AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Testy nieparametryczne

Statystyka

Dr inż. Janusz Majewski
Katedra Informatyki

Testy nieparametryczne

Testy nieparametryczne nie dotyczą poszczególnych parametrów rozkładu, ale istoty rozkładów jako całości. Nie ma przy tym żadnych założeń o typie rozkładu. Stosujemy jej gdy między innymi:

1) może istnieć oczywista nienormalność rozkładu,
2) może istnieć przypuszczalna nienormalność rozkładu, czasem nawet znacznego stopnia, ale liczebność próby może być zbyt mała, aby to ustalić,
3) potrzebna jest szybka metoda statystyczna, wymagająca niewielkiej ilości obliczeń,
4) pomiar ma charakter jakościowy, tworzy, np. szereg rangowy lub istotne są tylko znaki,
5) nie są spełnione założenia związane z rozkładem (parametrami rozkładu lub typem rozkładu), co uniemożliwia przeprowadzenie testu parametrycznego.

Badanie charakteru rozkładu Test λ-Kołmogorowa

Służy on do zweryfikowania hipotezy, że populacja ma określony typ rozkładu. Wymaga się, aby populacja badana miała rozkład ciągły o dystrybuancie $F(x)$. Na podstawie wyników próby o liczebności *N* **(*N* co najmniej kilkadziesiąt!)** wylosowanej niezależnie chcemy zweryfikować hipotezę zerową, że dystrybuanta badanej populacji $F(x)$ jest identyczna z dystrybuantą pewnego konkretnego hipotetycznego rozkładu ciągłego $F_0(x)$, czyli

$$H_0: F(x)=F_0(x)$$

$$H_1: F(x)\neq F_0(x)$$

Badanie charakteru rozkładu
Test λ-Kołmogorowa

Wyniki próby należy uporządkować w kolejności rosnącej i pogrupować w stosunkowo wąskie przedziały o prawych końcach x_j. Liczebność j-tego przedziału oznaczamy r_j. Dla każdej wartości x_j wyznaczamy wartość dystrybuanty empirycznej (z próby) $F_e(x)$ według wzoru:

$$F_e(x_j) = \frac{\sum_{i \leq j} n_i}{N}$$

Badanie charakteru rozkładu Test λ-Kołmogorowa

Z rozkładu hipotetycznego wyznaczamy następnie dla każdego x_j wartość teoretycznej dystrybuanty $F_0(x)$. Dla każdego x_j obliczamy bezwzględną wartość odchylenia dystrybuanty empirycznej od teoretycznej $\left|F_e(x_j) - F_0(x_j)\right|$. Dalej wyznaczamy wartość maksymalnego modułu odchylenia

$$D = \sup_{x_j} \left|F_e(x_j) - F_0(x_j)\right|$$

oraz wartość statystyki λ

$$\lambda = D\sqrt{N}$$

Badanie charakteru rozkładu
Test λ-Kołmogorowa

Statystyka ta przy założeniu prawdziwości H_0 ma rozkład λ-Kołmogorowa (niezależny od postaci dystrybuanty teoretycznej $F_0(x)$). Odrzucamy H_0, gdy

$\lambda \geq {}_{\alpha}\lambda$ (wartość krytyczna ${}_{\alpha}\lambda$ odczytywana z tablic)

${}_{\alpha}\lambda$	α
1,224	0,1
1,358	0,05
1,627	0,01
1,731	0,005
1,950	0,001

Badanie charakteru rozkładu Test λ-Kołmogorowa

Jeśli chcemy sprawdzić normalność rozkładu populacji przy użyciu testu λ-Kołmogorowa, obliczamy $\bar{x}$ oraz s z próby. Jeśli próba jest duża, można przyjąć, że $\mu = \bar{x}$, $\sigma = s$. Dokonujemy standaryzacji wartości x_j dla końców przedziału.

$$u_j = \frac{x_j - \bar{x}}{s}$$

i obliczamy wartości dystrybuanty empirycznej

$$F_e(u_j) = \frac{\sum_{i \leq j} n_i}{N}$$

i następnie z tablic odczytujemy wartości dystrybuanty rozkładu normalnego $F_0(u_j)$. Dalej jak poprzednio.

Badanie charakteru rozkładu Test λ-Kołmogorowa

<u>Przykład:</u> Zbadano 200 próbek osocza krwi (pobranych od pacjentów bez anemii) oznaczając w każdej ilość tzw. azotu pozabiałkowego.

$$\bar{x} = 32{,}9 \qquad s = 1{,}4$$

Zawartość azotu [mg% N]	x_j	u_j	n_j	Liczebność skumulowana	$F_e(u_j)$	$F_0(u_j)$	D_j
29,5- 30,5	30,5	-1,71	12	12	0,060	0,044	0,016
30,5- 31,5	31,5	-1,00	23	35	0,175	0,159	0,016
31,5- 32,5	32,5	-0,29	35	70	0,350	0,386	0,036 !
32,5- 33,5	33,5	0,43	62	132	0,660	0,666	0,006
33,5- 34,5	34,5	1,14	44	176	0,880	0,873	0,007
34,5- 35,5	35,5	1,86	18	194	0,970	0,969	0,001
35,5- 36,5	36,5	2,57	6	200	1,000	0,995	0,005

Badanie charakteru rozkładu Test λ-Kołmogorowa

Zawartość azotu [mg% N]	x_j	u_j	n_j	Liczebność skumulowana	$F_e(u_j)$	$F_0(u_j)$	D_j
29,5- 30,5	30,5	-1,71	12	12	0,060	0,044	0,016
30,5- 31,5	31,5	-1,00	23	35	0,175	0,159	0,016
31,5- 32,5	32,5	-0,29	35	70	0,350	0,386	0,036 !
32,5- 33,5	33,5	0,43	62	132	0,660	0,666	0,006
33,5- 34,5	34,5	1,14	44	176	0,880	0,873	0,007
34,5- 35,5	35,5	1,86	18	194	0,970	0,969	0,001
35,5- 36,5	36,5	2,57	6	200	1,000	0,995	0,005

$$\lambda = D \cdot \sqrt{N} = 0{,}036 \cdot \sqrt{200} = 0{,}509 \;<\; {}_{0,05}\,\lambda = 1{,}358$$

Nie ma podstaw kwestionowania normalności

Badanie charakteru rozkładu Test χ^2

Dzielimy przedział zmienności na *k* rozłącznych klas (najlepiej, aby w każdej klasie znalazła się podobna liczba danych). Oznaczamy przez n_j liczebność *j*-tej klasy, przy czym:

$$N = \sum_{j=1}^{k} n_j$$

Po dokonaniu podziału określa się prawdopodobieństwa p_j, z jakimi, przy założeniu że rozkład jest zgodny z hipotetycznie zakładanym, zmienna losowa przyjmowałaby wartości z poszczególnych klas. W tym celu należy najpierw wyznaczyć na podstawie próby parametry rozkładu hipotetycznego,
a następnie z tablic ustalić odpowiednie wartości prawdopodobieństw teoretycznych p_j. Dalej wyznaczamy statystykę χ^2

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(n_j - Np_j\right)^2}{Np_j}$$

Badanie charakteru rozkładu Test χ^2

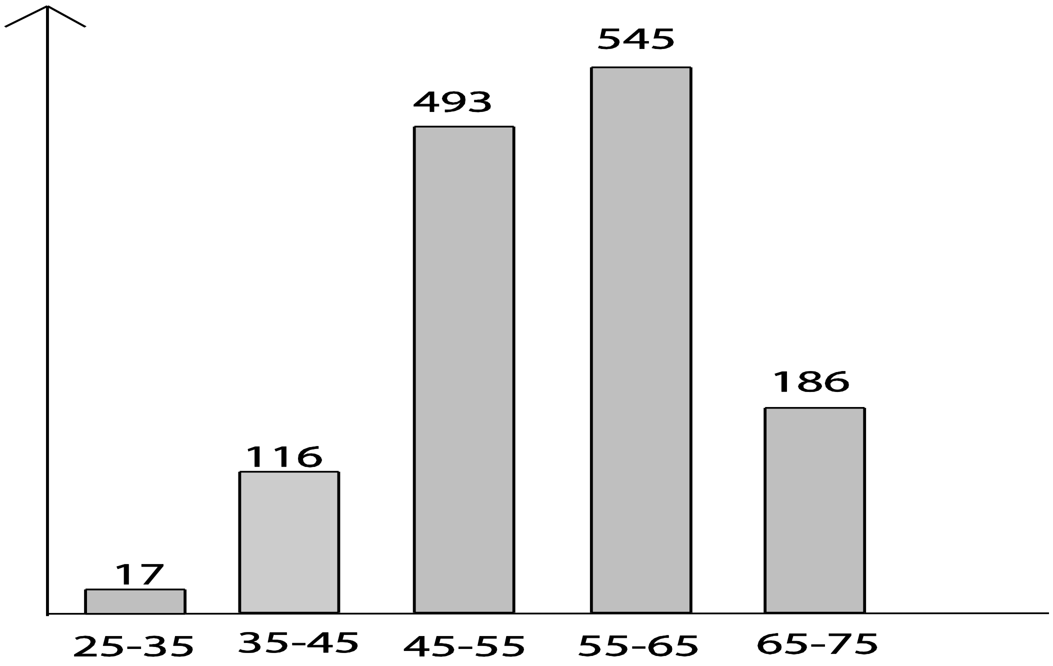
Statystyka ta ma w przybliżeniu rozkład χ^2 o $k\text{-}r\text{-}1$ stopniach swobody, przy czym r jest liczbą parametrów rozkładu szacowanych z próby (dla rozkładu normalnego $r=2$: średnia i odchylenie standardowe).

Odrzucamy H_0 o zgodności rozkładu teoretycznego i empirycznego, gdy

$$\chi^2 \geq_{\propto} \chi^2_{(k-r-1)} \ .$$

Badanie charakteru rozkładu Test χ^2

Przykład: Zweryfikować testem χ^2 normalność rozkładu danych wieku pacjentów z nowotworem płuc w pewnym szpitalu.



Gdyby była taka możliwość należałoby tak wybrać granice przedziałów, aby liczebności w klasach były podobne. Tutaj n_j dla grupy wiekowej 25-35 jest niekorzystnie małe!

Badanie charakteru rozkładu
Test χ^2

Wiek	n_j	x_j	u_j	$F(u_j)$	p_j	Np_j	$\left(n_j - Np_j\right)^2$	$\frac{\left(N_j - Np_j\right)^2}{Np_j}$
25-35	17	35	-2,490	0,0064	0,0084	8,68	69,14	7,96
35-45	116	45	-1,282	0,1003	0,0929	127,56	133,63	1,05
45-55	493	55	-0,073	0,4721	0,3718	504,80	139,24	0,28
55-65	545	65	1,137	0,8729	0,4008	544,16	0,71	0,00
65-75	186	75	-------	1,0000	0,1271	172,34	186,60	1,08
Razem	1357				1			10,37

Badanie charakteru rozkładu Test χ^2

Liczba stopni swobody = 5-2-1=2

$$\chi^2 = 10{,}37$$

$$_{0,05}\chi^2_{(2)} = 5{,}99 \qquad _{0,01}\chi^2_{(2)} = 9{,}21$$

$$\chi \geq \chi^2_{kryt} \quad dla \quad \alpha = 0{,}01$$

Hipotezę o normalności rozkładu trzeba odrzucić!!

Badanie charakteru rozkładu Test normalności Shapiro-Wilka

- Test normalności Shapiro-Wilka może być używany nawet w przypadku prób o niewielkiej liczebności.
- Testowane hipotezy:

H_0: **populacja**, z której wylosowano próbę, **ma rozkład normalny**

H_1: **populacja nie ma rozkładu normalnego**

- Dane:

n – liczebność próby,

$x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ – uporządkowana według wartości rosnących próba pobrana z populacji o ciągłej dystrybuancie,

α - poziom istotności

Badanie charakteru rozkładu
Test normalności Shapiro-Wilka

Statystyka testu:

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_i(n)(x_{(n-i+1)} - x_{(i)})\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

gdzie:

$\left[\frac{n}{2}\right]$ – część całkowita *n/2*

$a_i(n)$ – stablicowane współczynniki Shapiro-Wilka, zależne od liczebności próby *n* oraz *i*

i\n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,7071	0,7071	0,6872	0,6646	0,6431	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739	0,5601
2		0	0,1677	0,2413	0,2806	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291	0,3315
3				0	0,0875	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141	0,2260
4						0	0,0564	0,0947	0,1224	0,1429
5								0	0,0399	0,0695
6										0

Badanie charakteru rozkładu
Test normalności Shapiro-Wilka

i \ n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	0,5475	0,5359	0,5251	0,5150	0,5056	0,4968	0,4886	0,4808	0,4734	0,4643
2	0,3325	0,3325	0,3318	0,3306	0,3290	0,3273	0,3253	0,3232	0,3211	0,3185
3	0,2347	0,2412	0,2460	0,2495	0,2521	0,2540	0,2553	0,2561	0,2565	0,2578
4	0,1586	0,1707	0,1802	0,1878	0,1939	0,1988	0,2027	0,2059	0,2085	0,2199
5	0,0922	0,1099	0,1240	0,1353	0,1447	0,1524	0,1587	0,1641	0,1686	0,1736
6	0,0303	0,0539	0,0727	0,0880	0,1005	0,1109	0,1197	0,1271	0,1334	0,1399
7		0	0,0240	0,0433	0,0593	0,725	0,0837	0,0932	0,1013	0,1092
8				0	0,0196	0,0359	0,0496	0,0612	0,0711	0,0804
9						0	0,0130	0,0303	0,0422	0,0530
10								0	0,0140	0,0263
11										0

Badanie charakteru rozkładu
Test normalności Shapiro-Wilka

- Hipotezę zerową odrzucamy, gdy obliczone $\boldsymbol{W \leq W_{(\alpha,n)}}$ gdzie:

$W_{(\alpha,n)}$ - odczytana z tablicy wartość krytyczna testu Shapiro-Wilka

Uwaga: nie zależy nam na odrzuceniu hipotezy zerowej, czyli jeśli rozkład ma być zbliżony do normalnego, to oczekujemy, aby $\boldsymbol{W > W_{(\alpha,n)}}$

- Fragment tablicy wartości krytycznych testu Shapiro-Wilka (na następnym slajdzie)

Badanie charakteru rozkładu
Test normalności Shapiro-Wilka

n \ α	**0,01**	**0,02**	**0,05**	**0,1**
3	0,753	0,756	0,767	0,789
4	0,687	0,707	0,748	0,792
5	0,686	0,715	0,762	0,806
6	0,713	0,743	0,788	0,826
7	0,730	0,760	0,803	0,838
8	0,749	0,778	0,818	0,851
9	0,764	0,791	0,829	0,859
10	0,781	0,806	0,842	0,869
11	0,792	0,817	0,850	0,876
12	0,805	0,828	0,859	0,883
13	0,814	0,837	0,866	0,889
14	0,825	0,846	0,874	0,895
15	0,835	0,855	0,881	0,901
16	0,844	0,863	0,887	0,906
17	0,851	0,869	0,892	0,910
18	0,858	0,874	0,897	0,914
19	0,863	0,879	0,901	0,917
20	0,868	0,884	0,905	0,920
21	0,873	0,888	0,908	0,923

Badanie charakteru rozkładu
Test normalności Shapiro-Wilka

Przykład: Zebrano i posortowano niemalejąco 20 obserwacji charakteryzujących wskaźnik masy ciała (BMI) badanych pacjentów. Aby przeprowadzić analizę statystyczną musimy dowiedzieć się, czy rozkład tej cechy jest rozkładem normalnym.

BMI = [21,7; 22,5; 23,1; 23,6; 24,2; 24,5; 24,6; 25,5; 25,7; 25,9; 26,2; 26,4; 27,1; 27,3; 27,3; 27,7; 28,1; 30,4; 30,7; 31,2]

Aby obliczyć wartość statystyki testowej dla testu Shapiro-Wilka musimy wyznaczyć następujące wartości:

Badanie charakteru rozkładu
Test normalności Shapiro-Wilka

i	$a_i(n)$	$\widetilde{X}_{n-i+1}$	$\widetilde{X}_i$	$a_i(n) \cdot (\widetilde{X}_{n-i+1} - \widetilde{X}_i)$
1	0,4734	31,2	21,7	4,4973
2	0,3211	30,7	22,5	2,63302
3	0,2565	30,4	23,1	1,87245
4	0,2085	28,1	23,6	0,93825
5	0,1686	27,7	24,2	0,5901
6	0,1334	27,3	24,5	0,37352
7	0,1013	27,3	24,6	0,27351
8	0,0711	27,1	25,5	0,11376
9	0,0422	26,4	25,7	0,02954
10	0,014	26,2	25,9	0,0042
			$\sum$	11,32565
			$\sum^2$	128,2703

$$\bar{x} = \frac{21{,}7 + \cdots + 31{,}2}{20} = 26{,}185$$

$$\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = (21{,}7 - 26{,}185)^2 + \cdots + (31{,}2 - 26{,}185)^2 = 132{,}6055$$

Badanie charakteru rozkładu
Test normalności Shapiro-Wilka

Statystyka testowa W przyjmie zatem wartość:

$$W = \frac{128{,}2703}{132{,}6055} = 0{,}9673$$

Dla α=0,05 i dla n=20 , stablicowana wartość krytyczna wynosi $W_{(0,05;20)}$=0,905 . A zatem zachodzi nierówność $W > W_{(\alpha,n)}$, co oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładu badanych danych.

Porównywanie populacji
Test Wilcoxona (sumy rang)
dla danych niesparowanych

Z dwóch populacji wylosowano niezależne próby losowe o liczebnościach N_1 i N_2 odpowiednio. Zakłada się, że istnieje możliwość ustawienia obserwacji z jednej i drugiej próby w jednym wspólnym szeregu, przy czym można obserwacje te uporządkować według pewnego porządku (nadać im rangi). Rangi powinny być liczbami od 1 do $N = N_1 + N_2$. Dopuszczalne są tzw. rangi wiązane (kilka obserwacji jest sklasyfikowanych na „tym samym miejscu”- wówczas wartość liczbowa rangi musi być odpowiednią średnią).

H_0: Próby wylosowano z populacji o tych samych rozkładach
H_1: Próby wylosowano z populacji o różnych rozkładach

Obliczamy sumy rang dla próby pierwszej i drugiej osobno. Porównujemy <u>mniejszą</u> z tych sum z wartością krytyczną z tablic. Hipotezę zerową odrzucamy, gdy suma rang jest <u>MNIEJSZA(!)</u> od wartości krytycznej.

Porównywanie populacji
Test Wilcoxona (sumy rang)
dla danych niesparowanych

Wartości krytyczne dla testu sumy rang Wilcoxona

dla danych niesparowanych

n_A	n_B	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}05$	n_A	n_B	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}05$
4	4	-	11	5	5	16	19
	5	10	12		6	17	20
	6	11	13		7	18	21
	7	11	14		8	19	23
	8	12	15		9	20	24
	9	13	16		10	21	26
	10	13	17		11	22	27
	11	14	18		12	23	28
	12	15	19				

Porównywanie populacji Test Wilcoxona (sumy rang) dla danych niesparowanych

Przykład: Badano, jaką część budżetu centrów onkologicznych (badania nad rakiem, diagnozowanie i terapia, edukacja publiczna, rehabilitacja, udogodnienia dla ciężko chorych i umierających) stanowią koszty diagnozowania i terapii. Według tego chciano porównać lecznictwo onkologiczne w Europie Zachodniej i Wschodniej.

H_0: Nie ma różnicy w poziomie wydatków na diagnozowanie i leczenie raka (w stosunku do całkowitego budżetu centrów onkologicznych) między Europą Zachodnią i Wschodnią (1985 r.)

H_1: Są różnice w poziomie wydatków na diagnozowanie i leczenie raka między Europą Zachodnią i Wschodnią

Porównywanie populacji
Test Wilcoxona (sumy rang)
dla danych niesparowanych

Poziomy wydatków (%)	Ranga	Kwalifikacja
40	1	WE
61	2	WE
64	3	EE
68	4	WE
75	5	EE
80	6	WE
82	7	WE
88	8	WE
91	9	EE
93	10 ½	EE
93	10 ½	WE
98	12	EE
99,8	13	WE

Porównywanie populacji
Test Wilcoxona (sumy rang)
dla danych niesparowanych

EE:

$N_1 = 5$

$\sum_{rang} EE = 3 + 5 + 9 + 10{,}5 + 12 = 39{,}5$ **<= MNIEJSZA**

WE:

$N_2 = 8$

$\sum_{rang} WE = 1 + 2 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10{,}5 + 13 = 51{,}5$

Wartość krytyczna dla α=0,05 N_1=5, N_2= 8 wynosi 23

Ponieważ $39{,}5 > 23$ **NIE MA PODSTAW DO ODRZUCENIA H_0 !**

Porównywanie populacji
Test sumy rang Wilcoxona dla danych połączonych w pary

Dane tworzą pary obserwacji związane z pewnym obiektem (np. pacjentem). Różnice między obserwacjami z danej pary dają się uporządkować i można im przypisać rangi. Wyznaczamy rangi różnic bez uwzględniania znaków różnic, po czym sumujemy oddzielnie rangi różnic dodatnich , oddzielnie rangi różnic ujemnych, nie biorąc pod uwagę różnic równych zero.

(N'– liczba wszystkich par w próbie; N– liczba par, dla których różnice ≠ 0)

Wybieramy <u>mniejszą</u> z sum rang i porównujemy ją z wartością krytyczną dla danego poziomu istotności i dla danego N. Jeśli suma rang jest <u>MNIEJSZA(!)</u> od wartości krytycznej, odrzucamy hipotezę H_0 mówiącą, że: populacje, z których otrzymano pierwsze i drugie elementy par, mają takie same rozkłady. Podobnie jak poprzednio dopuszczalne są tzw. rangi wiązane; wówczas wartości liczbowe rang są odpowiednimi średnimi.

Porównywanie populacji
Test sumy rang Wilcoxona dla danych połączonych w pary

Wartości krytyczne testu Wilcoxona dla danych połączonych w pary

N	α = 0,05	α = 0,02	α = 0,01
6	0	-	-
7	2	0	-
8	4	2	0
9	6	3	2
10	8	5	3
11	11	7	5
12	14	10	7
13	17	13	10
14	21	16	13
15	25	20	16
16	30	24	20
17	35	28	23
18	40	33	28
19	46	38	32
20	52	43	38

Porównywanie populacji
Test sumy rang Wilcoxona dla danych połączonych w pary

Przykład: Czternastu pacjentów z rakiem głowy lub szyi leczono dwoma metodami (sekwencyjnie przez trzy miesiące, kolejność losowa).

Metoda A: radioterapia + lek

Metoda B: radioterapia + placebo

Efekty oznaczono wg skali 5 punktowej:

1- rozwój choroby

2- bez zmian

3- częściowy regres guza

4- całkowity regres z nawrotem

5- całkowity regres bez nawrotu

Porównać oba sposoby leczenia

Porównywanie populacji
Test sumy rang Wilcoxona dla danych połączonych w pary

<table>
<tr><th>Pacjent</th><th>Leczenie A</th><th>Leczenie B</th><th>|Różnica|</th><th>Ranga</th><th>Ranga ze znakiem</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td><td>7</td><td>-7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>3,5</td><td>+3,5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>3,5</td><td>+3,5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td><td>8,5</td><td>+8,5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>1</td><td>4</td><td>10</td><td>+10</td></tr>
<tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>1</td><td>3,5</td><td>+3,5</td></tr>
<tr><td>7</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>3,5</td><td>+3,5</td></tr>
<tr><td>8</td><td>5</td><td>4</td><td>1</td><td>3,5</td><td>+3,5</td></tr>
<tr><td>9</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td><td>8,5</td><td>+8,5</td></tr>
<tr><td>10</td><td>5</td><td>4</td><td>1</td><td>3,5</td><td>+8,5</td></tr>
<tr><td>11</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td rowspan="4" colspan="2">Nie uwzględniamy</td></tr>
<tr><td>12</td><td>5</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>13</td><td>5</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>14</td><td>5</td><td>5</td><td>0</td></tr>
</table>

Porównywanie populacji
Test sumy rang Wilcoxona dla danych połączonych w pary

$$N' = 14$$

$$N = 14 - 4 = 10$$

$$\sum rang\ ujemnych = 7$$

$$\sum rang\ dodatnich = 48$$

Wartość krytyczna dla $\alpha = 0{,}05$ i dla $N = 10$ wynosi 8

Ponieważ $7 < 8$ H_0 o równości rozkładów **ODRZUCAMY!**

Porównywanie populacji
Test sumy rang dla kilku prób

Test ten jest „analogiem” nieparametrycznym analizy wariancji, nazywany jest też testem **Kruskala-Wallisa**. Sprawdza się hipotezę, że k prób pochodzi z populacji o identycznych rozkładach, tzn.:

H_0: $F_1(x) = F_2(x) = \cdots = F_k(x)$

H_1: Nie wszystkie dystrybuanty porównywanych rozkładów są identyczne

Założenie: rozkłady testowanych populacji są ciągłe

n_i – liczebność *i*-tej próby

$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ – liczebność całkowita

Wszystkie N obserwacji ustawiamy w jeden szereg nadając im rangi od najmniejszej- najniższa ranga (na ogół =1) do największej. Następnie dla każdej *i*-tej próby obliczamy T_i – sumę rang obserwacji należących do tej próby.

Porównywanie populacji
Test sumy rang dla kilku prób

Obliczamy wartość statystyki χ^2

$$\chi^2 = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{{T_i}^2}{n_i} - 3(N+1)$$

Statystyka ta ma przy założeniu prawdziwości H_0 rozkład zbliżony do $\chi^2_{(k-1)}$

Hipotezę zerową odrzucamy, gdy

$$\chi^2 \geq {}_{\alpha}\chi^2_{(k-1)}$$

Porównywanie populacji
Test sumy rang dla kilku prób

Przykład: Załóżmy, że przeprowadzono badania w celu porównania 4 metod leczenia pewnej choroby. Pobrano 5-elementowe próby losowe spośród chorych na daną chorobę, których leczono odpowiednio metodą I, II, III i IV. Wyniki terapii oceniono w specjalnym teście. Wartości testu podane w umownej punktacji przedstawia poniższa tabela. Podano w niej też rangi nadane wynikom obserwacji.

Metoda I	Rangi	Metoda II	Rangi	Metoda III	Rangi	Metoda IV	Rangi
57	2	74	20	63	8,5	62	6,5
58	3	66	11,5	68	15	63	8,5
67	13	65	10	59	4,5	66	11,5
50	1	72	19	59	4,5	71	18
62	6,5	68	15	68	15	70	17
	25,5		75,5		47,5		61,5

Porównywanie populacji
Test sumy rang dla kilku prób

W podanym przykładzie chcemy zweryfikować hipotezę, że wszystkie metody leczenia dają jednakowe wyniki. Musimy więc zastosować test sprawdzający hipotezę, że *k* niezależnych próbek pochodzi z tej samej populacji. Użyjemy w tym celu testu sumy rang Kruskala-Wallisa.

$$\chi^2 = 7{,}841454$$

$$_{0.05}\chi^2_{(3)} = 7{,}81$$

$$\chi^2 \geq {}_{0.05}\chi^2_{(3)}$$

czyli odrzucamy hipotezę zerową. Na podstawie wyników analizy można wyciągnąć wniosek, że metody leczenia mają statystycznie istotny wpływ na wynik terapii.

Porównywanie populacji
Korelacja rang Spearmana

Przypuśćmy, że dla każdego *N* obiektów dokonuje się obserwacji dwu zmiennych x i y. Czasami nie możemy zastosować analizy regresji liniowej i korelacji, gdyż:

- zależność nie jest liniowa,
- nie dysponujemy dokładnymi pomiarami ilościowymi zmiennych, choć potrafimy je uporządkować (nadać im rangi)
- istnieje uzasadnione podejrzenie o nienormalności rozkładu dwuwymiarowego (x, y)

Porównywanie populacji
Korelacja rang Spearmana

Można wtedy wyznaczyć rangi obiektów względem dwu rozważanych kryteriów x i y i obliczyć współczynnik korelacji r_S Spearmana

$$r_S = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{N}\left(r_i^{(x)} - r_i^{(y)}\right)^2}{N(N^2-1)}$$

N- liczebność próby

$r_i^{(x)}, r_i^{(y)}$- rangi i-tego obiektu względem odpowiednio kryteriów *x* i *y*.

Współczynnik r_S zachowuje się podobnie jak współczynnik korelacji Pearsona *r* czyli $(-1 \le r_S \le 1)$

Porównywanie populacji
Korelacja rang Spearmana

Test istotności: tablica wartości krytycznych

N	**α=0,05**	**α=0,01**
4 i mniej	-	-
5	1,0	-
6	0,886	1,0
7	0,750	0,893
8	0,714	0,857
9 lub więcej	jak dla zwykłego *r* Pearsona badanego testem t-Studenta przy *N – 2* stopniach swobody	

H_0: $r_S = 0$

H_1: $r_S \neq 0$

H_0 odrzucamy, gdy

$|r_S| \geq {}_{\propto}r_{S(kryt)}$

Porównywanie populacji
Korelacja rang Spearmana

<u>Przykład</u>: Po zakończeniu zajęć z psychologii klinicznej asystent uszeregował studentów według dwóch kryteriów: przydatności do zawodu (*x*) oraz znajomości psychologii (*y*). Czy korelacja między tymi kryteriami jest istotna?

Student	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Ranga wg przydatności do zawodu (*x*)	4	10	3	1	9	2	6	7	8	5
Ranga wg znajomości psychologii (*y*)	5	8	6	2	10	3	9	4	7	1

Porównywanie populacji
Korelacja rang Spearmana

$N = 10$

$$r_S = 1 - \frac{\sum \left(r_1^{(x)} - r_i^{(y)} \right)^2}{N(N^2 - 1)}$$

$$r_S = 1 - \frac{6(1 + 4 + 9 + 1 + 1 + 1 + 9 + 9 + 1 + 16)}{10(100 - 1)} = 0{,}685$$

Korzystamy z testu t, gdyż $N \geq 9$

$$t = r\sqrt{\frac{N-2}{1-r^2}} = 0{,}685\sqrt{\frac{8}{1-(0{,}685)^2}} = 2{,}662$$

$${}_{0{,}05}t_{(8)} = 2{,}306$$

Ponieważ $|t| \geq t_{kryt}$ dla α=0,05, więc odrzucamy hipotezę zerową o braku korelacji między obydwoma klasyfikacjami.