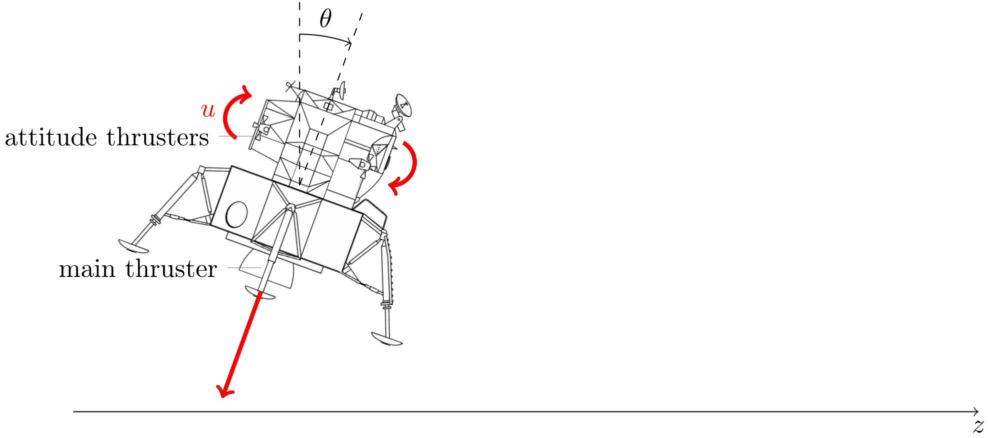
Control computarizado - Retroalimentación de estados

Kjartan Halvorsen

July 26, 2020

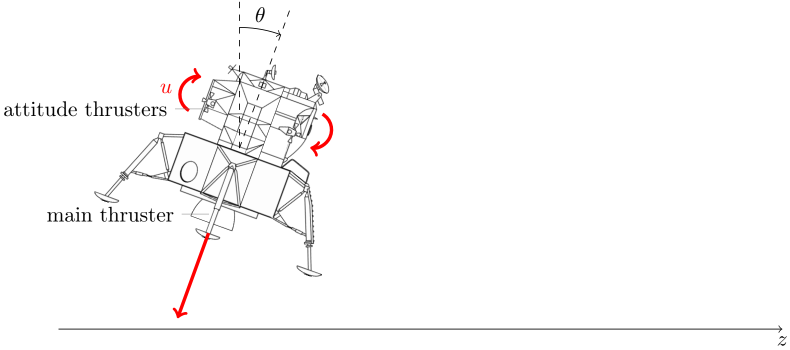
Modelación en espacio de estado

Ejemplo - El módulo lunar de Apollo



$$u(t) \longrightarrow \boxed{\frac{k_1}{s}} \xrightarrow{\dot{\theta}(t)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{\theta(t)} \boxed{k_2} \xrightarrow{\ddot{z}(t)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{\dot{z}(t)}$$

Ejemplo - El módulo lunar de Apollo

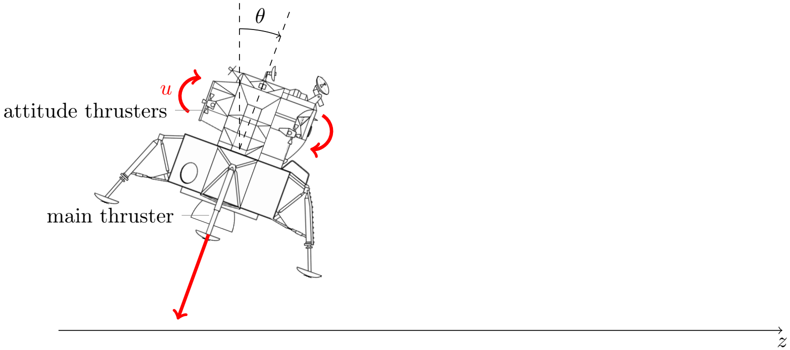


$$\xrightarrow{u(t)} \boxed{\frac{k_1}{s}} \xrightarrow{\dot{\theta}(t)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{\theta(t)} \boxed{k_2} \xrightarrow{\ddot{z}(t)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{\dot{z}(t)}$$

Actividad ¿Cuál es la función de transferencia del sistema?

$$1: \quad G(s) = \frac{k_1 k_2}{s^2} \qquad 2: \quad G(s) = \frac{k_1 k_2}{s(s^2+1)} \qquad 3: \quad G(s) = \frac{k_1 k_2}{s^3}$$

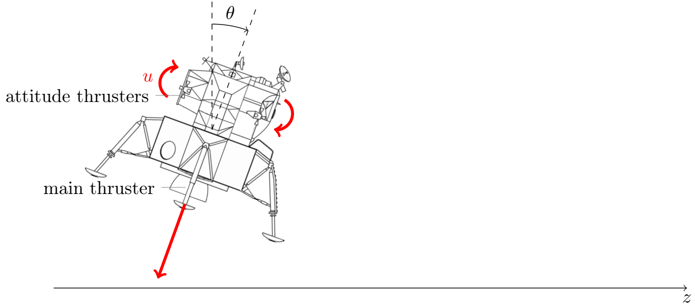
Ejemplo - El módulo lunar de Apollo



$$u(t) \longrightarrow \boxed{\frac{k_1}{s}} \xrightarrow{\dot{\theta}(t)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{\theta(t)} \boxed{k_2} \xrightarrow{\ddot{z}(t)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{\dot{z}(t)}$$

Actividad ¿Que sensores relevantes se puede usar para el control?

Ejemplo - El módulo lunar de Apollo



$$u(t) \longrightarrow \boxed{\frac{k_1}{s}} \xrightarrow{\dot{\theta}(t)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{\theta(t)} \boxed{k_2} \xrightarrow{\ddot{z}(t)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{\dot{z}(t)}$$

Variables del estado: $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \theta & \dot{z} \end{bmatrix}^T$. Con dinamica

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \ddot{\theta} = k_1 u \\ \dot{x}_2 = \dot{\theta} = x_1 \\ \dot{x}_3 = \ddot{z} = k_2\theta = k_2 x_2 \end{cases}$$

Ejemplo - El módulo lunar de Apollo

Variables del estado: $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \theta & \dot{z} \end{bmatrix}^T$. Con dinamica

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \ddot{\theta} = k_1 u \\ \dot{x}_2 = \dot{\theta} = x_1 \\ \dot{x}_3 = \ddot{z} = k_2\theta = k_2 x_2 \end{cases}$$

Actividad Llena las matriz A y vector B en el modelo de espacio de estado

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}}_{B} u$$

Ejemplo - El módulo lunar de Apollo - Solución

Ejemplo - El módulo lunar de Apollo - Solución

Variables del estado: $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \theta & \dot{z} \end{bmatrix}^T$. Con dinamica

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \ddot{\theta} = k_1 u \\ \dot{x}_2 = \dot{\theta} = x_1 \\ \dot{x}_3 = \ddot{z} = k_2\theta = k_2 x_2 \end{cases}$$

Actividad Llena las matriz A y vector B en el modelo de espacio de estado

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u$$

Estabilidad

El sistema

$$x(k+1) = \Phi x(k), \quad x(0) = x_0$$

es estable si $\lim_{t \to \infty} x(kh) = 0, \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Un requisito necessario y suficiente para estabilidad, es que todos los eigenvalores (valores característicos) de Φ están en el interior del círculo unitario.

Eigenvalores y eigenvectores

Definición Eigenvalores λ y eigenvectores v de una matriz Φ son pares $(\lambda, v \neq 0)$ que satisfican

$$\Phi v = \lambda v$$

Eigenvalores y eigenvectores - ejercicio

Actividad Verifica que el vector

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es un eigenvector de

$$\Phi = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Cuál es el eigenvalor correspondiente?

Controlabilidad

Controlabilidad es la respuesta a la pregunta *Podemos llegar a cualquier punto en el espacio de estados con una secuencia* $u(k),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ *bien eligida?*

Considera

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k), \quad x(0) = x_0$$

con solución

$$\begin{aligned} x(n) &= \Phi^n x(0) + \Phi^{n-1}\Gamma u(0) + \cdots + \Gamma u(n-1) \\ &= \Phi^n x(0) + W_c U, \end{aligned} \tag{1}$$

dónde

$$\begin{aligned} W_c &= \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \cdots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix} \\ U &= \begin{bmatrix} u(n-1) & u(n-2) & \cdots & u(0) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

Controlabilidad

Para encontrar la secuencia de entrada $u(k)$ que lleva el estado de $x(0) = x_0$ a $x(n) = x_d$ podemos despejar a U en la ecuación

$$x_d = \Phi^n x_0 + W_c U.$$

$$U = W_c^{-1} (x_d - \Phi^n x(0))$$

Esto require que la matriz W_x es invertible:

El sistem de espacio de estados arriba es controlable si y solo si la *matriz de controlabilidad* W_c tenga rango n.

$$\det W_c \neq 0.$$

State feedback

Have state space model

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{2}$$

and measurements (or estimates) of the state vector $x(k)$.

Linear state feedback is the control law

$$\begin{aligned} u(k) = f\big((x(k), u_c(k)\big) &= -l_1 x_1(k) - l_2 x_2(k) - \cdots - l_n x_n(k) + m u_c(k) \\ &= -Lx(k) + m u_c(k), \end{aligned}$$

where

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_n \end{bmatrix}.$$

Insert the control law into the state space model (3) to get

State feedback

Have state space model

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{3}$$

and measurements (or estimates) of the state vector $x(k)$.

Linear state feedback is the control law

$$u(k) = -l_1 x_1(k) - l_2 x_2(k) - \cdots - l_n x_n(k) + m u_c(k) = -Lx(k) + m u_c(k),$$

where

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_n \end{bmatrix}.$$

Insert the control law into the state space model (3) to get

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (\Phi - \Gamma L)\, x(k) + m\Gamma u_c(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{4}$$

Pole placement by state feedback

Assume the desired performance of the control system is given as a set of desired closed loop poles $p_1, p_2, \ldots, p_n$, corresponding to the desired characteristic polynomial

$$a_c(z) = (z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots \alpha_n. \tag{5}$$

With state feedback we get the the closed-loop system

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (\Phi - \Gamma L)\,x(k) + m\Gamma u_c(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{6}$$

with characteristic equation

$$\det\left(zI - (\Phi - \Gamma L)\right) = z^n + \beta_1(l_1, \ldots, l_n) z^{n-1} + \cdots \beta_n(l_1, \ldots, l_n). \tag{7}$$

Equate the coefficients in (5) and (7) to get the system of equations

$$\begin{aligned} \beta_1(l_1, \ldots, l_n) &= \alpha_1 \\ \beta_2(l_1, \ldots, l_n) &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ \beta_n(l_1, \ldots, l_n) &= \alpha_n \end{aligned}$$

Pole placement by state feedback, contd.

The system of equations

$$\begin{aligned}\beta_1(l_1,\ldots,l_n) &= \alpha_1\\ \beta_2(l_1,\ldots,l_n) &= \alpha_2\\ &\vdots\\ \beta_n(l_1,\ldots,l_n) &= \alpha_n\end{aligned}$$

is always linear in the unknown controller parameters, so it can be written

$$AL^{\mathrm{T}} = \alpha,$$

Where $\alpha^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}$.

Pole placement and reacability

It can be shown that the controllability matrix W_c is a factor of the matrix A

$$A = \bar{A} W_c.$$

Hence, in general the system of equations

$$\bar{A} W_c L^{\mathrm{T}} = \alpha \tag{8}$$

has a solution only if W_c is invertible, i.e. the system is *reachable*.

Note that equation (8) can still have a solution for unreachable systems if α is in the *column space* of A, i.e. α can be written

$$\alpha = b_1 A_{:,1} + b_2 A_{:,2} + \cdots + b_m A_{:,m}, \;\; m < n$$