1. $M_{m\times n}$은 mXn행렬 집합으로서 행렬합과 상수곱이 정의된 벡터공간(강의자료 p4-16), $P_2=\{a+bx+cx^2 : a,b,c\in\mathbb{R}\}$는 미지수 x에 대한 이차 이하의 다항식 집합으로서 다항식 합과 상수곱이 정의된 벡터공간이다. 다음 질문에 답하시오.

(a) $\underbrace{\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=0\}}_{=S}$는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간인가?

$= \{(0,0,0)\}$ $\quad \therefore \{(0,0,0)\} \subset (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$?

$(0,0,0)+(0,0,0)=(0,0,0)\in S$, $\alpha\cdot(0,0,0)=(0,0,0)\in S$

항등원 $=(0,0,0)\in S$ $\quad\therefore$ 부분공간 o

(b) $\underbrace{\{(x,y,z) : y\geq x\}}_{=S}$는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간인가?

$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\in S$, $\alpha(x,y,z)\notin S$ (α가 음수일 때)

항등원 $(0,0,0)\in S$ $\quad\therefore$ 부분공간 X

(c) $\underbrace{\{A\in M_{2\times 2} : A^T=-A\}}_{=S}$는 $M_{2\times 2}$의 부분공간인가?

$A=\left\{\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}\right\}$ $\quad \begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & b'\\ -b' & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & b+b'\\ -b-b' & 0\end{pmatrix}\in S$, $\alpha\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}\in S$

항등원 $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in S$ $\quad\therefore$ 부분공간 o

(d) $\underbrace{\{a+bx : a,b\in\mathbb{R}\}}_{=S}$는 P_2의 부분공간인가? $\quad$ * P_2 = x에 대한 2차 이하의 모든 다항식 집합

$P_2=\{(a+bx+cx^2)\}$. $(a+bx+cx^2)+(a'+b'x+c'x^2)=(a+a')+(b+b')x+(c+c')x^2 \in S$

$\alpha\cdot(a+bx+cx^2)=\alpha a+\alpha bx+\alpha cx^2\in S$, 항등원은 $0\in S$ $\quad\therefore$ 부분공간 o

* $\{1+bx\}$는 부분공간 X

2. Column Space에 대한 다음 질문들에 답하시오.

(a) $A_1=(1,4;2,9;-1,-4)$ 일 때, 벡터 $b=(b_1,b_2,b_3)^T$ 가 $\mathbb{C}(A_1)$에 들어갈 조건?

$\mathbb{C}(A_1)=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\9\\-4\end{pmatrix}\right\}\subset R^3$ 조건: $b_1=-b_3$

(b) $A_2=(1,1,1;0,0,1;0,0,1)$ 일 때, 벡터 $b=(b_1,b_2,b_3)^T$ 가 $\mathbb{C}(A_2)$에 들어갈 조건?

$\mathbb{C}(A_2)=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ 조건: $b_2=b_3$

(c) $A_3=(1,1,1;0,1,1;0,0,0)$ 일 때, 벡터 $b=(b_1,b_2,b_3)^T$ 가 $\mathbb{C}(A_3)$에 들어갈 조건?

$\mathbb{C}(A_3)=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ 조건: $b_3=0$

3. 다음 행렬 A에 대하여 Null Space N(A)를 구하시오.

(a) A=(1, 2, 2, 1, 1; 2, 4, 6, 6, 4; 3, 6, 4, 1, 5)

$$\begin{pmatrix}1&2&2&1&1\\2&4&6&6&4\\3&6&4&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1&1\\0&0&2&4&2\\0&0&-2&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1&1\\0&0&2&4&2\\0&0&0&2&4\end{pmatrix}$$

pivot : x, z, s
free : y, t

x	y	z	s	t
-2	1	0	0	0
-5	0	3	-2	1

$\therefore N(A)=\left\{y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\0\\3\\-2\\1\end{pmatrix}\middle|\ s,t\in R\right\}$

(b) A=(1, 3, 3, 1, 1; 2, 6, 8, 6, 4; 3, 9, 7, -1, 5)

$$\begin{pmatrix}1&3&3&1&1\\2&6&8&6&4\\3&9&7&-1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&3&3&1&1\\0&0&2&4&2\\0&0&-2&-4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&3&1&1\\0&0&2&4&2\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}$$

pivot : x, z, t
free : y, s

x	y	z	s	t
-3	1	0	0	0
5	0	-2	1	0

$N(A)=\left\{y\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}5\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\middle|\ y,s\in R\right\}$

(c) A=(1, 4, 2; 2, 8, 5; -1, -4, -2)

$$\begin{pmatrix}1&4&2\\2&8&5\\-1&-4&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

pivot : x, z
free : y

x	y	z
-4	1	0

$\therefore N(A)=\left\{y\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}\middle|\ y\in R\right\}$

(d) A=(1, 4; 2, 9; -1, -4)

$$\begin{pmatrix}1&4\\2&9\\-1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

pivot : x, y
free : 없음

$\therefore N(A)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$