Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа №2
по курсу "Математическая статистика"

Тема Интервальные оценки

Студент Ковалец К. Э.

Группа ИУ7-63Б

Вариант 9

Преподаватель Власов П. А.

Москва — 2022 г.

1 Содержание работы

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ:

   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\hat{\mu}}(\vec{x}_n)$, $\overline{\hat{\mu}}(\vec{x}_n)$ для γ - доверительного интервала для математического ожидания MX;

   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\hat{\sigma}}(\vec{x}_n)$, $\overline{\hat{\sigma}}(\vec{x}_n)$ для γ - доверительного интервала для дисперсии DX.

2. Вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта.

3. Для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:

   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma^2}(\vec{x}_n)$, $z = \overline{\sigma^2}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 Теоретическая часть

2.1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

2.1.1 Интервальная оценка

Опр. Интервальной оценкой параметра θ уровня $\gamma \in (0, 1)$ (γ - интервальной оценкой) называется пара статистик:

$$\underline{\theta}(\vec{X}) \text{ и } \overline{\theta}(\vec{X}) \text{ таких, что } P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}),\ \overline{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma.$$

2.1.2 Доверительный интервал

Опр. γ - доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня γ) для параметра θ называют реализацию интервальной оценки уровня γ для этого параметра, т. е. интервал:

$$(\underline{\theta}(\vec{x}),\ \overline{\theta}(\vec{x}))$$

с детерминированными границами.

2.2 Формулы для вычисления границ γ - доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Таблица 2.1 – Таблица границ доверительных интервалов

Параметры	Центральная статистика	Границы
μ – неизвестно, σ – известно, Оценить μ	$\frac{\mu-\overline{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$	$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{u_{1-\alpha}\sigma}{\sqrt{n}}$ $\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{u_{1-\alpha}\sigma}{\sqrt{n}}$
μ – неизвестно, σ – неизвестно, Оценить μ	$\frac{\mu-\overline{X}}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n} \sim St(n-1)$	$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{t_{1-\alpha}^{(n-1)}S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}$ $\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{t_{1-\alpha}^{(n-1)}S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}$
σ – неизвестно, Оценить σ^2	$\frac{(n-1)S(\vec{X}_n)}{\sigma^2}\sqrt{n} \sim \chi^2(n-1)$	$\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{S^2(\vec{X}_n)(n-1)}{h_{1-\alpha}^{(n-1)}}$ $\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{S^2(\vec{X}_n)(n-1)}{h_{\alpha}^{(n-1)}}$

Обозначения:

$$\alpha = \frac{1-\gamma}{2};$$
u_α — квантиль уровня α распределения $N(0,1)$;
$t_\alpha^{(n-1)}$ — квантиль уровня α распределения $St(n-1)$;
$h_\alpha^{(n-1)}$ квантиль уровня α распределения $\chi^2(n-1)$;
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i;$$
$$S^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

3 Практическая часть

3.1 Текст программы

```
function lab_2()
    clc

    % Было в защите
    % Объяснить, почему график S^2(Xn) сначала резко растет, а потом падает
    % X = 10 * csvread('X.csv');
    % X = [X zeros(1, 300) - 110];

    X = csvread('X.csv');
    n = length(X);

    % Вычисление выборочного среднего
    mu = sum(X) / n;
    fprintf("Выборочное среднее = %.4f\n", mu);

    % Вычисление исправленной выборочной дисперсии
    if (n > 1)
        s2 = sum((X - mu) .^2) / (n - 1);
    else
        s2 = 0;
    endif

    fprintf("Исправленная выборочная дисперсия = %.4f\n", s2);


    gamma = 0.9;
    alpha = (1 - gamma) / 2;

    % Вычисление доверительных интервалов

    % m - неизвестно,
    % sigma - неизвестно,
    % Оценить m

    quant_st = tinv((1 - alpha), (n - 1));

    lower_m = mu - (quant_st * sqrt(s2) / sqrt(n));
    upper_m = mu + (quant_st * sqrt(s2) / sqrt(n));

    fprintf("\nНижняя граница gamma-доверительного интервала для mu = %.4f\n", lower_m);
```

```
    fprintf("Верхняя граница gamma-доверительного интервала для mu = %.4f\n", upper_m);

    fprintf("\ngamma-доверительный интервал для mu: (%.4f, %.4f)\n", lower_m, upper_m);

    % sigma - неизвестно
    % Оценить sigma^2

    quant_xi2_lower = chi2inv((1 - alpha), (n - 1));
    quant_xi2_upper = chi2inv(alpha, (n - 1));

    lower_sigma = s2 * (n - 1) / quant_xi2_lower;
    upper_sigma = s2 * (n - 1) / quant_xi2_upper;

    fprintf("\nНижняя граница gamma-доверительного интервала для sigma = %.4f\n", lower_sigma);
    fprintf("Верхняя граница gamma-доверительного интервала для sigma = %.4f\n", upper_sigma);

    fprintf("\ngamma-доверительный интервал для sigma: (%.4f, %.4f)\n", lower_sigma, upper_sigma);

    % Построение графиков для задания 3 а)

    mu_arr = zeros(n, 1);
    s2_arr = zeros(n, 1);

    for i = 1 : n
        X_part = X(1 : i);

        mu_arr(i) = sum(X_part) / i;

        if (i > 1)
            s2_arr(i) = sum((X_part - mu_arr(i)) .^2) / (i - 1);
        else
            s2_arr(i) = 0;
        endif
    endfor

    mu_line = zeros(n, 1);
    mu_line(1 : n) = mu_arr(n);

    mu_lower = zeros(n, 1);
    mu_upper = zeros(n, 1);

    for i = 1 : n
        quant_st = tinv((1 - alpha), (i - 1));
```

```

        mu_lower(i) = mu_arr(i) - (quant_st * sqrt(s2_arr(i)) / sqrt(i));
        mu_upper(i) = mu_arr(i) + (quant_st * sqrt(s2_arr(i)) / sqrt(i));
    endfor

    % Графики
    plot((10 : n), mu_line(10 : n), 'r', 'LineWidth', 1);
    hold on;
    plot((10 : n), mu_arr(10 : n), 'g', 'LineWidth', 1);
    hold on;
    plot((10 : n), mu_upper(10 : n), 'b', 'LineWidth', 1);
    hold on;
    plot((10 : n), mu_lower(10 : n), 'k', 'LineWidth', 1);
    hold on;

    grid on;
    xlabel("n");
    ylabel('\mu');

    legend('\mu\^(x_N)', '\mu\^(x_n)', '\mu^{-}(x_n)', '\mu_{-}(x_n)');

    % Построение графиков для задания 3 b)

    figure()

    mu_arr = zeros(n, 1);
    s2_arr = zeros(n, 1);

    for i = 1 : n
        X_part = X(1 : i);

        mu_arr(i) = sum(X_part) / i;

        if (i > 1)
            s2_arr(i) = sum((X_part - mu_arr(i)) .^2) / (i - 1);
        else
            s2_arr(i) = 0;
        endif
    endfor

    s2_line = zeros(n, 1);
    s2_line(1 : n) = s2_arr(n);

    s2_lower = zeros(n, 1);
    s2_upper = zeros(n, 1);

    for i = 1 : n
        quant_xi2_lower = chi2inv((1 - alpha), (i - 1));
```

```
        quant_xi2_upper = chi2inv(alpha, (i - 1));

        s2_lower(i) = s2_arr(i) * (i - 1) / quant_xi2_lower;
        s2_upper(i) = s2_arr(i) * (i - 1) / quant_xi2_upper;
    endfor

    % Графики
    plot((10 : n), s2_line(10 : n), 'r', 'LineWidth', 1);
    hold on;
    plot((10 : n), s2_arr(10 : n), 'g', 'LineWidth', 1);
    hold on;
    plot((10 : n), s2_upper(10 : n), 'b', 'LineWidth', 1);
    hold on;
    plot((10 : n), s2_lower(10 : n), 'k', 'LineWidth', 1);
    hold on;

    grid on;
    xlabel("n");
    ylabel('\sigma');

    legend('S^2(x_N)', 'S^2(x_n)', '\sigma^{2 -}(x_n)', '\sigma^2_{-}(x_n)');

endfunction
```

3.2 Результаты работы программы

```
>> lab_2

Выборочное среднее = -7.6609
Исправленная выборочная дисперсия = 0.7779

Нижняя граница gamma-доверительного интервала для mu = -7.7944
Верхняя граница gamma-доверительного интервала для mu = -7.5274

gamma-доверительный интервал для mu: (-7.7944, -7.5274)

Нижняя граница gamma-доверительного интервала для sigma = 0.6364
Верхняя граница gamma-доверительного интервала для sigma = 0.9764

gamma-доверительный интервал для sigma: (0.6364, 0.9764)
>> |
```

Рисунок 3.1 – Результаты расчетов для выборки из индивидуального варианта

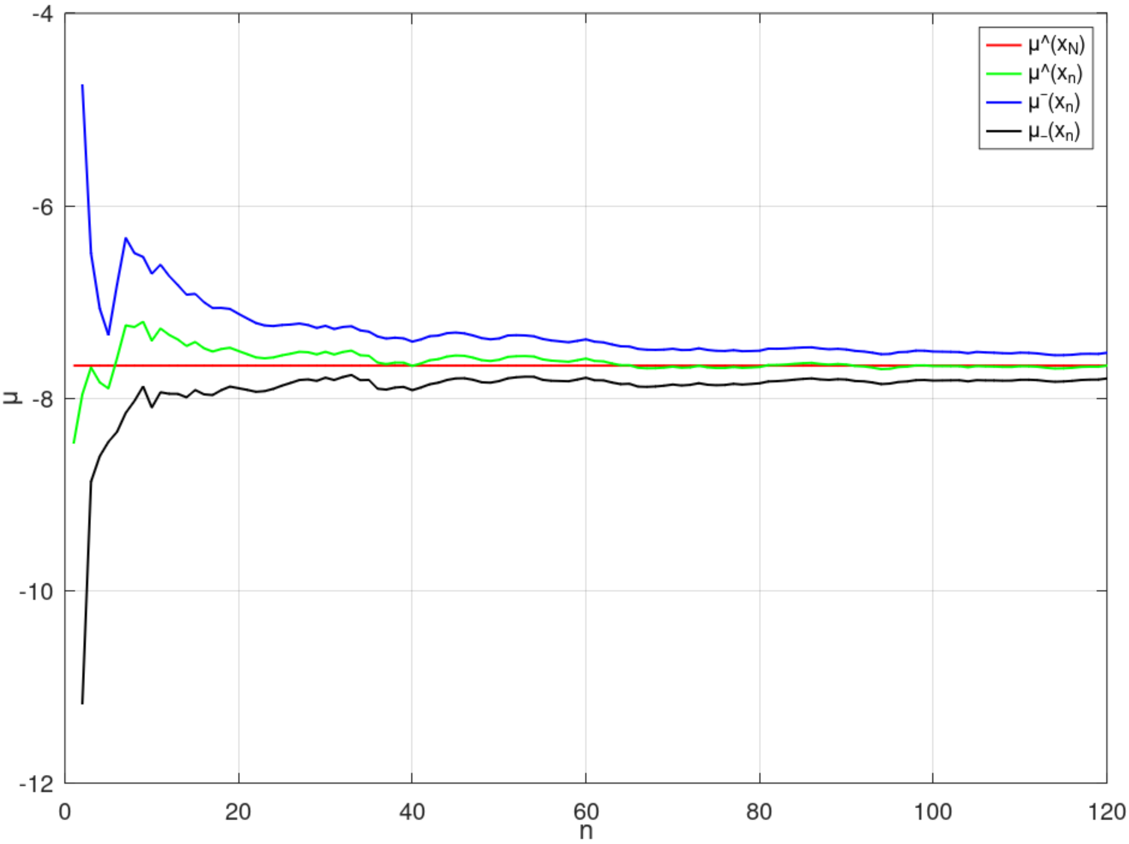

Рисунок 3.2 – График для математического ожидания

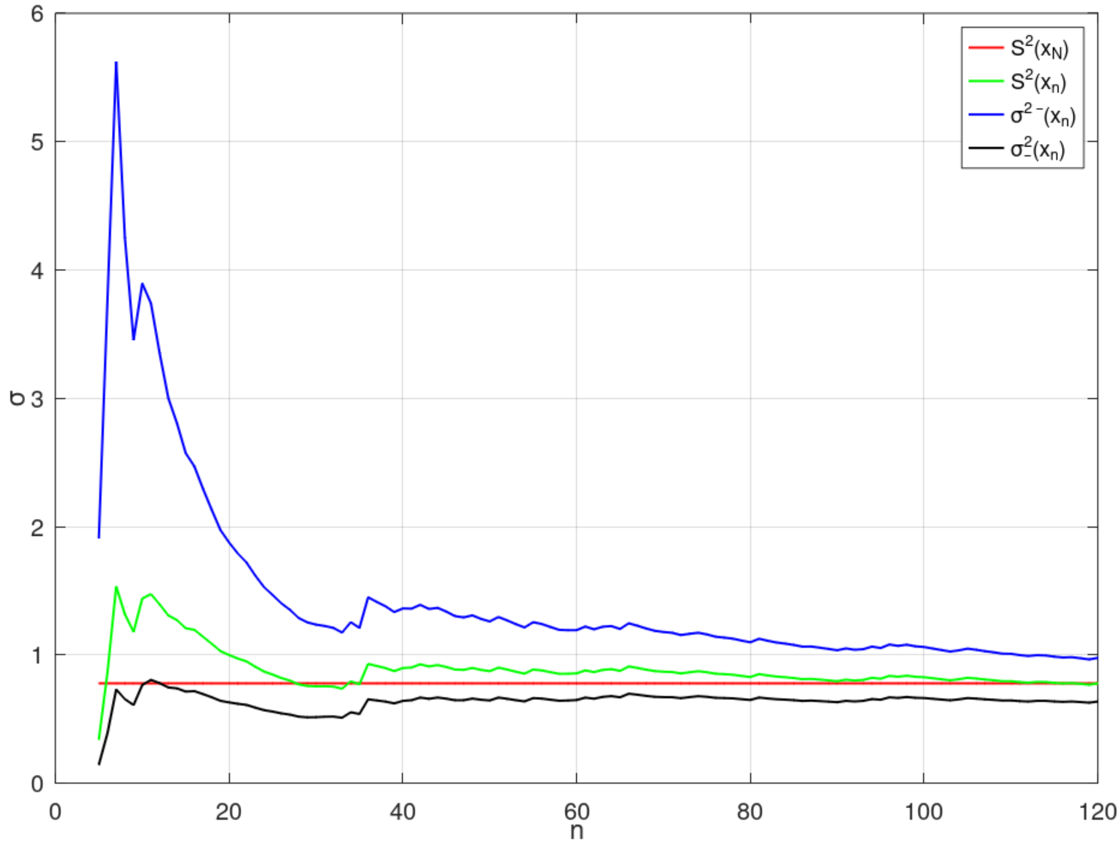

Рисунок 3.3 – График для дисперсии