Control computarizado - Mínimos cuadrados

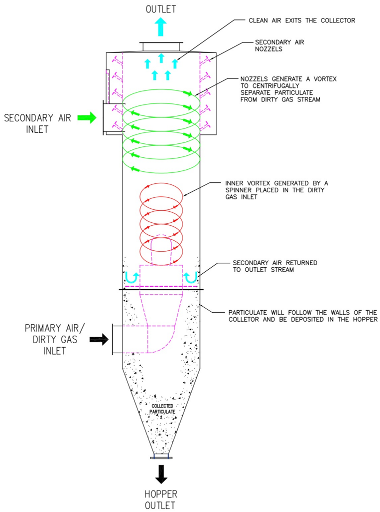
Kjartan Halvorsen

July 17, 2020

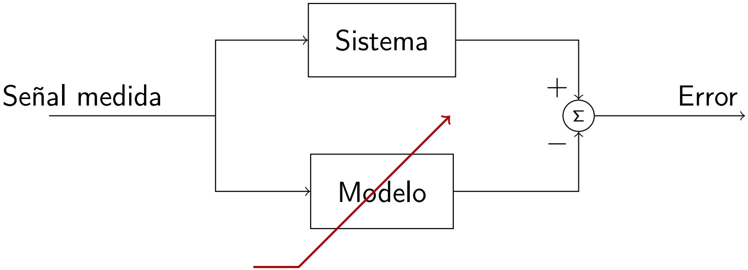
Identificación de sistemas

Un proceso complejo

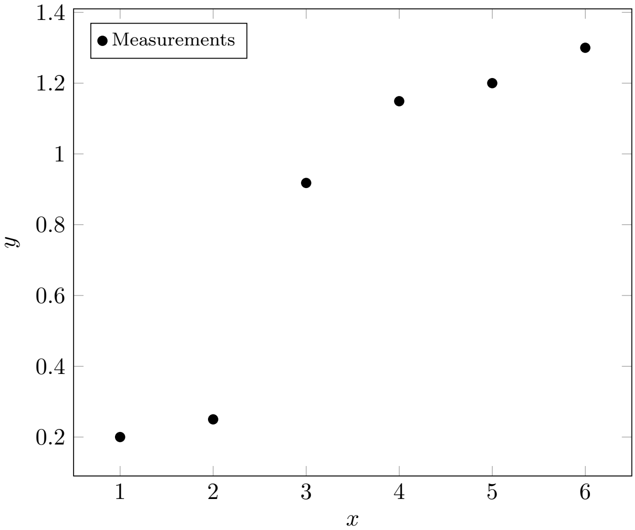
From Wikipedia "Cyclonic separation"



Identificación de sistemas



Ajustando un modelo

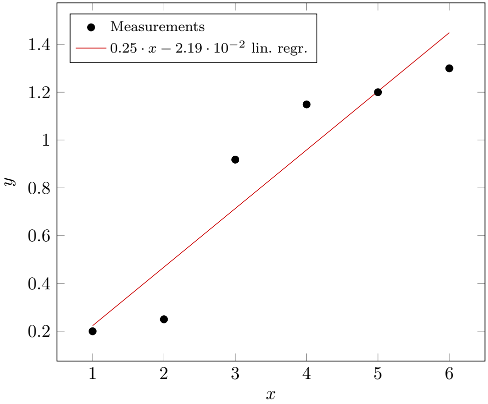


Ajustando un modelo - regresión lineal

Objetivo Dado observaciones

$$\mathcal{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)\}$$

y modelo $\mathcal{M}: \; y = ax + b + e$, obtiene los parametros (a, b) que da el modelo que mejor se ajuste a los datos.
El término de ruido, o error, e, incluye errores de modelación y perturbaciones.



Ajustando un modelo - regresión lineal

Dado observaciones $\mathcal{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)\}$ y modelo $\mathcal{M}: \; y = ax + b + e$.

La predicción es

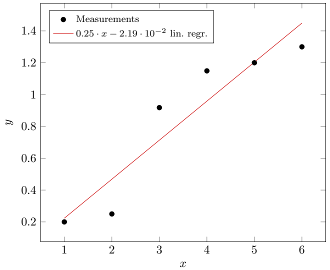
$$\hat{y}_k = ax_k + b = \underbrace{\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}}_{\varphi_k^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\theta}$$

y el error de predicción

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - ax_k - b = y - \varphi_k^T \theta.$$

Buscamos parametros $\theta^T = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ que minimiza la función de pérdida

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^{N} g\left(\epsilon_k\right).$$



Ajustando un modelo - regresión lineal

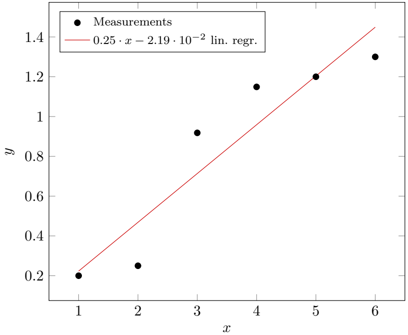
Dado observaciones $\mathcal{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)\}$ y modelo $\mathcal{M}: \; y = ax + b + e$.

La función de pérdida más común es mínimos cuadrados

$$\hat{\theta}_{LS} = \arg\min J_{LS}(\theta) = \arg\min \sum_{k=1}^{N} \epsilon_k^2$$

$$= \arg\min \sum_{k=1}^{N} (y_k - \hat{y}_k)^2 = \arg\min \sum_{k=1}^{N} (y_k - \varphi_k \theta)^2$$

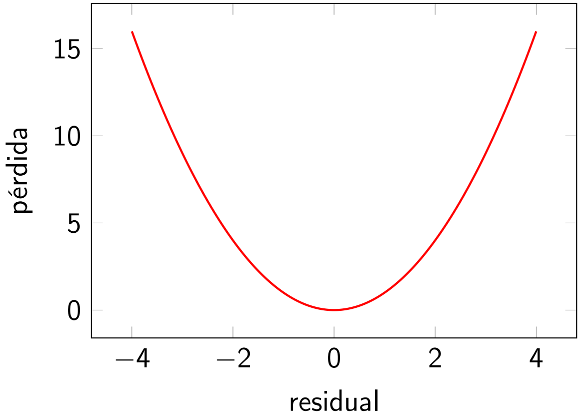
$$= \arg\min \sum_{k=1}^{N} (y_k - a x_k - b)^2$$



El problema con mínimos cuadrados

$$\text{minimiza} \sum_k g(\epsilon_k)$$

dónde $g(u) = u^2$

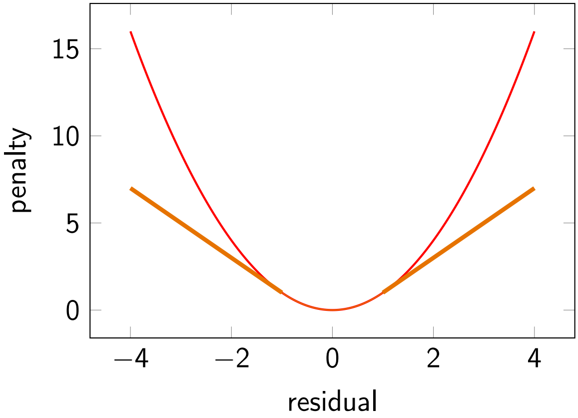


Más robusta: La función de pérdida de Huber

También conocido como regresión robusta

$$\text{minimiza} \sum_k g_{hub}(\epsilon_k)$$

dónde $g_{hub}(u) = \begin{cases} u^2 & |u| \leq M \\ M(2|u| - M) & |u| > M \end{cases}$



Ejemplo - Modelo autorregresivo (AR)

Modelo autorregresivo (AR)

Dado una secuencia discreta observada $y(k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autorregresivo

$$y(k+1) = -ay(k) + e(k+1),$$

dónde $e(k)$ es una sequencia discreto de ruido blanco.

Objetivo Estimar el parametro a.

1. Forma el predictor de un paso adelante

$$\hat{y}_{k+1} = -ay_k = -y_k a = \varphi_{k+1}\theta,$$

y el error de predicción

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - \varphi_k\theta$$

Modelo autorregresivo (AR)

Dado una secuencia discreta observada $y(k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autorregresivo $y(k+1) = -ay(k) + e(k+1)$, dónde $e(k)$ es una sequencia discreto de ruido blanco.

Objetivo Estimar el parametro a.

2. Reune todas las observaciónes y_k y predicciones $\hat{y}_k$ en forma vectoral

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_2 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \vdots \\ \hat{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -y_1 a \\ -y_2 a \\ \vdots \\ -y_{N-1}^T \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi_2^T \theta \\ \varphi_3^T \theta \\ \vdots \\ \varphi_N^T \theta \end{bmatrix}$$

$$= y - \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix}}_{\Phi} \theta = y - \Phi\theta$$

Modelo autorregresivo (AR)

Dado una secuencia discreta observada $y(k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autorregresivo $y(k+1) = -ay(k) + e(k+1)$, dónde $e(k)$ es una sequencia discreto de ruido blanco.

Objetivo Estimar el parametro a.

3. Obtiene el estimado de mínimos cuadrados

$$
\begin{aligned}
\theta_{LS} &= (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T y \\
&= \left(\begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & \cdots & -y_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ \vdots \\ -y_{N-1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & \cdots & -y_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \\
&= -\frac{\sum_{k=1}^{N-1} y_k y_{k+1}}{\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2}
\end{aligned}
$$

Computación de la solución de mínimos cuadrados

Dado error de predicción en forma vectoral para sistema de orden n $\epsilon = y - \Phi\theta$. Forma las ecuaciones normales

$$\Phi\theta = y$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^T \\ \varphi_{n+2}^T \\ \varphi_{n+3}^T \\ \varphi_{n+4}^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ yn+3 \\ y_{n+4} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Resuelva las ecuaciones normales usando métodos numericamente robustos de algebra lineal, por ejemplo factorización L-U. En matlab se escribe

```
theta_LS = Phi \ y
```

Ejemplo numerico

Mybinder

Modelo autorregresivo (AR) - Ejercicio

Dado una secuencia discreta observada $y(k),\ k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autorregresivo de segunda orden

$$y(k+2) = a_1 y(k+1) + a_2 y(k) + e(k+2),$$

dónde $e(k)$ es una sequencia discreto de ruido blanco.

Actividad Forma las ecuaciones normales

$$\Phi\theta = y$$

siguiendo los mismos pasos como en el ejemplo de primer orden.