Hometask. MDMWNPP

Problem Statement I

Пусть задано мультимножество векторов $\mathcal{S} = \left\{s_i \; \middle| s_i = (s_{i1}, ..., s_{ip}) \in \mathbb{R}^p_{>0}, i \in \{1, ..., n\}\right\}$, где n - число элементов мультимножества $\mathcal{S}$, p - размерность векторов.

Необходимо разбить мультимножество на k групп с наиболее равномерной суммой подгрупп.

Введем бинарные переменные принадлежности i-го вектора j-й группе.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } s_i \text{ назначен в группу } j \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \tag{1}$$

Целевая функция (2) минимизирует максимальное абсолютное отклонение суммарного значения компонент в группах.

$$\max \left| \sum_{i=1}^{n} s_{il}(x_{ij_1} - x_{ij_2}) \right| \to \min \tag{2}$$
$$\forall l \in \{1, ..., p\} \tag{3}$$
$$\forall j_1, j_2 \in \{1, ..., k\} \tag{4}$$
$$j_1 < j_2 \tag{5}$$

Так как целевая функция нелинейная, то необходимо линеаризовать ее. Введем переменную Δ.

$$\Delta \to \min \tag{6}$$

Ограничения:

$$\Delta = \max \left| \sum_{i=1}^{n} s_{il}(x_{ij_1} - x_{ij_2}) \right| \tag{7}$$
$$\sum_{j=1}^{k} x_{ij} = 1 \;\; \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{8}$$

Преобразуем ограничение (7).

$$\Delta \geq \sum_{i=1}^{n} s_{il}(x_{ij_1} - x_{ij_2}) \tag{9}$$
$$\Delta \geq \sum_{i=1}^{n} s_{il}(x_{ij_2} - x_{ij_1}) \tag{10}$$
$$\forall l \in \{1, ..., p\} \tag{11}$$
$$\forall j_1, j_2 \in \{1, ..., k\} \tag{12}$$
$$j_1 < j_2 \tag{13}$$

Таким образом получаем слудующую постановку задачи.

$$\Delta \to \min \tag{14}$$

$$\Delta \geq \sum_{i=1}^{n} s_{il}(x_{ij_1} - x_{ij_2}) \qquad \forall l \in \{1, ..., p\} \; \forall j_1, j_2 \in \{1, ..., k\}, \; j_1 < j_2 \tag{15}$$

$$\Delta \geq \sum_{i=1}^{n} s_{il}(x_{ij_2} - x_{ij_1}) \qquad \forall l \in \{1, ..., p\} \; \forall j_1, j_2 \in \{1, ..., k\}, \; j_1 < j_2 \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{17}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in \{1, ..., n\} \; \forall j \in \{1, ..., k\} \tag{18}$$

$$\Delta \in \mathbb{R}_{>0} \tag{19}$$

Problem Statement II

Пусть задано мультимножество векторов $\mathcal{S} = \big\{ s_i \ \big| s_i = (s_{i1}, ..., s_{ip}) \in \mathbb{R}^p_{>0}, i \in \{1, ..., n\} \big\}$, где n - число элементов мультимножества $\mathcal{S}$, p - размерность векторов.

Необходимо разбить мультимножество на k групп с наиболее равномерной суммой подгрупп.

Введем бинарные переменные принадлежности i-го вектора j-й группе.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } s_i \text{ назначен в группу } j \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \tag{20}$$

Введем идеальные суммы подгрупп: $\widetilde{\psi}_l = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} s_{il}}{k}$ и весовые коэффициенты $w_l \geq 0$, такие что $\displaystyle\sum_{l=1}^{p} w_l = 1$. Пусть ψ_{lj} - суммарное значение компоненты l в группе j. Тогда целевая функция примет следующий вид (21).

$$\sum_{l=1}^{p} \left(w_l \sum_{j=1}^{k} \left| 1 - \frac{\psi_{lj}}{\widetilde{\psi}_l} \right| \right) \to \min \tag{21}$$

Линеаризуем целевую функцию, введя новые переменные $\varepsilon_{lj} \in \mathbb{R}_{>0}$. Получим следующую целевую функцию.

$$\sum_{l=1}^{p} \left(w_l \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_{lj} \right) \to \min \tag{22}$$

Ограничения задачи:

$$\varepsilon_{lj} \geq 1 - \frac{\psi_{lj}}{\widetilde{\psi}_l} \qquad \forall l \in \{1, ..., p\}\ \forall j \in \{1, ..., k\} \tag{23}$$

$$\varepsilon_{lj} \geq \frac{\psi_{lj}}{\widetilde{\psi}_l} - 1 \qquad \forall l \in \{1, ..., p\}\ \forall j \in \{1, ..., k\} \tag{24}$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{25}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in \{1, ..., n\}\ \forall j \in \{1, ..., k\} \tag{26}$$

$$\varepsilon_{lj} \in \mathbb{R}_{>0} \qquad \forall l \in \{1, ..., p\} \qquad \forall j \in \{1, ..., k\} \tag{27}$$

Problem Statement III

Пусть задано мультимножество векторов $\mathcal{S} = \big\{s_i \ \big| s_i = (s_{ij1}, ..., s_{ijp}) \in \mathbb{R}^{kp}_{>0}, i \in \{1, ..., n\}\big\}$, где n - число элементов мультимножества $\mathcal{S}$, p - размерность векторов.

Необходимо разбить мультимножество на k групп с наиболее равномерной суммой подгрупп.

Введем бинарные переменные принадлежности i-го вектора j-й группе.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } s_i \text{ назначен в группу } j \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \tag{28}$$

Введем идеальные суммы подгрупп: $\widetilde{\psi}_l = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} s_{ijl}}{k}$ $\forall l \in \{1, ..., p\}$ $\forall j \in \{1, ..., k\}$ и весовые коэффициенты $w_l \geq 0$, такие что $\displaystyle\sum_{l=1}^{p} w_l = 1$. Пусть ψ_{lj} - суммарное значение компоненты l в группе j. Тогда целевая функция примет следующий вид (29).

$$\sum_{l=1}^{p} \left(w_l \sum_{j=1}^{k} \left| 1 - \frac{\psi_{lj}}{\widetilde{\psi}_{lj}} \right| \right) \to \min \tag{29}$$

Линеаризуем целевую функцию, введя новые переменные $\varepsilon_{lj} \in \mathbb{R}_{>0}$. Получим следующую целевую функцию.

$$\sum_{l=1}^{p} \left(w_l \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_{lj} \right) \to \min \tag{30}$$

Ограничения задачи:

$$\varepsilon_{lj} \geq 1 - \frac{\psi_{lj}}{\widetilde{\psi}_{lj}} \qquad \forall l \in \{1,...,p\}\ \forall j \in \{1,...,k\} \tag{31}$$

$$\varepsilon_{lj} \geq \frac{\psi_{lj}}{\widetilde{\psi}_{lj}} - 1 \qquad \forall l \in \{1,...,p\}\ \forall j \in \{1,...,k\} \tag{32}$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in \{1,...,n\} \tag{33}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in \{1,...,n\}\ \forall j \in \{1,...,k\} \tag{34}$$

$$\varepsilon_{lj} \in \mathbb{R}_{>0} \qquad \forall l \in \{1,...,p\} \qquad \forall j \in \{1,...,k\} \tag{35}$$