Модели ценообразования опционов на основе стохастических дифференциальных уравнений

Кирилл Захаров
Научный руководитель: доцент, к.ф-м.н., Лебедева Л.Н.

СПбГЭУ

2022

Постановка задачи

1. Heston 1993 (Стох. волатильность)
2. L. Grzelak 2011 (Стох. волатильность + стох. процентная ставка)
3. L. Teng 2015 (Стох. корреляция)

Цель: Обобщить модель Бейтса со стохастической волатильностью на случай стохастических процентной ставки и корреляции. Найти аналитическое выражение для характеристической функции системы СДУ, применить COS метод для ценообразования. Сделать замену меры для симуляции почти-точного решения.

Обозначения

Рассмотрим классический вариант европейского опциона

- $S(t)$ - цена базового актива ($x = \log S(t)$)
- $V(t, S)$ - цена опциона в момент времени t на базовый актив S
- K - страйк-цена (цена исполнения контракта)
- T - момент экспирации (время исполнения контракта)
- $H(t, S)$ - функция выплаты

$$H(T, S) = \max\{S(T) - K, 0\} \tag{1}$$

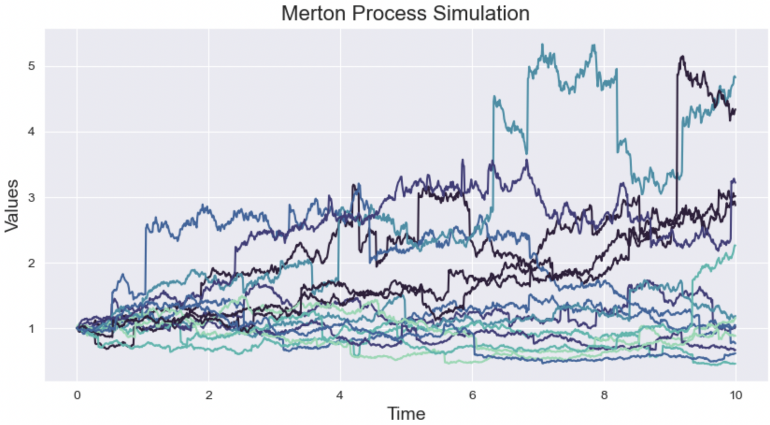
- $\tau = T - t$ - длительность до экспирации опциона
- $v(t)$ - стохастическая волатильность
- $\rho(t)$ - стохастическая корреляция между $v(t)$ и $S(t)$
- $r(t)$ - стохастическая процентная ставка

Пусть задано $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{Q})$
Процессы v, r, ρ определяются системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dv(t) = k(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v^{\mathbb{Q}}(t) \\ d\rho(t) = k_\rho(\mu_\rho - \rho(t))dt + \sigma_\rho dW_\rho^{\mathbb{Q}}(t) \\ dr(t) = k_r(\mu_r - r(t))dt + \gamma_r\sqrt{r(t)}dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \\ dx(t) = \left(r(t) - \frac{1}{2}v(t) - \xi_p\mathbb{E}[e^J - 1]\right)dt + \sqrt{v(t)}dW_x^{\mathbb{Q}}(t) + JdX_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t) \end{cases} \tag{2}$$

$W^{\mathbb{Q}}(t)$ - винеровский процесс по мере $\mathbb{Q}$
$X_{\mathcal{P}}$ - пуассоновский процесс по мере $\mathbb{Q}$
$J \sim \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J)$ - величина скачка

$$dW_v dW_\rho = \rho_{v\rho}dt = 0$$
$$dW_v dW_r = \rho_{vr}dt = 0$$
$$dW_\rho dW_r = \rho_{\rho r}dt = 0$$
$$dW_\rho dW_x = \rho_{\rho x}dt = \rho_4$$
$$dW_r dW_x = \rho_{rx}dt = \rho_5$$
$$dW_v dW_x = \rho(t)dt$$


Merton Process Simulation
Values
Time
0
2
4
6
8
10
1
2
3
4
5

Разложение Холецкого (4×4)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \rho(t) & \rho_4 & \rho_5 & \sqrt{1 - \rho^2(t) - \rho_4^2 - \rho_5^2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Ковариационная матрица

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma}^T = \begin{pmatrix} \gamma^2 v(t) & 0 & 0 & \gamma v(t)\rho(t) \\ 0 & \sigma_\rho^2 & 0 & \sigma_\rho \rho_4 \sqrt{v(t)} \\ 0 & 0 & \gamma_r^2 r(t) & \gamma_r \rho_5 \sqrt{v(t)}\sqrt{r(t)} \\ \gamma v(t)\rho(t) & \sigma_\rho \rho_4 \sqrt{v(t)} & \gamma_r \rho_5 \sqrt{v(t)}\sqrt{r(t)} & v(t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Необходимо получить $X(t) = (v(t), \rho(t), r(t), x(t))$ в аффинной форме.

Характеристическая функция

Воспользуемся следующей аппроксимацией для аффинизации

$$\gamma v(t) r(t) \approx \gamma \mathbb{E}[v(t)] \rho(t) \tag{5}$$

$$\sigma_\rho \rho_4 \sqrt{v(t)} \approx \sigma_\rho \rho_4 \mathbb{E}[\sqrt{v(t)}] \tag{6}$$

$$\gamma_r \rho_5 \sqrt{v(t)} \sqrt{r(t)} \approx \gamma_r \rho_5 \mathbb{E}[\sqrt{v(t)}] \mathbb{E}[\sqrt{r(t)}] \tag{7}$$

Аппроксимация $\mathbb{E}\sqrt{v(t)}$ (L.Grzelak 2011)

$$\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}] \approx a + be^{-ct}$$

Пусть $V(t, X) \in C^2$; $V(t, X(t)) \equiv \varphi(u, X(t); t, T)$
Тогда (Duffie&Pan&Singleton 2000)

$$\varphi(u, X(t); t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\int_t^T r(z)dz + iuX(T)} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] =$$

$$= e^{A(u,\tau) + B(u,\tau)x(t) + C(u,\tau)r(t) + D(u,\tau)\rho(t) + E(u,\tau)v(t)} \tag{8}$$

Многомерная лемма Ито

Рассмотрим $X(t) = \big(X_1(t), ..., X_n(t)\big)^T$
Пусть $g(t, X(t))$ дифференцируема на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
Тогда

$$dg(t, X(t)) = \frac{\partial g}{\partial t}dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial X_j} dX_j(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} dX_i(t) dX_j(t)$$

Применим к систему СДУ многомерную лемму Ито со следующими дифференциалами

$$(dv)^2 = \gamma^2 v(t)dt \qquad (d\rho^2) = \sigma_\rho^2 dt$$

$$(dr)^2 = \gamma_r^2 r(t)dt \qquad (dx^2) = v(t)dt + J^2 dX_{\mathcal{P}}(t)$$

$$dvd\rho = \gamma\sigma_\rho\sqrt{v(t)}\rho_{v\rho}dt = 0 \qquad dvdr = \gamma\gamma_r\sqrt{v(t)}\sqrt{r(t)}\rho_{vr}dt = 0$$

$$dvdx = \gamma v(t)\rho(t)dt \qquad d\rho dr = \sigma_\rho\gamma_r\sqrt{r(t)}\rho_{\rho r}dt = 0$$

$$d\rho dx = \sigma_\rho\sqrt{v(t)}\rho_4 dt \qquad drdx = \gamma_r\sqrt{v(t)}\sqrt{r(t)}\rho_5 dt$$

Тогда получим следующее выражение.

$$
\begin{aligned}
dV(t,X) = &\frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial v}(k(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v(t)) + \\
&+ \frac{\partial V}{\partial \rho}(k_\rho(\mu_\rho - \rho(t))dt + \sigma_\rho dW_\rho(t)) + \\
&+ \frac{\partial V}{\partial r}(k_r(\mu_r - r(t))dt + \gamma_r\sqrt{r(t)}dW_r(t)) + \\
&+ \frac{\partial V}{\partial x}(\big(r(t) - \frac{1}{2}v(t) - \xi_p\mathbb{E}[e^J - 1]\big)dt + \sqrt{v(t)}dW_x(t) + JdX_{\mathcal{P}}(t)) + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\gamma^2 v(t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}\sigma_\rho^2 dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\gamma_r^2 r(t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}v(t)dt + \\
&+ \frac{\partial^2 V}{\partial v\partial x}\gamma v(t)\rho(t)dt + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho\partial x}\sigma_\rho\sqrt{v(t)}\rho_4 dt + \\
&+ \frac{\partial^2 V}{\partial r\partial x}\gamma_r\rho_5\sqrt{v(t)}\sqrt{r(t)}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}J^2 dX_{\mathcal{P}}(t)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Обратное уравнение Колмогорова

Так как дисконтированная цена $\frac{V}{M}$ мартингал по мере $\mathbb{Q}$, то раскладывая дифференциал $d\frac{V}{M}$ по лемме Ито получим

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[d\frac{V}{M}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{dV}{M} - r\frac{V}{M}\right] = 0 \qquad (10)$$

Обратное уравнение Колмогорова:

$$\begin{aligned} dV(t,X) = {} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial v}(k(\bar{v} - v(t)) + \frac{\partial V}{\partial \rho}(k_\rho(\mu_\rho - \rho(t)) + \frac{\partial V}{\partial r}(k_r(\mu_r - r(t))+ \\ & + \frac{\partial V}{\partial x}\left(r(t) - \frac{1}{2}v(t) - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\gamma^2 v(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}\sigma_\rho^2 + \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\gamma_r^2 r(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}v(t) + \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial x}\gamma \mathbb{E}[v(t)]\rho(t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial x}\sigma_\rho \mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]\rho_4 + \\ & + \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial x}\gamma_r \rho_5 \mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]\mathbb{E}[\sqrt{r(t)}] - r(t)V(t,X) + \\ & + \xi_p \mathbb{E}[V(t, X+J)] - \xi_p V(t,X) = 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

Лемма

Пусть $\forall \tau \geq 0; \forall u \in \mathbb{R}$ задано уравнение Колмогорова (11). Тогда

$$
\begin{cases}
\dfrac{dB}{d\tau} = 0 \\[2ex]
\dfrac{dC}{d\tau} = -k_r C + B + \dfrac{1}{2}\gamma_r^2 C^2 - 1 \\[2ex]
\dfrac{dD}{d\tau} = -k_\rho D + \gamma \mathbb{E}[v(t)] BE \\[2ex]
\dfrac{dE}{d\tau} = -kE - \dfrac{1}{2}B + \dfrac{1}{2}\gamma^2 E^2 + \dfrac{1}{2}B^2 \\[2ex]
\dfrac{dA}{d\tau} = k\bar{v}E + k_\rho \mu_\rho D + k_r \mu_r C - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]B + \dfrac{1}{2}\sigma_\rho^2 D^2 + \\
\quad + \sigma_\rho \rho_4 \mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]BD + \gamma_r \rho_5 \mathbb{E}[\sqrt{r(t)}]\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]BC + \xi_p \mathbb{E}[e^{JB} - 1] \\
B(u,0) = iu;\ C(u,0) = 0;\ D(u,0) = 0;\ E(u,0) = 0;\ A(u,0) = 0
\end{cases}
\tag{12}
$$

Лемма. Продолжение

И Решение задается

$$
\begin{cases}
B(u,\tau) = iu \\
E(u,\tau) = \frac{k-E_1}{\gamma^2}\frac{1-e^{-E_1\tau}}{1-E_2e^{-E_1\tau}} \\
D(u,\tau) = \gamma D_1\left[\frac{(v_0-\bar{v})}{k_\rho+k}e^{k\tau-kT} + \frac{\bar{v}}{k_\rho} + \frac{(\bar{v}-v_0)}{k_\rho+k-l_1}e^{-kT+k\tau-l_1\tau} - \right. \\
\qquad \left. -\frac{\bar{v}}{k_\rho-l_1}e^{-l_1\tau} + e^{-k_\rho\tau}\left(-\frac{e^{-kT}(v_0-\bar{v})}{k+k_\rho} - \frac{\bar{v}}{k_\rho} + \frac{\bar{v}}{k_\rho-l_1} - \frac{\bar{v}-v_0}{k+k_\rho-l_1}e^{-kT}\right)\right] \\
C(u,\tau) = \dfrac{k_r + C_1\tan(\frac{1}{2}C_1\tau - \arctan(\frac{k_r}{C_1}))}{\gamma_r^2} \\
A(u,\tau) = -\xi_p\left(e^{\mu_J+\frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1\right)iu\tau + \xi_p\left(e^{\mu_J iu-\frac{1}{2}\sigma_J^2u^2} - 1\right)\tau + k\bar{v}\frac{k-E_1}{\gamma^2}I_1 + \\
\qquad +(k_\rho\mu_\rho + iu\sigma_\rho\rho_4 a)I_{21} + iu\sigma_\rho\rho_4 bI_{22} + \frac{1}{2}\sigma_\rho^2 I_{23} + \\
\qquad +iu\gamma_r\rho_5\left[maI_{31} + mbI_{32} + naI_{33} + nbI_{34}\right]
\end{cases}
\tag{13}
$$

Решение обратного уравнения Колмогорова

Лемма. Продолжение

$$
\begin{cases}
I_1 = \int_0^\tau (1 - e^{-l_1 s}) ds \\
I_{21} = \int_0^\tau D(u,s) ds \\
I_{22} = \int_0^\tau e^{-c(T-s)} D(u,s) ds \\
I_{23} = \int_0^\tau D^2(u,s) ds \\
I_{31} = \int_0^\tau C(u,s) ds \\
I_{32} = \int_0^\tau e^{-c(T-s)} C(u,s) ds \\
I_{33} = \int_0^\tau e^{-o(T-s)} C(u,s) ds \\
I_{34} = \int_0^\tau e^{(-o-c)(T-s)} C(u,s) ds \\
E_1 = \sqrt{k^2 + \gamma^2(u^2 + iu)} \\
E_2 = \frac{k-E_1}{k+E_1} \\
C_1 = \sqrt{-k_r^2 - 2\gamma_r^2 + 2iu\gamma_r^2}
\end{cases}
\tag{14}
$$

Почти-точное решение ситемы СДУ

$$\begin{cases} dv(t) = k(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}d\tilde{W}_v^{\mathbb{Q}}(t) \\ d\rho(t) = k_\rho(\mu_\rho - \rho(t))dt + \sigma_\rho d\tilde{W}_\rho^{\mathbb{Q}}(t) \\ dr(t) = k_r(\mu_r - r(t))dt + \gamma_r\sqrt{r(t)}d\tilde{W}_r^{\mathbb{Q}}(t) \\ dx(t) = \left(r(t) - \frac{1}{2}v(t) - \xi_p\mathbb{E}[e^J - 1]\right)dt + (\rho(t)\sqrt{v(t)}d\tilde{W}_v^{\mathbb{Q}}(t) + \\ \qquad +\rho_4\sqrt{v(t)}d\tilde{W}_\rho^{\mathbb{Q}}(t) + \rho_5\sqrt{v(t)}d\tilde{W}_r^{\mathbb{Q}}(t) + \\ \qquad +\sqrt{v(t)}\sqrt{1 - \rho^2(t) - \rho_4^2 - \rho_5^2}d\tilde{W}_x^{\mathbb{Q}}(t)) + JdX_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t) \end{cases} \tag{15}$$

Применим дискретизацию по Эйлеру

$$v_{i+1} = v_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)}d\tilde{W}_v(t)$$

$$\rho_{i+1} = \rho_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_\rho(\mu_\rho - \rho(t))dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma_\rho d\tilde{W}_\rho(t)$$

$$r_{i+1} = r_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_r(\mu_r - r(t))dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma_r\sqrt{r(t)}d\tilde{W}_r(t)$$

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(r(t) - \frac{1}{2}v(t) - \xi_p\mathbb{E}[e^J - 1]\right)dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \rho(t)\sqrt{v(t)}d\tilde{W}_v(t) +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \rho_4\sqrt{v(t)}d\tilde{W}_\rho(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \rho_5\sqrt{v(t)}d\tilde{W}_r(t) +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)}\sqrt{1 - \rho^2(t) - \rho_4^2 - \rho_5^2}d\tilde{W}_x(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} JdX_{\mathcal{P}}(t) \tag{16}$$

Почти-точное решение ситемы СДУ

$$x_{i+1} = x_i + \left(r_i - \frac{1}{2}v_i - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]\right)\Delta t + \frac{\rho_i}{\gamma}\left(v_{i+1} - v_i - k(\bar{v} - v_i)\Delta t\right) +$$
$$+ \rho_4 \sqrt{v_i}\frac{1}{\sigma_\rho}\left(\rho_{i+1} - \rho_i - k_\rho(\mu_\rho - \rho_i)\Delta t\right) + \rho_5 \sqrt{v_i}\frac{1}{\gamma_r \sqrt{r_i}}\left(r_{i+1} - r_i - \right.$$
$$\left. - k_r(\mu_r - r_i)\Delta t\right) + \sqrt{v_i}\sqrt{1 - \rho_i^2 - \rho_4^2 - \rho_5^2}\sqrt{\Delta t} Z_x + J Z_{\mathcal{P}}(\xi_p \Delta t) \tag{17}$$

$$v_{i+1} = \alpha(t_{i+1}, t_i)\chi^2(\delta, \beta(t_{i+1}, t_i)) \tag{18}$$

$$\alpha(t_{i+1}, t_i) = \frac{\gamma}{4k}\left(1 - e^{-k(t_{i+1} - t_i)}\right); \delta = \frac{4k\bar{v}}{\gamma^2} \tag{19}$$

$$\beta(t_{i+1}, t_i) = \frac{4ke^{-k(t_{i+1} - t_i)}}{\gamma^2(1 - e^{-k(t_{i+1}, t_i)})} v_i \tag{20}$$

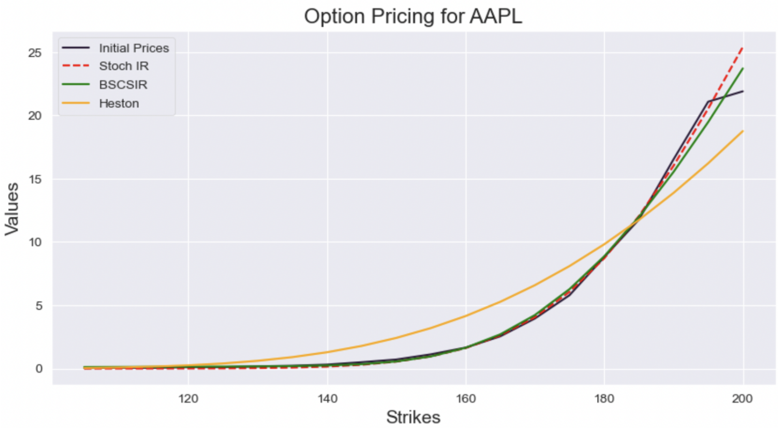
$$r_{i+1} = \alpha_r(t_{i+1}, t_i)\chi^2(\delta_r, \beta_r(t_{i+1}, t_i)) \tag{21}$$

$$\rho_{i+1} = \rho_i e^{-k_\rho \Delta t} + \mu_\rho(1 - e^{-k_\rho}\Delta t) + \sigma_\rho \sqrt{\frac{1 - e^{-2k_\rho}\Delta t}{2k_\rho}} Z_\rho \tag{22}$$

$$\tilde{W}(t_{i+1}) - \tilde{W}(t_i) \overset{d}{=} \sqrt{\Delta t} Z_x$$

$$X_{\mathcal{P}}(t_{i+1}) - X_{\mathcal{P}}(t_i) \overset{d}{=} Poiss(\xi_p \Delta t)$$

Калибровка модели



	Heston	HSIR	BSCSIR
MSE	3.9	0.65	0.34

Преобразование меры

$$V(t_0, X) = \int_\Omega \frac{H(T,X)}{M(T)} d\mathbb{Q} = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{M(T)} H(T,X) | \mathcal{F}(t_0)\right] \tag{23}$$

$P(t,T)$ - цена облигации с нулевым купоном в момент времени t и длительностью T

Для CIR процесса

$$P(t,T) = e^{\tilde{A} - \tilde{B} r(t)} \tag{24}$$

$$\tilde{B} = \frac{2(e^{p\tau} - 1)}{2p + (e^{p\tau} - 1)(p + k_r)} \tag{25}$$

$$\tilde{A} = \frac{2k_r\mu_r}{\gamma_r^2} \log\left(\frac{2pe^{(p+k_r)\tau/2}}{2p + (e^{p\tau} - 1)(p + k_r)}\right) \tag{26}$$

$$p = \sqrt{k_r^2 + 2\gamma_r^2}$$

Преобразование меры

Производная Радона-Никодима

$$\lambda_{\mathbb{Q}}^{T}(t) = \left.\frac{d\mathbb{Q}^{T}}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}(t)} = \frac{P(t,T)M(t_0)}{P(t_0,T)M(t)} \tag{27}$$

$$d\lambda_{\mathbb{Q}}^{T}(t) = \frac{M(t_0)}{P(t_0,T)}\left[\frac{dP(t,T)}{M(t)} - \frac{P(t,T)}{M^2(t)}dM(t)\right] \tag{28}$$

Динамика $P(t,T)$

$$\begin{aligned} dP(t,T) &= r(t)P(t,T)dt - P(t,T)\left(\int_t^T \eta(z)dz\right)dW^{\mathbb{Q}}(t) = \\ &= r(t)P(t,T)dt + \gamma_r \tilde{B}(t,T)\sqrt{r(t)}P(t,T)dW^{\mathbb{Q}}(t) \end{aligned} \tag{29}$$

$$\int_t^T \eta(z)dz = -\gamma_r \tilde{B}(t,T)\sqrt{r(t)} \tag{30}$$

Ценообразование по мере T

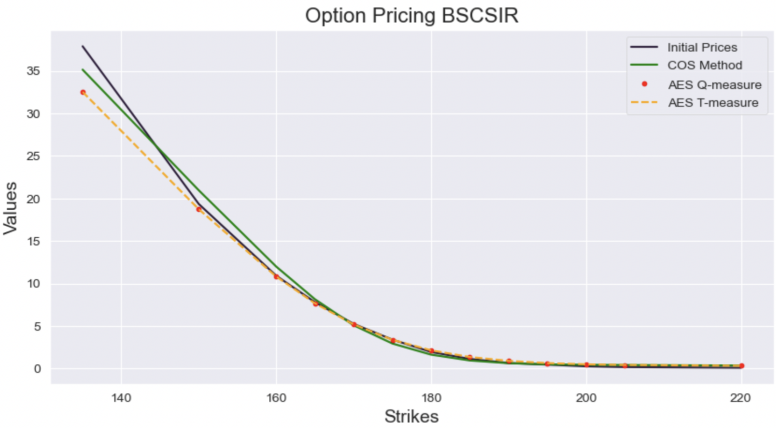
$$\frac{d\lambda^T_{\mathbb{Q}}(t)}{\lambda^T_{\mathbb{Q}}(t)} = -\left(\int_t^T \eta(z)dz\right)dW^{\mathbb{Q}}(t) \tag{31}$$

Тогда преобразование меры определяется

$$dW^T(t) = \left(\int_t^T \eta(z)dz\right)dt + dW^{\mathbb{Q}}(t) \tag{32}$$

$$\begin{aligned} V(t_0, X) = \int_\Omega \frac{H(T,X)}{M(T)} P(t_0,T)M(T)d\mathbb{Q}^T = \\ = P(t_0,T)E^T[H(T,X)|\mathcal{F}(t_0)] \end{aligned} \tag{33}$$

Сравнение мер



$1/M(T)$	$P(t_0, T)$
0.991	0.989

Выводы

1. Найдено аналитическое выражение для характеристической функции системы СДУ (2)
2. Найдено выражение для цены опциона через COS метод системы (2)
3. Найдено почти-точное решение системы СДУ (2) по мере $\mathbb{Q}$
4. Произведена замена меры в системе СДУ (2) и найдено почти-точное решение по мере $\mathbb{Q}^T$
5. Выполнена калибровка моделей и анализ результатов

Список использованных источников

1. S. Watanabe, N. Ikeda. Stochastic Differential Equations
2. А.Н. Ширяев. Случайные процессы
3. А.Н. Ширяев, Р.Ш. Липцер. Теория мартингалов
4. Б. Оксендаль. Стохастические дифференциальные уравнения
5. L. Grzelak, C. Oosterlee. Computational Finance
6. L. Grzelak, C. Oosterlee. On the Heston Model with Stochastic Interest Rates
7. L. Teng, M. Gunter, M. Ehrhardt. On the Heston Model with Stochastic Correlation