Моделирование портфеля ценных бумаг

Кирилл Захаров

СПбГЭУ

22 апреля 2021 г.

Постановка задачи

$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; r = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n; l = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$
Рассмотрим следующую квадратичную функцию

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} x_i x_j \tag{1}$$

$$f(X) = r x^T + \frac{1}{2} x \Sigma x^T \tag{2}$$

Σ - положительно полуопределенная матрица.

Постановка задачи

Определение

Портфель называется эффективным по дисперсии, если для фиксированного дохода портфеля r_p, не существует портфеля с меньшей дисперсией.

Определение

Портфель называется эффективным по доходности, если для фиксированной дисперсии портфеля σ_p^2, не существует портфеля с большим доходом.

Постановка задачи

Для получения максимального дохода, будем решать следующую оптимизационную задачу

$$\max_X \left\{ r \cdot x^T \ \middle| l \cdot x^T = 1; x\Sigma x^T \leq \tilde{\sigma}_p; x_i \geq 0 \right\} \tag{3}$$

А для минимизации риска

$$\min_X \left\{ x\Sigma x^T \ \middle| l \cdot x^T = 1; r \cdot x^T \geq \tilde{r}_p; x_i \geq 0 \right\} \tag{4}$$

Обобщенная функция. Граница эффективности

Пусть t - неотрицательный параметр. Будем решать следующую задачу

$$\min_X \Big\{ -t \cdot r \cdot x^T + \frac{1}{2} x \Sigma x^T \ \Big| l \cdot x^T = 1; x_i \geq 0 \Big\} \tag{5}$$

Определение

Портфель называется параметрически-эффективным, если он является оптимальным решением задачи (5) для некоторого неотрицательного параметра t.

Обобщенная функция. Граница эффективности

Теорема

Оптимальными условиями для квадратичной функции являются: $Ax_0 = b$ и существование вектора u, такого что $-\nabla f(x_0) = uA^T$.

Тогда получаем $t \cdot r - \Sigma x^T = u \cdot l^T \wedge l \cdot x^T = 1$. Решаем по x.

$$x^T = -u\Sigma^{-1}l^T + t\Sigma^{-1}r^T \tag{6}$$

$$l \cdot x^T = -u \cdot l\Sigma^{-1}l^T + t \cdot l\Sigma^{-1}r^T = 1 \tag{7}$$

$$u = \frac{-1}{l\Sigma^{-1}l^T} + t\frac{l\Sigma^{-1}r^T}{l\Sigma^{-1}l^T} \tag{8}$$

Подставим найденный вектор u в уравнение (6).

Обобщенная функция. Граница эффективности

$$x^T \equiv x^T(t) = \frac{\Sigma^{-1}l^T}{l\Sigma^{-1}l^T} - \Sigma^{-1}l^T \cdot t\frac{l\Sigma^{-1}r^T}{l\Sigma^{-1}l^T} + t \cdot \Sigma^{-1}r^T = \tag{9}$$

$$= \frac{\Sigma^{-1}l^T}{l\Sigma^{-1}l^T} + t\big(\Sigma^{-1}r^T - \Sigma^{-1}l^T \cdot t\frac{l\Sigma^{-1}r^T}{l\Sigma^{-1}l^T}\big)$$

Пусть $h_0 = \frac{\Sigma^{-1}l^T}{l\Sigma^{-1}l^T}$, $h_1 = \Sigma^{-1}r^T - \Sigma^{-1}l^T \cdot t\frac{l\Sigma^{-1}r^T}{l\Sigma^{-1}l^T}$. Тогда получим следующую зависимость от параметра t.

$$x^T(t) = h_0 + th_1 \tag{10}$$

Обобщенная функция. Граница эффективности

Теперь определим доходность портфеля и риск.

$$r_p = r \cdot x^T(t) = rh_0 + rth_1 \tag{11}$$

$$\sigma_p^2 = (h_0 + th_1)^T \Sigma (h_0 + th_1) = h_0^T \Sigma h_0 + th_1^T \Sigma h_0 + th_0^T \Sigma h_1 + t^2 h_1^T \Sigma h_1 = \tag{12}$$

$$= h_0^T \Sigma h_0 + 2th_1^T \Sigma h_0 + t^2 h_1^T \Sigma h_1$$

Введем дополнительные обозначения.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= r \cdot h_0 \\ \alpha_1 &= r \cdot h_1 \\ \beta_0 &= h_0^T \Sigma h_0 \\ \beta_1 &= h_1^T \Sigma h_0 \\ \beta_2 &= h_1^T \Sigma h_1 \end{aligned} \tag{13}$$

Обобщенная функция. Граница эффективности

Тогда получим $r_p = \alpha_0 + t\alpha_1,\ \sigma_p^2 = \beta_0 + 2t\beta_1 + t^2\beta_2$. Можно показать, что $\beta_1 = 0, \alpha_1 = \beta_2$. Выразим t.

$$r_p \rightarrow:\ t = \frac{r_p - \alpha_0}{\alpha_1} \tag{14}$$

$$\sigma_p^2 \rightarrow:\ t^2 = \frac{\sigma_p^2 - \beta_0}{\beta_2} = \frac{\sigma_p^2 - \beta_0}{\alpha_1} \tag{15}$$

Возведем в квадрат (14) и приравняем к (15). Получим следующее соотношение, называемое границей эффективности (efficient frontier).

$$\frac{(r_p - \alpha_0)^2}{\alpha_1} = \sigma_p^2 - \beta_0 \tag{16}$$

Коэффициент Шарпа

$$Sh(X) = \frac{r_p(X) - r_f}{\sigma_p^2(X)} \tag{17}$$

$$\max_{X \in \mathbb{R}^n} \left\{ Sh(X) \ \middle| l \cdot x^T = 1; x_i \geq 0 \right\}$$

Коэффициент Сортино
Для $r_i < r_f$

$$St(X) = \frac{r_p(X) - r_f}{\sum_i (r_i - r_f)^2} \tag{18}$$

$$\max_{X \in \mathbb{R}^n} \left\{ St(X) \ \middle| l \cdot x^T = 1; x_i \geq 0 \right\}$$

Многокритериальная задача

$$
\begin{cases}
f_1(X) = r \cdot X^T \to \max\limits_X \\
f_2(X) = Sh(X) \to \max\limits_X \\
f_3(X) = -t \cdot r \cdot X^T + \frac{1}{2} X \Sigma X^T \to \min\limits_X \\
l \cdot X^T = 1 \\
0 \leq x_i \leq 1
\end{cases}
\tag{19}
$$

Модель без ребалансировки

$\Delta_{ij} = q^i(p^i_{s_j} - p^i_{b_j});\ i = 1, ..., n; j = 1, ..., k$ - доход за период j актива i

t_0 - начальный период

m - число ценных бумаг в валюте 1

ξ - курс валюты на период j

Example

$$\begin{aligned}
t_1 : \Delta_{i1} &= q^i(p^i_{s_1} - p^i_{b_1}), \qquad i = 1, ..., m \\
\Delta_{i1} &= q^i(p^i_{s1} - p^i_{b1}) \cdot \xi, \quad i = m+1, ..., n \\
t_2 : \Delta_{i2} &= q^i(p^i_{s_2} - p^i_{b_1}) \\
t_k : \Delta_{ik} &= q^i(p^i_{s_k} - p^i_{b_1})
\end{aligned}$$

Модель с ребалансировкой

$\psi_i(t_j)$ - предсказанное значение i-го актива в период j
N - количество наблюдений временного ряда
$y_i = (y_1^i, ..., y_N^i)$

Example

$t_j : y_i = (y_1^i, ..., y_N^i, \psi_i(t_j))$