A. 다음 언어들이 Context Free language가 아님을 증명하시오.

2.30(a) $\{0^n1^n0^n1^n \mid n \geq 0\}$

강의 참고

2.30(b) $\{0^n\#0^{2n}\#0^{3n} \mid n \geq 0\} = L$

pf) L이 CFL 가정, $p = P_L \geq 1$

$s = 0^p \# 0^{2p} \# 0^{3p} \in L$, $s = {}^\forall uvxyz$

① $uv^ixy^iz \in A$

② $|vy| > 0$

③ $|vxy| \leq P_A$

① v or $y \ni \#$: $\underbrace{uv^2xy^2z}_{\#\,3개}$ or $\underbrace{uv^0xy^0z}_{\#\,1개} \in L$

② $\underline{0}^p \# \underline{0}^{2p} \# \underline{0}^{3p}$

vxy가 여기 있는 경우, uv^ixy^iz 했을 때 0의 개수 비율 1:2:3을 유지 못함.

③ $\underbrace{0^p\#0}\!{}^{2p}\underbrace{\#0}\!{}^{3p}$

vxy가 여기 있는 경우 ($x \ni \#$) 에도 0 개수 비율 1:2:3을 유지 못함.
(소모된 덩어리는 pumping X)

2.30(c) $\{w\#t \mid w \text{ is a substring of } t, \text{ where } w, t \in \{a, b\}^*\} = L$

L: CFL 가정 $\Rightarrow p = P_L \geq 1$

$s = a^pb^p \# a^pb^p \in L$, $s = {}^\forall uvxyz$

① v or $y \ni \#$: $uv^0xy^0z \notin L$ (∵ # 없어짐)

② $uvx \in w$: $uv^2xy^2z \notin L$ (∵ # 앞부분 길이가 더 커짐)

③ $uvx \in t$: $uv^0xy^0z = a^pb^p\#w'$ with $|w'| < 2p$
so, w' cannot contain a^pb^p

④ $x \ni \#$
- $v \neq \varepsilon$: $uv^2xy^2z = a^pb^{p+k}\#a^{p+l}b^p$, $(k \geq 1) \notin L$
- $y \neq \varepsilon$: $uv^0xy^0z = a^pb^{p-k}\#a^{p-l}b^p$, $(l \geq 1) \notin L$

2.30(d) $\{t_1\sharp t_2\sharp\cdots\sharp t_k \mid \underbrace{k\geq 2}_{\hookrightarrow \#\text{최소 1개}},\text{ each } t_i\in\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*,\ t_i=t_j \text{ for some } i\neq j\} = L$

$s = a^p b^p \# a^p b^p = {}^\forall uvxyz$

① v or $y \ni \#$ 인 경우 $uv^2xy^2z \notin L$ ($\because \#$ 없어짐)

② $vxy \subset \#$ 앞부분인 경우
③ $vxy \subset \#$ 뒷부분인 경우
$\Big\}$ $uv^2xy^2z = w\#w',\ w\neq w' \notin L$

④ $x \ni \#$ 인 경우

$\begin{cases} v\neq\varepsilon : uv^2xy^2z = a^p b^{p+k}\#a^{p+l}b^p,\ (k\geq 1) \notin L \\ y\neq\varepsilon : uv^0xy^0z = a^p b^{p-k}\#a^{p-l}b^p,\ (l\geq 1) \notin L \end{cases}$

B. $L=\{w\in\{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}^* \mid n_\mathtt{a}(w)=n_\mathtt{b}(w)=n_\mathtt{c}(w)\}$ 이 Context Free language가 아님은 Lec7(p6)에서와 유사하게, 단어 $\mathtt{a}^p\mathtt{b}^p\mathtt{c}^p$를 이용해 펌핑정리로 증명할 수 있다. 또한 귀류법(Proof by Contradiction)으로도 증명 가능한데, Lec6 (p7)의 Theorem과 Lec7(p6)의 언어 B를 이용해 귀류법으로 증명해 보시오.

$s = a^p b^p c^p \in L \qquad s = {}^\forall uvxyz$

$vxy \in a^p$
$vxy \in b^p$
$vxy \in c^p$
$\Big\}$ pumping하면 개수 달라짐

$vxy \in a^p b^p$
$vxy \in b^p c^p$
$\Big)$ $uv^2xy^2z = w'$ $\begin{cases} \max(n_a(w'), n_b(w')) \neq n_c(w') \\ \max(n_b(w'), n_c(w')) \neq n_a(w') \end{cases}$

THM: CFL $\cap$ Reg $=$ CFL

$L \cap a^*b^*c^* = \{a^n b^n c^n\}$ 인데

$a^n b^n c^n$은 CFL이 아님. (강의자료 참고)

$\therefore L$도 CFL이 아님