Методы оптимизации. Теоремы.

Кирилл Захаров

2021 г.

Содержание

1 Линейное программирование. Базисное решение, допустимое множество, оптимальное решение

Теорема 1.1. *Множество допустимых решений есть выпуклое множество.*

Лемма 1.1. *Базисные решения являются вершинами выпуклой многогранной области.*

Теорема 1.2. *Оптимальное решение является базисным решением. (Оптимальное решение лежит в углах выпуклой многогранной области).*

2 Линейное программирование. Двойственная задача

Теорема 2.1 (Основное неравенство двойственности)**.** *Пусть заданы прямая задача $D : X\ f(X)$ и двойственная $\Omega : \Lambda\ \varphi(\Lambda)$. Тогда для любых допустимых планов прямой и двойственной задачи их целевые функции связаны неравенствами.*

$$f(X) \to \min \Rightarrow f(X) \geqslant \varphi(\Lambda) \tag{1}$$
$$f(X) \to \max \Rightarrow f(X) \leqslant \varphi(\Lambda)$$

Теорема 2.2 (Критерий оптимальности Канторович)**.** *Если на допустимых планах прямой X и двойственной задачи Λ значения их целевых функций совпадают, то планы X и Λ являются оптимальными и наоборот.*

Теорема 2.3. *Для существования оптимального плана как прямой, так и двойственной задач $\iff$ существование какого-либо допустимого плана для каждой из этих задач.*

Теорема 2.4. *Если прямая задача имеет оптимальное решение, то и двойственная имеет оптимальное решение.*

Теорема 2.5. *Если прямая задача не имеет решения из-за неограниченности целевой функции, то система ограничений двойственной задачи противоречива.*

Теорема 2.6 (О дополняющей нежесткости)**.** *Необходимым и достаточным условием того, что прямая и двойственная задачи имеют оптимальное решение, является выполнение условий дополняющей нежесткости.*

$$\lambda_j\left(\sum_{i=1}^{N} a_{ji}x_i - b_j\right) = 0 \tag{2}$$
$$x_i\left(\sum_{j=1}^{M} a_{ji}\lambda_i - c_i\right) = 0$$

3 Задача нелинейной безусловной оптимизации

$x \in O \subseteq \mathbb{R}^N$

Определение 3.1. $Y = (y_1, ..., y_N)$ - точка локального минимума или максимума, если $\exists\, \varepsilon > 0$, такое что выполняется

$$f(Y) \leqslant f(Y + \delta X) \text{ или } f(Y) \geqslant f(Y + \delta X) \tag{3}$$

для всех $\delta X = (\delta x_1, ..., \delta x_N)\ \big| 0 < |\delta x_i| < \varepsilon$.

Определение 3.2. Y - точка строгого экстремума, если неравенства выполняются строго.

Определение 3.3. Y называется точкой глобального экстремума, если неравенства (3) выполняются во всей области.

$\min f(x) = \max -f(X)$

Определение 3.4. Функция, имеющая единственный экстремум называется унимодальной.

Лемма 3.1. *Если область допустимых значений, определяемая системой ограничений равенств, содержит точку Y и ее окрестность, то $M < N$.*

$$Y \subseteq D \wedge U_\varepsilon(Y) \subseteq D \Rightarrow M < N \tag{4}$$

Лемма 3.2. *Пусть область допустимых значений, определяемая системой ограничений равенств задачи на условный экстремум, содержит хотя бы одну точку Y. Если набор градиентов $grad\,\psi_j$ линейно независим и $rank\, J = M < N$, то D вместе с каждой точкой X содержит некоторую непустую ее окрестность.*

Теорема 3.1. *Пусть задана функция $f(x)$ и $x \in O = \mathbb{R}^1$. Если в точке Y функция $f(x)$ имеет локальный экстремум, то $\dfrac{\partial f(Y)}{\partial x} = 0$.*

Теорема 3.2 (Необходимое условие экстремума 1-го порядка)**.** *Пусть задана функция $f(X)$ и $X \in O = \mathbb{R}^N$. Пусть Y точка локального экстремума. Тогда $grad\, f(Y) = 0$.*

Теорема 3.3 (Критерий Сильвестра)**.**

1. *Матрица A является положительно определенной $\iff$ когда все ее угловые миноры больше 0;*
2. *Матрица A является отрицательно определенной $\iff$ когда все ее угловые миноры образуют знакочередующийся ряд, начиная со знака «$-$»;*
3. *Матрица A является положительно полуопределенной $\iff$ A вырождена и все ее главные миноры $m_i(A) \geqslant 0$;*
4. *Матрица A является отрицательно полуопределенной $\iff$ $m_i(A) = 0$ или $sign\, m_i(A) = sign\,(-1)^i$.*

Теорема 3.4 (Необходимое условие экстремума 2-го порядка)**.** *Пусть задана функция $f(X)$ $X \in \mathbb{R}^N$. Пусть $f(X)$ дважды дифференцируема в окрестности точки Y. Тогда если Y - точка локального минимума (максимума), то $H_f(Y)$ положительно полуопределенная (отрицательно полуопределенная).*

Теорема 3.5 (Достаточное условие экстремума 2-го порядка)**.** *Пусть задана функция $f(X)$ $X \in \mathbb{R}^N$. Пуста $f(X)$ имеет стационарную точку, в которой вторые частные производные существуют и непрерывны. Если $H_f(Y)$ положительно определена (отрицательно определена), то Y точка минимума (максимума).*

Теорема 3.6.

1. *Пусть $f(X)$ дифференцируема в точке $Y \in \mathbb{R}^N$.*
   Тогда если $\delta X \in \mathbb{R}^N \,\big|\, grad\, f(Y) \cdot \delta X < (>) 0 \Rightarrow \delta X \in W_-(Y, f)(W_+(Y, f))$;
2. *Если $\delta X \in W_-(Y, f)(W_+(Y, f))$. Тогда $grad\, f(Y) \cdot \delta X \leqslant (\geqslant) 0$.*

4 Задача нелинейной условной оптимизации

Теорема 4.1 (Связь между $W_{+/-}(Y, f)$ и $V(Y, f)$)**.** *Если точка Y точка локального минимума (максимума), то $W_-(Y, f) \cap V(Y, f) = \varnothing$ ($W_+(Y, f) \cap V(Y, f) = \varnothing$).*

Теорема 4.2 (Вейерштрасс)**.** *Пусть D - компакт и $f(X)$ непрерывная функция определенная на D.*
Тогда существует точка Y глобального минимума (максимума).

Теорема 4.3 (Необх. условие 1-го рода. Правило множителей Лагранжа). *Пусть* $Y \in D \subseteq \mathbb{R}^N$ *- точка локального экстремума. Пусть* $f(X), \psi_j(X)$ *- непрерывно дифференцируемы и пусть в точке* Y $J(Y) = \left\{\dfrac{\partial \psi_j(Y)}{\partial x_i}\right\}$ *имеет ранг равный* M.
Тогда существуют неравные одновременно нулю вектор Λ' *и* λ_0' $\Big|$ *точка* $(\Lambda', \lambda_0', Y)$ *- стационарная точка функции Лагранжа, т.е.* $grad\, L(\Lambda', \lambda_0', Y) = 0$

Теорема 4.4 (Необх. условие 2-го рода). *Пусть* $Y \in D \subseteq \mathbb{R}^N$ *- точка локального минимума (максимума). Пусть* $f(X), \psi_j(X)$ *- дважды непрерывно дифференцируемы и пусть в точке* Y $J(Y) = \left\{\dfrac{\partial \psi_j(Y)}{\partial x_i}\right\}$ *имеет ранг равный* M.
Тогда в стационарной точке функции Лагранжа (Y) $\forall\, \delta X \neq 0$ $\Big| grad\, \psi_j(X) \cdot \delta X = 0$ *выполняется неравенство* $\delta X L''_{XX}(\Lambda', Y)\delta X^T \geqslant (\leqslant) 0$.

Теорема 4.5 (Достаточное условие экстремума). *Пусть* $Y \in D \subseteq \mathbb{R}^N$ *- точка экстремума и* $\psi_j(X) = 0$. *Пусть* $f(X), \psi_j(X)$ *- дважды непрерывно дифференцируемы. Если существуют* $\Lambda' = (\lambda_1, ..., \lambda_M) \neq 0 \wedge \lambda_0' \neq 0$ $\Big| grad\, L(\Lambda', \lambda_0', Y) = 0$ *и при этом* $\delta X L''_{XX}(\Lambda', Y)\delta X^T > (<) 0\ \forall\, \delta X \neq 0$ *для которых* $grad\, \psi_j(Y)\delta X = 0$.
Тогда Y *- точка локального минимума (максимума).*

Теорема 4.6 (Достаточное условие экстремума в терминах матрицы Гессе функции Лагранжа). *Пусть найдена стационарная точка функции Лагранжа.*
Y *- точка максимума, если начиная с углового минора порядка* $2M + 1$ *последующие* $N - M$ *угловых миноров матрицы Гессе образуют знакочередующийся числовой ряд в котором знак первого члена совпадает со знаком* $(-1)^{M+1}$.
Y *- точка минимума, если начиная с углового минора порядка* $2M + 1$ *последующие* $N - M$ *угловых миноров матрицы Гессе имеют знак* $(-1)^M$.

5 Задача выпуклой оптимизации

Лемма 5.1. *Пересечение конечного или счетного числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.*

Лемма 5.2. *Линейная комбинация* $\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i$ *конечного числа выпуклых множеств* X_i *при любых* α_i *является выпуклым множеством.*

Лемма 5.3. *Если* $f_1(X), f_2(X), ..., f_M(X)$ *выпуклы (вогнуты) на выпуклом множестве* D, *то их линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами* $f(X) = \sum\limits_{j=1}^{M} \alpha_j f_j(X)$ *будет выпуклой (вогнутой) функцией на* D.

Лемма 5.4. *Пусть* O *- выпуклое множество,* D *- произвольное множество.*
Пусть $g(X, Y) : O \in X \times D \in Y$. *Пусть* g *выпукла по* X *на* O *при* $\forall\, Y$ *и ограничена сверху по* Y *при* $\forall\, X$.
Тогда $f(X) = \sup\limits_{Y \in D} g(X, Y)$ *выпукла на* O.

Лемма 5.5. *Если функции $g_1(X), g_2(X), ..., g_M(X)$ выпуклы на выпуклом множестве $O \subset \mathbb{R}^N$ и $G(X) = (g_1(X), g_2(X), ..., g_M(X))$ - вектор-функция, образованная из них, q - монотонно неубывающая выпуклая функция, заданная на выпуклом множестве $D \subset \mathbb{R}^M$, и функция $G(X)$ принимает значения из D, то функция $f(X) = q(G(X))$ выпукла на O.*

Лемма 5.6. *Если функция g выпукла на выпуклом множестве $O \subset \mathbb{R}^M$, A - матрица размера $M \times N$, $B \in \mathbb{R}^M$ - вектор и множество $D = \left\{X \in \mathbb{R}^N : A \cdot X + B \in O\right\}$ непусто, то функция $f(X) = g(A \cdot X + B)$ выпукла на D.*

Лемма 5.7 (Дифференциальный критерий выпуклости)**.** *Дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(X)$ выпукла (вогнута), если ее матрица Гессе является положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной). Если $H_f(Y)$ положительно (отрицательно) определена, то $f(X)$ строго выпукла (вогнута).*

Выпуклая задача оптимизации: $(*)$

$$
\begin{aligned}
&f(Y) = extr_D\, f(X)\\
&D = \left\{X \,\middle|\, X \in P, \psi_j(X) \leqslant (\geqslant, =) 0, j = 1, ..., M\right\} \subseteq \mathbb{R}^N\\
&D \text{ - выпуклое множество}, f(x) \text{ - выпукла на } D
\end{aligned}
$$

Теорема 5.1 (Условие выпуклости множества допустимых решений)**.** *Если $\psi(X)$ выпуклая (вогнутая) функция, то множество допустимых решений удовлетворяющее системе $\psi(X) \leqslant b, x_i \geqslant 0$ $(\psi(X) \geqslant b, x_i \geqslant 0)$ будет выпуклым.*

Теорема 5.2 (Необходимо условие экстремума)**.** *Если в задаче $(*)$ целевая функция задана на выпуклой области определения и дифференцируема в $Y \in D$ и если Y - точка локального минимума (максимума), то $grad\, f(Y) \cdot \delta X \geqslant (\leqslant)\, 0$. $(\delta X = X - Y)$*

Лемма 5.8. *Если точка локального экстремума Y является внутренней точкой D, то $grad\, f(Y) = 0$.*

Лемма 5.9. *Пусть $D = \left\{X \,\middle|\, X \in \mathbb{R}^N, a_j \leqslant x_j \leqslant b_j, j = 1, ..., N\right\}$, $-\infty \leqslant a_j \leqslant b_j \leqslant \infty$. Тогда*

$$
\frac{\partial f(Y)}{\partial x_j} = \begin{cases} \geqslant (\leqslant) 0, & y_j = a_j \neq -\infty \\ 0, & a_j \leqslant y_j \leqslant b_j \\ \leqslant (\geqslant) 0, & y_j = b_j \neq +\infty \end{cases} \tag{5}
$$

Лемма 5.10. *Пусть $D = \left\{X \,\middle|\, X \in \mathbb{R}^N, x_j \geqslant 0, j = 1, ..., S\right\}$.*
Тогда в точке локального минимума (максимума)
при $j = 1, ..., S$: $\dfrac{\partial f(Y)}{\partial x_j} \geqslant (\leqslant) 0$ если $y_j = 0$ и $\dfrac{\partial f(Y)}{\partial x_j} = 0$ если $y_j > 0$;
при $j = S+1, ..., S+N$: $\dfrac{\partial f(Y)}{\partial x_j} = 0\ \forall\, y_j$.

Теорема 5.3 (Достаточное условие экстремума). *Если в задаче* $(*)$ *целевая функция задана на выпуклой области определения и дифференцируема в* $Y \in D$ *и если* $grad f(Y) \cdot \delta X \geqslant (\leqslant)\, 0$*, то* Y *точка* $\min$ $(\max)$.

Лемма 5.11. *Пусть* $f(X)$ *- выпуклая (вогнутая) функция, определенная на* $D \subseteq \mathbb{R}^N$ *и дифференцируемая во внутренней точке* $Y \in D$*. Если* Y *- стационарная точка функции* $f(X), grad\, f(Y) = 0$*, то* Y *- точка экстремума* $f(X)$ *на* D*.*

Теорема 5.4 (Единственность точки экстремума задачи выпуклой оптимизации). *Если выпуклая функция* $f(X)$ *определенная на* D *имеет точку локального минимума (максимума), то эта точка является точкой глобального минимума (максимума).*

Теорема 5.5. *Пусть* $f(X)$ *выпуклая функция определенная на* D*. Пусть* $f(X)$ *достигает глобального минимума (максимума) на* E*.*
Тогда E *выпуклое множество. (*E *- множество точек глобального минимума (максимума) функции* $f(X)$*)*

Общая (неклассическая) постановка задачи оптимизации: $(**)$

$$f(Y) = extr_D\, f(X)$$
$$D = \left\{ X \,\middle|\, X \in P; \psi_j(X) \leqslant 0, j = 1, ..., K; \psi_j(X) = 0, j = K+1, K+2, ..., M \right\} \subseteq \mathbb{R}^N \tag{6}$$

Функция Лагранжа: $L(\Lambda, \lambda_0, X) = \lambda_0 f(X) + \sum\limits_{j=1}^{M} \lambda_j \psi_j(X)$

Теорема 5.6 (Необходимое условие экстремума в форме принципа Лагранжа). *Пусть есть задача* $(**)$*. Пусть выполняются следующие условия:*

1. P *- выпуклое множество;*
2. $f(X), \psi_1(X), ..., \psi_K(X)$ *дифференцируемы в точке* $Y \in D$*;*
3. $\psi_{K+1}(X), ..., \psi_{K+M}(X)$ *непрерывно дифференцируемы в окрестности* $U_\varepsilon(Y)$*.*

Если Y *- точка локального минимума (максимума) задачи* $(**)$ *и при этом* $\exists\, \Lambda' = (\lambda_1', ..., \lambda_M') \neq 0 \wedge \lambda_0' \neq 0 \,\big|\, \forall\, X \in P$ *и* $\forall\, \delta X = X - Y$ *выполняются условия Куна-Таккера.*

$$\sum_i \frac{\partial L(\Lambda', \lambda_0', Y)}{\partial x_i} \delta x_i \geqslant (\leqslant) 0 \tag{7}$$
$$\lambda_j' \psi_j(Y) = 0, j = 1, ..., K \tag{8}$$
$$\lambda_j' \geqslant (\leqslant) 0, j = 1, ..., K \tag{9}$$

$\lambda_{K+1}', ..., \lambda_M'$ *могут иметь любой знак.*

Теорема 5.7 (Достаточное условие экстремума). *Пусть есть задача* $(**)$*. Пусть выполняются следующие условия:*

1. *P - выпуклое множество;*

2. *$f(X), \psi_1(X), ..., \psi_K(X)$ дифференцируемы в точке $Y \in D$;*

3. *$f(X), \psi_1(X), ..., \psi_K(X)$ выпуклы на P;*

4. *$\psi_{K+1}(X), ..., \psi_M(X)$ линейны.*

Если существуют такие $\Lambda' \neq 0 \wedge \lambda_0' \neq 0$, что $\forall\, X \in P$ выполняются условия Куна-Таккера.
Тогда Y - точка минимума (максимума).

Лемма 5.12. *Пусть Y - точка минимума (максимума). Пусть Y - внутренняя точка P.*
Тогда $\dfrac{\partial L(\Lambda', \lambda_0', Y)}{\partial x_i} = 0, i = 1, ..., N$.
Если $P = \left\{X \in P \,\middle|\, a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1, ..., N\right\}$.
Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \begin{cases} \geqslant (\leqslant) 0, & y_i = a_i \neq -\infty \\ 0, & a_i < y_j < b_i \\ \leqslant (\geqslant) 0, & y_i = b_i \neq +\infty \end{cases} \tag{10}$$

Если $P = \left\{X \in P \,\middle|\, x_i \geqslant 0, i = 1, ..., S, 0 \leqslant S \leqslant N\right\}$.
Тогда

$$\frac{\partial L(\Lambda', \lambda_0', Y)}{\partial x_i} \geqslant (\leqslant) 0; y_i \frac{\partial L(\Lambda', \lambda_0', Y)}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, ..., S \tag{11}$$

$$\frac{\partial L(\Lambda', \lambda_0', Y)}{\partial x_i} = 0, \qquad i = S+1, S+2, ..., N \tag{12}$$

Условие регулярности: линейная независимость набора градиентов ограничений в D.

Теорема 5.8 (Необходимое условие экстремума Куна-Таккера)**.** *Пусть есть задача $(**)$. Пусть выполняются следующие условия:*

1. *P - выпуклое множество;*

2. *$f(X), \psi_1(X), ..., \psi_K(X)$ дифференцируемы в точке $Y \in D$;*

3. *$\psi_1(X), ..., \psi_K(X)$ выпуклы на P;*

4. *$\psi_{K+1}(X), ..., \psi_M(X)$ линейны.*

И выполнено одно из условий:

a) *ограничения равенства отсутствуют, т.е. $K = M$ и система $\psi_j(X) < 0, j = 1, ..., M$ имеет решение на P;*

b) P - полиэдр и $\psi_j(X), j = 1, ..., K$ - линейны;

c) P - полиэдр и $\psi_{S+1}(X), ..., \psi_K$ - линейны и система ограничений $\psi_j(X) \leqslant 0, j = 1, ..., S$ имеет хотя бы одно допустимое решение.

Если Y - точка локального минимума (максимума)
Тогда существуют такие $\Lambda' \neq 0 \wedge \lambda_0' \neq 0$, что $\forall X \in P$ выполняются условия Куна-Таккера.

Теорема 5.9 (Необходимые и достаточные условия экстремума Куна-Таккера в дифф. форме)**.** *Пусть есть задача (**). Пусть выполняются следующие условия:*

1. *P - выпуклое множество;*
2. *$f(X), \psi_1(X), ..., \psi_K(X)$ дифференцируемы в точке $Y \in D$;*
3. *$\psi_1(X), ..., \psi_K(X)$ выпуклы на P;*
4. *$\psi_{K+1}(X), ..., \psi_M(X)$ линейны;*
5. *$f(x)$ - выпукла.*

И выполняется одно из $a) - c)$.
Точка Y локального минимума (максимума) существует $\iff \exists \Lambda' \neq 0 \wedge \lambda_0' \neq 0$, такие что $\forall X \in P$ выполняются условия Куна-Таккера.

Задача: $(***)$

$$f(Y) = \min f(X)$$
$$D = \left\{ X \,\middle|\, X \in P, \psi_j(X) \leqslant 0, j = 1, ..., K; \psi_j(X) = 0, j = K+1, ..., M \right\} \subseteq \mathbb{R}^N$$

Теорема 5.10. *Пусть есть задача $(***)$. Пусть выполняются следующие условия:*

1. *P - выпуклое множество;*
2. *$f(X), \psi_1(X), ..., \psi_K(X)$ выпуклы на P;*
3. *$\psi_{K+1}(X), ..., \psi_M(X)$ линейны;*
4. *D - непусто.*

Тогда существуют такие $\Lambda' \neq 0 \wedge \lambda_0' \neq 0$, что $\forall X \in P$ выполняются неравенства

$$\lambda_0' f^* \leqslant \lambda_0' f(X) + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \psi_j(X) = L(\Lambda', \lambda_0', X) \tag{13}$$
$$\lambda_j' \geqslant 0, j = 1, ..., K \tag{14}$$

Теорема 5.11 (Достаточное условие существования вектора Куна-Таккера)**.** *Пусть есть задача $(***)$. Пусть выполняются следующие условия:*

1. *P - выпуклое множество;*
2. *$f(X), \psi_1(X), ..., \psi_K(X)$ выпуклы на P;*
3. *$\psi_{K+1}(X), ..., \psi_M(X)$ линейны.*

И выполняется одно из a) – c). Тогда вектор Куна-Таккера существует.

Условие регулярности задачи $(***)$**:** существование вектора Куна-Таккера.

Теорема 5.12 (Выпуклость двойственной задачи)**.** *В двойственной задаче Q - выпукло и φ вогнута (выпукла вверх) на Q.*

Теорема 5.13 (Основное неравенство двойственности для задачи выпуклой оптимизации)**.** *$\forall\, X \in D$ прямой задачи и $\forall\, \Lambda \in \mathcal{L}$ двойственной задачи справедливо неравенство $f(X) \geqslant \varphi(\Lambda)$.*

Теорема 5.14 (Теорема двойственности)**.** *Если прямая задача имеет решение и оно конечно и выполнено условие регулярности (th 11).*
Тогда множество решений двойственной задачи непусто и совпадает со множеством векторов Куна-Таккера прямой задачи. И целевые функции прямой и двойственной задач совпадают.

Теорема 5.15 (Связь между решением прямой и двойственной задачи)**.** *Если для прямой задачи $(***)$ выполнено условие регулярности и допустимое множество двойственной задачи непусто, то двойственная задача имеет решение.*
Если допустимое множество пусто, то минимум прямой задачи это «$-\infty$».

Теорема 5.16 (Теорема Куна-Таккера в форме двойственности)**.** *Если выполнено условие теоремы 11 для прямой задачи, то точка Y есть решение прямой задачи $\iff$ существует вектор Куна-Таккера, такой что $f(Y) = \varphi(\Lambda)$.*

Теорема 5.17 (Теорема Куна-Таккера в терминах седловой точки)**.** *Если выполнено условие теоремы 11 для прямой задачи, то точка Y есть решение прямой задач $\iff$ существует вектор Куна-Таккера, такой что $(Y, \Lambda^{'})$ - седловая точка функции Лагранжа.*

Теорема 5.18 (Об условиях одновременного достижения экстремума прямой и двойственной задачи)**.** *Если выполнено условие теоремы 11, то точки Y и $\Lambda^{'}$ есть решения прямой и двойственной задач $\iff$ выполнено соотношение двойственности.*
Или точки Y и $\Lambda^{'}$ есть решения прямой и двойственной задач $\iff$ $(Y, \Lambda^{'})$ - седловая точка функции Лагранжа.

6 Задача выпуклой квадратичной оптимизации

Теорема 6.1. *Для того, чтобы существовал вектор Куна-Таккера $\Lambda^{'} \in \mathcal{L}$, удовлетворяющий условиям $\begin{cases} CX + S + \Lambda^{'} = 0 \\ \lambda^{'}_j(A_jY - b_j) = 0, j = 1, ..., K \end{cases}$ $\iff$ $Y \in D$ - точкой минимума.*