



POLITECHNIKA WARSZAWSKA
WYDZIAŁ MATEMATYKI
I NAUK INFORMACYJNYCH



PRACA DYPLOMOWA INŻYNIERSKA

INFORMATYKA

Symulacje Przestrzennego Dylematu Więźnia

Autorzy:

Błażej Bobko, Patryk Kujawski

Promotor: dr inż. Agnieszka Jastrzębska

Opiekun naukowy: prof. nzw. dr hab. inż. Władysław Homenda

Warszawa, Grudzień 2016

.....

podpis promotora

.....

podpis autora

Spis treści

1	Wstęp	3
1.1	Opis Problemu	3
1.2	Motywacja Pracy	4
1.3	Słownik Pojęć	4
1.4	Proces Implementacji	5
2	Wprowadzenie Teoretyczne	7
2.1	Kontekst Pojęciowy	7
2.1.1	Dylemat Więźnia	7
2.1.2	Przestrzenny Dylemat Więźnia	8
2.1.3	Przestrzenny Dylemat Więźnia a Automaty Komórkowe	8
2.1.4	Uogólnienie sąsiedztw	9
2.1.5	Różnorodna Macierz Wypłat	11
2.2	Algorytm Symulacji	12
3	Analiza Działania Automatu Komórkowego	14
3.1	Eksperyment Nowaka i Maya	14
3.2	Eksperyment Ishidy i Moriego	20
4	Przestrzenny Dylemat Więźnia z Różnorodną Macierzą Wypłat	27
4.1	Eksperyment Nowaka i Maya	27
4.2	Eksperyment Ishidy i Moriego	34
5	Przestrzenny Dylemat Więźnia o Uogólnionych Sąsiedztwach	41
5.1	Eksperyment Nowaka i Maya	41
5.2	Eksperyment Ishidy i Moriego	45

5.3	Eksperyment Wanga	51
6	Wnioski	58

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Opis Problemu

Dylemat więźnia jest najprostszym przykładem gry o sumie niezerowej jakie zamodelowano w toku rozwoju teorii gier. W podstawowej wersji każdy z dwóch graczy stoi przed wyborem: kooperować czy zdradzić. Ostateczny wynik każdego z nich zależy od kombinacji ich decyzji, gdzie największą nagrodę otrzymuje zdradzający kooperującego przeciwnika, zaś drugą najwyższą gdy obu graczy kooperowało. W wariantcie tym mamy do czynienia z rozgrywką jednokrotną – każdy z graczy podejmuje tylko jedną decyzję. Sytuacja staje się nietrywialna gdy wprowadzimy rozgrywkę wielokrotną. Gracze podejmują decyzje w oparciu o poprzednie wybory swoje i przeciwnika oraz swój aktualny wynik. Można więc mówić o strategiach – sposobach podejmowania decyzji na podstawie aktualnej sytuacji w grze.

Przestrzenny dylemat więźnia jest rozszerzeniem powyższego problemu: gracze rozmieszczeni są na siatce i rozgrywają dylemat więźnia z wielokrotną decyzją z każdym ze swoich sąsiadów. Następnie porównują oni wyniki swoje i sąsiadów i przejmują strategię, która w ich otoczeniu okazała się być najbardziej korzystna.

Przedmiotem niniejszej pracy jest symulacja oraz analiza przestrzennego dylematu więźnia. W ramach projektu powstała aplikacja pozwalająca na wizualizację symulacji wielu rund gry dla zadanych ustawień parametrów: układu początkowego, macierzy wypłat, ilość ruchów rozgrywki wielokrotnej. Na potrzeby pracy zakres strategii został ograniczony do trzech klas: zawsze zdradzaj, zawsze wybaczej, zdradzaj jeśli k sąsiadów zdradziło w poprzednim ruchu, gdzie k jest większe od 0 i mniejsze lub równe ilości sąsiadów w układzie. W ramach analizy merytorycznej dylematu więźnia rozszerzono problematykę o nowe są-

siedztwa oraz o funkcję macierzy wypłat. Z użyciem programu do symulacji jako narzędzia powtórzono eksperymenty Nowaka i May'a, Ishidy i Moriego oraz Wanga jak i sprawdzono czy ich wnioski mają zastosowanie w wariantach rozszerzonych.

1.2 Motywacja Pracy

Teoria gier jest pełna modeli, które choć z pozoru wydają się być proste, w rzeczywistości dobrze opisują złożone zjawiska ekonomiczne i społeczne. Jednym z takich modeli jest dylemat więźnia. Od momentu kiedy został po raz pierwszy formalnie zdefiniowany liczne badania z różnych obszarów nauki od matematyki przez ekonomię po socjologię odnosiły się doń, próbując dociec jaka strategia działania jest najlepsza i jak bardzo grający człowiek jest się w stanie do tej optymalnej metody gry zbliżyć. Mnogość i interdyscyplinarność zastosowań dylematu więźnia czynią ten temat niezwykle interesującym, a rozliczne drogi modyfikacji, które można zastosować na tej oryginalnej, prostej formule otwierają wiele ciekawych możliwości badań.

1.3 Słownik Pojęć

- Decyzja - jedna z dwóch decyzji jakie może podjąć gracz spośród opisanych przez dylemat więźnia: "zdradzaj" lub "siedź cicho"
- Gracz - Fragment symulacji będący pojedynczą komórką. Inaczej nazywany komórką
- Iteracja - Patrz: pokolenie.
- Komórka - patrz: gracz
- Optymalizacja Strategii - proces w wyniku którego gracze podejmują decyzję czy chcą zmienić swoje strategie. Jeśli tak to wybierana jest zawsze strategia tego sąsiada, który uzyskał najlepszy wynik w ostatnim pokoleniu.
- Pokolenie - Jeden krok symulacji. Zdefiniowana w opcjach liczba rund składa się na jedno pokolenie. Między kolejnymi pokoleniami następuje optymalizacja strategii. Inaczej nazywane iteracją

- Przestrzenny Dylemat Więźnia - Problem, dla którego tworzona jest symulacja. Inaczej nazywane SPD
- Rozgrywka - Fragment symulacji na który składa się dwóch graczy grających między sobą w dylemat więźnia przez podaną w opcjach aplikacji liczbę rund. Wraz z nowym pokoleniem rozpoczynana jest nowa rozgrywka między sąsiadami
- Rozmieszczenie początkowe - Patrz: Warunki początkowe.
- Ruch - Podjęcie jednej decyzji w trakcie pojedynczej rozgrywki
- Runda - Wykonywanie jednego ruchu przez wszystkich graczy
- SPD - Patrz: Przestrzenny dylemat więźnia
- Stan symulacji - aktualny układ komórek w automacie komórkowym
- Strategia - Wzorzec podejmowania decyzji, który posiada każdy gracz i na podstawie którego wykonuje ruchy w toku rozgrywek.
- Symulacja - realizacja automatu komórkowego opisanego przez SPD o podanych warunkach początkowych
- Sąsiedzi - Para komórek będąca w zadanym w opcjach aplikacji sąsiedztwie (Moore'a lub von Neumanna)
- Ustawienie początkowe - Patrz: Warunki początkowe.
- Warunki początkowe - Początkowe ustawienie układu komórek w automacie komórkowym wraz z wymiarami jak również macierz nagród oraz definicja sąsiedztwa. Inaczej nazywany ustawieniem lub rozmieszczeniem początkowym.
- Wizualizacja - graficzna reprezentacja aktualnego stanu symulacji
- Wynik gracza - suma punktów jakie uzyskał gracz w toku rozgrywek ze swoimi sąsiadami w trakcie jednego pokolenia.

1.4 Proces Implementacji

W stworzonym oprogramowaniu można rozróżnić dwa moduły:

- GUI wykonane przez Patryka Kujawskiego, w skład którego wchodziły:
 - Możliwość zdefiniowania warunków początkowych symulacji
 - Wylosowanie warunków początkowych
 - Import i eksport warunków początkowych z i do plików
 - Wyświetlanie stanu symulacji w formie graficznej
 - Uruchamianie i zatrzymywanie symulacji
 - Wyświetlanie statystyk symulacji na wykresach
 - Zmiana prędkości symulacji
 - Podgląd stanów symulacji z poprzednich pokoleń
 - Przybliżanie i oddalanie graficznej reprezentacji stanu symulacji oraz wykresów
 - Eksport wykresów i stanu symulacji do plików graficznych
 - Wprowadzanie niejednorodnych macierzy wypłat
- Biblioteka obliczeniowa wykonana przez Błażeja Bobko, której zadaniem było:
 - Dokonanie symulacji
 - Optymalizacja symulacji z użyciem wielowątkowości
 - Możliwość łatwego rozszerzenia symulacji o nowo zdefiniowane strategie i sąsiedztwa
 - Wykrywanie stabilizacji układu
- Sprawna integracja obu modułów oraz naprawianie błędów wymagały współpracy obu osób w zespole.

Projekt wykonano z użyciem metodologii zwinnych w szczególności czerpiąc z metodyk scrum oraz kanban stawiając w ten sposób na komunikację w zespole, większość dokumentacji powstawało post factum by dokładnie opisywać zmiany kodu. Wymagania funkcjonalne przeanalizowano oraz na podstawie estymacji wymaganego czasu implementacji opracowano harmonogram sprintów zamieszczony w załączniku „Analiza biznesowa”. W obrębie sprintu (na poziomie mikrozarządzania zadaniami) wykorzystano metodykę kanban. Wraz z rozwojem projektu sprinty skracano co ułatwiało integrację modułów oraz doraźne zmniejszanie time-to-market, w tym wypadku – osiągnięcie wymagań funkcjonalnych oraz terminów ustalonych z promotorem jako kamienie milowe.

Rozdział 2

Wprowadzenie Teoretyczne

2.1 Kontekst Pojęciowy

2.1.1 Dylemat Więźnia

W klasycznym dylemacie więźnia mamy do czynienia z sytuacją, w której dwoje graczy podejmuje niezależnie od siebie decyzje, zaś od ich kombinacji zależy nagroda punktowa dla każdego z nich. Zależność decyzji od nagrody opisana jest macierzą wypłat, której ogólna postać widoczna jest poniżej.

		Gracz A	
		Zdrada	Kooperacja
Gracz B	Zdrada	x_1 x_1	x_2 x_3
	Kooperacja	x_3 x_2	x_4 x_4

Gdzie zachowane są następujące zależności między nagrodami:

$$2 * x_1 > x_2 + x_3 \quad (2.1)$$

$$x_2 < x_4 < x_1 < x_3 \quad (2.2)$$

[?, rozdział 12, s. 94-95]

W wariantcie z rozgrywką wielokrotną punkty między rozgrywkami się sumują.

Ponieważ w macierzy wypłat występują cztery unikalne wartości, w tej pracy została przyjęta dla niej notacja czwórki liczb tj. $[x_1, x_2, x_3, x_4]$.

2.1.2 Przestrzenny Dylemat Więźnia

W przestrzennym dylemacie więźnia rozmieszczamy graczy na siatce i każdy z nich ściera się ze swoimi sąsiadami (sąsiedztwo von Neumanna albo Moore'a) w rozgrywkach wielokrotnych. Wszystkie rozgrywki składają się z takiej samej ilości decyzji oraz wszystkich graczy obowiązuje ta sama macierz wypłat. Następnie każdy z graczy optymalizuje swoją strategię tzn. przejmuje strategię najbardziej efektywnego sąsiada (lub zostaje przy swojej jeśli sam osiągnął najlepszy wynik w swoim sąsiedztwie). Następnie rozgrywki rozpoczynane są od nowa (z zerowaniem punktów). Wariant ten jest ciekawy w szczególności ze względu na sytuację w których dwoje sąsiadów rywalizuje korzystając z tej samej strategii co z powodu klastrowania się strategii zdarza się często.

Jeżeli zarówno strategię graczy jak i metoda wyboru nowej strategii są całkowicie deterministyczne, przestrzenny dylemat więźnia może być reprezentowany jako automat komórkowy. Stanem poszczególnej komórki jest strategia, a zasadą opisującą przejście automatu jest rozgrzywka dylematu więźnia oraz wybór strategii. Przedstawienie gry w ten sposób umożliwia studiowanie pojawiających się grup graczy o tych samych strategiach jako struktur w przestrzeni siatki komórek automatu.

W tej pracy zdecydowaliśmy się na reprezentację przestrzennego dylematu więźnia jako automatu komórkowego.

2.1.3 Przestrzenny Dylemat Więźnia a Automaty Komórkowe

Definicja 2.1.1. Automatem komórkowym A nazywamy czwórkę (α, S, N, f) , gdzie α oznacza regularną siatkę złożoną z jednakowych komórek, S skończony zbiór stanów w którym może znajdować się komórka, N skończony zbiór funkcji sąsiedztw n takich że $\forall_{c \in \alpha} n(c) \subset \alpha$ i funkcja $f : S^m \rightarrow S$ nazywana funkcją przejścia, opisującą w jaki sposób zmieniają się stany komórek automatu (gdzie m określa ilość komórek biorących udział w ewaluacji funkcji przejścia). Aby opis automatu komórkowego był pełny, należy również określić układ początkowy - dla każdej komórki automatu jej stan początkowy.

W zastosowanej w tej pracy reprezentacji zachodzą następujące odniesienia między elementami przestrzennego dylematu więźnia a automatem komórkowym: Gracz w dylemacie więźnia odpowiada komórce w automacie komórkowym. Strategia tego gracza odpowiada zaś stanowi komórki. Sąsiedztwo w dylemacie więźnia bezpośrednio przekłada się na

sąsiedztwo automatu komórkowego, a funkcją przejścia jest zadana liczbę rozgrywek dy-
lematu więźnia po których następuje policzenie punktacji wg. zadanej macierzy wypłat i
aktualizacja strategii każdej komórki na podstawie wyników jej sąsiadów.

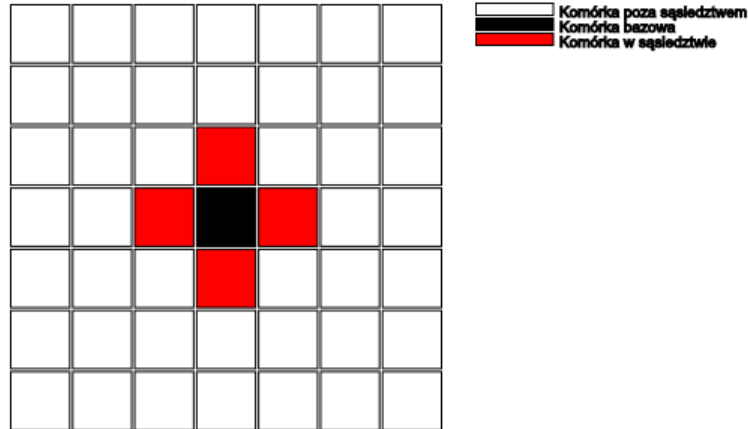
2.1.4 Uogólnienie sąsiedztw

Tradycyjnie w dylemacie więźnia rozpatruje się jedynie sąsiedztwa von Neumanna i Mo-
ore'a. W naszej symulacji uogólniliśmy je do trzech przypadków:

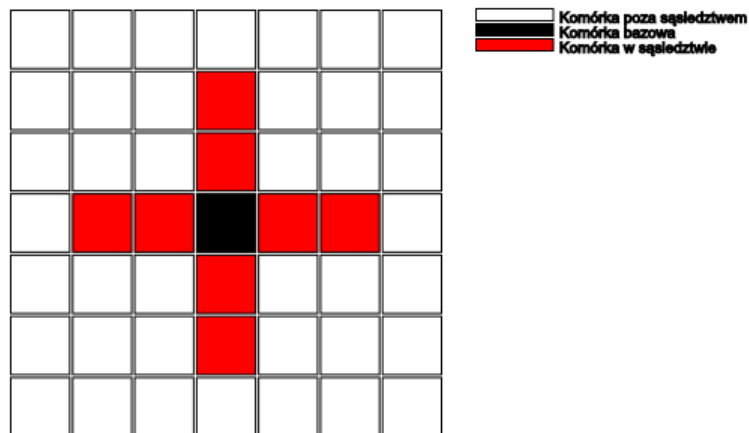
1. Rozszerzone sąsiedztwo von Neumanna o zasięgu d

$$S(x, y) = \bigcup_{i=1}^d \{(x+i, y), (x-i, y), (x, y+i), (x, y-i)\} \quad (2.3)$$

Poniżej znajduje się graficzna reprezentacja dla $d = 1$ i $d = 2$:



Rysunek 2.1: $d=1$



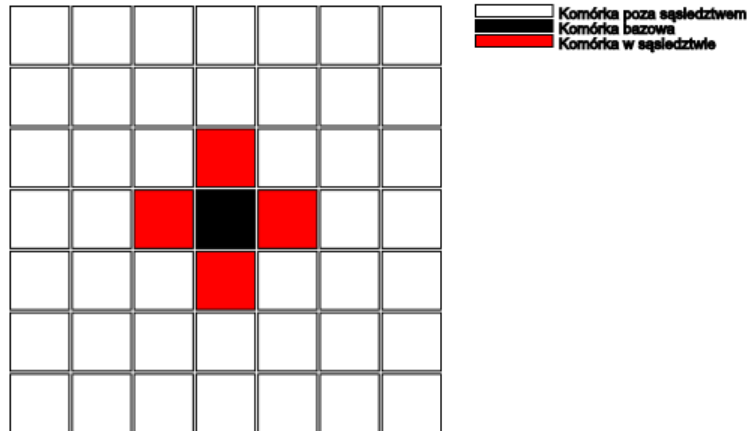
Rysunek 2.2: $d=2$

2. Taksówkowe sąsiedztwo von Neumanna o zasięgu d

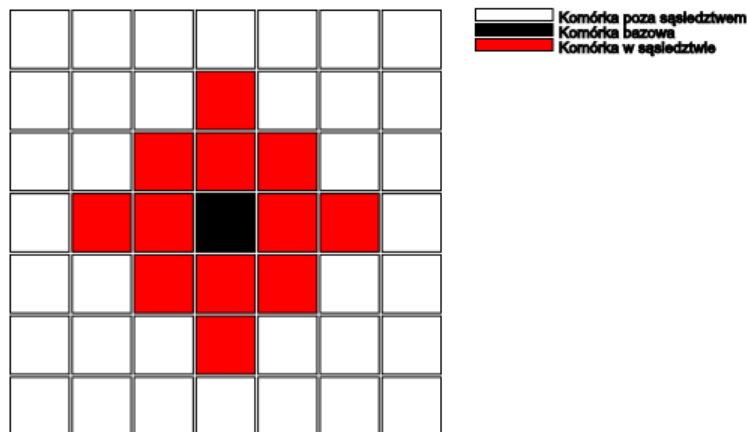
$$S(x, y) = \{(x', y'); x', y' \in \mathbb{Z} \text{ i } 0 < d_{taxi}((x, y), (x', y')) \leq d\} \quad (2.4)$$

Gdzie d_{taxi} jest odległością w metryce taksówkowej.

Poniżej znajduje się graficzna reprezentacja dla $d = 1$ i $d = 2$



Rysunek 2.3: $d=1$



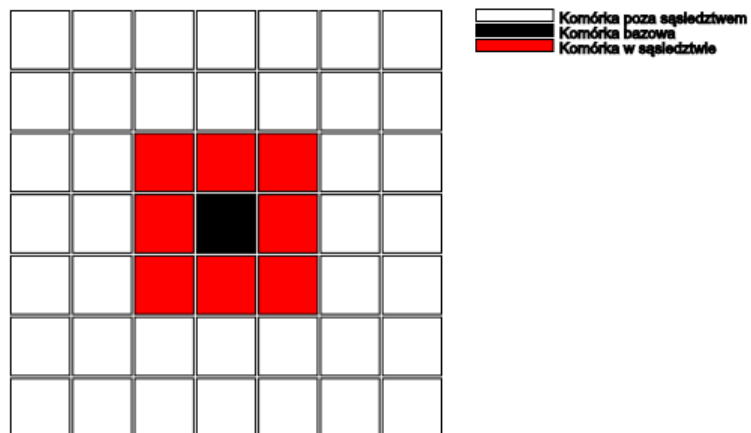
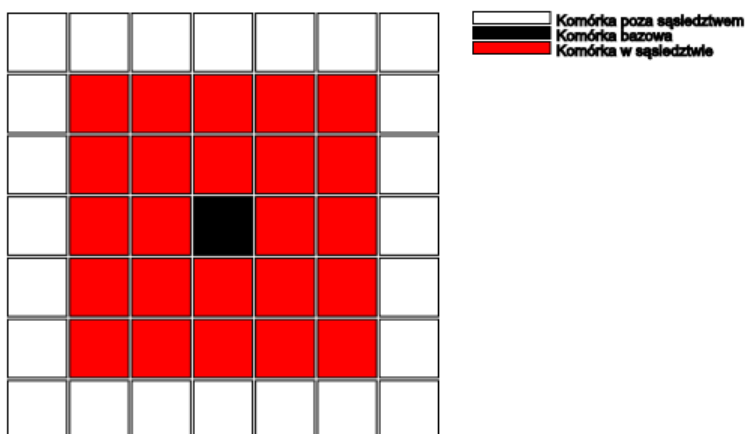
Rysunek 2.4: $d=2$

3. Rozszerzone sąsiedztwo Moore'a o zasięgu d

$$S(x, y) = \{(x', y'); x', y' \in \mathbb{Z} \text{ i } 0 < d_{max}((x, y), (x', y')) \leq d\} \quad (2.5)$$

Gdzie d_{max} jest odległością w metryce maksimum.

Na rysunkach ?? i ?? znajduje się graficzna reprezentacja dla $d = 1$ i $d = 2$:

Rysunek 2.5: $d=1$ Rysunek 2.6: $d=2$

2.1.5 Różnorodna Macierz Wypłat

Rozpatrujemy również wariant, w którym gracze w zależności od swojego położenia podlegają różnym macierzom wypłat. Komplikuje się wtedy krok optymalizacji strategii. Rozważyliśmy dwa rozwiązania:

1. Gracze optymalizują strategię tylko na podstawie punktów sąsiadów.
2. Gracze ewaluują ciąg decyzji sąsiadów względem swojej macierzy wypłat i na tej podstawie wyłaniają najbardziej efektywną.

2.2 Algorytm Symulacji

Symulacja inicjalizowana jest następującymi parametrami:

- Początkowy układ strategii, ozn $D(x, y)$ = strategia komórki o współrzędnych (x, y)
- Długość rozgrywek, ozn k .
- Funkcja macierzy wypłat $M(x, y)$ = macierz wypłat dla gracza (x, y) lub M = pojedyncza macierz wypłat dla wariantu z jednorodną macierzą wypłat (wtedy $M(x, y) = M$)
- Funkcja sąsiedztwa $S(x, y) = \{(x', y')\}$; gracz (x', y') jest sąsiadem gracza (x, y)
- Rodzaj optymalizacji (istotny tylko w wariacie z niejednorodną macierzą wypłat)

Pomocniczo oznaczmy:

- $P(x, y)$ = punkty gracza o współrzędnych (x, y) , początkowo dla każdego (x, y) $P(x, y) = 0$
- $M_m(d_1, d_2)$ = ilość punktów jakie dostaje podejmujący decyzję d_1 w sytuacji gdy przeciwnik podjął decyzję d_2 rozpatrując macierz wypłat m .

Krok automatu wygląda wtedy następująco:

- Powtórz k razy:
 - Dla każdego (x, y)
 - * Dla każdego $s \in S(x, y)$
 - Niech $D_{(x,y)}(s) :=$ decyzja $D(x, y)$ przeciw s
 - Dla każdego (x, y)
 - * Dla każdego $s \in S(x, y)$
 - Niech $d = D_{(x,y)}(s)$ i $d' = D_{(s)}(x, y)$
 - $P(x, y) + = M_{M(x,y)}(d, d')$
- Dla każdego (x, y)
 - Weźmy s takie, że $s \in S(x, y) \wedge P(s) = \max_{(x,y) \in S(x,y)} P(x, y)$
 - $D(x, y) := D(s)$

$$- P(x, y) := 0$$

Szczegółową implementację przewidującą wielowątkowość oraz synchronizację wątków opisano w dokumentacji technicznej.

Rozdział 3

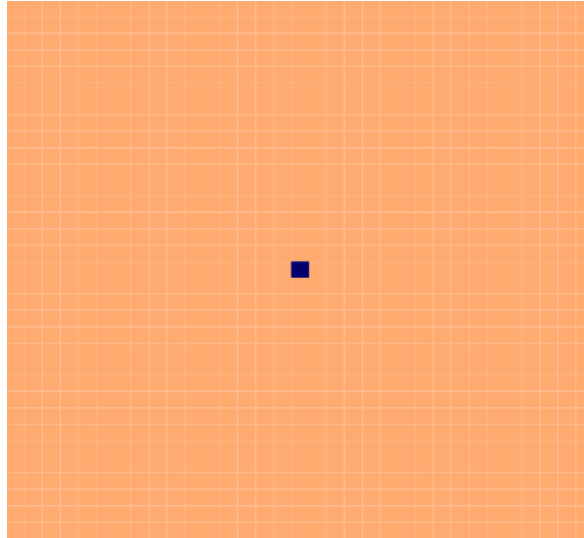
Analiza Działania Automatu Komórkowego

Wykorzystując przygotowaną aplikację opracowaliśmy schemat analizy empirycznej przestrzennego dylematu więźnia w oparciu o popularne prace badawcze poświęcone tej tematyce. Celem części empirycznej było powtórzenie, a następnie rozszerzenie badań opisanych w [?, ?, ?].

Decyzja o wyborze wyżej wymienionych prac została podjęta po studium aktualnej literatury z dziedziny dylematu więźnia. Wybrane prace zwróciły naszą uwagę tym, że stanowią studium podstawowych zagadnień związanych z tematem. Trudno o lepszy materiał bazowy w trakcie badania własności rozszerzonych wariantów przestrzennego dylematu więźnia.

3.1 Eksperyment Nowaka i Maya

[?] Jedną z pierwszych prac dotyczących przestrzennego dylematu więźnia, był eksperyment wykonany przez M. Nowaka i R. May'a. Rozważali oni strategię „zawsze wybaczaj” i „zawsze zdradzaj”, rozłożone na planszy tak, by jedna strategia zawsze zdradza otoczona była ze wszystkich stron symetrycznie tylko i wyłącznie przez komórki o strategii „zawsze wybaczaj”.



Rysunek 3.1

Siatka graczy w tej rozgrywce rozłożona była na torusie z użyciem sąsiedztwa von Neumanna. Nowak i May zauważyli, że strategia zawsze zdradczaj propaguje się, tworząc podobne do fraktalnych struktury.

Eksperyment ten uwzględniał wykorzystanie następującej macierzy wypłat (zgodnie z modyfikacją zaproponowaną w artykule Y. Ishidy i T. Moriego) [?]:

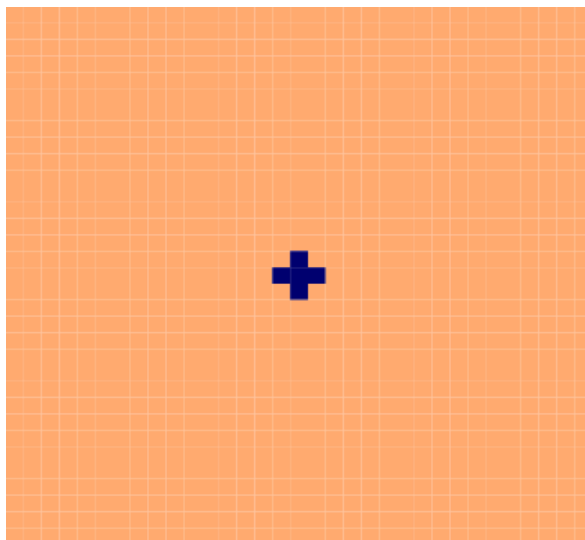
		Gracz A	
		Zdrada	Kooperacja
Gracz B	Zdrada	1 1	b 0
	Kooperacja	0 b	0 0

W celu spełniania nierówności charakteryzujących przestrzenny dylemat więźnia, parametr b musi spełniać nierówność $1 < b < 2$.

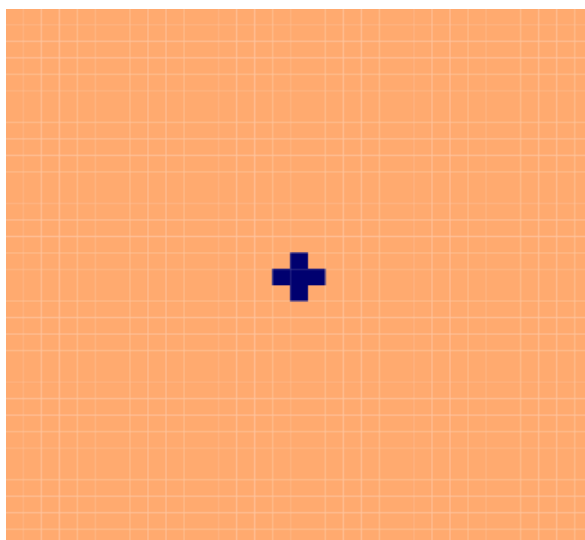
Zdecydowaliśmy na częściową zmianę parametrów - sąsiedztwo zostało rozłożone na płaszczyźnie zamiast na torusie.

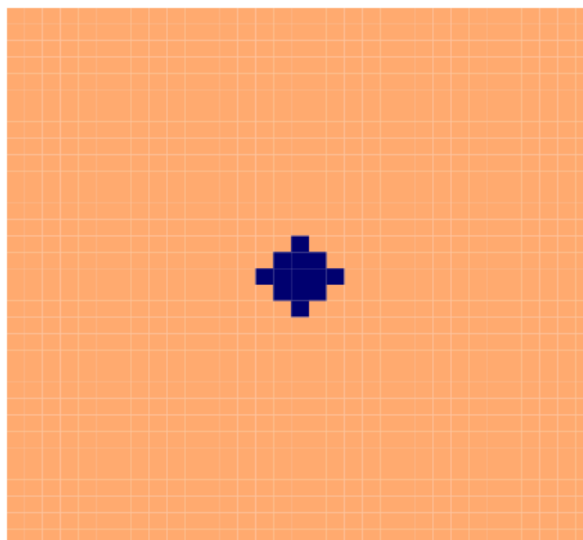
W wyniku eksperymentów (na sąsiedztwie Moore'a rozłożonym na płaszczyźnie) wysnuiliśmy wniosek istnienia wartości brzegowej parametru b , powyżej której automat komórkowy odwzorowuje zachowanie zaobserwowane w oryginalnym eksperymencie Nowaka i Maya.

Dla $b = 1.39$ obliczenia kończą się po dwóch krokach automatu, osiągając układ wynikowy widoczny na rysunku ??:

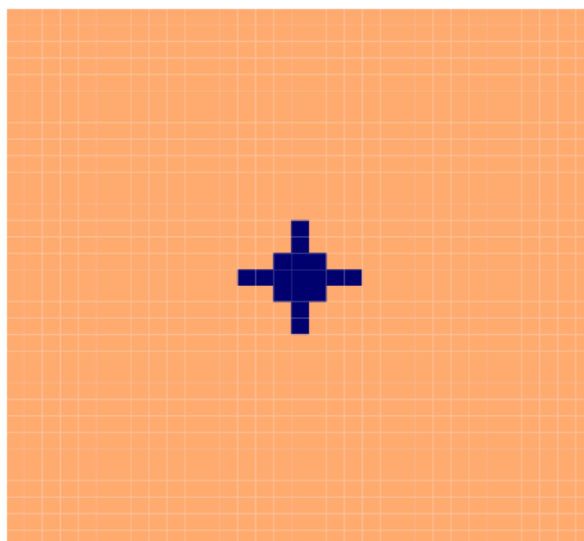
*Rysunek 3.2: Krok 1*

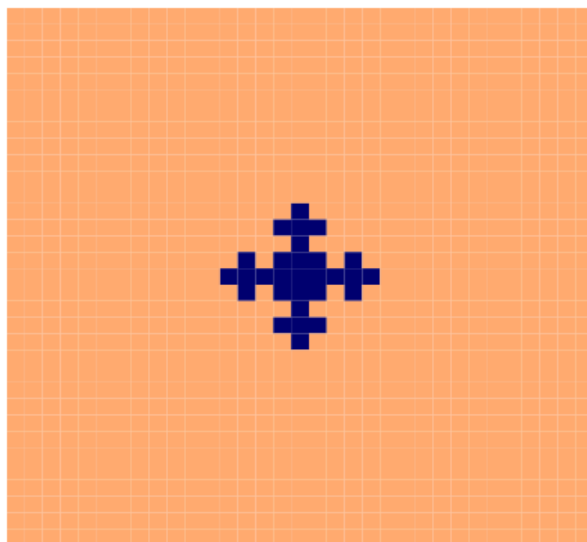
Dla $b = 1.40$ osiągamy powstawanie zbliżonych kształtem do fraktalnych struktur - rysunki ?? i ?? ←ODNOŚNIK zamiast dwukropka

*Rysunek 3.3: Krok 1*

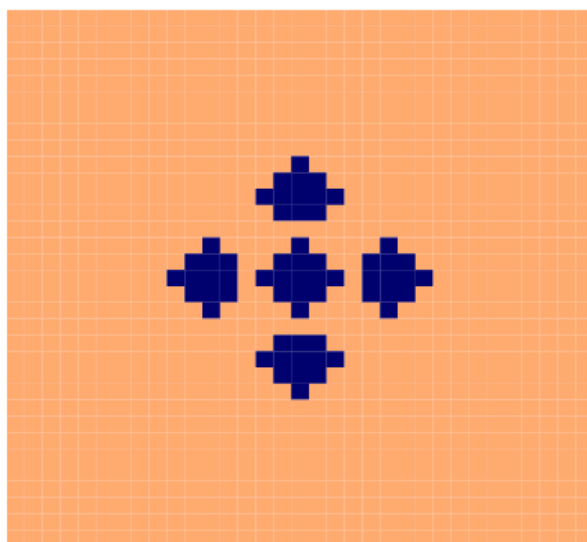
*Rysunek 3.4: Krok 2*

Początkowym etapem powstawania struktury jest rozszerzanie się oryginalnego punktu do większych rozmiarów, zachowując dwie osie symetrii - pionową i poziomą przechodzące przez środek układu.

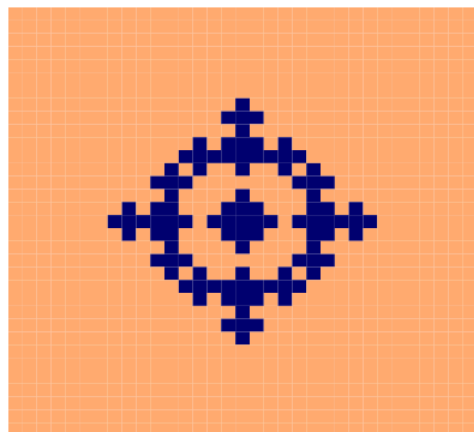
*Rysunek 3.5: Krok 3*

*Rysunek 3.6: Krok 4*

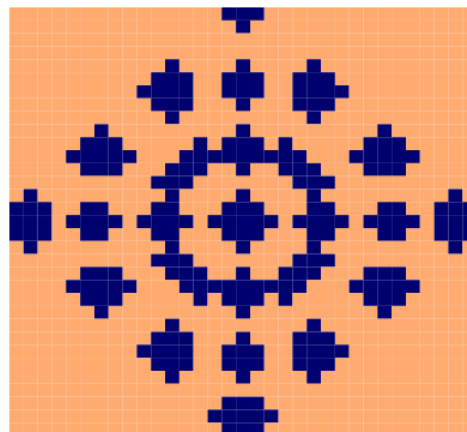
Następnym etapem jest powstanie struktur w przestrzeni będących kopiami tych z wcześniejszych kroków, jako odnóg głównej struktury.

*Rysunek 3.7: Krok 7*

Częściowo powielone struktury wydzielają się, umożliwiając rozrost struktur fraktalnych.

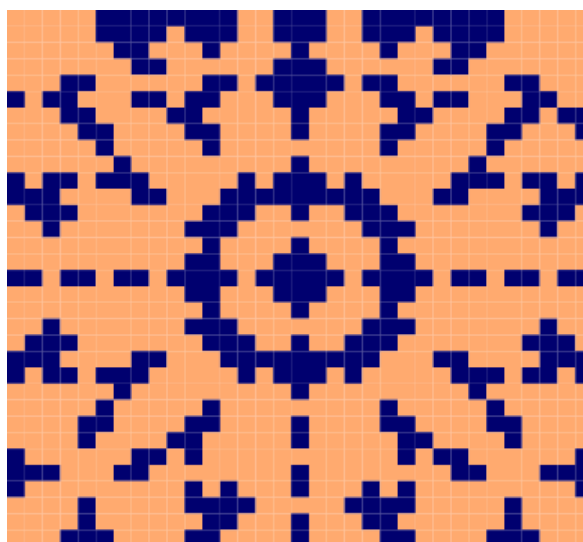


Rysunek 3.8: Krok 9



Rysunek 3.9: Krok 17

Po siedemnastu iteracjach struktury fraktalne jest zbyt duże by pomieścić się na planszy. Może to powodować zaburzenia we wcześniej istniejącej symetrii i ostatecznie będzie powodem zakończenia obliczeń automatu.



Rysunek 3.10: Krok 34 - Ostatni

Fraktalna struktura zaburzyła się z powodu braku miejsca na planszy. Ostatecznie częściowa symetria została zachowana jednakże nie jest to konieczność. Jednym z powodów zaburzenia symetrii może być funkcja wyboru strategii podczas aktualizacji strategii – model teoretyczny nie rozsądza na jakiej podstawie należy rozsądzać remis. W takiej sytuacji wybór mógłby być losowy, ale w celu zachowania determinizmu koniecznego do istnienia automatu komórkowego, wedle naszej implementacji komórka wybiera najpierw siebie (jeśli posiada największą ilość punktów), a potem sąsiada o najmniejszej współrzędnej X. W wypadku

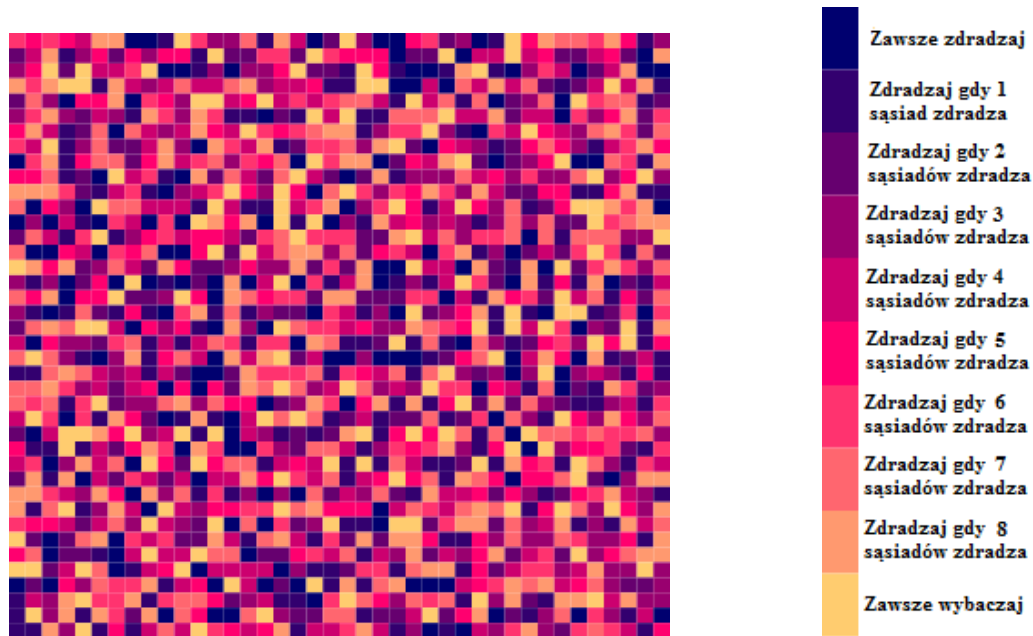
kolejnego remisu decyduje najmniejsza współrzędna Y. Doprowadza to do sytuacji, w której odpowiadające sobie komórki znajdujące się po dwóch stronach osi symetrii mogą wybrać do pobrania strategii komórki które nie odpowiadają sobie w ten sam sposób, co zaburza symetryczność układu.

3.2 Eksperyment Ishidy i Moriego

[?] Drugi eksperyment oparty był na pracy Y. Ishidy i T. Moriego. W tym eksperymencie badane były strategie postaci „Zdradzaj gdy k sąsiadów zdradza”. Wnioskiem z eksperymentów było zauważenie zjawiska klastrowania się strategii w przestrzeni (parafrazując [?])

"Przy właściwym wyborze parametrów macierzy wypłat, niektóre przestrzenne strategie rozpowszechniają się, tworząc granice w dwuwymiarowej przestrzeni siatki. Połączony obszar siatek z identycznymi strategiami może wyeliminować inną strategię; jeśli niewielka część siatek w połączonym obszarze zostanie zmieniona na strategię inną od tej w połączonym obszarze, ta strategia powróci do oryginalnej."

W eksperymencie wykorzystano 10 strategii - Od $k = 0$ (strategia zawsze zdradzaj) do $k = 9$ (strategia zawsze wybacza), każdą z nich przedstawiono innym kolorem. Układ początkowy został wylosowany z równym prawdopodobieństwem dla każdej strategii, na rysunku ?? widać jego graficzną reprezentację.

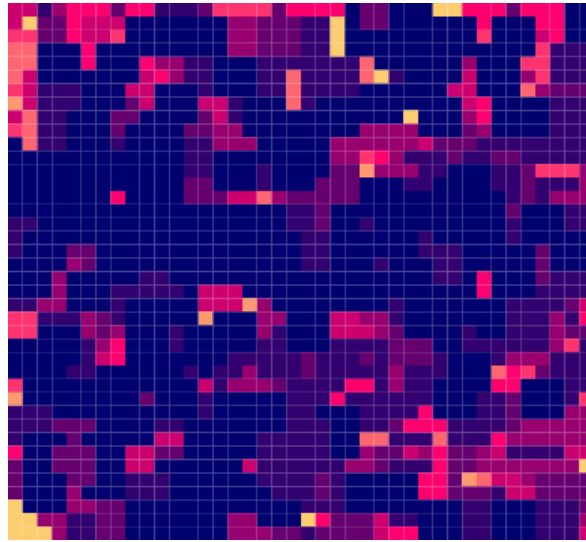


Rysunek 3.11: Układ początkowy + Legenda

W omówieniu wniosków pierwotnego eksperymentu nie poruszono tematu macierzy wypłat, co sugeruje, iż zjawisko klasteryzacji jest niezależne od sposobu punktowania, toteż można wybrać dowolną spełniającą warunki dylematu więźnia. W toku naszych badań wybrano macierz promującą zachowania agresywne (ze względu na punktowanie podwójnej zdrady) jak i podtrzymującą zachowania defensywne (wysokie punktowanie podwójnej kooperacji). Poniżej przedstawiono dokładne wartości wybranej macierzy. <– DOPILNOWAĆ ŻE PONIŻEJ

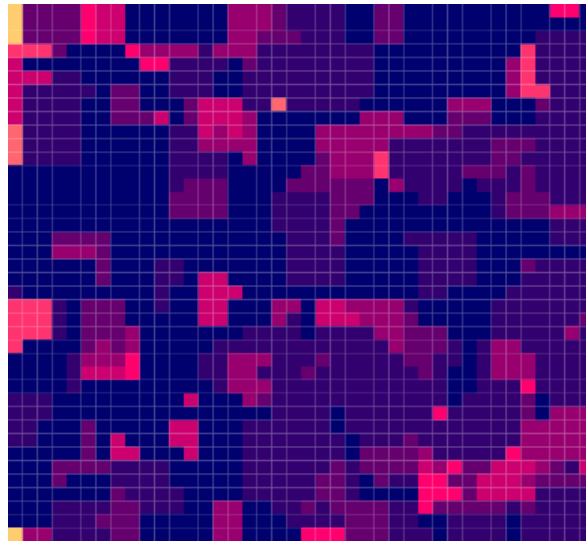
		Gracz A	
		Zdrada	Kooperacja
Gracz B	Zdrada	4 4	5 0
	Kooperacja	0 5	2 2

Poniżej zamieszczono graficzną reprezentację najważniejszych kroków obliczenia wraz z komentarzem.



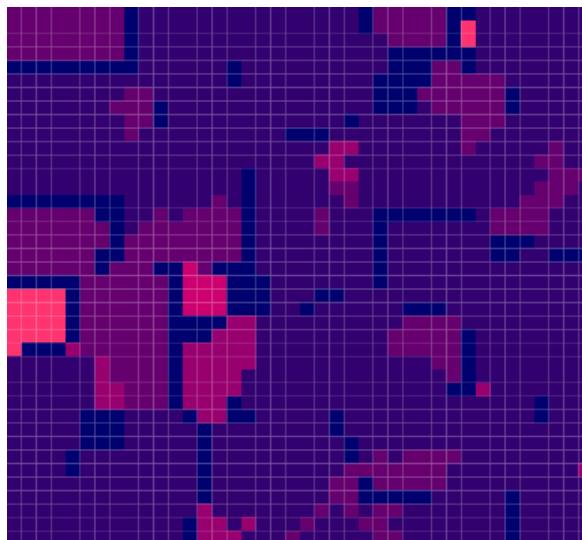
Rysunek 3.12: Krok 1

W pierwszym kroku widoczny jest efekt znaczącej dominacji strategii o niskim k - strategia $k=0$ (zawsze zdradza) i $k=1$ (zdradza gdy jeden sąsiad zdradza) zajęły większą część siatki. Pozostałe strategie utworzyły niewielkie struktury w przestrzeni, w szczególności widoczna jest niewielka ilość strategii o wysokim k (reprezentowanych jasnymi barwami).

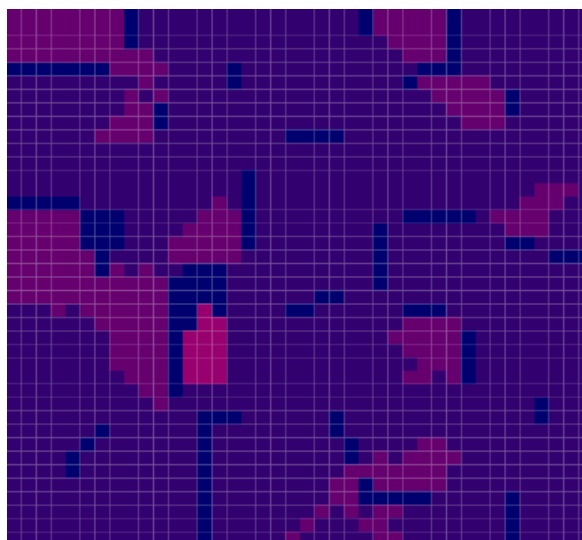


Rysunek 3.13: Krok 2

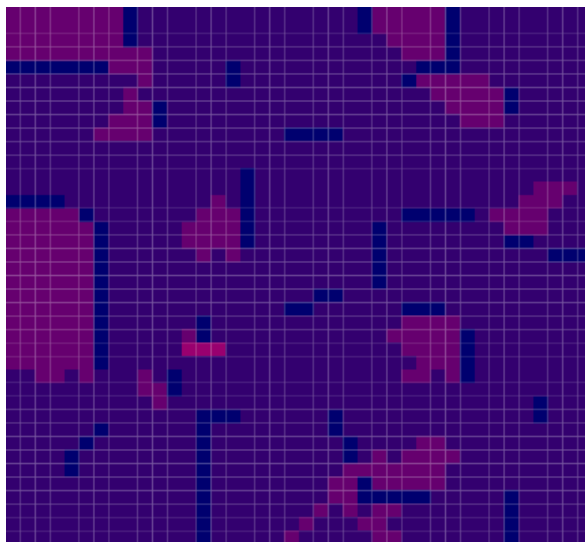
W tym kroku prawie całkowicie zaniknęły strategie o wysokich k jak również zwiększyła się liczba komórek ze strategią $k=1$, kosztem znikającej strategii $k=0$. Jest to związane z faktem, że strategie te osiągają więcej punktów na interakcji między sobą w środku tworzonych przez siebie klastrow, niż odpowiadające struktury strategii „zawsze zdradza”.

*Rysunek 3.14: Krok 6*

W tym kroku strategia $k=1$ stała się dominującą ilościowo strategią, posiadając znaczącą większość komórek siatki. Doprowadziło to do prawie całkowitego zaniknięcia strategii o $k>3$ i zmniejszenia liczebności strategii "zawsze zdradzaj".

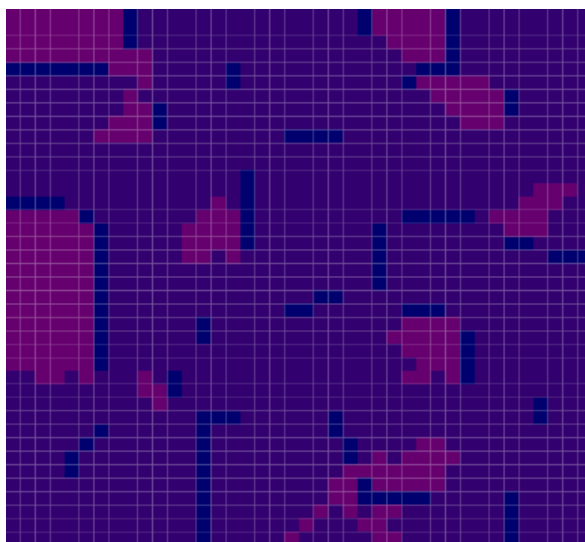
*Rysunek 3.15: Krok 12*

Po sześciu kolejnych przebiegach automatu pozostały cztery strategie o najniższych wartościach k , z czego strategia $k=3$ występuje tylko w jednym klastrze w przestrzeni. Strategia $k=1$ w niewielkim stopniu zwiększyła swoją liczebność kosztem pozostałych.



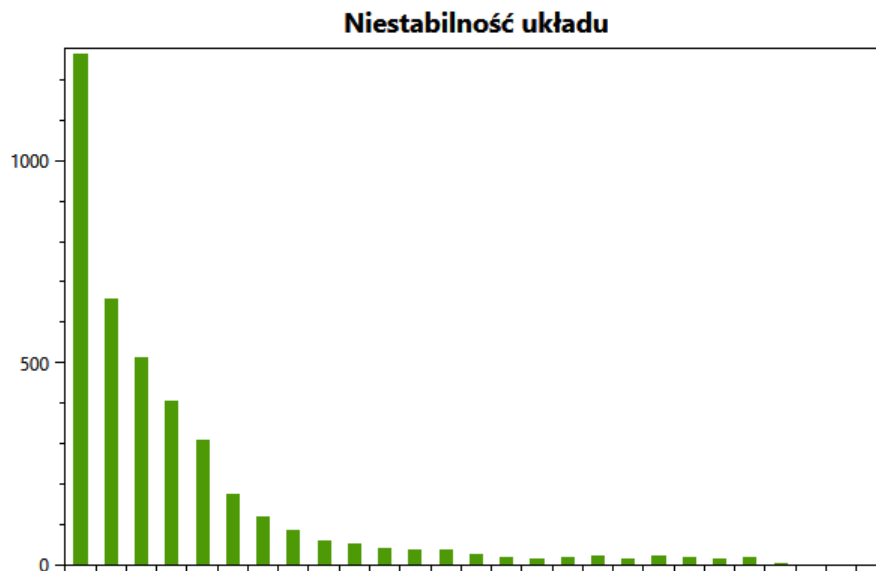
Rysunek 3.16: Krok 23

Dwudziesta trzecia iteracja automatu to ostatnie wystąpienie strategii $k=3$. Strategia ta zostaje wyparta przez rozrastającą się strategię $k=1$, co widać na ostatecznym, ustabilizowanym układzie: <—Odkośnik do figury zamiast dwukropka



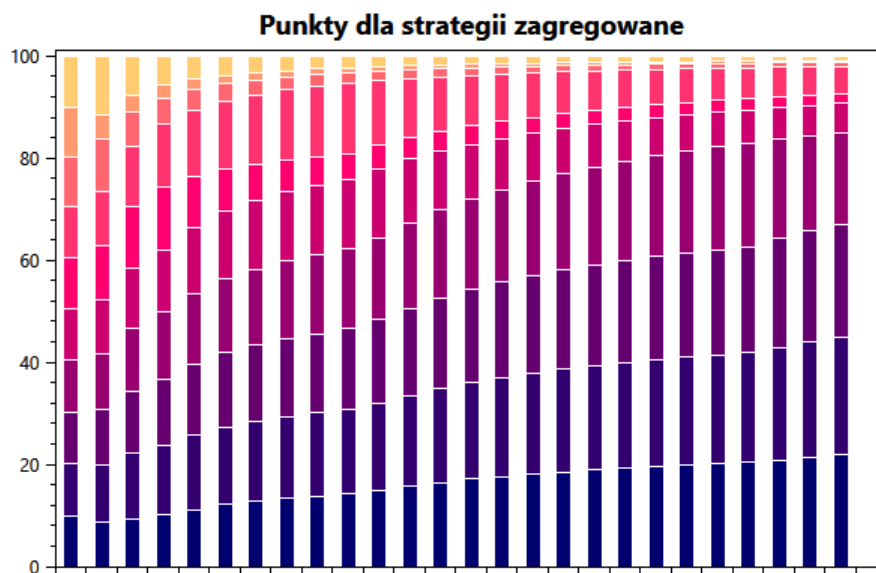
Rysunek 3.17: Krok 24 - Ostatni

Na poniższym wykresie niestabilności układu widać, że po pierwszym utworzeniu się struktur przestrzeni w kroku 1 ilość zmian strategii w każdej iteracji malała znacząco. Sukcesywnie zniknęły strategie inne niż $k=1$. <—OPIS wykresu plus odkośnik



Rysunek 3.18

Strategia $k=1$ jest strategią zbliżoną do wzorcowej strategii „wet za wet”, z tymże, że stosuje ona odpowiedzialność zbiorową - przy jednej zdradzie mści się na wszystkich swoich sąsiadach. Pozwala jej to zerować na bardziej pokojowych w sytuacjach zagrożenia i jednocześnie kooperować w sytuacji braku agresorów. Strategia $k=2$ osiąga podobny efekt, jednakże ze względu na wyższy próg mściwości nie jest równie efektywna. Na poniższym wykresie przedstawiono procentowy udział zdobytych przez każdą strategię punktów na przestrzeni kolejnych iteracji. <– odnośnik zamiast "poniższym"



Rysunek 3.19

W ostatecznym rozrachunku sumy średnich wartości punktowych dla pozostałych strategii są bardzo do siebie zbliżone, co doprowadza do widocznego na siatce impasu.

Rozdział 4

Przestrzenny Dylemat Więźnia z Różnorodną Macierzą Wypłat

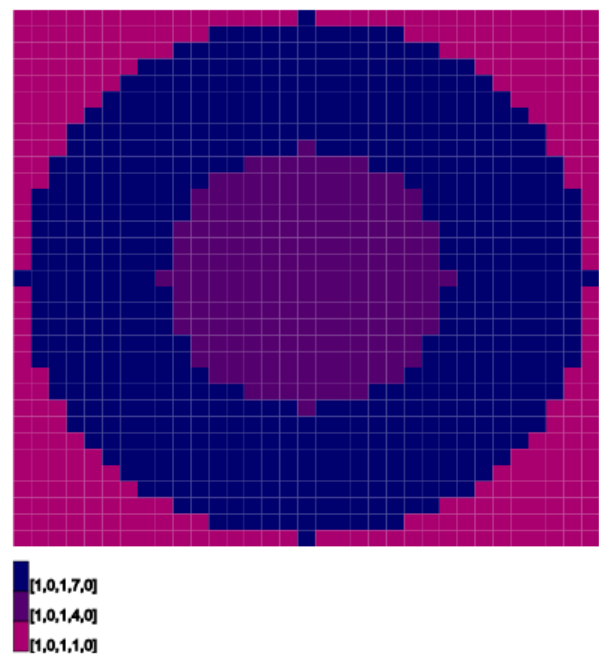
Zdecydowaliśmy się na rozszerzenie oryginalnych eksperymentów poprzez dodanie macierzy wypłat w której wartości punktowe zależą bezpośrednio od współrzędnych komórki na planszy automatu komórkowego.

4.1 Eksperyment Nowaka i Maya

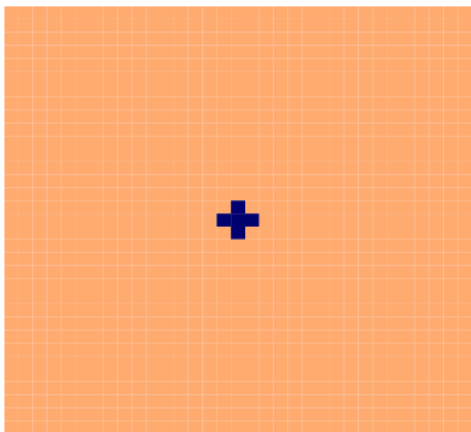
[?] W tym eksperymencie zdecydowaliśmy się na zróżnicowanie parametru b w zależności od współrzędnej komórki. Dla przypomnienia poniżej umieszczono uogólnioną macierz wypłat z pierwotnego eksperymentu:

		Gracz A	
		Zdrada	Kooperacja
Gracz B	Zdrada	1 1	b 0
	Kooperacja	0 b	0 0

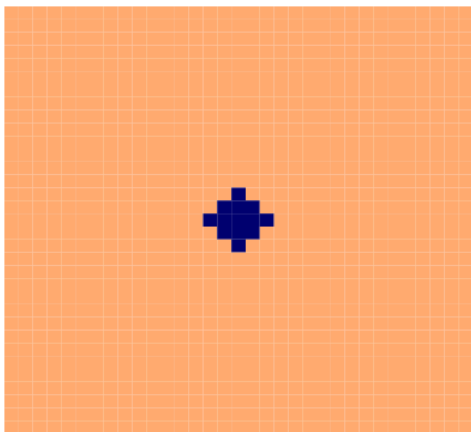
Pierwszą metodą zróżnicowania, było zwiększanie parametru b wraz ze zbliżaniem się do środka układu. Poniżej graficzna reprezentacja rozmieszczenia macierzy wypłat na siatce, kolory odpowiadają macierzom opisanym w legendzie notacją (x_1, x_2, x_3, x_4)



Rysunek 4.1: Układ macierzy

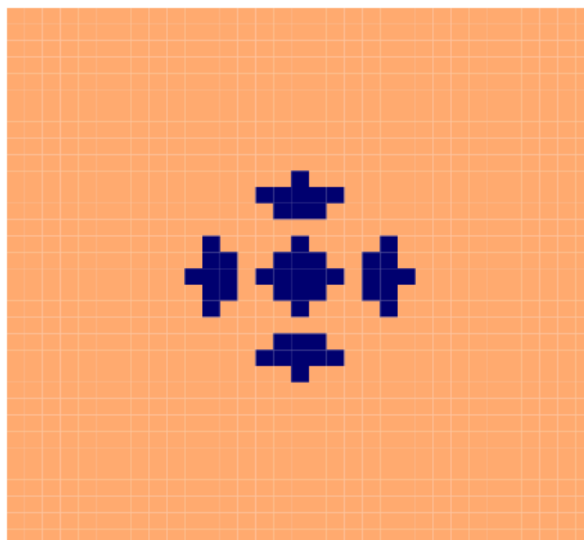


Rysunek 4.2: Krok 1

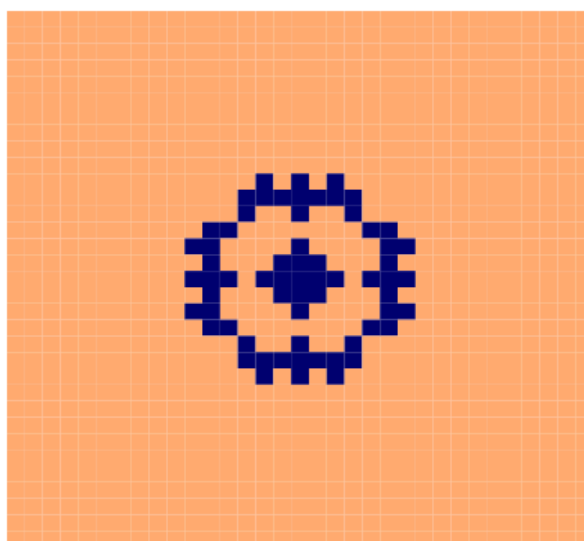


Rysunek 4.3: Krok 2

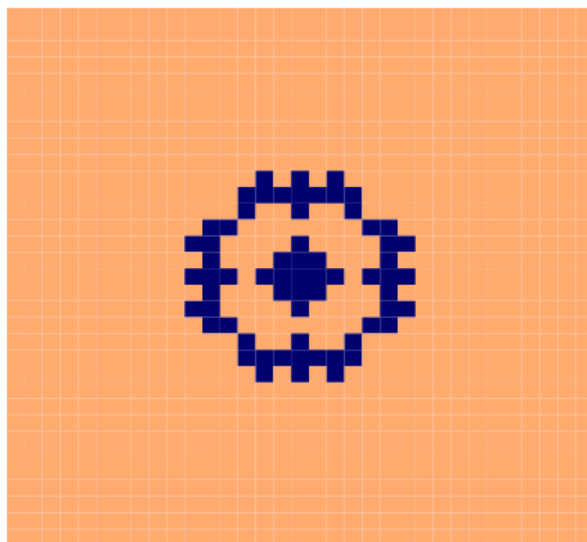
Początkowe struktury w przestrzeni są identyczne do tych z punktu 3.1 ??.

*Rysunek 4.4: Krok 7*

Pierwsza różnica widoczna jest w siódmej iteracji, powstała struktura jest odrobinę inna. Wnioskujemy, że wynika to z faktu, iż powielone obiekty są na granicy zmiany macierzy.

*Rysunek 4.5: Krok 9*

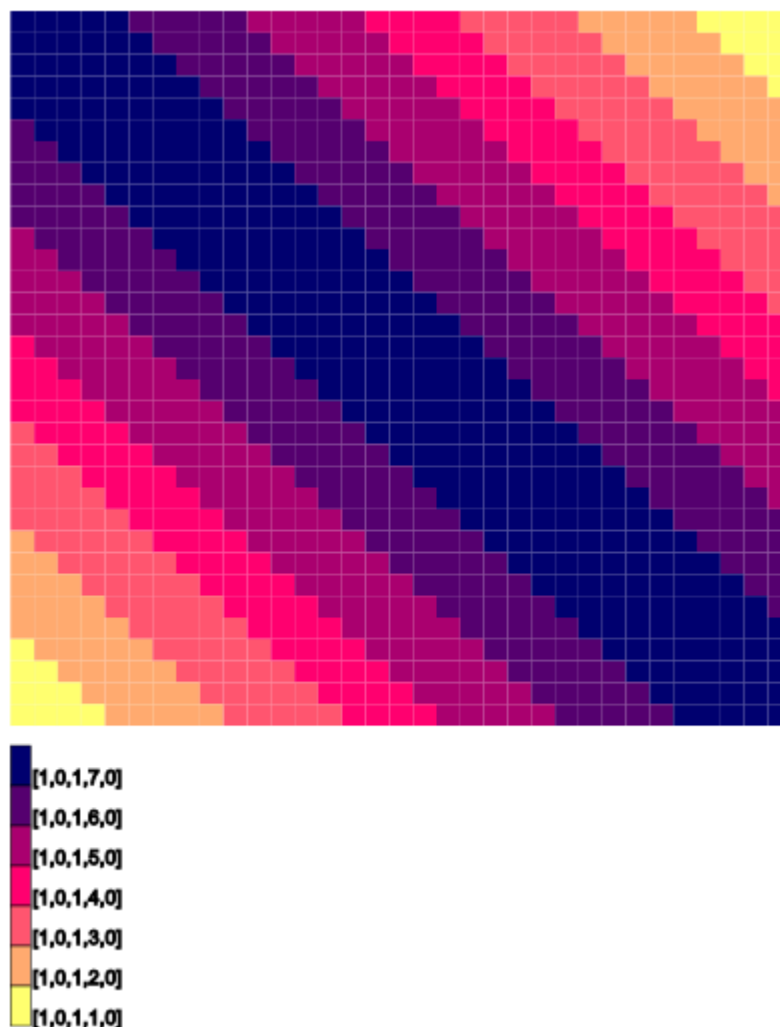
Powstała w kroku dziewiątym struktura jest znacząco inna, mniejsza niż w oryginalnym eksperymencie. Struktura kręgu powstała naokoło granic w układzie macierzy.



Rysunek 4.6: Krok 11 - Ostatni

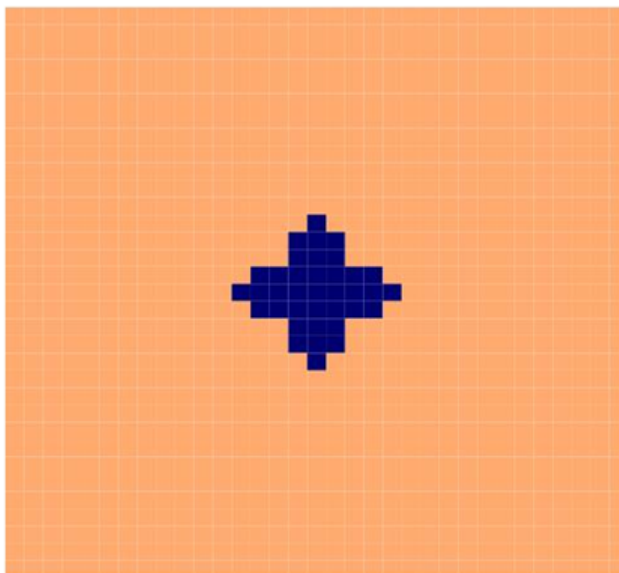
Struktura zatrzymała się na tym etapie, nie rozrastając się dalej, mimo że znajduje się w strefie $b = 1.4$. Najprawdopodobniejszym wytłumaczeniem na brak dalszego rozrostu jest to, że struktura dostosowuje się do układu macierzy. By zweryfikować tę hipotezę zdecydowaliśmy się na układ nie posiadający tych samych osi symetrii co struktura fraktalna z pierwotnego eksperymentu.

Tak jak poprzednio zamieszczamy graficzną reprezentację rozmieszczenia macierzy wypłat na siatce (Rysunek ??), kolory odpowiadają macierzom opisanym w legendzie notacją (x_1, x_2, x_3, x_4)



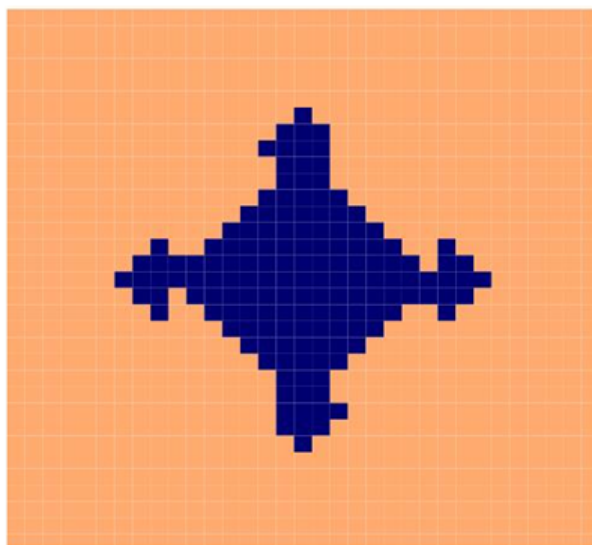
Rysunek 4.7

Układ początkowy strategii jest taki sam. Pierwsze różnice pojawiają się dopiero w czwartym kroku:



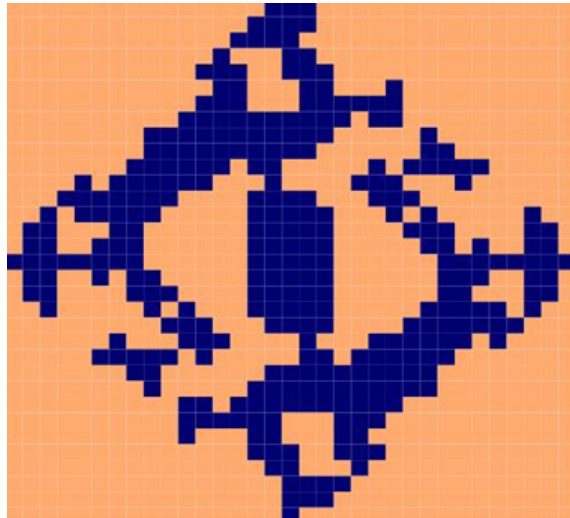
Rysunek 4.8: Krok 4

Powstała struktura ma zbliżony kształt, jednakże jest większa. W następnych krokach struktura rozrasta się w podobny sposób do oryginalnej. Duża zmiana zachodzi w kroku dziesiątym:



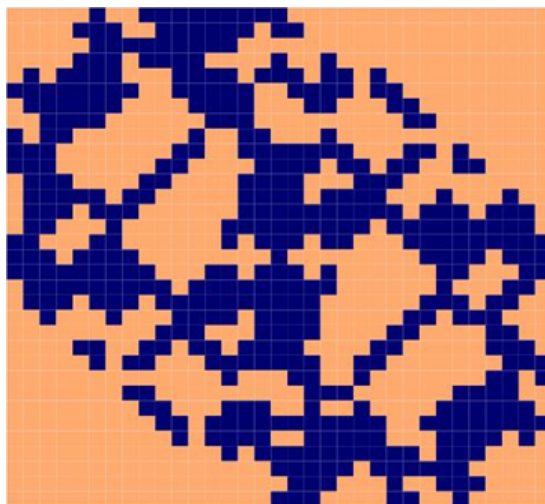
Rysunek 4.9: Krok 10

Układ traci tutaj symetrię, co wynika najpewniej z dostosowywania się do układu macierzy. Od tego momentu struktura przestaje przypominać fraktal, co widać np. w kroku sie-



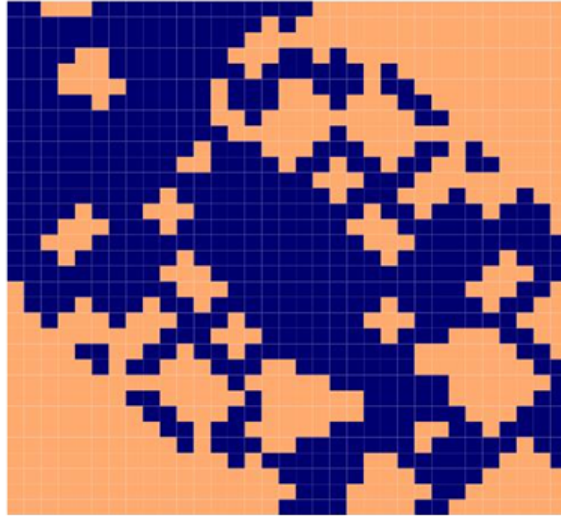
demnastym:

Rysunek 4.10: Krok 17



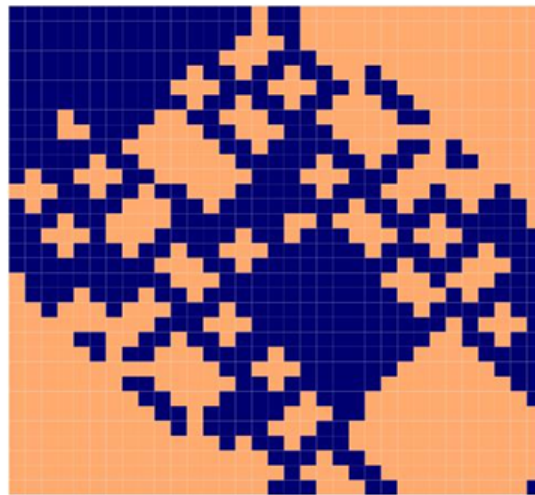
Rysunek 4.11: Krok 27

Struktura nie posiada osi symetrii pionowej ani poziomej jak oryginalny fraktal ale jest zbliżona do osi symetrii zlokalizowanej na przekątnej (o takim samym układzie jak rozłożenie macierzy wypłat).



Rysunek 4.12: Krok 60

Gdy układ w większym stopniu zbliża się do krawędzi siatki zaczyna tracić nawet tę szczątkową symetrię jaką posiadał. Od tego momentu zmiany w układzie zachodzić będą głównie na przekątnej.



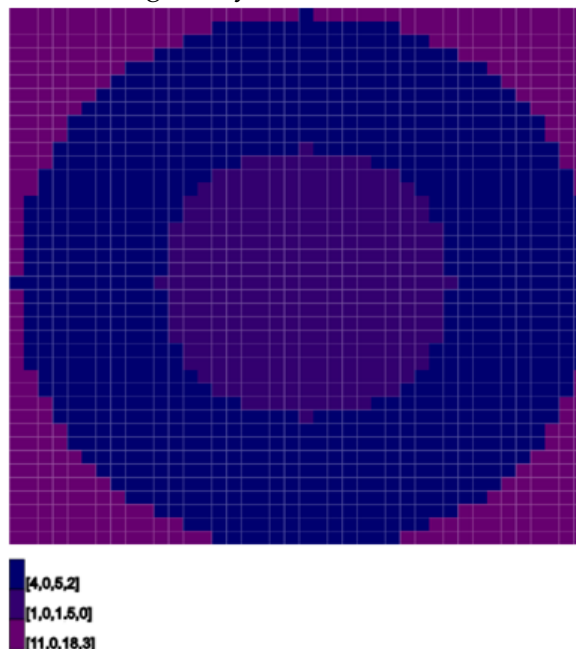
Rysunek 4.13: Krok 287

Wnioskiem, który można zauważyć jest to, że rozłożenie macierzy wypłat nawet o niewielkich różnicach w wartościach może znacząco wpłynąć na powstawanie i rozrastanie się różnych struktur.

4.2 Eksperyment Ishidy i Moriego

[?] Podczas powtórzenia tego eksperymentu, wykorzystane zostały trzy macierze o bardzo zróżnicowanych wartościach funkcji wypłat, ułożone w koncentryczne kręgi dookoła środka

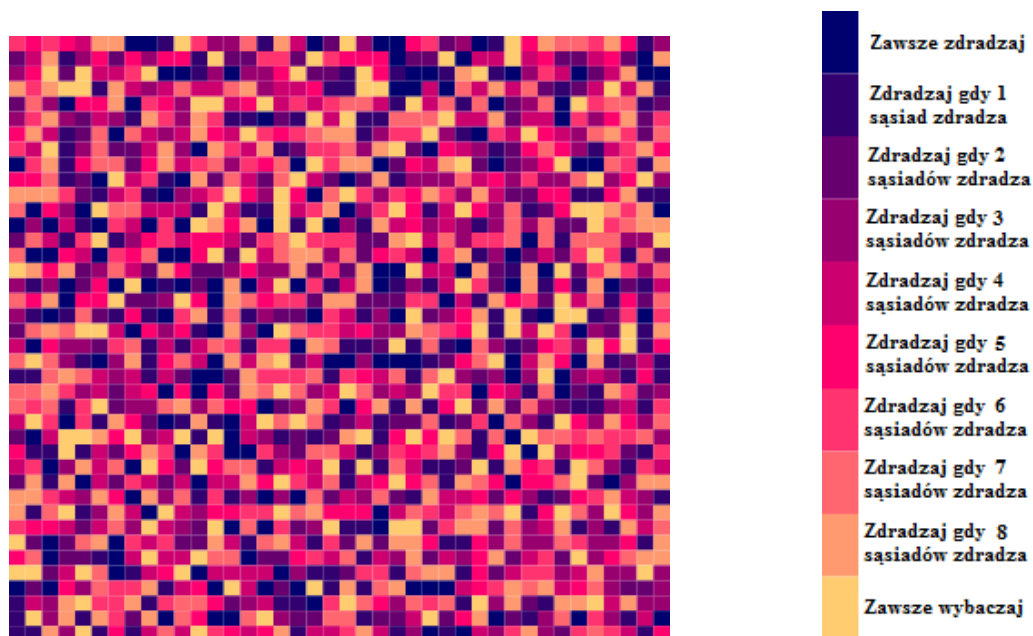
planszy. Wartości te zostały dobrane tak by zachęcać strategie leżące na granicy między dwoma różnymi macierzami do przejmowania strategii od tych komórek, które leżą dalej od cen-



trum planszy:

Rysunek 4.14: Układ macierzy

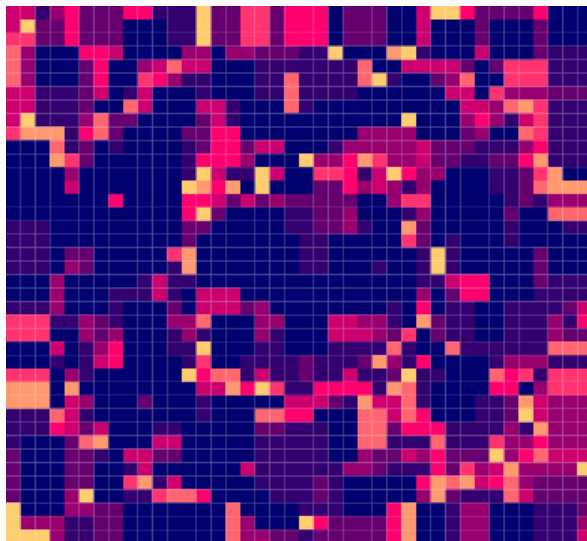
Wykorzystany został ponownie układ początkowy z rozdziału 3.2: ??:



Rysunek 4.15: Układ początkowy + legenda

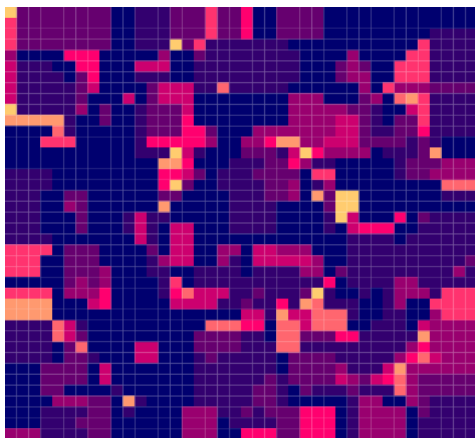
W pierwszym kroku ponownie widać dominację strategii o niskich wartościach k (w szczególności strategii zawsze zdradzaj), jednakże w tym wypadku przetrwało więcej stra-

tegi bardziej pokojowych:

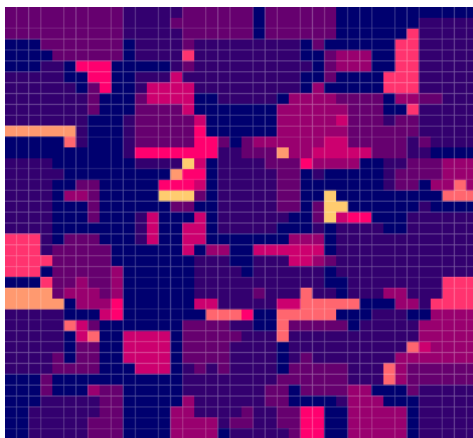


Rysunek 4.16: Krok 1

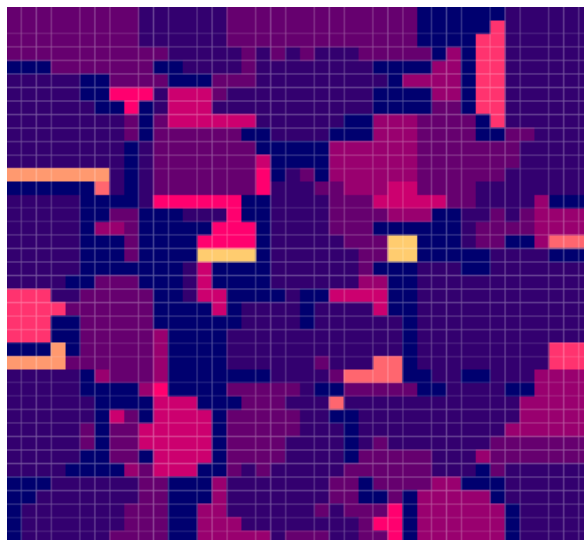
W kolejnych krokach trend rozszerzenia się strategii o niskich k utrzymuje się, ponownie faworyzując strategię "zdradzaj gdy 1 sąsiad zdradza". Tak jak w kroku wcześniejszym, pod wpływem modyfikacji macierzy wypłat strategie pokojowe dłużej utrzymują się w otoczeniu bardziej agresywnych strategii: Można zauważyć, że strategie układają się w struktury odpowiadające układowi macierzy – tworzą one koncentryczne kręgi w około środka siatki.



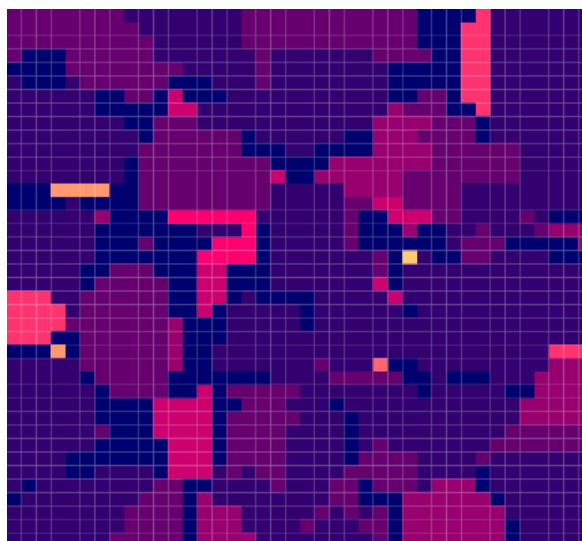
Rysunek 4.17: Krok 2



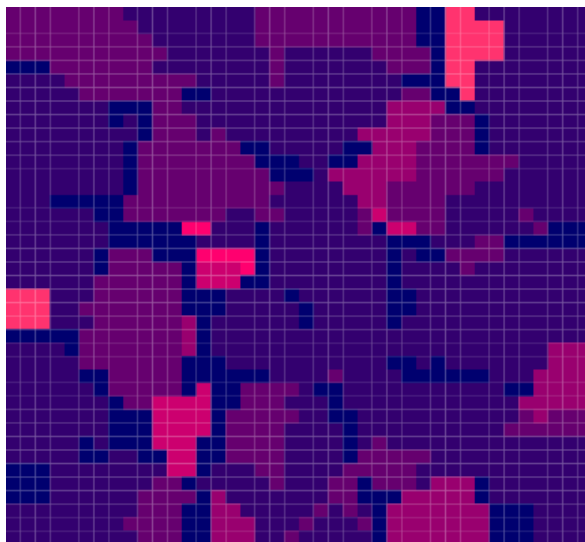
Rysunek 4.18: Krok 3

*Rysunek 4.19: Krok 4*

W kroku czwartym wyraźnie widać już powstałe w przestrzeni struktury tych samych strategii, utrzymujące się w przestrzeni. Dominującą strategią jest strategia o $k = 1$ ("zdradzaj gdy 1 sąsiad zdradza"). Ilość strategii o wysokich k jest niewielka co sugeruje, że znikną one lub pozostaną w niewielkich skupiskach.

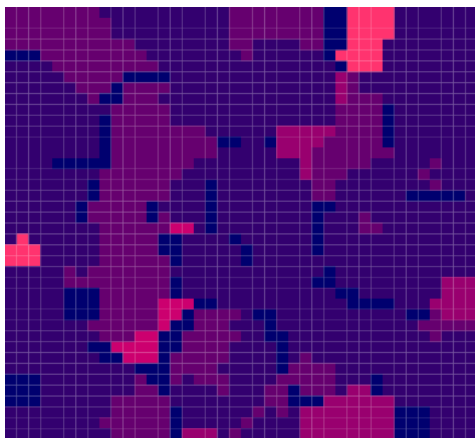
*Rysunek 4.20: Krok 5*

Zgodnie z przewidywaniami strategia zawsze wybaczaj oraz inne strategie o wysokich k stopniowo zanikają i już w kroku szóstym nie występują one wcale.

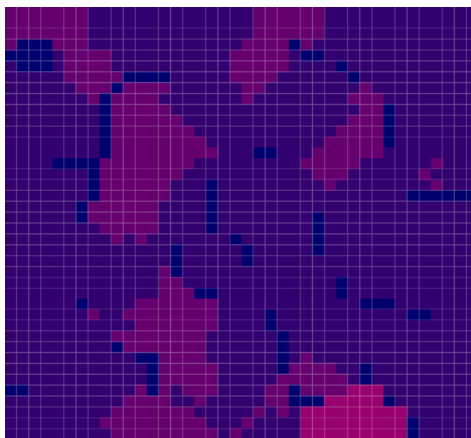


Rysunek 4.21: Krok 6

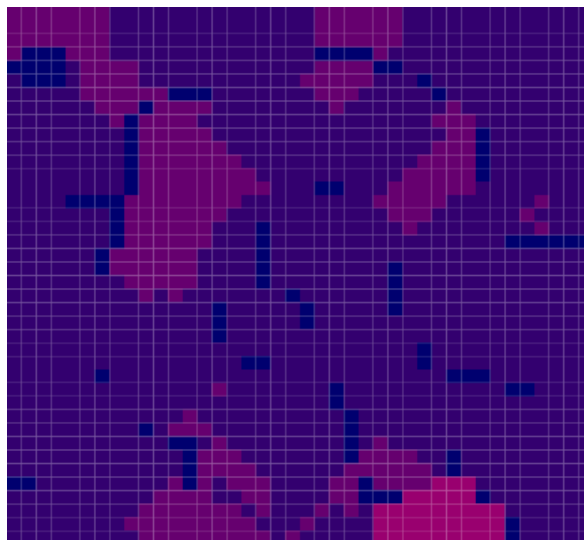
W kolejnych krokach znikać będą kolejne strategie o k wyższym niż 3:



Rysunek 4.22: Krok 8



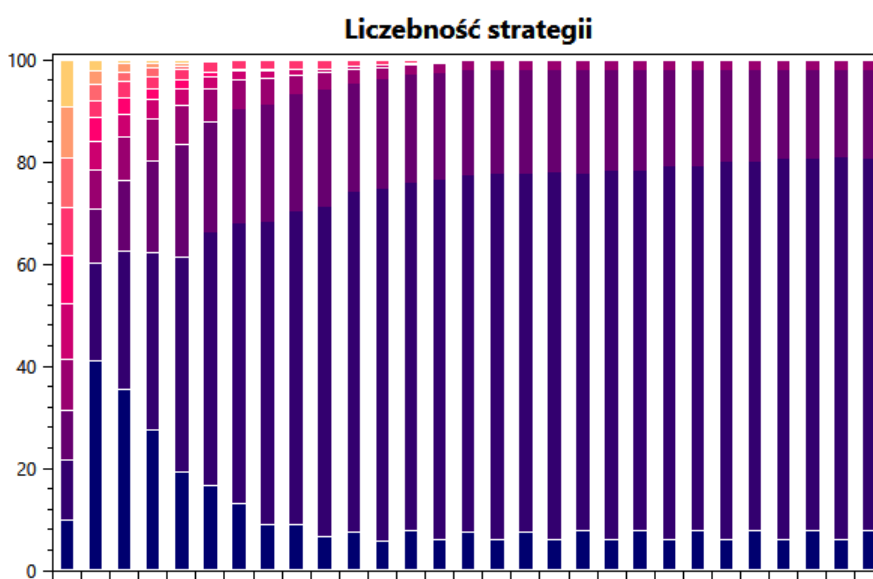
Rysunek 4.23: Krok 15



Rysunek 4.24: Krok 27 - Ostatni

Mimo tego, że strategie pokojowe utrzymywały się dłużej, niż w przypadku jednorodnej macierzy wypłat, ponownie jesteśmy w stanie zaobserwować dominację strategii, które mają k niskie acz różne od 0. Ciekawym faktem jest również to, że po pozostaniu ostatnich 4 strategii, automat przechodzi w oscylacje. Obliczenie wprowadziło wystarczający szum, by zaniknęła widoczna struktura układu macierzy.

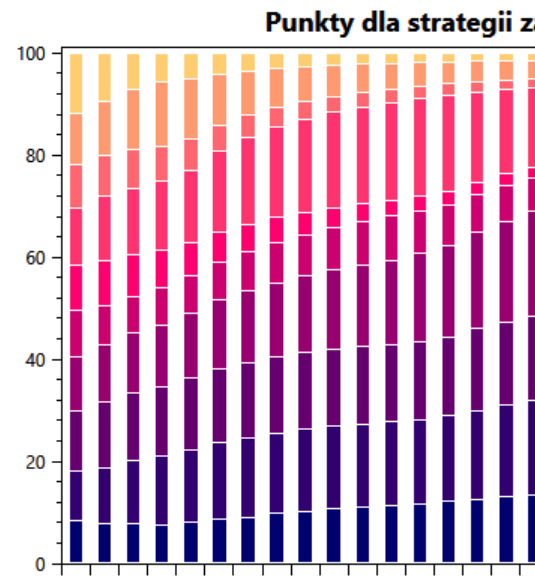
Poniżej przedstawiono procentowy stosunek liczby komórek o danej strategii do liczby wszystkich komórek w kolejnych iteracjach:



Rysunek 4.25

Na następującym wykresie przedstawiono procentowy udział sum punktów danej strategii

w ogólnych punktach zdobytych przez wszystkie strategie. Poniżej przedstawiono procen-



towy udział poszczególnych strategii w kolejnych iteracjach:

Na wykresach idealnie widać rosnącą dominację strategii, w szczególności tych o niskim k - liczebność strategii o $k = 1$ znacząco przewyższa pozostałe strategie. Zsumowane średnie wartości punktów zdobytych przez tę strategię zachowują stały trend wzrostowy.

Rysunek 4.26

Rozdział 5

Przestrzenny Dylemat Więźnia o Uogólnionych Sąsiedztwach

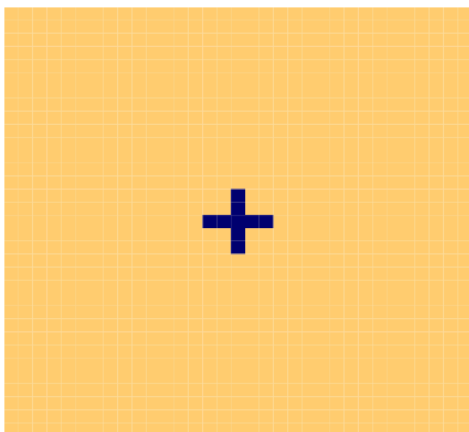
Oryginalne eksperymenty [?, ?] zostały rozszerzone również o uogólnione sąsiedztwa, a także dodatkowo powtórzone zostały eksperymenty J. Wanga [?] dotyczące rozszerzonych sąsiedztw Moore'a.

5.1 Eksperyment Nowaka i Maya

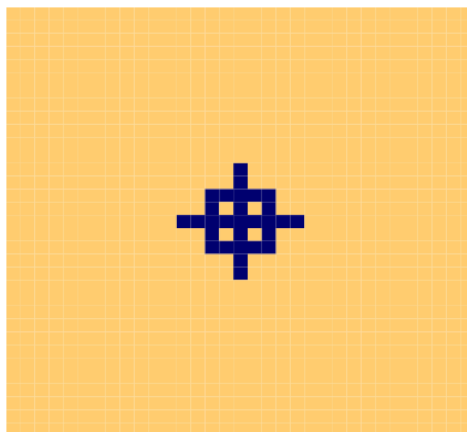
Dla przypomnienia poniżej znajduje się uogólniona macierz wypłat oryginalnego eksperymentu:

		Gracz A	
		Zdrada	Kooperacja
Gracz B	Zdrada	1 1	b 0
	Kooperacja	0 b	0 0

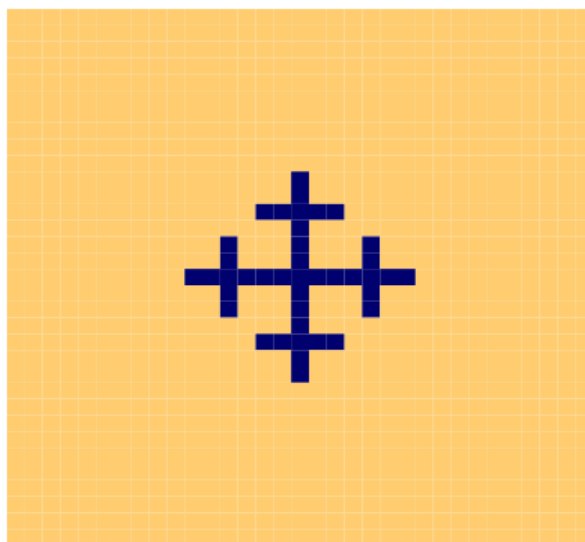
Eksperyment powieliliśmy dla sąsiedztwa von Neumanna o rozmiarze 2 i 3 (dla parametru $b = 1.4$). W obydwu wypadkach struktura rozrasta się szybciej, zgodnie z powiększonym sąsiedztwem:



Rysunek 5.1: Krok 1 - $d = 2$

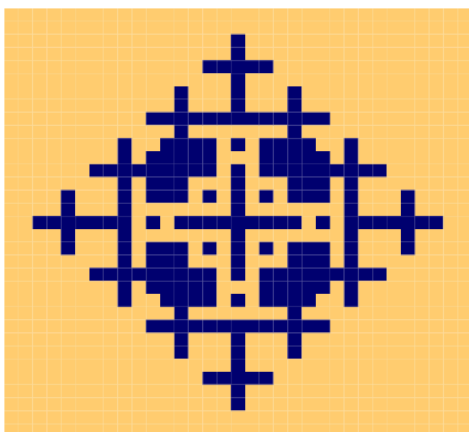


Rysunek 5.2: Krok 2 - $d = 2$

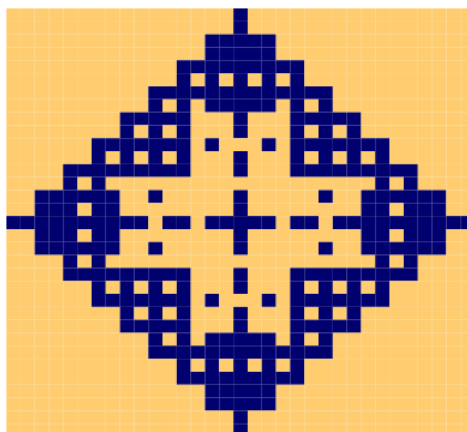


Rysunek 5.3: Krok 3 - $d = 2$

Szybsze rozrastanie się struktur powoduje również szybsze osiągnięcie granic siatki:

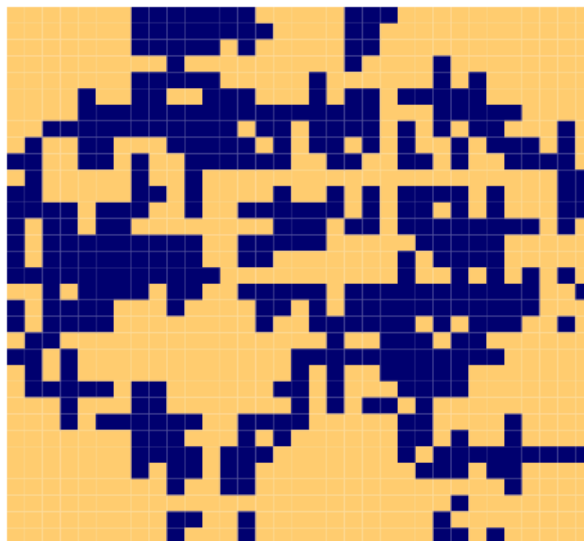


Rysunek 5.4: Krok 7 - $d = 2$



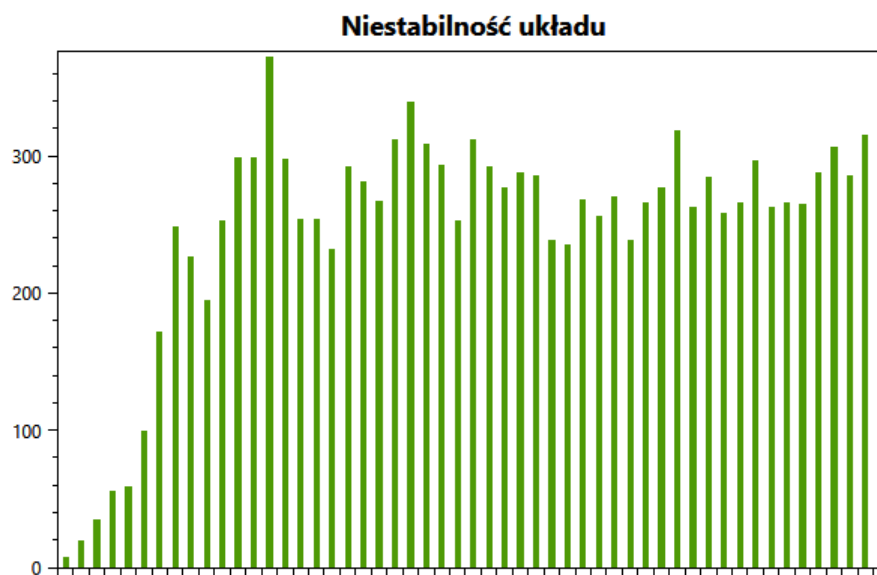
Rysunek 5.5: Krok 8 - $d = 2$

Powoduje to, że układ w krótkim czasie destabilizuje się:



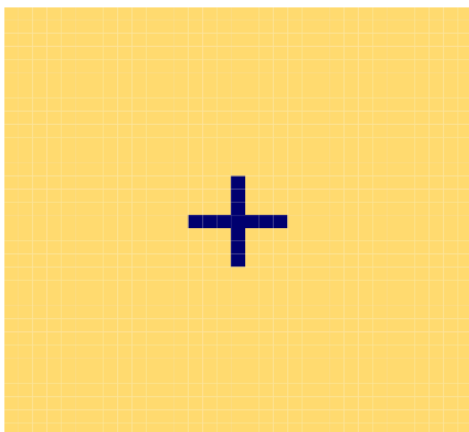
Rysunek 5.6: Krok 43 - $d = 2$

Brak możliwości obliczeniowych nie pozwolił na odkrycie jak długo zajmie ustabilizowanie układu, jednakże dla obliczonych iteracji wykres niestabilności układu (obrazujący ile komórek zmieniło strategię w danej iteracji) sugeruje długi, chaotyczny przebieg obliczeń. Zamieszczono go poniżej.

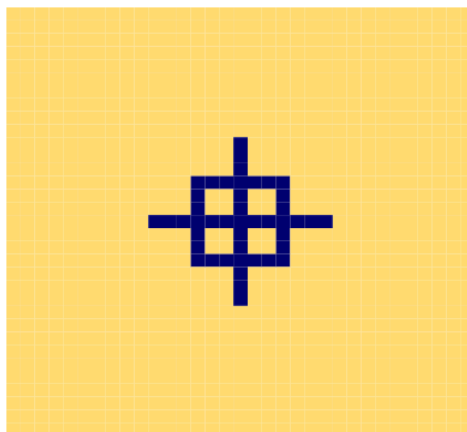


Rysunek 5.7

Dla układu o rozmiarze sąsiedztwa 3 wspomniane wcześniej efekty zachodzą jeszcze szybciej - co wynika z szybszego rozrastania się układu.

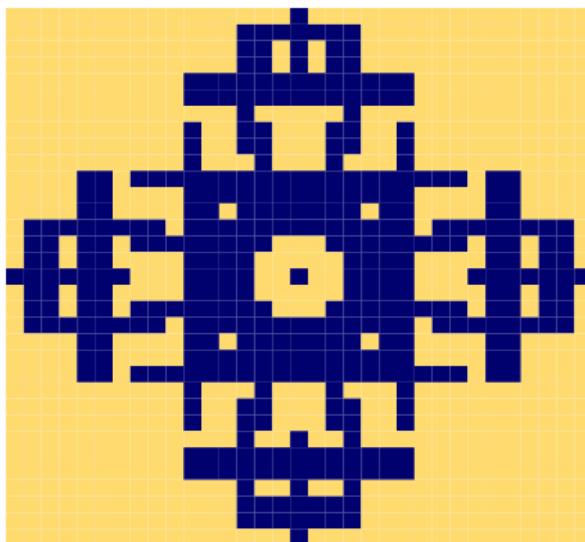


Rysunek 5.8: Krok 1 - $d = 3$



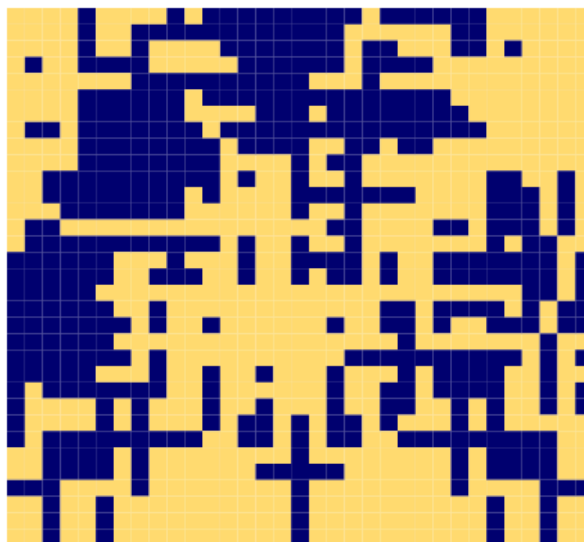
Rysunek 5.9: Krok 2 - $d = 3$

Układ osiąga granice siatki już w kroku 6:



Rysunek 5.10: Krok 2 - $d = 3$

Destabilizacja zaczyna być szczególnie widoczna w kroku 24:

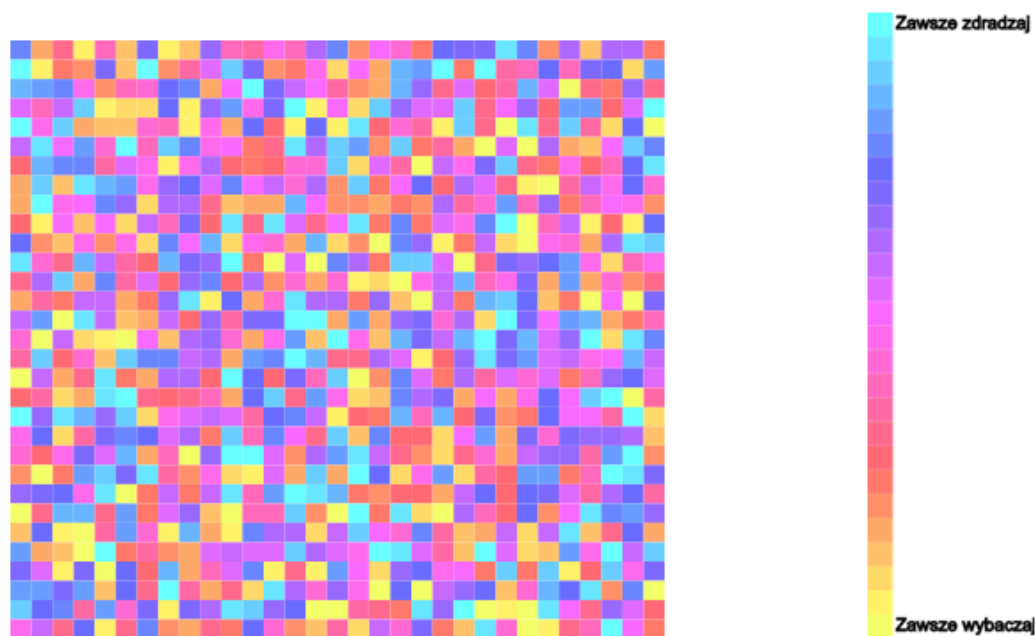


Rysunek 5.11: Krok 24 - $d = 3$

W tym przypadku również nie udało się osiągnąć stabilizacji z powodu zbyt długich obliczeń.

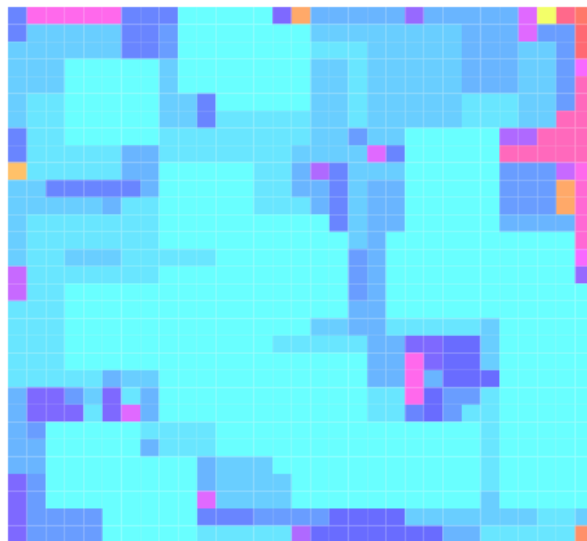
5.2 Eksperyment Ishidy i Moriego

Eksperyment 3.2. ?? opisujący klasteryzację strategii, został rozszerzony o dwa sąsiedztwa - sąsiedztwo Moore'a o rozmiarze 2 i sąsiedztwo Moore'a o rozmiarze 3. Wygenerowany został układ początkowy dla pierwszego sąsiedztwa. Poniżej znajduje się graficzna reprezentacja wygenerowanego układu początkowego, kolory odpowiadają konkretnym strategiom.



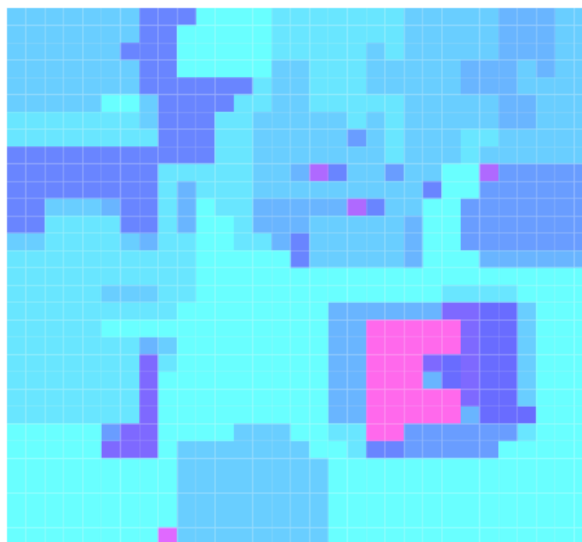
Rysunek 5.12: Układ początkowy + legenda

W tym eksperymencie również zaobserwowane wcześniej zjawiska będą zachodzić dużo szybciej z powodu większych sąsiedztw.

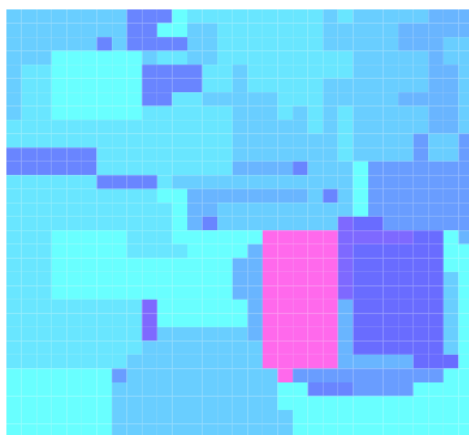
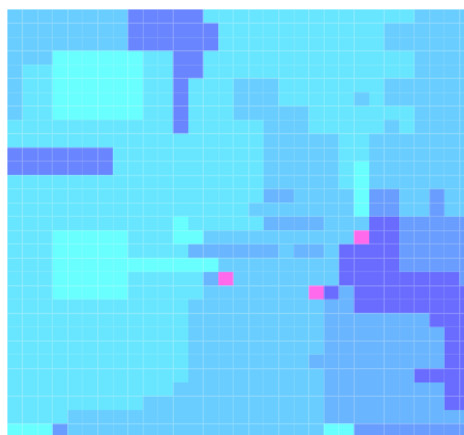


Rysunek 5.13: Krok 1

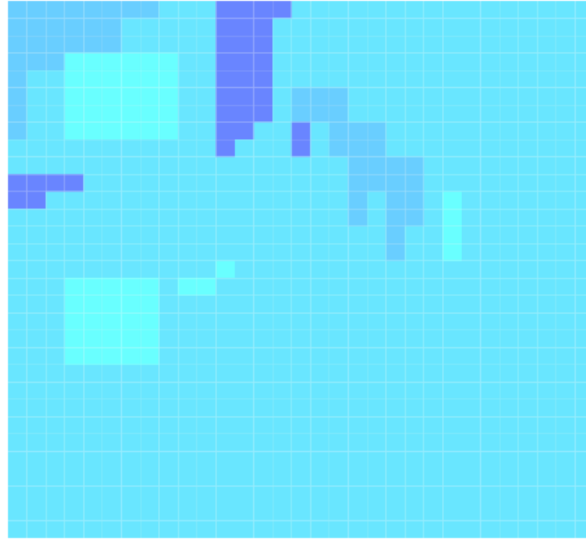
W kroku pierwszym działania automatu większość układu przyjmuje strategię $k=0$. Nie-wielka część posiada strategię $k=1$ i $k=2$. Pozostałe strategię mają znacząco mniejszą licznosc. Jest to ten sam efekt ekspansji strategii agresywnych, który można zauważyć w oryginalnym eksperymencie, przemnożony przez powiększone sąsiedztwo.

*Rysunek 5.14: Krok 2*

Tak jak poprzednio strategie o wysokich k zanikają podczas gdy strategie bardziej agresywne prosperują. Dominacja strategii $k=0$ zaczyna być zmniejszana przez strategię $k=1$.

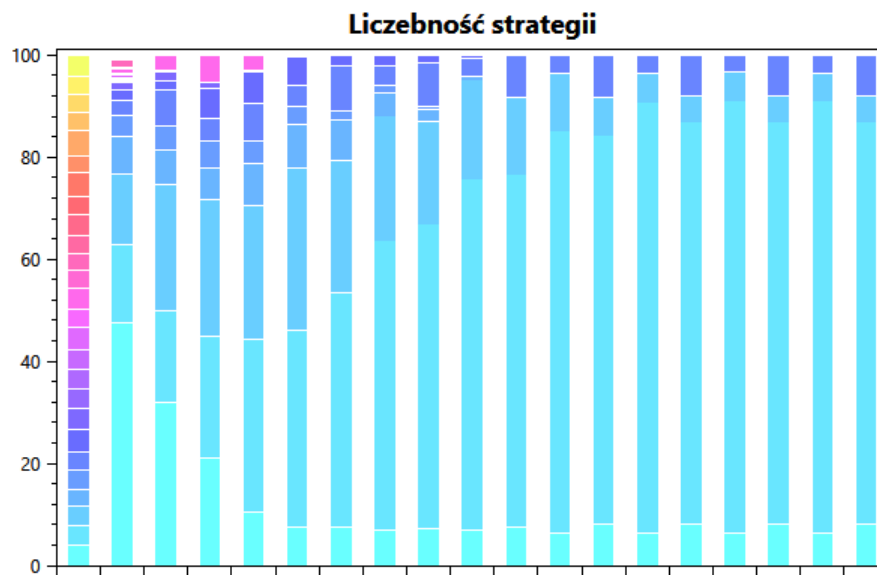
*Rysunek 5.15: Krok 3**Rysunek 5.16: Krok 5*

Strategie pokojowe w praktyce całkowicie zaniknęły, wszystkie pozostałe strategie mają $k < 5$. Stopniowo strategie zanikają, aż do prawie pełnej dominacji strategii $k=1$:



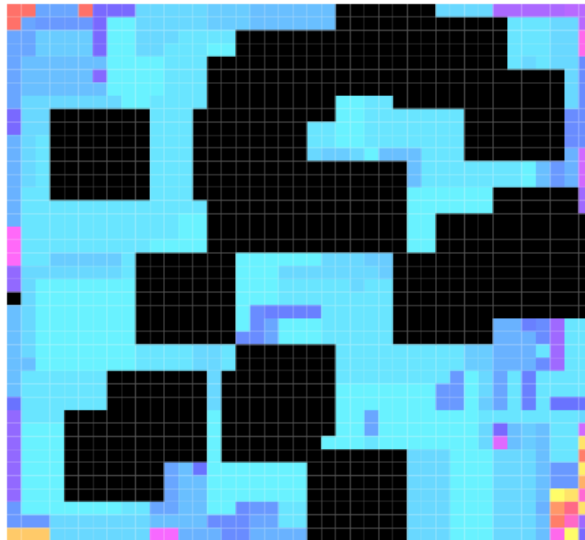
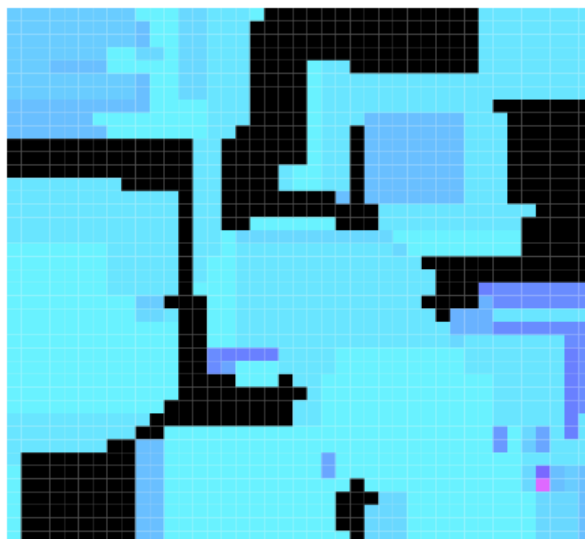
Rysunek 5.17: Krok finałowy

Na poniższym wykresie zobaczymy liczebność strategii różnych typów jako stosunek do ogólnej liczby komórek.

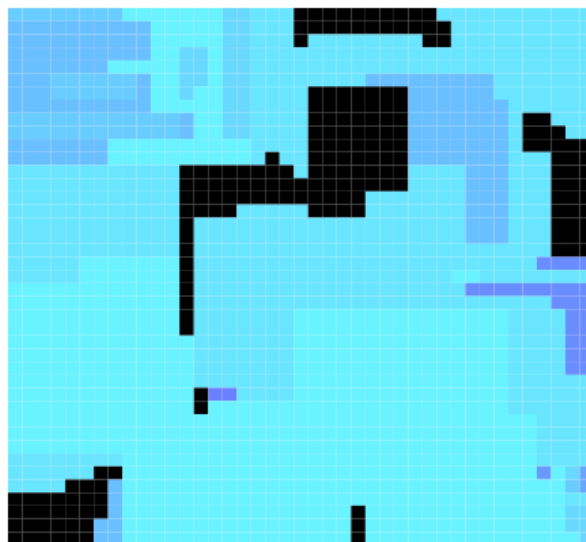


Rysunek 5.18

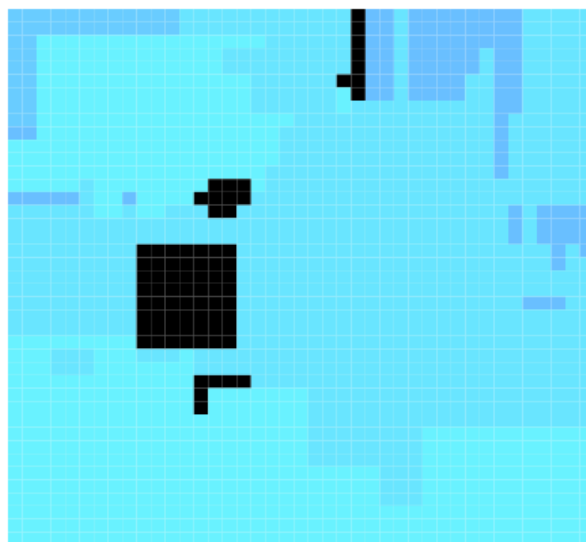
Wykres liczebności pokazuje zarówno początkową drastyczną dominację strategii "zawsze zdradza" jak i późniejsze wybicie się strategii "zdradza gdy 1 sąsiad zdradza". Mimo rozszerzenie sąsiedztwa i pojawienia się znaczącej liczby nowych strategii nadal utrzymuje się trend zanikania tych o wysokim k . Dla sąsiedztwa Moore o rozmiarze 3 wygenerowany został następujący układ początkowy. Dla ustalenia uwagi strategia „zawsze zdradza” została zaznaczona na czarno.

*Rysunek 5.19: Krok 1**Rysunek 5.20: Krok 2*

W kroku 1 widać znaczącą dominację strategii "zawsze zdradzaj", jednakże już w kroku 2 strategia $k=1$ zaczyna dominować.

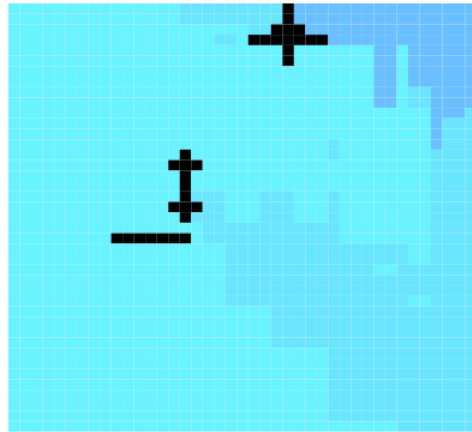


Rysunek 5.21: Krok 3

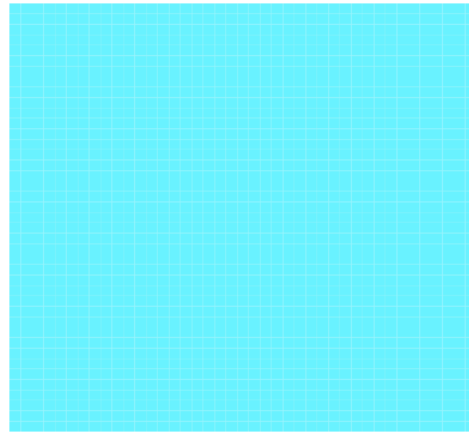


Rysunek 5.22: Krok 6

W kolejnych krokach strategia $k=0$ zmniejsza swoją liczebność. Ciekawym jest utworzenie się nowej struktury "zawsze zdradzaj" w kroku 6, która nie istniała we wcześniejszych krokach. Struktura ta odpowiada kształtem sąsiedztwu Moore'a o rozmiarze 3.



Rysunek 5.23: Krok 12



Rysunek 5.24: Krok finalowy

W dalszym ciągu obliczeń automatu znacząca zmniejsza się ilość strategii innych niż $k=1$, doprowadzając do sytuacji gdy ta strategia jest jedyną na końcu obliczeń.

5.3 Eksperyment Wanga

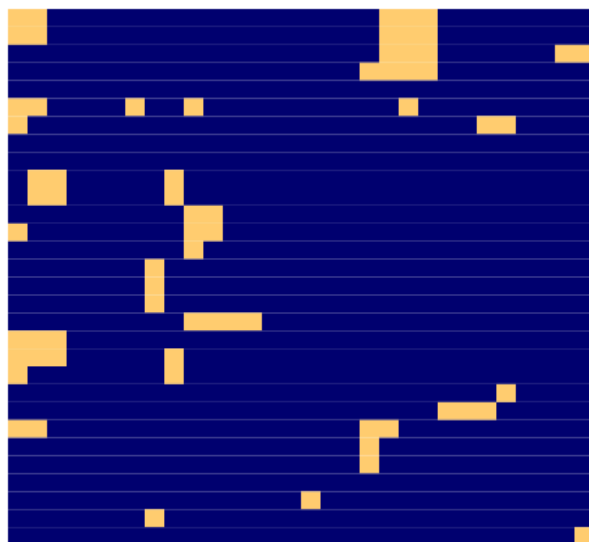
[?] Eksperyment J. Wanga polegał na zbadaniu jaki wpływ na obliczenia przestrzennego dyalematu więźnia mają rozszerzające się sąsiedztwa. Wnioskiem z tego eksperymentu było, że im większe sąsiedztwo tym większa szansa na klasteryzacja się tych samych strategii. Efekt ten miał być proporcjonalny do prawdopodobieństwa wyboru najlepszego sąsiada podczas aktualizacji strategii. W tej pracy rozważymy szczególny przypadek w którym to prawdopodobieństwo zbiega do 1.

		Gracz A	
		Zdrada	Kooperacja
Gracz B	Zdrada	1 1	1.5 0
	Kooperacja	0 1.5	0 0

W celu powtórzenia eksperymentu wygenerowaliśmy układ o losowym rozłożeniu strategii zawsze zdradzaj i zawsze wybacza reprezentowanych odpowiednio kolorem granatowym i żółtym.

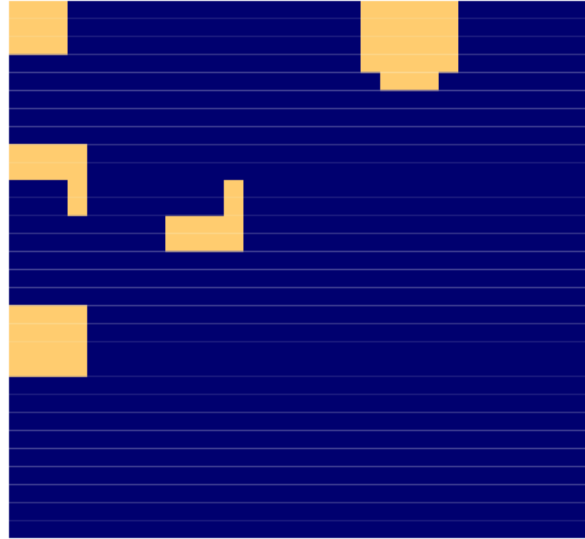


Rysunek 5.25: Układ początkowy



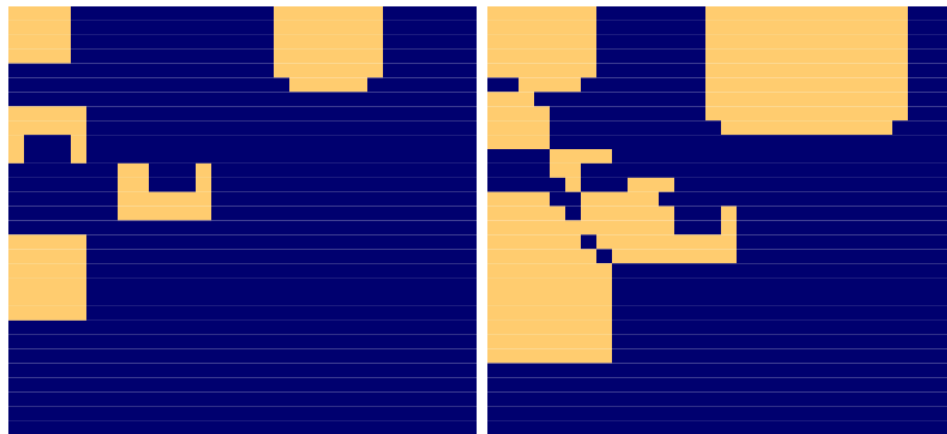
Rysunek 5.26: Krok 1

W kroku 1 widać znany z eksperymentów Ishidy i Moriego efekt początkowej dominacji strategii agresywnych. Z braku występowania strategii $k=1$ i $k=2$ istnieje niezerowe prawdopodobieństwo przetrwania strategii pokojowej.



Rysunek 5.27: Krok 2

W kolejnym kroku powstały przestrzenne struktury - strategie zaczęły klastrować się. Strategie pokojowe mogą dzięki temu zyskiwać przewagę nad strategiami agresywnymi - strategia "zawsze zdradzaj" otrzymuje punkty za każdą strategię wybaczącą w swoim sąsiedztwie ale nie za inne $k=0$. Strategia "zawsze wybacza" zaś przeciwnie. W wypadku powstania prostokątnej struktury w przestrzeni strategie zdradzające mają dostęp do 3 "żywicieli" podczas gdy strategie wybaczące mają do 5 wspierających je komórek.

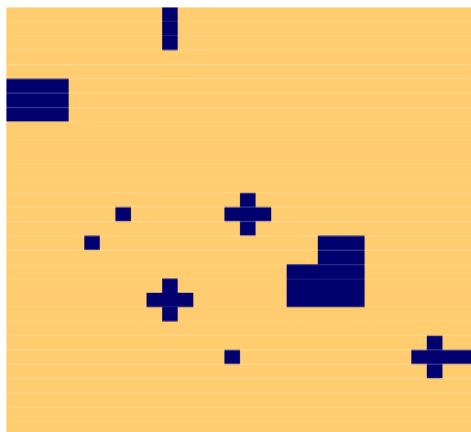


Rysunek 5.28: Krok 3

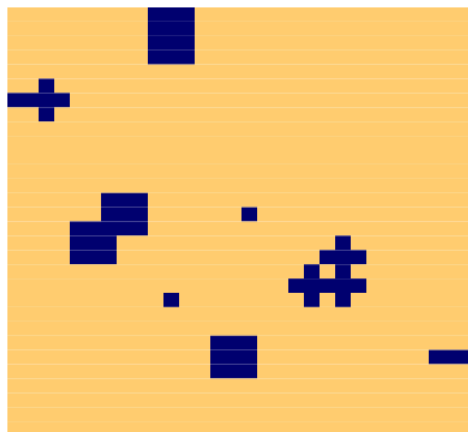


Rysunek 5.29: Krok 6

Zgodnie z wcześniejszą obserwacją, klastry strategii pokojowych rozszerzają się, kosztem strategii agresywnej. W tym wypadku zajmą one prawie całą siatkę:



Rysunek 5.30: Krok 95



Rysunek 5.31: Krok 96

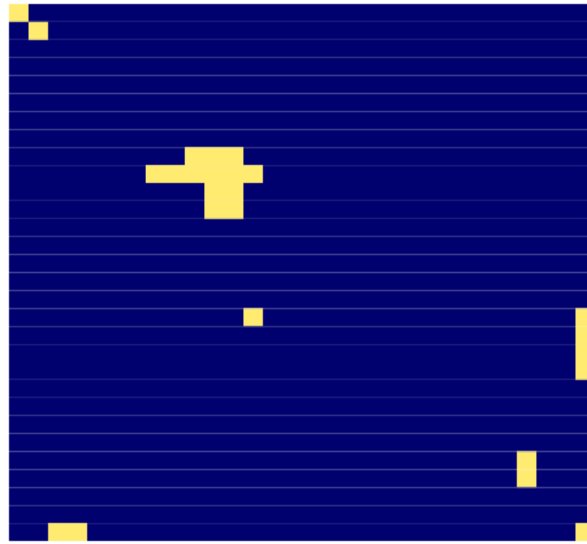


Rysunek 5.32: Krok 97 - finałowy

Powodem dlaczego struktury w przestrzeni strategii zdradzających mogą istnieć, jest odwrotna sytuacja do poprzednio opisanej - strategie zdradzające mają teraz przewagę sąsiadów, którzy są ich "żywicielami". Powoduje to uzyskanie chwilowej przewagi przez agresorów, która przy zwiększeniu rozmiaru obiektu w przestrzeni zanika. Powoduje to oscylacje między kilkoma kształtami, co widać w krokach 95, 96 i 97.

Ten sam układ dla sąsiedztwa Moore'a o rozmiarze 2 i 3 działa zupełnie inaczej.

Dla sąsiedztwa o rozmiarze 2 w pierwszym kroku uzyskujemy układ:



Rysunek 5.33: Krok 1

Liczność strategii pokojowych jest niższa, co powoduje, że nie są one w stanie osiągnąć masy krytycznej wystarczającej do sklastrowania się. W następnym kroku układ jest całkowicie zajęty przez strategię agresywną. Dla sąsiedztwa Moore'a o rozmiarze 3 nie zachodzi nawet przejściowy krok w którym pozostają przy życiu strategie pokojowe.

Obserwacje dokonane na podstawie przeprowadzonych przez nas eksperymentów zgodne są z wnioskami eksperymentu Wanga - powiększenie sąsiedztwa zwiększa efekt klastrowania się strategii, co wpływa na początkową dominację strategii agresywnych - ich początkowe klastrowanie się powoduje, że strategiom pokojowym brak wystarczająco dużych struktur by przetrwać.

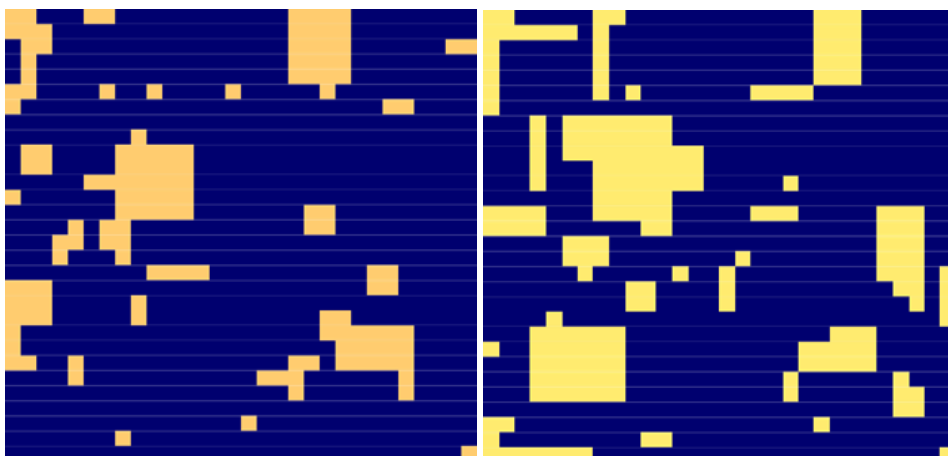
Dla macierzy

		Gracz A	
		Zdrada	Kooperacja
Gracz B	Zdrada	1 1	1.01 0
	Kooperacja	0 1.01	0 0

Strategie wybaczące muszą mieć tylko jednego więcej sąsiada kooperującego niż strategie zdradzające by nad nimi dominować. W takiej sytuacji widzimy większe klastrowanie się strategii pokojowych:

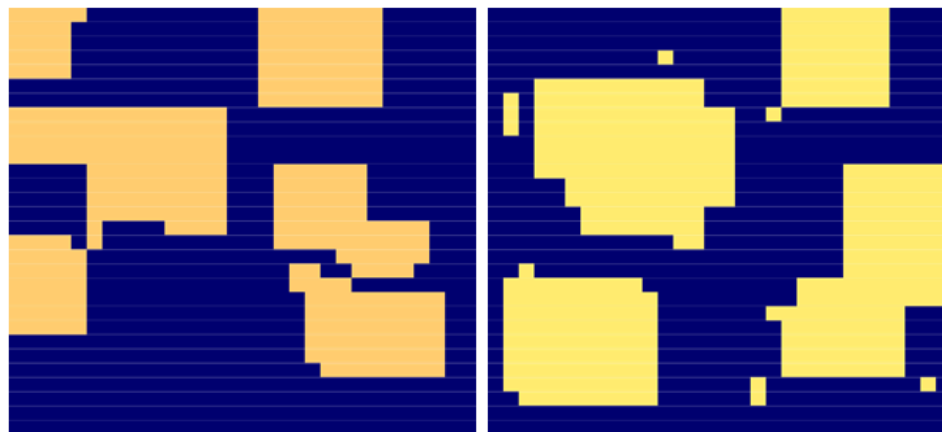


Rysunek 5.34: Układ początkowy



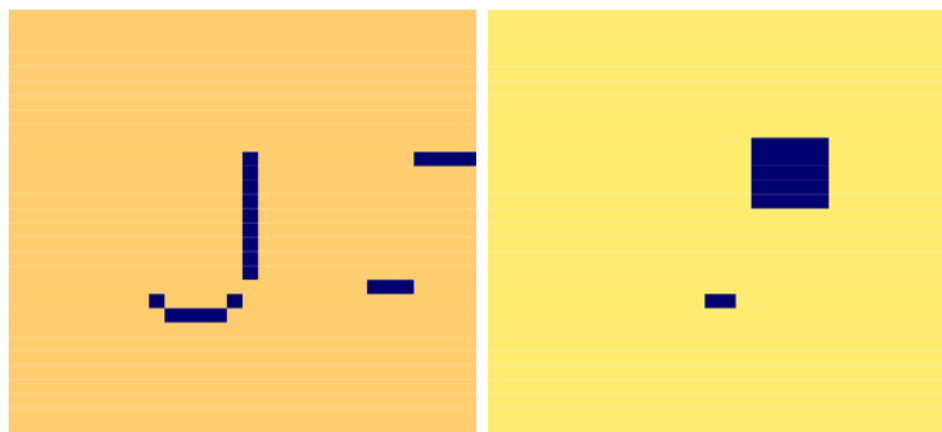
Rysunek 5.35: Krok 1 - Moore o wielkości 1 Rysunek 5.36: Krok 1 - Moore o wielkości 2

Jak widać struktury strategii pokojowej są większe w przypadku sąsiedztwa o większym rozmiarze.



Rysunek 5.37: Krok 3 - Moore o wielkości 1 Rysunek 5.38: Krok 2 - Moore o wielkości 2

W tym przypadku struktury są podobnego rozmiaru, jednakże sąsiedztwo większe osiąga je krok wcześniej.



Rysunek 5.39: Krok 12 - Moore o wielkości 1 Rysunek 5.40: Krok 7 - Moore o wielkości 2

Układ o większym sąsiedztwie znacząco szybciej osiągnął stan stabilny - w kroku 7 w przeciwieństwie do kroku 12 w sąsiedztwie mniejszym. Efekt zwiększonego klastrowania widoczny jest również w zwiększonej strukturze strategii agresywnych.

Rozdział 6

Wnioski

!!!!!!!!!!!!!!

Bibliografia

- [1] Martin A. Nowak, Robert M. May *Evolutionary games and spatial chaos*, Nature, 1992, 359.6398: 826-829.
- [2] Yoshiteru Ishida, Toshikatsu Mori *Spatial strategies in a generalized spatial prisoner's dilemma*, Artificial life and robotics, 2005, 9.3: 139-143.
- [3] Juan Wang, et al. *Spatial prisoner's dilemma games with increasing size of the interaction neighborhood on regular lattices.*, Chinese Science Bulletin, 2012, 57.7: 724-728.
- [4] Phillip D. Straffin, *Teoria Gier*, 83-88495-49-6, Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, Warszawa 2001.

Warszawa, dnia

Oświadczenie

Oświadczamy, że pracę magisterską pod tytułem: „Symulacje Przestrzennego Dylematu Więźnia”, której promotorem jest dr inż. Agnieszka Jastrzębska, wykonaliśmy samodzielnie, co poświadczamy własnoręcznymi podpisami.

.....