

Control computarizado - Mínimos cuadrados

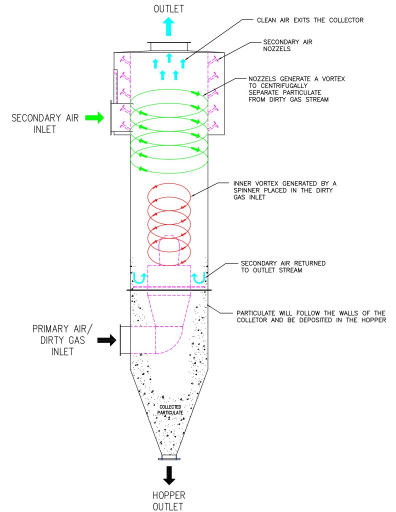
Kjartan Halvorsen

July 13, 2021

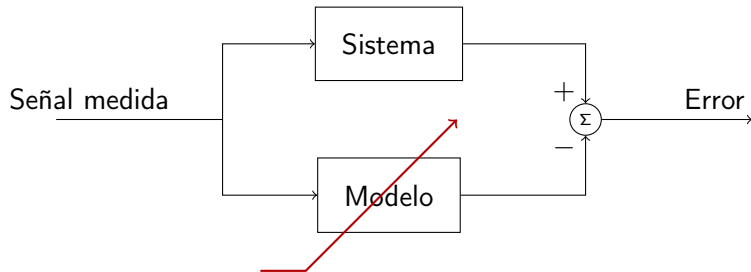
Identificación de sistemas

Un proceso complejo

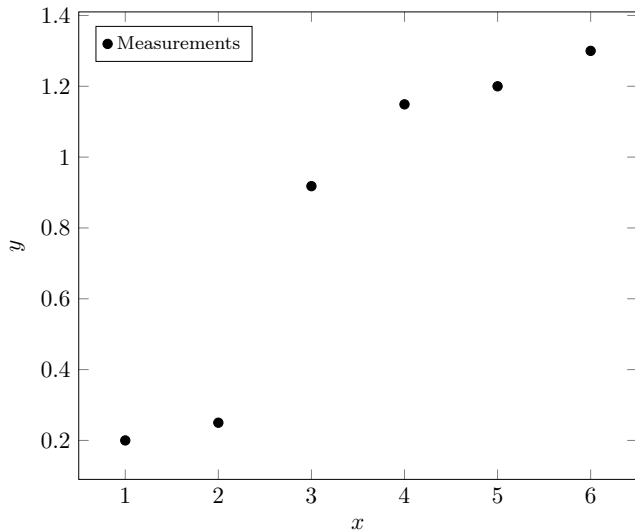
From Wikipedia "Cyclonic separation"



Identificación de sistemas



Ajustando un modelo



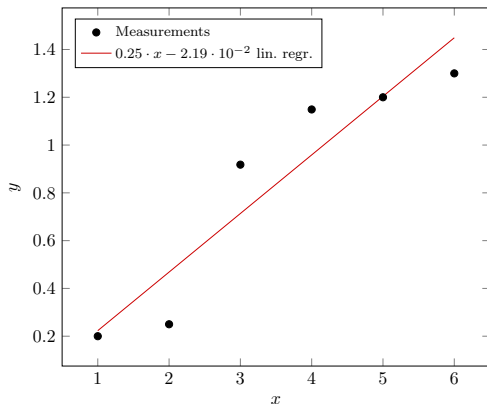
Ajustando un modelo - regresión lineal

Objetivo Dado observaciones

$$\mathcal{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$$

y modelo $\mathcal{M} : y = ax + b + e$,
obtiene los parametros (a, b) que
da el modelo que mejor se ajuste a
los datos.

El término de ruido, o error, e ,
incluye errores de modelación y
perturbaciones.



Ajustando un modelo - regresión lineal

Dado observaciones $\mathcal{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$ y modelo

$$\mathcal{M}: y = ax + b + e.$$

La predicción es

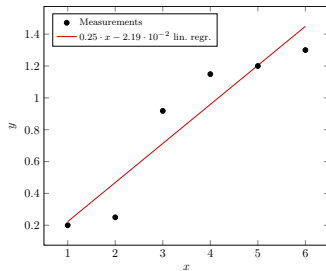
$$\hat{y}_k = ax_k + b = \underbrace{\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}}_{\varphi_k^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\theta}$$

y el error de predicción

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - ax_k - b = y - \varphi_k^T \theta.$$

Buscamos parametros $\theta^T = [a \quad b]$ que minimiza la función de pérdida

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N g(\epsilon_k).$$



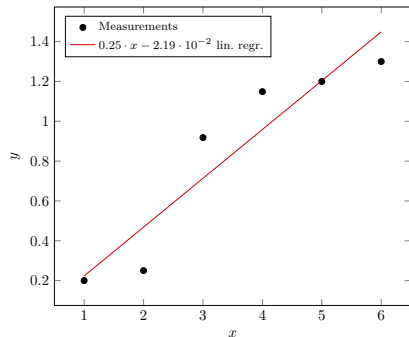
Ajustando un modelo - regresión lineal

Dado observaciones $\mathcal{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$ y modelo

$\mathcal{M}: y = ax + b + e$.

La función de pérdida más común es **mínimos cuadrados**

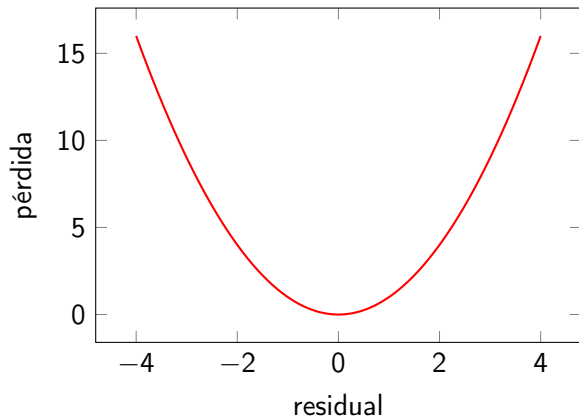
$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{LS} &= \arg \min J_{LS}(\theta) = \arg \min \sum_{k=1}^N \epsilon_k^2 \\ &= \arg \min \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2 = \arg \min \sum_{k=1}^N (y_k - \varphi_k \theta)^2 \\ &= \arg \min \sum_{k=1}^N (y_k - ax_k - b)^2\end{aligned}$$



El problema con mínimos cuadrados

$$\text{minimiza } \sum_k g(\epsilon_k)$$

dónde $g(u) = u^2$

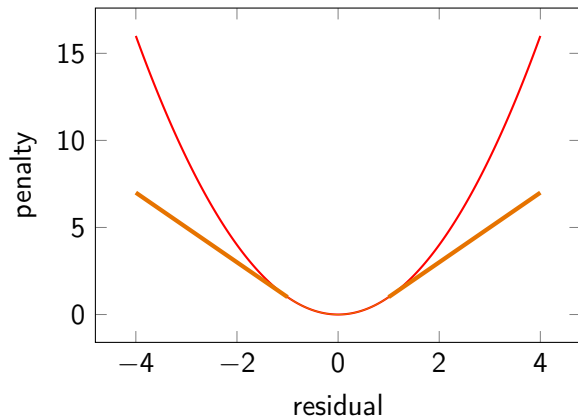


Más robusta: La función de pérdida de Huber

También conocido como **regresión robusta**

$$\text{minimiza } \sum_k g_{hub}(\epsilon_k)$$

$$\text{dónde } g_{hub}(u) = \begin{cases} u^2 & |u| \leq M \\ M(2|u| - M) & |u| > M \end{cases}$$



Ejemplo - Modelo autorregresivo (AR)

Modelo autorregresivo (AR)

Dado una secuencia discreta observada $y(k)$, $k = 1, 2, \dots, N$, y el modelo autorregresivo

$$y(k+1) = -ay(k) + e(k+1),$$

dónde $e(k)$ es una secuencia discreto de ruido blanco.

Objetivo Estimar el parametro a .

1. Forma el predictor de un paso adelante

$$\hat{y}_{k+1} = -ay_k = -y_k a = \varphi_{k+1} \theta,$$

y el error de predicción

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - \varphi_k \theta$$

Modelo autorregresivo (AR)

Dado una secuencia discreta observada $y(k)$, $k = 1, 2, \dots, N$, y el modelo autorregresivo $y(k+1) = -ay(k) + e(k+1)$, donde $e(k)$ es una secuencia discreto de ruido blanco.

Objetivo Estimar el parametro a .

2. Reune todas las observaciones y_k y predicciones \hat{y}_k en forma vectoral

$$\begin{aligned}\epsilon &= \begin{bmatrix} \epsilon_2 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \vdots \\ \hat{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -y_1 a \\ -y_2 a \\ \vdots \\ -y_{N-1}^T \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi_2^T \theta \\ \varphi_3^T \theta \\ \vdots \\ \varphi_N^T \theta \end{bmatrix} \\ &= y - \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix}}_{\Phi} \theta = y - \Phi \theta\end{aligned}$$

Modelo autorregresivo (AR)

Dado una secuencia discreta observada $y(k)$, $k = 1, 2, \dots, N$, y el modelo autorregresivo $y(k+1) = -ay(k) + e(k+1)$, donde $e(k)$ es una secuencia discreto de ruido blanco.

Objetivo Estimar el parametro a .

3. Obtiene el estimado de mínimos cuadrados

$$\begin{aligned}\theta_{LS} &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y \\ &= \left(\begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & \cdots & -y_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ \vdots \\ -y_{N-1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & \cdots & -y_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\sum_{k=1}^{N-1} y_k y_{k+1}}{\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2}\end{aligned}$$

Computación de la solución de mínimos cuadrados

Dado error de predicción en forma vectoral para sistema de orden $n \in y - \Phi\theta$. Forma las **ecuaciones normales**

$$\Phi\theta = y$$
$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1}^T \\ \varphi_{n+2}^T \\ \varphi_{n+3}^T \\ \varphi_{n+4}^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ y_{n+3} \\ y_{n+4} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Resuelva las ecuaciones normales usando métodos numericamente robustos de algebra lineal, por ejemplo factorización L-U. En matlab se escribe

```
theta_LS = Phi \ y
```

Ejemplo numerico

Mybinder

Modelo autorregresivo (AR) - Ejercicio

Dado una secuencia discreta observada $y(k)$, $k = 1, 2, \dots, N$, y el modelo autorregresivo de segunda orden

$$y(k+2) = a_1 y(k+1) + a_2 y(k) + e(k+2),$$

dónde $e(k)$ es una secuencia discreto de ruido blanco.

Actividad Forma las ecuaciones normales

$$\Phi\theta = y$$

siguiendo los mismos pasos como en el ejemplo de primer orden.