

## Mètodes Bayesians: Sessions Pràctiques

### Sessió 2: Distribució a Posteriori i Predictiva a Posteriori.

Objectius:

Calcular i representar:

- la distribució a posteriori, juntament amb la a priori i la versemblança
- la predictiva a posteriori

**Exercici 2.1 Sèpia Verda: Estimació d'una freqüència (Poisson).** El portal d'internet de l'associació cultural *La Sèpia Verda* desconeix la freqüència de visitants setmanals al portal. Amb l'objectiu de sortir de la ignorància s'ha recollit el nombre de visitants de les darreres 10 setmanes. Les dades es troben a l'arxiu *sepiaverda.txt*. En el supòsit de que els responsables de l'associació visquessin en el convenciment de que rarament el nombre de visitants serà inferior a 5 i rarament superior a 40.

- a) Tria els paràmetres de la distribució a priori (Nota: Pot ser útil triar els paràmetres de la a priori utilitzant la predictiva a priori).
- b) Dibuixa la distribució a priori i la versemblança en un mateix gràfic
- c) Dibuixa la predictiva a priori
- d) Dibuixa la distribució a posteriori, i dona una estimació puntual, així com un interval de credibilitat del 95%.
- e) Estima de forma analítica i per simulació la probabilitat de que la freqüència de la propera setmana sigui inferior a 10 visitants.
- f) Dibuixa la distribució predictiva a posteriori.
- g) Si es plantegessin apostes sobre el nombre de visitants per la setmana vinent, i en el supòsit que no es fes trampa, per quina opció apostaries?
  1.  $\tilde{y} < 15$
  2.  $15 \leq \tilde{y} < 25$
  3.  $25 \leq \tilde{y}$

**Exercici 2.2 Estimació d'una proporció (Binomial): Asma.** És vol estimar el percentatge d'asmàtics de la ciutat de Sabadell, anomenem aquest paràmetre com  $\theta$ . Amb aquest objectiu es pren una mostra aleatòria simple de 200 ciutadans. D'aquests 11 van resultar ser asmàtics.

- a) Escull els paràmetres de la distribució conjugada per a cadascun dels següents escenaris
  - a.1) No es coneix cap informació de la prevalença d'asmàtics
  - a.2) Els professionals de la salut a través de la seva experiència creuen que la prevalença estar al voltant del 5%, i que és molt improbable que prengui taxes superiors al 20%.

Per a cadascun dels dos escenaris:

- b) Dibuixa la distribució a priori, la versemblança i la distribució a posteriori en un mateix gràfic.
- c) Dona una estimació puntual així com un interval de credibilitat del 95% per al percentatge d'asmàtics de la ciutat de Sabadell.
- d) Dibuixa la predictiva a priori i a posteriori.
- e) Si la mostra hagués estat de 10 ciutadans i un d'aquests fos asmàtic, estudia la inferència a posteriori per a cadascun dels escenaris.

**Exercici 2.3 Espai paramètric discret. Binomial.** Suposem  $Y|\theta$  és binomial( $n=4$ ,  $\theta$ ) i considerem que només hi ha tres possibles valors per  $\theta$ , 0.4, 0.5 i 0.6, que assumirem a priori equiprobables. La distribució de  $\theta$ , i la distribució de  $Y|\theta$  és:

$\theta$	priori	0	1	2	3	4
0.4	1/3	0.1296	0.3456	0.3456	0.1536	0.0256
0.5	1/3	0.0625	0.2500	0.3750	0.2500	0.0625
0.6	1/3	0.0256	0.1536	0.3456	0.3456	0.1296

- a) Dibuixa la distribució a priori.
- b) Calcula i dibuixa la distribució predictiva a priori (la marginal de  $Y$ ).

Ara suposem que hem observat  $y=3$ .

- c) Calcula i dibuixa la versemblança
- d) Calcula i dibuixa la distribució a posteriori.
- e) Calcula i dibuixa la distribució predictiva a posteriori

**Exercici 2.4 Accidents de trànsit (Poisson).** El nombre d'accidents de trànsit durant els caps de setmana a l'autovia de l'Atmella segueix una distribució de Poisson( $\mu$ ). Tres estudiants contaràn el nombre d'accidents en els pròxims 8 caps de setmana. En Bru no té informació a priori i decideix utilitzar com a priori una Gamma amb molta variància, concretament una Gamma(0.01, 0.001). La Clàudia que viu a la Garriga es decideix per utilitzar una Gamma(6.25, 2.5). I finalment en Carles tampoc té informació a priori, i vol assumir tots els possibles valors com equiprovables. El nombre d'accidents en les següents 8 setmanes, han estat: 3, 2, 0, 8, 2, 4, 6, 1.

- a) Dibuixa en un mateix gràfic les tres distribucions a priori
- b) Dibuixa en un mateix gràfic les tres distribucions a posteriori.

**Exercici 2.5 EuroVegas (Binomial).** Dos estudiants volen construir una distribució a priori que reflexi el seu coneixement a priori sobre la proporció de ciutadans del Baix Llobregat que donarien suport a la construcció d'un macro complex turístic amb casinos com a temàtica central (l'EuroVegas). L'Anna que viu a Gavà pensa que la mitjana de la seva a priori és 0.2 i la desviació de la seva a priori és 0.08. I en Sam que és un estudiant d'Erasmus escocès decideix escollir una a priori uniforme. Tots dos estudiants prenen plegats una mostra de  $n=100$  residents al Baix Llobregat dels quals  $y=26$  diuen donar suport a l'EuroVegas.

- a) Dibuixa en un mateix gràfic les dues distribucions a priori
- b) Dibuixa en un mateix gràfic les dues distribucions a posteriori
- c) Repeteix a) i b) suposant que les dades ara fossin:  $n=1000$  i  $y=260$ .

**Exercici 2.6 La tastadora de te (Binomial).** La secretaria d'un prestigiós departament d'estadística d'Anglaterra presumia de ser una experta en l'art del te, fins al punt que distingia si en un te amb llet s'hi havia posat primer el te o primer la llet. Això irremediablement va provocar a fer un experiment, en el que es van omplir 5 gots posant primer el te i després la llet, i 5 gots més posant primer la llet i després el te. Posteriorment la secretària va tastar els gots prèviament ordenats de forma aleatòria. Els va endevinar tots 10. És vol estimar la probabilitat d'encert de la secretària.

- f) Escull els paràmetres de la distribució a priori conjugada
- g) Dibuixa la distribució a priori, la versemblança i la distribució a posteriori en un mateix gràfic.
- h) Dona una estimació puntual així com un interval de credibilitat del 95% per a la probabilitat d'encert de la secretària.
- i) Dibuixa la predictiva a priori i a posteriori.

**Exercici 2.7 El borratxo adiví (Binomial).** Dos estadístics després de fer un munt de mitjanes estaven molt borratxos. Un d'ells va dir que tenia un do diví que consistia a endevinar si el llançament d'una moneda sortiria cara o creu. Van fer l'experiment 10 vegades i en tots ells va endevinar el resultat. És vol estimar la probabilitat d'encert de l'estadístic borratxo.

- c) Escull els paràmetres de la distribució a priori conjugada
- d) Dibuixa la distribució a priori, la versemblança i la distribució a posteriori en un mateix gràfic.
- e) Dona una estimació puntual així com un interval de credibilitat del 95% per a la probabilitat d'encert de la secretària.
- f) Dibuixa la predictiva a priori i a posteriori.

**Exercici 2.8 L'expert en música (Binomial).** A un prestigiós compositor se'l sotmet a una prova que consisteix en endevinar mirant una partitura si aquesta correspon o bé a Bach o bé a Mozart. Van fer l'experiment 10 vegades i en tots ells va endevinar el resultat. És vol estimar la probabilitat d'encert del compositor.

- a) Escull els paràmetres de la distribució a priori conjugada
- b) Dibuixa la distribució a priori, la versemblança i la distribució a posteriori en un mateix gràfic.
- c) Dona una estimació puntual així com un interval de credibilitat del 95% per a la probabilitat d'encert de la secretària.
- d) Dibuixa la predictiva a priori i a posteriori.

**Exercici 2.9** En els tres exercicis anteriors teníem una mostra de tamany 10 i en tots ells hem observat 10 encerts, de manera que la versemblança i la informació de les dades eren la mateixa.

- a) Posa't el barret freqüentista i dona una estimació puntual així com un interval de confiança del 95% per a la probabilitat d'encert per a cadascun dels exercicis anteriors.
- b) Compara i discuteix els resultats obtinguts de forma bayesiana i de forma freqüentista.