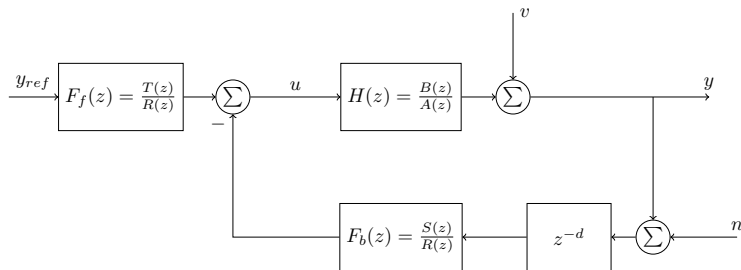


# Control computarizado - Asignación de polos, controlador incremental

Kjartan Halvorsen

July 16, 2020

# Controlador de dos grados de libertad



## Åström & Wittenmark problema 5.3

Dado sistema

$$H(z) = \frac{z + 0.7}{z^2 - 1.8z + 0.81}$$

Determina controlador de dos grados de libertad, dónde el polinomio característica del sistema en lazo cerrado, desde la señal de referencia a la salida sea

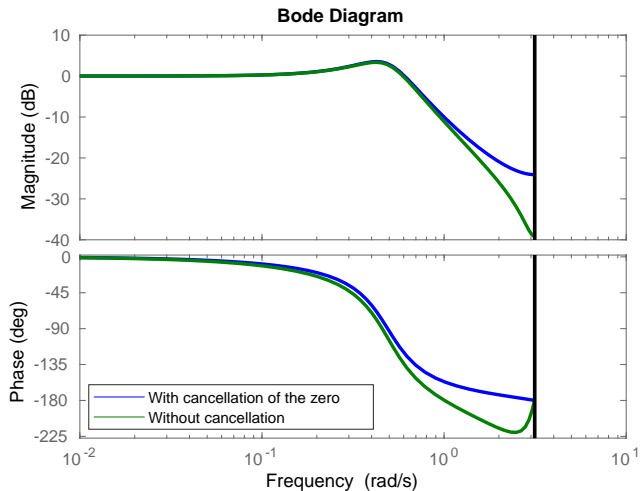
$$A_c(z) = z^2 - 1.5z + 0.7.$$

Pon los polos del observador en el origen (deadbeat observer). Considera tres casos

- (a) Control posicional **con** cancelación del cero del proceso
- (b) Control posicional **sin** cancelación del cero del proceso
- (c) Control **incremental** sin cancelación del cero del proceso

## ¿Por qué cancelar el cero?

Diagramas de Bode para los sistemas en lazo cerrado (seguimiento de referencia) con y sin cancelación del cero

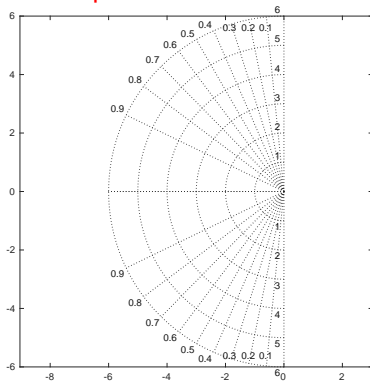


## Ejercicio preliminar 1

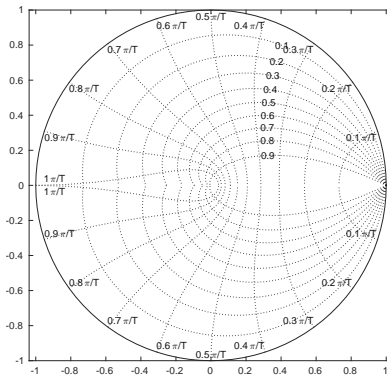
Dado sistema  $H(z) = \frac{z+0.7}{z^2-1.8z+0.81}$  y polinomio característico deseado  $A_c(z) = z^2 - 1.5z + 0.7$

**Actividad** Marca los polos del proceso  $H(z)$ , y los polos deseados del sistema en lazo cerrado, asumiendo  $h = 0.1$ .

plano s

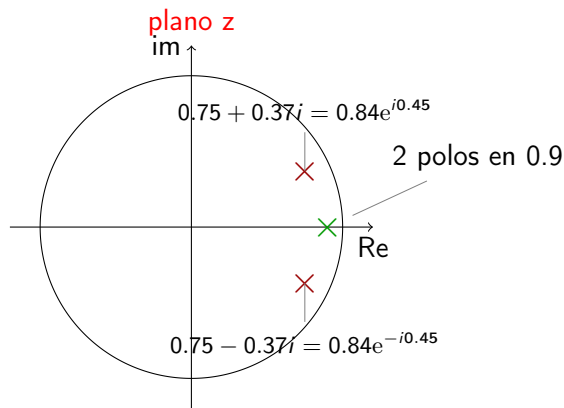
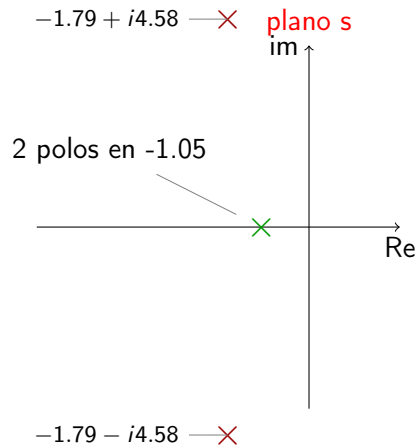


plano z



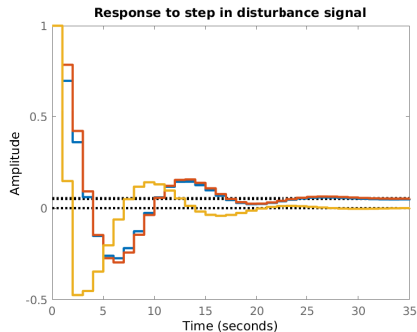
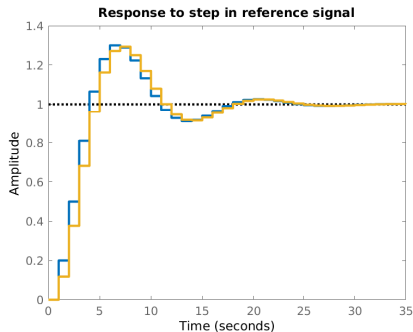
## Ejercicio preliminar 1 - Solución

Dado sistema  $H(z) = \frac{z+0.7}{z^2-1.8z+0.81} = \frac{z+0.7}{(z-0.9)^2}$  y polinomio característico deseado  $A_c(z) = z^2 - 1.5z + 0.7 = (z - 0.75 + i0.37)(z - 0.75 - i0.37)$ .



## Ejercicio preliminar 2

Cuál de las respuestas de sistema en lazo cerrado corresponde a (I) Control posicional **con** cancelación del cero del proceso, (II) Control posicional **sin** cancelación del cero del, (III) Control **incremental** sin cancelación del cero del proceso



# Asignación de los polos



## Caso (a) Controlador posicional con cancelación del cero

Dado sistema  $H(z) = \frac{z+0.7}{z^2-1.8z+0.81}$  y polinomio característico deseado  $A_c(z) = z^2 - 1.5z + 0.7$ .

1. **Orden del controlador** Eligimos el controlador

$$F_b(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{S(z)}{(z+1)\bar{R}(z)}$$

para que haya cancelación del cero. Ecuación diofantina

$$A(z)(z+0.7)\bar{R}(z) + (z+0.7)S(z) = (z+0.7)A_c(z)A_o(z)$$

$$A(z)\bar{R}(z) + S(z) = A_c(z)A_o(z) \quad (*)$$

Número de coeficientes desconocidos del controlador:  $n_{\bar{R}} + n_{\bar{R}} + 2$ . Número de ecuaciones de la ecuación diofantina:  $n_A + n_{\bar{R}}$ .  $\Rightarrow \quad n_{\bar{R}} = n_A - 2 = 2 - 2 = 0$

$$F_b(z) = \frac{s_0 z + s_1}{z + 0.7}$$

## Caso (a) Controlador posicional con cancelación del cero

2. **Polinomio del observador** Factorización de  $A_{cl}(z) = A_c(z)A_o(z)$ . Ecuación (\*) es de orden 2, igual que  $A_c(z)$ , entonces

$$A_o(z) = 1$$

.

## Caso (a) Controlador posicional con cancelación del cero

3. **Solución de la ecuación diofantina** Determina los polinomios  $R(z)$  y  $S(z)$ . La ecuación diofantina

$$(z^2 - 1.8z + 0.81) + s_0z + s_1 = z^2 - 1.5z + 0.7$$

nos da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} z^1 : & s_0 = -1.5 + 1.8 = 0.3 \\ z^0 : & s_1 = 0.7 - 0.81 = -0.11 \end{cases}$$

$$F_b(z) = \frac{0.3z - 0.11}{z + 0.7}$$

## Caso (a) Controlador posicional con cancelación del cero

### 4. El polinomio $T(z)$

$$F_f(z) = \frac{T(z)}{R(z)} = \frac{t_0 A_o(z)}{B(z)}$$

Función de transferencia del seguimiento a la referencia:

$$G_c(z) = \frac{\frac{T}{R} \frac{B}{A}}{1 + \frac{B}{A} \frac{S}{R}} = \frac{TB}{AR + BS} = \frac{t_0 B}{BA_c} = \frac{t_0}{A_c(z)}$$

Para obtener ganancia estática unitaria:

$$t_0 = A_c(1) = 0.2$$

Controlador completo

$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)} U_c(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z) = \frac{0.2}{z + 0.7} U_c(z) - \frac{0.3z - 0.11}{z + 0.7} Y(z)$$

## Caso (c) Controlador incremental sin cancelación del cero

Dado sistema

$$H(z) = \frac{z + 0.7}{z^2 - 1.8z + 0.81}$$

y polinomio característico deseado

$$A_c(z) = z^2 - 1.5z + 0.7.$$

1. **Orden del controlador**  $F_b(z) = \frac{S(z)}{(z-1)\bar{R}(z)}$ , con  $n_S = n_{\bar{R}} + 1$  nos da la ecuación diofantina

$$A(z)(z-1)\bar{R}(z) + B(z)S(z) = A_c(z)A_o(z)$$

Número de coeficientes desconocidos del controlador:  $n_{\bar{R}} + \bar{R} + 2$ . Número de ecuaciones de la ecuación diofantina:  $n_A + n_{\bar{R}+1} \Rightarrow n_{\bar{R}} = n_A + 1 - 2 = 1$

$$F_b(z) = \frac{s_0 z^2 + s_1 z + s_2}{(z-1)(z+r_1)}$$

## Caso (c) Controlador incremental sin cancelación del cero

2. **Polinomio del observador** Factorización de  $A_{cl}(z) = A_c(z)A_o(z)$ . La ecuación diofantina es de orden 4, y tenemos el polinomio característico deseado  $A_c(z) = z^2 - 1.5z + 0.7$ . Entonces

$$A_o(z) = z^2$$

## Caso (c) Controlador incremental sin cancelación del cero

### 3. Solución de la ecuación diofantina

$$(z^2 - 1.8z + 0.81)(z - 1)(z + r_1) + (z + 0.7)(s_0z^2 + s_1z + s_2) = z^2(z^2 - 1.5z + 0.7)$$

► El lado izquierdo

$$\begin{aligned} & (z^2 - 1.8z + 0.81)(z^2 + (r_1 - 1)z - r_1) + s_0z^3 + s_1z^2 + s_2z + 0.7s_0z^2 + 0.7s_1z + 0.7s_2 \\ & z^4 - 1.8z^3 + 0.81z^2 + (r_1 - 1)z^3 - 1.8(r_1 - 1)z^2 + 0.81(r_1 - 1)z - r_1z^2 + 1.8r_1z - 0.81r_1 \\ & z^4 + (r_1 + s_0 - 2.8)z^3 + (-2.8r_1 + 0.7s_0 + s_1 + 2.61)z^2 + (2.61r_1 + 0.7s_1 + s_2 - 0.81)z \\ & \quad + (-0.81r_1 + 0.7s_2) \end{aligned}$$

## Caso (c) Controlador incremental sin cancelación del cero

### 3. Solución de la ecuación diofantina

$$z^4 + (r_1 + s_0 - 2.8)z^3 + (-2.8r_1 + 0.7s_0 + s_1 + 2.61)z^2 + (2.61r_1 + 0.7s_1 + s_2 - 0.81)z + (-0.81r_1 + 0.7s_2) = z^4 - 1.5z^3 + 0.7z^2$$

Coeficientes iguales da las ecuaciones

$$\begin{cases} z^3 : & r_1 + s_0 = 2.8 - 1.5 \\ z^2 : & -2.8r_1 + 0.7s_0 + s_1 = -2.61 + 0.7 \\ z^1 : & 2.61r_1 + 0.7s_1 + s_2 = 0.81 \\ z^0 : & -0.81r_1 + 0.7s_2 = 0 \end{cases}$$

$$R(z) = (z - 1)(z + 0.45), \quad S(z) = 0.85z^2 - 1.25z + 0.52$$



## Caso (c) Controlador incremental sin cancelación del cero

### 4. El polinomio $T(z)$

$$F_f(z) = \frac{T(z)}{R(z)} = \frac{t_0 A_o(z)}{B(z)}, \quad G_c(z) = \frac{t_0 B(z)}{A_c(z)}, \quad G_c(1) = 1 \Rightarrow$$

$$t_0 = \frac{A_c(1)}{B(1)} = \frac{1 - 1.5 + 0.7}{1 + 0.7} = \frac{2}{17}$$

Controlador completo

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{T(z)}{R(z)} U_c(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z) \\ &= \frac{\frac{2}{17} z^2}{(z-1)(z+0.45)} U_c(z) - \frac{0.85z^2 - 1.25z + 0.52}{(z-1)(z+0.45)} Y(z) \end{aligned}$$

# La importancia de los polos del observador

Mybinder