Методы оптимизации. Теоремы.

Кирилл Захаров

2021 г.

Содержание

1 Линейное программирование

1.1 Базисное решение, допустимое множество, оптимальное решение

Теорема 1.1. *Множество допустимых решений есть выпуклое множество.*

Лемма 1.1. *Базисные решения являются вершинами выпуклой многогранной области.*

Теорема 1.2. *Оптимальное решение является базисным решением. (Оптимальное решение лежит в углах выпуклой многогранной области).*

1.2 Двойственная задача

Теорема 1.3 (Основное неравенство двойственности)**.** *Пусть заданы прямая задача* $D : X\ f(X)$ *и двойственная* $\Omega : \Lambda\ \varphi(\Lambda)$. *Тогда для любых допустимых планов прямой и двойственной задачи их целевые функции связаны неравенствами.*

$$\begin{aligned} f(X) \to \min \Rightarrow f(X) \geqslant \varphi(\Lambda) \\ f(X) \to \max \Rightarrow f(X) \leqslant \varphi(\Lambda) \end{aligned} \tag{1}$$

Теорема 1.4 (Критерий оптимальности Канторович)**.** *Если на допустимых планах прямой* X *и двойственной задачи* Λ *значения их целевых функций совпадают, то планы* X *и* Λ *являются оптимальными и наоборот.*

Теорема 1.5.

Теорема 1.6. *Если прямая задача имеет оптимальное решение, то и двойственная имеет оптимальное решение.*

Теорема 1.7. *Если прямая задача не имеет решения из-за неограниченности целевой функции, то система ограничений двойственной задачи противоречива.*

Теорема 1.8 (О дополняющей нежесткости)**.** *Необходимым и достаточным условием того, что прямая и двойственная задачи имеют оптимальное решение, является выполнение условий дополняющей нежесткости.*

$$\lambda_j\left(\sum_{i=1}^{N} a_{ji}x_i - b_j\right) = 0 \tag{2}$$
$$x_i\left(\sum_{j=1}^{M} a_{ji}\lambda_i - c_i\right) = 0$$

2 Общая постановка задачи оптимизации

2.1 Задача безусловной оптимизации

$x \in O \subseteq \mathbb{R}^N$

Определение 2.1. $Y = (y_1, ..., y_N)$ - точка локального минимума или максимума, если $\exists\ \varepsilon > 0$, такое что выполняется

$$f(Y) \leqslant f(Y + \delta X) \text{ или } f(Y) \geqslant f(Y + \delta X) \tag{3}$$

для всех $\delta X = (\delta x_1, ..., \delta x_N)\ \big|0 < |\delta x_i| < \varepsilon$.

Определение 2.2. Y - точка строгого экстремума, если неравенства выполняются строго.

Определение 2.3. Y называется точкой глобального экстремума, если неравенства (3) выполняются во всей области.

$\min f(x) = \max -f(X)$

Определение 2.4. Функция, имеющая единственный экстремум называется унимодальной.

Лемма 2.1. *Если область допустимых значений, определяемая системой ограничений равенств, содержит точку Y и ее окрестность, то $M < N$.*

$$Y \subseteq D \wedge U_\varepsilon(Y) \subseteq D \Rightarrow M < N \tag{4}$$

Лемма 2.2. *Пусть область допустимых значений, определяемая системой ограничений равенств задачи на условный экстремум, содержит хотя бы одну точку Y. Если набор градиентов $grad\,\psi_j$ линейно независим и $rank\,J = M < N$, то D вместе с каждой точкой X содержит некоторую непустую ее окрестность.*

Теорема 2.1. *Пусть задана функция $f(x)$ и $x \in O = \mathbb{R}^1$. Если в точке Y функция $f(x)$ имеет локальный экстремум, то $\dfrac{\partial f(Y)}{\partial x} = 0$.*

Теорема 2.2 (Необходимое условие экстремума 1-го порядка)**.** *Пусть задана функция $f(X)$ и $X \in O = \mathbb{R}^N$. Пусть Y точка локального экстремума. Тогда $grad\,f(Y) = 0$.*

Теорема 2.3 (Критерий Сильвестра)**.**

1. *Матрица A является положительно определенной $\iff$ когда все ее угловые миноры больше 0;*
2. *Матрица A является отрицательно определенной $\iff$ когда все ее угловые миноры образуют знакочередующийся ряд, начиная со знака «$-$»;*
3. *Матрица A является положительно полуопределенной $\iff$ A вырождена и все ее главные миноры $m_i(A) \geqslant 0$;*
4. *Матрица A является отрицательно полуопределенной $\iff$ $m_i(A) = 0$ или $sign\,m_i(A) = sign\,(-1)^i$.*

Теорема 2.4 (Необходимое условие экстремума 2-го порядка)**.** *Пусть задана функция $f(X)$ $X \in \mathbb{R}^N$. Пусть $f(X)$ дважды дифференцируема в окрестности точки Y. Тогда если Y - точка локального минимума (максимума), то $H_f(Y)$ положительно полуопределенная (отрицательно полуопределенная).*

Теорема 2.5 (Достаточное условие экстремума 2-го порядка)**.** *Пусть задана функция $f(X)$ $X \in \mathbb{R}^N$. Пуста $f(X)$ имеет стационарную точку, в которой вторые частные производные существуют и непрерывны. Если $H_f(Y)$ положительно определена (отрицательно определена), то Y точка минимума (максимума).*

Теорема 2.6.

1. *Пусть $f(X)$ дифференцируема в точке $Y \in \mathbb{R}^N$.*
   Тогда если $\delta X \in \mathbb{R}^N \,\big|\, grad\,f(Y) \cdot \delta X < (>) 0 \Rightarrow \delta X \in W_-(Y, f)(W_+(Y, f))$;
2. *Если $\delta X \in W_-(Y, f)(W_+(Y, f))$. Тогда $grad\,f(Y) \cdot \delta X \leqslant (\geqslant) 0$.*

2.2 Задача условной оптимизации

Теорема 2.7 (Связь между $W_{+/-}(Y, f)$ и $V(Y, f)$)**.** *Если точка Y точка локального минимума (максимума), то $W_-(Y, f) \cap V(Y, f) = \varnothing$ $(W_+(Y, f) \cap V(Y, f) = \varnothing)$.*

Теорема 2.8 (Вейерштрасс)**.** *Пусть D - компакт и $f(X)$ непрерывная функция определенная на D.*
Тогда существует точка Y глобального минимума (максимума).