

Математическое моделирование

Лектор: Лебедева Л.Н.

Студент: Захаров К.А.

2020 г.

Содержание

1	Введение	2
2	Статические модели	3
2.1	Производственная функция Кобба-Дугласа	3
2.2	Модель Леонтьева (Межотраслевой баланс)	4
3	Динамические модели	4
3.1	Модель Солоу	4
3.2	SIR модель	5
3.3	SEIRD модель	6
3.4	Модель Лотки-Вольтерра	6
3.5	Модель взаимодействия двух конкурирующих видов	7
3.6	Переход к полярным координатам	7
3.7	Модель Самуэльсона-Хикса	8
3.7.1	Дискретная форма	8
3.7.2	Непрерывная форма	10
4	Модели в частных производных	14
4.1	Модель распространения тепла в тонком стержне	14
4.2	Колебание пластины	16
5	Бифуркации динамических систем	18
5.1	Аттрактор Лоренца	18
5.2	Маятник Фуко	19
5.3	Аттрактор Рикитаци	19
6	Оптимизационные модели	22

1 Введение

Модель - образ или прообраз какого-либо объекта или системы объектов, используемый в качестве их "заместителя".

Математическая модель - описание объекта исследования на языке математики.

Требования к модели:

- адекватность
- конечность
- полнота(информированность)
- упрощенность
- гибкость
- приемлемая трудоемкость разработки

Этапы построения модели:

1. определение цели;
2. изучение предметной области, выявление причинно-следственных связей;
3. переход от концептуальной модели к формализованному описанию;
4. проверка адекватности моделирование;
5. корректировка модели;
6. применение модели. Проведение исследования и практическое использование.

Классификация моделей:

- линейные или нелинейные;
- сосредоточенные и распределенные системы;
- детерминированные или стохастические;
- статические или динамические;
- дискретные или непрерывные.

2 Статические модели

2.1 Производственная функция Кобба-Дугласа

Определение 2.1. Производственная функция - функция выражающая зависимость между затратами ресурсов и объемом выпуска.

Пусть \bar{X} - вектор используемых ресурсов, \bar{Y} - объем выпуска продукции каждого вида.

Property 1. *О производственной функции*

1. $F(x_1, \dots, x_n)$ является достаточно гладкой, т.е. $F \in C^2$
2. $F(x_1, \dots, x_n)$ - возрастающая по каждому аргументу $\frac{\partial F}{\partial x_i} > 0 \forall i$
3. выпуск по каждому аргументу не ограничен
4. предельная производительность убывает $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} < 0 \forall i$

Определение 2.2. Однородная функция

$$F(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda F(x_1, \dots, x_n)$$

Пусть Y - это ВВП, K - основные производственные фонды, L - число занятых. Тогда определим функцию $Y = AK^\alpha L^\beta$, ($A > 0, 0 < \alpha, \beta < 1$). Для оценки параметров A, α, β воспользуемся методом наименьших квадратов $\sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2 \rightarrow \min$. Также необходимо линеаризовать данные параметры при помощи натурального алгоритма. После чего получим следующую целевую функцию.

$$S(A, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^M (\ln A + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i - \ln Y_i)^2 \rightarrow \min \quad (1)$$

Теперь нужно приравнять частные производные к нулю по каждому аргументу и решить систему линейных уравнений (3).

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \ln A} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \end{cases} ; \quad (2)$$

$$\begin{cases} M \ln A + \alpha \sum_{i=1}^M \ln K_i + \beta \sum_{i=1}^M \ln L_i = \sum_{i=1}^M \ln Y_i \\ \ln A \sum_{i=1}^M \ln K_i + \alpha \sum_{i=1}^M \ln K_i^2 + \beta \sum_{i=1}^M \ln K_i \ln L_i = \sum_{i=1}^M \ln Y_i \ln K_i \\ \ln A \sum_{i=1}^M \ln L_i + \alpha \sum_{i=1}^M \ln K_i \ln L_i + \beta \sum_{i=1}^M \ln L_i^2 = \sum_{i=1}^M \ln Y_i \ln L_i \end{cases} \quad (3)$$

2.2 Модель Леонтьева (Межотраслевой баланс)

Пусть x_{ij} - промежуточный продукт, т.е. отрасль i изготавливает продукт для отрасли j

X_i - валовый продукт отрасли i

Y_i - конечный продукт отрасли $i (i = \overline{1, n})$.

Тогда валовый выпуск определяется по следующей формуле.

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i \quad (4)$$

Матрица прямых затрат определяется, как $a_{ij} = x_{ij}/X_j$. Тогда вектор валового выпуска можно определить, как $X = AX + Y \Rightarrow X = (E - A)^{-1}Y$, а конечный продукт $Y = (E - A)X$.

Определение 2.3. Если хотя бы для одного положительного Y уравнение межотраслевого баланса имеет неотрицательное решение, то матрица A продуктивна.

Определение 2.4. Матрица A продуктивна $\iff (E - A)$ имеет n положительных последовательностей главных миноров.

Определение 2.5. Матрица A продуктивна \iff когда матричный ряд $E + A + A^2 + \dots + A_k + \dots$ сходится.

Определение 2.6. Матрицей полных затрат называется обратная матрица Леонтьева $B = (E - A)^{-1}$

3 Динамические модели

3.1 Модель Солоу

Пусть имеется замкнутая односекторная экономика.

Y - ВВП

K - капитал

I - инвестиции

C - конечное потребление

L - трудовые ресурсы

Имеется баланс $Y = C + I$. Зависимость ВВП от ресурсов выражается функцией Кобба-Дугласа.

$$\begin{aligned} Y &= AK^\alpha L^\beta \\ Y &= C + I \\ I &= sY \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= \gamma L & (L(0) = L_0) \\ \frac{\partial K}{\partial t} &= -\mu K + I & (K(0) = K_0) \end{aligned} \quad (5)$$

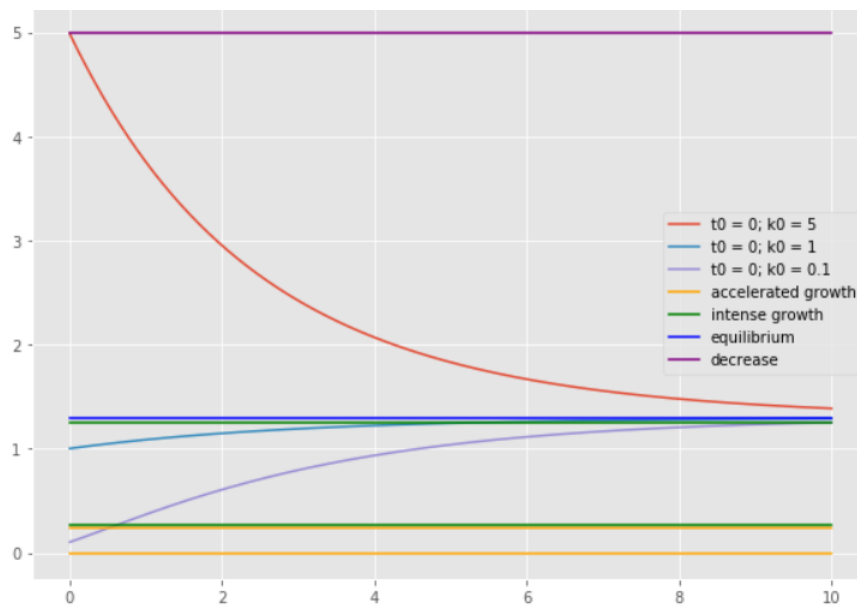
где γ - темп прироста трудовых ресурсов, s - склонность к сбережению, A - научно-технический прогресс. Пусть $y = Y/L$, $k = K/L$, $i = I/L$. Тогда получим модель Солоу в относительных показателях.

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -(\lambda + \mu)k + sAk^\alpha \quad (6)$$

Равновесие равно $\hat{k} = \left(\frac{sA}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Интервалы	Рост
$\left(0; \left(\frac{\alpha s A}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$	Ускоренный рост
$\left(\left(\frac{\alpha s A}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}; \left(\frac{s A}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$	Насыщенный рост
$\left(\left(\frac{s A}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}; +\infty\right)$	Падение

Конечно-разностное представление: $k(t + \Delta) = k(t) + \Delta t(-(\lambda + \mu)k(t) + sAk(t)^\alpha)$ На рисунке ниже показана реализация модели Солоу на Python. На графике представлены три решения с разными задачами Коши. Также при помощи горизонтальных прямых график разбит на интервалы, описанные выше.



3.2 SIR модель

Пусть $S(t)$ - число восприимчивых к инфекции

$I(t)$ - число инфицированных

$R(t)$ - число переболевших инфекцией

N - число популяции

β - коэффициент интенсивности контактов

γ - коэффициент интенсивности выздоровления

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{-\beta IS}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}\tag{7}$$

3.3 SEIRD модель

$E(t)$ - число носителей заболевания

D - число умерших

μ - уровень смертности

$\delta = \frac{1}{\text{ср.инк.период}}$

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{-\beta IS}{N} \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - \delta E \\ \frac{dI}{dt} &= \delta E - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \\ \frac{dD}{dt} &= \mu I\end{aligned}\tag{8}$$

3.4 Модель Лотки-Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}\tag{9}$$

$x(t)$ - число жертв

$y(t)$ - число хищников

a - коэффициент рождаемости жертв

b - коэффициент убыли жертв

c - коэффициент убыли хищников

d - коэффициент рождаемости хищников

Первой стационарной точкой является $(0, 0)$. Возьмем из системы линейную часть и составим матрицу.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{vmatrix}\tag{10}$$

Решая данной характеристическое уравнение получим $\lambda_1 = a, \lambda_2 = -c \Rightarrow$ данная точка является седлом. Теперь приравняем правые части системы к 0 и решим ее. Получим

вторую стационарную точку $\bar{x} = \frac{c}{d}, \bar{y} = \frac{a}{b}$. Построим матрицу Якоби, подставив \bar{x}, \bar{y} .

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ -\frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 + ac = 0$, получаем два мнимых корня, что свидетельствует о том что данная стационарная точка является центром.

3.5 Модель взаимодействия двух конкурирующих видов

x_1 - количество особей первого типа x_2 - количество особей второго типа

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1x_1 - b_{11}x_1^2 - b_{12}x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = a_2x_2 - b_{21}x_1x_2 - b_{22}x_2^2 \end{cases} \quad (12)$$

Приравняем к 0 правые части системы.

$$\begin{cases} x_1(a_1 - b_{11}x_1 - b_{12}x_2) = 0 \\ x_2(a_2 - b_{21}x_1 - b_{22}x_2) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Получим 4 стационарные точки.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{a_2}{b_{22}} \end{cases} ; \\ & \begin{cases} x_1 = \frac{a_1}{b_{11}} \\ x_2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = \frac{a_2b_{12} - a_1b_{22}}{b_{12}b_{21} - b_{22}b_{11}} \\ x_2 = \frac{a_1b_{21} - a_2b_{11}}{b_{12}b_{21} - b_{22}b_{11}} \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Определим состояние равновесия для каждой стационарной точки

1. 1

2. 2

3.6 Переход к полярным координатам

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (15)$$

Перейдем к полярным координатам.

$$\begin{cases} x_1(t) = r(t) \cos \varphi(t) \\ x_2(t) = r(t) \sin \varphi(t) \end{cases} \quad (16)$$

Выполним подстановку и получим выражения для \dot{r} и $\dot{\varphi}$.

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi + r \dot{\varphi}(-\sin \varphi) = r \cos \varphi - r \sin \varphi - r^3 \cos \varphi & | * \cos \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = r \cos \varphi + r \sin \varphi - r^3 \sin \varphi & | * \sin \varphi \end{cases} + \quad (17)$$

$$\begin{cases} \dot{r} \cos^2 \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi = r \cos^2 \varphi - r \cos \varphi \sin \varphi - r^3 \cos^2 \varphi \\ \dot{r} \sin^2 \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi = r \sin^2 \varphi + r \sin \varphi \cos \varphi - r^3 \sin^2 \varphi \end{cases} \quad (18)$$

Тем самым получаем выражение для $\dot{r}(t) = r(t)(1 - r^2(t))$. Теперь умножим первое уравнения на $\sin \varphi$, второе на $\cos \varphi$ и вычтем из первого второе.

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi + r \dot{\varphi}(-\sin \varphi) = r \cos \varphi - r \sin \varphi - r^3 \cos \varphi & | * \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = r \cos \varphi + r \sin \varphi - r^3 \sin \varphi & | * \cos \varphi \end{cases} - \quad (19)$$

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi \sin \varphi - r \dot{\varphi} \sin^2 \varphi = r \cos \varphi \sin \varphi - r \sin^2 \varphi - r^3 \cos \varphi \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi \cos \varphi + r \dot{\varphi} \cos^2 \varphi = r \cos^2 \varphi + r \sin \varphi \cos \varphi - r^3 \sin \varphi \cos \varphi \end{cases} \quad (20)$$

Таким образом получим систему (1) в полярных координатах.

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (21)$$

Стационарные точки для данной системы $r = 0$ и $r = 1$.

Устойчивый вариант:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (22)$$

Неустойчивый вариант:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (23)$$

Полуустойчивый вариант:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r)^2 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (24)$$

3.7 Модель Самуэльсона-Хикса

3.7.1 Дискретная форма

Предполагается замкнутая экономика, предложение эластично, цены и процентная ставка фиксированы. Рассмотрим уравнение

$$Y_{t+1} = C(Y_t) + I_t \quad (25)$$

Пусть спрос зависит от Y_t линейно, т.е. $C(Y_t) = C_a + cY_t$, а инвестиции равны $I_t = r(Y_t - Y_{t-1}) + I_a$, где C_a - постоянное потребление, I_a - постоянные инвестиции, r -

коэффициент акселерации, c - склонность к потреблению. $A = C_a + I_a$ - автономные расходы. Получим следующее конечно-разностное уравнение.

$$Y_{t+1} = C_a + I_a + cY_t + r(Y_t - Y_{t-1}) \quad (26)$$

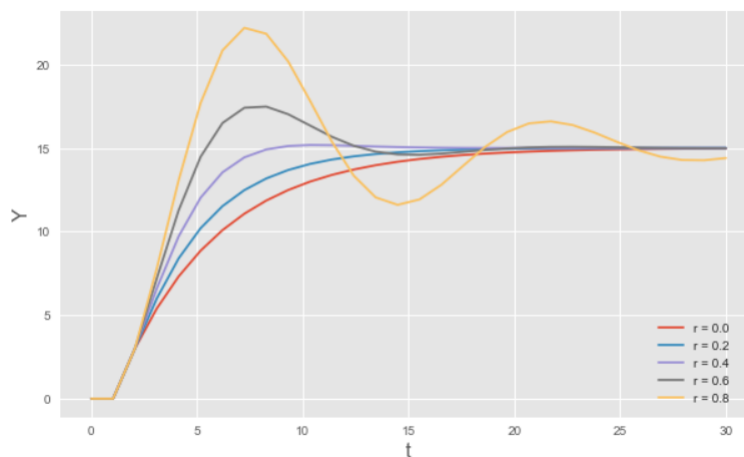
Равновесие определим из предположения, что автономные расходы постоянны и объем ВВП стабилизируется на определенном уровне, т.е. $Y_t = Y_{t-1} = \dots = Y_{t-n} = \hat{Y}$. Тогда получим уравнение

$$\hat{Y} = A + c\hat{Y} + r(\hat{Y} - \hat{Y}) = A + c\hat{Y} \quad (27)$$

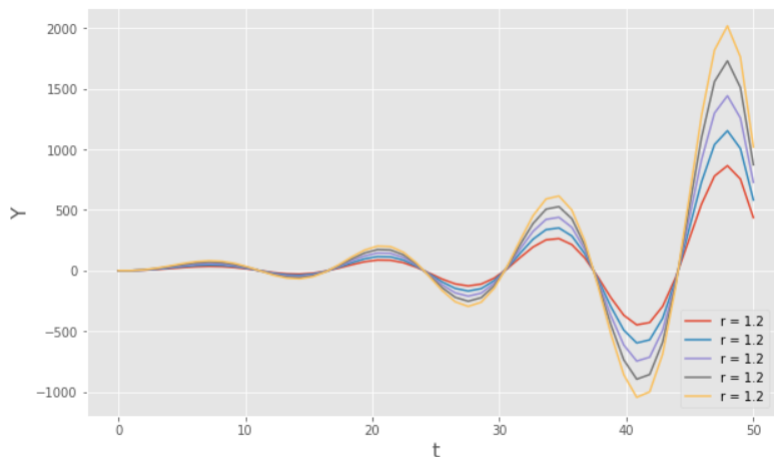
$\Rightarrow \hat{Y} = \frac{A}{1-c}$. Величина $\frac{1}{1-c}$ называется мультипликатором автономных расходов.

Рассмотрим уровень дохода при изменении коэффициента акселерации:

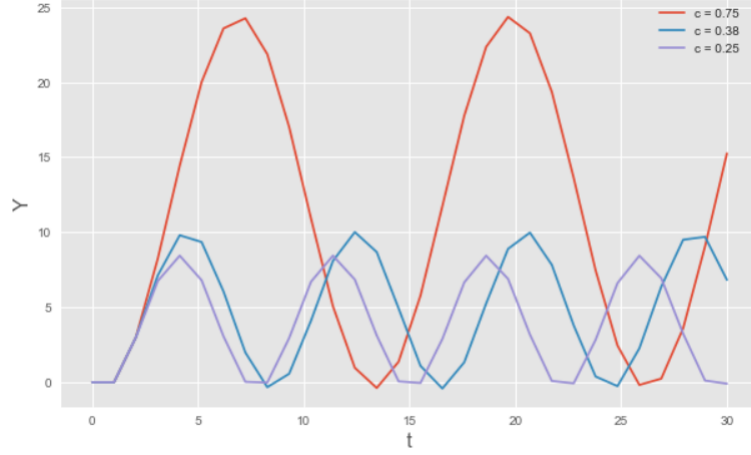
1. Если $0 < r < 1$, то равновесие восстановится через некоторое время при новом уровне дохода.



2. Если $r > 1$, то при нарушении равновесия единожды, оно больше не восстановится.



3. Если $r = 1$, то значение дохода будет колебаться с постоянным периодом.



3.7.2 Непрерывная форма

Перейдя от конечных разностей получим следующее уравнение.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(1-r) \frac{\partial y}{\partial t} - (1-c)y + A \quad (28)$$

Понизим порядок уравнения, приведя его к НСДУ.

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = x \\ \frac{\partial x}{\partial t} = -(1-r)x - (1-c)y + A \end{cases} \quad (29)$$

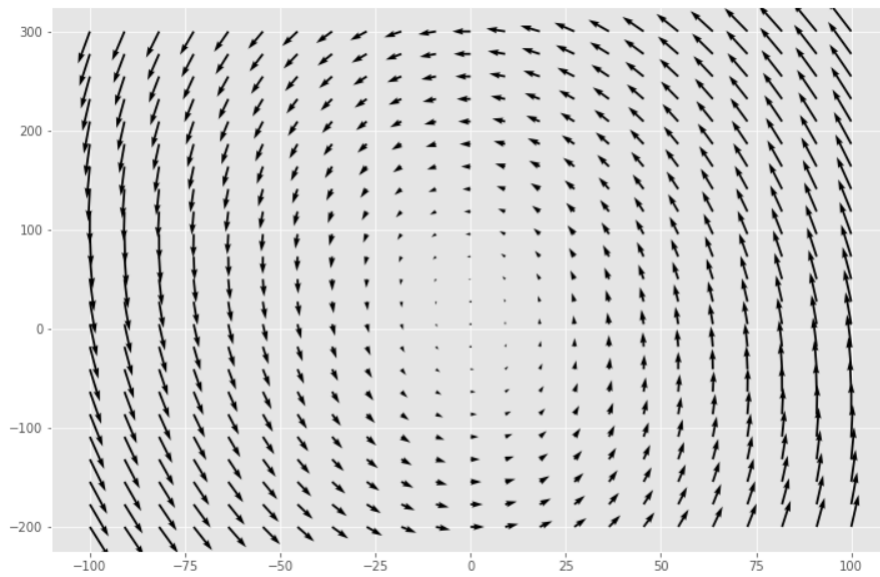
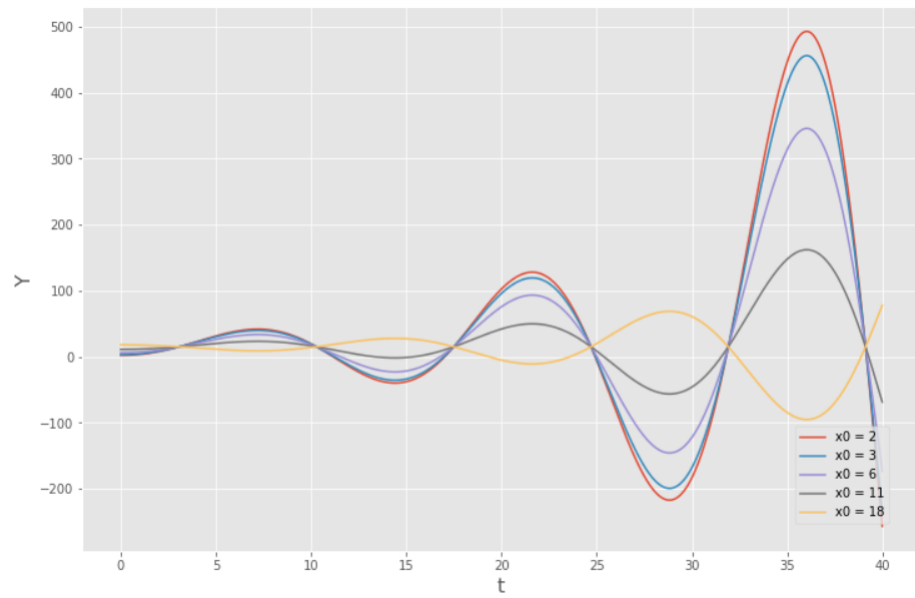
Отсюда легко получить стационарную точку приравняв правые части к 0. Получим $x = 0, y = \frac{A}{1-c}$. Определим состояния равновесия в стационарной точке при помощи корней характеристического уравнения. Составим матрицу Якоби.

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} - & -(1-c) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

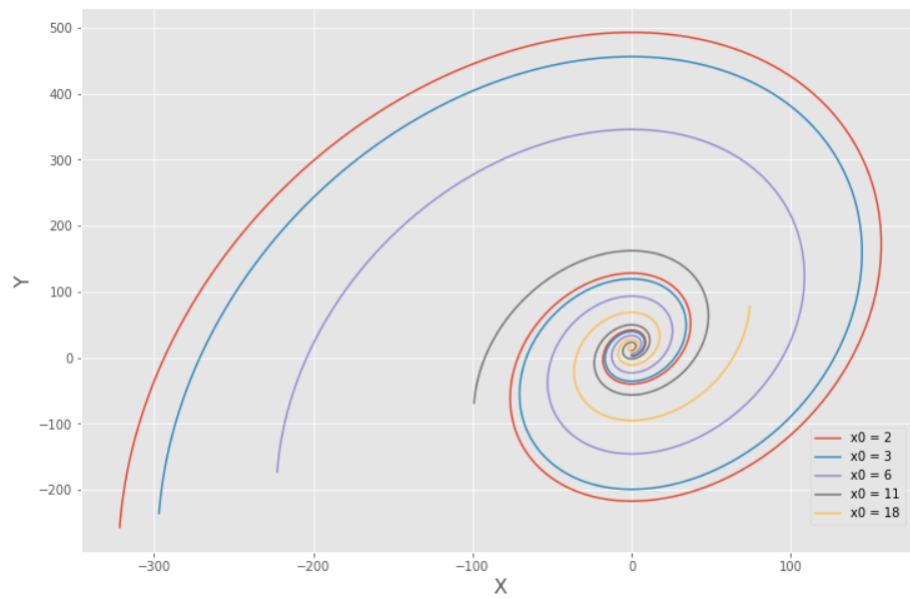
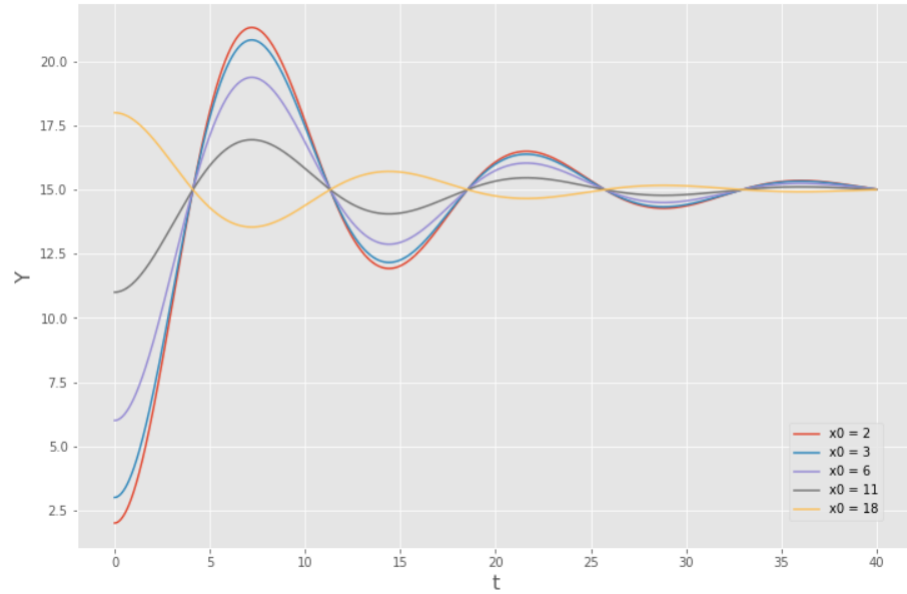
Найдем собственные значения при следующих параметрах:

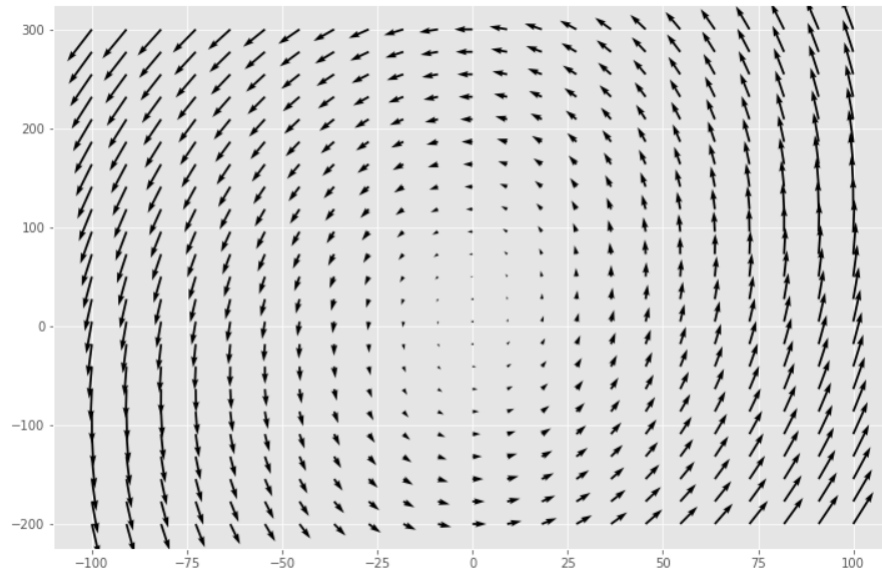
1. $r = 1.2; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0.1 \pm 0.435i$.

Т.е. при $r > 1$ получаем неустойчивый фокус.



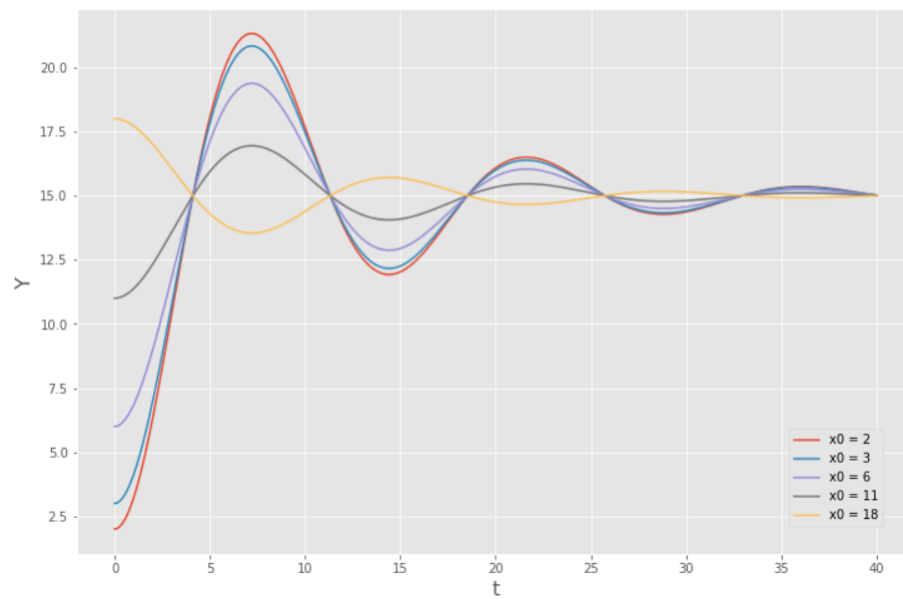
2. $r = 0.8; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -0.1 \pm 0.435i$.
 При $0 < r < 1$ получаем устойчивый фокус.

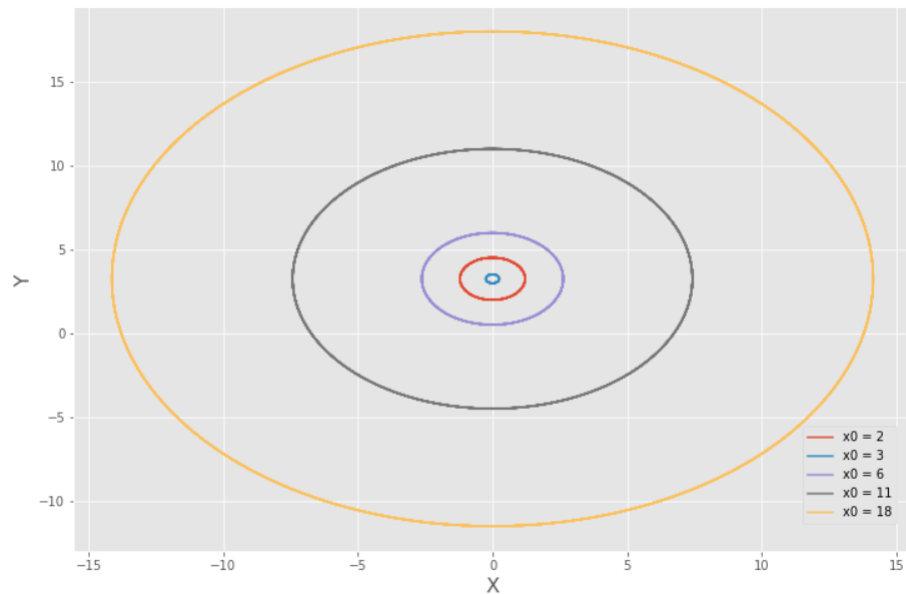




3. $r = 1; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 0.447i$.

И наконец при $r = 1$ получаем центр.





4 Модели в частных производных

4.1 Модель распространения тепла в тонком стержне

Предположения по модели:

- теплоизолированная боковая поверхность;
- однородный тонкий стержень;
- в любой точке поперечного сечения температура в момент времени t одинакова;
- начальное распределение температуры известно.

Пусть $u(x, t)$ - температура в поперечном сечении с координатой x в момент времени t ;

ρ - плотность материала, из которого изготовлен стержень;

C - удельная теплоемкость;

λ - коэффициент теплопроводности;

S - площадь поперечного сечения стержня.

Рассмотрим малый участок стержня $[x, x + \Delta x]$, а Δu - изменение температуры на этом

участке.

$$\begin{aligned}
 \Delta Q &= C \cdot m \cdot \Delta u \\
 \Delta Q &= CS\Delta x\rho\Delta u \\
 \Delta Q &= Q_L - Q_R \\
 \Delta Q &= -\lambda S \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Delta t + \lambda S \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} \Delta t \\
 CS\Delta x\rho\Delta u &= \lambda S\Delta t \left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \\
 \frac{\Delta u}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{C\rho} \cdot \frac{\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\Delta x}
 \end{aligned} \tag{31}$$

При $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0, a = \sqrt{\frac{\lambda}{C\rho}}$ получаем уравнение теплопроводности.

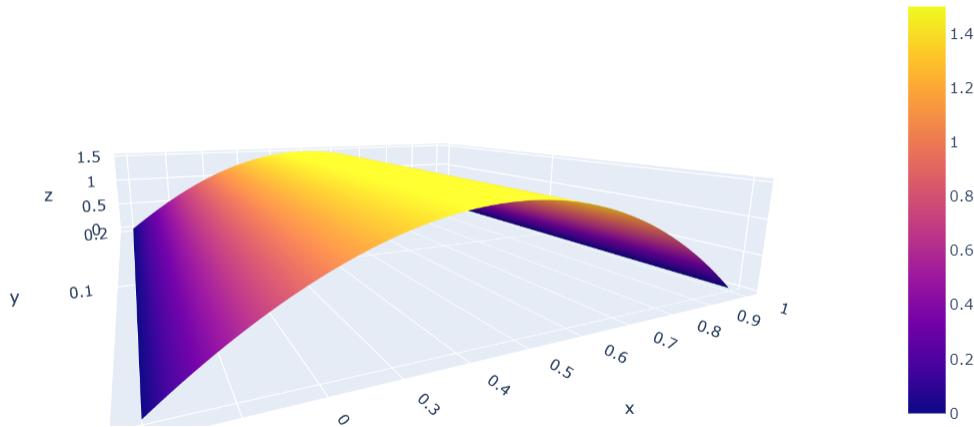
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{32}$$

Начальное условие: $u(x, 0) = f(x)$

Граничные условия: $u(0, 0) = u_0, u(0, t) = u_0, u(L, 0) = u_L, u(L, t) = u_L$ Рассмотрим в качестве начальной функции распределения температуры треугольное распределение.

$$f_t(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & \text{if } x \in [a, c] \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & \text{if } x \in [c, b] \\ 0, & \text{if } x \notin [a, b] \end{cases} \tag{33}$$

Для решения уравнения теплопроводности воспользуемся методом сеток.



4.2 Колебание пластины

Рассмотрим изотропную (одинаковые физические свойства во всех направлениях) однородную пластину. Пусть w - поперечное смещение средней поверхности пластины. Общее уравнение для w имеет следующий вид.

$$D\nabla^2\nabla^2w = -q(x, t) - 2\rho h\frac{\partial^2w}{\partial t^2} \quad (34)$$

где $2h$ - ширина пластины, $q(x, t)$ - внешняя сила, D - жесткость пластины при изгибе, ρ - плотность пластины. Формула для бигармонического оператора имеет следующий вид.

$$\nabla^2\nabla^2w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left\{ \frac{\partial^2w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2w}{\partial y^2} \right\} \quad (35)$$

Для свободно вибрирующей пластины $w = w(r, t)$ перейдем в цилиндрические координаты. Оператор Лапласа в них выглядит следующим образом.

$$\nabla^2w \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial w}{\partial r} \right\} \quad (36)$$

Тогда исходное уравнение примет следующий вид.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial w}{\partial r} \right\} \right\} \right] \quad (37)$$

После применения оператора Лапласа получим следующее выражение.

$$\frac{\partial^4w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2w}{\partial r^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{2h\rho}{D} \frac{\partial^2w}{\partial t^2} \quad (38)$$

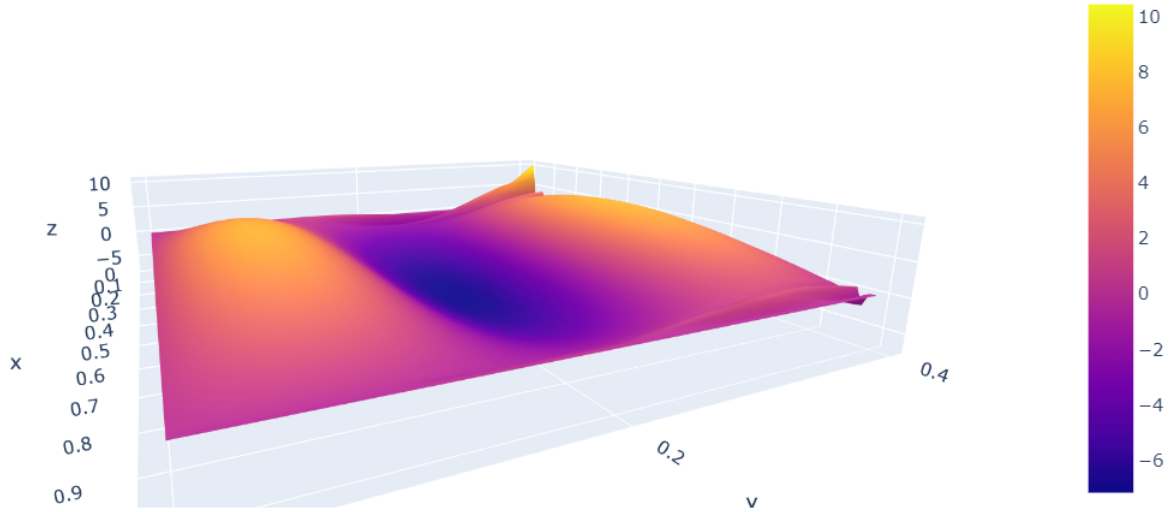
Перепишем производные в конечных разностях.

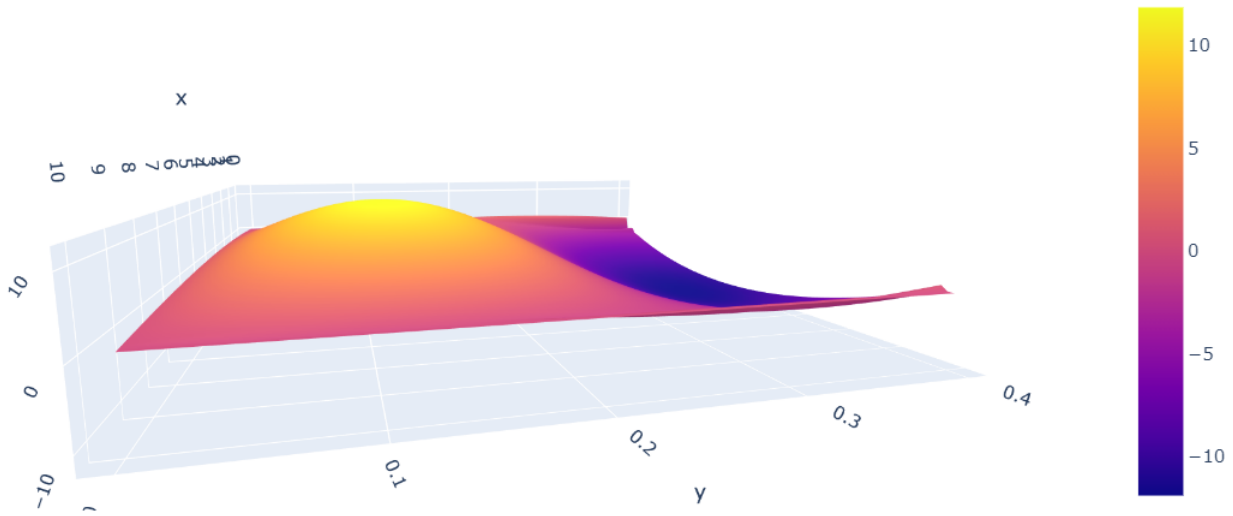
$$\begin{aligned} \frac{\partial^3x}{\partial t^3} &= \frac{\frac{x(t+2\Delta t) - x(t+\Delta t)}{\Delta t} - \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}}{\Delta t} - \\ &\quad \frac{\frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t} - \frac{x(t-\Delta t) - x(t-2\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t} = \\ &= \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)) + 2x(t-\Delta t) - 2x(t-2\Delta t) + x(t-2\Delta t)}{\Delta t^3} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial w(r, t)}{\partial x} \right|_{(x, t) = (x_i, t_j)} &= \frac{w_{i+1, j} - w_{i, j}}{h} \\
\left. \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial x^2} \right|_{(x, t) = (x_i, t_j)} &= \frac{w_{i+1, j} - 2w_{i, j} + w_{i-1, j}}{h^2} \\
\left. \frac{\partial^3 w(r, t)}{\partial x^3} \right|_{(x, t) = (x_i, t_j)} &= \frac{w_{i+2, j} - 2w_{i+1, j} + 2w_{i-1, j} + w_{i-2, j}}{h^3} \\
\left. \frac{\partial^4 w(r, t)}{\partial x^4} \right|_{(x, t) = (x_i, t_j)} &= \frac{w_{i+2, j} - 4w_{i+1, j} + 6w_{i, j} - 4w_{i-1, j} + w_{i-2, j}}{h^4} \\
\left. \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2} \right|_{(x, t) = (x_i, t_j)} &= \frac{w_{i, j+1} - 2w_{i, j} + w_{i, j-1}}{k^2}
\end{aligned} \tag{40}$$

Пусть $\alpha = -\frac{2\rho h}{D}$. Обозначим левую часть за L и выразим $w(r, t + \Delta t)$.

$$w(r, t + \Delta t) = \frac{k^2 L}{\alpha} + 2w(r, t) - w(r, t - \Delta t) \tag{41}$$





5 Бифуркации динамических систем

Определение 5.1. Бифуркация - качественное изменение фазового портрета при изменении параметров системы.

Теорема 5.1. Бифуркация Хопфа

Пусть есть система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(x_1, \dots, x_n, \mu) & X_1(0, \dots, 0, \mu) = 0 \\ \dot{x}_2 = X_2(x_1, \dots, x_n, \mu) & X_2(0, \dots, 0, \mu) = 0 \end{cases} \quad (42)$$

$\lambda_1(\mu_0), \lambda_2(\mu_0)$ - чисто мнимые корни. Точка $(0, 0)$ - асимптотически устойчива при μ_0 и $\frac{\partial}{\partial \mu} \{Re(\lambda_i(\mu))\}_{\mu=\mu_0} > 0$.

Тогда

1. μ_0 - точка бифуркации
2. \exists интервал $\mu \in (\mu_1, \mu_0)$ такой, что $(0; 0)$ - устойчивый фокус
3. \exists интервал $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$ такой, что $(0; 0)$ - неустойчивый фокус, окруженный предельным циклом

5.1 Аттрактор Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad a, r, b > 0 \quad (43)$$

r - управляющий переменный параметр

$(0 < r < 1)$ - одна критическая точка

$r \rightarrow 1$ - критическое замедление

$r = 1.345$ - узлы переходят в фокусы

$r > 24$ - хаос

5.2 Маятник Фуко

Пусть L - длина нити маятника

ω - угловая скорость

g - ускорение свободного падения

x, y - координаты

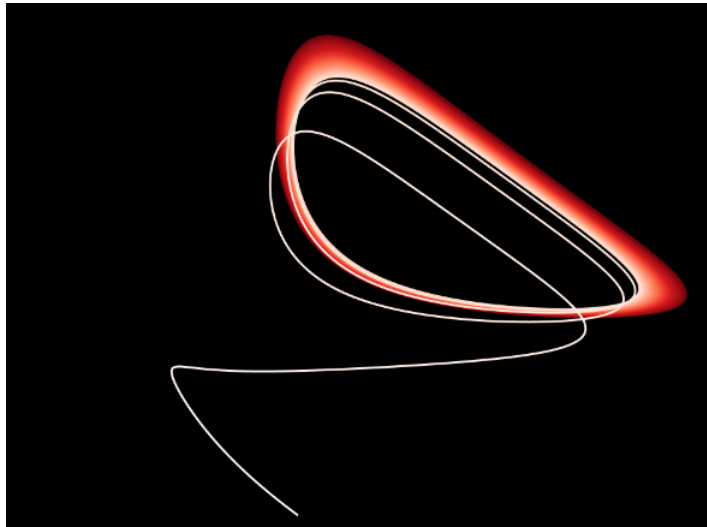
v_x, v_y - скорости

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= 2v_y\omega + \omega^2x - g\frac{x}{L} \\ \frac{dv_y}{dt} &= -2v_x\omega + \omega^2y - g\frac{y}{L} \\ \frac{dx}{dt} &= v_x \\ \frac{dy}{dt} &= v_y\end{aligned}\tag{44}$$

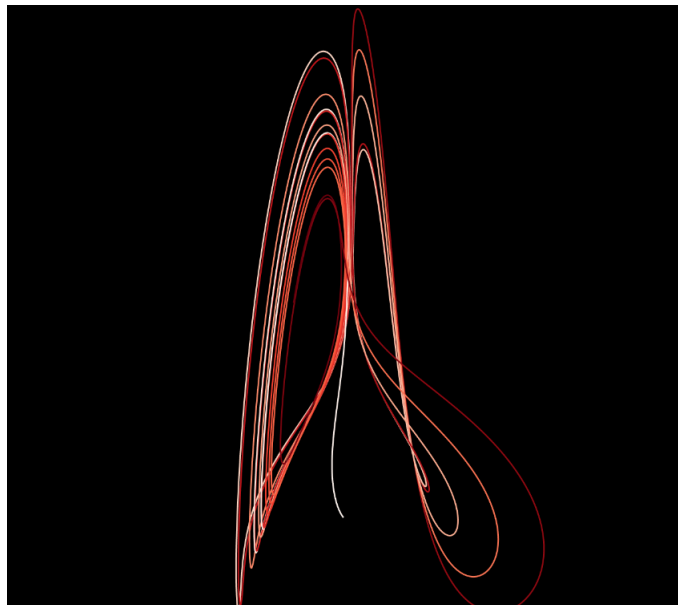
5.3 Аттрактор Рикитаки

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\mu x + yz \\ \frac{dy}{dt} &= (z - a)x - \mu y \\ \frac{dz}{dt} &= 1 - xy\end{aligned}\tag{45}$$

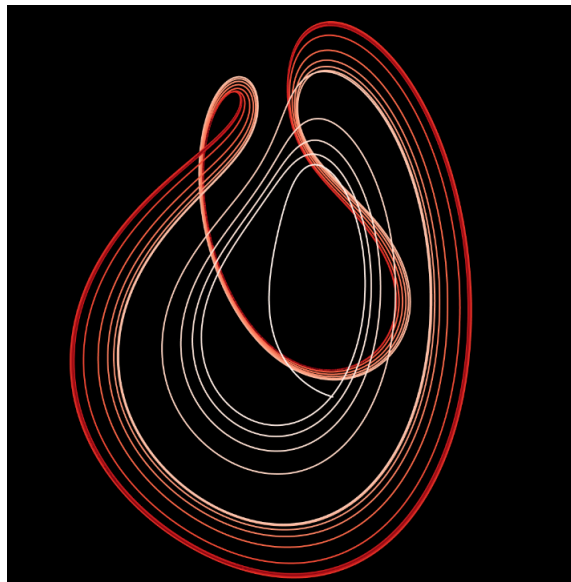
На рисунках ниже представлен численный анализ модели при различных параметрах μ и a . При параметрах $\mu = 0.2, a = 0.5$ получаем спиральный устойчивый фокус сходящийся в направлении плоскости XY



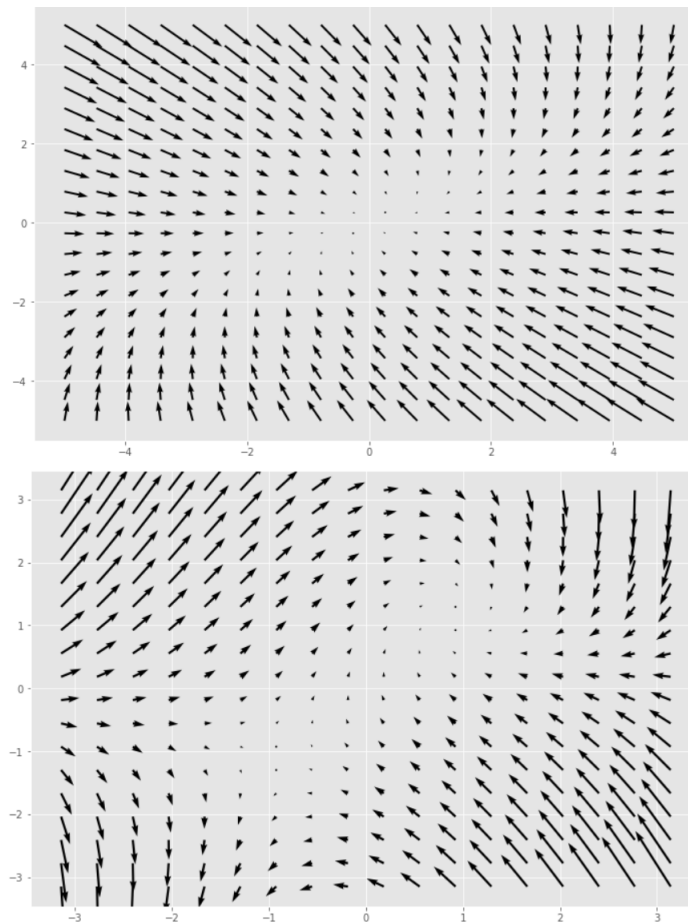
При параметрах $\mu \geq 1, a = 0.9$ получаем седло.



При параметрах $\mu = 0.498, a = 0.1$ получаем график, где видно и седло и спиральный фокус.



Далее представлены графики векторного поля по осям. На первом рисунке виден спиральный устойчивый фокус в плоскости XY , а на второй в плоскости XZ видно седло и устойчивый фокус одновременно.



6 Оптимизационные модели