The Execution Time of N Figures Problem Cannot Be Polynomial

Written by Jozsef Kiss (KissCode Systems Kft, Hungary)
Site: https://openso.kisscodesystems.com/
Date: 01.01.2018.

0. ABSTRACT

Letezik az algoritmusoknak azon nemures reszhalmaza, amely elemei az N sakkfigura (N kiralyno es kiterjesztese) problemat megoldjak. Ezen algoritmusok implementacioira tapasztalat szerint jellemzo, hogy futasi idejuk drasztikusan megnovekszik ahogy a Sakktabla meretet (es a lerakni kivant sakkfigurak szamat) noveljuk.
A jelenlegi vilagrekord vezerre 27 meretu tablan van kiszamolva, ezen a Sakktablan ismeretes tehat a vezerek osszes olyan lerakasa amelyekben egyik vezer sem tamadja a masikat.
A Futasi ido roviditesere jo sok otlet gyult mar ossze (bitenkenti muveletek hasznalata, szimmetria hasznalata, tamadas elokalkulacio + csak ervenyes poziciok hasznalata, stb.) azonban a tendencia nem tudott szamottevoen valtozni. Ha tudott volna, akkor ismernenk az osszes helyes kiralyno lerakast mondjuk 100 meretu tablan, de nem ismerjuk. Az alabbiakban szeretnenk megmutatni azt, hogy az N sakkfigura osszes lehetseges helyes lerakasa es ezek megszamolasa nem lehetseges gyorsan azaz Polynomialis futasi idoben.
Az N kiralyno problema gyors megoldasaval egyebkent cafolni lehetne a P!=NP sejtest amely egyike a milleniumi problemaknak.

1. DEFINITIONS

1.1 Dimenzio (D)
osszes figura darabszam amelyet egyszerre hasznalni szeretnenk

1.2 Sakktabla (C)
0 .. (D ^ 2 - 1) rendezett sorozat
peldaul a C4x4-es Sakktabla reprezentacioja:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

1.3 Jo pozicio
C tetszoleges 2 eleme: Ci es Cj (i,j eleme N es i,j <= D ^ 2 - 1) kozott ertelmezett, es azon tulajdonsag amely szerint az emlitett 2 sakkfigura nem tamadja egymast

1.4 Jo lerakas
C Sakktabla D darab eleme amelyek kozul mindegyik 2 elem Jo pozicio

1.5 N sakkfigura problema
minden Jo lerakast eloallitani a D szamu sakkfigurakra a D meretu C Sakktablan, es megszamolni ezeket

1.6 N sakkfigura algoritmus (A)
olyan algoritmus amely az osszes sakkfigura lerakasat elvegzi az osszes helyes lerakasban optimalis modon, azaz nem tartalmaz olyan kalkulaciot amely nem az N sakkfigura problema megoldasan dolgozna

1.7 Ellenorzesi ido (T0)
az az idotartam amely alatt a szamitogep ellenorzi ket tetszoleges Ci, Cj elemekrol hogy azok Jo pozicioban vannak-e vagy sem
nem fugg a pillanatnyi idoponttol, sem pedig az osszehasonlitott 2 elemtol
kicsiny konstanskent kezeljuk

1.8 Megszamolasi ido (T1)
az az idotartam amely alatt a szamitogep egy helyes lerakast megszamol
T0-hoz hasonloan kicsiny konstanskent kezeljuk

1.9 Futasi ido (TR)
az a teljes idotartam amely ido alatt A implementacioja elkezdi majd be is fejezi a futasat, azaz a kezdo es vegzo idopillanatok kulonbsege
TR csakis attol fugg hogy hany elemi CPU utasitast kell vegrehajtani igy kozvetett modon D fuggvenye

1.10 Polynomialis futasi ido
letezik k pozitiv egesz szam hogy az A algoritmus implementacio Futasi ideje O (D ^ k) osszefugges szerint alakuljon tetszoleges D ertekre

2. ANALYSIS

2.1 Assumption: lehetseges Polynomialis futasi ido alatt megoldani az N sakkfigura problemat az A algoritmus implementaciojanak futtatasaval.

2.2 Az N sakkfigura problema alapveto elvarasa hogy A:
- kepes legyen eldonteni C barmely reszsorozatarol hogy azok elemei Jo poziciok vagy sem
- a Jo lerakasokat kepes legyen megszamolni

2.3 Az A algoritmustol pontosan a fontieket koveteljuk meg es nem tobbet.
Tehat, A legyen olyan tulajdonsagu hogy D ertekebol egyertelmuen es pontosan 0 ido alatt bocsassa rendelkezesunkre az osszes helyes lerakast alkoto reszsorozatokat, rossz lerakassal ne talalkozzunk.
Tovabba, A kepes legyen eldonteni ezekrol a C reszsorozatokrol hogy minden 2 eleme Jo pozicio legyen, es a Jo lerakasokat kepes legyen osszeszamolni.

2.4 Az A algoritmus tehat a kovetkezo feladatokat vegzi el:

D darab elemrol

$$(1) \quad 0 + 1 + 2 + .. + (D - 1) = 1/2 * D * (D - 1)$$

darab ellenorzessel tudja meghatarozni hogy C adott reszsorozata Jo lerakas.
Ez (1) alapjan

$$(2) \quad T0 * 1/2 * D * (D - 1)$$

ideig tart.
Ezt az uj poziciot hozza kell adni a mar megtalalt darabszamhoz (found ++), ami T1 ideig tart.
Legyen

$$(3.a) \quad G = G (D)$$

az a darabszam amely a D Dimenziohoz tartozo helyes sakkfigura lerakasok szamat jeloli.
Nem tudunk rola semmit csak annyit hogy nagy D ertekek eseten

$$(3.b) \quad G (D) < G (D + 1)$$

Ekkor (1), (2) es (3.a) alapjan a fontiek elvegzesehez szukseges osszes idotartam:

$$(4) \quad TR (D) = T0 * 1/2 * D * (D - 1) * G + T1 * G$$

A tovabbiakban nagy D ertekeket vizsgalunk, igy

$$(5) \quad D * (D - 1) \sim D \wedge 2$$

Azaz a (4) osszefugges igy alakul nagy D ertekekre:

$$(6) \quad TR (D) = T0 * 1/2 * D \wedge 2 * G + T1 * G$$

Legyen 1.10 es (6) alapjan:

$$(7) \quad \begin{aligned} TR (D) &= D \wedge k \\ T0 * 1/2 * D \wedge 2 * G + T1 * G &= D \wedge k \end{aligned}$$

azaz, keressunk allando k erteket ennek a bal oldalon levo Futasi idonek.

2.5 Nezzuk meg hogy a 2.4 pont (7) osszefuggesere milyen k ertekeket lehet talalni.

2.5.1 Legyen k = 1, ekkor (7):

$$(8) \quad \begin{aligned} T0 * 1/2 * D \wedge 2 * G + T1 * G &= D \\ 1/2 * T0 * G * D \wedge 2 - D + T1 * G &= 0 \end{aligned}$$

Ez D-re egy masodfoku egyenlet, amelynek akkor van legalabb 1 megoldasa, ha

$$(9) \quad \begin{aligned} (- 1) \wedge 2 - 4 * 1/2 * T0 * G * T1 * G &>= 0 \\ 1 - 2 * T0 * T1 * G \wedge 2 &>= 0 \end{aligned}$$

T0 es T1 kicsiny konstansok, viszont (3.a) miatt G fuggvenye az aktualis D Sakktabla meretnek. Igy egy bizonyos D ertek folott (3.b) miatt (9) nem teljesulhet.
Ezert (7) nem teljesulhet minden egyes D esetben k = 1-re.

2.5.2 Legyen $k = 2$, ekkor (7):

$$
\begin{aligned}
(10) \qquad T0 \cdot 1/2 \cdot D^2 \cdot G + T1 \cdot G &= D^2 \\
(1/2 \cdot T0 \cdot G - 1) \cdot D^2 + T1 \cdot G &= 0 \\
(1 - 1/2 \cdot T0 \cdot G) \cdot D^2 &= T1 \cdot G \\
D &= \sqrt{T1 \cdot G / (1 - 1/2 \cdot T0 \cdot G)}
\end{aligned}
$$

Ez akkor ertelmezett, ha

$$(11) \qquad 1 - 1/2 \cdot T0 \cdot G > 0$$

A (9)-hez hasonloan (11)-ben is az latszik hogy (3.b) miatt nem teljesulhet mindig, ezert (7) sem teljesulhet tetszoleges D ertekre $k = 2$ eseten.

2.5.3 Vizsgaljuk (7)-et altalanos azaz valtozatlan formajaban.

$$
\begin{aligned}
(12) \qquad T0 \cdot 1/2 \cdot D^2 \cdot G + T1 \cdot G &= D^k, \quad k > 2 \\
D^k - 1/2 \cdot T0 \cdot G \cdot D^2 - T1 \cdot G &= 0 \\
D^2 \cdot (D^{(k - 2)} - 1/2 \cdot T0 \cdot G) - T1 \cdot G &= 0
\end{aligned}
$$

Mivel $T1 \cdot G > 0$ es $D^2 > 0$ ezert a fontebbi csak akkor teljesulhet, ha

$$(13) \qquad D^{(k - 2)} - 1/2 \cdot T0 \cdot G > 0$$

Ez azt jelenti, hogy adott D-hez mindig lehet legkisebb k erteket talalni, de k nem lehet allando: ha D novekszik akkor k-nak is novekednie kell.
Ez azert van mert $G(D)$ gyorsabban novekszik mint $D^{(k - 2)}$:
- vezer eseten $G(D)$ felulbecsulheto: $D! / (2^D)$ szerint
- bastya eseten $G(D)$ pontosan $D!$
- futo eseten $G(D)$ az $D!$ relacional is meredekebb.

2.5.4 Igy $k = 1$, $k = 2$ es altalanos k esetre is lathato hogy (7) nem teljesulhet tetszoleges D esetre. Ennel fogva 2.1 Assumption sem igaz.

2.6 A fonti megfontolasok soran nem szamoltunk azzal hogy a jo es rossz lerakasok megkeresesehez is szukseges 0-nal tobb ido. Ez a (6) osszegben egy tovabbi tagkent jelenik meg, amely fuggvenye a D-nek, es legyen

$$(14.a) \qquad TS = TS(D) \neq 0$$

A (3.b)-bol kovetkezik hogy nagy D-kre

$$(14.b) \qquad TS(D) < TS(D + 1)$$

tovabba 2.5.3-bol lathato $TS(D)$ tendenciaja (ami legalabb akkora mint $G(D)$ meredeksege mert jo es nem jo lerakasok mindig lesznek es egyre tobb)
Tehat (6) tendenciajat ez a tovabbi tag nem tudja csokkenteni csak novelni.
Igy 2.5.4 tovabbra is igaz marad ha $TS(D) \neq 0$.

3. CONCLUSIONS

3.1 A fonti logika szerint az adodik hogy gyors, azaz 1.10 szerinti Futasi ido nem erheto el az N sakkfigura problema megoldasat vegzo A algoritmus implementaciojanak futtatasara.

3.2 Lathato (13)-bol hogy $T0 = 0$ eseten lehetne igaz a 2.1 tetszoleges D ertekre adott, allando k mellett. Ekkor viszont az A algoritmus implementacioja 0 ido alatt el tudna donteni egy adott lerakasrol hogy az helyes-e, de ez vegtelen gyors szamitogepet feltetelezne, amelyet jelenlegi ismereteink szerint lehetetlen megepiteni.

3.3 Nem hasznaltuk ki tovabba hogy vezert teszunk le a Sakktablara, igy 2.5.4 fennall akarmilyen hagyomanyos sakkfigura hasznalatara.