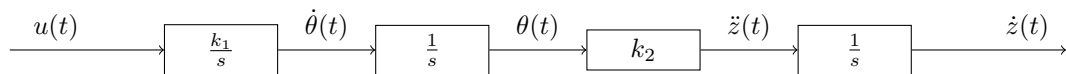
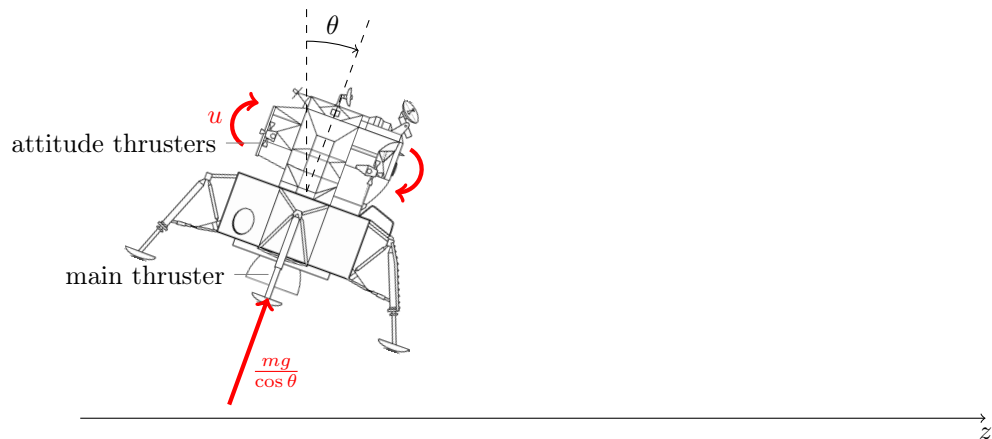


Control computarizado - Retroalimentación de estados

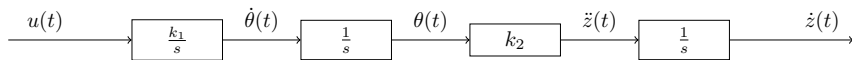
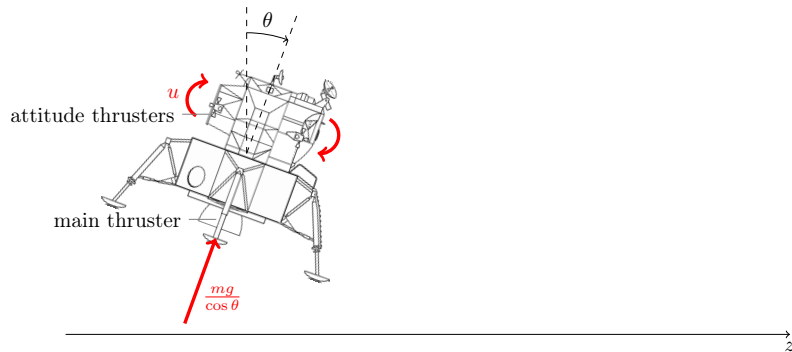
Kjartan Halvorsen

July 27, 2020

Ejemplo - El módulo lunar de Apollo

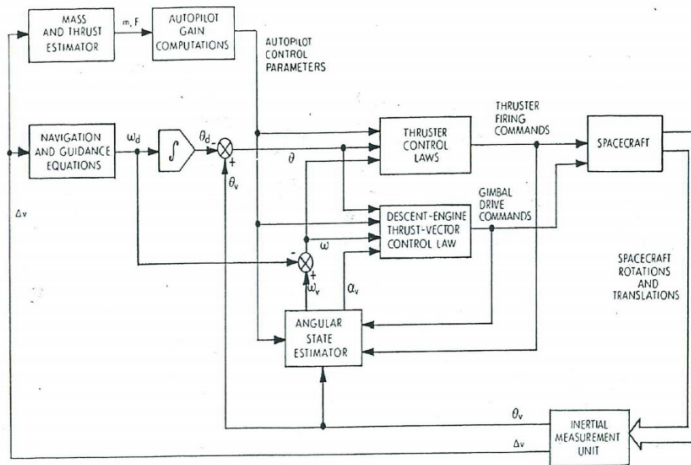


Ejemplo - El módulo lunar de Apollo



Actividad ¿Que sensores relevantes se puede usar para el control?

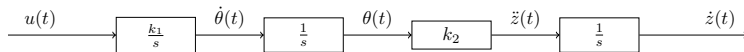
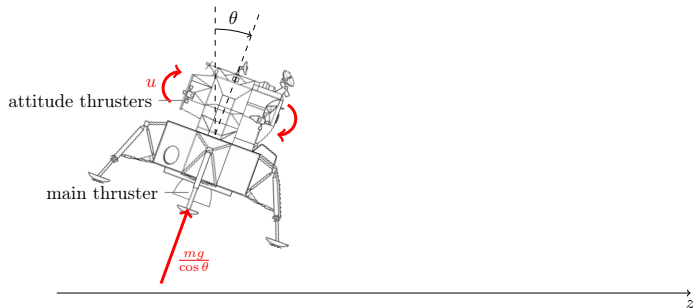
Ejemplo - El módulo lunar de Apollo



Information flow in the LM digital autopilot during descent engine powered flight

“Dynamics and control challenges during the Apollo project” MIT OCW

Ejemplo - El módulo lunar de Apollo



Variables del estado: $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\dot{\theta} \ \theta \ \dot{z}]^T$. Con dinamica

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \ddot{\theta} = k_1 u \\ \dot{x}_2 = \dot{\theta} = x_1 \\ \dot{x}_3 = \ddot{z} = k_2 \theta = k_2 x_2 \end{cases}$$

Ejemplo - El módulo lunar de Apollo

Variables del estado: $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\dot{\theta} \ \theta \ \dot{z}]^T$. Con dinamica

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \ddot{\theta} = k_1 u \\ \dot{x}_2 = \dot{\theta} = x_1 \\ \dot{x}_3 = \ddot{z} = k_2 \theta = k_2 x_2 \end{cases}$$

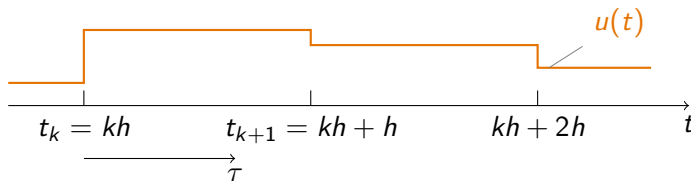
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u$$

Discretización

Discretización

Solución general de un sistema lineal en espacio de estado

$$x(t_k + \tau) = e^{A(\tau)}x(t_k) + \int_0^\tau e^{As}Bu((t_k + \tau) - s)ds$$



$$\begin{aligned} x(kh + h) &= e^{Ah}x(kh) + \int_0^h e^{As}Bu(kh + h - s)ds \\ &= \underbrace{e^{Ah}}_{\Phi(h)}x(kh) + \underbrace{\left(\int_0^h e^{As}Bds\right)}_{\Gamma(h)}u(kh) \end{aligned}$$

Discretización - La exponencial de una matriz

Matriz A cuadrada. Variable t escalar.

$$e^{At} = 1 + At + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots$$

Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$$

Discretización - Apollo LM

$$\begin{aligned}x(kh + h) &= e^{Ah}x(kh) + \int_0^h e^{As}Bu(kh + h - s)ds \\&= \underbrace{e^{Ah}}_{\Phi(h)}x(kh) + \underbrace{\left(\int_0^h e^{As}Bds\right)}_{\Gamma(h)}u(kh)\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = 0$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\Phi(h) &= e^{Ah} = 1 + Ah + A^2h^2/2 + \dots \\&= \end{aligned}$$

Discretización - Apollo LM

$$\begin{aligned}x(kh + h) &= e^{Ah}x(kh) + \int_0^h e^{As}Bu(kh + h - s)ds \\&= \underbrace{e^{Ah}}_{\Phi(h)}x(kh) + \underbrace{\left(\int_0^h e^{As}Bds\right)}_{\Gamma(h)}u(kh)\end{aligned}$$

$$e^{As}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 \\ \frac{s^2 k_2}{2} & sk_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \frac{k_2 s^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(h) = \int_0^h e^{As}Bds =$$

Estabilidad

Eigenvalores y eigenvectores

Definición Eigenvalores $\lambda \in \mathbb{R}$ y eigenvectores $v \in \mathbb{R}^n$ de una matriz $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son pares $(\lambda, v \neq 0)$ que satisfican

$$\Phi v = \lambda v$$

Estabilidad

El sistema

$$x(k+1) = \Phi x(k), \quad x(0) = x_0$$

es **estable** si $\lim_{t \rightarrow \infty} x(kh) = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Un requisito necesario y suficiente para estabilidad, es que **todos los eigenvalores (valores característicos) de Φ están en el interior del círculo unitario.**

Los **eigenvalores** de Φ son los **polos** del sistema.

Control por retroalimentación de estados

Retroalimentación de estados

Dado

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}\tag{1}$$

y medidas (o valores estimados) del vector de estado $x(k)$.

Retroalimentación lineal de estados es la ley de control

$$\begin{aligned}u(k) &= f(x(k), u_c(k)) = -l_1 x_1(k) - l_2 x_2(k) - \cdots - l_n x_n(k) + l_0 u_c(k) \\ &= -Lx(k) + l_0 u_c(k),\end{aligned}$$

dónde

$$L = [l_1 \quad l_2 \quad \cdots \quad l_n].$$

Sustituyendo la ley de control en el modelo en espacio de estado (1) da

$$\begin{aligned}x(k+1) &= (\Phi - \Gamma L)x(k) + \Gamma l_0 u_c(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}\tag{2}$$

Asignación de polos por retroalimentación de estados

Dado ubicación deseada de los polos del lazo cerrado p_1, p_2, \dots, p_n , correspondiente al polinomio característico deseado

$$a_c(z) = (z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots \alpha_n. \quad (3)$$

Retroalimentación de estados nos da el sistema

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (\Phi - \Gamma L) x(k) + l_0 \Gamma u_c(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (4)$$

con polinomio característico

$$\det(zI - (\Phi - \Gamma L)) = z^n + \beta_1(l_1, \dots, l_n) z^{n-1} + \cdots \beta_n(l_1, \dots, l_n). \quad (5)$$

Equipara los coeficientes de (3) con los de (5) para obtener sistema de ecuaciones

$$\beta_1(l_1, \dots, l_n) = \alpha_1$$

$$\beta_2(l_1, \dots, l_n) = \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_n(l_1, \dots, l_n) = \alpha_n$$

Asignación de polos por retroalimentación de estados

El sistema de ecuaciones

$$\beta_1(l_1, \dots, l_n) = \alpha_1$$

$$\beta_2(l_1, \dots, l_n) = \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_n(l_1, \dots, l_n) = \alpha_n$$

siempre es lineal en los parámetros del controlador, cuál nos da

$$ML^T = \alpha,$$

dónde $\alpha^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]$.

Asignación de polos y controlabilidad

Se puede verificar que la matriz de controlabilidad

$$W_c = [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1}\Gamma]$$

es un factor de la matriz M

$$M = \bar{M}W_c.$$

Entonces, en general las ecuaciones

$$\bar{M}W_c L^T = \alpha \quad \Rightarrow \quad L^T = W_c^{-1} \bar{M}^{-1} \alpha \quad (6)$$

solo tienen una solución si W_c es invertible, es decir cuando el sistema es *controlable*.

Nota que las ecuaciones (6) pueden tener soluciones (numero infinito) cuando el sistema no es controlable, si α está en el espacio de columnas de M . Es decir, se puede escribir

$$\alpha = b_1 M_{:,1} + b_2 M_{:,2} + \dots + b_{M:,m}, \quad m < n$$

Asignación de polos por retroalimentación de estados

Dado ubicación deseada de los polos del lazo cerrado p_1, p_2, \dots, p_n , correspondiente al polinomio característico deseado

$$a_c(z) = (z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n. \quad (7)$$

y sistema de espacio de estado en lazo cerrado

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (\Phi - \Gamma L)x(k) + l_0 \Gamma u_c(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (8)$$

Matlab (*control systems toolbox*) tiene dos métodos para calcular las ganancias L

1. Método de Ackerman

```
L = acker(Phi, Gamma, pd)
```

2. Método numericamente estable

```
L = place(Phi, Gamma, pd)
```

La ganancia l_0 de la referencia

El sistema de espacio de estado en lazo cerrado

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \underbrace{(\Phi - \Gamma L)}_{\Phi_c} x(k) + l_0 \Gamma u_c(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

tiene la solución en estado estacionario ($x(k+1) = x(k)$) con referencia constante $u_c(k) = u_{c,f}$

$$y_f = l_0 C(I - \Phi_c)^{-1} \Gamma u_{c,f}.$$

Queremos $y_f = u_{c,f}$,

$$\Rightarrow \quad l_0 = \frac{1}{C(I - \Phi_c)^{-1} \Gamma}$$

Actividad

En grupos:

1. Visualiza la actitud (ángulo θ en grados) del módulo lunar durante la simulación. ¿Cuál es el ángulo máximo?
2. Determina las ganancias $L = [l_1 \quad l_2 \quad l_3]$ para control *dead-beat*. Es decir con todos los polos del sistema en lazo cerrado en el origen.
3. Simula el sistema en lazo cerrado con control *dead-beat*. ¿Cuál es el ángulo máximo del módulo lunar?
4. Cambia el periodo de muestreo de $h = 1s$ a $h = 0.5s$. ¿Cuál es el ángulo máximo ahora, usando control *dead-beat*.