Control computarizado - Asignación de polos (RST posicional)

Kjartan Halvorsen

July 14, 2020

Objetivo

- Entender diseño de un controlador por asignación de polos

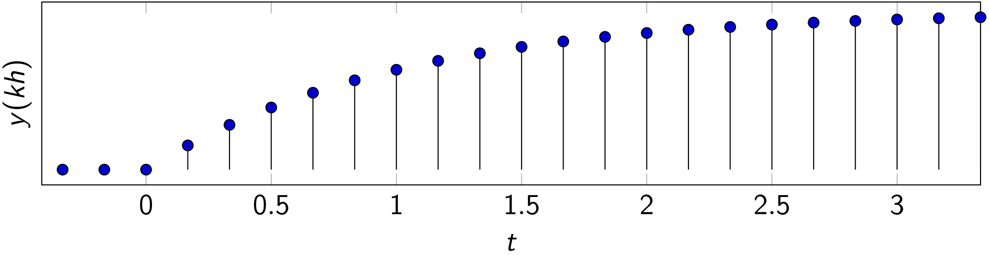
Tiempo de muestreo

Un tiempo de muestreo, h, adecuado depende de la velocidad del proceso a controlar y/o la velocidad deseada del sistema en lazo cerrado

Reglas de oro (Åström & Wittenmark)

1. Para sistemas con respuesta al escalón sin sobrepaso: 4 a 10 muestreos en un tiempo de subida.

$$\frac{t_r}{h} \approx 4 \text{ a } 10$$

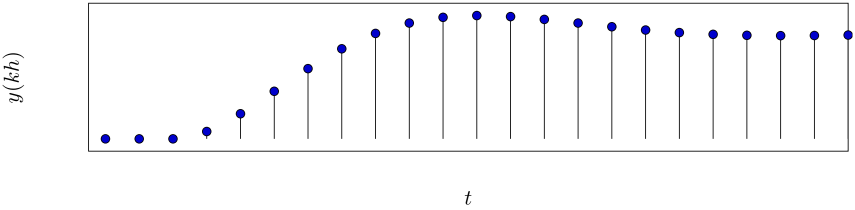


Tiempo de muestreo

Reglas de oro (Åström & Wittenmark)

2. Para sistemas con respuesta tipo segunda orden subamortiguada $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$:

$$\omega_n h \approx 0.2 \text{ to } 0.6 \qquad \text{Ejemplo con } h = \frac{0.4}{\omega_n} :$$



Tiempo de muestreo

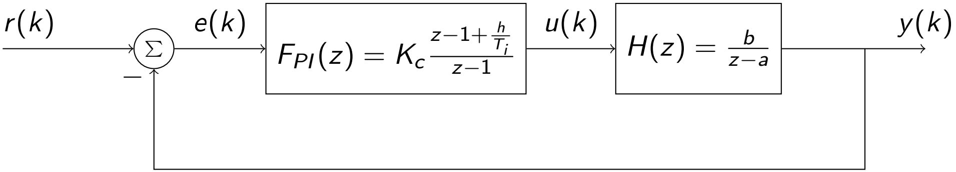
Reglas de oro (Åström & Wittenmark)

3. Si conocemos la frecuencia de cross-over, podemos eligir el tiempo de muestreo para que el cambio de fase negativo causado por el muestreo y retención no sea entre 5 y 15 grados. El efecto de muestreo y retención es approximadamente un retraso de $h/2$, $\mathrm{e}^{-sh/2}$. Resulta la regla

$$\arg \mathrm{e}^{-i\omega_c h/2} = -\omega_c h/2 \approx \frac{5\pi}{180} \text{ a } \frac{15\pi}{180}$$

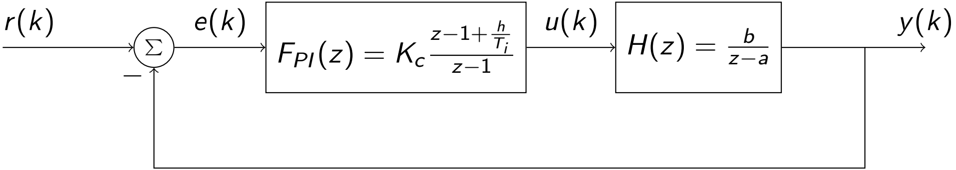
Diseño por asignación de polos

Asignación de polos - Un ejemplo



Queremos un sistema de lazo cerrado criticalmente amortiguado con dos polos en
$z = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$

Asignación de polos



Ecuación característica

$$1 + H(z)F_{PI}(z) = 0$$

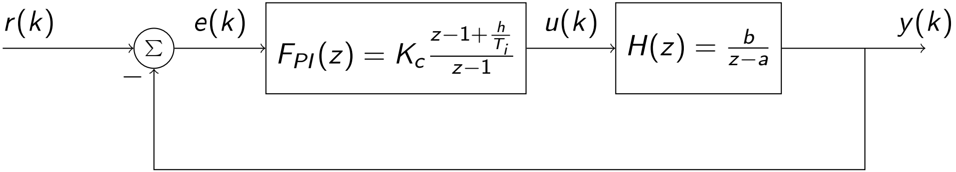
$$(z-1)(z-a) + K_c b(z - 1 + h/T_i) = 0$$

Polinomio característico

$$\underbrace{(z-1)(z-a) + K_c b(z-1+h/T_i)}_{\text{parametrizado}} = \underbrace{(z-\alpha)^2}_{\text{deseado}}$$

¿Cómo podemos determinar los parametros del controlador, K_c y T_i?

Asignación de polos - Solución



Polinomio característico

$$\underbrace{z^2 - (1 + a - K_c b)z + K_c b(h/T_i - 1) + a}_{\text{parametrizado}} = \underbrace{z^2 - 2\alpha z + \alpha^2}_{\text{deseado}}$$

Los dos polinomios caracteristicos son iguales solamente si cada uno de los coefficientes correspondientes son iguales. Eso nos da dos ecuaciones en los variables desconocidos:

$$1 + a - K_c b = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad K_c = \frac{1 + a - 2\alpha}{b}$$

$$K_c b(h/T_i - 1) + a = \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_i} = \frac{1}{h}\left(1 + \frac{\alpha^2 - a}{K_c b}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{(\alpha - 1)^2}{1 + a - 2\alpha}\right)$$

Asignación de polos

Ligas

Solución en mybinder

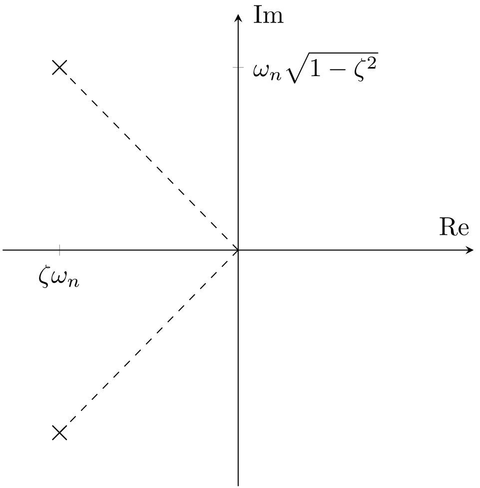
Solución en github

Tres conceptos claves

1. Dónde poner los polos del sistem en lazo cerrado
2. La función de *sensibilidad* y la función de *sensibilidad complementaria*
3. Determinar el orden del controlador

Los polos del sistema en lazo cerrado

Polos complejos en el plano s:



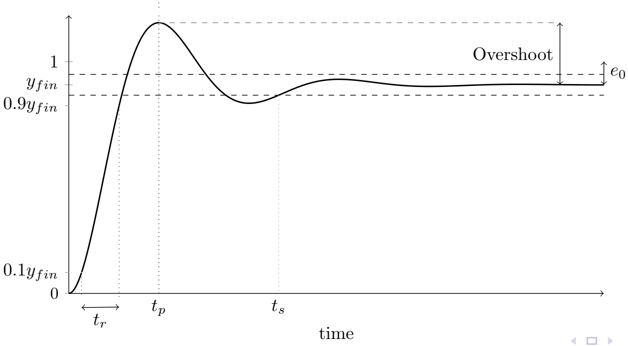
Los polos del sistema en lazo cerrado

Dado especificaciónes de la velocidad y amortiguación del sistema en lazo cerrado

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} < 1s \qquad \zeta \approx \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}, \quad OS < 10\%$$

resulta en

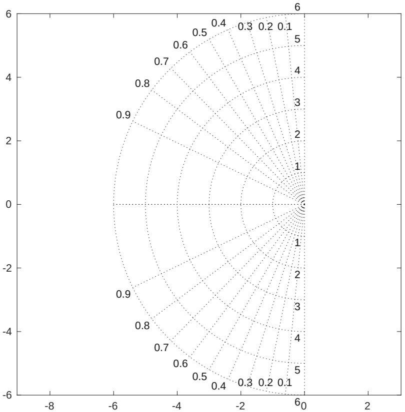
$$\zeta > 0.59, \qquad \zeta\omega_n > 4$$



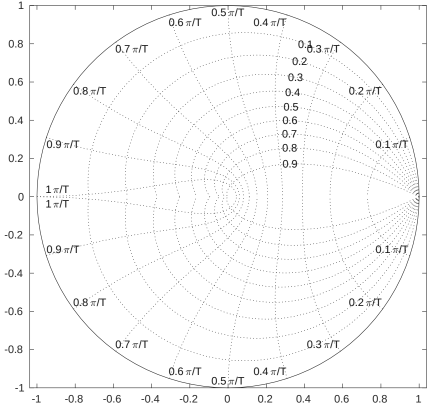
Los polos del sistema en lazo cerrado

Actividad Dado especificaciones $\zeta > 0.59$ y $\zeta\omega_n > 4$, marca las regiones en el plano s y en el plano z que corresponden a las especificaciones.

plano s

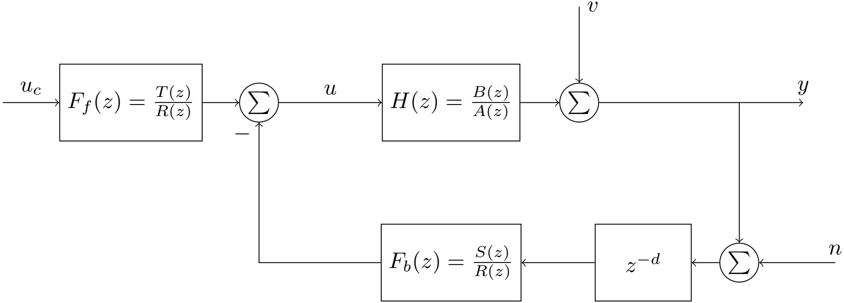


plano z



Las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria

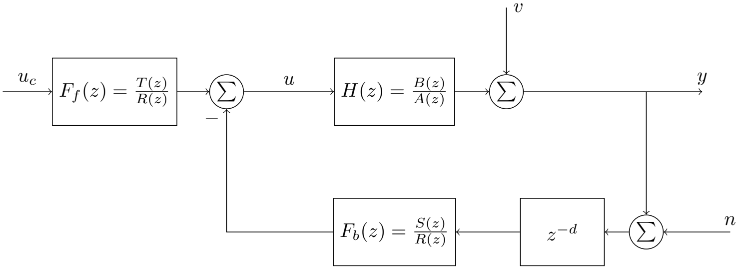
Controlador de dos grados de libertad



$$Y(z) = G_c(z)U_c(z) + \overbrace{S_s(z)}^{\text{sensib}} V(z) - \overbrace{T_s(z)}^{\text{sens compl}} N(z)$$

$$= \frac{F_f(z)H(z)}{1 + F_b(z)z^{-d}H(z)} U_c(z) + \frac{1}{1 + F_b(z)z^{-d}H(z)} V(z) - \frac{z^{-d}F_b(z)H(z)}{1 + F_b(z)z^{-d}H(z)} N(z)$$

Controlador de dos grados de libertad

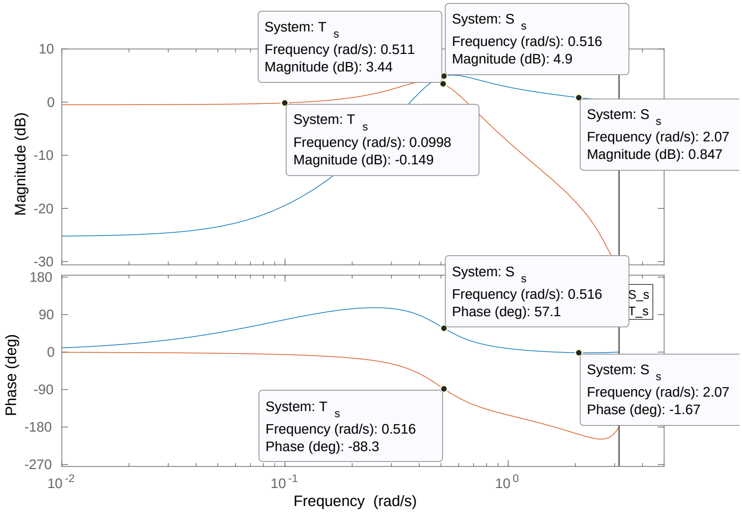


$$Y(z) = \frac{F_f(z)H(z)}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)}U_c(z) + \overbrace{\frac{1}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)}}^{S_s(z)}V(z) - \overbrace{\frac{z^{-d}F_b(z)H(z)}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)}}^{T_s(z)}N(z)$$

Evidentemente $S_s(z) + T_s(z) = 1$ Conclusion: Hay que encontrar un equilibrio entre rechazo a perturbaciones y rechazo a ruido de medida.

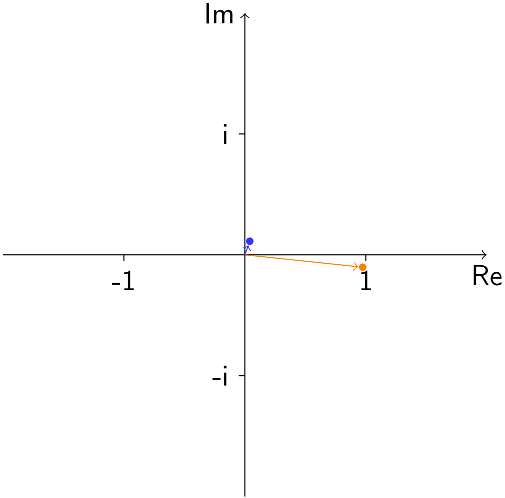
Sensibilidad y sensibilidad complementaria

Actividad Marca en el plano complejo los puntos indicados en el diagrama de Bode para ambos sistemas $S_s(z)$ y $T_s(z)$. Verifica que la suma vectorial de los puntos es 1.



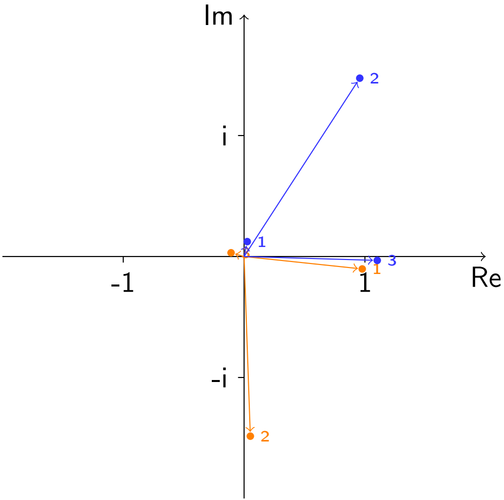
Sensibilidad y sensibilidad complementaria

Punto 1: $\omega = 0.1,\ T_s(0.1) = 10^{-0.149/20}\mathrm{e}^{-i6^o} = 0.98\mathrm{e}^{-i6^o} = 0.97 - i0.1,$
$S_s(0.1) = 10^{-18/20}\mathrm{e}^{i70^o} = 0.12\mathrm{e}^{i70^o} = 0.04 + i0.11$

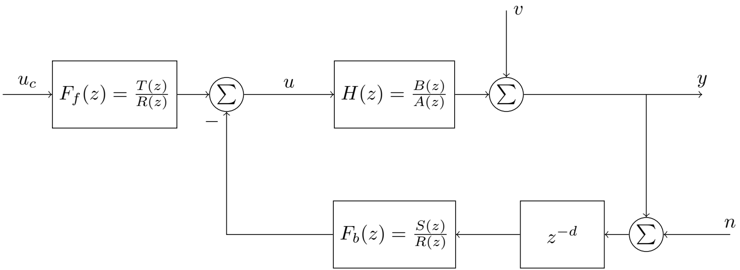


Sensibilidad y sensibilidad complementaria - Solución

Sensibilidad y sensibilidad complementaria - Solución



Controlador de dos grados de libertad



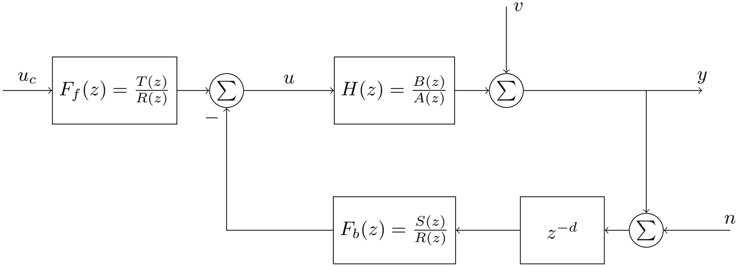
$$Y(z) = \frac{T(z)B(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} V(z)$$

$$- \frac{S(z)B(z)}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} N(z)$$

Controlador de dos grados de libertad

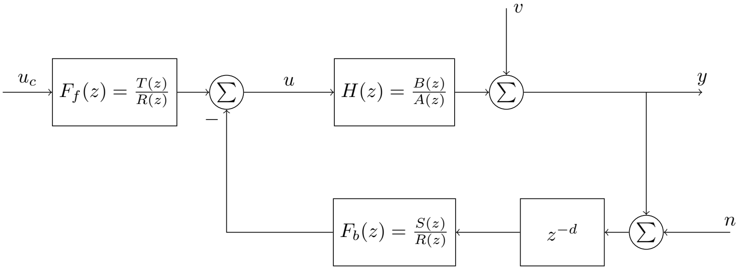
$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{T(z)B(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} V(z) \\
&\quad - \frac{S(z)B(z)}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} N(z) \\
&= \frac{T(z)B(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{A_c(z)A_o(z)} N(z), \quad \text{elige } T(z) = t_0 A_o(z) \\
&= \frac{t_0 B(z)z^d}{A_c(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{A_c(z)A_o(z)} N(z)
\end{aligned}
$$

Controlador de dos grados de libertad



$$Y(z) = \frac{t_0 B(z) z^d}{A_c(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{A_c(z)A_o(z)} N(z)$$

Controlador de dos grados de libertad



$$Y(z) = \frac{t_0 B(z) z^d}{A_c(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{A_c(z)A_o(z)} N(z)$$

Conclusiones 1) Hay una separación parcial entre seguimiento de la referencia y rechazo a perturbaciones. 2) Se puede usar los polos correspondientes a las raíces de $A_o(z)$ para afinar el rechazo a perturbaciones contra rechazo a ruido de medida.

Procedimiento - asignación de polos

Dado modelo del proceso $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$, y specificaciones de polos deseados del sistema en lazo cerrado $A_{cl}(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\cdots(z - \alpha_{n_c})$

1. Determina la ecuación diofántica

$$A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z)$$

   y el orden adecuado del controlador, con $\deg S = \deg R$.

2. Factoriza el polinomio caracteristico del lazo cerrado $A_{cl}(z) = A_c(z)A_o(z)$, donde $n_{A_o} = n_R$.

3. Determina polinomios $R(z)$ y $S(z)$ que satisfican

$$A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z)$$

Procedimiento

Dado modelo del proceso $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$, y specificaciones de polos deseados del sistema en lazo cerrado $A_{cl}(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_{n_c})$

4. Elige
$$T(z) = t_0 A_o(z),$$
donde $t_0 = \frac{A_c(1)}{B(1)}$.

Resulta la ley de control

$$R(q)u(k) = T(q)u_c(k) - S(q)y(k).$$

y la respuesta en lazo cerrado a la señal de referencia

$$A_c(q)y(k) = t_0 B(q)u_c(k).$$

Determinando el orden del controlador

Tenemos la ecuación diafóntica

$$A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z) \qquad (*)$$

y el controlador

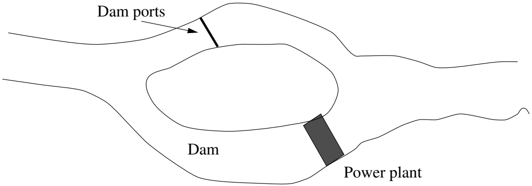
$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z^n + s_1 z^{n-1} + \cdots + s_n}{z^n + r_1 z^{n-1} + \cdots + r_n}$$

¿Cómo decidir el orden del controlador? Nota

- el controlador tiene $n + n + 1 = 2 \deg R + 1$ parámetros desconocidos
- el lado izquierdo de $(*)$ tiene el grado $\deg \big(A(z)R(z)z^d + B(z)S(z)\big) = \deg A + \deg R + d$
- la ecuación diofántica da un numero de ecuaciones (no-triviales) igual a su grado, al poner coeficientes de los dos lados iguales.

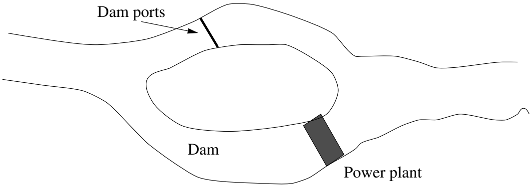
$\Rightarrow$ Elige $\deg R$ que satisface $2 \deg R + 1 = \deg A + \deg R + d$

Ejemplo - Control de nivel de una presa



Objetivo Obtener un sistema en lazo cerrado con polos en $z = 0.9$.

Ejemplo - Control de nivel de una presa



Dinámica del proceso

Cambio en el nivel de agua

Cambio en flujo controlado

$$y(k) = y(k-1) - v(k-1) + u(k-2)$$

Cambio en flujos no controlados

Actividad ¿Cuál es la funcion de transferencia correcta?

1: $H(z) = \frac{z}{z-1}$ 2: $H(z) = \frac{1}{z-1}$ 3: $H(z) = \frac{1}{z(z-1)}$

Ejemplo - Control de nivel de una presa

Dado proceso $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{z(z-1)}$ y polos deseados en $z = 0.9$.

1. Ecuación diofántica $A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z)$

$$z(z-1)R(z) + S(z) = A_{cl}(z)$$

   El orden del controlador es

$$\deg R = \deg A + d - 1 = 2 - 1 = 1, \quad \Rightarrow \quad F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z + s_1}{z + r_1}$$

2. Tenemos la ecuación diofántica

$$z(z-1)(z + r_1) + s_0 z + s_1 = A_{cl}(z)$$

   El grado de $A_{cl}(z)$ es 3. Eligimos $A_o(z) = z$, ($\deg A_o = \deg R$)

$$A_{cl}(z) = A_o(z)A_c(z) = z(z-0.9)^2$$

Ejemplo - Control de nivel de una presa

3. De la ecuación diofántica

$$z(z-1)(z+r_1)+s_0z+s_1=z(z-0.9)^2$$

$$z^3+(r_1-1)z^2-r_1z+s_0z+s_1=z^3-1.8z^2+0.81z$$

Obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} z^2 & : \quad r_1-1=-1.8 \\ z^1 & : \quad -r_1+s_0=0.81 \\ z^0 & : \quad s_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 & =-0.8 \\ s_0 & =0.01 \\ s_1 & =0 \end{cases}$$

$$F_b(z)=\frac{0.01z}{z-0.8}$$

Ejemplo - Control de nivel de una presa

4. Tenemos $A_o(z) = z$, entonces

$$T(z) = t_0 A_o(z) = t_0 z$$

$$G_c(z) = \frac{T(z)B(z)}{A_o(z)A_c(z)} = \frac{t_0 B(z)}{A_c(z)}, \quad \text{queremos } G_c(1) = 1$$

$$t_0 = \frac{A_c(1)}{B(1)} = \frac{(1-0.9)^2}{1} = 0.01$$

Ley de conctrol

$$R(\mathrm{q})u(kh) = T(\mathrm{q})u_c(kh) - S(\mathrm{q})y(kh)$$

$$(\mathrm{q} - 0.8)u(kh) = 0.01\,\mathrm{q}\,u_c(kh) - 0.01\,\mathrm{q}\,y(kh)$$

$$u(kh+h) = 0.8u(kh) + 0.01u_c(kh+h) - 0.01y(kh+h)$$