

# Introducció a la Investigació Operativa

## **Tema 4.** Models lineals d'optimització: plantejaments alternatius

Catalina Bolancé

Dept. Econometria, Estadística i Economia Espanyola

Javier Heredia

Dept. Estadística i Investigació Operativa

## 1 Definicions

- Programació per fites
- Programació amb objectius múltiples o multiobjectiu

## 2 Programació per fites

- Exemple "*Resort Hotel and Convention Center*"
- Modificacions del model per fites

## 3 Programació amb objectius múltiples o multiobjectiu

- Exemple "*Blackstone Mining Company*"

# Definicions

## Programació per fites

La **programació per fites** consisteix en resoldre problemes que no inclouen un únic i específic objectiu; el que plantegen és un conjunt de fites que ens agradaria aconseguir.

En la solució final no totes les fites han de estar assolides.

Les fites es poden prioritzar en funció de la seva importància i, per tant, en funció de l'ordre en què ens agradaria que s'aconseguissin.

# Definicions

## Programació amb objectius múltiples

La **programació multiobjectiu** consisteix en resoldre problemes on hi ha més d'una funció objectiu a optimitzar.

Els objectius poden entrar en conflicte entre ells.

La solució òptima és de compromís, és a dir, per a un objectiu únic sempre podem trobar una solució que almenys iguali a l'obtinguda.

# Programació per fites

## Exemple “Resort Hotel and Convention Center”

Mitjançant un estudi de mercat es determina que per aconseguir atreure un determinat nombre de convencions és necessari:

- **Fita 1:** S’han d’incloure aproximadament 5 sales de conferències de mida petita.
- **Fita 2:** S’han d’incloure aproximadament 10 sales de conferències de mida mitjana.
- **Fita 3:** S’han d’incloure aproximadament 15 sales de conferències de mida gran.
- **Fita 4:** S’ha de fer una ampliació de 25.000 metres quadrats.
- **Fita 5:** Es desitja limitar la inversió total a aproximadament 1.000.000€.

# Programació per fites

Exemple “*Resort Hotel and Convention Center*”

La mida de les sales petites és 400 metres quadrats, la de les mitjanes 750 i la de les grans 1.050 metres quadrats. Els costos de les sales són 18.000€ per a les petites, 33.000€ per a les mitjanes i 45.000€ per a les grans. Es desitja trobar una solució que ens determini quantes sales de moda petita, mitjana i gran s’han de afegir si es volen aconseguir totes les fites marcades.

Es pot utilitzar un model de programació lineal per resoldre aquest tipus de problemes.

# Programació per fites

Exemple "*Resort Hotel and Convention Center*"

## Definim primer les restriccions del model per fites.

Siguin les variables de decisió del model:

- $x_1$  = Nombre de sales petites
- $x_2$  = Nombre de sales mitjanes
- $x_3$  = Nombre de sales grans

Les tres primeres fites són:

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = 10$$

$$x_3 = 15$$

Hem d'incorporar el fet de que són fites i no restriccions, i tenint en compte que en les fites s'utilitza la paraula "aproximadament".

# Programació per fites

Exemple “*Resort Hotel and Convention Center*”: Les variables de desviació

- Anomenem  $d_i^-$  a les variables que representen en quina quantitat la fita no s’ha aconseguit per defecte. És a dir, el resultat de la restricció és menor al que estableix la fita.
- Anomenem  $d_i^+$  a les variables que representen en quina quantitat la fita no s’ha aconseguit per excés. És a dir, el resultat de la restricció és major al que estableix la fita.

El subíndex  $i$  fa referència a la restricció.



# Programació per fites

Exemple "*Resort Hotel and Convention Center*": Les variables de desviació

Per permetre desviacions respecte els valors de les fites, s'afegeixen a les restriccions les variables de desviació per defecte i per excés:

$$x_1 + d_1^- - d_1^+ = 5$$

$$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$$

$$x_3 + d_3^- - d_3^+ = 15$$

# Programació per fites

Exemple "*Resort Hotel and Convention Center*": Les variables de desviació

Fem el mateix per les fites 4 i 5:

$$\begin{array}{rcl} 400x_1 + 750x_2 + 1.050x_3 + d_4^- - d_4^+ & = & 25.000 \\ 18.000x_1 + 33.000x_2 + 45.150x_3 + d_5^- - d_5^+ & = & 1.000.000 \end{array}$$

# Programació per fites

Exemple “*Resort Hotel and Convention Center*”: La funció objectiu

L'objectiu és trobar la solució (valor de les variables de decisió) amb la què aconseguim complir, el màxim possible, totes les fites.

L'objectiu consisteix en minimitzar la suma de totes les desviacions:

$$\min : z = \sum_i (d_i^- + d_i^+)$$

# Programació per fites

Exemple “Resort Hotel and Convention Center”: El model de PL

$$\min z = d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+ + d_3^- + d_3^+ + d_4^- + d_4^+ + d_5^- + d_5^+ \quad \text{Fites}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.: } x_1 + d_1^- - d_1^+ &= 5 && \text{Petites} \\ x_2 + d_2^- - d_2^+ &= 10 && \text{Mitjanes} \\ x_3 + d_3^- - d_3^+ &= 15 && \text{Grans} \\ 400x_1 + 750x_2 + 1.050x_3 + d_4^- - d_4^+ &= 25.000 && \text{Superfície} \\ 18.000x_1 + 33.000x_2 + 45.150x_3 + d_5^- - d_5^+ &= 1.000.000 && \text{Pressupost} \\ x_1, x_2, x_3, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+, d_4^-, d_4^+, d_5^-, d_5^+ &\geq 0 \end{aligned}$$

# Programació per fites

Exemple “*Resort Hotel and Convention Center*”: Solució del model de PL

Podem utilitzar l'algorisme SIMPLEX.

Les variables de desviació per defecte actuen com si fossin variables de folgança.

S'obtenen els resultats amb el *Solver* d'Excel i amb el *PROC LP* de SAS/OR.

# Programació per fites

Exemple "*Resort Hotel and Convention Center*": Solució del model de PL

MIRAR FITXER D'EXCEL: **Exemple\_per\_fites1.xlsx**

# Programació per fites

Exemple "Resort Hotel and Convention Center": Solució del model de PL

```
Exemple_multiobjectiu_T3
libname t3 '.';
data t3.multobj_t3;
  input _row_ $12. x1 x2 x3 d1me d1ma d2me d2ma d3me d3ma d4me d4ma d5me d5ma _type_ $ _rhs_;
  datalines;
Objectius      0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 MIN .
Petites        1 0 0 1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 EQ 5
Mitjanes       0 1 0 0 0 1 -1 0 0 0 0 0 0 EQ 10
Grans          0 0 1 0 0 0 0 1 -1 0 0 0 0 EQ 15
Superfície     400 750 1050 0 0 0 0 0 0 1 -1 0 0 EQ 25000
Pressupost     18000 33000 45150 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 EQ 1000000
;
run;

proc print data=t3.multobj_t3;
run;

proc lp data=t3.multobj_t3 tableauout=t3.taula_opt;
run;

proc print data=t3.taula_opt;
run;
```

# Programació per fites

Exemple "*Resort Hotel and Convention Center*": Solució del model de PL

MIRAR EL FITXER D'OUTPUT DE SAS **Exemple\_per\_fites1.lst**



# Programació per fites

Exemple “*Resort Hotel and Convention Center*”: Modificacions del model per fites

Modifiquem la redacció de les fites:

- **Fita 1:** S’han d’incloure almenys 5 sales de conferències de mida petita (5 o més).
- **Fita 2:** S’han d’incloure almenys 10 sales de conferències de mida mitjana (10 o més).
- **Fita 3:** S’han d’incloure almenys 15 sales de conferències de mida gran (15 o més).
- **Fita 4:** S’ha de fer una ampliació de 25.000 metres quadrats.
- **Fita 5:** Es desitja limitar la inversió total a no més de 1.000.000€ (1.000.000€ o menys).

# Programació per fites

Modificacions del model per fites: El model de PL

$$\min z = d_1^- + d_2^- + d_3^- + d_4^- + d_4^+ + d_5^+$$

Fites

$$\text{s.a.: } x_1 + d_1^- - d_1^+ = 5$$

Petites

$$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$$

Mitjanes

$$x_3 + d_3^- - d_3^+ = 15$$

Grans

$$400x_1 + 750x_2 + 1.050x_3 + d_4^- - d_4^+ = 25.000$$

Superfície

$$18.000x_1 + 33.000x_2 + 45.150x_3 + d_5^- - d_5^+ = 1.000.000$$

Pressupost

$$x_1, x_2, x_3, d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_4^-, d_4^+, d_5^+ \geq 0$$

# Programació per fites

Exemple "*Resort Hotel and Convention Center*": Solució del model de PL

MIRAR EL FITXER D'OUTPUT D'EXCEL **Exemple\_per\_fites2.xlsx**

# Programació per fites

## Modificacions del model per fites: El model de PL

Hem de tenir en compte l'escala associada a les fites.

En el exemple "*Resort Hotel and Convention Center*" no és el mateix referir-se a nombre de sales, a metres quadrats o a euros.

L'opció és expressar les fites en tant per cent en la funció objectiu.

$$\begin{aligned} \min z = & \frac{1}{5}d_1^- + \frac{1}{5}d_1^+ + \frac{1}{10}d_2^- + \frac{1}{10}d_2^+ + \frac{1}{15}d_3^- + \frac{1}{15}d_3^+ \\ & + \frac{1}{25.000}d_4^- + \frac{1}{25.000}d_4^+ + \frac{1}{1.000.000}d_5^- + \frac{1}{1.000.000}d_5^+ && \text{Fites} \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + d_1^- - d_1^+ = 5 && \text{Petites} \\ & x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 && \text{Mitjanes} \\ & x_3 + d_3^- - d_3^+ = 15 && \text{Grans} \\ & 400x_1 + 750x_2 + 1.050x_3 + d_4^- - d_4^+ = 25.000 && \text{Superfície} \\ & 18.000x_1 + 33.000x_2 + 45.150x_3 + d_5^- - d_5^+ = 1.000.000 && \text{Pressupost} \\ & x_1, x_2, x_3, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+, d_4^-, d_4^+, d_5^-, d_5^+ \geq 0 \end{aligned}$$

# Programació per fites

Exemple "*Resort Hotel and Convention Center*": Solució del model de PL

MIRAR EL FITXER D'OUTPUT DE SAS **Exemple\_per\_fites3.xlsx**

# Programació per fites

## Modificacions del model per fites: El model de PL

També es pot donar més importància a un objectiu que a un altre. Per exemple:

**La limitació de pressupost és dues vegades més important que la limitació de metres quadrats.**

$$\min z = \frac{1}{5}d_1^- + \frac{1}{5}d_1^+ + \frac{1}{10}d_2^- + \frac{1}{10}d_2^+ + \frac{1}{15}d_3^- + \frac{1}{15}d_3^+ \\ + \frac{1}{25.000}d_4^- + \frac{1}{25.000}d_4^+ + \frac{2}{1.000.000}(d_5^- + d_5^+)$$

Fites

$$\text{s.a.: } x_1 + d_1^- - d_1^+ = 5$$

Petites

$$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10$$

Mitjanes

$$x_3 + d_3^- - d_3^+ = 15$$

Grans

$$400x_1 + 750x_2 + 1.050x_3 + d_4^- - d_4^+ = 25.000$$

Superfície

$$18.000x_1 + 33.000x_2 + 45.150x_3 + d_5^- - d_5^+ = 1.000.000$$

Pressupost

$$x_1, x_2, x_3, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+, d_4^-, d_4^+, d_5^-, d_5^+ \geq 0$$

**EXERCICI:** Resoldre el model anterior utilitzant SAS.

# Programació per fites

## Modificacions del model per fites: El model de PL

També es pot donar més importància a un objectiu que a un altre. Per exemple:

**Les fites poden ordenar-se per preferències subjectives.**

$$\begin{aligned} \min z = & \frac{1}{5}P_1^-d_1^- + \frac{1}{5}P_1^+d_1^+ \\ & + \frac{1}{10}P_2^-d_2^- + \frac{1}{10}P_2^+d_2^+ \\ & + \frac{1}{15}P_3^-d_3^- + \frac{1}{15}P_3^+d_3^+ \\ & + \frac{1}{25.000}P_4^-d_4^- + \frac{1}{25.000}P_4^+d_4^+ \\ & + \frac{2}{1.000.000}(P_5^-d_5^- + P_5^+d_5^+) \end{aligned}$$

Fites

$$\begin{aligned} \text{s.a.: } & x_1 + d_1^- - d_1^+ = 5 \\ & x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ & x_3 + d_3^- - d_3^+ = 15 \\ & 400x_1 + 750x_2 + 1.050x_3 + d_4^- - d_4^+ = 25.000 \\ & 18.000x_1 + 33.000x_2 + 45.150x_3 + d_5^- - d_5^+ = 1.000.000 \\ & x_1, x_2, x_3, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+, d_4^-, d_4^+, d_5^-, d_5^+ \geq 0 \end{aligned}$$

Petites

Mitjanes

Grans

Superfície

Pressupost

# Programació amb objectius múltiples o multiobjectiu

## Exemple "*Blackstone Mining Company*"

Per preveure un possible augment de la demanda dels pròxims mesos s'han de programar torns extres. La informació del problema és la següent:

- Les previsions són que la demanda de carbó d'alta graduació augmentarà en 48 tones, la de graduació mitjana en 28 tones i la de baixa graduació en 100 tones.
- Hi ha dues mines funcionant, Whithe i Giles. A Whithe el cost d'un torn extra per tots els treballadors és de 40.000\$ i a Giles de 32, 000\$.
- Les quantitats de tones que es produeixen per torn extra dels treballadors són:

<b>Tipus de Carbó</b>	<b>Whithe</b>	<b>Giles</b>
Graduació alta	12 tones	4 tones
Graduació mitjana	4 tones	4 tones
Graduació baixa	10 tones	20 tones

- Només es pot fer un torn extra mensual.



# Programació amb objectius múltiples o multiobjectiu

Exemple "*Blackstone Mining Company*"

- Les extraccions de carbó generen aigües tòxiques. A la mina de Whithe un torn extra genera aproximadament 800 galons d'aigües tòxiques i a la mina de Giles 1.250 galons.
- Els accidents laborals també són una preocupació pels directius de l'empresa. S'ha calculat que aproximadament hi han 0,20 accidents mortals per torn en Whithe i 0,45 en Giles.

Els objectius dels directius són minimitzar el cost dels torns extres, minimitzar la producció d'aigües tòxiques i minimitzar els accidents laborals.

# Programació amb objectius múltiples o multiobjectiu

Exemple "*Blackstone Mining Company*": El model de PL

## VARIABLES DE DECISIÓ:

$x_1$  = Nombre de mesos a programar torn extra a la mina de Whithe.

$x_2$  = Nombre de mesos a programar torn extra a la mina de Giles.

## FUNCIONS OBJECTIU:

$\min z_1 = 40x_1 + 32x_2$  Costos de producció (en milers de dòlars)

$\min z_2 = 800x_1 + 1.250x_2$  Producció d'aigües tòxiques

$\min z_2 = 0, 20x_1 + 0, 45x_2$  Accidents laborals

## RESTRICCIONS:

$12x_1 + 4x_2 \geq 48$  Carbó d'alta graduació

$4x_1 + 4x_2 \geq 28$  Carbó de mitjana graduació

$10x_1 + 20x_2 \geq 100$  Carbó de baixa graduació

# Programació amb objectius múltiples o multiobjectiu

Exemple "*Blackstone Mining Company*": El model de PL

$\min z_1 =$	$40x_1 + 32x_2$	Costos de producció (en milers de dolars)
$\min z_2 =$	$800x_1 + 1.250x_2$	Producció d'aigües tòxiques
$\min z_3 =$	$0,20x_1 + 0,45x_2$	Accidents laborals
s.a.:		
	$12x_1 + 4x_2 \geq 48$	Carbó d'alta graduació
	$4x_1 + 4x_2 \geq 28$	Carbó de mitjana graduació
	$10x_1 + 20x_2 \geq 100$	Carbó de baixa graduació
	$x_1, x_2 \geq 0$	

# Programació amb objectius múltiples o multiobjectiu

Exemple "Blackstone Mining Company": Solució del model de PL

Exemple\_multiobj\_T3

```
libname mult '.';
data mult.exemple_multobj;
  input _row_ $19. White Giles _type_ $ _rhs_;
  datalines;
Coste de producció      40  32  MIN  1
Aigües tòxiques        800 1250 MIN  2
Accidents mortals      0.20 0.45 MIN  3
Alta graduació         12   4   GE   48
Mitjana graduació      4    4   GE   28
Baixa graduació        10  20   GE  100
;
run;
proc print data=mult.exemple_multobj;
run;
proc lp data=mult.exemple_multobj goalprogram;
run;
```

Coste de producció	40	32	MIN	1
Aigües tòxiques	800	1250	MIN	2
Accidents mortals	0.20	0.45	MIN	3
Alta graduació	12	4	GE	48
Mitjana graduació	4	4	GE	28
Baixa graduació	10	20	GE	100

Exemple\_multiobj\_T3 \*

```
libname mult '.';
data mult.exemple_multobj;
  input _row_ $19. White Giles _type_ $ _rhs_;
  datalines;
Coste de producció      40  32  MIN  2
Aigües tòxiques        800 1250 MIN  1
Accidents mortals      0.20 0.45 MIN  3
Alta graduació         12   4   GE   48
Mitjana graduació      4    4   GE   28
Baixa graduació        10  20   GE  100
;
run;
proc print data=mult.exemple_multobj;
run;
proc lp data=mult.exemple_multobj goalprogram;
run;
```

Coste de producció	40	32	MIN	2
Aigües tòxiques	800	1250	MIN	1
Accidents mortals	0.20	0.45	MIN	3
Alta graduació	12	4	GE	48
Mitjana graduació	4	4	GE	28
Baixa graduació	10	20	GE	100

Exemple\_multiobj\_T3 \*

```
libname mult '.';
data mult.exemple_multobj;
  input _row_ $19. White Giles _type_ $ _rhs_;
  datalines;
Coste de producció      40  32  MIN  3
Aigües tòxiques        800 1250 MIN  2
Accidents mortals      0.20 0.45 MIN  1
Alta graduació         12   4   GE   48
Mitjana graduació      4    4   GE   28
Baixa graduació        10  20   GE  100
;
run;
proc print data=mult.exemple_multobj;
run;
proc lp data=mult.exemple_multobj goalprogram;
run;
```

Coste de producció	40	32	MIN	3
Aigües tòxiques	800	1250	MIN	2
Accidents mortals	0.20	0.45	MIN	1
Alta graduació	12	4	GE	48
Mitjana graduació	4	4	GE	28
Baixa graduació	10	20	GE	100

# Programació amb objectius múltiples o multiobjectiu

Exemple "*Blackstone Mining Company*": Solució del model de PL

MIRAR FITXER D'OUTPUT DE SAS **Exemple\_multiobjt.lst**

<b>Solució</b>	<b>Mesos en Whithe</b>	<b>Mesos en Giles</b>	<b>Cost de producció</b>	<b>Aigües tòxiques</b>	<b>Accidents mortals</b>
1	2,5	4,5	244	7.625.00	5,53 €
2	4,0	3,0	256	6.950.00	2,15 €
3	10,0	0,0	400	8.000.00	2,00 €