第一章　随机事件

1. **概率的性质**:
   (1) $P(\varnothing)=0$
   (2) A_i 两两互斥, $P(\bigcup_{i=1}^n A_i)=\sum_{i=1}^n P(A_i)$
   (3) $P(\overline{A})=1-P(A)$
   (4) $P(B-A)=P(B)-P(A)$
   (5) (加法公式) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
2. **加法公式**: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
   (1) 互不相容: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
   (2) 相互独立: $P(A\cup B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$
3. **乘法公式**: $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$
   (1) 相互独立: $P(AB)=P(A)P(B)$
4. **条件概率公式**: $P(B|A)=P_B(A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$
5. **全概率公式**: $P(A)=\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$
6. **贝叶斯公式**: $P(B_i|A)=\dfrac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}$

第二章　随机变量

1. 概率密度函数 $f(x)$: $P\{a<X\leqslant b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
2. 概率分布函数: $F(x)=P\{X\leqslant x\}$
   (1) (单调不减性) $P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a)$
   (2) (有界性) $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$
   (3) $F(x)=\sum_{x_k\leqslant x} p_k$
3. $F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$
   $f(x)=F'(x)$
4. 已知连续性随机变量 X 的概率密度 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y=g(X)$ 的概率密度 $f_Y(y)$
   (1) **积分转化法** $F_Y(y)=P\{g(X)\leqslant y\}$,
   $f_Y(y)=F_Y'(y)$
   (2) **单调函数公式法** 反函数 $x=h(y)$
   $$f_Y(y)=\begin{cases} f(h(y))\cdot|h'(y)|, & a<y<b,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

离散型随机变量

1. **两点分布** $X\sim B(1,p)$
   $\boxed{P\{X=1\}=p, P\{X=0\}=1-p}$
   性质 1 $E(X)=p, D(X)=p(1-p)$
2. **二项分布** $X\sim B(n,p)$ 伯努利实验
   $\boxed{b(k;n,p)=P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}}$
   性质 1 $E(X)=np, D(X)=np(1-p)$
   性质 2 X 可表示成 n 个 $X_i\sim B(1,p)$ 的独立随机变量
   性质 3 若 X_i 相互独立, 且 $X_i\sim B(n_i,p)$,
   则 $X=\sum_{i=1}^m X_i\sim B(n,p)$
   $\hat{p}=\bar{X}/n=\sum X/(nN)$ 是 p 的矩估计和极大似然估计
3. **泊松分布** $X\sim P(\lambda)$
   $\boxed{b(k;\lambda)=P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}$
   性质 1 $E(X)=\lambda, D(X)=\lambda$
   性质 2 若 X_i 相互独立, 且 $X_i\sim P(\lambda_i)$,
   则 $X=\sum_{i=1}^m X_i\sim P(\lambda)$
   性质 3 若 X_1, X_2 相互独立, 且 $X_i\sim P(\lambda_i)$, 则条件分布 $X_i|(X_1+X_2=n)$ 是二项分布, 且 $X_i|(X_1+X_2=n)\sim B(n,\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2})$
   某医院每天前来就诊的病人数, 某地区一段时间间隔内发生火灾的次数, 一段时间间隔内容器内部细菌数, 某地一年内发生暴雨的次数, 每条床单上的疵点数.
4. $P\{X\geqslant x\}=\sum_{r=x}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-r}\lambda^r}{r!}$
5. 当 $n\to\infty, p\to 0$ 时, $b(k;n,p)\approx b(k;\lambda), \lambda=np$

连续型随机变量

1. **均匀分布** $X\sim U[a,b]$
   $$\boxed{f(x)=\begin{cases} 1/(b-a), & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}}$$
   性质 1 $E(X)=(a+b)/2, D(X)=(b-a)^2/12$
   性质 2 对任意满足 $a\leqslant c<d\leqslant d$ 的 c,d,
   有 $P\{c\leqslant X\leqslant d\}=\dfrac{d-c}{b-a}$
   性质 3 $F(X)\sim U(0,1)$
2. **指数分布** $X\sim EP(\lambda)$ 寿命分布
   $$\boxed{f(x)=\begin{cases} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}}$$
   性质 1 $E(X)=\lambda^{-1}, D(X)=\lambda^{-2}$
   性质 2 (无记忆性) $P\{X>x+y|X>y\}=P\{X>x\}$
3. **正态分布** $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 高斯分布
   $$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}}$$
   (1) 标准正态分布: $X\sim N(0,1)$
   (2) 概率密度: $\varphi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
   (3) 分布函数: $\Phi(x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$
   (4) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$
   (5) 标准正态分布上的 α 分位点, $\Phi(Z_\alpha)=1-\alpha$,
   $P\{X>Z_\alpha\}=\int_{Z_\alpha}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\alpha$
   性质 1 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$
   性质 2 $\sum_{i=1}^n c_iX_i+d\sim N\left(\sum_{i=1}^n c_i\mu_i+d, \sum_{i=1}^n c_i^2\sigma_i^2\right)$
   性质 3 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$;
   若 $X\sim N(0,1)$, 则 $Y=\sigma X+\mu\sim N(\mu,\sigma^2)$
   性质 4 $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$
   性质 5 $P\{a<X<b\}=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$
   $P\{X<b\}=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})$
   $P\{X>a\}=1-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$
   某地区成年男性的身高, 某零件长度的测量误差, 半导体器件中的热噪声电流.

第三章　随机向量

1. $F(x,y)=P\{X\leqslant x, Y\leqslant y\}$,
   $P\{X=x_i, Y=y_i\}=p_{ij}$
   (1) 离散型: $F(x,y)=\sum_{x_i\leqslant x}\sum_{y_i\leqslant y}p_{ij}$
   (2) 连续型: $F(x,y)=\int_{-\infty}^y\int_{-\infty}^x f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
   i. $f(x,y)\geqslant 0$
   ii. $F(+\infty,+\infty)=1$
   iii. $\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$
   iv. $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
2. 二维均匀分布 $f(x,y)=\begin{cases} 1/d, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$
3. 二维正态分布 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$
   $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\right.}$
4. **边缘概率分布**:
   $F_X(x)=F(x,+\infty), F_Y(x)=F(+\infty,y)$
   (1) 二维离散型随机向量: $p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}$, $p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}$
   (2) 二维连续型随机变量: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$
   $f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$
5. **条件概率密度**: $f_{X|Y}(u|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$
6. 独立性的判断: $\forall x,y$, $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$,
   对于连续型变量 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$
7. $Z=X+Y$ 的密度: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$,
   $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y$.
   (1) 相互独立: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$,
   $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$.
8. $Z=\max\{X,Y\}$ 和 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布:

$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z)$
$F_{\min}(z) = 1 - (1 - F_X(z)) \cdot (1 - F_Y(z))$

第四章　数字特征

1. **期望** $E(X)$
   (1) 离散型: $E(X) = \sum_i x_i p_i$
   (2) 连续型: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$
   (3) $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x$
   性质1 $E(c) = c$
   性质2 $E(kX) = kE(X)$
   性质3 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
   性质4 若X, Y相互独立, 则$E(XY) = E(X)E(Y)$
2. **方差** $D(X) = \mathrm{Var}(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$
   (1) 离散型: $D(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 p_i$
   (2) 连续型: $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_i - E(X)]^2 f(x) \mathrm{d}x$
   (3) (计算公式) $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$
   性质1 $D(c) = 0, D(X+c) = D(X)$
   性质2 $D(kX) = k^2 D(X), D(-X) = D(X)$
   性质3 $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X,Y)$. 若$X, Y$相互独立, 则$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$
   性质4 若X, Y相互独立, 则$D(aX \pm bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y)$
3. **协方差** $\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$
   性质1 $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
   性质2 $\mathrm{Cov}(aX+b, cY+d) = ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)$
   性质3 $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, Y)\,\mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Cov}(X_2, Y)$
   性质4 (计算公式) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
   性质5 $\mathrm{Cov}^2(X,Y) \leqslant D(X)D(Y)$, 等号成立当且仅当$\exists a, b, Y = aX + b$
4. **相关系数** $\rho_{XY} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$
   (1) $|\rho_{XY}| \leqslant 1$
   (2) 互不相关: $\rho_{XY} = 0$
5. $E\{[X - E(X)]^k\}$称为X的k阶**中心矩**
6. 记$c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$, 称$\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n \times n}$为$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的**协方差矩阵**

第五章　极限定理

1. **切比雪夫不等式**: $\forall \varepsilon > 0$,
   $P\{|X - \mu| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \sigma^2/\varepsilon^2$,
   $P\{|X - \mu| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \sigma^2/\varepsilon^2$
2. **大数定律**: X_i相互独立, $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $\forall \varepsilon > 0$,
   $\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - \mu| < \varepsilon\} = 1$.
   $\lim_{n\to\infty} P\{|n_A/n - p| < \varepsilon\} = 1$.
3. 独立同分布的**中心极限定理**:
   X_i相互独立且服从同一分布, 则$Y_n = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$的分布函数$F_n(x) = P\{Y_n \leqslant x\}$收敛于$\varPhi(x)$,
   即$\lim_{x\to\infty} F_n(x) = \varPhi(x)$.
4. (棣莫夫-拉普拉斯定理) X_i相互独立且服从$B(1,p)$, 则
   $\forall x,\ \lim\limits_{x\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right\} = \varPhi(x)$.

第六章　样本与统计量

1. **样本均值** $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 是μ的估计
2. **样本方差** $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是σ^2的估计
3. 样本标准差 $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$
4. **样本原点矩** $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$
5. **样本中心矩** $M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$
6. 样本均值的**大样本分布**: $\bar{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$.
   $F(x) \approx \varPhi\Big(\dfrac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)$,
   $P\{|\bar{X} - \mu| \leqslant c\} \approx 2\varPhi\Big(\dfrac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\Big) - 1$

正态总体的抽样分布

1. $\Gamma\Big(\dfrac{n}{2}\Big) = \begin{cases} (\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1, & n\text{为偶数}, \\ (\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)\cdots \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, & n\text{为奇数}. \end{cases}$
2. χ^2**分布** $X \sim \chi_n^2$
   X_i独立同分布于$N(0,1)$, $X = \sum_{i=1}^n X_i^2$
   $$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}}$$
   性质1 $E(X^k) = 2^k \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+k)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$,
   $E(X) = n, D(X) = 2n$
   性质2 若$X_i \sim \chi_{n_i}^2$独立同分布, 则$\sum_{i=1}^m X_i \sim \chi_n^2$, 其中$n = \sum_{i=1}^m n_i$
3. $\chi_n^2(\alpha)$为χ_n^2分布上的α分位点:
   $P\{\chi_n^2 > \chi_n^2(\alpha)\} = \int_{\chi_n^2(\alpha)}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \alpha$
4. t**分布** $T \sim t_n$ 学生分布
   $X \sim N(0,1), Y \sim \chi_n^2, T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$
   $$\boxed{f(x) = \dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\Big(1 + \dfrac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}}$$
   性质1 $E(F) = 0, D(F) = n/(n-2), n = 3, 4, \cdots$
   性质2 $Y = \dfrac{F_2 - F_1}{2\sqrt{F_1 F_2/n}} \sim t_n$
   性质3 $\dfrac{\overline{F} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$
5. $t_n(\alpha)$为t_n分布上的α分位点:
   $P\{T > t_n(\alpha)\} = \int_{t_n(\alpha)}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \alpha$
6. F**分布** $F \sim F_{m,n}$
   $X \sim \chi_m^2, Y \sim \chi_n^2, F = \dfrac{X/m}{Y/n}$
   $$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\Big(\dfrac{m}{n}\Big)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}\Big(1 + \dfrac{m}{n}x\Big)^{-\frac{m+n}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}}$$
   性质1 $E(F) = n/(n-2), n > 2$;
   $D(F) = \dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, n > 4$
   性质2 $1/F \sim F_{m,n}$
   性质3 若$X \sim t_n$, 则$X^2 \sim F_{1,n}$
7. $F_{m,n}(\alpha)$为$F_{m,n}$分布上的α分位点:
   $P\{F > F_{m,n}(\alpha)\} = \int_{F_{m,n}(\alpha)}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \alpha$
8. (基本定理) 样本X_i来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$
   (1) $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
   (2) $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$
   (3) $\bar{X}$与S^2相互独立
   (4) $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

第七章　参数估计

1. 矩估计: $\alpha_m = E(X^m), A_m = \sum X_i^m, \alpha_m(\theta_i) = A_m$
   (1) 正态分布: $\hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
   (2) 均匀分布: $\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3}\hat{\sigma}, \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3}\hat{\sigma}$
2. 极大似然估计: $\ln L(\theta) = \sum \ln f(x_i; \theta_j), \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i} = 0$
   (1) 正态分布: $\mu^* = \bar{X}, \sigma^{2*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
   (2) 泊松分布: $\lambda^* = \bar{X}$
   (3) 均匀分布: $a^* = \min\{X_i\}, b^* = \max\{X_i\}$
3. 无偏估计: $E[\hat{\theta}(X_i)] = \theta$
   (1) $E(\bar{X}) = \mu$
   (2) $E(S^2) = \sigma^2$
   (3) S不是σ的无偏估计
4. 均方误差: $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = D(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2$

(1) 无偏估计: $\mathrm{MSE}(\hat\theta)=D(\hat\theta)$
(2) 两个估计中哪个方差小, 哪个优

5. $P\{\theta\in[\hat\theta_1,\hat\theta_2]\}\geqslant 1-\alpha$
置信区间 $[\hat\theta_1,\hat\theta_2]$, 置信系数 $1-\alpha$
6. $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$, 置信系数为 $1-\alpha$
(1) μ 的置信区间: $[\bar X-\frac{\sigma}{\sqrt n}Z_{\frac{\alpha}{2}},\bar X+\frac{\sigma}{\sqrt n}Z_{\frac{\alpha}{2}}]$
σ^2 未知时: $[\bar X-\frac{S}{\sqrt n}t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}),\bar X+\frac{S}{\sqrt n}t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})]$
(2) σ^2 的置信区间: $[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}]$
7. $X_i\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y_i\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 互相独立
(1) $\bar X-\bar Y\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n)$,
或 $\frac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}\sim N(0,1)$
(2) $\frac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{1/m+1/n}}\sim t_{m+n-2}$,
其中 $S^2=\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$
(3) $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间: $[\bar X-\bar Y\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sqrt m}+\frac{\sigma_2^2}{\sqrt n}}]$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$: $[\bar X-\bar Y\pm t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2})S\sqrt{\frac{1}{\sqrt m}+\frac{1}{\sqrt n}}]$
8. 大样本参数 μ 的置信区间: $[\bar X\pm\frac{\sigma}{\sqrt n}Z_{\frac{\alpha}{2}}]$
9. 二项分布参数 p 的置信区间: $[\hat p\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat p(1-\hat p)/n}]$,
其中 $\hat p=Y_n/n=\sum_{i=1}^n X_i/n$
10. 泊松分布参数 λ 的置信区间: $[\bar X\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\bar X/n}]$

第八章　假设检验

1. 检验 H_0 有可能犯的两类错误
(1) 第一类错误“弃真”错误: H_0 正确但是被拒绝了
(2) 第二类错误“采伪”错误: H_0 错误但是被接受了
2. 检验的显著性水平: $P\{$犯第一类错误$\}\leqslant\alpha\in(0,1)$

1. 正态总体均值的检验

1. 单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 均值 μ 的检验
(1) $H_0:\mu=\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$
i. 拒绝域: $|\bar X-\mu_0|\geqslant\frac{\sigma}{\sqrt n}Z_{\frac{\alpha}{2}}$
ii. 拒绝域: $|\bar X-\mu_0|\geqslant\frac{S}{\sqrt n}t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$
(2) $H_0:\mu=\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu>\mu_0$
i. 拒绝域: $\bar X-\mu_0\geqslant\frac{S}{\sqrt n}t_{n-1}(\alpha)$
2. 两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 均值的比较
(1) $H_0:\mu_1=\mu_2\leftrightarrow H_1:\mu_1\neq\mu_2$
i. 拒绝域: $|\bar X-\bar Y|\geqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}$
ii. 拒绝域: $|\bar X-\bar Y|\geqslant t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{m+n}{mn}}S$
(2) $H_0':\mu_1-\mu_2\geqslant 0\leftrightarrow H_1':\mu_1-\mu_2<0$
i. 拒绝域: $\bar X-\bar Y\leqslant -t_{m+n-2}(\alpha)\sqrt{\frac{m+n}{mn}}S$
(3) $H_0'':\mu_1-\mu_2\leqslant 0\leftrightarrow H_1'':\mu_1-\mu_2>0$
i. 拒绝域: $\bar X-\bar Y\geqslant t_{m+n-2}(\alpha)\sqrt{\frac{m+n}{mn}}S$
3. 成对数据的 t 检验
(1) $H_0:\mu=0\leftrightarrow H_1:\mu\neq 0$, $d_i=X_i-Y_i$
i. 拒绝域: $|\bar d|\geqslant t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\frac{S_d}{\sqrt n}$

2. 正态总体方差的检验

1. 单个正态总体方差的 χ^2 检验
(1) $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2\leftrightarrow H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$
i. 拒绝域: $(n-1)S^2/\sigma_0^2\leqslant\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})$
ii. 拒绝域: $(n-1)S^2/\sigma_0^2\geqslant\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$
(2) $H_0:\sigma^2\leqslant\sigma_0^2\leftrightarrow H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$
i. 拒绝域: $(n-1)S^2/\sigma_0^2\geqslant\chi^2_{n-1}(\alpha)$
2. 两个正态总体方差比的 F 检验
(1) $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2\leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$
i. 拒绝域: $S_1^2/S_2^2\leqslant F_{m-1,n-1}(1-\frac{\alpha}{2})$
ii. 拒绝域: $S_1^2/S_2^2\geqslant F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})$
(2) $H_0':\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2\leftrightarrow H_1':\sigma_1^2>\sigma_2^2$
i. 拒绝域: $S_1^2/S_2^2\geqslant F_{m-1,n-1}(\alpha)$

3. 拟合优度检验

1. H_0:样本 X_i 的总体分布为 $F(x)$
(1) 把 $(-\infty,+\infty)$ 分割为 k 个区间:
$I_1=(a_0,a_1],\cdots,I_k=(a_{k-1},a_k)$
(2) 计算每个区间的实际频数 f_i
(3) 计算理论频数 $p_i(\theta)=F(a_i,\theta)-F(a_{i-1},\theta)$
(4) 计算偏差平方和 $\chi^2=\sum_{i=1}^k\frac{[f_i-np_i(\theta^*)]^2}{np_i(\theta^*)}$
(5) 假设 H_0 的水平 α 的检验拒绝域为 $\chi^2\geqslant\chi^2_{k-r-1}(\alpha)$

4. 独立性检验

1. $H_0:p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$
(1) 拒绝域: $\chi^2\geqslant\chi^2_{(a-1)(b-1)}(\alpha)$,
其中 $\chi^2=\sum_{i=1}^a\sum_{j=1}^b\frac{(nn_{ij}-n_{i\cdot}n_{\cdot j})^2}{n_{ij}n_{i\cdot}n_{\cdot j}}$

第九章　回归分析

1. 一元线性回归模型 $y_i=\beta_0+\beta_1x_i+e_i$
性质1 $E(\hat\beta_0)=\beta_0,E(\hat\beta_1)=\beta_1$ 为无偏估计
性质2 假设 $e_i\sim N(0,\sigma^2)$, $S_{xx}=\sum(x_i-\bar x)^2$,则
$\hat\beta_0\sim N(\beta_0,(1/n+\bar x^2/S_{xx})\sigma^2)$,
$\hat\beta_1\sim N(\beta_1,\sigma^2/S_{xx})$.
2. 高斯-马尔可夫假设: $E(e_i)=0$,
$D(e_i)=\sigma^2,\mathrm{Cov}(e_i,e_j)=0$
3. 最小二乘估计 $\hat\beta_0=\bar y-\hat\beta_1\bar x$,
$\hat\beta_1=\frac{\sum(x_i-\bar x)(y_i-\bar y)}{\sum(x_i-\bar x)^2}$
4. 经验回归直线方程 $\hat Y=\hat\beta_0+\hat\beta_1X=\bar y+\hat\beta_1(X-\bar x)$
5. 残差 $\hat e_i=y_i-(\hat\beta_0+\hat\beta_1x_i)$
6. $\hat\sigma^2=\sum\hat e_i^2/(n-2)$
(1) $\hat\sigma^2$ 是 σ^2 的无偏估计
(2) $(n-2)\hat\sigma^2/\sigma^2\sim\chi^2_{n-2}$,且 $\hat\sigma^2$ 与 $\hat\beta_0,\hat\beta_1$ 相互独立
7. 回归方程的显著性检验
(1) $H_0:\beta_1=0\leftrightarrow H_1:\beta_1\neq 0$
i. 拒绝域: $|T|=\left|\frac{\hat\beta_1^2}{\hat\sigma/\sqrt{S_{xx}}}\right|\geqslant t_{n-2}(\frac{\alpha}{2})$
ii. 拒绝域: $F=\frac{\hat\beta_1^2}{\hat\sigma^2/S_{xx}}\geqslant F_{1,n-2}$
8. 判定系数/确定系数 $R^2=\frac{\sum(\hat y_i-\bar y)^2}{\sum(y_i-\bar y)^2}$
(1) 回归平方和 $SS_{回}=\sum(\hat y_i-\bar y)^2$
(2) 总平方和 $SS_{总}=\sum(y_i-\bar y)^2$
(3) 误差平方和 $SS_{误}=\sum\hat e_i^2=SS_{回}-SS_{总}$
9. 回归参数的区间估计 $\hat\sigma_{\hat\beta_0}=\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\bar x^2}{S_{xx}}}\hat\sigma$, $\hat\sigma_{\hat\beta_1}=\frac{\hat\sigma}{\sqrt{S_{xx}}}$.
β_i 的置信区间: $[\hat\beta_i\pm t_{n-2}(\frac{\alpha}{2})\hat\sigma_{\hat\beta_i}]$

常用结论

1. 人群中有相同生日: $P(A)=\dfrac{A_N^n}{N^n}$
2. 把 n 个物品分成 k 组, 每组恰有 n_i 个, 不同的分组方法有 $\dfrac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$ 种
3. 将 n 个球放入 M 个盒子，有球的盒子数
$E(X)=M\left[1-(1-1/M)^n\right]$
4. 基本积分表
(1) $\int k\mathrm{d}x=kx+C$
(2) $\int x^\mu\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$
(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$
(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$
(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
(6) $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$
(7) $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$
(8) $\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$
(9) $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$
5. 积分换元法
$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=[\int f(u)\mathrm{d}u]_{u=\varphi(x)}$
$\int f(x)\mathrm{d}x=[f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t]_{t=\psi^{-1}(x)}$
6. 二重积分的计算
$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$
$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$

1. 逻辑表达式

0 0000_2 $\boldsymbol{F}$, 永假

1 0001_2 $A \wedge B$, 合取; $A \& B$, 与; $A \cdot B$; AB

2 0010_2 $A \stackrel{c}{\nrightarrow} B$, 逆条件; $A \wedge \neg B$

3 0011_2 A

4 0100_2 $B \stackrel{c}{\nrightarrow} A$, 逆条件; $\neg A \wedge B$

5 0101_2 B

6 0110_2 $A \bar{\vee} B$, 不可兼或取; $A \oplus B$, 异或

7 0111_2 $A \vee B$, 析取; $A|B$, 或; $A + B$

8 1000_2 $A \downarrow B$, 或非; $\neg(A \vee B)$

9 1001_2 $A \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrows B$, 双条件; $A \odot B$, 同或; iff

10 1010_2 $\neg B$, 非

11 1011_2 $B \to A$, 条件; $A \vee \neg B$

12 1100_2 $\neg A$, 非

13 1101_2 $A \to B$, 条件; $\neg A \vee B$

14 1110_2 $A \uparrow B$, 与非; $\neg(A \wedge B)$

15 1111_2 $\boldsymbol{T}$, 永真

2. 证明方法

P规则 前提引入: P

T规则 结论引用: $T(i)E, T(i)I$

CP规则 由$(S \wedge R) \Rightarrow C$, 证$S \Rightarrow (R \to C)$: CP

3. 常用蕴含式

I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$

I_2 $P \wedge Q \Rightarrow Q$

I_3 $P \Rightarrow P \vee Q$

I_4 $Q \Rightarrow P \vee Q$

I_5 $\neg P \Rightarrow P \to Q$

I_6 $Q \Rightarrow P \to Q$

I_7 $\neg(P \to Q) \Rightarrow P$

I_8 $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$

I_9 $P, Q \Rightarrow P \wedge Q$

I_{10} $\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$

I_{11} $P, P \to Q \Rightarrow Q$

I_{12} $\neg Q, P \to Q \Rightarrow \neg P$

I_{13} $P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$

I_{14} $P \vee Q, P \to R, Q \to R \Rightarrow R$

I_{15} $A \to B \Rightarrow (A \vee C) \to (B \vee C)$

I_{16} $A \to B \Rightarrow (A \wedge C) \to (B \wedge C)$

I_{17} $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$

I_{18} $(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$

I_{19} $(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \to B(x))$

4. 常用等价式

E_1 (对合律) $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

E_2 (交换律) $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

E_3 (交换律) $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

E_4 (结合律) $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

E_5 (结合律) $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

E_6 (分配律) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

E_7 (分配律) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

E_8 (德摩根律) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

E_9 (德摩根律) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

E_{10} (幂等律) $P \vee P \Leftrightarrow P$

E_{11} (幂等律) $P \wedge P \Leftrightarrow P$

E_{12} (同一律) $R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$

E_{13} (同一律) $R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$

E_{14} (零律) $R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow \boldsymbol{T}$

E_{15} (零律) $R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow \boldsymbol{F}$

E_{16} (消去$\to$) $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$

E_{17} (消去$\to$) $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

E_{18} $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$

E_{19} $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$

E_{20} $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

E_{21} $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$

E_{22} $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$

E_{23} $(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$

E_{24} $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$

E_{25} $\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$

E_{26} $\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$

E_{27} $(\forall x)(A \vee B(x)) \Leftrightarrow A \vee (\forall x)B(x)$

E_{28} $(\exists x)(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \wedge (\exists x)B(x)$

E_{29} $(\exists x)(A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \to (\exists x)B(x)$

E_{30} $(\forall x)A(x) \to B \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \to B)$

E_{31} $(\exists x)A(x) \to B \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \to B)$

E_{32} $A \to (\forall x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)(A \to B(x))$

E_{33} $A \to (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(A \to B(x))$