

Control Computarizado - Muestreo y el efecto de alias

Kjartan Halvorsen

2020-07-01

Sistemas híbridos

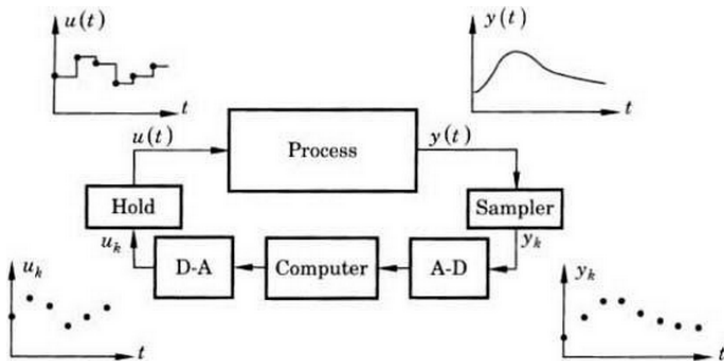
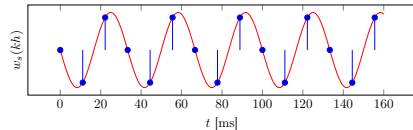
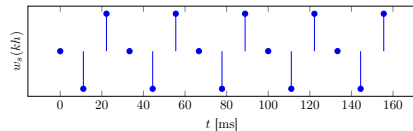
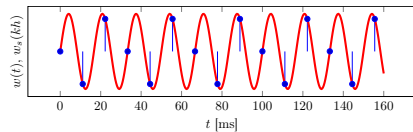
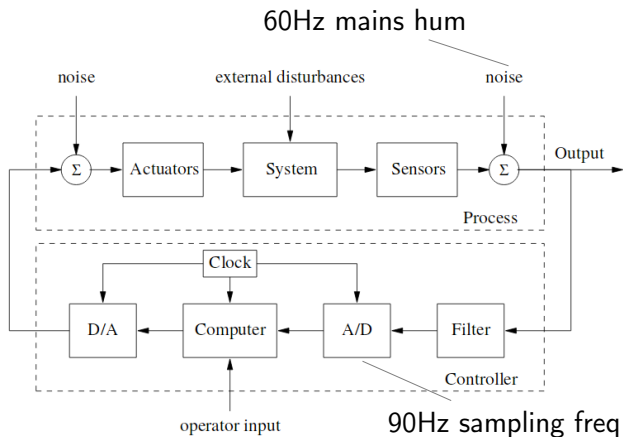
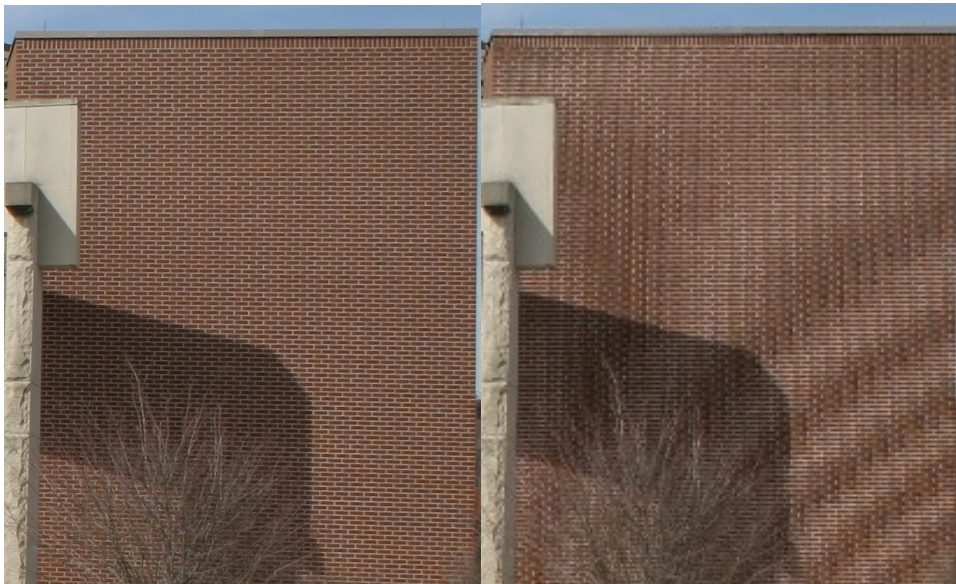


Figure 7.2 Relationships among the measured signal, control signal, and their representations in the computer.

Retos en control computarizado - fenómeno de alias



Efecto de alias en imágenes

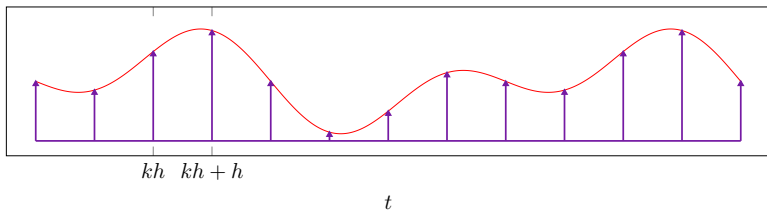


Un modelo del muestreo

Una señal muestreada tiene una representación en tiempo continuo usando el modelo de modulación por un **tren de impulsos**

$$m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kh)$$

$$f_s(t) = f(t)m(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kh) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - kh) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)\delta(t - kh)$$



Transformada de Fourier de la señal muestreada

La relación entre la transformada de la señal continua $f(t)$ y la de su versión muestreada $f_s(t)$:

$$F_s(\omega) = \frac{1}{h} \sum_n F(\omega + n\omega_s)$$

$F_s(\omega)$ se obtiene sumando repeticiones de $F(\omega)$ en cada múltiple de la frecuencia de muestro ω_s . Esta es la causa del fenómeno de **alias** y la distorsión conocido como **plegado de frecuencia** (*frequency folding*).

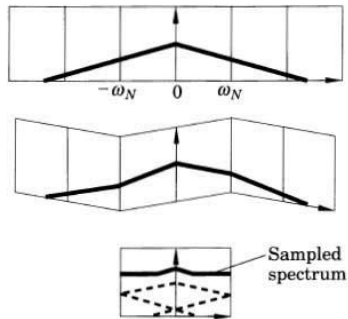
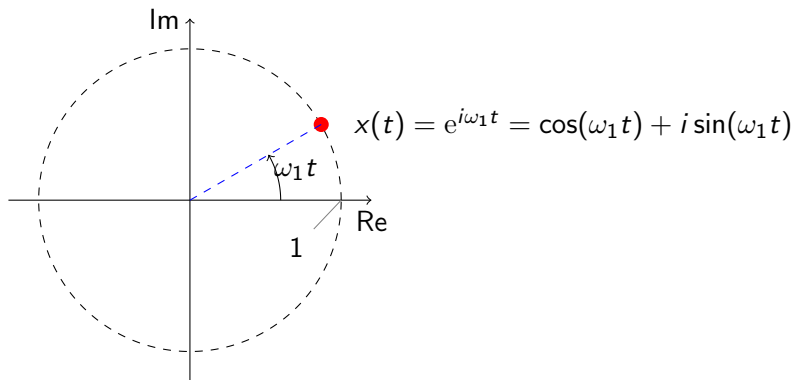


Figure 7.11 Frequency folding.

Transformada de Fourier de un exponencial complejo

La función $x(t) = e^{i\omega_1 t}$

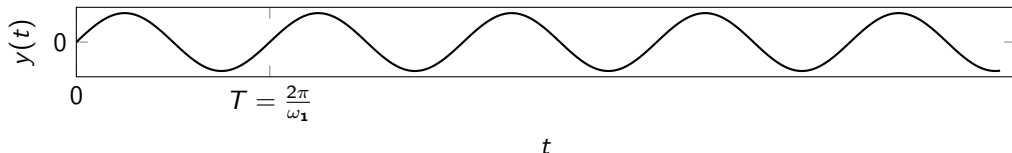


tiene la transformada de Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1 - \omega)t} dt = \delta(\omega_1 - \omega)$$

Transformada de Fourier de una senoide

Una senoide $y(t) = \sin(\omega_1 t)$ tiene toda su energía concentrada en una sola frecuencia, $\omega = \omega_1$ rad/s.



Dado de que

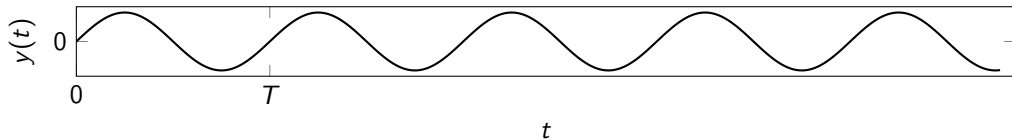
$$y(t) = \sin(\omega_1 t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t})$$

la transformada de Fourier es

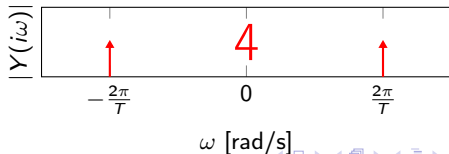
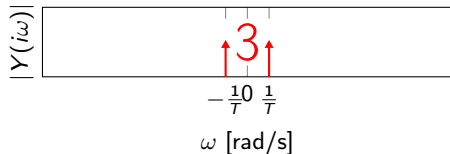
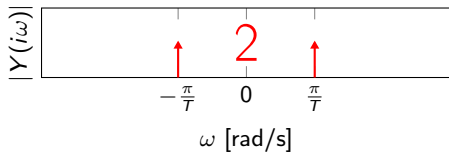
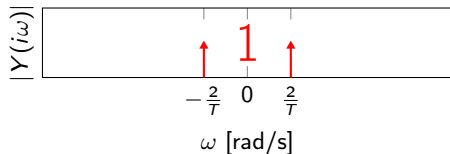
$$Y(\omega) = \frac{1}{2i} (\delta(\omega_1 - \omega) - \delta(\omega_1 + \omega))$$

Ejercicio 1: La transformada de Fourier de una senoide

Considera la siguiente señal

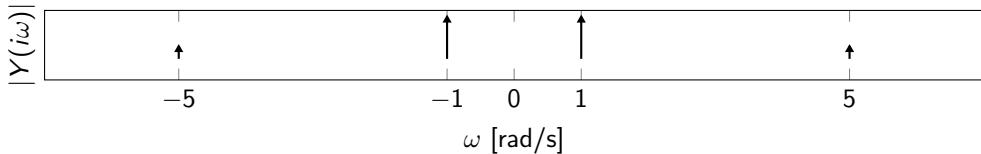


Cuál de los espectros abajo ($|Y(i\omega)|$) corresponde a la señal?

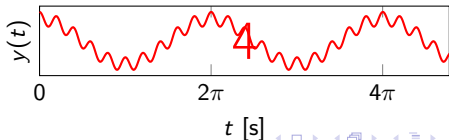
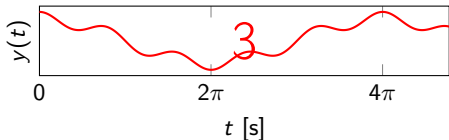
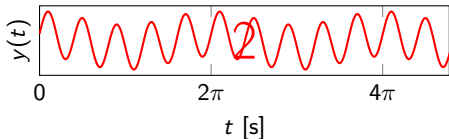
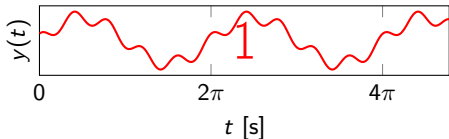


Ejercicio 2: Dos sinusoides

Considera una señal con la siguiente transformada de Fourier

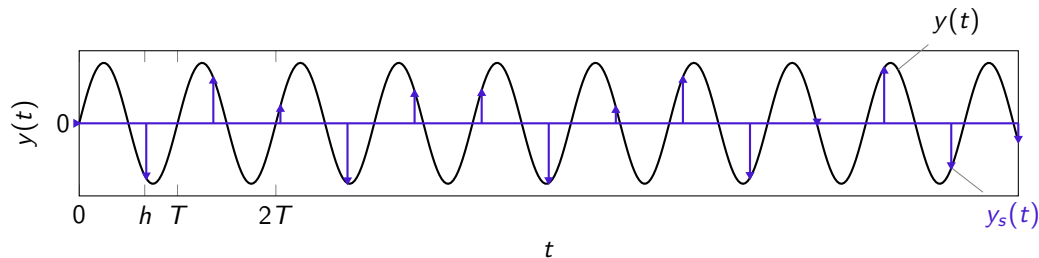


Cuál de las señales abajo corresponde a la transformada de Fourier arriba?



Ejercicio 3: Transformada de Fourier de una senoide muestreada

La figura siguiente enseña una senoide con periodo T y su versión muestreada con period de muestreo $h = \frac{2}{3}T$.

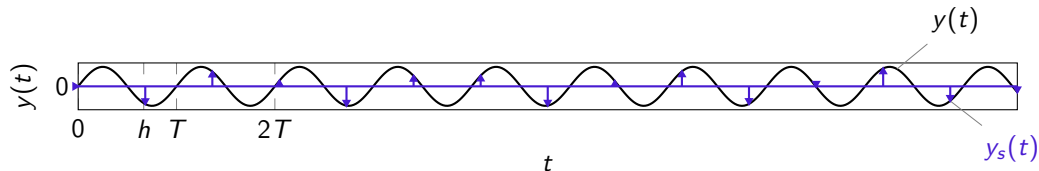


Determine

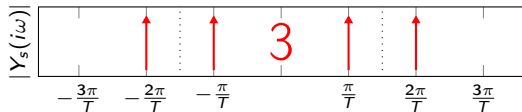
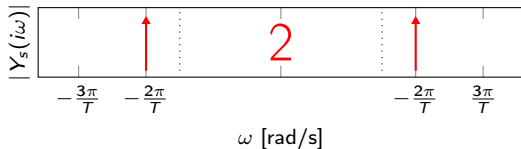
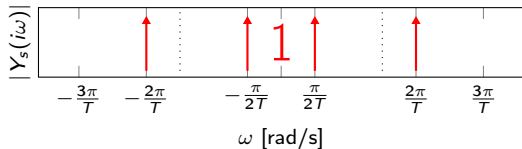
1. La frecuencia de la senoide
2. La frecuencia de muestreo ω_s
3. La frecuencia de Nyquist ω_N

Ejercicio 4: Transformada de Fourier de una senoide muestreada

Considera la misma situación que en ejercicio 3 (periodo de muestreo $h = \frac{2}{3}T$).



Cuál de los siguientes espectros corresponde a la **senoide muestreada**?

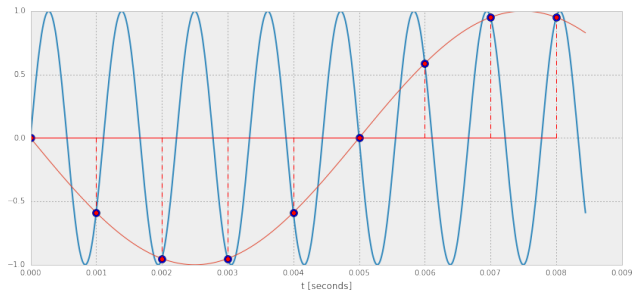


Frecuencia de alias

Para determinar la frecuencia de alias más bajo $\omega_a < \omega_N$ de una senoide ω_1 , se puede usar la expresión

$$\omega_a = |((\omega_1 + \omega_N) \bmod \omega_s) - \omega_N|$$

Ejemplo del fenómeno de alias



Una senoide de alta frecuencia ($\omega_1 = 1800\pi$ rad/s) tiene un alias de frecuencia 200π rad/s cuando se la muestra con un periodo de muestreo de $h = 10^{-3}$ s.

Dibuja el espectro de las dos senoideas. Marca la frecuencia de muestreo y la de Nyquist, y verifica que la frecuencia de alias se produce plegando la frecuencia ω_1 por la frecuencia de Nyquist

Ejercicio en grupo: Fenómeno de alias

Una senoide $f_1 = 60\text{Hz}$ esta muestreado con la frecuencia $f_s = 90\text{Hz}$.

1. Determine la frecuencia de alias usando la expresión

$$f_a = |((f_1 + f_N) \bmod f_s) - f_N|$$

2. Verifica en la gráfica que su calculación sea correcta.
3. Dibuja el espectro de las dos senoideas. Marca la frecuencia de Nyquist f_N , y verifica que la frecuencia de alias se produce plegando la frecuencia f_1 por la frecuencia de Nyquist.

