第一章 随机事件

1. 概率的性质:
   (1) $P(\varnothing)=0$
   (2) A_i两两互斥, $P(\bigcup_{i=1}^n A_i)=\sum_{i=1}^n P(A_i)$
   (3) $P(\overline{A})=1-P(A)$
   (4) $P(B-A)=P(B)-P(A)$
   (5) (加法公式) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
2. **加法公式**: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
   (1) 互不相容: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
   (2) 相互独立: $P(A\cup B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$
3. **乘法公式**: $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$
   (1) 相互独立: $P(AB)=P(A)P(B)$
4. **条件概率公式**: $P(B|A)=P_B(A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$
5. **全概率公式**: $P(A)=\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$
6. **贝叶斯公式**: $P(B_i|A)=\dfrac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}$

第二章 随机变量

1. 概率密度函数$f(x)$: $P\{a<X\leqslant b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
2. 概率分布函数: $F(x)=P\{X\leqslant x\}$
   (1) (单调不减性) $P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a)$
   (2) (有界性) $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$
   (3) $F(x)=\sum_{x_k\leqslant x} p_k$
3. $F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$
   $f(x)=F'(x)$
4. 已知连续性随机变量X的概率密度$f_X(x)$, 求随机变量$Y=g(X)$的概率密度$f_Y(y)$
   (1) **积分转化法** $F_Y(y)=P\{g(X)\leqslant y\}$,
   $f_Y(y)=F'_Y(y)$
   (2) **单调函数公式法** 反函数$x=h(y)$
   $$f_Y(y)=\begin{cases} f(h(y))\cdot|h'(y)|, & a<y<b,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

离散型随机变量

1. **两点分布** $X\sim B(1,p)$
   $\boxed{P\{X=1\}=p, P\{X=0\}=1-p}$
   性质1 $E(X)=p, D(X)=p(1-p)$
2. **二项分布** $X\sim B(n,p)$ 伯努利实验
   $\boxed{b(k;n,p)=P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}}$
   性质1 $E(X)=np, D(X)=np(1-p)$
   性质2 X可表示成n个$X_i\sim B(1,p)$的独立随机变量
   性质3 若X_i相互独立, 且$X_i\sim B(n_i,p)$,
   则$X=\sum_{i=1}^m X_i\sim B(n,p)$
   $\hat{p}=\bar{X}/n=\sum X/(nN)$是$p$的矩估计和极大似然估计
3. **泊松分布** $X\sim P(\lambda)$
   $\boxed{b(k;\lambda)=P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}$
   性质1 $E(X)=\lambda, D(X)=\lambda$
   性质2 若X_i相互独立, 且$X_i\sim P(\lambda_i)$,
   则$X=\sum_{i=1}^m X_i\sim P(\lambda)$
   性质3 若X_1,X_2相互独立, 且$X_i\sim P(\lambda_i)$, 则条件分布$X_i|(X_1+X_2=n)$是二项分布, 且$X_i|(X_1+X_2=n)\sim B(n,\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2})$
   某医院每天前来就诊的病人数, 某地区一段时间间隔内发生火灾的次数, 一段时间间隔内容器内部细菌数, 某地一年内发生暴雨的次数, 每条床单上的疵点数.
4. $P\{X\geqslant x\}=\sum_{r=x}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-r}\lambda^r}{r!}$
5. 当$n\to\infty, p\to 0$时, $b(k;n,p)\approx b(k;\lambda), \lambda=np$

连续型随机变量

1. **均匀分布** $X\sim U[a,b]$
   $$\boxed{f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}}$$
   性质1 $E(X)=(a+b)/2, D(X)=(b-a)^2/12$
   性质2 对任意满足$a\leqslant c<d\leqslant d$的$c,d$,
   有$P\{c\leqslant X\leqslant d\}=\dfrac{d-c}{b-a}$
   性质3 $F(X)\sim U(0,1)$
2. **指数分布** $X\sim EP(\lambda)$ 寿命分布
   $$\boxed{f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}}$$
   性质1 $E(X)=\lambda^{-1}, D(X)=\lambda^{-2}$
   性质2 (无记忆性) $P\{X>x+y|X>y\}=P\{X>x\}$
3. **正态分布** $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 高斯分布
   $$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}}$$
   (1) 标准正态分布: $X\sim N(0,1)$
   (2) 概率密度: $\varphi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
   (3) 分布函数: $\Phi(x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$
   (4) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$
   (5) 标准正态分布上的α分位点, $\Phi(Z_\alpha)=1-\alpha$,
   $P\{X>Z_\alpha\}=\int_{Z_\alpha}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\alpha$
   性质1 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$
   性质2 $\sum_{i=1}^n c_iX_i+d\sim N\left(\sum_{i=1}^n c_i\mu_i+d, \sum_{i=1}^n c_i^2\sigma_i^2\right)$
   性质3 若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$;
   若$X\sim N(0,1)$, 则$Y=\sigma X+\mu\sim N(\mu,\sigma^2)$
   性质4 $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$
   性质5 $P\{a<X<b\}=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$
   $P\{X<b\}=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})$
   $P\{X>a\}=1-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$
   某地区成年男性的身高, 某零件长度的测量误差, 半导体器件中的热噪声电流.

第三章 随机向量

1. $F(x,y)=P\{X\leqslant x, Y\leqslant y\}$,
   $P\{X=x_i, Y=y_i\}=p_{ij}$
   (1) 离散型: $F(x,y)=\sum_{x_i\leqslant x}\sum_{y_i\leqslant y}p_{ij}$
   (2) 连续型: $F(x,y)=\int_{-\infty}^y\int_{-\infty}^x f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
      i. $f(x,y)\geqslant 0$
      ii. $F(+\infty,+\infty)=1$
      iii. $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$
      iv. $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
2. 二维均匀分布 $f(x,y)=\begin{cases}1/d, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$
3. 二维正态分布 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$
4. **边缘概率分布**:
   $F_X(x)=F(x,+\infty), F_Y(x)=F(+\infty,y)$
   (1) 二维离散型随机向量: $p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}$, $p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}$
   (2) 二维连续型随机变量: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$
   $f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$
5. **条件概率密度**: $f_{X|Y}(u|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$
6. 独立性的判断: $\forall x,y$, $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$,
   对于连续型变量$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$
7. $Z=X+Y$的密度: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$,
   $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y$.
   (1) 相互独立: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$,
   $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$.
8. $Z=\max\{X,Y\}$和$Z=\min\{X,Y\}$的分布:

$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z)$
$F_{\min}(z) = 1-(1-F_X(z)) \cdot (1-F_Y(z))$

第四章 数字特征

1. **期望** $E(X)$
   (1) 离散型: $E(X)=\sum_i x_i p_i$
   (2) 连续型: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$
   (3) $E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$

性质 1 $E(c)=c$
性质 2 $E(kX)=kE(X)$
性质 3 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
性质 4 若 X,Y 相互独立, 则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

2. **方差** $D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$
   (1) 离散型: $D(X)=\sum_i [x_i-E(X)]^2 p_i$
   (2) 连续型: $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x_i-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x$
   (3) (计算公式) $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$

性质 1 $D(c)=0, D(X+c)=D(X)$
性质 2 $D(kX)=k^2D(X), D(-X)=D(X)$
性质 3 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$. 若 X,Y 相互独立, 则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$
性质 4 若 X,Y 相互独立, 则 $D(aX\pm bY) = a^2D(X)+b^2D(Y)$

3. **协方差** $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

性质 1 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$
性质 2 $\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)=ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)$
性质 3 $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)\,\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$
性质 4 (计算公式) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
性质 5 $\mathrm{Cov}^2(X,Y)\leqslant D(X)D(Y)$, 等号成立当且仅当 $\exists a,b, Y=aX+b$

4. **相关系数** $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$
   (1) $|\rho_{XY}|\leqslant 1$
   (2) 互不相关: $\rho_{XY}=0$
5. $E\{[X-E(X)]^k\}$ 称为 X 的 k 阶**中心矩**
6. 记 $c_{ij}=\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$, 称 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$ 为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的**协方差矩阵**

第五章 极限定理

1. **切比雪夫不等式**: $\forall\varepsilon>0$,
   $P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\sigma^2/\varepsilon^2$,
   $P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geqslant 1-\sigma^2/\varepsilon^2$
2. **大数定律**: X_i 相互独立, $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $\forall\varepsilon>0$,
   $\lim_{n\to\infty}P\{|Y_n-\mu|<\varepsilon\}=1$.
   $\lim_{n\to\infty}P\{|n_A/n-p|<\varepsilon\}=1$.
3. 独立同分布的**中心极限定理**:
   X_i 相互独立且服从同一分布, 则 $Y_n=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 的分布函数 $F_n(x)=P\{Y_n\leqslant x\}$ 收敛于 $\Phi(x)$, 即 $\lim_{x\to\infty}F_n(x)=\Phi(x)$.
4. (棣莫夫-拉普拉斯定理) X_i 相互独立且服从 $B(1,p)$, 则 $\forall x$, $\lim\limits_{x\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

第六章 样本与统计量

1. **样本均值** $\bar X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 是 μ 的估计
2. **样本方差** $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2$ 是 σ^2 的估计
3. 样本标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2}$
4. **样本原点矩** $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$
5. **样本中心矩** $M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^k$
6. 样本均值的**大样本分布**: $\bar X\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$.
   $F(x)\approx\Phi\Big(\dfrac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)$,
   $P\{|\bar X-\mu|\leqslant c\}\approx 2\Phi\Big(\dfrac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)-1$

正态总体的抽样分布

1. $\Gamma\Big(\dfrac{n}{2}\Big)=\begin{cases}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)\cdots3\cdot2\cdot1, & n\text{为偶数},\\ (\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, & n\text{为奇数}.\end{cases}$
2. **χ^2 分布** $X\sim\chi_n^2$
   X_i 独立同分布于 $N(0,1)$, $X=\sum_{i=1}^n X_i^2$
   $$\boxed{f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}}$$

性质 1 $E(X^k)=2^k\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+k)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$,
$E(X)=n, D(X)=2n$
性质 2 若 $X_i\sim\chi_{n_i}^2$ 独立同分布, 则 $\sum_{i=1}^m X_i\sim\chi_n^2$, 其中 $n=\sum_{i=1}^m n_i$

3. $\chi_n^2(\alpha)$ 为 χ_n^2 分布上的 α 分位点:
   $P\{\chi_n^2>\chi_n^2(\alpha)\}=\int_{\chi_n^2(\alpha)}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\alpha$
4. **t 分布** $T\sim t_n$ 学生分布
   $X\sim N(0,1), Y\sim\chi_n^2, T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$
   $$\boxed{f(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}}$$

性质 1 $E(F)=0, D(F)=n/(n-2), n=3,4,\cdots$
性质 2 $Y=\dfrac{F_2-F_1}{2\sqrt{F_1F_2/n}}\sim t_n$
性质 3 $\dfrac{\overline{F}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}$

5. $t_n(\alpha)$ 为 t_n 分布上的 α 分位点:
   $P\{T>t_n(\alpha)\}=\int_{t_n(\alpha)}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\alpha$
6. **F 分布** $F\sim F_{m,n}$
   $X\sim\chi_m^2, Y\sim\chi_n^2, F=\dfrac{X/m}{Y/n}$
   $$\boxed{f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\Big(\dfrac{m}{n}\Big)^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\Big(1+\dfrac{m}{n}x\Big)^{-\frac{m+n}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}}$$

性质 1 $E(F)=n/(n-2), n>2$;
$D(F)=\dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, n>4$
性质 2 $1/F\sim F_{m,n}$
性质 3 若 $X\sim t_n$, 则 $X^2\sim F_{1,n}$

7. $F_{m,n}(\alpha)$ 为 $F_{m,n}$ 分布上的 α 分位点:
   $P\{F>F_{m,n}(\alpha)\}=\int_{F_{m,n}(\alpha)}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\alpha$
8. (基本定理) 样本 X_i 来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$
   (1) $\bar X\sim N(\mu,\sigma^2/n)$
   (2) $(n-1)S^2/\sigma^2\sim\chi_{n-1}^2$
   (3) $\bar X$ 与 S^2 相互独立
   (4) $\dfrac{\bar X-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}$

第七章 参数估计

1. 矩估计: $\alpha_m=E(X^m), A_m=\sum X_i^m, \alpha_m(\theta_i)=A_m$
   (1) 正态分布: $\hat\mu=\bar X, \hat\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2$
   (2) 均匀分布: $\hat a=\bar X-\sqrt{3}\hat\sigma, \hat b=\bar X+\sqrt{3}\hat\sigma$
2. 极大似然估计: $\ln L(\theta)=\sum\ln f(x_i;\theta_j), \frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta_i}=0$
   (1) 正态分布: $\mu^*=\bar X, \sigma^{2*}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2$
   (2) 泊松分布: $\lambda^*=\bar X$
   (3) 均匀分布: $a^*=\min\{X_i\}, b^*=\max\{X_i\}$
3. 无偏估计: $E[\hat\theta(X_i)]=\theta$
   (1) $E(\bar X)=\mu$
   (2) $E(S^2)=\sigma^2$
   (3) S 不是 σ 的无偏估计
4. 均方误差: $\mathrm{MSE}(\hat\theta)=E[(\hat\theta-\theta)^2]=D(\hat\theta)+[E(\hat\theta)-\theta]^2$

(1) 无偏估计: $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = D(\hat{\theta})$
(2) 两个估计中哪个方差小, 哪个优

5. $P\{\theta \in [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]\} \geqslant 1-\alpha$
置信区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$, 置信系数 $1-\alpha$

6. $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, 置信系数为 $1-\alpha$
(1) μ 的置信区间: $[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}]$
σ^2 未知时: $[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})]$
(2) σ^2 的置信区间: $[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}]$

7. $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 互相独立
(1) $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n)$,
或 $\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}} \sim N(0,1)$
(2) $\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{1/m+1/n}} \sim t_{m+n-2}$,
其中 $S^2 = \frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$
(3) $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间: $[\bar{X} - \bar{Y} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sqrt{m}} + \frac{\sigma_2^2}{\sqrt{n}}}]$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$: $[\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2}) S \sqrt{\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{n}}}]$

8. 大样本参数 μ 的置信区间: $[\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}]$

9. 二项分布参数 p 的置信区间: $[\hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}]$,
其中 $\hat{p} = Y_n/n = \sum_{i=1}^n X_i/n$

10. 泊松分布参数 λ 的置信区间: $[\bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\bar{X}/n}]$

第八章　假设检验

1. 检验 H_0 有可能犯的两类错误
(1) 第一类错误“弃真”错误: H_0 正确但是被拒绝了
(2) 第二类错误“采伪”错误: H_0 错误但是被接受了
2. 检验的显著性水平: $P\{$犯第一类错误$\} \leqslant \alpha \in (0,1)$

1. 正态总体均值的检验

1. 单个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 μ 的检验
(1) $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$
i. 拒绝域: $|\bar{X} - \mu_0| \geqslant \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\frac{\alpha}{2}}$
ii. 拒绝域: $|\bar{X} - \mu_0| \geqslant \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$
(2) $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$
i. 拒绝域: $\bar{X} - \mu_0 \geqslant \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha)$

2. 两个正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 均值的比较
(1) $H_0: \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
i. 拒绝域: $|\bar{X} - \bar{Y}| \geqslant Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}$
ii. 拒绝域: $|\bar{X} - \bar{Y}| \geqslant t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2}) \sqrt{\frac{m+n}{mn}} S$
(2) $H_0': \mu_1 - \mu_2 \geqslant 0 \leftrightarrow H_1': \mu_1 - \mu_2 < 0$
i. 拒绝域: $\bar{X} - \bar{Y} \leqslant -t_{m+n-2}(\alpha) \sqrt{\frac{m+n}{mn}} S$
(3) $H_0'': \mu_1 - \mu_2 \leqslant 0 \leftrightarrow H_1'': \mu_1 - \mu_2 > 0$
i. 拒绝域: $\bar{X} - \bar{Y} \geqslant t_{m+n-2}(\alpha) \sqrt{\frac{m+n}{mn}} S$

3. 成对数据的 t 检验
(1) $H_0: \mu = 0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 0$, $d_i = X_i - Y_i$
i. 拒绝域: $|\bar{d}| \geqslant t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}) \frac{S_d}{\sqrt{n}}$

2. 正态总体方差的检验

1. 单个正态总体方差的 χ^2 检验
(1) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
i. 拒绝域: $(n-1)S^2/\sigma_0^2 \leqslant \chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})$
ii. 拒绝域: $(n-1)S^2/\sigma_0^2 \geqslant \chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$
(2) $H_0: \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$
i. 拒绝域: $(n-1)S^2/\sigma_0^2 \geqslant \chi^2_{n-1}(\alpha)$

2. 两个正态总体方差比的 F 检验
(1) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
i. 拒绝域: $S_1^2/S_2^2 \leqslant F_{m-1,n-1}(1-\frac{\alpha}{2})$
ii. 拒绝域: $S_1^2/S_2^2 \geqslant F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})$
(2) $H_0': \sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1': \sigma_1^2 > \sigma_2^2$
i. 拒绝域: $S_1^2/S_2^2 \geqslant F_{m-1,n-1}(\alpha)$

3. 拟合优度检验

1. H_0 :样本 X_i 的总体分布为 $F(x)$
(1) 把 $(-\infty, +\infty)$ 分割为 k 个区间:
$I_1 = (a_0, a_1], \cdots, I_k = (a_{k-1}, a_k)$
(2) 计算每个区间的实际频数 f_i
(3) 计算理论频数 $p_i(\theta) = F(a_i, \theta) - F(a_{i-1}, \theta)$
(4) 计算偏差平方和 $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{[f_i - np_i(\theta^*)]^2}{np_i(\theta^*)}$
(5) 假设 H_0 的水平 α 的检验拒绝域为 $\chi^2 \geqslant \chi^2_{k-r-1}(\alpha)$

4. 独立性检验

1. $H_0: p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$
(1) 拒绝域: $\chi^2 \geqslant \chi^2_{(a-1)(b-1)}(\alpha)$,
其中 $\chi^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{(nn_{ij} - n_{i\cdot} n_{\cdot j})^2}{n_{ij} n_{i\cdot} n_{\cdot j}}$

第九章　回归分析

1. 一元线性回归模型 $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$
性质 1 $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0, E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$ 为无偏估计
性质 2 假设 $e_i \sim N(0, \sigma^2)$, $S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2$, 则
$\hat{\beta}_0 \sim N(\beta_0, (1/n + \bar{x}^2/S_{xx})\sigma^2)$,
$\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \sigma^2/S_{xx})$.

2. 高斯-马尔可夫假设: $E(e_i) = 0$,
$D(e_i) = \sigma^2, \mathrm{Cov}(e_i, e_j) = 0$

3. 最小二乘估计 $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$,
$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

4. 经验回归直线方程 $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X = \bar{y} + \hat{\beta}_1 (X - \bar{x})$

5. 残差 $\hat{e}_i = y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)$

6. $\hat{\sigma}^2 = \sum \hat{e}_i^2/(n-2)$
(1) $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的无偏估计
(2) $(n-2)\hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-2}$, 且 $\hat{\sigma}^2$ 与 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 相互独立

7. 回归方程的显著性检验
(1) $H_0: \beta_1 = 0 \leftrightarrow H_1: \beta_1 \neq 0$
i. 拒绝域: $|T| = \left|\frac{\hat{\beta}_1^2}{\hat{\sigma}/\sqrt{S_{xx}}}\right| \geqslant t_{n-2}(\frac{\alpha}{2})$
ii. 拒绝域: $F = \frac{\hat{\beta}_1^2}{\hat{\sigma}^2/S_{xx}} \geqslant F_{1,n-2}$

8. 判定系数/确定系数 $R^2 = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$
(1) 回归平方和 $SS_{回} = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$
(2) 总平方和 $SS_{总} = \sum (y_i - \bar{y})^2$
(3) 误差平方和 $SS_{误} = \sum \hat{e}_i^2 = SS_{回} - SS_{总}$

9. 回归参数的区间估计 $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}} \hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{S_{xx}}}$.
β_i 的置信区间: $[\hat{\beta}_i \pm t_{n-2}(\frac{\alpha}{2}) \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}]$

常用结论

1. 人群中有相同生日: $P(A) = \dfrac{A_N^n}{N^n}$

2. 把 n 个物品分成 k 组, 每组恰有 n_i 个, 不同的分组方法有 $\dfrac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$ 种

3. 将 n 个球放入 M 个盒子，有球的盒子数
$E(X) = M\left[1 - (1 - 1/M)^n\right]$

4. 基本积分表
(1) $\int k \mathrm{d}x = kx + C$
(2) $\int x^\mu \mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$
(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$
(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$
(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
(6) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$
(7) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$
(8) $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$
(9) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$

5. 积分换元法
$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = [\int f(u)\mathrm{d}u]_{u=\varphi(x)}$
$\int f(x)\mathrm{d}x = [f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t]_{t=\psi^{-1}(x)}$

6. 二重积分的计算
$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$
$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$

1. 逻辑表达式

0 0000_2 $\boldsymbol{F}$, 永假
1 0001_2 $A \wedge B$, 合取; $A \& B$, 与; $A \cdot B$; AB
2 0010_2 $A \stackrel{c}{\rightarrow} B$, 逆条件; $A \wedge \neg B$
3 0011_2 A
4 0100_2 $B \stackrel{c}{\rightarrow} A$, 逆条件; $\neg A \wedge B$
5 0101_2 B
6 0110_2 $A \bar{\nabla} B$, 不可兼或取; $A \oplus B$, 异或
7 0111_2 $A \vee B$, 析取; $A|B$, 或; $A + B$
8 1000_2 $A \downarrow B$, 或非; $\neg(A \vee B)$
9 1001_2 $A \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrows B$, 双条件; $A \odot B$, 同或; iff
10 1010_2 $\neg B$, 非
11 1011_2 $B \rightarrow A$, 条件; $A \vee \neg B$
12 1100_2 $\neg A$, 非
13 1101_2 $A \rightarrow B$, 条件; $\neg A \vee B$
14 1110_2 $A \uparrow B$, 与非; $\neg(A \wedge B)$
15 1111_2 $\boldsymbol{T}$, 永真

2. 证明方法

P 规则 前提引入: P
T 规则 结论引用: $T(i)E, T(i)I$
CP 规则 由 $(S \wedge R) \Rightarrow C$, 证 $S \Rightarrow (R \rightarrow C)$: CP

3. 常用蕴含式

I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$
I_2 $P \wedge Q \Rightarrow Q$
I_3 $P \Rightarrow P \vee Q$
I_4 $Q \Rightarrow P \vee Q$
I_5 $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$
I_6 $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$
I_7 $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$
I_8 $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$
I_9 $P, Q \Rightarrow P \wedge Q$
I_{10} $\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$
I_{11} $P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$
I_{12} $\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$
I_{13} $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$
I_{14} $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$
I_{15} $A \rightarrow B \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$
I_{16} $A \rightarrow B \Rightarrow (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$
I_{17} $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$
I_{18} $(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$
I_{19} $(\exists x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$

4. 常用等价式

E_1 (对合律) $\neg\neg P \Leftrightarrow P$
E_2 (交换律) $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
E_3 (交换律) $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
E_4 (结合律) $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
E_5 (结合律) $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
E_6 (分配律) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
E_7 (分配律) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
E_8 (德摩根律) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
E_9 (德摩根律) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
E_{10} (幂等律) $P \vee P \Leftrightarrow P$
E_{11} (幂等律) $P \wedge P \Leftrightarrow P$
E_{12} (同一律) $R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$
E_{13} (同一律) $R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
E_{14} (零律) $R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow \boldsymbol{T}$
E_{15} (零律) $R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow \boldsymbol{F}$
E_{16} (消去 $\rightarrow$) $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$
E_{17} (消去 $\rightarrow$) $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
E_{18} $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
E_{19} $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$
E_{20} $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
E_{21} $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$
E_{22} $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$
E_{23} $(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$
E_{24} $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$
E_{25} $\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$
E_{26} $\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$
E_{27} $(\forall x)(A \vee B(x)) \Leftrightarrow A \vee (\forall x)B(x)$
E_{28} $(\exists x)(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \wedge (\exists x)B(x)$
E_{29} $(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$
E_{30} $(\forall x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B)$
E_{31} $(\exists x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B)$
E_{32} $A \rightarrow (\forall x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)(A \rightarrow B(x))$
E_{33} $A \rightarrow (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(A \rightarrow B(x))$