1 Динамические модели

1.1 Модель Солоу

Пусть имеется замкнутая односекторная экономика.
Y - ВВП
K - капитал
I - инвестиции
C - конечное потребление
L - трудовые ресурсы
Имеется баланс $Y = C + I$. Зависимость ВВП от ресурсов выражается функцией Кобба-Дугласа.

$$\begin{aligned} &Y = AK^{\alpha}L^{\beta} \\ &Y = C + I \\ &I = sY \\ &\frac{\partial L}{\partial t} = \gamma L \qquad (L(0) = L_0) \\ &\frac{\partial K}{\partial t} = -\mu K + I \qquad (K(0) = K_0) \end{aligned} \tag{1}$$

где γ - темп прироста трудовых ресурсов, s - склонность к сбережению, A - научно-технический прогресс. Пусть $y = Y/L, k = K/L, i = I/L$. Тогда получим модель Солоу в относительных показателях.

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -(\lambda + \mu)k + sAk^{\alpha} \tag{2}$$

Равновесие равно $\hat{k} = (\frac{sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Интервалы	Рост
$\left(0; (\frac{\alpha sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$	Ускоренный рост
$\left((\frac{\alpha sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}; (\frac{sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$	Насыщенный рост
$\left((\frac{sA}{\lambda + \mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}; +\infty\right)$	Падение

Конечно-разностное представление: $k(t + \Delta) = k(t) + \Delta t(-(\lambda + \mu)k(t) + sAk(t)^{\alpha})$

1.2 SIR модель

Пусть $S(t)$ - число восприимчивых к инфекции
$I(t)$ - число инфицированных
$R(t)$ - число переболевших инфекцией
N - число популяции

β - коэффициент интенсивности контактов
γ - коэффициент интенсивности выздоровления

$$\begin{aligned} &\frac{dS}{dt} = \frac{-\beta IS}{N} \\ &\frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I \\ &\frac{dR}{dt} = \gamma I \end{aligned} \tag{3}$$

1.3 SEIRD модель

$E(t)$ - число носителей заболевания
D - число умерших
μ - уровень смертности
$\delta = \dfrac{1}{\text{ср.инк.период}}$

$$\begin{aligned} &\frac{dS}{dt} = \frac{-\beta IS}{N} \\ &\frac{dE}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \delta E \\ &\frac{dI}{dt} = \delta E - \gamma I - \mu I \\ &\frac{dR}{dt} = \gamma I \\ &\frac{dD}{dt} = \mu I \end{aligned} \tag{4}$$

1.4 Модель Лотки-Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \tag{5}$$

$x(t)$ - число жертв
$y(t)$ - число хищников
a - коэффициент рождаемости жертв
b - коэффициент убыли жертв
c - коэффициент убыли хищников
d - коэффициент рождаемости хищников
Первой стационарной точкой является $(0, 0)$. Возьмем из системы линейную часть и составим матрицу.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} \tag{6}$$

Решая данной характеристическое уравнение получим $\lambda_1 = a, \lambda_2 = -c \Rightarrow$ данная точка является седлом. Теперь приравняем правые части системы к 0 и решим ее. Получим вторую стационарную точку $\overline{x} = \dfrac{c}{d}, \overline{y} = \dfrac{a}{b}$. Построим матрицу Якоби, подставив $\overline{x}, \overline{y}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{bc}{d} \\ -\dfrac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 + ac = 0$, получаем два мнимых корня, что свидетельствует о том что данная стационарная точка является центром.

1.5 Модель взаимодействия двух конкурирующих видов

x_1 - количество особей первого типа x_2 - количество особей второго типа

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 - b_{11} x_1^2 - b_{12} x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 - b_{21} x_1 x_2 - b_{22} x_2^2 \end{cases} \tag{8}$$

Приравняем к 0 правые части системы.

$$\begin{cases} x_1(a_1 - b_{11} x_1 - b_{12} x_2) = 0 \\ x_2(a_2 - b_{21} x_1 - b_{22} x_2) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Получим 4 стационарные точки.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{a_2}{b_{22}} \end{cases}; \tag{10}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_1}{b_{11}} \\ x_2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = \dfrac{a_2 b_{12} - a_1 b_{22}}{b_{12} b_{21} - b_{22} b_{11}} \\ x_2 = \dfrac{a_1 b_{21} - a_2 b_{11}}{b_{12} b_{21} - b_{22} b_{11}} \end{cases}$$

Определим состояние равновесия для каждой стационарной точки

1. 1
2. 2

1.6 Модель Самуэльсона-Хикса

1.6.1 Дискретная форма

Предполагается замкнутая экономика, предложение эластично, цены и процентная ставка фиксированы. Рассмотрим уравнение

$$Y_{t+1} = C(Y_t) + I_t \tag{11}$$

Пусть спрос зависит от Y_t линейно, т.е. $C(Y_t) = C_a + cY_t$, а инвестиции равны $I_t = r(Y_t - Y_{t-1}) + I_a$, где C_a - постоянное потребление, I_a - постоянные инвестиции, r -

коэффициент акселерации, c - склонность к потреблению. $A = C_a + I_a$ - автономные расходы. Получим следующее конечно-разностное уравнение.

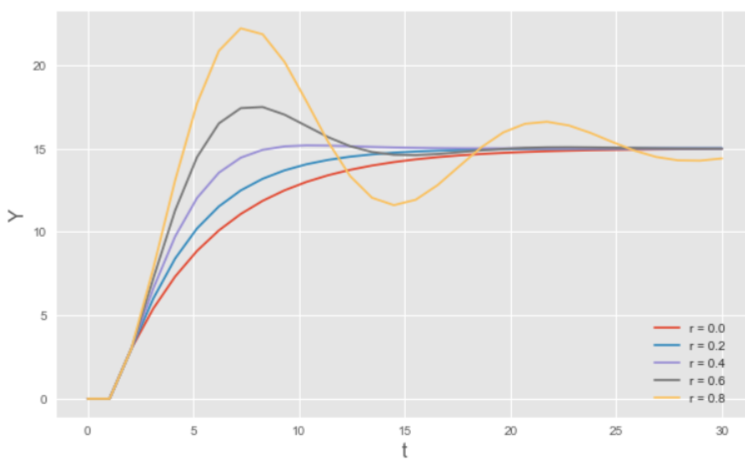
$$Y_{t+1} = C_a + I_a + cY_t + r(Y_t - Y_{t-1}) \tag{12}$$

Равновесие определим из предположения, что автономные расходы постоянны и объем ВВП стабилизируется на определенном уровне, т.е. $Y_t = Y_{t-1} = ... = Y_{t-n} = \hat{Y}$. Тогда получим уравнение

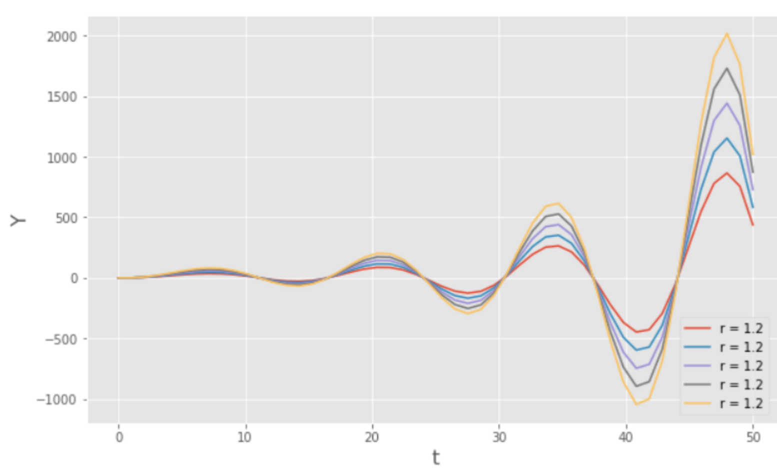
$$\widehat{Y} = A + c\widehat{Y} + r(\widehat{Y} - \widehat{Y}) = A + c\widehat{Y} \tag{13}$$

$\Rightarrow \widehat{Y} = \dfrac{A}{1-c}$. Величина $\dfrac{1}{1-c}$ называется мультипликатором автономных расходов. Рассмотрим уровень дохода при изменения коэффициента акселерации:

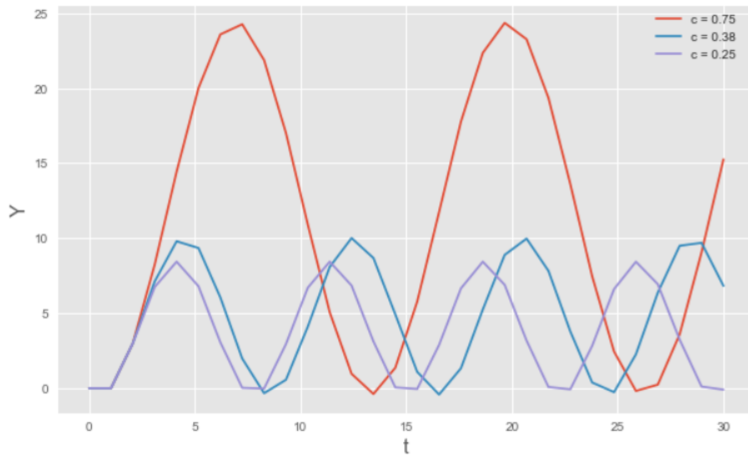
1. Если $0 < r < 1$, то равновесие восстановится через некоторое время при новом уровне дохода.



2. Если $r > 1$, то при нарушении равновесия единожды, оно больше не восстановится.



3. Если $r = 1$, то значение дохода будет колебаться с постоянным периодом.



1.6.2 Непрерывная форма

Перейдя от конечных разностей получим следующее уравнение.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(1-r)\frac{\partial y}{\partial t} - (1-c)y + A \tag{14}$$

Понизим порядок уравнения, приведя его к НСДУ.

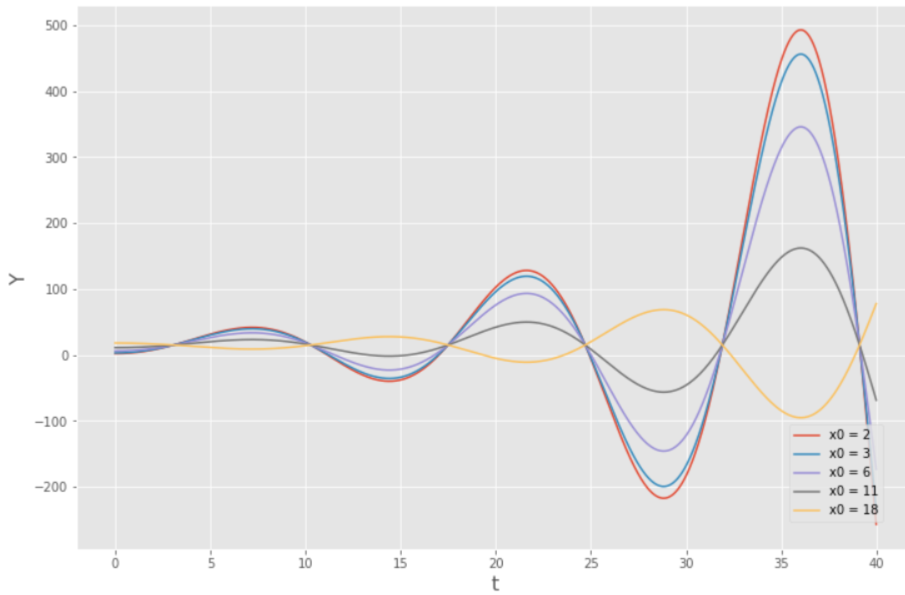
$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} = x \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} = -(1-r)x - (1-c)y + A \end{cases} \tag{15}$$

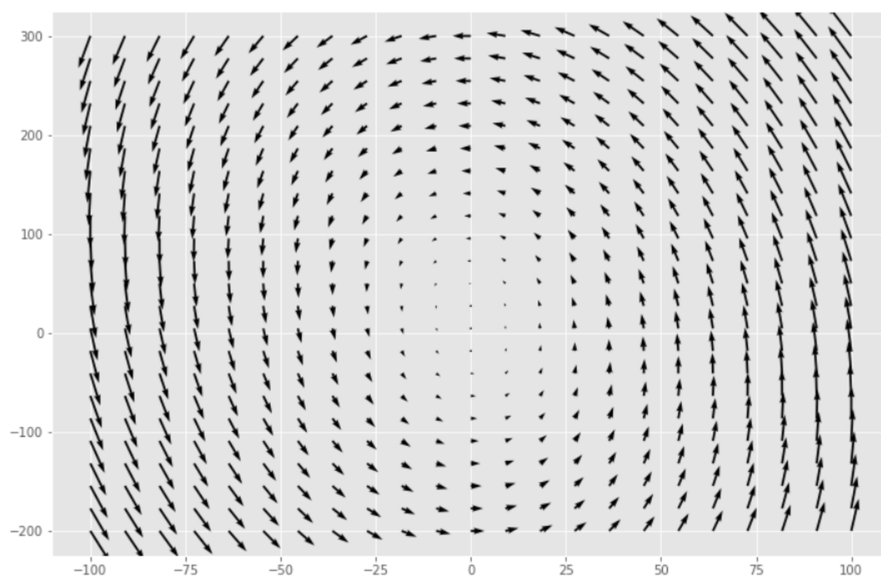
Отсюда легко получить стационарную точку приравняв правые части к 0. Получим $x = 0, y = \dfrac{A}{1-c}$. Определим состояния равновесия в стационарной точке при помощи корней характеристического уравнения. Составим матрицу Якоби.

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -(1-r) & -(1-c) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

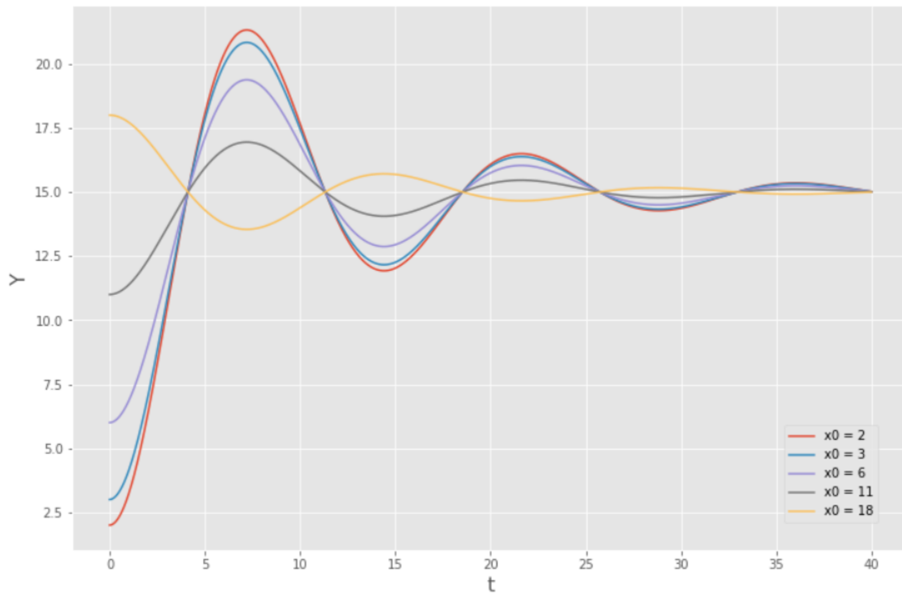
Найдем собственные значения при следующих параметрах:

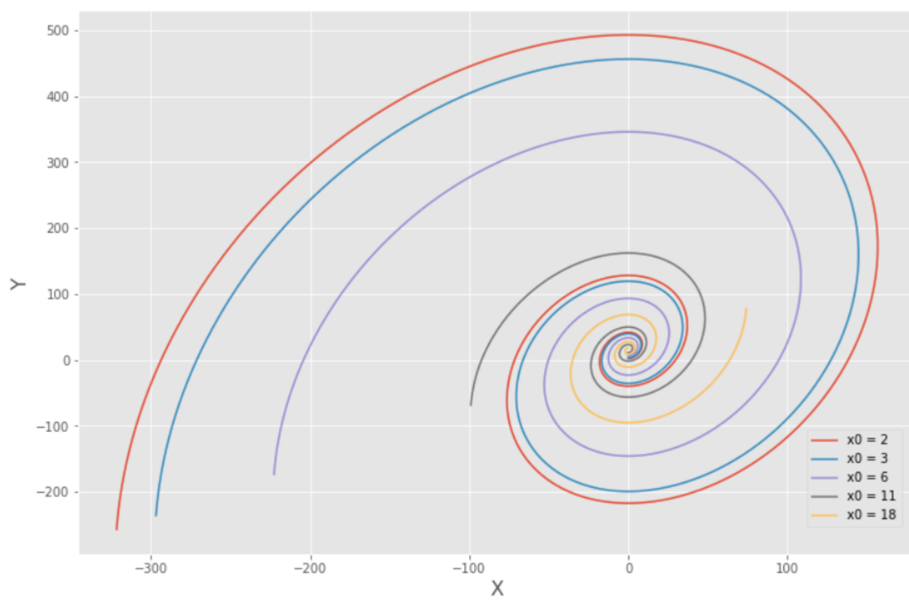
1. $r = 1.2; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0.1 \pm 0.435i$.
   Т.е. при $r > 1$ получаем неустойчивый фокус.

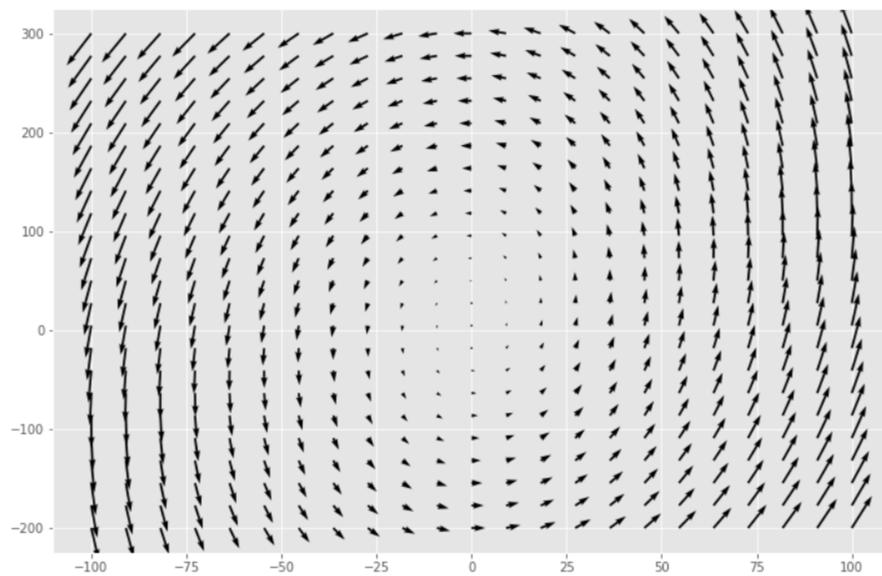




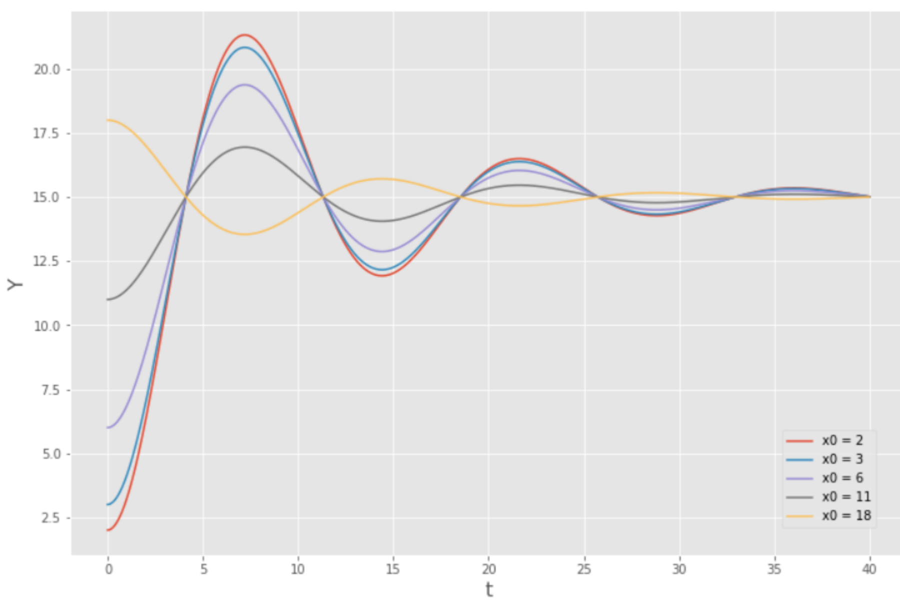
2. $r = 0.8; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -0.1 \pm 0.435i$.
   При $0 < r < 1$ получаем устойчивый фокус.

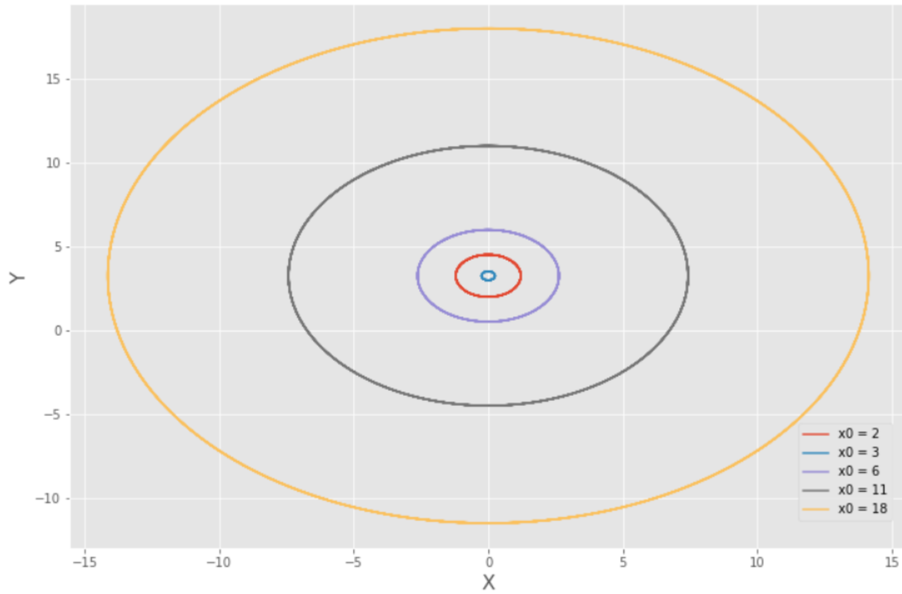

Y
t
x0 = 2
x0 = 3
x0 = 6
x0 = 11
x0 = 18


Y
X
x0 = 2
x0 = 3
x0 = 6
x0 = 11
x0 = 18



3. $r = 1; c = 0.8 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 0.447i$.
   И наконец при $r = 1$ получаем центр.





Y
X
x0 = 2
x0 = 3
x0 = 6
x0 = 11
x0 = 18