Task 10 (Метод ветвей и границ)

Целевая функция и ограничения имеют следующий вид

$$\begin{aligned} & f = 10x_1 - 6x_2 \to \max \\ & x_1 - 8x_2 \le 10 \\ & x_1 + x_2 \ge 6 \\ & x_1 \ge 2 \\ & x_2 \le 4.99 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Решение данной задачи: $x^* = (49.92; 4.99), f^* = 469.26$ - не целые, поэтому применим метод ветвей и границ. Начнем с переменной x_1.

1. $x_1 \leqslant [x_1^*] = 49$ и $x_1 \geqslant [x_1^*] + 1 = 50$

   1.1) $f = 10x_1 - 6x_2 \to \max;$ constraints; $x_1 \leqslant 49$
   $x_{1.1}^* = (49; 4.875), f^* = 460.75$

      1.1.1) $f = 10x_1 - 6x_2 \to \max;$ constraints; $x_1 \leqslant 49;\ x_2 \leqslant 4$
      $x_{1.1.1}^* = (42; 4), f^* = 396$

      1.1.2) $f = 10x_1 - 6x_2 \to \max;$ constraints; $x_1 \leqslant 49;\ x_2 \geqslant 5$
      $x_{1.1.2}^* \in \varnothing$

   1.2) $f = 10x_1 - 6x_2 \to \max;$ constraints; $x_1 \geqslant 50$
   $x_{1.2}^* \in \varnothing$

2. $x_2 \leqslant [x_2^*] = 4$ и $x_2 \geqslant [x_2^*] + 1 = 5$

   2.1) $f = 10x_1 - 6x_2 \to \max;$ constraints; $x_2 \leqslant 4$
   $x_{2.1}^* = (42; 4), f^* = 396$

   2.2) $f = 10x_1 - 6x_2 \to \max;$ constraints; $x_2 \geqslant 5$
   $x_{2.2}^* \in \varnothing$

Таким образом выбираем решение $x = (42; 4), f = 396$.

Task 11 (Метод Гомори)

Целевая функция и ограничения имеют следующий вид

$$
\begin{aligned}
& f = 10x_1 - 6x_2 \to \max \\
& x_1 - 8x_2 \le 10 \\
& x_1 + x_2 \ge 6 \\
& x_1 \ge 2 \\
& x_2 \le 4.99 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

Приведем задачу к каноническому виду, добавив слабые и искусственные переменные.

$$
\begin{aligned}
& x_1 - 8x_2 + y_1 = 10 \\
& x_1 + x_2 - y_2 + R_1 = 6 \\
& x_1 - y_3 + R_2 = 2 \\
& x_2 + y_4 = 4.99 \\
& x_{1,2} \geqslant 0;\ y_j \geqslant 0 \\
& R_{1,2} \geqslant 0
\end{aligned} \tag{3}
$$

Найдем оптимальное решение при помощи двухэтапного метода.

Первый этап

БП	x1	x2	y1	y2	y3	y4	r1	r2	св.чл.	
R	0 2 2	0 1 0	0 0 0	0 -1 0	0 -1 -2	0 0 0	-1 0 0	-1 0 2	0 8 4	
y1	1 1	-8 0	1 0	0 0	0 -1	0 0	0 0	0 1	10 2	10
r1	1 1	1 0	0 0	-1 0	0 -1	0 0	1 0	0 1	6 2	6
r2	1 1	0 0	0 0	0 0	-1 -1	0 0	0 0	1 1	2 2	2
y4	0 0	1 0	0 0	0 0	0 0	1 0	0 0	0 0	4,99 0	#DIV/0!

БП	x1	x2	y1	y2	y3	y4	r1	r2	св.чл.	
R	0 0	1 1	0 0	-1 -1	1 1	0 0	0 1	-2 -1	4 4	
y1	0 0	-8 -8	1 0	0 8	1 -8	0 0	0 -8	-1 8	8 -32	-1
r1	0 0	1 1	0 0	-1 -1	1 1	0 0	1 1	-1 -1	4 4	4
x1	1 0	0 0	0 0	0 0	-1 0	0 0	0 0	1 0	2 0	#DIV/0!
y4	0 0	1 1	0 0	0 -1	0 1	1 0	0 1	0 -1	4,99 4	4,99

БП	x1	x2	y1	y2	y3	y4	r1	r2	св.чл.
R	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
y1	0	0	1	-8	9	0	8	-9	40
x2	0	1	0	-1	1	0	1	-1	4
x1	1	0	0	0	-1	0	0	1	2
y4	0	0	0	1	-1	1	-1	1	0,99

Второй этап

БП	x1	x2	y1	y2	y3	y4	св.чл.	
f	-10	6	0	0	0	0	0	
	0	0	0	6	-16	0	-4	
	0	-16	0	16	-16	0	-64	
y1	0	0	1	-8	9	0	40	4,444444
	0	9	0	-9	9	0	36	
x2	0	1	0	-1	1	0	4	4
	0	1	0	-1	1	0	4	
x1	1	0	0	0	-1	0	2	-2
	0	-1	0	1	-1	0	-4	
y4	0	0	0	1	-1	1	0,99	-0,99
	0	-1	0	1	-1	0	-4	

БП	x1	x2	y1	y2	y3	y4	св.чл.	
f	0	16	0	-10	0	0	60	
	0	90	-10	-10	0	0	-40	
y1	0	-9	1	1	0	0	4	4
	0	-9	1	1	0	0	4	
y3	0	1	0	-1	1	0	4	-4
	0	9	-1	-1	0	0	-4	
x1	1	1	0	-1	0	0	6	-6
	0	9	-1	-1	0	0	-4	
y4	0	1	0	0	0	1	4,99	#DIV/0!
	0	0	0	0	0	0	0	

БП	x1	x2	y1	y2	y3	y4	св.чл.	
f								
	0	-74	10	0	0	0	100	
	0	-74	0	0	0	-74	-369,26	
y2	0	-9	1	1	0	0	4	-0,44444
	0	-9	0	0	0	-9	-44,91	
y3	0	-8	1	0	1	0	8	-1
	0	-8	0	0	0	-8	-39,92	
x1	1	-8	1	0	0	0	10	-1,25
	0	-8	0	0	0	-8	-39,92	
y4	0	1	0	0	0	1	4,99	4,99
	0	1	0	0	0	1	4,99	

БП	x1	x2	y1	y2	y3	y4	св.чл.	
f								
	0	0	10	0	0	74	469,26	
y2	0	0	1	1	0	9	48,91	
y3	0	0	1	0	1	8	47,92	
x1	1	0	1	0	0	8	49,92	
x2	0	1	0	0	0	1	4,99	

Получили следующее оптимальное решение: $x_1 = 49.92, x_2 = 4.99, f = 469.26$. Решение не является целочисленным, поэтому применим метод Гомори. Из таблицы видно, что $x_2 + y_4 = 4.99 \Rightarrow x_2 = 4.99 - y_4 \Rightarrow 0.99 - y_4 \leqslant 0 \Rightarrow 99 - 100y_4 \leqslant 0 \Rightarrow -100y_4 + s_1 = -99$. Добавим новое ограничение в оптимальное решение и применим двойственный симплекс-метод.

БП	x1	x2	y1	y2	y3	y4	s1	св.чл.
f	0	0	10	0	0	74	0	469,26
	0	0	0	0	0	74	-0,74	73,26
y2	0	0	1	1	0	9	0	48,91
	0	0	0	0	0	9	-0,09	8,91
y3	0	0	1	0	1	8	0	47,92
	0	0	0	0	0	8	-0,08	7,92
x1	1	0	1	0	0	8	0	49,92
	0	0	0	0	0	8	-0,08	7,92
x2	0	1	0	0	0	1	0	4,99
	0	0	0	0	0	1	-0,01	0,99
s1	0	0	0	0	0	-100	1	-99
	0	0	0	0	0	1	-0,01	0,99
	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	-0,74	0	

БП	x1	x2	y1	y2	y3	y4	s1	св.чл.
f	0	0	10	0	0	0	0,74	396
y2	0	0	1	1	0	0	0,09	40
y3	0	0	1	0	1	0	0,08	40
x1	1	0	1	0	0	0	0,08	42
x2	0	1	0	0	0	0	0,01	4
s1	0	0	0	0	0	1	-0,01	0,99