Control computarizado - Identificación de sistemas

Kjartan Halvorsen

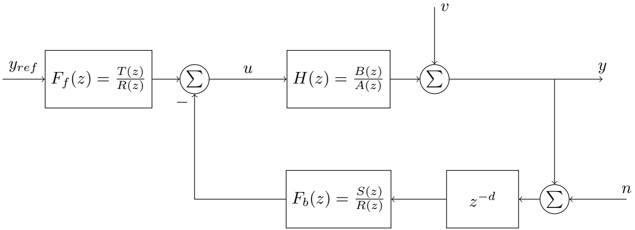
July 22, 2020

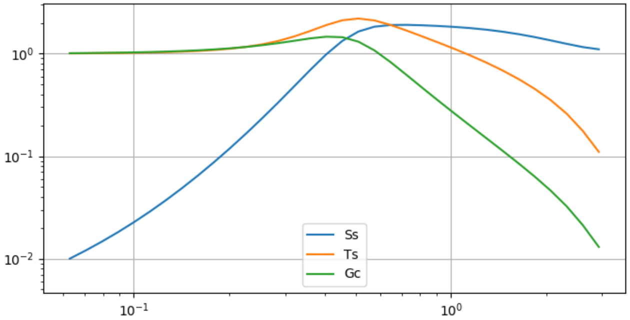
Retroalimentación Examen parcial 2

Retroalimentación Examen parcial 2

- La mayoridad dominan bien un gran parte de la materia
- Dos cosas a enforzar
  1. Interpretación de funciones de transferencia (diagrama de Bode)
  2. Transformar especifiaciones en el tiempo a ubicación de los polos

Retroalimentación Examen parcial 2 - funciones de transferencia





Retroalimentación Examen parcial 2 - sensibilidad

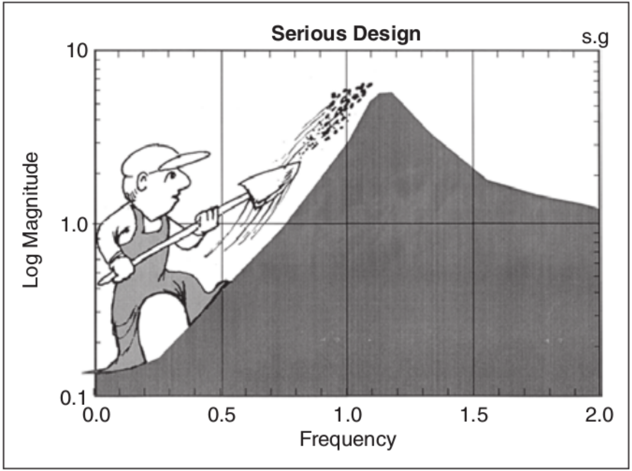


Figure 3. *Sensitivity reduction at low frequency unavoidably leads to sensitivity increase at higher frequencies.*

Stein 2003 "Respect the unstable" IEEE Control Systems Magazine

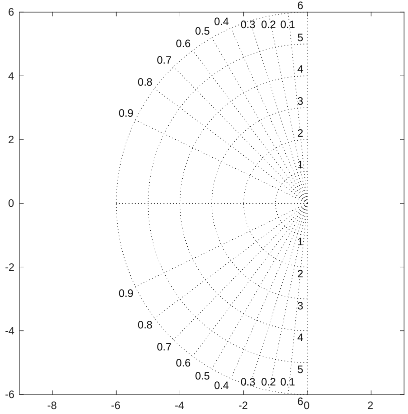
Retroalimentación Examen parcial 2 - Ubicación de polos

Dado $h = 0.01$, y usando $t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} < 0.01$

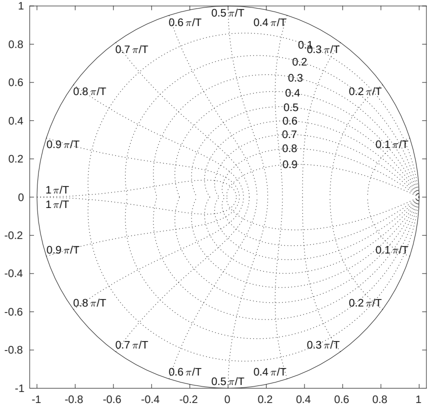
$$z = \mathrm{e}^{sh} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(s)h}\mathrm{e}^{i\mathrm{Im}(s)h}$$

$$|z| = |\mathrm{e}^{sh}| = |\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(s)h}| < \mathrm{e}^{-\zeta\omega_n h} = \mathrm{e}^{-40\cdot 0.01} = 0.67$$

plano s

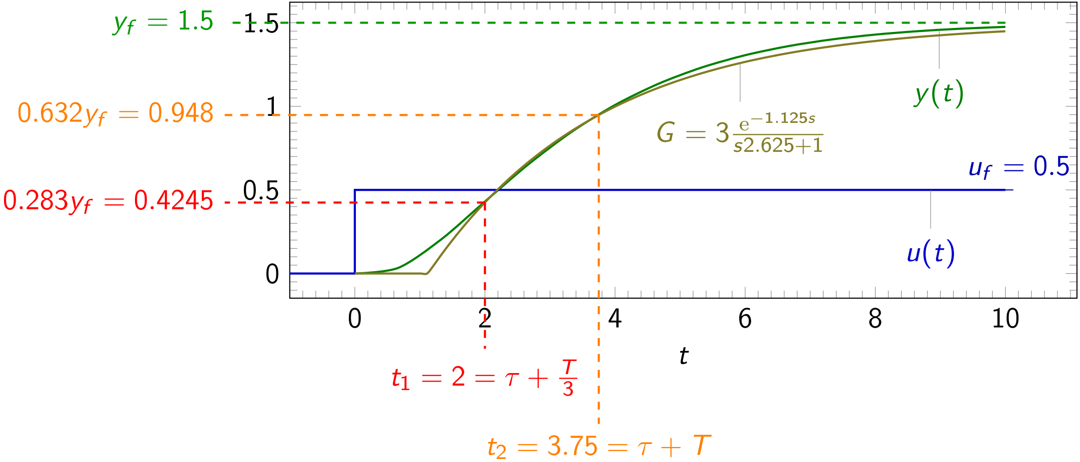


plano z

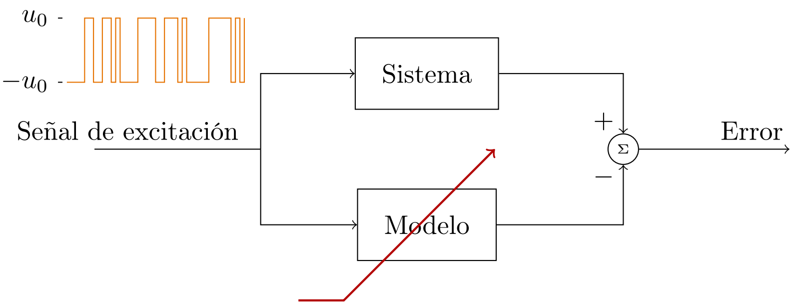


Identificación de sistemas

Identificación de sistemas



Identificación de sistemas



Ejemplo - Modelo autoregresivo (AR)

Modelo autoregresivo (AR)

Dado una secuencia discreta observada $y(k), \; k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autoregresivo

$$y(k+1) = -ay(k) + e(k+1),$$

dónde $e(k)$ es una sequencia discreta de ruido blanco.

Objetivo Estimar el parametro a.

1. Forma el predictor de un paso adelante

$$\hat{y}_{k+1} = -ay_k = -y_k a = \varphi_{k+1}\theta,$$

y el error de predicción

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - \varphi_k\theta$$

Modelo autoregresivo (AR)

Dado una secuencia discreta observada $y(k),\ k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autoregresivo $y(k+1) = -ay(k) + e(k+1)$, dónde $e(k)$ es una sequencia discreta de ruido blanco.

Objetivo Estimar el parametro a.

2. Reune todas las observaciónes y_k y predicciones $\hat{y}_k$ en forma vectoral

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_2 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \vdots \\ \hat{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -y_1 a \\ -y_2 a \\ \vdots \\ -y_{N-1}^T \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi_2^T \theta \\ \varphi_3^T \theta \\ \vdots \\ \varphi_N^T \theta \end{bmatrix}$$

$$= y - \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix}}_{\Phi} \theta = y - \Phi\theta$$

Modelo autoregresivo (AR)

Dado una secuencia discreta observada $y(k),\ k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autoregresivo $y(k+1) = -ay(k) + e(k+1)$, dónde $e(k)$ es una sequencia discreta de ruido blanco.

Objetivo Estimar el parametro a.

3. Obtiene el estimado de mínimos cuadrados

$$
\begin{aligned}
\theta_{LS} &= (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T y \\
&= \left(\begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & \cdots & -y_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ \vdots \\ -y_{N-1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & \cdots & -y_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \\
&= -\frac{\sum_{k=1}^{N-1} y_k y_{k+1}}{\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2}
\end{aligned}
$$

Computación de la solución de mínimos cuadrados

Dado error de predicción en forma vectoral para sistema de orden n $\epsilon = y - \Phi\theta$. Forma el sistema de ecuaciones

$$\Phi\theta = y$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^T \\ \varphi_{n+2}^T \\ \varphi_{n+3}^T \\ \varphi_{n+4}^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ yn+3 \\ y_{n+4} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Resuelva las ecuaciones usando métodos numericamente robustos de algebra lineal, por ejemplo factorización L-U. En matlab se escribe

```
theta_LS = Phi \ y
```

Ejemplo numerico

Mybinder

Model AR de orden n

Dado una secuencia discreta observada $y(k),\ k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autoregresivo

$$
\begin{aligned}
A(z)Y(z) = z^n E(z) \quad \Leftrightarrow \quad A(\mathrm{q})y(k) &= \mathrm{q}^{n-1}\, e(k) \\
(\mathrm{q}^n + a_1\, \mathrm{q}^{n-1} + a_2\, \mathrm{q}^{n-2} + \cdots + a_n)y(k) &= \mathrm{q}^n\, e(k) \\
(\mathrm{q} + a_1 + a_2\, \mathrm{q} - 1 + \cdots + a_n\, \mathrm{q}^{-n+1})y(k) &= \mathrm{q}\, e(k) \\
y(k+1) + a_1 y(k) + a_2 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n+1) &= e(k+1) \\
y(k+1) = -a_1 y(k) - a_2 y(k-1) - \cdots - a_n y(k-n+1) &+ e(k+1)
\end{aligned}
$$

dónde $e(k)$ es una sequencia discreta de ruido blanco.

Objetivo Estimar los parametro $a_1, a_2, \ldots, n$.

Model AR de orden n

Dado una secuencia discreta observada $y(k),\ k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autoregresivo $y(k+1) = -a_1 y(k) - a_2 y(k-1) - \cdots - a_n y(k-n+1) + e(k+1)$.

1. Forma el predictor de un paso adelante

$$\hat{y}_{k+1} = -a_1 y_k - a_2 y_{k-1} - \ldots - a_n y_{k-n+1} a = \underbrace{\begin{bmatrix} -y_k & -y_{k-1} & \cdots & -y_{k-n+1} \end{bmatrix}}_{\varphi_{k+1}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\theta}$$

y el error de predicción

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - \varphi_k^T \theta$$

Model AR de orden n

Dado una secuencia discreta observada $y(k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autoregresivo $y(k+1) = -a_1 y(k) - a_2 y(k-1) - \cdots - a_n y(k-n+1) + e(k+1)$.

2. Reune todas las observaciónes y_k y predicciones $\hat{y}_k$ en forma vectoral

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{n+1} \\ \epsilon_{n+2} \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}_{n+1} \\ \hat{y}_{n+2} \\ \vdots \\ \hat{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^T \theta \\ \varphi_{n+2}^T \theta \\ \vdots \\ \varphi_N^T \theta \end{bmatrix}$$

$$= y - \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^T \\ \varphi_{n+2}^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix}}_{\Phi} \theta = y - \Phi\theta$$

Model AR de orden n

Dado una secuencia discreta observada $y(k)$, $k = 1, 2, \dots, N$, y el modelo autoregresivo $y(k+1) = -a_1 y(k) - a_2 y(k-1) - \cdots - a_n y(k-n+1) + e(k+1)$.

3. Obtiene el estimado de mínimos cuadrados, que es

$$\theta_{LS} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y$$

formando y resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\Phi\theta = y$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^T \\ \varphi_{n+2}^T \\ \varphi_{n+3}^T \\ \varphi_{n+4}^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ y_{n+3} \\ y_{n+4} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Modelo autoregresivo (AR) - Ejercicio

Dado una secuencia discreta observada $y(k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autoregresivo de segunda orden

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) = e(k+2),$$

dónde $e(k)$ es una sequencia discreta de ruido blanco.

Actividad Forma las ecuaciones

$$\Phi\theta = y$$

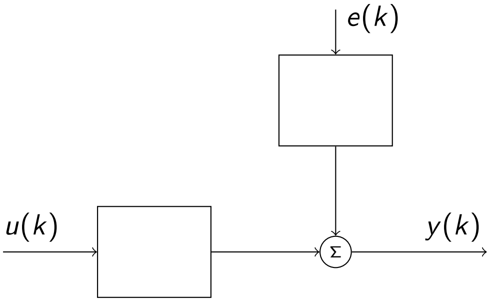
Model AutoRegresivo con variables eXógenas (ARX)

Dado señal discreta de entrada de un sistema $u(k),\ k = 1, 2, \ldots, N$ y observaciones de la respuesta $y(k),\ k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo ARX

$$A(\mathrm{q})y(k) = B(\mathrm{q})u(k) + e(k+n),$$

dónde $e(k)$ es una sequencia discreta de ruido blanco.

Actividad Llena los bloques



Model AutoRegresivo con variables eXógenas (ARX) - solución

Model ARX de orden n

Dado señal discreta de entrada de un sistema $u(k),\ k = 1, 2, \ldots, N$ y observaciones de la respuesta $y(k),\ k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo ARX
$A(\mathrm{q})y(k) = B(\mathrm{q})u(k-d) + \mathrm{q}^n e(k)$ con n polos, m ceros y retraso de d pasos

$$A(z)Y(z) = B(z)z^{-d}U(z) + z^n E(z) \quad \Leftrightarrow \quad A(\mathrm{q})y(k) = B(\mathrm{q})\,\mathrm{q}^{-d}\,u(k) + \mathrm{q}^n\,e(k)$$

Model ARX de orden n

Dado señal discreta de entrada de un sistema $u(k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$ y observaciones de la respuesta $y(k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo ARX
$A(\mathrm{q})y(k) = B(\mathrm{q})u(k-d) + \mathrm{q}^n e(k)$ con n polos, m ceros y retraso de d pasos

$$A(z)Y(z) = B(z)z^{-d}U(z) + z^n E(z) \quad \Leftrightarrow \quad A(\mathrm{q})y(k) = B(\mathrm{q})\,\mathrm{q}^{-d}\,u(k) + \mathrm{q}^n\,e(k)$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{q}^n + a_1\,\mathrm{q}^{n-1} + a_2\,\mathrm{q}^{n-2} + \cdots + a_n)y(k) = (b_0\,\mathrm{q}^{m-d} + b_1\,\mathrm{q}^{m-d-1} + \cdots + b_m\,\mathrm{q}^{-d})u(k) \\ + \mathrm{q}^n\,e(k)\end{aligned}$$

Objetivo Estimar los parametro $a_1, a_2, \ldots, n, b_0, b_1, \ldots, b_m$.

Model ARX de orden n

$$A(z)Y(z) = B(z)z^{-d}U(z) + z^n E(z) \quad \Leftrightarrow \quad A(\mathrm{q})y(k) = B(\mathrm{q})\,\mathrm{q}^{-d}\,u(k) + \mathrm{q}^n\,e(k)$$

$$(\mathrm{q}^n + a_1\,\mathrm{q}^{n-1} + a_2\,\mathrm{q}^{n-2} + \cdots + a_n)y(k) = (b_0\,\mathrm{q}^{m-d} + b_1\,\mathrm{q}^{m-d-1} + \cdots + b_m\,\mathrm{q}^{-d})u(k) + \mathrm{q}^n\,e(k)$$

$$(\mathrm{q} + a_1 + a_2\,\mathrm{q}^{-1} + \cdots + a_n\,\mathrm{q}^{-n+1})y(k) = (b_0\,\mathrm{q}^{m-n+1} + b_1\,\mathrm{q}^{m-n} + \cdots + b_m\,\mathrm{q}^{-n+1})\,\mathrm{q}^{-d}\,u(k) + \mathrm{q}\,e(k)$$

Model ARX de orden n

$$A(z)Y(z) = B(z)z^{-d}U(z) + z^n E(z) \quad \Leftrightarrow \quad A(\mathrm{q})y(k) = B(\mathrm{q})\,\mathrm{q}^{-d}\,u(k) + \mathrm{q}^n\,e(k)$$

$$(\mathrm{q}^n + a_1\,\mathrm{q}^{n-1} + a_2\,\mathrm{q}^{n-2} + \cdots + a_n)y(k) = (b_0\,\mathrm{q}^{m-d} + b_1\,\mathrm{q}^{m-d-1} + \cdots + b_m\,\mathrm{q}^{-d})u(k) + \mathrm{q}^n\,e(k)$$

$$(\mathrm{q} + a_1 + a_2\,\mathrm{q}^{-1} + \cdots + a_n\,\mathrm{q}^{-n+1})y(k) = (b_0\,\mathrm{q}^{m-n+1} + b_1\,\mathrm{q}^{m-n} + \cdots + b_m\,\mathrm{q}^{-n+1})\,\mathrm{q}^{-d}\,u(k) + \mathrm{q}\,e(k)$$

$$y(k+1) = -a_1 y(k) - \cdots - a_n y(k-n+1) + b_0 u(k+m-n-d+1) + \cdots + b_m u(k-n-d+1) + e(k+1)$$

Model ARX de orden n

Dado señal discreta de entrada de un sistema $u(k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$ y observaciones de la respuesta $y(k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, el modelo ARX
$A(\mathrm{q})y(k) = B(\mathrm{q})u(k-d) + \mathrm{q}^n e(k)$ con n polos, m ceros y retraso de d pasos

Predictor

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+1) = -a_1 y(k) - \cdots - a_n y(k-n+1)\\ + b_0 u(k+m-n-d+1) + \cdots + b_m u(k-n-d+1) + e(k+1)\end{aligned}$$

Objetivo Estimar los parametro $a_1, a_2, \ldots, n, b_0, b_1, \ldots, b_m$.

Ejemplo y tarea

Ejercicios

Tarea