

# Control Computarizado - Sintonización de PID

Kjartan Halvorsen

2020-07-13

# Retroalimentación - Primer examen parcial

Varias respuestas muy buenas

A mejorar

- ▶ Profesor: Dar instrucciones más claras
- ▶ Estudiantes: Leer bien las instrucciones

## Retroalimentación - Primer examen parcial

$$e^x = -1$$

$$x = \ln(-1) = ?$$

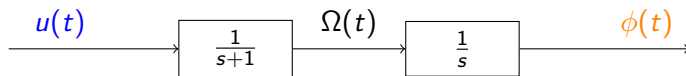
## Retroalimentación - Primer examen parcial

$$e^{i\pi} = -1$$

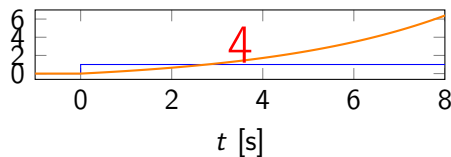
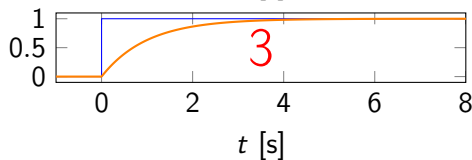
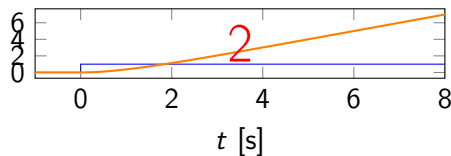
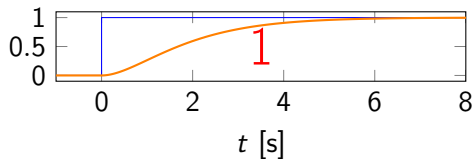
$$\ln(-1) = i\pi$$

# Retroalimentación - Primer examen parcial

Respuesta al escalón de un motor DC



Cuál es el respuesta al escalón correcto del sistema?



# Retroalimentación - Primer examen parcial

## Problema 1

$$H_1(z) = \frac{0.035(z + 0.88)}{(z - 1)(z - 0.67)}, \quad h = 0.2$$

Polos en

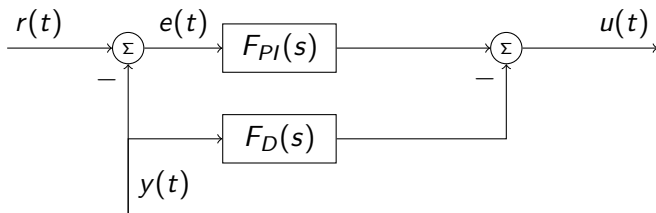
$$z = 1 \quad s = \frac{\ln 1}{h} = 0$$

$$z = 0.67 \quad s = \frac{\ln 0.67}{h} = -2.0$$

El polo en  $z = 1$  está ubicado justamente **sobre el círculo unitario** y no en el interior. El sistema **no es estable**.

# PID - repetición

## PID con acción derivada sobre la variable de proceso



$$U(s) = \underbrace{K_c \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)}_{F_{PI}(s)} E(s) - \underbrace{\frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1}}_{F_D} Y(s)$$



# Sintonización de un PID

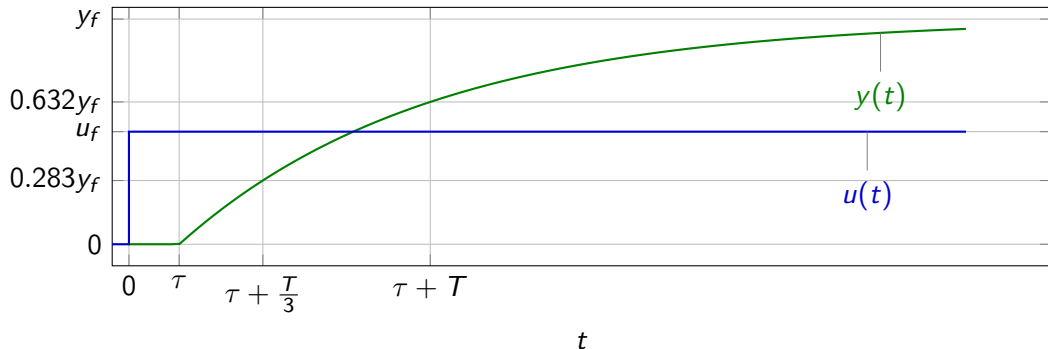
**El idea** En forma experimental obtener unos pocos valores que capturan la dinámica del proceso. Usar una tabla predefinida para obtener las ganancias del PID dado estos valores.

Hay varios métodos. Ver el libro de texto y referencias incluidas.

## Sintonización de un PID - método de Smith & Corripio

Asumiendo modelo de proceso de primer orden con constante de tiempo  $T$  y retraso  $\tau$

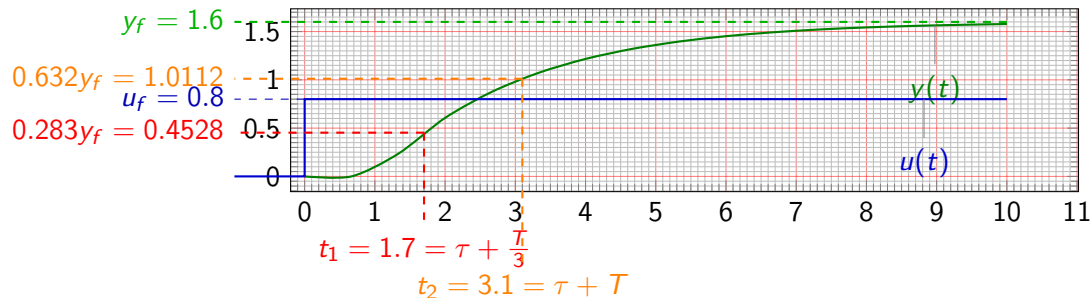
$$Y(s) = \frac{K e^{-s\tau}}{sT + 1} U(s) \quad U(s) = \frac{u_f}{s} \quad \Rightarrow \quad y(t) = u_f K (1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}) u_s(t - \tau)$$



$$y_f = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = u_f K \quad \Rightarrow \quad K = \frac{y_f}{u_f}$$

## Método de Smith & Corripio - ejemplo

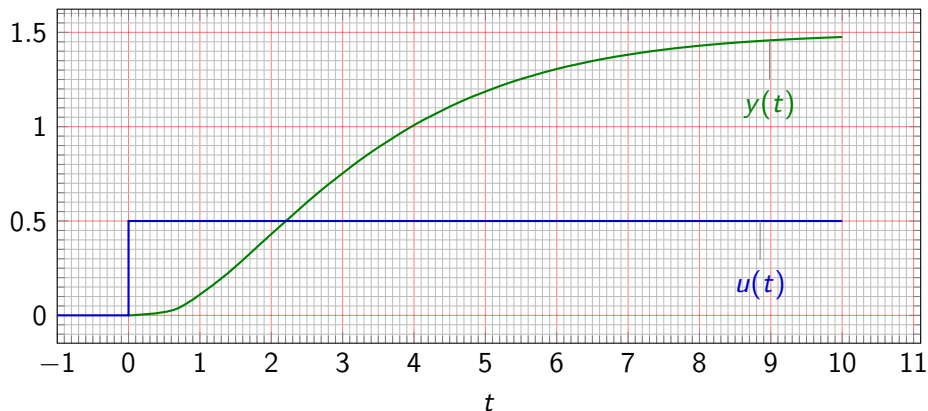
$$Y(s) = \frac{Ke^{-s\tau}}{sT + 1} U(s) \quad U(s) = \frac{u_f}{s} \quad \xrightarrow{s} \quad y(t) = u_f K (1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}) u_s(t - \tau)$$



$$\begin{cases} 1.7 = \tau + \frac{T}{3} \\ 3.1 = \tau + T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau = 1 \\ T = 2.1 \end{cases}, \quad K = \frac{y_f}{u_f} = \frac{1.6}{0.8} = 2$$

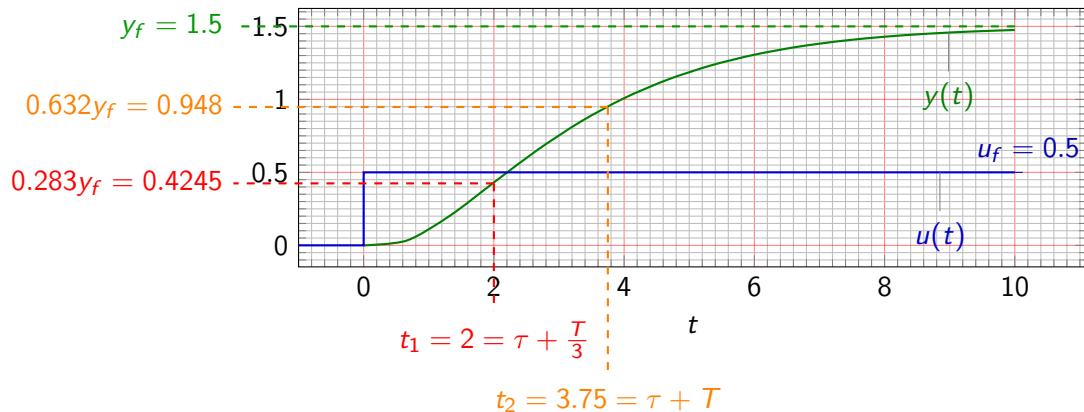
## Método de Smith & Corripio - ejercicio

**Actividad** En grupos de dos: Comparte pantalla con esta diapositiva. Marca  $y_f$ ,  $0.632y_f$ ,  $0.283y_f$ ,  $u_f$ ,  $t_1$  y  $t_2$ . Determina los parámetros del modelo de primer orden con retraso.



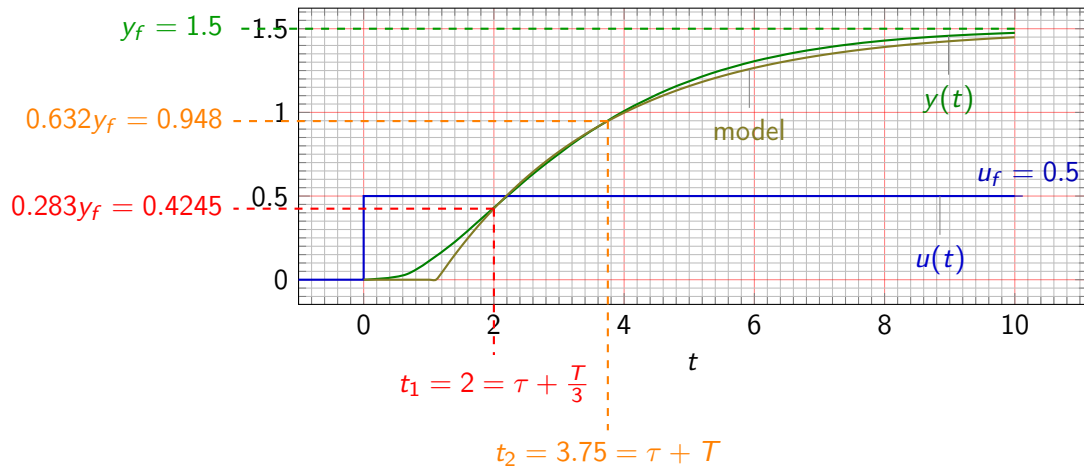
# Método de Smith & Corripio - solución

## Método de Smith & Corripio - solución



$$\begin{cases} 2 = \tau + \frac{T}{3} \\ 3.75 = \tau + T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau = 1.125 \\ T = 2.625 \end{cases}, \quad K = \frac{y_f}{u_f} = \frac{1.5}{0.5} = 3$$

## Método de Smith & Corripio - solución



Model: 
$$G(s) = 3 \frac{e^{-1.125s}}{2.625s + 1}$$

# Método de Smith & Corripio - Tabla de Ziegler-Nichols

Dado el modelo

$$G(s) = K \frac{e^{-s\tau}}{sT + 1}$$

Elige los parametros PID según la tabla de Ziegler y Nichols (1943)

Controlador	$K_c$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{T}{\tau K}$		
PI	$\frac{0.9T}{\tau K}$	$\frac{\tau}{0.3}$	
PID	$\frac{1.2T}{\tau K}$	$2\tau$	$\frac{\tau}{2}$

Funciona bien cuando

$$0.1 < \frac{\tau}{T} < 0.6.$$



## Tabla de Ziegler-Nichols - ejemplo

$$G(s) = K \frac{e^{-s\tau}}{sT + 1} = 2 \frac{e^{-s}}{s2.1 + 1}$$

Controlador	$K_c$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{T}{\tau K} = \frac{2.1}{1 \cdot 2} = 1.05$		
PI	$\frac{0.9T}{\tau K} = \frac{0.9 \cdot 2.1}{2} = 0.945$	$\frac{\tau}{0.3} = \frac{1}{3}$	
PID	$\frac{1.2T}{\tau K} = 1.26$	$2\tau = 2$	$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}$

Regla de control (PID completo,  $N = 10$ ):

$$U(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) E(s) - \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} Y(s) = 1.26 \left( 1 + \frac{1}{2s} \right) E(s) - \frac{0.5s}{\frac{0.5}{10}s + 1} Y(s)$$

## Tabla de Ziegler-Nichols - ejercicio

Determina los parametros del PID para el modelo del ejercicio anterior  $\tau = 1.125$ ,  $T = 2.625$ .

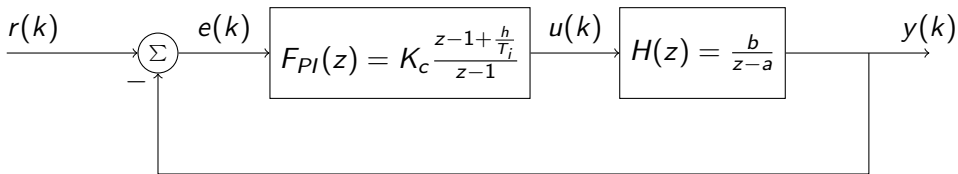
$$G(s) = K \frac{e^{-s\tau}}{sT + 1} =$$

Controlador	$K_c$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{T}{\tau K} =$		
PI	$\frac{0.9T}{\tau K} =$	$\frac{\tau}{0.3} =$	
PID	$\frac{1.2T}{\tau K} =$	$2\tau$	$\frac{\tau}{2} =$

Regla de control (PID completo,  $N = ?$ ):

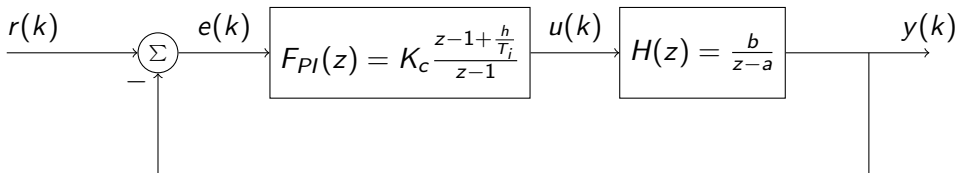
$$U(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) E(s) - \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} Y(s) =$$

## Asignación de polos - Un ejemplo



Queremos un sistema de lazo cerrado críticamente amortiguado con dos polos en  $z = \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$

## Asignación de polos



### Ecuación característica

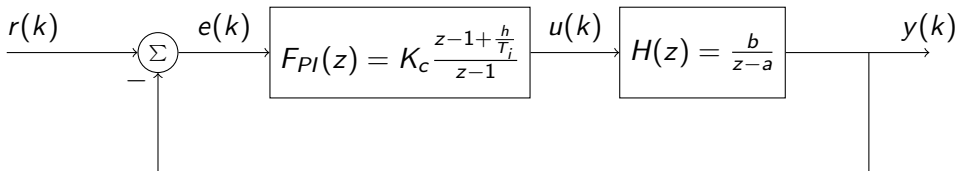
$$1 + H(z)F_{PI}(z) = 0$$
$$(z - 1)(z - a) + K_c b(z - 1 + h/T_i) = 0$$

### Polinomio característico

$$\underbrace{(z - 1)(z - a) + K_c b(z - 1 + h/T_i)}_{\text{parametrizado}} = \underbrace{(z - \alpha)^2}_{\text{deseado}}$$

¿Cómo podemos determinar los parametros del controlador,  $K_c$  y  $T_i$ ?

## Asignación de polos - Solución



### Polinomio característico

$$\underbrace{z^2 - (1 + a - K_c b)z + K_c b(h/T_i - 1) + a}_{\text{parametrizado}} = \underbrace{z^2 - 2\alpha z + \alpha^2}_{\text{deseado}}$$

$$1 + a - K_c b = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad K_c = \frac{1 + a - 2\alpha}{b}$$

$$K_c b(h/T_i - 1) + a = \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_i} = \frac{1}{h} \left( 1 + \frac{\alpha^2 - a}{K_c b} \right) = \frac{1}{h} \left( \frac{(\alpha - 1)^2}{1 + a - 2\alpha} \right)$$

# Asignación de polos

Ligas

Solución en mybinder

Solución en github