
FICHE 4^{BIS} : VECTEURS ALÉATOIRES DISCRETS

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes et de même loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$, où $N \geq 2$ est un entier fixé. On définit les variables aléatoires $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$ par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \max(X, Y)(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega)), \quad \min(X, Y)(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega)).$$

- a) Expliquer pourquoi $\max(X, Y) \neq X$ et $\max(X, Y) \neq Y$.
- b) Montrer que le vecteur aléatoire (X, Y) suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket^2$, c'est-à-dire que tous les éléments de cet ensemble *fini* ont la même probabilité d'être atteints par le vecteur aléatoire (X, Y) .
- c) Montrer que le vecteur aléatoire $(\min(X, Y), \max(X, Y))$ suit une loi uniforme dont on déterminera le *support* (c'est-à-dire l'ensemble des couples atteints avec une probabilité non nulle par ce vecteur aléatoire).
- d) Les variables aléatoires $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer $P(X \neq Y)$.

Exercice 3

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et de même loi de fonction de répartition F et de fonction de survie $G = 1 - F$.

- a) Exprimer en fonction de F la fonction de répartition de $\max(X_1, \dots, X_n)$.
- b) Exprimer en fonction de G la fonction de survie de $\min(X_1, \dots, X_n)$.

Exercice 4 (*La solitude du gardien de but*)

On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes avec pour chaque épreuve trois issues possibles : *succès* avec probabilité p , *échec* avec probabilité q ou *nul* avec probabilité r ($p + q + r = 1$). On notera respectivement S_i , E_i et N_i les événements *succès*, *échec*, *nul* à la i -ème épreuve.

- a) Dans cette question, $n = 5$. Quelle est la probabilité d'obtenir dans cet ordre 2 succès suivis d'un échec et de 2 nuls ? Quelle est celle d'obtenir (sans condition d'ordre) 2 succès, 1 échec et 2 nuls ?
- b) Généraliser en montrant que la probabilité d'obtenir au cours des n épreuves (et sans condition d'ordre) i succès, j échecs et k nuls ($i + j + k = n$) vaut :

$$\frac{n!}{i! j! k!} p^i q^j r^k.$$

- c) On revient au cas $n = 5$ et on note X_ℓ la variable aléatoire codant le résultat de la ℓ -ième épreuve par $X_\ell = 1$ pour un succès, $X_\ell = -1$ pour un échec et $X_\ell = 0$ pour un nul. On définit la variable aléatoire

$$Z = \sum_{\ell=1}^5 X_\ell.$$

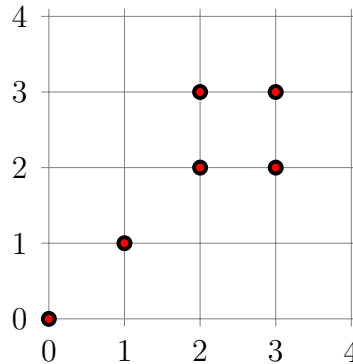
Calculer $P(Z = 0)$.

- d) *Application* : Un match de coupe entre deux équipes de football s'étant terminé sur un score nul, l'équipe qualifiée est désignée par la séance des tirs au but. Un joueur de l'équipe A tire face au gardien de l'équipe B , puis un joueur de l'équipe B tire face à celui de l'équipe A et ainsi de suite jusqu'à ce que chaque équipe ait effectués 5 tirs au but. On admet que la probabilité de réussir un tir au but est dans chaque cas de 0,7 et que tous les tirs sont indépendants. Calculer la probabilité que les deux équipes soient encore à égalité après avoir effectué chacune ses 5 tirs. Si une équipe a marqué plus de buts que l'autre lors de cette séance, elle est qualifiée, sinon on recommence l'épreuve avec d'autres joueurs. Calculer la probabilité de qualification de A au bout de ses 5 tirs.

N. B. : *Il s'agit d'une modélisation légèrement simplifiée, en réalité la séance de tirs peut s'arrêter dès qu'une équipe ne peut plus être rejointe, par exemple si A réussit ses 3 premiers tirs et si B les rate, il est inutile d'effectuer les deux derniers tirs.*

Exercice 5

Dans tout cet exercice, le vecteur aléatoire discret (X, Y) a pour support S l'ensemble des six points représentés sur la figure ci-dessous.



La loi de (X, Y) est donc donnée par les $P((X, Y) = (i, j))$, pour $(i, j) \in S$.

- a) Quelles probabilités faut-il attribuer aux différents points de S pour satisfaire simultanément aux deux conditions suivantes :
 - a) les points de $\llbracket 2, 3 \rrbracket^2$ ont tous même probabilité,
 - b) X et Y suivent la loi uniforme sur $\llbracket 0, 3 \rrbracket$?
- b) Lorsque (X, Y) suit la loi déterminée à la question précédente, X et Y sont-elles indépendantes ? On peut répondre sans calcul.
- c) Montrer qu'il existe une infinité de lois de (X, Y) avec support S telles que b) soit vérifiée et X et Y non indépendantes.