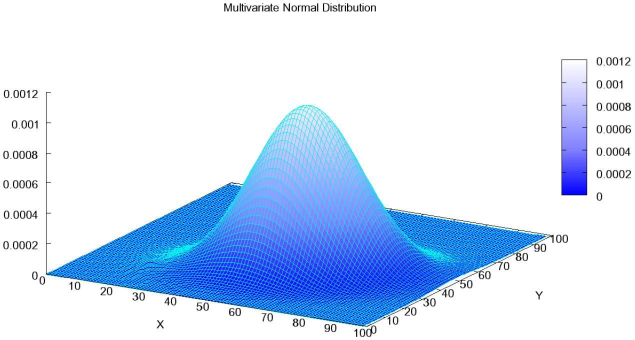
Spherical and Elliptical distributions

Kirill Zakharov

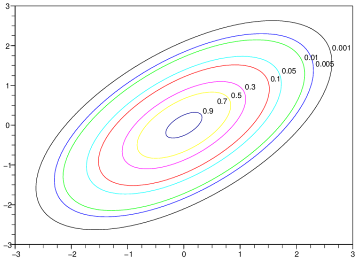
SPbSUE

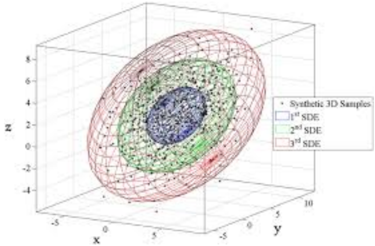
2021

Предпосылки



Предпосылки





Сферическое распределение. Определение

$X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - случайный вектор с одинаково распределенными и не коррелированными компонентами.

Определение

Случайный вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ имеет **сферическое распределение**, если для любой ортогональной матрицы $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(UU^T = U^T U = I_n)$

$$UX \overset{d}{=} X \tag{1}$$

Сферическое распределение. Теоремы

Теорема 1

Пусть $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ n-мерный случайный вектор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:
1) X - имеет сферическое распределение
2) $\exists \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $\forall h \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_X(h) = E\left[e^{ih^T X}\right] = \psi(h^T h) = \psi(h_1^2 + ... + h_n^2) \tag{2}$$

3) $\forall a \in \mathbb{R}^n$ $(||a||^2 = a^T a = a_1^2 + ... + a_n^2)$

$$a^T X \overset{d}{=} ||a|| x_1 \tag{3}$$

ψ назвается **характерестическим генератором**
Обозначение: $X \sim S_n(\psi)$

Сферическое распределение. Примеры

Многомерное нормальное распределение

Пусть X имеет многомерное стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0, I_n)$. Такое распределение является сферическим, так как

$$\varphi_X(h) = E[e^{ih^T X}] = e^{-\frac{1}{2}h^T h}$$

Сферическое распределение. Примеры

Многомерное нормальное распределение

Пусть X имеет многомерное стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0, I_n)$. Такое распределение является сферическим, так как

$$\varphi_X(h) = E[e^{ih^T X}] = e^{-\frac{1}{2}h^T h}$$

Смеси с нормальной дисперсией

$X \sim M(0, I_n, \hat{H}) \Longleftrightarrow X \sim S_n(\hat{H}(\frac{1}{2}))$
$Y = \alpha + \beta W + \gamma\sqrt{W}X$
$\varphi_X(h) = E[E[e^{ih^T X} \mid W]] = E[e^{ih^T\mu - \frac{1}{2}Wh^T\Sigma h}] = e^{ih^T\mu}\hat{H}(\frac{1}{2}h^T\Sigma h)$,
где $\hat{H}(x) = \int_0^\infty e^{-xv}H(v)dv$ - преобразование Лапласа.
т.е. $\varphi_X(h) = \hat{H}(\frac{1}{2}h^T h)$

Сферическое распределение. Теоремы

Теорема 2

Пусть S - равномерно распределенный случайный вектор на единичной гиперсфере $\mathcal{S}^{n-1} = \{s \in \mathbb{R}^n \,|s^T s = 1\}$ и $R \geqslant 0$ - радиальная случайная величина, независимая от S.

Тогда X имеет сферическое распределение $\Longleftrightarrow X \stackrel{d}{=} RS$

Сферическое распределение. Теоремы

Теорема 2

Пусть S - равномерно распределенный случайный вектор на единичной гиперсфере $\mathcal{S}^{n-1} = \{s \in \mathbb{R}^n \mid s^T s = 1\}$ и $R \geqslant 0$ - радиальная случайная величина, независимая от S.

Тогда X имеет сферическое распределение $\iff X \overset{d}{=} RS$

Следствие

Пусть $X \overset{d}{=} RS \sim S_n^+(\psi)$

Тогда $\left(||X||, \frac{X}{||X||}\right) \overset{d}{=} (R, S)$

Generating RV для $X \sim \mathcal{N}_n(0, I_n)$

Пусть $X \overset{d}{=} RS_n$

$\chi_l^2 \overset{d}{=} X^T X \overset{d}{=} R^2 S^T S \overset{a.s.}{=} R^2$

Определение

Пусть $Y \sim S_k(\psi)$; $\Lambda \in \mathbb{R}^{d \times k}$; $\mu \in \mathbb{R}^d$.
Тогда $X \overset{d}{=} \mu + \Lambda Y$ имеет **эллиптическое** распределение.

$\varphi_X(h) = E[e^{ih^T X}] = E[e^{ih^T(\mu + \Lambda Y)}] = e^{ih^T \mu} E[e^{i(\Lambda^T h)^T Y}] = e^{ih^T \mu} \psi(h^T \Sigma h)$, где $\Sigma = \Lambda \Lambda^T$.

Обозначение: $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$

Теоремы

Теорема 3

Пусть $rank(\Sigma) = n$

Тогда $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \psi) \Longleftrightarrow X \overset{d}{=} \mu + R\Lambda S_n,$
где $S_n \sim U_n[\mathcal{S}^{n-1}]; R \geq 0; \mu \in \mathbb{R}^d; \Lambda \in \mathbb{R}^{d \times n}; rank(\Lambda) = n$

Теоремы

Теорема 3

Пусть $rank(\Sigma) = n$

Тогда $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \psi) \iff X \overset{d}{=} \mu + R\Lambda S_n$,
где $S_n \sim U_n[\mathcal{S}^{n-1}]; R \geq 0; \mu \in \mathbb{R}^d; \Lambda \in \mathbb{R}^{d\times n}; rank(\Lambda) = n$

Многомерное нормальное распределение

Пусть $\mu \in \mathbb{R}^n; \Lambda \in \mathbb{R}^{n\times k}; \Sigma = \Lambda^T\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n} > 0.$

Если $X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma) \Rightarrow X \overset{d}{=} \mu + \sqrt{\chi_k^2}\Lambda U_k$

Многомерное t-распределение

Пусть $Y \overset{d}{=} \dfrac{X}{\sqrt{\frac{\chi_v^2}{v}}}; X \sim \mathcal{N}_n(0, I_n)$

Тогда $Y \overset{d}{=} \dfrac{\sqrt{\chi_n^2}}{\sqrt{\frac{\chi_v^2}{v}}} U_n = \sqrt{n\dfrac{\chi_n^2/n}{\chi_v^2/v}} U_n \overset{d}{=} \sqrt{nF_{n,v}} U_n$

Определение

Через функцию плотности:

$$f_X(v) = \frac{k}{\sqrt{|\Sigma|}} g(\frac{1}{2}(v-\mu)^T \Sigma^{-1}(v-\mu)) \qquad (4)$$

k - нормирующая константа

g - генератор

μ - медианный вектор

Для g выполняется условие: $\int_0^{+\infty} y^{n/2-1} g(y) dy < \infty$

Класс эллиптических распределений

Распределение	Генератор	Нормирующая константа
Многомерное нормальное распределение	e^{-y}	$(2\pi)^{-n/2}$
Многомерное t-распределение Стьюдента	$\left(1+\frac{y}{\nu}\right)^{-p}, p > \frac{n}{2}$	$\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-\frac{n}{2})}(2\pi\nu)^{-n/2}$
Многомерное логит распределение	$\frac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2}$	$\frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}\int_0^{+\infty}\frac{y^{n/2-1}e^{-y}}{(1+e^{-y})^2}dy}$
Многомерное экспоненциально-степенное распределение	e^{-ay^b}	$\frac{b\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2b})}a^{n/2b}$

Свойства

$X \sim E_n(\mu, \Sigma, \psi)$

1. *Линейность*
   $\forall B \in \mathbb{R}^{k \times n}; b \in \mathbb{R}^k \Rightarrow BX + b \sim E_k(B\mu + b, B\Sigma B^T, \psi)$

2. *О квадратичной форме*
   $$\left(\sqrt{(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)}, \frac{\Sigma^{-1/2}(X-\mu)}{\sqrt{(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)}}\right) = (R, S)$$
   if $X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$, then $(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) \overset{d}{=} \chi^2(n)$
   if $X \sim t_n(v, \mu, \Sigma)$, then $(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) \overset{d}{=} nF(n, v)$

3. *Свертка*
   $Y \sim E_n(\tilde{\mu}, \Sigma, \tilde{\psi}) \Rightarrow X + Y \sim E_n(\mu + \tilde{\mu}, \Sigma, \psi(\cdot)\tilde{\psi}(\cdot))$

4. *Маргинальные распределения*
   $$X = (X_1, X_2); \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}; \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$
   $\Rightarrow X_1 \sim E_k(\mu_1, \Sigma_{11}, \psi);\ X_2 \sim E_{n-k}(\mu_2, \Sigma_{22}, \psi)$

Свойство 5. О функции плотности

Теорема 4

Пусть $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \psi); \mu \in \mathbb{R}^n; \Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n} \geq 0; rank(\Sigma) = m$.
Пусть CDF генерирующей величины абсолютно непрерывна.
$S_\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ - линейная оболочка, натянутая на Λ.
Тогда $f_X(x) = \frac{1}{|\Lambda|} g_R((x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)) \quad x \in S_\Lambda \backslash \{\mu\}$
где $g_R(t) = k f_R(\sqrt{t})$

$$X \sim E_n(0, \Sigma, \psi); \quad \Sigma = \begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & b & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & \dots & a & b \end{pmatrix} (equicovariance);$$

$$-b/(n-1) < a < b$$

6. *Симметричность*
   6.1. Rotational symmetry

   $X \overset{d}{=} UX; U$ - ортогональная матрица

   6.2. Permutation symmetry

   $X \overset{d}{=} \mathcal{P}X$

   $\mathcal{P}X \overset{d}{=} \mathcal{P}(R\Lambda U_n) = R\mathcal{P}\Lambda U_n$

   6.3. Radial symmetry (central, simply)

   $\forall c \in \mathbb{R}^n \quad X - c \overset{d}{=} -(X - c)$

   $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f_X(\mu + x) = f_X(\mu - x)$ (по св. 5)

   $-(X - \mu) \overset{d}{=} -R\Lambda U_n = R\Lambda(-U_n) \overset{d}{=} R\Lambda U_n \overset{d}{=} X - \mu$

6.4. Angular symmetry

$$\frac{X-c}{||X-c||_2} \stackrel{d}{=} -\frac{X-c}{||X-c||_2}$$

Spherical distribution: rotationally, permutationally, radially and if $R > 0$ angularly symmetric

Eplitical distribution: radially and if $R > 0$ angularly symmetric.
If $\mu = 0$ and Σ - equicovariance matrix, then permutationally symmetric

7. *Моменты*

$$E[X] = E[\mu + R\Lambda U_n] = \mu + \Lambda E[R]E[U_n]$$

$$Cov(X) = E[(R\Lambda U_n)(R\Lambda U_n)^T] = E[R^2]\Lambda E[U_n U_n^T]\Lambda^T$$

8. *Self-decomposability*

$$X \stackrel{d}{=} \rho X + \epsilon$$