

# Control computarizado - Asignación de polos, parte 2

Kjartan Halvorsen

July 15, 2020

# Tres conceptos claves

1. Dónde poner los polos del sistema en lazo cerrado
2. La función de *sensibilidad* y la función de *sensibilidad complementaria*
3. Determinar el orden del controlador

# Concepto clave 1) Los polos del sistema en lazo cerrado

## Los polos del sistema en lazo cerrado

**Actividad** Dado especificaciones  $\zeta \gtrsim 0.59$  y  $\zeta \omega_n > 4$ , marca las regiones en el plano  $z$  que corresponden a las especificaciones.

$$s = \sigma + i\omega$$

$$z = e^{sh}$$

$$= e^{\sigma h + i\omega h}$$

$$= e^{\sigma h} \cdot e^{i\omega h}$$

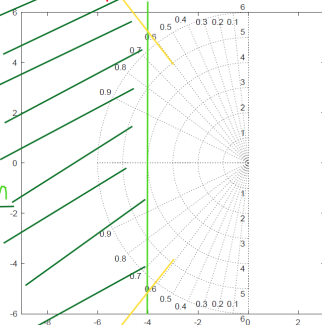
$$|z| = e^{\sigma h}$$

$$\arg z = \omega h$$

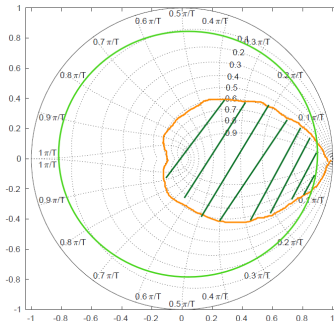
$$\omega_n = \frac{4}{0.6}$$

$$h\omega_n \approx 0.2 - 0.6 \Rightarrow h = \frac{0.3}{\omega_n} = \frac{0.3 \cdot 0.6}{4} \approx 0.045$$

plano  $s$



plano  $z$

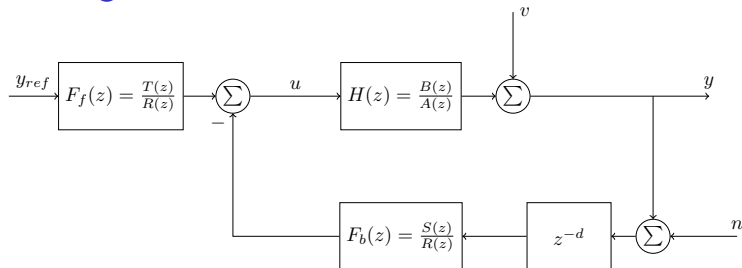


$$|z| = e^{\sigma h} = e^{-4 \cdot 0.045} = e^{-0.18} = 0.83$$

Talking:

## Concepto clave 2) Las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria

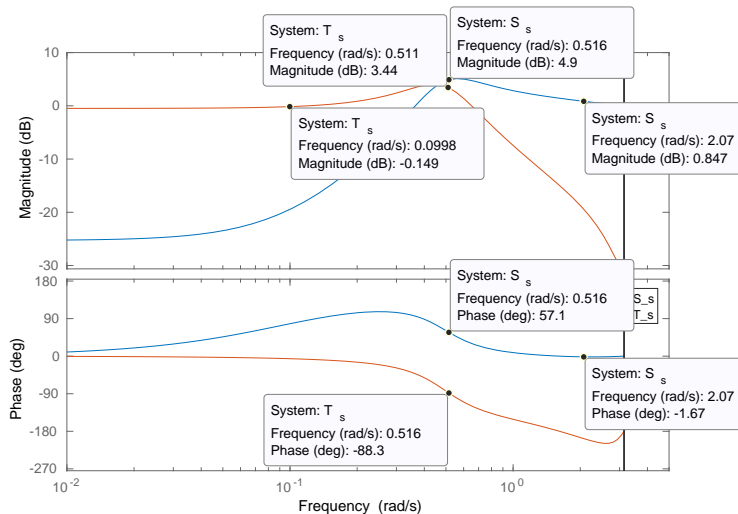
## Controlador de dos grados de libertad



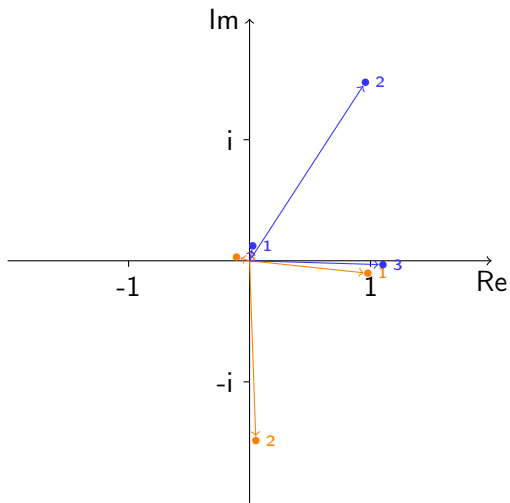
$$Y(z) = \frac{F_f(z)H(z)}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)} U_c(z) + \underbrace{\frac{S_s(z)}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)}}_{1} V(z) - \underbrace{\frac{T_s(z)}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)}}_{\frac{z^{-d}F_b(z)H(z)}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)}} N(z)$$

**Evidentemente**  $S_s(z) + T_s(z) = 1$  **Conclusion:** Hay que encontrar un equilibrio entre rechazo a perturbaciones y rechazo a ruido de medida.

# Sensibilidad y sensibilidad complementaria



## Sensibilidad y sensibilidad complementaria - Solución

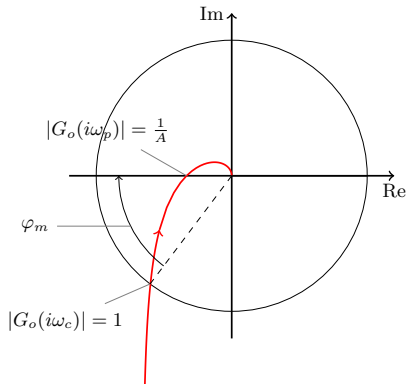


## La función de sensibilidad

$$S_s(z) = \frac{1}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)} = \frac{1}{1 + G_o(z)} = \frac{1}{G_o(z) - (-1)}$$

$$|S_s(e^{i\omega h})| = |S_s(i\omega)| = \frac{1}{|G_o(i\omega) - (-1)|}$$

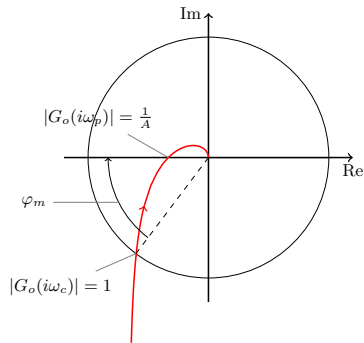
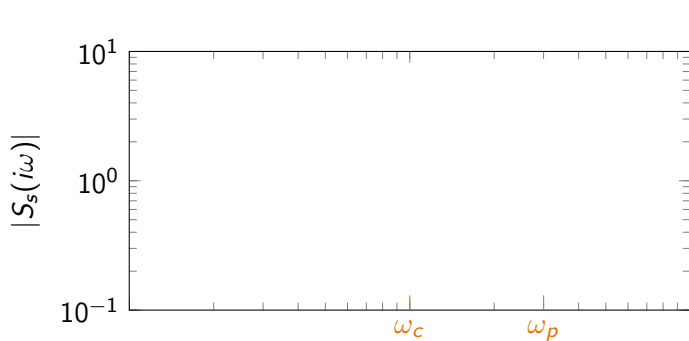
La magnitud de la función de sensibilidad es inversa proporcional a la distancia de la curva de Nyquist al punto crítico -1



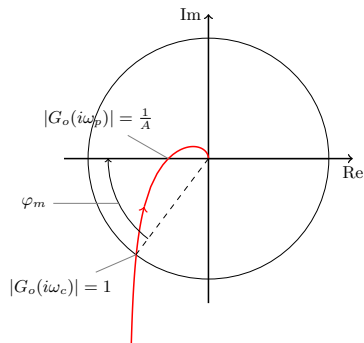
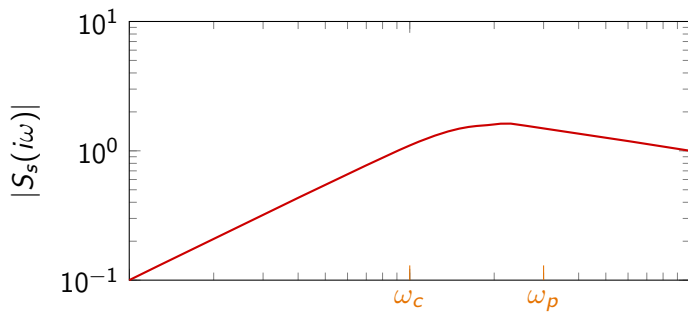


## La función de sensibilidad - ejercicio

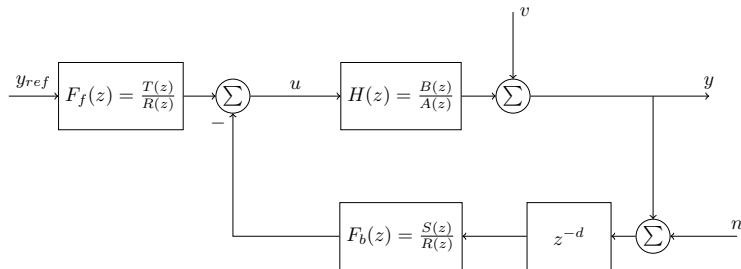
**Actividad** Dibuja la magnitud de la función de sensibilidad, dado la curva de Nyquist.



## La función de sensibilidad - solución

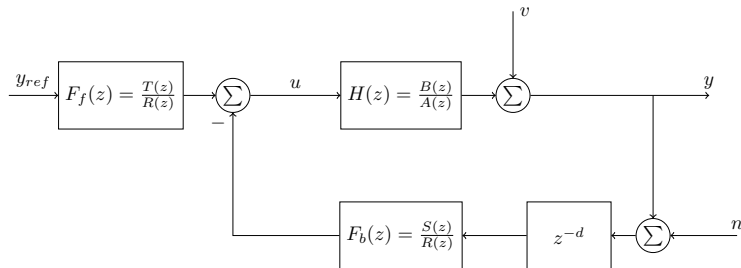


# Controlador de dos grados de libertad



$$Y(z) = \frac{T(z)B(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} N(z)$$

# Controlador de dos grados de libertad



$$Y(z) = \frac{t_0 B(z) z^d}{A_c(z)} U_c(z) + \frac{A(z) R(z) z^d}{A_c(z) A_o(z)} V(z) - \frac{S(z) B(z)}{A_c(z) A_o(z)} N(z)$$

**Conclusiones** 1) Hay una separación parcial entre seguimiento de la referencia y rechazo a perturbaciones. 2) Se puede usar los polos correspondientes a las raíces de  $A_o(z)$  para afinar el rechazo a perturbaciones contra rechazo a ruido de medida.

## Procedimiento - asignación de polos

Dado modelo del proceso  $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ , y especificaciones de polos deseados del sistema en lazo cerrado  $A_{cl}(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_{n_c})$

1. Determina la ecuación diofantina

$$A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z)$$

y el orden adecuado del controlador, con  $\deg S = \deg R$ .

2. Factoriza el polinomio característico del lazo cerrado  $A_{cl}(z) = A_c(z)A_o(z)$ , donde  $n_{A_o} = n_R$ .
3. Determina polinomios  $R(z)$  y  $S(z)$  que satisficán

$$A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z)$$

## Procedimiento

Dado modelo del proceso  $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ , y especificaciones de polos deseados del sistema en lazo cerrado  $A_{cl}(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_{n_c})$

4. Elige

$$T(z) = t_0 A_o(z),$$

$$\text{donde } t_0 = \frac{A_c(1)}{B(1)}.$$

Obtenemos la **ley de control**

$$R(q)u(k) = T(q)u_c(k) - S(q)y(k).$$

y la respuesta en lazo cerrado a la señal de referencia

$$y(k) = \frac{t_0 B(q)}{A_c(q)} u_c(k).$$

## Concepto clave 3) Determinando el orden del controlador

Tenemos la ecuación diofantina

$$A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z) \quad (*)$$

y el controlador

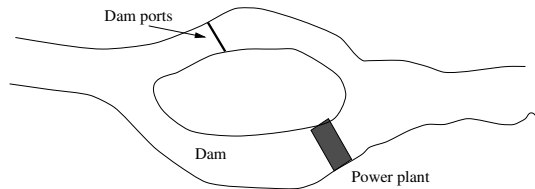
$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z^n + s_1 z^{n-1} + \dots + s_n}{z^n + r_1 z^{n-1} + \dots + r_n}$$

¿Cómo decidir el orden del controlador? Nota

- ▶ el controlador tiene  $n + n + 1 = 2 \deg R + 1$  parámetros desconocidos
- ▶ el lado izquierdo de (\*) tiene el grado  $\deg(A(z)R(z)z^d + B(z)S(z)) = \deg A + \deg R + d$
- ▶ la ecuación diofantina da un numero de ecuaciones (no-triviales) igual a su grado, al poner iguales los coeficientes correspondientes de los dos lados.

⇒ Elige  $\deg R$  que satisface  $2 \deg R + 1 = \deg A + \deg R + d$

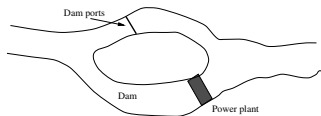
## Ejemplo - Control de nivel de una presa



**Objetivo** Obtener un sistema en lazo cerrado con polos en  $z = 0.9$ .



## Ejemplo - Control de nivel de una presa



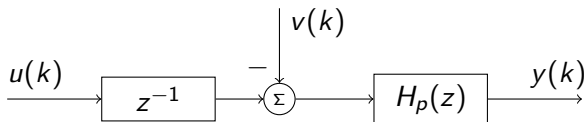
## Dinámica del proceso

## Cambio en el nivel de agua

## Cambio en flujo controlado

$$\overline{y(k)} = y(k-1) - v(k-1) + \overline{u(k-2)}$$

## Cambio en flujos no controlados



# Ejemplo - Control de nivel de una presa

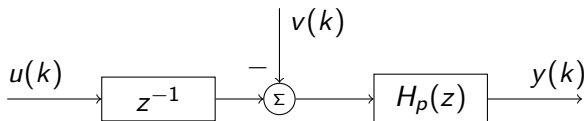
## Dinámica del proceso

Cambio en el nivel de agua

Cambio en flujo controlado

$$y(k) = y(k-1) - v(k-1) + u(k-2)$$

Cambio en flujos no controlados



**Actividad** ¿Cuál es la función de transferencia de  $u(k)$  a  $y(k)$ ?

$$1: H(z) = \frac{z}{z-1} \quad 2: H(z) = \frac{1}{z-1} \quad 3: H(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

## Ejemplo - Control de nivel de una presa

Dado proceso  $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{z(z-1)}$  y polos deseados en  $z = 0.9$ .

1. Ecuación diofantina  $A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z)$

$$z(z-1)R(z) + S(z) = A_{cl}(z)$$

El orden del controlador es

$$\deg R = \deg A + d - 1 = 2 - 1 = 1, \quad \Rightarrow \quad F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z + s_1}{z + r_1}$$

2. Tenemos la ecuación diofantina

$$z(z-1)(z+r_1) + s_0 z + s_1 = A_{cl}(z)$$

El grado de  $A_{cl}(z)$  es 3. Eligimos  $A_o(z) = z$ , ( $\deg A_o = \deg R$ )

$$A_{cl}(z) = A_o(z)A_c(z) = z(z-0.9)^2$$

## Ejemplo - Control de nivel de una presa

### 3. De la ecuación diofantina

$$z(z-1)(z+r_1) + s_0z + s_1 = z(z-0.9)^2$$

$$z^3 + (r_1 - 1)z^2 - r_1z + s_0z + s_1 = z^3 - 1.8z^2 + 0.81z$$

Obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} z^2 & : & r_1 - 1 = -1.8 \\ z^1 & : & -r_1 + s_0 = 0.81 \\ z^0 & : & s_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 & = -0.8 \\ s_0 & = 0.01 \\ s_1 & = 0 \end{cases}$$

$$F_b(z) = \frac{0.01z}{z - 0.8}$$

## Ejemplo - Control de nivel de una presa

4. Tenemos  $A_o(z) = z$ , entonces

$$T(z) = t_0 A_o(z) = t_0 z$$

$$G_c(z) = \frac{T(z)B(z)}{A_o(z)A_c(z)} = \frac{t_0 B(z)}{A_c(z)}, \quad \text{queremos } G_c(1) = 1$$

$$t_0 = \frac{A_c(1)}{B(1)} = \frac{(1 - 0.9)^2}{1} = 0.01$$

Ley de control

$$R(q)u(kh) = T(q)u_c(kh) - S(q)y(kh)$$

$$(q - 0.8)u(kh) = 0.01 q u_c(kh) - 0.01 q y(kh)$$

$$u(kh + h) = 0.8u(kh) + 0.01u_c(kh + h) - 0.01y(kh + h)$$

# Ejercicios

## Concepto clave 3) Determinando el orden del controlador

Tenemos la ecuación diafónica

$$A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z) \quad (*)$$

y el controlador de retroalimentación

$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z^n + s_1 z^{n-1} + \dots + s_n}{z^n + r_1 z^{n-1} + \dots + r_n}$$

¿Cómo decidir el orden del controlador? Nota

- ▶ el controlador tiene  $n + n + 1 = 2 \deg R + 1$  parámetros desconocidos
- ▶ el lado izquierdo de  $(*)$  tiene el grado  $\deg(A(z)R(z)z^d + B(z)S(z)) = \deg A + \deg R + d$
- ▶ la ecuación diofantina nos un numero de ecuaciones (no-triviales) igual a su grado, al poner coeficientes de los dos lados iguales.

⇒ Elige  $\deg R$  que satisface  $2 \deg R + 1 = \deg A + \deg R + d$

## Determinando el orden del controlador - Ejercicio 1

Recuerda  $\Rightarrow$  Elige  $\deg R$  que satisface  $2 \deg R + 1 = \deg A + \deg R + d$

Dado modelo del proceso

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b}{z + a}$$

y  $d = 0$  (ningun retraso en el lazo) ¿Cuál es el orden apropiado del controlador

$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z^n + s_1 z^{n-1} + \dots + s_n}{z^n + r_1 z^{n-1} + \dots + r_n}$$

para que se puede determinar todos los parametros usando la ecuación diofantina

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_c(z)A_o(z)?$$

1.  $n = 0$
2.  $n = 1$
3.  $n = 2$
4.  $n = 3$



## Determinando el orden del controlador - Ejercicio 1, Solución

Recuerda  $\Rightarrow$  Elige  $\deg R$  que satisface  $2 \deg R + 1 = \deg A + \deg R + d$

Dado modelo del proceso

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b}{z + a}$$

y  $d = 0$  (ningun retraso en el lazo) ¿Cuál es el orden apropiado del controlador

$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z^n + s_1 z^{n-1} + \dots + s_n}{z^n + r_1 z^{n-1} + \dots + r_n}$$

para que se puede determinar todos los parametros usando la ecuación diofantina

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_c(z)A_o(z)?$$

1.  $n = 0$
2.  $n = 1$
3.  $n = 2$
4.  $n = 3$

## Determinando el orden del controlador - Ejercicio 2

Recuerda  $\Rightarrow$  Elige  $\deg R$  que satisface  $2 \deg R + 1 = \deg A + \deg R + d$

Dado modelo del proceso

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

y  $d = 2$  ¿Cuál es el orden apropiado del controlador

$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z^n + s_1 z^{n-1} + \dots + s_n}{z^n + r_1 z^{n-1} + \dots + r_n}$$

para que se puede determinar todos los parametros usando la ecuación diofantina

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_c(z)A_o(z)?$$

1.  $n = 1$
2.  $n = 2$
3.  $n = 3$
4.  $n = 4$

## Determinando el orden del controlador - Ejercicio 2, Solución

Recuerda  $\Rightarrow$  Elige  $\deg R$  que satisface  $2 \deg R + 1 = \deg A + \deg R + d$

Dado modelo del proceso

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

y  $d = 2$  ¿Cuál es el orden apropiado del controlador

$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z^n + s_1 z^{n-1} + \dots + s_n}{z^n + r_1 z^{n-1} + \dots + r_n}$$

para que se puede determinar todos los parametros usando la ecuación diofantina

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_c(z)A_o(z)?$$

- 1.
- 2.
3.  $n = 3$
- 4.

## Determinando el orden del controlador - Ejercicio 3

Dado modelo del proceso

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0z + b_1}{z^2 + a_1z + a_2}$$

y  $d = 2$  el controlador apropiado es

$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0z^3 + s_1z^2 + s_2z + s_3}{z^3 + r_1z^2 + r_2z + r_3}.$$

¿Cuáles son los grados permisibles del polinomio observador  $A_o(z)$  en

$$A(z)R(z)z^2 + B(z)S(z) = A_c(z)A_o(z)?$$

1.  $< 2$
2.  $< 3$
3.  $> 2$
4.  $\leq 3$

## Determining the order of the controller - Exercise 3, Solución

With the plant model

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0z + b_1}{z^2 + a_1z + a_2}$$

and  $d = 2$  the appropriate degree of the controller is 3

$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0z^3 + s_1z^2 + s_2z + s_3}{z^3 + r_1z^2 + r_2z + r_3}.$$

What are the possible choices of the degree of the observer polynomial  $A_o(z)$  in

$$A(z)R(z)z^2 + B(z)S(z) = A_c(z)A_o(z)?$$

- 1.
- 2.
- 3.
4.  $\leq 3$