UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

PRIMER CONTROL DE TEORIA
Programació Lineal i Entera, curs 2014-15
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM :

	Temps estimat	Punts	Puntuació
Test	15min	2 pt	
Exercici 1	75min	a) 2pt	
		b) 2pt	
		c) 2pt	
		d) 2pt	
Total	90min	10 pt	

- **Prohibida la presència de mòbils durant la prova.**
- **Copiar o facilitar la còpia implica suspendre el control.**

TEST (2 punts / 15min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a), b)** i **c)** si és certa (**Si**) o falsa (**No**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. El vector $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda^i x^i$, amb x i $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda^1, \dots, \lambda^k \in \mathbb{R}$, és combinació convexa de $x^1, \dots, x^k$ si:

a) **Si** / **No** Si x pertany a l'embolcall convex de $x^1, \dots, x^k$. (S)
b) **Si** / **No** Si $\lambda^i \geq 0$. (N)
c) **Si** / **No** Si $\sum_{i=1}^{k} \lambda^i = 1$. (N)

TEST 2. Els políedres no buits en forma estàndard:

a) **Si** / **No** Poden no contenir cap punt extrem. (N)
b) **Si** / **No** No contenen bases degenerades. (N)
c) **Si** / **No** Sempre contenen alguna línia. (N)

TEST 3. Tot punt extrem d'un políedre:

a) **Si** / **No** Sempre té associada alguna solució bàsica factible. (S)
b) **Si** / **No** Sempre té associada una única solució bàsica factible. (N)
c) **Si** / **No** Pot tenir associada més d'una solució bàsica factible. (S)

TEST 4. Considereu y i x s.b.f. adjacents no degenerades i la seva relació $y = x + \theta^* d$

a) **Si** / **No** d és una direcció factible. (S)
b) **Si** / **No** d és una direcció bàsica factible. (S)
c) **Si** / **No** d és una direcció bàsica factible de descens. (N)

TEST 5. Sigui P un políedre no buit en forma estàndard, i sigui x s.b.f. de P amb costos reduïts $r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N$. Llavors:

a) **Si** / **No** Si x és òptima $\Rightarrow$ $r \geq 0$. (N)
b) **Si** / **No** Si $r = 0 \Rightarrow x$ no és òptima.(N)
c) **Si** / **No** Si $r > 0 \Rightarrow x$ és òptima. (S)

TEST 6. La longitud de pas θ^* de l'algorisme del símplex aplicat a un problema (PL) qualsevol

a) **Si** / **No** Pot ser negativa. (N)
b) **Si** / **No** Pot ser més gran o igual que zero. (N)
c) **Si** / **No** Sempre serà més gran o igual que zero. (S)

NOM :

EXERCICI 1. (8 punts / 75min / amb transparències de teoria i calculadora)

Considereu el següent problema de programació lineal: $(PL)\begin{cases} \min & c_1x_1 & +c_2x_2 & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \leq 0 \\ & x_1 & +x_2 & \geq 2 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0 \end{cases}$

a) **(2 punts)** Trobeu totes les solucions bàsiques ($\mathcal{B}$ i x_B) indicant, per cadascuna d'elles, si és factible i/o degenerada.

Resposta:

$\mathcal{B}$	x_B	**Factible?**	**Degenerada?**

b) **(2 punts)** Considereu ara que el vector de termes independents és $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Trobeu el valor de b_1 que fa que totes les solucions bàsiques factibles de problema (PL) siguin degenerades (us pot ajudar la representació gràfica del políedre).

Resposta:

c) **(2 punts)** Trobeu quina condició han de complir les components c_1 i c_2 per tal de poder assegurar que el problema (PL) no té solució òptima.

Resposta:

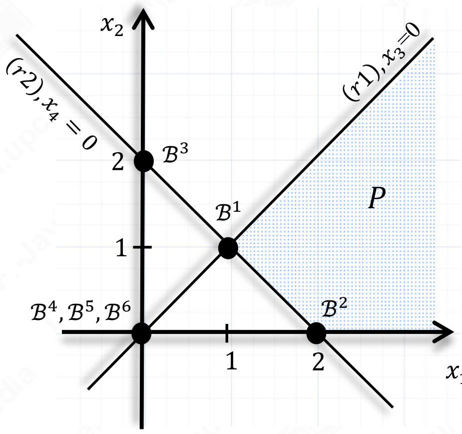
d) **(2 punts)** Trobeu la solució òptima quan $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ amb l'algorisme del símplex de les dues fases introduint una única variable artificial a la fase I.

Resposta:

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

Apartat a)

$$(PL)_e \begin{cases} \min & c_1x_1 & +c_2x_2 & & & \\ s.a.: & & & & & \\ (r1) & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 0 \\ (r2) & x_1 & +x_2 & & -x_4 & = 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

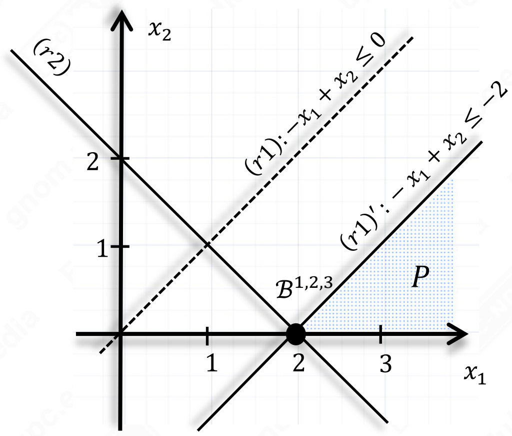


$\mathcal{B}$	x_B	Factible?	Degenerada?
$\mathcal{B}^1 = \{1,2\}$	$x_B^1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	Sí	No
$\mathcal{B}^2 = \{1,3\}$	$x_B^2 = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \leftarrow (r1): x_3 = x_1$	Sí	No
$\mathcal{B}^3 = \{2,3\}$	$x_B^3 = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} \leftarrow (r1): x_3 = -x_2$	No	No
$\mathcal{B}^4 = \{1,4\}$	$x_B^4 = \begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix} \leftarrow (r2): x_4 = x_1 + x_2 - 2$	No	Sí
$\mathcal{B}^5 = \{2,4\}$	$x_B^5 = \begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$	No	Sí
$\mathcal{B}^6 = \{3,4\}$	$x_B^6 = \begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$	No	Sí

Apartat b)

Modificar $b_1 = -x_1 + x_2$ equival a representar una nova inequació $(r1)'$ "paral·lela" a $(r1)$. Sabem que les s.b.f. degenerades d'un políedre en $\mathbb{R}^2$ es poden identificar perquè sobre elles intersequen les rectes de més de dues constriccions. Observant la representació gràfica veiem que per tal de que el nou políedre tingui totes les s.b.f. degenerades cal fer passar la recta associada a $(r1)'$ pel punt $x = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \Rightarrow b_1 = -2 + 0 = -2$. Llavors P tindria 3 s.b.f. degenerades:

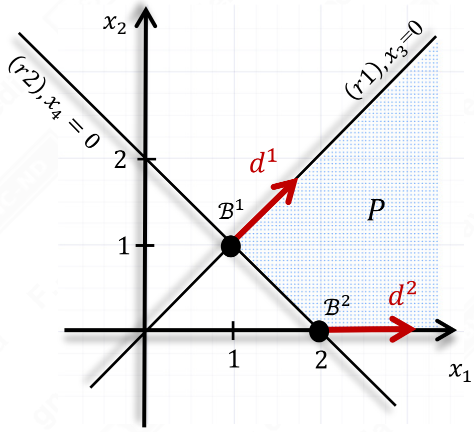
$$\left.\begin{matrix} \mathcal{B}^1 = \{1,2\} \\ \mathcal{B}^2 = \{3,2\} \\ \mathcal{B}^3 = \{4,2\} \end{matrix}\right\} \to x_B^{1,2,3} = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$$



Un altre forma de procedir, més complicada però vàlida, seria expressar el valor de les sis solucions bàsiques trobades a l'apartat anterior en funció de b_1 (per exemple, $x_B^1(b_1) = [B^1]^{-1}\begin{bmatrix}b_1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-b_1/2+1\\b_1/2+1\end{bmatrix}$, $x_B^2(b_1) = [B^2]^{-1}\begin{bmatrix}b_1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\b_1+2\end{bmatrix}$) i observar que per $b_1 = -2$ totes les s.b. que són factibles tenen alguna component nul·la.

Apartat c)

Per tal que (PL) no tingui solució òptima cal que sigui il·limitat. (PL) serà il·limitat alguna de les direccions bàsiques factibles d^1 i d^2 (veure gràfica adjunta) són de descens:



- $d^1 \colon \mathcal{B}^1 = \{1,2\}$

$$d_B^1 = -B^{-1}A_4 = -\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$c'd^1 = c_4 + c_B^{1\prime} d_B^1 = 0 + [c_1 \quad c_2]\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} < 0$$

$$\rightarrow \boxed{c_1 + c_2 < 0}$$

- $d^2 \colon \mathcal{B}^2 = \{1,3\}$

$$d_B^2 = -B^{-1}A_4 = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c'd^2 = c_4 + c_B^{2\prime} d_B^2 = 0 + [c_1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{c_1 < 0}$$

Així doncs, si $c_1 + c_2 < 0$ o $c_1 < 0 \Rightarrow (PL)$ no tindrà solució òptima.

Apartat d)

$$(PL)_I \begin{cases} \min & z_I = x_5 \\ s.a.: \\ (r1) & -x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \qquad\qquad\qquad = 0 \\ (r2) & x_1 \quad +x_2 \qquad\qquad -x_4 \quad +x_5 \quad = 2 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \quad \geq 0 \end{cases}$$

1a iteració fase I:

- $\mathcal{B} = \{3,5\}, B = I, x_B = [0 \quad 2]', \mathcal{N} = \{1,2,4\}, z_I = 2$
- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0] - [0 \quad 1] I \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [-1 \quad -1 \quad 1] \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q = 1}$$

- Direcció bàsica de descens : $d_B = -B^{-1}A_1 = -I\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. v.b. de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i=2}\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\} = \min\left\{-\frac{2}{-1}\right\} = 2 \Rightarrow \boxed{p = 2, B(2) = 5}$
- Actualitzacions i canvi de base :
  - $x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \coloneqq x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 = \theta^* = 2, x_2 = x_4 = 0,\ z_I \coloneqq z_I + \theta^* r_q = 2 + 2 \times (-1) = 0$
  - $\mathcal{B} \coloneqq \{3,1\},\ \mathcal{N} \coloneqq \{2,4,5\}$.

2a iteració fase I:

- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0 \quad 1] - [0 \quad 0] B^{-1} A_N = [0 \quad 0 \quad 1] \geq 0$$

- Hem assolit l'òptim de la fase I havent eliminat totes les variables artificials de la base: $\mathcal{B} = \{3,1\}$ s.b.f. inicial del problema $(PL)_e$.

1a iteració fase II:

- $\mathcal{B} = \{3,1\}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_B = [2 \quad 2]', \mathcal{N} = \{2,4\}, z = 2$
- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [1 \quad 0] - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \geq 0 \rightarrow \boxed{òptima}$$