Control Computarizado - Discretización de controladores continuosos

Kjartan Halvorsen

2020-07-08

Retroalimentación Tarea 1

- En general muy buen trabajo de todos
- Unos reportes excelentes
- A mejorar: Incluir referencia a fuente de cada gráfica
- Se quedan unos conceptos erróneos

Retroalimentación Tarea 1 - efecto de alias

La señal original es un sinusoide de 3Hz $u(t) = \cos(6\pi t)$, que tiene la transformada de Fourier

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\delta(\omega + 6\pi) + \frac{1}{2}\delta(\omega - 6\pi).$$

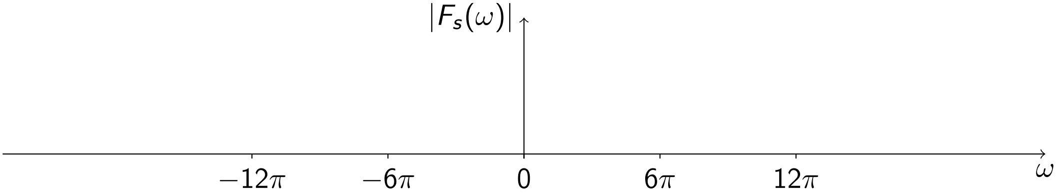
Se muestrea la señal con una frecuencia de muestreo de 8Hz, o $\omega_s = 16\pi \text{ rad/s}$, que da una frecuencia de Nyquist de $\omega_N = \frac{1}{2}\omega_s = 8\pi \text{ rad/s}$. La señal muestreada tiene la transformada de Fourier

$$\begin{aligned}
F_s(\omega) &= \frac{1}{h}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_s) = \frac{1}{h}\left(\cdots + F(\omega - \omega_s) + F(\omega) + F(\omega + \omega_s) + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{2h}\Big(\cdots + \big(\delta(\omega - \omega_s + 6\pi) + \delta(\omega - \omega_s - 6\pi)\big) \\
&\quad + \big(\delta(\omega + 6\pi) + \delta(\omega - 6\pi)\big) \\
&\quad + \big(\delta(\omega + \omega_s + 6\pi) + \delta(\omega + \omega_s - 6\pi)\big) + \cdots \Big)
\end{aligned}$$

Retroalimentación Tarea 1 - efecto de alias

$$
\begin{aligned}
F_s(\omega) = \frac{1}{2h}\Big(& \cdots + \delta(\omega - 16\pi + 6\pi) + \delta(\omega - 16\pi - 6\pi) \\
& + \delta(\omega + 6\pi) + \delta(\omega - 6\pi) \\
& + \delta(\omega + 16\pi + 6\pi) + \delta(\omega + 16\pi - 6\pi) + \cdots \Big)
\end{aligned}
$$

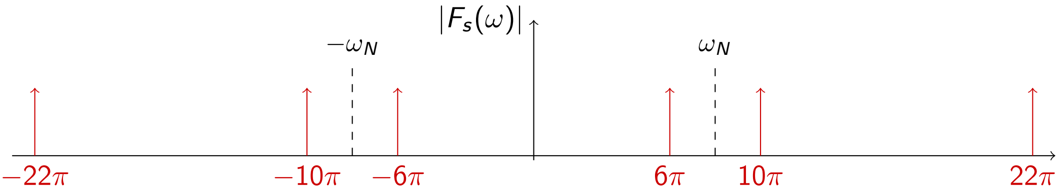
Actividad Dibuja la transformada de Fourier (espectro) de la señal muestreada!



Transformada de Fourier - solución

Transformada de Fourier - solución

$$
\begin{aligned}
F_s(\omega) = \frac{1}{2h}\Big(& \cdots + \delta(\omega - 16\pi + 6\pi) + \delta(\omega - 16\pi - 6\pi) \\
& + \delta(\omega + 6\pi) + \delta(\omega - 6\pi) \\
& + \delta(\omega + 16\pi + 6\pi) + \delta(\omega + 16\pi - 6\pi) + \cdots \Big)
\end{aligned}
$$



Retroalimentación Tarea 1 - Reconstrucción de señales muestreadas

Reconstrucción de Shannon:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \frac{\sin\left(\omega_N(t-kh)\right)}{\omega_N(t-kh)}$$

- Reconstrucción perfecto de la señal original
- No es causal

Retroalimentación Tarea 1 - Reconstrucción de señales muestreadas

Reconstrucción con ROC:

$$f(t) = f(kh), \quad kh \geq t < kh + h$$

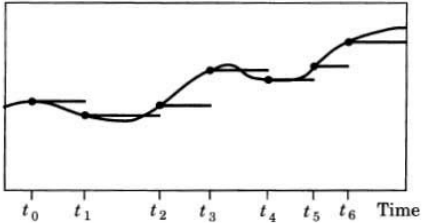
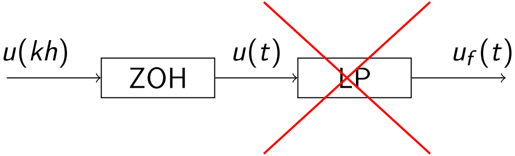


Figure 7.4 Sampling and zero-order-hold reconstruction of a continuous-time signal.

Åström and Wittenmark *Computer-controlled systems*

- es causal
- no es perfecto

Retroalimentación Tarea 1 - Reconstrucción de señales muestreadas



- Normalmente evitamos un filtro pasobajo en la salida del DAC, porque contribuye un cambio de fase negativo en la gananzia del lazo abierto.

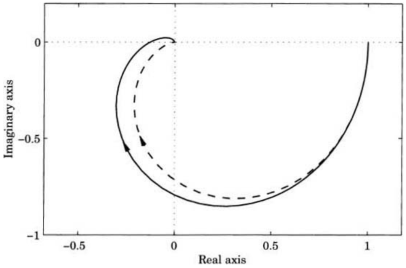


Figure 3.3 The frequency curve of (3.6) (dashed) and for (3.6) sampled with zero-order hold when $h = 0.4$ (solid).

Åström and Wittenmark *Computer-controlled systems*

Discretización de un controlador continuo

Discretización de un controlador continuo

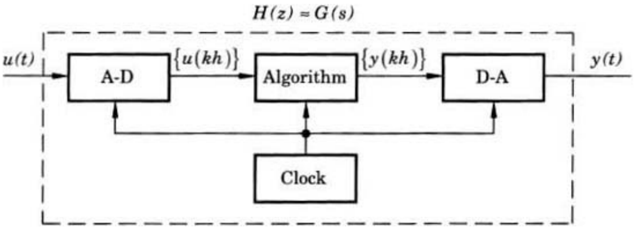


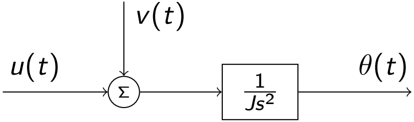
Figure 8.1 Approximating a continuous-time transfer function, $G(s)$, using a computer.

- Dado un controlador obtenido de un diseño en tiempo continuo
- Es necesario discretizarlo para implementar en una computadora

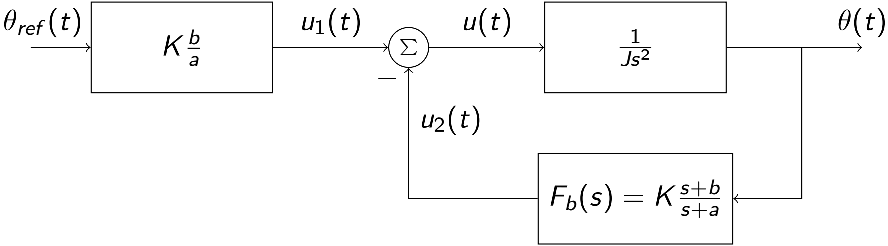
Position control of a diskdrive arm

"Laptop-hard-drive-exposed" by Evan-Amos - Own work. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Commons

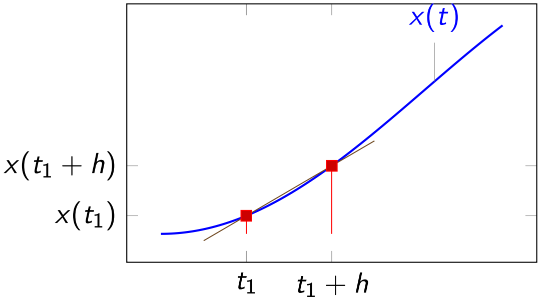
$$J\ddot{\theta}(t) = u(t) + v(t)$$



Discretización de un controlador continuo



Simple discretization



$$\dot{x}(t) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

Euler's method

Approximating the controller, assuming equidistant sampling $t = kh$:

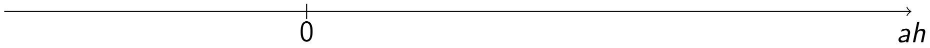
$$au_2 + \dot{u}_2 = Kby + K\dot{y}$$

$$au_2(kh) + \frac{1}{h}\big(u_2(kh+h) - u_2(kh)\big) = Kby(kh) + \frac{K}{h}\big(y(kh+h) - y(kh)\big)$$

Discretización con el método de Euler

$$u_2(kh + h) = (1 - ah)u_2(kh) + Ky(kh + h) - K(1 - bh)y(kh)$$

Actividad Es un sistema de primer orden. ¿Cuál es su polo? Marka en el eje real abajo los valores del producto ah que da un sistema discreto estable.



Discretización con el método de Euler - solución

Discretización con el método de Euler - solución

$$u_2(kh+h) = (1-ah)u_2(kh) + Ky(kh+h) - K(1-bh)y(kh)$$

$$u_2(kh) = K\frac{\mathrm{q}-(1-bh)}{\mathrm{q}-(1-ah)}y(kh)$$

El polo está en $1-ah$, y para estabilidad debe tener un magnitúd menos de 1. Es decir

$$-1 < (1-ah) < 1$$

$$-2 < -ah < 0$$

$$0 < ah < 2$$

Métodos de discretización

Introduciendo el operador diferencial: $\mathrm{p}\, f(t) = \frac{d}{dt} f$

1. Euler (diferencia hacia adelante) $\mathrm{p} \approx \frac{\mathrm{q}-1}{h}$. Substituir
$$s = \frac{z-1}{h}$$
en $F(s)$ para obtener
$$F_d(z) = F(s')\big|_{s'=\frac{z-1}{h}}.$$

2. Euler hacia atras $\mathrm{p} \approx \frac{1-\mathrm{q}^{-1}}{h} = \frac{\mathrm{q}-1}{h\,\mathrm{q}}$. Substituir
$$s = \frac{z-1}{zh}$$
en $F(s)$ para obtener
$$F_d(z) = F(s')\big|_{s'=\frac{z-1}{zh}}.$$

Métodos de discretización

3. El método de Tustin (transformada bilineal). Substituir

$$s = \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1}$$

en $F(s)$ para obtener

$$F_d(z) = F(s')\big|_{s'=\frac{2}{h}\cdot\frac{z-1}{z+1}}.$$

4. Discretización invariante a la rampa. Similar a discretización con ROC. La transformada z de una rampa es $\frac{zh}{(z-1)^2}$ y su transformada de Laplace $1/s^2$. La discretización es dado por

$$F_d(z) = \frac{(z-1)^2}{zh}\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2}\right\}\right\}.$$

Deformación del eje de frecuencias con el método de Tustin

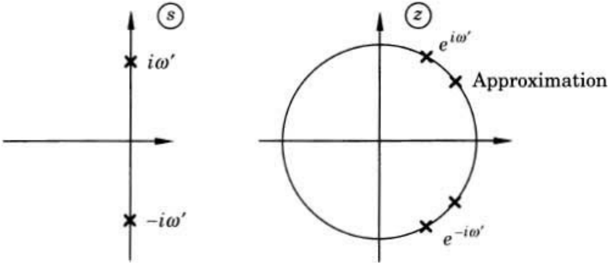


Figure 8.3 Frequency distortion (warping) obtained with approximation.

Åström and Wittenmark *Computer-controlled systems*

El eje imaginario del plano s, infintamente largo, se mapea al circulo unitario del plano z, que es finito.

Mapeo de la región estable del plano *s*

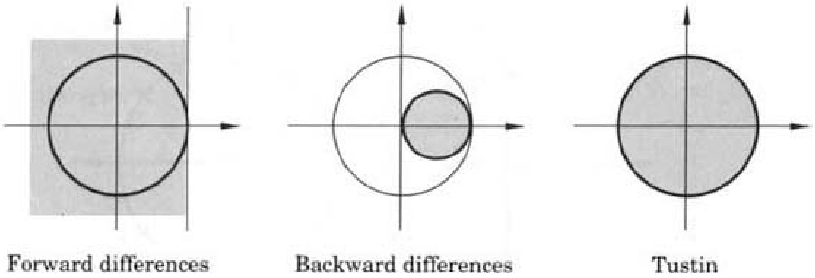


Figure 8.2 Mapping of the stability region in the s-plane on the z-plane for the transformations (8.4), (8.5), and (8.6).

Åström and Wittenmark *Computer-controlled systems*

Ejercicio

En pares Divida entre ustedes los dos ejercicios abajo. Despues de 5 minutos explica su procedimiento y resultado a su compañer@.

Determine la approximación del compensador lead $F(s) = \frac{s+b}{s+a}$, y el polo de la approximación.

1. Euler hacia atras

$$F_d(z) = F(s')\big|_{s'=\frac{z-1}{zh}}.$$

2. Tustin

$$F_d(z) = F(s')\big|_{s'=\frac{2}{h}\cdot\frac{z-1}{z+1}}.$$

Solución

1

$$F_d(z) = \frac{\frac{z-1}{zh} + b}{\frac{z-1}{zh} + a} = \frac{z - 1 + zhb}{z - 1 + zha} = \frac{(1 + bh)z - 1}{(1 + ah)z - 1}$$

Polo en $z = \frac{1}{1+ah} < 1$ para a, h positivos.

2

$$F_d(z) = \frac{\frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1} + b}{\frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1} + a} = \frac{\frac{2}{h}(z-1) + b(z+1)}{\frac{2}{h}(z-1) + a(z+1)}$$

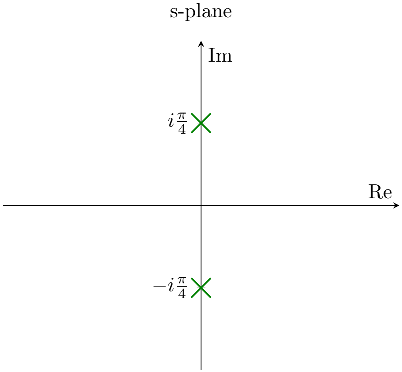
$$= \frac{(\frac{2}{h} + b)z - (\frac{2}{h} - b)}{(\frac{2}{h} + a)z - (\frac{2}{h} - a)}$$

Polo en

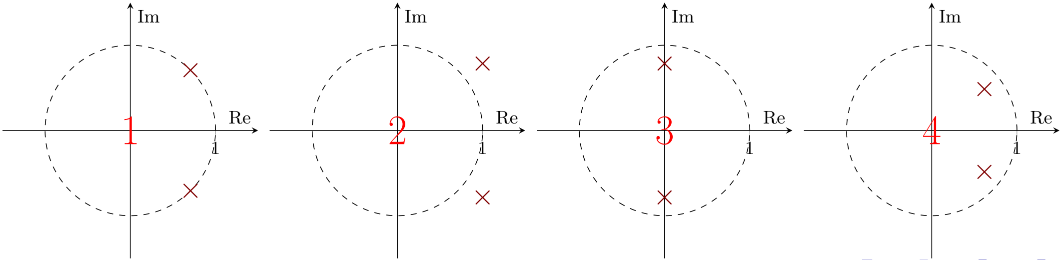
$$z = \frac{\frac{2}{h} - a}{\frac{2}{h} + a} = \frac{2 - ah}{2 + ah}$$

.

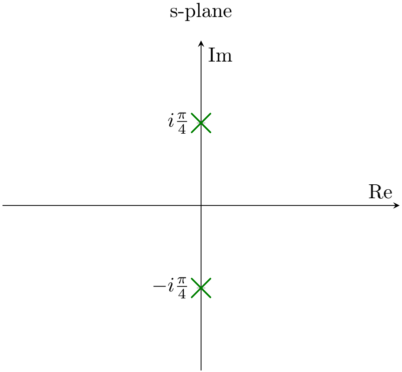
Forward difference exercise



Which of the below figures shows the correct mapping of the continuous-time poles using the **forward difference** $z = 1 + sh$ with $h = 1$?



Backward difference exercise



Which of the below figures shows the correct mapping of the continuous-time poles using the **backward difference** $z = \frac{1}{1-sh}$ with $h = 1$?