充足可能性ソルバ（SAT ソルバ）の原理

Hiromi ISHII

2024-03-10

Tsukuba Computer Mathematics Seminar 2024

自己紹介

自己紹介

- いし い ひろ み
  石井大海
- 2018 年度 筑波大学数学専攻博士後期課程修了（照井研）
- 計算機合宿には 2014 年から参加
- 現職： Haskell 製大規模数値計算ベンチャー研究開発職
- 宣伝：今年 05/11，12 に横浜でお芝居をするので興味のある方は是非観にきてください

充足可能性ソルバ（SAT ソルバ）の原理

本日の話題：充足可能性問題と SAT ソルバ

- 充足可能性問題：与えられた命題論理式が（古典的に）充足可能かどうかを判定する問題
  - 古典命題論理式：命題変数 $P_1, \ldots, Q_1, \ldots,$ を $\wedge$ (かつ)、$\vee$ (または)、$\rightarrow$ (ならば)、$\neg$ (でない) で結んで得られる論理式
  - 古典的充足可能性 : 与えられた式を真とするような、 命題変数への真偽値 $\circ$ (真) または $\times$ (偽) の割り当てが存在するか？
- 充足可能性（SATisfiability）を略して SAT と呼ぶ。
- 判定問題としては NP- 完全：総当たりで解けるような任意の問題が SAT に帰着できる
- 色々な問題が SAT (やその拡張である SMT ソルバ) で解け、実用上も重要

SAT で解ける問題の例：論理パズル

問 1 (三人の島民 [1])

常に嘘だけをいう嘘吐きと、本当のことだけをいう正直者だけが住む島で、A, B, C 三人の島民に出会った。彼らのいうことには：

- A：「B と C はどちらも正直者だ」
- B：「A は嘘吐きで、C は正直者だ」

A, B, C はそれぞれ正直者か、嘘吐きか？

三人の島民：回答

- A, B, C を「A が正直者」「B が正直者」「C が正直者」を表す命題変数とする
- 情報を命題論理式に変換して (1) ∧ (2) を充足する解を求めればよい：

$$A \iff B \wedge C \tag{1}$$

$$B \iff \neg A \wedge C \tag{2}$$

- 真偽値表を書いてみると、全員嘘吐きだとわかる。

A	B	C	(1)	(2)	(1) ∧ (2)
○	○	○	○	×	×
○	○	×	×	×	×
○	×	○	×	○	×
○	×	×	×	○	×

A	B	C	(1)	(2)	(1) ∧ (2)
×	○	○	×	○	×
×	○	×	○	×	×
×	×	○	○	×	×
×	×	×	○	○	○

SAT で解ける問題の例：数独

- 簡単な例として、4×4 の小さな数独の問題を SAT で解くことを考える。
- $i, j, k \leq 4$ に対し命題変数 $P_{ij}^{=k}$ を用意する（$d_{ij} = k$ というきもち）。
- 各マスには $1, 2, 3, 4$ のいずれかの数字一つを入れる。

d_{14}	d_{24}	d_{34}	d_{44}
d_{13}	d_{23}	d_{33}	d_{43}
d_{12}	d_{22}	d_{32}	d_{42}
d_{11}	d_{21}	d_{31}	d_{41}

$$\bigwedge_{i\leq 4}\bigwedge_{j\leq 4}\left\{\left(P_{ij}^{=1} \vee P_{ij}^{=2} \vee P_{ij}^{=3} \vee P_{ij}^{=4}\right) \wedge \bigwedge_{k\leq 4}\bigwedge_{l\neq k}\left(P_{ij}^{=k} \Longrightarrow \neg P_{ij}^{=l}\right)\right\} \tag{3}$$

SAT で解ける問題の例：数独　（続）

- 各行、各列、各 2×2 の小ブロックには各数字 $1, \ldots, 4$ が一つずつ入る。
  - 「各行」は次のように書ける（「各列」も i, j の役割を入れ換え同様）：

$$\bigwedge_{i \le 4} \bigwedge_{k \le 4} (P_{i1}^{=k} \vee P_{i2}^{=k} \vee P_{i3}^{=k} \vee P_{i4}^{=k}) \tag{4}$$

  - 演習問題：「一意性」の条件が要らない理由を考えてみよう。
  - 演習問題：「各ブロック」の条件を書き下してみよう。
- あとは盤面の情報を個別に $P_{ij}^{=k}$ で与えてやれば、個別の問題を SAT で解ける！

まとめ

まとめ

- Matome here

参考文献

[1] レイモンド・スマリヤン , “スマリヤンの決定不能の論理パズル ゲーデルの定理と様相論理 ,” 白揚社 , 2008.