Control computarizado - Asignación de polos, parte 2

Kjartan Halvorsen

July 15, 2020

Tres conceptos claves

1. Dónde poner los polos del sistem en lazo cerrado
2. La función de *sensibilidad* y la función de *sensibilidad complementaria*
3. Determinar el orden del controlador

Concepto clave 1) Los polos del sistema en lazo cerrado

Los polos del sistema en lazo cerrado

Actividad Dado especificaciones $\zeta > 0.59$ y $\zeta\omega_n > 4$, marca las regiones en el
en el plano z que corresponden a las especificaciones.

$s = a + i\omega$

$z = e^{sh}$

$= e^{ah + i\omega h}$

$= e^{ah} \cdot e^{i\omega h}$

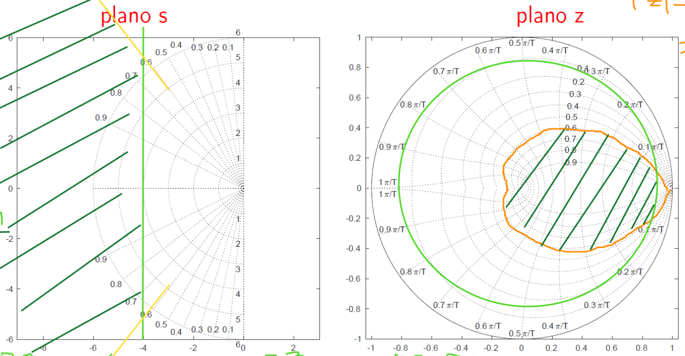
$|z| = e^{ah}$

$\arg z = \omega h$

$\omega_n = \frac{4}{0{,}6}$

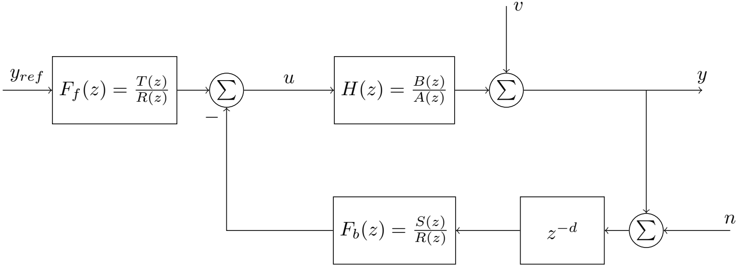
$h\omega_n \approx 0{,}2 - 0{,}6 \Rightarrow h \approx \frac{0{,}3}{\omega_n} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6}{4} \approx 0{,}045$

$|z| = e^{-\zeta\omega_n h} = e^{-4 \cdot 0{,}045} = 0{,}83$



Concepto clave 2) Las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria

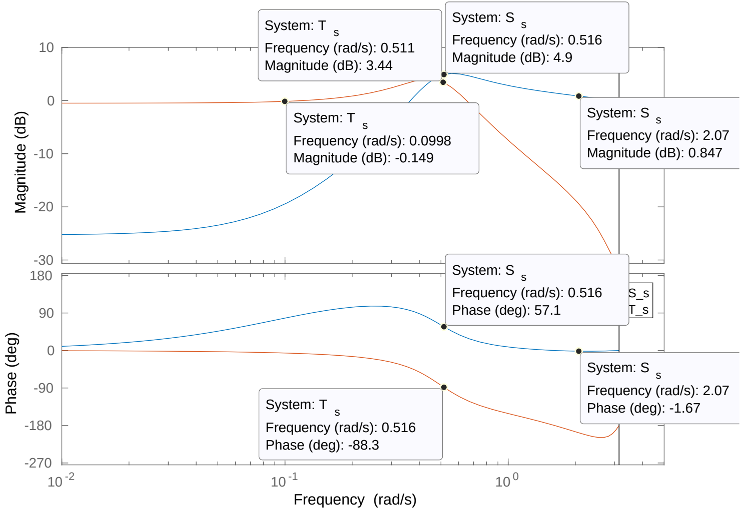
Controlador de dos grados de libertad



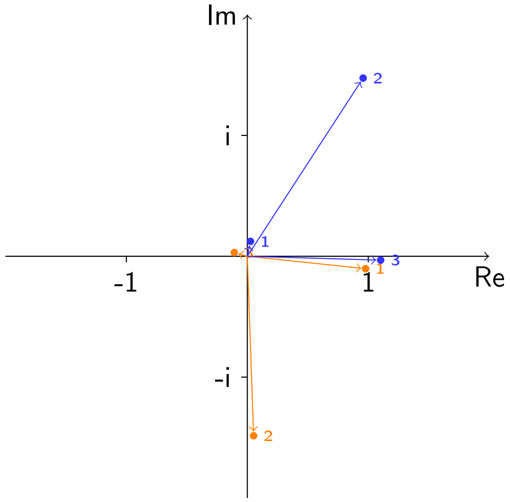
$$Y(z) = \frac{F_f(z)H(z)}{1+z^{-d}F_b(z)H(z)}U_c(z) + \overbrace{\frac{1}{1+z^{-d}F_b(z)H(z)}}^{S_s(z)}V(z) - \overbrace{\frac{z^{-d}F_b(z)H(z)}{1+z^{-d}F_b(z)H(z)}}^{T_s(z)}N(z)$$

Evidentemente $S_s(z) + T_s(z) = 1$ Conclusion: Hay que encontrar un equilibrio entre rechazo a perturbaciones y rechazo a ruido de medida.

Sensibilidad y sensibilidad complementaria



Sensibilidad y sensibilidad complementaria - Solución

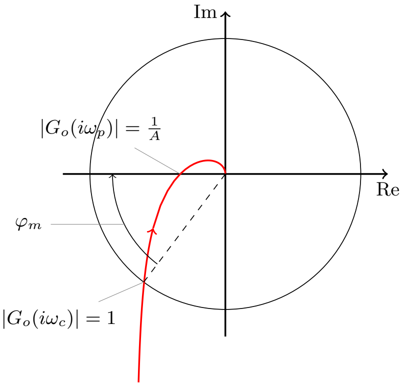


La función de sensibilidad

$$S_s(z) = \frac{1}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)} = \frac{1}{1 + G_o(z)} = \frac{1}{G_o(z) - (-1)}$$

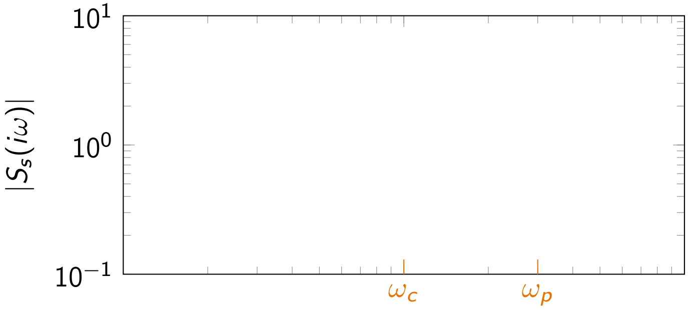
$$|S_s(\mathrm{e}^{i\omega h})| = |S_s(i\omega)| = \frac{1}{|G_o(i\omega) - (-1)|}$$

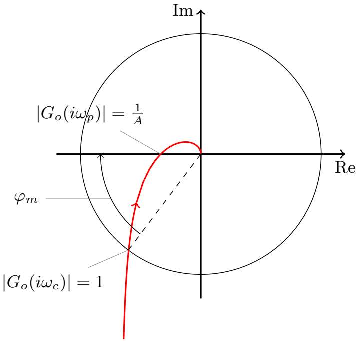
La magntiúd de la función de sensibilidad es inversa proporcional a la distancia de la curva de Nyquist al punto critico -1



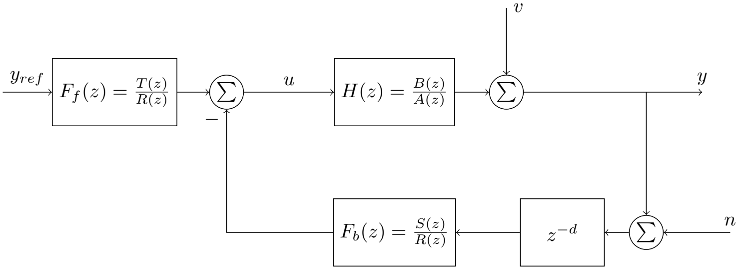
La función de sensibilidad - ejercicio

Actividad Dibuja la magnitúd de la funcion de sensibilidad, dado la curva de Nyquist.



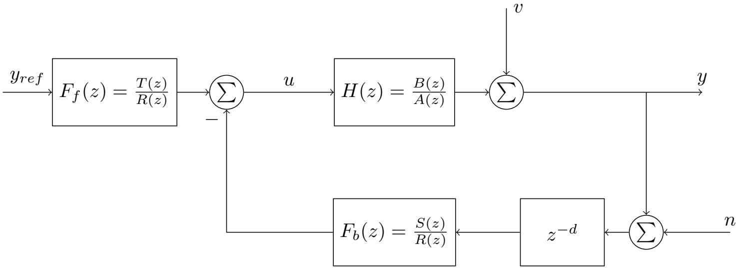


Controlador de dos grados de libertad



$$Y(z) = \frac{T(z)B(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} V(z)$$
$$- \frac{S(z)B(z)}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} N(z)$$

Controlador de dos grados de libertad



$$Y(z) = \frac{t_0 B(z) z^d}{A_c(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{A_c(z)A_o(z)} N(z)$$

Conclusiones 1) Hay una separación parcial entre seguimiento de la referencia y rechazo a perturbaciones. 2) Se puede usar los polos correspondientes a las raíces de $A_o(z)$ para afinar el rechazo a perturbaciones contra rechazo a ruido de medida.

Procedimiento - asignación de polos

Dado modelo del proceso $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$, y especificaciones de polos deseados del sistema en lazo cerrado $A_{cl}(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\cdots(z - \alpha_{n_c})$

1. Determina la ecuación diofantina

$$A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z)$$

   y el orden adecuado del controlador, con $\deg S = \deg R$.

2. Factoriza el polinomio caracteristico del lazo cerrado $A_{cl}(z) = A_c(z)A_o(z)$, donde $n_{A_o} = n_R$.

3. Determina polinomios $R(z)$ y $S(z)$ que satisfican

$$A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z)$$

Procedimiento

Dado modelo del proceso $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$, y especificaciones de polos deseados del sistema en lazo cerrado $A_{cl}(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_{n_c})$

4. Elige
$$T(z) = t_0 A_o(z),$$
donde $t_0 = \frac{A_c(1)}{B(1)}$.

Obtenemos la ley de control

$$R(q)u(k) = T(q)u_c(k) - S(q)y(k).$$

y la respuesta en lazo cerrado a la señal de referencia

$$y(k) = \frac{t_0 B(q)}{A_c(q)} u_c(k).$$

Concepto clave 3) Determinando el orden del controlador

Tenemos la ecuación diofantina

$$A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z) \qquad (*)$$

y el controlador

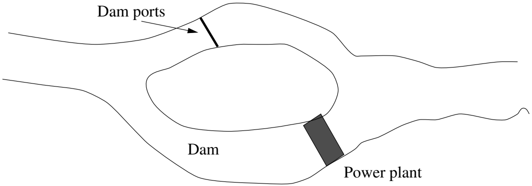
$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z^n + s_1 z^{n-1} + \cdots + s_n}{z^n + r_1 z^{n-1} + \cdots + r_n}$$

¿Cómo decidir el orden del controlador? Nota

- el controlador tiene $n + n + 1 = 2 \deg R + 1$ parámetros desconocidos
- el lado izquierdo de $(*)$ tiene el grado $\deg \left(A(z)R(z)z^d + B(z)S(z)\right) = \deg A + \deg R + d$
- la ecuación diofantina da un numero de ecuaciones (no-triviales) igual a su grado, al poner iguales los coeficientes correspondientes de los dos lados.

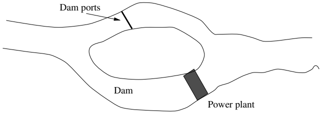
$\Rightarrow$ Elige $\deg R$ que satisface $2 \deg R + 1 = \deg A + \deg R + d$

Ejemplo - Control de nivel de una presa



Objetivo Obtener un sistema en lazo cerrado con polos en $z = 0.9$.

Ejemplo - Control de nivel de una presa



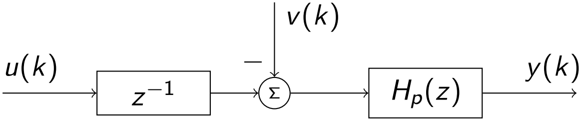
Dinámica del proceso

Cambio en el nivel de agua

Cambio en flujo controlado

$$y(k) = y(k-1) - v(k-1) + u(k-2)$$

Cambio en flujos no controlados



Ejemplo - Control de nivel de una presa

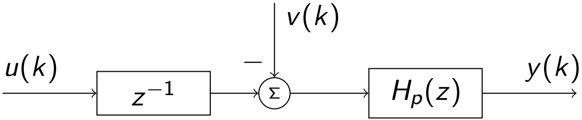
Dinámica del proceso

Cambio en el nivel de agua

Cambio en flujo controlado

$$y(k) = y(k-1) - v(k-1) + u(k-2)$$

Cambio en flujos no controlados



Actividad ¿Cuál es la funcion de transferencia de $u(k)$ a $y(k)$?

1: $H(z) = \frac{z}{z-1}$ 2: $H(z) = \frac{1}{z-1}$ 3: $H(z) = \frac{1}{z(z-1)}$

Ejemplo - Control de nivel de una presa

Dado proceso $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{z(z-1)}$ y polos deseados en $z = 0.9$.

1. Ecuación diofantina $A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z)$

$$z(z-1)R(z) + S(z) = A_{cl}(z)$$

   El orden del controlador es

$$\deg R = \deg A + d - 1 = 2 - 1 = 1, \quad \Rightarrow \quad F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z + s_1}{z + r_1}$$

2. Tenemos la ecuación diofantina

$$z(z-1)(z + r_1) + s_0 z + s_1 = A_{cl}(z)$$

   El grado de $A_{cl}(z)$ es 3. Eligimos $A_o(z) = z$, ($\deg A_o = \deg R$)

$$A_{cl}(z) = A_o(z)A_c(z) = z(z-0.9)^2$$

Ejemplo - Control de nivel de una presa

3. De la ecuación diofantina

$$z(z-1)(z+r_1)+s_0 z+s_1=z(z-0.9)^2$$

$$z^3+(r_1-1)z^2-r_1 z+s_0 z+s_1=z^3-1.8z^2+0.81z$$

Obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} z^2 & : \quad r_1-1=-1.8 \\ z^1 & : \quad -r_1+s_0=0.81 \\ z^0 & : \quad s_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 & =-0.8 \\ s_0 & =0.01 \\ s_1 & =0 \end{cases}$$

$$F_b(z)=\frac{0.01z}{z-0.8}$$

Ejemplo - Control de nivel de una presa

4. Tenemos $A_o(z) = z$, entonces

$$T(z) = t_0 A_o(z) = t_0 z$$

$$G_c(z) = \frac{T(z)B(z)}{A_o(z)A_c(z)} = \frac{t_0 B(z)}{A_c(z)}, \quad \text{queremos } G_c(1) = 1$$

$$t_0 = \frac{A_c(1)}{B(1)} = \frac{(1-0.9)^2}{1} = 0.01$$

Ley de control

$$R(\mathrm{q})u(kh) = T(\mathrm{q})u_c(kh) - S(\mathrm{q})y(kh)$$

$$(\mathrm{q} - 0.8)u(kh) = 0.01\,\mathrm{q}\,u_c(kh) - 0.01\,\mathrm{q}\,y(kh)$$

$$u(kh+h) = 0.8u(kh) + 0.01u_c(kh+h) - 0.01y(kh+h)$$

Ejercicios

Concepto clave 3) Determinando el orden del controlador

Tenemos la ecuación diafóntica

$$A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z) \qquad (*)$$

y el controlador de retroalimentación

$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z^n + s_1 z^{n-1} + \cdots + s_n}{z^n + r_1 z^{n-1} + \cdots + r_n}$$

¿Cómo decidir el orden del controlador? Nota

- el controlador tiene $n + n + 1 = 2 \deg R + 1$ parámetros desconocidos
- el lado izquierdo de $(*)$ tiene el grado $\deg \big(A(z)R(z)z^d + B(z)S(z)\big) = \deg A + \deg R + d$
- la ecuación diofantina nos un numero de ecuaciones (no-triviales) igual a su grado, al poner coeficientes de los dos lados iguales.

$\Rightarrow$ Elige $\deg R$ que satisface $2 \deg R + 1 = \deg A + \deg R + d$

Determinando el orden del controlador - Ejercicio 1

Recuerda $\Rightarrow$ Elige $\deg R$ que satisface $2\deg R + 1 = \deg A + \deg R + d$

Dado modelo del proceso

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b}{z+a}$$

y $d = 0$ (ningun retraso en el lazo) ¿Cuál es el orden apropiado del controlador

$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z^n + s_1 z^{n-1} + \cdots + s_n}{z^n + r_1 z^{n-1} + \cdots + r_n}$$

para que se puede determinar todos los parametros usando la ecuación diofantina

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_c(z)A_o(z)?$$

1. $n = 0$
2. $n = 1$
3. $n = 2$
4. $n = 3$

Determinando el orden del controlador - Ejercicio 2

Recuerda $\Rightarrow$ Elige $\deg R$ que satisface $2\deg R + 1 = \deg A + \deg R + d$

Dado modelo del proceso

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

y $d = 2$ ¿Cuál es el orden apropiado del controlador

$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z^n + s_1 z^{n-1} + \cdots + s_n}{z^n + r_1 z^{n-1} + \cdots + r_n}$$

para que se puede determinar todos los parametros usando la ecuación diofantina

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_c(z)A_o(z)?$$

1. $n = 1$
2. $n = 2$
3. $n = 3$
4. $n = 4$

Determinando el orden del controlador - Ejercicio 3

Dado modelo del proceso

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

y $d = 2$ el controlador apropprioado es

$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z^3 + s_1 z^2 + s_2 z + s_3}{z^3 + r_1 z^2 + r_2 z + r_3}.$$

¿Cuáles son los grados permisibles del polinomio observador $A_o(z)$ en

$$A(z)R(z)z^2 + B(z)S(z) = A_c(z)A_o(z)?$$

1. < 2
2. < 3
3. > 2
4. ≤ 3