FICHE 0 : DÉNOMBRABILITÉ

Exercice 1

Soit une suite géométrique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q.

a) Rappeler et démontrer la formule qui permet de calculer la somme partielle d'une série géométrique

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

b) Pour quelles valeurs des paramètres a_0 et q la série géométrique $S = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ converge ? Justifier votre réponse.

c) Donner la formule du reste $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$ d'une série géométrique convergente. Sous quelle condition $|R_n| \leqslant |a_n|$?

Exercice 2

Trouvez une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers appartenant chacun à $[\![0, 9]\!]$ et telle que

$$\frac{19}{44} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{10^i}.$$

Justifiez votre réponse par un calcul de somme de série.

Exercice 3

En probabilités, on énumère assez souvent les issues élémentaires possibles d'une expérience, mais on dresse rarement la liste de tous les événements observables. Le but de cet exercice est de comprendre pourquoi.

a) Etant donnée un ensemble Ω soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Si l'ensemble Ω a n éléments, combien l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ a-t-il d'éléments ?

b) On réalise une expérience simple : un tirage dans une urne contenant 3 jetons numérotés 1,2 et 3. Donner l'ensemble Ω des issues possibles de cette expérience et l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ correspondant, qui représente la famille des événements observables.

c) On réalise une expérience un peu moins simple : le lancer de deux dés de couleurs différentes. Quel est le cardinal de Ω ? Si on utilise un ordinateur pour décrire tous les événements observables et si chacun occupe 6 bits (pourquoi ?), quel espace mémoire l'ensemble des observables occupera-t-il en tout ? Calculer la hauteur de la pile de CD-ROMs nécessaire (épaisseur : 1,2 mm, contenance : 800 mégaoctets [1]).

Exercice 4

a) Montrer que l'ensemble des nombres irrationnels n'est pas dénombrable.

b) Montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux (c'est-à-dire de la forme $k \times 10^{-n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) est dénombrable.

c) Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

(i) l'ensemble des polynômes à coefficients entiers ;

(ii) l'ensemble des nombres algébriques (un nombre réel ou complexe est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers).

Exercice 5

a) Montrez que toute famille d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ non vides et deux à deux disjoints est au plus dénombrable.

b) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

Exercice 6

Existe-t-il des droites du plan $\mathbb{R}^2$ qui ne contiennent pas au moins deux points à coordonnées rationnelles ?

1. Rappelons que un mégaoctet vaut $10^6 \approx 2^{20}$ octets.