FICHE 1 : ESPACES PROBABILISÉS

Exercice 1

Trois enfants lancent chacun un ballon en direction d'un panier de basket. Il est convenu que celui qui marquera gagnera un paquet de bonbons, et qu'en cas d'ex-æquo les vainqueurs se partageront le paquet. Si personne ne réussit son panier, chacun mangera le tiers des bonbons. En utilisant les événements :

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Arthur marque un panier}\}, \\ B &= \{\text{Béatrice marque un panier}\}, \\ C &= \{\text{Cécile marque un panier}\}, \end{aligned}$$

écrire de façon ensembliste les événements suivants :

$$\begin{aligned} D &= \{\text{tous les trois réussissent à marquer}\}, \\ E &= \{\text{aucun ne réussit à marquer}\}, \\ F &= \{\text{Béatrice mange tous les bonbons}\}, \\ G &= \{\text{les trois enfants mangent des bonbons}\}, \\ H &= \{\text{Cécile mange au moins un bonbon}\}, \\ I &= \{\text{Arthur ne reçoit aucun bonbon}\}. \end{aligned}$$

Parmi tous ces événements, lesquels sont des événements élémentaires ?

Exercice 2

En probabilités, on énumère assez souvent les issues élémentaires possibles d'une expérience, mais on dresse rarement la liste de tous les événements observables. Le but de cet exercice est de comprendre pourquoi.

a) Étant donné un ensemble Ω soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Si l'ensemble Ω a n éléments, combien l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ a-t-il d'éléments ?

b) On réalise une expérience simple : un tirage dans une urne contenant 3 jetons numérotés 1,2 et 3. Donner l'ensemble Ω des issues possibles de cette expérience et l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ correspondant, qui représente la famille des événements observables.

c) On réalise une expérience un peu moins simple : le lancer de deux dés de couleurs différentes. Quel est le cardinal de Ω ? Si on utilise un ordinateur pour décrire tous les événements observables et si chacun occupe 6 bits (pourquoi ?), quel espace mémoire l'ensemble des observables occupera-t-il en tout ? Calculer la hauteur de la pile de CD-ROMs nécessaire (épaisseur : 1,2 mm, contenance : 800 mégaoctets [1]).

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire à pile ou face n fois.

a) Donner une représentation de l'espace Ω des événements élémentaires de cette expérience.

b) Écrire l'événement F ={pile n'a pas été obtenu lors des 2 premiers lancers} comme sous-ensemble de Ω.

c) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Décrire les éléments de l'événement E_i = {le résultat du i-ième lancer est pile}.

d) Écrire à l'aide des événements E_i l'événement F.

e) Écrire à l'aide des événements E_i l'événement G ={la pièce est tombée au moins une fois sur pile}.

f) Écrire à l'aide des ensembles E_i l'événement H ={la pièce est tombée au moins deux fois sur pile}.

Exercice 4

On tire, une à une, sans les remettre dans le paquet, cinq cartes dans un jeu de 32 cartes ; chaque succession de cartes ainsi tirées s'appelle une main.

a) Quel est l'espace de probabilité que vous considérez ?

b) Quelle est la probabilité qu'une main contienne :

(i) que des cartes d'une même couleur ?

(ii) exactement trois rois ? au plus un roi ? au moins un roi ou un as ?

c) Mêmes questions si le tirage se fait avec remise.

Exercice 5

On relève les dates d'anniversaire dans un groupe de 30 personnes (jours numérotés de 1 à 365). On suppose que les jours de naissance sont équiprobables. Quelle est la probabilité que deux personnes au moins aient le même anniversaire ?

---

1. Rappelons que un mégaoctet vaut $10^6 \approx 2^{20}$ octets.

Exercice 6

a) En dénombrant les façons de tirer n boules parmi n boules blanches et n boules noires, montrer que :

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2.$$

b) Retrouver cette formule à partir de l'identité $(1+t)^n(1+t)^n = (1+t)^{2n}$.

c) Deux personnes lancent chacune n fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité p_n qu'elles obtiennent le même nombre de piles ?

Indication : On utilisera l'équiprobabilité sur l'espace $\Omega = \{\mathtt{f}, \mathtt{p}\}^{2n}$.

d) Donner un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Indication : On rappelle la formule de Stirling :

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+\varepsilon_n), \quad \textit{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

e) Que pensez vous de l'affirmation suivante : *Lorsqu'on jette un grand nombre (pair) de fois une pièce équilibrée, il y a une forte probabilité d'obtenir exactement autant de piles que de faces* ?

Exercice 7

Une secrétaire un peu distraite a tapé N lettres et préparé N enveloppes portant les adresses des destinataires, mais elle répartit au hasard les lettres dans les enveloppes. Pour modéliser cette situation, on choisit comme espace probabilisé Ω_N ensemble de toutes les permutations sur $\{1, \ldots, N\}$ muni de l'équiprobabilité P_N. Pour $1 \leqslant j \leqslant N$, on note A_j l'événement *la j-ième lettre se trouve dans la bonne enveloppe.*

a) Calculer $P_N(A_j)$.

b) On fixe k entiers $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ entre 1 et N. Dénombrer toutes les permutations σ sur $\{1, \ldots, N\}$ telles que $\sigma(i_1) = i_1$, $\sigma(i_2) = i_2$, ..., $\sigma(i_k) = i_k$. En déduire $P_N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$.

c) On note B l'événement *au moins une des lettres est dans la bonne enveloppe.* Exprimer B à l'aide des A_j.

d) Utiliser la formule de Poincaré pour calculer $P_N(B)$ et sa limite quand N tend vers l'infini.