

---

## FICHE 2 : PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

---

### Exercice 1

Une urne contient 10 jetons jaunes, 5 blancs et 1 rouge. J'ai tiré un jeton de cette urne et je vous annonce qu'il n'est pas rouge. Quelle est la probabilité qu'il soit jaune ?

### Exercice 2

Un joueur de tennis a une probabilité de 40% de passer sa première balle de service. S'il échoue, sa probabilité de passer sa deuxième balle est 70%. Lorsque sa première balle de service passe, sa probabilité de gagner le point est 80%, tandis que sa probabilité de gagner le point lorsqu'il passe sa deuxième balle de service n'est plus que 50%.

- a) Calculer la probabilité qu'il passe sa deuxième balle et celle qu'il fasse une double faute.
- b) Calculer la probabilité qu'il perde le point sur son service.
- c) Sachant qu'il a perdu le point, quelle est la probabilité que ce soit sur une double faute ?

### Exercice 3

On cherche une girafe qui, avec une probabilité  $p/7$ , se trouve dans l'un des quelconques des 7 étages d'un immeuble, et avec probabilité  $1 - p$  hors de l'immeuble. On a exploré en vain les 6 premiers étages.

- a) Quelle est la probabilité qu'elle habite au septième étage ? On note  $f(p)$  cette probabilité.
- b) Représenter la fonction  $p \mapsto f(p)$

### Exercice 4

On étudie une maladie qui touche 1% d'une population. On dispose d'un test de dépistage de la maladie qui a les caractéristiques suivantes :

- Si la personne est malade, le test est positif avec une probabilité de 99%.
- Si la personne n'est pas malade, le test est positif avec une probabilité de 9%.

Dans la suite, on notera  $M$  l'événement « la personne est malade » et  $T$  l'événement « le test est positif ».

- a) Traduire les données de l'énoncé en donnant, sans aucun calcul, la valeur de chacune des quantités suivantes :  $P_M(T)$ ,  $P_{\overline{M}}(T)$  et  $P(M)$ .
- b) Calculer  $P(T)$ .
- c) Une personne a effectué le test, qui est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?
- d) En déduire le taux de faux positifs  $P_T(\overline{M})$  pour ce test médical.
- e) Quel est le taux de faux négatifs  $P_{\overline{T}}(M)$  ?

### Exercice 5

Un avion a disparu et la région où il s'est écrasé est divisée pour sa recherche en trois zones de même probabilité. Pour  $i = 1, 2, 3$ , notons  $1 - \alpha_i$  la probabilité que l'avion soit retrouvé par une recherche dans la zone  $i$  s'il est effectivement dans cette zone. Les constantes  $\alpha_i$  représentent les probabilités de manquer l'avion et sont généralement attribuables à l'environnement de la zone (relief, végétation,...). On notera  $A_i$  l'événement *l'avion est dans la zone  $i$* , et  $R_i$  l'événement *l'avion est retrouvé dans la zone  $i$*  ( $i = 1, 2, 3$ ).

- a) Pour  $i = 1, 2, 3$ , déterminer les probabilités que l'avion soit dans la zone  $i$  sachant que la recherche dans la zone 1 a été infructueuse.
- b) Étudier brièvement les variations de ces trois probabilités conditionnelles considérées comme fonctions de  $\alpha_1$  et commenter les résultats obtenus.

### Exercice 6

On lance deux dés et on considère les événements :

$$\begin{aligned} A &= \{\text{le résultat du premier dé est impair}\}, \\ B &= \{\text{le résultat du second dé est pair}\}, \\ C &= \{\text{les résultats des deux dés sont de même parité}\}. \end{aligned}$$

Étudier l'indépendance deux à deux des événements  $A$ ,  $B$  et  $C$ , puis l'indépendance mutuelle (indépendance de la famille)  $A, B, C$ .

### Exercice 7

On s'intéresse à la répartition des sexes des enfants d'une famille de  $n$  enfants, avec  $n \geq 2$ . On prend comme modélisation

$$\Omega_n = \{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x_i \in \{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}, i = 1, \dots, n\},$$

muni de l'équiprobabilité. On considère les événements :

$$A = \{\text{la famille a des enfants des deux sexes}\} \quad \text{et} \quad B = \{\text{la famille a au plus une fille}\}.$$

- a) Montrer que  $P(A) = (2^n - 2)/2^n$  et  $P(B) = (n + 1)/2^n$ .
- b) En déduire que  $A$  et  $B$  ne sont indépendants que si  $n = 3$ .

### Exercice 8

On effectue des lancers répétés d'une paire de dés discernables et on observe pour chaque lancer la *somme* des points indiqués par les deux dés. On se propose de calculer de deux façons la probabilité de l'événement  $E$  défini ainsi : *dans la suite des résultats observés, la première obtention d'un 9 a lieu avant la première obtention d'un 7*.

- a) Quelle est la probabilité de n'obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer ?
- b) Première méthode : On note  $N_i = \{\text{obtention d'un 9 au } i\text{-ième lancer}\}$  et pour  $n > 1$ ,  $E_n = \{\text{ni 7 ni 9 ne sont obtenus au cours des } n - 1 \text{ premiers lancers et le } n\text{-ième lancer donne 9}\}$ . Dans le cas particulier  $n = 1$ , on pose  $E_1 = N_1$ .
- Exprimer  $E$  à l'aide d'opérations ensemblistes sur les  $E_n$  ( $n \geq 1$ ). Exprimer de même chaque  $E_n$  à l'aide des  $N_i$  et des  $A_i = \{\text{autre que 7 et 9 au } i\text{-ième lancer}\}$ .
  - Calculer  $P(E_n)$  en utilisant l'indépendance des lancers.
  - Calculer  $P(E)$ .
- c) Deuxième méthode : On note  $S_1 = \{\text{obtention d'un 7 au premier lancer}\}$ .
- Donner une expression de  $P(E)$  en utilisant le conditionnement par la partition  $\{N_1, S_1, A_1\}$ .
  - Donner sans calcul les valeurs de  $P_{N_1}(E)$ ,  $P_{S_1}(E)$  et expliquer pourquoi  $P_{A_1}(E) = P(E)$ .
  - En déduire la valeur de  $P(E)$ .