Стохастические дифференциальные уравнения

Кирилл Захаров

2020

Содержание

1 Предварительные сведения

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство.$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ - случайная последовательность. Пусть $\theta_k \xi = (\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, ...)$.

Definition 1.1. ξ называется стационарной в узком смысле, если $\forall k \geq 1$ распределения $\theta_k \xi$ и ξ совпадают $P((\xi_1, \xi_2, ...) \in B) = P((\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, ...) \in B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$.

Definition 1.2. Пусть T - множество значений параметра t. Случайным процессом назовем параметризованный набор случайных величин $\{\xi_t\}_{t \in T}$, принимающих значения в $\mathbb{R}^n$.

2 Уравнение Ито

2.1 Винеровский процесс

Рассмотрим дискретную модель блуждания.

$$x = x_0 + \mu_0 n + \sigma_0 \sqrt{n} \cdot \varepsilon \tag{1}$$

Накопленное стохастическое изменение пропорционально нормальному распределению с параметрами 0 и 1, т.е. $\varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n = \sqrt{n} \cdot \varepsilon$, где $\varepsilon \sim N(0, 1)$. Пусть Δt - длительность одного шага, тогда количество шагов в момент $t - t_0$ равно $n = \dfrac{t - t_0}{\Delta t}$. Пусть $\sigma^2 = \sigma_0^2/\Delta t$ и $\mu = \dfrac{\mu_0}{\Delta t}$. Получим следующее уравнение.

$$x(t) = x(t_0) + \mu(t - t_0) + \sigma\sqrt{t - t_0} \cdot \varepsilon \tag{2}$$

Ширина процесса $x(t)$ увеличивается со временем пропорционально корню $\sqrt{t - t_0}$, а максимум сдвигается со скоростью μ. Рассмотрим изменение $dx = x(t) - x(t_0)$ за бесконечно малый интервал $dt = t - t_0$. Тогда получим

$$dx = \mu dt + \sigma\sqrt{dt} \cdot \varepsilon \tag{3}$$

Обозначим $\sqrt{dt} \cdot \varepsilon$ за δW. Данный процесс называется непрерывным винеровским процессом.

$$dx = \mu dt + \sigma \delta W \tag{4}$$

2.2 Процесс Ито

Общие процессы Ито представляют собой "деформацию"простого винеровского блуждания при помощи функций $a(x, t)$ и $b(x, t)$.

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)\delta W \tag{5}$$

где $a(x, t)$-коэффициент сноса, $b(x, t)$ - коэффициент волатильности, δW - бесконечно малый винеровский шум. Также $b^2(x, t)$ называют диффузией. Для моделирования процесса Ито воспользуемся формулой в конечно-разностном представлении.

$$x_{k+1} = x_k + a(x_k, t_k)\Delta t + b(x_k, t_k)\sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_k \tag{6}$$

В произвольный фиксированный момент времени $x(t)$ - это случайная величина, свойства которой определяются при помощи ε и значения t.

2.3 Лемма Ито

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + a(x, t)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{b^2(x, t)}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)dt + b(x, t)\frac{\partial F}{\partial x}\delta W \tag{7}$$

Слагаемое перед dt обозначим за $f(t)$, а перед δW за $s(t)$ Необходимо подобрать $F(x, t)$ так, чтобы функции $f(t), s(t)$ были зависимы только от t. В результате получим следующие выражения.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{s(t)}{b(x, t)} \tag{8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + s(t)\left(\frac{a(x, t)}{b(x, t)} - \frac{1}{2}\frac{\partial b(x, t)}{\partial x}\right) = f(t) \tag{9}$$

Возьмём частные производные уравнения (8) по t и (9) по x. Вычитая их, получим условие совместности

$$\frac{1}{s(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{s(t)}{b(x,t)}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{a(x,t)}{b(x,t)}\right\} \tag{10}$$

Если при данных $a(x,t)$ и $b(x,t)$ можно подобрать такую функцию $s(t)$, при которой уравнение (10) обратится в тождество, то получим решение стохастического уравнения (5) в следующей неявной форме

$$F(x,t) = F(x_0,t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + \left(\int_{t_0}^{t} s^2(\tau)d\tau\right)^{1/2} \cdot \varepsilon \tag{11}$$

3 Простые стохастические модели

3.1 Логарифмическое блуждание

Данный процесс также называется геометрическим броуновским блужданием и определяется уравнением (7).

$$dx = \mu x dt + \sigma x \delta W \tag{12}$$

где $\mu, \sigma = const$. Если стохастический член равен 0 $\sigma = 0$, то получаем уравнение экспоненциального пространство при $\mu > 0$ и снижения при $\mu < 0$.
Здесь $a(x,t) = \mu x$ и $b(x,t) = \sigma x$. Подставим их в условие совместности.

$$\frac{1}{s(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{s(t)}{\sigma x}\right\} = 0 - \frac{\partial \frac{\mu}{\sigma}}{\partial x} = 0$$
$$\Rightarrow \dot{s}(t) = 0 \Rightarrow s = const$$

Так как $s(t)$ равна любой константе, удобно ее взять равной σ, для более простого нахождения $F(x,t)$. Воспользуемся уравнением (8), проинтегрировав его. $\int \frac{\partial F}{\partial x} dx = \int \frac{\sigma}{\sigma x} dx \Rightarrow F(x,t) = ln(x)$. Теперь, зная $F(x,t)$ легко найти $f(t)$ по формуле (9). $f(t) = 0 + \sigma\left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma\right) \Rightarrow f(t) = \mu - \sigma^2/2$. Далее воспользуемся уравнением (11) при $t_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
&F(x,t) = ln(x_0) + \int_{t_0}^{t} (\mu - \sigma^2/2)d\tau + \left(\int_{t_0}^{t} \sigma^2 d\tau\right)^{1/2} \cdot \varepsilon = \\
&= ln(x_0) + (\mu - \sigma^2/2)t + \sqrt{\sigma^2}\sqrt{t} \cdot \varepsilon \\
&\Rightarrow ln(x) = ln(x_0) + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t} \cdot \varepsilon \\
&\Rightarrow x(t) = x_0 \cdot e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t} \cdot \varepsilon}
\end{aligned}$$

3.2 Процесс Орнштейна-Уленбека

Данный процесс задается следующим уравнением.

$$dx = -\beta(x-\alpha)dt + \sigma\delta W \tag{13}$$

где $\sigma = const, \beta > 0$ - характеризуется величину силы притяжения к равновесному состоянию α Здесь $a(x,t) = -\beta(x-\alpha)$ и $b(x,t) = \sigma$. Подставим их в условие совместности.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{s(t)}{\sigma}\right\} = 0 - \frac{\partial\frac{-\beta(x-\alpha)}{\sigma}}{\partial x} \\ &\Rightarrow \frac{1}{s(t)\sigma}\dot{s}(t) = \frac{\beta}{\sigma} \Rightarrow \dot{s}(t) = \beta s(t) \\ &\Rightarrow \ln s(t) = \beta t \Rightarrow s(t) = Ce^{\beta t} \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть $C = \sigma \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{s(t)}{b(x,t)} = e^{\beta t} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{\partial F}{\partial x}dx = \int e^{\beta t}dx \Rightarrow F(x,t) = x\cdot e^{\beta t} + C_1$. Теперь, зная $F(x,t)$ найдем $f(t)$ по формуле (9). $f(t) = \beta x e^{\beta t} + \sigma e^{\beta t}\left(\dfrac{-\beta(x-\alpha)}{\sigma} - \dfrac{1}{2}\cdot 0\right) \Rightarrow f(t) = \alpha\beta e^{\beta t}$. Далее воспользуемся уравнением (11) при $t_0 = 0$.

$$\begin{aligned} &F(x,t) = x_0 e^{\beta t_0} + \int_{t_0}^{t}(\alpha\beta e^{\beta\tau})d\tau + \left(\int_{t_0}^{t}\sigma^2 e^{2\beta\tau}d\tau\right)^{1/2}\cdot\varepsilon = \\ &= x_0 e^{\beta t_0} + \alpha\beta e^{\beta t} - \alpha + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\beta}e^{2\beta t} - \frac{\sigma^2}{2\beta}}\cdot\varepsilon \\ &x e^{\beta t} = x_0 + \alpha\beta e^{\beta t} - \alpha + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\beta}e^{2\beta t} - \frac{\sigma^2}{2\beta}}\cdot\varepsilon \\ &x(t) = x_0 e^{-\beta t} + \alpha - \alpha e^{-\beta t} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\beta}}e^{-\beta t}\cdot\sqrt{e^{2\beta t}-1}\cdot\varepsilon = \\ &\alpha + (x_0-\alpha)e^{-\beta t} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\beta}}\sqrt{1-e^{-2\beta t}}\cdot\varepsilon \end{aligned} \tag{15}$$

Если $\beta > 0$, то среднее значение при $t \to \infty$ стремится к α. Решение $x(t)$ находится в интервале шириной $2\frac{\sigma}{\sqrt{2\beta}}$