1 Динамические модели

1.1 Модель Солоу

Пусть имеется замкнутая односекторная экономика.
Y - ВВП
K - капитал
I - инвестиции
C - конечное потребление
L - трудовые ресурсы
Имеется баланс $Y = C + I$. Зависимость ВВП от ресурсов выражается функцией Кобба-Дугласа.

$$\begin{aligned} &Y = AK^{\alpha}L^{\beta} \\ &Y = C + I \\ &I = sY \\ &\frac{\partial L}{\partial t} = \gamma L \qquad\qquad (L(0) = L_0) \\ &\frac{\partial K}{\partial t} = -\mu K + I \qquad (K(0) = K_0) \end{aligned} \tag{1}$$

где γ - темп прироста трудовых ресурсов, s - склонность к сбережению, A - научно-технический прогресс. Пусть $y = Y/L, k = K/L, i = I/L$. Тогда получим модель Солоу в относительных показателях.

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -(\lambda + \mu)k + sAk^{\alpha} \tag{2}$$

Равновесие равно $\hat{k} = (\frac{sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Интервалы	Рост
$\left(0; (\frac{\alpha sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$	Ускоренный рост
$\left((\frac{\alpha sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}; (\frac{sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$	Насыщенный рост
$\left((\frac{sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}; +\infty\right)$	Падение

Конечно-разностное представление: $k(t + \Delta) = k(t) + \Delta t(-(\lambda + \mu)k(t) + sAk(t)^{\alpha})$

1.2 SIR модель

Пусть $S(t)$ - число восприимчивых к инфекции
$I(t)$ - число инфицированных
$R(t)$ - число переболевших инфекцией
N - число популяции

β - коэффициент интенсивности контактов
γ - коэффициент интенсивности выздоровления

$$\frac{dS}{dt} = \frac{-\beta IS}{N}$$
$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I \tag{3}$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

1.3 SEIRD модель

$E(t)$ - число носителей заболевания
D - число умерших
μ - уровень смертности
$\delta = \dfrac{1}{\text{ср.инк.период}}$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{-\beta IS}{N}$$
$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \delta E$$
$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \gamma I - \mu I \tag{4}$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$
$$\frac{dD}{dt} = \mu I$$

1.4 Модель Лотки-Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \tag{5}$$

$x(t)$ - число жертв
$y(t)$ - число хищников
a - коэффициент рождаемости жертв
b - коэффициент убыли жертв
c - коэффициент убыли хищников
d - коэффициент рождаемости хищников
Первой стационарной точкой является $(0, 0)$. Возьмем из системы линейную часть и составим матрицу.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 \\ 0 & -c-\lambda \end{vmatrix} \tag{6}$$

Решая данной характеристическое уравнение получим $\lambda_1 = a, \lambda_2 = -c \Rightarrow$ данная точка является седлом. Теперь приравняем правые части системы к 0 и решим ее. Получим вторую стационарную точку $\overline{x} = \dfrac{c}{d}, \overline{y} = \dfrac{a}{b}$. Построим матрицу Якоби, подставив $\overline{x}, \overline{y}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{bc}{d} \\ -\dfrac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 + ac = 0$, получаем два мнимых корня, что свидетельствует о том что данная стационарная точка является центром.

1.5 Модель взаимодействия двух конкурирующих видов

x_1 - количество особей первого типа x_2 - количество особей второго типа

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1x_1 - b_{11}x_1^2 - b_{12}x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = a_2x_2 - b_{21}x_1x_2 - b_{22}x_2^2 \end{cases} \tag{8}$$

Приравняем к 0 правые части системы.

$$\begin{cases} x_1(a_1 - b_{11}x_1 - b_{12}x_2) = 0 \\ x_2(a_2 - b_{21}x_1 - b_{22}x_2) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Получим 4 стационарные точки.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{a_2}{b_{22}} \end{cases}; \tag{10}$$
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_1}{b_{11}} \\ x_2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = \dfrac{a_2b_{12} - a_1b_{22}}{b_{12}b_{21} - b_{22}b_{11}} \\ x_2 = \dfrac{a_1b_{21} - a_2b_{11}}{b_{12}b_{21} - b_{22}b_{11}} \end{cases}$$