

Examen de INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

9 de junio de 2015

1. Una compañía posee dos minas A y B para la extracción de hierro de 3 calidades distintas: alta, media y baja. La capacidad de producción de cada mina en toneladas diarias es la siguiente:

Mina	Calidad hierro	Alta	Media	Baja
A		1	3	5
B		2	2	2

La compañía necesita extraer al menos 80 toneladas de calidad alta, 160 toneladas de calidad media y 200 de calidad baja. El coste diario de operación en cada mina es de 2000 euros. El modelo de programación lineal (PL a partir de ahora) a partir de cual se determina el número de días que hay que trabajar en cada mina para minimizar el coste y satisfacer las necesidades de extracción es:

Cuadro 1.

$$\text{Min } Z=2000X_1+2000X_2$$

Sujeto a:

$$X_1+2X_2\geq 80$$

$$3X_1+2X_2\geq 160$$

$$5X_1+2X_2\geq 200$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

- a. Analizad gráficamente la solución del modelo del Cuadro 1. Comentad la gráfica obtenida y la solución óptima. (0.75 puntos)
- b. Suponed que en la mina A el coste diario de la extracción sube a 3000 euros y volved a analizar gráficamente la solución del modelo. Comentar la gráfica obtenida y la solución óptima. (0.75 puntos)
- c. Suponed que la compañía en lugar de minimizar el coste está interesada en maximizar el beneficio que equivale a $Z=1000X_1+1000X_2$, ¿crees que es necesario añadir algún tipo de restricción para que el problema tenga solución finita? Si es así, especifica qué tipo de restricción añadirías (una exigencia o un recurso) y justifica la respuesta. (0.75 puntos)
- d. Escribid el programa de SAS que permita solucionar el modelo de PL del Cuadro 1. SOLO PARA LOS ALUMNOS QUE SE PRESENTEN A LA EVALUACIÓN FINAL. (2.5 puntos)
2. Suponed que la compañía a la que se hizo referencia en el ejercicio 1 sabe de la existencia de vertidos contaminante, de modo que en la mina A se vierten 100 litros de vertidos diarios y en la mina B 150 litros diarios. Plantead el modelo de programación matemática que tendría que resolver la compañía si los objetivos fueran minimizar el coste y minimizar los litros de vertidos. ¿Qué tipo de modelización has planteado? Justifica la respuesta. (1 punto)

3. La compañía del ejercicio 1 se replantea los objetivos del ejercicio 2, de modo que ahora está interesada en determinar el número de días que tiene que trabajar en cada mina de forma que se alcancen al máximo posible las siguientes metas: (1 punto)
- Que el coste de la producción no supere los 130000 euros.
 - Que se cumplan las necesidades de extracción de las diferentes calidades de hierro.
 - Que los litros totales de vertido no superen los 10000 litros.
4. Una empresa que produce condimentos alimenticios dispone de un stock limitado de dos ingredientes: I1 e I2 para la elaboración de dos condimentos: A y B, los cuáles vende en paquetes de 100 gramos cada uno. El departamento de marketing informa que la empresa tiene una limitación de demanda con respecto al condimento A, de éste sólo puede vender 1500 paquetes. Además los ingredientes no utilizados se pueden vender a 375 euros el paquete de I1 y 167 euros el paquete de I2. Determinar cuál sería el consumo de los condimentos A y B que maximiza los ingresos por ventas de la empresa, sabiendo que:

Condimento	Ingrediente (necesidad en paquetes)		Demanda (En paquetes)	Precio de Venta del paquete
	I1	I2		
A	5	3	1500	2750
B	2	3	Ilimitada	1300

La compañía dispone de 10000 paquetes de I1 y 8500 de I2.

El modelo de programación lineal que se plantea resolver la empresa para determinar el consumo óptimo es:

Cuadro 2.

Max $Z=2750X_1+1300X_2+375X_3+167X_4$
Sujeto a:
$5X_1+2X_2 \leq 10000$
$3X_1+3X_2 \leq 8500$
$X_1 \leq 1500$
$X_3+5X_1+2X_2=10000$
$X_4+3X_1+3X_2=8500$
$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

- Analizad detalladamente cómo se han obtenido los coeficientes asociados a las variables de decisión en la función objetivo y en las restricciones del modelo del Cuadro 2. Describid el significado de cada coeficiente. (0.25 puntos)
- A continuación, en los cuadros 3 y 4 se muestran algunos resultados de la resolución del modelo obtenidos con SAS/OR:

Cuadro 3.

Variable Summary

Col	Variable Name	Status	Type	Price	Activity	Reduced Cost
1	x1	BASIC	NON-NEG	2750	1500	0
2	x2	BASIC	NON-NEG	1300	1250	0
3	x3		NON-NEG	375	0	-24.5
4	x4	BASIC	NON-NEG	167	250	0
5	RI1	DEGEN	SLACK	0	0	0
6	RI2	BASIC	SLACK	0	250	0
7	Marketing		SLACK	0	0	-251.5

Cuadro 4.

Constraint Summary						
Row	Constraint Name	Type	S/S Col	Rhs	Activity	Dual Activity
1	Beneficio	OBJECTVE	.	0	5791750	.
2	RI1	LE	5	10000	10000	0
3	RI2	LE	6	8500	8250	0
4	Marketing	LE	7	1500	1500	251.5
5	I1	EQ	.	10000	10000	399.5
6	I2	EQ	.	8500	8500	167

Cuadro 5.

RHS Range Analysis						
Row	Minimum Phi			Maximum Phi		
	Rhs	Leaving	Objective	Rhs	Leaving	Objective
RI1	10000	RI1	5791750	INFINITY	.	.
RI2	8250	RI2	5791750	INFINITY	.	.
Marketing	1444.4444	x4	5777777.8	2000	x2	5917500
I1	7500	x2	4793000	10000	RI1	5791750
I2	8250	x4	5750000	INFINITY	.	.

Cuadro 6.

Price Range Analysis							
Col	Variable Name	Minimum Phi			Maximum Phi		
		Price	Entering	Objective	Price	Entering	Objective
1	x1	2498.5	Marketing	5414500	INFINITY	.	INFINITY
2	x2	1251	x3	5730500	1400.6	Marketing	5917500
3	x3	-INFINITY	.	5791750	399.5	x3	5791750
4	x4	111.11111	Marketing	5777777.8	183.33333	x3	5795833.3
5	RI1	-INFINITY	.	5791750	24.5	x3	5791750
6	RI2	-55.88889	Marketing	5777777.8	16.333333	x3	5795833.3
7	Marketing	-INFINITY	.	5791750	251.5	Marketing	5791750

Cuadro 7.

Obs	_OBJ_ID_	_RHS_ID_	_BASIC_	INVB_R	x1	x2	x3	x4	RI1	RI2	Marketing	PHASE_1_OB	Beneficio
1	Beneficio	_rhs_	R_COSTS	.	0	0	-24.5	0	0	0	-251.5	0	0
2	Beneficio	_rhs_	x2	1250	0	1	0.5	0	0	0	-2.5	0	0
3	Beneficio	_rhs_	x4	250	0	0	-1.5	1	0	0	4.5	0	0
4	Beneficio	_rhs_	RI1	0	0	0	-1.0	0	1	0	0.0	0	0
5	Beneficio	_rhs_	RI2	250	0	0	-1.5	0	0	1	4.5	0	0
6	Beneficio	_rhs_	x1	1500	1	0	0.0	0	0	0	1.0	0	0
7	Beneficio	_rhs_	PHASE_1_OB	0	0	0	0.0	0	0	0	0.0	1	0
8	Beneficio	_rhs_	Beneficio	5791750	0	0	24.5	0	0	0	251.5	0	1

b.1. Por debajo de que coste unitario de producción la empresa estaría dispuesta a producir y vender por encima de las 1500 unidades de A impuestas por el departamento de marketing. Justificad la respuesta a partir de los resultados de los cuadros 3 y 4. (0.75 puntos)

b.2. A partir de qué precio de venta del ingrediente I1 sería rentable que este recurso fuera sobrante. Justificad la respuesta. (0.75 puntos)

b.3. Cuáles son los nuevos valores de las variables básicas y la función objetivo si el departamento de marketing aumentara la producción y las ventas de A a 1600 paquetes. Justificad la respuesta. (0.5 puntos)

b.4. La solución óptima del cuadro 3 tiene una particularidad (soluciones múltiples, degenerada, infactible, etc.) ¿Podrías describir cuál es? Justificad la respuesta. (0.5 puntos)

b.5. ¿Cuál es la opción o las opciones del procedimiento de programación lineal de SAS/OR que hemos utilizado para realizar la interpretación de los a'_{ij} . Interprete los resultados correspondientes. (SOLO PARA LOS QUE NO HAN REALIZADO LA EVALUACIÓN CONTINUA) (2.5 puntos)

5. A partir del modelo del Cuadro 2, utilizad variables binarias para incorporar el hecho de que la empresa podría disponer de una cantidad ilimitada de alguno de los ingredientes. Tenéis que escribir el modelo de PL con binarias. (1 punto)
6. Escribid el programa de SAS/OR con el que resorberíais el modelo de PL del ejercicio 5. (SOLO PARA LOS QUE NO HAN REALIZADO LA EVALUACIÓN CONTINUA) (2.5 puntos)
7. El beneficio de una empresa viene dado por la función: $B(x,y,z) = x y + 2 z^2$ donde x, y, z son las cantidades a producir de cada uno de los tres artículos que fabrica y vende. La empresa produce estos tres productos en una única sección en la que hay disponibles 120 horas semanales, empleando en la producción de una unidad del primer artículo 5 horas, en una del segundo 20 horas y en una del tercero 4 horas. Se sabe además que por razones de demanda la empresa no puede producir menos de 5 unidades del primer artículo, ni más de 10 del segundo. Tras resolver con SAS/OR un modelo de programación no lineal (PNL) se obtienen los siguientes resultados:

PROC NLP: Nonlinear Maximization

Optimization Start					
Parameter Estimates					
N	Parameter	Estimate	Gradient Objective Function	Lower Bound Constraint	Upper Bound Constraint
1	x	6.000000	1.000000	5.000000	.
2	y	1.000000	6.000000	0	10.000000
3	z	1.000000	4.000000	0	.

Value of Objective Function = 8

Linear Constraints					
1	66.00000	:	120.0	>=	+ 5.0000 * x + 20.0000 * y + 4.0000 * z

Conjugate-Gradient Optimization

Automatic Restart Update (Powell, 1977; Beale, 1972)

Parameter Estimates	3
Lower Bounds	3
Upper Bounds	1
Linear Constraints	1

Optimization Start		
Active Constraints	0	Objective Function 8
Max Abs Gradient Element	6	

Iteration	Restarts	Function Calls	Active Constraints	Objective Function	Objective Function Change	Max Abs Gradient Element	Step Size	Slope of Search Direction
1	0	4	1	41.13445	33.1344	9.9078	0.468	-53.000
2	1	7	2	696.31007	655.2	58.2807	1.623	-102.7

Iteration	Restarts	Function Calls	Active Constraints	Objective Function	Objective Function Change	Max Abs Gradient Element	Step Size	Slope of Search Direction
3	2	9	3	1128	431.8	0	0.112	-3396.6

Optimization Results			
Iterations	3	Function Calls	10
Gradient Calls	10	Active Constraints	3
Objective Function	1128.125	Max Abs Gradient Element	0
Slope of Search Direction	-3396.634488		

All parameters are actively constrained. Optimization cannot proceed.

PROC NLP: Nonlinear Maximization

Optimization Results				
Parameter Estimates				
N	Parameter	Estimate	Gradient Objective Function	Active Bound Constraint
1	x	5.000000	-7.56773E-17	Lower BC
2	y	-7.56773E-17	5.000000	Lower BC
3	z	23.750000	95.000000	

Value of Objective Function = 1128.125

Linear Constraints Evaluated at Solution

1 ACT -1.27E-14 = 120.0 - 5.0000 * x - 20.0000 * y - 4.0000 * z

- Escribid el modelo de PNL que se ha utilizado para obtener los resultados anteriores. Comenta la solución óptima del modelo. (1 puntos)
- ¿Cree que el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de recurso toma valor diferente de cero? Justificad la respuesta. (1 puntos)
- Escribid el programa de SAS/OR con el que obtendría los resultados de la optimización del modelo de PNL. (SOLO PARA LOS QUE NO HAN REALIZADO LA EVALUACIÓN CONTINUA) (2.5 puntos)

PARTE CONJUNTA EVALUACIÓN CONTINUA Y FINAL (**PARTE COMÚN**): La tienen que realizar todos los alumnos. Para promediar con la nota de las prácticas es necesario obtener una puntuación de al menos 3 puntos.

PARTE EVALUACIÓN FINAL (**PARTE COMÚN MÁS PARTE ESPECÍFICA**): La tienen que realizar aquellos alumnos que decidan presentarse a la evaluación final. La nota final será el promedio de ambas partes. De igual forma para promediar ambas partes es necesario obtener una puntuación de al menos 3 puntos en la parte común.