Нелинейная оптимизация

Task 14.6 (Условный экстремум)

Условие

Дана функция трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$.
a. Составить функцию Лагранжа;
b. Определить стационарную точку и проверить ее на экстремум;
c. Найти стационарную точку методом Якоби, проверить ее на экстремум и исследовать решение на чувствительность.

$$\begin{aligned} &f = -5x_1^2 - 16x_2^2 - 15x_3^2 + 10x_1x_2 + 3x_1x_3 - 5x_2x_3 + 10x_1 + 13x_2 + 5x_3 \\ &2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 20 \\ &3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 20 \end{aligned} \tag{1}$$

Решение

a) Составим функцию Лагранжа $L(\Lambda, X) = -5x_1^2 - 16x_2^2 - 15x_3^2 + 10x_1x_2 + 3x_1x_3 - 5x_2x_3 + 10x_1 + 13x_2 + 5x_3 + \lambda_1(2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 20) + \lambda_2(3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 20)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\Lambda, X)}{\partial x_1} = -10x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 10 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L(\Lambda, X)}{\partial x_2} = 10x_1 - 32x_2 - 5x_3 + 13 - 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L(\Lambda, X)}{\partial x_3} = -30x_3 + 3x_1 - 5x_2 + 5 + 5\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \psi_1(X) = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 20 \\ \psi_2(X) = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 20 \end{cases} \tag{2}$$

b) **Способ 1:** Решая систему (2), получим следующую стационарную точку, вектор параметров Лагранжа и значение функции в стационарной точке.

$$\begin{aligned} &Y = (x_1, x_2, x_3) = (\frac{93673}{12080}; \frac{34333}{24160}; \frac{3073}{1510}) \approx (7.75439; 1.42107; 2.0351) \\ &\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (\frac{300699}{24160}; \frac{44969}{6040}) \approx (12.4462; 7.4452) \\ &f(x_1, x_2, x_3) = -\frac{7045871}{48320} \approx -145.817 \end{aligned} \tag{3}$$

Найдем такие вектора для которых $grad\psi_j(Y) \cdot \delta X = 0$

$$\begin{aligned} &j = 1 : 2\delta x_1 - 4\delta x_2 + 5\delta x_3 = 0 \\ &j = 2 : 3\delta x_1 + 2\delta x_2 - 3\delta x_3 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Решим систему приняв δx_3 за параметр.

$$\begin{cases} 2\delta x_1 - 4\delta x_2 = -5\delta x_3 \\ 3\delta x_1 + 2\delta x_2 = 3\delta x_3 \end{cases} ; \begin{cases} \delta x_1 = \dfrac{1}{8}\delta x_3 \\ \delta x_2 = \dfrac{21}{16}\delta x_3 \end{cases} \tag{5}$$

Получили следующий вектор: $\delta X = (\frac{1}{8}\delta x_3; \frac{21}{16}\delta x_3; \delta x_3)$

$$L''_{XX} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 3 \\ 10 & -32 & -5 \\ 3 & -5 & -30 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Теперь определим знак квадратичной формы $\delta X \cdot L''_{XX} \cdot \delta X^T = -\frac{755}{8}\delta x_3^2 < 0$
$\Rightarrow Y = (x_1, x_2, x_3)$ - точка максимума (по достаточному условию экстремума).
Способ 2:

$$H(\Lambda, X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -10 & 10 & 3 \\ -4 & 2 & 10 & -32 & -5 \\ 5 & -3 & 3 & -5 & -30 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Если Y - точка максимума, то начиная с углового минора M_{2M+1} последующие $N - M$ угловых миноров образуют знакочередующийся ряд, начиная со знака $(-1)^{2M+1}$. В задаче $N = 3, M = 2 \Rightarrow$ необходимо посчитать угловой минор порядка 5 и проверить его знак. $M_5(H) = -24160$ и $(-1)^3 = -1 \Rightarrow$ Точка Y - точка максимума.

c) В качестве зависимых переменных возьмем $x_1, x_2(S)$, а независимая будет $x_3(Z)$. Посчитаем градиенты целевой функции по этим переменным.

$$\begin{aligned} &grad_Z f(X) = 5 + 3x_1 - 5x_2 - 30x_3 \\ &grad_S f(X) = \{10 - 10x_1 + 10x_2 + 3x_3, 13 + 10x_1 - 32x_2 - 5x_3\} \end{aligned} \tag{8}$$

Теперь посчитаем J и C.

$$\begin{gathered} J(X) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ C(X) = (5, -3)^T \end{gathered} \tag{9}$$

Обращаем якобиан

$$J^{-1}(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Составим $grad_* f(x) = grad_Z f(X) - grad_S f(X) J^{-1} C =$
$5 + 3x_1 - 5x_2 - 30x_3 - \{10 - 10x_1 + 10x_2 + 3x_3, 13 + 10x_1 - 32x_2 - 5x_3\} \cdot J^{-1} \cdot C =$
$\left\{\frac{373}{16} + \frac{119}{8}x_1 - \frac{183}{4}x_2 - \frac{579}{16}x_3\right\}$.
Решая систему найдем стационарную точку.

$$\begin{cases} grad_* f(x) = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 20 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 20 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = \frac{93673}{12080} \approx 7.75 \\ x_2 = \frac{34333}{24160} \approx 1.42 \\ x_3 = \frac{3073}{1510} \approx 2.03 \end{cases} \tag{11}$$

$$\delta x_3 = -J^{-1}C\begin{pmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\end{pmatrix} \tag{12}$$

Проверим на экстремум, составив матрицу Гессе.

$$H(Y) = \left\{\frac{\partial grad_* f(Y)}{\partial x_3}\right\} = \left\{-\frac{579}{16}\right\} \tag{13}$$

$\Rightarrow$ матрица Гессе отрицательно определенная и по достаточному условию экстремума точка Y является точкой максимума.

Анализ чувствительности:

$$\frac{\delta f(Y)}{\delta B} = grad_S f(Y) J^{-1}(Y) = \{-12.4, -7.4\} \tag{14}$$

Это означает, что при увеличении ресурса 1 на единицу, целевая функция быстрее будет убывать по первой переменной.