

Control computarizado - Asignación de polos (RST posicional)

Kjartan Halvorsen

2020-07-14

Objetivo

- ▶ Entender diseño de un controlador por asignación de polos

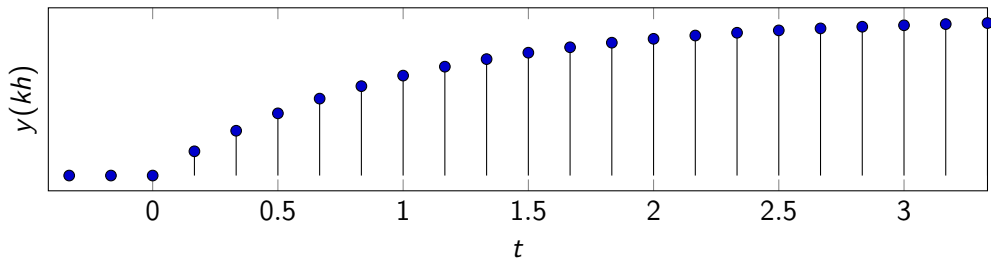
Tiempo de muestreo

Un tiempo de muestreo, h , adecuado depende de la velocidad del proceso a controlar y/o la velocidad deseada del sistema en lazo cerrado

Reglas de oro (Åström & Wittenmark)

1. Para sistemas con respuesta al escalón **sin** sobrepaso: **4 a 10** muestreos en un tiempo de subida.

$$\frac{t_r}{h} \approx 4 \text{ a } 10$$



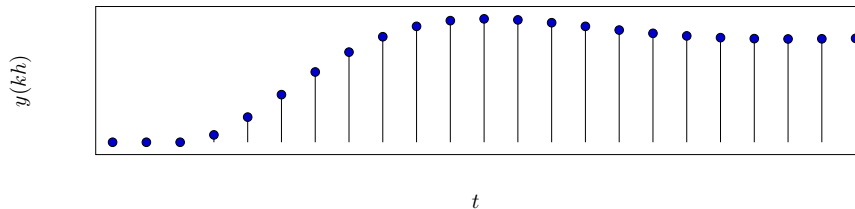
Tiempo de muestreo

Reglas de oro (Åström & Wittenmark)

2. Para sistemas con respuesta tipo segunda orden subamortiguada

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} :$$

$\omega_n h \approx 0.2$ to 0.6 Ejemplo con $h = \frac{0.4}{\omega_n}$:



Tiempo de muestreo

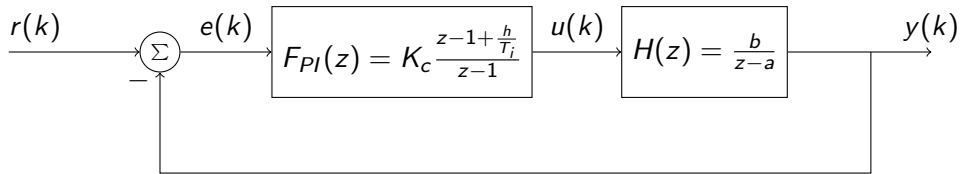
Reglas de oro (Åström & Wittenmark)

3. Si conocemos la frecuencia de cross-over, ω_c , deseada, podemos elegir un tiempo de muestreo basado en un análisis del cambio de fase negativo causado por el muestreo y retención. La regla dice que este cambio negativo sea entre -5 y -15 grados. El efecto de muestreo y retención es aproximadamente un retraso de $h/2$, $e^{-sh/2}$. Resulta la regla

$$\arg e^{-i\omega_c h/2} = -\omega_c h/2 \approx -\frac{5\pi}{180} \text{ a } -\frac{15\pi}{180}$$

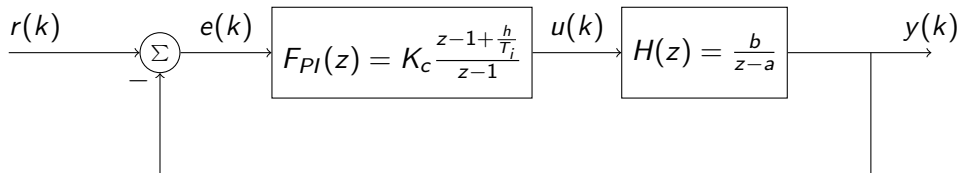
Diseño por asignación de polos

Asignación de polos - Un ejemplo



Queremos un sistema de lazo cerrado críticamente amortiguado con dos polos en $z = \alpha$, $0 < \alpha < 1$

Asignación de polos



Ecuación característica

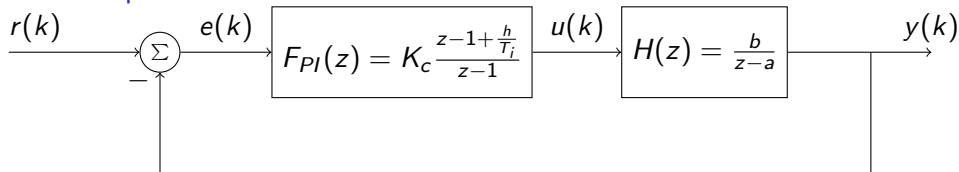
$$1 + H(z)F_{PI}(z) = 0$$
$$(z-1)(z-a) + K_c b(z-1 + h/T_i) = 0$$

Polinomio característico

$$\underbrace{(z-1)(z-a) + K_c b(z-1 + h/T_i)}_{\text{parametrizado}} = \underbrace{(z-\alpha)^2}_{\text{deseado}}$$

¿Cómo podemos determinar los parámetros del controlador, K_c y T_i ?

Asignación de polos - Solución



Polinomio característico

$$\underbrace{z^2 - (1 + a - K_c b)z + K_c b(h/T_i - 1) + a}_{\text{parametrizado}} = \underbrace{z^2 - 2\alpha z + \alpha^2}_{\text{deseado}}$$

Los dos polinomios característicos son iguales solamente si cada uno de los coeficientes correspondientes son iguales. Eso nos da dos ecuaciones en los variables desconocidos:

$$1 + a - K_c b = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad K_c = \frac{1 + a - 2\alpha}{b}$$

$$K_c b(h/T_i - 1) + a = \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_i} = \frac{1}{h} \left(1 + \frac{\alpha^2 - a}{K_c b} \right) = \frac{1}{h} \left(\frac{(\alpha - 1)^2}{1 + a - 2\alpha} \right)$$

Asignación de polos

Ligas

Solución en mybinder

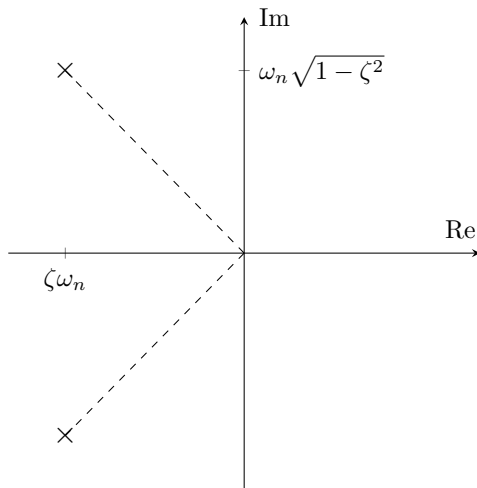
Solución en github

Tres conceptos claves

1. Dónde poner los polos del sistema en lazo cerrado
2. La función de *sensibilidad* y la función de *sensibilidad complementaria*
3. Determinar el orden del controlador

Los polos del sistema en lazo cerrado

Polos complejos en el plano s :



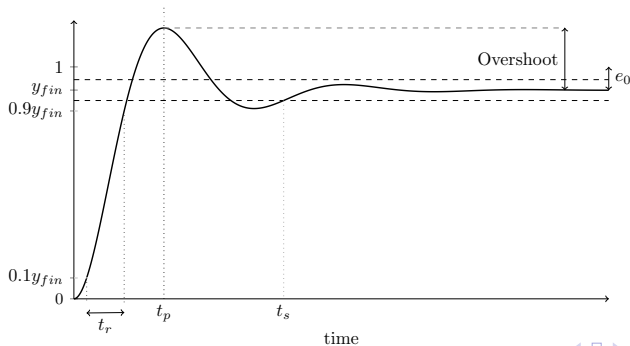
Los polos del sistema en lazo cerrado

Dado especificaciones de la velocidad y amortiguación del sistema en lazo cerrado

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} < 1s \quad \zeta \approx \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}, \quad OS < 10\%$$

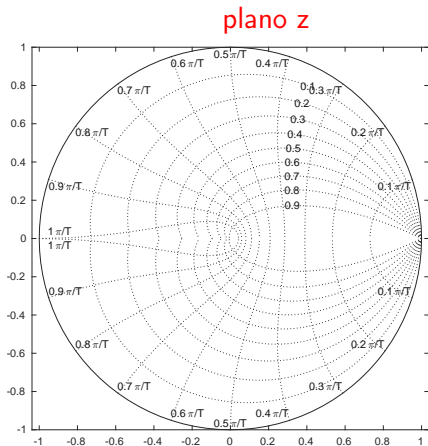
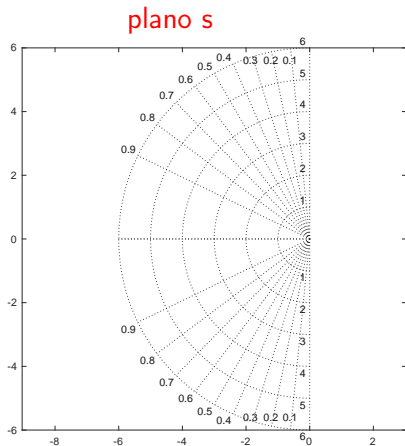
resulta en

$$\zeta > 0.59, \quad \zeta \omega_n > 4$$



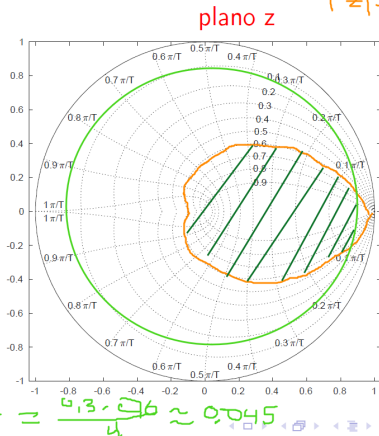
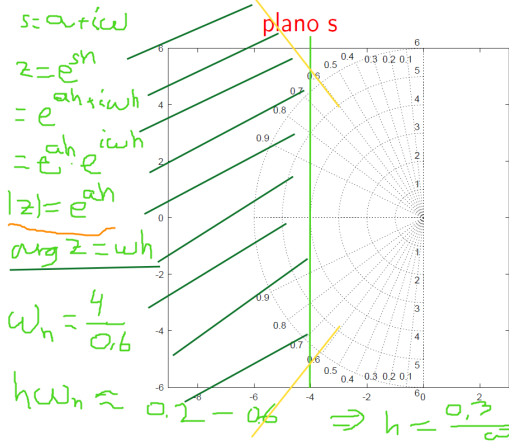
Los polos del sistema en lazo cerrado

Actividad Dado especificaciones $\zeta > 0.59$ y $\zeta\omega_n > 4$, marca las regiones en el plano s y en el plano z que corresponden a las especificaciones.



Los polos del sistema en lazo cerrado

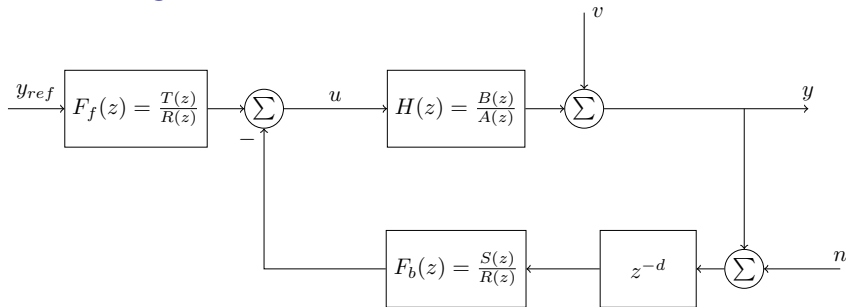
Actividad Dado especificaciones $\zeta \gtrsim 0.59$ y $\zeta \omega_n > 4$, marca las regiones en el plano z que corresponden a las especificaciones.



$|z| = e^{-\zeta \omega_n h} = e^{-4 \cdot 0.3} = e^{-1.2} = 0.3$

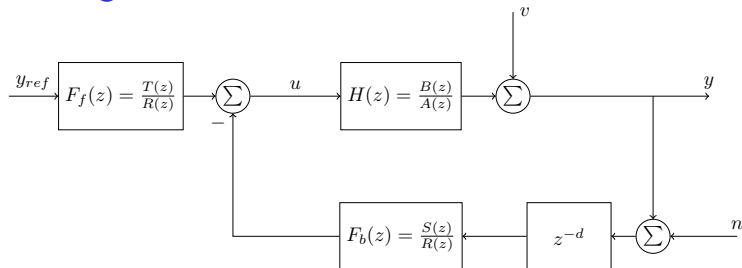
Las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria

Controlador de dos grados de libertad



$$\begin{aligned}
 Y(z) &= G_c(z)U_c(z) + \overbrace{S_s(z)}^{\text{sensib}} V(z) - \overbrace{T_s(z)}^{\text{sens compl}} N(z) \\
 &= \frac{F_f(z)H(z)}{1 + F_b(z)z^{-d}H(z)}U_c(z) + \frac{1}{1 + F_b(z)z^{-d}H(z)}V(z) - \frac{z^{-d}F_b(z)H(z)}{1 + F_b(z)z^{-d}H(z)}N(z)
 \end{aligned}$$

Controlador de dos grados de libertad

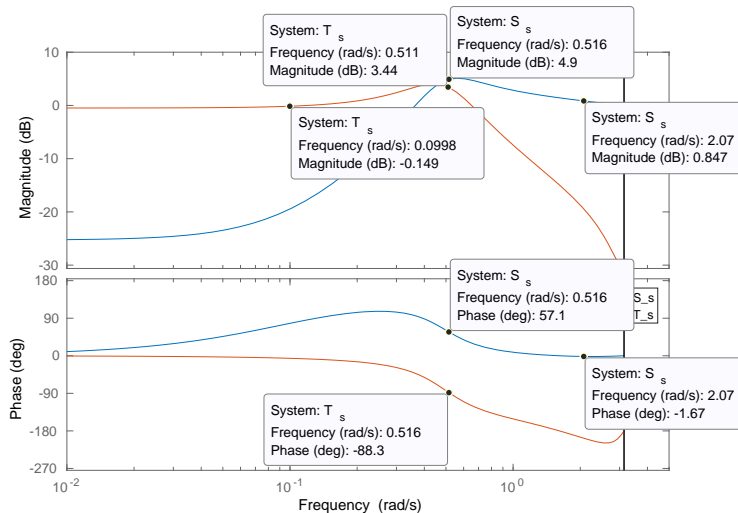


$$Y(z) = \frac{F_f(z)H(z)}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)} U_c(z) + \underbrace{\frac{S_s(z)}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)}}_{S_s(z)} V(z) - \underbrace{\frac{z^{-d}F_b(z)H(z)}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)}}_{T_s(z)} N(z)$$

Evidentemente $S_s(z) + T_s(z) = 1$ **Conclusion:** Hay que encontrar un equilibrio entre rechazo a perturbaciones y rechazo a ruido de medida.

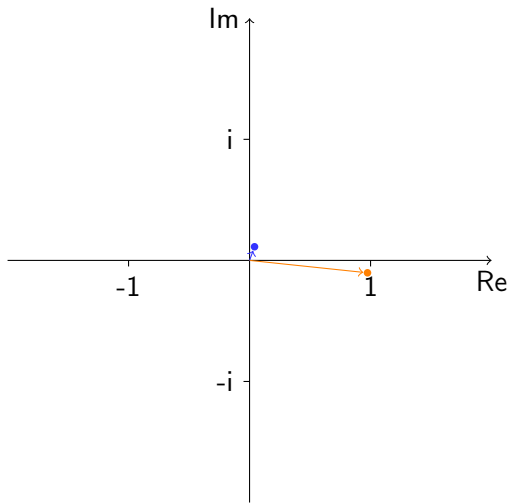
Sensibilidad y sensibilidad complementaria

Actividad Marca en el plano complejo los puntos indicados en el diagrama de Bode para ambos sistemas $S_s(z)$ y $T_s(z)$. Verifica que la suma vectorial de los puntos es 1.



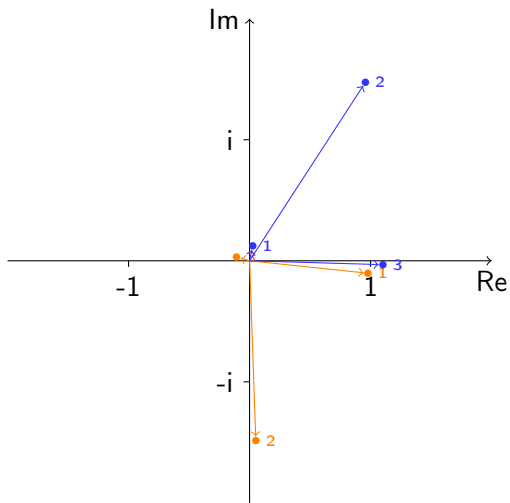
Sensibilidad y sensibilidad complementaria

Punto 1: $\omega = 0.1$, $T_s(0.1) = 10^{-0.149/20} e^{-i6^\circ} = 0.98 e^{-i6^\circ} = 0.97 - i0.1$,
 $S_s(0.1) = 10^{-18/20} e^{i70^\circ} = 0.12 e^{i70^\circ} = 0.04 + i0.11$

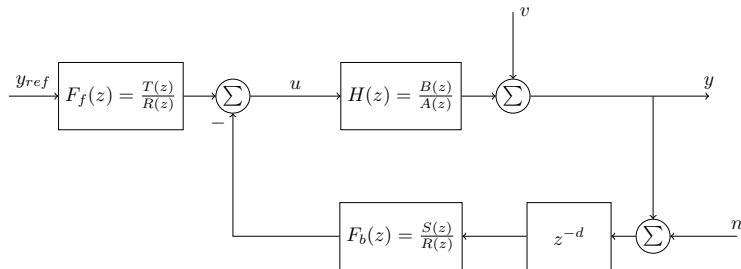


Sensibilidad y sensibilidad complementaria - Solución

Sensibilidad y sensibilidad complementaria - Solución



Controlador de dos grados de libertad

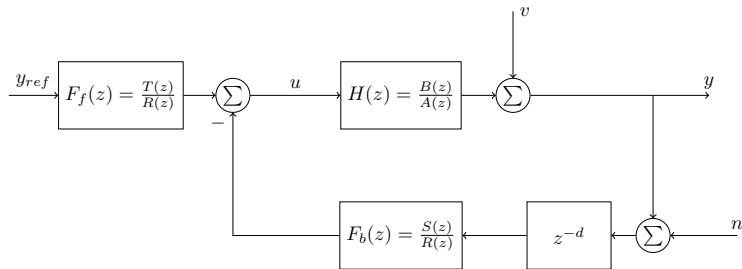


$$Y(z) = \frac{T(z)B(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} N(z)$$

Controlador de dos grados de libertad

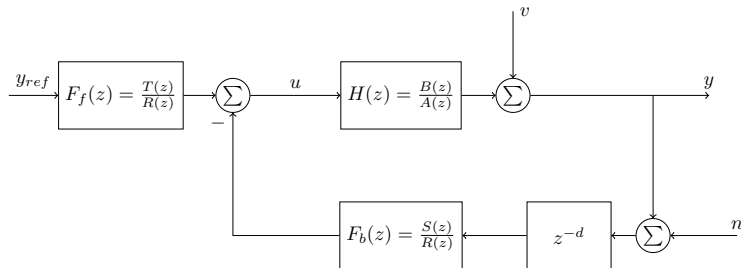
$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{T(z)B(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} V(z) \\ &\quad - \frac{S(z)B(z)}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} N(z) \\ &= \frac{T(z)B(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{A_c(z)A_o(z)} N(z), \quad \text{elige } T(z) = t_0 A_o(z) \\ &= \frac{t_0 B(z)z^d}{A_c(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{A_c(z)A_o(z)} N(z) \end{aligned}$$

Controlador de dos grados de libertad



$$Y(z) = \frac{t_0 B(z) z^d}{A_c(z)} U_c(z) + \frac{A(z) R(z) z^d}{A_c(z) A_o(z)} V(z) - \frac{S(z) B(z)}{A_c(z) A_o(z)} N(z)$$

Controlador de dos grados de libertad



$$Y(z) = \frac{t_0 B(z) z^d}{A_c(z)} U_c(z) + \frac{A(z) R(z) z^d}{A_c(z) A_o(z)} V(z) - \frac{S(z) B(z)}{A_c(z) A_o(z)} N(z)$$

Conclusiones 1) Hay una separación parcial entre seguimiento de la referencia y rechazo a perturbaciones. 2) Se puede usar los polos correspondientes a las raíces de $A_o(z)$ para afinar el rechazo a perturbaciones contra rechazo a ruido de medida.