

Моделирование портфеля ценных бумаг

Кирилл Захаров

СПбГЭУ

2021

Постановка задачи

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n; l = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$

Рассмотрим следующую квадратичную функцию

$$f(X) = \sum_{i=1}^n c_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

$$f(X) = rx^T + \frac{1}{2} x \Sigma x^T \quad (2)$$

Σ - положительно полуопределенная матрица.

Постановка задачи

Определение

Портфель называется эффективным по дисперсии, если для фиксированного дохода портфеля r_p , не существует портфеля с меньшей дисперсией.

Определение

Портфель называется эффективным по доходности, если для фиксированной дисперсии портфеля σ_p^2 , не существует портфеля с большим доходом.

Постановка задачи

Для получения максимального дохода, будем решать следующую оптимизационную задачу

$$\max_X \{r \cdot x^T \mid l \cdot x^T = 1; x \Sigma x^T \leq \tilde{\sigma}_p; x_i \geq 0\} \quad (3)$$

А для минимизации риска

$$\min_X \{x \Sigma x^T \mid l \cdot x^T = 1; r \cdot x^T \geq \tilde{r}_p; x_i \geq 0\} \quad (4)$$

Обобщенная функция. Граница эффективности

Пусть t - неотрицательный параметр. Будем решать следующую задачу

$$\min_x \left\{ -t \cdot r \cdot x^T + \frac{1}{2} x \Sigma x^T \mid l \cdot x^T = 1; x_i \geq 0 \right\} \quad (5)$$

Определение

Портфель называется параметрически-эффективным, если он является оптимальным решением задачи (5) для некоторого неотрицательного параметра t .

Обобщенная функция. Граница эффективности

Теорема

Оптимальными условиями для квадратичной функции являются: $Ax_0 = b$ и существование вектора u , такого что $-\nabla f(x_0) = uA^T$.

Тогда получаем $t \cdot r - \Sigma x^T = u \cdot l^T \wedge l \cdot x^T = 1$. Решаем по x .

$$x^T = -u\Sigma^{-1}l^T + t\Sigma^{-1}r^T \quad (6)$$

$$l \cdot x^T = -u \cdot l\Sigma^{-1}l^T + t \cdot l\Sigma^{-1}r^T = 1 \quad (7)$$

$$u = \frac{-1}{l\Sigma^{-1}l^T} + t \frac{l\Sigma^{-1}r^T}{l\Sigma^{-1}l^T} \quad (8)$$

Подставим найденный вектор u в уравнение (6).

Обобщенная функция. Граница эффективности

$$\begin{aligned} x^T &\equiv x^T(t) = \frac{\Sigma^{-1}l^T}{l\Sigma^{-1}l^T} - \Sigma^{-1}l^T \cdot t \frac{l\Sigma^{-1}r^T}{l\Sigma^{-1}l^T} + t \cdot \Sigma^{-1}r^T = \\ &= \frac{\Sigma^{-1}l^T}{l\Sigma^{-1}l^T} + t \left(\Sigma^{-1}r^T - \Sigma^{-1}l^T \cdot t \frac{l\Sigma^{-1}r^T}{l\Sigma^{-1}l^T} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $h_0 = \frac{\Sigma^{-1}l^T}{l\Sigma^{-1}l^T}$, $h_1 = \Sigma^{-1}r^T - \Sigma^{-1}l^T \cdot t \frac{l\Sigma^{-1}r^T}{l\Sigma^{-1}l^T}$. Тогда получим следующую зависимость от параметра t .

$$x^T(t) = h_0 + th_1 \quad (10)$$

Обобщенная функция. Граница эффективности

Теперь определим доходность портфеля и риск.

$$r_p = r \cdot x^T(t) = rh_0 + rth_1 \quad (11)$$

$$\sigma_p^2 = (h_0 + th_1)^T \Sigma (h_0 + th_1) = h_0^T \Sigma h_0 + th_1^T \Sigma h_0 + th_0^T \Sigma h_1 + t^2 h_1^T \Sigma h_1 = \quad (12)$$

$$= h_0^T \Sigma h_0 + 2th_1^T \Sigma h_0 + t^2 h_1^T \Sigma h_1$$

Введем дополнительные обозначения.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= r \cdot h_0 \\ \alpha_1 &= r \cdot h_1 \\ \beta_0 &= h_0^T \Sigma h_0 \\ \beta_1 &= h_1^T \Sigma h_0 \\ \beta_2 &= h_1^T \Sigma h_1 \end{aligned} \quad (13)$$

Обобщенная функция. Граница эффективности

Тогда получим $r_p = \alpha_0 + t\alpha_1$, $\sigma_p^2 = \beta_0 + 2t\beta_1 + t^2\beta_2$. Можно показать, что $\beta_1 = 0$, $\alpha_1 = \beta_2$. Выразим t .

$$r_p \rightarrow: t = \frac{r_p - \alpha_0}{\alpha_1} \quad (14)$$

$$\sigma_p^2 \rightarrow: t^2 = \frac{\sigma_p^2 - \beta_0}{\beta_2} = \frac{\sigma_p^2 - \beta_0}{\alpha_1} \quad (15)$$

Возведем в квадрат (14) и приравняем к (15). Получим следующее соотношение, называемое границей эффективности (efficient frontier).

$$\frac{(r_p - \alpha_0)^2}{\alpha_1} = \sigma_p^2 - \beta_0 \quad (16)$$

Коэффициент Шарпа

$$Sh(X) = \frac{r_p(X) - r_f}{\sigma_p(X)} \quad (17)$$

$$\max_{X \in \mathbb{R}^n} \{Sh(X) \mid l \cdot x^T = 1; x_i \geq 0\}$$

Коэффициент Сортино

Для $r_i < r_f$

$$St(X) = \frac{r_p(X) - r_f}{\sum_i (r_i - r_f)^2} \quad (18)$$

$$\max_{X \in \mathbb{R}^n} \{St(X) \mid l \cdot x^T = 1; x_i \geq 0\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(X) = r \cdot X^T \rightarrow \max_X \\ f_2(X) = Sh(X) \rightarrow \max_X \\ f_3(X) = -t \cdot r \cdot X^T + \frac{1}{2} X \Sigma X^T \rightarrow \min_X \\ l \cdot X^T = 1 \\ 0 \leq x_i \leq 1 \end{array} \right. \quad (19)$$

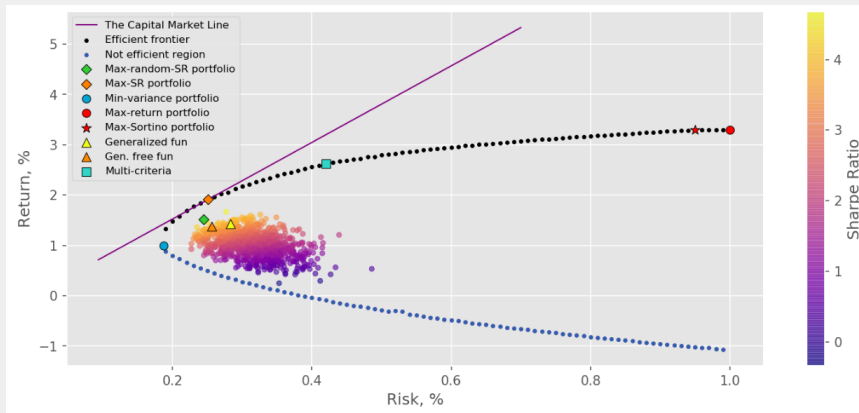


Рис.1 - Эффективная граница

Модель без ребалансировки

q^i - количество ценных бумаг актива i

$\Delta_{ij} = q^i(p_{s_j}^i - p_{b_j}^i)$; $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, k$ - доход за период j актива i

t_0 - начальный период

m - число ценных бумаг в валюте 1

ξ - курс валюты на период j

tax - налог на доход

fee - комиссия за сделки

Модель без ребалансировки

q^i - количество ценных бумаг актива i

$\Delta_{ij} = q^i(p_{s_j}^i - p_{b_j}^i)$; $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, k$ - доход за период j актива i

t_0 - начальный период

m - число ценных бумаг в валюте 1

ξ - курс валюты на период j

tax - налог на доход

fee - комиссия за сделки

Example

$$t_1 : \Delta_{i1} = q^i(p_{s_1}^i - p_{b_1}^i), \quad i = 1, \dots, m$$

$$\Delta_{i1} = q^i(p_{s_1}^i - p_{b_1}^i) \cdot \xi, \quad i = m + 1, \dots, n$$

$$t_2 : \Delta_{i2} = q^i(p_{s_2}^i - p_{b_1}^i)$$

$$t_k : \Delta_{ik} = q^i(p_{s_k}^i - p_{b_1}^i)$$

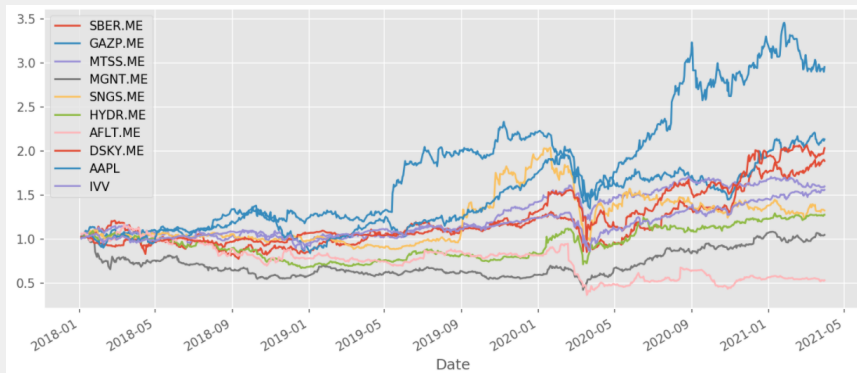


Рис.2 - Котировки

Показатели оценки эффективности портфеля

$$\beta_p = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i; \quad \beta_i = \frac{\text{cov}(r_i, r_m)}{\sigma_{r_m}} \quad (20)$$

$$RVol = \frac{r_p - r_f}{\beta_p} \quad (21)$$

	Max return	Max Sharpe ratio	Max Sortino ratio	Min risk	Generalized fun	Generalized free fun	Multi-criteria
Return	3.3%	1.913%	3.296%	0.993%	1.434%	1.386%	2.62%
Risk	1.0%	0.251%	0.95%	0.187%	0.283%	0.256%	0.42%
Return/Risk	3.3	7.622	3.469	5.31	5.067	5.414	6.238
Beta	1.263	0.714	1.263	0.636	0.815	0.766	0.922
Treynor ratio	2.61	2.672	2.606	1.556	1.754	1.805	2.836

Рис.3 - Показатели эффективности

Модель с ребалансировкой

$\psi_i(t_j)$ - предсказанное значение i -го актива в период j

N - количество наблюдений временного ряда

$$y_i = (y_1^i, \dots, y_N^i)$$

Модель с ребалансировкой

$\psi_i(t_j)$ - предсказанное значение i -го актива в период j

N - количество наблюдений временного ряда

$$y_i = (y_1^i, \dots, y_N^i)$$

Example

$$t_j : y_i = (y_1^i, \dots, y_N^i, \psi_i(t_j))$$

Спасибо за внимание!