

---

## FICHE 0 : DÉNOMBRABILITÉ

---

### Exercice 1

Soit une suite géométrique  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de raison  $q$ .

- a) Rappeler et démontrer la formule qui permet de calculer la somme partielle d'une série géométrique

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

- b) Pour quelles valeurs des paramètres  $a_0$  et  $q$  la série géométrique  $S = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$  converge ? Justifier votre réponse.
- c) Donner la formule du reste  $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$  d'une série géométrique convergente. Sous quelle condition  $R_n \leq a_n$  ?

### Exercice 2

Trouvez une suite  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  d'entiers appartenant chacun à  $\llbracket 0, 9 \rrbracket$  et telle que

$$\frac{19}{44} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{10^i}.$$

Justifiez votre réponse par un calcul de somme de série.

### Exercice 3

*En probabilités, on énumère assez souvent les issues élémentaires possibles d'une expérience, mais on dresse rarement la liste de tous les événements observables. Le but de cet exercice est de comprendre pourquoi.*

- a) Etant donné un ensemble  $\Omega$  soit  $\mathcal{P}(\Omega)$  l'ensemble des parties de  $\Omega$ . Si l'ensemble  $\Omega$  a  $n$  éléments, combien l'ensemble  $\mathcal{P}(\Omega)$  a-t-il d'éléments ?
- b) On réalise une expérience simple : un tirage dans une urne contenant 3 jetons numérotés 1, 2 et 3. Donner l'ensemble  $\Omega$  des issues possibles de cette expérience et l'ensemble  $\mathcal{P}(\Omega)$  correspondant, qui représente la famille des événements observables.
- c) On réalise une expérience un peu moins simple : le lancer de deux dés de couleurs différentes. Quel est le cardinal de  $\Omega$  ? Si on utilise un ordinateur pour décrire tous les événements observables et si chacun occupe 5 octets (pourquoi ?), quel espace mémoire

l'ensemble des observables occupera-t-il en tout ? Calculer la hauteur de la pile de CD-ROMs nécessaire (épaisseur : 1,2 mm, contenance : 800 mégaoctets<sup>1</sup>).

#### Exercice 4

- a) Montrer que l'ensemble des nombres irrationnels n'est pas dénombrable.
- b) Montrer que l'ensemble  $\mathbb{D}$  des nombres décimaux (c'est-à-dire de la forme  $k \times 10^{-n}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) est dénombrable.
- c) Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?
  - (i) l'ensemble des polynômes à coefficients entiers ;
  - (ii) l'ensemble des nombres algébriques (un nombre réel ou complexe est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers).

#### Exercice 5

- a) Montrez que toute famille d'intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  non vides et deux à deux disjoints est au plus dénombrable.
- b) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

#### Exercice 6

Existe-t-il des droites du plan  $\mathbb{R}^2$  qui ne contiennent pas au moins deux points à coordonnées rationnelles ?

---

1. Rappelons que un mégaoctet vaut  $10^6 \approx 2^{20}$  octets.