11. Programación Matemática con restricciones de desigualdad

Este tipo de programas son los más representativos de las cirecustancias en las que se desemvuelve la actividad económica que los programas con restricciones de igualda y sin restricciones. Por tanto, es posible concebir soluciones factibles y óptimos que no saturen necesariamente todas las restricciones, dejando un excedente iniutilizado del recurso cuya disponibilidad limitan.

La formulación general es

$$\begin{array}{ll} OPT & f(x_1, \cdots, x_n) \\ \text{s.a:} & g_1(x_1, \cdots, x_n) \leq b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \cdots, x_n) \geq b_m \\ & h_1(x_1, \cdots, x_n) \leq b_1 \\ & \vdots \\ & h_k(x_1, \cdots, x_n) \geq b_k \end{array}$$

pudiendose reducir todo al estudio del problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(x_1, \cdots, x_n) \\ \text{s.a:} & g_1(x_1, \cdots, x_n) \leq b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \cdots, x_n) \leq b_{m+k} \end{array} \tag{1}$$

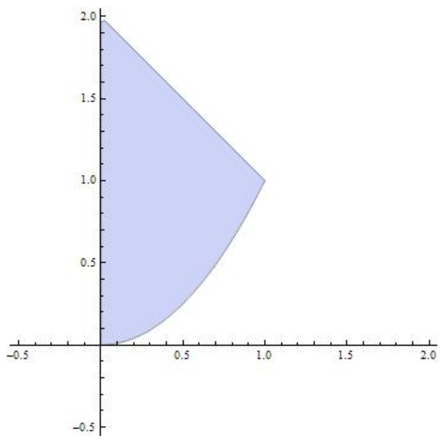
con las adecuadas transformaciones.

Tenemos que tener en consideración que las restricciones de desigualdad definen fronteras al dominio de soluciones posibles (conjunto factible), pero no reducen generalmente su dimensión. Por ello, se acotan las posibilidades de movimiento a partir de una solución factible ya que queda reducido el conjunto de direcciones factibles y a lo largo de las cuales, normalmente, el movimiento no puede efectuarse de forma indefinida puesto que acaban chocando de nuevo con la frontera de la factibilidad definida por las restricciones.

Un ejemplo de conjunto factible es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} x^2 \leq y, & x \geq 0, \\ x + y \leq 2, & y \geq 0, \end{array}$$

resultando



El punto óptimo x^* está dento de la región factible (recinto sombreado) y puede estar en una frontera, en el interior o en un vértice. Si está en algún punto de la frontera algunas desigualdades estarán saturadas.

Un primer algoritmo de búsqueda de soluciones de un programa matemático con restricciones de desigualdad puede ser el siguiente:

(1) Se buscan los óptimos en el interior (es un problema de óptimos sin restricciones).

(2) Se buscan los óptimos en la frontera no vértice (es un problema de óptimos con restricciones de igualdad).

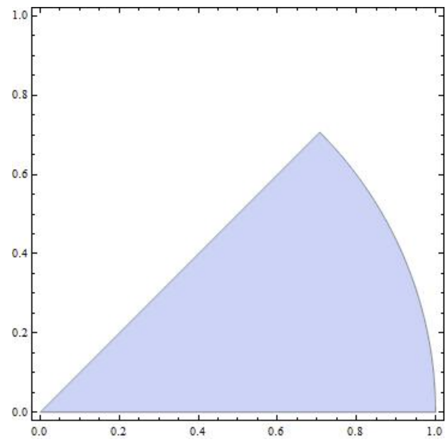
(3) Se buscan los óptimos en los vértices (se prueba para cada uno de los vértices).

11.1. Problema ilustrativo

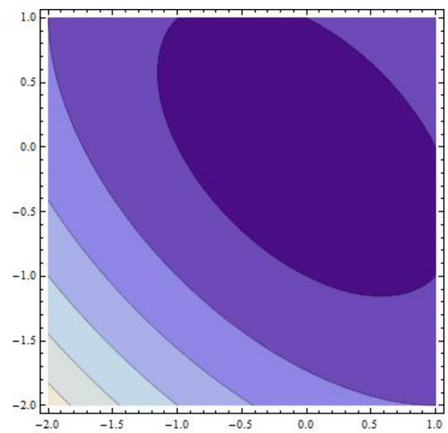
Este ejemplo constituye una práctica pero no un método idóneo para resolver problemas

$$\begin{array}{ll} \text{Opt} & x^2 + xy + y^2, \\ \text{s.a:} & x^2 + y^2 - 1 \leq 0, \\ & y - x \leq 0, \\ & -y \leq 0. \end{array}$$

La gráfica del conjunto factible del problema es:



Las curvas de nivel de la función objetivo son:



11.2. Puntos óptimos en el interior

El problema es

$$Opt \quad x^2 + xy + y^2,$$

que resulta un problema de búsqueda de óptimos sin restricciones, por consiguiente

$z = x^2 + xy + y^2$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0. \\ y = 0. \end{array}$$

El candidato a solución es $x^* = (0, 0)$, que no pertenece al interior. Por tanto, lo deshechamos.

11.3. Puntos óptimos en la frontera no vértice

Aquí tendremos tres problemas de búsqueda de óptimos con restricciones de igualdad.

Problema 1

El problema es :

$$\begin{array}{ll} Opt & x^2+xy+y^2, \\ \text{s.a:} & x^2+y^2-1=0. \end{array}$$

$L(x,y;\lambda) = x^2+xy+y^2+\lambda\left(1-x^2-y^2\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x+y-\lambda 2x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x+2y-\lambda 2y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 1-x^2-y^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{2x+y}{2x}, \\ \lambda = \dfrac{2x+y}{2y}, \\ 1-x^2-y^2=0, \end{array} \quad \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{2x+y}{2y} = \dfrac{2x+y}{2x}, \\ y = \pm x. \end{array}$$

Si $y = x$ tenemos que $1-x^2-x^2=0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Por tanto la propuesta es $x^* = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $x^* = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Si $y = -x$ tenemos que $1-x^2-x^2=0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Por tanto la propuesta es $x^* = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $x^* = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ninguno de estos puntos es candidato puesto que unos no son factibles y el que es factible no pertenece a la frontera no vértice.

Problema 2

$$\begin{array}{ll} Opt & x^2+xy+y^2, \\ \text{s.a:} & y-x=0. \end{array}$$

$L(x,y;\lambda) = x^2+xy+y^2+\lambda(x-y)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x+y+\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x+2y-\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = y-x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = -2x-y, \\ \lambda = -x-2y, \\ y = x, \end{array} \Rightarrow x^* = (0,0).$$

El punto no es candidato puesto que no pertenece a la frontera no vértice.

Problema 3

$$\begin{array}{ll} Opt & x^2+xy+y^2, \\ \text{s.a:} & -y=0. \end{array}$$

$L(x,y;\lambda) = x^2+xy+y^2+\lambda(-y)$

Dado que $y=0$. Tenemos que, $L(x,y;\lambda) = x^2$ y entonces la solución del problema es $x^* = (0,0)$.

El punto no es candidato puesto que no pertenece a la frontera no vértice.

11.4. Puntos óptimos en los vértices

Los vértices de conjunto factibles y el valor de la función objetivo en ellos es:

$$
\begin{array}{ll}
(0,0), & f(0,0)=0. \\
(1,0) & f(1,0)=1. \\
\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) & f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=1{,}5.
\end{array}
$$

De aquí deducimos que en $x^*=(0,0)$ se alcanza el mínimo global y en $x^*=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$se alcanza el máximo global.

Problema 11.1 *Encuentra mediante la geometría de los óptimos del problema*

$$
\begin{array}{ll}
Opt & x^2+y^2, \\
s.a: & x+y-1\le 0, \\
 & -x\le 0, \\
 & -y\le 0.
\end{array}
$$

Problema 11.2 *Encuentra mediante la geometría de los óptimos del problema*

$$
\begin{array}{ll}
Opt & x^2+y^2, \\
s.a: & x^2+y^2-1\le 0.
\end{array}
$$

11.5. Condiciones necesarias de primer orden

Sea $\vec{x}^*$ un punto que es factible y cumple una restricción en la forma de igualdad, es decir, la satura. Si fuese óptimo del problema, las otras restricciones son irrelevantes, puesto que el óptimo no depende de elllas (desde el punto de vista económico). Las restricciones que no están saturadas en el óptimo pueden eliminarse de la formulación del problema, la dificultad estriba en que, a priori, no sabemos cualles son.

Como consecuencia, si $\vec{x}^*$ cumple las condiciones necesarias de óptimo en un programa de optimización con restricciones de desigualdad, las condiciones de suficiencia las aplicaremos sólo a las restricciones que resulten saturadas.

Digamos a continuación las condiciones que deben satisfacer necesariamente $\vec{x}^*$ para que sea solución óptima del programa 1. Tales condiciones no son aplicables si los puntos no cumplen ciertas condiciones de regularidad con respecto a las restricciones del programa.

Proposición 11.3 (Condición de regularidad) *Sea dado el programa 1. Sea $\vec{x}^*$ un punto de la frontera del conjunto factible, J el conjunto de subindices de las restricciones que este punto satura y k el número de ellas. Diremos que $\vec{x}^*$ es un punto regular del programa si*

$$rango\ Jg_{j\in J}\left(\vec{x}^*\right)=k.$$

Si consideramos el programa 1. Sea $\vec{x}^*$ un punto óptimo, J el conjunto de subindices de las restricciones que este punto satura y m el número de ellas. Consideramos también que el punto es regular. Si eliminamos las restricciones que $\vec{x}^*$ no satura el problema queda reducido a un programa de optimización con restricciones de igualdad. Por tanto, las condiciones necesarias son (por el teorema de Lagrange)

$$\nabla f(\vec{x}^*) + \sum_{j \in J} \lambda_j \nabla g_j(\vec{x}^*) = 0.$$

La pregunta obvia es ¿cómo introducir las restantes restricciones? (la razón importante es que "a priori" no conocemos que restricciones están saturadas o no lo están). Seguiremos la siguiente regla:

$$\begin{array}{l} \text{Si } g_{j\in J}(\vec{x}^*) = 0 \\ \text{Si } g_{j\notin J}(\vec{x}^*) < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_{j\in J} \geq 0, \\ \lambda_{j\notin J} = 0. \end{array}$$

Por tanto las condición necesaria la podemos escribir

$$\begin{array}{ll} a) & \nabla f(\vec{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(\vec{x}^*) = 0 \\ b) & \lambda_j \geq 0 \text{ para } j = 1, \cdots m, \\ c) & \lambda_j (g_j(\vec{x}^*) - b_j) = 0 \text{ para } j = 1, \cdots m. \end{array}$$

Podemos añadir la condición de factibilidad que es $g_j(\vec{x}^*) \leq b_j$ para $j = 1, \cdots m$. Pudiendo enunciar el siguiente teorema.

Teorema 11.4 (Kuhn-Tucker) *Sea dado el programa 1 y sea $\vec{x}^*$ un punto factible y regular.*

Si $\vec{x}^*$ es mínimo del programa 1. Entonces el punto $\vec{x}^*$ cumple

$$\begin{array}{ll} a) & \nabla f(\vec{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(\vec{x}^*) = 0 \\ b) & \lambda_j \geq 0 \textit{ para } j = 1, \cdots m, \\ c) & \lambda_j (g_j(\vec{x}^*) - b_j) = 0 \textit{ para } j = 1, \cdots m, \\ d) & g_j(\vec{x}^*) \leq b_j \textit{ para } j = 1, \cdots m. \end{array}$$

Formulación del teorema en términos del Lagrangiano.

Teorema 11.5 *Sea dado el programa 1 y sea $\vec{x}^*$ un punto factible y regular. Sea $L\left(\vec{x}; \vec{\lambda}\right) = f(\vec{x}) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(\vec{x}) - b_j)$ el Lagrangiano asociado al problema.*

Si $\vec{x}^*$ es mínimo del programa 1. Entonces el punto $\vec{x}^*$ cumple

$$\begin{array}{ll} a) & \nabla_{\vec{x}} L\left(\vec{x}; \vec{\lambda}\right) = \vec{0}, \\ b) & \nabla_{\vec{\lambda}} L\left(\vec{x}; \vec{\lambda}\right) = \vec{0}, \\ c) & \vec{\lambda} \nabla_{\vec{\lambda}} L\left(\vec{x}; \vec{\lambda}\right) = \vec{0}, \\ d) & \vec{\lambda} \geq \vec{0}. \end{array}$$

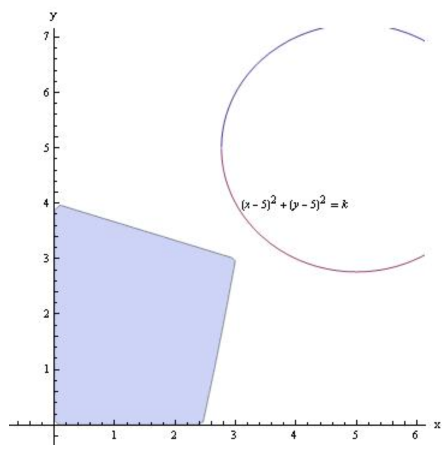
Veamos un ejemplo.

Ejemplo 11.6 (Borrell pg. 182) *Encontra la solución del problema*

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & (x_1-5)^2+(x_2-5)^2, \\ s.a: & x_1^2 - x_2 - 6 \leq 0, \\ & x_1 + 3x_2 - 12 \leq 0, \\ & -x_1 \leq 0, \\ & -x_2 \leq 0. \end{array}$$

Solución:

Si lo resolvemos gráficamente resulta



encontrando que el óptimo es $\vec{x}^* = (3, 3)$.

Si lo resolvemos utilizando KT.

1) construimos la lagrangiana del problema

$L(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = (x_1-5)^2 + (x_2-5)^2 + \lambda_1\left(x_1^2 - x_2 - 6\right) + \lambda_2(x_1 + 3x_2 - 12) + \mu_1(-x_1) + \mu_2(-x_2)$

Para provar la regularida tenemos que hacer el Jacobiano

$$Jg(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son

a) $$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = &\quad 2x_1(\lambda_1 + 1) + \lambda_2 - \mu_1 - 10 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = &\quad 2x_2 - \lambda_1 + 3\lambda_2 - \mu_2 - 10 = 0. \end{aligned}$$

b) $\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0.$

c) $$\begin{array}{ll} \lambda_1\left(x_1^2 - x_2 - 6\right) = 0, & \mu_1(-x_1) = 0, \\ \lambda_2(x_1 + 3x_2 - 12) = 0, & \mu_2(-x_2) = 0. \end{array}$$

d) $\begin{array}{ll} x_1^2 - x_2 - 6 \leq 0, & -x_1 \leq 0, \\ x_1 + 3x_2 - 12 \leq 0, & -x_2 \leq 0. \end{array}$

Las aplicamos en el caso $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = (\neq 0, \neq 0, = 0, = 0)$. Resultando el sistema

a) $\begin{array}{l} 2x_1 (\lambda_1 + 1) + \lambda_2 - 10 = 0, \\ 2x_2 - \lambda_1 + 3\lambda_2 - 10 = 0. \end{array}$

b) $\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0.$

c) $\begin{array}{ll} \lambda_1 \left(x_1^2 - x_2 - 6\right) = 0, & 0 = 0, \\ \lambda_2 (x_1 + 3x_2 - 12) = 0, & 0 = 0. \end{array}$

d) $\begin{array}{ll} x_1^2 - x_2 - 6 = 0, & -x_1 < 0, \\ x_1 + 3x_2 - 12 = 0, & -x_2 < 0. \end{array}$

La solución del sistema es $(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = \left(3, 3; \frac{8}{19}, \frac{28}{19}, 0, 0\right)$. Este será nuestro candidato a óptimo.

En este caso el jacobiano es sólo referente a las restricciones saturadas (2), por tanto

$Jg\,(3,3) = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y su rango es 2. Resultado que nos permite afirmar que el punto $(3,3)$ es regular.

Ahora tendremos que probar que efectivamente el máximo local.

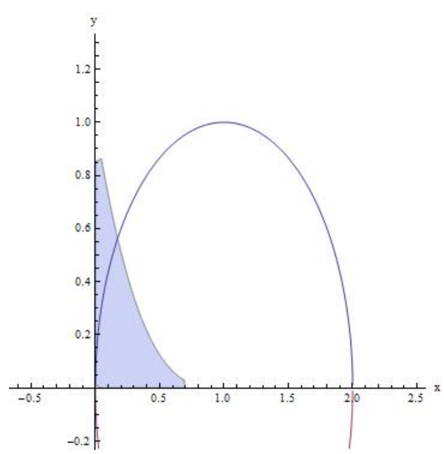
Estudiemos ahora un ejemplo en el que no se puede aplicar Kuhn-Tucker.

Ejemplo 11.7 *Calcular el mínimo del programa*

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & (x_1 - 1)^2 + x_2^2, \\ s.a: & -x_1 \leq 0, \\ & -x_2 \leq 0, \\ & x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0. \end{array}$$

Solución:

La versión gráfica del programa es:



observamos que el punto $\vec{x}^* = (1,0)$ es el mínimo del problema, Justificado geométricamente.

Escribamos las condiciones de KT.

$L(x_1, x_2; \lambda, \mu_1, \mu_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \lambda \left(x_2 - (1 - x_1)^3\right) + \mu_1 (-x_1) + \mu_2 (-x_2)$.

$$\text{a)} \quad \begin{array}{ll} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2; \lambda, \mu_1, \mu_2) = & 2(x_1 - 1) + 3\lambda (1 - x_1)^2 - \mu_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2; \lambda, \mu_1, \mu_2) = & 2x_2 + \lambda - \mu_2 = 0. \end{array}$$

b) $\lambda \geq 0, \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0.$

c) $\lambda \left(x_2 - (1 - x_1)^3\right) = 0, \quad \mu_1 (-x_1) = 0, \quad \mu_2 (-x_2) = 0.$

d) $x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0, \quad -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0.$

El caso que estudiamos es $(\lambda, \mu_1, \mu_2) = (\neq 0, = 0, \neq 0)$. Por tanto, las condiciones de KT devienen en:

$$\text{a)} \quad \begin{array}{l} 2(x_1 - 1) + 3\lambda (1 - x_1)^2 = 0, \\ 2x_2 + \lambda - \mu_2 = 0. \end{array}$$

b) $\lambda \geq 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 \geq 0.$

c) $\lambda \left(x_2 - (1 - x_1)^3\right) = 0, \quad \mu_2 (-x_2) = 0.$

d) $x_2 - (1 - x_1)^3 = 0, \quad -x_1 < 0, \quad x_2 = 0.$

En el punto $\vec{x}^* = (1,0)$ tenemos que:

$$\text{a)} \quad \begin{array}{l} 3\lambda (0)^2 = 0, \\ \lambda - \mu_2 = 0. \end{array}$$

b) $\lambda \geq 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 \geq 0.$

c) $\lambda (0) = 0, \quad \mu_2 (0) = 0.$

d) $0 = 0, \quad -1 < 0, \quad 0 = 0.$

En virtud de lo anterior podemos decir que, de a2) $\lambda = \mu_2$ y de a1) no podemos resolver la ecuación en λ.

Deduciendo que no existe solución ¡pero existe!.

Veamos la condición de regularidad para $\vec{x}^* = (1,0)$.

$Jg(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3(1 - x_1)^2 & 1 \end{pmatrix}$ de aquí $Jg(\vec{x}^*) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que es de rango $1 \neq 2$. Por lo tanto el punto $\vec{x}^* = (1,0)$ no es regular y las condiciones de Kuhn-Tucker no se pueden aplicar.

11.6. Condición de suficiencia

Las condiciones de Kuhn-Tucker estudiadas son condiciones necesarias. Para encontrar una condición suficiente, sólo consideraremos las restricciones saturadas.

Dado que, en principio, no podemos saber qué condiciones están saturadas, una vez determinados los candidatos a óptimos mediante el cálculo de los puntos que cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker sabremos cuáles son las restricciones saturadas. Las restricciones no saturadas las consideraremos irrelevantes.

En este momento, aplicaremos las condiciones de optimalidad de segundo orden enunciandolas tal y como lo hacíamos en los programas con restricciones de igualdad.

11.7. Interpretación económica de los multiplicadores

Sea el programa

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(\vec{x}), \\ \text{s.a:} & g(\vec{x}) \leq b. \end{array}$$

Sabemos que $\vec{x}^*$ es la solución de este programa y satura la restricción. Queremos calcular $\dfrac{\partial f}{\partial b}(\vec{x}^*)$.

Tenemos que $L(\vec{x};\lambda) = f(\vec{x}) + \lambda(g(\vec{x}) - b)$ y por el teorema de la función implícita sabemos que $\vec{x} = \vec{x}(b)$, por consiguiente podemos hacer

$F(b) = f(\vec{x}(b))$ y al derivar con respecto a b obtenemos

(a) $\dfrac{\partial F(b)}{\partial b} = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{x}}\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial b}$.

También tenemos que $g(\vec{x}(b)) = b$ y derivando con respecto a b obtenemos

(b) $\dfrac{\partial g}{\partial \vec{x}}\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial b} = 1 \to$ al multiplicar por $\lambda \neq 0$ nos da $\lambda = \lambda\dfrac{\partial g}{\partial \vec{x}}\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial b}$

Sumando ambas expresiones (a) y b)) obtenemos para $\vec{x} = \vec{x}^*$

$$\frac{\partial F(b)}{\partial b} + \lambda = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\frac{\partial \vec{x}}{\partial b}(\vec{x}^*) - +\lambda\frac{\partial g}{\partial \vec{x}}\frac{\partial \vec{x}}{\partial b}(\vec{x}^*) = \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}^*) + \lambda\frac{\partial g}{\partial \vec{x}}(\vec{x}^*)}_{=0}\right)\frac{\partial \vec{x}}{\partial b}(\vec{x}^*) = 0.$$

en virtud de lo anterior tenemos que

$$\frac{\partial F(b)}{\partial b} = -\lambda.$$

La interpretación es análoga a la que se hizo para los programas de optimización con restricciones de igualdad. □