1 Статические модели

1.1 Производственная функция Кобба-Дугласа

Definition 1.1. Производственная функция - функция выражающая зависимость между затратами ресурсов и объемом выпуска.

Пусть $\overline{X}$ - вектор используемых ресурсов, $\overline{Y}$ - объем выпуска продукции каждого вида.

Property. *О производственной функции*

1. *$F(x_1, ..., x_n)$ является достаточно гладкой, т.е. $F \in C^2$*
2. *$F(x_1, ..., x_n)$ - возрастающая по каждому аргументу $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} > 0 \forall\ i$*
3. *выпуск по каждому аргументу не ограничен*
4. *предельная производительность убывает $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} > 0 \forall\ i$*

Definition 1.2. Однородная функция
$F(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda F(x_1, ..., x_n)$

Пусть Y - это ВВП, K - основные производственные фонды, L – число занятых. Тогда определим функцию $Y = AK^\alpha L^\beta, (A > 0, 0 < \alpha, \beta < 1)$. Для оценки параметров A, α, β воспользуемся методом наименьших квадратов $\sum_{i=1}^{n}(a + bx_i - y_i)^2 \to \min$. Также необходимо линеаризовать данные параметры при помощи натурального алгоритма. После чего получим следующую целевую функцию.

$$S(A, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{M}(\ln A + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i - \ln Y_i)^2 \to \min \tag{1}$$

Теперь нужно приравнять частные производные к нулю по каждому аргументу и решить систему линейных уравнений (3).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \ln A} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \end{cases}; \tag{2}$$

$$\begin{cases} M \ln A + \alpha \sum_{i=1}^{M} \ln K_i + \beta \sum_{i=1}^{M} \ln L_i = \sum_{i=1}^{M} \ln Y_i \\ lnA \sum_{i=1}^{M} \ln K_i + \alpha \sum_{i=1}^{M} \ln K_i{}^2 + \beta \sum_{i=1}^{M} \ln K_i \ln L_i = \sum_{i=1}^{M} \ln Y_i \ln K_i \\ lnA \sum_{i=1}^{M} \ln L_i + \alpha \sum_{i=1}^{M} \ln K_i \ln L_i + \beta \sum_{i=1}^{M} \ln L_i{}^2 = \sum_{i=1}^{M} \ln Y_i \ln L_i \end{cases} \tag{3}$$

1.2 Модель Леонтьева (Межотраслевой баланс)

Пусть x_{ij} - промежуточный продукт, т.е. отрасль i изготавливает продукт для отрасли j
X_i - валовый продукт отрасли i
Y_i - конечный продукт отрасли $i(i = \overline{1,n})$.
Тогда валовый выпуск определяется по следующей формуле.

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i \tag{4}$$

Матрица прямых затрат определяется, как $a_{ij} = x_{ij}/X_j$. Тогда вектор валового выпуска можно определить, как $X = AX + Y \Rightarrow X = (E - A)^{-1}Y$, а конечный продукт $Y = (E - A)X$.

Definition 1.3. Если хотя бы для одного положительного Y уравнение межотраслевого баланса имеет неотрицательное решение, то матрица A продуктивна.

Definition 1.4. Матрица A продуктивна $\iff$ $(E - A)$ имеет n положительных последовательностей главных миноров.

Definition 1.5. Матрица A продуктивна $\iff$ когда матричный ряд $E + A + A^2 + ... + A_k + ...$ сходится.

Definition 1.6. Матрицей полных затрат называется обратная матрица Леонтьева $B = (E - A)^{-1}$