Fiche 2 : Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 1

Une urne contient 10 jetons jaunes, 5 blancs et 1 rouge. J'ai tiré un jeton de cette urne et je vous annonce qu'il n'est pas rouge. Quelle est la probabilité qu'il soit jaune ?

Exercice 2

Un joueur de tennis a une probabilité de 40% de passer sa première balle de service. S'il échoue, sa probabilité de passer sa deuxième balle est 70%. Lorsque sa première balle de service passe, sa probabilité de gagner le point est 80%, tandis que sa probabilité de gagner le point lorsqu'il passe sa deuxième balle de service n'est plus que 50%. Calculer

a) La probabilité qu'il passe sa deuxième balle et celle qu'il fasse une double faute.

b) La probabilité qu'il perde le point sur son service.

c) Sachant qu'il a perdu le point, quelle est la probabilité que ce soit sur une double faute ?

Exercice 3

On cherche une girafe qui, avec une probabilité $p/7$, se trouve dans l'un des quelconques des 7 étages d'un immeuble, et avec probabilité $1-p$ hors de l'immeuble. On a exploré en vain les 6 premiers étages.

a) Quelle est la probabilité qu'elle habite au septième étage ? On note $f(p)$ cette probabilité.

b) Représenter la fonction $p \mapsto f(p)$

Exercice 4

On étudie une maladie qui touche 1% d'une population. On dispose d'un test de dépistage de la maladie qui a les caractéristiques suivantes :

— Si la personne est malade, le test est positif avec une probabilité de 99%.

— Si la personne n'est pas malade, le test est positif avec une probabilité de 9%.

Dans la suite, on notera M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

a) Traduire les données de l'énoncé en donnant, sans aucun calcul, la valeur de chacune des quantités suivantes : $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$ et $P(M)$.

b) Calculer $P(T)$.

c) Une personne a effectué le test, qui est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?

d) En déduire le taux de faux positifs pour ce test médical.

e) Quel est le taux de faux négatifs ?

Exercice 5

Un avion a disparu et la région où il s'est écrasé est divisée pour sa recherche en trois zones de même probabilité. Pour $i = 1, 2, 3$, notons $1-\alpha_i$ la probabilité que l'avion soit retrouvé par une recherche dans la zone i s'il est effectivement dans cette zone. Les constantes α_i représentent les probabilités de manquer l'avion et sont généralement attribuables à l'environnement de la zone (relief, végétation,...). On notera A_i l'événement *l'avion est dans la zone* i, et R_i l'événement *l'avion est retrouvé dans la zone* i $(i = 1, 2, 3)$.

a) Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer les probabilités que l'avion soit dans la zone i sachant que la recherche dans la zone 1 a été infructueuse.

b) Étudier brièvement les variations de ces trois probabilités conditionnelles considérées comme fonctions de α_1 et commenter les résultats obtenus.

Exercice 6

On lance deux dés et on considère les événements :

$$\begin{aligned} A &= \{\text{le résultat du premier dé est impair}\}, \\ B &= \{\text{le résultat du second dé est pair}\}, \\ C &= \{\text{les résultats des deux dés sont de même parité}\}. \end{aligned}$$

Etudier l'indépendance deux à deux des événements A, B et C, puis l'indépendance mutuelle (indépendance de la famille) A, B, C.

Exercice 7

On s'intéresse à la répartition des sexes des enfants d'une famille de n enfants. On prend comme modélisation

$$\Omega_n = \{\mathtt{f}, \mathtt{g}\}^n = \{\, (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in \{\mathtt{f}, \mathtt{g}\}, i = 1, \ldots, n\},$$

muni de l'équiprobabilité. On considère les événements :

$$A = \{\text{la famille a des enfants des deux sexes}\} \quad B = \{\text{la famille a au plus une fille}\}.$$

a) Montrer que pour $n \geqslant 2$, $P(A) = (2^n - 2)/2^n$ et $P(B) = (n+1)/2^n$.

b) En déduire que A et B ne sont indépendants que si $n = 3$.

Exercice 8

On effectue des lancers répétés d'une paire de dés discernables et on observe pour chaque lancer la *somme* des points indiqués par les deux dés. On se propose de calculer de deux façons la probabilité de l'événement E défini ainsi : *dans la suite des résultats observés, la première obtention d'un* 9 *a lieu avant la première obtention d'un* 7.

a) Quelle est la probabilité de n'obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer ?

b) *Première méthode :* On note $F_i = \{$*obtention d'un* 9 *au i-ième lancer*$\}$ et pour $n > 1$, $E_n = \{$ *ni* 7 *ni* 9 *ne sont obtenus au cours des* $n-1$ *premiers lancers et le n-ième lancer donne* 9$\}$. Dans le cas particulier $n = 1$, on pose $E_1 = F_1$.

(i) Exprimer E à l'aide d'opérations ensemblistes sur les E_n $(n \geqslant 1)$. Exprimer de même chaque E_n à l'aide des F_i et des $H_i = \{$ *ni* 7 *ni* 9 *au i-ième lancer*$\}$.

(ii) Calculer $P(E_n)$ en utilisant l'indépendance des lancers.

(iii) Calculer $P(E)$.

c) *Deuxième méthode :* On note $G_1 = \{$ *obtention d'un* 7 *au premier lancer*$\}$.

(i) Donner une expression de $P(E)$ en utilisant le conditionnement par la partition $\{F_1, G_1, H_1\}$.

(ii) Donner sans calcul les valeurs de $P_{F_1}(E)$, $P_{G_1}(E)$ et expliquer pourquoi $P_{H_1}(E) = P(E)$.

(iii) En déduire la valeur de $P(E)$.