1. 대칭행렬(Symmetric Matrix; $B^T = B$), 반대칭행렬(Skew-Symmetric Matrix; $B^T = -B$)에 대해, 강의자료 p4-1의 성질 5와 6을 행렬 A를 이용해 확인해 보시오. 계산해보기!

(a) 임의의 mxn 행렬 A에 대하여 AA^T와 A^TA는 대칭행렬이 된다.

A=(1,2,3; 2,3,4)에 대하여

$AA^T=$ $A^TA=$

<증명>

$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$

⇒ transpose 해도 자기자신 ∴ 대칭행렬

(b) 임의의 nxn 행렬 A에 대하여 $A+A^T$ 는 대칭행렬, $A-A^T$는 반대칭행렬이 된다.

A=(1,2; 3,4)에 대하여

$A+A^T=$, $\frac{1}{2}(A+A^T)=$

$A-A^T=$, $\frac{1}{2}(A-A^T)=$

<참고>

$A+A^T = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$ ⇒ 대칭행렬 $\frac{1}{2}(A+A^T) = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix}$ ⇒ 대칭행렬

$A-A^T = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ b+c & 0 \end{pmatrix}$ ⇒ 반대칭행렬 $\frac{1}{2}(A-A^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & 0 \end{pmatrix}$ ⇒ 반대칭행렬

2. 다음은 $\mathbb{R}^3$의 부분공간들이다. Orthogonal인 쌍과 Orthogonal Complement인 쌍을 모두 구하시오.

(a) x축 (b) z축 (c) xy평면 (d) yz평면 (e) 원점

누구하고나 Orthogonal 함
(∵ 내적하면 무조건 0)

(a)의 Basis = $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$, (b)의 Basis = $\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, (c)의 Basis = $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$,

(d)의 Basis = $\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, (e)의 Basis = ϕ (없음)

dim(a) = 1, dim(b) = 1, dim(c) = 2, dim(d) = 2, dim(e) = 0

∴ (a)⊥(b), $\underbrace{(a)\perp(d)}_{\text{Orthogonal Complement}}$, (a)⊥(e), $\underbrace{(b)\perp(c)}_{\text{Orthogonal Complement}}$, (b)⊥(e), (c)⊥(e), (d)⊥(e)

Amxn에 대한

$\mathbb{R}^n \supset \boxed{N(A)} = \langle S_1 \cdots S_{n-r} \rangle$, $\dim(N(A)) = n-r$

$\mathbb{R}^n \supset \boxed{R(A)} = \langle R_1 \cdots R_r \rangle$, $\dim(R(A)) = r$

Orthogonal
(∵ N(A)의 어떤걸 곱해도 0 이므로 N(A) R(A) = 0)

⇒ $N(A) \perp R(A)$

$\dim(N(A)) + \dim(R(A)) = n$

∴ Orthogonal Complement

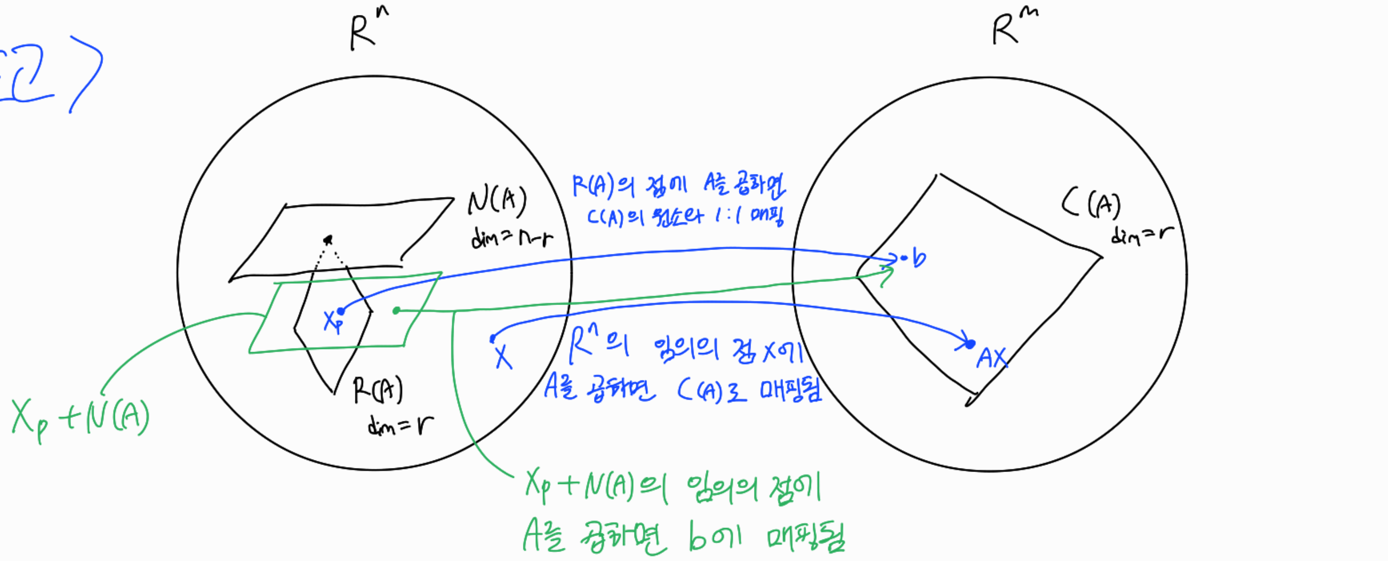
$N(A) = R(A)^\perp$

$R(A) = N(A)^\perp$

3. 임의의 mxn 행렬 A에 대해 함수 $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$를 $f_A(X) = AX$로 정의하면(강의자료p12) 함수 f_A에 의해 Row space $\mathbb{R}(A)$와 Column space $\mathbb{C}(A)$는 1-1 대응됨을 증명하시오.

즉, 임의의 두 X_n, $X_n' \in \mathbb{R}(A)$에 대하여 $f_A(X_n) = f_A(X_n')$이면 $X_n = X_n'$임을 보이시오

<참고>



풀이 : $X_n, X_n' \in R(A) \Rightarrow X_n - X_n' \in R(A)$

$f_A(X_n) = f_A(X_n') \Rightarrow AX_n = AX_n' \Rightarrow A(X_n - X_n') = 0 \Rightarrow X_n - X_n' = N(A)$

$\Rightarrow X_n - X_n' \in N(A)$ && $X_n - X_n' \in R(A)$

즉 $(X_n - X_n' \in N(A) \cap R(A))$ $\Rightarrow$ $N(A) \perp R(A)$ 이므로 ($\because$ 내적하면 0됨) 교집합에 해당하는건 $\{0\}$ 영벡터 $\Rightarrow$ $X_n - X_n'$가 영벡터라는건 $X_n = X_n'$ 이라는 것!

4. a1=(1;1;1), a2=(1;2;1), a3=(2;2;2), b=(1;2;2)일 때 다음에 답하시오.(10주차 강의자료 p4~5)

(a) a1이 생성하는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간에 대해, b의 projection $\hat{b}$를 구하시오.

$$\hat{b} = \hat{x}a_1 = \frac{a_1^T b}{a_1^T a_1} a_1 = \frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

(b) a1과 a2가 생성하는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간에 대해, b의 projection $\hat{b}$를 구하시오.

$$\hat{b} = A(A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-4\\-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

(c) 3x2행렬 B=(a1, a3)에 대해, 행렬 B^TB를 구하고 역행렬이 존재하는지 확인하시오.

$$B = \begin{pmatrix}1&2\\1&2\\1&2\end{pmatrix} \qquad B^TB = \begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\\1&2\end{pmatrix}$$

두 칼럼이 Independent 하지 않기 때문에 역행렬 존재 X
(rank(B)=1임)