Àlgebra lineal. Curs 2015-2016

Llista 2. Matrius (primers càlculs).

1. Trobeu la forma normal d'Hermite i el rang de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 10 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix} \quad , \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Trobeu AB^t, B^tA, A^tB i BA^t, on les matrius A i B són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Utilitzeu el mètode de Gauss per a calcular el rang de les matrius següents,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 10 & 20 \\ 30 & 20 & 40 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 13 & -30 & -49 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 & 1 \\ -9 & 2 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & -6 \\ -5 & -10 & 9 & -15 \\ -6 & -12 & 27 & -18 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & -6 \\ -5 & -10 & 9 & -15 \\ -6 & -12 & 12 & -19 \end{pmatrix},$$

4. Discutiu els sistemes d'equacions següents en funció dels valors dels paràmetres **a** i **b**. Calculeu la solució quan sigui possible.

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & \mathbf{a}z & = & 1 \\ x & - & \mathbf{a}y & + & z & = & -1 \\ x & + & \mathbf{a}y & + & z & = & \mathbf{b} \end{array} \right. \qquad \text{b)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{a}x & + & y & + & \mathbf{a}z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & \mathbf{b} \\ \mathbf{a}x & + & (\mathbf{a}-1)y & - & z & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\text{c)} \left\{ \begin{array}{llllll} x & +y & +\mathbf{a}z & = & \mathbf{b} \\ -x & -\mathbf{a}y & -z & = & 2 \\ x & +\mathbf{a}y & +\mathbf{b}z & = & -2 \end{array} \right. \qquad \text{d)} \left\{ \begin{array}{lllll} x & +\mathbf{a}\,y & -z & = & 1 \\ -\mathbf{a}\,x & -y & +(2+\mathbf{a})\,z & = & 2-\mathbf{a} \\ -x & -\mathbf{a}\,y & -\mathbf{a}\,z & = & \mathbf{b}. \end{array} \right.$$

$$\text{e)*} \left\{ \begin{array}{lllll} x & +y & +\mathbf{a}z & = & 1 \\ x & -\mathbf{a}y & +z & = & -1 \\ x & +\mathbf{a}y & +z & = & \mathbf{b} \end{array} \right. \qquad \text{f)*} \left\{ \begin{array}{lllll} \mathbf{a}\,x & +y & +\mathbf{a}\,z & = & 1 \\ x & -y & +z & = & \mathbf{b} \\ \mathbf{a}\,x & +(\mathbf{a}-1)y & -z & = & -1. \end{array} \right.$$

5. Trobeu els següents productes de matrius:

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & -4 \\ -9 & 7 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

6. Trobeu $A \cdot B$ i $B \cdot A$, on A i B són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

7. Donades les matrius A i B, expliqueu perquè cal que siguin matrius quadrades per a poder fer l'operació $(A+B)^2$.

Indiqueu perquè en general $(A+B)^2 \neq A^2 + 2A \cdot B + B^2$.

8. Demostreu que la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

verifica una equació del tipus $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, determinant α i β. Utilitzeu aquest resultat per a trobar la matriu inversa de A.

9. Donada una matriu quadrada A, demostreu que $A + A^t$ és una matriu simètrica.Proveu que tota matriu quadrada es pot descompondre com a suma d'una matriu simètrica i una anti-simètrica; és única aquesta descomposició?

10. Trobeu la forma d'Hermite reduïda per files de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

trobeu una matriu B tal que

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proveu que no existeix cap matriu C tal que

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Donada la matriu A

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & a & b \end{pmatrix}.$$

- Trobeu una matriu B tal que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & b+a+3 \\ 1 & a & 1 & 1 & b+a+3 \\ 1 & 1 & a & 1 & b+a+3 \\ 1 & 1 & 1 & a & b+a+3 \end{pmatrix}.$$

- Si $b+a+3 \neq 0$ trobeu una matriu C tal que

$$A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}.$$