1. 행렬 A, B에 대하여 $AX=B$를 만족하는 complete solution(완전해 혹은 모든 해의 집합)을 구하시오. (강의자료 p8~10)

(a) A=(1, 2, 2, 1, 1; 2, 4, 6, 6, 4; 3, 6, 4, 1, 5), B=(2; 16; 4)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&2&1&1&2\\ 2&4&6&6&4&16\\ 3&6&4&1&5&4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&2&1&1&2\\ 0&0&2&4&2&12\\ 0&0&-2&-2&2&-2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&2&1&1&2\\ 0&0&2&4&2&12\\ 0&0&0&2&4&10 \end{array}\right)$$

	x	y	z	s	t
x_p	5	0	-4	5	0
x_n	-5	0	3	-2	1
	-2	1	0	0	0

$$\therefore X=\left\{\begin{pmatrix}5\\0\\-4\\5\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-5\\0\\3\\-2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, y,t\in R\right\}$$

(b) A=(1, 4, 2; 2, 8, 5; -1, -4, -2), B=(1; 3; -1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&2&1\\ 2&8&5&3\\ -1&-4&-2&-1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&2&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&0 \end{array}\right)$$

	x	y	z
x_p	-1	0	1
x_n	-4	1	0

$$\therefore X=\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, y\in R\right\}$$

(c) A=(1, 4, 2; 2, 8, 6), B=(1; 6)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&2&1\\ 2&8&6&6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&4&2&1\\ 0&0&2&4 \end{array}\right)$$

	x	y	z
x_p	-3	0	2
x_n	-4	1	0

$$\therefore X=\left\{\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, y\in R\right\}$$

2. 방정식 $AX=b$의 해가 존재하기 위한 $b=(b_1,b_2,b_3)^T$의 필요충분조건을 구하시오. (강의자료 p11~12)

(a) $A=(1,1,1;0,1,1;0,0,1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&b_1\\ 0&1&1&b_2\\ 0&0&1&b_3 \end{array}\right)$$

zero row가 없으므로 $C(A)=R^3$이고, 모든 b_1, b_2, b_3에 대해 $AX=B$의 해가 존재함

(b) $A=(1,2;3,8;2,4;6,16)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1&2&b_1\\ 3&8&b_2\\ 2&4&b_3\\ 6&16&b_4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1&2&b_1\\ 0&2&b_2-3b_1\\ 0&0&b_3-2b_1\\ 0&4&b_4-4b_1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1&2&b_1\\ 0&2&b_2-3b_1\\ 0&0&b_3-2b_1\\ 0&0&b_4+2b_1-2b_2 \end{array}\right)$$

$\therefore \begin{cases} b_3-2b_1=0 \\ b_4+2b_1-2b_2=0 \end{cases}$ 일 때 $AX=B$의 해 존재

(c) $A=(1,2;2,4;2,5;3,9)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1&2&b_1\\ 2&4&b_2\\ 2&5&b_3\\ 3&9&b_4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1&2&b_1\\ 0&0&b_2-2b_1\\ 0&1&b_3-2b_1\\ 0&3&b_4-3b_1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1&2&b_1\\ 0&0&b_2-2b_1\\ 0&1&b_3-2b_1\\ 0&0&b_4+3b_1-3b_3 \end{array}\right)$$

$\therefore$ $b_2-2b_1=0$, $b_4+3b_1-3b_3=0$ 일 때 $AX=B$의 해 존재

2. 방정식 $AX=b$의 해가 존재하기 위한 $b=(b_1,b_2,b_3)^T$의 필요충분조건을 구하시오. (강의자료 p11~12)

(d) $A=(1,2,3;2,4,6;2,5,7;3,9,12)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & b_2 \\ 2 & 5 & 7 & b_3 \\ 3 & 9 & 12 & b_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2-2b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_3-2b_1 \\ 0 & 3 & 3 & b_4-3b_1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_3-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_4+3b_1-3b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_2-2b_1 \end{array}\right)$$

$\therefore \begin{cases} b_4+3b_1-3b_3=0 \\ b_2-2b_1=0 \end{cases}$ 일 때

AX=B의 해 존재

3. mxn 행렬 A와 mx1 행렬 b에 대하여, 방정식 Ax=b의 해의 개수가 다음과 같을 때, r=rank(A)와 두 수 m, n 의 관계를 자세히 쓰시오.

(a) b에 따라, 해는 없거나 1개이다.

pivot이 n개이어서 N(A)={0}이어야 하고 zero row가 존재해야 한다.

$\therefore r=n<m$

(b) b에 상관없이, 해는 언제나 무한히 많다.

{0} 이외의 N(A)가 있어야 하고 zero row가 없어야 한다

$\therefore r=m<n$

(c) b에 따라, 해는 없거나 무한히 많다.

zero row 와 free variable이 존재해야 한다.

$\therefore r<m,n$

(d) b에 상관없이, 해는 정확히 1개이다.

pivot이 n개여야 하고 n(A)={0}이어야 한다

$\therefore r=m=n$