Control Computarizado - La transformada z

Kjartan Halvorsen

2020-07-02

El mundo según el controlador discreto

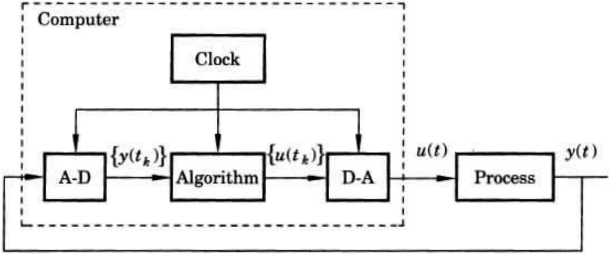


Figure 1.1 Schematic diagram of a computer-controlled system.

Sistemas muestreados no son invariantes en el tiempo continuo

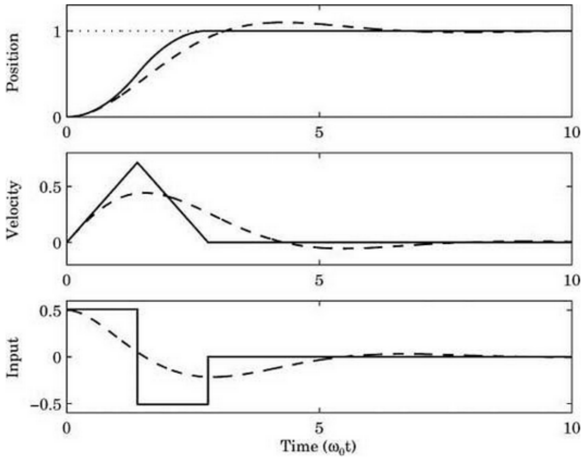


Figure 1.9 Simulation of the disk arm servo with deadbeat control (solid). The sampling period is $h = 1.4/\omega_0$. The analog controller from Example 1.2 is also shown (dashed).

Sistemas LTI discretos

$$u(k) \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow y(k)$$

Caso general (no-causal)

$$y(k) = g * u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)u(k-n)$$

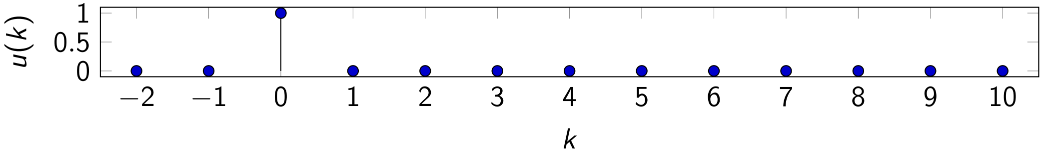
Caso causal

$$y(k) = g * u = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)u(k-n)$$

$g(k)$ se llama la sequencia de ponderación.

Respuesta al impulso

Si la señal de entrada es un impulso unitario



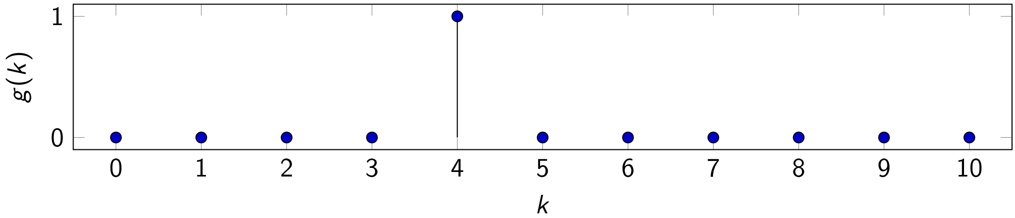
$$y(k) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\delta(k-n) = g(k)$$

La respuesta de un sistema LSI discreta causal es una suma de valores previod de la señal de entreda

$$y(k) = g * u = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)u(k-n)$$

La sequencia de ponderación $g(k)$ es también la respuesta al impulso del sistema.

Actividad Cuál es la respuesta del sistema si la respuesta al impulse es como abajo



$$y(k) =$$

Eigenfunciónes de sistemas LTI discretos

Si la señal de entrada al sistema es una función exponencial compleja

$$u(k) = z_1^k, \quad z_1 \in \mathbb{C}$$

la respuesta será también una función exponencial compleja de la misma forma

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{n=0}^{\infty} g(n)u(k-n) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)z_1^{k-n} = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)z_1^k z_1^{-n} \\ &= z_1^k \sum_{n=0}^{\infty} g(n)z_1^{-n} = z_1^k G(z_1). \end{aligned}$$

La transformada de Laplace

Definición (ecuación de análisis)

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}dt$$

Transformada inversa (ecuación de síntesis)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\,ds$$

La transformada z

Definición (ecuación de análisis)

$$F(z) = \mathcal{Z}\left\{f(kh)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh) z^{-k}$$

Transformada inversa (ecuación de síntesis)

$$f(kh) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{r} F(z) z^{k-1}\, dz$$

La transformada de Laplace de una señal muestreada

$$f_s(t) = f(t)m(t) = f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kh) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-kh) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)\delta(t-kh)$$

$$\begin{aligned}
F_s(s) = \mathcal{L}\{f_s(t)\} &= \int_0^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)\delta(t-kh)\right)\mathrm{e}^{-st}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} f(kh)\delta(t-kh)\mathrm{e}^{-st}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh)\mathrm{e}^{-skh} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f(kh)\left(\mathrm{e}^{-sh}\right)^k
\end{aligned}$$

La transformada de Laplace de una señal muestreada

Nota:

$$F_s(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh)\left(\mathrm{e}^{-sh}\right)^k \quad \text{transformada de Laplace}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh) z^{-k} \quad \text{transformada z}$$

La transformada z de una señal muestreada corresponde a su transformada de Laplace bajo la relación

$$z = \mathrm{e}^{sh}$$

entre el dominio s de la transformada de Laplace y el dominio z de la tranformada z.

La transformada más importante

$$f(kh) = \alpha^{kh}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(kh)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{kh} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha^{h}\right)^{k} z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^{h}}{z}\right)^{k} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha^{h}}{z}} = \frac{z}{z - \alpha^{h}}, \quad |\frac{\alpha^{h}}{z}| < 1$$

$$\alpha^{kh} \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{z}{z - \alpha^{h}}$$

Otras parejas

Actividad (manda por Remind) Usa la definición de la transformada z

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(kh)\} = \sum_{0}^{\infty} f(kh) z^{-k}$$

o el resultado

$$\alpha^{kh} \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{z}{z - \alpha^h}$$

para calcular las siguientes transformadas de señales derechas (son zero para argumentos negativos)

$f(kh)$	$F(z)$
a) $f(kh) = \beta$	
b) $f(kh) = (-1)^k$	
c) $f(kh) = \mathrm{e}^{i\omega_1 kh}$	
d) $f(kh) = \delta(k-3)$	
e) $f(kh) = \cos(\omega_1 kh)$	

Otras parejas - solución

$$F(z) = \mathcal{Z}\left\{f(kh)\right\} = \sum_{0}^{\infty} f(kh) z^{-k}$$

o el resultado

$$\alpha^{kh} \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{z}{z - \alpha^h}$$

$f(kh)$	$F(z)$	Comentario
a) $f(kh) = \beta$	$\beta \frac{z}{z-1}$	$f(kh) = \beta(1)^{kh}$
b) $f(kh) = (-1)^k$	$\frac{z}{z+1}$	$\alpha^h = -1$
c) $f(kh) = \mathrm{e}^{i\omega_1 kh}$	$\frac{z}{z-\mathrm{e}^{i\omega_1 h}}$	
d) $f(kh) = \delta(k-3)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \delta(k-3) z^{-k} = z^{-3}$	
e) $f(kh) = \cos(\omega_1 kh)$	$\frac{z(z-\cos\omega_1 h)}{z^2-2\cos(\omega_1 h)z+1}$	$\cos\omega_1 h = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\omega_1 h} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i\omega_1 h}$

Propiedades básicas de la transformada z

Table 2.2 Some properties of the z-transform.

1. **Definition.**
$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh) z^{-k}$$

2. **Inversion.**
$$f(kh) = \frac{1}{2\pi i} \oint F(z) z^{k-1} dz$$

3. **Linearity.**
$$\mathcal{Z}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha \mathcal{Z} f + \beta \mathcal{Z} g$$

4. **Time shift.**
$$\mathcal{Z}\{q^{-n} f\} = z^{-n} F$$
$$\mathcal{Z}\{q^{n} f\} = z^{n}(F - F_1) \text{ where } F_1(z) = \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} f(jh) z^{-j}$$

5. **Initial-value theorem.**
$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

6. **Final-value theorem.**
If $(1 - z^{-1})F(z)$ does not have any poles on or outside the unit circle, then $\lim_{k \to \infty} f(kh) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) F(z)$.

7. **Convolution.**
$$\mathcal{Z}\{f * g\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{n=0}^{k} f(n) g(k-n)\right\} = (\mathcal{Z} f)(\mathcal{Z} g)$$

Solución de sistemas discretos

Aplicando la transformada z a la ecuación en diferencias

$$(\mathrm{q}^2 + a_1\,\mathrm{q} + a_2)y_k = \left(b_0\,\mathrm{q}^2 + b_1\,\mathrm{q} + b_2\right) u_k$$

da

$$\begin{aligned} z^2Y - z^2y(0) - zy(1) + a_1zY - a_1zy(0) + a_2Y = \\ b_0z^2U - b_0z^2u(0) - b_0zu(1) + b_1zU - b_1zu(0) + b_2U \end{aligned}$$

$$Y(z) = \underbrace{\frac{\left(y(0) - b_0u(0)\right)z^2 + \left(y(1) + a_1y(0) - b_0u(1) - b_1u(0)\right)z}{z^2 + a_1z + a_2}}_{\text{respuesta transiente}}$$

$$+ \underbrace{\underbrace{\frac{b_0z^2 + b_1z + b_2}{z^2 + a_1z + a_2}}_{\text{función de transferencia}} U(z)}_{\text{respuesta a la señal de entrada}}$$

Solución de sistemas discretos

In general, la respuesta de un LTI discreto

$$\left(\mathrm{q}^n + a_1 \mathrm{q}^{n-1} + \cdots + a_n\right) y(k) = \left(b_0 \mathrm{q}^m + b_1 \mathrm{q}^{m-1} + \cdots + b_m\right) u(k)$$

es

$$Y(z) = \frac{\beta(z)}{A(z)} + \frac{B(z)}{A(z)} U(z)$$

Cuando el sistema está inicialmente relajado:

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) = G(z) U(z)$$

Convolución en dominio de tiempo es multiplicación en dominio de z

$$\mathcal{Z}\left\{g * u)\right\} = \mathcal{Z}\left\{g(kh)\right\}\mathcal{Z}\left\{u(kh)\right\} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} g(kh)z^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} u(kh)z^{-k}\right)$$

$$\xrightarrow{u(kh)} \boxed{G(z)} \xrightarrow{y(kh)}$$

$$y(kh) = g(kh) * u(kh)$$

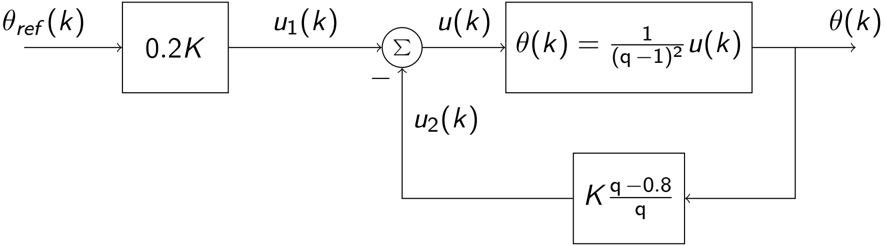
$$\mathcal{Z}\left\{y(kh)\right\} = \mathcal{Z}\left\{g(kh) * u(kh)\right\}$$

$$Y(z) = G(z)U(z).$$

La transformada z juega el mismo papel para sistemas discretos, como juega la transformada de Laplace para sistemas continuosas!

Ejemplo: Controlador discreto para el brazo del disco duro

Usando $J = 1$ y $h = 1$.

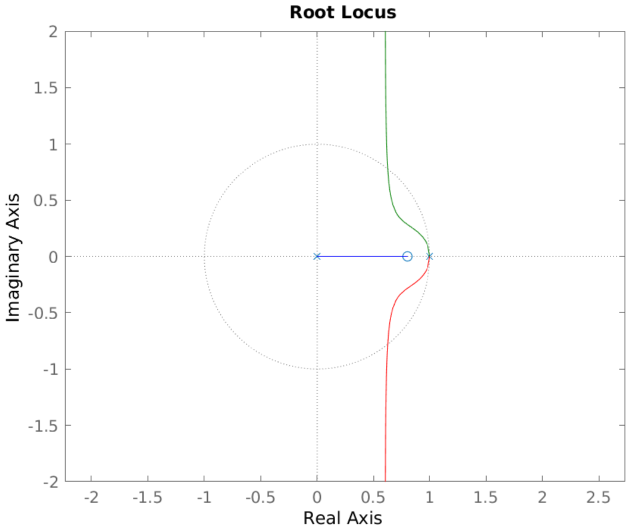


Ecuación en diferencias para el sistema de lazo cerrado (usando $K = 0.5$):

$$\theta(k+2) - 2\theta(k+1) + \theta(k) = 0.1\theta_{ref}(k) - 0.5\big(\theta(k) - 0.8\theta(k-1)\big)$$

$$\theta(k+3) - 2\theta(k+2) + 1.5\theta(k+1) - 0.4\theta(k) = 0.1\theta_{ref}(k+1)$$

Ejemplo: Controlador discreto para el brazo del disco duro



Ejemplo: Controlador discreto para el brazo del disco duro

Calcula el respuesta a un escalón unitario en $\theta_{ref}(k)$! Tenemos

$$\theta(k+3) - 2\theta(k+2) + 1.5\theta(k+1) - 0.4\theta(k) = 0.1\theta_{ref}(k+1)$$

Tomando la transformada z

$$(z^3 - 2z^2 + 1.5z - 0.4)\Theta(z) = 0.1z\Theta_{ref}(z) = 0.1\frac{z^2}{z-1}$$

$$\Theta(z) = 0.1\frac{z^2}{(z-1)(z^3 - 2z^2 + 1.5z - 0.4)}$$

$$\theta(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{\Theta(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{0.1\frac{z^2}{(z-1)(z^3 - 2z^2 + 1.5z - 0.4)}\right\}$$

Ejemplo: Controlador discreto para el brazo del disco duro

Solución usando expansión de fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
\Theta(z) &= 0.1\frac{z^2}{(z-1)(z^3-2z^2+1.5z-0.4)} \\
&= 0.1\frac{z^2}{(z-1)(z-0.62)(z-0.69+0.41i)(z-0.69-0.41i)} \\
&= 0.1\frac{z^2}{(z-1)(z-0.62)(z^2-1.38z+0.64)} \\
&= \frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-0.62}+\frac{Cz+D}{z^2-1.38z+0.64}
\end{aligned}$$

$$A = \lim_{z\to 1}(z-1)\Theta(z) = 1.01, \quad etc.$$

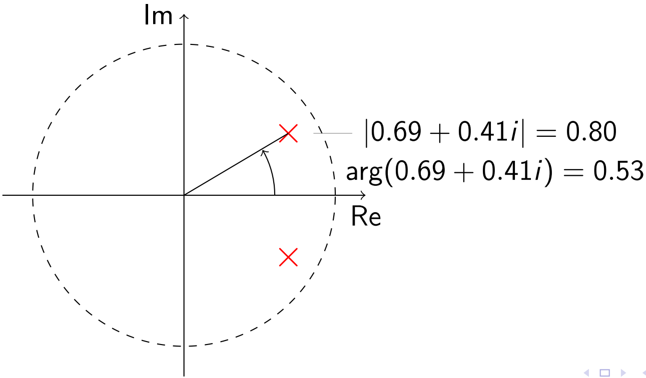
$$\Theta(z) = \frac{1.01}{z-1} - \frac{0.60}{z-0.62} + \frac{0.03-0.41z}{z^2-1.38z+0.64}$$

Ejemplo: Controlador discreto para el brazo del disco duro

$$\Theta(z) = \frac{1.01}{z-1} - \frac{0.60}{z-0.62} + \frac{0.03}{z^2 - 1.38z + 0.64} - \frac{0.41z}{z^2 - 1.38z + 0.64}$$

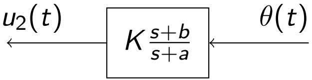
Aplicando la transformada z inversa (ayuda de Wolfram) para cada uno de los terminos

$$\theta(k) = 1.01u_s(k-1) - 0.60(0.62)^{k-1} - 0.05(0.8)^k\Big(\cos(0.53k) + 19.9\sin(0.53k)\Big)$$



Ejercicio

La ecuación en diferencias para el compensador *lead* $F(s) = K\frac{s+b}{s+a}$ que vímos en la primera clase



era (con los valores $a = 8,\ b = 1,\ h = 0.1,\ K = 1$)

$$u_2(k+1) - 0.2u_2(k) = \theta(k+1) - 0.9\theta(k)$$

Calcula la respuesta del sistema a una señal escalón unitario.