

---

## FICHE 1 : ESPACES PROBABILISÉS

---

### Exercice 1

Trois enfants lancent chacun un ballon en direction d'un panier de basket. Il est convenu que celui qui marquera gagnera un paquet de bonbons, et qu'en cas d'ex-æquo les vainqueurs se partageront le paquet. Si personne ne réussit son panier, chacun mangera le tiers des bonbons. En utilisant les événements :

$$\begin{aligned}A &= \{\text{Arthur marque un panier}\}, \\B &= \{\text{Béatrice marque un panier}\}, \\C &= \{\text{Cécile marque un panier}\},\end{aligned}$$

écrire de façon ensembliste les événements suivants :

$$\begin{aligned}D &= \{\text{tous les trois réussissent à marquer}\}, \\E &= \{\text{aucun ne réussit à marquer}\}, \\F &= \{\text{Béatrice mange tous les bonbons}\}, \\G &= \{\text{les trois enfants mangent des bonbons}\}, \\H &= \{\text{Cécile mange au moins un bonbon}\}, \\I &= \{\text{Arthur ne reçoit aucun bonbon}\}.\end{aligned}$$

Préciser un univers  $\Omega$  permettant de décrire cette expérience. Parmi tous ces événements, lesquels sont des événements élémentaires ?

### Exercice 2

*En probabilités, on énumère assez souvent les issues élémentaires possibles d'une expérience, mais on dresse rarement la liste de tous les événements observables. Le but de cet exercice est de comprendre pourquoi.*

- Étant donné un ensemble  $\Omega$  soit  $\mathcal{P}(\Omega)$  l'ensemble des parties de  $\Omega$ . Si l'ensemble  $\Omega$  a  $n$  éléments, combien l'ensemble  $\mathcal{P}(\Omega)$  a-t-il d'éléments ?
- On réalise une expérience simple : un tirage dans une urne contenant 3 jetons numérotés 1, 2 et 3. Donner l'ensemble  $\Omega$  des issues possibles de cette expérience et l'ensemble  $\mathcal{P}(\Omega)$  correspondant, qui représente la famille des événements observables.

- c) On réalise une expérience un peu moins simple : le lancer de deux dés de couleurs différentes. Quel est le cardinal de  $\Omega$  ? Si on utilise un ordinateur pour décrire tous les événements observables et si chacun occupe 6 bits (pourquoi ?), quel espace mémoire l'ensemble des observables occupera-t-il en tout ? Calculer la hauteur de la pile de CD-ROMs nécessaire (épaisseur : 1,2 mm, contenance : 800 mégaoctets<sup>1</sup>).

### Exercice 3

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On tire à pile ou face  $n$  fois.

- a) Donner une représentation de l'espace  $\Omega$  des événements élémentaires de cette expérience.
- b) Écrire l'événement  $F = \{\text{pile n'a pas été obtenu lors des 2 premiers lancers}\}$  comme sous-ensemble de  $\Omega$ .
- c) Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Décrire les éléments de l'événement  $E_i = \{\text{le résultat du } i\text{-ième lancer est pile}\}$ .
- d) Écrire à l'aide des événements  $E_i$  l'événement  $F$ .
- e) Écrire à l'aide des événements  $E_i$  l'événement  $G = \{\text{la pièce est tombée au moins une fois sur pile}\}$ .
- f) Écrire à l'aide des ensembles  $E_i$  l'événement  $H = \{\text{la pièce est tombée au moins deux fois sur pile}\}$ .

### Exercice 4

On tire, une à une, sans les remettre dans le paquet, cinq cartes dans un jeu de 32 cartes ; chaque succession de cartes ainsi tirées s'appelle une main.

- a) Quel est l'espace de probabilité que vous considérez ?
- b) Quelle est la probabilité qu'une main contienne :
  - (i) Que des cartes d'une même couleur<sup>2</sup> ?
  - (ii) Exactement trois rois ? Au plus un roi ? Au moins un roi ou un as ?
- c) Mêmes questions si le tirage se fait avec remise.

### Exercice 5

On relève les dates d'anniversaire dans un groupe de 30 personnes (jours numérotés de 1 à 365). On suppose que les jours de naissance sont équiprobables. Quelle est la probabilité que deux personnes au moins aient le même anniversaire ?

---

1. Rappelons que un mégaoctet vaut  $10^6 \approx 2^{20}$  octets.

2. Dans le jeu de cartes il y a 4 couleurs :  $\spadesuit$ ,  $\heartsuit$ ,  $\clubsuit$  et  $\diamondsuit$ .

## Exercice 6

- a) En dénombrant les façons de tirer  $n$  boules parmi  $n$  boules blanches et  $n$  boules noires, montrer que :

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2.$$

- b) Retrouver cette formule à partir de l'identité  $(1+t)^n(1+t)^n = (1+t)^{2n}$ .
- c) Deux personnes lancent chacune  $n$  fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité  $p_n$  qu'elles obtiennent le même nombre de piles ?

*Indication: On utilisera l'équiprobabilité sur l'espace  $\Omega = \{\mathbf{f}, \mathbf{p}\}^{2n}$ .*

- d) Donner un équivalent de  $p_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

*Indication: On rappelle la formule de Stirling :*

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + \varepsilon_n), \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

- e) Que pensez vous de l'affirmation suivante : *Lorsqu'on jette un grand nombre (pair) de fois une pièce équilibrée, il y a une forte probabilité d'obtenir exactement autant de piles que de faces ?*

## Exercice 7

Une secrétaire un peu distraite a tapé  $N$  lettres et préparé  $N$  enveloppes portant les adresses des destinataires, mais elle répartit au hasard les lettres dans les enveloppes. Pour modéliser cette situation, on choisit comme espace probabilisé  $\Omega_N$  ensemble de toutes les permutations sur  $\{1, \dots, N\}$  muni de l'équiprobabilité  $P_N$ . Pour  $1 \leq j \leq N$ , on note  $A_j$  l'événement *la  $j$ -ième lettre se trouve dans la bonne enveloppe*.

- a) Calculer  $P_N(A_j)$ .
- b) On fixe  $k$  entiers  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  entre 1 et  $N$ . Déénombrer toutes les permutations  $\sigma$  sur  $\{1, \dots, N\}$  telles que  $\sigma(i_1) = i_1, \sigma(i_2) = i_2, \dots, \sigma(i_k) = i_k$ . En déduire  $P_N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$ .
- c) On note  $B$  l'événement *au moins une des lettres est dans la bonne enveloppe*. Exprimer  $B$  à l'aide des  $A_j$ .
- d) Utiliser la formule de Poincaré pour calculer  $P_N(B)$  et sa limite quand  $N$  tend vers l'infini.