

# Control computarizado - Asignación de polos (RST posicional)

Kjartan Halvorsen

July 14, 2020

# Objetivo

- ▶ Entender diseño de un controlador por asignación de polos

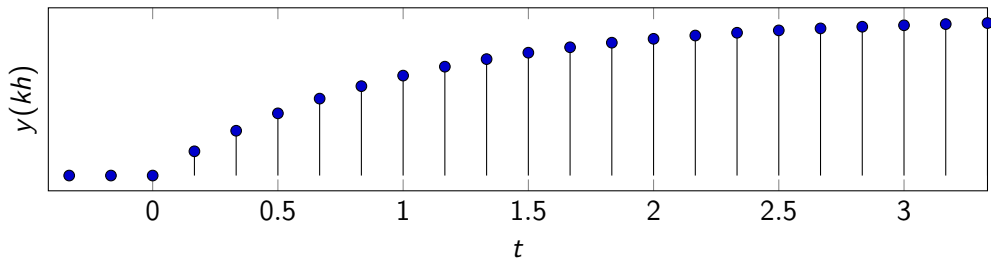
# Tiempo de muestreo

Un tiempo de muestreo,  $h$ , adecuado depende de la velocidad del proceso a controlar y/o la velocidad deseada del sistema en lazo cerrado

## Reglas de oro (Åström & Wittenmark)

1. Para sistemas con respuesta al escalón **sin** sobrepaso: **4 a 10** muestreos en un tiempo de subida.

$$\frac{t_r}{h} \approx 4 \text{ a } 10$$



## Tiempo de muestreo

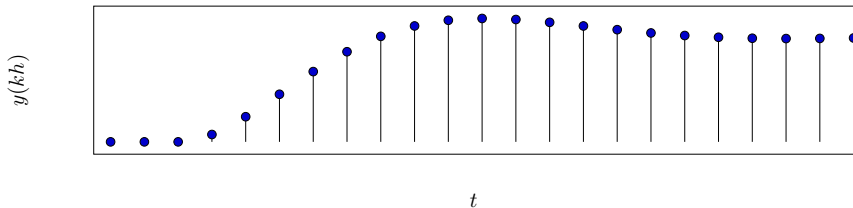
Un tiempo de muestreo,  $h$ , adecuado depende de la velocidad del proceso a controlar y/o la velocidad deseada del sistema en lazo cerrado

### Reglas de oro (Åström & Wittenmark)

2. Para sistemas con respuesta tipo segunda orden subamortiguada

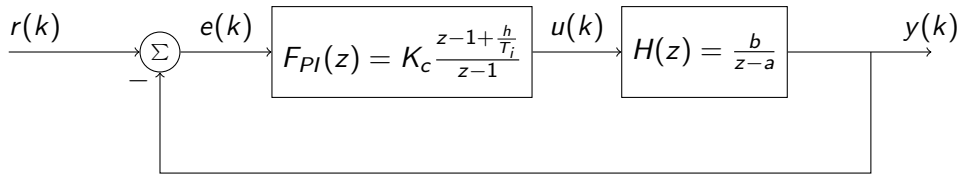
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} :$$

$$\omega_n h \approx 0.2 \text{ to } 0.6 \quad \text{Example with } h = \frac{0.4}{\omega_n} :$$



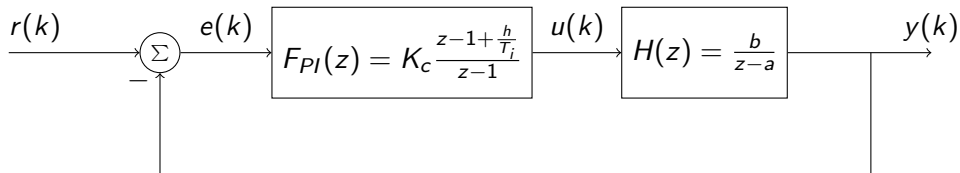
# Diseño por asignación de polos

## Asignación de polos - Un ejemplo



Queremos un sistema de lazo cerrado críticamente amortiguado con dos polos en  $z = \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$

## Asignación de polos



### Ecuación característica

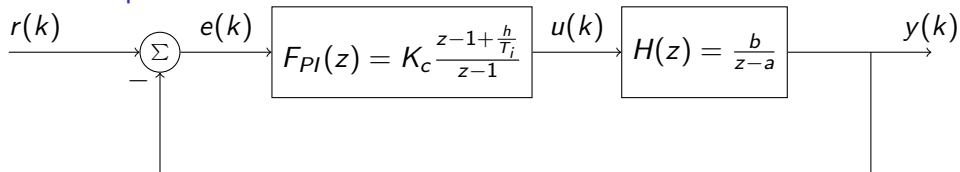
$$1 + H(z)F_{PI}(z) = 0$$
$$(z-1)(z-a) + K_c b(z-1 + h/T_i) = 0$$

### Polinomio característico

$$\underbrace{(z-1)(z-a) + K_c b(z-1 + h/T_i)}_{\text{parametrizado}} = \underbrace{(z-\alpha)^2}_{\text{deseado}}$$

¿Cómo podemos determinar los parámetros del controlador,  $K_c$  y  $T_i$ ?

## Asignación de polos - Solución



Polinomio característico

$$\underbrace{z^2 - (1 + a - K_c b)z + K_c b(h/T_i - 1) + a}_{\text{parametrizado}} = \underbrace{z^2 - 2\alpha z + \alpha^2}_{\text{deseado}}$$

Los dos polinomios característicos son iguales solamente si cada uno de los coeficientes correspondientes son iguales. Eso nos da dos ecuaciones en los variables desconocidos:

$$1 + a - K_c b = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad K_c = \frac{1 + a - 2\alpha}{b}$$

$$K_c b(h/T_i - 1) + a = \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_i} = \frac{1}{h} \left( 1 + \frac{\alpha^2 - a}{K_c b} \right) = \frac{1}{h} \left( \frac{(\alpha - 1)^2}{1 + a - 2\alpha} \right)$$



# Asignación de polos

## Ligas

Solución en mybinder

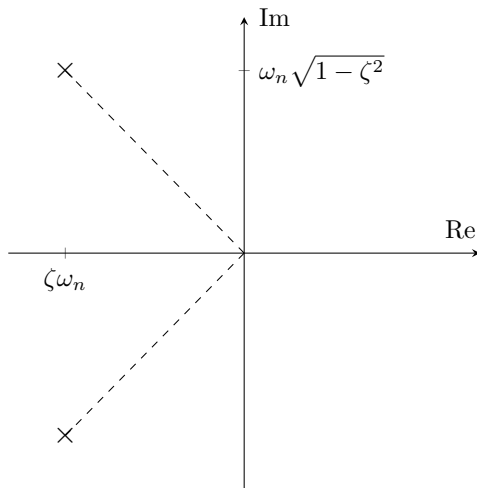
Solución en github

# Tres conceptos claves

1. Dónde poner los polos del sistema en lazo cerrado
2. La función de *sensibilidad* y la función de *sensibilidad complementaria*
3. Determinar el orden del controlador

## Los polos del sistema en lazo cerrado

Polos complejos en el plano  $s$ :



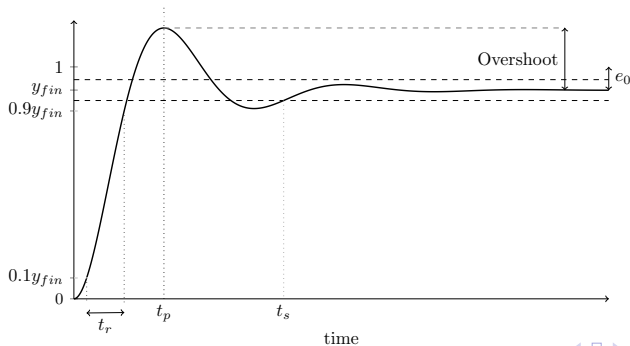
## Los polos del sistema en lazo cerrado

Dado especificaciones de la velocidad y amortiguación del sistema en lazo cerrado

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} < 1s \quad \zeta \approx \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}, \quad OS < 10\%$$

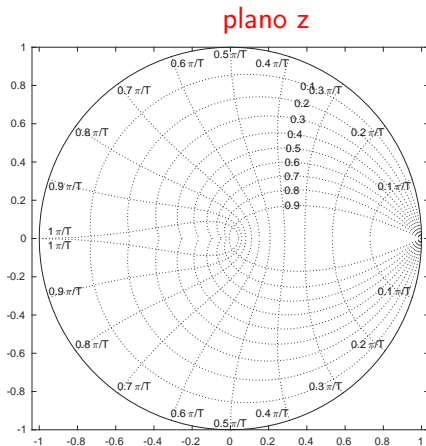
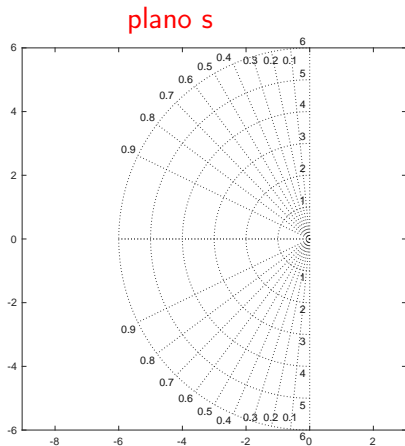
resulta en

$$\zeta < 0.59, \quad \zeta \omega_n > 4$$



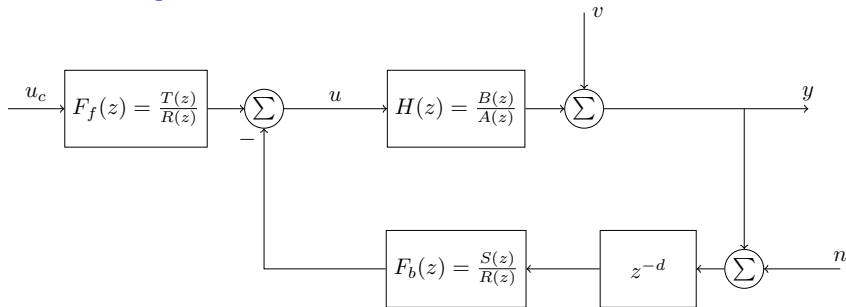
# Los polos del sistema en lazo cerrado

**Actividad** Dado especificaciones  $\zeta < 0.59$  y  $\zeta\omega_n > 4$ , marca las regiones en el plano  $s$  y en el plano  $z$  que corresponden a las especificaciones.



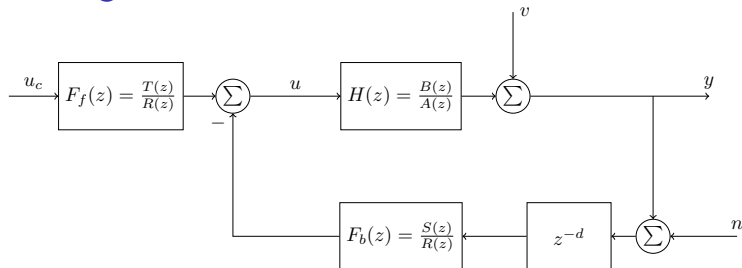
# Las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria

## Controlador de dos grados de libertad



$$\begin{aligned}
 Y(z) &= G_c(z)U_c(z) + \overbrace{S_s(z)}^{\text{sensib}} V(z) - \overbrace{T_s(z)}^{\text{sens compl}} N(z) \\
 &= \frac{F_f(z)H(z)}{1 + F_b(z)z^{-d}H(z)}U_c(z) + \frac{1}{1 + F_b(z)z^{-d}H(z)}V(z) - \frac{z^{-d}F_b(z)H(z)}{1 + F_b(z)z^{-d}H(z)}N(z)
 \end{aligned}$$

## Controlador de dos grados de libertad



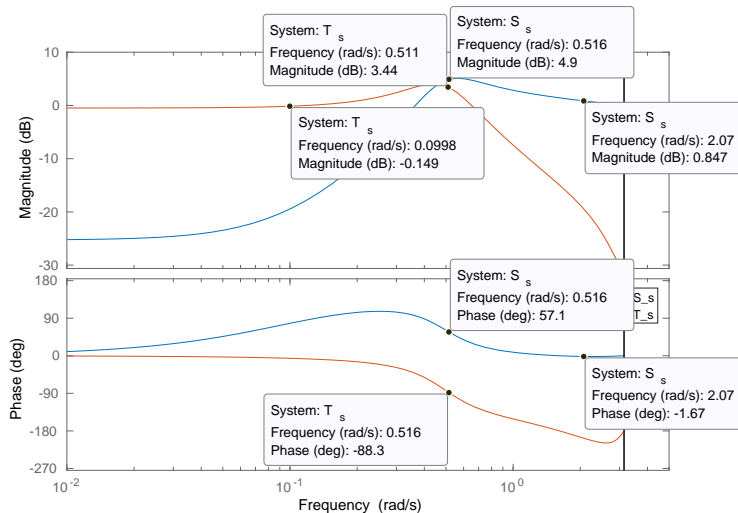
$$Y(z) = \frac{F_f(z)H(z)}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)} U_c(z) + \underbrace{\frac{S_s(z)}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)}}_{1} V(z) - \underbrace{\frac{T_s(z)}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)}}_{\frac{z^{-d}F_b(z)H(z)}{1 + z^{-d}F_b(z)H(z)}} N(z)$$

**Evidentemente**  $S_s(z) + T_s(z) = 1$  **Conclusion:** Hay que encontrar un equilibrio entre rechazo a perturbaciones y rechazo a ruido de medida.



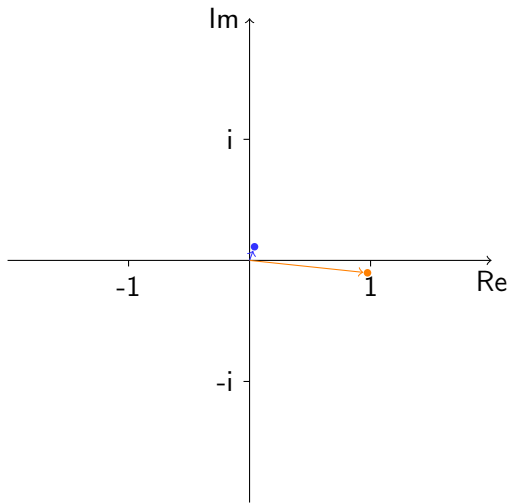
## Sensibilidad y sensibilidad complementaria

**Actividad** Marca en el plano complejo los puntos indicados en el diagrama de Bode para ambos sistemas  $S_s(z)$  y  $T_s(z)$ . Verifica que la suma vectorial de los puntos es 1.



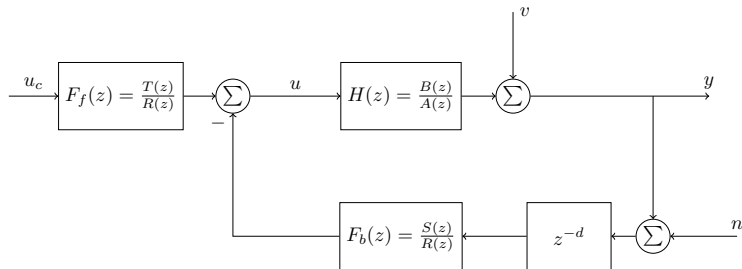
## Sensibilidad y sensibilidad complementaria

**Punto 1:**  $\omega = 0.1$ ,  $T_s(0.1) = 10^{-0.149/20} e^{-i6^\circ} = 0.98 e^{-i6^\circ} = 0.97 - i0.1$ ,  
 $S_s(0.1) = 10^{-18/20} e^{i70^\circ} = 0.12 e^{i70^\circ} = 0.04 + i0.11$



# Sensibilidad y sensibilidad complementaria - Solución

# Controlador de dos grados de libertad

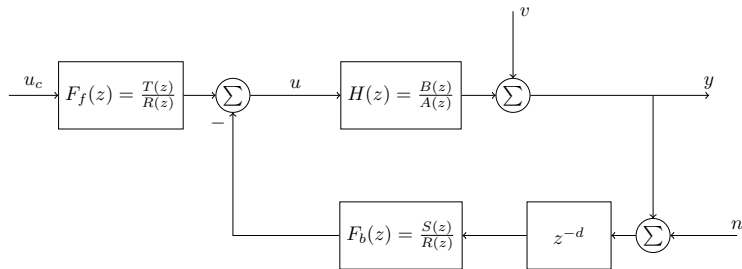


$$Y(z) = \frac{T(z)B(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} N(z)$$

## Controlador de dos grados de libertad

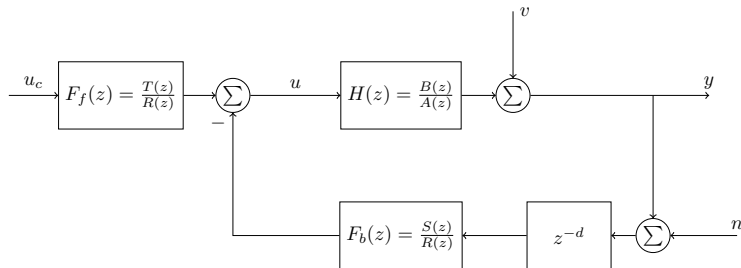
$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{T(z)B(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} V(z) \\ &\quad - \frac{S(z)B(z)}{z^d A(z)R(z) + B(z)S(z)} N(z) \\ &= \frac{T(z)B(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{A_c(z)A_o(z)} N(z), \quad \text{elige } T(z) = t_0 A_o(z) \\ &= \frac{t_0 B(z)z^d}{A_c(z)} U_c(z) + \frac{A(z)R(z)z^d}{A_c(z)A_o(z)} V(z) - \frac{S(z)B(z)}{A_c(z)A_o(z)} N(z) \end{aligned}$$

## Controlador de dos grados de libertad



$$Y(z) = \frac{t_0 B(z) z^d}{A_c(z)} U_c(z) + \frac{A(z) R(z) z^d}{A_c(z) A_o(z)} V(z) - \frac{S(z) B(z)}{A_c(z) A_o(z)} N(z)$$

## Controlador de dos grados de libertad



$$Y(z) = \frac{t_0 B(z) z^d}{A_c(z)} U_c(z) + \frac{A(z) R(z) z^d}{A_c(z) A_o(z)} V(z) - \frac{S(z) B(z)}{A_c(z) A_o(z)} N(z)$$

**Conclusiones** 1) Hay una separación parcial entre seguimiento de la referencia y rechazo a perturbaciones. 2) Se puede usar los polos correspondientes a las raíces de  $A_o(z)$  para afinar el rechazo a perturbaciones contra rechazo a ruido de medida.

## Procedimiento - asignación de polos

Dado modelo del proceso  $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ , y especificaciones de polos deseados del sistema en lazo cerrado  $A_{cl}(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_{n_c})$

1. Determina la ecuación diofántica

$$A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z)$$

y el orden adecuado del controlador, con  $\deg S = \deg R$ .

2. Factoriza el polinomio característico del lazo cerrado  $A_{cl}(z) = A_c(z)A_o(z)$ , donde  $n_{A_o} = n_R$ .
3. Determina polinomios  $R(z)$  y  $S(z)$  que satisficán

$$A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z)$$



## Procedimiento

Dado modelo del proceso  $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ , y especificaciones de polos deseados del sistema en lazo cerrado  $A_{cl}(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_{n_c})$

4. Elige

$$T(z) = t_0 A_o(z),$$

$$\text{donde } t_0 = \frac{A_c(1)}{B(1)}.$$

Resulta la ley de control

$$R(q)u(k) = T(q)u_c(k) - S(q)y(k).$$

y la respuesta en lazo cerrado a la señal de referencia

$$A_c(q)y(k) = t_0 B(q)u_c(k).$$

## Determinando el orden del controlador

Tenemos la ecuación diafónica

$$A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z) \quad (*)$$

y el controlador

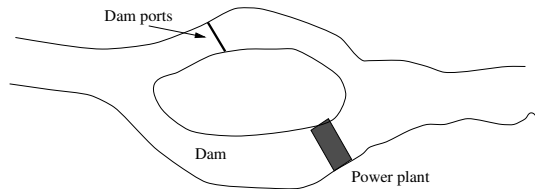
$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z^n + s_1 z^{n-1} + \dots + s_n}{z^n + r_1 z^{n-1} + \dots + r_n}$$

¿Cómo decidir el orden del controlador? Nota

- ▶ el controlador tiene  $n + n + 1 = 2 \deg R + 1$  parámetros desconocidos
- ▶ el lado izquierdo de  $(*)$  tiene el grado  $\deg(A(z)R(z)z^d + B(z)S(z)) = \deg A + \deg R + d$
- ▶ la ecuación diofántica da un número de ecuaciones (no-triviales) igual a su grado, al poner coeficientes de los dos lados iguales.

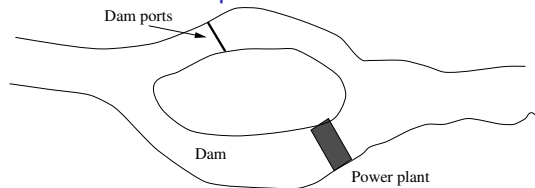
⇒ Elige  $\deg R$  que satisface  $2 \deg R + 1 = \deg A + \deg R + d$

## Ejemplo - Control de nivel de una presa



**Objetivo** Obtener un sistema en lazo cerrado con polos en  $z = 0.9$ .

## Ejemplo - Control de nivel de una presa



### Dinámica del proceso

Cambio en el nivel de agua

Cambio en flujo controlado

$$y(k) = y(k-1) - v(k-1) + u(k-2)$$

Cambio en flujos no controlados

**Actividad** ¿Cuál es la función de transferencia correcta?

$$1: H(z) = \frac{z}{z-1} \quad 2: H(z) = \frac{1}{z-1} \quad 3: H(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

## Ejemplo - Control de nivel de una presa

Dado proceso  $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{z(z-1)}$  y polos deseados en  $z = 0.9$ .

1. Ecuación diofántica  $A(z)R(z)z^d + B(z)S(z) = A_{cl}(z)$

$$z(z-1)R(z) + S(z) = A_{cl}(z)$$

El orden del controlador es

$$\deg R = \deg A + d - 1 = 2 - 1 = 1, \quad \Rightarrow \quad F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{s_0 z + s_1}{z + r_1}$$

2. Tenemos la ecuación diofántica

$$z(z-1)(z+r_1) + s_0 z + s_1 = A_{cl}(z)$$

El grado de  $A_{cl}(z)$  es 3. Eligimos  $A_o(z) = z$ , ( $\deg A_o = \deg R$ )

$$A_{cl}(z) = A_o(z)A_c(z) = z(z-0.9)^2$$

## Ejemplo - Control de nivel de una presa

### 3. De la ecuación diofántica

$$z(z-1)(z+r_1) + s_0z + s_1 = z(z-0.9)^2$$

$$z^3 + (r_1 - 1)z^2 - r_1z + s_0z + s_1 = z^3 - 1.8z^2 + 0.81z$$

Obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} z^2 & : & r_1 - 1 = -1.8 \\ z^1 & : & -r_1 + s_0 = 0.81 \\ z^0 & : & s_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 & = -0.8 \\ s_0 & = 0.01 \\ s_1 & = 0 \end{cases}$$

$$F_b(z) = \frac{0.01z}{z - 0.8}$$

## Ejemplo - Control de nivel de una presa

4. Tenemos  $A_o(z) = z$ , entonces

$$T(z) = t_0 A_o(z) = t_0 z$$

$$G_c(z) = \frac{T(z)B(z)}{A_o(z)A_c(z)} = \frac{t_0 B(z)}{A_c(z)}, \quad \text{queremos } G_c(1) = 1$$

$$t_0 = \frac{A_c(1)}{B(1)} = \frac{(1 - 0.9)^2}{1} = 0.01$$

Ley de control

$$R(q)u(kh) = T(q)u_c(kh) - S(q)y(kh)$$

$$(q - 0.8)u(kh) = 0.01 q u_c(kh) - 0.01 q y(kh)$$

$$u(kh + h) = 0.8u(kh) + 0.01u_c(kh + h) - 0.01y(kh + h)$$