

Математическое моделирование

Лектор: Лебедева Л.Н.

Студент: Захаров К.А.

2020 г.

Все реализации моделей на моем github: <https://github.com/kirillzx/Math-projects>

Содержание

1 Введение	2
2 Статические модели	3
2.1 Производственная функция Кобба-Дугласа	3
2.2 Модель Леонтьева (Межотраслевой баланс)	4
3 Динамические модели	6
3.1 Модель Солоу	6
3.2 SIR модель	8
3.3 SEIRD модель	10
3.4 Модель Лотки-Вольтерра	12
3.5 Взаимодействие двух конкурирующих видов	14
3.6 Переход к полярным координатам	17
3.7 Модель Самуэльсона-Хикса	19
3.7.1 Дискретная форма	19
3.7.2 Непрерывная форма	21
3.8 Маятник Фуко	25
3.9 Пружинные маятники	27
4 Модели в частных производных	29
4.1 Модель распространения тепла в тонком стержне	29
4.2 Колебание пластины	31
5 Бифуркации динамических систем	33
5.1 Аттрактор Лоренца	34
5.2 Аттрактор Рикитаки	35

6 Оптимизационные модели	38
6.1 Задача о производстве мебели	38
6.2 Задача о назначениях	41
6.3 Задача про аудиторов	42
6.4 Модель потребительского выбора	43
6.4.1 Модель Стоуна	43
6.4.2 Функция Кобба-Дугласа	44
6.5 Задача о назначениях бригад	45

1 Введение

Модель - образ или прообраз какого-либо объекта или системы объектов, используемый в качестве их "заместителя".

Математическая модель - описание объекта исследования на языке математики.

Требования к модели:

- адекватность
- конечность
- полнота(информированность)
- упрощенность
- гибкость
- приемлемая трудоемкость разработки

Этапы построения модели:

1. определение цели;
2. изучение предметной области, выявление причинно-следственных связей;
3. переход от концептуальной модели к формализованному описанию;
4. проверка адекватности моделирования;
5. корректировка модели;
6. применение модели. Проведение исследования и практическое использование.

Классификация моделей:

- линейные или нелинейные;
- сосредоточенные и распределенные системы;
- детерминированные или стохастические;
- статические или динамические;
- дискретные или непрерывные.

2 Статические модели

2.1 Производственная функция Кобба-Дугласа

Определение 2.1. Производственная функция - функция выражающая зависимость между затратами ресурсов и объемом выпуска.

Пусть \bar{X} - вектор используемых ресурсов, \bar{Y} - объем выпуска продукции каждого вида.

Свойство 1. О производственной функции

1. $F(x_1, \dots, x_n)$ является достаточно гладкой, т.е. $F \in C^2$
2. $F(x_1, \dots, x_n)$ - возрастающая по каждому аргументу $\frac{\partial F}{\partial x_i} > 0 \forall i$
3. выпуск по каждому аргументу не ограничен
4. предельная производительность убывает $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} < 0 \forall i$

Определение 2.2. Однородная функция

$$F(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda F(x_1, \dots, x_n)$$

Пусть Y - это ВВП, K - основные производственные фонды, L - число занятых. Тогда определим функцию $Y = AK^\alpha L^\beta$, ($A > 0, 0 < \alpha, \beta < 1$). Для оценки параметров A, α, β воспользуемся методом наименьших квадратов $\sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2 \rightarrow \min$. Также необходимо линеаризовать данные параметры при помощи натурального алгоритма. После чего получим следующую целевую функцию.

$$S(A, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^M (\ln A + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i - \ln Y_i)^2 \rightarrow \min \quad (1)$$

Теперь нужно приравнять частные производные к нулю по каждому аргументу и решить систему линейных уравнений (3).

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \ln A} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \end{cases}; \quad (2)$$

$$\begin{cases} M \ln A + \alpha \sum_{i=1}^M \ln K_i + \beta \sum_{i=1}^M \ln L_i = \sum_{i=1}^M \ln Y_i \\ \ln A \sum_{i=1}^M \ln K_i + \alpha \sum_{i=1}^M \ln K_i^2 + \beta \sum_{i=1}^M \ln K_i \ln L_i = \sum_{i=1}^M \ln Y_i \ln K_i \\ \ln A \sum_{i=1}^M \ln L_i + \alpha \sum_{i=1}^M \ln K_i \ln L_i + \beta \sum_{i=1}^M \ln L_i^2 = \sum_{i=1}^M \ln Y_i \ln L_i \end{cases} \quad (3)$$

Для решения данной модели воспользуемся средствами Excel.

Экономика США														Kirill Zakharov						
Год	ВВП(млн \$)	K(млн \$)	L(тыс. чел.)	In K	In L	In Y	In K**2	In L**2	In K * In L	In K * In Y	In L * In Y	In K - In L	(In K - In L)^2	In Y - In L	(In Y - In L)*(In K - In L)					
3	1936	83278	234236	73426	12,3641	11,204	11,3289	152,8705839	125,5303639	138,528	140,0843309	126,941022	1,160051	1,345718457	0,125906312	0,146057751				
4	1937	90984	254890	77568	12,4486	11,2589	11,4173	154,9673272	126,76306	140,158	142,129745	128,546798	1,189677	1,415331623	0,158428997	0,188479351				
5	1938	83743	217606	70460	12,2904	11,1628	11,3355	151,054949	124,6081139	137,196	139,3183948	126,536012	1,127641	1,271574034	0,172707412	0,194751944				
6	1939	91530	221746	75131	12,3093	11,227	11,4244	151,5185677	126,0452716	138,196	140,6264999	128,261856	1,082299	1,171371831	0,197433531	0,213682177				
7	1940	101313	228757	79694	12,3404	11,2859	11,526	152,2858568	127,3726579	139,273	142,23526	130,081516	1,054466	1,111898554	0,240020434	0,253093388				
8	1941	116415	250236	89276	12,4302	11,3995	11,6649	154,9483261	141,696	144,996671	152,974077	1,03668	1,062300789	0,265428696	0,27357199					
9	1942	127434	266469	97056	12,493	11,483	11,7554	156,0753786	131,860286	143,456	146,8597909	134,987239	1,00997	1,020038962	0,272310452	0,275025328				
10	1943	136274	266154	101633	12,4918	11,5291	11,8224	156,0456259	132,9206902	144,02	147,6837007	136,302174	0,962707	0,926804389	0,293299279	0,282361211				
11	1944	146470	269520	100124	12,5044	11,5142	11,8946	156,3599663	132,5759887	143,978	148,7345097	136,956106	0,990233	0,980561753	0,380411212	0,376695804				
12	1945	145052	263098	94920	12,4803	11,4608	11,8848	155,7574354	131,3497008	143,034	148,3262477	136,209739	1,019492	1,039364254	0,424057867	0,432323669				
13	1946	140268	252357	96671	12,4386	11,4791	11,8516	154,7187707	131,7690191	142,784	147,4154803	136,043641	0,959531	0,920700298	0,372383992	0,357314092				
14	1947	142022	262536	100072	12,4781	11,5136	11,8637	155,7040651	132,5640259	143,669	148,0374158	136,594862	0,964498	0,930256949	0,350092048	0,337663181				
15	1948	149889	285700	101304	12,5627	11,5259	11,9177	157,8213707	132,8459369	144,796	149,7183935	137,361883	1,036816	1,074988272	0,391809152	0,406234159				
16	1949	147122	277522	96784	12,5337	11,4802	11,899	157,0925199	131,7958409	143,889	149,1381854	136,60354	1,053419	1,109690574	0,418780483	0,441151116				
17	1950	163620	307946	100352	12,6377	11,5164	12,0053	159,7109488	132,6283738	145,541	151,7191609	138,258331	1,12124	1,257180119	0,488862661	0,548132584				
18								Сумма	186,803	171,041	175,592	2326,492636	1950,577656	2130,22	2187,023933	2002,65886	15,76272	16,63778086	4,55193253	4,726537746
19																				
20																				
21																				
22																				
23																				
24																				
25																				
26																				
27																				
28																				
29																				
30																				
31																				
32																				
33																				
34																				
35																				
36																				

Рисунок 1 - Модель Кобба-Дугласа

По данным ВВП США получено решение для коэффициентов α, β, A .

2.2 Модель Леонтьева (Межотраслевой баланс)

Пусть x_{ij} - промежуточный продукт, т.е. отрасль i изготавливает продукт для отрасли j

X_i - валовый продукт отрасли i

Y_i - конечный продукт отрасли i ($i = \overline{1, n}$).

Тогда валовый выпуск определяется по следующей формуле.

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i \quad (4)$$

Матрица прямых затрат определяется, как $a_{ij} = x_{ij}/X_j$. Тогда вектор валового выпуска можно определить, как $X = AX + Y \Rightarrow X = (E - A)^{-1}Y$, а конечный продукт $Y = (E - A)X$.

Определение 2.3. Если хотя бы для одного положительного Y уравнение межотраслевого баланса имеет неотрицательное решение, то матрица A продуктивна.

Определение 2.4. Матрица A продуктивна $\Leftrightarrow (E - A)$ имеет n положительных последовательностей главных миноров.

Определение 2.5. Матрица A продуктивна \Leftrightarrow когда матричный ряд $E + A + A^2 + \dots + A_k + \dots$ сходится.

Определение 2.6. Матрицей полных затрат называется обратная матрица Леонтьева $B = (E - A)^{-1}$

На рисунках 2-3 представлено решение индивидуального задания по модели Леонтьева. В первом задание вычислены объемы конечно продукта при увеличение валового выпуска каждой отрасли на 10%, 50%, 20% соответственно.

Kirill Zakharov					
Task 1					
A	40	18	75	21	Final Prod. Gross output
A	40	18	75	21	154
B	16	9	75	24	124
C	240	135	150	75	600
					matrix A
					0,25974 0,145161 0,125
					0,103896 0,072581 0,125
					1,558442 1,08871 0,25
					Identity Matrix
					1 0 0
					0 1 0
					0 0 1
					E-A
					0,74026 -0,14516 -0,125
					-0,1039 0,927419 -0,125
					-1,55844 -1,08871 0,75
					New X Volume of Y
				10%	169,4 8,4
				50%	186 64,9
				20%	720 73,5
Поскольку имеется положительный элемент Y и есть неотр. Решение для X, то A продуктивна					
При увеличении валового выпуска, конечный продукт сократился для первого и третьего продукта, однако увеличился для второго					

Рисунок 2 - Индивидуальное задание 1

Kirill Zakharov					
Task 2					
Matrix of direct costs	FP	x _{ij} = a _{ij} *x _j	Для начала найдем вектор валового выпуска		
0,3	0,1	0,2	270		Identity matrix
0,1	0,2	0,3	115		1 0 0
0,2	0,3	0,1	35		0 1 0
					0 0 1
E-A		Inverse E-A	X		
0,7	-0,1	-0,2	1,623711 0,386598 0,489691	500	
-0,1	0,8	-0,3	0,386598 1,520619 0,592784	300	
-0,2	-0,3	0,9	0,489691 0,592784 1,417526	250	
Теперь можно найти валовые выпуски отраслей x _i					
			150 30 50		
			50 60 75		
			100 90 25		

Рисунок 3 - Индивидуальное задание 2

Во втором задании вычислены валовые выпуски отраслей по заданной матрице прямых затрат и вектору конечной продукции. На рисунках 4-5 показано решение на Python.

```

matrix = np.array([])
yVector = np.array([])
print("Enter the values of matrix: ")
for i in range(n*n):
    matrix = np.append(matrix, float(input()))

print("Enter the final product vector: ")
for i in range(n):
    yVector = np.append(yVector, float(input()))
matrix = matrix.reshape((n, n))

def identityM(n):
    matrix = [[0 for i in range(n)] for j in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                matrix[i][j] = 1
    return matrix

invM = np.linalg.inv(identityM(n) - matrix)
print(f'Gross output vector: {np.matmul(invM, yVector)}')

```

Рисунок 4 - Модель Леонтьева

```

import numpy as np
n = int(input("Enter the number of rows: "))

matrix = np.array([])
yVector = np.array([])
print("Enter the values of A matrix: ")
for i in range(n*n):
    matrix = np.append(matrix, float(input()))

print("Enter the final product vector: ")
for i in range(n):
    yVector = np.append(yVector, float(input()))
matrix = matrix.reshape((3,3))

def identityM(n):
    matrix = [[0 for i in range(n)] for j in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                matrix[i][j] = 1
    return matrix

invM = np.linalg.inv(identityM(n) - matrix)
grossOutput = np.matmul(invM, yVector)

xMatrix = np.array([[0 for j in range(n)] for i in range(n)])
for i in range(n):
    for j in range(n):
        xMatrix[i][j] = matrix[i][j] * grossOutput[j]

print(f'Gross output vector:\n {xMatrix}')

```

Рисунок 5 - Индивидуальное задание

3 Динамические модели

3.1 Модель Солоу

Пусть имеется замкнутая односекторная экономика.

Y - ВВП

K - капитал

I - инвестиции

C - конечное потребление

L - трудовые ресурсы

Имеется баланс $Y = C + I$. Зависимость ВВП от ресурсов выражается функцией Кобба-Дугласа.

$$\begin{aligned} Y &= AK^\alpha L^\beta \\ Y &= C + I \\ I &= sY \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= \gamma L \quad (L(0) = L_0) \\ \frac{\partial K}{\partial t} &= -\mu K + I \quad (K(0) = K_0) \end{aligned} \tag{5}$$

где γ - темп прироста трудовых ресурсов, s - склонность к сбережению, A - научно-технический прогресс. Пусть $y = Y/L, k = K/L, i = I/L$. Тогда получим модель Солоу в относительных показателях.

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -(\lambda + \mu)k + sAk^\alpha \tag{6}$$

Равновесие равно $\hat{k} = \left(\frac{sA}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Интервалы	Рост
$\left(0; \left(\frac{\alpha s A}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$	Ускоренный рост
$\left(\left(\frac{\alpha s A}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}; \left(\frac{s A}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$	Насыщенный рост
$\left(\left(\frac{s A}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}; +\infty\right)$	Падение

Конечно-разностное представление: $k(t + \Delta) = k(t) + \Delta t(-(\lambda + \mu)k(t) + sAk(t)^\alpha)$

На рисунке 6 показана реализация модели Солоу на Python. На графике представлены три решения с разными задачами Коши. Также при помощи горизонтальных прямых график разбит на интервалы, описанные ранее. Для численного решения здесь и далее используется метод численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений Рунге-Кутта порядка 4 (рис. 7).

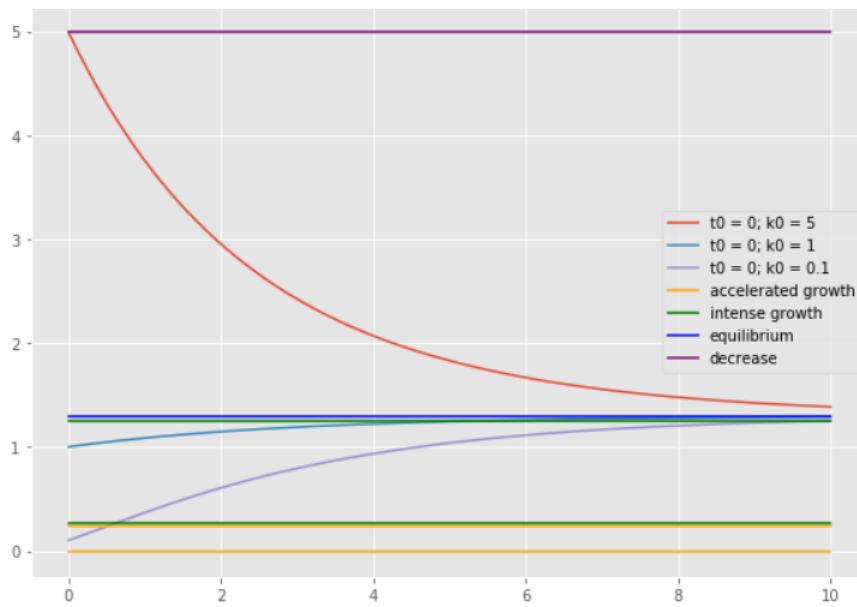


Рисунок 6 - Модель Солоу

```
def runge_Kutt(f, x0, y0, h, b):
    x = x0
    y = y0
    array = np.array([])
    arrayx = np.array([])
    while x < b:
        k1 = f(x, y)
        k2 = f(x + h/2, y + (h*k1)/2)
        k3 = f(x + h/2, y + (h*k2)/2)
        k4 = f(x + h, y + h*k3)
        y = y + h*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6
        array = np.append(array, y)
        arrayx = np.append(arrayx, x)
        x += h
    return arrayx, array
```

Рисунок 7 - Метод Рунге-Кутта

3.2 SIR модель

Пусть $S(t)$ - число восприимчивых к инфекции

$I(t)$ - число инфицированных

$R(t)$ - число переболевших инфекций

N - число популяции

β - коэффициент интенсивности контактов

γ - коэффициент интенсивности выздоровления

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta IS}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \end{aligned} \tag{7}$$

Далее представлена реализация данной модели в среде AnyLogic. На рисунке 8

показана модель при $\beta = 3/14, \gamma = 1/14$, где знаменатель это среднее время выздоровления. По данной модели видно, что сперва идет рост инфицированных, затем он доходит до своего пика (за этот пик отвечают параметры β, γ). После пика начинается спад и спустя какое-то время видна стабилизация, скорость выздоровления начинается снижаться, так как после пика распространение эпидемии сокращается.

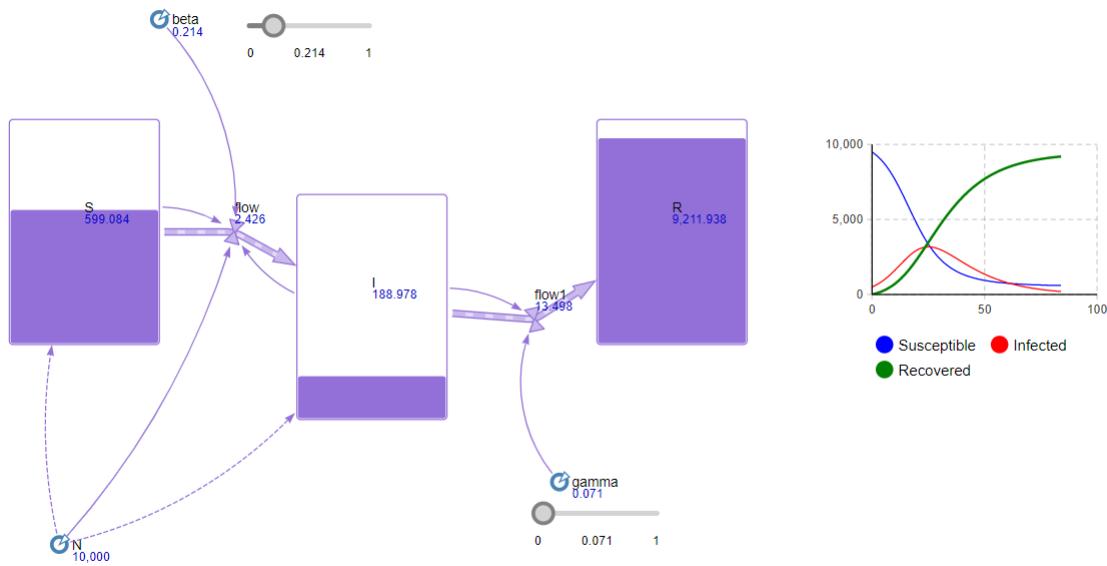


Рисунок 8 - SIR модель ($\beta = 3/14, \gamma = 1/14$)

На рисунке 9 представлена SIR модель с увеличенным параметром β . Как видно при его увеличении пик распространения эпидемии наступает намного быстрее, что соответствует если в действительности увеличить число контактов.

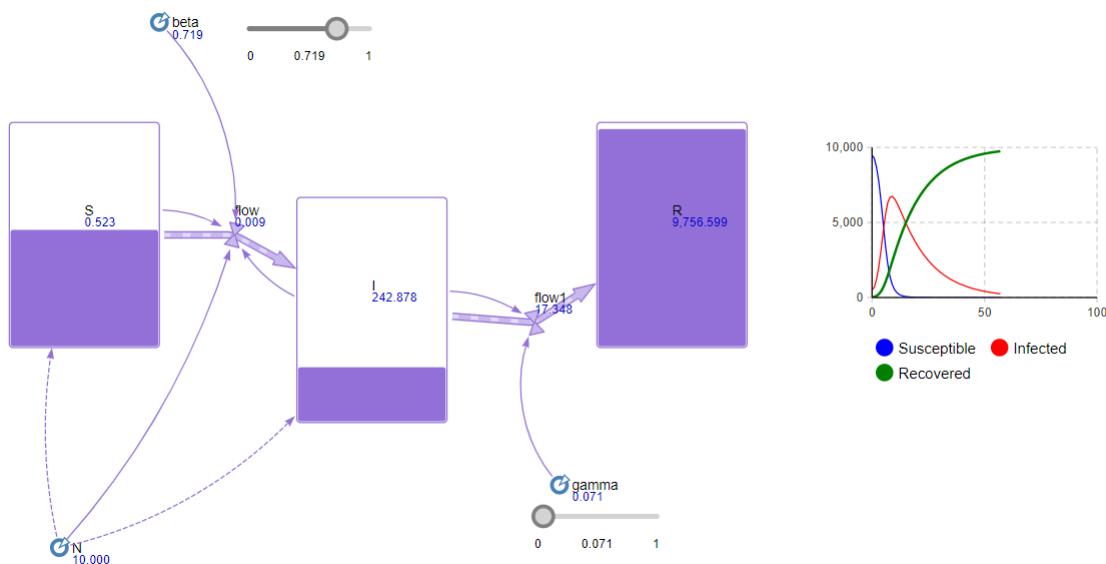


Рисунок 9 - SIR модель с увеличенным β

На рисунке 10 увеличен параметр γ - коэффициент интенсивности выздоровления. Увеличивая его, люди слишком быстро выздоравливают и соответственно пик эпидемии наступает рано и незначителен по своей величине.

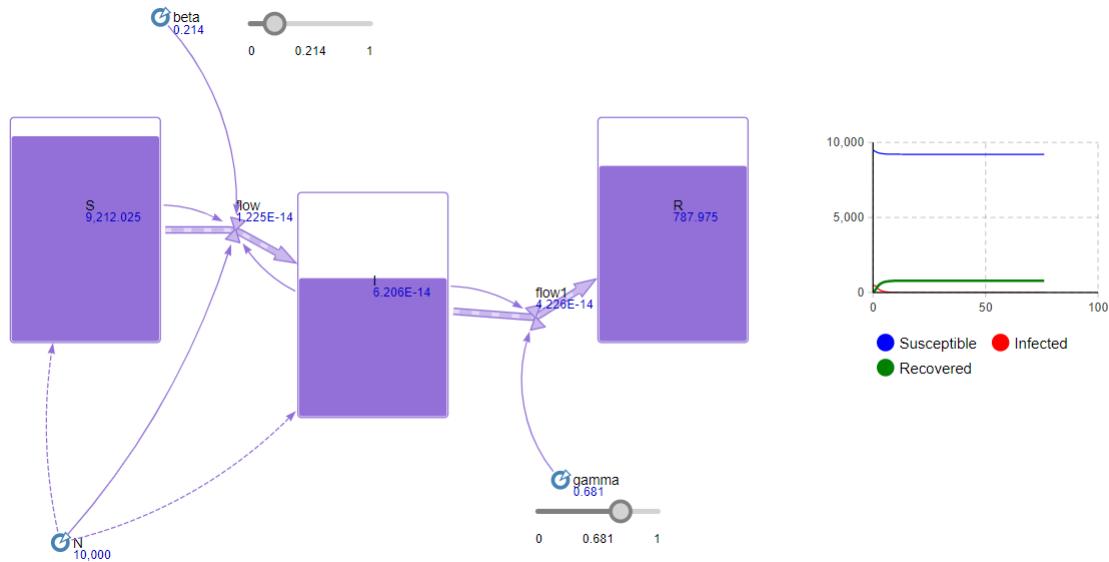


Рисунок 10 - SIR модель с увеличенным γ

3.3 SEIRD модель

$E(t)$ - число носителей заболевания

D - число умерших

μ - уровень смертности

$$\delta = \frac{1}{\text{ср.инк.период}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{-\beta IS}{N} \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - \delta E \\ \frac{dI}{dt} &= \delta E - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \\ \frac{dD}{dt} &= \mu I \end{aligned} \tag{8}$$

В данной модели в отличие от предыдущий, люди заболевают не сразу, а есть некоторый инкубационный период, то есть сначала они получают статус exposed, а только затем infected. Также в данной модели есть убыль популяции, за счет смертности. На рисунке 11 представлена реализация с введением в SEIRD модель вакцинации. Вакцинация по факту дает возможность перейти из восприимчивого к агенту с иммунитетом, но также есть и вероятность рецидивы, когда вакцина не подействовала.

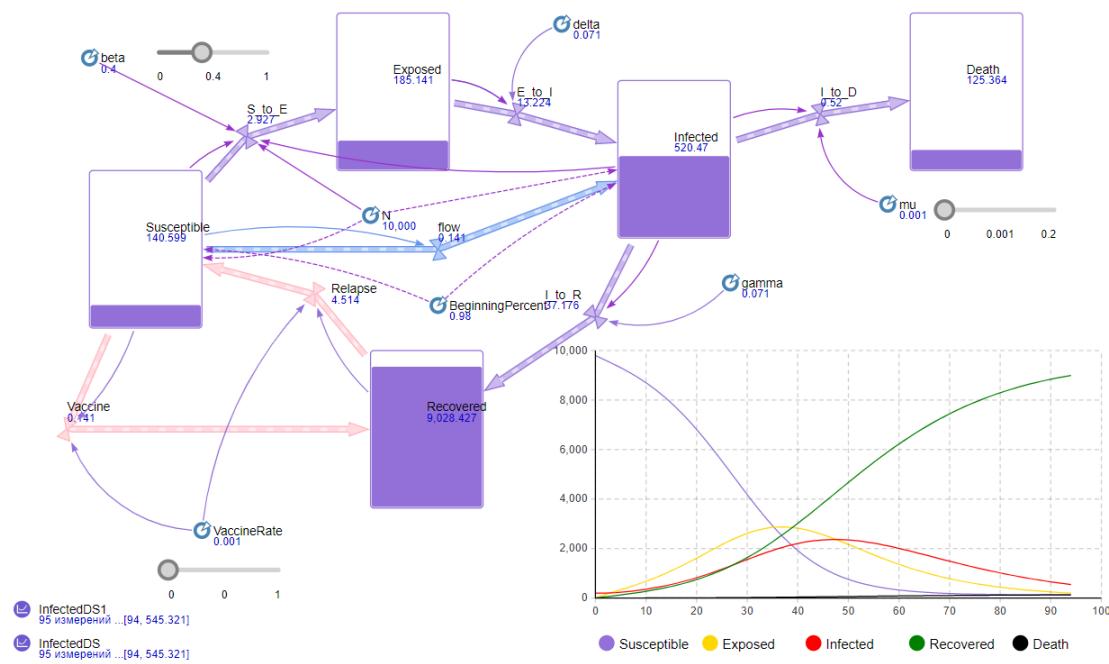


Рисунок 11 - SEIRD модель

На рисунке 12 увеличен уровень вакцинации, что приводит к значительному увеличению числа выздоровевших.

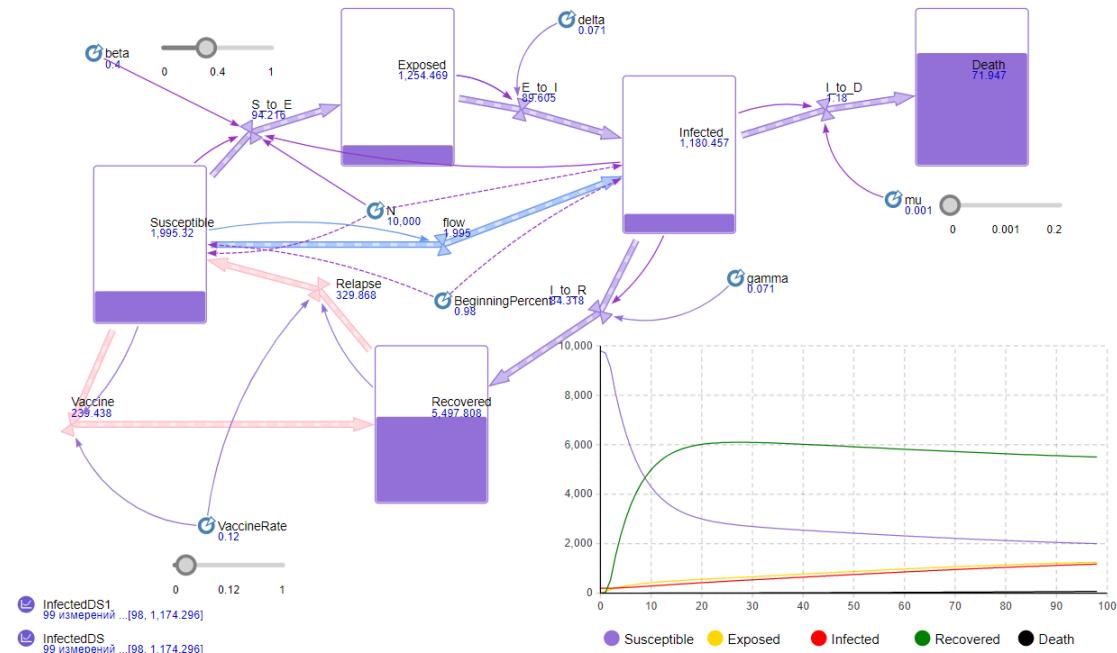
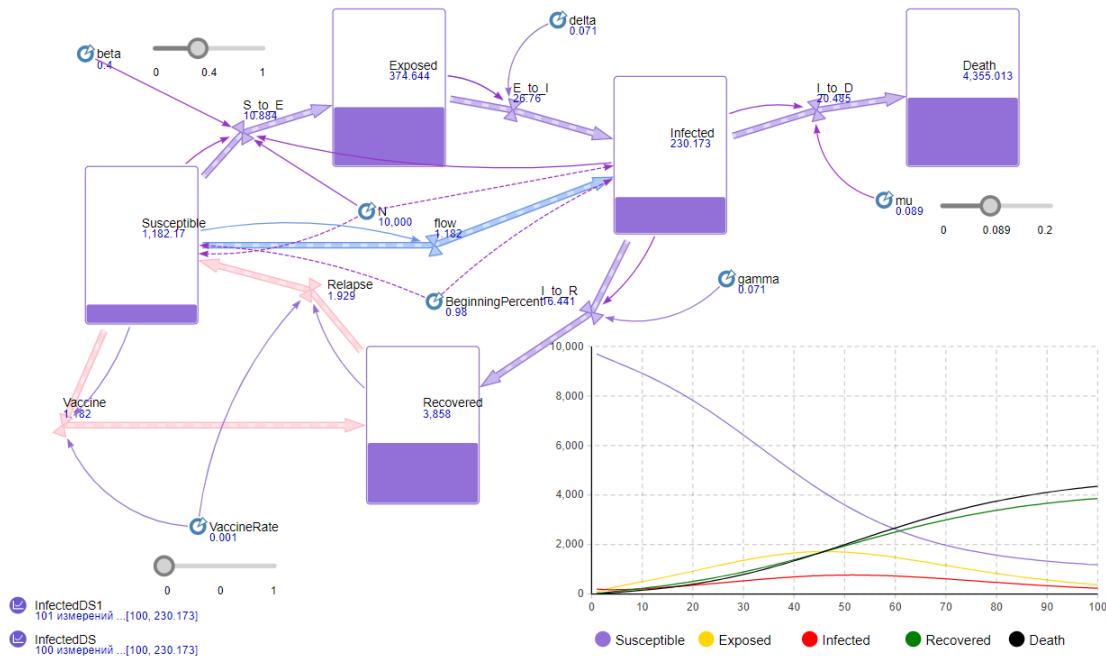


Рисунок 12 - SEIRD модель с увеличенной вакцинацией

На рисунке 13 показана модель при увеличение уровня смертности. В следствии сильное сокращения числа популяции.

Рисунок 13 - SEIRD модель с увеличенным μ

3.4 Модель Лотки-Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \quad (9)$$

$x(t)$ - число жертв

$y(t)$ - число хищников

a - коэффициент рождаемости жертв

b - коэффициент убыли жертв

c - коэффициент убыли хищников

d - коэффициент рождаемости хищников

Первой стационарной точкой является $(0, 0)$. Возьмем из системы линейную часть и составим матрицу.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} \quad (10)$$

Решая данной характеристическое уравнение получим $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -c \Rightarrow$ данная точка является седлом. Теперь приравняем правые части системы к 0 и решим ее. Получим вторую стационарную точку $\bar{x} = \frac{c}{d}$, $\bar{y} = \frac{a}{b}$. Построим матрицу Якоби, подставив \bar{x}, \bar{y} .

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ -\frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 + ac = 0$, получаем два мнимых корня, что свидетельствует о том что данная стационарная точка является центром (рис. 14).

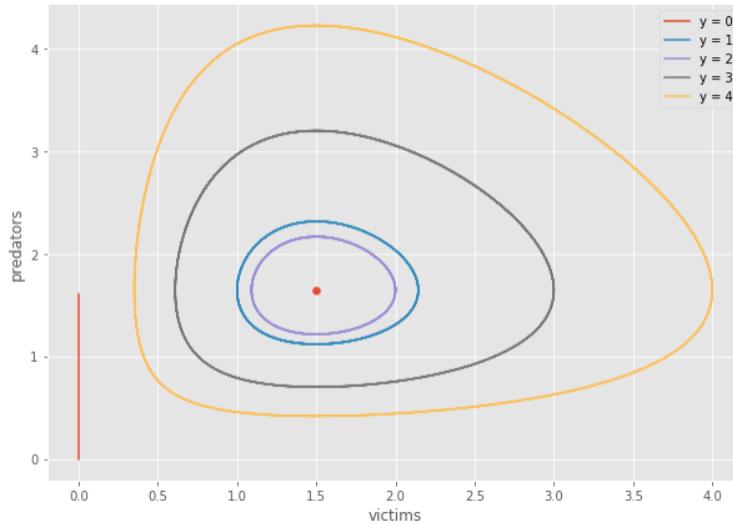


Рисунок 14 - Состояния равновесия

На рисунке 15 приведена реализации модели Лотки-Вольтерра в AnyLogic.

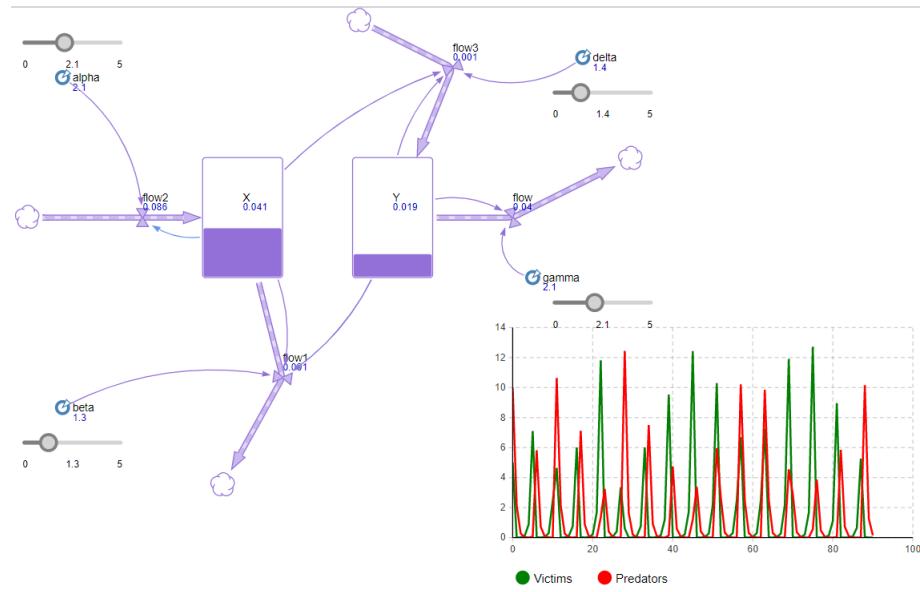


Рисунок 15 - Модель Лотки-Вольтерра AnyLogic

На рисунке 16 приведена реализации модели Лотки-Вольтерра на Python.

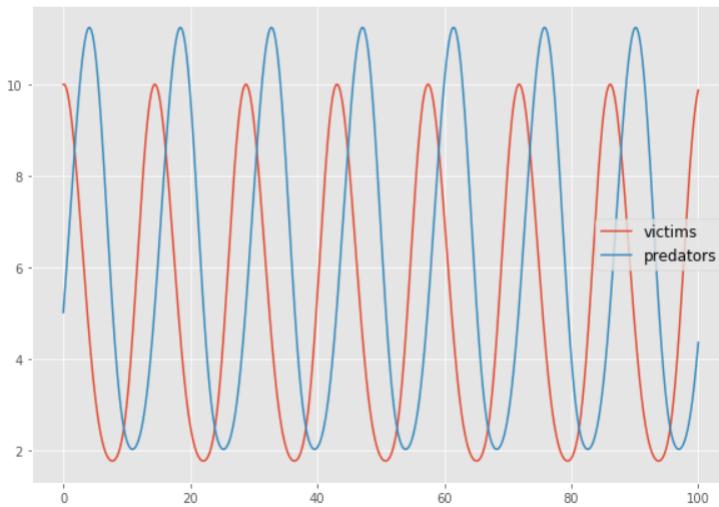


Рисунок 16 - Модель Лотки-Вольтерра Python

3.5 Взаимодействие двух конкурирующих видов

x_1 - количество особей первого типа x_2 - количество особей второго типа

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 - b_{11} x_1^2 - b_{12} x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 - b_{21} x_1 x_2 - b_{22} x_2^2 \end{cases} \quad (12)$$

Приравняем к 0 правые части системы.

$$\begin{cases} x_1(a_1 - b_{11}x_1 - b_{12}x_2) = 0 \\ x_2(a_2 - b_{21}x_1 - b_{22}x_2) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Получим 4 стационарные точки.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{a_2}{b_{22}} \end{cases}; \quad (14)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a_1}{b_{11}} \\ x_2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = \frac{a_2 b_{12} - a_1 b_{22}}{b_{12} b_{21} - b_{22} b_{11}} \\ x_2 = \frac{a_1 b_{21} - a_2 b_{11}}{b_{12} b_{21} - b_{22} b_{11}} \end{cases}$$

Для численного анализа данной модели модифицируем метод Рунге-Кутта для двух функций (рис. 17).

```

def runge_Kutt(f, g, t0, x0, y0, h, b):
    t = t0
    x = x0
    y = y0
    arrayX = np.array([])
    arrayY = np.array([])
    arrayT = np.array([])
    while t < b:
        k1 = g(t, x, y)
        q1 = f(t, x, y)

        k2 = g(t + h/2, x + (h*q1)/2, y + (h*k1)/2)
        q2 = f(t + h/2, x + (h*q1)/2, y + (h*k1)/2)

        k3 = g(t + h/2, x + (h*q2)/2, y + (h*k2)/2)
        q3 = f(t + h/2, x + (h*q2)/2, y + (h*k2)/2)

        k4 = g(t + h, x + h*q3, y + h*k3)
        q4 = f(t + h, x + h*q3, y + h*k3)

        y = y + h*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6
        x = x + h*(q1 + 2*q2 + 2*q3 + q4)/6

        arrayX = np.append(arrayX, x)
        arrayT = np.append(arrayT, t)
        arrayY = np.append(arrayY, y)

        t += h
    return arrayT, arrayX, arrayY

```

Рисунок 17 - Метод Рунге-Кутта для двух функций

На рисунке 18 приведены значения параметров для которых производился расчет.

```

a1 = 1
a2 = 0.75
b11 = 1
b12 = 0.85
b21 = 0.55
b22 = 0.55

def fx(t, x, y):
    return a1*x - b11*x**2 - b12*x*y

def fy(t, x, y):
    return a2*y - b21*x*y - b22*y**2

def fxl(t, x, y):
    return a1*math.log(x) - b11*math.log(x)**2 - b12*math.log(x)*math.log(y)

def fyl(t, x, y):
    return a2*math.log(y) - b21*math.log(x)*math.log(y) - b22*math.log(y)**2

p1, p2, p3 = runge_Kutt(fxl, fyl, 0, 4, 5, 0.01, 100)
print(f"Solution: x = {p2[-1]}, y = {p3[-1]}")

```

Рисунок 18 - Параметры

На рисунке 19 показано численное решение. Как видно сначала две популяции убывали, но затем вторая начала рост до некоторого равновесного состояния.

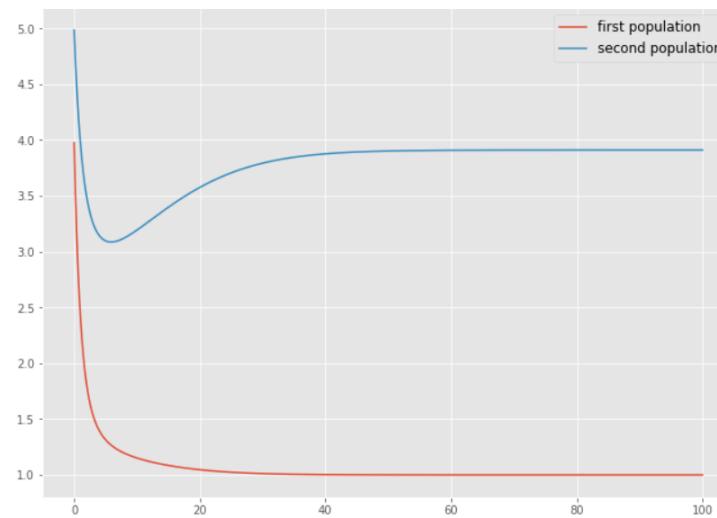


Рисунок 19 - Два конкурирующих вида

Теперь посмотри на результат в плоскости двух популяций. На рисунке 20 приведен график векторного поля, то есть касательных к интегральной кривой. Здесь видны равновесные состояния описанные ранее. Для точки $(0, 0)$ неустойчивый узел, все вектора расходятся от данной точки. Точки $(0, \frac{a_2}{b_{22}})$, $(\frac{a_1}{b_{11}}, 0)$ являются устойчивыми узлами и следовательно к ним вектора сходятся.

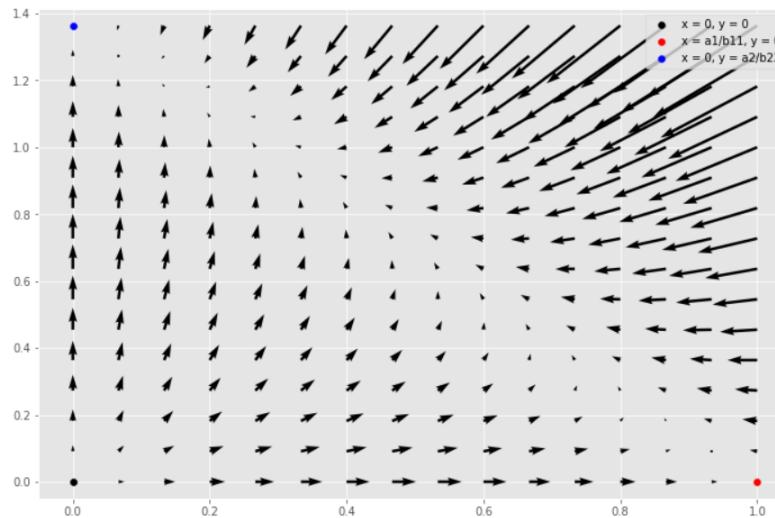


Рисунок 20 - Два конкурирующих вида

Для того чтобы увидеть 4 точку, которая является седловой обратимся к рисунку 21. Здесь представлен *dashboard* по данной модели и отчетливо видны все 4 точки. Данный график реализован при помощи библиотеки *Plotly*.



Рисунок 21 - Два конкурирующих вида (dashboard)

3.6 Переход к полярным координатам

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (15)$$

Перейдем к полярным координатам.

$$\begin{cases} x_1(t) = r(t) \cos \varphi(t) \\ x_2(t) = r(t) \sin \varphi(t) \end{cases} \quad (16)$$

Выполним подстановку и получим выражения для \dot{r} и $\dot{\varphi}$.

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi + r \dot{\varphi}(-\sin \varphi) = r \cos \varphi - r \sin \varphi - r^3 \cos \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = r \cos \varphi + r \sin \varphi - r^3 \sin \varphi \end{cases} \quad | * \cos \varphi + | * \sin \varphi \quad (17)$$

$$\begin{cases} \dot{r} \cos^2 \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi = r \cos^2 \varphi - r \cos \varphi \sin \varphi - r^3 \cos^2 \varphi \\ \dot{r} \sin^2 \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi = r \sin \varphi \cos \varphi + r \sin^2 \varphi - r^3 \sin^2 \varphi \end{cases} \quad (18)$$

Тем самым получаем выражение для $\dot{r}(t) = r(t)(1 - r^2(t))$. Теперь умножим первое уравнения на $\sin \varphi$, второе на $\cos \varphi$ и вычтем из первого второе.

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi + r \dot{\varphi}(-\sin \varphi) = r \cos \varphi - r \sin \varphi - r^3 \cos \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = r \cos \varphi + r \sin \varphi - r^3 \sin \varphi \end{cases} \quad | * \sin \varphi - | * \cos \varphi \quad (19)$$

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi \sin \varphi - r \dot{\varphi} \sin^2 \varphi = r \cos \varphi \sin \varphi - r \sin^2 \varphi - r^3 \cos \varphi \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi \cos \varphi + r \dot{\varphi} \cos^2 \varphi = r \cos^2 \varphi + r \sin \varphi \cos \varphi - r^3 \sin \varphi \cos \varphi \end{cases} \quad (20)$$

Таким образом получим систему (1) в полярных координатах.

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (21)$$

Стационарные точки для данной системы $r = 0$ и $r = 1$.

Устойчивый предельный цикл (рис. 22):

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (22)$$

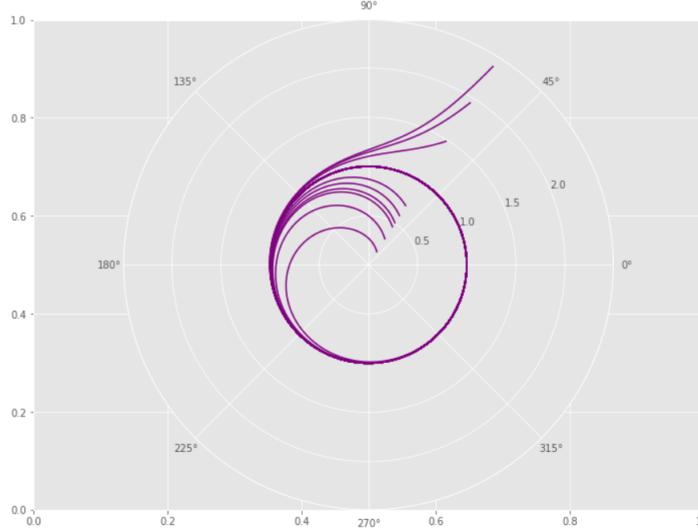


Рисунок 22 - Устойчивый предельный цикл

Неустойчивый предельный цикл (рис. 23):

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (23)$$

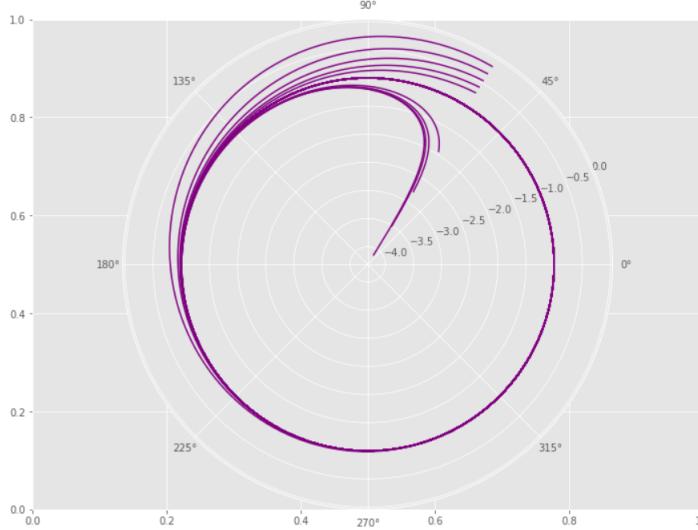


Рисунок 23 - Неустойчивый предельный цикл

Полуустойчивый предельный цикл (рис. 24):

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r)^2 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (24)$$

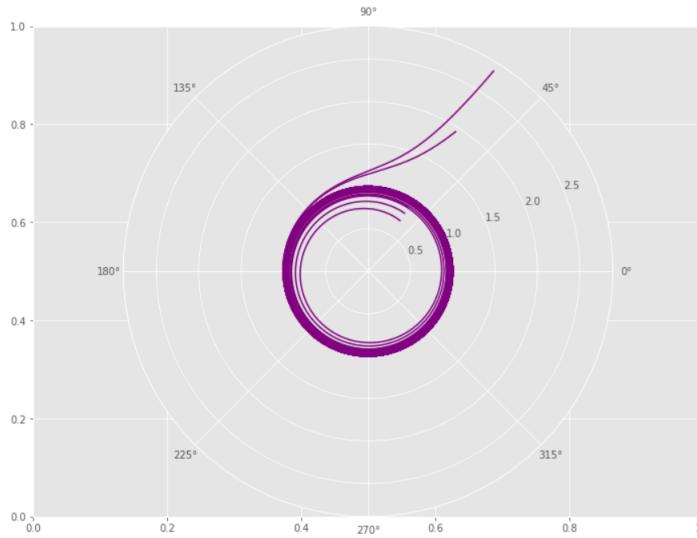


Рисунок 24 - Полуустойчивый предельный цикл

3.7 Модель Самуэльсона-Хикса

3.7.1 Дискретная форма

Предполагается замкнутая экономика, предложение эластично, цены и процентная ставка фиксированы. Рассмотрим уравнение

$$Y_{t+1} = C(Y_t) + I_t \quad (25)$$

Пусть спрос зависит от Y_t линейно, т.е. $C(Y_t) = C_a + cY_t$, а инвестиции равны $I_t = r(Y_t - Y_{t-1}) + I_a$, где C_a - постоянное потребление, I_a - постоянные инвестиции, r - коэффициент акселерации, c - склонность к потреблению. $A = C_a + I_a$ - автономные расходы. Получим следующее конечно-разностное уравнение.

$$Y_{t+1} = C_a + I_a + cY_t + r(Y_t - Y_{t-1}) \quad (26)$$

Равновесие определим из предположения, что автономные расходы постоянны и объем ВВП стабилизируется на определенном уровне, т.е. $Y_t = Y_{t-1} = \dots = Y_{t-n} = \hat{Y}$. Тогда получим уравнение

$$\hat{Y} = A + c\hat{Y} + r(\hat{Y} - \hat{Y}) = A + c\hat{Y} \quad (27)$$

$\Rightarrow \hat{Y} = \frac{A}{1-c}$. Величина $\frac{1}{1-c}$ называется мультипликатором автономных расходов.

Рассмотрим уровень дохода при изменения коэффициента акселерации:

- Если $0 < r < 1$, то равновесие восстановится через некоторое время при новом уровне дохода (рис. 25).

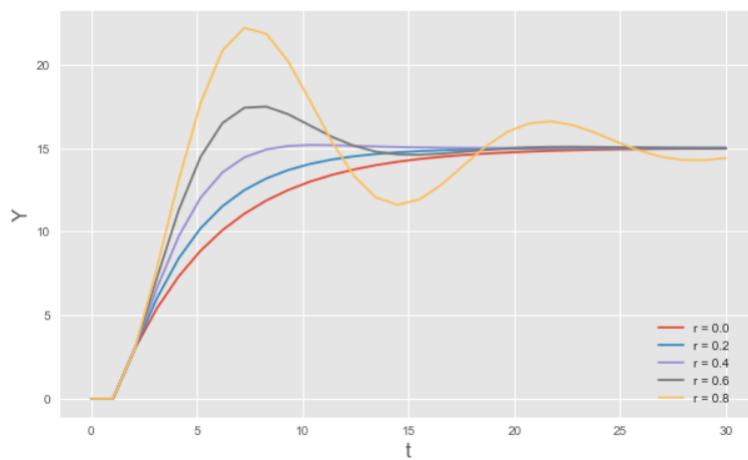


Рисунок 25 - Равновесное состояние

- Если $r > 1$, то при нарушении равновесия единожды, оно больше не восстановится (рис. 26).

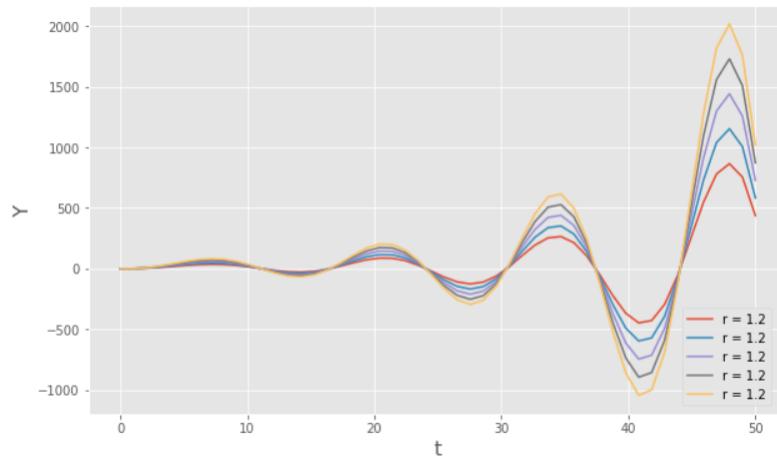


Рисунок 26 - Уход от равновесного состояния

- Если $r = 1$, то значение дохода будет колебаться с постоянным периодом (рис. 27).

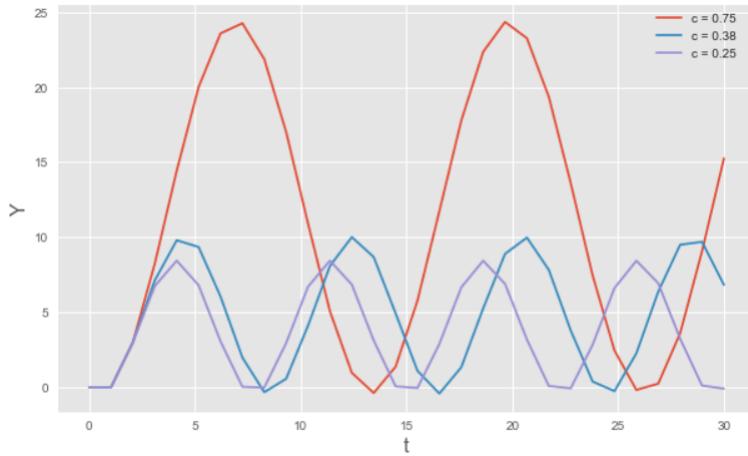


Рисунок 27 - Постоянные колебания

3.7.2 Непрерывная форма

Перейдя от конечных разностей получим следующее уравнение.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(1-r) \frac{\partial y}{\partial t} - (1-c)y + A \quad (28)$$

Понизим порядок уравнения, приведя его к НСДУ.

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = x \\ \frac{\partial x}{\partial t} = -(1-r)x - (1-c)y + A \end{cases} \quad (29)$$

Отсюда легко получить стационарную точку приравняв правые части к 0. Получим $x = 0, y = \frac{A}{1-c}$. Определим состояния равновесия в стационарной точке при помощи корней характеристического уравнения. Составим матрицу Якоби.

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -(1-r) & -(1-c) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Найдем собственные значения при следующих параметрах:

1. $r = 1.2; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0.1 \pm 0.435i$.

Т.е. при $r > 1$ получаем неустойчивый фокус (рис. 28, 29).

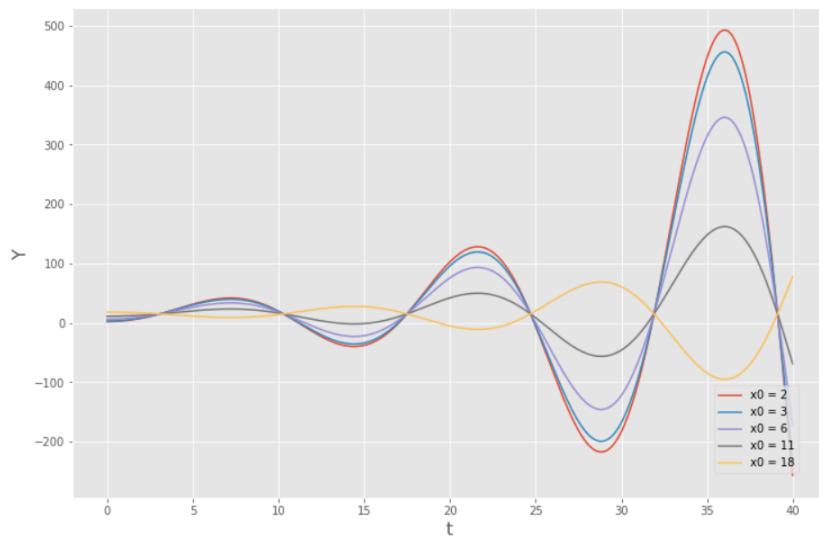


Рисунок 28 - Уход от равновесного состояния

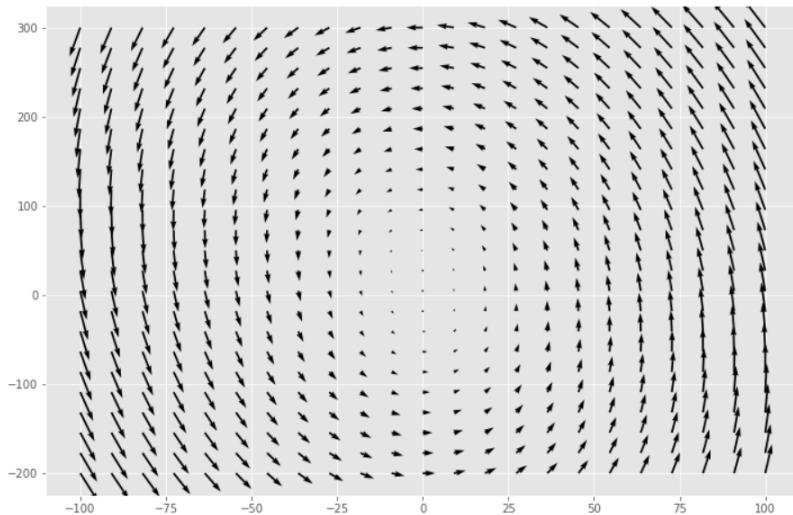


Рисунок 29 - Векторное поле

$$2. r = 0.8; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -0.1 \pm 0.435i.$$

При $0 < r < 1$ получаем устойчивый фокус (рис. 30-32). На рисунке 31 видно состояние устойчивый фокус в плоскости XY , для разных задач Коши.

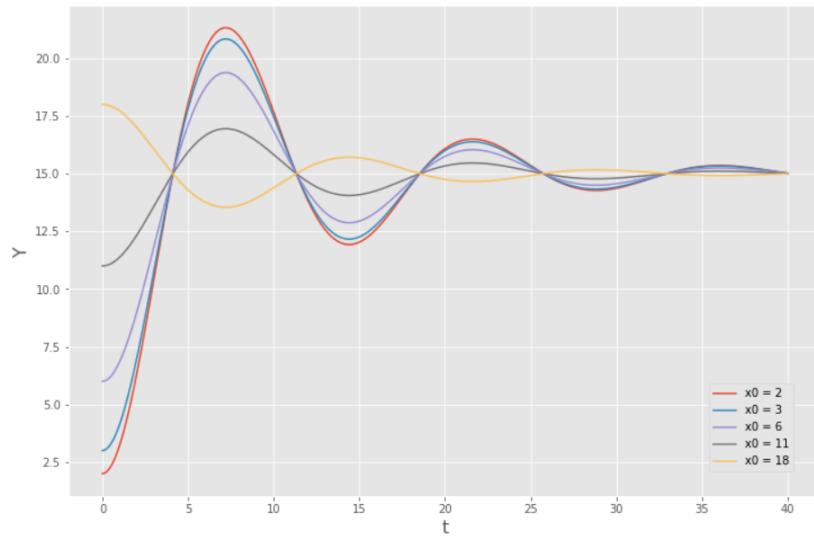
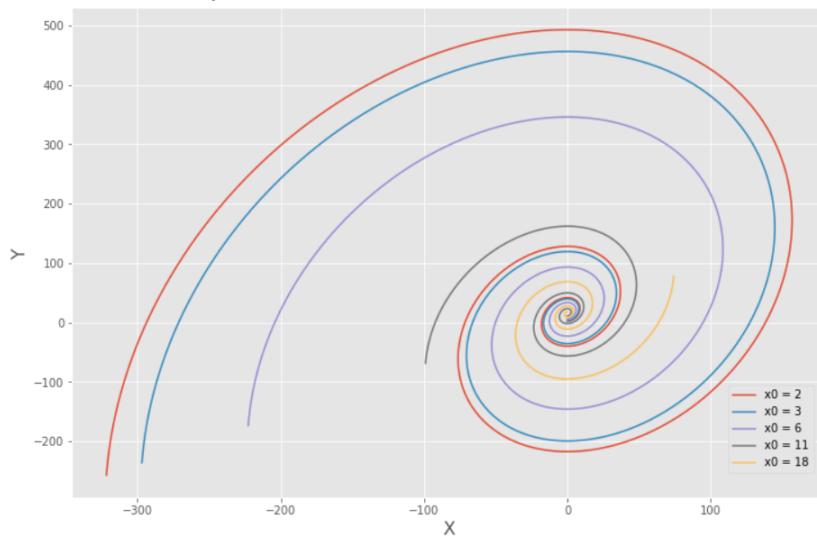


Рисунок 30 - Равновесное состояние

Рисунок 31 - График в плоскости XY

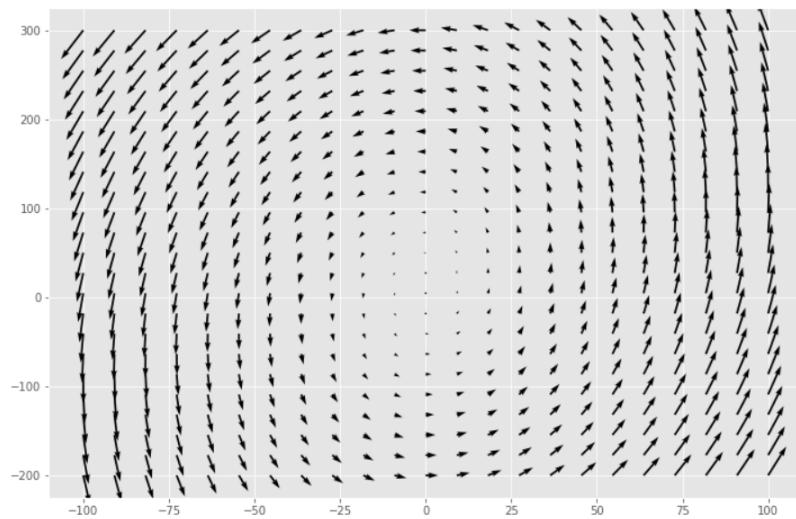


Рисунок 32 - Векторное поле

$$3. \quad r = 1; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 0.447i.$$

И наконец при $r = 1$ получаем центр (рис. 33, 34). На рисунке отчетливо видно, что устанавливаются колебания с постоянным периодом.

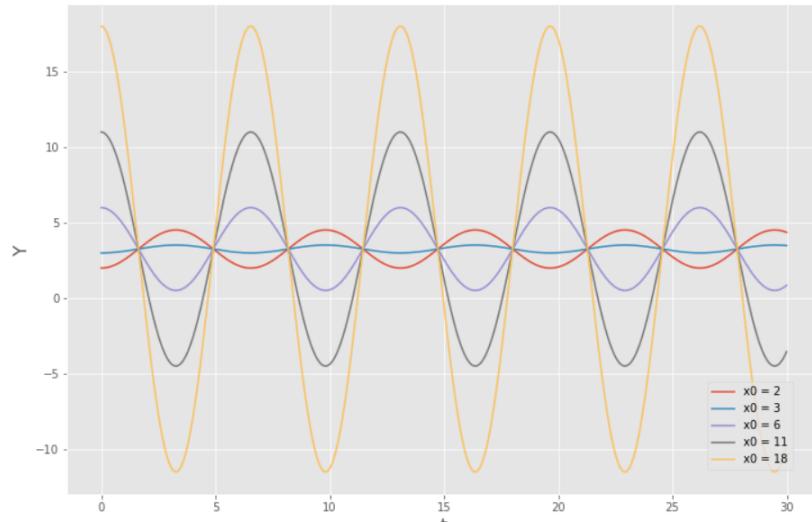
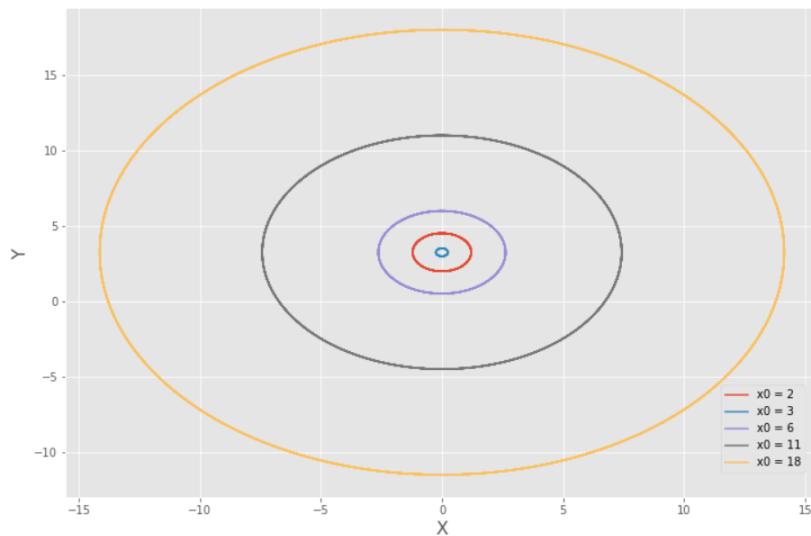


Рисунок 33 - Постоянные колебания

Рисунок 34 - График в плоскости XY

3.8 Маятник Фуко

Данная модель используется для экспериментальной демонстрации суточного вращения Земли. Суточное вращение влияет на постепенный поворот плоскости колебаний маятника. Пусть L - длина нити маятника

ω - угловая скорость

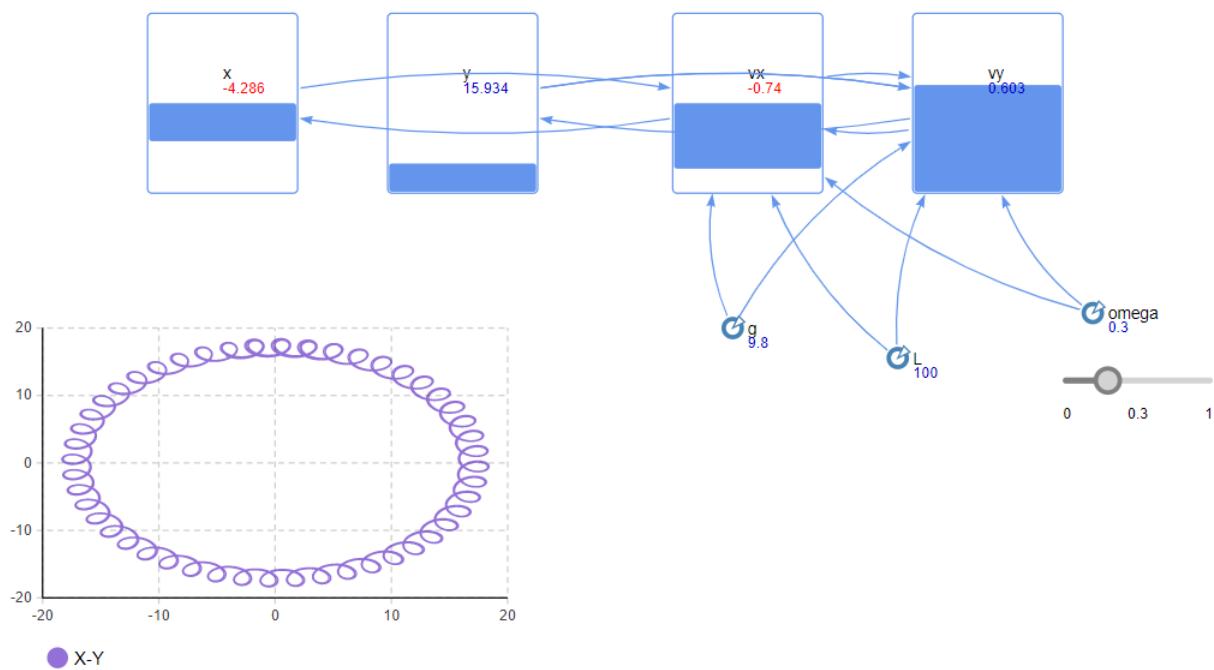
g - ускорение свободного падения

x, y - координаты

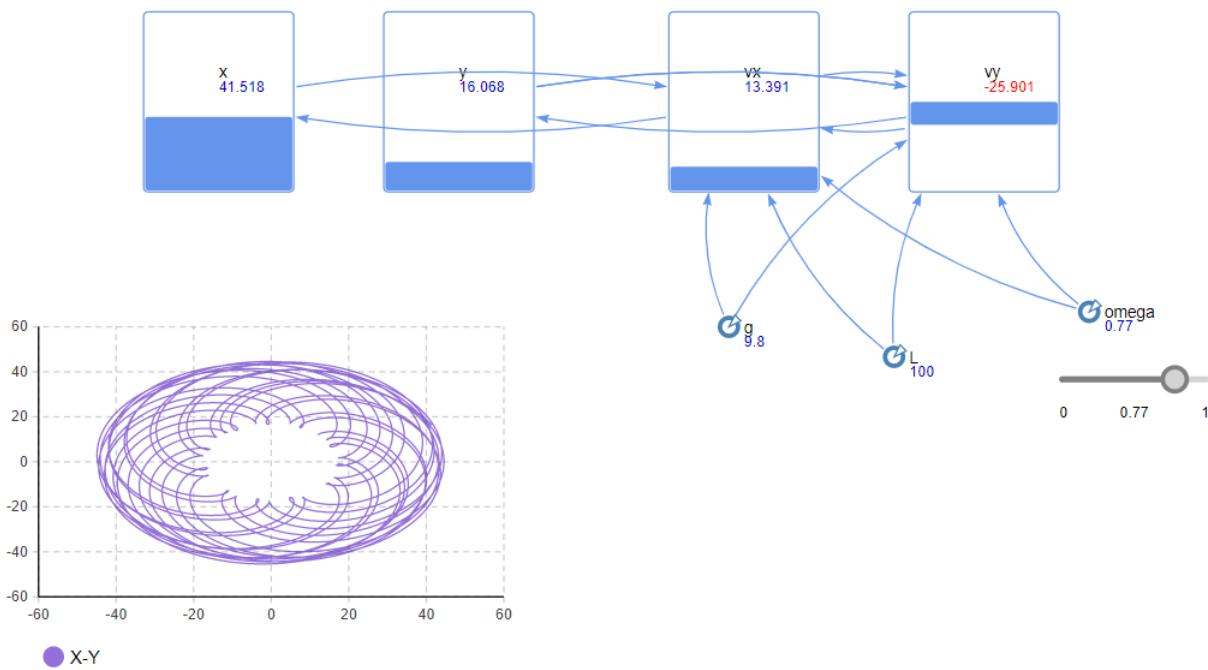
v_x, v_y - скорости

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= 2v_y\omega + \omega^2x - g\frac{x}{L} \\ \frac{dv_y}{dt} &= -2v_x\omega + \omega^2y - g\frac{y}{L} \\ \frac{dx}{dt} &= v_x \\ \frac{dy}{dt} &= v_y \end{aligned} \tag{31}$$

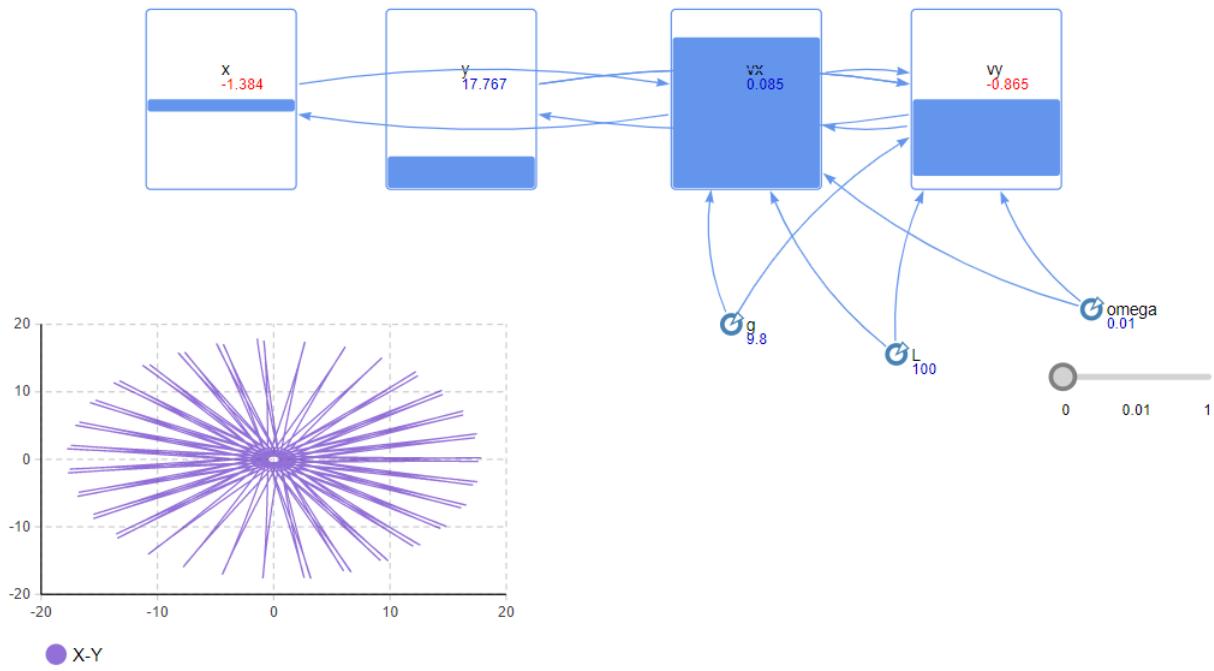
На рисунке 35 приведена реализация маятника Фуко в программе *AnyLogic* с угловой скоростью 0.3. Длина нити равна 100, а за ускорение свободного падения взята величина 9.8.

Рисунок 35 - Маятник Фуко $\omega = 0.3$

При довольно большой скорости, амплитуда колебаний сильно растет и видно что маятник не проходит через центральную точку (рис. 36).

Рисунок 36 - Маятник Фуко $\omega = 0.77$

При угловой скорости $\omega = 0.01$ видно, что эффект вращения плоскости колебаний сильнее всего виден на полюсах (рис. 37).

Рисунок 37 - Маятник Фуко $\omega = 0.01$

3.9 Пружинные маятники

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_1 = 2 \ddot{x}_2 = -k_1 x_2 + k_2(x_1 - x_2) \end{cases} \quad (32)$$

где k_1, k_2 - жесткости пружин 1 и 2, m_1, m_2 - массы пружин, x_1, x_2 - координаты смещения по оси X . Преобразуем данную систему, сведя ее к ЛИСДУ. Пусть $v_1 = \dot{x}_1, v_2 = \dot{x}_2$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{v}_1 = -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = v_2 \\ \dot{v}_2 = -\frac{k_1}{m_2}x_2 + \frac{k_2}{m_2}(x_1 - x_2) \end{cases} \quad (33)$$

На рисунке 38 представлен метод Рунге-Кутты обобщенный на случай n функций и система уравнений для n пружинных маятников.

```

def runge_Kutt(functions, t0, initial, parameters, h, b):
    variables = [initial]
    arrayT = [t0]

    while arrayT[-1]<b:
        k1 = np.array(functions(variables[-1], parameters))
        k2 = np.array(functions(variables[-1]+(h*k1)/2, parameters))
        k3 = np.array(functions(variables[-1]+(h*k2)/2, parameters))
        k4 = np.array(functions(variables[-1]+h*k1, parameters))

        variables.append(variables[-1] + h*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6)
        arrayT.append(arrayT[-1]+h)

    return arrayT, variables

def pend_functions(variables, parameters):
    n = len(variables)//2
    x = variables[:n]
    v = variables[n:]
    k = parameters[:n]
    m = parameters[n:]

    d = v
    d = np.append(d, -k[0]*x[0]/m[0] + k[1]*(x[1]-x[0])/m[0])

    for i in range(1, n-1):
        d = np.append(d, k[i]*(x[i-1]-x[i])/m[i] + k[i+1]*(x[i+1]-x[i])/m[i])
    d = np.append(d, -k[-1]*x[-1]/m[-1] + k[-2]*(x[-2]-x[-1])/m[-2])
    return d

```

Рисунок 38 - Система уравнений маятников

На рисунке 39 представлена реализация модели движения пружинных маятников.

```

n = len(initial)//2
fig, ax = plt.subplots()
ax.axis([0, n+3, -1.5, 1.5])
point, = ax.plot([], [], marker='o')
x1 = np.array(range(1, n + 3))
y = [0]*(n+2)
def update(t):
    x = x1 + np.insert(p2[t][:n], 0, 0), 0)
    point.set_data(x, y)
    return point,

```

res = FuncAnimation(fig, update, interval=1, frames=range(len(p1)), repeat=True, blit=True)

plt.show()

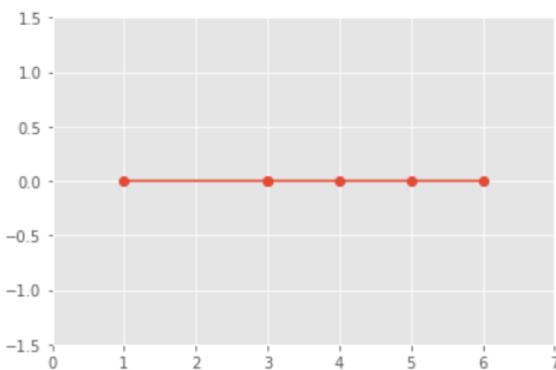


Рисунок 39 - Визуализация пружинных маятников

На рисунке 40 представлен график колебаний одного из маятников во времени.

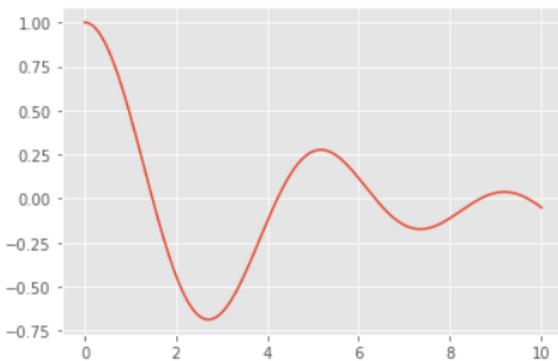


Рисунок 40 - График колебаний

4 Модели в частных производных

4.1 Модель распространения тепла в тонком стержне

Предположения по модели:

- теплоизолированная боковая поверхность;
- однородный тонкий стержень;
- в любой точке поперечного сечения температура в момент времени t одинакова;
- начальное распределение температуры известно.

Пусть $u(x, t)$ - температура в поперечном сечении с координатой x в момент времени t ;

ρ - плотность материала, из которого изготовлен стержень;

C - удельная теплоемкость;

λ - коэффициент теплопроводности;

S - площадь поперечного сечения стержня.

Рассмотрим малый участок стержня $[x, x + \Delta x]$, а Δu - изменение температуры на этом участке.

$$\begin{aligned}
 \Delta Q &= C \cdot m \cdot \Delta u \\
 \Delta Q &= CS\Delta x \rho \Delta u \\
 \Delta Q &= Q_L - Q_R \\
 \Delta Q &= -\lambda S \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta t + \lambda S \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} \Delta t \\
 CS\Delta x \rho \Delta u &= \lambda S \Delta t \left(\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \\
 \frac{\Delta u}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{C\rho} \cdot \frac{\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}}{\Delta x}
 \end{aligned} \tag{34}$$

При $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0, a = \sqrt{\frac{\lambda}{C\rho}}$ получаем уравнение теплопроводности.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (35)$$

Начальное условие: $u(x, 0) = f(x)$

Границные условия: $u(0, 0) = u_0, u(0, t) = u_0, u(L, 0) = u_L, u(L, t) = u_L$ Рассмотрим в качестве начальной функции распределения температуры треугольное распределение.

$$f_t(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & \text{if } x \in [a, c] \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & \text{if } x \in [c, b] \\ 0, & \text{if } x \notin [a, b] \end{cases} \quad (36)$$

Для решения уравнения теплопроводности воспользуемся методом сеток. Сначала генерируем начальное распределение температуры в стержне при помощи параболического распределения. В качестве граничных условий берем нулевую температуру (рис. 41).

```
def solution(f, N=20, L=1, dt=0.5):
    x = np.linspace(0, 1, N)
    initial_temp = [f(i, 0, L) for i in x]
    matrix = [initial_temp]

    for j in range(t):
        matrix.append([0]*N)

    for j in range(t):
        for i in range(1, N-1):
            # matrix[j+1][i] = (matrix[j][i-1] + matrix[j][i+1])/2
            matrix[j+1][i] = matrix[j][i]*(1-2*a**2*dt/dx**2)+a**2*dt/dx**2*(matrix[t][i+1]+matrix[t][i-1])
    return matrix
```

Рисунок 41 - Метод сеток

На рисунке 42 представлено численное решение в трехмерной системе координат. По оси Z температура стержня в момент времени t .

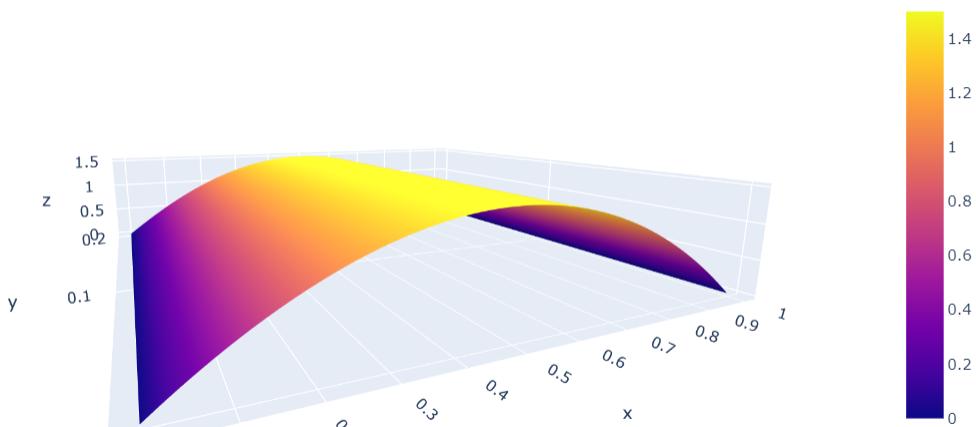


Рисунок 42 - Уравнение теплопроводности

4.2 Колебание пластины

Рассмотрим изотропную (одинаковые физические свойства во всех направлениях) однородную пластину. Пусть w - поперечное смещение средней поверхности пластины. Общее уравнение для w имеет следующий вид.

$$D\nabla^2\nabla^2w = -q(x, t) - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (37)$$

где $2h$ - ширина пластины, $q(x, t)$ - внешняя сила, D - жесткость пластины при изгибе, ρ - плотность пластины. Формула для бигармонического оператора имеет следующий вид.

$$\nabla^2\nabla^2w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \quad (38)$$

Для свободно вибрирующей пластины $w = w(r, t)$ перейдем в цилиндрические координаты. Оператор Лапласа в них выглядит следующим образом.

$$\nabla^2w \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial w}{\partial r} \right\} \quad (39)$$

Тогда исходное уравнение примет следующий вид.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial w}{\partial r} \right\} \right\} \right] \quad (40)$$

После применения оператора Лапласа получим следующее выражение.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{2h\rho}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (41)$$

Перепишем производные в конечных разностях.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} &= \frac{\frac{x(t+2\Delta t) - x(t+\Delta t)}{\Delta t} - \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}}{\Delta t} - \\ &\quad - \frac{\frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t} - \frac{x(t-\Delta t) - x(t-2\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t} = \\ &= \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t+\Delta t) + 2x(t-\Delta t) + x(t-2\Delta t)}{\Delta t^3} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w(r, t)}{\partial x} \Big|_{(x,t)=(x_i, t_j)} &= \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{h} \\
 \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial x^2} \Big|_{(x,t)=(x_i, t_j)} &= \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} \\
 \frac{\partial^3 w(r, t)}{\partial x^3} \Big|_{(x,t)=(x_i, t_j)} &= \frac{w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} + w_{i-2,j}}{h^3} \\
 \frac{\partial^4 w(r, t)}{\partial x^4} \Big|_{(x,t)=(x_i, t_j)} &= \frac{w_{i+2,j} - 4w_{i+1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j}}{h^4} \\
 \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2} \Big|_{(x,t)=(x_i, t_j)} &= \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{k^2}
 \end{aligned} \tag{43}$$

Пусть $\alpha = -\frac{2\rho h}{D}$. Обозначим левую часть за L и выразим $w(r, t + \Delta t)$.

$$w(r, t + \Delta t) = \frac{k^2 L}{\alpha} + 2w(r, t) - w(r, t - \Delta t) \tag{44}$$

На рисунках 43, 44 представлен трехмерный график колебаний пластины, где в плоскости Z значение функции $w(r, t)$.

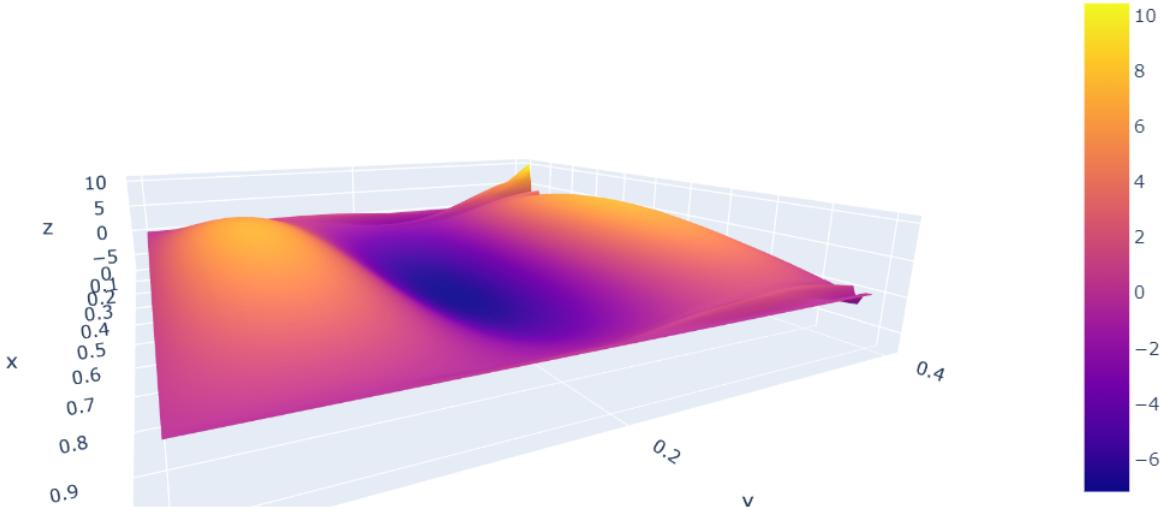


Рисунок 43 - Колебание пластины $\alpha = -0.07$

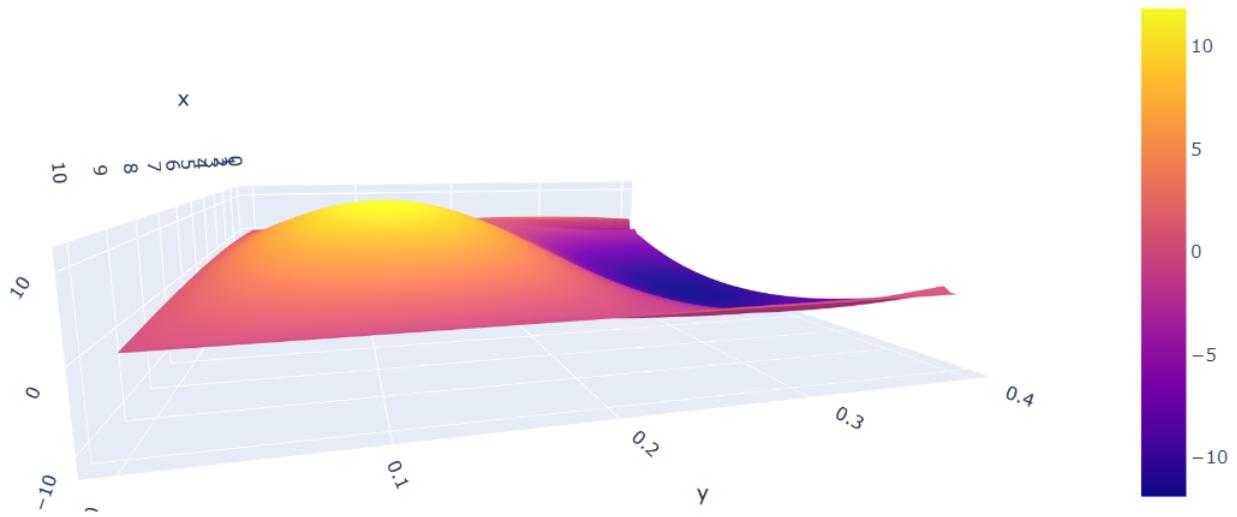


Рисунок 44 - Колебание пластины $\alpha = -1$

5 Бифуркации динамических систем

Определение 5.1. Бифуркация - качественное изменение фазового портрета при изменении параметров системы.

Определение 5.2. Точка бифуркации - критическое состояние системы, при котором система становится неустойчивой относительно флуктуаций и возникает неопределённость: станет ли состояние системы хаотическим или она перейдёт на новый, более дифференцированный и высокий уровень упорядоченности.

Теорема 5.1. Бифуркация Хопфа

Пусть есть система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(x_1, \dots, x_n, \mu) & X_1(0, \dots, 0, \mu) = 0 \\ \dot{x}_2 = X_2(x_1, \dots, x_n, \mu) & X_2(0, \dots, 0, \mu) = 0 \end{cases} \quad (45)$$

$\lambda_1(\mu_0), \lambda_2(\mu_0)$ - чисто мнимые корни. Точка $(0, 0)$ - асимптотически устойчива при μ_0 и $\frac{\partial}{\partial \mu} \{Re(\lambda_i(\mu))|_{\mu=\mu_0}\} > 0$.

Тогда

1. μ_0 - точка бифуркации
2. \exists интервал $\mu \in (\mu_1, \mu_0)$ такой, что $(0; 0)$ - устойчивый фокус
3. \exists интервал $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$ такой, что $(0; 0)$ - неустойчивый фокус, окруженный предельным циклом

5.1 Аттрактор Лоренца

Модель Лоренца является реальным физическим примером динамических систем с хаотическим поведением, в отличие от различных искусственно сконструированных отображений (преобразование пекаря, отображение Фейгенбаума).

Определение 5.3. Динамический хаос или детерминированный хаос - явление в теории динамических систем, при котором поведение нелинейной системы выглядит случайным, хотя оно определяется детерминистическими законами.

Аттрактор Лоренца возникает в следующих физических вопросах:

- конвекция в замкнутой петле;
- вращение водяного колеса;
- модель одномодового лазера;
- диссипативный гармонический осциллятор с инерционной нелинейностью.

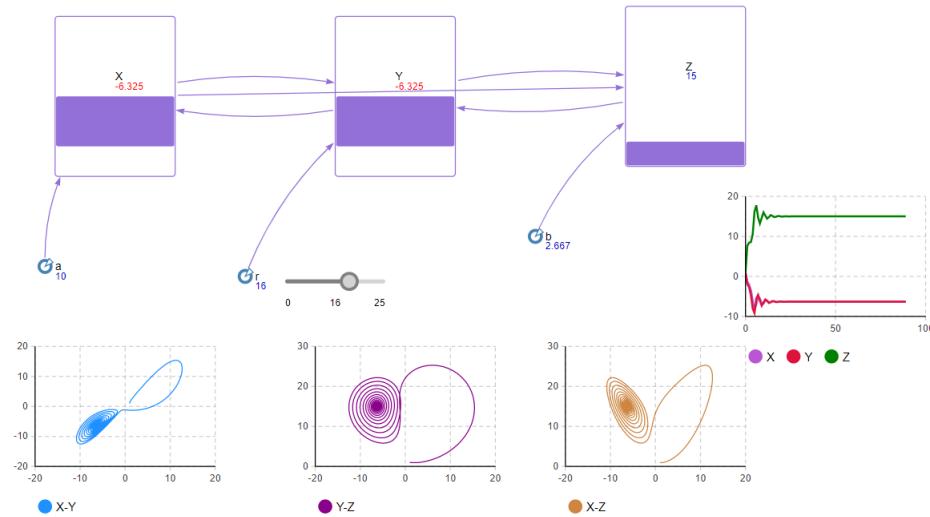
Аттрактор описывается следующей системой дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad a, r, b > 0 \quad (46)$$

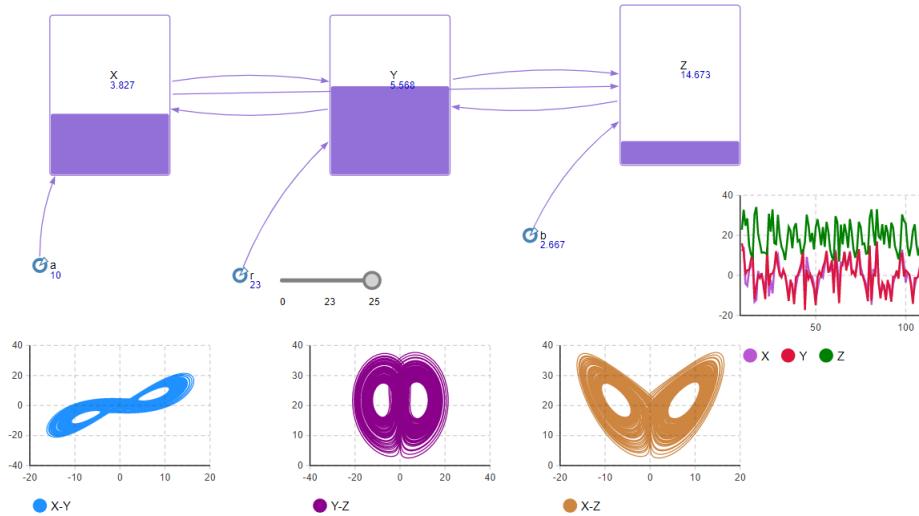
r - управляющий переменный параметр;

- $(0 < r < 1)$ - одна критическая точка;
- $r \rightarrow 1$ - критическое замедление;
- $r = 1.345$ - узлы переходят в фокусы;
- $r \approx 13.927$ - если траектория выходит из начала координат, то, совершив полный оборот вокруг одной из устойчивых точек, она вернется обратно в начальную точку — возникают две гомоклинические петли. Понятие гомоклинической траектории означает, что она выходит и приходит в одно и то же положение равновесия;
- $r > 13.927$ - в зависимости от направления траектория приходит в одну из двух устойчивых точек. Гомоклинические петли перерождаются в неустойчивые предельные циклы, также возникает семейство сложно устроенных траекторий, не являющееся аттрактором, а скорее наоборот, отталкивающее от себя траектории. Иногда по аналогии эта структура называется «странным репеллером»;
- $r > 24$ - хаос.

При $r = 16$ на рисунке 45 видно образование неустойчивых предельных циклов.

Рисунок 45 - Аттрактор Лоренца $r = 16$

При $r = 23$ на рисунке 46 виден сам Аттрактор Лоренца и его хаотическое поведение на графиках по времени.

Рисунок 46 - Аттрактор Лоренца $r = 23$

5.2 Аттрактор Рикитаки

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\mu x + yz \\ \frac{dy}{dt} &= (z - a)x - \mu y \\ \frac{dz}{dt} &= 1 - xy \end{aligned} \quad (47)$$

На рисунках ниже представлен численный анализ модели при различных параметрах μ и a . При параметрах $\mu = 0.2$, $a = 0.5$ получаем спиральный устойчивый фокус сходящийся в направлении плоскости XY (рис. 47).

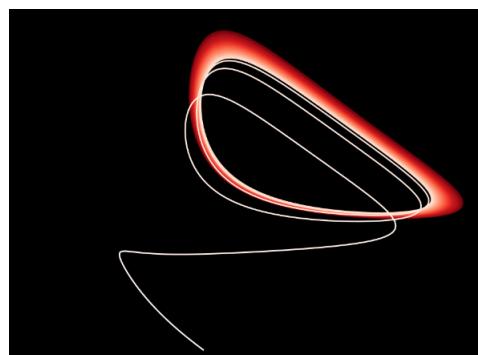


Рисунок 47 - Аттрактор Рикитаки $\mu = 0.2, a = 0.5$

При параметрах $\mu \geq 1, a = 0.9$ получаем седло (рис. 48).

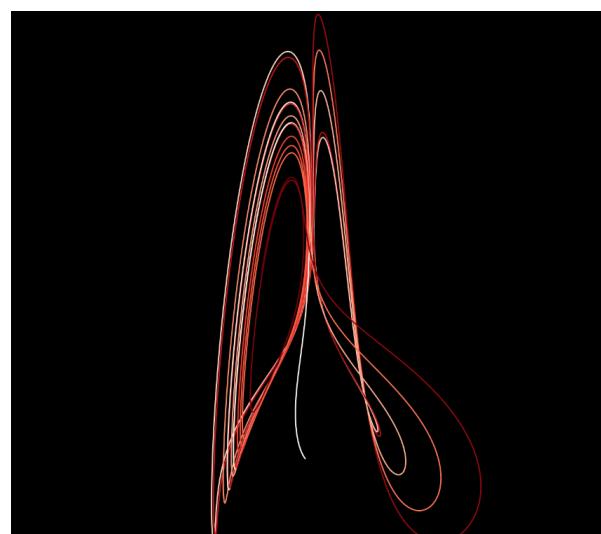
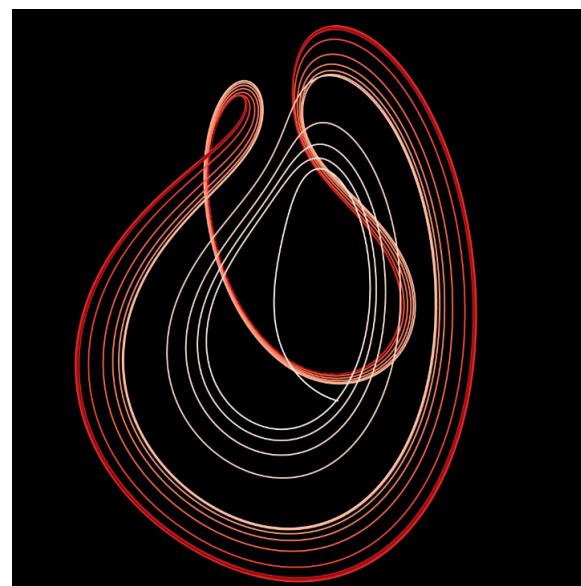
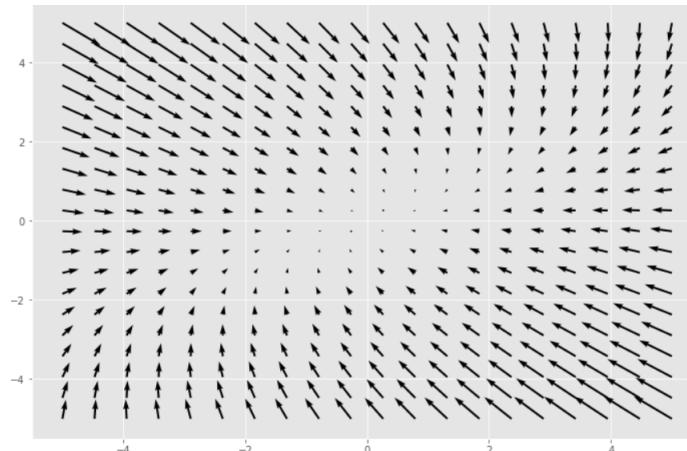


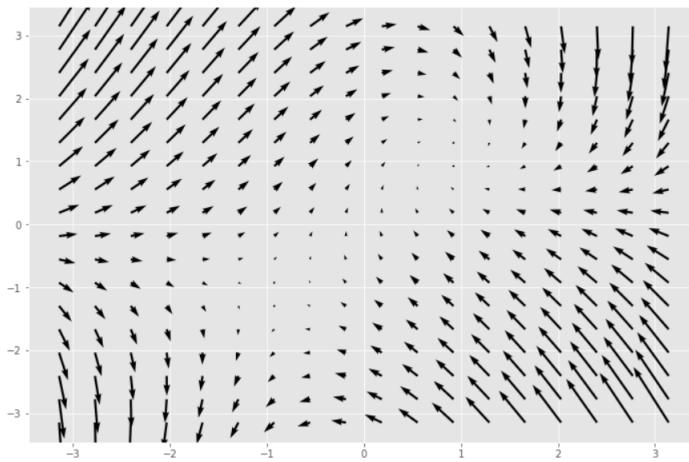
Рисунок 48 - Аттрактор Рикитаки $\mu \geq 1, a = 0.9$

При параметрах $\mu = 0.498, a = 0.1$ получаем график, где видно и седло и спиральный фокус (рис. 49).

Рисунок 49 - Аттрактор Рикитаки $\mu = 0.498, a = 0.1$

Далее представлены графики векторного поля по осям. На первом рисунке виден спиральный устой фокус в плоскости XY , а на второй в плоскости XZ видно седло и устойчивый фокус одновременно (рис. 50, 51).

Рисунок 50 - Векторное поле в XY


 Рисунок 51 - Векторное поле в XZ

6 Оптимизационные модели

6.1 Задача о производстве мебели

Условие

Есть N типов A_i продукции, M операций B_j для производства продукции, c_i – прибыль за единицу i -той произведенной продукции, a_{ij} – количество времени, необходимого на операцию j при производстве продукции i . b_j – ограничение на количество времени по каждой операции.

Решение

	B_1	B_2	...	B_M	Прибыль	Количество
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1M}	p_1	x_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2M}	p_2	x_2
...
A_N	a_{N1}	a_{N2}	...	a_{NM}	p_N	x_N
Огр	b_1	b_2	...	b_M		

$\forall i : x_i \geq 0$, $x_i \in \mathbb{Z}$ – количество произведенной продукции каждого типа

$$f(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_Nx_N \rightarrow \max$$

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{N1}x_N \leq b_1$$

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{Nj}x_N \leq b_j$$

$$a_{1M}x_1 + a_{2M}x_2 + \dots + a_{NM}x_N \leq b_M$$

$$\begin{cases} f(X) = \sum_{i=1}^N p_i x_i \rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^N a_{ij} x_i \leq b_j \\ \forall i : x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

В данной конкретной задаче математическая модель выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} f(X) = 16x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 42x_4 + 32x_5 \rightarrow \max \\ 8x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 9x_4 + 12x_5 \leq 320 \\ 12x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 12x_4 + 8x_5 \leq 400 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 4x_5 \leq 270 \\ \forall i : x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a

Какая комбинация изделий должна быть произведена в это время, чтобы максимизировать прибыль? Какой будет общая прибыль? Для решения этой задачи был использован Excel.

	Обрезка	Шлифовка	Сборка	Цена	Количество
Стул	8	12	4	16	0
Стол	6	10	3	30	0
Бюро	9	15	5	40	0
Книжный Шкаф	9	12	4	42	32
Серв Тележка	12	8	6	32	2
Ограничение	320	400	270	1408	
	312	400	140		

Рисунок 52 - Пункт а

Общая прибыль равна 1408 единицам.

b

Выгодно ли производить все изделия? Если имеется изделие, которое не выгодно производить, что нужно изменить, чтобы его производство стало выгодным?

Не все изделия выгодно производить. Например, изделия «Стул», «Стол» и «Бюро» в оптимальном плане не производятся вообще. Это значит, что их производство невыгодно. Чтобы их производство стало выгодным, необходимо, к примеру, увеличить их стоимость или изменить технологию производства. Например, уменьшив время на шлифовку изделия «Бюро» на четыре единицы, получаем увеличение целевой функции на 24 единицы, а также изделие «Бюро» становится наиболее выгодным для производства.

	Обрезка	Шлифовка	Сборка	Цена	Количество
Стул	8	12	4	16	0
Стол	6	10	3	30	2
Бюро	9	11	5	40	28
Книжный Ш	9	12	4	42	6
Серв Тележка	12	8	6	32	0
Ограничени	320	400	270	1432	
	318	400	170		

Рисунок 53 - Пункт б

c

Можно ли изменить что-то в технологии или в ценах так, чтобы все изделия стали выгодными? Исследуйте это. Опишите результаты.

Чтобы их производство всех изделий стало выгодным, необходимо, к примеру, увеличить их стоимость. Чтобы понять, на сколько надо увеличить стоимость изделий, проведем анализ чувствительности с помощью Excel.

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$I\$7	Количество Стул	0	-25,33333333	16	25,33333333	1E+30
\$J\$7	Количество Стол	0	-4	30	4	1E+30
\$K\$7	Количество Бюро	0	-11	40	11	1E+30
\$L\$7	Количество Кн Шкаф	31,11111111	0	42	6	4
\$M\$7	Количество Серв Тел	3,333333333	0	32	16	4

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$O\$3	Обрезка Использованное время	320	0,666666667	320	226	20
\$O\$4	Шлифовка Использованное время	400	3	400	26,66666667	186,6666667
\$O\$5	Сборка Использованное время	144,4444444	0	270	1E+30	125,5555556

Рисунок 54 - Пункт c

Reduced Cost («Приведенная цена» в русифицированной версии Excel) показывает, на сколько нужно увеличить стоимость изделий, чтобы они вошли в оптимальный план. Если увеличить стоимость невыгодных изделий, то получим следующий результат:

	Обрезка	Шлифовка	Сборка	Цена	Количество
Стул	8	12	4	41	1
Стол	6	10	3	34	0
Бюро	9	15	5	51	12
Книжный Ш	9	12	4	42	12
Серв Тележ	12	8	6	32	8
Ограничени	320	400	270	1413	
	320	400	160		

Рисунок 55 - Пункт c

Практически все изделия стало выгодно производить. Общая прибыль увеличилась на пять единиц.

d

Допустим, что Вы можете установить 100 сверхурочных минут, но для только одной из основных операций? На какую операцию стоит выделить это время? Сколько при этом получится прибыли? Подтвердите все ваши ответы вычислениями.

Если посмотреть на решение пункта a, то можно увидеть, что для всех операций осталось свободное время, кроме шлифовки. Таким образом, добавив время к обрезке или сборке, мы не увеличим количество произведенной продукции, так как для шлифовки не будет хватать времени. Стоит выделить сверхурочное время для шлифовки.

Также из решения пункта *c* видно, что Shadow price («теневая цена») для шлифовки наибольшая. То есть доход больше всего увеличится при увеличении времени на шлифовку. Для решения этой задачи был использован Excel.

	Обрезка	Шлифовка	Сборка	Цена	Количество
Стул	8	12	4	16	0
Стол	6	10	3	30	38
Бюро	9	15	5	40	0
Книжный Шкаф	9	12	4	42	10
Серв Тележка	12	8	6	32	0
Ограничение	320	500	270	1560	
	318	500	154		

Рисунок 56 - Пункт *d*

При установлении 100 сверхурочных минут к шлифовке общая прибыль увеличилась на 152 единицы.

6.2 Задача о назначениях

Условие

Необходимо составить 6 пар-команд для выполнения некоторой работы. Индекс совместности варьируется от 20 (выраженная враждебность) до 1 (дружеские отношения) и представлен в таблице 1 на рисунке 57. Необходимо составить команды, минимизировав суммарную совместность. Какой минимально возможный для всех пар индекс совместности можно обеспечить и как при этом изменится суммарная совместимость.

Решение

Для решения данной задачи также воспользуемся в *Excel* поиском решения. Чтобы просто составить пары-команды, необходимо задать ограничения на сумму по столбцами и строкам равную 1, так как один человек может образовать пару только с одним другим человеком. Также надо указать, что работаем с бинарными переменными. Целевая функция для данной задачи это сумма произведения элементов матрицы совместности на элементы матрицы назначений. Решение представлено в таблице 2 на рисунке 57.

Чтобы ответить на второй вопрос какой минимальный индекс совместности можно выбрать, надо дополнительно вручную задавать ограничения на максимальный индекс совместности при выборе пар. Таким индексом здесь является 6. При выборе меньшего индекса уменьшается значение целевой функции, а следовательно, такое решение брать не оптимально.

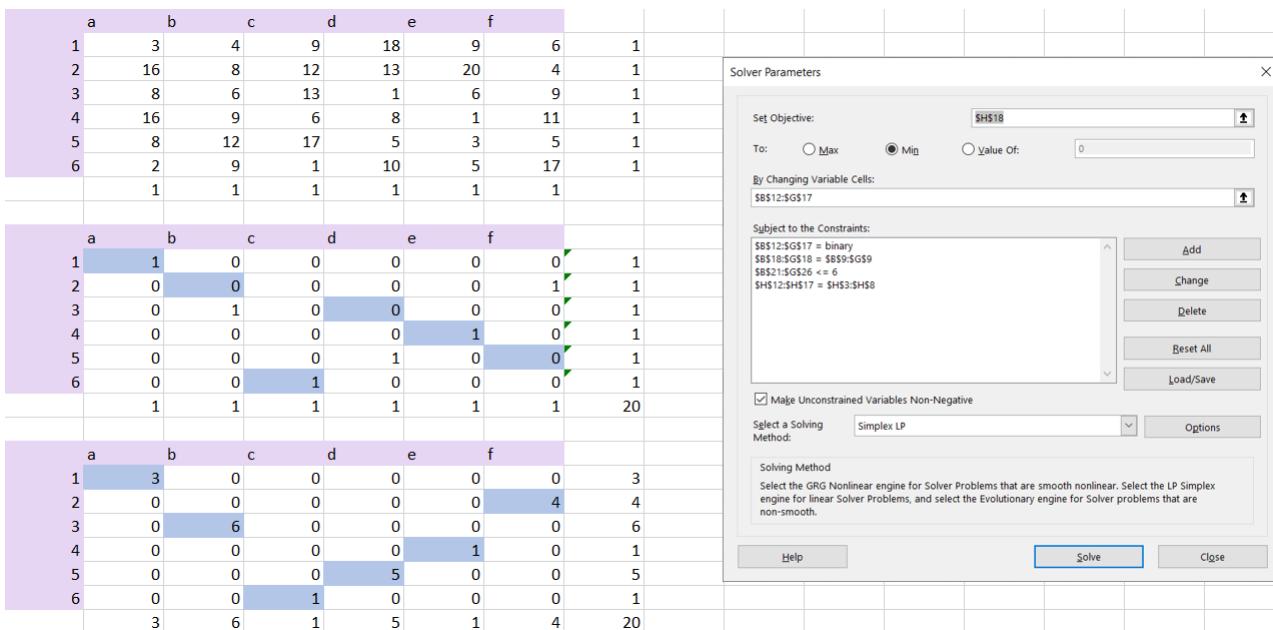


Рисунок 57 - Задача о назначениях

6.3 Задача про аудиторов

Условие

Менеджер аудиторской фирмы должен распределить аудиторов для работы на следующий месяц. Аудиторы различаются по квалификации и опыту работы. Прежде чем приступить к аудиту конкретной фирмы они должны затратить определенное время на подготовку и консультации. В данный момент имеются заявки от 10 клиентов. Менеджер – координатор, учитывая опыт работ аудиторов каждой конторы, оценил время, необходимое «среднему» аудитора каждой конторы для подготовки к аудиту конкретного клиента

Решение

Целевой функцией в этой задаче также является сумма произведений элементов двух таблиц. Целевая функция минимизируется. Также необходимы ограничения, которые позволяют распределить всех сотрудников без остатка, то есть сумма по столбцам и строкам новой таблицы минус заявки и число сотрудников соответственно из исходной таблицы с данными (рис. 58). Там где имеются пропуски, чтобы не рассматривать данные ячейки поставим большие значения, так как функция минимизируется.

Конторы	Клиенты										Число сотрудников
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Гаапвилл	8	21	15	13	9	17	18	7	26	9	0
Финанстайн	14	18	17	19	12	6	100000	15	24	13	0
Исабург	9	15	18	16	16	15	11	13	21	19	0
Бю-Баланс	11	100000	14	7	23	9	6	18	100000	7	0
Заявки	4	9	2	12	7	6	9	3	18	5	15
f	950										

Рисунок 58 - Задача про аудиторов п.1

Решение пункта два аналогично, только теперь для столбцов не будем вычитать данные исходной таблицы, а найдем решение только для ограничений по строкам. Далее будем вычитать поочередно из каждого элемента столбца получившуюся сумму всего столбца, тем самым получим вариации для распределения аудиторов (рис. 59).

Конторы	Клиенты										Число сотрудников
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Гаапвилл	3	0	1	11	6	0	0	2	0	4	8
Финанстайн	0	3	1	0	1	5	0	1	1	1	7
Исабург	1	6	0	0	0	0	1	0	17	0	0
Бю-Баланс	0	0	0	1	0	1	8	0	0	0	0
Заявки	4	9	2	12	7	6	9	3	18	5	15
	-1	-9	-1	-1	-1	-6	-9	-1	-18	-1	-7
	-4	-6	-1	-12	-6	-1	-9	-2	-17	-4	-8
	-3	-3	-2	-12	-7	-6	-8	-3	-1	-5	-15
	-4	-9	-2	-11	-7	-5	-1	-3	-18	-5	-15
f	982										

Рисунок 59 - Задача про аудиторов п.2

6.4 Модель потребительского выбора

В общем случае постановка задачи выглядит следующим образом.

$$\begin{cases} u(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq I \\ x_i \geq 0 \end{cases} \quad (48)$$

6.4.1 Модель Стоуна

$$u = \prod_{i=1}^n (x_i - \alpha_i)^{\beta_i} \rightarrow \max \quad (49)$$

где $\alpha_i \leq 0$, $x_i \leq \alpha_i$, $0 < \beta_i < 1$ - степень важности благ. Составив функцию Лагранжа и выполнив несложные преобразования получим следующее выражение.

$$x_k = \alpha_k + \frac{1}{p_k} \frac{(I - \sum_i \alpha_i p_i) \beta_k}{\sum_i \beta_i} \quad (50)$$

6.4.2 Функция Кобба-Дугласа

При выборе в качестве функции полезности функцию Кобба-Дугласа построим изокванты и линию "доход-потребление". Для этого решим несколько оптимизационных задач при разных уровнях дохода I . Из решения получим оптимальное значение функции полезности и далее рассчитаем координаты (x_1, x_2) при помощи следующих формул (рис. 60).

$$x_2 = \left(\frac{u}{Ax_1^\alpha} \right)^{1/\beta} \quad (51)$$

$$x_2 = \frac{I - x_1 p_1}{p_2} \quad (52)$$

I			20			x1 x2 u			constraint: 40					
x1	x2	u	4,285714	2,285714	12,92311	I	40	x1	x2	u	8,571429	4,571429	20,99365	
0,2	3,92	6,39403		22,76496				7,92	8,471305			76,57189		
0,4	3,84	7,807316		13,53613				7,84	10,38713			45,52992		
0,6	3,76	8,743227		9,98679				7,76	11,68265			33,59142		
0,8	3,68	9,449686		8,048628				7,68	12,68302			27,07225		
1	3,6	10,01549		6,80831				7,6	13,50444			22,90034		
1,2	3,52	10,4839		5,938181				7,52	14,20341			19,97358		
1,4	3,44	10,8796		5,28985				7,44	14,81218			17,79286		
1,6	3,36	11,21819		4,785743				7,36	15,35106			16,09726		
1,8	3,28	11,51019		4,381118				7,28	15,83381			14,73627		
2	3,2	11,76306		4,048246				7,2	16,27021			13,61662		
2,2	3,12	11,98229		3,768967				7,12	16,66748			12,67724		
2,4	3,04	12,17206		3,530863				7,04	17,03114			11,87636		
2,6	2,96	12,33559		3,325135				6,96	17,36549			11,18438		
2,8	2,88	12,47543		3,145363				6,88	17,67397			10,5797		
3	2,8	12,59363		2,986747				6,8	17,95937			10,04618		
3,2	2,72	12,69182		2,84562				6,72	18,22401			9,571486		
3,4	2,64	12,77134		2,719131				6,64	18,4698			9,146031		
3,6	2,56	12,83329		2,605028				6,56	18,69836			8,762236		
3,8	2,48	12,87855		2,501507				6,48	18,91108			8,414032		
4	2,4	12,90785		2,407101				6,4	19,10914			8,096491		
4,2	2,32	12,92175		2,320611				6,32	19,29358			7,805575		
4,4	2,24	12,92071		2,241041				6,24	19,46529			7,537934		
4,6	2,16	12,90506		2,167559				6,16	19,62506			7,290771		
4,8	2,08	12,87505		2,099464				6,08	19,77357			7,061727		
5	2	12,83082		2,03616				6	19,91144			6,848798		

Рисунок 60 - Расчет точек графика

Таким образом получим набор точек для бюджетных линий и для изокvant (рис. 61).

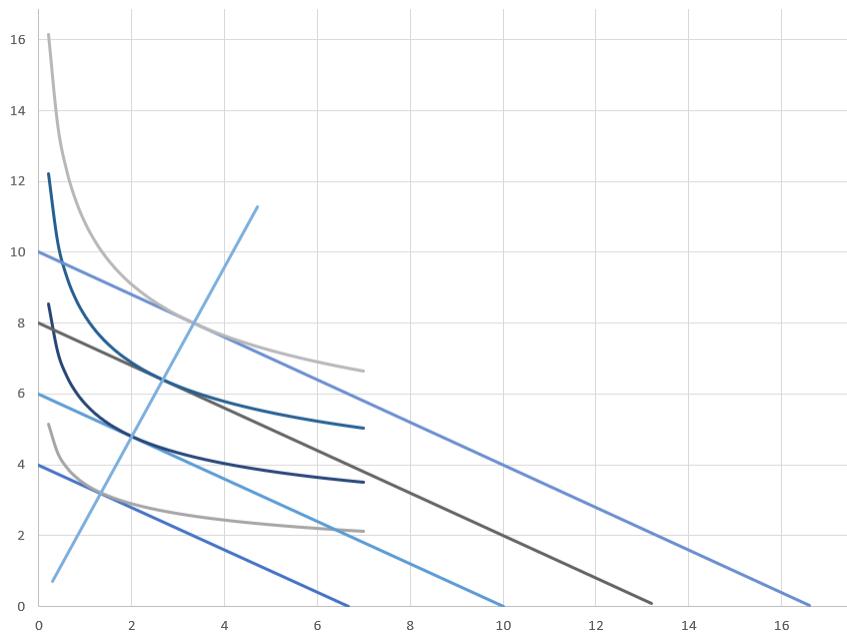


Рисунок 61 - Изокванты

6.5 Задача о назначениях бригад

Условие

Для выполнения срочного заказа мастер должен набрать из 14 рабочих (P_1, P_2, \dots, P_{14}) бригаду в 5 человек. Среднее время, которое каждый из 14 рабочих тратит на ту или иную операцию (P_1, P_2, \dots, P_5), требующуюся для выполнения заказа, дано в таблице. Размер заказа равен 100 единицам, так что каждая операция будет выполнена 100 раз.

- Определите оптимальное распределение рабочих по операциям. Рассчитайте количество рабочего времени, требующегося на выполнение заказа. Можно ли при этом выполнить заказ за 10 рабочих дней? (Считайте, что рабочая смена равна 8 часам);
- Помогите мастеру набрать запасную бригаду из 5 человек, на случай, если заказ будет удвоен, а время на выполнение останется практически прежним. Представьте списки бригад. Рассчитайте количество рабочего времени, требующегося на выполнение удвоенного заказа в сложившихся обстоятельствах;
- Что следует сделать, чтобы набрать две как можно более равные по силам бригады? Представьте списки новых бригад.

Решение

Информация о времени работы каждого рабочего представлена в таблице 1 на рисунке 62. Поскольку необходимо выбрать 5 человек, то данная задача является не сбалансированной и удобно добавить еще один столбец где будут все рабочие, которых не выбрали (они выполняют другую операцию). По столбцам и строкам сумма элементов должна равняться 1, так как данная задача о назначениях, а для столбца с операцией 6, ограничение равно числу не выбранных рабочих, то есть 9. Добавим еще столбец, где

будет подсчитываться время работы одно рабочего в днях, то есть умножаем часы на 100 операций и делим на 60. Запускаем поиск решения и получаем, что максимально долгий рабочий работает за 9 дней, а значит за 10 они успеют. Полное рабочее время составляет 366.6.

	O1	O2	O3	O4	O5	O6	Время	
P1	67	55	51	63	49	0	0	
P2	61	77	52	72	66	0	0	
P3	63	73	72	42	58	0	42	
P4	52	44	72	50	55	0	44	
P5	53	76	63	45	47	0	0	
P6	70	55	77	46	67	0	0	
P7	43	61	75	54	75	0	43	
P8	69	70	55	47	61	0	0	
P9	71	56	67	42	45	0	45	
P10	68	63	77	61	69	0	0	
P11	54	59	51	66	56	0	0	
P12	57	53	61	62	59	0	0	
P13	73	64	46	72	60	0	46	
P14	70	65	78	45	49	0	0	
					f		220	
	O1	O2	O3	O4	O5	O6		
P1	0	0	0	0	0	1	1	0
P2	0	0	0	0	0	1	1	0
P3	0	0	0	1	0	0	1	8,75
P4	0	1	0	0	0	0	1	9,16667
P5	0	0	0	0	0	1	1	0
P6	0	0	0	0	0	1	1	0
P7	1	0	0	0	0	0	1	8,95833
P8	0	0	0	0	0	1	1	0
P9	0	0	0	0	1	0	1	9,375
P10	0	0	0	0	0	1	1	0
P11	0	0	0	0	0	1	1	0
P12	0	0	0	0	0	1	1	0
P13	0	0	1	0	0	0	1	9,58333
P14	0	0	0	0	0	1	1	0
	1	1	1	1	1	9		
ПРВ	366,667	9,16667					9,58333	

Рисунок 62 - Задача о бригадах п.а

Для второго пункта уберем тех рабочих, которых выбрали в первом пункте и проделаем те же самые действия. Получим результат на рисунке 63. Видно, что максимально долгий рабочий выполняет 100 операций за 11 дней, а значит они за 10 не успеют. Если заказ удвоят, то будут работать две бригады одновременно, а значит это время составит $(366 + 416)/10/8 = 9.7$. То есть при удвоении заказы две бригады успеют за 10 дней.

	O1	O2	O3	O4	O5	O6	Время	
P1	67	55	51	63	49	0	51	
P2	61	77	52	72	66	0	0	
P5	53	76	63	45	47	0	47	
P6	70	55	77	46	67	0	0	
P8	69	70	55	47	61	0	0	
P10	68	63	77	61	69	0	0	
P11	54	59	51	66	56	0	54	
P12	57	53	61	62	59	0	53	
P14	70	65	78	45	49	0	45	
					f		250	
	O1	O2	O3	O4	O5	O6		
P1	0	0	1	0	0	0	1	10,625
P2	0	0	0	0	0	1	1	0
P5	0	0	0	0	1	0	1	9,79167
P6	0	0	0	0	0	1	1	0
P8	0	0	0	0	0	1	1	0
P10	0	0	0	0	0	1	1	0
P11	1	0	0	0	0	0	1	11,25
P12	0	1	0	0	0	0	1	11,0417
P14	0	0	0	1	0	0	1	9,375
	0	0	0	0	0	0		
	1	1	1	1	1	4		
ПРВ	416,667	10,4167					max	11,25
2x заказо	9,775							

Рисунок 63 - Задача о бригадах п.б

Для пункта с, необходимо решить задачу с самого начало с учетом выбора 10 человек, либо из имеющихся бригад, например, перекинуть долго работающих за 11 дней из второй в первую, вместо работающих за 8 дней.