Stochastik Blatt 1

Mtr.-Nr. 6329857

Universität Hamburg — 20. April 2020

Aufgabe 1

(a) Wenigstens eines der drei Ereignisse tritt ein:
$A \cup B \cup C$

(b) Höchstens eines der drei Ereignisse tritt ein:
$(A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B^C \cap C^C)$

Aufgabe 2

(a) $\Omega = \left\{ (w_1, w_2, w_3) \,\middle|\, w_1, w_2, w_3 \in \{K, Z\} \right\}$

(b) $A = \left\{ (w_1, w_2, w_3) \,\middle|\, (w_1, w_2, w_3) \in \Omega \wedge w_1 = w_2 \right\}$
$B = \left\{ (w_1, w_2, w_3) \,\middle|\, (w_1, w_2, w_3) \in \Omega \wedge w_2 = w_3 \right\}$

(c) $A \cap B = \left\{ (w, w, w) \,\middle|\, (w, w, w) \in \Omega \right\}$: Alle drei Münzewürfe landen auf der selben Seite
$A \setminus B = \left\{ (w, w, w_3) \,\middle|\, (w, w, w_3) \in \Omega \wedge w \neq w_3 \right\}$: Die ersten beiden Münzwürfe landen auf der selben Seite, der dritte aber auf einer anderen.

(d)

$$\begin{aligned}
\forall w_1, w_2, w_3 \in \{K, Z\} : P(\{(w_1, w_2, w_3)\}) &= \frac{1}{8} \\
P(A) &= P(\{(K,K,K)\}) + P(\{(K,K,Z)\}) + P(\{(Z,Z,K)\}) + P(\{(Z,Z,Z)\}) \\
&= \frac{4}{8} \\
P(A \setminus B) &= P(\{(K,K,Z)\}) + P(\{(Z,Z,K)\}) \\
&= \frac{2}{8}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a)

$$P(\Omega) = 1 \quad (1)$$
$$\Omega \cap \emptyset = \emptyset \quad (2)$$
$$\Omega \cup \emptyset = \Omega \quad (3)$$
$$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) \quad (4)$$
$$1 = 1 + P(\emptyset) \quad (5)$$
$$P(\emptyset) = 0 \quad (6)$$

(b) Zu zeigen für alle n:

$$\forall A_1, \ldots, A_n \subset \Omega \text{ sind disjunkt } : P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad (7)$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt:

$$A_1 \subset \Omega \text{ ist disjunkt } : P(\bigcup_{i=1}^{n=1} A_i) = \sum_{i=1}^{n=1} P(A_i) \quad (8)$$
$$\text{denn } P(A_1) = P(A_1) \quad (9)$$

Indunktionsschritt: Wenn für ein beliebig festes n gilt:

$$\forall A_1, \ldots, A_n \subset \Omega \text{ sind disjunkt } : P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad (10)$$

Und ein weiteres Ereignis A_{n+1} sei disjunkt zu allen Ereignissen $A_1, \ldots, A_n$, dann gilt auch:

$$P((\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1}) = (\sum_{i=1}^{n} P(A_i)) + P(A_{n+1}) \quad (11)$$

Durch jeweilig zusammenführung der Summen und Vereinigung gilt entsprend auch:

$$\forall A_1, \ldots, A_n, A_{n+1} \subset \Omega \text{ sind disjunkt } : P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) \quad (12)$$

Indunktionsabschluss: Da wir gezeigt haben, dass die Aussage falls sie für ein beliebiges n gilt auch für $n + 1$ gilt, und dass sie für $n = 1$ gilt, gilt sie per Indunktion für alle $n \in \mathbb{N}$

(c)

$$A \subset \Omega \quad (13)$$
$$P(\Omega) = 1 \quad (14)$$
$$A \cap A^C = \emptyset \quad (15)$$
$$A \cup A^C = \Omega \quad (16)$$
$$P(A) + P(A^C) = P(\Omega) = 1 \quad (17)$$
$$P(A^C) = 1 - P(A) \quad (18)$$

(d)

$$A \subset B \subset \Omega: \tag{19}$$

$$(B \setminus A) \cap A = \emptyset \tag{20}$$

$$P(B \setminus A) + P(A) = P((B \setminus A) \cup A) \tag{21}$$

$$P(B \setminus A) + P(A) = P(B) \tag{22}$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \tag{23}$$