# Математическое моделирование

Лектор: Лебедева Л.Н.
Студент: Захаров К.А.

2020 г.

Все реализации моделей на моем github: *https://github.com/kirillzx/Math-projects*

## Содержание

# 1 Введение

**Модель** - образ или прообраз какого-либо объекта или системы объектов, используемый в качестве их "заместителя".
**Математическая модель** - описание объекта исследования на языке математики.
Требования к модели:

- адекватность
- конечность
- полнота(информированность)
- упрощенность
- гибкость
- приемлемая трудоемкость разработки

Этапы построения модели:

1. определение цели;
2. изучение предметной области, выявление причинно-следственных связей;
3. переход от концептуальной модели к формализованному описанию;
4. проверка адекватности моделирование;
5. корректировка модели;
6. применение модели. Проведение исследования и практическое использование.

Классификация моделей:

- линейные или нелинейные;
- сосредоточенные и распределенные системы;
- детерминированные или стохастические;
- статические или динамические;
- дискретные или непрерывные.

# 2 Статические модели

## 2.1 Производственная функция Кобба-Дугласа

**Определение 2.1.** Производственная функция - функция выражающая зависимость между затратами ресурсов и объемом выпуска.

Пусть $\overline{X}$ - вектор используемых ресурсов, $\overline{Y}$ - объем выпуска продукции каждого вида.

**Property 1.** *О производственной функции*

1. *$F(x_1, ..., x_n)$ является достаточно гладкой, т.е. $F \in C^2$*
2. *$F(x_1, ..., x_n)$ - возрастающая по каждому аргументу $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} > 0 \forall\ i$*
3. *выпуск по каждому аргументу не ограничен*
4. *предельная производительность убывает $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} > 0 \forall\ i$*

**Определение 2.2.** Однородная функция
$F(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda F(x_1, ..., x_n)$

Пусть $Y$ - это ВВП, $K$ - основные производственные фонды, $L$ – число занятых. Тогда определим функцию $Y = AK^\alpha L^\beta, (A > 0, 0 < \alpha, \beta < 1)$. Для оценки параметров $A, \alpha, \beta$ воспользуемся методом наименьших квадратов $\sum_{i=1}^{n}(a + bx_i - y_i)^2 \to \min$. Также необходимо линеаризовать данные параметры при помощи натурального алгоритма. После чего получим следующую целевую функцию.

$$S(A, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{M}(\ln A + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i - \ln Y_i)^2 \to \min \tag{1}$$

Теперь нужно приравнять частные производные к нулю по каждому аргументу и решить систему линейных уравнений (3).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \ln A} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \end{cases} ; \tag{2}$$

$$\begin{cases} M \ln A + \alpha \sum_{i=1}^{M} \ln K_i + \beta \sum_{i=1}^{M} \ln L_i = \sum_{i=1}^{M} \ln Y_i \\ lnA \sum_{i=1}^{M} \ln K_i + \alpha \sum_{i=1}^{M} \ln K_i{}^2 + \beta \sum_{i=1}^{M} \ln K_i \ln L_i = \sum_{i=1}^{M} \ln Y_i \ln K_i \\ lnA \sum_{i=1}^{M} \ln L_i + \alpha \sum_{i=1}^{M} \ln K_i \ln L_i + \beta \sum_{i=1}^{M} \ln L_i{}^2 = \sum_{i=1}^{M} \ln Y_i \ln L_i \end{cases} \tag{3}$$

Для решения данной модели воспользуемся средствами Excel.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Экономика США | | | | | | | Kirill Zakharov | | | | | | | |
| 2 | Год | ВВП(млн.$) | K(млн.$) | L(тыс.чел.) | ln K | ln L | ln Y | ln K**2 | ln L**2 | ln K * ln L | ln K * ln Y | ln L * ln Y | ln Ki - ln Li | (ln Ki - ln Li)^2 | ln Yi - ln Li | (ln Yi - ln Li)*(ln Ki - ln Li) |
| 3 | 1936 | 83278 | 234236 | 73426 | 12,3641 | 11,204 | 11,3299 | 152,8705839 | 125,5303639 | 138,528 | 140,0843309 | 126,941022 | 1,160051 | 1,345718457 | 0,125906312 | 0,146057751 |
| 4 | 1937 | 90884 | 254890 | 77568 | 12,4486 | 11,2589 | 11,4173 | 154,9673272 | 126,76306 | 140,158 | 142,129745 | 128,546798 | 1,189677 | 1,415331623 | 0,158428997 | 0,188479351 |
| 5 | 1938 | 83743 | 217606 | 70460 | 12,2904 | 11,1628 | 11,3355 | 151,054949 | 124,6081139 | 137,196 | 139,3183948 | 126,536012 | 1,127641 | 1,271574034 | 0,172707412 | 0,194751944 |
| 6 | 1939 | 91530 | 221746 | 75131 | 12,3093 | 11,227 | 11,4244 | 151,5185677 | 126,0452716 | 138,196 | 140,6264999 | 128,261856 | 1,082299 | 1,171371831 | 0,197433531 | 0,213682177 |
| 7 | 1940 | 101313 | 228757 | 79694 | 12,3404 | 11,2859 | 11,526 | 152,2858568 | 127,3726579 | 139,273 | 142,23526 | 130,081516 | 1,054466 | 1,111898554 | 0,240020434 | 0,253093388 |
| 8 | 1941 | 116415 | 250238 | 89276 | 12,4302 | 11,3995 | 11,6649 | 154,5090701 | 129,9483261 | 141,698 | 144,996871 | 132,974077 | 1,03068 | 1,062300789 | 0,265428698 | 0,27357199 |
| 9 | 1942 | 127434 | 266469 | 97056 | 12,493 | 11,483 | 11,7554 | 156,0753786 | 131,860286 | 143,458 | 146,8597909 | 134,987239 | 1,00997 | 1,020038962 | 0,272310452 | 0,275025328 |
| 10 | 1943 | 136274 | 266154 | 101633 | 12,4918 | 11,5291 | 11,8224 | 156,0458259 | 132,9206902 | 144,02 | 147,6837007 | 136,302174 | 0,962707 | 0,926804389 | 0,293299279 | 0,282361211 |
| 11 | 1944 | 146470 | 269520 | 100124 | 12,5044 | 11,5142 | 11,8946 | 156,3599663 | 132,5759887 | 143,978 | 148,7345097 | 136,956106 | 0,990233 | 0,980561753 | 0,380411212 | 0,376695804 |
| 12 | 1945 | 145052 | 263098 | 94920 | 12,4803 | 11,4608 | 11,8848 | 155,7574354 | 131,3497008 | 143,034 | 148,3262477 | 136,209739 | 1,019492 | 1,039364254 | 0,424057867 | 0,432323669 |
| 13 | 1946 | 140288 | 252357 | 96671 | 12,4386 | 11,4791 | 11,8515 | 154,7187707 | 131,7690191 | 142,784 | 147,4154803 | 136,043641 | 0,959531 | 0,920700298 | 0,372383992 | 0,357314092 |
| 14 | 1947 | 142022 | 262536 | 100072 | 12,4781 | 11,5136 | 11,8637 | 155,7040651 | 132,5640259 | 143,669 | 148,0374158 | 136,594862 | 0,964498 | 0,930256949 | 0,350092048 | 0,337663181 |
| 15 | 1948 | 149895 | 285700 | 101304 | 12,5627 | 11,5259 | 11,9177 | 157,8213707 | 132,8459369 | 144,796 | 149,7183395 | 137,361883 | 1,036816 | 1,074988272 | 0,391809152 | 0,406234159 |
| 16 | 1949 | 147122 | 277522 | 96784 | 12,5337 | 11,4802 | 11,899 | 157,0925199 | 131,7958409 | 143,889 | 149,1381854 | 136,60354 | 1,053419 | 1,109690574 | 0,418780483 | 0,441151116 |
| 17 | 1950 | 163620 | 307946 | 100352 | 12,6377 | 11,5164 | 12,0053 | 159,7109488 | 132,6283738 | 145,541 | 151,7191609 | 138,258331 | 1,12124 | 1,257180119 | 0,488862661 | 0,548132584 |
| 18 | | | | Сумма | 186,803 | 171,041 | 175,592 | 2326,492636 | 1950,577656 | 2130,22 | 2187,023933 | 2002,6588 | 15,76272 | 16,63778086 | 4,55193253 | 4,726537746 |
| 19 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | Матрица коэффициентов | | | 15 | 186,803284 | 171,041 | | Вектор-столбец свободных членов | | | | 175,5924955 |
| 22 | | | | | | | | 186,803284 | 2326,492636 | 2130,22 | | | | | | 2187,023933 |
| 23 | | | | | | | | 171,0405629 | 2130,216255 | 1950,58 | | | | | | 2002,658795 |
| 24 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 25 | | | | | Обратная матрица | | | 1391,733704 | -158,907753 | 51,5052 | | Результат | | ln A | -9,65103581 | |
| 26 | | | | | | | | -158,907753 | 28,7879861 | -17,5051 | | | | α | 0,358166295 | |
| 27 | | | | | | | | 51,50523599 | -17,5050526 | 14,6013 | | | | β | 1,481820383 | |
| 28 | | | | | | | | | | | | | | A | 6,43589E-05 | |
| 29 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 30 | | | | | Для случая β = 1 - α | | | 15 | 15,76272105 | | 4,55193253 | | | | | |
| 31 | | | | | | | | 15,76272105 | 16,63778086 | | 4,726537746 | | | | | |
| 32 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 33 | | | | | | | | 15,07949701 | -14,2863947 | | | Результат | | ln A | 1,115668975 | |
| 34 | | | | | | | | -14,28639475 | 13,59510966 | | | | | α | -0,77290603 | |
| 35 | | | | | | | | | | | | | | 1 - α | 1,772906027 | |
| 36 | | | | | | | | | | | | | | A | 3,051608948 | |

Рисунок 1 - Модель Кобба-Дугласа

По данным ВВП США получено решение для коэффициентов $\alpha, \beta, A$.

## 2.2 Модель Леонтьева (Межотраслевой баланс)

Пусть $x_{ij}$ - промежуточный продукт, т.е. отрасль $i$ изготавливает продукт для отрасли $j$
$X_i$ - валовый продукт отрасли $i$
$Y_i$ - конечный продукт отрасли $i (i = \overline{1,n})$.
Тогда валовый выпуск определяется по следующей формуле.

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i \tag{4}$$

Матрица прямых затрат определяется, как $a_{ij} = x_{ij}/X_j$ . Тогда вектор валового выпуска можно определить, как $X = AX + Y \Rightarrow X = (E - A)^{-1}Y$, а конечный продукт $Y = (E - A)X$.

**Определение 2.3.** Если хотя бы для одного положительного $Y$ уравнение межотраслевого баланса имеет неотрицательное решение, то матрица $A$ продуктивна.

**Определение 2.4.** Матрица $A$ продуктивна $\iff$ $(E - A)$ имеет $n$ положительных последовательностей главных миноров.

**Определение 2.5.** Матрица $A$ продуктивна $\iff$ когда матричный ряд $E + A + A^2 + ... + A_k + ...$ сходится.

**Определение 2.6.** Матрицей полных затрат называется обратная матрица Леонтьева $B = (E - A)^{-1}$

На рисунках 2-3 представлено решение индивидуального задания по модели Леонтьева. В первом задание вычислены объемы конечно продукта при увеличение валового выпуска каждой отрасли на 10%, 50%, 20% соответственно.

**Kirill Zakharov**
**Task 1**

| | A | B | C | Final Prod. | Gross output |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 40 | 18 | 75 | 21 | 154 |
| B | 16 | 9 | 75 | 24 | 124 |
| C | 240 | 135 | 150 | 75 | 600 |

| matrix A | | |
|---|---|---|
| 0,25974 | 0,145161 | 0,125 |
| 0,103896 | 0,072581 | 0,125 |
| 1,558442 | 1,08871 | 0,25 |

| Identity Matrix | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

| E-A | | |
|---|---|---|
| 0,74026 | -0,14516 | -0,125 |
| -0,1039 | 0,927419 | -0,125 |
| -1,55844 | -1,08871 | 0,75 |

| | New X | | Volume of Y |
|---|---|---|---|
| 10% | 169,4 | | 8,4 |
| 50% | 186 | | 64,9 |
| 20% | 720 | | 73,5 |

Поскольку имеется положительный элемент Y и есть неотр. Решение для X, то A продуктивна

При увеличении валового выпуска, конечный продукт сократился для первого и третьего продукта, однако увеличился для второго

Рисунок 2 - Индивидуальное задание 1

**Kirill Zakharov**
**Task 2**

| Matrix of direct costs | | | FP |
|---|---|---|---|
| 0,3 | 0,1 | 0,2 | 270 |
| 0,1 | 0,2 | 0,3 | 115 |
| 0,2 | 0,3 | 0,1 | 35 |

xij = aij*Xj

Для начала найдем вектор валового выпуска

| Identity matrix | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

| E-A | | | Inverse E-A | | | X |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,7 | -0,1 | -0,2 | 1,623711 | 0,386598 | 0,489691 | 500 |
| -0,1 | 0,8 | -0,3 | 0,386598 | 1,520619 | 0,592784 | 300 |
| -0,2 | -0,3 | 0,9 | 0,489691 | 0,592784 | 1,417526 | 250 |

Теперь можно найти валовые выпуски отраслей xij

| | | |
|---|---|---|
| 150 | 30 | 50 |
| 50 | 60 | 75 |
| 100 | 90 | 25 |

Рисунок 3 - Индивидуальное задание 2

Во втором задании вычислены валовые выпуски отраслей по заданной матрице прямых затрат и вектору конечной продукции. На рисунках 4-5 показано решение на Python.

```python
matrix = np.array([])
yVector = np.array([])
print("Enter the values of matrix: ")
for i in range(n*n):
    matrix = np.append(matrix, float(input()))

print("Enter the final product vector: ")
for i in range(n):
    yVector = np.append(yVector, float(input()))
matrix = matrix.reshape((n, n))

def identityM(n):
    matrix = [[0 for i in range(n)] for j in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                matrix[i][j] = 1
    return matrix

invM = np.linalg.inv(identityM(n) - matrix)
print(f'Gross output vector: {np.matmul(invM, yVector)}')
```

Рисунок 4 - Модель Леонтьева

```python
import numpy as np
n = int(input("Enter the number of rows: "))

matrix = np.array([])
yVector = np.array([])
print("Enter the values of A matrix: ")
for i in range(n*n):
    matrix = np.append(matrix, float(input()))

print("Enter the final product vector: ")
for i in range(n):
    yVector = np.append(yVector, float(input()))
matrix = matrix.reshape((3,3))

def identityM(n):
    matrix = [[0 for i in range(n)] for j in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                matrix[i][j] = 1
    return matrix

invM = np.linalg.inv(identityM(n) - matrix)
grossOutput = np.matmul(invM, yVector)

xMatrix = np.array([[0 for j in range(n)] for i in range(n)])
for i in range(n):
    for j in range(n):
        xMatrix[i][j] = matrix[i][j] * grossOutput[j]


print(f'Gross output vector:\n {xMatrix}')
```

Рисунок 5 - Индивидуальное задание

# 3 Динамические модели

## 3.1 Модель Солоу

Пусть имеется замкнутая односекторная экономика.
$Y$ - ВВП
$K$ - капитал

$I$ - инвестиции
$C$ - конечное потребление
$L$ - трудовые ресурсы
Имеется баланс $Y = C + I$. Зависимость ВВП от ресурсов выражается функцией Кобба-Дугласа.

$$\begin{aligned} &Y = AK^{\alpha}L^{\beta} \\ &Y = C + I \\ &I = sY \\ &\frac{\partial L}{\partial t} = \gamma L \qquad\qquad (L(0) = L_0) \\ &\frac{\partial K}{\partial t} = -\mu K + I \qquad (K(0) = K_0) \end{aligned} \tag{5}$$

где $\gamma$ - темп прироста трудовых ресурсов, $s$ - склонность к сбережению, $A$ - научно-технический прогресс. Пусть $y = Y/L, k = K/L, i = I/L$. Тогда получим модель Солоу в относительных показателях.

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -(\lambda + \mu)k + sAk^{\alpha} \tag{6}$$

Равновесие равно $\hat{k} = (\frac{sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}$

| Интервалы | Рост |
|---|---|
| $\left(0; (\frac{\alpha sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$ | Ускоренный рост |
| $\left((\frac{\alpha sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}; (\frac{sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$ | Насыщенный рост |
| $\left((\frac{sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}; +\infty\right)$ | Падение |

**Конечно-разностное представление**: $k(t + \Delta) = k(t) + \Delta t(-(\lambda + \mu)k(t) + sAk(t)^{\alpha})$
На рисунке 6 показана реализация модели Солоу на Python. На графике представлены три решения с разными задачами Коши. Также при помощи горизонтальных прямых график разбит на интервалы, описанные раннее. Для численного решение здесь и далее используется метод численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений Рунге-Кутта порядка 4 (рис. 7).

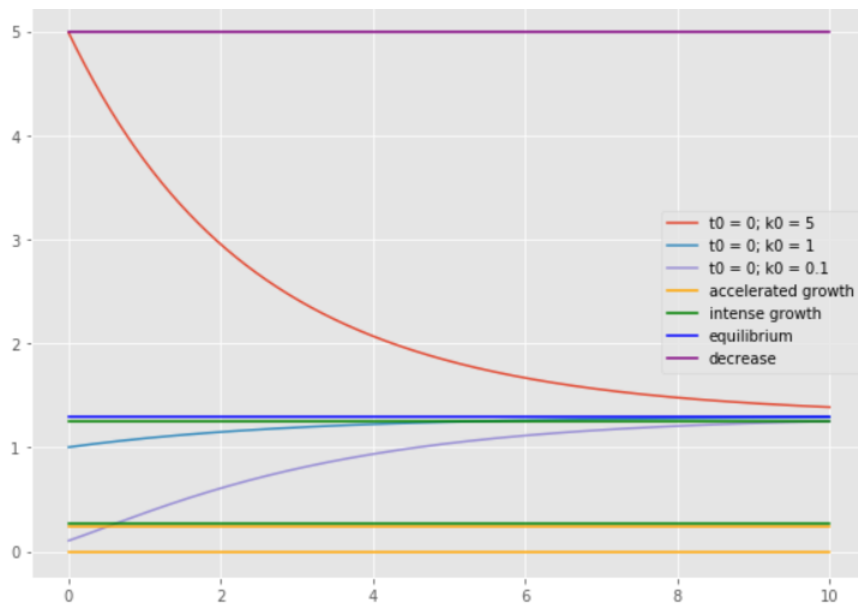



Рисунок 6 - Модель Солоу

```
def runge_Kutt(f, x0, y0, h, b):
    x = x0
    y = y0
    array = np.array([])
    arrayx = np.array([])
    while x<b:
        k1 = f(x, y)
        k2 = f(x + h/2,y + (h*k1)/2)
        k3 = f(x + h/2,y + (h*k2)/2)
        k4 = f(x + h,y + h*k3)
        y = y + h*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6
        array = np.append(array, y)
        arrayx = np.append(arrayx, x)
        x += h
    return arrayx, array
```

Рисунок 7 - Метод Рунге-Кутта

## 3.2 SIR модель

Пусть $S(t)$ - число восприимчивых к инфекции
$I(t)$ - число инфицированных
$R(t)$ - число переболевших инфекцией
$N$ - число популяции
$\beta$ - коэффициент интенсивности контактов
$\gamma$ - коэффициент интенсивности выздоровления

$$\begin{gathered}\frac{dS}{dt} = \frac{-\beta IS}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I\end{gathered} \tag{7}$$

Далее представлена реализация данной модели в среде AnyLogic. На рисунке 8 показана модель при $\beta = 3/14, \gamma = 1/14$, где знаменатель это среднее время выздоровления. По данной модели видно, что сперва идет рост инфицированных, затем он доходит до своего пика (за этот пик отвечают параметры $\beta, \gamma$). После пика начинается спад и спустя какое-то время видна стабилизация, скорость выздоровления начинается снижаться, так как после пика распространение эпидемии сокращается.

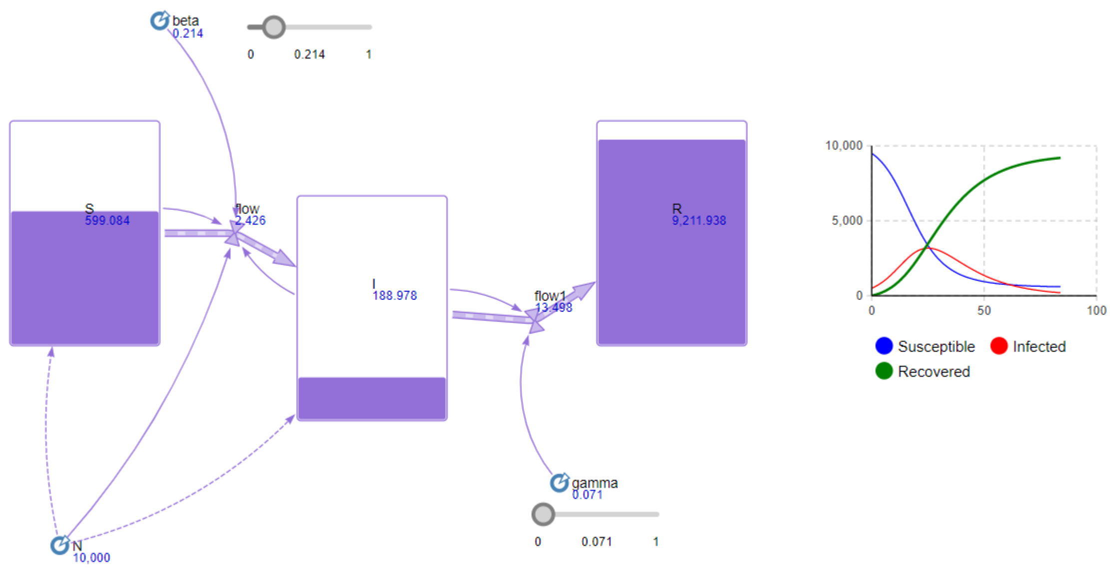



Рисунок 8 - SIR модель ($\beta = 3/14, \gamma = 1/14$)

На рисунке 9 представлена SIR модель с увеличенным параметров $\beta$. Как видно при его увеличении пик распространения эпидемии наступает намного быстрее, что соответствует если в действительности увеличить число контактов.

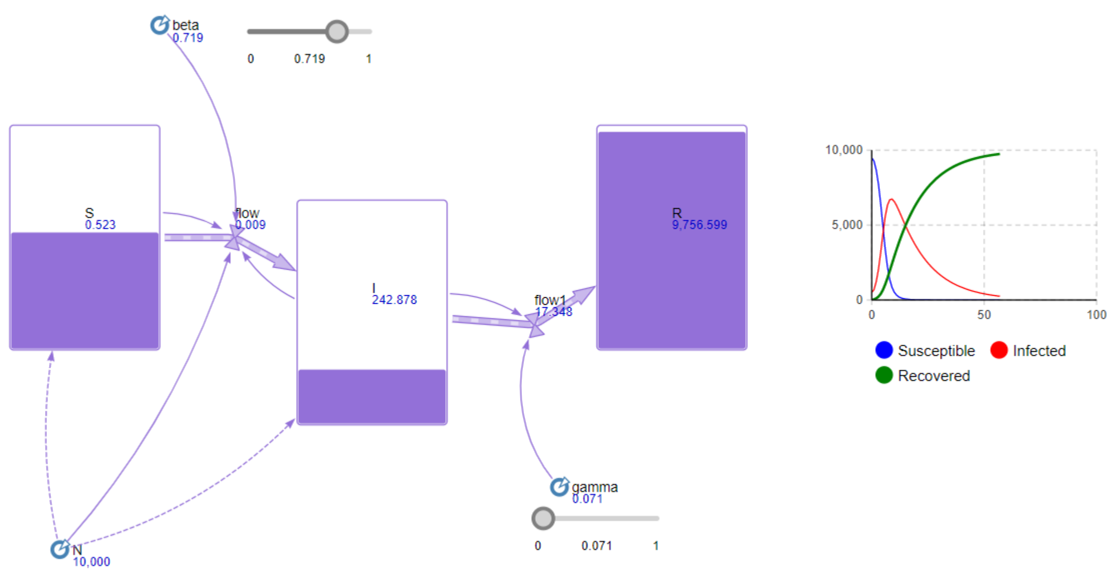



Рисунок 9 - SIR модель с увеличенным $\beta$

На рисунке 10 увеличен параметр $\gamma$ - коэффициент интенсивности выздоровления. Увеличивая его, люди слишком быстро выздоровливают и соответственно пик эпидемии наступает рано и незначителен по своей величине.

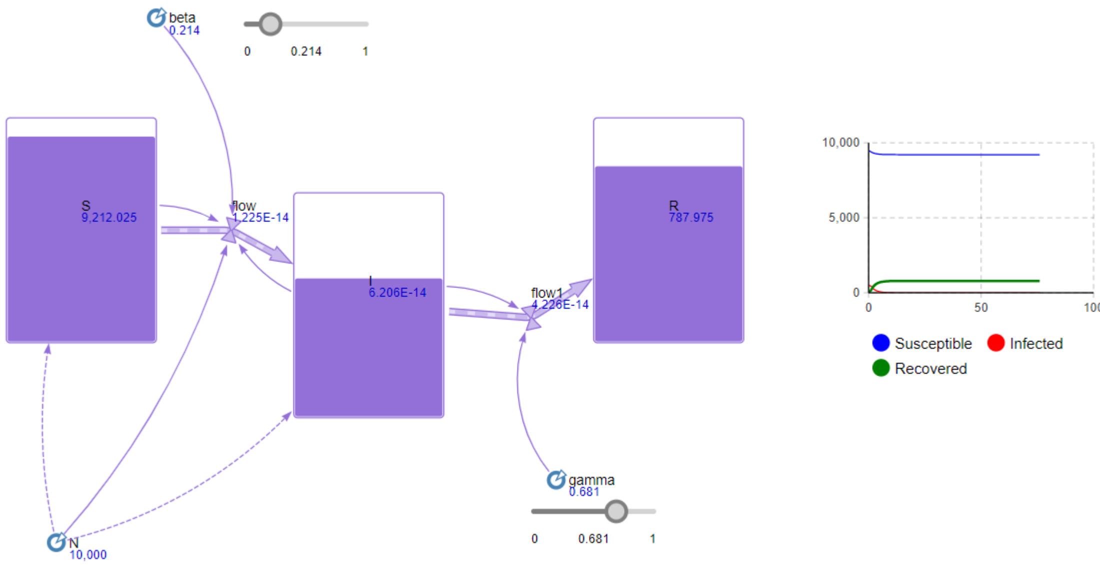



Рисунок 10 - SIR модель с увеличенным $\gamma$

## 3.3 SEIRD модель

$E(t)$ - число носителей заболевания
$D$ - число умерших
$\mu$ - уровень смертности
$\delta = \dfrac{1}{\text{ср.инк.период}}$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{-\beta IS}{N} \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - \delta E \\ \frac{dI}{dt} &= \delta E - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \\ \frac{dD}{dt} &= \mu I \end{aligned} \tag{8}$$

В данной модели в отличие от предыдущий, люди заболевают не сразу, а есть некоторый инкубационный период, то есть сначала они получают статус exposed, а только затем infected. Также в данной модели есть убыль популяции, за счет смертности. На рисунке 11 представлена реализация с введением в SEIRD модель вакцинации. Вакцинация по факту дает возможность перейти из восприимчивого к агенту с иммунитетом, но также есть и вероятность рецидивы, когда вакцина не подействовала.

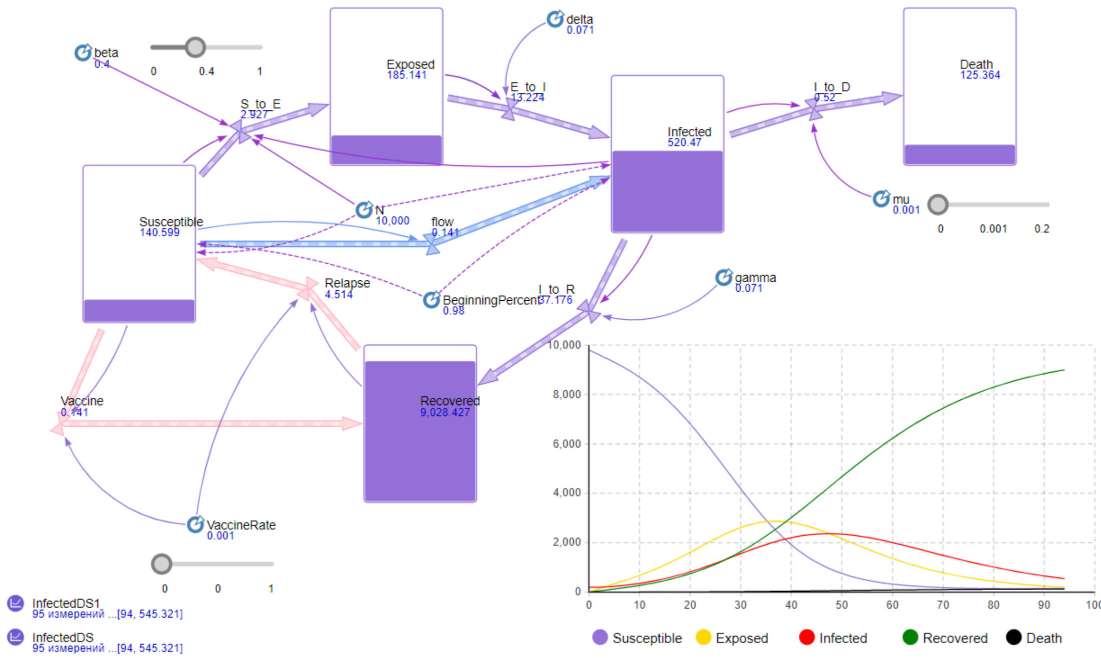



Рисунок 11 - SEIRD модель

На рисунке 12 увеличен уровень вакцинации, что приводит к значительному увеличению числа выздоровевших.

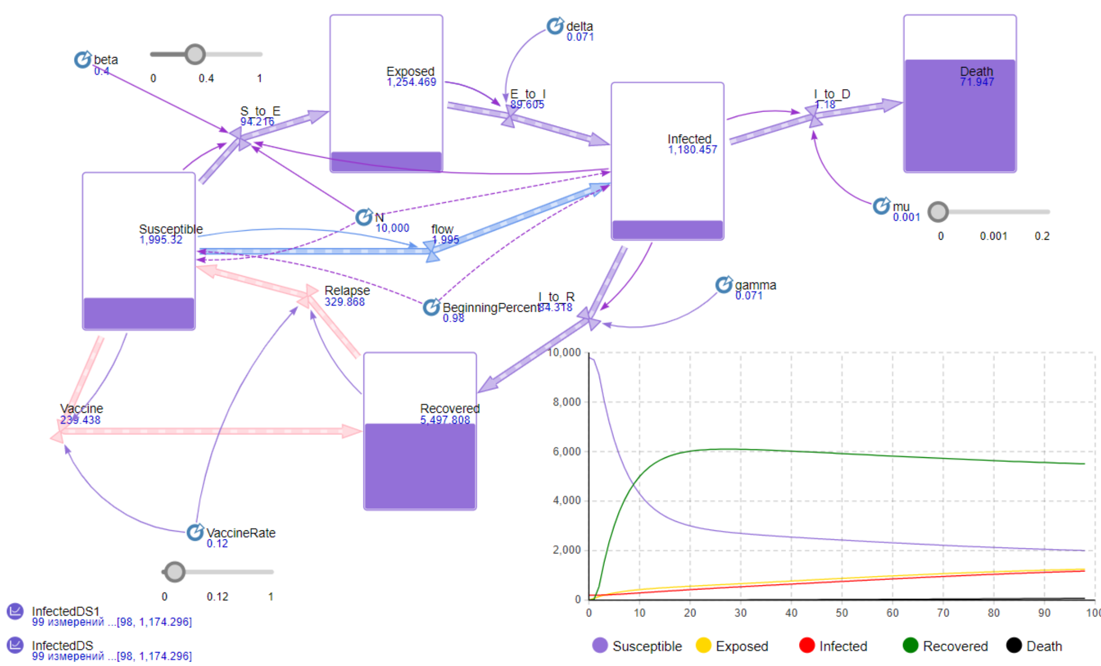



Рисунок 12 - SEIRD модель с увеличенной вакцинацией

На рисунке 13 показана модель при увеличение уровня смертности. В следствии сильное сокращения числа популяции.

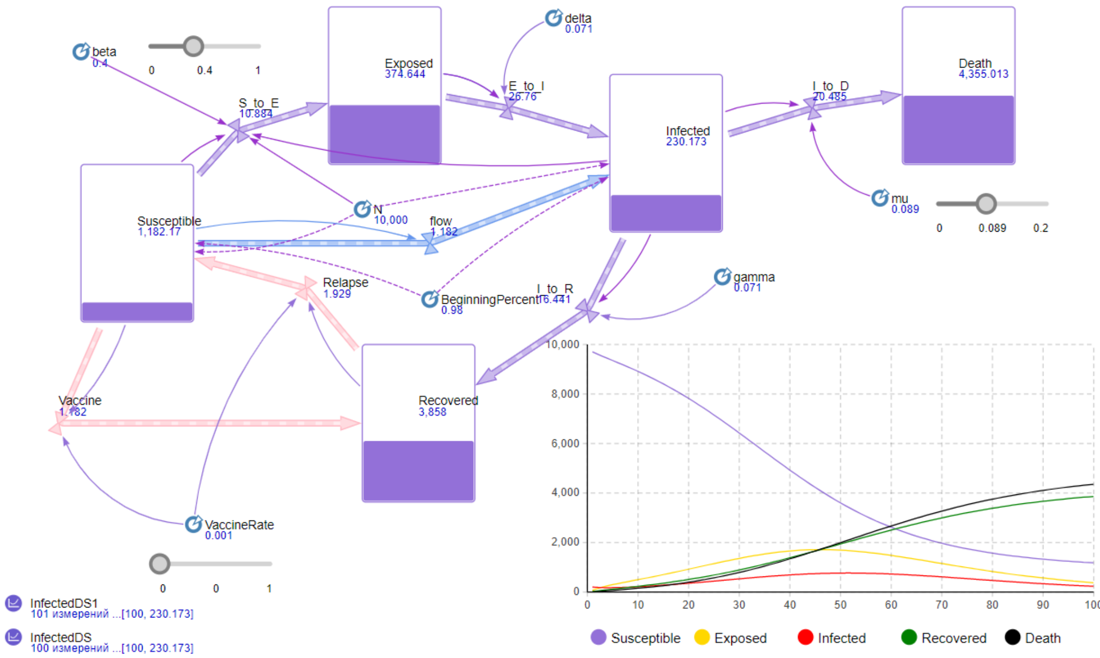



Рисунок 13 - SEIRD модель с увеличенным $\mu$

## 3.4 Модель Лотки-Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \tag{9}$$

$x(t)$ - число жертв
$y(t)$ - число хищников
$a$ - коэффициент рождаемости жертв
$b$ - коэффициент убыли жертв
$c$ - коэффициент убыли хищников
$d$ - коэффициент рождаемости хищников

Первой стационарной точкой является $(0, 0)$. Возьмем из системы линейную часть и составим матрицу.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} \tag{10}$$

Решая данной характеристическое уравнение получим $\lambda_1 = a, \lambda_2 = -c \Rightarrow$ данная точка является седлом. Теперь приравняем правые части системы к 0 и решим ее. Получим вторую стационарную точку $\overline{x} = \dfrac{c}{d}, \overline{y} = \dfrac{a}{b}$. Построим матрицу Якоби, подставив $\overline{x}, \overline{y}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{bc}{d} \\ -\dfrac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 + ac = 0$, получаем два мнимых корня, что свидетельствует о том что данная стационарная точка является центром (рис. 14).

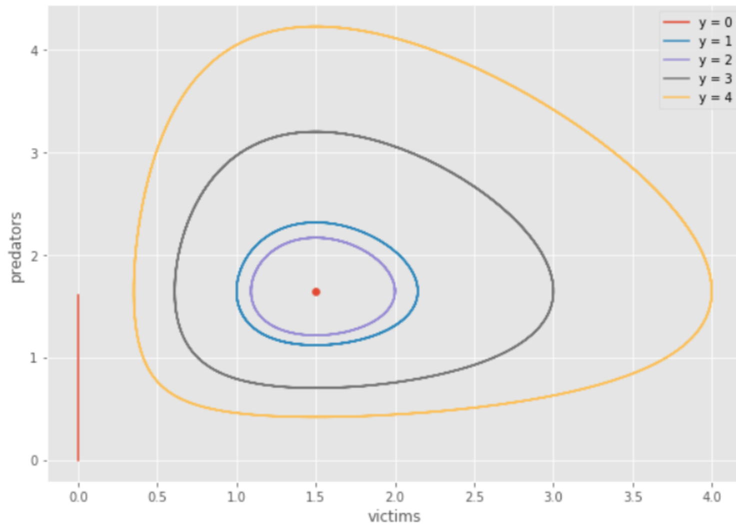



Рисунок 14 - Состояния равновесия

На рисунке 15 приведена реализации модели Лотки-Вольтерра в AnyLogic.

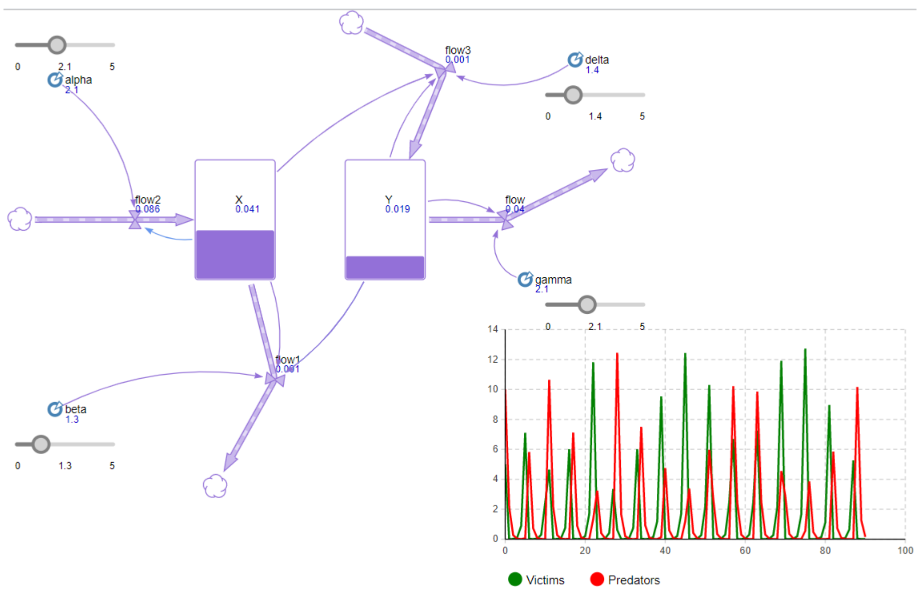



Рисунок 15 - Модель Лотки-Вольтерра AnyLogic

На рисунке 16 приведена реализации модели Лотки-Вольтерра на Python.

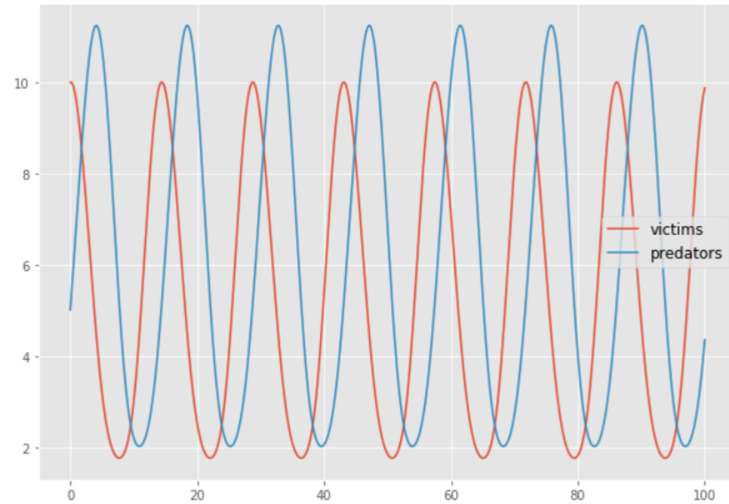



Рисунок 16 - Модель Лотки-Вольтерра Python

## 3.5 Взаимодействие двух конкурирующих видов

$x_1$ - количество особей первого типа $x_2$ - количество особей второго типа

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 - b_{11} x_1^2 - b_{12} x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 - b_{21} x_1 x_2 - b_{22} x_2^2 \end{cases} \tag{12}$$

Приравняем к 0 правые части системы.

$$\begin{cases} x_1(a_1 - b_{11} x_1 - b_{12} x_2) = 0 \\ x_2(a_2 - b_{21} x_1 - b_{22} x_2) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Получим 4 стационарные точки.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{a_2}{b_{22}} \end{cases} ; \tag{14}$$
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_1}{b_{11}} \\ x_2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = \dfrac{a_2 b_{12} - a_1 b_{22}}{b_{12} b_{21} - b_{22} b_{11}} \\ x_2 = \dfrac{a_1 b_{21} - a_2 b_{11}}{b_{12} b_{21} - b_{22} b_{11}} \end{cases}$$

Определим состояние равновесия для каждой стационарной точки

1. 1
2. 2

Для численного анализа данной модели модифицируем метод Рунге-Кутта для двух функций (рис. 17).

```python
def runge_Kutt(f, g, t0, x0, y0, h, b):
    t = t0
    x = x0
    y = y0
    arrayX = np.array([])
    arrayY = np.array([])
    arrayT = np.array([])
    while t<b:
        k1 = g(t, x, y)
        q1 = f(t, x, y)

        k2 = g(t + h/2, x + (h*q1)/2, y + (h*k1)/2)
        q2 = f(t + h/2, x + (h*q1)/2, y + (h*k1)/2)

        k3 = g(t + h/2, x + (h*q2)/2, y + (h*k2)/2)
        q3 = f(t + h/2, x + (h*q2)/2, y + (h*k2)/2)

        k4 = g(t + h, x + h*q3, y + h*k3)
        q4 = f(t + h, x + h*q3, y + h*k3)

        y = y + h*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6
        x = x + h*(q1 + 2*q2 + 2*q3 + q4)/6

        arrayX = np.append(arrayX, x)
        arrayT = np.append(arrayT, t)
        arrayY = np.append(arrayY, y)

        t += h
    return arrayT, arrayX, arrayY
```

Рисунок 17 - Метод Рунге-Кутта для двух функций

На рисунке 18 приведены значения параметров для которых производился расчет.

```python
a1 = 1
a2 = 0.75
b11 = 1
b12 = 0.85
b21 = 0.55
b22 = 0.55

def fx(t, x, y):
    return a1*x - b11*x**2 - b12*x*y

def fy(t, x, y):
    return a2*y - b21*x*y - b22*y**2

def fxl(t, x, y):
    return a1*math.log(x) - b11*math.log(x)**2 - b12*math.log(x)*math.log(y)

def fyl(t, x, y):
    return a2*math.log(y) - b21*math.log(x)*math.log(y) - b22*math.log(y)**2


p1, p2, p3 = runge_Kutt(fxl, fyl, 0, 4, 5, 0.01, 100)
print(f"Solution: x = {p2[-1]}, y = {p3[-1]}")
```

Рисунок 18 - Параметры

На рисунке 19 показано численное решение. Как видно сначала две популяции убывали, но затем вторая начала рост до некоторого равновесного состояния.

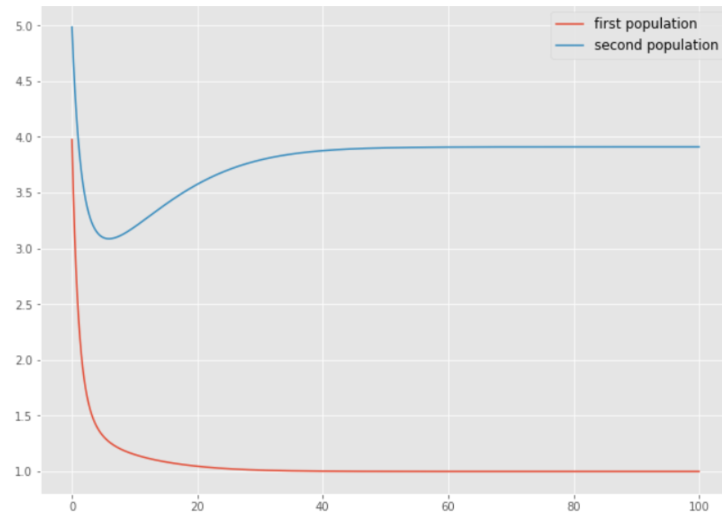



Рисунок 19 - Два конкурирующих вида

Теперь посмотри на результат в плоскости двух популяций. На рисунке 20 приведен график векторного поля, то есть касательных к интегральной кривой. Здесь видны равновесные состояния описанные ранее. Для точки $(0, 0)$ неустойчивый узел, все вектора расходятся от данной точки. Точки $(0, \frac{a_2}{b_{22}}), (\frac{a_1}{b_{11}}, 0)$ являются устойчивыми узлами и следовательно к ним вектора сходятся.

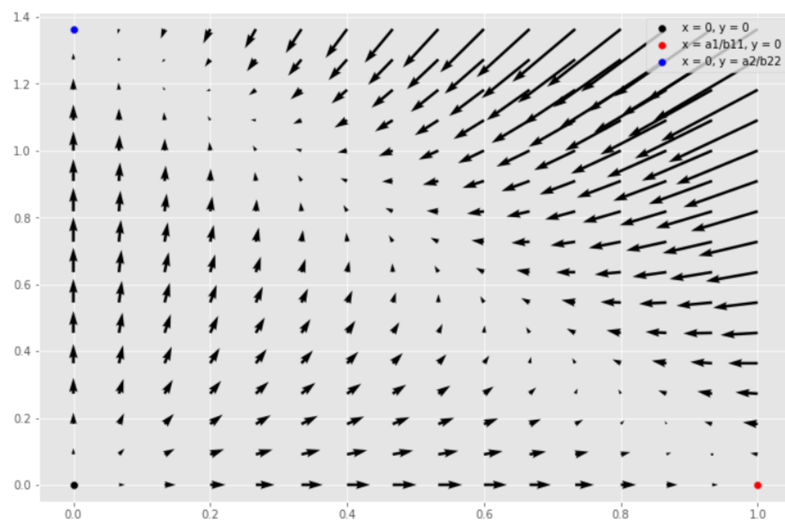



Рисунок 20 - Два конкурирующих вида

Для того чтобы увидеть 4 точку, которая является седловой обратимся к рисунку 21. Здесь представлен *dashboard* по данной модели и отчетливо видны все 4 точки. Данный график реализован при помощи библиотеки *Plotly*.

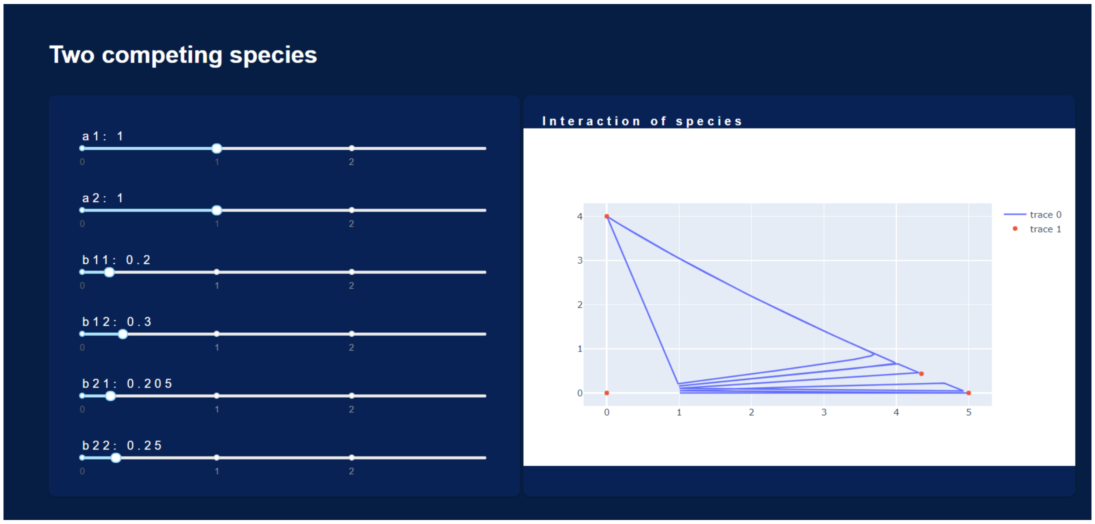



Рисунок 21 - Два конкурирующих вида (dashboard)

## 3.6 Переход к полярным координатам

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \tag{15}$$

Перейдем к полярным координатам.

$$\begin{cases} x_1(t) = r(t)\cos\varphi(t) \\ x_2(t) = r(t)\sin\varphi(t) \end{cases} \tag{16}$$

Выполним подстановку и получим выражения для $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$.

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi + r\dot{\varphi}(-\sin\varphi) = r\cos\varphi - r\sin\varphi - r^3\cos\varphi & \big| * \cos\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = r\cos\varphi + r\sin\varphi - r^3\sin\varphi & \big| * \sin\varphi \end{cases} \quad + \tag{17}$$

$$\begin{cases} \dot{r}\cos^2\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = r\cos^2\varphi - r\cos\varphi\sin\varphi - r^3\cos^2\varphi \\ \dot{r}\sin^2\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi = r\sin\varphi\cos\varphi + r\sin^2\varphi - r^3\sin^2\varphi \end{cases} \tag{18}$$

Тем самым получаем выражение для $\dot{r}(t) = r(t)(1 - r^2(t))$. Теперь умножим первое уравнения на $sin\varphi$, второе на $cos\varphi$ и вычтем из первого второе.

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi + r\dot{\varphi}(-\sin\varphi) = r\cos\varphi - r\sin\varphi - r^3\cos\varphi & \big| * \sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = r\cos\varphi + r\sin\varphi - r^3\sin\varphi & \big| * \cos\varphi \end{cases} \quad - \tag{19}$$

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi\sin\varphi - r\dot{\varphi}\sin^2\varphi = r\cos\varphi\sin\varphi - r\sin^2\varphi - r^3\cos\varphi\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + r\dot{\varphi}\cos^2\varphi = r\cos^2\varphi + r\sin\varphi\cos\varphi - r^3\sin\varphi\cos\varphi \end{cases} \tag{20}$$

Таким образом получим систему (1) в полярных координатах.

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \tag{21}$$

Стационарные точки для данной системы $r = 0$ и $r = 1$.
Устойчивый предельный цикл (рис. 22):

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \tag{22}$$

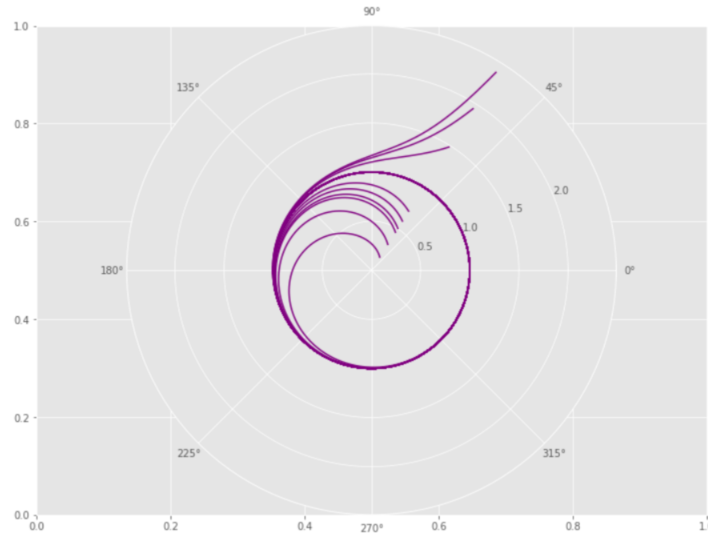


Рисунок 22 - Устойчивый предельный цикл

Неустойчивый предельный цикл (рис. 23):

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \tag{23}$$

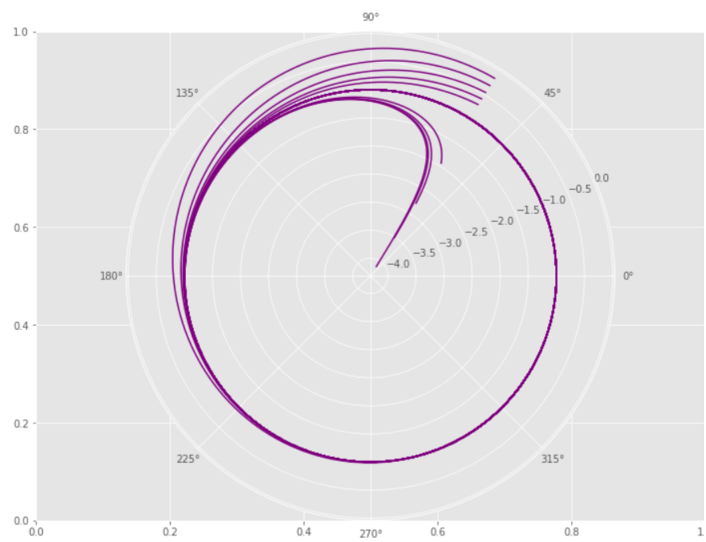


Рисунок 23 - Неустойчивый предельный цикл

Полуустойчивый предельный цикл (рис. 24):

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r)^2 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \tag{24}$$

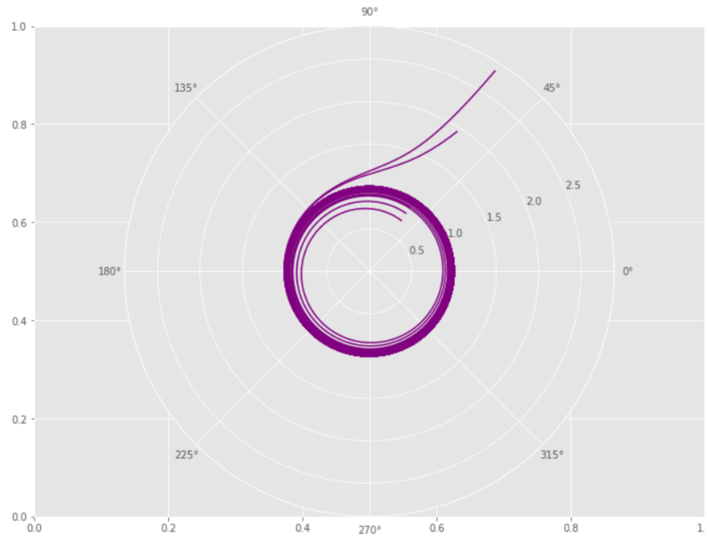



Рисунок 24 - Полуустойчивый предельный цикл

## 3.7 Модель Самуэльсона-Хикса

### 3.7.1 Дискретная форма

Предполагается замкнутая экономика, предложение эластично, цены и процентная ставка фиксированы. Рассмотрим уравнение

$$Y_{t+1} = C(Y_t) + I_t \tag{25}$$

Пусть спрос зависит от $Y_t$ линейно, т.е. $C(Y_t) = C_a + cY_t$, а инвестиции равны $I_t = r(Y_t - Y_{t-1}) + I_a$, где $C_a$ - постоянное потребление, $I_a$ - постоянные инвестиции, $r$ - коэффициент акселерации, $c$ - склонность к потреблению. $A = C_a + I_a$ - автономные расходы. Получим следующее конечно-разностное уравнение.

$$Y_{t+1} = C_a + I_a + cY_t + r(Y_t - Y_{t-1}) \tag{26}$$

Равновесие определим из предположения, что автономные расходы постоянны и объем ВВП стабилизируется на определенном уровне, т.е. $Y_t = Y_{t-1} = ... = Y_{t-n} = \widehat{Y}$. Тогда получим уравнение

$$\widehat{Y} = A + c\widehat{Y} + r(\widehat{Y} - \widehat{Y}) = A + c\widehat{Y} \tag{27}$$

$\Rightarrow \widehat{Y} = \dfrac{A}{1-c}$. Величина $\dfrac{1}{1-c}$ называется мультипликатором автономных расходов.

Рассмотрим уровень дохода при изменения коэффициента акселерации:

1. Если $0 < r < 1$, то равновесие восстановится через некоторое время при новом уровне дохода (рис. 25).

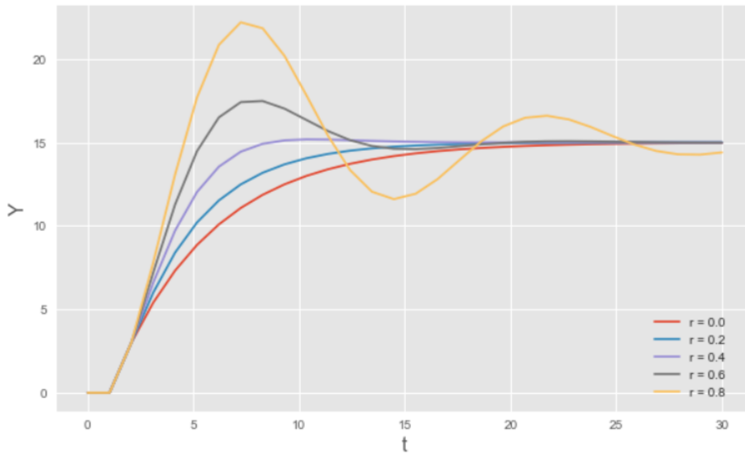



Рисунок 25 - Равновесное состояние

2. Если $r > 1$, то при нарушении равновесия единожды, оно больше не восстановится (рис. 26).

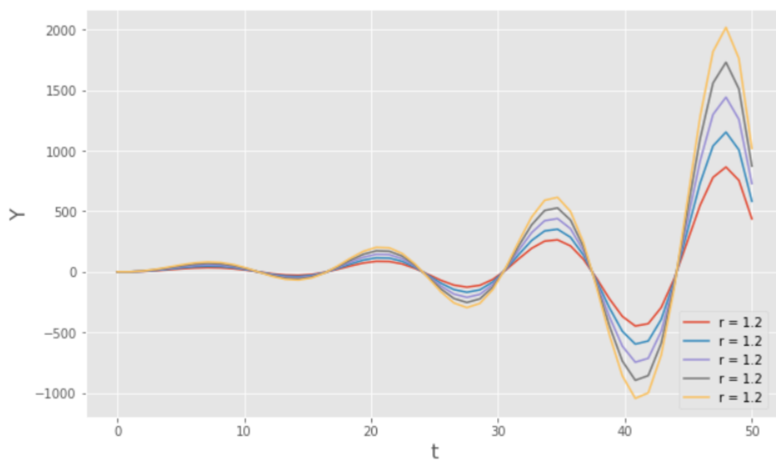



Рисунок 26 - Уход от равновесного состояния

3. Если $r = 1$, то значение дохода будет колебаться с постоянным периодом (рис. 27).

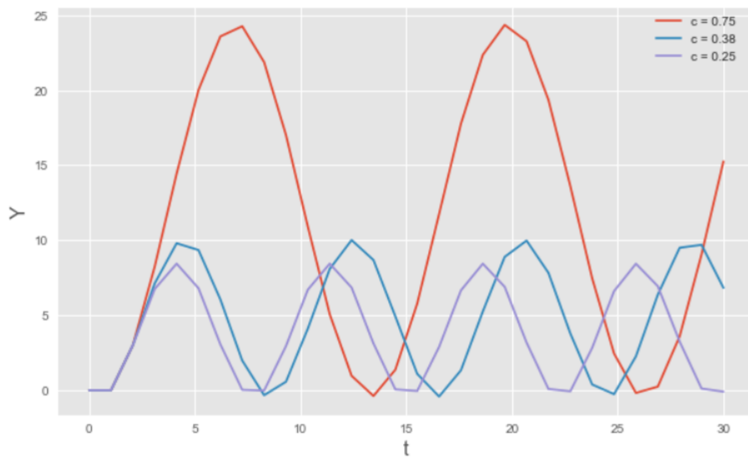



Рисунок 27 - Постоянные колебания

### 3.7.2 Непрерывная форма

Перейдя от конечных разностей получим следующее уравнение.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(1-r)\frac{\partial y}{\partial t} - (1-c)y + A \tag{28}$$

Понизим порядок уравнения, приведя его к НСДУ.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} = x \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} = -(1-r)x - (1-c)y + A \end{cases} \tag{29}$$

Отсюда легко получить стационарную точку приравняв правые части к 0. Получим $x = 0, y = \dfrac{A}{1-c}$. Определим состояния равновесия в стационарной точке при помощи корней характеристического уравнения. Составим матрицу Якоби.

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -(1-r) & -(1-c) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Найдем собственные значения при следующих параметрах:

1. $r = 1.2; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0.1 \pm 0.435i$.
   Т.е. при $r > 1$ получаем неустойчивый фокус (рис. 28, 29).

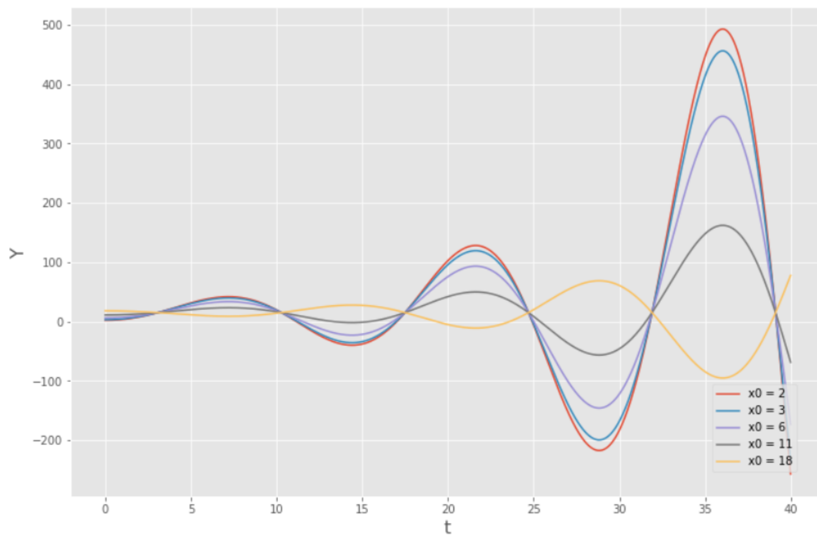



Рисунок 28 - Уход от равновесного состояния

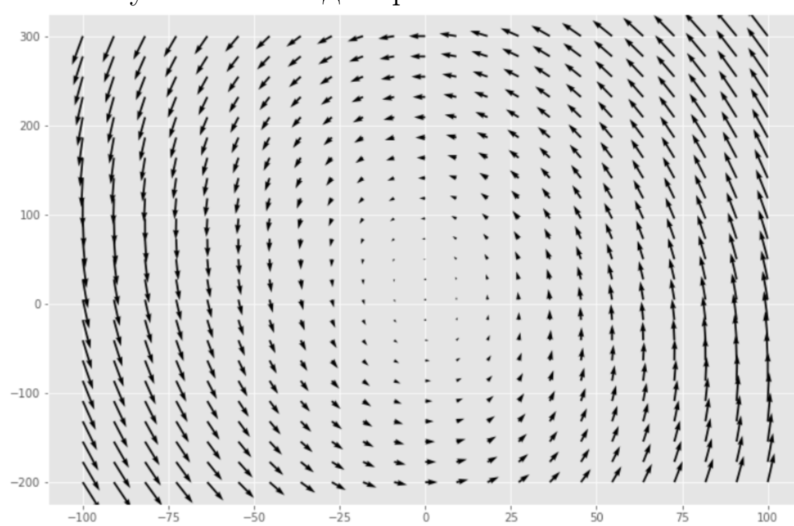



Рисунок 29 - Векторное поле

2. $r = 0.8; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -0.1 \pm 0.435i$.
   При $0 < r < 1$ получаем устойчивый фокус (рис. 30-32). На рисунке 31 видно состояние устойчивый фокус в плоскости $XY$, для разных задач Коши.

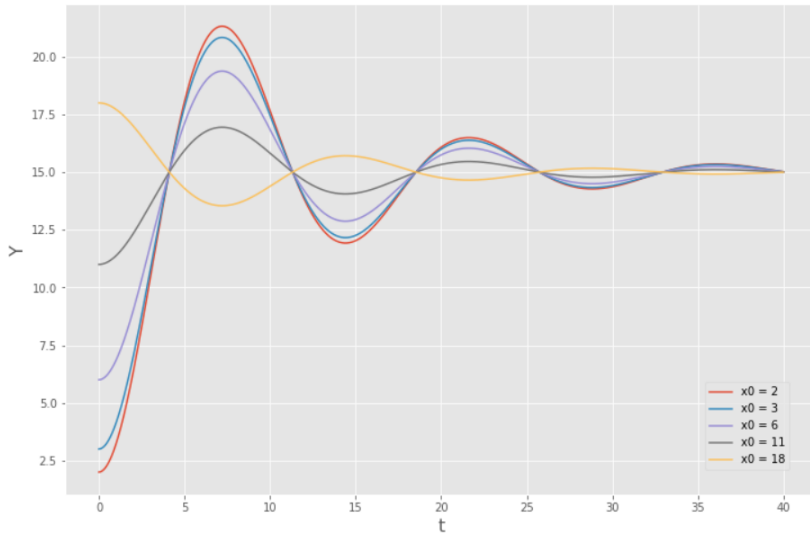



Рисунок 30 - Равновесное состояние

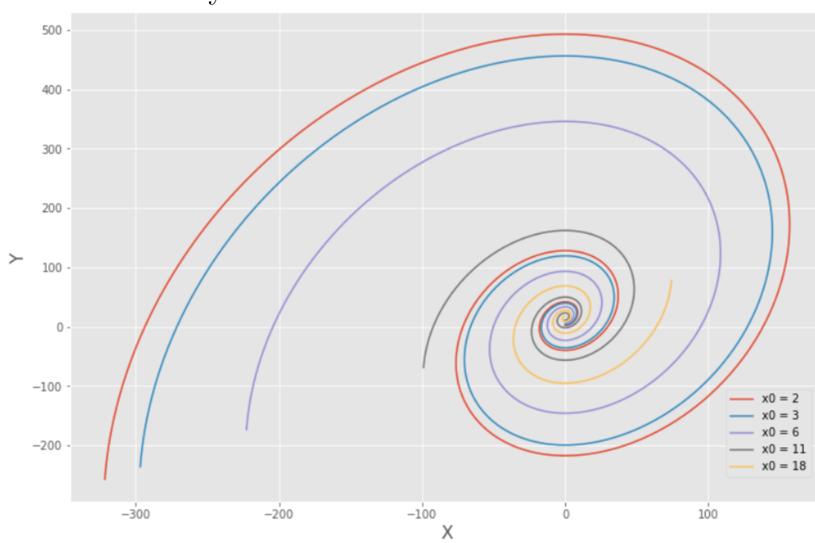



Рисунок 31 - График в плоскости $XY$

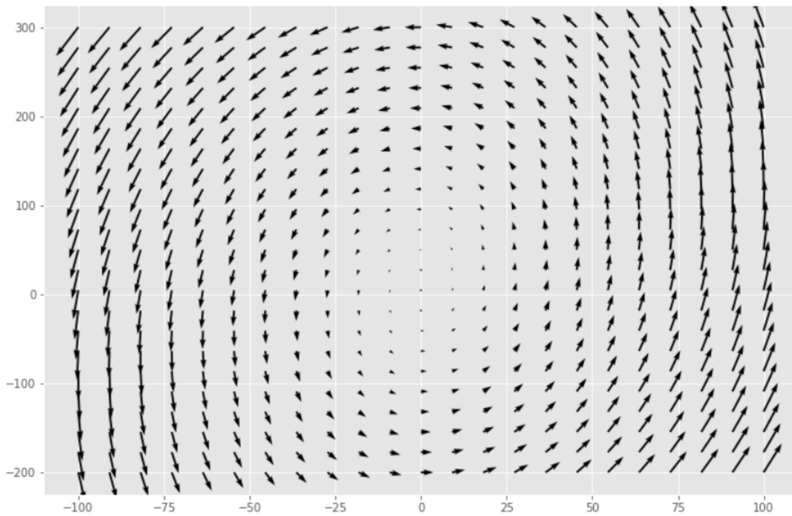



Рисунок 32 - Векторное поле

3. $r = 1; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 0.447i$.
   И наконец при $r = 1$ получаем центр (рис. 33, 34). На рисунке отчетливо видно, что устанавливаются колебания с постоянным периодом.

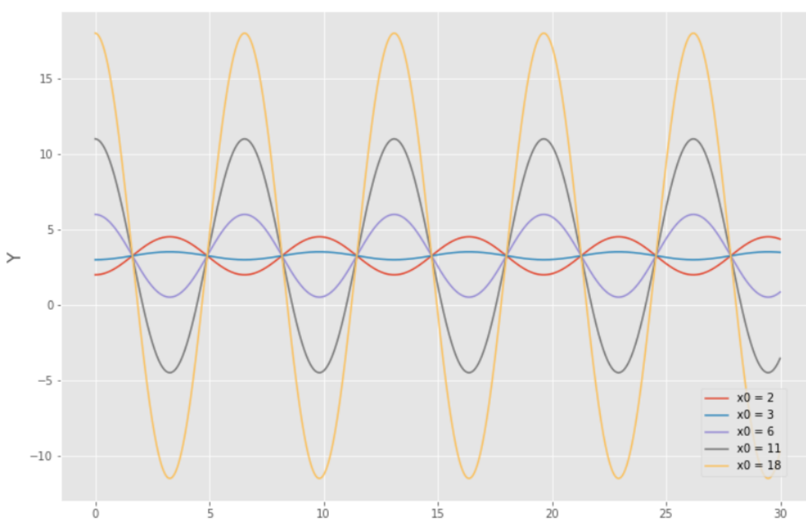



Рисунок 33 - Постоянные колебания

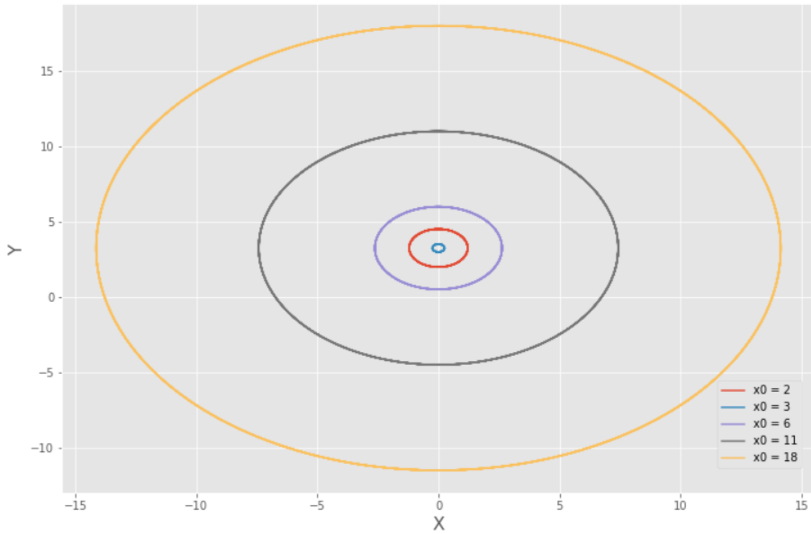



Рисунок 34 - График в плоскости $XY$

# 4 Модели в частных производных

## 4.1 Модель распространения тепла в тонком стержне

Предположения по модели:

- теплоизолированная боковая поверхность;
- однородный тонкий стержень;
- в любой точке поперечного сечения температура в момент времени $t$ одинакова;
- начальное распределение температуры известно.

Пусть $u(x,t)$ - температура в поперечном сечении с координатой $x$ в момент времени $t$;
$\rho$ - плотность материала, из которого изготовлен стержень;
$C$ - удельная теплоемкость;
$\lambda$ - коэффициент теплопроводности;
$S$ - площадь поперечного сечения стержня.
Рассмотрим малый участок стрежня $[x, x+\Delta x]$, а $\Delta u$ - изменение температуры на этом

участке.

$$\begin{aligned}
&\Delta Q = C \cdot m \cdot \Delta u \\
&\Delta Q = CS\Delta x\rho\Delta u \\
&\Delta Q = Q_L - Q_R \\
&\Delta Q = -\lambda S\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Delta t + \lambda S\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}\Delta t \\
&CS\Delta x\rho\Delta u = \lambda S\Delta t\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) \\
&\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\lambda}{C\rho} \cdot \frac{\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\Delta x}
\end{aligned} \tag{31}$$

При $\Delta t \to 0, \Delta x \to 0, a = \sqrt{\dfrac{\lambda}{C\rho}}$ получаем уравнение теплопроводности.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{32}$$

**Начальное условие:** $u(x,0) = f(x)$
**Граничные условия:** $u(0,0) = u_0, u(0,t) = u_0, u(L,0) = u_L, u(L,t) = u_L$ Рассмотрим в качестве начальной функции распределения температуры треугольное распределение.

$$f_t(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, \text{ if } x \in [a,c] \\ \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, \text{ if } x \in [c,b] \\ 0, \text{ if } x \notin [a,b] \end{cases} \tag{33}$$

Для решения уравнения теплопроводности воспользуемся методом сеток. Сначала генерируем начальное распределение температуры в стержне при помощи параболического распределения. В качестве граничных условий берем нулевую температуру (рис. 35).

```
def solution(f, N=20, L=1, dt=0.5):
    x = np.linspace(0, 1, N)
    initial_temp = [f(i, 0, L) for i in x]
    matrix = [initial_temp]

    for j in range(t):
        matrix.append([0]*N)

    for j in range(t):
        for i in range(1, N-1):
#             matrix[j+1][i] = (matrix[j][i-1] + matrix[j][i+1])/2
            matrix[j+1][i] = matrix[j][i]*(1-2*a**2*dt/dx**2)+a**2*dt/dx**2*(matrix[t][i+1]+matrix[t][i-1]
    return matrix
```

Рисунок 35 - Метод сеток

На рисунке 36 представлено численное решение в трехмерной системе координат. По оси $Z$ температура стержня в момент времени $t$.

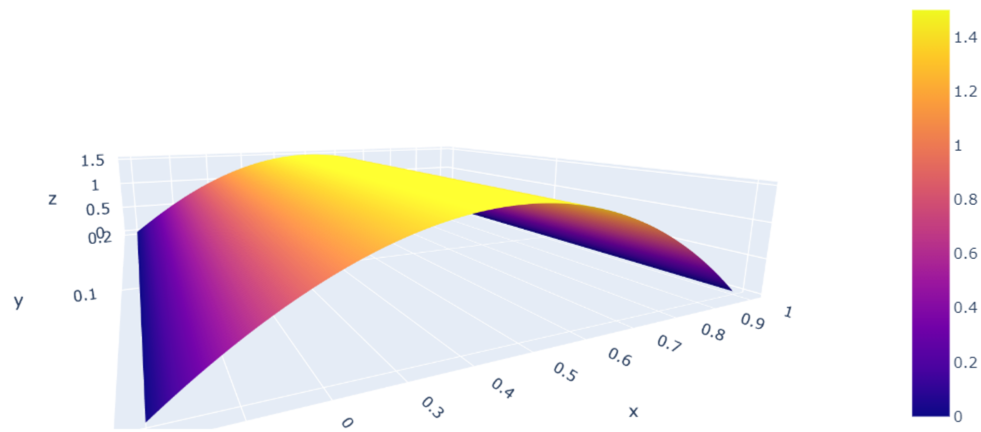



Рисунок 36 - Уравнение теплопроводности

## 4.2 Колебание пластины

Рассмотрим изотропную (одинаковые физические свойства во всех направлениях) однородную пластину. Пусть $w$ - поперечное смещение средней поверхности пластины. Общее уравнение для $w$ имеет следующий вид.

$$D\nabla^2\nabla^2 w = -q(x,t) - 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{34}$$

где $2h$ - ширина пластины, $q(x,t)$ - внешняя сила, $D$ - жесткость пластины при изгибе, $\rho$ - плотность пластины. Формула для бигармонического оператора имеет следующий вид.

$$\nabla^2\nabla^2 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\} \tag{35}$$

Для свободно вибрирующей пластины $w = w(r,t)$ перейдем в цилиндрические координаты. Оператор Лапласа в них выглядит следующим образом.

$$\nabla^2 w \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial w}{\partial r}\right\} \tag{36}$$

Тогда исходное уравнение примет следующий вид.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial w}{\partial r}\right\}\right\}\right] \tag{37}$$

После применения оператора Лапласа получим следующее выражение.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{2h\rho}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{38}$$

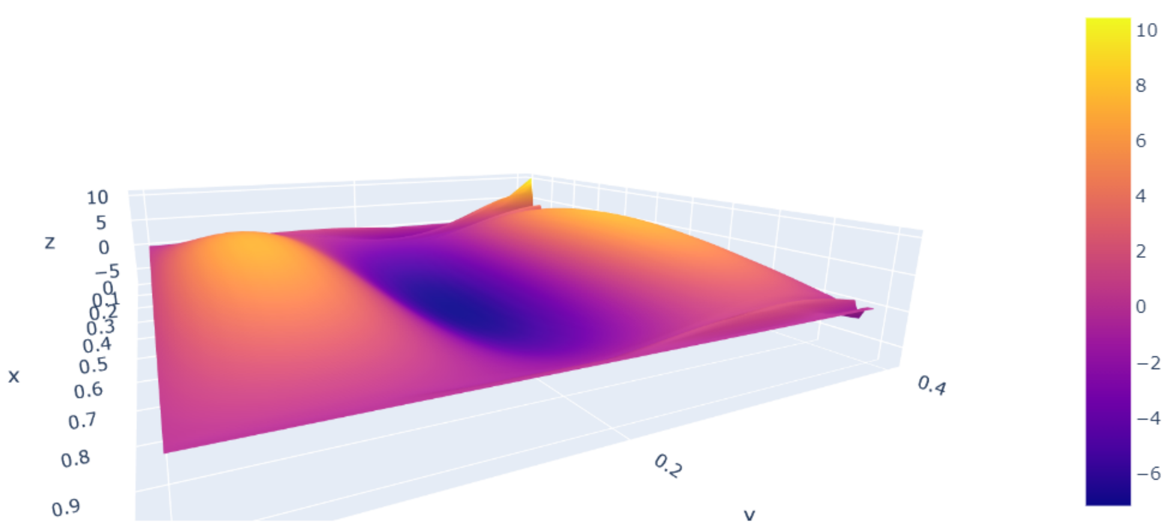
Перепишем производные в конечных разностях.

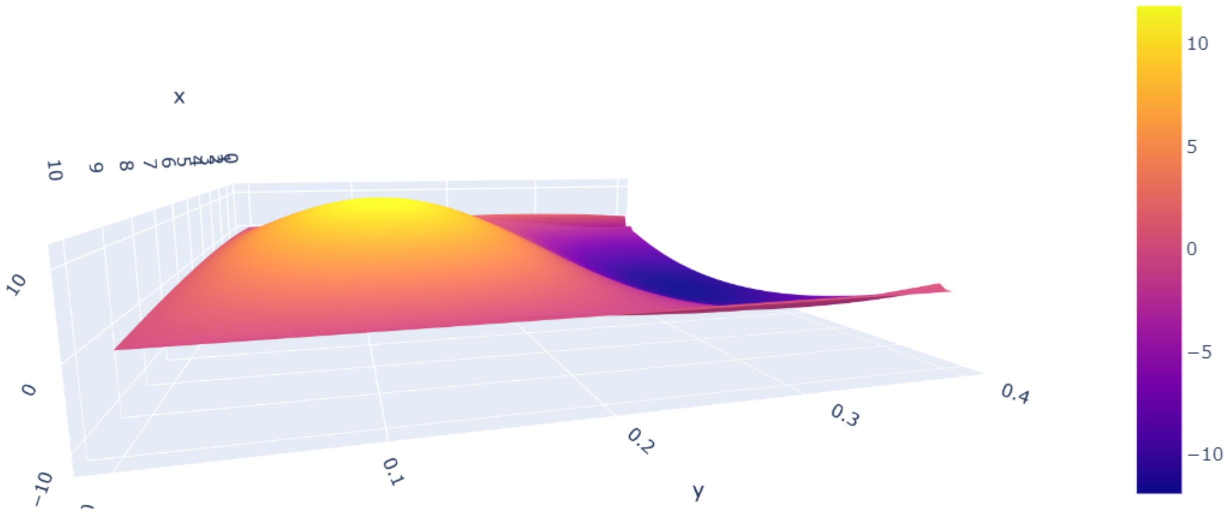
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^3 x}{\partial t^3} = \frac{\dfrac{\dfrac{x(t+2\Delta t)-x(t+\Delta t)}{\Delta t}-\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}}{\Delta t}}{\Delta t} - \\
-\frac{\dfrac{\dfrac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t}-\dfrac{x(t-\Delta t)-x(t-2\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t}}{\Delta t} = \\
= \frac{x(t+\Delta t)-2x(t+\Delta t)+2x(t-\Delta t)+x(t-2\Delta t)}{\Delta t^3}
\end{aligned}
\tag{39}
$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial w(r,t)}{\partial x}\right|_{(x,t)=(x_i,t_j)} &= \frac{w_{i+1,j}-w_{i,j}}{h} \\
\left.\frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial x^2}\right|_{(x,t)=(x_i,t_j)} &= \frac{w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}}{h^2} \\
\left.\frac{\partial^3 w(r,t)}{\partial x^3}\right|_{(x,t)=(x_i,t_j)} &= \frac{w_{i+2,j}-2w_{i+1,j}+2w_{i-1,j}+w_{i-2,j}}{h^3} \\
\left.\frac{\partial^4 w(r,t)}{\partial x^4}\right|_{(x,t)=(x_i,t_j)} &= \frac{w_{i+2,j}-4w_{i+1,j}+6w_{i,j}-4w_{i-1,j}+w_{i-2,j}}{h^4} \\
\left.\frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial t^2}\right|_{(x,t)=(x_i,t_j)} &= \frac{w_{i,j+1}-2w_{i,j}+w_{i,j-1}}{k^2}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Пусть $\alpha = -\dfrac{2\rho h}{D}$. Обозначим левую часть за $L$ и выразим $w(r,t+\Delta t)$.

$$
w(r,t+\Delta t) = \frac{k^2 L}{\alpha} + 2w(r,t) - w(r,t-\Delta t) \tag{41}
$$






# 5 Бифуркации динамических систем

**Определение 5.1.** Бифуркация - качественное изменение фазового портрета при изменении параметров системы.

**Теорема 5.1.** *Бифуркация Хопфа*
*Пусть есть система дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(x_1, ..., x_n, \mu) \qquad X_1(0, ..., 0, \mu) = 0 \\ \dot{x}_2 = X_2(x_1, ..., x_n, \mu) \qquad X_2(0, ..., 0, \mu) = 0 \end{cases} \tag{42}$$

$\lambda_1(\mu_0), \lambda_2(\mu_0)$ *- чисто мнимые корни. Точка* $(0, 0)$ *- асимптотически устойчива при* $\mu_0$ *и* $\dfrac{\partial}{\partial \mu}\{Re(\lambda_i(\mu))|_{\mu=\mu_0}\} > 0$.
*Тогда*

1. $\mu_0$ *- точка бифуркации*
2. $\exists$ *интервал* $\mu \in (\mu_1, \mu_0)$ *такой, что* $(0; 0)$ *- устойчивый фокус*
3. $\exists$ *интервал* $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$ *такой, что* $(0; 0)$ *- неустойчивый фокус, окруженный предельным циклом*

## 5.1 Аттрактор Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \qquad a, r, b > 0 \end{cases} \tag{43}$$

$r$ - управляющий переменный параметр
$(0 < r < 1)$ - одна критическая точка
$r \to 1$ - критическое замедление
$r = 1.345$ - узлы переходят в фокусы
$r > 24$ - хаос

## 5.2 Маятник Фуко

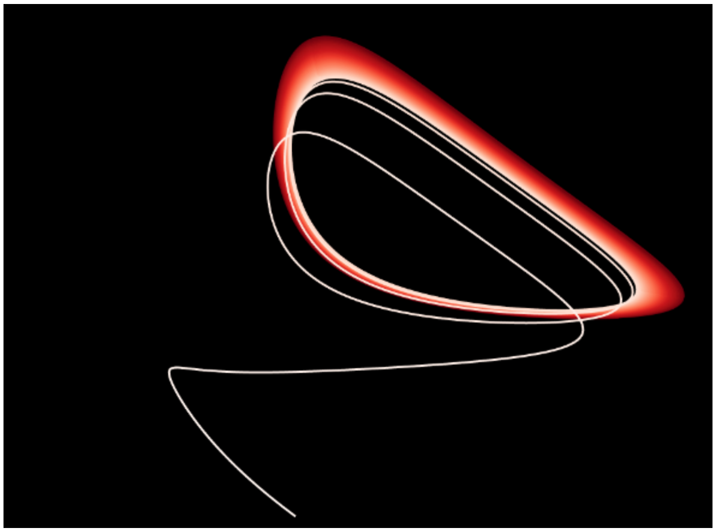
Пусть $L$ - длина нити маятника
$\omega$ - угловая скорость
$g$ - ускорение свободного падения
$x, y$ - координаты
$v_x, v_y$ - скорости

$$\begin{aligned}
&\frac{dv_x}{dt} = 2v_y\omega + \omega^2 x - g\frac{x}{L} \\
&\frac{dv_y}{dt} = -2v_x\omega + \omega^2 y - g\frac{y}{L} \\
&\frac{dx}{dt} = v_x \\
&\frac{dy}{dt} = v_y
\end{aligned} \tag{44}$$

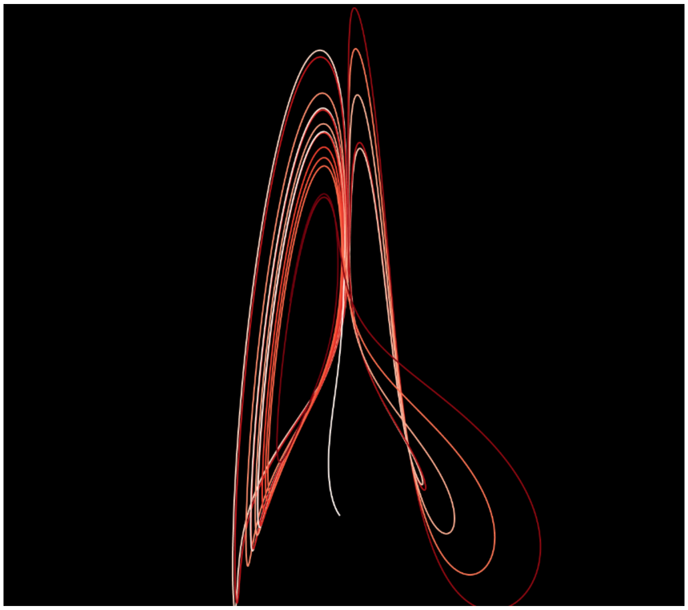
## 5.3 Аттрактор Рикитаки

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = -\mu x + yz \\
&\frac{dy}{dt} = (z - a)x - \mu y \\
&\frac{dz}{dt} = 1 - xy
\end{aligned} \tag{45}$$

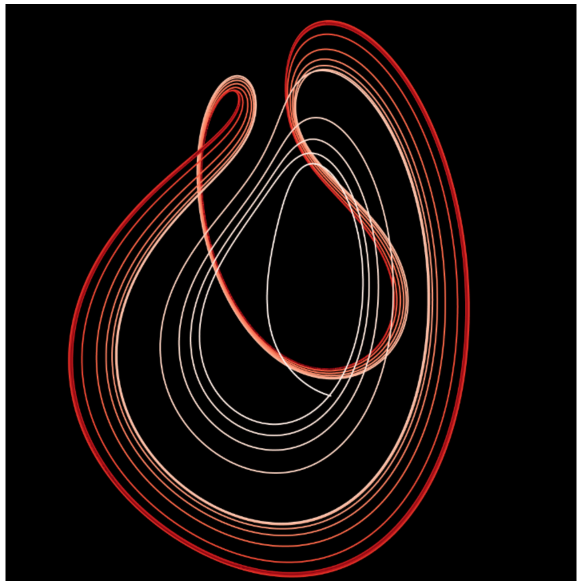
На рисунках ниже представлен численный анализ модели при различных параметрах $\mu$ и $a$. При параметрах $\mu = 0.2, a = 0.5$ получаем спиральный устойчивый фокус сходящийся в направлении плоскости $XY$



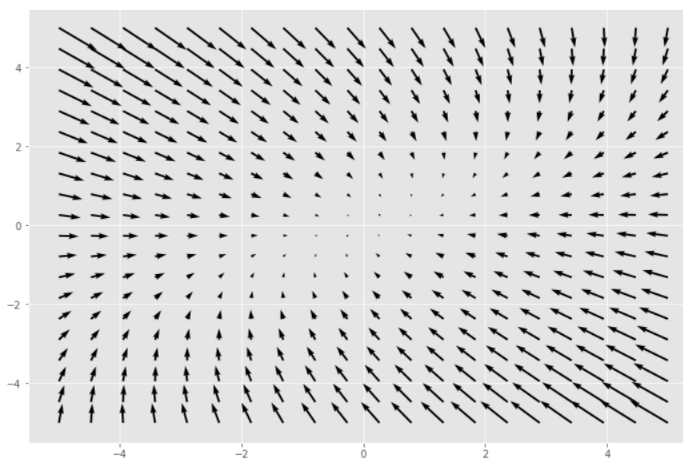
При параметрах $\mu >= 1, a = 0.9$ получаем седло.

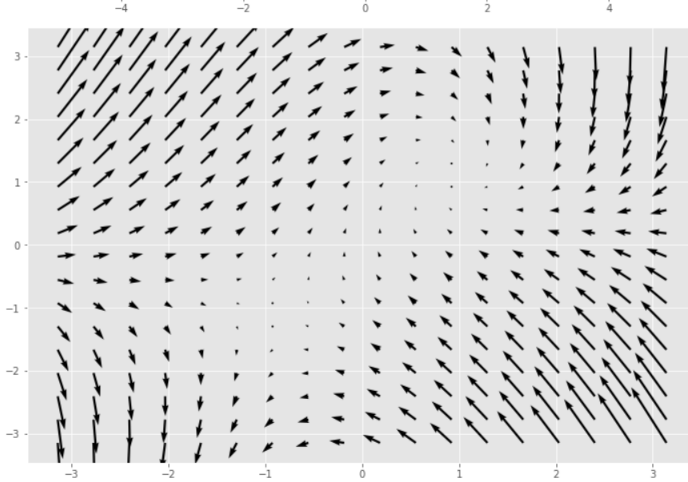


При параметрах $\mu = 0.498, a = 0.1$ получаем график, где видно и седло и спиральный фокус.



Далее представлены графики векторного поля по осям. На первом рисунке виден спиральный устой фокус в плоскости $XY$, а на второй в плоскости $XZ$ видно седло и устойчивый фокус одновременно.



# 6 Оптимизационные модели