Математическое моделирование

Лектор: Лебедева Л.Н.
Студент: Захаров К.А.

2020 г.

Содержание

1 Введение

2 Статические модели

2.1 Производственная функция Кобба-Дугласа

Definition 2.1. Производственная функция - функция выражающая зависимость между затратами ресурсов и объемом выпуска.

Пусть $\overline{X}$ - вектор используемых ресурсов, $\overline{Y}$ - объем выпуска продукции каждого вида.

Property 1. *О производственной функции*

1. *$F(x_1, ..., x_n)$ является достаточно гладкой, т.е. $F \in C^2$*
2. *$F(x_1, ..., x_n)$ - возрастающая по каждому аргументу $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} > 0 \forall\ i$*
3. *выпуск по каждому аргументу не ограничен*
4. *предельная производительность убывает $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} > 0 \forall\ i$*

Definition 2.2. Однородная функция
$F(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda F(x_1, ..., x_n)$

Пусть Y - это ВВП, K - основные производственные фонды, L – число занятых. Тогда определим функцию $Y = AK^\alpha L^\beta, (A > 0, 0 < \alpha, \beta < 1)$. Для оценки параметров A, α, β воспользуемся методом наименьших квадратов $\sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2 \to \min$. Также необходимо линеаризовать данные параметры при помощи натурального алгоритма. После чего получим следующую целевую функцию.

$$S(A, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{M} (\ln A + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i - \ln Y_i)^2 \to \min \tag{1}$$

Теперь нужно приравнять частные производные к нулю по каждому аргументу и решить систему линейных уравнений (3).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \ln A} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \end{cases} ; \tag{2}$$

$$\begin{cases} M \ln A + \alpha \sum_{i=1}^M \ln K_i + \beta \sum_{i=1}^M \ln L_i = \sum_{i=1}^M \ln Y_i \\ lnA \sum_{i=1}^M \ln K_i + \alpha \sum_{i=1}^M \ln K_i{}^2 + \beta \sum_{i=1}^M \ln K_i \ln L_i = \sum_{i=1}^M \ln Y_i \ln K_i \\ lnA \sum_{i=1}^M \ln L_i + \alpha \sum_{i=1}^M \ln K_i \ln L_i + \beta \sum_{i=1}^M \ln L_i{}^2 = \sum_{i=1}^M \ln Y_i \ln L_i \end{cases} \tag{3}$$

2.2 Модель Леонтьева (Межотраслевой баланс)

Пусть x_{ij} - промежуточный продукт, т.е. отрасль i изготавливает продукт для отрасли j

X_i - валовый продукт отрасли i
Y_i - конечный продукт отрасли $i (i = \overline{1,n})$.
Тогда валовый выпуск определяется по следующей формуле.

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i \tag{4}$$

Матрица прямых затрат определяется, как $a_{ij} = x_{ij}/X_j$. Тогда вектор валового выпуска можно определить, как $X = AX + Y \Rightarrow X = (E - A)^{-1}Y$, а конечный продукт $Y = (E - A)X$.

Definition 2.3. Если хотя бы для одного положительного Y уравнение межотраслевого баланса имеет неотрицательное решение, то матрица A продуктивна.

Definition 2.4. Матрица A продуктивна $\iff$ $(E - A)$ имеет n положительных последовательностей главных миноров.

Definition 2.5. Матрица A продуктивна $\iff$ когда матричный ряд $E + A + A^2 + ... + A_k + ...$ сходится.

Definition 2.6. Матрицей полных затрат называется обратная матрица Леонтьева $B = (E - A)^{-1}$

3 Динамические модели

3.1 Модель Солоу

Пусть имеется замкнутая односекторная экономика.
Y - ВВП
K - капитал
I - инвестиции
C - конечное потребление
L - трудовые ресурсы
Имеется баланс $Y = C + I$. Зависимость ВВП от ресурсов выражается функцией Кобба-Дугласа.

$$\begin{aligned}
&Y = AK^{\alpha}L^{\beta} \\
&Y = C + I \\
&I = sY \\
&\frac{\partial L}{\partial t} = \gamma L \qquad\qquad (L(0) = L_0) \\
&\frac{\partial K}{\partial t} = -\mu K + I \qquad (K(0) = K_0)
\end{aligned} \tag{5}$$

где γ - темп прироста трудовых ресурсов, s - склонность к сбережению, A - научно-технический прогресс. Пусть $y = Y/L, k = K/L, i = I/L$. Тогда получим модель Солоу в относительных показателях.

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -(\lambda + \mu)k + sAk^{\alpha} \tag{6}$$

Равновесие равно $\hat{k} = (\frac{sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Интервалы	Рост
$\left(0; (\frac{\alpha sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$	Ускоренный рост
$\left((\frac{\alpha sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}; (\frac{sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$	Насыщенный рост
$\left((\frac{sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}; +\infty\right)$	Падение

Конечно-разностное представление: $k(t + \Delta) = k(t) + \Delta t(-(\lambda + \mu)k(t) + sAk(t)^{\alpha})$

3.2 SIR модель

Пусть $S(t)$ - число восприимчивых к инфекции
$I(t)$ - число инфицированных
$R(t)$ - число переболевших инфекцией
N - число популяции
β - коэффициент интенсивности контактов
γ - коэффициент интенсивности выздоровления

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{-\beta IS}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \end{aligned} \tag{7}$$

3.3 SEIRD модель

$E(t)$ - число носителей заболевания
D - число умерших
μ - уровень смертности

$\delta = \dfrac{1}{\text{ср.инк.период}}$

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \frac{-\beta IS}{N} \\
\frac{dE}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - \delta E \\
\frac{dI}{dt} &= \delta E - \gamma I - \mu I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I \\
\frac{dD}{dt} &= \mu I
\end{aligned} \tag{8}$$

3.4 Модель Лотки-Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \tag{9}$$

$x(t)$ - число жертв
$y(t)$ - число хищников
a - коэффициент рождаемости жертв
b - коэффициент убыли жертв
c - коэффициент убыли хищников
d - коэффициент рождаемости хищников
Первой стационарной точкой является $(0, 0)$. Возьмем из системы линейную часть и составим матрицу.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} \tag{10}$$

Решая данной характеристическое уравнение получим $\lambda_1 = a, \lambda_2 = -c \Rightarrow$ данная точка является седлом. Теперь приравняем правые части системы к 0 и решим ее. Получим вторую стационарную точку $\overline{x} = \dfrac{c}{d}, \overline{y} = \dfrac{a}{b}$. Построим матрицу Якоби, подставив $\overline{x}, \overline{y}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{bc}{d} \\ -\dfrac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 + ac = 0$, получаем два мнимых корня, что свидетельствует о том что данная стационарная точка является центром.

3.5 Модель взаимодействия двух конкурирующих видов

x_1 - количество особей первого типа x_2 - количество особей второго типа

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 - b_{11} x_1^2 - b_{12} x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 - b_{21} x_1 x_2 - b_{22} x_2^2 \end{cases} \tag{12}$$

Приравняем к 0 правые части системы.

$$\begin{cases} x_1(a_1 - b_{11}x_1 - b_{12}x_2) = 0 \\ x_2(a_2 - b_{21}x_1 - b_{22}x_2) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Получим 4 стационарные точки.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{a_2}{b_{22}} \end{cases} ; \tag{14}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_1}{b_{11}} \\ x_2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 = \dfrac{a_2b_{12} - a_1b_{22}}{b_{12}b_{21} - b_{22}b_{11}} \\ x_2 = \dfrac{a_1b_{21} - a_2b_{11}}{b_{12}b_{21} - b_{22}b_{11}} \end{cases}$$

Определим состояние равновесия для каждой стационарной точки

1. 1

2. 2

3.6 Модель Самуэльсона-Хикса

3.6.1 Дискретная форма

Предполагается замкнутая экономика, предложение эластично, цены и процентная ставка фиксированы. Рассмотрим уравнение

$$Y_{t+1} = C(Y_t) + I_t \tag{15}$$

Пусть спрос зависит от Y_t линейно, т.е. $C(Y_t) = C_a + cY_t$, а инвестиции равны $I_t = r(Y_t - Y_{t-1}) + I_a$, где C_a - постоянное потребление, I_a - постоянные инвестиции, r - коэффициент акселерации, c - склонность к потреблению. $A = C_a + I_a$ - автономные расходы. Получим следующее конечно-разностное уравнение.

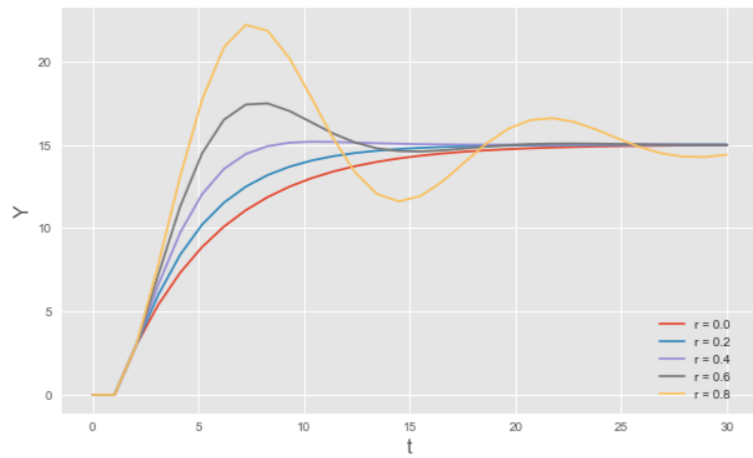
$$Y_{t+1} = C_a + I_a + cY_t + r(Y_t - Y_{t-1}) \tag{16}$$

Равновесие определим из предположения, что автономные расходы постоянны и объем ВВП стабилизируется на определенном уровне, т.е. $Y_t = Y_{t-1} = ... = Y_{t-n} = \widehat{Y}$. Тогда получим уравнение

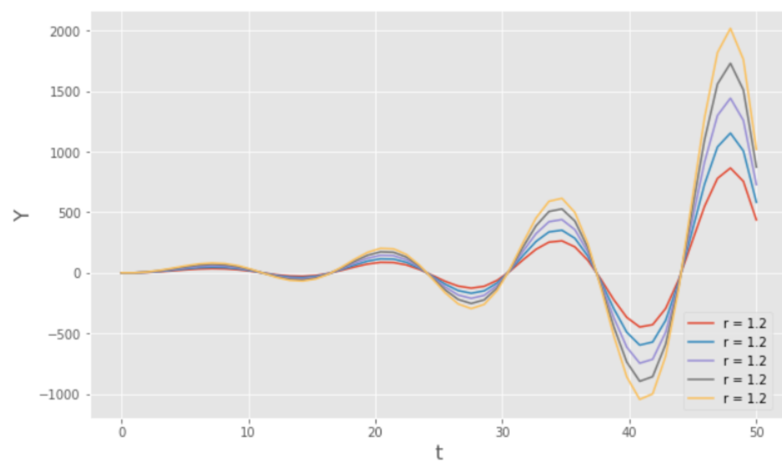
$$\widehat{Y} = A + c\widehat{Y} + r(\widehat{Y} - \widehat{Y}) = A + c\widehat{Y} \tag{17}$$

$\Rightarrow \widehat{Y} = \dfrac{A}{1-c}$. Величина $\dfrac{1}{1-c}$ называется мультипликатором автономных расходов. Рассмотрим уровень дохода при изменения коэффициента акселерации:

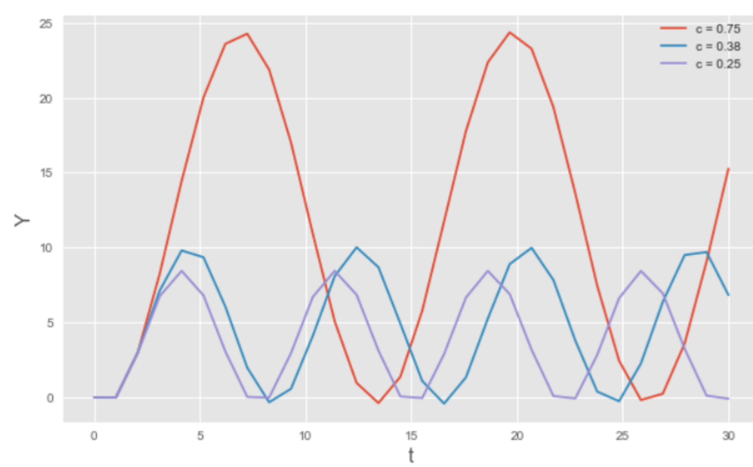
1. Если $0 < r < 1$, то равновесие восстановится через некоторое время при новом уровне дохода.



2. Если $r > 1$, то при нарушении равновесия единожды, оно больше не восстановится.



3. Если $r = 1$, то значение дохода будет колебаться с постоянным периодом.



3.6.2 Непрерывная форма

Перейдя от конечных разностей получим следующее уравнение.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(1-r)\frac{\partial y}{\partial t} - (1-c)y + A \tag{18}$$

Понизим порядок уравнения, приведя его к НСДУ.

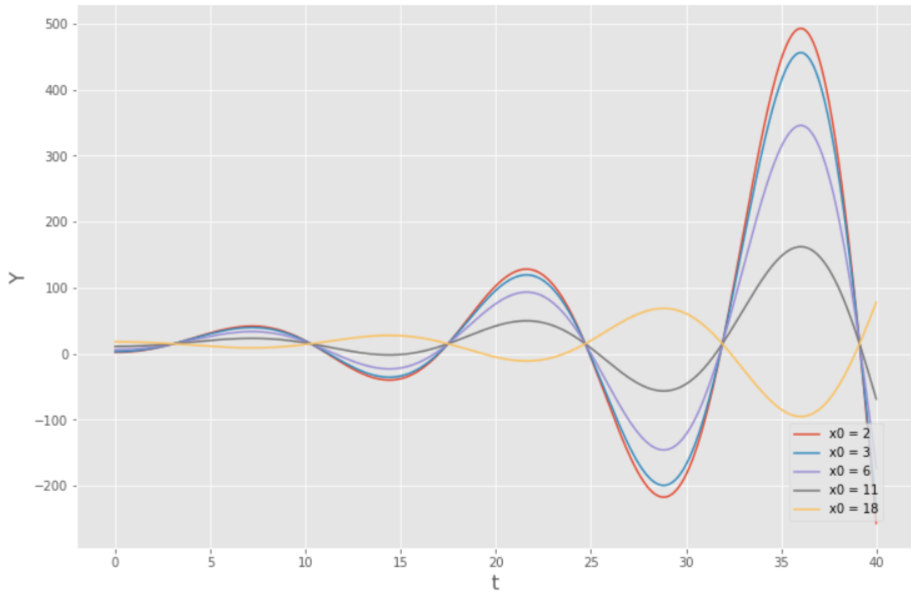
$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = x \\ \frac{\partial x}{\partial t} = -(1-r)x - (1-c)y + A \end{cases} \tag{19}$$

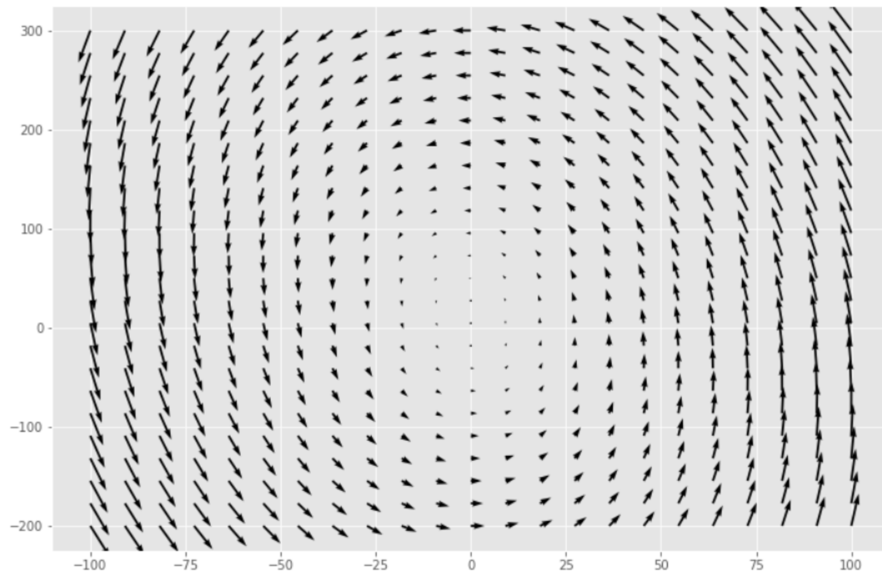
Отсюда легко получить стационарную точку приравняв правые части к 0. Получим $x = 0, y = \frac{A}{1-c}$. Определим состояния равновесия в стационарной точке при помощи корней характеристического уравнения. Составим матрицу Якоби.

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -(1-r) & -(1-c) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

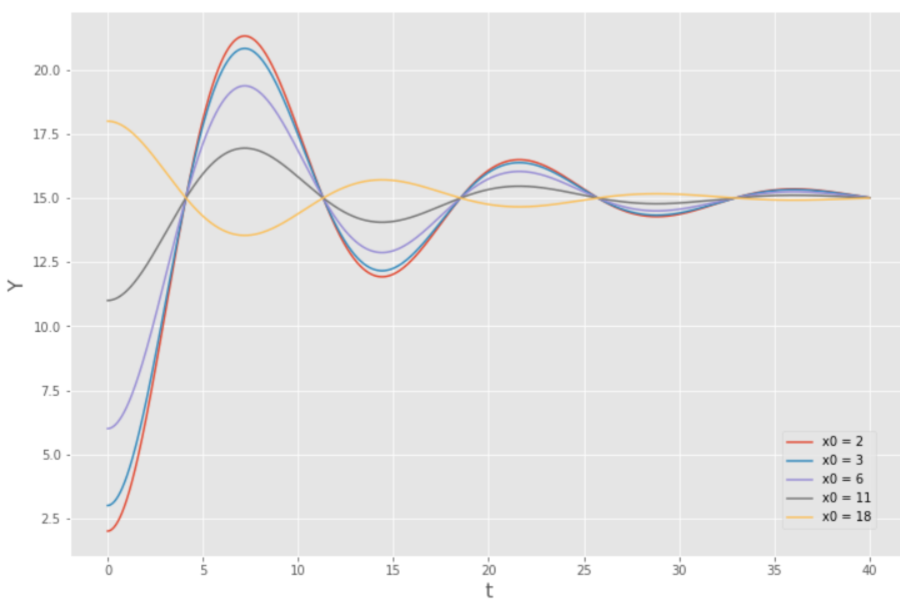
Найдем собственные значения при следующих параметрах:

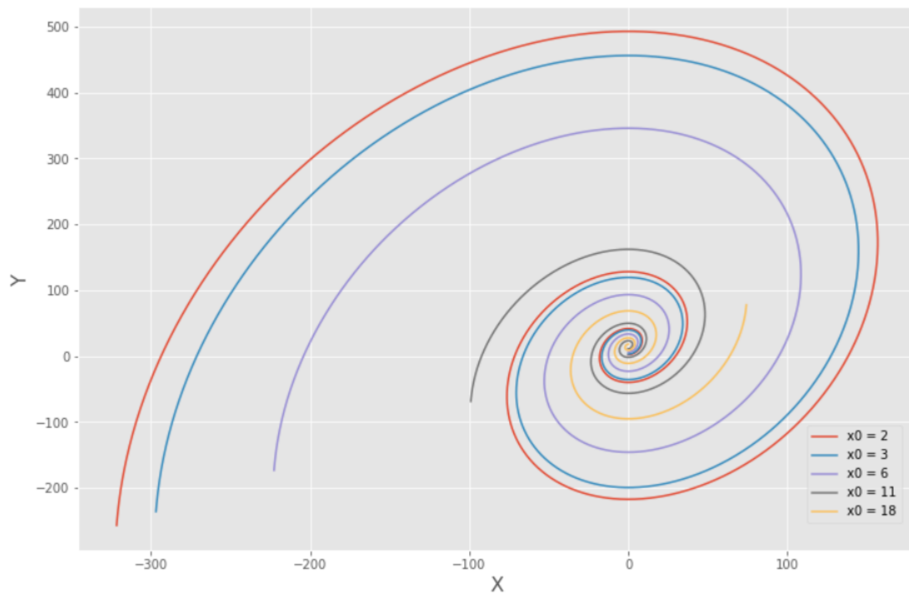
1. $r = 1.2; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0.1 \pm 0.435i$.
   Т.е. при $r > 1$ получаем неустойчивый фокус.

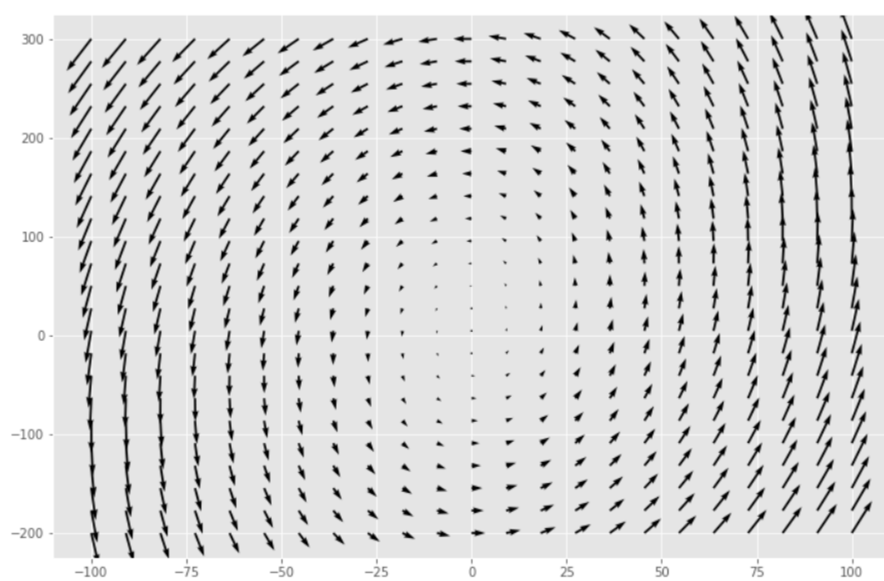




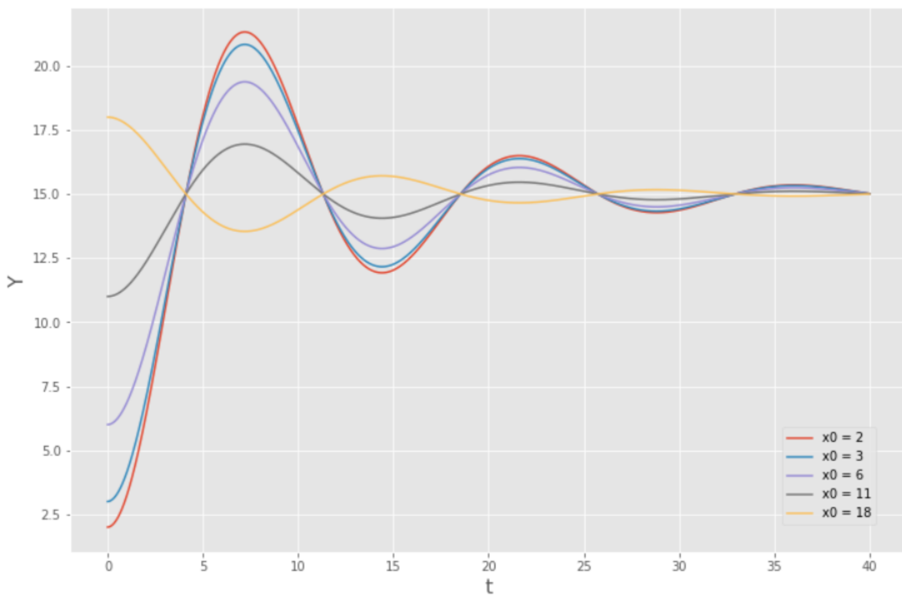
2. $r = 0.8; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -0.1 \pm 0.435i$.
   При $0 < r < 1$ получаем устойчивый фокус.

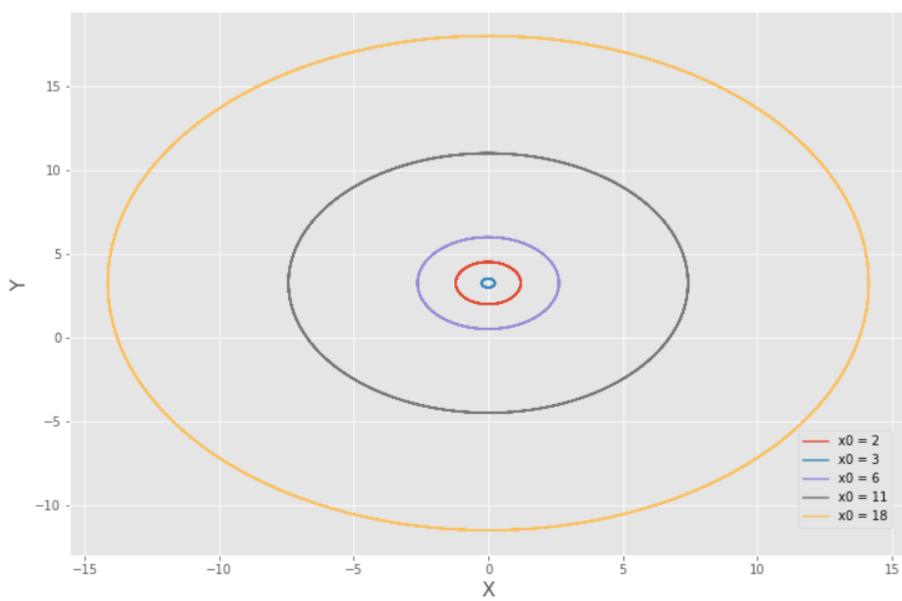






3. $r = 1; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 0.447i$.
   И наконец при $r = 1$ получаем центр.





3.7 Переход к полярным координатам

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \tag{21}$$

Перейдем к полярным координатам.

$$\begin{cases} x_1(t) = r(t)\cos\varphi(t) \\ x_2(t) = r(t)\sin\varphi(t) \end{cases} \tag{22}$$

Выполним подстановку и получим выражения для $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$.

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi + r\dot{\varphi}(-\sin\varphi) = r\cos\varphi - r\sin\varphi - r^3\cos\varphi & \Big| * \cos\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = r\cos\varphi + r\sin\varphi - r^3\sin\varphi & \Big| * \sin\varphi \end{cases} + \tag{23}$$

$$\begin{cases} \dot{r}\cos^2\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = r\cos^2\varphi - r\cos\varphi\sin\varphi - r^3\cos^2\varphi \\ \dot{r}\sin^2\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi = r\sin\varphi\cos\varphi + r\sin^2\varphi - r^3\sin^2\varphi \end{cases} \tag{24}$$

Тем самым получаем выражение для $\dot{r}(t) = r(t)(1 - r^2(t))$. Теперь умножим первое уравнения на $sin\varphi$, второе на $cos\varphi$ и вычтем из первого второе.

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi + r\dot{\varphi}(-\sin\varphi) = r\cos\varphi - r\sin\varphi - r^3\cos\varphi & \Big| * \sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = r\cos\varphi + r\sin\varphi - r^3\sin\varphi & \Big| * \cos\varphi \end{cases} - \tag{25}$$

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi\sin\varphi - r\dot{\varphi}\sin^2\varphi = r\cos\varphi\sin\varphi - r\sin^2\varphi - r^3\cos\varphi\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + r\dot{\varphi}\cos^2\varphi = r\cos^2\varphi + r\sin\varphi\cos\varphi - r^3\sin\varphi\cos\varphi \end{cases} \tag{26}$$

Таким образом получим систему (1) в полярных координатах.

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \tag{27}$$

Стационарные точки для данной системы $r = 0$ и $r = 1$.
Устойчивый вариант:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \tag{28}$$

Неустойчивый вариант:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \tag{29}$$

Полуустойчивый вариант:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r)^2 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \tag{30}$$

4 Бифуркации динамических систем

Definition 4.1. Бифуркация - качественное изменение фазового портрета при изменении параметров системы.

Theorem 4.1. *Бифуркация Хопфа*
Пусть есть система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(x_1, ..., x_n, \mu) & X_1(0, ..., 0, \mu) = 0 \\ \dot{x}_2 = X_2(x_1, ..., x_n, \mu) & X_2(0, ..., 0, \mu) = 0 \end{cases} \tag{31}$$

$\lambda_1(\mu_0), \lambda_2(\mu_0)$ - *чисто мнимые корни. Точка* $(0,0)$ - *асимптотически устойчива при* μ_0 *и* $\dfrac{\partial}{\partial\mu}\{Re(\lambda_i(\mu))|_{\mu=\mu_0}\} > 0$.
Тогда

1. μ_0 - *точка бифуркации*
2. $\exists$ *интервал* $\mu \in (\mu_1, \mu_0)$ *такой, что* $(0;0)$ - *устойчивый фокус*
3. $\exists$ *интервал* $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$ *такой, что* $(0;0)$ - *неустойчивый фокус, окруженный предельным циклом*

4.1 Аттрактор Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \qquad a, r, b > 0 \end{cases} \tag{32}$$

r - управляющий переменный параметр
$(0 < r < 1)$ - одна критическая точка
$r \to 1$ - критическое замедление
$r = 1.345$ - узлы переходят в фокусы
$r > 24$ - хаос

4.2 Маятник Фуко

Пусть L - длина нити маятника
ω - угловая скорость
g - ускорение свободного падения
x, y - координаты
v_x, v_y - скорости

$$\begin{aligned} &\frac{dv_x}{dt} = 2v_y\omega + \omega^2 x - g\frac{x}{L} \\ &\frac{dv_y}{dt} = -2v_x\omega + \omega^2 y - g\frac{y}{L} \\ &\frac{dx}{dt} = v_x \\ &\frac{dy}{dt} = v_y \end{aligned} \tag{33}$$

4.3 Аттрактор Рикитаки

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\mu x + yz \\ \frac{dy}{dt} &= (z-a)x - \mu y \\ \frac{dz}{dt} &= 1 - xy\end{aligned} \tag{34}$$

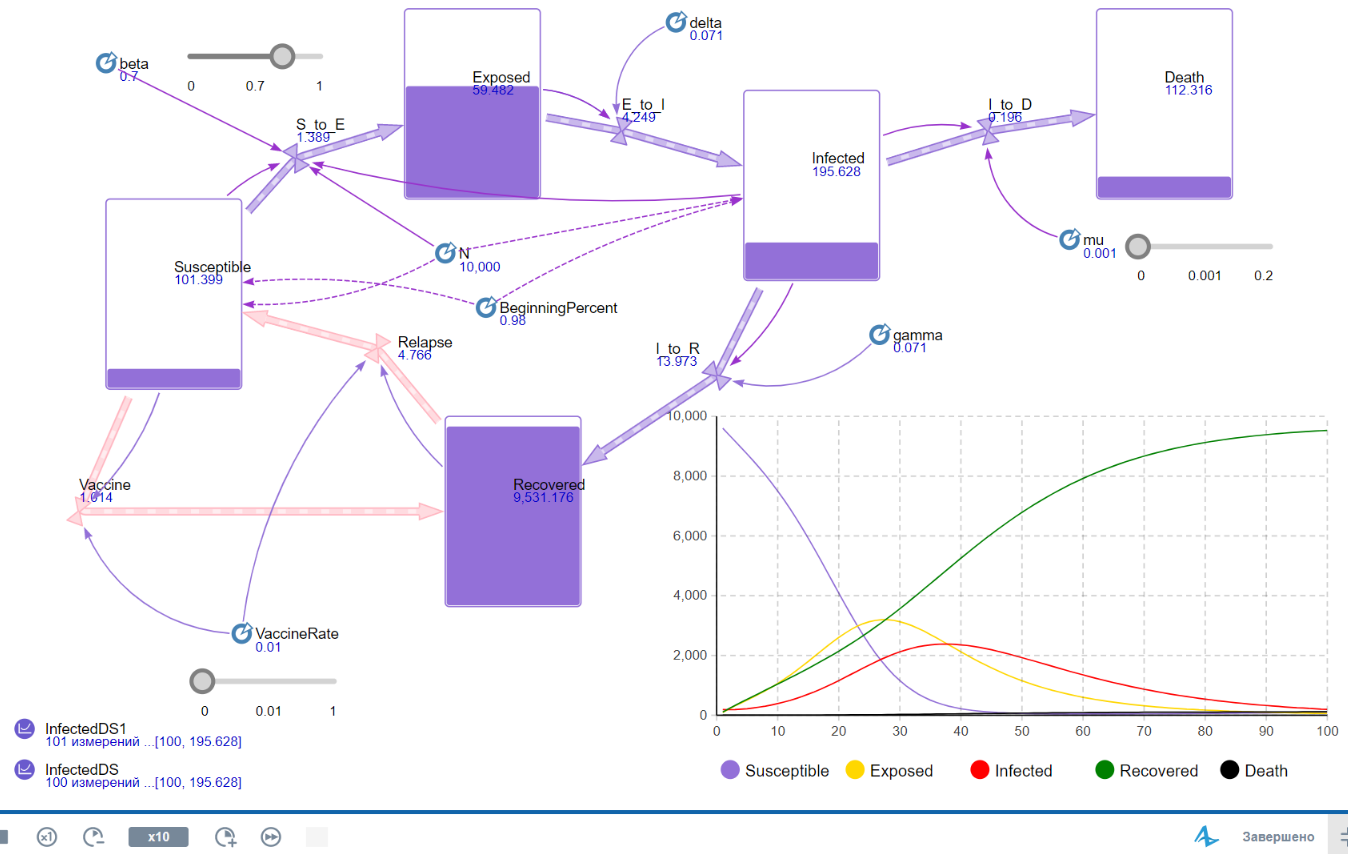


Рис. 1: Test image

Lemma.