Securities portfolio modeling

1. Классический портфель

$x = (x_1, ..., x_n); r = (r_1, ..., r_n); l = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$
Рассмотрим следующую квадратичную функцию

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} x_i x_j \tag{1}$$

$$f(X) = r x^T + \frac{1}{2} x \Sigma x^T \tag{2}$$

Σ - положительно полуопределенная матрица.

Определение 1. Портфель называется эффективным по дисперсии, если для фиксированного дохода портфеля r_p, не существует портфеля с меньшей дисперсией.

Определение 2. Портфель называется эффективным по доходности, если для фиксированной дисперсии портфеля σ_p^2, не существует портфеля с большим доходом.

Для получения максимального дохода, будем решать следующую оптимизационную задачу

$$\max_X \left\{ r \cdot x^T \ \middle| l \cdot x^T = 1; x \Sigma x^T \leq \tilde{\sigma}_p; x_i \geq 0 \right\} \tag{3}$$

А для минимизации риска

$$\min_X \left\{ x \Sigma x^T \ \middle| l \cdot x^T = 1; r \cdot x^T \geq \tilde{r}_p; x_i \geq 0 \right\} \tag{4}$$

2. Обобщенная функция. Граница эффективности

Пусть t - неотрицательный параметр. Будем решать следующую задачу

$$\min_X \left\{ -t \cdot r \cdot x^T + \frac{1}{2} x \Sigma x^T \ \middle| l \cdot x^T = 1; x_i \geq 0 \right\} \tag{5}$$

Определение 3. Портфель называется параметрически-эффективным, если он является оптимальным решением задачи (5) для некоторого неотрицательного параметра t.

Определение 4. Оптимальными условиями для квадратичной функции являются $Ax_0 = b$ и существование вектора u, такого что $-\nabla f(x_0) = uA^T$.

Тогда получаем $t \cdot r - \Sigma x^T = u \cdot l^T \wedge l \cdot x^T = 1$. Решаем по x.

$$x^T = -u \Sigma^{-1} l^T + t \Sigma^{-1} r^T \tag{6}$$

$$l \cdot x^T = -u \cdot l \Sigma^{-1} l^T + t \cdot l \Sigma^{-1} r^T = 1 \tag{7}$$

$$u = \frac{-1}{l \Sigma^{-1} l^T} + t \frac{l \Sigma^{-1} r^T}{l \Sigma^{-1} l^T} \tag{8}$$

Подставим найденный вектор u в уравнение (6).

$$x^T \equiv x^T(t) = \frac{\Sigma^{-1}l^T}{l\Sigma^{-1}l^T} - \Sigma^{-1}l^T \cdot t\frac{l\Sigma^{-1}r^T}{l\Sigma^{-1}l^T} + t \cdot \Sigma^{-1}r^T = \\ = \frac{\Sigma^{-1}l^T}{l\Sigma^{-1}l^T} + t\big(\Sigma^{-1}r^T - \Sigma^{-1}l^T \cdot t\frac{l\Sigma^{-1}r^T}{l\Sigma^{-1}l^T}\big) \tag{9}$$

Пусть $h_0 = \frac{\Sigma^{-1}l^T}{l\Sigma^{-1}l^T}$, $h_1 = \Sigma^{-1}r^T - \Sigma^{-1}l^T \cdot t\frac{l\Sigma^{-1}r^T}{l\Sigma^{-1}l^T}$. Тогда получим следующую зависимость от параметра t.

$$x^T(t) = h_0 + th_1 \tag{10}$$

Теперь определим доходность портфеля и риск.

$$r_p = r \cdot x^T(t) = rh_0 + rth_1 \tag{11}$$

$$\sigma_p^2 = (h_0 + th_1)^T\Sigma(h_0 + th_1) = h_0^T\Sigma h_0 + th_1^T\Sigma h_0 + th_0^T\Sigma h_1 + t^2h_1^T\Sigma h_1 = \\ = h_0^T\Sigma h_0 + 2th_1^T\Sigma h_0 + t^2h_1^T\Sigma h_1 \tag{12}$$

Введем дополнительные обозначения.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= r \cdot h_0 \\ \alpha_1 &= r \cdot h_1 \\ \beta_0 &= h_0^T\Sigma h_0 \\ \beta_1 &= h_1^T\Sigma h_0 \\ \beta_2 &= h_1^T\Sigma h_1 \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда получим $r_p = \alpha_0 + t\alpha_1$, $\sigma_p^2 = \beta_0 + 2t\beta_1 + t^2\beta_2$. Можно показать, что $\beta_1 = 0, \alpha_1 = \beta_2$. Выразим t.

$$r_p \to: \ t = \frac{r_p - \alpha_0}{\alpha_1} \tag{14}$$

$$\sigma_p^2 \to: \ t^2 = \frac{\sigma_p^2 - \beta_0}{\beta_2} = \frac{\sigma_p^2 - \beta_0}{\alpha_1} \tag{15}$$

Возведем в квадрат (14) и приравняем к (15). Получим следующее соотношение, называемое границей эффективности (efficient frontier).

$$\frac{(r_p - \alpha_0)^2}{\alpha_1} = \sigma_p^2 - \beta_0 \tag{16}$$

3. Коэффициент Шарпа. The capital market line

Пусть r - доходность по безрисковому активу. Тогда доходность портфеля определяется по формуле (17). $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$r_p = \mu_1x_1 + ... + \mu_nx_n + rx_{n+1} = \begin{pmatrix} \mu^T & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \tag{17}$$

И риск портфеля

$$COV = x^T \Sigma x = \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \tag{18}$$

$COV \geq 0, \Sigma > 0$

Будем решать следующую задачу

$$\min_x \left\{ -t \left(\mu^T \quad r\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \quad \middle| l \cdot x + x_{n+1} = 1 \right\} \tag{19}$$