

Algorithmik Blatt 3 Teil 1

Mtr.-Nr. 6329857

Universität Hamburg — 5. November 2019

Aufgabe 6

Was macht der Algorithmus?

Der Wert des Zählers wird durch die Differenz zweier Teilzähler P und N gebildet. Wir haben bereits gesehen, dass ein einzelner Zähler in amortisierter worst-case Zeit $\mathcal{O}(1)$ inkrementiert werden kann. Das Hinzunehmen der DECREMENT Operation verschlechtert die amortisierte Laufzeit jedoch auf $\mathcal{O}(n)$, weil im worst-case eine Sequenz aus abwechselnden INCREMENT und DECREMENT dazu führen, dass in jeder Operation alle n Bits gewechselt werden müssen.

Der neue Algorithmus umgeht das Problem, indem die DECREMENT Operation einfach als INCREMENT auf einem zweiten Zähler agiert. Nun sind abwechselnde INCREMENT und DECREMENT einfach nur INCREMENTS auf unterschiedlichen Zählern und die Argumentation für die amortisierte $\mathcal{O}(1)$ Laufzeit von INCREMENT lässt sich auf $\{\text{INCREMENT}, \text{DECREMENT}\}$ übertragen.

Allerdings muss der Algorithmus eine Besonderheit beachten: Jedes Bit darf nur in einem der beiden Zähler auf 1 stehen. Das ist wichtig, um ungewollte mehrfache Repräsentation von Werten zu verhindern. Ansonsten stellten z.B. $(P = 00, N = 00)$, $(P = 01, N = 01)$, $(P = 10, N = 10)$ und $(P = 11, N = 11)$ alle den Gesamtwert 0 dar. Dadurch wäre bei gleicher Anzahl Bits der Wertebereich eingeschränkt. Immer wenn der Algorithmus ein Bit auf 1 setzen will, muss er zunächst prüfen, ob das Partnerbit im anderen Zähler schon auf 1 steht und falls ja, dieses dort stattdessen auf 0 setzen.

Accounting-Methode

Die relevanten Operationen der INCREMENT und DECREMENT Funktion sind die Schreibzugriffe auf die jeweils $\log(n)$ breiten Zähler P und N . Die Operation die ein Bit i auf 0 setzt nennen wir $\text{RESET}_P(i)$ bzw. $\text{RESET}_N(i)$. Die Operation die ein Bit i auf 1 setzt nennen wir $\text{SET}_P(i)$ bzw. $\text{SET}_N(i)$.

Die Laufzeit von INCREMENT ist proportional zur Anzahl der ausgeführten $\text{RESET}_P(i)$ Operationen, denn diese kommt unbedingt genau einmal in der einzigen Schleife vor. Entsprechend ist die Laufzeit von DECREMENT ist proportional zur Anzahl der ausgeführten $\text{RESET}_N(i)$ Operationen.

Zu Beginn seien alle Bits auf 0 gesetzt. $\text{RESET}_P(i)$ wird nur durchgeführt, wenn Bit i auf 1 gesetzt ist. Dies kann nur der Fall sein, wenn vorher ein $\text{SET}_P(i)$ durchgeführt wurde. Analog gilt dies für $\text{RESET}_N(i)$.

Also gilt (wobei $\#(Op)$ die Anzahl der Ausführungen von Op ist):

$$\#(\text{RESET}_N) \leq \#(\text{SET}_N) \quad (1)$$

Wir können im Accounting die RESET Operationen also die Kosten für die SET Operationen übernehmen lassen. Somit veranschlagen wir:

$$\begin{aligned} T_{\text{SET}_P} &= 2 \\ T_{\text{SET}_N} &= 2 \\ T_{\text{RESET}_P} &= 0 \\ T_{\text{RESET}_N} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Für n ausführungen von INCREMENT ergibt sich eine gesamte Laufzeit von:

$$\begin{aligned} T_{\text{INC}}(p) &= p \cdot (T_{\text{SET}_P} + \log(p) \cdot T_{\text{RESET}_P} + T_{\text{RESET}_N}) \\ &= p \cdot T_{\text{SET}_P} \end{aligned} \quad (3)$$

Für DECREMENT entsprechend

$$\begin{aligned} T_{\text{DEC}}(q) &= q \cdot (T_{\text{SET}_N} + \log(q) \cdot T_{\text{RESET}_N} + T_{\text{RESET}_P}) \\ &\quad \text{weil } T_{\text{RESET}_P} = T_{\text{RESET}_N} = 0 \\ T_{\text{DEC}}(q) &= q \cdot T_{\text{SET}_N} \end{aligned} \quad (4)$$

Für n ausgeführte INCREMENT und m ausgeführte DECREMENT ergibt sich:

$$\begin{aligned} T_{\text{INC}}(p) + T_{\text{DEC}}(q) &= p \cdot T_{\text{SET}_P} + q \cdot T_{\text{SET}_N} \\ T_{\text{SET}_P} &= T_{\text{SET}_N} = 2 \\ T_{\text{INC}}(p) + T_{\text{DEC}}(q) &= (p + q) \cdot 2 \end{aligned} \quad (5)$$

Da INCREMENT und DECREMENT die einzig erlaubten Operationen sind ergibt sich für jede beliebige Sequenz aus $n = (p + q)$ Operationen eine Laufzeit von $\mathcal{O}(n \cdot 2) = \mathcal{O}(n)$ und damit einer amortisierten worst-case Laufzeit von $\mathcal{O}(1)$.

Potential-Funktion

Die tatsächlichen Kosten c_i der INCREMENT Operation von Schritt i einer Sequenz von Operationen ergeben sich aus der Anzahl der Teiloperationen RESET_P , RESET_N und SET_P in Schritt i :

$$c_i = \#_i(\text{RESET}_P) + \#_i(\text{RESET}_N) + \#_i(\text{SET}_P)$$

Wobei $\#_i(\text{Op})$ die Anzahl der ausgeführten Teiloperationen Op in Schritt i der Sequenz ist. Die amortisierten Kosten der i -ten Operation sind:

$$c'_i = c_i + \phi_i(P, N) - \phi_{i-1}(P, N) \quad (6)$$

Wählen wir als Potentialfunktion ϕ die Gesamtzahl der in P und N auf 1 gesetzten Bits, ergibt sich:

$$\phi_i(P, N) - \phi_{i-1}(P, N) = \#_i(\text{SET}_P) - \#_i(\text{RESET}_P) - \#_i(\text{RESET}_N) \quad (7)$$

44 Das Potential kann nie negativ sein, da die Anzahl der auf 1 gesetzten Bits nicht negativ sein kann.

45 Fügen wir die drei Gleichungne zusammen ergibt sich:

$$\begin{aligned} c'_i &= \#_i(\text{RESET}_P) + \#_i(\text{RESET}_N) + \#_i(\text{SET}_P) \\ &\quad + \#_i(\text{SET}_P) - \#_i(\text{RESET}_P) - \#_i(\text{RESET}_N) \\ &= 2 \cdot \#_i(\text{SET}_P) \end{aligned} \quad (8)$$

46 Da SET_P nur höchstens einmal pro INCREMENT vorkommt, ergibt sich $c'_i = 2 \leq 2$ als armortisierte
47 Kosten der INCREMENT Operation.

48 Analog funktioniert die Argumentation für Decrement:

$$\begin{aligned} c'_i &= c_i + \phi_i(P, N) - \phi_{i-1}(P, N) \\ c_i &= \#_i(\text{RESET}_N) + \#_i(\text{RESET}_P) + \#_i(\text{SET}_N) \\ \phi_i(P, N) - \phi_{i-1}(P, N) &= \#_i(\text{SET}_N) - \#_i(\text{RESET}_N) - \#_i(\text{RESET}_P) \\ c'_i &= \#_i(\text{RESET}_N) + \#_i(\text{RESET}_P) + \#_i(\text{SET}_N) \\ &\quad + \#_i(\text{SET}_N) - \#_i(\text{RESET}_N) - \#_i(\text{RESET}_P) \\ &= 2 \cdot \#_i(\text{SET}_N) \\ c'_i &= 2 \leq 2 \end{aligned} \quad (9)$$

49 Für eine Sequenz aus n beliebigen Operationen aus der Menge {INCREMENT, DECREMENT} ergibt
50 sich $T(n) = 2 \cdot n$, also eine armortisierte worst-case Laufzeit von $\mathcal{O}(1)$.

51 Aufgabe 7