mu = 4.2 \,\frac{\mathrm{\mu H}}{\mathrm{m}}$ اور $\sigma = 4.6 \,\frac{\mathrm{mS}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ خالی خلاء سے سرحد پر آمدی موج کی مساوات $E_{x1}^+ = 340e^{-\alpha_1 z} \cos(2 \times 10^8 t - \beta_1 z) \,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ الف) α_1 اور β_1 حاصل کریں۔ ب) انعکاسی مستقل حاصل کریں۔ پ) انعکاسی موج E_{x1}^- کی مساوات حاصل کریں۔ ت) ترسیلی موج E_{x2}^+ کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $\alpha_1 = 0$، $\beta_1 = 0.667 \,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$، $\Gamma = 0.176\underline{/111^\circ}$، $E_{x1}^- = 59.8 \cos(2 \times 10^8 t + 0.667z + 111^\circ) \,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$، $E_{x2}^+ = 324e^{-0.81z} \cos(2 \times 10^8 t - 2.39z + 9.9^\circ) \,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

سوال 10.28: المونیم کی سطح $y = 0$ پر خالی خلاء سے عمودی آمدی موج $E_{x1}^{+} = E_{x10}^{+}\cos(4\times 10^{8}t - \beta y)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ آمدی طاقت کا کتنا فی صد سطح سے انعکاس پذیر ہوتا ہے۔

جواب: 99.997 %

سوال 10.29: مستوی موج خطہ-1 سے خطہ-2 پر عمودی پڑتی ہے۔ ان خطوں کے مستقل $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ، $\epsilon_{R1} = \mu_{R1}^{3}$ اور $\epsilon_{R2} = \mu_{R2}^{3}$ ہیں۔ آمدی طاقت کا 40 % سرحد سے واپس لوٹتا ہے۔ $\frac{\mu_{R2}}{\mu_{R1}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{\mu_{R2}}{\mu_{R1}} = 0.225$ اور $\frac{\mu_{R2}}{\mu_{R1}} = 4.442$

سوال 10.30: خالی خلاء سے مستوی موج ضیاع کار خطہ $\sigma = 0.002\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ، $\epsilon_R = 8.2$ اور $\mu_R = 1.8$ پر عمودی پڑتی ہے۔ آمد موج کی تعدد 100 MHz اور کثافت طاقت $12\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ ہے۔ الف) ابتدائی ترسیلی کثافت طاقت حاصل کریں۔ ب) ضیاع کار خطے میں کی قیمت حاصل کریں۔ پ) دوسرے خطے میں کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد ترسیلی کثافت طاقت $0.2\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ رہ جائے گی۔

جوابات: $10.42\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ ، $\alpha_2 = 0.1765\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ ، 11.2 m

سوال 10.31: خالی خلاء $z < 0$ میں برقی موج $\boldsymbol{E}_s = 100e^{-j15z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 28\underline{/30^{\circ}}e^{j15z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ پائی جاتی ہے۔ الف) موج کی تعدد حاصل کریں۔ ب) خطہ $z > 0$ کی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ پ) دو خطوں کے سرحد کے قریب کس مقام پر برقی موج کی چوٹی پائی جاتی ہے؟

جوابات: 715.7 MHz ، $\eta = 585 + j178\,\Omega$ ، $z = -1.75\,\mathrm{cm}$

سوال 10.32: بے ضیاع خطہ $z < 0$ کے مستقل $\sigma_1 = 0$ ، $\mu_1 = 30\,\frac{\mu\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$ اور $\epsilon_1 = 120\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}}$ ہیں جبکہ ضیاع کار خطہ $z > 0$ کے مستقل $\sigma_1 = 0.02\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ، $\mu_1 = 50\,\frac{\mu\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$ اور $\epsilon_1 = 260\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ آمدی موج $\boldsymbol{E}_s = 10e^{-\alpha_1 z}\cos(9\times 10^{8}t - \beta_1 z)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ الف) α_1 اور β_1 حاصل کریں۔ ب) $\mathscr{P}^{+}_{1\,\text{اوسط}}$ اور $\mathscr{P}^{-}_{1\,\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔ پ) $\mathscr{P}^{+}_{2\,\text{اوسط}}$ کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $\alpha_1 = 0\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ ، $\beta_1 = 54\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\mathscr{P}^{+}_{1\,\text{اوسط}} = 100\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{m}^2}$ ، $\mathscr{P}^{-}_{1\,\text{اوسط}} = -0.486\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{m}^2}$ ، $\mathscr{P}^{+}_{2\,\text{اوسط}} = 99.514e^{-8.76z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 10.33: خطہ $0 < z < 1.5\,\mathrm{m}$ میں بے ضیاع ذو برق پایا جاتا ہے جس کے مستقل $\sigma_2 = 0$ ، $\mu_{R2} = 1$ اور $\epsilon_{R2} = 6$ ہیں۔ اس خطے کو دونوں جانب خالی خلاء پائی جاتی ہے۔ مستوی موج جس کی تعدد $\omega = 6\times 10^{8}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ہے سرحد $z = 0$ کی جانب $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ الف) ذو برق میں β_2 حاصل کرتے ہوئے سرحد $z = 0$ پر $\eta_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔ ب) خطہ $z < 0$ میں Γ_1 اور s_1 حاصل کریں۔ پ) ذو برق میں $z = 1.5\,\mathrm{m}$ پر سرحد سے منعکس موج کو استعمال کرتے ہوئے Γ_2 اور s_2 حاصل کریں۔ ت) خطہ $z > 1.5\,\mathrm{m}$ میں s_3 حاصل کریں۔ ٹ) خطہ $z < 0$ میں سرحد کے قریب ترین ایسا نقطہ حاصل کریں جہاں بلند تر برقی میدان پایا جاتا ہے۔

جوابات: $\beta_2 = 2\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ ، $\eta_{\text{داخلی}} = 77.69 - j66.76\,\Omega$ ، $\Gamma_1 = -0.623 - j0.238 = 0.667e^{-j2.776}$ ، $s_1 = 5$ ، $\Gamma_2 = 0.42$ ، $s_2 = 2.45$ ، $s_3 = 1$ ، $z = -0.924\,\mathrm{m}$

سوال 10.34: ضیاع کار خطہ جہاں $\alpha = 0.4\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ ہو میں موج 100 m چلنے کے بعد سرحد سے منعکس ہو کر واپس اسی ابتدائی نقطے تک پہنچتی ہے۔ انعکاسی مستقل $\Gamma = 0.4 - j0.5$ ہے۔ واپس آتی موج اور ابتدائی موج کے طاقت کی شرح حاصل کریں۔

جواب: 1.33×10^{-70}

سوال 10.35: خطہ $z<0$ اور خطہ $z>0$ کامل ذو برق پر مشتمل ہیں جہاں $\sigma=0$ اور $\mu_R=1$ ہیں۔ تعدد $2\times10^{10}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ کی موج $\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ سمت میں حرکت کرتے ہوئے دونوں خطوں سے گزرتی ہے۔ ان خطوں میں طول موج بالترتیب 8 cm اور 6 cm ہیں۔ الف) Γ حاصل کریں۔ ب) کتنی فی صد طاقت منعکس پذیر ہوتی ہے۔ پ) کتنی فی صد طاقت ترسیل ہوتی ہے۔ ت) شرح ساکن موج s حاصل کریں۔

جوابات: $\Gamma=0.143e^{j\pi}$ ، $2.04\,\%$ ، $97.96\,\%$ ، $s=1.333$

سوال 10.36: کامل ذو برق $\sigma=0$ سے خالی خلاء میں موج داخل ہوتی ہے۔ مندرجہ ذیل صورتوں میں ذو برق کی جزوی برقی مستقل ϵ_R حاصل کریں۔ الف) منعکس موج کی چوٹی آمدی موج کے چوٹی کی آدھی ہے۔ ب) منعکس موج کا طاقت آمدی موج کے طاقت کا آدھا ہے۔ پ) ذو برق میں $|\boldsymbol{E}|_{\text{کمتر}}$ کی قیمت $|\boldsymbol{E}|_{\text{بلندتر}}$ کی آدھی ہے۔

جوابات: $\epsilon_R=9$ ، $\epsilon_R=34$ ، $\epsilon_R=4$

سوال 10.37: ایک ایسا خطہ جس کے مستقل ہمیں معلوم نہیں ہیں پر خالی خلاء سے 330 MHz تعدد کی موج پڑتی ہے۔ خالی خلاء میں سرحد کے قریب $s=3$ حاصل ہوتا ہے جبکہ موج کی پہلی کمتر قیمت سرحد سے 0.3λ فاصلے پر پائی جاتی ہے۔ انعکاسی مستقل کا زاویہ ϕ اور اس کی حتمی قیمت $|\Gamma|$ حاصل کرتے ہوئے خطے کی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔

جوابات: $\phi=0.2\pi$ ، $|\Gamma|=0.5$ ، $\eta=641+j501\,\Omega$

سوال 10.38: سمندری پانی کے مستقل $\sigma=5\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ اور $\epsilon_R=78$ ہیں۔ خالی خلاء سے اس پر 100 MHz تعدد کی موج پڑتی ہے۔ آمدی طاقت کا کتنا حصہ واپس خلاء میں لوٹتا ہے۔

جواب: $90.7\,\%$

سوال 10.39: خالی خلاء میں $242\,\Omega$ قدرتی رکاوٹ کی $\frac{\lambda}{8}$ موٹی تہہ پائی جاتی ہے۔ آمدی طاقت کا کتنا حصہ اس تہہ سے گزر پاتا ہے؟

جوابات: $\eta_{\text{داخلی}}=220-j101\,\Omega$ ، $\Gamma=0.308\underline{/-2.4\,\text{rad}}$ ، $91\,\%$

سوال 10.40: آمدی موج کی تعدد تبدیل کئے بغیر سوال 10.39 کو مندرجہ ذیل صورتوں میں دوبارہ حل کریں۔ الف) تہہ کی موٹائی دگنی کر دی جاتی ہے۔ ب) تہہ کی موٹائی آدھی کر دی جاتی ہے۔ پ) تہہ کی موٹائی چار گنا کر دی جاتی ہے۔

جوابات: $82.7\,\%$ ، $97\,\%$ ، $100\,\%$

سوال 10.41: مستوی موج کا برقی جزو $\boldsymbol{E}_s=10e^{-j\beta x}\boldsymbol{a}_{\text{z}}+15e^{-j\beta x}\boldsymbol{a}_{\text{y}}\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہے۔ الف) اس موج کی قطبیت دریافت کریں ب) $\boldsymbol{H}_s$ حاصل کریں۔ پ) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔

جوابات: الف) موج خطی قطبی ہے۔ یہ موج yz سطح میں رہتے ہوئے y محدد کے ساتھ 33.7° زاویہ بناتی ہے۔
ب) $\boldsymbol{H}_s=-26.5e^{-j\beta x}\boldsymbol{a}_{\text{y}}+39.8e^{-j\beta x}\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{mA}}{\text{m}}$ ؛ پ) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}=0.43\boldsymbol{a}_{\text{x}}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

سوال 10.42: بائیں قطبی $\boldsymbol{E}_s=E_0(\boldsymbol{a}_{\text{x}}+j\boldsymbol{a}_{\text{y}})e^{-j\beta z}$ دی گئی ہے۔ الف) $\boldsymbol{H}_s$ دریافت کریں۔ ب) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{H}_s=\frac{E_0}{\eta_0}(\boldsymbol{a}_{\text{y}}-j\boldsymbol{a}_{\text{x}})e^{-j\beta z}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}=\frac{E_0^2}{\eta_0}\boldsymbol{a}_{\text{z}}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

سوال 10.43: مستوی برقی موج $\boldsymbol{E}_s = 10(\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + j\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}})e^{-j50y}$ ہے۔الف) تعدد حاصل کریں۔ب) مقناطیسی موج حاصل کریں۔پ) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔ت) موج کی قطبیت دریافت کریں

جوابات: $2.39\,\mathrm{GHz}$ ، $\boldsymbol{H}_s = \frac{10}{377}(\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - j\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})e^{-j50y}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = 0.27\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$، بائیں قطبی

سوال 10.44: برقی موج $\boldsymbol{E}_s = 15e^{-j\beta z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 18e^{-j\beta z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ایسے خطے سے گزرتی ہے جس کی قدرتی رکاوٹ η مخلوط عدد ہے۔الف) $\boldsymbol{H}_s$ حاصل کریں۔ب) $\mathscr{P}_{\text{اوسط}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{H}_s = \frac{1}{\eta}(-18e^{j\phi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 15\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})e^{-j\beta z}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ، $\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{275}{\eta^*}\Big|_{\text{حقیقی}}$

سوال 10.45: شیشے کی چادر کے بائیں سطح پر موج عمودی آمد ہے۔شیشے کی انحرافی مستقل $n = 1.45$ ہے جبکہ اس کی دائیں سطح کامل موصل کے ساتھ جڑی ہے۔شیشے کی موٹائی $\frac{\lambda}{2}$ ، $\frac{\lambda}{4}$ اور $\frac{\lambda}{8}$ ہونے کی صورت میں بائیں سطح پر انعکاسی موج کے زاویے میں فرق دریافت کریں۔

جوابات: 0° ، 71° ، -69.2°

سوال 10.46: برقی موج کی دوری سمتی مساوات $\boldsymbol{E}_s = (5\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + j20\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})e^{j\beta z}$ ہے۔اس کی قطبیت، شرح رداس اور جھکاو دریافت کریں۔

جواب: دایاں بیضوی قطبی موج۔شرح رداس 4 ہے۔جھکاو 90° ہے۔

سوال 10.47: برقی موج $\boldsymbol{E} = (3\underline{/-15^\circ}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 4\underline{/30^\circ}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})e^{j\beta z}$ کی حقیقی مساوات حاصل کرتے ہوئے اس کی قطبیت دریافت کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{E} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cos(\omega t + \beta z - 15^\circ) - 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cos(\omega t + \beta z + 30^\circ)$، دایاں بیضوی قطبی

سوال 10.48: مثال 10.12 کے طرز پر بائیں دائری قطبی موج کی مساوات حاصل کریں جسے مساوات 10.143 میں پیش کیا گیا ہے۔

ڈھلوان، پھیلاو، گردش اور لاپلاسی

کارتیسی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & az \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

نلکی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_{\rho} & \boldsymbol{a}_{\phi} & \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

کروی محدد

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_{\phi} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r}\right)\boldsymbol{a}_{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{a}_{\phi} \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}
\end{aligned}
$$

5349 عمومی محدد

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{1}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}\boldsymbol{a}_v + \frac{1}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w}\boldsymbol{a}_w \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{k_1 k_2 k_3}\left(\frac{\partial(k_2 k_3 A_u)}{\partial u} + \frac{\partial(k_3 k_1 A_v)}{\partial v} + \frac{\partial(k_1 k_2 A_w)}{\partial w}\right) \\
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{k_2 k_3}\left[\frac{\partial(k_3 A_w)}{\partial v} - \frac{\partial(k_2 A_v)}{\partial w}\right]\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_3 k_1}\left[\frac{\partial(k_1 A_u)}{\partial w} - \frac{\partial(k_3 A_w)}{\partial u}\right]\boldsymbol{a}_v \\
&\quad + \frac{1}{k_1 k_2}\left[\frac{\partial(k_2 A_v)}{\partial u} - \frac{\partial(k_1 A_u)}{\partial v}\right]\boldsymbol{a}_w \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{k_1 k_2 k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_2 k_3}{k_1}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_3 k_1}{k_2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{k_1 k_2}{k_3}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]
\end{aligned}$$

5350 سمتی مماثل

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G} = FG\cos\theta \qquad \text{غیر سمتی (نقطہ) ضرب}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}}{FG}\right)$$

$$\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G} = FG\sin\theta\,\boldsymbol{a}_N \qquad \text{سمتی (صلیبی) ضرب}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left[\frac{(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{a}_N}{FG}\right]$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) &= 0 \\
\nabla\cdot\nabla f &= \nabla^2 f \\
\nabla\times\nabla f &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla(f+g) &= \nabla f + \nabla g \\
\nabla\cdot(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) &= \nabla\cdot\boldsymbol{F} + \nabla\cdot\boldsymbol{G} \\
\nabla\times(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) &= \nabla\times\boldsymbol{F} + \nabla\times\boldsymbol{G}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\
\nabla\cdot(f\boldsymbol{G}) &= f(\nabla\cdot\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G}\cdot(\nabla f) \\
\nabla\times(f\boldsymbol{G}) &= f(\nabla\times\boldsymbol{G}) + (\nabla f)\times\boldsymbol{G}
\end{aligned}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) - \nabla^2\boldsymbol{F}$$

جہاں $\nabla^2\boldsymbol{F}$ سے مراد

$$\nabla^2\boldsymbol{F} = \nabla^2 F_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \nabla^2 F_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \nabla^2 F_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{Z}}$$

ہے۔

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{G} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{G}) \\
\boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{H}) &= \boldsymbol{G} \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{H} \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) \\
\nabla \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{F}(\nabla \cdot \boldsymbol{G}) - \boldsymbol{G}(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} \\
\nabla(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) &= (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \times (\nabla \times \boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G} \times (\nabla \times \boldsymbol{F})
\end{aligned}
$$

سطحی اور حجمی تکمل کے تعلق 5351

مندرجہ ذیل تین مساوات میں دائیں جانب حجمی تکمل کے حجم کو بائیں جانب سطحی تکمل کی سطح گھیرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\oint_S f \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_h \nabla f \,\mathrm{d}h \\
\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_h \nabla \cdot \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}h \qquad \text{مسئلہ پھیلاو} \\
\oint_S \boldsymbol{a}_N \times \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}S &= \int_h \nabla \times \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}h
\end{aligned}
$$

خطی اور سطحی تکمل کے تعلق 5352

مندرجہ ذیل دو مساوات میں دائیں جانب سطحی تکمل کی سطح کو بائیں جانب خطی تکمل کی بند راہ گھیرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\oint_l f \,\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_S \boldsymbol{a}_N \times \nabla f \,\mathrm{d}S \\
\oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \int_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \text{مسئلہ سٹوکس}
\end{aligned}
$$

complex permitivity
dispersion
try to resolve the issue of using k and γ as propagation constants
kraus p473 fig 10-60 sec 10.18 and 10.19, 10.17,10.16,10.15,10.11 or do the entire chap9 and 10 transmission from kraus too
fourier transform sec 14.8 of kraus must draw the figures
charge is barqi bar and let the reader figure out which bar is meant
degree angle and degree celcius, ohm, micro etc not showing
kraus p581 mentions three types of impedances: intrinsic, characteristic and transverse. ensure that i too have these distinctions
kraus fig-13.28 and fig 13.29 and table 13.3 (on p577) are v. impt
Huygens improvements
figTransmissionSmithFromInternet.tex is not giving the figure of the book
the answers should be at the end of the book
handle all side notes ( ) and remove the corresponding text
read chapter 9 onwards (proof reading)
energy travels along the wire and not in the wire.
antenna chapter, 3D figure at start and complete the start section.
house completion certificate.
zaryab fish
F=-dW/dT to include in inductance chapter plus a question or two
magnetizartion curve and an iteration example. fig 8.10, 11 of hayt.
add questions to machine book too.

when giving fields always remember the following rules:
always ensure that divergence of magnetic field is zero.
moving waves must be of the form $E = E0\cos(wt - kz)$ where $c = (\mu * \epsilon)^{-0.5}$ and $k = 2 * \pi/\lambda$
include complex permitivity (7th ed Q12.18 says sigma=omega*epsilon")
include 4th ed fig 11.11 of page 422

جدول 15.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیر	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^{7}	گریفائٹ	7×10^{4}
تانبا	5.80×10^{7}	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^{7}	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^{7}	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^{7}	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^{7}	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^{7}	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^{7}	مقطر پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^{7}	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^{7}	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^{7}	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^{7}	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^{7}	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^{7}	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^{7}	کوارٹس	10^{-17}

جدول 15.2: ϵ_R and $\sigma/\omega\epsilon$

چیز	ϵ_R	$\sigma/\omega\epsilon$
خالی خلاء	1	
ہوا	1.0006	
المونیم اکسائڈ	8.8	0.0006
عنبر	2.7	0.002
بیک لائٹ	4.74	0.022
کاربن ڈائی آکسائڈ	1.001	
جرمینیم	16	
شیشہ	4 تا 7	0.001
برف	4.2	0.1
ابرق	5.4	0.0006
نائلون	3.5	0.02
کاغذ	3	0.008
پلیکسی گلاس	3.45	0.04
پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)	2.26	0.0002
پولیسٹرین	2.55	0.000 05
چینی مٹی	6	0.014
پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)	4	0.0006
کوارٹس	3.8	0.000 75
ربڑ	2.5 تا 3	0.002
سلیکا SiO_2	3.8	0.000 75
سلیکان	11.8	
قدرتی برف	3.3	0.5
کھانے کا نمک	5.9	0.0001
خشک مٹی	2.8	0.07
سٹائروفوم	1.03	0.0001
ٹیفلان	2.1	0.0003
ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ	100	0.0015
مقطر پانی	80	0.04
سمندری پانی		4
خشک لکڑی	1.5 تا 4	0.01

جدول 15.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 15.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$