Control computarizado - Identificación de sistemas

Kjartan Halvorsen

July 20, 2020

Retroalimentación - Tarea 2

- Más variedad en nivel del trabajo esta vez
- Bastante retador
- Gráficas con referencia a fuente

Discretización

Aplicando el método de Tustin

$$z = \mathrm{e}^{sh} = \frac{\mathrm{e}^{sh/2}}{\mathrm{e}^{-sh/2}} \approx \frac{1 + \frac{sh}{2}}{1 - \frac{sh}{2}}$$

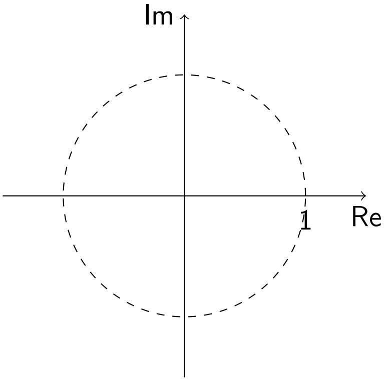
$$s = \frac{2}{h} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

para discretizar el controlador PD ideal

$$F_{PD}(s) = K\big(1 + sT_d\big)$$

da

$$F_{PD}(z) = \frac{z(1 + \frac{2T_d}{h}) - (\frac{2T_d}{h} - 1)}{z+1}$$



Actividad Marca (aproximadamente) el cero y el polo en el plano z

Ganancia del PD ideal

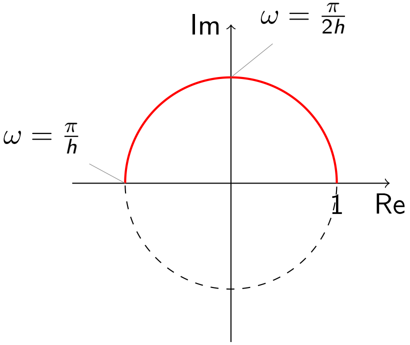
En tiempo discreto el diagrama de Bode de una función de transferencia nos da los valores de esta función evaluada por puntos en el semicirculo arriba del circulo unitario en el plano z. Es decir

$$F_{PD}(\mathrm{e}^{i\omega h}), \quad 0 \leq \omega h \leq \pi$$

Actividad Que pasa con la ganancia del PD discretizado con el método de Tustin

$$|F_{PD}(z)| = \left| \frac{z(1 + \frac{2T_d}{h}) - (\frac{2T_d}{h} - 1)}{z + 1} \right|$$

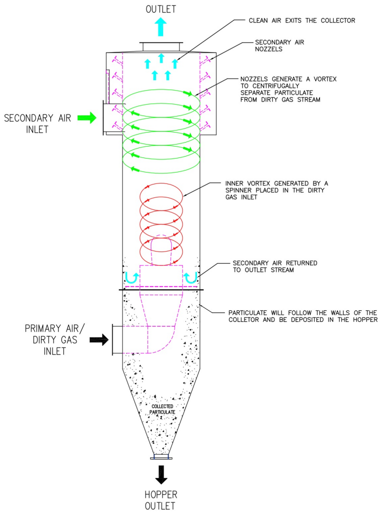
cuando $\omega = \omega_N = \frac{\pi}{h}$?



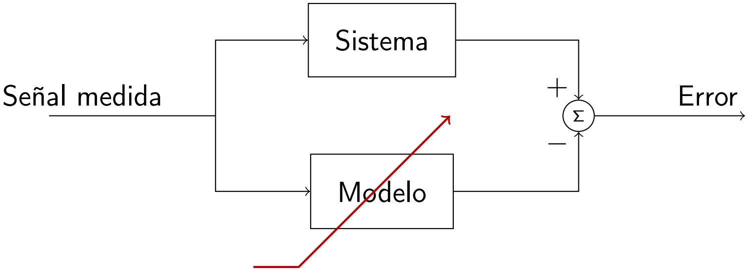
Identificación de sistemas

Un proceso complejo

From Wikipedia "Cyclonic separation"



Identificación de sistemas



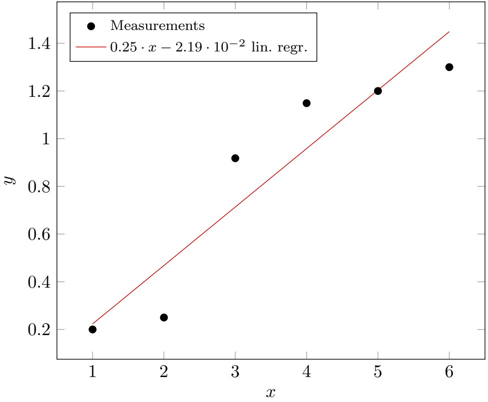
Ajustando un modelo - regresión lineal

Objetivo Dado observaciones

$$\mathcal{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)\}$$

y modelo $\mathcal{M}: \; y = ax + b + e$, obtiene los parametros (a, b) que da el modelo que mejor se ajuste a los datos.

El término de ruido, o error, e, incluye errores de modelación y perturbaciones.



Ajustando un modelo - regresión lineal

Dado observaciones $\mathcal{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)\}$ y modelo $\mathcal{M}: \; y = ax + b + e$.

La predicción es

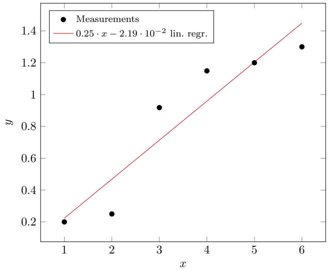
$$\hat{y}_k = ax_k + b = \underbrace{\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}}_{\varphi_k^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\theta}$$

y el error de predicción

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - ax_k - b = y - \varphi_k^T \theta.$$

Buscamos parametros $\theta^T = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ que minimiza la función de pérdida

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^{N} g\left(\epsilon_k\right).$$

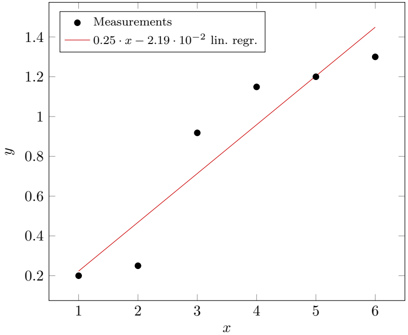


Ajustando un modelo - regresión lineal

Dado observaciones $\mathcal{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)\}$ y modelo $\mathcal{M}:\ y = ax + b + e$.

La función de pérdida más común es mínimos cuadrados

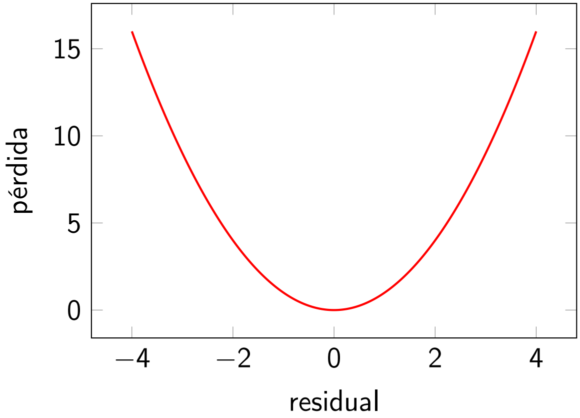
$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_{LS} &= \arg\min J_{LS}(\theta) = \arg\min \sum_{k=1}^{N} \epsilon_k^2 \\
&= \arg\min \sum_{k=1}^{N} (y_k - \hat{y}_k)^2 = \arg\min \sum_{k=1}^{N} (y_k - \varphi_k \theta)^2 \\
&= \arg\min \sum_{k=1}^{N} (y_k - a x_k - b)^2
\end{aligned}
$$



El problema con mínimos cuadrados

$$\text{minimiza} \sum_k g(\epsilon_k)$$

dónde $g(u) = u^2$

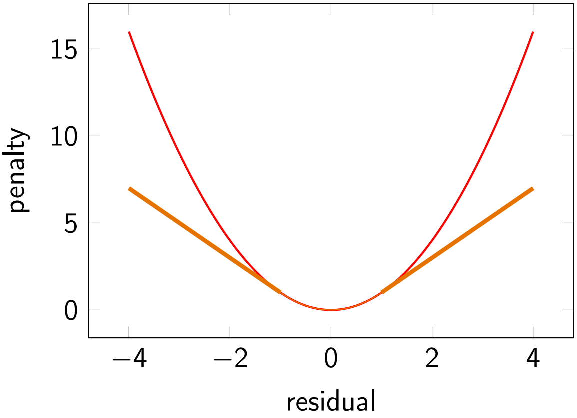


Más robusta: La función de pérdida de Huber

También conocido como regresión robusta

$$\text{minimiza} \sum_k g_{hub}(\epsilon_k)$$

dónde $g_{hub}(u) = \begin{cases} u^2 & |u| \leq M \\ M(2|u| - M) & |u| > M \end{cases}$



Ejemplo - Modelo autoregresivo (AR)

Modelo autoregresivo (AR)

Dado una secuencia discreta observada $y(k), \; k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autoregresivo

$$y(k+1) = -ay(k) + e(k+1),$$

dónde $e(k)$ es una sequencia discreta de ruido blanco.

Objetivo Estimar el parametro a.

1. Forma el predictor de un paso adelante

$$\hat{y}_{k+1} = -ay_k = -y_k a = \varphi_{k+1}\theta,$$

y el error de predicción

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - \varphi_k\theta$$

Modelo autoregresivo (AR)

Dado una secuencia discreta observada $y(k),\ k = 1, 2, \dots, N$, y el modelo autoregresivo $y(k+1) = -ay(k) + e(k+1)$, dónde $e(k)$ es una sequencia discreta de ruido blanco.

Objetivo Estimar el parametro a.

2. Reune todas las observaciónes y_k y predicciones $\hat{y}_k$ en forma vectoral

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_2 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \vdots \\ \hat{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -y_1 a \\ -y_2 a \\ \vdots \\ -y_{N-1}^T \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi_2^T \theta \\ \varphi_3^T \theta \\ \vdots \\ \varphi_N^T \theta \end{bmatrix}$$

$$= y - \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix}}_{\Phi} \theta = y - \Phi\theta$$

Modelo autoregresivo (AR)

Dado una secuencia discreta observada $y(k), \; k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autoregresivo $y(k+1) = -ay(k) + e(k+1)$, dónde $e(k)$ es una sequencia discreta de ruido blanco.

Objetivo Estimar el parametro a.

3. Obtiene el estimado de mínimos cuadrados

$$
\begin{aligned}
\theta_{LS} &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y \\
&= \left(\begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & \cdots & -y_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ \vdots \\ -y_{N-1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & \cdots & -y_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \\
&= -\frac{\sum_{k=1}^{N-1} y_k y_{k+1}}{\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2}
\end{aligned}
$$

Computación de la solución de mínimos cuadrados

Dado error de predicción en forma vectoral para sistema de orden n $\epsilon = y - \Phi\theta$. Forma el sistema de ecuaciones

$$\Phi\theta = y$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^T \\ \varphi_{n+2}^T \\ \varphi_{n+3}^T \\ \varphi_{n+4}^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ yn+3 \\ y_{n+4} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Resuelva las ecuaciones usando métodos numericamente robustos de algebra lineal, por ejemplo factorización L-U. En matlab se escribe

```
theta_LS = Phi \ y
```

Ejemplo numerico

Mybinder

Model AR de orden n

Dado una secuencia discreta observada $y(k),\ k = 1, 2, \dots, N$, y el modelo autoregresivo

$$
\begin{aligned}
A(z)Y(z) = z^n E(z) \quad &\Leftrightarrow \quad A(\mathrm{q})y(k) = \mathrm{q}^{n-1}\, e(k) \\
(\mathrm{q}^n + a_1\, \mathrm{q}^{n-1} + a_2\, \mathrm{q}^{n-2} + \dots + a_n)y(k) &= \mathrm{q}^n\, e(k) \\
(\mathrm{q} + a_1 + a_2\, \mathrm{q} - 1 + \dots + a_n\, \mathrm{q}^{-n+1})y(k) &= \mathrm{q}\, e(k) \\
y(k+1) + a_1 y(k) + a_2 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n+1) &= e(k+1) \\
y(k+1) = -a_1 y(k) - a_2 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n+1) &+ e(k+1)
\end{aligned}
$$

dónde $e(k)$ es una sequencia discreta de ruido blanco.

Objetivo Estimar los parametro $a_1, a_2, \dots, n$.

Model AR de orden n

Dado una secuencia discreta observada $y(k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autoregresivo $y(k+1) = -a_1 y(k) - a_2 y(k-1) - \cdots - a_n y(k-n+1) + e(k+1)$.

1. Forma el predictor de un paso adelante

$$\hat{y}_{k+1} = -a_1 y_k - a_2 y_{k-1} - \ldots - a_n y_{k-n+1} a = \underbrace{\begin{bmatrix} -y_k & -y_{k-1} & \cdots & -y_{k-n+1} \end{bmatrix}}_{\varphi_{k+1}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\theta}$$

y el error de predicción

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - \varphi_k^T \theta$$

Model AR de orden n

Dado una secuencia discreta observada $y(k),\ k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autoregresivo $y(k+1) = -a_1 y(k) - a_2 y(k-1) - \cdots - a_n y(k-n+1) + e(k+1)$.

2. Reune todas las observaciónes y_k y predicciones $\hat{y}_k$ en forma vectoral

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{n+1} \\ \epsilon_{n+2} \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}_{n+1} \\ \hat{y}_{n+2} \\ \vdots \\ \hat{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^T \theta \\ \varphi_{n+2}^T \theta \\ \vdots \\ \varphi_N^T \theta \end{bmatrix}$$

$$= y - \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^T \\ \varphi_{n+2}^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix}}_{\Phi} \theta = y - \Phi\theta$$

Model AR de orden n

Dado una secuencia discreta observada $y(k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autoregresivo $y(k+1) = -a_1 y(k) - a_2 y(k-1) - \cdots - a_n y(k-n+1) + e(k+1)$.

3. Obtiene el estimado de mínimos cuadrados, que es

$$\theta_{LS} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y$$

formando y resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\Phi\theta = y$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^T \\ \varphi_{n+2}^T \\ \varphi_{n+3}^T \\ \varphi_{n+4}^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ y_{n+3} \\ y_{n+4} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Modelo autoregresivo (AR) - Ejercicio

Dado una secuencia discreta observada $y(k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, y el modelo autoregresivo de segunda orden

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) = e(k+2),$$

dónde $e(k)$ es una sequencia discreta de ruido blanco.

Actividad Forma las ecuaciones

$$\Phi\theta = y$$

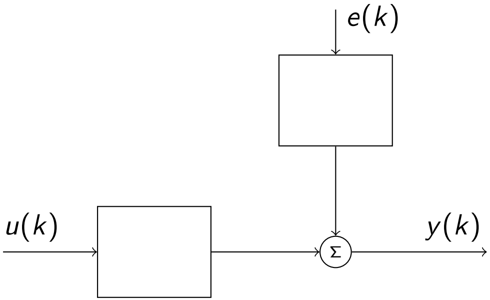
Model AutoRegresivo con variables eXógenas (ARX)

Dado señal discreta de entrada de un sistema $u(k),\ k = 1, 2, \dots, N$ y observaciones de la respuesta $y(k),\ k = 1, 2, \dots, N$, y el modelo ARX

$$A(\mathrm{q})y(k) = B(\mathrm{q})u(k) + e(k+n),$$

dónde $e(k)$ es una sequencia discreta de ruido blanco.

Actividad Llena los bloques



Model AutoRegresivo con variables eXógenas (ARX) - solución

Dado señal discreta de entrada de un sistema $u(k),\ k = 1, 2, \dots, N$ y observaciones de la respuesta $y(k),\ k = 1, 2, \dots, N$, y el modelo ARX

$$A(\mathrm{q})y(k) = B(\mathrm{q})u(k) + e(k+n),$$

dónde $e(k)$ es una sequencia discreta de ruido blanco.

Actividad Llena los bloques