برقی و مقناطیسیات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1 سمتیات 1

1.1 مقداری اور سمتیہ 1

1.2 سمتی الجبرا 2

1.3 کارتیسی محدد 3

1.4 اکائی سمتیات 6

1.5 میدانی سمتیہ 10

1.6 سمتی رقبہ 10

1.7 غیر سمتی ضرب 10

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب 15

1.9 گول نلکی محدد 18

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب 21

1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق 21

1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں 27

1.10 کروی محدد 29

2 کولومب کا قانون 39

2.1 قوت کشش یا دفع 39

2.2 برقی میدان کی شدت 43

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان 46

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح 52

2.5 چارج بردار حجم 55

2.6 مزید مثال 56

2.7 برقی میدان کے سمت بہاو خط 64

2.8 سوالات 65

3 گاؤس کا قانون اور پھیلاو 67

3.1 ساکن چارج 67

3.2 فیراڈے کا تجربہ 67

3.3 گاؤس کا قانون 68

3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال 70

3.4.1 نقطہ چارج 70

3.4.2 یکساں چارج بردار کروی سطح 72

3.4.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر 73

3.5 ہم محوری تار 73

3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح 75

3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق 76

3.8 پھیلاو 79

3.9 نکلی محدد میں پھیلاو کی مساوات 81

3.10 پھیلاو کی عمومی مساوات 82

3.11 مسئلہ پھیلاو 85

4 توانائی اور برقی دباو 87
4.1 توانائی اور کام 87
4.2 لکیری تکملہ 88
4.3 برقی دباو 94
4.3.1 نقطہ چارج کا برقی دباو 95
4.3.2 لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو 96
4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباو 96
4.4 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباو 97
4.5 برقی دباو کی ڈھلوان 100
4.5.1 نلکی محدد میں ڈھلوان 104
4.5.2 کروی محدد میں ڈھلوان 105
4.6 جفت قطب 107
4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاو خط 109
4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی 112

5 موصل، ذو برق اور کپیسٹر 117
5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو 117
5.2 استمراری مساوات 119
5.3 موصل 121
5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط 126
5.5 عکس کی ترکیب 130
5.6 نیم موصل 133
5.7 ذو برق 134
5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط 139
5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط 143
5.10 کپیسٹر 143
5.10.1 متوازی چادر کپیسٹر 145
5.10.2 ہم محوری کپیسٹر 146
5.10.3 ہم کوہ کپیسٹر 146
5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر 148
5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس 149

6 پوئسن اور لاپلاس مساوات 157

6.1 مسئلہ یکتائی 159

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے 160

6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات 161

6.4 لاپلاس مساوات کے حل 162

6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال 169

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل 171

6.7 عددی دہرانے کا طریقہ 179

7 ساکن مقناطیسی میدان 185

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون 185

7.2 ایمپیئر کا دوری قانون 190

7.3 گردش 194

7.3.1 نلکی محدد میں گردش 202

7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات 207

7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات 209

7.4 مسئلہ سٹوکس 210

7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو 213

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو 220

7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول 226

7.7.1 سمتی مقناطیسی دباو 226

7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون 227

8 مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ 233

8.1 متحرک چارج پر قوت 233

8.2 تفرقی چارج پر قوت 234

8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت 237

8.4 قوت اور مروڑ 238

8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے 244

8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل 245

8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط 248

8.8 مقناطیسی دور 249

8.9 مقناطیسی مخفی توانائی 252

8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ 253

8.11 مشترکہ امالہ 258

9 وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات 261

9.1 فیراڈے کا قانون 261

9.2 انتقالی برقی رو 268

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل 272

9.4 میکس ویل مساوات کی تکمل شکل 273

9.5 تاخیری دباو 276

10 مستوی امواج 281

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج 281

10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج 282

10.2.1 خالی خلاء میں امواج 290

10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج 291

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج 293

10.3 پوئنٹنگ سمتیہ 296

10.4 موصل میں امواج 300

10.5 انعکاس مستوی موج 306

10.6 شرح ساکن موج 312

11 ترسیلی تار 321

11.1 ترسیلی تار کے مساوات 321

11.2 ترسیلی تار کے مستقل 325

11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل 326

11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل 329

11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار 330

11.3 ترسیلی تار کے چند مثال 332

11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ 336

11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ 343

11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال 345

12 تقطیب موج 349

12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب 349

12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئنٹنگ سمتیہ 353

13 ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار 355

13.1 ترچھی آمد 355

13.2 ترسیم ہائی گن 366

14 موتج اور گھمکیا 369

14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور موتج کا موازنہ 369

14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے موتج میں عرضی برقی موج 370

14.3 کھوکھلا مستطیلی موتج 377

14.3.1 مستطیلی موتج کے میدان پر تفصیلی غور 386

14.4 مستطیلی موتج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج 393

14.5 کھوکھلی نالی موتج 397

14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف 404

14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف 406

14.8 سطحی موج 409

14.9 ذو برق تختی موتج 413

14.10 شیش ریشہ 417

14.11 پردہ بصارت 419

14.12 گھمکی خلاء 421

14.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل 424

15 اینٹینا اور شعاعی اخراج 433
15.1 تعارف 433
15.2 تاخیری دباو 433
15.3 مختصر جفت قطبی اینٹینا 435
15.4 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت 444
15.5 ٹھوس زاویہ 447
15.6 موثر رقبہ، سمتیت اور افزائش 448
15.7 قطاری ترتیب 455
15.7.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع 455
15.7.2 ضرب نقش 456
15.7.3 ثنائی قطار 457
15.7.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار 459
15.7.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار 461
15.7.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار 462
15.8 تداخُل پیما 466
15.9 مسلسل موثر رقبے کی نقش 467

16 سوالات 469

باب 1

سمتیات

1.1 مقداری اور سمتیہ

وہ طبعی مقدار جس کے مکمل اظہار کے لئے سمت کی ضرورت نہیں ہوتی مقداری[1] کہلاتا ہے۔کسی چیز کی کمیت m یا اس کا درجہ حرارت T مقداری کی مثالیں ہیں۔مقداری کی قیمت اٹل یا متغیر ممکن ہے۔کمیت اٹل مقداری کی مثال ہے۔متغیر مقداری کی قیمت مختلف اوقات اور نقاط پر مختلف ہو سکتی ہے۔یوں کسی بھی نقطے پر درجہ حرارت کی قیمت وقت t کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔اسی طرح کسی بھی وقت مختلف نقاط پر درجہ حرارت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔یوں اگر صبح کے وقت اسلام آباد میں کسی مقام پر درجہ حرارت $12\,^\circ\mathrm{C}$ ہو تو دوپہر کو اسی مقام پر درجہ حرارت $30\,^\circ\mathrm{C}$ ہو سکتا ہے۔درجہ حرارت T، وقت t، کارتیسی محدد[2] کے متغیرات x، y اور z تمام مقداری متغیرات ہیں۔

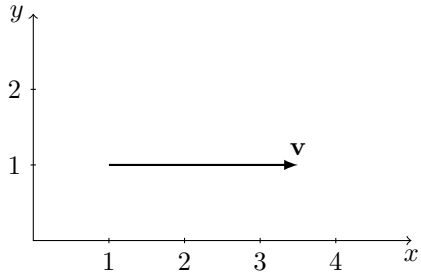
ایسی طبعی مقدار جسے بیان کرنے کے لئے سمت درکار ہو سمتیہ[3] کہلاتا ہے۔اس کتاب میں سمتیہ کی قیمت (یا طول) کو مثبت تصور کیا جائے گا۔یوں سمتیہ کی حتمی قیمت ہی اس کی مقدار ہو گی۔سمتیہ کی مثالیں قوت، سمتی رفتار اور سمتی اسراع ہیں۔

اس کتاب میں مقداری متغیرات کو سادہ طرز کی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے حروف مثلاً a، b، α، $\cdots$ یا بڑے حروف مثلاً A، B، Ψ، $\cdots$ سے ظاہر کیا جائے گا۔سمتیہ متغیرات کو موٹی لکھائی میں انگریزی یا لاطینی زبان کے چھوٹے یا بڑے حروف سے ظاہر کیا جائے گا۔یوں قوت کو $\mathbf{F}$ جبکہ سمتی رفتار کو $\mathbf{v}$ سے ظاہر کیا جائے گا۔قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں قوت کو $\vec{F}$ یا $\overrightarrow{F}$ لکھا جاتا ہے۔سمتیہ کو تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں تیر کی لمبائی سمتیہ کی حتمی قیمت $|\mathbf{F}|$ ظاہر کرتی ہے جبکہ سمتیہ کی سمت تیر کی سمت سے ظاہر کی جاتی ہے۔سمتیہ کی حتمی قیمت کو سمتیہ ظاہر کرنے والے حرف کو سادہ لکھائی میں لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں قوت $\mathbf{F}$ کی حتمی قیمت کو F لکھا جائے گا۔

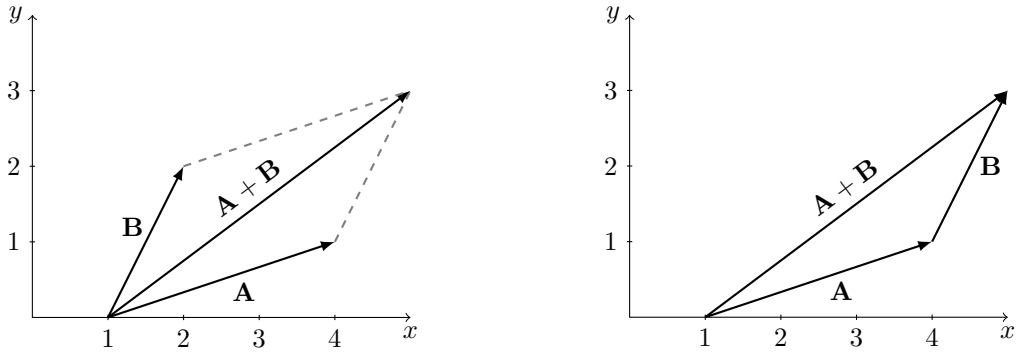
شکل 1.1 میں نقطہ $(1,1)$ پر پانی کی رفتار کو سمتیہ $\mathbf{v}$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس نقطے پر مثبت افقی محور کی سمت میں پانی کی رفتار $2.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے۔سمتیہ کی دُم اس مقام پر رکھی جاتی ہے جہاں سمتیہ کی قیمت بیان کی جا رہی ہو۔یوں شکل میں سمتیہ کی دُم $(1,1)$ پر رکھی گئی ہے۔اس شکل میں $1\,\mathrm{cm}$ کی لمبائی $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ کی رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔

---

[1] scalar
[2] Cartesian coordinates
[3] vector



شکل 1.1: سمتیہ



(ا) سر کے ساتھ دُم جوڑ کر مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔ (ب) متوازی الاضلاع سے بھی مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.2: سمتیوں کے مجموعے کا حصول

1.2 سمتی الجبرا

دو سمتیوں کا ترسیمی مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر ایک سمتیہ کے سر کو دوسری سمتیہ کے دُم کے ساتھ ملایا جاتا ہے۔پہلی سمتیہ کی دُم سے دوسری سمتیہ کے سر تک سمتیہ حاصل جمع ہو گا۔اس عمل کو شکل 1.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔شکل میں $\mathbf{A}$ کے سر کے ساتھ $\mathbf{B}$ کی دُم ملائی گئی ہے۔دو سے زیادہ سمتیوں کا مجموعہ بھی اسی عمل کو استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔اس عمل کو سر سے دُم جوڑنا[4] کہتے ہیں۔شکل 1.2-ب میں دو سمتیوں کے دُم ملا کر سمتیوں کے متوازی الاضلاع[5] سے ان کا مجموعہ حاصل کرنا دکھایا گیا ہے جسے دیکھ کر صاف ظاہر ہے کہ $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ ہے یعنی سمتیوں کا مجموعہ قانون تبادل[6] پر پورا اترتا ہے۔اسی طرح سمتیوں کا مجموعہ قانون تلازمی[7]

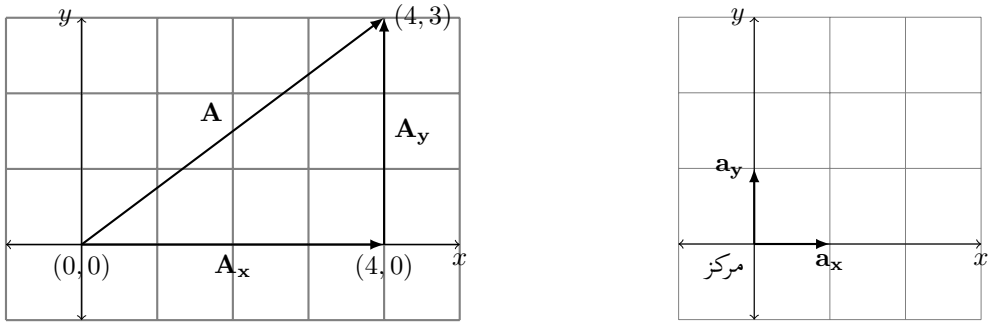
$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} \tag{1.1}$$

پر بھی پورا اترتا ہے۔

سمتیوں کے تفریق کا اصول جمع کے اصول سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ہم $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ کو $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$ لکھ سکتے ہیں جہاں $-\mathbf{B}$ سے مراد یہ ہے کہ سمتیہ $\mathbf{B}$ کی سمت الٹی کر دی گئی ہے۔یوں $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ حاصل کرنے کی خاطر $\mathbf{B}$ کی سمت الٹی کرتے ہوئے اس نئے سمتیہ کو $\mathbf{A}$ کے ساتھ جمع کیا جاتا ہے۔

---

[4] head to tail rule
[5] parallelogram law
[6] commutative law
[7] associative law



(ا) اکائی سمتیہ

(ب) اکائی سمتیوں کی مدد سے کسی بھی سمتیہ کو ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

شکل 1.3: اکائی سمتیہ اور ان کا استعمال

سمتیہ $\mathbf{A}$ کو مثبت مقداری k سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت پر کوئی اثر نہیں ہوتا جبکہ اس کی لمبائی k گنا ہو جاتی ہے۔اس کے برعکس سمتیہ $\mathbf{A}$ کو منفی مقداری $-k$ سے ضرب دینے سے سمتیہ کی سمت الٹ ہو جاتی ہے اور اس کی لمبائی $|k|$ گنا ہو جاتی ہے۔

دو سمتیے اُس صورت میں برابر ہوتے ہیں جب ان کا تفریق صفر کے برابر ہو یعنی $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ تب ہو گا جب $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=0$ ہو۔

سمتی میدان کے متغیرات کو ہم آپس میں جمع یا منفی صرف اُس صورت کریں گے جب یہ متغیرات ایک ہی نقطے پر بیان کئے گئے ہوں۔یوں کسی بھی نقطے پر دو یا دو سے زیادہ مقناطیسوں کا اجتماعی مقناطیسی میدان حاصل کرتے ہوئے اس نقطے پر تمام مقناطیسوں کا علیحدہ علیحدہ مقناطیسی میدان لیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

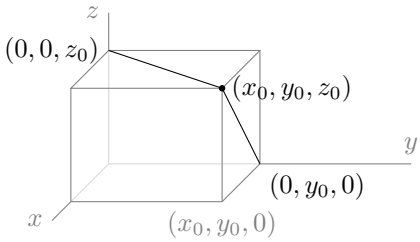
اگر سمتی میدان کی بات نہ ہو رہی ہو تب مختلف مقامات پر پائے جانے والے سمتیوں کا بھی مجموعہ یا فرق لیا جا سکتا ہے۔یوں سمندر کے پانی میں ڈوبے آب دوز کی اوپر اور نچلی سطح پر قوت کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا یہ مزید ڈوبے گا یا نہیں۔

1.3 کارتیسی محدد

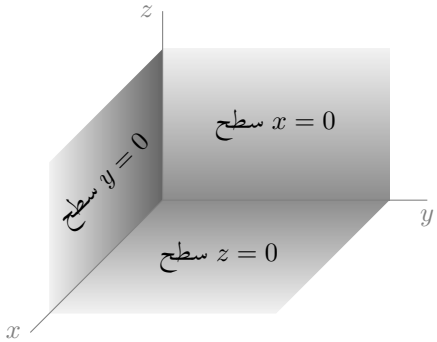
ایسا طریقہ جس سے کسی نقطے کا مقام بیان کیا جائے محدد[8] کہلاتا ہے۔سیدھی سطح پر کسی بھی نقطے کو دو محدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔خلاء تین طرفہ[9] ہے لہٰذا خلاء میں کسی بھی نقطے کو تین محدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔شکل 1.3-الف میں دو طرفہ کارتیسی محدد پر اکائی لمبائی کے دو سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ دکھائے گئے ہیں۔اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کی سمت مثبت x جانب کو ہے جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی سمت مثبت y جانب کو ہے۔شکل-ب میں $\mathbf{A}$ دکھایا گیا ہے۔کسی بھی سمتیہ کو دو یا دو سے زیادہ سمتیوں کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔شکل میں $\boldsymbol{A}$ کو $\boldsymbol{A}_x$ اور $\boldsymbol{A}_y$ کے مجموعے کی شکل میں دکھایا گیا ہے یعنی

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_x+\boldsymbol{A}_y \tag{1.2}$$

[8] coordinates
[9] three dimensional



(ب) نقطے سے محدد پر عمود۔



(ا) کارتیسی محدد میں عمودی سیدھی سطحیں۔

شکل 1.4: کارتیسی نظام میں نقطہ اور تین عمودی سطحیں۔

زمین کی سطح کو لامحدود سیدھی سطح تصور کرتے ہوئے، اس کے ہم سطحی[10] دو عمودی لکیریں کھینچتے ہوئے ایک لکیر کو x محدد اور دوسری لکیر کو y محدد تصور کیا جا سکتا ہے۔زمین کے ہم سطحی لکیر سے مراد ایسی لکیر ہے جس پر ہر نقطہ اس سطح کو چھوتا ہے۔x محدد کے مثبت حصے سے گھڑی کی الٹ سمت گھومتے ہوئے نوے درجے پر y محدد کا مثبت حصہ رکھتے ہوئے اونچائی کو z محدد کے مثبت حصے سے ظاہر کیا جائے گا۔ اب اگر اونچائی صفر رکھتے ہوئے x اور y کو تبدیل کیا جائے تو ہم زمین کی سطح پر حرکت کریں گے۔اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ زمین کی سطح پر $z=0$ جبکہ اس پر x اور y آزاد متغیرات ہیں۔یوں زمین کی سطح کو $z=0$ سطح کہتے ہیں جسے

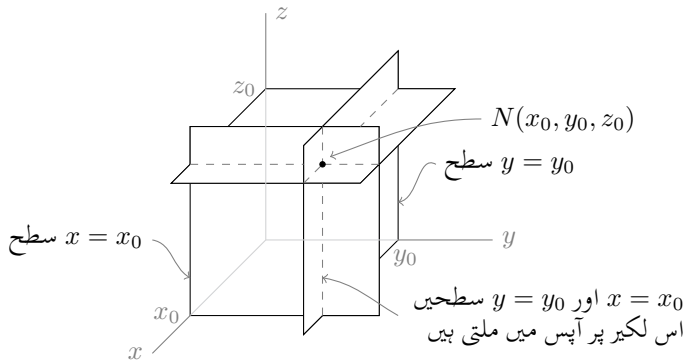
$$z=0, \quad x \leq |\mp\infty|, \quad y \leq |\mp\infty|$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 1.4-الف میں اس سطح کی نشاندہی کی گئی ہے۔ہم بالکل اسی طرح $y=0$ سطح اور $x=0$ سطح بھی بیان کر سکتے ہیں۔

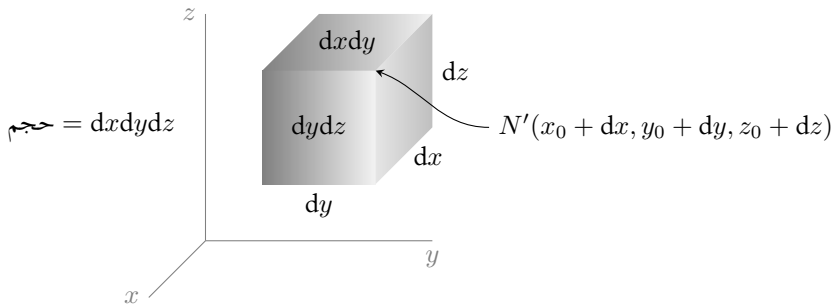
شکل 1.4-ب کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی نقطے کو (x_0,y_0,z_0) لکھا جا سکتا ہے۔اس نقطے تک پہنچنے کی خاطر کارتیسی محدد کے مرکز سے پہلے x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0,0,0)$ تک پہنچیں۔اس کے بعد y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے $(x_0,y_0,0)$ تک پہنچیں اور آخرکار z محدد کے متوازی z_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے درکار نقطہ (x_0,y_0,z_0) تک پہنچیں۔اس عمل میں یہ ضروری نہیں کہ پہلے x محدد کے متوازی ہی چلا جائے۔آپ مرکز سے پہلے y محدد کے متوازی y_0 فاصلہ طے کرنے کے بعد z محدد کے متوازی z_0 اور آخرکار x محدد کے متوازی x_0 فاصلہ طے کرتے ہوئے بھی اسی نقطے تک پہنچ سکتے ہیں۔تینوں فاصلوں کو کسی بھی ترتیب سے طے کیا جا سکتا ہے۔

نقطہ (x_0,y_0,z_0) سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے $(x_0,0,0)$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح اس نقطے سے y محدد پر عمود $(0,y_0,0)$ اور z محدد پر عمود $(0,0,z_0)$ دیتا ہے۔نقطہ (x_0,y_0,z_0) سے y محدد اور z محدد پر عمودی لکیریں گہری سیاہی میں دکھائے گئے ہیں۔ اگر (x_0,y_0,z_0) سے شروع ہوتے ہوئے z محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخرکار $z=0$ ہو جائے تو نقطہ $(x_0,y_0,0)$ حاصل ہو گا۔ اب اگر یہاں سے x محدد کے متوازی یوں چلا جائے کہ آخرکار $x=0$ ہو جائے تو نقطہ $(0,y_0,0)$ حاصل ہو گا۔یہ وہی نقطہ ہے جو (x_0,y_0,z_0) سے y محدد پر عمودی لکیر بناتے ہوئے حاصل ہوتا ہے۔اس عمل میں ہم پہلے x محدد کے متوازی چلتے ہوئے $x=0$ کرنے کے بعد z محدد کے متوازی چلتے ہوئے $z=0$ کرتے ہوئے بھی نقطہ $(0,y_0,0)$ تک پہنچ سکتے تھے۔

[10] coplanar



شکل 1.5: تین عمودی سطحوں سے نقطے کا حصول۔



شکل 1.6: چھ سطحے مکعب گھیرتی ہیں۔

نقطہ (x_0, y_0, z_0) تک قدر مختلف انداز سے بھی پہنچا جا سکتا ہے جسے کارتیسی محدد میں سمجھنا زیادہ آسان ہے۔فرض کریں کہ $x = x_0$ پر لامحدود yz سیدھی سطح بنائی جائے۔ایسی سطح کو $x = x_0$ سطح کہتے ہیں۔اس سطح کو

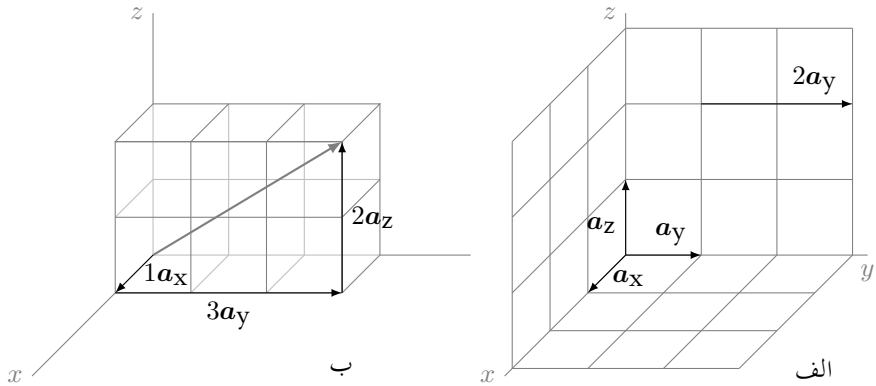
$$x = x_0, \quad y \leq |\mp\infty|, \quad z \leq |\mp\infty|$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں x_0 مقررہ ہے جبکہ y اور z متغیرات ہیں۔دو متغیرات کی مساوات سطح کو ظاہر کرتی ہے۔اگر $y = y_0$ پر لامحدود xz سیدھی سطح بنائی جائے تو یہ دو سطحے آپس میں سیدھی لکیر پر ملیں گے۔یہ لکیر

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z \leq |\mp\infty|$$

لکھی جا سکتی ہے۔اس مساوات میں x_0 اور y_0 مقررہ ہیں جبکہ z متغیرہ ہے۔ایک متغیرہ کی مساوات لکیر کو ظاہر کرتی ہے۔اب اگر $z = z_0$ پر لامحدود xy سیدھی سطح بھی بنائی جائے تب یہ تینوں سطحے ایک نقطے $N(x_0, y_0, z_0)$ پر آپس کو چھوئنگے۔یہ صورت حال شکل 1.5 میں دکھائی گئی ہے جہاں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھیں گے کہ نقطے تک پہنچنے کا یہ طریقہ دیگر محدد میں استعمال کرنا لازمی ثابت ہو گا۔

اگر سطح $x = x_0$ کے متوازی $x = x_0 + \mathrm{d}x$ پر اور اسی طرح $y = y_0$ کے متوازی $y = y_0 + \mathrm{d}y$ اور $z = z_0$ کے متوازی $z = z_0 + \mathrm{d}z$ سطح رکھے جائیں تو یہ چھ سطحے ایک چھوٹی مکعب نما حجم کو گھیریں گی جسے شکل 1.6 میں دکھایا گیا ہے جبکہ یہ تین نئی سطحیں آپس میں نقطہ $N'(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y, z_0 + \mathrm{d}z)$ پر ملیں گی ۔ اس مکعب نما کے اطراف $\mathrm{d}x$، $\mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}z$ ہیں۔ اس کی اوپر والی سطح کا رقبہ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہے۔اسی طرح اس کی نچلی سطح کا رقبہ بھی $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہے۔سامنے سطح اور پچھلی سطح دونوں $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ رقبے رکھتے ہیں جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کے رقبے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ کے برابر ہیں۔اس مکعب نما کی حجم $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ہے۔نقطہ



شکل 1.7: کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات اور ان کا استعمال

$N'(x_0+\mathrm{d}x, y_0+\mathrm{d}y, z_0+\mathrm{d}z)$ شکل میں دکھایا گیا ہے جبکہ نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ مکعب نما کا وہ واحد کونا ہے جسے شکل میں نہیں دکھایا گیا۔ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ $NN' = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}$ ہے۔

کارتیسی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرنے سے ہم N سے N' پہنچتے ہیں۔N سے N' تک کی سمتیہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{1.3}$$

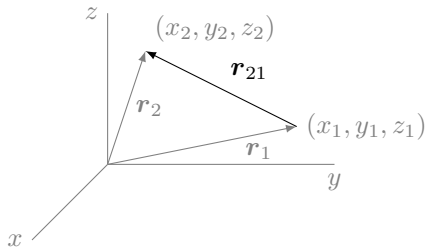
لکھی جاتی ہے۔یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی لمبائی دیتی ہے۔

1.4 اکائی سمتیات

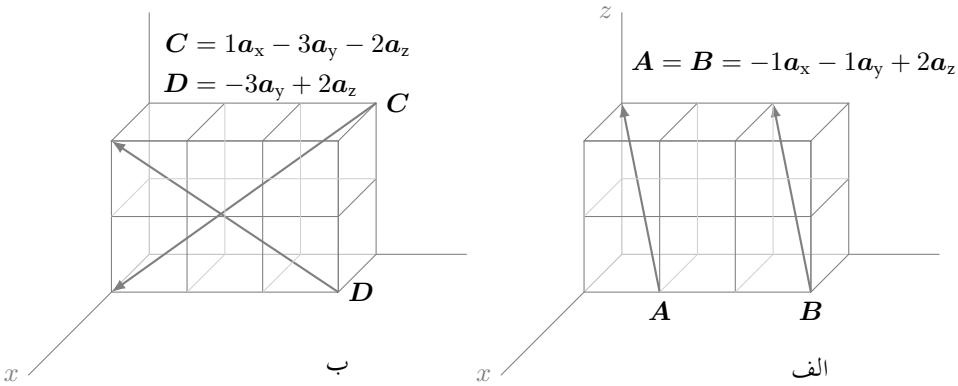
حصہ 1.3 کے شروع میں دو طرفہ کارتیسی نظام میں سیدھی سطح پر کسی بھی سمتیہ کو دو سمتیات کی صورت میں لکھنا دکھایا گیا۔یہی طریقہ تین طرفہ کارتیسی نظام کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ تین طرفہ کارتیسی نظام کے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$، $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ لکھے جاتے ہیں۔یہ تینوں سمتیات آپس میں عمودی ہیں۔کسی بھی اکائی سمتیہ کی طرح یہ تین اکائی سمتیات اکائی لمبائی رکھتے ہیں۔ $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ کی سمت x محدد کے بڑھتے جانب کو ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ کی سمت y محدد کے بڑھتے جانب کو اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ کی سمت z محدد کے بڑھتے جانب کو ہے۔شکل 1.7-الف میں یہ تینوں اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔اسی شکل میں نقطہ $(0,1,2)$ پر سمتیہ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ یہ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ کی سمت میں ہے۔اس سمتیہ کو $2\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ لکھا جا سکتا ہے۔یاد رہے کہ ایسے دو سمتیات برابر ہوتے ہیں جن کا طول برابر ہو اور جو ایک ہی سمت میں ہوں۔ یوں سمت تبدیل کئے بغیر سمتیہ کو کارتیسی محدد کے مرکز منتقل کرتے ہوئے اس کی قیمت نسبتاً آسانی سے لکھی جا سکتی ہے۔

شکل 1.8 میں مرکز سے (x_1, y_1, z_1) تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + y_1\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + z_1\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ اور مرکز سے (x_2, y_2, z_2) تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + y_2\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + z_2\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ دکھائے گئے ہیں۔شکل میں سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ بھی دکھائی گئی ہے جس کی دُم (x_1, y_1, z_1) اور نوک (x_2, y_2, z_2) پر ہے۔ سر سے دُم جوڑنے کے اصول کے استعمال سے $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_{21} + \boldsymbol{r}_1$ لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{21} &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\\ &= (x_2-x_1)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + (y_2-y_1)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (z_2-z_1)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\end{aligned} \tag{1.4}$$



شکل 1.8: کارتیسی نظام میں سمتیہ کی مساوات کا حصول



شکل 1.9: کارتیسی نظام میں چند سمتیات۔

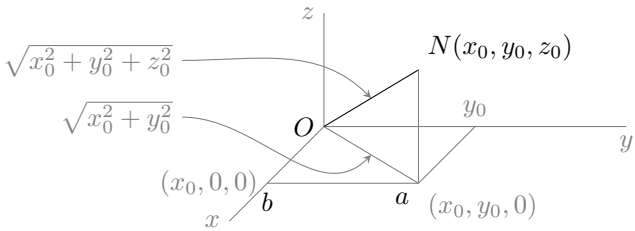
حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے استعمال سے سمتیہ کی مساوات باآسانی حاصل ہوتی ہے۔سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ لکھتے ہوئے زیرنوشت میں سمتیہ کی نوک کو 2 اور اس کی دُم کو 1 سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس کتاب میں سمتیہ لکھتے ہوئے نوک اور دُم کو اسی ترتیب سے زیرنوشت میں لکھا جائے گا۔یوں سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ کو تین اجزاء $(x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$، $(y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ اور $(z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.7-ب میں مرکز سے $(1,3,2)$ تک سمتیہ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کو تین سمتیات کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے یعنی $1\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + 3\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ جہاں اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے تینوں اجزاء کو لکھا گیا ہے۔ سمتیہ کی دُم $(0,0,0)$ اور اس کی نوک $(1,3,2)$ پر لیتے ہوئے یہی جواب مساوات 1.4 سے بھی حاصل ہوتا ہے۔

شکل 1.9-الف میں دو متوازی سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دکھائے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔ چونکہ ان کی لمبائی برابر ہے اور یہ دونوں ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = -1\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - 1\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ لکھا جائے گا۔شکل 1.9-ب میں $\boldsymbol{C}$ کی دُم سے $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ جانب ایک قدم اور یہاں سے $-\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ جانب تین قدم اور آخرکار $-\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ جانب دو قدم چلنے سے اس کی نوک تک پہنچا جا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{C} = 1\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - 3\boldsymbol{a}_\mathrm{y} - 2\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ لکھا جائے گا۔ اسی طرح $\boldsymbol{D}$ کی دُم سے $-\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ جانب تین قدم اور پھر $\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ جانب دو قدم چلتے ہوئے سمتیہ کی نوک تک پہنچا جایا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{D} = -3\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ لکھا جائے گا۔سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کو دو اجزاء کی شکل میں لکھا گیا ہے چونکہ اس کے تیسرے جزو کی لمبائی صفر کے برابر ہے۔

مشق 1.1: مساوات 1.4 کے استعمال سے شکل 1.9 میں تمام سمتیات لکھیں۔

جوابات:تمام جوابات شکل میں دئے گئے ہیں۔



شکل 1.10: کارتیسی نظام میں سمتیہ کا طول۔

شکل 1.10 میں مرکز سے نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ تک کا فاصلہ ON مسئلہ فیثاغورث[11] سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس نقطے سے $z = 0$ سطح پر عمود سے نقطہ a حاصل ہوتا ہے۔نقطہ a سے x محدد پر عمود نقطہ b دیتا ہے۔تکون Oba میں O سے b کا فاصلہ x_0 ہے جبکہ b سے a کا فاصلہ y_0 ہے۔یوں فاصلہ Oa مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ کے برابر ہو گا۔ تکون OaN میں a پر $90°$ کا زاویہ پایا جاتا ہے۔یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے ON کا فاصلہ $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 1.4 سمتیہ کی عمومی مساوات ہے۔اس میں دئے سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21}$ کی دُم محدد کے مرکز پر رکھنے سے صاف ظاہر ہے کہ سمتیہ کی مقدار

$$|\boldsymbol{r}_{21}| = r_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{1.5}$$

کے برابر ہے۔اگر سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کیا جائے تو حاصل جواب کی مقدار اکائی ہو گی جبکہ اس کی سمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی۔یوں $\boldsymbol{r}_{21}$ کو $|\boldsymbol{r}_{21}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{r}_{21}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{r21}$ حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\boldsymbol{a}_{r21} = \frac{\boldsymbol{r}_{21}}{|\boldsymbol{r}_{21}|} = \frac{(x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \tag{1.6}$$

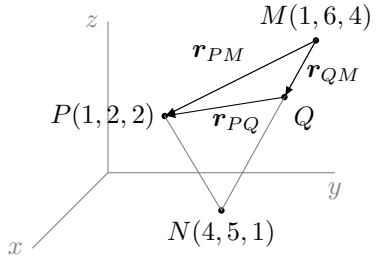
یاد رہے کہ سمتیہ کی سمت اور طول تبدیل کئے بغیر اسے ایک مقام سے دوسری مقام منتقل کیا جا سکتا ہے۔البتہ وہ سمتیہ جو کسی نقطے کی مقام تعین کرتا ہو کو اگر کہیں اور منتقل کیا جائے تو ایسی صورت میں سمتیہ کی نوک درکار نقطے پر نہیں رہے گی۔اسی حقیقت کی بنا پر میدان ظاہر کرنے والے سمتیہ کو اپنی جگہ سے نہیں ہٹایا جا سکتا۔میدانی سمتیہ کی دُم اس مقام پر پائی جاتی ہے جہاں میدان بیان کی جا رہی ہو۔

سمتیات کے استعمال سے نقطہ (x, y, z) کے مقام کو $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ لکھا جاتا ہے۔کسی بھی سمتیہ مثلاً قوت $\boldsymbol{F}$ کو بالکل اسی طرح $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + F_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + F_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ لکھا جاتا ہے جہاں $F_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$، $F_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ اور $F_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ اس کے تین اجزاء ہیں۔اس طرح قوت کی مقدار $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ کے برابر ہو گی۔

مثال 1.1: نقطہ $(-5, 2, -1)$ کا مقام ظاہر کرنے والا سمتیہ اور اس سمتیہ کا طول حاصل کریں۔اسی سمتیہ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔

---

[11] Pythagoras theorem



شکل 1.11: سمتیوں کا استعمال

حل:مرکز سے اس نقطے تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r} = -5\boldsymbol{a}_{\text{x}} + 2\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\text{z}}$ ہے جبکہ اس سمتیہ کا طول $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{5^2+2^2+1^1} = \sqrt{30}$ ہے۔یوں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_r = \frac{-5\boldsymbol{a}_{\text{x}}+2\boldsymbol{a}_{\text{y}}-1\boldsymbol{a}_{\text{z}}}{\sqrt{30}}$ ہو گا۔

مثال 1.2: شکل 1.11 میں تین نقطے $M(1,6,4)$، $N(4,5,1)$ اور $P(1,2,2)$ دئے گئے ہیں۔M اور N کے درمیان سیدھی لکیر پر M سے کل فاصلے کے $\frac{1}{3}$ پر نقطہ Q پایا جاتا ہے۔Q سے P تک سمتیہ حاصل کرتے ہوئے ان دو نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔ حل:M سے N تک سمتیہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{NM} &= (4-1)\boldsymbol{a}_{\text{x}} + (5-6)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + (1-4)\boldsymbol{a}_{\text{z}}\\ &= 3\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 1\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{z}}\end{aligned}$$

ہے۔M سے Q تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{QM}$ اور $\boldsymbol{r}_{NM}$ ایک ہی سمت میں ہیں جبکہ $|\boldsymbol{r}_{QM}| = \frac{1}{3}|\boldsymbol{r}_{NM}|$ کے برابر ہے۔یوں

$$\boldsymbol{r}_{QM} = \frac{1}{3}\boldsymbol{r}_{NM} = \frac{1}{3}(3\boldsymbol{a}_{\text{x}} - 1\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 3\boldsymbol{a}_{\text{z}}) = 1\boldsymbol{a}_{\text{x}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\text{z}}$$

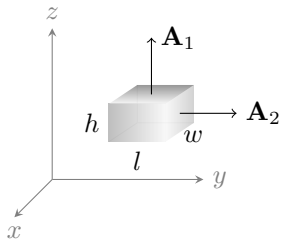
ہو گا۔M سے P تک سمتیہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{PM} &= (1-1)\boldsymbol{a}_{\text{x}} + (2-6)\boldsymbol{a}_{\text{y}} + (2-4)\boldsymbol{a}_{\text{z}}\\ &= -4\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{z}}\end{aligned}$$

ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے ہم لکھ سکتے ہیں $\boldsymbol{r}_{QM} + \boldsymbol{r}_{PQ} = \boldsymbol{r}_{PM}$ لہٰذا

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{PQ} &= \boldsymbol{r}_{PM} - \boldsymbol{r}_{QM}\\ &= (-4\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\text{z}}) - (1\boldsymbol{a}_{\text{x}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\text{z}})\\ &= -1\boldsymbol{a}_{\text{x}} - \frac{11}{3}\boldsymbol{a}_{\text{y}} - 1\boldsymbol{a}_{\text{z}}\end{aligned}$$

ہو گا۔Q سے P تک فاصلہ $\sqrt{1^1 + \left(\frac{11}{3}\right)^2 + 1^2} = 3.93$ ہے۔



$$\mathbf{A}_1 = A_1\mathbf{a}_{N1} = wl\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{A}_2 = A_2\mathbf{a}_{N2} = wh\mathbf{a}_y$$

شکل 1.12: سمتی رقبہ

مشق 1.2: مثال 1.2 میں دئے نقطوں کو استعمال کرتے ہوئے M سے P تک سمتیہ حاصل کریں۔اسی طرح P سے N تک سمتیہ اور M سے N تک سمتیہ حاصل کریں۔پہلے دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے سر سے دُم جوڑنے کے اصول سے تیسرا سمتیہ دوبارہ حاصل کریں۔

جوابات: $-5\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - 4\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ ، $-1\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + 4\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 12\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ اور $-6\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + 12\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$

1.5 میدانی سمتیہ

1.6 سمتی رقبہ

کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں۔یوں سطح کے کسی بھی نقطے پر دو آپس میں الٹ سمتوں میں عمود بنائے جا سکتے ہیں۔سیدھی سطح جس کا رقبہ S ہو کے ایک طرف پر اکائی عمود $\boldsymbol{a}_N$ اور دوسری طرف پر اکائی عمود $-\boldsymbol{a}_N$ بنائے جا سکتے ہیں۔اگر ان دو عمود میں سے ایک عمود مثلاً $\boldsymbol{a}_N$ کو سطح کی سمت[12] تصور کیا جائے تب اس سطح کا سمتی رقبہ[13] $S\boldsymbol{a}_N$ ہو گا۔بند سطح کے بیرونی اکائی عمود کو سطح کی سمت تصور کیا جاتا ہے۔شکل 1.12 میں سمتی رقبے $\boldsymbol{A}_1$ اور $\boldsymbol{A}_2$ دکھائے گئے ہیں جہاں بند سطح کے بیرونی عمود کو ہی سطح کی سمت دکھایا گیا ہے۔

1.7 غیر سمتی ضرب

دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے غیر سمتی ضرب[14] سے مراد $\boldsymbol{A}$ کی مقدار ضربِ $\boldsymbol{B}$ کی مقدار ضربِ سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کا کوسائن ہے۔

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta_{AB} \tag{1.7}$$

---

[12] عمود سطح کے ساتھ نوے درجہ زاویہ بناتا ہے۔$\boldsymbol{a}_N$ کے زیر نوشت میں N، لفظ نوے کے پہلے حرف کی آواز کو ظاہر کرتا ہے۔
[13] vector area
[14] scalar product

اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔غیر سمتی ضرب دو سمتیوں کے مابین کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب مقداری ہوتا ہے جس کی وجہ سے اسے مقداری ضرب بھی کہا جاتا ہے۔غیر سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان نقطے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی وجہ سے اسے ضرب نقطہ[15] بھی کہا جاتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ کو "$\boldsymbol{A}$نقطہ $\boldsymbol{B}$" پڑھا جاتا ہے۔بالکل سادہ ضرب کی طرح $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ کو $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ بھی لکھا جا سکتا ہے یعنی غیر سمتی ضرب میں متغیرات کی ترتیب اہمیت نہیں رکھتی۔

کارتیسی اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_\text{x}$، $\boldsymbol{a}_\text{y}$ اور $\boldsymbol{a}_\text{z}$ آپس میں عمودی ہیں لہٰذا ان میں کسی بھی دو سمتیات کے درمیان 90 زاویہ پایا جاتا ہے۔چونکہ $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ان میں کسی بھی دو سمتیوں کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{a}_\text{x}\cdot\boldsymbol{a}_\text{y}=0,\quad \boldsymbol{a}_\text{x}\cdot\boldsymbol{a}_\text{z}=0,\quad \boldsymbol{a}_\text{y}\cdot\boldsymbol{a}_\text{z}=0 \tag{1.8}$$

ایک ہی سمت میں دو سمتیوں کے درمیان صفر زاویہ ہوتا ہے اور $\cos 0 = 1$ کے برابر ہے۔ اکائی سمتیہ کا طول بھی ایک کے برابر ہے لہٰذا مساوات 1.7 کے تحت $\boldsymbol{a}_\text{x}$ اور $\boldsymbol{a}_\text{x}$ کا غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{a}_\text{x}\cdot\boldsymbol{a}_\text{x}=(|\boldsymbol{a}_\text{x}|)(|\boldsymbol{a}_\text{x}|)(\cos 0)=(1)(1)(1)=1$$

ہو گا۔بقایا دو کارتیسی اکائی سمتیات کا خود غیر سمتی ضرب بھی ایک کے برابر ہے۔

$$\boldsymbol{a}_\text{x}\cdot\boldsymbol{a}_\text{x}=1,\quad \boldsymbol{a}_\text{y}\cdot\boldsymbol{a}_\text{y}=1,\quad \boldsymbol{a}_\text{z}\cdot\boldsymbol{a}_\text{z}=1 \tag{1.9}$$

مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کو کرونیکر ڈیلٹا[16] δ_{ij} کی مدد سے ایک ہی مساوات کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j=\delta_{ij} \tag{1.10}$$

جہاں

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j \text{ اگر}\\ 1 & i=j \text{ اگر}\end{cases} \tag{1.11}$$

کے برابر ہے یعنی $i=j$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت ایک جبکہ $i\neq j$ کی صورت میں ہی δ_{ij} کی قیمت صفر کے برابر لی جاتی ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_\text{x}\cdot\boldsymbol{a}_\text{y}$ کی صورت میں $i=\boldsymbol{a}_\text{x}$ جبکہ $j=\boldsymbol{a}_\text{y}$ کے برابر ہیں۔یوں i اور j برابر نہیں ہیں لہٰذا حاصل جواب صفر کے برابر ہو گا۔اس کے برعکس $\boldsymbol{a}_\text{z}\cdot\boldsymbol{a}_\text{z}$ کی صورت میں $i=\boldsymbol{a}_\text{z}$ اور $j=\boldsymbol{a}_\text{z}$ ہیں لہٰذا $i=j$ ہے اور یوں حاصل جواب ایک کے برابر ہے۔

کارتیسی تین عمودی اکائیوں کی مدد سے سمتیات کا غیر سمتی ضرب نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔یوں اگر $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{a}_\text{x}+A_y\boldsymbol{a}_\text{y}+A_z\boldsymbol{a}_\text{z}$ اور $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{a}_\text{x}+B_y\boldsymbol{a}_\text{y}+B_z\boldsymbol{a}_\text{z}$ دو سمتیات ہوں تب ان کا غیر سمتی ضرب

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=(A_x\boldsymbol{a}_\text{x}+A_y\boldsymbol{a}_\text{y}+A_z\boldsymbol{a}_\text{z})\cdot(B_x\boldsymbol{a}_\text{x}+B_y\boldsymbol{a}_\text{y}+B_z\boldsymbol{a}_\text{z})\\&=A_xB_x\boldsymbol{a}_\text{x}\cdot\boldsymbol{a}_\text{x}+A_xB_y\boldsymbol{a}_\text{x}\cdot\boldsymbol{a}_\text{y}+A_xB_z\boldsymbol{a}_\text{x}\cdot\boldsymbol{a}_\text{z}\\&\quad+A_yB_x\boldsymbol{a}_\text{y}\cdot\boldsymbol{a}_\text{x}+A_yB_y\boldsymbol{a}_\text{y}\cdot\boldsymbol{a}_\text{y}+A_yB_z\boldsymbol{a}_\text{y}\cdot\boldsymbol{a}_\text{z}\\&\quad+A_zB_x\boldsymbol{a}_\text{z}\cdot\boldsymbol{a}_\text{x}+A_zB_y\boldsymbol{a}_\text{z}\cdot\boldsymbol{a}_\text{y}+A_zB_z\boldsymbol{a}_\text{z}\cdot\boldsymbol{a}_\text{z}\end{aligned}$$

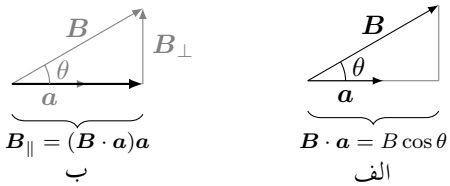
ہو گا۔مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 کا سہارا لیتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{1.12}$$

---

[15] dot product

[16] یہ لیوپولڈ کرونیکر کے نام سے منسوب ہے۔



شکل 1.13: کسی بھی سمت میں سمتیہ کے جزو کا حصول۔

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کا خود غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\boldsymbol{A}|^2 \tag{1.13}$$

اس کے طول کے مربع کے برابر ہے۔یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جسے عموماً استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کا طول حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 1.7 اور مساوات 1.12 کی مدد سے دو سمتیوں کے مابین زاویہ معلوم کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B})}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}\right) \tag{1.14}$$

مثال 1.3: شکل 1.11 میں تکون دکھایا گیا ہے جس کے نوک $M(1,6,4)$، $N(4,5,1)$ اور $P(1,2,2)$ ہیں۔M پر زاویہ حاصل کریں۔

حل:مثال 1.2 میں $\boldsymbol{r}_{NM} = 3\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - 1\boldsymbol{a}_\mathrm{y} - 3\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ اور $\boldsymbol{r}_{PM} = 0\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - 4\boldsymbol{a}_\mathrm{y} - 2\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ حاصل کئے گئے۔$|\boldsymbol{r}_{NM}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{19}$ اور $|\boldsymbol{r}_{PM}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ ہیں جبکہ

$$\boldsymbol{r}_{NM} \cdot \boldsymbol{r}_{PM} = 0 + 4 + 6 = 10$$

کے برابر ہے۔یوں ان سمتیوں کے مابین زاویہ

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{19}\sqrt{20}}\right) = 1.0321 \quad \mathrm{rad}$$

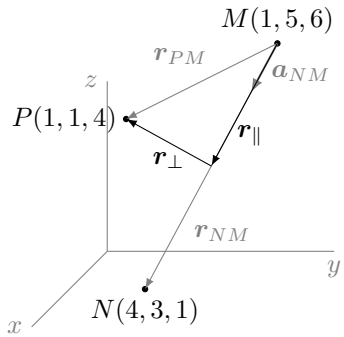
یا 59.137° ہے۔

شکل 1.13-الف میں سمتیہ $\boldsymbol{B}$ اور اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}$ دکھائے گئے ہیں۔ان کا غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{a}|\cos\theta = B\cos\theta$$

کے برابر ہے۔شکل سے واضح ہے کہ یہی $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کے جزو کا طول $B_\parallel$[17] ہے۔یوں کسی بھی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کے جزو کا طول حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{B}$ اور اس سمت کی اکائی سمتیہ کا غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔یوں حاصل طول کا اکائی سمتیہ کے

[17] $B_\parallel$ لکھتے ہوئے زیرنوشت میں دو متوازی لکیریں یہ بتلاتی ہیں کہ $\boldsymbol{B}$ کا یہ وہ حصہ ہے جو $\boldsymbol{a}$ کے متوازی ہے۔اسی طرح عمودی مقدار کو عموماً $\perp$ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



شکل 1.14: متوازی اور عمودی اجزاء۔

ساتھ ضرب یعنی $(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$ سے اکائی سمتیہ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کا سمتی جزو حاصل ہوتا ہے۔ شکل 1.13-ب میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{B}$ کا سمتی جزو $\boldsymbol{B}_{\parallel}$ دکھایا گیا ہے۔شکل سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{B}$ سے $B_{\parallel}\boldsymbol{a}$ منفی کرنے سے $B_{\perp}$ حاصل ہوتا ہے جو $\boldsymbol{B}$ کا وہ جزو ہے جو $\boldsymbol{a}$ کے عمودی ہے۔

غیر سمتی ضرب کا حاصل جواب دو صورتوں میں صفر کے برابر ہوتا ہے۔پہلی صورت وہ ہے جب دونوں سمتیوں میں سے کم از کم ایک سمتیہ کا طول صفر کے برابر ہو۔دوسری صورت وہ ہے جب دونوں سمتیات آپس میں عمودی ہوں۔عمودی ہونے کی صورت میں ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہو گا اور $\cos 90 = 0$ کے برابر ہوتا ہے۔یوں دو سمتیوں کے نقطہ ضرب صفر کے برابر ہونے سے اخذ کیا جاتا ہے کہ یہ آپس میں عمودی ہیں۔

مثال 1.4: شکل 1.14 میں تین نقطے $M(1,5,6)$، $N(4,3,1)$ اور $P(1,1,4)$ دئے گئے ہیں۔M اور N سے گزرتی سیدھی لکیر سے P کا عمودی فاصلہ حاصل کریں۔

حل:M سے N تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{NM} = 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے جس کا طول $|\boldsymbol{r}_{NM}| = \sqrt{38}$ ہے۔یوں اس سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM} = \frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}}$ ہو گا۔ اسی طرح M سے P تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{PM} = -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے۔$\boldsymbol{a}_{NM}$ کی سمت میں $\boldsymbol{r}_{PM}$ کا طول

$$\begin{aligned} r_{\parallel} = \boldsymbol{r}_{PM}\cdot\boldsymbol{a}_{NM} &= (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\cdot\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}}\right) \\ &= \frac{0+8+10}{\sqrt{38}} = \frac{18}{\sqrt{38}} \end{aligned}$$

ہے یوں $\boldsymbol{a}_{NM}$ سمت میں $\boldsymbol{r}_{PM}$ کا سمتی جزو

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} = r_{\parallel}\boldsymbol{a}_{NM} = \frac{18}{\sqrt{38}}\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{38}}\right) = \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})$$

ہے۔$\boldsymbol{r}_{PM}$ سے $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ منفی کرنے سے لکیر سے P تک عمودی سمتیہ $\boldsymbol{r}_{\perp}$ حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{\perp} = \boldsymbol{r}_{PM} - \boldsymbol{r}_{\parallel} &= (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) - \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \\ &= \frac{-27\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 58\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 7\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{19} \end{aligned}$$

جس کا طول $\frac{\sqrt{27^2+58^2+7^2}}{19} = 3.3873$ ہے۔یوں P کا لکیر سے عمودی فاصلہ 3.3873 ہے۔

$\boldsymbol{r}_\parallel$ اور $\boldsymbol{r}_\perp$ آپس میں عمودی ہیں لہٰذا ان کا نقطہ ضرب

$$\boldsymbol{r}_\parallel \cdot \boldsymbol{r}_\perp = \frac{18}{38}(3\boldsymbol{a}_\text{x} - 2\boldsymbol{a}_\text{y} - 5\boldsymbol{a}_\text{z}) \cdot \left(\frac{-27\boldsymbol{a}_\text{x} - 58\boldsymbol{a}_\text{y} + 7\boldsymbol{a}_\text{z}}{19}\right) = \frac{18}{722}(-81 + 116 - 35) = 0$$

صفر کے برابر ہے۔

شکل 1.14 میں اگر M پر $\boldsymbol{r}_{NM}$ کی دُم رکھی جائے تب $\boldsymbol{r}_{NM}$ کی نوک N کا مقام تعین کرتا ہے۔عموماً کسی بھی نقطے کا مقام محدد کے مرکز $(0,0,0)$ کی نسبت سے طے کیا جاتا ہے۔ایسا سمتیہ جس کی دُم مرکز پر رکھتے ہوئے اس کی نوک نقطے کا مقام طے کرے مقام تعین کنندہ سمتیہ[18] کہلاتا ہے۔اگر تعین کنندہ سمتیہ کو مرکز سے ہٹایا جائے تب ظاہر ہے اس کی نوک اصل مقام طے کرنے سے قاصر ہو گی۔

مثال 1.5: شکل 1.14 میں M سے شروع ہوتے اور N جانب بڑھتی سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطے کا مقام تعین کرتے تعین کنندہ سمتیہ حاصل کریں۔

حل:مرکز $(0,0,0)$ سے نقطہ M تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_M = 1\boldsymbol{a}_\text{x} + 5\boldsymbol{a}_\text{y} + 6\boldsymbol{a}_\text{z}$ ہے جبکہ M سے N جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM}$ گزشتہ مثال میں حاصل کیا گیا۔اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{NM}$ کی سمت میں M سے s فاصلے پر نقطہ Q تک کا سمتیہ $s\boldsymbol{a}_{NM}$ ہے۔یوں مرکز سے Q تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_M + s\boldsymbol{a}_{NM}$ ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}_\text{Q} = (1\boldsymbol{a}_\text{x} + 5\boldsymbol{a}_\text{y} + 6\boldsymbol{a}_\text{z}) + s\left(\frac{3\boldsymbol{a}_\text{x} - 2\boldsymbol{a}_\text{y} - 5\boldsymbol{a}_\text{z}}{\sqrt{38}}\right)$$

اس مساوات میں s متغیرہ ہے جسے تبدیل کرتے ہوئے سیدھی لکیر پر کسی بھی نقطہ Q تک پہنچا جا سکتا ہے۔

مثال 1.6: $z = z_0$ پر $1\boldsymbol{a}_\text{z}$ کے عمودی سیدھی سطح کی مساوات حاصل کریں جہاں z_0 مستقل ہے۔

حل:نقطہ $N_1(0,0,z_0)$ سے کسی بھی نقطہ $N_2(x,y,z)$ تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_{21} = x\boldsymbol{a}_\text{x} + y\boldsymbol{a}_\text{y} + (z - z_0)\boldsymbol{a}_\text{z}$ ہے۔سطح پر کسی بھی سمتیہ اور سطح کے عمودی سمتیہ آپس میں نوے درجے زاویہ پر پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔یوں اگر N_2 اسی عمودی سطح پر پایا جائے تب

$$1\boldsymbol{a}_\text{z} \cdot [x\boldsymbol{a}_\text{x} + y\boldsymbol{a}_\text{y} + (z - z_0)\boldsymbol{a}_\text{z}] = z - z_0 = 0$$

ہو گا جس سے اس سطح کی مساوات $z = z_0$ حاصل ہوتی ہے۔

---

[18] displacement vector

اس قیمت کو r_{21} میں پُر کرتے ہوئے $r_{21} = xa_x + ya_y$ حاصل ہوتا ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں۔چونکہ مرکز سے N_1 کا تعین کنندہ سمتیہ $r_{10} = z_0 a_z$ ہے لہٰذا $z = z_0$ سطح پر کسی بھی نقطہ N_2 کا تعین کنندہ سمتیہ یعنی سطح کی سمتی مساوات $r_{20} = xa_x + ya_y + z_0 a_z$ ہو گی۔

مشق 1.3: مرکز سے $(2,1,3)$ تک کی سمتیہ ایک سیدھی سطح کی عمودی سمتیہ ہے۔اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $2x + y + 3z = 14$

1.8 سمتی ضرب یا صلیبی ضرب

دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے سمتی ضرب[19] کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جس کا طول $\boldsymbol{A}$ کی مقدار ضربِ $\boldsymbol{B}$ کی مقدار ضربِ سمتیوں کے مابین چھوٹے زاویے کے سائن کے برابر ہے۔حاصل سمتیہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سمتیات کی عمودی سمت میں ہوتا ہے جسے اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{a}_N$ سے ظاہر کیا جائیگا۔

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin \theta_{AB} \boldsymbol{a}_N \tag{1.15}$$

جس سیدھی سطح پر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں پائے جائیں، $\boldsymbol{a}_N$ اس سطح کے دو عمودی سمتیات میں سے ایک ہے۔$\boldsymbol{a}_N$ کو دائیں ہاتھ کے قانون[20] سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

دائیں ہاتھ کی ہتھیلی سیدھی اور انگوٹھے کو بقایا چار انگلیوں کے عمود میں رکھتے ہوئے پہلی انگلی کو $\boldsymbol{A}$ اور دوسری انگلی کو $\boldsymbol{B}$ کی سمت میں رکھیں۔اس صورت میں انگوٹھا $\boldsymbol{a}_N$ کی سمت میں ہو گا۔

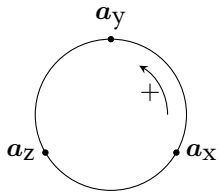
اگر دونوں سمتیات کی دُم ایک ہی جگہ پر نہ ہو تب ان کے مابین زاویہ دریافت کرنے کی خاطر سمتیوں کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں ایک نقطے پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔سمتی ضرب کو سمتیوں کے درمیان صلیبی نشان $\times$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی وجہ سے اسے صلیبی ضرب[21] بھی کہا جاتا ہے اور $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ کو "$\boldsymbol{A}$ صلیب $\boldsymbol{B}$" پڑھا جاتا ہے۔سمتی ضرب میں سمتیوں کی ترتیب نہایت اہم ہے اور انہیں الٹانے سے حاصل جواب کی سمت الٹی ہو جاتی ہے۔

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \tag{1.16}$$

اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_x$ اور $\boldsymbol{a}_y$ کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\sin 90 = 1$ کے برابر ہے جبکہ دائیں ہاتھ کے قانون سے ان کے صلیبی ضرب کی سمت $\boldsymbol{a}_z$ حاصل ہوتی ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_x \times \boldsymbol{a}_y = \boldsymbol{a}_z$ کے برابر ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_y \times \boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{a}_x$

---

[19] vector product
[20] right hand rule
[21] cross product



شکل 1.15: صلیبی ضرب کا حصول۔

اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{x} = \boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔مساوات 1.16 کے تحت یوں $\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{x} = -\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$، $\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{y} = -\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{z} = -\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ لکھے جا سکتے ہیں۔دو متوازی سمتیوں کے درمیان صفر درجے کا زاویہ ہوتا ہے اور $\sin 0 = 0$ کے برابر ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{x} = 0$ کے برابر ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{y} = 0$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{z} = 0$ کے برابر ہیں۔ان تمام جوابات کو ایک جگہ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{y} &= \boldsymbol{a}_\mathrm{z} & \boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{z} &= \boldsymbol{a}_\mathrm{x} & \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{x} &= \boldsymbol{a}_\mathrm{y} \\ \boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{x} &= 0 & \boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{y} &= 0 & \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{z} &= 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

یہی جوابات شکل 1.15 کی مدد سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔اس شکل میں گھڑی کی الٹ سمت مثبت سمت ہے۔یوں اگر $\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ حاصل کرنا ہو تو شکل میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ سے شروع ہو کر $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ کی جانب کم راستے پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ حاصل ہوتا ہے۔ساتھ ہی ساتھ چونکہ $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ سے $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ جانے کی خاطر مثبت راستہ اختیار کیا گیا لہٰذا جواب مثبت یعنی $+\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ ہو گا۔اس کے برعکس $\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ سے $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ جانب کم راستے پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ حاصل ہوتا ہے البتہ یہ راستہ گھڑی کے الٹ سمت یعنی منفی سمت میں ہے لہٰذا جواب $-\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ ہو گا۔

مساوات 1.17 کی مدد سے $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + A_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + A_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ اور $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + B_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + B_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ کی صلیبی ضرب

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + A_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + A_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}) \times (B_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + B_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + B_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}) \\ &= A_xB_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{x} + A_xB_y\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{y} + A_xB_z\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \\ &\quad + A_yB_x\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{x} + A_yB_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{y} + A_yB_z\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \\ &\quad + A_zB_x\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{x} + A_zB_y\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{y} + A_zB_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \end{aligned}$$

کو

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{1.18}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس جواب کو قالب کے حتمی قیمت کی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_\mathrm{x} & \boldsymbol{a}_\mathrm{y} & \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.19}$$

یوں اگر $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - 3\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 1\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ اور $\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + 5\boldsymbol{a}_\mathrm{y} - 4\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ ہوں تب

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_\mathrm{x} & \boldsymbol{a}_\mathrm{y} & \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\ &= [(-3)(-4) - (1)(5)]\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - [(2)(-4) - (1)(6)]\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + [(2)(5) - (-3)(6)]\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \\ &= 7\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + 14\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 28\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \end{aligned}$$

ہو گا۔

مثال 1.7: $N_1(2,3,1)$، $N_2(1,6,5)$ اور $N_3(-2,-3,2)$ سیدھی سطح پر پائے جاتے ہیں۔اس سطح کی مساوات حاصل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{21} &= (1-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (6-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (5-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\ \boldsymbol{r}_{31} &= (-2-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (-3-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (2-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -4\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned}$$

کے سمتی ضرب سے ان کا عمودی سمتیہ حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_N &= (-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \times (-4\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\\ &= 6\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 12\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 16\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 24\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\\ &= 27\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 15\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned}$$

سطح پر دئے گئے تین نقطوں سے سطح پر کسی بھی نقطہ $N_4(x,y,z)$ تک کا سمتیہ اس عمودی سمتیہ کے نوے درجے زاویہ پر ہو گا اور یوں ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔N_1 سے N_4 تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_{41} = (x-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (y-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے استعمال سے

$$\boldsymbol{r}_{41} \cdot \boldsymbol{r}_N = [(x-2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + (y-3)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + (z-1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}] \cdot (27\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 15\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) = 0$$

لکھ کر

$$27(x-2) - 15(y-3) + 18(z-1) = 0$$

سے

$$27x - 15y + 18z = 27$$

سیدھی سطح کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ایسی مساوات میں x، y اور z کے مخفف عمودی سمتیہ میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے مخفف 27، 15− اور 18 ہوتے ہیں۔

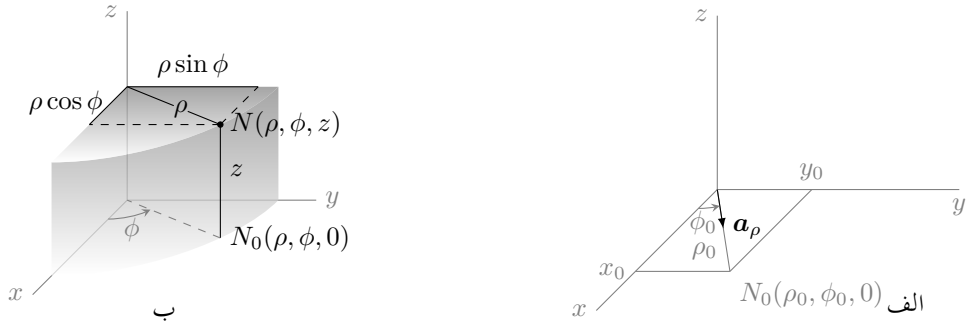
سطح کی مساوات سے $z = \frac{9-9x+5y}{6}$ لکھا جا سکتا ہے۔سطح پر N_4 کی تعین کنندہ مساوات $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ میں z کی قیمت پُر کرتے ہوئے سطح کی سمتی مساوات

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{9-9x+5y}{6}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں x اور y آزاد متغیرات ہیں جبکہ z کو بطور تابع متغیرہ لکھا گیا ہے۔

مشق 1.4: $\boldsymbol{A} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور $\boldsymbol{B} = 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} - 3\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کی صورت میں $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$، $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{a}_B \times \boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \times (\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \times \boldsymbol{B})$ حاصل کریں۔

خلاء میں کسی بھی نقطے کا مقام کارتیسی محدد کے علاوہ دیگر طرز کے محدد سے بھی تعین کیا جا سکتا ہے۔ماہرین طبیعیات تقریباً ایک درجن اقسام کے محددی نظام استعمال کرتے ہیں۔ہم اس کتاب میں کارتیسی نظام کے علاوہ دو مزید اقسام کے محددی نظام استعمال کریں گے۔آئیں انہیں پر غور کریں۔



شکل 1.16: نلکی محدد

1.9 گول نلکی محدد

کارتیسی نظام میں کسی بھی نقطے کا مقام مرکز سے x، y اور z سمتوں میں فاصلوں سے طے کیا جاتا ہے۔آئیں اب ایسا نظام دیکھیں جس میں ایک عدد زاویہ اور دو عدد فاصلے استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے کا مقام طے ہو۔

شکل 1.16-الف میں $z=0$ سطح پر نقطہ N_0 دکھایا گیا ہے جسے کارتیسی محدد میں $N_0(x_0,y_0,0)$ لکھا جائے گا۔اگر مرکز سے N_0 تک سیدھی لکیر کی لمبائی ρ_0 اور x محدد سے اس لکیر کا زاویہ ϕ_0 ہو تب اسی نقطے کو گول نلکی محدد[22] کے نظام میں $N_0(\rho_0,\phi_0,0)$ لکھا جاتا ہے۔اس کتاب میں گول نلکی محدد کا نام چھوٹا کر کے اسے نلکی محدد پکارا جائے گا۔ اگر $z=0$ سطح پر مرکز سے نقطے کی جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ ہو تب مرکز سے نقطے تک سمتیہ کو

$$\boldsymbol{\rho}=\rho_0\boldsymbol{a}_\rho \qquad (\phi=\phi_0, \quad z=0) \tag{1.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔نلکی اور کارتیسی نظام میں z محدد یکساں ہیں۔

شکل 1.16-الف یا شکل-ب سے کارتیسی اور نلکی محدد کے تعلق اخذ کئے جا سکتے ہیں۔یوں نلکی محدد کے متغیرات (ρ,ϕ,z) سے کارتیسی متغیرات (x,y,z) یوں حاصل ہوتے ہیں۔

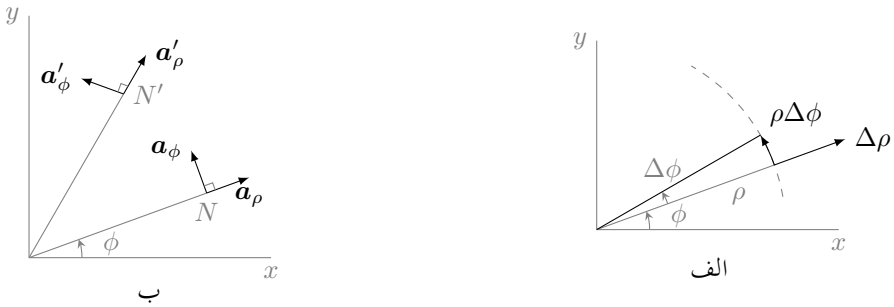
$$\begin{aligned} x&=\rho\cos\phi\\ y&=\rho\sin\phi\\ z&=z \end{aligned} \tag{1.21}$$

اسی طرح (x,y,z) سے (ρ,ϕ,z) یوں حاصل کئے جاتے ہیں۔

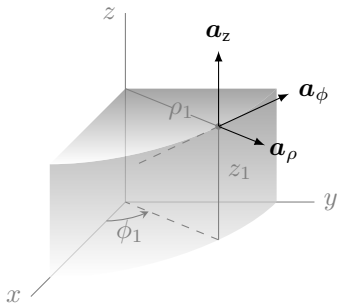
$$\begin{aligned} \rho&=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (\rho\geq 0)\\ \phi&=\tan^{-1}\frac{y}{x}\\ z&=z \end{aligned} \tag{1.22}$$

مندرجہ بالا مساوات میں رداس کی صرف مثبت قیمت لی گئی۔ہم رداس کی قیمت مثبت ہی لیتے ہیں۔

[22] cylindrical coordinate system



شکل 1.17: نلکی محدد میں متغیرات کے تبدیلی سے فاصلے کا حصول اور اکائی سمتیات۔



شکل 1.18: نلکی محدد کے اکائی سمتیات۔

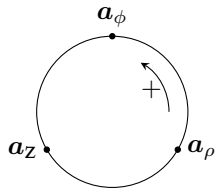
شکل 1.17-الف میں ϕ زاویہ پر ρ رداس کا ہلکی سیاہی میں دکھایا سمتیہ نقطہ N ہے۔ اس شکل میں ϕ اور z تبدیل کئے بغیر ρ کو $\Delta\rho$ بڑھتا دکھایا گیا ہے۔اس صورت میں سمتیہ کی نوک $\Delta\rho$ فاصلہ طے کرتی ہے۔نقطہ N سے $\Delta\rho$ کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے $\boldsymbol{a}_\rho$ لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.17-الف میں ρ اور z تبدیل کئے بغیر ϕ کو $\Delta\phi$ بڑھا کر اسی سمتیہ کو گاڑھی سیاہی میں دوبارہ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سمتیہ کی نوک نے ρ رداس کے گول دائرے پر حرکت کرتے ہوئے $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کیا۔یوں اگر زاویہ کو 0 تا 2π ریڈیئن تبدیل کیا جائے تو سمتیہ کی نوک گول دائرے پر ایک مکمل چکر کاٹے گی۔جیسے جیسے $\Delta\phi$ کو کم سے کم کیا جائے ویسے ویسے $\rho\Delta\phi$ گول دائرے کے مماس کی صورت اختیار کرے گی حتٰی کہ $\mathrm{d}\phi$ کی صورت میں $\rho\,\mathrm{d}\phi$ گول دائرے کا مماس ہو گا۔نقطہ N پر بڑھتے ϕ جانب مماس کی سمت میں اکائی سمتیہ کو $\boldsymbol{a}_\phi$ لکھا جاتا ہے۔ اس سمتیہ کو شکل 1.17-ب میں دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح اگر نقطہ N پر صرف z کو Δz تبدیل کیا جائے تب سمتیہ کی نوک Δz فاصلہ طے کرے گی۔ Δz کی سمت میں اکائی سمتیہ جسے $\boldsymbol{a}_z$ لکھا جاتا ہے، نلکی محدد کی تیسری اور آخری بنیادی اکائی سمتیہ ہے۔نلکی محدد کے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_z$ مل کر دائیں ہاتھ کا عمودی نظام دیتے ہیں۔نقطہ (ρ_1, ϕ_1, z_1) پر نلکی محدد کے اکائی سمتیات کو شکل 1.18 میں دکھایا گیا ہے۔$\boldsymbol{a}_\rho$ گول سطح $\rho = \rho_1$ کے عمودی ہے۔یہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_\phi$ سیدھی سطح $\phi = \phi_1$ کے عمودی ہے۔ یہ $z = z_1$ سطح پر پایا جاتا ہے اور $\rho = \rho_1$ نلکی سطح کا مماس ہے۔$\boldsymbol{a}_z$ اکائی سمتیہ $z = z_1$ سطح کے عمودی ہے۔یہ $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحوں پر پایا جاتا ہے۔

دائیں ہاتھ کے عمودی نظام میں سمتی ضرب کا حاصل جواب صفحہ 15 پر دئے گئے دائیں ہاتھ کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے ۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\phi = \boldsymbol{a}_z, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{a}_\rho, \quad \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_\phi \tag{1.23}$$



شکل 1.19: صلیبی ضرب کی حاصل اکائی سمتیہ۔

لکھا جا سکتا ہے۔یہی جوابات شکل 1.19 سے بھی اخذ کئے جا سکتے ہیں۔

کسی سمتیہ کا خود سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_\rho \times \boldsymbol{a}_\rho = 0, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_\phi = 0, \quad \boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{a}_z = 0 \tag{1.24}$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ کسی بھی اکائی سمتیہ کا خود غیر سمتی ضرب ایک کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 1, \quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 1, \quad \boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{a}_z = 1 \tag{1.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح کسی بھی دو عمودی سمتیات کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0, \quad \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_z = 0, \quad \boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 0 \tag{1.26}$$

غیر سمتی ضرب کو کرونیکر ڈیلٹا کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \tag{1.27}$$

جہاں

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ 1 & \text{اگر } i = j \end{cases} \tag{1.28}$$

کے برابر ہے۔

آپ دیکھتے ہیں کہ کسی بھی نقطہ $N(\rho, \phi, z)$ پر اکائی سمتیات حاصل کرنے کی خاطر محدد کے متغیرات ρ، ϕ اور z کو باری باری انتہائی کم بڑھایا جاتا ہے۔جس سمت میں نقطہ حرکت کرے، اسی سمت میں اکائی سمتیہ ہو گی۔شکل 1.17-ب میں دو مختلف نقاط N اور N' پر نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نلکی محدد کے عمودی اکائی سمتیات کی سمت کا دارومدار اس نقطے پر ہے جہاں انہیں حاصل کیا جائے۔آپ جانتے ہیں کہ کارتیسی نظام میں نقطے کا مقام تبدیل کرنے سے کارتیسی اکائی سمتیات تبدیل نہیں ہوتے۔یوں نلکی محدد کے اکائی سمتیات اٹل نہیں ہیں۔یہ ایک انتہائی اہم حقیقت ہے جو تکمل لیتے وقت پیچیدگیاں پیدا کرتا ہے۔تکمل لیتے وقت کارتیسی اکائی سمتیات اٹل ہونے کی بنا پر تکمل کے باہر لے جائے جا سکتے ہیں جبکہ نلکی محدد کے $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ اکائی سمتیات کو تکمل کے باہر نہیں لے جایا جا سکتا۔یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ N پر حاصل کئے گئے $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_z$ آپس میں عمودی ہوں گے جبکہ کسی اور نقطہ N' پر حاصل کئے گئے $\boldsymbol{a}'_\rho$، $\boldsymbol{a}'_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_z$ آپس میں عمودی ہوں گے۔

شکل 1.20: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

جدول 1.1: نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

a_z	a_y	a_x	
0	$\sin\phi$	$\cos\phi$	a_ρ
0	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	a_ϕ
1	0	0	a_z

1.9.1 نلکی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب

شکل 1.20-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیات a_ρ، a_x اور a_y دکھائے گئے ہیں۔a_ρ اور a_x کے مابین زاویہ ϕ ہے جبکہ اکائی سمتیات کی لمبائی ایک ہوتی ہے لہٰذا

$$a_\rho \cdot a_x = (1)(1)(\cos\phi) = \cos\phi \tag{1.29}$$

ہے۔a_ρ اور a_y کے مابین زاویہ $(90^\circ - \phi)$ ہے لہٰذا

$$a_\rho \cdot a_y = (1)(1)[\cos(90^\circ - \phi)] = \sin\phi \tag{1.30}$$

کے برابر ہے۔اس مساوات میں $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ کو استعمال کرتے ہوئے $\cos(90^\circ - \phi) = \sin\phi$ لکھا گیا ہے۔شکل 1.20-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات a_ϕ، a_x اور a_y دکھائے گئے ہیں۔a_ϕ اور a_x کے مابین زاویہ $(90^\circ + \phi)$ ہے لہٰذا

$$a_\phi \cdot a_x = (1)(1)[\cos(90^\circ + \phi)] = -\sin\phi \tag{1.31}$$

ہے۔a_ϕ اور a_y کے مابین زاویہ ϕ ہے لہٰذا

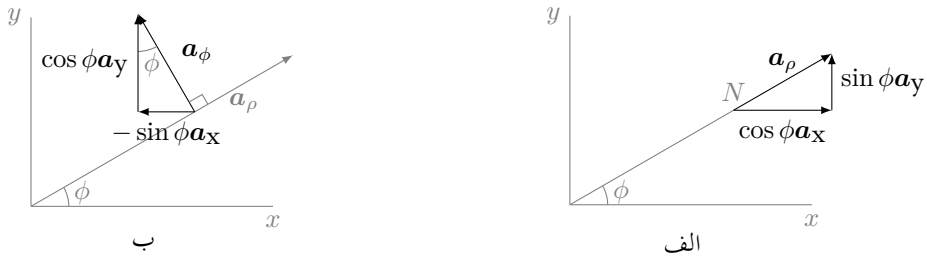
$$a_\phi \cdot a_y = (1)(1)(\cos\phi) = \cos\phi \tag{1.32}$$

کے برابر ہے۔a_z کا a_x اور a_y کے ساتھ غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہے۔اس کی وجہ ان کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے۔ان تمام غیر سمتی ضرب کو جدول 1.1 میں یکجا کیا گیا ہے۔

1.9.2 نلکی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا تعلق

شکل 1.21-الف میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ a_ρ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدد میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔a_ρ کی لمبائی ایک کے برابر ہے۔یوں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned} a_\rho &= \cos\phi a_x + \sin\phi a_y \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} a_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} a_y \end{aligned} \tag{1.33}$$



شکل 1.21: $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

شکل 1.22: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدد کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔شکل 1.21-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کارتیسی محدد میں اسی اکائی سمتیہ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_\phi &= -\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\ &= -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\end{aligned} \tag{1.34}$$

جہاں دوسرے قدم پر تمام نلکی محدد کے متغیرات کو کارتیسی متغیرات کی شکل میں لکھا گیا ہے۔

شکل 1.22-الف میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔جس نقطے پر ایسا درکار ہو، اس نقطے پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کی دُم رکھیں۔مرکز سے نقطے تک نقطہ دار سیدھی لکیر کھینچتے ہوئے اسے مزید آگے بڑھائیں۔اس نقطے پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اسی لکیر کی سمت میں ہو گا جبکہ $\boldsymbol{a}_\phi$ لکیر کے ساتھ نوے درجے کا زاویہ بنائے گا۔شکل میں $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھایا گیا ہے۔جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود بنائیں۔صاف ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کو دو عدد سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔ان میں سے ایک سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں اور دوسرا سمتیہ $\boldsymbol{a}_\phi$ کی الٹ جانب کو ہو گا۔یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos\phi\boldsymbol{a}_\rho - \sin\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.35}$$

لکھا جا سکتا ہے۔شکل 1.22-ب میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کا نلکی محدد میں تبادلہ دکھایا گیا ہے۔یہاں نقطہ پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ کی دُم رکھتے ہوئے اس کی نوک سے نقطہ دار لکیر پر عمود کھینچا گیا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \sin\phi\boldsymbol{a}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.36}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں مساوات 1.33 تا مساوات 1.36 کو جدول 1.1 کی مدد سے حاصل کریں۔کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کو کارتیسی یا نلکی محدد میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\ &= A_\rho\boldsymbol{a}_\rho + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned} \tag{1.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان میں پہلی مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = A_x\\ \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = A_y\\ \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\cdot\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = A_z\end{aligned} \tag{1.38}$$

حاصل ہوتے ہیں۔$\boldsymbol{A}$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر A_x، A_y اور A_z درکار ہوتے ہیں جنہیں مندرجہ بالا مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح مساوات 1.37 کے نچلے حصے کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{A} &= A_\rho\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\rho + A_\phi\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\phi + A_z\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = A_\rho\\ \boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{A} &= A_\rho\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_\rho + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_\phi + A_z\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = A_\phi\\ \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\cdot\boldsymbol{A} &= A_\rho\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\cdot\boldsymbol{a}_\rho + A_\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\cdot\boldsymbol{a}_\phi + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = A_z\end{aligned} \tag{1.39}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{A}$ کو نلکی نظام میں لکھنے کی خاطر A_ρ، A_ϕ اور A_z کو مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

آئیں $\boldsymbol{a}_\rho$ کو کارتیسی نظام میں لکھیں۔یوں $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_\rho$ کو کارتیسی نظام میں لکھنا مطلوب ہے۔مساوات 1.38 کے مطابق A_x حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{A}$ لینا ہو گا۔جدول 1.1 کے استعمال سے

$$A_x = \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح جدول کو استعمال کرتے ہوئے

$$A_y = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_\rho = \sin\phi$$

اور

$$A_z = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\cdot\boldsymbol{a}_\rho = 0$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

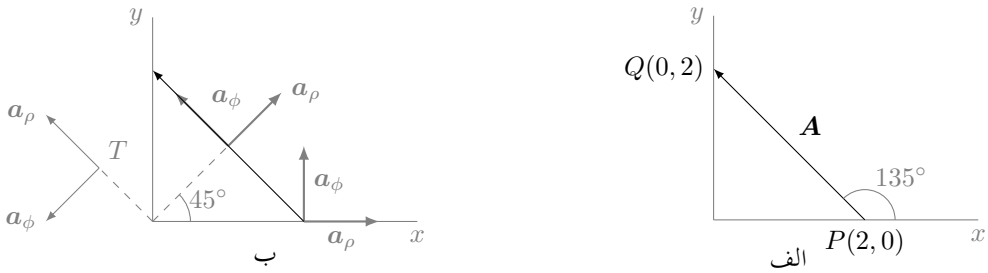
لکھا جائے گا۔ یہی جواب مساوات 1.33 میں بھی حاصل کیا گیا تھا۔

$\boldsymbol{a}_\phi$ کو بھی اسی طرح کارتیسی نظام میں لکھا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے اس سمتیہ کا باری باری $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}A_x &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\cdot\boldsymbol{a}_\phi = -\sin\phi\\ A_y &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\cdot\boldsymbol{a}_\phi = \cos\phi\\ A_z &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 0\end{aligned}$$

یوں

$$\boldsymbol{a}_\phi = A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = -\sin\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \cos\phi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$



شکل 1.23: کارتیسی اور نلکی محدد میں سمتیہ۔

حاصل ہوتا ہے۔یہی جواب مساوات 1.34 بھی دیتا ہے۔

آپ سے گزارش ہے کہ جدول 1.34 کو یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔اپنے آپ میں یہ صلاحیت پیدا کریں کہ ان جوابات کو آپ جلد اخذ کر سکیں۔

مشق 1.5: $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$، $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ کو جدول 1.1 کی مدد سے نلکی محدد میں لکھیں۔

جوابات:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\mathrm{x} &= \cos\phi\boldsymbol{a}_\rho - \sin\phi\boldsymbol{a}_\phi \\
\boldsymbol{a}_\mathrm{y} &= \sin\phi\boldsymbol{a}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{a}_\phi \\
\boldsymbol{a}_\mathrm{z} &= \boldsymbol{a}_\mathrm{z}
\end{aligned}$$

شکل 1.23 میں $P(2,0)$ سے $Q(0,2)$ تک سمتیہ $\boldsymbol{A}$ دکھایا گیا ہے۔کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \tag{1.40}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس سمتیہ کی حتمی قیمت

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} = \sqrt{(-2\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{y})\cdot(-2\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{y})} = \sqrt{8}$$

ہے۔آئیں اسی سمتیہ کو نلکی محدد میں لکھیں۔ایسا کرنے کی خاطر A_ρ اور A_ϕ درکار ہوں گے جنہیں حاصل کرنے کی خاطر جدول 1.1 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{a}_\phi\cdot\boldsymbol{A}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
A_\rho &= \boldsymbol{a}_\rho\cdot(-2\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{y}) = -2\cos\phi + 2\sin\phi \\
A_\phi &= \boldsymbol{a}_\phi\cdot(-2\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{y}) = 2\sin\phi + 2\cos\phi
\end{aligned}$$

یوں

$$\boldsymbol{A} = 2(-\cos\phi + \sin\phi)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin\phi + \cos\phi)\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ اس کی حتمی قیمت کیا حاصل ہوتی ہے۔اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\rho = 1$، $\boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 1$ اور $\boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0$ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}} \\
&= \sqrt{2^2(-\cos\phi + \sin\phi)^2 + 2^2(\sin\phi + \cos\phi)^2} \\
&= \sqrt{4(\cos^2\phi + \sin^2\phi - 2\cos\phi\sin\phi) + 4(\cos^2\phi + \sin^2\phi + 2\cos\phi\sin\phi)} \\
&= \sqrt{8(\cos^2\phi + \sin^2\phi)} \\
&= \sqrt{8}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یقیناً سمتیہ کی حتمی قیمت محدد کے نظام پر منحصر نہیں۔

مساوات 1.40 اور مساوات 1.41 ایک ہی سمتیہ کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔یہاں کارتیسی نظام کا استعمال نہایت آسان ثابت ہوا۔ آگے چل کر آپ دیکھیں گے کہ کہیں مسئلوں میں نلکی محدد کا استعمال زیادہ آسان ہو گا۔آئیں مساوات 1.40 پر مزید غور کریں۔اس مساوات میں اکائی سمتیات از خود اٹل نہیں ہیں۔ان کی سمتوں کا دارومدار زاویہ ϕ پر ہے۔شکل 1.23-ب میں $\phi = 0°$، $\phi = 45°$ اور $\phi = 135°$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھائے گئے ہیں۔نقطہ P یعنی $\phi = 0°$ پر مساوات 1.41

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\phi=0°} &= 2(-\cos 0° + \sin 0°)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin 0° + \cos 0°)\boldsymbol{a}_\phi \\
&= -2\boldsymbol{a}_\rho + 2\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}$$

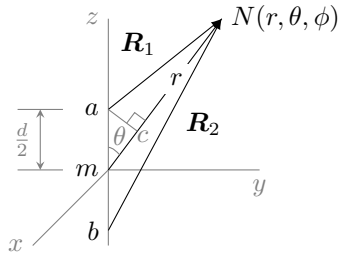
صورت اختیار کر لیتی ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi = 0°$ پر $\boldsymbol{A}$ کو دو عدد سمتیات کے مجموعہ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے جن میں پہلی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کے الٹ سمت میں ہے اور اس کی لمبائی دو کے برابر ہے جبکہ دوسری سمتیہ کی مقدار دو اور اس کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت میں ہی ہے۔1.23-ب میں نقطہ P پر $\boldsymbol{A}$ کی سمت واقع بڑھتی $\boldsymbol{a}_\phi$ اور گھٹتی $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں ہے۔یاد رہے کہ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کو $\phi = 0°$ پر حاصل کیا گیا ہے۔$\phi = 0°$ پر $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ برابر ہوتے ہیں اور اسی طرح $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ برابر ہوتے ہیں۔یہی وجہ ہے کہ مساوات 1.40 میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\phi$ پُر کرنے سے مندرجہ بالا مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$\phi = 45°$ پر مساوات 1.41

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\phi=45°} &= 2(-\cos 45° + \sin 45°)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin 45° + \cos 45°)\boldsymbol{a}_\phi \\
&= 2(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\rho + 2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\phi \\
&= \sqrt{8}\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi = 45°$ پر $\boldsymbol{A}$ صرف اور صرف $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت میں ہے اور اس کی لمبائی $\sqrt{8}$ ہے۔شکل 1.23-ب میں یہ حقیقت واضح ہے کہ $\phi = 45°$ پر $\boldsymbol{A}$ کی سمت $\boldsymbol{a}_\phi$ ہی ہے۔یاد رہے کہ اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کو $\phi = 45°$ پر حاصل کیا گیا ہے۔شکل میں اکائی سمتیات کو عین $\boldsymbol{A}$ کے اوپر کھینچا گیا ہے تا کہ سمتیات کی سمتوں کا موازنہ آسانی سے کیا جا سکے۔

آپ نے دیکھا کہ نلکی محدد میں سمتیہ کی مساوات کا دارومدار اس نقطے پر ہے جس نقطے کے اکائی سمتیات استعمال کئے جائیں۔آئیں دیکھیں کہ $\phi = 135°$ پر پائے جانے والے نقطہ T کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کیسا لکھا جائے گا۔مساوات



شکل 1.24: جفت قطب کے چارجوں سے دور نقطے تک فاصلے۔

1.41 میں $\phi = 135^\circ$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{\phi=135^\circ} &= 2(-\cos 135^\circ + \sin 135^\circ)\boldsymbol{a}_\rho + 2(\sin 135^\circ + \cos 135^\circ)\boldsymbol{a}_\phi \\ &= 2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\rho + 2(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_\phi \\ &= \sqrt{8}\boldsymbol{a}_\rho\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے مطابق $\phi = 135^\circ$ کے اکائی سمتیات استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کو $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت میں $\sqrt{8}$ لمبائی کا سمتیہ لکھا جا سکتا ہے۔شکل سے یہ حقیقت واضح ہے۔

مثال 1.8: شکل 1.24 میں z محدد پر نقطہ $a(0,0,\frac{d}{2})$ پر مثبت چارج $+Q$ اور نقطہ $b(0,0,-\frac{d}{2})$ پر منفی چارج $-Q$ پائے جاتے ہیں۔ایسے دو برابر لیکن الٹ علامت کے دو قریب قریب پائے جانے والے چارجوں کے جوڑی کو جفت قطب[23] کہتے ہیں۔دکھائے گئے سمتی فاصلوں $\boldsymbol{R}_1$ اور $\boldsymbol{R}_2$ کو کروی محدد میں لکھیں۔

حل:m سے N تک فاصلہ r ہے اور اس سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔نقطہ a سے r پر عمودی لکیر لگائی گئی ہے جو اسے c پر ملتی ہے۔یوں ac کی سمت کروی محدد کے اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ کی سمت میں ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے $mc = \frac{d}{2}\cos\theta$ اور $ac = \frac{d}{2}\sin\theta$ لکھے جا سکتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{R}_1$ کو ہم a سے c تک سمتیہ $\frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$ اور c سے N تک سمتیہ $(r-\frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کے مجموعے کی شکل میں

$$\boldsymbol{R}_1 = \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta + (r - \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{1.42}$$

لکھ سکتے ہیں۔ہم اسی طرح شکل 1.24 میں N سے m تک لکیر کو m سے آگے بڑھا کر b سے اس پر عمودی لکیر کھینچ کر شکل کو دیکھتے ہوئے $\boldsymbol{R}_2$ کی مساوات بھی لکھ سکتے ہیں البتہ ایسا کرنے کی بجائے آئیں $\boldsymbol{R}_2$ کی مساوات تحلیلی طریقے سے حاصل کریں۔شکل کو دیکھتے ہوئے

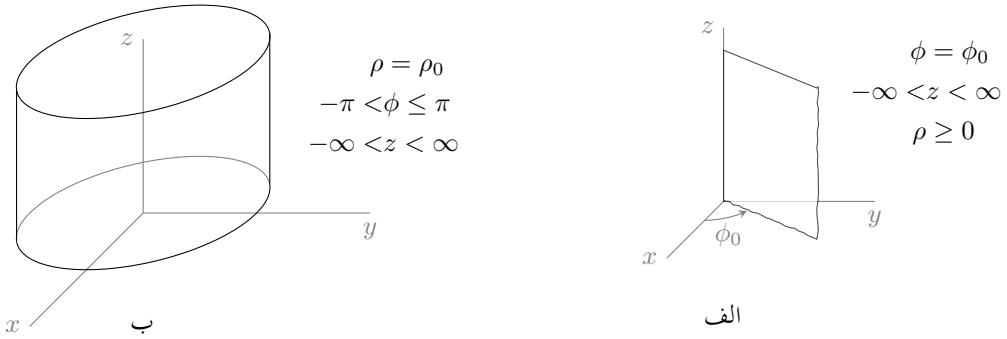
$$\boldsymbol{R}_2 = \frac{d}{2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} + r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور کروی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ استعمال کئے گئے۔کروی محدد میں کسی بھی لکیر کی طرح

$$\boldsymbol{R}_2 = A_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + A_\theta\boldsymbol{a}_\theta + A_\phi\boldsymbol{a}_\phi$$

---

[23] dipole



شکل 1.25: $\phi = \phi_0$ اور $\rho = \rho_0$ سطحیں۔

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں $A_r = \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ سے حاصل کریں۔

$$A_r = \left(\frac{d}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} + r\boldsymbol{a}_\mathrm{r}\right) \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \frac{d}{2}\cos\theta + r$$

اسی طرح $A_\theta = \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{a}_\theta$ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$A_\theta = \left(\frac{d}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} + r\boldsymbol{a}_\mathrm{r}\right) \cdot \boldsymbol{a}_\theta = -\frac{d}{2}\sin\theta$$

اسی طرح $A_\phi = \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{a}_\phi$ لکھتے ہوئے $A_\phi = 0$ حاصل ہوتا ہے۔یوں

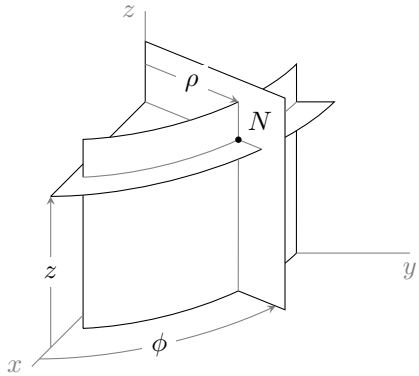
$$\boldsymbol{R}_2 = \left(\frac{d}{2}\cos\theta + r\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{r} - \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta \tag{1.43}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

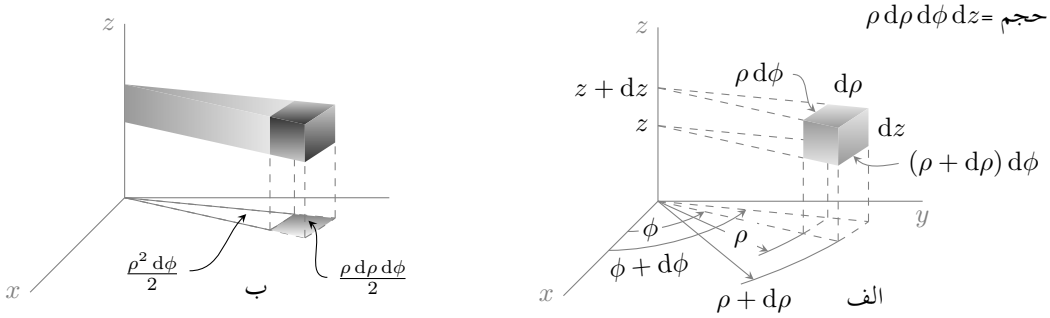
1.9.3 نلکی لامحدود سطحیں

شکل 1.25-الف میں ϕ تبدیل کئے بغیر ρ اور z کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے $\phi = \phi_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا ہے۔یہ سطح نلکی شکل رکھتی ہے جس کا اوپر والا منہ اور نچلا منہ کھلے ہیں یعنی ان پر ڈھکن نہیں۔شکل-ب میں ρ تبدیل کئے بغیر ϕ اور z کو تبدیل کرتے ہوئے $\rho = \rho_0$ سطح کا حصول دکھایا گیا ہے۔ان دونوں لامحدود سطحوں کے کچھ حصے ان اشکال میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-الف میں ρ کی قیمت صرف مثبت جبکہ z کی قیمت مثبت یا منفی ممکن ہے۔شکل-ب میں زاویہ کُل 2π ریڈیئن تبدیل ہو سکتا ہے۔یوں زاویے کا مثبت حد π ریڈیئن یعنی 180 درجہ ہے جبکہ اس کا منفی[24] حد $-\pi$ یعنی -180 درجے ہے۔نلکی محدد اور کارتیسی نظام دونوں میں $z = z_0$ سطح یکساں بنتی ہے۔

جیسے شکل 1.26 میں دکھایا گیا ہے، $\rho = \rho_1$ اور $\phi = \phi_1$ سطحیں $\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔اسی طرح $\rho = \rho_1$ اور $z = z_1$ سطحیں ایک گول دائرے پر ملتے ہیں جبکہ $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سیدھ میں سیدھی لکیر پر ملتے ہیں۔$\rho = \rho_1$، $\phi = \phi_1$ اور $z = z_1$ سطحیں صرف اور صرف ایک ہی نقطہ N پر اکٹھے ملتے ہیں۔نلکی محدد میں کسی بھی نقطے



شکل 1.26: نلکی محدد کے تین سطحیں۔



شکل 1.27: نلکی محدد میں انتہائی چھوٹی حجم۔

کا مقام اسی طرح تین سطحوں کے متقاطع نقطہ سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ $(0,0,z)$ تک پہنچنے کی خاطر ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔

کسی بھی نقطہ $N(\rho_1,\phi_1,z_1)$ پر $\rho=\rho_1$، $\phi=\phi_1$ اور $z=z_1$ سطحیں بنانے کے بعد اگر نلکی محدد کے متغیرات کو $\mathrm{d}\rho$، $\mathrm{d}\phi$ اور $\mathrm{d}z$ بڑھا کر مزید تین سطحیں کھینچے جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر منحرف مکعب کو گھیریں گے جسے شکل 1.27-الف میں دکھایا گیا ہے۔رداسی سمت میں اس منحرف مکعب کے اطراف کی لمبائی $\mathrm{d}\rho$ جبکہ $\boldsymbol{a}_z$ سمت کے اطراف کی لمبائی $\mathrm{d}z$ ہے۔ $\boldsymbol{a}_\phi$ سمت میں z محدد کے قریبی گول طرف کی لمبائی $\rho\,\mathrm{d}\phi$ جبکہ محدد سے دور طرف کی گول لمبائی $(\rho+\mathrm{d}\rho)\,\mathrm{d}\phi$ ہے۔جیسے جیسے اس منحرف مکعب کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے یہ ایک درست مکعب کی صورت اختیار کرتا ہے لہٰذا نہایت چھوٹے حجم کو مکعب تصور کرتے ہوئے اس کا حجم $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.27-ب میں چھوٹے منحرف مکعب کو رداسی سمت میں z محدد تک بڑھا کر پچر یا فانہ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔$z=0$ سطح پر اس کا عمودی سایہ بھی دکھایا گیا ہے۔ρ رداس کے گول دائرے کے مرکز سے $\mathrm{d}\phi$ زاویے پر دو لکیریں دائرے تک کھینچنے سے $\frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2}$ رقبہ گھیرا جاتا ہے۔اگر رداس $\rho+\mathrm{d}\rho$ ہو تب رقبہ $\frac{(\rho+\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2}$ ہو گا۔یوں شکل-ب میں چھوٹے مکعب کے سایہ کا

[24] حقیقت میں منفی حد -180° کو نہیں چھوتا۔اگر منفی حد -180° کو چھوئے تب منفی x محدد دو مرتبہ شامل ہوتا ہے۔

رقبہ $\mathrm{d}S$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \frac{(\rho+\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} - \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2}\\
&= \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi + 2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi + (\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2} - \frac{\rho^2\,\mathrm{d}\phi}{2}\\
&= \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi + \frac{(\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{2}\\
&\approx \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

ہو گا۔یہاں آخری قدم پر d کی علامت، مجموعہ کے پہلے رکن میں دو مرتبہ جبکہ دوسرے رکن میں تین مرتبہ ہے۔یوں دوسرے اور پہلے رکن کی نسبت $\frac{0.5(\mathrm{d}\rho)^2\,\mathrm{d}\phi}{\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi} = \frac{\mathrm{d}\rho}{2\rho}$ ہو گی۔$\mathrm{d}\rho$ کو کم سے کم[25] کرتے ہوئے دوسرے رکن کو قابل نظر انداز بناتے ہوئے نظرانداز کیا گیا ہے۔یوں $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ رقبہ اور $\mathrm{d}z$ بلندی کے مکعب کا حجم $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ ہو گا۔

شکل 1.27 کو درست مکعب تصور کرتے ہوئے، اس کے اطراف کی لمبائی $\rho\,\mathrm{d}\phi$، $\mathrm{d}\rho$ اور $\mathrm{d}z$ لی جاتی ہے۔یوں مکعب کے نچلی اور اوپر سطح کا رقبہ مستطیل کے اطراف کو ضرب دیتے ہوئے $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح سامنے اور پیچھے سطحوں کا رقبہ $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$ جبکہ بائیں اور دائیں سطحوں کا رقبہ $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.27-الف میں نلکی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(\rho,\phi,z)$ کونے سے $N'(\rho+\mathrm{d}\rho,\phi+\mathrm{d}\phi,z+\mathrm{d}z)$ کونے پہنچتے ہیں۔N سے N' تک سمتیہ کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_z \tag{1.44}$$

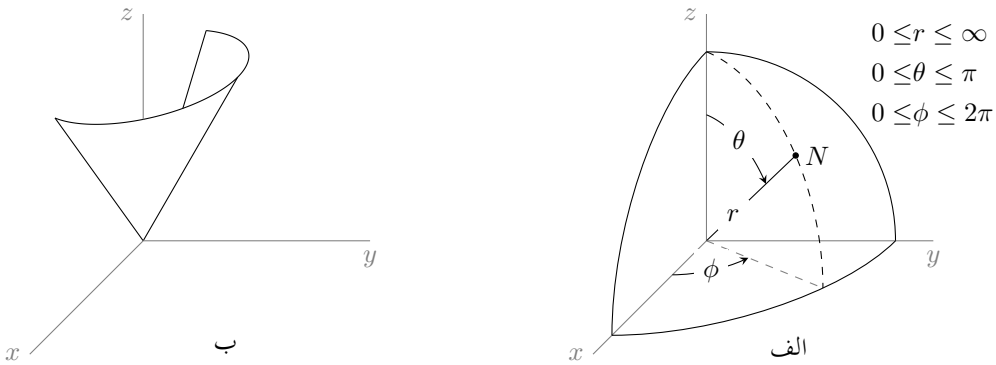
لکھا جاتا ہے۔یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے مابین سمتی فاصلے کو ظاہر کرتی ہے۔

1.10 کروی محدد

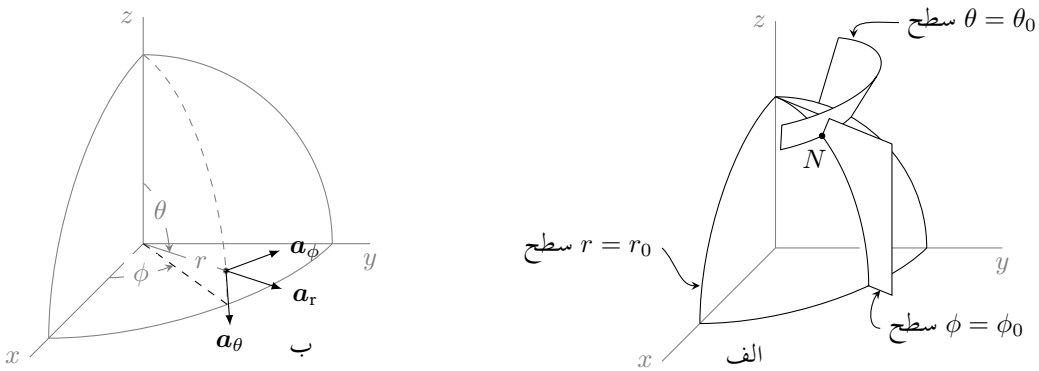
سیدھی لکیروں اور سیدھی سطحوں کو کارتیسی محدد میں زیادہ آسانی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ نلکی سطحوں کو ظاہر کرنے کے لئے نلکی محدد بہتر ثابت ہوتا ہے۔اسی طرح کرہ اشکال کے سطحوں کو کروی محدد میں باآسانی لکھا جا سکتا ہے۔آئیں کروی نظام پر غور کریں۔

شکل 1.28-الف میں کروی محدد کے متغیرات r، θ اور ϕ دکھائے گئے ہیں۔محدد کے مرکز سے نقطہ N تک کے فاصلے r کو کروی رداس پکارا جاتا ہے جبکہ z محدد سے کروی رداس تک زاویے کو θ لکھا جاتا ہے۔x محدد سے رداس کے عمودی سائے تک زاویہ ϕ ہے۔کروی اور نلکی نظام میں ϕ یکساں بیان کیا جاتا ہے۔رداس کی قیمت مثبت لی جاتی ہے۔یوں $r \geq 0$ ممکن ہے۔θ کی کم سے کم قیمت $0°$ اور زیادہ سے زیادہ قیمت $180°$ ہے جبکہ ϕ کی کم سے کم قیمت $0°$ اور زیادہ سے زیادہ قیمت $360°$ ہے۔

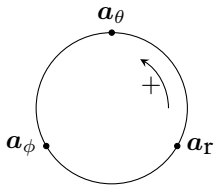
r اور ϕ تبدیل کئے بغیر θ کو 0 سے بڑھاتے ہوئے π ریڈیئن کرنے سے نقطہ N شکل 1.28-الف میں نقطہ دار لکیر پر چلتے ہوئے مثبت z محدد سے شروع ہو کر منفی z محدد پر پہنچتا ہے۔اسے نقطہ دار لکیر کو کرہ ارض کے خط طول بلد[26] تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل-الف میں θ کا $0°$ تا $90°$ تبدیل ہوتا دکھایا گیا ہے۔اسی طرح r اور θ تبدیل کئے بغیر ϕ کو $0°$ تا $360°$ تبدیل



شکل 1.28: الف کروی محدد کے متغیرات۔ ب $\theta = \theta_0$ سطح کا کچھ حصہ۔



شکل 1.29: (الف) تین عمودی سطحوں کے ملاپ سے نقطہ N کا حصول۔ (ب) کروی محدد کے تین عمودی اکائی سمتیات۔



شکل 1.30: کروی نظام میں اکائی سمتیات کی صلیبی ضرب۔

کرنے سے نقطہ N گول دائرے پر z محدد کے گرد ایک چکر کاٹے گا۔یہ حرکت کرہ ارض کے خط عرض بلد[27] پر چلنے کے مانند ہے۔θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کو تبدیل کرنے سے نقطہ N مرکز سے سیدھی باہر نکلتی لکیر پر حرکت کرتا ہے۔

r تبدیل کئے بغیر θ کو $0°$ تا $180°$ اور ϕ کو $0°$ تا $360°$ تبدیل کرنے سے نقطہ N کروی $r = r_0$ سطح پر حرکت کرے گا۔ اس کروی سطح کا رداس r ہو گا۔شکل 1.28-الف میں θ کو $0°$ تا $90°$ اور ϕ کو $0°$ تا $90°$ تبدیل کرنے سے حاصل سطح دکھائی گئی ہے۔شکل 1.28-ب میں θ تبدیل کئے بغیر r اور ϕ تبدیل کرنے سے پیدا مخروط[28] $\theta = \theta_0$ کروی سطح دکھائی گئی ہے۔ϕ تبدیل کئے بغیر r اور θ تبدیل کرنے سے نلکی محدد کی طرح $\phi = \phi_0$ سطح حاصل ہوتی ہے۔ شکل 1.29-الف میں ان تینوں سطحوں کو دکھایا گیا ہے۔بالکل کارتیسی اور نلکی محدد کی طرح، کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ کا مقام ان تین سطحوں کے نقطہ ملاپ سے اخذ کیا جاتا ہے۔کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر $r = r_0$، $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحیں آپس میں عمودی ہوتی ہے اور یہ صرف اور صرف اسی نقطے پر اکھٹے ملتی ہیں۔

شکل 1.29-ب میں کروی نظام کے تین عمودی اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$، $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ دکھائے گئے ہیں۔نلکی محدد کی طرح کروی محدد کے عمودی اکائی سمتیات بھی مقام تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتے ہیں۔کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ پر θ اور ϕ تبدیل کئے بغیر r کے بڑھتے جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہو گی۔اسی طرح θ بڑھانے سے نقطہ N اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ کی جانب حرکت کرے گا جبکہ ϕ بڑھانے سے نقطہ $\boldsymbol{a}_\phi$ کی جانب حرکت کرے گا۔کارتیسی اور نلکی محدد کی طرح کروی محدد کے اکائی سمتیات کو بھی محددی نظام کے متغیرات کو کم سے کم بڑھاتے ہوئے نقطے کی حرکت کی جانب اکائی سمتیہ کھینچنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.29-الف سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سمتیہ $r = r_0$ سطح کے عمودی جبکہ $\theta = \theta_0$ اور $\phi = \phi_0$ سطحوں کے متوازی ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_\theta$ سمتیہ $\theta = \theta_0$ سطح کے عمودی اور $\phi = \phi_0$ سطح کے متوازی پایا جاتا ہے جبکہ $r = r_0$ سطح کے ساتھ مماس بناتا ہے۔$\boldsymbol{a}_\phi$ سمتیہ $\phi = \phi_0$ سطح کے عمودی جبکہ $r = r_0$ اور $\theta = \theta_0$ سطحوں کے ساتھ مماس بناتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$، $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_\phi$ کروی نظام کے اکائی سمتیات ہیں۔$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_\phi$ لکھنے سے دائیں ہاتھ کا کروی نظام حاصل ہوتا ہے۔دائیں ہاتھ کے قانون میں دائیں ہاتھ کا انگوٹھا r جبکہ پہلی انگلی θ اور دوسری انگلی ϕ بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتے ہیں۔نلکی محدد میں یہ انگلیاں ρ، ϕ اور z جبکہ کارتیسی محدد میں x، y اور z بڑھانے سے پیدا حرکت کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہیں۔

دائیں ہاتھ کے قانون یا شکل 1.30 کی مدد سے یوں اکائی سمتیات کے صلیبی ضرب

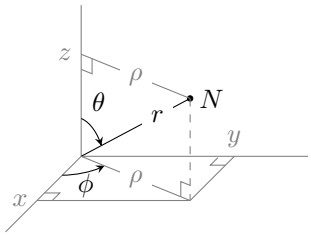
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_\phi, \quad \boldsymbol{a}_\theta \times \boldsymbol{a}_\phi = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}, \quad \boldsymbol{a}_\phi \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{a}_\theta \tag{1.45}$$

[25] کسی بھی متغیرہ مثلاً ρ میں چھوٹی سی تبدیلی کو $\Delta\rho$ لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $\mathrm{d}\rho$ لکھا جاتا ہے۔$\mathrm{d}\rho$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $\mathrm{d}\rho \to 0$ ہوتا ہے۔

[26] longitude

[27] latitude

[28] cone



شکل 1.31: کروی، نلکی اور کارتیسی متغیرات کا تبادلہ۔

لکھے جا سکتے ہیں۔اسی طرح

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\theta} \cdot \boldsymbol{a}_{\theta} = 1, \quad \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 1 \tag{1.46}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\theta} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\theta} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{\phi} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = 0 \tag{1.47}$$

بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

نقطہ N کا z محدد سے فاصلہ ρ ہے جو نلکی محدد کا رداس ہے۔اسے شکل 1.31 میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\rho = r\sin\theta$ کے برابر ہے۔اسی طرح $z = 0$ سطح سے N کی اونچائی z ہے جو شکل کو دیکھتے ہوئے $z = r\cos\theta$ لکھی جا سکتی ہے۔نقطہ N کا عمودی سایہ $z = 0$ سطح پر دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $x = \rho\cos\phi$ اور $y = \rho\sin\phi$ لکھے جا سکتے ہیں۔$\rho = r\sin\theta$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{1.48}$$

لکھے جا سکتے ہیں جہاں z کی مساوات بھی ساتھ ہی لکھی گئی ہے۔مساوات 1.48 کروی سے کارتیسی متغیرات دیتا ہے۔ اسی شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + z^2 \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned} \tag{1.49}$$

لکھتے ہوئے

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.50}$$

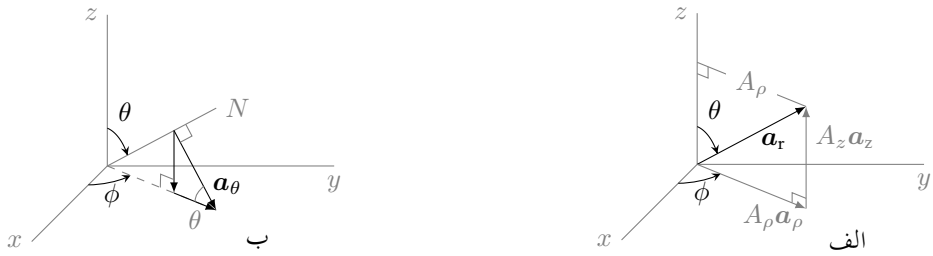
حاصل ہوتا ہے۔مساوات 1.48 میں z کی مساوات سے

$$\theta = \cos^{-1}\frac{z}{r} = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{1.51}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح مساوات 1.48 کے y کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{1.52}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 1.50، مساوات 1.51 اور مساوات 1.52 کارتیسی سے کروی متغیرات دیتے ہیں۔



شکل 1.32: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی نظام میں تبادلہ۔

شکل 1.29-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔a_r کی سمت تبدیل کئے بغیر اسے محدد کے مرکز پر منتقل کرتے ہوئے شکل 1.32-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ اسے نلکی محدد کے اکائی سمتیات کی مدد سے

$$a_r = A_\rho a_\rho + A_z a_z \tag{1.53}$$

لکھا جا سکتا ہے۔شکل 1.32-الف میں a_r کی لمبائی ایک لیتے ہوئے $A_\rho = \sin\theta$ اور $A_z = \cos\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$a_r = \sin\theta a_\rho + \cos\theta a_z \tag{1.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا باری باری a_ρ، a_ϕ اور a_z کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_r \cdot a_\rho &= (\sin\theta a_\rho + \cos\theta a_z) \cdot a_\rho = \sin\theta \\ a_r \cdot a_\phi &= (\sin\theta a_\rho + \cos\theta a_z) \cdot a_\phi = 0 \\ a_r \cdot a_z &= (\sin\theta a_\rho + \cos\theta a_z) \cdot a_z = \cos\theta \end{aligned} \tag{1.55}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $a_\rho \cdot a_\rho = 1$، $a_z \cdot a_\rho = 0$ وغیرہ کا استعمال کیا گیا۔یہ مساوات کروی رداسی اکائی سمتیے اور نلکی نظام کے اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔اسی طرح جدول 1.1 استعمال کرتے ہوئے مساوات 1.54 کا باری باری a_x اور a_y کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_r \cdot a_x &= (\sin\theta a_\rho + \cos\theta a_z) \cdot a_x = \sin\theta\cos\phi \\ a_r \cdot a_y &= (\sin\theta a_\rho + \cos\theta a_z) \cdot a_y = \sin\theta\sin\phi \\ a_r \cdot a_z &= (\sin\theta a_\rho + \cos\theta a_z) \cdot a_z = \cos\theta \end{aligned} \tag{1.56}$$

حاصل ہوتا ہے۔مکمل نتائج ایک جگہ لکھنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات میں $a_r \cdot a_z$ کو بھی شامل کیا گیا ہے۔ یہ مساوات کروی اکائی رداسی سمتیے اور کارتیسی اکائی سمتیات کے تمام ممکنہ غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

a_r کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $a_r = \boldsymbol{A} = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ لکھتے ہیں۔مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = a_x \cdot a_r$ جبکہ $A_y = a_y \cdot a_r$ اور $A_z = a_z \cdot a_r$ ہوں گے۔یہ تمام مساوات 1.56 میں دئے گئے ہیں۔ یوں

$$a_r = \sin\theta\cos\phi a_x + \sin\theta\sin\phi a_y + \cos\theta a_z \tag{1.57}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 1.29-ب میں دکھائے a_θ کو $\phi = \phi_0$ سطح پر حرکت دیتے ہوئے مرکز کے اتنے قریب لا کر شکل 1.32-ب میں دکھایا گیا ہے کہ اس کی نوک $x = 0$ سطح کو چھوتی ہے۔جیسا شکل 1.29-الف سے واضح ہے، $\phi = \phi_0$ سطح پر a_θ کو حرکت دینے سے اس سمتیہ کی سمت تبدیل نہیں ہوتی۔شکل 1.32-ب کو دیکھتے ہوئے $a_\theta = B_\rho a_\rho - B_z a_z$ لکھا جا سکتا ہے۔یہاں رک

کر تسلی کر لیں کہ $B_\rho \boldsymbol{a}_\rho$ اور $\boldsymbol{a}_\theta$ کے مابین زاویہ θ ہے۔$\boldsymbol{a}_\theta$، $B_\rho \boldsymbol{a}_\rho$ اور $-B_z \boldsymbol{a}_z$ مل کر تکون بناتے ہیں جسے دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\begin{aligned} B_\rho &= \cos\theta \\ B_z &= \sin\theta \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{a}_\theta = \cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_z \tag{1.58}$$

کے برابر ہے۔اس مساوات کا باری باری $\boldsymbol{a}_\rho$، $\boldsymbol{a}_\phi$ اور $\boldsymbol{a}_z$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\rho &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_z) \cdot \boldsymbol{a}_\rho = \cos\theta \\ \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\phi &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_z) \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0 \\ \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_z &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_z) \cdot \boldsymbol{a}_z = -\sin\theta \end{aligned} \tag{1.59}$$

$\boldsymbol{a}_\theta$ اور نلکی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح مساوات 1.58 کا باری باری ax، $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ اور $\boldsymbol{a}_z$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لینے سے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{x} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_z) \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{x} = \cos\theta \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{x} = \cos\theta\cos\phi \\ \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{y} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_z) \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{y} = \cos\theta \boldsymbol{a}_\rho \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{y} = \cos\theta\sin\phi \\ \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{z} &= (\cos\theta \boldsymbol{a}_\rho - \sin\theta \boldsymbol{a}_z) \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{z} = -\sin\theta \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{z} = -\sin\theta \end{aligned} \tag{1.60}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یہ مساوات $\boldsymbol{a}_\theta$ اور کارتیسی اکائی سمتیات کے تمام غیر سمتی ضرب دیتا ہے۔

$\boldsymbol{a}_\theta$ کو کارتیسی نظام میں لکھنے کی خاطر $\boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_\mathrm{x} + A_y \boldsymbol{a}_\mathrm{y} + A_z \boldsymbol{a}_z$ لکھتے ہیں۔مساوات 1.38 کے مطابق $A_x = \boldsymbol{a}_\mathrm{x} \cdot \boldsymbol{a}_\theta$ جبکہ $A_y = \boldsymbol{a}_\mathrm{y} \cdot \boldsymbol{a}_\theta$ اور $A_z = \boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{a}_\theta$ ہوں گے۔یہ تمام مساوات 1.60 میں دئے گئے ہیں۔ یوں

$$\boldsymbol{a}_\theta = \cos\theta\cos\phi \boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \cos\theta\sin\phi \boldsymbol{a}_\mathrm{y} - \sin\theta \boldsymbol{a}_z \tag{1.61}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

کروی محدد کا $\boldsymbol{a}_\phi$ اور نلکی محدد کا $\boldsymbol{a}_\phi$ یکساں ہیں۔اسے کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{a}_\phi = -\sin\phi \boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \cos\phi \boldsymbol{a}_\mathrm{y} \tag{1.62}$$

لکھا جاتا ہے۔اس مساوات کا $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$، $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ اور $\boldsymbol{a}_z$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{x} &= -\sin\phi \\ \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{y} &= \cos\phi \\ \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_z &= 0 \end{aligned} \tag{1.63}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 1.55 اور مساوات 1.59 کے نتائج کے ساتھ $\boldsymbol{a}_\phi$ کے مختلف غیر سمتی ضربوں کو جدول 1.2 میں یکجا کیا گیا ہے۔

مساوات 1.56 اور مساوات 1.60 کے نتائج جدول 1.3 میں یکجا کئے گئے ہیں۔

جدول 1.2: کروی اکائی سمتیات کا نلکی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_z$	$\boldsymbol{a}_\phi$	$\boldsymbol{a}_\rho$	
$\cos\theta$	0	$\sin\theta$	$\boldsymbol{a}_r$
$-\sin\theta$	0	$\cos\theta$	$\boldsymbol{a}_\theta$
0	1	0	$\boldsymbol{a}_\phi$

جدول 1.3: کروی اکائی سمتیات کا کارتیسی اکائی سمتیات کے ساتھ غیر سمتی ضرب۔

$\boldsymbol{a}_z$	$\boldsymbol{a}_y$	$\boldsymbol{a}_x$	
$\cos\theta$	$\sin\theta\sin\phi$	$\sin\theta\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_r$
$-\sin\theta$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$\boldsymbol{a}_\theta$
0	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	$\boldsymbol{a}_\phi$

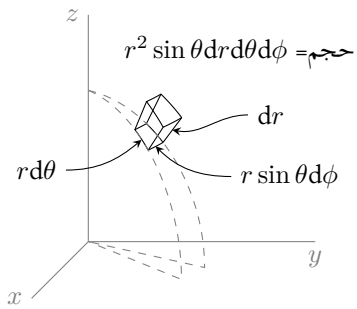
شکل 1.29 میں $N(r,\theta,\phi)$ پر تین عمودی سطحیں دکھائی گئی ہیں۔اگر کروی محدد کے متغیرات $\mathrm{d}r$، $\mathrm{d}\theta$ اور $\mathrm{d}\phi$ بڑھا کر دوبارہ تین عمودی سطحیں کھینچی جائیں تو یہ چھ سطحیں مل کر چھوٹا منحرف مکعب نما حجم گھیریں گی جسے شکل 1.33 میں دکھایا گیا ہے۔$\boldsymbol{a}_r$ سمت میں مکعب کے چار اطراف کی لمبائیاں $\mathrm{d}r$ ہے۔$\boldsymbol{a}_\theta$ سمت میں z محدد کے قریبی دو اطراف کی لمبائیاں $r\,\mathrm{d}\theta$ جبکہ دو دور اطراف کی لمبائیاں $(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta$ ہے جسے دو اجزاء کی صورت میں یوں $r\,\mathrm{d}\theta+\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔دور اطراف کے لمبائی کا پہلا جزو ہوبہو قریبی اطراف کی لمبائی ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو دور اور قریبی اطراف کے لمبائیوں میں فرق کو ظاہر کرتی ہے۔ان دو اجزاء کی نسبت $\frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{r\,\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}r}{r}$ کے برابر ہے۔$\mathrm{d}r$ کو کم سے کم[29] کرتے ہوئے اس نسبت کو کم سے کم کیا جا سکتا ہے۔ایسا ہی کرتے ہوئے ہم $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ کو رد کرتے ہوئے ان چاروں اطراف کی لمبائیاں $r\,\mathrm{d}\theta$ ہی لیتے ہیں۔اسی طریقہ کار سے $\boldsymbol{a}_\phi$ اطراف کی لمبائیاں $r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$ لکھی جا سکتی ہے۔منحرف مکعب نما کے اطراف میں معمولی فرق کو نظرانداز کرتے ہوئے اسے مکعب نما تصور کیا جا سکتا ہے جس کے $r=r_0$ سطحوں کا رقبہ $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ جبکہ $\theta=\theta_0$ سطحوں کا رقبہ $r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$ اور $\phi=\phi_0$ سطحوں کا رقبہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ ہو گا۔اس مکعب کا حجم $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ ہو گا۔

شکل 1.33 میں کروی محدد کے تینوں متغیرات تبدیل کرتے ہوئے ہم چھوٹے مکعب کے $N(r,\theta,\phi)$ کونے سے $N'(r+\mathrm{d}r,\theta+\mathrm{d}\theta,\phi+\mathrm{d}\phi)$ کونے پہنچتے ہیں۔N سے N' تک سمتیہ کو

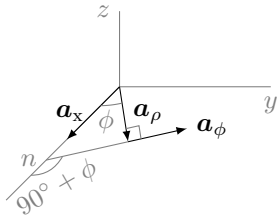
$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_r+r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta+r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{1.64}$$

لکھا جاتا ہے۔یہ مساوات کسی بھی دو قریبی نقطوں کے درمیان سمتی فاصلہ دیتا ہے۔

[29] کسی بھی متغیرہ مثلاً r میں چھوٹی سی تبدیلی کو Δr لکھا جاتا ہے جبکہ اس میں کم سے کم تبدیلی کو $\mathrm{d}r$ لکھا جاتا ہے۔$\mathrm{d}r$ کو تقریباً صفر سمجھا جا سکتا ہے یعنی $\mathrm{d}r\to 0$ ہوتا ہے۔



شکل 1.33: کروی نظام میں چھوٹی حجم۔



شکل 1.34: کارتیسی اور نلکی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔

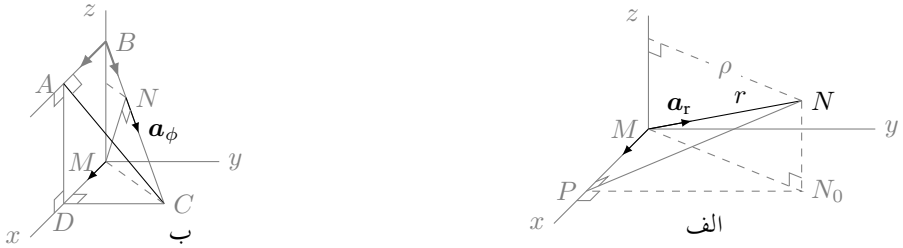
کسی بھی مکمل بند سطح کی سمت، سطح کے عمودی باہر جانب لی جاتی ہے۔شکل 1.33 میں $r = r_0$ سطح مرکز کا قریبی سطح ہے۔اس سطح کے دو آپس میں الٹ عمودی اطراف $\mp\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہیں جن میں $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ بند سطح کی بیرونی سمت کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا یہی اس سطح کی درست سمت ہے۔اس کے برعکس $r = r_0 + \mathrm{d}r$ سطح مرکز سے دور تر ہے۔اس سطح کے بھی دو آپس میں الٹ عمودی سمتیں $\mp\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہیں جن میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ سطح کی درست سمت ہے۔یوں $r = r_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ جبکہ $r = r_0 + \mathrm{d}r$ سطح کا سمتی رقبہ $r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہے۔اسی طرح $\theta = \theta_0$ سطح کا سمتی رقبہ $-r \sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\theta}$ جبکہ $\theta = \theta_0 + \mathrm{d}\theta$ سطح کا سمتی رقبہ $r \sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_{\theta}$ ہو گا۔$\phi = \phi_0$ سطح کا $-r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\phi = \phi_0 + \mathrm{d}\phi$ سطح کا سمتی رقبہ $r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \boldsymbol{a}_{\phi}$ ہو گا۔

مشق 1.6: شکل 1.33 میں سمت میں مرکز کے قریبی اور دور اطراف کی لمبائیاں لکھیں۔

جوابات: $r \sin\theta \,\mathrm{d}\phi$، $r \sin(\theta + \mathrm{d}\theta) \,\mathrm{d}\phi$، $(r + \mathrm{d}r) \sin\theta \,\mathrm{d}\phi$ اور $(r + \mathrm{d}r) \sin(\theta + \mathrm{d}\theta) \,\mathrm{d}\phi$

مثال 1.9: دو اکائی سمتیات $\boldsymbol{a}_1$ اور $\boldsymbol{a}_2$ کا غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = (1)(1)\cos\alpha_{12}$ یعنی ان کے مابین زاویے α_{12} کے کوسائن کے برابر ہوتا ہے۔غیر سمتی ضرب کے اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho}$، $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi}$ حاصل کریں۔

حل:شکل 1.34 میں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\rho}$ کے درمیان زاویہ ϕ جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\rho}$ کے درمیان زاویہ $90^\circ - \phi$ پایا جاتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} = \cos\phi$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\rho} = \cos(90^\circ - \phi) = \sin\phi$ کے برابر ہیں۔$\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کی سمتیں تبدیل کئے بغیر اگر انہیں یوں ہلایا جائے کہ ان کی دُم نقطہ n پر آ ٹھرے تو شکل سے ظاہر ہے کہ ان کے مابین زاویہ $90^\circ + \phi$ ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = \cos(90^\circ + \phi) = -\sin\phi$ کے برابر ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\phi}$ کے درمیان ϕ زاویہ ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \cdot \boldsymbol{a}_{\phi} = \cos\phi$ کے برابر ہے۔چونکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ان دونوں نلکی اکائی سمتیات کے عمودی ہے لہٰذا ان کا غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہو گا۔



شکل 1.35: کروی اور کارتیسی اکائی سمتیات کا غیر سمتی ضرب۔

مثال 1.10: مثال 1.9 کے طرز پر $\boldsymbol{a}_r$ کا $\boldsymbol{a}_x$، $\boldsymbol{a}_y$ اور $\boldsymbol{a}_z$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-الف میں نقطہ $N(r,\theta,\phi)$ دکھایا گیا ہے جسے $N(x,y,z)$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔شکل میں $\boldsymbol{a}_x$ اور $\boldsymbol{a}_r$ بھی دکھائے گئے ہیں۔شکل سے ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{a}_x \cdot \boldsymbol{a}_r = \cos \underline{/NMP}$ کے برابر ہے جہاں N اور P سے M تک لکیریں کھینچنے سے زاویہ $\underline{/NMP}$ بنتا ہے۔N سے $z=0$ سطح پر عمود نقطہ N_0 دیتا ہے۔N_0 سے x محدد پر عمود نقطہ P دیتا ہے۔N سے N_0 اور یہاں سے P منتقل ہوتے ہوئے $\boldsymbol{a}_x$ سمت میں کسی قسم کی حرکت نہیں کی جاتی لہٰذا اگر کارتیسی نظام میں $N(x,y,z)$ لکھا جائے تو اسی نظام میں $N_0(x,y,0)$ اور $P(x,0,0)$ لکھے جائیں گے۔ہم N سے x محدد پر عمود بناتے ہوئے بھی P تک پہنچ سکتے ہیں۔ تکون NMP میں M سے N تک کا فاصلہ $\overline{MN}=r$ جبکہ M سے P تک کا فاصلہ $\overline{MP}=x$ اور زاویہ $\underline{/NPM}=90^\circ$ ہیں لہٰذا $\cos \underline{/NMP} = \frac{x}{r}$ ہو گا۔یہی $\boldsymbol{a}_x$ اور $\boldsymbol{a}_r$ کے غیر سمتی ضرب کے برابر ہے۔N سے y محدد پر عمود بناتے ہوئے یوں $\boldsymbol{a}_y \cdot \boldsymbol{a}_r = \frac{y}{r}$ اور N سے z محدد پر عمود سے $\boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{a}_r = \frac{z}{r}$ لکھے جا سکتے ہیں۔چونکہ $x = r\sin\theta\cos\phi$، $y = r\sin\theta\sin\phi$ اور $z = r\cos\theta$ کے برابر ہیں لہٰذا ہم

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{a}_x &= \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\phi \\
\boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{a}_y &= \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\phi \\
\boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{a}_z &= \frac{z}{r} = \cos\theta
\end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں۔

مثال 1.11: مثال 1.9 کے طرز پر $\boldsymbol{a}_\theta$ کا $\boldsymbol{a}_x$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب حاصل کریں۔

حل: شکل 1.35-ب میں نقطہ N پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\theta$ جبکہ محدد کے مرکز M پر $\boldsymbol{a}_x$ دکھائے گئے ہیں۔$\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_x$ حاصل کرنے کی خاطر سمتیات کی سمت تبدیل کئے بغیر انہیں z محدد پر نقطہ B منتقل کرتے ہوئے دوبارہ دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_x = \cos \underline{/ABC}$ کے برابر ہے۔اس شکل میں $\underline{/DMC} = \phi$ اور $\underline{/BMN} = \theta$ کروی محدد کے زاویے ہیں۔تکون ΔBMN میں زاویہ $\underline{/MNB}$ نوے درجے کا ہے۔یوں $\underline{/NBM} = 90^\circ - \theta$ ہو گا۔شکل سے واضح ہے کہ $\underline{/NBM} = \underline{/CBM}$ ہیں۔اس طرح تکون ΔBMC میں $\underline{/BMC} = 90^\circ$ جبکہ $\underline{/CBM} = 90^\circ - \theta$ ہونے کی بنا پر $\underline{/MCB} = \theta$ ہو گا۔

شکل-ب میں $\overline{BM} = l$ لیتے ہوئے تکون ΔBMC کو دیکھتے ہوئے

$$\overline{BC} = \frac{l}{\sin\theta}$$
$$\overline{MC} = \frac{l}{\tan\theta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔تکون ΔMDC سے

$$\overline{MD} = \overline{MC}\cos\phi = \frac{l\cos\phi}{\tan\theta}$$

لکھا جا سکتا ہے۔شکل سے واضح ہے کہ $\overline{MD}$ اور $\overline{AB}$ برابر ہیں یعنی $\overline{AB} = \overline{MD}$-یوں تکون ΔBAC سے

$$\cos\underline{/ABC} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\left(\frac{l\cos\phi}{\tan\theta}\right)}{\left(\frac{l}{\sin\theta}\right)} = \cos\theta\cos\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \cos\theta\cos\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 1.7: شکل 1.35-ب کے طرز پر شکل بناتے ہوئے $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\cos\theta\sin\phi$ اور $-\sin\theta$

باب 2

کولومب کا قانون

2.1 قوت کشش یا دفع

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون[1] سے آپ بخوبی واقف ہوں گے۔کولومب کا قانون[2] اس سے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔کائناتی تجاذب کے قانون کو مساوات 2.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

$$F = G\frac{M_1 M_2}{R^2} \tag{2.1}$$

یہ مساوات کمیت M_1 اور کمیت M_2 کے مابین قوت کشش F دیتا ہے جہاں ایک کمیت کے مرکز سے دوسری کمیت کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔قوت کشش دونوں کمیت کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔دونوں کمیتوں پر قوت کشش کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں کمیتوں کے مرکزوں پر کھینچی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔M_1 پر قوت کشش کی سمت M_1 کے مرکز سے M_2 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے جبکہ M_2 پر قوت کشش کی سمت M_2 کے مرکز سے M_1 کے مرکز کی جانب کو ہوتا ہے۔تناسب کے جزو مستقل کو G لکھا اور تجاذبی مستقل[3] پکارا جاتا ہے جس کی قیمت تقریباً $6.674 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ کے برابر ہے۔

کولومب کا قانون مساوات 2.2 میں بیان کیا گیا ہے۔یہ مساوات چارج Q_1 اور چارج Q_2 کے مابین قوت کشش یا قوت دفع F دیتا ہے جہاں ایک چارج کے مرکز سے دوسری چارج کے مرکز تک کا فاصلہ R ہے۔ان چارجوں کا حجم صفر تصور کیا جاتا ہے۔یوں اگر چارج کو گیند کی شکل کا تصور کیا جائے تو اس گیند کے رداس کی لمبائی صفر ہو گی۔ایسے چارج کو نقطہ چارج[4] کہا جاتا ہے۔

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{R^2} \tag{2.2}$$

قوت کشش یا دفع دونوں چارجوں کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور باہمی فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔دونوں چارجوں پر قوت کی مقدار برابر ہوتی ہے اور یہ قوت دونوں چارجوں سے گزرتی لکیر پر عمل درآمد ہوتی ہے۔دو مختلف

[1] Law of Universal Gravitation
[2] Coulomb's law
[3] gravitational constant
[4] point charge

اقسام کے چارجوں کے مابین قوت کشش پائی جاتی ہے جبکہ دو یکساں چارجوں کے مابین قوت دفع پائی جاتی ہے۔مساوات کے جزو مستقل کو $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ لکھا جاتا ہے جہاں ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل[5] [6] ہے جس کی قیمت اٹل ہے۔خالی خلاء کے برقی مستقل کی قیمت

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \tag{2.3}$$

ہے جہاں c خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اور μ_0 خالی خلاء کی مقناطیسی مستقل[7] ہے۔یہ دونوں بھی اٹل مستقل ہیں جن کی قیمتیں

$$c = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 3 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{2.4}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{2.5}$$

ہیں۔یوں مقناطیسی مستقل کی قیمت تقریباً

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi} 10^{-9}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \tag{2.6}$$

کے برابر ہے۔اس کتاب میں $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ بار بار استعمال ہو گا جسے عموماً

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9 \times 10^9 \tag{2.7}$$

لیا جائے گا۔ϵ_0 کی اکائی فیراڈ فی میٹر $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ ہے جس کی وضاحت جلد کر دی جائے گی۔

مثال 2.1: زمین کی سطح پر زمین اور ایک کلو گرام کمیت کے مابین 9.8 N کی قوت کشش پائی جاتی ہے۔زمین کا رداس 6370 km لیتے ہوئے زمین کی کمیت حاصل کریں۔

حل:مساوات 2.1 کی مدد سے

$$9.8 = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times M \times 1}{6\,370\,000 \times 6\,370\,000}$$

لکھتے ہوئے زمین کی کمیت 5.959×10^{24} kg حاصل ہوتی ہے۔

مثال 2.2: زمین کی مرکز سے تقریباً 42 000 km کے فاصلے پر ذرائع ابلاغ کے سیٹلائٹ زمین کے گرد مدار میں گردش کرتے ہیں۔پوری دنیا میں بے تار[8] مواصلاتی نظام انہیں کے مرہون منت ہے۔اس فاصلے پر ایک کلو گرام کی کمیت اور زمین کے مابین قوت کشش کی مقدار حاصل کریں۔

---

[5] permittivity
[6] electric constant
[7] permeability
[8] wireless

حل:

$$F = \frac{6.674 \times 10^{-11} \times 5.959 \times 10^{24} \times 1}{42\,000\,000 \times 42\,000\,000} = 0.225\,\mathrm{N}$$

مثال 2.3: ایک ایک کولومب کے دو مثبت چارجوں کے درمیان ایک میٹر کا فاصلہ ہے۔ان میں قوت دفع حاصل کریں۔

حل: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت مساوات 2.7 سے لیتے ہوئے

$$F = 9 \times 10^9 \frac{1 \times 1}{1 \times 1} = 9 \times 10^9\,\mathrm{N}$$

مندرجہ بالا مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چارج کی اکائی (کولومب) انتہائی بڑی مقدار ہے۔

شکل 2.1 میں چارج Q_1 محدد کے مرکز سے سمتی فاصلہ $\mathbf{r_1}$ پر جبکہ چارج Q_2 مرکز سے سمتی فاصلہ $\mathbf{r_2}$ پر دکھائے گئے ہیں۔چارج Q_1 سے چارج Q_2 تک کا سمتی فاصلہ $\mathbf{R_{21}}$ ہے جہاں

$$\boldsymbol{R_{21}} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1} \tag{2.8}$$

کے برابر ہے۔سمتیہ $\mathbf{R_{21}}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\mathbf{a_{21}}$ یوں حاصل کیا جاتا ہے

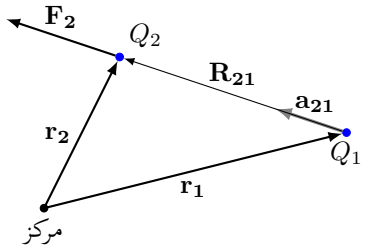
$$\boldsymbol{a_{21}} = \frac{\boldsymbol{R_{21}}}{|\boldsymbol{R_{21}}|} = \frac{\boldsymbol{R_{21}}}{R_{21}} = \frac{\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|} \tag{2.9}$$

چارج Q_2 پر قوت $\mathbf{F_2}$ کی حتمی قیمت مساوات 2.2 سے حاصل کی جا سکتی ہے جبکہ اس کی سمت اکائی سمتیہ $\mathbf{a_{21}}$ کے سمت میں ہو گی۔اس طرح یہ قوت

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F_2} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} \boldsymbol{a_{21}} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|^3} \end{aligned} \tag{2.10}$$

لکھا جائے گا۔مساوات 2.10 کولومب کے قانون کی سمتی شکل ہے۔چونکہ دونوں چارجوں پر برابر مگر الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے لہٰذا Q_1 پر قوت $\mathbf{F_1}$ یوں لکھا جائے گا

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F_1} = -\boldsymbol{F_2} &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} \boldsymbol{a_{21}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \boldsymbol{a_{12}} \end{aligned} \tag{2.11}$$



شکل 2.1: دو مثبت چارجوں کے مابین قوت دفع

جہاں دوسری قدم پر $R_{21} = R_{12} = R$ لکھا گیا ہے اور $\boldsymbol{a_{12}} = -\boldsymbol{a_{21}}$ کے برابر ہے۔ دونوں چارج مثبت یا دونوں چارج منفی ہونے کی صورت میں Q_2 پر مساوات 2.10 سے قوت $\mathbf{a_{21}}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔یوں یکساں چارجوں کے مابین قوت دفع پایا جاتا ہے۔دو الٹ اقسام کے چارجوں کی صورت میں Q_2 پر قوت $-\mathbf{a_{21}}$ کی سمت میں حاصل ہوتا ہے۔یوں الٹ اقسام کے چارجوں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے۔

مثال 2.4: شکل 2.1 میں نقطہ $A(3,2,4)$ پر $20\,\mu\text{C}$ کا چارج Q_1 جبکہ نقطہ $B(1,5,9)$ پر $-50\,\mu\text{C}$ کا چارج Q_2 پایا جاتا ہے۔منفی چارج Q_2 پر سمتی قوت حاصل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R_{21}} &= (1-3)\boldsymbol{a}_\text{x} + (5-2)\boldsymbol{a}_\text{y} + (9-4)\boldsymbol{a}_\text{z} \\
&= -2\boldsymbol{a}_\text{x} + 3\boldsymbol{a}_\text{y} + 5\boldsymbol{a}_\text{z} \\
R_{21} &= |\boldsymbol{R_{21}}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 5^2} \\
&= \sqrt{38} \\
&= 6.1644
\end{aligned}$$

اور یوں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a_{21}} &= \frac{\boldsymbol{R_{21}}}{|\boldsymbol{R_{21}}|} = \frac{-2\boldsymbol{a}_\text{x} + 3\boldsymbol{a}_\text{y} + 5\boldsymbol{a}_\text{z}}{6.1644} \\
&= -0.324\boldsymbol{a}_\text{x} + 0.487\boldsymbol{a}_\text{y} + 0.811\boldsymbol{a}_\text{z}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F_2} &= \frac{36\pi \times 10^9}{4\pi} \frac{\left(-50 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{-6}\right)}{38} \left(-0.324\boldsymbol{a}_\text{x} + 0.487\boldsymbol{a}_\text{y} + 0.811\boldsymbol{a}_\text{z}\right) \\
&= -0.237 \left(-0.324\boldsymbol{a}_\text{x} + 0.487\boldsymbol{a}_\text{y} + 0.811\boldsymbol{a}_\text{z}\right) \text{ N}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوت کی سمت $\mathbf{a_{21}}$ کے الٹ سمت میں ہے۔یوں منفی چارج پر قوت کی سمت مثبت چارج کی جانب ہے یعنی اس پر قوت کشش پایا جاتا ہے۔

کسی بھی چارج پر ایک سے زیادہ چارجوں سے پیدا مجموعی قوت تمام چارجوں سے پیدا علیحدہ علیحدہ قوتوں کا سمتی مجموعہ ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \tag{2.12}$$

اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ کولومب کا قانون خطی[9] ہے۔

2.2 برقی میدان کی شدت

نیوٹن کے کائناتی تجاذب کے قانون میں زمین کی کمیت کو M لکھ کر کمیت m پر قوت F حاصل کی جا سکتی ہے۔ایک کلوگرام کمیت پر اس قوت کی مقدار $\frac{F}{m}$ ہو گی جسے زمین کی کشش [10] یا ثقلی اسراع پکارا اور g لکھا جاتا ہے۔زمین کی سطح پر g کی مقدار تقریباً $9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ کے برابر ہے۔

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} \tag{2.13}$$

کسی بھی کمیت M کے گرد تجاذبی میدان[11] پایا جاتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر اس تجاذبی میدن کو ناپنے کی خاطر اس نقطے پر پیمائشی کمیت m_p[12] رکھ کر اس پر قوت ناپی جاتی ہے۔مختلف مقامات پر اس طرح قوت ناپ کر ہم تجاذبی میدان کا جائزہ لے سکتے ہیں۔تجاذبی قوت کی مقدار کا دارومدار پیمائشی کمیت [13] m_p پر بھی منحصر ہے۔مختلف تجاذبی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام تجاذبی میدان جانچتے وقت ایک ہی قیمت کے پیمائشی کمیت استعمال کی جائے۔ماہرین طبیعیات عموماً m_p کو ایک کلوگرام رکھتے ہیں۔یہ ضروری نہیں کہ تجاذبی قوت ناپتے وقت ایک کلوگرام کی پیمائشی کمیت ہی استعمال کی جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت $\mathbf{F}$ کو m_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک کلوگرام پر تجاذبی قوت حاصل کی جا سکتی ہے۔زمین کے قریب ایک کلو گرام کمیت پر قوت کشش کو ثقلی اسراع g پکارا جاتا ہے۔

مثال 2.5: زمین کی سطح پر دو سو گرام پیمائشی کمیت پر $1.96\,\mathrm{N}$ قوت ناپی جاتی ہے۔ثقلی اسراع حاصل کریں۔

حل:

$$g = \frac{1.96}{0.2} = 9.8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \tag{2.14}$$

---

[9] linear
[10] gravity
[11] gravitational field
[12] m_p لکھتے ہوئے زیرنوشت میں p لفظ پیمائشی کے پ کو ظاہر کرتا ہے، یعنی یہ وہ کمیت ہے جسے قوت کی پیمائش کی خاطر استعمال کیا جا رہا ہے۔
[13] test mass

مساوات 2.13 سے ہم

$$F = mg \qquad (2.15)$$
$$w = mg$$

لکھ سکتے ہیں جو زمین کی سطح پر کمیت m پر کشش ثقل F دیتا ہے جسے وزن پکارا اور w لکھا جاتا ہے۔

چارجوں پر بھی اسی طرح غور کیا جاتا ہے۔کسی بھی چارج Q کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے یعنی برقی میدان کا منبع چارج ہے۔اس برقی میدان میں چارج پر قوت اثر انداز ہوتا ہے۔چارج Q کے برقی میدان کی شدت کے پیمائش کی خاطر اس میدان میں مختلف مقامات پر پیمائشی چارج[14] q_p پر قوت $\mathbf{F}$ ناپ کر برقی میدان کا مطالعہ کیا جا سکتا ہے اور اس کا نقشہ بنایا جا سکتا ہے۔مختلف چارجوں کے برقی میدانوں کا آپس میں موازنہ کرتے وقت یہ ضروری ہے کہ تمام صورتوں میں ایک ہی قیمت کے پیمائشی چارج استعمال کئے جائیں۔ماہرین طبیعیات q_p کو ایک کولومب کا مثبت چارج رکھتے ہیں۔یہ ضروری نہیں کہ قوت ناپتے وقت ایک کولومب کا مثبت پیمائشی چارج ہی استعمال کیا جائے البتہ جوابات اکٹھے کرتے وقت $\mathbf{F}$ کو q_p سے تقسیم کرتے ہوئے ایک مثبت کولومب پر قوت حاصل کی جاتی ہے جسے برقی میدان کی شدت[15] یا صرف برقی میدان پکارا اور $\mathbf{E}$ لکھا جاتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q_p} \qquad (2.16)$$

مختلف مقامات پر موجود مختلف قیمتوں کے چارجوں سے کسی ایک نقطے پر پیدا برقی میدان تمام چارجوں کے مجموعی اثر سے پیدا ہو گا۔ایسا کولومب کے قانون کے خطی ہونے کی بنا پر ہوتا ہے۔کسی بھی نقطے پر n چارجوں کا مجموعی $\mathbf{E}$ تمام چارجوں کے علیحدہ علیحدہ پیدا کردہ $\boldsymbol{E}_1$، $\boldsymbol{E}_2$، $\boldsymbol{E}_3$، $\cdots$ کا سمتی مجموعہ

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \cdots + \boldsymbol{E}_n \qquad (2.17)$$

ہوتا ہے۔یوں کسی بھی نقطے P پر $\mathbf{E}$ ناپتے وقت اس نقطے پر ایک کولومب چارج q_p رکھ کر اس چارج پر قوت ناپی جاتی ہے۔یہ قوت اس نقطے پر تمام چارجوں کا مجموعی $\mathbf{E}$ ہوتا ہے۔یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ ناپتے وقت یہاں رکھے پیمائشی چارج q_p کا اثر شامل نہیں ہوتا۔

مساوات 2.10 سے چارج Q سے $\boldsymbol{a}_R$ سمت میں R فاصلے پر برقی میدان کو

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{a_R}}{R^2} \qquad (2.18)$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}$$

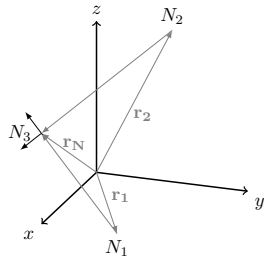
لکھا جا سکتا ہے۔چارج کو کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے اسی مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \qquad (2.19)$$

جہاں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ کروی محدد کا رداسی سمت میں اکائی سمتیہ ہے۔

---

[14] test charge
[15] electric field intensity



شکل 2.2: دو چارجوں سے پیدا برقی شدت

نقطہ (x',y',z') پر موجود چارج Q سے نقطہ (x,y,z) پر برقی شدت یوں حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^3}\\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left[(x-x')\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+(y-y')\boldsymbol{a}_\mathrm{y}+(z-z')\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right]}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned} \tag{2.20}$$

جہاں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+y\boldsymbol{a}_\mathrm{y}+z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\\ \boldsymbol{r'} &= x'\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+y'\boldsymbol{a}_\mathrm{y}+z'\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\\ \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'} = (x-x')\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+(y-y')\boldsymbol{a}_\mathrm{y}+(z-z')\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔

مثال 2.6: نقطہ $N_1(4,1,1)$ پر $100\,\mu\mathrm{C}$ کا چارج Q_1 جبکہ نقطہ $N_2(1,4,2)$ پر $50\,\mu\mathrm{C}$ کا چارج Q_2 پایا جاتا ہے۔نقطہ $N_3(2,2,5)$ پر Q_1 سے پیدا $\boldsymbol{E}_1$ اور Q_2 سے پیدا $\boldsymbol{E}_2$ حاصل کریں۔اس نقطے پر دونوں چارجوں کا مجموعی $\boldsymbol{E}$ کیا ہو گا۔

چارج ہوئے تا 1 ک

حل:شکل 2.2 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔پہلے Q_1 سے پیدا $\boldsymbol{E}_1$ حاصل کرتے ہیں۔N_1 سے N_3 تک سمتی فاصلہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{31} = \boldsymbol{R}_3-\boldsymbol{R}_1 &= (2-4)\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+(2-1)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}+(5-1)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\\ &= -2\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+1\boldsymbol{a}_\mathrm{y}+4\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\end{aligned}$$

ہے جس سے

$$\begin{aligned}R_{31} &= |\boldsymbol{R}_{31}| = \sqrt{(-2)^2+1^2+4^2}\\ &= \sqrt{21} = 4.583\\ \boldsymbol{a}_{31} &= \frac{\boldsymbol{R}_{31}}{R_{31}} = \frac{-2\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+1\boldsymbol{a}_\mathrm{y}+4\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{\sqrt{21}}\\ &= -0.436\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+0.218\boldsymbol{a}_\mathrm{y}+0.873\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں مساوات 2.18 سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1 &= 9\times 10^9\frac{100\times 10^{-6}}{21}\left(-0.436\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+0.218\boldsymbol{a}_\mathrm{y}+0.873\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right)\\ &= -18\,686\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+9343\boldsymbol{a}_\mathrm{y}+37\,414\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 2.7 سے $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ کی قیمت 9×10^9 پر کی گئی۔اسی طرح Q_2 کے لئے حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{32} &= (2-1)\boldsymbol{a}_x + (2-4)\boldsymbol{a}_y + (5-2)\boldsymbol{a}_z \\ &= 1\boldsymbol{a}_x - 2\boldsymbol{a}_y + 3\boldsymbol{a}_z\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}R_{32} &= |\boldsymbol{R}_{32}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14} \\ \boldsymbol{a}_{32} &= \frac{1\boldsymbol{a}_x - 2\boldsymbol{a}_y + 3\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{14}} \\ &= 0.267\boldsymbol{a}_x - 0.535\boldsymbol{a}_y + 0.802\boldsymbol{a}_z\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2 &= 9\times10^9\frac{50\times10^{-6}}{14}\left(0.267\boldsymbol{a}_x - 0.535\boldsymbol{a}_y + 0.802\boldsymbol{a}_z\right) \\ &= 8582\boldsymbol{a}_x - 17\,196\boldsymbol{a}_y + 25\,779\boldsymbol{a}_z \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\end{aligned}$$

ملتا ہے۔ان دو جوابات کا سمتی مجموعہ لیتے ہوئے کُل $\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \\ &= \left(-18\,686\boldsymbol{a}_x + 9343\boldsymbol{a}_y + 37\,414\boldsymbol{a}_z\right) + \left(8582\boldsymbol{a}_x - 17\,196\boldsymbol{a}_y + 25\,779\boldsymbol{a}_z\right) \\ &= -10\,104\boldsymbol{a}_x - 7853\boldsymbol{a}_y + 63\,193\boldsymbol{a}_z \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\end{aligned}$$

مساوات 2.16 کو

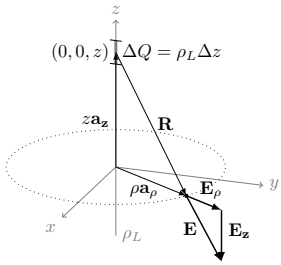
$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{2.21}$$

لکھا جا سکتا ہے جو برقی میدان $\mathbf{E}$ کے موجودگی میں چارج q پر قوت $\mathbf{F}$ دیتا ہے۔

2.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

شکل 2.3 میں z محدد پر $z=-\infty$ سے $z=+\infty$ تک یکساں چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔آپ تصور کر سکتے ہیں کہ z محدد پر انتہائی قریب قریب برابر فاصلے پر یکساں نقطہ چارج رکھے گئے ہیں۔یوں اگر ΔL لمبائی میں کُل ΔQ چارج پایا جائے تب اکائی لمبائی میں $\frac{\Delta Q}{\Delta L}$ چارج پایا جائے گا جسے لکیری چارج کثافت[16] ρ_L[17] کہا جاتا ہے اور جس کی اکائی C/m ہے۔لکیری چارج کثافت کی تعریف

$$\rho_L = \lim_{\Delta L\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta L} \tag{2.22}$$



شکل 2.3: یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کا برقی میدان

ہے۔لکیر پر چھوٹی لمبائی اتنی کم نہیں کی جاتی کہ چارج بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ نظر آئیں اور لکیری کثافت کی جگہ نقطہ چارج نظر آئیں۔اگر لکیر پر چارج کی تقسیم ہر جگہ یکساں نہ ہو تب لکیری چارج کثافت متغیر ہو گی۔آئیں یکساں لکیری چارج کثافت سے خالی خلاء میں پیدا برقی میدان پر غور کریں۔

پہلے بغیر قلم اٹھائے اس مسئلے کی نوعیت پر توجہ دیتے ہیں۔مقام $(0,0,z)$ پر چھوٹی سی لمبائی Δz میں $\rho_L \Delta z$ چارج پایا جاتا ہے جسے نقطہ چارج تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔z محدد کے گرد $z=0$ یعنی xy سطح پر شکل 2.3 میں نقطہ دار گول دائرہ بنایا گیا ہے۔نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ سے دائرے پر کسی بھی مقام پر پیدا برقی میدان پر غور کرتے ہیں۔برقی میدان کی مقدار کا دارومدار میدان پیدا کرنے والے چارج اور چارج سے فاصلے پر ہے۔نقطہ دار لکیر پر پائے جانے والے تمام نقطوں کا $(0,0,z)$ سے فاصلہ برابر ہے۔یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ اس دائرے پر برقی میدان کی شدت کی حتمی قیمت ہر جگہ برابر ہو گی۔اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ چارج کی نقطہ نظر سے نقطہ دار لکیر پر تمام نقطے بالکل یکساں نظر آتے ہیں۔اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقطہ دار دائرے پر ہر جگہ برقی میدان یکساں ہو گا۔

آئیں شکل 2.3 کو دیکھتے ہوئے ایک اور مشابہت پر غور کرتے ہیں۔چونکہ $\mathbf{E}$ سمتی فاصلہ $\mathbf{R}$ کی سمت میں ہوتا ہے لہٰذا دائرے پر کسی بھی نقطے پر نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ سے پیدا $\boldsymbol{E}$ کے دو اجزاء پائے جائیں گے یعنی

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\rho + \boldsymbol{E}_z \tag{2.23}$$

مثبت ρ_L کی صورت میں $(0,0,z)$ پر موجود چارج سے $\boldsymbol{E}_z$ کی سمت منفی z جانب ہو گی۔اسی طرح $(0,0,-z)$ پر پائے جانے والے مثبت چارج سے دائرے پر پیدا $\boldsymbol{E}$ کی سمت مثبت z جانب ہو گی۔دائرے پر یہ دونوں ارکان ایک دونوں کو ختم کریں گے۔اسی عمل سے دائرے پر کسی بھی نقطے پر مثبت z محدد پر کسی بھی فاصلے پر پائے جانے والے چارج سے پیدا $\boldsymbol{E}_z$ کے اثر کو منفی z محدد پر اتنے ہی فاصلے پر چارج سے پیدا $\boldsymbol{E}_z$ ختم کرتا ہے۔یوں دائرے پر

$$\boldsymbol{E}_z = 0 \tag{2.24}$$

ہو گا۔

ایک آخری مشابہت پر اب غور کرتے ہیں۔اگر نقطہ دار دائرے کو z محدد پر مثبت یا منفی جانب لے جایا جائے تو کیا ہو گا؟ اب بھی دائرے کے ایک جانب کسی بھی فاصلے پر چارج کا اثر دائرے کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر چارج ختم کرے گا۔یوں دائرے کے ایک جانب یعنی z محدد پر ∞ تک فاصلے پر چارجوں کے $\boldsymbol{E}_z$ کو دائرے کی دوسری جانب z محدد پر $-\infty$ تک فاصلے پر چارجوں کا $\boldsymbol{E}_z$ ختم کرے گا اور یوں خلاء میں ہر جگہ مساوات 2.24 درست ثابت ہوتا ہے۔اس حقیقت کو یوں بہتر

[16] line charge density

[17] اس کتاب میں رداس کے لئے بھی ρ استعمال کیا جاتا ہے۔ρ کو جب بھی کثافت کے لئے استعمال کیا جائے،اس کے زیر نوشت میں L، S یا h لکھا جائے گا۔

بیان کیا جا سکتا ہے کہ لامحدود لکیر پر یکساں کثافت چارج سے خلاء میں برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پیدا ہو گا۔آئیں اس E کو حاصل کریں۔

شکل 2.3 میں مقام z پر نقطہ چارج $\rho_L \Delta z$ دائرے پر $\Delta \boldsymbol{E}$ پیدا کرتا ہے۔محدد کے مرکز سے نقطہ چارج کا مقام سمتیہ $z\boldsymbol{a}_z$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جبکہ دائرے پر کسی بھی نقطے N کو سمتیہ $\rho\boldsymbol{a}_\rho$ ظاہر کرتا ہے۔یوں نقطہ چارج سے N تک کا سمتی فاصلہ اور اسی سمت میں اکائی سمتیہ یوں حاصل کئے جائیں گے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_z \\
|\boldsymbol{R}| &= R = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\
\boldsymbol{a}_R &= \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}
\end{aligned}$$

مساوات 2.19 سے

$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_L \Delta z}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2 + z^2\right)} \frac{\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\
&= \frac{\rho_L \Delta z\left(\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_z\right)}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔تمام چارجوں کے اثرات کو یکجا کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو تکمل کی شکل دے کر مندرجہ ذیل مساوات میں دکھایا گیا ہے۔تکملہ کے حدود $-\infty$ اور $+\infty$ ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\rho_L\left(\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_z\right)}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right] \mathrm{d}z \tag{2.25}$$

اس تکمل کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L\boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.26}$$

جہاں مساوات کی نشان کے دائیں جانب پہلا تکمل $\boldsymbol{E}_\rho$اور دوسرا تکمل $\boldsymbol{E}_z$دیتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L\rho\boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L\boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

مساوات 2.24 کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دوسرا تکملہ صفر جواب دیگا۔آئیں دونوں تکمل کو باری باری حل کریں۔پہلے $\boldsymbol{E}_\rho$حل کرتے ہیں۔اس مساوات میں

$$z = \rho\tan\alpha$$

استعمال کرتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے تکمل کا ابتدائی حد

$$
\begin{aligned}
-\infty &= \rho \tan \alpha_{\text{ابتدائی}} \\
\alpha_{\text{ابتدائی}} &= -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

اور اختتامی حد

$$
\begin{aligned}
\infty &= \rho \tan \alpha_{\text{اختتامی}} \\
\alpha_{\text{اختتامی}} &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔مزید

$$
\mathrm{d}z = \rho \sec^2 \alpha \, \mathrm{d}\alpha
$$

لکھا جائے گا۔یوں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, \mathrm{d}\alpha}{\left(\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, \mathrm{d}\alpha}{\rho^3 \left(1 + \tan^2 \alpha\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

لکھا جائے گا جس میں

$$
1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha
$$

استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, \mathrm{d}\alpha}{\rho^3 \sec^3 \alpha} \\
&= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, \mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \sin \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \boldsymbol{a}_\rho
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

ملتا ہے جہاں دوسری قدم پر $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ کا استعمال کیا گیا۔

آئیں اب مساوات 2.27 کے دوسرے جزو کو حل کریں۔اس میں بھی $z = \rho \tan \alpha$ استعمال کرتے ہیں۔یوں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2 \tan\alpha \sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left(\rho^2 + \rho^2 \tan^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\tan\alpha \sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\left(1 + \tan^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\tan\alpha \sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\sec^3\alpha} \\
&= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} \cos\alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

ملتا ہے۔یہی جواب مساوات 2.24 میں حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.28 اور مساوات 2.29 سے مساوات 2.26 کا حل یوں لکھا جائے گا

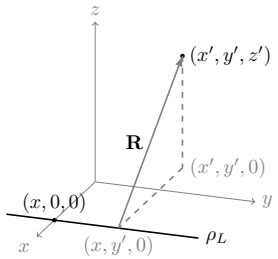
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \boldsymbol{a}_\rho \tag{2.30}$$

جس کے مطابق لامحدود سیدھی لکیر پر یکساں چارج سے برقی میدان رداس ρ کے بالعکس متناسب ہے۔اس نتیجے کا مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں جو نقطہ چارج کی برقی میدان بیان کرتا ہے۔نقطہ چارج کا برقی میدان کروی رداس کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔یوں اگر لامحدود لکیر کے چارج سے فاصلہ دگنا کر دیا جائے تو برقی میدان آدھا ہو جائے گا جبکہ نقطہ چارج سے فاصلہ دگنا کرنے سے برقی میدان چار گنا کم ہوتا ہے۔

کسی بھی سمت میں لامحدود سیدھی لکیر پر چارج کا برقی میدان مساوات 2.30 میں بیان خوبیوں پر پورا اترے گا۔ایسی صورت میں کسی بھی نقطے پر E حاصل کرنے کی خاطر اس نقطے سے چارج کے لکیر تک کم سے کم فاصلہ R حاصل کریں۔یہ فاصلہ نقطے سے لکیر پر عمود کھینچنے سے حاصل ہو گا۔اس فاصلے کو ρ تصور کریں۔لکیر سے عمودی سمت میں نقطے کی جانب اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_R$ کو $\boldsymbol{a}_\rho$ تصور کریں۔ایسی صورت میں مساوات 2.30 کو

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R} \boldsymbol{a}_R \tag{2.31}$$

لکھ سکتے ہیں۔



شکل 2.4: کسی بھی سمت میں لامحدود لکیر پر چارج کی مثال

مثال 2.7: y محدد کے متوازی اور $(x,0,0)$ سے گزرتی لامحدود لکیر پر ρ_L کثافت کا چارج پایا جاتا ہے۔نقطہ (x',y',z') پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

حل:شکل 2.4 میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔(x',y',z') سے چارج کے لکیر پر عمود $(x,y',0)$ پر ٹکراتا ہے۔ان دو نقطوں کا آپس میں فاصلہ $\sqrt{(x'-x)^2+z^2}$ ہے جبکہ

$$\boldsymbol{R} = (x'-x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$
$$\boldsymbol{a}_R = \frac{(x'-x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{(x'-x)^2+z^2}}$$

ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\sqrt{(x'-x)^2+z^2}}\boldsymbol{a}_R$$

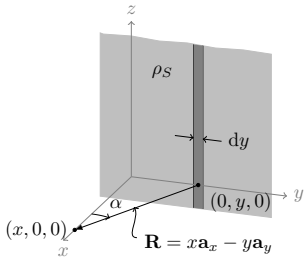
ہو گا۔

مشق 2.1: y محدد پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $10\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0,0,6)$ اور نقطہ $N_2(0,8,6)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جواب: دونوں نقطوں پر $\boldsymbol{E} = 30\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے برابر ہے۔

مشق 2.2: x محدد پر $-\infty$ سے $+\infty$ تک $5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ چارج کی کثافت پائی جاتی ہے۔ نقطہ $N_1(0,5,0)$ اور نقطہ $N_2(7,3,4)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{E}_1 = 18\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $\boldsymbol{E}_2 = 18\left(\frac{3\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+4\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}}{5}\right)\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$



شکل 2.5: یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

2.4 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

شکل 2.5 میں $z = 0$ پر لامحدود $x - y$ سطح دکھائی گئی ہے۔تصور کریں کہ اس پوری سطح پر انتہائی قریب قریب نقطہ چارج یوں رکھے گئے ہیں کہ سطح پر کہیں بھی چھوٹی رقبہ ΔS پر یکساں قیمت کا چارج ΔQ پایا جاتا ہے۔اس طرح اکائی رقبے پر کل $\frac{\Delta Q}{\Delta S}$ چارج پایا جائے گا جسے سطحی چارج کثافت[18] ρ_S کہتے ہیں۔سطحی چارج کثافت کی تعریف

$$\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \tag{2.32}$$

ہے۔چھوٹی سطح اتنی کم نہیں لی جاتی کہ اس پر چارج بردار الیکٹران علیحدہ علیحدہ بطور نقطہ چارج نظر آئیں بلکہ اسے اتنا رکھا جاتا ہے کہ علیحدہ علیحدہ الیکٹران کا اثر قابل نظر انداز ہو۔ سطح پر ہر جگہ چارج کا تقسیم یکساں نہ ہونے کی صورت میں ρ_S کی قیمت متغیر ہو گی۔آئیں لامحدود سطح پر یکساں چارج کثافت سے خالی خلاء میں پیدا $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

پہلے غور کرتے ہیں کہ آیا مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے کچھ اخذ کرنا ممکن ہے۔اگر اس چارج بردار سطح کے سامنے ہم کھڑے ہو جائیں تو ہمیں سامنے لامحدود چارج بردار سطح نظر آئے گی۔سطح سے برابر فاصلے پر ہم جہاں بھی جائیں ہمیں صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔اسی طرح اگر ہم سطح کی دوسری طرف اتنے ہی فاصلے پر چلے جائیں تو ہمیں صورت حال میں کسی قسم کی کوئی تبدیلی نظر نہیں آئے گی۔اس مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایسی سطح سے برابر فاصلے پر تمام نقطوں پر یکساں برقی میدان پایا جائے گا۔اس کے برعکس اگر ہم اس سطح سے دور ہو جائیں تو ہمیں سطح قدر دور نظر آئے گی اور ہو سکتا ہے کہ اس تبدیلی سے $\mathbf{E}$ پر اثر ہو۔آئیں اب مسئلے کو حساب و کتاب سے حل کرتے ہوئے $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

شکل 2.5 میں چارج بردار سطح پر z محدد کے متوازی دو انتہائی قریب قریب لکیریں کھینچی گئی ہیں جن کے مابین فاصلہ $\mathrm{d}y$ ہے۔اس گھیرے گئے رقبے کی چوڑائی $\mathrm{d}y$ ہے۔یوں ΔL لمبائی اور $\mathrm{d}y$ چوڑائی رقبے میں $\rho_S \Delta L\, \mathrm{d}y$ چارج پایا جائے گا۔لکیروں سے گھیرے رقبے کو چارج کی سیدھی لکیر تصور کیا جا سکتا ہے جس پر اکائی لمبائی کے رقبے پر $\frac{\rho_S \Delta L\, \mathrm{d}y}{\Delta L}$ چارج پایا جائے گا جسے ρ_L تصور کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\rho_L = \rho_S\, \mathrm{d}y \tag{2.33}$$

لامحدود لکیر پر یکساں چارج کی کثافت سے پیدا برقی میدان پر گزشتہ حصے میں غور کیا گیا۔نقطہ $(x, 0, 0)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کرتے ہیں۔شکل میں لامحدود چارج کی لکیر سے اس نقطے تک کا قریبی سمتی فاصلہ $\mathbf{R}$ دکھایا گیا ہے جہاں

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \tag{2.34}$$

[18] surface charge density

کے برابر ہے جس سے

$$
\begin{aligned}
R &= |\boldsymbol{R}| = \sqrt{x^2+y^2} \\
\boldsymbol{a}_R &= \frac{x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - y\boldsymbol{a}_\mathrm{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں چارج بردار لکیر سے $(x,0,0)$ پر پیدا برقی میدان کو مساوات 2.31 کی مدد سے

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_S\,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - y\boldsymbol{a}_\mathrm{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{\rho_S\,\mathrm{d}y\left(x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - y\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)}{2\pi\epsilon_0\left(x^2+y^2\right)}
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس جواب کو $\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x + \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S x\,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0\left(x^2+y^2\right)}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \\
\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y &= -\frac{\rho_S y\,\mathrm{d}y}{2\pi\epsilon_0\left(x^2+y^2\right)}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

کے برابر ہیں۔x محدد کے ایک جانب چارج بردار لکیر مندرجہ بالا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ x محدد کے دوسری جانب اتنے ہی فاصلے پر چارج بردار لکیر سے پیدا برقی میدان مندرجہ بالا $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کو ختم کرے گا۔یوں کسی بھی مثبت y پر کھینچی لکیر کے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کو منفی y پر کھینچی لکیر کا $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ ختم کرے گا۔x محدد کے دونوں جانب مسئلے کی مشابہت سے یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ

$$
\boldsymbol{E}_y = 0 \tag{2.38}
$$

ہو گا۔

آئیں اب حساب و کتاب سے مساوات 2.37 کو حل کریں۔پہلے $\boldsymbol{E}_x$ حاصل کرتے ہیں۔مساوات 2.37 میں دئے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_x$ کا تکمل لیتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر

$$
\begin{aligned}
y &= x\tan\alpha \\
\mathrm{d}y &= x\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

کا استعمال کرتے ہیں۔شکل 2.5 میں α کی نشاندہی کی گئی ہے۔یوں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_x = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S x\boldsymbol{a}_\mathrm{x}}{2\pi\epsilon_0}\int_{y=-\infty}^{y=+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)} \\
&= \frac{\rho_S x\boldsymbol{a}_\mathrm{x}}{2\pi\epsilon_0}\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}}\frac{x\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{x^2\left(1+\tan^2\alpha\right)}
\end{aligned}
$$

میں $\sec^2\alpha = 1+\tan^2\alpha$ کے استعمال سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_x &= \frac{\rho_S\boldsymbol{a}_\mathrm{x}}{2\pi\epsilon_0}\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{\rho_S\boldsymbol{a}_\mathrm{x}}{2\pi\epsilon_0}\,\alpha\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

حاصل ہوتا ہے۔آئیں اب $\boldsymbol{E}_y$ حاصل کریں۔

مساوات 2.37 میں دئے $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E}_y = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}_y = -\frac{\rho_S \boldsymbol{a}_\mathrm{y}}{2\pi\epsilon_0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{y\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)}$$

تکمل کے نشان کے اندر $f(y) = x^2 + y^2$ لیتے ہوئے اسے $\frac{\mathrm{d}f(y)}{2f(y)}$ لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل $\frac{\ln f(y)}{2}$ ہے۔یوں

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_y &= -\frac{\rho_S \boldsymbol{a}_\mathrm{y}}{2\pi\epsilon_0} \left.\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}\right|_{y=-\infty}^{y=+\infty} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.41}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 2.38 میں یہی جواب حاصل کیا گیا تھا۔

مساوات 2.40 اور مساوات 2.41 کی مدد سے یکساں چارج بردار لامحدود سطح کی برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \boldsymbol{a}_N \tag{2.42}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ اس سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطح سے فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے برقی میدان کی شدت پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔سطح کے دونوں جانب برقی میدان اسی مساوات سے حاصل کی جائے گی۔ظاہر ہے کہ سطح کے دونوں جانب کے اکائی عمودی سمتیہ آپس میں الٹ ہیں۔

اب تصور کریں کہ اس سطح کے متوازی $x = x_1$ پر ایک اور لامحدود سطح رکھی جائے جس پر چارج کی یکساں کثافت $-\rho_S$ ہو۔ان دو متوازی سطحوں کو دو دھاتی چادروں سے بنایا گیا کپیسٹر[19] سمجھا جا سکتا ہے۔کسی بھی نقطے پر کل E دونوں سطحوں پر چارج سے پیدا برقی میدان کا مجموعہ ہو گا۔پہلے دونوں سطحوں کے دونوں جانب برقی میدان لکھتے ہیں۔

- $x = 0$ پر $+\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^+_{x>0} &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \boldsymbol{a}_\mathrm{x} & x > 0 \\ \boldsymbol{E}^+_{x<0} &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \boldsymbol{a}_\mathrm{x} & x < 0 \end{aligned}$$

- $x = x_1$ پر $-\rho_S$ کثافت کی سطح کا برقی میدان۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^-_{x>x_1} &= -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \boldsymbol{a}_\mathrm{x} & x > x_1 \\ \boldsymbol{E}^-_{x<x_1} &= +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \boldsymbol{a}_\mathrm{x} & x < x_1 \end{aligned}$$

[19] capacitor

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے $x < 0$، $x > x_1$ اور $0 < x < x_1$ خطوں میں برقی میدان حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{x<0} &= \boldsymbol{E}^{+}_{x<0} + \boldsymbol{E}^{-}_{x<x_1} = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = 0 \\
\boldsymbol{E}_{x>x_1} &= \boldsymbol{E}^{+}_{x>0} + \boldsymbol{E}^{-}_{x>x_1} = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = 0 \\
\boldsymbol{E}_{0<x<x_1} &= \boldsymbol{E}^{+}_{x>0} + \boldsymbol{E}^{-}_{x<x_1} = +\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

اس نتیجے کے مطابق دو متوازی لامحدود سطحوں جن پر الٹ یکساں کثافت پائی جائے کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا جبکہ سطحوں کے درمیانی خطے میں

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \tag{2.44}$$

برقی میدان پایا جاتا ہے۔اس میدان کی سمت مثبت چارج بردار چادر سے منفی چارج بردار چادر کی جانب ہوتی ہے۔یہی مساوات ایک ایسے کپیسٹر کے برقی میدان کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جس میں دھاتی چادروں کی لمبائی اور چوڑائی دونوں چادروں کے درمیانی فاصلے سے کئی گنا زیادہ ہو اور چادروں کے درمیان خالی خلاء یا ہوا پائی جائے۔چادروں کے کناروں کے قریب کپیسٹر کے اندر اور باہر صورت حال قدر مختلف ہو گی۔

مثال 2.8: خلاء میں تین متوازی لامحدود سطح پائے جاتے ہیں جن پر چارج کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔پہلی سطح $y = 2$ پر $2\,\mathrm{nC/m^2}$، دوسری سطح $y = 5$ پر $4\,\mathrm{nC/m^2}$ اور تیسری سطح $y = 10$ پر $-6\,\mathrm{nC/m^2}$ کثافت پائی جاتی ہے۔$N_1(0,0,0)$، $N_2(5,3,4)$، $N_3(-2,7,11)$ اور $N_4(-7,30,22)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

جوابات: 0، $144\pi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$، $216\pi\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اور 0

2.5 چارج بردار حجم

ہم نقطہ چارج، لامحدود لکیر پر چارج اور لامحدود سطح پر چارج دیکھ چکے ہیں۔اگلا فطری قدم چارج بردار حجم بنتا ہے لہٰذا اسی پر غور کرتے ہیں۔لکیر اور سطح کے چارج پر غور کرتے ہوئے ہر جگہ یکساں کثافت کی بات کی گئی۔حجم میں چارج کی بات کرتے ہوئے اس شرط کو دور کرتے ہوئے کثافت کو متغیرہ تصور کرتے ہیں۔یوں مختلف مقامات پر کثافت کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔

تصور کریں کہ حجم میں انتہائی قریب قریب نقطہ چارج پائے جاتے ہیں۔یوں اگر کسی نقطے پر Δh حجم میں ΔQ چارج پایا جائے تب اس نقطے پر اوسط حجمی چارج کثافت $\frac{\Delta Q}{\Delta h}$ ہو گی۔کسی بھی نقطے پر چارج کی حجمی کثافت یوں بیان کی جاتی ہے۔

$$\rho_h = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta h} \tag{2.45}$$

کسی بھی حجم میں کل چارج تین درجی تکمل سے حاصل کیا جائے گا۔کارتیسی محدد میں ایسا تکمل یوں لکھا جائے گا۔

$$Q = \iiint\limits_{\mathrm{h}} \rho_h \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \tag{2.46}$$

جہاں تکمل کے نشان کے نیچے h حجم کو ظاہر کرتا ہے۔اس طرز کے تکمل کو عموماً ایک درجی تکمل سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$Q = \int\limits_{\mathrm{h}} \rho_h \, \mathrm{d}h \tag{2.47}$$

حجم میں $\mathbf{r}'$ نقطے پر چھوٹی سی حجم $\Delta h'$ میں $\Delta Q = \rho'_h \Delta h'$ چارج پایا جائے گا جسے نقطہ چارج تصور کیا جا سکتا ہے۔نقطہ $\mathbf{r}$ پر اس نقطہ چارج کا برقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ مساوات 2.20 سے یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho'_h \Delta h'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

اس مساوات میں نقطہ r' پر چارج کی کثافت ρ'_h لکھی گئی ہے۔تمام حجم میں پائے جانے والے چارج کا نقطہ $\mathbf{r}$ پر میدان مندرجہ بالا مساوات کے تکمل سے یوں حاصل کیا جائے گا۔

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{\mathrm{h}} \frac{\rho'_h \, \mathrm{d}h'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{2.48}$$

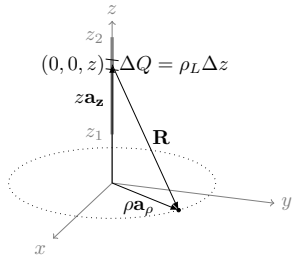
اس مساوات کی شکل قدر خوف ناک ہے البتہ حقیقت میں ایسا ہرگز نہیں۔سمتیہ $\mathbf{r}$ اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی میدان حاصل کرنا درکار ہو۔اس نقطے پر برقی میدان کو $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ لکھ کر اس حقیقت کی وضاحت کی گئی ہے کہ نقطے کی تبدیلی سے برقی میدان تبدیل ہو سکتا ہے۔کثافت از خود متغیرہ ہے جس کی قیمت $\mathbf{r}'$ پر منحصر ہے۔ $\mathbf{r}'$ پر چھوٹی حجم $\mathrm{d}h'$ اور چارج کی کثافت ρ'_h لکھے گئے ہیں جہاں $'$ اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ یہ متغیرات نقطہ r' پر پائے جاتے ہیں۔آخر میں یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر $\mathbf{E}$ حاصل کرتے وقت اسی نقطے پر موجود چارج کو نظرانداز کیا جاتا ہے۔

2.6 مزید مثال

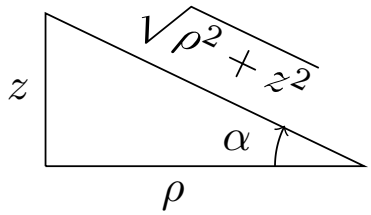
مثال 2.9: شکل 2.6 میں $z = z_1$ سے $z = z_2$ تک کی سیدھی لکیر پر یکساں ρ_L پایا جاتا ہے۔نقطہ دار گول دائرے پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔اس گول دائرے کا مرکز کارتیسی محدد کے مرکز $(0,0,0)$ پر ہے جبکہ دائرہ از خود $z = 0$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل:شکل 2.6 سے واضح ہے کہ نکتہ دار گول دائرے پر $\mathbf{E}$ کی حتمی قیمت $|\boldsymbol{E}|$ یکساں ہو گی۔یوں ہم لکھ سکتے ہیں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\mathrm{d}z}{|\rho^2+z^2|} \frac{\rho \boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\
&= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\mathrm{d}z}{|\rho^2+z^2|^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z\,\mathrm{d}z}{|\rho^2+z^2|^{\frac{3}{2}}} \\
&= \boldsymbol{E}_\rho + \boldsymbol{E}_z
\end{aligned}$$



(ا) محدود لکیر پر چارج کی یکساں کثافت



(ب) z اور α کا تعلق

شکل 2.6: محدود لکیر پر چارج

دائیں جانب باری باری تکملہ حل کرتے ہیں۔تکملہ حل کرنے کی خاطر $z = \rho \tan \alpha$ کا تعلق استعمال کرتے ہیں۔α کا z کا تعلق شکل 2.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= \frac{\rho_L \rho \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, \mathrm{d}\alpha}{\left|\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha\right|^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\
&= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \arctan \frac{z_2}{\rho} \\
\alpha_1 &= \arctan \frac{z_1}{\rho}
\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔شکل 2.6-ب سے $\sin \alpha = \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں

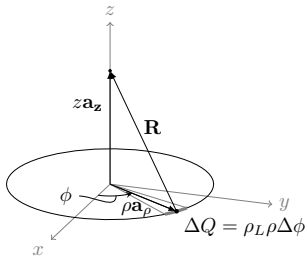
$$\boldsymbol{E}_\rho = \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z \, \mathrm{d}z}{\left|\rho^2 + z^2\right|^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{\rho_L \boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho^2 \tan \alpha \sec^2 \alpha \, \mathrm{d}\alpha}{\left|\rho^2 + \rho^2 \tan^2 \alpha\right|^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_z &= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0 \rho} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \\
&= \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right)
\end{aligned}$$



شکل 2.7: چارج بردار گول دائرہ

حاصل ہوتا ہے۔$\boldsymbol{E}_\rho$ اور $\boldsymbol{E}_z$ کا مجموعہ لیتے ہوئے کل برقی میدان یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_\rho}{4\pi\epsilon_0\rho}\left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right) + \frac{\rho_L \boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z_1^2}}\right) \tag{2.49}$$

مثال 2.10: شکل 2.7 میں $z=0$ پر گول دائرہ دکھایا گیا ہے جس پر چارج کی یکساں کثافت پائی جاتی ہے۔نقطہ $(0,0,z)$ پر $\mathbf{E}$ حاصل کریں۔

حل:نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے اسے حل کرتے ہیں۔کسی بھی زاویہ پر رداس کھینچتے ہوئے دائرے پر کوئی نقطہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔زاویہ میں باریک تبدیلی $\Delta\phi$ سے لمبائی $\rho\Delta\phi$ حاصل ہوتی ہے جس پر کل چارج $\Delta Q = \rho_L\rho\Delta\phi$ پایا جائے گا۔یوں چارج ΔQ مقام $\rho\boldsymbol{a}_\rho$ پر پایا جاتا ہے جبکہ $\mathbf{E}$ مقام $z\boldsymbol{a}_z$ پر درکار ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\mathbf{E}$ رداس کی سمت میں ممکن نہیں۔ΔQ سے

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L\rho\Delta\phi}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)}\frac{z\boldsymbol{a}_z - \rho\boldsymbol{a}_\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

پیدا ہو گا۔دائرے پر تمام چارج کے اثر کے لئے تکملہ لینا ہو گا۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L\rho}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\left(z\boldsymbol{a}_z - \rho\boldsymbol{a}_\rho\right)\mathrm{d}\phi$$

تکملہ کا متغیرہ ϕ ہے جسے تبدیل کرنے سے ρ اور z میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔اسی لئے انہیں تکملہ کی نشان سے باہر لے جایا گیا ہے۔حاصل تکملہ کو دو حصوں میں لکھا جا سکتا ہے البتہ معاملہ اتنا سیدھا نہیں جتنا معلوم ہوتا ہے۔$\boldsymbol{E}_z$ لکھتے ہوئے کارتیسی محدد کی اکائی سمتیہ $\mathbf{a}_z$ کو تکملہ کے باہر لے جایا جا سکتا ہے چونکہ ϕ کی تبدیلی سے $\mathbf{a}_z$ تبدیل نہیں ہوتا البتہ $\boldsymbol{E}_\rho$ لکھتے ہوئے نلکی محدد کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کو تکملہ کے باہر نہیں لے جایا جا سکتا چونکہ ϕ کی تبدیلی سے $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔چونکہ $\boldsymbol{a}_\rho$ کی سمت تبدیل ہوتی ہے لہٰذا اس کو مستقل تصور کرنا غلط ہے اور یوں یہ تکملہ کے اندر ہی رہے گا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_z &= \frac{\rho_L\rho z\boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\\ \boldsymbol{E}_\rho &= -\frac{\rho_L\rho^2}{4\pi\epsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{a}_\rho\,\mathrm{d}\phi\end{aligned} \tag{2.50}$$

پہلے تکملہ کا جواب اب دیکھ کر ہی

$$\boldsymbol{E}_z = \frac{2\pi\rho_L \rho z \boldsymbol{a}_z}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.51}$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ دوسرے تکملہ میں $\boldsymbol{a}_\rho = \cos\phi \boldsymbol{a}_\text{x} + \sin\phi \boldsymbol{a}_\text{y}$ لکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\rho &= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} (\cos\phi \boldsymbol{a}_\text{x} + \sin\phi \boldsymbol{a}_\text{y})\, \mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{\rho_L \rho^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} (\sin\phi \boldsymbol{a}_\text{x} - \cos\phi \boldsymbol{a}_\text{y}) \Big|_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

یہی جواب اس طرح بھی حاصل کیا جا سکتا ہے کہ گول دائرے پر تمام چارج کو $Q = 2\pi\rho\rho_L$ لکھیں۔یہ چارج نقطہ $(0,0,z)$ سے $\sqrt{\rho^2+z^2}$ فاصلے پر ہے۔اگر اس تمام چارج کو ایک ہی نقطے $(\rho,0,0)$ پر موجود تصور کیا جائے تو یہ

$$\boldsymbol{E}_R = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)} \boldsymbol{a}_R$$

برقی میدان پیدا کرے گا۔چارج گول دائرے پر پھیلا ہوا ہے لہٰذا حقیقت میں صرف $\boldsymbol{a}_\text{z}$ جانب ہی $\boldsymbol{E}$ پیدا ہوتا ہے۔شکل میں اس تکون کو دیکھتے ہوئے جس کا $\boldsymbol{R}$ حصہ ہے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{E}_R$ کا $\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ حصہ حقیقت میں پایا جائے گا۔یوں

$$\boldsymbol{E}_z = \frac{2\pi\rho\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \left(\rho^2+z^2\right)} \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \boldsymbol{a}_\text{z}$$

ہی حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2.11: رداس a کرہ کی سطح پر یکساں چارج کثافت ρ_S پایا جاتا ہے۔کرہ کے باہر اور اس کے اندر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

حل:ہم کرہ کو کروی محدد کے مرکز پر رکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔کرہ کی سطح پر نقطہ $M(a,\theta,\phi)$ پر چھوٹی رقبہ $a^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$ میں چارج $\rho_S a^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$ پایا جائے گا جو نقطہ $N(0,0,b)$ پر برقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ پیدا کرے گا۔محدد کے مرکز سے M تک سمتی فاصلہ $a\boldsymbol{a}_\text{r}$ جبکہ مرکز سے N تک سمتی فاصلہ $b\boldsymbol{a}_\text{z}$ ہے۔یوں M سے N تک سمتی فاصلہ

$$\boldsymbol{R} = b\boldsymbol{a}_\text{z} - a\boldsymbol{a}_\text{r} \tag{2.52}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد اور کروی محدد کے اکائی سمتیات استعمال کئے گئے ہیں۔اس طرح

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{R}| = \sqrt{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}} &= \sqrt{(b\boldsymbol{a}_\text{z} - a\boldsymbol{a}_\text{r})\cdot(b\boldsymbol{a}_\text{z} - a\boldsymbol{a}_\text{r})} \\
&= \sqrt{b^2+a^2-2ab\boldsymbol{a}_\text{z}\cdot\boldsymbol{a}_\text{r}} \\
&= \sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}
\end{aligned} \tag{2.53}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_R = \frac{\boldsymbol{R}}{|R|} = \frac{b\boldsymbol{a}_z - a\boldsymbol{a}_r}{\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}} \tag{2.54}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں صفحہ 35 پر جدول 1.3 کے استعمال سے $\boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{a}_r = \cos\theta$ لکھا گیا ہے۔

کرہ کی سطح z محدد کو $(0,0,-a)$ اور $(0,0,a)$ پر چھوتا ہے جہاں بالترتیب $\theta = \pi$ اور $\theta = 0$ کے برابر ہیں۔یوں $(0,0,-a)$ سے $N(0,0,b)$ تک فاصلہ

$$\begin{aligned}\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\pi} &= \sqrt{b^2+a^2+2ab}\\ &= \sqrt{(b+a)^2}\\ &= b+a\end{aligned} \tag{2.55}$$

کے برابر ہے جہاں جذر لیتے وقت مثبت جواب چنا گیا ہے چونکہ فاصلہ مقداری[20] ہے جو مثبت قیمت رکھتا ہے۔اسی طرح $(0,0,a)$ سے $N(0,0,b)$ تک فاصلہ

$$\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos 0} = \sqrt{b^2+a^2-2ab} \tag{2.56}$$

کے برابر ہے۔اگر N کرہ کے باہر ہو تب $b > a$ ہو گا اور یہ فاصلہ $b-a$ کے برابر ہو گا جسے مساوات 2.56 سے یوں

$$\sqrt{b^2+a^2-2ab} = \sqrt{(b-a)^2} = b-a \tag{2.57}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس کے برعکس اگر N کرہ کے اندر ہو تب $a > b$ ہو گا اور یہ فاصلہ $a-b$ کے برابر ہو گا جسے اور مساوات 2.56 سے یوں

$$\sqrt{b^2+a^2-2ab} = \sqrt{(a-b)^2} = a-b \tag{2.58}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اس طرح N پر

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_R$$

لکھتے ہوئے تمام کرہ پر چارج سے پیدا میدان کو تکمل سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho_S a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0(b^2+a^2-2ab\cos\theta)}\frac{b\boldsymbol{a}_z - a\boldsymbol{a}_r}{\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}\\ &= \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(b\boldsymbol{a}_z - a\boldsymbol{a}_r)\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\end{aligned} \tag{2.59}$$

اس مساوات میں جدول 1.3 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_r = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_x + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_y + \cos\theta\boldsymbol{a}_z$ لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{[-a\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_x - a\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{a}_y + (b-a\cos\theta)\boldsymbol{a}_z]\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{2.60}$$

[20] فاصلہ ہر صورت مثبت ہوتا ہے البتہ سمتی فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے جہاں سمتی فاصلے کی مقدار مثبت ہی رہتی ہے جبکہ اس کی سمت مثبت یا منفی ہو سکتی ہے۔

حاصل ہوتا ہے۔z محدد سے دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ اس محدد پر میدان صرف اور صرف $\boldsymbol{a}_z$ سمت میں ہی ممکن ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_x$ اور $\boldsymbol{a}_y$ اجزاء کو صفر لیتے ہوئے

$$E_z = \frac{\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(b-a\cos\theta)\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{2.61}$$

لکھتے ہیں۔سوال 2.1 میں آپ سے درخواست کی گئی ہے کہ مساوات 2.60 میں $\boldsymbol{a}_x$ اور $\boldsymbol{a}_y$ اجزاء کو صفر ثابت کریں۔بیرونی تکمل پہلے لیتے ہوئے

$$E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{(b-a\cos\theta)\sin\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\theta \tag{2.62}$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_z = \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.63}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 2.63 کے پہلے تکمل میں $w=\cos\theta$ اور $\mathrm{d}w = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ پُر کر کے حل کرتے ہوئے

$$\int\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{-\mathrm{d}w}{\left(b^2+a^2-2abw\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{ab(b^2+a^2-2abw)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.64}$$

یعنی

$$\frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \left.\frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}\right|_0^{\pi}\\ &= \frac{-1}{ab\sqrt{b^2+a^2+2ab}} + \frac{1}{ab\sqrt{b^2+a^2-2ab}}\end{aligned} \tag{2.65}$$

حاصل ہوتا ہے جو N بیرونِ کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.57 کے تحت

$$\frac{1}{ab}\left[\frac{-1}{b+a}+\frac{1}{b-a}\right] = \frac{1}{ab}\left[\frac{-(b-a)+(b+a)}{(b+a)(b-a)}\right] = \frac{2}{b(b^2-a^2)} \tag{2.66}$$

جبکہ N اندرونِ کرہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.55 اور مساوات 2.58 کے تحت

$$\frac{1}{ab}\left[\frac{-1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right] = \frac{1}{ab}\left[\frac{-(a-b)+(a+b)}{(a+b)(a-b)}\right] = \frac{2}{a(a^2-b^2)} \tag{2.67}$$

شکل اختیار کرتا ہے۔

مساوات 2.63 کے دوسرے تکمل میں $w = \cos\theta$ پُر کرتے ہوئے

$$\int \frac{\cos\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-w \, \mathrm{d}w}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ

$$\int u \, \mathrm{d}v = uv - \int v \, \mathrm{d}u$$

کے کلیہ سے بخوبی واقف ہیں۔ہم

$$\begin{aligned} u &= w \\ \mathrm{d}v &= \frac{-\mathrm{d}w}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

لیتے ہیں۔یوں

$$v = \int \mathrm{d}v = \int \frac{-\mathrm{d}w}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}}$$

کے برابر ہے جسے ہم مساوات 2.64 میں حاصل کر چکے ہیں۔اس طرح

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \int w \left[\frac{-\mathrm{d}w}{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{3}{2}}}\right] \\ &= w \left[\frac{-1}{ab(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}}\right] + \int \frac{\mathrm{d}w}{ab(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-w}{ab(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}}{a^2b^2} \\ &= \frac{-(b^2 + a^2 - abw)}{a^2b^2(b^2 + a^2 - 2abw)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta}{\left(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} &= \left.\frac{-(b^2 + a^2 - ab\cos\theta)}{a^2b^2(b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\right|_0^\pi \\ &= \frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2 + a^2 + ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} + \frac{(b^2 + a^2 - ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}}\right] \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔N کا کرہ سے باہر ہونے کی صورت میں اس سے

$$\frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2 + a^2 + ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} + \frac{(b^2 + a^2 - ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}}\right] = \frac{2a}{b^2(b^2 - a^2)} \tag{2.68}$$

جبکہ N کا کرہ کے اندر ہونے کی صورت میں اس سے

$$\frac{1}{a^2b^2}\left[\frac{-(b^2 + a^2 + ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 + 2ab}} + \frac{(b^2 + a^2 - ab)}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab}}\right] = \frac{2b}{a^2(a^2 - b^2)} \tag{2.69}$$

حاصل ہوتا ہے۔کرہ کے باہر مساوات 2.66 اور مساوات 2.68 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63 سے

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{b(b^2-a^2)}\right) - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2a}{b^2(b^2-a^2)}\right) \\ &= \frac{4\pi\rho_S a^2}{4\pi\epsilon_0 b^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \end{aligned} \tag{2.70}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کرہ پر کُل چارج $4\pi a^2\rho_S$ کو Q لکھا گیا ہے۔کرہ کے اندر مساوات 2.67 اور مساوات 2.69 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.63

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{2\pi\rho_S a^2 b}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{a(a^2-b^2)}\right) - \frac{2\pi\rho_S a^3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2b}{a^2(a^2-b^2)}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.71}$$

مساوات 2.70 بیرون کرہ z محدد پر میدان دیتا ہے۔چونکہ ہم کسی بھی سمت میں اس محدد کو رکھ سکتے تھے اور میدان اسی محدد کی سمت یعنی رداسی سمت میں ہوتا لہٰذا یہ ایک عمومی جواب ہے جسے کسی بھی بیرونی نقطے کے لئے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \qquad (r > a) \tag{2.72}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ وہی میدان ہے جو کروی محدد کے مرکز پر Q نقطہ چارج رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 2.71 کے تحت کرہ کے اندر میدان صفر کے برابر ہے۔یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ہم کسی بھی مقام کو کرہ یا کسی بھی مکمل بند موصل سطح میں گھیر کر اس مقام پر صفر برقی میدان یقینی بنا سکتے ہیں۔ایسی سطح کو فیراڈے پناہ گاہ[21] کہتے ہیں۔

حصہ 3.4.2 میں اسی مسئلے کو انتہائی آسان طریقے سے حل کرنا دکھایا جائے گا۔

مثال 2.12: مثال 2.11 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے a رداس کرہ جس میں یکساں ρ_h حجمی چارج کثافت پائی جائے کا کرہ کے اندر اور کرہ کے باہر برقی میدان $\boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔

حل:کرہ کے اندر رداس r پر $\mathrm{d}r$ موٹی جھلی کا حجم $4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ ہو گا جس میں کُل $4\pi\rho_h r^2\,\mathrm{d}r$ چارج پایا جائے گا۔مثال 2.11 کے مطابق یہ چارج r سے کم رداس کے خطے میں کوئی برقی میدان نہیں پیدا کرتا جبکہ r سے زیادہ رداس پر یہ میدان پیدا کرے گا۔یوں R سے کم کسی بھی رداس پر جھلی میں پائے جانے والا چارج R پر میدان پیدا کرے گا جسے

$$\boldsymbol{E} = \int_0^R \frac{4\pi\rho_h r^2\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \left.\frac{\rho_h r^3}{3\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right|_0^R = \frac{\rho_h R}{3\epsilon_0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \qquad (R < a) \tag{2.73}$$

---

[21] Faraday shield

شکل 2.8: الف) سمت بہاو خط کے مساوات کا حصول۔ ب) لکیری چارج کثافت کے سمت بہاو خط۔

لکھ کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔چارج کرہ کے باہر یعنی $R > a$ کی صورت میں کرہ میں موجود تمام چارج بطور نقطہ چارج کردار ادا کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_h}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \frac{a^3\rho_h}{3\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \qquad (R > a) \tag{2.74}$$

2.7 برقی میدان کے سمت بہاو خط

ہم نے اب تک جتنے بھی مثال دیکھے ان سب میں $\boldsymbol{E}$ کی شکل سیدھی لکیر کی مانند رہی ہے۔ایسے میدان کا تصوراتی شکل ذہن میں بنانا آسان ہوتا ہے۔یوں نقطہ چارج کے میدان کو چارج سے ابتدا کرتے ہوئے ہر طرف سمتیوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔اب چارج کے قریب $\boldsymbol{E}$ کی قیمت زیادہ اور چارج سے دور اس کی قیمت کم ہوتی ہے۔یوں مختلف مقامات پر $\boldsymbol{E}$ کی لمبائی یہاں کے میدان کی نسبت سے ہو گی۔میدان کو ظاہر کرنے کے دیگر طریقے بھی رائج ہیں۔

آئیں ایسے ہی ایک طریقے پر غور کریں جس میں میدان کو سمت بہاو خط سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس طریقے میں کسی بھی نقطے پر $\boldsymbol{E}$ یہاں سے گزرتے سمت بہاو خط کا مماس ہوتا ہے۔جس مقام پر گھنے سمت بہاو خطوط پائے جائیں ایسے مقام پر $\boldsymbol{E}$ کی مقدار زیادہ ہوتی ہے اور جہاں ان خطوط کی تعداد کم ہو وہاں میدان کمزور ہوتا ہے۔سمت بہاو خطوط پر تیر کا نشان $\boldsymbol{E}$ کے مثبت سمت کی نشاندہی کرتا ہے۔

کارتیسی محدد میں کسی بھی میدان کو

$$\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + E_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + E_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ مساوات ان میدان کو بھی ظاہر کرتا ہے جو سیدھی لکیر کی مانند نہ ہوں۔آئیں ایسے عمومی میدان پر غور کریں جس میں E_z کی قیمت صفر کے برابر ہو جبکہ E_x اور E_y کی قیمتیں x اور y پر منحصر ہو۔کسی بھی نقطہ (x,y) پر ایسے میدان کو

$$\boldsymbol{E} = E_x(x,y)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + E_y(x,y)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \tag{2.75}$$

لکھا جا سکتا ہے۔شکل 2.8-الف میں ایسے ہی ایک $\boldsymbol{E}$ کے تین سمت بہاو خط دکھائے گئے ہیں۔شکل میں کسی عمومی نقطے پر $\boldsymbol{E}$ دکھایا گیا ہے جو اس نقطے سے گزرتے سمت بہاو خط کا مماس ہے۔میدان کے کارتیسی اجزاء E_x اور E_y بھی دکھائے گئے ہیں۔اسی

نقطے پر سمت بہاو خط کی چھوٹی لمبائی لیتے ہوئے Δx اور Δy دکھائے گئے ہیں۔Δx اور Δy کو کم سے کم کرتے ہوئے ہم شکل کو دیکھتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{E_y}{E_x} \tag{2.76}$$

لکھ سکتے ہیں۔اب اگر ہمیں E_x اور E_y کی خاصیت معلوم ہو تب ہم تکمل سے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

آئیں لامحدود لکیری چارج کثافت کے میدان کو مثال بناتے ہوئے اس کے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کریں۔$\rho_L = 2\pi\epsilon_0$ کی صورت میں z محدد پر لامحدود لکیری چارج کثافت کا میدان

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{a}_\rho}{\rho} \tag{2.77}$$

لکھا جاتا ہے۔مساوات 2.75 بھی اسی میدان کی مساوات ہے جس سے ظاہر ہے کہ $E_x = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ اور $E_y = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔یوں مساوات 2.77 کی مدد سے

$$E_x = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\mathrm{x} = \frac{\cos\phi}{\rho} = \frac{x}{x^2+y^2}$$
$$E_y = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\mathrm{y} = \frac{\sin\phi}{\rho} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں لامحدود لکیری چارج کثافت کے میدان کو

$$\boldsymbol{E} = \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \tag{2.78}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح مساوات 2.76 کو

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

لکھ کر اس کا تکمل

$$\ln y = \ln x + M'$$

یعنی

$$y = Mx \tag{2.79}$$

لیتے ہوئے میدان کے سمت بہاو خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔یہ سیدھی لکیر کی مساوات ہے جسے مختلف M کے قیمتوں کے لئے شکل 2.8-ب میں کھینچا گیا ہے۔

2.8 سوالات

سوال 2.1: صفحہ 60 پر مساوات 2.60 میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ اور $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ اجزاء کا تکمل لیتے ہوئے انہیں صفر کے برابر ثابت کریں۔

باب 3

گاؤس کا قانون اور پھیلاو

3.1 ساکن چارج

3.2 فیراڈے کا تجربہ

اس باب کا آغاز جناب مائکل فیراڈے[1] کے ایک تجربے سے کرتے ہیں جس کے نتیجے کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے۔چارج Q کو غیر چارج شدہ موصل سطح میں مکمل طور پر یوں بند کرنے کے بعد، کہ چارج اور سطح کہیں بھی ایک دونوں کو نہ چھوئیں، موصل سطح کو زمین کے ساتھ ایک لمحے کے لئے ملانے سے موصل سطح پر Q− چارج پیدا ہو جاتا ہے۔دیکھا یہ گیا ہے کہ چارج بہتری اور بیرونی سطح کے درمیان فاصلہ کم یا زیادہ کرنے سے نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔اسی طرح چارج اور سطح کے درمیان مختلف غیر موصل مواد بھرنے سے بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔مزید یہ کہ سطح کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔اسی طرح جس چیز پر چارج Q رکھا گیا ہو، اس کی شکل کا بھی نتیجے پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔

ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے اندرونی چارج سے بیرونی سطح تک چارج کی مقدار اور قطب کی خبر پہنچتی ہے۔اس حقیقت کو تصوراتی جامع یوں پہنایا جا سکتا ہے کہ ہم سمجھیں کہ مثبت چارج سے ہر جانب یکساں طور پر کچھ خارج ہوتا ہے۔اس چیز کو ہم برقی بہاو[2] کہیں گے اور اس کو ψ سے ظاہر کریں گے۔برقی بہاو کو چارج کے برابر تصور کیا جاتا ہے۔

$$\psi = Q \tag{3.1}$$

برقی بہاو کی اکائی کولومب C ہی تصور کی جاتی ہے۔منفی چارج کی صورت میں برقی بہاو کی سمت الٹی ہو گی اور یہ چارج میں داخل ہو گا۔

تصور کریں کہ اندرونی چارج r_1 رداس کی کرہ پر پایا جاتا ہے جبکہ اسے r_2 رداس کی کرہ نے گھیرا ہوا ہے۔کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہوتی ہے۔اندرونی کرہ سے ψ برقی بہاو خارج ہوتا ہے۔یوں اندرونی کرہ سے $\frac{\psi}{4\pi r_1^2}$ برقی بہاو فی اکائی رقبہ خارج ہوتا ہے جسے $\frac{Q}{4\pi r_1^2}$ لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح بیرونی کرہ پر $\frac{Q}{4\pi r_2^2}$ برقی بہاو فی اکائی رقبہ پہنچتی ہے۔برقی بہاو فی اکائی رقبے کو کثافت

[1] Michael Faraday
[2] electric flux

برقی بہاو[3] D کہا جائے گا۔یوں اگر اندرونی کرہ کے رداس کو اتنا کم کر دیا جائے کہ اس کو نقطہ تصور کرنا ممکن ہو اور اس نقطہ چارج کو رداس r کے کرہ کے مرکز پر رکھا جائے تو کرہ پر

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \tag{3.2}$$

سمتیہ کثافت برقی بہاو پائی جائے گی۔صفحہ 44 پر مساوات 2.19 سے موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ خالی خلاء میں

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad \text{خالی خلاء} \tag{3.3}$$

کے برابر ہے۔اگر نقطہ چارج کو کروی محدد کے مرکز پر نہ رکھا جائے تب کسی بھی مقام پر کثافت برقی بہاو حاصل کرنے کی خاطر مساوات 3.2 یوں لکھی جائے گی

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi R^2}\boldsymbol{a}_R \tag{3.4}$$

جہاں $\boldsymbol{a}_R$ چارج سے اس مقام کی جانب اکائی سمتیہ ہے اور R ان کے درمیان فاصلہ ہے۔

کسی بھی حجم جس میں تغیر پذیر چارج کی کثافت پائی جائے میں مقام $\mathbf{r}'$ پر $\Delta h'$ حجم میں $\rho'_h \Delta h'$ چارج پایا جائے گا جو مقام $\mathbf{r}$ پر

$$\Delta \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho'_h \Delta h'}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

کثافت برقی بہاو پیدا کرے گا۔قانون کولومب خطی ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{D}$ بھی خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہٰذا حجم کے تمام چارجوں سے

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \int_h \frac{\rho'_h \,\mathrm{d}h'}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3.5}$$

حاصل ہو گا۔مساوات 3.5 کا صفحہ 56 پر مساوات 2.48 کے ساتھ موازنہ کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ حجمی کثافت کے لئے بھی مساوات 3.3 خالی خلاء میں $\mathbf{D}$ اور $\mathbf{E}$ کا تعلق بیان کرتا ہے۔اسی طرح ρ_S اور ρ_L سے پیدا $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ کا خالی خلاء میں تعلق بھی مساوات 3.3 ہی بیان کرتا ہے۔یوں مساوات 3.3 ایک عمومی مساوات ہے۔

3.3 گاؤس کا قانون

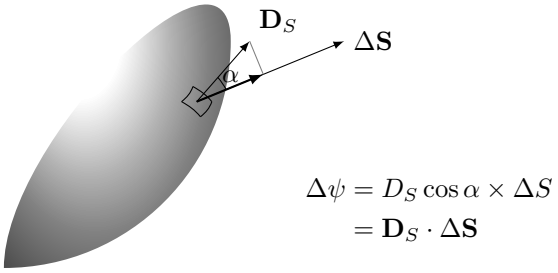
فیراڈے کے تجربے کو قانون کی شکل میں یوں پیش کیا جا سکتا ہے جسے گاؤس کا قانون[4] کہتے ہیں۔

کسی بھی مکمل بند سطح سے کل گزرتی برقی بہاو سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتی ہے۔

جناب گاؤس[5] نے اس قانون کو ریاضیاتی شکل دی جس کی بنا پر یہ قانون انہیں کے نام سے منسوب ہے۔آئیں گاؤس کے قانون کی ریاضیاتی شکل حاصل کریں۔

---

[3] electric flux density
[4] Gauss's law
[5] Carl Friedrich Gauss



شکل 3.1: مکمل بند سطح سے گزرتی برقی بہاو سطح میں گھیرے کل چارج کے برابر ہے۔

شکل 3.1 میں بند سطح دکھائی گئی ہے جس کی کوئی مخصوص شکل نہیں ہے۔اس سطح کے اندر یعنی سطح کے گھیرے حجم میں کل Q چارج پایا جاتا ہے۔سطح پر کسی بھی مقام سے گزرتا برقی بہاو اس مقام پر سطح کی عمودی سمت میں کثافت برقی بہاو اور اس مقام کے رقبہ کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا۔یوں شکل کو دیکھتے ہوئے چھوٹے سے رقبہ ΔS پر سطح کے عمودی سمت میں برقی بہاو کے کثافت کی قیمت $D_S \cos\alpha$ ہو گی لہٰذا

$$\Delta\psi = D_S \cos\alpha \Delta S$$

ہو گا۔کثافتِ برقی بہاو D_S لکھتے ہوئے زیرنوشت میں S اس حقیقت کی یاد دہانی کراتا ہے کہ سطح پر کثافتِ برقی بہاو کی قیمت کی بات کی جا رہی ہے۔اس مساوات کو ضرب نقطہ کے استعمال سے

$$\Delta\psi = \boldsymbol{D}_S \cdot \Delta\boldsymbol{S}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مکمل سطح سے گزرتے کل برقی بہاو تکملہ سے حاصل ہو گی جو گاؤس کے قانون کے مطابق گھیرے ہوئے چارج Q کے برابر ہے۔یوں

$$\psi = \oint_S \boldsymbol{D}_S \cdot \Delta\boldsymbol{S} = Q \tag{3.6}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ تکملہ دراصل دو درجی تکملہ ہے جسے ہم عموماً ایک درجی تکملہ سے ہی ظاہر کریں گے۔تکملہ کے نشان پر گول دائرہ بند تکملہ[6] کو ظاہر کرتا ہے جبکہ بند تکملہ کے نیچے S اس بند سطح کو ظاہر کرتا ہے جس پر بند تکملہ حاصل کیا جا رہا ہو۔اس بند سطح کو عموماً گاؤس سطح[7] کہتے ہیں۔

جس مقام پر چارج کی کثافت ρ_h ہو، وہاں چھوٹی سی حجم Δh میں کل چارج $\rho_h \Delta h$ پایا جاتا ہے۔یوں کسی بھی حجم کو چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہوئے تمام حصوں میں پائے جانے والے چارجوں کا مجموعہ پوری حجم میں چارج کے برابر ہو گا یعنی

$$Q = \int_h \rho_h \, \mathrm{d}h \tag{3.7}$$

جہاں تین درجی حجم کے تکملہ کو ایک درجی تکملہ کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

---

[6] closed integral
[7] gaussian surface

مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$\oint_S \boldsymbol{D}_S \cdot \Delta \boldsymbol{S} = \int_h \rho_h \, \mathrm{d}h \tag{3.8}$$

حاصل ہوتا ہے جو گاؤس کے قانون کی تکملہ شکل ہے۔اس مساوات کو یوں پڑھا جاتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی کل برقی بہاو اس سطح کے اندر گھیرے کل چارج کے برابر ہے۔

یہ ضروری نہیں کہ گھیرے ہوئے حجم یعنی بند حجم میں حجمی کثافت ہی پائی جائے۔بند حجم کے اندر سطحی کثافت، لکیری کثافت، علیحدہ علیحدہ نقطہ چارج یا ان تینوں اقسام کا مجموعہ پایا جا سکتا ہے۔حجم گھیرنے والے بند بیرونی سطح کے اندر کسی سطح پر سطحی کثافت کی صورت میں مساوات 3.7 کی جگہ

$$Q = \int_S \rho_S \, \mathrm{d}S \tag{3.9}$$

لکھا جائے گا جہاں چارج بردار سطح ازخود بند یا کھلی سطح ہو سکتی ہے۔لکیری کثافت کی صورت میں

$$Q = \int_L \rho_L \, \mathrm{d}L \tag{3.10}$$

جبکہ n عدد نقطہ چارج کی صورت میں

$$Q = \sum_n Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_n \tag{3.11}$$

لکھا جائے گا، وغیرہ وغیرہ۔بہرحال مساوات 3.7 سے مراد یہ تمام صورتیں لی جاتی ہیں اور یوں ان تمام صورتوں کے لئے گاؤس کے قانون کی تکملہ شکل مساوات 3.8 ہی ہے۔

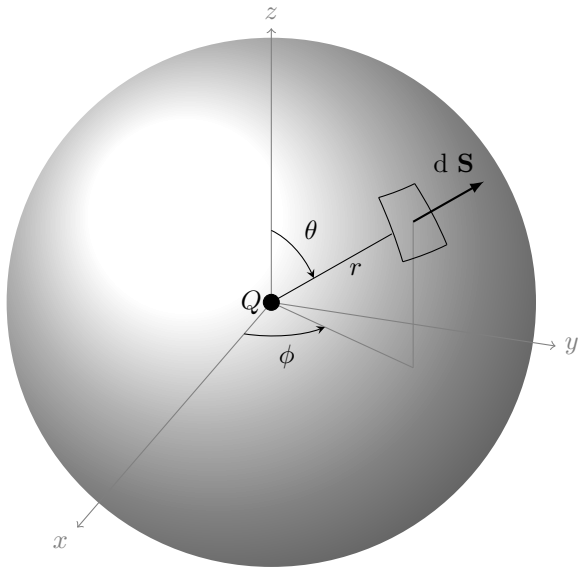
3.4 گاؤس کے قانون کا استعمال

گزشتہ باب میں ہم نے کولومب کے قانون سے نقطہ چارج، لامحدود لکیری چارج اور لامحدود سطحی چارج سے پیدا برقی میدان حاصل کئے۔آئیں انہیں کو گاؤس کے قانون کی مدد سے بھی حاصل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ان تینوں صورتوں میں گاؤس کے قانون کا استعمال شرم ناک حد تک سادہ ثابت ہو گا۔یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ ایسے مسائل جن میں گاؤس کا قانون استعمال کیا جا سکے کی تعداد بہت کم ہیں۔

3.4.1 نقطہ چارج

شکل 3.2 میں کرہ کے مرکز پر نقطہ چارج دکھایا گیا ہے۔ نقطہ چارج کو کروی محدد[8] کے مرکز پر رکھتے ہوئے ہم نے مختلف مقامات سے دیکھتے ہوئے مسئلے کی مشابہت کی بنا پر اخذ کیا تھا کہ کثافتِ برقی میدان صرف رداس کی سمت میں ممکن ہے اور اس کی حتمی قیمت صرف اور صرف رداس r تبدیل کرنے سے تبدیل ہو گی۔اس کا مطلب ہے کہ کروی محدد کے مرکز کے گرد رداس r کے کرہ پر $\mathbf{D}$ تبدیل نہیں ہو گا۔

[8] spherical coordinates



شکل 3.2: کرہ کے مرکز پر نقطہ چارج کا کرہ کے سطح پر کثافتِ برقی بہاو

کروی محدد استعمال کرتے ہوئے کرہ پر چھوٹی سی سطح

$$\mathrm{d}S = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$$

لکھی جا سکتی ہے۔اسی کی سمتی شکل

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\mathrm{r}$$

ہو گی۔اس سطح پر کثافتِ برقی بہاو کی قیمت D_S اور سمت $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ ہو گی لہٰذا سمتی کثافتِ برقی بہاو

$$\boldsymbol{D}_S = D_S \boldsymbol{a}_\mathrm{r}$$

لکھی جائے گی۔یوں اس چھوٹی سی سطح سے گزرتی برقی بہاو

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\psi &= \boldsymbol{D}_S \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= (D_S \boldsymbol{a}_\mathrm{r}) \cdot \left(r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\mathrm{r}\right) \\
&= D_S r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

ہو گی۔اس طرح پوری کرہ سے گزرتی برقی بہاو تکملہ سے یوں حاصل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\psi &= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \\
&= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} -\cos\theta \Big|_0^\pi \mathrm{d}\phi \\
&= D_S r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} 2 \, \mathrm{d}\phi \\
&= 4\pi r^2 D_S
\end{aligned}$$

گاؤس کے قانون کے تحت یہ برقی بہاو گھیرے گئے چارج Q کے برابر ہے لہٰذا

$$4\pi r^2 D_S = Q$$

ہو گا جس سے

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہی جواب بغیر زیادہ حساب و کتاب کے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

کرہ پر کثافتِ برقی بہاو D_S عمودی ہے اور اس کی قیمت کرہ پر تبدیل نہیں ہوتی۔کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہٰذا پوری سطح سے $4\pi r^2 D_S$ برقی بہاو گزرے گی جو گاؤس کے قانون کے تحت Q کے برابر ہے لہٰذا $4\pi r^2 D_S = Q$ ہو گا جس سے $D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$ حاصل ہوتا ہے۔اس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{D}_S = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \tag{3.12}$$

اور $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$ سے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \tag{3.13}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا صفحہ 44 پر مساوات 2.19 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ جواب کتنی آسانی سے حاصل ہوا۔

3.4.2 یکساں چارج بردار کروی سطح

صفحہ 59 پر حصہ 2.11 میں کروی محدد کے مرکز پر a رداس کی کروی سطح جس پر یکساں ρ_S چارج کثافت پائی جائے کا میدان بیرونِ کروہ اور اندرونِ کروہ حاصل کیا گیا۔آئیں گاوس کے قانون سے انہیں جوابات کو دوبارہ حاصل کریں۔

کرہ کے اندر r رداس کا کرہ لیتے ہیں۔یوں $r < a$ رداس کے کرہ میں صفر چارج پایا جائے گا۔یوں اس کی سطح پر صفر میدان ہو گا۔اس کے برعکس $r > a$ رداس کا کرہ a رداس کے کرہ کو گھیرتا ہے لہٰذا یہ $4\pi a^2 \rho_S$ چارج کو گھیرے گا لہٰذا یہاں

$$\boldsymbol{D} = \frac{4\pi a^2 \rho_S}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$$

ہو گا جس سے

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں کُل چارج کو Q لکھا گیا ہے۔یہ نتائج گاوس کے قانون کے استعمال سے حاصل کئے گئے۔ساتھ ہی ساتھ اس حقیقت کو مدنظر رکھا گیا کہ میدان صرف رداسی سمت میں ممکن ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس مسئلے کو حل کرنے کا موجودہ طریقہ نہات آسان ہے۔

3.4.3 یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر

ایسی لامحدود لکیر جس پر چارج کی یکساں کثافت پائی جائے کے گرد رداس پر گھومتے ہوئے صورت حال میں کوئی تبدیلی نظر نہیں آتی۔اسی طرح اس لکیر کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے بھی صورت حال میں کسی قسم کی تبدیلی پیدا نہیں ہوتی۔لامحدود لکیر کو نلکی محدد کی z محدد تصور کرتے ہوئے ان حقائق کی روشنی میں ہم توقع کرتے ہیں کہ برقی میدان صرف رداس تبدیل کرنے سے ہی تبدیل ہو گا۔مزید، جیسا کہ پچھلی باب میں بتلایا گیا، کسی بھی نقطے کے ایک جانب لکیر پر چارج سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو $\boldsymbol{a}_z$ کی سمت میں ہو کو لکیر پر نقطے کی دوسری جانب برابر فاصلے پر چارج سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو $\boldsymbol{a}_z$ کی سمت میں ہو ختم کرتا ہے۔یوں یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ کثافتِ برقی بہاو صرف رداس کی سمت میں ہی پایا جائے گا۔آئیں ان معلومات کی روشنی میں گاؤس کے قانون کی مدد سے کثافتِ برقی بہاو حاصل کریں۔

چارج بردار لکیر جس پر یکساں کثافتِ چارج ρ_L پایا جائے کی لمبائی L میں کل چارج $\rho_L L$ ہو گا۔اس لمبائی کے گرد ρ رداس کی نلکی سطح تصور کرتے ہیں جس کے دونوں آخری سرے[9] بند تصور کریں۔چونکہ برقی بہاو صرف رداس کی سمت میں ہے لہٰذا ان دونوں آخری سروں سے کوئی برقی بہاو نہیں ہو گا۔نلکی سطح کا رقبہ $2\pi\rho L$ ہے جبکہ اس سطح پر ہر جگہ کثافتِ برقی بہاو D_ρ ہے لہٰذا پوری سطح سے $2\pi\rho L D_\rho$ برقی بہاو ہو گا جو گاؤس کے قانون کے تحت گھیرے گئے چارج $\rho_L L$ کے برابر ہو گا۔اس طرح

$$2\pi\rho D_\rho = \rho_L L$$

لکھتے ہوئے

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{D}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.14}$$

سے

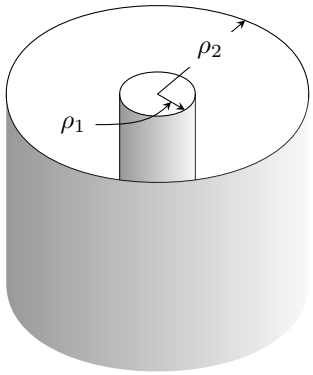
$$\boldsymbol{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.15}$$

حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 50 پر مساوات 2.30 کے ساتھ موازنہ کریں اور دیکھیں کہ موجودہ طریقہ کتنا سادہ ہے۔

3.5 ہم محوری تار

یکساں چارج بردار سیدھی لامحدود لکیر کے قصے کو آگے بڑھاتے ہوئے تصور کریں کہ اس تار کا رداس ρ_1 ہے۔اگر تار پر کسی بھی جگہ L لمبائی میں Q چارج پایا جائے تو تار پر چارج کی لکیری کثافت $\rho_L = \frac{Q}{L}$ ہو گی جبکہ اس پر چارج کی سطحی کثافت $\frac{Q}{2\pi\rho_1 L}$ ہو گی۔جیسا آپ جانتے ہیں ہیں ٹھوس موصل میں چارجوں کے مابین قوت دفع کی وجہ سے تمام چارج موصل کے بیرونی سطح پر دکھیلے جاتے ہیں۔یوں چارج Q تار کے بیرونی سطح، محور سے ρ_1 فاصلے، پر پایا جائے گا۔

[9] آخری سروں کو غیر موصل چادر سے بند کیا جا سکتا ہے۔یوں اس نلکی سطح تک چارج نہیں پہنچ پائے گا۔



شکل 3.3: ہم محوری تار

اب تصور کریں کہ پہلی تار کے اوپر نلکی نما دوسری تار چڑھائی جائے جس کا اندرونی رداس ρ_2 ہو جہاں $\rho_2 > \rho_1$ ہو گا۔ایسی تار جسے ہم محوری تار[10] کہتے ہیں کو شکل 3.3 میں دکھایا گیا ہے۔تصور کریں کہ بیرونی تار پر کسی بھی جگہ L لمبائی پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔دونوں تاروں پر الٹ اقسام کے چارج ہیں جن میں قوت کشش پائی جائے گی۔یوں بیرونی تار پر چارج تار کے اندرونی سطہ یعنی محور سے ρ_2 رداس پر پایا جائے گا۔بیرونی تار پر $\rho_L = \frac{-Q}{L}$ جبکہ $\rho_S = \frac{-Q}{2\pi\rho_2 L}$ ہو گی۔

دونوں تاروں کے درمیانی فاصلے میں رداس ρ کی فرضی نلکی سطح صرف اندرونی تار کے چارج کو گھیرتی ہے لہٰذا L لمبائی کی ایسی نلکی پر مساوات 3.14 کی طرح

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\rho \\ &= \frac{Q}{2\pi\rho L}\boldsymbol{a}_\rho \end{aligned} \tag{3.16}$$

پایا جائے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بیرونی تار پر چارج کا اس میدان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔یوں اندرونی تار کے بیرونی سطح پر

$$\boldsymbol{D}_1 = \frac{Q}{2\pi\rho_1 L}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.17}$$

جبکہ بیرونی تار کے اندرونی سطح پر

$$\boldsymbol{D}_2 = \frac{Q}{2\pi\rho_2 L}\boldsymbol{a}_\rho \tag{3.18}$$

پایا جائے گا۔بیرونی تار کے باہر فرضی نلکی سطح میں کل صفر چارج پایا جاتا ہے لہٰذا ہم محوری تار کے باہر (یعنی بیرونی تار کے باہر)

$$\boldsymbol{D}_{\text{تار کے باہر}} = 0 \tag{3.19}$$

ہو گا۔مساوات 3.14 انتہائی اہم نتیجہ ہے۔اس کے مطابق ہم محوری تار کے باہر کسی قسم کا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہٰذا تار کے باہر سے کسی طرح بھی یہ معلوم نہیں کیا جا سکتا کہ تار پر کس قسم کا چارج پائے جاتے ہیں۔یوں ہم محوری تار کے ذریعہ اشارات کی منتقلی محفوظ ہوتی ہے۔ہم محوری تار میں بیرونی تار اندرونی تار کو پناہی دیتا ہے۔ لہٰذا ہم محوری تار کو پناہ دار تار[11] بھی کہا جائے گا۔

---

[10] coaxial cable
[11] shielded

مثال 3.1: ہم محوری تار کے اندروری تار کا رداس 1 mm جبکہ اس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس 5 mm ہے۔3 mm رداس پر کثافتِ برقی بہاو $-5\,\frac{\mu\text{Wb}}{\text{m}^2}$ ہے جبکہ تار کے باہر کوئی برقی میدان نہیں پایا جاتا۔دونوں تاروں پر چارج کی سطحی کثافت حاصل کریں۔

حل:تار کے گرد برقی میدان صرف رداس کی سمت میں پایا جاتا ہے۔اگر تار پر چارج کی لکیری کثافت ρ_L ہو تب مساوات

$$-5\times 10^{-6}=\frac{\rho_L}{2\pi\times 0.003}$$

سے $\rho_L=-94.26\,\frac{\text{nC}}{\text{m}}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں اندرونی تار کے ایک میٹر لمبائی پر $-94.26\,\text{nC}$ چارج پایا جائے گا جس سے اس کی سطحی کثافت

$$\rho_{S1}=\frac{-0.09426\times 10^{-9}}{2\pi\times 0.001\times 1}=-15\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔بیرونی تار کے ایک میٹر فاصلے پر $94.26\,\text{nC}$ چارج پایا جائے گا جس سے یہاں

$$\rho_{S2}=\frac{94.26\times 10^{-9}}{2\pi\times 0.005\times 1}=3\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

3.6 یکساں چارج بردار ہموار لامحدود سطح

اگر چارج بردار ہموار لامحدود سطح سے برابر فاصلے پر کسی بھی مقام سے دیکھا جائے تو صورت حال بالکل یکساں معلوم ہو گا۔کسی بھی نقطے کے ایک جانب چارجوں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو چارج بردار سطح کے متوازی ہو کو نقطے کے دوسری جانب چارجوں سے پیدا برقی میدان کا وہ حصہ جو چارج بردار سطح کے متوازی ہو کو ختم کرتا ہے۔ان حقائق سے ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ ایسی سطح کا برقی میدان سطح کی عمودی سمت میں ہو گا اور سطح سے یکساں فاصلے پر برقی میدان کی حتمی قیمت برابر ہو گی۔صفحہ 52 پر ایسی لامحدود سطح شکل 2.5 میں دکھائی گئی ہے۔

اس شکل میں چارج بردار سطح کے متوازی دونوں اطراف برابر فاصلے پر تصوراتی لامحدود سطح تصور کرتے ہیں۔ان سطحوں پر آمنے سامنے رقبہ S لیتے ہوئے انہیں عمودی سطحوں سے بند کرتے ہوئے حجم گھیرتے ہیں۔سامنے سطح پر $D\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ جبکہ پیچھے سطح پر $-D\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ ہو گا جبکہ ان رقبوں کو $S\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ اور $-S\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ برقی میدان سطحوں کے عمودی ہے لہٰذا دونوں سطحوں کو ملانے والے عمودی سطحوں میں سے کوئی برقی بہاو نہیں ہو گا۔یوں حجم سے برقی بہاو صرف ان آمنے سامنے رقبوں سے یعنی

$$\begin{aligned}\psi_{\text{سامنے}}&=D\boldsymbol{a}_{\text{x}}\cdot S\boldsymbol{a}_{\text{x}}=SD\\ \psi_{\text{پیچھے}}&=(-D\boldsymbol{a}_{\text{x}})\cdot(-S\boldsymbol{a}_{\text{x}})=SD\end{aligned}$$

جو گھیرے گئی چارج کے برابر ہو گا۔اگر چارج بردار سطح پر ρ_S ہو تب حجم میں $\rho_S S$ چارج پایا جائے گا۔یوں

$$\psi_{\text{سامنے}} + \psi_{\text{پیچھے}} = 2DS = \rho_S S$$

لکھتے ہوئے

$$D = \frac{\rho_S}{2}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{D} = \frac{\rho_S}{2}\boldsymbol{a}_N \tag{3.20}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ سے مراد سطح کی اکائی سمتیہ ہے۔یوں

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\boldsymbol{a}_N \tag{3.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 2.42 کے حصول کا موجودہ طریقہ زیادہ آسان ہے۔

3.7 انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق

شکل 3.4 میں کارتیسی محدد کے نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر چھوٹا مستطیلی ڈبہ دکھایا گیا ہے جس کے اطراف Δx، Δy اور Δz ہیں۔یہ ڈبہ برقی میدان $\boldsymbol{D} = D_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + D_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + D_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ میں ہے۔اس چھوٹی ڈبیہ پر گاؤس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q = \int_h \rho_h \,\mathrm{d}h \tag{3.22}$$

کا اطلاق کرتے ہیں۔ڈبیہ کے چھ اطراف ہیں۔یوں مندرجہ بالا تکملہ کے بائیں بازو کو

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پیچھے}} + \int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} + \int_{\text{اوپر}} + \int_{\text{نیچے}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

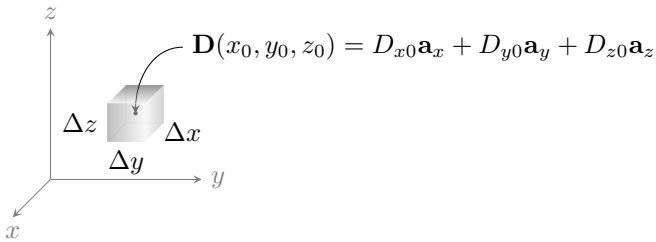
$$\begin{aligned}
\int_{\text{سامنے}} &\doteq \boldsymbol{D}_{\text{سامنے}} \cdot \Delta \boldsymbol{S}_{\text{سامنے}} \\
&\doteq \left(D_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + D_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + D_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right)_{\text{سامنے}} \cdot \Delta y \Delta z \boldsymbol{a}_\mathrm{x} \\
&\doteq D_{x,\text{سامنے}} \Delta y \Delta z
\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔

ہمیں $\boldsymbol{D}$ کی قیمت ڈبیہ کے وسط میں معلوم ہے۔ٹیلر تسلسل[12] کے مطابق کسی بھی تفاعل جس کی قیمت نقطہ a پر معلوم ہو کو اس نقطے کے قریبی نقطوں پر

$$f(x+a) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \cdots$$

[12] Taylor series



شکل 3.4: انتہائی چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کا اطلاق

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ڈبیہ کے وسط میں نقطہ $N(x_0, y_0, z_0)$ پر

$$\boldsymbol{D}(x_0, y_0, z_0) = D_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + D_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + D_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

کی قیمت سے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر ڈبیہ کے سامنے سطح پر D_x ٹیلر تسلسل سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} D_{x,\text{سامنے}} &= D_{x0} + \frac{1}{1!}\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{1}{2!}\left[\frac{\Delta x}{2}\right]^2 \frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2} \cdots \\ &\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x} \end{aligned}$$

جہاں دوسرے قدم پر تسلسل کے صرف پہلے دو اجزاء لئے گئے ہیں۔تفاعل کے ایک سے زیادہ متغیرات x، y اور z ہیں لہٰذا تسلسل میں جزوی تفرق[13] کا استعمال کیا گیا ۔

یوں

$$\int_{\text{سامنے}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔

بند سطح کی سمت باہر جانب ہوتی ہے لہٰذا پچھلی سطح $-\Delta y \Delta z \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ہے اور یوں ڈبیہ کی پچھلی سطح کے لئے

$$\begin{aligned} \int_{\text{پیچھے}} &\doteq \boldsymbol{D}_{\text{پیچھے}} \cdot \Delta \boldsymbol{S}_{\text{پیچھے}} \\ &\doteq \left(D_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + D_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + D_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)_{\text{پیچھے}} \cdot \left(-\Delta y \Delta z \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\right) \\ &\doteq -D_{x,\text{پیچھے}} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں وسط سے $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر ڈبیہ کی پچھلی سطح پر D_x ٹیلر تسلسل سے

$$D_{x,\text{پیچھے}} = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$\int_{\text{پیچھے}} \doteq -\left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z$$

[13] partial differential

اور

$$\int\limits_{\text{سامنے}} + \int\limits_{\text{پیچھے}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z - \left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z$$
$$\doteq \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی عمل کو دہراتے ہوئے بائیں اور دائیں سطحوں کے لئے

$$\int\limits_{\text{بائیں}} + \int\limits_{\text{دائیں}} \doteq \frac{\partial D_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z$$

اور اوپر، نیچے سطحوں کے لئے

$$\int\limits_{\text{اوپر}} + \int\limits_{\text{نیچے}} \doteq \frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔اس طرح

$$\oint\limits_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z \tag{3.23}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر انتہائی چھوٹی حجم Δh میں چارج تقریباً

$$Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta h \tag{3.24}$$

کے برابر ہے۔حجم کی جسامت جتنی کم کی جائے جواب اتنا زیادہ درست ہو گا۔اگلے حصے میں حجم کو کم کرتے کرتے نقطہ نما بنا دیا جائے گا۔ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات مکمل طور صحیح جواب مہیا کرے گا۔

مثال 3.2: اگر $\boldsymbol{D} = 2x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 3y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 5\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\mathrm{C/m^2}$ ہو تب کارتیسی محدد کے مرکز پر $10^{-9}\,\mathrm{m}^3$ کے انتہائی چھوٹی حجم میں چارج حاصل کریں۔

حل:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2 + 3 + 0$$

سے اس حجم میں $5 \times 10^{-9} = 5\,\mathrm{nC}$ چارج پایا جائے گا۔

3.8 پھیلاو

مساوات 3.23 میں حجم کو اتنا کم کرتے ہوئے کہ اس کو صفر تصور کرنا ممکن ہو

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h}=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{Q}{\Delta h}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چارج فی حجم کو حجمی کثافت کہتے ہیں۔یوں مساوات کا دایاں بازو نقطے پر حجمی کثافت ρ_h دیتا ہے۔اس طرح اس مساوات سے دو مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں یعنی

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho_h \tag{3.25}$$

اور

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} \tag{3.26}$$

مساوات 3.25 میکس ویل[14] [15] کی پہلی مساوات ہے جبکہ مساوات 3.26 سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کا پھیلاو[16] بیان کرتا ہے۔اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاو کی تعریف جبکہ اس کا بایاں بازو پھیلاو حاصل کرنے کا طریقہ دیتا ہے۔یوں کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \text{کارتیسی محدد میں پھیلاو کی مساوات} \tag{3.27}$$

سے سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کا پھیلاو حاصل کیا جاتا ہے۔

انجنیئرنگ کے شعبے میں ایسے کئی مسئلے پائے جاتے ہیں جن میں چھوٹی سی حجم کو گھیرنے والے بند سطح پر کسی سمتیہ $\boldsymbol{K}$ کا $\oint_S \boldsymbol{K}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ درکار ہو۔گزشتہ حصے میں سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کے لئے ایسا ہی کیا گیا۔غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ایسا کرتے ہوئے $\boldsymbol{D}$ کی جگہ $\boldsymbol{K}$ لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\frac{\partial K_x}{\partial x}+\frac{\partial K_y}{\partial y}+\frac{\partial K_z}{\partial z}=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{K}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} \tag{3.28}$$

حاصل ہوتا۔سمتیہ $\boldsymbol{K}$ پانی کا بہاو، ایٹموں کی رفتار یا سلیکان کی پتری میں درجہ حرارت ہو سکتا ہے۔ہم $\boldsymbol{K}$ کو سمتی بہاو کی کثافت تصور کریں گے۔مندرجہ بالا مساوات $\boldsymbol{K}$ کا پھیلاو بیان کرتا ہے۔پھیلاو کے عمل سے مراد مساوات کے بائیں بازو کا عمل ہے جبکہ مساوات کا دایاں بازو اس کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے تحت

کسی بھی سمتی کثافتی بہاو کے پھیلاو سے مراد کسی چھوٹی حجم کو صفر کرتے ہوئے اس سے خارج کُل بہاو فی اکائی حجم ہے۔

یہ ضروری ہے کہ آپ کو پھیلاو کی تعریف کی سمجھ ہو۔یاد رہے کہ پھیلاو کا عمل سمتیہ پر کیا جاتا ہے جبکہ اس سے حاصل جواب مقداری ہوتا ہے۔کسی نقطے پر چھوٹی حجم سے باہر جانب کل بہاو فی چھوٹی حجم کو پھیلاو کہتے ہیں۔پھیلاو کی کوئی سمت نہیں

---

[14] Maxwell equation

[15] جناب جیمس کلارک میکس ویل (1831-1879) کے مساوات میکس ویل مساوات کہلاتے ہیں۔

[16] divergence

ہوتی۔پھیلاو کی تعریف جانتے ہوئے کئی مرتبہ بغیر قلم اٹھائے جواب حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی نوعیت کے چند مسئلوں پر اب غور کرتے ہیں۔

پانی سے بھری بالٹی میں پانی میں ڈوبے کسی بھی نقطے پر پانی کی رفتار کا پھیلاو صفر ہو گا چونکہ اس نقطے سے نہ پانی باہر نکل رہا ہے اور نا ہی اس میں داخل ہو رہا ہے۔اسی طرح دریا میں پانی میں ڈھوبے نقطے پر بھی پانی کے رفتار کا پھیلاو صفر ہو گا چونکہ ایسے نقطے سے جتنا پانی نکلتا ہے، اتنا ہی پانی اس میں داخل ہوتا ہے۔البتہ اگر بھری بالٹی کے تہہ میں سوراخ کر دیا جائے تو جب تک نقطہ پانی میں ڈھوبا رہے اس وقت تک یہاں پھیلاو صفر رہے گا البتہ جیسے ہی نقطہ پانی سے نمودار ہونے لگے یہاں مثبت پھیلاو پایا جائے گا اور جب نقطہ پانی سے مکمل طور باہر آ جائے تب ایک بار پھر یہاں پھیلاو صفر ہو جائے گا۔جتنی دیر نقطہ پانی کی سطح سے باہر نمودار ہو رہا ہوتا ہے اتنی دیر اس نقطے سے پانی کی انخلاء پائی جاتی ہے جس کی وجہ سے یہاں پھیلاو پایا جاتا ہے۔

ایک اور دلچسپ مثال سائیکل کے ٹائر میں ہوا کی ہے۔اگر ٹائر پنکچر ہو جائے اور اس سے ہوا نکلنی شروع ہو جائے تو ٹائر میں کسی بھی نقطے پر سمتی رفتار کا پھیلاو پایا جائے گا چونکہ کسی بھی نقطے پر دیکھا جائے تو یہاں سے ہوا پھیلتے ہوئے خارج ہو گا۔یوں مثبت پھیلاو سے مراد نقطے سے انخلاء جبکہ منفی پھیلاو سے مراد نقطے میں داخل ہونا ہے۔

ریاضیاتی عمل کو بیان کرنے کے لئے عموماً علامت استعمال کی جاتی ہے۔یوں جمع کے لئے $+$، ضرب کے لئے $\times$ اور تکملہ کے لئے $\int$ استعمال کئے جاتے ہیں۔آئیں ایک نئی علامت جسے نیبلا[17] کہتے اور ∇ سے ظاہر کرتے ہیں سیکھیں۔نیبلا یونانی حروف تہجی کا حرف ہے۔ تصور کریں کہ

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{3.29}$$

لکھا جاتا ہے جہاں مقداری متغیرہ f کے سامنے لکھنے سے مراد

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{3.30}$$

جبکہ سمتیہ $\boldsymbol{K}$ کے ساتھ نقطہ ضرب سے مراد

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{K} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right) \cdot \left(K_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + K_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + K_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\\ &= \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{3.31}$$

لیا جاتا ہے۔یہ علامت انجنیئرنگ کے شعبے میں انتہائی مقبول ہے۔اسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کو $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{3.32}$$

کے برابر ہے۔پھیلاو کے عمل کو ہم اسی علامت سے ظاہر کریں گے۔مساوات 3.25 یعنی میکس ویل کی پہلی مساوات اب یوں لکھی جا سکتی ہے۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \quad \text{میکس ویل کی پہلی مساوات} \tag{3.33}$$

میکس ویل کی پہلی مساوات درحقیقت گاؤس کے قانون کی تفرق[18] شکل ہے۔اسی طرح گاؤس کا قانون میکس ویل مساوات کی تکمل[19] شکل ہے۔

مساوات 3.30 کے طرز پر مساوات صفحہ 103 پر دیا گیا ہے۔

---

[17] nabla, del
[18] differential
[19] integral

3.9 نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات

حصہ 3.7 میں کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم پر گاؤس کے قانون کے اطلاق سے پھیلاو کی مساوات حاصل کی گئی۔اس حصے میں نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے شکل میں دکھائے چھوٹی حجم کو استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی جائے گی۔شکل کو دیکھتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\Delta_{S_{\text{سامنے}}} &= -\Delta\rho\Delta z\boldsymbol{a}_\phi \\
\Delta_{S_{\text{پیچھے}}} &= +\Delta\rho\Delta z\boldsymbol{a}_\phi \\
\Delta_{S_{\text{بائیں}}} &= -\left(\rho - \frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\Delta z\boldsymbol{a}_\rho \\
\Delta_{S_{\text{دائیں}}} &= +\left(\rho + \frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\Delta z\boldsymbol{a}_\rho \\
\Delta_{S_{\text{اوپر}}} &= +\rho\Delta\phi\Delta\rho\boldsymbol{a}_z \\
\Delta_{S_{\text{نیچے}}} &= -\rho\Delta\phi\Delta\rho\boldsymbol{a}_z
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔کارتیسی محدد میں آمنے سامنے رقبے برابر تھے۔نلکی محدد میں بائیں اور دائیں رقبے برابر نہیں ہیں۔اس فرق کی بنا پر نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات قدر مختلف حاصل ہو گی۔چھوٹی حجم کے وسط میں

$$\boldsymbol{D} = D_{\rho 0}\boldsymbol{a}_\rho + D_{\phi 0}\boldsymbol{a}_\phi + D_{z0}\boldsymbol{a}_z \tag{3.34}$$

کے برابر ہے جس سے ٹیلر تسلسل کی مدد سے

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_{\text{سامنے}} &= \left(D_{\phi 0} - \frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}\right)\boldsymbol{a}_\phi \\
\boldsymbol{D}_{\text{پیچھے}} &= \left(D_{\phi 0} + \frac{\Delta\phi}{2}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}\right)\boldsymbol{a}_\phi \\
\boldsymbol{D}_{\text{بائیں}} &= \left(D_{\rho 0} - \frac{\Delta\rho}{2}\frac{\partial D_\rho}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_\rho \\
\boldsymbol{D}_{\text{دائیں}} &= \left(D_{\rho 0} + \frac{\Delta\rho}{2}\frac{\partial D_\rho}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_\rho \\
\boldsymbol{D}_{\text{اوپر}} &= \left(D_{z0} + \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_z \\
\boldsymbol{D}_{\text{نیچے}} &= \left(D_{z0} - \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_z
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\int_{\text{سامنے}} + \int_{\text{پیچھے}} = \frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح

$$\int_{\text{بائیں}} + \int_{\text{دائیں}} = \left(D_{\rho 0} + \rho\frac{\partial D_\rho}{\partial\rho}\right)\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\int\limits_{\text{بائیں}} + \int\limits_{\text{دائیں}} = \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ایسا لکھتے وقت یاد رہے کہ نقطہ $N(\rho_0, \phi_0, z_0)$ پر

$$\left.\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho}\right|_N = D_\rho + \rho\left.\frac{\Delta D_\rho}{\Delta \rho}\right|_N = D_{\rho 0} + \rho\frac{\partial D_\rho}{\partial \rho}$$

کے برابر ہے۔اسی طرح

$$\int\limits_{\text{اوپر}} + \int\limits_{\text{نیچے}} = \rho\frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

حاصل ہوتا ہے۔ان تمام کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint\limits_S \boldsymbol{D}_S \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \rho\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

ملتا ہے۔چھوٹی حجم $\Delta h = \rho\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$ کے استعمال سے

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta h \to 0}\frac{\oint\limits_S \boldsymbol{D}_S \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta h} \tag{3.35}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 3.28 کا دایاں بازو پھیلاو کی تعریف بیان کرتا ہے جس کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 3.35 نکلی محدد میں پھیلاو دیتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نکلی محدد میں پھیلاو کی مساوات سادہ شکل نہیں رکھتی۔مساوات 3.29 میں دی گئی ∇ کو استعمال کرتے ہوئے نکلی محدد میں پھیلاو کی مساوات ہرگز حاصل نہیں کی جا سکتی ہے۔اس کے باوجود نکلی محدد میں بھی پھیلاو کے عمل کو $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$ سے ہی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں اس سے مراد

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{3.36}$$

لیا جاتا ہے۔مندرجہ بالا مساوات نکلی محدد میں پھیلاو کی مساوات ہے جو کسی بھی سمتیہ کے لئے درست ہے۔یوں سمتیہ $\boldsymbol{K}$ کے لئے اسے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{K} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho K_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial K_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial K_z}{\partial z} \tag{3.37}$$

3.10 پھیلاو کی عمومی مساوات

کارتیسی محدد میں چھوٹی حجم کے آمنے سامنے اطراف کا رقبہ برابر ہوتا ہے جس سے پھیلاو کی مساوات آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔نکلی محدد میں چھوٹی حجم کے رداسی سمت کے آمنے سامنے رقبے مختلف ہوتے ہیں جن کا خصوصی خیال رکھتے ہوئے پھیلاو کی

قدر مشکل مساوات گزشتہ حصے میں حاصل کی گئی۔اس حصے میں پھیلاو کی مساوات حاصل کرنے کا ایسا طریقہ دیکھتے ہیں جسے استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کی عمومی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے جو تمام محدد کے لئے کارآمد ہے۔

کارتیسی محدد کے متغیرات (x,y,z) جبکہ نلکی محدد کے (ρ,ϕ,z) اور کروی محدد کے متغیرات (r,θ,ϕ) ہیں۔اس حصے میں عمومی محدد[20] استعمال کیا جائے گا جس کے متغیرات (u,v,w) اور تین عمودی اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u,\boldsymbol{a}_v,\boldsymbol{a}_w)$ ہیں۔عمومی محدد کسی بھی محدد کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔یوں اگر اسے کارتیسی محدد کے لئے استعمال کیا جا رہا ہو تب (u,v,w) سے مراد (x,y,z) ہو گا۔

شکل میں عمومی محدد استعمال کرتے ہوئے چھوٹی حجم دکھائی گئی ہے۔عمومی محدد کے تین اطراف

$$\begin{aligned}\mathrm{d}L_1 &= k_1\,\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}L_2 &= k_2\,\mathrm{d}v\\ \mathrm{d}L_3 &= k_3\,\mathrm{d}w\end{aligned}$$

ہیں۔کارتیسی محدد میں $k_1=k_2=k_3=1$ کے برابر لیا جائے گا اور یوں $\mathrm{d}L_1=\mathrm{d}x$ کے برابر ہو گا۔نلکی محدد میں

$$\begin{aligned}k_1 &= 1\\ k_2 &= \rho\\ k_3 &= 1\end{aligned} \tag{3.38}$$

جبکہ کروی محدد میں

$$\begin{aligned}k_1 &= 1\\ k_2 &= r\\ k_3 &= r\sin\theta\end{aligned} \tag{3.39}$$

کے برابر ہیں۔اسی طرح تین سمتی رقبے

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3\boldsymbol{a}_u\\ &\mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_3\boldsymbol{a}_v\\ &\mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_2\boldsymbol{a}_w\end{aligned}$$

ہوں گے۔

گزشتہ حصوں میں چھوٹی حجم کے آمنے سامنے سطحوں پر بہاو حاصل کرتے وقت پہلے ان سطحوں پر $\boldsymbol{D}$ کی قیمت اور ان سطحوں کے رقبے حاصل کئے گئے جن کے نقطہ ضرب سے بہاو حاصل کیا گیا۔یہاں چھوٹی حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کی سمت میں بہاو سے ٹیلر تسلسل کے استعمال سے حجم کے سطحوں پر بہاو حاصل کیا جائے گا۔حجم کے وسط میں تین اکائی سمتیات کے رخ میں سطحوں پر بہاو

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3D_{u0}\\ &\mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_3D_{v0}\\ &\mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_2D_{w0}\end{aligned}$$

ہے۔ٹیلر تسلسل سے سامنے اور پیچھے سطحوں پر ان مساوات سے

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3D_{u0}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3D_u)\,\mathrm{d}u && \text{سامنے}\\ &-\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3D_{u0}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3D_u)\,\mathrm{d}u && \text{پیچھے}\end{aligned}$$

[20] generalized coordinates

یعنی

$$k_2k_3\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}wD_{u0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \quad \text{سامنے}$$
$$-k_2k_3\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}wD_{u0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \quad \text{پیچھے}$$

لکھتے ہوئے دونوں سطحوں پر بہاو کا مجموعہ

$$\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح بائیں اور دائیں سطحوں پر کل

$$\frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

اور اوپر، نیچے کا مجموعہ

$$\frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

حاصل ہوتا ہے۔چھوٹی حجم

$$\begin{aligned}\mathrm{d}h &= \mathrm{d}L_1\,\mathrm{d}L_2\,\mathrm{d}L_3\\ &= k_1k_2k_3\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\end{aligned}$$

لکھتے ہوئے گاؤس کے قانون سے

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u) + \frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v) + \frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

یعنی

$$\frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u) + \frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v) + \frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\right] = \lim_{\mathrm{d}h\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}h}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا دایاں بازو پھیلاو کی تعریف ہے۔یوں پھیلاو کی عمومی مساوات

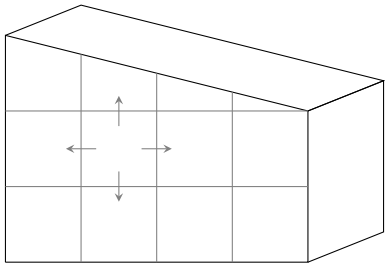
$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(k_2k_3D_u) + \frac{\partial}{\partial v}(k_1k_3D_v) + \frac{\partial}{\partial w}(k_1k_2D_w)\right] \tag{3.40}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 3.3: مساوات 3.40 سے نلکی اور کروی محدد میں پھیلاو کی مساوات حاصل کریں۔

حل: u,v,w کی جگہ ρ,ϕ,z اور مساوات 3.38 کے استعمال سے نلکی محدد میں پھیلاو

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_\rho) + \frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho D_z)\right]\\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(D_z) \quad \text{نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات}\end{aligned} \tag{3.41}$$



شکل 3.5: بند سطح پر سمتیہ کا عمودی حصے کا تکملہ بند حجم میں سمتیہ کے تکملہ کے برابر ہوتا ہے۔

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح u,v,w کی جگہ r,θ,ϕ اور مساوات 3.39 کے استعمال سے کروی محدد میں پھیلاو

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta D_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta D_\theta)+\frac{\partial}{\partial\phi}(rD_\phi)\right]\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2D_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta D_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi)\end{aligned} \tag{3.42}$$

کروی محدد میں پھیلاو کی مساوات

حاصل ہوتا ہے۔

3.11 مسئلہ پھیلاو

صفحہ 76 پر مساوات 3.22 میں

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_h$$

لکھتے ہوئے

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_h \nabla\cdot\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}h \tag{3.43}$$

لکھا جا سکتا ہے جو مسئلہ پھیلاو[21] بیان کرتا ہے۔اگرچہ ہم نے اس مسئلے کو برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ کے لئے حاصل کیا حقیقت میں یہ ایک عمومی نتیجہ ہے جو کسی بھی تین درجی تکملہ کو دو درجی تکملہ اور دو درجی تکملہ کو تین درجی تکملہ میں تبدیل کرتا ہے۔مسئلہ پھیلاو کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے

فاصلہ کسی بھی بند سطح پر سمتیہ کے عمودی حصے کا تکملہ بند حجم میں اسی سمتیہ کے پھیلاو کے تکملہ کے برابر ہوتا ہے۔

مسئلہ پھیلاو کی سمجھ شکل 3.5 کی مدد سے با آسانی ممکن ہے۔جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے کہ کسی بھی چھوٹی حجم سے بہاو قریبی چھوٹی حجم کی منفی بہاو ثابت ہوتی ہے لہٰذا دونوں کا مجموعی بہاو حاصل کرتے ہوئے ان کے درمیانی دیوار پر بہاو رد کیا جائے گا۔یہی سلسلہ تمام حجم پر لاگو کرتے ہوئے ظاہر ہے کہ پوری حجم سے بہاو کے حصول میں اندرونی تمام دیواروں پر بہاو کا کوئی کردار نہیں ہوتا اور صرف بیرونی سطح پر بہاو سے ہی جواب حاصل کیا جا سکتا ہے۔

---

[21] divergence theorem

مثال 3.4: نقطہ چارج کے $\boldsymbol{D}$ سے پھیلاو کی مساوات سے مختلف مقامات پر کثافت چارج ρ_h حاصل کریں۔

حل:کروی محدد کے مرکز پر نقطہ چارج کا

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

ہوتا ہے۔کروی محدد میں پھیلاو کی مساوات کے تحت

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(D_\phi)$$

کے برابر ہے۔چونکہ D_θ اور D_ϕ صفر کے برابر ہیں لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{Q}{4\pi r^2}) = \begin{cases} 0 & r > 0 \\ \infty & r = 0 \end{cases}$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تحت مرکز کے علاوہ تمام خلاء میں کوئی چارج نہیں پایا جاتا۔مرکز پر لامحدود کثافت کا چارج پایا جاتا ہے۔یاد رہے کہ نقطہ چارج سے مراد ایسا چارج ہے جس کا حجم صفر ہو۔ایسی صورت میں اس نقطے پر نقطہ چارج کی کثافت لا محدود ہی ہو گی۔

باب 4

توانائی اور برقی دباو

4.1 توانائی اور کام

قوت F کی سمت میں فاصلہ $\mathrm{d}L$ طے کرنے سے

$$\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}L$$

کام کیا جاتا ہے۔اگر قوت اور طے کردہ فاصلہ ایک ہی سمت میں نہ ہوں تب قوت کا وہ حصہ جو طے کردہ فاصلے کی سمت میں ہو اور طے شدہ فاصلے کے حاصل ضرب کو کام[1] کہتے ہیں۔شکل 4.1 کو دیکھتے ہوئے سمتیات کے استعمال سے

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W &= F\cos\alpha\,\mathrm{d}L\\ &= \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $F\cos\alpha\,\mathrm{d}L$ کو نقطہ ضرب کی مدد سے $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھا گیا ہے۔

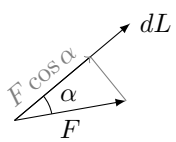
زمین اور کمیت m کے درمیان قوت ثقل $\boldsymbol{F}_\mathrm{G} = -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ پایا جاتا ہے[2] جس میں $\frac{GM}{r^2} = g$ لکھتے ہوئے $\boldsymbol{F}_\mathrm{G} = -mg\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ لکھا جا سکتا ہے۔کام کرتے ہوئے کمیت کو $\Delta h\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ اونچائی پر منتقل کرنے کی خاطر قوت ثقل کے خلاف

$$\boldsymbol{F}_{\text{لاگو}} = -\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$$

---

[1] work

[2] $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ اکائی سمتیہ ہے۔



شکل 4.1: طے فاصلہ اور فاصلے کی سمت میں قوت کا حاصل ضرب کام کہلاتا ہے

لاگو کرتے ہوئے

$$\Delta W = \boldsymbol{F}_{\text{لاگو}} \cdot \Delta h \boldsymbol{a}_{\text{r}} = mg\Delta h$$

توانائی درکار ہو گی۔کام کرنے کے لئے درکار توانائی کمیت میں منتقل ہو جاتی ہے جسے مخفی توانائی[3] کہتے ہیں۔اگر Δh کی قیمت r کی نسبت سے بہت کم نہ ہو تب g کو مستقل تصور کرنا ممکن نہ ہو گا اور مخفی توانائی تکملہ کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$W = -\int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{F}_{\text{G}} \cdot \text{d}\boldsymbol{r} = \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \frac{GMm}{r^2} dr$$

ثقلی میدان میں کمیت کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچاتے ہوئے کوئی بھی راستہ اختیار کیا جا سکتا ہے۔اختیار کردہ راستے کا مخفی توانائی پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں ہوتا۔ایسے میدان جن میں دو نقطوں کے مابین مخففی توانائی کا دارومدار، ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک پہنچنے کے راستے، پر نہیں ہوتا قائم میدان[4] کہلاتے ہیں۔

برقی میدان میں چارجوں کے حرکت کے مسئلے کو بھی اسی طرح حل کیا جاتا ہے۔برقی میدان $\mathbf{E}$ میں چارج q پر قوت $\boldsymbol{F}_E = q\boldsymbol{E}$ عمل کرتا ہے۔چارج کو فاصلہ $\text{d}\boldsymbol{L}$ ہلانے کی خاطر اس قوت کے خلاف بیرونی

$$\boldsymbol{F}_{\text{لاگو}} = -\boldsymbol{F}_E$$

قوت لاگو کرتے ہوئے

$$\text{d}W = -q\boldsymbol{E} \cdot \text{d}\boldsymbol{L} \tag{4.1}$$

کام[5] کیا جاتا ہے۔کسی بھی ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک یوں

$$W = -q \int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{E} \cdot \text{d}\boldsymbol{L} \tag{4.2}$$

توانائی درکار ہو گی۔

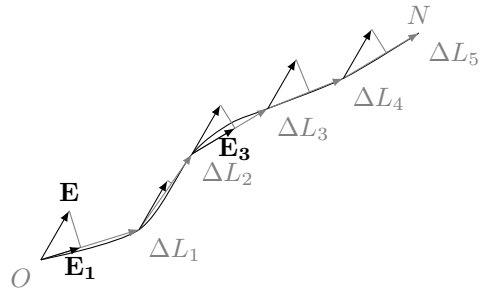
4.2 لکیری تکملہ

درکار

مساوات 4.2 لکیری تکملہ ہے جس پر مزید غور کرتے ہیں۔شکل 4.2 میں یکساں[6] اور وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے میدان $\boldsymbol{E}$ میں نقطہ O سے نقطہ N تک چارج کی منتقلی دکھائی گئی ہے۔یکساں میدان سے مراد ایسا میدان ہے جس میں $\boldsymbol{E}$ کی قیمت جگہ جگہ تبدیل نہیں ہوتی بلکہ اس کی قیمت ہر جگہ یکساں ہوتی ہے۔اسی طرح وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو وقت کے ساتھ تغیر پذیر میدان کہا جائے گا۔یکساں میدان وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر میدان ہے۔

شکل 4.2 میں پورے راستے کو چھوٹے چھوٹے ٹکڑے $\Delta\boldsymbol{L}_1$، $\Delta\boldsymbol{L}_2$، $\cdots$ میں تقسیم کرتے ہوئے ایک ایک ٹکڑے پر حرکت کے لئے درکار توانائی مساوات 4.1 کی مدد سے حاصل کی جا سکتی ہے۔یوں $\Delta\boldsymbol{L}_1$ کے ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک چارج q

[3] potential energy
[4] conservative field
[5] work
[6] uniform



شکل 4.2: تکملہ دراصل چھوٹے حصوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔

منتقل کرنے کی خاطر $\Delta W = -q\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{L}_1$ توانائی درکار ہو گی۔یہی عمل راستے کے بقایا ٹکڑوں پر بھی لاگو کرتے ہوئے کُل درکار توانائی

$$\begin{aligned} W &= -q\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{L}_1 - q\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{L}_2 - q\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{L}_3 - q\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{L}_4 - q\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{L}_5 \\ &= -q\boldsymbol{E}\cdot(\Delta\boldsymbol{L}_1 + \Delta\boldsymbol{L}_2 + \Delta\boldsymbol{L}_3 + \Delta\boldsymbol{L}_4 + \Delta\boldsymbol{L}_5) \end{aligned} \tag{4.3}$$

لکھی جا سکتی ہے۔قوسین میں بند $\Delta\boldsymbol{L}_1 + \Delta\boldsymbol{L}_2 + \Delta\boldsymbol{L}_3 + \Delta\boldsymbol{L}_4 + \Delta\boldsymbol{L}_5$ درحقیقت نقطہ O سے N تک کا کُل سمتی راستہ $\boldsymbol{L}_{ON}$ ہے۔یوں مندرجہ بالا مساوات کو

$$W = -q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{L}_{ON} \tag{4.4}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر شکل 4.2 میں منتقلی کے راستے کے نہایت چھوٹے چھوٹے ٹکڑے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ بنائے جائیں تو مساوات 4.3 کو تکمل کی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$W = \int_O^N -q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.5}$$

چونکہ q اور $\boldsymbol{E}$ کی قیمتیں مستقل ہیں لہٰذا انہیں تکمل کے باہر لکھا جا سکتا ہے۔ایسا کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} W &= -q\boldsymbol{E}\cdot\int_O^N \mathrm{d}\boldsymbol{L} \\ &= -q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{L}_{ON} \end{aligned} \tag{4.6}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس جواب سے ہم دیکھتے ہیں کہ درکار توانائی کا دارومدار q، $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{L}_{ON}$ پر ہے جہاں $\boldsymbol{L}_{ON}$ نقطہ O سے نقطہ N تک سیدھی کھینچی لکیر ہے۔درکار توانائی کا اس سے کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں کہ ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے جاتے ہوئے کون سا راستہ اختیار کیا گیا۔جیسا کہ پہلے ذکر کیا گیا، ایسے میدان کو قدامت پسند میدان کہتے ہیں۔ہم جلد دیکھیں گے کہ غیر یکساں برقی میدان بھی قدامت پسند میدان ہوتا ہے البتہ تغیر پذیر برقی میدان غیر قدامت پسند ہو سکتا ہے۔

مثال 4.1: غیر یکساں، غیر تغیر پذیر میدان

$$\boldsymbol{E} = (y+z)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + (x+z)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (x+y)\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

شکل 4.3: چارج منتقل کرنے کے دو راستے۔

میں $N_1(1,0,2)$ سے $N_2(0,1,2)$ تک سیدھی لکیر پر $0.1\,\mathrm{C}$ کا چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

حل: شکل 4.3 میں چارج منتقل کرنے کا سیدھا راستہ دکھایا گیا ہے۔پہلے اس سیدھی لکیر کا مساوات حاصل کرتے ہیں۔اس لکیر کا ڈھلوان[7]

$$\text{ڈھلوان} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{0-1} = -1$$

ہے لہٰذا سیدھی لکیر کی مساوات $y = mx + c$ میں نقطہ N_1 پُر کرتے ہوئے $0 = -1 \times 1 + c$ سے $c = 1$ حاصل ہوتا ہے۔یوں لکیر کی مساوات

$$y = -x + 1 \tag{4.7}$$

ہے۔کارتیسی محدد میں کسی بھی راستے پر حرکت کرتے ہوئے مساوات 1.3 کے مطابق

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{4.8}$$

لکھا جاتا ہے۔یوں مساوات 4.2 سے حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
W &= -q\int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\
&= -0.1\int_{N_1}^{N_2}\Big[(y+z)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + (x+z)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (x+y)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\Big]\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\mathrm{z})\\
&= -0.1\int_1^0 (y+z)\,\mathrm{d}x - 0.1\int_0^1 (x+z)\,\mathrm{d}y - 0.1\int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

آخری قدم پر تکمل کو تین حصوں میں لکھا گیا ہے جہاں پہلے حصے میں تکمل کو x کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے جبکہ دوسرے حصے میں تکمل کو y کے ساتھ اور آخری حصے میں اسے z کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے۔پہلے حصے میں $(y+z)$ کا تکمل x کے ساتھ ہے لہٰذا $(y+z)$ کو x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔منتقلی کے راستے پر $z = 2$ ہے جبکہ مساوات 4.7 میں y کو x کی صورت میں لکھا گیا ہے۔یوں پہلا تکمل

$$\begin{aligned}
-0.1\int_1^0 [y+z]\,\mathrm{d}x &= -0.1\int_1^0 [(-x+1)+2]\,\mathrm{d}x\\
&= -0.1\left(\frac{-x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_1^0\\
&= 0.25\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

---

[7] slope

یعنی جاول کے ایک چوتھائی کے برابر حاصل ہوتا ہے۔دوسرا تکمل y کے ساتھ ہے لہٰذا تمام متغیرات y کی صورت میں لکھنے ہوں گے۔سیدھی لکیر کے مساوات سے $x=-y+1$ لکھا جا سکتا ہے جبکہ پورے راستے پر $z=2$ کے برابر ہے لہٰذا

$$\begin{aligned}-0.1\int_0^1[x+z]\,\mathrm{d}y &= -0.1\int_0^1[(-y+1)+2]\,\mathrm{d}y\\ &= -0.1\left(\frac{-y^2}{2}+3y\right)\Bigg|_0^1\\ &= -0.25\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

ہو گا۔تیسرے تکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لہٰذا یہ تکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1\int_2^2(x+y)\,\mathrm{d}z = 0\,\mathrm{J}$$

اس طرح کُل درکار توانائی تینوں جوابات کا مجموعہ یعنی $0\,\mathrm{J}$ ہو گی۔مثبت جواب کا مطلب یہ ہے کہ چارج کو منتقل کرنے کی خاطر بیرونی لاگو قوت توانائی فراہم کرے گی۔

مثال 4.2: گزشتہ مثال میں سیدھی لکیر پر چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کرنے کو کہا گیا۔اس مثال میں شکل 4.3 میں بائیں جانب گول دائرے کے راستے $(1,0,2)$ سے $(0,1,2)$ تک $\boldsymbol{E}=(y+z)\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+(x+z)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}+(x+y)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ میدان میں $0.1\,\mathrm{C}$ کے چارج کو منتقل کرنے کی خاطر درکار توانائی حاصل کریں۔گول دائرے کا راستہ $z=2$ سطح پر پایا جاتا ہے۔

حل:اکائی رداس کے گول دائرے کی مساوات $x^2+y^2=1^2$ ہے۔یوں مساوات 4.2 سے حاصل تین تکملوں

$$W=-0.1\int_1^0(y+z)\,\mathrm{d}x-0.1\int_0^1(x+z)\,\mathrm{d}y-0.1\int_2^2(x+y)\,\mathrm{d}z$$

میں پہلی تکمل میں $z=2$ اور $y=\sqrt{1-x^2}$ پُر کرنا ہو گا۔یاد رہے کہ ربع اول[8] میں x اور y دونوں کی قیمتیں مثبت ہوتی ہیں۔اس طرح کے تکمل حل کرتے وقت ربع کو مد نظر رکھنا ضروری ہے۔

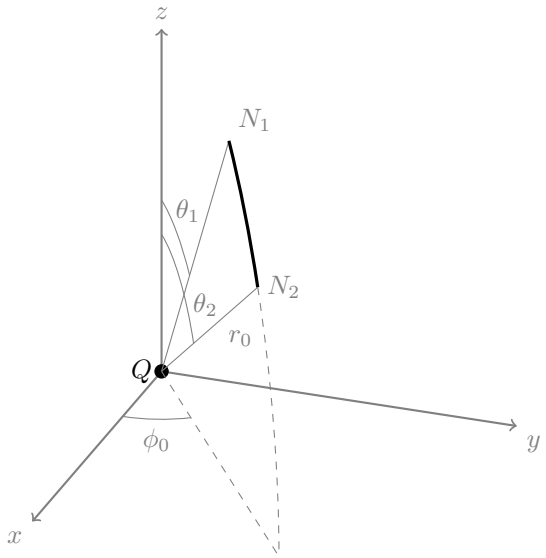
$$\begin{aligned}-0.1\int_1^0(y+z)\,\mathrm{d}x &= -0.1\int_1^0(\sqrt{1-x^2}+2)\,\mathrm{d}x\\ &= -0.1\,(\frac{\sin^{-1}x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+2x)\Bigg|_1^0\\ &= -0.025\pi-0.2\end{aligned}$$

جاول، دوسرے تکمل میں $z=2$ ہی رہے گا جبکہ $x=\mp\sqrt{1-y^2}$ میں سے $x=\sqrt{1-y^2}$ کا استعمال ہو گا۔یوں

$$\begin{aligned}-0.1\int_0^1(x+z)\,\mathrm{d}y &= -0.1\int_0^1(\sqrt{1-y^2}+2)\,\mathrm{d}y\\ &= -0.1\,(\frac{\sin^{-1}y}{2}+\frac{y\sqrt{1-y^2}}{2}+2x)\Bigg|_0^1\\ &= 0.025\pi+0.2\end{aligned}$$

---

[8] first quadrant



شکل 4.4: نقطہ چارج کے گرد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے حرکت کا راستہ

جاول حاصل ہوتا ہے۔ تیسرے تکمل میں ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہیں لہٰذا یہ تکمل صفر کے برابر ہے۔

$$-0.1\int_2^2 (x+y)\,\mathrm{d}z = 0\,\mathrm{J}$$

کُل توانائی ان تین جوابات کا مجموعہ یعنی $0\,\mathrm{J}$ ہو گا۔

مشق 4.1: گزشتہ دو مثالوں میں ابتدائی نقطہ $(1,0,2)$ اور اختتامی نقطہ $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},2)$ تصور کرتے ہوئے دوبارہ حل کریں۔

جوابات: $-0.1328\,\mathrm{J}$ ، $-0.1328\,\mathrm{J}$

محدد کے مرکز پر موجود نقطہ چارج Q کا میدان ہم حاصل کر چکے ہیں جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \tag{4.9}$$

آئیں دیکھیں کہ رداس تبدیل کئے بغیر اس میدان میں چارج q کو حرکت دیتے ہوئے کتنی توانائی درکار ہو گی۔چونکہ میدان رداس کی سمت میں ہے اور رداس تبدیل کئے بغیر حرکت صرف اُس صورت ممکن ہے کہ ہم $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ یعنی $\boldsymbol{E}$ کے عمود میں سفر کریں۔ایسی صورت میں چارج پر میدان سے رونما ہونے والی قوت اور طے فاصلہ عمودی ہوں گے لہٰذا درکار توانائی صفر کے برابر ہو گی۔آئیں تکمل کے ذریعہ یہی جواب حاصل کریں۔

تصور کریں کہ $\phi = \phi_0$ اور $r = r_0$ رکھتے ہوئے ہم θ کو θ_1 تا θ_2 ریڈیئن تبدیل کرتے ہوئے چارج کو نقطہ N_1 سے N_2 تک حرکت دیتے ہیں۔یہ صورت حال شکل 4.4 میں دکھائی گئی ہے۔مساوات 1.3، مساوات 1.44 اور مساوات 1.64 جنہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

کارتیسی، نلکی اور کروی متغیرات تبدیل کرنے سے پیدا چھوٹا فاصلہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ دیتے ہیں۔یوں درکار توانائی

$$
\begin{aligned}
W &= -q\int_{\text{ابتدا}}^{\text{اختتام}} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \\
&= -q\int_{r_0,\theta_1,\phi_0}^{r_0,\theta_2,\phi_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot(\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi) \\
&= -q\int_{r_0}^{r_0} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

صفر ہی حاصل ہوتی ہے۔یہاں دوسرے قدم پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = 1$ کے علاوہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_\theta = 0$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{a}_\phi = 0$ کا استعمال کیا گیا۔

اس کے برعکس اگر نقطہ (r_1,θ_1,ϕ_1) تا نقطہ (r_2,θ_2,ϕ_2) چارج کو حرکت دی جائے تب

$$
\begin{aligned}
W &= -q\int_{r_1,\theta_1,\phi_1}^{r_2,\theta_2,\phi_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\cdot(\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi) \\
&= -q\int_{r_1}^{r_2} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\
&= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)
\end{aligned}
$$

ہو گا۔ یوں $r_1 > r_2$ کی صورت میں جواب مثبت ہو گا اور چارج کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے منتقل کرنے کے خاطر بیرونی توانائی درکار ہو گی جبکہ $r_2 > r_1$ کی صورت میں جواب منفی حاصل ہوتا ہے لہٰذا چارج کے حرکت سے ہمیں توانائی حاصل ہو گی۔

مشق 4.2: میدان $\boldsymbol{E} = 3x^2yz^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + x^3z^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 2x^3yz\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ میں محدد کے مرکز $(0,0,0)$ سے نقطہ $(2,3,5)$ تک دو کولمب کا چارج مندرجہ ذیل راستوں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی حاصل کریں۔

- دو نقطوں کے مابین سیدھی لکیر۔
- ایسا راستہ جس پر $y = \frac{3}{4}x^2$ اور $z = \frac{x}{2} + x^2$ ہوں۔

جوابات: سیدھی لکیر پر $y = \frac{3}{2}x$ اور $z = \frac{5}{2}x$ لکھا جائے گا۔جوابات کے مطابق توانائی درکار نہیں بلکہ حاصل ہو گی۔$-1200\,\mathrm{J}$، $-1200\,\mathrm{J}$

4.3 برقی دباو

چارج q کے منتقلی کے لئے درکار توانائی سے زیادہ اہم اکائی چارج کے منتقلی کے لئے درکار توانائی ہے۔اس توانائی کو برقی دباو[9] کہتے ہیں۔برقی دباو کے اکائی J/C کو وولٹ[10] کا نام دیا گیا ہے جسے V سے ظاہر کیا جاتا ہے۔چونکہ توانائی غیر سمتی یعنی مقداری ہے لہٰذا برقی دباو بھی مقداری ہے۔مساوات 4.2 سے برقی دباو یوں حاصل ہوتا ہے

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = -\int_B^A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.11}$$

جہاں ابتدائی نقطے کو B، اختتامی نقطے کو A اور حاصل جواب کو V_{AB} لکھا گیا ہے۔V_{AB} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلے اختتامی نقطہ A اور بعد میں ابتدائی نقطہ B لکھا گیا ہے۔مساوات 4.6 میں فاصلہ $\boldsymbol{L}_{ON}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں ابتدائی نقطہ O پہلے اور اختتامی نقطہ N بعد میں لکھا گیا۔برقی دباو V_{AB} لکھتے ہوئے اس فرق کو مد نظر رکھنا ہو گا۔

برقی دباو دو نقطوں کے مابین ناپی جاتی ہے۔کسی نقطے کی حتمی برقی دباو معنی نہیں رکھتی۔برقی دباو بالکل اونچائی کے مترادف ہے۔یوں کسی پہاڑی کے قریب کھڑے ہو کر اگر اس کی اونچائی تین سو میٹر ناپی جائے تو اسی پہاڑی کی اونچائی سطح سمندر سے ناپتے ہوئے سات سو میٹر حاصل ہو سکتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اونچائی ناپتے ہوئے نقطہ حوالہ[11] ، جہاں کی نسبت سے اونچائی ناپی جائے، نہایت اہمیت کا حامل ہے۔نقطہ حوالہ کی اونچائی صفر تصور کی جاتی ہے۔دو یا دو سے زیادہ عمارتوں کی اونچائی کا موازنہ کرتے وقت ان تمام عمارتوں کی اونچائی پہلے کسی ایک نقطے سے ناپی جاتی ہے۔یہ نقطہ عموماً زمین کی سطح ہوتی ہے۔اس کے برعکس مختلف شہروں یا پہاڑیوں کی اونچائی عموماً سطح سمندر سے ناپی جاتی ہے۔اگر تمام افراد کسی ایک نقطہ حوالہ پر اتفاق کریں تب اس نقطے کی نسبت سے کسی مقام کی اونچائی کو اس مقام کی حتمی اونچائی تصور کی جاتی ہے۔ بالکل اسی طرح مختلف نقطوں کے برقی دباو کا موازنہ کرتے ہوئے ان تمام نقطوں کی برقی دباو کسی ایک نقطے کی نسبت سے ناپے جائیں گے۔ایسے نقطے کو برقی زمین[12] ، کہا جاتا ہے جہاں برقی زمین کو صفر برقی دباو پر تصور کیا جاتا ہے۔عموماً کرہ ارض کی سطح کو ہی برقی زمین تصور کیا جاتا ہے۔

موٹر گاڑی میں نسب بیٹری کے مثبت سرے کی برقی دباو، بیٹری کے منفی سرے کی نسبت سے ناپنا زیادہ مطلب آمیز ہو گا جبکہ گھریلو برقی دباو مہیا کردہ ٹھنڈی اور گرم تار کے مابین ناپنا مطلب رکھتا ہے۔کبھی کبھار برقی دباو ناپنا نسبتاً مشکل ہوتا ہے، مثلاً کرہ ارض کی برقی دباو کو کس نقطہ حوالہ سے ناپا جائے گا۔طبیعیات کے میدان میں عموماً ایسے ہی مسئلے درپیش آتے ہیں جہاں نقطہ حوالہ تعین کرنا دشوار ہوتا ہے۔ایسی صورت میں نقطہ حوالہ کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا جاتا ہے اور نقطہ A کے برقی دباؤ کو V_A لکھا جاتا ہے۔یوں لامحدود فاصلے سے اکائی چارج کو کرہ ارض تک لانے کے لئے درکار توانائی دریافت کرتے ہوئے کرہ ارض کی برقی دباو حاصل کی جائے گی۔

ہمہ محوری تار کے مسائل پر غور کرتے ہوئے عموماً اس کی بیرونی نلکی سطح کو نقطہ حوالہ لیا جاتا ہے۔اسی طرح کروی تناسب رکھنے والے سطحوں کے مابین برقی دباو حاصل کرتے وقت ان میں کسی ایک سطح کو حوالہ سطح چنا جائے گا۔

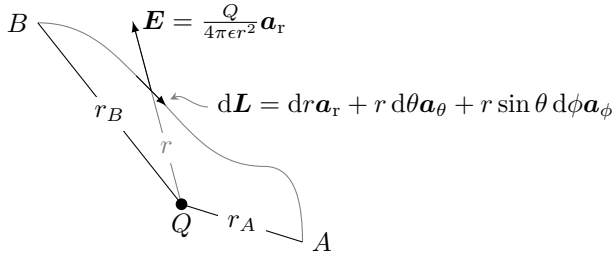
اگر نقطہ A کی برقی دباو V_A جبکہ نقطہ B کی برقی دباو V_B ہو تب ان کے مابین برقی دباو

$$V_{AB} = V_A - V_B \tag{4.12}$$

ہو گا جہاں نقطہ B کو نقطہ حوالہ تصور کیا گیا ہے۔یہ مساوات صرف اور صرف اسی صورت درست ہو گی جب V_A اور V_B ازخود ایک ہی نقطہ حوالہ سے ناپے گئے ہوں۔

---

[9] voltage
[10] volt
[11] reference point
[12] electrical ground



شکل 4.5: نقطہ چارج کی برقی دباو۔

4.3.1 نقطہ چارج کا برقی دباو

شکل 4.5 میں خالی خلاء میں کروی محدد کے مرکز پر پائے جانے والے چارج Q کے میدان میں کسی بھی راستے پر q کولمب کے پیمائشی چارج کو نقطہ B سے نقطہ A لانا دکھایا گیا ہے۔Q سے r فاصلے پر اس راستے کے چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر اوسط برقی میدان $\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ ہو گا۔یوں اتنا راستہ طے کرنے کے لئے

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W &= -q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\
&= -q\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\right)\cdot\left(\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi\right)\\
&= -\frac{qQ\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2}
\end{aligned}$$

توانائی درکار ہو گی۔اس طرح پورا راستہ طے کرنے کے لئے

$$W = -\int_{r_B}^{r_A}\frac{qQ\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \left.\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}\right|_{r_B}^{r_A} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

توانائی درکار ہو گی جس سے ان دو نقطوں کے مابین برقی دباو $V_{AB} = \frac{W}{q}$ یوں حاصل ہوتا ہے۔

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \tag{4.13}$$

اس مساوات سے صاف ظاہر ہے کہ نقطہ چارج Q کے میدان میں دو نقطوں کے مابین برقی دباو کا انحصار چارج سے نقطوں کے فاصلوں r_A اور r_B پر ہے نا کہ ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچنے کے راستے پر۔یوں نقطہ B کے حوالے سے نقطہ A پر برقی دباو مساوات 4.13 سے حاصل ہوتا ہے۔اگر نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر رکھا جائے یعنی اگر $r_B = \infty$ لیا جائے تب $\frac{1}{\infty} = 0$ ہونے کی وجہ سے یہ مساوات

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \tag{4.14}$$

صورت اختیار کر لیتی ہے۔اگر ہم حوالہ نقطہ کے لامحدود فاصلے پر ہونے پہ اتفاق کریں تو ایسی صورت میں $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$ کو نقطہ A کی حتمی برقی دباو تصور کیا جا سکتا ہے جسے V_A لکھا جاتا ہے۔نقطہ حوالے کو لامحدود فاصلے پر رکھنے کا مطلب ہے کہ برقی زمین لامحدود فاصلے پر ہے۔ نقطہ حوالہ پر اتفاق کے بعد برقی دباو کی بات کرتے ہوئے بار بار برقی زمین کی نشاندہی کرنا ضروری نہیں لہٰذا برقی دباو لکھتے ہوئے زیر نوشت میں B لکھنے سے گریز کیا جاتا ہے اور اسے صرف V_A لکھا جاتا ہے۔مساوات 4.14 نقطہ A

کی حتمی برقی دباو دیتا ہے جو Q سے r_A فاصلے پر ہے۔یہ نقطہ کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے لہٰذا اسے r_A فاصلے پر نقطہ A کی بجائے r فاصلے پر نقطہ کہا جا سکتا ہے۔ایسی صورت میں مساوات 4.14 کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{4.15}$$

جو کروی محدد کے مرکز پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے r فاصلے پر برقی دباو V دیتا ہے جہاں نقطہ حوالہ لامحدود فاصلے پر ہے۔

برقی دباو مقداری ہے لہٰذا مساوات 4.15 میں اکائی سمتیات نہیں پائے جاتے۔

ایسی سطح جس پر حرکت کرنے سے برقی دباو تبدیل نہ ہو کو ہم قوہ سطح[13] کہتے ہیں۔مساوات 4.15 کے مطابق کروی محدد کے مرکز پر نقطہ چارج کے گرد کسی بھی رداس کا کرہ ہم قوہ سطح ہو گی۔ایسی سطح پر حرکت کرنے کی خاطر کسی توانائی کی ضرورت نہیں ہوتی۔

4.3.2 لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو

z محدد پر لامحدود لمبائی کے لکیری چارج کثافت کا میدان صفحہ 73 پر مساوات 3.15

$$\boldsymbol{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\boldsymbol{a}_\rho$$

دیتا ہے۔اس میدان میں ρ_0 اور ρ_1 سطحوں کے مابین

$$V = -\int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{\rho_L \, \mathrm{d}\rho}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\rho_0}{\rho_1} \tag{4.16}$$

برقی دباو پایا جائے گا۔

4.3.3 ہم محوری تار کا برقی دباو

ہم محوری تار میں اندرونی اور بیرونی تاروں کے درمیانی جگہ پر برقی میدان صفحہ 74 پر مساوات 3.16 میں دیا گیا ہے جسے $\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E}$ کے استعمال سے

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}\boldsymbol{a}_\rho \tag{4.17}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اندرونی تار پر ρ_L لکیری چارج کثافت پایا جاتا ہے۔اندرونی تار کے اکائی لمبائی پر $+Q$ جبکہ بیرونی تار کے اکائی لمبائی پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔بیرونی تار کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی تار پر برقی دباو

$$V = -\int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}\boldsymbol{a}_\rho \cdot \mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_\rho = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

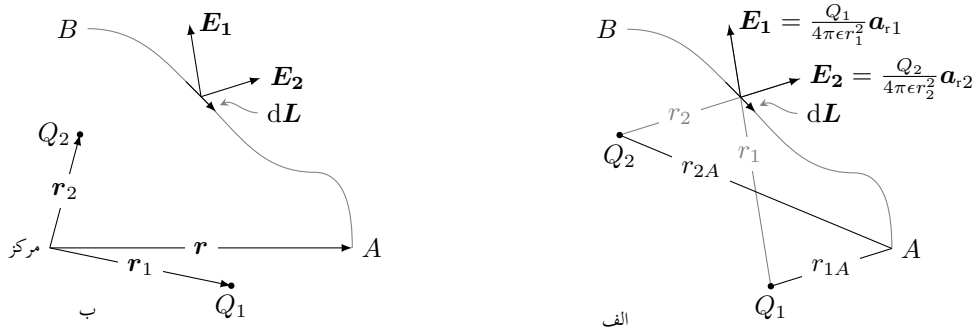
یعنی

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{4.18}$$

ہو گا جہاں اندرونی تار کا رداس ρ_1 اور بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔

---

[13] equipotential surface



شکل 4.6: دو نقطہ چارج کے میدان میں حتمی برقی دباو۔

4.4 متعدد نقطہ چارجوں کی برقی دباو

شکل 4.6-الف میں چارج Q_1 اور Q_2 کے برقی میدان میں B سے A تک پیمائشی چارج q کی حرکت دکھائی گئی ہے۔Q_1 کو کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے، B سے A تک راستے پر کسی بھی نقطہ N پر اس کا میدان $\boldsymbol{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\boldsymbol{a}_{r1}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں r_1 مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔اسی طرح Q_2 کو ایک اور کروی محدد کے مرکز پر تصور کرتے ہوئے نقطے N پر اس کا میدان $\boldsymbol{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}\boldsymbol{a}_{r2}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں r_2 اس محدد کے مرکز سے N تک کا فاصلہ ہے۔شکل-الف میں B سے A تک راستے پہ نقطہ N پر Q_1 اور Q_2 کے میدان $\boldsymbol{E}_1$ اور $\boldsymbol{E}_2$ دکھائے گئے ہیں۔یوں N پر کُل میدان $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ ہو گا۔نقطہ N پر B سے A کے راستے چھوٹی سی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر کُل میدان یہی ہو گا۔ جس کروی محدد کے مرکز پر Q_1 پایا جاتا ہے اس نظام میں اس چھوٹے فاصلے کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_1\boldsymbol{a}_{r1} + r_1\,\mathrm{d}\theta_1\boldsymbol{a}_{\theta 1} + r_1\sin\theta_1\,\mathrm{d}\phi_1\boldsymbol{a}_{\phi_1} \tag{4.19}$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ جس کروی محدد کے مرکز پر Q_2 پایا جاتا ہے اس نظام میں اسی چھوٹے فاصلے کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_2\boldsymbol{a}_{r2} + r_2\,\mathrm{d}\theta_2\boldsymbol{a}_{\theta 2} + r_2\sin\theta_2\,\mathrm{d}\phi_2\boldsymbol{a}_{\phi_2} \tag{4.20}$$

لکھا جائے گا۔$\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ فاصلہ طے کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W &= -q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\ &= -q(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\\ &\quad -\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\boldsymbol{a}_{r1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}\boldsymbol{a}_{r2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}\end{aligned}$$

توانائی درکار ہو گی۔اس مساوات میں $\boldsymbol{a}_{r1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کرتے وقت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت مساوات 4.19 سے لیتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{r1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_1$ ملتا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{a}_{r2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کرتے وقت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت مساوات 4.20 سے لیتے ہوئے $\boldsymbol{a}_{r2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r_2$ ملتا ہے۔ان قیمتوں کے پُر کرنے سے

$$\mathrm{d}W = -\frac{qQ_1\,\mathrm{d}r_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} - \frac{qQ_2\,\mathrm{d}r_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں B سے A تک کا پورا راستہ طے کرنے کی خاطر

$$\begin{aligned} W = \int_B^A \mathrm{d}W &= -\frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_{1B}}^{r_{1A}} \frac{\mathrm{d}r_1}{r_1^2} - \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_{2B}}^{r_{2A}} \frac{\mathrm{d}r_2}{r_2^2} \\ &= \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}}\right) + \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{2A}} - \frac{1}{r_{2B}}\right) \end{aligned}$$

توانائی درکار ہو گی۔نقطہ B کو لامحدود فاصلے پر لیتے ہوئے یوں نقطہ A پر حتمی برقی دباو

$$V_A = \frac{W}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_{1A}} + \frac{Q_2}{r_{2A}}\right) \tag{4.21}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 4.21 میں دائیں ہاتھ پہلا جزو Q_1 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباو جبکہ دوسرا جزو Q_2 کے میدان میں نقطہ A کی حتمی برقی دباو دیتا ہے۔مساوات 4.21 کے مطابق Q_1 اور Q_2 دونوں کے موجودگی میں نقطہ A کا برقی دباو حاصل کرنے کی خاطر ان دو چارجوں کو باری باری علیحدہ لیتے ہوئے A پر برقی دباو حاصل کیا جاتا ہے اور پھر دونوں برقی دباو کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہی طریقہ کار دو سے زیادہ نقطہ چارجوں کے لئے بھی بروئے کار لایا جا سکتا ہے۔یوں کسی بھی نقطے کی برقی دباو حاصل کرتے ہوئے مختلف نقطہ چارجوں کے برقی دباو علیحدہ علیحدہ حاصل کرتے ہوئے انہیں جمع کرتے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اگر کسی کروی محدد کے مرکز سے Q_1 تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_1$ جبکہ مرکز سے Q_2 تک کا سمتیہ $\boldsymbol{r}_2$ اور مرکز سے نقطہ A تک سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہوں تب نقطہ A کے لئے مساوات 4.21 کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} + \frac{Q_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}\right) \tag{4.22}$$

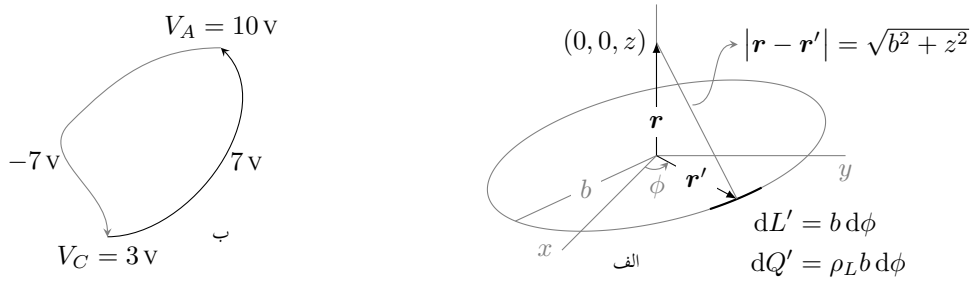
جہاں Q_1 سے A تک فاصلہ $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|$ اور Q_2 سے A تک فاصلہ $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|$ ہے۔یہ صورت حال شکل 4.6-ب میں دکھائی گئی ہے۔متعدد نقطہ چارجوں کے لئے مساوات 4.22

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} + \frac{Q_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|} + \cdots + \frac{Q_n}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n|}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{Q_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|} \end{aligned} \tag{4.23}$$

لکھی جائے گی جہاں نقطہ A کا مقام زیر نوشت میں A لکھنے کی بجائے $V(\boldsymbol{r})$ میں $\boldsymbol{r}$ سے واضح کیا گیا ہے۔

متغیر حجمی چارج کثافت ρ_h کے چھوٹے حجم Δh میں پائے جانے والے چارج $\Delta Q = \rho_h \Delta h$ کو نقطہ چارج تصور کیا جا سکتا ہے۔پورے حجم کے n چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے مساوات 4.23 کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\rho_h(\boldsymbol{r}_1)\Delta h_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} + \frac{\rho_h(\boldsymbol{r}_2)\Delta h_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|} + \cdots + \frac{\rho_h(\boldsymbol{r}_n)\Delta h_n}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n|}\right) \tag{4.24}$$



شکل 4.7: (الف) گول دائرے پر لکیری چارج کثافت سے z محدد پر پیدا برقی دباو۔ (ب)بند دائرے کی برقی دباو صفر ہے۔

جہاں $\boldsymbol{r}$ کو کثافت کا آزاد متغیرہ لیتے ہوئے مقام $\boldsymbol{r}_j$ پر کثافت کو $\rho_h(\boldsymbol{r}_j)$ اور چھوٹی حجم کو Δh_j لکھا گیا ہے۔چھوٹی حجم Δh کو کم سے کم کرتے ہوئے ایسے نقطوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ بناتے ہوئے اس مجموعہ سے مندرجہ ذیل حجمی تکمل حاصل ہوتا ہے۔

$$V(\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\text{حجم}} \frac{\rho_h(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}h'}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.25}$$

یہاں رک کر مندرجہ بالا مساوات کو دوبارہ دیکھتے ہیں۔ρ_h حجمی چارج کثافت ہے۔مقام $\boldsymbol{r}'$ پر چھوٹی حجم $\mathrm{d}h'$ میں تھوڑا سا چارج $\rho_h(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}h'$ پایا جاتا ہے جسے نقطہ چارج تصور کیا جاتا ہے۔مساوات 4.25 نقطہ $\boldsymbol{r}$ پر برقی دباو دیتا ہے جہاں برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر تصور کیا گیا ہے۔یوں اکائی چارج کو لامحدود فاصلے سے نقطہ $\boldsymbol{r}$ تک کسی بھی راستے لانے کے لئے اس مساوات سے حاصل $V(\boldsymbol{r})$ برابر توانائی درکار ہو گی۔

اگر حجمی چارج کثافت کی جگہ سطحی چارج کثافت ρ_S یا لکیری چارج کثافت ρ_L پایا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$V(\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\text{سطح}} \frac{\rho_S(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S'}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.26}$$

$$V(\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\text{لکیر}} \frac{\rho_L(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}L'}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.27}$$

لکھتے۔ان مساوات میں $\mathrm{d}h'$، $\mathrm{d}S'$ اور $\mathrm{d}L'$ غیر سمتی یعنی مقداری ہیں۔تینوں اقسام کے چارج کثافت پائے جانے کی صورت میں باری باری ہر ایک سے پیدا برقی دباو حاصل کرتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جائے گا۔

مثال 4.3: $z=0$ سطح پر z محدد کے گرد b رداس کے گول دائرے پر ρ_L چارج کثافت پایا جاتا ہے۔$N(0,0,z)$ پر برقی دباو حاصل کریں۔

حل:شکل 4.7-الف میں صورت حال دکھایا گیا ہے۔$z=0$ سطح پر کروی نظام کا رداس r اور تکی محدد کا رداس ρ برابر ہوتے ہیں۔گول دائرے پہ $\boldsymbol{r}'$ کے مقام پر چھوٹی لکیر $\mathrm{d}L' = b\,\mathrm{d}\phi$ لکھی جا سکتی ہے۔برقی دباو $\boldsymbol{r}$ پر درکار ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}| = \sqrt{b^2+z^2}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 4.27 استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(0,0,z)$ پر

$$V = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho_L b\,\mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0\sqrt{b^2+z^2}} = \frac{\rho_L b}{2\epsilon_0\sqrt{b^2+z^2}}$$

برقی دباو پایا جائے گا۔گول دائرے کے عین وسط یعنی $(0,0,0)$ پر یوں $\frac{\rho_L}{2\epsilon_0}$ وولٹ کا برقی دباو پایا جائے گا۔

مساوات 4.2 میں B کو لامحدود فاصلے پر لیتے ہوئے کسی بھی دو نقطوں A اور C کے حتمی برقی دباو یوں لکھے جا سکتے ہیں۔

$$V_A = -\int_{\infty}^{A} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$
$$V_C = -\int_{\infty}^{C} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

شکل 4.7-ب میں یہ نقطے دکھائے گئے ہیں۔اب اگر V_A دس وولٹ جبکہ V_C تین وولٹ کے برابر ہو تب C کے حوالے سے A پر سات وولٹ ہوں گے یعنی $V_{AC} = 7\,\mathrm{V}$ ہو گا۔اسی طرح A کے حوالے سے C پر منفی سات وولٹ ہوں گے یعنی $V_{CA} = -7\,\mathrm{V}$ ہو گا۔یوں اگر کسی بھی راستے C سے A جایا جائے تو برقی دباو میں سات وولٹ کا اضافہ ہو گا جبکہ کسی بھی راستے واپس C لوٹنے سے برقی دباو میں سات وولٹ ہی کی کمی رونما ہو گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے سے شروع ہو کر بند دائرے پر چلتے ہوئے واپس اسی نقطے تک پہنچنے سے برقی دباو میں کُل کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہو گی۔اس حقیقت کو یوں لکھا جاتا ہے

$$V_{AC} + V_{CA} = -\int_{C}^{A} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} - \int_{A}^{C} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

جہاں پہلے C سے A اور پھر A سے واپس C پہنچا گیا۔بند دائرے کے تکمل کو دو ٹکڑوں میں لکھنے کی بجائے اسے بند تکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے اسی مساوات کو یوں بہتر لکھا جا سکتا ہے

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0 \tag{4.28}$$

جہاں تکمل کے نشان پر گول دائرہ بند تکمل کو ظاہر کرتا ہے۔

مساوات 4.28 کہتا ہے کہ کسی بھی طرح پیدا کئے گئے برقی میدان میں بند دائرے پر پورا چکر لگانے کے لئے صفر توانائی درکار ہوتی ہے۔حقیقت میں یہ مساوات صرف وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہونے والے برقی میدان یعنی ساکن برقی میدان[14] کے لئے درست ہے۔اس کتاب میں وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر بعد میں غور کیا جائے گا۔ایسے میدان جس میں بند دائرے پر چلنے کی خاطر کوئی توانائی درکار نہ ہو کو بقائی میدان[15] کہتے ہیں۔ساکن تجاذبی میدان بھی بقائی میدان[16] ہے۔یوں تجاذبی میدان میں پہاڑی کی چوٹی تک پہنچنے سے مخفی توانائی میں جتنا اضافہ پیدا ہو، چوٹی سے واپس اترنے پر مخفی توانائی میں اتنی ہی کمی رونما ہو گی اور یوں آپ کی ابتدائی اور اختتامی مخفی توانائی عین برابر ہوں گے۔

4.5 برقی دباو کی ڈھلوان

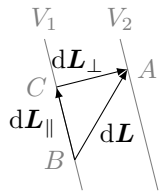
شکل 4.8 میں دو انتہائی قریب ہم قوہ سطحیں دکھائی گئی ہیں جن پر V_1 اور V_2 برقی دباو پایا جاتا ہے۔ہم قوہ سطح V_1 پر کسی نقطہ B سے ہم قوہ سطح V_2 پر کسی نقطہ A تک کا سمتی فاصلہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لیتے ہوئے B سے A تک حرکت کرنے سے برقی دباو میں

---

[14] static electric field

[15] conservative field

[16] یہ جملہ لکھنے کے ٹھیک ایک دن بعد نرگس مولولہ اور ان کے ساتھیوں نے تجاذبی موجیں دریافت کیں۔اس دریافت سے پہلے کسی بھی تجاذبی میدان کو بقائی میدان تصور کیا جاتا تھا۔آج سے ہم ساکن تجاذبی میدان کو ہی بقائی میدان کہیں گے۔



شکل 4.8: برقی دباو کی ڈھلوان برقی میدان ہے۔

$-\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ تبدیلی رونما ہو گی جہاں برقی میدان کو $\boldsymbol{E}$ لکھا گیا ہے۔

$$\mathrm{d}V = V_2 - V_1 = -\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.29}$$

چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر برقی میدان کو غیر تغیر پذیر تصور کیا جا سکتا ہے۔چونکہ دو نقطوں کے مابین برقی دباو کا ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے پہنچنے کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہٰذا ہم B سے C اور پھر A بھی جا سکتے تھے۔B سے C تک فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel$ جبکہ C سے A تک فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp$ لکھتے ہوئے

$$\mathrm{d}V = -\boldsymbol{E}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel + \mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp) \tag{4.30}$$

لکھا جا سکتا ہے۔$\boldsymbol{E}$ کو ہم قوہ سطحہ کے متوازی اور اس کے عمودی اجزاء کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\parallel + \boldsymbol{E}_\perp \tag{4.31}$$

جس سے

$$\mathrm{d}V = -(\boldsymbol{E}_\parallel + \boldsymbol{E}_\perp)\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel + \mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp) = -E_\parallel\,\mathrm{d}L_\parallel - E_\perp\,\mathrm{d}L_\perp \tag{4.32}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\boldsymbol{E}_\parallel$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel$ کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{E}_\parallel\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\parallel = E_\parallel\,\mathrm{d}L_\parallel$ لکھا گیا ہے جبکہ $\boldsymbol{E}_\parallel$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp$ کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہونے کی بنا پر $\boldsymbol{E}_\parallel\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\perp = 0$ ہے۔اس مساوات کا پہلا جزو $-E_\parallel\,\mathrm{d}L_\parallel$ نقطہ B اور C کے درمیان برقی دباو دیتا ہے۔ہم قوہ سطح پر ہر جگہ برابر برقی دباو پایا جاتا ہے لہٰذا B اور C کے درمیان کسی قسم کا برقی دباو نہیں پایا جاتا یعنی $-E_\parallel\,\mathrm{d}L_\parallel$ صفر کے برابر ہے۔اب چونکہ $\mathrm{d}L_\parallel$ صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا کسی بھی ہم قوہ سطح پر

$$\boldsymbol{E}_\parallel = 0 \tag{4.33}$$

ہو گا اور سطح پر صرف اور صرف عمودی برقی میدان پایا جائے گا یعنی

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\perp \tag{4.34}$$

یوں

$$\mathrm{d}V = -E_\perp\,\mathrm{d}L_\perp \tag{4.35}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ ہم قوہ سطح پر صرف عمودی میدان پایا جاتا ہے، مندرجہ بالا مساوات میں $\boldsymbol{E}_\perp$ کی جگہ $\boldsymbol{E}$ لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}V = -E\,\mathrm{d}L_\perp \tag{4.36}$$

اس مساوات سے

$$E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}L_\perp} \tag{4.37}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ E درحقیقت V کے ڈھلوان کے برابر مگر الٹ سمت میں ہے۔یوں

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}L_\perp} \tag{4.38}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_\mathrm{N}$ ہم قوہ سطح کا عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

کسی نقطہ کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے کسی دوسرے نقطے کی برقی دباو کو حتمی برقی دباو تصور کیا جاتا ہے جو نقطے کے مقام پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا اسے $V(x,y,z)$ لکھا جا سکتا ہے جہاں برقی دباو کے آزاد متغیرات x، y اور z ہیں۔کسی بھی قابو متغیرہ کی طرح $V(x,y,z)$ کا تفرق

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{4.39}$$

لکھا جا سکتا ہے۔کارتیسی محدد میں کسی بھی برقی دباو کو

$$\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + E_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + E_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{4.40}$$

اور چھوٹی لمبائی کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{4.41}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہاں آپ صفحہ 6 پر دئے مساوات 1.3 پر دوبارہ نظر ڈال سکتے ہیں۔مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z = -E_x\,\mathrm{d}x - E_y\,\mathrm{d}y - E_z\,\mathrm{d}z \tag{4.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔y اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $\mathrm{d}y = 0$ اور $\mathrm{d}z = 0$ لیتے ہوئے) x تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ اور $-E_x\,\mathrm{d}x$ تبدیل ہوتے ہیں لہٰذا یہ لازم ہے کہ یہ دونوں اجزاء برابر ہوں یعنی $\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x = -E_x\,\mathrm{d}x$ جس سے $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ حاصل ہوتا ہے۔اگر $\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ اور $-E_x\,\mathrm{d}x$ برابر نہ ہوں تب مساوات کے ایک طرف تبدیلی دوسرے طرف کے تبدیلی کے برابر نہیں ہو گی اور یوں مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہیں گے۔اسی طرح صرف y اور صرف z تبدیل کئے جا سکتا ہیں۔یوں

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \tag{4.43}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے مساوت 4.40 میں پُر کرتے

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right) \tag{4.44}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اگر ہم

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{4.45}$$

کارتیسی محدد میں ڈھلوان کی مساوات

لکھیں جہاں کسی بھی مقداری f کے لئے ∇f سے مراد $\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات کو

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V \tag{4.46}$$

لکھا جا سکتا ہے۔∇V کو برقی دباو کی ڈھلوان[17] پڑھا جاتا ہے۔مساوات 4.45 کا بایاں ہاتھ ڈھلوان کی علامت جبکہ اس کا دایاں ہاتھ ڈھلوان کے عمل کو ظاہر کرتا ہے۔اگرچہ ہم نے ڈھلوان کا عمل برقی دباو اور برقی میدان کے لئے حاصل کیا، حقیقت میں یہ عمل سائنس کے دیگر متغیرات کے لئے بھی درست ثابت ہوتا ہے۔اس کی مقبولیت اسی حقیقت کی وجہ سے ہے کہ یہ جگہ جگہ پیش آتا ہے۔ڈھلوان کا عمل مقداری پر کیا جاتا ہے جبکہ اس کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے۔صفحہ 80 پر مساوات 3.32 پھیلاو کی تعریف بیان کرتا ہے جہاں پھیلاو کا عمل سمتیہ پر کرتے ہوئے مقداری[18] حاصل کی جاتی ہے۔پھیلاو کے اس مساوات کو یہاں موازنے کے لئے دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{4.47}$$

مشق 4.3: تفاعل $f(x,y,z)=3+z^2e^y\sin x$ کا ڈھلوان حاصل کریں۔

جواب: $z^2e^y\cos x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+z^2e^y\sin x\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+2ze^y\sin x\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$

مثال 4.4: نقطہ $N_1(x_1,y_1,z_1)$ سے نقطہ $N_2(x_2,y_2,z_2)$ کا سمتی فاصلہ $\boldsymbol{R}_{21}=(x_2-x_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+(y_2-y_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+(z_2-z_1)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے جبکہ ان کے مابین فاصلہ $R_{21}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ ہے۔نقطہ N_2 پر $\frac{1}{R_{21}}$ کی ڈھلوان حاصل کریں۔

حل:نقطہ N_2 پر ڈھلوان حاصل کرتے وقت x_2، y_2 اور z_2 کو متغیرات تصور کیا جاتا ہے جبکہ x_1، y_1 اور z_1 کو اٹل قیمتیں تصور کیا جاتا ہے۔یوں ڈھلوان کی تعریف

$$\nabla_2=\frac{\partial}{\partial x_2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{\partial}{\partial y_2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\frac{\partial}{\partial z_2}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

لکھی جائے گی جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 یاد دہانی کراتا ہے کہ نقطہ N_2 کے متغیرات ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے استعمال کئے جائیں گے۔ڈھلوان کا پہلا جزو

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{R_{21}}&=\frac{\partial}{\partial x_2}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{-\frac{1}{2}}\\&=-\frac{1}{2}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{-\frac{3}{2}}\left[2(x_2-x_1)\right]\\&=\frac{-(x_2-x_1)}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

---

[17] gradient

[18] طلباء و طالبات عموماً ڈھلوان کے حاصل جواب کے اکائی سمتیات کو غائب کرتے ہوئے انہیں پھیلاو کے ساتھ منسلک کر لیتے ہیں۔ایسا کرنے سے گریز کریں۔

یعنی

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{R_{21}} = \frac{-(x_2 - x_1)}{R_{21}^3}$$

حاصل ہوتا ہے۔بقایا دو اجزاء بھی بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے

$$\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} = \frac{-(x_2 - x_1)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - (y_2 - y_1)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} - (z_2 - z_1)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{R_{21}^3}$$

یعنی

$$\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} = -\frac{\boldsymbol{R}_{21}}{R_{21}^3} = -\frac{\boldsymbol{a}_{R21}}{R_{21}^2} \tag{4.48}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 4.4: مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ N_2 پر ڈھلوان حاصل کی گئی۔اب آپ نقطہ N_1 پر $\frac{1}{R_{21}}$ کی ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = \frac{\boldsymbol{R}_{21}}{R_{21}^3} \tag{4.49}$$

کے برابر ہے۔یوں

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} \tag{4.50}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

4.5.1 نلکی محدد میں ڈھلوان

نلکی محدد میں برقی دباو کے آزاد متغیرات نلکی محدد کے متغیرات ہوں گے اور یوں برقی دباو $V(\rho,\phi,z)$ لکھا جائے گا۔مساوات 4.39، مساوات 4.40 اور مساوات 4.41 کو نلکی محدد میں یوں لکھ سکتے ہیں

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{4.51}$$

$$\boldsymbol{E} = E_\rho \boldsymbol{a}_\rho + E_\phi \boldsymbol{a}_\phi + E_z \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{4.52}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho \boldsymbol{a}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z \boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{4.53}$$

جہاں چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو صفحہ 29 پر مساوات 1.44 کی مدد سے لکھا گیا ہے۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z = -\left(E_\rho\,\mathrm{d}\rho + E_\phi \rho\,\mathrm{d}\phi + E_z\,\mathrm{d}z\right) \tag{4.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔ϕ اور z تبدیل کئے بغیر (یعنی $\mathrm{d}\phi = 0$ اور $\mathrm{d}z = 0$ لیتے ہوئے) ρ تبدیل کرنے سے اس مساوات کے بائیں اور دائیں ہاتھ کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho$ اور $-E_\rho\,\mathrm{d}\rho$ تبدیل ہوتے ہیں۔ اگر یہ اجزاء ہر صورت برابر رہیں صرف اور صرف اسی صورت مندرجہ بالا مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہٰذا $-E_\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho$ ہو گا جس سے $E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح باری باری ϕ اور z تبدیل کرتے ہوئے

$$E_\phi \rho\,\mathrm{d}\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi$$
$$E_z\,\mathrm{d}z = -\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

لکھے جا سکتے ہیں جس سے E_ϕ اور E_z کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_\phi &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \tag{4.55}$$

انہیں مساوات 4.52 میں پُر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_z\right) \tag{4.56}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کو مساوات 4.46 کی شکل میں لکھتے ہوئے نلکی محدد میں ڈھلوان کی مساوات

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \qquad \text{نلکی محدد میں ڈھلوان کی مساوات} \tag{4.57}$$

حاصل ہوتی ہے۔مساوات 4.45 اور مساوات 4.57 کا موازنہ کریں۔کارتیسی محدد کی مساوات نسبتاً آسان ہے۔

4.5.2 کروی محدد میں ڈھلوان

صفحہ 35 پر مساوات 1.64 کروی محدد میں چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی مساوات ہے۔کروی محدد میں کسی بھی نقطے کے برقی دباو کو $V(r,\theta\phi)$ لکھا جا سکتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کی طرح $\boldsymbol{E}$ کو تین عمودی حصوں میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں ہم مساوات 4.39، مساوات 4.40 اور مساوات 4.41 کو کروی محدد میں یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi \tag{4.58}$$

$$\boldsymbol{E} = E_r\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + E_\theta\boldsymbol{a}_\theta + E_\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{4.59}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{4.60}$$

ان تین مساوات کو مساوات 4.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi = -\left(E_r\,\mathrm{d}r + E_\theta r\,\mathrm{d}\theta + E_\phi r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\right) \tag{4.61}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب اگر ہم صرف r کو تبدیل کریں تب $\mathrm{d}\theta = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کے بائیں دائیں بازو کا پہلا جزو یعنی $\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r$ اور $-E_r\,\mathrm{d}r$ تبدیل ہوں گے۔یہ اجزاء بالکل برابر ہونے کی صورت میں ہی مساوات کے دونوں بازو برابر رہیں گے لہٰذا ہم $\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r = -E_r\,\mathrm{d}r$ لکھ سکتے ہیں جس سے $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح باری باری اور تبدیل کرتے ہوئے مساوات کے دونوں بازو کے اجزاء برابر لکھتے ہوئے

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta = -E_\theta r\,\mathrm{d}\theta$$
$$\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi = -E_\phi r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$$

حاصل ہوتا ہے جس سے E_θ اور E_ϕ کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ان تمام جوابات کو یکجا کرتے ہیں۔

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$
$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$
$$E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

ان قیمتوں کو مساوات 4.59 میں پُر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi\right) \tag{4.62}$$

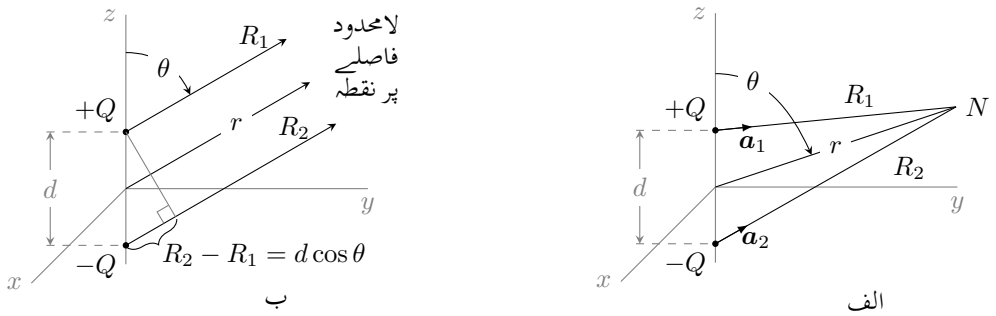
لکھا جا سکتا ہے جس سے کروی محدد میں ڈھلوان کی مساوات یوں لکھی جا سکتی ہے۔

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi \qquad \text{کروی محدد میں ڈھلوان کی مساوات} \tag{4.63}$$

مشق 4.5: صفحہ 82 پر حصہ 3.10 میں پھیلاو کی عمومی مساوات کا حصول دکھایا گیا جہاں عمومی محدد کے متغیرات (u,v,w) اور اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u,\boldsymbol{a}_v,\boldsymbol{a}_w)$ لئے گئے۔ایسا ہی کرتے ہوئے ڈھلوان کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب:

$$\nabla = \frac{1}{K_1}\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{K_2}\frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{a}_v + \frac{1}{K_3}\frac{\partial}{\partial w}\boldsymbol{a}_w \qquad \text{ڈھلوان کی عمومی مساوات}$$



شکل 4.9: جفت قطب

مثال 4.5: صفحہ 4.15 پر مساوات 4.15 نقطہ چارج کا برقی دباو دیتا ہے۔مساوات 4.62 کے استعمال سے کروی محدد میں $\boldsymbol{E}$ کی مساوات حاصل کریں۔

حل:برقی دباو $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ کروی محدد کے رداس پر منحصر ہے جبکہ θ اور ϕ کا اس میں کوئی کردار نہیں لہٰذا مساوات 4.62 میں $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ اور $\frac{\partial V}{\partial \phi}$ صفر کے برابر ہوں گے۔اس طرح $\frac{\partial V}{\partial r}$ لیتے ہوئے $\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ حاصل ہوتا ہے۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباو معلوم ہوتی ہے جس سے برقی میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔اس کی مثال بجلی کی دو تاریں ہو سکتی ہیں جن کے درمیان 220 V پایا جاتا ہے اور جن کے درمیان آپ برقی میدان جاننا چاہتے ہوں۔

4.6 جفت قطب

شکل 4.9-الف میں محدد کے مرکز سے $\frac{d}{2}$ فاصلے پہ z محدد پر ایک جانب $+Q$ اور دوسری جانب $-Q$ نقطہ چارج دکھائے گئے ہیں۔یوں برابر مقدار مگر الٹ علامت کے نقطہ چارجوں کے درمیان d فاصلہ ہے۔ایسی جوڑی چارجوں کو جفت قطب[19] کہا جاتا ہے۔ہمیں جفت قطب سے دور نقطہ N پر برقی میدان اور برقی دباو کی قیمتیں درکار ہیں۔کسی بھی دور نقطے سے یہ دونوں چارج تقریباً مرکز پر دکھائی دیتے ہیں۔دور نقطے سے ایسا نقطہ مراد ہے جہاں مرکز سے نقطے تک کا فاصلہ r جفت قطب چارجوں کے درمیان فاصلہ d سے بہت زیادہ ہو یعنی جب $r \gg d$ ہو۔ہم دیکھ سکتے ہیں کہ r یا θ تبدیل کرنے سے برقی میدان تبدیل ہو گا جبکہ ϕ تبدیل کرنے سے ایسا نہیں ہو گا۔شکل 4.9-الف میں R_1 اور R_2 دونوں r کی جانب جھک کر N پر آ ملتے ہیں۔نقطہ N کو جتنا دور لے جایا جائے اتنی ہی R_1 اور R_2 دونوں r کے متوازی صورت اختیار کرتے ہیں حتٰی کہ آخر کار یہ شکل 4.9-ب کی طرح نظر آتے ہیں۔آئیں اس شکل کی مدد سے دور نقطے پر برقی دباو اور برقی میدان حاصل کریں۔

شکل 4.9-ب میں R_1، R_2 اور r تینوں z محدد کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔چارج $+Q$ سے R_2 پر عمود بناتے ہوئے

$$\begin{aligned} R_2 - R_1 &= d\cos\theta \\ R_1 &= r - \frac{d}{2}\cos\theta \\ R_2 &= r + \frac{d}{2}\cos\theta \end{aligned} \tag{4.64}$$

---

[19] dipole

لکھا جا سکتا ہے۔شکل 4.9-الف میں N پر برقی دباو V مساوات 4.22 کی مدد سے

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) \tag{4.65}$$

لکھی جا سکتی ہے۔مساوات 4.64 کی مدد سے اسے

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\cos\theta}{(r - \frac{d}{2}\cos\theta)(r + \frac{d}{2}\cos\theta)} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\cos\theta}{(r^2 - \frac{d^2}{4}\cos^2\theta)} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{d\cos\theta}{(1 - \frac{d^2}{4r^2}\cos^2\theta)} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔نیچے قوسین میں $\cos\theta \leq 1$ اور $r \gg d$ کی وجہ سے $1 \gg \frac{d^2}{4r^2}\cos^2\theta$ ہو گا اور یوں $\frac{d^2}{4r^2}\cos^2\theta$ کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔یوں

$$V = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{4.66}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 4.62 کو استعمال کرتے ہوئے اس مساوات سے برقی میدان لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{4.67}$$

ہم پہلے برقی دباو اور پھر ڈھلوان کی مدد سے برقی میدان حاصل کرنے کے بجائے پہلے برقی میدان اور پھر تکمل استعمال کرتے ہوئے برقی دباو حاصل کر سکتے ہیں البتہ ایسا کرنا اتنا آسان ثابت نہیں ہوتا۔شوق رکھنے والوں کے لئے مثال 4.6 میں اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے دور نقطے پر جفت قطب سے پیدا میدان اور برقی دباو حاصل کئے گئے ہیں۔

جفت قطب کا چارج $|Q|$ ضرب چارجوں کے درمیان سمتی فاصلہ $\boldsymbol{d}$ کو معیار اثر جفت قطب[20] کہتے ہیں اور اسے $\boldsymbol{p}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d} \tag{4.68}$$

کے برابر ہے جہاں سمتی فاصلہ منفی چارج سے مثبت چارج کی سمت میں ہوتا ہے لہٰذا شکل 4.9 میں $\boldsymbol{d} = d\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے۔اس طرح چونکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \cos\theta$ کے برابر ہے لہٰذا یوں ہم مساوات 4.66 کو

$$V = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{4.69}$$

لکھ سکتے ہیں۔ اسی مساوات کو مزید یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{p} \cdot \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{4.70}$$

جہاں $\boldsymbol{r}$ اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں برقی دباو حاصل کیا جا رہا ہو جبکہ $\boldsymbol{r}'$ جفت قطب کے مرکز کی نشاندہی کرتا ہے۔یہ مساوات کسی بھی محدد نظام سے آزاد مساوات ہے۔

---

[20] dipole moment

مساوات 4.66 کے تحت r بڑھانے سے برقی دباو r^2 گنا کم ہوتا ہے۔یاد رہے کہ اکیلے چارج کا برقی دباو ایسی صورت میں r گنا کم ہوتا ہے۔ہمیں تعجب نہیں ہونا چاہیے چونکہ دور سے جفت قطب کے دو چارج نہایت قریب قریب نظر آتے ہیں جس سے مثبت چارج کا اثر منفی چارج کا اثر تقریباً ختم کرتا ہے۔یہی حقیقت مساوات 4.67 میں بھی نظر آتا ہے جہاں r بڑھانے سے $\boldsymbol{E}$ کی قیمت r^3 گنا کم ہوتی ہے۔

جب تک Q ضرب $\boldsymbol{d}$ کی قیمت تبدیل نہ ہو اس وقت تک دور کسی بھی نقطے پر جفت قطب کے اثرات میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔یوں Q کو کم یا زیادہ کرتے ہوئے اگر $\boldsymbol{d}$ کو یوں تبدیل کیا جائے کہ $Q\boldsymbol{d}$ تبدیل نہ ہو تو جفت قطب سے دور نقطے پر جفت قطب کے اثرات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جائے گی۔اب اگر ہم $Q\boldsymbol{d}$ کی قیمت محدود رکھتے ہوئے $\boldsymbol{d}$ کو اتنا کم کر دیں کہ اسے صفر تصور کیا جا سکے اور ساتھ ہی ساتھ Q کو اتنا بڑھا دیں کہ اسے لامحدود تصور کیا جا سکے تو ایسی صورت میں ہمیں نقطہ جفت قطب حاصل ہو گا۔

4.6.1 جفت قطب کے سمت بہاو خط

ہم پہلے صفحہ 64 پر حصہ 2.7 میں سمت بہاو خط[21] پر غور کر چکے ہیں۔آئیں جفت قطب کے سمت بہاو خط کھینچنا دیکھیں۔برقی دباو کے سمت بہاو خط مساوات 4.66 کی مدد سے کھینچے جا سکتے ہیں۔اس مساوات میں $\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}$ مستقل ہے جسے ایک کے برابر لیتے ہوئے $V = \frac{\cos\theta}{r^2}$ حاصل ہوتا ہے۔مختلف برقی دباو کی قیمتوں کے لئے اسے کھینچ کر برقی دباو کے سمت بہاو خط حاصل کئے جاتے ہیں۔شکل 4.10 میں $V = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ کے لئے اس مساوات کے خط دکھائے گئے ہیں۔ مساوات 4.65 کے تحت دونوں چارج سے برابر فاصلہ پر $V = 0$ حاصل ہوتا ہے۔یوں $z = 0$ لامحدود سطح پر برقی دباو صفر ہو گا اور یہ بطور برقی زمین کردار ادا کرے گی۔

جفت قطب کے میدان کے سمت بہاو خط مساوات 4.67 کی مدد سے کھینچے جاتے ہیں۔اس مساوات کا پہلا جزو کسی بھی نقطے پر $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ سمت میں میدان E_r دیتا ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو اسی نقطے پر $\boldsymbol{a}_\theta$ سمت میں میدان E_θ دیتا ہے۔اس طرح اس نقطے پر ہم

$$\frac{E_r}{E_\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{r\,\mathrm{d}\theta} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

لکھ کر تکمل لیتے ہوئے

$$\ln r = 2\ln\sin\theta + \ln M$$

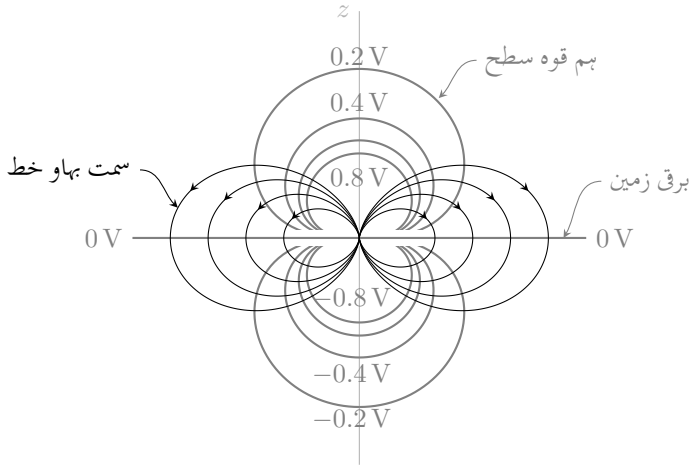
یا

$$r = M\sin^2\theta \tag{4.71}$$

حاصل کرتے ہیں جہاں $\ln M$ تکمل کا مستقل ہے۔یہ مساوات جفت قطب کے میدان کے سمت بہاو خط دیتا ہے جنہیں شکل 4.10 میں $M = 1, 1.5, 2, 2.5$ کے لئے کھینچا گیا ہے۔برقی زمین پر برقی میدان عمودی ہے۔

---

[21] streamlines



شکل 4.10: جفت قطب کے ہم قوہ اور سمت بہاو خط۔

مثال 4.6: شکل 4.9-الف میں دکھائے گئے جفت قطب سے دور کسی نقطے N پر پہلے برقی میدان اور پھر اس برقی میدان کو استعمال کرتے ہوئے برقی دباو حاصل کریں۔

صفحہ 26 پر مثال 1.8 میں $\boldsymbol{R}_1 = R_1\boldsymbol{a}_1$ اور $\boldsymbol{R}_2 = R_2\boldsymbol{a}_2$ سمتیوں کو کروی نظام میں لکھنا دکھایا گیا ہے۔ انہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_1 &= (r - \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\\ \boldsymbol{R}_2 &= (r + \frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_\mathrm{r} - \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\end{aligned}$$

جس سے $R_1 = |\boldsymbol{R}_1| = \sqrt{\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{R}_1}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}R_1 &= \sqrt{\left(r - \frac{d}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right)^2}\\ &= r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{r^2}}\\ &\approx r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\theta} \qquad (d \ll r)\end{aligned} \tag{4.72}$$

آخری قدم پر $d \ll r$ کی بنا پر $\frac{d^2}{r^2}$ کو رد کیا گیا ہے۔ہم جانتے ہیں کہ

$$(a+b)^n = a^n + \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \cdots$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $a = 1$ اور $b = -\frac{d}{r}\cos\theta$ کے برابر ہوں تب مساوات 4.72 میں دئے R_1 کی طاقت تین کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$R_1^3 = r^3(1 - \tfrac{d}{r}\cos\theta)^{\frac{3}{2}} = r^3\left(1 - \tfrac{3d}{2r}\cos\theta + \cdots\right)$$

اس مساوات کے پہلے دو جزو دکھائے گئے ہیں۔اس کے تیسرے جزو میں $\frac{d^3}{r^3}$ چوتھے جزو میں $\frac{d^4}{r^4}$ پائے جاتے ہیں لہٰذا پہلے دو اجزاء کے علاوہ تمام اجزاء کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔یوں

$$R_1^3 = r^3\left(1 - \frac{3d}{2r}\cos\theta\right) \tag{4.73}$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔یہی عمل R_2^3 کے لئے کرنے سے

$$R_2^3 = r^3\left(1 + \frac{3d}{2r}\cos\theta\right) \tag{4.74}$$

حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 44 پر مساوات 2.18 کو استعمال کرتے ہوئے دونوں چارجوں سے کُل برقی میدان ان کے علیحدہ علیحدہ میدان کے مجموعہ لے کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1^3} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}_2}{R_2^3}\\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\left[(r-\frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right]}{r^3(1-\frac{3d}{2r}\cos\theta)} - \frac{\left[(r+\frac{d}{2}\cos\theta)\boldsymbol{a}_\mathrm{r} - \frac{d}{2}\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right]}{r^3(1+\frac{3d}{2r}\cos\theta)}\right)\\
&= \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(\frac{2\cos\theta\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta}{(1-\frac{3d}{2r}\cos\theta)(1+\frac{3d}{2r}\cos\theta)}\right)
\end{aligned}$$

اس مساوات میں کسر کے نچلے حصے کو ضرب دیتے ہوئے $(1 - \frac{9d^2}{4r^2}\cos^2\theta \approx 1)$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $\frac{d^2}{r^2}$ والے جزو کو نظرانداز کیا گیا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta) \tag{4.75}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.67 ہی ہے۔

آئیں اب مساوات 4.75 سے نقطہ $N_0(r,\theta,\phi)$ پر برقی دباو حاصل کریں۔ہم برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر رکھتے ہیں۔ لامحدود فاصلے پر نقطہ $N_3(\infty,\theta',\phi')$ سے کروی محدد کے مرکز کی جانب سیدھا چلتے ہوئے ہم پہلے $N_2(r,\theta',\phi')$ تک پہنچتے ہیں۔اس کے بعد صرف θ تبدیل کرتے ہوئے ہم $N_1(r,\theta,\phi')$ پہنچیں گے اور آخر کار r اور θ تبدیل کئے بغیر $N_0(r,\theta,\phi)$ پہنچیں گے۔

صفحہ 35 پر مساوات 1.64 کروی محدد میں چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی مساوات ہے۔اسے یہاں دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}r\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi \tag{4.76}$$

N_3 سے N_2 تک چلتے ہوئے $\mathrm{d}\theta = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ ہوں گے لہٰذا N_3 کے حوالے سے N_2 پر برقی دباو V_{23}

$$\begin{aligned}
V_{23} &= -\int_{N_3}^{N_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\int_{N_3}^{N_2}\frac{(2\cos\theta\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta)\cdot\mathrm{d}r\boldsymbol{a}_\mathrm{r}}{r^3}\\
&= -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\int_{N_3}^{N_2}\frac{2\cos\theta\,\mathrm{d}r}{r^3} = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}\bigg|_{\infty,\theta',\phi'}^{r,\theta',\phi'} = \frac{Qd\cos\theta'}{4\pi\epsilon_0 r^2}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب N_2 سے N_1 چلتے ہیں۔ہم اس راستے $\mathrm{d}r = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ رکھتے ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned}
V_{12} &= -\int_{N_2}^{N_1}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\int_{N_2}^{N_1}\frac{(2\cos\theta\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta)\cdot r\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{a}_\theta}{r^3}\\
&= -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\int_{N_2}^{N_1}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{r^2} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}\bigg|_{r,\theta',\phi'}^{r,\theta,\phi'} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\cos\theta - \cos\theta')}{r^2}
\end{aligned}$$

ہو گا۔اب N_1 سے N چلتے ہیں۔اس راستے $\mathrm{d}r = 0$ اور $\mathrm{d}\theta = 0$ رکھے گئے ہیں لہٰذا

$$V_{01} = -\int_{N_1}^{N_0} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \int_{N_1}^{N_0} \frac{(2\cos\theta \boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \sin\theta \boldsymbol{a}_\theta) \cdot r \sin\theta \, \mathrm{d}\phi \boldsymbol{a}_\phi}{r^3} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0$ اور $\boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\phi = 0$ کی بدولت تکمل صفر کے برابر لیا گیا ہے۔یوں V_{23}، V_{12} اور V_{01} جمع کرتے ہوئے N_3 سے N_0 تک کا برقی دباو

$$V_0 = V_{03} = V_{23} + V_{12} + V_{01} = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{4.77}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 4.66 ہی ہے۔

مندرجہ بالا مثال سے آپ نے دیکھ لیا ہو گا کہ پہلے برقی میدان اور بعد میں برقی دباو حاصل کرنا زیادہ مشکل کام ہے۔برقی دباو کی افادیت اس مثال سے صاف ظاہر ہے۔حقیقی دنیا میں عموماً برقی دباو ہی معلوم ہوتی ہے جیسے دو متوازی دھاتی چادروں کے درمیان برقی دباو یا گھریلو صارفین کے ہاں دو برقی تاروں کے درمیان برقی دباو۔ہم ایسی برقی دباو جانتے ہوئے اس سے مختلف متغیرات حاصل کرتے ہیں۔

4.7 ساکن برقی میدان کی کثافت توانائی

برقی دباو پر غور کرتے ہوئے ہم نے دیکھا کہ برقی میدان میں لامحدود فاصلے سے چارج کو کسی نقطہ منتقل کرنے کے لئے توانائی درکار ہوتی ہے۔یہ توانائی چارج کو حرکت دینے والا محرک مہیا کرتا ہے۔چونکہ توانائی اٹل ہے لہٰذا یہ توانائی بصورت مخفی توانائی چارج میں منتقل ہو جاتی ہے۔جب تک بیرونی قوت چارج کو اس نقطے پر روکے رکھے یہ توانائی چارج میں بطور مخفی توانائی رہے گی۔اگر چارج کو بیرونی طاقت نہ روکے تو مخفی توانائی حرکی[22] توانائی میں تبدیل ہوتے ہوئے چارج کو حرکت دے گی۔یوں اب چارج ازخود کام کرنے کے قابل ہو گا۔

آئیں دیکھیں کہ اگر اسی طرح مختلف چارج کو لامحدود فاصلے سے مختلف مقامات پر لا کر وہیں روکے رکھا جائے تو اس پورے نظام کی کُل مخفی توانائی کتنی ہو گی۔یہ توانائی ان چارجوں کو اپنی اپنی جگہوں پر منتقل کرنے کے لئے درکار بیرونی توانائی کے مجموعے سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

شروع خالی خلاء سے کرتے ہیں۔خالی خلاء میں چونکہ کوئی چارج نہیں پایا جاتا لہٰذا اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہو گا۔یوں پہلے چارج Q_1 کو لامحدود فاصلے سے نقطہ N_1 منتقل کرنے کے لئے صفر توانائی درکار ہو گی۔اب چونکہ خلاء میں Q_1 موجود ہے لہٰذا دوسرے چارج Q_2 کو نقطہ N_2 منتقل کرنے کے لئے $Q_2V_{2,1}$ توانائی درکار ہو گی جہاں N_2 پر پہلے چارج کی وجہ سے پیدا برقی دباو کو $V_{2,1}$ لکھا گیا ہے۔$V_{2,1}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت میں پہلا عدد منتقل کئے جانے والے چارج کی نشاندہی کرتا ہے جبکہ پہلا عدد منتقلی کے نقطے پر برقی دباو پیدا کرنے والے چارج کی نشاندہی کرتا ہے۔یوں

$$Q_2V_{2,1} = \text{چارج } Q_2 \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی}$$

---

[22] kinetic energy

لکھا جائے گا۔اب خلاء میں دو عدد چارج پائے جاتے ہیں لہٰذا نقطہ N_3 پر Q_1 سے پیدا $V_{3,1}$ اور Q_2 سے پیدا $V_{3,2}$ برقی دباو ہوں گے۔یوں N_3 پر کل $V_{3,1}+V_{3,2}$ برقی دباو ہو گا لہٰذا

$$\text{چارج } Q_3 \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی} = Q_3V_{3,1}+Q_3V_{3,2}$$

اور اسی طرح

$$\text{چارج } Q_4 \text{ منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی} = Q_4V_{4,1}+Q_4V_{4,2}+Q_4V_{4,3}$$

ہو گا۔یہی طریقہ کار مزید چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی دریافت کرنے کے لئے استعمال کیا جائے گا۔کل مخفی توانائی W تمام چارجوں کو منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے برابر ہو گا جو مندرجہ بالا طرز کے تمام جوابات کا مجموعہ ہو گا یعنی

$$\begin{aligned} W &= Q_2V_{2,1}+Q_3V_{3,1}+Q_3V_{3,2}+Q_4V_{4,1}+Q_4V_{4,2}+Q_4V_{4,3}+\cdots \\ &= Q_2(V_{2,1})+Q_3(V_{3,1}+V_{3,2})+Q_4(V_{4,1}+V_{4,2}+V_{4,3})+\cdots \end{aligned} \tag{4.78}$$

مندرجہ بالا مساوات میں کسی رکن مثلاً $Q_4V_{4,2}$ کو دیکھیں۔ اسے یوں

$$Q_4V_{4,2} = Q_4\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{42}} = Q_2\frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 R_{24}} = Q_2V_{2,4}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں Q_2 اور Q_4 کے درمیان مقداری فاصلے کو R_{42} یا R_{24} لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح $Q_4V_{4,2}$ کو $Q_2V_{2,4}$ لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح مساوات 4.78 کے ہر جزو کو تبدیل کرتے ہوئے اسے

$$\begin{aligned} W &= Q_1V_{1,2}+Q_1V_{1,3}+Q_2V_{2,3}+Q_1V_{1,4}+Q_2V_{2,4}+Q_3V_{3,4}+\cdots \\ &= Q_1(V_{1,2}+V_{1,3}+V_{1,4}+\cdots)+Q_2(V_{2,3}+V_{2,4}+\cdots)+Q_3(V_{3,4}+\cdots) \end{aligned} \tag{4.79}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 4.78 اور مساوات 4.79 کو جمع کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} 2W = \quad & Q_1(V_{1,2}+V_{1,3}+V_{1,4}+\cdots) \\ & +Q_2(V_{2,1}+V_{2,3}+V_{2,4}+\cdots) \\ & +Q_3(V_{3,1}+V_{3,2}+V_{3,4}+\cdots) \\ & +\cdots \end{aligned} \tag{4.80}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے پہلے قوسین میں $V_{1,2}$ نقطہ N_1 پر Q_2 کا پیدا کردہ برقی دباو ہے۔اسی طرح $V_{1,3}$ نقطہ N_1 پر Q_3 کا پیدا کردہ برقی دباو ہے جبکہ $V_{1,4}$ یہیں پر Q_4 کا پیدا کردہ برقی دباو ہے۔یوں قوسین میں بند قیمت نقطہ N_1 پر تمام چارجوں کا مجموعی برقی دباو V_1 ہے۔یاد رہے کہ N_1 پر برقی دباو حاصل کرتے وقت یہیں پر پائے جاتے چارج Q_1 کو شامل نہیں کیا جاتا۔یوں

$$V_1 = V_{1,2}+V_{1,3}+V_{1,4}+\cdots$$

کے برابر ہے۔اس طرح مندرجہ بالا مساوات سے

$$W = \frac{1}{2}(Q_1V_1+Q_2V_2+Q_3V_3+\cdots) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} Q_mV_m \tag{4.81}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{1,2}+V_{1,3}+V_{1,4}+\cdots \\ V_2 &= V_{2,1}+V_{2,3}+V_{2,4}+\cdots \\ V_3 &= V_{3,1}+V_{3,2}+V_{3,4}+\cdots \end{aligned}$$

لکھے گئے ہیں۔

ایسی حجم جس میں حجمی چارج کثافت ρ_h پائی جائے کی کل مخفی توانائی حاصل کرنے کی غرض سے چھوٹے چھوٹے حجم $\mathrm{d}h$ میں چارج $\mathrm{d}Q = \rho_h \,\mathrm{d}h$ کو نقطہ چارج تصور کرتے ہوئے مساوات 4.81 کا استعمال کیا جا سکتا ہے۔ایسی صورت میں یہ مساوات تکمل کی شکل اختیار کر لے گی یعنی

$$W = \frac{1}{2}\int_h \rho_h V \,\mathrm{d}h \tag{4.82}$$

جہاں تکمل پورے حجم h کے لئے حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 4.7 میں کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل مساوات کا ثبوت دکھایا گیا ہے۔

$$\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V) \tag{4.83}$$

مساوات 4.83 اور صفحہ 80 پر مساوات 3.33 کے استعمال سے مساوات 4.82 کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{D}) V \,\mathrm{d}h \\ &= \frac{1}{2}\int_h [\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) - \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V)] \,\mathrm{d}h \end{aligned} \tag{4.84}$$

اس مساوات میں تکمل کے دو اجزاء ہیں۔پہلے جزو کو مسئلہ پھیلاو، جسے صفحہ 85 پر مساوات 3.43 دیتا ہے، کی مدد سے بند سطحی تکمل کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{1}{2}\int_h \nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) \,\mathrm{d}h = \frac{1}{2}\oint_S (V\boldsymbol{D}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{4.85}$$

یہاں بائیں جانب حجم h جبکہ دائیں جانب اس حجم کی سطح S پر تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔h اس حجم کو ظاہر کرتا ہے جس میں مساوات 4.82 کے تمام چارج پائے جاتے ہیں۔مساوات 4.82 میں حجم کے ایسے حصے بھی ہوں گے جہاں چارج کثافت ρ_h کی قیمت صفر ہو گی۔ایسے حصوں کا تکمل $\rho_h = 0$ کی بنا پر صفر کے برابر ہو گا۔یوں اگر حجم کو لامحدود کر دیا جائے تب بھی تکمل کی قیمت وہی رہے گی چونکہ ایسی اضافی حجم میں $\rho_h = 0$ ہو گا۔مساوات 4.85 میں یوں حجم کو لامحدود لیا جا سکتا ہے۔لامحدود حجم کو گھیرتی سطح کو کرہ شکل کا تصور کرتے ہوئے ایسی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہو گی جہاں $r \to \infty$ ہو گا۔لامحدود رداس کی سطح سے دیکھتے ہوئے کسی بھی شکل کا چارج کثافت نقطہ مانند چارج Q نظر آئے گا جو سطح پر $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ میدان اور $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ برقی دباو پیدا کرے گا۔ یوں مساوات 4.85 کے دائیں جانب بند تکمل رداس کے ساتھ $\frac{1}{r}$ کا تعلق رکھتا ہے اور $r \to \infty$ کی صورت میں ایسا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔یوں مساوات 4.84 کو

$$W = -\frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V) \,\mathrm{d}h$$

یا

$$W = \frac{1}{2}\int_h \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \,\mathrm{d}h = \frac{\epsilon_0}{2}\int_h E^2 \,\mathrm{d}h \tag{4.86}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 4.46 اور صفحہ 68 پر مساوات 3.3 کی مدد لی گئی ہے۔

مثال 4.7: مساوات 4.83

$$\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V)$$

کو ثابت کریں۔

حل:مساوات 4.83 کا بائیں بازو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) &= \nabla \cdot (V[D_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + D_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + D_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}]) \\
&= \nabla \cdot (VD_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + VD_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + VD_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \\
&= \frac{\partial (VD_x)}{\partial x} + \frac{\partial (VD_y)}{\partial y} + \frac{\partial (VD_z)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial V}{\partial x} D_x + V \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} D_y + V \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} D_z + V \frac{\partial D_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

ایک جیسے اجزاء کو اکٹھے کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} D_x + \frac{\partial V}{\partial y} D_y + \frac{\partial V}{\partial z} D_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب مساوات 4.83 کا دایاں بازو حل کرتے ہیں جہاں

$$V \nabla \cdot \boldsymbol{D} = V \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right)$$

اور

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D} \cdot \nabla V &= (D_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + D_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + D_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial V}{\partial y} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial V}{\partial z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \right) \\
&= D_x \frac{\partial V}{\partial x} + D_y \frac{\partial V}{\partial y} + D_z \frac{\partial V}{\partial z}
\end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔انہیں جمع کرتے ہوئے مساوات 4.83 کا بایاں بازو ہی ملتا ہے۔یاد رہے کہ $D_x \frac{\partial V}{\partial x}$ کو $\frac{\partial V}{\partial x} D_x$ لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 4.8: صفحہ 55 پر مساوات 2.44 دو لامحدود چادروں کے درمیان برقی میدان دیتا ہے جہاں ایک چادر پر $+\rho_S$ اور دوسری چادر پر $-\rho_S$ سطحی کثافت چارج پایا جاتا ہے۔اگر ان چادروں کے مابین فاصلہ a ہو تب چادروں پر آمنے سامنے S سطح لیتے ہوئے حجم aS میں کل مخفی توانائی حاصل کریں۔

حل:چادروں کے مابین $E = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}$ ہے جو اٹل مقدار ہے لہٰذا اسے مساوات 4.86 میں تکمل سے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔یوں

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\rho_S^2}{\epsilon_0^2}\int_h \mathrm{d}h = \frac{\rho_S^2 Sa}{2\epsilon_0} \tag{4.87}$$

حاصل ہوتا ہے۔آئیں اسی نتیجے کو مساوات 4.82 کی مدد سے حاصل کریں۔منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر $Ea = \frac{\rho_S a}{\epsilon_0}$ برقی دباو ہو گا۔منفی چادر پر برقی دباو چونکہ صفر لیا گیا ہے لہٰذا مساوات 4.82 کا تکمل لیتے ہوئے منفی چادر پر تکمل صفر کے برابر ہو گا۔اسی طرح دونوں چادروں کے درمیان چارج نہیں پایا جاتا لہٰذا اس حجم پر بھی تکمل صفر کے برابر ہو گا۔مثبت چادر پر سطحی چارج کثافت کو حجمی چارج کثافت میں یوں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔الٹ قطب کے چارجوں کے مابین قوت کشش پایا جاتا ہے لہٰذا چادروں پر آپس میں قریبی سطحوں پر چارج پایا جائے گا۔یوں مثبت چادر کے S حصے پر چارج $\rho_S S$ کو t موٹائی اور S رقبے کے حجم پر تقسیم کرتے ہوئے $\frac{\rho_S}{t}$ حجمی چارج کثافت تصور کیا جا سکتا ہے جہاں t نہایت کم موٹائی ہے یعنی $t \to 0$ ہے۔اس چارج کو $(a - t/2)$ تا $(a + t/2)$ خطے میں تصور کرتے ہوئے یوں

$$W = \frac{1}{2}\int_S \int_{a-t/2}^{a+t/2} \frac{\rho_S}{t}\frac{\rho_S a}{\epsilon_0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}S = \frac{\rho_S^2 Sa}{2\epsilon_0} \tag{4.88}$$

ہی دوبارہ حاصل ہوتا ہے۔

اس باب میں ہم مخفی توانائی کی بات کرتے رہے لیکن کہیں پر بھی یہ ذکر نہیں کیا کہ مخفی توانائی آخر کہاں ذخیرہ ہوتی ہے۔اس کا جواب آج تک کوئی نہیں بتلا سکا ہے۔آئیں دیکھیں کہ یہ بتلانا اتنا مشکل کیوں ہے۔

مساوات 4.87 سے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ مخفی توانائی دو چادروں کے درمیان برقی میدان میں ذخیرہ ہے البتہ مساوات 4.88 کے حصول کو دیکھتے ہوئے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ منفی چادر اور چادروں کے درمیان صفر توانائی پائی جاتی ہے جبکہ تمام کی تمام مخفی توانائی مثبت چادر پر ہے۔اسی طرح اگر ہم مثبت چادر کو برقی زمین تصور کرتے تب منفی چادر پر برقی دباو $-Ea$ ہوتا اور مخفی توانائی منفی چادر میں نظر آتی۔ہم دو چادروں کے بالکل درمیانی نقطے کو برقی زمین لے سکتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے مثبت چادر پر $\frac{Ea}{2}$ اور منفی چادر پر $\frac{-Ea}{2}$ برقی دباو حاصل ہوتی ہے اور مخفی توانائی برابر دونوں چادروں میں نظر آئے گی۔برقی زمین کو دو چادروں کے درمیان کسی بھی نقطے پر رکھا جا سکتا ہے اور ایسا کرنے سے مثبت اور منفی چادروں میں مخفی توانائی کی تقسیم کے جوابات تبدیل ہوتے رہیں گے۔اگرچہ ان تمام طریقوں سے کُل مخفی توانائی کی صحیح قیمت حاصل ہوتی ہے لیکن ان سے کسی صورت یہ معلوم نہیں کیا جا سکتا ہے کہ مخفی توانائی ذخیرہ کہاں ہوتی ہے۔ اس حقیقت کے ساتھ ہی زندگی بسر کرنا سیکھ لیں۔

سوالات

سوال 4.1: برقی میدان $\boldsymbol{E} = (y+z)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + (x+z)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (x+y)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ میں $-0.1\,\mathrm{C}$ کے چارج کو نقطہ $(1,0,2)$ سے نقطہ $(0,0,2)$ اور یہاں سے نقطہ $(0,1,2)$ لایا جاتا ہے۔دونوں راستوں کا علیحدہ علیحدہ اور کُل درکار توانائی حاصل کریں۔

جوابات: $0.2\,\mathrm{J}$، $-0.2\,\mathrm{J}$ اور $0\,\mathrm{J}$

سوال 4.2: مثال 4.8 کے طرز پر L لمبائی ہم محوری تار میں مخففی توانائی حاصل کریں۔اندرونی تار کا رداس a جبکہ بیرونی تار کا رداس b ہے۔

جواب: $W = \frac{\pi L a^2 \rho_S^2}{\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$

باب 5

موصل، ذو برق اور کپیسٹر

اس باب میں ہم برقی رو اور کثافت برقی رو سے شروع ہو کر بنیادی استمراری مساوات[1] حاصل کریں گے۔اس کے بعد اوہم کے قانون کی نقطہ شکل اور اس کی بڑی شکل حاصل کریں گے۔دو اجسام کے سرحد پر سرحدی شرائط[2] حاصل کرتے ہوئے عکس[3] کے طریقے کا استعمال دیکھیں گے۔

ذو برق[4] کی تقطیب[5] پر غور کرتے ہوئے جزو برقی مستقل حاصل کریں گے۔اس کے بعد کپیسٹر پر غور کیا جائے گا۔سادہ شکل و صورت رکھنے والے کپیسٹر کی قیمتیں حاصل کی جائیں گیں۔ایسا گزشتہ بابوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے کیا جائے گا۔

5.1 برقی رو اور کثافت برقی رو

جیسے پانی کے حرکت کو پانی کا بہاو کہتے ہیں، اسی طرح برقی چارج کے حرکت کو برقی رو کہتے ہیں۔برقی رو کو i اور I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔برقی رو کی اکائی ایمپیئر (A) ہے۔کسی نقطے یا سطح سے ایک کولمب چارج فی سیکنڈ کے گزر کو ایک ایمپیئر کہتے ہیں۔یوں

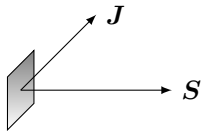
$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.1}$$

لکھا جائے گا۔

ایسی موصل تار جس کی ایک سرے سے دوسری سرے تک موٹائی مسلسل کم ہوتی ہو کے بالکل محور پر برقی چارج محوری سمت میں حرکت کرے گا جبکہ محور سے دور چارج کی حرکت تار کی موٹائی کم یا زیادہ ہونے کی وجہ سے قدرِ ترچھی ہو گی۔یوں اگرچہ تار میں ہر مقام پر برقی رو کی مقدار برابر ہے لیکن برقی رو کی سمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔اسی بنا پر ہم برقی رو کو مقداری تصور کریں گے۔اگر تار کی موٹائی انتہائی کم ہو تب برقی رو سمتیہ مانند ہو گا لیکن ایسی صورت میں بھی ہم اسے مقداری ہی تصور کرتے ہوئے تار کی لمبائی کو سمتیہ لیں گے۔

---

[1] continuity equation
[2] boundary conditions
[3] images
[4] dielectric
[5] polarization



شکل 5.1: سطح سے گزرتی برقی رو۔

کثافت برقی رو[6] سے مراد برقی رو فی اکائی مربع سطح $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right)$ ہے اور اسے J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اگر چھوٹی سطح ΔS سے عمودی سمت میں ΔI برقی رو گزرے تب

$$\Delta I = J_n \Delta S \tag{5.2}$$

کے برابر ہو گا۔اگر کثافت برقی رو اور سمتی رقبہ کی سمتیں مختلف ہوں تب

$$\Delta I = \boldsymbol{J} \cdot \Delta S \tag{5.3}$$

لکھا جائے گا اور پوری سطح سے کُل گزرتی برقی رو تکمل کے ذریعہ حاصل کی جائے گی۔

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.4}$$

مثال 5.1: شکل 5.1 میں سیدھی سطح $\boldsymbol{S} = 2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ دکھائی گئی ہے جہاں کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + 1\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ پائی جاتی ہے۔سطح سے گزرتی برقی رو اور اس کی سمت دریافت کریں۔اگر سطح کی دوسری سمت کو سطح کی سمت لی جائے تب برقی رو کی مقدار اور اس کی سمت کیا ہوں گے۔

حل:چونکہ یہاں $\boldsymbol{J}$ مستقل مقدار ہے لہٰذا اسے مساوات 5.4 میں تکمل کے باہر لایا جا سکتا ہے اور یوں اس تکمل سے

$$I = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{S} = 2\,\mathrm{A}$$

حاصل ہوتا ہے۔برقی رو چونکہ مثبت ہے لہٰذا یہ سطح کی سمت میں ہی سطح سے گزر رہی ہے۔

اگر سطح کی دوسری طرف کو سطح کی سمت لی جائے تب $\boldsymbol{S} = -2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ لکھا جائے گا اور یوں

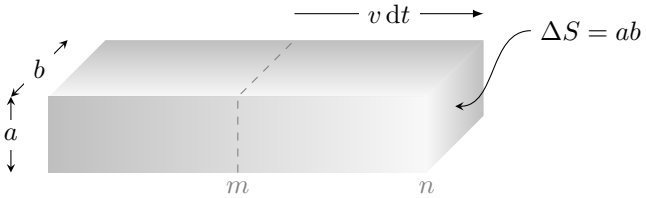
$$I = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{S} = -2\,\mathrm{A}$$

حاصل ہو گا۔برقی رو کی مقدار اب بھی دو ایمپیئر ہی ہے البتہ اس کی علامت منفی ہے جس کا مطلب یہ ہے کہ برقی رو سطح کے سمت کی الٹی سمت میں ہے۔یوں اب بھی برقی رو بائیں سے دائیں ہی گزر رہی ہے۔

اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{S}$ کی سمت میں برقی رو کو مثبت برقی رو کہا جاتا ہے۔

شکل 5.2 میں a اور b اطراف کی تار میں لمبائی کی سمت میں v رفتار سے چارج حرکت کر رہا ہے۔شکل میں اس تار کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔یوں $\mathrm{d}t$ دورانیہ میں چارج $v\,\mathrm{d}t$ فاصلہ طے کرے گا۔اس طرح اس دورانیہ میں m پر لگائی گئی نقطہ دار لکیر n

[6] current density



شکل 5.2: حرکت کرتے چارج کی رفتار اور کثافت برقی رو۔

پہنچ جائے گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیہ میں m اور n کے درمیان موجود چارج سطح ΔS سے گزر جائے گا۔m سے n تک حجم $abv\,\mathrm{d}t$ کے برابر ہے۔اگر تار میں چارج کی حجمی کثافت ρ_h ہو تب اس حجم میں کُل چارج $\rho_h abv\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔یوں برقی رو

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_h abv\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \rho_h \Delta S v$$

لکھتے ہوئے کثافت برقی رو

$$J = \frac{I}{\Delta S} = \rho_h v$$

حاصل ہوتی ہے جس کی سمتی شکل

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{5.5}$$

ہے۔اس مساوات میں $\boldsymbol{J}$ کثافت اتصالی رو[7] کو ظاہر کرتی ہے۔

یہ مساوات کہتا ہے کہ حجمی چارج کثافت بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔اسی طرح چارج کی رفتار بڑھانے سے کثافت برقی رو اسی نسبت سے بڑھتی ہے۔یہ ایک عمومی نتیجہ ہے۔یوں سڑک پر زیادہ لوگ گزارنے کا ایک طریقہ انہیں تیز چلنے پر مجبور کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔دوسرا طریقہ یہ ہے کہ انہیں قریب قریب کر دیا جائے۔

5.2 استمراری مساوات

قانون بقائے چارج کہتا ہے کہ چارج کو نہ تو پیدا اور نا ہی اسے ختم کیا جا سکتا ہے، اگرچہ برابر مقدار میں مثبت اور منفی چارج کو ملا کی انہیں ختم کیا جا سکتا ہے اور اسی طرح برابر مقدار میں انہیں پیدا بھی کیا جا سکتا ہے۔

یوں اگر ڈبے میں ایک جانب $5\,\mathrm{C}$ اور دوسری جانب $-3\,\mathrm{C}$ چارج موجود ہو تو اس ڈبے میں کُل $2\,\mathrm{C}$ چارج ہے۔اگر ہم $3\,\mathrm{C}$ کو $-3\,\mathrm{C}$ کے ساتھ ملا کر ختم کر دیں تب بھی ڈبے میں کُل $2\,\mathrm{C}$ ہی چارج رہے گا۔

مثال 5.2: ایک ڈبہ جس کا حجم $5\,\mathrm{m}^3$ ہے میں حجمی کثافت چارج $3\,\mathrm{C/m}^3$ ہے۔اس ڈبے سے چارج کی نکاسی ہو رہی ہے۔دو سیکنڈ میں حجمی کثافت چارج $1\,\mathrm{C/m}^3$ رہ جاتی ہے۔ان دو سیکنڈوں میں ڈبے سے خارج برقی رو کا تخمینہ لگائیں۔

[7] convection current density

حل:شروع میں ڈبے میں $Q_1 = 3 \times 5 = 15\,\mathrm{C}$ چارج ہے جبکہ دو سیکنڈ بعد اس میں $Q_1 = 1 \times 5 = 5\,\mathrm{C}$ رہ جاتا ہے۔یوں دو سیکنڈ میں ڈبے سے $10\,\mathrm{C}$ چارج خارج ہوتا ہے۔اس طرح ڈبے سے خارج برقی رو $\frac{10}{2} = 5\,\mathrm{A}$ ہے۔اسی کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{(5-15)}{2} = 5\,\mathrm{A}$$

اس مثال میں آپ نے دیکھا کہ ڈبے میں ΔQ منفی ہونے کی صورت میں خارجی برقی رو کی قیمت مثبت ہوتی ہے۔آئیں اس حقیقت کو بہتر شکل دیں۔

حجم کو مکمل طور پر گھیرتی سطح کو بند سطح کہتے ہیں۔کسی بھی مقام پر ایسی سطح کی سمت سطح کے عمودی باہر کو ہوتی ہے۔مساوات 5.4 کے تحت برقی رو کو کثافت برقی رو کے سطحی تکمل سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں

$$I = \oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.6}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں حجم کی سطح بند سطح ہونے کی بنا پر بند تکمل کی علامت استعمال کی گئی ہے اور Q حجم میں کل چارج ہے۔

مساوات 5.6 استمراری مساوات[8] کی تکمل شکل ہے۔آئیں اب اس کی نقطہ شکل حاصل کریں۔

مسئلہ پھیلاو کو صفحہ 85 پر مساوات 3.43 میں بیان کیا گیا ہے۔مسئلہ پھیلاو کسی بھی سمتی تفاعل کے لئے درست ہے لہٰذا اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.6 میں بند سطحی تکمل کو حجمی تکمل میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}h$$

اگر حجم میں حجمی کثافت چارج ρ_h ہو تب اس میں کل چارج

$$Q = \int_h \rho_h\,\mathrm{d}h$$

ہو گا۔ان دو نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}h = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_h \rho_h\,\mathrm{d}h$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ دو متغیرات پر لاگو ہو گا۔یہ متغیرات تکمل کے اندر حجمی چارج کثافت ρ_h اور حجم h ہے۔

آپ جانتے ہیں کہ دو متغیرات کے تفرق کو جزوی تفرق کی شکل میں

$$\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t}v + u\frac{\partial v}{\partial t}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں v کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial u}{\partial t}$ اور u کو مستقل رکھتے ہوئے $\frac{\partial v}{\partial t}$ حاصل کیا جاتا ہے۔

---

[8] continuity equation

اگر ہم یہ شرط لاگو کریں کہ حجم کی سطح تبدیل نہیں ہو گی تب حجم بھی تبدیل نہیں ہو گا اور یوں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ کو جزوی تفرق میں تبدیل کرتے ہوئے تکمل کے اندر لکھتے ہوئے

$$\int_h (\nabla \cdot \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}h = \int_h -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}\,\mathrm{d}h$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ مساوات ہر ممکنہ حجم کے لئے درست ہے لہٰذا یہ نہایت چھوٹی حجم کے لئے بھی درست ہے۔نہایت چھوٹی حجم $\mathrm{d}h$ کے لئے تکمل

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}h = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}\,\mathrm{d}h$$

ہی ہے جس سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t} \tag{5.7}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 5.7 استمراری مساوات کی نقطہ شکل ہے۔

پھیلاو کی تعریف کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.7 کہتا ہے کہ ہر نقطے پر چھوٹی سی حجم سے فی سیکنڈ چارج کا اخراج، یعنی برقی رو، فی اکائی حجم مساوی ہے چارج کے گھٹاو فی سیکنڈ فی اکائی حجم۔

5.3 موصل

غیر چارج شدہ موصل میں منفی الیکٹران اور مثبت ساکن ایٹموں کی تعداد برابر ہوتی ہے البتہ اس میں برقی رو آزاد الیکٹران کے حرکت سے پیدا ہوتا ہے۔موصل میں الیکٹران آزادی سے بے ترتیب حرکت کرتا رہتا ہے۔یہ حرکت کرتا ہوا لمحہ بہ لمحہ ساکن ایٹم سے ٹکراتا ہے اور ہر ٹکر سے اس کے حرکت کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔یوں ایسے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر کے برابر ہوتی ہے۔آئیں دیکھیں کہ برقی میدان کے موجودگی میں کیا ہوتا ہے۔

برقی میدان $\boldsymbol{E}$ میں الیکٹران پر قوت

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E} \tag{5.8}$$

عمل کرے گی جہاں الیکٹران کا چارج $-e$ ہے۔ الیکٹران کی رفتار اس قوت کی وجہ سے اسراع کے ساتھ قوت کی سمت میں بڑھنے شروع ہو جائے گی۔یوں بلا ترتیب رفتار کے ساتھ ساتھ قوت کے سمت میں الیکٹران رفتار پکڑے گا۔موصل میں پائے جانے والا الیکٹران جلد کسی ایٹم سے ٹکرا جاتا ہے اور یوں اس کی سمت تبدیل ہو جاتی ہے۔جس لمحہ الیکٹران کسی ایٹم سے ٹکراتا ہے اگر لاگو میدان کو صفر کر دیا جائے تو الیکٹران دوبارہ بلا ترتیب حرکت کرتا رہے گا اور اس کی اوسط رفتار دوبارہ صفر ہی ہو گی، البتہ اس کی رفتار اب پہلے سے زیادہ ہو گی۔اگر الیکٹران ایٹم سے نہ ٹکراتا تب برقی میدان صفر کرنے کے بعد یہ برقرار قوت کی سمت میں حاصل کردہ رفتار سے حرکت کرتا رہتا۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہر ٹکر سے الیکٹران کی اوسط رفتار صفر ہو جاتی ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{E}$ کے موجودگی میں موصل میں الیکٹران کی رفتار مسلسل نہیں بڑھتی بلکہ یہ قوت کی سمت میں اوسط رفتار $\boldsymbol{v}_d$ حاصل کرتا ہے اور جیسے ہی میدان صفر کر دیا جائے الیکٹران کی اوسط رفتار بھی صفر ہو جاتی ہے۔$\boldsymbol{v}_d$ کو رفتار بہاو[9] کہتے ہیں۔رفتار بہاو کا دارومدار $\boldsymbol{E}$ کی قیمت پر ہے لہٰذا ہم

$$\boldsymbol{v}_d = -\mu_e \boldsymbol{E} \tag{5.9}$$

[9] drift velocity

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات کے مستقل μ_e کو الیکٹران کی حرکت پذیری[10] کہتے ہیں۔حرکت پذیری کی مقدار مثبت ہے ۔چونکہ v_d کو میٹر فی سیکنڈ اور $\boldsymbol{E}$ کو وولٹ فی میٹر میں ناپا جاتا ہے لہٰذا حرکت پذیری کو $\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{V\,s}}$ میں ناپا جائے گا۔

مساوات 5.9 کو صفحہ 119 پر دئے مساوات 5.5 میں پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{J} = -\rho_e \mu_e \boldsymbol{E} \tag{5.10}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موصل میں آزاد الیکٹران کی حجمی چارج کثافت کو ρ_e لکھا گیا ہے۔ρ_e منفی مقدار ہے۔یاد رہے کہ غیر چارج شدہ موصل میں حجمی کثافت چارج صفر کے برابر ہے چونکہ اس میں منفی الیکٹران اور مثبت ایٹم کے چارج برابر ہوتے ہیں۔اس مساوات کو عموماً

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{5.11}$$

لکھا جاتا ہے جو اوہم کے قانون کی نقطہ شکل ہے اور جہاں

$$\sigma = -\rho_e \mu_e \tag{5.12}$$

لکھا گیا ہے۔مساوات 5.11 میں $\boldsymbol{J}$ کو کثافت ایصالی برقی رو یا [11] ہے جبکہ σ کو موصلیت کا مستقل[12] کہتے ہیں اور اس کی اکائی[13] سیمنز فی میٹر $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے۔سیمنز کو بڑے S سے جبکہ سیکنڈ کو چھوٹے s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ آپ ان میں غلطی نہیں کریں گے۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 471 پر جدول 16.1 میں کئی موصل اور غیر موصل اشیاء کی موصلیت پیش کی گئی ہیں۔

مثال 5.3: تانبے[14] کی موصلیت کے مستقل کی قیمت $5.8 \times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے جبکہ اس کی کمیتی کثافت $8940\,\mathrm{kg/m^3}$ اور ایٹمی کمیت $63.5\,\mathrm{g}$ ہیں۔اگر ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہو تب تانبے میں الیکٹران کی حرکت پذیری حاصل کریں۔برقی میدان $E = 0.1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کی صورت میں الیکٹران کا رفتار بہاو حاصل کریں۔

حل:ایٹمی کمیت 6.023×10^{23} یعنی ایک مول[15] ایٹم کی کمیت کو کہتے ہیں۔چونکہ ایک مربع میٹر میں $8940\,\mathrm{kg}$ ہیں لہٰذا ایک مربع میٹر میں

$$\frac{8940 \times 6.023 \times 10^{23}}{0.0635} = 8.48 \times 10^{28}$$

ایٹم پائیں جائیں گے۔ہر ایٹم ایک الیکٹران آزاد کرتا ہے لہٰذا $0.1\,\mathrm{nm}$ اطراف کے مربع میں اوسطاً 0.848 یعنی تقریباً ایک عدد آزاد الیکٹران پایا جائے گا۔ اس طرح ایک مربع میٹر میں کل آزاد الیکٹران چارج یعنی حجمی آزاد چارج کثافت

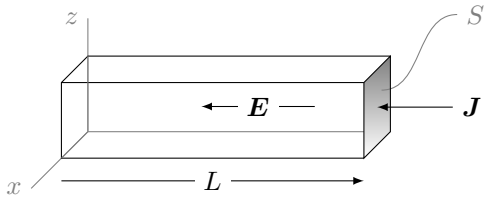
$$\rho_e = -1.6 \times 10^{-19} \times 8.48 \times 10^{28} = -1.36 \times 10^{10}\,\mathrm{C/m^3} \tag{5.13}$$

ہو گی۔ایک مربع میٹر میں یوں انتہائی زیادہ آزاد چارج پایا جاتا ہے۔ اس طرح مساوات 5.12 کی مدد سے

$$\mu_e = -\frac{\sigma}{\rho_e} = \frac{5.8 \times 10^7}{-1.36 \times 10^{10}} = 0.004\,27\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{V\,s}}$$

---

[10] mobility
[11] conduction current density
[12] conductivity
[13] یہ اکائی جرمنی کے جناب ارنسٹ ورنر وان سیمنز (1816–1892) کے نام ہے جنہوں نے موجودہ سیمنز ادارے کی بنیاد رکھی۔
[14] copper
[15] mole



شکل 5.3: اوہم کے قانون کی بڑی شکل۔

حاصل ہوتا ہے جہاں $0.004\,27\,\frac{\mathrm{m^2\,S}}{\mathrm{C}}$ کو $0.004\,27\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{V\,s}}$ لکھا گیا ہے۔آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ یہ برابر مقدار ہیں۔اب مساوات 5.9 استعمال کرتے ہوئے الیکٹران کی رفتار بہاو

$$v_d = -0.00427 \times 0.1 = -0.000\,427\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

حاصل ہوتی ہے۔منفی رفتار کا مطلب ہے کہ الیکٹران $\boldsymbol{E}$ کے الٹ سمت حرکت کر رہا ہے۔اس رفتار[16] سے الیکٹران ایک کلو میٹر کا فاصلہ ستائیس دن و رات چل کر طے کرے گا۔یہاں یہ بتلاتا چلوں کہ عام درجہ حرارت مثلاً 300 K پر تانبے میں حرارتی توانائی سے حرکت کرتے الیکٹران کی رفتار تقریباً $1000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ ہوتی ہے۔

یوں موصل میں آزاد الیکٹرانوں کو نئی جگہ منتقل ہوتے شہد کے مکھیوں کا جھنڈ سمجھا جا سکتا ہے۔ایسے جھنڈ میں کوئی ایک مکھی نہایت تیز رفتار سے آگے پیچھے اڑتی ہے جبکہ پورا جھنڈ نسبتاً آہستہ رفتار سے ایک سمت میں حرکت کرتا ہے۔موصل میں بھی کوئی ایک الیکٹران نہایت تیز رفتار سے ایٹموں سے ٹکراتا ہوا حرارتی توانائی کی وجہ سے نہایت تیزی سے اِدھر اُدھر حرکت کرتا ہے جبکہ بیرونی لاگو میدان کی وجہ سے ایسے تمام الیکٹران نہایت آہستہ رفتار سے میدان کی سمت میں حرکت کرتے ہیں۔

اگر موصل میں آزاد الیکٹران اتنے کم رفتار سے بیرونی لاگو میدان کی سمت میں صفر کرتے ہیں تب بجلی چالو کرتے ہی بلب کس طرح روشن ہوتا ہے۔اس کو سمجھنے کی خاطر برقی تار کو پانی بھرے ایک لمبے پائپ مانند سمجھیں۔ایسے پائپ میں جیسے ہی ایک جانب سے مزید پانی داخل کیا جائے، اسی وقت پائپ کے دوسرے سرے سے برابر پانی خارج ہو گا۔امید ہی سمجھ آ گئی ہو گی۔

مندرجہ بالا مثال میں بتلایا گیا کہ تانبے کا ہر ایٹم ایک عدد الیکٹران آزاد کرتا ہے۔اس حقیقت کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ تانبے کا ایٹمی عدد 29ہے۔ایٹم کے کسی بھی مدار میں $2n^2$ الیکٹران ہو سکتے ہیں جہاں پہلے مدار کے لئے $n = 1$، دوسرے مدار کے لئے $n = 2$ وغیرہ لیا جاتا ہے۔یوں اس کے پہلے مدار میں 2، دوسرے مدار میں 8، تیسرے مدار میں 18 اور آخری مدار[17] میں 1 الیکٹران ہو گا۔ایٹم آخری مدار میں واحد الیکٹران کو آزاد کرتا ہے۔آئیں اب بڑی شکل میں اوہم کا قانون حاصل کریں۔

شکل 5.3 میں موصل سلاخ دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L اور رقبہ عمودی تراش S ہیں۔سلاخ کو $\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ سمت میں لیٹا تصور کریں۔سلاخ میں لمبائی کی سمت میں مستقل اور یکساں برقی میدان $\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ اور کثافت برقی رو $\boldsymbol{J} = -J\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ پائے جاتے ہیں۔یوں اگر سلاخ کا بایاں سرا برقی زمین تصور کیا جائے تب اس کے دائیں سرے پر برقی دباو کو صفحہ 94 پر دئے مساوات 4.11 سے یوں

$$V = -\int_0^L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^L E\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\cdot \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} = \int_0^L E\,\mathrm{d}y = E\int_0^L \mathrm{d}y = EL$$

---

[16] کھودا پہاڑ، نکلا چوہا۔آزاد الیکٹران تو کچھوے سے بھی آہستہ چلتا ہے۔

[17] چوتھے مدار میں 32 الیکٹران ممکن ہیں لیکن تانبے کے ایٹم میں اس مدار کے لئے صرف ایک عدد الیکٹران بچتا ہے۔

حاصل کرتے ہیں۔رقبہ عمودی تراش کو شکل میں گہرے رنگ سے اجاگر کیا گیا ہے۔سمتی رقبہ عمودی تراش بند سطح نہیں ہے لہٰذا اس کے دو ممکنہ رخ ہیں۔سلاخ کے دائیں سرے سے داخل برقی رو حاصل کرنے کی غرض سے رقبہ عمودی تراش کو $\boldsymbol{S} = -S\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ لکھتے ہیں۔یوں دائیں سرے سے داخل برقی رو کی مقدار مثبت ہو گی۔برقی رو

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = JS$$

حاصل ہوتی ہے۔ان معلومات کو شکل 5.11 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V}{L}$$

یا

$$V = I \frac{L}{\sigma S}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$R = \frac{L}{\sigma S} \tag{5.14}$$

کو مزاحمت لکھتے ہوئے

$$V = IR \tag{5.15}$$

حاصل ہوتا ہے جو اوہم کے قانون کی جانی پہچانی شکل ہے۔

مساوات 5.14 یکساں رقبہ عمودی تراش رکھنے والے موصل سلاخ کی مزاحمت[18] دیتا ہے جہاں مزاحمت کی اکائی اوہم[19] ہے جسے Ω سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یکساں رقبہ عمودی تراش کے سلاخ میں برقی میدان یکساں ہوتا ہے۔اگر سلاخ کا رقبہ عمودی تراش یکساں نہ ہو تب اس میں برقی میدان بھی یکساں نہ ہو گا اور ایسی صورت میں مساوات 5.14 استعمال نہیں کیا جا سکتا البتہ ایسی صورت میں بھی مزاحمت کو مساوات 5.15 کی مدد سے برقی دباو فی اکائی برقی رو سے بیان کیا جاتا ہے۔یوں مساوات 4.11 اور مساوات 5.4 استعمال کرتے ہوئے سلاخ کے b سے a سرے تک مزاحمت

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_b^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}} = \frac{-\int_b^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\int_S \sigma \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}} \tag{5.16}$$

سے حاصل ہو گی جہاں برقی رو سلاخ کے مثبت برقی دباو والے سرے سے سلاخ میں داخل ہوتے برقی رو کو کہتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات میں سطحی تکمل سلاخ کے مثبت سرے پر حاصل کیا جائے گا جہاں سطح عمودی تراش کی سمت سلاخ کی جانب لی جائے گی۔

مثال 5.4: تانبے کی ایک کلو میٹر لمبی اور تین ملی میٹر رداس کے تار کی مزاحمت حاصل کریں۔

حل: یہاں $L = 1000\,\mathrm{m}$ جبکہ $S = \pi r^2 = 2.83 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}^2$ اور $\sigma = 5.8 \times 10^7$ ہے لہٰذا

$$R = \frac{1000}{5.8 \times 10^7 \times 2.83 \times 10^{-7}} = 0.61\,\Omega$$

---

[18] resistance
[19] ohm

حاصل ہوتا ہے۔

مشق 5.1: المونیم میں کثافت برقی رو مندرجہ ذیل صورتوں میں حاصل کریں۔(الف) برقی میدان کی شدت $50\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ (ب) آزاد الیکٹران کی رفتار بہاو $0.12\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$ ہے۔ (پ) ایک ملی میٹر موٹی تار جس میں 2 A برقی رو گزر رہی ہے۔

جوابات: $1.91\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$، $3.82\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$ اور $2.55\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$

ہم دیکھ چکے ہیں کہ موصل کے اندر داخل کیا گیا چارج جلد موصل کے سطح پر پہنچ کر سطحی چارج کثافت پیدا کرتا ہے۔یہ جانتے ہوئے کہ حقیقت میں موصل کے اندر چارج کا پیدا ہونا یا وہاں چارج داخل کرنا معمول کی بات ہرگز نہیں، ہم ایسے داخل کئے گئے چارج کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔

اوہم کے قانون

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

اور استمراری مساوات

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

دونوں میں صرف آزاد چارج کی بات کی جاتی ہے۔ان مساوات سے

$$\nabla \cdot \sigma \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

یا

$$\nabla \cdot \frac{\sigma}{\epsilon} \boldsymbol{D} = -\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر موصل میں σ اور ϵ کی قیمتیں اٹل ہوں تب اس مساوات کو

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = -\frac{\epsilon}{\sigma}\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔صفحہ 80 پر مساوات 3.33 جو میکس ویل کی پہلی مساوات ہے کی مدد سے یوں

$$\rho_h = -\frac{\epsilon}{\sigma}\frac{\partial \rho_h}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 5.12 کہتا ہے کہ موصلیت کی قیمت آزاد الیکٹران کی حجمی چارج کثافت ρ_e اور الیکٹران کی حرکت پذیری پر منحصر ہے۔مساوات 5.13 تانبے میں $\rho_e = -1.36 \times 10^{10}\,\mathrm{C/m^3}$ دیتا ہے جو انتہائی بڑی مقدار ہے۔اتنے چارج میں بیرونی داخل چارج نمک برابر بھی حیثیت نہیں رکھتا لہٰذا σ کی قیمت کو اٹل تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں مندرجہ بالا مساوات کو نئی شکل

$$\frac{\partial \rho_h}{\rho_h} = -\frac{\sigma}{\epsilon}\partial t$$

میں لکھتے ہوئے، اس کا تکمل

$$\rho_h = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}$$

حاصل کرتے ہیں جہاں وقت $t = 0$ پر داخل کئے گئے چارج کا حجمی چارج کثافت ρ_0 ہے۔اس مساوات کے تحت حجمی چارج کثافت $\frac{\sigma}{\epsilon}$ وقتی مستقل[20] رکھتا ہے۔تقطیر شدہ پانی کا وقتی مستقل جدول 16.1 اور جدول 16.2 کی مدد سے

$$\frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{80}{36\pi \times 10^9 \times 10^{-4}} = 7.07\,\mu\text{s}$$

حاصل ہوتا ہے۔اگرچہ تقطیر شدہ پانی انتہائی کم موصل ہے لیکن اس میں بھی کثافت چارج صرف سات مائیکرو سیکنڈ میں ابتدائی قیمت کے صرف 37 فی صد رہ جاتا ہے۔یوں کسی بھی موصل کے اندر انتہائی کم دورانیے کے لئے اضافی چارج پایا جا سکتا ہے۔اس لحاقی چارج کثافت کے علاوہ اندرون موصل کو چارج سے پاک تصور کیا جا سکتا ہے۔

ذو برق میں مختلف وجوہات کی بنا پر لگاتار آزاد چارج پیدا ہوتے رہتے ہیں جس کی بنا پر ذو برق صفر سے زیادہ موصلیت رکھتے ہوئے برقی رو گزارتا ہے۔ذو برق کے اندر چارج بھی آخر کار سطح پر پہنچ جاتا ہے۔

5.4 موصل کے خصوصیات اور سرحدی شرائط

غیر چارج شدہ موصل میں کُل آزاد الیکٹران اور مثبت ایٹم برابر تعداد میں پائے جاتے ہیں۔یوں اس میں برقی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔فرض کریں کہ غیر چارج شدہ موصل کے اندر کسی طرح چند الیکٹران نمودار ہو جاتے ہیں۔یہ الیکٹران برقی میدان $\boldsymbol{E}$ پیدا کریں گے جس کی وجہ سے موصل میں آزاد الیکٹران موصل کے سطح کی جانب چل پڑیں گے۔سطح کے باہر غیر موصل خلاء پائی جاتی ہے جس میں الیکٹران حرکت نہیں کر سکتے لہٰذا الیکٹران موصل کے سطح پر پہنچ کر رک جائیں گے۔موصل میں نمودار ہونے والے الیکٹران کے برابر تعداد میں الیکٹران موصل کے سطح پر منتقل ہوں گے جس کے بعد موصل میں دوبارہ منفی الیکٹران اور مثبت ایٹموں کی تعداد برابر ہو جائے گی اور یہ غیر چارج شدہ صورت اختیار کر لے گا۔

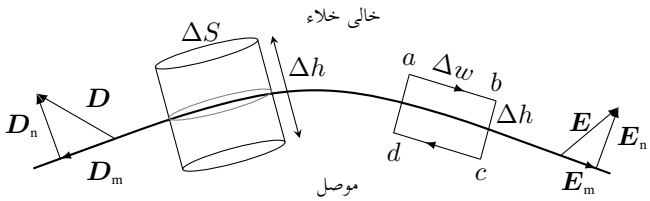
آپ نے دیکھا کہ اضافی چارج موصل میں زیادہ دیر نہیں رہ سکتا اور یہ جلد سطح پر منتقل ہو جاتا ہے۔یوں اضافی چارج موصل کے سطح پر بیرونی جانب چمٹا رہتا ہے۔یہ موصل کی پہلی اہم خاصیت ہے۔

موصل کی دوسری خاصیت برقی سکون[21] کی حالت کے لئے بیان کرتے ہیں۔برقی سکون سے مراد ایسی صورت ہے جب چارج حرکت نہ کر رہا ہو یعنی جب برقی رو صفر کے برابر ہو۔برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر ساکن برقی میدان صفر رہتا ہے۔اگر ایسا نہ ہوتا تو میدان کی وجہ سے اس میں آزاد الیکٹران حرکت کر کے برقی رو کو جنم دیتے جو غیر ساکن حالت ہے۔

یوں برقی سکون کی حالت میں موصل کے اندر اضافی چارج اور برقی میدان دونوں صفر کے برابر ہوتے ہیں البتہ اس کے سطح پر بیرونی جانب چارج پایا جا سکتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ سطح پر پائے جانے والا چارج موصل کے باہر کس قسم کا برقی میدان پیدا کرتا ہے۔

---

[20] time constant
[21] electrostatic



شکل 5.4: موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی شرائط۔

موصل کے سطح پر چارج، موصل کے باہر برقی میدان پیدا کرتا ہے۔سطح پر کسی بھی نقطے پر ایسے میدان کو دو اجزاء کے مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔پہلا جزو سطح کے مماسی اور دوسرا جزو سطح کے عمودی رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مماسی جزو صفر ہو گا۔اگر ایسا نہ ہو تو اس میدان کی وجہ سے سطح پر پائے جانے والے آزاد الیکٹران حرکت میں آئیں گے جو غیر ساکن حالت ہو گی۔یوں ہم

$$E_{\text{مماسی}} = 0 \tag{5.17}$$

لکھ سکتے ہیں۔سطح پر عمودی برقی میدان گاوس کے قانون کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جو کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے کُل برقی بہاو کا اخراج، سطح میں گھیرے چارج کے برابر ہوتا ہے۔چونکہ سطح پر مماسی برقی میدان صفر ہے اور موصل کے اندر بھی برقی میدان صفر ہے لہٰذا سطح پر چارج سے برقی بہاو کا اخراج صرف عمودی سمت میں ہو سکتا ہے۔یوں ΔS سطح سے عمودی اخراج $D\Delta S$ اسی سطح پر چار $\rho_S \Delta S$ کے برابر ہو گا جس سے

$$D_{\text{عمودی}} = \rho_S \tag{5.18}$$

حاصل ہوتا ہے۔آئیں اسی بحث کو بہتر جامہ پہنائیں۔ایسا کرتے ہوئے ہم ایک عمومی ترکیب سیکھ لیں گے جو مختلف اقسام کے اشیاء کے سرحد پر میدان کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے درمیان سرحد موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔اس سرحد پر خلاء میں $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ دکھائے گئے ہیں۔خلاء میں $\boldsymbol{E}$ کو $\boldsymbol{E}_m$ اور $\boldsymbol{E}_n$ کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جو بالترتیب سرحد کے مماسی اور عمودی اجزاء ہیں۔اسی طرح $\boldsymbol{D}$ کو بھی مماسی اور عمودی اجزاء کے مجموعہ کے طور پر دکھایا گیا ہے۔ہم صرف اس حقیقت کو لے کر آگے بڑھتے ہیں کہ موصل کے اندر $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ دونوں صفر کے برابر ہیں۔آئیں اس حقیقت کی بنا پر خلاء میں $\boldsymbol{E}$ کی قیمت حاصل کریں۔ہم $\boldsymbol{E}$ کے مجموعے $\boldsymbol{E}_m$ اور $\boldsymbol{E}_n$ حاصل کریں گے۔پہلے $\boldsymbol{E}_m$ حاصل کرتے ہیں۔

سرحد پر $abcd$ مستطیل بنایا گیا ہے جہاں ab اور cd سرحد کے مماسی جبکہ bc اور da سرحد کے عمودی ہیں۔ab خالی خلاء میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر جبکہ cd موصل میں سرحد سے $\Delta h/2$ فاصلے پر ہیں۔ab اور cd کی لمبائیاں Δw ہیں جبکہ bc اور da کی لمبائیاں Δh ہے۔صفحہ 100 پر دئے مساوات 4.28

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

کو $abcd$ پر لاگو کرتے ہیں۔اس تکمل کو چار ٹکڑوں کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} + \int_b^c \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} + \int_c^d \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} + \int_d^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

اب a سے b تک

$$\int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_m \Delta w$$

حاصل ہوتا ہے۔خلاء میں نقطہ b پر عمودی میدان کو $E_{n,b}$ لکھتے ہوئے b سے c تک

$$\int_b^c \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -E_{n,b}\frac{\Delta h}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ bc کی آدھی لمبائی موصل کے اندر ہے جہاں $\boldsymbol{E}=0$ ہے۔c سے d تک تکمل صفر کے برابر ہے چونکہ یہ راستہ موصل کے اندر ہے جہاں $\boldsymbol{E}=0$ ہے۔

$$\int_c^d \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

خلاء میں نقطہ a پر عمودی میدان کو $E_{n,a}$ لکھتے ہوئے d سے a تک

$$\int_d^a \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_{n,a}\frac{\Delta h}{2}$$

ان چار نتائج سے

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_m\Delta w + \left(E_{n,a}-E_{n,b}\right)\frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔سرحد کے قریب میدان حاصل کرنے کی خاطر ہمیں سرحد کے قریب تر ہونا ہو گا یعنی Δh کو تقریباً صفر کے برابر کرنا ہو گا۔ایسا کرنے سے $(E_{n,a}-E_{n,b})\frac{\Delta h}{2}$ کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ہم Δw کو اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ اس کی پوری لمبائی پر میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ایسا کرتے ہوئے اس مساوات سے

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = E_m\Delta w = 0$$

یعنی

$$E_m = 0 \tag{5.19}$$

حاصل ہوتا ہے۔آئیں اب E_n حاصل کریں۔E_n کی بجائے گاوس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

کی مدد سے D_n کا حصول زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے لہٰذا ہم اسی کو حاصل کرتے ہیں۔

شکل 5.4 میں موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر Δh لمبائی کا بیلن دکھایا گیا ہے۔اس بیلن کے ڈھکنوں کا رقبہ ΔS ہے۔اگر سرحد پر ρ_S پایا جائے تب بیلن $\rho_S\Delta S$ چارج کو گھیرے گا۔گاوس کے قانون کے تحت بیلن سے اسی مقدار کے برابر برقی بہاو کا اخراج ہو گا۔برقی بہاو کا اخراج بیلن کے دونوں سروں اور اس کے نلکی نما سطح سے ممکن ہے۔یوں

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{نچلا ڈھکن}} \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{بالائی ڈھکن}} \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \rho_S\Delta S$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب بیلن کی نچلی سطح موصل کے اندر ہے جہاں میدان صفر کے برابر ہے لہٰذا

$$\int_{\text{نچلا ڈھکن}} \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

ہو گا۔مساوات 5.19 کے تحت سرحد پر خلاء میں مماسی میدان صفر ہوتا ہے۔موصل میں بھی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا

$$\int_{\text{نکلی سطح}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

ہو گا۔بیلن کے بالائی سرے پر

$$\int_{\text{بالائی ڈھکن}} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_n \Delta S$$

ہو گا۔ان تین نتائج کو استعمال کرتے ہوئے

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_n \Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$D_n = \rho_S$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ $D = \epsilon_0 E$ ہوتا ہے لہٰذا یوں

$$D_n = \epsilon_0 E_n = \rho_S \tag{5.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 5.19 اور مساوات 5.20 موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر برقی میدان کے شرائط بیان کرتے ہیں۔موصل اور خلاء کے سرحد پر برقی میدان موصل سے عمودی خارج ہوتا ہے جبکہ اس کے سرحد کے مماسی میدان صفر کے برابر ہوتا ہے۔نتیجتاً موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے۔یوں موصل کی سطح پر دو نقطوں کے مابین کسی بھی راستے پر برقی میدان کا تکمل صفر کے برابر ہو گا یعنی $\int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$ ہو گا۔یاد رہے کہ برقی میدان کا تکمل برقی دباو دیتا ہے جو تکمل کے راستے پر منحصر نہیں ہوتا لہٰذا اس راستے کو موصل کی سطح پر ہی رکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{E}_{\text{مماسی}} = 0$ ہونے کی وجہ سے تکمل صفر کے برابر ہو گا۔

مشق 5.2: نقطہ $N(2,-3,5)$ موصل کی سطح پر پایا جاتا ہے جہاں $\boldsymbol{E} = 210\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} - 350\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 99\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ کے برابر ہے۔اس نقطے پر E_m، E_n اور ρ_S حاصل کریں۔

جوابات:0، $420\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ اور $3.71\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$

5.5 عکس کی ترکیب

جفت قطب کے خطوط صفحہ 110 پر شکل 4.10 میں دکھائے گئے ہیں جہاں دونوں چارجوں سے برابر فاصلے پر لامحدود برقی زمینی سطح دکھائی گئی ہے۔برقی زمین پر انتہائی باریک موٹائی کی لامحدود موصل سطح رکھی جا سکتی ہے۔ایسی موصل سطح پر برقی دباو صفر وولٹ ہو گا اور اس پر میدان عمودی ہو گا۔موصل کے اندر برقی میدان صفر رہتا ہے اور اس سے برقی میدان گزر نہیں پاتا۔

اگر اس موصل سطح کے نیچے سے جفت قطب کا منفی چارج ہٹا دیا جائے تب بھی سطح کے بالائی جانب میدان عمودی ہی ہو گا۔یاد رہے برقی زمین صفر وولٹ پر ہوتی ہے۔موصل سطح سے اوپر میدان جوں کا توں رہے گا جبکہ اس سے نیچے میدان صفر ہو جائے گا۔اسی طرح سطح سے اوپر جفت قطب کا مثبت چارج ہٹانے سے سطح کے نچلے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ سطح سے اوپر میدان صفر ہو جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو دوسری نقطہ نظر سے دیکھیں۔فرض کریں کہ لامحدود موصل سطح یا برقی زمین سے $\frac{d}{2}$ فاصلے پر اوپر مثبت نقطہ چارج $+Q$ پایا جاتا ہے۔چونکہ ایسی صورت میں سطح سے اوپر برقی میدان بالکل جفت قطب کے میدان کی طرح ہو گا لہٰذا ہم $\frac{d}{2}$ فاصلے پر برقی زمین سے نیچے عین مثبت چارج کے نیچے منفی چارج $-Q$ رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹا سکتے ہیں۔اوپر جانب کے میدان پر ان اقدام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔یوں جفت قطب کے تمام مساوات بروئے کار لاتے ہوئے زمین کے اوپر جانب کا میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔یاد رہے کہ سطح کے نیچے برقی زمین کو صفر ہی تصور کیا جائے گا۔اگر برقی زمین کی سطح کو آئینہ تصور کیا جائے تب مثبت چارج کا عکس اس آئینہ میں اسی مقام پر نظر آئے گا جہاں ہم نے تصوراتی منفی چارج رکھا۔یوں اس منفی چارج کو حقیقی چارج کا عکس[22] کہتے ہیں۔

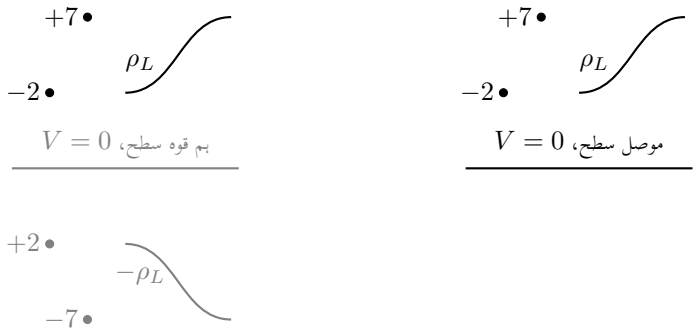
ایسی ہی ترکیب لامحدود زمینی سطح کے ایک جانب منفی چارج سے پیدا میدان حاصل کرنے کی خاطر بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں زمین کی دوسری جانب عین منفی چارج کے سامنے، اتنے ہی فاصلے پر برابر مقدار مگر مثبت چارج رکھتے ہوئے برقی زمین کو ہٹایا جا سکتا ہے۔

کسی بھی چارج کو نقطہ چارجوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔لہٰذا لامحدود برقی زمین یا لامحدود موصل سطح کی ایک جانب کسی بھی شکل کے چارجوں کا میدان، سطح کی دوسری جانب چارجوں کا عکس رکھتے اور زمین کو ہٹاتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔اس ترکیب کو عکس کی ترکیب کہتے ہیں۔یاد رہے کہ کسی بھی لامحدود موصل سطح جس کے ایک جانب چارج پایا جاتا ہو پر سطحی چارج پایا جائے گا۔عموماً مسئلے میں لامحدود سطح اور سطح کے باہر چارج معلوم ہوں گے۔ایسے مسئلے کو حل کرنے کی خاطر سطح پر سطحی چارجوں کا علم بھی ضروری ہوتا ہے۔سطحی چارج دریافت کرنا نسبتاً مشکل کام ہے جس سے چھٹکارا حاصل کرنا عقلمندی ہو گی۔عکس کی ترکیب میں سطحی چارج کا جاننا ضروری نہیں لہٰذا اس ترکیب سے مسئلہ کو حل کرنا عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

شکل 5.5 میں لامحدود موصل سطح سے اوپر مختلف اقسام کے چارج دکھائے گئے ہیں۔اسی شکل میں مسئلے کو عکس کے ترکیب کی نقطہ نظر سے بھی دکھایا گیا ہے۔موصل سطح کے مقام پر دونوں صورتوں میں صفر وولٹ ہی رہتے ہیں۔

---

[22] image



شکل 5.5: عکس کی ترکیب۔

مثال 5.5: لامحدود موصل سطح $z = 3$ کے قریب $N(5,7,8)$ پر $5\,\mu\text{C}$ چارج پایا جاتا ہے۔موصل کی سطح پر نقطہ $M(2,4,3)$ پر $\boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہوئے اسی مقام پر موصل کی سطحی کثافت چارج حاصل کریں۔

حل:$5\,\mu\text{C}$ کا عکس $-5\,\mu\text{C}$ لامحدود سطح کے دوسری جانب نقطہ $P(5,7,-2)$ پر رکھتے ہوئے موصل سطح ہٹاتے ہیں۔اب N سے M تک سمتیہ $\boldsymbol{R}_{MN} = -3\boldsymbol{a}_\text{x} - 3\boldsymbol{a}_\text{y} - 5\boldsymbol{a}_\text{z}$ ہے جبکہ P سے M تک سمتیہ $\boldsymbol{R}_{MP} = -3\boldsymbol{a}_\text{x} - 3\boldsymbol{a}_\text{y} + 5\boldsymbol{a}_\text{z}$ ہے۔یوں $5\,\mu\text{C}$ نقطہ M پر

$$\boldsymbol{E}_+ = \frac{5\times 10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_\text{x} - 3\boldsymbol{a}_\text{y} - 5\boldsymbol{a}_\text{z})}{4\pi\epsilon_0(3^2+3^2+5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5\times 10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_\text{x} - 3\boldsymbol{a}_\text{y} - 5\boldsymbol{a}_\text{z})}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

پیدا کرے گا۔اسی طرح $-5\,\mu\text{C}$ چارج نقطہ M پر

$$\boldsymbol{E}_- = \frac{-5\times 10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_\text{x} - 3\boldsymbol{a}_\text{y} + 5\boldsymbol{a}_\text{z})}{4\pi\epsilon_0(3^2+3^2+5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-5\times 10^{-6}(-3\boldsymbol{a}_\text{x} - 3\boldsymbol{a}_\text{y} + 5\boldsymbol{a}_\text{z})}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کرے گا۔چونکہ برقی میدان خطی نوعیت کا ہوتا ہے لہٰذا کسی بھی نقطے پر مختلف چارجوں کے پیدا کردہ میدان جمع کرتے ہوئے کُل میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں نقطہ M پر کُل میدان

$$\boldsymbol{E}_{\text{کل}} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{-50\times 10^{-6}\boldsymbol{a}_\text{z}}{4\pi\epsilon_0(43)^{\frac{3}{2}}}$$

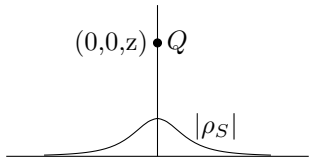
ہو گا۔موصل کی سطح پر میدان عمودی ہوتا ہے۔موجودہ جواب اس حقیقت کی تصدیق کرتا ہے۔یوں موصل کی سطح پر

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} = \frac{-50\times 10^{-6}\boldsymbol{a}_\text{z}}{4\pi(43)^{\frac{3}{2}}} = -14.13\times 10^{-9}\boldsymbol{a}_\text{z}$$

حاصل ہوتا ہے جو سطح میں داخل ہونے کی سمت میں ہے۔یوں مساوات 5.20 کے تحت سطح پر

$$\rho_S = -14.3\frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$$

پایا جاتا ہے۔



شکل 5.6: نقطہ چارج سے لامحدود موصل سطح میں پیدا سطحی کثافت چارج۔

مندرجہ بالا مثال میں اگر $N(5,7,8)$ پر $5\,\mu\text{C}$ پایا جاتا اور لامحدود سطح موجود نہ ہوتا تب $M(2,4,3)$ پر میدان $\boldsymbol{E}_+$ ہوتا۔لامحدود موصل سطح کی موجودگی میں یہ قیمت تبدیل ہو کر مثال میں حاصل کی گئی کل $\boldsymbol{E}$ ہو جاتی ہے۔درحقیقت سطح کے قریب چارج کی وجہ سے سطح پر سطحی چارج کثافت پیدا ہو جاتا ہے۔کسی بھی نقطے پر بیرونی چارج اور سطحی چارج دونوں کے میدان کا مجموعہ حقیقی میدان ہوتا ہے۔

مثال 5.6: لامحدود موصل سطح $z=0$ میں $(0,0,z)$ پر Q نقطہ چارج سے پیدا کثافت سطحی چارج حاصل کریں۔

حل:اس مسئلے کو عکس کے ترکیب سے حل کرنے کی خاطر $(0,0,-z)$ پر $-Q$ چارج رکھتے ہوئے موصل سطح کو ہٹا کر حل کرتے ہیں۔ایسی صورت میں سطح کے مقام پر عمومی نقطہ $(\rho,\phi,0)$ پر Q اور $-Q$ چارج

$$\boldsymbol{E}_+ = \frac{Q(\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_z)}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\boldsymbol{E}_- = \frac{-Q(\rho\boldsymbol{a}_\rho + z\boldsymbol{a}_z)}{4\pi\epsilon_0(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

میدان پیدا کریں گے۔$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}$ استعمال کرتے ہوئے کُل

$$\boldsymbol{D} = \frac{-2Qz\boldsymbol{a}_z}{4\pi(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی سمت $-\boldsymbol{a}_z$ ہے جو موصل میں اوپر سے داخل ہونے کی سمت ہے۔یوں موصل سطح پر

$$\rho_S = \frac{-2Qz}{4\pi(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \tag{5.21}$$

پایا جائے گا۔شکل 5.6 میں چارج Q اور موصل سطح پر ρ_S دکھائے گئے ہیں۔

مساوات 5.21 کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود موصل سطح پر کل چارج حاصل کیا جا سکتا ہے۔یقینی طور پر اس کی مقدار $-Q$ ہی حاصل ہو گی۔

5.6 نیم موصل

نیم موصل اشیاء مثلاً خالص سلیکان اور جرمینیم میں آزاد چارجوں کی تعداد موصل کی نسبت سے کم جبکہ غیر موصل کی نسبت سے زیادہ ہوتی ہے۔یوں ان کی موصلیت موصل اور غیر موصل کے موصلیت کے درمیان میں ہوتی ہے۔نیم موصل کی خاص بات یہ ہے کہ ان میں انتہائی کم مقدار کے ملاوٹ[23] سے ان کی موصلیت پر انتہائی گہرا اثر پڑتا ہے۔نیم موصل دوری جدول[24] کے چوتھے جماعت[25] سے تعلق رکھتے ہیں۔دوری جدول کے پانچویں جماعت کے عناصر مثلاً نائٹروجن اور فاسفورس کا ایٹم ایک عدد الیکٹران عطا کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔یوں انہیں عطا کنندہ [26] عناصر کہتے ہیں۔نیم موصل میں ایسا ہر عطا کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد الیکٹران کو جنم دیتا ہے۔ ایسے عنصر کی نہایت کم مقدار کی ملاوٹ سے نیم موصل میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھ جاتی ہے جس سے ان کی موصلیت بہت بڑھ جاتی ہے۔ایسے نیم موصل جن میں آزاد الیکٹران کی تعداد بڑھا دی گئی ہو کو n نیم موصل کہتے ہیں۔اس کے برعکس تیسرے جماعت کے عناصر مثلاً المونیم کا ایٹم ایک عدد الیکٹران قبول کرنے کا رجحان رکھتا ہے۔یوں المونیم کو قبول کنندہ [27] عنصر کہا جاتا ہے۔ملاوٹی المونیم کا ایٹم نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران حاصل کرتے ہوئے الیکٹران کی جگہ خالی جگہ پیدا کر دیتا ہے جسے خول[28] کہا جاتا ہے۔نیم موصل میں ایسا ہر قبول کنندہ ملاوٹی ایٹم ایک عدد آزاد خول کو جنم دیتا ہے۔ایسا آزاد خول مثبت ذرے کی مانند معلوم ہوتا ہے جس کا چارج e الیکٹران کے چارج $-e$ کے برابر مگر الٹ قطب کا ہوتا ہے اور جس کی کمیت m_h لی جا سکتی ہے۔ اسی طرح آزاد خول کی حرکت پذیری μ_h لکھی جاتی ہے۔بالکل آزاد الیکٹران کی طرح برقی میدان کی موجودگی میں آزاد خول رفتار بہاو $\boldsymbol{v}_d = \mu_h \boldsymbol{E}$ سے حرکت کرتا ہے جو موصلیت $\sigma = \rho_h \mu_h$ کو جنم دیتا ہے۔یاد رہے کہ مثبت خول $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں ہی حرکت کرے گا لہٰذا اس کے رفتار بہاو کی سمت $\boldsymbol{E}$ کی سمت ہی ہو گی۔تیسرے جماعت کے عناصر کی ملاوٹ کردہ نیم موصل کو p نیم موصل کہا جاتا ہے۔ آزاد الیکٹران اور آزاد خول مل کر

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h \tag{5.22}$$

موصلیت پیدا کرتے ہیں جہاں ρ_h آزاد خول کی حجمی چارج کثافت ہے۔خالص نیم موصل میں حرارتی توانائی سے نیم موصل کے ایٹم سے الیکٹران خارج ہو کر آزاد الیکٹران کی حیثیت اختیار کرتا ہے جبکہ ایسے الیکٹران کا خالی کردہ مقام آزاد خول کی حیثیت اختیار کرتا ہے۔یوں خالص نیم موصل میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد برابر ہوتی ہے۔

خالص نیم موصل اوہم کے قانون کی نقطہ شکل پر پورا اترتا ہے۔یوں کسی ایک درجہ حرارت پر نیم موصل کی موصلیت تقریباً اٹل قیمت رکھتی ہے۔

آپ کو یاد ہو گا کہ درجہ حرارت بڑھانے سے موصل میں آزاد الیکٹران کی رفتار بہاو کم ہوتی ہے جس سے موصلیت کم ہو جاتی ہے۔درجہ حرارت کا موصل میں آزاد الیکٹران کے حجمی چارج کثافت پر خاص اثر نہیں ہوتا۔اگرچہ نیم موصل میں بھی درجہ حرارت بڑھانے سے آزاد چارج کی رفتار بہاو کم ہوتی ہے لیکن ساتھ ہی ساتھ آزاد چارج کی مقدار نسبتاً زیادہ مقدار میں بڑھتی ہے جس کی وجہ سے نیم موصل کی موصلیت درجہ حرارت بڑھانے سے بڑھتی ہے۔یہ موصل اور نیم موصل کے خصوصیات میں واضح فرق ہے۔

---

[23] doping
[24] periodic table
[25] group
[26] donor
[27] acceptor
[28] hole

مشق 5.3: 300 K درجہ حرارت پر خالص سلیکان میں آزاد الیکٹران اور آزاد خول کی تعداد 1.5×10^{16} فی مربع میٹر، الیکٹران کی رفتار بہاو $0.12\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vs}}$ جبکہ خول کی رفتار بہاو $0.025\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vs}}$ ہے۔جرمینیم کے لئے یہی قیمتیں بالترتیب 2.4×10^{19} فی مربع میٹر، $0.36\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vs}}$ اور $0.17\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vs}}$ ہیں۔ خالص سلیکان اور خالص جرمینیم کی موصلیت دریافت کریں۔

جوابات: $0.348\ \frac{\mathrm{mS}}{\mathrm{m}}$ اور $2\ \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

5.7 ذو برق

اس باب میں اب تک ہم موصل اور نیم موصل کی بات کر چکے ہیں جن میں آزاد چارج پائے جاتے ہیں۔یوں ایسے اشیاء پر برقی دباو لاگو کرنے سے ان میں برقرار برقی رو پیدا کی جا سکتی ہے۔آئیں ایسی اشیاء کی بات کریں جن میں آزاد چارج نہیں پائے جاتے لہٰذا ان میں برقرار برقی رو پیدا کرنا ممکن نہیں ہوتا۔

بعض اشیاء مثلاً پانی کے مالیکیول میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز پائے جاتے ہیں۔ایسے مالیکیول کو قطبی[29] مالیکیول کہتے ہیں۔قطبی مالیکیول کو جفت قطب تصور کیا جا سکتا ہے۔بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں کسی بھی چیز میں قطبی مالیکیول بلا ترتیب پائے جاتے ہیں۔ بیرونی میدان $\boldsymbol{E}$ لاگو کرنے سے مالیکیول کے مثبت سرے پر میدان کی سمت میں جبکہ منفی سرے پر میدان کی الٹ سمت میں قوت عمل کرتا ہے۔ان قوتوں کی وجہ سے مالیکیول کے مثبت اور منفی مراکز ان قوتوں کی سمتوں میں حرکت کرتے ہوئے گھوم جاتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ مراکز کے درمیان فاصلہ بھی بڑھ جاتا ہے۔ٹھوس قطبی اشیاء میں ایٹموں اور مالیکیول کے درمیان قوتیں ان حرکات کو روکنے کی کوشش کرتی ہیں۔اسی طرح مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش ان کے درمیان فاصلہ بڑھنے کو روکتا ہے۔جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہوں وہاں مثبت اور منفی مراکز رک جاتے ہیں۔بیرونی میدان ان تمام بلا ترتیب جفت قطب کو ایک سمت میں لانے کی کوشش کرتا ہے۔

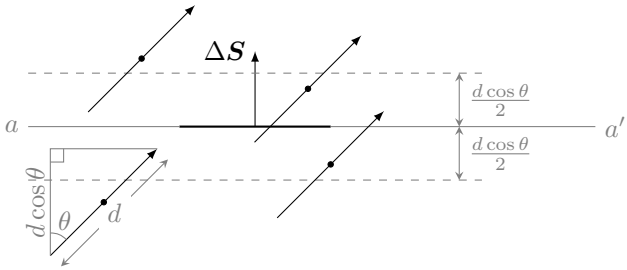
بعض اشیاء میں قدرتی طور پر مثبت اور منفی مراکز نہیں پائے جاتے البتہ انہیں بیرونی میدان میں رکھنے سے ان میں ایسے مراکز پیدا ہو جاتے ہیں۔ایسے اشیاء کو غیر قطبی[30] کہتے ہیں۔ بیرونی میدان مالیکیول کے الیکٹرانوں کو ایک جانب کھینچ کر منفی مرکز جبکہ بقایا ایٹم کو مثبت چھوڑ کر مثبت مرکز پیدا کرتا ہے۔مثبت اور منفی چارج کے مابین قوت کشش اس طرح مراکز پیدا ہونے کے خلاف عمل کرتا ہے۔جہاں یہ مخالف قوتیں برابر ہو جائیں وہیں پر چارج کے حرکت کا سلسلہ رک جاتا ہے۔یہ اشیاء قدرتی طور پر غیر قطبی ہیں البتہ انہیں بیرونی میدان قطبی بنا دیتا ہے۔پیدا کردہ جفت قطب بیرونی میدان کی سمت میں ہی ہوں گے۔

ایسے تمام اشیاء جو یا تو پہلے سے قطبی ہوں اور یا انہیں بیرونی میدان کی مدد سے قطبی بنایا جا سکے ذو برقی[31] کہلاتے ہیں۔

ذو برق میں بیرونی میدان سے مالیکیول کے اندر حرکت پیدا ہوتی ہے البتہ مالیکیول ازخود اسی جگہ رہتا ہے۔ایسا چارج جو بیرونی میدان کی وجہ سے اپنی جگہ پر معمولی حرکت کرتا ہو کو مقید چارج[32] کہتے ہیں۔ اس کے برعکس آزاد چارج بیرونی میدان میں مسلسل حرکت کرتا ہے۔

---

[29] polar
[30] non polar
[31] dielectric
[32] bound charge



شکل 5.7: بیرونی میدان کی موجودگی میں مقید چارج کی حرکت۔

ذو برق کے جفت قطب کا معیار اثر کو صفحہ 108 میں دئے مساوات 4.68

$$\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d} \tag{5.23}$$

سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں Q ذو برق کے جفت قطب میں مثبت مرکز کا چارج ہے۔

اگر اکائی حجم میں n جفت قطب پائے جائیں تب Δv حجم میں $n\Delta v$ جفت قطب ہوں گے جن کا اجتماعی معیار اثر جفت قطب تمام کے سمتی مجموعے

$$\boldsymbol{p}_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \boldsymbol{p}_i \tag{5.24}$$

کے برابر ہو گا جہاں انفرادی $\boldsymbol{p}$ مختلف ہو سکتے ہیں۔تقطیب[33] سے مراد اکائی حجم میں کل معیار اثر جفت قطب ہے یعنی

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \boldsymbol{p}_i \tag{5.25}$$

جس کی اکائی کولمب فی مربع میٹر ہے۔Δv کو کم سے کم[34] کرتے ہوئے نقطے پر تقطیب حاصل کی گئی ہے۔حقیقت میں Δv کو اتنا رکھا جاتا ہے کہ اس میں جفت قطب کی تعداد $(n\Delta v)$ اتنی ہو کہ انفرادی جفت قطب کے اثر کو نظر انداز کرنا ممکن ہو۔یوں تقطیب کو یکساں تفاعل تصور کیا جاتا ہے۔

آئیں ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔

شکل 5.7 کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔ تصور کریں کہ ذو برق میں غیر قطبی مالیکیول پائے جاتے ہیں جن کا مقام بیرونی میدان کی غیر موجودگی میں دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں $\boldsymbol{P} = 0$ ہو گا۔ذو برق کے اندر تصوراتی سطح $\Delta \boldsymbol{S}$ لیتے ہیں جسے موٹی گہری سیاہی کی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس کے دونوں جانب ہلکی سیاہی سے a تا a' لکیر بھی دکھائی گئی ہے۔بیرونی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب $\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d}$ پیدا ہوتے ہیں جن کا $\boldsymbol{d}$ اور $\boldsymbol{p}$ سطح $\Delta \boldsymbol{S}$ کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔ان جفت قطب کو سمتیوں سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں سمتیہ کی نوک مثبت جبکہ اس کی دم منفی چارج کا مقام دیتی ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ aa' سے $\frac{d\cos\theta}{2}$ فاصلے نیچے تک تمام مثبت چارج بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے اوپر چلے جائیں گے۔ اسی طرح aa' سے $\frac{d\cos\theta}{2}$ فاصلے اوپر تک تمام منفی چارج بیرونی میدان لاگو کرنے سے aa' سے گزرتے ہوئے نیچے چلے جائیں گے۔یوں ΔS رقبہ اور $d\cos\theta$ گہرائی کے حجم $d\Delta S\cos\theta$ میں جتنے بھی جفت قطب ہوں ان تمام کا ایک سرا $\Delta \boldsymbol{S}$ سے گزرے گا۔چونکہ اکائی حجم میں n جفت قطب ہیں لہٰذا اتنی حجم میں $nd\Delta S\cos\theta$ جفت قطب ہوں

[33] polarization

[34] یہ ایسے ہی ہے جیسے لمحاتی رفتار $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ حاصل کرتے وقت $\Delta t \to 0$ لیا جاتا ہے۔

گے۔یوں $\frac{nQd\Delta S\cos\theta}{2}$ چارج ΔS سے گزر کر اوپر جبکہ $\frac{-nQd\Delta S\cos\theta}{2}$ چارج ΔS سے گزر کر نیچے جائے گا۔مثبت چارج کا اوپر جانب حرکت اور منفی چارج کا نیچے جانب حرکت ایک ہی معنی رکھتے ہیں لہٰذا کل

$$\Delta Q_m = nQd\Delta S\cos\theta = nQ\boldsymbol{d}\cdot\Delta\boldsymbol{S} \tag{5.26}$$

چارج سطح سے گزرتے ہوئے اوپر جانب جائے گا جہاں ΔQ_m لکھتے ہوئے اس حقیقت کی یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ ہم مقید چارج کی بات کر رہے ہیں۔چونکہ تمام جفت قطب ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا اس حجم کی تقطیب

$$\boldsymbol{P} = nQ\boldsymbol{d} \tag{5.27}$$

ہو گی۔یوں مساوات 5.26 کو

$$\Delta Q_m = \boldsymbol{P}\cdot\Delta\boldsymbol{S} \tag{5.28}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $\Delta\boldsymbol{S}$ کو بند سطح کا ٹکڑا سمجھا جائے جہاں $\boldsymbol{a}_S$ بیرونی سمت کو ہو تب اس بند سطح سے کل چارج کا اخراج

$$\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

کے برابر ہو گا۔یوں بند سطح میں مقید چارج کا اضافہ

$$Q_m = -\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.29}$$

ہو گا۔یہ مساوات گاوس کے قانون کی شکل رکھتی ہے لہٰذا ہم کثافت برقی بہاو کی تعریف یوں تبدیل کرتے ہیں کہ یہ خالی خلاء کے علاوہ دیگر صورتوں میں بھی قابل استعمال ہو۔گاوس کا قانون صحہ 69 پر مساوات 3.6 میں دیا گیا ہے۔ہم پہلے اس قانون کو $\epsilon_0\boldsymbol{E}$ اور کل گھیرے چارج $Q_{\text{کل}}$ کی شکل میں لکھتے ہیں

$$Q_{\text{کل}} = \oint_S \epsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.30}$$

جہاں

$$Q_{\text{کل}} = Q + Q_m \tag{5.31}$$

کے برابر ہے۔مساوات 5.30 میں بند سطح $\boldsymbol{S}$ آزاد چارج Q اور مقید چارج Q_m کو گھیرے ہوئے ہے۔مساوات 5.31 میں مساوات 5.29 اور مساوات 5.30 پر کرتے ہوئے

$$Q = Q_{\text{کل}} - Q_m = \oint_S (\epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.32}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم کثافت برقی بہاو کو اب

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{5.33}$$

بیان کرتے ہیں جو زیادہ کارآمد اور عمومی مساوات ہے۔یوں ذو برق اشیاء کے لئے کثافت برقی بہاو میں اضافی جزو $\boldsymbol{P}$ شامل ہو جاتا ہے۔اس طرح

$$Q = \oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.34}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں Q گھیرا ہوا آزاد چارج ہے۔

ہم آزاد، مقید اور کُل چارجوں کے لئے آزاد، مقید اور کُل حجمی کثافت بیان کرتے ہوئے

$$Q = \int_h \rho_h \, \mathrm{d}h$$
$$Q_m = \int_h \rho_m \, \mathrm{d}h$$
$$Q_{\text{کل}} = \int_h \rho_{\text{کل}} \, \mathrm{d}h$$

لکھ سکتے ہیں۔

مسئلہ پھیلاو کے استعمال سے مساوات 5.29، مساوات 5.30 اور مساوات 5.34 کے نقطہ اشکال

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P} = -\rho_m$$
$$\epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho_{\text{کل}}$$

اور

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{5.35}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

قلم میں دہراتے طرز پر ایٹم پائے جاتے ہیں۔قلم میں عموماً کسی ایک سمت میں با آسانی جبکہ بقایا سمتوں میں مشکل سے تقطیب پیدا کرنا ممکن ہوتا ہے۔جس سمت میں باآسانی تقطیب پیدا کی جا سکے اسے آسان محور[35] یا آسان سمت یا نرم محور کہتے ہیں۔۔ایسے اشیاء جو مختلف اطراف میں مختلف خصوصیات رکھتے ہوں سمتی[36] اشیاء کہلاتے ہیں۔ساتھ ہی ساتھ یہ ضروری نہیں کہ بیرونی لاگو میدان اور تقطیب ایک ہی سمت میں ہوں۔کچھ ایسے اشیاء بھی پائے جاتے ہیں جو برقی چال[37] کی خاصیت رکھتے ہیں۔ان میں تقطیب کی قیمت ان اشیاء کی گزشتہ تاریخ پر مبنی ہوتی ہے۔یہ عمل بالکل مقناطیسی مادے کی مقناطیسی چال کے طرز کی خصوصیت ہے۔

کچھ ذو برق اشیاء میں لاگو بیرونی میدان $\boldsymbol{E}$ اور تقطیب $\boldsymbol{P}$ ہر صورت ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں۔ ان اشیاء کی خصوصیات ہر طرف بالکل ایک ہی طرح ہوتی ہیں۔ایسے اشیاء غیر سمتی[38] اشیاء کہلاتے ہیں۔انجنیئرنگ میں استعمال ہونے والے ذو برق اشیاء عموماً ایسے ہی ہوتے ہیں۔اس کتاب میں صرف انہیں پر تبصرہ کیا جائے گا۔ایسے اشیاء میں تقطیب اور لاگو برقی میدان راست تناسب تعلق

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= \chi_e \epsilon_0 \boldsymbol{E} \\ &= (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 \boldsymbol{E}\end{aligned} \tag{5.36}$$

رکھتا ہے جہاں مساوات کے مستقل کو $\chi_e \epsilon_0$ یا $(\epsilon_R - 1)\epsilon_0$ لکھا جاتا ہے۔یوں مساوات 5.33

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 \boldsymbol{E}$$

---

[35] easy axis
[36] anisotropic
[37] ferroelectric
[38] isotropic

یا

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_R \epsilon_0 \boldsymbol{E} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{5.37}$$

شکل اختیار کرتا ہے جہاں ذو برق کا برقی مستقل

$$\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0 \tag{5.38}$$

کے برابر ہے۔ماہر طبیعیات عموماً χ_e جبکہ انجنیئر عموماً ϵ_R استعمال کرتے ہیں۔ان کا تعلق

$$\chi_e = \epsilon_R - 1 \tag{5.39}$$

ہے۔

χ_e برقی اثر پذیری[39] ، ϵ_R جزوی برقی مستقل[40] جبکہ ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل[41] کہلاتے ہیں۔ اس کتاب کے آخر میں صفحہ 472 پر چند مخصوص اشیاء کے برقی مستقل جدول 16.2 میں دئے گئے ہیں۔

غیر یکساں[42] خاصیت رکھنے والے اشیاء اتنے سادہ مساوات سے نہیں نپٹے جاتے۔ان اشیاء میں $\boldsymbol{E}$ کا ہر کارتیسی جزو $\boldsymbol{D}$ کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہٰذا ان کا تعلق یوں

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned} \tag{5.40}$$

لکھا جاتا ہے جہاں نو اعدادی ϵ_{ij} کو مجموعی طور پر تناوی مستقل[43] کہا جاتا ہے۔اسی طرح مساوات 5.40 کے طرز کے مساوات تناوی مساوات کہلاتے ہیں۔غیر سمتی اشیاء میں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ (اور $\boldsymbol{P}$) آپس میں متوازی نہیں ہوتے اور اگرچہ $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ ان کے لئے بھی درست ہے، $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ استعمال کرتے وقت اس حقیقت کا خیال رکھنا ہو گا کہ ϵ اب تناوی مستقل ہے۔غیر سمتی اشیاء پر ایک مثال کے بعد بحث روکتے ہیں۔

مثال 5.7: ایک غیر سمتی ذو برق کا تناوی مستقل

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

ہے۔برقی میدان $\boldsymbol{E} = \sqrt{3}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$، $\boldsymbol{E} = \sqrt{3}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ اور $\boldsymbol{E} = 1\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + 1\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 1\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ کی صورت میں $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{D} = 4\sqrt{3}\epsilon_0 \boldsymbol{a}_\mathrm{x}$، $\boldsymbol{D} = 9\epsilon_0 \boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon_0(4\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + 9\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 9\boldsymbol{a}_\mathrm{z})$

---

[39] electric susceptibility
[40] relative electric constant, relative permittivity
[41] permittivity of vacuum, electric constant of vacuum
[42] non homogeneous
[43] tensor

اس مثال میں تینوں بار $|E| = \sqrt{3}$ رہا جبکہ D کی قیمتیں خاصی مختلف ہیں۔یہی غیر سمتی ذو برق کی پہچان ہے۔

مشق 5.4: مندرجہ ذیل صورتوں میں تقطیب حاصل کریں۔ (الف) ذو برق میں $E = 5\,\frac{\text{kV}}{\text{m}}$ کی صورت میں $D = 1.2\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ پایا جاتا ہے۔(ب) $D = 2\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ اور $\chi_e = 1.5$ ہیں۔ (پ)ذو برق میں 6×10^{20} مالیکیول فی مربع میٹر ہیں جہاں $E = 100\,\frac{\text{kV}}{\text{m}}$ پر ہر مالیکیول کا معیار جفت قطب $1.2 \times 10^{-26}\,\text{C}\,\text{m}$ ہے۔

جوابات: $1.156\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$، $1.2\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$ اور $7.2\,\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$

5.8 کامل ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط

دو مختلف ذو برق کے سرحدی برقی شرائط[44] شکل 5.8 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں پہلے ذو برق کا برقی مستقل ϵ_1 جبکہ دوسرے ذو برق کا برقی مستقل ϵ_2 ہے۔پہلے مماسی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر مستطیلی راستہ $abcd$ پر

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

یعنی

$$E_{m1}\Delta w - E_{n1,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{n2,b}\frac{\Delta h}{2} - E_{m2}\Delta w + E_{n2,a}\frac{\Delta h}{2} + E_{n1,a}\frac{\Delta h}{2} = 0$$

لکھتے ہیں جس سے

$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w + (E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔Δw اتنا چھوٹا لیا جاتا ہے کہ اس پر مماسی میدان کو یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ مستطیل کے بائیں اور دائیں اطراف کے میدان کو زیر نوشت میں a اور b سے ظاہر کیا گیا ہے۔سرحدی شرائط حاصل کرنے کی خاطر سطح کے قریب تر جانا ہو گا۔ایسا کرنے سے $\Delta h \to 0$ ہو گا جس سے

$$(E_{n1,a} + E_{n2,a} - E_{n1,b} - E_{n2,b})\frac{\Delta h}{2} \to 0$$

ہو کر قابل نظر انداز ہو گا۔یوں

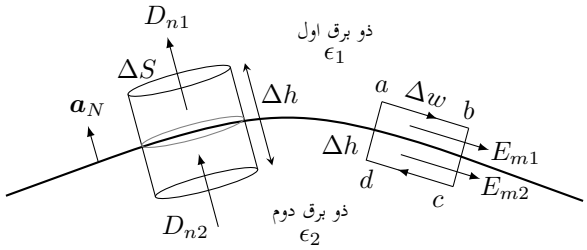
$$(E_{m1} - E_{m2})\Delta w = 0$$

رہ جاتا ہے جس سے

$$E_{m1} = E_{m2} \tag{5.41}$$

---

[44] boundary conditions



شکل 5.8: دو مختلف ذو برق کے سرحد پر برقی شرائط۔

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{E}1 - \boldsymbol{E}_2) = 0 \tag{5.42}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات سے

$$\frac{D_{m1}}{\epsilon_1} = E_{m1} = E_{m2} = \frac{D_{m2}}{\epsilon_2}$$

یعنی

$$\frac{D_{m1}}{D_{m2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tag{5.43}$$

یا

$$\boldsymbol{a}_N \times \left(\boldsymbol{D}_1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\boldsymbol{D}_2\right) = 0 \tag{5.44}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 5.41 کہتا ہے کہ ایک ذو برق سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے سرحد پر مماسی برقی شدت بلا جوڑ[45] ہوتا ہے۔اس کے برعکس مساوات 5.43 کہتا ہے کہ دو ذو برق کے سرحد پر مماسی برقی بہاو جوڑ دار[46] ہوتا ہے۔یوں ایک ذو برق سے دوسرے ذو برق میں داخل ہوتے ہوئے مماسی برقی بہاو میں سیڑھی نما[47] تبدیلی پائی جاتی ہے۔

عمودی اجزاء حاصل کرنے کی خاطر گاؤس کا قانون شکل میں رقبہ ΔS گھیرتے بیلن پر لاگو کرتے ہوئے

$$\int_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{نلکی سطح}} \boldsymbol{D}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\Delta S} \rho_S \, \mathrm{d}S \tag{5.45}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چھوٹے رقبہ پر میدان کو یکساں تصور کرتے ہوئے تکمل کے باہر لے جاتے ہوئے مساوات 5.45 کے پہلے جزو سے

$$\int_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D_{n1}\Delta S$$

---

[45] continuous
[46] discontinuous
[47] step

حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ بند سطح کی سمت باہر کو ہوتی ہے لہٰذا $\boldsymbol{D}_{n1}$ اور بیلن کا بالائی ڈھکن ایک ہی سمت رکھتے ہیں جبکہ $\boldsymbol{D}_{n2}$ اور بیلن کا نچلا ڈھکن الٹ سمت میں ہیں۔مساوات 5.45 کا دوسرا جزو

$$\int_{\Delta S} \boldsymbol{D}_{n2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -D_{n2}\Delta S$$

دیتا ہے۔سطح کے قریب سے قریب ہونے سے $\Delta h \to 0$ ہو گا جس سے نلکی سطح کا رقبہ قابل نظر انداز ہو گا جس سے مساوات 5.45 کا تیسرا جزو صفر ہو جاتا ہے جبکہ

$$\int_{\Delta S} \rho_S \, \mathrm{d}S = \rho_S \Delta S$$

کے برابر ہے۔ان تمام نتائج سے

$$D_{n1}\Delta S - D_{n2}\Delta S = \rho_S \Delta S$$

یعنی

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_S \tag{5.46}$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S \tag{5.47}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔یوں $D = \epsilon E$ کے استعمال سے

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\epsilon_1 \boldsymbol{E}_1 - \epsilon_2 \boldsymbol{E}_2) = \rho_S \tag{5.48}$$

حاصل ہوتا ہے۔

جزوی برقی مستقل کی مدد سے مقید چارج کا حساب رکھا جاتا ہے۔ اس طرح مقید چارج کا علیحدہ طور پر خیال رکھنے کی ضرورت نہیں رہتی۔یوں مندرجہ بالا مساوات میں ρ_S مقید چارج نہیں ہے۔ ρ_S سرحد پر با مقصد طور رکھی گئی سطحی چارج کثافت ہے۔اس منفرد صورت، جہاں سرحد پر از خود چارج رکھا جائے، کے علاوہ دو ذو برق کی سرحد پر کبھی چارج نہیں پایا جاتا۔انجنیئرنگ مسائل میں عموماً $\rho_S = 0$ ہی ہوتا ہے۔ایسی صورت میں مندرجہ بالا مساوات نسبتاً سادہ شکل

$$D_{n1} = D_{n2} \tag{5.49}$$

اختیار کر لیتی ہے جس سے

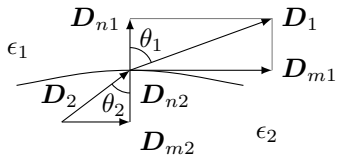
$$\epsilon_1 E_{n1} = D_{n1} = D_{n2} = \epsilon_2 E_{n2} \tag{5.50}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں سرحد پار کرتے وقت E_n میں سیڑھی نما تبدیلی پائے جاتی ہے۔اس حقیقت کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ سرحد پر E_n جوڑ دار[48] ہے۔اس کے برعکس D_n سرحد پر بلا جوڑ ہے۔

آئیں ان جوابات کی مدد سے سرحد کے دونوں جانب برقی میدان کا تعلق حاصل کریں۔شکل 5.9 کو دیکھتے ہوئے ہم

$$\begin{aligned} D_{m1} &= D_1 \sin\theta_1 \\ D_{n1} &= D_1 \cos\theta_1 \\ D_{m2} &= D_2 \sin\theta_2 \\ D_{n2} &= D_2 \cos\theta_2 \end{aligned}$$

[48] discontinuous



شکل 5.9: $\epsilon_1 > \epsilon_2$ کی صورت میں $D_1 > D_2$ ہو گا۔اسی طرح $\theta_1 > \theta_2$ جبکہ $E_1 < E_2$ ہو گا۔

لکھ سکتے ہیں جن سے

$$\frac{D_{n1}}{D_{n2}} = \frac{D_1 \cos\theta_1}{D_2 \cos\theta_2} = 1$$
$$\frac{D_{m1}}{D_{m2}} = \frac{D_1 \sin\theta_1}{D_2 \sin\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 5.49 اور مساوات 5.43 کا استعمال کیا گیا ہے۔انہیں

$$\begin{aligned} D_1 \cos\theta_1 &= D_2 \cos\theta_2 \\ \epsilon_2 D_1 \sin\theta_1 &= \epsilon_1 D_2 \sin\theta_2 \end{aligned} \tag{5.51}$$

لکھ سکتے ہیں۔ان میں دوسری مساوات کو پہلی مساوات سے تقسیم کرتے ہیں

$$\frac{\epsilon_2 D_1 \sin\theta_1}{D_1 \cos\theta_1} = \frac{\epsilon_1 D_2 \sin\theta_2}{D_2 \cos\theta_2}$$

جس سے

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tag{5.52}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ مساوات سرحد کے دونوں جانب میدان کے زاویوں کا تعلق بیان کرتا ہے۔چونکہ $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ ہوتا ہے لہٰذا سرحد کے کسی بھی طرف، اس طرف کا $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{D}$ ایک ہی سمت رکھتے ہیں۔ شکل میں $\epsilon_1 > \epsilon_2$ تصور کیا گیا ہے لہٰذا اس میں $\theta_1 > \theta_2$ ہے۔

مساوات 5.51 کے پہلے جزو کا مربع لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} D_1^2 \cos^2\theta_1 &= D_2^2 \cos^2\theta_2 \\ &= D_2^2 (1 - \sin^2\theta_2) \\ &= D_2^2 - D_2^2 \sin^2\theta_2 \end{aligned}$$

اس میں مساوات 5.51 کے دوسرے جزو سے $D_2 \sin\theta_2$ کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$D_1^2 \cos^2\theta_1 = D_2^2 - D_1^2 \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1} \tag{5.53}$$

ملتا ہے۔چونکہ $E = \frac{D}{\epsilon}$ ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\begin{aligned} E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} &= \frac{D_1}{\epsilon_2}\sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1} \\ &= \frac{\epsilon_1 E_1}{\epsilon_2}\sqrt{\cos^2\theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2\theta_1} \end{aligned}$$

یعنی

$$E_2 = E_1\sqrt{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2 \cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1} \tag{5.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔

جس جانب برقی مستقل کی قیمت زیادہ ہو، سرحد کے اسی طرف D کی قیمت بھی زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ہوں جس صورت میں $D_2 = D_1$ ہوتا ہے۔اسی طرح کم ϵ جانب E کی قیمت زیادہ ہوتی ہے ماسوائے جب $\theta_1 = \theta_2 = 90$ ہوں جس صورت میں $E_2 = E_1$ ہوتا ہے۔

5.9 موصل اور ذو برقی کے سرحدی شرائط

موصل اور ذو برق کے سرحد پر صورت حال تقریباً ویسے ہی ہے جیسے موصل اور خالی خلاء کے سرحد پر تھی۔موصل میں $\boldsymbol{E} = 0$ ہونے کی وجہ سے سرحد پر مستطیلی راستے پر کرچاف کے قانون سے ذو برق میں $E_m = 0$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح $D_m = \frac{E_m}{\epsilon} = 0$ ہو گا۔

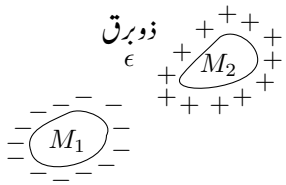
اسی طرح سرحد پر چھوٹا بیلن $\rho_S \Delta S$ چارج کو گھیرے گا جو گاوس کے قانون کی مدد سے بیلن کے ذو برق جانب ڈھکن پر عمودی بہاو $D_n \Delta S$ پیدا کرے گا۔یوں $D_n = \rho_S$ حاصل ہوتا ہے جس سے $E_n = \frac{D_n}{\epsilon} = \frac{\rho_S}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔

ان نتائج سے صاف ظاہر ہے کہ موصل اور ذو برق کے سرحد پر برقی میدان کے جوابات موصل اور خالی خلاء کے سرحد کے جوابات میں ϵ_0 کی جگہ ϵ پر کرنے سے حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} D_m &= E_m = 0 \\ D_n &= \epsilon E_n = \rho_S \end{aligned} \tag{5.55}$$

5.10 کپیسٹر

شکل 5.10 میں دو عدد موصل M_1 اور M_2 دکھائے گئے ہیں جن کے گرد ذو برق پایا جاتا ہے۔M_1 پر کل $-Q$ اور M_2 پر کل $+Q$ چارج پایا جاتا ہے۔ان چارجوں کے علاوہ پورے نظام میں کوئی اور چارج نہیں پایا جاتا۔یوں پورا نظام غیر چارج شدہ ہے۔چونکہ موصل پر صرف سطحی چارج پایا جاتا ہے لہٰذا دونوں موصل پر چارج سطحی چارج کثافت کی صورت میں پایا جائے گا۔



شکل 5.10: کپیسٹنس کی تعریف۔

گاوس کے قانون کے تحت M_2 سے عمودی سمت میں $+Q$ کے برابر برقی بہاو کا اخراج اور M_1 پر عمودی سمت میں اتنی ہی برقی بہاو کا دخول ہو گا۔یوں موصل کے گرد ذو برق میں کثافت برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ پائی جائے گی۔$\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ کی ابتدا M_2 سے ہو گی اور ان کا اختتام M_1 پر ہو گا۔

اس برقی میدان میں کسی بھی راستے ایک کولمب کا چارج M_1 تا M_2 منتقل کرنے کی خاطر V_0 توانائی درکار ہو گی۔موصل کی سطح ہم قوہ سطح ہوتی ہے لہٰذا پہلے موصل کی سطح سے کسی بھی نقطے سے دوسرے موصل کی سطح پر کسی بھی نقطے تک چارج منتقل کرنے کی خاطر برابر توانائی درکار ہوتی ہے۔

کپیسٹنس [49] C کی تعریف

$$\mathrm{C} = \frac{Q}{V_0} \tag{5.56}$$

ہے جہاں M_1 کو صفر برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے M_2 کی برقی دباو V_0 اور مثبت موصل یعنی M_2 کا چارج Q ہے۔منفی موصل سے مثبت موصل تک اکائی مثبت چارج منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی V_0 کو تکمل کے ذریعے حاصل کیا جاتا ہے۔اسی طرح مثبت موصل پر چارج Q کو گاوس کے قانون کی مدد سے بذریعہ سطحی تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔یوں صفحہ 69 پر مساوات 3.6 اور صفحہ 94 پر مساوات 4.11 کی مدد سے کپیسٹنس کی عمومی مساوات

$$\mathrm{C} = \frac{\oint_S \epsilon \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{-\int_-^+ \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}} \tag{5.57}$$

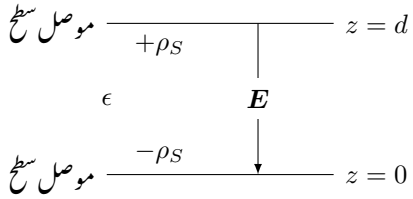
لکھی جا سکتی ہے۔

دونوں موصل پر چارج دگنا کرنے سے گاوس کے قانون کے تحت برقی بہاو بھی دگنی ہو جائے گی۔یوں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ بھی دگنے ہوں گے جس سے دونوں موصل کے مابین برقی دباو بھی دگنا ہو گا۔اس طرح دگنا چارج تقسیم دگنا دباو ایک بار پھر وہی کپیسٹنس دے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کپیسٹنس کی قیمت کا دارومدار موصل کے اشکال، ان کے درمیان فاصلہ اور برقی مستقل پر منحصر ہے نا کہ موصل پر کل چارج کے۔

کپیسٹنس کی اکائی فیراڈ[50] ہے جسے F سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ایک کولمب فی وولٹ ایک فیراڈ[51] کے برابر ہے۔ایک فیراڈ نہایت بڑی قیمت ہے اور عام طور کپیسٹنس کو مائیکرو فیراڈ μF یا پیکو فیراڈ pF میں ناپا جاتا ہے۔

---

[49] capacitance
[50] Farad
[51] یہ اکائی انگلستانی ماہر طبیعیات مائکل فیراڈے کے نام سے منسوب ہے۔



شکل 5.11: متوازی چادر کپیسٹر۔

5.10.1 متوازی چادر کپیسٹر

شکل 5.11 میں دو لامحدود متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں۔نچلی چادر $z = 0$ پر ہے اور اس پر سطحی چارج کثافت $-\rho_S$ پائی جاتی ہے جبکہ بالائی چادر $z = d$ پر ہے اور اس پر سطحی چارج کثافت $+\rho_S$ پائی جاتی ہے۔اس مسئلے کو ہم پہلے تفصیلی طور پر دیکھ چکے ہیں۔دو چادروں کے درمیان میدان صفحہ 55 پر مساوات 2.44 دیتا ہے جہاں مثبت چادر $x = 0$ اور منفی چادر $x = x_1$ پر رکھے گئے تھے۔یوں موجودہ شکل کے مطابق مساوات 2.44 کی صورت

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\rho_S}{\epsilon}\boldsymbol{a}_z$$

ہو گی۔میدان مثبت سے منفی چادر کی سمت میں ہے۔مثبت سطح سے خارج برقی بہاو کی کثافت مثبت ہے یعنی اس سطح پر عمودی $D_+ = \rho_S$ کے برابر ہے جبکہ منفی چادر پر برقی بہاو داخل ہوتا ہے لہٰذا یہاں $D_- = -\rho_S$ ہو گا۔

منفی چادر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے مثبت چادر پر

$$V = -\int_0^d \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^d \frac{\rho_S \boldsymbol{a}_z}{\epsilon}\cdot \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_z = \int_0^d \frac{\rho_S}{\epsilon}\,\mathrm{d}z = \frac{\rho_S d}{\epsilon}$$

برقی دباو ہو گا۔لامحدود چادر پر لامحدود چارج پایا جائے گا جس سے چادر لامحدود کپیسٹنس کا حامل ہو گا۔حقیقی کپیسٹر محدود رقبے کے چادر سے بنائے جاتے ہیں۔اگر محدود رقبے کے متوازی چادروں کے اطراف کی لمبائیاں سطحوں کے مابین فاصلے سے زیادہ ہو تو ایسی صورت میں چادروں کے درمیانی خطے میں برقی میدان لامحدود چادروں کے میدان کی مانند ہی ہو گا۔ S رقبے کے چادروں کے کپیسٹر کو لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مثبت چادر پر کل

$$Q = \int_S \rho_S\,\mathrm{d}S = \rho_S S$$

چارج پایا جائے گا۔یوں اس کی کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon S}{d} \tag{5.58}$$

ہو گی۔کپیسٹر کے کناروں کے قریب میدان پھول کر کپیسٹر سے باہر نکلے گا۔میدان کے پھولنے[52] کو ہم نے نظرانداز کیا ہے۔کپیسٹنس کی قیمت رقبہ بڑھا کر اور چادروں کے درمیان فاصلہ کم کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔اسی طرح چادروں کے درمیان زیادہ سے زیادہ برقی مستقل کا ذو برق استعمال کرتے ہوئے کپیسٹنس بڑھائی جا سکتی ہے۔

[52] fringing

بلند تر تعدد پر چلنے والے کپیسٹر ابرق استعمال کرتے ہوئے بنائے جاتے ہیں۔ابرق کپیسٹر [53] انتہائی کم برقی طاقت ضائع کرتا ہے۔ابرق کی پتری کے دونوں جانب موصل مادے کی تہہ چڑھا[54] کر کپیسٹر تیار کیا جاتا ہے۔

مثال 5.8: ایک ملی میٹر کے ایک چوتھائی موٹا اور ایک سنٹی میٹر اطراف کے مربع ابرق کے پتری کے دونوں جانب المونیم کی تہہ چڑھا کر کپیسٹر تیار کیا گیا۔اس کی کپیسٹنس دریافت کریں۔

حل:کتاب کے آخر میں جدول 16.2 سے ابرق کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_R = 5.4$ حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$C = \frac{5.4 \times 0.01^2}{36\pi \times 10^9 \times 0.25 \times 10^{-3}} = 19.1\,\text{pF}$$

حاصل ہوتا ہے۔

5.10.2 ہم محوری کپیسٹر

صفحہ 96 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ہم محوری تار کے دو تاروں کے درمیان برقی دباو دیتا ہے جہاں اندرونی تار پر لکیری چارج کثافت ρ_L ہے۔بیرونی تار کو برقی زمین تصور کیا گیا ہے۔L لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی تار پر یوں $Q = \rho_L L$ چارج پایا جائے گا۔اس طرح اتنی تار کا کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_L L}{\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{5.59}$$

ہو گا جہاں اندرونی تار کا رداس ρ_1 جبکہ بیرونی تار کا رداس ρ_2 ہے۔

5.10.3 ہم کوہ کپیسٹر

محدد کے مرکز پر r_A اور r_B رداس کے موصل کرہ سطح ہیں جہاں $r_B > r_A$ ہے۔اندرونی سطح پر $+Q$ اور بیرونی سطح پر $-Q$ چارج پایا جاتا ہے۔گاوس کے قانون کے تحت اندرونی سطح کے اندر یعنی $r < r_A$ اور بیرونی سطح باہر یعنی $r > r_B$ پر میدان صفر ہو گا۔دونوں سطحوں کے درمیان میدان بالکل ایسا ہی ہو گا جیسے محدد کے مرکز پر نقطہ چارج $+Q$ کا میدان ہوتا ہے۔یوں بیرونی سطح کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے اندرونی سطح پر برقی دباو صفحہ 95 پر مساوات 4.13

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

---

[53] mica capacitor
[54] deposit

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس طرح ان سطحوں کا کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}} \tag{5.60}$$

ہو گا۔

ایک دلچسپ صورت حال کو دیکھتے ہیں۔اگر r_B کو لامحدود کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات سے

$$C = 4\pi\epsilon R \qquad \text{کرہ کی کپیسٹنس} \tag{5.61}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں r_A کی جگہ R لکھا گیا ہے۔یہ مساوات رداس R کرہ کی کپیسٹنس دیتا ہے۔یاد رہے کہ اس کپیسٹر کی دوسری سطح لامحدود فاصلے پر ہے۔

مثال 5.9: آپ نے بچپن میں بلور تو کھیلیں ہوں گے۔بلور کا قطر تقریباً ایک سنٹی میٹر ہوتا ہے۔خالی خلاء میں موصل بلور کی کپیسٹنس حاصل کریں۔

حل:

$$C = \frac{0.5 \times 10^{-2}}{9 \times 10^9} = 0.55\,\text{pF}$$

---

r_A رداس کے چارج بردار موصل بلور کے اوپر r_A تا r_1 برقی مستقل ϵ_1 کے ذو برق کی تہہ چھڑانے سے $\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{a}_\text{r}$ کی بدولت

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2}\boldsymbol{a}_\text{r} & (r_A < r < r_1) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_\text{r} & (r > r_1) \end{cases}$$

ہو گا۔برقی زمین کو لامحدود فاصلے پر رکھتے ہوئے بلور کا برقی دباو

$$\begin{aligned} V &= -\int_\infty^{r_1} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_1 r^2} - \int_{r_1}^{r_A} \frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_1 r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_1}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1}\right) \end{aligned}$$

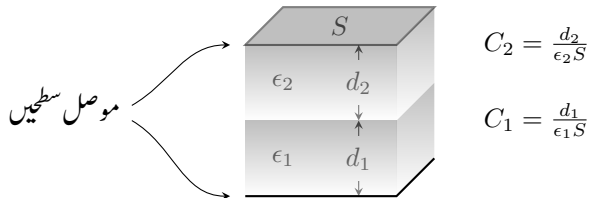
ہو گا جس سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1}\right)} \tag{5.62}$$

حاصل ہوتی ہے۔

5.11 سلسلہ وار اور متوازی جڑے کپیسٹر

متوازی چادر کپیسٹر میں دو مختلف ذو برق بھرنے کا کپیسٹنس پر اثر دیکھتے ہیں۔ایسا کپیسٹر شکل 5.12 میں دکھایا گیا ہے۔چادروں کے درمیان فاصلہ چادر کے اطراف کی لمبائیوں سے نہایت کم ہونے کی صورت میں انہیں لامحدود چادروں کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔منفی چادر پر ϵ_1 برقی مستقل کی d_1 موٹائی کی تہہ اور مثبت چادر پر ϵ_2 برقی مستقل کی d_2 موٹائی کی تہہ ہیں۔نفی چادر پر $-\rho_S$ جبکہ مثبت چادر پر $+\rho_S$ سطحی چارج کثافت کی صورت میں چادروں کے درمیان $D=\rho_S$ ہو گا۔یوں ϵ_1 ذو برق کے خطے میں



شکل 5.12: سلسلہ وار کپیسٹر۔

$$E_1 = \frac{\rho_S}{\epsilon_1}$$

جبکہ ϵ_2 ذو برق کے خطے میں

$$E_2 = \frac{\rho_S}{\epsilon_2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\rho_S d_1}{\epsilon_1} + \frac{\rho_S d_2}{\epsilon_2}$$

ہو گا جبکہ مثبت چادر پر چارج $Q=\rho_S S$ ہو گا جس سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

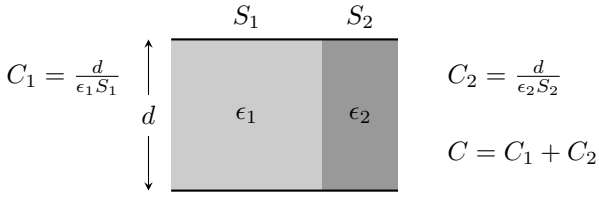
یعنی

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{5.63}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{d_1}{\epsilon_1 S} \\ C_2 &= \frac{d_2}{\epsilon_2 S} \end{aligned} \tag{5.64}$$

کے برابر ہیں۔یہی جواب شکل 5.12 میں سلسلہ وار جڑے C_1 اور C_2 کی نشاندہی کرتے ہوئے لکھا جا سکتا ہے۔



شکل 5.13: متوازی جڑے کپیسٹر۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل متوازی دو چادروں کے درمیان تیسرے اور چوتھے ذو برق کے تہہ دئے جا سکتے ہیں۔انہیں سلسلہ وار کپیسٹر تصور کرتے ہوئے حل کیا جا سکتا ہے۔

شکل 5.13 میں دو چادروں کے درمیان دو مختلف ذو برق اس طرح بھرے گئے ہیں کہ یہ متوازی جڑے کپیسٹر کو جنم دیں۔ہم شکل کو دیکھ کر ہی

$$C = C_1 + C_2 \tag{5.65}$$

لکھ سکتے ہیں۔آئیں اتنی جلدی کرنے کی بجائے اس مسئلے کا ریاضیاتی حل نکالیں۔دونوں موصل چادر ہم قوہ ہیں لہٰذا نچلی چادر کو برقی زمین یعنی صفر وولٹ اور دوسری چادر کو V_0 برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں چادروں کے درمیان خطے میں $E = \frac{V_0}{d}$ ہو گا جس سے بائیں ہاتھ، یعنی ϵ_1 برقہ مستقل کے ذو برق میں $D_1 = \epsilon_1 E$ جبکہ دائیں ہاتھ کے ذو برق میں $D_2 = \epsilon_2 E$ ہوں گے۔D_1 اور D_2 موصل چادروں کے عمودی ہیں لہٰذا سرحدی شرائط کے تحت مثبت چادر کے S_1 حصے پر $\rho_1 = D_1$ جبکہ اس کے S_2 حصے پر $\rho_2 = D_2$ ہو گا۔یوں مثبت چادر پر کل چارج

$$Q = \rho_1 S_1 + \rho_2 S_2 = \epsilon_1 \frac{V_0}{d} S_1 + \epsilon_2 \frac{V_0}{d} S_2$$

سے کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d}$$

یعنی

$$C = C_1 + C_2 \tag{5.66}$$

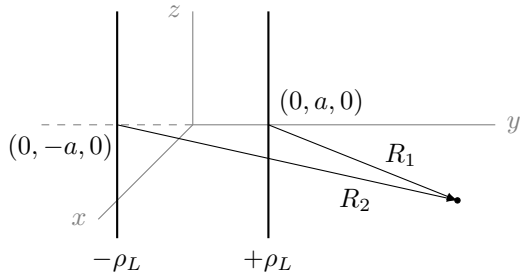
لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\epsilon_1 S_1}{d} \\ C_2 &= \frac{\epsilon_2 S_2}{d} \end{aligned} \tag{5.67}$$

کے برابر ہیں۔

5.12 دو متوازی تاروں کا کپیسٹنس

شکل 5.14 میں دو لامحدود لمبائی کے تار z محدد کے متوازی دکھائے گئے ہیں۔ہم ایسے متوازی جوڑی کی کپیسٹنس حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ہم قوہ تار کی طرح دو متوازی تار بھی انتہائی اہم ہیں اور ان سے زندگی میں بار بار واسطہ پڑتا ہے۔



شکل 5.14: دو متوازی تاروں کی کپیسٹنس۔

ایک تار جو $(0,a,0)$ سے گزرتی ہے پر مثبت لکیری چارج کثافت $+\rho_L$ پایا جاتا ہے جبکہ دوسری تار جو $(0,-a,0)$ سے گزرتی ہے پر منفی لکیری چارج کثافت $-\rho_L$ پایا جاتا ہے۔z محدد پر لامحدود لمبائی کے لکیری چارج کثافت سے پیدا برقی دباو صفحہ 96 پر مساوات 4.16

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

دیتا ہے جہاں برقی میدان کو ρ_0 پر تصور کیا گیا۔اس مساوات کو شکل 5.14 کے لئے ترتیب دیتے ہوئے دونوں تاروں کا مجموعی برقی دباو

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{R_{10}}{R_1} - \ln \frac{R_{20}}{R_2} \right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_{10}R_2}{R_{20}R_1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $R_{10} = R_{20}$ رکھا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

صورت اختیار کر لے گی۔ سطح $y = 0$ پر $R_{10} = R_{20}$ ہو گا لہٰذا دراصل ہم برقی زمین کو $y = 0$ سطح پر رکھ رہے ہیں۔اب R_1 اور R_2 کو x اور y کی صورت

$$\boldsymbol{R}_1 = x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + (y-a)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$$
$$\boldsymbol{R}_2 = x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + (y+a)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$$

میں لکھتے ہوئے

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2} \tag{5.68}$$

یا

$$e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V}{\rho_L}} = \frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2} \tag{5.69}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

ہم قوہ سطحیں حاصل کرنے کی خاطر مندرجہ بالا مساوات کو کسی اٹل برقی دباو مثلاً V_1 کے لئے لکھ کر حل کرتے ہیں۔چونکہ V_1 اٹل یا مستقل قیمت ہے جو تبدیل نہیں ہوتا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں

$$K_1 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\rho_L}} \tag{5.70}$$

لکھ کر اسے

$$K_1 = \frac{x^2 + (y+a)^2}{x^2 + (y-a)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے حل کرتے ہوئے

$$x^2 + y^2 - 2ay\frac{K_1+1}{K_1-1} = -a^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات کے دونوں جانب $a^2\frac{(K_1+1)^2}{(K_1-1)^2}$ جمع کرتے ہوئے یوں

$$x^2 + \left[y - a\left(\frac{K_1+1}{K_1-1}\right)\right]^2 = \left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}\right)^2 \tag{5.71}$$

لکھا جا سکتا ہے جو رداس $\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}$ کے گول دائرے کی مساوات ہے جس کا مرکز $[0, \frac{a(K_1+1)}{K_1-1}]$ پر ہے۔یہ مساوات کہتا ہے کہ ہم قوہ سطح z کی قیمت پر منحصر نہیں ہے یعنی یہ نلکی شکل رکھتی ہے۔مساوات 5.71 میں

$$\begin{aligned} b &= \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1} \\ h &= a\left(\frac{K_1+1}{K_1-1}\right) \end{aligned} \tag{5.72}$$

لکھتے ہوئے اسے

$$x^2 + (y-h)^2 = b^2 \tag{5.73}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں ان نتائج پر غور کریں۔

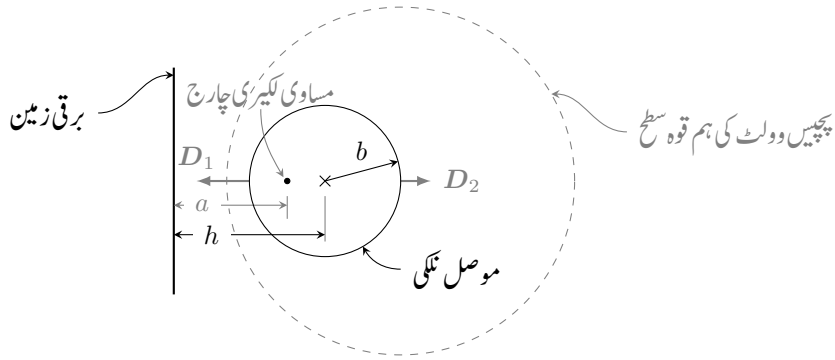
شکل 5.14 کو عکس کے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے $y = 0$ پر برقی زمین رکھتے ہوئے منفی چارج کثافت کے تار کو ہٹانے سے زمین کے دائیں جانب میدان میں کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہو گی۔دائیں جانب اب بھی ہم قوہ سطحیں b رداس کے دائرے بنائے گیں جن کا مرکز زمین سے h فاصلے پر ہو گا۔ہم قوہ سطح کے رداس اور h کا دارومدار K_1 پر ہے جو ازخود V_1 پر منحصر ہے۔ہم مختلف برقی دباو $V_2, V_3, \cdots$ کے لئے $K_2, K_3, \cdots$ حاصل کرتے ہوئے ایسے ہم قوہ سطحوں کے رداس اور زمین سے ان کے مرکز کے فاصلے حاصل کر سکتے ہیں۔ہم V_1 ہم قوہ سطح کی جگہ V_1 برقی دباو کی موصل سطح رکھ سکتے ہیں۔ایسا کرنے سے میدان پر کہیں بھی کوئی اثر نہیں آئے گا۔

آئیں ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے لامحدود سیدھی موصل سطح سے h فاصلے پر b رداس کے موصل نلکی کی کپیسٹنس حاصل کریں۔یہ صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔یہاں h اور b دئے گئے ہیں جن سے مساوات 5.72 کی مدد سے a، K_1 اور یوں V_1 معلوم کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 5.72 کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{h^2 - b^2} \\ K_1 &= \left(\frac{h + \sqrt{h^2-b^2}}{b}\right)^2 \end{aligned} \tag{5.74}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس سے

$$V_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}$$



شکل 5.15: زمین کے قریب موٹی تار کا کپیسٹنس۔

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ زمین صفر وولٹ اور موصل نلکی V_1 وولٹ پر ہے لہٰذا ان کے درمیان V_1 برقی دباو ہو گا۔

شکل 5.14 میں مثبت تار کے L لمبائی پر کل چارج $Q = \rho_L L$ پایا جاتا ہے۔ شکل 5.15 میں بھی برقی زمین کے اتنے ہی لمبائی پر اتنے ہی مقدار مگر منفی چارج ہو گا جبکہ b رداس کے موصل نلکی پر یہی $Q = \rho_L L$ چارج ہو گا۔یوں L لمبائی کے موصل نلکی اور زمین کے درمیان

$$C = \frac{Q}{V_1} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\cosh^{-1}\frac{h}{b}} \tag{5.75}$$

کپیسٹنس پایا جائے گا۔

زمین سے دور کم موٹائی کے تار کی صورت میں $h \gg b$ ہو گا لہٰذا مساوات 5.75

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{2h}{b}} \quad h \gg b \tag{5.76}$$

صورت اختیار کر لے گا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔شکل 5.14 میں دو تاروں کے درمیان کپیسٹنس مساوات 5.75 کے جواب کا نصف ہو گا چونکہ مثبت تار اور زمین کے مابین کپیسٹر اور منفی تار اور زمین کے مابین کپیسٹر کو سلسلہ وار جڑا تصور کیا جا سکتا ہے۔

کچھ حقائق مثال کی مدد سے بہتر سمجھ آتے ہیں۔آئیں مثال 5.10 کی مدد سے ایسی چند باتیں سیکھیں۔

مثال 5.10: برقی زمین کے متوازی خالی خلاء میں دس میٹر کے فاصلے پر پانچ میٹر رداس کی موصل نلکی پائی جاتی ہے جس پر پچاس وولٹ کا برقی دباو ہے۔

- نلکی پر لکیری چارج کثافت حاصل کریں۔
- ایک میٹر لمبائی کے لئے نلکی اور زمین کے مابین کپیسٹنس حاصل کریں۔

- پچیس وولٹ ہم قوہ سطح کا رداس اور زمین سے اس کے مرکز کا فاصلہ حاصل کریں۔
- زمین سے ایسی لکیری چارج کثافت کا فاصلہ دریافت کریں جو ہوبہو ایسی ہی ہم قوہ سطحیں پیدا کرے گا۔
- نلکی پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

حل: صورت حال شکل 5.15 میں دکھائی گئی ہے۔

- یہاں $h = 10$ جبکہ $b = 5$ ہیں لہٰذا مساوات 5.74 کی مدد سے

$$a = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8.66\,\mathrm{m}$$
$$K_1 = \left(\frac{10 + \sqrt{10^2 - 5^2}}{5}\right)^2 = 13.92$$

حاصل ہوتے ہیں۔مساوات 5.70 کے استعمال سے یوں

$$\rho_L = \frac{4\pi\epsilon_0 V_1}{\ln K_1} = \frac{50}{9 \times 10^9 \times \ln 13.92} = 2.11\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

- مساوات 5.75 یا کپیسٹنس کی تعریف سے فی میٹر کپیسٹنس حاصل کرتے ہیں۔

$$C = \frac{\rho_L L}{V_1} = \frac{2.11 \times 10^{-9} \times 1}{50} = 4.22\,\mathrm{nF}$$

- پچیس وولٹ ہم قوہ سطح کے لئے مساوات 5.70 سے

$$K_2 = e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_2}{\rho_L}} = e^{\frac{25}{9\times10^9\times2.11\times10^{-9}}} = 3.73$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 5.72 سے پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح کے لئے

$$b = \frac{2 \times 8.66 \times \sqrt{3.73}}{3.73 - 1} = 12.25\,\mathrm{m}$$
$$h = 8.66 \times \left(\frac{3.73 + 1}{3.73 - 1}\right) = 15\,\mathrm{m}$$

حاصل ہوتے ہیں۔پچیس وولٹ کے ہم قوہ سطح جس کا رداس سوا بارہ میٹر اور جو زمین سے پندرہ میٹر کے فاصلے پر ہے کو شکل میں ہلکی سیاہی سے نقطہ دار گول دائرے سے دکھایا گیا ہے۔

- برقی زمین سے $8.66\,\mathrm{m}$ فاصلے پر $2.11\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ لکیری چارج کثافت کی باریک تار بالکل اسی طرز کے ہم قوہ سطحیں پیدا کرے گا۔

• کسی بھی جگہ $\boldsymbol{E}$ کو مساوات 5.68

$$V = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln(x^2+(y+a)^2) - \ln(x^2+(y-a)^2)\right]$$

کے ڈھلوان $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس سے

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} = -\epsilon_0\nabla V = -\epsilon_0\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right)$$

بھی حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2x}{x^2+(y+a)^2} - \frac{2x}{x^2+(y-a)^2}\right]$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(y+a)}{x^2+(y+a)^2} - \frac{2(y-a)}{x^2+(y-a)^2}\right]$$

کے برابر ہیں۔

چونکہ موصل کے سطح پر $\boldsymbol{D}$ عمودی ہوتا ہے اور اس کی قیمت سطحی چارج کثافت کے برابر ہوتی ہے لہٰذا ہم موصل نلکی پر برقی زمین کے قریبی جانب $\boldsymbol{D}_1$ اور اس سے دور جانب $\boldsymbol{D}_2$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔انہیں شکل 5.15 میں دکھایا گیا ہے۔زمین سے نلکی کا قریبی فاصلہ $h-b=5\,\mathrm{m}$ ہے۔یوں $x=0$ اور $y=5$ ہو گا جس سے

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2\times 0}{0^2+(5+8.66)^2} - \frac{2\times 0}{0^2+(5-8.66)^2}\right] = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(5+8.66)}{0^2+(5+8.66)^2} - \frac{2(5-8.66)}{0^2+(5-8.66)^2}\right] = \frac{0.693\rho_L}{4\pi\epsilon_0}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{D}_1 = -\frac{0.693\rho_L}{4\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

ہو گا۔زمین سے دور نلکی پر $x=0$ اور $y=h+b=10+5=15\,\mathrm{m}$ ہیں جس سے

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2\times 0}{0^2+(15+8.66)^2} - \frac{2\times 0}{0^2+(15-8.66)^2}\right] = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(15+8.66)}{0^2+(15+8.66)^2} - \frac{2(15-8.66)}{0^2+(15-8.66)^2}\right] = -\frac{0.231\rho_L}{4\pi\epsilon_0}$$

یا

$$\boldsymbol{D}_2 = \frac{0.231\rho_L}{4\pi}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$$

حاصل ہوتا ہے۔دونوں جوابات سے ظاہر ہے کہ بہاو کا اخراج سطح کے عمودی ہے۔یوں موصل نلکی پر

$$\rho_{S\text{قریبی}} = \frac{0.693\rho_L}{4\pi}$$
$$\rho_{S\text{دور}} = \frac{0.231\rho_L}{4\pi}$$

پایا جائے گا۔یاد رہے کہ قریبی جانب منفی جواب کا مطلب ہے کہ اخراج زمین کی جانب ہے جبکہ دور جانب مثبت جواب کا مطلب ہے کہ اخراج $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جانب ہے۔دونوں جانب اخراج ہی ہے لہٰذا سطحی چارج کثافت دونوں جگہوں پر مثبت ہی ہے۔

اس مثال سے صاف ظاہر ہے کہ نلکی کا چارج بالکل اس طرح عمل کرتا ہے جیسے برقی زمین سے 8.66 m فاصلے پر باریک چارج بردار تار جس پر $2.11\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$ پایا جاتا ہو۔نلکی سے پیدا ہم قوہ سطحیں اسی فرضی لکیری چارج کثافت کے تار سے حاصل کی جاتی ہیں۔

مشق 5.5: مساوات 5.74 کو ثابت کریں۔

سوالات

سوال 5.1: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}} \qquad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

سے $M(5,3,1)$ پر $\boldsymbol{D}$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{D} = \frac{5\times10^{-9}(5\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-1\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})}{2\pi\times26}$

سوال 5.2: لامحدود موصل زمینی سطح $z = 0$ رکھتے ہوئے مندرجہ بالا سوال کو دوبارہ حل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{D} = \frac{5\times10^{-9}(40\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-112\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})}{2\pi\times884}$

سوال 5.3: $N(0,0,2)$ سے گزرتی y محدد کے متوازی لکیری چارج کثافت

$$\rho_L = 5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}} \qquad (-\infty < y < \infty, x = 0, z = 2)$$

پایا جاتا ہے جبکہ $z = 0$ پر لامحدود موصل زمینی سطح موجود ہے۔سطح کے $M(5,3,0)$ مقام پر سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

جواب: $-0.1097\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$

سوال 5.4: مشق 5.3 میں 300 K درجہ حرارت پر سلیکان اور جرمینیم کے مستقل دئے گئے ہیں۔اگر سلیکان میں المونیم کا ایک ایٹم فی 1×10^{7} سلیکان ایٹم ملاوٹ شامل کی جائے تو سلیکان کی موصلیت کیا ہو گی۔سلیکان کی تعدادی کثافت 5×10^{28} ایٹم فی

مربع میٹر ہے۔(ہر ملاوٹی المونیم کا ایٹم ایک عدد آزاد خول پیدا کرتا ہے جن کی تعداد مشق میں دئے خالص سلیکان میں آزاد خول کی تعداد سے بہت زیادہ ہوتی ہے لہٰذا ایسی صورت میں موصلیت صرف ملاوٹی ایٹموں کے پیدا کردہ آزاد خول ہی تعین کرتے ہیں۔)

جواب: $800\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$

سوال 5.5: صفحہ 132 پر مثال 5.6 میں لامحدود موصل سطح $z=0$ میں $(0,0,z)$ پر پائے جانے والے نقطہ چارج Q سے پیدا سطحی چارج کثافت ρ_S حاصل کیا گیا۔موصل سطح میں پائے جانے والا کل چارج سطحی تکمل سے حاصل کریں۔

جواب: $-Q$

سوال 5.6: صفحہ 122 پر تانبے کے ایک مربع میٹر میں کل آزاد چارج مساوات 5.13 میں حاصل کیا گیا۔ایک ایمپئیر کی برقی رو کتنے وقت میں اتنے چارج کا اخراج کرے گا۔

جواب: چار سو اکتیس (431) سال۔

سوال 5.7: مساوات 5.75 میں $\ln\frac{h+\sqrt{h^2-b^2}}{b}=\cosh^{-1}\frac{h}{b}$ لکھا گیا ہے۔اسے ثابت کریں۔

سوال 5.8: پانچ میٹر رداس کی موصل نلکی کا محور برقی زمین سے تیرہ میٹر پر ہے۔نلکی پر ایک سو وولٹ کا برقی دباو ہے۔

- ایسی لکیری چارج کثافت کا زمین سے فاصلہ اور اس کا ρ_L حاصل کریں جو ایسی ہم قوہ سطح پیدا کرے۔
- موصل نلکی سے پیدا پچاس وولٹ کے ہم قوہ سطح کا رداس اور اس کے محور کا زمین سے فاصلہ دریافت کریں۔
- نلکی پر زمین کے قریب اور اس سے دور سطحی چارج کثافت حاصل کریں۔

جوابات: $12\,\mathrm{m}$، $3.46\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$، $13.4\,\mathrm{m}$، $18\,\mathrm{m}$، $1.65\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}^2}$ اور $0.73\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}^2}$

باب 6

پوئسن اور لاپلاس مساوات

گاوس کے قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{6.1}$$

میں $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ اور حاصل جواب میں $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot (\epsilon \boldsymbol{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_h$$

یعنی

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{6.2}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ہر طرف یکساں[1] خاصیت کے خطے میں ϵ اٹل قیمت رکھتا ہے۔مساوات 6.2 پوئسن[2] مساوات کہلاتا ہے۔

آئیں کارتیسی محدد میں پوئسن مساوات کی شکل حاصل کریں۔یاد رہے کہ کسی بھی متغیرہ $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + A_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + A_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے لئے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

کے برابر ہوتا ہے۔اب چونکہ

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial V}{\partial y} \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial V}{\partial z} \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

کے برابر ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla V &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{6.3}$$

---

[1] homogeneous
[2] Poisson equation

ہو گا۔

عموماً $\nabla \cdot \nabla$ کو ∇^2 لکھا جاتا ہے۔اس طرح پوئسن مساوات کی کارتیسی شکل

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{6.4}$$

حاصل ہوتی ہے۔

حجمی چارج کثافت کی غیر موجودگی، یعنی $\rho_h = 0$ کی صورت میں مساوات 6.2

$$\nabla^2 V = 0 \tag{6.5}$$

صورت اختیار کر لے گی جسے لاپلاس[3] مساوات کہتے ہیں۔جس حجم کے لئے لاپلاس کی مساوات لکھی گئی ہو اس حجم میں حجمی چارج کثافت صفر ہوتا ہے البتہ اس حجم کی سرحد پر نقطہ چارج یا سطحی چارج کثافت پائی جا سکتیں ہیں۔عموماً سطح پر موجود چارج سے حجم میں پیدا میدان ہی حاصل کرنا مطلوب ہوتا ہے۔کارتیسی محدد میں لاپلاس کی مساوات

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{6.6}$$

صورت رکھتی ہے۔∇^2 کو لاپلاسی عامل[4] کہا جاتا ہے۔

لاپلاس مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی چارج سے خالی حجم میں ہر صورت $\nabla^2 V = 0$ ہو گا۔حجم کی شکل کچھ بھی ہو سکتی ہے اور اس کے سرحد پر کسی بھی قسم کا چارج ہو سکتا ہے۔یہ ایک دلچسپ حقیقت ہے۔حجم کے سرحد پر عموماً ایک یا ایک سے زیادہ موصل سطحیں ہوتی ہیں جن پر برقی دباو V_0، V_1، V_2 وغیرہ پایا جاتا ہے اور حجم کے اندر میدان کا حصول درکار ہوتا ہے۔کبھی کبھار موصل سطح پر چارج یا $\boldsymbol{E}$ معلوم ہو گا جس سے حجم کے اندر میدان درکار ہو گا۔اسی طرح کبھی کبھار سرحد پر ایک جگہ چارج اور اس پر دوسری جگہ برقی دباو اور اس پر تیسرے جگہ عمودی بہاو دیا گیا ہو گا جبکہ حجم کے اندر کے متغیرات درکار ہوں گے۔اس کے برعکس ایسا بھی ممکن ہے کہ حجم میں میدان یا برقی دباو معلوم ہو اور ان معلومات سے سرحد پر چارج یا بہاو یا برقی دباو حاصل کرنا ضروری ہو گا۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ $V = 0$ لاپلاس مساوات کا حل ہے۔یہ حل برقی دباو کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ہمیں عموماً ایسے مسئلوں سے دلچسپی ہوتی ہے جہاں برقی دباو پائی جائے۔اس لئے لاپلاس مساوات کے اس حل کو ہم عموماً نظرانداز کریں گے۔

ہم نے لاپلاس کی مساوات برقی دباو کے لئے حاصل کی۔دیکھا یہ گیا ہے کہ انجینئری کے دیگر شعبوں میں کئی متغیرات لاپلاس کے مساوات پر پورا اترتے ہیں۔یہ مساوات حقیقی اہمیت کا حامل ہے۔

اس باب میں ہم ایسی کئی مثالیں دیکھیں گے لیکن پہلے یہ حقیقت جاننا ضروری ہے کہ مساوات 6.6 کا کوئی بھی جواب ان تمام اقسام کے سرحدی معلومات کے لئے درست ہو گا۔یہ انتہائی تشویشناک بات ہو گی اگر دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے جوابات حاصل کرنے کے بعد معلوم ہو کہ ان میں سے ایک ٹھیک اور دوسرا غلط جواب ہے۔آئیں اس حقیقت کا ثبوت دیکھیں کہ کسی بھی سرحدی حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا صرف اور صرف ایک ہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

---

[3] Laplace equation
[4] Laplacian operator

6.1 مسئلہ یکتائی

تصور کریں کہ ہم دو مختلف طریقوں سے لاپلاس مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 حاصل کرتے ہیں۔یہ دونوں جوابات لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا

$$\nabla^2 V_1 = 0$$
$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0 \tag{6.7}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب اگر سرحد پر برقی دباو V_s ہو تب دونوں جوابات سرحد پر یہی جواب دیں گے یعنی سرحد پر

$$V_{1s} = V_{2s} = V_s$$

یا

$$V_{1s} - V_{2s} = 0$$

ہو گا۔صفحہ 114 پر مساوات 4.83

$$\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V)$$

کا ذکر کیا گیا جو کسی بھی مقداری V اور کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{D}$ کے لئے درست ہے۔موجودہ استعمال کے لئے ہم $V_1 - V_2$ کو مقداری اور $\nabla(V_1 - V_2)$ کو سمتیہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] &= (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2) \\ &= (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)] + [\nabla(V_1 - V_2)]^2\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کا تکمل پورے حجم کے لئے

$$\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)]\,\mathrm{d}h = \int_{\text{حجم}} (V_1 - V_2)[\nabla^2(V_1 - V_2)]\,\mathrm{d}h + \int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2\,\mathrm{d}h \tag{6.8}$$

ہو گا۔صفحہ 85 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاو بیان کرتا ہے جس کے مطابق کسی بھی حجمی تکمل کو بند سطحی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جہاں حجم کی سطح پر سطحی تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ کو سطحی تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے

$$\int_{\text{حجم}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)]\,\mathrm{d}h = \oint_{\text{سطح}} [(V_{1s} - V_{2s})\nabla(V_{1s} - V_{2s})] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سرحدی سطح پر $V_{1s} = V_{2s}$ ہونے کی بنا پر $V_{1s} - V_{2s} = 0$ ہے اور صفر کا تکمل صفر ہی ہوتا ہے۔مساوات 6.8 میں دائیں ہاتھ پہلے جزو میں مساوات 6.7 کے تحت $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ ہے اور صفر کا تکمل صفر ہی ہوتا ہے۔اس طرح مساوات 6.8 سے

$$\int_{\text{حجم}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2\,\mathrm{d}h = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔

کسی بھی تکمل کا جواب صرف دو صورتوں میں صفر کے برابر ہو سکتا ہے۔پہلی صورت یہ ہے کہ کچھ خطے میں تکمل کی قیمت مثبت اور کچھ خطے میں اس کی قیمت منفی ہو۔اگر مثبت اور منفی حصے بالکل برابر ہوں تب تکمل صفر کے برابر ہو گا۔موجودہ صورت میں $[\nabla(V_1 - V_2)]^2$ کا تکمل لیا جا رہے ہے اور کسی بھی متغیر کا مربع کسی صورت منفی نہیں ہو سکتا لہٰذا موجودہ تکمل میں ایسا ممکن نہیں ہے۔تکمل صفر ہونے کی دوسری صورت یہ ہے کہ صفر کا تکمل حاصل کیا جا رہا ہو لہٰذا

$$[\nabla(V_1 - V_2)]^2 = 0$$

ہی ہو گا یعنی

$$\nabla(V_1 - V_2) = 0$$

کے برابر ہے۔

اب $\nabla(V_1 - V_2) = 0$ کا مطلب ہے کہ $V_1 - V_2$ کی ڈھلوان ہر صورت صفر کے برابر ہے۔یہ تب ہی ممکن ہے جب $V_1 - V_2$ کی قیمت کسی بھی محدد کے ساتھ تبدیل نہ ہو یعنی اگر تکمل کے پورے خطے میں

$$V_1 - V_2 = \text{اٹل قیمت}$$

ہو۔حجم کے سرحد پر بھی یہ درست ہو گا۔مگر سرحد پر

$$V_1 - V_2 = V_{1s} - V_{2s} = 0$$

کے برابر ہے لہٰذا یہ اٹل قیمت ازخود صفر ہے۔یوں

$$V_1 = V_2 \tag{6.9}$$

ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ دونوں جوابات بالکل برابر ہیں۔

مسئلہ یکتائی کو پوئسن مساوات کے لئے بھی بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔پوئسن مساوات کے دو جوابات V_1 اور V_2 پوئسن مساوات پر پورا اتریں گے لہٰذا $\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$ اور $\nabla^2 V_2 = -\frac{\rho_h}{\epsilon}$ لکھے جا سکتے ہیں جن سے $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ حاصل ہوتا ہے۔سرحد پر اب بھی $V_{1s} - V_{2s} = 0$ ہو گا۔یہاں سے آگے ثبوت بالکل یکتائی لاپلاس کی ثبوت کی طرح ہے۔

مسئلہ یکتائی کے تحت سرحدی حقائق کے لئے حاصل کئے گئے پوئسن یا لاپلاس مساوات کے جوابات ہر صورت برابر ہوں گے۔یہ ممکن نہیں کہ دو مختلف جوابات حاصل کئے جائیں۔

6.2 لاپلاس مساوات خطی ہے

تصور کریں کہ سرحدی شرائط لاگو کرنے کے بغیر لاپلاس مساوات کے دو حل V_1 اور V_2 حاصل کئے جائیں۔یوں

$$\nabla^2 V_1 = 0$$
$$\nabla^2 V_2 = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جن سے

$$\nabla^2(c_1 V_1 + c_2 V_2) = 0$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل ہیں۔اس حقیقت کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ لاپلاس مساوات خطی[5] ہے۔

[5] linear

6.3 نلکی اور کروی محدد میں لاپلاس کی مساوات

نلکی محدد میں ڈھلوان کی مساوات صفحہ 105 پر مساوات 4.57 دیتا ہے جس سے

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial \rho}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \\ &= -E_\rho \boldsymbol{a}_\rho - E_\phi \boldsymbol{a}_\phi - E_z \boldsymbol{a}_z\end{aligned} \tag{6.10}$$

لکھتے ہیں جہاں $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ کا استعمال کیا گیا۔نلکی محدد میں پھیلاو کی مساوات صفحہ 82 پر مساوات 3.37 دیتا ہے۔اسی مساوات کو سمتیہ $\boldsymbol{E}$ کے لئے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

لکھتے ہیں۔اس میں بائیں ہاتھ $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ اور دائیں ہاتھ مساوات 6.10 سے قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں دونوں جانب منفی علامت کٹ جاتے ہیں۔اس کو یوں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{نلکی} \tag{6.11}$$

لکھا جا سکتا ہے جو نلکی محدد میں لاپلاسی مساوات ہے۔

کروی محدد میں بالکل اسی

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad \text{کروی} \tag{6.12}$$

جبکہ عمومی محدد میں

$$\nabla^2 V = \frac{1}{k_1 k_2 k_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_2 k_3}{k_1}\frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_1 k_3}{k_2}\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{k_1 k_2}{k_3}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\right] \quad \text{عمومی} \tag{6.13}$$

حاصل کی جا سکتی ہے۔

مشق 6.1: مساوات 6.12 حاصل کریں۔

6.4 لاپلاس مساوات کے حل

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔سادہ ترین مسئلے، سادہ تکمل سے ہی حل ہو جاتے ہیں۔ہم اسی سادہ تکمل کے طریقے سے کئی مسئلے حل کریں گے۔یہ طریقہ صرف اس صورت قابل استعمال ہوتا ہے جب میدان یک سمتی ہو یعنی جب یہ محدد کے تین سمتوں میں سے صرف ایک سمت میں تبدیل ہوتا ہو۔چونکہ اس کتاب میں محدد کے تین نظام استعمال کئے جا رہے ہیں لہٰذا معلوم ایسا ہوتا ہے کہ کل نو مسئلے ممکن ہیں۔درحقیقت ایسا نہیں ہے۔کارتیسی محدد میں x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل بالکل ویسا ہی ہے جیسے y یا z سمت میں تبدیل ہوتے میدان کا حل۔اسی طرح x محدد سے کسی زاویے پر سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتا میدان بھی بالکل اسی طرح حل ہو گا۔یوں کارتیسی محدد میں کسی بھی سمت میں تبدیل ہوتے میدان اور x سمت میں تبدیل ہوتے میدان کے حل بالکل ایک جیسے ہوں گے لہٰذا کارتیسی محدد میں صرف ایک مسئلہ حل کرنا درکار ہے۔نلکی محدد میں z محدد کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کو ہم کارتیسی محدد میں دیکھ لیں گے لہٰذا یہاں کل دو مسئلے حل کرنا درکار ہے جبکہ کروی محدد میں بھی دو مسئلے پائے جاتے ہیں۔آئیں ان تمام کو باری باری حل کریں۔

مثال 6.1: تصور کریں کہ V صرف x محدد کے ساتھ تبدیل ہوتی ہو۔دیکھتے ہیں کہ ایسی صورت میں لاپلاس مساوات کا حل کیا ہو گا۔اس پر بعد میں غور کریں گے کہ حقیقت میں ایسی کون سی صورت ہو گی کہ V صرف x محدد کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

شکل اختیار کر لے گا۔چونکہ V کی قیمت صرف x پر منحصر ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کو

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = A$$

حاصل ہوتا ہے۔دوبارہ تکمل لیتے ہوئے

$$V = Ax + B \tag{6.14}$$

حاصل ہوتا ہے جو لاپلاس مساوات کا حل ہے۔یہ کسی بھی سیدھی لکیر کی سمت میں تبدیل ہوتے برقی دباو کے مسئلے کو ظاہر کرتا ہے جہاں اس لکیر کو x کہا جائے گا۔A اور B دو درجی تکمل کے مستقل ہیں جن کی قیمتیں سرحدی شرائط کی مدد سے حاصل کی جاتی ہیں۔

آئیں مساوات 6.14 کا مطلب سمجھیں۔اس کے مطابق برقی دباو کا دارومدار صرف x پر ہے جبکہ y اور z کا اس کی قیمت پر کوئی اثر نہیں۔x کی کسی بھی قیمت پر یعنی $x = x_0$ سطح پر V کی قیمت اٹل ہو گی۔ایسی ہم قوہ سطحیں x محدد کے عمودی ہوں گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 6.14 یہ متوازی چادر کپیسٹر کا حل ہے۔

ہم ایسے کپیسٹر کے دونوں چادروں پر برقی دباو اور چادروں کا x محدد پر مقام بیان کرتے ہوئے A اور B کی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں۔یوں اگر کپیسٹر کی پہلی چادر x_1 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباو V_1 ہے اور اسی طرح دوسری چادر x_2 پر ہے جبکہ اس پر برقی دباو V_2 ہے تب

$$\begin{aligned} V_1 &= Ax_1 + B \\ V_2 &= Ax_2 + B \end{aligned}$$

ہو گا جس سے

$$\begin{aligned} A &= \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2} \\ B &= \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں چادروں کے درمیان

$$V = \left(\frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2}\right) x + \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2} \tag{6.15}$$

ہو گا۔

اگر ہم پہلی چادر کو $x = 0$ اور دوسری چادر کو d پر تصور کرتے جبکہ اسی ترتیب سے ان کی برقی دباو کو صفر اور V_0 کہتے تب ہمیں

$$V = \frac{V_0 x}{d} \tag{6.16}$$

حاصل ہوتا جو نسبتاً آسان مساوات ہے۔

باب 5 میں ہم نے سطحی چارج کثافت سے بالترتیب برقی میدان، برقی دباو اور کپیسٹنس حاصل کئے۔موجودہ باب میں ہم پہلے لاپلاس کے مساوات کے حل سے برقی دباو حاصل کرتے ہیں۔برقی دباو سے میدان بذریعہ $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ اور بہاو بذریعہ $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ حاصل کرتے ہوئے سطحی چارج کثافت حاصل کرتے ہیں جو عمودی بہاو کے برابر ہے۔سطحی چارج کثافت سے سطح پر کل چارج حاصل کرتے ہوئے $C = \frac{Q}{V}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ان اقدام کو بالترتیب دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

- لاپلاس مساوات حل کرتے ہوئے برقی دباو V حاصل کریں۔
- تکمل کے سرحدی شرائط سے تکمل کے مستقل کی قیمتیں حاصل کریں۔
- برقی دباو سے برقی میدان اور برقی بہاو بذریعہ $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ حاصل کریں۔
- کپیسٹر کے کسی ایک چادر پر برقی بہاو کی قیمت $\boldsymbol{D}_S = D_n \boldsymbol{a}_N$ حاصل کریں جو سطح کے عمودی ہو گا۔
- چونکہ سطح پر سطحی چارج کثافت اور عمودی برقی بہاو برابر ہوتے ہیں لہٰذا $\rho_S = D_n$ ہو گا۔مثبت چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاو کا موصل چادر سے اخراج جبکہ منفی چارج کثافت کی صورت میں برقی بہاو کا چادر میں دخول ہو گا۔
- سطح پر چارج بذریعہ سطحی تکمل حاصل کریں۔
- کپیسٹنس $C = \frac{Q}{V}$ ہو گا۔

آئیں ان اقدام کو موجودہ مثال پر لاگو کریں۔

چونکہ موجودہ مثال میں مساوات 6.16 کے تحت

$$V = \frac{V_0 x}{d}$$

ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$$

اور

$$\boldsymbol{D} = -\epsilon\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$$

چونکہ بہاو کی سمت مثبت سے منفی چادر کی جانب ہوتی ہے لہٰذا مثبت چادر $x = d$ پر جبکہ منفی چادر $x = 0$ پر ہے۔مثبت چادر پر

$$\boldsymbol{D}_S = \boldsymbol{D}\Big|_{x=d} = -\epsilon\frac{V_0}{d}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$$

کے برابر ہے۔چونکہ مثبت چادر کا

$$\boldsymbol{a}_N = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$$

ہے لہٰذا برقی بہاو چادر سے خارج ہو رہا ہے۔یوں

$$\rho_S = \epsilon\frac{V_0}{d}$$

ہو گا۔اگر چادر کی سطح کا رقبہ S ہو تب

$$Q = \int_S \rho_S \,\mathrm{d}S = \int \epsilon\frac{V_0}{d}\,\mathrm{d}S = \frac{\epsilon V_0 S}{d}$$

ہو گا جس سے

$$\mathrm{C} = \frac{\epsilon S}{d}$$

حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 145 پر مساوات 5.58 یہی جواب دیتا ہے۔

اگر مندرجہ بالا مثال میں کپیسٹر کو y یا z محدد پر رکھا جاتا تو کپیسٹنس کی قیمت یہی حاصل ہوتی لہٰذا کارتیسی محدد کے لئے ایک مثال حل کر لینا کافی ہے۔نلکی محدد میں z کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کو حل کرنے سے کوئی نئی بات سامنے نہیں آتی۔یہ بالکل کارتیسی محدد کے مثال کی طرح ہی ہے لہٰذا ہم باری باری ρ اور ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کے مسئلے حل کرتے ہیں۔

مثال 6.2: اس مثال میں صرف ρ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو پر غور کرتے ہیں۔ایسی صورت میں لاپلاس کی مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)=0$$

یا

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \tag{6.17}$$

صورت اختیار کر لے گی۔یوں یا

$$\frac{1}{\rho}=0$$

ہو گا جس سے

$$\rho=\infty \tag{6.18}$$

حاصل ہوتا ہے اور یا

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \tag{6.19}$$

ہو گا۔اس تفرقی مساوات کو بار بار تکمل لے کر حل کرتے ہیں۔پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}=A$$

یا

$$\mathrm{d}V=A\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسری بار تکمل سے

$$V=A\ln\rho+B$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ ہم قوہ سطحیں نلکی شکل کے ہیں۔یوں یہ مساوات محوری تار کا برقی دباو دیتی ہے۔ہم محوری تار کے بیرونی تار $\rho=b$ کو برقی زمین اور اندرونی تار $\rho=a$ کو V_0 برقی دباو پر تصور کرتے ہوئے

$$V=V_0\frac{\ln\frac{b}{\rho}}{\ln\frac{b}{a}} \tag{6.20}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی شکل کے چارج سے لامحدود فاصلے پر برقی دباو صفر ہی ہوتا ہے۔اسی وجہ سے ہم لامحدود فاصلے کو ہی برقی زمین کہتے آ رہے ہیں۔یوں لاپلاس مساوات کا پہلا حل یعنی مساوات 6.18 ہمارے امید کے عین مطابق ہے۔

مساوات 6.20 کو لے کر آگے بڑھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=\frac{V_0}{\rho}\frac{1}{\ln\frac{b}{a}}\boldsymbol{a}_\rho$$

اور

$$D_n = D\Big|_{\rho=a} = \frac{\epsilon V_0}{a \ln \frac{b}{a}}$$
$$Q = \frac{\epsilon V_0 2\pi a L}{a \ln \frac{b}{a}}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{b}{a}} \tag{6.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 146 پر مساوات 5.59 یہی جواب دیتا ہے۔

مساوات 6.17 کو ρ سے ضرب دینے سے بھی مساوات 6.19 حاصل ہوتا ہے۔البتہ یہ ضرب صرف اور صرف اس صورت ممکن ہے جب $\rho \neq 0$ ہو۔یاد رہے کہ $\rho = 0$ کی صورت میں $\frac{0}{0} = \frac{\rho}{\rho}$ ہو گا جو غیر معین[6] ہے۔یوں مساوات 6.20 صرف اس صورت مساوات 6.19 کا حل ہو گا اگر $\rho \neq 0$ ہو۔ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے لاپلاس مساوات کا حل

$$V = V_0 \frac{\ln \frac{b}{\rho}}{\ln \frac{b}{a}} \qquad \rho \neq 0 \tag{6.22}$$

لکھنا زیادہ درست ہو گا۔

مثال 6.3: اب تصور کرتے ہیں کہ برقی دباو نلکی محدد کے متغیرہ ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔اس صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

صورت اختیار کرے گا۔یہاں بھی پہلا حل $\rho = \infty$ حاصل ہوتا ہے۔ہم یہاں بھی $\rho = 0$ کو جواب کا حصہ تصور نہ کرتے ہوئے مساوات کو ρ^2 سے ضرب دیتے ہوئے اس سے جان چڑاتے ہیں۔یوں

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\phi^2} = 0 \qquad \rho \neq 0$$

رہ جاتا ہے۔دو مرتبہ تکمل لینے سے

$$V = A\phi + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ایسی دو ہم قوہ سطحیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\rho = 0$ کی صورت میں دونوں چادر آپس میں مل جائیں گی اور ان پر مختلف برقی دباو ممکن نہ ہو گا۔یوں $\rho = 0$ قابل قبول جواب نہیں ہے۔یہاں $\phi = 0$ کو برقی زمین جبکہ $\phi = \phi_0$ پر V_0 برقی دباو کی صورت میں

$$V = \frac{V_0 \phi}{\phi_0} \qquad \rho \neq 0 \tag{6.23}$$

---

[6] undefined

حاصل ہوتا ہے۔اس سے

$$\boldsymbol{E} = -\frac{V_0}{\phi_0 \rho}\boldsymbol{a}_\phi$$

حاصل ہوتا ہے۔ان چادروں کے کپیسٹنس کا حصول آپ سے حاصل کرنے کو سوال میں کہا گیا ہے۔

مثال 6.4: کروی محدد میں ϕ کے ساتھ تبدیلی کو مندرجہ بالا مثال میں دیکھا گیا لہٰذا اسے دوبارہ حل کرنے کی ضرورت نہیں۔ہم پہلے r اور بعد میں θ کے ساتھ تبدیلی کے مسئلوں کو دیکھتے ہیں۔

یہ زیادہ مشکل مسئلہ نہیں ہے لہٰذا آپ ہی سے سوالات کے حصے میں درخواست کی گئی ہے کہ اسے حل کرتے ہوئے برقی دباو کی مساوات

$$V = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \tag{6.24}$$

اور کپیسٹنس کی مساوات

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \tag{6.25}$$

حاصل کریں جہاں $r = b$ پر برقی زمین اور $r = a$ پر V_0 برقی دباو ہے اور $b > a$ ہے۔

مثال 6.5: کروی محدد میں θ کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\right) = 0 \tag{6.26}$$

صورت اختیار کرے گی۔اگر $r \neq 0$ اور $\sin\theta \neq 0$ ہوں تب اس مساوات کو $r^2 \sin\theta$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\right) = 0 \tag{6.27}$$

لکھا جا سکتا ہے۔$\sin\theta$ اس صورت صفر کے برابر ہو گا جب $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ ہوں۔اس کے پہلی بار تکمل سے

$$\sin\theta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = A$$

یا

$$\mathrm{d}V = \frac{A\,\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسری بار تکمل سے

$$V = A\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} + B = A\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + B \tag{6.28}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ ہم قوہ سطحیں مخروطی شکل رکھتے ہیں۔اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ پر $V = 0$ اور $\theta = \theta_0$ پر $V = V_0$ ہوں جہاں $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ ہے تب ہمیں

$$V = V_0 \frac{\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}{\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)} \tag{6.29}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آئیں ایسی مخروط اور سیدھی سطح کے مابین کپیسٹنس حاصل کریں جہاں مخروط کی نوک سے انتہائی باریک فاصلے پر سیدھی سطح ہو اور مخروط کا محور اس سطح کے عمود میں ہو۔پہلے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\boldsymbol{a}_\theta = -\frac{V_0}{r\sin\theta\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}\boldsymbol{a}_\theta \tag{6.30}$$

مخروط کی سطح پر سطحی چارج کثافت یوں

$$\rho_S = D_n = -\frac{\epsilon V_0}{r\sin\theta_0\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

ہو گا جس سے اس پر چارج

$$Q = -\frac{\epsilon V_0}{\sin\theta_0\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{r\sin\theta_0\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{r}$$

ہو گا۔تکمل میں رداس کا حد لامحدود ہونے کی وجہ سے چارج کی قیمت بھی لامحدود حاصل ہوتی ہے جس سے لامحدود کپیسٹنس حاصل ہو گا۔حقیقت میں محدود جسامت کے سطحیں ہی پائی جاتی ہیں لہٰذا ہم رداس کے حدود 0 تا r_1 لیتے ہیں۔ایسی صورت میں

$$\mathrm{C} = \frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln\left(\cot\frac{\theta_0}{2}\right)} \tag{6.31}$$

حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ ہم نے لامحدود سطح سے شروع کیا تھا لہٰذا چارج کی مساوات بھی صرف لامحدود سطح کے لئے درست ہے۔اس طرح مندرجہ بالا مساوات کپیسٹنس کی قریبی قیمت ہو گی نا کہ بالکل درست قیمت۔

6.5 پوئسن مساوات کے حل کی مثال

پوئسن مساوات تب حل کیا جا سکتا ہے جب ρ_h معلوم ہو۔حقیقت میں عموماً سرحدی برقی دباو وغیرہ معلوم ہوتے ہیں اور ہمیں ρ_h ہی درکار ہوتی ہے۔ہم پوئسن مساوات حل کرنے کی خاطر ایسی مثال لیتے ہیں جہاں ہمیں ρ_h معلوم ہو۔

سلیکان[7] کی پتری میں p اور n اقسام کے مواد کی ملاوٹ سے p اور n سلیکان پیدا کیا جاتا ہے۔ایک ہی سلیکان پتری پر آپس میں جڑے ہوئے p اور n خطے ڈایوڈ[8] کو جنم دیتے ہیں۔x محدد پر رکھے ایسے ہی ایک ڈایوڈ کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔تصور کریں کہ $x < 0$ خطہ p اور $x > 0$ خطہ n قسم کا ہے۔مزید یہ کہ دونوں جانب ملاوٹ کی مقدار یکساں ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ p یا n خطہ ازخود غیر چارج شدہ ہوتا ہے البتہ p خطے میں آزاد خول[9] اور n خطے میں آزاد الیکٹران[10] پائے جاتے ہیں۔ آزاد خول اور آزاد الیکٹران حرکت کر سکتے ہیں۔جس لمحہ یہ آپس میں جڑے خطے وجود میں آتے ہیں، اس وقت آزاد خول صرف p جانب جبکہ آزاد الیکٹران صرف n جانب پائے جاتے ہیں۔یوں اس لمحے ہی آزاد خول p سے n جانب اور آزاد الیکٹران n سے p جانب نفوذ[11] کے ذریعے حرکت کرنا شروع کر دیتے ہیں۔چارج کے اس حرکت سے جلد p اور n کے سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کا چارج جمع ہونے شروع ہو جاتا ہے۔یوں دو چادر کپیسٹر پر چارج کی طرح، سرحد کے دائیں یعنی $x > 0$ جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج جمع ہو جاتا ہے۔یہ چارج کپیسٹر کے چادروں کے درمیان برقی میدان کی طرح $\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{a}_x$ پیدا کرتا ہے جو بائیں سے دائیں جانب آزاد خول کے حرکت اور دائیں سے بائیں جانب آزاد الیکٹران کے حرکت کو روکتا ہے۔جب تک برقی میدان $\boldsymbol{E}$ چارج کے اس حرکت کو نہ روک سکے اس وقت تک چارج کا نفوذ جاری رہے گا جس سے سرحد کے دونوں جانب چارج کا انبار بڑھتا رہے گا جس سے $\boldsymbol{E}$ بڑھتی رہے گی۔آخر کار $\boldsymbol{E}$ کی قیمت اتنی ہو جائے گی کہ یہ نفوذ کو مکمل طور پر روک دے گا۔آئیں برقی سکون کے اس حال پر غور کریں۔ابتدا میں p اور n خطے دونوں غیر چارج شدہ تھے البتہ برقی سکون کی حالت اختیار کرنے کے بعد صاف ظاہر ہے کہ سرحد کے دائیں جانب مثبت جبکہ اس کے بائیں جانب منفی چارج پایا جاتا ہے۔سرحد کے دائیں جانب مثبت چارج دو وجوہات کی بنا ہے۔کچھ تو آزاد خول اس جانب منتقل ہوئے ہیں اور کچھ یہاں سے آزاد الیکٹران کی نفوذ سے مثبت ایٹم یہاں رہ گئے ہیں۔اسی طرح سرحد کے دوسری جانب منفی چارج کچھ تو آزاد الیکٹران کی آمد اور کچھ یہاں سے آزاد خول کے اخراج سے منفی ایٹموں کے رہ جانے کی وجہ سے ہے۔سرحد کے دونوں جانب الٹ قطب کے چارج میں قوت کشش پائی جاتی ہے جو انہیں سرحد کے قریب ہی رکھتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب چارج کے انبار کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔اس طرح کے انبار کو کئی مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے جن میں غالباً سب سے سادہ مساوات

$$\rho = 2\rho_0 \operatorname{sech}\frac{x}{a}\tanh\frac{x}{a} \tag{6.32}$$

ہے جہاں زیادہ سے زیادہ چارج کثافت ρ_0 ہے جو $x = 0.881a$ پر پائی جاتی ہے۔آئیں اس چارج کثافت کے لئے پوئسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{2\rho_0}{\epsilon}\operatorname{sech}\frac{x}{a}\tanh\frac{x}{a}$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2\rho_0}{\epsilon}\operatorname{sech}\frac{x}{a}\tanh\frac{x}{a}$$

---

[7] silicon
[8] diode
[9] free holes
[10] free electrons
[11] diffusion

حل کریں۔پہلی بار تکمل لیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} + A$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} - A$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔تکمل کے مستقل A کی قیمت اس حقیقت سے حاصل کی جا سکتی ہے کہ سرحد سے دور کسی قسم کا چارج کثافت یا برقی میدان نہیں پایا جاتا لہٰذا $x \to \mp\infty$ پر $E_x \to 0$ ہو گا جس سے $A = 0$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -\frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tag{6.33}$$

کے برابر ہے۔دوسری بار تکمل لیتے ہوئے

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} + B$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم برقی زمین کو عین سرحد پر لیتے ہیں۔ایسا کرنے سے $B = -\frac{\rho_0 a^2 \pi}{\epsilon}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \left(\tan^{-1} e^{\frac{x}{a}} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{6.34}$$

کے برابر ہو گا۔

شکل میں مساوات 6.32، مساوات 6.33 اور مساوات 6.34 دکھائے گئے ہیں جو بالترتیب حجمی چارج کثافت، برقی میدان کی شدت اور برقی دباو دیتے ہیں۔

سرحد کے دونوں جانب کے مابین برقی دباو V_0 کو مساوات 6.34 کی مدد سے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$V_0 = V_{x\to+\infty} - V_{x\to-\infty} = \frac{2\pi\rho_0 a^2}{\epsilon} \tag{6.35}$$

سرحد کے ایک جانب کل چارج کو مساوات 6.32 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں کل مثبت چارج

$$Q = S\int_0^\infty 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}\, \mathrm{d}x = 2\rho_0 a S \tag{6.36}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ڈایوڈ کا رقبہ عمودی تراش[12] S ہے۔مساوات 6.35 سے a کی قیمت مساوات 6.36 میں پر کرنے سے

$$Q = S\sqrt{\frac{2\rho_0 \epsilon V_0}{\pi}} \tag{6.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات سے کپیسٹنس کی قیمت $C = \frac{Q}{V_0}$ لکھ کر نہیں حاصل کی جا سکتی البتہ

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}t}$$

[12] cross sectional area

سے

$$C = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V_0}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 6.37 کا تفرق لیتے ہوئے

$$C = \sqrt{\frac{\rho_0 \epsilon}{2\pi V_0}} S = \frac{\epsilon S}{2\pi a}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے پہلے جزو سے ظاہر ہے کہ برقی دباو بڑھانے سے کپیسٹنس کم ہو گی۔مساوات کے دوسرے جزو سے یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ ڈایوڈ بالکل ایسے دو چادر کپیسٹر کی طرح ہے جس کے چادر کا رقبہ S اور چادروں کے مابین فاصلہ $2\pi a$ ہو۔یوں برقی دباو سے کپیسٹنس کے گھٹنے کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ برقی دباو بڑھانے سے a بڑھتا ہے۔

6.6 لاپلاس مساوات کا ضربی حل

گزشتہ حصے میں صرف ایک محدد کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی دباو کے لاپلاس مساوات پر غور کیا گیا۔اس حصے میں ایسے میدان پر غور کیا جائے گا جہاں برقی دباو ایک سے زیادہ محدد کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔تصور کریں کہ V کارتیسی محدد کے x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہو۔ایسی صورت میں لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{6.38}$$

صورت اختیار کرے گا۔تصور کریں کہ ایسی مساوات کے حل کو دو تفاعل $X(x)$ اور $Y(y)$ کے حاصل ضرب $X(x)Y(y)$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جہاں X تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف x اور Y تفاعل کا آزاد متغیرہ صرف y ہو۔یہاں آپ کو ایسا معلوم ہو رہا ہو گا کہ یہ شرط زیادہ تر ممکنہ جوابات کو پہلے سے ہی رد کرتا ہے۔ایسا ہی ایک سادہ حل $V = x + y$ اور دوسرا نسبتاً مشکل حل $V = G(x) + H(y)$ ہو سکتے ہیں جنہیں ہم انجانے طور پر رد کر رہے ہو سکتے ہیں۔ہم $V = x + y$ کو $V = V_1 + V_2$ لکھ سکتے ہیں جہاں

$$\begin{aligned} V_1 &= X_1(x)Y_1(y) = 1x \\ V_2 &= X_2(x)Y_2(y) = 1y \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $Y_1(y) = 1$ اور $X_2(x) = 1$ کے برابر ہیں۔یوں ہم دیکھتے ہیں کہ ہم x کو دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح y کو بھی دو تفاعل کے ضرب کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔ لاپلاس مساوات خطی ہونے کی بنا پر ان جوابات کا مجموعہ $x + y$ بھی لاپلاس مساوات کا حل ہو گا۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہم نے $V = x + y$ جواب کو ہرگز رد نہیں کیا۔ایسے ہی ثبوت سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $V = G(x) + H(y)$ جواب کو بھی رد نہیں کیا گیا۔

اب آتے ہیں اصل مسئلے پر۔اگر $V = XY$ مساوات 6.38 کا حل ہو تب

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

ہو گا جسے

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \tag{6.39}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یہاں آنکھیں کھول دینے والی دلیل پیش کرتے ہیں۔ مساوات 6.39 میں بائیں جانب صرف x متغیرہ پایا جاتا ہے جبکہ دائیں جانب صرف y متغیرہ پایا جاتا ہے۔یوں x تبدیل کرنے سے صرف بائیاں ہاتھ تبدیل ہو سکتا ہے جبکہ دایاں ہاتھ جوں کا توں رہے گا۔اب مساوات کہتا ہے کہ بائیں اور دائیں ہاتھ برابر ہیں۔ ایسا صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا کہ نا تو x تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو اور نا ہی y تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ تبدیل ہوتا ہو یعنی اگر دونوں ہاتھ کسی مستقل کے برابر ہوں جہاں اس مستقل کو m^2 لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔m^2 کو علیحدگی مستقل[13] کہا جاتا ہے۔

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = m^2 \tag{6.40}$$

اس مساوات کو دو اجزاء

$$\begin{aligned}\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} &= m^2\\ \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} &= -m^2\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - m^2 X(x) &= 0\\ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + m^2 Y(y) &= 0\end{aligned} \tag{6.41}$$

کی صورت میں لکھتے ہوئے باری باری حل کرتے ہیں۔

اس طرز کے مساوات آپ پہلے حل کر چکے ہوں گے جہاں جواب اندازے سے لکھتے ہوئے مساوات کو حل کیا جاتا ہے۔اسی طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں

$$X(x) = e^{\omega x}$$

پر کرتے ہیں۔یوں $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \omega^2 e^{\omega x}$ ہو گا لہٰذا

$$\omega^2 e^{\omega x} - m^2 e^{\omega x} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے

$$\omega = \mp m$$

حاصل ہو گا۔ω کے دونوں قیمتیں استعمال کرتے ہوئے یوں اصل جواب

$$X(x) = A' e^{mx} + B' e^{-mx} \tag{6.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا جواب اسی طرح

$$Y(y) = C\cos my + D\sin my \tag{6.43}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 6.38 کا پورا حل

$$V = XY = \left(A' e^{mx} + B' e^{-mx}\right)\left(C\cos my + D\sin my\right) \tag{6.44}$$

---

[13] separation constant

لکھا جائے گا۔

آئیں مساوات 6.41 کے حل کو ایک مرتبہ دوبارہ حاصل کریں۔البتہ اس مرتبہ جواب کا اندازہ لگانے کی بجائے ہم ایک ایسی ترکیب استعمال کریں گے جو انتہائی زیادہ طاقتور ثابت ہو گا اور جو آگے بار بار استعمال آئے گا۔

اس ترکیب میں ہم تصور کرتے ہیں کہ $X(x)$ تفاعل کو طاقتی سلسلے[14]

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \tag{6.45}$$

کی شکل میں لکھنا ممکن ہے جہاں a_0، a_1، a_2 وغیرہ طاقتی سلسلے کے مستقل ہیں۔یوں

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 + a_1 + 2a_2 x^1 + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

اور

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 + 0 + 2 \times 1 a_2 + 3 \times 2 a_3 x^1 + 4 \times 3 a_4 x^2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{6.46}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔مساوات 6.45 اور مساوات 6.46 کو مساوات 6.41 کے پہلے جزو میں پر کرتے ہیں

$$2 \times 1 a_2 + 3 \times 2 a_3 x^1 + 4 \times 3 a_4 x^2 + \cdots = m^2 \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \right)$$

جہاں ہم $m^2 X$ کو دائیں ہاتھ لے گئے ہیں۔یہاں بائیں اور دائیں ہاتھ کے طاقتی سلسلے صرف اس صورت x کے ہر قیمت کے لئے برابر ہو سکتے ہیں جب دونوں جانب x کے برابر طاقت کے ضربیہ[15] عین برابر ہوں یعنی جب

$$\begin{aligned} 2 \times 1 a_2 &= m^2 a_0 \\ 3 \times 2 a_3 &= m^2 a_1 \\ 4 \times 3 a_4 &= m^2 a_2 \end{aligned}$$

یا

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = m^2 a_n$$

ہوں۔جفت ضربیہ کو a_0 کی صورت میں یوں

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{m^2}{2 \times 1} a_0 \\ a_4 &= \frac{m^2}{4 \times 3} a_2 = \left(\frac{m^2}{4 \times 3} \right) \left(\frac{m^2}{2 \times 1} a_0 \right) = \frac{m^4}{m!} a_0 \\ a_6 &= \frac{m^6}{6!} a_0 \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے عمومی طور پر

$$a_n = \frac{m^n}{n!} a_0 \qquad (\text{جفت } n)$$

---

[14] power series
[15] coefficient

لکھا جا سکتا ہے۔طاق ضربیہ کو a_1 کی صورت میں

$$a_3 = \frac{m^2}{3 \times 2} a_1 = \frac{m^3}{3!} \frac{a_1}{m}$$
$$a_5 = \frac{m^5}{5!} \frac{a_1}{m}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ان کی عمومی مساوات

$$a_n = \frac{m^n}{n!} \frac{a_1}{m} \qquad (\text{طاق } n)$$

لکھی جا سکتی ہے۔انہیں واپس طاقتی سلسلے میں پر کرتے ہوئے

$$X = a_0 \sum_{\text{جفت},0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n + \frac{a_1}{m} \sum_{\text{طاق},1}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n$$

یا

$$X = a_0 \sum_{\text{جفت},0}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} + \frac{a_1}{m} \sum_{\text{طاق},1}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!}$$

حاصل ہوتا ہے۔غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مندرجہ بالا مساوات میں پہلا طاقتی سلسلہ دراصل $\cosh mx$ کے برابر

$$\cosh mx = \sum_{\text{جفت},0}^{\infty} \frac{(mx)^n}{n!} = 1 + \frac{(mx)^2}{2!} + \frac{(mx)^4}{4!} + \cdots$$

اور دوسرا طاقتی سلسلہ $\sinh mx$

$$\sinh mx = \sum_{\text{طاق},1}^{\infty} \frac{m^n}{n!} x^n = mx + \frac{(mx)^3}{3!} + \frac{(mx)^5}{5!} + \cdots$$

کے برابر ہے۔یوں

$$X = a_0 \cosh mx + \frac{a_1}{m} \sinh mx$$

یا

$$X = A \cosh mx + B \sinh mx$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں a_0 اور $\frac{a_1}{m}$ یا ان کی جگہ لکھے گئے A اور B کو سرحدی شرائط سے حاصل کیا جائے گا۔

$\cosh mx$ اور $\sinh mx$ کو

$$\cosh mx = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}$$
$$\sinh mx = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2}$$

لکھ کر

$$X = A' e^{mx} + B' e^{-mx}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں A' اور B' دو نئے مستقل ہیں۔یہ مساوات 6.42 ہی ہے۔

اسی طاقتی سلسلے کے طریقے کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل بھی دو طاقتی سلسلوں کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے جہاں ایک طاقتی سلسلہ $\cos my$ اور دوسرا $\sin my$ کے برابر ہوتا ہے۔یوں

$$Y = C\cos my + D\sin my \tag{6.47}$$

لکھا جا سکتا ہے جو عین مساوات 6.43 ہی ہے۔یوں

$$V = XY = (A\cosh mx + B\sinh mx)\left(C\cos my + D\sin my\right) \tag{6.48}$$

یا

$$V = XY = \left(A'e^{mx} + B'e^{-mx}\right)\left(C\cos my + D\sin my\right) \tag{6.49}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس آخری مساوات کا مساوات 6.44 کے ساتھ موازنہ کریں۔

مساوات 6.48 میں کل چار مستقل پائے جاتے ہیں جنہیں سرحدی شرائط سے حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں ان مستقل کو دو مختلف سرحدی شرائط کے لئے حاصل کریں۔پہلی صورت میں بجائے یہ کہ سرحدی شرائط سے ان مستقل کو حاصل کریں، ہم مستقل پہلے چنتے ہیں اور بعد میں ان چنے گئے مستقل کے مطابق سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں۔

تصور کریں کہ مساوات 6.48 میں A اور B دونوں یا C اور D دونوں صفر کے برابر ہیں۔ایسی صورت میں $V = 0$ حاصل ہو گا جو برقی دباو کی عدم موجودگی کو ظاہر کرتی ہے۔ہمیں عموماً برقی دباو کی موجودگی سے زیادہ دلچسپی ہوتی ہے۔آئیں ایک اور صورت دیکھیں۔

تصور کریں کہ A اور C صفر کے برابر ہے۔ایسی صورت میں مساوات 6.48 کو

$$V = V_0 \sinh mx \sin my \tag{6.50}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $BD = V_0$ لکھا گیا ہے۔چونکہ

$$\sinh mx = \frac{1}{2}\left(e^{mx} - e^{-mx}\right)$$

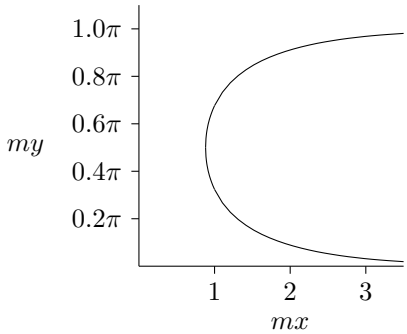
ہے لہٰذا $x = 0$ پر $\sinh mx = 0$ ہو گا جبکہ بڑھتے x کے ساتھ اس کی قیمت تقریباً e^{mx} کے تعلق سے بڑھتی ہے۔$\sin my$ کی قیمت $y = 0$، $y = \frac{\pi}{m}$، $y = \frac{2\pi}{m}$ وغیرہ پر صفر کے برابر ہو گی۔یوں صفر برقی دباو کے ہم قوہ سطحیں $x = 0$ اور $y = \frac{n\pi}{m}$ پر رکھی جا سکتیں ہیں جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہو سکتا ہے۔ہم ایسی ہم قوہ سطحیں $x = 0$، $y = 0$ اور $y = \frac{\pi}{m}$ پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔آخر میں V_0 ہم قوہ سطح مساوات 6.50 میں $V = V_0$ پر کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$V_0 = V_0 \sinh mx \sin my$$

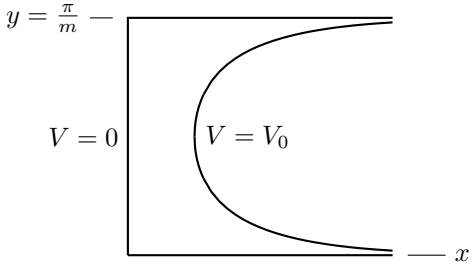
یا

$$my = \sin^{-1}\frac{1}{\sinh mx}$$

x کے مختلف قیمتوں کے لئے اس مساوات سے y کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے اس مساوات کے خط کو شکل 6.1 میں کھینچا گیا ہے۔



شکل 6.1: $my = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sinh mx}\right)$ کی مساوات۔



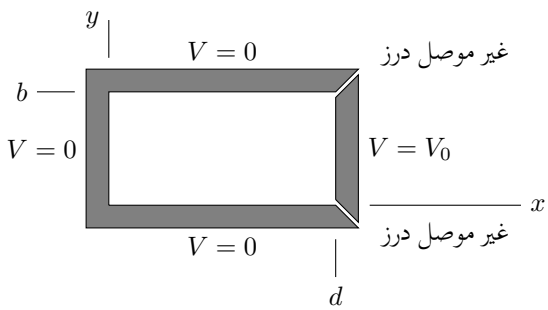
شکل 6.2: ہم قوہ سطحیں اور ان پر برقی دباو۔

ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے موصل ہم قوہ سطحیں شکل 6.2 میں دکھائی گئی ہیں۔یہ سطحیں z محدد کی سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں اور ان سے پیدا برقی دباو مساوات 6.50 دیتا ہے۔

ہم نے لاپلاس مساوات کے حل یعنی مساوات 6.50 کو لیتے ہوئے ان ہم قوہ سطحوں کو دریافت کیا جو ایسی برقی دباو پیدا کرے گی۔حقیقت میں عموماً موصل ہم قوہ سطحیں معلوم ہوں گی جن کا پیدا کردہ برقی دباو درکار ہو گا۔آئیں ایسی ایک مثال دیکھیں۔

شکل 6.3 میں موصل سطحیں اور ان پر برقی دباو دیا گیا ہے۔یہ سطحیں z سمت میں لامحدود لمبائی رکھتی ہیں۔سطحوں کے گھیرے خطے میں برقی دباو حاصل کرنا درکار ہے۔

یہاں سرحدی شرائط کچھ یوں ہیں۔$x = 0$، $y = 0$ اور $y = b$ پر برقی دباو صفر ہے جبکہ $x = d$ پر برقی دباو V_0 ہے۔دونوں



شکل 6.3: موصل سطحوں سے گھیرے خطے میں لاپلاس مساوات متعدد اجزاء کے مجموعے سے حاصل ہوتا ہے۔

ہم قوہ سطحوں کے مابین انتہائی باریک غیر موصل درز ہیں جن کی بنا پر ان کے برقی دباو مختلف ہو سکتے ہیں۔انس درز کے اثر کو نظرانداز کیا جائے گا۔

موجودہ مسئلے میں بھی برقی دباو صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لہٰذا مساوات 6.38 ہی اس مسئلے کا لاپلاس مساوات ہے جس کا حل مساوات 6.48 ہے۔ہم سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔مساوات 6.38 میں $x=0$ پر برقی دباو صفر پر کرنے سے

$$\begin{aligned}0 &= (A\cosh 0 + B\sinh 0)\left(C\cos my + D\sin my\right)\\ 0 &= A\left(C\cos my + D\sin my\right)\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ y کے تمام قیمتوں کے لئے یہ مساوات صرف

$$A=0$$

کی صورت میں درست ہو سکتا ہے لہٰذا پہلا مستقل صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔$y=0$ پر صفر برقی دباو پر کرنے سے

$$\begin{aligned}0 &= B\sinh mx\,(C\cos 0 + D\sin 0)\\ 0 &= BC\sinh mx\end{aligned}$$

لکھا جائے گا جو x کی ہر قیمت کے لئے صرف $BC=0$ کی صورت میں درست ہو گا۔اب چونکہ $A=0$ ہے لہٰذا B صفر نہیں ہو سکتا چونکہ ایسی صورت میں مساوات 6.38 سے برقی دباو صفر حاصل ہو گا۔یہ جواب ہمیں مطلوب نہیں ہے۔ہم وہ جواب چاہتے ہیں جس سے برقی دباو کے بارے میں علم حاصل ہو۔اس لئے $C=0$ کے برابر ہے۔اس طرح مساوات 6.48

$$V = BD\sinh mx\sin my \tag{6.51}$$

صورت اختیار کر لے گی۔اس مساوات میں $y=b$ پر صفر برقی دباو پر کرتے ہیں۔

$$0 = BD\sinh mx\sin mb$$

ہم B یا D کو صفر کے برابر نہیں لے سکتے چونکہ ایسی صورت میں $V=0$ جواب حاصل ہوتا ہے جس میں ہمیں کوئی دلچسپی نہیں۔یہ مساوات x کی ہر قیمت کے لئے صرف اس صورت درست ہو گا اگر

$$\sin mb = 0$$

ہو جس سے

$$mb = n\pi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

کے برابر ہو سکتا ہے۔اس طرح $m=\frac{n\pi}{b}$ لکھتے ہوئے مساوات 6.51

$$V = V_1\sinh\frac{n\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{6.52}$$

صورت اختیار کر لے گا جہاں BD کو V_1 لکھا گیا ہے۔مساوات 6.52 تین اطراف کے سطحوں پر صفر برقی دباو کے شرائط پر پورا اترتا حل ہے۔البتہ $x=d$ پر V_0 برقی دباو کے شرط کو مندرجہ بالا مساوات سے پورا کرنا ممکن نہیں۔ہمیں عموماً بالکل اسی طرز کے مسئلوں سے واسطہ پڑتا ہے جہاں آخری قدم پر معلوم ہوتا ہے کہ ہماری قمر دیوار کے ساتھ لگ گئی ہے جہاں سے ظاہری

طور پر نکلنے کا کوئی راستہ نہیں۔گھبرائیں نہیں۔ہمیں درپیش مسئلے کے تمام ممکنہ جوابات کو مساوات 6.52 کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں ان تمام جوابات کا مجموعہ بھی قابل قبول حل ہو گا یعنی ہم

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad (0 < y < b, n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{6.53}$$

بھی لکھ سکتے ہیں جہاں n کی ہر قیمت پر منفرد V_1 کو V_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔ n اور V_n کی قیمتیں ایسی رکھی جاتی ہیں کہ $x = d$ پر V_0 برقی دباو کے شرط کو پورا کیا جائے۔اس آخری شرط کو مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sinh \frac{n\pi d}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

یعنی

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.54}$$

ملتا ہے جہاں

$$c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$$

لکھا گیا ہے۔

مساوات 6.54 فوریئر تسلسل[16] ہے جس کے مستقل با آسانی حاصل کئے جا سکتے ہیں۔چونکہ ہمیں $0 < y < b$ کے خطے سے غرض ہے لہٰذا اس خطے کے باہر ہمیں برقی دباو سے کوئی غرض نہیں۔ایسی صورت میں ہم فوریئر تسلسل کے طاق یا جفت جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔طاق جوابات اس صورت حاصل ہوں گے اگر ہم $0 < y < b$ کو آدھا میعاد تصور کرتے ہوئے بقایا آدھے میعاد $b < y < 2b$ پر برقی دباو کو $-V_0$ تصور کریں یعنی

$$\begin{aligned} V &= +V_0 \qquad (0 < y < b) \\ V &= -V_0 \qquad (b < y < 2b) \end{aligned}$$

اسی صورت میں فوریئر تسلسل کے مستقل

$$c_n = \frac{1}{b}\left[\int_0^b V_0 \sin \frac{n\pi y}{b}\, \mathrm{d}y + \int_b^{2b} (-V_0) \sin \frac{n\pi y}{b}\, \mathrm{d}y\right]$$

سے

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{4V_0}{n\pi} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots) \\ c_n &= 0 \qquad (n = 2, 4, 6, \cdots) \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اب چونکہ $c_n = V_n \sinh \frac{n\pi d}{b}$ کے برابر ہے لہٰذا

$$V_n = \frac{4V_0}{n\pi \sinh(\frac{n\pi d}{b})} \qquad (n = 1, 3, 5, \cdots)$$

[16] Fourier series

ہو گا اور یوں مساوات 6.53 کو

$$V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,\text{طاق}}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sinh \frac{n\pi x}{b}}{\sinh \frac{n\pi d}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{6.55}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات سے مختلف نقطوں پر برقی دباو $V(x,y)$ حاصل کرتے ہوئے ان میں برابر برقی دباو رکھنے والے نقطوں سے گزرتی سطح ہم قوہ سطح ہو گی۔

مثال 6.6: شکل 6.3 میں $d = b$ اور $V_0 = 90\,\text{V}$ ہونے کی صورت میں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباو حاصل کریں۔

حل:ڈبے کا وسط $(\frac{b}{2}, \frac{b}{2})$ ہے۔مساوات 6.55 کے پہلے چند اجزاء لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
V &= \frac{4 \times 90}{\pi} \left(\frac{\sinh \frac{\pi}{2}}{\sinh \pi} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \frac{\sinh \frac{3\pi}{2}}{\sinh 3\pi} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \frac{\sinh \frac{5\pi}{2}}{\sinh 5\pi} \sin \frac{5\pi}{2} \right) \\
&= \frac{4 \times 90}{\pi} (0.199268 - 0.0029941887 + 0.0000776406) \\
&= 22.5\,\text{V}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

6.7 عددی دہرانے کا طریقہ

لاپلاس مساوات حل کرنے کے کئی ترکیب ہم دیکھ چکے۔کمپیوٹر کی مدد سے عددی دہرانے[17] کے طریقے سے مساوات حل کئے جاتے ہیں۔آئیں لاپلاس مساوات اسی ترکیب سے حل کریں۔

تصور کرتے ہیں کہ کسی خطے میں برقی میدان صرف x اور y کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔شکل 6.4 میں ایسی سطح دکھائی گئی ہے جسے h چوڑائی اور اتنے ہی لمبائی کے مربع کے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔اس میدان میں آپس میں قریبی پانچ نقطوں پر برقی دباو V_0، V_1، V_2، V_3 اور V_4 ہیں۔اگر یہ خطہ ہر جانب یکساں خاصیت رکھتا ہو اور یہ چارج سے پاک ہو تب $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$ اور $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ ہوں گے جس سے دو محدد میں

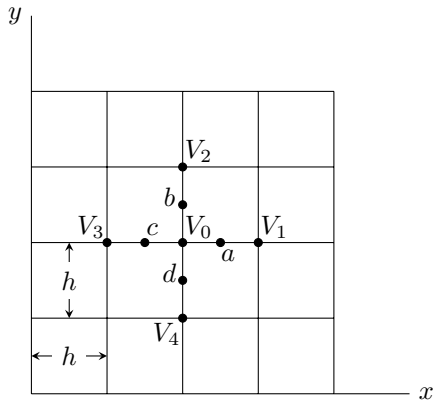
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ہونے کی وجہ سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

---

[17] numerical iteration



شکل 6.4: لاپلاس مساوات کے تحت کسی بھی نقطے پر برقی دباو قریبی نقطوں کے برقی دباو کا اوسط ہوتا ہے۔

صورت اختیار کر لیتی ہے جو لاپلاس مساوات ہے۔شکل 6.4 میں نقطہ a اور نقطہ c پر $\frac{\partial V}{\partial x}$ اور $\frac{\partial V}{\partial y}$ کی قیمتیں تقریباً

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a \doteq \frac{V_1 - V_0}{h}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c \doteq \frac{V_0 - V_3}{h}$$

ہوں گیں۔یوں ہم

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_0 \doteq \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c}{h} \doteq \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

لکھ سکتے ہیں۔بالکل اسی طرح ہم

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_0 \doteq \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_b - \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_d}{h} \doteq \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2}$$

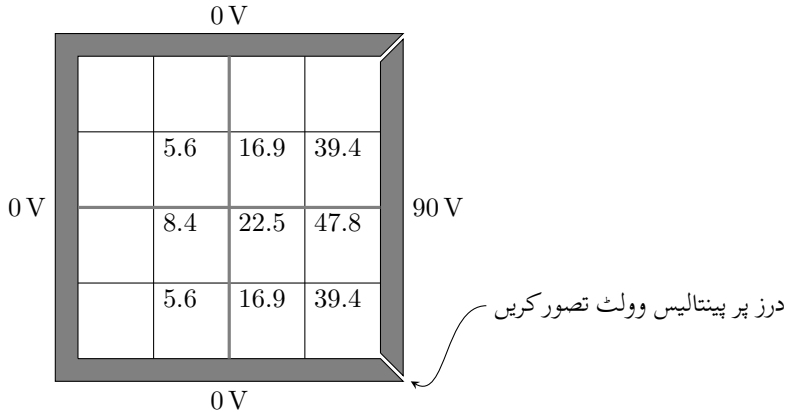
بھی لکھ سکتے ہیں۔ان دو جوابات کو لاپلاس مساوات میں پر کرنے

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \doteq \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} = 0$$

سے

$$V_0 \doteq \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4} \tag{6.56}$$

حاصل ہوتا ہے۔h لمبائی جتنی کم ہو مندرجہ بالا مساوات اتنا زیادہ درست ہو گا۔h کی لمبائی انتہائی چھوٹی کرنے سے مندرجہ بالا مساوات بالکل صحیح ہو گا۔یہ مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی دباو اس نقطے کے گرد چار نقطوں کے برقی دباو کا اوسط ہوتا ہے۔



شکل 6.5: رقبہ عمودی تراش کو خانوں میں تقسیم کرتے ہوئے، ہر کونے پر گرد کے چار نقطوں کے اوسط برابر برقی دباو ہو گا۔

عددی دہرانے کے طریقے میں تمام خطے کو شکل 6.4 کی طرز پر مربعوں میں تقسیم کرتے ہوئے مربع کے ہر کونے پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباو حاصل کیا جاتا ہے۔تمام خطے پر بار بار اسی طریقے سے برقی دباو حاصل کی جاتی ہے حتٰی کہ کسی بھی نقطے پر متواتر جوابات میں تبدیلی نہ پائی جائے۔اس طریقے کو مثال سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے۔

شکل 6.5 میں مربع شکل کے لامحدود لمبائی کے ڈبے کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے۔اس کے چار اطراف صفر برقی دباو پر ہیں جبکہ نہایت باریک غیر موصل فاصلے پر چوتھی طرف نوے وولٹ پر ہے۔اس ڈبے کو یوں خانوں میں تقسیم کیا گیا ہے کہ یا تو انہیں سولہ چھوٹے خانے تصور کیا جا سکتا ہے اور یا چار درمیانے جسامت کے خانے۔اس کے علاوہ پورے ڈبے کو ایک ہی بڑا خانہ بھی تصور کیا جا سکتا ہے۔آئیں ان خانوں کے کونوں پر مساوات 6.56 کی مدد سے برقی دباو حاصل کریں۔

اگرچہ کمپیوٹر پر ایسے مسائل حل کرتے ہوئے تمام کونوں پر ابتدائی برقی دباو صفر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھا جاتا ہے۔قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ذرہ سوچ کر چلنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ہم پورے مربع شکل کو ایک ہی بڑا خانہ تصور کرتے ہوئے اس کے عین وسط میں برقی دباو حاصل کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم بڑے خانے کے چار کونوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔یوں بڑے خانے کے چار کونوں کی برقی دباو زیر استعمال آئے گی۔اب دو کونوں پر صفر برقی دباو ہے جبکہ دو کونے غیر موصل درز پر مشتمل ہیں۔درز کے ایک جانب صفر جبکہ اس کی دوسری جانب نوے وولٹ ہیں، لہٰذا درز میں ان دو قیمتوں کا اوسط یعنی پینتالیس وولٹ برقی دباو تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح بڑے خانے کے وسط میں

$$V = \frac{45+45+0+0}{4} = 22.5\,\mathrm{V}$$

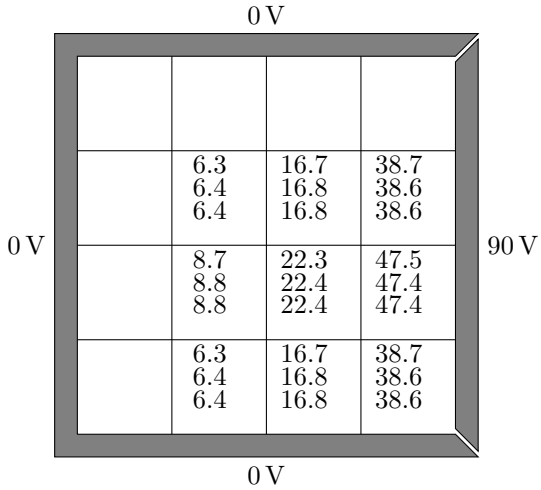
حاصل ہوتا ہے۔شکل 6.5 میں یہ قیمت دکھائی گئی ہے۔

آئیں اب چار درمیانے جسامت کے خانوں کے کونوں پر برقی دباو حاصل کریں۔یہاں بھی ہم ان خانوں کے کونوں کو چار قریبی نقطے چنتے ہیں۔اوپر دائیں بڑے خانے کے وسط میں برقی دباو حاصل کرنے کی خاطر اس خانے کے چار کونوں کے برقی دباو زیر استعمال لائے جائیں گے۔یوں درز پر پینتالیس وولٹ تصور کرتے ہوئے

$$V = \frac{90+45+0+22.5}{4} = 39.4\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح دائیں نچلے بڑے خانے کے وسط میں بھی

$$V = \frac{90+45+0+22.5}{4} = 39.4\,\mathrm{V}$$



شکل 6.6: چار بار دہرانے کے بعد جوابات تبدیل ہونا بند ہو جاتے ہیں۔یہی اصل جواب ہیں۔

حاصل ہوتا ہے۔ہم اس قیمت کو بغیر حل کئے شکل کو دیکھ کر ہی لکھ سکتے تھے چونکہ شکل کا اوپر والا آدھا حصہ اور اس کا نچلا آدھا حصہ بالکل یکساں ہیں لہٰذا ان دونوں حصوں میں بالکل یکساں برقی دباو ہو گا۔اس حقیقت کو یہاں سے استعمال کرنا شروع کرتے ہیں۔اوپر اور نیچے بائیں بڑے خانے بالکل یکساں ہیں لہٰذا دونوں کے وسط میں

$$V = \frac{22.5 + 0 + 0 + 0}{4} = 5.6\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔بقایا کونوں پر برقی دباو حاصل کرتے ہوئے نقطے کے بائیں، دائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کو قریبی نقطے چنتے ہیں۔یوں

$$\frac{90 + 39.4 + 22.5 + 39.4}{4} = 47.8\,\mathrm{V}$$
$$\frac{39.4 + 0 + 5.6 + 22.5}{4} = 16.9\,\mathrm{V}$$
$$\frac{22.5 + 5.6 + 0 + 5.6}{4} = 8.4\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔شکل 6.5 میں یہ تمام قیمت دکھائی گئی ہے۔

آئیں شکل میں اوپر سے نیچے چلتے ہوئے پہلے دائیں، پھر درمیانے اور آخر میں بائیں قطار کے تمام کونوں پر برقی دباو حاصل کریں۔ہم یہی سلسلہ بار بار دہرائیں گے حتٰی کہ کسی بھی کونے پر متواتر حاصل کردہ جوابات تبدیل ہونا بند کر دیں۔ہر کونے پر برقی دباو مساوات 6.56 کے استعمال سے حاصل کیا جائے گا جہاں کونے کے اوپر، نیچے، دائیں اور بائیں نقطوں کے برقی دباو کو استعمال کیا جائے گا۔یاد رہے کہ موصل سطحوں پر برقی دباو ہمیں پہلے سے ہی معلوم ہے لہٰذا ان پر برقی دباو حاصل کرنے کی کوشش نہیں کی جائے گی۔

اس طرح دائیں قطار کے اوپر جانب 39.4 V کی نئی قیمت

$$\frac{90 + 0 + 16.9 + 47.8}{4} = 38.7\,\mathrm{V}$$

ہو جائے گی۔اوپر اور نچلے آدھے حصوں کی مشابہت سے ہم قطار کی نچلی قیمت بھی یہی لکھتے ہیں۔شکل 6.6 میں یہ قیمتیں دکھائی گئی ہیں۔مساوات 6.56 میں نئی سے نئی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔یوں 47.8 V کی نئی قیمت

$$\frac{90 + 38.7 + 22.5 + 38.7}{4} = 47.5\,\mathrm{V}$$

ہو گی۔

درمیانے قطار پر آتے ہیں۔یہاں اوپر 16.9 V کی نئی قیمت

$$\frac{38.7+0+5.6+22.5}{4}=16.7\,\mathrm{V}$$

ہو گی جو قطار کے نچلے کونے کی بھی قیمت ہے۔اس قطار کے درمیانے نقطے کی نئی قیمت

$$\frac{47.5+16.7+8.4+16.7}{4}=22.3\,\mathrm{V}$$

ہو گی۔

اسی طرح بائیں قطار کی نئی قیمتیں بھی حاصل کی جاتی ہیں۔ان تمام کو شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے۔یہی سلسلہ دوبارہ دہرانے سے مزید نئے اور بہتر جوابات حاصل ہوں گے جنہیں گزشتہ جوابات کے نیچے لکھا گیا ہے۔شکل میں اس طرح تین بار دہرانے سے حاصل کئے گئے جوابات دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے کے آخری دو حاصل کردہ جوابات میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی۔اسی لئے ان آخری جوابات کو حتمی جوابات تسلیم کیا جاتا ہے۔

یہاں ڈبے کے عین وسط میں برقی دباو 22.4 V حاصل ہوا ہے۔مثال 6.6 میں ڈبے کے وسط پر برقی دباو طاقتی سلسلے کی مدد سے 22.5 V حاصل ہوئی تھی جو تقریباً اتنی ہی قیمت ہے۔یاد رہے کہ یہاں ہم نے اشاریہ کے بعد صرف ایک ہندسہ رکھتے ہوئے برقی دباو حاصل کئے۔اسی وجہ سے دونوں جوابات میں معمولی فرق ہے۔

اگر ہم سوچ سے کام نہ لیتے ہوئے سیدھ و سیدھ مساوات 6.56 میں شروع سے دائیں، بائیں، اوپر اور نیچے نقطوں کی قیمتیں استعمال کرتے، تب ہمیں قطعی جوابات دس مرتبہ دہرانے کے بعد حاصل ہوتے۔اگرچہ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے آپ ضرور سوچ سمجھ سے ہی کام لیں گے البتہ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ایسا کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی۔کمپیوٹر کے لئے کیا ایک مرتبہ اور کیا دس ہزار مرتبہ۔

اس مثال میں ہم نے بہت کم نقطوں پر برقی دباو حاصل کی تا کہ دہرانے کا طریقہ با آسانی سمجھا جا سکے۔کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے آپ زیادہ سے زیادہ نقطے چن سکتے ہیں۔بہتر سے بہتر نتائج، زیادہ سے زیادہ نقطے چننے سے حاصل ہوتا ہے نا کہ کم نقطوں پر زیادہ ہندسوں پر مبنی جوابات سے۔دہرانے کا طریقہ اس مرتبہ تک دہرایا جاتا ہے جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر حاصل کردہ جوابات میں فرق اتنی کم ہو کہ اسے رد کرنا ممکن ہو۔یوں ایک مائیکرو وولٹ تک درست جوابات حاصل کرنے کی خاطر اس وقت تک دہرائی کی جائے گی جب تک کسی بھی نقطے پر دو متواتر جوابات میں فرق ایک مائیکرو وولٹ سے کم نہ ہو جائے۔

سوالات

سوال 6.1: صفحہ 161 پر مساوات 6.13 عمومی محدد میں لاپلاسی دیتا ہے۔اس مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 6.2: مثال 6.3 کو حتمی نتیجے تک پہنچاتے ہوئے اس کا کپیسٹنس حاصل کریں۔

سوال 6.3: مثال 6.4 میں دیے مساوات 6.24 اور مساوات 6.25 حاصل کریں۔

سوال 6.4: مساوات 6.28 کے تکمل کو حل کریں۔

سوال 6.5: مساوات 6.29 حاصل کریں۔

سوال 6.6: مساوات 6.31 حل کریں۔

سوال 6.7: مساوات 6.41 کے دوسرے جزو کا حل طاقتی سلسلے کے طریقے سے حاصل کریں۔ثابت کریں کہ اس حل کو مساوات 6.47 کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 6.8: دہرانے کے طریقے میں اشاریہ کے نشان کے بعد دو ہندسوں تک درستگی استعمال کرتے ہوئے شکل 6.5 میں دئے تمام نقطوں پر برقی دباو چار مرتبہ دہرانے سے حاصل کریں۔ڈبے کے وسط میں برقی دباو کیا حاصل ہوتی ہے۔

جواب: 22.49 V

باب 7

ساکن مقناطیسی میدان

برقی میدان کا منبع برقی چارج ہے جس پر باب 2 میں تفصیلی غور کیا گیا۔مقناطیسی میدان کا منبع یا تو مقناطیس ہو سکتا ہے، یا وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان اور یا پھر برقی رو۔اس کتاب میں مقناطیس سے پیدا مقناطیسی میدان پر غور نہیں کیا جائے گا۔وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا مقناطیسی میدان پر ایک اور باب میں غور کیا جائے گا جبکہ اس باب میں برقی رو سے پیدا ساکن مقناطیسی میدان پر غور کیا جائے گا۔

7.1 بایوٹ-سیوارٹ کا قانون

برقی رو اور اس سے پیدا مقناطیسی میدان کا تعلق بایوٹ-سیوارٹ[1] کا قانون[2]

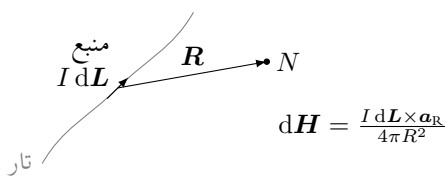
$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}}{4\pi R^2} \tag{7.1}$$

بیان کرتا ہے جہاں سے مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ کی اکائی ایمپیئر فی میٹر $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)$ حاصل ہوتی ہے۔آئیں شکل 7.1 کی مدد سے اس قانون کا مطلب سمجھیں۔

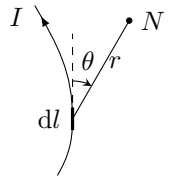
یہ قانون باریک تار کے انتہائی چھوٹے حصے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ جس میں I برقی رو گزر رہا ہو سے نقطہ N پر پیدا سمتی برقی میدان $\boldsymbol{H}$ دیتا ہے۔نقطہ N باریک تار کے چھوٹے حصے سے $\boldsymbol{R}$ فاصلے پر ہے۔باریک تار سے مراد ایسی ٹھوس نلکی نما موصل تار ہے جس کے

[1] Biot-Savart law

[2] یہ قانون فرانس کے بایوٹ اور سیوارٹ نے 1820 میں پیش کیا۔یہ دونوں ایمپیئر کے ساتھی تھے۔



شکل 7.1: بایوٹ سیوارٹ کا قانون۔



شکل 7.2: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا میدان۔

رقبہ عمودی تراش کا رداس کم سے کمتر ہو۔چھوٹے لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی سمت برقی رو کی سمت میں ہے جبکہ $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ منبع مقناطیسی میدان ہے۔

مقناطیسی شدت کی قیمت برقی رو ضرب باریک چھوٹی تار کی لمبائی ضرب $\boldsymbol{R}$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کے مابین زاویہ کے سائن کے برائے راست تناسب جبکہ ان کے مابین فاصلہ R کے مربع کے بالعکس تناسب رکھتی ہے۔تناسبی مستقل $\frac{1}{4\pi}$ ہے۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کا موازنہ کولومب کے قانون کے ساتھ کرنے کی غرض سے دونوں مساوات کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 &= \frac{I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}\\ \mathrm{d}\boldsymbol{E}_2 &= \frac{\mathrm{d}Q_1\boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^2}\end{aligned} \tag{7.2}$$

ان مساوات میں زیر نوشت میں 2 اس مقام کو ظاہر کرتی ہے جہاں میدان کی قیمت حاصل کی گئی ہے جبکہ زیر نوشت میں 1 میدان کے منبع کے مقام کو ظاہر کرتی ہے۔دونوں میدان فاصلے کے مربع کا بالعکس تناسب رکھتے ہیں۔دونوں اقسام کے میدان کی شدت اور میدان کی منبع کا خطی تعلق ہے۔دونوں میں فرق میدان کی سمت کا ہے۔برقی میدان کی سمت منبع سے اس نقطہ کی جانب ہے جہاں میدان حاصل کیا جا رہے ہو۔مقناطیسی میدان کی سمت سمتی ضرب کے دائیں ہاتھ کے قانون سے حاصل ہوتی ہے۔

شکل 7.2 میں تار کے چھوٹے حصے $\mathrm{d}l$ سے نقطہ N پر مقناطیسی میدان کی مقدار

$$\mathrm{d}H = \frac{I\,\mathrm{d}l\sin\theta}{4\pi r^4} \tag{7.3}$$

ہو گا۔

بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مساوات 7.1 کی شکل میں تجرباتی طور پر ثابت نہیں کیا جا سکتا چونکہ باریک تار کے چھوٹی لمبائی میں برقی رو تب گزرے گی جب یہ اس تک پہنچائی جائے۔جو تار اس تک برقی رو پہنچائے گا، وہ بھی مقناطیسی میدان پیدا کرے گا۔انہیں علیحدہ علیحدہ نہیں کیا جا سکتا۔ہم فی الحال صرف یک سمتی برقی رو کی بات کر رہے ہیں۔ یک سمتی برقی رو کی صورت میں وقت کے ساتھ حجمی چارج کثافت تبدیل نہیں ہو گا لہٰذا صفحہ 121 پر دئے استمراری مساوات

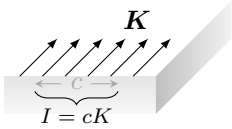
$$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\frac{\partial\rho_h}{\partial t}$$

سے

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0 \tag{7.4}$$

حاصل ہو گا جسے مسئلہ پھیلاو کی مدد سے

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$



شکل 7.3: سطحی کثافت برقی رو کے c چوڑائی میں کل cK برقی رو ہو گا۔

لکھا جا سکتا ہے۔یہ مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی بند سطح سے گزرتی برقی رو صفر کے برابر ہے۔یہ صرف اس صورت ممکن ہے جب برقی رو کسی بند راہ پر گزر رہی ہو۔ہمیں ایسی ہی مکمل بند راہ کے برقی رو کے اثر کو دیکھنا ہو گا نا کہ تار کے کسی چھوٹے حصے کے برقی رو کو۔

یوں بایوٹ-سیوارٹ قانون کی تکمل شکل

$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{R}}{4\pi R^2} \tag{7.5}$$

ہی تجرباتی طور ثابت کی جا سکتی ہے۔

مساوات 7.1 سے مساوات 7.5 لکھی جا سکتی ہے۔البتہ مساوات 7.5 میں تکمل کے اندر کوئی بھی ایسی اضافی تفاعل شامل کیا جا سکتا ہے جس کا بند تکمل صفر کے برابر ہو۔مقداری میدان کا ڈھلوان ہر صورت بقائی میدان ہوتا ہے لہٰذا مساوات 7.5 میں $\nabla \mathrm{G}$ کے شمول سے اس کے جواب میں کوئی فرق نہیں پڑے گا۔G کوئی بھی مقداری میدان ہو سکتا ہے۔اس حقیقت کا تذکرہ اس لئے کیا جا رہا ہے کہ اگر ہم ایک چھوٹے برقی رو گزارتے تار پر دوسرے چھوٹے برقی رو گزارتے تار سے پیدا قوت دریافت کرنا چاہیں جہاں تجرباتی طور پر ان کا میدان قابل دریافت نہ ہو تب ہمیں احمقانہ جوابات ہی حاصل ہوں گے۔

شکل 7.3 میں یکساں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ دکھایا گیا ہے۔سطحی کثافت برقی رو کو ایمپیئر فی اکائی چوڑائی پیش کیا جاتا ہے لہٰذا c چوڑائی کے حصے میں

$$I = cK$$

برقی رو ہو گا۔اگر کثافت برقی رو یکساں نہ ہو تب کسی بھی چوڑائی میں کل برقی تو بذریعہ تکمل

$$I = \int K\,\mathrm{d}c$$

حاصل ہو گی جہاں $\mathrm{d}c$ چوڑائی کا چھوٹا حصہ ہے۔یوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ یا حجمی کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ کی صورت میں

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}v \tag{7.6}$$

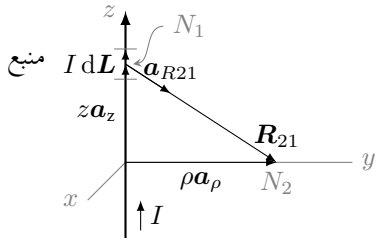
لکھا جا سکتا ہے۔یوں بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو

$$\boldsymbol{H} = \int_S \frac{\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{R}\,\mathrm{d}S}{4\pi R^2} \tag{7.7}$$

یا

$$\boldsymbol{H} = \int_h \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{R}\,\mathrm{d}h}{4\pi R^2} \tag{7.8}$$

لکھا جا سکتا ہے۔



شکل 7.4: سیدھی لامحدود تار سے پیدا مقناطیسی میدان

آئیں برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار سے پیدا مقناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔شکل 7.4 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔اس تار کے دونوں سرے لامحدود فاصلے پر ہیں۔تار کے قریب نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان کا بیشتر حصہ تار کے اس حصے کی وجہ سے ہو گا جو N_2 کے قریب ہو۔یوں لامحدود فاصلے پر تار کے سروں تک برقی رو پہنچانے والے تار کا نقطہ N_2 پر اثر کو نظرانداز کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

نقطہ N_1 پر تار کے چھوٹے حصے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں برقی رو کو منبع مقناطیسی میدان تصور کرتے ہوئے مساوات 7.1 کی مدد سے نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان لکھی جا سکتی ہے۔چونکہ

$$\boldsymbol{R}_{21} = \rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_z$$

کے برابر ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} R_{21} &= |\boldsymbol{R}_{21}| = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \boldsymbol{a}_R &= \frac{\boldsymbol{R}_{21}}{|\boldsymbol{R}_{21}|} = \frac{\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔نلکی محدد میں چھوٹی لمبائی

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{a}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_z$$

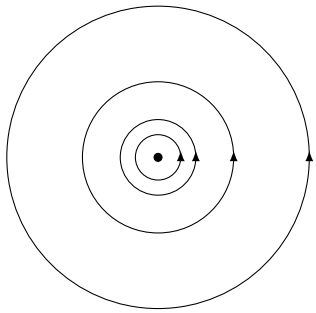
لکھی جاتی ہے۔چونکہ یہاں $\mathrm{d}\rho = 0$ اور $\mathrm{d}\phi = 0$ ہیں لہٰذا $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_z$ لکھتے ہوئے مساوات 7.1 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 = \frac{I\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_z \times (\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

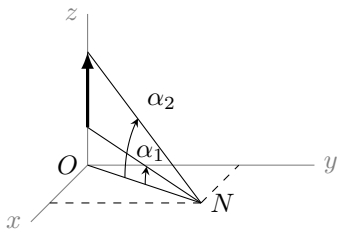
لکھا جا سکتا ہے۔پورے تار کا مقناطیسی میدان اس مساوات کے تکمل سے حاصل ہو گا جہاں تکمل$-\infty$ تا $+\infty$ حاصل کیا جائے گا۔اس طرح

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_z \times (\rho\boldsymbol{a}_\rho - z\boldsymbol{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{I\rho}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{a}_\phi\,\mathrm{d}z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں صفحہ 19 پر مساوات 1.23 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{a}_\rho = \boldsymbol{a}_\phi$ جبکہ مساوات 1.24 کی مدد سے $\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{a}_z = 0$ لکھے گئے ہیں۔



شکل 7.5: سیدھی لمبی تار کا مقناطیسی میدان تار کے گرد دائرے بناتا ہے۔برقی رو صفحے سے باہر نکل رہی ہے۔



شکل 7.6: سیدھی محدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت۔

مندرجہ بالا مساوات میں تکمل کے اندر $\boldsymbol{a}_\phi$ پر نظر رکھنا ہو گا۔اگرچہ $\boldsymbol{a}_\phi$ اکائی سمتیہ ہے لہٰذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہو سکتی البتہ یہ دیکھنا ضروری ہے کہ آیا تکمل کا متغیرہ یعنی z تبدیل کرنے سے $\boldsymbol{a}_\phi$ کی سمت تو تبدیل نہیں ہوتی۔صفحہ 22 پر مساوات 1.34 کے تحت

$$\boldsymbol{a}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ z تبدیل کرنے سے $\boldsymbol{a}_\phi$ پر کوئی اثر نہیں پڑتا لہٰذا $\boldsymbol{a}_\phi$ کو تکمل کے باہر منتقل کیا جا سکتا ہے۔یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_2 &= \frac{I\rho\boldsymbol{a}_\phi}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{I\rho\boldsymbol{a}_\phi}{4\pi}\left.\frac{z}{\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}}\right|_{-\infty}^{+\infty}\end{aligned} \tag{7.9}$$

سے

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi \tag{7.10}$$

حاصل ہوتا ہے۔شکل 7.5 میں برقی رو صفحہ سے باہر نکل رہی ہے جبکہ گول دائرے مقناطیسی میدان کو ظاہر کرتے ہیں۔اگر تار کو دائیں ہاتھ سے یوں پکڑا جائے کہ انگوٹھا برقی رو کی سمت میں ہو تب اس ہاتھ کی انگلیاں تار کے گرد مقناطیسی میدان کی سمت میں لپٹی ہوں گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مقناطیسی میدان نا نو z اور نا ہی زاویہ ϕ کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔اس کی قیمت صرف تار سے فاصلے پر منحصر ہے۔

اگر شکل 7.4 میں تار لامحدود نہ ہو تب مساوات 7.6 میں تکمل کے محدود حدود پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی شدت

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi\rho}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)\boldsymbol{a}_\phi \tag{7.11}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں شکل 7.6 میں α_1 اور α_2 کی نشاندہی کی گئی ہے۔تار کا نچلا سرا xy سطح یعنی $z=0$ سطح سے نیچے ہونے کی صورت میں α_1 کی قیمت منفی ہو گی۔یہی کچھ تار کے دوسرے سرے اور α_2 کے لئے بھی درست ہے۔

7.2 ایمپیئر کا دوری قانون

کولومب کے قانون کی مدد سے مختلف طرز پر پائے جانے والے چارج کے برقی میدان حاصل کرنے کے بعد ہم نے گاؤس کا قانون اخذ کیا جس سے ہماری زندگی نہایت آسان ہو گئی۔گاؤس کے قانون کی مدد سے تشاکل چارج سے پیدا برقی میدان انتہائی آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔تشاکل برقی رو کے مقناطیسی میدان حاصل کرنے کا بھی اتنا ہی آسان طریقہ موجود ہے جسے ایمپیئر کا دوری قانون[3] کہتے ہیں۔اس قانون کو بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے حصہ 7.7.2 میں حاصل کیا گیا ہے۔فی الحال ہم اس قانون کو استعمال کرنا سیکھتے ہیں۔اس قانون کے استعمال کے وقت مسئلے پر غور کرتے ہوئے بغیر حساب و کتاب کے فیصلہ کیا جاتا ہے کہ مقناطیسی میدان کے کون کون سے اجزاء موجود نہیں ہونے چاہئے۔یہ فیصلہ برقی رو کے راستے کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔

ایمپیئر کا دوری قانون کہتا ہے کہ یک سمتی برقی رو کے گرد کسی بھی راہ $\boldsymbol{H}$ کا لکیری بند تکمل گھیرے برقی رو کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I \tag{7.12}$$

لکیری بند تکمل کی سمت میں برقی رو کے گرد دائیں ہاتھ کی انگلیاں گھمانے سے اسی ہاتھ کا انگوٹھا مثبت برقی رو کی سمت دے گا۔ایسا کرتے وقت انگوٹھے کو باقی چار انگلیوں کے عمودی رکھا جاتا ہے۔

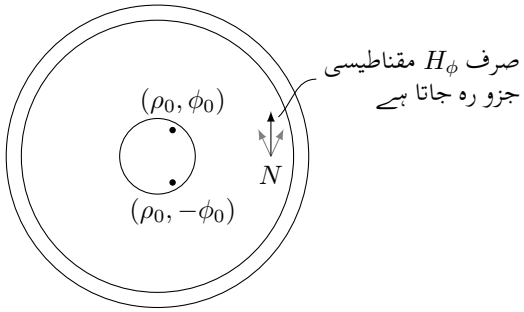
کسی بھی راہ $\boldsymbol{H}$ کے لکیری تکمل سے مراد اس راہ کو انتہائی چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں تقسیم کر کے ہر ٹکڑے پر $\boldsymbol{H}$ کی قیمت استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ حاصل کر کے تمام $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کا مجموعہ حاصل کرنا ہے۔مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ کی قیمت مختلف مقامات پر عموماً مختلف ہو گی۔یوں کسی ایک نقطے پر $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمت کسی دوسرے نقطے کے $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ سے مختلف ہو گی۔ایمپیئر کا دوری قانون کہتا ہے کہ اگرچہ یک سمتی برقی رو کے گرد دو مختلف بند راہوں پر جگہ جگہ $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی قیمتیں مختلف ہوں گی لیکن دونوں راہ پر ان کا مجموعہ عین برقی رو کے برابر ہو گا۔

کسی بھی سطح کا محیط، بند راہ ہوتی ہے۔اسی طرح کوئی بھی بند راہ، لامحدود سطحوں کا محیط ہوتا ہے۔یوں بند راہ کا گھیرا ہوا برقی رو ان تمام سطحوں کو چھیرتا ہوا گزرے گا جن کا محیط یہ بند راہ ہو۔

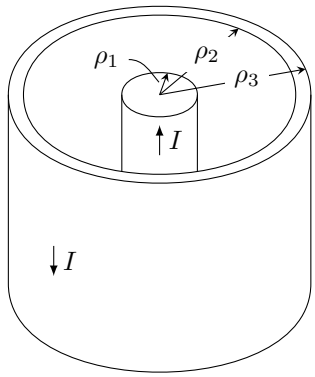
گاؤس کے قانون کا استعمال تب ممکن ہوتا ہے جب بند سطح میں کل برقی چارج معلوم ہو۔ایمپیئر کا دوری قانون اس صورت استعمال کیا جا سکتا ہے جب بند راہ میں گھیرا کل یک سمتی برقی رو معلوم ہو۔

---

[3] Ampere's circuital law



(ب) رداسی اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں اور یوں صرف زاویائی جزو رہ جاتا ہے۔



(ا) ہم محوری تار کے اندرونی تار میں مثبت جبکہ بیرونی تار میں منفی برقی رو ہے۔

شکل 7.7: ہم محوری تار۔

آئیں شکل 7.4 میں دکھائے گئے برقی رو گزارتے سیدھی لامحدود لمبائی کے تار کی مقناطیسی شدت ایمپیئر کے دوری قانون یعنی مساوات 7.12 کی مدد سے دوبارہ حاصل کریں۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے برقی رو کے گرد راہ یوں چنی جاتے ہے کہ اس پر $\boldsymbol{H}$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ یا تو آپس میں عمودی ہوں اور یا $\boldsymbol{H}$ کی قیمت قطعی اور اس کی سمت $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کے متوازی ہو۔پہلی صورت میں دونوں متغیرات کے مابین نوے درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 90 = 0$ ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ صفر کے برابر ہو گا اور یوں راہ کے اس حصے پر تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ دوسری صورت میں متغیرات کے مابین صفر درجے کا زاویہ ہے اور $\cos 0 = 1$ ہوتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو $H\,\mathrm{d}L$ لکھا جا سکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ مقناطیسی شدت کی قیمت قطعی ہونے کی وجہ سے H کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔یوں راہ کے اس راستے پر تکمل کی قیمت HL کے برابر ہو گی جہاں L راہ کے اس حصے کی لمبائی ہے۔

تار کے گرد اور اس کے ساتھ ساتھ حرکت کرنے سے واضح ہوتا ہے کہ مسئلے کی نوعیت نا تو تار کے گرد زاویہ ϕ پر اور نا ہی محدد z پر منحصر ہے۔تار سے دور یا اس کے قریب ہونے سے ہی مسئلے کی نوعیت میں تبدیلی آتی ہے۔یوں صاف ظاہر ہے کہ مقناطیسی شدت صرف ρ پر منحصر ہو سکتی ہے۔اسی طرح بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی شدت $\boldsymbol{a}_\phi$ سمت رکھتی ہے یعنی اس کا صرف H_ϕ جزو پایا جائے گا۔یوں اگر ρ تبدیل کئے بغیر تار کے گرد چلا جائے تو ہم یقین رکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{H}$ کی حتمی قیمت H_ϕ تبدیل نہیں ہو گی۔ساتھ ہی ساتھ اس راہ پر کسی بھی نقطے پر $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \rho\,\mathrm{d}\phi\boldsymbol{a}_\phi$ اور $H_\phi\boldsymbol{a}_\phi$ آپس میں متوازی ہوں گے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho\,\mathrm{d}\phi = H_\phi \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = H_\phi 2\pi\rho = I$$

یا

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

حاصل ہوتا ہے جو ہم پہلے بھی حاصل کر چکے ہیں۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال کی دوسری مثال کی خاطر ہم شکل 7.7 میں دکھائے گئے ہم محوری تار لیتے ہیں۔فرض کریں کہ z محدد پر پڑی ایسی لامحدود لمبائی کے ہم محوری تار کے اندرونی حصے میں I اور اس کے بیرونی سطح میں $-I$ برقی رو

گزر رہی ہے۔اندرونی موصل موٹی ساخت کے تار کو نہایت پتلی فرضی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔آئیں ان پتلی فرضی تاروں سے نقطہ N پر پیدا مقناطیسی شدت پر غور کریں۔نقطہ N کو کارتیسی محدد کے x محدد پر رکھتے ہوئے مسئلے کی نوعیت شکل 7.7-ب میں دکھائی گئی ہے۔پچھلی مثال سے یہ واضح ہے کہ ایسی کسی بھی پتلی تار کی مقناطیسی شدت میں H_z جزو نہیں پایا جاتا۔ساتھ ہی ساتھ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ایسی تار کی مقناطیسی شدت تار کے گرد گول دائرہ بناتی ہے۔کسی بھی فرضی تار جو (ρ_0, ϕ_0) پر پایا جاتا ہو N پر ΔH_ρ اور ΔH_ϕ اجزاء پیدا کرے گا۔اسی طرح $(\rho_0, -\phi_0)$ پر پتلی تار سے پیدا مقناطیسی شدت کے بھی ایسے رداسی اور زاویائی اجزاء ہوں گے۔ان دونوں پتلی تاروں کے رداسی اجزاء آپس میں الٹ سمت میں ہوں گے لہٰذا یہ ایک دونوں کو ختم کرتے ہیں جبکہ زاویائی اجزاء ایک ہی سمت میں ہوتے ہیں لہٰذا N پر صرف زاویائی جزو پایا جائے گا۔

اندرونی ٹھوس موصل تار کے گرد ایسا گول دائرہ لیتے ہیں جس کا رداس ρ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے زیادہ مگر بیرونی تار کے اندرونی رداس ρ_2 سے کم ہو۔اس راہ پر ہم ایمپیئر کے دوری قانون کی مدد سے

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho_1 < \rho < \rho_2) \tag{7.13}$$

لکھ سکتے ہیں۔

اندرونی تار کا رقبہ عمودی تراش $\pi\rho_1^2$ ہے لہٰذا اس میں کثافت برقی رو $\frac{I}{\pi\rho_1^2}$ ہو گی۔اگر ρ کو اندرونی ٹھوس موصل تار کے رداس ρ_1 سے کم رکھا جائے تب یہ راہ

$$I_{\text{گھیرا}} = \frac{I}{\pi\rho_1^2}\pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{\rho_1^2} I$$

برقی رو کو گھیرے گا لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اندرونی ٹھوس تار میں

$$H_\phi = \frac{\rho I}{2\pi\rho_1^2} \qquad (\rho < \rho_1)$$

مقناطیسی شدت پایا جائے گا۔اسی طرح اگر ρ کو بیرونی تار کے بیرونی رداس ρ_3 سے زیادہ رکھا جائے تب یہ راہ اندرونی تار کے $+I$ اور بیرونی تار کے $-I$ کو گھیرے گی لہٰذا یہ کل $I - I = 0$ برقی رو کو گھیرے گا لہٰذا

$$H_\phi = 0 \qquad (\rho_3 < \rho)$$

ہو گا۔آخر میں اس صورت کو بھی دیکھتے ہیں جب ρ بیرونی تار کے اندر پایا جائے۔ایسی صورت میں یہ راہ

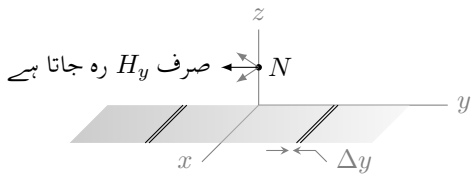
$$I_{\text{گھیرا}} = I - \left(\frac{\rho^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) I = \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) I$$

برقی رو گھیرے گی لہٰذا بیرونی تار میں

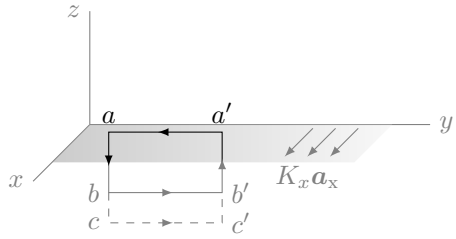
$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) \qquad (\rho_2 < \rho < \rho_3)$$

ہو گا۔

ہم محوری تار کے باہر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے۔اس کی وجہ یہ ہے کہ تار کے باہر کوئی بھی بند گول دائرہ اندرونی تار کے برقی رو I اور بیرونی تار کے برقی رو $-I$ دونوں کو گھیرتا ہے۔یہ دونوں برابر مقدار مگر الٹ سمت کے برقی رو ہر نقطے



(ب) کسی بھی نقطے کے دونوں جانب فرضی تاروں کے H_z اجزاء آپس میں ختم ہو جاتے ہیں جبکہ ان کے H_y اجزاء جمع ہوتے ہیں۔



(ا) لامحدود جسامت کے موصل سطح پر سطحی کثافت برقی رو۔

شکل 7.8: لامحدود سطحی کثافت برقی رو۔

پر برابر مگر الٹ سمت میں مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ہم محوری تار کی یہ خاصیت کہ یہ بیرون تار کسی قسم کا مقناطیسی میدان نہیں پیدا کرتا نہایت اہمیت کا حامل ہے۔ہم محوری تار اسی خاصیت کی بنا پر ہر ایسی جگہ پر استعمال کیا جاتا ہے جہاں تار میں پائے گئے برقی اشارات سے بیرونی تار کسی قسم کا اثر ناقابل برداشت ہو۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال کی تیسری مثال کو شکل 7.8-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں $z = 0$ لامحدود چوڑائی اور لامحدود لمبائی کے موصل سطح پر $K_x\boldsymbol{a}_x$ سطحی کثافت برقی رو گزر رہی ہے۔ہمیں اس سطح کے قریب نقطہ N پر مقناطیسی شدت حاصل کرنے سے دلچسپی ہے۔سطح کے $x = +\infty$ سرے سے $x = -\infty$ سرے تک برقی رو بذریعہ دو لامحدود چوڑائی کے موصل سطحوں سے واپس پہنچتی ہے۔یہ سطحیں $z = +\infty$ اور $z = -\infty$ پر پائی جاتی ہیں۔اتنی دور سطحوں کے اثر کو نقطہ N پر نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

موصل سطح کو Δy چوڑائی کے فرضی تاروں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ایسا شکل 7.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔یوں ہر ایسی فرضی تار $K_x\Delta y\boldsymbol{a}_x$ برقی رو گزارے گی۔لامحدود تار کی مقناطیسی میدان سے ہم بخوبی واقف ہیں۔ایسی کسی بھی فرضی تار کا برقی رو H_x جزو پیدا نہیں کرے گا۔سطح پر N کے ایک جانب فرضی تار کا H_z جزو سطح پر N کے دوسری جانب فرضی تار کے H_z جزو کو ختم کرتا ہے جبکہ ان کے H_y اجزاء مل کر دگنی مقناطیسی شدت پیدا کرتے ہیں۔اس طرح مقناطیسی شدت کا صرف اور صرف H_y جزو ممکن ہے۔

شکل 7.8-الف میں موصل سطح کے کچھ حصے کو گھیرتی مستطیلی راہ $a'abb'$ دکھائی گئی ہے جس کے اطراف y_1 اور $2z_1$ لمبائی رکھتے ہیں۔اس راہ کے z_1 حصوں پر مقناطیسی شدت صفر کے برابر ہے لہٰذا اس حصے پر مقناطیسی شدت کا تکمل بھی صفر کے برابر ہو گا۔راہ کے y_1 اطراف سطح سے دونوں جانب z_1 فاصلے پر ہیں۔سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں۔بایوٹ-سیوارٹ کے قانون سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سطحی کثافت برقی رو موصل سطح کے اوپر جانب $-H_{ya}\boldsymbol{a}_y$ جبکہ اس کے نچلی جانب $+H_{yb}\boldsymbol{a}_y$ مقناطیسی شدت پیدا کرتا ہے۔مستطیلی راہ Ky_1 برقی رو کو گھیرتی ہے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت

$$H_{ya}y_1 + H_{yb}y_1 = K_x y_1$$

یا

$$H_{ya} + H_{yb} = K_x \tag{7.14}$$

ہو گا۔اب اگر موصل سطح کے ایک جانب مستطیلی راہ کا y_1 حصہ قدر دور کرتے ہوئے z_2 فاصلے پر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات

$$H_{ya} + H_{yc} = K_x$$

صورت اختیار کر لے گی جس سے صاف ظاہر ہے کہ H_{yb} اور H_{yc} عین برابر ہیں یعنی مقناطیسی شدت کا دارومدار سطح سے فاصلے پر ہرگز نہیں ہے۔اس طرح تمام ایسے نقطے جو مثبت z پر پائے جاتے ہوں کا مقناطیسی شدت ایک برابر ہو گا۔یہی کچھ تمام ایسے نقطوں کے لئے بھی درست ہے جو منفی z پر پائے جاتے ہوں۔

سطح کے دونوں اطراف بالکل یکساں مشابہت رکھتے ہیں لہٰذا دونوں جانب مقناطیسی شدت بھی برابر ہو گا یعنی $\left|\boldsymbol{H}_{ya}\right| = \left|\boldsymbol{H}_{yb}\right|$ ہو گا۔اس طرح مساوات 7.14 سے $H_{ya} = H_{yb} = H_y = \frac{K_x}{2}$ لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_y &= -\frac{1}{2}K_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \qquad (z>0)\\ \boldsymbol{H}_y &= +\frac{1}{2}K_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \qquad (z<0)\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جسے بہتر طور پر

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{a}_N \tag{7.15}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ موصل سطح کی عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

اگر $z=-h$ پر دوسری لامحدود موصل سطح رکھی جائے جس میں سطحی کثافت برقی رو $-K_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ہو تب دونوں سطحی کثافت برقی رو کا مجموعی مقناطیسی شدت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{K}\times\boldsymbol{a}_N \qquad (-h<z<0)\\ \boldsymbol{H} &= 0 \qquad (z<-h, \quad z>0)\end{aligned} \tag{7.16}$$

ہو گا۔

ایمپیئر کے دوری قانون کے استعمال میں سب سے مشکل کام ایسی راہ تلاش کرنا ہے جس پر مقناطیسی میدان یا راہ کے عمودی ہو اور یا پھر اس کی قیمت مستقل ہو۔جہاں قبل از وقت ایسا جاننا ممکن نہ ہو وہاں بایوٹ-سیوارٹ کا قانون ہی قابل استعمال ہو گا۔

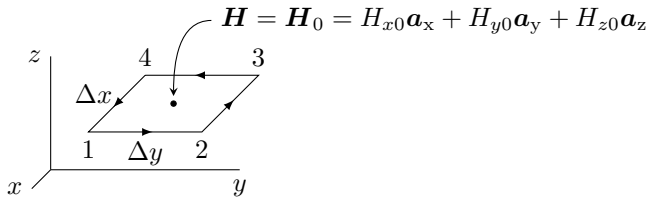
7.3 گردش

آپ کو یاد ہو گا کہ ہم نے گاؤس کے قانون کو انتہائی چھوٹی حجم پر لاگو کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی تھی۔اس حصے میں ہم ایمپیئر کے دوری قانون کو انتہائی چھوٹی بند راہ پر استعمال کرتے ہوئے گردش[4] کی مساوات حاصل کریں گے۔

کارتیسی محدد میں ہم کسی نقطے N پر Δx اور Δy اطراف کی چھوٹی بند راہ لیتے ہیں۔شکل 7.9 میں اس چھوٹی بند راہ کو دکھایا گیا ہے جو رقبہ $\Delta x\Delta y$ کو گھیرتی ہے۔یہ راہ مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H} = H_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + H_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + H_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ میں پائی جاتی ہے۔شکل میں راہ پر تیر کے نشان راہ پر چلنے کی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔اس رقبے کے عین وسط میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر مقناطیسی شدت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_0 &= H_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + H_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + H_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\ &= H_{x0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + H_{y0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + H_{z0}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned}$$

[4] curl



شکل 7.9: گردش کی تعریف۔

کے برابر ہے۔ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اس بند راہ کے گرد مقناطیسی شدت کا تکمل رقبہ $\Delta x \Delta y$ سے گزرتی برقی رو کے برابر ہو گا۔آئیں اس تکمل کو حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم بند راہ پر1 سے 2 کی طرف چلتے ہوئے پورا چکر کاٹیں گے۔

کارتیسی محدد میں کسی بھی چھوٹے فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ لکھا جا سکتا ہے۔شکل 7.9 میں 1 تا 2 پر $\mathrm{d}x = 0$ اور $\mathrm{d}z = 0$ ہیں لہٰذا اس چھوٹے فاصلے کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ لکھا جا سکتا ہے۔چھوٹے چکور کا وسط (x_0, y_0, z_0) ہے۔یوں چکور کا 1 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 - \frac{\Delta y}{2})$ پر اور 2 کونا $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta y}{2})$ پر ہو گا۔یوں راہ کے پہلے حصے 1 تا 2 پر لکیری تکمل

$$\int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \left(H_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + H_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + H_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right) \cdot \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} = \int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} H_y\,\mathrm{d}y = H_{y21} \int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} \mathrm{d}y = H_{y21}\Delta y$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کو H_y کے بجائے H_{y21} لکھتے ہوئے اور اس راہ پر مقناطیسی شدت میں تبدیلی کو نظر انداز کرتے ہوئے تکمل کے باہر لے جایا گیا۔ہمیں اس طرح کے تکمل بار بار حاصل کرنے ہوں گے لہٰذا اس پورے عمل کو ہم

$$(\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21} = H_{y21}\Delta y \tag{7.17}$$

لکھیں گے۔ہمیں رقبے کے عین وسط میں مقناطیسی شدت معلوم ہے البتہ راہ کے پہلے حصے پر ہمیں اس کے بارے میں معلومات فراہم نہیں ہے۔ایسی صورت میں ہمیں ٹیلر تسلسل[5] بروئے کار لانا ہو گا۔

ٹیلر تسلسل

$$f(x+\delta x) = f(x) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\delta x)^2 + \cdots$$

سے آپ بخوبی واقف ہیں جہاں $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور دیگر تفرق کو نقطہ x پر حاصل کیا جاتا ہے۔اگر اس میں $\delta x = \frac{\Delta x}{2}$ پر کیا جائے تو اس کی نئی شکل

$$f(x+\tfrac{\Delta x}{2}) = f(x) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \cdots$$

حاصل ہوتی ہے جسے ہم اب استعمال کرتے ہیں۔

اگر نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر تفاعل H_y کی قیمت $H_y(x_0, y_0, z_0)$ ہو تب نقطہ $(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)$ پر اس کی قیمت مسئلہ ٹیلر سے

$$\begin{aligned} H_y(x_0 + \tfrac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) &= H_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \cdots \\ &= H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + \cdots \end{aligned}$$

[5] Taylor series

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ کو نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر حاصل کیا جاتا ہے۔راہ 1 تا 2 پر مقناطیسی شدت کی قیمت ٹیلر تسلسل کے پہلے دو اجزاء سے حاصل کرتے ہوئے

$$H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \tag{7.18}$$

لکھ کر مساوات 7.17 کو

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21} \doteq \left(H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \tag{7.19}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.18 کو یوں بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔چھوٹے رقبے کے وسط میں x کے ساتھ H_y تبدیل ہونے کی شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔ یوں اگر x میں Δx تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x}\Delta x$ ہو گی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}\Delta x$ ہو گی۔اسی طرح اگر x میں $\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی پیدا ہو تب H_y میں تبدیلی تقریباً $\frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی اور یوں اس کی نئی قیمت تقریباً $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی۔اب رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر 1 تا 2 راہ کا درمیانہ نقطہ ہے لہٰذا یہاں

$$H_{y21} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \tag{7.20}$$

ہو گا جو عین مساوات 7.18 ہی ہے۔

راہ کے اگلے حصے یعنی 2 تا 3 یہی کچھ کرتے ہوئے

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{32} = H_{x32}(-\Delta x) \doteq -\left(H_{x0} + \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \tag{7.21}$$

جبکہ 3 تا 4 پر

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{43} = H_{43}(-\Delta y) \doteq -\left(H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \tag{7.22}$$

اور 4 تا 1 پر

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{14} = H_{x14}\Delta x \doteq \left(H_{x0} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \tag{7.23}$$

حاصل ہوتے ہیں۔مساوات 7.19، مساوات 7.21، مساوات 7.22 اور مساوات 7.23 کو جمع کرتے ہوئے پورے بند راستے کا تکمل

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y \tag{7.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔اگر اس چھوٹے بند راہ کے گھیرے رقبے پر کثافت برقی رو

$$\boldsymbol{J} = J_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + J_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + J_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$$

ہو تب اس رقبے سے $J_z\Delta x\Delta y$ برقی رو گزرے گی۔ ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت بند راہ کا تکمل اور رقبے سے گزرتی برقی رو برابر ہوں گے یعنی

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y \doteq J_z\Delta x\Delta y$$

ہو گا جسے

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta x\Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \doteq J_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔رقبے کو جتنا چھوٹا کیا جائے مندرجہ بالا مساوات اتنا ہی زیادہ درست ہو گا حتیٰ کہ $\Delta x \to 0$ اور $\Delta y \to 0$ کی صورت میں یہ مکمل طور پر درست ہو گا اور یوں مساوات میں تقریباً برابر کی علامت $\doteq$ کی جگہ بالکل برابر $=$ کی علامت استعمال کی جائے گی یعنی

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta x\Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \tag{7.25}$$

لکھا جائے گا۔

اگر ہم کارتیسی محدد کے بقایا دو محدد کے عمودی چھوٹے رقبے لیں اور مندرجہ بالا عمل دہرائیں تو ہمیں

$$\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta y\Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \tag{7.26}$$

اور

$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ \Delta x\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta z\Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \tag{7.27}$$

حاصل ہوں گے۔ مساوات 7.26 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δy اور Δz ہیں جس سے $J_x\Delta y\Delta z$ برقی رو گزرتی ہے۔اسی طرح مساوات 7.27 میں چھوٹے رقبے کے اطراف Δz اور Δx ہیں جس سے $J_y\Delta z\Delta x$ برقی رو گزرتی ہے۔

ایمپیئر کے دوری قانون سے شروع کرتے ہوئے ہم نے مساوات 7.25، مساوات 7.26 اور مساوات 7.27 حاصل کئے جو مقناطیسی شدت کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو گھیرے گئے کثافت برقی رو کے برابر ٹھہراتے ہیں۔کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل فی اکائی رقبہ کو اس متغیرہ کی گردش[6] کہتے ہیں۔انتہائی چھوٹے رقبے کے گرد گردش کرتے ہوئے کسی بھی متغیرہ کے بند تکمل کو اس نقطے پر متغیرہ کے گھومنے یا گردش کی ناپ تصور کی جا سکتی ہے۔اسی لئے اس عمل کو گردش کہا جاتا ہے۔

کسی بھی سمتیہ کا گردش بھی سمتیہ ہو گا۔گردش کا کوئی بھی جزو انتہائی چھوٹے سیدھے رقبے کے گرد سمتیہ کے بند تکمل فی یہی رقبہ کے برابر ہو گا جہاں بند تکمل کی راہ درکار جزو کے عمودی سطح میں پایا جاتا ہو اور رقبے کی قیمت صفر کے قریب سے قریب تر ہو۔گردش کی یہ تعریف کسی بھی محدد پر مبنی نہیں ہے۔اس تعریف کی حسابی شکل

$$\boldsymbol{H}\text{گردش} = \lim_{\Delta S_n\to 0} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta S_n}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{H}$ کی گردش حاصل کی گئی ہے۔اس مساوات میں ΔS_n وہ چھوٹا سیدھا رقبہ ہے جس کے گرد $\boldsymbol{H}$ کا بند تکمل حاصل کیا گیا ہے۔گردش از خود سیدھے سطح کے عمودی ہو گا۔ رقبہ ΔS_n لکھتے ہوئے زیر نوشت میں n اسی حقیقت کی یاد دہانی کراتا ہے کہ رقبے اور گردش کے درمیان نوے درجے کا زاویہ پایا جاتا ہے۔

---

[6] curl

کارتیسی محدد میں گردش $\boldsymbol{H}$ کے x، y اور z اجزاء مساوات 7.26، مساوات 7.27 اور مساوات 7.25 بالترتیب دیتے ہیں لہٰذا

$$\boldsymbol{H}\text{گردش} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \boldsymbol{J} \tag{7.28}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کو قالب کے حتمی قیمت[7] کی شکل میں

$$\boldsymbol{H}\text{گردش} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} & \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{J} \tag{7.29}$$

لکھا جا سکتا ہے۔صفحہ 80 پر مساوات 3.29 نیبلا ∇ کے عمل کو بیان کرتا ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

اور صفحہ 16 پر مساوات 1.19 دو سمتیات کا سمتی ضرب دیتا ہے۔ان سے گردش نہایت خوبصورتی سے

$$\boldsymbol{H}\text{گردش} = \nabla \times \boldsymbol{H} \tag{7.30}$$

لکھی جا سکتی ہے۔آپ جلد دیکھیں گے کہ صرف کارتیسی محدد میں ہی گردش ∇ اور $\boldsymbol{H}$ کے صلیبی ضرب سے حاصل ہوتا ہے۔اس کے باوجود کسی بھی محدد میں گردش کو $\nabla \times \boldsymbol{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں کارتیسی محدد میں H کی گردش یوں لکھی جائے گی۔

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{7.31}$$

ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.32}$$

لکھی جا سکتی ہے جو میکس ویل کی دوسری مساوات ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے میدان کے لئے درست ہے۔یہاں میکس ویل کے تیسری مساوات کا بھی ذکر کر لیتے ہیں جو $\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{7.33}$$

ہے۔ میکس ویل کے چوتھی مساوات پر اس کتاب میں آگے غور کیا جائے گا۔

آپ جانتے ہیں کہ ساکن برقی میدان بقائی میدان ہے لہٰذا اس میں چارج q کو کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے صفر توانائی درکار ہو گی۔یوں $q\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ صفر کے برابر ہو گا جس سے $\boldsymbol{E}$ کا گردش بھی صفر ہو گا۔مساوات 7.33 یہی کہتا ہے۔اس کے برعکس وقت کے ساتھ غیر تغیر پذیر مقناطیسی میدان غیر بقائی میدان ہے جس میں چارج کو برقی رو گھیرتی کسی بھی بند راہ پر پورا چکر گھمانے کے لئے توانائی درکار ہو گی۔اسی لئے اس کا گردش صفر نہیں ہو گا۔مساوات 7.32 یہی کہتا ہے۔

---

[7] determinant

مشق 7.1: گردش یعنی $\nabla \times \boldsymbol{H}$ کو

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)\times\left(H_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+H_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+H_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)$$

لکھ کر سمتی ضرب سے مساوات 7.28 حاصل کریں۔

مشق 7.2: اگر $\boldsymbol{H}=(x^2y+2z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+(xz-y)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+(e^xyz)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ تب $\nabla\times\boldsymbol{H}$ کیا ہو گا اور اس کی قیمت نقطہ $(0,1,2)$ پر کیا ہو گی۔

جوابات: $\nabla\times\boldsymbol{H}=(e^xz-x)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+(2-e^xyz)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+(z-x^2)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اور نقطے پر گردش کی قیمت $2\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+2\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہو گی۔

مثال 7.1: سمتیہ $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے گردش کی گردش یعنی $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 7.31 سے

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \tag{7.34}$$

لکھتے ہیں۔ مساوات 7.31 دوبارہ استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=&\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\\&+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\&+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned}$$

تمام تفرق حاصل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=&\left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial x}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\\&+\left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\&+\left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned}$$

اس مساوات کے پہلے جزو میں $\mp\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$، دوسرے جزو میں $\mp\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}$ اور تیسرے میں $\mp\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$ شامل کرتے ہوئے ذرہ مختلف ترتیب سے لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=&\left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial x}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}-\left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\\&+\left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial y}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-\left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\&+\left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}-\left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned}\tag{7.35}$$

یہاں رک کر $\boldsymbol{A}$ کے پھیلاو کی ڈھلوان یعنی $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$ حاصل کرتے ہیں۔ پھیلاو

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)=&\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\\&+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\&+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned}\tag{7.36}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر ہم

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{A}&\equiv\nabla^2 A_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\nabla^2 A_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\nabla^2 A_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\&=\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned}\tag{7.37}$$

لکھیں تب مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے مساوات 7.35 کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}\equiv\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)-\nabla^2\boldsymbol{A}\tag{7.38}$$

مساوات 7.37 سمتیہ کی لاپلاسی[8] ہے۔

[8] vector Laplacian

مثال 7.2: سمتیہ $\boldsymbol{S}$ اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش کے لئے ثابت کریں کہ

$$\nabla \times (M\boldsymbol{S}) \equiv (\nabla M) \times \boldsymbol{S} + M(\nabla \times \boldsymbol{S}) \tag{7.39}$$

کے برابر ہے۔

حل:سمتیہ اور مقداری کے حاصل ضرب کو

$$M\boldsymbol{S} = M\left(S_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + S_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + S_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right) = MS_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + MS_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + MS_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

لکھتے ہوئے اس کی گردش مساوات 7.31 کی طرح لکھ کر

$$\nabla \times M\boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial MS_z}{\partial y} - \frac{\partial MS_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(\frac{\partial MS_x}{\partial z} - \frac{\partial MS_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{\partial MS_y}{\partial x} - \frac{\partial MS_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

تفرق کھولتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\nabla \times M\boldsymbol{S} = &\left(\frac{\partial M}{\partial y}S_z + M\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}S_y - M\frac{\partial S_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\\ &+\left(\frac{\partial M}{\partial z}S_x + M\frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial x}S_z - M\frac{\partial S_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\ &+\left(\frac{\partial M}{\partial x}S_y + M\frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}S_x - M\frac{\partial S_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned}$$

اس کو یوں ترتیب دیتے ہیں

$$\begin{aligned}\nabla \times M\boldsymbol{S} = &\left[\left(\frac{\partial M}{\partial y}S_z - \frac{\partial M}{\partial z}S_y\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}S_x - \frac{\partial M}{\partial x}S_z\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}S_y - \frac{\partial M}{\partial y}S_x\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right]\\ &+M\left[\left(\frac{\partial S_z}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(\frac{\partial S_x}{\partial z} - \frac{\partial S_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right]\end{aligned}$$

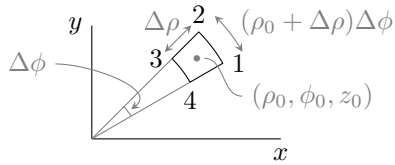
اس مساوات کا دوسرا جزو $M(\nabla \times \boldsymbol{S})$ کے برابر ہے جبکہ اس کا پہلا جزو $(\nabla M) \times \boldsymbol{S}$ کے برابر ہے جسے

$$(\nabla M) \times \boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial x}\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial M}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial M}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right) \times \left(S_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + S_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + S_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\right)$$

لکھ کر صلیبی ضرب کے بعد ترتیب دینے سے

$$(\nabla M) \times \boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial M}{\partial y}S_z - \frac{\partial M}{\partial z}S_y\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}S_x - \frac{\partial M}{\partial x}S_z\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}S_y - \frac{\partial M}{\partial y}S_x\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔



شکل 7.10: نلکی محدد میں چھوٹا رقبہ۔

7.3.1 نلکی محدد میں گردش

نلکی محدد میں J_z کثافت برقی رو کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جسے شکل 7.10 میں دکھایا گیا ہے۔ایسے رقبے کے اطراف $\Delta\rho$ اور $\rho\Delta\phi$ ہوں گے جبکہ اس سطح پر z کی قیمت تبدیل نہیں ہو گی۔اس رقبے کے وسط میں

$$\boldsymbol{H}_0(\rho_0,\phi_0,z_0)=H_{\rho 0}\boldsymbol{a}_\rho+H_{\phi 0}\boldsymbol{a}_\phi+H_{z0}\boldsymbol{a}_z$$

ہو گا۔کارتیسی محدد میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta x}{2}$ اور $-\frac{\Delta x}{2}$ فاصلے پر اطراف کی لمبائیاں عین برابر تھیں۔نلکی محدد میں رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $(\rho_0+\frac{\Delta\rho}{2})\Delta\phi$ جبکہ وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر طرف کی لمبائی $(\rho_0-\frac{\Delta\rho}{2})\Delta\phi$ ہے۔انہیں اطراف پر مقناطیسی شدت بالترتیب

$$H_{\phi 21}\doteq H_{\phi 0}+\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

اور

$$H_{\phi 43}\doteq H_{\phi 0}-\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$

ہو گی جہاں $\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}$ چھوٹے رقبے کے وسط میں حاصل کیا جائے گا۔یوں 1 سے 2 جانب چھوٹے رقبے کے گرد چکر کاٹتے ہوئے ان دو اطراف پر تکمل

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})_{21}&\doteq\left(H_{\phi 0}+\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}\right)\left(\rho_0+\frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\\&\doteq\left[H_{\phi 0}\rho_0+H_{\phi 0}\frac{\Delta\rho}{2}+\rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}+\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\left(\frac{\Delta\rho}{2}\right)^2\right]\Delta\phi\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L})_{43}&\doteq\left(H_{\phi 0}-\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}\right)\left[-\left(\rho_0-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\Delta\phi\right]\\&\doteq\left[-H_{\phi 0}\rho_0+H_{\phi 0}\frac{\Delta\rho}{2}+\rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}-\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho}\left(\frac{\Delta\rho}{2}\right)^2\right]\Delta\phi\end{aligned}$$

ہوں گے۔

چھوٹے رقبے کے وسط سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ یا $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر اطراف $\Delta\rho$ لمبائی رکھتے ہیں جبکہ ان پر اوسط شدت بالترتیب

$$H_{\phi 32}\doteq H_{\rho 0}+\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

اور

$$H_{\phi 14} \doteq H_{\rho 0} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

ہیں۔یوں ان اطراف پر تکمل

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{32} \doteq \left(H_{\rho 0} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2}\right)(-\Delta\rho)$$

اور

$$(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L})_{14} \doteq \left(H_{\rho 0} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\frac{\Delta\phi}{2}\right)\Delta\rho$$

ہوں گے۔

یوں پورا تکمل ان چار جوابات کا مجموعہ

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right)\Delta\rho\Delta\phi \tag{7.40}$$

ہو گا۔اس چھوٹے رقبے سے $J_z\rho_0\Delta\rho\Delta\phi$ برقی رو گزرے گی۔یوں ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \doteq \left(H_{\phi 0} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right)\Delta\rho\Delta\phi \doteq J_z\rho_0\Delta\rho\Delta\phi$$

یعنی

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho_0\Delta\rho\Delta\phi} \doteq \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right) \doteq J_z$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $\Delta\rho$ اور $\Delta\phi$ کو کم سے کم کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کر دیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات بالکل درست ہو گا اور تقریباً برابر کی علامت $\doteq$ کی جگہ برابر کی علامت $=$ استعمال کی جائے گی۔اس طرح گردش کا پہلا جزو

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta\phi\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho_0\Delta\rho\Delta\phi} = \left(\frac{H_{\phi 0}}{\rho_0} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right) = J_z \tag{7.41}$$

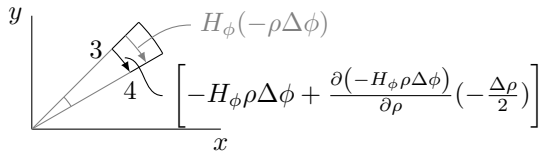
لکھا جا سکتا ہے۔

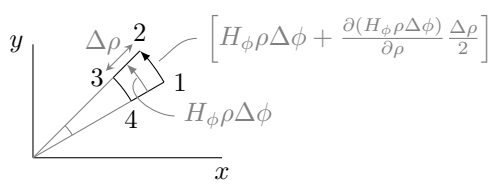
اس سے پہلے کہ ہم گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں، آئیں مساوات 7.40 کو قدر مختلف اور بہتر طریقے سے حاصل کریں۔شکل 7.11-الف کو دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔اگر ہم کسی نقطے کے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ سے نقطے کے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ تک حرکت کریں تو ہم $\rho\Delta\phi$ فاصلہ طے کریں گے۔اس راہ پر تکمل تقریباً

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\phi\rho\Delta\phi$$

کے برابر ہو گا۔اس تکمل کو تفاعل g تصور کرتے ہوئے یعنی $g = H_\phi\rho\Delta\phi$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم چھوٹے رقبے کے وسط سے رداسی سمت میں $+\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کریں تو اس تفاعل کی قیمت میں تبدیلی

$$\Delta(\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}) = \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2} = \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial \rho}\frac{\Delta\rho}{2}$$





(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے بیرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔ (ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر تکمل کے قیمت سے اندرونی زاویائی تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.11: زاویائی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}$ کو چھوٹے رقبے کے وسط پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں رداس ρ_0 کے برابر ہے۔چونکہ چھوٹے رقبے کے عین وسط پر اس تکمل کی قیمت $H_{\phi 0}\rho_0\Delta\phi$ کے برابر ہے لہٰذا وسط سے $\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر تکمل کی قیمت

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} = H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2} \tag{7.42}$$

ہو گی۔اسی طرح، جیسا شکل 7.11-ب میں دکھایا گیا ہے، اگر ہم کسی نقطے کے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ سے نقطے کے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ تک حرکت کریں تو اس راہ پر تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\phi(-\rho\Delta\phi)$$

کے برابر ہو گا۔اگر اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کیا جائے تب وسط سے $-\frac{\Delta\rho}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} &= -H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(-H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\left(-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\ &= -H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\frac{\Delta\rho}{2}\end{aligned} \tag{7.43}$$

ہو گا۔

اسی طرح، جیسے شکل 7.12-الف میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $-\frac{\Delta\rho}{2}$ تا $+\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت $H_\rho\Delta\rho$ ہو گی۔اس نقطے سے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت میں تبدیلی رو نما ہو گی جسے

$$\Delta(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}) = \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\left(-\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

لکھا جا سکتا ہے اور یوں تکمل کی نئی قیمت

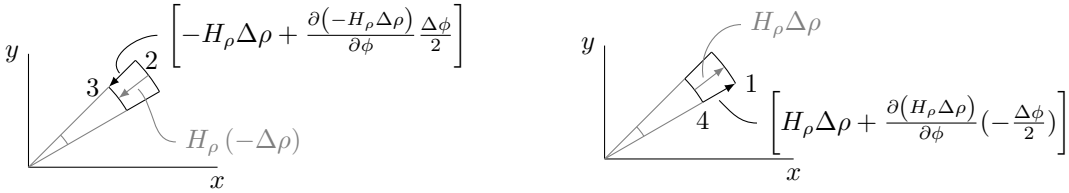
$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\rho\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2}$$

ہو گی۔اگر چھوٹے رقبے کے عین وسط کو یہی نقطہ تصور کیا جائے تب مندرجہ بالا مساوات 4 تا 1 پر تکمل دیتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} = H_\rho\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2} \tag{7.44}$$

اسی طرح، جیسے شکل 7.12-ب میں دکھایا گیا ہے، کسی بھی نقطے پر $+\frac{\Delta\rho}{2}$ تا $-\frac{\Delta\rho}{2}$ حرکت کرتے ہوئے تکمل کی قیمت

$$\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = H_\rho(-\Delta\rho)$$



(ا) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے کم زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔ (ب) چھوٹے رقبے کے وسط پر رداسی تکمل کے قیمت سے زیادہ زاویہ پر تکمل کی قیمت کا حصول۔

شکل 7.12: رداسی حصوں پر تکمل کے قیمت کے حصول کا بہتر طریقہ۔

(ا) نلکی محدد میں شدت کا رداسی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔ (ب) نلکی محدد میں شدت کا زاویائی جزو حاصل کرنے کے لئے چھوٹا رقبہ۔

شکل 7.13: نلکی محدد میں گردش کے رداسی اور زاویائی اجزاء کے رقبے۔

ہو گی۔اس نقطے کو چھوٹے رقبے کا وسط تصور کرتے ہوئے وسط سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ پر یہی تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} = -H_\rho\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\frac{\Delta\phi}{2} \tag{7.45}$$

کے برابر ہو گا۔

مساوات 7.42، مساوات 7.43، مساوات 7.44 اور مساوات 7.45 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد پورا تکمل دیتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial\rho}\Delta\rho - \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial\phi}\Delta\phi\\ &= \left[\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]\Delta\rho\Delta\phi\end{aligned} \tag{7.46}$$

جہاں تفرق رقبے کے وسط پر حاصل کئے جاتے ہیں۔اس مساوات کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \left[H_{\phi 0} + \rho_0\frac{\partial H_\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]\Delta\rho\Delta\phi$$

جو بالکل مساوات 7.40 ہی ہے۔یاد رہے کہ $\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho}$ کو اجزاء کی صورت میں لکھتے ہوئے رقبے کے وسط کی قیمتیں پر کی جاتی ہیں۔یوں رداس ρ_0 اور مقناطیسی شدت $H_{\phi 0}$ کے برابر ہوں گے۔مساوات 7.46 سے گردش

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta\phi\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta\rho\rho\Delta\phi} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right] = J_z \tag{7.47}$$

آئیں اب نلکی محدد میں گردش کے بقایا دو اجزاء بھی حاصل کریں۔گردش کا رداسی جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم $\rho = \rho_0$ سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف Δz اور $\rho_0\Delta\phi$ لمبائی رکھیں گے۔اس رقبے کو شکل 7.13-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس

پر 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے کا لکیری تکمل حاصل کیا جائے گا۔مستقل رداس کے سطح پر کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta z}{2}$ تا $+\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے تکمل $H_z\Delta z$ حاصل ہوتا ہے۔اس نقطے سے $+\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر اس تکمل کی قیمت ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} = H_z\Delta z + \frac{\partial(H_z\Delta z)}{\partial\phi}\left(+\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta z}{2}$ تا $-\frac{\Delta z}{2}$ چلتے ہوئے تکمل $-H_z\Delta z$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta\phi}{2}$ زاویہ پر

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} = -H_z\Delta z + \frac{\partial(-H_z\Delta z)}{\partial\phi}\left(-\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ان دو جوابات سے رقبے کے z اطراف کا تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} + \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} = +\frac{\partial H_z}{\partial\phi}\Delta z\Delta\phi \tag{7.48}$$

حاصل ہوتا ہے۔کسی بھی نقطے کے قریب $-\frac{\Delta\phi}{2}$ تا $+\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت $H_\phi\rho\Delta\phi$ جبکہ نقطے سے $-\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} = H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial z}\left(-\frac{\Delta z}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح نقطے کے قریب $+\frac{\Delta\phi}{2}$ تا $-\frac{\Delta\phi}{2}$ پر تکمل کی قیمت $-H_\phi\rho\Delta\phi$ جبکہ نقطے سے $+\frac{\Delta z}{2}$ فاصلے پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} = -H_\phi\rho\Delta\phi + \frac{\partial(-H_\phi\rho\Delta\phi)}{\partial z}\left(+\frac{\Delta z}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ان دو جوابات کے مجموعے سے چھوٹے رقبے کے گرد گھومتے ہوئے زاویائی حصے کا تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} + \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} = -\rho\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\Delta z\Delta\phi \tag{7.49}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 7.48 اور مساوات 7.49 کا مجموعہ چھوٹے رقبے کے گرد کل تکمل دیتا ہے جو رقبے سے گزرتی برقی رو $J_\rho\rho\Delta\phi\Delta z$ کے برابر ہو گا یعنی

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \left[\frac{\partial H_z}{\partial\phi} - \rho\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]\Delta z\Delta\phi = J_\rho\rho\Delta\phi\Delta z$$

جس سے گردش کا رداسی جزو

$$\lim_{\substack{\Delta\phi\to 0\\ \Delta z\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\rho\Delta\phi\Delta z} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right] = J_\rho \tag{7.50}$$

ملتا ہے۔

شکل 7.13-ب میں 1 سے 2 جانب گھومتے ہوئے $\boldsymbol{H}$ کے لکیری تکمل مندرجہ ذیل ہیں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21} &= H_z\Delta z + \frac{\partial(H_z\Delta z)}{\partial\rho}\left(-\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43} &= -H_z\Delta z + \frac{\partial(-H_z\Delta z)}{\partial\rho}\left(+\frac{\Delta\rho}{2}\right)\\
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32} &= H_\rho\Delta\rho + \frac{\partial(H_\rho\Delta\rho)}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\\
\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14} &= -H_\rho\Delta\rho + \frac{\partial(-H_\rho\Delta\rho)}{\partial z}\left(-\frac{\Delta z}{2}\right)
\end{aligned}$$

اور یوں ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta z\to 0}} \frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\Delta\rho\Delta z} = \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right) = J_\phi \tag{7.51}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.51، مساوات 7.50 اور مساوات 7.47 کا مجموعہ نکلی محدد میں گردش دیتا ہے یعنی

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(H_\phi\rho)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_z \tag{7.52}$$

یہاں ایک بار پھر یہ بتلانا ضروری ہے کہ نکلی محدد میں ∇ اور $\boldsymbol{H}$ کا صلیبی ضرب کسی صورت مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ نہیں دیتا۔اس کے باوجود $\boldsymbol{H}$ کے گردش کو $\nabla\times\boldsymbol{H}$ سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 7.3: اگر $\boldsymbol{H} = (3\rho\cos\phi + 5)\boldsymbol{a}_\rho + 6\sin\phi\boldsymbol{a}_\phi + 2\boldsymbol{a}_z$ ہو تب $\nabla\times\boldsymbol{H}$ کیا ہو گا۔

جواب: $\nabla\times\boldsymbol{H} = (\frac{6}{\rho}+3)\sin\phi\boldsymbol{a}_z$

7.3.2 عمومی محدد میں گردش کی مساوات

صفحہ 82 پر حصہ 3.10 میں عمومی محدد استعمال کرتے ہوئے پھیلاو کی مساوات حاصل کی گئی۔یہاں عمومی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔عمومی محدد کے متغیرات (u,v,w) جبکہ اکائی سمتیات $(\boldsymbol{a}_u,\boldsymbol{a}_v,\boldsymbol{a}_w)$ ہیں۔ان میں تین اطراف

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}L_u &= k_1\,\mathrm{d}u\\
\mathrm{d}L_v &= k_2\,\mathrm{d}v\\
\mathrm{d}L_w &= k_3\,\mathrm{d}w
\end{aligned}$$

لکھے جاتے ہیں۔

گردش کا پہلا جزو حاصل کرنے کی خاطر ہم نقطہ (u,v,w) پر u کے عمودی سطح پر چھوٹا رقبہ لیتے ہیں جس کے اطراف $k_2\Delta v$ اور $k_3\Delta w$ ہوں گے۔اب $v-\frac{\Delta v}{2}$ سے $v+\frac{\Delta v}{2}$ تک فاصلہ $k_2\Delta v$ کے برابر ہے لہٰذا اس پر چلتے ہوئے تکمل $H_v k_2\Delta v$ کے برابر ہو گا۔نقطہ (u,v,w) سے $-\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی تکمل ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21}=H_v k_2\Delta v+\frac{\partial(H_v k_2\Delta v)}{\partial w}\left(-\frac{\Delta w}{2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $v+\frac{\Delta v}{2}$ سے $v-\frac{\Delta v}{2}$ تک تکمل $-H_v k_2\Delta v$ کے برابر ہو گا۔نقطہ (u,v,w) سے $+\frac{\Delta w}{2}$ پر یہی تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43}=-H_v k_2\Delta v+\frac{\partial(-H_v k_2\Delta v)}{\partial w}\left(\frac{\Delta w}{2}\right)$$

ہو گا۔یوں ان اطراف پر کل تکمل

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{21}+\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{43}=-\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w}\Delta v\Delta w \tag{7.53}$$

ہو گا۔یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}=H_w k_3\Delta w+\frac{\partial(H_w k_3\Delta w)}{\partial v}\left(\frac{\Delta v}{2}\right)$$
$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}=-H_w k_3\Delta w+\frac{\partial(-H_w k_3\Delta w)}{\partial v}\left(-\frac{\Delta v}{2}\right)$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{32}+\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_{14}=\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v}\Delta v\Delta w \tag{7.54}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں چھوٹے رقبے کے گرد کل تکمل

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=\left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v}-\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w}\right]\Delta v\Delta w \tag{7.55}$$

لکھتے ہوئے ایمپیئر کے دوری قانون سے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}=\left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v}-\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w}\right]\Delta v\Delta w=J_u k_2 k_3\Delta v\Delta w$$

لکھ کر گردش کا پہلا جزو

$$\lim_{\substack{\Delta v\to 0\\ \Delta w\to 0}}\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_2 k_3\Delta v\Delta w}=\frac{1}{k_2 k_3}\left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v}-\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w}\right]=J_u \tag{7.56}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ اسی مساوات میں متغیرات ذرہ دیکھ کر تبدیل کرتے ہوئے گردش کے بقایا دو اجزاء

$$\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta w\to 0}}\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_1 k_3\Delta u\Delta w}=\frac{1}{k_1 k_3}\left[\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial w}-\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial u}\right]=J_v \tag{7.57}$$

اور

$$\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{k_1 k_2\Delta u\Delta v}=\frac{1}{k_1 k_2}\left[\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial u}-\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial v}\right]=J_w \tag{7.58}$$

لکھ سکتے ہیں۔عمومی محدد میں گردش کے ان اجزاء کو

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{k_2 k_3}\left[\frac{\partial(H_w k_3)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v k_2)}{\partial w}\right]\boldsymbol{a}_u + \frac{1}{k_1 k_3}\left[\frac{\partial(H_u k_1)}{\partial w} - \frac{\partial(H_w k_3)}{\partial u}\right]\boldsymbol{a}_v + \frac{1}{k_1 k_2}\left[\frac{\partial(H_v k_2)}{\partial u} - \frac{\partial(H_u k_1)}{\partial v}\right]\boldsymbol{a}_w \tag{7.59}$$

یا قالب کا حتمی قیمت

$$\boldsymbol{H}\text{گردش} = \begin{vmatrix} \frac{\boldsymbol{a}_u}{k_2 k_3} & \frac{\boldsymbol{a}_v}{k_3 k_1} & \frac{\boldsymbol{a}_w}{k_1 k_2} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ k_1 H_u & k_2 H_v & k_3 H_w \end{vmatrix} \tag{7.60}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

7.3.3 کروی محدد میں گردش کی مساوات

جیسے صفحہ 82 پر حصہ 3.10 میں بتلایا گیا عمومی محدد میں

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= r \\ k_3 &= r\sin\theta \end{aligned}$$

اور $\boldsymbol{a}_u$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$، $\boldsymbol{a}_v$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\theta$ اور $\boldsymbol{a}_w$ کی جگہ $\boldsymbol{a}_\phi$ پر کرنے سے کروی محدد حاصل ہوتا ہے۔مساوات 7.59 میں یہی کچھ پر کرتے ہوئے یوں کروی محدد میں گردش کی مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi r\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial(H_\theta r)}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial H_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(H_\phi r\sin\theta)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(H_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi$$

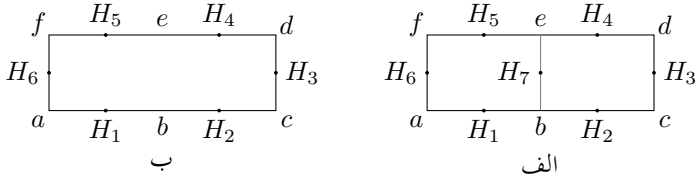
یا

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi \tag{7.61}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مشق 7.4: اگر $\boldsymbol{H} = 2r\cos\theta\boldsymbol{a}_\mathrm{r} - 3r\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$ ہو تب $\nabla \times \boldsymbol{H}$ کیا ہو گا۔

جواب: $\nabla \times \boldsymbol{H} = -4\sin\theta\boldsymbol{a}_\theta$



شکل 7.14: چھوٹے رقبوں کے گرد لکیری تکمل پورے رقبے کے گرد لکیری تکمل کے برابر ہے۔

7.4 مسئلہ سٹوکس

شکل 7.14-الف میں ایک رقبہ دکھایا گیا ہے جسے دو چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔بائیں چھوٹے رقبے کے لئے گردش

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla\times \boldsymbol{H}_B)_N$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں زیر نوشت میں N اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ گردش رقبے ΔS_B کے عمودی ہے اور زیر نوشت میں B بائیں رقبے کو ظاہر کرتا ہے۔یوں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_B$ سے مراد بائیں رقبے کے سرحد پر چھوٹا فاصلہ ہے جبکہ $\boldsymbol{H}_B$ سے مراد بائیں چھوٹے رقبے کے وسط میں مقناطیسی شدت ہے۔ اس طرح اسی مساوات کو

$$\frac{\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B}{\Delta S_B} \doteq (\nabla\times \boldsymbol{H}_B)\cdot \boldsymbol{a}_N$$

یا

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B \doteq (\nabla\times \boldsymbol{H}_B)\cdot \boldsymbol{a}_N\Delta S_B = (\nabla\times \boldsymbol{H})\cdot \Delta \boldsymbol{S}_B$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ اس رقبے کی اکائی عمودی سمتیہ ہے۔اب شکل کو دیکھ کر

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B \doteq \boldsymbol{H}_1\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ba} + \boldsymbol{H}_7\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{eb} + \boldsymbol{H}_5\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{fe} + \boldsymbol{H}_6\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{af}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اسی طرح دائیں چھوٹے رقبے کے لئے

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D \doteq (\nabla\times \boldsymbol{H}_D)\cdot \Delta \boldsymbol{S}_D$$

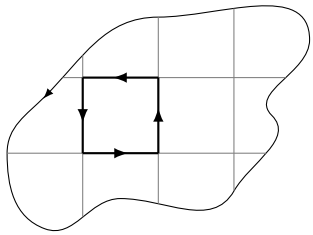
اور

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D \doteq \boldsymbol{H}_2\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{cb} + \boldsymbol{H}_3\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{dc} + \boldsymbol{H}_4\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ed} + \boldsymbol{H}_7\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{be}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

دائیں رقبے کے لکیری تکمل میں $\boldsymbol{H}_7\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{be} = -\boldsymbol{H}_7\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{eb}$ لکھ کر دونوں رقبوں کے لکیری تکمل جمع کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_B + \oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_D &\doteq \boldsymbol{H}_1\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ba} + \boldsymbol{H}_2\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{cb} + \boldsymbol{H}_3\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{dc} + \boldsymbol{H}_4\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{ed} + \boldsymbol{H}_5\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{fe} + \boldsymbol{H}_6\cdot \Delta \boldsymbol{L}_{af}\\ &\doteq (\nabla\times \boldsymbol{H}_B)\cdot \Delta \boldsymbol{S}_B + (\nabla\times \boldsymbol{H}_D)\cdot \Delta \boldsymbol{S}_D\end{aligned}$$



شکل 7.15: کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر کے گرد لکیری تکمل لیں۔ان تمام کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹے رقبوں کے مشترک طرف ΔL_{be} پر دونوں کے لکیری تکمل آپس میں کٹ گئے ہیں۔یہاں پہلی مساوات پورے رقبے کے گرد لکیری تکمل کے برابر ہے جو شکل 7.14-ب کو دیکھ کر لکھی جا سکتی ہے۔ ہم نے شکل 7.14-الف میں رقبے کے صرف دو ٹکڑے لئے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رقبے کے زیادہ ٹکڑے کرتے ہوئے بھی یہی طریقہ کار استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح اگر کسی بھی بڑے رقبے کو انتہائی چھوٹے چھوٹے رقبوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ایک کے گرد لکیری تکمل لیا جائے تو ان کا مجموعہ پورے رقبے کے سرحد پر گھومتے لکیری تکمل کے برابر ہو گا۔شکل 7.15 میں بڑے رقبے کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کیا دکھایا گیا ہے۔ہر دو جڑے چھوٹے رقبوں کے مشترکہ طرف پر لکیری تکمل آپس میں کٹ جائیں گے۔ یوں تمام چھوٹے رقبوں کے لکیری تکمل کے مجموعے کو بڑے رقبے کا لکیری تکمل لیتے ہوئے اور تمام چھوٹے رقبوں کے $(\nabla \times \boldsymbol{H}_B) \cdot \Delta \boldsymbol{S}$ کے مجموعے کو تکمل کی شکل میں لکھتے ہوئے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}_B) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{7.62}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو صرف بڑے رقبے S کے سرحد پر لیا جاتا ہے۔

اگرچہ ہم نے مساوات 7.62 مقناطیسی میدان کے لئے حاصل کیا، درحقیقت یہ ایک عمومی مساوات ہے جو کسی بھی سمتی میدان کے لئے درست ہے۔یہ مساوات مسئلہ سٹوکس[9] بیان کرتا ہے۔

مسئلہ سٹوکس سے ایمپیئر کا دوری قانون باآسانی حاصل ہوتا ہے۔ایسا کرنے کی خاطر $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ کے دونوں اطراف کا $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے دونوں اطراف کا کھلے سطح S پر سطحی تکمل لیتے ہوئے مسئلہ سٹوکس کا استعمال کریں گے۔

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

کثافت برقی رو کا سطحی تکمل سطح S سے گزرتی برقی رو کے برابر ہے لہٰذا مندرجہ بالا سے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

حاصل ہوتا ہے جو ایمپیئر کا دوری قانون ہے۔ایمپیئر کے دوری قانون کے اس مختصر حصول سے یہ حقیقت بھی واضح ہوتی ہے کہ I ان تمام سطحوں سے گزرتی برقی رو ہے جن کا سرحد تکمل میں استعمال بند راہ ہے۔

[9] Stokes theorem

مسئلہ سٹوکس سطحی تکمل اور بند لکیری تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ مسئلہ پھیلاو حجمی تکمل اور بند سطحی تکمل کے مابین تعلق بیان کرتا ہے۔یہ دونوں مسئلے عمومی سمتیاتی ثبوت پیش کرنے میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔آئیں ایسی ایک مثال دیکھتے ہیں جس میں ہم $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}$ کو بیان کرنے کا مختلف طریقہ حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں جہاں $\boldsymbol{A}$ کوئی بھی عمومی سمتی میدان ہو سکتا ہے۔

شروع کرنے سے پہلے یاد رہے کہ گردش کا حاصل جواب سمتیہ ہوتا ہے جبکہ پھیلاو کا حاصل جواب غیر سمتی ہوتا ہے۔کسی بھی عمومی سمتیہ میدان $\boldsymbol{A}$ کا گردش $\nabla \times \boldsymbol{A}$ بھی سمتیہ ہو گا جبکہ اس گردش کا پھیلاو $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}$ غیر سمتی ہو گا جسے ہم T کہتے ہیں یعنی

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = T$$

دونوں اطراف کا حجمی تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{\text{حجم}} (\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A})\, \mathrm{d}h = \int_{\text{حجم}} T\, \mathrm{d}h$$

بائیں ہاتھ پر مسئلہ پھیلاو لاگو کرتے ہوئے

$$\oint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{حجم}} T\, \mathrm{d}h$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کا بایاں ہاتھ حجم کو گھیرتے بند سطح پر $\nabla \times \boldsymbol{A}$ کا تکمل ہے۔مسئلہ سٹوکس کسی بھی سطح پر سطحی تکمل اور اس سطح کے سرحد پر لکیری تکمل کا تعلق بیان کرتا ہے۔یوں مندرجہ بالا مساوات کے بائیں ہاتھ میں اگر سطح کو تھیلا سمجھا جائے تو تھیلے کا منہ سطح کا سرحد ہو گا جس پر لکیری تکمل لیا جائے گا۔جیسے جیسے تھیلے کے منہ کو چھوٹا کیا جائے ویسے ویسے تھیلا بند سطح کی شکل اختیار کرے گا جبکہ سطح کا سرحد چھوٹے سے چھوٹا ہوتا جائے گا حتیٰ کہ جب تھیلے کا منہ مکمل بند ہو جائے تو تھیلا مکمل بند سطح ہو گا جبکہ اس کا سرحد صفر کے برابر ہو گا۔صفر لمبائی کے راہ پر تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\int_0^0 \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

یوں

$$\int_{\text{حجم}} T\, \mathrm{d}h = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ یہ مساوات کسی بھی حجم کے لئے درست ہے لہٰذا یہ تفرقی حجم $\mathrm{d}h$ کے لئے بھی درست ہے یعنی

$$T\, \mathrm{d}h = 0$$

جس سے

$$T = 0$$

یا

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0 \tag{7.63}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 7.63 انتہائی اہم ثبوت ہے جس کے تحت کسی بھی عمومی سمتی میدان کے گردش کا پھیلا صفر کے برابر ہوتا ہے۔اس ثبوت کو مندرجہ ذیل مثال میں کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے بھی حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 7.3: کسی بھی عمومی سمتی میدان $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + A_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + A_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ کا گردش اور گردش کا پھیلا کارتیسی محدد میں حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہو گا۔

حل:پہلے گردش حاصل کرتے ہیں

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$$

جس کا پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

کے برابر ہے جہاں $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}$ اور $-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}$ کی طرح بقایا اجزاء بھی آپس میں کٹ جاتے ہیں۔

ساکن مقناطیسی میدان یعنی وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان کے لئے ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

ہے۔اس مساوات کے دونوں اطراف کا پھیلاو حاصل کرتے ہوئے

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \cdot \boldsymbol{J}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 7.63 کے تحت گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{7.64}$$

ہو گا۔اس سے ظاہر ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف ایسی برقی رو سے حاصل ہوتا ہے جس کے لئے مساوات 7.64 درست ہو۔یہی نتیجہ ہم پہلے بھی مساوات 7.4 میں حاصل کر چکے ہیں جہاں ہم دیکھ چکے کہ $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ سے مراد بند راہ سے کل صفر یک سمتی برقی رو کا گزرنا ہے۔

7.5 مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو

خالی خلاء میں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ کی تعریف

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{7.65}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{B}$ کی اکائی ویبر فی مربع میٹر $\mathrm{Wb/m^2}$ ہے جسے ٹسلا[10] پکارا اور T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس مساوات میں μ_0 خالی خلاء کا مقناطیسی مستقل[11] ہے جسے ہینری فی میٹر $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$ میں ناپا جاتا ہے۔خالی خلاء میں

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{7.66}$$

---

[10] Tesla

[11] magnetic constant, permeability

کے برابر ہے۔

چونکہ $\boldsymbol{H}$ کی اکائی ایمپیئر فی میٹر ہے لہٰذا ویبر کی اکائی ہینری ضرب ایمپیئر ہے۔ہینری کو اکائی تصور کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ہینری ضرب ایمپیئر کو ویبر لکھا جاتا ہے۔وقت کے ساتھ بدلتے میدان پر غور کے دوران ہم دیکھیں گے کہ ویبر سے مراد وولٹ ضرب سیکنڈ بھی لیا جا سکتا ہے۔

خالی خلاء میں کثافت برقی بہاو $\boldsymbol{D}$ اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ کا تعلق

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$$

ہو بہو مساوات 7.65 کی طرح ہے۔کثافت برقی بہاو کا سطحی تکمل برقی بہاو ψ دیتا ہے۔

$$\psi = \int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

کسی بھی بند سطح سے گزرتی برقی بہاو اس سطح میں گھیرے چارج Q کے برابر ہوتا ہے۔

$$\psi = \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

مثبت چارج سے برقی بہاو کا اخراج ہوتا ہے جبکہ منفی چارج پر برقی بہاو کا اختتام ہوتا ہے۔یوں برقی بہاو کا منبع برقی چارج ہے۔مقناطیسی قطب ہر صورت جوڑی کی شکل میں پائے جاتے ہیں۔آج تک تنہا مقناطیسی قطب نہیں پایا گیا۔یوں آج تک ایسی صورت دیکھنے کو نہیں ملی جہاں تنہا مقناطیسی قطب سے مقناطیسی بہاو کا اخراج ہو یا مقناطیسی بہاو اس پر اختتام پذیر ہو۔ مقناطیسی بہاو کا منبع برقی رو ہے۔ یاد رہے کہ نا تو مقناطیسی بہاو اس برقی رو سے خارج اور نا ہی اس پر اختتام پذیر ہوتی ہے بلکہ یہ بند دائرے کی شکل میں برقی رو کو گھیرتی ہے۔کثافت مقناطیسی بہاو کا سطحی تکمل مقناطیسی بہاو[12] Φ دیتا ہے جسے ویبر[13] Wb میں ناپا جاتا ہے۔

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \mathrm{Wb} \tag{7.67}$$

چونکہ مقناطیسی بہاو بند دائرہ بناتا ہے لہٰذا کسی بھی بند سطح میں جتنا مقناطیسی بہاو داخل ہوتا ہے، اتنا ہی مقناطیسی بہاو اس سطح سے خارج بھی ہوتا ہے لہٰذا کسی بھی بند سطح پر مقناطیسی بہاو کا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{7.68}$$

مسئلہ پھیلاو کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.69}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم نے مساوات 7.68 کو ثابت نہیں کیا بلکہ حقیقت کو سامنے رکھتے ہوئے اسے لکھا ہے۔اس کو آگے ثابت کیا جائے گا۔فی الحال اس کو قبول کر لیں اور یوں مساوات 7.69 کو بھی درست تصور کریں۔

---

[12] magnetic flux
[13] Weber

ساکن مقناطیسی اور ساکن برقی میدان کے لئے مساوات 7.69 میکس ویل کی چوتھی اور آخری مساوات ہے۔ان تمام کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{D}&=\rho\\ \nabla\times\boldsymbol{E}&=0\\ \nabla\times\boldsymbol{H}&=\boldsymbol{J}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}&=0\end{aligned}\tag{7.70}$$

ان کے ساتھ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\epsilon_0\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}&=\mu_0\boldsymbol{H}\end{aligned}\tag{7.71}$$

کو بھی شامل کرتے ہیں۔ہم برقی میدان کی شدت اور ساکن برقی دباو کا تعلق بھی پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V\tag{7.72}$$

مساوات 7.70 برقی اور مقناطیسی میدان کے پھیلاو اور گردش بیان کرتے ہیں جو ان میدان کی خاصیت کے نقطہ اشکال ہیں۔انہیں کی تکمل اشکال مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}\oint_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=Q=\int_{\text{حجم}}\rho_h\,\mathrm{d}h\\ \oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}&=0\\ \oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}&=I=\int_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ \oint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=0\end{aligned}\tag{7.73}$$

ہم جلد ساکن مقناطیسی میدان کے مقناطیسی دباو پر بھی غور کریں گے۔ہم نے برقی میدان پر غور کے دوران موصل اجزاء کے اثر کو بھی تقطیب $\boldsymbol{P}$ کی صورت میں شامل کیا۔ایسا کرتے ہوئے جزو برقی مستقل کا سہارا لیا گیا۔اگلے باب میں اسی طرح دیگر اجزاء کا مقناطیسی میدان پر اثر دیکھا جائے گا۔

آئیں مقناطیسی بہاو اور کثافت مقناطیسی بہاو کا استعمال ہم محوری تار کے اندر بہاو کے مثال کی صورت میں دیکھیں۔ایسی ہم محوری تار جسے شکل 7.7 میں دکھایا گیا ہے میں مقناطیسی شدت

$$H_\phi=\frac{I}{2\pi\rho}\qquad(\rho_1<\rho<\rho_2)$$

ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں۔ یوں کثافت مقناطیسی بہاو

$$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi$$

ہو گا۔اندرونی اور بیرونی تار کے درمیان مقناطیسی بہاو وہی ہو گا جو ان تاروں کے درمیان رداسی سیدھی سطح سے گزرے گا۔تار کو z محدد پر تصور کرتے ہوئے $z=0$ تا $z=d$ تک رداسی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاو

$$\Phi=\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^d\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi\cdot(\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_\phi)$$

یعنی

$$\Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{7.74}$$

ہو گی۔ یہ مساوات آگے جا کر ہم محوری تار کے امالہ کے حصول میں کام آئے گی۔

مشق 7.5: تانبے کی تار کو پانی سے ٹھنڈا کرتے ہوئے اس میں زیادہ کثافت برقی رو گزاری جا سکتی ہے۔ایک ایسی ہم محوری تار جس کے اندرونی تار کا اندرونی رداس 25 mm جبکہ اس کا بیرونی رداس 28 mm ہے اور جس کے بیرونی تار کا اندرونی رداس 35 mm اور بیرونی رداس 37 mm ہے میں 10 000 A کا یک سمتی برقی رو تاروں میں الٹ سمت میں گزر رہا ہے۔ٹھنڈا پانی اندرونی تار کے اندر اور تاروں کے درمیان فاصلے سے گزار کر انہیں ٹھنڈا رکھا جاتا ہے۔ دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین $\boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{B}$ حاصل کرنے کے بعد 1 m لمبائی کے لئے دونوں تاروں کے اندر اور ان کے مابین مقناطیسی بہاو حاصل کریں۔

جوابات: اندرونی تار میں $J = 20\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2}$ اور $\Phi = 109\,\mu\mathrm{Wb}$ ہیں۔بیرونی تار میں $J = 22.1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2}$ اور $\Phi = 56.6\,\mu\mathrm{Wb}$ ہیں۔تاروں کے درمیانی فاصلے میں $\Phi = 446\,\mu\mathrm{Wb}$ ہے۔

مشق 7.6: $z = 0$ سطح پر ρ رداس کے گول بند دائرے میں I برقی رو گزر رہی ہے۔گول دائرے کا مرکز کارتیسی محدد کے $(0,0,0)$ پر ہے۔اگر مثبت z جانب سے دیکھا جائے تو برقی رو گھڑی کے الٹ سمت میں گھوم رہی ہے۔بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے دائرے کے عین وسط میں $\boldsymbol{H}$ حاصل کریں۔

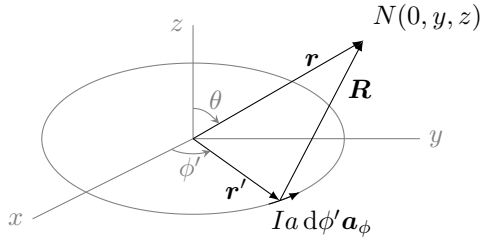
جواب: $\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\rho}\boldsymbol{a}_z$

مندرجہ بالا مشق میں آپ نے دائرے کے مرکز پر مقناطیسی میدان حاصل کیا۔یہی طریقہ استعمال کرتے ہوئے دائرے کے محور پر کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔البتہ جیسے ہی محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان مطلوب ہو مسئلہ خاصہ مشکل ہو جاتا ہے۔مندرجہ ذیل مثال میں اس حقیقت کو سامنے رکھا جائے گا کہ محور سے ہٹ کر برقی رو گزارتے گول دائرے کا مقناطیسی میدان حاصل کرنا کیوں ممکن نہیں ہو گا۔اس کے بعد اس مسئلے کا عددی حل[14] حاصل کرنا دکھایا جائے گا۔کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کسی بھی مسئلے کا عددی حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 7.4: شکل 7.16 میں $x = 0$ سطح یعنی yz سطح پر نقطہ $N(0,y,z)$ پر گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کریں۔

---

[14] numerical solution



شکل 7.16: گول بند دائرے میں یک سمتی برقی رو سے محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان۔

حل:رداس a کے گول دائرے پر نقطہ $N'(a,\frac{\pi}{2},\phi')$ پر چھوٹی سمتی لمبائی کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}' = a\,\mathrm{d}\phi'\boldsymbol{a}'_\phi$ لکھا جا سکتا ہے جہاں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}'_\phi$ کو کارتیسی محدد میں

$$\boldsymbol{a}'_\phi = -\sin\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}' = a\,\mathrm{d}\phi'\left(-\sin\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ چھوٹی لمبائی خود $(a\cos\phi', a\sin\phi')$ پر پائی جاتی ہے یعنی

$$\boldsymbol{r}' = a\boldsymbol{a}'_\rho = a\cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + a\sin\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$$

کے برابر ہے۔نقطہ N کا مقام کارتیسی محدد میں

$$\boldsymbol{r} = y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$$

ہے۔یوں

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = -a\cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + (y - a\sin\phi')\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$$

لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{R}| = R &= \sqrt{(-a\cos\phi')^2 + (y - a\sin\phi')^2 + z^2}\\ &= \sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'}\end{aligned}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{R} = \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \frac{-a\cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + (y - a\sin\phi')\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2 - 2ay\sin\phi'}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔بایوٹ سیوارٹ قانون میں $\boldsymbol{a}_\mathrm{R} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}$ پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}' \times \boldsymbol{R}}{4\pi R^3}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آئیں پہلے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}' \times \boldsymbol{R}$ کی سادہ شکل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{L}' \times \boldsymbol{R} &= a\,\mathrm{d}\phi'\left(-\sin\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right) \times \left[-a\cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + (y - a\sin\phi')\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right]\\ &= a\,\mathrm{d}\phi'\left[z\cos\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + z\sin\phi'\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + (a - y\sin\phi')\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right]\end{aligned}$$

یوں بایوٹ سیوارٹ کے قانون کو

$$\boldsymbol{H} = \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\cos\phi'\boldsymbol{a}_x + z\sin\phi'\boldsymbol{a}_y + (a - y\sin\phi')\boldsymbol{a}_z}{\left(a^2+y^2+z^2-2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\phi'$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں H_x جزو صفر کے برابر ہے۔یہ حقیقت سیدھی منطق سے ثابت ہوتی ہے۔کسی بھی زاویہ ϕ' پر چھوٹی لمبائی سے پیدا میدان کو زاویہ $\pi - \phi'$ پر چھوٹی لمبائی کا میدان ختم کرتا ہے۔یوں یہ جزو صفر کے برابر ہے۔جن کا منطق پر پورا عقیدہ نہیں ہے وہ H_x جزو میں نیا متغیرہ $w = a^2+y^2+z^2-2ay\sin\phi'$ پر کرتے ہوئے تکمل لے کر دیکھیں کہ

$$H_x = \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2+y^2+z^2-2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ہی ہے۔بقایا دو اجزاء

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2+y^2+z^2-2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}} \\ H_z &= \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(a - y\sin\phi')\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2+y^2+z^2-2ay\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{7.75}$$

ہیں۔یہ دونوں بیضوی تکمل[15] ہیں جنہیں الجبرائی طریقے سے حل کرنا ممکن نہیں ہے۔

بیضوی تکمل کا عددی حل[16] بذریعہ کمپیوٹر حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے بیضوی تکمل کا عددی حل حاصل کریں۔

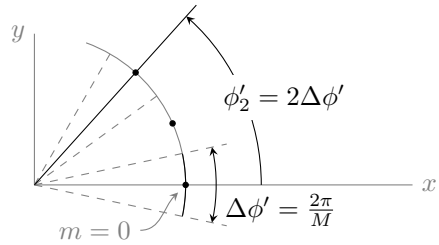
مثال 7.5: مندرجہ بالا مثال میں H_y اور H_z کے حل بیضوی تکمل کی صورت میں حاصل ہوئے۔نقطہ $N(0,a,a)$ پر H_y کا عددی حل حاصل کریں۔

حل:اس نقطے پر

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{aI}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(a^2+a^2+a^2-2a^2\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{I}{4\pi a}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'}{\left(3-2\sin\phi'\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

---

[15] elliptic integral
[16] numerical solution



شکل 7.17: تکمل کے راہ کو متعدد چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

لکھا جائے گا۔اس تکمل کو مجموعے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔شکل 7.17 کو دیکھ کر آگے پڑھیں۔تکمل کے راہ کو M برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑا پر $\Delta\phi' = \frac{2\pi}{M}$ کے برابر ہو گا۔ان ٹکڑوں کے گنتی کا حساب ہم m سے رکھتے ہیں جہاں m کی قیمت 0 تا $(M-1)$ ہے۔یوں پہلے ٹکڑے کو $m = 0$ سے ظاہر کیا جائے گا اور اس ٹکڑے کے عین وسط میں زاویہ $\phi_0' = 0$ ہو گا۔شکل میں راہ کے چھوٹے ٹکڑوں کے عین وسط کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔دوسرے ٹکڑے پر $m = 1$ اور زاویہ $\phi_1' = \Delta\phi' = \frac{2\pi}{M}$ ہو گا۔جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے، تیسرے پر $m = 2$ اور زاویہ $\phi_2' = 2\Delta\phi' = \frac{2\times 2\pi}{M}$ ہو گا۔یوں عمومی ٹکڑے m پر زاویہ $\phi_m' = m\Delta\phi' = \frac{2m\pi}{M}$ ہو گا۔

اگر ان چھوٹے ٹکڑوں پر تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کو رد کرنا ممکن ہو تب ہر چھوٹے ٹکڑے پر تکمل تقریباً

$$\begin{aligned}\Delta H_y &= \frac{I}{4\pi a}\frac{\sin\phi_m'\Delta\phi'}{\left(3-2\sin\phi_m'\right)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{I}{4\pi a}\frac{\sin(\frac{2m\pi}{M})\frac{2\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

کے برابر ہو گا۔یوں تمام ٹکڑوں کا مجموعہ

$$H_y = \frac{I}{4\pi a}\frac{2\pi}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\frac{\sin\frac{2m\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ہو گا۔جدول 7.1 میں $M = 10$ کی صورت میں m کے تمام قیمتوں پر حاصل $\frac{\sin\frac{2m\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$ اجزاء دئے گئے ہیں۔ان تمام کا مجموعہ

$$\begin{aligned}H_y &= \frac{I}{4\pi a}\frac{2\pi}{M}(0.00000+0.23852+0.82674+0.82674+0.23852+0.00000\\ &\qquad -0.06889-0.08763-0.08763-0.06889)\\ &= \frac{I}{4\pi a}\frac{2\pi}{10}(1.8175)\\ &= 1.1420\left(\frac{I}{4\pi a}\right)\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔زیادہ سے زیادہ ٹکڑے لیتے ہوئے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔اگر $M = 100$ کر دیا جائے تب $H_y = \frac{1.1433I}{4\pi a}$ حاصل ہوتا ہے۔

جدول کو دیکھتے ہوئے ظاہر ہے کہ $m = 0$ اور $m = 5$ برابر حصہ ڈالتے ہیں۔اسی طرح $m = 1$ اور $m = 4$ بھی برابر حصہ ڈالتے ہیں۔ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے پورے جدول کو حل کرنا درکار نہیں ہے۔درحقیقت موجودہ مثال میں جدول کے صرف

$\frac{\sin\frac{2m\pi}{M}}{\left(3-2\sin\frac{2m\pi}{M}\right)^{\frac{3}{2}}}$	m
0.00000	0
0.23852	1
0.82674	2
0.82674	3
0.23852	4
0.00000	5
−0.06889	6
−0.08763	7
−0.08763	8
−0.06889	9

جدول 7.1: دائرے پر برقی رو سے حاصل مقناطیسی میدان کی شدت بذریعہ عددی حل۔

پانچ یعنی آدھے خانوں کا حل درکار ہے۔موجودہ مسئلے میں صرف دس چھوٹے ٹکڑے کرتے ہوئے تقریباً درست جواب حاصل ہوتا ہے۔دس اور سو ٹکڑوں کے جوابات میں صرف

$$\left(\frac{1.1433-1.1420}{1.1433}\right)\times 100 = 0.11\,\%$$

کا فرق ہے۔

7.6 غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو

برقی میدان کے مسائل برقی دباو کے استعمال سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں۔گھریلو 220 V کے برقی دباو سے آپ بخوبی واقف ہیں۔اگرچہ برقی دباو سے ہمیں روز مرہ زندگی میں عموماً واسطہ پڑتا ہے اور یہ ہمارے لئے ایک حقیقت رکھتا ہے، مقناطیس و برقیات کے میدان میں برقی دباو کی اہمیت صرف اس وجہ سے ہے کہ اس کی مدد سے برقی مسائل باآسانی حل ہو جاتے ہیں۔مثال کے طور پر ہم کسی بھی چارج سے پہلے برقی دباو اور پھر برقی دباو سے برقی شدت حاصل کرتے ہیں۔

برقی دباو غیر سمتی مقدار ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ برقی دباو کے طرز پر غیر سمتی مقناطیسی دباو[17] بیان کیا جا سکتا ہے۔البتہ یہ صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر قابل بیان ہوتا ہے۔یوں اس کا استعمال ہر جگہ ممکن نہیں ہو گا۔اس کے برعکس سمتی مقناطیسی دباو[18] بھی بیان کیا جا سکتا ہے جو انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔سمتی مقناطیسی دباو اینٹینا[19] ، موتج[20] اور مائیکرو ویو چولھے (خرد موج چولھے)[21] پر غور کرنے میں مدد دیتا ہے۔یہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی قابل استعمال ہو گا اور یہ ان مقامات پر بھی قابل بیان ہو گا جہاں برقی رو پائی جائے۔آئیں پہلے غیر سمتی مقناطیس دباو دیکھیں۔

---

[17] scalar magnetic potential
[18] vector magnetic potential
[19] antenna
[20] waveguide
[21] microwave oven

برقی دباو اور برقی میدان کی شدت کا تعلق صفحہ 103 پر مساوات 4.46 میں بیان کیا گیا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں بالکل اسی طرح غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m کی ڈھلوان منفی مقناطیسی شدت دیتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m$$

یہ نیا تفاعل مقناطیسی میدان کے دیگر تفاعل کے ساتھ ہم آہنگ ہونا چاہیے لہٰذا اسے ایمپیئر کے دوری قانون کے نقطہ صورت پر پورا اترنا ہو گا۔اس طرح

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} = \nabla \times (-\nabla V_m) \tag{7.76}$$

ہو گا۔ البتہ جیسے آپ مشق 7.7 میں دیکھیں گے، کسی بھی متغیرہ کی ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے۔یوں مقناطیسی میدان کے شدت اور غیر سمتی مقناطیسی دباو کا تعلق صرف اس صورت درست ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{J} = 0$ ہو یعنی

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m \qquad (\boldsymbol{J} = 0) \tag{7.77}$$

اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر مقناطیسی دباو پر لاگو شرط کہ کثافت برقی رو صفر ہونا ضروری ہے ناقابل قبول شرط ہے۔اگرچہ کئی صورتوں میں کثافت برقی رو صفر ہو گی اور V_m کا استعمال ممکن ہو گا لیکن ہمیں ایسے مسائل بھی درپیش ہوں گے جہاں کثافت برقی رو صفر نہ ہو گا۔ایسی صورت میں V_m ہمارے کسی کام کا نہ ہو گا۔ غیر سمتی مقناطیسی دباو V_m کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اسے ایمپیئر میں ناپا جائے گا۔

خالی خلاء میں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

سے

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0$$

یا

$$\nabla^2 V_m = 0 \qquad (\boldsymbol{J} = 0) \tag{7.78}$$

جو لاپلاس مساوات ہے حاصل ہوتا ہے۔یوں غیر سمتی مقناطیسی دباو لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔ہم دیکھیں گے کہ ہر طرف یکساں خاصیت کے مقناطیسی اشیاء میں بھی V_m لاپلاس مساوات پر پورا اترتا ہے۔یاد رہے کہ V_m صرف اور صرف کثافت برقی رو سے پاک مقامات پر درست ثابت ہوتا ہے۔

اگلے باب میں V_m پر تفصیلی غور کیا جائے گا۔یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ چونکہ مقناطیسی میدان بقائی میدان نہیں ہے لہٰذا V_m کی قیمت اٹل نہیں ہو گی۔آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں کسی نقطے کو برقی زمین رکھتے ہوئے کسی دوسرے نقطے پر برقی دباو اٹل قیمت رکھتی ہے۔مقناطیسی میدان میں ایسا ممکن نہیں ہے۔ایسی ایک مثال دیکھنے کی خاطر z محدد پر رکھی لامحدود لمبائی کے تار پر غور کرتے ہیں جس میں $\boldsymbol{a}_z$ جانب I برقی رو گزر رہی ہو۔ایسی تار کے گرد جہاں $\boldsymbol{J} = 0$ ہے

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\phi$$

ہو گا اور غیر سمتی مقناطیسی دباو حاصل کیا جا سکتا ہے۔مساوات 7.77 اور نلکی محدد میں V_m کے ڈھلوان کا زاویائی جزو لیتے ہوئے

$$\frac{I}{2\pi\rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_m}{\partial \phi}$$

یا

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = -\frac{I}{2\pi}$$

سے

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں تکمل کے مستقل کو صفر چنا گیا ہے تا کہ $\phi = 0$ پر مقناطیسی زمین ہو۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہے لہٰذا یہی مقناطیسی زمین ہے۔اب اگر ہم تار کے گرد پورا چکر کاٹیں تو ہم اسی مقناطیسی زمین پر دوبارہ پہنچتے ہیں لیکن مندرجہ بالا مساوات کے تحت $\phi = 2\pi$ پر $V_m = -I$ کے برابر ہے نا کہ صفر۔تار کے گرد دو چکر کے بعد اسی نقطے پر $V_m = -2I$ حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی نقطے پر غیر سمتی مقناطیسی دباو کے متعدد قیمتیں ممکن ہیں۔آپ کو یاد ہو گا کہ برقی میدان میں ایک مرتبہ برقی زمین چنے کے بعد کسی بھی ایک نقطے پر ایک ہی برقی دباو کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

آئیں غیر سمتی مقناطیسی دباو کے متعدد قیمتوں کا ممکن ہونا سمجھیں۔ساکن برقی میدان میں

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$
$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$$

ہوتا ہے لہٰذا دو نقطوں کے مابین لکیری تکمل

$$V_{ab} = -\int_b^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

کا دارومدار تکمل کے راہ پر منحصر نہیں ہوتا۔ساکن مقناطیسی میدان میں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \qquad (\boldsymbol{J} = 0)$$

ہوتا ہے لیکن

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

کے برابر ہوتا ہے اگرچہ تکمل کے راہ پر $\boldsymbol{J} = 0$ ہے۔یوں تکمل لیتے ہوئے جب بھی ایک چکر پورا ہو، تکمل کے قیمت میں I برابر اضافہ آئے گا۔ہاں اگر تکمل کی راہ صفر برقی رو گھیرے تب غیر سمتی مقناطیسی دباو بھی ایک قیمت رکھے گا۔ان حقائق کو مدنظر رکھتے ہوئے غیر سمتی مقناطیسی دباو

$$V_{ab} = -\int_b^a \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \qquad \text{(قیمت راہ پر منحصر ہے)} \tag{7.79}$$

بیان کی جاتی ہے۔ہم یہ فیصلہ کر سکتے ہیں کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو حاصل کرتے وقت صرف ایک چکر کاٹا جائے گا۔اس شرط پر چلتے ہوئے V_m ایک قیمت رکھے گا۔یہ آپ مندرجہ بالا مثال سے دیکھ سکتے ہیں یعنی

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi \qquad (-\pi < \phi \leq \pi) \tag{7.80}$$

کی صورت میں $\phi = 0$ پر $V_m = 0$ ہی حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات میں چکر کی وضاحت ضروری ہے۔صفر زاویہ سے شروع ہو کر اگر زاویہ ϕ مثبت جانب بڑھایا جائے تو $\phi = \pi$ تک پہنچا جا سکتا ہے۔اس کے برعکس اگر صفر زاویہ سے شروع ہو کر زاویہ ϕ منفی کرتے ہوئے $\phi = \pi$ تک پہنچنے کی کوشش کی جائے تو ایسا ممکن نہیں ہے۔یوں $\phi = \pi$ پر V_m کی ایک عدد قیمت ہو گی۔

مشق 7.7: کارتیسی محدد استعمال کرتے ہوئے مثال 7.3 کے طرز پر ثابت کریں کہ کسی بھی غیر سمتی متغیرہ کے ڈھلوان کی گردش صفر کے برابر ہو گی یعنی

$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \tag{7.81}$$

آئیں اب سمتی مقناطیسی دباو پر غور کرتے ہیں۔ہم شروع

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.82}$$

سے کرتے ہیں۔سمتی مقناطیسی دباو کو اس مساوات کے ہم آہنگ ہونا ہو گا۔مساوات 7.63 میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا پھیلاو صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا اگر $\boldsymbol{B}$ سمتی متغیرہ A کا گردش

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.83}$$

ہو تب بھی $\boldsymbol{B}$ کا پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0$$

ہی ہو گا۔ہم مساوات 7.83 میں دئے $\boldsymbol{A}$ کو سمتی مقناطیسی دباو کی تعریف مان کر آگے بڑھتے ہیں۔یوں سمتی مقناطیسی دباو خود بخود مساوات 7.82 کے ہم آہنگ ہو گا۔ یوں

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{A}$$

اور

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A}$$

حاصل ہوتے ہیں۔کسی بھی سمتی متغیرہ کے گردش کا گردش عموماً صفر کے برابر نہیں ہوتا۔سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کی اکائی ویبر فی میٹر $\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}}$ ہے۔گردش کے گردش کی قدر مختلف صورت صفحہ 200 پر مساوات 7.38 میں حاصل کی گئی ہے۔

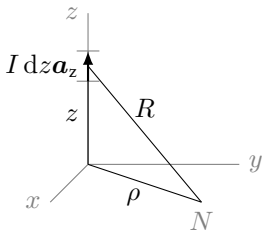
ہم حصہ 7.7.1 میں دیکھیں گے کہ $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{A}$ کے تعریف اور بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے

$$\boldsymbol{A} = \oint \frac{\mu_0 I \, \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi R} \tag{7.84}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم نے $\boldsymbol{A}$ کی تعریف اس کے گردش کے ذریعے کی ہے۔چونکہ ڈھلوان کا گردش صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ہم مندرجہ بالا مساوات کے ساتھ کسی غیر سمتی متغیرہ کا ڈھلوان بھی جمع کر سکتے ہیں۔ایسا کرنے سے $\boldsymbol{B}$ یا $\boldsymbol{H}$ کے قیمتوں پر کوئی اثر نہ پڑتا۔ساکن مقناطیسی میدان میں عموماً ڈھلوان جمع نہیں کیا جاتا اور اس مساوات کو یوں ہی رکھا جاتا ہے۔

ساکن برقی دباو کے مساوات

$$V = \int \frac{\rho_L \, \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi\epsilon_0 R}$$



شکل 7.18: تار کے چھوٹے حصے سے پیدا سمتی مقناطیسی دباو۔

کے ساتھ مساوات 7.84کا موازنہ کرنے سے یہ بات بہتر سمجھ میں آتی ہے کہ $\boldsymbol{A}$ واقع سمتی مقناطیسی دباو ہی ہے۔یہ دونوں مساوات لکیری تکمل دیتے ہیں۔ایک برقی رو اور دوسرا کثافت چارج کا لکیری تکمل دیتا ہے۔دونوں میں تفرقی فاصلے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کا اثر R کے بالعکس متناسب ہے اور دونوں مساوات میں خالی خلاء کے خاصیت یعنی μ_0 اور ϵ_0 استعمال ہوتے ہیں۔

مساوات 7.84 کی تفرق شکل

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{4\pi R} \tag{7.85}$$

بھی لکھی جا سکتی ہے جب تک $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ سے حاصل $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ کا کوئی مطلب نہ لیا جائے۔یاد رہے کہ جب تک بند تکمل پورا نہ لیا جائے، حاصل $\boldsymbol{A}$ کوئی معنی نہیں رکھتا۔

شکل 7.18 میں z محدد پر لامحدود لمبائی کے برقی رو گزارتے تار کا چھوٹا حصہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ دکھایا گیا ہے۔نقطہ N پر یہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}z\boldsymbol{a}_z}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

یا

$$\mathrm{d}A_z = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}z}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}\,, \quad \mathrm{d}A_\rho = 0, \quad \mathrm{d}A_\phi = 0 \tag{7.86}$$

سمتی مقناطیسی دباو پیدا کرے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تار کے ہر چھوٹے حصے کا پیدا کردہ سمتی مقناطیسی دباو تار کے اسی حصے کی سمت میں ہو گا۔

مقناطیسی شدت نکلی محدد میں مندرجہ بالا مساوات کے گردش

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathrm{d}\boldsymbol{A} &= \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\partial\,\mathrm{d}A_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi \\ &= \frac{I\,\mathrm{d}z}{4\pi}\frac{\rho\boldsymbol{a}_\phi}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

سے حاصل ہو گا۔یہی مساوات شکل 7.18 کو دیکھتے ہوئے بایوٹ سیوارٹ کے مساوات سے لکھی جا سکتی ہے۔

سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کے کلیات دیگر اشکال کے کثافت برقی رو کے لئے بھی لکھا جا سکتے ہیں۔یوں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ کے لئے برقی رو کے چھوٹے حصے کو

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S$$

اور حجمی کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ کے لئے

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ لکیری برقی رو کے چھوٹے حصے کو عموماً $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھا جاتا ہے۔یوں برقی رو کو غیر سمتی تصور کرتے ہوئے فاصلے کو سمتی تصور کیا جاتا ہے۔اس کے برعکس مندرجہ بالا دو مساوات میں کثافت برقی رو کو سمتی مقدار تصور کیا گیا جبکہ تفرقی سطح $\mathrm{d}S$ اور تفرقی حجم $\mathrm{d}h$ کو غیر سمتی تصور کیا گیا۔یوں $\boldsymbol{A}$ کے دیگر کلیے

$$\boldsymbol{A} = \int_S \frac{\mu_0 \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S}{4\pi R} \tag{7.87}$$

اور

$$\boldsymbol{A} = \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h}{4\pi R} \tag{7.88}$$

ہیں۔

سمتی مقناطیسی دباو مختلف اشکال کے برقی رو اور کثافت برقی رو سے مندرجہ بالا مساوات کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔برقی دباو کی طرح سمتی مقناطیسی دباو کا زمین بھی لامحدود فاصلے پر رکھا جاتا ہے یعنی $R \to \infty$ پر $\boldsymbol{A} \to 0$ تصور کیا جاتا ہے۔لامحدود فاصلے پر کوئی بھی برقی رو $R \to \infty$ کی بنا پر سمتی مقناطیسی دباو پر کوئی اثر نہیں ڈال سکتا۔

مثال 7.6: رداس a کے موصل تار میں یکساں برقی رو I گزر رہی ہے۔تار کے اندر $\boldsymbol{B}$ حاصل کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ بھی حاصل کریں۔

حل:تار کو z محدد پر پڑا تصور کرتے ہیں۔تار کے اندر ρ رداس کا بند دائرہ $\frac{I\pi\rho^2}{\pi a^2}$ برقی رو گھیرے گی لہٰذا اس دائرے پر $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}\boldsymbol{a}_\phi$ ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{B}$ کا صرف زاویائی جزو پایا جاتا ہے۔یوں $\boldsymbol{A}$ کے گردش کو مساوات 7.52 کی مدد سے لکھتے ہوئے صرف زاویائی جزو لیتے ہیں۔اس طرح

$$B_\phi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ برقی رو $\boldsymbol{a}_z$ سمت میں ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}$ کا صرف A_z جزو متوقع ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات

$$B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

یعنی

$$-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}$$

صورت اختیار کر لے گا جس سے

$$A_z = \frac{\mu_0 I\rho^2}{4\pi a^2} + M$$

حاصل ہوتا ہے جہاں M تکمل کا مستقل ہے۔

7.7 ساکن مقناطیسی میدان کے قوانین کا حصول

ساکن مقناطیس میدان کے تمام قوانین بایوٹ سیوارٹ کے قانون،

$$\boldsymbol{H} = \oint \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{R}}{4\pi R^2} \tag{7.89}$$

سمتی مقناطیسی دباو کے تعریف

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.90}$$

اور مقناطیسی میدان کی شدت اور کثافت مقناطیسی بہاو کے تعلق

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{7.91}$$

سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔امید کی جاتی ہے کہ طلبہ و طالبات مندرجہ ذیل ثبوت کو سمجھتے ہوئے پڑھیں گے۔آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ انہیں یاد کرنے کی کوشش نہ کریں۔

7.7.1 سمتی مقناطیسی دباو

سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کی مساوات

$$\boldsymbol{A} = \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h}{4\pi R} \tag{7.92}$$

ثابت کرنے کی خاطر ہم اس سے بایوٹ سیوارٹ کا قانون یعنی مساوات 7.89 حاصل کرتے ہیں۔مساوات 7.88 میں (x_2, y_2, z_2) پر سمتی مقناطیسی دباو دی گئی ہے جبکہ (x_1, y_1, z_1) وہ مقام ہے جہاں برقی رو گزارتا تار کا چھوٹا حصہ پایا جاتا ہے۔یوں چھوٹے حجم کو $\mathrm{d}h_1$ لکھیں گے جو $\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}z_1$ کے برابر ہو گا۔تکمل کے متغیرات x_1، y_1 اور z_1 ہیں۔یوں

$$\boldsymbol{A}_2 = \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}_1\,\mathrm{d}h_1}{4\pi R_{21}} \tag{7.93}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{\boldsymbol{B}_2}{\mu_0} = \frac{\nabla_2 \times \boldsymbol{A}_2}{\mu_0}$$

کے برابر ہے جہاں ∇_2 کے زیر نوشت میں 2 لکھ کر یاد دہانی کرائی گئی ہے کہ گردش نقطہ (x_2, y_2, z_2) پر حاصل کیا جائے گا لہٰذا گردش کے متغیرات بھی x_2، y_2 اور z_2 ہی ہوں گے۔آپ کو یاد ہو گا کہ صفحہ 103 پر مثال 4.4 میں ڈھلوان حاصل کرتے ہوئے بالکل اسی طرح کیا گیا تھا۔یوں موجودہ مسئلے میں گردش حاصل کرتے وقت تمام تفرق x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ لئے جائیں گے۔

اس طرح مساوات 7.93 سے $\boldsymbol{A}_2$ پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{\mu_0} \nabla_2 \times \int_h \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}_1\,\mathrm{d}h_1}{4\pi R_{21}}$$

حاصل ہوتا ہے۔گردش بنیادی طور پر تفرق کا عمل ہے۔اس مساوات میں تکمل کا گردش حاصل کیا جا رہا ہے۔تکمل اور تفرق جس ترتیب سے حاصل کئے جائیں، اس کا حاصل جواب پر کوئی اثر نہیں ہے لہٰذا ہم تفرق کے عمل کو تکمل کے اندر لے جا سکتے ہیں جبکہ $\frac{\mu_0}{4\pi}$ مستقل ہے جسے تکمل کے باہر لایا جا سکتا ہے۔یوں

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_h \nabla_2 \times \frac{\boldsymbol{J}_1\,\mathrm{d}h_1}{R_{21}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہاں $\mathrm{d}h_1 = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}z_1$ پہلے تو مقداری ہے جس کا گردش حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ اس کے علاوہ اس کا x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہے لہٰذا اسے گردش کے عمل سے باہر لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_h \left(\nabla_2 \times \frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}}\right)\mathrm{d}h_1 \tag{7.94}$$

یہاں سمتیہ $\boldsymbol{J}$ ضرب مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ کا گردش لیا جا رہا ہے۔مثال 7.2 میں کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{S}$ اور مقداری M کے حاصل ضرب کی گردش

$$\nabla \times (M\boldsymbol{S}) \equiv (\nabla M) \times \boldsymbol{S} + M(\nabla \times \boldsymbol{S}) \tag{7.95}$$

حاصل کی گئی۔اس کی مدد سے مساوات 7.94 کو کھولتے ہیں جہاں سمتیہ $\boldsymbol{J}_1$ اور مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں۔

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_h \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}\right) \times \boldsymbol{J}_1 + \frac{1}{R_{21}}(\nabla_2 \times \boldsymbol{J}_1)\right]\mathrm{d}h_1 \tag{7.96}$$

اس مساوات کے دوسرے جزو میں $\boldsymbol{J}_1$ صرف x_1، y_1 اور z_1 پر منحصر ہے۔نقطہ (x_2, y_2, z_2) کا اس پر کسی قسم کا کوئی اثر نہیں لہٰذا $\boldsymbol{J}_1$ کے تمام تفرق جو x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ لئے جائیں صفر کے برابر ہوں گے۔یوں $\nabla_2 \times \boldsymbol{J}_1 = 0$ ہو گا۔

صفحہ 104 پر مساوات 4.48 کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات

$$\boldsymbol{H}_2 = -\frac{1}{4\pi}\int_h \frac{\boldsymbol{a}_{R21} \times \boldsymbol{J}_1}{R_{21}^2}\,\mathrm{d}h_1$$

یا

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{4\pi}\int_h \frac{\boldsymbol{J}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{R_{21}^2}\,\mathrm{d}h_1$$

لکھی جا سکتی ہے۔اس میں $\boldsymbol{J}_1\,\mathrm{d}h_1$ کی جگہ لکیری انداز میں $I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1$ پر کرتے ہوئے اور بند تکمل لکھ کر جانی پہچانی بایوٹ سیوارٹ مساوات

$$\boldsymbol{H}_2 = \oint_h \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔یوں ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 7.93 درست ہے اور یہ مساوات ، مساوات — اور مساوات پر پورا اترتا ہے۔

7.7.2 ایمپیئر کا دوری قانون

آئیں اب ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.97}$$

کو بایوٹ سیوارٹ کے قانون سے حاصل کریں۔

شروع کرتے ہیں مساوات 7.90 اور مساوات 7.91 سے جن سے

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7.98}$$

لکھا جا سکتا ہے۔صفحہ 200 پر مساوات 7.38 استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \left[\nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \right] \tag{7.99}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں پھیلاو اور لاپلاسی کے عمل درکار ہیں۔

پھیلاو کو پہلے حل کرتے ہیں۔مساوات 7.93 کی پھیلاو

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_2 \cdot \frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \, \mathrm{d}h_1 \tag{7.100}$$

لکھی جا سکتی ہے۔صفحہ 115 پر مثال 4.7 میں سمتیہ $\boldsymbol{D}$ اور مقداری V کے لئے

$$\nabla \cdot (V\boldsymbol{D}) = V(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot (\nabla V)$$

ثابت کیا گیا۔یہاں سمتیہ $\boldsymbol{J}_1$ جبکہ مقداری $\frac{1}{R_{21}}$ ہیں لہٰذا اس مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \right) = \frac{1}{R_{21}} (\nabla \cdot \boldsymbol{J}_1) + \boldsymbol{J}_1 \cdot \left(\nabla \frac{1}{R_{21}} \right) \tag{7.101}$$

جس کی مدد سے

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}} (\nabla_2 \cdot \boldsymbol{J}_1) + \boldsymbol{J}_1 \cdot \left(\nabla_2 \frac{1}{R_{21}} \right) \right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.102}$$

ہو گا۔

چونکہ $\boldsymbol{J}_1$ صرف متغیرات x_1، y_1 اور z_1 پر منحصر ہے لہٰذا اس کے x_2، y_2 اور z_2 کے ساتھ تفرق صفر کے برابر ہوں گے لہٰذا $\nabla_2 \cdot \boldsymbol{J}_1 = 0$ ہو گا۔

ہم صفحہ 104 پر مساوات 4.50

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{21}}$$

کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[-\boldsymbol{J}_1 \cdot \left(\nabla_1 \frac{1}{R_{21}} \right) \right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.103}$$

لکھ سکتے ہیں۔مساوات 7.101 کے دوبارہ استعمال سے

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \left[\frac{1}{R_{21}} (\nabla_1 \cdot \boldsymbol{J}_1) - \nabla_1 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \right) \right] \mathrm{d}h_1 \tag{7.104}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 7.64 کہتا ہے کہ ساکن مقناطیسی میدان صرف اس صورت پیدا ہو گا جب $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ ہو۔چونکہ ہمیں ساکن مقناطیسی میدان سے ہی غرض ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں سے

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_h \nabla_1 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \right) \mathrm{d}h_1 \tag{7.105}$$

حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 85 پر مساوات 3.43 مسئلہ پھیلاو بیان کرتا ہے جس کے تحت حجمی تکمل کو سطحی تکمل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔اسے استعمال کرتے ہوئے یوں

$$\nabla_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{\boldsymbol{J}_1}{R_{21}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \tag{7.106}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سطح S_1 اس تمام حجم کو گھیرتی ہے جس پر حجمی تکمل حاصل کیا گیا تھا۔چونکہ حجمی تکمل اس غرض سے حاصل کیا گیا تھا کہ ساکن مقناطیسی میدان پیدا کرنے والے برقی رو کو مکمل طور پر شامل کیا جائے لہٰذا اس حجم کے باہر کسی قسم کا کوئی برقی رو نہیں پایا جاتا۔اگر حجم سے باہر کوئی بھی برقی رو ہوتی تب ہمیں حجم کو بڑھا کر اس برقی رو کے اثر کو بھی شامل کرنا ہوتا۔ہم تکمل لیتے ہوئے حجم کو قدر اور بڑھا سکتے ہیں تا کہ اس کی سطح کو برقی رو نہ چھوئے۔ہم ایسا اس لئے کر سکتے ہیں کہ برقی رو سے خالی حجم کے شمول سے تکمل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔یوں ضرورت سے زیادہ حجم پر تکمل سے مراد یہ بھی ہے کہ سطحی تکمل ایسی سطح پر لی جائے جس پر کثافت برقی رو صفر کے برابر ہو۔صفر کثافت برقی رو کا سطحی تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{7.107}$$

حاصل ہوتا ہے جو کہتا ہے کہ سمتی مقناطیسی دباو کا پھیلاو صفر کے برابر ہے۔اس مساوات میں زیر نوشت میں 2 نہیں لکھا گیا ہے جو اس نقطے کی نشاندہی کرتا ہے جہاں مقناطیسی میدان کی بات ہو رہی ہو۔پھیلاو بھی اسی نقطے پر حاصل کیا جاتا ہے۔یاد رہے کہ ہم مساوات 7.99 حل کرنے کی خاطر پھیلاو اور لاپلاسی حاصل کرنے نکلے تھے۔پھیلاو حاصل ہو چکا ہے آئیں اب لاپلاسی حاصل کریں۔

برقی دباو اور سمتی مقناطیسی دباو کے ایک جزو

$$V = \int_h \frac{\rho \, \mathrm{d}h}{4\pi\epsilon_0 R}$$
$$A_x = \int_h \frac{\mu_0 J_x \, \mathrm{d}h}{4\pi R}$$

کا موازنہ کرنے سے صاف ظاہر ہے کہ ρ اور J_x کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے اور $\frac{1}{\epsilon_0}$ اور μ_0 کو آپس میں تبدیل کرتے ہوئے ایک مساوات سے دوسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔اب ہم پوئسن مساوات

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

میں یہی تبدیلیاں کرتے ہوئے

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

اور

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$
$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

لکھ سکتے ہیں جنہیں یوں

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{7.108}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.99 میں مساوات 7.107 اور مساوات 7.108 استعمال کرتے ہوئے یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{7.109}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 7.7: مندرجہ بالا حصے میں برقی دباو کے لاپلاسی سے سمتی مقناطیسی دباو کی لاپلاسی اخذ کی گئی۔سمتی مقناطیسی دباو کے لاپلاسی کو ایمپیئر کے دوری قانون اور $\boldsymbol{A}$ کی تعریف سے حاصل کریں۔

حل:ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل اور $\boldsymbol{A}$ کی تعریف

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J}\\ \boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A}\end{aligned}$$

سے

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔صفحہ 200 پر مساوات 7.38 استعمال کرتے ہوئے

$$\nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 7.107 کی مدد سے

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{7.110}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال 7.1: مساوات 7.11 حاصل کریں۔

سوال 7.2: شکل 7.8ا کے لامحدود سطح سے پیدا مقناطیسی میدان بایوٹ-سیوارٹ کے قانون کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 7.3: مساوات 7.20 حاصل کرنے کے طرز پر شکل 7.9 میں 3 تا 4 پر H_{y34} حاصل کریں۔

جواب:شرح $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ ہے۔یوں $-\frac{\Delta x}{2}$ تبدیلی سے $\frac{\partial H_y}{\partial x}(-\frac{\Delta x}{2})$ تبدیلی رو نما ہو گی اور یوں نئی قیمت $H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ ہو گی۔

سوال 7.4: عمومی محدد میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے کارتیسی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 7.5: عمومی محدد میں حاصل کردہ گردش کی مساوات سے نلکی محدد میں گردش کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 7.6: گول دائرے پر برقی رو کا دائرے کے محور سے ہٹ کر مقناطیسی میدان کی شدت حاصل کرتے ہوئے مساوات 7.75 میں دئے بیضوی تکمل حاصل کئے گئے۔ان میں H_y کا عددی حل مثال 7.5 میں حاصل کیا گیا۔بالکل اسی طرز پر تکمل کو دس ٹکڑوں میں کرتے ہوئے H_z کی عددی قیمت نقطہ $N(0,a,a)$ پر حاصل کریں۔

جواب: $0.96525\left(\frac{I}{4\pi a}\right)$

باب 8

مقناطیسی قوتیں، مقناطیسی مادے اور امالہ

برقی چارج کے گرد برقی میدان پایا جاتا ہے جس میں موجود ساکن یا حرکت کرتے چارج پر قوت دفع یا قوت کشش پایا جاتا ہے۔مقناطیسی میدان برقی رو یعنی حرکت کرتے چارج سے پیدا ہوتا ہے اور اس میدان میں حرکت کرتے چارج پر قوت پائی جاتی ہے۔مقناطیسی میدان ساکن چارج پر قوت پیدا نہیں کرتا۔

اس باب میں برقی رو گزارتی تار پر قوت اور مروڑ کا جائزہ لیا جائے گا۔ اس کے بعد مقناطیسی اشیاء اور آخر میں امالہ پر غور کیا جائے گا۔

8.1 متحرک چارج پر قوت

تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ برقی میدان میں چارج بردار ذرے پر

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E} \tag{8.1}$$

قوت اثر انداز ہوتی ہے۔مثبت چارج کی صورت میں یہ قوت برقی میدان کے شدت $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں ہوتی ہے۔قوت کی قیمت چارج Q اور برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے۔چارج ساکن ہو یا حرکت کر رہا ہو، اس پر قوت کی مقدار اسی مساوات سے حاصل ہوتی ہے۔

اسی طرح تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ مقناطیسی میدان میں ساکن چارج بردار ذرے پر مقناطیسی میدان کوئی قوت پیدا نہیں کرتا البتہ متحرک چارج بردار ذرے پر مقناطیسی میدان

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{8.2}$$

قوت پیدا کرتا ہے۔یہ قوت چارج کے براہ راست متناسب ہوتی ہے۔اسی طرح قوت چارج کے رفتار $\boldsymbol{v}$، کثافت مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ اور ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے بھی براہ راست متناسب ہوتی ہے۔قوت کی سمت $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں کے عمودی یعنی $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ سمت میں ہوتی ہے۔

مقناطیسی قوت رفتار کے عمودی ہے لہٰذا یہ رفتار کے قیمت پر اثر انداز نہیں ہوتا البتہ یہ اس کی سمت پر ضرور اثر ڈالتا ہے۔اس طرح مقناطیسی قوت چارج بردار ذرے کے متحرک توانائی میں تبدیلی لانے سے قاصر ہے۔ اس کے برعکس برقی قوت جسے مساوات 8.1 بیان کرتا ہے چارج بردار ذرے کی رفتار میں تبدیلی پیدا کرتے ہوئے حرکی توانائی میں تبدیلی پیدا کرتا ہے۔دونوں میدانوں میں یہ بنیادی فرق ہے کہ برقی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا کرتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان تبادلہ توانائی میں کردار ادا نہیں کرتا۔

دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں چارج بردار ذرے پر کل قوت

$$\boldsymbol{F} = Q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{8.3}$$

دونوں میدانوں سے علیحدہ علیحدہ پیدا قوتوں کے مجموعے کے برابر ہے۔مساوات 8.3 لورنز مساوات قوت[21] کہلاتی ہے۔برقی اور مقناطیسی میدانوں میں چارج بردار ذرے، مثلاً الیکٹران، کے راہ اسی مساوات کو حل کرتے ہوئے حاصل کئے جاتے ہیں۔

مشق 8.1: ایک عدد نقطہ چارج جس کی قیمت $-3\,\mathrm{C}$ اور رفتار $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - 3\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ ہو پر مندرجہ ذیل میدانوں میں قوت کی حتمی قیمت حاصل کریں۔ (الف) $\boldsymbol{E} = 3\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - 2\boldsymbol{a}_\mathrm{y} - 5\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$، (ب) $\boldsymbol{B} = -2\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - 3\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 6\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$، (پ) دونوں میدانوں کے بیک وقت موجودگی میں۔

جوابات: $18.49\,\mathrm{N}$ ، $71.3\,\mathrm{N}$ ، $78.7\,\mathrm{N}$

8.2 تفرقی چارج پر قوت

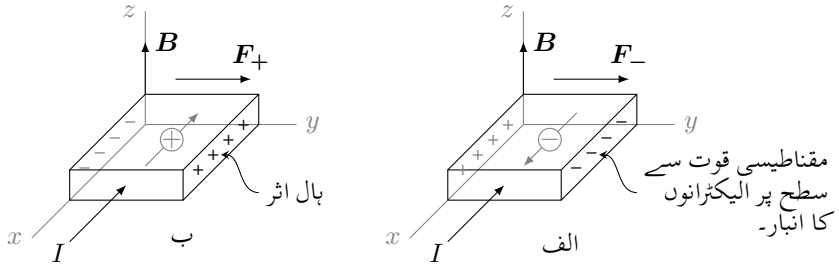
مقناطیسی میدان میں متحرک تفرقی چارج $\mathrm{d}Q$ پر تفرقی قوت $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ عمل کرے گی۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{8.4}$$

آپ جانتے ہیں کہ منفی چارج کی باریک ترین مقدار الیکٹران کا چارج ہے۔مثبت چارج کی باریک ترین قیمت بھی اتنی ہی لیکن مثبت قطب کی ہے۔منفی چارج کو مثال بناتے ہوئے، یوں مندرجہ بالا مساوات میں تفرقی چارج سے مراد کم از کم اتنا چارج ہے جس میں الیکٹرانوں کی تعداد اتنی ہو کہ کسی ایک الیکٹران کے چارج کا اثر قابل نظر انداز ہو۔اسی طرح اس تفرقی چارج کا حجم اگرچہ چھوٹا ہے لیکن اس حجم کی جسامت الیکٹرانوں کے مابین اوسط فاصلے سے بہت زیادہ ہے۔مساوات 8.4 تفرقی چارج پر کل قوت دیتا ہے۔یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ یہ قوت کسی ایک الیکٹران پر اثر انداز نہیں ہوتا بلکہ یہ تمام الیکٹرانوں پر علیحدہ علیحدہ قوتوں کا مجموعہ ہے۔

---

[1] یہ مساوات ہینڈرک لورنز کے نام ہے۔
[2] Lorentz force equation



شکل 8.1: ہال اثر سے متحرک چارج کا قطب دریافت کیا جا سکتا ہے۔

موصل تار میں برقی رو، الیکٹران کے حرکت کی بدولت ہے۔برقی رو گزارتے تار کو مقناطیسی میدان میں رکھنے سے تار میں ہر الیکٹران پر مقناطیسی قوت کا اثر پایا جائے گا۔اگرچہ کسی ایک الیکٹران پر انتہائی کم قیمت کا قوت پایا جاتا ہے لیکن موصل تار میں الیکٹرانوں کی تعداد انتہائی زیادہ ہوتی ہے۔یوں انتہائی زیادہ تعداد میں انتہائی کم قوتوں کا مجموعہ معقول قیمت کی قوت پیدا کرتا ہے۔آئیں دیکھتے ہیں کہ یہ مجموعی قوت تار تک کس طرح منتقل ہوتی ہے۔

موصل میں مثبت ایٹم یا آئن ساکن ہوتے ہیں جبکہ الیکٹران آزادی سے حرکت کر سکتے ہیں۔مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے موصل تار میں حرکت پذیر منفی الیکٹران پر مقناطیسی قوت عمل کرتی ہے جس سے مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین فاصلوں میں تبدیلی رونما ہوتی ہے۔اب مثبت اور منفی چارج کے مابین کولومب قوتیں ایسی تبدیلی کو روکتے ہیں لہٰذا حرکت پذیر الیکٹران پر مقناطیسی قوت یوں ساکن آئن تک پہنچ پاتی ہیں جو بطور تار پر مقناطیسی قوت کی صورت میں رونما ہوتی ہے۔

مثبت آئن اور منفی الیکٹران کے مابین کولمب قوتیں انتہائی طاقتور ہوتی ہیں لہٰذا مقناطیسی میدان سے پیدا فاصلوں میں تبدیلی قابل ناپ نہیں ہوتی۔مثبت اور منفی چارجوں کے مابین فاصلے کی بنا پر انہیں دو چادر کپیسٹر تصور کیا جا سکتا ہے۔ہم جانتے ہیں کہ ایسے کپیسٹر کے چادروں کے مابین برقی دباو پایا جاتا ہے۔یوں الیکٹران کے حرکت اور مقناطیسی میدان دونوں کی سمتوں کے عمودی دو الٹ اطراف کے مابین تار پر معمولی برقی دباو پایا جاتا ہے جسے ہال اثر[3] کے نام[4] سے جانا جاتا ہے۔

ہال اثر کو شکل 8.1 کی مدد سے باآسانی سمجھا جا سکتا ہے۔شکل-الف میں موصل یا n قسم کے نیم موصل برقی رو گزارتا تار دکھایا گیا ہے۔تار میں برقی رو I کی سمت $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ہے لہٰذا تار میں آزاد منفی چارج اس کے الٹ یعنی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔تار میں آزاد الیکٹران کو ہلکی سیاہی میں تیر کے نشان پر دائرے میں بند − علامت سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں تیر اس کے حرکت کی سمت ظاہر کرتا ہے۔یہ تار $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت کے مقناطیسی میدان میں پڑی ہے۔تار میں آزاد چارج منفی قطب کے ہیں لہٰذا ان پر مساوات 8.2 کے تحت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں قوت $\boldsymbol{F}_-$ عمل کرے گا۔قوت کی علامت پر زیر نوشت میں منفی کی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ یہ قوت متحرک منفی چارج پر اثر انداز ہوتا ہے۔یوں تار کے دائیں طرف پر منفی الیکٹرانوں کا انبار جمع ہوتا ہے جبکہ تار کے بائیں طرف پر الیکٹران کی تعداد کم ہو جاتی ہے جس سے اس جانب ساکن مثبت آئن بے پردہ[5] ہو جاتے ہیں۔شکل 8.1-الف میں تار کے دائیں طرف − اور بائیں طرف + کے علامات انہیں کو ظاہر کرتے ہیں۔آپ جانتے ہیں کہ مثبت اور منفی چارج کے مابین برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ اور یوں برقی دباو پایا جاتا ہے لہٰذا تار کے دائیں اور بائیں اطراف کے مابین ہال برقی دباو[6] پایا جائے گا۔تار کا بایاں طرف ہال برقی دباو کا مثبت سرا ہو گا۔

---

[3] Hall effect
[4] ایڈون حال نے اس اثر کو 1879 میں دریافت کیا۔
[5] uncovered
[6] Hall voltage

آئیں ایسی صورت دیکھیں جہاں متحرک مثبت چارج کی بدولت برقی رو پائی جائے۔شکل 8.1-ب میں بقایا صورت حال بالکل شکل-الف کی طرح ہے البتہ یہاں تار p قسم کے نیم موصل کا بنا ہوا ہے جس میں برقی رو مثبت آزاد خول[7] کے حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔یوں اگر برقی رو $-\boldsymbol{a}_x$ سمت میں ہو تب آزاد خول بھی اسی سمت میں حرکت کریں گے۔جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے یہاں بھی مقناطیسی قوت آزاد چارج کو دائیں جانب دھکیل رہے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس بار ہال برقی دباو کا مثبت سرا تار کا دائیں طرف پایا جاتا ہے جو شکل-الف کے عین الٹ ہے۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے یہ معلوم کیا جا سکتا ہے کہ آیا نیم موصل n یا p قسم کا ہے۔

ہال اثر استعمال کرتے ہوئے مختلف پیمائشی آلات بنائے جاتے ہیں مثلاً یک سمتی رو پیما، مقناطیسی بہاو پیما[8] وغیرہ۔

سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ سے حرکت کرتا ہوا حجمی کثافت چارج ρ_h کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{8.5}$$

کو جنم دیتا ہے۔اس مساوات کو صفحہ 119 پر حاصل کیا گیا۔چھوٹے حجم $\mathrm{d}h$ میں تھوڑے سے چارج کو

$$\mathrm{d}Q = \rho_h \, \mathrm{d}h \tag{8.6}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 8.4 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \rho_h \, \mathrm{d}h \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}h \tag{8.7}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم مساوات 7.6 میں دیکھ چکے ہیں کہ $\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h$ کو برقی رو گزارتے تار کا تفرقی حصہ تصور کیا جا سکتا ہے جسے

$$\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}h = \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}S = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح مساوات 8.7 کو

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}S \tag{8.8}$$

یا

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I \, \mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.9}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 8.7، مساوات 8.8 اور مساوات 8.9 کے تکمل سے انہیں یوں

$$\boldsymbol{F} = \int_h \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}h \tag{8.10}$$

$$\boldsymbol{F} = \int_S \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}S \tag{8.11}$$

$$\boldsymbol{F} = \oint I \, \mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.12}$$

---

[7] free holes
[8] magnetic flux meter

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 8.12 میں اگر سیدھی تار لی جائے جس کی لمبائی L ہو تو تکمل سے

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} \tag{8.13}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں قوت کی قیمت

$$F = ILB \sin \alpha \tag{8.14}$$

ہے جہاں تار اور مقناطیسی میدان کے درمیان زاویہ α ہے۔مساوات 8.13 اور مساوات 8.14 پورے دور کے کچھ حصے پر قوت دیتے ہیں۔دور کے بقایا حصوں پر بھی اسی طرح قوت حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

8.3 برقی رو گزارتے تفرقی تاروں کے مابین قوت

شکل میں نقطہ N_1 پر تار کا ایک چھوٹا ٹکڑا $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1$ دکھایا گیا ہے جس میں I_1 برقی رو گزر رہی ہے جبکہ نقطہ N_2 پر تار کا دوسرا چھوٹا ٹکڑا $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$ دکھایا گیا ہے جس میں I_2 برقی رو گزر رہی ہے۔ نقطہ N_2 پر تار کے پہلے ٹکڑے سے پیدا مقناطیسی میدان مساوات 7.2 دیتا ہے۔

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 = \frac{I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2}$$

مساوات 8.9 مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_2$ میں تار کے تفرقی حصے پر تفرقی قوت دیتا ہے۔یہاں تفرقی مقناطیسی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ سے $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$ پر پیدا قوت درکار ہے۔اس قوت کو تفرقی قوت کا تفرقی حصہ $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2)$ لکھتے ہوئے مساوات 8.9 کو

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) = I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times \mathrm{d}\boldsymbol{B}_2$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2 = \mu_0\,\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ کے برابر ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{21}^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}) \tag{8.15}$$

حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی رو سے پیدا مقناطیسی میدان حاصل کرتے وقت ضروری ہے کہ پورے تار پر تکمل حاصل کیا جائے۔مندرجہ بالا مساوات میں نقطہ N_2 پر مکمل تکمل لیتے ہوئے میدان $\boldsymbol{H}_2$ استعمال نہیں کیا گیا بلکہ تفرقی میدان $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ استعمال کیا گیا ہے۔یوں اگر اس مساوات سے قوتیں حاصل کی جائیں تو یہ درست نہیں ہوں گی۔یہ دیکھنے کے لئے تصور کریں کہ نقطہ $(1,2,3)$ پر $I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 = 2\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\mathrm{A\,m}$ جبکہ نقطہ $(-1,3,2)$ پر $I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 = -4\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\mathrm{A\,m}$ پایا جاتا ہے۔دوسرے نقطے پر قوت حاصل کرتے ہیں۔یہاں $\boldsymbol{R}_{21} = -2\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \boldsymbol{a}_\mathrm{y} - \boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ ہے لہٰذا دوسرے تار پر قوت

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi\left(2^2+1^1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}(-4\boldsymbol{a}_\mathrm{z}) \times \left[(2\boldsymbol{a}_\mathrm{y}) \times \left(-2\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \boldsymbol{a}_\mathrm{y} + 2\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right)\right] \\ &= -108.86\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\,\mathrm{nN}\end{aligned}$$

ہو گا۔اب بالکل اسی طرح حل کرتے ہوئے پہلے نقطے پر

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1) &= \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi\left(2^2+1^1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}(2\boldsymbol{a}_\mathrm{y}) \times \left[(-4\boldsymbol{a}_\mathrm{z}) \times \left(2\boldsymbol{a}_\mathrm{x} - \boldsymbol{a}_\mathrm{y} - 2\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right)\right] \\ &= 54.4\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\,\mathrm{nN}\end{aligned}$$

قوت حاصل ہوتی ہے جہاں $\boldsymbol{R}_{12} = -\boldsymbol{R}_{21}$ استعمال کیا گیا۔آپ کو یاد ہو گا کہ چھوٹے سے چھوٹے مقدار کے دو چارجوں کے مابین ہر صورت قیمت میں برابر اور سمت میں الٹ قوتیں پائی جاتی ہیں۔مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہے اور برقی رو گزارتے دو چھوٹے حصوں پر نا تو قوت کی قیمتیں برابر ہیں اور نا ہی ان کی سمتوں کا آپس میں کوئی تعلق ہے۔یہاں یہ سمجھ لینا ضروری ہے کہ مقناطیسی میدان میں مکمل بند دور حل کرتے ہوئے ہی صحیح جوابات حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ایسا ہی کرتے ہیں۔

مساوات 8.15 کا دو درجی تکمل لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_2 &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \times \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{a}_{R21}}{R_{21}^2}\right] \\ &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\oint \frac{\boldsymbol{a}_{R21} \times \mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R_{21}^2}\right] \times \mathrm{d}\boldsymbol{L}_2\end{aligned} \tag{8.16}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مساوات میں اندرونی تکمل نقطہ N_2 پر مقناطیسی میدان حاصل کرنے کے لئے درکار ہے جبکہ بیرونی تکمل اسی نقطے پر تار پر کل قوت حاصل کرنے کے لئے درکار ہے۔

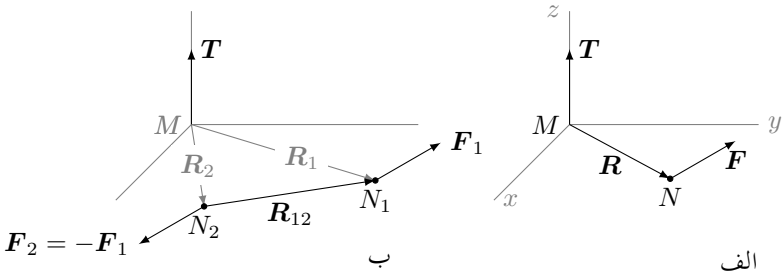
8.4 قوت اور مروڑ

مساوات 8.12 مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے تار پر قوت دیتا ہے جسے یکساں میدان میں $\boldsymbol{B}$ کو تکمل کے باہر لے جاتے ہوئے

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{B} \times \oint \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب کوئی بھی برقی دور مکمل بند دائرہ بناتا ہے۔کسی بھی شکل کے بند دائرے کا لکیری تکمل $\oint \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$ ہوتا ہے لہٰذا یکساں میدان میں برقی دور کے پورے تار پر کل صفر قوت پایا جائے گا۔البتہ اگر میدان یکساں نہ ہو تب ضروری نہیں کہ پورے دور پر قوت صفر ہو۔

مساوات 8.10 اور مساوات 8.11 کے برقی رو کو بھی متعدد متوازی جڑے باریک تار نما ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ایسے ہر باریک تار پر بھی یکساں میدان میں صفر قوت ہو گا لہٰذا ان اشکال کے برقی رو کے ادوار پر بھی کل صفر قوت ہی پایا جائے گا۔



شکل 8.2: قوت کا معیار اثر۔

یکساں میدان میں پورے دور پر صفر قوت پایا جاتا ہے البتہ دور پر مروڑ[9] یعنی قوت کا معیار اثر[10] عموماً صفر نہیں ہوتا۔قوت کا معیار اثر حاصل کرنے کی خاطر قوت اور مروڑ کے محور یعنی چُول[11] کا جاننا ضروری ہے۔شکل 8.2-الف میں نقطہ N پر قوت $\boldsymbol{F}$ عمل کر رہا ہے۔ہم نقطہ M کو محور چنتے ہیں۔ نقطہ M سے N تک سمتی فاصلہ $\boldsymbol{R}$ قوت کا بازو[12] کہلاتا ہے۔قوت کا معیار اثر $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{F} \tag{8.17}$$

کے برابر ہے۔مروڑ کی قیمت، قوت کے بازو کی لمبائی ضرب قوت کی قیمت ضرب ان دو کے مابین زاویے کے سائن کے برابر ہے جبکہ اس کی سمت دونوں کے عمودی ہے جسے صلیبی ضرب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

شکل 8.2-ب میں پختہ شکل کے جسم پر دو مختلف نقطوں پر برابر مگر الٹ سمت کے قوت لاگو کئے گئے ہیں۔چونکہ اس جسم پر کل قوت صفر کے برابر ہے لہٰذا یہ کسی بھی سمت میں سیدھی حرکت نہیں کرے گی۔محور M پر ان قوتوں کے مروڑ کا مجموعہ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \\ &= (\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2) \times \boldsymbol{F}_1 \\ &= \boldsymbol{R}_{12} \times \boldsymbol{F}_1\end{aligned}$$

ہو گا جہاں دوسرے قدم پر $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$ پر کیا گیا ہے۔اس مساوات میں قوتوں کے محور کا $\boldsymbol{R}_{12}$ پر کوئی اثر نہیں ہے لہٰذا کل قوت صفر ہونے کی صورت میں مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے۔اسی عمل کو زیادہ قوتوں پر بھی لاگو کیا جا سکتا ہے۔

چونکہ مروڑ کی قیمت محور پر منحصر نہیں ہے لہٰذا ہم محور اس مقام پر چن سکتے ہیں جس پر مروڑ کا حصول زیادہ آسان ہو۔ہم سطحی قوتوں کی صورت میں ایسا محور عموماً قوتوں کے ہم سطحی ، جسم کے دھرے پر پایا جاتا ہے۔

آئیں شکل 8.3 میں دئے برقی رو گزارتے تار پر غیر یکساں مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + B_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + B_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$ میں مروڑ حاصل کریں۔تصور کریں کہ تار چول M پر صرف گھوم سکتا ہے۔ اس تار کے اطراف $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ ہیں جبکہ اس میں برقی رو I کی سمت تیر کے نشان سے ظاہر کی گئی ہے۔اس چھوٹے رقبے کے وسط M پر مقناطیسی میدان

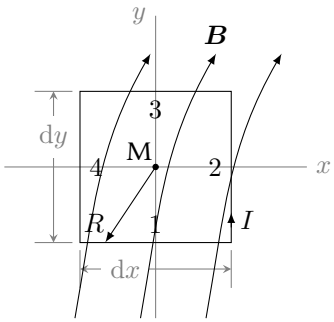
$$\boldsymbol{B}_0 = B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{8.18}$$

کے برابر ہے۔ یوں وسط سے $-\frac{\mathrm{d}y}{2}$ جانب نقطہ 1 پر مقناطیسی میدان ٹیلر تسلسل سے

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_0 - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} + \cdots$$

---

[9] torque
[10] moment of force
[11] pivot
[12] moment arm



شکل 8.3: مقناطیسی میدان میں برقی رو گزارتے تفرقی بند دائرے پر مروڑ۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{B}_1 = \left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \boldsymbol{B}_1$$

یا

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 &= I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \left[\left(B_{x0} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right]\\ &= I\,\mathrm{d}x\left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z} - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right]\end{aligned}$$

ہو گی۔اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیانے نقطے تک ہو گا یعنی $\boldsymbol{R}_1 = -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ لہٰذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 &= \boldsymbol{R}_1 \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_1\\ &= -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times I\,\mathrm{d}x\left[\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z} - \left(B_{z0} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right]\\ &= -\frac{I}{2}\left(B_{y0} - \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\end{aligned}$$

ہو گا۔

اسی طرح وسط سے $+\frac{\mathrm{d}y}{2}$ جانب نقطہ 3 پر مقناطیسی میدان مکارن تسلسل سے

$$\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{B}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2} + \cdots$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں تمام تفرق نقطہ M پر حاصل کئے جاتے ہیں۔صرف ایک درجی تفرق رکھتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{B}_3 = \left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں راہ کے اس طرف کی تفرقی لمبائی پر تفرقی قوت

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 = -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \boldsymbol{B}_3$$

یا

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 &= -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \left[\left(B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + \left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right]\\ &= I\,\mathrm{d}x\left[-\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right]\end{aligned}$$

ہو گی۔اس قوت کا بازو مرکز سے اس طرف کے درمیان تک یعنی $\boldsymbol{R}_3 = \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ ہے لہٰذا اس قوت کا معیار اثر

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 &= \boldsymbol{R}_3 \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_3\\ &= \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times I\,\mathrm{d}x\left[-\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{z} + \left(B_{z0} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right]\\ &= -\frac{I}{2}\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\end{aligned}$$

ہو گا۔

ان دو قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 = -IB_{y0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$$

کے برابر ہے۔بالکل اسی طرح تیسرے اور چھوتے اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_2 + \mathrm{d}\boldsymbol{T}_4 = IB_{x0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں تمام اطراف کے قوتوں کے معیار اثر کا مجموعہ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} - B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔قوسین میں بند حصے کو صلیبی ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,(\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \times \boldsymbol{B}_0)$$

یا

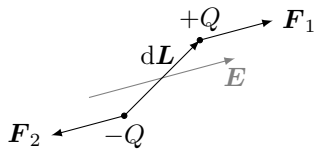
$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B} \tag{8.19}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں بند راہ سمتی رقبے $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کو گھیرتی ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ لکھتے ہوئے زیر نوشت نہیں لکھا گیا۔

بند دائرے میں برقی رو ضرب چھوٹے سمتی رقبے کا حاصل ضرب تفرقی مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر[13] $\mathrm{d}\boldsymbol{m}$ کی تعریف ہے جس کی اکائی $\mathrm{A\,m^2}$ ہے۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.20}$$

[13] differential magnetic dipole moment



شکل 8.4: برقی جفت قطب پر برقی میدان میں مروڑ۔

اور

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = \mathrm{d}\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \tag{8.21}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

مساوات 8.19، مساوات 8.20 اور مساوات 8.21 عمومی مساوات ہیں جن میں چھوٹا رقبہ $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ مربع کے علاوہ کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے اور اس کی سمت کچھ بھی ہو سکتی ہے۔

غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں تار پر کل قوت صفر نہیں ہو گی۔

شکل 8.4 میں برقی میدان میں برقی جفت قطب دکھایا گیا ہے ۔مثبت چارج پر قوت $\boldsymbol{F}_1 = Q\boldsymbol{E}$ اور منفی چارج پر قوت $\boldsymbol{F}_2 = -Q\boldsymbol{E}$ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس جفت قطب پر تفرقی مروڑ

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T} &= \mathrm{d}\boldsymbol{L} \times Q\boldsymbol{E}\\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}\end{aligned}$$

کے برابر ہے جہاں $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = Q\,\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ برقی جفت قطب ہے۔مروڑ کی سمت صفحہ کے اندر جانب کو ہے۔ آپ نے دیکھا کہ مقناطیسی اور برقی جفت قطب پر مروڑ کے مساوات یکساں ہیں۔بالکل مقناطیسی جفت قطب کی طرح یہاں بھی مروڑ کا تخمینہ لگاتے وقت جفت قطب کے احاطے میں میدان $\boldsymbol{E}$ کے تبدیلی کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

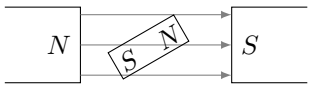
مثال 8.1: شکل 8.3 میں چھوٹے رقبے کو اتنا چھوٹا تصور کریں کہ اس پر مقناطیسی میدان یکساں تصور کرنا ممکن ہو۔ایسی صورت میں تفرقی مروڑ حاصل کریں۔

حل:یکساں میدان کی صورت میں

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 &= I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} \times \left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right)\\ &= I\,\mathrm{d}x\left(B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} - B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1 &= -\frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y} \times I\,\mathrm{d}x\left(B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z} - B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)\\ &= -\frac{I}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\end{aligned}$$



شکل 8.5: مروڑ دونوں مقناطیسی میدان کو متوازی بنانے کی کوشش کرتا ہے۔

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_3 &= -I\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\times\left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}+B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}+B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}\right)\\ &= I\,\mathrm{d}x\left(-B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}+B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 &= \frac{\mathrm{d}y}{2}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\times I\,\mathrm{d}x\left(-B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{z}+B_{z0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}\right)\\ &= -\frac{I}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_1+\mathrm{d}\boldsymbol{T}_3 = -I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}_2+\mathrm{d}\boldsymbol{T}_4 = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yB_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$$

حاصل ہوتا ہے۔ان نتائج سے کل مروڑ

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = I\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left(B_{x0}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}-B_{y0}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}\right)$$

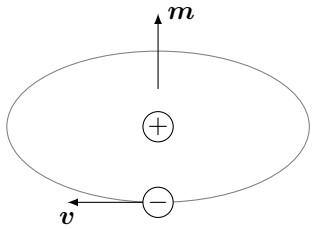
ہی حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال سے ثابت ہوتا ہے کہ غیر یکساں مقناطیسی میدان کی صورت میں مروڑ حاصل کرتے وقت چھوٹے رقبے پر میدان کی تبدیلی کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔اس مثال سے یہ بھی ظاہر ہے کہ یکساں مقناطیسی میدان میں تار پر کل قوت صفر کے برابر ہوتی ہے۔ اگر مقناطیسی میدان حقیقت میں یکساں ہی ہو تب کسی بھی بڑے رقبے پر بھی مروڑ بالکل اسی مساوات

$$\boldsymbol{T} = I\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B} \qquad \text{یکساں مقناطیسی میدان} \tag{8.22}$$

سے حاصل ہو گا۔

غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ برقی رو گزارتے بند دائرے پر مروڑ اس سمت میں دائرے کو گھمانے کی کوشش کرتا ہے جس میں دائرے سے پیدا مقناطیسی میدان اور بیرونی لاگو مقناطیسی میدان کی سمتیں ایک ہی ہوں۔اس حقیقت کو شکل 8.5 کی مدد سے یاد رکھا جا سکتا ہے جہاں برقی رو گزارتے تار کی جگہ چھوٹا مقناطیس بیرونی میدان میں دکھایا گیا ہے۔چھوٹا مقناطیس اس سمت میں گھومتا ہے جہاں دونوں میدان متوازی ہوں۔



شکل 8.6: مدار میں گھومتے الیکٹران کے مقناطیسی جفت قطب کے معیار اثر کو بیرونی میدان کے متوازی دکھایا گیا ہے۔

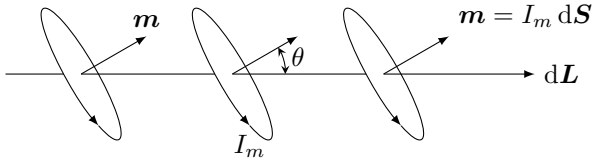
8.5 فولادی مقناطیسی اشیاء اور مقناطیسی خطے

شکل 8.6 میں ایٹمی مرکز کے گرد مدار میں گھومتا الیکٹران دکھایا گیا ہے۔حرکت کرتا چارج برقی رو پیدا کرتا ہے۔ایسی برقی رو جو مقید الیکٹران کی بنا ہو مقید برقی رو[14] I_m کہلائی جاتی ہے۔اس الیکٹران کو بند گول دائرے پر مقید برقی رو تصور کیا جا سکتا ہے جو مقناطیسی جفت قطب m کو جنم دیتی ہے۔الیکٹران منفی ہونے کی وجہ سے مقید برقی رو v کے الٹ سمت میں ہو گی۔ایٹمی مسائل صرف کوانٹم میکانیات[15] سے ہی سمجھے جا سکتے ہیں۔یہاں صرف اتنا بتانا ضروری ہے کہ لوہا، نِکل[16] اور کوبالٹ [17] ایسے عناصر ہیں جن کا m قدر زیادہ قیمت رکھتا ہے۔یہ اشیاء فولادی مقناطیسی اشیاء[18] کہلاتے ہیں۔ہم انہیں اشیاء پر غور کرتے ہیں۔

فولادی مقناطیسی اشیاء میں ایٹموں کے باہمی قوتوں کی وجہ سے قریبی جفت قطب ایک ہی سمت میں رخ کر لیتے ہیں۔ایسے ہم صف[19] خطوں میں متعدد ایٹم شامل ہوتے ہیں۔ان خطوں کو مقناطیسی خطے[20] کہتے ہیں۔مقناطیسی خطے مختلف شکل کے ہو سکتے ہیں اور ان کی جسامت ایک مائیکرو میٹر تا کئی سنٹی میٹر ممکن ہے۔کسی بھی قدرتی مقناطیسی شہ میں انفرادی مقناطیسی خطے کے مقناطیسی جفت قطب کا معیار اثر انتہائی بڑی مقدار کا ہوتا ہے البتہ مختلف مقناطیسی خطوں کے جفت قطب کے رخ مختلف سمتوں میں ہوتے ہیں۔اسی وجہ سے پورا حجم از خود کوئی مقناطیسی معیار اثر نہیں رکھتا۔ہاں بیرونی مقناطیسی میدان B_0 لاگو کرنے سے وہ مقناطیسی خطے جو B_0 کے ہی سمت میں رخ کئے ہوں کا حجم بڑھ جاتا ہے جبکہ بقایا مقناطیسی خطوں کا حجم کم ہو جاتا ہے۔یوں اندرونی مقناطیسی میدان بیرونی میدان سے کئی گنا بڑھ جاتا ہے۔بیرونی میدان ہٹا دینے سے تمام مقناطیسی خطے اپنی پرانی صورت اختیار نہیں کر پاتے۔یوں تمام مقناطیسی خطوں کا مجموعی بقایا مقناطیسی معیار اثر رہ جاتا ہے۔یہ حقیقت کہ مقناطیسی اشیاء کے خصوصیات گزشتہ حالات پر منحصر ہے، مقناطیسی چال[21] کہلاتا ہے۔

---

[14] bound current
[15] quantum mechanics
[16] nickel
[17] cobolt
[18] ferromagnetic
[19] aligned
[20] magnetic domain
[21] hysteresis



شکل 8.7: بیرونی مقناطیسی میدان جفت قطب کو صف بستہ کئے ہوئے ہے جس سے بند راہ سے گھیرے گئے سطح میں مقید برقی رو سے اضافہ پایا جاتا ہے۔

8.6 مقناطیسیت اور مقناطیسی مستقل

تصور کریں کہ کسی مادے کے اکائی حجم میں n مقناطیسی جفت قطب پائے جاتے ہوں۔ اس مادے کے Δh حجم میں $n\Delta h$ جفت قطب ہوں گے جن کا اجتماعی مقناطیسی معیار اثر ان کا سمتی مجموعہ

$$\boldsymbol{m}_{\text{کل}} = \sum_{i=1}^{n\Delta h} \boldsymbol{m}_i \tag{8.23}$$

ہو گا۔انفرادی $\boldsymbol{m}$ مختلف قیمت اور سمت کے ہو سکتے ہیں۔اجتماعی مقناطیسی معیار اثر فی اکائی حجم

$$\boldsymbol{M} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{1}{\Delta h} \sum_{i=1}^{n\Delta h} \boldsymbol{m}_i \tag{8.24}$$

کو مقناطیسیت[22] پکارا اور $\boldsymbol{M}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔مقناطیسیت کی اکائی بالکل $\boldsymbol{H}$ کے اکائی کی طرح ایمپیئر فی میٹر $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ ہے۔ مندرجہ بالا مساوات کا صفحہ 135 پر دئے مساوات 5.25 کے ساتھ موازنہ کریں جو تقطیب کی تعریف بیان کرتی ہے۔مندرجہ ذیل پڑھتے ہوئے بھی تقطیب پر تبصرے کو ساتھ ساتھ دیکھتے رہیں۔

شکل 8.7 میں بند راہ کا کچھ حصہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ دکھایا گیا ہے جس پر مقناطیسی جفت قطب دکھائے گئے ہیں۔چھوٹے رقبے $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کے گرد گھومتی مقید برقی رو I_m مقناطیسی معیار اثر $\boldsymbol{m} = I_m \, \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کو جنم دیتی ہے۔بیرونی مقناطیسی میدان لاگو کرنے سے جفت قطب ہم صف ہو کر $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کے ساتھ θ کا زاویہ بناتے ہیں۔یوں چھوٹے حجم $\mathrm{d}S \cos\theta \, \mathrm{d}L$ یعنی $\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ میں جفت قطب کی کل تعداد $n \, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ ہو گی۔آئیں دیکھتے ہیں کہ بند راہ سے گھیری سطح سے گزرتی برقی رو میں بیرونی میدان لاگو کرنے سے کیا تبدیلی رو نما ہوتی ہے۔اگر بند راہ پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{L}}$ جانب چلا جائے تو گھیری گئی سطح بائیں ہاتھ کو ہے۔ بیرونی میدان کے غیر موجودگی میں تمام جفت قطب بلا ترتیب پائے جاتے۔بیرونی میدان $\boldsymbol{B}$ لاگو کرنے کی صورت میں تمام کے تمام $n \, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ جفت قطب ہم صف ہو جاتے ہیں جس کی وجہ سے گھیرے سطح سے کل مقید گزرتی برقی رو بڑھ جاتی ہے۔ہر انفرادی جفت قطب گھیری گئی سطح سے گزرتی برقی رو میں I_m کا اضافہ کرتا ہے لہٰذا تمام ہم صف جفت قطب مل کر

$$\mathrm{d}I_m = n I_m \, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.25}$$

اضافہ پیدا کرتے ہیں۔پورے بند راہ کے گرد چلتے ہوئے یوں کل اضافہ

$$I_m = \oint \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.26}$$

ہو گا۔

---

[22] magnetization

مندرجہ بالا مساوات ایمپیئر کے دوری قانون کی مساوات کے ساتھ قریبی مشابہت رکھتا ہے۔یوں $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{H}$ کے تعلق پر نظر ثانی کرتے ہوئے یوں بیان کیا جا سکتا ہے کہ یہ خالی خلاء کے علاوہ دیگر اشیاء میں بھی کارآمد ہو۔ہمارا موجودہ تبصرہ بیرونی میدان $\boldsymbol{B}$ میں جفت قطب پر قوت اور مروڑ پر رہا ہے۔آئیں $\boldsymbol{B}$ کو ہی بنیادی متغیرہ تصور کرتے ہوئے $\boldsymbol{H}$ کی بہتر تعریف حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر ایمپیئر کے دوری قانون کو آزاد برقی رو I اور مقید برقی رو I_m کے مجموعے $I_{\text{کل}}$ کی صورت

$$\oint \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I_{\text{کل}} \tag{8.27}$$

میں لکھتے ہیں جہاں

$$I_{\text{کل}} = I + I_m \tag{8.28}$$

کے برابر ہے۔مندرجہ بالا تین مساوات سے

$$I = I_{\text{کل}} - I_m = \oint \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.29}$$

حاصل ہوتا ہے۔قوسین میں بند حصے کو $\boldsymbol{H}$ کی بہتر تعریف لیتے ہیں یعنی

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \tag{8.30}$$

جسے یوں

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \tag{8.31}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ خالی خلاء میں $\boldsymbol{M}$ صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات سے خالی خلاء میں $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ ہی حاصل ہوتا ہے۔مساوات 8.29 میں $\boldsymbol{H}$ کی نئی تعریف پر کرنے سے ایمپیئر کے دوری قانون کو آزاد برقی رو کی صورت

$$I = \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.32}$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

مختلف اقسام کے برقی رو کے لئے

$$\begin{aligned} I_m &= \oint_S \boldsymbol{J}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ I_{\text{کل}} &= \oint_S \boldsymbol{J}_{\text{کل}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ I &= \oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں جن سے بذریعہ مسئلہ سٹوکس مساوات 8.26، مساوات 8.32 اور مساوات 8.27 کے گردش

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{J}_m \\ \nabla \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} &= \boldsymbol{J}_{\text{کل}} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} \end{aligned} \tag{8.33}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ ہمیں یہاں سے آگے مساوات 8.32 اور مساوات 8.33 سے غرض رہے گا۔یہ دونوں مساوات آزاد برقی رو کے تعلق پیش کرتے ہیں۔

مساوات 8.31 کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$، مقناطیسی میدان کی شدت $\boldsymbol{H}$ اور مقناطیسیت $\boldsymbol{M}$ کے تعلق کو بیان کرتی ہے۔خطی[23] اور غیر سمتی خاصیت[24] کے اشیاء میں مقناطیسیت اور میدان کے شدت کا خطی تعلق

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{8.34}$$

پایا جاتا ہے جہاں χ_m کو مقناطیسی اثر پذیری[25] کہا جاتا ہے۔یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \mu_0 (\boldsymbol{H} + \chi_m \boldsymbol{H}) \\ &= \mu_0 (1 + \chi_m) \boldsymbol{H}\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔قوسین میں بند حصے کو جزوی مقناطیسی مستقل[26] پکارا اور μ_R سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$\mu_R = 1 + \chi_m \tag{8.35}$$

یوں

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_R \boldsymbol{H}$$

یا

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{8.36}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں μ

$$\mu = \mu_0 \mu_R \tag{8.37}$$

مقناطیسی مستقل[27] پکارا جاتا ہے۔جزوی مقناطیسی مستقل μ_R کے استعمال سے بایوٹ سیوارٹ کا قانون اور ایمپیئر کے دوری قانون کو خالی خلاء کے علاوہ ان تمام اشیاء میں بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جو خطی اور غیر سمتی خاصیت رکھتے ہوں۔ایسے اشیاء مساوات 8.34 پر پورا اترتے ہیں۔

فولادی مقناطیسی اشیاء کے μ_R کی قیمت 10 تا 100 000 پائی جاتی ہے۔

سمتی خاصیت[28] کے اشیاء میں $\boldsymbol{H}$ کا ہر کارتیسی جزو $\boldsymbol{B}$ کے ہر کارتیسی جزو پر اثر انداز ہوتا ہے لہٰذا ان کا تعلق تناوی شکل

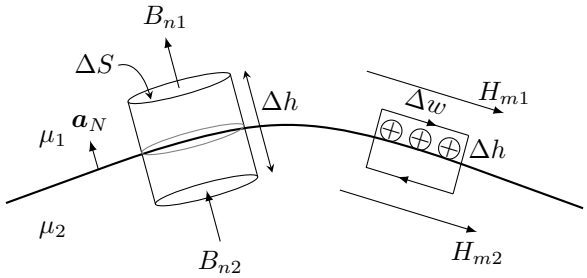
$$\begin{aligned}B_x &= \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z \\ B_y &= \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z \\ B_z &= \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z\end{aligned} \tag{8.38}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔یہ مساوات صفحہ 138 پر دئے مساوات 5.40 کی طرح ہے۔یوں سمتی خاصیت کے اشیاء میں $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ کے تعلق میں μ تناوی مستقل ہے۔مساوات $\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$ اب بھی درست ہے اگرچہ $\boldsymbol{B}$، $\boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{M}$ عموماً غیر متوازی ہوں گے۔

مقناطیسی اثر پذیری کی بات کرتے ہوئے خطی تعلق تصور کیا گیا ہے۔حقیقت میں ایسا خطی تعلق صرف غیر مقناطیسی اشیاء میں ہی پایا جاتا ہے۔

---

[23] linear
[24] isotropic
[25] magnetic susceptibility
[26] relative magnetic constant, relative permeability
[27] magnetic constant, permeability
[28] anisotropic



شکل 8.8: مقناطیسی سرحدی شرائط۔

8.7 مقناطیسی سرحدی شرائط

ہم موصل اور ذو برق کے سرحدی شرائط دیکھ چکے ہیں۔انہیں دیکھتے ہوئے آگے پڑھیں۔بالکل انہیں کی طرح شکل 8.8 کی مدد سے مقناطیسی سرحدی شرائط حاصل کرتے ہیں جہاں دو مقناطیسی اشیاء کا سرحد دکھایا گیا ہے جن کے مقناطیسی مستقل μ_1 اور μ_2 ہیں۔ سرحد پر چھوٹے نلکی ڈبے کی لمبائی کم سے کم کرتے ہوئے گاؤس کے قانون

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

کے اطلاق سے

$$B_{n1}\Delta S - B_{n2}\Delta S = 0$$

یعنی

$$B_{n2} = B_{n1} \tag{8.39}$$

یا

$$H_{n2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n1} \tag{8.40}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں عمودی $\boldsymbol{B}$ سرحد پر بلا جوڑ ہے جبکہ عمودی $\boldsymbol{H}$ سرحد پر $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ کی شرح سے جوڑ دار ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات کو یوں

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0 \tag{8.41}$$

$$\boldsymbol{a}_N \cdot \left(\boldsymbol{H}_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\boldsymbol{H}_1\right) = 0 \tag{8.42}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

سرحد پر عمودی $\boldsymbol{M}$ کا تعلق سرحد پر عمودی $\boldsymbol{H}$ کے تعلق سے حاصل ہوتا ہے۔خطی خاصیت کے مقناطیسی اشیاء کے لئے یوں

$$M_{n2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} \frac{\mu_1}{\mu_2} M_{n1} \tag{8.43}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

سرحد پر انتہائی کم موٹائی کے خطے میں کثافت برقی رو K تصور کرتے ہوئے کثافت کے عمودی ΔL چوڑائی پر برقی رو $I_{\Delta L} = K\Delta L$ لکھی جا سکتی ہے۔یوں سرحد پر متوازی اجزاء کا شرط شکل میں مستطیل راہ پر ایمپیئر کے دوری قانون

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I$$

کے اطلاق سے

$$H_{m1}\Delta w - H_{m2}\Delta w = K_\perp \Delta w$$

یعنی

$$H_{m1} - H_{m2} = K_\perp \tag{8.44}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $K_\perp$ سے مراد K کا وہ حصہ ہے جو H_{m1} اور H_{m2} کے عمودی ہے۔سمتی ضرب کے استعمال سے مندرجہ بالا مساوات کو

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{K}_\perp \tag{8.45}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}_N$ سرحد پر عمودی اکائی سمتیہ ہے۔ سرحد کے متوازی $\boldsymbol{B}$ کے لئے یوں

$$\frac{B_{m1}}{\mu_1} - \frac{B_{m2}}{\mu_2} = K_\perp \tag{8.46}$$

یا

$$\boldsymbol{a}_N \times \left(\frac{B_{m1}}{\mu_1} - \frac{B_{m2}}{\mu_2}\right) = \boldsymbol{K}_\perp \tag{8.47}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح خطی خاصیت کے اشیاء کے لئے سرحد کے متوازی $\boldsymbol{M}$ کے لئے

$$M_{m2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} M_{m1} - \chi_{m2} K_\perp \tag{8.48}$$

لکھا جا سکتا ہے۔سرحد پر صفر کثافت برقی رو کی صورت میں مندرجہ بالا تین مساوات سادہ صورت اختیار کر لیتے ہیں۔دونوں اشیاء غیر موصل ہونے کی صورت میں سرحد پر کثافت برقی رو صفر ہی ہوتی ہے۔

8.8 مقناطیسی دور

یک سمتی برقی ادوار حل کرنے سے آپ بخوبی آگاہ ہوں گے۔کئی مقناطیسی مسائل بالکل انہیں کی طرح حل ہوتے ہیں۔برقی مشین مثلاً موٹر اور ٹرانسفارمر کے کارکردگی پر غور کرتے وقت انہیں مقناطیسی ادوار سمجھا جاتا ہے۔میری کتاب "برقی آلات" میں اس ترکیب پر پورا باب ہے اور پوری کتاب میں اسی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے مختلف برقی مشین پر غور کیا گیا ہے۔ آئیں اس ترکیب کو دیکھیں۔

سب سے پہلے ان برقی اور مقناطیسی مساوات کو پاس پاس لکھتے ہیں جن کی مدد سے مقناطیسی ادوار کا تصور پیدا ہوتا ہے۔برقی دباو اور برقی میدان کی شدت کا تعلق

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{8.49}$$

ہے۔غیر سمتی مقناطیسی دباو اور مقناطیسی میدان کی شدت کے تعلق

$$\boldsymbol{H} = -\nabla V_m \tag{8.50}$$

سے بھی آپ بخوبی واقف ہیں۔منبع برقی دباو کو محرک برقی دباو پکارا جاتا ہے۔اسی مشابہت کی بنا پر غیر مقناطیسی دباو کو محرک مقناطیسی دباو پکارا جائے گا۔متحرک مقناطیسی دباو کی اکائی ایمپیئر ہے۔حقیقت میں عموماً متعدد چکر کے لچھے کو بطور متحرک مقناطیسی دباو استعمال کیا جاتا ہے اور یوں اس کی اکائی ایمپیئر-چکر[29] لی جاتی ہے۔یاد رہے کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو صرف اس خطے میں معنی رکھتا ہے جہاں برقی رو موجود نہ ہو۔

دو نقطوں کے درمیان برقی دباو کے فرق کو

$$V_{AB} = -\int_B^A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.51}$$

لکھا جاتا ہے۔بالکل اسی طرح دو نقطوں کے درمیان مقناطیسی دباو کے فرق کو

$$V_{mAB} = -\int_B^A \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.52}$$

لکھا جاتا ہے۔صفحہ 222 پر مساوات 7.80 میں بتلایا گیا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو کے حصول کے دوران مندرجہ بالا تکمل میں $\phi = \pi$ پر سے نہیں گزرا جائے گا۔اس حقیقت کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

برقی ادوار میں اوہم کے قانون کی نقطہ شکل

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{8.53}$$

سے کون خبردار نہیں ہے۔یہ مساوات کثافت برقی رو اور برقی میدان کے شدت کا تعلق بیان کرتی ہے۔مقناطیسی ادوار میں اس کا مقابل

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{8.54}$$

ہے جو کثافت مقناطیسی بہاو اور مقناطیسی میدان کے شدت کا تعلق پیش کرتی ہے۔

کل برقی رو بذریعہ سطحی تکمل

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.55}$$

حاصل ہوتی ہے۔کل مقناطیسی بہاو بھی ایسے ہی تکمل سے حاصل ہو گا لہٰذا

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8.56}$$

لکھا جائے گا۔یوں برقی ادوار میں I اور مقناطیسی ادوار میں Φ اہمیت کے حامل ہیں۔

برقی ادوار میں برقی دباو اور برقی رو کی شرح کو برقی مزاحمت پکارا اور R سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$V = IR \tag{8.57}$$

---

[29] ampere-turns

ہم بالکل اسی طرح متحرک مقناطیسی دباو اور مقناطیسی بہاو کی شرح کو ہچکچاہٹ کا نام دیتے ہیں جسے $\Re$ سے ظاہر کیا جائے گا لہٰذا مقناطیس ادوار کے لئے

$$V_m = \Phi\Re \tag{8.58}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہچکچاہٹ کی اکائی ایمپیئر-چکر فی ویبر $(\mathrm{A \cdot t/Wb})$ ہے۔

خطی اور غیر سمتی خاصیت کے یکساں مادہ جس کی موصلیت σ ہو سے بنایا گیا برقی مزاحمت

$$R = \frac{d}{\sigma S} \tag{8.59}$$

کے برابر ہے جہاں مزاحمت کی لمبائی d اور اس کا رقبہ عمودی تراش پورے لمبائی پر یکساں S کے برابر ہے۔اگر خطی اور غیر سمتی خاصیت کے یکساں مادہ سے ہچکچاہٹ بنایا جائے تو اس کی قیمت

$$\Re = \frac{d}{\mu S} \tag{8.60}$$

ہو گی جہاں ہچکچاہٹ کی لمبائی d اور اس کا رقبہ عمودی تراش پورے لمبائی پر یکساں S کے برابر ہے۔حقیقت میں ہوا کے علاوہ ایسا کوئی مادہ نہیں پایا جاتا جس سے اٹل قیمت کی ہچکچاہٹ بنائی جا سکے۔

مثال 8.2: ایک سلاخ جس کی لمبائی 15 cm اور رداس 1 mm ہے کی موصلیت $1200\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے پر 220 V برقی دباو لاگو کی جاتی ہے۔سلاخ کی مزاحمت اور اس میں برقی رو حاصل کریں۔سلاخ میں کثافت برقی رو بھی حاصل کریں۔

حل:مزاحمت

$$R = \frac{d}{\sigma A} = \frac{0.15}{7 \times 10^4 \times \pi \times 0.001^2} = 39.8\,\Omega$$

اور برقی رو

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{39.8} = 5.5\,\mathrm{A}$$

اور یوں کثافت برقی رو ہو گا

$$J = \frac{I}{A} = \frac{5.5}{\pi \times 0.001^2} = 1.75\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{m}^2}$$

مثال 8.3: ایک سلاخ کی لمبائی 15 cm اور رداس 2 cm ہے کی جزو مقناطیسی مستقل 1000 ہے۔اس پر 100 چکر کا لچھا جس میں 0.5 A برقی رو ہو مقناطیسی دباو لاگو کرتا ہے۔سلاخ کی ہچکچاہٹ اور اس میں مقناطیسی بہاو حاصل کریں۔سلاخ میں کثافت مقناطیسی بہاو بھی حاصل کریں۔

حل: ہچکچاہٹ

$$\Re = \frac{d}{\mu_R \mu_0 A} = \frac{0.15}{1000 \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times \pi \times 0.02^2} = 94\,988\,\mathrm{A \cdot t/Wb}$$

اور مقناطیسی بہاو

$$\Phi = \frac{V_m}{\Re} = \frac{100 \times 0.5}{94988} = 0.53\,\mathrm{mWb}$$

اور یوں کثافت مقناطیسی بہاو ہو گی

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0.00053}{\pi \times 0.02^2} = 0.42\,\mathrm{T}$$

8.9 مقناطیسی مخفی توانائی

ساکن برقی میدان پر غور کے دوران ہم نے نقطہ چارج پر قوت کے تجرباتی نتائج سے کولومب کا قانون اخذ کیا۔اس قانون کو استعمال کرتے ہوئے مختلف نقطہ چارج کو لامحدود فاصلے سے مختلف اختتامی مقامات پر رکھنے کی خاطر کل درکار توانائی حاصل کی گئی۔یہی ساکن برقی میدان کی مخفی توانائی تھی۔اس مخفی توانائی کی عمومی مساوات

$$W_{\text{برقی}} = \frac{1}{2} \int_h \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}h \tag{8.61}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{E}$ کا تعلق راست تناسب تصور کیا گیا ہے۔

یہاں خیال آتا ہے کہ مقناطیسی میدان کی مخفی توانائی بھی اسی طرز پر حاصل کی جا سکتی ہے جیسے برقی میدان کی مخفی توانائی حاصل کی گئی تھی، یعنی، ایک برقی رو گزارتے تار کے قریب دوسرے برقی رو گزارتے تار کو قریب لاتے ہوئے درکار توانائی معلوم کر کے۔حقیقت میں معاملہ اتنا سادہ نہیں ہے۔جیسے کہ اگلے باب میں بتلایا جائے گا، مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے حصے میں برقی دباو پیدا ہوتا ہے جس میں معاملہ خاصہ تبدیل ہو جاتا ہے۔

مقناطیسی میدان کی مخفی توانائی اگلے باب میں پوئنٹنگ سمتیہ[30] سے حاصل کی جائے گی۔یہاں مقناطیسی مخفی توانائی کی مساوات صفر پیش کرتے ہیں

$$W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2} \int_h \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}\, \mathrm{d}h \tag{8.62}$$

جو شکل سے برقی مخفی توانائی کے مساوات کے قریبی مشابہت رکھتا ہے۔اس میں $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ پر کرنے سے

$$W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2} \int_h \mu H^2\, \mathrm{d}h \tag{8.63}$$

---

[30] Poynting vector

اور

$$W_{\text{مقناطیسی}} = \frac{1}{2}\int_h \frac{B^2}{\mu}\,\mathrm{d}h \tag{8.64}$$

بھی حاصل ہوتے ہیں۔

برقی مخفی توانائی کی طرح یہاں بھی یہ بتلانا کہ مخفی توانائی درحقیقت کہاں پر ہے نا ممکن ثابت ہوتا ہے البتہ حساب و کتاب آسان بنانے کی خاطر ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہ توانائی پورے حجم میں بطور کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$ پائی جاتی ہے جسے جاول فی مربع میٹر $\mathrm{J/m^3}$ میں ناپا جائے گا۔

8.10 خود امالہ اور مشترکہ امالہ

برقی ادوار میں مزاحمت، کپیسٹر اور امالہ کردار ادا کرتے ہیں۔مزاحمت اور کپیسٹر پر ہم بات کر چکے ہیں۔برقی دباو اور برقی رو کی شرح کو مزاحمت کہا گیا۔ ہم نے دیکھا کہ مزاحمت کے قیمت کا دارومدار مزاحمت کے لمبائی، رقبہ عمودی تراش اور موصلیت پر ہے۔اسی طرح دو چادروں میں سے کسی ایک پر چارج کی حتمی قیمت اور ان چادروں کے درمیان برقی دباو کی شرح کو کپیسٹنس کہا گیا۔ہم نے دیکھا کہ کپیسٹر کے قیمت کا دارومدار کپیسٹر کے چادروں کے رقبے، ان چادروں کے درمیان فاصلے اور چادروں کے درمیان مادے کی برقی مستقل پر ہے۔یوں مزاحمت اور کپیسٹر کے قیمت ان کے شکل، جسامت اور مادے کے مستقل پر ہے۔اس حصے میں ہم امالہ L پر غور کریں گے جس کی اکائی ہینری[31] H ہے۔نیچے کئی مساوات میں امالہ اور فاصلہ دونوں کے لئے ایک ہی علامت یعنی L استعمال کیا گیا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ متن سے ان کا فرق کرنا ممکن ہو گا۔ہم دیکھیں گے کہ اس کے قیمت کا دارومدار امالہ کی شکل، جسامت اور مقناطیسی مستقل پر ہے۔

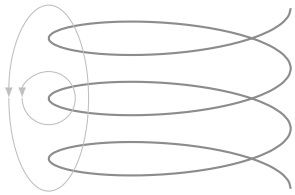
امالہ سمجھنے کی خاطر ارتباط بہاو[32] کا ذکر ضروری ہے۔تصور کریں کہ N چکر لا لچھا جس میں I برقی رو گزر رہا ہے کل Φ مقناطیسی بہاو پیدا کرتا ہے۔تصور کریں کہ Φ ان تمام N چکر سے گزرتی ہے۔یوں تمام کا تمام مقناطیسی بہاو ہر چکر سے گزرتی ہے۔یوں پہلے چکر سے Φ بہاو گزرتی ہے، دوسرے چکر سے بھی Φ بہاو گزرتی ہے اور اسی طرح بقایا ہر چکر سے بھی اتنی ہی بہاو گزرتی ہے۔ارتباط بہاو سے مراد $N\Phi$ ہے یعنی تمام چکر سے گزرتی بہاو کا مجموعہ۔

ارتباط بہاو اور برقی رو کی شرح کو امالہ کہا جاتا ہے۔اگر ارتباط بہاو اسی برقی رو سے پیدا ہو تب ان کی شرح کو خود امالہ[33] کہتے ہیں جسے عموماً چھوٹا کر کے صرف امالہ پکارا جاتا ہے۔اس کے برعکس اگر برقی رو ایک تار میں ہو اور ارتباط بہاو دوسری تار کی ہو تب ان کے شرح کو مشترکہ امالہ[34] کہتے ہیں۔اس حصے میں خود امالہ پر ہی غور کیا جائے گا۔اگلے حصے میں مشترکہ امالہ پر غور کیا جائے گا۔

$$L = \frac{N\Phi}{I} \tag{8.65}$$

اس مساوات میں تصور کیا گیا ہے کہ پورا مقناطیسی بہاو تمام چکر سے گزرتی ہے۔امالہ کی یہ تعریف صفر خطی مقناطیسی اشیاء کے لئے معنی رکھتی ہے۔خطی مقناطیسی اشیاء سے مراد ایسے مقناطیسی اشیاء ہیں جن میں مقناطیسی بہاو اور برقی رو راست تناسب کا تعلق رکھتے

[31] Henry
[32] flux linkage
[33] self inductance
[34] mutual inductance



شکل 8.9: متعدد چکر کے لچھے میں ہر چکر سے گزرتی مقناطیسی بہاو مختلف ہو سکتی ہے۔

ہیں۔فولادی مقناطیسی اشیاء میں مقناطیسی چال کی بنا پر امالہ کی کوئی ایک تعریف تمام موقعوں کے لئے کارآمد ثابت نہیں ہوتا۔ہم خطی مقناطیسی اشیاء تک ہی بحث کو محدود رکھیں گے۔

آئیں ہم محوری تار کے اکائی لمبائی کی امالہ حاصل کریں۔صفحہ 192 پر مساوات 7.13

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho_1 < \rho < \rho_2)$$

ہم محوری تار میں تاروں کے درمیانی خطے میں مقناطیسی شدت دیتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے اس خطے میں z_0 لمبائی پر کل مقناطیسی بہاو

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S B_\phi \,\mathrm{d}S \\ &= \int_0^{z_0}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu I \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}z}{2\pi\rho} \\ &= \frac{\mu I z_0}{2\pi} \ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\end{aligned}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔یہ مقناطیسی بہاو دونوں تاروں کے درمیانے خطے میں اندرونی تار کے گرد گھومتی ہے لہٰذا تکمل میں کسی بھی زاویہ پر z_0 لمبی ρ_1 تا ρ_2 رداسی سطح لی جا سکتی ہے۔یوں اکائی لمبائی پر ہم محوری تار کی امالہ

$$L = \frac{\mu I}{2\pi} \ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{8.66}$$

ہو گی۔یہاں $N = 1$ یعنی ایک ہی چکر ہے اور تمام کا تمام مقناطیسی بہاو پورے برقی رو کے گرد چکر کاٹتی ہے۔

اب تصور کریں کہ پیچدار لچھے کی امالہ درکار ہو جسے شکل 8.9 میں دکھایا گیا ہے۔ایسے لچھے کے پہلے چکر کا پورا بہاو پہلے چکر سے گزرتی ہے البتہ اس کا کچھ ہی حصہ دوسرے یا تیسرے چکر سے گزرتی ہے۔یہی کچھ بقایا چکر کے بارے میں بھی کہا جا سکتا ہے۔ایسی صورت میں لچھے کی ارتباط بہاو حاصل کرنے کی خاطر ہر چکر سے گزرتی انفرادی بہاو لیتے ہوئے تمام کا مجموعہ حاصل کیا جائے گا یعنی

$$\text{ارتباط بہاو} = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_N = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i$$

آئیں اب امالہ کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

کسی بھی بند راہ پر یک سمتی برقی رو I گزرنے سے کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

پیدا ہوتی ہے جہاں $\boldsymbol{A}$ سمتی مقناطیسی دباو ہے جسے

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{R}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ایسی بند راہ سطح S کو گھیرتی ہے جس میں سے گزرتی کل مقناطیسی بہاو Φ کو تکمل

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس تکمل میں $\boldsymbol{B}$ پر کرنے سے

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔مسئلہ بایوٹ سیوارٹ کی مدد سے اسے

$$\Phi = \oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں بند تکمل سطح کے سرحد یعنی برقی رو گزارتے بند راہ پر حاصل کیا جائے گا۔اس مساوات میں $\boldsymbol{A}$ پر کرنے سے

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں امالہ کی عمومی مساوات

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{8.67}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہاں تکمل کے اندر L فاصلے کو ظاہر کرتی ہے جبکہ مساوات کے بائیں ہاتھ یہی علامت امالہ کو ظاہر کرتی ہے۔

امالہ کی مساوات سے ظاہر ہے کہ امالہ کی قیمت کا دارومدار صرف اور صرف تار یا لچھے کی شکل و جسامت اور مقناطیسی مستقل پر منحصر ہے۔

امالہ کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر سطحی تکمل لیا گیا۔ایک چکر کے بند راہ جس سطح کو گھیرتی ہے، اس کی شکل ذہن میں آسانی سے بن جاتی ہے البتہ پیچدار لچھا جس سطح کو گھیرتا ہے اس کی شکل ذہن میں ذرہ مشکل[35] سے بنتی ہے۔سطحی تکمل لیتے وقت ایسی تمام ممکنہ سطح استعمال کی جا سکتی ہیں جن کا سرحد پیچدار لچھے کی تار ہو۔

برقی رو گزارتے تار کی رداس صفر کرنے سے بایوٹ سیوارٹ کے قانون کے تحت لامحدود کثافت مقناطیسی بہاو حاصل ہو گی جس سے لامحدود توانائی اور لامحدود امالہ حاصل ہوتا ہے۔حقیقت میں قابل استعمال جوابات حاصل کرنے کی خاطر تار کے رداس چھوٹا ضرور لیکن صفر کبھی تصور نہیں کیا جاتا۔

کسی بھی برقی رو گزارتے تار کے اندر بھی زاویائی مقناطیسی بہاو پایا جاتا ہے۔تار کے محور کے قریب گھومتی اندرونی بہاو کم برقی رو کو گھیرتی ہے جبکہ محور سے دور زاویائی اندرونی بہاو زیادہ برقی رو گھیرتی ہے۔جیسا آپ اگلے بابوں میں پڑھیں گے، زیادہ

[35] آپ لچھے کے محور پر سلاخ تصور کرتے ہوئے اس کے گرد گول گھومتی اور اوپر جاتی سطح تصور کر سکتے ہیں۔

تعدد پر تار کے بیرونی سطح کے قریب زیادہ برقی رو گزرتی ہے لہٰذا زیادہ تعدد پر تار کی اندرونی امالہ کا کردار قابل نظرانداز ہوتا ہے البتہ کم تعدد پر اس کا حساب رکھنا ضروری ہوتا ہے۔

مثال 8.4: لا محدود لمبائی کے تار کی اندرونی امالہ حاصل کریں۔

حل:رداس ρ_1 کے تار کو z محدد پر تصور کرتے ہیں۔تار میں کثافت برقی رو یکساں تصور کرتے ہوئے $J = \frac{I}{\pi\rho_1^2}$ حاصل ہوتا ہے۔رداس ρ پر گول دائرہ $\frac{I\rho^2}{\rho_1^2}$ برقی رو گھیرتا ہے لہٰذا ایمپیئر کے دوری قانون کے تحت اس دائرے پر زاویائی شدت $H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi\rho_1^2}$ ہو گی۔رداس ρ پر $\mathrm{d}\rho$ چوڑائی اور z_0 لمبائی کی مستطیل سطح سے

$$\mathrm{d}\Phi = B_\phi z_0\,\mathrm{d}\rho = \mu H_\phi z_0\,\mathrm{d}\rho$$

بہاو گزرے گی۔اگر تار کو متعدد باریک متوازی تاروں کا مجموعہ تصور کیا جائے تو مندرجہ بالا تفرقی بہاو صفر ρ کے اندر تاروں کو گھیرتی ہے جو ایک چکر کا صرف $\frac{\rho^2}{\rho_1^2}$ حصہ ہیں لہٰذا یہ تفرقی بہاو صرف

$$\text{تفرقی ارتباط بہاو} = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}\,\mathrm{d}\Phi = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}\mu H_\phi z_0\,\mathrm{d}\rho = \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho_1^4}\rho^3\,\mathrm{d}\rho$$

دیتی ہے۔اگر تفرقی بہاو تمام فرضی باریک تاروں کو گھیرتی تب یہ ایک چکر شمار ہوتا۔یوں مکمل سے اندرونی ارتباط بہاو

$$\text{ارتباط بہاو} = \int_0^{\rho_1} \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho_1^4}\rho^3\,\mathrm{d}\rho = \frac{\mu I z_0}{8\pi}$$

حاصل ہوتی ہے جس سے اندرونی امالہ

$$L_{\text{اندرونی}} = \frac{\mu z_0}{8\pi}$$

یا فی میٹر امالہ

$$L_{\text{اندرونی فی میٹر}} = \frac{\mu}{8\pi} \tag{8.68}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مشق 8.2: صفحہ 191 میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے۔بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کریں۔

جوابات: تار کی لمبائی z_0 لیتے ہوئے

$$I_{\text{گھیرا}} = \left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right) I$$
$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right)$$
$$\mathrm{d}\Phi = \mu H_\phi z_0 \,\mathrm{d}\rho$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ تفرقی بہاو ایک چکر کے $\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}$ حصے کے گرد گھومتی ہے لہٰذا تفرقی ارتباط بہاو

$$\text{تفرقی ارتباط بہاو} = \frac{\mu I z_0}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right)^2 \mathrm{d}\rho$$

اور یوں $z_0 = 1$ پر کرتے ہوئے فی میٹر امالہ

$$L_{\text{بیرونی تار}} = \frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2 - \rho_2^2\right)^2}\left(\rho_3^4 \ln\frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2\rho_3^2\right) \tag{8.69}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 8.68 ہی ہم محوری تار کے اندرونی تار کی امالہ دیتا ہے۔یوں کم تعدد پر مساوات 8.66، مساوات 8.68 اور مساوات 8.69 کا مجموعہ

$$L = \frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2 - \rho_2^2\right)^2}\left(\rho_3^4 \ln\frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2\rho_3^2\right) \tag{8.70}$$

فی میٹر ہم محوری تار کا کل امالہ ہو گا۔جیسے اگلے بابوں میں بتلایا جائے گا، بلند تعدد پر تار میں کثافت برقی رو یکساں نہیں رہتی جس کی وجہ سے تار کی اندرونی امالہ قابل نظرانداز ہو جاتی ہے۔یوں بلند تعدد پر مساوات 8.66 ہی فی میٹر تار کی امالہ دے گا۔

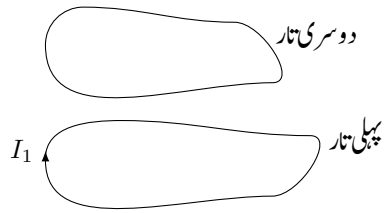
آپ امالہ کے مخفی توانائی

$$W = \frac{LI^2}{2} \tag{8.71}$$

سے بخوبی واقف ہیں جہاں مخفی توانائی مساوات 8.62، مساوات 8.63 یا مساوات 8.64 سے حاصل کی جا سکتی ہے۔انہیں استعمال کرتے ہوئے امالہ یوں بھی حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned} L = \frac{2W}{I^2} &= \frac{1}{I^2}\int_h \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}h \\ &= \frac{1}{I^2}\int_h \mu H^2\,\mathrm{d}h \\ &= \frac{1}{I^2}\int_h \frac{B^2}{\mu}\,\mathrm{d}h \end{aligned} \tag{8.72}$$

آپ سے مندرجہ بالا مساوات استعمال کرتے ہوئے، سوال 8.2 میں لامحدود لمبائی کے سیدھی تار کی امالہ اور سوال 8.3 میں ہم محوری تار کے بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔



شکل 8.10: مشترکہ امالہ۔

8.11 مشترکہ امالہ

شکل 8.10 میں دو تار دکھائے گئے ہیں۔آئیں پہلی تار میں برقی رو I سے پیدا مقناطیسی بہاو کا وہ حصہ حاصل کریں جو دوسرے تار سے گزرتا ہے۔ان معلومات سے دونوں تاروں کے مابین مشترکہ امالہ حاصل کیا جائے گا۔ خود امالہ حاصل کرنے کے طرز پر دوسرے تار سے گزرتی بہاو کو

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_2$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اندرونی تکمل پہلی تار پر ہے اور یہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان دیتا ہے جبکہ دوسری تکمل دوسرے تار پر ہے جس میں سے گزرتی بہاو کا حصول درکار ہے۔مشترکہ امالہ M_{21} کی تعریف

$$M_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1} \tag{8.73}$$

ہے جس سے

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_2 \tag{8.74}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اگر دوسری تار میں برقی رو لی جاتی اور پہلی سے گزرتی بہاو حاصل کی جاتی تب

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}_1 \tag{8.75}$$

حاصل ہوتا۔مندرجہ بالا دو درجی تکمل میں اندرونی تکمل دوسری راہ پر ہے جبکہ بیرونی تکمل پہلی راہ پر ہے۔تکمل لینے کی ترتیب بدلتے ہوئے اگر پہلا تکمل پہلی راہ پر لیا جائے اور بعد میں دوسری راہ پر تکمل لیا جائے تو تکمل کی قیمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی لیکن ایسا کرنے سے ہمیں ہو بہو مساوات 8.74 ملتا ہے لہٰذا

$$M_{21} = M_{12} \tag{8.76}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کسی بھی دو لچھوں کے درمیان مشترکہ امالہ دونوں جانب سے برابر حاصل ہوتی ہے۔

سوالات

سوال 8.1: صفحہ 191 میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے۔تصور کریں کہ اس ہم محوری تار کے اندرونی تار میں برقی رو صفر کے برابر ہے جبکہ بیرونی تار میں برقی رو I کے برابر ہے۔بیرونی تار کی فی میٹر اندرونی امالہ مثال 8.2 کی طرز پر حاصل کریں۔

جواب: $\frac{\mu}{2\pi\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)^2}\left[\rho_2^4\ln\frac{\rho_3}{\rho_2}+\frac{\rho_3^4-\rho_2^4}{4}-\rho_2^2\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)\right]$

سوال 8.2: لامحدود لمبائی کے سیدھی تار کی امالہ مساوات 8.72 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 8.3: صفحہ 256 پر مثال 8.2 میں ہم محوری تار کے بیرونی تار کی اندرونی امالہ حاصل کی گئی۔اسی کو دوبارہ مساوات 8.72 کی مدد سے حاصل کریں۔

جواب:بیرونی تار میں $H=\frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho_3^2-\rho^2}{\rho_3^2-\rho_2^2}\right)$ استعمال کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔

باب 9

وقت کے ساتھ بدلتے میدان اور میکس ویل کے مساوات

گزشتہ بابوں میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے میدان یعنی میدانوں پر غور کیا گیا۔یہاں سے آگے اس کتاب میں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں پر غور کیا جائے گا۔

دو نئے اصول پر غور کیا جائے گا۔پہلا اصول مائکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔دوسرا قانون جیمس کلارک میکس ویل کے کاوشوں سے حاصل ہوا جس کے تحت وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے۔ اس باب میں برقی و مقناطیسیات کے چار ایسے مساوات پیش کئے جائیں گے جو میکس ویل کے نام سے منسوب ہیں۔

9.1 فیراڈے کا قانون

جناب مائکل فیراڈے نے تجرباتی طور پر ثابت کیا کہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، برقی میدان پیدا کرتا ہے۔قانون فیراڈے[1] کو مندرجہ ذیل مساوات پیش کرتی ہے۔

$$\text{محرک برقی دباو} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{9.1}$$

اس قانون کے تحت کسی بھی بند راہ سے گزرتی مقناطیس بہاو میں تبدیلی اس راہ پر برقی دباو پیدا کرتی ہے۔ایسی برقی دباو روایتی طور پر محرک برقی دباو[2] پکاری جاتی ہے۔محرک برقی دباو[3] کی قیمت وقت کے ساتھ بند راہ سے گزرتی مقناطیسی بہاو کے تبدیلی کے برابر ہوتی ہے۔محرک برقی دباو کی اکائی وولٹ V ہے۔ضروری نہیں کہ بند راہ موصل مادے کی ہی ہو، یہ فرضی بند لکیر بھی ہو سکتی ہے۔

---

[1] Faraday's law

[2] electromotive force, emf

[3] محرک برقی دباو کی اصطلاح روایتی طور پر ہر قسم کے منبع برقی دباو کے لئے استعمال کی جاتی ہے۔

محرک برقی دباو مکمل برقی دور میں برقی رو پیدا کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔محرک برقی دباو سے پیدا برقی رو، بند راہ میں مقناطیسی بہاو پیدا کرے گی جس کی سمت، راہ میں پہلے سے موجود مقناطیسی بہاو کے سمت، کی الٹ ہوتی ہے۔مساوات 9.1 میں منفی کی علامت اسی اصول کو بیان کرتی ہے کہ بند راہ میں محرک برقی دباو سے پیدا برقی رو ایسا مقناطیسی بہاو پیدا کرتی ہے جو پہلے سے موجود مقناطیسی بہاو کے الٹ سمت رکھتی ہے۔اس اصول کو لینز[54] کا اصول کہا جاتا ہے۔

کسی بھی بند راہ سے گزرتی کل مقناطیسی بہاو میں تبدیلی مندرجہ ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہے۔

- وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی کثافت مقناطیسی بہاو جو ساکن بند راہ سے گزرتی ہو۔
- ساکن مقناطیسی میدان اور بند راہ کا آپس میں اضافی حرکت۔
- مندرجہ بالا دونوں وجوہات۔

اگر بند راہ N چکر کے لچھے پر مشتمل ہو جہاں ہر چکر میں سے Φ مقناطیسی بہاو گزرتی ہو تب فیراڈے کے قانون کو

$$\text{محرک برقی دباو} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{9.2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

برقی دباو کے طرز پر محرک برقی دباو کی تعریف

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.3}$$

لکھی جاتی ہے جہاں تکمل پورے بند راہ پر لینا لازم ہے۔برقی دباو کے تعریف کے ساتھ موازنہ کرتے ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے ہم مندرجہ بالا مساوات میں منفی کی علامت $(-)$ لگانا بھول گئے ہیں۔ایسا بالکل نہیں ہے اور اس کی وضاحت جلد شکل 9.2 کی مدد سے کر دی جائے گی۔محرک برقی دباو بند راہ پر بیان کی جاتی ہے۔صفحہ 100 پر مساوات 4.28 کے تحت ساکن برقی میدان میں کسی بھی بند دائرے پر $\boldsymbol{E}$ کا لکیری تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے۔مساوات 9.3 کہتا ہے کہ غیر ساکن مقناطیسی میدان میں ایسا نہیں ہوتا اور کسی بھی بند دائرے پر $\boldsymbol{E}$ کا لکیری تکمل اس راہ پر پیدا محرک برقی دباو دیتا ہے۔

مساوات 9.1 اور مساوات 9.3 سے

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.4}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں Φ کی جگہ کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ کا سطحی تکمل استعمال کیا گیا۔

اگر بند راہ کو دائیں ہاتھ میں یوں پکڑا جائے کہ انگلیاں راہ پر چلنی کی سمت میں ہوں تب انگوٹھا راہ سے گھیرے سمتی سطح کی سمت میں ہو گا۔مندرجہ بالا مساوات کہتا ہے کہ کسی بھی سمتی سطح سے گزرتی مقناطیسی بہاو اگر بڑھ رہی ہو تب محرک برقی دباو سطح کے سرحد پر مثبت سمت کے الٹ جانب برقی رو پیدا کرے گا۔مساوات 9.4 استعمال کرتے ہوئے دائیں ہاتھ کے اس قانون کو یاد رکھیں۔

---

[4] یہ قانون 1834 میں جناب لینز نے پیش کیا۔
[5] Lenz's law

آئیں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی وجہ سے پیدا ساکن بند راہ میں محرک برقی دباو پر پہلے غور کریں اور بعد میں ساکن مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے راہ کی وجہ سے پیدا محرک برقی دباو پر غور کریں۔

ساکن راہ کی صورت میں مساوات 9.4 میں دائیں ہاتھ پر $\boldsymbol{B}$ ہی وقت کے ساتھ تبدیل ہو رہی ہے یوں اس مساوات میں تفرق کے عمل کو تکمل کے اندر لے جایا جا سکتا ہے یعنی

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.5}$$

آگے بڑھنے سے پہلے اس مساوات کی نقطہ شکل حاصل کرتے ہیں۔مساوات کے بائیں ہاتھ پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$\int_S (\nabla\times \boldsymbol{E})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ سطح S ایسی کوئی بھی سطح ہو سکتی ہے جس کا سرحد بند راہ ہو۔یوں ہم دونوں جانب مختلف سطحیں لے سکتے ہیں جب تک دونوں سطحوں کے سرحد یہی بند راہ ہو۔اسی طرح ہم ایک ہی سطح کو دونوں جانب تکمل میں استعمال کر سکتے ہیں۔یہ مساوات کسی بھی سطح کے لئے درست ہے لہٰذا یہ تفرقی سطح $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ کے لئے بھی درست ہے۔تفرقی سطح کے لئے اسے یوں

$$(\nabla\times \boldsymbol{E})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

یعنی

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.6}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 9.6 میکس ویل کے چار مساواتوں میں سے پہلی مساوات ہے۔یہ میکس ویل کے پہلی مساوات کی نقطہ شکل ہے۔اس مساوات کی نقطہ شکل ہی عموماً استعمال ہوتی ہے۔میکس ویل کے پہلی مساوات کی تکمل شکل مساوات 9.5 بیان کرتی ہے۔وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے مقناطیسی میدان کی صورت میں مساوات 9.6 اور مساوات 9.5 ساکن میدان کے مساوات کی صورت اختیار کرتے ہیں یعنی

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0 \qquad \text{(برقی سکون)} \tag{9.7}$$

اور

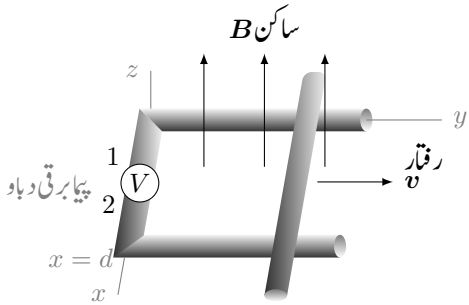
$$\nabla\times \boldsymbol{E} = 0 \qquad \text{(برقی سکون)}$$

آئیں مساوات 9.5 اور مساوات 9.6 کو استعمال کر کے دیکھیں۔تصور کریں کہ $\rho < \rho_2$ نلکی خطے میں وقت کے ساتھ مسلسل بڑھتی

$$\boldsymbol{B} = B_0 e^{kt}\boldsymbol{a}_z \qquad (\rho < \rho_2) \tag{9.8}$$

کثافت مقناطیسی بہاو پائی جاتی ہے جہاں B_0 ایک مستقل ہے۔ ہم $z=0$ سطح پر ρ_1 رداس کی گول راہ لیتے ہیں۔مشابہت سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس پورے راہ پر E_ϕ کی قیمت تبدیل نہیں ہو سکتی لہٰذا مساوات 9.5 سے

$$\text{محرک برقی دباو} = 2\pi\rho_1 E_\phi = -kB_0 e^{kt}\pi\rho_1^2$$



شکل 9.1: وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتے یکساں مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے موصل سلاخ پر محرک برقی دباو پیدا ہوتی ہے۔

حاصل ہوتا ہے۔یوں کسی بھی رداس پر برقی میدان کی شدت

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{2}kB_0e^{kt}\rho\boldsymbol{a}_\phi \tag{9.9}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

آئیں اب یہی جواب مساوات 9.6 سے حاصل کریں۔چونکہ اس مساوات کے دائیں جانب صرف $\boldsymbol{a}_z$ جزو پایا جاتا ہے لہٰذا بائیں ہاتھ بھی صرف یہی جزو ہو گا لہٰذا اس مساوات سے

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial\rho} = -kB_0e^{kt}$$

لکھا جا سکتا ہے۔دونوں اطراف کو ρ سے ضرب دیتے ہوئے 0 تا ρ تکمل لے کر

$$\rho E_\phi = -kB_0e^{kt}\frac{\rho^2}{2}$$

یعنی

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{2}kB_0e^{kt}\rho\boldsymbol{a}_\phi \tag{9.10}$$

ہی دوبارہ حاصل ہوتا ہے جہاں رداسی تکمل میں t مستقل کا کردار ادا کرتا ہے۔

مثبت B_0 کی صورت میں اس راہ پر $\boldsymbol{a}_\phi$ کی الٹ سمت میں برقی رو گزرے گی جو $\boldsymbol{a}_z$ کی الٹ سمت میں کثافت مقناطیسی بہاو پیدا کرتے ہوئے پہلے سے موجود مقناطیسی میدان میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔

اس مثال کے آخر میں یہ بتلانا ضروری ہے کہ مساوات 9.8 میں دیا گیا میدان غیر حقیقی ہے چونکہ یہ میکس ویل کے دیگر مساوات پر پورا نہیں اترتا۔

آئیں اب ایسی مثال دیکھیں جس میں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہونے والے مقناطیسی میدان میں بند راہ حرکت کر رہی ہو۔شکل 9.1 میں ایسی صورت حال دکھائی گئی ہے۔اس شکل میں $\boldsymbol{v}$ سمتی رفتار کو جبکہ V برقی دباو ناپنے کی آلہ[6] یعنی پیما برقی

[6]وولٹ میٹر

دباو[7] کو ظاہر کرتی ہے۔اس شکل میں دو افقی اور دو متوازی موصل سلاخ بند راہ یا بند دور بناتے ہیں۔ متوازی افقی سلاخوں کو بائیں طرف عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے جس میں قابل نظر انداز جسامت اور لامحدود مزاحمت والا پیما برقی دباو نسب ہے، جبکہ دائیں جانب انہیں v سمتی رفتار سے حرکت کرتے عمودی سلاخ سے جوڑا گیا ہے۔وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتا اور ہر جگہ یکساں کثافت مقناطیسی بہاو $\boldsymbol{B}$ بند راہ کی گھیرے سطح کے عمودی ہے۔

مثبت $\boldsymbol{B}$ کی صورت میں $\boldsymbol{B}$ کی سمت ہی بند راہ سے گھیری گئی سطح کی سمت ہو گی اور بند راہ کی سمت گھڑی کے الٹ ہو گی۔یوں راہ کے مثبت سمت میں دائیں ہاتھ کی انگلیاں رکھتے ہوئے گھیری سطح کی سمت انگوٹھے سے حاصل کی جاتی ہے۔

کسی بھی لمحہ t پر حرکت کرتے سلاخ کے مقام کو y سے ظاہر کرتے ہوئے ہم $y = vt$ لکھ سکتے ہیں جہاں v سلاخ کے رفتار کی قیمت ہے۔یوں لمحہ t پر بند دور کا ارتباط بہاو

$$\Phi = Bdy = Bdvt$$

ہو گا جو مساوات 9.1 کے تحت بند دور میں

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -Bdv$$

محرک برقی دباو e پیدا کرے گا۔

اب محرک برقی دباو $\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ کو کہتے ہیں لہٰذا مندرجہ بالا جواب راہ پر گھڑی کے الٹ سمت میں اس بند لکیری تکمل سے بھی حاصل ہونا چاہیے۔ہم دیکھ چکے ہیں کہ برقی سکون کی صورت میں موصل کی سطح پر سطح کے متوازی E صفر رہتی ہے۔ہم آگے دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان میں بھی موصل کی سطح پر متوازی E صفر ہی رہتی ہے۔یوں شکل 9.1 پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تمام سلاخوں پر تکمل کی قیمت صفر کے برابر ہو گی۔پیما برقی دباو کی مزاحمت صفر نہیں ہے لہٰذا تکمل کی قیمت پیما برقی دباو پر مندرجہ بالا قیمت کے برابر ہونا ہو گا۔گھڑی کی الٹ سمت چلتے ہوئے پیما برقی دباو کی لمبائی کو $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = -Bdv$ ہونا ہو گا۔چونکہ $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mathrm{d}L\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے برابر ہے لہٰذا $\boldsymbol{E}$ کی سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے الٹ ہو گی۔یوں پیما برقی دباو پر $\boldsymbol{E}$ کی سمت پیما کے دوسرے سرے سے پہلے سرے کی جانب ہے اور پیما پر برقی دباو کا مثبت سرا پیما کا دوسرا سرا ہے۔

پیما کی جگہ مزاحمت جوڑنے سے دور میں گھڑی کے الٹ برقی رو گزرے گی جو $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ کے الٹ سمت میں مقناطیسی بہاو پیدا کرے گی۔یہ لورنز کے قانون کے عین مطابق ہے۔

آئیں اب اسی شکل میں دئے مسئلے کو حرکی برقی دباو تصور کرتے ہوئے حل کریں۔مقناطیسی میدان میں $\boldsymbol{v}$ سمتی رفتار سے حرکت کرتے ہوئے چارج Q پر قوت

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

یا حرکی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$

$$\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{9.11}$$

عمل کرتی ہے۔حرکی شدت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت میں ہے۔حرکت کرتے سلاخ میں ساکن مثبت ایٹم اور آزاد منفی الیکٹران پائے جاتے ہیں۔ان تمام چارجوں پر ایسی قوت پائی جائے گی البتہ ساکن ایٹم مقید ہونے کی بنا حرکت نہیں کریں گے۔اگر محرک سلاخ کو متوازی

[7] voltmeter

سلاخوں سے اٹھایا جائے تو اس میں آزاد الیکٹران پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ کے الٹ جانب قوت انہیں سلاخ کے پرلے سرے پر انبار کرنا شروع کر دے گی۔الیکٹرانوں کا انبار سلاخ میں $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ جانب برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{ساکن}}$ پیدا کرے گا۔الیکٹران کا انبار بڑھتا رہے گا حتیٰ کہ $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$ اور $\boldsymbol{E}_{\text{ساکن}}$ برابر ہو جائیں۔ایسا ہوتے ہی سلاخ میں کل برقی میدان کی شدت صفر ہو جائے گی اور اس میں چارج کا حرکت رک جائے گا۔

یوں حرکی برقی دباو

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.12}$$

سے حاصل ہو گی۔مساوات کے دائیں ہاتھ بند راہ کے ساکن حصوں پر تکمل کی قیمت صفر ہو گی لہٰذا محرک برقی دباو صرف حرکت کرتے حصوں کی وجہ سے پیدا ہو گی۔یوں حرکت کرتے سلاخ پر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے تکمل سے

$$\oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_d^0 vB \, \mathrm{d}x = -Bvd$$

حاصل ہوتا ہے ۔چونکہ $\boldsymbol{B}$ از خود وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو رہا لہٰذا یہی کل محرک برقی دباو ہو گا۔

یوں وقت کے ساتھ تبدیل نہ ہوتے مقناطیسی میدان میں حرکت کرتے بند راہ میں محرک برقی دباو حاصل کرتے وقت حرکت کرتے حصوں پر حرکی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$ کے استعمال سے محرک برقی دباو یوں

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \oint \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.13}$$

حاصل کی جا سکتی ہے۔البتہ وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان میں محرک برقی دباو کے حصول میں مساوات 9.5 کا حصہ شامل کرنا ضروری ہے یوں محرک برقی دباو

$$\text{محرک برقی دباو} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{9.14}$$

سے حاصل ہو گی۔یہ مساوات دراصل مساوات 9.1

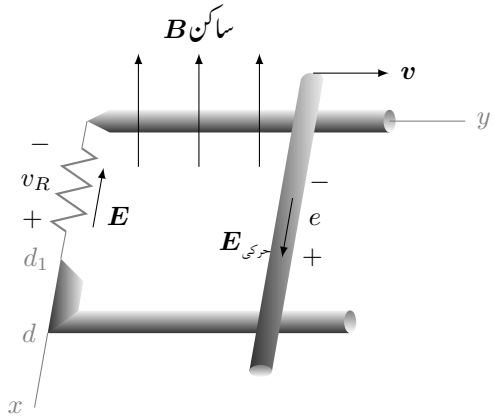
$$\text{محرک برقی دباو} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

ہی ہے۔

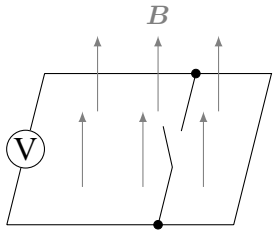
آئیں شکل 9.1 میں پیا برقی دباو کی جگہ مزاحمت نسب کرتے ہوئے اس کی مدد سے مساوات 9.3 جو محرک برقی دباو کی تعریف بیان کرتا ہے پر دوبارہ غور کریں۔نئی شکل کو شکل 9.2 میں دکھایا گیا ہے۔مساوات 9.11 محرک سلاخ پر پیدا $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}}$ دیتا ہے جو سلاخ میں مثبت چارج کو سلاخ کے اُرلے سرے کی طرف دھکیلے گا۔اس کے برعکس مزاحمت پر برقی دباو v_R پایا جاتا ہے جس کی وجہ سے اس میں برقی میدان کی شدت $\boldsymbol{E}$ پائی جائے گی جو مزاحمت میں مثبت چارج کو مزاحمت کے پرلے سرے کی جانب دھکیلے گی۔

آپ شکل کو دیکھ کر تسلی کر لیں کہ مزاحمت پر میدان کی شدت $\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سے برقی دباو v_R یوں

$$v_R = -\int_0^{d_1} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^{d_1} E \, \mathrm{d}x = Ed_1 \tag{9.15}$$



شکل 9.2: محرک برقی دباو اور برقی دباو کا موازنہ۔



شکل 9.3: محرک برقی دباو یا تا وقت کے ساتھ بدلتی مقناطیسی میدان اور یا حرکت کرتے بند راہ سے ہی پیدا ہو سکتی ہے۔

حاصل ہوتی ہے جبکہ متحرک سلاخ پر حرکی شدت $\boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} = E_{\text{حرکی}}\boldsymbol{a}_{\text{x}}$ سے حرکی دباو e یوں

$$e = \oint \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^d \boldsymbol{E}_{\text{حرکی}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_0^d E_{\text{حرکی}}\,\mathrm{d}x = E_{\text{حرکی}} d \tag{9.16}$$

حاصل ہوتی ہے۔شکل میں دو افقی موصل سلاخوں کے مابین برقی دباو کو سلاخوں کے بائیں سروں پر v_R جبکہ ان کے دائیں سروں پر e کہا گیا ہے لہٰذا v_R اور e دونوں مثبت اور برابر قیمت رکھتے ہیں۔یہاں ضرورت اس بات کی ہے کہ آپ دیکھ سکیں کہ v_R کی مثبت قیمت حاصل کرنے کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں منفی کی علامت استعمال کی جائے جبکہ e کے مثبت قیمت کے حصول کے لئے ضروری ہے کہ مساوات میں جمع کی علامت استعمال کی جائے۔حرکی دباو کے بند تکمل میں راہ کے بقایا اطراف پر تکمل کی قیمت صفر ہونے کے ناطے صرف متحرک سلاخ پر تکمل لیا گیا ہے۔

اگرچہ مساوات 9.1 انتہائی سادہ شکل رکھتی ہے لیکن اس کا استعمال کبھی کبھار مشکل ہو جاتا ہے۔ایسا اس وقت ہوتا ہے جب دور کے کسی حصے کو تبدیل کرتے ہوئے دوسرا حصہ نسب کیا جائے۔یہ بات شکل 9.3 پر غور کرنے سے بہتر سمجھ آئے گی۔اس شکل میں نا تو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا مقناطیسی میدان ہے اور نا ہی بند راہ کا کوئی حصہ متحرک ہے۔البتہ شکل میں دکھائے سوئچ کو چالو یا غیر چالو کرتے ہوئے بند راہ میں مقناطیسی بہاو کم اور زیادہ کیا جا سکتا ہے۔یہاں بغیر سوچے مساوات 9.1 استعمال کرتے ہوئے غلط نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ یاد رہے کہ برقی دباو یا تو وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان اور یا پھر بند راہ کے کسی حصے کے حرکت سے ہی پیدا ہو گا۔

مشق 9.1: شکل 9.3 میں $\boldsymbol{B} = 0.5\boldsymbol{a}_z$ ٹسلا، رفتار $100y\boldsymbol{a}_y$ میٹر فی سیکنڈ جبکہ $d = 0.5$ میٹر ہے۔اگر $t = 0$ پر $y = 0.2$ میٹر ہو تب $t = 15$ ملی سیکنڈ پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- سلاخ کی رفتار،
- محرک برقی دباو V_{21}،
- پیا برقی دباو کی اندرونی مزاحمت دس میگا اوہم کی صورت میں دور میں برقی رو۔

جوابات: $4.017\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$، $100\,\mathrm{V}$، $10\,\mu\mathrm{A}$

9.2 انتقالی برقی رو

فیراڈے کے تجرباتی نتیجے سے میکس ویل کی پہلی مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.17}$$

حاصل ہوئی جو کہتا ہے کہ بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے برقی دباو۔گردش کے عمل کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں ایسے پیدا کردہ برقی دباو کا بند لکیری تکمل صفر کے برابر نہیں ہوتا۔ آئیں اب وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر غور کریں۔

ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{9.18}$$

ساکن مقناطیسی میدان پر لاگو ہوتی ہے۔اس مساوات کی پھیلاو

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = 0 = \nabla \cdot \boldsymbol{J}$$

لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ گردش کی پھیلاو ہر صورت صفر کے برابر ہوتی ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کا بایاں ہاتھ ہر صورت صفر دے گا اور یوں اگر یہ مساوات درست ہو تب اس کا دایاں ہاتھ بھی ہر صورت صفر ہونا چاہیے۔مگر ہم استمراری مساوات سے جانتے ہیں کہ

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{9.19}$$

ہوتا ہے۔اس سے ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 9.18 صرف اس صورت درست ہو گا جب $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ہو۔یہ ایک غیر ضروری اور غیر حقیقی شرط ہے لہٰذا وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر استعمال کے قابل بنانے کی خاطر مساوات 9.18 کو تبدیل کرنا لازم ہے۔تصور کریں کہ مساوات 9.18 میں نا معلوم جزو $\boldsymbol{G}$ کی شمولیت سے یہ مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے برقی میدان پر بھی لاگو کرنے کے قابل ہو جاتا ہے۔ایسی صورت میں مساوات 9.18 یوں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{G}$$

لکھی جائے گی۔آئیں دوبارہ اس کی پھیلاو حاصل کریں جس سے

$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \nabla \cdot \boldsymbol{G}$$

یا

$$\nabla \cdot \boldsymbol{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں استمراری مساوات کا سہارا لیا گیا۔اس مساوات میں ρ کی جگہ $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$ پر کرنے سے

$$\nabla \cdot \boldsymbol{G} = \frac{\partial (\nabla \cdot \boldsymbol{D})}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

یعنی

$$\boldsymbol{G} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں ایمپیئر کے دوری قانون کی درست شکل

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{9.20}$$

ہے۔ مندرجہ بالا مساوات برقی و مقناطیسیات کے اب تک تمام دریافت کردہ اصولوں پر پورا اترتی آئی ہے۔جب تک یہ غلط ثابت نہ ہو جائے، ہم اسے درست ہی تصور کریں گے۔

مساوات 9.20 میکس ویل کے مساوات میں سے ایک مساوات ہے۔اس مساوات میں $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ کی بُعد ایمپیئر فی مربع میٹر حاصل ہوتی ہے جو کثافت برقی رو کا بُعد ہے۔میکس ویل نے اس مساوات میں دائیں ہاتھ نئے جزو کو کثافت انتقالی رو[8] کا نام دیا اور $\boldsymbol{J}_d$ سے ظاہر کیا یعنی

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_d$$
$$\boldsymbol{J}_d = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

ہم تین اقسام کے کثافت رو دیکھ چکے جن میں کثافت انتقالی رو کے علاوہ غیر چارج شدہ خطے میں عموماً الیکٹران کے حرکت سے پیدا کثافت ایصالی رو

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{9.21}$$

اور چارج کے حجم کے حرکت سے پیدا کثافت اتصالی رو

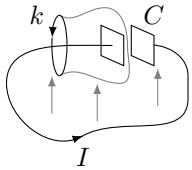
$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{9.22}$$

شامل ہیں۔مساوات 9.20 میں $\boldsymbol{J}$ سے مراد ایصالی اور اتصالی رو کے کثافتوں کا مجموعہ ہے جبکہ مقید چارج $\boldsymbol{H}$ کا حصہ ہیں۔غیر موصل خطے میں جہاں کثافت چارج پائی ہی نہیں جاتی $\boldsymbol{J} = 0$ ہوتا ہے لہٰذا غیر موصل میں

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (\boldsymbol{J} = 0) \tag{9.23}$$

---

[8] displacement current density



شکل 9.4: موصل تار میں ایصالی رو کپیسٹر کے چادروں کے درمیان انتقالی رو کے برابر ہے۔

ہو گا۔مساوات 9.23 اور مساوات 9.17 میں مشابہت دیکھیں۔

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

مقناطیسی شدت $\boldsymbol{H}$ اور برقی شدت $\boldsymbol{E}$ کافی مشابہت رکھتے ہیں۔ اسی طرح کثافت رو $\boldsymbol{D}$ اور کثافت بہاو $\boldsymbol{B}$ بھی کافی مشابہت رکھتے ہیں۔اس مشابہت کو یہیں تک رکھیں چونکہ جیسے ہی میدان میں چارج پر قوت کی بات کی جائے، دونوں اقسام کے میدان بالکل مختلف طریقوں سے عمل کرتے ہیں۔

کسی بھی سطح سے کل انتقالی رو سطحی تکمل

$$I_d = \int_S \boldsymbol{J}_d \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.24}$$

سے حاصل ہو گی۔مساوات 9.20 کے سطحی تکمل

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

پر مسئلہ سٹوکس کے اطلاق سے

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.25}$$

وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل حاصل ہوتی ہے۔

انتقالی رو کو شکل 9.4 کی مدد سے سمجھتے ہیں جہاں موصل تار سے کپیسٹر C کے دو سرے جوڑتے ہوئے بند دور بنایا گیا ہے جس میں وقت کے ساتھ بدلتی سائن نما مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ محرک برقی دباو

$$e = V_0 \cos \omega t$$

پیدا کرتی ہے۔یہ سادہ برقی دور ہے جس میں مزاحمت اور امالہ کو نظر انداز کرتے ہوئے برقی رو

$$\begin{aligned} i &= -\omega C V_0 \sin \omega t \\ &= -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں ϵ، S اور d کپیسٹر سے متعلق ہیں۔آئیں انتقالی رو کو نظرانداز کرتے ہوئے تار کے گرد بند راہ k پر ایمپیئر کا دوری قانون لاگو کریں۔

$$\oint_k \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I_k$$

اب بند راہ k اور اس راہ پر $\boldsymbol{H}$ حقیقی مقدار ہیں اور تکمل سے حاصل رو I_k اس راہ سے گھیرے کسی بھی سطح سے گزرتی رو کو ظاہر کرتی ہے۔اگر ہم k کو سیدھی سطح کا سرحد تصور کریں تب موصل تار اس سطح کو چھیدتا ہوا گزرے گا۔یوں اس سطح سے I رو ہی گزرے گی جو ایصالی رو ہے۔اس کے برعکس اگر ہم k کو تھیلے کا منہ تصور کریں جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے تب ایصالی رو ایسی سطح سے نہیں گزرتی چونکہ تھیلا کپیسٹر کے دو چادروں کے درمیان سے گزرتا ہے اور تار اسے چھوتی تک نہیں۔ایسی صورت میں تھیلے سے گزرتی ایصالی رو صفر کے برابر ہے۔ایسی صورت میں ہمیں انتقالی رو کا سہارا لینا ہو گا۔کپیسٹر کے چادروں کے درمیان

$$D = \epsilon E = \epsilon \left(\frac{V_0}{d} \cos \omega t\right)$$

ہے لہٰذا

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = -\omega \epsilon \frac{V_0}{d} \sin \omega t$$

اور یوں

$$I_d = S J_d = -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t$$

ہو گی۔

یہ وہی جواب ہے جو ایصالی رو سے حاصل ہوا تھا۔اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایمپیئر کے دوری قانون کو استعمال کرتے ہوئے سطح سے گزرتی ایصالی رو اور انتقالی رو دونوں کا خیال رکھنا ہو گا۔کہیں پر سطح سے صرف ایصالی رو گزرے گی تو کہیں اس سے صرف انتقالی رو گزرے گی اور کبھی کبھار دونوں کا مجموعہ۔

انتقالی رو وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان سے پیدا ہوتے ہیں لہٰذا یہ ایسے تمام غیر موصل یا نیم موصل خطوں میں پائی جاتی ہے جہاں وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ایصالی رو پائی جائے۔اگرچہ موصل خطے میں بھی انتقالی رو پائی جاتی ہے لیکن، جیسے آپ مندرجہ ذیل مشق میں دیکھیں گے، اس کی قیمت ایصالی رو کی نسبت سے اتنی کم ہوتی ہے کہ یہ قابل نظر انداز ہوتی ہے۔یہی وجہ ہے کہ انتقالی رو تجرباتی طور دریافت نہیں کی گئی بلکہ اس تک منطق کے ذریعہ سے پہنچا گیا۔

مشق 9.2: ٹھوس تانبے کی تار میں سائن نما، پچاس ہرٹز کی ایصالی رو $I_0 \cos \omega t$ گزر رہی ہے۔اس میں انتقالی رو حاصل کریں۔پچاس ہرٹز رو کی صورت میں ایصالی اور انتقالی رو کے موثر قیمت کی شرح حاصل کریں۔

حل: $I_d = -\frac{\omega \epsilon_0}{\sigma} I_0 \sin \omega t$ جبکہ ان کے موثر قیمت کی شرح $\frac{I}{I_d} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = 2.08 \times 10^{16}$ ہے۔

9.3 میکس ویل مساوات کی نقطہ شکل

ہم وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدانوں میں میکس ویل کے دو مساوات کے نقطہ اشکال

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.26}$$

اور

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{9.27}$$

حاصل کر چکے ہیں۔میکس ویل کے بقایا دو مساوات وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان میں بھی جوں کے توں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h \tag{9.28}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{9.29}$$

رہتے ہیں۔

مساوات 9.28 کہتا ہے کہ کثافت برقی رو کا منبع کثافت چارج ہے۔وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان میں برقی میدان پیدا ہوتا ہے جو بند راہ پر چلتا ہے۔ایسے برقی میدان کا نا تو کسی چارج سے اخراج ہوتا ہے اور نا ہی یہ کسی چارج پر ختم ہوتا ہے۔اس کے برعکس ہر مثبت چارج سے اس کے برابر برقی بہاو کا اخراج ہوتا ہے اور ہر منفی چارج پر اس کے برابر برقی بہاو کا اختتام ہوتا ہے۔

مساوات 9.29 کہتا ہے کہ کسی بھی نقطے سے کل مقناطیسی بہاو کا اخراج صفر ہے یعنی مقناطیسی بہاو نا تو کسی نقطے سے خارج ہوتا ہے اور نا ہی یہ کسی نقطے پر اختتام پذیر ہوتا ہے۔ سادہ زبان میں اس کا مطلب ہے کہ مقناطیس کا یک قطب ممکن نہیں جس سے مقناطیسی بہاو کا اخراج ہو یا اس پر مقناطیسی بہاو اختتام ہو۔

مندرجہ بالا چار مساوات پر برقی و مقناطیسیات کی بنیاد کھڑی ہے جنہیں استعمال کرنے کی خاطر چار معاون مساوات

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{9.30}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{9.31}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{9.32}$$

$$\boldsymbol{J} = \rho_h \boldsymbol{v} \tag{9.33}$$

بھی درکار ہوتے ہیں۔

ایسے ذو برق اور مقناطیسی اشیاء جن میں متغیرات سادہ تعلق نہ رکھتے ہوں، ان میں مساوات 9.30 اور مساوات 9.31 کی جگہ

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{9.34}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}\right) \tag{9.35}$$

استعمال ہوتے ہیں۔خطی اشیاء میں

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \boldsymbol{E} \tag{9.36}$$

اور

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{9.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آخر میں لورنز قوت کی مساوات

$$\boldsymbol{F} = \rho_h \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{9.38}$$

بھی شامل کرتے ہیں۔

غیر سمتی مقناطیسی دباو V اور سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ انتہائی اہم ہیں البتہ ان کی شمولیت لازم نہیں۔

9.4 میکس ویل مساوات کی تکمل شکل

مساوات 9.26 کے سطحی تکمل پر مسئلہ سٹوکس کا اطلاق کرتے ہوئے فیراڈے کا قانون

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{S} \tag{9.39}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 9.27 اسی طریقہ کار سے ایمپیئر کا دوری قانون

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = I + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.40}$$

حاصل ہوتا ہے۔

برقی اور مقناطیسی میدان کے لئے گاؤس کے قوانین مساوات 9.28 اور مساوات 9.29 کے تمام حجم پر حجمی تکمل اور مسئلہ پھیلاو کی مدد سے

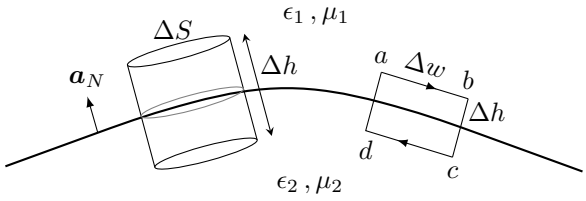
$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h \rho_h \, \mathrm{d}h \tag{9.41}$$

اور

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{9.42}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مندرجہ بالا چار مساوات سے $\boldsymbol{E}$، $\boldsymbol{H}$، $\boldsymbol{D}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے سرحدی شرائط حاصل ہوتے ہیں جن سے میکس ویل کے جزوی تفرقی مساوات کے مستقل حاصل کئے جاتے ہیں۔وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کے سرحدی شرائط عموماً ساکن میدان کے سرحدی شرائط ہی ہوتے ہیں لہٰذا ساکن میدان کے طریقہ کار سے وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط بھی حاصل کئے جا سکتے ہیں۔



شکل 9.5: وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے سرحدی شرائط۔

آئیں شکل 9.5 کی مدد سے سرحد کے متوازی برقی اور مقناطیسی شرائط حاصل کریں۔ شکل میں مستطیل راہ پر مساوات 9.39 کے اطلاق سے

$$(E_{m1} - E_{m2})\,\Delta w = -\frac{\partial B_n}{\partial t}\Delta w \Delta h$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\frac{\partial B_n}{\partial t}$ سے مراد راہ کے گھیرے سطح سے گزرتی مجموعی میدان کی تبدیلی ہے جس کا کچھ حصہ خطہ 1 اور کچھ حصہ خطہ 2 سے گزرتا ہے۔اس مساوات کے دائیں ہاتھ کی قیمت $\Delta h \to 0$ کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کی جا سکتی ہے۔ایسی صورت میں دائیں ہاتھ کو صفر ہی تصور کرتے ہوئے

$$E_{m1} = E_{m2} \tag{9.43}$$

یعنی

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0 \tag{9.44}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سرحد پر انتہائی کم موٹائی کے خطے میں کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ تصور کرتے ہوئے کسی بھی چھوٹی لمبائی $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ پر برقی رو کو $I = \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}$ لکھی جا سکتی ہے۔یوں شکل 9.5 میں مستطیل راہ پر مساوات 9.41 کے اطلاق سے

$$(H_{m1} - H_{m2})\,\Delta w = K_\perp \Delta w + \frac{\partial D}{\partial t}\Delta w \Delta h$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $K_\perp$ سے مراد K کا وہ حصہ ہے جو H_{m1} اور H_{m2} کے عمودی ہے۔دائیں ہاتھ دوسرے جزو کی قیمت $\Delta h \to 0$ کرتے ہوئے صفر کے قریب تر کی جا سکتی ہے لہٰذا اس جزو کو نظرانداز کرتے ہوئے

$$H_{m1} - H_{m2} = K_\perp \tag{9.45}$$

حاصل ہوتا ہے جسے یوں

$$\boldsymbol{a}_N \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{K}_\perp \tag{9.46}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

کسی بھی حقیقی دو مختلف اشیاء کے سرحد، مثلاً سمندر کے پانی اور ہوا کے سرحد یا ہوا اور دیوار کے سرحد، پر کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ صفر ہوتی ہے۔لہٰذا حقیقی مسائل میں $K = 0$ کی بنا پر

$$H_{m1} = H_{m2} \tag{9.47}$$

ہو گا۔صفحہ 248 پر شکل 8.8 میں سطحی کثافت برقی رو $\boldsymbol{K}$ دکھائی گئی ہے جبکہ یہاں شکل 9.5 میں اسے صفر تصور کرتے ہوئے نہیں دکھایا گیا۔

مساوات 9.41 اور مساوات 9.42 سے سرحدی عمودی شرائط

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S \tag{9.48}$$

اور

$$\boldsymbol{a}_N \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0 \tag{9.49}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

موصل کو ایسا کامل موصل تصور کرتے ہوئے جس کی موصلیت لامحدود مگر $\boldsymbol{J}$ محدود ہو سے موصل کے اندر اوہم کے قانون سے

$$\boldsymbol{E} = 0 \tag{9.50}$$

اور یوں فیراڈے کے قانون کی نقطہ شکل سے، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے میدان کی صورت میں

$$\boldsymbol{H} = 0 \tag{9.51}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اس طرح ایمپیئر کے دوری قانون کی نقطہ شکل سے محدود $\boldsymbol{J}$ کی قیمت

$$\boldsymbol{J} = 0 \tag{9.52}$$

حاصل ہوتی ہے لہٰذا برقی رو صرف موصل کی سطح پر بطور سطحی کثافت رو $\boldsymbol{K}$ ممکن ہے۔یوں اگر خطہ 2 کامل موصل ہو تب مساوات 9.43 تا مساوات 9.49 سے

$$E_{m1} = 0 \tag{9.53}$$
$$H_{m1} = 0 \tag{9.54}$$
$$D_{n1} = \rho_S \tag{9.55}$$
$$B_{n1} = 0 \tag{9.56}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یاد رہے کہ سطحی کثافت چارج کی موجودگی ذو برق، کامل موصل اور غیر کامل موصل تمام پر ممکن ہے جبکہ سطحی کثافت رو $\boldsymbol{K}$ صرف کامل موصل کی صورت میں ممکن ہے۔

مندرجہ بالا سرحدی شرائط میکس ویل کے مساوات کے حل کے لئے لازم ہیں۔حقیقت میں پیش آنے والے تمام مسائل میں مختلف اشیاء کے سرحدیں پائی جاتی ہیں اور ایسے ہر سرحد کے دونوں اطراف پر مختلف متغیرات کے تعلق سرحدی شرائط سے ہی حاصل کرنا ممکن ہے۔کامل موصل کی صورت میں موصل کے اندر، وقت کے ساتھ بدلتے، تمام متغیرات صفر ہوتے ہیں البتہ ایسی صورت میں مساوات 9.53 تا مساوات 9.56 میں دئے شرائط کا اطلاق نہایت مشکل ہوتا ہے۔

متحرک لہروں کے چند بنیادی خاصیت بغیر سرحد کے خطے میں لہر کی حرکت پر غور سے واضح ہوتے ہیں۔اگلا باب انہیں متحرک لہروں پر ہے۔میکس ویل مساوات کا یہ سب سے آسان استعمال ہے چونکہ ان میں کسی قسم کے سرحدی شرائط لاگو نہیں ہوتے۔

9.5 تاخیری دباو

وقت کے ساتھ بدلتے دباو، جنہیں تاخیری دباو[9] کہا جاتا ہے، اشعاعی اخراج[10] کے مسائل حل کرنے میں نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔آپ کو یاد ہو گا کہ غیر سمتی مقناطیسی دباو V کو خطے میں تقسیم ساکن چارج کی صورت

$$V = \int_h \frac{\rho_h \, \mathrm{d}h}{4\pi\epsilon R} \qquad \text{(برقی سکون)} \tag{9.57}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح سمتی مقناطیسی دباو $\boldsymbol{A}$ کو وقت کے ساتھ نہ بدلتے یعنی یک سمتی برقی رو کے تقسیم کی صورت

$$\boldsymbol{A} = \int_h \frac{\mu \boldsymbol{J} \, \mathrm{d}h}{4\pi R} \qquad \text{(یک سمتی رو)} \tag{9.58}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔انہیں مساوات کے نقطہ اشکال بالترتیب

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} \qquad \text{(برقی سکون)} \tag{9.59}$$

اور

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} \qquad \text{(یک سمتی رو)} \tag{9.60}$$

ہیں۔

غیر سمتی اور سمتی مقناطیسی دباو کے حصول کے بعد میدان کے بنیادی متغیرات ڈھلوان

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \qquad \text{(برقی سکون)} \tag{9.61}$$

اور گردش

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad \text{(یک سمتی رو)} \tag{9.62}$$

کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔

آئیں اب ساکن چارج اور یک سمتی رو سے متعلق، وقت کے ساتھ تبدیل ہوتے ایسے دباو حاصل کریں جو مندرجہ بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔

میکس ویل کے مساوات کے تحت $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ ہو گا۔صفحہ 212 پر مساوات 7.63 کے تحت گردش کی پھیلاو لازماً صفر ہوتی ہے لہٰذا مساوات 9.62 میکس ویل کی مساوات $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ پر پورا اترتی ہے۔ یوں ہم مساوات 9.62 کو بدلتے میدان کے لئے بھی درست تصور کرتے ہیں۔

صفحہ 223 پر مشق 7.7 میں آپ نے ثابت کیا کہ ڈھلوان کی گردش لازماً صفر ہوتی ہے یوں مساوات 9.61 کی گردش لینے سے دایاں ہاتھ صفر حاصل ہوتا ہے جبکہ بایاں ہاتھ $\nabla \times \boldsymbol{E}$ حاصل ہوتا ہے جو مساوات 9.26 کے تحت صفر نہیں ہے۔یوں صاف ظاہر ہے کہ مساوات 9.61 وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے درست نہیں ہے۔آئیں اس توقع سے مساوات 9.61 کے دائیں جانب متغیرہ $\boldsymbol{N}$ جمع کریں

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V + \boldsymbol{N}$$

---

[9] retarded potentials
[10] radiation

کہ وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے ایسی مساوات درست ثابت ہو گی۔ فی الحال $\boldsymbol{N}$ ایک نا معلوم متغیرہ ہے۔گردش لینے سے

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= -\nabla \times (\nabla V) + \nabla \times \boldsymbol{N} \\ &= 0 + \nabla \times \boldsymbol{N}\end{aligned}$$

یعنی

$$\nabla \times \boldsymbol{N} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 9.62 کے استعمال سے یوں

$$\nabla \times \boldsymbol{N} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{A})$$

یا

$$\nabla \times \boldsymbol{N} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جس کا سادہ ترین حل

$$\boldsymbol{N} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

ہے لہٰذا اب ہم

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{9.63}$$

لکھ سکتے ہیں۔

ہمیں اب بھی دیکھنا ہو گا کہ آیا مساوات 9.62 اور مساوات 9.63 میکس ویل کے بقایا دو مساوات یعنی مساوات 9.27

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

اور مساوات 9.28

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_h$$

پر پورا اترتے ہیں کہ نہیں۔یہاں پہلی مساوات میں $\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{J} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\ &= \boldsymbol{J} + \epsilon \left(-\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right)\end{aligned}$$

یا

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu \boldsymbol{J} - \mu\epsilon \left(\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right) \tag{9.64}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 9.63 کا سہارا لیا گیا۔اسی طرح مساوات 9.28 سے

$$\epsilon\left(-\nabla\cdot\nabla V-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)=\rho_h$$

یا

$$\nabla^2 V+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)=-\frac{\rho_h}{\epsilon} \tag{9.65}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 میں کوئی تضاد نہیں پایا جاتا۔ساکن یا یک سمتی حالات میں $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ کی وجہ سے مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 سے بالترتیب مساوات 9.60 اور مساوات 9.59 حاصل ہوتے ہیں۔یوں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ وقت کے ساتھ بدلتے دباو کی تعریف یوں کی جا سکتی ہے کہ ان سے $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{E}$ بذریعہ مساوات 9.62 اور مساوات 9.63 حاصل کئے جا سکتے ہوں۔البتہ $\boldsymbol{A}$ اور V کو مساوات 9.62 اور مساوات 9.63 از خود مکمل طور پر بیان نہیں کرتے۔یہ دو مساوات لازمی لیکن نا مکمل شرائط ہیں جن پر $\boldsymbol{A}$ اور V کا پورا اترنا ضروری ہے۔آئیں ایک مثال سے اس حقیقت کو سمجھیں۔

تصور کریں کہ ہمارے پاس سادہ سمتی مقناطیسی دباو ہے جس کے A_y اور A_z اجزاء صفر کے برابر ہیں۔ یوں مساوات 9.62 کی مدد سے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$B_x\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+B_y\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}+B_z\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}=0\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

اس سے ظاہر ہے کہ x محدد کے ساتھ A_x کے تبدیلی کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن نہیں ہے۔یہ مساوات $\frac{\partial A_x}{\partial x}$ کا ذکر تک نہیں کرتا۔ہاں اگر ہمیں $\boldsymbol{A}$ کے پھیلاو کے بارے میں بھی معلومات فراہم ہوتی تب x محدد کے ساتھ A_x کے تبدیلی کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہوتا چونکہ دئے گئے سمتی دباو سے

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آخر میں یہ بھی بتانا ضروری ہے کہ $\boldsymbol{A}$ کے بارے میں ہماری تمام معلومات جزوی تفرقی مساوات کی صورت میں ہیں جن سے $\boldsymbol{A}$ کے حصول کے وقت تکمل کا مستقل شامل کرنا ضروری ہے۔کسی بھی حقیقی مسئلہ جس میں مکمل خلاء کے لئے حل درکار ہو میں ایسا مستقل صفر کے برابر ہو گا چونکہ کوئی بھی میدان لا محدود فاصلے پر صفر ہی ہو گا۔

اس مثال سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر ہمیں لامحدود خلاء میں کسی بھی نقطے پر سمتی میدان کی قیمت معلوم ہو تب اس سمتی میدان کو تمام خلاء میں میدان کے گردش اور پھیلاو سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ہمیں مکمل آزادی ہے کہ جیسے چاہیں $\boldsymbol{A}$ کی پھیلاو بیان کریں۔ ہم مساوات 9.64 اور مساوات 9.65 کو مدنظر رکھتے ہوئے یوں $\boldsymbol{A}$ کے پھیلاو کے لئے سادہ ترین تفاعل

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t} \tag{9.66}$$

لکھتے ہیں جس سے مساوات 9.64

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}+\mu\epsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} \tag{9.67}$$

صورت اختیار کر لے گی جبکہ مساوات 9.65

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_h}{\epsilon} + \mu\epsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{9.68}$$

صورت اختیار کر لے گی۔

مندرجہ بالا دو مساوات متحرک امواج سے متعلق ہیں جن پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔ان مساوات کی مشابہت بھی حیرت انگیز ہے۔باب کے اس حصے میں، وقت کے ساتھ بدلتے میدان کے لئے، حاصل کئے گئے نتائج یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{9.69}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t} \tag{9.70}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{9.71}$$

اگلے باب میں متحرک امواج پر غور کیا جائے گا۔آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتے برقی و مقناطیسی میدان متحرک امواج پیدا کرتے ہیں جن کی رفتار v

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{9.72}$$

کے برابر ہوتی ہے۔خالی خلاء میں یہ رفتار تقریباً $3 \times 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ کے برابر ہوتی ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔اس سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ نقطہ N_1 پر کثافت چارج سے دور کسی نقطے N_2 پر دباو کی قیمت اسی لمحے کثافت چارج کے قیمت پر منحصر نہیں ہوتی بلکہ کچھ دیر قبل کے کثافت چارج پر منحصر ہوتی ہے۔کثافت چارج میں تبدیلی کی خبر N_1 سے N_2 تک رفتار v سے پہنچتی ہے لہٰذا ان نقطوں کے درمیان فاصلہ R ہونے کی صورت میں یہ خبر $\frac{R}{v}$ سیکنڈ تاخیر سے پہنچے گی۔اس طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.57 کی نئی شکل

$$V = \int_h \frac{[\rho_h]}{4\pi\epsilon R}\,\mathrm{d}h \tag{9.73}$$

ہو گی جہاں $[\rho_h]$ سے مراد یہ ہے کہ مساوات میں وقت t کی جگہ تاخیری وقت t' استعمال کیا جائے یعنی

$$t' = t - \frac{R}{v}$$

یوں اگر خلاء میں کثافت چارج

$$\rho_h = e^{-r}\cos\omega t$$

ہو تب

$$[\rho_h] = e^{-r}\cos\left[\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)\right]$$

ہو گا جہاں R تفرقی چارج سے اس نقطے تک فاصلہ ہے جہاں اس تفرقی چارج سے پیدا دباو کا حصول درکار ہو۔

اسی طرح وقت کے ساتھ بدلتی صورت میں مساوات 9.58 کی نئی شکل یعنی تاخیری سمتی مقناطیسی دباو کی مساوات

$$\boldsymbol{A} = \int_h \frac{\mu[\boldsymbol{J}]}{4\pi R}\,\mathrm{d}h \tag{9.74}$$

ہو گی۔

تاخیری وقت کے استعمال کی بنا پر ایسے دباو کو تاخیری دباو[11] کہا جاتا ہے۔

تاخیری برقی اور تاخیری مقناطیسی دباو کے استعمال سے برقی و مقناطیسی مسئلے نسبتاً زیادہ آسانی سے حل ہوتے ہیں۔یوں اگر ہمیں ρ اور $\boldsymbol{J}$ معلوم ہوں تب ہم مساوات 9.73 اور مساوات 9.74 سے V اور $\boldsymbol{A}$ حاصل کر سکتے ہیں جن سے مقناطیسی میدان بذریعہ مساوات 9.69 اور برقی میدان بذریعہ مساوات 9.71 حاصل کئے جا سکتے ہیں۔اگر ہمیں ρ اور $\boldsymbol{J}$ کی قیمتیں معلوم نہ ہوں اور نا ہی ان کے قیمتوں کا اندازہ لگانا ممکن ہو تب تاخیری دباو، میکس ویل مساوات کے حل سے زیادہ، مددگار ثابت نہیں ہوتے۔

[11] retarded potential

باب 10

مستوی امواج

لامحدود خطہ جس کا کوئی سرحد نہ ہو میں میکس ویل مساوات کا حل سادہ ترین مسئلہ ہے البتہ اس سے حاصل نتائج انتہائی دلچسپ اور معلوماتی ثابت ہوتے ہیں۔آپ دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ بدلتا برقی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے مقناطیسی میدان کو جنم دیتا ہے جبکہ وقت کے ساتھ بدلتا مقناطیسی میدان، وقت کے ساتھ بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔چونکہ برقی میدان چارج کی بدولت جبکہ مقناطیسی میدان برقی رو کی بدولت ہے لہٰذا چارج یا رو میں کسی بھی تبدیل سے باہمی تعاون سے بدلتا برقی اور بدلتا مقناطیسی میدان یعنی برقی و مقناطیسی[1] موج پیدا ہوتی ہے۔ایسے امواج کی تعدد[2] کا دارومدار چارج یا رو (یا دونوں) میں تبدیلی کی شرح پر منحصر ہے۔یوں ω زاویائی تعدد[3] پر سائن نما شکل میں ارتعاش کرتا چارج ω زاویائی تعدد کی سائن نما موج ہی پیدا کرتی ہے۔برقی و مقناطیسی امواج روشنی کی رفتار سے حرکت کرتی ہیں۔انسانی آنکھ مخصوص تعدد کی برقی و مقناطیسی امواج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔برقی و مقناطیسی امواج کے تعدد کی وہ پٹی جو ہمیں نظر آتی ہیں روشنی[4] کہلاتی ہے۔سائن نما موج کو اس کی تعدد f یا دوری عرصے[5] λ سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ ہم $380\,\text{nm}$ تا $750\,\text{nm}$ کے دوری عرصے کے برقی و مقناطیسی امواج دیکھ سکتے ہیں۔

دو اشیاء کے سرحد پر برقی و مقناطیسی موج پر غور کرنے سے شعاعی انعکاس[6] ، شعاعی انحراف[7] اور انکسار امواج[8] کے حقائق دریافت ہوتے ہیں۔مختصراً شعاع کے تمام خصوصیات میکس ویل کے مساوات سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

10.1 خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی مستوی امواج

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی جسم کے اندر کسی بھی طرح پہنچایا گیا اضافی چارج باہمی قوت دفع سے آخر کار حجم کے سطح پر پہنچ جاتا ہے۔اگر ان لمحات کو نظر انداز کیا جائے جتنی دیر آزاد چارج سطح تک پہنچتا ہے تو جسم کے حجم میں $\rho_h = 0$ تصور

[1] electromagnetic
[2] frequency
[3] angular frequency
[4] light
[5] time period
[6] reflection
[7] refraction
[8] diffraction

کیا جا سکتا ہے۔اس کتاب میں $\rho_h = 0$ ہی تصور کرتے ہوئے برقی و مقناطیسی امواج پر غور کیا جائے گا لہٰذا ایسا ہی تصور کرتے ہوئے صفحہ 272 پر دئے گئے میکس ویل مساوات یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{10.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{10.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{10.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{10.4}$$

جہاں $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ کے علاوہ قانون اوہم کی نقطہ شکل $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$ کے استعمال سے تمام مساوات صرف دو متغیرات $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ کی صورت میں لکھے گئے ہیں۔

اس سے پہلے کہ ہم ان مساوات کو حل کریں، آئیں انہیں صرف دیکھ کر فیصلہ کریں کہ خالی خلاء میں ان سے کیا نتائج اخذ کئے جا سکتے ہیں۔خالی خلاء میں کثافت برقی رو $\boldsymbol{J}$ صفر کے برابر ہوتی ہے۔اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔مساوات 10.1 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد برقی میدان کی گردش پیدا ہوتی ہے۔گردش سے مراد ایسا میدان ہے جو بند دائرے پر اس نقطے کے گرد گھومتی ہو۔اگر مقناطیسی میدان کی قیمت زیادہ ہو تب برقی گردش کی قیمت بھی زیادہ ہو گی اور اگر مقناطیسی میدان کی قیمت کم ہو تب گردش بھی کم ہو گی۔یوں دو حقائق سامنے آتے ہیں۔پہلی حقیقت یہ ہے کہ کسی بھی نقطے پر بدلتا مقناطیسی میدان اس نقطے کے گرد، یعنی نقطے سے ذرہ دور، برقی میدان پیدا کرتی ہے اور دوسری حقیقت یہ کہ پہلی میدان کی قیمت کم یا زیادہ کرنے سے پیدا میدان کی قیمت بھی تبدیل ہوتی ہے یعنی بدلتا مقناطیسی میدان، بدلتے برقی میدان کو جنم دیتا ہے۔اسی طرح مساوات 10.2 کہتی ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیلی سے اس نقطے کے گرد مقناطیسی گردش پیدا ہوتی ہے۔یہاں بھی صاف واضح ہے کہ کسی بھی نقطے پر برقی میدان میں وقت کے ساتھ تبدیل، اس نقطے سے ذرہ دور، بدلتی مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ایسا معلوم ہوتا ہے کہ بدلتا مقناطیسی میدان کچھ فاصلے پر آگے کر کے بدلتا برقی میدان پیدا کرتا ہے جو مزید آگے مقناطیسی میدان پیدا کرتا ہے اور یہ سلسلہ چلے جاتا ہے۔جیسا کہ ہم جلد دیکھیں گے، ایسے جڑواں، ہاتھ میں ہاتھ ڈالے، حرکت کرتے بدلتے برقی اور بدلتے مقناطیسی میدان کی رفتار $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ یعنی تقریباً $3 \times 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ہے جو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار ہے۔

10.2 برقی و مقناطیسی مستوی امواج

میکس ویل مساوات کے حل دوری سمتیات[9] کی مدد سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں لہٰذا پہلے دوری سمتیہ پر غور کرتے ہیں جو آپ نے برقی ادوار حل کرتے وقت ضرور استعمال کئے ہوں گے۔

سائن نما لہر کی عمومی شکل

$$E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) \tag{10.5}$$

ہے جہاں

$$\omega = 2\pi f \tag{10.6}$$

زاویائی تعدد[10] اور ϕ زاویائی فاصلہ[11] ہیں جبکہ E_{xyz} ازخود x، y، z اور ω کا تابع تفاعل[12] ہو سکتا ہے۔تعدد f کی اکائی ہرٹز[13]

phasor[9]
angular frequency[10]
phase angle[11]
dependent function[12]
Hertz[13]

ہے۔یہاں دھیان رہے کہ E_{xyz} وقت t کا تابع نہیں ہے۔

کسی بھی متغیرہ x کے لئے یولر مماثل[14] کو $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ لکھا جاتا ہے جہاں $j = \sqrt{-1}$ خیالی عدد[15] ہے ۔آزاد متغیرہ $\omega t + \psi$ کے لئے یولر مماثل

$$e^{j(\omega t+\psi)} = \cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)$$

لکھا جا سکتا ہے جو حقیقی[16] اور خیالی[17] اجزاء پر مشتمل مخلوط تفاعل[18] ہے۔یوں $\cos(\omega t + \psi)$ کو $e^{j(\omega t+\psi)}$ کا حقیقی جزو تصور کیا جا سکتا ہے۔اس طرح

$$E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) = \left[E_{xyz} e^{j(\omega t+\psi)}\right]_{\text{حقیقی}} = \left[E_{xyz} e^{j\omega t} e^{j\psi}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں زیر نوشت میں حقیقی لکھنے سے مراد یہ ہے کہ پورے تفاعل کا حقیقی جزو لیا جائے۔مندرجہ بالا مساوات کو بطور دوری سمتیہ یوں

$$E_{ys} = E_{xyz} e^{j\psi}$$

لکھا جاتا ہے جہاں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھا جاتا ہے۔ اس مساوات کے بائیں ہاتھ E_{ys} لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں لکھی گئی ہے لہٰذا یاد رہے کہ اصل تفاعل میں $e^{j\omega t}$ پایا جاتا ہے اور پورے تفاعل کا صرف حقیقی جزو ہی لیا جائے۔تفاعل E_{ys} کے زیر نوشت میں s دراصل اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ اس تفاعل کا آزاد متغیرہ، مخلوط تعدد[19] ہے۔ہمارے استعمال میں s خیالی عدد یعنی $s = j\omega$ ہو گا۔

اب $E_y = 10.5 \cos(10^6 t - 0.35z)$ کو دوری سمتیہ کی شکل میں لکھنے کی خاطر اسے یولر مماثل کے حقیقی جزو

$$E_y = \left[10.5 e^{j(10^6 t - 0.35z)}\right]_{\text{حقیقی}} = \left[10.5 e^{j10^6 t} e^{-j0.35z}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھنے کے بعد $e^{j10^6 t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے یوں

$$E_{ys} = 10.5 e^{-j0.35z}$$

لکھا جائے گا جہاں بائیں ہاتھ E_{ys} میں زیر نوشت میں s کا اضافہ کیا گیا۔یاد رہے کہ E_y حقیقی تفاعل ہے جبکہ E_{ys} عموماً مخلوط تفاعل ہوتا ہے۔

دوری سمتیہ سے اصل تفاعل حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے حاصل جواب کا حقیقی جزو لیا جاتا ہے۔

مساوات 10.5 کا وقت کے ساتھ جزوی تفرق

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}[E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)] = -\omega E_{xyz} \sin(\omega t + \psi)\\ &= \left[j\omega E_{xyz} e^{j(\omega t+\psi)}\right]_{\text{حقیقی}}\end{aligned}$$

---

[14] Euler's identity
[15] imaginary number
[16] real
[17] imaginary
[18] complex function
[19] complex frequency

کے برابر ہے۔یہ عمومی نتیجہ ہے جس کے تحت وقت کے ساتھ تفاعل کا تفرق، دوری سمتیہ کو $j\omega$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔یوں مثال کے طور پر اگر

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

ہو تب اسی کی دوری سمتیہ شکل

$$j\omega E_{xs} = -\frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

ہو گی۔اسی طرح سائن نما میدان کے لئے میکس ویل کے مساوات بھی با آسانی دوری سمتیہ کی شکل میں لکھے جا سکتے ہیں لہٰذا

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

کو دوری سمتیہ کی صورت میں

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu\boldsymbol{H}_s \tag{10.7}$$

لکھا جائے گا۔میکس ویل کے بقایا مساوات کو بھی دوری سمتیہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\,\boldsymbol{E}_s \tag{10.8}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_s = 0 \tag{10.9}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H}_s = 0 \tag{10.10}$$

آئیں ان مساوات سے امواج کی مساوات حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات 10.7 کی گردش

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_s = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}_s) - \nabla^2\boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu\nabla \times \boldsymbol{H}_s$$

میں مساوات 10.8 اور مساوات 10.9 پر کرنے سے

$$\nabla^2\boldsymbol{E}_s = j\omega\mu\,(\sigma + j\omega\epsilon)\,\boldsymbol{E}_s = \gamma^2\boldsymbol{E}_s \tag{10.11}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\gamma = \mp\sqrt{j\omega\mu\,(\sigma + j\omega\epsilon)} \tag{10.12}$$

حرکی مستقل[20] کہلاتا ہے۔چونکہ $j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$ مخلوط عدد ہے لہٰذا اس کا جزر γ بھی مخلوط عدد ہو گا جسے

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{10.13}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں α اور β مثبت اور حقیقی اعداد ہیں۔مساوات 10.12 کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \tag{10.14}$$

جہاں کسی وجہ سے صرف مثبت قیمت لی گئی ہے۔یہ وجہ آپ کو جلد بتلا دی جائے گی۔

[20] propagation constant

مساوات 10.11 سمتی ہلم ہولٹز مساوات[21] [22] کہلاتی ہے۔کارتیسی محدد میں بھی سمتی ہلم ہولٹز مساوات کی بڑی شکل کافی خوفناک نظر آتی ہے چونکہ اس سے چار چار اجزاء پر مشتمل تین عدد مساوات نکلتے ہیں۔کارتیسی محدد میں اس کی x مساوات

$$\nabla^2 E_{xs} = \gamma^2 E_{xs} \tag{10.15}$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs} \tag{10.16}$$

ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ جن امواج پر ہم غور کرنا چاہتے ہیں ان میں نا تو x اور نا ہی y کے ساتھ میدان تبدیل ہوتے ہیں۔ایسی صورت میں $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} = 0$ اور $\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} = 0$ ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs} \tag{10.17}$$

صورت اختیار کر لے گی۔اس طرح کے دو درجی تفرقی مساوات آپ نے پڑھے ہوں گا لہٰذا میں توقع رکھتا ہوں کہ آپ اس کے حل

$$E_{xs} = Ae^{-\gamma z} \tag{10.18}$$

اور

$$E_{xs} = Be^{\gamma z} \tag{10.19}$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $\gamma = \alpha + j\beta$ پر کرتے ہوئے ان جوابات میں سے مساوات 10.18 پر غور کریں۔مساوات 10.18 درحقیقت دوری سمتیہ ہے لہٰذا اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر

$$\begin{aligned} E_x &= \left[Ae^{j\omega t}e^{-(\alpha+j\beta)z}\right]_{\text{حقیقی}} \\ &= \left[Ae^{-\alpha z}e^{j(\omega t-\beta z)}\right]_{\text{حقیقی}} \end{aligned}$$

حقیقی جزو

$$E_x = Ae^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)$$

لیتے ہیں۔مساوات کے مستقل A کی جگہ $t = 0$ اور $z = 0$ پر میدان کی قیمت E_0 پر کرتے ہوئے اصل حل

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) \tag{10.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ مستوی موج[23] کی وہ مساوات ہے جس کی تلاش میں ہم نکلے تھے۔اگر ہم مساوات 10.19 کو لے کر آگے بڑھتے تو مساوات 10.20 کی جگہ موج کی مساوات

$$E_x = E_0 e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z) \tag{10.21}$$

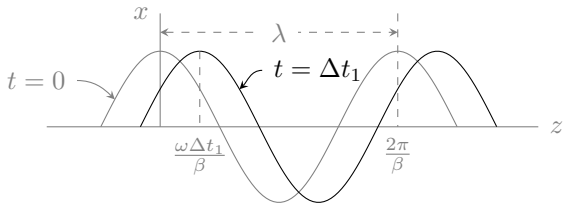
حاصل ہوتی۔

---

[21] vector Helmholtz equation

[22] ہرمن لڈوگ فرڈیننڈ ون ہلم ہولٹز جرمنی کے عالم طبیعیات تھے۔

[23] plane wave



شکل 10.1: وقت $t = 0$ اور $t = t_1$ پر خلاء میں موج کا مقام۔

مساوات 10.18 میں $A = E_0$ پر کرتے ہوئے اس کی سمتیہ شکل

$$\boldsymbol{E}_s = E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_x \tag{10.22}$$

لکھی جا سکتی ہے جو صرف $\boldsymbol{a}_x$ جزو پر مشتمل ہے۔آئیں مساوات 10.20 میں دئے متحرک موج[24] پر اب غور کریں۔

مساوات 10.20 کہتی ہے کہ برقی میدان ہر نقطے پر x محدد کے متوازی ہے۔اگر z کی قیمت تبدیل نہ کی جائے تب x اور y تبدیل کرنے سے میدان تبدیل نہیں ہوتا۔

مساوات 10.20 میں z بڑھانے سے α کی وجہ سے موج کی چوٹی گھٹتی ہے لہٰذا α تضعیفی مستقل[25] کہلاتا ہے۔تضعیفی مستقل کو نیپر[26] فی میٹر $\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ میں ناپا[27] جاتا ہے۔یوں مساوات 10.20 میں e کی طاقت یعنی αz بے بعد[28] مقدار نیپر Np میں ہو گی۔ موج کے مساوات میں $-\beta z$ زاویائی فاصلہ ہے جسے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے لہٰذا β زاویائی مستقل[29] کہلاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈیئن فی میٹر $\frac{\text{rad}}{\text{m}}$ ہے۔

موج کی مساوات میں $\alpha = 0$ تصور کرتے ہوئے اسے وقت $t = 0$ پر شکل 10.1 میں ہلکی سیاہی سے دکھایا گیا ہے۔یہاں دھیان رہے کہ شکل میں z محدد کو افقی دکھایا گیا ہے۔جیسے آپ دیکھ سکتے ہیں $t = 0$ پر موج کی دو آپس میں قریبی چوٹیاں $z = 0$ اور $z = \frac{2\pi}{\beta}$ پر پائی جاتی ہیں۔دو آپس میں قریبی چوٹیوں کے درمیان فاصلے کو طول موج[30] پکارا اور λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں اس موج کی طول موج

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{10.23}$$

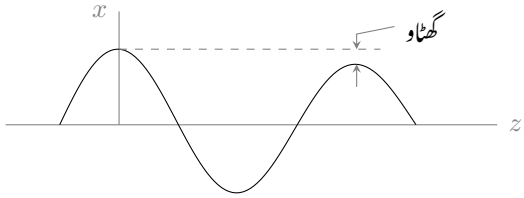
ہے جس سے

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{10.24}$$

لکھا جا سکتا ہے جو انتہائی اہم نتیجہ ہے۔

موج کی مساوات ہی کو وقت $t = \Delta t_1$ پر شکل 10.1 میں دوبارہ گاڑھی سیاہی میں بھی دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس دورانیے میں موج نے دائیں جانب یعنی z بڑھنے کی طرف حرکت کی ہے۔یوں صاف ظاہر ہے کہ یہ موج وقت کے ساتھ

[24] travelling wave
[25] attenuation constant
[26] neper
[27] تضعیفی مستقل کی اکائی جان نیپر کے نام سے منسوب ہے۔
[28] dimensionless
[29] phase constant
[30] wavelength



شکل 10.2: موج چلتے ہوئے آہستہ آہستہ کمزور ہوتی رہتی ہے۔

مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے۔ دورانیہ Δt_1 میں موج کی چوٹی نے $\frac{\omega \Delta t_1}{\beta}$ فاصلہ طے کیا ہے لہٰذا موج کے رفتار کو

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega \Delta t_1}{\beta} \frac{1}{\Delta t_1} = \frac{\omega}{\beta} \tag{10.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 10.24 کو مساوات 10.25 میں پر کرنے سے

$$v = f\lambda \tag{10.26}$$

حاصل ہوتا ہے جو λ طول موج اور f تعدد رکھنے والے موج کی رفتار v دیتی ہے۔

مساوات 10.20 میں مساوات 10.25 استعمال کرتے ہوئے

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] \tag{10.27}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 10.25 اور مساوات 10.24 کی مدد سے

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) \tag{10.28}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

موج کی رفتار کو مساوات 10.20 سے دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔اس مساوات کے تحت کسی بھی لمحہ t پر موج کی چوٹی اس مقام پر ہو گی جہاں

$$\omega t - \beta z = 0$$

ہو۔چونکہ رفتار $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کو کہتے ہیں لہٰذا اس مساوات کے تفرق

$$\omega\, \mathrm{d}t - \beta\, \mathrm{d}z = 0$$

سے رفتار

$$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{\beta} \tag{10.29}$$

حاصل ہوتی ہے۔

شکل 10.2 میں α کو صفر تصور نہیں کیا گیا ہے۔جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں، ایسی صورت میں موج کی چوٹی، z کے ساتھ بتدریج گھٹتی ہے لہٰذا $\alpha = 0.001\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ کی صورت میں $1\,\text{km}$ کے فاصلے پر موج کی چوٹی، ابتدائی چوٹی کے $\frac{e^{-1}}{e^{-0}} = 0.368$ گنا رہ گئی ہو گی جہاں ابتدائی چوٹی $z = 0$ پر لی گئی ہے۔

برقی موج $\boldsymbol{E}_s$ سے مساوات 10.7

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_s$$

کی مدد سے مقناطیسی موج با آسانی حاصل ہوتی ہے۔مساوات 10.22 استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا مساوات سے

$$-\gamma E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_\text{y} = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_s$$

یا

$$\boldsymbol{H}_s = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_\text{y}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 10.12 سے مثبت γ کی قیمت پر کرنے سے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_s &= \sqrt{\frac{\sigma + j\omega\epsilon}{j\omega\mu}} E_0 e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_\text{y} \\ &= \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z} \boldsymbol{a}_\text{y} \end{aligned} \tag{10.30}$$

ملتا ہے جہاں دوسرے قدم پر

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \tag{10.31}$$

لکھی[31] گئی[32] ہے۔اس مساوات کو

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}} \tag{10.32}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 10.22 کی غیر سمتی صورت یعنی $E_{xs} = E_0 e^{-\gamma z}$ کو مساوات 10.30 کے غیر سمتی صورت یعنی $H_{ys} = \frac{E_0}{\eta} e^{-\gamma z}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{E_{xs}}{H_{ys}} = \eta \tag{10.33}$$

ملتا ہے۔

یہاں ذرہ رک کر ایک برقی دور پر غور کرتے ہیں۔منبع برقی دباو $V_0 \cos(\omega t - \psi)$ جسے دوری سمتیہ $V_0 e^{-j\psi}$ لکھا جا سکتا ہے کے ساتھ سلسلہ وار مزاحمت R، امالہ L اور کپیسٹر C جڑے ہیں جن کی رکاوٹ Z

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX = |Z|\, e^{j\theta_Z} = |Z| \angle \theta_Z$$

---

[31] یونانی حروف تہجی η ایٹا پڑھا جاتا ہے۔

[32] eta η

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں X مثبت ہو گا جبکہ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں یہ منفی ہو گا۔مزید $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں دور خالص مزاحمتی رکاوٹ پیش کرے گا اور $\theta_Z = 0$ ہو گا۔اس دور میں برقی رو دوری سمتیہ کی مدد سے

$$I_s = \frac{V_s}{Z_s} = \frac{V_0 e^{-j\psi}}{|Z|\, e^{j\theta_Z}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{-j(\psi+\theta_Z)}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$i = \frac{V_0}{|Z|} \cos\left(\omega t - \psi - \theta_Z\right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔برقی دباو اور برقی رو ایک ہی تعدد رکھتے ہیں البتہ ان میں زاویائی فاصلہ θ_Z پایا جاتا ہے۔مثبت X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباو کے پیچھے رہتی ہے جبکہ منفی X کی صورت میں برقی رو اس زاویائی فاصلے کے برابر برقی دباو کے آگے رہتی ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ برقی دباو اور برقی رو کی شرح

$$\frac{V_s}{I_s} = |Z|\, e^{j\theta_Z} = Z$$

کے برابر ہے جسے رکاوٹ کہتے ہیں۔

آئیں اب دوبارہ امواج کی بات کریں۔برقی موج کو اس مثال کے برقی دباو کی جگہ اور مقناطیسی موج کو مثال کے رو کی جگہ رکھتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ دونوں مسائل ہوبہو یکساں ہیں۔اسی وجہ سے برقی موج E_{xs} اور مقناطیسی موج H_{ys} کی شرح η، قدرتی رکاوٹ[33] کہلاتی ہے۔بالکل برقی رکاوٹ کی طرح قدرتی رکاوٹ حقیقی یا خیالی اور یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔قدرتی رکاوٹ کی اکائی اوہم Ω ہے۔

مساوات 10.30 سے مقناطیسی موج

$$H_y = \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|\eta|} \cos\left(\omega t - \beta z - \theta_\eta\right) \tag{10.34}$$

لکھی جائے گی جہاں قدرتی رکاوٹ کو

$$\eta = |\eta|\, e^{j\theta_\eta} \tag{10.35}$$

لکھا گیا۔

مساوات 10.20 کے تحت برقی میدان x محدد کے متوازی ہے جبکہ مساوات 10.34 کے تحت مقناطیسی میدان y محدد کے متوازی ہے لہٰذا یہ میدان آپس میں ہر وقت عمودی رہتے ہیں۔اس کے علاوہ دونوں امواج z سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔یوں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت بھی آپس میں عمودی ہیں۔ایسے امواج جن میں میدان کی سمت اور حرکت کی سمت عمودی ہوں عرضی امواج[34] کہلاتے ہیں۔پانی کی سطح پر لہریں بھی عرضی امواج ہوتے ہیں۔اسی طرح رسی کو کھینچ کر رکھتے ہوئے اسے جھٹکے سے ہلانے سے رسی میں عرضی موج پیدا ہوتی ہے۔عرضی برقی و مقناطیسی موج[35] میں برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں حرکت کے سمت کے عمودی ہوتے ہیں۔ باب 14 میں ایسے امواج پر غور کیا جائے گا جن میں صرف ایک میدان سمت حرکت کے عمودی ہو گا۔انہیں عرضی برقی موج[36] یا عرضی مقناطیسی موج[37] کا نام دیا گیا ہے۔

آئیں اب چند مخصوص صورتوں میں ان مساوات کو استعمال کرنا سیکھیں۔

---

[33] intrinsic impedance
[34] transverse waves
[35] transverse electromagnetic, TEM
[36] transverse electric wave, TE wave
[37] transverse magnetic wave, TM wave

10.2.1 خالی خلاء میں امواج

خالی خلاء میں $\sigma = 0$، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 1$ ہیں لہٰذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_R\mu_0\left(\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0\right)} = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\begin{aligned}\alpha &= 0\\ \beta &= \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، جسے روایتی طور پر c سے ظاہر کیا جاتا ہے، مساوات 10.25 سے

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \tag{10.36}$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت

$$\begin{aligned}c = \frac{1}{\sqrt{4\times\pi\times10^{-7}\times8.854\times10^{-12}}} &= 2.99\times10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\\ &\approx 3\times10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

ہے۔

مساوات 10.31 سے خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu_R\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon_R\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

حاصل ہوتی ہے۔قدرتی رکاوٹ کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہم $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\times10^9$ سے $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi10^9}$ لکھتے ہوئے

$$\eta = 120\pi \approx 377\,\Omega \tag{10.37}$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں خالی خلاء میں کسی بھی لمحے، کسی بھی نقطے پر برقی میدان کی قیمت اس نقطے پر مقناطیسی میدان کے 377 گنا ہو گی۔

حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے خالی خلاء میں متحرک موج کے میدان

$$\begin{aligned}E_x &= E_0\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\\ H_y &= \frac{E_0}{120\pi}\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\end{aligned}$$

لکھے جائیں گے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں میدان ہم زاویہ ہیں۔یوں کسی بھی نقطے پر بڑھتے برقی میدان کی صورت میں اس نقطے پر مقناطیسی میدان بھی بڑھتا ہے۔ان مساوات کے تحت امواج بالکل سیدھے حرکت کرتے ہیں اور نا وقت اور نا ہی فاصلے کے ساتھ ان کی طاقت میں کسی قسم کی کمی رونما ہوتی ہے۔یہی وجہ ہے کہ کائنات کے دور ترین کہکشاوں سے ہم تک برقی و مقناطیسی امواج پہنچتی ہیں اور ہمیں رات کے چمکتے اور خوبصورت تارے نظر آتے ہیں۔

مشق 10.1: بے تار[38] ذرائع ابلاغ میں 36 000 km کی اونچائی پر پرواز کرتے مصنوعی سیارے اہم کردار ادا کرتے ہیں۔یہ

[38] wireless

سیارے زمین کے اوپر ایک ہی نقطے پر آویزاں نظر آتے ہیں۔ان سیاروں سے زمین کے قریبی نقطے تک برقی اشارہ کتنی دیر میں پہنچے گا۔

جواب: 0.12 s

10.2.2 خالص یا کامل ذو برق میں امواج

خالص یا کامل ذو برقی سے مراد ایسا ذو برق ہے جس میں متحرک برقی و مقناطیسی امواج کی توانائی ضائع نہیں ہوتی۔خالص ذو برق میں $\sigma = 0$ جبکہ اس کا جزوی مقناطیسی مستقل μ_R اور جزوی برقی مستقل ϵ_R ہے لہٰذا مساوات 10.12 سے مثبت حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = 0 \tag{10.38}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{10.39}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں خالی خلاء میں برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار مساوات 10.25 سے

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_R\mu_0\epsilon_R\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} \tag{10.40}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ کو خالی خلاء میں روشنی کی رفتار c لکھا گیا ہے۔چونکہ ذو برق میں $\mu_R\epsilon_R > 1$ ہے لہٰذا ذو برق میں روشنی کی رفتار خالی خلاء میں روشنی کے رفتار سے کم ہو گی۔خالی خلاء میں روشنی کی رفتار اس کی زیادہ سے زیادہ رفتار ہے۔

موج کی رفتار اور تعدد سے طول موج

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R\epsilon_R}} \tag{10.41}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کے طول موج کو λ_0 لکھا گیا ہے۔اس مساوات سے ذو برق میں روشنی کی رفتار کم ہونے کی وجہ سامنے آتی ہے۔چونکہ $\mu_R\epsilon_R > 1$ ہے لہٰذا ذو برق میں طول موج کم ہو جاتا ہے جس سے روشنی کی رفتار کم ہو جاتی ہے۔

مساوات 10.31 سے ذو برقی کی قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ کو η_0 لکھا گیا ہے۔

یوں ذو برق میں امواج کے مساوات

$$E_x = E_0\cos(\omega t - \beta z) \tag{10.42}$$

$$H_y = \frac{E_0}{\eta}\cos(\omega t - \beta z) \tag{10.43}$$

ہیں۔

مثال 10.1: پانی کے لئے $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 78.4$ اور $\sigma = 0$ لیتے ہوئے 300 MHz تعدد کے برقی و مقناطیسی امواج کی رفتار، طول موج اور قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔ برقی میدان $50\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$ ہونے کی صورت میں برقی اور مقناطیسی امواج کے مساوات لکھیں۔ہم $\sigma = 0$ لیتے ہوئے درحقیقت پانی میں توانائی کے ضیاع کو نظرانداز کر رہے ہیں۔

حل:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{78.4}} = 0.3388 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.3388 \times 10^8}{300 \times 10^6} = 11.29\,\mathrm{cm}$$

ہیں جبکہ خالی خلاء میں $\lambda = 1\,\mathrm{m}$ ہے۔بقایا مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 55.7\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

اور

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \frac{377}{\sqrt{78.4}} = 42.58\,\Omega$$

ہیں۔امواج کے مساوات

$$E_x = 0.05 \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$
$$H_y = \frac{0.05}{42.58} \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z) = 0.00117 \cos(6\pi 10^8 t - 55.7z)$$

ہیں۔

مشق 10.2: کتاب کے آخر میں مختلف اشیاء کے مستقل دئے گئے ہیں۔انہیں استعمال کرتے ہوئے ابرق میں، طاقت کے ضیاع کو نظرانداز کرتے ہوئے، 5.6 GHz اور $10\,\frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{m}}$ حیطے کی مقناطیسی میدان پر مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- موج کی رفتار،
- طول موج،
- زاویائی مستقل،
- قدرتی رکاوٹ،
- برقی میدان کا حیطہ۔

جوابات: $1.29 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$، 23 cm، $272.6\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$، $162.1\,\Omega$ اور $1.62\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

10.2.3 ناقص یا غیر کامل ذو برقی میں امواج

کامل ذو برق میں امواج پر غور کے بعد فطری طور ناقص ذو برق پر بات کرنا ضروری ہے لہٰذا صاف پانی کو مثال بناتے ہوئے 20 GHz تعدد پر ایسا ہی کرتے ہیں۔صفحہ 296 پر شکل 10.4 میں صاف پانی کے مستقل دئے گئے ہیں۔

اس تعدد پر صاف پانی کے مستقل $\epsilon_R = 41$ اور $\sigma = 36.7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔چونکہ پانی غیر مقناطیسی ہے لہٰذا اس کا $\mu_R = 1$ ہو گا۔ یوں

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0.8$$

اور

$$\begin{aligned}\gamma &= j2 \times \pi \times 20 \times 10^9 \times \frac{\sqrt{1 \times 41}}{3 \times 10^8}\sqrt{1 - j0.8}\\ &= 3035\underline{/70.67^\circ}\\ &= 1005 + j2864 \quad \mathrm{m}^{-1}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں پانی کا تضعیفی مستقل

$$\alpha = 1005\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$$

ہے جس کا مطلب ہے کہ پانی میں ہر $\frac{1}{1005}$ میٹر یعنی 1 mm فاصلہ طے کرنے پر برقی اور مقناطیسی امواج 0.368 گنا گھٹ جائیں گے۔آپ دیکھ سکتے ہیں ریڈار[39] پانی میں کیوں کام نہیں کرتا۔اسی طرح بارش کی صورت میں بھی ریڈار کی کارکردگی بری طرح متاثر ہوتی ہے۔پانی میں دیکھنے کی خاطر موج آواز استعمال کی جاتی ہیں۔

زاویائی مستقل

$$\beta = 2864\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

ہے جو $\sigma = 0$ کی صورت میں $2682\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا پانی کے موصلیت سے زاویائی مستقل زیادہ متاثر نہیں ہوا۔ اس تعدد پر خالی خلاء میں طول موج 1.5 cm ہے جبکہ پانی میں $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ سے طول موج 2.19 mm ہے۔

قدرتی رکاوٹ

$$\eta = \frac{377}{\sqrt{41}}\frac{1}{\sqrt{1 - j0.8}} = 52\underline{/19.33^\circ} = 49.1 + j17.2 \quad \Omega$$

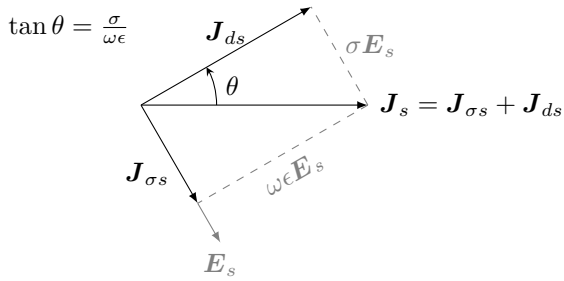
ہے لہٰذا E_x ہر نقطے پر H_y سے 19.33° آگے ہے۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\boldsymbol{E}_s = \boldsymbol{J}_{\sigma s} + \boldsymbol{J}_{ds}$$

---

[39] radar



شکل 10.3: طاقت کے ضیاع کا تکون۔

میں ایصالی اور انتقالی کثافت برقی رو کے سمتی مجموعے کو شکل 10.3 میں بطور مجموعی کثافت رو $\boldsymbol{J}_s$ دکھایا گیا ہے۔ایصالی رو اور انتقالی رو آپس میں $90°$ درجے کا زاویہ بناتے ہیں۔انتقالی رو $90°$ آگے رہتا ہے۔یہ بالکل متوازی جڑے مزاحمت اور کپیسٹر کے رو کی طرح صورت حال ہے۔کپیسٹر کی رو، مزاحمت کی رو سے $90°$ آگے رہتی ہے۔مزید یہ کہ مزاحمت کی رو سے برقی طاقت کا ضیاع پیدا ہوتا ہے جبکہ کپیسٹر کی رو سے ایسا نہیں ہوتا۔ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے شکل 10.3 میں زاویہ θ (جس کا کروی محدد کے زاویہ θ کے ساتھ کسی قسم کا کوئی تعلق نہیں ہے) کو دیکھیں جس کے لئے

$$\tan\theta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \tag{10.44}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں اس تکون کو طاقت کے ضیاع کا تکون پکارا جاتا ہے اور $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کی شرح کو ضیاعی ٹینجنٹ[40] یا مماس ضیاع کہا جاتا ہے۔

مساوات 10.14 اور مساوات 10.32 کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ استعمال کرتے ہوئے لکھا گیا۔کسی ذو برق کے کامل یا غیر کامل ہونے کا فیصلہ اس کے مماس ضیاع کی قیمت کو دیکھ کر کیا جاتا ہے۔اگر اس شرح کی قیمت اکائی کے قریب ہو تب ذو برق غیر کامل قرار دیا جاتا ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ کی صورت میں ذو برق کو کامل تصور کیا جاتا ہے۔

کم مماس ضیاع کی صورت میں حرکی مستقل اور قدرتی رکاوٹ کے کارآمد مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں۔حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

کو مسئلہ ثنائی[41]

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

جہاں $|x| < 1$ ہے، کی مدد سے تسلسل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔اگر ہم $x = -\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ اور $n = \frac{1}{2}$ لیں تو حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + \cdots\right]$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\alpha \doteq j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(-j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{10.45}$$

---

[40] loss tangent
[41] binomial theorem

اور

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1+\frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right] \tag{10.46}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اگر $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ ہو تب

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{10.47}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔بالکل اسی طرح قدرتی رکاوٹ کو

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left[1-\frac{3}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2+j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right] \tag{10.48}$$

یا

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(1+j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) \tag{10.49}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ ان مساوات سے حاصل جواب اصل مساوات کے جوابات کے کتنے قریب ہیں۔ایسا صاف پانی کی مثال کو دوبارہ حل کر کے دیکھتے ہیں۔ صاف پانی کے مستقل 20 GHz تعدد پر $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 41$ اور $\sigma = 36.7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں لہٰذا مساوات 10.45 سے

$$\alpha = 1080\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ حاصل کردہ قیمت $1005\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$ کے کافی قریب ہے۔مساوات 10.46 سے

$$\beta = 2897\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

حاصل ہوتا ہے جو گزشتہ جواب $2864\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ کے بہت قریب ہے۔مساوات 10.47 سے حاصل جواب

$$\beta = 2682\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

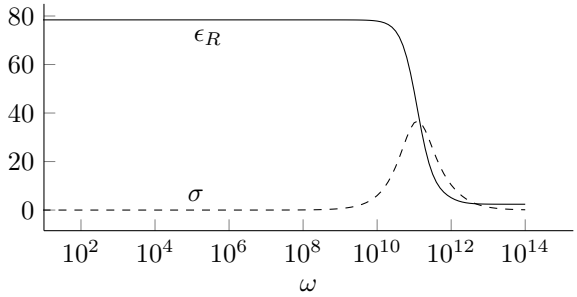
درست جواب سے نسبتاً زیادہ مختلف ہے۔قدرتی رکاوٹ مساوات 10.48 سے

$$\eta = 44.75 + j23.55$$

حاصل ہوتا ہے جو $49.1 + j17.2$ کے بہت قریب ہے البتہ مساوات 10.49 سے حاصل جواب

$$\eta = 58.88 + j23.55$$

قدر مختلف ہے۔صاف پانی کی اس مثال میں مماس ضیاع 0.8 ہے جو اکائی سے بہت کم نہیں ہے، اسی لئے جوابات پہلے سے قدر مختلف حاصل ہوئے۔چونکہ موصلیت اور برقی مستقل کی بالکل درست قیمتیں عموماً ہمیں معلوم نہیں ہوتیں لہٰذا سادہ مساوات سے حاصل جوابات کے اس فرق کو زیادہ اہمیت نہیں دینی چاہئے۔ بہتر یہی ہوتا ہے کہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 0.1$ ہی کی صورت میں سادہ مساوات استعمال کئے جائیں۔



شکل 10.4: صاف پانی کا جزوی برقی مستقل بالمقابل زاویائی تعدد اور موصلیت بالمقابل زاویائی تعدد۔

عموماً ذو برق کی موصلیت تعدد بڑھانے سے غیر خطی طور پر بڑھتی ہے جبکہ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کے قیمت میں تبدیلی نسبتاً کم ہوتی ہے۔یہی وجہ مماس ضیاع کی اہمیت کا راز ہے۔یاد رہے کہ مختلف تعدد پر موصلیت، برقی مستقل اور مماس ضیاع نہایت تیزی سے تبدیل ہو سکتے ہیں۔ایسا عموماً نظر آنے والی روشنی سے قدر کم یا قدر زیادہ تعدد پر ہوتا ہے۔

شکل 10.4 میں صاف پانی کا جزوی برقی مستقل ϵ_R بالمقابل زاویائی تعدد ω ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے جبکہ موصلیت بالمقابل تعدد نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔افقی محدد تعدد کا لاگ ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تقریباً $10\,\frac{\text{Grad}}{\text{s}}$ تعدد تک $\epsilon_R = 78.4$ رہتا ہے جبکہ اس سے بلند تعدد پر اس کی قیمت گھٹ کر 2.4 ہو جاتی ہے۔موصلیت کی چوٹی تقریباً $36.7\,\frac{\text{S}}{\text{m}}$ پائی جاتی ہے۔دیگر ذو برق کے خط مختلف اشکال کے ہوں گے۔

مشق 10.3: ایک مادے کے مستقل $1\,\text{MHz}$ تعدد پر $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 2.8$ اور $\sigma = 10\,\frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$ ہیں۔ اس مادے کے مماس ضیاع، تضعیفی مستقل اور زاویائی مستقل حاصل کریں۔

جوابات:0.0642، $1.13 \times 10^{-3}\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ اور $3.51 \times 10^{-4}\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$

مشق 10.4: ایک غیر مقناطیسی مادے کا مماس ضیاع 0.07 جبکہ $\mu_R = 4.7$ ہیں۔ان قیمتوں کو $1\,\text{MHz}$ تا $80\,\text{MHz}$ تعدد کے درمیان اٹل تصور کیا جا سکتا ہے۔اس کا تضعیفی مستقل اور مادے میں طول موج $20\,\text{MHz}$ اور $60\,\text{MHz}$ تعدد پر حاصل کریں۔

جوابات: $0.031\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$، $6.9\,\text{m}$، $0.095\,\frac{\text{Np}}{\text{m}}$، $2.3\,\text{m}$

10.3 پوئنٹنگ سمتیہ

امواج کی طاقت جاننے کے لئے مسئلہ پوئنٹنگ[42] درکار ہو گا لہٰذا پہلے اسے[43] حاصل کرتے ہیں۔

[42] Poynting theorem

[43] جان ہینری پوئنٹنگ نے 1884 میں پہلی بار اس مسئلے کو پیش کیا۔

میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

کا $\boldsymbol{E}$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب

$$\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

لیتے ہوئے سمتی مماثل (جسے آپ با آسانی کارتیسی محدد میں ثابت کر سکتے ہیں)

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E}$$

کے ذریعہ

$$\boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E} - \nabla (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس میں $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ پر کرنے سے

$$-\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

یا

$$-\nabla (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \epsilon \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب

$$\epsilon \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right)$$

اور

$$\mu \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھے جا سکتے ہیں لہٰذا

$$-\nabla (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کے حجمی تکمل

$$-\int_h \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \, \mathrm{d}h = \int_h \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \, \mathrm{d}h + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) \mathrm{d}h$$

پر مسئلہ پھیلاو کے اطلاق سے

$$-\oint_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_h \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \, \mathrm{d}h + \frac{\partial}{\partial t} \int_h \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) \mathrm{d}h \tag{10.50}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو کی بات کرتے ہیں۔اگر پورے حجم میں کہیں پر بھی منبع طاقت موجود نہ ہو تب یہ تکمل حجم میں کل لمحاتی مزاحمتی طاقت کا ضیاع دیتا ہے۔اگر حجم میں منبع طاقت پایا جاتا ہو تب ان منبع کے حجم پر تکمل کی قیمت مثبت ہو گی اگر منبع کو طاقت فراہم کی جا رہی ہو اور یہ تکمل منفی ہو گا اگر منبع طاقت فراہم کر رہا ہو۔

مساوات کے دائیں ہاتھ دوسرا تکمل حجم میں توانائی کا کل ذخیرہ دیتا ہے جس کا وقت کے ساتھ تفرق حجم میں ذخیرہ توانائی میں لمحاتی تبدیل یعنی طاقت دیتا ہے۔اس طرح مندرجہ بالا مساوات کا دایاں ہاتھ حجم میں داخل ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔یوں حجم سے کل خارجی طاقت

$$\oint_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{S}$$

ہو گا جہاں حجم گھیرتی سطح پر تکمل لیا گیا ہے۔سمتی ضرب $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ پوئنٹنگ سمتیہ[44] $\mathscr{P}$ پکارا جاتا ہے

$$\mathscr{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{10.51}$$

جس سے مراد لمحاتی طاقت کی کثافت لی جاتی ہے جو واٹ فی مربع میٹر $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ میں ناپی جاتی ہے۔یہاں بھی برقی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}$ یا مقناطیسی میدان میں کثافت توانائی $\frac{1}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}$ کے استعمال کی طرح یاد رہے کہ پوئنٹنگ سمتیہ کا بند سطح پر تکمل ہی حقیقی معنی رکھتا ہے اور ایسا تکمل سطح سے خارج ہوتا کل طاقت دیتا ہے۔ کسی بھی نقطے پر $\mathscr{P}$ کی سمت اس نقطے پر لمحاتی طاقت کے بہاو کی سمت دیتا ہے۔

چونکہ $\mathscr{P}$ برقی میدان اور مقناطیسی میدان دونوں کے عمودی ہے لہٰذا طاقت کی بہاو بھی دونوں میدان کے عمودی سمت میں ہو گی۔ہم نے برقی و مقناطیسی امواج پر تبصرے کے دوران دیکھا کہ امواج کے حرکت کی سمت $\boldsymbol{E}$ اور $\boldsymbol{H}$ کے عمودی ہوتی ہے لہٰذا $\mathscr{P}$ کی سمت ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔مزید کامل ذو برق میں

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos(\omega t - \beta z) \\ H_y &= \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

سے لمحاتی کثافت سطحی بہاو طاقت

$$E_x \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} \times H_y \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} = \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} = \mathscr{P} \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$$

حاصل ہوتی ہے۔اوسط کثافت طاقت حاصل کرنے کی خاطر ہم ایک پھیرے یعنی $T = \frac{1}{f}$ دورانیے کا تکمل لیتے ہوئے دوری عرصہ T پر تقسیم

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= f \int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z)\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \int_0^{\frac{1}{f}} \left[1 + \cos(2\omega t - 2\beta z)\right] \mathrm{d}t \\ &= \frac{f}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t - 2\beta z)\right]_0^{\frac{1}{f}} \end{aligned}$$

[44] Poynting vector

کرتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\eta} \quad \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \tag{10.52}$$

حاصل کرتے ہیں جو z سمت میں کثافت طاقت کی بہاو دیتا ہے۔اگر میدان کی چوٹی E_0 کی جگہ اس کی موثر قیمت $E_{\text{موثر}}$ استعمال کی جائے تب مندرجہ بالا مساوات میں $\frac{1}{2}$ کا جزو ضربی نہیں لکھا جائے گا۔

موج کی سمت کے عمودی سطح S سے یوں

$$P_{z,\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\eta} S \quad \text{W}$$

طاقت گزرے گی۔

غیر کامل ذو برق کی صورت میں

$$\eta = |\eta|\, e^{j\theta_\eta}$$

لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) \\ H_y &= \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|\eta|}\cos\left(\omega t - \beta z - \theta_\eta\right) \end{aligned} \tag{10.53}$$

ہوں گے جن سے

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= f\int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)\cos\left(\omega t - \beta z - \theta_\eta\right) \mathrm{d}t \\ &= f\int_0^{\frac{1}{f}} \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z}\left[\cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_\eta) + \cos\theta_\eta\right] \mathrm{d}t \end{aligned}$$

یعنی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z}\cos\theta_\eta \tag{10.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔

کثافت طاقت کی اوسط قیمت مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ

$$\boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} \tag{10.55}$$

سے بھی حاصل کی جا سکتی ہے جہاں جوڑی دار مخلوط[45] مقناطیسی موج استعمال کی جاتی ہے۔آئیں مساوات 10.54 کو اس ترکیب سے دوبارہ حاصل کریں۔مساوات 10.53 کی دوری سمتی شکل

$$\begin{aligned} E_{sx} &= E_0 e^{-\alpha z - j\beta z} \\ H_{sy} &= \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z - j\beta z - j\theta_\eta} \\ H_{sy}^* &= \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z + j\beta z + j\theta_\eta} \end{aligned}$$

[45] complex conjugate

ہے جہاں جوڑی دار مخلوط مقناطیسی موج بھی لکھی گئی ہے۔یوں

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^* &= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z + j\theta_\eta} \\ &= \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\left(\cos\theta_\eta + j\sin\theta_\eta\right)\end{aligned}$$

کا حقیقی حصہ لیتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\cos\theta_\eta$$

کثافت اوسط توانائی کی مطلوبہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

اس کتاب میں اوسط کثافت توانائی حاصل کرتے وقت مساوات 10.55 استعمال کی جائے گی۔

مشق 10.5: ایک میگا ہرٹز، تین سو میگا ہرٹز اور تین گیگا ہرٹز کے تعدد پر صاف پانی کے برف کے جزو برقی مستقل بالترتیب 4.15، 3.45 اور 3.2 ہیں جبکہ اس کے مماس ضیاع بالترتیب 0.12، 0.035 اور 0.0009 ہیں۔ یکساں سطحی موج جس کی چوٹی $z=0$ پر $100\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ ہو برف سے گزر رہی ہے۔ایک مربع میٹر سطح سے اوسط طاقت کا بہاو $z=0$ اور $z=5\,\text{m}$ پر حاصل کریں۔

جوابات: 27.1 W، 26.4 W، 24.7 W، 12.48 W، 23.7 W، 14.31 W

10.4 موصل میں امواج

موصل میں امواج پر غور کی خاطر ہم تصور کرتے ہیں کہ موصل سے جڑے ذو برق میں امواج پیدا کئے جاتے ہیں۔ہم جاننا چاہتے ہیں کہ ایسے موج ذو برق اور موصل کے سرحد پر موصل میں کیسے داخل ہوتے ہیں اور موصل میں ان کی کیا کارکردگی ہوتی ہے۔

ایصالی اور انتقالی رو کی شرح $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ کو مماس ضیاع کہتے ہیں۔یوں ناقص موصل کی مماس ضیاع بلند تعدد پر کم ہو گی۔نائیکروم[46] ناقص موصل ہے جس کا مماس ضیاع 100 MHz تعدد پر تقریباً 2×10^8 ہے۔یوں کسی بھی موصل کے لئے $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ ہوتا ہے۔اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے چند سادہ مساوات حاصل کرتے ہیں۔حرکی مستقل

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

---

[46] nichrome

کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی بنا پر

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

یا

$$\gamma = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب

$$-j = 1\underline{/-90^\circ}$$

کے برابر ہے جس کا جزر

$$\sqrt{1\underline{/-90^\circ}} = 1\underline{/-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ہے لہٰذا

$$\gamma = j\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

یا

$$\gamma = (j+1)\sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{10.56}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{10.57}$$

ملتا ہے۔

ان معلومات کے بعد کہا جا سکتا ہے کہ کسی بھی μاور σ مستقل رکھنے والے موصل کے α اور β ہر تعدد پر برابر ہی رہتے ہیں۔ یوں z سمت میں دوبارہ امواج فرض کرتے ہوئے موصل میں برقی میدان کی موج کو

$$E_x = E_0 e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}}\cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \tag{10.58}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $z < 0$ کامل ذو برق اور $z > 0$ موصل خطے ہوں تب ان کے سرحد $z = 0$ پر برقی سرحدی شرائط کے مطابق متوازی برقی میدان سرحد کے دونوں اطراف پر برابر ہوں گے۔مساوات 10.58 کے تحت سرحد پر موصل میں

$$E_x = E_0\cos\omega t \qquad (z = 0) \tag{10.59}$$

ہو گا اور یوں سرحد پر ذو برق میں بھی برقی میدان یہی ہو گا۔اب اسی حقیقت کو یوں بھی دیکھا جا سکتا ہے کہ سرحد پر ذو برق میں برقی میدان مساوات 10.59 دیتا ہے جو موصل میں سرحد پر اسی قیمت کا میدان پیدا کرتا ہے۔ایسا تصور کرنے کا مطلب یہ ہے کہ ہم ذو برق میں میدان کو منبع میدان تصور کرتے ہیں جو موصل میں مساوات 10.58 میں دی موج پیدا کر تا ہے۔موصل میں $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی بنا پر انتقالی رو کو نظر انداز کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} \tag{10.60}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا موصل میں ہر نقطے پر کثافت رو اور برقی میدان راہ تناسب کا تعلق رکھتے ہیں اور یوں موصل میں

$$J_x = \sigma E_0 e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}}\cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \tag{10.61}$$

لکھا جا سکتا ہے۔شکل 10.5 میں J_x دکھایا گیا ہے جہاں عین سرحد یعنی $z=0$ پر کثافت رو کے قیمت σE_0 کو J_0 لکھا گیا ہے۔

مساوات 10.58 اور مساوات 10.61 میں بہت معلومات پائی جاتی ہے۔پہلے ان مساوات میں $e^{z\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$ جزو پر غور کریں۔سرحد پر اس کی قیمت $e^0=1$ کے برابر ہے جو سرحد سے

$$z=\frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

فاصلے پر $e^{-1}=0.368$ رہ جاتی ہے۔یہ فاصلہ گہرائی جلد[47] کہلایا اور δ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\delta=\frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \tag{10.62}$$

برقی رو کا سطحی تہہ تک محدود رہنے کو اثر جلد[48] کہا جاتا ہے۔ یوں موصل میں

$$\alpha=\beta=\frac{1}{\delta} \tag{10.63}$$

ہو گا۔ اسی طرح سرحد سے 2δ فاصلے پر میدان $e^{-2}=0.135$ اور 4δ فاصلے پر میدان $e^{-4}=0.018$ یعنی صرف 1.8 % رہ جائے گا۔

تانبے کی $\sigma=5.8\times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہے لہٰذا اس میں گہرائی جلد

$$\delta_{\text{تانبہ}}=\frac{1}{\sqrt{\pi\times f\times 4\times \pi\times 10^{-7}\times 5.8\times 10^7}}=\frac{0.0661}{\sqrt{f}}$$

میٹر کے برابر ہے۔یوں 50 Hz کا میدان سرحد سے $\frac{0.0661}{\sqrt{50}}=9.35\,\mathrm{mm}$ فاصلے پر کم ہو کر صرف 0.368 گنا رہ جائے گا۔برقی ادوار میں مزاحمت میں طاقت کا ضیاع رو کے مربع کے راست تناسب ہوتا ہے لہٰذا ہر ایک گہرائی جلد کے فاصلے پر کثافت طاقت $0.368^2=0.135$ گنا کم ہو گی۔ خرداموا ج[49] کے تعدد یعنی 10 GHz پر گہرائی جلد 0.661 µm یعنی نظر آنے والے روشنی کے طول کے آٹھویں حصے کے برابر ہے۔

ان تعدد پر کسی بھی موصل مثلاً تانبے میں سرحد سے چند ہی گہرائی جلد کے فاصلے پر تمام میدان تقریباً صفر کے برابر ہوتے ہیں۔موصل کے سرحد پر پیدا کئے گئے برقی میدان یا کثافت رو، سرحد سے دوری کے ساتھ تیزی سے کم ہوتے ہیں۔ برقی و مقناطیسی طاقت موصل کے اندر نہیں بلکہ اس کے باہر صفر کرتی ہے۔موصل کا کام صرف اتنا ہے کہ یہ ان امواج کو راستہ دکھاتی ہے۔موصل کے سرحد پر پیدا کثافت رو، موصل میں موج کے حرکت کے عمودی سمت میں داخل ہوتی ہے جس سے موصل میں مزاحمتی ضیاع پیدا ہوتا ہے۔یوں موصل بطور راہ گیر کردار ادا کرتے ہوئے مزاحمتی ضیاع بطور اجرت حاصل کرتا ہے۔

اگر آپ کسی بجلی گھر میں 50 Hz کے برقی رو کو منتقل کرنے کی خاطر پانچ سنٹی میٹر رداس کے تانبے کی ٹھوس تار استعمال کر رہے ہوں تو یہ سراسر تانبہ ضائع کرنا ہو گا چونکہ کثافت رو تار کے بیرونی سطح پر ہی پائی جائے گی۔اندرونی تار، سطح سے دور، کثافت رو قابل نظرانداز ہو گی لہٰذا اس سے بہتر ہو گا کہ زیادہ رداس کی نلکی نما تار استعمال کی جائے جس کی موٹائی تقریباً 1.5δ یعنی 1.4 cm ہو۔اگرچہ یہ فیصلہ لامحدود جسامت کے سرحد کے نتائج پر بنیاد ہے، حقیقت میں محدود سرحد پر بھی میدان اسی نسبت سے گھٹتے ہیں۔

---

[47] skin depth
[48] skin effect
[49] microwave

بلند تعدد پر گہرائی جلد کا فاصلہ اتنا کم ہوتا ہے کہ راہ گیر موصل کی سطحی تہہ ہی اہمیت رکھتی ہے۔یوں خرد امواج کی منتقلی کے لئے شیشے پر $0.661\,\mu\text{m}$ موٹی چاندی کی تہہ کافی ہے۔

آئیں اب موصل میں طول موج اور رفتار موج کے مساوات حاصل کریں۔ہم

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

سے شروع کرتے ہوئے مساوات 10.63 استعمال کرتے ہوئے

$$\lambda = 2\pi\delta$$

لکھ سکتے ہیں۔اسی طرح مساوات 10.25

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

سے

$$v = \omega\delta \tag{10.64}$$

ملتا ہے۔

تانبے میں $50\,\text{Hz}$ پر $\lambda = 5.8\,\text{cm}$ اور $v = 2.94\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ یا $10.6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ حاصل ہوتے ہیں۔میں تقریباً $6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ کی رفتار سے چلتا ہوں۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تانبے میں برقی و مقناطیسی امواج انتہائی آہستہ چلتے ہیں۔یاد رہے کہ اسی $50\,\text{Hz}$ کے موج کی خالی خلاء میں $\lambda = 6000\,\text{km}$ اور رفتار $3 \times 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہو گی۔

موصل میں H_y کی مساوات لکھنے کی خاطر موصل کی قدرتی رکاوٹ درکار ہو گی۔مساوات 10.31

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

کو $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ کی وجہ سے

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

یا

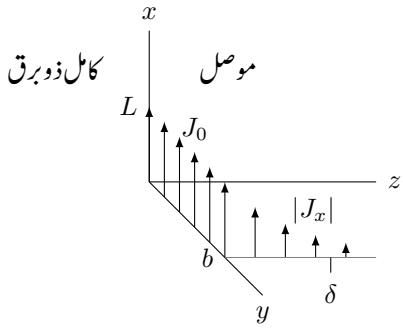
$$\eta = \frac{\sqrt{2}\angle 45^\circ}{\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} + j\frac{1}{\sigma\delta} \tag{10.65}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 10.59 کو گہرائی جلد کی صورت

$$E_x = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \tag{10.66}$$

میں لکھتے ہوئے مقناطیسی موج کو

$$H_y = \frac{\sigma\delta E_0}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{10.67}$$



شکل 10.5: موصل میں طاقت کے ضیاع اور گہرائی جلد۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی موج، برقی موج سے پھیرے کے آٹھویں حصے پیچھے ہے۔

مندرجہ بالا دو مساوات کی مدد سے پوئنٹنگ مساوات

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma\delta E_0^2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{2z}{\delta}}\cos\frac{\pi}{4}$$

یا

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{\sigma\delta E_0^2}{4}e^{-\frac{2z}{\delta}}$$

دیتا ہے۔ آپ دوبارہ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک گہرائی جلد کی گہرائی پر کثافت طاقت، سرحد کے کثافت طاقت کے $e^{-2} = 0.135$ گنا رہ گئی ہے۔

شکل 10.5 پر دوبارہ نظر ڈالیں۔مسئلہ پوئنٹنگ کہتا ہے کہ سرحد پر L اور b اطراف کے مستطیل میں جتنی برقی و مقناطیسی طاقت داخل ہوتی ہے، وہ تمام کی تمام موصل میں ضائع ہو جاتی ہے۔یہ طاقت

$$\begin{aligned}
P_{L,\text{اوسط}} &= \int_0^b\int_0^L \mathscr{P}_{\text{اوسط}}\big|_{z=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^b\int_0^L \frac{\sigma\delta E_0^2}{4}e^{-\frac{2z}{\delta}}\bigg|_{z=0}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sigma\delta bLE_0^2}{4}
\end{aligned}$$

کے برابر ہے۔سرحدی کثافت رو

$$J_0 = \sigma E_0$$

کی صورت میں اسے

$$P_{L,\text{اوسط}} = \frac{1}{4\sigma}\delta bLJ_0^2 \tag{10.68}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ اگر b چوڑائی میں کل برقی رو کو δ گہرائی تک محدود کر دیا جائے تو مزاحمتی ضیاع کتنا ہو گا۔ایسا کرنے کی خاطر پہلے اس چوڑائی میں کل رو

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

حاصل کرتے ہیں جہاں تکمل آسان بنانے کی غرض سے

$$J_x = J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

کو دوری سمتیہ کی شکل

$$\begin{aligned} J_{xs} &= J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} \\ &= J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \end{aligned}$$

میں لکھ کر تکمل حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^b J_0 e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{J_0 b \delta}{1+j} \end{aligned}$$

اس سے

$$I = \frac{J_0 b \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

لکھا جائے گا۔اگر اس رو کو $0 < y < b$ اور $0 < z < \delta$ میں محدود کر دیا جائے تب نئی کثافت رو

$$J'_x = \frac{J_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

ہو گی۔مزاحمتی طاقت کا ضیاع فی اکائی حجم $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}$ کے برابر ہے لہٰذا اس حجم میں کل ضیاع

$$P_L = \frac{1}{\sigma}\left(J'_x\right)^2 bL\delta = \frac{J_0^2}{2\sigma} bL\delta \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

ہو گا۔مربع کوسائن موج کی اوسط قیمت $\frac{1}{2}$ کے برابر ہوتی ہے لہٰذا اوسط طاقت کے ضیاع کو

$$P_L = \frac{J_0^2 bL\delta}{4\sigma} \tag{10.69}$$

لکھا جا سکتا ہے جو عین مساوات 10.68 ہے۔

اس نتیجے کو دیکھ کر اب کسی بھی موصل، جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو، میں کل رو کو ایک جلد گہرائی میں یکساں تقسیم شدہ تصور کرتے ہوئے سلاخ کی مزاحمتی ضیاع حاصل کی جا سکتی ہے۔یوں b چوڑائی، L لمبائی اور لامحدود گہرائی سلاخ جس میں اثر جلد پایا جاتا ہو اور b چوڑائی، L لمبائی اور δ گہرائی سلاخ جس میں یکساں تقسیم شدہ رو ہو کے مزاحمت بالکل برابر ہوں گے۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے رداس r کے ٹھوس نلکی سلاخ کی مزاحمت بلند تعدد پر حاصل کی جا سکتی ہے۔اگر گہرائی جلد سلاخ کے رداس سے بہت کم ہو تب اس طرح حاصل کردہ مزاحمت کی قیمت تقریباً بالکل درست ہو گی۔ایسی تعدد جس پر

اثر جلد پایا جاتا ہو کی صورت میں سلاخ کی بیرونی جلد ہی رو گزارے گی لہٰذا مزاحمت کی قیمت حاصل کرتے وقت اس نلکی نما جھلی کو ہی موصل تصور کیا جائے گا لہٰذا مزاحمت R

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{\sigma 2\pi r \delta} \tag{10.70}$$

ایک ملی میٹر رداس اور دس میٹر لمبی تانبے کے تار کی یک سمتی مزاحمت

$$R_{\text{یک سمتی}} = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times \pi \times 0.001^2} = 54.88\,\mathrm{m\Omega}$$

ہے۔ ایک سو میگا ہرٹز کی تعدد پر تانبے کی $\delta = 6.61\,\mu\mathrm{m}$ ہو گی لہٰذا اس تعدد پر اسی تار کی مزاحمت

$$R = \frac{10}{5.8 \times 10^7 \times 2 \times \pi \times 0.001 \times 6.61 \times 10^{-6}} = 4.15\,\Omega$$

ہو گی۔

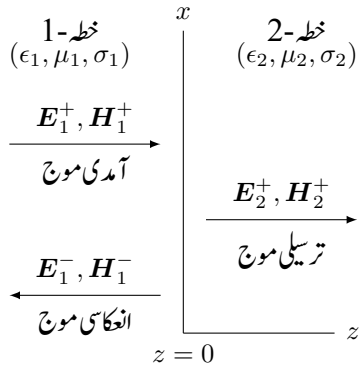
مشق 10.6: ٹھوس نلکی نما لوہے کی تار جس کا رداس 5 mm اور جس کی لمبائی 2.5 m ہے میں $2\cos 10000t$ ایمپیئر کی برقی رو گزر رہی ہے۔کتاب کے آخر میں ضمیمے سے $\sigma = 1.03 \times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ اور $\mu_R = 4000$ دئے گئے ہیں۔یاد رہے کہ موصل کا $\epsilon_R = 1$ ہوتا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

- یک سمتی رو مزاحمت،
- گہرائی جلد،
- بدلتی رو مزاحمت یا موثر مزاحمت،
- مزاحمتی طاقت کا ضیاع۔

جوابات: $3.09\,\mathrm{m\Omega}$، $62\,\mu\mathrm{m}$، $1.25\,\Omega$ اور $2.49\,\mathrm{W}$

10.5 انعکاس مستوی موج

لامحدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج ہم دیکھ چکے۔ایسے حجم میں کبھی بھی موج دو مختلف اقسام کے اشیاء کے درمیان پائی جانے والی سرحد نہیں چھوتی۔آئیں محدود جسامت کے حجم میں مستوی امواج پر غور کریں جہاں امواج کو ایک قسم کے مادے سے دوسرے قسم کے مادے میں داخل ہونا ہو گا۔آپ دیکھیں گے کہ ایسی صورت میں موج کا کچھ حصہ پہلے خطے سے دوسرے خطے میں داخل ہو پاتا ہے جبکہ اس کا بقایا حصہ سرحد سے ٹکرا کر واپس پہلے خطے میں لوٹ جاتا ہے۔اس حصے میں ہم سرحد سے



شکل 10.6: آمدی موج سرحد سے گزرتی ترسیلی اور اس سے لوٹتی انعکاسی امواج پیدا کرتی ہے۔

گزرتے اور اس سے ٹکرا کر واپس لوٹتے حصوں کے مساوات حاصل کریں گے۔یہ نتائج ترسیلی تاروں[50] اور رہبر موج[51] کے مسائل میں جوں کے توں قابل استعمال ہوں گے۔

ہم $z < 0$ کو خطہ-1 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ ہیں جبکہ $z > 0$ کو خطہ-2 تصور کرتے ہیں جہاں $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ ہیں۔یہ صورت حال شکل 10.6 میں دکھائی گئی ہے۔ہم بڑھتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشت $+$ جبکہ گھٹتے z جانب حرکت کرتے موج کو بالانوشت $-$ سے ظاہر کریں گے۔اب تصور کریں کہ پہلے خطے میں سرحد کی جانب برقی موج

$$E_{xs1}^+ = E_{x10}^+ e^{-\gamma_1 z} \tag{10.71}$$

آتی ہے۔آپ جانتے ہیں کہ اس برقی موج کے ساتھ لازماً مقناطیسی موج

$$H_{ys1}^+ = \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} \tag{10.72}$$

بھی ہو گی۔ سرحد کی طرف آتے موج کو آمدی موج[52] کہا جاتا ہے۔چونکہ یہ موج سرحد کے عمودی حرکت کر رہا ہے لہٰذا اس کے حرکت کو عمودی آمد[53] کہتے ہیں۔

اس آمدی موج کا کچھ حصہ جسے ترسیلی موج[54] کہتے ہیں، سرحد سے گزرتے ہوئے سیدھا چلے جائے گا۔ترسیلی امواج

$$E_{xs2}^+ = E_{x20}^+ e^{-\gamma_2 z} \tag{10.73}$$

$$H_{ys2}^+ = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z} \tag{10.74}$$

ہیں۔سرحد کے دوسرے جانب حرکی مستقل γ_2 اور قدرتی رکاوٹ η_2 ہیں جو پہلے خطے سے مختلف ہیں۔ترسیلی امواج سرحد سے دور چلتی جاتی ہیں۔

آمدی اور ترسیلی برقی امواج x محدد کے متوازی جبکہ مقناطیسی امواج y محدد کے متوازی ہیں لہٰذا یہ چاروں امواج سرحد کے بھی متوازی ہیں۔صفحہ 274 پر مساوات 9.43 اور اس کے قریب ہی مساوات 9.45 متوازی امواج کے سرحدی شرائط بیان کرتے

[50] transmission lines
[51] waveguide
[52] incident wave
[53] normal incidence
[54] transmitted wave

ہیں۔اب کائنات میں کبھی بھی دو اشیاء کے سرحد پر سطحی کثافت رو نہیں پائی جاتی۔یوں $K_\perp = 0$ لیتے ہوئے ان شرائط کو

$$E_{m1} = E_{m2}$$
$$H_{m1} = H_{m2} \quad (K_\perp = 0)$$

لکھا جاتا ہے۔

اب اگر پہلی شرط پوری کی جائے تو سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی برقی میدان برابر ہوں گے لہٰذا $z = 0$ پر مساوات 10.71 اور مساوات 10.73 برابر ہوں گے۔یوں $E^+_{x10} = E^+_{x20}$ حاصل ہوتا ہے لیکن دوسری شرط کے مطابق سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان بھی برابر ہونا ہو گا لہٰذا $z = 0$ پر مساوات 10.72 اور مساوات 10.74 بھی برابر ہوں گے جس سے $\frac{E^+_{x10}}{\eta_1} = \frac{E^+_{x20}}{\eta_2}$ حاصل ہوتا ہے۔یہ دونوں تب ممکن ہے جب $\eta_1 = \eta_2$ ہو جو حقیقت میں کبھی بھی نہیں ہو گا لہٰذا صرف آمدی اور ترسیلی امواج کی صورت میں سرحدی شرائط پر پورا نہیں اترا جا سکتا۔مندرجہ بالا دونوں سرحدی شرائط صرف اس صورت میں پورا ہوتے ہیں جب سرحد سے ٹکرا کر واپس لوٹتے امواج

$$E^-_{xs1} = E^-_{x10} e^{\gamma_1 z} \tag{10.75}$$

$$H^-_{ys1} = -\frac{E^-_{x10}}{\eta_1} e^{\gamma_1 z} \tag{10.76}$$

بھی پائے جائیں جنہیں انعکاسی امواج[55] کہا جاتا ہے۔انعکاسی موج کا حرکی مستقل γ_1 ہی ہے جبکہ یہ موج گھٹتے z جانب حرکت کر رہی ہے۔انعکاسی موج میں E^-_{x10} مخلوط عدد ہو سکتا ہے۔چونکہ انعکاسی امواج گھٹتے z جانب حرکت کرتی ہیں لہٰذا مسئلہ پوئنٹنگ کے تحت $E^-_{xs1} = -\eta_1 H^-_{ys1}$ ہو گا تا کہ $\boldsymbol{E}^-_1 \times \boldsymbol{H}^-_1$ کی سمت $-\boldsymbol{a}_z$ ہو۔

آمدی، ترسیلی اور انعکاسی امواج کی صورت میں دونوں سرحدی شرائط پورے ہوتے ہیں اور ان کی مدد سے E^+_{x10} کی صورت میں بقایا تمام امواج کے طول بھی حاصل ہوتے ہیں۔آئیں دیکھیں کہ ایسا کس طرح ہوتا ہے۔

اب پہلے خطے میں آمدی امواج کے علاوہ انعکاسی امواج بھی پائے جاتے ہیں لہٰذا سرحدی شرائط میں دونوں کا مجموعہ استعمال کیا جائے گا۔یوں $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی برقی میدان برابر ہونے سے

$$E_{xs1} = E_{xs2} \quad (z = 0)$$

یعنی

$$E^+_{xs1} + E^-_{xs1} = E^+_{xs2} \quad (z = 0)$$

یا

$$E^+_{x10} + E^-_{x10} = E^+_{x20} \tag{10.77}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $z = 0$ پر سرحد کے دونوں جانب متوازی مقناطیسی میدان کے برابری سے

$$H_{ys1} = H_{ys2} \quad (z = 0, K_\perp = 0)$$

یعنی

$$H^+_{ys1} + H^-_{ys1} = H^+_{ys2} \quad (z = 0, K_\perp = 0)$$

---

[55] reflected wave

یا

$$\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^{-}}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^{+}}{\eta_2} \tag{10.78}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 10.77 اور مساوات 10.78 کو E_{x10}^{-} کی خاطر حل کرنے کی غرض سے مساوات 10.77 کو مساوات میں پر کرتے

$$\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^{-}}{\eta_1} = \frac{E_{x10}^{+} + E_{x10}^{-}}{\eta_2}$$

ہوئے یوں

$$E_{x10}^{-} = E_{x10}^{+}\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔انعکاسی اور آمدی برقی میدان کے حیطوں کی شرح کو شرح انعکاس[56] پکارا اور Γ سے ظاہر[57] کیا جاتا ہے۔

$$\Gamma = \frac{E_{x10}^{-}}{E_{x10}^{+}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \tag{10.79}$$

مخلوط شرح انعکاس کی صورت میں انعکاسی اور آمدی میدان میں زاویائی فرق پایا جائے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شرح انعکاس کی حتمی قیمت صفر تا ایک ممکن ہے۔

$$|\Gamma| \leq 1 \tag{10.80}$$

اسی طرح مساوات 10.77 اور مساوات 10.78 سے E_{x10}^{-} ختم کرنے سے

$$\tau = \frac{E_{x20}^{+}}{E_{x10}^{+}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \tag{10.81}$$

حاصل ہوتا ہے جو شرح ترسیل[58] کہلایا اور τ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔مساوات 10.79 اور مساوات 10.81 سے

$$\tau = 1 + \Gamma \tag{10.82}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

آئیں ان نتائج کو چند مخصوص صورتوں میں استعمال کرتے ہیں۔تصور کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق جبکہ دوسرا خطہ کامل موصل ہے۔ایسی صورت میں σ_2 لامحدود ہو گا لہٰذا

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = 0$$

ہو گا۔یوں مساوات 10.81 سے

$$E_{x20}^{+} = 0$$

---

[56] reflection coefficient

[57] Γ یونانی حروف تہجی گیما ہے۔

[58] transmission coefficient

حاصل ہوتا ہے یعنی کامل موصل میں کسی صورت بھی وقت کے ساتھ بدلتا میدان نہیں پایا جا سکتا۔اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ کامل موصل کی گہرائی جلد صفر کے برابر ہے۔

مساوات 10.79 میں $\eta_2 = 0$ پر کرنے سے

$$\Gamma = -1$$

یعنی

$$E_{x10}^- = -E_{x10}^+$$

حاصل ہوتا ہے۔انعکاسی موج کا حیطہ بالکل آمدی موج کے حیطے کے برابر ہے لیکن ان میں 180° کا زاویہ پایا جاتا ہے۔موصل سطح آمدی توانائی کو واپس کرتی ہے اور یوں پہلے خطے میں کل برقی میدان

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- \\ &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہو گا جہاں کامل ذو برق میں $\gamma_1 = 0 + j\beta_1$ لیا گیا ہے۔اس کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^+ \left(e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}\right) \\ &= -j2E_{x10}^+ \sin\beta_1 z \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جو دوری سمتیہ کی صورت میں ہے جسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر حقیقی جزو لیتے ہوئے اصل موج کی مساوات

$$E_{x1} = 2E_{x10}^+ \sin\beta_1 z \sin\omega t \tag{10.83}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ مساوات ساکن میدان کو ظاہر کرتی ہے۔یاد رہے کہ اسے دو آپس میں الٹ سمت میں حرکت کرتے امواج سے حاصل کیا گیا ہے۔اس کا موازنہ آمدی موج

$$E_{x1}^+ = E_{x10}^+ \cos(\omega t - \beta_1 z)$$

سے کریں۔حرکت کرتے موج کی پہچان جزو $\omega t - \beta_1 z$ ہے جو مثبت سمت میں موج کو ظاہر کرتی ہے۔مساوات 10.83 میں ωt اور $\beta_1 z$ علیحدہ علیحدہ پائے جاتے ہیں۔

مساوات 10.83 میں جس لمحہ $\omega t = n\pi$ کے برابر ہو اس لمحہ میدان ہر نقطے پر صفر کے برابر ہو گا۔اس کے علاوہ جس نقطے پر $\beta_1 z = n\pi$ کے برابر ہو، اس نقطے پر ہر وقت میدان صفر ہی رہتا ہے۔مساوات 10.83 کو ساکن موج[59] کہا جاتا ہے۔برقی میدان ان سطحوں پر ہر وقت صفر رہتا ہے جہاں

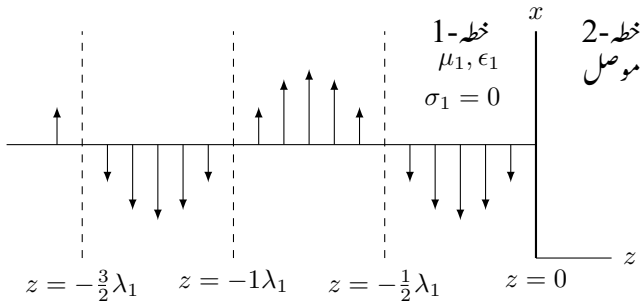
$$\beta_1 z = n\pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots)$$

ہو جس سے

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = n\pi$$

یعنی

$$z = n\frac{\lambda_1}{2}$$



شکل 10.7: ساکن موج، برقی میدان۔

حاصل ہوتا ہے۔یوں سرحد یعنی $z = 0$ پر برقی میدان صفر ہو گا اور پہلے خطے میں سرحد سے دور چلتے ہوئے ہر آدھے طول موج پر صفر برقی میدان پایا جائے گا۔یہ صورت حال شکل 10.7 میں دکھائی گئی ہے۔اس شکل میں نقطہ دار لکیر ان سطحوں کو ظاہر کرتی ہیں جہاں میدان صفر رہتا ہے۔برقی میدان کو وقت $t = \frac{\pi}{2}$ پر دکھایا گیا ہے جب اس کا حیطہ زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے۔

چونکہ $E_{xs1}^{+} = \eta_1 H_{ys1}^{+}$ اور $E_{xs1}^{-} = -\eta_1 H_{ys1}^{-}$ ہوتے ہیں لہٰذا مقناطیسی میدان

$$H_{ys1} = \frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1}\left(e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z}\right)$$

یا

$$H_{y1} = 2\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1}\cos\beta_1 z \cos\omega t \tag{10.84}$$

ہو گا۔یہ بھی ساکن موج ہے لیکن جس سطح پر برقی میدان صفر رہتا ہے وہاں مقناطیسی ساکن موج کی چوٹی پائی جاتی ہے۔اس کے علاوہ برقی اور مقناطیسی ساکن امواج میں 90° کا وقتی فرق پایا جاتا ہے لہٰذا یہ امواج کسی بھی سمت میں اوسطاً صفر طاقت منتقل کرتی ہیں۔

آئیں اب دو کامل ذو برق کی سرحد پر صورت حال دیکھیں۔اب ان دو خطوں میں قدرتی رکاوٹ η_1 اور η_2 جبکہ $\alpha_1 = 0$ اور $\alpha_2 = 0$ ہوں گے۔عددی قیمتیں لے کر آگے چلتے ہیں۔فرض کریں کہ

$$\eta_1 = 50\,\Omega$$
$$\eta_2 = 377\,\Omega$$
$$E_{x10}^{+} = 10\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

ہیں۔یوں

$$\Gamma = \frac{377 - 50}{377 + 50} = 0.7658$$

ہے لہٰذا

$$E_{x10}^{-} = 0.7658 \times 10 = 7.658\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

---

[59] standing wave

ہو گا۔پہلے خطے میں مقناطیسی میدان

$$H_{y10}^{+} = \frac{10}{50} = 0.2\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$
$$H_{y10}^{-} = -\frac{7.658}{50} = -0.153\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

ہیں۔آمدی اوسط سطحی کثافت طاقت مساوات 10.54 سے

$$P_{1,\text{اوسط}}^{+} = \frac{1}{2}\frac{\left(E_{x10}^{+}\right)^2}{|\eta_1|}e^{-2\alpha_1 z}\cos\theta_{\eta 1} = 1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

جبکہ انعکاسی اوسط سطحی کثافت طاقت

$$P_{1,\text{اوسط}}^{-} = \frac{1}{2}\frac{\left(E_{x10}^{-}\right)^2}{|\eta_1|}e^{-2\alpha_1 z}\cos\theta_{\eta 1} = 0.5864\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

ہے۔ان مساوات میں $\alpha_1 = 0$ اور $\eta_1 = 50\underline{/0}$ استعمال کئے گئے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور آمدی کثافت طاقت کی شرح

$$\frac{\frac{\left(E_{x10}^{-}\right)^2}{2\eta_0}}{\frac{\left(E_{x10}^{+}\right)^2}{2\eta_0}} = |\Gamma|^2 \tag{10.85}$$

کے برابر ہے۔

دوسرے خطے میں

$$E_{x20}^{+} = \frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}E_{x10}^{+} = 17.658\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$
$$H_{y20}^{+} = \frac{17.658}{377} = 0.046\,84\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

ہیں لہٰذا

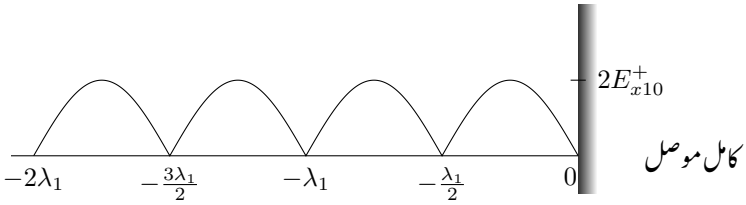
$$P_{2,\text{اوسط}}^{+} = \frac{1}{2}\frac{\left(E_{x20}^{+}\right)^2}{|\eta_2|}e^{-2\alpha_2 z}\cos\theta_{\eta 2} = 0.4135\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انعکاسی اور ترسیلی طاقت کا مجموعہ آمدی طاقت کے عین برابر ہے۔

$$P_{1,\text{اوسط}}^{+} = P_{1,\text{اوسط}}^{-} + P_{2,\text{اوسط}}^{+}$$

10.6 شرح ساکن موج

کسی بھی ترسیلی نظام میں مختلف مقامات پر برقی یا مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارہ باآسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔محوری تار کا اندرونی تار ذرہ زیادہ لمبا رکھتے ہوئے برقی میدان حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح تار کا ایک چھوٹا دائرہ مقناطیسی میدان کا



شکل 10.8: کامل موصل سے انعکاس، کامل ذو برق میں ساکن موج پیدا کرتا ہے۔

نمونہ حاصل کرنے میں کام آتا ہے۔ان آلات سے حاصل اشارات کو سمت کار[60] سے گزارتے ہوئے مائیکرو میٹر سے ناپا جا سکتا ہے۔مائیکرو میٹر میدان کے حیطے کے راست تناسب جواب دیتا ہے۔ان آلات کو عموماً درکار اشارات کے ہمسر[61] رکھا جاتا ہے تا کہ یہ زیادہ حساس ہوں۔

اگر بغیر ضیاع خطے میں یکساں مستوی موج حرکت کر رہی ہو اور اس خطے میں انعکاسی موج نہ پائی جاتی ہو تب میدان ناپنے والا آلہ تمام مقامات پر یکساں حیطہ دکھائے گا۔ایسا آلہ تیزی سے تبدیل ہوتے حیطے کو دکھانے سے قاصر ہوتا ہے۔ہر جگہ برابر حیطہ اس بات کی نشانی ہے کہ خطے میں طاقت ضائع نہیں ہوتا اور یہ کہ انعکاسی موج بھی غیر موجود ہے۔

اس کے برعکس کامل ذو برق میں آمدی موج کا کامل موصل سے انعکاس، ساکن موج پیدا کرتا ہے۔ایسے خطے میں میدان ناپتا آلہ مختلف مقامات پر مختلف حیطے ناپے گا۔چونکہ سرحد سے ہر آدھے طول موج کے فاصلے پر میدان صفر رہتا ہے لہٰذا ان نقطوں پر آلہ صفر حیطہ ناپے گا جبکہ عین ایسے دو قریبی نقطوں کے درمیان آلہ زیادہ سے زیادہ حیطہ دکھائے گا۔آلے کو سرحد کے قریب اور دور کرنے سے ناپے گئے حیطے کی شکل $|\sin \beta z|$ کی طرح حاصل ہو گی جہاں سرحد سے فاصلہ z ہے۔اسے شکل 10.8 میں دکھایا گیا ہے۔سائن نما حیطے کا تبدیل ہونا ساکن موج کی پہچان ہے۔

مثال 10.2: کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں کامل ذو برق میں ساکن موج کی مساوات حاصل کریں۔

حل:کامل موصل سے انعکاس کی صورت میں $\Gamma = -1$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا $E^-_{xs1} = -E^+_{x10}e^{j\beta_1 z}$ ہو گا۔یوں آمدی اور انعکاسی امواج کا مجموعہ

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E^+_{x10}e^{-j\beta_1 z} - E^+_{x10}e^{j\beta_1 z} \\ &= -2jE^+_{x10}\sin\beta_1 z \end{aligned}$$

ہو گا۔اس دوری سمتیہ سے حقیقی ساکن موج کی مساوات حاصل کرنے کی خاطر اسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$E_{xs1}e^{j\omega t} = -2jE^+_{x10}\sin\beta_1 z\cos\omega t + 2E^+_{x10}\sin\beta_1 z\sin\omega t$$

حقیقی جزو

$$E_{x1} = 2E^+_{x10}\sin\beta_1 z\sin\omega t$$

لیتے ہیں۔یہی ساکن موج کی مساوات ہے۔شکل 10.8 میں آلہ ناپ سے حاصل $|E_{x1}|$ دکھایا گیا ہے۔

---

[60] rectifier
[61] tuned

اب ایسی صورت پر غور کرتے ہیں جہاں تمام کی تمام موج سرحد سے واپس نہیں لوٹتی بلکہ اس کا کچھ حصہ سرحد پار کرتے ہوئے دوسری جانب چلے جاتی ہے۔پہلے خطے میں اب آمدی موج کے علاوہ ایسی انعکاسی موج پائی جاتی ہے جس کا حیطہ آمدی موج سے کم ہوتا ہے۔اگرچہ اب پہلے خطے میں ساکن موج کے ساتھ ساتھ حرکت کرتی موج بھی پائی جاتی ہے لیکن اس کے باوجود اس کو ساکن موج ہی پکارا جاتا ہے۔اب کسی بھی نقطے پر میدان ہر وقت صفر نہیں رہتا۔ساکن اور حرکت کرتے حصوں کا اندازہ حیطے کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور اس کے کم سے کم قیمت کی شرح سے بیان کی جاتی ہے۔اس شرح کو شرح ساکن موج[62] کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے جبکہ دوسرا خطہ کوئی بھی مادہ ہو سکتا ہے۔یوں $\alpha_1 = 0$ ہو گا۔اب

$$\begin{aligned} E_{xs1}^{+} &= E_{x10}^{+} e^{-j\beta_1 z} \\ E_{xs1}^{-} &= \Gamma E_{x10}^{+} e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

ہوں گے جہاں

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

ہے۔چونکہ کامل ذو برق میں $\sigma = 0$ ہوتا ہے لہٰذا η_1 مثبت حقیقی عدد ہے جبکہ η_2 مخلوط عدد ہو سکتا ہے لہٰذا Γ بھی مخلوط ہو سکتا ہے۔یوں اسے

$$\Gamma = |\Gamma| \, e^{j\phi}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$E_{xs1}^{-} = |\Gamma| \, E_{x10}^{+} e^{j(\beta_1 z + \phi)}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ساکن موج کی مساوات

$$E_{xs1} = \left(e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| \, e^{j(\beta_1 z + \phi)}\right) E_{x10}^{+} \tag{10.86}$$

حاصل ہوتی ہے۔

اب آپ جانتے ہیں کہ کسی بھی مخلوط عدد $e^{j\theta}$ کو

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ہوتا ہے لہٰذا اس کی حتمی قیمت ایک (1) ہی رہتی ہے۔اس عدد کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\theta = 0$ کی صورت میں $+1$ حاصل ہوتی ہے۔یہی قیمت $\theta = \mp 2\pi$ یا $\theta = \mp 4\pi$ کی صورت میں بھی حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح اس عدد کی کم سے کم قیمت $\theta = \mp\pi, \mp 3\pi, \mp 5\pi \cdots$ پر -1 حاصل ہوتی ہے۔اس طرح مساوات 10.86 کو

$$E_{xs1} = \left(1 + |\Gamma| \, e^{j(2\beta_1 z + \phi)}\right) e^{-j\beta_1 z} E_{x10}^{+}$$

[62] standing wave ratio

لکھتے ہوئے اگر $2\beta_1 z+\phi$ کو θ تصور کیا جائے تو $e^{j(2\beta_1 z+\phi)}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت یعنی $+1$

$$2\beta_1 z+\phi=0,2\pi,-2\pi,4\pi,-4\pi,\cdots$$

یا

$$-\beta_1 z=\left(\frac{\phi}{2}\right),\left(\frac{\phi}{2}-\pi\right),\left(\frac{\phi}{2}+\pi\right),\left(\frac{\phi}{2}-2\pi\right),\cdots$$

پر حاصل ہو گی جسے

$$-\beta_1 z_{\text{بلند تر}}=\frac{\phi}{2}+n\pi \quad (n=0,\mp 1,\mp 2,\cdots) \tag{10.87}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ایسی صورت میں

$$|E_{xs1}|_{\text{بلند تر}}=(1+|\Gamma|)\,E_{x10}^{+} \tag{10.88}$$

ہو گا۔اسی طرح $e^{j(2\beta_1 z+\phi)}$ کی کم سے کم قیمت یعنی -1

$$2\beta_1 z+\phi=\pi,-\pi,3\pi,-3\pi,\cdots$$

یا

$$-\beta_1 z=\left(\frac{\phi}{2}-\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\phi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right),\cdots$$

پر حاصل ہو گی جسے

$$-\beta_1 z_{\text{کمتر}}=\frac{\phi}{2}+n\pi+\frac{\pi}{2} \quad (n=0,\mp 1,\mp 2,\cdots) \tag{10.89}$$

لکھا جا سکتا ہے اور ایسی صورت میں

$$|E_{xs1}|_{\text{کمتر}}=(1-|\Gamma|)\,E_{x10}^{+} \tag{10.90}$$

ہو گا۔

موج کی کم تر قیمت ہر آدھے طول موج پر پائی جاتی ہے۔موج کی بلند تر قیمت دو کم تر قیمتوں کے مقام کے عین وسط میں پائی جاتی ہیں۔کامل موصل کی صورت میں پہلا کمتر میدان $-\beta_1 z=0$ یعنی سرحد پر پایا جائے گا۔اگر $\eta_2<\eta_1$ ہو اور دونوں قدرتی رکاوٹوں کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں تب $\phi=\pi$ ہو گا اور ایسی صورت میں سرحد یعنی $-\beta_1 z=0$ پر برقی دباو کی کمتر قیمتیں پائی جائے گی۔اس کے برعکس اگر $\eta_2>\eta_1$ ہو اور دونوں رکاوٹ حقیقی ہوں تب سرحد پر برقی میدان کی قیمت بلند تر ہو گی۔

ان معلومات کو زیر استعمال لانے کی غرض سے $10\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ اور $1\,\text{GHz}$ تعدد کے موج پر غور کرتے ہیں جو خطہ اول میں سرحد کی طرف عمودی آمد ہے۔پہلے خطے کے مستقل $\epsilon_{R1}=3$، $\mu_{R1}=1$ اور $\sigma_1=0$ جبکہ دوسرے خطے کے مستقل $\epsilon_{R1}=6$، $\mu_{R1}=1$ اور $\sigma_1=0$ ہیں۔

یوں

$$\omega=2\pi 10^9\,\frac{\text{rad}}{\text{s}},\quad \beta_1=36.28\,\frac{\text{rad}}{\text{m}},\quad \beta_2=51.3\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اگرچہ خالی خلاء میں اس موج کی طول 30 cm ہو گی، یہاں $\lambda_1 = 17.32\,\text{cm}$ اور $\lambda_2 = 12.25\,\text{cm}$ ہیں۔قدرتی رکاوٹ $\eta_1 = 217.66\,\Omega$ اور $\eta_2 = 153.91\,\Omega$ ہیں جن سے شرح انعکاس $\Gamma = -0.17$ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ دونوں رکاوٹ حقیقی اعداد ہیں اور $\eta_2 < \eta_1$ ہے لہٰذا سرحد پر کمتر برقی میدان پایا جائے گا۔پہلے خطے، یعنی $z < 0$، میں سرحد سے دور ہر 8.66 cm فاصلے پر برقی میدان کی کمتر قیمت پائی جائے گی۔مساوات 10.90 سے ساکن موج کی کمتر قیمت $|Exs1|_{\text{کمتر}} = 8.3\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ حاصل ہوتی ہے۔چونکہ پہلا خطہ کامل ذو برق ہے لہٰذا اس میں طاقت کا ضیاع نہیں ہوتا اور یوں اس خطے میں تمام کمتر قیمتیں برابر ہوں گی۔

میدان کی بلند تر قیمت $11.7\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ پہلے خطے میں سرحد سے 4.33 ، 12.99 ، 21.65 ، ... سنٹی میٹر کے فاصلوں پر پائی جائیں گی۔

چونکہ دوسرے خطے میں انعکاسی موج نہیں پائی جاتی لہٰذا اس میں ساکن موج بھی نہیں پائی جائے گی۔

ساکن موج کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کی شرح کو شرح ساکن موج[63] کہا اور s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$s = \frac{|E_{xs1}|_{\text{بلند تر}}}{|E_{xs1}|_{\text{کمتر}}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \tag{10.91}$$

چونکہ $|\Gamma| \leq 1$ رہتا ہے لہٰذا شرح ساکن موج ہر صورت مثبت اور اکائی کے برابر یا اس سے زیادہ قیمت کا ہو گا یعنی

$$s \geq 1 \tag{10.92}$$

مندرجہ بالا مثال میں $s = \frac{1+0.17}{1-0.17} = 1.409$ ہے۔

اگر $|\Gamma| = 1$ ہو تب انعکاسی اور آمدی امواج برابر ہوں گے لہٰذا تمام کی تمام آمدی توانائی سرحد سے واپس لوٹتی ہے اور ایسی صورت میں s لامحدود ہو گا۔پہلے خطے میں ہر $\frac{\lambda_1}{2}$ فاصلے پر ایسی سطح پائی جائے گی جس پر برقی میدان ہر وقت صفر رہتا ہے۔ان سطحوں کے درمیان ایسی سطحیں ہوں گی جہاں آمدی موج کے دگنے حیطے کا برقی میدان ہو گا۔

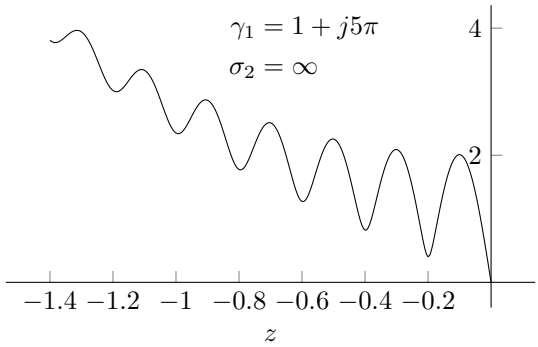
اگر $\eta_2 = \eta_1$ ہو تب $\Gamma = 0$ ہو گا۔ایسی صورت میں توانائی سرحد سے واپس نہیں لوٹتی، $s = 1$ ہوتا ہے اور برقی میدان کی بلند تر اور کم تر قیمتیں برابر ہوتی ہیں۔

آدھی طاقت کے انعکاس کی صورت میں $|\Gamma|^2 = 0.5$ یعنی $|\Gamma| = 0.707$ اور $s = 5.83$ ہو گا۔

چونکہ برقی اور مقناطیسی میدان کے راست تناسب اشارات باآسانی حاصل کئے جا سکتے ہیں اور s کی قیمت حاصل کرنے کے لئے راست تناسب اشارات ہی درکار ہیں لہٰذا شرح ساکن موج کو تجرباتی طور حاصل کیا جا سکتا ہے۔یہی اس کی اہمیت کا راز ہے۔یاد رہے کہ s حاصل کرنے کے لئے میدان کی اصل قیمت درکار نہیں ہوتی۔صرف اتنا ضروری ہوتا ہے کہ تمام اشارات اصل میدان کے تناسب سے ہوں۔

آئیں اب پہلے خطے کو غیر کامل ذو برق تصور کریں جس کا α صفر کے برابر نہیں ہو گا۔اب بائیں سے آتی آمدی موج مثبت z جانب چلتے ہوئے گھٹے گی۔انعکاسی موج منفی z جانب چلتے ہوئے گھٹتے جائے گی حتٰی کہ آخر کار اس کی قیمت قابل نظر انداز ہو گی۔یوں اگرچہ سرحد کے قریب بلند تر اور کم تر میدان میں فرق واضح ہو سکتا ہے لیکن سرحد سے دور ان میں فرق نہیں رہ پاتا۔ پہلے خطے کا حرکی مستقل $\gamma_1 = 1 + j5\pi$ اور دوسرا خطہ کامل موصل ہونے کی صورت میں ایسی ہی ایک ساکن موج شکل 10.9

[63] standing wave ration



شکل 10.9: غیر کامل ذو برق میں ساکن موج کی بلند تر اور کم تر قیمتوں میں فرق سرحد سے دور کم ہوتا ہے۔

میں دکھائی گئی ہے جہاں موصل $z = 0$ کے دائیں ہاتھ پر ہے۔اس شکل میں عین سرحد پر آمدی موج کی قیمت $E_{x10}^{+} = 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔چونکہ ذو برق کا سرحد موصل کے ساتھ ہے اور موصل میں برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا شکل میں سرحد پر برقی میدان صفر ہی ہے۔سرحد سے $\frac{2\pi}{\beta_1} = 0.2\,\mathrm{m}$ فاصلے پر دوبارہ کم تر میدان پایا جاتا ہے۔اسی طرح پہلی چوٹی سرحد پر آمدی میدان کے تقریباً دگنی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو چوٹیاں یا دو نشیب برابر نہیں ہیں۔یہاں شرح ساکن موج کی قیمت اس صورت مطلب رکھتی ہے جب اسے ناپنے کا مقام یعنی z بھی ساتھ بتلایا جائے۔ایسی صورت میں انعکاسی شرح اور تضعیفی مستقل زیادہ کار آمد معلومات ہیں۔

اگرچہ مندرجہ بالا مثال زیادہ انتہا درجے کا تھا لیکن یہ بھی نہیں بھولنا چاہئے کہ حقیقت میں کامل ترسیلی تار بھی نہیں پائے جاتے۔حقیقت میں شرح ساکن موج ہر صورت سرحد سے فاصلے پر منحصر ہو گی اور اس کا استعمال اسی وقت ممکن ہو گا جب ہماری دلچسپی کے خطے میں اس کی قیمت زیادہ تبدیل نہ ہو۔

آئیں دوبارہ پہلا خطہ کامل ذو برق لیتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح حاصل کریں۔لامحدود حجم میں آزاد موج کی صورت میں یہ شرح $\mp\eta_1$ تھی جہاں منفی قیمت بڑھتے z جانب حرکت کی صورت میں ہوتی ہے۔انعکاسی موج کی موجودگی میں برقی اور مقناطیسی میدان صفر بھی ممکن ہیں لہٰذا ان کی شرح صفر سے لامحدود قیمت کی ہو سکتی ہے۔سرحد سے $z = -l$ فاصلے پر میدان

$$E_{xs1} = \left(e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}\right) E_{x10}^{+}$$
$$H_{ys1} = \left(e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}\right) \frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1}$$

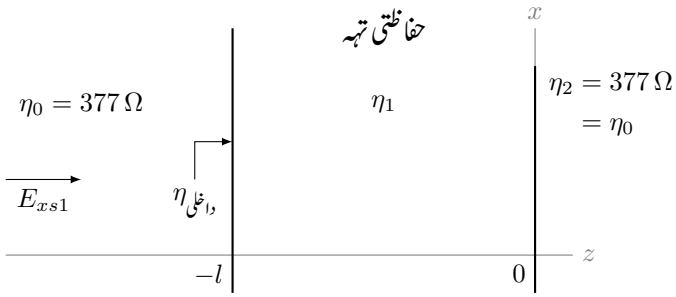
ہیں۔ان کی شرح کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے اور $\eta_{\text{داخلی}}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\eta_{\text{داخلی}} = \left.\frac{E_{xs1}}{H_{ys1}}\right|_{z=-l} = \eta_1 \frac{e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}}{e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}}$$

اس میں $\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ پر کرتے ہوئے اور یولر مماثل[64] استعمال کرتے ہوئے

$$\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1 \frac{(\eta_2 + \eta_1)(\cos\beta_1 l + j\sin\beta_1 l) + (\eta_2 - \eta_1)(\cos\beta_1 l - j\sin\beta_1 l)}{(\eta_2 + \eta_1)(\cos\beta_1 l + j\sin\beta_1 l) - (\eta_2 - \eta_1)(\cos\beta_1 l - j\sin\beta_1 l)}$$

[64] $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$



شکل 10.10: ریڈار اینٹینا پر ایسی شفاف حفاظتی تہہ چڑھائی جاتی ہے جو برقی و مقناطیسی امواج کو نہیں گھٹاتی۔

حاصل ہوتا ہے جسے باآسانی یوں

$$\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l} \tag{10.93}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

جب η_2 اور η_1 برابر ہوں تب داخلی قدرتی رکاوٹ $\eta_{\text{داخلی}}$ پہلے خطے کی قدرتی رکاوٹ η_1 کے برابر ہوتی ہے۔ایسی صورت میں انعکاس پیدا نہیں ہوتی اور ترسیلی نظام ہم رکاوٹی[65] کہلاتا ہے۔ہم رکاوٹی نظام میں انعکاس کے غیر موجودگی کی بنا توانائی ایک ہی سمت میں منتقل ہوتی ہے۔اگر دوسرا خطہ کامل موصل ہو تب $\eta_2 = 0$ ہو گا۔ایسی صورت میں

$$\eta_{\text{داخلی}} = j\eta_1 \tan \beta_1 l \quad (\eta_2 = 0) \tag{10.94}$$

ہو گا لہٰذا ان مقامات پر جہاں $E_{xs1} = 0$ ہو، یعنی جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو، داخلی قدرتی رکاوٹ صفر کے برابر ہو گی جبکہ ان مقامات پر جہاں $H_{ys1} = 0$ ہو وہاں داخلی قدرتی رکاوٹ لامحدود ہو گی۔

مساوات 10.93 ترسیلی نظام پر غور کرنے کے لئے انتہائی اہمیت کا حامل ہے۔

اس باب کے آخر میں ریڈار اینٹینا کو موسمی اثرات سے بچانے کی خاطر استعمال کئے جانے والی ایسی تہہ کی بات کرتے ہیں جو ریڈار کے شعاعوں کے لئے بالکل شفاف ثابت ہوتی ہے۔یہ تہہ عموماً اینٹینا پر گنبد کی شکل میں ہوتی ہے۔شکل 10.10 میں ریڈار اینٹینا $z = -l$ کے بائیں جانب خلاء میں ہے جبکہ $z = 0$ تا $z = -l$ خطے میں حفاظتی تہہ ہے۔یوں $z = 0$ کے دائیں جانب خلاء ہے جس میں ریڈار اشارات بھیجتا ہے۔ خلاء کی قدرتی رکاوٹ $377\,\Omega$ ہوتی ہے۔ذو برق کی بنی حفاظتی تہہ کی موٹائی زیادہ نہیں رکھی جاتی تا کہ اس میں طاقت کا ضیاع کم سے کم ہو۔حفاظتی تہہ سے انعکاس قابل قبول نہیں چونکہ اس طرح ریڈار کے امواج واپس اینٹینا کی طرف لوٹیں گے۔ہم چاہتے ہیں کہ اینٹینا، دائیں جانب کے پورے نظام کے لئے ہم رکاوٹی ہو۔ایسا تب ہو گا جب $\eta_{\text{داخلی}} = \eta_2$ ہو یعنی

$$377 = \eta_1 \frac{377 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j377 \tan \beta_1 l}$$

یا

$$j377^2 \tan \beta_1 l = j\eta_1^2 \tan \beta_1 l$$

[65] matched

اب تمام غیر مقناطیسی اشیاء کی $\eta_1 < 377$ ہے لہٰذا اس مساوات پر پورا صرف اس صورت اترا جا سکتا ہے جب $\beta_1 l = n\pi$ ہو۔کم سے کم موٹائی یوں $n = 1$ کی صورت میں $l = \frac{\pi}{\beta_1}$ یعنی $l = \frac{\lambda_1}{2}$ حاصل ہوتی ہے۔اگر ریڈار 10 GHz کی شعاعیں پیدا کرتا ہو تب ہم حفاظتی تہہ کو کم ضیاع اور ہلکے وزن کے ایسے پلاسٹک سے بنا سکتے ہیں جس کا $\epsilon_R = 2.25$ ہے۔ہمیں تہہ کی موٹائی

$$l = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{v_1}{2f_1} = \frac{3 \times 10^8}{2\sqrt{2.25} \times 10^{10}} = 1\,\text{cm}$$

رکھنی ہو گی۔

اگر 10 GHz پر چلنے والے ریڈار پر چڑھائی حفاظتی تہہ کی موٹائی 0.5 cm کر دی جائے تب $\beta_1 = 314.2$ اور $\eta_1 = 251.33$ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\eta_{\text{داخلی}} &= 251.33 \times \frac{377 + j251.33\tan(314.2 \times 0.005)}{251.33 + j377\tan(314.2 \times 0.005)}\\ &\approx 167.6\,\Omega\end{aligned}$$

ہو گی۔یوں شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{167.6 - 377}{167.6 + 377} = -0.3845$$

ہو گا اور انعکاسی طاقت کی فی صد شرح

$$\frac{\frac{\left(E_{x10}^{-}\right)^2}{2\eta_0}}{\frac{\left(E_{x10}^{+}\right)^2}{2\eta_0}} \times 100 = |\Gamma|^2 \times 100 = 14.78\,\%$$

ہو گی۔

مشق 10.7: دو خطے آپس میں $z = 0$ پر ملتے ہیں۔سرحد کے بائیں جانب پہلا خطہ ہے جس کے مستقل $\epsilon_{R1} = 5$ ، $\mu_{R1} = 1$ اور $\sigma_1 = 0$ ہیں۔سرحد کے دوسری جانب مستقل $\epsilon_{R2} = 2$ ، $\mu_{R2} = 10$ اور $\sigma_2 = 0$ ہیں۔ پہلے خطے میں s حاصل کریں۔دوسرے خطے میں s حاصل کریں اور آخر میں $z = -0.6\,\text{cm}$ پر $\eta_{\text{داخلی}}$ حاصل کریں۔

جوابات: 5 ، 1 اور $86.9\underline{/-61.8^\circ}$

باب 11

ترسیلی تار

ترسیلی تار ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک توانائی اور اشارات منتقل کرتے ہیں۔بالکل سادہ صورت میں ترسیلی تار منبع طاقت کو برقی بار کے ساتھ منسلک کرتا ہے۔یہ مرسل (ٹرانسمٹر)[1] اور اینٹینا[2] یا پھر ڈیم میں نسب جنریٹر اور اس سے دور کسی شہر کا بار ہو سکتے ہیں۔

مستوی برقی و مقناطیسی امواج عرضی امواج ہیں۔ترسیلی تار پر بھی عرضی امواج ہی پائی جاتی ہیں۔ہم دیکھیں گے کہ اس مشابہت کی بنا پر برقی و مقناطیسی امواج کے لئے حاصل کردہ مساوات ترسیلی تار کے لئے بھی قابل استعمال ہوں گے البتہ ترسیلی نظام میں برقی اور مقناطیسی میدان کے بجائے عموماً برقی دباو اور برقی رو کی استعمال کئے جاتے ہیں۔اسی طرح کثافت طاقت کی جگہ طاقت کی بات کی جاتی ہے۔

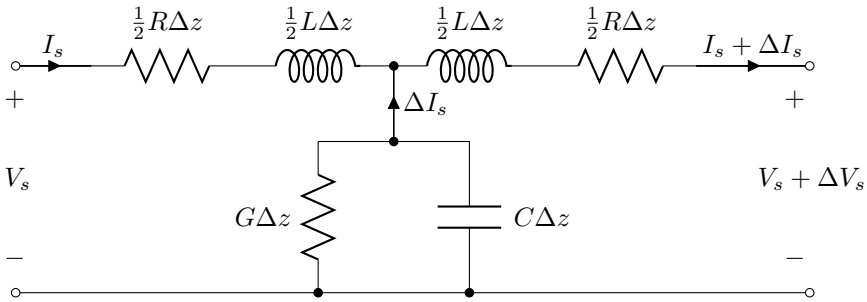
اس باب میں ترسیمی تجزیے پر خاص زور دیا جائے گا جو عرضی برقی و مقناطیسی مستوی امواج کے لئے بھی قابل استعمال ہو گا۔

11.1 ترسیلی تار کے مساوات

ہم ترسیلی تار کی عمومی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم محوری تار کو ذہن میں رکھ کر آگے چلتے ہیں۔یہ تار z محدد پر پڑی ہے۔ہم محوری تار کے اندرونی اور بیرونی موصل تار بہتر موصلیت σ_c رکھتے ہیں۔ان تاروں کے درمیان مادے کے مستقل ϵ، μ (عموماً μ_0) اور σ ہیں۔ ہم محوری تار کی جسامت اور اشارات کی تعدد جانتے ہوئے ہم اکائی لمبائی تار کے مستقل R، L، C اور G حاصل کر سکتے ہیں۔

یہاں بھی ہم موج کی حرکت $\boldsymbol{a}_z$ جانب تصور کرتے ہیں۔یوں تار کے چھوٹی لمبائی Δz کی مزاحمت $R\Delta z$، امالہ $L\Delta z$، کپیسٹنس $C\Delta z$ اور ایصالیت $G\Delta z$ ہوں گے۔شکل 11.1 میں ترسیلی تار کے اس چھوٹے لمبائی کو دکھایا گیا ہے۔چونکہ تار کا یہ چھوٹا ٹکڑا دونوں اطراف سے بالکل ایک جیسے معلوم ہوتا ہے لہٰذا اس کے سلسلہ وار اجزاء کو آدھے آدھے ٹکڑوں میں کرتے ہوئے متوازی

[1] transmitter
[2] antenna



شکل 11.1: یکساں ترسیلی تار کا چھوٹا حصہ۔ متغیرات R، L، C اور G تار کی شکل اور مادوں پر منحصر ہیں۔

اجزاء کے دونوں طرف دکھایا گیا ہے۔ہم متوازی اجزاء کو دو برابر ٹکڑوں میں کرتے ہوئے سلسلہ وار اجزاء کے دونوں جانب بھی جوڑ سکتے تھے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ شکل 11.1 میں بائیں طرف برقی دباو

$$V = V_0 \cos(\omega t - \beta z + \psi)$$

پائی جاتی ہے۔یہ حرکت کرتے موج کی عمومی مساوات ہے۔یولر مماثل استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کو

$$V = \left[V_0 e^{j(\omega t - \beta z + \psi)}\right]_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں $e^{j\omega t}$ اور زیر نوشت میں حقیقی کو پوشیدہ رکھتے ہوئے دوری سمتیہ کی صورت میں یوں لکھا جا سکتا ہے

$$V_s = V_0 e^{j\psi} e^{-\beta z}$$

جہاں مساوات کے بائیں ہاتھ V_s لکھتے ہوئے زیر نوشت میں s یاد دلاتی ہے کہ یہ مساوات دوری سمتیہ کی شکل میں ہے۔

شکل 11.1 کے گرد گھومتے ہوئے کرچاف کے برقی دباو کے قانون سے

$$V_s = \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2}\right) I_s + \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2}\right)(I_s + \Delta I_s) + V_s + \Delta V_s$$

یا

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta z} = -\left(R + j\omega L\right) I_s - \frac{1}{2}\left(R + j\omega L\right)\Delta I_s$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر Δz کو صفر کے قریب تر کیا جائے تب ΔI_s بھی صفر کے قریب تر ہو گا۔یوں $\Delta z \to 0$ کی صورت میں اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔یوں اسے

$$\frac{\mathrm{d}V_s}{\mathrm{d}z} = -\left(R + j\omega L\right) I_s \tag{11.1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

متوازی اجزاء پر برقی دباو

$$V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2}\right) I_s$$

ہے جسے استعمال کرتے ہوئے شکل کو دیکھ کر متوازی اجزاء میں تفرقی رو کے لئے

$$-\Delta I_s = \left[V_s - \left(\frac{R\Delta z}{2} + j\frac{\omega L\Delta z}{2}\right) I_s\right] \left(G\Delta z + j\omega C\Delta z\right)$$

یا

$$\frac{\Delta I_s}{\Delta z} = -\left(G + j\omega C\right) V_s + \frac{1}{2}\left(R + j\omega L\right)\left(G + j\omega C\right) I_s \Delta z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر $\Delta z \to 0$ کیا جائے تب اس مساوات کے آخری جزو کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے اور یوں

$$\frac{\mathrm{d}I_s}{\mathrm{d}z} = -\left(G + j\omega C\right) V_s \tag{11.2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں رک کر ذرہ برقی و مقناطیسی امواج کے مساوات کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔میکس ویل کی مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_s = -j\omega\mu \boldsymbol{H}_s$$

میں $\boldsymbol{E}_s = E_{xs}\boldsymbol{a}_\mathrm{x}$ اور $\boldsymbol{H}_{ys} = H_{ys}\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ پر کرنے سے

$$\frac{\mathrm{d}E_{xs}}{\mathrm{d}z} = -j\omega\mu H_{ys} \tag{11.3}$$

ملتا ہے اور اسی طرح

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_s = \left(\sigma + j\omega\epsilon\right) \boldsymbol{E}_s$$

سے

$$\frac{\mathrm{d}H_{ys}}{\mathrm{d}z} = -\left(\sigma + j\omega\epsilon\right) E_{xs} \tag{11.4}$$

ملتا ہے۔

مساوات 11.2 کا مساوات 11.4 کے ساتھ موازنہ کریں۔غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ پہلے مساوات میں I_s کی جگہ H_{ys} لکھنے اور اسی طرح G کی جگہ σ، C کی جگہ ϵ اور V_s کی جگہ E_{xs} لکھتے ہوئے دوسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔دونوں مساوات بہت قریبی مشابہت رکھتے ہیں۔

اسی طرح مساوات 11.1 اور مساوات 11.3 کو دیکھتے ہوئے یہی جوڑے یہاں بھی پائے جاتے ہیں، البتہ یہاں L اور μ کی جوڑی بھی پائی جاتی ہے۔ہاں ظاہری طور پر R کی جوڑی موجود نہیں ہے۔یوں ہم $j\omega\mu$ کی جوڑی $R + j\omega L$ لے سکتے ہیں۔

لامحدود یکساں مستوی امواج اور لامحدود لمبائی کی یکساں ترسیلی تار کے سرحدی شرائط ایک جیسے ہیں۔دونوں میں سرحد پایا ہی نہیں جاتا لہٰذا ہم گزشتہ باب میں حاصل حل

$$E_{xs} = E_{x0}e^{-\gamma z}$$

کی طرز پر اب

$$V_s = V_0 e^{-\gamma z} \tag{11.5}$$

بطور ترسیلی تار کے مساوات کا حل لکھ سکتے ہیں۔یہ برقی دباو کے موج کی مساوات ہے۔یہ موج مثبت z جانب حرکت کر رہی ہے اور $z=0$ پر اس کا حیطہ V_0 ہے۔حرکی مستقل

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

اب

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \tag{11.6}$$

ہو جائے گا۔طول موج اب بھی

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{11.7}$$

ہو گا۔موج کی رفتار اب بھی

$$v = \frac{\omega}{\beta} \tag{11.8}$$

ہے۔

کامل ترسیلی تار طاقت ضائع نہیں کرتا۔ایسی تار کے مستقل $R = G = 0$ ہوتے ہیں لہٰذا

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

اور

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{11.9}$$

ہوں گے۔

اسی طرح مقناطیسی موج

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\gamma z}$$

سے

$$I_s = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma z} \tag{11.10}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ Z_0 کو

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

سے

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \tag{11.11}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

خطہ-1 میں آمدی موج جب خطہ-2 کے سرحد سے ٹکراتی ہے تو اس کا کچھ حصہ بطور انعکاسی موج خطہ-1 میں واپس ہو جاتی ہے۔اس انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح کو شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{E_{x0}^{-}}{E_{x0}^{+}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

کہتے ہیں۔اسی طرح اگر Z_{01} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار پر آمد موج Z_{02} قدرتی رکاوٹ کی ترسیلی تار میں داخل ہونا چاہے تو ان کے سرحد سے انعکاسی موج واپس ہو گی۔ایسی انعکاسی موج اور آمدی موج کی شرح

$$\Gamma = \frac{V_0^{-}}{V_0^{+}} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \tag{11.12}$$

ہو گی۔انعکاسی شرح جانتے ہوئے شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \tag{11.13}$$

لکھی جا سکتی ہے۔آخر میں اگر $z > 0$ پر $\eta = \eta_2$ ہو تب $z = -l$ پر E_{xs} اور H_{ys} کی شرح

$$\eta_{\text{داخلی}} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l}$$

کو داخلی قدرتی رکاوٹ کہتے ہیں۔اس سے $z > 0$ پر Z_{02} کی صورت میں ترسیلی تار کے لئے $z = -l$ پر V_s اور I_s کی شرح، یعنی اس کی داخلی قدرتی رکاوٹ کو

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_{01} \frac{Z_{02} + jZ_{01} \tan \beta_1 l}{Z_{01} + jZ_{02} \tan \beta_1 l} \tag{11.14}$$

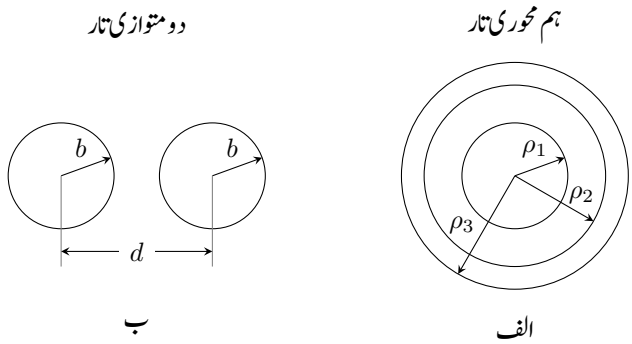
لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 11.1: ایک ترسیلی تار جو $\omega = 5 \times 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ پر کام کرتی ہے کے مستقل $R = 0.15 \frac{\Omega}{\text{m}}$، $L = 0.25 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}}$، $G = 8 \frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$ اور $C = 80 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$ ہیں۔ اس کے α، β، λ، v اور Z_0 حاصل کریں۔

جوابات: $1.57 \frac{\text{Np}}{\text{m}}$، $2.236 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$، $2.81\,\text{m}$، $2.23 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ اور $55.9\underline{/-0.029^\circ}\,\Omega$

11.2 ترسیلی تار کے مستقل

اس حصے میں مختلف اشکال کے ترسیلی تار کے مستقل یکجا کرتے ہیں۔ان میں سے عموماً مستقل کو ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں، بس انہیں ایک جگہ لکھنا باقی ہو گا۔سب سے پہلے ہم محوری تار کے مستقل اکھٹے کرتے ہیں۔



شکل 11.2: ہم محوری ترسیلی تار اور دو متوازی ترسیلی تار۔

11.2.1 ہم محوری تار کے مستقل

شکل 11.2-الف میں ہم محوری تار دکھائی گئی ہے جس میں اندرونی تار کا رداس ρ_1 ہے۔بیرونی تار کا اندرونی رداس ρ_2 اور اس کا بیرونی رداس ρ_3 ہیں۔تاروں کے درمیان ذو برق کے مستقل ϵ، μ اور σ ہیں۔ صفحہ 146 پر مساوات میں تار کی لمبائی $L = 1\,\text{m}$ پر کرنے سے اس کی فی میٹر کپیسٹنس

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{11.15}$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ فی میٹر امالہ صفحہ 254 پر مساوات 8.66 دیتا ہے۔

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{11.16}$$

یہ تار کی بیرونی امالہ ہے۔بلند تعدد پر تار میں برقی رو صرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہٰذا ایسی صورت میں تار کے اندر نہایت کم مقناطیسی بہاو پایا جاتا ہے اور یوں اس کی اندرونی امالہ قابل نظرانداز ہوتی ہے۔کسی بھی ترسیلی تار کے لئے

$$L_{\text{بیرونی}} C = \mu\epsilon \tag{11.17}$$

درست ثابت ہوتا ہے۔یوں دونوں ہم محوری تاروں کے درمیان میں بھری ذو برق کا ϵ اور فی میٹر تار کی کپیسٹنس جانتے ہوئے اندرونی امالہ اس مساوات سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

کم تعدد پر تار کی اندرونی امالہ کو نظرانداز نہیں کیا جا سکتا۔ایسی صورت میں مساوات 8.70

$$L = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi \left(\rho_3^2 - \rho_2^2\right)^2} \left(\rho_3^4 \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2^4}{4} - \frac{3\rho_3^4}{4} + \rho_2^2 \rho_3^2\right) \tag{11.18}$$

میں دی گئی فی میٹر تار کی امالہ استعمال کی جائے گی۔یاد رہے کہ یہ امالہ حاصل کرتے ہوئے فرض کیا گیا تھا کہ برقی رو یکساں موصل تار میں گزرتی ہے۔اب ہم جانتے ہیں کہ بلند تعدد پر رو صرف گہرائی جلد تک محدود رہتی ہے لہٰذا کم تعدد پر ہی اس امالہ کو استعمال کیا جا سکتا ہے۔

آئیں ایسی تعدد پر بھی صورت حال دیکھیں جب اندرونی امالہ کی قیمت قابل نظرانداز نہ ہو لیکن گہرائی جلد کے اثر کو بھی نظرانداز نہیں کیا جا سکتا۔ گہرائی جلد کے اثر کی وجہ سے مساوات 11.18 قابل قبول نہیں ہو گی۔اب فرض کرتے ہیں کہ گہرائی جلد δ اندرونی تار کے رداس ρ_1 سے بہت کم ہے۔یوں اندرونی تار کے بیرونی باریک تہہ میں برقی رو پائی جائے گی۔برقی رو $\boldsymbol{a}_z$ سمت میں ہے اور چونکہ $\boldsymbol{J}_s = \sigma_c \boldsymbol{E}_s$ ہوتا ہے لہٰذا تار کی سطح پر $\boldsymbol{E}_s$ کا مماثل جزو بھی $\boldsymbol{a}_x$ سمت میں ہو گا۔موصل تار کی موصلیت کو یہاں σ_c لکھا گیا ہے۔ مقناطیسی میدان کی شدت تار کی سطح پر

$$H_{\phi s} = \frac{I_s}{2\pi\rho_1} \tag{11.19}$$

ہو گی۔اب تار کی سطح پر E_{zs} اور H_{ys} کی شرح، مستوی برقی و مقناطیسی موج کی قدرتی رکاوٹ ہو گی۔اگرچہ ہم نلکی اشکال کی بات کر رہے ہیں لیکن $\delta \ll \rho_1$ کی بنا پر برقی رو گزارتے باریک تہہ کو δ موٹائی اور $2\pi\rho_1$ چوڑائی کا موصل تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں صفحہ 303 پر مساوات 10.65 سے

$$|_{\rho_1} \frac{E_{zs}}{H_{ys}} = \frac{1+j}{\sigma_c \delta}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں مساوات 11.19 پر کرنے سے

$$\left.\frac{E_{zs}}{I_s}\right|_{\rho_1} = \frac{1+j}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ E_{zs} دراصل فی میٹر برقی دباو ہے لہٰذا مندرجہ بالا شرح فی میٹر قدرتی رکاوٹ

$$Z = \left.\frac{E_{zs}}{I_s}\right|_{\rho_1} = R + j\omega L = \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c} + j\frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c} \tag{11.20}$$

کے برابر ہے۔یہ امالہ تار کی اندرونی امالہ ہے جو تار کے موصلیت σ_c پر منحصر ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کامل موصل کی صورت میں قدرتی رکاوٹ صفر ہو گی۔یوں اندرونی تار کی اندرونی امالہ

$$L_{\rho_1,\text{اندرونی}} = \frac{1}{2\pi\rho_1\delta\sigma_c\omega}$$

ہو گی۔صفحہ 302 پر مساوات 10.62 کو $\sigma_c = \frac{1}{\pi f \mu \delta^2}$ لکھتے ہوئے اس میں پر کرنے سے

$$L_{\rho_1,\text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_1} \quad (\delta \ll \rho_1) \tag{11.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طریقہ کار سے بیرونی تار کے لئے

$$L_{\rho_2,\text{اندرونی}} = \frac{\mu\delta}{4\pi\rho_2} \quad (\delta \ll \rho_3 - \rho_2) \tag{11.22}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں بلند تعدد پر ہم محوری تار کی کل امالہ

$$L_{\text{بلند تعدد}} = \frac{\mu}{2\pi}\left[\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\sigma_c}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\right] \quad (\delta \ll \rho_1,\ \delta \ll \rho_3 - \rho_2) \tag{11.23}$$

ہو گا۔مساوات 11.20 بلند تعدد پر قدرتی رکاوٹ کا مزاحمتی حصہ یعنی فی میٹر مزاحمت بھی دیتا ہے جس سے اندرونی اور بیرونی تاروں کا سلسلہ وار مجموعہ

$$R = \frac{1}{2\pi\delta\sigma_c}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \quad (\delta \ll \rho_1,\ \delta \ll \rho_3 - \rho_2) \tag{11.24}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مزاحمت کے ساتھ شعاعی اخراج سے پیدا مزاحمتی جزو بھی شامل کیا جا سکتا ہے۔بے پناہ[3] تار یا ہم محوری تار کے کھلے سر سے شعاعی اخراج ہوتا ہے۔

ایسی تعدد جس پر گہرائی جلد کی قیمت رداس سے بہت کم نہ ہو حل کرتے ہوئے [4] استعمال ہوتے ہیں۔یہاں انہیں حل نہیں کیا جائے گا۔

قدرتی رکاوٹ کو عموماً بیرونی امالہ اور کپیسٹنس کی صورت میں

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{بیرونی}}}{C}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{11.25}$$

لکھا جاتا ہے۔

اندرونی اور بیرونی تار کے مابین ذو برق میں سے گزرتی یک سمتی برقی رو $I = GV$ سے حاصل ہوتی ہے۔اندرونی تار پر ρ_L اور بیرونی تار پر $-\rho_L$ کثافت لکیری چارج تصور کرتے ہوئے تاروں کے مابین برقی دباو صفحہ 96 پر مساوات 4.18

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

دیتی ہے۔تاروں کے درمیان ذو برق میں میدان مساوات 4.17

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

دیتی ہے۔ ذو برق کی موصلیت σ لکھتے ہوئے، صفحہ 122 پر اوہم کے قانون کی نقطہ شکل یعنی مساوات 5.11 کی مدد سے یوں رداس ρ پر کثافت برقی رو

$$J_\rho = \sigma E_\rho = \frac{\sigma\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}$$

لکھی جائے گی۔اندرونی تار کے گرد رداس ρ پر L لمبائی کی نلکی سطح کا رقبہ $2\pi\rho L$ ہو گا۔ایسی اکائی لمبائی کی سطح کے رقبہ $2\pi\rho$ سے کل

$$I = J_\rho 2\pi\rho = \frac{\sigma\rho_L}{\epsilon}$$

برقی رو گزرے گی۔یوں

$$G = \frac{I}{V} = \frac{2\pi\sigma}{\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{11.26}$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہاں G کی قیمت C کے قیمت سے حاصل کرنا دیکھتے ہیں۔ایک تار سے دوسرے تار تک $\boldsymbol{E}$ کی لکیری تکمل سے برقی دباو V حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 127 پر مساوات 5.18 کے تحت کسی بھی موصل پر سطحی کثافت چارج، سطح کے عمودی برقی بہاو کے برابر ہوتی ہے، یعنی $\rho_S = D_{\text{عمودی}}$۔یوں تار پر کل چارج

$$Q = \int_S \rho_S\,\mathrm{d}S = \epsilon\int_S E_{\text{عمودی}}\,\mathrm{d}S$$

---

[3] unshielded
[4] Bessel functions

لکھی جا سکتی ہے جہاں S تار کا سطحی رقبہ ہے اور $D = \epsilon E$ لکھا گیا گا۔یوں

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon \int_S E_{\text{عمودی}}\, \mathrm{d}S}{V} \tag{11.27}$$

ہو گا۔اب موصل کے سطح پر $E_{\text{عمودی}}$ جانتے ہوئے یہاں کثافت برقی رو $J = \sigma E_{\text{عمودی}}$ لکھی جا سکتی ہے لہٰذا تار کے سطح سے خارج کل برقی رو

$$I = \sigma \int_S E_{\text{عمودی}}\, \mathrm{d}S$$

ہو گی۔یوں دو تاروں کے مابین ایصالیت

$$G = \frac{I}{V} = \frac{\sigma \int_S E_{\text{عمودی}}\, \mathrm{d}S}{V} \tag{11.28}$$

ہو گی۔مساوات 11.27 اور مساوات 11.28 کو دیکھ کر

$$G = \frac{\sigma}{\epsilon} C \tag{11.29}$$

لکھا جا سکتا ہے جو کسی بھی ترسیلی تار کے لئے درست ہے

مشق 11.2: ایک ہم محوری تار جس کے $\rho_1 = 1\,\mathrm{mm}$، $\rho_2 = 3.49\,\mathrm{mm}$ اور $\sigma_c = 3.82 \times 10^7\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں کے ذو برق کے مستقل $\mu_R = 1$، $\epsilon_R = 2.25$ اور $\sigma = 10\,\frac{\mu\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ ہیں۔ اس کا فی میٹر کپیسٹنس، بیرونی اور اندرونی امالہ حاصل کریں۔ترسیلی تار کے α، β اور Z_0 بھی حاصل کریں۔

جوابات: $0.1\,\frac{\mathrm{nF}}{\mathrm{m}}$، $0.25\,\frac{\mu\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$، $1.29\,\frac{\mathrm{nH}}{\mathrm{m}}$، $0.014\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$، $15.1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$ اور $50\angle 0.055^\circ\,\Omega$

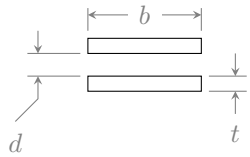
11.2.2 دو متوازی تار کے مستقل

شکل 11.2-ب میں دو متوازی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے۔تار کا رداس b، تاروں کے مابین فاصلہ d جبکہ تار کی موصلیت σ_c ہے۔تاروں کے گرد ذو برق کے مستقل ϵ، μ اور σ ہیں۔ اس تار کی کپیسٹنس صفحہ 152 پر مساوات 5.75 کی نصف ہو گی۔اس کی وجہ وہیں پر مساوات کے نیچے سمجھائی گئی ہے۔یوں فی میٹر تار کی کپیسٹنس

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}\frac{d}{2b}} \tag{11.30}$$

ہو گی۔اگر $b \ll d$ ہو تب مساوات 5.76 سے

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln\frac{d}{b}} \quad (b \ll d)$$



شکل 11.3: سطح مستوی ترسیلی تار۔

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 11.17 سے تار کی فی میٹر بیرونی امالہ

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\frac{d}{2b}$$

یا

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu}{\pi}\ln\frac{d}{b} \quad (b \ll d)$$

لکھی جا سکتی ہے جبکہ بلند تعدد پر فی میٹر کل امالہ

$$L_{\text{بلند تعدد}} = \frac{\mu}{\pi}\left(\frac{\delta}{2b} + \cosh^{-1}\frac{d}{2b}\right) \quad (\delta \ll b) \tag{11.31}$$

ہے۔تار کی بیرونی δ تہہ برقی رو گزارتی ہے۔اس تہہ کا رقبہ عمودی تراش $S = 2\pi b\delta$ ہے لہٰذا فی میٹر مزاحمت

$$R = \frac{l}{\sigma_c S} = \frac{1}{\pi b \delta \sigma_c} \tag{11.32}$$

ہو گی جہاں دونوں تاروں کی مزاحمت سلسلہ وار جڑے ہیں۔مساوات 11.29 سے فی میٹر تار کی ایصالیت

$$G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}\frac{d}{2b}} \tag{11.33}$$

حاصل ہوتی ہے۔

بیرونی امالہ اور کپیسٹنس استعمال کرتے ہوئے قدرتی مزاحمت

$$Z_0 = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\cosh^{-1}\frac{d}{2b} \tag{11.34}$$

حاصل ہوتا ہے۔

11.2.3 سطح مستوی ترسیلی تار

شکل 11.3 میں سطح مستوی ترسیلی تار[5] دکھایا گیا ہے جس میں b چوڑائی اور t موٹائی کے دو متوازی موصل چادر دکھائے گئے ہیں جن کے مابین فاصلہ d ہے۔موصل چادر کی موصلیت σ_c جبکہ اردگرد کے ذو برق کے مستقل ϵ، μ اور σ ہیں۔

[5] stripline

اگر $b \gg d$ ہو تب ان چادروں کی فی میٹر کپیسٹنس

$$C = \frac{\epsilon \text{رقبہ}}{\text{فاصلہ}} = \frac{\epsilon b}{d} \tag{11.35}$$

ہو گی۔یوں مساوات 11.17 سے فی میٹر بیرونی امالہ

$$L_{\text{بیرونی}} = \frac{\mu\epsilon}{C} = \frac{\mu d}{b} \tag{11.36}$$

ہو گی۔امید کی جاتی ہے کہ آپ گہرائی جلد استعمال کرتے ہوئے اندرونی امالہ حاصل کر سکتے ہیں۔یوں کل امالہ

$$L = \frac{\mu d}{b} + \frac{2}{\sigma_c \delta b w} = \frac{\mu}{b}(d+\delta) \quad (\delta \ll t) \tag{11.37}$$

ہو گی جہاں گہرائی جلد کو چادر کی موٹائی سے بہت کم تصور کیا گیا ہے۔

بلند تعدد پر برقی رو چادروں کے آمنے سامنے سطحوں پر گہرائی جلد تک محدود ہو گی۔یوں برقی رو رقبہ $b\delta$ سے گزرے گی جس سے ایک تار کے اکائی لمبائی کی مزاحمت $\frac{1}{\sigma_c b\delta}$ حاصل ہوتی ہے۔یوں اکائی لمبی تار کے دونوں حصوں کی سلسلہ وار جڑی کل مزاحمت

$$R = \frac{2}{\sigma_c b\delta} \quad (\delta \ll t) \tag{11.38}$$

ہو گی۔

مساوات 11.29 سے

$$G = \frac{\sigma b}{d} \tag{11.39}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

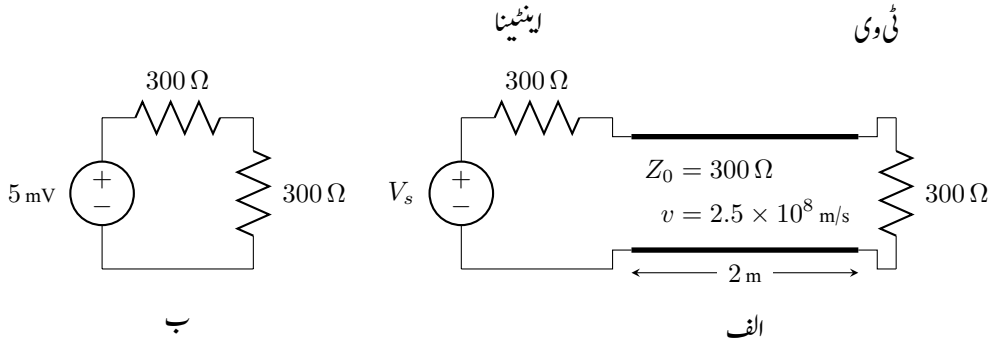
ان معلومات سے سطح مستوی ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{بیرونی}}}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{d}{b} \tag{11.40}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

مشق 11.3: مندرجہ بالا تینوں اقسام کے ترسیلی تار 400 MHz پر کام کر رہے ہیں۔ان میں طاقت کے ضیاع کو نظرانداز کرتے ہوئے تمام کے لئے λ اور Γ حاصل کریں۔ہم محوری تار کا $\rho_1 = 0.5\,\text{mm}$، $\rho_2 = 2.8\,\text{mm}$، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 3.1$ ہیں۔ متوازی تار کے $b = 0.5\,\text{mm}$، $d = 9\,\text{mm}$، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 5$ ہیں۔ مستوی سطح کے $d = 0.2\,\text{mm}$، $b = 5\,\text{mm}$، $\mu_R = 1$ اور $\epsilon_R = 2.2$ ہیں۔

جوابات: 42.6 cm، 0.26، 33.5 cm، −0.215، 50.6 cm، 0.816



شکل 11.4: ترسیلی تار اینٹینا کو ٹی وی سے جوڑ رہی ہے۔

11.3 ترسیلی تار کے چند مثال

اس حصے میں گزشتہ حصوں کے نتائج استعمال کرتے ہوئے چند مثال کرتے ہیں۔یہاں تمام ترسیلی تاروں کو بے ضیاع تار تصور کیا جائے گا۔

شروع دو متوازی ترسیلی تار سے کرتے ہیں جس کی قدرتی رکاوٹ $300\,\Omega$ ہے۔ ایسی تار ٹی وی[6] کے اینٹینا اور ٹی وی کے مابین لگائی جاتی ہے۔شکل 11.4-الف میں اس طرح جڑے ترسیلی نظام کو دکھایا گیا ہے۔اینٹینا کا تھونن[7] مساوی دور استعمال کیا گیا ہے جو ایک عدد منبع برقی دباو V_s اور اس کے ساتھ سلسلہ وار جڑی $300\,\Omega$ کی مزاحمت پر مشتمل ہے۔ترسیلی تار ٹی وی کے برقیاتی دور کے بالکل شروع میں نسب ابتدائی ایمپلی فائر سے جڑتی ہے جس کا داخلی مزاحمت $300\,\Omega$ ہے۔ٹی وی کو اسی مزاحمت سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس مثال میں ٹی وی بطور برقی بار کردار ادا کرتا ہے۔ٹی وی اسٹیشن سے خارج $100\,\text{MHz}$ کے برقی و مقناطیسی امواج اس اینٹینا میں $5\,\text{mV}$ کا اشارہ پیدا کرتی ہیں۔ترسیلی تار کے مستقل ایسے ہیں کہ اس میں اشارات کی رفتار $2.5 \times 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ہے۔

چونکہ برقی بار کی مزاحمت اور ترسیلی تار کی قدرتی مزاحمت برابر ہیں لہٰذا ترسیلی تار اور برقی بار ہمہ رکاوٹ ہیں۔یوں برقی بار پر انعکاس نہیں پایا جائے گا لہٰذا شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{300 - 300}{300 + 300} = 0$$

صفر اور شرح ساکن موج

$$s = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

ایک کے برابر ہوں گے۔اشارے کے تعدد پر ترسیلی تار میں طول موج

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2.5 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 2.5\,\text{m}$$

اور زاویائی مستقل

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2.5} = 0.8\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

---

[6] TV, television
[7] Thevenin

ہیں۔ترسیلی تار کی برقی لمبائی

$$\beta l = 0.8\pi \times 2 = 1.6\pi \,\text{rad}$$

یا 288° ہے جسے 0.8 طول موج بھی کہا جاتا ہے۔

شکل 11.4-ب میں داخلی جانب کا صورت حال دکھایا گیا ہے۔داخلی جانب چونکہ اینٹینا کی مزاحمت $300\,\Omega$ ہے اور ترسیلی تار کی قدرتی رکاوٹ بھی $300\,\Omega$ ہے لہٰذا اینٹینا اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں۔اینٹینا میں پیدا $5\,\text{mV}$ کا اشارہ ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ پر

$$\frac{5 \times 10^{-3} \times 300}{300 + 300} = 2.5\,\text{mV}$$

پیدا کرے گا۔اینٹینا اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ ہیں لہٰذا منبع طاقت V_s ترسیلی تار میں زیادہ سے زیادہ طاقت بھیجے گا۔ترسیلی تار کے داخلی جانب پیدا $2.5\,\text{mV}$ کا اشارہ تار میں سے گزرتے ہوئے برقی بار تک پہنچے گا البتہ یہ داخلی اشارے سے 1.6π ریڈیئن پیچھے ہو گا۔یوں اگر ترسیلی تار کا داخلی اشارہ

$$V_{\text{داخلی}} = 2.5 \cos 2\pi 10^8 t \quad \text{mV}$$

ہو تب برقی بار پر اشارہ

$$V_{\text{بار}} = 2.5 \cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \text{mV}$$

ہو گا۔داخلی برقی رو

$$I_{\text{داخلی}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{300} = 8.33 \cos 2\pi 10^8 t \quad \mu\text{A}$$

اور برقی بار پر برقی رو

$$I_{\text{بار}} = \frac{V_{\text{داخلی}}}{300} = 8.33 \cos(2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad \mu\text{A}$$

ہوں گے۔چونکہ ترسیلی تار بے ضیاع تار ہے لہٰذا جو طاقت اسے داخلی جانب فراہم کی جاتی ہے وہی طاقت خارجی جانب برقی بار کو مہیا کر دی جاتی ہے۔

$$P_{\text{داخلی}} = P_{\text{بار}} = V_{\text{موثر}} I_{\text{موثر}} = \frac{2.5 \times 10^{-3}}{\sqrt{2}} \times \frac{8.33 \times 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 10.41\,\text{nW}$$

مزاحمتی بار کی طاقت کا حساب لگاتے وقت یاد رہے کہ $P = VI$ میں برقی دباو اور برقی رو کے موثر[8] قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔سائن نما موج کی موثر قیمت موج کی چوٹی تقسیم $\sqrt{2}$ کے برابر ہوتی ہے۔

اب پہلے ٹی وی کے متوازی دوسرا ٹی وی نسب کرنے کے اثرات پر غور کرتے ہیں۔دوسرے ٹی وی کا داخلی مزاحمت بھی $300\,\Omega$ ہے۔یوں اب ترسیلی تار کے خارجی جانب کل $150\,\Omega$ کا بار پایا جاتا ہے۔اس طرح شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{150 - 300}{150 = 300} = -\frac{1}{3}$$

[8] RMS, effective

یا

$$\Gamma = \frac{1}{3}\underline{/\pi} \tag{11.41}$$

حاصل ہوتی ہے اور شرح ساکن موج

$$s = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$$

ہوں گے۔ترسیلی تار کی داخلی مزاحمت اب $300\,\Omega$ کے بجائے

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = 300 \frac{150 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j150 \tan 288^\circ} \\ &= 509.7\underline{/-23.79^\circ} = 466.39 - j205.6 \quad \Omega \end{aligned}$$

ہو گی جو کپیسٹر کی خاصیت رکھتی ہے۔کپیسٹر کی خاصیت کا مطلب یہ ہے کہ ترسیلی تار کے برقی میدان میں مقناطیسی میدان سے زیادہ توانائی ذخیرہ ہے۔داخلی رو

$$I_{s,\text{داخلی}} = \frac{0.005}{300 + 466.39 - j205.6} = 6.3013\underline{/15.017^\circ} \quad \mu\text{A}$$

ہے اور یوں ترسیلی تار کو داخلی جانب

$$P_{\text{داخلی}} = \frac{1}{2}\left(6.3013 \times 10^{-6}\right)^2 \times 466.39 = 9.2593\,\text{nW}$$

طاقت فراہم کی جا رہی ہے۔بے ضیاع تار تمام کی تمام طاقت خارجی جانب منتقل کرے گا لہٰذا $150\,\Omega$ کے بار کو $9.2593\,\text{nW}$ حاصل ہو گا جو گزشتہ جواب یعنی $10.41\,\text{nW}$ سے قدر کم ہے۔یہ کمی انعکاس کی وجہ سے پیدا ہوئی۔ کہانی یہاں ختم نہیں ہوتی۔یہ طاقت دونوں ٹی وی میں برابر تقسیم ہو گا لہٰذا ہر ٹی وی کو صرف $4.6297\,\text{nW}$ طاقت مہیا ہو گا۔چونکہ ایک ٹی وی $300\,\Omega$ مزاحمت رکھتا ہے لہٰذا ٹی وی پر پیدا برقی دباو

$$4.6297 \times 10^{-9} = \frac{\left|V_{s,\text{بار}}\right|^2}{2 \times 300}$$

یعنی

$$\left|V_{s,\text{بار}}\right| = 1.666\,67\,\text{mV}$$

ہو گا۔یہ قیمت $2.5\,\text{mV}$ سے بہت کم ہے جو اکیلے ٹی وی پر پیدا ہوتی ہے۔

آئیں ترسیلی تار پر برقی دباو کی چوٹی، نشیب اور ان کے مقامات کے علاوہ دیگر معلومات بھی حاصل کریں۔اگر ہم برقی دباو کے معلومات حاصل کر سکیں تو ظاہر ہے کہ برقی رو کے معلومات بھی حاصل کر پائیں گے۔گزشتہ باب میں مستوی امواج کے لئے یہی معلومات حاصل کی گئیں تھیں۔ وہاں استعمال کئے گئے ترکیب یہاں بھی کارآمد ثابت ہوں گے۔برقی دباو موج کے چوٹی کے مقامات مساوات 10.87

$$-\beta_1 z_{\text{بلند تر}} = \frac{\phi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots)$$

دیتا ہے۔اس میں $\beta = 0.8\pi$ اور $\phi = \pi$ پر کرنے سے

$$z_{\text{بلند تر}} = \frac{1}{-0.8\pi}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$
$$= -1.25\left(\frac{1}{2} + n\right)$$

حاصل ہوتا ہے جس میں $n = 0$ اور $n = 1$ پر کرنے سے

$$z_{\text{بلند تر}} = -0.625\,\text{m} \quad \text{اور} \quad -1.875\,\text{m}$$

حاصل ہوتے ہیں جو درست جوابات ہیں۔اگر $n = 2$ پر کیا جائے تو $z_{\text{بلند تر}} = -3.125\,\text{m}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ تار کی کل لمبائی صرف دو میٹر ہے لہٰذا اس جواب کو رد کیا جاتا ہے۔اسی طرح $n = -1$ پر کرنے سے $z_{\text{بلند تر}} = 0.625\,\text{m}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ تار منفی z محدد پر پائی جاتی ہے لہٰذا اس جواب کو بھی رد کیا جاتا ہے۔

موج کے چوٹی سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر نشیب پائے جاتے ہیں، لہٰذا ان کے مقامات

$$z_{\text{کمتر}} = 0\,\text{m} \quad \text{اور} \quad -1.25\,\text{m}$$

ہوں گے۔آپ نے دیکھا کہ سرحد پر برقی دباو کا نشیب پایا جاتا ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ حقیقی Z_0 اور Z_L کی صورت میں اگر $Z_0 < Z_L$ ہو تب سرحد پر موج کا نشیب ہی پایا جاتا ہے۔

چونکہ سرحد پر موج کا نشیب ہے اور ہم جانتے ہیں کہ ٹی وی پر $1.66\,\text{mV}$ ہے لہٰذا دباو کی کمتر قیمت یہی ہے اور $s = 2$ سے دباو کی چوٹی اس کے دگنا یعنی $3.32\,\text{mV}$ حاصل ہوتی ہے۔ترسیلی تار کے داخلی سرے پر برقی دباو

$$V_{s,\text{داخلی}} = I_{s,\text{داخلی}} Z_{\text{داخلی}} = \left(6.3013 \times 10^{-6}\underline{/15.017^\circ}\right)\left(509.7\underline{/-23.79^\circ}\right) = 0.00321175\underline{/-8.77^\circ}$$

ہو گی جو تقریباً موج کے چوٹی کے برابر ہے۔ایسا اس لئے ہے کہ سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر چوٹی پائی جاتی ہے جس سے ہر 0.5λ فاصلے پر چوٹی ہو گی لہٰذا سرحد سے $\frac{3\lambda}{4}$ فاصلے پر بھی چوٹی متوقع ہے جو تار کے داخلی سرے کے بہت قریب نقطہ ہے۔آپ ترسیلی تار کی داخلی برقی دباو یوں

$$V_{s,\text{داخلی}} = \frac{Z_{\text{داخلی}} V_s}{Z_{\text{داخلی}} + 300} = \frac{(466.39 - j205.6) \times 0.005}{466.39 - j205.6 + 300} = 0.00321175\underline{/-8.77^\circ}$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

آخر میں داخلی برقی دباو اور بار پر برقی دباو کا زاویائی تعلق دیکھتے ہیں۔اگرچہ ہم دونوں برقی دباو کے قیمتیں حاصل کر چکے ہیں، ان کے زاویائی معلومات ابھی تک نہیں حاصل کی گئیں۔مساوات 10.86 کی مدد سے تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباو

$$V_s = \left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right) V_0^+$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ ہمیں تار کے داخلی سرے پر دباو معلوم ہے لہٰذا اس میں $z = -l$ پر کرنے سے

$$V_{s,\text{داخلی}} = \left(e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}\right) V_0^+$$

حاصل ہوتا ہے جسے V_0^+ کے لئے حل کرتے ہیں

$$V_0^+ = \frac{V_{s,\text{داخلی}}}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}} = \frac{0.00321175\underline{/-8.77^\circ}}{e^{j1.6\pi} - \frac{1}{3}e^{-j1.6\pi}} = 0.0025\underline{/-72^\circ}$$

اور یوں بار یعنی $z = 0$ پر برقی دباو اب حاصل کی جا سکتی ہے

$$V_{s,\text{بار}} = (1+\Gamma)\, V_0^+ = 0.001666\underline{/-72^\circ} = 0.001666\underline{/-288^\circ}$$

یہاں حاصل جواب کی حتمی قیمت اور کچھ دیر پہلے حاصل کی گئی بار پر برقی دباو کی حتمی قیمت برابر ہیں۔تار کے داخلی سرے پر دباو کا زاویہ -8.77° جبکہ تار کے خارجی سرے پر دباو کا زاویہ 72° ہے۔یوں ان کے مابین فرق 80.77° یعنی -279.23° ہے۔انعکاسی موج کی عدم موجودگی میں یہ فرق -288° یعنی تار کی زاویائی لمبائی جتنا ہوتا ہے۔

آخری مثال کے طور پر ہم اس ترسیلی تار کے خارجی سرے پر صرف کپیسٹر $Z_L = -j300\,\Omega$ نسب کر کے دیکھتے ہیں۔کپیسٹر میں توانائی ضائع نہیں ہوتی۔یہ حقیقت شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{-j300 - 300}{-j300 + 300} = -j = 1\underline{/-90^\circ}$$

سے صاف ظاہر ہے جو انعکاسی موج کا حیطہ آمدی موج کے برابر دیتا ہے۔شرح ساکن موج یوں

$$s = \frac{1+|-j|}{1-|-j|} = \infty$$

ہو گا جس سے موج کا نشیب عین صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ

$$Z_{\text{داخلی}} = 300\frac{-j300 + j300\tan 288^\circ}{300 + j(-j300)\tan 288^\circ} = j589$$

ہو گی جو خیالی عدد ہے لہٰذا اسے اوسط طاقت فراہم نہیں کی جا سکتی۔

ترسیلی تار کے مسائل ترسیمی طریقے سے نہایت خوش اسلوبی سے حل ہوتے ہیں۔ان میں سمتھ نقشہ[9] زیادہ اہم ہے۔اگلے حصے میں اسی پر غور کیا جائے گا۔

11.4 ترسیمی تجزیہ، سمتھ نقشہ

سمتھ نقشہ بنیادی طور پر شرح انعکاس

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

کی مساوات پر منحصر ہے۔اس نقشے میں بار بمطابق Z_0 یعنی $\frac{Z_L}{Z_0}$ استعمال کی جاتی ہے جسے

$$z = r + jx = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L + jX_L}{Z_0}$$

[9] Smith chart

لکھا جا سکتا ہے جہاں z کارتیسی محدد کا متغیرہ نہیں بلکہ Z_0 کے مطابقت سے بار کو ظاہر کرتا ہے۔یوں

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1}$$

اور

$$z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \tag{11.42}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔شرح انعکاس کو حقیقی اور خیالی اجزاء

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i$$

کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$r + jx = \frac{1+\Gamma_r + j\Gamma_i}{1-\Gamma_r - j\Gamma_i}$$

کے حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ کرتے ہوئے

$$r = \frac{1-\Gamma_r^2-\Gamma_i^2}{(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2} \tag{11.43}$$

$$x = \frac{2\Gamma_i}{(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2} \tag{11.44}$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں کچھ الجبرا کے بعد

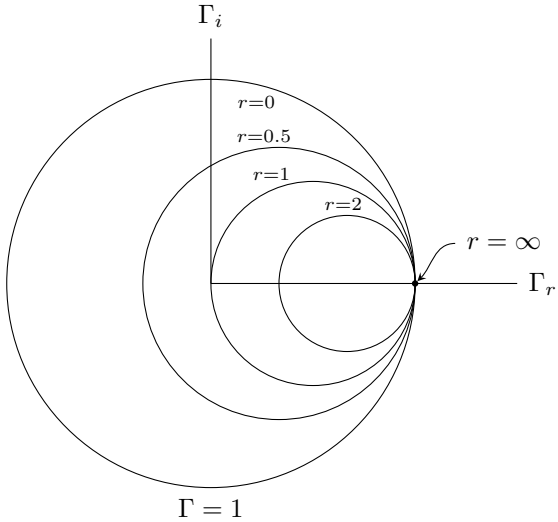
$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \tag{11.45}$$

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{11.46}$$

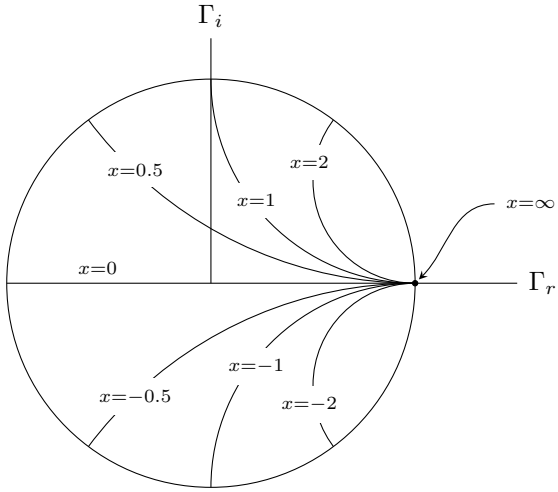
لکھا جا سکتا ہے۔اگر کارتیسی محدد کے متغیرات Γ_r اور Γ_i رکھے جائیں تو مندرجہ بالا دونوں مساوات گول دائروں کے مساوات ہوں گے۔

مساوات 11.45 کے دائروں پر پہلے غور کرتے ہیں۔اگر $r = 0$ ہو تب یہ مساوات اکائی رداس کا دائرہ دیتی ہے جس کا مرکز محدد کے $(0,0)$ پر ہے۔خیالی برقی بار کی صورت میں شرح انعکاس کی حتمی قیمت ایک ہی ہوتی ہے۔اسی طرح $r = \infty$ کی صورت میں دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا مرکز محدد پر $(1,0)$ ہے۔یوں یہ دائرہ صرف اسی نقطے یعنی $\Gamma = 1$ تک محدود ہے۔اب $r = \infty$ سے مراد $Z_L - \infty$ ہے جس سے شرح انعکاس $\Gamma = 1$ ہی حاصل ہوتی ہے۔ایک آخری مثال $r = 1$ کی لیتے ہیں جس سے 0.5 رداس کا دائرہ حاصل ہوتا ہے جس کا مرکز $(0.5,0)$ ہے۔شکل 11.5 میں ان دائروں کے علاوہ $r = 0.5$ اور $r = 2$ سے حاصل دائرے بھی دکھایا گیا ہے۔

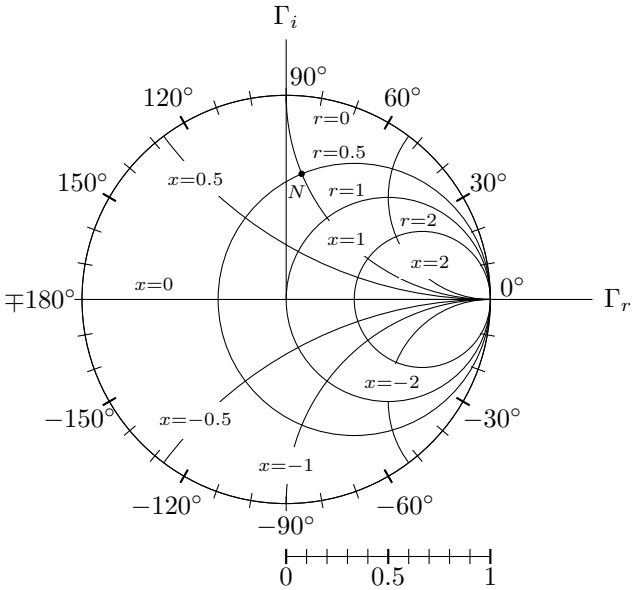
مساوات 11.46 بھی دائرے دیتی ہے البتہ ان دائروں کا رداس $\frac{1}{x}$ اور مراکز $(1, \frac{1}{x})$ ہیں۔لامحدود x کی صورت میں دوبارہ $Z = \infty$ اور $\Gamma = 1 + j0$ ہوں گے۔مساوات 11.46 کے مطابق اس دائرے کا رداس صفر جبکہ اس کا مرکز $(1,0)$ ہے لہٰذا یہ $\Gamma = 1$ کو ہی ظاہر کرتا ہے۔اگر $x = 1$ ہو تب دائرے کا رداس اکائی جبکہ اس کا مرکز $(1,1)$ ہوں گے۔جیسا شکل 11.6 میں دکھایا گیا ہے، اس دائرے کا چوتھائی حصہ $|\Gamma| = 1$ دائرے کے اندر پایا جاتا ہے۔اسی طرح $x = -1$ کی صورت میں دائرے کا چوتھائی حصہ Γ_r محدد کے نیچے پایا جاتا ہے۔شکل میں $x = 0.5$، $x = -0.5$، $x = 2$ اور $x = -2$ کے دائرے بھی دکھائے گئے ہیں۔شکل میں $x = 0$ سے پیدا سیدھی لکیر، یعنی Γ_r محدد بھی دکھایا گیا ہے۔



شکل 11.5: کارتیسی محدد کے متغیرات Γ_r اور Γ_i ہیں جبکہ دائرے کا رداس $\frac{1}{r+1}$ ہے۔



شکل 11.6: کارتیسی محدد پر $\frac{1}{x}$ رداس کے دائروں کے وہ حصے دکھائے گئے ہیں جو اکائی دائرے کے اندر پائے جاتے ہیں۔



شکل 11.7: سمتھ نقشے پر اکائی دائرے میں r اور x سے حاصل دائرے دکھائے جاتے ہیں۔

ان دونوں دائروں کو ایک ہی جگہ شکل 11.7 کے سمتھ نقشے میں دکھایا گیا ہے۔یوں کسی بھی Z_L کی صورت میں $\frac{Z_L}{Z_0}$ کی شرح لیتے ہوئے z یعنی r اور x حاصل کر کے سمتھ نقشے میں ان کے دائروں کی نشاندہی کریں۔اگر نقشے پر درکار r اور (یا) x کے دائرے نہ پائے جائیں تب ان کے قریبی قیمتوں کے دائروں سے مطلوبہ دائرے کا مقام اخذ کریں۔جہاں یہ دائرے ایک دونوں کو کاٹتے ہیں وہاں سے Γ پڑھیں۔نقشے کے مرکز $(0,0)$ سے اس نقطے تک فاصلہ $|\Gamma|$ کے برابر ہو گا جبکہ افقی محدد یعنی Γ_r سے گھڑی کے الٹ سمت زاویہ Γ کا زاویہ ہو گا۔اس زاویے کو اکائی رداس کے دائرے کے باہر دکھایا گیا ہے۔یوں محدد کے مرکز سے درکار نقطے تک سیدھی لکیر کو اکائی رداس کے دائرے تک بڑھا کر زاویہ ناپا جاتا ہے۔ سمتھ نقشے میں $|\Gamma|$ ناپنے کی غرض سے محدد کے مرکز $(0,0)$ پر مختلف رداس کے دائرے کھینچے جا سکتے تھے، لیکن ایسا نہیں کیا جاتا۔آپ کو یہ فاصلہ نقشے میں دئے فیتے کی مدد سے ناپنا ہو گا۔اب مثال کے طور پر $Z_0 = 50\,\Omega$ کی ترسیلی تار پر $Z_L = 25 + j50\,\Omega$ کا بار $z = 0.5 + j1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔اس نقطے کو شکل میں بطور نقطہ N دکھایا گیا ہے جو $r = 0.5$ اور $x = 1$ کے دائروں کے نقطہ ملاپ سے حاصل ہوتا ہے۔شرح انعکاس تقریباً $0.62\underline{/83°}$ حاصل ہوتا ہے۔

سمتھ نقشہ مکمل کرنے کی خاطر اکائی دائرے کے محیط کے باہر دوسرا فیتہ شامل کیا جاتا ہے جس سے ترسیلی تار پر فاصلہ ناپا جاتا ہے۔اس فیتے پر فاصلہ طول موج λ کی صورت میں ناپا جا سکتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ اس فیتے سے کس طرح فاصلہ حاصل کیا جاتا ہے۔ترسیلی تار پر کسی بھی نقطے پر برقی دباو

$$V_s = V_0^+ \left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right)$$

کو برقی رو

$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0} \left(e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}\right)$$

سے تقسیم کرتے ہوئے Z_0 کے مطابقت سے داخلی قدرتی رکاوٹ

$$z_{\text{داخلی}} = \frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0} = \frac{V_s}{Z_0 I_s} = \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}}$$

حاصل کی جا سکتی ہے جس میں $z=-l$ پر کرتے ہوئے

$$z_{\text{داخلی}} = \frac{1+\Gamma e^{-j2\beta l}}{1-\Gamma e^{j2\beta l}} \tag{11.47}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں $l=0$ پر کرنے سے

$$z_{\text{داخلی}}\Big|_{l=0} = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} = z \tag{11.48}$$

حاصل ہوتا ہے جو عین بار پر شرح انعکاس ہے جسے مساوات 11.42 میں پیش کیا گیا ہے۔

یہاں رک کر اس حقیقت پر غور کریں کہ Γ کو $e^{-j2\beta l}$ سے ضرب دینے سے

$$\Gamma e^{-j2\beta l} = |\Gamma|\, e^{j\phi} e^{-j2\beta l} = |\Gamma|\, e^{j(\phi-2\beta l)}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی حتمی قیمت اب بھی $|\Gamma|$ ہی ہے لیکن نیا زاویہ $(\phi-2\beta l)$ ہے۔یوں سمتھ نقشے میں نقطہ z یعنی

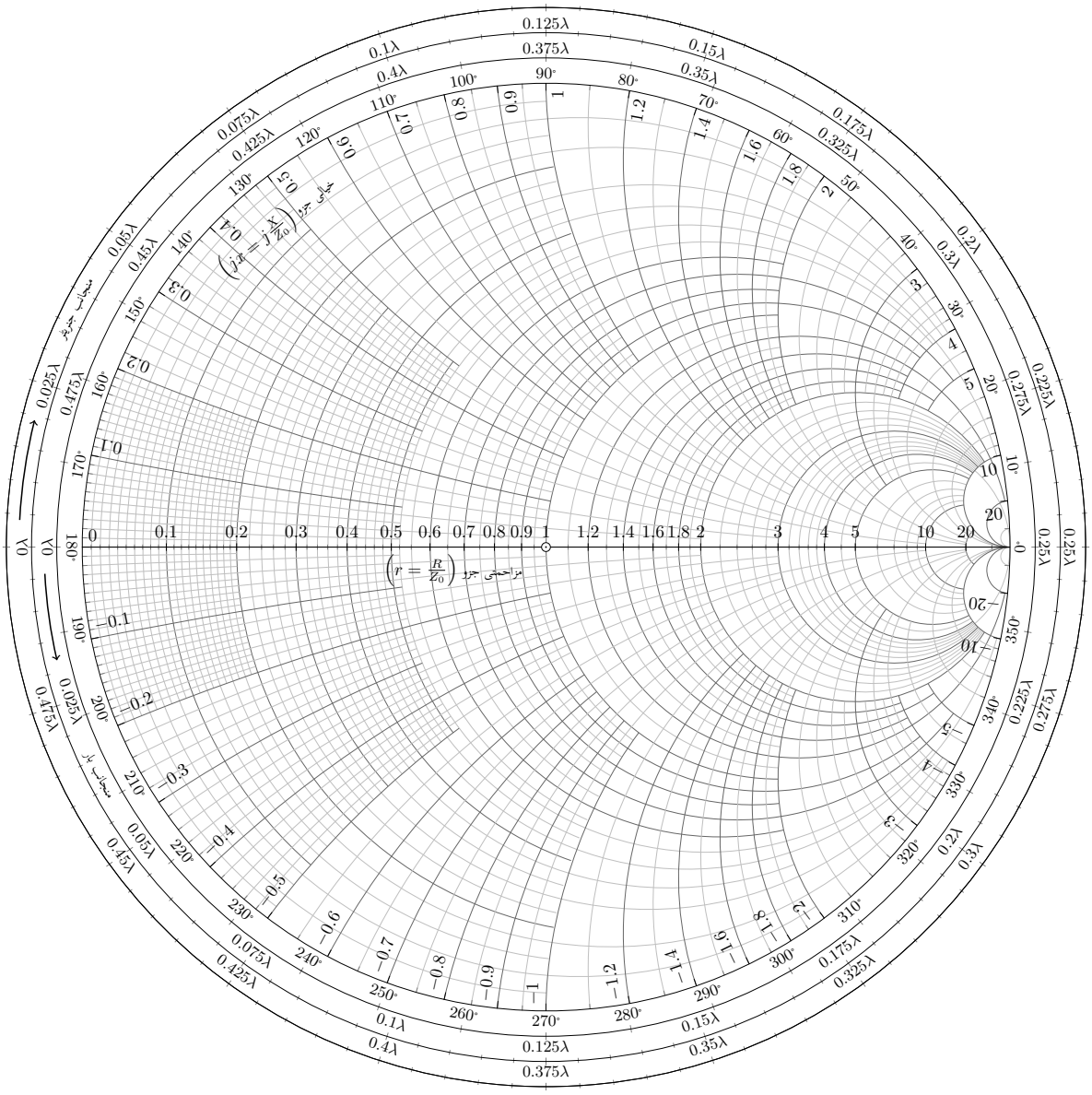
$$z = r + jx = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \tag{11.49}$$

کی نشاندہی کرتے ہوئے $|\Gamma|\underline{/\phi}$ ناپیں۔اب $|\Gamma|$ تبدیل کئے بغیر زاویہ تبدیل کرتے ہوئے $(\phi-2\beta l)$ تک پہنچیں اور یہاں سے $z_{\text{داخلی}}$ ناپیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 11.49 میں Γ کی جگہ $\Gamma e^{-j2\beta l}$ پر کرنے سے مساوات 11.47 ہی حاصل ہوتا ہے جو برقی بار سے l فاصلے پر بمطابق Z_0 داخلی قدرتی رکاوٹ ہے۔

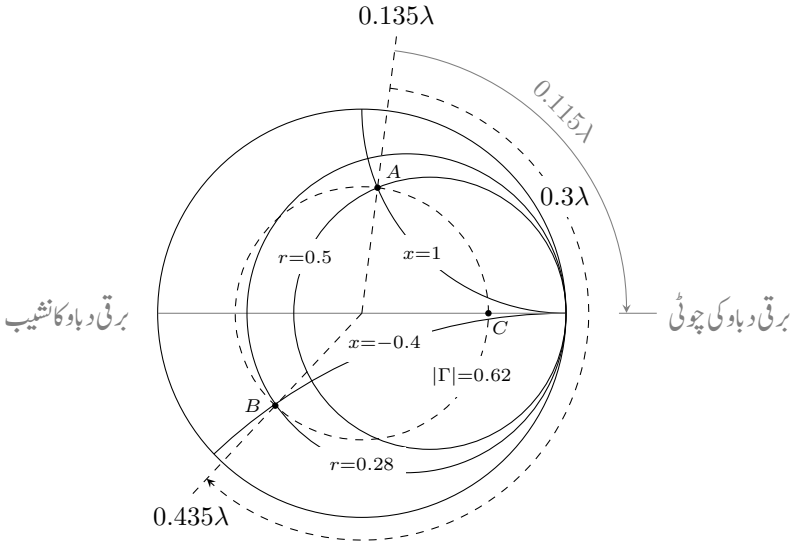
یوں بار z سے دور $z_{\text{داخلی}}$ کی طرف چلتے ہوئے، ہم منبع طاقت یعنی جنریٹر کی طرف چلتے ہیں جبکہ سمتھ نقشے پر ایسا کرنے سے زاویہ ϕ سے کم ہو کر $\phi-2\beta l$ ہوتا ہے لہٰذا نقشے پر ہم گھڑی کے سمت چلتے ہیں۔یوں $\beta l=\pi$ فاصلہ، یعنی آدھی طول موج، طے کرنے سے نقشے کے گرد ایک چکر مکمل ہو گا۔اس طرح $\frac{\lambda}{2}$ لمبی بے ضیاع ترسیلی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ عین بار کے رکاوٹ برابر ہو گی۔

یوں سمتھ نقشے کے حیطے پر ایک مکمل چکر کو 0.5λ دکھایا جاتا ہے۔جیسے شکل 11.8 میں دکھایا گیا ہے، استعمال میں آسانی کی غرض سے ایک کے بجائے دو ایسے فیتے بنائے جاتے ہیں۔ایک فیتہ گھڑی کی سمت میں بڑھتا فاصلہ دکھاتا ہے جسے نقشے میں "منجانب جنریٹر" سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ دوسرا فیتہ گھڑی کے الٹ سمت بڑھتا فاصلہ دکھاتا ہے جسے "منجانب بار" لکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے۔ان فیتوں کے ابتدائی نقطے کوئی اہمیت نہیں رکھتے البتہ انہیں نقشے کے بائیں ہاتھ پر رکھا جاتا ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ حقیقی Z_L اور Z_0 کی صورت میں اگر $Z_L < Z_0$ ہو تب برقی دباو کا نشیب اسی نقطے پر ہو گا۔

سمتھ نقشے کا استعمال مثال کی مدد سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے۔یوں $50\,\Omega$ کے ترسیلی تار پر $Z_L = 25+j50\,\Omega$ کے بار پر دوبارہ غور کرتے ہیں۔شکل 11.9 میں $z=0.5+j1$ کو نقطہ A ظاہر کرتا ہے جہاں سے $\Gamma = 0.62e^{j1.45} = 0.62\underline{/83^\circ}$ حاصل ہوتا ہے۔مرکز سے A تک لکیر کو اکائی دائرے کے حیطے تک بڑھا کر 0.135λ پڑھا جاتا ہے۔اگر تار کی لمبائی $60\,\text{cm}$ ہو اور اشارے کی تعدد اتنی ہو کہ ترسیلی تار پر طول موج $2\,\text{m}$ ہو، تب $\frac{l}{\lambda}=0.3$ ہو گا لہٰذا تار 0.3λ لمبی ہو گی۔یوں بیرونی دائرے پر $0.135\lambda+0.3\lambda=0.435\lambda$ سے مرکز تک لکیر اور $|\Gamma|$ رداس کے دائرے کے ملاپ، یعنی نقطہ B، سے $z_{\text{داخلی}} = 0.28-j0.4$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح $Z_{\text{داخلی}} = 14-j20$ ہو گا۔تحلیلی طور پر زیادہ درست جواب $Z_{\text{داخلی}} = 13.7-j20.2$ حاصل ہوتا ہے۔



شکل 11.8: مکمل سمتھ نقشہ۔



شکل 11.9: سمتھ نقشے سے متغیرات کا حصول۔

سمتھ نقشے سے موج کے چوٹی یا نشیب کے مقام باآسانی حاصل کئے جاتے ہیں۔کسی بھی $\Gamma = |\Gamma| \angle \phi$ کے لئے $z = -l$ پر آمدی اور انعکاسی امواج کے مجموعے

$$\begin{aligned} V_s &= V_0^+ \left(e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}\right) \\ &= V_0^+ e^{j\beta l} \left[1 + |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)}\right] \end{aligned}$$

کی حتمی قیمت

$$\begin{aligned} |V_s| &= V_0^+ \left|e^{j\beta l}\right| \left[\left|1 + |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)}\right|\right] \\ &= V_0^+ \left|1 + |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)}\right| \end{aligned}$$

ہے جہاں $\left|e^{j\beta l}\right| = 1$ کے برابر[10] ہے۔اس کی کم سے کم قیمت $V_0^+ (1 - |\Gamma|)$ ہے جو $\phi - \beta l = (2n+1)\pi$ کی صورت میں حاصل ہوتی ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ہے۔عین بار پر $l = 0$ ہے اور ایسی صورت میں اس شرط کو $\phi = \pi$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح $|V_s|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $V_0^+ (1 + |\Gamma|)$ ہے جو $\phi - \beta l = 2n\pi$ کی صورت میں حاصل ہوتی ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \ldots$ ہے۔عین بار پر $l = 0$ ہے اور ایسی صورت میں اس شرط کو $\phi = 0$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\phi = \pi$ کی صورت میں بار پر V_s کی کم سے کم قیمت ہو گی جبکہ $\phi = 0$ کی صورت میں بار پر V_s کی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔آئیں دیکھیں کہ ان شرائط کا مطلب کیا ہے۔

مزاحمتی بار R_L اور حقیقی Z_0 کی صورت میں اگر $R_L < Z_0$ ہو تب Γ منفی حقیقی عدد ہو گا جسے $\Gamma = |\Gamma| \angle \pi$ لکھا جا سکتا ہے جبکہ $R_L > Z_0$ کی صورت میں Γ مثبت حقیقی عدد ہو گا جسے $\Gamma = |\Gamma| \angle 0^\circ$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $R_L < Z_0$ یعنی $\Gamma = |\Gamma| \angle 0$ کی صورت میں بار پر کمتر V_s ہو گا جبکہ $R_L > Z_0$ یعنی $\Gamma = |\Gamma| \angle \pi$ کی صورت میں بار پر بلند تر V_s ہو گا۔سمتھ نقشے پر افقی

[10] $\left|e^{j\beta l}\right| = |\cos \beta l + j \sin \beta l| = \sqrt{\cos^2 \beta l + \sin^2 \beta l} = 1$

محدد حقیقی Γ دیتا ہے۔منفی افقی محدد پر $\Gamma = |\Gamma| \angle \pi$ ہوتا ہے لہٰذا بار پر کمتر V_s ہر صورت سمتھ نقشے میں منفی افقی محدد پر پایا جائے گا۔اسی طرح مثبت افقی محدد پر $\Gamma = |\Gamma| \angle 0$ ہوتا ہے لہٰذا بار پر بلند تر V_s ہر صورت سمتھ نقشے میں مثبت افقی محدد پر پایا جائے گا۔

ان نتائج کو آگے بڑھاتے ہیں۔کسی بھی مخلوط بار $Z_L = R_L + jX_L$ کی صورت میں سمتھ نقشے میں $z = r + jx$ سے شروع کر کے فاصلہ l بڑھانے سے زاویہ $\phi - 2\beta l$ گھٹتا ہے جو سمتھ نقشے پر گھڑی کی سمت گھومنے کے مترادف ہے۔جس فاصلے پر $\phi - 2\beta l = 2n\pi$ ہو وہاں برقی موج کی چوٹی پائی جائے گی اور جس فاصلے پر $\phi - 2\beta l = (2n+1)\pi$ ہو وہاں موج کا نشیب پایا جائے گا۔اب $2n\pi$ سے مراد سمتھ نقشے کے افقی محدد کا مثبت حصہ جبکہ $(2n+1)\pi$ سے مراد افقی محدد کا منفی حصہ ہے۔ یوں شکل 11.9 میں نقطہ A سے گھڑی کی سمت 0.115λ گھومتے ہوئے ترسیلی تار پر پہلی چوٹی پائی جائے گی۔یوں بار سے پہلی چوٹی 0.115λ یعنی $0.115 \times 200 = 23\,\text{cm}$ فاصلے پر ہے۔ اگر ترسیلی تار زیادہ لمبی ہوتی تب بار سے 0.365λ دور پہلا نشیب پایا جاتا۔چونکہ تار کی لمبائی اس سے کم ہے لہٰذا تار پر کہیں پر بھی نشیب نہیں پایا جاتا۔

برقی رو کی چوٹی اس نقطے پر پائی جاتی ہے جہاں $\phi - 2\beta l = 2n\pi$ کا شرط پورا ہو۔برقی رو

$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0}\left(e^{j\beta l} - \Gamma e^{j\beta l}\right)$$

کی کمتر قیمت اس نقطے پر پائی جاتی ہے۔اسی طرح جس نقطے پر برقی دباو کی کمتر قیمت پائی جائے، اس نقطے پر برقی رو کی چوٹی پائی جاتی ہے۔یوں سمتھ نقشے کے افقی محدد کے مثبت حصے پر برقی رو کا نشیب جبکہ اس کے منفی حصے پر برقی رو کی چوٹی پائی جائے گی۔

مزاحمتی بار R_L اور بے ضیاع ترسیلی تار کی صورت میں $\Gamma = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$ ہو گا۔اگر $R_L > R_0$ ہو تب $|\Gamma| = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$ ہو گا جبکہ $R_L < R_0$ کی صورت میں $|\Gamma| = \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}$ ہو گا۔یوں $R_L > R_0$ کی صورت میں

$$s = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1+\frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}}{1-\frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}} = \frac{R_L}{R_0} = r \quad (R_L > R_0)$$

جبکہ $R_L < R_0$ کی صورت میں

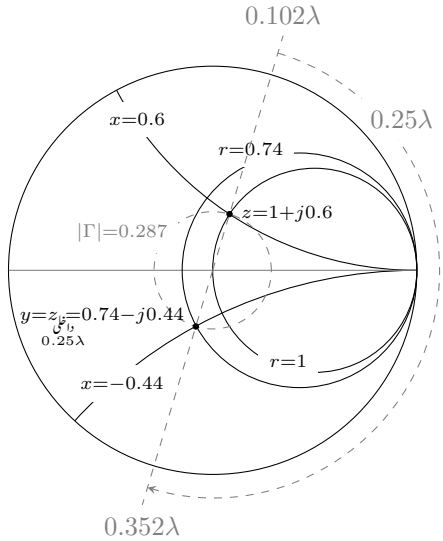
$$s = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1+\frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}}{1-\frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L}} = \frac{R_0}{R_L} \quad (R_L < R_0)$$

ہو گا۔یاد رہے کہ $s > 1$ ہوتا ہے لہٰذا $\frac{R_L}{R_0}$ اور $\frac{R_0}{R_L}$ میں جو بھی اکائی سے زیادہ قیمت رکھتا ہو یہی s ہو گا۔یوں $|\Gamma|$ رداس کے دائرے اور مثبت افقی محدد سے r پڑھ کر s کی قیمت بھی یہی تصور کریں۔شکل 11.9 میں نقطہ C سے $r = 4.2$ پڑھا جائے گا لہٰذا $s = 4.2$ ہے۔مثبت افقی محدد پر $r > 1$ ہوتا ہے لہٰذا محدد کے اسی حصے سے s کی قیمت پڑھی جاتی ہے۔ آپ تسلی کر لیں کہ $\frac{R_0}{R_L} > 1$ کی صورت میں بھی اسی طریقہ کار سے درست s حاصل ہوتا ہے۔

11.4.1 سمتھ فراوانی نقشہ

اس حصے کو $\frac{\lambda}{4}$ لمبی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ کے حصول سے شروع کرتے ہیں۔اتنی لمبائی کے تار کا $\beta l = 90^\circ$ ہو گا۔ داخلی قدرتی رکاوٹ کی مساوات

$$Z_{\text{داخلی}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}$$



شکل 11.10: چوتھائی طول تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ اسی تار کی برقی فراوانی کے برابر ہے۔

میں $Z_{\text{داخلی}}$ کو Z_0 سے تقسیم کرتے اور $\beta l = 90^\circ$ پر کرتے ہوئے

$$\frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0} = \frac{Z_L + jZ_0 \tan 90^\circ}{Z_0 + jZ_L \tan 90^\circ} = \frac{Z_0}{Z_L}$$

یعنی

$$z_{\substack{\text{داخلی}\\0.25\lambda}} = \frac{1}{z} \tag{11.50}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\frac{Z_{\text{داخلی}}}{Z_0} = z_{\substack{\text{داخلی}\\0.25\lambda}}$$
$$\frac{Z_L}{Z_0} = z$$

کے برابر ہیں۔مساوات 11.50 کے تحت بار سے 0.25λ فاصلے پر داخلی قدرتی رکاوٹ $\frac{1}{z}$ کے برابر ہے لیکن $y = \frac{1}{z}$ ہوتا ہے لہٰذا اسی مساوات کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$y = \frac{1}{z} = z_{\substack{\text{منجانب جزیٹر}\\0.25\lambda}} \tag{11.51}$$

جہاں 0.25λ تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ کی جگہ منجانب جزیٹر 0.25λ گھومنے کا ذکر کیا گیا ہے۔مساوات 11.51 کہتی ہے کہ سمتھ نقشے میں z سے منجانب جزیٹر 0.25λ گھوم کر $|\Gamma|$ رداس کے دائرے سے y حاصل ہو گا۔

شکل 11.10 میں $z = 1 + j0.6$ دکھایا گیا ہے جو منجانب جزیٹر 0.102λ زاویے پر پایا جاتا ہے۔یہ رکاوٹ $\Gamma = 0.287\underline{/73.7^\circ}$ دیتا ہے۔چوتھائی طول لمبی تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کرنے کی خاطر منجانب جزیٹر 0.25λ چلتے ہوئے 0.352λ سے مرکز تک لکیر اور 0.287 رداس کے دائرے کے ملاپ سے $z_{\text{داخلی}} = 0.74 - j0.44$ حاصل ہوتا ہے جو $\frac{1}{z}$ یعنی y کے عین برابر ہے۔

آئیں کسر دور اور کھلے دور تار کے ٹکڑوں کا داخلی قدرتی رکاوٹ حاصل کریں۔کسر دور تار کی صورت میں $Z_L = 0$ ہو گا لہٰذا داخلی قدرتی رکاوٹ

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{0 + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + j0 \tan \beta l} \\ &= jZ_0 \tan \beta l \end{aligned} \tag{11.52}$$

حاصل ہوتا ہے جو خیالی عدد ہے۔چوتھائی طول لمبی کسر دور تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ یوں

$$Z_{\substack{\text{داخلی} \\ 0.25\lambda}} = jZ_0 \tan 90^\circ = \infty \qquad \text{(کسرے دور)} \tag{11.53}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ تعجب بھرا نتیجہ ہے جس کے مطابق چوتھائی طول لمبی کسے دور تار بطور کھلے دور کردار ادا کرتی ہے۔

کھلے دور تار کی صورت میں $Z_L = \infty$ ہو گا لہٰذا داخلی قدرتی رکاوٹ

$$\begin{aligned} Z_{\text{داخلی}} &= Z_0 \frac{\infty + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + j\infty \tan \beta l} \\ &= -j \frac{Z_0}{\tan \beta l} \end{aligned} \tag{11.54}$$

حاصل ہوتا ہے جو خیالی عدد ہے۔چوتھائی طول لمبی کھلے دور تار کی داخلی قدرتی رکاوٹ یوں

$$Z_{\substack{\text{داخلی} \\ 0.25\lambda}} = -j \frac{Z_0}{\tan 90^\circ} = 0 \qquad \text{(کھلے دور)} \tag{11.55}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ بھی تعجب بھرا نتیجہ ہے جس کے مطابق چوتھائی طول لمبی کھلے دور تار بطور کسر دور کردار ادا کرتی ہے۔

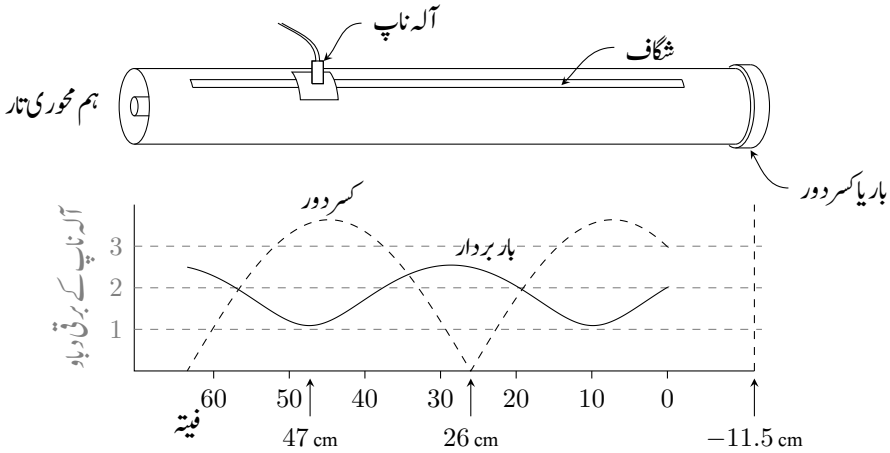
سمتھ مزاحمتی نقشے[11] کا متبادل سمتھ فراوانی[12] نقشہ بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ ان میں $y = \frac{Y_L}{Y_0} = g + jb$ لیا جاتا ہے جہاں $Y_L = \frac{1}{R_L}$ اور $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$ کے برابر ہیں۔اس طرح y برقی فراوانی بمطابق Y_0 کہلائے گی۔یوں r سے حاصل دائرے اب g کے دائرے کہلاتے ہیں جبکہ x کے دائرے b کے دائرے کہلاتے ہیں۔اس نقشے میں $g > 1$ اور $b = 0$ کی صورت میں برقی دباو کی کمتر قیمت حاصل ہو گی۔ ایصالی سمتھ نقشے سے حاصل Γ کا زاویہ 180° بڑھانا ہو گا۔

11.5 تجرباتی نتائج پر مبنی چند مثال

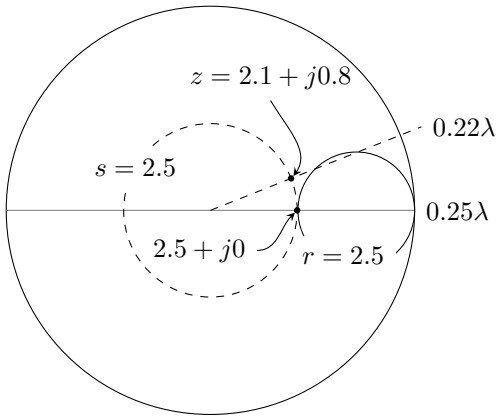
اس حصے میں دو مثالوں پر غور کیا جائے گا۔پہلی مثال میں تجرباتی نتائج سے بار کی رکاوٹ حاصل کی جائے گی جبکہ دوسری مثال میں بار کو تار کے ہمہ رکاوٹ بنانے کی ترکیب دکھائی جائے گی۔

ہم محوری ترسیلی تار کے بیرونی تار میں لمبائی کی سمت میں شگاف ڈال کر اس میں مختلف مقامات پر برقی دباو کے نمونے لے کر $s = 2.5$ حاصل کیا گیا ہے۔شکل 11.11 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔شگاف کے ساتھ فیتہ رکھ کر بلند تر اور کم تر نمونوں کے مقامات بھی درج کئے گئے۔ایسے نتائج حاصل کرتے وقت فیتے کا صفر کہیں پر بھی رکھا جا سکتا ہے لہٰذا اسے بار کا مقام تصور نہیں کریں۔کمتر برقی دباو فیتے پر 47 cm کے نشان کے ساتھ پایا جاتا ہے۔سائن نما اشارے کی صورت میں سمت کار کے خارجی

[11] Smith impedance chart
[12] Smith admittance chart



شکل 11.11: ہم محوری تار میں شگاف ڈال کر اس میں آلہ ناپ کی مدد سے مختلف مقامات پر برقی دباو کے نمونے لئے جا سکتے ہیں۔

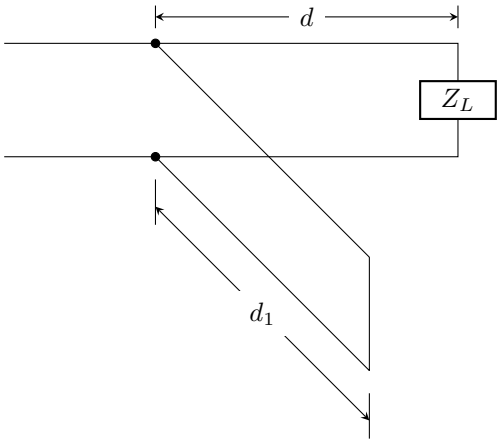


شکل 11.12: اگر 0.03λ لمبی تار پر $z_{\text{داخلی}} = 2.5 + j0$ ہو تب $z = 2.1 + j0.8$ ہو گا۔

اشارہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اشارے کے کمتر قیمت کا مقام ٹھیک ٹھیک تعین کرنا زیادہ آسان ہے۔اشارے کی چوٹی نوک دار نہیں ہوتی لہٰذا اس کا مقام ٹھیک ٹھیک تعین کرنا قدر مشکل ہوتا ہے۔اسی وجہ سے عموماً موج کی کمتر قیمت کے مقامات حاصل کرتے ہوئے مطلوبہ معلومات دریافت کی جاتی ہیں۔ہم محوری تار کی قدرتی رکاوٹ $50\,\Omega$ ہے اور تار میں ہوا بطور ذو برق استعمال کی گئی ہے۔اشارے کی تعدد $400\,\text{MHz}$ ہے لہٰذا طول موج $75\,\text{cm}$ ہے۔بار کا مقام تعین کرنے کی خاطر بار کو ہٹا کر تار کے ان سروں کو کسر دور کیا جاتا ہے۔کسر دور تار پر کمتر دباو فیتے پر $26\,\text{cm}$ کے نشان کے سامنے پایا جاتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ کسر دور نقطے سے کمتر دباو کا فاصلہ $\frac{n\lambda}{2}$ ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ کمتر دباو کسر دور نقطے سے آدھے طول موج کے فاصلے پر ہے۔ایسی صورت میں کسر دور کا مقام فیتے پر $26 - 37.5 = -11.5\,\text{cm}$ نشان کے ساتھ ہو گا۔چونکہ بار کے مقام پر ہی کسر دور پیدا کیا گیا تھا لہٰذا بار بھی فیتے پر $-11.5\,\text{cm}$ کے نشان کے ساتھ ہو گا۔یوں حاصل نتائج کے تحت بار سے کم تر دباو کا نقطہ $47 - (-11.5) = 58.5\,\text{cm}$ فاصلے پر ہے جس سے آدھی طول موج منفی کرتے ہوئے بار سے کمتر دباو کا فاصلہ $21\,\text{cm}$ حاصل ہوتا ہے۔بلند تر دباو کا بار سے فاصلہ یوں $21 - \frac{37.5}{2} = 2.25\,\text{cm}$ ہو گا جو $\frac{2.25}{75} = 0.03$ طول موج کے برابر ہے۔

ان معلومات کے ساتھ اب شکل 11.12 کے سمتھ نقشے کا سہارا لیتے ہیں۔بلند تر برقی دباو کے نقطے پر داخلی قدرتی رکاوٹ حقیقی



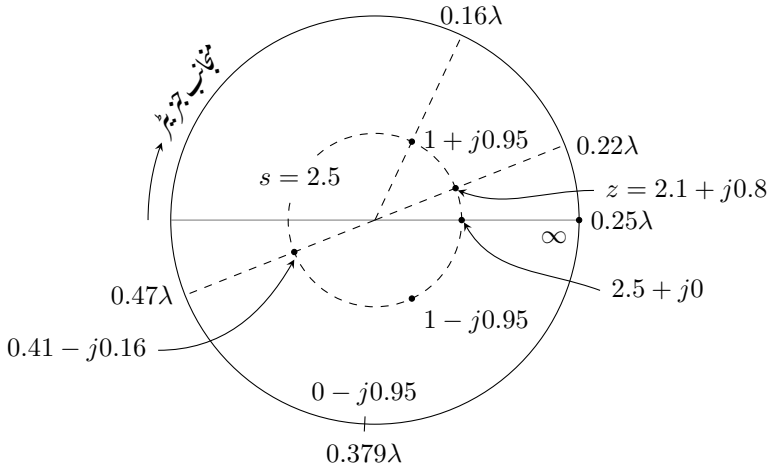
شکل 11.13: بار سے d فاصلے پر d_1 لمبائی کے کسرے دور تار کا ٹکڑا جوڑنے سے بار اور اور ترسیلی تار ہمہ رکاوٹ بنائے جاتے ہیں۔

عدد ہوتا ہے جس کی قیمت sR_0 کے برابر ہوتی ہے، لہٰذا ایسے نقطے پر $z_{\text{داخلی}} = 2.5$ ہو گا۔ہم یوں سمتھ نقشے پر $z_{\text{داخلی}} = 2.5$ نقطے پر داخل ہوتے ہیں جہاں سے منجانب جنریٹر فاصلہ 0.25λ پڑھا جاتا ہے۔اس سے 0.03λ منفی کرتے ہوئے بار تک پہنچتے ہیں، لہٰذا 0.22λ سے مرکز تک لکیر اور $s = 2.5$ یعنی $|\Gamma| = 0.429$ رداس کے دائرے کے ملاپ سے $z = 2.1 + j0.8$ پڑھا جاتا ہے۔یوں $Z_L = 105 + j40\,\Omega$ حاصل ہوتا ہے۔یاد رہے کہ ہم نے بار کو فیتے پر $-11.5\,\text{cm}$ یا اس نقطے سے $\frac{n\lambda}{2}$ فاصلے پر تصور کیا ہے۔چونکہ بار کا مقام اب بھی مکمل طور پر معلوم نہیں ہے لہٰذا بہتر یہ ہوتا ہے کہ تجرباتی نتائج سے حاصل Z_L کی بات کرتے ہوئے بار کا فرض کردہ مقام بھی ساتھ بتلایا جائے۔

آخر میں آئیں اس بار کو $50\,\Omega$ ترسیلی تار کے ہمہ رکاوٹ بنانے کی ترکیب دیکھیں۔ایسا d_1 لمبائی کے کسر دور تار کے ٹکڑے کو بار سے d فاصلے پر نسب کرنے سے ممکن بنایا جاتا ہے۔ایسا شکل 11.13 میں دکھایا گیا ہے۔بار سے d فاصلے پر z کے متوازی d_1 لمبی کسرے دور ٹکڑا نسب کرنے سے کل رکاوٹ $z = 1 + j0$ حاصل کرنے مقصد ہے۔یہاں d_1 اور d مطلوب ہیں۔کسر دور ٹکڑے کی قدرتی رکاوٹ ترسیلی تار کے قدرتی رکاوٹ $50\,\Omega$ کے برابر ہے۔

برقی بار اور کسر دور تار کا ٹکڑا متوازی جڑے ہیں۔متوازی جڑے رکاوٹوں کی بجائے متوازی جڑے برقی فراوانی کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے لہٰذا ہم ایسا ہی کرتے ہیں۔برقی فراوانی کی زبان میں موجودہ مسئلہ کچھ یوں ہے۔ہم d اتنا رکھنا چاہتے ہیں کہ داخلی فراوانی $y_{\text{داخلی}} = 1 + jb$ ہو۔اب اگر $y_{\text{داخلی}}$ کے متوازی $-jb$ برقی تاثریت جوڑی جائے تو حاصل کل برقی فراوانی $1 + j0$ ہو گی جو ہمارا مقصد ہے۔یوں d_1 لمبی کسر دور تار کے ٹکڑے کی برقی تاثریت $-jb$ درکار ہے۔ان حقائق کو لے کر سمتھ نقشے کی مدد سے d اور d_1 کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

سمتھ نقشے میں $z = 2.1 + j0.8$ پر داخلی ہو کر مساوات 11.51 کے تحت منجانب جنریٹر 0.25λ گھومنے سے $y = \frac{1}{z}$ حاصل ہوتا ہے۔شکل 11.14 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔سمتھ نقشے میں $z = 2.1 + j0.8$ منجانب جنریٹر 0.22λ زاویے پر پایا جاتا ہے۔یہاں سے منجانب جنریٹر 0.25λ گھومتے ہوئے 0.47λ تک پہنچا جاتا ہے جہاں $|\Gamma|$ رداس کے دائرے سے $y = 0.41 - j0.16$ ملتا ہے۔اب ہم چاہتے ہیں کہ یہاں سے منجانب جنریٹر گھومتے ہوئے داخلی قدرتی فراوانی $1 + jb$ حاصل ہو۔جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، ایسا 0.16λ اور 0.34λ زاویوں پر ممکن ہے جہاں سے بالترتیب $y_1 = 1 + j0.95$ اور $y_2 = 1 - j0.95$ حاصل ہوتے ہیں۔پہلے نقطے تک پہنچنے کے لئے کم لمبی تار درکار ہے لہٰذا اسی کو جواب تسلیم کرتے ہیں۔بار سے اس نقطے تک $(0.5\lambda - 0.47\lambda) + 0.16\lambda = 0.19\lambda$ تار درکار ہو گی لہٰذا $d = 0.19\lambda$ یعنی $14.25\,\text{cm}$ بنتا ہے۔



شکل 11.14: بار $z = 2.1 + j0.8$ سے 0.19λ فاصلے پر 0.129λ لمبائی کا کسر دور ٹکڑا جوڑنے سے نظام ہمہ رکاوٹ ہو جاتا ہے۔

اب $1 + j0.95$ کے متوازی $y_{\text{ٹکڑا}} = -j0.95$ برقی تاثریت جوڑ کر $1 + j0$ حاصل ہو گا۔مساوات 11.54 کے تحت کسرے دور ٹکڑے کی داخلی رکاوٹ یا داخلی فراوانی خیالی عدد ہوتا ہے لہٰذا سمتھ نقشے پر ایسے ٹکڑے کا $g = 0$ ہی رہے گا جو نقشے کی بیرونی دائرے کو ظاہر کرتی ہے۔عین کسر دور پر $y = \infty$ حاصل ہوتا ہے جو منجانب جنریٹر 0.25λ پر پایا جاتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $y_{\text{داخلی}} = -j0.95$ نقشے پر منجانب جنریٹر 0.379λ پر حاصل ہوتا ہے۔یوں کسے دور ٹکڑے کی لمبائی $0.379\lambda - 0.25\lambda = 0.129\lambda$ یعنی 9.67 cm حاصل ہوتا ہے۔

مشق 11.4: بے ضیاع $50\,\Omega$ ترسیلی تار کو کسرے دور کرنے سے برقی دباو کے دو آپس میں قریبی نشیب 12 cm اور 27 cm پر پائے جاتے ہیں۔ کسرے دور ختم کرتے ہوئے یہاں بار نسب کرنے سے 0.4 V حیطے کے نشیب اور 0.72 V حیطے کے چوٹیاں حاصل ہوتی ہیں۔ ایک عدد نشیب 9 cm پر حاصل ہوتا ہے۔ترسیلی تار میں ہوا بطور ذو برق استعمال ہوا ہے۔مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ λ، f، s، Γ اور Z_L

جوابات: 0.3 m، 1 GHz، 1.8، $0.286\underline{/108^\circ}$ اور $36.5 + j21.6\,\Omega$

مشق 11.5: بے ضیاع $50\,\Omega$ کے ساتھ $Z_L = 100 + j100\,\Omega$ کا بار نسب ہے۔بار سے d فاصلے پر d_1 لمبائی کا کسرے دور ٹکڑا جوڑتے ہوئے نظام کو ہمہ رکاوٹ بنایا جاتا ہے۔اگر تار پر $v = \frac{2}{3}c$ ہو جبکہ اشارے کی تعدد 10 MHz ہو تب مندرجہ ذیل حاصل کریں۔ λ، چھوٹے سے چھوٹا d_1 اور ایسی صورت میں d

جوابات: 20 m، 1.8 m اور 4.4 m

باب 12

تقطیب موج

اس باب میں تقطیب موج[1] پر غور کیا جائے گا۔خطی تقطیب اور بیضوی تقطیب کے بعد دائری تقطیب پر تبصرہ کیا جائے گا۔

12.1 خطی، بیضوی اور دائری تقطیب

اب تک اٹل سمت کے امواج پر غور کیا گیا۔یوں $\boldsymbol{a}_z$ جانب حرکت کرتا $\boldsymbol{a}_x$ سمت کا میدان

$$E_x = E_{x0}\cos(\omega t - \beta z) \tag{12.1}$$

لکھا گیا۔یہ مساوات خطی تقطیب کی مثال ہے جہاں میدان تمام اوقات صرف x سمت میں پایا جاتا ہے۔عموماً $\boldsymbol{a}_z$ جانب حرکت کرتے موج میں $\boldsymbol{a}_x$ کے علاوہ $\boldsymbol{a}_y$ جزو بھی پایا جائے گا۔ایسی صورت میں موج کے اجزاء

$$\begin{aligned} E_x &= E_1\cos(\omega t - \beta z) \\ E_y &= E_2\cos(\omega t - \beta z - \delta) \end{aligned} \tag{12.2}$$

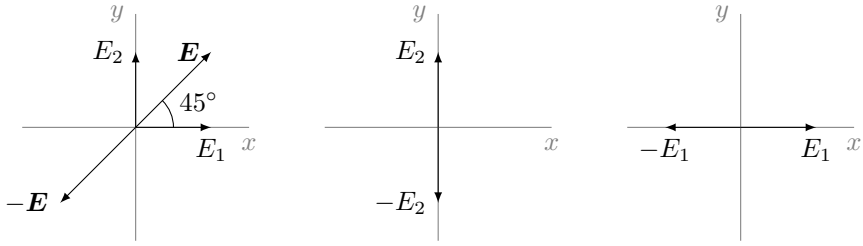
ہو سکتے ہیں جہاں دونوں اجزاء کے حیطے مختلف ممکن ہیں جبکہ ان میں زاویائی فاصلہ δ بھی پایا جا سکتا ہے۔ان اجزاء کا مجموعہ

$$\boldsymbol{E} = E_1\cos(\omega t - \beta z)\boldsymbol{a}_x + E_2\cos(\omega t - \beta z - \delta)\boldsymbol{a}_y \tag{12.3}$$

ایسی موج کو ظاہر کرے گا۔یہ مساوات غور طلب ہے۔آئیں خلاء میں کسی بھی اٹل نقطے پر وقت تبدیل ہونے سے ایسی میدان پر غور کریں۔ہم خلاء میں $z = 0$ کو اٹل نقطہ لیتے ہوئے میدان حاصل کرتے ہیں۔

اگر $E_2 = 0$ ہو تب وقت t کے تبدیلی سے میدان کی قیمت $-E_1\boldsymbol{a}_x$ تا $+E_1\boldsymbol{a}_x$ تبدیل ہوتی ہے۔اس میدان کو تمام t کے لئے شکل 12.1-الف میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میدان کی نوک $-E_1$ تا $+E_1$ خطی لکیر پر رہتی ہے۔اسی حقیقت سے ایسے موج کی قطبیت کو خطی قطبیت[2] کہتے ہیں۔یہ موج $\boldsymbol{a}_x$ سمت میں خطی قطبیت رکھتی ہے۔اس کے برعکس اگر مساوات 12.3 میں $E_1 = 0$ ہو تب یہ $\boldsymbol{a}_y$ خطی قطبیت کی موج ہو گی جسے شکل 12.1-ب میں دکھایا گیا ہے۔اگر $E_1 = E_2 = E_{12}$

[1] wave polarization
[2] linear polarization



الف: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ خطی قطبیت ب: $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ خطی قطبیت پ: 45° خطی قطبیت

شکل 12.1: خطی، دائری اور بیضوی قطبیت۔

اور $\delta = 0$ ہوں تب بھی خطی قطبیت کی موج حاصل ہوتی ہے البتہ یہ موج افقی محدد کے ساتھ 45° کا زاویہ بناتی ہے۔شکل 12.1-پ میں اس موج کو دکھایا گیا ہے۔

آئیں اب ذرہ دلچسپ صورت حال دیکھیں۔نقطہ $z = 0$ پر مساوات 12.2

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos \omega t \\ E_y &= E_2 \cos(\omega t - \delta) \end{aligned} \tag{12.4}$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں جس میں E_y کو

$$E_y = E_2 \left(\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta\right)$$

لکھنا ممکن ہے۔اس مساوات میں، E_x کی مساوات استعمال کرتے ہوئے، $\cos \omega t = \frac{E_x}{E_1}$ اور $\sin \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2}$ پر کر کے

$$E_y = E_2 \left[\frac{E_x}{E_1} \cos \delta + \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2} \sin \delta\right]$$

ملتا ہے جسے

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} - 2\frac{E_x}{E_1}\frac{E_y}{E_2} \cos \delta + \frac{E_y^2}{E_2^2} = \sin^2 \delta \tag{12.5}$$

یا

$$a E_x^2 - b E_x E_y + c E_y^2 = 1 \tag{12.6}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

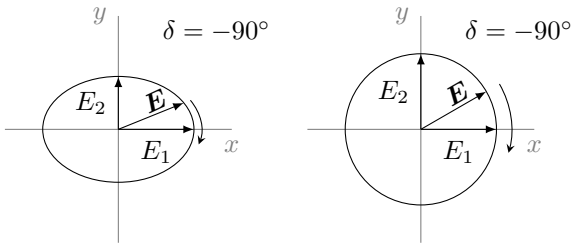
$$a = \frac{1}{E_1^2 \sin^2 \delta} \qquad b = \frac{2 \cos \delta}{E_1 E_2 \sin^2 \delta} \qquad c = \frac{1}{E_2^2 \sin^2 \delta} \tag{12.7}$$

لئے گئے ہیں۔مساوات 12.6 بیضوی قطبیت[3] کی عمومی مساوات ہے۔

مساوات 12.5 میں $E_1 = E_2 = E_0$ اور $\delta = \mp 90°$ کی صورت میں

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 \tag{12.8}$$

[3] elliptic polarization



ب: بیضوی قطبیت　　الف: دائری قطبیت

شکل 12.2: دائری اور بیضوی قطبیت۔

حاصل ہوتا ہے جو دائرے کی مساوات ہے اور جسے شکل 12.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔شکل میں E_1 اور E_2 بھی ظاہر کئے گئے ہیں جن کی لمبائی برابر ہے۔مساوات 12.4 سے $\delta = +90°$ کی صورت میں $\omega t = 0$ پر

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos 0 = E_0 \\ E_y &= E_0 \cos(0 - 90°) = 0 \qquad (\delta = +90°) \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جبکہ کچھ ہی لمحے بعد $\omega t = 30°$ کی صورت میں

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos 30° = 0.866 E_0 \\ E_y &= E_0 \cos(30° - 90°) = 0.5 E_0 \qquad (\delta = +90°) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔شکل 12.3-الف میں دونوں اوقات پر موج دکھائی گئی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بڑھتے وقت کے ساتھ میدان کی نوک دائرے پر گھڑی کے الٹ سمت میں حرکت کرتی ہے۔اس شکل میں موج کے حرکت کی سمت $\boldsymbol{a}_z$ کاغذ سے باہر کو ہے۔اگر دائیں ہاتھ کے انگوٹھے کو موج کے حرکت کی سمت میں رکھا جائے تو اس ہاتھ کی بقایا چار انگلیاں دائرے پر میدان کی نوک کی حرکت کا سمت دیتی ہیں۔یوں $\delta = +90°$ کی صورت میں مساوات 12.8 دائیں دائری قطبیت[4] کی موج کو ظاہر کرتا ہے۔

اسی طرح $\delta = -90°$ کی صورت میں بائیں دائری قطبیت[5] حاصل ہوتی ہے جسے شکل 12.3-ب میں دکھایا گیا ہے۔

دائیں ہاتھ قطبی موج سے مراد وہ موج ہے جو آپ کی طرف حرکت کرتے ہوئے آپ کو دائیں ہاتھ گھومتی نظر آئے۔کسی موج کی قطبیت سے مراد وہ قطبیت ہے جو دیکھنے والے کی طرف حرکت کرتی موج کی قطبیت ہو گی۔

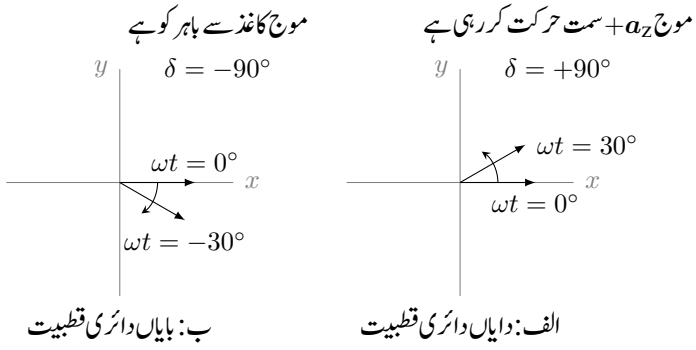
جہاں بھی غلطی کی گنجائش ہو وہاں بہتر ہوتا ہے کہ قطبیت کا ذکر کرتے وقت حرکت کی سمت کا بھی ذکر کیا جائے۔

مساوات 12.5 میں $E_1 \neq E_2$ کی صورت میں بیضوی موج حاصل ہوتی ہے جسے شکل 12.2-ب میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 12.4 میں مساوات 12.6 کی عمومی شکل دکھائی گئی ہے۔ اس شکل میں ترخیم[6] افقی محدد کے ساتھ τ زاویہ بناتا ہے لہٰذا یہ τ زاویے کی بیضوی قطبیت کو ظاہر کرتی ہے۔

---

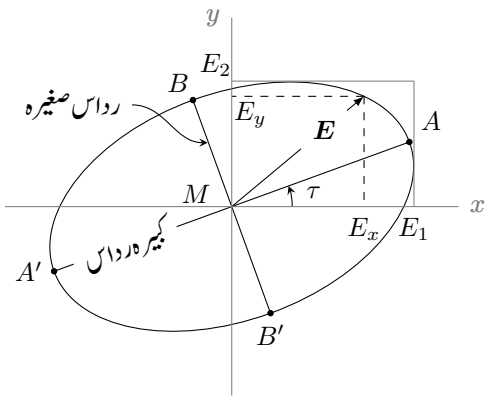
[4] right circular polarization
[5] left circular polarization
[6] ellipse



ب: بایاں دائری قطبیت

الف: دایاں دائری قطبیت

شکل 12.3: دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ کی دائری قطبیت۔



شکل 12.4: عمومی بیضوی قطبیت۔

12.2 بیضوی یا دائری قطبی امواج کا پوئنٹنگ سمتیہ

کسی بھی موج کی اوسط طاقت مساوات 10.55

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_{\text{s}} \times \boldsymbol{H}_{\text{s}}^{*}\right]_{\text{حقیقی}}$$

سے حاصل کی جا سکتی ہے۔شکل 12.4 کے عمومی بیضوی قطبی موج کے x اور y اجزاء

$$E_{sx} = E_1 e^{j(\omega t - \beta z)} \tag{12.9}$$

$$E_{sy} = E_2 e^{j(\omega t - \beta z + \delta)} \tag{12.10}$$

میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔کسی بھی نقطے پر کل برقی میدان ان اجزاء کا سمتی مجموعہ ہو گا جسے نقطہ $z = 0$ پر

$$\boldsymbol{E}_{\text{s}} = \boldsymbol{a}_{\text{x}} E_1 e^{j\omega t} + \boldsymbol{a}_{\text{y}} E_2 e^{j(\omega t + \delta)} \tag{12.11}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ

$$\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{H}} = \eta = |\eta|\, e^{j\theta_\eta}$$

ہوتا ہے لہٰذا مساوات 12.9 کی جوڑی مقناطیسی موج

$$H_{sy} = \frac{E_{sx}}{|\eta|} e^{-j\theta_\eta} = \frac{E_1}{|\eta|} e^{j(\omega t - \beta z - \theta_\eta)} = H_1 e^{j(\omega t - \beta z - \theta_\eta)}$$

ہو گی۔اسی طرح مساوات 12.10 کی جوڑی

$$H_{sx} = -H_2 e^{j(\omega t - \beta z + \delta - \theta_\eta)} \tag{12.12}$$

ہو گی۔کسی بھی نقطے پر مقناطیسی میدان ان اجزاء کا سمتی مجموعہ ہو گا جسے نقطہ $z = 0$ پر

$$\boldsymbol{H}_{\text{s}} = -\boldsymbol{a}_{\text{x}} H_2 e^{j(\omega t + \delta - \theta_\eta)} + \boldsymbol{a}_{\text{y}} H_1 e^{j(\omega t - \theta_\eta)} \tag{12.13}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہو گا۔جوڑی دار مخلوط $\boldsymbol{H}_{\text{s}}$ کی قیمت مندرجہ بالا مساوات میں مثبت j کو منفی اور منفی j کو مثبت لکھ کر حاصل ہوتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{H}_{\text{s}}^{*} = -\boldsymbol{a}_{\text{x}} H_2 e^{-j(\omega t + \delta - \theta_\eta)} + \boldsymbol{a}_{\text{y}} H_1 e^{-j(\omega t - \theta_\eta)} \tag{12.14}$$

مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ سے اوسط طاقت

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2}\left[\left(\boldsymbol{a}_{\text{x}} E_1 e^{j\omega t} + \boldsymbol{a}_{\text{y}} E_2 e^{j(\omega t + \delta)}\right) \times \left(-\boldsymbol{a}_{\text{x}} H_2 e^{-j(\omega t + \delta - \theta_\eta)} + \boldsymbol{a}_{\text{y}} H_1 e^{-j(\omega t - \theta_\eta)}\right)\right]_{\text{حقیقی}} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\text{z}}\left[E_1 H_1 e^{j\theta_\eta} + E_2 H_2 e^{j\theta_\eta}\right]_{\text{حقیقی}}\end{aligned}$$

یعنی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_{\text{z}}\left(E_1 H_1 + E_2 H_2\right)\cos\theta_\eta \tag{12.15}$$

حاصل ہوتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ طاقت δ پر بالکل منحصر نہیں ہے۔

بے ضیاع خطے میں برقی اور مقناطیسی میدان ہم قدم ہوتے ہیں۔ان میں $\frac{E_1}{H_1} = \frac{E_2}{H_2} = \eta_0$ کے برابر ہوتا ہے جہاں حقیقی قدرتی رکاوٹ کا زاویہ $\theta_\eta = 0$ ہے۔ایسے خطے میں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_z\left(E_1H_1 + E_2H_2\right)\\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_z\left(H_1^2 + H_2^2\right)\eta_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_z H^2\eta_0\end{aligned} \tag{12.16}$$

ہو گا جہاں $H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2}$ کے برابر ہے۔اس مساوات کو

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_z\left(E_1H_1 + E_2H_2\right)\\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_z\frac{E_1^2 + E_2^2}{\eta_0} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_z\frac{E^2}{\eta_0}\end{aligned} \tag{12.17}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$ کے برابر ہے۔

مثال 12.1: خلاء میں بیضوی قطبی موج کے اجزاء

$$\begin{aligned}E_x &= 2\cos(\omega t - \beta z)\\ E_y &= 3\cos(\omega t - \beta z + 75^\circ)\end{aligned}$$

وولٹ فی میٹر ہیں۔موج کی فی مربع میٹر اوسط طاقت دریافت کریں۔

حل:خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ $\eta = 120\pi$ لیتے ہوئے مساوات 12.17 سے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{2^2 + 3^2}{120\pi} = 17.24\,\frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

باب 13

ترچھی آمد، انعکاس، انحراف اور انکسار

دو خطوں کے سرحد پر عمودی آمدی موج کے انعکاس اور ترسیل پر باب 10 میں غور کیا گیا۔اس باب میں ترچھی آمدی موج کی بات کرتے ہوئے انعکاس اور ترسیل کے علاوہ انحراف اور انکسار کی بھی بات کی جائے گی۔عمودی امواج اور ترسیلی تار کے مساوات ہوبہو ایک جیسے تھے۔ ترچھی آمدی موج کی مساوی مثال ترسیلی تار میں نہیں پائی جاتی۔یہی وجہ ہے کہ ان پر یہاں علیحدہ غور کیا جا رہا ہے۔

13.1 ترچھی آمد

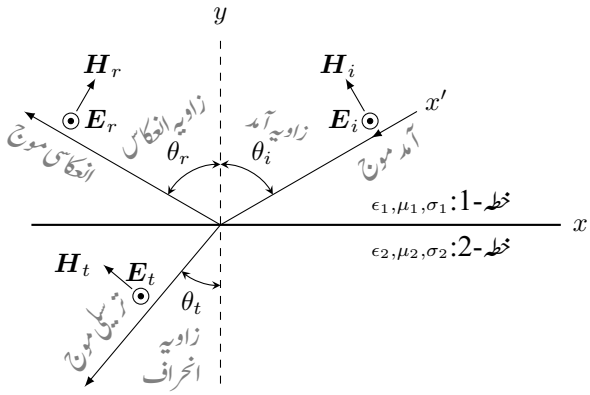
عمودی قطبی برقی موج $\boldsymbol{E}_\perp$

شکل 13.1 میں سرحد پر ترچھی آمد موج دکھائی گئی ہے۔سرحد $y=0$ سطح پر پایا جاتا ہے لہٰذا y محدد، سرحد کے عمودی ہے۔پہلے خطے (خطہ-1) میں آمدی برقی موج y محدد کے ساتھ θ_i زاویہ آمد[1] بناتی ہے جبکہ اسی خطے میں انعکاسی برقی موج y محدد کے ساتھ θ_r زاویہ انعکاس[2] بناتی ہے۔ترسیلی موج دوسرے خطے (خطہ-2) میں منفی y محدد کے ساتھ θ_t زاویہ بناتی ہے۔ترسیلی موج کو انحرافی موج بھی کہا جاتا ہے لہٰذا θ_t اصطلاحزاویہ انحراف[3] کہلاتی ہے۔پہلے خطے کے مستقل $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ جبکہ دوسرے خطے کے مستقل $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ ہیں۔

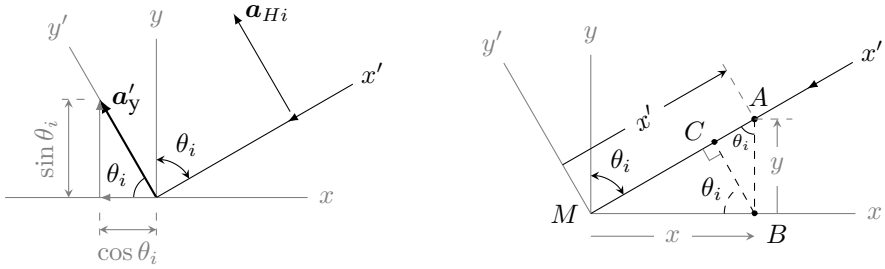
ہم دو صورتوں پر باری باری غور کریں گے۔ پہلی صورت میں برقی موج سطح آمد (یعنی xy سطح) کے عمودی ہو گی جبکہ دوسری صورت میں برقی موج اس سطح کے متوازی ہو گی۔ان دو صورتوں میں برقی موج بالترتیب عمودی قطب موج[4] اور متوازی قطب موج[5] کہلائیں گے۔شکل 13.1 عمودی قطبیت کی صورت حال دکھا رہی ہے۔کسی بھی عمومی برقی موج کو عمودی اور متوازی قطب کے امواج کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

---

[1] incidence angle
[2] reflection angle
[3] refraction angle
[4] perpendicular polarized
[5] parallel polarized



شکل 13.1: ترچھی آمد کی صورت میں انعکاسی اور ترسیلی امواج اور ان کے زاویے۔برقی میدان عمودی قطبیت رکھتی ہے۔



(ا) فاصلے کا کارتیسی محدد میں اظہار۔

(ب) اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدد میں اظہار۔

شکل 13.2: کسی بھی سمت میں فاصلے اور اکائی سمتیہ کو کارتیسی محدد میں لکھنے کا طریقہ۔

منفی z سمت میں حرکت کرتی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ میدان کی برقی موج

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} e^{j(\omega t+\beta_1 z)}$$

لکھی جاتی ہے۔اس موج میں برقی میدان ہر نقطے پر تمام اوقات $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت میں ہو گا جبکہ حرکت کی سمت میں فاصلہ z سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اب $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اکائی سمتیہ کی جگہ کسی بھی عمومی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}$ سمت کا میدان جو z محدد کی بجائے لکیر l پر گھٹتے فاصلے کی جانب حرکت کر رہا ہو

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a} e^{j(\omega t+\beta_1 l)}$$

لکھی جائے گی۔اب شکل 13.1 میں $\boldsymbol{E}_i$ پر دوبارہ غور کریں۔یہ برقی میدان $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ سمت میں ہے جبکہ برقی موج لکیر x' پر حرکت کر رہی ہے لہٰذا اس موج کو

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} e^{j(\omega t+\beta_1 x')} \tag{13.1}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں کارتیسی محدد x,y کے مرکز سے لکیر x' پر فاصلہ ناپا گیا ہے۔آئیں مساوات 13.1 میں لکیر x' پر فاصلے کو کارتیسی محدد x,y کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے ناپیں۔

شکل 13.2-الف میں آمد موج اور کارتیسی محدد دوبارہ دکھائے گئے ہیں۔اس شکل میں لکیر x' کو کارتیسی محدد x',y' کا حصہ دکھایا گیا ہے۔لکیر x' پر نقطہ A کا مرکز سے فاصلہ MA کو x' لکھا گیا ہے۔ اب $MA = MC + CA$ کے برابر ہے جہاں $MC = x\sin\theta_i$ اور $CA = y\cos\theta_i$ کے برابر ہیں لہٰذا

$$x' = x\sin\theta_i + y\cos\theta_i \tag{13.2}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے ہم مساوات 13.1 کو

$$\boldsymbol{E}_i = E_0 \boldsymbol{a}_z e^{j[\omega t + \beta_1 (x \sin\theta_i + y \cos\theta_i)]} \tag{13.3}$$

لکھ سکتے ہیں۔اس مساوات میں موج گھٹتے x' کی طرف رواں ہے۔

آمدی برقی اور مقناطیسی میدان x' کے عمودی ہیں۔برقی میدان کی سمت $\boldsymbol{a}_z$ (یا $\boldsymbol{a}'_z$) ہے جہاں $\boldsymbol{a}_z$ اور $\boldsymbol{a}'_z$ دونوں ایک ہی سمت کو ظاہر کرتے ہیں۔مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_i$ کی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_{Hi}$ محدد y' کی سمت میں ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{Hi} = \boldsymbol{a}'_y$ لکھا جا سکتا ہے۔آئیں $\boldsymbol{a}'_y$ کو کارتیسی محدد x, y کے متغیرات کی صورت میں شکل 13.2-ب کی مدد سے لکھیں۔اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}'_y$ کو دو سمتیوں کے مجموعے کے طور پر دکھایا گیا ہے۔چونکہ اکائی سمتیہ کی لمبائی ایک کے برابر ہوتی ہے لہٰذا شکل میں تکون کے وتر کی لمبائی اکائی ہے۔یوں تکون کا قاعدہ $\cos\theta_i$ اور اس کا عمود $\sin\theta_i$ کے برابر ہوں گے جس سے

$$\boldsymbol{a}'_y = -\cos\theta_i \boldsymbol{a}_x + \sin\theta_i \boldsymbol{a}_y \tag{13.4}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے آمدی مقناطیسی موج

$$\boldsymbol{H}_i = \frac{E_0}{\eta_1} \boldsymbol{a}'_y e^{j(\omega t + \beta_1 x')}$$

کو

$$\boldsymbol{H}_i = \frac{E_0}{\eta_1} (-\cos\theta_i \boldsymbol{a}_x + \sin\theta_i \boldsymbol{a}_y) e^{j[\omega t + \beta_1 (x \sin\theta_i + y \cos\theta_i)]} \tag{13.5}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 13.3 اور مساوات 13.5 کے مساوی دوری سمتی مساوات مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{E}_{si} = \boldsymbol{a}_z E_0 e^{j\beta_1 (x \sin\theta_i + y \cos\theta_i)} \tag{13.6}$$

$$\boldsymbol{H}_{si} = (-\cos\theta_i \boldsymbol{a}_x + \sin\theta_i \boldsymbol{a}_y) \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 (x \sin\theta_i + y \cos\theta_i)} \tag{13.7}$$

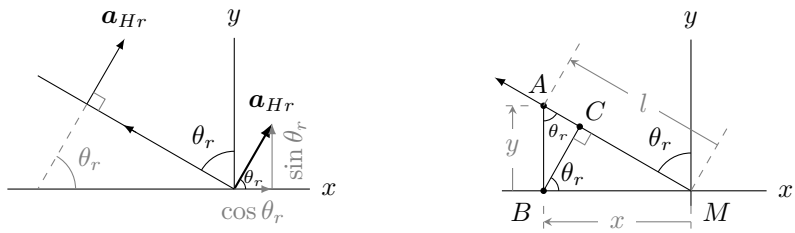
مساوات 10.79 شرح انعکاس جبکہ مساوات 10.81 شرح ترسیل کی تعریف بیان کرتے ہیں۔عین سرحد پر عمودی ($\perp$) قطب کے میدان کے لئے ان مساوات کو

$$\begin{aligned} \Gamma_\perp &= \frac{E_r}{E_i} \\ \tau_\perp &= \frac{E_t}{E_i} \end{aligned} \tag{13.8}$$

لکھا جائے گا۔

شکل 13.3-الف میں صرف انعکاسی موج دکھائی گئی ہے۔مرکز M سے موج کا فاصلہ l لیتے ہوئے برقی موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔اب $MA = MC + CA$ کے برابر ہے جہاں $MC = -x \sin\theta_r$ اور $CA = y \cos\theta_r$ کے برابر ہیں لہٰذا

$$l = -x \sin\theta_r + y \cos\theta_r \tag{13.9}$$



(ا) انعکاسی موج کے فاصلے کی کارتیسی محدد میں اظہار۔ (ب) انعکاسی مقناطیسی موج کی اکائی سمتیہ کا کارتیسی محدد میں اظہار۔

شکل 13.3: انعکاسی موج کے متغیرات کا کارتیسی محدد میں اظہار۔

لکھا جائے گا۔چونکہ منفی محدد پر x کی قیمت منفی ہو گی لہٰذا MC حاصل کرتے وقت منفی علامت کی ضرورت ہو گی۔یوں انعکاسی برقی موج

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{sr} &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\Gamma_{\perp}E_0 e^{-j\beta_1 l}\\ &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\Gamma_{\perp}E_0 e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r+y\cos\theta_r)}\end{aligned} \tag{13.10}$$

لکھی جائے گی جہاں بڑھتے l کی جانب حرکت کی بنا پر e کی طاقت میں منفی کی علامت استعمال کی گئی اور میدان کی سمت $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ ہے۔

انعکاسی مقناطیسی موج کی مساوات لکھنے کی خاطر مقناطیسی میدان کی اکائی سمتیہ درکار ہے۔شکل 13.3-ب میں انعکاسی مقناطیسی میدان کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{a}_H$ دکھائی گئی ہے جو x محدد کے ساتھ θ_r زاویہ بناتی ہے۔اکائی سمتیہ کو محدد کے مرکز پر دو سمتیات کے مجموعے کے طور پر بھی دکھایا گیا ہے جہاں سے

$$\boldsymbol{a}_{Hr} = \cos\theta_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \sin\theta_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \tag{13.11}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا انعکاسی مقناطیسی موج

$$\boldsymbol{H}_{sr} = (\cos\theta_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \sin\theta_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})\Gamma_{\perp}\frac{E_0}{\eta_1}e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r+y\cos\theta_r)} \tag{13.12}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

یہی طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے ترسیلی امواج کے مساوات یوں لکھے جا سکتے ہیں

$$\boldsymbol{E}_{st} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\tau_{\perp}E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t+y\cos\theta_t)} \tag{13.13}$$

$$\boldsymbol{H}_{st} = (-\cos\theta_t\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}} + \sin\theta_t\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})\tau_{\perp}\frac{E_0}{\eta_2}e^{j\beta_2(x\sin\theta_t+y\cos\theta_t)} \tag{13.14}$$

جہاں ترسیلی امواج کارتیسی محدد کے مرکز سے بڑھتے فاصلے کی طرف رواں ہیں۔یہاں غور کریں کہ دوسرے خطے میں امواج کے مساوات میں مستقل β_2 اور η_2 استعمال کئے گئے ہیں۔

صفحہ 274 پر مساوات 9.43 برقی میدان کی سرحدی شرط پیش کرتی ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف متوازی برقی میدان برابر ہوں گے۔ برقی میدان کی شرط مساوات 13.6، مساوات 13.10 اور مساوات 13.13 میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے یوں

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_i+0\cos\theta_i)} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\Gamma_{\perp}E_0 e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r+0\cos\theta_r)} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\tau_{\perp}E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t+0\cos\theta_t)}$$

یا

$$e^{j\beta_1 x \sin\theta_i} + \Gamma_\perp e^{j\beta_1 x \sin\theta_r} = \tau_\perp e^{j\beta_2 x \sin\theta_t} \tag{13.15}$$

لکھی جا سکتی ہے۔یہ مساوات کسی بھی x کے لئے درست ہے لہٰذا یہ $x = 0$ کے لئے بھی درست ہو گی۔اس میں $x = 0$ پر کرنے سے

$$1 + \Gamma_\perp = \tau_\perp \tag{13.16}$$

ملتا ہے۔مساوات 13.15 میں x کی قیمت تبدیل کرنے سے e کے طاقت تبدیل ہوتے ہیں۔یوں یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت x کے ہر قیمت کے لئے درست ہو گی جب مساوات میں تینوں e کے طاقت ہر صورت برابر ہوں یعنی

$$e^{j\beta_1 x \sin\theta_i} = e^{j\beta_1 x \sin\theta_r} = e^{j\beta_2 x \sin\theta_t} \tag{13.17}$$

اب پہلی دو اجزاء کے مساوات سے

$$\theta_i = \theta_r \tag{13.18}$$

اور آخری دو اجزاء کی مساوات سے

$$\beta_2 \sin\theta_t = \beta_1 \sin\theta_r \tag{13.19}$$

ملتا ہے جس میں مساوات 13.18 پر کرنے سے

$$\sin\theta_t = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin\theta_i$$

اور صفحہ 291 پر دیے، بے ضیاع خطے کی مساوات 10.39 پر کرنے سے

$$\sin\theta_t = \frac{\omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}}{\omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}} \sin\theta_i = \frac{\sqrt{\mu_1\epsilon_1}}{\sqrt{\mu_2\epsilon_2}} \sin\theta_i \tag{13.20}$$

یعنی

$$\begin{aligned}\sin\theta_t &= \frac{\sqrt{\mu_{r1}\mu_0\epsilon_{r1}\epsilon_0}}{\sqrt{\mu_{r2}\mu_0\epsilon_{r2}\epsilon_0}} \sin\theta_i \\ &= \frac{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}} \sin\theta_i\end{aligned}$$

یا

$$\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_i \tag{13.21}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\begin{aligned}n_1 &= \sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}} \\ n_2 &= \sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}\end{aligned} \tag{13.22}$$

انحرافی مستقل[6] کہلاتے ہیں۔امید کی جاتی ہے کہ آپ انحرافی مستقل n اور قدرتی رکاوٹ η میں فرق کر پائیں گے۔

[6] index of refraction

مساوات 13.18 کہتا ہے کہ آمدی اور انعکاسی زاویے برابر ہیں۔مساوات 13.21 جسے ابن سھل[7] کا قانون انحراف کہتے ہیں زاویہ انحراف اور زاویہ آمد کا تعلق بیان کرتا ہے۔یہ قانون مغربی دنیا میں قانون سنیل[8] سے جانا جاتا ہے۔بصریات[9] کے میدان میں قانون ابن سھل بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔

مثال 13.1: ہوا سے $\theta_i = 30^\circ$ زاویے پر شیشے میں عمودی تقطیب کی موج داخل ہوتی ہے۔پانی میں انحرافی موج کا زاویہ θ_t حاصل کریں۔اگر شیشے سے خلاء میں موج اسی زاویے سے داخل ہو تب θ_t کیا ہو گا۔شیشے کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 2.3$ لیں۔

حل:خلاء کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 1$ لیتے ہوئے، خلاء سے شیشے میں دخول پر

$$\sin\theta_t = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2.3}}\sin 30^\circ = 0.32969$$

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.32969 = 19.25^\circ$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ شیشے سے خلاء میں دخول پر

$$\sin\theta_t = \frac{\sqrt{2.3}}{\sqrt{1}}\sin 30^\circ = 0.758288$$

سے

$$\theta_t = \sin^{-1} 0.758288 = 49.3^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔

صفحہ 274 پر مساوات 9.47 مقناطیسی میدان کی سرحدی شرط بیان کرتا ہے جس کے مطابق سرحد کے دونوں اطراف پر متوازی مقناطیسی میدان برابر ہوں گے۔شکل 13.1 میں آمدی، انعکاسی اور انحرافی مقناطیسی میدان $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ اجزاء پر مشتمل ہیں۔ان میں صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اجزاء سرحد کے متوازی ہیں لہٰذا مساوات 13.7، مساوات 13.12 اور مساوات 13.14 کے $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ اجزاء میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے مقناطیسی سرحدی شرط سے

$$-\cos\theta_i \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1 x \sin\theta_i} + \cos\theta_r \Gamma_\perp \frac{E_0}{\eta_1} e^{-j\beta_1(-x\sin\theta_r)} = -\cos\theta_t \tau_\perp \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2(x\sin\theta_t)}$$

یا

$$-\cos\theta_i e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} + \cos\theta_r \Gamma_\perp e^{j\beta_1 x \sin\theta_r} = -\cos\theta_t \tau_\perp \frac{\eta_1}{\eta_2} e^{j\beta_2 x \sin\theta_t}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 13.18 اور مساوات 13.19 کے استعمال سے

$$-\cos\theta_i + \cos\theta_i \Gamma_\perp = -\cos\theta_t \tau_\perp \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

---

[7] بغداد کے اَبو سعد العلاء ابن سھل نے اس قانون کو سن 984 میں دریافت کیا۔
[8] Snell's law
[9] optics

لکھا جا سکتا ہے۔اس میں مساوات 13.16 سے $\tau_\perp$ کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$\Gamma_\perp = \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} \tag{13.23}$$

حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 309 پر مساوات 10.79 موجودہ مساوات میں $\theta_i = 0^\circ$ پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر خطہ-2 کامل موصل ہو تب $\eta_2 = 0$ ہو گا جس سے $\Gamma_\perp = -1$ حاصل ہوتا ہے۔اگر دونوں خطے غیر مقناطیسی ، بے ضیاع ذو برق ہوں تب مساوات 13.20 کی مدد سے

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}} \tag{13.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔خطہ-2 کا برقی مستقل خطہ-1 کے برقی مستقل سے زیادہ ہونے کی صورت $(\epsilon_2 > \epsilon_1)$ میں $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} > 1$ ہو گا جبکہ سائن کی زیادہ سے زیادہ ممکن قیمت اکائی ہے لہٰذا $\sin^2\theta_i \leq 1$ ہو گا اور یوں جزر کے اندر مقدار مثبت رہے گی جس سے $\Gamma_\perp$ حقیقی عدد حاصل ہوتا ہے۔اس کے برعکس $\epsilon_2 < \epsilon_1$ کی صورت میں اگر $\sin^2\theta_i > \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ ہو تب جزر کے اندر منفی مقدار ہو گی لہٰذا $\Gamma_\perp$ خیالی عدد ہو گا۔ایسی صورت میں $|\Gamma_\perp| = 1$ ہوتا ہے اور سرحد پر مکمل اندرونی انعکاس[10] سے پوری کی پوری موج زیادہ برقی مستقل کے خطے میں سرحد سے واپس لوٹتی ہے۔جس زاویہ آمد پر $\Gamma_\perp = 1$ ہو اسے زاویہ فاصل[11] پکارا جاتا ہے۔یوں زاویہ فاصل

$$\theta_{i,\text{ف}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \tag{13.25}$$

کے برابر ہے۔غیر مقناطیسی خطوں کا مقناطیسی مستقل μ_0 لیتے ہوئے، فاصل زاویے سے بڑے زاویے $(\theta_i > \theta_{i,\text{ف}})$ کی صورت میں مساوات 13.20 سے $\sin\theta_t > 1$ حاصل ہوتا ہے جس سے $\cos\theta_t$ خیالی عدد حاصل ہو گا

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \sin^2\theta_t} = \sqrt{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i} = jA \tag{13.26}$$

جہاں $A = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i - 1}$ حقیقی عدد ہے۔یوں کم کثافت کے خطے میں مساوات 13.13 کی مدد سے میدان

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{st} &= \boldsymbol{a}_z \tau_\perp E_0 e^{j\beta_2(x\sin\theta_t + yjA)}\\ &= \boldsymbol{a}_z \tau_\perp E_0 e^{-\beta_2 A y} e^{j\beta_2 x \sin\theta_t}\end{aligned}$$

یا

$$\boldsymbol{E}_{st} = \boldsymbol{a}_z \tau_\perp E_0 e^{-\alpha y} e^{j\beta_2 x \sin\theta_t} \tag{13.27}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\alpha = \beta_2 A = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i - 1} \tag{13.28}$$

کے برابر ہے۔یہ میدان کم کثافت خطے میں $x-$ جانب بے ضیاع حرکت کرتی ہے۔سرحد پر $E_\perp$ کی مقدار $\tau_\perp E_0$ ہے جو سرحد سے دور چلتے ہوئے $e^{-\alpha y}$ کی شرح سے گھٹتی ہے۔مساوات 13.27 کے طرز کی موج کو سطحی موج[12] کہتے ہیں۔سطحی موج سرحد کے ساتھ چمٹی رہتی ہے۔

---

[10] total internal reflection
[11] critical angle
[12] surface wave

مثال 13.2: پانی سے ہوا کی جانب سرحد پر آمدی موج $\theta_i = 55^\circ$ زاویہ رکھتی ہے۔ہوا میں انحرافی موج کی قیمت سرحد پر اور سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر حاصل کریں۔سرحد پر آمدی برقی میدان $E_i = 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہے۔پانی کے مستقل $\epsilon_r = 80$، $\mu_r = 1$ اور $\sigma = 0$ لیں۔

حل: مساوات 13.25 سے فاصل زاویہ

$$\theta_{i,\text{ف}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{80}} = 6.42^\circ$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ آمدی زاویہ اس سے زیادہ ہے لہٰذا مکمل اندرونی انعکاس پائی جائے گی۔مساوات 13.20 سے

$$\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\mu_0 \times 80 \times \epsilon_0}{\mu_0 \times 1 \times \epsilon_0}}\sin 55^\circ = 7.327$$

اور مساوات 13.26 سے

$$\cos\theta_t = jA = \sqrt{1 - 7.327^2} = j7.258$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$\alpha = \beta_2 A = \frac{2\pi}{\lambda_0}7.258 = \frac{45.6}{\lambda_0}\,\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$$

ہو گا۔مساوات 13.24 سے

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos 55^\circ - \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}}{\cos 55^\circ + \sqrt{\frac{1}{80} - \sin^2 55^\circ}} = -0.33369 - j0.94268$$

اور مساوات 13.16 سے

$$\tau_\perp = 1 + \Gamma_\perp = 0.66631 - j0.94268 = 1.1544\underline{/-54.746^\circ}$$

- اس طرح ہوا میں سرحد پر $|E_t| = 1.1544 \times 1 = 1.1544\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ ہو گا۔
- ہوا میں سرحد سے $\frac{\lambda}{4}$ فاصلے پر

$$|E_t| = 1.1544 \times 1 \times e^{-\frac{45.6}{\lambda_0}\frac{\lambda_0}{4}} = 12.9\,\frac{\mu\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

ہو گا۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہوا میں میدان سرحد کے قریب رہتا ہے۔سرحد سے کچھ ہی فاصلے پر میدان کی قیمت قابل نظر انداز ہو جاتی ہے۔یاد رہے کہ $\sin\theta_t$ حقیقی عدد ہے جس کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے جبکہ $\cos\theta_t$ خیالی عدد ہے۔مساوات 13.27 اور مساوات 13.14 سے ہوا میں برقی اور مقناطیسی امواج

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{st} &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\tau_{\perp}E_0 e^{-\beta_2 Ay}e^{j\beta_2 x\sin\theta_t}\\
\boldsymbol{H}_{st} &= (-jA\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\sin\theta_t\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})\tau_{\perp}\frac{E_0}{\eta_2}e^{-\beta_2 Ay}e^{j\beta_2 x\sin\theta_t}\\
&= (-jA\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\sin\theta_t\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})\tau_{\perp}\frac{E_0}{|\eta_2|}e^{-\beta_2 Ay}e^{\left(j\beta_2 x\sin\theta_t-j\theta_\eta\right)}
\end{aligned}
$$

لکھے جائیں گے جہاں $\eta = |\eta|\, e^{j\theta_\eta}$ کا استعمال کیا گیا۔ہوا میں سرحد سے دور $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ سمت میں اوسط طاقت کی منتقلی صفحہ 299 پر مساوات 10.55

$$
\boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}^{*}\right]_{\text{حقیقی}}
$$

کی مدد حاصل کرتے ہیں۔مقناطیسی میدان کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جزو اس منتقلی میں کوئی کردار ادا نہیں کرتا لہٰذا اس کا صرف $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ جزو لیا جائے گا۔جوڑی دار مخلوط مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}^{*}$ لکھتے ہوئے $\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}$ میں تمام مقامات پر j کی علامت مثبت سے منفی اور منفی سے مثبت کر دی جاتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{s}}^{*} &= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\tau_{\perp}E_0 e^{-\beta_2 Ay}e^{j\beta_2 x\sin\theta_t}\right]\times\left[jA\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\tau_{\perp}\frac{E_0}{|\eta_2|}e^{-\beta_2 Ay}e^{\left(-j\beta_2 x\sin\theta_t+j\theta_\eta\right)}\right]\\
&= \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\frac{\tau_{\perp}^2E_0^2}{2|\eta_2|}e^{-2\beta_2 Ay}\left[j\cos\theta_\eta-\sin\theta_\eta\right]
\end{aligned}
$$

کا حقیقی جزو لیتے ہوئے

$$
\boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\frac{\tau_{\perp}^2E_0^2}{2|\eta_2|}e^{-2\beta_2 Ay}\sin\theta_\eta
$$

حاصل ہوتا ہے۔ہوا میں η حقیقی عدد ہے لہٰذا $\theta_\eta = 0$ ہو گا اور چونکہ $\sin 0 = 0$ ہوتا ہے لہٰذا اوسط طاقت کی منتقلی

$$
\boldsymbol{\mathscr{P}}_{\text{اوسط}} = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\frac{\tau_{\perp}^2E_0^2}{2|\eta_2|}e^{-2\beta_2 Ay}\sin 0^{\circ} = 0
$$

صفر ہو گی۔یوں کم کثافتی خطے میں مکمل اندرونی انعکاس کی صورت میں اوسطاً کوئی طاقت منتقل نہیں ہو گا اور برقی اور مقناطیسی امواج سرحد کے قریب ہی رہتی ہیں۔ایسی امواج کو فنا پذیر امواج[13] کہتے ہیں۔

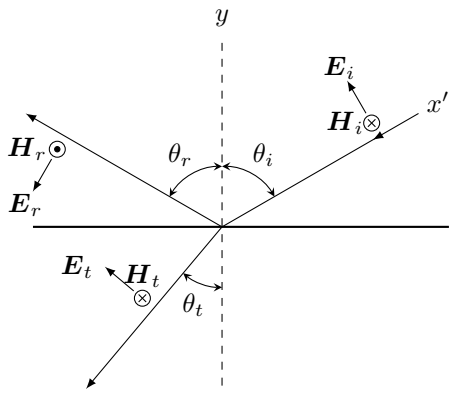
کم کثافتی خطے یعنی ہوا میں مقناطیسی موج کا $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جزو اور برقی $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ اجزاء سرحد کے ساتھ ساتھ، بے ضیاع $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ سمت میں حرکت کریں گے۔ہوا میں ان امواج کی رفتار، زیادہ کثافتی خطے یعنی پانی میں، سرحد کے متوازی موج کی رفتار کے برابر ہو گی یعنی

$$
\text{ہوا میں سرحد کے متوازی موج کی رفتار} = \frac{\text{پانی میں رفتار موج}}{\sin\theta_i}
$$

سرحدی موج درحقیقت سرحدی شرائط پورا کرنے کی درکار برقی اور مقناطیسی میدان ہیں۔

---

[13] evanescent wave



شکل 13.4: متوازی قطبی موج میں برقی میدان سطح آمد کے متوازی ہوتا ہے۔

متوازی قطبی برقی موج $\boldsymbol{E}_{\|}$

آئیں اب متوازی قطبی موج کی صورت حال دیکھیں۔یاد رہے کہ موج کی سمت پوئنٹنگ سمتیہ $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ کی سمت ہی ہوتی ہے۔برقی اور مقناطیسی میدان، موج کے حرکت کی سمت کے عمودی ہوتے ہیں۔یوں سمت حرکت کے عمودی، برقی میدان کی سمت فرض کرتے ہوئے اور سمت حرکت جانتے ہوئے مقناطیسی میدان کی سمت کا تعین پوئنٹنگ سمتیہ سے کیا جاتا ہے۔متوازی قطبی موج کی بات کرتے ہوئے، آمدی برقی میدان کی سمت یا تو شکل 13.4 میں $\boldsymbol{E}_i$ کی سمت اور یا اس کے الٹ سمت ممکن ہے۔یہ واحد دو سمتیں ہیں جو موج کے حرکت کے عمودی اور آمدی سطح کے متوازی ہیں۔ اگر آمدی برقی میدان کی سمت شکل میں دکھائے سمت کے الٹ ہو تب آمدی مقناطیسی میدان کی سمت بھی الٹ ہو گی یعنی یہ صفحہ سے باہر جانب کو ہو گا۔ سمت حرکت کے عمودی اور آمدی سطح کے متوازی، انعکاسی موج $\boldsymbol{E}_r$ کی بھی دو سمتیں ممکن ہیں جن میں ایک سمت شکل میں فرض کی گئی ہے۔برقی انعکاسی میدان کی سمت فرض کرنے سے انعکاسی مقناطیسی میدان کی سمت اب وہی ممکن ہے جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔آئیں اس شکل کو حل کریں۔

مساوات 13.2 اور مساوات 13.4 کی مدد سے شکل 13.4 کے لئے

$$\boldsymbol{E}_{si}=(-\cos\theta_i\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\sin\theta_i\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})E_0e^{j\beta_1(x\sin\theta_i+y\cos\theta_i)} \tag{13.29}$$

$$\boldsymbol{H}_{si}=-\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\frac{E_0}{\eta_1}e^{j\beta_1(x\sin\theta_i+y\cos\theta_i)} \tag{13.30}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔اسی طرح گزشتہ معلومات کا سہارا لیتے ہوئے

$$\boldsymbol{E}_{sr}=-(\cos\theta_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\sin\theta_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})\Gamma_{\|}E_0e^{j\beta_1(x\sin\theta_r-y\cos\theta_r)} \tag{13.31}$$

$$\boldsymbol{H}_{sr}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\Gamma_{\|}\frac{E_0}{\eta_1}e^{j\beta_1(x\sin\theta_r-y\cos\theta_r)} \tag{13.32}$$

$$\boldsymbol{E}_{st}=(-\cos\theta_t\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}+\sin\theta_t\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}})\tau_{\|}E_0e^{j\beta_2(x\sin\theta_t+y\cos\theta_t)} \tag{13.33}$$

$$\boldsymbol{H}_{st}=-\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\tau_{\|}\frac{E_0}{\eta_2}e^{j\beta_2(x\sin\theta_t+y\cos\theta_t)} \tag{13.34}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔سرحد $(y=0)$ پر برقی شرط لاگو کرنے کی خاطر برقی میدان کا وہ حصہ استعمال کیا جائے گا جو سرحد کے متوازی ہے۔یوں $\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}$ جزو کو رد کیا جائے گا جبکہ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ جزو کو استعمال کیا جائے گا لہٰذا

$$-\cos\theta_i\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}E_0e^{j\beta_1(x\sin\theta_i+0\cos\theta_i)}-\cos\theta_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\Gamma_{\|}E_0e^{j\beta_1(x\sin\theta_r-0\cos\theta_r)}=-\cos\theta_t\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\tau_{\|}E_0e^{j\beta_2(x\sin\theta_t+0\cos\theta_t)}$$

یعنی

$$\cos\theta_i e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} + \cos\theta_r \Gamma_\parallel e^{j\beta_1 x\sin\theta_r} = \cos\theta_t \tau_\parallel e^{j\beta_2 x\sin\theta_t} \tag{13.35}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں x کی قیمت تبدیل کرنے سے e کی طاقت تبدیل ہوتی ہے۔ایسی صورت میں یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت درست ہو گا جب مساوات میں تینوں e کے طاقت، x کے تمام قیمتوں کے لئے برابر ہوں یعنی

$$j\beta_1 x\sin\theta_i = j\beta_1 x\sin\theta_r = j\beta_2 x\sin\theta_t \tag{13.36}$$

ہو۔اس مساوات سے

$$\theta_i = \theta_r \tag{13.37}$$

اور

$$\sin\theta_t = \frac{\beta_1}{\beta_2}\sin\theta_i \tag{13.38}$$

حاصل ہوتے ہیں جو عین عمودی قطبی موج کے مساوات ہیں۔مساوات 13.35 میں مساوات 13.36 پر کرنے سے

$$1 + \Gamma_\parallel = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\tau_\parallel \tag{13.39}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سرحد پر مقناطیسی شرط لاگو کرتے ہیں۔چونکہ مقناطیسی میدان سرحد کے متوازی ہے لہٰذا اس کا کوئی جزو رد نہیں کیا جائے گا۔اس طرح

$$-\boldsymbol{a}_z \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1(x\sin\theta_i + 0\cos\theta_i)} + \boldsymbol{a}_z \Gamma_\parallel \frac{E_0}{\eta_1} e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - 0\cos\theta_r)} = -\boldsymbol{a}_z \tau_\parallel \frac{E_0}{\eta_2} e^{j\beta_2(x\sin\theta_t + 0\cos\theta_t)}$$

یعنی

$$e^{j\beta_1 x\sin\theta_i} - \Gamma_\parallel e^{j\beta_1 x\sin\theta_r} = \tau_\parallel \frac{\eta_1}{\eta_2} e^{j\beta_2 x\sin\theta_t}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں مساوات 13.36 پر کرنے سے

$$1 - \Gamma_\parallel = \tau_\parallel \frac{\eta_1}{\eta_2} \tag{13.40}$$

ملتا ہے۔مساوات 13.39 اور مساوات 13.40 حل کرتے ہوئے

$$\Gamma_\parallel = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t} \tag{13.41}$$

ملتا ہے جو غیر مقناطیسی اور بے ضیاع خطوں میں

$$\Gamma_\parallel = \frac{-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}} \tag{13.42}$$

صورت اختیار کر لے گی۔اگر خطہ-2 کامل موصل ہو تب $\Gamma_\parallel = -1$ حاصل ہوتا ہے جو متوقع جواب ہے۔

متوازی قطبی موج کی صورت میں ایسے آمدی زاویہ ممکن ہے جس پر $\Gamma_{\parallel} = 0$ حاصل ہو لہٰذا ایسی صورت میں تمام کی تمام موج بغیر انعکاس کے دوسرے خطے میں داخل ہو جاتی ہے۔اس آمدی زاویے کو بریوسٹر زاویہ[14] کہتے[15] ہیں۔مساوات 13.42 کو صفر کے برابر پر کرنے سے زاویہ بریوسٹر

$$\theta_{i,\text{بریوسٹر}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}{1+\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \tag{13.43}$$

حاصل ہوتا ہے۔

کسی بھی موج کو عمودی اور متوازی قطبی امواج کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔یوں اگر غیر قطبی موج، سرحد پر زاویہ بریوسٹر سے آمد ہو تب اس موج کا وہ جزو جو متوازی قطبیت رکھتا ہو سرحد سے مکمل طور دوسری جانب گزر جائے گا جبکہ سرحد سے انعکاسی جزو صرف اور صرف عمودی قطبیت کا ہو گا۔عمودی قطبی موج حاصل کرنے کا یہ آسان طریقہ ہے۔عمودی موج کا کچھ حصہ منعکس ہو گا اور کچھ حصہ منحرف لہٰذا انحرافی موج غیر قطبی ہو گی۔زاویہ بریوسٹر کو زاویہ قطبیت[16] بھی کہتے ہیں۔

مثال 13.3: متوازی قطبی موج ہوا سے پانی کی طرف آمد ہے۔زاویہ بریوسٹر حاصل کریں۔پانی کا جزوی برقی مستقل $\epsilon_r = 80$ لیں۔

حل:

$$\theta_{i,\text{بریوسٹر}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{80}{1}} = 83.6^\circ \tag{13.44}$$

مشق 13.1: شکل 13.4 میں انعکاسی میدانوں کی سمتیں الٹ تصور کرتے ہوئے شرح انعکاس $\Gamma_{\parallel}$ حاصل کریں۔چونکہ یہاں انعکاسی میدان الٹ تصور کئے جا رہے ہیں لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ $\Gamma_{\parallel}$ کی حاصل مساوات منفی ایک سے ضرب ہو گی۔

جواب:صرف انعکاسی امواج میں فرق ہو گا جنہیں یوں لکھا جائے گا۔

$$\boldsymbol{E}_{sr} = (\cos\theta_r \boldsymbol{a}_{\text{x}} + \sin\theta_r \boldsymbol{a}_{\text{y}})\Gamma_{\parallel} E_0 e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - y\cos\theta_r)}$$

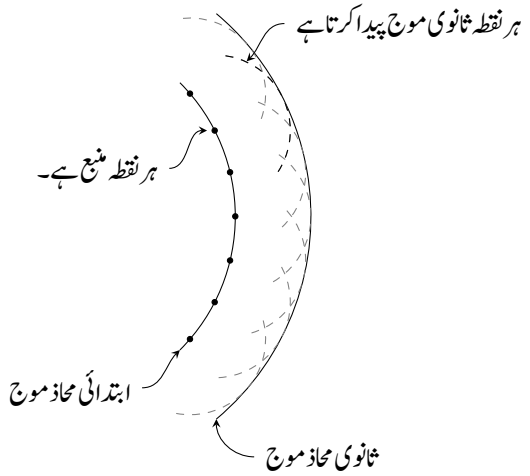
$$\boldsymbol{H}_{sr} = -\boldsymbol{a}_{\text{z}}\Gamma_{\parallel}\frac{E_0}{\eta_1}e^{j\beta_1(x\sin\theta_r - y\cos\theta_r)}$$

شرح انعکاس $\frac{\eta_1\cos\theta_i - \eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t}$ حاصل ہو گا۔

13.2 ترسیم ہائی گن

ہائی گن [17] کا اصول کہتا ہے کہ محاذ موج پر ہر نقطے کو منبع کروی موج تصور کیا جا سکتا ہے۔شکل 13.5 میں اس اصول کو دکھایا

[14] Brewster angle
[15] یہ زاویہ سکاٹ لینڈ کے داؤد بریوسٹر کے نام سے منسوب ہے۔
[16] polarizing angle
[17] Huygen's principle



شکل 13.5: ہائی گن کے اصول کے تحت محاذ موج پر ہر نقطہ منبع موج کا کردار ادا کرتا ہے۔

گیا ہے جہاں ابتدائی محاذ موج پر مختلف نقطوں سے پیدا ثانوی امواج دکھائے گئے ہیں۔یہ ثانوی امواج مل کر ثانوی محاذ موج پیدا کرتی ہیں۔ہائی گن کے اصول کی مدد سے شعاع کی راہ میں حائل چیز کے قریب شعاع کا مڑ جانا سمجھا جا سکتا ہے جو نا تو انعکاس اور نا ہی انحراف کے زمرے میں آتا ہے۔

شعاع کی راہ میں حائل موصل سطح شکل میں دکھائی گئی ہے۔آئیں ہائی گن کے اصول سے نقطہ N پر برقی میدان

$$E = \int \mathrm{d}E \tag{13.45}$$

حاصل کریں جہاں موصل سطح کے کنارے سے آگے x محدد پر عمومی نقطے کو منبع موج تصور کرتے ہوئے N پر میدان $\mathrm{d}E$ کے برابر ہے۔

$$\mathrm{d}E = \frac{E_0}{r} e^{-j\beta(r+\delta)}\,\mathrm{d}x \tag{13.46}$$

سے

$$E = \frac{E_0}{r} e^{-j\beta r} \int_a^\infty e^{-j\beta\delta}\,\mathrm{d}x \tag{13.47}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر $\delta \ll r$ ہو تب

$$\delta = \frac{x^2}{2r} \tag{13.48}$$

کے برابر ہو گا۔یوں $k^2 = \frac{2}{r\lambda}$ اور $u = kx$ لیتے ہوئے

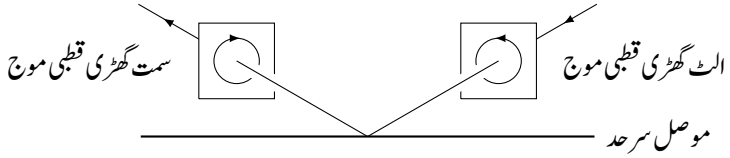
$$E = \frac{E_0}{kr} e^{-j\beta r} \int_{ka}^\infty e^{-j\frac{\pi u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \tag{13.49}$$

لکھا جا سکتا ہے جسے

$$E = \frac{E_0}{kr} e^{-j\beta r} \left(\int_0^\infty e^{-j\frac{\pi u^2}{2}}\,\mathrm{d}u - \int_0^{ka} e^{-j\frac{\pi u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \right) \tag{13.50}$$

لکھ سکتے ہیں۔

ہائی گن
کو بہتر



شکل 13.6: الٹ گھڑی قطبی آمدی موج موصل سطح سے انعکاس کے بعد سمت گھڑی قطبیت رکھتی ہے۔

باب 14

موتج اور گھمکیا

اب تک ہم صرف عرضی برقی و مقناطیسی[1] TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں جن میں برقی اور مقناطیسی دونوں میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔اس باب میں ترسیلی تار پر بحث کو آگے بڑھاتے ہوئے ایسے امواج پر غور کیا جائے گا جن میں برقی یا مقناطیسی میدان سمت حرکت کی جانب بھی جزو رکھتے ہوں۔وہ ترسیلی تار جو صرف اس طرح کے امواج کو گزار سکیں میوج[2] کہلاتے ہیں۔

دو لامحدود جسامت کے مستوی سطحوں کے موتج سے بات شروع کرتے ہوئے کھوکھلے مستطیلی اور نلکی موتج تک بات بڑھائی جائے گی۔ان موتج میں میدان کے اشکال، ان کے منقطع طول موج اور تضعیفی مستقل حاصل کئے جائیں گے۔اس کے بعد ایک تار پر بیرونی موج اور دیگر اقسام کے موتج پر غور کیا جائے گا۔آخر میں موصل کے بند ڈبوں میں قید امواج پر غور کیا جائے گا جنہیں گھمکیا کہتے ہیں۔

14.1 برقی دور، ترسیلی تار اور موتج کا موازنہ

کم تعدد پر برقی دباو، برقی رو، مزاحمت وغیرہ عملی متغیر ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے برقی ادوار حل کئے جاتے ہیں۔ان تعدد پر تمام مزاحمت یا رکاوٹ کو نقطہ نما تصور کیا جاتا ہے۔یوں تار کے ایک سرے پر منبع برقی دباو لاگو کرتے ہوئے تار کے دوسرے سرے پر مزاحمت میں برقی رو حاصل کی جا سکتی ہے۔

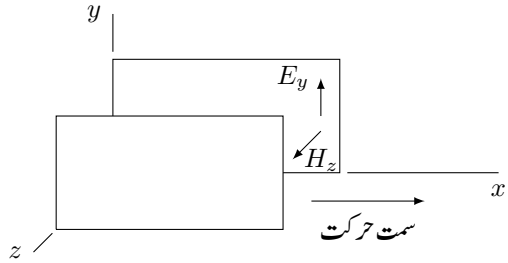
قدر زیادہ تعدد پر انہیں حقائق کو ترسیلی تار پر لاگو کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرتے وقت ترسیلی تار کی مزاحمت یا امالہ تار کی لمبائی پر تقسیم شدہ تصور کرنا لازم ہے۔ساتھ ہی ساتھ ترسیلی تار پر برقی دباو کی رفتار پر بھی نظر رکھنی ہوتی ہے۔

اب موصل کھوکھلے نلکی یا مستطیلی نالی پر مبنی نظام کی بات کرتے ہیں۔کیا ایسی نالی برقی و مقناطیسی طاقت منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے؟ اگر ہماری معلومات برقی ادوار یا ترسیلی تار تک محدود ہوتی تب اس سوال کا جواب یہ ہے کہ ایسا ممکن نہیں

---

[1] transverse electromagnetic, TEM

[2] waveguide



شکل 14.1: دو لامحدود وسعت کے متوازی موصل چادروں کا نظام۔

ہے کیونکہ برقی طاقت کے منتقلی کے لئے دو تار ضروری ہیں۔البتہ اگر ہم شعاعوں کا علم رکھتے تب جواب ہوتا کہ ایسا ممکن ہے چونکہ شعاعیں سیدھی کھوکھلے نلکی سے گزر سکتی ہیں اور شعاعیں بلند تعدد ($10^{16}\,\mathrm{Hz}$) کی برقی و مقناطیسی امواج ہی ہیں۔

اصل جواب ہے کہ ایسا امواج کے تعدد پر منحصر ہے۔کم تعدد کے امواج نالی سے نہیں گزر سکتے جبکہ بلند تعدد کے امواج اس سے گزر سکتے ہیں۔تعدد کے ان دو خطوں کے درمیان ایسی تعدد ہو گی جس سے کم تعدد نالی سے نہیں گزرے گی اور جس سے زیادہ تعدد نالی سے گزرے گی۔اس تعدد کو پست انقطاعی تعدد[3] کہا جاتا ہے۔

کھوکھلے نالی سے برقی و مقناطیسی طاقت کی منتقلی برقی ادوار حل کرنے کے علم سے ناقابل سمجھ مسئلہ ہے۔کھوکھلے نالی میں طاقت کی منتقلی، نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی میدان پر غور سے سمجھا جا سکتا ہے جنہیں استعمال کرتے ہوئے پوئنٹنگ سمتیہ سے موج کی طاقت حاصل ہوتی ہے۔دراصل برقی و مقناطیسی طاقت نالی کے کھوکھلے حصے میں برقی اور مقناطیسی امواج سے منتقل ہوتا ہے نا کہ نالی کے موصل حصے میں۔برقی دباو اور برقی رو اس منتقلی کے محض اضافی اثرات ہیں۔

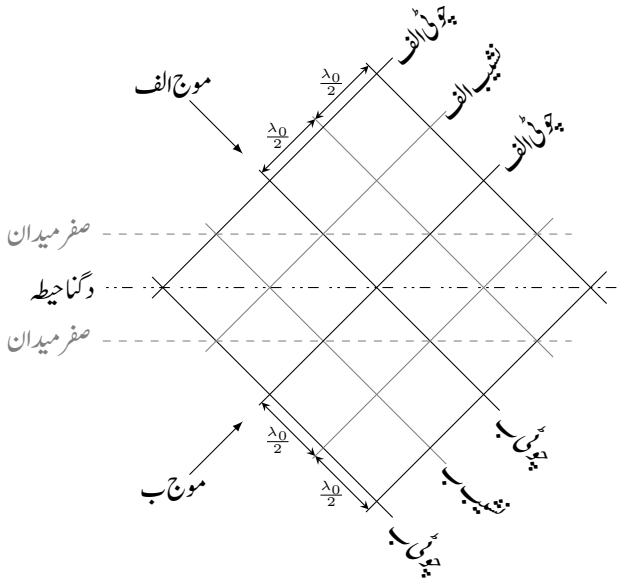
14.2 دو لامحدود وسعت کے مستوی چادروں کے موتج میں عرضی برقی موج

شکل 14.1 میں دو لامحدود وسعت کے متوازی چادروں پر مبنی ترسیلی تار دکھائی گئی ہے جو y سمتی عرضی برقی و مقناطیسی موج گزار سکتی ہے۔ اس تار کی خاص خاصیت یہ ہے کہ ایک مخصوص تعدد کے اوپر یہ دیگر بلند درجی انداز[4] کے امواج بھی گزار سکتی ہے۔یوں ترسیلی تار سے شروع کرتے ہوئے موتج تک بحث کو پہنچانے کے لئے یہ بہترین مثال ہے۔

ایسی بلند درجی انداز کی بات کرتے ہیں جس میں برقی میدان ہر نقطے پر y سمتی ہے جبکہ سمت حرکت $\boldsymbol{a}_x$ ہے۔چونکہ برقی میدان سمت حرکت کے عمودی ہے لہٰذا اس انداز کو عرضی برقی انداز[5] (TE) کہا جائے گا۔اگرچہ اس موج میں برقی میدان عرضی ہے، مقناطیسی میدان عرضی اور طولی اجزاء پر مشتمل ہے۔کامل موصل چادروں کی صورت میں چادروں پر برقی میدان صفر ہو گا البتہ چادر سے دور اس کی کچھ بھی قیمت ممکن ہے۔ایسی عرضی برقی انداز موج کے خصوصیات باآسانی یوں حاصل کئے جا سکتے ہیں کہ اسے دو عرضی برقی و مقناطیسی انداز TEM امواج کا مجموعہ تصور کیا جائے جو موصل چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی ہوں۔

---

[3] low cutoff frequency
[4] higher order mode
[5] transverse electric mode, TE mode

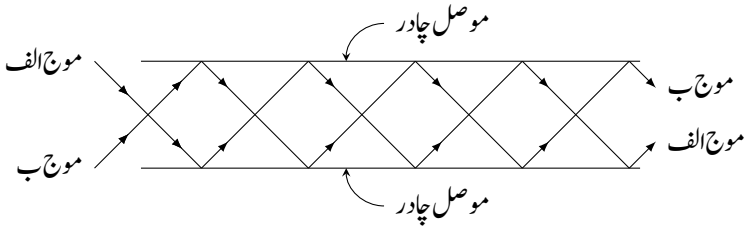


شکل 14.2: دو عرضی برقی و مقناطیسی امواج خلاء میں مختلف سمتوں میں حرکت کر رہی ہیں۔

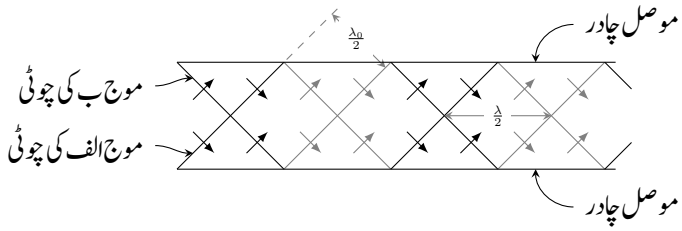
آئیں پہلے شکل 14.2 پر غور کریں جہاں خالی خلاء میں ایک ہی تعدد کے دو سطحی TEM امواج کے ملاپ کی صورت حال دکھائی گئی ہے۔اس شکل میں امواج خطی قطبی تصور کئے گئے ہیں جن کا برقی میدان صفحہ کے عمودی فرض کیا گیا ہے۔موج الف کی شعاع اوپر بائیں ہاتھ سے نیچے دائیں ہاتھ کی طرف جبکہ موج ب کی شعاع نیچے بائیں ہاتھ سے اوپر دائیں ہاتھ کی جانب گامزن ہے۔یوں ان کا آپس میں ملاپ کسی زاویے پر ہوتا ہے۔شکل میں گہری سیاہی کی ٹھوس لکیر سے موج کی چوٹی جبکہ ہلکی سیاہی کے ٹھوس لکیر سے اس کا نشیب دکھایا گیا ہے۔یوں سطحی موج الف کی چوٹیاں اور نشیب، شعاع الف کے عمودی دکھائے گئے ہیں۔گہری سیاہی کے ٹھوس لکیر کو برقی میدان کی چوٹی تصور کیا جائے۔یوں اس لکیر پر برقی میدان زیادہ سے زیادہ قیمت رکھتا ہے اور اس کی سمت صفحہ سے عمودی باہر جانب کو ہے۔اسی طرح ہلکی ٹھوس لکیر میدان کی نشیب کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا یہاں میدان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی البتہ اس کی سمت صفحہ کے عمودی اندر جانب کو ہو گی۔چوٹی اور نشیب کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda_0}{2}$ کے برابر ہے۔

جس نقطے پر ایک موج کی چوٹی اور دوسری موج کا نشیب ملتے ہیں اس نقطے پر کل میدان صفر کے برابر ہو گا۔یوں جہاں گہری سیاہی اور ہلکی سیاہی کے لکیر ملتے ہیں وہاں میدان صفر ہو گا۔شکل میں ہلکی سیاہی میں ایسی دو نقطہ دار لکیریں کھینچی گئی ہیں جن پر میدان صفر کے برابر ہے۔آپ غور کر کے تسلی کر لیں کہ ان لکیروں کے ہر نقطے پر برقی میدان صفر ہی ہے۔مزید آپ ذہن میں دونوں امواج کو حرکت دیتے ہوئے تسلی کر لیں کہ امواج کے حرکت کے باوجود ان دو لکیروں پر میدان صفر ہی رہتا ہے۔اسی طرح جن نقطوں پر دونوں امواج کی چوٹیاں آپس میں ملتی ہوں یا دونوں کے نشیب آپس میں ملتے ہوں وہاں میدان دگنا ہو گا۔شکل میں ہلکی سیاہی اور دو نقطوں والی ایسی ایک عدد لکیر دکھائی گئی ہے جہاں میدان دگنا پایا جائے گا۔

صفر میدان دکھاتے نقطہ دار لکیر پر برقی میدان صفر کے برابر ہے لہٰذا ان پر موصل سطح کے سرحدی برقی میدان کا شرط پورا اترتا ہے۔یوں ان لکیروں پر، صفحہ کے عمودی موصل چادر رکھے جا سکتے ہیں۔البتہ ایسا کرنے سے موج کی سیدھی حرکت متاثر ہو گی چونکہ آمدی زاویے کے برابر، موصل سطح پر، انعکاسی زاویے سے موج انعکاس کرے گی۔یوں موج موصل سطح سے گزر نہیں پائے گی۔ہاں اگر دو موصل چادروں کے درمیان ان امواج کو بھیجا جائے، تب یہ دونوں موصل سطحوں کے درمیان بار بار



شکل 14.3: شعاعیں دو چادروں کے درمیان بار بار انعکاس کرتی حرکت کرتی ہیں۔



شکل 14.4: موجوں کی چوٹیاں، نشیب، خالی خلاء اور موتج میں طول موج۔

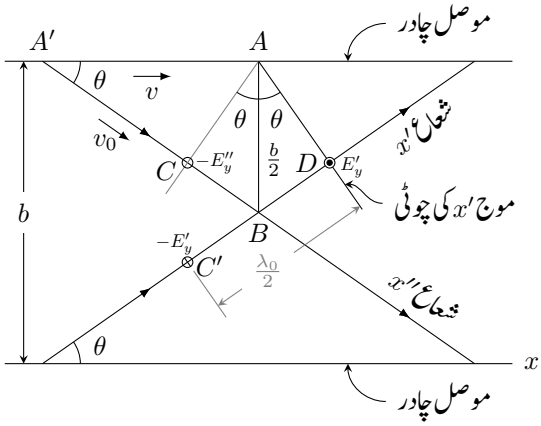
انعکاس کرتی حرکت کریں گی۔شکل 14.3 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ شکل 14.4 میں موتج میں موج کی چوٹی اور نشیب دکھائے گئے ہیں۔خالی خلاء میں طول موج اور موتج میں طول موج کا تعلق بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں موصل چادروں کے درمیان میدان ہوبہو شکل 14.2 میں دو متوازی نقطہ دار لکیروں کے درمیان میدان ہے۔یہاں بھی گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر $\boldsymbol{E}$ کی چوٹی اور ہلکی سیاہی میں لکیر اس کا نشیب ہے۔موصل چادر پر یہ دونوں مل کر صفر برقی میدان پیدا کرتے ہیں۔

اگرچہ ہم دو عدد عرضی برقی و مقناطیسی TEM امواج کی بات کرتے آ رہے ہیں، درحقیقت ان کا مجموعہ بلند درجی TE انداز کی موج ہے۔بلند درجی انداز کے موج کی اہم خصوصیت یہ ہے کہ اس کا طول موج ایک مخصوص حد سے کم ہونا لازم ہے۔ایسا نہ ہونے کی صورت میں یہ موتج سے نہیں گزر سکتی۔طول کی یہ حد انقطاعی طول[6] پکاری جاتی ہے۔ آئیں انقطاعی طول حاصل کریں۔

شکل 14.5 میں TE موج کے دو TEM اجزاء دکھائے گئے ہیں جو x' اور x'' سمت میں گامزن ہیں۔دونوں جزو موصل چادر یعنی x محدد کے ساتھ θ زاویہ بناتے ہیں۔برقی میدان صفحہ کے عمودی y محدد کی سمت میں ہے۔چادروں کے درمیان فاصلہ b ہے۔نقطہ D پر موج x' کی چوٹی ہے لہٰذا یہاں برقی میدان E'_y مثبت قیمت رکھتا ہے جو صفحہ کے عمودی باہر کو ہے اور جسے گول دائرے میں بند نقطے سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس نقطے پر لکیر AD لہر کی چوٹی ظاہر کرتی ہے۔عین اسی لمحہ نقطہ C پر موج x'' کا نشیب ہے جسے گول دائرے میں بند صلیبی نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس لہر کے نشیب کو ہلکی سیاہی میں لکیر AC سے ظاہر کیا گیا ہے۔ایک لہر کی چوٹی اور دوسرے لہر کا نشیب نقطہ A پر مل کر صفر میدان پیدا کرتے ہیں۔ہم جانتے ہیں کہ عین دو چادروں کے درمیان دونوں امواج کی چوٹیاں مل کر دگنا میدان پیدا کرتی ہیں۔اس نقطے کو شکل میں B سے ظاہر کیا گیا ہے۔یوں موج x'' کا نشیب C پر جبکہ اس کی چوٹی B پر ہے۔اس طرح ان نقطوں کے درمیان فاصلہ طول موج کا چوتھا حصہ ہو گا۔اسی طرح BD اور $C'B$ بھی طول موج کے چوتھائی برابر ہیں

$$BC = BC' = BD = \frac{\lambda_0}{4} \tag{14.1}$$

[6] cutoff wavelength



شکل 14.5: متوازی لامحدود وسعت کے چادروں کے موجیج میں میدان کے اجزاء۔

جہاں لامحدود خلاء میں TEM موج کا طول موج λ_0 ہے اور یہ خلاء اسی مادے سے بھری ہے جو دو چادروں کے درمیان پایا جاتا ہے۔موصل چادر پر ایک موج کی کوئی بھی چوٹی اور دوسری موج کا کوئی بھی نشیب مل کر صفر میدان پیدا کر سکتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات کی عمومی شکل

$$BC = \frac{n\lambda_0}{4} \tag{14.2}$$

ہے جہاں $n = 1, 2, 3, \cdots$ ہو سکتے ہیں۔جفت n کی صورت میں دو چادروں کے عین درمیان برقی میدان صفر حاصل ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں یہاں میدان دگنا ہو گا۔ان حقائق ہر تفصیلاً جلد بات کی جائے گی۔شکل 14.5 میں تکون ABC سے

$$AB \sin\theta = \frac{b}{2}\sin\theta = \frac{n\lambda_0}{4}$$

یعنی

$$\lambda_0 = \frac{2b}{n}\sin\theta \tag{14.3}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمبائی BC کے لئے مساوات 14.2 استعمال کیا گیا۔اس مساوات کے تحت زیادہ سے زیادہ طول موج λ_{0c} کی قیمت $\sin\theta = 1$ یعنی $\theta = 90^\circ$ پر

$$\lambda_{0c} = \frac{2b}{n} \tag{14.4}$$

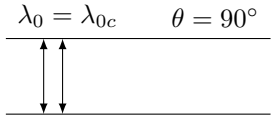
حاصل ہوتی ہے جس سے n کی ہر قیمت کے مقابل طول کی انقطاعی قیمت حاصل کی جا سکتی ہے۔جب $n = 1$ ہو تب

$$\lambda_{0c} = 2b \tag{14.5}$$

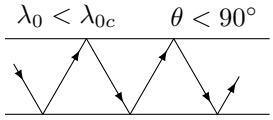
حاصل ہوتا ہے۔یہ کم تر درجے کی TE موج کا انقطاعی طول ہے جو ان چادروں کے درمیان صفر کر سکتی ہے۔یہ مساوات کہتا ہے کہ چادروں کے درمیان فاصلہ کم از کم آدھے طول کے برابر ہو گا تو موج چادروں کے درمیان سے گزر پائے گی۔

$n = 1$ کو بلند درجی TE امواج کا کم تر درجہ کہا جاتا ہے۔$n = 2$ اس سے ایک قدم بلند درجے کی موج کہلائے گی اور اس کا انقطاعی طول

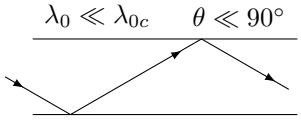
$$\lambda_{0c} = b \tag{14.6}$$



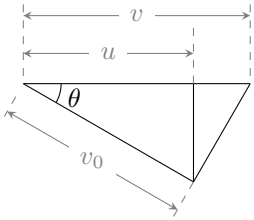
(ا) طول موج، عین انقطاعی طول موج کے برابر ہے۔



(ب) طول موج، انقطاعی طول موج سے قدر کم ہے۔



(ج) طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ بھی مزید کم ہوتا ہے۔



(د) مختلف اقسام کے رفتار کا تعلق۔

شکل 14.6: طول موج اور انعکاس موج کے زاویے۔ مختلف اقسام کے رفتاروں کا آپس میں تعلق۔

ہو گا۔یوں $n = 2$ درجے کی TE موج کے گزرنے کا لئے چادروں کے درمیان کم از کم فاصل موج کے طول کے برابر ضروری ہے۔اسی طرح $n = 3$ کے لئے $\lambda_{0c} = \frac{2b}{3}$ حاصل ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔

مساوات 14.4 اور مساوات 14.3 کو ملا کر

$$\lambda_0 = \lambda_{0c} \sin\theta \tag{14.7}$$

یا

$$\theta = \sin^{-1} \frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}} \tag{14.8}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں کسی بھی درجے کی موج کا انقطاعی زاویہ $\theta = 90°$ حاصل ہوتا ہے۔اس زاویے پر موج دونوں چادروں کے مابین، x تبدیل کئے بغیر، انعکاس کرتی رہتی ہے۔یوں چادروں کے درمیان ساکن موج پیدا ہوتی ہے جو x سمت میں طاقت منتقل نہیں کر سکتی۔اگر طول موج λ_0 انقطاعی طول موج λ_{0c} سے قدر کم ہو تب θ کی قیمت $90°$ سے کم ہو گی اور موج، بار بار انعکاس کرتی ہوئی، چادروں کے درمیان x سمت میں حرکت کر پائے گی۔جیسے شکل 14.6 میں دکھایا گیا ہے، طول موج مزید کم کرنے سے زاویہ مزید کم ہوتا ہے۔آخر کار انتہائی کم طول موج پر صورت حال لامحدود خلاء میں موج کے حرکت مانند ہو جاتی ہے اور یہ شعاع کی طرح چادروں کے درمیان سیدھا گزرنے کے قابل ہو جاتی ہے۔

شکل 14.5 میں TEM امواج کی دوری رفتار[7] v_0 لامحدود خلاء میں آزاد موج کی دوری رفتار

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}) \tag{14.9}$$

ہی ہے جہاں خلاء کا مقناطیسی مستقل μ اور اس کا برقی مستقل ϵ ہیں۔شکل 14.6-د میں TE موج کی x سمت میں دوری رفتار v ہے۔TE موج کی چوٹی یا نشیب یا کوئی اور زاویائی نقطہ اس رفتار سے x سمت میں حرکت کرتا نظر آئے گا۔ان دو اقسام کے رفتار کا تعلق شکل 14.6-د سے

$$\frac{v_0}{v} = \cos\theta \tag{14.10}$$

[7] phase velocity

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$v = \frac{v_0}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}\cos\theta} \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{14.11}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے تحت جیسے جیسے طول موج کو انقطاعی طول موج کے قریب لایا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار کی قیمت بڑھتی ہے حتٰی کہ عین λ_{0c} پر دوری رفتار لامحدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔اس کے برعکس جیسے جیسے طول موج کو کم کیا جائے، یعنی جیسے جیسے θ کو کم کیا جائے، ویسے ویسے TE موج کی دوری رفتار TEM کے دوری رفتار کے قریب ہو گی حتٰی کہ انتہائی کم طول موج یعنی انتہائی بلند تعدد کے موج کی صورت میں یہ قیمت v_0 کے برابر ہو جائے گی۔ یوں موتیج میں بند، بلند درجی موج کا دوری رفتار TEM موج کے دوری رفتار سے زیادہ یا اس کے برابر ممکن ہے۔طاقت کی منتقلی انعکاس کرتی موج کے مجموعی رفتار[8] سے ہوتی ہے جسے شکل میں u سے ظاہر کیا گیا ہے۔شکل 14.6-د سے

$$u = v_0 \cos\theta \tag{14.12}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا طاقت کی منتقلی کی رفتار TEM کے رفتار سے کم یا اس کے برابر ممکن ہے۔طاقت کسی صورت بھی TEM موج کی رفتار سے زیادہ رفتار پر منتقل کرنا ممکن نہیں ہے۔یہ حقیقت آئن سٹائن کے قانون کے عین مطابق ہے جس کے تحت کوئی بھی چیز رفتار شعاع سے تجاوز نہیں کر سکتی۔یاد رہے کہ TE موج کی دوری رفتار درحقیقت کسی چیز کی منتقلی نہیں کرتی لہٰذا اس کی قیمت v_0 سے بڑھ سکتی ہے۔مساوات 14.11 اور مساوات 14.12 کو ملا کر

$$uv = v_0^2 \tag{14.13}$$

حاصل ہوتا ہے۔

دو چادروں میں بند ہونے سے TEM موج کا تعدد تبدیل نہیں ہوتا۔اسی طرح ایسے دو یکساں تعدد کے امواج سے حاصل TE موج کا تعدد بھی وہی رہتا ہے۔چونکہ طول موج ضرب تعدد کا حاصل رفتار کے برابر ہوتا ہے لہٰذا مساوات 14.11 کو

$$f\lambda = \frac{f\lambda_0}{\cos\theta}$$

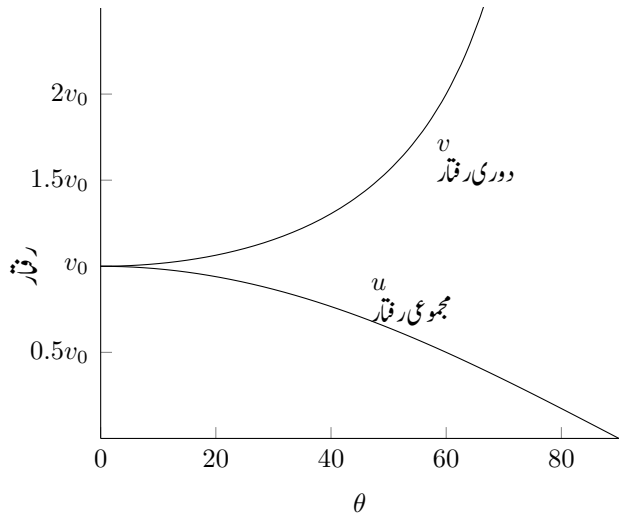
لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\cos\theta}$$

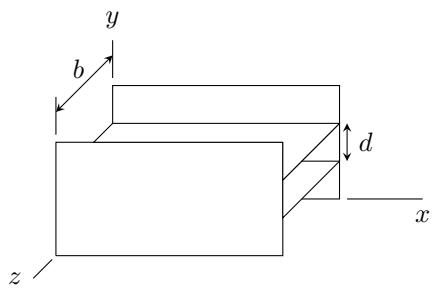
حاصل ہوتا ہے جو بلند درجہ موج کے طول λ اور آزاد موج کے طول λ_0 کا تعلق ہے۔

شکل 14.7 میں دوری رفتار بالمقابل زاویہ موج اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج دکھائے گئے ہیں۔جیسے جیسے θ کی قیمت 90° کے قریب آتی ہے ویسے ویسے دوری رفتار کی قیمت لامحدود جبکہ مجموعی رفتار کی قیمت صفر کے قریب تر ہوتی ہے۔

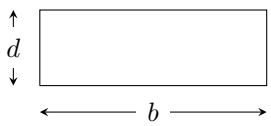
حقیقت میں دو متوازی لامحدود وسعت[9] کے چادروں پر مبنی موتیج کہیں نہیں پایا جاتا۔حقیقی موتیج عموماً کھوکھلے مستطیل یا کھوکھلے نالی کے اشکال رکھتے ہیں۔چونکہ برقی میدان کے عمودی موصل چادر رکھنے سے میدان متاثر نہیں ہوتا لہٰذا دو لامحدود وسعت کے متوازی چادر، جن کے درمیان فاصلہ b ہو، میں TE موج کے عمودی دو چادر رکھنے سے میدان میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی، لیکن ایسا کرنے سے مستطیل موتیج حاصل ہوتا ہے۔شکل 14.8-الف میں مستطیلی موتیج بنتا دکھایا گیا ہے جہاں d فاصلے پر دو متوازی چادر رکھے گئے ہیں۔مستطیل شکل کے علاوہ بقایا چادر ہٹانے سے مستطیل موتیج حاصل ہوتا ہے جسے شکل 14.8-ب میں دکھایا گیا ہے۔اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ دو لامحدود چادروں کا موتیج تو استعمال نہیں ہوتا لیکن اس کے TE امواج جوں



شکل 14.7: دوری اور مجموعی رفتار بالمقابل زاویہ موج۔



(ا) لامحدود متوازی چادر موتج سے مستطیلی موتج کا حصول۔



(ب) مستطیلی موتج کا رقبہ عمودی تراش۔

شکل 14.8: مستطیلی موتج کا حصول اور اس کا رقبہ عمودی تراش۔

کے توں مستطیل موجیج کے لئے استعمال کئے جا سکتے ہیں۔موجودہ TE امواج کے نقطہ نظر سے مستطیل کی d لمبائی کچھ بھی ممکن ہے۔

لامحدود چادر کے موجیج پر غور کرنے سے انقطاعی طول موج کے علاوہ دوری رفتار اور مجموعی رفتار کے مساوات بھی حاصل کئے گئے۔دیگر بلند درجے کے امواج پر معلومات حاصل کرنے کی خاطر میکس ویل کے مساوات حل کرنا لازم ہے۔آئیں مستطیل موجیج کے لئے میکس ویل مساوات حل کرتے ہیں۔

14.3 کھوکھلا مستطیلی موجیج

مستطیل موجیج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط، کارتیسی محدد میں نہایت آسانی سے لاگو کئے جا سکتے ہیں۔اسی لئے مستطیلی موجیج کو کارتیسی نظام میں حل کیا جائے گا۔ہم کارتیسی نظام میں میکس ویل کے مساوات سے موج کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔موجیج کو x محدد پر رکھتے ہوئے ہم سمت موج کو اسی سمت حرکت کے پابند بناتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ اسے سائن نما تصور کرتے ہیں۔اس کے بعد بلند درجے موج کی قسم کا انتخاب کرتے ہیں۔یوں ہم برقی میدان E کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی برقی[10] TE موج پر غور کر سکتے ہیں یا مقناطیسی میدان کو سمت موج کے عمودی رہنے کے پابند رکھتے ہوئے عرضی مقناطیسی[11] TM موج پر غور کر سکتے ہیں۔TEM موج میں برقی اور مقناطیسی میدان سمت حرکت کے عمودی ہوتے ہیں۔بلند درجی موج میں میدان، سمت حرکت کی سمت میں بھی پائے جاتے ہیں۔اب عرضی برقی TE موج کی صورت میں $E_x = 0$ ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں H_x صفر کے برابر نہیں ہو سکتا۔اگر H_x بھی صفر کے برابر ہو تب موج TEM قسم کی ہو گی نا کہ TE قسم کی۔TE کی صورت میں تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔حاصل موج پر سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے اسے H_x کے لئے حل کیا جاتا ہے۔حاصل H_x کو بقایا مساوات میں پر کرتے ہوئے E_y، E_z، H_y اور H_z حاصل کئے جاتے ہیں۔یوں برقی اور مقناطیسی میدان کے تمام کارتیسی اجزاء کی مکمل معلومات حاصل ہوتی ہے۔یہ عمومی طریقہ کار ہے جسے دیگر مسائل حل کرنے کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

اس طریقے کو مستطیلی موجیج میں TE موج کے لئے تفصیلاً استعمال کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر مندرجہ ذیل قدم سلسلہ وار اٹھائے جائیں گے۔

- میکس ویل مساوات سے شروع کریں۔
- موج کو وقت کے ساتھ سائن نما رہنے کا پابند بنائیں۔
- موج کو x سمت کے ساتھ سائن نما رہنے کا پابند بناتے ہوئے حرکی مستقل بروئے کار لائیں۔
- بلند درجی موج کا انتخاب کریں۔ہم TE موج کا انتخاب کرتے ہوئے $E_x = 0$ اور $H_x \neq 0$ رکھیں گے۔
- بقایا چار اجزاء یعنی E_y، E_z، H_y اور H_z کے مساوات H_x کی صورت میں لکھیں۔
- موج کی مساوات H_x کی صورت میں حاصل کریں۔

---

[8] group velocity

[9] حقیقی دنیا میں لا محدود وسعت کے چادر نہیں پائے جاتے۔

[10] transverse electric, TE

[11] transverse magnetic, TM

- مستطیلی موتج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کی اس مساوات کو H_x کے لئے حل کریں۔
- E_y، E_z، H_y اور H_z کے مساوات میں حاصل H_x پر کرتے ہوئے ان کی مساوات بھی حاصل کریں۔

ان قدموں پر چلتے ہوئے مکمل حل حاصل ہو گا۔

آئیں پہلے قدم سے شروع کرتے ہوئے میکس ویل کے مساوات کو کارتیسی نظام میں لکھتے ہیں۔صفحہ 272 پر مساوات 9.26 اور مساوت 9.27

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{14.14}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{14.15}$$

کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \tag{14.16}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0 \tag{14.17}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \tag{14.18}$$

اور

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x - \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \tag{14.19}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y - \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0 \tag{14.20}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z - \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \tag{14.21}$$

لکھے جائیں گے جہاں $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ اور $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔اسی طرح خالی خلاء میں $\rho_h = 0$ لیتے ہوئے مساوات 9.28 اور مساوات 9.29 کارتیسی محدد میں

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.22}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.23}$$

لکھے جائیں گے۔

اب دوسرا قدم کہتا ہے کہ موج وقت کے ساتھ سائن نما تعلق رکھتا ہے جبکہ تیسرا قدم کہتا ہے کہ موج x فاصلے کے ساتھ بھی سائن نما تعلق رکھتا ہے۔ساتھ ہی ساتھ x سمت میں حرکی مستقل بھی بروئے کار لانا ہے۔ان دو اقدام کو استعمال کرتے ہوئے میدان کے تمام اجزاء لکھتے ہیں۔یوں E_y اور H_x کو مثال بناتے ہوئے

$$\begin{aligned} E_y &= E_1 e^{j\omega t - \gamma x} \\ H_x &= H_1 e^{j\omega t - \gamma x} \end{aligned} \tag{14.24}$$

لکھے جائیں گے جہاں

γ حرکی مستقل $(\gamma = \alpha + j\beta)$

α تضعیفی مستقل

β زاویائی مستقل

ہیں۔مساوات 14.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 14.16

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x\right] e^{j\omega t - \gamma z} = 0$$

یا

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x = 0 \tag{14.25}$$

لکھا جائے۔اسی طرح مساوات 14.24 کے طرز پر بقایا میدان بھی لکھتے ہوئے مساوات 14.17 تا مساوات 14.23 یوں لکھے جائیں گے۔

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z + j\omega\mu H_y = 0 \tag{14.26}$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} + j\omega\mu H_z = 0 \tag{14.27}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - (\sigma + j\omega\epsilon) E_x = 0 \tag{14.28}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - (\sigma + j\omega\epsilon) E_y = 0 \tag{14.29}$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (\sigma + j\omega\epsilon) E_z = 0 \tag{14.30}$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.31}$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.32}$$

مندرجہ بالا آٹھ مساوات میں ترسیلی تار کے برقی رکاوٹ Z اور برقی فراوانی Y کی طرز کے مستقل

$$Z = -j\omega\mu \qquad (\Omega/\mathrm{m}) \tag{14.33}$$

$$Y = \sigma + j\omega\epsilon \qquad (\mathrm{S/m}) \tag{14.34}$$

استعمال کرتے ہوئے انہیں قدر چھوٹا لکھتے ہیں۔

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0 \tag{14.35}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - ZH_y = 0 \tag{14.36}$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - ZH_z = 0 \tag{14.37}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - YE_x = 0 \tag{14.38}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0 \tag{14.39}$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0 \tag{14.40}$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.41}$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.42}$$

یہ x سمت میں حرکت کرتی موج کی عمومی مساوات ہیں۔

ابھی تک نا تو موج کی شکل اور نا ہی بلند درجی موج کا انتخاب کیا گیا ہے لہٰذا چوتھے قدم کا اطلاق کرتے ہوئے TE قسم کا انتخاب کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ $E_x = 0$ لیا جائے گا۔ایسا کرنے سے مندرجہ بالا مساوات

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0 \tag{14.43}$$

$$\gamma E_z - ZH_y = 0 \tag{14.44}$$

$$-\gamma E_y - ZH_z = 0 \tag{14.45}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \tag{14.46}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0 \tag{14.47}$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0 \tag{14.48}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.49}$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.50}$$

صورت اختیار کر لیتے ہیں۔

پانچویں قدم پر تمام مساوات کو H_x کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ایسا کرنے کی خاطر پہلے مساوات 14.44 اور 14.45 سے

$$\frac{E_z}{H_y} = -\frac{E_y}{H_z} = \frac{Z}{\gamma} \tag{14.51}$$

لکھتے ہیں۔اب $\frac{E_z}{H_y}$ یا $\frac{E_y}{H_z}$ کی شرح قدرتی رکاوٹ کی مانند ہے۔چونکہ مساوات 14.51 میں صرف عرضی اجزاء پائے جاتے ہیں لہٰذا اس شرح کو عرضی-موج کی قدرتی رکاوٹ[12] Z_{yz} کہا جائے گا جہاں

$$Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \qquad (\Omega) \tag{14.52}$$

[12] transverse-wave impedance

کے برابر ہے۔مساوات 14.52 کو مساوات 14.48 میں پر کرتے ہوئے H_y کے لئے حل کرنے سے

$$H_y = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{14.53}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 14.52 کو مساوات 14.47 میں پر کرتے ہوئے H_z کے لئے حل کرنے سے

$$H_z = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z} \tag{14.54}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب مساوات 14.53 کو مساوات 14.52 میں پر کرتے ہوئے

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{14.55}$$

اور مساوات 14.54 کو مساوات 14.52 میں پر کرتے ہوئے

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z} \tag{14.56}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 14.53 تا مساوات 14.56 تمام اجزاء کو H_x کی صورت میں پیش کرتے ہیں۔

چھٹے قدم پر ان مساوات سے موج کی مساوات کا حصول ہے۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات 14.53 کا y کے ساتھ تفرق اور مساوات 14.54 کا z کے ساتھ تفرق لیتے ہوئے دونوں حاصل جواب کو مساوات 14.50 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma H_x - \frac{1}{\gamma - YZ_{yz}} \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \gamma \left(\gamma - YZ_{yz} \right) H_x = 0$$

حاصل کرتے ہیں جس میں

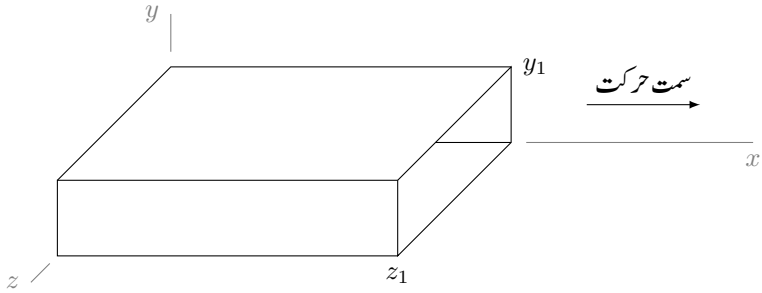
$$k^2 = \gamma \left(\gamma - YZ_{yz} \right) \tag{14.57}$$

پر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0 \tag{14.58}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 14.58 موجیج کے عرضی برقی موج کی عمومی مساوات ہے۔موجیج کا عمودی تراش کسی بھی شکل کا ہو سکتا ہے۔ یہاں چھٹا قدم پورا ہوتا ہے۔

ساتویں قدم میں موجیج کے اطراف کے سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے موج کو حل کرنا ہے۔شکل 14.9 میں کامل موصل چادروں سے بنایا گیا مستطیلی موجیج دکھایا گیا ہے جس کی چوڑائی z_1 اور اونچائی y_1 ہے۔موصل اور ہوا کے سرحدی برقی شرائط کے مطابق سرحد پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا موجیج کے اطراف پر متوازی E صفر ہو گا۔یوں موجیج کے نچلی اور بالائی سطحوں پر $E_z = 0$ ہو گا۔اسی طرح موجیج کے بائیں اور دائیں کھڑے سطحوں پر $E_y = 0$ ہو گا۔اب ان شرائط پر پورا اترتا



شکل 14.9: مستطیل موتج۔

مساوات 14.58 کا حل درکار ہے۔علیحدگی متغیرات کا طریقہ یہاں قابل استعمال ہے جس میں H_x کو دو متغیرات کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاتا ہے یعنی

$$H_x = YZ \tag{14.59}$$

جہاں Y ایسا متغیر ہے جو صرف y پر منحصر ہے جبکہ Z ایسا متغیر ہے جو صرف z پر منحصر ہے۔اصل میں ان متغیرات کو $Y(y)$ اور $Z(z)$ لکھنا چاہیے لیکن غیر ضروری علامات کم کرنے کی غرض سے انہیں Y اور Z ہی لکھا جائے گا۔مساوات 14.59 کے استعمال سے مساوات 14.58

$$Z\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 YZ = 0 \tag{14.60}$$

صورت اختیار کر لیتا ہے۔دونوں اطراف کو YZ سے تقسیم کرتے ہوئے اسے یوں

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2 \tag{14.61}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب بائیں ہاتھ پہلا جزو صرف y پر منحصر ہے جبکہ دوسرا جزو صرف z پر منحصر ہے۔یوں y کی تبدیلی سے صرف پہلے جزو میں تبدیلی کا امکان ہے لیکن پہلے جزو میں کسی بھی تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں رہ سکتے۔اس طرح صاف ظاہر ہے کہ پہلے جزو میں y کے تبدیلی سے کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو سکتی یعنی یہ جزو نا قابل تبدیل مستقل قیمت رکھتا ہے جسے ہم $-A_1$ لکھتے ہیں۔اسی منطق سے دوسرا جزو بھی اٹل قیمت رکھتا ہے جسے ہم $-A_2$ لکھتے ہیں۔یوں

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -A_1 \tag{14.62}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -A_2 \tag{14.63}$$

ہوں گے لہٰذا مساوات 14.61 سے

$$A_1 + A_2 = k^2 \tag{14.64}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 14.62 اور مساوات 14.63 ایک متغیرہ پر مبنی دو درجی تفرقی مساوات ہیں جن کا حل آپ جانتے ہی ہوں گے۔مساوات 14.62 کا حل تجربے سے

$$Y = c_1 \cos b_1 y + c_2 \sin b_1 y \tag{14.65}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں m_1، c_2 اور b_1 مساوات کے مستقل ہیں۔ مساوات 14.65 کو واپس مساوات 14.62 میں پر کرنے سے

$$b_1 = \sqrt{A_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 14.62 کا حل

$$Y = c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y \tag{14.66}$$

ہے۔اسی طرح مساوات 14.63 کا حل

$$Z = c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \tag{14.67}$$

ہے۔ان دو جوابات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.59 کو

$$H_x = \left(c_1 \cos \sqrt{A_1} y + c_2 \sin \sqrt{A_1} y\right) \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right) \tag{14.68}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسے مساوات 14.55 میں پر کرنے سے

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} \left(-c_1 \sin \sqrt{A_1} y + c_2 \cos \sqrt{A_1} y\right) \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔مستطیل کا نچلا چادر $y = 0$ پر پایا جاتا ہے جس پر، برقی سرحدی شرط کے مطابق، $E_z = 0$ ہو گا لہٰذا $y = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات صفر کے برابر ہو گا، جس سے

$$0 = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_2 \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right)$$

یعنی

$$c_2 = 0 \tag{14.69}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$E_z = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔مستطیل کا بالائی چادر $y = y_1$ پر پایا جاتا ہے جس پر برقی سرحدی شرط کے مطابق متوازی برقی دباو صفر کے برابر ہو گا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں y_1 پر $E_z = 0$ پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \sqrt{A_1} c_1 \sin \sqrt{A_1} y_1 \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_1 مساوی صفر ہے جس سے $H_x = 0$ حاصل ہو گا۔اگرچہ یہ درست جواب ہے لیکن ہمیں زیادہ غرض حرکت کرتے موج سے ہے نا کہ ہر قسم کے میدان سے خالی موجیج سے، لہٰذا ہم

$$c_1 \neq 0 \tag{14.70}$$

لیتے ہیں۔یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_1} y_1 = n\pi$$

یعنی

$$\sqrt{A_1} = \frac{n\pi}{y_1} \tag{14.71}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔یوں

$$H_x = n_1 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \left(c_3 \cos \sqrt{A_2} z + c_4 \sin \sqrt{A_2} z \right) \tag{14.72}$$

ہو گا۔اس مساوات کو مساوات 14.56 میں پر کرنے سے

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \left(-c_3 \sin \sqrt{A_2} z + c_4 \cos \sqrt{A_2} z \right)$$

حاصل ہوتا ہے۔مستطیل کا دایاں کھڑا چادر $z = 0$ پر ہے، جہاں سرحدی شرط کے تحت متوازی برقی میدان صفر ہو گا لہٰذا

$$0 = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_4 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1}$$

حاصل ہوتا ہے۔اب چونکہ $c_1 \neq 0$ ہے لہٰذا

$$c_4 = 0 \tag{14.73}$$

حاصل ہوتا ہے اور یوں

$$E_y = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z$$

ہو گا۔مستطیل کا بایاں کھڑا چادر $z = z_1$ پر پایا جاتا ہے جہاں سرحدی شرائط کے تحت E_y ہو گا لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں یہ حقائق پر کرتے ہوئے

$$0 \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} c_1 c_3 \sqrt{A_2} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \sqrt{A_2} z_1$$

لکھا جائے گا۔اب $c_1 \neq 0$ اور اس مساوات کا ایک ممکنہ حل c_3 برابر صفر ہے جس سے H_x کے علاوہ تمام میدان صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔ہم چونکہ حرکت کرتے موج کی تلاش میں ہیں لہٰذا ہم اس ممکنہ جواب کو رد کرتے ہوئے

$$c_3 \neq 0 \tag{14.74}$$

چنتے ہیں۔اس شرط کے ساتھ مندرجہ بالا مساوات سے

$$\sqrt{A_2} z_1 = m\pi \tag{14.75}$$

یعنی

$$\sqrt{A_2} = \frac{m\pi}{z_1} \tag{14.76}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $m = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔یوں $c_1 c_3 = H_0$ لکھتے ہوئے

$$H_x(y, z) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} \tag{14.77}$$

حاصل ہوتا ہے جو مقداری مساوات ہے۔اس مساوات میں وقت t اور x سمت میں حرکت کا کوئی ذکر نہیں ہے۔یاد رہے کہ اصل میدان مساوات 14.24 کی طرز کا ہے جس میں یہ معلومات بھی شامل ہیں لہٰذا

$$H_x(x, y, z, t) = H_0 \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.78}$$

لکھا جائے گا جو مکمل جواب ہے۔

آٹھویں قدم میں H_x کو مساوات 14.53 تا مساوات 14.56 میں پر کرتے ہوئے بقایا میدان حاصل کرتے ہیں یعنی

$$H_y = \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{n\pi}{y_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.79}$$

$$H_z = \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{m\pi}{z_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.80}$$

$$E_z = -\frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2}\frac{n\pi}{y_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.81}$$

$$E_y = \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2}\frac{m\pi}{z_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \tag{14.82}$$

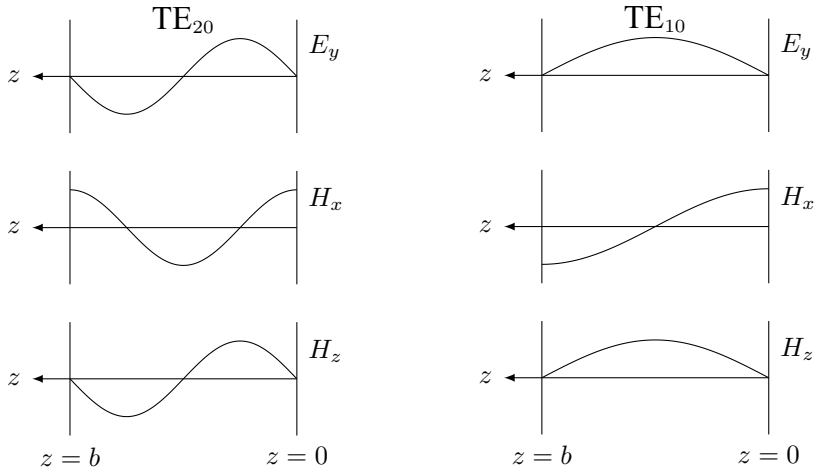
$$E_x = 0 \tag{14.83}$$

جہاں آخر میں $E_x = 0$ بھی شامل کیا گیا ہے۔مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 مستطیلی موجیج میں TE موج کا مکمل حل ہے۔یہاں آٹھواں قدم پورا ہوتا ہے۔

آئیں مستطیلی موجیج میں m اور n مستقل پر غور کریں۔ اگر $m = 1$ اور $n = 0$ ہوں تب مندرجہ بالا مساوات میں H_y، E_z اور E_x صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں۔یوں موجیج میں صرف H_x، H_z اور E_y میدان پائے جاتے ہیں۔ دائیں چادر، یعنی $z = 0$، پر $E_y = 0$ پایا جاتا ہے جبکہ دونوں چادروں کے عین درمیان $z = \frac{z_1}{2}$ پر میدان کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ شکل 14.10-الف میں پہلا خط E_y ہی ہے۔اگر H_x کی بات کی جائے تو دائیں چادر، یعنی $z = 0$، پر H_x کی چوٹی جبکہ بائیں چادر، یعنی $z = z_1$، پر H_x کا نشیب پایا جاتا ہے۔ ان دو اطراف کے عین درمیان $z = \frac{z_1}{2}$ پر $H_x = 0$ پایا جاتا ہے۔شکل 14.10-الف میں دوسرا خط H_x ہے۔مقناطیسی میدان H_z بھی دائیں اور بائیں چادروں پر صفر کے برابر ہے جبکہ ان کے عین درمیان اس کی چوٹی پائی جاتی ہے۔یوں $m = 1$ اور $n = 0$ کی صورت میں میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا آدھا چکر پایا جاتا ہے۔

$m = 2$ اور $n = 0$ کی صورت میں میدان شکل 14.10-ب میں دکھائے گئے ہیں۔اب بھی میدان z کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ y کا ان پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ساتھ ہی ساتھ z پر میدان کا مکمل چکر، یعنی دو آدھے چکر، پائے جاتے ہیں۔ان سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ m کی قیمت z پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔آپ جلد دیکھیں گے کہ n بالکل اسی طرح y پر میدان کے آدھے چکروں کی گنتی ہے۔ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے بلند درجی TE موج کو m اور n سے پہچانا جاتا ہے۔یوں شکل 14.10-الف کے امواج TE_{10} جبکہ شکل 14.10-ب کے امواج TE_{20} کہلاتے ہیں۔یوں عمومی بلند درجی عرضی برقی موج TE_{mn} کہلائے گی جہاں z پر آدھے چکروں کی تعداد m ہے جبکہ y پر آدھے چکروں کی تعداد n ہے۔مستطیلی موجیج میں عموماً z سے لمبی طرف کو ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی طرح مقناطیسی امواج TM_{mn} کہلائے جاتے ہیں۔

آئیں TE پر تفصیلاً غور کریں۔



الف: $m = 1, n = 0$ ب: $m = 2, n = 0$

شکل 14.10: بلند انداز TE امواج۔

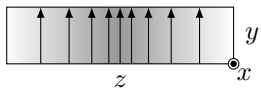
14.3.1 مستطیلی موتج کے میدان پر تفصیلی غور

بلند درجی TE_{10} موج:

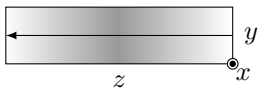
مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 میں $m = 1$ اور $n = 0$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE_{10} امواج حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \qquad \text{TE کا بنیادی شرط} \\
E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= H_0 \cos \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x} \\
H_y &= 0 \\
H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2} \frac{\pi}{z_1} \sin \frac{\pi z}{z_1} e^{j\omega t - \gamma x}
\end{aligned}
\tag{14.84}
$$

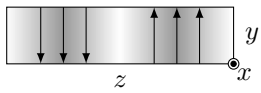
ان میں پہلی مساوات، یعنی $E_x = 0$، درحقیقت TE موج کی تعریف ہے۔ان امواج کو شکل 14.10-الف میں $t = 0$ اور $x = 0$ کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ان اشکال میں میدان بالمقابل z دکھایا گیا ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں کوئی میدان بھی y پر منحصر نہیں ہے لہٰذا y کے تبدیلی سے یہ میدان تبدیل نہیں ہوں گے۔TE_{10} تمام اقسام کے بلند درجی امواج میں سب سے لمبی انقطاعی طول موج رکھتی ہے لہٰذا اس کی انقطاعی تعدد سب سے کم ہے۔شکل 14.11 میں E_y اور H_z کو بطور سمتیہ دکھایا گیا ہے۔شکل-الف میں $z = \frac{z_1}{2}$ پر سمتیوں کی تعداد زیادہ دکھا کر گھنے میدان کو ظاہر کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ساتھ ہی ساتھ اس خطے کو گہرا رنگ بھی دے کر گھنے میدان کو ظاہر کیا گیا ہے۔شکل-ب میں مقناطیسی میدان کی سمت کو سمتیہ سے جبکہ میدان کو گہرے رنگ سے ظاہر کیا گیا ہے۔



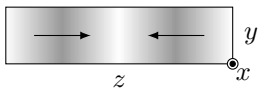
TE_{10} کا E_y میدان۔



TE_{10} کا H_z میدان۔



TE_{20} کا E_y میدان۔



TE_{20} کا H_z میدان۔

شکل 14.11: TE_{10} اور TE_{20} کے E_y اور H_z میدان۔

بلند درجی TE_{20} موج:

شکل 14.11 میں TE_{20} کے E_y اور H_z اشکال بھی دکھائے گئے ہیں۔

بلند درجی TE_{11} موج:

مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 میں $m=1$ اور $n=1$ پر کرنے سے مندرجہ ذیل TE_{11} امواج حاصل ہوتے ہیں۔

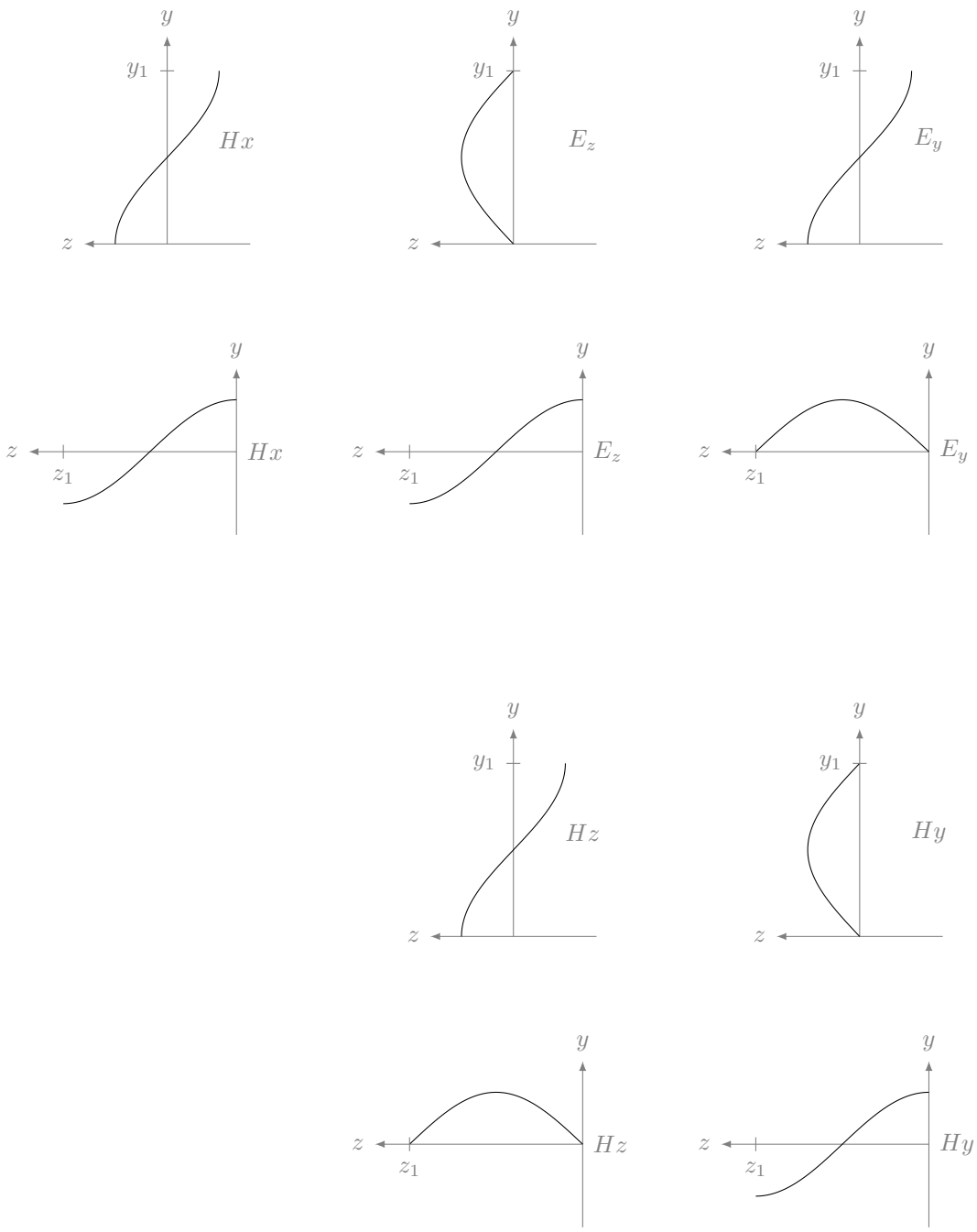
$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \qquad\qquad \text{TE کا بنیادی شرط} \\
E_y &= \frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\cos\frac{\pi y}{y_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \\
E_z &= -\frac{\gamma Z_{yz} H_0}{k^2}\frac{\pi}{y_1}\sin\frac{\pi y}{y_1}\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \\
H_x &= H_0\cos\frac{\pi y}{y_1}\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \\
H_y &= \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{\pi}{y_1}\sin\frac{\pi y}{y_1}\cos\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x} \\
H_z &= \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{\pi}{z_1}\cos\frac{\pi y}{y_1}\sin\frac{\pi z}{z_1}e^{j\omega t-\gamma x}
\end{aligned}
\tag{14.85}
$$

اس بلند درجی انداز میں صرف E_x ہر نقطے پر تمام اوقات صفر کے برابر رہتا ہے۔ان میدان کو شکل 14.12 میں دکھایا گیا ہے۔

مستطیل موجیج کے حاصل حل میدان تمام ممکنہ میدان ہیں جو کسی موجیج میں پائے جا سکتے ہیں۔حقیقت میں کسی بھی موجیج میں پائے جانے والے امواج کا دارومدار موجیج کی جسامت، موج پیدا کرنے کا طریقہ اور موجیج میں ناہمواریوں پر ہے۔کسی بھی نقطے پر موجود تمام میدانوں کا مجموعی میدان پایا جائے گا۔

واپس اپنی گفتگو پر آتے ہوئے مساوات 14.64، مساوات 14.71 اور مساوات 14.76 کو ملا کر

$$
k^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.86}
$$



شکل 14.12: TE_{11} میدان۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 14.33، مساوات 14.52 اور مساوات 14.57 سے

$$k^2 = \gamma^2 - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \tag{14.87}$$

کے برابر ہے۔بے ضیاع ذو برق میں $\sigma = 0$ لیا جا سکتا ہے۔اس طرح مندرجہ بالا دو مساوات سے

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \tag{14.88}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ایک مخصوص قیمت سے کم تعدد پر جزر میں آخری جزو پہلے دو اجزاء کے مجموعے سے کم ہو گا لہٰذا γ حقیقی ہو گا۔حقیقی γ کی صورت میں موج گھٹے گی اور یہ موتج میں صفر نہیں کر پائے گی۔

اسی طرح اس مخصوص قیمت سے زیادہ تعدد پر γ خیالی عدد ہو گا لہٰذا موتج میں موج صفر کرے گی۔

ان دو قیمتوں کے درمیان تعدد کی وہ قیمت ہو گی جس پر $\gamma = 0$ حاصل ہوتا ہے۔اس تعدد کو انقطاعی تعدد[13] کہتے ہیں۔انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج، بغیر گھٹے، موتج میں صفر کر سکتے ہیں جبکہ اس سے کم تعدد کے امواج گھٹتے ہیں لہٰذا یہ موتج میں صفر نہیں کر پاتے۔

ان تین تعددی خطوں کو ایک جگہ دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

- کم تعدد یعنی کم ω پر γ حقیقی ہوتا ہے۔موتج غیر شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر نہیں کر سکتے۔
- مخصوص درمیانی تعدد پر $\gamma = 0$ ہوتا ہے۔یہ انقطاعی تعدد ہے۔
- زیادہ تعدد پر γ خیالی ہوتا ہے۔موتج شفاف ہوتا ہے جس میں امواج صفر کر سکتے ہیں۔

مساوات 14.88 میں $\sqrt{\omega^2\mu\epsilon}$ درحقیقت ایسی لامحدود خطے کا زاویائی مستقل β_0 ہے جس میں وہی ذو برق ہو جو موتج میں پایا جاتا ہے۔یوں ہم

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} \tag{14.89}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں

$$\beta_0 = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad \text{لامحدود خطے کا زاویائی مستقل}$$

$$\lambda_0 \quad \text{لامحدود خطے میں طول موج}$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}$$

ہیں۔یوں انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر $\beta_0 > k$ ہو گا لہٰذا

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = j\beta \tag{14.90}$$

---

[13] cutoff frequency

ہو گا جہاں

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \quad \text{موتج میں زاویائی مستقل}$$
$$\lambda \quad \text{موتج میں طول موج}$$

ہیں۔کافی بلند تعدد پر $\beta_0 \gg k$ ہو گا اور یوں موتج کے زاویائی مستقل β کی قیمت لامحدود خطے کے زاویائی مستقل β_0 کے قیمت کے قریب ہو گی۔اس کے برعکس انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر $\beta_0 < k$ ہو گا جس سے

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \beta_0^2} = \alpha \tag{14.91}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں α تضعیفی مستقل ہے۔

کافی کم تعدد پر $\beta_0 \ll k$ ہو گا لہٰذا تضعیفی مستقل کی قیمت k کے قریب ہو گی۔

عین انقطاعی تعدد پر $\beta_0 = k$ ہو گا لہٰذا $\gamma = 0$ ہو گا۔یوں انقطاعی تعدد پر

$$\omega^2 \mu\epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.92}$$

ہو گا جس سے انقطاعی تعدد[14]

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2} \qquad \text{(Hz)} \tag{14.93}$$

اور انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}} = \frac{2\pi}{k} \qquad \text{(m)} \tag{14.94}$$

یا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \tag{14.95}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں λ_{0c} لامحدود خطے میں انقطاعی تعدد پر طول موج ہے جسے چھوٹا کر کہ انقطاعی طول موج[15] پکارا جاتا ہے۔مساوات 14.93 اور مساوات 14.94 سے کھوکھلے مستطیلی موتج کے کسی بھی TE_{mn} موج کا انقطاعی تعدد اور انقطاعی طول موج حاصل کیا جا سکتا ہے۔مثال کے طور پر TE_{10} موج کا انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = 2z_1 \tag{14.96}$$

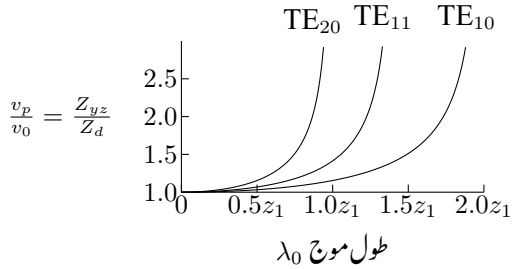
حاصل ہوتا ہے جو وہی قیمت ہے جو مساوات 14.5 میں حاصل کی گئی تھی جہاں $z_1 = b$ کے برابر ہے۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $(\beta_0 > k)$ پر

$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} = \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2} \tag{14.97}$$

---

[14] cutoff frequency
[15] cutoff wavelength



شکل 14.13: مختلف بلند درجی امواج کے مستطیلی موجیج میں دوری رفتار بالمقابل طول موج λ_0۔

کے برابر ہے۔اب $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ اور مساوات 14.95 مندرجہ بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}\right)^2} = \beta_0\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{14.98}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا موجیج میں طول موج

$$\lambda_{\text{موجیج}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{14.99}$$

اور موجیج میں دوری رفتار[16] v_p

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}} \tag{14.100}$$

یا

$$v_p = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{14.101}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

v_o لامحدود خطے میں دوری رفتار $v_0 = \frac{\omega}{\beta_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ ہے،

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج،

λ_{0c} انقطاعی طول موج

ہیں۔

شکل 14.13 میں مختلف بلند انداز امواج کے دوری رفتار بالمقابل طول موج λ_0 دکھائے گئے ہیں۔دوری رفتار کو لامحدود خطے کے دوری رفتار v_0 کی نسبت سے دکھایا گیا ہے۔ان اشکال میں مستطیلی موجیج کے دونوں اطراف برابر لمبائی $(y_1 = z_1)$ کے تصور کئے گئے ہیں۔

[16] phase velocity

مندرجہ بالا تجزیے میں موتج کے اطراف کامل موصل کے تصور کئے گئے اور ساتھ ہی ساتھ موتج میں بے ضیاع ذو برق بھرا تصور کیا گیا۔اسی لئے انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر امواج بغیر گھٹے موتج میں صفر کرتے ہیں۔حقیقت میں موتج کے اطراف کے موصل کی موصلیت اور ذو برق میں طاقت کی ضیاع سے $\gamma = \alpha + j\beta$ ہو گا لہٰذا انقطاعی تعدد سے بلند تعدد کے امواج بھی صفر کے دوران کچھ نہ کچھ گھٹتے ہیں۔

کھوکھلے موتج جس میں صرف ہوا بھری ہو میں ذو برق یعنی ہوا کا ضیاع قابل نظر انداز ہوتا ہے۔ایسے موتج میں طاقت کا ضیاع صرف موتج کے چادروں کی موصلیت کی بنا ہے۔موصل چادر مکمل طور پر کامل نہ ہونے کا مطلب لے کہ حقیقت میں چادر کے متوازی برقی میدان E_m صفر نہیں ہو گا۔اچھے موصل مثلاً تانبے کی بنی چادر میں E_m کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے۔یوں تانبے یا دیگر اچھے موصل کے چادر سے بنی موتج کے طول موج λ، زاویائی مستقل β یا دوری رفتار v_p حاصل کرتے وقت موتج کے چادر کو کامل ہی تصور کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں تضعیفی مستقل α کا تخمینہ علیحدہ طور پر لگایا جاتا ہے۔

آخر میں مستطیلی موتج میں عرضی برقی موج کی رکاوٹ Z_{yz} مساوات 14.52 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$Z_{yz} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \tag{14.102}$$

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر $\gamma = j\beta$ ہوتا ہے لہٰذا

$$Z_{yz} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{Z_z}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad (\Omega) \tag{14.103}$$

ہو گا جہاں

Z_z موتج کے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ $Z_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ جبکہ

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج ،

λ_{0c} انقطاعی طول موج

ہیں۔ہوا کے لئے $Z_z = 120\pi = 376.7\,\Omega$ کے برابر ہے۔چونکہ Z_{yz} اور Z_z کی شرح بالقل v_p اور v_0 کی شرح کے برابر ہے لہٰذا شکل 14.13 $\frac{Z_{yz}}{Z_z}$ بالمقابل λ_0 بھی دیتا ہے۔

مشق 14.1: TE_{10}، TE_{20} اور TE_{11} امواج کی انقطاعی طول موج مندرجہ ذیل مستطیلی موتج کے لئے حاصل کریں۔

- ہوا سے بھرا موتج جس کے اطراف چار سنٹی میٹر اور دو سنٹی میٹر ہیں۔
- ہوا سے بھرا موتج جس کے دونوں اطراف چار سنٹی میٹر کے برابر ہیں۔

جوابات:پہلا موتج 8 cm، 4 cm، 3.577 cm۔ دوسرا موتج 8 cm، 4 cm، 5.656 cm

---

14.4 مستطیلی موجیج میں عرضی مقناطیسی TM_{mn} موج

عرضی برقی امواج حل کرنے کے آٹھ قدم صفحہ 377 پر بتلائے گئے۔انہیں آٹھ قدم سے شکل 14.9 کے مستطیلی موجیج میں عرضی مقناطیسی موج TM_{mn} بھی حاصل کئے جاتے ہیں۔فرق صرف اتنا ہے کہ یہاں $H_x = 0$ فرض کر کے مسئلہ حل کیا جاتا ہے۔TM_{mn} موج کہتے ہی اس موج کو ہیں جن میں $H_x = 0$ ہو۔آئیں TM_{mn} حاصل کرنے کے اہم نکات کا تذکرہ کریں۔

موج حاصل کرنے کے پہلے تین قدم میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی لہٰذا مساوات 14.14 تا مساوات 14.42 جوں کے توں استعمال کئے جائیں گے۔چوتھے قدم میں $H_x = 0$ پر کرنے سے

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \tag{14.104}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - Z H_y = 0 \tag{14.105}$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - Z H_z = 0 \tag{14.106}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - Y E_x = 0 \tag{14.107}$$

$$\gamma H_z - Y E_y = 0 \tag{14.108}$$

$$-\gamma H_y - Y E_z = 0 \tag{14.109}$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.110}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.111}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 14.108 اور مساوات 14.109 سے

$$Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{E_z}{H_y} = \frac{\gamma}{Y} \tag{14.112}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کا مساوات 14.52 کے ساتھ موازنہ کریں۔اگرچہ دونوں جگہ Z_{yz} کی تعریف $\frac{E_y}{H_z}$ ہی ہے لیکن دونوں جگہ اس شرح کی قیمت مختلف ہے۔یہیں سے آپ توقع کر سکتے ہیں کہ TM_{mn} موج کی رکاوٹ TE_{mn} کے رکاوٹ سے مختلف ہو گی۔

پانچویں قدم میں تمام میدان کو E_x کی صورت میں حاصل کرنا ہے۔مساوات 14.112 کو مساوات 14.105 میں پر کرتے ہوئے H_y کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_y = \frac{Y}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{14.113}$$

اور اسی طرح مساوات 14.112 کو مساوات 14.106 میں پر کرتے ہوئے H_z کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_z = \frac{-Y}{\gamma^2 + YZ} \frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{14.114}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان دو مساوات اور مساوات 14.112 سے

$$E_y = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + YZ}\frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{14.115}$$

$$E_z = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + YZ}\frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{14.116}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں پانچواں قدم پورا ہوتا ہے۔

چھٹے قدم میں E_x کے موج کی مساوات حاصل کرنے کی غرض سے مساوات 14.115 کا y کے ساتھ تفرق اور مساوات 14.116 کا z کے ساتھ تفرق مساوات 14.110 میں پر کرتے ہوئے

$$-\gamma E_x - \frac{\gamma}{\gamma^2 + YZ}\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\gamma}{\gamma^2 + YZ}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + (\gamma^2 + YZ)E_x = 0$$

حاصل ہوتا ہے جسے

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \tag{14.117}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$k^2 = \gamma^2 + YZ = \gamma\left(\gamma + \frac{Z}{Z_{yz}}\right) \tag{14.118}$$

کے برابر ہے۔مساوات 14.57 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کے k^2 مختلف قیمت رکھتے ہیں۔

ساتویں قدم پر مساوات 14.117 کا ایسا حل درکار ہے جو مستطیلی موج کے اطراف پر برقی اور مقناطیسی سرحدی شرائط پر پورا اترتا ہو۔بالکل پہلے کی طرح حل کرتے ہوئے

$$k^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.119}$$

اور میدان

$$E_x = E_0 \sin\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.120}$$

حاصل ہوتا ہے جسے باری باری مساوات 14.113 تا مساوات 14.116 میں پر کرتے ہوئے

$$H_y = \frac{YE_0}{\gamma^2 + YZ}\frac{m\pi}{z_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.121}$$

$$H_z = \frac{-YE_0}{\gamma^2 + YZ}\frac{n\pi}{y_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.122}$$

$$E_y = \frac{-\gamma E_0}{\gamma^2 + YZ}\frac{n\pi}{y_1}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.123}$$

$$E_z = \frac{-\gamma E_0}{\gamma^2 + YZ}\frac{m\pi}{z_1}\sin\frac{n\pi y}{y_1}\cos\frac{m\pi z}{z_1}e^{j\omega t - \gamma x} \tag{14.124}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان جوابات کے ساتھ

$$TM_{mn} \quad \text{موج ہونے کا شرط} \quad H_x = 0 \tag{14.125}$$

شامل کرتے ہوئے تمام میدان حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 14.120 تا مساوات 14.125 کے TM_{mn} امواج میں m یا n صفر کے برابر ہونے سے تمام میدان صفر ہو جاتے ہیں لہٰذا TM_{mn} کا کم سے کم تعددی موج TM_{11} ہے۔

بے ضیاع $\sigma = 0$ ذو برق تصور کرتے ہوئے، مساوات 14.118، مساوات 14.119 اور مساوات 14.33 سے

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \\ &= \sqrt{k^2 - \beta_0^2}\end{aligned} \tag{14.126}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ لامحدود وسعت کے خطے میں موج کا زاویائی مستقل β_0 ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں $k > \beta_0$ کی صورت میں $\gamma = \alpha + j\beta$ سے

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{k^2 - \beta_0^2} \qquad (k > \beta_0) \\ \beta &= 0\end{aligned} \tag{14.127}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس صورت میں موج صفر نہیں کر پائے گی۔اس کے برعکس $k < \beta_0$ کی صورت میں

$$\begin{aligned}\alpha &= 0 \\ \beta &= \sqrt{\beta_0^2 - k^2} \qquad (k < \beta_0)\end{aligned} \tag{14.128}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اس صورت میں موج، بغیر گھٹے موجیج میں صفر کرے گی۔انقطاعی تعدد ان دو تعددی خطوں کے عین درمیان پایا جائے گا جہاں γ کی قیمت حقیقی سے خیالی ہوتے ہوئے صفر سے گزرے گی۔مساوات 14.126 میں $\gamma = 0$ پر کرنے سے انقطاعی تعدد

$$\omega_c^2\mu\epsilon = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.129}$$

یا

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2} \tag{14.130}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس طرح انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}} = \frac{2\pi}{k} \tag{14.131}$$

یا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \tag{14.132}$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کے انقطاعی تعدد کے مساوات ہوبہو ایک جیسے ہیں۔

انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $\beta_0 > k$ کی صورت میں

$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - k^2} = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2} \tag{14.133}$$

ہو گا جس سے موتج میں طول موج

$$\lambda_{\text{موتج}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \tag{14.134}$$

اور موتج میں دوری رفتار

$$\begin{aligned} v_p = \frac{\omega}{\beta} &= \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2y_1}\right)^2 - \left(\frac{m\lambda_0}{2z_1}\right)^2}} \\ &= \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \end{aligned} \tag{14.135}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

v_0 لامحدود خطے میں دوری رفتار $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ جبکہ

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} کے دوری رفتار کے مساوات بھی ہوبہو یکساں ہیں۔

عرضی مقناطیسی موج کی رکاوٹ مساوات 14.112 سے

$$Z_{yz} = \frac{\gamma}{Y}$$

ہے جو انقطاعی تعدد سے بلند تعدد $\gamma = j\beta$ کی صورت میں

$$Z_{yz} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = Z_z\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{14.136}$$

ہو گا جہاں

Z_z موتج کے ذو برق کی قدرتی رکاوٹ $Z_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ جبکہ

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

کے برابر ہیں۔مساوات 14.136 کا مساوات 14.103 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ TM_{mn} اور TE_{mn} امواج کی رکاوٹ مختلف ہیں۔

ہم نے دیکھا کہ ہر بلند درجی انداز کا اپنا مخصوص انقطاعی تعدد، رفتار اور رکاوٹ ہوتے ہیں۔اگر تعدد اتنی ہو کہ مختلف بلند انداز موتج میں صفر کر سکتے ہوں تب میدان ان تمام میدانوں کا مجموعہ ہو گا جو موتج میں پائے جاتے ہوں۔

جدول 14.1 مستطیلی موتج میں TE_{mn} موج کے متغیرات کے تعلق دیتا ہے۔Z_{yz} کے علاوہ یہی تعلق TM_{mn} کے لئے بھی درست ہیں۔

جدول 14.1: مستطیلی موتج میں TE_{mn} امواج کے متغیرات کے تعلق۔

نام تفاعل	اکائی	تعلق
انقطاعی تعدد	Hz	$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}$
انقطاعی طول موج	m	$\lambda_{0c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{z_1}\right)^2}}$
موتج میں طول موج	m	$\lambda_{\text{موتج}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$
دوری رفتار	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	$v_p = \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$
عرضی موج کی رکاوٹ	Ω	$Z_{yz} = \frac{Z_z}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}}$

14.5 کھوکھلی نالی موتج

کھوکھلی نالی جس کا اندرونی رداس ρ ہو کے مسائل نلکی محدد میں باآسانی حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ایسے موتج میں TE_{mn} یا TM_{mn} امواج حاصل کرنے کی خاطر نلکی محدد ہی استعمال کرتے ہیں۔یہاں بھی صفحہ 377 پر دیے آٹھ قدم لیتے ہوئے جواب حاصل کیا جائے گا۔نلکی موتج z محدد پر رکھا گیا ہے لہٰذا اس میں امواج z جانب حرکت کریں گے۔

میکس ویل کے گردش کے دو مساوات کو نلکی محدد میں لکھ کر

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z}\right]\boldsymbol{a}_\rho + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_z = -\mu\left(\frac{\partial H_\rho}{\partial t}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{\partial H_\phi}{\partial t}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial H_z}{\partial t}\boldsymbol{a}_z\right)$$

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]\boldsymbol{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\boldsymbol{a}_z = \sigma\left(E_\rho\boldsymbol{a}_\rho + E_\phi\boldsymbol{a}_\phi + E_z\boldsymbol{a}_z\right) + \epsilon\left(\frac{\partial E_\rho}{\partial t}\boldsymbol{a}_\rho + \frac{\partial E_\phi}{\partial t}\boldsymbol{a}_\phi + \frac{\partial E_z}{\partial t}\boldsymbol{a}_z\right)$$

محددی اجزاء علیحدہ علیحدہ لکھتے ہوئے مندرجہ ذیل چھ مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H_\rho}{\partial t} \tag{14.137}$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -\mu\frac{\partial H_\phi}{\partial t} \tag{14.138}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} = -\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{14.139}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = \sigma E_\rho + \epsilon\frac{\partial E_\rho}{\partial t} \tag{14.140}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = \sigma E_\phi + \epsilon\frac{\partial E_\phi}{\partial t} \tag{14.141}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} = \sigma E_z + \epsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{14.142}$$

حاصل ہوتے ہیں جن کے ساتھ چارج سے خالی $\rho_h = 0$ خطے میں پھیلاو کے دو مساوات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.143}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho H_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{14.144}$$

شامل کرتے ہیں۔

مساوات 14.137 تا مساوات 14.144 کو وقت کے ساتھ اور z فاصلے کے ساتھ سائن نما تعلق کا پابند $(E_\phi = E_1 e^{j\omega t - \gamma z})$ بناتے ہوئے

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} + \gamma E_\phi - Z H_\rho = 0 \tag{14.145}$$

$$-\gamma E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - Z H_\phi = 0 \tag{14.146}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (E_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} - Z H_z = 0 \tag{14.147}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \gamma H_\phi - Y E_\rho = 0 \tag{14.148}$$

$$-\gamma H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - Y E_\phi = 0 \tag{14.149}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (H_\phi \rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} - Y E_z = 0 \tag{14.150}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{14.151}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho H_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} - \gamma H_z = 0 \tag{14.152}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$Z = -j\omega\mu \quad (\Omega/\mathrm{m})$ سلسلہ وار رکاوٹ

$Y = \sigma + j\omega\epsilon \quad (\mathrm{S/m})$ متوازی فراوانی

$\gamma = \alpha + j\beta$ حرکی مستقل

ہیں۔

یہاں ہم عرضی برقی یا عرضی مقناطیسی موج منتخب کرتے ہوئے آگے بڑھ سکتے ہیں۔ہم TE_{mn} منتخب کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں $E_z = 0$ ہو گا جس سے

$$\gamma E_\phi - ZH_\rho = 0 \tag{14.153}$$

$$-\gamma E_\rho - ZH_\phi = 0 \tag{14.154}$$

$$\frac{E_\phi}{\rho} + \frac{\partial E_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} - ZH_z = 0 \tag{14.155}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \gamma H_\phi - YE_\rho = 0 \tag{14.156}$$

$$-\gamma H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - YE_\phi = 0 \tag{14.157}$$

$$\frac{H_\phi}{\rho} + \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} = 0 \tag{14.158}$$

$$\frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} = 0 \tag{14.159}$$

$$\frac{H_\rho}{\rho} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} - \gamma H_z = 0 \tag{14.160}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں مساوات 14.147 میں $\frac{\partial(E_\phi \rho)}{\partial \rho}$ تفرق کو کھول کر $E_\phi + \rho\frac{\partial E_\phi}{\partial \rho}$ لکھا گیا ہے۔ایسا ہی بقایا تفرق کے ساتھ بھی کیا گیا ہے۔

تمام میدان کو H_z کی صورت میں لکھنے کی خاطر مساوات 14.153 اور مساوات 14.154 سے عرضی موج کی رکاوٹ $Z_{\rho\phi}$

$$Z_{\rho\phi} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = -\frac{E_\phi}{H_\rho} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \tag{14.161}$$

لیتے ہیں۔ مساوات 14.161 سے E_ρ مساوات 14.156 میں پر کرتے ہوئے H_ϕ کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_\phi = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} \tag{14.162}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 14.161 سے E_ϕ مساوات 14.157 میں پر کرتے ہوئے H_ρ کے لئے حل کرتے ہوئے

$$H_\rho = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \tag{14.163}$$

حاصل ہوتا ہے۔مندرجہ بالا دو مساوات اور مساوات 14.161 سے

$$E_\rho = -\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} \tag{14.164}$$

$$E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \tag{14.165}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔یہ مساوات تمام میدان کو H_z کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

مساوات 14.164 کا ϕ تفرق، مساوات 14.165 کا ρ تفرق اور مساوات 14.165 کو مساوات 14.155 میں پر کرتے ہوئے

$$\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} - ZH_z = 0 \tag{14.166}$$

موج کی مقداری مساوات حاصل ہوتی ہے۔اس میں

$$\frac{Z\left(\gamma - YZ_{\rho\phi}\right)}{Z_{\rho\phi}} = -k^2 \tag{14.167}$$

یعنی

$$k^2 = \gamma^2 + YZ \tag{14.168}$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + k^2 H_z = 0$$

یا

$$\rho^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 H_z = -\frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} \tag{14.169}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں

$$H_z(\rho, \phi) = M(\rho) N(\phi) \tag{14.170}$$

لکھ کر متغیرات کی علیحدگی ممکن ہے۔ایسا کرتے ہوئے

$$\rho^2 N \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \rho N \frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 MN = -M \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے۔دونوں اطراف کو MN سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\rho^2}{M}\frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{M}\frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 = -\frac{1}{N}\frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں بایاں ہاتھ کا متغیرہ ρ ہے جبکہ دائیں ہاتھ کا متغیرہ ϕ ہے۔یوں دونوں اطراف کو مستقل n^2 کے برابر پر کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\frac{\rho^2}{M}\frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{M}\frac{\partial M}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 = n^2 \tag{14.171}$$

$$-\frac{1}{N}\frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2} = n^2 \tag{14.172}$$

مندرجہ بالا میں نچلی مساوات کا حل

$$N = c_1 \cos n\phi + c_2 \sin n\phi \tag{14.173}$$

ہے جہاں c_1 اور c_2 مساوات کے مستقل ہیں۔

مساوات 14.171 کو

$$\rho^2 \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial M}{\partial \rho} + (k^2 \rho^2 - n^2) M = 0 \tag{14.174}$$

لکھا جا سکتا ہے جو بیسل مساوات[17] کہلاتی ہے اور جس کا حل

$$M = c_3 J_n(k\rho) + c_4 N_n(k\rho) \tag{14.175}$$

لکھا جاتا ہے جہاں c_3 اور c_4 مساوات کے مستقل ہیں۔

یوں مساوات 14.170 سے

$$H_z = \left[c_3 J_n(k\rho) + c_4 Y_n(k\rho)\right]\left(c_1 \cos n\phi + c_2 \sin n\phi\right) \tag{14.176}$$

حاصل ہوتا ہے جس پر مندرجہ ذیل دو عدد سرحدی شرائط لاگو کرتے ہوئے مساوات کے مستقل حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

کائنات میں کہیں پر بھی لامحدود میدان نہیں پایا جاتا لہٰذا نلکی موجیج میں بھی میدان کی قیمت محدود ہو گی۔اس کے علاوہ موصل نلکی سطح پر برقی میدان صفر ہو گا، یعنی $(E_\phi(\rho_0) = 0)$، جہاں نلکی کا رداس ρ_0 کے برابر ہے۔

پہلے شرط کے تحت نلکی محدد میں میدان کی قیمت محدود ہے، لیکن $\rho = 0$ پر $Y_n \to \infty$ کی قیمت لامحدود ہوتی ہے لہٰذا مساوات 14.176 میں

$$c_4 = 0 \tag{14.177}$$

ہو گا۔اگر $c_2 = 0$ ہو تب میدان کی چوٹی $\phi = 0^\circ$ پر ہو گی اور اگر $c_1 = 0$ ہو تب میدان کی چوٹی $n\phi = 90^\circ$ پر ہو گی۔کسی اور زاویے پر چوٹی کی صورت میں دونوں مستقل پائے جائیں گے۔ہم چوٹی کو صفر زاویے پر تصور کرتے ہیں۔یوں

$$H_z = H_0 \cos n\phi J_n(k\rho) \tag{14.178}$$

ہو گا جہاں $c_1 c_3 = H_0$ لکھا گیا ہے۔اب چونکہ $\phi = 0$ اور $\phi = 2\pi$ ریڈیئن نلکی موجیج میں ایک ہی نقطے کو ظاہر کرتے ہیں لہٰذا دونوں زاویوں سے میدان برابر حاصل ہونا چاہیے۔یوں

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n = 1$ کی صورت میں نلکی میں $\phi = 0$ تا $\phi = 2\pi$ یعنی ایک چکر کاٹتے ہوئے H_z کی موج بوجہ $\cos n\phi$ کے ایک چکر کاٹے گا۔اسی طرح $n = 2$ کی صورت میں نلکی کے گرد ایک چکر کاٹتے ہوئے میدان دو چکر کاٹتا ہے۔یوں نلکی کے گرد ایک چکر کاٹتے ہوئے میدان کے چکر کی تعداد n دیتا ہے۔

نلکی موجیج میں موج کی مساوات

$$H_z = H_0 \cos n\phi J_n(k\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{14.179}$$

ہو گی جہاں میدان کا وقت اور فاصلے کے ساتھ سائن نما تبدیلی کو بھی شامل کیا گیا ہے۔ اس کو مساوات 14.165 میں پر کرتے ہوئے

$$E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - Y Z_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{\mathrm{d}J_n(k\rho)}{\mathrm{d}\rho} e^{j\omega t - \gamma z} \tag{14.180}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسری سرحدی شرط کے تحت موصل نلکی سطح پر متوازی برقی میدان صفر ہو گا لہٰذا مساوات 14.180 میں ρ_0 پر $E_\rho = 0$ پر کرتے ہوئے

$$\left.\frac{\mathrm{d}J_n(k\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho_0} = 0 \tag{14.181}$$

---

[17] Bessel's equation

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$k\rho_0 = \alpha'_{nm} \tag{14.182}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں α'_{nm} بیسل تفاعل کے تفرق کے صفر کہلاتے ہیں یعنی

$$\frac{\mathrm{d}J_n(\alpha'_{nm})}{\mathrm{d}\rho} = 0 \tag{14.183}$$

مساوات 14.182 سے حاصل k کو k'_{nm} لکھتے ہوئے یوں

$$k'_{nm} = \frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0} \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots) \tag{14.184}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 14.184 کو استعمال کرتے ہوئے یوں

$$H_z = H_0 \cos n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \tag{14.185}$$

حاصل ہوتا ہے جسے مساوات 14.162 تا مساوات 14.165 میں پر کرتے ہوئے بقایا تمام میدان

$$H_\phi = \frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{n}{\rho} H_0 \sin n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \tag{14.186}$$

$$H_\rho = -\frac{1}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{\mathrm{d}J_n(k'_{nm}\rho)}{\mathrm{d}\rho} e^{j\omega t - \gamma z} \tag{14.187}$$

$$E_\rho = -\frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} \frac{n}{\rho} H_0 \sin n\phi J_n(k'_{nm}\rho) e^{j\omega t - \gamma z} \tag{14.188}$$

$$E_\phi = \frac{Z_{\rho\phi}}{\gamma - YZ_{\rho\phi}} H_0 \cos n\phi \frac{\mathrm{d}J_n(k'_{nm}\rho)}{\mathrm{d}\rho} e^{j\omega t - \gamma z} \tag{14.189}$$

$$E_z = 0 \tag{14.190}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں E_z بھی شامل کیا گیا ہے۔

آئیں k'_{nm} کو سمجھیں۔ اگر $n = 1$ ہو تب بیسل تفاعل J_1 اور اس کا تفرق $\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}\rho}$ استعمال کئے جائیں گے۔ $\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}\rho}$ کے پہلے تین صفر $\alpha'_{11} = 1.84$، $\alpha'_{12} = 5.33$ اور $\alpha'_{13} = 8.54$ ہیں جو بالترتیب TE_{11}، TE_{12} اور TE_{13} بلند عرضی برقی امواج کے مستقل ہیں۔ شکل 14.14 میں انہیں دکھایا گیا ہے۔اسی طرح TE_{01} اور TE_{02} میں $n = 0$ ہے جبکہ $\alpha'_{01} = 3.832$ اور $\alpha'_{02} = 7.016$ ہیں۔بیسل تفاعل کے تفرق $\frac{\mathrm{d}J_0}{\mathrm{d}\rho}$ اور J_1 کے صفر عین برابر ہوتے ہیں۔شکل میں یوں $\frac{\mathrm{d}J_0}{\mathrm{d}\rho}$ کے صفر کو J_1 کے صفر سے حاصل کیا گیا دکھایا گیا ہے۔

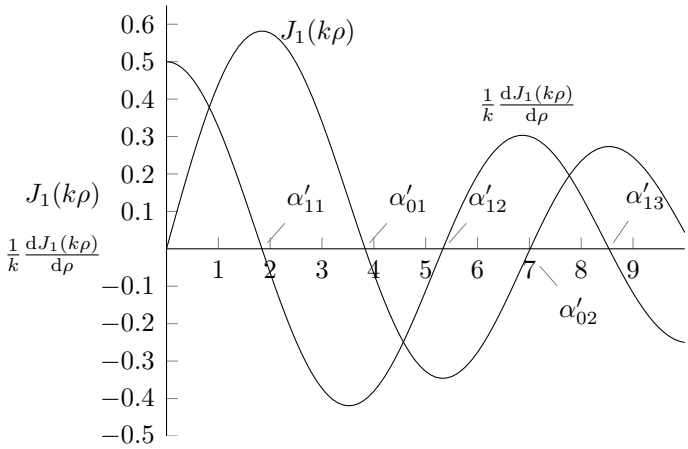
کامل ذو برق کی صورت میں $\sigma = 0$ لیتے ہوئے مساوات 14.184 کو مساوات 14.168 میں پر کرنے سے

$$\left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

یا

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \tag{14.191}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے تین صورتیں ممکن ہیں۔



شکل 14.14: بیسل تفاعل۔

- کم تعدد پر حقیقی γ ہو گا لہٰذا موجیج غیر شفاف ہو گا اور موج اس میں صفر نہیں کر پائے گی۔
- مخصوص درمیانے تعدد پر $\gamma = 0$ حاصل ہو گا۔یہ انقطاعی تعدد ہو گی۔
- بلند تعدد پر γ خیالی عدد ہو گا لہٰذا موجیج شفاف ہو گا اور موج اس میں صفر کر پائے گی۔

مساوات 14.191 کو صفر کے برابر پر کرنے سے انقطاعی تعدد

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}\frac{k'_{nm}}{\rho_0} \qquad \text{(Hz)} \tag{14.192}$$

اور انقطاعی طول موج

$$\lambda_{0c} = \frac{2\pi\rho_0}{k'_{nm}} \qquad \text{(m)} \tag{14.193}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں TE_{11} کے لئے $\alpha'_{11} = 1.84$ سے $\lambda_{0c} = \frac{2\pi\rho_0}{1.84} = 3.41\rho_0$ حاصل ہو گا۔

انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر γ خیالی ہو گا لہٰذا اسے

$$\beta = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{\alpha'_{nm}}{\rho_0}\right)^2} \qquad \text{(rad/m)} \tag{14.194}$$

لکھا جائے گا۔مندرجہ بالا دو مساوات کو ملا کر z سمت میں موجیج میں طول موج

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad \text{(m)} \tag{14.195}$$

حاصل ہوتی ہے جہاں

λ_0 موجیج کے ذو برق سے بھرے لامحدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

ہیں۔موتج میں دوری رفتار $v_p = f\lambda_g$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}} \qquad (\mathrm{m/s}) \tag{14.196}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

ہے۔

مساوات 14.195 اور مساوات 14.196 ہوبہو مستطیلی موتج کے مساوات ہیں۔یہی مساوات ہر شکل کے کھوکھلے موتج کے لئے درست ثابت ہوتے ہیں۔

بیسل تفاعل کے صفر برابر فاصلوں پر نہیں پائے جاتے لہٰذا نلکی موتج میں ممکنہ بلند انداز امواج برابر تعدد کے فاصلے پر نہیں پائے جاتے۔اس کے برعکس مستطیلی موتج میں یہ بلند انداز امواج برابر تعدد کے فاصلوں پر پائے جاتے ہیں۔نلکی موتج میں TE_{11} تمام امواج، بشمول TM_{nm}، سے کم انقطاعی تعدد رکھتی ہے لہٰذا اسے غالب[18] بلند درجی انداز کہتے ہیں۔TE_{01} بلند درجی انداز نہایت کم تضعیف کا حامل ہے لہٰذا کم موصلیت کے چادر کی بنی موتج میں اس کی اہمیت مزید بڑھ جاتی ہے۔

14.6 انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیف

ہم دیکھ چکے ہیں کہ انقطاعی تعدد سے کم تعدد کی موج تضعیف کا شکار ہوتی ہے اور یہ موتج میں صفر کے قابل نہیں ہوتی۔آئیں تضعیف کی مقدار کا حساب لگائیں۔مستطیلی موتج میں مساوات 14.127

$$\alpha = \sqrt{k^2-\beta_0^2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2-\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2} \tag{14.197}$$

انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر تضعیفی مستقل دیتا ہے جسے مساوات 14.131 کی مدد سے

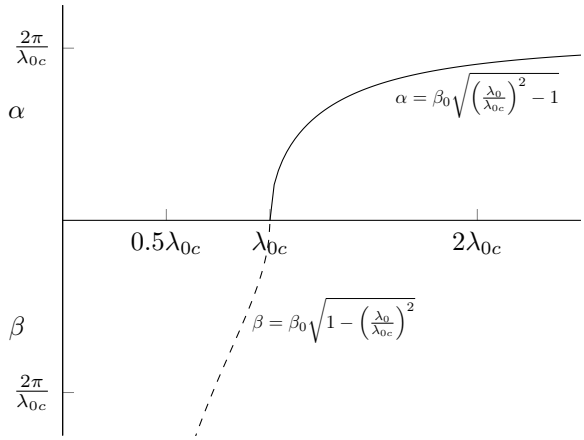
$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2-1} = \beta_0\sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2-1} \quad (\mathrm{Np/m}) \tag{14.198}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

λ_0 لا محدود خطے میں طول موج اور

λ_{0c} انقطاعی طول موج

[18] dominant mode



شکل 14.15: حرکی مستقل بالمقابل طول موج۔انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر تضعیفی مستقل صفر ہے جبکہ اس سے زیادہ طول موج پر زاویائی مستقل صفر ہے۔

ہیں۔مساوات 14.198 ہر قسم کے شکل کے کھوکھلے موجیج کے لئے درست ہے۔

انقطاعی تعدد سے بہت کم تعدد $(\lambda_0 \gg \lambda_{0c})$ کی صورت میں مساوات 14.198 سے

$$\alpha \approx \frac{2\pi}{\lambda_{0c}} \qquad (\mathrm{Np/m}) \tag{14.199}$$

حاصل ہوتا ہے۔شکل 14.15 میں تضعیفی مستقل α بالمقابل لامحدود خطے میں طول موج λ_0 کو ٹھوس خط سے دکھایا گیا ہے۔انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر $\alpha = 0$ ہے۔

مثال 14.1: ایک موجیج کا انقطاعی طول موج $\lambda_{0c} = 50\,\mathrm{mm}$ ہے۔اس موجیج میں $\lambda_0 = 2\,\mathrm{m}$ کے موج کی فی میٹر صفر کے دوران تضعیف دریافت کریں۔

حل:چونکہ $\lambda_0 \gg \lambda_{0c}$ ہے لہٰذا

$$\alpha = \frac{2\pi}{50 \times 10^{-3}} = 125.68\,\mathrm{Np/m}$$

ہو گا۔یوں موجیج میں بہت کم فاصلے پر موج کی قیمت انتہائی گھٹ جائے گی۔

14.7 انقطاعی تعدد سے بلند تعدد پر تضعیف

کامل موصل چادر سے بنا اور کامل ذو برق سے بھرا موتج بے ضیاع ہوتا ہے لہٰذا انقطاعی تعدد سے زیادہ تعدد پر $\alpha = 0$ ہو گا۔مساوات 14.128 سے

$$\begin{aligned}\beta &= \sqrt{\beta_0^2 - k^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}\right)^2}\\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2}\end{aligned}$$

یا

$$\beta = \beta_0\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0c}}\right)^2} \tag{14.200}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 14.200 ہر قسم کے شکل کے کھوکھلے موتج کے لئے درست ہے۔شکل 14.15 میں نقطہ دار خط سے β دکھایا گیا ہے۔انقطاعی طول موج سے زیادہ طول موج پر $\beta = 0$ ہے۔

شکل 14.15 میں طول موج کو افقی محدد اور حرکی مستقل کو عمودی محدد پر رکھا گیا ہے۔عین انقطاعی طول موج λ_{0c} پر $\gamma = 0$ یعنی $\alpha = 0$ اور $\beta = 0$ ہیں۔انقطاعی طول موج سے کم طول موج پر $\alpha = 0$ رہتا ہے جبکہ β کی قیمت طول موج کم کرنے سے لامحدود قیمت کی جانب بڑھتی ہے۔انقطاعی طول موج سے زیادہ طول موج پر $\beta = 0$ رہتا ہے جبکہ α کی قیمت $\frac{2\pi}{\lambda_{0c}}$ تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے۔

حقیقی موتج کامل نہیں ہوتے لہٰذا ان میں α صفر نہیں ہوتا۔بہتر موصل، مثلاً تانبہ، کی چادر سے بنے اور ہوا سے بھرے موتج میں α کی قیمت نہایت کم ہوتی ہے جبکہ β مندرجہ بالا مساوات کے عین مطابق ہوتا ہے۔آئیں حقیقی موتج میں α کی قیمت حاصل کریں۔

صفحہ 299 پر مساوات 10.55

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}}$$

موج کی اوسط طاقت دیتی ہے۔کسی بھی موتج میں میدان، مثلاً صفحہ 387 پر مساوات 14.85، میں حرکت کرتے میدان $e^{-\alpha x}e^{j(\omega t - \beta x)}$ خاصیت رکھتے ہیں۔یوں $\frac{E}{H} = Z$ لیتے ہوئے

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\frac{|E|^2}{Z_h}e^{-2\alpha x} = \frac{1}{2}Z_h|H|^2 e^{-2\alpha x} = P_0 e^{-2\alpha x} \tag{14.201}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $x = 0$ پر اوسط طاقت P_0 کے برابر ہے، Z کے حقیقی جزو کو Z_h اور $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}^* = |E|^2$ لکھے گئے ہیں۔اس مساوات سے

$$\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}}{P} \qquad (\mathrm{Np/m}) \tag{14.202}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں اوسط $\mathscr{P}$ کو P لکھا گیا ہے۔مساوات 14.202 میں کسی بھی نقطے پر x سمت میں P طاقت منتقل ہو رہا ہے جبکہ اسی نقطے پر $-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ طاقت کے ضیاع کو ظاہر کرتا ہے۔تضعیفی مستقل کی اس مساوات میں طاقت کا ضیاع، موجیح کی دیواروں میں پیدا برقی رو سے مزاحمتی برقی ضیاع (I^2R_c) ہے جو حرارت میں تبدیل ہوتا ہے۔انقطاعی تعدد سے کم تعدد پر موجیح کے تضعیفی مستقل پر طاقت کا ضیاع عمل درآمد نہیں ہوتا۔کم انقطاعی تعدد پر امواج نہ گزارنے کی معزوری کو α سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مساوات 14.202 کو یوں پڑھا جا سکتا ہے

$$\alpha = \frac{\text{طاقت کا ضیاع فی اکائی لمبائی}}{\text{منتقل طاقت کا دگنا}}$$

کامل ذو برق سے بھرے موجیح میں ذو برق کا ضیاع صفر ہو گا۔ایسی صورت میں صرف موجیح کے چادروں میں مزاحمتی ضیاع پایا جائے گا لہٰذا اکائی لمبائی میں طاقت کا ضیاع

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{d}x}\int\int \mathscr{P}_{\text{چادر}}\,\mathrm{d}S = \int \mathscr{P}_{\text{چادر}}\,\mathrm{d}l \tag{14.203}$$

ہو گا جہاں $\mathscr{P}_{\text{چادر}}$ سے مراد وہ اوسط طاقت (وقت کے مطابقت سے اوسط) ہے جو موجیح کے دیواروں کے موصل چادروں میں منتقل ہو رہا ہے۔مساوات 14.203 میں سطح کا چھوٹا رقبہ $\mathrm{d}S$ موجیح کے اندرونی سطح پر لیا جاتا ہے۔اس رقبے کی لمبائی $\mathrm{d}x$ اور چوڑائی $\mathrm{d}l$ ہے جہاں l اندرونی سطح پر ایک چکر کے برابر ہے۔شکل 14.9 کے مستطیلی موجیح کی صورت میں $l = 2(y_1 + z_1)$ کے برابر ہو گا۔مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ سے موصل چادر میں منتقل طاقت کو

$$\mathscr{P}_{\text{چادر}} = \frac{1}{2}Z_{ch}|H_m|^2 \tag{14.204}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں H_m چادر کے متوازی میدان اور Z_c چادر کے موصل کا قدرتی رکاوٹ ہے جس کا حقیقی جزو Z_{ch} ہے۔چادر کے متوازی میدان کی حتمی قیمت $|H_m|$ ہے۔چونکہ موصل میں $\sigma \gg j\omega\epsilon$ ہوتا ہے لہٰذا

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} =\approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

ہو گا جس سے

$$Z_{ch} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 14.203 کو

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{Z_{ch}}{2}\int |H_m|^2\,\mathrm{d}l \tag{14.205}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

موجیح میں کسی بھی نقطے پر لمبائی کے جانب منتقل طاقت کو

$$P = \frac{Z_{yz,h}}{1}\int\int |H_\perp|^2\,\mathrm{d}S \tag{14.206}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $H_\perp$ سے مراد وہ میدان ہے جو موج کے حرکت کے عمودی ہے۔اس میدان کو موتج کے سطح عمودی تراش کے متوازی بھی لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں Z_{yz} موتج کا قدرتی رکاوٹ ہے جس کے حقیقی جزو کو $Z_{yz,h}$ لکھا گیا ہے۔اس طرح تضعیفی مستقل کو

$$\alpha = \frac{Z_{ch}\int |H_m|^2\,\mathrm{d}l}{2Z_{yz,h}\int\int |H_\perp|^2}\,\mathrm{d}S \qquad (\mathrm{Np/m}) \tag{14.207}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 14.207 تمام موتج کے تمام بلند انداز کے لئے درست ہے۔کسی بھی بلند انداز کا تضعیفی مستقل حاصل کرتے وقت اسی بلند انداز کے میدان مساوات 14.207 میں پر کئے جائیں گے۔بہتر موصل سے بنے موتج کی صورت میں کامل موصل کے لئے حاصل کردہ میدان ہی استعمال کئے جاتے ہیں۔مساوات 14.207 کا استعمال مندرجہ ذیل مثال میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 14.2: دو متوازی چادروں کے موتج کو صفحہ 370 پر شکل 14.1 میں دکھایا گیا ہے۔اس موتج میں 450 Hz کے TEM موج کا تضعیفی مستقل حاصل کریں۔چادروں کے درمیان فاصلہ 20 cm ہے۔

حل:مساوات 14.207 سے

$$\alpha = \frac{2Z_{ch}\int_0^{y_1}|H_m|^2\,\mathrm{d}y}{2Z_{yz,h}\int_0^{y_1}\int_0^{z_1}|H_\perp|^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y}$$

لکھا جائے گا جہاں کسر کے بالائی حصے میں دونوں اطراف کے چادروں میں طاقت کے ضیاع کی وجہ سے ضرب دو لکھا گیا ہے۔اس موتج میں TEM موج کے میدان حرکت کے سمت کے عمودی اور چادروں کے متوازی ہیں۔یوں مقناطیسی میدان $H\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ ہے جو چادروں کے متوازی اور موج کے حرکت کے عمودی ہے۔یوں H_m اور $H_\perp$ دونوں $H\boldsymbol{a}_\mathrm{y}$ ہی ہیں لہٰذا

$$\alpha = \frac{Z_{ch}y_1}{Z_{yz,h}y_1z_1} = \frac{Z_{ch}}{z_1Z_{yz,h}}$$

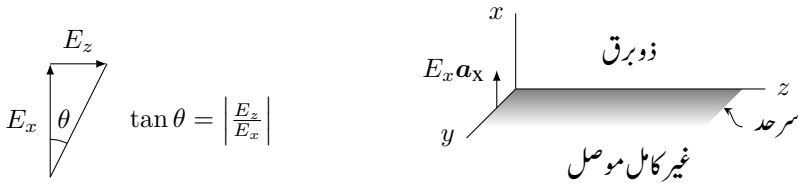
ہو گا۔تانبے میں 450 MHz پر

$$\begin{aligned}
Z_c &= \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}\\
&= \sqrt{\frac{j2\times\pi\times 450\times 10^6}{5.8\times 10^7 + j2\times\pi\times 450\times 10^6\times 8.854\times 10^{-12}}}\\
&= 0.0055 + j0.0055
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کا حقیقی جزو $Z_{ch} = 0.0055$ اوہم ہے۔ہوا کے لئے $Z_{yz,h} = Z_{yz} = 376.7\,\Omega$ ہے۔ان نتائج کے تحت

$$\alpha = \frac{0.0055}{0.2\times 376.7} = 73\,\mu\mathrm{Np/m}$$

ہو گا۔یوں ایک کلو میٹر فاصلہ طے کرنے پر میدان کی قیمت ابتدائی قیمت کے $e^{-0.073} = 0.9296$ یعنی 92.96 فی صد ہو گی۔



الف: غیر کامل موصل اور ذو برق کی سرحد

ب: زاویہ جھکاو

شکل 14.16: دو خطوں کے سرحد پر امواج۔

14.8 سطحی موج

غیر کامل موصل اور ذو برق کی سطح شکل 14.16-الف میں $x = 0$ پر دکھائی گئی ہے۔سطح کے نیچے $(x < 0)$ غیر کامل موصل جبکہ اس کے اوپر $(x > 0)$ ذو برق ہے۔سطح کے ساتھ ساتھ TEM موج z سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ آئیں اس مسئلے کو حل کریں۔

اس مسئلے کو حل کرتے ہوئے تصور کیا جائے گا کہ موج میں y کے تبدیلی سے کوئی تبدیلی رو نما نہیں ہوتی۔یوں $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ہو گا۔چونکہ موج z سمت حرکت کر رہی ہے لہٰذا تمام میدان

$$H = H_0 e^{j\omega t - \gamma z} \tag{14.208}$$

خاصیت رکھتے ہیں۔ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے، سطح سے اوپر ذو برق میں مساوات 14.16 تا مساوات 14.23 مندرجہ ذیل صورت اختیار کر لیتے ہیں

$$\gamma_1 E_y + j\omega\mu_1 H_x = 0 \tag{14.209}$$

$$-\gamma_1 E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu_1 H_y = 0 \tag{14.210}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} + j\omega\mu_1 H_z = 0 \tag{14.211}$$

$$\gamma_1 H_y - j\omega\epsilon_1 E_x = 0 \tag{14.212}$$

$$-\gamma_1 H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\omega\epsilon_1 E_y = 0 \tag{14.213}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - j\omega\epsilon_1 E_z = 0 \tag{14.214}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_1 E_z = 0 \tag{14.215}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} - \gamma_1 H_z = 0 \tag{14.216}$$

جہاں زیر نوشت میں 1 سرحد سے اوپر ذو برق کے خطے کو ظاہر کرتا ہے۔موج کی مقداری مساوات حاصل کرنے کی خاطر مساوات 14.212 سے E_x اور مساوات 14.214 سے E_z کو مساوات 14.210 میں پر کرتے ہوئے

$$-\frac{\gamma_1^2}{j\omega\epsilon_1} H_y - \frac{1}{j\omega\epsilon_1}\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + j\omega\mu_1 H_y = 0$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \left(\gamma_1^2 + \omega^2\mu_1\epsilon_1\right) H_y = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = k_1^2 H_y \tag{14.217}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$k_1^2 = -\left(\gamma_1^2 + \omega^2 \mu_1 \epsilon_1\right) \tag{14.218}$$

کے برابر ہے۔مساوات 14.217 کا حل

$$H_y = c_1 e^{-k_1 x} + c_2 e^{k_1 x}$$

ہے۔ذو برق میں x کی قیمت 0 تا ∞ ممکن ہے۔اس مساوات میں سرحد سے دور لامحدود فاصلے $x \to \infty$ پر میدان کی قیمت لامحدود حاصل ہوتی ہے جو ناقابل قبول نتیجہ ہے لہٰذا اسے رد کرتے ہوئے $c_2 = 0$ لیا جاتا ہے۔ اور یوں

$$H_y = c_1 e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \qquad \text{ذو برق خطہ} \tag{14.219}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موج کو مساوات 14.208 کے طرز پر لکھا گیا ہے۔

موصل خطے کے لئے میکس ویل کے مساوات مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\gamma_2 E_y + j\omega\mu_2 H_x = 0 \tag{14.220}$$

$$-\gamma_2 E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu_2 H_y = 0 \tag{14.221}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} + j\omega\mu_2 H_z = 0 \tag{14.222}$$

$$\gamma_2 H_y - \left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) E_x = 0 \tag{14.223}$$

$$-\gamma_2 H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) E_y = 0 \tag{14.224}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) E_z = 0 \tag{14.225}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} - \gamma_2 E_z = 0 \tag{14.226}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} - \gamma_2 H_z = 0 \tag{14.227}$$

موج کی مقداری مساوات حاصل کرنے کی خاطر مساوات 14.223 سے E_x اور مساوات 14.225 سے E_Z کو مساوات 14.221 میں پر کرتے ہوئے

$$-\frac{\gamma_2^2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} H_y - \frac{1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + j\omega\mu_2 H_y = 0$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \left[\gamma_2^2 - j\omega\mu_2\left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right)\right] H_y = 0$$

یا

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = k_2^2 H_y \tag{14.228}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$k_2^2 = -\gamma_2^2 + \gamma_m^2 \tag{14.229}$$
$$\gamma_m^2 = j\omega\mu_2\left(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2\right) \tag{14.230}$$

کے برابر ہیں۔

مساوات 14.228 کا حل

$$H_y = c_3 e^{-k_2 x} + c_4 e^{k_2 x}$$

ہے۔موصل میں x کی قیمت 0 تا $-\infty$ ممکن ہے۔اس مساوات میں سرحد سے دور لامحدود فاصلے $x \to -\infty$ پر میدان کی قیمت لامحدود حاصل ہوتی ہے جو ناقابل قبول نتیجہ ہے لہٰذا اسے رد کرتے ہوئے $c_3 = 0$ لیا جاتا ہے اور یوں

$$H_y = c_4 e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_2 z} \qquad \text{موصل خطہ} \tag{14.231}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں موج کو مساوات 14.208 کے طرز پر لکھا گیا ہے۔

مقناطیسی سرحدی شرط کے تحت سرحد کے دونوں اطراف تمام اوقات میدان برابر ہوں گے لہٰذا $x = 0$ پر کسی بھی z پر تمام t کے لئے مساوات 14.219 اور مساوات 14.231 برابر ہوں گے جس سے

$$\gamma_1 = \gamma_2 \tag{14.232}$$
$$c_1 = c_4 \tag{14.233}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.212 سے E_x اور مساوات 14.214 سے ذو برق میں E_z یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\gamma_1 c_1}{j\omega\epsilon_1} e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \\ E_z &= \frac{-k_1 c_1}{j\omega\epsilon_1} e^{-k_1 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \qquad \text{ذو برق خطہ} \end{aligned} \tag{14.234}$$

مندرجہ مساوات کو کم چاہیے

اسی طرح ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.223 سے E_x اور مساوات 14.225 سے موصل میں E_z یوں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\gamma_1 c_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \\ E_z &= \frac{k_2 c_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} e^{k_2 x} e^{j\omega t - \gamma_1 z} \qquad \text{موصل خطہ} \end{aligned} \tag{14.235}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $c_4 = c_1$ اور $\gamma_2 = \gamma_1$ پر کئے گئے ہیں۔

سرحد کے دونوں اطراف متوازی برقی میدان برابر ہونے کی شرط سے $x = 0$ پر دونوں اطراف E_z برابر ہوں گے جس سے

$$\frac{-k_1}{j\omega\epsilon_1} = \frac{k_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}$$

یعنی

$$k_1 = \frac{-j\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2} k_2 \tag{14.236}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 14.218 سے

$$\begin{aligned}\gamma_1^2 &= -\omega^2\mu_1\epsilon_1 - k_1^2\\ &= -\omega^2\mu_1\epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}\right)^2 k_2^2\\ &= -\omega^2\mu_1\epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}\right)^2 \left(-\gamma_2^2 + \gamma_m^2\right)\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں پہلے قدم پر مساوات 14.236 اور دوسرے قدم پر مساوات 14.229 کا استعمال کیا گیا ہے۔اس میں مساوات 14.232 سے $\gamma_2 = \gamma_1$ پر کرتے ہوئے

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{-\omega^2\mu_1\epsilon_1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2+j\omega\epsilon_2}\right)^2 \gamma_m^2}{1 + \left(\frac{\omega\epsilon_1}{\sigma_2+j\omega\epsilon_2}\right)^2}} \tag{14.237}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 14.234 میں E_x سرحد کے عمودی ہے جبکہ E_z سرحد کے متوازی ہے۔کل برقی میدان ان دونوں کا سمتی مجموعہ ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کل میدان حرکت کی سمت میں جھکا ہو گا۔شکل 14.16-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ جھکنے کا زاویہ

$$\theta = \tan^{-1}\frac{|E_z|}{|E_x|} = \tan^{-1}\left|\frac{-k_1}{\gamma_1}\right| \tag{14.238}$$

ہو گا۔

آئیں چند مخصوص سرحدوں پر موج کے جھکاو کا زاویہ حاصل کریں۔

ہوا اور تانبے کے سرحد پر $\omega = 100\,\text{Mrad/s}$ تعدد کے موج کی بات کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \epsilon_2 = \epsilon_0\\ \mu_1 &= \mu_2 = \mu_0\\ \sigma_2 &= 5.8\times 10^7\end{aligned}$$

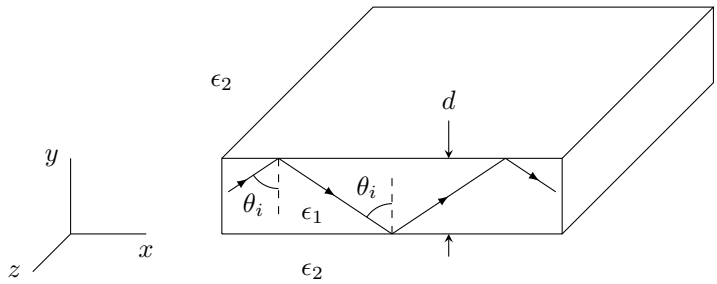
سے

$$\begin{aligned}\gamma_1 = \gamma_2 &= j0.33356\\ k_1 &= 0.9215(1-j)\times 10^{-6}\\ k_2 &= 6.038(1-j)\times 10^{4}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں جن سے

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{0.9215(1-j)\times 10^{-6}}{j0.33356}\right| = 0.00022385^\circ$$

زاویہ حاصل ہوتا ہے۔اس نتیجے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موصل کے سرحد پر برقی میدان تقریباً عمودی ہی ہوتا ہے۔برقی میدان کا عمودی یعنی E_x حصہ حرکت موج کی سمت میں طاقت منتقل کرتا ہے جبکہ E_z حصہ موصل میں طاقت منتقل کرتا ہے جو ضائع ہو جاتا ہے۔



شکل 14.17: ذو برق تختی موج میں اندرونی مکمل انعکاس سے موج صفر کرتی ہے۔

ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر $\omega = 100\,\text{Mrad/s}$ تعدد کے موج کی بات کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_0 \\
\epsilon_2 &= 78\epsilon_0 \\
\mu_1 &= \mu_2 = \mu_0 \\
\sigma_2 &= 0
\end{aligned}$$

سے

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = \gamma_2 &= j0.33144 \\
k_1 &= j0.037528 \\
k_2 &= 2.9272
\end{aligned}$$

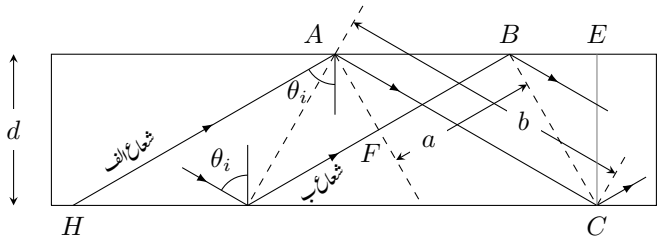
حاصل ہوتے ہیں جو

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{j0.037528}{j0.33144}\right| = 6.46^\circ$$

زاویہ دیتا ہے۔ہوا اور پانی کے سرحد پر برقی میدان کی جھکاو باآسانی ناپی جا سکتی ہے۔

14.9 ذو برق تختی موج

اب تک ہم موصل چادروں سے بنائے گئے موج پر غور کرتے رہے ہیں۔اس حصے میں ذو برق سے بنائے گئے موج پر غور کیا جائے گا۔شکل 14.17 میں d موٹائی اور لامحدود وسعت کے ذو برق کا تختہ دکھایا گیا ہے۔اس تختے میں بائیں طرف سے TEM موج داخلی کی جاتی ہے۔ ہم تختے میں پیدا کردہ موج کی حرکت پر غور کریں گے۔یہ موج تختے میں بائیں سے دائیں یعنی بڑھتے x جانب حرکت کرے گی۔جب تک ذو برق کے نچلے اور بالائی سطحوں پر آمدی زاویہ کی قیمت فاصل زاویے سے زیادہ ہو، موج مکمل اندرونی انعکاس کرے گی۔یوں ذو برق میں بار بار انعکاس کرتے ہوئے موج صفر کرے گی۔ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے دو متوازی موصل چادروں کے درمیان موج انعکاس کر رہی ہے۔حقیقت میں موصل چادروں کی صورت میں چادر پر متوازی برقی میدان صفر ہو گا جبکہ ذو برق میں مکمل اندرونی انعکاس کی صورت میں ایسا نہیں ہوتا۔ ذو برق کے باہر میدان لامحدود فاصلے تک پہنچتا ہے البتہ ایسا میدان سرحد سے دور جلد قابل نظر انداز حد تک گھٹ جاتا ہے۔ یوں میدان ذو برق کے انتہائی قریب ہی رہتا ہے۔



شکل 14.18: ذو برق تختے کے اندرونی سطح پر ممکنہ آمدی زاویے۔

اگرچہ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جب تک آمدی زاویہ، فاصل زاویے سے زیادہ ہو، موج ذو برق میں صفر کر پائے گی، حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا۔موج مخصوص زاویوں پر ہی صفر کر پاتی ہے۔آئیں اس کی وجہ پر غور کریں۔شکل کو دیکھتے ہوئے، دو TEM امواج پر نظر رکھیں جن کی تعدد برابر ہے۔دونوں فاصل زاویے سے زیادہ زاویے پر آمد ہیں یعنی $\theta_{>}\theta_{ic}$ ہے۔یوں

$$\theta_i > \theta_{ic} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sin^{-1}\frac{n_2}{n_1} \tag{14.239}$$

ہو گا جہاں

$\epsilon_1 > \epsilon_2$ اور

ϵ_1 ذو برق تختے کا برقی مستقل،

ϵ_2 ذو برق تختے کے اوپر اور نیچے خطوں کا برقی مستقل

ہیں۔

شکل 14.18 میں شعاعوں کو ٹھوس لکیر جبکہ موج کی چوٹیوں کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔موج کی ترسیل کے لئے ضروری شرط یہ ہے کہ پہلی موج کا زاویائی فاصلہ a دوسری موج کے زاویائی فاصلے b کے برابر ہو اور یا ان میں فرق $2m\pi$ ہو جہاں $m = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔زاویائی فاصلے ناپتے وقت انعکاس سے پیدا زاویائی فرق کا بھی حساب رکھا جائے گا۔ اس شرط کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 (b - a) + \phi = 2m\pi \tag{14.240}$$

جہاں

$m = 0, 1, 2, \cdots$

n_1 پہلے خطے کا انحرافی مستقل $n_1 = \sqrt{\epsilon_{R1}}$ جبکہ

ϕ سطح سے انعکاس پر زاویائی فرق،

λ_0 خالی خلاء میں طول موج

ہیں۔شکل 14.18 کو دیکھ کر

$$b = \frac{d}{\cos\theta_i} \tag{14.241}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح تکون ΔAEC، تکون ΔBEC اور تکون ΔAFB سے بالترتیب

$$\begin{aligned} AB + BE &= d\tan\theta_i \\ \tan\theta_i &= \frac{d}{BE} \\ \sin\theta_i &= \frac{a}{AB} \end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔یوں مساوات 14.240 کو

$$\frac{2\pi n_1 d}{\lambda_0}\left[\frac{1}{\cos\theta_i} - \sin\theta_i\left(\tan\theta_i - \frac{1}{\tan\theta_i}\right)\right] + \phi = 2m\pi \tag{14.242}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کی سادہ صورت

$$\frac{4\pi n_1 d\cos\theta_i}{\lambda_0} + \phi = 2m\pi \tag{14.243}$$

ہے۔عمودی برقی میدان $\boldsymbol{E}_\perp$ کو لے کر آگے بڑھتے ہیں۔صفحہ 361 پر مساوات 13.24 کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos\theta_i - j\sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{\cos\theta_i + j\sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}} = 1\underline{/\phi} \tag{14.244}$$

جہاں

$$\phi = -2\tan^{-1}\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{\cos\theta_i} \tag{14.245}$$

کے برابر ہے۔

اس طرح شرح انعکاس Γ کی حتمی قیمت اکائی ہے جبکہ انعکاس سے پیدا زاویائی فرق ϕ ہے۔مساوات 14.244 کو مساوات 14.243 میں پر کرتے ہوئے

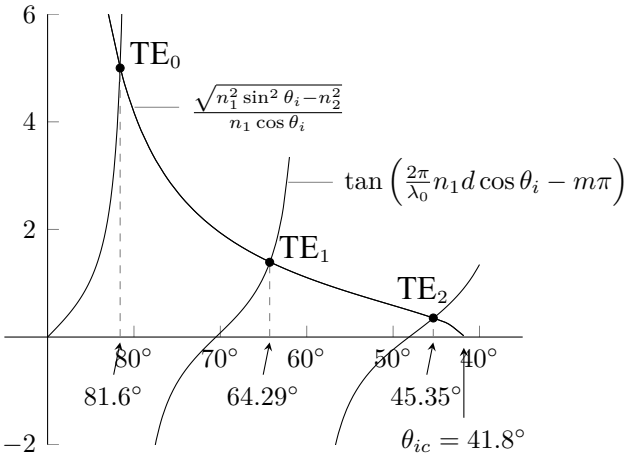
$$\frac{4\pi n_1 d\cos\theta_i}{\lambda_0} - 2m\pi = 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{\epsilon_2}{\epsilon-1}}}{\cos\theta_i} \tag{14.246}$$

یا

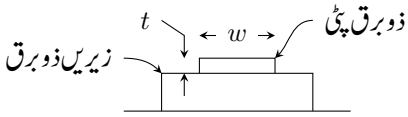
$$\tan\left(\frac{2\pi n_1 d\cos\theta_i}{\lambda_0} - m\pi\right) = \frac{\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_i - n_2^2}}{n_1\cos\theta_i} \tag{14.247}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$m = 0, 1, 2, 3, \cdots$ جبکہ



شکل 14.19: تختی موتج میں شعاع کے ممکن زاویے۔



شکل 14.20: ذو برق پٹی موتج

n_1 پہلے خطے کا انحرافی مستقل $n_1 = \sqrt{\epsilon_{R1}}$ ہے،

n_2 ذو برق تختے سے اوپر اور اس سے نیچے خطے کا انحرافی مستقل $n_2 = \sqrt{\epsilon_{R2}}$ ہے،

d ذو برق تختے کی موٹائی،

θ_i آمدی زاویہ اور

λ_0 لامحدود خطے میں طول موج

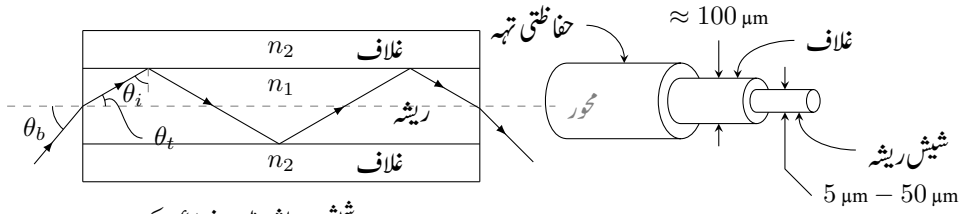
ہیں۔

چادر کی چوڑائی کم کرتے ہوئے w کرنے سے ذو برقی پٹی موتج حاصل ہوتا ہے جسے شکل 14.20 میں دکھایا گیا ہے جہاں $t \ll w$ ہے۔ ذو برق پٹی سے کم انحرافی مستقل کے زیریں ذو برقی[19] پر عموماً یہ نسب کئے جاتے ہیں۔

مثال 14.3: ذو برق کے 10 mm موٹی تختے کو بطور موتج استعمال کیا جا رہے ہے۔اس تختے کا انحرافی مستقل $n_1 = 1.5$ ہے جبکہ تختے سے اوپر اور نیچے خطے کا انحرافی مستقل $n_2 = 1$ ہے۔برقی میدان تختے کے متوازی ہے یعنی شکل 14.17 میں x سمت کو ہے۔طول موج $\lambda_0 = 10\,\text{mm}$ کی صورت میں آمدی زاویہ θ_i حاصل کریں۔

---

[19] dielectric substrate



ب: شیش ریشے میں شعاع کے زاویے

الف: شیش ریشے کی بنیادی ساخت

شکل 14.21: شیش ریشے کی ساخت اور ممکنہ آمدی زاویے

حل:برقی میدان تختے کے متوازی لیکن موج کے حرکت کی سمت کے عمودی ہے۔مساوات 14.239 سے زاویہ فاصل

$$\theta_{ic} = \sin^{-1}\frac{1}{1.5} = 41.8^\circ \tag{14.248}$$

حاصل ہوتا ہے۔زاویے کو θ_{ic} سے زیادہ رکھتے ہوئے، مساوات 14.247 کے بائیں اور دائیں ہاتھ کو شکل 14.19 میں کھینچا گیا ہے جس سے ممکنہ زاویے 45.35°، 64.29° اور 81.6° حاصل ہوتے ہیں۔یہ زاویے TE_0، TE_1 اور TE_2 امواج کے لئے ہیں۔تینوں امواج بیک وقت موجیج میں پائے جا سکتے ہیں۔ تختے کی موٹائی کم یا زیادہ کرنے سے امواج کی ممکنہ تعداد بالترتیب زیادہ یا کم ہو گی۔اسی طرح طول موج زیادہ (کم) کرنے سے ممکنہ امواج کی تعداد کم (زیادہ) ہو گی۔ہاں کسی بھی صورت کم از کم ایک موج ضرور ممکن ہو گی لہٰذا تعدد کم کرتے کرتے صفر تک پہنچتے ہوئے بھی کوئی نہ کوئی موج ضرور ممکن ہو گی۔

14.10 شیش ریشہ

ذو برق تختی موجیج پر غور کے بعد ذو برق نلکی موجیج پر غور کرتے ہیں۔ذرائع ابلاغ کے نظام میں اس طرز کے نلکی موجیج جنہیں شیش ریشہ[20] کہتے ہیں، عام استعمال ہوتے ہیں۔ بصری طول موج یا اس کے قریب طول موج پر استعمال کئے جانے والے نلکی موجیج کا رداس انتہائی کم ہوتا ہے۔یہ n_1 شرح انحراف کے انتہائی شفاف شیشے سے بنایا جاتا ہے جسے قدر کم شرح انحراف n_2 کے شیشے کا غلاف پہنایا جاتا ہے۔ان دونوں پر غیر شفاف حفاظتی تہہ چڑھائی جاتی ہے۔شیش ریشے کے مرکزی ریشے کا عمومی قطر $25\,\mu m$ ہے جو انسانی سر کے بال جتنی موٹائی ہے۔ایک شیش ریشہ ہزار سے زائد دو طرفہ گفتگو کی ترسیل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔روشنی یا زیریں بصری[21] شعاعوں کے لئے شیش ریشے کی تضعیفی مستقل $1.15 \times 10^{-4}\,\frac{Np}{m}$ کے برابر ہوتی ہے جو ایک انتہائی کم مقدار ہے۔بصری اور زیریں بصری شعاعوں کے طول موج تقریباً $400\,nm$ تا $1000\,nm$ ہے۔

شکل 14.21-الف میں شیش ریشے کی ساخت دکھائی گئی ہے۔اندرونی شفاف ریشے کا انحرافی مستقل n_1 جبکہ غلاف کا انحرافی مستقل n_2 ہے۔ارد گرد خلاء کا انحرافی مستقل n_0 ہے۔جیسے شکل 14.21-ب میں دکھایا گیا ہے، بیرون تار محور کے ساتھ θ_b زاویے پر آمدی شعاع تار کے اندر θ_t زاویے پر داخل ہو گا۔یوں شفاف ریشے اور غلاف کی سرحد پر شعاع کا زاویہ θ_i ہو گا۔بیرونی اور اندرونی زاویوں کا تعلق ابن سہل کا قانون

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_b} = \frac{n_0}{n_1} \tag{14.249}$$

---

[20] optical fiber
[21] infrared

دیتا ہے۔جب تک مرکزی ریشے اور غلاف کے سرحد پر آمدی زاویہ θ_i، فاصل زاویے θ_{ic} سے زیادہ ہو، شعاع مکمل اندرونی انعکاس کرے گی۔شیش ریشے اور غلاف کی سرحد پر قانون ابن سھل

$$\sin\theta_{ic} = \frac{n_2}{n_1} \tag{14.250}$$

سے فاصل زاویہ θ_{ic} حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$\sin\theta_b = \frac{n_1}{n_0}\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_0}\sin(90^\circ - \theta_{ic}) = \frac{n_1}{n_0}\cos\theta_{ic}$$

یا

$$\sin\theta_b = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0} \tag{14.251}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

θ_b بیرون تار، محور کے ساتھ آمدی زاویہ،

n_1 شیش ریشے کا انحرافی مستقل،

n_2 شیش ریشے پر چڑھائی تہہ کا انحرافی مستقل اور

n_0 تار کے گرد خطے کا انحرافی مستقل

ہیں۔خالی خلاء یا ہوا کی صورت میں $n_0 = 1$ ہو گا لہٰذا

$$\sin\theta_b = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{14.252}$$

ہو گا۔

شیش ریشے اور غلاف کے انحرافی مستقل تقریباً $n_1 = 1.5$ اور $n_2 = 1.485$ ہوتے ہیں جس سے $\theta_b = 12.2^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔یوں جو شعاع شیش ریشے کے محور پر $\theta_b < 12.2^\circ$ زاویے سے آمد ہو شیش ریشے میں پھنس جائے گی۔یہ شعاع شیش ریشے میں بار بار مکمل اندرونی انعکاس کرتے ہوئے صفر کرے گی۔شیش ریشے میں کئی بلند انداز شعاع ممکن ہیں اور تختی موتج کی طرح یہاں بھی ایک عدد بلند درجی انداز ایسا ہے جس کا کوئی انقطاعی تعدد نہیں پایا جاتا۔یوں اگر

$$\lambda_0 > \frac{2\pi a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{k_{01}} = \frac{2\pi a n_1 \cos\theta_{ic}}{k_{01}} \tag{14.253}$$

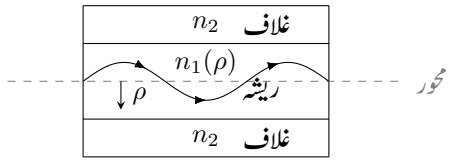
ہو جہاں

k_{01} صفر درجی بیسل تفاعل J_0 کا پہلا صفر $k_{01} = 2.405$ ہے،

λ_0 لامحدود خلاء میں طول موج

a شیش ریشے کا رداس

n_1 شیش ریشے کا انحرافی مستقل



شکل 14.22: رداسی سمت ρ میں انحرافی مستقل مسلسل کم ہونے سے موج ہمواری کے ساتھ مڑتی ہے۔

n_2 شیش ریشے پر چڑھی تہہ کا انحرافی مستقل

θ_{ic} شیش ریشے اور اس پر چڑھی تہہ کے سرحد پر فاصل آمدی زاویہ

کے برابر ہیں تب صرف ایک عدد بلند درجی موج شیش ریشے میں پائی جائے گی۔اس صورت میں شیش ریشہ اکائی بلند درجی انداز رکھتی ہے۔

اگر شفاف ریشے کا انحرافی مستقل محور سے رداسی ρ سمت گھٹتا ہو تب شعاع کی راہ سرحد پر انعکاس سے اچانک تبدیل ہونے کی بجائے ہمواری کے ساتھ مڑے گی۔یوں شعاع کبھی بھی ریشے اور غلاف کے سرحد کو نہیں چھوئے گی۔ شکل 14.21-ب اور شکل 14.22 میں دونوں صورت حال دکھائے ہیں۔

شیش ریشے پر مبنی ذرائع ابلاغ کا نظام شکل میں دکھایا گیا ہے۔ایک جانب نوری ڈایوڈ[22] یا لیزر[23] برقی اشارے کو شعاع میں تبدیل کرتے ہوئے شیش ریشے میں خارج کرتا ہے۔دوسری جانب یہی شعاع شیش ریشے سے خارج ہو کر نوری ٹرانزسٹر پر چمکتی ہے جو اسے واپس برقی اشارے میں تبدیل کرتا ہے۔

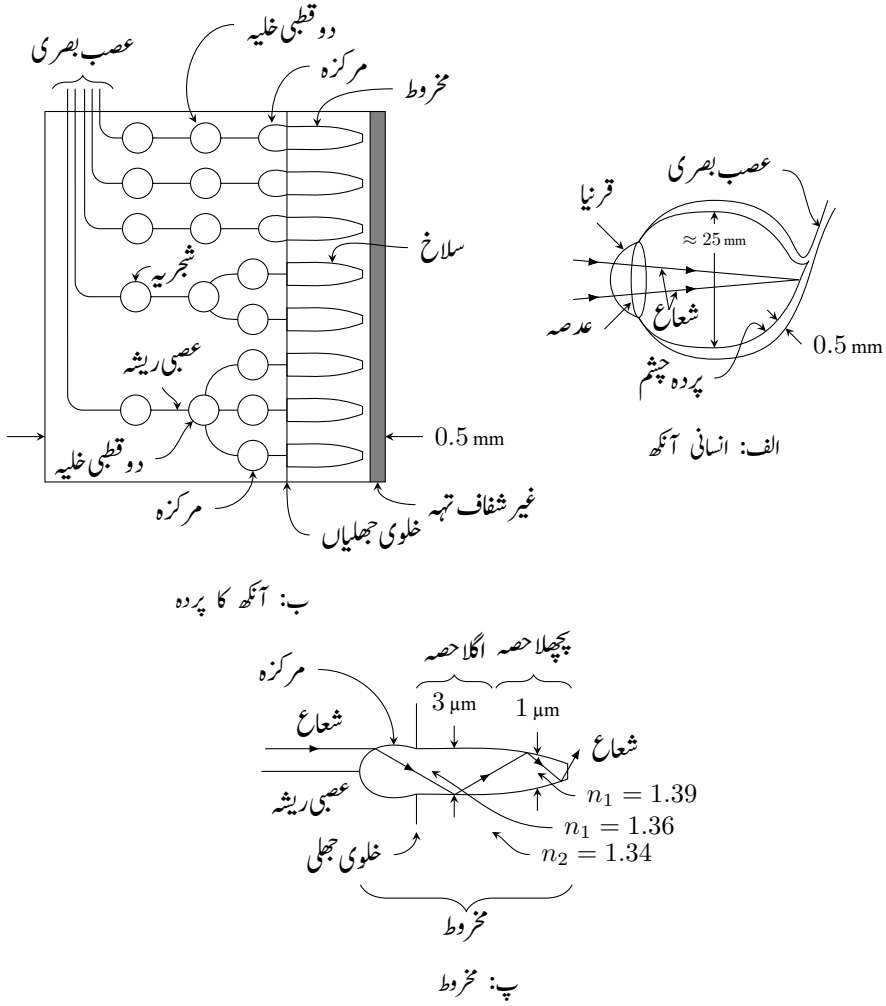
عمومی شیش ریشے میں کم سے کم تضعیف 700 nm تا 1100 nm زیریں بصری طول موج پر پائی جاتی ہے۔انسانی آنکھ 400 nm تا 700 nm طول موج دیکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔

شیش ریشے 5 μm تا 50 μm قطر کے پائے جاتے ہیں جو کئی زیریں بصری طول موج کے برابر ہے لہٰذا اس سے شعاعی اخراج نہایت کم ہوتا ہے۔قطر کم کرنے یا طول موج بڑھانے سے شعاعی اخراج بڑھتا ہے۔ایسے شیش ریشے جن کا انحرافی مستقل 1.5 کے لگ بھگ ہو اور ان کا قطر اکائی طول موج سے زیادہ ہو بطور موجیج کردار ادا کرتے ہیں جبکہ اکائی طول موج سے کم قطر کے شیش ریشوں میں توانائی بیرون ریشہ سطح کے قریب رہتے ہوئے صفر کرتی ہے لہٰذا ان سے زیادہ شعاعی اخراج ہوتا ہے۔یوں اگر اکائی طول موج سے زیادہ قطر کے شیش ریشے کا قطر کم ہوتے ہوتے اکائی طول موج سے کم ہو جائے تو توانائی شیش ریشے کے اندر سے باہر منتقل ہو گی اور ساتھ ہی ساتھ محوری سمت میں شعاعی اخراج بھی پایا جائے گا۔ایسا شیش ریشہ بطور محوری اینٹینا[24] کردار ادا کرے گا۔

14.11 پردہ بصارت

انسانی آنکھ میں 10^8 سے زائد شیش ریشے پائے جاتے ہیں جو نا صرف بطور موجیج کام کرتے ہیں بلکہ یہ ضیائی ذرے یعنی فوٹان[25] پکڑنے کا کام بھی سرانجام دیتے ہیں۔آنکھ میں دو اقسام کے شیش ریشے پائے جاتے ہیں۔آنکھ کے درمیانے خطے میں مخروط شکل کے جبکہ اطراف پر نسبتاً زیادہ تعداد میں سلاخ نما شیش ریشے پائے جاتے ہیں جنہیں بالترتیب مخروطے[26] اور سلاخ[27] کہا جاتا ہے۔

[22] light emitting diode, LED
[23] laser
[24] end-fire antenna
[25] photon
[26] cones
[27] rods



الف: انسانی آنکھ

ب: آنکھ کا پردہ

پ: مخروط

شکل 14.23: انسانی آنکھ اور اس کی تفصیل

تقریباً ہر مخروط علیحدہ علیحدہ انفرادی ترسیلی عصبی ریشے[28] کے ذریعہ دماغ کے ساتھ منسلک ہوتا ہے جہاں تصویر کشی کا عمل ہوتا ہے۔ مخروطے ہمیں باریک بینی اور رنگ پہچانے کی صلاحیت مہیا کرتے ہیں۔مخروطوں کے برعکس اشکال پہچانے میں سلاخ کم مدد کرتے ہیں لیکن ان کی زیادہ تعداد اور حساس پن تاریکی میں دیکھنا ممکن بناتی ہے۔دماغ سے جڑی ایک عدد ترسیلی تار کے ساتھ متوازی کئی سلاخ جڑے ہوتے ہیں جس سے کم روشنی میں بینائی مزید بہتر کرتی ہے۔مرکز نگاہ سے ہٹ کر اطراف کی بینائی بھی سلاخ مہیا کرتے ہیں۔

شکل 14.23-الف میں آنکھ کا عمودی تراش دکھایا گیا ہے جس میں عدسہ چشم[29] ، پردہ بصارت[30] اور دماغ کو جاتا عصب بصری[31] دکھائے گئے ہیں۔شکل 14.23-ب میں پردہ آنکھ کی زیادہ تفصیل دکھائی گئی ہے۔آنکھ کا پردہ شفاف ہوتا ہے۔اس میں مخروطے، سلاخ، دو قطبی خلیے[32] اور عصبی خلیے[33] پائے جاتے ہیں۔عصبی خلیہ کے دو اہم جزو شجریہ[34] اور عصبی ریشہ کہلاتے

[28] axon
[29] lens
[30] retina
[31] optic nerve
[32] bipolar cells
[33] nerve cells
[34] dendrite

ہیں۔پردے کے پچھلی سطح پر غیر شفاف تہہ پائی جاتی ہے۔شکل 14.23-پ میں مخروط کی مزید وضاحت کی گئی ہے۔مخروط اور سلاخ کے پچھلے دبلے سر کا قطر تقریباً $1\,\mu m$، لمبائی بیس گنا زیادہ اور اس کا انحرافی مستقل $n_1 = 1.39$ جبکہ گرد مواد کا انحرافی مستقل n_2 اس سے چند فی صد کم ہوتا ہے۔یاد رہے کہ ذرائع ابلاغ میں استعمال شیشہ ریشوں کے انحرافی مستقل $n_1 = 1.46$ اور $n_2 = 1.44$ تقریباً یہی قیمتیں ہیں البتہ مخروط اور سلاخ کے دبلے سر کا قطر 1.5λ تا 2λ ہے جو شیشہ ریشے کے قطر سے نسبتاً کم ہے لہٰذا ان سے شعاعی اخراج زیادہ ہو گا۔

مخروط یا سلاخ کا مرکزہ[35] بطور عدسہ چشم کردار ادا کرتا ہے۔شعاع مخروط یا سلاخ میں بار بار مکمل اندرونی انعکاس سے صفر کرتی ہے اور جو فوٹان پچھلے دبلے حصے میں جذب نہ ہو پائے وہ پردے پر غیر شفاف تہہ تک پہنچتی ہے۔انسانی آنکھ میں غیر شفاف تہہ فوٹان جذب کرتی ہے جبکہ رات کی تاریکی میں شکار کرنے والے جانور، مثلاً بلی، کی آنکھ میں غیر شفاف تہہ کی جگہ انعکاسی مادے کی تہہ پائی جاتی ہے جو فوٹان کو واپس مخروط یا سلاخ میں بھیجتی ہے جس سے ان کی بینائی مزید بہتر ہوتی ہے۔

مخروط کے اگلے حصے میں $n_1 = 1.36$ جبکہ پچھلے حصے میں $n_1 = 1.39$ ہے۔یوں اگرچہ مخروط میں لمبائی کی جانب انحرافی مستقل تبدیل ہوتا ہے لیکن یاد رہے کہ اس کی قیمت بیرونی مادے کی انحرافی مستقل سے زیادہ رہتی ہے۔

مخروط یا سلاخ کے پچھلے حصے کے مالیکیول ضیائی ذرہ پکڑتے ہیں۔فوٹان پکڑنے سے برقی رو پیدا ہوتی ہے جو دو قطبی خلیے تک پہنچتی ہے۔دو قطبی خلیہ مختصر دورانیے کی موج پیدا کرتی ہے جو عصب بصری کے ذریعہ دماغ تک اشارہ پہنچاتی ہے۔یوں مخروط یا سلاخ محوری اینٹینا کی طرح ہیں البتہ ان میں $10^{15}\,Hz$ تعدد کے فوٹان پکڑنے اور اس کے عوض مختصر دورانیے کا عددی اشارہ پیدا کرنے کی صلاحیت بھی پائی جاتی ہے۔

14.12 گھمکی خلاء

موجیج کا مقصد طاقت کی منتقلی ہے۔اس کے برعکس گھمکیا طاقت ذخیرہ کرتا ہے۔گھمکیا کو امالہ اور کپیسٹر کے گھمکی دور[36] کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔شکل میں امالہ اور کپیسٹر کا دور دکھایا گیا ہے جس کی گھمکی تعدد $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ہے۔اس دور کے گھمکی تعدد کو بڑھانے کی خاطر امالہ اور کپیسٹر کی قیمت کم کرنی ہو گی۔شکل-ب میں امالہ کے چکر کم کرتے کرتے ایک تک پہنچ گئے ہیں۔اسی طرح کپیسٹر کی قیمت کم کرنے کی خاطر اس کے دو چادروں کو دور کر دیا گیا ہے۔متوازی امالہ جوڑنے سے کل امالہ کم ہوتی ہے۔شکل-پ میں مزید امالہ متوازی جوڑ کر یہی کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔متوازی امالہ جوڑنے کی حد شکل-ت میں دکھائی گئی ہے جہاں کپیسٹر اور امالہ مل کر بند ڈبے کی شکل اختیار کر گئے ہیں۔یہی بند ڈبی گھمکی خلاء[37] کہلاتی ہے۔

آئیں مستطیلی گھمکی خلاء پر تفصیلی بحث کریں۔صفحہ 384 پر مساوات 14.78 تا مساوات 14.83 مستطیلی موجیج میں تمام میدان دیتے ہیں۔ان میں $\gamma = j\beta$ لیتے ہوئے یہاں دوبارہ پیش کیا گیا ہے جہاں H_y کے مساوات میں $H_{y0} = \frac{\gamma H_0}{k^2}\frac{n\pi}{y_1}$ لکھا گیا ہے

[35] nucleus
[36] resonant circuit
[37] cavity resonator

اور یہی طریقہ کار باقی مساوات پر بھی لاگو کیا گیا ہے تا کہ صرف ضروری معلومات پر توجہ رہے۔مثبت x جانب حرکت کرتے میدان مثلاً H_x^+ پر زیر بالا + لکھ کر حرکت کی سمت بتلائی گئی ہے۔

$$H_x^+ = H_{x0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{14.254}$$

$$H_y^+ = H_{y0} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{14.255}$$

$$H_z^+ = H_{z0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{14.256}$$

$$E_z^+ = -E_{z0} \sin \frac{n\pi y}{y_1} \cos \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{14.257}$$

$$E_y^+ = E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{14.258}$$

$$E_x^+ = 0 \tag{14.259}$$

اگر موتج کو دائیں جانب موصل چادر سے بند کر دیا جائے تو امواج اس بند سرے پر عمودی آمد ہوں گے۔برقی میدان E_y^+ بند سرے کی چادر کے متوازی ہے لہٰذا انعکاسی مستقل $\Gamma_{\|} = -1$ ہے۔یوں یہ برقی میدان انعکاس کے بعد منفی x جانب حرکت کرے گا۔انعکاسی برقی میدان

$$E_y^- = -E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t + \beta x)} \tag{14.260}$$

ہے۔آمدی اور انعکاسی میدان مل کر ساکن موج

$$\begin{aligned} E_y^+ + E_y^- &= E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t - \beta x)} - E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j(\omega t + \beta x)} \\ &= E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} e^{j\omega t} \left(e^{-j\beta x} - e^{j\beta x} \right) \end{aligned}$$

یعنی

$$E_y = -j2E_{y0} \cos \frac{n\pi y}{y_1} \sin \frac{m\pi z}{z_1} \sin \beta x e^{j\omega t} \tag{14.261}$$

کو جنم دیتے ہیں۔موصل پر متوازی برقی میدان صفر ہوتا ہے لہٰذا مساوات 14.261 کا برقی میدان موتج کے دائیں بند سرے پر صفر کے برابر ہو گا۔اسی طرح بند سرے سے $\frac{\lambda}{2}$ یا $\frac{l\lambda}{2}$ فاصلے پر بھی میدان صفر ہو گا جہاں $l = 1, 2, \cdots$ ہے۔ یوں بند سرے سے $\frac{l\lambda}{2}$ فاصلے پر موصل چادر رکھنے سے میدان پر کوئی اثر نہیں پڑے گا، البتہ E_y^- موتج کے بائیں بند سرے سے انعکاس پذیر ہو گا۔ شکل 14.24 میں مستطیلی موتج کے دائیں اور بائیں سرے بند کرتے ہوئے بقایا موتج کو ہٹا لیا گیا ہے۔یہ بند ڈبہ مستطیلی گھمکیا[38] ہے۔

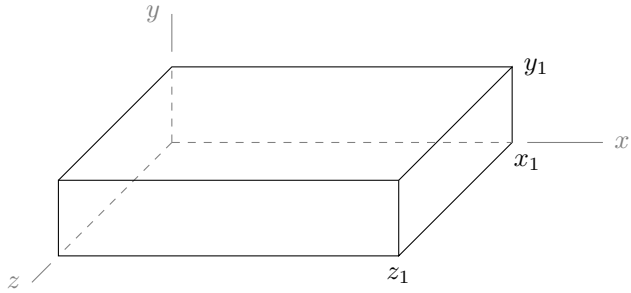
شکل 14.24 میں گھمکیا کا بایاں سرا $x = 0$ اور دایاں سرا $x = x_1$ پر ہیں جہاں دونوں بند سروں کے درمیان فاصلہ

$$x_1 = \frac{l\lambda}{2} \qquad (l = 1, 2, 3, \cdots) \tag{14.262}$$

ہے۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے

$$\beta x_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l\lambda}{2} = l\pi$$

[38] rectangular resonator



شکل 14.24: مستطیلی گھمکیا

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\beta = \frac{l\pi}{x_1} \tag{14.263}$$

ملتا ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.261

$$E_y = -j2E_{y0}\cos\frac{n\pi y}{y_1}\sin\frac{m\pi z}{z_1}\sin\frac{l\pi x}{x_1}e^{j\omega t} \tag{14.264}$$

لکھا جائے گا۔اس مساوات میں گھمکیا کے x سمت میں l آدھے طول موج پائے جاتے ہیں، y سمت میں n آدھے طول موج پائے جاتے ہیں اور z سمت میں m آدھے طول موج پائے جاتے ہیں۔

مساوات 14.264 میں $x = 0$ یا $x = x_1$ پر کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں بند سطحوں پر برقی میدان صفر کے برابر ہے۔

مساوات 14.86 میں دئے k کو k_{yz} لکھتے

$$k_{yz}^2 = \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.265}$$

ہوئے اور کامل ذو برق کے لئے $\sigma = 0$ لیتے ہوئے مساوات 14.87

$$k_{yz}^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

لکھا جائے گا جہاں $\alpha = 0$ کی صورت میں $\gamma = j\beta$ ہو گا لہٰذا

$$k_{yz}^2 = -\beta^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

یا

$$\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 = -\left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2 + (2\pi f)^2\frac{1}{(f\lambda)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے گھمکی طول موج

$$\lambda_{\text{گھمکی}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2}} \tag{14.266}$$

حاصل ہوتی ہے۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے گھمکیا کا مستقل k یوں

$$k_{xyz}^2 = \left(\frac{l\pi}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{z_1}\right)^2 \tag{14.267}$$

بیان کیا جاتا ہے جس سے

$$\lambda_{\text{گھمکی}} = \frac{2\pi}{k_{xyz}} \tag{14.268}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

یوں گھمکی کے مندرجہ بالا امواج بلند درجی TE_{lnm} کہلائیں گے اور گھمکی طول موج λ_{lnm} لکھی جائے گی۔

14.13 میکس ویل مساوات کا عمومی حل

اس حصے میں مستطیلی گھمکی مکمل طور پر حل کی جائے گی۔امید کی جاتی ہے کہ آپ اس طریقے کو پسند کریں گے۔

کثافت چارج سے خالی $\rho_h = 0$ خطے کے میکس ویل کے مساوات

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{14.269}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{14.270}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{14.271}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{14.272}$$

سے شروع کرتے ہیں۔مساوات 14.270 کی گردش لیتے ہوئے حاصل جواب میں مساوات 14.269 اور مساوات 14.272 پر کرنے سے موج کی مساوات

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{H})$$

$$-\nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ سمتی مساوات حقیقت میں تین مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ان میں سے E_x کی مساوات یوں

$$\nabla^2 E_x = \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

یا

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{14.273}$$

لکھی جائے گی جہاں برقی میدان $E_x(x,y,z,t)$ کے چار آزاد متغیرات ہیں۔علیحدگی متغیرات[39] استعمال کرتے ہوئے برقی میدان کو دو تفاعل کے حاصل ضرب کے برابر لکھا جاتا ہے

$$E_x(x,y,z,t) = M(x,y,z)T(t) \tag{14.274}$$

جہاں پہلے تفاعل M کے تین آزاد متغیرات x، y اور z ہیں جبکہ دوسرے تفاعل T کا صرف t آزاد متغیرہ ہے۔یوں مساوات 14.273 سے

$$T\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}\right) = M\left(\mu\sigma\frac{\partial T}{\partial t}+\mu\epsilon\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔ دونوں اطراف کو MT سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{T}\left(\mu\sigma\frac{\partial T}{\partial t}+\mu\epsilon\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کا بایاں ہاتھ خلاء کے متغیرات x، y اور z پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ وقت t پر منحصر ہے۔یوں خلاء کے متغیرات تبدیل کرنے سے صرف بایاں ہاتھ تبدیل ہونے کا امکان ہے لیکن بائیں ہاتھ میں تبدیلی کے بعد مساوات کے دونوں اطراف برابر نہیں ہوں گے لہٰذا یہ لازم ہے کہ مساوات کے دونوں اطراف قابل تبدیل نہ ہوں۔یوں انہیں مستقل k^2 کے برابر لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{T}\left(\mu\sigma\frac{\partial T}{\partial t}+\mu\epsilon\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right) = -k^2$$

جس سے دو مساوات

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial T}{\partial t}+k^2 T = 0 \tag{14.275}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}+k^2 M = 0 \tag{14.276}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 14.275 کا حل $T = e^{pt}$ فرض کرتے ہوئے

$$\left(\mu\epsilon p^2+\mu\sigma p+k^2 T\right)e^{pt} = 0$$

سے

$$p = \frac{-\sigma \mp \sqrt{\sigma^2 - 4\frac{\epsilon}{\mu}k^2}}{2\epsilon}$$

حاصل ہوتا ہے۔کامل ذو برق کی صورت میں $\sigma = 0$ ہو گا جس سے

$$p = \mp\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{14.277}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$T(t) = c_{t1}e^{-\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}t} + c_{t2}e^{+\frac{jk}{\sqrt{\mu\epsilon}}t}$$

---

[39] separation of variables

لکھا جا سکتا ہے جہاں c_{t1}، c_{t2} مساوات کے مستقل ہیں۔اس میں

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{14.278}$$

لیتے ہوئے مساوات کی جانی پہچانی شکل

$$T(t) = c_{t1}e^{-j\omega t} + c_{t2}e^{j\omega t} \tag{14.279}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 14.276 کو بھی علیحدگی متغیرات کے طریقے سے حل کرتے ہیں۔یوں

$$M(x,y,z) = X(x)N(y,z) \tag{14.280}$$

لیتے ہوئے

$$N\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + X\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + k^2 XN = 0$$

یا

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{N}\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right) - k^2$$

حاصل ہوتا ہے جسے نئے مستقل $-k_x^2$ کے برابر لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X = 0 \tag{14.281}$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2)N = 0 \tag{14.282}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان میں دوسرے مساوات میں N کو مزید دو تفاعل کا حاصل ضرب

$$N(y,z) = Y(y)Z(z) \tag{14.283}$$

لکھتے ہوئے

$$Z\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + Y\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2)YZ = 0$$

یا

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 + k_x^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کو نئے مستقل $-k_y^2$ کے برابر پر کرتے ہوئے دو مساوات

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2 Y \tag{14.284}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -(k^2 - k_x^2 - k_y^2)Z = -k_z^2 Z \tag{14.285}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں آخری قدم پر $(k^2 - k_x^2 - k_y^2 = k_z^2)$ یا

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \tag{14.286}$$

لیا گیا ہے۔مساوات 14.281، مساوات 14.284 اور مساوات 14.285 کے حل

$$X(x) = c_{x1}e^{-jk_x x} + c_{x2}e^{jk_x x} = c'_{x1}\cos k_x x + c'_{x2}\sin k_x x \tag{14.287}$$
$$Y(y) = c_{y1}e^{-jk_y y} + c_{y2}e^{jk_y y} = c'_{y1}\cos k_y y + c'_{y2}\sin k_y y \tag{14.288}$$
$$Z(z) = c_{z1}e^{-jk_z z} + c_{z2}e^{jk_z z} = c'_{z1}\cos k_z z + c'_{z2}\sin k_z z \tag{14.289}$$

ہیں۔

مساوات 14.280، مساوات 14.283 اور مساوات 14.274 سے ظاہر ہے کہ

$$E_x(x,y,z,t) = TXYZ \tag{14.290}$$

کے برابر ہے۔مساوات 14.290 میکس ویل مساوات کا عمومی حل ہے جو کسی ایک خطے میں ہر ممکنہ E_x موج کو ظاہر کرتی ہے۔اصل موج اس مساوات کا حقیقی جزو ہو گا۔

اب تک k پر کوئی شرط عائد نہیں کی گئی۔یوں $k_x = 0.32$ یا $k_x = -7.59$ ہو سکتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات لامحدود خطے میں مکمل آزاد موج کو ظاہر کرتی ہے۔آئیں اب موج کو پابند کر کے دیکھیں۔

تصور کریں کہ لا محدود وسعت کے دو متوازی موصل چادروں کے درمیان موج پیدا کی جاتی ہے۔صفحہ 370 پر شکل 14.1 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ان موصل چادروں پر متوازی برقی دباو صفر ہو گا۔یوں $z = 0$ اور $z = z_0$ پر E_x صفر ہو گا۔ہم اس ترکیب کو کئی مرتبہ استعمال کر چکے ہیں۔مساوات 14.289 میں ان شرائط کو پر کرتے ہوئے

$$c'_{z1} = 0 \tag{14.291}$$
$$k_z = \frac{m\pi}{z_1} \tag{14.292}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$m = 1, 2, 3 \cdots \tag{14.293}$$

کے برابر ممکن ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ k_z اب صرف چنی گئی قیمت کا ہو سکتا ہے۔یوں $k_z = \frac{\pi}{z_1}$ یا $k_z = \frac{2\pi}{z_1}$ ہو سکتا ہے لیکن ان دو قیمتوں کے درمیان یہ کسی اور قیمت کا نہیں ہو سکتا۔یہی خصوصیت مقید موج کی نشانی ہے۔

اسی طرح $y = 0$ اور $y = y_0$ پر بھی دو متوازی موصل چادر نسب کرنے سے صفحہ 376 پر دکھایا شکل 14.8 حاصل ہوتا ہے۔ان سطحوں پر بھی متوازی برقی میدان صفر ہو گا۔اس طرح مساوات 14.288 سے

$$c'_{y1} = 0 \tag{14.294}$$
$$k_y = \frac{n\pi}{y_1} \tag{14.295}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں

$$n = 1, 2, 3, \cdots \tag{14.296}$$

کے برابر ممکن ہیں۔اب موج y اطراف سے بھی پابند ہے جس کی وجہ سے k_y بھی آزادانہ قیمت رکھنے سے قاصر ہے۔ یوں مستطیلی موتج میں موج کی مساوات

$$E_x = E_{x0} \sin \frac{n\pi y}{y_0} \sin \frac{m\pi z}{z_0} e^{j(\omega t \mp k_x x)} \tag{14.297}$$

ہو گی جہاں $e^{j(\omega t - k_x x)}$ بڑھتے x جانب موج جبکہ $e^{j(\omega t + k_x x)}$ گھٹتے x جانب موج ہے۔ k_y اور k_z کی قیمتیں مساوات 14.292 اور مساوات 14.295 کے تحت ہوں گی۔جیسے آپ جلد مساوات 14.311 میں دیکھیں گے، طول موج اور k کا ایک خاص تعلق ہے۔یوں جس تعدد کی موج مستطیلی موتج سے گزر رہی ہو مساوات 14.311 اس کا k دیتی ہے جو ایک اٹل قیمت ہو گی۔اب کسی بھی k_y اور k_z کے لئے مساوات 14.286 سے k_x کی قیمت مخصوص تعدد کے موج کے لئے حاصل کی جا سکتی ہے۔جب تک k_x کی قیمت حقیقی عدد حاصل ہو اس وقت تک مساوات 14.287 سے حرکت کرتی موج ہی حاصل ہو گی البتہ اگر k_y اور k_z کی جوڑی سے k_x کی قیمت خیالی حاصل ہو تب مساوات 14.287 سے

$$X(x) = c_{x1} e^{k_x x} + c_{x2} e^{-k_x x}$$

حاصل ہو گا۔بڑھتے x جانب موج کی صورت میں $x \to \infty$ کی صورت میں اس مساوات سے لامحدود میدان حاصل ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں $c_{x1} = 0$ لیا جائے گا۔مساوات کا بقایا حصہ حرکت کرتے موج کو ظاہر نہیں کرتا بلکہ یہ گھٹتے میدان کو ظاہر کرتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی مخصوص تعدد، k_x اور k_y سے 14.286 k_x کی مخصوص قیمت دیتا ہے۔

اگر $x = 0$ اور $x = x_0$ پر بھی موصل چادر نسب کئے جائیں تو صفحہ 423 پر دکھایا شکل 14.24 حاصل ہو گا۔چونکہ E_x ان چادروں کے عمودی ہے لہٰذا ہمیں E_y یا E_z کی مساوات درکار ہو گی۔میں لکھتے لکھتے بہت تھک چکا ہوں۔آپ بھی پڑھ پڑھ کر بہت تھکے ہوں گے لہٰذا میں ان چادروں سے حاصل نتیجہ لکھ لیتا ہوں

$$c'_{x2} = 0 \tag{14.298}$$

$$k_x = \frac{l\pi}{x_0} \tag{14.299}$$

جہاں

$$l = 1, 2, 3, \cdots \tag{14.300}$$

کے برابر ممکن ہے۔

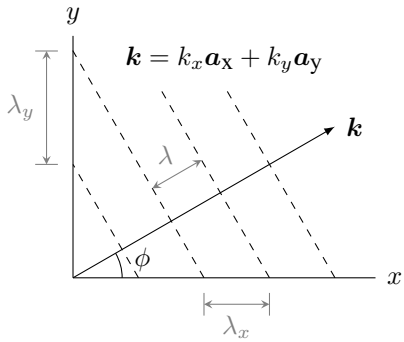
ان نتائج کو جمع کرتے ہوئے شکل 14.24 میں دکھائے مستطیلی گھمکیا کی مساوات

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z e^{j\omega t} \\ &= E_{x0} \cos \frac{l\pi x}{x_0} \sin \frac{n\pi y}{y_0} \sin \frac{m\pi z}{z_0} e^{j\omega t} \end{aligned} \tag{14.301}$$

حاصل ہوتی ہے جو ساکن موج ہے۔

آئیں ایک بار پھر مکمل آزاد موج کی بات کریں۔مساوات 14.287 دراصل دو ممکنہ جوابات $e^{-jk_x x}$ اور $e^{jk_x x}$ کا مجموعہ ہے۔اسی طرح مساوات 14.288 اور مساوات 14.289 بھی مجموعے ہیں۔مساوات 14.290 میں X، Y اور Z کے مختلف اجزاء پر کرتے ہوئے مختلف امواج کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔یوں مساوات 14.287، مساوات 14.288 اور مساوات 14.289 کے پہلے جزو چنتے ہوئے ایک ممکنہ حل

$$E_x = E_{x0} e^{j\omega t - k_x \boldsymbol{a}_x - k_y \boldsymbol{a}_y - k_z \boldsymbol{a}_z} \tag{14.302}$$



شکل 14.25: مختلف طول موج کا آپس میں تعلق

حاصل ہوتا ہے۔ کارتیسی محدد میں کسی بھی نقطہ (x,y,z) کو سمتیہ

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{14.303}$$

ظاہر کرتی ہے۔ہم k_x، k_y، k_z اور k کو سمتیہ

$$\boldsymbol{k} = k_x\boldsymbol{a}_\mathrm{x} + k_y\boldsymbol{a}_\mathrm{y} + k_z\boldsymbol{a}_\mathrm{z} \tag{14.304}$$

لکھ سکتے ہیں جو مساوات 14.286 کے شرط پر پورا اترتی ہے۔اس طرح

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_x x + k_y y + k_z z \tag{14.305}$$

ہو گا لہٰذا مساوات 14.302 کو نہایت عمدگی کے ساتھ

$$E_x = E_{x0} e^{j(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{14.306}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا حقیقی جزو

$$E_x = E_{x0}\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{14.307}$$

اصل موج دیتا ہے۔مندرجہ بالا مساوات لامحدود خطے میں موج کی عمومی مساوات ہے جو بڑھتے $\boldsymbol{k}$ کی جانب حرکت کرے گی۔

شکل 14.25 میں موج کے حرکت کی سمت، x محدد کے ساتھ ϕ زاویہ بناتی ہے۔یہ موج xy سطح پر پائی جاتی ہے یعنی $k_z = 0$ کے برابر ہے۔موج کی چوٹیوں کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔کسی بھی نقطے پر ان چوٹیوں کو گن کر تعدد دریافت کی جا سکتی ہے۔یوں x محدد پر نقطہ $(x_0,0)$ سے فی سیکنڈ گزرتے چوٹیوں کی تعداد موج کی تعدد f ہو گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ y محدد پر نقطہ $(0,y_0)$ سے بھی فی سیکنڈ اتنی ہی چوٹیاں گزریں گی۔اسی طرح $\boldsymbol{k}$ پر بھی کسی نقطے پر چوٹیاں گنتے ہوئے یہی تعدد حاصل ہوتی ہے۔

دو متواتر چوٹیوں کے درمیان فاصلہ طول موج کہلاتا ہے۔ وقت t کو روک کر x محدد پر رہتے ہوئے موج کی دو متواتر چوٹیوں کے درمیان فاصلہ λ_x ناپا جائے گا۔ اسی طرح y محدد پر طول موج λ_y ناپی جائے گی جبکہ حرکت کی سمت میں طول موج λ ناپی جائے گی۔ان تمام کو شکل 14.25 میں دکھایا گیا ہے۔

کسی بھی موج کی تعدد f اور طول موج λ جانتے ہوئے اس کی رفتار $v = f\lambda$ لکھی جا سکتی ہے۔سمت حرکت کی جانب موج کی رفتار $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ کے برابر ہوتی ہے لہٰذا

$$f\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{14.308}$$

ہو گا۔اس مساوات کے دونوں اطراف کو 2π سے ضرب دیتے ہوئے

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{14.309}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں مساوات 14.278 پر کرنے سے

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{14.310}$$

یا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{14.311}$$

حاصل ہوتا ہے لیکن ہم جانتے ہیں کہ $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ ہوتا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات کامل ذو برق $\sigma = 0$ کے لئے حاصل کئے گئے لہٰذا $\alpha = 0$ اور

$$\gamma = 0 + j\beta = jk \tag{14.312}$$

کے برابر ہے۔اس طرح k کو β جبکہ k_x، k_y اور k_z کو بالترتیب β_x،β_y اور β_z لکھا جا سکتا ہے۔

ہم توقع کرتے ہیں کہ مساوات 14.311 کی طرح $\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$ لکھنا ممکن ہو گا۔آئیں اس حقیقت کو ثابت کریں۔شکل 14.25 کو دیکھ کر $\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos\phi}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں شکل کو دیکھتے ہوئے $\cos\phi = \frac{k_x}{k}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos\phi} = \frac{\lambda k}{k_x}$$

لکھ کر $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} \tag{14.313}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح ہم

$$\lambda_y = \frac{2\pi}{k_y} \tag{14.314}$$

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} \tag{14.315}$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

سمت حرکت کی جانب رفتار جسے مجموعی رفتار[40] کہتے ہیں

$$v = f\lambda = \frac{\omega}{k} \tag{14.316}$$

کے برابر ہے۔موج اس رفتار سے توانائی ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرتی ہے۔اس کے برعکس کارتیسی محدد پر دوری رفتار[41]

$$v_x = f\lambda_x = \frac{\omega}{k_x}$$
$$v_y = f\lambda_y = \frac{\omega}{k_y}$$
$$v_z = f\lambda_z = \frac{\omega}{k_z}$$

---

[40] group velocity
[41] phase velocity

ہوں گے۔شکل 14.25 میں ϕ کی قیمت کم کرنے سے λ_y اور یوں v_y کی قیمت بڑھتی ہے حتٰی کہ $\phi = 0$ پر $v_y = \infty$ حاصل ہوتا ہے۔یوں دوری رفتار، روشنی کے رفتار سے زیادہ ہو سکتی ہے۔دوری رفتار صرف آنکھوں کا دھوکہ ہے، اس رفتار سے موج کا کوئی حصہ حرکت نہیں کرتا لہٰذا یہ آئن سٹائن کے قانون کی خلاف ورزی نہیں کرتا۔آئن سٹائن کا قانون کہتا ہے کہ کوئی چیز روشنی سے زیادہ تیز صفر نہیں کر سکتی۔

باب 15

اینٹینا اور شعاعی اخراج

15.1 تعارف

15.2 تاخیری دباو

کسی بھی اخراج شعاع کے نظام میں موج کے ترسیل کے لئے درکار دورانیہ اہمیت رکھتا ہے۔یوں شکل 15.3 میں دکھائے تار میں برقی رو سے پیدا میدان کا اثر نقطہ N پر کچھ وقفے سے ہو گا۔خالی خلاء میں یہ وقفہ موج کو تار سے نقطے تک پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے جہاں $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ خالی خلاء میں شعاع کی رفتار ہے۔یوں N کے نقطہ نظر سے تار میں برقی رو

$$I = I_0 \cos \omega t \tag{15.1}$$

کی بجائے

$$[I] = I_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \tag{15.2}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $[I]$ تاخیری برقی رو[1] کہلاتی ہے۔تاخیری تفاعل کو چکور قوسین میں بند لکھا جاتا ہے۔تاخیری برقی رو لکھتے ہوئے وقت t کی جگہ تاخیری وقت $(t - \frac{r}{c})$ استعمال کیا جاتا ہے۔

مساوات 15.2 کہتا ہے کہ نقطہ N پر لمحہ t پر پیدا اثر، گزرے لمحے $(t - \frac{r}{c})$ پر تار میں برقی رو کا اثر ہے جہاں تار سے N تک فاصلہ r ہے۔تار سے N تک شعاع پہنچنے کا دورانیہ $\frac{r}{c}$ ہے۔

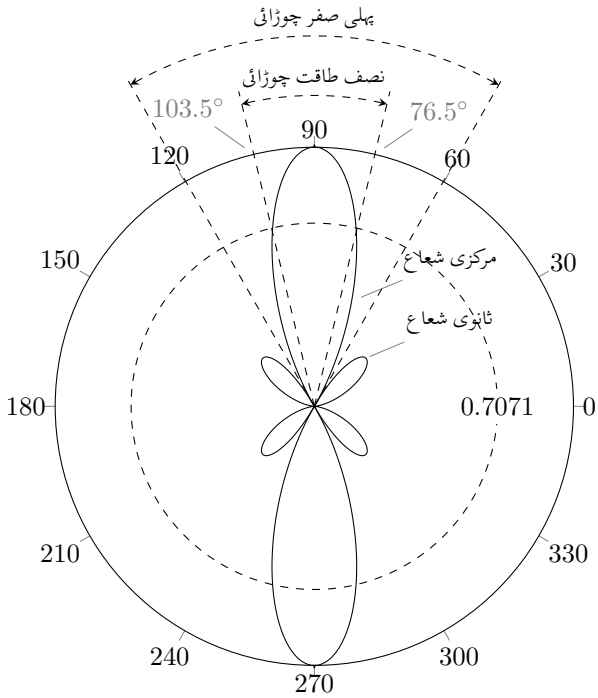
گزشتہ بابوں میں امواج کی بات کرتے ہوئے $\cos(\omega t - \beta x)$ استعمال کیا گیا جس میں $\frac{\omega}{\beta} = c$ کے استعمال سے

$$\cos(\omega t - \beta x) = \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) \tag{15.3}$$

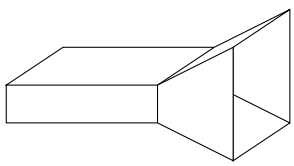
لکھا جا سکتا ہے جو تاخیری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

---

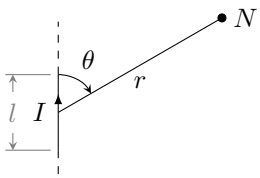
[1] retarded current



شکل 15.1: اینٹینا کے شعاع کا نقش



شکل 15.2: پیپا اینٹینا



شکل 15.3: برقی رو گزارتی تار کی چھوٹی لمبائی

مساوات 15.2 کی دوری سمتیہ شکل

$$[I] = I_0 e^{j\omega(t-r/c)} = I_0 e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{15.4}$$

ہے۔اسی طرح کثافت برقی رو کی تاخیری دوری سمتیہ شکل

$$[\boldsymbol{J}] = \boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)} = \boldsymbol{J}_0 e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{15.5}$$

ہو گی جسے استعمال کرتے ہوئے تاخیری مقناطیسی دباو

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{\mu}{4\pi}\int_h \frac{[\boldsymbol{J}]}{r}\,\mathrm{d}h = \frac{\mu}{4\pi}\int_h \frac{\boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r}\,\mathrm{d}h \tag{15.6}$$

لکھا جائے گا۔اسی طرح تاخیری حجمی کثافت چارج

$$[\rho_h] = \rho_0 e^{j\omega(t-r/c)} \tag{15.7}$$

لکھتے ہوئے تاخیری برقی دباو

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_h \frac{[\rho_h]}{r}\,\mathrm{d}h \tag{15.8}$$

لکھا جائے گا۔ باب-9 کے آخر میں مساوات 9.74 اور مساوات 9.73 کے بائیں ہاتھ کے تفاعل کو چکور قوسین میں لکھ کر موج کی رفتار c لیتے ہوئے اور فاصلے کو کروی محدد کے رداس r سے ظاہر کرنے سے یہی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

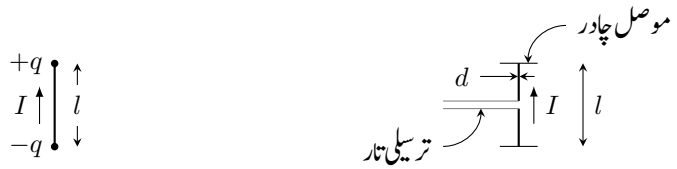
15.3 مختصر جفت قطبی اینٹینا

مختصر لمبائی کے سیدھے موصل تار کو عموماً مختصر جفت قطب[2] کہا جاتا ہے۔مندرجہ ذیل گفتگو میں مختصر جفت قطب کی لمبائی محدود ہو گی۔لامحدود حد تک کم لمبائی کی صورت میں اسے صغاری جفت قطب[3] کہا جائے گا۔

خطی نوعیت کے کسی بھی اینٹینا کو متعدد تعداد کے سلسلہ وار جڑے مختصر جفت قطبوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے لہٰذا مختصر جفت قطب کی خاصیت جانتے ہوئے زیادہ لمبے جفت قطب یا مختلف انداز میں جڑے موصل تاروں کی خاصیت جاننے میں مدد ملے گی۔

آئیں شکل 15.4-الف میں دکھائے مختصر جفت قطب پر غور کریں جس کی لمبائی l طول موج سے بہت کم $l \ll \lambda$ ہے۔جفت قطب کے سروں پر موصل چادر بطور کپیسٹر بوجھ کردار ادا کرتے ہیں۔جفت قطب کی مختصر لمبائی اور اس کے سروں پر موصل چادر مل کر جفت قطب کی پوری لمبائی پر تقریباً برابر برقی رو رکھنے میں مدد دیتے ہیں۔جیسے شکل-الف میں دکھایا گیا ہے، جفت قطب کو متوازن ترسیلی تار سے طاقت مہیا کی جا سکتی ہے۔یہ فرض کرتے ہوئے کہ ترسیلی تار سے شعاعی اخراج نہیں ہوتی، اس کے موجودگی کو نظر انداز کیا جائے گا۔جفت قطب کے سروں پر نسب موصل چادروں کے شعاعی اخراج کو بھی نظر انداز کیا جائے گا۔جفت قطب کی موٹائی d اس کے لمبائی سے بہت کم $d \ll \lambda$ ہے۔ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے تحلیلی تجزیے کی خاطر

[2] short dipole
[3] infinitesimal



الف: متوازن ترسیلی تار سے جفت قطب کو طاقت مہیا کی گئی ہے۔ ب: جفت قطب بطور چھوٹی تار

شکل 15.4: جفت قطب

جفت قطب کو شکل 15.4-ب کی طرح تصور کیا جا سکتا ہے۔ایسا جفت قطب یکساں برقی رو I گزارتا، l لمبائی کا تار معلوم ہو گا جس کے دونوں سروں پر برابر مگر الٹ قطب کے چارج $\mp q$ ہوں۔کپیسٹر پر چارج q اور برقی رو I کا تعلق

$$I = \frac{\partial q}{\partial t} \tag{15.9}$$

ہے۔

آئیں لامحدود وسعت کی خالی خلاء میں جفت قطب کے میدان حاصل کریں۔جفت قطب کے وسط کو کروی محدد کے مرکز اور لمبائی کو z محدد پر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔کسی بھی نقطہ N پر عموماً آپس میں عمودی تین میدان E_r، E_θ اور $E\phi$ پائے جائیں گے۔

کسی بھی نقطہ N پر مساوات 9.69 اور مساوات 9.71 بالترتیب مقناطیسی میدان اور برقی میدان دیتے ہیں

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{A} \tag{15.10}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{15.11}$$

جہاں

V نقطہ N پر مقداری برقی دباو

$\boldsymbol{A}$ نقطہ N پر سمتی دباو

ہیں۔اگر ہمیں کسی بھی نقطے پر مقداری دباو V اور سمتی دباو $\boldsymbol{A}$ معلوم ہوں تب مندرجہ بالا دو مساوات سے اس نقطے پر برقی اور مقناطیسی میدان حاصل کئے جا سکتے ہیں۔چونکہ ہمیں جفت قطب سے دور میدان درکار ہیں لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 15.6 اور مساوات 15.8 میں دئے تاخیری دباو قابل استعمال ہوں گے۔یوں ان مساوات کو

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times [\boldsymbol{A}] \tag{15.12}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla[V] - \frac{\partial[\boldsymbol{A}]}{\partial t} = -\nabla[V] - j\omega[\boldsymbol{A}] \tag{15.13}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 9.57 اور مساوات 9.58 سے تاخیری دباو

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_h \frac{\boldsymbol{J}_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r}\,\mathrm{d}h \tag{15.14}$$

$$[V] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_h \frac{\rho_0 e^{j\omega(t-r/c)}}{r}\,\mathrm{d}h \tag{15.15}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔

کسی بھی برقی چارج اور برقی رو سے پیدا میدان مساوات 15.12 اور مساوات 15.13 سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔مساوات 15.15 کے تحت تاخیری مقداری دباو $[V]$ صرف ساکن چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.14 کے تحت تاخیری سمتی دباو $[\boldsymbol{A}]$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے۔مساوات 15.12 کے تحت مقناطیسی میدان $\boldsymbol{H}$ صرف برقی رو یعنی حرکت کرتے چارجوں پر منحصر ہے جبکہ مساوات 15.13 کے تحت برقی میدان $\boldsymbol{E}$ ساکن چارج اور برقی رو دونوں پر منحصر ہے۔ہم جلد دیکھیں گے کہ کسی بھی چارج اور برقی رو سے دور پیدا مقناطیسی اور برقی میدانوں کا دارومدار صرف برقی رو پر ہوتا ہے۔ چونکہ اس باب میں تاخیری دباو ہی استعمال کئے جائیں گے لہٰذا انہیں چکور قوسین میں لکھنے سے گریز کیا جائے گا۔اس باب میں یہاں سے آگے بغیر چکور قوسین کے دباو کو تاخیری دباو ہی سمجھا جائے۔

شکل سے ظاہر ہے کہ سمتی دباو کا صرف $\boldsymbol{a}_z$ جزو

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{a}_z \mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta s)}}{s} \, \mathrm{d}z \tag{15.16}$$

پایا جاتا ہے۔اگر جفت قطب کی لمبائی l، نقطہ N سے جفت قطب تک فاصلہ r سے نہایت کم $l \ll r$ اور طول موج λ سے بھی نہایت کم $l \ll \lambda$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات میں متغیر فاصلہ s کی جگہ مستقل فاصلہ r پر کیا جا سکتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ l پر مختلف نقطوں سے N پر پیدا دباو میں زاویائی فرق کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔اس طرح ان تمام کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔جفت قطب کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 کی صورت میں I_0 کو بھی تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔یوں مندرجہ بالا مساوات سے

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{a}_z \mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \tag{15.17}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو کروی محدد میں یوں

$$\boldsymbol{A} = A_r \boldsymbol{a}_\mathrm{r} + A_\theta \boldsymbol{a}_\theta + A_\phi \boldsymbol{a}_\phi$$

لکھا جائے گا جہاں

$$\begin{aligned}
A_r &= \boldsymbol{a}_\mathrm{r} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \boldsymbol{a}_\mathrm{r} \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{z} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \cos\theta \\
A_\theta &= \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \boldsymbol{a}_\theta \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{z} = -\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \sin\theta \\
A_\phi &= \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \boldsymbol{a}_\phi \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{z} = 0
\end{aligned} \tag{15.18}$$

ہوں گے جہاں اکائی سمتیات کے مقداری ضرب صفحہ 35 پر جدول 1.2 سے حاصل کئے گئے۔اس طرح

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} (\cos\theta \boldsymbol{a}_\mathrm{r} - \sin\theta \boldsymbol{a}_\theta) \tag{15.19}$$

لکھا جائے گا۔

ساکن چارج جفت قطب کے سروں پر پایا جاتا ہے لہٰذا مقداری دباو

$$V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right] \tag{15.20}$$

ہو گا جہاں مساوات 15.9 کے تحت

$$q = \int I \, \mathrm{d}t = \frac{I}{j\omega} \tag{15.21}$$

کے برابر ہے جہاں

$$I = I_0 e^{j(\omega t - \beta s)}$$
$$q = q_0 e^{j(\omega t - \beta s)}$$

ہیں۔مساوات 15.21 سے $q_0 = \frac{I_0}{j\omega}$ حاصل کرتے ہوئے مساوات 15.20 میں پر کرتے ہیں۔

$$V = \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega}\left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2}\right] \tag{15.22}$$

شکل کو دیکھ کر

$$s_1 = r - \frac{l}{2}\cos\theta$$
$$s_2 = r + \frac{l}{2}\cos\theta$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں مساوات 15.22 میں پر کرتے

$$V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega}\left[\frac{(r + \frac{l}{2}\cos\theta)e^{j\frac{\beta l}{2}\cos\theta} - (r - \frac{l}{2}\cos\theta)e^{-j\frac{\beta l}{2}\cos\theta}}{r^2 - \frac{l^2}{4}\cos^2\theta}\right] \tag{15.23}$$

ملتا ہے۔چکور قوسین میں شرح کے نچلے حصے میں $r \gg l$ کی وجہ سے $\frac{l^2}{4}\cos^2\theta$ کو نظر انداز کرتے ہیں۔مسئلہ ڈی مویور[4] کے استعمال سے

$$V = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2}\left[\left(r + \frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} + j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right) - \left(r - \frac{l}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} - j\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2}\right)\right] \tag{15.24}$$

لکھا جائے گا۔چونکہ $l \ll \lambda$ ہے لہٰذا

$$\cos\frac{\beta l\cos\theta}{2} = \cos\frac{\pi l\cos\theta}{\lambda} \approx l$$
$$\sin\frac{\beta l\cos\theta}{2} \approx \frac{\beta l\cos\theta}{2}$$

ہوں گے، جنہیں مساوات 15.24 میں پر کرنے سے

$$V = \frac{I_0 l e^{j(\omega t - \beta r)}\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2}\right) \tag{15.25}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

---

[4] $(e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha)$ de Moivre's theorem

I_0 برقی رو کا حیطہ یعنی اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت، A

l جفت قطب کی لمبائی، m

ω زاویائی تعدد $(\omega = 2\pi f)$ ، اکائی rad/s۔ جہاں ہرٹز Hzمیں تعدد f ہے

β زاویائی مستقل $(\beta = \frac{2\pi}{\lambda})$، اکائی rad/m

t وقت،s

θ جفت قطب اور جفت قطب سے نقطہ N تک سمتیہ کے مابین زاویہ

ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل، 8.854 pF/m

c خالی خلاء میں شعاع کی رفتار، 3×10^8 m/s

j خیالی عدد $\sqrt{-1}$

r جفت قطب کے وسط سے نقطہ N تک فاصلہ،m

ہیں۔

مختصر جفت قطب کے وسط سے، $l \ll \lambda$ اور $l \ll r$ کی صورت میں، r فاصلے اور θ زاویے پر مساوات 15.19 سمتی دباو اور مساوات 15.25 مقداری دباو دیتے ہیں۔کروی محدد میں مقداری دباو کی ڈھلوان

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\boldsymbol{a}_\phi \\ &= \frac{I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0 c}\left[-\left(\frac{\cos\theta}{r^2}+\frac{2c\cos\theta}{j\omega r^3}\right)\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} - \left(\frac{\sin\theta}{r}+\frac{c\sin\theta}{j\omega r^2}\right)\boldsymbol{a}_\theta\right]\end{aligned} \tag{15.26}$$

کے برابر ہے۔برقی میدان $\boldsymbol{E} = E_r\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + E_\theta\boldsymbol{a}_\theta + E_\phi\boldsymbol{a}_\phi$ کے اجزاء مساوات 15.13 کی مدد سے

$$\begin{aligned}E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} - j\omega A_r \\ E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} - j\omega A_\theta \\ E_\phi &= -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} - j\omega A_\phi\end{aligned}$$

لکھے جا سکتے ہیں جن میں مطلوبہ تفاعل پر کرنے سے برقی میدان کے عمومی مساوات

$$\begin{aligned}E_r &= \frac{I_0 l\cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right) \\ E_\theta &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{c^2 r}+\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right) \qquad \text{عمومی میدان} \\ E_\phi &= 0\end{aligned} \tag{15.27}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مقناطیسی میدان مساوات 15.12 سے حاصل ہو گی۔کروی محدد میں سمتی دباو کی گردش

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{a}_\phi \tag{15.28}$$

میں مساوات 15.18 پر کرنے سے مقناطیسی میدان کی عمومی مساوات

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2}\right) \qquad \text{عمومی میدان} \\ H_r &= 0 \\ H_\theta &= 0 \end{aligned} \tag{15.29}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ کا استعمال کیا گیا۔

مساوات 15.27 اور مساوات 15.29 کے تحت جفت قطب سے پیدا میدان کے صرف تین اجزاء E_r، E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں۔جفت قطب سے زیادہ فاصلے پر میدان کی مساوات میں $\frac{1}{r^3}$ یا $\frac{1}{r^2}$ کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔یوں E_r قابل نظر انداز ہو گا لہٰذا $E_r \approx 0$ تصور کیا جائے گا جبکہ

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\frac{j\omega}{c^2 r} = j\frac{30 I_0 \beta l}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \\ H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\frac{j\omega}{cr} = j\frac{I_0 \beta l}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \qquad \text{دور میدان} \end{aligned} \tag{15.30}$$

ہوں گے۔مساوات 15.30 استعمال کرتے ہوئے برقی اور مقناطیسی میدان کی شرح

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7\,\Omega \tag{15.31}$$

حاصل ہوتی ہے جو خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

یہاں اس حقیقت پر توجہ دیں کہ خالی خلاء میں TEM موج کی طرح، جفت قطب سے دور E_θ اور H_ϕ آپس میں ہم قدم ہیں۔اس کے علاوہ دونوں میدان $\sin\theta$ کے راست تناسب ہیں یعنی جفت قطب کے محوری سمت $\theta = 0°$ پر ان کی قیمت صفر جبکہ $\theta = 90°$ پر ان کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہے۔اندرسہ[5] شکل کی ان میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

جفت قطب سے دور میدان حاصل کرتے وقت مساوات 15.27 اور مساوات 15.29 میں $\frac{1}{r^3}$ یا $\frac{1}{r^2}$ رکھتے اجزاء کو نظر انداز کیا گیا یعنی E_θ میں

$$\left|j\frac{\omega}{c^2 r}\right| \gg \frac{1}{cr^2}$$

$$\left|j\frac{\omega}{c^2 r}\right| \gg \left|\frac{1}{j\omega r^3}\right|$$

یا

$$r \gg \frac{c}{\omega} \tag{15.32}$$

[5] doughnut

تصور کیا گیا۔اسی طرح H_ϕ میں بھی

$$\left|j\frac{\omega}{cr}\right| \gg \frac{1}{r^2}$$

یا

$$r \gg \frac{c}{\omega} \tag{15.33}$$

تصور کیا گیا جسے

$$r \gg \frac{1}{\beta} \qquad \text{(دور میدان)} \tag{15.34}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔اگر جفت قطب کے قریب میدان کی بات کی جائے تو $r \ll \frac{c}{\omega}$ یعنی $r \ll \frac{1}{\beta}$ لیا جائے گا۔یوں مساوات 15.27 اور مساوات 15.29 میں

$$\begin{aligned}
\frac{1}{cr^2} &\ll \left|\frac{1}{j\omega r^3}\right| \\
\left|\frac{j\omega}{c^2 r}\right| &\ll \left|\frac{1}{j\omega r^3}\right| \\
\frac{1}{cr^2} &\ll \left|\frac{1}{j\omega r^3}\right| \\
\left|\frac{j\omega}{cr}\right| &\ll \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

ہوں گے لہٰذا قریبی میدان

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}}{2\pi\epsilon_0\omega r^3} \\
E_\theta &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{j\omega r^3} = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}}{4\pi\epsilon_0\omega r^3} \\
H_\phi &= \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\frac{1}{r^2} = \frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r^2} \qquad \text{قریبی میدان}
\end{aligned} \tag{15.35}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔ کل قریبی برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = E_r\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + E_\theta\boldsymbol{a}_\theta = \left[\frac{I_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\theta\right] e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})} \tag{15.36}$$

ہو گا۔مساوات 15.36 کے برقی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t-\beta r-\frac{\pi}{2})}$ پایا جاتا ہے جبکہ مقناطیسی میدان میں جزو ضربی $e^{j(\omega t-\beta r)}$ پایا جاتا ہے۔یوں جفت قطب کے قریب کسی بھی نقطے پر ہر لمحہ برقی میدان اور مقناطیسی میدان میں $\frac{\pi}{2}$ زاویے کا فرق پایا جاتا ہے جو ساکن میدان کی نشانی ہے۔

جفت قطب کے قریب برقی اور مقناطیسی میدان میں لحاتی طور $\frac{\pi}{2}$ ریڈیئن کا زاویہ پایا جاتا ہے جبکہ جفت قطب سے دور دونوں میدان لحاتی طور پر ہم قدم ہیں لہٰذا کسی درمیانے فاصلے پر ان میدانوں میں 45° کا زاویہ ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جفت قطب سے فاصلہ بڑھانے سے برقی میدان وقت کی نسبت سے گھوم کر مقناطیسی میدان کے ہم قدم ہو جاتا ہے۔

مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.30 سے دور میدان میں کثافت توانائی

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]_{\text{حقیقی}} = \frac{1}{2}E_\theta H_\phi^* \boldsymbol{a}_{\text{r}} = \frac{15 I_0^2 \beta^2 l^2}{4\pi r^2}\sin^2\theta \boldsymbol{a}_{\text{r}} \quad \text{دور کثافت طاقت}$$

حاصل ہوتی ہے جو رداسی r سمت میں منتقل ہوتی حقیقی توانائی ہے۔یہی اینٹینا کی شعاعی اخراج ہے۔شعاعی اخراج $\theta = 90^\circ$ پر زیادہ سے زیادہ ہے۔اسی طرح پوئنٹنگ سمتیہ استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.35 سے قریبی میدان میں کثافت توانائی

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]_{\text{حقیقی}} &= \frac{1}{2}\left[(E_r\boldsymbol{a}_{\text{r}} + E_\theta\boldsymbol{a}_\theta)\times H_\phi^*\boldsymbol{a}_\phi\right]_{\text{حقیقی}}\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{I_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_\theta + \frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\omega r^3}\boldsymbol{a}_{\text{r}}\right]\frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے جس کا بیشتر حصہ خیالی ہے اور ساتھ ہی ساتھ شعاعی اخراج کے علاوہ یہاں θ سمت میں گھومتی طاقت بھی پائی جاتی ہے۔

آئیں اب نہایت کم تعدد پر صورت حال دیکھیں۔ مساوات 15.27 میں $I_0 = j\omega q_0$ پر کرتے ہوئے اور مساوات 15.29 کو جوں کا توں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}E_r &= \frac{q_0 l\cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{cr^2}+\frac{1}{r^3}\right)\\ E_\theta &= \frac{q_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r}+\frac{j\omega}{cr^2}+\frac{1}{r^3}\right)\\ H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right)\end{aligned}$$

$\left|e^{-j\beta r}\right| = 1$ لیتے ہوئے، صفر کے قریب تر تعدد $\omega \to 0$ پر ان مساوات سے میدان کی حتمی قیمت

$$\begin{aligned}E_r &= \frac{q_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}\\ E_\theta &= \frac{q_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\\ H_\phi &= \frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2} \qquad \text{نیم ساکن میدان}\end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہیں جن سے برقی میدان

$$\boldsymbol{E} = \frac{q_0 l}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{a}_{\text{r}} + \sin\theta\boldsymbol{a}_\theta\right) \tag{15.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ان میدان کو نیم ساکن میدان[6] کہا جاتا ہے۔یہ صفحہ 108 پر حاصل کی گئی مساوات 4.67 ہی ہے۔اسی طرح مندرجہ بالا مقناطیسی میدان H_ϕ کی قیمت صفحہ 186 پر مساوات 7.3 ہی ہے۔چونکہ یہ میدان $\frac{1}{r^2}$ یا $\frac{1}{r^3}$ کے تعلق سے تبدیل ہوتے ہیں لہٰذا یہ جفت قطب کے قریب ہی پائے جاتے ہیں۔جفت قطب سے دور ان کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے لہٰذا ان کا شعاعی اخراج میں خاص کردار نہیں ہوتا۔بلند تعدد پر دور میدان جنہیں مساوات 15.30 پیش کرتی ہے، $\frac{1}{r}$ کے تعلق سے گھٹتی ہیں لہٰذا یہی شعاعی اخراج کو ظاہر کرتی ہیں اور یوں انہیں اخراجی میدان[7] کہا جاتا ہے۔

جدول 15.1: مختصر جفت قطب کے میدان

جزو	عمومی مساوات	دور میدان	نیم ساکن میدان
E_r	$\frac{I_0 l \cos\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right)$	0	$\frac{q_0 l\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$
E_θ	$\frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{j\omega}{c^2 r}+\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right)$	$\frac{j60\pi I_0 \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{r}\frac{l}{\lambda}$	$\frac{q_0 l\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
H_ϕ	$\frac{I_0 l \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right)$	$\frac{jI_0 \sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)}}{2r}\frac{l}{\lambda}$	$\frac{I_0 l\sin\theta}{4\pi r^2}$

مختصر جفت قطب، $l \ll r$ اور $l \ll \lambda$، کے تمام میدان کو جدول 15.1 میں پیش کیا گیا ہے۔بقایا اجزاء $E_\phi = H_r = H_\theta = 0$ صفر کے برابر ہیں۔

اگر ہماری دلچسپی صرف دور میدان میں ہو تب مطلوبہ میدان کو نہایت آسانی کے ساتھ صرف $\boldsymbol{A}$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے چونکہ دور میدان میں مقداری دباو V کا کوئی کردار نہیں۔یوں مساوات 15.13 اور مساوات 15.18 سے

$$E_\theta = -j\omega A_\theta = -j\omega\left(-\frac{\mu_0 I_0 l e^{j(\omega t-\beta r)}}{4\pi r}\sin\theta\right) = j\frac{30 I_0 \beta l}{r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{15.38}$$

حاصل ہوتا ہے۔مقناطیسی میدان H_ϕ کو مساوات 15.12 سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں $\frac{1}{r^2}$ اجزاء رد کئے جائیں گے۔مقناطیسی میدان کو نسبتاً زیادہ آسانی سے، لامحدود خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ استعمال کرتے ہوئے

$$H_\phi = \frac{E_\theta}{Z_0} = j\frac{30 I_0 \beta l}{120\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} = j\frac{I_0 \beta l}{4\pi r}\sin\theta e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{15.39}$$

سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 15.30 میں $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ پر کرتے ہوئے دور برقی میدان کو

$$E_\theta = j \quad 60\pi \quad I_0 \quad \frac{l}{\lambda} \quad \frac{1}{r} \quad \sin\theta \quad e^{j(\omega t-\beta r)} \tag{15.40}$$

مقدار رو لمبائی فاصلہ شکل زاویہ

لکھا جا سکتا ہے جہاں 60π جزو مقدار ہے، I_0 برقی رو، $\frac{l}{\lambda}$ جفت قطب کی لمبائی جسے طول موج میں ناپا گیا ہے، $\frac{1}{r}$ فاصلے کو ظاہر کرتا ہے، $\sin\theta$ میدان کی شکل اور $e^{j(\omega t-\beta r)}$ زاویائی فرق ہے۔کسی بھی اینٹینا کے میدان کو عموماً ان چھ اجزاء کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

جدول 15.1 مختصر جفت قطب کے میدان دیتا ہے۔کسی بھی اینٹینا کو متعدد مختصر جفت قطب کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں کسی بھی اینٹینا کے میدان تمام جفت قطب کے میدان کو جمع کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

---

[6] quasi stationary fields
[7] radiation fields

15.4 مختصر جفت قطب کا اخراجی مزاحمت

اینٹینا کے گرد کسی بھی بند سطح پر مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P}_{\text{اوسط}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} \tag{15.41}$$

کی سطحی تکمل

$$P = \int_S \mathscr{P}_{\text{اوسط}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad (\mathrm{W}) \tag{15.42}$$

کل شعاعی اخراج P دے گی۔فی سیکنڈ خارج ہونے والی توانائی شعاعی اخراج کہلاتی ہے لہٰذا اس کی اکائی واٹ W ہے۔سادہ ترین بند سطح کرہ ہے۔یوں اینٹینا کو کروی محدد کے مرکز پر رکھتے ہوئے تکمل حاصل کیا جائے گا۔چونکہ دور کے میدان نسبتاً سادہ صورت رکھتے ہیں لہٰذا بند سطح کا رداس جتنا زیادہ رکھا جائے تکمل اتنا آسان ہو گا۔یوں رداس زیادہ سے زیادہ رکھتے ہوئے دور میدان استعمال کرتے ہوئے جفت قطب کا شعاعی اخراج P حاصل کیا جاتا ہے۔

کامل اینٹینا کی صورت میں شعاعی اخراج اس برقی طاقت کے برابر ہو گا جو اینٹینا کے برقی سروں پر مہیا کی گئی ہو۔اینٹینا کو مزاحمت R تصور کرتے ہوئے اس برقی طاقت کو $P = \frac{1}{2}I_0^2 R$ لکھا جا سکتا ہے جہاں I_0 سائن نما برقی رو کا حیطہ ہے۔یوں

$$R = \frac{2P}{I_0^2} \qquad (\Omega) \tag{15.43}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں R اینٹینا کی اخراجی مزاحمت[8] کہلاتی ہے۔

آئیں مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں لہٰذا شعاعی اخراج

$$P = \frac{1}{2}\int_S \left[E_\theta H_\phi^*\right]_{\text{حقیقی}} \mathrm{d}s \tag{15.44}$$

سے حاصل ہو گی جہاں H_ϕ^* مقناطیسی میدان H_ϕ کا جوڑی دار مخلوط ہے۔اب $E_\theta = Z_0 H_\phi$ ہے لہٰذا

$$P = \frac{1}{2}\int_S \left[H_\phi H_\phi^* Z_0\right]_{\text{حقیقی}} \mathrm{d}s = \frac{Z_0}{2}\int_S \left|H_\phi\right|^2 \mathrm{d}s \tag{15.45}$$

یا

$$P = \frac{1}{2Z_0}\int_S \left|E_\phi\right|^2 \mathrm{d}s \tag{15.46}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$ اور $\mathrm{d}s = r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$ کے برابر ہیں۔

جفت قطب کے میدان حاصل کرتے وقت فرض کیا گیا کہ اس کی پوری لمبائی پر یک برابر برقی رو I_0 پائی جاتی ہے۔ساتھ ہی ساتھ لمبائی l کے مختلف نقطوں کے میدان کا زاویائی فرق نظر انداز کیا گیا۔جفت قطب کی پوری لمبائی پر برابر برقی رو نہ ہونے کی صورت میں مساوات 15.16 سے مساوات 15.17 حاصل ہونے کی بجائے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \frac{\boldsymbol{a}_z \mu_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r}\int_{-l/2}^{l/2} i\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\boldsymbol{a}_z \mu_0 l I e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r}\end{aligned}$$

[8] radiation resistance

حاصل ہو گا جہاں I اوسط برقی رو ہے۔اسی حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 15.30 سے مقناطیسی میدان کا حیطہ

$$H_\phi = \frac{I\beta l}{4\pi r}\sin\theta \tag{15.47}$$

لکھتے ہوئے I_0 کی جگہ اوسط برقی رو I لکھی گئی ہے۔مقناطیسی میدان کے اس حیطے کو مساوات 15.45 میں پر کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ اخراجی طاقت

$$\begin{aligned}
P &= \frac{120\pi}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{I\beta l}{4\pi r}\sin\theta\right)^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\
&= \frac{120\pi}{2}\left(\frac{\beta I l}{4\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\
&= 80\pi^2 I^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2
\end{aligned}$$

حاصل ہوتی ہے۔مساوات 15.45 یا مساوات 15.46 برقی رو کی چوٹی I کی صورت میں اخراجی طاقت دیتے ہیں جو سائن نما برقی رو کی صورت میں اوسط اخراجی طاقت کے دگنا ہوتی ہے۔یوں اوسط اخراجی طاقت

$$P_{\text{اوسط}} = 40\pi^2 I^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{15.48}$$

ہو گی۔مساوات 15.43 سے مختصر جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R = 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\left(\frac{I}{I_0}\right)^2 \qquad (\Omega) \tag{15.49}$$

حاصل ہوتی ہے۔

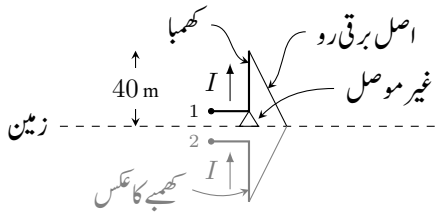
کسی بھی اینٹینا کی اخراجی مزاحمت

$$R = \frac{Z_0}{I_0^2}\int_S |H|^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{Z_0 I_0^2}\int_S |E|^2\,\mathrm{d}s \tag{15.50}$$

سے حاصل کی جا سکتی ہے جہاں $Z_0 = 120\pi$ کے برابر ہے۔

مثال 15.1: چالیس میٹر لمبے کھمبے اینٹینا کو موصل سطح پر کھڑا کئے 300 kHz کے تعدد پر استعمال کیا جاتا ہے۔اسے برقی اشارہ نچلے سرے پر فراہم کیا جاتا ہے۔اینٹینا کی اخراجی مزاحمت حاصل کریں۔اس کھمبے کو شکل 15.5 میں دکھایا گیا ہے۔کھمبے کو غیر موصل بنیاد پر کھڑا کیا گیا ہے۔

حل:موصل زمین میں کھمبا اینٹینا کا عکس بنتا ہے۔درکار تعدد پر $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{300000} = 1000\,\mathrm{m}$ ہے جو کھمبے کی لمبائی سے بہت زیادہ ہے۔یوں اینٹینا اور اس کا عکس بطور مختصر جفت قطب کردار ادا کرتے ہیں۔چونکہ کھمبے کے سر پر موصل چادر نسب نہیں کیا گیا ہے لہٰذا اس کے پورے لمبائی پر برابر برقی رو تصور کرنا غلط ہو گا۔حقیقت میں، جیسے شکل میں وضاحت کی گئی ہے، کھمبے کے کھلے سر پر برقی رو صفر ہو گی جبکہ نچلے سر پر اس کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی۔جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، برقی رو بالمقابل لمبائی l کا خط تکونی ہے۔یوں اوسطاً برقی رو $I_{\text{اوسط}} = \frac{I_0}{2}$ ہو گی جہاں برقی رو کی زیادہ سے زیادہ قیمت I_0 ہے۔



شکل 15.5: کھمبا اینٹینا

یوں 2×40 میٹر لمبے فرضی جفت قطب کی اخراجی مزاحمت مساوات 15.49 سے

$$80\pi^2 \left(\frac{2 \times 40}{1000}\right)^2 \left(\frac{0.5 I_0}{I_0}\right)^2 = 1.2633\,\Omega$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ مزاحمت حقیقی کھمبے کے سر 1 اور عکسی کھمبے کے سر 2 کے مابین ہے۔یوں اصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت جو زمین اور 1 کے مابین ناپی جائے گی کی قیمت

$$R_{\text{اخراجی}} = \frac{0.63165}{2} = 0.63\,\Omega \tag{15.51}$$

ہو گی۔

حقیقی دھات کامل موصل نہیں ہوتے لہٰذا کسی بھی دھات سے بنائے گئے جفت قطب میں توانائی کا ضیاع ہو گا۔موصل کے علاوہ اینٹینا کے ساتھ منسلک ذو برق میں بھی طاقت کا ضیاع ہو گا۔ان ضیاع کو مزاحمت $R_{\text{ضیاعی}}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔یوں اینٹینا کے برقی سروں پر کل مزاحمت

$$R = R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیاعی}} \tag{15.52}$$

ہو گی۔مندرجہ بالا مثال میں اگر $R_{\text{ضیاعی}} = 0.63\,\Omega$ ہوتا تب اینٹینا کی کارکزاری[9] k

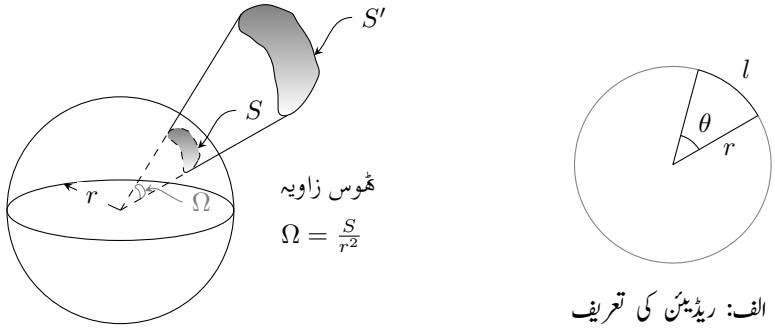
$$k = \frac{\text{اخراجی طاقت}}{\text{داخلی طاقت}} = \frac{R_{\text{اخراجی}}}{R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضیاعی}}} \frac{0.63}{0.63 + 0.63} = 50\,\% \tag{15.53}$$

پچاس فی صد ہو گی۔اگر طاقت کا ضیاع بڑھائے بغیر زیادہ لمبائی کا جفت قطب استعمال کیا جائے تو کارکزاری اس سے بہتر کی جا سکتی ہے۔

اگر مخلوط پوئنٹنگ سمتیہ کا حقیقی حصہ لئے بغیر کسی اینٹینا کو مکمل گھیرے سطح پر اس کا تکمل لیا جائے تو حقیقی طاقت کے ساتھ ساتھ خیالی طاقت بھی حاصل ہو گا۔حقیقی طاقت اخراجی طاقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ خیالی طاقت متعامل جزو ہے۔سطح تکمل کی صورت اور مقام کا تکمل کے حقیقی جزو پر کوئی اثر نہیں البتہ خیالی طاقت کا دارومدار سطح کی صورت اور مقام پر ہے۔اینٹینا سے بہت دور خیالی جزو قابل نظر انداز ہوتا ہے جبکہ اینٹینا کے قریب اس جزو کی مقدار بڑھ جاتی ہے۔نہایت پتلی ساخت کے خطی اینٹینا کی صورت میں اگر سطح تکمل کو بالکل سطح اینٹینا کے ساتھ ملا لیا جائے تب حاصل مخلوط طاقت تقسیم I_0^2 رکاوٹ $R + jX$ دیتا ہے جہاں R اینٹینا کے اخراجی مزاحمت کو ظاہر کرتا ہے۔

---

[9] efficiency



الف: ریڈیئن کی تعریف

ب: سٹریڈیئن کی تعریف

شکل 15.6: ریڈیئن اور سٹریڈیئن کی تعریف

15.5 ٹھوس زاویہ

اگلے حصے میں ٹھوس زاویہ[10] درکار ہو گا لہٰذا اسے پہلے سمجھتے ہیں۔

شکل 15.6-الف میں رداس r کے دائرے پر قوس کی لمبائی l اور رداس r کی شرح

$$\theta = \frac{l}{r} \qquad \text{(rad)} \tag{15.54}$$

زاویے θ دیتی ہے جس کی اکائی ریڈیئن[11] (rad) ہے۔یوں اکائی رداس کے دائرے پر اکائی لمبی قوس، دائرے کے مرکز پر، ایک ریڈیئن (1 rad) کا زاویہ بنائے گی۔یہی اکائی ریڈیئن کی تعریف ہے۔چونکہ دائرے کا محیط $2\pi r$ ہے لہٰذا دائرے کے گرد ایک مکمل چکر 2π ریڈیئن کے زاویے کو ظاہر کرتی ہے۔اگرچہ مساوات 15.54 کے تحت θ دراصل بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی ریڈیئن میں ناپتے ہیں۔یوں x rad سے ظاہر ہوتا ہے کہ x زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

بالکل اسی طرح رداس r کے کرہ کی سطح پر کسی بھی رقبہ S اور کرہ کے رداس کے مربع r^2 کی شرح

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \qquad \text{(sr)} \tag{15.55}$$

ٹھوس زاویہ Ω دیتی ہے جسے مربع ریڈیئن یعنی سٹریڈیئن[12] (sr) میں ناپا جاتا ہے۔اکائی رداس کے کرہ پر اکائی رقبہ، کرہ کے مرکز پر، ایک سٹریڈیئن کا ٹھوس زاویہ بنائے گی۔یہی سٹریڈیئن کی تعریف ہے۔چونکہ کرہ کی سطح $4\pi r^2$ کے برابر ہے لہٰذا پوری کرہ 4π سٹریڈیئن کا ٹھوس زاویہ دیتی ہے۔اگرچہ ٹھوس زاویہ بے بُعد مقدار ہے، ہم اس کے باوجود اس کو فرضی اکائی سٹریڈیئن میں ناپتے ہیں۔یوں مختلف اعداد کی بات کرتے وقت یہ جاننا ممکن ہوتا ہے کہ ٹھوس زاویے کی بات کی جا رہی ہے۔

شکل 15.6-ب میں عمومی رقبہ S' کا محدد کے مرکز پر ٹھوس زاویہ حاصل کرنے کا طریقہ دکھایا گیا ہے۔مرکز سے دیکھتے ہوئے S' کا بیرونی خاکہ نظر آئے گا۔اگر اس خاکے کے بیرونی کناروں سے مرکز تک ربڑی چادر کھینچ کر لگائی جائے تو یہ چادر رداس r کے کرہ کو کاٹے گی۔کرہ کی سطح پر یوں رقبہ S گھیرا جائے گا۔ٹھوس زاویے

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \tag{15.56}$$

---

[10] solid angle
[11] radian
[12] steradian

کے برابر ہو گا۔اکائی رداس کے کرہ کی صورت میں رقبہ S کی قیمت ٹھوس زاویے کی قیمت کے برابر ہو گی۔

شکل 15.6-الف میں θ نظارے کے حدود کو ظاہر کرتا ہے۔اسی طرح شکل 15.6-ب میں Ω نظارے کے حدود تعین کرتا ہے۔

شکل 15.6-الف میں دکھایا گیا زاویہ سطحی نوعیت کا ہے جسے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔اس کے برعکس شکل 15.6-ب میں دکھایا گیا زاویہ حجمی نوعیت کا ہے جسے سٹریڈیئن یا ریڈیئن کے مربع میں ناپا جاتا ہے۔یاد رہے کہ ایک مربع ریڈیئن کو ہی ایک سٹریڈیئن کہتے ہیں۔

$$1\,\mathrm{sr} = 1\,\mathrm{rad}^2 \tag{15.57}$$

کروی محدد میں r رداس کے کرہ کی سطح پر رقبے کو

$$S = \int_\theta \int_\phi r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{15.58}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ رقبہ کرہ کے مرکز پر

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = \int_\theta \int_\phi \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \qquad (\mathrm{sr}) \tag{15.59}$$

ٹھوس زاویہ بنائے گی۔

15.6 موثر رقبہ، سمتیت اور افزائش

مختصر جفت قطب کے دور میدان میں صرف E_θ اور H_ϕ پائے جاتے ہیں جنہیں مساوات 15.30 میں پیش کیا گیا ہے۔کسی بھی اینٹینا کی طرح اس کے دور میدان $\frac{1}{r}$ کی شرح سے گھٹتے ہیں لہٰذا پوئنٹنگ سمتیہ

$$\boldsymbol{\mathscr{P}} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*\right]_{\text{حقیقی}} = \frac{Z_0}{2}|H|^2\,\boldsymbol{a}_\mathrm{r} = \frac{1}{2Z_0}|E|^2\,\boldsymbol{a}_\mathrm{r} \tag{15.60}$$

$\frac{1}{r^2}$ کی شرح سے گھٹے گی۔یوں پوئنٹنگ سمتیہ کے رداسی جزو کو r^2 سے ضرب دینے سے $P(\theta,\phi)$

$$P(\theta,\phi) = r^2\mathscr{P} = \frac{Z_0}{2}|H|^2 r^2 = \frac{1}{2Z_0}|E|^2 r^2 \qquad (\mathrm{W/sr}) \tag{15.61}$$

حاصل ہوتی ہے جس کی قیمت فاصلہ r بڑھانے سے نہیں گھٹتی۔$P(\theta,\phi)$ اخراجی شدت[13] کہلاتی ہے۔اخراجی شدت کے بُعد پر غور کریں۔پوئنٹنگ سمتیہ طاقت کی کثافت یعنی طاقت فی رقبہ دیتی ہے۔مساوات 15.55 سے رقبے کو $S = \Omega r^2$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں پوئنٹنگ سمتیہ ضرب مربع رداس کا بُعد طاقت فی ٹھوس زاویہ W/sr بنتی ہے۔

اخراجی شدت کو تقابل پذیر[14] بنانے کی خاطر $P(\theta,\phi)$ کو اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت $P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}} = r^2\mathscr{P}_{\text{بلند تر}}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$P_n(\theta,\phi) = \frac{P(\theta,\phi)}{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}} \qquad \text{بے بُعد} \tag{15.62}$$

---

[13] radiation intensity
[14] normalized

بے بُعد[15] مقدار $P_n(\theta,\phi)$ حاصل ہوتی ہے جو اینٹینا کی تقابل پذیر نقش طاقت[16] ہے۔

اینٹینا کی کل اخراج

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathscr{P} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{15.63}$$

ہے۔اگر کثافت طاقت $\mathscr{P}_{\text{بلند تر}}$ ہو تب اتنی اخراج مکمل کرہ کی سطح کے بجائے کرہ کی سطح پر رقبہ S سے خارج ہو گی یعنی

$$\mathscr{P}_{\text{بلند تر}} S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathscr{P} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{15.64}$$

ہو گا۔اس میں مساوات 15.55 کی مدد سے کرہ کی سطح پر رقبے کو ٹھوس زاویے کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathscr{P} r^2}{\mathscr{P}_{\text{بلند تر}} r^2} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

یعنی

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n(\theta,\phi) r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \iint\limits_{4\pi} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega \qquad (\mathrm{sr}) \tag{15.65}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کے تحت Ω_A ٹھوس زاویے پر یکساں زیادہ سے زیادہ طاقت خارج کرتے ہوئے اینٹینا پوری طاقت خارج کر سکتی ہے۔Ω_A کو اخراجی ٹھوس زاویہ[17] کہتے ہیں۔

مرکزی شعاع[18] پر تکمل

$$\Omega_M = \iint\limits_{\text{مرکزی شعاع}} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega \qquad (\mathrm{sr}) \tag{15.66}$$

لیتے ہوئے مرکزی ٹھوس زاویہ[19] حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں ثانوی شعاع[20] کے ٹھوس زاویہ Ω_m کو اخراجی ٹھوس زاویے اور مرکزی ٹھوس زاویے کے فرق

$$\Omega_m = \Omega_A - \Omega_M \tag{15.67}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔غیر سمتی[21] اینٹینا ہر سمت میں برابر اخراج کرتی ہے لہٰذا ہر سمت میں اس کا $P_n(\theta,\phi) = 1$ اور $\Omega_A = 4\pi$ ہو گا۔

اینٹینا کی دوسری اہم خاصیت اس کی سمتیت[22] ہے۔اخراجی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت اور اوسط اخراجی شدت کی شرح

$$D = \frac{\text{زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{اوسط اخراجی شدت}} = \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{P(\theta,\phi)_{\text{اوسط}}} \qquad \text{بے بُعد} \tag{15.68}$$

---

[15] dimensionless
[16] normalized power pattern
[17] beam solid angle
[18] main lobe
[19] major lobe solid angle
[20] minor lobe
[21] isotropic
[22] directivity

اس کی سمتیت کہلاتی ہے۔کل اخراج W کو 4π سٹریڈیئن سے تقسیم کرنے سے اوسط اخراجی شدت $P(\theta,\phi)_{\text{اوسط}}$ حاصل ہوتی ہے جبکہ اخراجی شدت $P(\theta,\phi)$ کا 4π سٹریڈیئن پر تکمل لینے سے اینٹینا کی کل اخراج حاصل ہوتی ہے۔یوں

$$\begin{aligned}
D = \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{W/4\pi} &= \frac{4\pi P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{\iint\limits_{4\pi} P(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega} \\
&= \frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} \frac{P(\theta,\phi)}{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}\,\mathrm{d}\Omega} \\
&= \frac{4\pi}{\iint\limits_{4\pi} P_n(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega}
\end{aligned}$$

لکھی جا سکتی ہے۔مساوات 15.65 کے ساتھ موازنے کے بعد اسے

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \qquad \text{بے بُعد} \tag{15.69}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں اینٹینا کی سمتیت سے مراد، کرہ کا ٹھوس زاویہ 4π تقسیم اینٹینا کی اخراجی ٹھوس زاویہ Ω ہے۔سمتیت اینٹینا کی ایک منفرد خاصیت ہے۔مخصوص ٹھوس زاویے میں طاقت مرکوز کرنے کی صلاحیت کی ناپ سمتیت ہے۔ سمتیت جتنی زیادہ ہو گی اینٹینا اتنی کم ٹھوس زاویے میں طاقت کو مرکوز کر پائے گا۔

مثال 15.2: غیر سمتی اینٹینا کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہٰذا اس کا $P_n(\theta,\phi) = 1$ اور $\Omega_A = 1$ ہوں گے۔ یوں

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} = 1 \tag{15.70}$$

حاصل ہو گا۔کسی بھی اینٹینا کی یہ کم سے کم ممکنہ سمتیت ہے۔

مثال 15.3: مختصر جفت قطب کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.30 استعمال کرتے ہوئے تقابل پذیر نقش طاقت

$$P_n(\theta,\phi) = \frac{H_\phi^2(\theta,\phi)}{H_\phi^2(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}} = \sin^2\theta \tag{15.71}$$

لکھی جا سکتی ہے۔مساوات 15.65 سے

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta \, d\phi = \frac{8\pi}{3} \tag{15.72}$$

اور یوں مساوات سے

$$D = \frac{4\pi}{\Omega} = \frac{3}{2} \tag{15.73}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے مختصر جفت قطب کی زیادہ سے زیادہ اخراج $\frac{3}{2}$ گنا زیادہ ہے۔

سمتیت کا دارومدار صرف اور صرف دور میدان کی نقش پر ہے۔اس میں اینٹینا کی کارگزاری شامل نہیں ہے۔اس کے برعکس اینٹینا کی کارگزاری، اینٹینا کی افزائش طاقت یا افزائش[23] پر اثر انداز ہوتی ہے۔اینٹینا کی افزائش سے مراد

$$\text{افزائش} = G = \frac{\text{آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}}{\text{حوالہ اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت}} \tag{15.74}$$

ہے جہاں دونوں اینٹینوں کی داخلی طاقت برابر ہے۔کسی بھی اینٹینا کو بطور حوالہ اینٹینا لیا جا سکتا ہے۔اگر ہم بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کو حوالہ تصور کریں تب

$$G_0 = \frac{P'_m}{P_0} \tag{15.75}$$

ہو گا جہاں

P'_m آزمائشی اینٹینا کی زیادہ سے زیادہ اخراجی شدت،

P_0 بے ضیاع، غیر سمتی اینٹینا کی اخراجی شدت

ہیں۔یاد رہے کہ غیر سمتی اینٹینا ہر سمت میں یکساں اخراج کرتی ہے لہٰذا اس کی زیادہ سے زیادہ شدت اور اوسط اخراجی شدت برابر ہوتے ہیں۔آزمودہ اینٹینا کی اخراجی شدت P'_m اور کامل اینٹینا کی اخراجی شدت P_m کی شرح اینٹینا کی کارگزاری k دیتی ہے۔یہ وہی k ہے جسے مساوات 15.53 میں بھی حاصل کیا گیا۔یوں

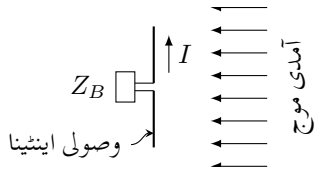
$$G_0 = \frac{kP_m}{P_0} = kD \tag{15.76}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہ مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی کامل اینٹینا ($k = 100\,\%$) کی افزائش، کامل غیر سمتی اینٹینا کی نسبت سے، اسی اینٹینا کی سمتیت کے برابر ہوتی ہے۔ غیر کامل $k < 100\,\%$ اینٹینا کی صورت میں افزائش کی قیمت سمتیت سے کم ہو گی۔

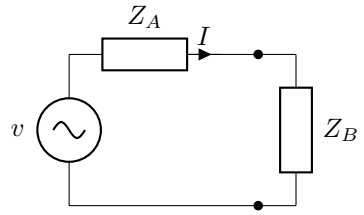
سمتیت کی قیمت 1 تا ∞ ممکن ہے۔سمتیت کی قیمت اکائی سے کم نہیں ہو سکتی۔اس کے برعکس افزائش کی قیمت صفر تا لا محدود ممکن ہے۔

$$1 \leq D \leq \infty$$

$$0 \leq G \leq \infty \qquad \text{ممکنہ قیمت}$$



الف: آمدی موج میں تر وصولی اینٹینا



ب: اینٹینا کے ساتھ برقی رکاوٹ جوڑا گیا ہے

شکل 15.7: وصولی اینٹینا آمدی موج سے طاقت حاصل کر کے برقی رکاوٹ کو فراہم کرتی ہے۔

اخراجی اینٹینا[24] شعاعی اخراج کرتی ہے۔اس کے برعکس وصولی اینٹینا[25] شعاع سے طاقت وصول کرتی ہے۔برقی و مقناطیسی امواج جب وصولی اینٹینا پر پہنچتے ہیں تو وصولی اینٹینا ان سے طاقت حاصل کرتی ہے۔اگر اینٹینا کے برقی سروں پر بیرونی مزاحمت R_B نسب کی جائے تو حاصل کردہ طاقت کا کچھ حصہ اس مزاحمت میں ضائع ہو گا۔ہم چونکہ بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت $W = I^2R_B$ میں دلچسپی رکھتے ہیں لہٰذا اسی کی بات کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔بیرونی مزاحمت کو فراہم طاقت I^2R_B کے برابر طاقت آمدی موج کے رقبہ S میں پایا جاتا ہے۔یوں

$$\mathscr{P}S = I^2R_B \tag{15.77}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ اینٹینے کا رقبہ S ہی ہے اور اینٹینا اتنے رقبے پر آمدی موج سے مکمل طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی برقی سروں تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔اس فرضی رقبے کو وصولی رقبہ[26] کہا جاتا ہے۔یوں وصولی رقبے کو

$$S = \frac{I^2R_B}{\mathscr{P}} \tag{15.78}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں

A اینٹینا کا فرضی رقبہ، m^2

I موثر برقی رو، A

$\mathscr{P}$ آمدی موج کا پوئنٹنگ سمتیہ، $\mathrm{W/m}^2$

R_L برقی مزاحمت، Ω

ہیں۔حقیقت میں اینٹینا I^2R_B سے زیادہ طاقت حاصل کرتی ہے جس کا کچھ حصہ اینٹینا کے اندر ہی ضائع ہو جاتا ہے۔ہمیں اینٹینا کے اندر ضائع ہونے والے طاقت سے کوئی دلچسپی نہیں ہے۔

شکل 15.7-الف میں آمدی موج میں تر اینٹینا دکھایا گیا ہے جسے بیرونی برقی رکاوٹ Z_B کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔اینٹینا کا تھونن[27] مساوی دور استعمال کرتے ہوئے، شکل-ب میں اسی کا مکمل برقی دور دکھایا گیا ہے۔اس دور میں سلسلہ وار برقی رو

$$I = \frac{v}{Z_A + Z_B} = \frac{v}{R_A + R_B + j(X_A + X_B)}$$

ہو گی جہاں

---

[23] gain
[24] transmitting antenna
[25] receiving antenna
[26] antenna aperture
[27] Thevenin equivalent circuit

v اینٹینا میں آمدی موج سے پیدا موثر برقی دباو،

R_A اینٹینا کے تھونن مساوی دور میں اینٹینا کی مزاحمت،

X_A تھونن دور میں اینٹینا کی متعاملیت،

R_B بیرونی مزاحمت،

X_B بیرونی متعاملیت

ہیں۔یوں بیرونی مزاحمت کو مہیا طاقت

$$|I|^2 R_B = \frac{v^2 R_B}{(R_A+R_B)^2+(X_A+X_B)^2} \tag{15.79}$$

ہو گا جس سے اینٹینے کا رقبہ وصولی

$$S = \frac{v^2 R_B}{\mathscr{P}\left[(R_A+R_B)^2+(X_A+X_B)^2\right]} \tag{15.80}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آمدی موج کی نسبت سے ایک مخصوص انداز میں رکھے ہوئے اینٹینا میں زیادہ سے زیادہ برقی دباو پیدا ہو گا۔اسی جگہ اینٹینا کو رکھتے ہوئے بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت اس صورت منتقل ہو گی جب

$$R_B = R_A \tag{15.81}$$

$$X_B = -X_A \tag{15.82}$$

ہوں۔بے ضیاع اینٹینا کی تھونن مزاحمت دراصل اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r ہی ہے۔اس طرح بیرونی مزاحمت میں زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرتے وقت زیادہ سے زیادہ وصولی رقبہ

$$S_{\text{موثر}} = \frac{v^2}{4\mathscr{P}R_r} \tag{15.83}$$

حاصل ہو گا جسے اینٹینا کا موثر رقبہ[28] $S_{\text{موثر}}$ پکارا جاتا ہے۔ہر اینٹینا مخصوص قیمت کا موثر رقبہ رکھتا ہے۔

مثال 15.4: پورے مختصر جفت قطب پر یکساں برقی رو تصور کرتے ہوئے، اس کا موثر رقبہ حاصل کریں۔

حل:مساوات 15.83 سے ظاہر ہے کہ موثر رقبہ دریافت کرنے کے لئے، اینٹینا میں پیدا برقی دباو v، اینٹینا کی اخراجی مزاحمت R_r اور آمدی موج میں کثافت طاقت $\mathscr{P}$ درکار ہوں گے۔جفت قطب میں زیادہ سے زیادہ برقی دباو اس صورت پیدا ہو گی جب اینٹینا کی تار اور آمدی موج کا برقی میدان متوازی ہوں۔ایسی صورت میں اینٹینا میں

$$v = El \tag{15.84}$$

---

[28] effective aperture

برقی دباو پیدا ہو گی۔آمدی موج کی پوئنٹنگ سمتیہ

$$\mathscr{P} = \frac{E^2}{Z_0} \qquad (\mathrm{W/m^2}) \tag{15.85}$$

ہے جہاں $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ خالی خلاء کی قدرتی رکاوٹ ہے۔مساوات 15.49 میں $I = I_0$ پر کرنے سے موجودہ جفت قطب کی اخراجی مزاحمت

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{15.86}$$

حاصل ہوتی ہے۔ان تمام کو مساوات 15.83 میں پر کرتے ہوئے

$$S_{\text{موثر}} = \frac{E^2 l^2}{4\frac{E^2}{Z_0} 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2} = \frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0.119\lambda^2 \qquad (\mathrm{m^2}) \tag{15.87}$$

یوں کامل مختصر جفت قطب کی لمبائی جتنی بھی کم کیوں نہ ہو یہ ہر صورت $0.119\lambda^2$ موثر رقبے پر آمدی موج سے تمام طاقت حاصل کرنے اور اسے بیرونی مزاحمت تک منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔حقیقی جفت قطب غیر کامل ہو گا لہٰذا اس کی مزاحمت $R_{\text{اخراجی}} + R_{\text{ضائع}}$ ہو گی۔یوں کامل جفت قطب کا موثر رقبہ کچھ کم ہو گا۔

آئیں ایسے اینٹینا کی بات کریں جس کا موثر رقبہ $S_{\text{موثر}}$ اور اخراجی ٹھوس زاویہ Ω_A ہو۔موثر رقبے پر یکساں برقی میدان E_m کی صورت میں اخراجی طاقت

$$P = \frac{E_m^2}{Z} S_{\text{موثر}} \tag{15.88}$$

ہو گا جہاں Z انتقالی خطے کی قدرتی رکاوٹ ہے۔

اگر r فاصلے پر میدان E_r ہو تب اخراجی طاقت

$$P = \frac{E_r^2}{Z} r^2 \Omega_A \tag{15.89}$$

ہو گا۔

ہم آگے جا کر ایک نتیجہ حاصل کریں گے جس کے تحت $E_r = \frac{E_m A_{\text{موثر}}}{r\lambda}$ ہے۔اس نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا دو مساوات کو برابر لکھتے ہوئے

$$\lambda^2 = A_{\text{موثر}} \Omega_A \qquad (\mathrm{m^2}) \tag{15.90}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

λ طول موج،

$A_{\text{موثر}}$ اینٹینا کا موثر رقبہ اور

Ω_A اینٹینا کا اخراجی ٹھوس زاویہ

ہیں۔اس مساوات کے تحت اینٹینا کا موثر رقبہ ضرب اخراجی ٹھوس زاویہ برابر ہوتا ہے طول موج کا مربع۔یوں اگر ہمیں موثر رقبہ معلوم ہو تب ہم اخراجی ٹھوس زاویہ حاصل کر سکتے ہیں اور اگر اخراجی ٹھوس زاویہ معلوم ہو تب موثر رقبہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 15.69 میں مساوات 15.90 پر کرنے سے

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{\text{موثر}} \tag{15.91}$$

لکھا جا سکتا ہے۔سمتیت کی یہ تیسری مساوات ہے۔تینوں کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\begin{aligned} D &= \frac{P(\theta,\phi)_{\text{بلند تر}}}{P_{\text{اوسط}}} \\ D &= \frac{4\pi}{\Omega} \\ D &= \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{\text{موثر}} \end{aligned} \tag{15.92}$$

جہاں پہلی دو مساوات میں سمتیت اخراجی شعاع کے نقش سے حاصل کی گئی ہے جبکہ تیسری مساوات میں اسے موثر رقبے سے حاصل کیا گیا ہے۔

15.7 قطاری ترتیب

مسئلہ اینٹینا دراصل اینٹینا کے مختلف حصوں سے پیدا میدانوں کا درست مجموعہ حاصل کرنا ہے۔اینٹینا کے مختلف حصوں کے میدان جمع کرتے ہوئے ان کے انفرادی حیطے اور زاویائی فرق کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

15.7.1 غیر سمتی، دو نقطہ منبع

دو عدد نقطہ منبع کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔دونوں منبع غیر سمتی ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ d ہے۔نقطہ منبع سے مراد ایسی فرضی منبع ہے جس کا حجم صفر کے برابر ہو۔ ہم آگے چل کر مسئلہ متکافیت[29] دیکھیں گے جس کے تحت نقطہ منبع کے قطاروں کا اخراجی نقش اور انہیں کا وصولی نقش بالکل یکساں ہوتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ دونوں منبع برابر حیطے اور ہم قدم میدان پیدا کرتے ہیں۔دونوں میدان کے خطی تقطیب ہیں۔مزید یہ کہ دونوں کے $\boldsymbol{E}$ میدان صفحے کے عمودی ہیں۔دونوں منبع سے برابر فاصلے پر ان کے بالکل درمیانے مقام پر زاویائی صفر تصور کرتے ہوئے، دور میدان کو

$$E = E_2 e^{j\frac{\psi}{2}} + E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} \tag{15.93}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\psi = \beta d \cos\theta = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos\theta \tag{15.94}$$

ہے۔ان مساوات میں

[29] reciprocity

E_1 منبع-1 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان،

E_2 منبع-2 کا زاویہ θ سمت میں دور میدان اور

ψ دونوں اشارات کا زاویہ θ کی سمت میں زاویائی فرق

ہیں۔دونوں دور میدان برابر $(E_1 = E_2)$ ہونے کی صورت میں یوں

$$E = E_1 \left(e^{j\frac{\psi}{2}} + e^{-j\frac{\psi}{2}}\right) = 2E_1 \cos\frac{\psi}{2} \tag{15.95}$$

ہو گا۔ فاصلہ $d = \frac{\lambda}{2}$ کی صورت میں میدان کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اگر زاویائی صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام کی جگہ منبع-1 پر چنا جاتا تب دور میدان

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 e^{j\psi} \\ &= \left(E_1 e^{-j\frac{\psi}{2}} + E_2 e^{j\frac{\psi}{2}}\right) e^{j\frac{\psi}{2}} \end{aligned} \tag{15.96}$$

حاصل ہوتا جو $E_1 = E_2$ کی صورت میں

$$E = 2E_1 \cos\frac{\psi}{2} e^{j\frac{\psi}{2}} = 2E_1 \cos\frac{\psi}{2} \angle \frac{\psi}{2} \tag{15.97}$$

حاصل ہوتا۔میدان کا نقش چونکہ میدان کے حیطے پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا اس میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوئی البتہ میدان کا زاویہ تبدیل ہو گیا ہے۔میدان کے زاویے کی تبدیلی کی وجہ یہ ہے کہ ہم نے زاویے کے صفر کو دونوں منبع کے درمیانے مقام سے ہٹا کر منبع-1 پر چنا ہے۔

15.7.2 ضرب نقش

گزشتہ حصے میں بالکل یکساں دو عدد غیر سمتی نقطہ منبع کے میدان پر غور کیا گیا۔اگر نقطہ منبع سمتی ہوں اور دونوں کے نقش بالکل یکساں ہوں تب بھی مساوات 15.95 (یا مساوات 15.97) ہی ان کا مجموعی میدان دے گا پس فرق اتنا ہے کہ اب E_1 از خود θ کا تفاعل $E(\theta)$ ہے۔ انفرادی منبع کے نقش $E(\theta)$ کو انفرادی نقش[30] جبکہ $\cos\frac{\psi}{2}$ کو قطاری نقش[31] کہا جائے گا۔یوں

$$E = E(\theta) \cos\frac{\psi}{2} \tag{15.98}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 15.98 ضرب نقش[32] کا اصول بیان کرتا ہے جس کے تحت انفرادی منبع کا نقش اور غیر سمتی نقطہ منبع کے قطار کا نقش ضرب دینے سے سمتی منبع کے قطار کا نقش حاصل ہوتا ہے۔یہاں فرض کیا گیا ہے کہ قطار میں انفرادی نقطہ منبع کا نقش وہی ہے جو اس نقطہ منبع کا تنہائی میں نقش ہوتا ہے۔

---

[30] primary pattern
[31] array pattern
[32] pattern multiplication

15.7.3 ثنائی قطار

مساوات 15.97 دو غیر سمتی زاویائی طور پر ہم قدم نقطہ منبع کے جوڑی کا دور میدان دیتا ہے۔نقطہ منبع کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ اور $E_1 = \frac{1}{2}$ ہونے کی صورت میں اس مساوات کو

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{15.99}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس نقش کو شکل میں دکھایا گیا ہے جس میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔ اس جوڑی منبع کے سیدھ میں $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر منبع کی دوسری جوڑی رکھنے سے شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔اس شکل میں دو درمیانے منبع دراصل ایک ہی نقطے پر پائے جائیں گے لیکن وضاحت کی خاطر انہیں اوپر نیچے دکھایا گیا ہے۔ضرب نقش کے اصول کے تحت ان کا مجموعی میدان

$$E = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{15.100}$$

ہو گا جسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔اس مساوات پر شق کرنے والوں کے لئے مثال میں تفصیلی ثبوت پیش کیا گیا ہے۔

اس قطار کو تین عدد منبع کی قطار تصور کیا جا سکتا ہے جہاں قطار میں بالترتیب، منبع کی طاقت $(1:2:1)$ نسبت سے ہے۔اس تین رکنی قطار کے سیدھ میں لیکن $\frac{\lambda}{2}$ ہٹ کر بالکل ایسی ہی تین رکنی قطار رکھنے سے شکل حاصل ہوتی ہے۔اس نئی قطار کو چار رکنی تصور کیا جا سکتا ہے جہاں بالترتیب منبع کی طاقت $(1:3:3:1)$ نسبت سے ہے۔ اس چار رکنی قطار کا میدان

$$E = \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{15.101}$$

ہے۔اس نقش میں بھی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا۔اسی طرح بڑھتے ہوئے، ثانوی شعاع سے پاک، زیادہ سے زیادہ سمتیت کا نقش حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں زیادہ منبع پر مبنی قطار میں منبع کی طاقت ثنائی تسلسل[33] کے ثنائی سر[34] کی نسبت سے ہوتے ہیں۔ ثنائی سروں کو شکل میں دکھائے گئے پاسکل تکون[35] کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس میں ہر اندرونی عدد، اوپر کے قریبی دو اعداد کا مجموعہ ہوتا ہے۔متعدد منبع کے قطار کا نقش

$$E = \cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{15.102}$$

کے برابر ہو گا جہاں قطار میں منبع کی تعداد n ہے۔

اگرچہ مندرجہ بالا n رکنی قطار کے نقش میں کوئی ثانوی شعاع نہیں پایا جاتا اس کے باوجود اس کی سمتیت برابر طاقت کے n رکنی منبع کے قطار سے کم ہوتی ہے۔حقیقی قطار عموماً ان دو صورتوں (ثنائی قطار اور یکساں قطار) کی درمیانی شکل رکھتے ہیں۔

مثال 15.5: مساوات 15.100 کو ثابت کریں۔

---

[33] binomial series
[34] binomial coefficient
[35] Pascal triangle

حل: مساوات 15.96 کی طرح زاویائی صفر کو قطار کے پہلی رکن پر چنتے ہوئے

$$\begin{aligned} E &= E_0 + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j\psi} + E_0 e^{j2\psi} \\ &= E_0\left(1+e^{j\psi}\right) + E_0 e^{j\psi}\left(1+e^{j\psi}\right) \\ &= E_0\left(1+e^{j\psi}\right)\left(1+e^{j\psi}\right) \\ &= E_0\left(1+e^{j\psi}\right)^2 \end{aligned}$$

جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \frac{\pi}{2}\cos\theta$ پر کرتے ہوئے

$$E = \left[\left(\frac{e^{-j\frac{\psi}{2}} + e^{j\frac{\psi}{2}}}{2}\right) e^{j\frac{\psi}{2}}\right]^2 = \cos^2\frac{\psi}{2}\,\underline{/\psi}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کا حیطہ $\cos^2\frac{\psi}{2}$ نقش کی مساوات ہے۔

مثال 15.6: مساوات 15.102 کو تفصیل سے ثابت کریں۔

ثنائی قطار میں رکن کے طاقت ثنائی تسلسل کے سر کی نسبت سے ہوتے ہیں۔یوں $n+1$ رکنی قطار میں بالترتیب رکن کے طاقت $(1+x)^n$ کی ثنائی تسلسل

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \tag{15.103}$$

کے سر سے حاصل کئے جاتے ہیں۔یوں تین رکنی قطار کے سر ثنائی تسلسل

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \tag{15.104}$$

کے سر کی نسبت $1:2:1$ سے ہوں گے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات میں $x = e^{j\psi}$ پر کرنے سے تین رکنی قطار کا دور میدان مندرجہ بالا مساوات کے بائیں یا دائیں ہاتھ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$E = E_0\left(1+e^{j\psi}\right)^2 = E_0(1 + 2e^{j\psi} + e^{j2\psi}) \tag{15.105}$$

تین رکنی قطار کو دیکھ کر دور میدان مندرجہ بالا مساوات کی دائیں ہاتھ دیتی ہے جسے ثنائی تسلسل کی مدد سے مساوات کی بائیں ہاتھ کی صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔مساوات کے بائیں ہاتھ سے نقش $\cos^2\frac{\psi}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح n رکنی قطار کو $(1+x)^{n-1}$ کی ثنائی تسلسل کی مدد سے اکھٹے کرتے ہوئے

$$E = E_0\left(1+e^{j\psi}\right)^{n-1} \tag{15.106}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $E_0 = \frac{1}{2}$ اور $\psi = \pi\cos\theta$ پر کرتے ہوئے صرف حیطہ لیتے ہوئے قطار کا نقش

$$E = \cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \tag{15.107}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

15.7.4 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار

ثنائی قطار غیر یکساں رکنی قطار ہے۔آئیں شکل میں دکھائے گئے n رکنی، غیر سمتی، یکساں طاقت کے منبع کی قطار کا دور میدان حاصل کریں۔یہاں فرض کیا جاتا ہے کہ قطار میں ہر دو قریبی منبع میں δ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔یوں

$$\psi = \beta d \cos\theta + \delta \tag{15.108}$$

ہو گا۔قطار کا دور میدان

$$E = E_0 \left(1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \cdots + e^{j(n-1)\psi}\right) \tag{15.109}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

d قطار میں رکن کے درمیان فاصلہ،

δ ہر دو قریبی رکن کے درمیان زاویائی فرق اور

ψ دو قریبی رکن میں کل زاویائی فرق یعنی $\psi = \beta d \cos\theta + \delta$

ہیں۔

اس میں $e^{j\psi} = x$ پر کرنے سے جانی پہچانی تسلسل

$$E_0 \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}\right)$$

حاصل ہوتی ہے جس کا مجموعہ

$$E_0 \left(\frac{1 - x^n}{1 - x}\right)$$

کے برابر ہے۔

مساوات 15.109 کو $e^{j\psi}$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$Ee^{j\psi} = E_0 \left(e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \cdots + e^{jn\psi}\right) \tag{15.110}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 15.109 سے مساوات 15.110 منفی کر کے E کے لئے حل کرتے ہوئے

$$E = E_0 \frac{1 - e^{jn\psi}}{1 - e^{j\psi}} = E_0 \frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \underline{/(n-1)\frac{\lambda}{2}} \tag{15.111}$$

حاصل ہوتا ہے۔اگر قطار کے درمیانے نقطے کو زاویائی صفر چنا جاتا تب مندرجہ بالا مساوات میں زاویہ $\underline{/(n-1)\frac{\lambda}{2}}$ نہ پایا جاتا۔تمام رکن غیر سمتی ہونے کی صورت میں E_0 ہر رکن کا انفرادی نقش ہو گا جبکہ $\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$ قطاری نقش ہے۔

غیر سمتی منبع اور زاویائی صفر کا مقام قطار کے درمیانے نقطے پر رکھتے ہوئے

$$E = E_0 \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \tag{15.112}$$

ہو گا۔قطار کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\psi \to 0$ کی صورت میں پائی جائے گی۔چونکہ $\psi = 0$ پر مندرجہ بالا مساوات $E = \frac{0}{0}$ دیتا ہے جو بے معنی[36] ہے لہٰذا ہمیں ال ہوس پٹل[37] کا قاعدہ استعمال کرنا ہو گا جس کے تحت اگر تفاعل $y = \frac{m(x)}{n(x)}$ کی قیمت $x \to a$ پر $y = \frac{0}{0}$ حاصل ہو تب قیمت $y = \frac{\partial m/\partial x}{\partial n/\partial x}$ سے حاصل ہو گی۔یوں مندرجہ بالا مساوات سے $\psi \to 0$ پر

$$\begin{aligned} E &= E_0 \left. \frac{\frac{\partial \sin \frac{n\psi}{2}}{\partial \psi}}{\frac{\partial \sin \frac{\psi}{2}}{\partial \psi}} \right|_{\psi \to 0} \\ &= E_0 \left. \frac{\frac{n}{2} \cos \frac{n\psi}{2}}{\frac{1}{2} \cos \frac{\psi}{2}} \right|_{\psi \to 0} \end{aligned}$$

یعنی

$$E = nE_0 \tag{15.113}$$

حاصل ہوتا ہے جو قطار کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ میدان ہے۔یہ میدان قطار میں انفرادی منبع کے طاقت سے n گنا زیادہ ہے۔ اس قطار کے نقش کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس زاویے پر پائی جائے گی جس پر $\psi = 0$ یعنی

$$\beta d \cos \theta + \delta = 0 \tag{15.114}$$

ہو جس سے

$$\theta_{\text{بلندتر طاقت}} = \cos^{-1} \left(-\frac{\delta}{\beta d} \right) \tag{15.115}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح اخراجی نقش کا صفر اس مقام پر ہو گا جہاں مساوات 15.112 صفر کے برابر ہو یعنی جہاں $\frac{n\psi}{2} = \mp k\pi$ کے برابر ہو یعنی

$$\frac{n}{2} \left(\beta d \cos \theta + \delta \right) = \mp k\pi \tag{15.116}$$

جس سے صفر اخراج کا زاویہ

$$\theta_0 = \cos^{-1} \left[\left(\mp \frac{2k\pi}{n} - \delta \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \right] \tag{15.117}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

θ_0 صفر اخراج کا زاویہ،

---

[36] indeterminate
[37] L Hospital's rule

k اعداد $k=1,2,3,\cdots$ ممکن ہے جہاں $k \neq mn$ کی شرط لاگو ہے جس میں $m=1,2,3,\cdots$ کے برابر ہے۔

مساوات 15.112 کو مساوات 15.113 سے تقسیم کرتے ہوئے تقابل پذیر میدان E_n

$$E_n = \frac{E}{nE_0} = \frac{1}{n}\frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \tag{15.118}$$

حاصل ہوتا ہے۔

15.7.5 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: چوڑائی جانب اخراجی قطار

نقش کی چوٹی اس مقام پر پائی جاتی ہے جس پر $\beta d\cos\theta = -\delta$ ہو۔ قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر، چوڑائی جانب $(\theta = 90^\circ)$ زیادہ سے زیادہ اخراج $\delta = 0$ کی صورت میں ہو گا یعنی جب تمام انفرادی منبع ہم قدم ہوں۔ اگر θ کی جگہ اس کا زاویہ تکملہ[38] γ استعمال کیا جائے تب نقش کے صفر

$$\gamma_0 = \sin^{-1}\left(\mp\frac{k\lambda}{nd}\right) \tag{15.119}$$

پر پائے جائیں گے۔لمبی قطار $nd \gg k\lambda$ کی صورت میں γ_0 کم قیمت کا ہو گا لہٰذا اسے

$$\gamma_0 = \frac{k}{nd/\lambda} \approx \frac{k}{L/\lambda} \tag{15.120}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں قطار کی لمبائی $L=(n-1)d$ ہے۔لمبائی کو $n \gg 1$ کی صورت میں

$$L = (n-1)d \approx nd$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 15.120 میں $k=1$ پر کرتے ہوئے نقش کا پہلا صفر γ_{01} حاصل ہوتا ہے۔یوں گوشے کے دونوں اطراف پر پہلے صفروں کے درمیان نقش کی چوڑائی

$$\text{پہلے صفر کے مابین نقش کی چوڑائی} = \gamma_{01} \approx \frac{2}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{114.6^\circ}{L/\lambda} \tag{15.121}$$

حاصل ہوتی ہے۔نقش میں زیادہ سے زیادہ طاقت کے زاویے کے دونوں اطراف وہ زاویے پائے جاتے ہیں جن پر طاقت نصف ہوتی ہے۔ان کے درمیان زاویے کو نصف طاقت چوڑائی[39] ، کہتے ہیں۔لمبے یکساں چوڑائی جانب اخراجی قطار[40] کے نصف طاقت چوڑائی کی قیمت پہلی صفر چوڑائی[41] کے تقریباً آدھی ہوتی ہے۔یوں

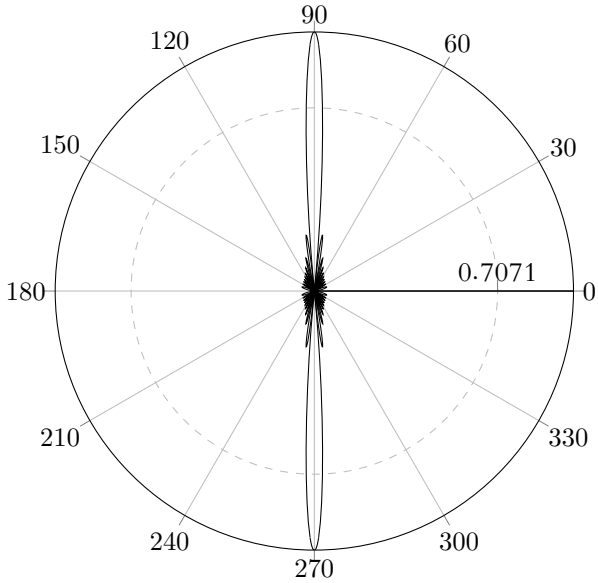
$$\text{نصف طاقت چوڑائی} \approx \frac{\text{پہلے صفر کے مابین نقش کی چوڑائی}}{2} = \frac{1}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{57.3^\circ}{L/\lambda} \tag{15.122}$$

ہو گی۔

شکل 15.8 میں چوڑائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر نقش دکھایا گیا ہے۔یہ نقش مساوات 15.118 سے حاصل کیا گیا ہے۔اس قطار میں منبع $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر رکھے گئے ہیں۔ بیس عدد برابر طاقت کے منبع پر مبنی اس قطار کی نصف طاقت چوڑائی $\theta^\circ_{HP} = 5.1^\circ$ ہے۔شکل میں نقش کا تراش دکھایا گیا ہے۔یہ حقیقت میں چرخی مانند ہے لہٰذا $\phi = 0^\circ$ تا $\phi = 360^\circ$ گھومتے ہوئے اس کی صورت یہی نظر آئے گی۔یوں ϕ زاویے پر اس کی نصف طاقت چوڑائی $\phi^\circ_{HP} = 360^\circ$ ہے۔

---

[38] complementary angle
[39] half power beam width, HPBW
[40] broadside array
[41] beam width between first nulls, BWFN



شکل 15.8: چوڑائی جانب اخراجی قطار

15.7.6 یکساں طاقت کے متعدد رکن پر مبنی قطار: لمبائی جانب اخراجی قطار

زیادہ سے زیادہ اخراج کا زاویہ مساوات 15.114

$$\beta d \cos\theta + \delta = 0 \tag{15.123}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔قطار کے سیدھ میں کھڑے ہو کر سیدھا آگے $(\theta = 0)$ لمبائی کی جانب زیادہ سے زیادہ اخراج اس صورت ہو گا جب ہر دو قریبی منبع کے مابین

$$\delta = -\beta d \tag{15.124}$$

زاویائی فرق پایا جاتا ہو۔یوں ایسے قطار کے صفر مساوات 15.116 کے تحت

$$\frac{n}{2}\beta d\left(\cos\theta_0 - 1\right) = \mp k\pi$$

یعنی

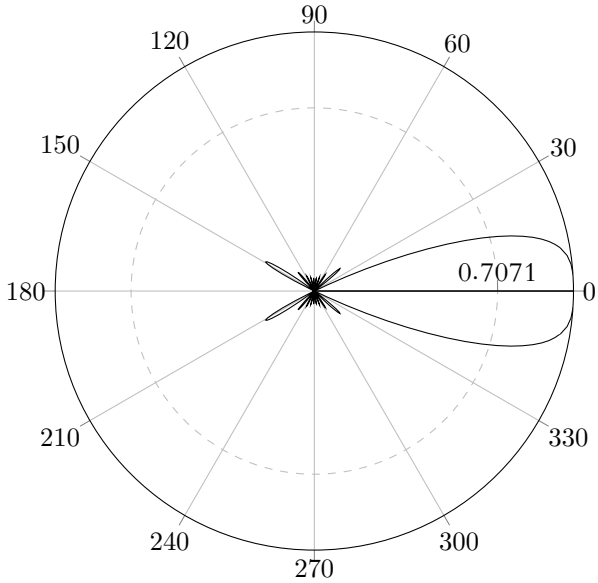
$$\cos\theta_0 - 1 = \mp\frac{k}{nd/\lambda}$$

سے حاصل ہوں گے۔اس سے

$$\frac{\theta_0}{2} = \sin^{-1}\left(\mp\sqrt{\frac{k}{2nd/\lambda}}\right) \tag{15.125}$$

لکھا جا سکتا ہے۔لمبی قطار $(nd \gg k\lambda)$ کی صورت میں اسے

$$\theta_0 = \mp\sqrt{\frac{2k}{nd/\lambda}} \approx \mp\sqrt{\frac{2k}{L/\lambda}} \tag{15.126}$$



شکل 15.9: لمبائی جانب اخراجی قطار

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمبائی $L = (n-1)d$ کو $(nd \gg k\lambda)$ کی صورت میں $L \approx= nd$ لکھا گیا ہے۔پہلا صفر $k = 1$ پر حاصل ہو گا جس سے پہلی صفر چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\theta_{01} \approx 2\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}}\,\text{rad} = 114.6^\circ\sqrt{\frac{2}{L/\lambda}} \tag{15.127}$$

حاصل ہوتی ہے۔

بیس منبع پر مبنی، لمبائی جانب اخراجی قطار کا تقابل پذیر اخراجی نقش شکل 15.9 میں دکھایا گیا ہے۔یہ نقش مساوات 15.118 سے حاصل کیا گیا ہے۔منبع کے درمیانی فاصلہ $\frac{\lambda}{2}$ ہے۔مساوات 15.118 سے پہلی صفر چوڑائی 52° اور نصف طاقت چوڑائی $\theta_{HP}^\circ = 34^\circ$ حاصل ہوتی ہے۔یہ نقش جتنا چوڑا ہے یہ اتنا صفحہ کے عمودی جانب موٹا بھی ہے۔یوں ϕ جانب بھی اس کی نصف طاقت چوڑائی $\phi_{HP}^\circ = 34^\circ$ ہی ہے۔لمبائی جانب اخراجی لمبی قطار کی نصف طاقت چوڑائی اس کے پہلے صفر چوڑائی کے تقریباً $\frac{2}{3}$ گنا ہوتی ہے۔

جیسے مثال 15.7 اور مثال 15.8 میں آپ دیکھیں گے کہ n عدد منبع پر مبنی لمبائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت n عدد منبع پر مبنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کی سمتیت سے زیادہ ہوتی ہے۔

مساوات 15.69 اینٹینا کی سمتیت

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \tag{15.128}$$

دیتا ہے جہاں ٹھوس زاویہ مساوات 15.65 سے حاصل ہوتا ہے۔اگر ثانوی شعاعوں کو نظرانداز کیا جائے تب مرکزی شعاع کے θ سمت میں نصف طاقت زاویے θ_{HP} اور ϕ سمت میں نصف طاقت زاویے ϕ_{HP} کا ضرب تقریباً ٹھوس زاویے کے برابر ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں مساوات 15.65 حل کرنا ضروری نہیں اور سمتیت کو

$$D \approx \frac{4\pi}{\phi_{HP}\phi_{HP}} \tag{15.129}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں نصف طاقت زاویے ریڈیئن میں ہیں۔اس مساوات میں

$$4\pi\,\mathrm{sr} = 4\pi\,\mathrm{rad}^2 = 4\pi\left(\frac{180}{\pi}\right)^2\ \mathrm{deg}^2 = 41\,253\,\mathrm{deg}^2$$

پر کرتے ہوئے

$$D \approx \frac{41\,253}{\theta^\circ_{HP}\phi^\circ_{HP}} \tag{15.130}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 15.7: بیس رکنی، چوڑائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta^\circ_{HP} = 5.1^\circ$ اور $\phi^\circ_{HP} = 360^\circ$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.130 سے

$$D \approx \frac{41\,253}{5.1 \times 360} = 22.5$$

حاصل ہوتی ہے۔

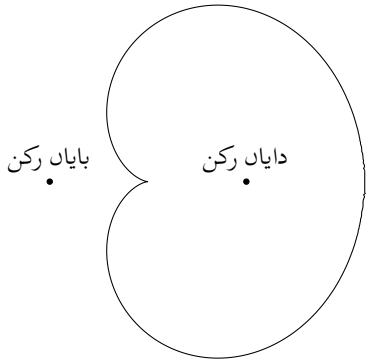
مثال 15.8: بیس رکنی، لمبائی جانب اخراجی قطار جس میں ارکان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلے پر ہیں کے نصف طاقت زاویے $\theta^\circ_{HP} = \phi^\circ_{HP} = 34^\circ$ ہیں کی سمتیت حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.130 سے

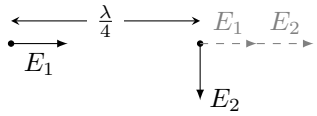
$$D \approx \frac{41\,253}{34 \times 34} = 35.7$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 15.9: دو ارکان پر مبنی قطار میں ارکان کے درمیان فاصلہ $\frac{\lambda}{4}$ ہے۔ دائیں رکن کو 90° پیچھے برقی رو مہیا کی گئی ہے۔دونوں برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہے۔دونوں ارکان افقی سطح کے عمودی کھڑے ہیں۔افقی میدان میں اخراجی نقش حاصل کریں۔



دو رکنی قطار کا نقش



الف: دو رکنی نشریاتی قطار اور میدان

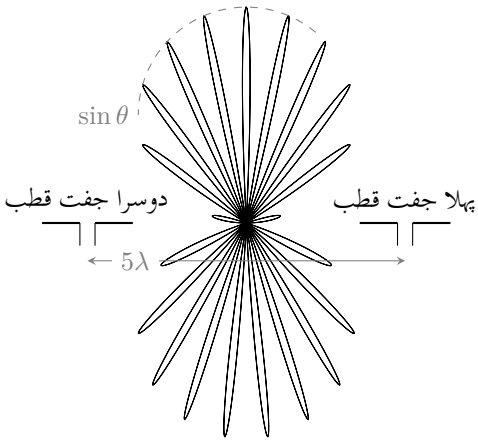
شکل 15.10: دو رکنی اشاعتی قطار اور اس کا نقش

حل:برقی رو کی حتمی قیمت برابر ہونے کی صورت میں $|E_1| = |E_2|$ ہوں گے۔اگر لمحہ $t = 0$ پر بائیں رکن (رکن-1) کا برقی میدان $0°$ پر ہو تب اسی لمحہ دائیں رکن (رکن-2) کا میدان $-90°$ پر ہو گا۔شکل 15.10-الف میں ان میدان (E_1 اور E_2) کو گاڑھی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ چونکہ دونوں ارکان میں $\frac{\lambda}{4}$ کا فاصلہ ہے لہٰذا جتنی دیر میں بائیں رکن کا میدان E_1 چل کر دائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دوری عرصے کے $\frac{1}{4}$ برابر وقت گزر چکا ہو گا لہٰذا رکن-2 میں برقی رو $\frac{1}{4} \times 360° = 90°$ آگے بڑھ چکی ہو گی اور یوں یہ اس لمحہ $0°$ پر ہی میدان پیدا کرے گا۔یوں رکن-2 پر دونوں میدان ہم قدم پائے جائیں گے لہٰذا یہاں برقی میدان $E_1 + E_2$ یعنی دگنا ہو گا۔شکل 15.10-الف میں کچھ دیر بعد کے ان میدان کو ہلکی سیاہی میں ہم قدم دکھایا گیا ہے۔دونوں میدان دائیں جانب ہم قدم رہتے ہوئے حرکت کریں گے۔

اس کے برعکس جس لمحہ دائیں رکن کی برقی رو $0°$ پر ہو اسی لمحہ بائیں رکن کی برقی رو $90°$ پر ہو گی۔اس لمحے پر دائیں رکن کا میدان $0°$ پر ہو گا جبکہ بائیں رکن کا میدان $90°$ پر ہو گا۔اب جتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان بائیں رکن تک پہنچے گا اتنی دیر میں دائیں رکن کا میدان مزید $90°$ آگے بڑھ کر $180°$ پر پہنچ چکا ہو گا۔یوں دائیں رکن پر دونوں میدان آپس میں الٹ سمت میں ہو گے لہٰذا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔اس طرح دائیں رکن کے دائیں جانب میدان صفر ہی پایا جائے گا۔شکل 15.10 میں صفر اور پائے ریڈیئن زاویوں پر دگنا اور صفر میدان دکھایا گیا ہے۔

دونوں رکن کے درمیان عمودی لکیر پر پہنچنے کے لئے دونوں میدان کو برابر دورانیے کی ضرورت ہے لہٰذا اس لکیر پر دونوں میدان آپس میں عمودی رہیں گے۔یوں اس لکیر پر کل میدان مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے $\sqrt{E^2 + E^2} = 1.4142E$ حاصل ہو گا۔شکل 15.10-ب میں اسی طرح مختلف مقامات پر میدان حاصل کرتے ہوئے حاصل کردہ نقش دکھایا گیا ہے۔

مندرجہ بالا مثال کے نقش سے ظاہر ہے کہ یہ اینٹینا بائیں جانب اخراج نہیں کرتا لہٰذا اس کے بائیں جانب دوسرا اینٹینا نسب کیا جا سکتا ہے جس کی اخراجی سمت بائیں رکھی جائے گی تا کہ دونوں علیحدہ علیحدہ نشریات کر سکیں۔



شکل 15.11: دو عدد مختصر جفت قطب جنہیں 5λ فاصلے پر رکھا گیا ہے سے حاصل تداخل پیما کا نقش۔

15.8 تداخُل پیما

فلکیات[42] کے میدان میں اینٹینا کا کلیدی کردار ہے۔ریڈیائی فلکیات[43] میں استعمال ہونے والے اینٹینا کو تداخل پیما[44] اینٹینا کہتے ہیں۔

شکل میں دو عدد مختصر جفت قطب کے درمیان فاصلہ L ہے۔دونوں کو ہم قدم برقی رو مہیا کی گئی ہے۔ضرب نقش کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے اس کا نقش

$$E = 2E_1 \cos\frac{\psi}{2} \tag{15.131}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\psi = \beta L \cos\theta$ کے برابر ہے۔ضرب نقش کے تحت E_1 انفرادی رکن کی نقش ہے جبکہ $\cos\frac{\psi}{2}$ دو رکنی قطار کا نقش ہے۔مساوات 15.40 سے مختصر جفت قطب کا نقش $\sin\theta$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا تقابل پذیر نقش

$$E = \sin\theta \cos\frac{\psi}{2} = \sin\theta \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\cos\theta\right) \tag{15.132}$$

لکھا جا سکتا ہے۔زاویہ θ کی جگہ اس کا زاویہ تکملہ $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ استعمال کرتے ہوئے، پہلا صفر

$$\frac{\pi L}{\lambda}\cos\theta = \frac{\pi L}{\lambda}\sin\gamma_{01} = \frac{\pi}{2}$$

کی صورت میں پایا جائے گا جس سے

$$\gamma_{01} = \sin^{-1}\frac{1}{2L/\lambda} \tag{15.133}$$

حاصل ہوتا ہے۔اگر $L \gg \lambda$ ہو تب پہلی صفر چوڑائی

$$\text{پہلی صفر چوڑائی} = 2\gamma_{01} = \frac{1}{L/\lambda}\,\text{rad} = \frac{57.3}{L/\lambda}\,\text{deg} \tag{15.134}$$

---

[42] astronomy
[43] radio astronomy
[44] interferometer

لکھی جا سکتی ہے۔یہ مساوات 15.121 میں دیے، n رکنی چوڑائی جانب اخراجی قطار کے پہلی صفر چوڑائی کی آدھی قیمت ہے۔ہلکی سیاہی کے نقطہ دار لکیر سے شکل میں مختصر جفت قطب کے نقش $\sin\theta$ کو واضح کیا گیا ہے۔

ریڈیائی فلکیات میں فلکی اخراجی مادے کی شعاع کو تداخل پیما سے وصول کیا جاتا ہے۔ان کی جسامت کا حساب لگانے میں اینٹینا کی کم سے کم چوڑائی نقش کردار ادا کرتی ہے۔

15.9 مسلسل موثر رقبے کی نقش

باب 16

سوالات

موج

سوال 16.1: ہوا اور تانبے کے سرحد پر 1GHz تعدد کے موج کا جھکاو حاصل کریں۔

جواب: $0.00177°$

سوال 16.2: ہوا اور پانی $\epsilon_R = 78$ کے سرحد پر 1GHz تعدد کے موج کا جھکاو حاصل کریں۔

جواب: $6.46°$

جدول 16.1: σ

چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$	چیز	$\sigma, \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
چاندی	6.17×10^7	گریفائٹ	7×10^4
تانبا	5.80×10^7	سلیکان	1200
سونا	4.10×10^7	فیرائٹ (عمومی قیمت)	100
المونیم	3.82×10^7	سمندری پانی	5
ٹنگسٹن	1.82×10^7	چھونا پتھر	10^{-2}
جست	1.67×10^7	چکنی مٹی	5×10^{-3}
پیتل	1.50×10^7	تازہ پانی	10^{-3}
نکل	1.45×10^7	تقطیر شدہ پانی	10^{-4}
لوہا	1.03×10^7	ریتیلی مٹی	10^{-5}
قلعی	0.70×10^7	سنگ مرمر	10^{-8}
کاربن سٹیل	0.60×10^7	بیک لائٹ	10^{-9}
مینگنین	0.227×10^7	چینی مٹی	10^{-10}
جرمینیم	0.22×10^7	ہیرا	2×10^{-13}
سٹینلس سٹیل	0.11×10^7	پولیسٹرین پلاسٹک	10^{-16}
نائیکروم	0.10×10^7	کوارٹس	10^{-17}

جدول 16.2: $\sigma/\omega\epsilon$ and ϵ_R

$\sigma/\omega\epsilon$	ϵ_R	چیز
	1	خالی خلاء
	1.0006	ہوا
0.0006	8.8	المونیم اکسائڈ
0.002	2.7	عنبر
0.022	4.74	بیک لائٹ
	1.001	کاربن ڈائی آکسائڈ
	16	جرمینیم
0.001	7 تا 4	شیشہ
0.1	4.2	برف
0.0006	5.4	ابرق
0.02	3.5	نائلون
0.008	3	کاغذ
0.04	3.45	پلیکسی گلاس
0.0002	2.26	پلاسٹک (تھیلا بنانے والا)
0.000 05	2.55	پولیسٹرین
0.014	6	چینی مٹی
0.0006	4	پائریکس شیشہ (برتن بنانے والا)
0.000 75	3.8	کوارٹس
0.002	3 تا 2.5	ربڑ
0.000 75	3.8	سلیکا SiO_2
	11.8	سلیکان
0.5	3.3	قدرتی برف
0.0001	5.9	کھانے کا نمک
0.07	2.8	خشک مٹی
0.0001	1.03	سٹائروفوم
0.0003	2.1	ٹیفلان
0.0015	100	ٹائٹینیم ڈائی آکسائڈ
0.04	80	مقطر پانی
4		سمندری پانی
0.01	4 تا 1.5	خشک لکڑی

جدول 16.3: μ_R

چیز	μ_R
بسمت	0.999 998 6
پیرافین	0.999 999 42
لکڑی	0.999 999 5
چاندی	0.999 999 81
المونیم	1.000 000 65
بیریلیم	1.000 000 79
نکل	50
ڈھلواں لوہا	60
مشین سٹیل	300
فیرائٹ (عمومی قیمت)	1000
پرم بھرت (permalloy)	2500
ٹرانسفارمر پتری	3000
سیلکان لوہا	3500
خالص لوہا	4000
میو میٹل (mumetal)	20 000
سنڈسٹ (sendust)	30 000
سوپرم بھرت (supermalloy)	100 000

جدول 16.4: اہم مستقل

چیز	علامت	قیمت
الیکٹران چارج	e	$(1.602\,189\,2 \mp 0.000\,004\,6) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
الیکٹران کمیت	m	$(9.109\,534 \mp 0.000\,047) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
برقی مستقل (خالی خلاء)	ϵ_0	$(8.854\,187\,818 \mp 0.000\,000\,071) \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
مقناطیسی مستقل (خالی خلاء)	μ_0	$4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
روشنی کی رفتار (خالی خلاء)	c	$(2.997\,924\,574 \mp 0.000\,000\,011) \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$