1. $v=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$에 대하여 $v \cdot w = v_x w_x + v_y w_y$로 정의할 때, 다음을 증명하시오.

(θ는 두 벡터 v와 w의 사잇각임)

<정의>

$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2$

(a) $v \cdot v = \| v \|^2$

$\| v \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ 이용.

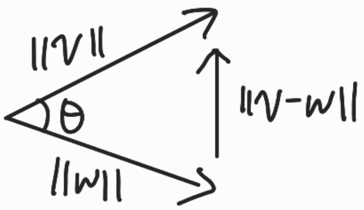
(b) 임의의 $u=\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$에 대하여 $u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$ (분배법칙)을 만족

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} = u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2)$$

$$= u_1 v_1 + u_1 w_1 + u_2 v_2 + u_2 w_2$$

$u \cdot v$ $\qquad$ $u \cdot w$

(c) $v \cdot w = \| v \| \ \| w \| \cos\theta$ (코사인 제2법칙, 벡터 $v-w$ 및 (a)(b)를 이용)



코사인 제2법칙

$$\cos\theta = \frac{\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2}{2\|v\|\|w\|}$$

(a) 이용

$$= \frac{\|v\|^2 + \|w^2\| - (v-w)\cdot(v-w)}{2\|v\|\|w\|}$$

$(v-w)\cdot(v-w)$

$= v\cdot(v-w) - w\cdot(v-w) = v\cdot v - v\cdot w - w\cdot v + w\cdot w$

$\therefore \cancel{\|v\|^2} + \|w\|^2 - \cancel{v\cdot v} + v\cdot w + w\cdot v - \cancel{w\cdot w} = 2(v\cdot w)$

$(\because (a)\ v\cdot v = \|v\|^2)$

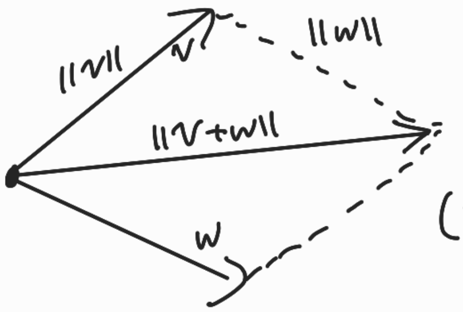
$\therefore \cos\theta = \dfrac{2(v\cdot w)}{2\|v\|\|w\|} = \dfrac{v\cdot w}{\|v\|\|w\|}$

$\therefore v\cdot w = \|v\|\|w\|\cos\theta$

1. $v=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$에 대하여 $v \cdot w = v_x w_x + v_y w_y$로 정의할 때, 다음을 증명하시오.

(θ는 두 벡터 v와 w의 사잇각임)

(d) Triangle Inequality: $\| v+w \| \le \| v \| + \| w \|$ (양변의 제곱 및 (a)(b)를 이용)



$$\|v+w\|^2 \le (\|v\| + \|w\|)^2$$

$$\|v+w\|^2 = (v+w)\cdot(v+w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2v\cdot w$$

$$(\|v\| + \|w\|)^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\|$$

즉, $\cancel{\|v\|} + \cancel{\|w\|^2} + \cancel{2}v\cdot w \le \cancel{\|v\|^2} + \cancel{\|w\|^2} + \cancel{2}\|v\|\|w\|$

$$v\cdot w \le \|v\|\|w\|$$

$$v\cdot w = \|v\|\|w\|\cos\theta.$$

$\Rightarrow \cos\theta \le 1$ 이므로 참.

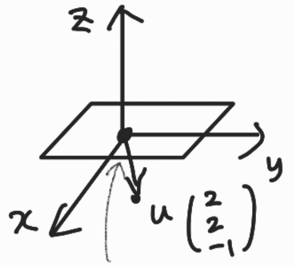
(e) (d)에서의 등식, 즉 $\| v+w \| = \| v \| + \| w \|$ 을 만족할 때, θ는 얼마인가?

$\cos\theta = 1$ 일 때 만족. $\therefore \theta = 0^\circ$

2. $u=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, p=\begin{pmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{pmatrix}$에 대하여 다음에 답하시오.

(a) $u \cdot p = 0$인 점 p를 모두 포함하는 평면을 그리시오.

$\overrightarrow{Ou}$ 와 수직인 평면 그리면 됨



법선벡터

$\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ .... 다 법선벡터

(수직이기만 하면 됨)

$u \cdot p = 0$ 인 점 p

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{pmatrix}=0$

평면의 방정식

$\left\{ \begin{pmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{pmatrix} \middle| \boxed{2p_x+2p_y-p_z=0} \right\}$

$\parallel$

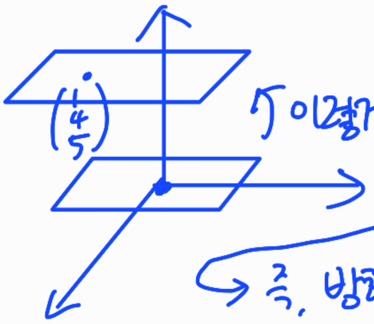
$\left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| 2x+2y-z=0 \right\}$

$\parallel$

$-2x-2y+z=0$

$\parallel$

$4x+4y-2z=0$



이렇게 옮기고 싶으면?

즉, 방향은 같은데 (1,4,5)를 지나게 하려면?

$2(x-1)+2(y-4)-(z-5)=0$ 이 평면의 방정식.

$2x+2y-z=5$.

는 $2x+2y-z$ 에 (1,4,5)를 대입해서 구할 수 있음

$ax+by+cz=k$ 평면은

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 에 수직인 평면이 평행이동해서

점 P를 지나는 평면.

(점 P는 위 식에 대입했을 때 만족하는 임의의 점)

ex) $2x+2y-z=5$ 평면 그리는 법

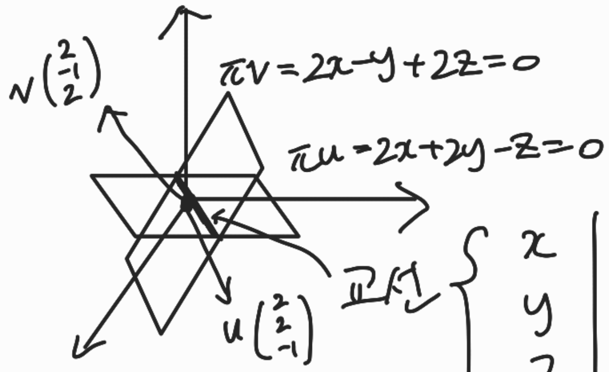
임의의 점 P(0,0,-5)를 지나고 법선벡터 $\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ 에 수직인 평면

$2x+2y-z=5$에 대입했을 때 만족하는 아무 점

평면방정식의 계수

2. $u=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, p=\begin{pmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{pmatrix}$에 대하여 다음에 답하시오.

(b) u와 v에 수직인 점 p를 모두 포함하는 직선의 방정식을 구하시오.



교선 $\left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix}2x+2y-z=0\\ \text{and}\\ 2x-y+2z=0\end{matrix} \right\}$

$$\begin{array}{r} 2x+2y-z=0 \\ -\quad 2x-y+2z=0 \\ \hline 3y-3z=0 \end{array}$$

$\boxed{y=z}$ 대입 $\Rightarrow$ $2x+2z-z=0$ $\boxed{x=-\frac{1}{2}z}$

$\left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\z\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}z = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}z \right\}$

∴ 직선의 방정식 : $-2x=y=z$

: $\dfrac{x}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$

(c) (b)에서 구한 직선상의 점 중에서 길이 1이고 x좌표가 양수인 점 p를 구하시오.

$\left\{ \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\z\\z\end{pmatrix} \right\}$.

$\sqrt{\frac{1}{4}z^2+z^2+z^2} = 1$

$\frac{9}{4}z^2 = 1 \qquad z^2=\frac{4}{9} \qquad z=\pm\frac{2}{3}$

x좌표가 양수이므로 $\boxed{x=\frac{1}{3},\ y=-\frac{2}{3},\ z=-\frac{2}{3}}$

2. $u=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, p=\begin{pmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{pmatrix}$에 대하여 다음에 답하시오.

(d) (b)에서 구한 직선과 평행하고 점 (2,1,-3)을 지나는 직선을 구하시오.

$$\frac{x}{-\frac{1}{2}}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$$

$$\frac{x-2}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{1}=t.$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}t+2 \\ y=t+1 \\ z=t-3 \end{cases}$$

둘 중 아무거나로
써도 됨

(e) (d)에서 구한 직선상의 점 중에서 $w \cdot p=0$을 만족하는 점 p를 구하시오.

$$\frac{x-2}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{1}.$$

위 식을 t로 놓으면

$$\frac{x-2}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{1}=t.$$

$$x=-\frac{1}{2}t+2,\ y=t+1,\ z=t-3 \qquad \therefore P\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}t+2\\t+1\\t-3\end{pmatrix}$$

$$w\cdot P=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}t+2\\t+1\\t-3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}t+2+t+1-t+3$$
$$=-\frac{1}{2}t+6=0. \quad t=12$$

$$\therefore P(-4,13,9)$$