

Control Computarizado - PID digital

Kjartan Halvorsen

2020-07-09

Discretización de un controlador continuo

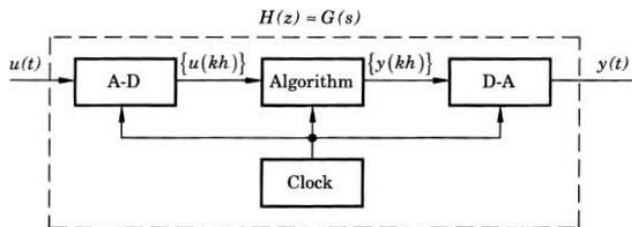


Figure 8.1 Approximating a continuous-time transfer function, $G(s)$, using a computer.

- ▶ Dado un controlador obtenido de un diseño en tiempo continuo
- ▶ Es necesario discretizarlo para implementarlo en una computadora

Métodos de discretización

Introduciendo el operador diferencial: $p f(t) = \frac{d}{dt} f$

1. Euler (diferencia hacia adelante) $p \approx \frac{q-1}{h}$. Substituir

$$s = \frac{z-1}{h}$$

en $F(s)$ para obtener

$$F_d(z) = F(s')|_{s'=\frac{z-1}{h}}.$$

2. Euler hacia atras $p \approx \frac{1-q^{-1}}{h} = \frac{q-1}{hq}$. Substituir

$$s = \frac{z-1}{zh}$$

en $F(s)$ para obtener

$$F_d(z) = F(s')|_{s'=\frac{z-1}{zh}}.$$

Métodos de discretización

3. El método de Tustin (transformada bilineal). Substituir

$$s = \frac{2}{h} \frac{z - 1}{z + 1}$$

en $F(s)$ para obtener

$$F_d(z) = F(s')|_{s' = \frac{2}{h} \cdot \frac{z-1}{z+1}}.$$

4. Discretización invariante a la rampa. Similar a discretización con ROC. La transformada z de una rampa es $\frac{zh}{(z-1)^2}$ y su transformada de Laplace $1/s^2$. La discretización es dado por

$$F_d(z) = \frac{(z-1)^2}{zh} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s^2} \right\} \right\}.$$

Mapeo de la región estable del plano s

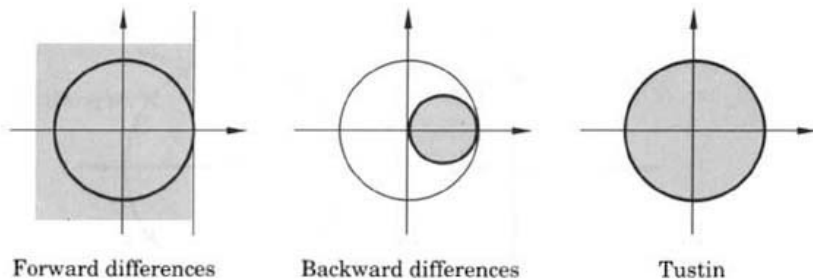
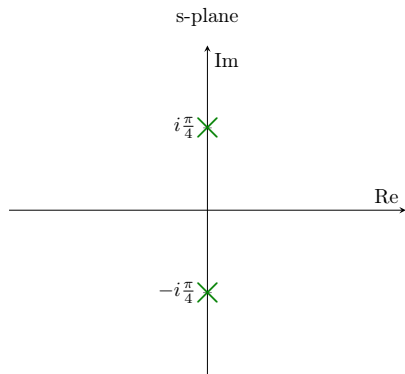


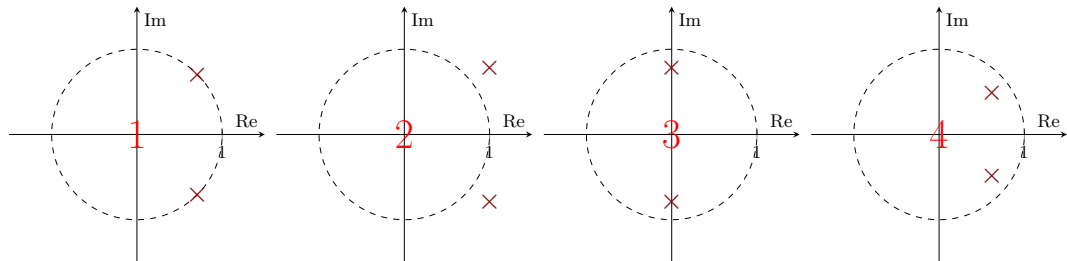
Figure 8.2 Mapping of the stability region in the s -plane on the z -plane for the transformations (8.4), (8.5), and (8.6).

Åström and Wittenmark *Computer-controlled systems*

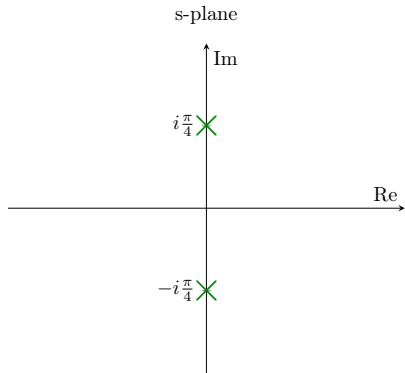
Forward difference exercise



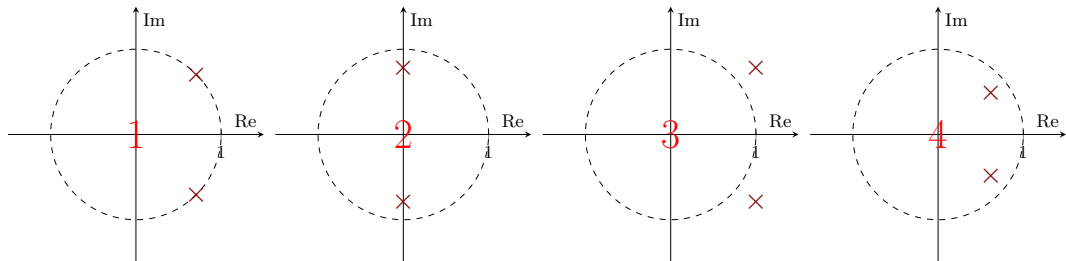
Which of the below figures shows the correct mapping of the continuous-time poles using the **forward difference** $z = 1 + sh$ with $h = 1$?



Backward difference exercise



Which of the below figures shows the correct mapping of the continuous-time poles using the **backward difference** $z = \frac{1}{1-sh}$ with $h = 1$?



PID tipo ISA

ISA - International Society of Automation

$$F(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

Con filtro pasabajo para el parte derivativo

$$F(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right), \quad N \approx 3 - 10$$

PID tipo ISA - parte derivativo

$$F(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right), \quad N \approx 3 - 10$$

Actividad en pares Dibuja el diagrama de Bode (solo la magnitud) del parte derivativo

$$F_d(s) = \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1}$$

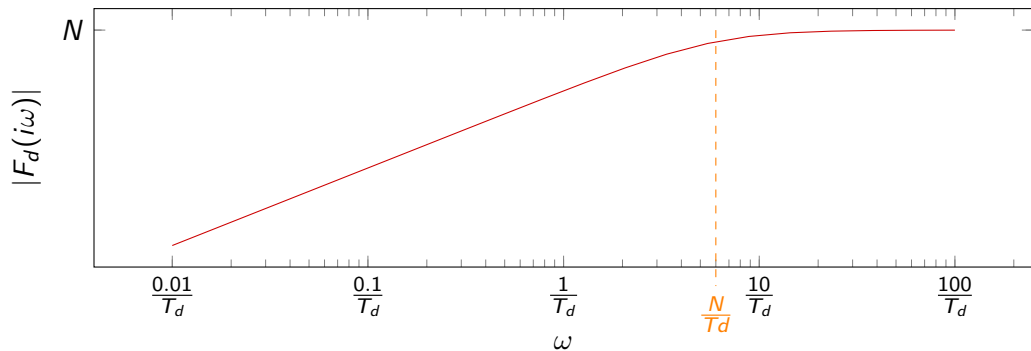
usando las aproximaciones de baja y alta frecuencia

$$\omega \text{ small: } F_d(i\omega) \approx T_d i\omega$$

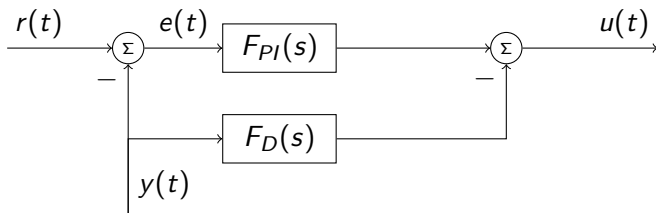
$$\omega \text{ large: } F_d(i\omega) \approx \frac{T_d i\omega}{\frac{T_d}{N} i\omega} = N$$

PID tipo ISA - parte derivativo, solución

$$F(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right), \quad N \approx 3 - 10$$

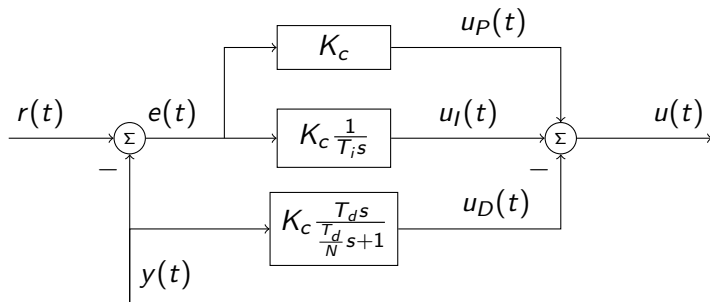


PID con acción derivada sobre la variable de proceso



$$U(s) = \underbrace{K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)}_{F_{PI}(s)} E(s) - \underbrace{\frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1}}_{F_D} Y(s)$$

Discretización común del PID



$$U(s) = U_P(s) + U_I(s) - U_D(s) = K_c E(s) + K_c \frac{1}{T_i s} E(s) - \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} Y(s)$$

Actividad 1) Usa *Euler hacia adelante* para discretizar el parte integral y *Euler hacia atrás* para discretizar el parte derivado. 2) Aplica la transformada z inversa para llegar a una ecuación de diferencias para el controlador.

Discretización común del PID - Solución

El parte proporcional

Facilísimo: $u_P(kh) = K_c e(kh)$

El parte integral

Substituye $s = \frac{z-1}{h}$ en la funcion de transferencia $F_I(s) = K_c \frac{1}{T_i s}$

$$F_{I,d}(z) = K_c \frac{1}{T_i \frac{z-1}{h}} = K_c \frac{\frac{h}{T_i}}{z-1}$$

$$U_I(z) = K_c \frac{\frac{h}{T_i}}{z-1} E(z),$$

$$U_I(z)(z-1) = K_c \frac{h}{T_i} E(z), \quad \text{Aplica transformada z inversa}$$

$$u_I(kh+h) - u_I(kh) = K_c \frac{h}{T_i} e(kh) \quad \Leftrightarrow \quad u_I(kh+h) = u_I(kh) + K_c \frac{h}{T_i} e(kh)$$

Discretización común del PID - Solución

El parte derivativo

Substituye $s = \frac{z-1}{zh}$ en la función de transferencia $F_D(s) = K_c \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1}$

$$F_{D,d}(z) = K_c \frac{T_d \frac{z-1}{zh}}{\frac{T_d}{N} \cdot \frac{z-1}{zh} + 1} = K_c \frac{T_d(z-1)}{\frac{T_d}{N}(z-1) + zh} = K_c \frac{T_d(z-1)}{(\frac{T_d}{N} + h)z - \frac{T_d}{N}}$$

$$U_D(z) = K_c \frac{T_d(z-1)}{(\frac{T_d}{N} + h)z - \frac{T_d}{N}} Y(z)$$

$$\left(\left(\frac{T_d}{N} + h \right) z - \frac{T_d}{N} \right) U_D(z) = K_c T_d (z-1) Y(z), \quad \text{aplica transformada z inversa}$$

$$\left(\frac{T_d}{N} + h \right) u_D(kh + h) - \frac{T_d}{N} u_D(kh) = K_c T_d (y(kh + h) - y(kh))$$

El algoritmo del PID discreto completo

Dado: $y(kh - h)$, $u_I(kh - h)$, $u_D(kh - h)$

Toma de muestreos: $r(kh)$, $y(kh)$

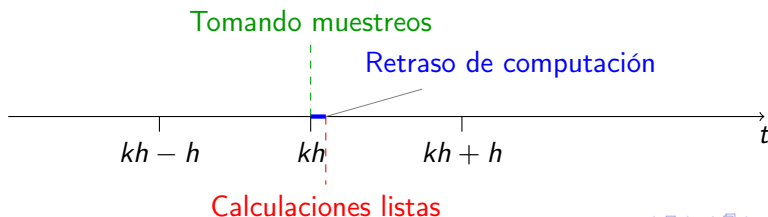
$$e(kh) = r(kh) - y(kh)$$

$$u_P(kh) = K_c e(kh)$$

$$u_D(kh) = \frac{\frac{T_d}{N}}{\frac{T_d}{N} + h} u_D(kh - h) + K_c \frac{T_d}{\frac{T_d}{N} + h} (y(kh) - y(kh - h))$$

$$u(kh) = u_P(kh) + u_I(kh - h) + u_D(kh), \quad \text{Send to DAC}$$

$$u_I(kh) = u_I(kh - h) + K_c \frac{h}{T_i} e(kh)$$



Sintonización de un PID

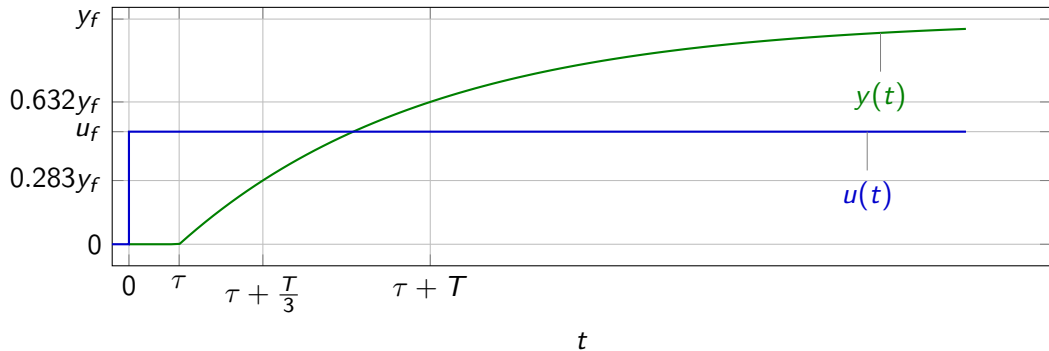
El idea En forma experimental obtener unos pocos valores que capturan la dinámica del proceso. Usar una tabla predefinida para obtener las ganancias del PID dado estos valores.

Hay varios métodos. Ver el libro de texto y referencias incluidas.

Sintonización de un PID - método de Smith & Corripio

Asumiendo modelo de proceso de primer orden con constante de tiempo T y retraso τ

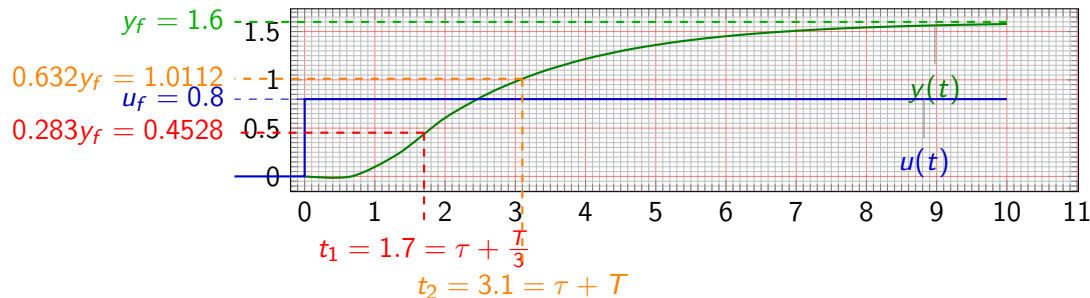
$$Y(s) = \frac{K_c e^{-s\tau}}{sT + 1} U(s) \quad \xrightarrow{U(s) = \frac{u_f}{s}} \quad y(t) = u_f K_c \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}\right) u_s(t - \tau)$$



$$y_f = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = u_f K \quad \Rightarrow \quad K = \frac{y_f}{u_f}.$$

Método de Smith & Corripio - ejemplo

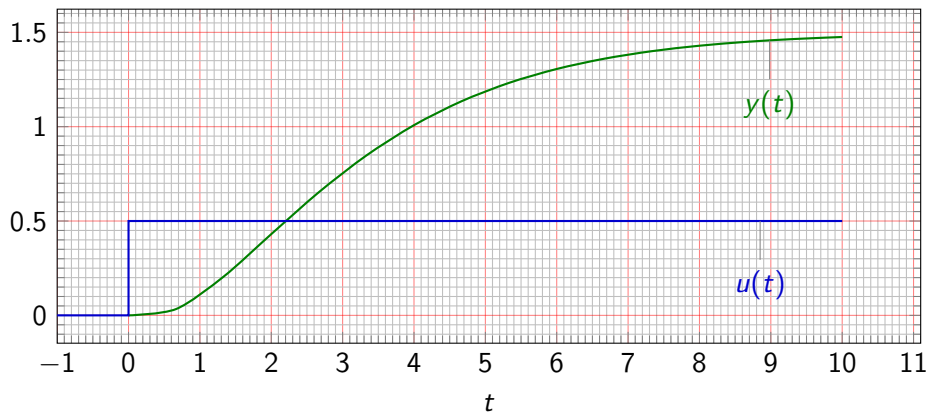
$$Y(s) = \frac{K e^{-s\tau}}{sT + 1} U(s) \quad U(s) = \frac{u_f}{s} \quad \xrightarrow{s} \quad y(t) = u_f K (1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}) u_s(t - \tau)$$



$$\begin{cases} 1.7 = \tau + \frac{T}{3} \\ 3.1 = \tau + T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau = 1 \\ T = 2.1 \end{cases}, \quad K = \frac{y_f}{u_f} = \frac{1.6}{0.8} = 2$$

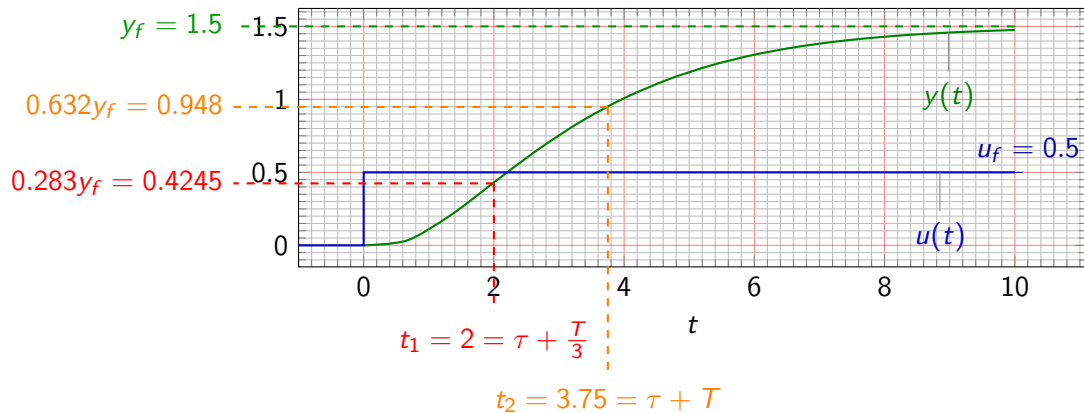
Método de Smith & Corripio - ejercicio

Actividad En grupos de dos: Comparte pantalla con esta diapositiva. Marca y_f , $0.632y_f$, $0.283y_f$, u_f , t_1 y t_2 . Determina los parametros del modelo de primer orden con retraso.



Método de Smith & Corripio - solución

Método de Smith & Corripio - solución



$$\begin{cases} 2 = \tau + \frac{T}{3} \\ 3.75 = \tau + T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau = 1.125 \\ T = 2.625 \end{cases}, \quad K = \frac{y_f}{u_f} = \frac{1.5}{0.5} = 3$$

Método de Smith & Corripio - Tabla de Ziegler-Nichols

Dado modelo

$$G(s) = K \frac{e^{-s\tau}}{sT + 1}$$

Eliga sus parametros PID según la tabla de Ziegler-Nichols (1943)

Controlador	K_c	T_i	T_d
P	$\frac{T}{\tau K}$		
PI	$\frac{0.9T}{\tau K}$	$\frac{\tau}{0.3}$	
PID	$\frac{1.2T}{\tau K}$	2τ	$\frac{\tau}{2}$

Funciona bien cuando

$$0.1 < \frac{\tau}{T} < 0.6.$$

Tabla de Ziegler-Nichols - ejemplo

$$G(s) = K \frac{e^{-s\tau}}{sT + 1} = 2 \frac{e^{-s}}{s2.1 + 1}$$

Controlador	K_c	T_i	T_d
P	$\frac{T}{\tau K} = \frac{2.1}{1 \cdot 2} = 1.05$		
PI	$\frac{0.9T}{\tau K} = \frac{0.9 \cdot 2.1}{2} = 0.945$	$\frac{\tau}{0.3} = \frac{1}{3}$	
PID	$\frac{1.2T}{\tau K} = 1.26$	$2\tau = 2$	$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}$

Regla de control (PID completo, $N = 10$):

$$U(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) E(s) - \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} Y(s) = 1.26 \left(1 + \frac{1}{2s} \right) E(s) - \frac{0.5s}{\frac{0.5}{10}s + 1} Y(s)$$

Tabla de Ziegler-Nichols - ejercicio

Determina los parametros del PID para el modelo del ejercicio anterior $\tau = 1.125$, $T = 2.625$.

$$G(s) = K \frac{e^{-s\tau}}{sT + 1} =$$

Controlador	K_c	T_i	T_d
P	$\frac{T}{\tau K} =$		
PI	$\frac{0.9T}{\tau K} =$	$\frac{\tau}{0.3} =$	
PID	$\frac{1.2T}{\tau K} =$	2τ	$\frac{\tau}{2} =$

Regla de control (PID completo, $N = ?$):

$$U(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) E(s) - \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} Y(s) =$$