Task 2.6

Условие:

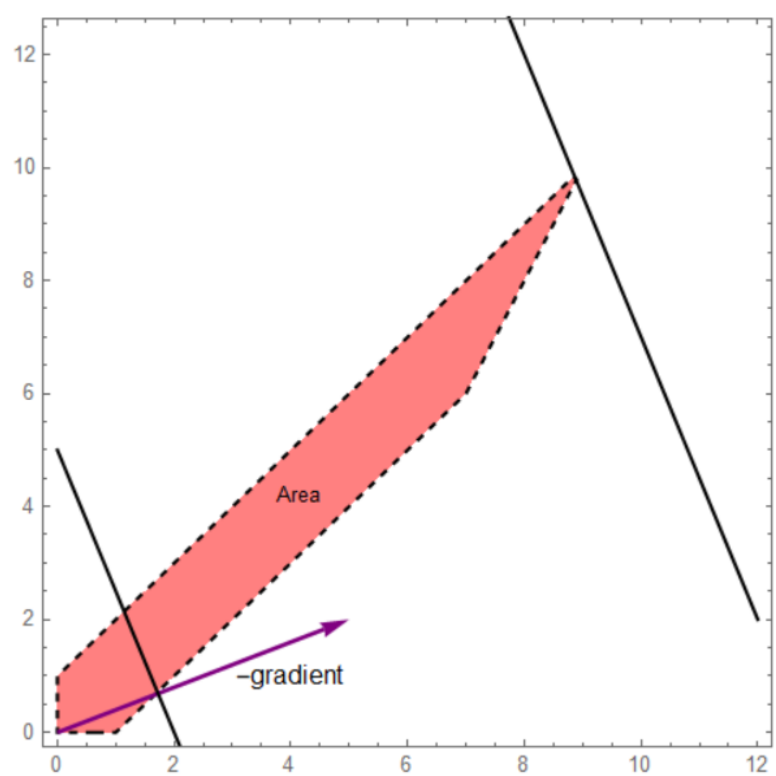
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leqslant 8 \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 1 \\ -x_1 + x_2 &\geqslant -1 \\ f = -5x_1 - 2x_2 &\to \min \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим равенства и построим границы.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 8 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned} \tag{2}$$

Чтобы найти минимальное значение функции, необходимо двигаться вдоль антиградиента.
$grad\, f = \{\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}\} = \{-5, -2\}$
$\Rightarrow \overline{grad}\, f = -grad\, f = \{5, 2\}$

Далее нарисуем границы выпуклой многогранной области, зададим линию уровня $f(x_1, x_2) = C$ и будем двигаться по направлению антиградиента, пока не окажемся в вершине области.



Таким образом минимальное решение есть точка пересечения двух ограничений $-x_1 + x_2 = 1$ и $2x_1 - x_2 = 8$. Решая систему получим

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 8 \end{cases} \tag{3}$$

$x_1 = 9; x_2 = 10 \Rightarrow f = -65$

Task 3.6

Каноническая форма: $2x_1 - x_2 + y_1 = 8$ $-x_1 + x_2 + y_2 = 1$ $x_1 - x_2 + y_3 = 1$ $f = -5x_1 - 2x_2 \to \min$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -5 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \min$
Стандартная форма: $-2x_1 + x_2 \geqslant -8$ $x_1 - x_2 \geqslant -1$ $-x_1 + x_2 \geqslant -1$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$N = 5; M = 3 \Rightarrow 3$ базисных переменных;2 свободные переменные.
В качестве базисных выберем y_1, y_2, y_3

$$\begin{aligned} y_1 &= -2x_1 + x_2 + 8 \\ y_2 &= x_1 - x_2 + 1 \\ y_3 &= -x_1 + x_2 + 1 \\ f &= -5x_1 - 2x_2 \end{aligned} \tag{4}$$

1) $x_1 = x_2 = 0;\ f = 0;\ y_1 = 8;\ y_2 = 1;\ y_3 = 1$
Наибольшее убывание функции f просиходит по переменной $x_1 \Rightarrow x_1 \to \infty$

$$\begin{cases} y_1 = -2x_1 + 8 = 0 \\ y_2 = x_1 + 1 = 0 \\ y_3 = -x_1 + 1 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_1 = -1 \\ x_1 = 1 \end{cases} \tag{5}$$

Выбираем наименьшее значение переменной x_1, ей соответсвует базисная переменная y_3. Меняем их местами $x_1 \to y_3; y_3 \to x_1$. Теперь x_1 - базисная переменная, а

y_3 - свободная переменная.
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &x_1 = 1 - y_3 + x_2 \\ &y_1 = -2(1 - y_3 + x_2) + 8 + x_2 = 6 + 2y_3 - x_2 \\ &y_2 = (1 - y_3 + x_2) + 1 + x_2 = 2 - y_3 \\ &f = -5(1 - y_3 + x_2) = -5 + 5y_3 - 7x_2 \end{aligned} \tag{6}$$

2) $y_3 = x_2 = 0$; $f = -5$; $x_1 = 1$; $y_1 = 6$; $y_2 = 2$
Функция f убывает за счет переменной $x_2 \Rightarrow x_2 \to \infty$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 = 0 \\ y_1 = 6 - x_2 = 0 \\ y_2 = 2 - y_3 \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = -1 \\ x_2 = 6 \end{cases} \tag{7}$$

$x_2 \to y_1; y_1 \to x_2$

$$\begin{aligned} &x_2 = 6 + 2y_3 - y_1 \\ &x_1 = 1 - y_3 + (6 + 2y_3 - y_1) = 7 + y_3 - y_1 \\ &y_2 = 2 - y_3 \\ &f = -5 + 5y_3 - 7(6 + 2y_3 - y_1) = -47 - 9y_3 + 7y_1 \end{aligned} \tag{8}$$

3) $y_1 = y_3 = 0$; $f = -47$; $x_1 = 7$; $x_2 = 6$; $y_2 = 2$
Теперь функция f убывает по переменной $y_3 \Rightarrow y_3 \to \infty$

$$\begin{cases} x_2 = 6 + 2y_3 = 0 \\ x_1 = 7 + y_3 = 0 \\ y_2 = 2 - y_3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} y_3 = -3 \\ y_3 = -7 \\ y_3 = 2 \end{cases} \tag{9}$$

$\Rightarrow y_3 \to y_2; y_2 \to y_3$

$$\begin{aligned} &y_3 = 2 - y_2 \\ &x_2 = 6 + 2(2 - y_2) - y_1 = 10 - 2y_2 - y_1 \\ &x_1 = 7 + (2 - y_2) - y_1 = 9 - y_2 - y_1 \\ &f = -47 - 9(2 - y_2) + 7y_1 = -65 + 9y_2 + 7y_1 \end{aligned} \tag{10}$$

4) $y_1 = y_2 = 0$; $f = -65$; $x_1 = 9$; $x_2 = 10$; $y_3 = 2$