UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH Departament d'Estadística i Investigació Operativa	**PROVA DE TEORIA AVALUACIÓ FINAL/ÚNICA** Programació Lineal i Entera, curs 2012-13 2on curs Grau en Estadística UB-UPC
NOM ALUMNE:	

	Temps estimat	Punts	Correcció	Material d'ajut.
Test	30min	2.0 pt		Cap.
Exercici 1a	75min	5.0 pt		Amb transparències de teoria i calculadora.
Exercici 1a	45min	3.0 pt		
Total	150min	10 pt		

TEST (2 punts / 30 min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a), b)** i **c)** si és certa (**Sí**) o falsa (**No**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n | \; Ax = b, x \geq 0\}$:

a) Sí / No Es pot assegurar que és un poliedre. - S

b) Sí / No Es pot assegurar que és un politop. - N

c) Sí / No Expressa de la regió factible de qualsevol problema de programació lineal. - S

TEST 2. Al simplex primal el criteri de selecció de la v.b. de sortida

$$\theta^* = \min_{i=1,\dots,m | d_{B(i)}<0} \{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\}$$

Cal per assegurar que:

a) Sí / No El problema no és il·limitat. - N

b) Sí / No Es produeix el màxim decrement de la funció objectiu. - N

c) Sí / No Es conserva la factibilitat dual de la base. - S

TEST 3. Considerem la forma estàndard del següent problema (PL) $\min_{x\in\mathbb{R}^2}\{-2x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 1 \,;x_1 \geq 0 \,;\; x_2 \geq 1\}$ i la s.b.f. $x = [0,1]'$ amb $\mathcal{B}^* = \{2,3\}$:

a) Sí / No $\mathcal{B}$ no és òptima perquè $r \ngeq 0$. – S.

b) Sí / No $\mathcal{B}$ és òptima però $r \ngeq 0$ - N.

c) Sí / No $\mathcal{B}$ no és òptima perquè el problema és il·limitat. –N.

TEST 4. Donades y i x s.b.f. adjacents no degenerades, la relació $c'y = c'x + \theta^* r_q$:

a) Sí / No Indica que $c'y < c'x$ si $\theta^* < 0$.- N (impossible, $\theta^* \geq 0$)

b) Sí / No Indica que $c'y < c'x$ si $r_q < 0$.- S

c) Sí / No Indica que la direcció $d = y - x$ és factible. – N (és cert que d és factible, pero no té cap relació amb l'expressió)

TEST 5. Quan apliquem el símplex primal de `SAS/OR`, l'opció `pricetype`:

a) Sí / No Permet controlar el procediment de taxació. – S.

b) Sí / No Permet controlar el procediment de selecció de la v.n.b. d'entrada a la base. – S.

c) Sí / No Permet controlar el procediment de selecció de la v.b. de sortida de la base. – N.

TEST 6. El signe de les variables duals associades al següent problema primal

$$(PL)\begin{cases} \max & -x_1 & -3x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \leq 2 \\ & 2x_1 & +x_2 & = 3 \\ & -x_1 & & \geq 4 \end{cases}$$

a) **Sí / No** És : λ_1 lliure, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \leq 0$. – N.

b) **Sí / No** És : $\lambda_1 \leq 0$, λ_2 lliure, $\lambda_3 \geq 0$. – N.

c) **Sí / No** És : $\lambda_1 \geq 0$, λ_2 lliure, $\lambda_3 \leq 0$. – S.

TEST 7. Indiqueu si les següents combinacions (P)-(D) son possibles (Si) o impossibles (No):

a) **Sí / No** (P) òptim – (D) il·limitat. – N.

b) **Sí / No** (P) òptim – (D) infactible. – N.

c) **Sí / No** (D) il·limitat – (P) infactible. – S.

TEST 8. Si volem trobar la solució òptima d'un problema (P) no degenerat en forma estàndard a partir d'una base $\mathcal{B}$ no òptima, l'algorisme que hem d'aplicar és:

a) **Sí / No** El símplex dual si $r \geq 0$. – S.

b) **Sí / No** El símplex primal si $r \ngeq 0$. – S.

c) **Sí / No** El símplex primal si $x_B \leq 0$. – N.

TEST 9. El preu ombra λ_j d'un problema (P) qualsevol:

a) **Sí / No** És el canvi en la funció objectiu per increment unitat del terme b_j. – S.

b) **Sí / No** Augmenta sempre a mida que augmenta b_j. – N.

c) **Sí / No** Disminueix sempre a mida que augmenta b_j. – N.

TEST 10. Donat un problema de programació lineal entera (PE) de minimització i la seva relaxació lineal (RL) es satisfà:

a) **Sí / No** $KPE \supseteq KRL$. – N.

b) **Sí / No** $z_{RL}^* \leq z_{PE}^*$. – S.

c) **Sí / No** (PE) només té solució òptima si KRL és un polítop. – N.

TEST 11. La formulació ideal (PEI) d'un problema de programació lineal entera (PE):

a) **Sí / No** Té la mateixa solució òptima que (PE). – S.

b) **Sí / No** Tots els punts extrems KRLI pertanyen a KPE. – S.

c) **Sí / No** És la formulació vàlida de (PE) que s'obté en finalitzar l'algorisme de plans de tall de Gomory. – N.

TEST 12. El tall de Gomory $x_{B(i)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor x_{B(i)}^* \rfloor$ associat a (PE) i x_{RL}^*és una constricció de desigualtat:

a) **Sí / No** Que no satisfà x_{RL}^*. – S.

b) **Sí / No** Que no satisfà x_{PE}^*. – N.

c) **Sí / No** Que defineix una formulació ideal de (PE). – N.

TEST 13. Quan apliquem un algorisme de Branch&Cut a un problema de (PE):

a) **Sí / No** Les fites z_{PEi}^* són, en general, millors que les que s'obtenen amb el Branch and Bound. – S.

b) **Sí / No** Els criteris de ramificació son diferents als de l'algorisme de Branch&Bound. – N.

c) **Sí / No** Sempre realitzarà un nombre d'iteracions igual o inferior a les del Branch&Bound. – N (usualment sí, no sempre)

EXERCICI 1. (5 punts / 1h 15min / amb transparències de teoria i calculadora)

Considereu el següent codi **OPTMODEL** d'un problema de programació lineal (P) i la seva solució:

```
proc optmodel;
var X{1..3} >=0;

min Z =    X[1]          +   X[3];

con C1:    X[1]          + 2*X[3] <=  4;
con C2:  4*X[1] - 5*X[2]          = 10;

solve;
print X.sol X.rc;
print C1.body C1.dual C2.body C2.dual;
```

[1]	X.SOL	X.RC
1	2.50	0.00
2	0.00	1.25
3	0.00	1.00

C1.BODY	C1.DUAL	C2.BODY	C2.DUAL
2.5	0	10	0.25

a) **(1. punt)** Indiqueu, raonadament, quantes solucions bàsiques té el problema (P) i quines variables les formen. Amb l'ajut de la sortida de SAS identifiqueu quina és la s.b.f. òptima.

b) **(1.5 punts)** Trobeu l'òptim de (P) amb l'algorisme del símplex de les dues fases.

c) **(1.5 punts)** Formuleu el problema dual (D) i ressoleu-lo gràficament. Comproveu que la solució òptima coincideix amb els preus ombra λ^* trobats a l'apartat b) i amb els valors que proporciona SAS.

d) **(1. punt)** Indiqueu quin és el valor mínim del terme b_1 que conserva l'optimalitat de la base trobada per SAS. Amb l'ajut del símplex dual indiqueu quina és la solució òptima de (P) si b_1 es redueix per sota d'aquest valor mínim. Expliqueu com hauríem pogut arribar a la mateixa conclusió analitzant gràficament com afecta a la solució òptima del problema dual el canvi en b_1 per sota del valor mínim.

EXERCICI 2. (3 punts / 45min / amb transparències de teoria i calculadora)

Considereu el següent problema de programació lineal entera (PE1):

$$
(PE)\begin{cases}
\min & -x_1 & -x_2 & \\
\text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \leq 1 \\
 & 2x_1 & +x_2 & \leq 1 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0,\ \text{enteres}
\end{cases}
$$

a) **(2 punts)** Trobeu la solució òptima de (PE) amb l'algorisme de ramificació i tall (*Branch* & Cut) aplicat seguint les indicacions:

- Ressoleu els problemes relaxats **gràficament**.
- Introduïu **un tall de Gomory** a cada node de l'arbre d'exploració..
- Trieu com a variable de generació del tall i de ramificació $\boldsymbol{x_1}$ **abans que** $\boldsymbol{x_2}$.
- Exploreu **primer la branca de l'esquerra** ($x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$).

b) **(1 punt)** Expliqueu quina és la millora que s'obté en aplicar l'algorisme de B&C al problema (PE) en relació a l'aplicació de l'algorisme de B&B comparant els respectius arbres d'exploració.

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

a) Formaran una base qualsevol conjunt de dues variables $\mathcal{B}=\{B(1),B(2)\}$ amb matriu associada $B=[A_{B(1)} \quad A_{B(2)}]$ no singular:

1. $\mathcal{B}=\{1,2\}, B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & -5\end{bmatrix}$ no singular $\Rightarrow$ base.
2. $\mathcal{B}=\{1,3\}, B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ no singular $\Rightarrow$ base.
3. $\mathcal{B}=\{1,4\}, B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ no singular $\Rightarrow$ base.
4. $\mathcal{B}=\{2,3\}, B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -5 & 0\end{bmatrix}$ no singular $\Rightarrow$ base.
5. $\mathcal{B}=\{2,4\}, B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & 0\end{bmatrix}$ no singular $\Rightarrow$ base.
6. $\mathcal{B}=\{3,4\}, B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ singular $\Rightarrow$ no forma base.

Així doncs, hem obtingut 5 bases (fixeu-vos que l'enunciat només demana quines variables formen la base, no el seu valor). Observant la sortida de SAS/OR veiem que la solució òptima correspon a la tercera base $\mathcal{B}=\{1,4\}$.

b) Forma estàndar (PL_e) i problema de fase I (PL_I):

$$(PL_e)\begin{cases}\min & x_1 & & +x_3 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & +2x_3 & +x_4 & =4\\ & 4x_1 & -5x_2 & & & =10\\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0\end{cases}$$

$$(PL_I)\begin{cases}\min & x_5 & & & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & +2x_3 & +x_4 & & =4\\ & 4x_1 & -5x_2 & & & +x_5 & =10\\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0\end{cases}$$

1a iteració fase I:

- $B=\{4,5\}, B=I, x_B=[4 \quad 10]', N=\{1,2,3\}, z_I=10$
- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :
- $r'=c'_N-c'_B B^{-1}A_N=[0]-[0 \quad 1]I\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & -5 & 0\end{bmatrix}=[-4 \quad 5 \quad 0]\ngeq 0 \to \boxed{q=1}$
- Direcció bàsica de descens : $d_B=-B^{-1}A_1=-I\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix}\ngeq 0$
- Sel. v.b. de sortida $B(p)$: $\theta^*=\min_{i\in\mathcal{B}|d_{B(i)}<0}\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\}=\min\left\{\frac{4}{1},\frac{10}{4}\right\}=\frac{5}{2}\Rightarrow$ $\boxed{p=2, B(2)=5}$
- Actualitzacions i canvi de base :
  - $x_B=\begin{bmatrix}x_4\\x_5\end{bmatrix}:=x_B+\theta^* d_B=\begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix}+\frac{5}{2}\times\begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/2\\0\end{bmatrix}, x_1=\theta^*=\frac{5}{2}, x_2=x_3=0,\ z:=z+\theta^* r_q=10+\frac{5}{2}\times(-4)=0$
  - $\mathcal{B}:=\{4,1\},\ \mathcal{N}:=\{2,3,5\}$. Hem eliminat totes les variables artificials de la base: $\Rightarrow \mathcal{B}:=\{4,1\}$ és una s.b.f. inicial del problema (PL_e).

1a iteració fase II:

- $\mathcal{B}=\{4,1\}, B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}, B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1/4\\ 0 & 1/4\end{bmatrix}, x_B=[3/2 \quad 5/2]',\ \mathcal{N}=\{2,3\}, z=5/2$
- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

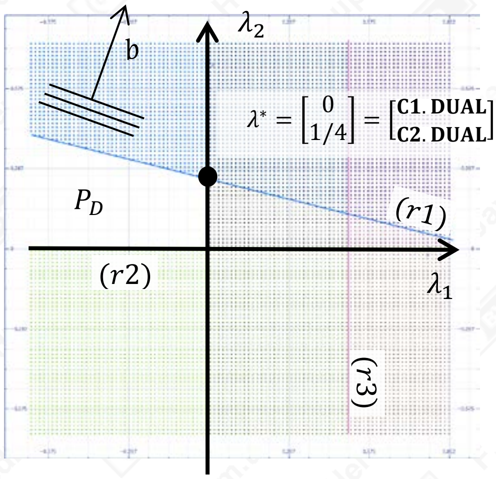
$$r'=c'_N-c'_B B^{-1}A_N=[0 \quad 1]-[0 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & -1/4\\ 0 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ -5 & 0\end{bmatrix}=[5/4 \quad 1]\geq 0\to\boxed{\grave{o}ptim}$$

Observem com aquesta solució coincideix amb la que proporciona SAS/OR:

$$x_B = \begin{bmatrix}x_4\\x_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4-\textbf{C1.BODY}\\ \textbf{X[1].SOL}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/2\\5/2\end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix}\textbf{X[2].RC}\\ \textbf{X[3].RC}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5/4\\0\end{bmatrix}$$

c) Problema dual:

$$(D)\begin{cases} \max & 4\lambda_1 & +10\lambda_2 & & \\ \text{s.a.:} & \lambda_1 & +4\lambda_2 & \leq 1 & (r1) \\ & & -5\lambda_2 & \leq 0 & (r2) \\ & 2\lambda_1 & & \leq 1 & (r3) \\ & \lambda_1 \leq 0 & & & (r4) \end{cases}$$



Preus ombra de (P) (si no s'han calculat ja a l'apartat b):

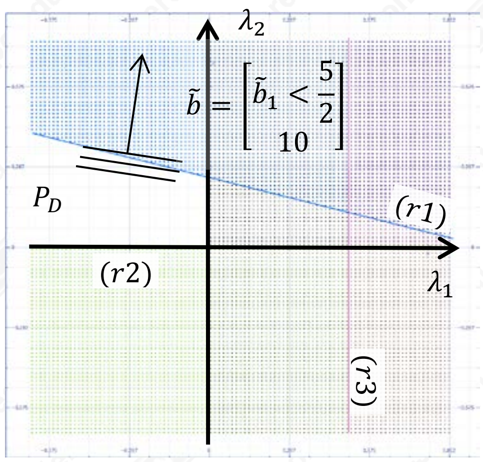
$$\lambda^{*\prime} = c_B' B^{-1} = \left| \begin{matrix} \mathcal{B} = \{4,1\}, c_B' = [0 \quad 1] \\ B = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1/4\\0 & 1/4\end{bmatrix} \end{matrix} \right|$$

$$= [0 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & -1/4\\0 & 1/4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overbrace{0}^{\textbf{C1.DUAL}} & \overbrace{\frac{1}{4}}^{\textbf{C2.DUAL}}\end{bmatrix}$$

d) Interval d'estabilitat de b_1:

$$x_B(b_1) = \begin{bmatrix}x_4(b_1)\\x_1(b_1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1/4\\0 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1 - 5/2\\5/2\end{bmatrix} \overset{\substack{\text{cond.}\\ \text{fact. (P)}}}{\geq} \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{b_1 \geq 5/2}$$

Si $\hat{b}_1 < 5/2$ es perd la factibilitat primal i hem de recuperar l'optimalitat amb el símplex dual. Relitzem la primera iteració a partir de la base òptima trobada a l'apartat b) (o la que proporciona SAS/OR, $\mathcal{B} = \{4,1\}$, $\mathcal{N} = \{2,3\}$**:**

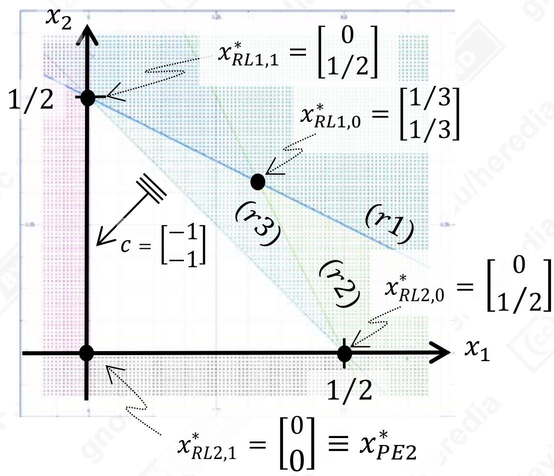


- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_{B(1)} < 0$ $\boxed{B(1) = 4 \text{ v.b. sortint}}$
- Identificació de problema dual il·limitat: $\nu = \beta_1 A_N = \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\-5 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{4} & 2\end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ problema dual il·limitat $\Rightarrow$ primal infactible.

Des del punt de vista del problema dual, un canvi $\tilde{b}_1 < 5/2$ implica una modificació dels costos. Quan $\hat{b}_1 = 5/2$ el problema dual té òptims alternatius. Si $\hat{b}_1 < 5/2$ el problema dual esdevé il·limitat:

SOLUCIÓ EXERCICI 2.

a) Representació gràfica:



$$(PE1)\begin{cases} \min & -x_1 & -x_2 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \leq 1 & (r1) \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq 1 & (r2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, \text{enteres} & \end{cases}$$

Inicialització: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

Iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.

- **Resolució de $(RL1)$ amb un tall de Gomory**:
  - Resolució de (RL1,0): $x^*_{RL1,0} = [1/3 \quad 1/3]', z^*_{RL1,0} = -2/3 \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := \lceil z^*_{RL1,0} \rceil = 0$
  - Tall de Gomory sobre $x^*_{RL1,0}$ associat a x_1:
    - $\mathcal{B} = \{1,2\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_N = I, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$
    - $x_1 + \lfloor -1/3 \rfloor x_3 + \lfloor 2/3 \rfloor x_4 \leq \lfloor 1/3 \rfloor \rightarrow x_1 - x_3 \leq 0 \xrightarrow{(r1)} \boxed{x_1 + x_2 \leq 1/2 \ (r3)}$
  - Resolució de (RL1,1) = (RL1,0) + (r3): $x^*_{RL1,1} = [0 \quad 1/2]', z^*_{RL1,1} = -1/2 \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := \lceil z^*_{RL1,1} \rceil = 0$.
- **Eliminació:** no es pot.
- **Separació:** $x_2^* = 1/2 \rightarrow \begin{cases} (PE2) \overset{\text{def}}{=} (PE1) + (\boldsymbol{r3}) + x_2 \leq \lfloor 1/2 \rfloor = 0 \\ (PE3) \overset{\text{def}}{=} (PE1) + (\boldsymbol{r3}) + x_2 \geq \lceil 1/2 \rceil = 1 \end{cases} \rightarrow L \leftarrow \{(PE2),(PE3)\}$

Iteració 2: $L \leftarrow \{(PE2),(PE3)\}, \underline{z}_{PE1} = 0, z^* = +\infty$

- **Selecció**: Seleccionem $(PE2)$. En aquest problema les constriccions $(r1)$ i $(r2)$ són redundants, i la fita $x_2 \leq 0$ fixa el valor de la variable x_2 a zero. Així doncs, el problema $(PE2)$ es pot expressar com el següent problema en una variable: $(PE2)\ \min_{x_1}\{-x_1 : 0 \leq x_1 \leq 1/2, \text{entera}\}$.
- **Resolució de $(RL2)$ amb un tall de Gomory**:
  - $x^*_{RL2,0} = [1/2 \quad 0]', z^*_{RL2,0} = -1/2 \Rightarrow \underline{z}_{PE2} := \lceil z^*_{RL2,0} \rceil = 0$
  - Tall de Gomory sobre $x^*_{RL2,0}$ associat a x_1: multiplicant (r3) per 2 per tal que la folga sigui entera ($2x_1 + x_5 = 2 \ \ (r3)$), tenim:
    - $\mathcal{B} = \{1\}, B = [2], A_N = [1], V = B^{-1}A_N = [1/2]$
    - $x_1 + \lfloor 1/2 \rfloor x_5 \leq \lfloor 1/2 \rfloor \rightarrow \boxed{x_1 \leq 0 \ (r4)}$
  - Resolució de (RL2,1) = (RL2,0) + (r4): $x^*_{RL2,1} = [0 \quad 0]', z^*_{RL2,1} = 0 \Rightarrow \underline{z}_{PE2} := 0$
- **Eliminació:** $x^*_{RL2,1} = [0 \quad 0]' = x^*_{PE2} \Rightarrow$ s'elimina $(PE2)$:
  - $z^* \leftarrow z^*_{PE2} = 0, x^* \leftarrow x^*_{PE2}, L \leftarrow L\backslash\{(PE2)\} = \{(PE3)\}$
  - $z^* = \underline{z}_{PE1} \Rightarrow$ eliminem (PE3): $L \leftarrow L \backslash \{(PE3)\} = \emptyset$

Iteració 3: $L = \emptyset \Rightarrow x^*_{PE1} = x^* = [0 \quad 0]', z^*_{PE1} = z^* = 0.$

b) Comparativa B&B – B&C:

Branch & Bound	**Branch & Cut**