

狭义相对论

一. 选择题

1. 宇宙飞船相对于地面以速度 v 作匀速直线飞行, 某一时刻飞船头部的宇航员向飞船尾部发出一个光讯号, 经过 Δt (飞船上的钟) 时间后, 被尾部的接收器收到, 则由此可知飞船的固有长度为 $c\Delta t$.

2. 下列说法正确的是 (1)(2)(3).

(1) 所有惯性系对物理基本规律都是等价的.

(2) 在真空中, 光的速度与光的频率、光源的运动状态无关.

(3) 任何惯性系中, 光在真空中沿任何方向的传播速率都相同.

3. 一火箭的固有长度为 L , 相对与地面做匀速直线运动的速度为 v_1 , 火箭上有一个人从火箭的后端向火箭前端上的一个靶子发射一颗相对于火箭速度为 v_2 的子弹. 在火箭上测得子弹从射出到击中靶子的时间间隔是 $\frac{L}{v_2}$.

4. 在狭义相对论中, 下列说法正确的是 (1)(2)(4).

(1) 一切运动物体相对于观察者的速度都不能大于真空中的光速.

(2) 质量、长度、时间的测量结果都是随物体与观察者的相对运动状态而改变的.

(3) 在一惯性系中发生于同一时刻、不同地点的两个事件在其他一切惯性系中也是同时发生的.

(4) 惯性系中的观察者观察一个与他做匀速相对运动的时钟时, 会看到这时钟比与他相对静止的相同的时钟走得慢些.

5. 关于同时性的以下结论中正确的是 (C).

(C) 在一惯性系同一地点同时发生的两个事件, 在另一惯性系一定同时发生.

6. 在某地发生两件事, 静止位于该地的甲测得时间间隔为 4s. 若相对于甲做匀速直线运动的乙测得时间间隔为 5s, 则乙相对于甲的运动速度是 $\frac{3}{5}c$.

7. 一宇航员要到离地球为 5 光年的星球去旅行. 如果宇航员希望把这路程缩短为 3 光年, 则他所称的火箭相对于地球的速度应是 $v = \frac{4}{5}c$.

10. (1) 对某观察者来说, 发生在某惯性系中的同一地点、同一时刻的两个事件, 对于相对该惯性系下匀速直线运动的其他惯性系中的观察者来说, 它们同时发生. (2) 在某惯性系中的同一时刻、不同地点的两个事件, 它们在其他惯性系中不同时发生.

12. 一匀质矩形薄板, 在它静止时测得其长为 a , 宽为 b , 质量为 m_0 , 由此可算出其面积密度为 m_0/ab . 假定该薄板沿长度方向以接近光速的速度 v 做匀速直线运动, 此时再测算该矩形薄板的面积密度则为 $\frac{m_0}{ab[1-(\frac{v}{c})^2]}$.

13. 设某微观粒子的总能量是它静止能量的 K 倍, 则其运动速度的大小为 $\frac{c}{K}\sqrt{K^2-1}$.

二. 填空题

16. 狭义相对论的两条基本原理中, 相对性原理说的是 一切彼此相对做匀速直线运动的惯性系对于物理学定律都是等价的; 光速不变原理说的是 一切惯性系中真空中的光速都是相等的.

20. π^+ 介子是不稳定的粒子,在它自己的参照系中测得平均寿命是 $2.6 \times 10^{-8}\text{s}$,如果它相对与实验室已 $0.8c$ 的速率运动,那么实验室坐标系中测得的 π^+ 介子寿命是 $4.33 \times 10^{-8}\text{s}$.

21. 一观察者测得一沿米尺长度方向匀速运动着的米尺长度为 0.5m ,则此米尺以速度 $v = 2.60 \times 10^8\text{ m/s}$ 接近观察者.

26. 狭义相对论确认,时间和空间的测量值都是相对的,它们与观察者的运动密切相关.

28. 狭义相对论中,一质点的质量 m 与速度 v 的关系式为 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$;其动能的表达式为 $E_k = mc^2 - m_0c^2$.

29. 质子在加速器中被加速,当其动能为静止能量的3倍时,其质量为静止质量的4倍.

30. 观察者甲以 $0.8c$ 的速度相对于静止的观察者乙运动,若甲携带一长度为 l 、截面积为 S 、质量为 m 的棒,这根棒安放在运动方向上,则 (1) 甲测得此棒的密度为 $\frac{m}{lS}$; (2) 乙测得此棒的密度为 $\frac{25m}{9lS}$.

31. 已知一静止质量为 m_0 的粒子,其固有寿命为实验室测量到的寿命的 $1/n$,则此粒子的动能是 $m_0c^2(n-1)$.

三. 计算题

32. 一艘宇宙飞船的船身固有长度为 $L_0 = 90\text{m}$,相对于地面以 $v = 0.8c$ 的匀速度在地面观测站的上空飞过.

(1) 观测站测得飞船的船身通过观测站的时间间隔是多少?

(2) 宇航员测得船身通过观测站的时间间隔是多少?

解: (1) 观测站测得飞船船身的长度为 $L = L_0\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} = 54\text{m}$,
则 $\Delta t_1 = L/v = 2.25 \times 10^{-7}\text{s}$.

(2) 宇航员测得飞船船身的长度为 L_0 , 则 $\Delta t_2 = L_0/v = 3.75 \times 10^{-7}\text{s}$.

33. 设有宇宙飞船 A 和 B ,固有长度均为 $l_0 = 100\text{m}$,沿同一方向匀速飞行,在飞船 B 上观测到飞船 A 的船头、船尾经过飞船 B 船头的的时间间隔 $\Delta t = \frac{5}{3} \times 10^{-7}\text{s}$,求飞船 B 相对于飞船 A 的速度的大小.

解: 设飞船 A 相对于飞船 B 的速度大小为 v ,这也就是飞船 B 相对于飞船 A 的速度大小.在飞船上测得飞船 A 的长度为 $l = l_0\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$,

故在飞船 B 上测得飞船 A 相对于飞船 B 的速度为 $v = \frac{l}{\Delta t} = \frac{l_0}{\Delta t}\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$,

解得 $v = \frac{\frac{l_0}{\Delta t}}{\sqrt{1+(\frac{l_0}{c\Delta t})^2}} = 2.68 \times 10^8\text{ m/s}$.

34. 在惯性系 S 中,有两事件发生于同一地点,且第二事件比第一事件晚发生 $\Delta t = 2\text{s}$;而在另一惯性系 S' 中,观测第二事件比第一事件晚发生 $\Delta t' = 3\text{s}$.那么在 S' 系中发生两事件的地点之间的距离是多少?

解: 令 S' 系与 S 系的相对速度为 v ,有 $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$, $(\frac{\Delta t}{\Delta t'})^2 = 1 - (\frac{v}{c})^2$,

则 $v = c\sqrt{1 - (\frac{\Delta t}{\Delta t'})^2} = 2.24 \times 10^8\text{ m/s}$.

那么,在 S' 系中测得两事件之间距离为 $\Delta x' = v\Delta t' = c\sqrt{\Delta t'^2 - \Delta t^2} = 6.72 \times 10^8\text{m}$.

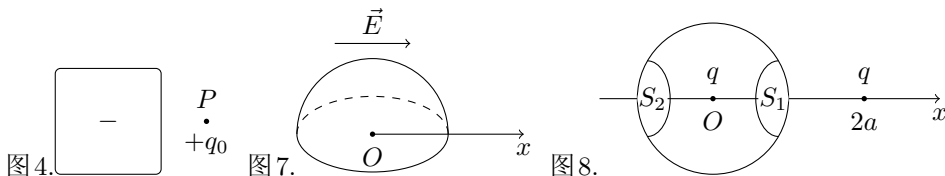
静电场

一. 选择题

1. 一均匀带电球面, 电荷面密度为 σ , 球面内电场强度处处为零, 球面上面元 dS 带有 σdS 的电荷, 该电荷在球面内各点产生的电场强度 处处不为零.

2. 下列说法中正确的是 场强可由 $\vec{E} = \vec{F}/q$ 定出, 其中 q 为试验电荷可负可正, \vec{F} 为试验电荷所受的电场力.

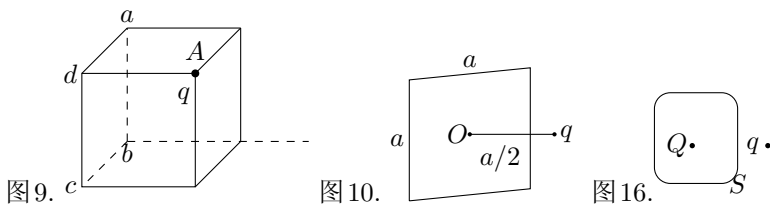
4. 将一个试验电荷 q_0 (正电荷) 放在带有负电荷的大导体附近 P 点处 (如图), 测得它所受的力为 F . 若考虑到电荷 q_0 不是足够小, 则 F/q_0 比 P 点处原先的场强数值小.



7. 一电场强度为 \vec{E} 的均匀电场, \vec{E} 的方向沿 x 轴正方向, 如图, 则通过图中一半径为 R 的半球面的电场强度通量为 0.

8. 有两个电荷都是 $+q$ 的点电荷, 相距为 $2a$. 今以左边的点电荷所在处为球心, 以 a 为半径作一球形高斯面. 在球面上取两块相等的小面积 S_1 和 S_2 , 其位置如图所示. 设通过 S_1 和 S_2 的电场强度通量分别为 Φ_1 和 Φ_2 , 通过整个球面的电场强度通量为 Φ_S , 则 $\Phi_1 < \Phi_2, \Phi_S = q/\epsilon_0$.

9. 如图所示, 一个电荷为 q 的点电荷位于立方体的 A 角上, 则通过侧面 $abcd$ 的电场强度通量等于 $\frac{q}{24\epsilon_0}$.



10. 有一边长为 a 的正方形平面, 在其中垂线上距中心 O 点 $a/2$ 处, 有一电荷为 q 的正点电荷, 如图所示, 则通过该平面的电场强度通量为 $\frac{q}{6\epsilon_0}$.

11. 高斯定理 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV / \epsilon_0$ 适用于任何静电场.

12. 关于高斯定理的理解有下面几种说法, 其中正确的是 如果高斯面内有静电荷, 则通过高斯面的电场强度通量必不为零.

15. 根据高斯定理的数学表达式 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum q / \epsilon_0$ 可知 闭合面内的电荷代数和为零时, 闭合面上各点场强不一定处处为零.

16. 点电荷 Q 被曲面 S 所包围, 从无限远处引入另一点电荷 q 至曲面外一点, 如图所示, 则引入前后曲面 S 的电场强度通量不变, 曲面上各点场强变化.

17. 半径为 R 的均匀带电球体的静电场中各点的电场强度大小 E 与距球心距离 r 的关系曲线为 (B).

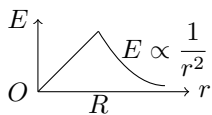


图17.(B)

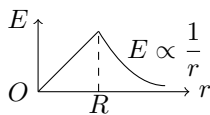


图18.(B)

18. 半径为 R 的“无限长”均匀带电圆柱体的静电场中各点的电场强度大小 E 与距轴线距离 r 的关系曲线为 (B).

23. 有 N 个电荷均为 q 的点电荷,以两种方式分布在相同半径的圆周上:一种是无规则的分布,另一种是均匀分布.比较这两种情况下在过圆心 O 并垂直于圆平面的 z 轴上任一点 P (如图所示)的场强与电势,则有场强分量 E_z 相等,电势相等.

24. 静电场中某点电势的数值等于单位正电荷置于该点时具有的电势能.

25. 关于静电场中某点电势值的正负,电势值的正负取决于电势零点的选取.

26. 如图,在点电荷 q 的电场中,选取以 q 为中心、 R 为半径的球面上一点 P 处作电势零点,则与点电荷 q 距离为 r 的点 P' 电势为 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r} - \frac{1}{R})$.

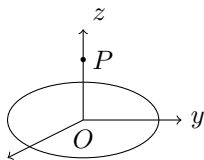


图23.

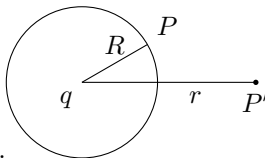


图26.

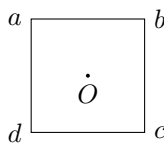


图27.

27. 如图所示,边长为 l 的正方形,在其四个顶点上各放有等量的点电荷.若正方形中心 O 处的场强值和电势值都等于零,则顶点 a, c 处是正电荷, b, d 处是负电荷.

30. 如图所示,两个同心球壳.内球壳半径为 R_1 ,均匀带有电荷 Q ; 外球壳半径为 R_2 , 壳的厚度忽略,原先不带电,但与地相连接.设地为电势零点,则在两球之间距离球心为 r 的点 P 处电场强度大小为 $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, 电势为 $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2})$.

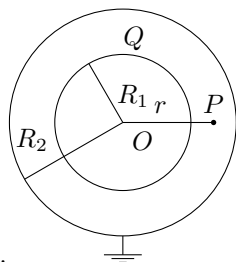


图30.

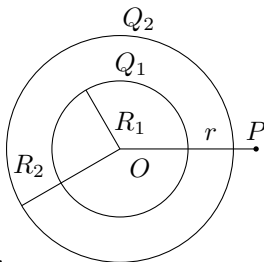


图32.

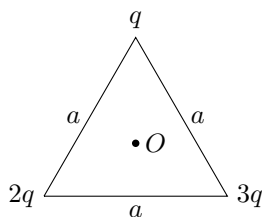


图33.

32. 如图所示,两个同心的均匀带电球面,内球面半径为 R_1 、带电荷 Q_1 ,外球面半径为 R_2 、带电荷 Q_2 .设无穷远处为电势零点,则在外球面之外距离球心为 r 处的点 P 的电势 U 为 $\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$.

33. 如图所示,边长为 a 的等边三角形的三个顶点上,分别放置着三个正的点电荷 $q, 2q, 3q$.若将另一正点电荷 Q 从无穷远处移到三角形中心 O 处,外力所做的功为 $\frac{3\sqrt{3}qQ}{2\pi\epsilon_0 a}$.

34. 点电荷 $-q$ 位于圆心 O 处, A, B, C, D 为同一圆周上的四点,如图所示.现将一试验电荷从 A 点分别移动到 B, C, D 各点,则从 A 到各点,电场力做功相等.

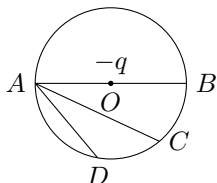


图 34.

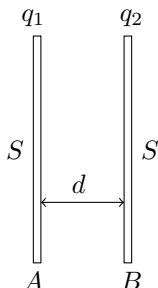


图 35.

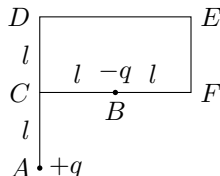


图 36.

35. 两块面积均为 S 的金属平板 A 和 B 彼此平行放置, 板间距离为 d (d 远小于板的线度), 设 A 板带有电荷 q_1 , B 板带有电荷 q_2 , 则 A, B 两板间的电势差 U_{AB} 为 $\frac{q_1 - q_2}{2\epsilon_0 S} d$.

36. 如图所示, $CDEF$ 为一矩形, 边长分别为 l 和 $2l$. 在 DC 延长线上 $CA = l$ 处的 A 点有点电荷 $+q$, 在 CF 的中点 B 点有点电荷 $-q$, 若使单位正电荷从 C 点沿 $CDEF$ 径运动到 F 点, 则电场力所做的功等于 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}$.

37. 图中实线为某电场中的电场线, 虚线表示等势(位)面, 由图可以看出 $E_A < E_B < E_C$, $U_A > U_B > U_C$.

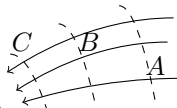


图 37.

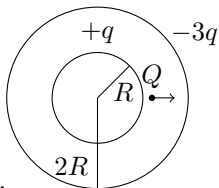


图 38.

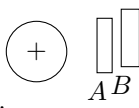


图 47.

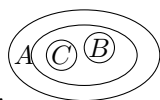


图 48.

38. 如图所示, 在真空中半径分别为 R 和 $2R$ 的两个同心球面, 其上分别均匀地带有电荷 $+q$ 和 $-3q$. 今将一电荷为 $+Q$ 的带电粒子从内球面处由静止释放, 则该粒子到达外球面时的动能为 $\frac{Qq}{8\pi\epsilon_0 R}$.

47. 把 A, B 两块不带电的导体放在一带正电导体的电场中, 如图所示. 设无限远处为电势零点, A 的电势为 U_A , B 的电势为 U_B , 则 $U_B < U_A$.

48. 如图所示, 一封闭的导体壳 A 内有两个导体 B 和 C . A, C 不带电, B 带正电, 则 A, B, C 三导体的电势关系是 $U_B > U_C > U_A$.

52. 一个平行板电容器, 充电后与电源断开, 当用绝缘手柄将电容器两极板间距拉大, 则两级板间的电势差 U_{12} 增大, 电场强度大小 E 不变, 电场能量 W 增大.

二. 填空题

57. A, B 为真空中两个平行的“无限大”的均匀带电平面, 已知两平面间的电场强度大小为 E_0 , 两平面外侧电场强度大小都为 $E_0/3$, 方向如图, 则 A, B 两平面上的电荷面密度分别为 $\sigma_A = -\frac{2}{3}\epsilon_0 E_0$, $\sigma_B = \frac{4}{3}\epsilon_0 E_0$.

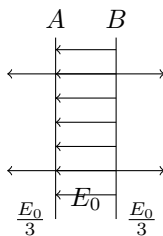


图 57.

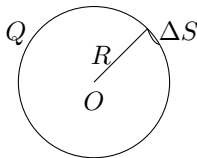


图 60.

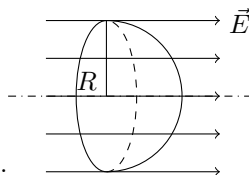


图 61.

60. 真空中一半径为 R 的均匀带电球面带有电荷 Q ($Q > 0$). 今在球面上挖去非常小块的面积 ΔS (连同电荷), 如图所示, 假设不影响其他处原来的电荷分布, 则挖去 ΔS 后球心处电场强度大小 $E = \frac{Q\Delta S}{16\pi^2\epsilon_0 R^4}$, 其方向为 由圆心 O 点指向 ΔS , 电势为 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} (1 - \frac{\Delta S}{4\pi R^2})$ (设无穷远处电势为零).

61. 半径为 R 的半球面置于场强为 \vec{E} 的均匀电场中, 其对称轴与场强方向一致, 如图所示. 则通过该半球面的电场强度通量为 $\pi R^2 E$.

62. 在点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的静电场中, 作出如图所示的三个闭合面 S_1, S_2, S_3 , 则通过这些闭合面的电场强度通量分别是: $\Phi_1 = q/\epsilon_0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = -q/\epsilon_0$.

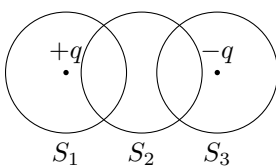


图 62.

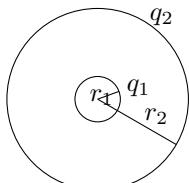


图 63.

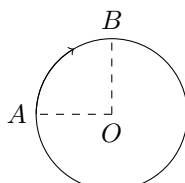


图 68.

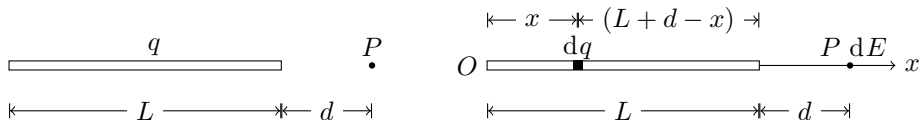
63. 如图所示, 两同心带电球面, 内球面半径为 $r_1 = 5\text{cm}$, 带电荷 $q_1 = 3 \times 10^{-8}\text{C}$; 外球面半径为 $r_2 = 20\text{cm}$, 带电荷 $q_2 = -6 \times 10^{-8}\text{C}$. 设无穷远处电势为零, 则空间另一电势为零的球面半径 $r = 10\text{cm}$.

66. 把一个均匀带有电荷 $+Q$ 的球形肥皂泡由半径 r_1 吹胀到 r_2 , 则半径为 R ($r_1 < R < r_2$) 的球面上任意点的场强大小 E 由 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ 变为 0 , 电势 U 由 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ 变为 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$.

68. 在静电场中, 一质子 (带电荷 $e = 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$) 沿四分之一圆弧轨道从 A 点移到 B 点 (如图), 电场力做功 $8.0 \times 10^{-15}\text{J}$. 则当质子沿四分之三圆弧轨道从 B 点回到 A 点时, 电场力做功 $A = -8.0 \times 10^{-15}\text{J}$. 设 A 点电势为零, 则 B 点电势 $U = -5 \times 10^4\text{V}$.

三. 计算题

98. 如图所示, 真空中一长为 L 的均匀带电细支杆, 总电荷为 q , 试求在直杆延长线上距杆的一端距离为 d 的 P 点的电场强度.

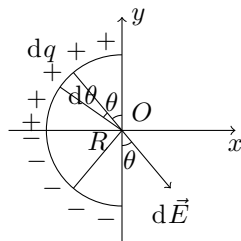
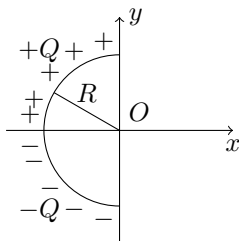


解: 建立图示坐标系, 带电直杆的电荷线密度为 $\lambda = q/L$, 在 x 处取一电荷元 $dq = \lambda dx = qdx/L$, 它在 P 点的元场强 $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 (L+d-x)^2} = \frac{qdx}{4\pi\epsilon_0 L(L+d-x)^2}$.

因各元场强在 P 点的元场强均同向, 所以可直接求和.

总场强 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \int_0^L \frac{dx}{(L+d-x)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d(L+d)}$, 方向沿 x 轴, 即杆的延长线方向.

99. 一个细玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形,沿其上半部分均匀分布有电荷 $+Q$,沿其下半部分均匀分布有电荷 $-Q$,如图所示.试求圆心 O 处的电场强度.



解: 把所有电荷都当作正电荷处理. 在 θ 处取微小电荷 $dq = \lambda dl = \frac{Q}{\frac{R}{2}\pi} \cdot R d\theta = \frac{2Q d\theta}{\pi}$.

它在 O 处产生场强 $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} d\theta$, 将 dE 分解成两个分量:

$$dE_x = dE \sin \theta = \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \sin \theta d\theta, \quad dE_y = -dE \cos \theta = -\frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \cos \theta d\theta.$$

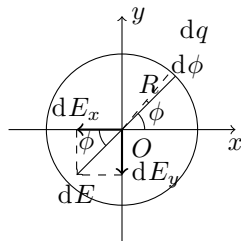
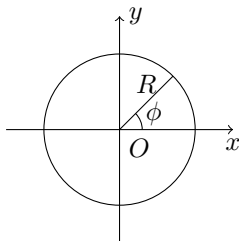
对各分量分别积分,考虑到一半是负电荷

$$E_x = \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \left[\int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta d\theta \right] = 0,$$

$$E_y = \frac{-Q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \left[\int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta d\theta \right] = \frac{-Q}{\pi^2\epsilon_0 R^2}.$$

$$\text{所以 } \vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = \frac{-Q}{\pi^2\epsilon_0 R^2} \vec{j}.$$

101. 半径为 R 的带电细圆环,其电荷线密度为 $\lambda = \lambda_0 \sin \phi$, 式中 λ_0 为一常数, ϕ 为半径 R 与 x 轴所成的夹角,如图所示,试求环心 O 处的电场强度.



解: 在任意角 ϕ 处取微小电量 $dq = \lambda dl$,

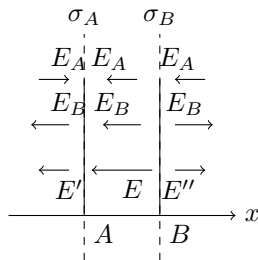
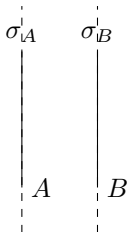
$$\text{它在 } O \text{ 点产生的场强为 } dE = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda_0 \sin \phi d\phi}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

它沿 x, y 轴上的两个分量为 $dE_x = -dE \cos \phi$, $dE_y = -dE \sin \phi$,

对各分量分别求和 $E_x = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \sin \phi d(\sin \phi) d\phi = 0$,

$$E_y = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = -\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}. \text{ 故 } O \text{ 点的场强为 } \vec{E} = E_y \vec{j} = -\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R} \vec{j}.$$

102. 图中所示, A, B 为真空中两个平行的“无限大”均匀带电平面, A 面上电荷面密度 $\sigma_A = -17.7 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$, B 面的电荷面密度 $\sigma_B = 35.4 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$. 试计算两平面之间和两平面外的电场强度.



解: 两带电平面各自产生的场强分别是

$$E_A = |\sigma_A|/(2\varepsilon_0), \text{方向如图示}; E_B = \sigma_B/(2\varepsilon_0), \text{方向如图示}.$$

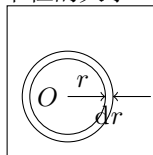
建立坐标正向如图. 由叠加原理得:

$$\text{两面间电场强度 } E = E_A + E_B = (|\sigma_A| + \sigma_B)/(2\varepsilon_0) = 3 \times 10^4 \text{ N/C, 方向沿 } x \text{ 轴负方向};$$

$$\text{两面外左侧 } E' = E_A - E_B = (|\sigma_A| - \sigma_B)/(2\varepsilon_0) = -1 \times 10^4 \text{ N/C, 方向沿 } x \text{ 轴负方向};$$

$$\text{两面外右侧 } E'' = E_B - E_A = 1 \times 10^4 \text{ N/C, 方向沿 } x \text{ 轴正方向}.$$

103. 如图所示, 一电荷面密度为 σ 的“无限大”平面, 在距离平面 a 处的一点的场强大小的一半是由平面上的一个半径为 R 的圆面积范围内的电荷所产生的. 试求该圆半径的大小.



解: 电荷面密度为 σ 的无限大均匀带电平面在任意点的场强大小为 $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$.

以图中 O 点为圆心, 取半径为 $r \rightarrow r + dr$ 的环形面积, 其电量为 $dq = \sigma 2\pi r dr$,

$$\text{在它距离平面为 } a \text{ 处的一点处产生的场强 } dE = \frac{\sigma a r dr}{2\varepsilon_0 (a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{则半径为 } R \text{ 的圆面积内的电荷在该点的场强为 } E = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right).$$

由题意, 令 $E = \sigma/(4\varepsilon_0)$, 得到 $R = \sqrt{3}a$.

118. 图中所示为一 x 轴放置的长度为 l 的不均匀带电细棒, 其电荷线密度为 $\lambda = \lambda_0(x - a)$, λ_0 为一常量. 取无穷远处为电势零点, 求坐标原点 O 处的电势.



解: 分割带电细棒, 任取线元 dx , 其带电荷 $dq = \lambda_0(x - a)dx$.

$$\text{它在 } O \text{ 点产生的元电势 } dU = \frac{\lambda_0(x-a)dx}{4\pi\varepsilon_0 x}.$$

$$O \text{ 点总电势 } U = \int dU = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\int_0^{a+l} dx - a \int_a^{a+l} \frac{dx}{x} \right) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(l - a \ln \frac{a+l}{a} \right).$$

稳恒磁场

一. 选择题

1. 在磁感强度为 \vec{B} 的均匀磁场中作一半径为 r 的半球面 S , S 边线所在平面的法线方向单位矢量 \vec{n} 与 \vec{B} 的夹角为 α , 则通过半球面 S 的磁通量为 $[-\pi r^2 B \cos \alpha]$. (取弯曲面向外为正)

2. 边长为 a 的正方形的四个角上固定有四个电荷均为 q 的点电荷. 此正方形以角速度 ω 绕 AC 轴旋转时, 在中心 O 点产生的磁感强度大小为 B_1 ; 此正方形以同样的角速度 ω 绕过 O 点垂直于正方形平面的轴旋转时, 在 O 点产生的磁感强度的大小为 B_2 , 则 $[B_1 = \frac{1}{2} B_2]$.

3. 通有电流 I 的无限长直导线有如图三种形状 (直线、“L”型、下半圆), 则 P, Q, O 各点磁感强度大小关系为 $[B_O > B_Q > B_P]$.

4. 载流的圆形线圈 (半径 a_2) 与正方形线圈 (边长 a_2) 通有相同电流 I . 若两个线圈的中心 O_1, O_2 处的磁感强度大小相同, 则半径 a_1 与边长 a_2 的比 $a_1 : a_2$ 为 $[\sqrt{2}\pi : 8]$.

5. 无限长直导线在 P 弯成半径为 R 的圆, 当通以电流 I 时, 则在圆心 O 的磁感强度大小等于 $\frac{\mu_0 I}{2R} (1 - \frac{1}{\pi})$.

6. 一个电流元 $I d\vec{l}$ 位于直角坐标系原点, 电流沿 z 轴方向, 点 $P(x, y, z)$ 的磁感强度沿 x 轴的分量是 $-(\mu_0/4\pi) I y dl / (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$.

9. 电流由长直导线1沿半径方向经 a 点流入一由电阻均匀的导线构成的圆环, 再由 b 点沿半径方向从圆环流出, 经长直导线2返回电源. 已知直导线上电流强度为 I , $\angle aOb = 30^\circ$. 若长直导线1, 2和圆环中的电流在圆心 O 点产生的磁感强度分别用 $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ 表示, 则圆心 O 点的磁感强度大小 $B = 0$, 因为 $B_1 = B_2 = B_3 = 0$.

14. 有一无限长通电流的扁平铜片, 宽度为 a , 厚度不计, 电流 I 在铜片上均匀分布, 在铜片外与铜片共面, 离铜片右边缘为 b 处的 P 点的磁感强度 \vec{B} 的大小为 $\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \frac{a+b}{b}$.

15. 若空间存在两根无限长直载流导线, 空间的磁场分布就不具有简单的对称性, 则该磁场分布可以用安培环路定理和磁感强度的叠加原理求出.

16. 如图, 流出纸面的电流为 $2I$, 流进纸面的电流为 I , 则正确的是 $\oint_{L_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$.

17. 在图(a)和(b)中各有一半半径相同的圆形回路 L_1, L_2 , 圆周内有电流 I_1, I_2 , 其分布相同, 且均在真空中, 但在(b)图中 L_2 回路外有电流 I_3 , P_1, P_2 位两圆形回路上的对应点, 则 $\oint_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}, B_{P_1} \neq B_{P_2}$.

20. 如图所示, 在磁感强度为 \vec{B} 的均匀磁场中, 有一圆形载流导线, a, b, c 是其上三个长度相等的电流元, 则它们所受安培力大小关系为 $F_b > F_c > F_a$.

21. 如图, 无限长直载流导线与正三角形载流线圈在同一平面内, 若长直导线固定不动, 则载流三角形线圈将向着长直导线平移.

22. 长直电流 I_2 与圆形电流 I_1 共面, 并与其一直径相重合, 如图(但两者间绝缘), 设长直电流不动, 则圆形电流将向右运动.

25. 如图, 匀强磁场中有一矩形铜电线圈, 它的平面与磁场平行, 在磁场作用下, 线圈发生转动, 其方向是 ab 边转入纸内, cd 边转出纸外.

26. 把通电的直导线放在蹄形磁铁磁极的上方, 如图所示. 导线可以自由活动, 且不计重力. 当导线内通以如图所示的电流时, 导线将顺时针方向转动, 然后下降(从上往下看).

二. 填空题

38. 真空中稳恒电流 I 流过两个半径分别为 R_1, R_2 的同心半圆型导线, 两半圆导线间由沿直径的导线连接, 电流沿直导线流入. (1) 如果两个半圆共面(图1), 圆心 O 点的磁感强度 \vec{B}_0 的大小为 $\frac{\mu_0 I}{4} (\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})$, 方向垂直纸面向外; (2) 如果两个半圆正交(图2), 则圆心 O 点的磁感强度 \vec{B}_0 的大小为 $\frac{\mu_0 I}{4} \sqrt{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}}$, \vec{B}_0 的方向与 y 轴的夹角为 $\frac{2}{\pi} + \arctan \frac{R_2}{R_1}$.

39. 一弯曲的载流导线在同一平面内, 形状如图(O 点是半径为 R_1 和 R_2 的两个半圆弧的共同圆心, 电流自无穷远来到无穷远去), 则 O 点磁感强度的大小是 $B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R_1} + \frac{\mu_0 I}{4R_2} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2}$.

49. 如图, 在无限长直载流导线的右侧有面积为 S_1 和 S_2 的两个矩形回路. 两回路与长直载流导线共面, 且矩形回路的一边与长直载流导线平行. 则通过面积为 S_1 的矩形回路的磁通量与通过面积为 S_2 的矩形回路的磁通量之比为 $1:1$.

50. 有一同轴电缆,其尺寸如图所示,它的内外两导体中的电流均为 I ,且在横截面上均匀分布,点两者电流的流向正相反,则 (1) 在 $r < R_1$ 处磁感强度大小为 $\boxed{\mu_0 r I / (2\pi R_1^2)}$; (2) 在 $r > R_2$ 处磁感强度大小为 $\boxed{0}$.

51. 两根长直导线通有电流 I ,图示有三种环路;在每种情况下, $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ 等于: $\boxed{\mu_0 I}$ (对环路 a), $\boxed{0}$ (对环路 b), $\boxed{2\mu_0 I}$ (对环路 c).

65. 如图所示,在真空中有一半径为 a 的 $3/4$ 圆弧形导线,其中通以稳恒电流 I ,导线置于均匀外磁场 \vec{B} 中,且 \vec{B} 与导线所在平面垂直.则该载流导线 bc 所受磁力大小为 $\boxed{\sqrt{2}aIB}$.

66. 如图所示,在真空中有一半圆形闭合线圈,半径为 a ,流过稳恒电流 I ,则圆心 O 处的电流元 $I d\vec{l}$ 所受的安培力 $d\vec{F}$ 的大小为 $\boxed{\mu_0 I^2 dl / 4a}$,方向 $\boxed{\text{垂直电流元背向半圆弧(即向左)}}$.

三. 计算题

69. 有一条载有电流 I 的导线弯成如图示 $abcd$ a形状.其中 ab, cd 是直线段,其余为圆弧.两段圆弧的长度和半径分别为 l_1, R_1 和 l_2, R_2 ,且两段圆弧共面共心.求圆心 O 处的磁感强度 \vec{B} 的大小.

解: 两段圆弧在 O 处产生的磁感强度为 $B_1 = \frac{\mu_0 I l_1}{4\pi R_1^2}, B_2 = \frac{\mu_0 I l_2}{4\pi R_2^2}$.
 两段直导线在 O 处产生的磁感强度为 $B_3 = B_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1 \cos \frac{l_1}{2R_1}} (-\sin \frac{l_1}{2R_1} + \sin \frac{l_2}{2R_2})$.
 取向里为正 $B = B_1 + B_3 + B_4 - B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1 \cos \frac{l_1}{2R_1}} (-\sin \frac{l_1}{2R_1} + \sin \frac{l_2}{2R_2}) + \frac{\mu_0 I}{4\pi} (\frac{l_1}{R_1^2} - \frac{l_2}{R_2^2})$.
 方向垂直版面向里.

71. 已知半径为 R 的载流圆线圈与边长为 a 的载流正方形线圈的磁矩之比为 $2:1$,且载流圆线圈在中心 O 处产生的磁感应强度为 B_0 ,求在正方形线圈中心 O' 处磁感强度的大小.

解: 设圆线圈磁矩为 p_{m1} ,方线圈磁矩为 p_{m2} ,则 $p_{m1} = I_1 \pi R^2, p_{m2} = I_1 a^2$,
 所以 $I_2 = \pi R^2 I_1 / (a^2)$. 正方形一边在其中心处产生的磁感强度
 $B_1 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi (a/2)} (\cos \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I_2}{2\pi a}$,【答案缺失】

73. 将通有电流 I 的导线在同一平面内弯成如图所示形状,求 D 点的磁感强度 \vec{B} 的大小.

解:【答案缺失】

78. 用两根彼此平行的半无限长直导线 L_1, L_2 把半径为 R 的均匀导体圆环联到电源上,如图所示.已知导线中的电流为 I ,求圆环中心 O 点的磁感强度.

解:【答案缺失】 $\vec{B}_3 + \vec{B}_4 = 0$.
 故 O 点的磁感强度 $|\vec{B}_0| = |\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$,方向垂直图面向外.

79. 如图所示,一无限长载流平板宽度为 a ,线电流密度为 δ (即沿 x 方向单位长度上的电流),求与平板共面且距平板一边为 b 的任意点 P 的磁感强度.

解: 利用无限长载流直导线的公式求解.
 取离 P 点为 x 宽度为 dx 的无限长载流细条,它的电流 $di = \delta dx$,
 这载流长条在 P 点产生的磁感强度 $dB = \frac{\mu_0 di}{2\pi x} = \frac{\mu_0 \delta dx}{2\pi x}$,方向垂直纸面向里.
 所有载流长条在 P 点产生的磁感强度方向都相同,所以载流平板在 P 点产生的磁感强度
 $B = \int dB = \frac{\mu_0 \delta}{2\pi x} \int_b^{a+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 \delta}{2\pi x} \ln \frac{a+b}{b}$,方向垂直纸面向里.

80. 在一无限长的半圆筒形的金属箔片中,沿轴向流有电流,在垂直电流方向单位长度的电流为 $i = k \sin \theta$,其中 k 为常量, θ 如图所示.求半圆筒轴线上的磁感强度.

解: 设轴线上任意点的磁感强度为 B , 半圆筒半径为 R .

先将半圆筒面分成许多平行轴线宽度为 dl 的无限长直导线, 其中流过的电流为

$$dI = i dl = k \sin \theta \cdot dl = k \sin \theta R d\theta,$$

它在轴线上产生的元磁感强度为 $dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R}$, 方向如图.

由对称性可知: $d\vec{B}$ 在 z 轴向的分量为 0, 在 y 轴的分量叠加中互相抵消,

只需要考虑 $d\vec{B}$ 在 x 轴的分量 $dB_x = dB \sin \theta = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} \sin \theta = \frac{\mu_0 k \sin^2 \theta}{2\pi} d\theta$,

$$\text{积分 } B = \int dB_x = \int_0^\pi \frac{\mu_0 k \sin^2 \theta}{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 k}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\mu_0 k}{4}.$$

81. 如图所示, 载有电流 I_1 和 I_2 的长直导线 ab 和 cd 相互平行, 相距为 $3r$, 今有载有电流 I_3 的导线 $MN = r$, 水平放置, 且其两端 MN 分别与 I_1, I_2 的距离都是 r , ab, cd 和 MN 共面, 求导线 MN 所受的磁力大小和方向.

解: 载流导线 MN 上任一点处的磁感强度大小为 $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(r+x)} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(2r-x)}$.

MN 上电流元 $I_3 dx$ 所受磁力 $dF = I_3 B dx = I_3 [\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(r+x)} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(2r-x)}] dx$,

$$F = I_3 \int_0^r [\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(r+x)} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(2r-x)}] dx = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} [\int_0^r \frac{1}{r+x} dx - \int_0^r \frac{I_2}{2r-x} dx]$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} [I_1 \ln \frac{2r}{r} + I_2 \ln \frac{r}{2r}] = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} [I_1 \ln 2 - I_2 \ln 2] = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} (I_1 - I_2) \ln 2.$$

若 $I_2 > I_1$, 则 \vec{F} 的方向向下; 若 $I_2 < I_1$, 则 \vec{F} 的方向向上.

电磁感应

一. 选择题

2. 如图所示, 矩形区域为均匀恒稳磁场, 半圆形闭合导线回路在纸面内绕轴 O 作逆时针方向匀角速转动, O 点时圆心且恰好落在磁场的边缘上, 半圆形闭合导线完全在磁场外时开始计时, 图中的 $\varepsilon-t$ 函数图像中哪一条属于半圆形导线回路中产生的感应电动势. (A).

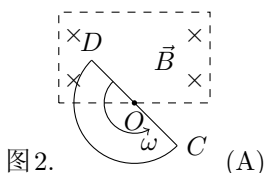
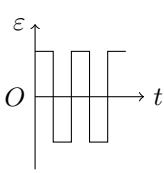


图 2.



(A)

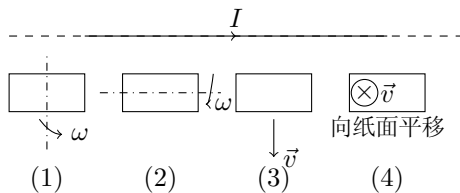


图 3.

3. 如图所示, 一矩形线圈, 放在一无限长载流直导线附近, 开始时线圈与导线在同一平面内, 矩形的长边与导线平行. 若矩形线圈以图中所示四种方式运动, 则在开始瞬间, 以图 (3) 方式运动的矩形线圈中的感应电流最大.

4. 如图, 长度为 l 的直导线 ab 在均匀磁场 \vec{B} 中以速度 \vec{v} 移动, 直导线 ab 中的电动势为 0 .

5. 一根长度为 L 的铜棒, 在均匀磁场 \vec{B} 中以匀角速度 ω 绕通过其一端 O 的定轴旋转着, \vec{B} 的方向垂直铜棒转动的平面, 如图所示. 设 $t = 0$ 时, 铜棒与 Ob 成 θ 角 (b 为铜棒转动的平面上的一个固定点), 则在任意时刻 t 这根铜棒两端之间的感应电动势是 $\frac{1}{2} \omega L^2 B$.

6. 如图所示, 导体棒 AB 在均匀磁场 \vec{B} 中绕通过 C 点的垂直与棒长且沿磁场方向的轴 OO' 转动 (角速度 $\vec{\omega}$ 与 \vec{B} 同方向), BC 的长度为棒长的 $1/3$, 则 A 点比 B 点电势高.

8. 尺寸相同的铁环与铜环所包围的面积中, 通以相同变化率的磁通量, 当不计环的自感时, 环中感应电动势相同, 感应电流不同.

9. 自感为0.25H的线圈中,当电流在(1/16)s内由2A均匀减小到零时,线圈中自感电动势的大小为 $\boxed{8.0\text{V}}$.

10. 两个通有电流的平面圆线圈相距不远,如果要使其互感系数近似为零,则应调整线圈的取向使得一个线圈平面平行于两圆心连线,另一个线圈平面垂直于两圆心连线.

二. 填空题

36. 一导线被弯成如图所示形状,acb为半径为 R 的四分之三圆弧,直线段 Oa 长为 R .若此导线放在匀强磁场 \vec{B} 中, \vec{B} 的方向垂直纸面向内.导线以角速度 ω 在图面内绕 O 点匀速转动,则此导线中的动生电动势 $\boxed{\varepsilon_i = \frac{5}{2}B\omega R^2}$,电势最高点是 $\boxed{O\text{点}}$.

41. 一自感线圈中,电流强度在0.002s内均匀地由10A增加到12A,此过程中线圈内自感电动势为400V,则线圈的自感系数 $\boxed{L = 0.400\text{H}}$.

42. 有两个长度相同,匝数相同,截面积不同的长直螺线管,通以相同大小的电流.现将小螺线管完全放入大螺线管里(两者轴线重合),且使两者产生的磁场方向一致,则小螺线管内的磁能密度是原来的 $\boxed{4\text{倍}}$;若使两线管产生的磁场方向相反,则小螺线管中的磁能密度为 $\boxed{0}$ (忽略边缘效应).

43. 自感系数 $L = 0.3\text{H}$ 的螺线管中通以 $I = 8\text{A}$ 的电流时,螺线管存储的磁场能量 $\boxed{W = 9.6\text{J}}$.

44. 真空中两只长直螺线管1和2,长度相等,单层密绕匝数相同,直径之比 $d_1 : d_2 = 1 : 4$.当它们通以相同电流时,两螺线管贮存的磁能之比为 $\boxed{W_1 : W_2 = 1 : 16}$.

三. 计算题

50. 无限长直导线,通以常定电流 I .有一与之共面的直角三角形线圈 ABC .已知 AC 边长为 b ,且与长直导线平行, BC 边长为 a .若线圈以垂直于导线方向的速度 \vec{v} 向右平移,当 B 点与长直导线的距离为 d 时,求线圈 ABC 内的感应电动势的大小和方向.

解: 取顺时针绕向为正,穿过小阴影面积的元磁通量 $d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi(r+x)} \cdot \frac{b}{a} x dx$,

式中 r 是 t 时刻 B 点与长直导线的距离.

总磁通量 $\Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} \int_0^a \frac{x}{r+x} dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} (a - r \ln \frac{a+r}{r})$.

感应电动势的大小 $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} (\ln \frac{a+r}{r} - \frac{a}{a+r}) \frac{dr}{dt}$,

当 $r = d$ 时, $\varepsilon_i = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} (\ln \frac{a+d}{d} - \frac{a}{a+d}) v$, 顺时针方向.

51. 如图所示,长直导线 AB 中的电流 I 沿导线向上,并以 $dI/dt = 2\text{A/s}$ 的变化率均匀增长.导线附近放一个与之同面的直角三角形线框,其一边与导线平行,距离为5cm.线框宽10cm,高20cm,求此线框中产生的感应电动势的大小和方向.

解: 取顺时针绕向为正,元磁通量 $d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi(0.05+x)} \cdot \frac{0.20}{0.10} (0.10 - x) dx$.

穿过直角三角形线框所围面积的总磁通量

$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{0.10} \frac{-2x+0.20}{x+0.05} dx = -\frac{\mu_0 I b}{\pi} + \frac{0.15\mu_0 I}{\pi} \ln 3$.

三角形线框中的感应电动势大小为

$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{0.15\mu_0}{\pi} \ln 3 \frac{dI}{dt} = -5.18 \times 10^{-8} \text{V}$, 逆时针方向.

53. 如图所示,两条平行长直导线和一个矩形导线框共面,且导线框的一个边与长直导线平行,它到两长直导线的距离分别为 r_1, r_2 .已知两导线中电流都为 $I = I_0 \sin \omega t$,其中 I_0 和 ω 为常数, t 为时间.导线框长为 a 宽为 b ,求导线框中的感应电动势.

解: 两个载同向电流的长直导线在坐标 x 处所产生的磁场为 $B = \frac{\mu_0}{\pi} (\frac{1}{x} + \frac{1}{x-r_1+r_2})$.
取顺时针绕向为正, 则 $\Phi = \int B dS = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} (\int_i^{i+b} \frac{dx}{x} + \int_i^{i+b} \frac{dx}{x-r_1+r_2}) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln(\frac{r_1+b}{r_1} \cdot \frac{r_2+b}{r_2})$.
所以 $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln[\frac{(r_1+b)(r_2+b)}{r_1 r_2}] \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 a \omega}{2\pi} \ln[\frac{(r_1+b)(r_2+b)}{r_1 r_2}] \cos \omega t$.

56. 如图所示, 一长直导线中通有电流 I , 有一垂直于导线长度为 l 的金属棒 AB 在包含导线的平面内, 以恒定的速度 \vec{v} 沿与棒成 θ 角的方向移动. 开始时, 棒的 A 端到导线的距离为 a , 求任意时刻金属棒中的动生电动势, 并指出棒哪端的电势高.

解: $v_{\perp} = v \sin \theta$, $v_{\parallel} = v \cos \theta$,
 $\varepsilon_i = \int \varepsilon_i = -\int_{a+vt \cos \theta}^{a+l+vt \cos \theta} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} v \sin \theta dx$ (ε_i 以 $A \rightarrow B$ 为正).
 $\varepsilon_i = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} v \sin \theta \ln \frac{a+l+vt \cos \theta}{a+vt \cos \theta}$, A 端的电势高.

57. 如图所示, 长直导线中电流为 i , 矩形线框 $abcd$ 与长直导线共面, 且 $ad \parallel AB$, dc 边固定, ab 边沿 da 及 cb 以速度 \vec{v} 无摩擦地匀速平动. $t = 0$ 时, ab 边与 cd 边重合. 设线框自感忽略不计.

(1) 如 $i = I_0$, 求 ab 中的感应电动势. ab 两点哪点电势高?

(2) 如 $i = I_0 \cos \omega t$, 求 ab 边运动到图示位置时线框中的总感应电动势.

解: (1) \overline{ab} 所处的磁场不均匀, 建立坐标 ox , x 沿 ab 方向, 原点在长直导线处, 则 x 处磁场为 $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$, $i = I_0$.
沿 $a \rightarrow b$ 方向 $\varepsilon = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\int_0^{l_0+l_1} v \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x} dx = -\frac{\mu_0 v I_0}{2\pi} \ln \frac{l_0+l_1}{l_0}$, 故 $V_a > V_b$.
(2) $i = I_0 \cos \omega t$, 取顺时针绕向为正
 $\Phi = \int B l_2 dx = \int_0^{l_0+l_1} \frac{\mu_0 i l_2}{2\pi x} dx = -\frac{\mu_0 i l_2}{2\pi} \ln \frac{l_0+l_1}{l_0}$,
其中 $l_2 = vt$, 则有
 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{l_0+l_1}{l_0} \frac{d(i l_2)}{dt} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} v (\ln \frac{l_0+l_1}{l_0}) (\omega t \sin \omega t - \cos \omega t)$.

58. 载流长直导线与矩形回路 $ABCD$ 共面, 导线平行于 AB , 如图所示. 求下列情况下 $ABCD$ 中的感应电动势:

(1) 长直导线中电流 $I = I_0$ 不变, $ABCD$ 以垂直于导线的速度 \vec{v} 从初始位置远离导线匀速平移到某一位置时 (t 时刻).

(2) 长直导线中电流 $I = I_0 \sin \omega t$, $ABCD$ 不动.

(3) 长直导线中电流 $I = I_0 \sin \omega t$, $ABCD$ 以垂直于导线的速度 \vec{v} 从初始位置远离导线匀速运动.

解: 取顺时针绕向为正 $\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a+vt+b}{a+vt}$.
(1) $I = I_0$ 时,
 $\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I l v}{2\pi} (\frac{1}{a+vt} - \frac{1}{a+b+vt})$, 方向沿顺时针.
(2) $v = 0$, $\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$,
 $\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \cdot \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 I l_0 \omega}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \cos \omega t$, 正值表示顺时针.
(3) $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{d}{dt} (I \ln \frac{a+b+vt}{a+vt}) = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} [v \sin \omega t (\frac{1}{a+vt} - \frac{1}{a+b+vt}) - \omega \cos \omega t \ln \frac{a+b+vt}{a+vt}]$.
也可直接得 $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \dots$.