FICHE 4BIS : VECTEURS ALÉATOIRES DISCRETS

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$, où $N \geqslant 2$ est un entier fixé. On définit les variables aléatoires $\min(X,Y)$ et $\max(X,Y)$ par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \max(X,Y)(\omega) = \max\big(X(\omega), Y(\omega)\big), \quad \min(X,Y)(\omega) = \min\big(X(\omega), Y(\omega)\big).$$

a) Expliquer pourquoi $\max(X,Y) \neq X$ et $\max(X,Y) \neq Y$.

b) Montrer que le vecteur aléatoire (X,Y) suit la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]^2$, c'est-à dire que tous les éléments de cet ensemble *fini* ont la même probabilité d'être atteints par le vecteur aléatoire (X,Y).

c) Montrer que le vecteur aléatoire $\big(\min(X,Y), \max(X,Y)\big)$ suit une loi uniforme dont on déterminera le *support* (c'est-à-dire l'ensemble des couples atteints avec une probabilité non nulle par ce vecteur aléatoire).

d) Les variables aléatoires $\min(X,Y)$ et $\max(X,Y)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer $P(X \neq Y)$.

Exercice 3

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de fonction de répartition F et de fonction de survie $G = 1 - F$.

a) Exprimer en fonction de F la fonction de répartition de $\max(X_1, \ldots, X_n)$.

b) Exprimer en fonction de G la fonction de survie de $\min(X_1, \ldots, X_n)$.

Exercice 4 *(La solitude du gardien de but)*

On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes avec pour chaque épreuve trois issues possibles : *succès* avec probabilité p, *échec* avec probabilité q ou *nul* avec probabilité r ($p+q+r=1$). On notera respectivement S_i, E_i et N_i les événements *succès*, *échec*, *nul* à la i-ème épreuve.

a) Dans cette question, $n=5$. Quelle est la probabilité d'obtenir dans cet ordre 2 succès suivis d'un échec et de 2 nuls ? Quelle est celle d'obtenir (sans condition d'ordre) 2 succès, 1 échec et 2 nuls ?

b) Généraliser en montrant que la probabilité d'obtenir au cours des n épreuves (et sans condition d'ordre) i succès, j échecs et k nuls ($i+j+k=n$) vaut :

$$\frac{n!}{i!\,j!\,k!}p^i q^j r^k.$$

c) On revient au cas $n=5$ et on note X_ℓ la variable aléatoire codant le résultat de la ℓ-ième épreuve par $X_\ell = 1$ pour un succès, $X_\ell = -1$ pour un échec et $X_\ell = 0$ pour un nul. On définit la variable aléatoire

$$Z = \sum_{\ell=1}^{5} X_\ell.$$

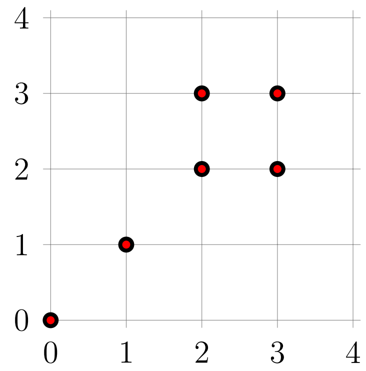
Calculer $P(Z=0)$.

d) *Application* : Un match de coupe entre deux équipes de football s'étant terminé sur un score nul, l'équipe qualifiée est désignée par la séance des tirs au but. Un joueur de l'équipe A tire face au gardien de l'équipe B, puis un joueur de l'équipe B tire face à celui de l'équipe A et ainsi de suite jusqu'à ce que chaque équipe ait effectués 5 tirs au but. On admet que la probabilité de réussir un tir au but est dans chaque cas de $0,7$ et que tous les tirs sont indépendants. Calculer la probabilité que les deux équipes soient encore à égalité après avoir effectué chacune ses 5 tirs. Si une équipe a marqué plus de buts que l'autre lors de cette séance, elle est qualifiée, sinon on recommence l'épreuve avec d'autres joueurs. Calculer la probabilité de qualification de A au bout de ses 5 tirs.

N. B. : *Il s'agit d'une modélisation légèrement simplifiée, en réalité la séance de tirs peut s'arrêter dès qu'une équipe ne peut plus être rejointe, par exemple si A réussit ses 3 premiers tirs et si B les rate, il est inutile d'effectuer les deux derniers tirs.*

Exercice 5

Dans tout cet exercice, le vecteur aléatoire discret (X, Y) a pour support S l'ensemble des six points représentés sur la figure ci-dessous.



La loi de (X, Y) est donc donnée par les $P\big((X, Y) = (i, j)\big)$, pour $(i, j) \in S$.

a) Quelles probabilités faut-il attribuer aux différents points de S pour satisfaire simultanément aux deux conditions suivantes :

(i) les points de $[\![2, 3]\!]^2$ ont tous même probabilité,

(ii) X et Y suivent la loi uniforme sur $[\![0, 3]\!]$?

b) Lorsque (X, Y) suit la loi déterminée à la question précédente, X et Y sont-elles indépendantes ? On peut répondre sans calcul.

c) Montrer qu'il existe une infinité de lois de (X, Y) avec support S telles que (ii) soit vérifiée et X et Y non indépendantes.