A. $\Sigma = \{a, b, c\}$ 일 때, 다음 언어들을 생성하는 Context-free Grammar를 만드시오. 단, 2개
   이하의 variable만을 사용하시오.($|V| \leq 2$)

A.1 $\{a^i b^j \mid i > j \geq 0\}$ ∋ $a, a^2 b, \cdots$

- $A \to aAb \mid a$: 불가능 (∵ a 보다 b 가 1개만 차이남)

전부
동일

- $A \to aAb \mid aA \mid a$: 가능

- $A \to aAb \mid Aa \mid a$: b 가 중간에 낄 수 없음

- $\begin{cases} A \to aAB \mid a \\ B \to b \mid \varepsilon \end{cases}$ } 가능

- $\begin{cases} S \to aA \mid aS \\ A \to bA \mid \varepsilon \end{cases}$ } 불가능 (∵ b 의 개수를 컨트롤할 수 없음)

- $\begin{cases} S \to aR \\ R \to aR \mid aRb \mid \varepsilon \end{cases}$ } 가능

  ← 없으면 ε 이 될 수도 없기 때문이 꼭 있어야 함

A.2 $\{a^i b^j c^k \mid i = j + k, \ i, j, k \geq 0\}$]

- $\begin{cases} S \to aSc \mid R \\ R \to aRb \mid \varepsilon \end{cases}$

  $i = j + k + 1$ 이면 $i = j + k + 2$ 면

  cf $\begin{cases} S \to aSc \mid R \\ R \to aRb \mid a \end{cases}$ cf $\begin{cases} S \to aSc \mid R \\ R \to aRb \mid aa \end{cases}$

- $S \to aSc \mid aSb \mid \varepsilon$: 불가능 (∵ b 와 c 순서 배열 수 없음)

  └ $n_a(w) = n_b(w) + n_c(w)$ 를 만들어내는건 아님

  (∵ 이건 a, b, c 순서가 아예 (상관없음))

  → 이건 a 는 항상 앞에만 몰려있는거임

B. $\Sigma = \{0,1\}$ 일 때, 다음 언어들을 생성하는 **Context-free Grammar**를 만드시오. 단, **2개** 이하의 **variable**만을 사용하시오.($|V| \leq 2$)

2.4(e) $\{w : w = w^R, \text{ i.e., } w \text{ is a palindrome.}\}$

- $A \to 0A0 \mid 1A1 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$

  cf) 길이가 짝수여야 하면

  $A \to 0A0 \mid 1A1 \mid \varepsilon$

2.4(b) $\{w : w \text{ starts and ends with the same symbol.}\}$

- $A \to 0B0 \mid 1B1$
  $B \to 0B \mid 1B \mid \varepsilon$ 불가능 ($\because$ 길이 1 짜리 커버 못함)

- $A \to 0B0 \mid 1B1 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$
  $B \to 0B \mid 1B \mid \varepsilon$ 가능

- $A \to 0B0 \mid 1B1 \mid B$
  $B \to 0B \mid 1B \mid \varepsilon$ 불가능 ($\because$ $A \to B$ 하는 순간 시작과 끝이 같음을 보장 못함)

2.4(c) $\{w : \text{the length of } w \text{ is odd.}\}$

- $S \to 0S0 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1 \mid 1 \mid 0$ 가능

- $A \to 0B \mid 1B$
  $B \to 00B \mid 01B \mid 10B \mid 11B \mid \varepsilon$ 가능 ($\because$ 어떤 단어든 2개씩 자르면 00, 01, 10, 11 중 하나가 나옴)

  0 혹은 1이 맨 앞 와야 하면 홀수개 남음. 남은것 중

  cf 길이가 $2k+1$ 이면 $S \to SSS \mid 0 \mid 1$
  길이가 $3k+1$ 이면 $S \to SSSS \mid 0 \mid 1$
  길이가 $3k+2$ 이면 $S \to SSSS \mid 00 \mid 01 \mid 10 \mid 11$

  길이가 2의 배수개면
  $A \to 0B \mid 1B$ $A \to 0B \mid 1B \mid 0 \mid 1$
  $B \to 0A \mid 1A \mid \varepsilon$ $B \to 0A \mid 1A$

2.4(d) $\{w : \text{the length of } w \text{ is odd and its middle symbol is a 0.}\}$

- $S \to 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1 \mid 0S0 \mid 0$ 가능

- $A \to BAB \mid 0$ 가능
  $B \to 0 \mid 1$

$$L(G_1) \cup L(G_2) = L(G)$$

$$G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1, \Sigma_2$$
$$R_1 \cup R_2 \cup \{ S \to S_1 | S_2 \}, S)$$

cf) $L(G_1) \cdot L(G_2)$ 의
$$R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}$$

$L(G_1)^*$ 의
$$R_1 \cup \{S \to S_1 S\}$$