Control Computarizado - Discretización del proceso continuo

Kjartan Halvorsen

2020-07-03

El mundo según el controlador discreto

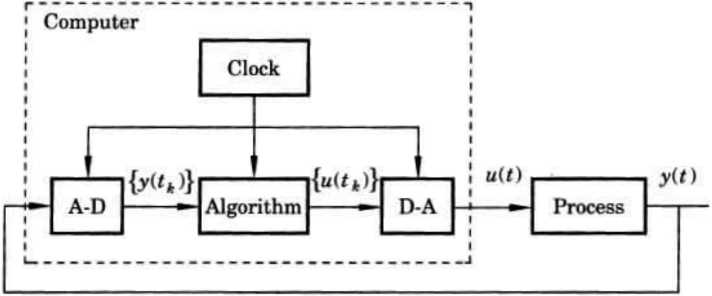


Figure 1.1 Schematic diagram of a computer-controlled system.

Åström & Wittenmark *Computer-controlled systems*

Discretización del proceso

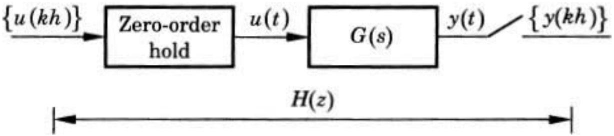
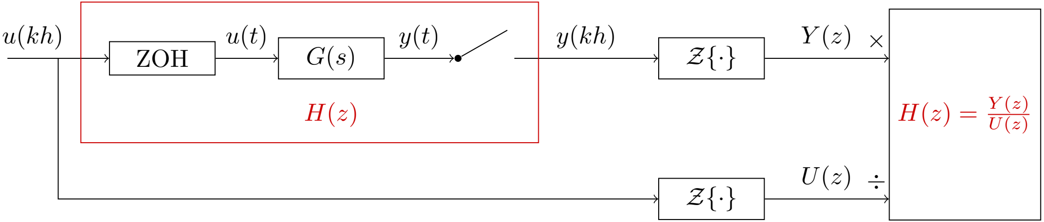


Figure 2.4 Sampling a continuous-time system.

Åström & Wittenmark *Computer-controlled systems*

Discretización invariante al escalón (*step-invariant* o *zero-order-hold sampling*)

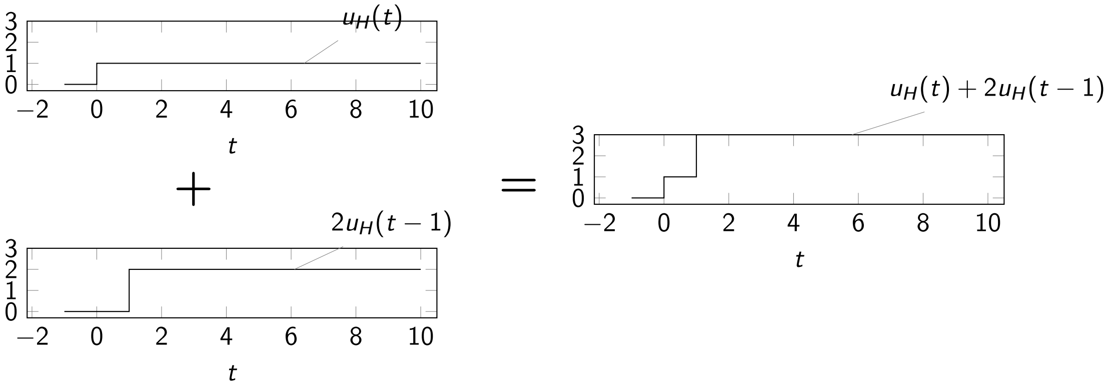
El idea es muestrear la respuesta del escalón del sistema continuo para obtener un modelo discreto que es exacto (en los instantes de muestreo) para señales de entrada que son combinaciones de escalones (funciones constantes por partes)



$$u(kh) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

Porqué discretización invariante al escalón?

Una función constante por partes, como produce el retenedor de orden cero, puede ser escrito como una suma de escalones retrasados:



Porqué discretización invariante al escalón?

Trabajamos con sistemas discretos LTI, entonces la respuesta de una suma de escalones retardados es la misma suma de respuestas de escalón retardados.

$$u_H(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y_H(t)$$

Si la respuesta de un escalón unitario del sistema es $y_H(t)$, la señal de entrada $u(t) = \sum_i \alpha_i u_H(t - \tau_i)$ va a dar la respuesta

$$y(t) = ?$$

Porqué discretización invariante al escalón?

Trabajamos con sistemas discretos LTI, entonces la respuesta de una suma de escalones retardados es la misma suma de respuestas de escalón retardados.

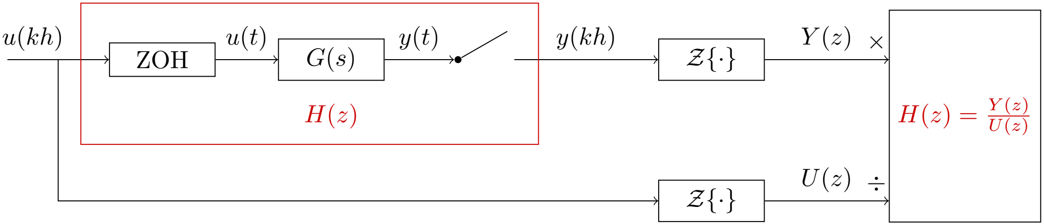
$$u_H(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y_H(t)$$

Si la respuesta de un escalón unitario del sistema es $y_H(t)$, la señal de entrada $u(t) = \sum_i \alpha_i u_H(t - \tau_i)$ va a dar la respuesta

$$y(t) = \sum_i \alpha_i u_H(t - \tau_i)$$

> Si el método de discretización es exacto para una señal de entrada en forma de un escalón, va a ser exacto para señales que son constantes por partes. Este son el tipo de señales que produce el retenedor de orden cero.

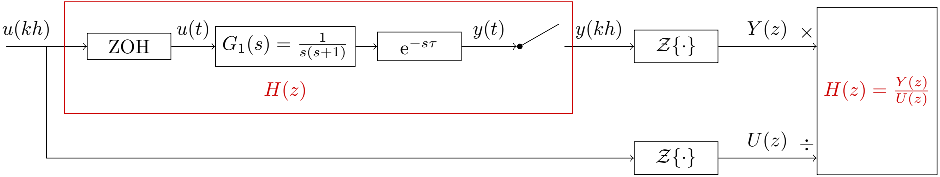
Procedimiento de discretización invariante al escalón



$$u(kh) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{H(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \right\}}$$

Ejemplo: Motor DC con retraso



$$G(s) = G_1(s)e^{-s\tau}$$

1. Respuesta sin retraso

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s^2(s+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}\} = u_H(t)\big(t - 1 + e^{-t}\big).$$

2. Respuesta con retraso

$$y(t) = y_1(t-\tau) = -u_H(t-\tau) + u_H(t-\tau)(t-\tau) + u_H(t-\tau)e^{-(t-\tau)}\big)$$

Ejemplo: Motor DC con retraso

Asumiendo $\tau = nh$

$$\mathcal{Z}\left\{f(kh - nh)\right\} = z^{-n}\mathcal{Z}\left\{f(kh)\right\}.$$

3. Transformada z de la respuesta sin retraso, muestreada Usando las transformadas

$$\begin{aligned}
u_H(kh) &\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-1}\\
u_H(kh)kh &\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{zh}{(z-1)^2}\\
u_H(kh)\mathrm{e}^{-a(kh)} &\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-ah}}
\end{aligned}$$

$$Y_1(z) = -\frac{z}{z-1} + \frac{zh}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-h}}$$

Ejemplo: Motor DC con retraso

4. Transformada z de la respuesta retresada

$$Y(z) = z^{-n}\left(-\frac{z}{z-1} + \frac{zh}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-h}}\right)$$

5. Diviendo por la transformada z del escalón

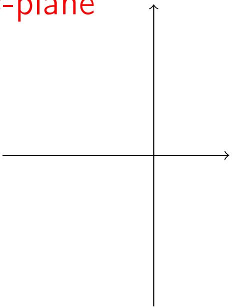
$$\begin{aligned} H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{z-1}{z} z^{-n}\left(-\frac{z}{z-1} + \frac{zh}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-h}}\right) \\ &= z^{-n}\left(-1 + \frac{h}{z-1} + \frac{z-1}{z-\mathrm{e}^{-h}}\right) \\ &= \frac{z\big(h-1+\mathrm{e}^{-h}\big) - \big(\mathrm{e}^{-h}(1+h)-1\big)}{z^n(z-1)(z-\mathrm{e}^{-h})} \end{aligned}$$

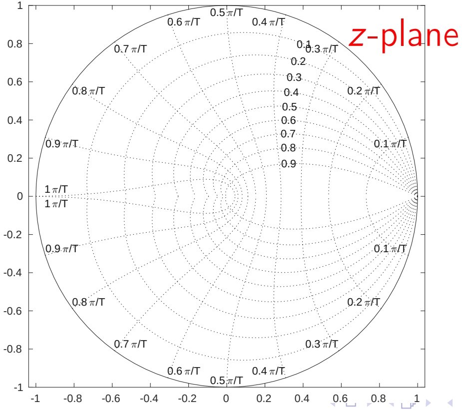
Ejemplo: Motor DC con retraso

$$G(s) = \frac{\mathrm{e}^{-s(nh)}}{s(s+1)} \quad \longrightarrow \quad H(z) = \frac{z\big(h - 1 + \mathrm{e}^{-h}\big) - \big(\mathrm{e}^{-h}(1+h) - 1\big)}{z^n(z-1)(z-\mathrm{e}^{-h})}$$

Actividad Determina el cero y los polos si $n = 1$ y $h = 0.2$. Marcalos (cero con $\bigcirc$ y polos con $\times$) en los diagramas correspondientes.

s-plane



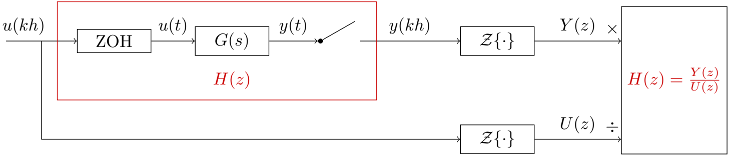


Ejercico: Sistema de primer orden

Actividad Discretiza el sistema

$$G(s) = \frac{1}{s+a}$$

usando el método de discretización invariante al escalón.



$$H(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\}\right\}$$

Ejercico: Sistema de primer orden - solución

1. Respuesta al escalón

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)/s\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right)\right\} = \frac{1}{a}(1 - \mathrm{e}^{-at}).$$

2. Transformada z de la respuesta muestreada

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left\{y(kh)\right\} = \frac{1}{a}\mathcal{Z}\left\{1 - \mathrm{e}^{-akh}\right\} = \frac{1}{a}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-ah}}\right)$$

3. División con $H(z)$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{a}\frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-ah}}\right) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{z-1}{z-\mathrm{e}^{-ah}}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{a}\left((z-\mathrm{e}^{-ah}) - (z-1)\right)}{z-\mathrm{e}^{-ah}} = \frac{\frac{1}{a}(1-\mathrm{e}^{-ah})}{z-\mathrm{e}^{-ah}} \end{aligned}$$

La transformada de Laplace de una señal muestreada

Nota:

$$F_s(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh)\left(\mathrm{e}^{-sh}\right)^k \quad \text{transformada de Laplace}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh) z^{-k} \quad \text{transformada z}$$

La transformada z de una señal muestreada corresponde a su transformada de Laplace bajo la relación

$$z = \mathrm{e}^{sh}$$

entre el dominio s de la transformada de Laplace y el dominio z de la tranformada z.

Mapeo del plano s al plano z

$$z = \mathrm{e}^{sh} \qquad \Leftrightarrow \qquad s = \frac{1}{h} \ln z$$

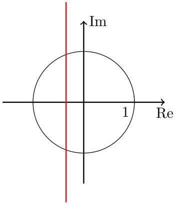
Ejemplo importante Semiplano izquierdo del plano s : $s = a + i\omega,\ a < 0$

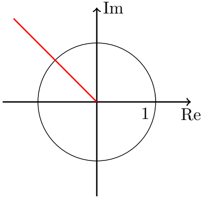
$$z = \mathrm{e}^{sh} = \mathrm{e}^{(a+i\omega)h} = \mathrm{e}^{ah}\mathrm{e}^{i\omega h}, \quad |z| = |\mathrm{e}^{ah}|\,|\mathrm{e}^{i\omega h}| = |\mathrm{e}^{ah}| < 1,\ a < 0$$

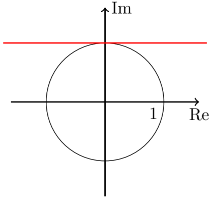
Ejercicio

Actividad en pareja Encuentra las correspondencias usando $z = \mathrm{e}^{sh}$

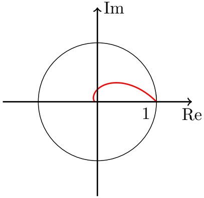
Plano s

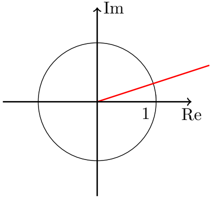


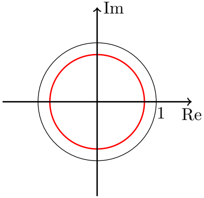




Plano z







Ejercicio - solución

Plano s

Plano z