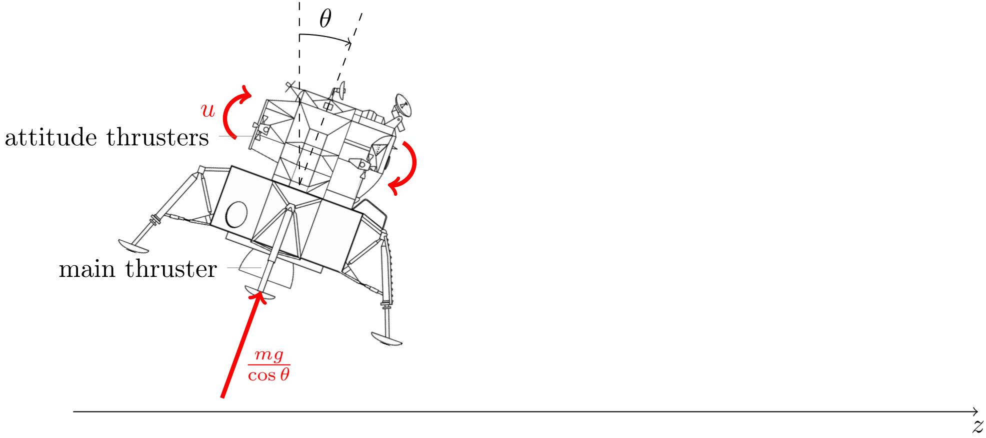
Control computarizado - Retroalimentación de estados

Kjartan Halvorsen

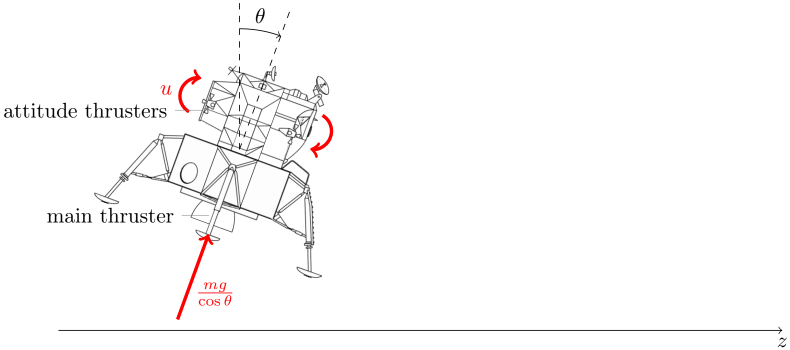
July 27, 2020

Ejemplo - El módulo lunar de Apollo



$$u(t) \longrightarrow \boxed{\frac{k_1}{s}} \xrightarrow{\dot{\theta}(t)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{\theta(t)} \boxed{k_2} \xrightarrow{\ddot{z}(t)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{\dot{z}(t)}$$

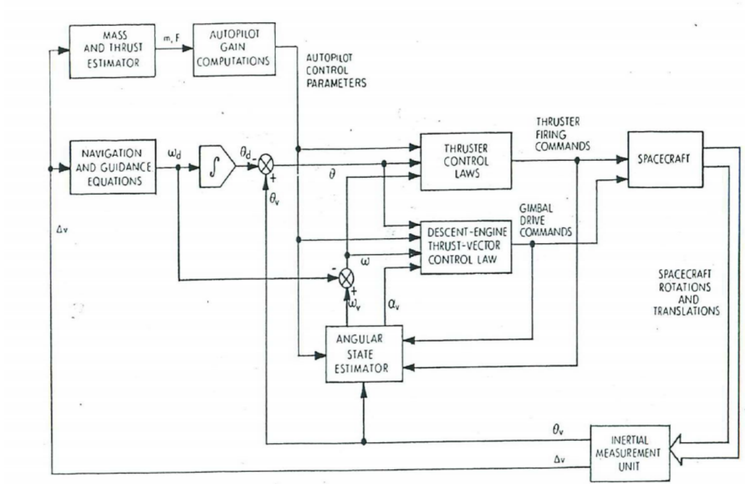
Ejemplo - El módulo lunar de Apollo



$$u(t) \longrightarrow \boxed{\frac{k_1}{s}} \xrightarrow{\dot{\theta}(t)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{\theta(t)} \boxed{k_2} \xrightarrow{\ddot{z}(t)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{\dot{z}(t)}$$

Actividad ¿Que sensores relevantes se puede usar para el control?

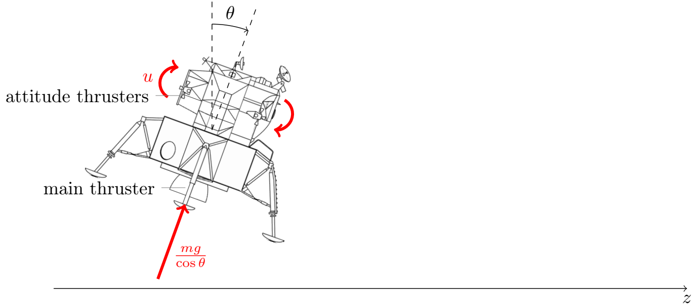
Ejemplo - El módulo lunar de Apollo



Information flow in the LM digital autopilot during descent engine powered flight

"Dynamics and control challenges during the Apollo project" MIT OCW

Ejemplo - El módulo lunar de Apollo



$$u(t) \longrightarrow \boxed{\frac{k_1}{s}} \xrightarrow{\dot\theta(t)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{\theta(t)} \boxed{k_2} \xrightarrow{\ddot z(t)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{\dot z(t)}$$

Variables del estado: $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot\theta & \theta & \dot z \end{bmatrix}^T$. Con dinamica

$$\begin{cases} \dot x_1 = \ddot\theta = k_1 u \\ \dot x_2 = \dot\theta = x_1 \\ \dot x_3 = \ddot z = k_2\theta = k_2 x_2 \end{cases}$$

Ejemplo - El módulo lunar de Apollo

Variables del estado: $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \theta & \dot{z} \end{bmatrix}^T$. Con dinamica

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \ddot{\theta} = k_1 u \\ \dot{x}_2 = \dot{\theta} = x_1 \\ \dot{x}_3 = \ddot{z} = k_2 \theta = k_2 x_2 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u$$

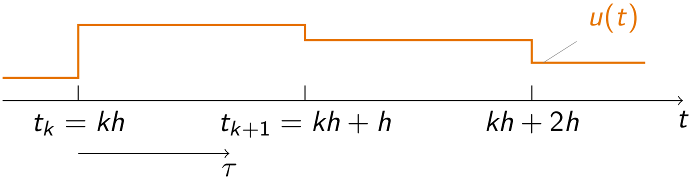
Matlab / Simulink

Discretización

Discretización

Solución general de un sistema lineal en espacio de estado

$$x(t_k + \tau) = \mathrm{e}^{A(\tau)} x(t_k) + \int_0^{\tau} \mathrm{e}^{As} B u((t_k + \tau) - s) ds$$



$$x(kh + h) = \mathrm{e}^{Ah} x(kh) + \int_0^{h} \mathrm{e}^{As} B u(kh + h - s) ds$$

$$= \underbrace{\mathrm{e}^{Ah}}_{\Phi(h)} x(kh) + \underbrace{\left(\int_0^{h} \mathrm{e}^{As} B ds \right)}_{\Gamma(h)} u(kh)$$

Discretización - La exponencial de una matriz

Matriz A cuadrada. Variable t escalar.

$$e^{At} = 1 + At + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots$$

Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{e^{At}\right\} = (sI - A)^{-1}$$

Discretización - Apollo LM

$$
\begin{aligned}
x(kh+h) &= \mathrm{e}^{Ah}x(kh) + \int_0^h \mathrm{e}^{As}Bu(kh+h-s)ds \\
&= \underbrace{\mathrm{e}^{Ah}}_{\Phi(h)}x(kh) + \underbrace{\left(\int_0^h \mathrm{e}^{As}Bds\right)}_{\Gamma(h)}u(kh)
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = 0
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\Phi(h) &= \mathrm{e}^{Ah} = 1 + Ah + A^2h^2/2 + \cdots \\
&=
\end{aligned}
$$

Discretización - Apollo LM - Solución

$$
\begin{aligned}
x(kh+h) &= \mathrm{e}^{Ah}x(kh) + \int_0^h \mathrm{e}^{As}Bu(kh+h-s)ds \\
&= \underbrace{\mathrm{e}^{Ah}}_{\Phi(h)}x(kh) + \underbrace{\left(\int_0^h \mathrm{e}^{As}Bds\right)}_{\Gamma(h)}u(kh)
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = 0
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\Phi(h) &= \mathrm{e}^{Ah} = 1 + Ah + A^2h^2/2 + \cdots \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} h + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{h^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 \\ \frac{h^2k_2}{2} & hk_2 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Discretización - Apollo LM

$$x(kh+h) = \mathrm{e}^{Ah}x(kh) + \int_0^h \mathrm{e}^{As}Bu(kh+h-s)ds$$

$$= \underbrace{\mathrm{e}^{Ah}}_{\Phi(h)}x(kh) + \underbrace{\left(\int_0^h \mathrm{e}^{As}Bds\right)}_{\Gamma(h)}u(kh)$$

$$\mathrm{e}^{As}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 \\ \frac{s^2k_2}{2} & sk_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \frac{k_2s^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(h) = \int_0^h \mathrm{e}^{As}Bds =$$

Discretización - Apollo LM - Solución

$$
\begin{aligned}
x(kh+h) &= \mathrm{e}^{Ah}x(kh) + \int_0^h \mathrm{e}^{As}Bu(kh+h-s)ds \\
&= \underbrace{\mathrm{e}^{Ah}}_{\Phi(h)}x(kh) + \underbrace{\left(\int_0^h \mathrm{e}^{As}Bds\right)}_{\Gamma(h)}u(kh) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 \\ \frac{h^2k_2}{2} & hk_2 & 1 \end{bmatrix} x(kh) + k_1 \begin{bmatrix} h \\ \frac{h^2}{2} \\ \frac{k_2h^3}{6} \end{bmatrix} u(kh)
\end{aligned}
$$

Estabilidad

Eigenvalores y eigenvectores

Definición Eigenvalores $\lambda \in \mathbb{R}$ y eigenvectores $v \in \mathbb{R}^n$ de una matriz $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son pares $(\lambda, v \neq 0)$ que satisfican

$$\Phi v = \lambda v$$

Estabilidad

El sistema

$$x(k+1) = \Phi x(k), \quad x(0) = x_0$$

es estable si $\lim_{t\to\infty} x(kh) = 0, \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n.$

Un requisito necessario y suficiente para estabilidad, es que todos los eigenvalores (valores característicos) de Φ están en el interior del círculo unitario.

Los eigenvalores de Φ son los polos del sistema.

Control por retroalimentación de estados

Retroalimentación de estados

Dado

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\
y(k) &= Cx(k)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

y medidas (o valores estimados) del vector de estado $x(k)$.

Reltroalimentación lineal de estados es la ley de control

$$
\begin{aligned}
u(k) = f\big((x(k), u_c(k)\big) &= -l_1 x_1(k) - l_2 x_2(k) - \cdots - l_n x_n(k) + l_0 u_c(k) \\
&= -Lx(k) + l_0 u_c(k),
\end{aligned}
$$

dónde

$$
L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_n \end{bmatrix}.
$$

Sustitoyende la ley de control en el modelo en espacio de estado (1) da

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= (\Phi - \Gamma L)\, x(k) + m\Gamma u_c(k) \\
y(k) &= Cx(k)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Asignación de polos por retroalimentación de estados

Dado ubicación deseada de los polos del lazo cerrado $p_1, p_2, \ldots, p_n$, correspondiente al polinomio característico deseado

$$a_c(z) = (z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots \alpha_n. \tag{3}$$

Retroalimentación de estados nos da el sistema

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (\Phi - \Gamma L)\, x(k) + l_0 \Gamma u_c(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{4}$$

con polinomio característico

$$\det\left(zI - (\Phi - \Gamma L)\right) = z^n + \beta_1(l_1, \ldots, l_n) z^{n-1} + \cdots \beta_n(l_1, \ldots, l_n). \tag{5}$$

Equipara los coeficientes de (3) con los de (5) para obtener sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \beta_1(l_1, \ldots, l_n) &= \alpha_1 \\ \beta_2(l_1, \ldots, l_n) &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ \beta_n(l_1, \ldots, l_n) &= \alpha_n \end{aligned}$$

Asignación de polos por retroalimentación de estados

El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \beta_1(l_1, \dots, l_n) &= \alpha_1 \\ \beta_2(l_1, \dots, l_n) &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ \beta_n(l_1, \dots, l_n) &= \alpha_n \end{aligned}$$

siempre es lineal en los parámetros del controlador, cuál nos da

$$ML^{\mathrm{T}} = \alpha,$$

dónde $\alpha^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$.

Asignación de polos y controlabilidad

Se puede verificar que la matriz de controlabilidad

$$W_c = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \cdots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}$$

es un factór de la matriz M

$$M = \bar{M} W_c.$$

Entonces, en general las ecuaciones

$$\bar{M} W_c L^{\mathrm{T}} = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad L^{\mathrm{T}} = W_c^{-1} \bar{M}^{-1} \alpha \tag{6}$$

solo tienen una solución si W_c es invertible, es decir cuando el sistema es *controlable*.

Nota que las ecuaciones (6) pueden tener soluciónes (numero infinito) cuando el sistema no es controlable, si α está en el espacio de columnas de M. Es decir, se puede escribir

$$\alpha = b_1 M_{:,1} + b_2 M_{:,2} + \cdots + b_{M:,m}, \;\; m < n$$

Asignación de polos por retroalimentación de estados

Dado ubicación deseada de los polos del lazo cerrado $p_1, p_2, \ldots, p_n$, correspondiente al polinomio característico deseado

$$a_c(z) = (z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots \alpha_n. \tag{7}$$

y sistema de espacio de estado en lazo cerrado

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (\Phi - \Gamma L)\, x(k) + l_0 \Gamma u_c(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{8}$$

Matlab (*control systems toolbox*) tiene dos métodos para calcular las ganancias L

1. Método de Ackerman

```
L = acker(Phi, Gamma, pd)
```

2. Método numericamente estable

```
L = place(Phi, Gamma, pd)
```

La ganancia l_0 de la referencia

El sistema de espacio de estado en lazo cerrado

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \underbrace{(\Phi - \Gamma L)}_{\Phi_c} x(k) + l_0 \Gamma u_c(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

tiene la solución en estado estacionario $(x(k+1) = x(k))$ con referencia constante $u_c(k) = u_{c,f}$

$$y_f = l_0 C(I - \Phi_c)^{-1} \Gamma u_{c,f}.$$

Queremos $y_f = u_{c,f}$,

$$\Rightarrow \qquad l_0 = \frac{1}{C(I - \Phi_c)^{-1}\Gamma}$$

Matlab

Actividad

En grupos:

1. Visualiza la atitúd (angulo θ en grados) del módulo lunar durante la simulación. Cuál es el angulo máximo?
2. Determina las ganancias $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}$ para control *dead-beat*. Es decir con todos los polos del sistema en lazo cerrado en el origen.
3. Simula el sistema en lazo cerrado con control dead-beat. Cuál es el angulo máximo del módulo lunar?
4. Cambia el periodo de muestreo de $h = 1$s a $h = 0.5$s. Cuál es el angulo máximo ahora, usando control dead-beat.