一　公式和性质

第一章　随机事件

1. **概率的性质:**
   (1) $P(\varnothing)=0$
   (2) A_i 两两互斥, $P(\bigcup_{i=1}^n A_i)=\sum_{i=1}^n P(A_i)$
   (3) $P(\overline{A})=1-P(A)$
   (4) $P(B-A)=P(B)-P(A)$
   (5) (加法公式) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
2. **加法公式:** $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
   (1) 互不相容: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
   (2) 相互独立: $P(A\cup B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$
3. **乘法公式:** $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$
   (1) 相互独立: $P(AB)=P(A)P(B)$
4. **条件概率公式:** $P(B|A)=P_B(A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$
5. **全概率公式:** $P(A)=\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$
6. **贝叶斯公式:** $P(B_i|A)=\dfrac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}$

第二章　随机变量

1. 概率密度函数 $f(x)$: $P\{a<X\le b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
2. 概率分布函数: $F(x)=P\{X\le x\}$
   (1) (单调不减性) $P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)$
   (2) (有界性) $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$
   (3) $F(x)=\sum_{x_k\le x}p_k$
3. $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$
   $f(x)=F'(x)$
4. 已知连续性随机变量 X 的概率密度 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y=g(X)$ 的概率密度 $f_Y(y)$
   (1) **积分转化法** $F_Y(y)=P\{g(X)\le y\}$,
   $f_Y(y)=F_Y'(y)$
   (2) **单调函数公式法** 对函数关系 $y=g(x)$, 给出反函数 $x=h(y)$.
   $$f_Y(y)=\begin{cases} f(h(y))\cdot|h'(y)|, & a<y<b,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

离散型随机变量

1. **两点分布** $X\sim B(1,p)$
   $\boxed{P\{X=1\}=p, P\{X=0\}=1-p}$
   性质1 $E(X)=p, D(X)=p(1-p)$
   $\hat{p}=\overline{X}=\sum X/n$ 是 p 的矩估计和极大似然估计
2. **二项分布** $X\sim B(n,p)$ 伯努利实验
   $\boxed{b(k;n,p)=P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}}$
   性质1 $E(X)=np, D(X)=np(1-p)$
   性质2 X 可以表示成 n 个同分布为 $B(1,p)$ 的独立随机变量 X_i
   性质3 若 X_i 相互独立, 且 $X_i\sim B(n_i,p)$,
   则 $X=\sum_{i=1}^m X_i\sim B(n,p)$
   $\hat{p}=\overline{X}/n=\sum X/(nN)$ 是 p 的矩估计和极大似然估计
3. **泊松分布** $X\sim P(\lambda)$
   $\boxed{b(k;\lambda)=P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}$
   性质1 $E(X)=\lambda, D(X)=\lambda$
   性质2 若 X_i 相互独立, 且 $X_i\sim P(\lambda_i)$,
   则 $X=\sum_{i=1}^m X_i\sim P(\lambda)$
   性质3 若 X_1,X_2 相互独立, 且 $X_i\sim P(\lambda_i)$, 则条件分布 $X_i|(X_1+X_2=n)$ 是二项分布, 且 $X_i|(X_1+X_2=n)\sim B(n,\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2})$
   某医院每天前来就诊的病人数, 某地区一段时间间隔内发生火灾的次数, 一段时间间隔内容器内部细菌数, 某地一年内发生暴雨的次数, 每条床单上的疵点数.
4. 二项分布和泊松分布的近似公式: 当 $n\to\infty, p\to 0$ 时, $b(k;n,p)\approx b(k;\lambda), \lambda=np$

连续型随机变量

1. **均匀分布** $X\sim U[a,b]$
   $$\boxed{f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}}$$
   性质1 $E(X)=(a+b)/2, D(X)=(b-a)^2/12$
   性质2 对任意满足 $a\le c<d\le d$ 的 c,d,
   有 $P\{c\le X\le d\}=\dfrac{d-c}{b-a}$
   性质3 $F(X)\sim U(0,1)$
2. **指数分布** $X\sim EP(\lambda)$ 寿命分布
   $$\boxed{f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0\end{cases}}$$
   性质1 $E(X)=\lambda^{-1}, D(X)=\lambda^{-2}$
   性质2 (无记忆性) $P\{X>x+y|X>y\}=P\{X>x\}$
3. **正态分布** $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 高斯分布
   $$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}}$$
   (1) 标准正态分布: $X\sim N(0,1)$
   (2) 概率密度: $\varphi(x)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
   (3) 分布函数: $\Phi(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$
   (4) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$
   (5) 标准正态分布上的 α 分位点, $\Phi(Z_\alpha)=1-\alpha$,
   $P\{X>Z_\alpha\}=\displaystyle\int_{Z_\alpha}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\alpha$
   性质1 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$
   性质2 $\displaystyle\sum_{i=1}^n c_iX_i+d\sim N\left(\sum_{i=1}^n c_i\mu_i+d, \sum_{i=1}^n c_i^2\sigma_i^2\right)$
   性质3 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$;
   若 $X\sim N(0,1)$, 则 $Y=\sigma X+\mu\sim N(\mu,\sigma^2)$
   性质4 $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$
   性质5 $P\{a<X<b\}=\Phi\Big(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\Big)-\Phi\Big(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\Big)$
   $P\{X<b\}=\Phi\Big(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\Big)$
   $P\{X>a\}=1-\Phi\Big(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\Big)$
   某地区成年男性的身高, 某零件长度的测量误差, 半导体器件中的热噪声电流.

第三章　随机向量

1. $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$,
   $P\{X=x_i, Y=y_i\}=p_{ij}$
   (1) 离散型: $F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_i\le y}p_{ij}$
   (2) 连续型: $F(x,y)=\int_{-\infty}^y\int_{-\infty}^x f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
      i. $f(x,y)\ge 0$
      ii. $F(+\infty,+\infty)=1$
      iii. $\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$
      iv. $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
2. 二维均匀分布 $f(x,y)=\begin{cases}1/d, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$
3. 二维正态分布 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$
   $$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-}{\sigma}\right.}$$

4. **边缘概率分布**:
$F_X(x)=F(x,+\infty), F_Y(x)=F(+\infty,y)$
 (1) 二维离散型随机向量: $p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}$, $p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}$
 (2) 二维连续型随机变量: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$
 $f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$
5. **条件概率密度**: $f_{X|Y}(u|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$
6. 独立性的判断: $\forall x,y$, $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$,
对于连续型变量 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$
7. $Z=X+Y$ 的密度: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$,
$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$.
 (1) 相互独立: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$,
 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$.
8. $Z=\max\{X,Y\}$ 和 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布:
$F_{\max}(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)$
$F_{\min}(z)=1-(1-F_X(z))\cdot(1-F_Y(z))$

第四章　数字特征

1. **期望** $E(X)$
 (1) 离散型: $E(X)=\sum_i x_i p_i$
 (2) 连续型: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$
 (3) $E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$
 性质 1 $E(c)=c$
 性质 2 $E(kX)=kE(X)$
 性质 3 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
 性质 4 若 X,Y 相互独立, 则 $E(XY)=E(X)E(Y)$
2. **方差** $D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$
 (1) 离散型: $D(X)=\sum_i[x_i-E(X)]^2p_i$
 (2) 连续型: $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x_i-E(X)]^2f(x)\mathrm{d}x$
 (3) (计算公式) $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$
 性质 1 $D(c)=0, D(X+c)=D(X)$
 性质 2 $D(kX)=k^2D(X), D(-X)=D(X)$
 性质 3 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$. 若 X,Y 相互独立, 则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$
 性质 4 若 X,Y 相互独立, 则 $D(aX\pm bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)$
3. **协方差** $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$
 性质 1 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$
 性质 2 $\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)=ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)$
 性质 3 $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)\,\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$
 性质 4 (计算公式) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
 性质 5 $\mathrm{Cov}^2(X,Y)\le D(X)D(Y)$, 等号成立当且仅当 $\exists a,b, Y=aX+b$
4. **相关系数** $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$
 (1) $|\rho_{XY}|\le 1$
 (2) 互不相关: $\rho_{XY}=0$
5. $E\{[X-E(X)]^k\}$ 称为 X 的 k 阶**中心矩**
6. 记 $c_{ij}=\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$, 称 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$ 为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的**协方差矩阵**

第五章　极限定理

1. **切比雪夫不等式**: $\forall\varepsilon>0$,
 $P\{|X-\mu|\ge\varepsilon\}\le\sigma^2/\varepsilon^2$,
 $P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\ge 1-\sigma^2/\varepsilon^2$
2. **大数定律**: X_i 相互独立, $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $\forall\varepsilon>0$,
 $\lim_{n\to\infty}P\{|Y_n-\mu|<\varepsilon\}=1$.
 $\lim_{n\to\infty}P\{|n_A/n-p|<\varepsilon\}=1$.
3. 独立同分布的**中心极限定理**:
X_i 相互独立且服从同一分布, 则 $Y_n=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 的分布函数 $F_n(x)=P\{Y_n\le x\}$ 收敛于 $\varPhi(x)$,
即 $\lim_{x\to\infty}F_n(x)=\varPhi(x)$.
4. (棣莫夫-拉普拉斯定理) X_i 相互独立且服从 $B(1,p)$,
则 $\forall x$, $\lim\limits_{x\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right\}=\varPhi(x)$.

第六章　样本与统计量

1. **样本均值** $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 是 μ 的估计
2. **样本方差** $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的估计
3. 样本标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2}$
4. **样本原点矩** $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$
5. **样本中心矩** $M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^k$
6. 样本均值的**大样本分布**: $\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$.
 $F(x)\approx\varPhi\Big(\dfrac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)$,
 $P\{|\overline{X}-\mu|\le c\}\approx 2\varPhi\Big(\dfrac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)-1$

正态总体的抽样分布

1. χ^2 **分布** $X\sim\chi_n^2$
 X_i 独立同分布于 $N(0,1)$, $X=\sum_{i=1}^n X_i^2$
 $$\boxed{f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}}$$
 $$\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)=\begin{cases}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)\cdots3\cdot2\cdot1, & \text{若}\ n\ \text{为偶数},\\ (\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, & \text{若}\ n\ \text{为奇数}.\end{cases}$$
 性质 1 $E(X^k)=2^k\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+k)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$,
 $E(X)=n, D(X)=2n$
 性质 2 若 $X_i\sim\chi_{n_i}^2$ 独立同分布, 则 $\sum_{i=1}^m X_i\sim\chi_n^2$, 其中 $n=\sum_{i=1}^m n_i$
2. $\chi_n^2(\alpha)$ 为 χ_n^2 分布上的 α 分位点:
 $P\{\chi_n^2>\chi_n^2(\alpha)\}=\int_{\chi_n^2(\alpha)}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\alpha$
3. t **分布** $T\sim t_n$ 学生分布
 $X\sim N(0,1), Y\sim\chi_n^2, T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$
 $$\boxed{f(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}}$$
 性质 1 $E(F)=0, D(F)=n/(n-2), n=3,4,\cdots$
 性质 2 $Y=\dfrac{F_2-F_1}{2\sqrt{F_1F_2/n}}\sim t_n$
 性质 3 $\dfrac{\overline{F}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}$
4. $t_n(\alpha)$ 为 t_n 分布上的 α 分位点:
 $P\{T>t_n(\alpha)\}=\int_{t_n(\alpha)}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\alpha$
5. F **分布** $F\sim F_{m,n}$
 $X\sim\chi_m^2, Y\sim\chi_n^2, F=\dfrac{X/m}{Y/n}$
 $$\boxed{f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\Big(\dfrac{m}{n}\Big)^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\Big(1+\dfrac{m}{n}x\Big)^{-\frac{m+n}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}}$$
 性质 1 $E(F)=n/(n-2), n>2$;
 $D(F)=\dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, n>4$
 性质 2 $1/F\sim F_{m,n}$
 性质 3 若 $X\sim t_n$, 则 $X^2\sim F_{1,n}$
6. $F_{m,n}(\alpha)$ 为 $F_{m,n}$ 分布上的 α 分位点:
 $P\{F>F_{m,n}(\alpha)\}=\int_{F_{m,n}(\alpha)}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\alpha$
7. (基本定理) 样本 X_i 来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$

(1) $\overline{X} \sim N\Big(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\Big)$

(2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

(3) $\overline{X}$与S^2相互独立

(4) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

第七章　参数估计

1.

第八章　假设检验

1.

第九章　回归分析与方差分析

1.

二　重要分布表

1. 泊松分布

$$P\{X \geq x\} = \sum_{r=x}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-r}\lambda^r}{r!}$$

2. 标准正态分布

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathrm{d}u$$

3. t 分布
4. χ^2 分布
5. F 分布

三　常用结论

1. 人群中有相同生日: $P(A) = \dfrac{A_N^n}{N^n}$
2. 把n个物品分成k组, 每组恰有n_i个, 不同的分组方法有$\dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$种
3. 将n个球放入M个盒子，有球的盒子数 $E(X) = M\left[1-(1-1/M)^n\right]$