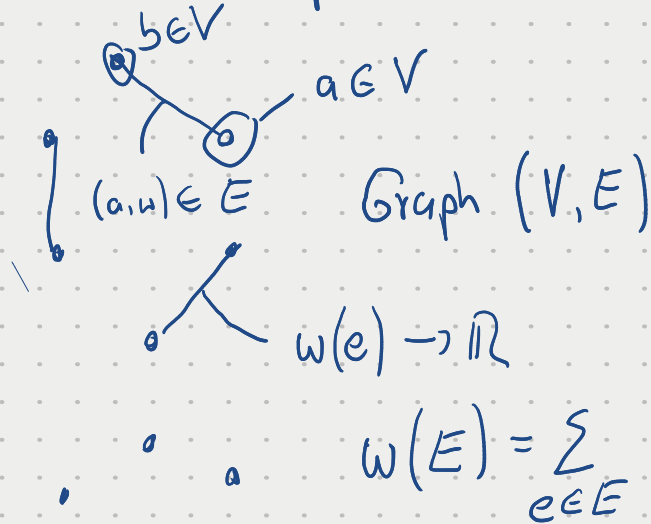
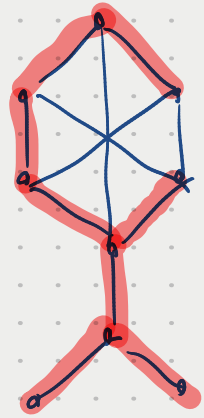


Minimale Spannbäume



zusammenhängend

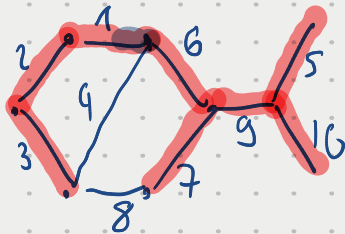


kreisfrei
"Wald"



Def: $MST(V, E_{MST})$ zu
gewichtetem Graph (V, E)
ist leichtester Spannbaum

Kruskal



IN: w, E

1.) $E_{MST} = \emptyset$

2.) FOR $e \in \text{SORT}(E, w)$:
IF $E_{MST} \cup \{e\}$ kreisfrei:
 $E_{MST} := E_{MST} \cup \{e\}$

Alle kreisfreien Teilgraphen:

$$U := \{u \in P(E) : u \text{ ist kreisfrei}\}$$

KI: Vererbung, $\forall a \subseteq b \in U \Rightarrow a \in U$

KII: Erweiterung, $\forall a, b \in U, |a| < |b|$
 $\Rightarrow \exists e \in b : a \cup \{e\} \in U$
 \uparrow
 $b-a$

KII: Spannbäume sind max. Mengen

Beweis: Kruskal ist korrekt

Lösung von Kruskal: $u^* = \{e_0^*, \dots, e_n^*\}$, $w(e_i) \leq w(e_j)$

Annahme: $\exists u \in \mathcal{U} : u = \{e_0, \dots, e_n\}$, $w(u) < w(u^*)$
 $\forall i < j$

$$|u| = |u^*| \Rightarrow \exists n \quad w(e_0) < w(e_0^*)$$

Kruskal nach n -Iterationen

$$u_{(n)}^* = \{e_0^*, \dots, e_{n-1}^*\} \leftarrow e_n^*$$

$$u_{(n+1)} = \{e_0, \dots, e_n\} := \{e_x \in u \mid w(e_x) < w(e_n)\}$$

$$u_{(n+1)} \subset u \in \mathcal{U} \xrightarrow{\text{KI}} u_{(n+1)} \in \mathcal{U}, \quad u_{(n)}^* \in \mathcal{U}$$

$$|u_{(n+1)}| > |u_{(n)}| \xrightarrow{\text{KII}} \exists e_x \in u_{(n+1)} : u_{(n)}^* \cup \{e_x\} \in \mathcal{U}$$

\Rightarrow Kruskal muss e_x wählen $\nabla \quad \square$

Teilmengensysteme : \mathcal{K}_I
Matroid : $\mathcal{K}_I + \mathcal{K}_I$

kanonischer Greedy : "Kruskal auf Matroiden"

Prim : Baue gierig Spannbaum

~~\mathcal{K}_I~~ \rightarrow abgeschwächte Fam "Greedoid"

Weiterführende Literatur:

- Uwe Schöning, "Algorithmik"

guter Überblick (Greedy, Kruskal, UNION-FIND, SORT, und mehr)
leicht zugänglich, gut zu lesen, anschaulich

- Cambridge University Press, "Matroid Applications"

Kapitel 8 "Introduction to Greedoids" (Björner, Ziegler)

insbesondere Kapitel 8.5 (kanonischer Greedy auf Greedoids, Prim Algorithmus)

deutlich formaler/allgemeiner

Online verfügbar in UFA Bibliothek

Frühe Version frei verfügbar (eng. Wikipedia → "Greedoid" → References)
(hier Kapitel 9 statt 8)

• <https://www.mi.fu-berlin.de/math/groups/discgeom/ziegler/Preprintfiles/006PREPRINT.pdf?1397057423>

- Kruskal → Wikipedia (alternativer Beweis)

- Dieses Skript: [github/holtmanj](#) → talk-and-material