

Нелинейная оптимизация

Task 12.6

Условие

Дана функция двух переменных $f(x_1, x_2)$.

- Найти стационарную точку и вычислить в ней значение функции;
- Определить экстремум, если он есть;
- Проверить функцию на выпуклость/вогнутость.

$$f = 18x_1 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 + 16x_1 - 16x_2 + 2 \quad (1)$$

Решение:

- а) Найдем стационарную точку

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 36x_1 - 4x_2 + 16 = 0 \\ -4x_1 + 12x_2 - 16 = 0 \end{cases} ; \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_2 = 9x_1 + 4 \\ -4x_1 + 12(9x_1 + 4) - 16 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = \frac{16}{13} \\ x_1 = -\frac{4}{13} \end{cases}$$

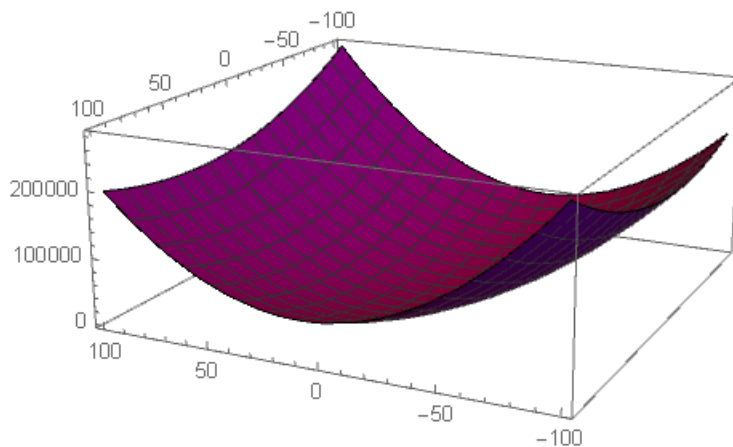
$$\Rightarrow f(x_1, x_2) = 18 \frac{16}{169} + 4 \frac{4}{13} \frac{16}{13} + 6 \frac{16^2}{169} - 16 \frac{4}{13} - 16 \frac{16}{13} + 2 = -\frac{134}{13}$$

- б) Составим матрицу Гессе

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 36 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$M_1(H) = 36, M_2(H) = 416 \Rightarrow$ Матрица Гессе положительно определенная, т.к. все угловые миноры положительны. Значит стационарная точка $(-\frac{4}{13}; \frac{16}{13})$ является точкой минимума.

- с) Из тех же соображений функция является выпуклой вниз.



Task 13.6

Условие

Дана функция трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$.

- Найти стационарную точку и вычислить в ней значение функции;
- Определить экстремум, если он есть;
- Проверить функцию на выпуклость/вогнутость.

$$f = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_1 - 3x_2 + 1 \quad (4)$$

Решение:

- а) Найдем стационарную точку

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2 = 0 \\ 6x_2 + 4x_1 - 4x_3 - 3 = 0 \\ 4x_3 - 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} ; \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x_3 - 16x_2 + 4x_2 - 2x_3 + 2 = 0 \\ 6x_2 + 8x_3 - 8x_2 - 4x_3 - 3 = 0 \\ x_1 = 2x_3 - 2x_2 \end{cases} ; \begin{cases} 14x_3 - 12(2x_3 - \frac{3}{2}) + 2 = 0 \\ x_2 = 2x_3 - \frac{3}{2} \\ x_1 = 2x_3 - 2x_2 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = \frac{5}{2} \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = -\frac{15}{4}$$

- б) Составим матрицу Гессе

$$H_f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$M_1(H) = 8, M_2(H) = 32, M_3(H) = 40 \Rightarrow$ Матрица Гессе положительно определенная, т.к. все угловые миноры положительны. Значит стационарная точка $(-1; \frac{5}{2}; 2)$ является точкой минимума.

- с) Из тех же соображений функция является выпуклой вниз.