Stochastik Blatt 1

Laszlo Korte (6329857), Torben Ammelt (6488297)

Universität Hamburg — 23. April 2020

Aufgabe 1

(a) Wenigstens eines der drei Ereignisse tritt ein:

$$A \cup B \cup C$$

(b) Höchstens eines der drei Ereignisse tritt ein:

$$(A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B^C \cap C^C)$$

Aufgabe 2

(a) Wahrscheinlichkeitsraum:

$$\Omega = \left\{ (w_1, w_2, w_3) \,\middle|\, w_1, w_2, w_3 \in \{K, Z\} \right\}$$

(b) Sei A das Ereignis, dass im ersten und im zweiten Wurf jeweils die gleiche Münzseite oben liegt:

$$A = \left\{ (w_1, w_2, w_3) \,\middle|\, (w_1, w_2, w_3) \in \Omega \land w_1 = w_2 \right\}$$

Sei B das Ereignis, dass im zweiten und im dritten Wurf jeweils die gleiche Münnzseite oben liegt:

$$B = \left\{ (w_1, w_2, w_3) \,\middle|\, (w_1, w_2, w_3) \in \Omega \land w_2 = w_3 \right\}$$

(c) Alle drei Münzewürfe landen auf der selben Seite:

$$A \cap B = \left\{ (w, w, w) \,\middle|\, (w, w, w) \in \Omega \right\}$$

Die ersten beiden Münzwürfe landen auf der selben Seite, der dritte aber auf einer anderen:

$$A \setminus B = \left\{ (w, w, w_3) \,\middle|\, (w, w, w_3) \in \Omega \land w \neq w_3 \right\}$$

(d)

$$\forall w_1, w_2, w_3 \in \{K, Z\} : P(\{(w_1, w_2, w_3)\}) = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(\{(K,K,K)\}) + P(\{(K,K,Z)\}) + P(\{(Z,Z,K)\}) + P(\{(Z,Z,Z)\}) \\
&= \frac{4}{8} \\
P(A \setminus B) &= P(\{(K,K,Z)\}) + P(\{(Z,Z,K)\}) \\
&= \frac{2}{8}
\end{aligned}$$

11 ## Aufgabe 3

(a)

$$\begin{aligned}
P(\Omega) &= 1 && \text{(Axiom)} \\
\Omega \cap \emptyset &= \emptyset && (\cap \text{ Absorbtion}) \\
\Omega \cup \emptyset &= \Omega && (\cup \text{ Neutrales Element}) \\
P(\Omega \cup \emptyset) &= P(\Omega) + P(\emptyset) && \text{(Additivität)} \\
1 &= 1 + P(\emptyset) \\
P(\emptyset) &= 0
\end{aligned}$$

(b) Zu zeigen für alle n:

$$\mathscr{A}(n) = \forall A_1, \ldots, A_n \subset \Omega \text{ sind disjunkt } \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(1) = A_1 \subset \Omega \text{ ist disjunkt } \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n=1} A_i) &= \sum_{i=1}^{n=1} P(A_i) \\
\text{denn } P(A_1) &= P(A_1)
\end{aligned}$$

Indunktionsschritt: Wenn $\mathscr{A}$ für ein beliebig festes n gilt, ist zu zeigen, dass es auch für $n+1$ gilt:

Induktionsannahme: $\forall A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ sind disjunkt $\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

12 Und ein weiteres Ereignis A_{n+1} sei disjunkt zu allen Ereignissen $A_1, \ldots, A_n$, dann gilt auch:

$$P((\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1}) = (\sum_{i=1}^{n} P(A_i)) + P(A_{n+1}) \qquad \text{(Additivität)}$$

13 Durch jeweilig zusammenführung der Summen und Vereinigung gilt entsprend auch:

$$\forall A_1, \dots, A_n, A_{n+1} \subset \Omega \text{ sind disjunkt } \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i)$$

Induktionsabschluss: Da Aussage $\mathscr{A}(n)$ für $n = 1$ bewiesen wurde und $\mathscr{A}(n) \Rightarrow \mathscr{A}(n+1)$ bewiesen wurde, gilt per Induktion auch $\forall n : \mathscr{A}(n)$.

(c)

$$\begin{aligned}
A \subset \Omega &: \\
P(\Omega) &= 1 \\
A \cap A^C &= \emptyset \\
A \cup A^C &= \Omega \\
P(A) + P(A^C) &= P(\Omega) = 1 \\
P(A^C) &= 1 - P(A)
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
A \subset B \subset \Omega &: \\
(B \setminus A) \cap A &= \emptyset \\
P(B \setminus A) + P(A) &= P((B \setminus A) \cup A) \\
P(B \setminus A) + P(A) &= P(B) \\
P(B \setminus A) &= P(B) - P(A)
\end{aligned}$$