

Поиск околостабильного распределения с нижней границей квоты

Кирилл Захаров

СПбГЭУ

2021

Постановка задачи

Пусть заданы множества:

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ - множество студентов

$C = \{c_1, \dots, c_m\}$ - множество компаний

E - множество всех пар (a_i, c_j)

И заданы границы квот:

u_j - верхняя граница квоты компании c_j

l_j - нижняя граница квоты компании c_j

Пусть r_{ij} - ранг компании c_j в списке предпочтений студента a_i

Будем говорить, что студент a_i предпочитает компанию c_j компании c_k , если $r_{ij} < r_{ik}$

Пусть s_{ij} - оценка студента a_i в компании c_j

Будем говорить, что компания c_j предпочитает студента a_i студенту a_k , если $s_{ij} \geq s_{kj}$

Определение

Распределение называется **стабильным** если для любой пары студент-компания, не входящей в распределение, т.е. $(a_i, c_j) \notin E$, либо студент назначен в более предпочитаемую им компанию или компания заполнена студентами с такой же или более высокой оценкой.

Пример

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Первый студент предпочитает 3 компанию, второй студент 1 компанию и третий предпочитает 2.

$$x \in \{0, 1\}$$

Базовые ограничения

$$\sum_{j:(a_i, c_j) \in E} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$\sum_{i:(a_i, c_j) \in E} x_{ij} \leq u_j \quad \forall j = 1, \dots, m \quad (2)$$

Ограничение для стабильности

$$\left(\sum_{k:r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik} \right) u_j + \sum_{h:(a_h, c_j) \in E, s_{hj} \geq s_{ij}} x_{hj} \geq u_j \quad \forall (a_i, c_j) \in E \quad (3)$$

Целевая функция

$$\sum_{(a_i, c_j) \in E} r_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min \quad (4)$$

Ограничения на распределение

Пусть $\mathcal{T} = \{T^1, \dots, T^p\}$ - множество типов студентов

$t(a_i)$ - тип студента a_i

l_j^k, u_j^k - нижняя и верхняя границы квоты компании c_j

$$\sum_{i: t(a_i)=T^k, (a_i, c_j) \in E} x_{ij} \leq u_j \quad \forall j = 1, \dots, m \text{ и } T^k \in \mathcal{T} \quad (5)$$

$$\sum_{i: t(a_i)=T^k, (a_i, c_j) \in E} x_{ij} \geq l_j \quad \forall j = 1, \dots, m \text{ и } T^k \in \mathcal{T} \quad (6)$$

Пусть $d_{ij} \geq 0 \in \mathbb{R}$ - переменная дефицита

Новые ограничения

$$\left(\sum_{k:r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik} \right) u_j + \sum_{h:(a_h, c_j) \in E, s_{hj} \geq s_{ij}} x_{hj} + d_{ij} \geq u_j \quad \forall (a_i, c_j) \in E \quad (7)$$

Целевая функция

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} d_{ij} \rightarrow \min \quad (8)$$

*Полученное решение называется **распределением с минимальным дефицитом**

Пусть $d_{ij} \in \{0, 1\}$ Новые ограничения

$$\left(\sum_{k: r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik} \right) u_j + \sum_{h: (a_h, c_j) \in E, s_{hj} \geq s_{ij}} x_{hj} + d_{ij} \cdot u_j \geq u_j \quad \forall (a_i, c_j) \in E \quad (9)$$

Целевая функция

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} d_{ij} \rightarrow \min \quad (10)$$

*Полученное решение называется **околостабильным распределением**

Распределение	Ранги r_{ij}
[1., 0., 0., 0., 0.],	[2, 5, 1, 4, 3],
[0., 0., 0., 1., 0.],	[3, 4, 5, 2, 1],
[0., 0., 0., 0., 1.],	[4, 3, 5, 2, 1],
[1., 0., 0., 0., 0.],	[1, 3, 2, 5, 4],
[0., 0., 0., 0., 1.],	[4, 5, 2, 3, 1],
[1., 0., 0., 0., 0.],	[1, 4, 3, 2, 5],
[0., 0., 0., 1., 0.],	[2, 5, 4, 1, 3],
[0., 0., 0., 1., 0.],	[2, 3, 5, 1, 4],
[0., 1., 0., 0., 0.],	[5, 1, 2, 3, 4],
[0., 0., 1., 0., 0.],	[3, 5, 1, 4, 2],
[0., 0., 0., 0., 1.],	[5, 2, 4, 3, 1],
[0., 0., 0., 0., 1.],	[3, 4, 2, 5, 1],
[0., 0., 1., 0., 0.],	[4, 5, 1, 3, 2],
[0., 0., 1., 0., 0.],	[5, 4, 1, 2, 3],
[1., 0., 0., 0., 0.],	[1, 2, 4, 5, 3],
[0., 0., 1., 0., 0.],	[5, 2, 1, 3, 4],
[0., 1., 0., 0., 0.],	[3, 1, 4, 5, 2],
[0., 0., 0., 0., 1.],	[3, 2, 5, 4, 1],
[0., 0., 1., 0., 0.],	[2, 5, 1, 3, 4],
[1., 0., 0., 0., 0.],	[1, 4, 5, 3, 2],
[0., 1., 0., 0., 0.],	[4, 2, 1, 3, 5],
[0., 0., 0., 1., 0.],	[5, 2, 4, 1, 3],
[0., 1., 0., 0., 0.],	[4, 1, 3, 5, 2],
[0., 0., 0., 0., 1.],	[5, 4, 3, 2, 1],
[0., 0., 0., 0., 1.],	[5, 4, 1, 2, 3]

1-й способ:

```
array([ 2,  7,  5,  8,  4,  3, 10, 10,  8,  4, 10,  5, 11,  8,  6,  5,  
       7,  4,  5,  4])
```

2-й способ:

```
array([ 1,  6,  4,  7,  3,  2,  9,  9,  7,  3,  9,  4, 10,  7,  5,  4,  
       6,  3,  3,  3])
```