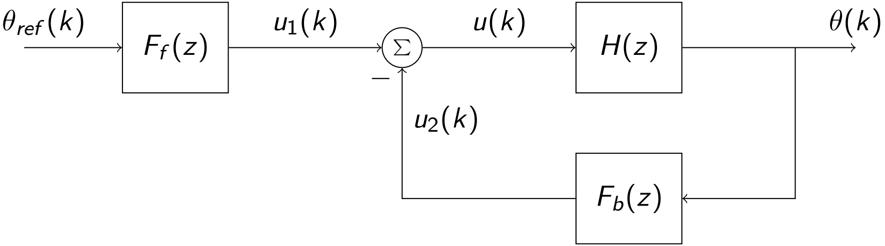
Control Computarizado - Estabilidad relativa de sistemas discretas

Kjartan Halvorsen

2020-07-07

Algebra en diagramas de bloque



Usando

$$U(z) = U_1(z) - U_2(z) = F_f(z)\Theta_{ref}(z) - F_b(z)\Theta(z), \quad \text{y}$$

$$\Theta(z) = H(z)U(z), \quad \text{obtenemos}$$

$$\Theta(z) = \underbrace{\frac{F_f(z)H(z)}{1 + F_b(z)H(z)}}_{H_c z} \Theta_{ref}(z).$$

Estabilidad del sistem an lazo cerrado

$$\Theta(z) = \underbrace{\frac{F_f(z)H(z)}{1 + F_b(z)H(z)}}_{H_c z} \Theta_{ref}(z).$$

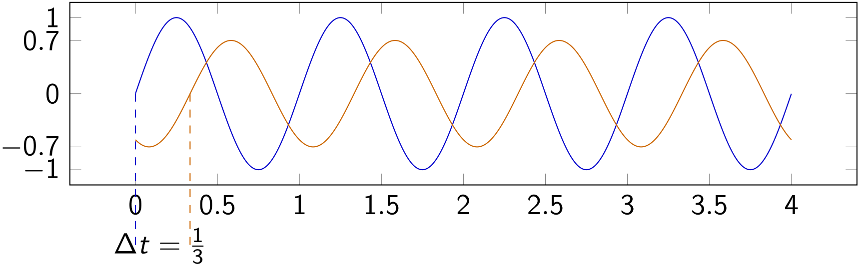
Estabilidad requiere que todos los polos del sistema, es decir las soluciones de la ecuación característica

$$1 + F_b(z)H(z) = 0$$

están en el interior del circulo unitario del plano z.

Sinusoide entra - sinusoide sale

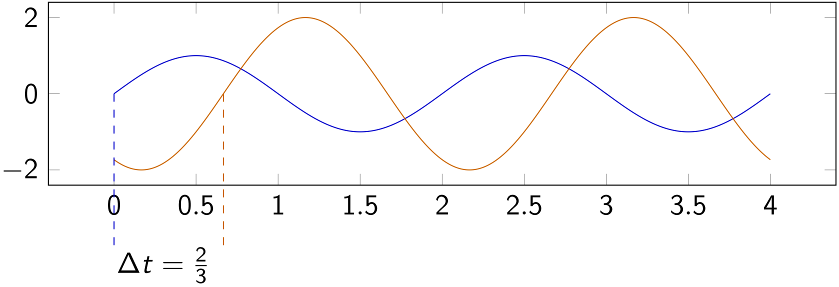
$$u(t) = \sin(\omega_1 t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t) = |G(i\omega_1)| \sin\left(\omega_1 t + \arg G(i\omega_1)\right)$$



$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi,\ |G(i\omega_1)| = 0.7,\ \arg G(i\omega_1) = -\omega_1 \Delta t = -2\pi \frac{1}{3} = -\frac{2\pi}{3}$$

Sinusoide entra - sinusoide sale

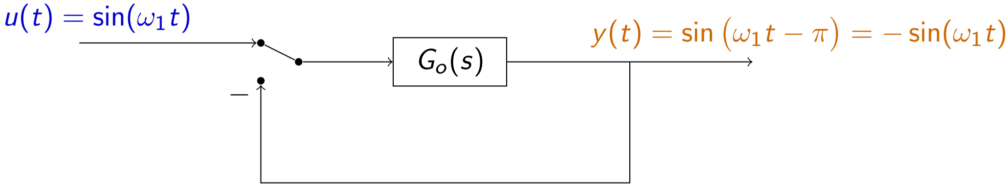
$$u(t) = \sin(\omega_1 t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t) = |G(i\omega_1)| \sin\left(\omega_1 t + \arg G(i\omega_1)\right)$$



$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \qquad , \; |G(i\omega_1)| = \qquad , \; \arg G(i\omega_1) = -\omega_1 \Delta t =$$

Si el cambio de fase es π

$$G_o(i\omega_1) = -1, \; |G_o(i\omega_1)| = 1, \; \arg G_o(i\omega_1) = -\pi$$



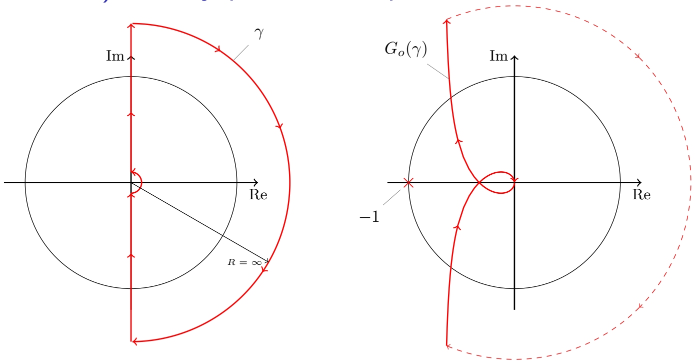
Función de transferencia del sistema de lazo cerrado: $G_c(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}$

Queremos

$$1 + G_o(i\omega) \neq 0, \quad \forall \omega$$

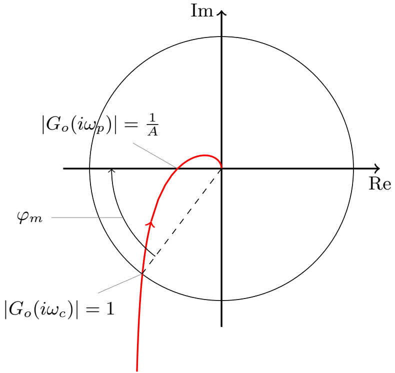
Si no, el sistema en lazo cerrado tendrá polos en el eje imaginario.

Criterion (simplificado) de Nyquist en el plano s



Si la ganancia del lazo abierto (*loop gain*) $G_o(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho (ningun polo inestable), entonces el sistem en lazo cerrado será estable si la curva de Nyquist **no rodea el punto** $s = -1$. El punto $s = -1$ debe quedarse al lado izquierdo (afuera) de la curva de Nyquist cuando "caminamos" a lo largo de la curva.

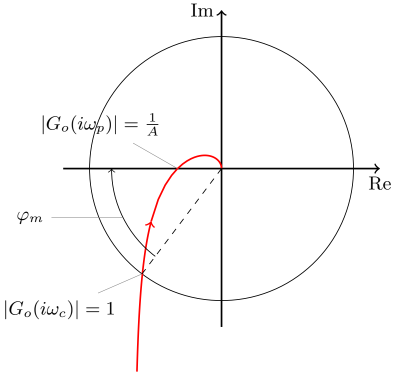
Márgenes de estabilidad relativa



- Cross-over frequency: The frequency ω_c for which $|G_o(i\omega)| = 1$.
- Phase margin: The angle φ_m to the negative real axis for the point where the Nyquist curve intersects the unit circle.

$$\varphi_m = \arg G_o(i\omega_c) - (-180^\circ) = \arg G_o(i\omega_c) + 180^\circ$$

Márgenes de estabilidad relativa



- phase-cross-over frequency: The frequency ω_p for which $\arg G_o(i\omega) = -180°$.
- Gain margin: The gain $K = A$ that would make the Nyquist curve of $KG_o(i\omega h)$ go through the point $-1 + i0$. This means that

$$|G_o(i\omega_p h| = \frac{1}{A}.$$

Efecto de muestreo y retención a los márgenes de estabilidad

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1.4s + 1} \quad \xrightarrow{h=0.4} \quad H(z) = \frac{0.066z + 0.055}{z^2 - 1.450z + 0.571}$$

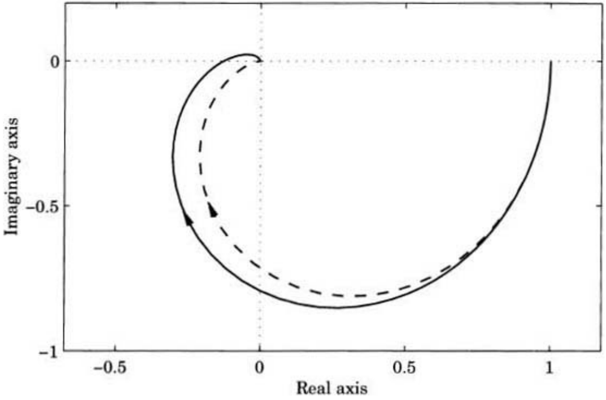


Figure 3.3 The frequency curve of (3.6) (dashed) and for (3.6) sampled with zero-order hold when $h = 0.4$ (solid).

Efecto de muestreo y retención a los márgenes de estabilidad

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1.4s + 1} \quad \xrightarrow{h=0.4} \quad H(z) = \frac{0.066z + 0.055}{z^2 - 1.450z + 0.571}$$

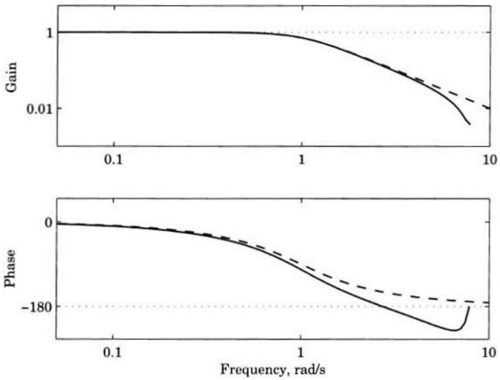


Figure 3.4 The Bode diagram of (3.6) (dashed) and of (3.6) sampled with zero-order hold when $h = 0.4$ (solid).

Selección del tiempo de muestreo

Se puede usar el cambio en el márgen de fase causada por el muestreo para determinar un tiempo de muestreo adecuado. Dado ω_c y un máximo cambio negative en el márgen de fase $\Delta\varphi \approx 5^\circ \; - \; 15^\circ \approx 0.09\text{rad} \; - \; 0.26\text{rad}$ (una "regla de oro").

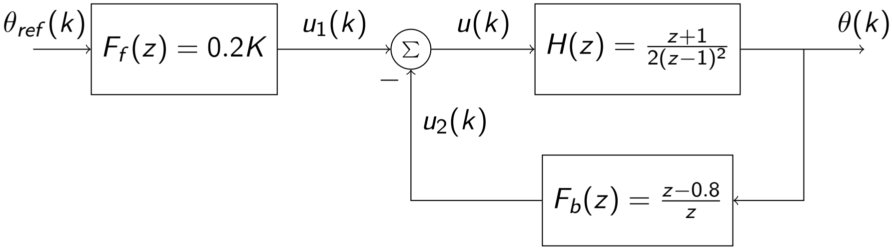
$$u_s(t) \longrightarrow \overset{\text{ROC}}{\boxed{G_{ROC}(s) = \frac{1-\mathrm{e}^{-sh}}{s} \approx \mathrm{e}^{-s\frac{h}{2}}}} \longrightarrow u(t)$$

$$\arg G_{ROC}(i\omega_c) \approx \arg \mathrm{e}^{-i\omega_c \frac{h}{2}} = -\omega_c \frac{h}{2} \approx -0.09\text{rad} \; - \; -0.26\text{rad}$$

Actividad Usa la *regla de oro* arriba para calcular un tiempo de muestreo si $\omega_c = 20 \text{ rad/s}$ y $\Delta\varphi = 0.2 \text{ rad}$.

El criterion de Jury

Estabilidad para el control del brazo del disco duro



Ecuación característica

$$1 + H(z)F_b(z) = 0$$

$$1 + \frac{z+1}{2(z-1)^2} K \frac{z-0.8}{z} = 0$$

$$(z-1)^2 z + \frac{K}{2}(z+1)(z-0.8) = 0$$

El método de Jury para analizar estabilidad

Tenemos el polinomio característico

$$z^3 - 2z^2 + z + \frac{K}{2}(z^2 + 0.2z - 0.8) = z^3 + (0.5K - 2)z^2 + (1 + 0.1K)z - 0.4K$$

El método de Jury se usa para analisar si un polynomio tiene todos sus raíces en el interior del círculo unitario

El método de Jury para analizar estabilidad

Es similar al método de Routh-Hurwitz de sistemas continuosos.

Considera el sistema

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

Es estable? Tenemos que investigar si los raíces del denominador están en el interior del círculo unitario.

La idea es investigar ciertas relaciónes algebraicas entre los coeficientes del polinomio $A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$.

El método de Jury para analizar estabilidad

Con $A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, forma la tabla

$$
\begin{array}{cccccc}
a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \\
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \alpha_n = \frac{a_n}{a_0} \\
\hline
a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & & \\
a_{n-1}^{n-1} & a_{n-1}^{n-1} & \cdots & a_0^{n-1} & & \alpha_{n-1} = \frac{a_n^{n-1}}{a_0^{n-1}} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\hline
a_0^0 & 0 & \cdots & 0 & &
\end{array}
$$

Las dos filas primeras son los coeficients de $A(z)$. La tercera fila se obtiene eliminando el último elemento de la fila una: Multiplica fila 2 por $\alpha_n = \frac{a_n}{a_0}$ y subtrae de la fila 1. Se repita el procedimiento hasta que solamente el primer elemento de la fila no es cero.

El método de Jury para analizar estabilidad

Con $A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, forma la tabla

El criterión dice que todos los raíces de $A(z)$ están en el interior del circulo unitario, sí, y solo sí todos los elementos a_0^k el el primer columno tienen el mismo signo.

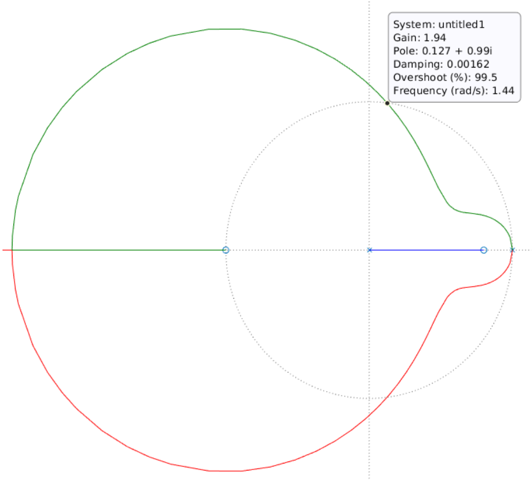
Hay pruebas preliminares de estabilidad que podemos utilizar:

1. $A(1) > 0$
2. $(-1)^n A(-1) > 0$
3. $|a_0^k| > |a_k^k|$

Ejemplo - control del brazo del disco duro

Polinomio característico

$$A(z) = z^3 + (0.5K - 2)z^2 + (1 + 0.1K)z - 0.4K$$



Ejemplo - Método de Jury

Polinomio característico

$$A(z) = z^3 + (0.5K - 2)z^2 + (1 + 0.1K)z - 0.4K$$

Aplica las pruebas preliminares 1 y 2:

1. $A(1) > 0$
2. $(-1)^n A(-1) > 0$

Ejemplo - Método de Jury

Polinomio característico

$$A(z) = z^3 + (0.5K - 2)z^2 + (1 + 0.1K)z - 0.4K$$

Aplica las pruebas preliminares 1 y 2:

1. $A(1) > 0$
2. $(-1)^n A(-1) > 0$

$$\begin{aligned}
(-1)^3 A(-1) &= -\left((-1)^3 + (0.5K - 2)(-1)^2 + (1 + 0.1K)(-1) - 0.4K\right) && (1)\\
&= 1 - (0.5K - 2) + (1 + 0.1K) + 0.4K > 0 && (2)\\
&= 4 > 0, \quad \text{Holds for all } K && (3)
\end{aligned}$$

Actividad Aplica prueba 1!

Ejemplo - Método de Jury

Tenemos el polinomio característico $eA(z) = z^3 + (0.5K - 2)z^2 + (1 + 0.1K)z - 0.4K$.
La tabla sería

$$
\begin{array}{llll}
1 & 0.5K - 2 & 0.1K + 1 & -0.4K \\
-0.4K & 0.1K + 1 & 0.5K - 2 & 1 \\
-0.16K^2 + 1 & 0.04K^2 + 0.9K - 2 & 0.2K^2 - 0.7K + 1 & 0 \\
0.2K^2 - 0.7K + 1 & 0.04K^2 + 0.9K - 2 & -0.16K^2 + 1 & 0 \\
\frac{K(0.0144K^3 - 0.28K^2 + 1.21K - 1.4)}{0.16K^2 - 1.0} & \frac{K(0.0144K^3 + 0.296K^2 - 1.35K + 1.4)}{0.16K^2 - 1.0} & 0 & 0 \\
\frac{K(0.0144K^3 + 0.296K^2 - 1.35K + 1.4)}{0.16K^2 - 1.0} & \frac{K(0.0144K^3 - 0.28K^2 + 1.21K - 1.4)}{0.16K^2 - 1.0} & 0 & 0
\end{array}
$$

Para estabilidad necesitamos

$$-0.16K^2 + 1 > 0$$

$$\frac{K(0.0144K^3 - 0.28K^2 + 1.21K - 1.4)}{0.16K^2 - 1} > 0$$

Ejemplo - Método de Jury

Para estabilidad necesitamos

$$-0.16K^2 + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad K < \sqrt{\frac{1}{0.16}} = 2.5$$

Asumiendo $0 < K < 2.5$

$$0.0144K^3 - 0.28K^2 + 1.21K - 1.4 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{35}{18} \approx 1.94$$

El sistema en lazo cerrado será estable si

$$0 < K < 1.94$$

Ejercicio - estabilidad de sistemas de segunda orden

Polinomio característico

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$$

Actividad Forma la tabla de Jury, y determina los valores de a y b que da raíces dentro del circulo unitario.

Puedes utilizar

$$1 - a_2^2 - \frac{a_1^2(1-a_2)}{1+a_2} = \frac{(1-a^2)(1+a_2) - a_1^2(1-a_2)}{1+a_2} = \frac{1-a_2}{1+a_2}\left((1+a_2)^2 - a_1^2\right)$$

Ejercicio - Solución

Polinomio característico

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$$

$$\begin{array}{lll}
1 & a_1 & a_2 \\
a_2 & a_1 & 1 \\
1 - a_2^2 & a_1(1 - a_2) & 0 \\
a_1(1 - a_2 & 1 - a_2^2 & 0 \\
1 - a_2^2 - \frac{a_1^2(1-a_2)}{1+a_2} & 0 &
\end{array}$$

Los raíces van a estar adentro del circulo unitario si

$$1 - a_2^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -1 < a_2 < 1$$

$$\frac{1 - a_2}{1 + a_2}\left((1 + a_2)^2 - a_1^2\right) > 0$$

Ejercicio - Solución

Con $-1 < a_2 < 1$ la fraccion en

$$\frac{1-a_2}{1+a_2}\left((1+a_2)^2 - a_1^2\right) > 0$$

siempre va a ser positiva.

$$(1+a_2)^2 - a_1^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1+a_2 > a_1, & a_1 > 0, \\ 1+a_2 > -a_1, & a_1 < 0 \end{cases}.$$

Los raíces del polinomio $A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$ están adentro del circulo unitario si

$$\begin{aligned} a_1 &< 1 \\ a_2 &> -1 + a_1 \\ a_2 &> -1 - a_1 \end{aligned}$$

Ejercicio - graficar

Los raíces del polinomio $A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$ están adentro del circulo unitario si

$$a_1 < 1$$
$$a_2 > -1 + a_1$$
$$a_2 > -1 - a_1$$

Dibuja la region definida por las inequalidades