FICHE 4 : VECTEURS ALÉATOIRES DISCRETS

Exercice 1

Les variables aléatoires X et Y sont telles que :

$$P(X=0 \text{ et } Y=1)=1/5 \quad P(X=0 \text{ et } Y=2)=1/5$$
$$P(X=1 \text{ et } Y=0)=1/5 \quad P(X=1 \text{ et } Y=1)=1/5 \quad P(X=1 \text{ et } Y=2)=1/5$$

a) Déterminer la loi de X.

b) Déterminer la loi de Y.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Trouver la loi de $Z = X - Y$.

Exercice 2

La loi du couple (U, V) est de la forme :

$$P(U=j, V=k) = C\frac{k}{j!(60-j)!} \qquad \text{pour } k \in \{1,2,\ldots,59\} \text{ et } j \in \{0,1,\ldots,60\}$$

a) Pour connaître vraiment la loi du couple, il faut connaître la constante réelle C dont on ne nous a pas donné la valeur. Calculer C.

b) Calculer la loi de U (et donner son nom si elle en a un).

c) Calculer la loi de V (et donner son nom si elle en a un).

d) U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 3

On suppose que le couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) a une loi donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X=i, Y=j) = \frac{\alpha}{(1+i+j)!},$$

où α est une constante strictement positive qui sera précisée ultérieurement.

a) Expliquer sans calcul pourquoi les marginales X et Y ont même loi.

b) On pose $S = X + Y$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(S=k) = \frac{\alpha}{k!}.$$

c) En déduire la valeur de α et reconnaître la loi de S.

d) Calculer $P(X = 0)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

e) Calculer $P(X = Y)$ et en déduire sans calcul $P(X > Y)$.

Exercice 4

Soient T et U deux variables aléatoires indépendantes de loi géométriques de paramètres α et β (avec α et β fixés dans $]0, 1[$).

a) Calculer la loi de leur somme $T + U$, dans le cas où $\alpha \neq \beta$, puis dans le cas où $\alpha = \beta$.

b) En déduire que quand $\alpha = \beta$, $T + U$ est la loi du second succès dans une suite d'épreuves indépendantes où la probabilité de succès vaut α.

c) Dans le cas $\alpha = \beta$, calculer $P(T \neq U)$.

Exercice 5

Soient X et Y deux variables indépendantes de lois binomiales de paramètres (n_1, p) et (n_2, p).

a) Déterminer par le calcul la loi de $X + Y$.

b) Retrouver ce résultat sans faire de calculs. Une interprétation de la loi binomiale suffira.

Exercice 6

Lors d'un congrès à Grenoble, n chercheurs se répartissent de façon aléatoire et indépendamment les uns des autres dans les $r > 1$ hôtels, $H_1, \ldots, H_r$, de la ville. On désigne par $p_i \in]0, 1[$ la probabilité qu'un chercheur aille dans l'hôtel H_i, de sorte que $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$ pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, et par X_i le nombre de personnes qui vont dans l'hôtel H_i.

a) Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$. Quelle est la loi de X_i ?

b) Déterminer $P(X_1 = n_1, \ldots, X_r = n_r)$ pour tout n-uplets $(n_1, \ldots, n_r)$ tel que $n_1 + \ldots + n_n = n$.

c) Les variables X_i sont-elles deux à deux indépendantes ?

Exercice 7

Pour les besoins médicaux (en particulier les transfusions), on classe le sang humain en quatre groupes : groupe O, groupe A, groupe B et groupe AB. Mais le sang présente aussi un « facteur rhésus », qui peut être positif ou négatif. Il y a donc huit [1] catégories de sang (O positif, O négatif, A positif, A négatif, etc).

En France, une personne choisie au hasard a 43% de chances d'être du groupe O, 45% de chances d'être du groupe A, 9% de chances d'être du groupe B, et 3% de chances d'être du

1. Il y a en réalité beaucoup plus de catégories, basées sur une trentaine de caractéristiques du sang. Mais les deux caractéristiques ci-dessus (ABO et rhésus) sont les plus importantes pour assurer la compatibilité des transfusions. Et ces deux caractéristiques ne déterminent que huit catégories.

groupe AB. Parmi les personnes du groupe O, 14% sont de rhésus négatif. La proportion de rhésus négatif est de 13% parmi les personnes du groupe A. Elle est de 22% parmi les gens de groupe sanguin B, et de 33% parmi les personnes du groupe AB.

a) Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard soit de rhésus positif ?

b) Si l'on sait qu'une personne est de rhésus négatif, quelle est la probabilité qu'elle soit du groupe AB ?

c) Dans un groupe de TD de 24 étudiants, on note N_O, N_A, N_B et N_{AB} les nombres respectifs d'étudiants ayant le groupe sanguin O, A, B et AB. Quelle est la loi du vecteur aléatoire (N_O, N_A, N_B, N_{AB}) ? Indiquer aussi les quatre lois des variables aléatoires N_O, N_A, N_B et N_{AB}.

d) Quelle est la loi du couple aléatoire $(N_O + N_A, N_B + N_{AB})$?

Exercice 8

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$, où $N \geqslant 2$ est un entier fixé. On définit les variables aléatoires $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$ par : $\forall \omega \in \Omega, \quad \max(X, Y)(\omega) = \max\big(X(\omega), Y(\omega)\big), \quad \min(X, Y)(\omega) = \min\big(X(\omega), Y(\omega)\big)$.

a) Expliquer pourquoi $\max(X, Y) \neq X$ et $\max(X, Y) \neq Y$.

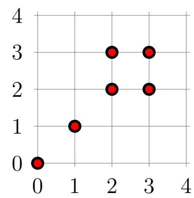
b) Montrer que le vecteur aléatoire (X, Y) suit la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]^2$, c'est-à dire que tous les éléments de cet ensemble *fini* ont la même probabilité d'être atteints par le vecteur aléatoire (X, Y).

c) Déterminer la loi du vecteur aléatoire $\big(\min(X, Y), \max(X, Y)\big)$.

d) Les variables aléatoires $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 9

Dans tout cet exercice, le vecteur aléatoire discret (X, Y) a pour support S l'ensemble des six points représentés sur la figure ci-contre. La loi de (X, Y) est donc donnée par les $P\big((X, Y) = (i, j)\big)$, pour $(i, j) \in S$.



a) Quelles probabilités faut-il attribuer aux différents points de S pour satisfaire simultanément aux deux conditions suivantes :

(i) les points de $[\![2, 3]\!]^2$ ont tous même probabilité,

(ii) X et Y suivent la loi uniforme sur $[\![0, 3]\!]$?

b) Lorsque (X, Y) suit la loi déterminée à la question précédente, X et Y sont-elles indépendantes ? On peut répondre sans calcul.

c) Montrer qu'il existe une infinité de lois de (X, Y) avec support S telles que (ii) soit vérifiée et X et Y non indépendantes.