Control computarizado - Asignación de polos (RST posicional)

Kjartan Halvorsen

2020-07-14

Objetivo

- Entender diseño de un controlador por asignación de polos

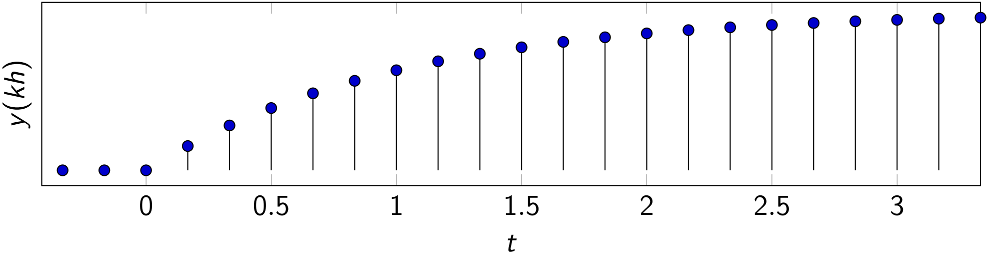
Tiempo de muestreo

Un tiempo de muestreo, h, adecuado depende de la velocidad del proceso a controlar y/o la velocidad deseada del sistema en lazo cerrado

Reglas de oro (Åström & Wittenmark)

1. Para sistemas con respuesta al escalón sin sobrepaso: 4 a 10 muestreos en un tiempo de subida.

$$\frac{t_r}{h} \approx 4 \text{ a } 10$$

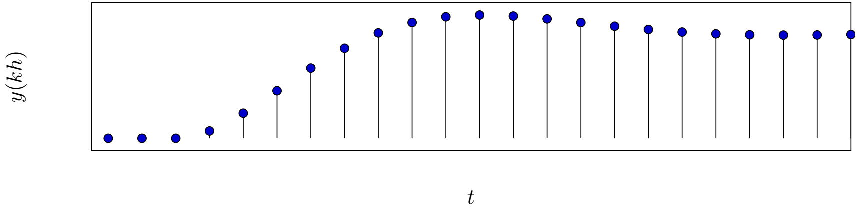


Tiempo de muestreo

Reglas de oro (Åström & Wittenmark)

2. Para sistemas con respuesta tipo segunda orden subamortiguada $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$:

$$\omega_n h \approx 0.2 \text{ to } 0.6 \qquad \text{Ejemplo con } h = \frac{0.4}{\omega_n} :$$



Tiempo de muestreo

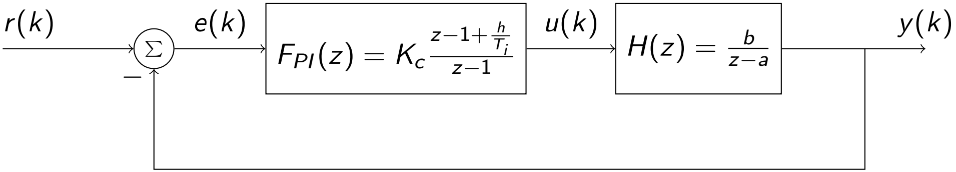
Reglas de oro (Åström & Wittenmark)

3. Si conocemos la frecuencia de cross-over, ω_c, deseada, podemos eligir un tiempo de muestreo basado en un análisis del cambio de fase negativo causado por el muestreo y retención. La regla dice que este cambio negativo sea entre -5 y -15 grados. El efecto de muestreo y retención es approximadamente un retraso de $h/2$, $\mathrm{e}^{-sh/2}$. Resulta la regla

$$\arg \mathrm{e}^{-i\omega_c h/2} = -\omega_c h/2 \approx -\frac{5\pi}{180} \text{ a } -\frac{15\pi}{180}$$

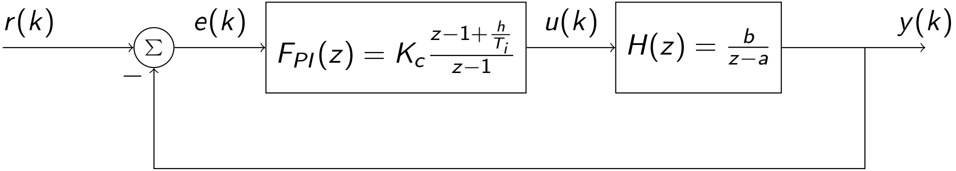
Diseño por asignación de polos

Asignación de polos - Un ejemplo



Queremos un sistema de lazo cerrado criticalmente amortiguado con dos polos en
$z = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$

Asignación de polos



Ecuación característica

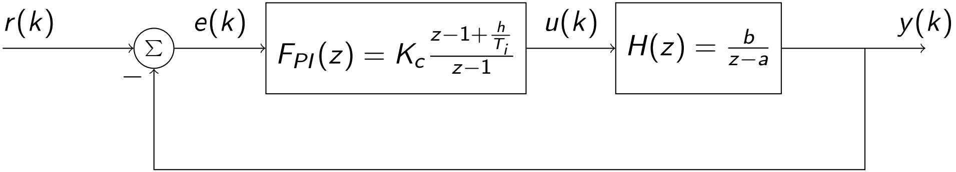
$$
\begin{aligned}
1 + H(z)F_{PI}(z) &= 0 \\
(z-1)(z-a) + K_c b(z - 1 + h/T_i) &= 0
\end{aligned}
$$

Polinomio característico

$$
\underbrace{(z-1)(z-a) + K_c b(z - 1 + h/T_i)}_{\text{parametrizado}} = \underbrace{(z-\alpha)^2}_{\text{deseado}}
$$

¿Cómo podemos determinar los parametros del controlador, K_c y T_i?

Asignación de polos - Solución



Polinomio característico

$$\underbrace{z^2 - (1 + a - K_c b)z + K_c b(h/T_i - 1) + a}_{\text{parametrizado}} = \underbrace{z^2 - 2\alpha z + \alpha^2}_{\text{deseado}}$$

Los dos polinomios caracteristicos son iguales solamente si cada uno de los coefficientes correspondientes son iguales. Eso nos da dos ecuaciones en los variables desconocidos:

$$1 + a - K_c b = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad K_c = \frac{1 + a - 2\alpha}{b}$$

$$K_c b(h/T_i - 1) + a = \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_i} = \frac{1}{h}\left(1 + \frac{\alpha^2 - a}{K_c b}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{(\alpha - 1)^2}{1 + a - 2\alpha}\right)$$

Asignación de polos

Ligas

Solución en mybinder

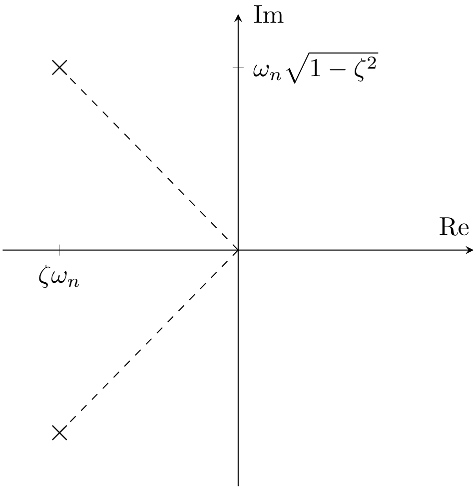
Solución en github

Tres conceptos claves

1. Dónde poner los polos del sistem en lazo cerrado
2. La función de *sensibilidad* y la función de *sensibilidad complementaria*
3. Determinar el orden del controlador

Los polos del sistema en lazo cerrado

Polos complejos en el plano s:



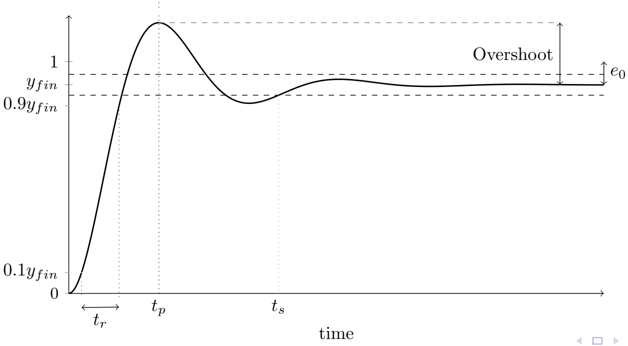
Los polos del sistema en lazo cerrado

Dado especificaciónes de la velocidad y amortiguación del sistema en lazo cerrado

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} < 1s \qquad \zeta \approx \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}, \quad OS < 10\%$$

resulta en

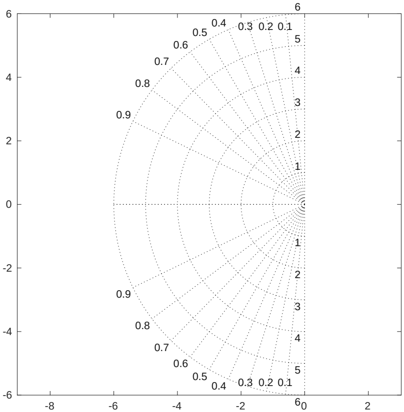
$$\zeta > 0.59, \qquad \zeta\omega_n > 4$$



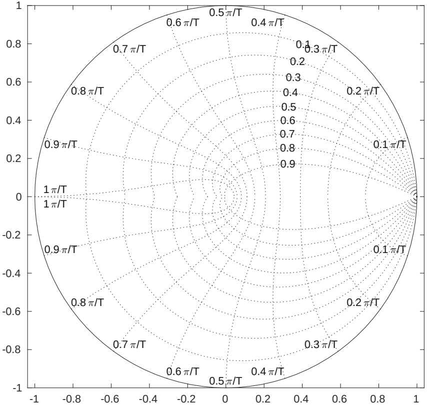
Los polos del sistema en lazo cerrado

Actividad Dado especificaciones $\zeta > 0.59$ y $\zeta\omega_n > 4$, marca las regiones en el plano s y en el plano z que corresponden a las especificaciones.

plano s



plano z



Los polos del sistema en lazo cerrado

Actividad Dado especificaciones $\zeta > 0.59$ y $\zeta\omega_n > 4$, marca las regiones en el
en el plano z que corresponden a las especificaciones.

$s = a + i\omega$

$z = e^{sh}$

$= e^{ah + i\omega h}$

$= e^{ah} \cdot e^{i\omega h}$

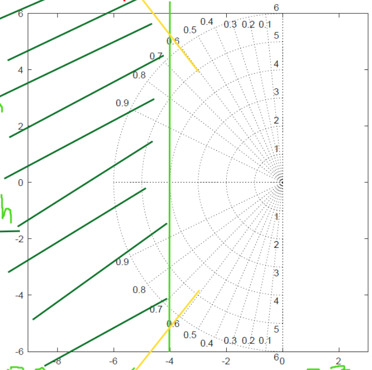
$|z| = e^{ah}$

$\arg z = \omega h$

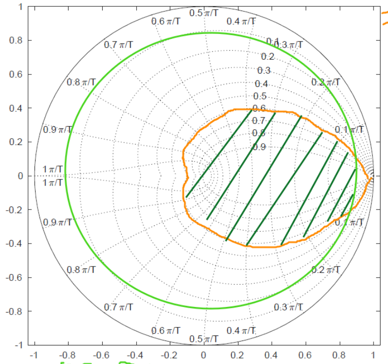
$\omega_n = \frac{4}{0{,}6}$

$h\omega_n \approx 0{,}2 - 0{,}6 \Rightarrow h = \frac{0{,}3}{\omega_n} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6}{4} \approx 0{,}045$

plano s



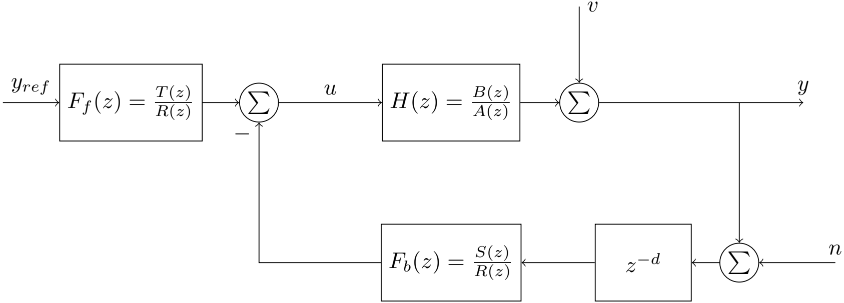
plano z



$|z| = e^{-\zeta\omega_n h} = e^{-4 \cdot 0{,}045} = 0{,}83$

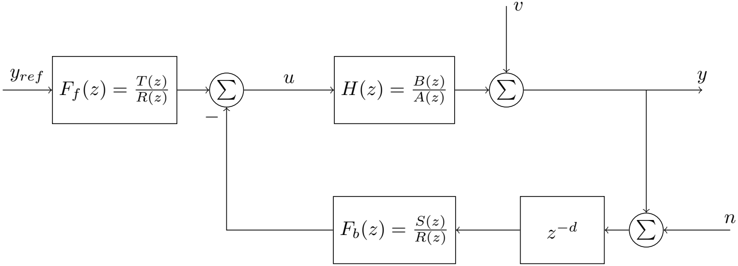
Las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria

Controlador de dos grados de libertad



$$
\begin{aligned}
Y(z) &= G_c(z)U_c(z) + \overbrace{S_s(z)}^{\text{sensib}} V(z) - \overbrace{T_s(z)}^{\text{sens compl}} N(z) \\
&= \frac{F_f(z)H(z)}{1+F_b(z)z^{-d}H(z)}U_c(z) + \frac{1}{1+F_b(z)z^{-d}H(z)}V(z) - \frac{z^{-d}F_b(z)H(z)}{1+F_b(z)z^{-d}H(z)}N(z)
\end{aligned}
$$

Controlador de dos grados de libertad

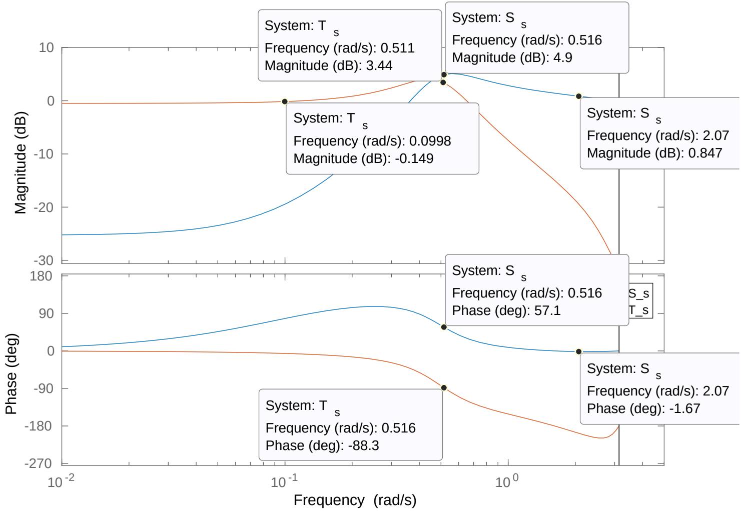


$$Y(z) = \frac{F_f(z)H(z)}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)}U_c(z) + \overbrace{\frac{1}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)}}^{S_s(z)}V(z) - \overbrace{\frac{z^{-d}F_b(z)H(z)}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)}}^{T_s(z)}N(z)$$

Evidentemente $S_s(z) + T_s(z) = 1$ Conclusion: Hay que encontrar un equilibrio entre rechazo a perturbaciones y rechazo a ruido de medida.

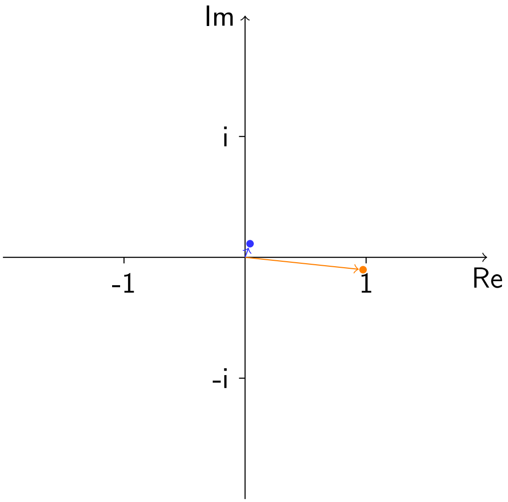
Sensibilidad y sensibilidad complementaria

Actividad Marca en el plano complejo los puntos indicados en el diagrama de Bode para ambos sistemas $S_s(z)$ y $T_s(z)$. Verifica que la suma vectorial de los puntos es 1.



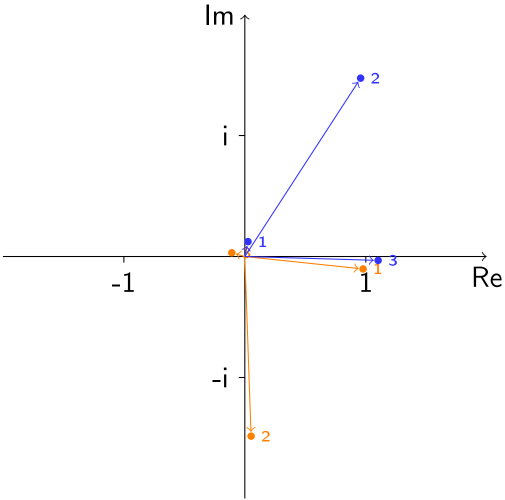
Sensibilidad y sensibilidad complementaria

Punto 1: $\omega = 0.1,\ T_s(0.1) = 10^{-0.149/20}\mathrm{e}^{-i6^o} = 0.98\mathrm{e}^{-i6^o} = 0.97 - i0.1,$
$S_s(0.1) = 10^{-18/20}\mathrm{e}^{i70^o} = 0.12\mathrm{e}^{i70^o} = 0.04 + i0.11$

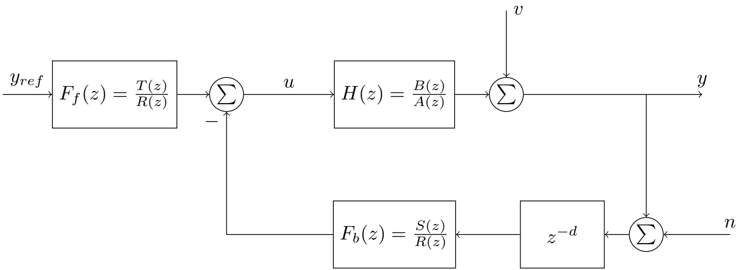


Sensibilidad y sensibilidad complementaria - Solución

Sensibilidad y sensibilidad complementaria - Solución



Controlador de dos grados de libertad

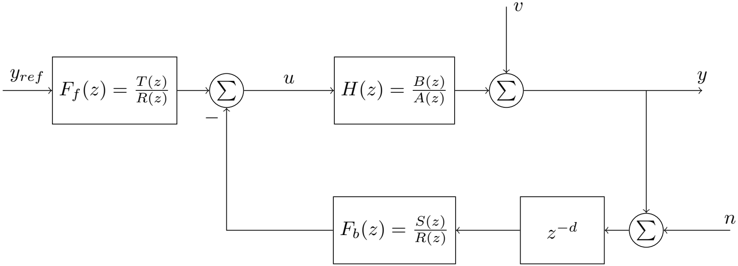


$$Y(z) = \frac{T(z)B(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} N(z)$$

Controlador de dos grados de libertad

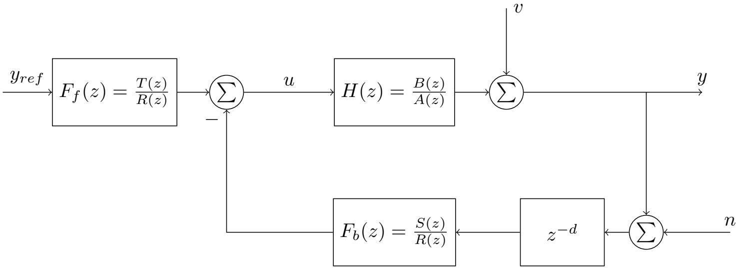
$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{T(z)B(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} V(z) \\
&\quad - \frac{S(z)B(z)}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} N(z) \\
&= \frac{T(z)B(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{A_c(z)A_o(z)} N(z), \quad \text{elige } T(z) = t_0 A_o(z) \\
&= \frac{t_0 B(z)z^d}{A_c(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{A_c(z)A_o(z)} N(z)
\end{aligned}
$$

Controlador de dos grados de libertad



$$Y(z) = \frac{t_0 B(z) z^d}{A_c(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{A_c(z)A_o(z)} N(z)$$

Controlador de dos grados de libertad



$$Y(z) = \frac{t_0 B(z) z^d}{A_c(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{A_c(z)A_o(z)} N(z)$$

Conclusiones 1) Hay una separación parcial entre seguimiento de la referencia y rechazo a perturbaciones. 2) Se puede usar los polos correspondientes a las raíces de $A_o(z)$ para afinar el rechazo a perturbaciones contra rechazo a ruido de medida.