1. 모든 원소가 음이 아닌 실수이고 각 열벡터 원소의 합이 1인 nxn 행렬을 Markov 행렬이라고 한다. 즉 Markov 행렬 $A = (a_{ij})$, $(1)\ \forall\, i, j,\ a_{ij} \geq 0$ $(2)\ \forall\, j,\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$

(a) A가 Markov 행렬이면 A와 A^{T}는 1을 고유치로 가짐을 보이시오. 고유치 =1 과 1보다 작은 수들

$$(1\ 1 \cdots 1)_{1\times n} \overset{A}{\left([\ ]\ [\ ] \cdots [\ ] \right)}_{n\times n} = (1\ 1 \cdots 1)_{1\times n}$$

$$\left[(1\ 1 \cdots 1)_{1\times n} \overset{A}{\left([\ ]\ [\ ] \cdots [\ ] \right)}_{n\times n} \right]^T = \left[(1\ 1 \cdots 1)_{1\times n} \right]^T$$

$$A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \lambda = 1$$

(b) A^{k}도 Markov 행렬임을 보이시오.

$(1 \cdots 1) A^k = (1 \cdots 1)$ 임을 보이면 됨

$$(1 \cdots 1) A^k = (1 \cdots 1) A A^{k-1} = (1 \cdots 1) A^{k-1} = \cdots = (1 \cdots 1)$$

2. 뉴스채널인 채널1과 채널2는 현재 각각 60%, 40%의 시청자를 확보하고 있다. 1년마다 채널1 시청자 중 30%가 채널2로 이동하고, 채널2 시청자 중 20%가 채널1로 이동한다. k년 후 채널1과 채널2의 시청률을 아래 과정을 따라 k의 함수로 유도해 보시오.

(a) 다음 행렬방정식을 만족하는 2x2행렬 A를 구하시오.

[1년 후 채널1 시청률; 1년 후 채널2 시청률] = A [현재 채널1 시청률; 현재 채널2 시청률]

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

(cf. A는 Markov 행렬)

(b) (a)와 HW11의 4번을 이용, k년 후 채널1과 채널2의 시청률을 k의 함수로 구하시오.

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (S\Lambda S^{-1})^k \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = S\Lambda^k S^{-1} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

$|A-\lambda I| = \lambda^2 - 1.5\lambda + 0.5 \quad \lambda = 1, \frac{1}{2}$

$\lambda=1$ 일 때 $\begin{pmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.3 & -0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\lambda=\frac{1}{2}$ 일 때 $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A^k \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = S\Lambda^k S^{-1} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5^2}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^k \\ -(\frac{1}{2})^k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \cdot 1^k + (\frac{1}{2})^k \\ 3 \cdot 1^k - (\frac{1}{2})^k \end{pmatrix}.$$

3. A=[1,-1,1; -1,1,-1; 1,-1,1]에 대하여 답하시오.

(a) A의 고유치 및 고유벡터를 모두 구하시오.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda)+2\lambda = -\lambda^3+3\lambda^2$$

$\lambda=3,0$

$\lambda=3$일 때 $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda=0$일 때 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A: \left(3, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \left(0, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(3, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

(b) $\mathrm{A} = \mathrm{S}\Lambda\mathrm{S}^{\mathrm{T}}$을 만족하는 3x3 행렬 S와 Λ를 구하시오.

$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. A=[1,0,1; -1,1,0; 0,-1,1]일 때 다음 순서로 Singular Value Decomposition을 구하시오.

(a) A^TA의 고유치, 고유벡터

$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$|A^TA - \lambda I| = -(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+4)$. $\lambda=4,1$ $\sigma_1=2$, $\sigma_2=\sigma_3=1$

$\lambda=4$일 때 $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda=1$일 때 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^TA: \left(4, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \left(1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

$A: \left(2, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \to V = \left(\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

(b) Singular values $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (절대값 큰 것부터)와 $Av_i = \sigma_i u_i$인 $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{u_1, u_2, u_3\}$

$u_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $AV = U\Sigma$인 3x3 행렬 V, U, Σ

$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$