Solutions de l'interrogation

30 mars 2017

[durée : 1 heure]

Exercice 1

L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets différents et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 70 sujets sur les 100.

a) Déterminer la probabilité pour que le candidat ait révisé :

(i) les trois sujets tirés ;

(ii) aucun des trois sujets.

b) Soit la variable aléatoire $X =$ « nombre de sujets révisés par le candidat parmi les 3 sujets tirés au sort ».

(i) Déterminer la loi de X. *(On pourra identifier une loi connue.)*

(ii) En déduire la probabilité pour que le candidat ait révisé deux des sujets tirés.
Le résultat doit être donné sous forme d'une fraction irréductible.

Solution :

a) Soit $[\![1;100]\!]$ l'ensemble des questions numérotées de 1 à 100. On considère l'univers $\Omega = \{M \in \mathcal{P}([\![1;100]\!]) \mid \#M = 3\}$ des parties à 3 éléments avec l'équiprobabilité. Ainsi nous avons $\#\Omega = C_{100}^3$.

(i) Le nombre de configurations avec 3 sujets révisés est C_{70}^3. Ainsi

$$P(\text{« trois sujets révisés »}) = \frac{C_{70}^3}{C_{100}^3} = \frac{70.69.68}{100.99.98} = \frac{17.23}{3.5.7.11} = \frac{391}{1155}.$$

(ii) Le nombre de configurations avec 3 sujets non révisés est C_{30}^3. Ainsi

$$P(\text{« aucun sujet révisé »}) = \frac{C_{30}^3}{C_{100}^3} = \frac{30.29.28}{100.99.98} = \frac{29}{3.5.7.11} = \frac{29}{1155}.$$

b) Soit la variable aléatoire $X =$ « nombre de sujets révisés par le candidat ».

(i) Comme il s'agit de compter le nombre de « succès » lors de tirages sans remise, on remarque que X suit une loi hypergéométrique : $X \sim \mathcal{H}(100, 70, 3)$. Ainsi $X \in \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$P(X = k) = \frac{C_{70}^k C_{30}^{3-k}}{C_{100}^3} \quad \text{pour} \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

(ii) Nous avons

$$P(\text{« deux sujets révisés »}) = P(X = 2) = \frac{C_{70}^2 C_{30}^1}{C_{100}^3} = \frac{70.69.30.3}{100.99.98} = \frac{23.3}{2.7.11} = \frac{69}{154}.$$

Exercice 2

Un serveur brise en moyenne trois verres et une assiette par mois. Notons V le nombre de verres cassés et A le nombre d'assiettes cassées par un serveur. On suppose que V et A sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs 3 et 1. Soit Z le nombre total de verres et d'assiettes cassés par mois par ce même serveur.

a) Exprimer Z en fonction de V et de A.

b) Calculer les probabilités $P(Z = 0)$, $P(Z = 1)$ et $P(Z = 2)$.

c) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(Z = k)$. Quelle loi connue suit la variable Z ?

d) Un serveur est caractériel : si à la fin du mois il n'a pas cassé trois verres, il fête cela en brisant des verres pour arriver au minimum de 3 verres cassés dans le mois. On note W la variable qui compte le nombre de verres cassés par ce serveur particulier. Donner la loi de W.

Solution :

a) D'après la définition de Z nous avons $Z = V + A$.

Dans la suite on utilise l'indépendance de V et A pour écrire

$$P(V = i, A = j) = P(V = i)P(A = j) = (e^{-3}\frac{3^i}{i!})(e^{-1}\frac{1^j}{j!}) = e^{-4}\frac{3^i}{i!j!}.$$

b) Nous avons

$$\begin{aligned}
P(Z = 0) &= P(V = 0, A = 0) = P(V = 0)P(A = 0) = e^{-3}e^{-1} = e^{-4},\\
P(Z = 1) &= P(V = 1, A = 0) + P(V = 0, A = 1) = (e^{-3}3)(e^{-1}) + (e^{-3})(e^{-1}) = e^{-4}\,4,\\
P(Z = 2) &= P(V = 2, A = 0) + P(V = 1, A = 1) + P(V = 0, A = 2)\\
&= (e^{-3}\frac{3^2}{2!})(e^{-1}) + (e^{-3}3)(e^{-1}) + (e^{-3})(e^{-1}\frac{1^2}{2!}) = e^{-4}(\frac{9}{2} + 3 + \frac{1}{2}) = e^{-4}\,8.
\end{aligned}$$

c) Comme $Z = k$ si et seulement si $V = i,\ A = k - i$ avec $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, nous avons

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(V = i, A = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \left(e^{-3}\frac{3^i}{i!}\right)\left(e^{-1}\frac{1^{(k-i)}}{(k-i)!}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} e^{-4}\frac{3^i 1^{(k-i)}}{i!(k-i)!} = \frac{e^{-4}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}3^i 1^{(k-i)} = e^{-4}\frac{4^k}{k!}.$$

On constate que Z suit la loi de Poisson avec paramètre $\lambda = 4$.

d) D'après l'énoncé

$$W = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad V \leqslant 3 \\ V & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi $W \in \{3, 4, 5, \ldots\}$ avec $P(W = 3) = P(V = 0) + P(V = 1) + P(V = 2) + P(V = 3) = e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}\right) = e^{-3}\,13$, et pour $k \geqslant 3$, $P(W = k) = P(V = k) = e^{-3}\,\frac{3^k}{k!}$.

En résumé, pour $k \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1, 2\}$

$$P(W = k) = \begin{cases} 13e^{-3} & \text{si} \quad k = 3 \\ \dfrac{3^k}{k!}e^{-3} & \text{si} \quad k > 3 \end{cases}.$$