

# Control computarizado - Identificación de sistemas

Kjartan Halvorsen

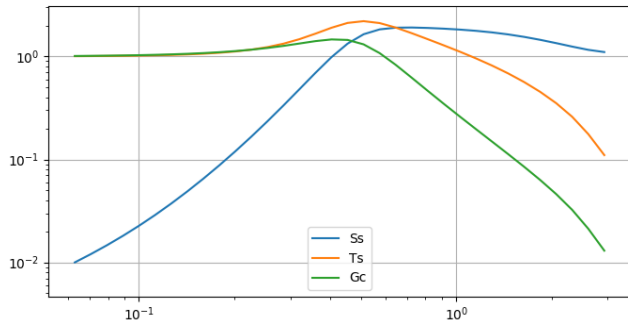
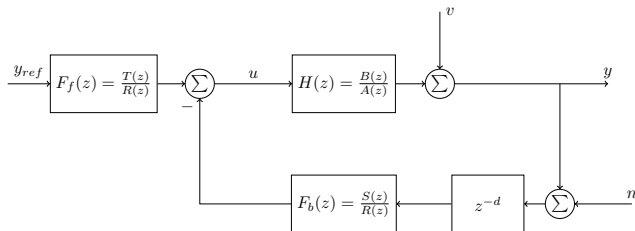
July 13, 2021

# Retroalimentación Examen parcial 2

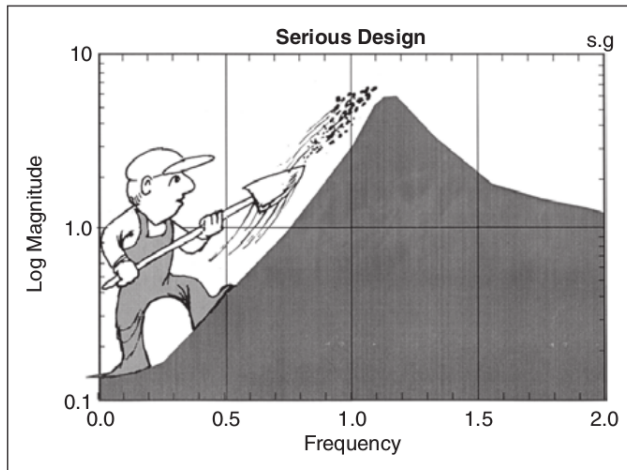
# Retroalimentación Examen parcial 2

- ▶ La mayoría dominan bien un gran parte de la materia
- ▶ Dos cosas a enfatizar
  1. Interpretación de funciones de transferencia (diagrama de Bode)
  2. Transformar especificaciones en el tiempo a ubicación de los polos

## Retroalimentación Examen parcial 2 - funciones de transferencia



## Retroalimentación Examen parcial 2 - sensibilidad



**Figure 3.** *Sensitivity reduction at low frequency unavoidably leads to sensitivity increase at higher frequencies.*

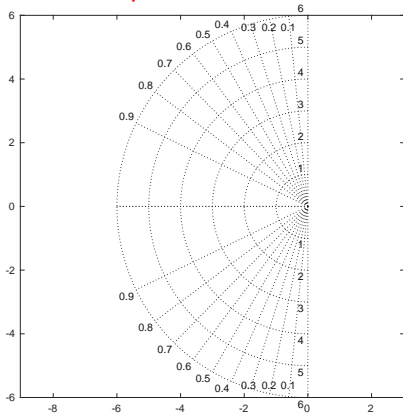
## Retroalimentación Examen parcial 2 - Ubicación de polos

Dado  $h = 0.01$ , y usando  $t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} < 0.01$

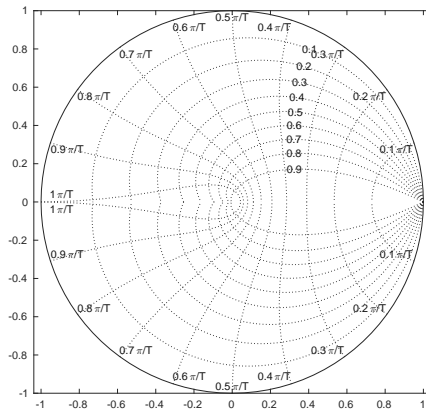
$$z = e^{sh} = e^{\operatorname{Re}(s)h} e^{i\operatorname{Im}(s)h}$$

$$|z| = |e^{sh}| = |e^{\operatorname{Re}(s)h}| < e^{-\zeta\omega_n h} = e^{-40 \cdot 0.01} = 0.67$$

plano s

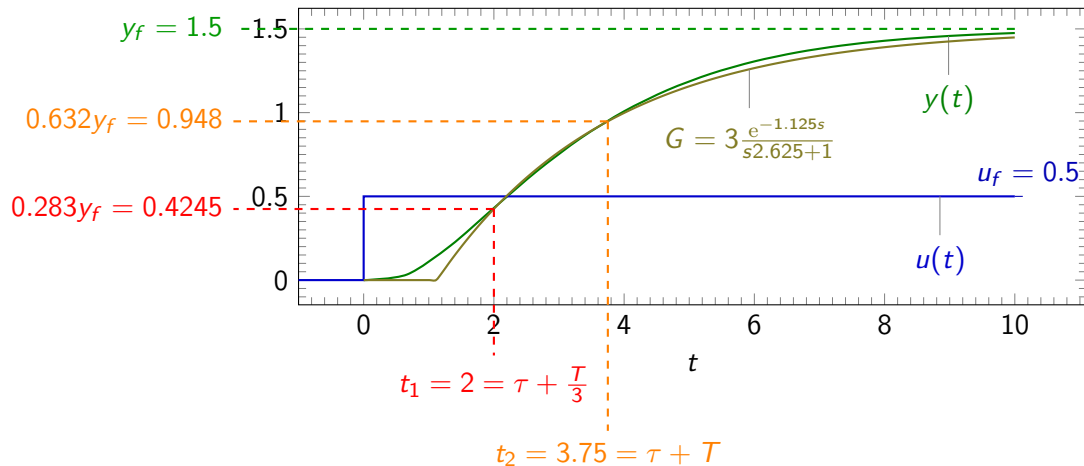


plano z



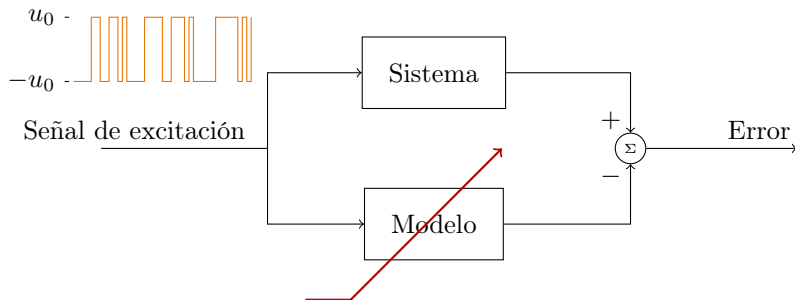
# Identificación de sistemas

# Identificación de sistemas





# Identificación de sistemas



## Ejemplo - Modelo autoregresivo (AR)

## Modelo autoregresivo (AR)

Dado una secuencia discreta observada  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , y el modelo autoregresivo

$$y(k+1) = -ay(k) + e(k+1),$$

dónde  $e(k)$  es una secuencia discreta de ruido blanco.

**Objetivo** Estimar el parametro  $a$ .

1. Forma el predictor de un paso adelante

$$\hat{y}_{k+1} = -ay_k = -y_k a = \varphi_{k+1} \theta,$$

y el error de predicción

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - \varphi_k \theta$$

## Modelo autoregresivo (AR)

Dado una secuencia discreta observada  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , y el modelo autoregresivo  $y(k+1) = -ay(k) + e(k+1)$ , donde  $e(k)$  es una secuencia discreta de ruido blanco.

**Objetivo** Estimar el parametro  $a$ .

2. Reune todas las observaciones  $y_k$  y predicciones  $\hat{y}_k$  en forma vectoral

$$\begin{aligned}\epsilon &= \begin{bmatrix} \epsilon_2 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \vdots \\ \hat{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -y_1 a \\ -y_2 a \\ \vdots \\ -y_{N-1}^T \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi_2^T \theta \\ \varphi_3^T \theta \\ \vdots \\ \varphi_N^T \theta \end{bmatrix} \\ &= y - \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix}}_{\Phi} \theta = y - \Phi \theta\end{aligned}$$

## Modelo autoregresivo (AR)

Dado una secuencia discreta observada  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , y el modelo autoregresivo  $y(k+1) = -ay(k) + e(k+1)$ , donde  $e(k)$  es una secuencia discreta de ruido blanco.

**Objetivo** Estimar el parametro  $a$ .

3. Obtiene el estimado de mínimos cuadrados

$$\begin{aligned}\theta_{LS} &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y \\ &= \left( \begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & \cdots & -y_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ \vdots \\ -y_{N-1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & \cdots & -y_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\sum_{k=1}^{N-1} y_k y_{k+1}}{\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2}\end{aligned}$$

## Computación de la solución de mínimos cuadrados

Dado error de predicción en forma vectoral para sistema de orden  $n \in y - \Phi\theta$ . Forma el sistema de ecuaciones

$$\Phi\theta = y$$
$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^T \\ \varphi_{n+2}^T \\ \varphi_{n+3}^T \\ \varphi_{n+4}^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ y_{n+3} \\ y_{n+4} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Resuelva las ecuaciones usando métodos numericamente robustos de algebra lineal, por ejemplo factorización L-U. En matlab se escribe

```
theta_LS = Phi \ y
```

# Ejemplo numerico

Mybinder

## Model AR de orden $n$

Dado una secuencia discreta observada  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , y el modelo autoregresivo

$$A(z)Y(z) = z^n E(z) \quad \Leftrightarrow \quad A(q)y(k) = q^{n-1} e(k)$$

$$(q^n + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \dots + a_n)y(k) = q^n e(k)$$

$$(q + a_1 + a_2 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n+1})y(k) = q e(k)$$

$$y(k+1) + a_1 y(k) + a_2 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n+1) = e(k+1)$$

$$y(k+1) = -a_1 y(k) - a_2 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n+1) + e(k+1)$$

dónde  $e(k)$  es una secuencia discreta de ruido blanco.

**Objetivo** Estimar los parametro  $a_1, a_2, \dots, n$ .



## Model AR de orden $n$

Dado una secuencia discreta observada  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , y el modelo autoregresivo  $y(k+1) = -a_1y(k) - a_2y(k-1) - \dots - a_ny(k-n+1) + e(k+1)$ .

1. Forma el predictor de un paso adelante

$$\hat{y}_{k+1} = -a_1y_k - a_2y_{k-1} - \dots - a_ny_{k-n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -y_k & -y_{k-1} & \dots & -y_{k-n+1} \end{bmatrix}}_{\varphi_{k+1}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\theta}$$

y el error de predicción

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - \varphi_k^T \theta$$

## Model AR de orden $n$

Dado una secuencia discreta observada  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , y el modelo autoregresivo  $y(k+1) = -a_1y(k) - a_2y(k-1) - \dots - a_ny(k-n+1) + e(k+1)$ .

2. Reune todas las observaciones  $y_k$  y predicciones  $\hat{y}_k$  en forma vectoral

$$\begin{aligned}\epsilon &= \begin{bmatrix} \epsilon_{n+1} \\ \epsilon_{n+2} \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}_{n+1} \\ \hat{y}_{n+2} \\ \vdots \\ \hat{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^T \theta \\ \varphi_{n+2}^T \theta \\ \vdots \\ \varphi_N^T \theta \end{bmatrix} \\ &= y - \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^T \\ \varphi_{n+2}^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix}}_{\Phi} \theta = y - \Phi \theta\end{aligned}$$

## Model AR de orden $n$

Dado una secuencia discreta observada  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , y el modelo autoregresivo  $y(k+1) = -a_1y(k) - a_2y(k-1) - \dots - a_ny(k-n+1) + e(k+1)$ .

- Obtiene el estimado de mínimos cuadrados, que es

$$\theta_{LS} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y$$

formando y resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\Phi \theta = y$$
$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^T \\ \varphi_{n+2}^T \\ \varphi_{n+3}^T \\ \varphi_{n+4}^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ y_{n+3} \\ y_{n+4} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

## Modelo autoregresivo (AR) - Ejercicio

Dado una secuencia discreta observada  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , y el modelo autoregresivo de segunda orden

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) = e(k+2),$$

dónde  $e(k)$  es una secuencia discreta de ruido blanco.

**Actividad** Forma las ecuaciones

$$\Phi\theta = y$$

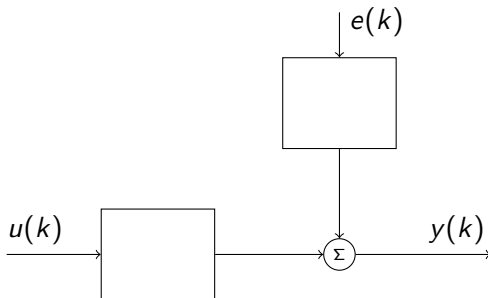
## Modelo AutoRegresivo con variables exógenas (ARX)

Dado señal discreta de entrada de un sistema  $u(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  y observaciones de la respuesta  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , y el modelo ARX

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + e(k + n),$$

dónde  $e(k)$  es una secuencia discreta de ruido blanco.

**Actividad** Llena los bloques



# Model AutoRegresivo con variables eXógenas (ARX) - solución

## Model ARX de orden $n$

Dado señal discreta de entrada de un sistema  $u(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  y observaciones de la respuesta  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , y el modelo ARX

$A(q)y(k) = B(q)u(k-d) + q^n e(k)$  con  $n$  polos,  $m$  ceros y retraso de  $d$  pasos

$$A(z)Y(z) = B(z)z^{-d}U(z) + z^n E(z) \quad \Leftrightarrow \quad A(q)y(k) = B(q)q^{-d}u(k) + q^n e(k)$$

## Model ARX de orden $n$

Dado señal discreta de entrada de un sistema  $u(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  y observaciones de la respuesta  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , y el modelo ARX

$A(q)y(k) = B(q)u(k-d) + q^n e(k)$  con  $n$  polos,  $m$  ceros y retraso de  $d$  pasos

$$A(z)Y(z) = B(z)z^{-d}U(z) + z^n E(z) \quad \Leftrightarrow \quad A(q)y(k) = B(q)q^{-d}u(k) + q^n e(k)$$

$$(q^n + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \dots + a_n)y(k) = (b_0 q^{m-d} + b_1 q^{m-d-1} + \dots + b_m q^{-d})u(k) + q^n e(k)$$

**Objetivo** Estimar los parametro  $a_1, a_2, \dots, n, b_0, b_1, \dots, b_m$ .



## Model ARX de orden $n$

$$A(z)Y(z) = B(z)z^{-d}U(z) + z^n E(z) \quad \Leftrightarrow \quad A(q)y(k) = B(q)q^{-d}u(k) + q^n e(k)$$

$$(q^n + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \dots + a_n)y(k) = (b_0 q^{m-d} + b_1 q^{m-d-1} + \dots + b_m q^{-d})u(k) + q^n e(k)$$

$$(q + a_1 + a_2 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n+1})y(k) = (b_0 q^{m-n+1} + b_1 q^{m-n} + \dots + b_m q^{-n+1})q^{-d}u(k) + q e(k)$$

## Model ARX de orden $n$

$$A(z)Y(z) = B(z)z^{-d}U(z) + z^n E(z) \quad \Leftrightarrow \quad A(q)y(k) = B(q)q^{-d}u(k) + q^n e(k)$$

$$(q^n + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \dots + a_n)y(k) = (b_0 q^{m-d} + b_1 q^{m-d-1} + \dots + b_m q^{-d})u(k) + q^n e(k)$$

$$(q + a_1 + a_2 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n+1})y(k) = (b_0 q^{m-n+1} + b_1 q^{m-n} + \dots + b_m q^{-n+1})q^{-d}u(k) + q e(k)$$

$$y(k+1) = -a_1 y(k) - \dots - a_n y(k-n+1) + b_0 u(k+m-n-d+1) + \dots + b_m u(k-n-d+1) + e(k+1)$$

## Model ARX de orden $n$

Dado señal discreta de entrada de un sistema  $u(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  y observaciones de la respuesta  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , el modelo ARX

$A(q)y(k) = B(q)u(k-d) + q^n e(k)$  con  $n$  polos,  $m$  ceros y retraso de  $d$  pasos

### Predictor

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+1) = & -a_1 y(k) - \dots - a_n y(k-n+1) \\ & + b_0 u(k+m-n-d+1) + \dots + b_m u(k-n-d+1) + e(k+1)\end{aligned}$$

**Objetivo** Estimar los parametro  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ .

# Ejemplo y tarea

Ejercicios

Tarea