

MODELS EXPONENCIALS de CUES

INTRODUCCIÓ ALS PROCESSOS DE NAIXEMENT I MORT.

Equacions d'equilibri. Condició d' E.E.

APLICACIÓ DE LAS EQUACIONS D'EQUILIBRI:

La cua M/M/1. Il·lustració del comportament.

MODELS DE CUES EXPONENCIALS.

Treball de servidors en paral·lel.

Casos importants:

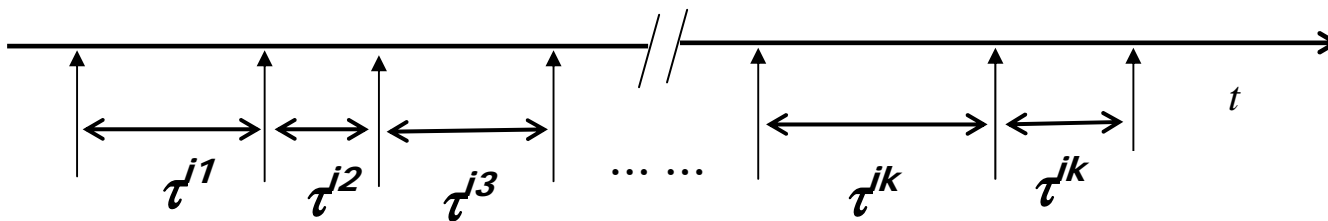
M/M/s , M/M/s/K , M/M/s/./N. Propietats.

Longituds mitjanes i Temps de permanència.

PROCESSOS DE NAIXEMENT I MORT

- "Naixement" indica arribada al S.E
- "Mort" indica sortida del S.E.

Pot ocórrer que el temps entre arribades τ sigui v.a. amb distribució dependent de l'estat N del sistema.



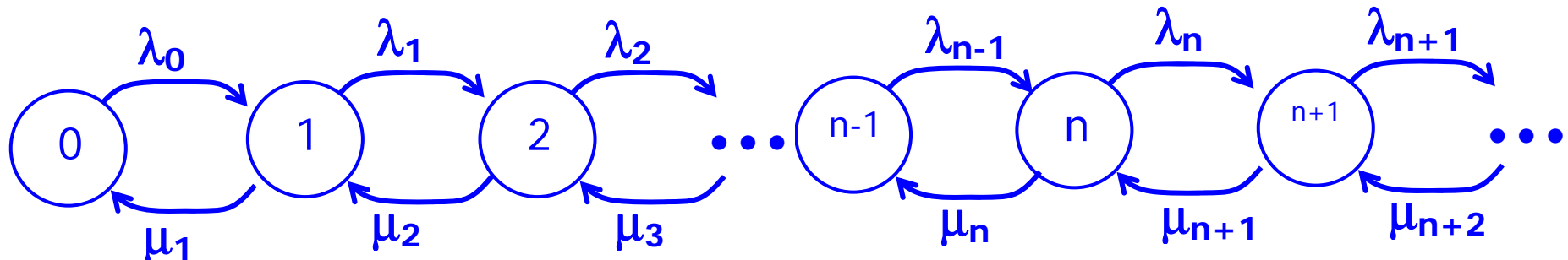
1. Si $N(t) = n$ el temps entre arribades $\tau \sim \text{exp.}$ de paràmetre λ_n .
2. Si $N(t) = n$ el temps de servei $x \sim \text{exp.}$ De paràmetre μ_n .

Sols una arribada o una sortida al/del sistema pot ocórrer en cada instant t .

Diagrama de taxes de transició

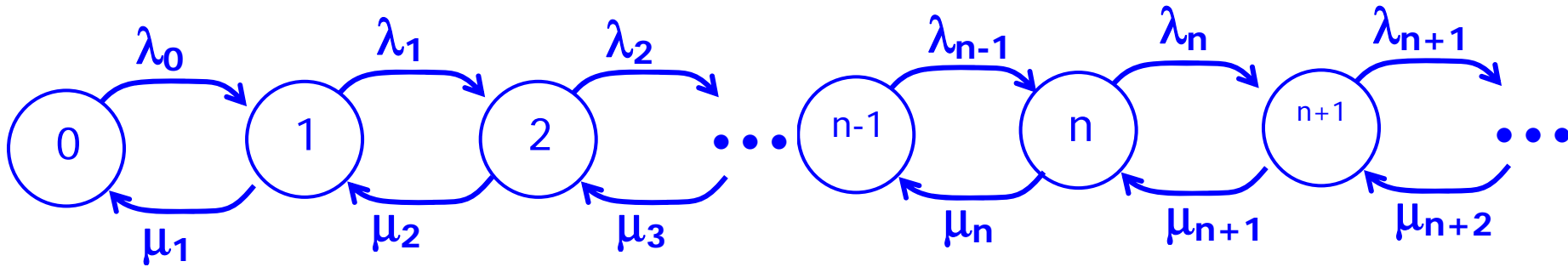
Mostra les possibles transicions permeses en l'estat del sistema en un instant determinat.

Taxes del procés d'arribades al S.E.



Taxes del procés de servei al S.E.

La **distribució de probabilitats** de l'estat del sistema, $N(t)$, en **règim estacionari** és relativament intuïtiu de deduir a partir del diagrama de taxes de transició.



<i>Estat</i>	<i>Taxa incident</i>	=	<i>Taxa emergent</i>
0	$\mu_1 \cdot P_1$	=	$\lambda_0 \cdot P_0$
1	$\lambda_0 \cdot P_0 + \mu_2 \cdot P_2$	=	$(\lambda_1 + \mu_1) \cdot P_1$
2	$\lambda_1 \cdot P_1 + \mu_3 \cdot P_3$	=	$(\lambda_2 + \mu_2) \cdot P_2$
\vdots	\vdots		\vdots
$n-1$	$\lambda_{n-2} \cdot P_{n-2} + \mu_n \cdot P_n$	=	$(\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) \cdot P_{n-1}$
n	$\lambda_{n-1} \cdot P_{n-1} + \mu_{n+1} \cdot P_{n+1}$	=	$(\lambda_n + \mu_n) \cdot P_n$
\vdots	\vdots		\vdots

Hi ha tantes equacions com valors pugui presentar $N(t)$, per tant, si al S.E. sols poden haver-hi com a màxim **K** clients, hi hauran **$K+1$** equacions.

Resolució del sistema d'equacions

$$\left\{ \begin{array}{l}
 P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot P_0 \\
 P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot P_1 + \frac{1}{\mu_2} \cdot (\mu_1 \cdot P_1 - \lambda_0 \cdot P_0) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot P_1 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \cdot P_0 \\
 P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot P_2 + \frac{1}{\mu_3} \cdot (\mu_2 \cdot P_2 - \lambda_1 \cdot P_1) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot P_2 + \frac{1}{\mu_3} \cdot (\mu_1 \cdot P_1 - \lambda_0 \cdot P_0) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot P_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \cdot P_0 \\
 \vdots \\
 P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot P_{n-1} + \frac{1}{\mu_n} \cdot (\mu_{n-1} \cdot P_{n-1} - \lambda_{n-2} \cdot P_{n-2}) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot P_{n-1} + \frac{1}{\mu_n} \cdot (\mu_1 \cdot P_1 - \lambda_0 \cdot P_0) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot P_{n-1} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \cdot P_0 \\
 P_{n+1} = \dots = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} \cdot P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n+1}} \cdot P_0 \\
 \vdots
 \end{array} \right.$$

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \quad n = 1, 2, \dots ; \quad C_0 = 1$$

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \cdot P_0 = C_n \cdot P_0 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n}$$

Les probabilitats d'estat estacionari estan ben definides si:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n < +\infty$$

En cas que el S.E. pugui contenir sols **K clients com molt**, el sumatori s'estén de $n=0$ a $n=K$ i **sempre serà finit**.

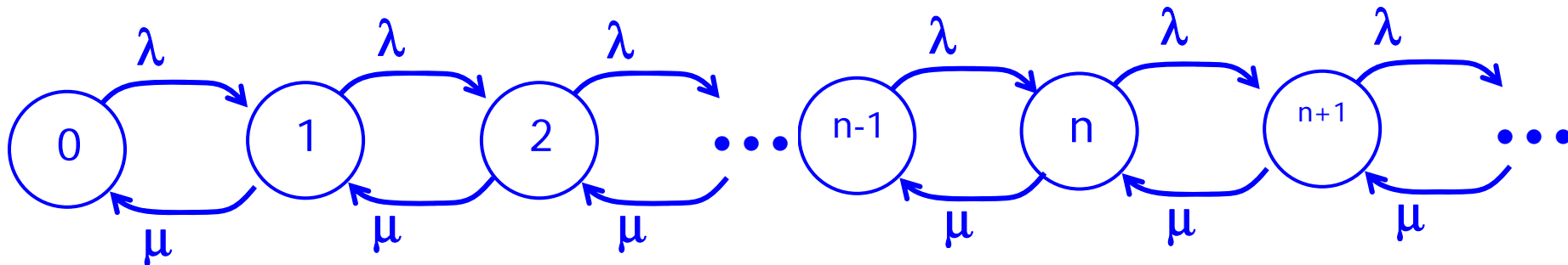
APLICACIÓ DE LES EQUACIONS D'EQUILIBRI: el model M/M/1

Hipòtesis del model:

- Temps entre arribades i.i.d. de llei exponencial amb paràmetre $\lambda_n = \lambda$.
- Temps de servei i.i.d. seguint una llei exponencial de paràmetre $\mu_n = \mu$.
- Un únic servidor, $s = 1$.

$$\lambda_n = \lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_n = \mu \quad n = 1, 2, \dots$$



■ Hi ha règim estacionari si el *factor de càrrega* del S.E. és $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

■ En cas que $\rho < 1$

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \rho^n \quad n=1,2,\dots \quad C_0 = 1 \rightarrow$$

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \rho^n \cdot P_0 \quad n=0,1,2,\dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}} = 1 - \rho$$

i per tant,

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \rho^n \cdot (1 - \rho) \quad n=0,1,2,\dots$$

■ *L'esperança matemàtica de la variable aleatòria estat del sistema ($\rho < 1$)*

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (1-\rho) \cdot \rho^n = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^n = \rho \cdot (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^{n-1} = \\
 &= \rho \cdot (1-\rho) \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right) = \rho \cdot (1-\rho) \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) = \\
 &= \rho \cdot (1-\rho) \cdot \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}
 \end{aligned}$$

■ *L'esperança matemàtica de la variable aleatòria longitud de cua en un sistema d'espera M/M/1 ($\rho < 1$)*

$$\begin{aligned}
 L_q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot P_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = (L) - (1 - P_0) = \\
 &= (L) - (\rho) = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu \cdot (\mu - \lambda)}
 \end{aligned}$$

ÚS DE LES FÒRMULES DE LITTLE

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot P_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \lambda$$

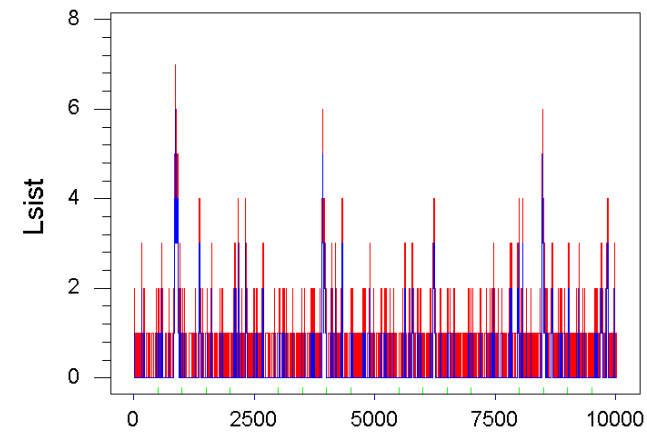
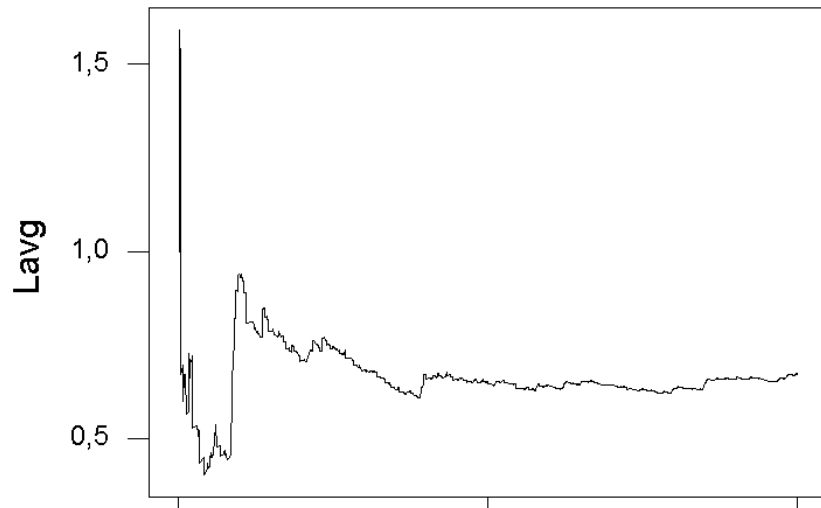
$$L = \bar{\lambda}W = \lambda W \rightarrow W = \frac{L}{\lambda}$$

$$L_q = \bar{\lambda}W_q = \lambda W_q \rightarrow W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

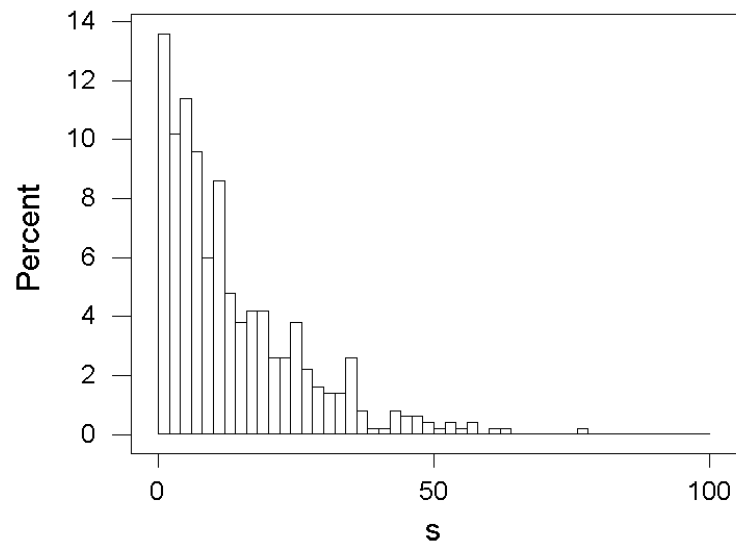
$$L_s = \bar{\lambda}W_s = \bar{\lambda}E[x] = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

$$W = W_q + W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = L_q + L_s = L_q + \rho$$



Rojo = N° de jobs en el procesador (Lsist)
Azul = N° de jobs en cola (Queue)



Distribució de la v.a. temps de permanència en el S.E. d'un client:

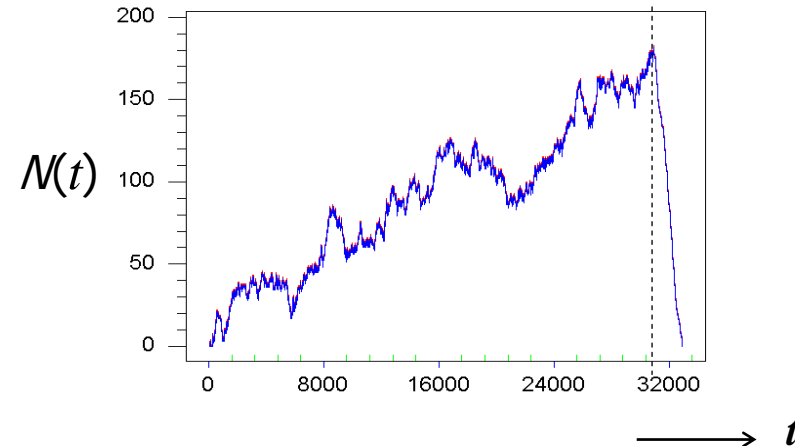
$$w \sim \text{exp. } E[w]=W$$

COMPORTAMENT d'una M/M/1.

COMPORTAMENT: Poden presentar-se dues situacions:

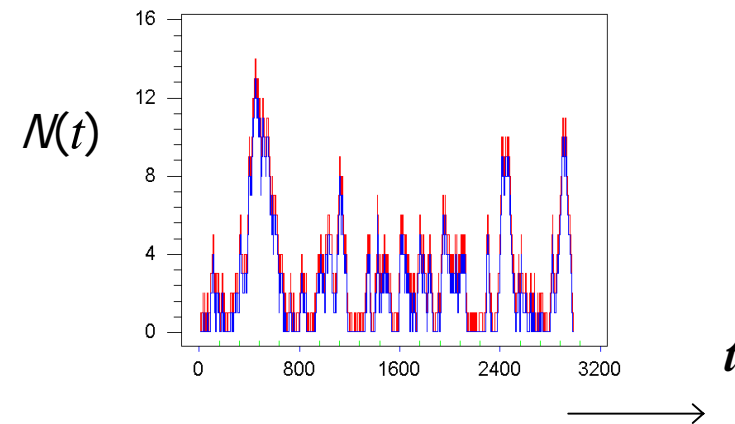
2. En promig l'afluència de clients al S.E. **ultrapassa** la capacitat de treball del Sistema de Servei:

$N(t)$ **PRESENTA UNA TENDÈNCIA CREIXENT**



3. El Sistema de Servei té suficient capacitat de treball davant la afluència de clients:

$N(t)$ pot créixer ocasionalment, però el S.E. **sempre retorna a l'estat 0 (buit)**



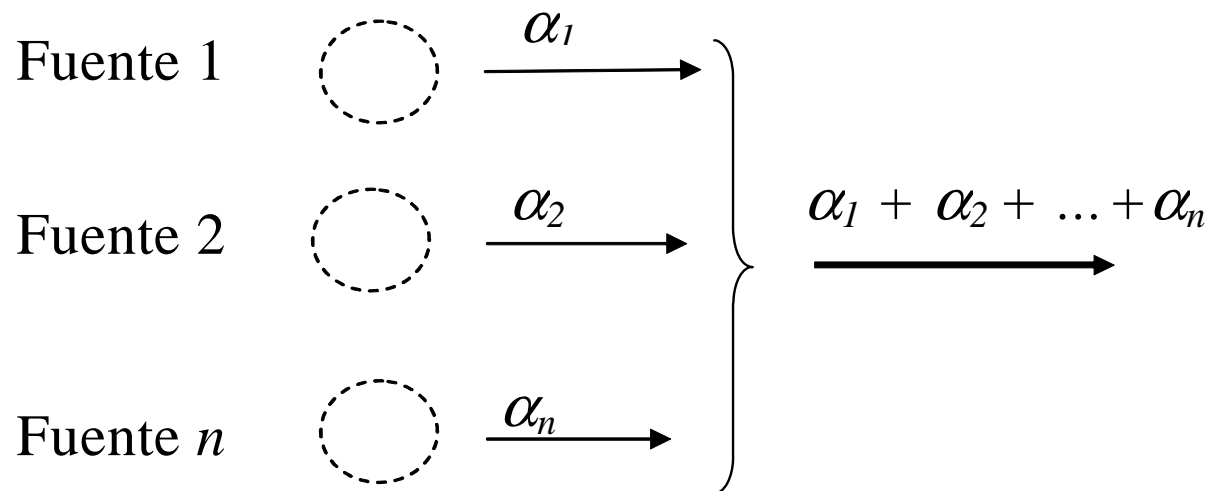
TREBALL DE SERVIDORS EN PARAL·LEL

La variable aleatòria U definida como el valor “mínim puntual” de n variables aleatòries independents i exponencials T_1, \dots, T_n , de paràmetres respectius $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, segueix una llei exponencial de paràmetre $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

→ És a dir, $U = \text{Min}\{T_1, \dots, T_n\}$ i per tant la funció de distribució de U ,

$$\begin{aligned} F_U(t) &= P(\{U \leq t\}) = 1 - P(\{U > t\}) = 1 - P(\{T_1 > t, \dots, T_n > t\}) = 1 - P(\{T_1 > t\}) \cdots P(\{T_n > t\}) = \\ &= 1 - e^{-\alpha_1 t} \cdots e^{-\alpha_n t} = 1 - e^{-t \sum_{i=1}^n \alpha_i} = 1 - e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

La interpretació que pot donar-se de la propietat en el cas del temps entre arribades és que si la població està constituïda per diferents classes de clients que arriben cadascuna d'elles al S.E. seguint una llei exponencial vinculada a la classe, llavors els temps entre arribades de 2 clients qualsevol segueix també una llei exponencial, o el que és equivalent, la població pot tractar-se des del punt de vista de la distribució entre arribades al S.E. com si fos homogènia.



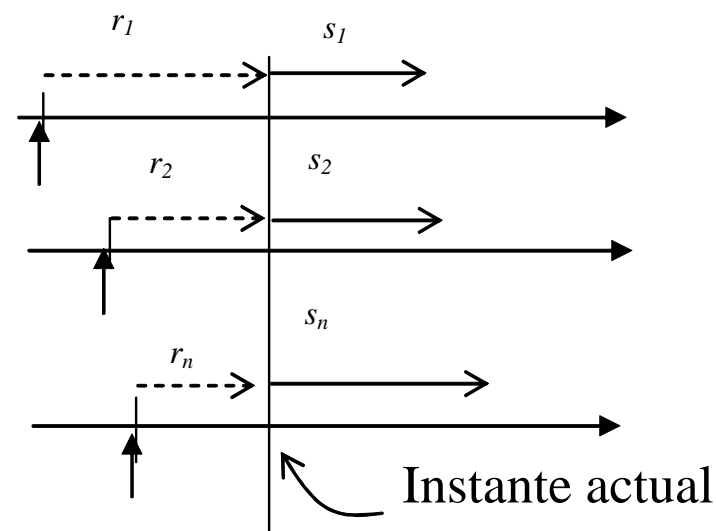
→ Si hi ha n servidors, el temps que resta fins la pròxima finalització de servei no depèn de l'instant ni del servidor que ha completat el darrer servei i segueix una distribució exponencial, lo qual permet tractar sistemes de espera con $n > 1$ servidors, como si tinguessin un únic servidor però que *treballa tan ràpid como tots n junts*.

→ Suposem n fonts exponencials i siguin $r_1 \dots r_n$ els intervals de temps transcorreguts des de el darrer succés per a les fonts $1 \dots n$ respectivament. Considerem variables aleatòries $s_1 \dots s_n$, temps comptats des de l'instant actual fins el proper succés per a cada una de les n fonts.

Per la propietat de absència de memòria les variables aleatòries s_1, \dots, s_n també es distribueixen exp. con paràmetres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

el temps comptat des de l'instant actual fins que un altre succés provinent de les n fonts se produeixi, es distribueix exponencialment con

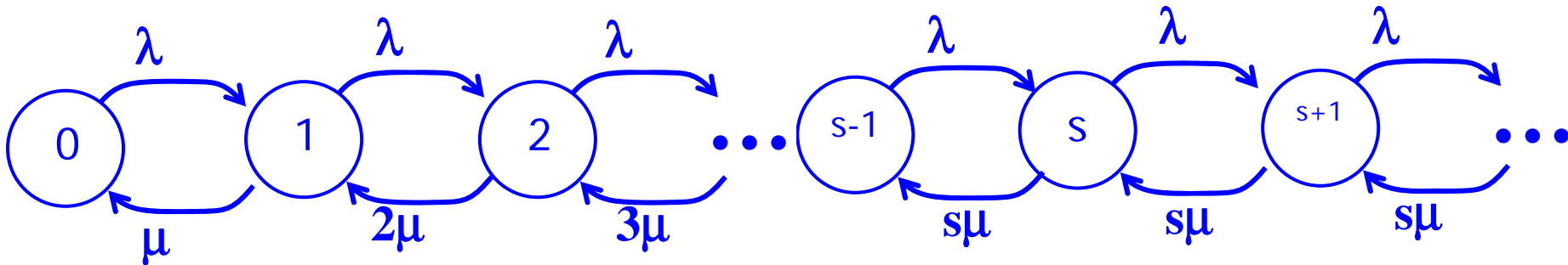
paràmetre $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.



MODEL M/M/s

- Temps entre arribades τ i.i.d. de llei exp. amb paràmetre λ .
- $s > 1$ servidors iguals.
- Temps de servei x i.i.d. seguint una llei exp. de paràmetre μ .

$$\lambda_n = \lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
$$\mu_n = \begin{cases} n \cdot \mu & n = 1, 2, \dots, s-1 \\ s \cdot \mu & n = s, s+1, \dots \end{cases}$$



Si el *factor de càrrega* ρ del S.E.

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} < 1 \quad C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n & n = 1, 2, \dots, s-1 \\ \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} & n = s, s+1, \dots \end{cases}$$

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot P_0 & n = 1, 2, \dots, s-1 \\ \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} \cdot P_0 & n = s, s+1, \dots \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1-\rho}}$$

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \cdot P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_{s+n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s (\rho)^{s+n-s} P = \dots = 0$$

$$= \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \lambda \cdot W = \lambda \cdot \left(W_q + \frac{1}{\mu} \right) = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Resum del càlcul d'una cua M/M/s (es coneixen λ , μ , s)

$$P_0 \rightarrow L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{P_0 \rho}{(1-\rho)^2} \rightarrow \begin{cases} W_q = \frac{L_q}{\lambda} \\ L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow W = \frac{L}{\lambda} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 P(\{n \geq s\}) &= \sum_{n=s}^{\infty} P_n = \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \rho^{n-s} P_0 = \\
 &= \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{P_0}{1-\rho}
 \end{aligned}$$

Fòrmula C-Erlang

Si $s \rightarrow \infty$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1-\rho}} \rightarrow e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$n \leq s, \quad P_n = C_n P_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \left(\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right)$$

Distribució de Poisson

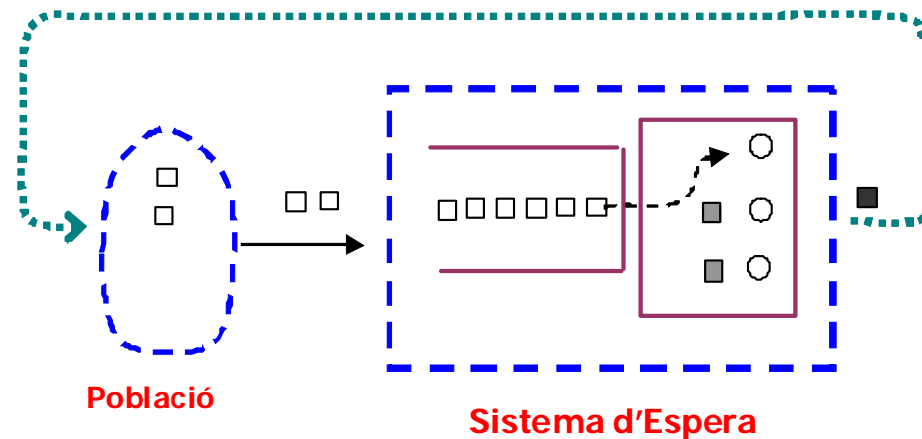
MODEL M/M/s/. /N

S.E. amb població finita (N) que pressuposa:

- Temps de permanència en la població dels clients i.i.d seguint llei exp. de paràmetre λ
- Temps de servei per servidor i.i.d. seguint llei exp. de paràmetre μ .
- Un conjunt de servidors en paral·lel $s > 1$.
- Una població finita de clients limitada al valor N . Com simplificació es suposarà $N > s$.

Es un S.E. tancat: Hi ha sempre N clients (població+S.E.)

Després de sortir del S.E. el client es reintegra a la Població

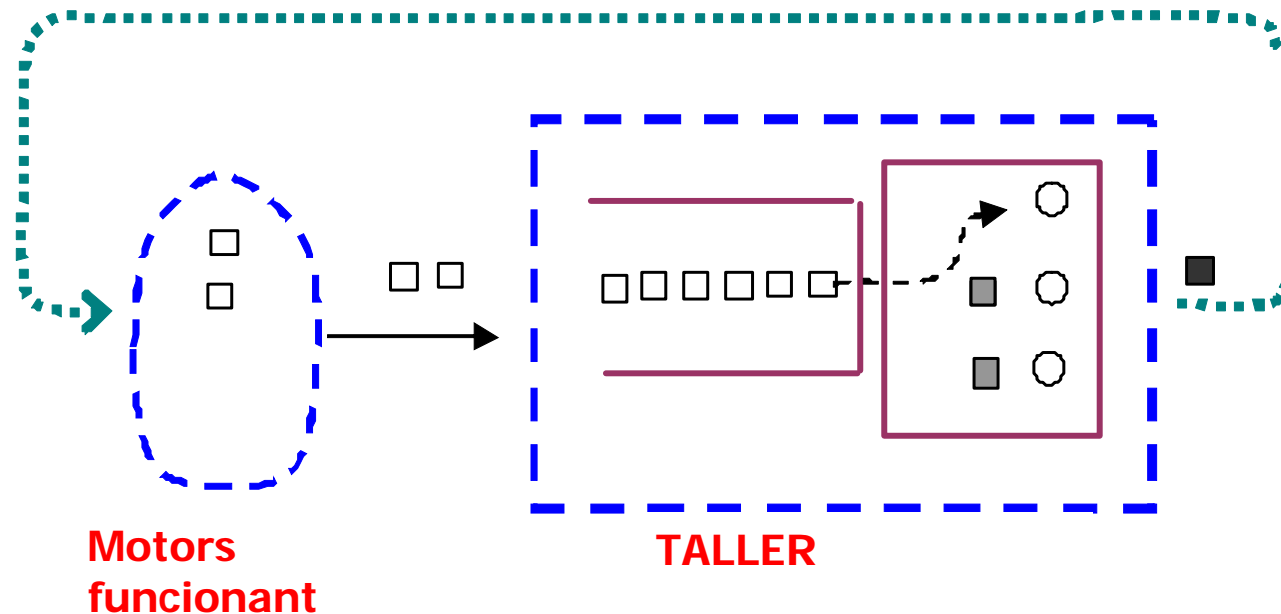


EXEMPLE: TALLER DE REPARACIONS

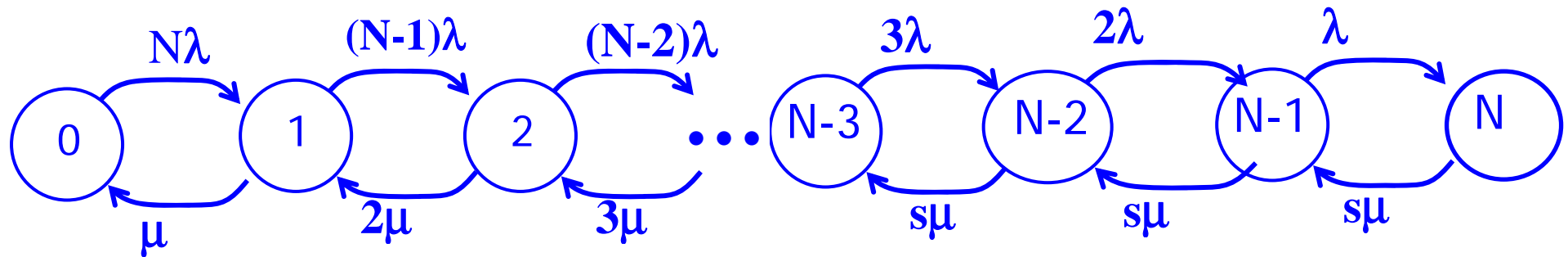
En un taller de reparació de motors hi ha 3 mecànics.

Atenen un conjunt de 12 motors d'una planta.

- Cada mecànic repara un motor en un temps $x \sim \text{exp.}$ $E[x]=1\text{dia.}$
- Després de la reparació un motor es posa en servei immediatament.
- El temps entre avaries d'un motor $\tau \sim \text{exp.}$ $E[\tau]=20\text{ dies.}$



M/M/s/./N: DIAGRAMA DE TAXES



$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & n = 1, 2, \dots, s-1 \\ \frac{N!}{(N-n)!s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} & n = s, s+1, \dots, N \\ 0 & n = N+1, N+2, \dots \end{cases} \quad i \quad C_0 = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^N \frac{N!}{(N-n)!s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}}$$

No es pot aconseguir una expressió analítica compacta i els càlculs amb població finita es fan a partir de taules específiques.

Exemple: La grua dels estibadors

Un port **opera amb una grua** contractada per a cada prestació de servei. La distribució del **número de vaixells que arriba al port** diàriament segueix una llei de Poisson de mitjana **1.4 vaixells per dia**. El **temps mig que triga la grua en descarregar els contenidors és de 4 hores** i s'accepta la hipòtesis de distribució exponencial dels temps de servei. Es demana:

1. El factor de càrrega i el temps mig de desocupació del sistema.
2. El número mig de vaixells en el port i el número mig de vaixells en el port en espera de ser descarregats.
3. El número mig de dies de permanència en el port per vaixell i el número mig de dies de permanència abans de ser descarregat.
4. Quina és la probabilitat de tenir més d'un vaixell esperant ser descarregat?

1. $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1.4}{2} = 0.7$ (dia laborable amb 8 hores ; implica una taxa de servei de 2 vaixells per dia). El percentatge del temps que la grua està inactiva és $P_0 = 1 - \rho = 1 - 0.7 = 0.3$, és a dir el 30% del temps.

2. $L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0.7}{1 - 0.7} = 2.33$ vaixells en el port.

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.7^2}{1-0.7} = 1.63 \text{ vaixells esperant ser descarregats.}$$

$$3. \quad W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2.33}{1.4} = 1.66 \text{ dies de permanència en el port.}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 1.66 - 0.5 = 1.16 \text{ dies esperant ser descarregats.}$$

$$4. \quad \begin{aligned} P(\{n > 2\}) &= 1 - P(\{n \leq 2\}) = 1 - P_0 - P_1 - P_2 = 1 - P_0 - \rho \cdot P_0 - \rho^2 \cdot P_0 \\ &= 1 - (1 - \rho) - \rho \cdot (1 - \rho) - \rho^2 \cdot (1 - \rho) = \rho^3 = 0.7^3 = 0.343 \end{aligned}$$

Terminal de facturació d'equipatge

Un terminal de facturació disposa de 2 operaris que **atenen** als clients que arriben seguint una distribució de Poisson de mitjana **80 clients per hora i esperen en una cua única** fins que hi ha un dels operaris lliure. El temps requerit para atendre un client està distribuït exponencialment amb mitjana 1.2 minuts.

1. Quin és el número esperat de clients en la terminal de facturació?
2. Quin és el temps mig que un client passa a la terminal de facturació?
3. Quin percentatge del temps està lliure un determinat operari?

Model M/M/2

Taxa d'arribades $\lambda = 80$ clients/hora $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{80}{2 \cdot 50} = 0.8$

Taxa de servei *per operari* $\mu = \frac{60}{1.2} = 50$ clients/hora.

$$P_0 \rightarrow L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{P_0 \rho}{(1-\rho)^2} \rightarrow \begin{cases} W_q = \frac{L_q}{\lambda} \\ L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow W = \frac{L}{\lambda} \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{1}{n!} \left(\frac{80}{50}\right)^n + \frac{1}{2!} \left(\frac{80}{50}\right)^2 \frac{1}{1-0.8}} = 0.111$$

$$L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{2!} \left(\frac{8}{5}\right)^2 (0.111) \frac{0.8}{(1-0.8)^2} = 2.84 \text{ clients}$$

1. El número mig de clients en el terminal de facturació és $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 2.84 + \frac{80}{50} = 4.44$ clientes.
2. Un clientes passa en promig en el terminal de facturació $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{4.44}{80} = 0.0555$ hores = 3.33 minuts.
3. $1 \cdot P_0 + 1/2 \cdot P_1 = (1 + 1/2 \cdot C_1) \cdot P_0 = (1 + 1/2 \cdot 8/5) \cdot P_0 = 0.2$



El servei d'urgències d'un hospital

El **servei d'urgències d'un hospital** disposa permanentment d'un metge de guàrdia, però s'han detectat temps de espera desaconsellables en moltes ocasions, de manera que la Direcció de l'Hospital vol **avaluar els beneficis de disposar d'un segon metge de urgències**. La taxa d'arribades de malalts al servei d'urgències es de 1 pacient cada 30 minuts y el temps mig de servei es de 20 minuts per pacient. Determineu els paràmetres ρ, P_0, L_q, L, W_q i W con $s=1$ y $s=2$ metges de guàrdia. Determineu la funció de distribució de probabilitat del temps d'espera fins ser examinat un pacient en ambdues situacions.

En el cas **M/M/1**,

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} ; P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{2/3}{1 - 2/3} = 2 \text{ pacients}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{(2/3)^2}{1 - 2/3} = \frac{4}{3} \text{ pacients}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{1} = 2 \text{ hores} \quad W_q = \rho \cdot W = (2/3) \cdot 2 = \frac{4}{3} \text{ hores}$$

En el cas **M/M/2**, $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$.

$$P_0 \rightarrow L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{P_0 \rho}{(1-\rho)^2} \rightarrow \begin{cases} W_q = \frac{L_q}{\lambda} \\ L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow W = \frac{L}{\lambda} \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{1}{2!} \left(\frac{2}{3} \right)^2 \frac{1}{1-1/3}} = \frac{1}{2}$$

$$L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{2!} \left(\frac{2}{3} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{1/3}{(1-1/3)^2} = \frac{1}{12} \text{ pacients}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \text{ pacients}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \text{ hores} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24} \text{ hores}$$



Exemple: L'assessor fiscal

Un assessor fiscal disposa d'un local per atendre als seus clients, els quals es concentren majoritàriament durant els mesos de maig i juny. **El local té una capacitat màxima de 8 seients en espera**; el client se'n va si no troba un seient lliure, i el **temps entre arribades de clientes** es pot considerar **distribuït exponencialment** segons un paràmetre $\lambda = 20$ **clients** per hora en període punta. **El temps d'una consulta** està distribuït exponencial amb una **mitjana de 12 minuts**,

1. ¿Quantes consultes per hora realitzarà en promig?
2. ¿Quin és el temps mig de permanència en el local?

El model és **M/M/1/9** $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{5} = 4$

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \rho^n \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} & n = 0, 1, 2, \dots, K \\ 0 & n = K+1, K+2, \dots \end{cases} \quad K=9, \quad P_9 = C_9 \cdot P_0 = \rho^9 \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{10}} = 4^9 \cdot \frac{1-4}{1-4^{10}} = 0.75$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \cdot P_n = \lambda \cdot (1 - P_9) = 20 \cdot (1 - 0.75) = 5 \text{ clients/hora}$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} = \frac{4}{1-4} - \frac{10 \cdot 4^{10}}{1-4^{10}} = 8.6 \text{ clients} \quad W = E[W] = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{8.6}{5} = 1.73 \text{ hores.}$$

Model de reparació d'avionetes

Una petita companyia aèria d'una illa de les Antilles disposa de 5 avionetes, que cal reparar con una taxa de 1 cada 30 dies. Es disposen de 2 tècnics de reparacions, cada un dels quals necessita un promig de 3 dies per efectuar una reparació. Els temps entre avaries i de reparació són exponencials.

1. Determinar el número mig d'avionetes en funcionament.
2. Calcular el temps mig que una avioneta està fora de servei quan requereix una reparació.
3. Calcular el percentatge del temps que un determinat tècnic està lliure.

El model és exponencial i de població finita: M/M/2//5. La taxa d'averies és $\lambda = \frac{1}{30}$ avionetes por dia i la taxa de reparacions es $\mu = \frac{1}{3}$ avionetes per dia.

El número mig d'avionetes en funcionament és el número total de avionetes, N , menys el número esperat d'avionetes en reparació, L :

$$N - L = 5 - L = 5 - \sum_{n=0}^N n \cdot P_n.$$

Cal determinar les $P_n = C_n \cdot P_0$ y per això fan falta les C_n y P_0 .

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \begin{cases} \frac{5!}{(5-n)!n!} \left(\frac{1}{10}\right)^n & n = 1 \\ \frac{5!}{(5-n)!2!} \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{1}{2 \cdot 10}\right)^{n-2} & n = 2, \dots, 5 \end{cases} \quad \text{y } C_0 = 1$$

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \frac{5!}{(5-n)!n!} \left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot P_0 & n = 1 \\ \frac{5!}{(5-n)!2!} \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{1}{2 \cdot 10}\right)^{n-2} \cdot P_0 & n = 2, \dots, 5 \end{cases}$$

i	0	1	2	3	4	5
c_i	1	0.5	0.1	0.015	0.0015	0.000075

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^5 C_n} = \frac{1}{1 + 0.5 + 0.1 + 0.015 + 0.0015 + 0.000075} = 0.619$$

i	0	1	2	3	4	5
P_i	0.619	0.310	0.062	0.009	0.001	0.00004

■ $N - L = 5 - L = 5 - \sum_{n=0}^N n \cdot P_n = 5 - 0.465 = 4.535$ avionetes en promig en funcionament.

- El temps mig que una avioneta passa en reparació és W .

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{0.465}{0.151} = 3.08 \text{ dies}$$

$$\text{on } \bar{\lambda} = \lambda \cdot (N - L) = \frac{1}{30} \cdot (5 - 0.465) = \frac{1}{30} \cdot (4.535) = 0.151$$

- La fracció de temps que un determinat tècnic passa inactiu és $P_0 + 0.5 \cdot P_1 = 0.619 + 0.5 \cdot 0.310 = 0.774$.

Microsoft Excel - QTS-MENU.xls [Sólo lectura]

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos S-PLUS Ventana ? Acrobat

Arial 10

A1 =

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		CHAPTER 2:												
2														
3		m-m-1												
4														
5		m-m-1-k												
6														
7		m-m-c												
8														
9		m-m-c-k												
10														
11		m-g-c-c												
12														
13		overflow												
14														
15		m-g-inf												
16														
17		m-m-inf												
18														
19		mr-m-1												
20														
21		mrs-m-1												
22														
23		mrs-m-c												
24														
25		ssdm-m-1												
26														
27		csdm-m-1												
28														
29		mm1 tran												
30														
31														
32														
33														
34														

Chapter1 Chapter2 Chapter3 Chapter4 Chapter5 Chapter6 Chapter7

Listo

23:06

Microsoft Excel - m-m-c.xls [Sólo lectura]

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos S-PLUS Ventana ? Acrobat

Times New Roman 10

A1 = M/M/c -- MULTIPLE SERVERS / UNLIMITED MARKOVIAN QUEUE:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	M/M/c -- MULTIPLE SERVERS / UNLIMITED MARKOVIAN QUEUE:												
2	-----												
3	INPUT VARIABLES:												
4													
5	lambda	6,	Arrival rate (arrivals/unit of time)										
6			[MAKE SURE THAT UNITS MATCH]										
7	st	0,333333	Mean time to complete service										
8													
9	c	3	Number of servers in the system (c > 1)										
10													
11	T	1	Total time horizon for prob plotting										
12													
13	SPREADSHEET DEFAULT							Graph					
14													
15	K	10	Maximum value (K>c) of variable whose probability										
16			is to be plotted (full printout contains 50)										
17			<i>[If K is changed, refresh the probability plot by hitting the above button.]</i>										
18	OUTPUT VARIABLES:												
19													
20	iat	0,166667	Mean interarrival time										
21	mu	3,0	Service rate (# served/unit of time)										
22	r	2,0	Average # arrivals during mean service time										
23	rho	0,666667	Fraction of time each server is busy [MUST BE < 1]										
24	p0	0,111111	Fraction of time all servers are idle										
25													
26	Lq	0,888889	Expected queue size										
27	L	2,888889	Expected system size										
28	Wq	0,148148	Expected waiting time in the queue										
29	W	0,481481	Expected waiting time in the system										
30													
31	n	prob_n	Prob_n		t	Wq(t)							
32	0	0,111111	0,111111		0	0,555556							
33	1	0,222222	0,333333		0,02	0,581438							
34	2	0,222222	0,555556		0,04	0,605813							

m-m-c

Listo

23:07

SESSIÓ DE PROBLEMES: ÚS de QTS_EXCEL

CHAPTER 2:

m-m-1

M/M/1: Single-Server/Unlimited Markovian Queue

m-m-1-k

M/M/1/K: Single-Server/Space-Limited Markovian Queue

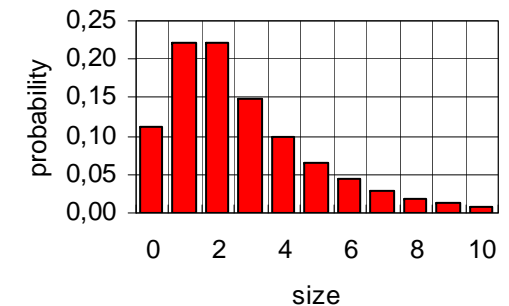
m-m-c

M/M/c: Multiple-Servers/Unlimited Markovian Queue

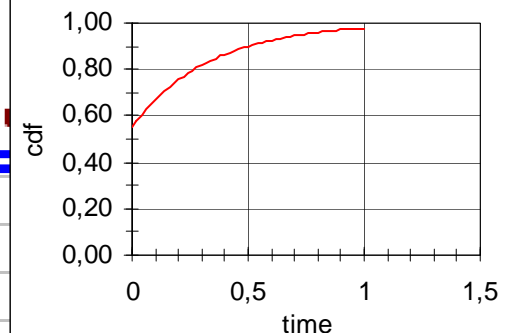
m-m-c-k

M/M/c/K: Multiple-Servers/Space-Limited Markovian Queue

M/M/c system-size probabilities



CDF for M/M/c line waiting times



OUTPUT VARIABLES:

18	OUTPUT VARIABLES:		
19			
20	iat	0,166667	Mean interarrival time
21	mu	3,0	Service rate (# served/unit of time)
22	r	2,0	Average # arrivals during mean service time
23	rho	0,666667	Fraction of time each server is busy [MUST BE < 1]
24	p0	0,111111	Fraction of time all servers are idle
25			
26	Lq	0,888889	Expected queue size
27	L	2,888889	Expected system size
28	Wq	0,148148	Expected waiting time in the queue
29	W	0,481481	Expected waiting time in the system

