Поиск околостабильного распределения с нижней границей квоты

Кирилл Захаров

СПбГЭУ

2021

Постановка задачи

Пусть заданы множества:
$A = \{a_1, ..., a_n\}$ - множество студентов
$C = \{c_1, ..., c_m\}$ - множество компаний
E - множество всех пар (a_i, c_j)

И заданы границы квот:
u_j - верхняя граница квоты компании c_j
l_j - нижняя граница квоты компании c_j

Пусть r_{ij} - ранг компании c_j в списке предпочтений студента a_i
Будем говорить, что студент a_i предпочитает компанию c_j компании c_k, если $r_{ij} < r_{ik}$

Пусть s_{ij} - оценка студента a_i в компании c_j
Будем говорить, что компания c_j предпочитает студента a_i студенту a_k, если $s_{ij} \geqslant s_{kj}$

Постановка задачи

Определение

Распределение называется ***стабильным*** если для любой пары студент-компания, не входящей в распределение, т.е. $(a_i, c_j) \notin E$, либо студент назначен в более предпочитаемую им компанию или компания заполнена студентами с такой же или более высокой оценкой.

Постановка задачи. Пример

Пример

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Первый студент предпочитает 3 компанию, второй студент 1 компанию и третий предпочитает 2.

Ограничения

$x \in \{0, 1\}$
Базовые ограничения

$$\sum_{j:(a_i,c_j)\in E} x_{ij} \leqslant 1 \qquad \forall i = 1, ..., n \tag{1}$$

$$\sum_{i:(a_i,c_j)\in E} x_{ij} \leqslant u_j \qquad \forall j = 1, ..., m \tag{2}$$

Ограничение для стабильности

$$\left(\sum_{k:r_{ik}\leqslant r_{ij}} x_{ik}\right) u_j + \sum_{h:(a_h,c_j)\in E, s_{hj}\geqslant s_{ij}} x_{hj} \geqslant u_j \qquad \forall (a_i, c_j) \in E \tag{3}$$

Целевая функция

$$\sum_{(a_i,c_j)\in E} r_{ij} \cdot x_{ij} \to \min \tag{4}$$

Ограничения на распределение

Пусть $\mathcal{T} = \{T^1, ..., T^p\}$ - множество типов студентов
$t(a_i)$ - тип студента a_i
l_j^k, u_j^k - нижняя и верхняя границы квоты компании c_j

$$\sum_{i:t(a_i)=T^k,(a_i,c_j)\in E} x_{ij} \leqslant u_j^k \qquad \forall j = 1, ..., m \text{ и } T^k \in \mathcal{T} \tag{5}$$

$$\sum_{i:t(a_i)=T^k,(a_i,c_j)\in E} x_{ij} \geqslant l_j^k \qquad \forall j = 1, ..., m \text{ и } T^k \in \mathcal{T} \tag{6}$$

Пусть $d_{ij} \geq 0 \in \mathbb{R}$ - переменная дефицита

Новые ограничения

$$\Big(\sum_{k:r_{ik}\leqslant r_{ij}} x_{ik}\Big)u_j + \sum_{h:(a_h,c_j)\in E, s_{hj}\geqslant s_{ij}} x_{hj} + d_{ij} \geqslant u_j \qquad \forall (a_i, c_j) \in E \tag{7}$$

Целевая функция

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} d_{ij} \to \min \tag{8}$$

*Полученное решение называется ***распределением с минимальным дефицитом***

Релаксация. Способ 2

Пусть $d_{ij} \in \{0, 1\}$
Новые ограничения

$$\left(\sum_{k:r_{ik} \leqslant r_{ij}} x_{ik}\right) u_j + \sum_{h:(a_h, c_j) \in E, s_{hj} \geqslant s_{ij}} x_{hj} + d_{ij} \cdot u_j \geqslant u_j \qquad \forall (a_i, c_j) \in E \tag{9}$$

Целевая функция

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} d_{ij} \to \min \tag{10}$$

*Полученное решение называется ***околостабильным распределением***

Реализация

Распределение

```
[[1., 0., 0., 0., 0.],
 [0., 0., 0., 1., 0.],
 [0., 0., 0., 0., 1.],
 [1., 0., 0., 0., 0.],
 [0., 0., 0., 0., 1.],
 [1., 0., 0., 0., 0.],
 [0., 0., 0., 1., 0.],
 [0., 0., 0., 1., 0.],
 [0., 1., 0., 0., 0.],
 [0., 0., 1., 0., 0.],
 [0., 0., 0., 0., 1.],
 [0., 0., 0., 0., 1.],
 [0., 0., 1., 0., 0.],
 [0., 0., 1., 0., 0.],
 [1., 0., 0., 0., 0.],
 [0., 0., 1., 0., 0.],
 [0., 1., 0., 0., 0.],
 [0., 0., 0., 0., 1.],
 [0., 0., 1., 0., 0.],
 [1., 0., 0., 0., 0.],
 [0., 1., 0., 0., 0.],
 [0., 0., 0., 1., 0.],
 [0., 1., 0., 0., 0.],
 [0., 0., 0., 0., 1.],
 [0., 0., 0., 0., 1.]]
```

Ранги r_{ij}

```
[[2, 5, 1, 4, 3],
 [3, 4, 5, 2, 1],
 [4, 3, 5, 2, 1],
 [1, 3, 2, 5, 4],
 [4, 5, 2, 3, 1],
 [1, 4, 3, 2, 5],
 [2, 5, 4, 1, 3],
 [2, 3, 5, 1, 4],
 [5, 1, 2, 3, 4],
 [3, 5, 1, 4, 2],
 [5, 2, 4, 3, 1],
 [3, 4, 2, 5, 1],
 [4, 5, 1, 3, 2],
 [5, 4, 1, 2, 3],
 [1, 2, 4, 5, 3],
 [5, 2, 1, 3, 4],
 [3, 1, 4, 5, 2],
 [3, 2, 5, 4, 1],
 [2, 5, 1, 3, 4],
 [1, 4, 5, 3, 2],
 [4, 2, 1, 3, 5],
 [5, 2, 4, 1, 3],
 [4, 1, 3, 5, 2],
 [5, 4, 3, 2, 1],
 [5, 4, 1, 2, 3]]
```

Реализация

1-й способ:

```
array([ 2,  7,  5,  8,  4,  3, 10, 10,  8,  4, 10,  5, 11,  8,  6,  5,
        7,  4,  5,  4])
```

2-й способ:

```
array([ 1,  6,  4,  7,  3,  2,  9,  9,  7,  3,  9,  4, 10,  7,  5,  4,
        6,  3,  3,  3])
```