Introducció a la Investigació Operativa

Tema 5. Formulació i resolució dels models no lineals d'optimització

Catalina Bolancé
Dept. Econometria, Estadística i Economia Espanyola

Javier Heredia
Dept. Estadística i Investigació Operativa

Objectius específics del Tema 5

Formulació i resolució numèrica:	
5.1	Conèixer i entendre la formulació d'alguns exemples de problemes de Programació No Lineal (**PNL**).
5.2	Davant d'algun Problema de Presa de Decisions (PPD) associat a un problema de (PNL), ser capaç de formular un model **consistent** d'optimització (**paràmetres**, **variables**, **funció objectiu** i **restriccions**), de forma **eficient**, **matemàticament correcta**, **clara** i **parametritzada**.
5.3	Conèixer i entendre les característiques més importants de les solucions dels problemes de programació no lineal (PNL): ubicació de les solucions òptimes sobre la regió factible; **òptims locals-globals**.
5.4	Conèixer i entendre el concepte de **problemes convexos** i la seva relació amb el càlcul d'**òptims globals**.
5.5	Conèixer i entendre la relació entre preus ombra i **multiplicadors de Lagrange**.

Introducció a la PNL

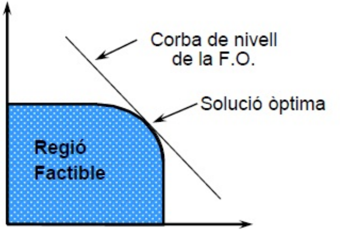
- Un problema de PNL és un problema de programació matemàtica o optimització on la funció objectiu o alguna restricció és no lineal.
- La forma de formular i implementar els problemes de PNL és semblant a la dels problemes de PL.
- Els algorismes d'optimització que s'usen per a resoldre problemes de PNL són força diferents dels usats als problemes de PL.
- L'ús de "*Solver*" amaga aquesta diferència, però és important conèixer les dificultats intrínseques dels problemes de PNL.

Forma general d'un problema de PNL

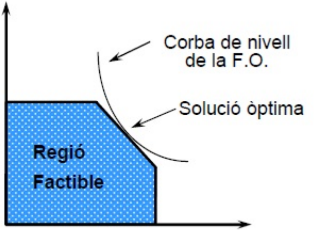
$$
\begin{array}{lrc}
\text{max (o min)} & f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) & (1) \\
\text{Subjecte a:} & f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_1 & (2) \\
 & \vdots & \vdots \\
 & f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b_k & (k) \\
 & \vdots & \vdots \\
 & f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_m & (m)
\end{array}
$$

- $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és diferenciable $\forall j$.
- x_i és contínua $\forall i$.

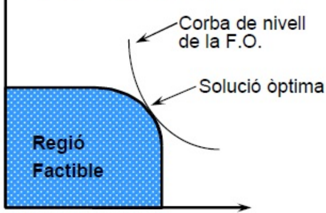
Ubicació de les solucions òptimes sobre la regió factible dels problemes de PNL



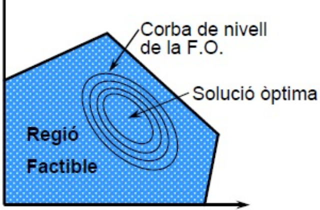
F.O. lineal, constriccions no lineals



F.O. no lineal, constriccions lineals



F.O. no lineal, constriccions no lineals

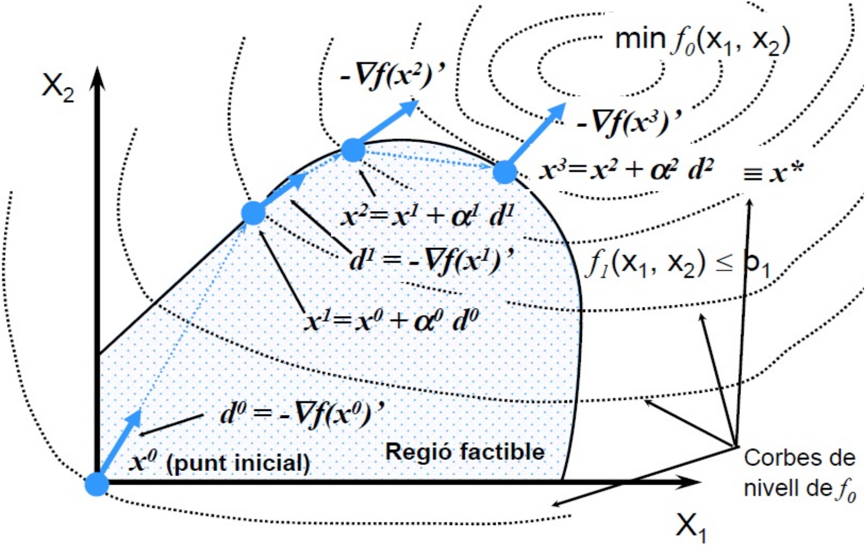


F.O. no lineal, constriccions lineals

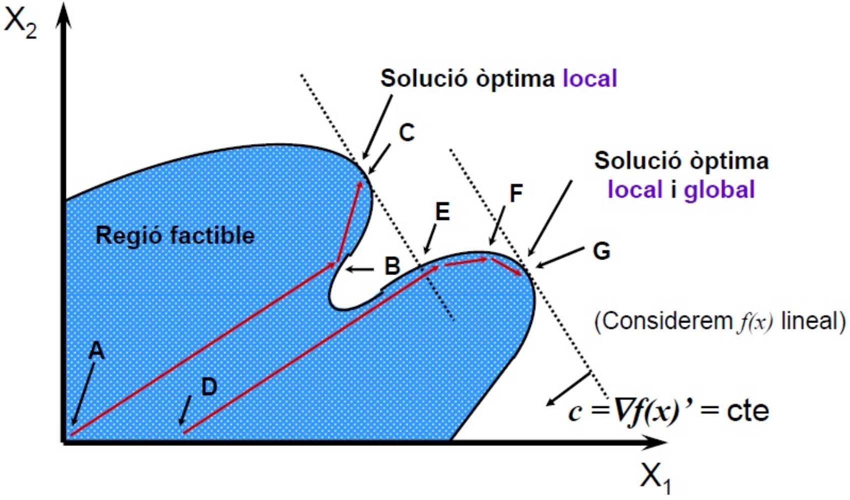
Algorisme **GRG**

- *Solver* usa l'algorisme del **Gradient Reduït Generalitzat** (**GRG**) per a resoldre problemes de PNL.
- **GRG** també es pot usar per a resoldre problemes de PL, però és més lent que el mètode SIMPLEX.
- SAS/OR utilitza diferents algorismes per resoldre problemes de PNL.

Estratègia dels algorismes de PNL



Òptims locals i globals



Condicions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

- Condicions necessàries de 1er. ordre:

  Sigui x^* mínim local de PNL, punt regular, llavors, es pot trobar el vector de multiplicadors de Lagrange, $\lambda \in \Re^m$ (m restriccions d'igualtat $h(\cdot)$) i $\mu \in \Re^l$ (l restriccions de desigualtat $g(\cdot)$) tals que:

  1. $\nabla f(x^*) + {\lambda^*}^T \nabla h(x^*) + {\mu^*}^T \nabla g(x^*) = 0$
  2. ${\mu^*}^T g(x^*) = 0$
  3. $\mu^* \geq 0$

Condició de regularitat

- Condició de regularitat:

  Es diu que el punt factible $x \in X$ és regular si els vectors gradient de les restriccions:

  $$\begin{array}{l} \nabla h_i(x)\,,\ i = 1, 2, \ldots, m \\ \nabla g_j(x)\,,\ j \in J = \{j | g_j(x) = 0\} \end{array}$$

  són linealment independents.

Comentaris sobre els algorismes de la PNL en *Solver*

- Els algorismes de PNL poden acabar en un *òptim local* i, fins i tot, molt excepcionalment, en un **punt estacionari**.
- L'òptim local proporcionat pels algorismes de PNL *depèn del punt inicial* x^0.
- El punt inicial nul $x^0 = [0]$ pot donar problemes amb el programa *Solver*; cal evitar-lo!
- Quan sigui possible, és convenient usar punts inicials que tinguin aproximadament el mateix ordre de magnitud que el valor òptim esperat de les variables.

Comentaris sobre les solucions òptimes *Solver*

El criteri d'aturada de *Solver* per a problemes de PNL depèn de tres tests numèrics. *Solver* s'atura quan un d'aquests tres tests se satisfa, emetent un dels següents missatges:

1. "**Solver found a solution. All constraints and optimality conditions are satisfied**."
   Solver ha trobat una solució òptima local. Si no es té la seguretat que aquesta sigui un òptim global (això passa, per exemple, si $f(x)$ és convexa i la regió factible també), es pot intentar millorar la solució reoptimitzant a partir de diferents punts inicials.
2. "**Solver has converged to the current solution. All constraints are satisfied**."
   La funció objectiu ha canviat molt lentament en les últimes iteracions, però el punt final pot no satisfer les condicions d'optimalitat local. Això pot ser degut a un escalat deficient del problema. Per tal d'intentar evitar que *Solver* convergeixi a una solució subòptima es pot reduir el valor del paràmetre "*Convergence*" de la finestra "*Options*".
3. "**Solver cannot improve the current solution. All constraints are satisfied**."
   Aquest missatge indica que el model és degenerat i *Solver* està iterant ("*cicling*"). La degeneració es pot evitar, sovint, eliminant restriccions redundants.

Problemes de localització

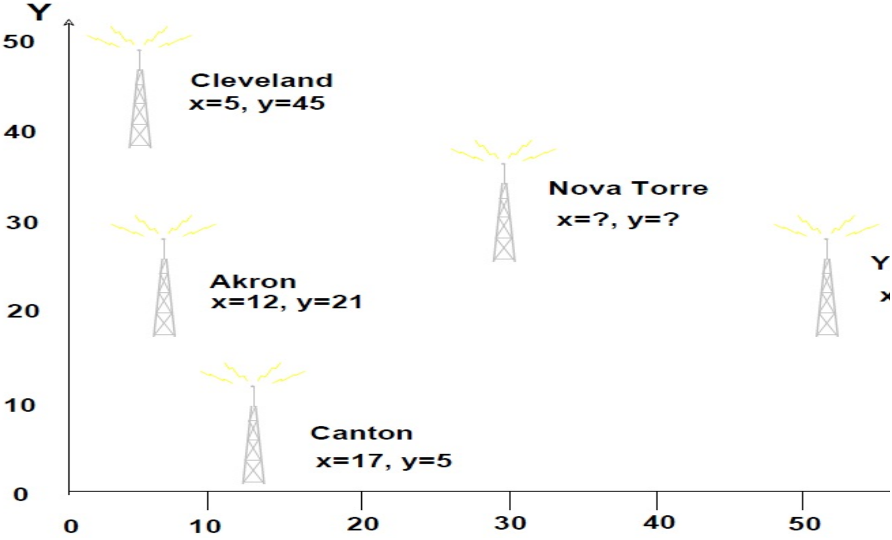
- Molts problemes de decisió impliquen l'obtenció de la localització òptima d'instal·lacions o centres de servei:
  - Plantes de producció
  - Magatzems
  - Estacions de bombers, ambulàncies, helicòpters,...
- Aquests problemes necessiten calcular distàncies entre dos punts (x_1, y_1) i (x_2, y_2), ja sigui a la funció objectiu o a les restriccions:

$$\text{Distància} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Problema de localització: "*Rappaport Communications*"

- *Rappaport Communications* subministra servei de telefonia mòbil a diferents estats.
- Vol ampliar el seu servei a quatre noves ciutats.
- Pot aprofitar les torres de comunicacions ja existents, però n'ha de crear una de nova.
- La nova torre tindrà un radi de transmissió de 40 milles (64.374 km, aprox.).

Problema de localització: Gràfic de localització de les torres



Problema de localització: Variables de decisió i funció objectiu

Es minimitza la distància total des de la nova torre fins a les torres existents:

- Variables de decisió:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{Localització de la nova torre respecte l'eix } X. \\ y_1 &= \text{Localització de la nova torre respecte l'eix } Y. \end{aligned}$$

- Funció objectiu:

$$\min f(x_1, y_1) = \sqrt{(5-y_1)^2 + (45-y_1)^2} + \sqrt{(12-x_1)^2 + (21-y_1)^2} +$$

$$+ \sqrt{(17-x_1)^2 + (5-y_1)^2} + \sqrt{(52-x_1)^2 + (21-y_1)^2}$$

Problema de localització: Definició de les restriccions

Cleveland: $\sqrt{(5 - x_1)^2 + (45 - y_1)^2} \leq 40$

Akron: $\sqrt{(12 - x_1)^2 + (21 - y_1)^2} \leq 40$

Canton: $\sqrt{(17 - x_1)^2 + (5 - y_1)^2} \leq 40$

Youngstown: $\sqrt{(52 - x_1)^2 + (21 - y_1)^2} \leq 40$

Problema de localització: Definició de les restriccions

$$\min\ f\left(x_1, y_1\right) = \sqrt{\left(5 - y_1\right)^2 + \left(45 - y_1\right)^2} + \sqrt{\left(12 - x_1\right)^2 + \left(21 - y_1\right)^2} +$$

$$+ \sqrt{\left(17 - x_1\right)^2 + \left(5 - y_1\right)^2} + \sqrt{\left(52 - x_1\right)^2 + \left(21 - y_1\right)^2}$$

S. a:

$$\sqrt{\left(5 - x_1\right)^2 + \left(45 - y_1\right)^2} \leq 40$$

$$\sqrt{\left(12 - x_1\right)^2 + \left(21 - y_1\right)^2} \leq 40$$

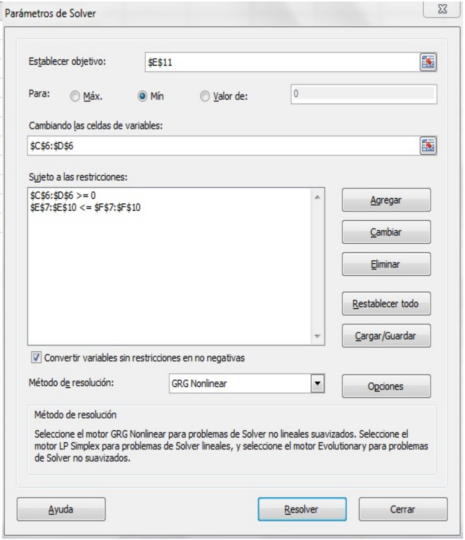
$$\sqrt{\left(17 - x_1\right)^2 + \left(5 - y_1\right)^2} \leq 40$$

$$\sqrt{\left(52 - x_1\right)^2 + \left(21 - y_1\right)^2} \leq 40$$

Problema de localització: Implementació del model amb *Solver*

	A	B	C	D	E	F
1			**RAPPAPORT COMMUNICATIONS**			
2						
3						
4			Coordenades			
5			**X**	**Y**	**Distance**	**Maximum**
6		**Tower**	10	20	**to Tower**	**Allowed**
7		**Cleveland**	5	45	25.4951	40
8		**Akron**	12	21	2.2361	40
9		**Canton**	17	5	16.5529	40
10		**Youngstown**	52	21	42.0119	40
11					86.2960	

Solució inicial



Problema de localització: Solució del model amb *Solver*

Mirar l'arxiu Exemple_T5.xlsx.

	A	B	C	D	E	F
1			RAPPAPORT COMMUNICATIONS			
2						
3						
4			Coordenades			
5			X	Y	Distance	Maximum
6		Tower	12.2001	21.0000	to Tower	Allowed
7		Cleveland	5	45	25.0568	40
8		Akron	12	21	0.2001	40
9		Canton	17	5	16.7045	40
10		Youngstown	52	21	39.7999	40
11					81.7612	

Comentaris sobre els problemes de localització

- La formulació simplificada del problema de localització que hem vist pot no ser vàlida:
  - Pot haver-hi terrenys que no estiguin en venda.
  - Pot haver-hi terrenys on no es pot edificar (llacs,. . .).
- En aquests casos, la solució del model simplificat pot servir de començament per una anàlisi més acurada.
- Es poden afegir restriccions per a eliminar les zones on no es pot edificar.

Programació no lineal amb *SAS/OR*

El procediment que utilitzarem per a resoldre els models de programació no lineal (PNL) és el

PROC NLP

Aquest procediment té incorporat diferents algorismes d'optimització no lineal que es poden classificar en funció del tipus de restriccions del model: lineals o no lineals.

Programació no lineal amb *SAS/OR*

TECH=*name*
TECHNIQUE=*name*

specifies the optimization technique. Valid values for it are as follows:

- CONGRA
  chooses one of four different conjugate gradient optimization algorithms, which can be more precisely specified with the UPDATE= option and modified with the LINESEARCH= option. When this option is selected, UPDATE=PB by default. For $n \geq 400$, CONGRA is the default optimization technique.
- DBLDOG
  performs a version of double dogleg optimization, which can be more precisely specified with the UPDATE= option. When this option is selected, UPDATE=DBFGS by default.
- HYQUAN
  chooses one of three different hybrid quasi-Newton optimization algorithms which can be more precisely defined with the VERSION= option and modified with the LINESEARCH= option. By default, VERSION=2 and UPDATE=DBFGS.
- LEVMAR
  performs the Levenberg-Marquardt minimization. For $n < 40$, this is the default minimization technique for least-squares problems.
- LICOMP
  solves a quadratic program as a linear complementarity problem.
- NMSIMP
  performs the Nelder-Mead simplex optimization method.

Problemes de PNL amb restriccions no lineals

- NONE
  does not perform any optimization. This option can be used
  - to do grid search without optimization
  - to compute and display derivatives and covariance matrices which cannot be obtained efficiently with any of the optimization techniques
- NEWRAP
  performs the Newton-Raphson optimization technique. The algorithm combines a line-search algorithm with ridging. The line-search algorithm LINESEARCH=2 is the default.
- NRRIDG
  performs the Newton-Raphson optimization technique. For $n \leq 40$ and non-linear least-squares, this is the default.
- QUADAS
  performs a special quadratic version of the active set strategy.
- QUANEW
  chooses one of four quasi-Newton optimization algorithms which can be defined more precisely with the UPDATE= option and modified with the LINESEARCH= option. This is the default for $40 < n < 400$ or if there are nonlinear constraints.
- TRUREG
  performs the trust region optimization technique.

Problema de localització: Implementació del model amb *SAS/OR*

```
libname t4 '.';

proc nlp tech=QUANEW;
 min z;
 parms x=0, y=0;
 bounds x>=0, y>=0;
 nlincon c1-c4<=0;
 c1=((5-x)**2+(45-y)**2)**(1/2)-40;
 c2=((12-x)**2+(21-y)**2)**(1/2)-40;
 c3=((17-x)**2+(5-y)**2)**(1/2)-40;
 c4=((52-x)**2+(21-y)**2)**(1/2)-40;
 z=((5-x)**2+(45-y)**2)**(1/2)+((12-x)**2+(21-y)**2)**(1/2)+((17-x)**2+(5-y)**2)**(1/2)+((52-x)**2+(21-y)**2)**(1/2);
run;

proc nlp tech=NMSIMP;
 min z;
 parms x=0, y=0;
 bounds x>=0, y>=0;
 nlincon c1-c4<=0;
 c1=((5-x)**2+(45-y)**2)**(1/2)-40;
 c2=((12-x)**2+(21-y)**2)**(1/2)-40;
 c3=((17-x)**2+(5-y)**2)**(1/2)-40;
 c4=((52-x)**2+(21-y)**2)**(1/2)-40;
 z=((5-x)**2+(45-y)**2)**(1/2)+((12-x)**2+(21-y)**2)**(1/2)+((17-x)**2+(5-y)**2)**(1/2)+((52-x)**2+(21-y)**2)**(1/2);
run;
```

Problema de localització: Implementació del model amb *SAS/OR*

EXECUTAR L'ARXIU DE SAS **Exemple_t5_1.SAS**

Optimització d'una cartera de valors: *Portfolio Optimization*

Un assessor financer vol crear la cartera de valors de risc mínim que asseguri un valor esperat dels guanys de, com a mínim, un 12%. Les dades disponibles són:

	Guanys anuals		
Any	*IBC*	*NMC*	*NBS*
1	11.2%	8.0%	10.9%
2	10.8%	9.2%	22.0%
3	11.6%	6.6%	37.9%
4	−1.6%	18.5%	−11.8%
5	−4.1%	7.4%	12.9%
6	8.6%	13.0%	−7.5%
7	6.8%	22.0%	9.3%
8	11.9%	14.0%	48.7%
9	12.0%	20.5%	−1.9%
10	8.3%	14.0%	19.1%
11	6.0%	19.0%	−3.4%
12	10.2%	9.0%	43.0%
Promig	7.64%	13.43%	14.93%

Matriu de covariància

	IBC	*NMC*	*NBS*
IBC	0.00258	−0.00025	0.00440
NMC	−0.00025	0.00276	−0.00542
NBS	0.00440	−0.00542	0.003677

NBS: valor amb major risc i benefici
IBC: valor amb menor risc i benefici

Optimització d'una cartera de valors: Variables de decisió i funció objectiu

- Variables de decisió:

$$\begin{aligned} p_1 &= \text{ \% del fons invertit en IBC.} \\ p_2 &= \text{ \% del fons invertit en NMC.} \\ p_3 &= \text{ \% del fons invertit en NBS.} \end{aligned}$$

- Funció objectiu. Es minimitza la variància de la cartera (*risc*):

$$\min\ f(p) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\, p_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \sigma_{ij}\, p_i\, p_j$$

$$\sigma_i^2 = \text{ variància de la inversió } i \text{ (diagonal de la matriu de covariància)}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \text{ covariància entre les inversions } i \text{ i } j$$

Optimització d'una cartera de valors: Definició de les restriccions

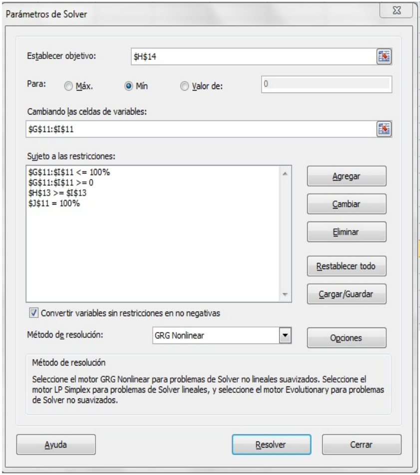
- Valor esperat dels ingressos:

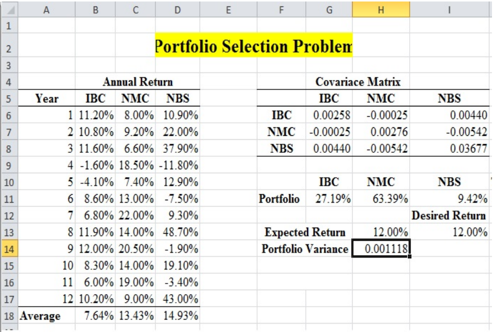
$$0.0764p_1 + 0.1343p_2 + 0.1493p_3 \geq 0.12$$

- Proporcions:

$$\begin{gathered} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1,\ p_2,\ p_3 \geq 0 \\ p_1,\ p_2,\ p_3 \leq 1 \end{gathered}$$

Optimització d'una cartera de valors: Resolució del model





	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2				Portfolio Selection Problem					
3									
4			Annual Return				Covariace Matrix		
5	Year	IBC	NMC	NBS			IBC	NMC	NBS
6	1	11.20%	8.00%	10.90%		IBC	0.00258	-0.00025	0.00440
7	2	10.80%	9.20%	22.00%		NMC	-0.00025	0.00276	-0.00542
8	3	11.60%	6.60%	37.90%		NBS	0.00440	-0.00542	0.03677
9	4	-1.60%	18.50%	-11.80%					
10	5	-4.10%	7.40%	12.90%			IBC	NMC	NBS
11	6	8.60%	13.00%	-7.50%		Portfolio	27.19%	63.39%	9.42%
12	7	6.80%	22.00%	9.30%					Desired Return
13	8	11.90%	14.00%	48.70%		Expected Return		12.00%	12.00%
14	9	12.00%	20.50%	-1.90%		Portfolio Variance		0.001118	
15	10	8.30%	14.00%	19.10%					
16	11	6.00%	19.00%	-3.40%					
17	12	10.20%	9.00%	43.00%					
18	Average	7.64%	13.43%	14.93%					

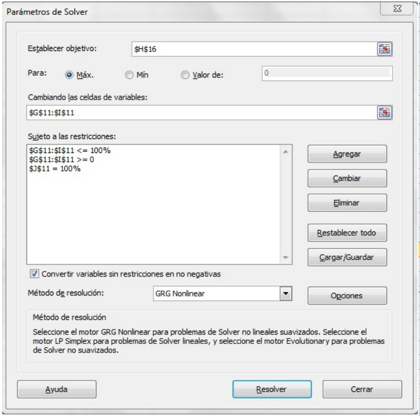
Objectius múltiples en l'optimització d'una cartera de valors

- En aquests problemes sovint es vol, simultàniament:
  - Minimitzar el risc (variància de la cartera).
  - Maximitzar el valor esperat dels ingressos.
- Aquests dos objectius es poden considerar simultàniament, fent:

$$\begin{aligned} \max\ f(x) = \quad & (1-r) \times \text{ Ingressos esperats } -r \times \text{ Variància de la cartera} \\ \text{s.a.:} \quad & p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1 \\ & p_i \geq 0 \end{aligned}$$

- $0 \leq r \leq 1$ és el valor de rebuig del risc (definit per l'usuari):
  - Si $r = 1$, es **maximitza la variància de la cartera**.
  - Si $r = 0$, es **maximitzen els ingressos esperats**.

Resolució del model



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			Portfolio Selection Problem						
3									
4		Annual Return				Covariace Matrix			
5	Year	IBC	NMC	NBS			IBC	NMC	NBS
6	1	11.20%	8.00%	10.90%		IBC	0.00258	-0.00025	0.00440
7	2	10.80%	9.20%	22.00%		NMC	-0.00025	0.00276	-0.00542
8	3	11.60%	6.60%	37.90%		NBS	0.00440	-0.00542	0.03677
9	4	-1.60%	18.50%	-11.80%					
10	5	-4.10%	7.40%	12.90%			IBC	NMC	NBS
11	6	8.60%	13.00%	-7.50%		Portfolio	36.02%	56.92%	7.06%
12	7	6.80%	22.00%	9.30%					Desired Return
13	8	11.90%	14.00%	48.70%		Expected Return		11.45%	12.00%
14	9	12.00%	20.50%	-1.90%		Portfolio Variance		0.0010979	
15	10	8.30%	14.00%	19.10%		Risk Aversion Value		1	
16	11	6.00%	19.00%	-3.40%		Weighted Objective		-0.001098	
17	12	10.20%	9.00%	43.00%					
18	Average	7.64%	13.43%	14.93%					

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			Portfolio Selection Problem						
3									
4		Annual Return				Covariace Matrix			
5	Year	IBC	NMC	NBS			IBC	NMC	NBS
6	1	11.20%	8.00%	10.90%		IBC	0.00258	-0.00025	0.00440
7	2	10.80%	9.20%	22.00%		NMC	-0.00025	0.00276	-0.00542
8	3	11.60%	6.60%	37.90%		NBS	0.00440	-0.00542	0.03677
9	4	-1.60%	18.50%	-11.80%					
10	5	-4.10%	7.40%	12.90%			IBC	NMC	NBS
11	6	8.60%	13.00%	-7.50%		Portfolio	0.00%	0.00%	100.00%
12	7	6.80%	22.00%	9.30%					Desired Return
13	8	11.90%	14.00%	48.70%		Expected Return		14.93%	12.00%
14	9	12.00%	20.50%	-1.90%		Portfolio Variance		0.03677	
15	10	8.30%	14.00%	19.10%		Risk Aversion Value		0	
16	11	6.00%	19.00%	-3.40%		Weighted Objective		0.1493333	
17	12	10.20%	9.00%	43.00%					
18	Average	7.64%	13.43%	14.93%					

Resolució del model

EXECUTAR L'ARXIU DE SAS **Exemple_t5_2.SAS**

Anàlisi de sensibilitat

Nom a PL	**Nom a PNL**	**Significat**
Preu ombra (*shadow price*)	Multiplicadors de Lagrange (*Lagrange Multipliers*)	Valor marginal dels recursos
Cost reduït (*reduced cost*)	Gradient reduït (*reduced gradient*)	Canvi en la funció objectiu provocat per petits canvis del valor òptim de les variables de decisió

- La informació d'anàlisi de sensibilitat és molt menor als problemes de PNL que als de PL.

Comparació entre l'anàlisi de sensibilitat de PL i PNL (I)

- Considerem el problema de l'empresa "*Blue Ridge Hot Tubs*".
- Es resol amb l'algorisme de SIMPLEX i del GRG.

Comparació entre l'anàlisi de sensibilitat de PL i PNL

	A	B	C	D	E	F
1						
2		BLUE RIDGE HOT TUBS				
3						
4	NOM DELS PRODUCTES	Aqua-Spas	Hydro-Luxes	Typhoon-Lagoons		
5	Nombre d'unitats (Producció)	122	78	0	Benefici total	
6	Benefici unitari	$350	$300	$320	$66,100	
7						
8	Renstriccions				Utilitzat	Disponible
9	Bombes	1	1	1	200	200
10	Mà d'obra	9	6	8	1566	1566
11	Canonades	12	16	13	2712	2880
12						

Comparació entre l'anàlisi de sensibilitat de PL i PNL

Microsoft Excel 14.0 Informe de confidencialidad
Hoja de cálculo: [ExempleT4_lineal.xlsx]Hoja1
Informe creado: 26/04/2012 14:18:14

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
B5	Nombre d'unitats (Producció) Aqua-Spas	122	0	350	100	20
C5	Nombre d'unitats (Producció) Hydro-Luxes	78	0	300	50	40
D5	Nombre d'unitats (Producció) Typhoon-Lagoons	0	-13.33333333	320	13.33333333	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
E9	Bombes Utilitzat	200	200	200	7	26
E10	Mà d'obra Utilitzat	1566	16.66666667	1566	234	126
E11	Canonades Utilitzat	2712	0	2880	1E+30	168

SIMPLEX

Microsoft Excel 14.0 Informe de confidencialidad
Hoja de cálculo: [ExempleT4_lineal.xlsx]Hoja1
Informe creado: 26/04/2012 14:18:33

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Degradado
B5	Nombre d'unitats (Producció) Aqua-Spas	122	0
C5	Nombre d'unitats (Producció) Hydro-Luxes	78	0
D5	Nombre d'unitats (Producció) Typhoon-Lagoons	0	-13.33332705

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Lagrange Multiplicador
E9	Bombes Utilitzat	200	200.0000842
E10	Mà d'obra Utilitzat	1566	16.66665641
E11	Canonades Utilitzat	2712	0

GRG

Resolució de problemes de PNL

- L'algorisme del **Gradient Reduït Generalitzat** (GRG) és el procediment matemàtic usat per *Solver* per a resoldre problemes de PNL.
- Per al cas de problemes de PNL *amb restriccions lineals* (*PNLrl*): **Gradient Reduït (GR)**.
- Definim:
  1) La forma estàndard d'un problema de *PNLrl*.
  2) Hipòtesi de no degeneració (*HND*).
- Seguirem l'evolució de l'algorisme del GRG a través del *Solver*.

Modificació del problema "*Blue Ridge Hot Tubs*"

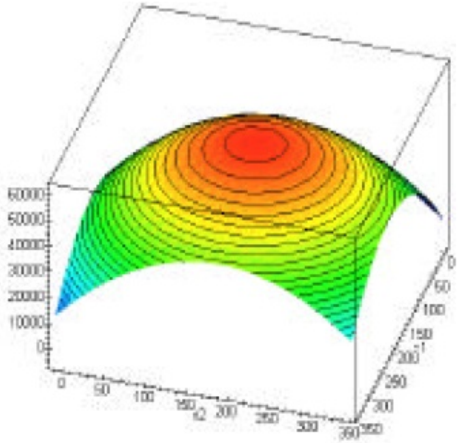
- Considereu que el departament de màrqueting ha detectat un efecte de saturació de mercat que fa que les vendes de jacuzzis disminueixin amb la producció:
  - La taxa de creixement dels beneficis disminueix amb x_1 i x_2.
  - S'ha de reformular la funció objectiu:

$$z = c'x = 350x_1 + 300x_2$$

$$\downarrow$$

$$f(x) = 350x_1 + 300x_2 - 0.875x_1^2 - 0.8x_2^2$$

Modificació del problema "*Blue Ridge Hot Tubs*"



A. Forma estàndard d'un problema *PNLrl*

Forma estàndard d'un problema de PNLrl:

$$(PNLrl) = \begin{cases} \quad min & f(x) \\ s.a.: & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

- Pas a la forma estàndard:

$$max\ f(x) \longrightarrow min\ -f(x)$$

  - La resta, com a PL.

- Exemple: "*Blue Ridge Hot Tubs*"

$$(PNLrl) = \begin{cases} min\ f(x) = & -350x_1 - 300x_2 + 0.875x_1^2 + 0.8x_2^2 \\ s.a.: & x_1 + x_2 + x_3 = 200 \\ & 9x_1 + 6x_2 + x_4 = 1566 \\ & 12x_1 + 16x_2 + x_5 = 2880 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

B. Hipòtesi de no degeneració (I)

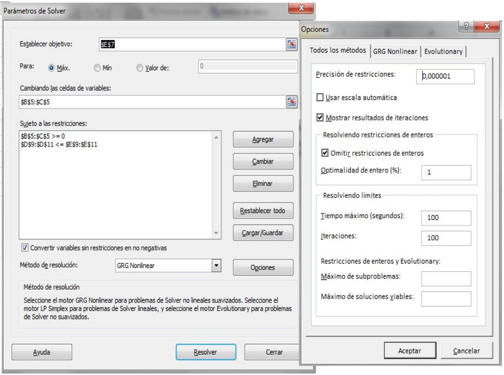
- **Hipòtesi de no degeneració**: Considereu el problema de *PNLrl* en forma estàndard. La hipòtesi de no degeneració considera que, sobre qualsevol vector $x \in \Re^n$ factible, *PNLrl* és possible definir una partició de les components de x en m *variables bàsiques* (x_B) *i* $n - m$ *variables no bàsiques* (x_N) de forma que:
  - La matriu bàsica B associada a x_B és no singular.
  - Les variables bàsiques NO estan a fita inferior: $x_B > 0$.

Mètode del GR

- El mètode del GR és un algorisme que permet resoldre problemes de *PNLrl* en forma estàndard basant-se en la següent estratègia:
  1. Es troba una solució factible inicial x (solució actual).
  2. Es determina si la solució actual x correspon a la solució òptima. Si és així, haurem resolt el problema.
  3. Si x no és la solució òptima, cal trobar, si existeix, una nova solució factible que millori el valor de la funció objectiu, i es considera aquesta com a nova solució actual:
     1. Càlcul d'una direcció factible i de descens: Δx
     2. Exploració lineal: α^*
     3. Actualització de la solució actual: $x = x + \alpha^* \Delta x$
     4. Anada a *2.*

L'algorisme del Gradient Reduït: Resolució amb *Solver* (I)

	A	B	C	D	E
1					
2		BLUE RIDGE HOT TUBS			
3					
4	NOM DELS PRODUCTES	Aqua-Spas	Hydro-Luxes		
5	Nombre d'unitats (Producció)	0	0		Benefici total
6	Benefici unitari	$350	$300	$0	
7	Efecte quadràtic	-0.875	-0.8	$0	$0
8	Renstriccions			Utilitzat	Disponible
9	Bombes	1	1	0	200
10	Mà d'obra	9	6	0	1566
11	Canonades	12	16	0	2880
12					



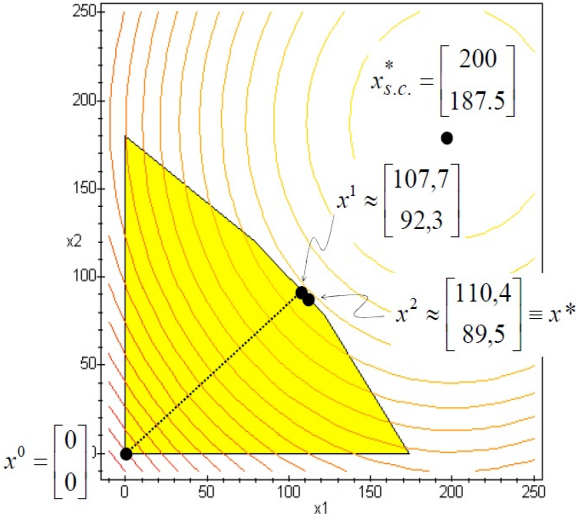
L'algorisme del Gradient Reduït: Resolució amb *Solver* (II)

	A	B	C	D	E
1					
2		BLUE RIDGE HOT TUBS			
3					
4	NOM DELS PRODUCTES	Aqua-Spas	Hydro-Luxes		
5	Nombre d'unitats (Producció)	107.69231	92.30769231		Benefici total
6	Benefici unitari	$350	$300	$65,385	
7	Efecte quadràtic	-0.875	-0.8	-$16,964	$48,420
8	Renstriccions				
9	Bombes				
10	Mà d'obra				
11	Canonades				
12					

	A	B	C	D	E
1					
2		BLUE RIDGE HOT TUBS			
3					
4	NOM DELS PRODUCTES	Aqua-Spas	Hydro-Luxes		
5	Nombre d'unitats (Producció)	110.44776	89.55223881		Benefici total
6	Benefici unitari	$350	$300	$65,522	
7	Efecte quadràtic	-0.875	-0.8	-$17,090	$48,433
8	Renstriccions			Utilitzat	Disponible
9	Bombes	1	1	200	200
10	Mà d'obra	9	6	1531.343284	1566
11	Canonades	12	16	2758.208955	2880

L'algorisme del Gradient Reduït: Resolució amb *Solver* (III)

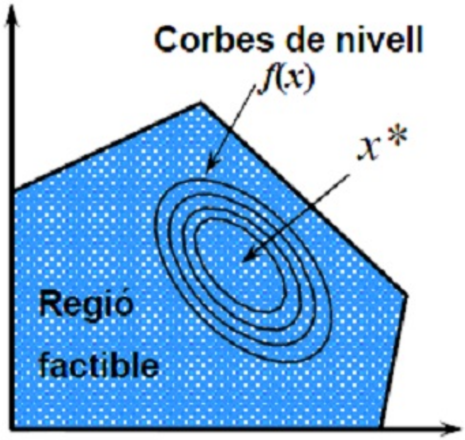
- Representació gràfica:



Convexitat

- L'algorisme del **GRG** que implementa *Solver* només assegura trobar **punts extrems**:
  - Convergeix a un punt que satisfa les condicions necessàries de 1er. ordre de mínim local (condicions de Karush-Kuhn-Tucker).
- **Convexitat**: tot punt extrem és mínim global si el problema de PNL és **convex**; és a dir, si:
  - La funció objectiu $f(x)$ és convexa.
  - El conjunt factible X és convex.
- Exemple: minimització d'una funció quadràtica definida positiva sobre un poliedre.

Convexitat



Solució amb SAS/OR del problema "*Blue Ridge Hot Tubs*" modificat

EXECUTAR L'ARXIU DE SAS **Exemple_t5_RHT.SAS**