

Математическое моделирование

Лектор: Лебедева Л.Н.

Студент: Захаров К.А.

2020 г.

Все реализации моделей на моем github: <https://github.com/kirillzx/Math-projects>

Содержание

1	Введение	2
2	Статические модели	3
2.1	Производственная функция Кобба-Дугласа	3
2.2	Модель Леонтьева (Межотраслевой баланс)	4
3	Динамические модели	6
3.1	Модель Солоу	6
3.2	SIR модель	8
3.3	SEIRD модель	10
3.4	Модель Лотки-Вольтерра	12
3.5	Модель взаимодействия двух конкурирующих видов	14
3.6	Переход к полярным координатам	15
3.7	Модель Самуэльсона-Хикса	17
3.7.1	Дискретная форма	17
3.7.2	Непрерывная форма	19
4	Модели в частных производных	23
4.1	Модель распространения тепла в тонком стержне	23
4.2	Колебание пластины	25
5	Бифуркации динамических систем	27
5.1	Аттрактор Лоренца	27
5.2	Маятник Фуко	28
5.3	Аттрактор Рикитаки	28
6	Оптимизационные модели	31

1 Введение

Модель - образ или прообраз какого-либо объекта или системы объектов, используемый в качестве их "заместителя".

Математическая модель - описание объекта исследования на языке математики.

Требования к модели:

- адекватность
- конечность
- полнота(информированность)
- упрощенность
- гибкость
- приемлемая трудоемкость разработки

Этапы построения модели:

1. определение цели;
2. изучение предметной области, выявление причинно-следственных связей;
3. переход от концептуальной модели к формализованному описанию;
4. проверка адекватности моделирование;
5. корректировка модели;
6. применение модели. Проведение исследования и практическое использование.

Классификация моделей:

- линейные или нелинейные;
- сосредоточенные и распределенные системы;
- детерминированные или стохастические;
- статические или динамические;
- дискретные или непрерывные.

2 Статические модели

2.1 Производственная функция Кобба-Дугласа

Определение 2.1. Производственная функция - функция выражающая зависимость между затратами ресурсов и объемом выпуска.

Пусть \bar{X} - вектор используемых ресурсов, \bar{Y} - объем выпуска продукции каждого вида.

Property 1. *О производственной функции*

1. $F(x_1, \dots, x_n)$ является достаточно гладкой, т.е. $F \in C^2$
2. $F(x_1, \dots, x_n)$ - возрастающая по каждому аргументу $\frac{\partial F}{\partial x_i} > 0 \forall i$
3. выпуск по каждому аргументу не ограничен
4. предельная производительность убывает $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} < 0 \forall i$

Определение 2.2. Однородная функция

$$F(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda F(x_1, \dots, x_n)$$

Пусть Y - это ВВП, K - основные производственные фонды, L - число занятых. Тогда определим функцию $Y = AK^\alpha L^\beta$, ($A > 0, 0 < \alpha, \beta < 1$). Для оценки параметров A, α, β воспользуемся методом наименьших квадратов $\sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2 \rightarrow \min$. Также необходимо линеаризовать данные параметры при помощи натурального алгоритма. После чего получим следующую целевую функцию.

$$S(A, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^M (\ln A + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i - \ln Y_i)^2 \rightarrow \min \quad (1)$$

Теперь нужно приравнять частные производные к нулю по каждому аргументу и решить систему линейных уравнений (3).

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \ln A} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \end{cases} ; \quad (2)$$

$$\begin{cases} M \ln A + \alpha \sum_{i=1}^M \ln K_i + \beta \sum_{i=1}^M \ln L_i = \sum_{i=1}^M \ln Y_i \\ \ln A \sum_{i=1}^M \ln K_i + \alpha \sum_{i=1}^M \ln K_i^2 + \beta \sum_{i=1}^M \ln K_i \ln L_i = \sum_{i=1}^M \ln Y_i \ln K_i \\ \ln A \sum_{i=1}^M \ln L_i + \alpha \sum_{i=1}^M \ln K_i \ln L_i + \beta \sum_{i=1}^M \ln L_i^2 = \sum_{i=1}^M \ln Y_i \ln L_i \end{cases} \quad (3)$$

Для решения данной модели воспользуемся средствами Excel.

	Экономика США			Kirill Zakharov													
2	Год	ВВП(млн. \$)	K(млн.\$)	L(тыс. чел.)	ln K	ln L	ln Y	ln K**2	ln L**2	ln K * ln L	ln K * ln Y	ln L * ln Y	ln Ki - ln Li	(ln Ki - ln Li)^2	ln Yi - ln Li	(ln Yi - ln Li)^2	(ln Yi - ln Li)*(ln Ki - ln Li)
3	1936	83278	234236	73426	12.3641	11.204	11.3299	152.8705839	125.5303639	138.528	140.0843309	126.941022	1.160051	1.345718457	0.125906312	0.146057751	
4	1937	90884	254890	77568	12.4486	11.2589	11.4173	154.9673272	126.76306	140.158	142.129745	128.546798	1.189677	1.415331623	0.158428997	0.188479351	
5	1938	83743	217606	70460	12.2904	11.1628	11.3355	151.054949	124.6081139	137.196	139.3183948	126.536012	1.127641	1.271574034	0.172707412	0.194751944	
6	1939	91530	221746	75131	12.3093	11.227	11.4244	151.5185677	126.0452716	138.196	140.6264999	128.261856	1.082299	1.171371831	0.197433531	0.213682177	
7	1940	101313	228757	79694	12.3404	11.2859	11.526	152.2858568	127.3726579	139.273	142.23526	130.081516	1.054466	1.111898554	0.240020434	0.253093388	
8	1941	116415	250238	89276	12.4302	11.3995	11.6649	154.5090701	129.9483261	141.698	144.996871	132.974077	1.03068	1.062300789	0.265428698	0.27357199	
9	1942	127434	266469	97056	12.493	11.483	11.7554	156.0753786	131.860286	143.458	146.8597909	134.987239	1.00997	1.020038962	0.272310452	0.275025328	
10	1943	136274	266154	101633	12.4918	11.5291	11.8224	156.0458259	132.9206902	144.02	147.6837007	136.302174	0.962707	0.926804389	0.293299279	0.282361211	
11	1944	146470	269520	100124	12.5044	11.5142	11.8946	156.3599663	132.5759887	143.978	148.7345097	136.956106	0.990233	0.980561753	0.380411212	0.376695804	
12	1945	145052	263098	94920	12.4803	11.4608	11.8848	155.7574354	131.3497008	143.034	148.3262477	136.209739	1.019492	1.039364254	0.424057867	0.432323669	
13	1946	140288	252357	96671	12.4386	11.4791	11.8515	154.7187707	131.7690191	142.784	147.4154803	136.043641	0.959531	0.920700298	0.372383992	0.357314092	
14	1947	142022	262536	100072	12.4781	11.5136	11.8637	155.7040651	132.5640259	143.669	148.0374158	136.594862	0.964498	0.930256949	0.350092048	0.337663181	
15	1948	149895	285700	101304	12.5627	11.5259	11.9177	157.8213707	132.8459369	144.796	149.7183395	137.361883	1.036816	1.074988272	0.391809152	0.406234159	
16	1949	147122	277522	96784	12.5337	11.4802	11.899	157.0925199	131.7958409	143.889	149.1381854	136.60354	1.053419	1.109690574	0.418780483	0.441151116	
17	1950	163620	307946	100352	12.6377	11.5164	12.0053	159.7109488	132.6283738	145.541	151.7191609	138.258331	1.12124	1.257180119	0.488862661	0.548132584	
18				Сумма	186.803	171.041	175.592	2326.492636	1950.577656	2130.22	2187.023933	2002.6588	15.76272	16.63778086	4.55193253	4.726537746	
19																	
20								15	186.803284	171.041							
21								186.803284	2326.492636	2130.22						175.5924955	
22								171.0415629	2130.216255	1950.58						2187.023933	
23																2002.658795	
24																	
25								1391.733704	-158.907753	51.5052							
26								-158.907753	28.7879861	-17.5051							
27								51.50523599	-17.5050526	14.6013							
28																	
29								15	15.76272105		4.55193253						
30								15.76272105	16.63778086		4.726537746						
31																	
32																	
33								15.07949701	-14.2863947								
34								-14.2863947	13.59510966								
35																	
36																	

Рисунок 1 - Модель Кобба-Дугласа

По данным ВВП США получено решение для коэффициентов α, β, A .

2.2 Модель Леонтьева (Межотраслевой баланс)

Пусть x_{ij} - промежуточный продукт, т.е. отрасль i изготавливает продукт для отрасли j

X_i - валовый продукт отрасли i

Y_i - конечный продукт отрасли $i (i = \overline{1, n})$.

Тогда валовый выпуск определяется по следующей формуле.

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i \quad (4)$$

Матрица прямых затрат определяется, как $a_{ij} = x_{ij}/X_j$. Тогда вектор валового выпуска можно определить, как $X = AX + Y \Rightarrow X = (E - A)^{-1}Y$, а конечный продукт $Y = (E - A)X$.

Определение 2.3. Если хотя бы для одного положительного Y уравнение межотраслевого баланса имеет неотрицательное решение, то матрица A продуктивна.

Определение 2.4. Матрица A продуктивна $\iff (E - A)$ имеет n положительных последовательностей главных миноров.

Определение 2.5. Матрица A продуктивна \iff когда матричный ряд $E + A + A^2 + \dots + A_k + \dots$ сходится.

Определение 2.6. Матрицей полных затрат называется обратная матрица Леонтьева $B = (E - A)^{-1}$

На рисунках 2-3 представлено решение индивидуального задания по модели Леонтьева. В первом задании вычислены объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли на 10%, 50%, 20% соответственно.

Kirill Zakharov											
Task 1											
	A	B	C	Final Prod.	Gross output	matrix A			Identity Matrix		
A	40	18	75	21	154	0,25974	0,145161	0,125	1	0	0
B	16	9	75	24	124	0,103896	0,072581	0,125	0	1	0
C	240	135	150	75	600	1,558442	1,08871	0,25	0	0	1
						E-A					
						0,74026	-0,14516	-0,125			
						-0,1039	0,927419	-0,125			
						-1,55844	-1,08871	0,75			
						New X		Volume of Y			
						10%	169,4	8,4			
						50%	186	64,9			
						20%	720	73,5			
Поскольку имеется положительный элемент Y и есть нестр. Решение для X, то A продуктивна											
При увеличении валового выпуска, конечный продукт сократился для первого и третьего продукта, однако увеличился для второго											

Рисунок 2 - Индивидуальное задание 1

Kirill Zakharov																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
-----------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Рисунок 3 - Индивидуальное задание 2

Во втором задании вычислены валовые выпуски отраслей по заданной матрице прямых затрат и вектору конечной продукции. На рисунках 4-5 показано решение на Python.

```

matrix = np.array([])
yVector = np.array([])
print("Enter the values of matrix: ")
for i in range(n*n):
    matrix = np.append(matrix, float(input()))

print("Enter the final product vector: ")
for i in range(n):
    yVector = np.append(yVector, float(input()))
matrix = matrix.reshape((n, n))

def identityM(n):
    matrix = [[0 for i in range(n)] for j in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                matrix[i][j] = 1
    return matrix

invM = np.linalg.inv(identityM(n) - matrix)
print(f'Gross output vector: {np.matmul(invM, yVector)}')

```

Рисунок 4 - Модель Леонтьева

```

import numpy as np
n = int(input("Enter the number of rows: "))

matrix = np.array([])
yVector = np.array([])
print("Enter the values of A matrix: ")
for i in range(n*n):
    matrix = np.append(matrix, float(input()))

print("Enter the final product vector: ")
for i in range(n):
    yVector = np.append(yVector, float(input()))
matrix = matrix.reshape((3,3))

def identityM(n):
    matrix = [[0 for i in range(n)] for j in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                matrix[i][j] = 1
    return matrix

invM = np.linalg.inv(identityM(n) - matrix)
grossOutput = np.matmul(invM, yVector)

xMatrix = np.array([[0 for j in range(n)] for i in range(n)])
for i in range(n):
    for j in range(n):
        xMatrix[i][j] = matrix[i][j] * grossOutput[j]

print(f'Gross output vector:\n {xMatrix}')

```

Рисунок 5 - Индивидуальное задание

3 Динамические модели

3.1 Модель Солоу

Пусть имеется замкнутая односекторная экономика.

Y - ВВП

K - капитал

I - инвестиции

C - конечное потребление

L - трудовые ресурсы

Имеется баланс $Y = C + I$. Зависимость ВВП от ресурсов выражается функцией Кобба-Дугласа.

$$\begin{aligned}
 Y &= AK^\alpha L^\beta \\
 Y &= C + I \\
 I &= sY \\
 \frac{\partial L}{\partial t} &= \gamma L \quad (L(0) = L_0) \\
 \frac{\partial K}{\partial t} &= -\mu K + I \quad (K(0) = K_0)
 \end{aligned} \tag{5}$$

где γ - темп прироста трудовых ресурсов, s - склонность к сбережению, A - научно-технический прогресс. Пусть $y = Y/L$, $k = K/L$, $i = I/L$. Тогда получим модель Солоу в относительных показателях.

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -(\lambda + \mu)k + sAk^\alpha \tag{6}$$

Равновесие равно $\hat{k} = \left(\frac{sA}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Интервалы	Рост
$\left(0; \left(\frac{\alpha s A}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$	Ускоренный рост
$\left(\left(\frac{\alpha s A}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}; \left(\frac{s A}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$	Насыщенный рост
$\left(\left(\frac{s A}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}; +\infty\right)$	Падение

Конечно-разностное представление: $k(t + \Delta) = k(t) + \Delta t(-(\lambda + \mu)k(t) + sAk(t)^\alpha)$
На рисунке 6 показана реализация модели Солоу на Python. На графике представлены три решения с разными задачами Коши. Также при помощи горизонтальных прямых график разбит на интервалы, описанные ранее. Для численного решения здесь и далее используется метод численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений Рунге-Кутты порядка 4 (рис. 7).

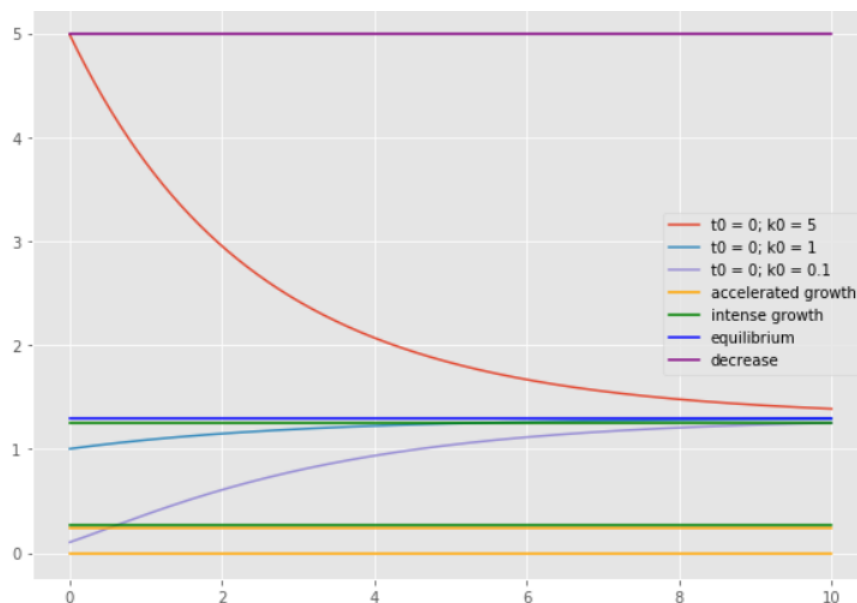


Рисунок 6 - Модель Солоу

```
def runge_kutt(f, x0, y0, h, b):
    x = x0
    y = y0
    array = np.array([])
    arrayx = np.array([])
    while x < b:
        k1 = f(x, y)
        k2 = f(x + h/2, y + (h*k1)/2)
        k3 = f(x + h/2, y + (h*k2)/2)
        k4 = f(x + h, y + h*k3)
        y = y + h*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6
        array = np.append(array, y)
        arrayx = np.append(arrayx, x)
        x += h
    return arrayx, array
```

Рисунок 7 - Метод Рунге-Кутты

3.2 SIR модель

Пусть $S(t)$ - число восприимчивых к инфекции

$I(t)$ - число инфицированных

$R(t)$ - число переболевших инфекцией

N - число популяции

β - коэффициент интенсивности контактов

γ - коэффициент интенсивности выздоровления

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{-\beta IS}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}\tag{7}$$

Далее представлена реализация данной модели в среде AnyLogic. На рисунке 8

показана модель при $\beta = 3/14, \gamma = 1/14$, где знаменатель это среднее время выздоровления. По данной модели видно, что сперва идет рост инфицированных, затем он доходит до своего пика (за этот пик отвечают параметры β, γ). После пика начинается спад и спустя какое-то время видна стабилизация, скорость выздоровления начинается снижаться, так как после пика распространение эпидемии сокращается.

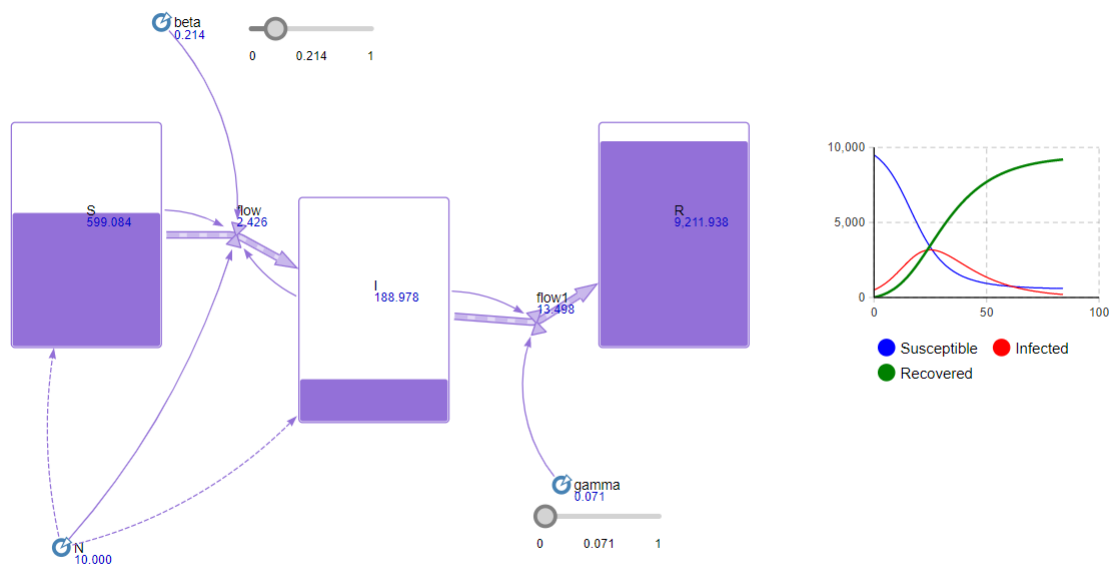


Рисунок 8 - SIR модель ($\beta = 3/14, \gamma = 1/14$)

На рисунке 9 представлена SIR модель с увеличенным параметром β . Как видно при его увеличении пик распространения эпидемии наступает намного быстрее, что соответствует если в действительности увеличить число контактов.

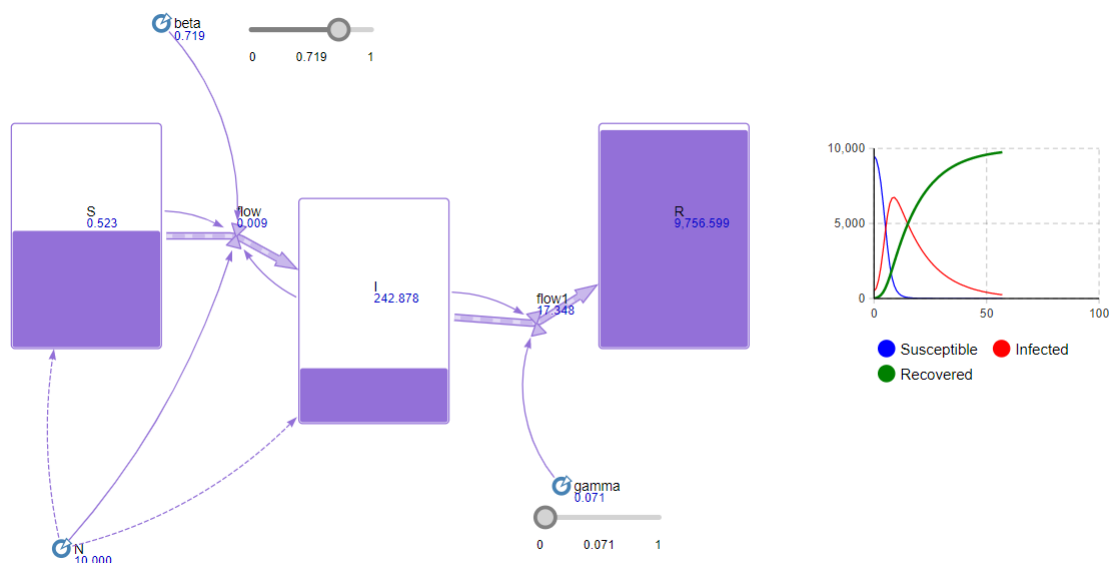


Рисунок 9 - SIR модель с увеличенным β

На рисунке 10 увеличен параметр γ - коэффициент интенсивности выздоровления. Увеличивая его, люди слишком быстро выздоравливают и соответственно пик эпидемии наступает рано и незначителен по своей величине.

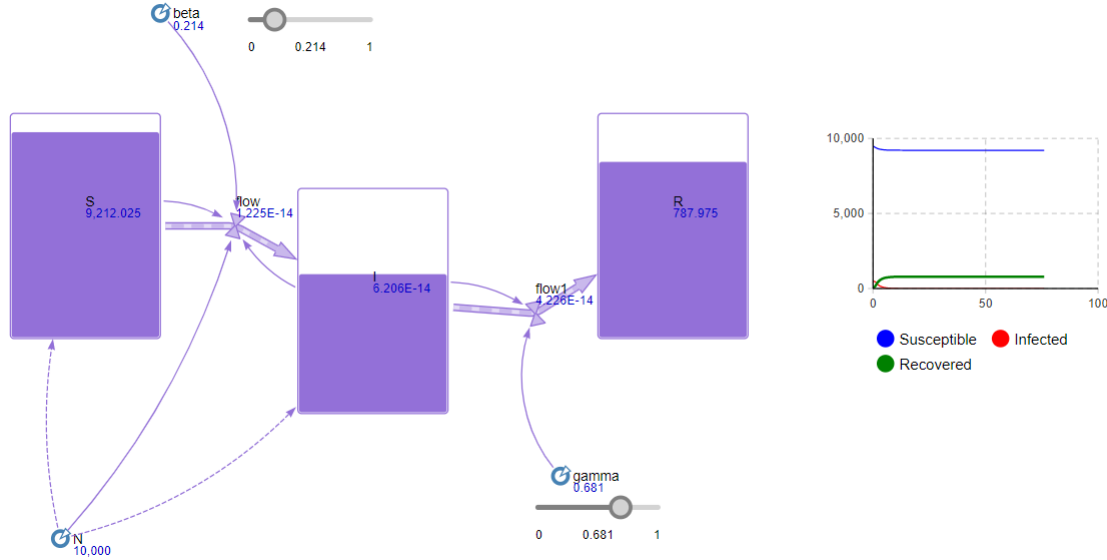


Рисунок 10 - SIR модель с увеличенным γ

3.3 SEIRD модель

$E(t)$ - число носителей заболевания

D - число умерших

μ - уровень смертности

$$\delta = \frac{1}{\text{ср.инк.период}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{-\beta IS}{N} \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - \delta E \\ \frac{dI}{dt} &= \delta E - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \\ \frac{dD}{dt} &= \mu I \end{aligned} \quad (8)$$

В данной модели в отличие от предыдущих, люди заболевают не сразу, а есть некоторый инкубационный период, то есть сначала они получают статус exposed, а только затем infected. Также в данной модели есть убыль популяции, за счет смертности. На рисунке 11 представлена реализация с введением в SEIRD модель вакцинации. Вакцинация по факту дает возможность перейти из восприимчивого к агенту с иммунитетом, но также есть и вероятность рецидива, когда вакцина не подействовала.

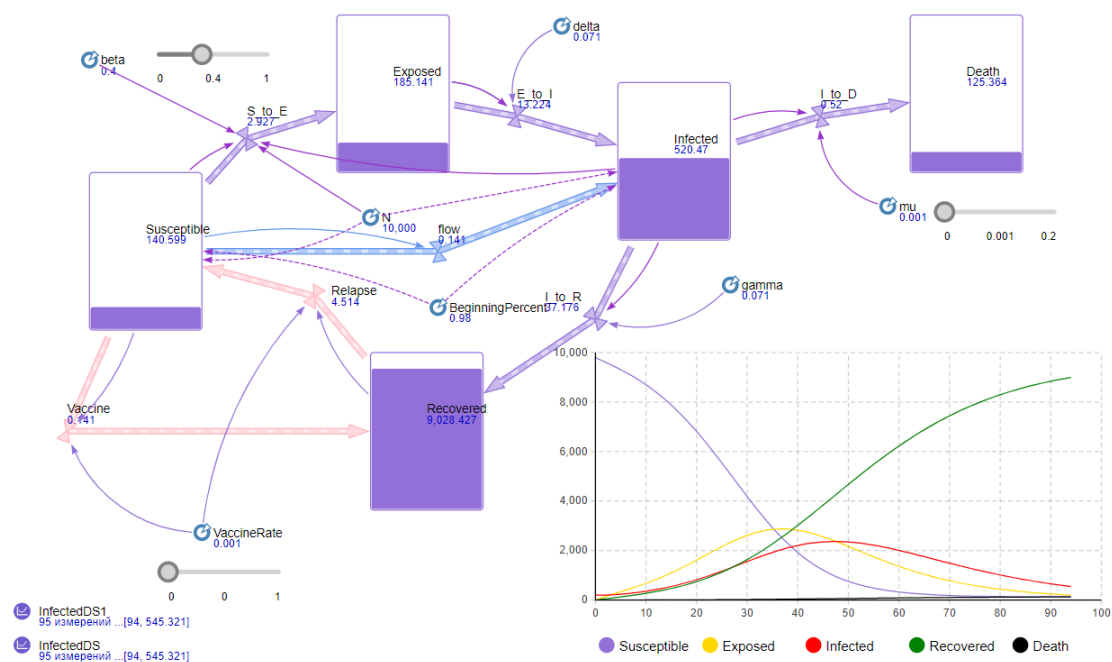


Рисунок 11 - SEIRD модель

На рисунке 12 увеличен уровень вакцинации, что приводит к значительному увеличению числа выздоровевших.

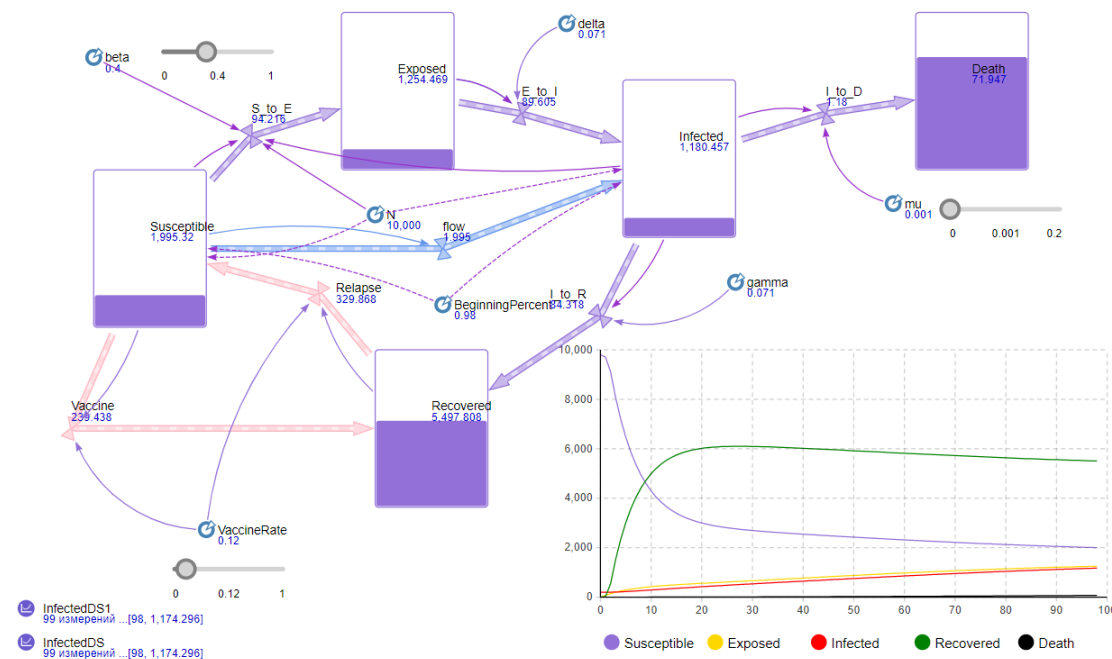
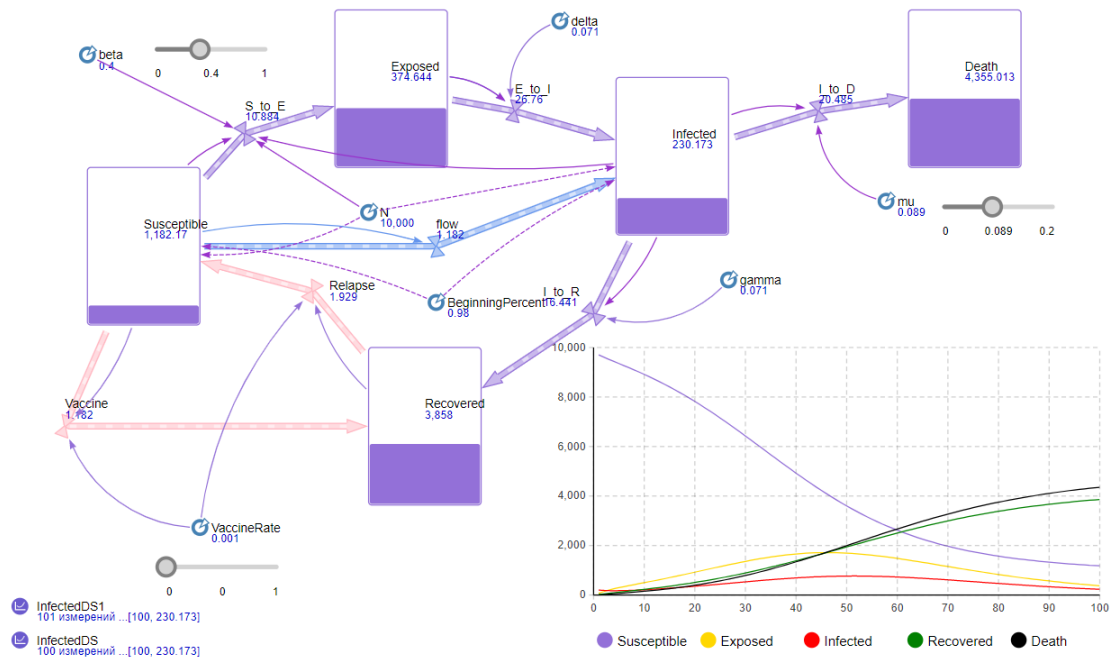


Рисунок 12 - SEIRD модель с увеличенной вакцинацией

На рисунке 13 показана модель при увеличении уровня смертности. В следствии сильного сокращения числа популяции.

Рисунок 13 - SEIRD модель с увеличенным μ

3.4 Модель Лотки-Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \quad (9)$$

$x(t)$ - число жертв

$y(t)$ - число хищников

a - коэффициент рождаемости жертв

b - коэффициент убыли жертв

c - коэффициент убыли хищников

d - коэффициент рождаемости хищников

Первой стационарной точкой является $(0, 0)$. Возьмем из системы линейную часть и составим матрицу.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} \quad (10)$$

Решая данной характеристическое уравнение получим $\lambda_1 = a, \lambda_2 = -c \Rightarrow$ данная точка является седлом. Теперь приравняем правые части системы к 0 и решим ее. Получим вторую стационарную точку $\bar{x} = \frac{c}{d}, \bar{y} = \frac{a}{b}$. Построим матрицу Якоби, подставив \bar{x}, \bar{y} .

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ -\frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 + ac = 0$, получаем два мнимых корня, что свидетельствует о том что данная стационарная точка является центром (рис. 14).

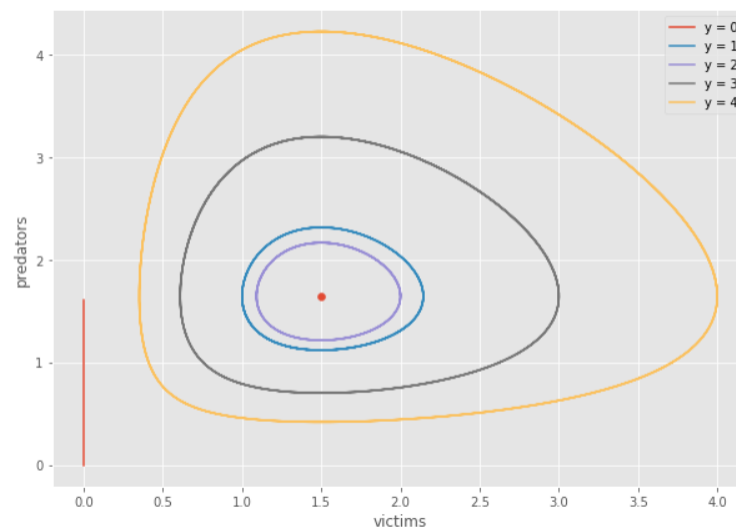


Рисунок 14 - Состояния равновесия

На рисунке 15 приведена реализации модели Лотки-Вольтерра в AnyLogic.

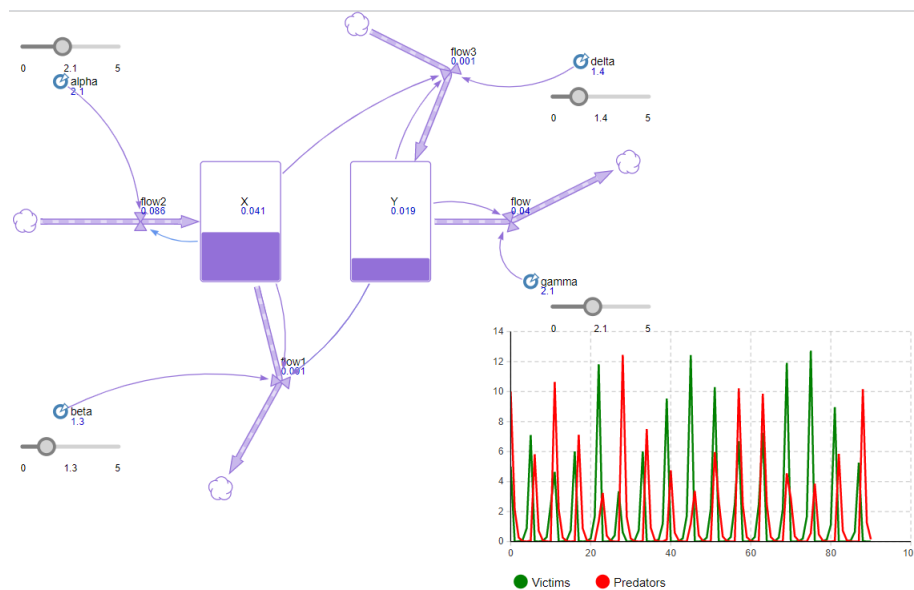


Рисунок 15 - Модель Лотки-Вольтерра AnyLogic

На рисунке 16 приведена реализации модели Лотки-Вольтерра на Python.

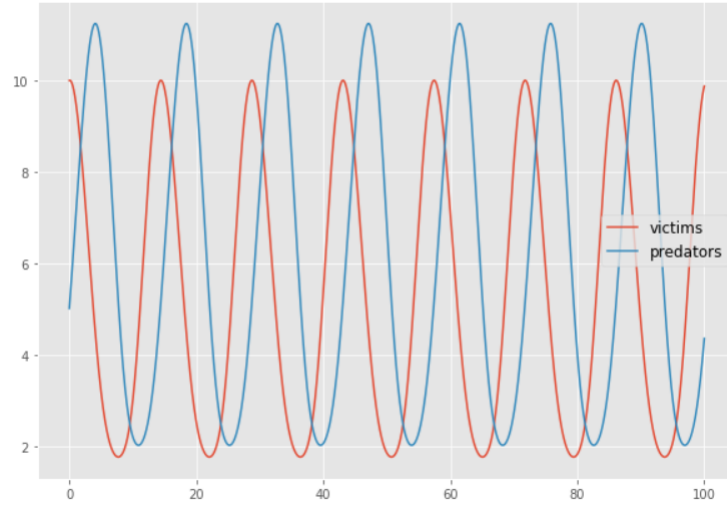


Рисунок 16 - Модель Лотки-Вольтерра Python

3.5 Модель взаимодействия двух конкурирующих видов

x_1 - количество особей первого типа x_2 - количество особей второго типа

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1x_1 - b_{11}x_1^2 - b_{12}x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = a_2x_2 - b_{21}x_1x_2 - b_{22}x_2^2 \end{cases} \quad (12)$$

Приравняем к 0 правые части системы.

$$\begin{cases} x_1(a_1 - b_{11}x_1 - b_{12}x_2) = 0 \\ x_2(a_2 - b_{21}x_1 - b_{22}x_2) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Получим 4 стационарные точки.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{a_2}{b_{22}} \end{cases} ; \\ & \begin{cases} x_1 = \frac{a_1}{b_{11}} \\ x_2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = \frac{a_2b_{12} - a_1b_{22}}{b_{12}b_{21} - b_{22}b_{11}} \\ x_2 = \frac{a_1b_{21} - a_2b_{11}}{b_{12}b_{21} - b_{22}b_{11}} \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Определим состояние равновесия для каждой стационарной точки

1. 1
2. 2

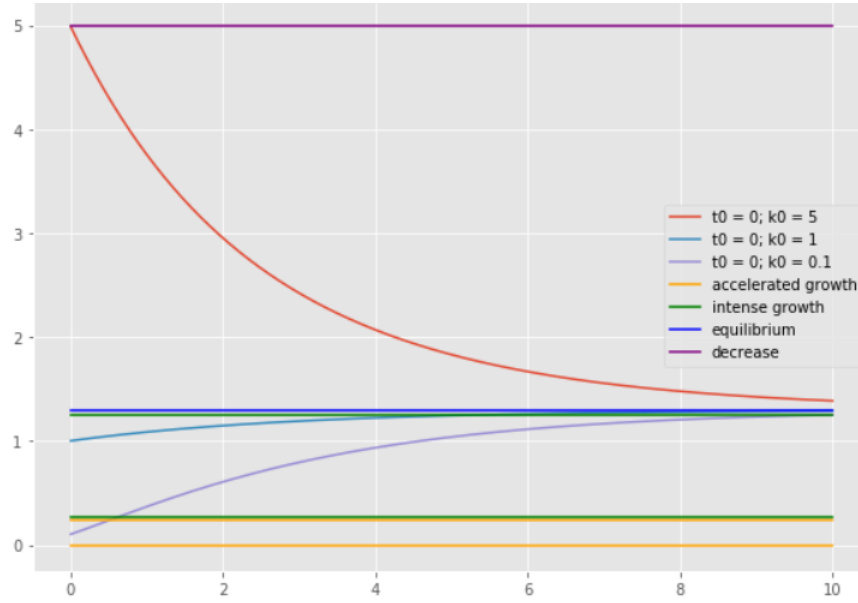


Рисунок 6 - Модель Солоу

```
def runge_kutt(f, x0, y0, h, b):
    x = x0
    y = y0
    array = np.array([])
    arrayx = np.array([])
    while x < b:
        k1 = f(x, y)
        k2 = f(x + h/2, y + (h*k1)/2)
        k3 = f(x + h/2, y + (h*k2)/2)
        k4 = f(x + h, y + h*k3)
        y = y + h*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6
        array = np.append(array, y)
        arrayx = np.append(arrayx, x)
        x += h
    return arrayx, array
```

Рисунок 7 - Метод Рунге-Кутты

3.6 Переход к полярным координатам

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (15)$$

Перейдем к полярным координатам.

$$\begin{cases} x_1(t) = r(t) \cos \varphi(t) \\ x_2(t) = r(t) \sin \varphi(t) \end{cases} \quad (16)$$

Выполним подстановку и получим выражения для \dot{r} и $\dot{\varphi}$.

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi + r \dot{\varphi} (-\sin \varphi) = r \cos \varphi - r \sin \varphi - r^3 \cos \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = r \cos \varphi + r \sin \varphi - r^3 \sin \varphi \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \dot{r} \cos^2 \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi = r \cos^2 \varphi - r \cos \varphi \sin \varphi - r^3 \cos^2 \varphi \\ \dot{r} \sin^2 \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi = r \sin^2 \varphi + r \sin \varphi \cos \varphi - r^3 \sin^2 \varphi \end{cases} \quad (18)$$

Тем самым получаем выражение для $\dot{r}(t) = r(t)(1 - r^2(t))$. Теперь умножим первое уравнения на $\sin \varphi$, второе на $\cos \varphi$ и вычтем из первого второе.

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi + r\dot{\varphi}(-\sin \varphi) = r \cos \varphi - r \sin \varphi - r^3 \cos \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi = r \cos \varphi + r \sin \varphi - r^3 \sin \varphi \end{cases} \begin{matrix} * \sin \varphi \\ * \cos \varphi \end{matrix} - \quad (19)$$

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi \sin \varphi - r\dot{\varphi} \sin^2 \varphi = r \cos \varphi \sin \varphi - r \sin^2 \varphi - r^3 \cos \varphi \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi \cos \varphi + r\dot{\varphi} \cos^2 \varphi = r \cos^2 \varphi + r \sin \varphi \cos \varphi - r^3 \sin \varphi \cos \varphi \end{cases} \quad (20)$$

Таким образом получим систему (1) в полярных координатах.

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (21)$$

Стационарные точки для данной системы $r = 0$ и $r = 1$.

Устойчивый предельный цикл (рис.):

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (22)$$

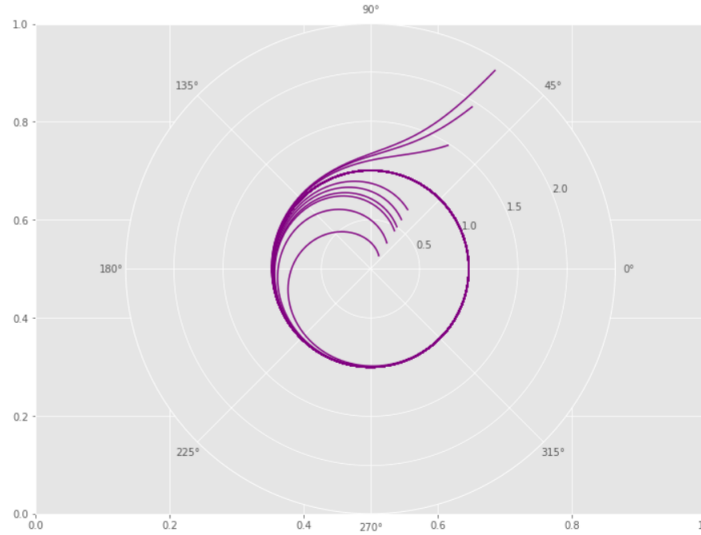


Рисунок - Устойчивый предельный цикл

Неустойчивый предельный цикл (рис.):

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (23)$$

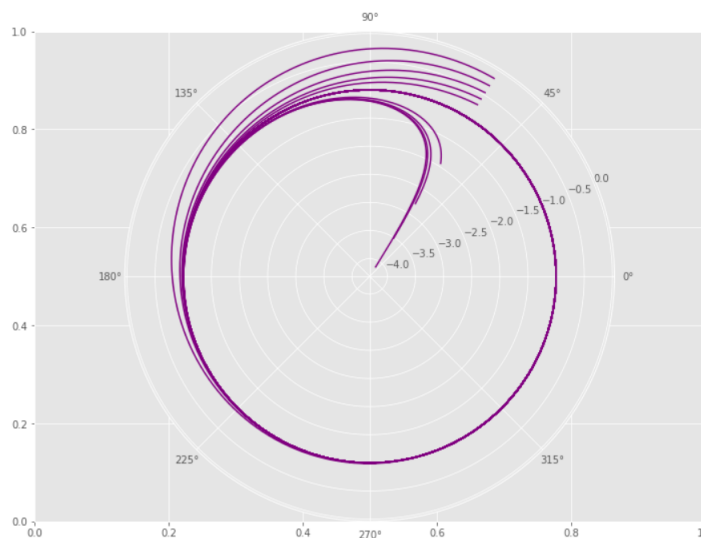


Рисунок - Неустойчивый предельный цикл

Полуустойчивый предельный цикл (рис.)::

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r)^2 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (24)$$

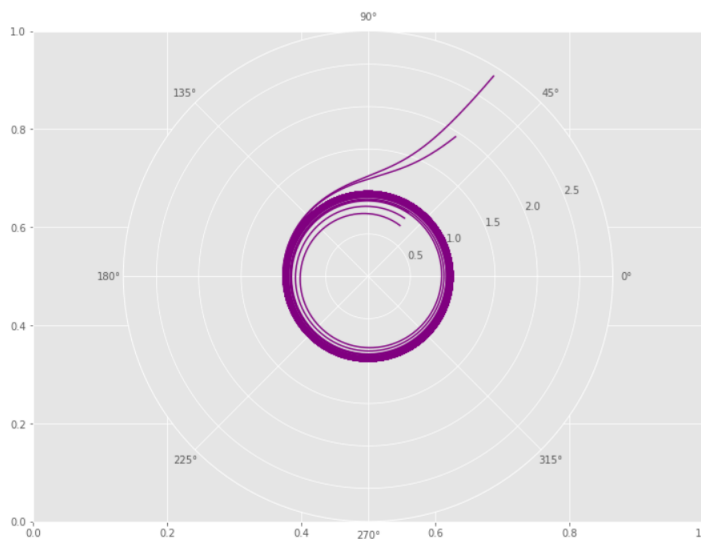


Рисунок - Полуустойчивый предельный цикл

3.7 Модель Самуэльсона-Хикса

3.7.1 Дискретная форма

Предполагается замкнутая экономика, предложение эластично, цены и процентная ставка фиксированы. Рассмотрим уравнение

$$Y_{t+1} = C(Y_t) + I_t \quad (25)$$

Пусть спрос зависит от Y_t линейно, т.е. $C(Y_t) = C_a + cY_t$, а инвестиции равны $I_t = r(Y_t - Y_{t-1}) + I_a$, где C_a - постоянное потребление, I_a - постоянные инвестиции, r - коэффициент акселерации, c - склонность к потреблению. $A = C_a + I_a$ - автономные расходы. Получим следующее конечно-разностное уравнение.

$$Y_{t+1} = C_a + I_a + cY_t + r(Y_t - Y_{t-1}) \quad (26)$$

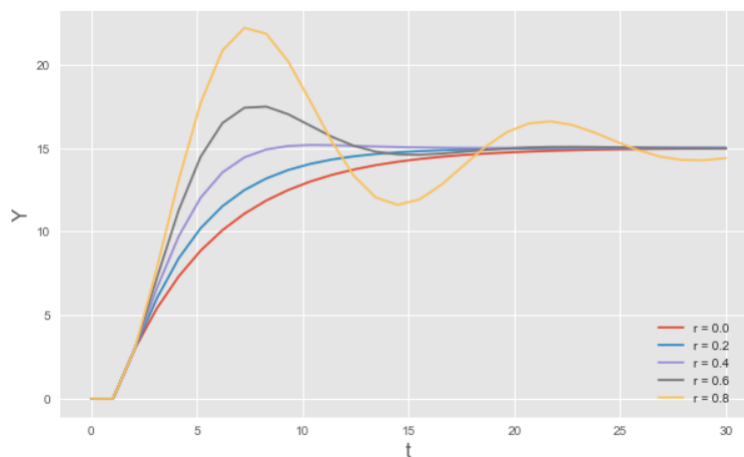
Равновесие определим из предположения, что автономные расходы постоянны и объем ВВП стабилизируется на определенном уровне, т.е. $Y_t = Y_{t-1} = \dots = Y_{t-n} = \hat{Y}$. Тогда получим уравнение

$$\hat{Y} = A + c\hat{Y} + r(\hat{Y} - \hat{Y}) = A + c\hat{Y} \quad (27)$$

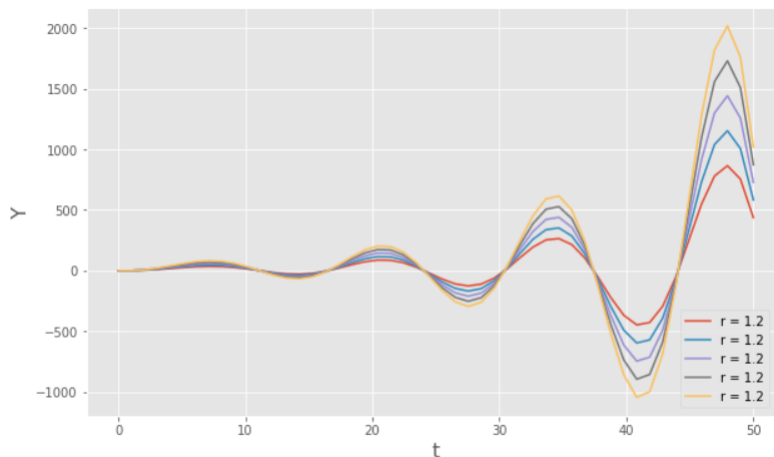
$\Rightarrow \hat{Y} = \frac{A}{1-c}$. Величина $\frac{1}{1-c}$ называется мультипликатором автономных расходов.

Рассмотрим уровень дохода при изменении коэффициента акселерации:

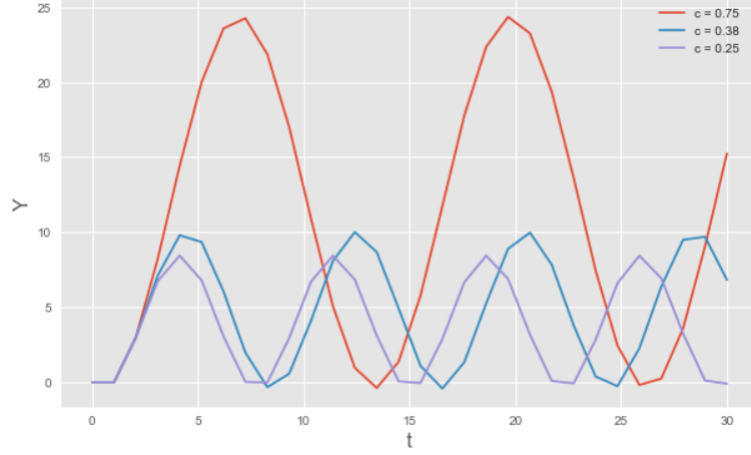
1. Если $0 < r < 1$, то равновесие восстановится через некоторое время при новом уровне дохода.



2. Если $r > 1$, то при нарушении равновесия единожды, оно больше не восстановится.



3. Если $r = 1$, то значение дохода будет колебаться с постоянным периодом.



3.7.2 Непрерывная форма

Перейдя от конечных разностей получим следующее уравнение.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(1-r) \frac{\partial y}{\partial t} - (1-c)y + A \quad (28)$$

Понизим порядок уравнения, приведя его к НСДУ.

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = x \\ \frac{\partial x}{\partial t} = -(1-r)x - (1-c)y + A \end{cases} \quad (29)$$

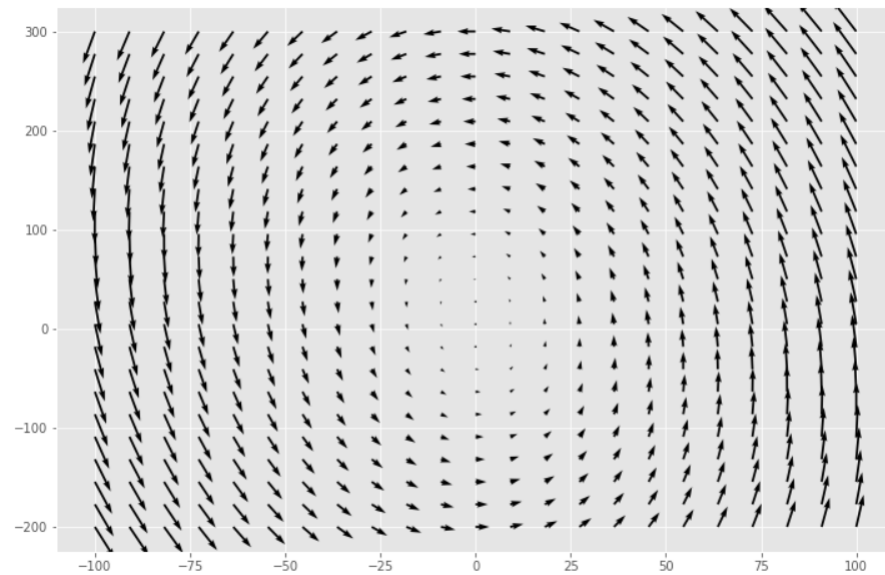
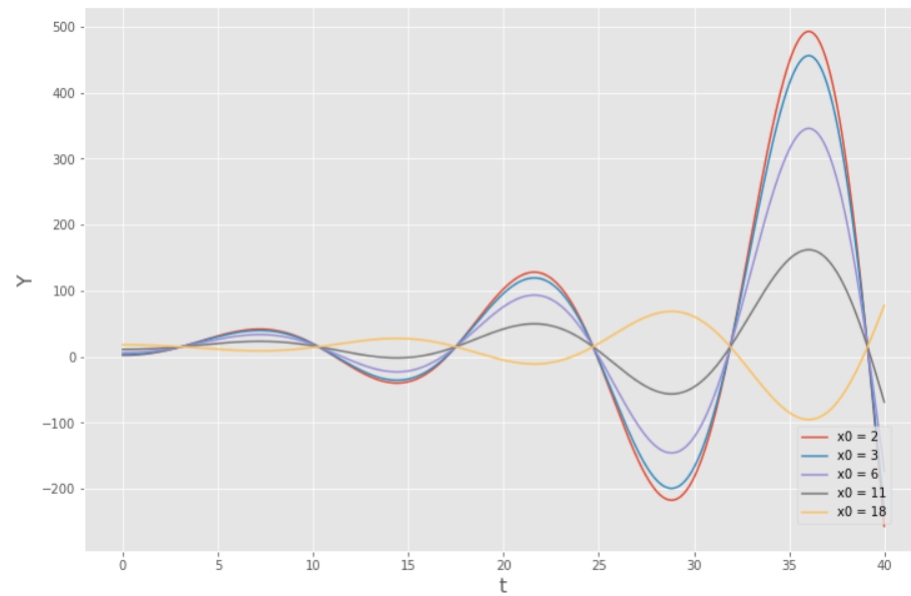
Отсюда легко получить стационарную точку приравняв правые части к 0. Получим $x = 0, y = \frac{A}{1-c}$. Определим состояния равновесия в стационарной точке при помощи корней характеристического уравнения. Составим матрицу Якоби.

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} - & -(1-c) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

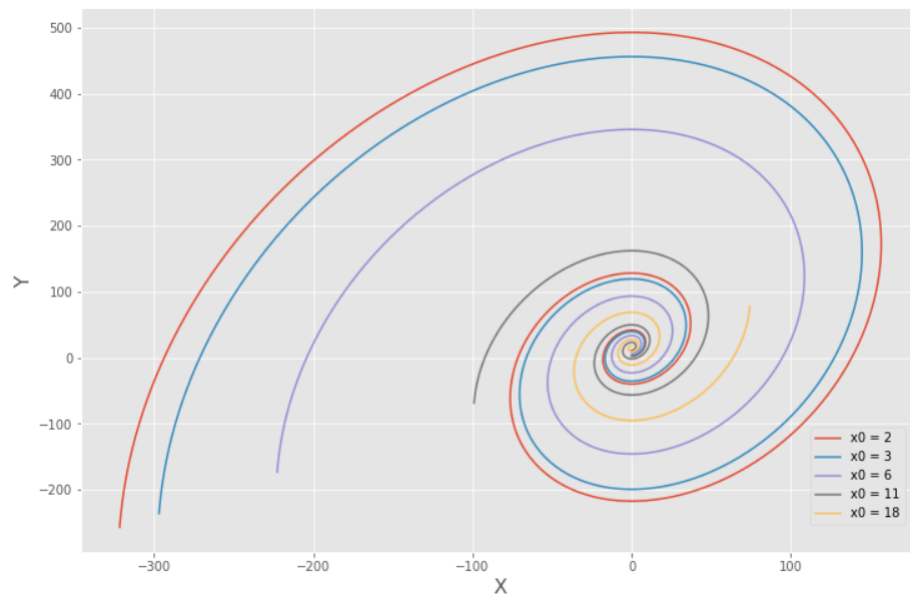
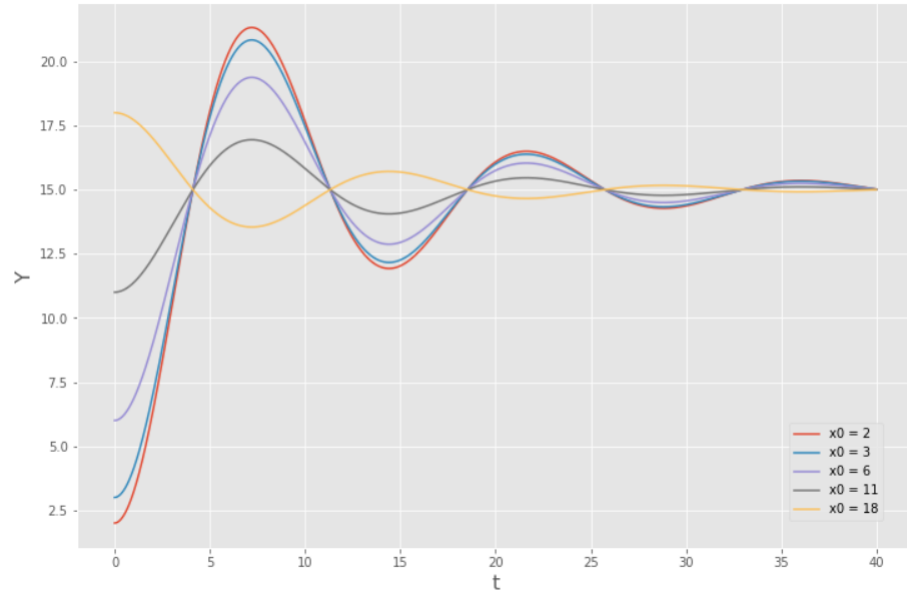
Найдем собственные значения при следующих параметрах:

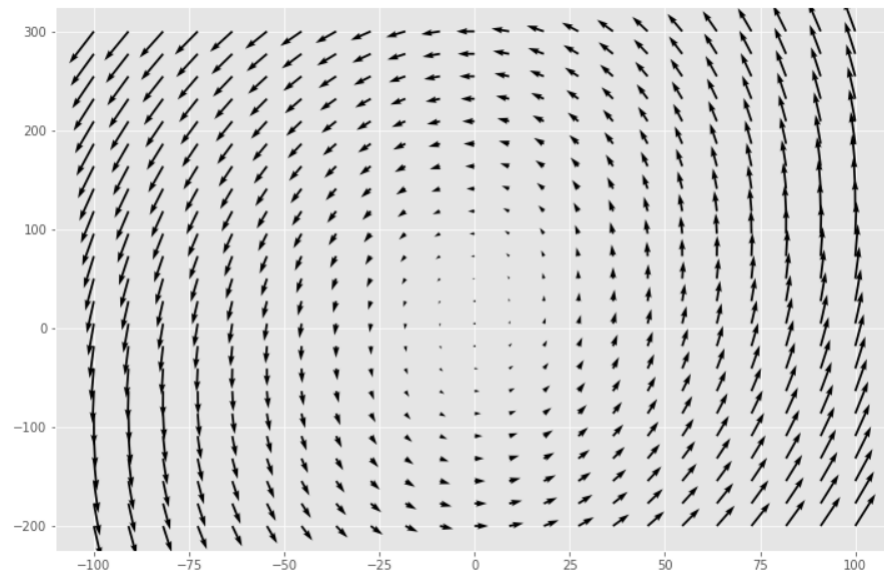
1. $r = 1.2; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0.1 \pm 0.435i$.

Т.е. при $r > 1$ получаем неустойчивый фокус.



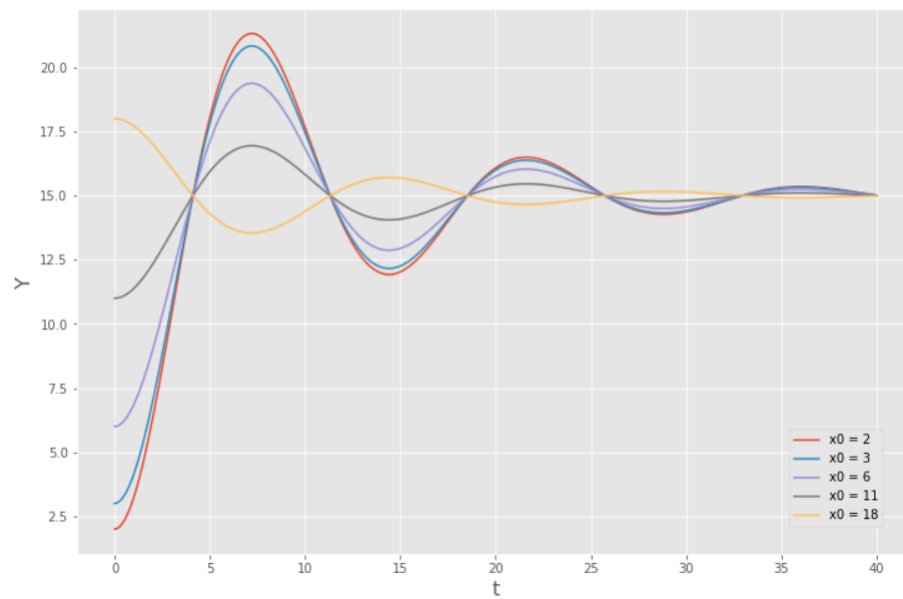
2. $r = 0.8; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -0.1 \pm 0.435i$.
 При $0 < r < 1$ получаем устойчивый фокус.

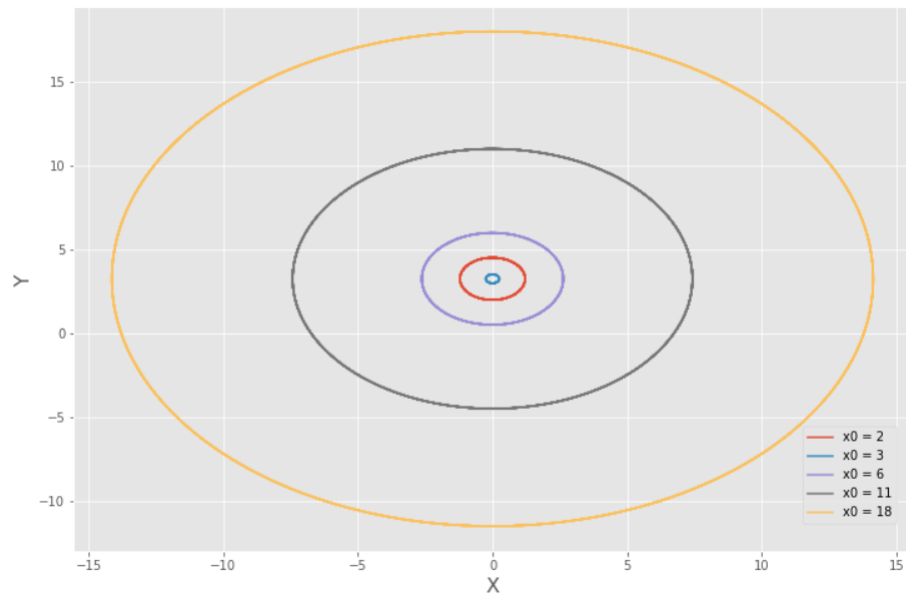




3. $r = 1; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 0.447i$.

И наконец при $r = 1$ получаем центр.





4 Модели в частных производных

4.1 Модель распространения тепла в тонком стержне

Предположения по модели:

- теплоизолированная боковая поверхность;
- однородный тонкий стержень;
- в любой точке поперечного сечения температура в момент времени t одинакова;
- начальное распределение температуры известно.

Пусть $u(x, t)$ - температура в поперечном сечении с координатой x в момент времени t ;

ρ - плотность материала, из которого изготовлен стержень;

C - удельная теплоемкость;

λ - коэффициент теплопроводности;

S - площадь поперечного сечения стержня.

Рассмотрим малый участок стержня $[x, x + \Delta x]$, а Δu - изменение температуры на этом

участке.

$$\begin{aligned}
 \Delta Q &= C \cdot m \cdot \Delta u \\
 \Delta Q &= CS\Delta x\rho\Delta u \\
 \Delta Q &= Q_L - Q_R \\
 \Delta Q &= -\lambda S \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Delta t + \lambda S \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} \Delta t \\
 CS\Delta x\rho\Delta u &= \lambda S \Delta t \left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \\
 \frac{\Delta u}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{C\rho} \cdot \frac{\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\Delta x}
 \end{aligned} \tag{31}$$

При $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0, a = \sqrt{\frac{\lambda}{C\rho}}$ получаем уравнение теплопроводности.

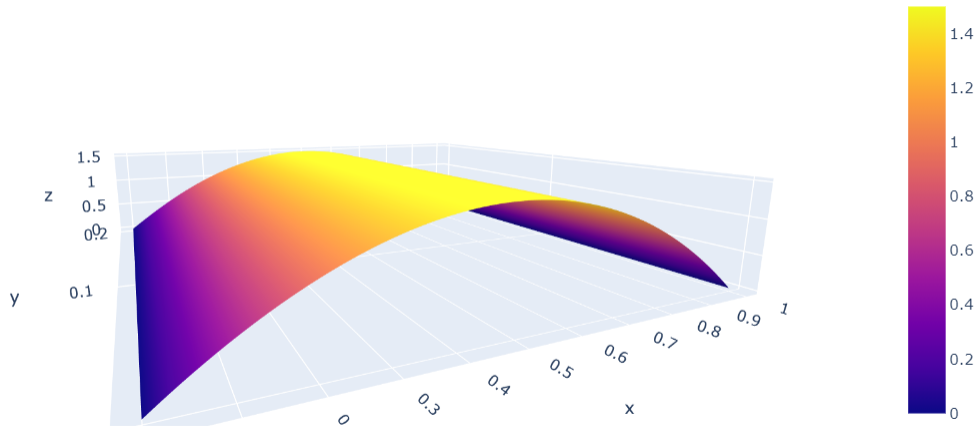
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{32}$$

Начальное условие: $u(x, 0) = f(x)$

Граничные условия: $u(0, 0) = u_0, u(0, t) = u_0, u(L, 0) = u_L, u(L, t) = u_L$ Рассмотрим в качестве начальной функции распределения температуры треугольное распределение.

$$f_t(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & \text{if } x \in [a, c] \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & \text{if } x \in [c, b] \\ 0, & \text{if } x \notin [a, b] \end{cases} \tag{33}$$

Для решения уравнения теплопроводности воспользуемся методом сеток.



4.2 Колебание пластины

Рассмотрим изотропную (одинаковые физические свойства во всех направлениях) однородную пластину. Пусть w - поперечное смещение средней поверхности пластины. Общее уравнение для w имеет следующий вид.

$$D\nabla^2\nabla^2w = -q(x, t) - 2\rho h\frac{\partial^2w}{\partial t^2} \quad (34)$$

где $2h$ - ширина пластины, $q(x, t)$ - внешняя сила, D - жесткость пластины при изгибе, ρ - плотность пластины. Формула для бигармонического оператора имеет следующий вид.

$$\nabla^2\nabla^2w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left\{ \frac{\partial^2w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2w}{\partial y^2} \right\} \quad (35)$$

Для свободно вибрирующей пластины $w = w(r, t)$ перейдем в цилиндрические координаты. Оператор Лапласа в них выглядит следующим образом.

$$\nabla^2w \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial w}{\partial r} \right\} \quad (36)$$

Тогда исходное уравнение примет следующий вид.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial w}{\partial r} \right\} \right\} \right] \quad (37)$$

После применения оператора Лапласа получим следующее выражение.

$$\frac{\partial^4w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2w}{\partial r^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{2h\rho}{D} \frac{\partial^2w}{\partial t^2} \quad (38)$$

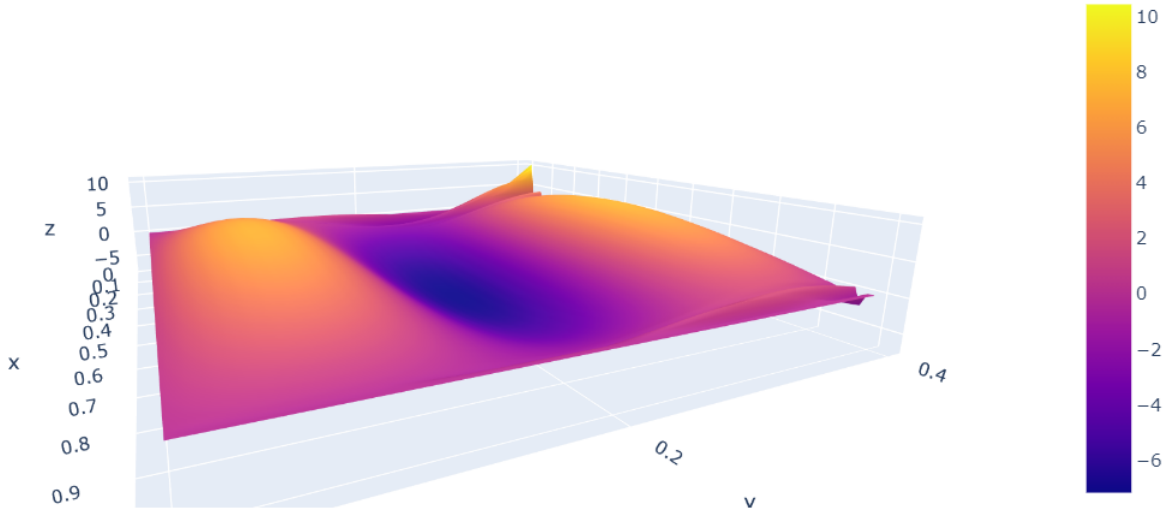
Перепишем производные в конечных разностях.

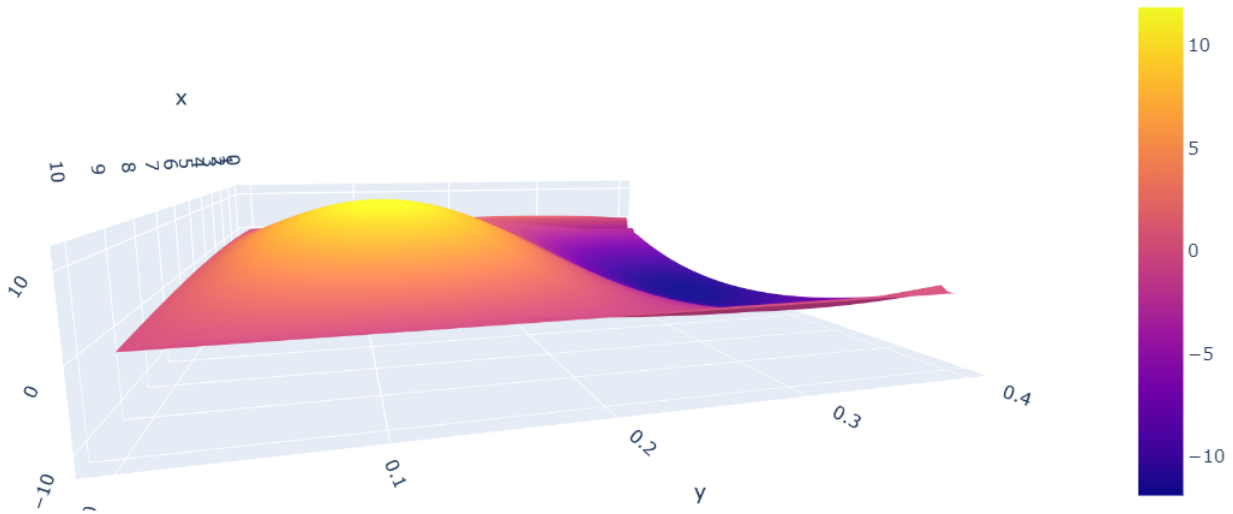
$$\begin{aligned} \frac{\partial^3x}{\partial t^3} &= \frac{\frac{x(t+2\Delta t) - x(t+\Delta t)}{\Delta t} - \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}}{\Delta t} - \\ &\quad \frac{\frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t} - \frac{x(t-\Delta t) - x(t-2\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t} = \\ &= \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)) + 2x(t-\Delta t) - 2x(t-2\Delta t) + x(t-2\Delta t)}{\Delta t^3} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial w(r, t)}{\partial x} \right|_{(x, t) = (x_i, t_j)} &= \frac{w_{i+1, j} - w_{i, j}}{h} \\
\left. \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial x^2} \right|_{(x, t) = (x_i, t_j)} &= \frac{w_{i+1, j} - 2w_{i, j} + w_{i-1, j}}{h^2} \\
\left. \frac{\partial^3 w(r, t)}{\partial x^3} \right|_{(x, t) = (x_i, t_j)} &= \frac{w_{i+2, j} - 2w_{i+1, j} + 2w_{i-1, j} + w_{i-2, j}}{h^3} \\
\left. \frac{\partial^4 w(r, t)}{\partial x^4} \right|_{(x, t) = (x_i, t_j)} &= \frac{w_{i+2, j} - 4w_{i+1, j} + 6w_{i, j} - 4w_{i-1, j} + w_{i-2, j}}{h^4} \\
\left. \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2} \right|_{(x, t) = (x_i, t_j)} &= \frac{w_{i, j+1} - 2w_{i, j} + w_{i, j-1}}{k^2}
\end{aligned} \tag{40}$$

Пусть $\alpha = -\frac{2\rho h}{D}$. Обозначим левую часть за L и выразим $w(r, t + \Delta t)$.

$$w(r, t + \Delta t) = \frac{k^2 L}{\alpha} + 2w(r, t) - w(r, t - \Delta t) \tag{41}$$





5 Бифуркации динамических систем

Определение 5.1. Бифуркация - качественное изменение фазового портрета при изменении параметров системы.

Теорема 5.1. Бифуркация Хопфа

Пусть есть система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(x_1, \dots, x_n, \mu) & X_1(0, \dots, 0, \mu) = 0 \\ \dot{x}_2 = X_2(x_1, \dots, x_n, \mu) & X_2(0, \dots, 0, \mu) = 0 \end{cases} \quad (42)$$

$\lambda_1(\mu_0), \lambda_2(\mu_0)$ - чисто мнимые корни. Точка $(0, 0)$ - асимптотически устойчива при μ_0 и $\frac{\partial}{\partial \mu} \{Re(\lambda_i(\mu))|_{\mu=\mu_0}\} > 0$.

Тогда

1. μ_0 - точка бифуркации
2. \exists интервал $\mu \in (\mu_1, \mu_0)$ такой, что $(0; 0)$ - устойчивый фокус
3. \exists интервал $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$ такой, что $(0; 0)$ - неустойчивый фокус, окруженный предельным циклом

5.1 Аттрактор Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad a, r, b > 0 \quad (43)$$

r - управляющий переменный параметр

$(0 < r < 1)$ - одна критическая точка

$r \rightarrow 1$ - критическое замедление

$r = 1.345$ - узлы переходят в фокусы

$r > 24$ - хаос

5.2 Маятник Фуко

Пусть L - длина нити маятника

ω - угловая скорость

g - ускорение свободного падения

x, y - координаты

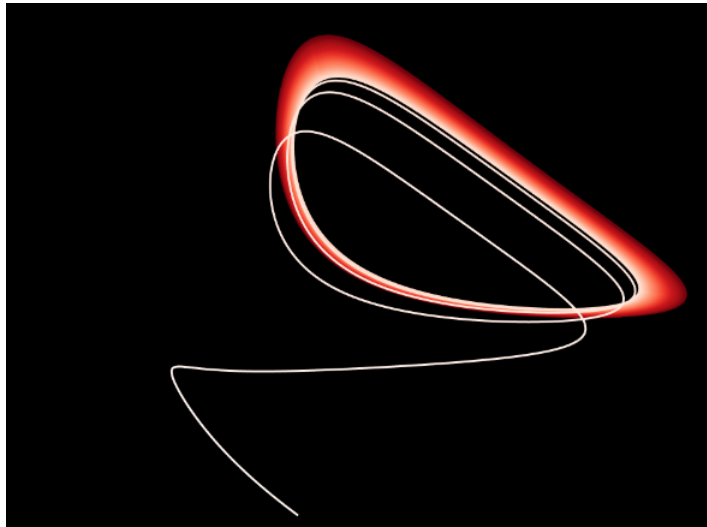
v_x, v_y - скорости

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= 2v_y\omega + \omega^2x - g\frac{x}{L} \\ \frac{dv_y}{dt} &= -2v_x\omega + \omega^2y - g\frac{y}{L} \\ \frac{dx}{dt} &= v_x \\ \frac{dy}{dt} &= v_y\end{aligned}\tag{44}$$

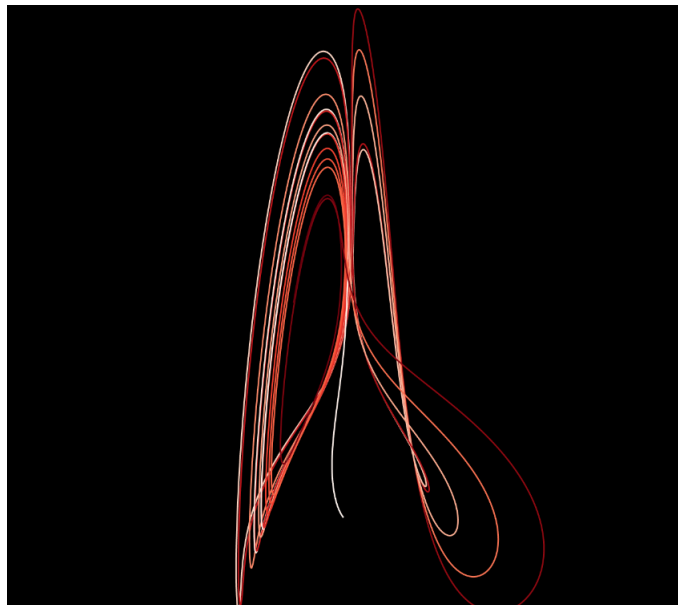
5.3 Аттрактор Рикитаки

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\mu x + yz \\ \frac{dy}{dt} &= (z - a)x - \mu y \\ \frac{dz}{dt} &= 1 - xy\end{aligned}\tag{45}$$

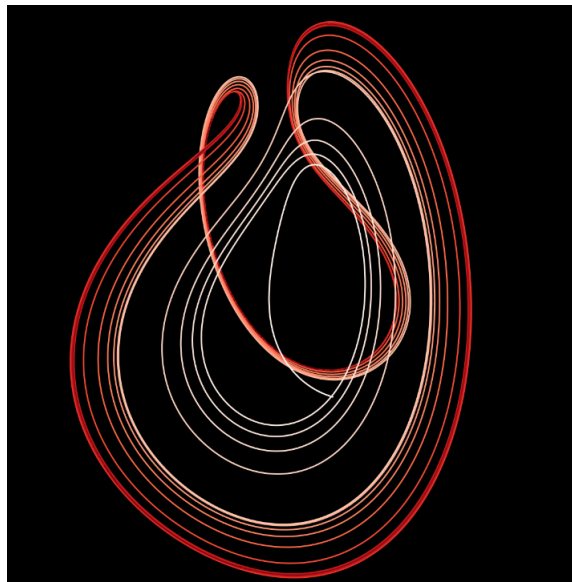
На рисунках ниже представлен численный анализ модели при различных параметрах μ и a . При параметрах $\mu = 0.2, a = 0.5$ получаем спиральный устойчивый фокус сходящийся в направлении плоскости XY



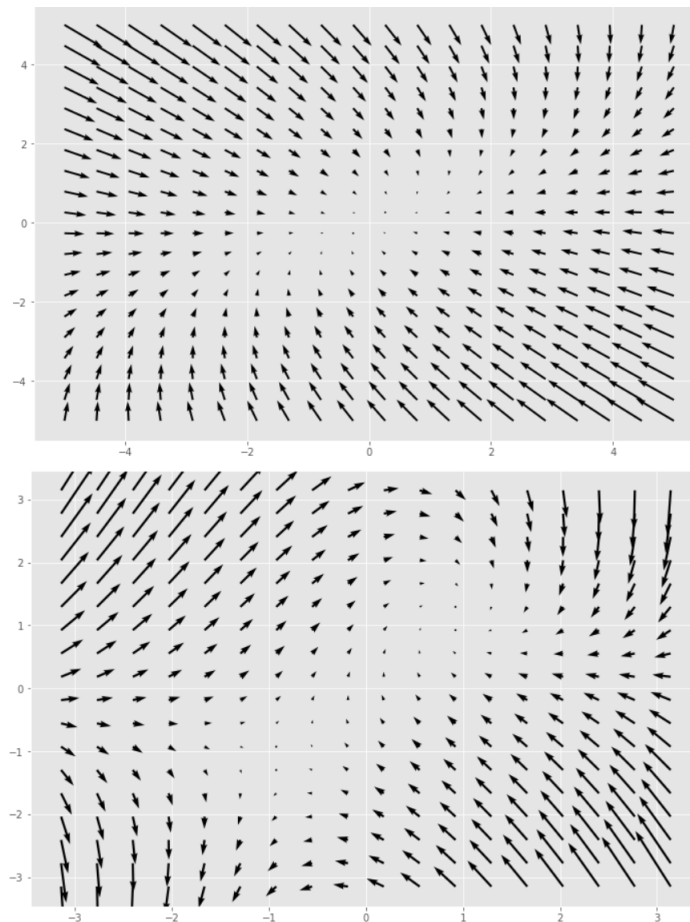
При параметрах $\mu \geq 1, a = 0.9$ получаем седло.



При параметрах $\mu = 0.498, a = 0.1$ получаем график, где видно и седло и спиральный фокус.



Далее представлены графики векторного поля по осям. На первом рисунке виден спиральный устойчивый фокус в плоскости XY , а на второй в плоскости XZ видно седло и устойчивый фокус одновременно.



6 Оптимизационные модели