Tema 3. Intervals de confiança en una població

1. Una entitat bancària va fer un estudi sobre les quantitats sol·licitades en els crèdits personals. En una mostra de 121 clients, la mitjana i desviació estàndard de les quantitats sol·licitades van ser 18456 euros i 5420 euros, respectivament. Calculeu un interval de confiança del 90% de les quantitats mitjanes sol·licitades en els crèdits personals d'aquesta entitat. Suposeu normalitat.

2. Per estudiar la precisió d'un aparell de mesura es van dur a terme 14 mesures d'un mateix objecte que van donar els resultats següents:

25.32	25.38	25.40	25.67	25.45	25.93	25.37
25.41	25.52	25.36	25.43	25.27	25.44	25.39

   Calculeu un interval de confiança del 95% per a la variància poblacional d'aquestes mesures. Suposeu normalitat.

3. Es vol fer un estudi sobre la proporció de vols que surten d'un determinat aeroport amb retard de més de 20 minuts. La informació de que es disposa és que dels darrers 436 vols n'han sortit amb retard 189. Calculeu un interval de confiança del 95% de la proporció poblacional de vols que surten amb retard.

4. Les autoritats sanitàries fixen la quantitat 14 UFP/100mL (UFP=unitats formadores de plaques) com la concentració màxima d'un determinat virus entèric en aigües residuals de qualsevol punt de l'estat. Es realitza un control en aigües depurades de 10 granges que generen purins. La concentració del virus entèric correspon a un nombre molt gran de forma que podem assumir que segueix una distribució Normal. D'altra banda, les granges estan prou allunyades per assumir que els resultats individuals son mútuament independents.

   Els valors obtinguts han estat:

14.3	15.3	13.8	15.4	15.5	14.6	13.9	15.0	14.6	13.8

   (a) Calculeu l'interval de confiança al 95% de la concentració mitjana del virus en les aigües que aboquen les granges.

   (b) Interpreteu el resultat en funció del valor fixat per l'administració.

5. Un laboratori d'ecologia forestal es dota d'un nou aparell de mesura de la marca Perkin-Elmer per mesurar la fotosíntesi. Aquest nou aparell disposa d'un sistema d'auto-calibratge que proporciona l'error (positiu o negatiu) entre la lectura de l'aparell i una sèrie de 8 mostres patró. En la darrera comprovació els errors han estat els següents:

1.3	-1.1	2.8	2.1	1.1	-0.3	-2.3	2.9

   Amb un 90% de confiança, què podem afirmar pel que fa a la mitjana poblacional de l'error de l'aparell nou? Es pot assumir la normalitat de la distribució de l'error.

6. L'estudi sanguini d'un individu presenta 125 neutròfils d'un recompte total de 200 glòbuls blancs. Es demana:

   (a) Trobar una estimació puntual per a la proporció de neutròfils.

   (b) Trobar un interval de confiança al 90% per l'anterior proporció.

   (c) En un individu sa, el percentatge de neutròfils es troba entre el 60% i el 70% del total de glòbuls blancs. Segons l'interval de l'apartat anterior, hi ha alguna evidència de desequilibri de neutròfils en la mostra de sang analitzada?

7. En una petita empresa, un directiu anuncia als treballadors que hi haurà retallades que comportaran decrements en els sous d'entre el 4 i el 6%. Un sindicat que sospita que la baixada mitjana dels sous ha estat superior, pren una mostra de la reducció del salari de 23 treballadors:

7.2	4.9	4.7	9.2	9.4	9.6	8.9	8.6	8.0	9.5	7.1	9.1
8.5	7.4	5.0	4.3	4.0	4.5	8.4	4.1	7.8	9.9	9.3	

(a) Amb una confiança del 99%, podeu dir que els sindicalistes tenen raó?
(b) Calculeu un interval de confiança del 99% per a la desviació estàndard de la reducció dels sous.

Suposeu normalitat.

8. Sigui una mostra de mida n d'una normal amb mitjana μ i variància $\sigma^2 = 100$. Trobeu el menor valor de n que fa que $(\bar{x} - 1, \bar{x} + 1)$ sigui un interval de confiança per a μ de nivell 0.9.

9. Els temps (en segons) de sis participants en la prova de triatló dels Jocs Olímpics de Londres 2012 van ser 6559, 6833, 6483, 6565, 6762 i 6434. Suposem que podem assumir normalitat.

   (a) Trobeu un interval de confiança al 95% per a la mitjana sabent que $\sigma = 120$.
   (b) Trobeu un interval de confiança al 95% per a la mitjana suposant σ desconeguda.

10. En un cinema es va prendre una mostra de 50 pel·lícules projectades en un any. D'aquesta mostra es va obtenir que la durada mitjana per pel·lícula era de 111 minuts i la desviació típica de 20 minuts.

   (a) Calculeu un interval de confiança al 99% per a la duració mitjana de les pel·lícules projectades en el cinema.
   (b) Calculeu el nombre de pel·lícules que caldria estudiar per tal que l'interval de confiança al 99% de la mitjana tingui una amplitud màxima de 12 minuts.

Exercicis resolts

1. Anomenem X la quantitat sol·licitada en un crèdit personal d'aquesta entitat bancària. Admetem que X té distribució normal amb μ i σ la mitjana i desviació estàndard de X, respectivament. L'interval de confiança de la mitjana d'una distribució normal amb variància desconeguda es calcula com:
$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left(\bar{x} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right).$$
Amb un nivell de confiança del 90%, tenim $\alpha = 0.1$, i aleshores el valor crític $t_{120,0.05}$ es troba a les taules de la distribució t de Student amb 120 graus de llibertat i resulta $t_{120,0.05} = 1.658$. Per tant, l'interval de confiança per a μ és:
$$IC_{0.90}(\mu) = (18456 - 1.658 \cdot 5420/\sqrt{121}, 18456 + 1.658 \cdot 5420/\sqrt{121}) = (17639.06, 19272.94).$$
Nota: també podríem calcular un interval de confiança amb
$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}},$$
ja que $n > 30$.

2. Notem amb σ^2 la variància de les lectures realitzades per l'aparell de mesura. L'interval de confiança de la variància d'una distribució normal es calcula com:
$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right).$$
Els valors de $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ i de $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ s'obtenen de la taula de la distribució khi-quadrat. El nombre de graus de llibertat és 14-1=13, ja que la mostra conté $n = 14$ observacions. Si el nivell de confiança és del 95% aleshores resulten: $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} = \chi^2_{13,0.975} = 24.74$ i $\chi^2_{n-1,\alpha/2} = \chi^2_{13,0.025} = 5.01$. En calcular la variància mostral de les 14 mesures donades a l'enunciat, s'obté $s^2 = 0.028$. Per tant, l'interval de confiança de la variància de l'aparell és:
$$IC_{0.95}(\sigma^2) = \left(\frac{13 \cdot 0.028}{24.74}, \frac{13 \cdot 0.028}{5.01}\right) = (0.015, 0.073).$$

3.

4.

5. Tenim $n = 8$. Sigui X l'error comès per l'aparell de mesura; podem suposar que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Es té
$$\bar{x} = 0.8125, \quad s = 1.8849.$$
Un interval de confiança per a μ ve donat per
$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$
Com que $\alpha = 0.1$, necessitem el valor de $t_{n-1;1-\alpha/2} = t_{7,0.95}$. Mirant les taules, $t_{7,0.95} = 1.8946$. Llavors,
$$IC_{0.90}(\mu) = 0.8125 \pm 1.8946 \cdot \frac{1.8849}{\sqrt{8}} = (-0.4501, 2.0751)\,.$$
Atès que el valor 0 pertany a l'interval que hem calculat, el resultat trobat és compatible amb la hipòtesi que la mitjana poblacional de l'error de lectura del nou aparell no difereix de 0.

6. (a) De 200 glòbuls blancs, 125 són neutròfils. Per tant, $\hat{p} = \frac{125}{200} = 0.625$.

(b) Un interval de confiança d'una proporció p amb un nivell de confiança $100(1-\alpha)\%$ es pot calcular mitjançant

$$IC_{1-\alpha}(p) = \hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

Tenim que $\alpha = 0.1$ i, per tant, necessitem el valor de $z_{\alpha/2} = z_{0.05}$. Buscant-lo a una taula de la normal, es té $z_{0.05} = 1.6449$. Notem que la mida de la mostra és $n = 200$. Llavors,

$$IC_{0.9}(p) = 0.625 \pm 1.6449 \cdot \sqrt{\frac{0.625(1-0.625)}{200}} = (0.5687, 0.6813).$$

(c) No hi ha evidència de desequilibri atès que l'anterior interval té intersecció no buida amb $(0.6, 0.7)$.

7.

8. Un interval de confiança per a μ quan σ^2 és coneguda ve donat per

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Notem que, segons es demana a l'enunciat, $\alpha = 0.1$. Volem que

$$IC_{0.9}(\mu) = (\bar{x}-1, \bar{x}+1),$$

és a dir,

$$\bar{x} \pm z_{0.1/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm 1,$$

que es tradueix en

$$z_{0.1/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.$$

Aïllant n, tenim

$$n = z_{0.1/2}^2 \cdot \sigma^2.$$

Necessitem $z_{0.1/2} = z_{0.05}$. Buscant a una taula de la normal, $z_{0.05} = 1.64$. Llavors,

$$n = 1.64^2 \cdot 100 = 268.96$$

i, com que n ha de ser un enter, prenem $n = 269$.

9. Tenim $n = 6$, $\bar{x} = 6606$.

(a) Un interval de confiança per a la mitjana si coneixem σ és

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Tenim $\alpha = 0.05$ i necessitem $z_{\alpha/2} = z_{0.025}$. Buscant a una taula de la normal, es té $z_{0.025} = 1.96$. Per tant,

$$IC_{0.95}(\mu) = 6606 \pm 1.96 \cdot \frac{120}{\sqrt{6}} = (6509.98, 6702.02).$$

(b) Un interval de confiança per a la mitjana si desconeixem σ i per a n petita és

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

La desviació estàndard mostral és $s = 157.78$. D'altra banda, necessitem $t_{n-1,1-\alpha/2} = t_{5,0.975}$. Buscant a les taules de la t de Student, $t_{5,0.975} = 2.57$. Per tant,

$$IC_{0.95}(\mu) = 6606 \pm 2.57 \cdot \frac{157.78}{\sqrt{6}} = (6440.46, 6771.54).$$

10.