1. 카메라가 점 $A=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(1,1,1)^T$에 놓여있고, 평면 $x-2y+3z+4=0$ 이 장애물이라 할 때, 다음에 답하시오.

(a) 장애물의 법선벡터 $(1,-2,3)^T$은 카메라가 위치한 (찍힐 수 있는) 영역의 방향인가, 반대 (장애물로 가려진) 영역의 방향인가?

장애물의 법선벡터와 A를 내적하면

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=1-2+3=2>0$

$\therefore \theta$가 예각이므로 카메라에 위치한 방향임

(b) 점 $B=(3,2,-1)^T$, $C=(-2,1,-2)^T$가 각각 카메라가 위치한 (찍힐 수 있는) 영역에 있는지 여부를 답하시오.

$A\cdot B=3+2-1=4>0$ $\therefore \theta$가 예각이므로 카메라가 위치한 영역

$A\cdot C=-2+1-2=-3<0$ $\therefore \theta$가 둔각이므로 카메라 반대 영역

(c) 임의의 점 $X=(x,y,z)^T$가 카메라가 위치한 영역에 있기 위한 부등식을 구하시오.

θ가 예각이어야 하므로 $A\cdot X=x+y+z>0$ 이어야 한다.

2. $u=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$일 때, $w=\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$를 u와 v의 일차결합(Linear Combination)으로 쓰시오.

(즉 $w=au+bv$를 만족하는 상수 a, b를 찾아야함)

$au+bv=w$

$\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$

$\begin{cases}2a+b=-7\\a+3b=4\end{cases}$

$2a+b=-7$

$-\ \ 2a+6b=8$

$-5b=-15$

$b=3,\ a=-5$

3. 두 3x3 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}=(1,2,3;2,3,4;3,4,5)$와 $B=(1,-1,1;-1,1,1;1,1,-1)$에 대하여 다음에 답하시오.

(a) 행렬곱 AB를 row-picture로 계산해 보시오. (즉, $A=(r_1;r_2;r_3)$ (r_1, r_2, r_3는 각각 1x3행렬(행벡터)라 하면 $AB=(r_1B;r_2B;r_3B)$이고, 각 r_iB는 B의 세 행들로부터 계산될 수 있다.)

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1B\\r_2B\\r_3B\end{pmatrix}$$

$$r_1B=(2\ 4\ 0)$$
$$r_2B=(3\ 5\ 1) \qquad \therefore AB=\begin{pmatrix}2&4&0\\3&5&1\\4&6&2\end{pmatrix}$$
$$r_3B=(4\ 6\ 2)$$

(b) 행렬곱 AB를 column-picture로 계산해 보시오. (즉, $B=(c_1, c_2, c_3)$ (c_1, c_2, c_3는 각각 3x1 행렬(열벡터)라 하면 $AB=(Ac_1, Ac_2, Ac_3)$이고, 각 Ac_i는 A의 세 열들로부터 계산될 수 있다.)

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}=(Ac_1\ Ac_2\ Ac_3)$$

$$Ac_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \quad Ac_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \quad Ac_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\therefore AB=\begin{pmatrix}2&4&0\\3&5&1\\4&6&2\end{pmatrix}$$

4.

일차연립방정식 $\begin{pmatrix} x+3y+5z=4 \\ x+2y-3z=5 \\ 2x+5y+2z=8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1, & 3, & 5 \\ 1, & 2, & -3 \\ 2, & 5, & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX=B$

(여기서 $A=(1,3,5;1,2,-3;2,5,2)=(r_1;r_2;r_3)=(c_1,c_2,c_3)$, $B=(4,5,8)^T$ 이다.)

는 이 식을 만족하는 해 $X=(x,y,z)^T$ 가 존재하지 않음을 row-picture와 column-picture로 각각 논증하시오.

[row-picture]

(a) 행렬 A의 행벡터 r_1, r_2, r_3는 서로 평행하거나 일치하지 않지만, 이들의 특정한 일차결합 $r_1+r_2-r_3$ 은 영벡터가 된다. 이로부터 $CA=(0,0,0)$인 행벡터 C를 구하시오.

$C=(i\ j\ k)$라 하면 $CA=(i\ j\ k)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (0\ 0\ 0)$

$i+j+2k=0,\ 3i+2j+5k=0,\ 5i-3j+2k=0.$

$\therefore i=1,\ j=1,\ k=-1.\quad \therefore C=(1,1,-1)$

(b) (a)를 이용하여 행렬방정식 $AX=B$를 만족하는 해 $X=(x,y,z)^T$ 가 존재할 수 없음을 논하시오.

$CAX=(0\ 0\ 0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$

$CB=(1\ 1\ -1)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}=4+5-8=1$

] 같지 않음.

∴ 해가 존재하지 않는다.

[column-picture]

양변에 $C=(1,1,-1)$을 곱하면

(c) (a)에서 구한 행벡터 C는 행렬 A의 열벡터 c_1, c_2, c_3 모두에 수직이다. 따라서 행렬 A의 열벡터 c_1, c_2, c_3는 평면 ____________________에 놓여있다. 하지만 벡터 B는 이 평면에 놓여 있지 않음을 확인하시오.

행렬 A의 열벡터 c_1, c_2, c_3는 평면 $x+y-z=0$에 놓여있다.

벡터 $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$인데 $x+y-z$에 대입하면 $4+5-8=1$ 이다

∴ 벡터 B는 $x+y-z=0$ 위에 있지 않다

(d) (c) 및 '$AX=xc_1+yc_2+zc_3$는 열벡터 c_1, c_2, c_3의 일차결합임'을 이용하여, 행렬방정식 $AX=B$를 만족하는 해 $X=(x,y,z)^T$ 가 존재할 수 없음을 논하시오.

열벡터 c_1, c_2, c_3가 한 평면 위에 있는데,

벡터 B는 그 평면 위에 있지 않으므로 $AX=B$를 만족하는 해 $X=(x,y,z)^T$는 존재할 수 없다.