Lancelot Chardonnet 01/05/2015

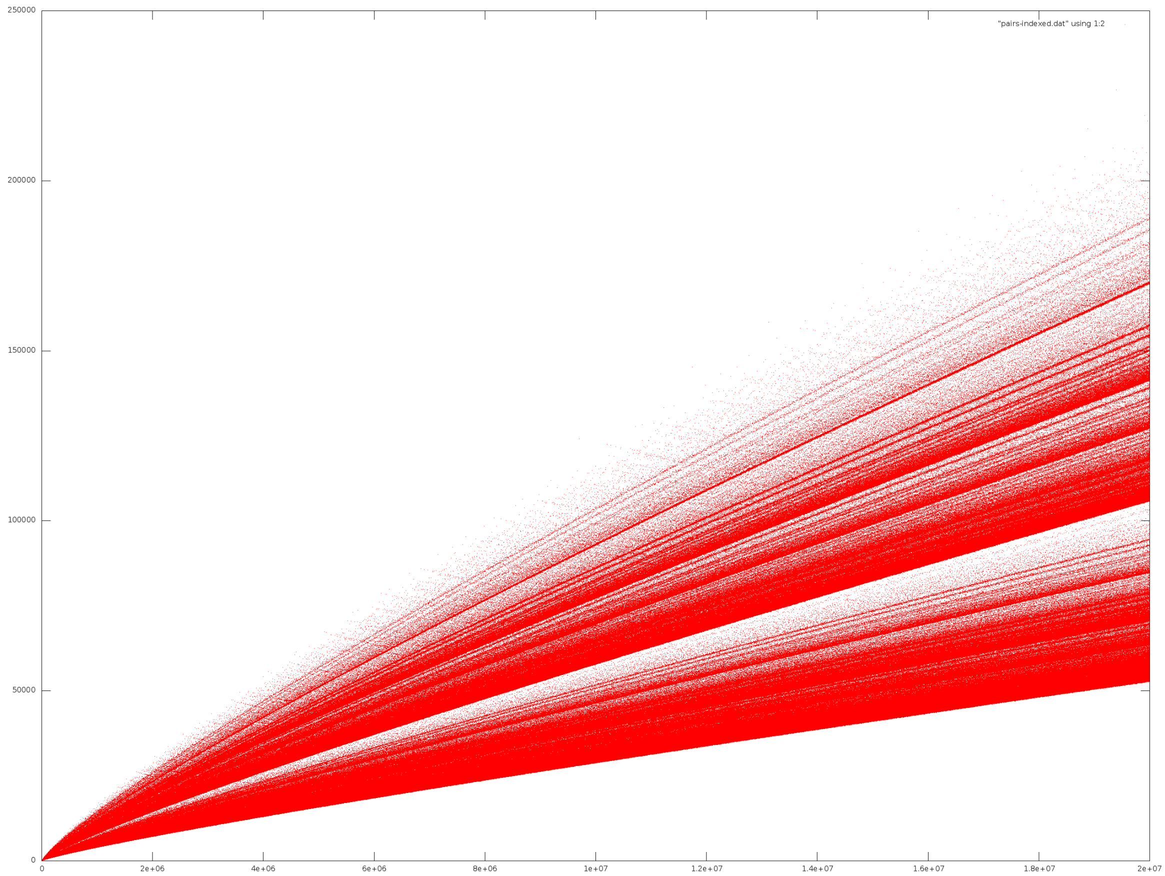
Recherches autour de la conjecture de Goldbach

On note G(x) la fonction qui à tout nombre pair x associe le nombre de fois que ce nombre peut se décomposer en somme de deux nombres premiers.

Exemples : G(10) = 2 car 10 = 3+7 = 5+5

G(12) = 1 car 12 = 5+7

Le graphe de cette fonction est aussi connu sous le nom de « Comète de Goldbach »



Comète de Goldbach

La conjecture de Goldbach affirme que chaque nombre pair plus grand que 2 se décompose au moins une fois en somme de deux nombres premiers.

Autrement dit, on a l'équivalence suivante :

$$\textit{Conjecture de Goldbach vraie} \Leftrightarrow \forall\ x \textit{ pair supérieur à } 2,\ G(x) \geq 1$$

Pour démontrer la partie droite de l'équivalence il faudrait trouver une formule donnant G(x), puis la minorer par 1. C'est la piste que j'ai choisi d'emprunter pour démontrer la conjecture de Goldbach.

Tout d'abord, commençons par déterminer G(x).

Etape I : Détermination de G(x)

J'introduis la fonction θ(x), qui à tout nombre pair x associe le nombre de fois que tous les nombres pairs inférieurs à x peuvent se décomposer en somme de deux nombres premiers. Autrement dit, on a :

$$\theta(x) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pair}}}^{x} G(j) \tag{1}$$

On en déduit alors que

$$G(x) = \theta(x) - \theta(x-2) \tag{2}$$

La détermination de θ(x) n'a pas été facile, elle demande beaucoup de logique et de gymnastique d'esprit. Néanmoins la démonstration rigoureuse est trop longue alors je ne la détaillera pas ici et nous admettrons le résultat suivant :

$$\theta(x) = \frac{\pi(i)*(\pi(i)-1)}{2} + 1 + \sum_{j=3}^{i-1} [\pi(2i-j)-\pi(2i-j-2)]*[\pi(j)-1] \tag{3}$$

où x = 2i (car x est pair rappelons le) et π(x) est la fonction de compte des nombres premiers.

En combinant les formules (2) et (3), on détermine alors G(x).

$$G(x) = \frac{\pi(i)*(\pi(i)-1) - \pi(i-1)*(\pi(i-1)-1)}{2} \qquad \longleftarrow (4)$$
$$+ (i-1\%2)*(\pi(i-1)-1)*(\pi(i+1)-\pi(i-1)) \qquad \longleftarrow (5)$$
$$+ \sum_{\substack{j=3 \\ j \text{ impair}}}^{i-2} [\pi(2i-j)-2*\pi(2i-j-2)+\pi(2i-j-4)]*[\pi(j)-1] \qquad \longleftarrow (6)$$

A première vue cette formule peut sembler incroyablement complexe et inutile pour tirer une quelconque conclusion, cependant il est possible de la simplifier considérablement en observant 3 choses :

- Si i est premier alors (4) = π(i)-1, sinon (4) = 0
- Si i+1 est premier alors (5) = π(i-1)-1, sinon (5) = 0
- Dans (6), on posera $f(i,\ j) = [\pi(2i-j)-2*\pi(2i-j-2)+\pi(2i-j-4)]$

  Alors, G(x) devient

$$G(x) = p(i)*(\pi(i)-1) + p(i+1)*(\pi(i-1)-1) + \sum_{\substack{j=3 \\ j \text{ impair}}}^{i-2} f(i,\ j)*(\pi(j)-1) \qquad (7)$$

où $p(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ est premier} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

J'ai vérifié cette formule sur Scilab jusqu'à x = 1000 et le graphe obtenu fut bien la comète de Goldbach. Il ne semble pas y avoir d'erreur là-dessus.

Par ailleurs on ne peut pas simplifier plus l'équation (7), donc nous garderons cette formule pour G(x) dans la suite de la démonstration.

Etape 2 : Minoration de G(x)

On remarque que f(i, j) prend des valeurs particulières en fonction de la primalité de 2i-j, 2i-j-2 et 2i-j-4 :

2i-j premier ?	2i-j-2 premier ?	2i-j-4 premier ?	f(i, j)
OUI	OUI	OUI	cas impossible*
OUI	OUI	NON	0
NON	OUI	OUI	-1
OUI	NON	OUI	+1
OUI	NON	NON	+1
NON	OUI	NON	-1
NON	NON	OUI	0
NON	NON	NON	0

*Il est impossible que deux couples de nombres premiers jumeaux partagent un même nombre premier donc ce cas n'arrive jamais

En résumé, seul 3 valeurs sont possibles pour f(i, j) : +1, -1 et 0.

Mais ce n'est pas tout. Il est également possible de prédire f(i, j-2) en connaissant f(i, j). Comment ? Grâce à la méthode du peigne !

Oui, ça !

Méthode du peigne

On considère la somme présente dans (7) comme un peigne à 3 dents placé sur une échelle de nombres. La première dent est placé sur 2i-3, la deuxième sur 2i-5, la troisième sur 2i-7. On obtient f(i, j) en fonction de la primalité de ces 3 nombres.

A la prochaine itération de la somme, le peigne descend de 2. La première dent se trouve alors sur 2i-5, la deuxième sur 2i-7, la troisième sur 2i-9. Comme on connait déjà la primalité de 2i-5 et 2i-7, seul la primalité de 2i-9 est inconnue.

Néanmoins c'est suffisant pour affirmer les propriétés suivantes :

- Si f(i, j) = +1, la prochaine valeur non nulle de f sera obligatoirement -1
- Si f(i, j) = -1, la prochaine valeur non nulle de f sera obligatoirement +1

La fonction f(i, j) constitue donc une alternance de -1 et de +1 séparés par un nombre inconnu de 0.