Examen de Inferencia Estadística

13 de junio de 2016

1. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad:

$$f(x;\theta) = \theta(1-x)^{\theta-1}\,\mathbb{1}_{(0,1)}(x) \quad \theta > 0$$

Consideremos una muestra aleatoria simple de tamaño n de X.

   a) Encuentre el MLE (estimador máximo verosímil) y el estimador obtenido por el método de los momentos de θ.

   b) Halle el sesgo del MLE de θ. También su error cuadrático medio.

   c) Calcule la Cota de Cramér-Rao correspondiente a estimadores insesgados de θ.

   d) Halle un estadístico suficiente para θ. Suponga que la família de probabilidades es completa, halle el estimador UMVU (uniformemente insesgado y de mínima varianza) de θ.

   e) Construya un intervalo de confianza $(1-\alpha)$ para θ.

Indicación: Puede ayudar a resolver el problema el calcular la función de densidad de la variable $Y = -\ln(1-X)$.

2. Sea X una variable aleatoria absolutament contínua con función de densidad

$$f(x;\lambda) = 2\lambda\, x \exp\left(-\lambda x^2\right)\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) \quad \lambda > 0$$

Fijemos dos números reales conocidos $0 < \lambda_0 < \lambda_1$. Consideremos una muestra aleatoria simple de tamaño n de X.

   a) Halle un test de potencia máxima (MP), fijado el nivel de significación $\alpha \in (0,1)$, para contrastar:

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \qquad H_1 : \lambda = \lambda_1$$

   y resuélvalo para el caso particular $n = 6$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 1.5$, $\alpha = 0.05$.

   b) Demuestre que la región crítica del test del primer apartado, también es la región crítica de un test UMP (uniformemente MP) pera contrastar:

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \qquad H_1 : \lambda > \lambda_0$$

   c) Utilitze el test de la razón de verosimilitud para contrastar:

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \qquad H_1 : \lambda \neq \lambda_0$$

Indicación: Puede ayudar a resolver el problema el calcular la función de densidad de la variable $Y = X^2$.

3. Contestar **verdadero (V)** o **falso (F)** en esta misma hoja.

V
- Sea X una variable aleatoria cuya ley probabilística es una distribución Binomial $B(m,p)$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $p \in (0,1)$, y sean $X_1,\ldots,X_n$ las variables aleatorias muestrales correspondientes a una muestra de tamaño n. Entonces la distribución conjunta de $(X_1,\ldots,X_n)$ sigue una distribución de la familia exponencial.

F
- Todo estimador consistente es asintóticamente eficiente.

F
- El MLE de un parámetro, si existe, siempre es un estimador insesgado de dicho parámetro.

F
- Un pivote es un estadístico insesgado del parámetro que pretendemos estimar por regiones.

V
- El Teorema de Fisher nos proporciona bastante directamente pivotes para estimar la esperanza o la desviación típica de una distribución normal univariante.

V
- El Lema (o Teorema) de Neyman-Pearson nos garantiza la existencia de tests óptimos (puros o aleatorizados) en el caso de que tanto la hipótesis nula como la alternativa sean simples.

V
- La Razón de verosimilitud es un estadístico con esperanza finita, tanto bajo la hipótesis nula como la alternativa.

F
- Bajo condiciones de regularidad $-2\ln\Lambda(X_1,\ldots,X_n)$ converge en ley (también: converge débilmente o en distribución) a una distribución χ^2 con sus correspondientes grados de libertad.

NOTA: Cada apartado de los dos problemas vale 1 punto. Las respuestas deben ser debidamente justificadas, exceptuando las preguntas tipo test finales. El test vale 2 puntos de la nota final del examen. La nota del test, sobre 2 puntos, es igual a 0,25 multiplicado por el nómero de aciertos menos fallos.

1.a) La función de verosimilitud será:

$$L_x(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \theta(1-x_i)^{\theta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x_i) \right\}$$

$$= \theta^n \left\{ \prod_{i=1}^{n} (1-x_i) \right\}^{\theta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x_{(1)}) \mathbb{1}_{(0,1)}(x_{(n)}) \qquad \theta > 0$$

con probabilidad 1 será:

$$L_x(\theta) = \theta^n \left\{ \prod_{i=1}^{n} (1-x_i) \right\}^{\theta-1} \qquad x_1, \dots, x_n \in (0,1) \quad \theta > 0$$

Hemos de hallar su máximo. Facilita el problema tomar logaritmos:

$$\ln L_x(\theta) = n \ln \theta + (\theta-1) \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)$$

$$\frac{\partial \ln L_x(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)$$

La ecuación de verosimilitud es:

$$\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i) = 0$$

que proporciona la solución:

$$\theta^* = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)}$$

obsérvese que:

$$\frac{\partial \ln L_x(\theta)}{\partial \theta} > 0 \quad \text{si} \quad \theta < \theta^*$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial \ln L_x(\theta)}{\partial \theta} < 0 \quad \text{si} \quad \theta > \theta^*$$

por lo que al ser $\ln L_x(\theta)$ creciente antes de θ^* y decreciente después, podemos asegurar que la función presenta un máximo absoluto en la (única) raíz obtenida por lo que el MLE es:

$$\boxed{\theta^*(X_1 \cdots X_n) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-X_i)}}$$

En cuanto al método de los momentos, notemos que

$$E(X) = \int_0^1 x\, f_X(x)\, dx = \int_0^1 x\, \theta (1-x)^{\theta-1} dx =$$

$$= \theta \int_0^1 x^{2-1}(1-x)^{\theta-1} dx = \theta B(2,\theta) = \theta \frac{\Gamma(2)\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta+2)} =$$

$$= \theta \frac{1!\ \Gamma(\theta)}{(\theta+1)\theta\Gamma(\theta)} = \frac{1}{\theta+1}$$

por tanto para obtener dicho estimador igualaremos:

$$\bar{x}_n = \frac{1}{\theta+1} \iff \theta = \frac{1}{\bar{x}_n} - 1$$

por tanto:

$$\boxed{\hat{\theta}(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{\bar{X}_n} - 1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} - 1}$$

o expresión equivalente.

1.b) Para hallar el sesgo del MLE usaremos la indicación. Lo haremos de dos formas distintas.

/* primera forma */ Sea $Y = -\ln(1-X)$, definida con probabilidad 1

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\ln(1-X) \leq y) = P(\ln(1-X) \geq -y) =$$

$$= P(1-X \geq e^{-y}) = P(-X \geq -1+e^{-y}) = P(X \leq 1-e^{-y})$$

$$= F_X(1-e^{-y})$$

pero:

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ 1-(1-u)^{\theta} & u \in (0,1) \\ 1 & u \geq 1 \end{cases}$$

por tanto:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1-e^{-\theta y} & y > 0 \end{cases}$$

por tanto Y sigue una distribución exponencial de parámetro θ.

/* segunda forma */

A través de las funciones de densidad.

$$f_Y(y) = f_X(x(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right| \quad \text{para } y>0, \text{ cero en caso contrario.}$$

donde $x(y) = 1 - e^{-y}$ ya que $y(x) = -\ln(1-x)$.

por tanto:

$$\frac{dx}{dy} = -e^{-y}(-1) = e^{-y}$$

y resulta:

$$f_Y(y) = \theta\left(1-(1-e^{-y})\right)^{\theta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(1-e^{-y}) \cdot \left|e^{-y}\right|$$

$$= \theta\left(e^{-y}\right)^{\theta-1} e^{-y}\, \mathbb{1}_{(0,1)}(1-e^{-y})$$

$$= \theta\, e^{-y\theta+y} e^{-y}\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

$$= \theta e^{-\theta y}\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

por tanto Y sigue una distribución exponencial de parámetro θ.

Cualquiera de los dos caminos es válido.

El MLE será:

$$\theta^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} Y_i} \quad \text{y por tanto, como } \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \text{Gamma}(\theta, n)$$

resultará que:

$$E_\theta((\theta^*)^p) = \int_0^\infty \left(\frac{n}{u}\right)^p \frac{\theta^n u^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-\theta u} du =$$

$$= \frac{n^p \theta^p}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \theta^{n-p} u^{n-p-1} e^{-\theta u} du =$$

$$= \frac{n^p \theta^p}{\Gamma(n)} \Gamma(n-p) \quad \text{siempre que } n-p > 0$$

$(n > p)$

para $p=1$

$$E_\theta(\theta^*) = \frac{n\theta}{\Gamma(n)} \Gamma(n-1) = \frac{n}{n-1}\theta$$

El sesgo del MLE será:

$$\boxed{B(\theta) = \frac{n}{n-1}\theta - \theta = \frac{1}{n-1}\theta} \quad (\text{para } n > 1)$$

Para calcular el error cuadrático medio calculemos

$$E_\theta(\theta^{*2}) = \frac{n^2\theta^2}{\Gamma(n)} \Gamma(n-2) = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)(n-2)} \quad (\text{para } n > 2)$$

por tanto

$$\text{var}_\theta(\theta^*) = E_\theta(\theta^{*2}) - E_\theta(\theta^*)^2 =$$

$$= \frac{n^2\theta^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2} = \frac{n^2((n-1)-(n-2))}{(n-2)(n-1)^2}\theta^2$$

$$= \frac{n^2}{(n-2)(n-1)^2}\theta^2$$

para $n > 2$

El error cuadrático medio será:

$$\boxed{EQM(\theta^*) = var_\theta(\theta^*) + B(\theta^*)^2} =$$

$$= \frac{n^2}{(n-2)(n-1)^2}\theta^2 + \frac{1}{(n-1)^2}\theta^2 =$$

$$= \frac{(n^2+n-2)\ \theta^2}{(n-2)(n-1)^2} = \frac{(n-1)(n+2)}{(n-2)(n-1)^2}\theta^2 =$$

$$\boxed{= \frac{n+2}{(n-2)(n-1)}\theta^2}$$

1.c) En cuanto la cota de Cramér-Rao resulta:

$\ln f(x,\theta) = \ln\theta + (\theta-1)\ln(1-x)$ (con probabilidad 1)

$$\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta} + \ln(1-x)$$

$$\boxed{I(\theta) = E_\theta\left(\left\{\frac{1}{\theta} + \ln(1-X)\right\}^2\right)} = E_\theta\left(\left\{\frac{1}{\theta^2} + \ln^2(1-X) + \frac{2}{\theta}\ln(1-X)\right\}\right)$$

$$= \frac{1}{\theta^2} + E_\theta(Y^2) - \frac{2}{\theta}E_\theta(Y) = \frac{1}{\theta^2} + \left(\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2}\right) - \frac{2}{\theta}\frac{1}{\theta} =$$

$$\boxed{= \frac{1}{\theta^2}}$$

(ya que $E_\theta(Y) = \frac{1}{\theta}$ $\quad var_\theta(Y) = \frac{1}{\theta^2}$)

Por tanto la cota de Cramér-Rao, para insesgados, será:

$$\boxed{CCR = \frac{1}{nI(\theta)} = \frac{1}{n\frac{1}{\theta^2}} = \frac{\theta^2}{n}}$$

/* Alternativamente */ Por condiciones de regularidad:

$$I(\theta) = -E_\theta\left(\frac{\partial^2 \ln f(X,\theta)}{\partial\theta^2}\right) = -E_\theta\left(-\frac{1}{\theta^2}\right) = \frac{1}{\theta^2}$$

1.d) La función de densidad conjunta de la muestra es:

$$\tilde{f}(x_1 - x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \theta (1-x_i)^{\theta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x_i) \right\} =$$

$$= \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} (1-x_i) \right)^{\theta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x_{(1)}) \, (x_{(n)})$$

$$= \theta^n \left\{ e^{\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\right)} \right\}^{\theta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x_{(1)}) (x_{(n)})$$

$$= \underbrace{\theta^n e^{-\left(-\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)\right)(\theta-1)}}_{g\left(\theta, -\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)\right)} \underbrace{\mathbb{1}_{(0,1)}(x_{(1)})(x_{(n)})}_{h(x_1 - x_n)}$$

(Neyman - Fisher)

por tanto $-\sum_{i=1}^{n} \ln(1-X_i)$ es un estadístico suficiente.

Además nos añaden la hipótesis de completitud, por tanto para aplicar Lehmann-Scheffé bastará corregir el sesgo del MLE:

$$\left[U \equiv \frac{n-1}{n} \theta^* = - \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-X_i)} \right]$$

este estimador es insesgado y función del suficiente y completo $-\sum_{i=1}^{n} \ln(1-X_i)$ por tanto es UMVU.

Su varianza será:

$$\left[\operatorname{var}_\theta(U) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \operatorname{var}_\theta(\theta^*) = \frac{(n-1)^2}{n^2} \frac{n^2}{(n-2)(n-1)^2} \theta^2 = \frac{\theta^2}{n-2} \right]$$

por tanto: U no es eficiente ya que

$$\left[\operatorname{var}_\theta(U) = \frac{\theta^2}{n-2} > \frac{\theta^2}{n} \right]$$

1.e) Observemos que conocemos la distribución de

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i = -\sum_{i=1}^{m} \ln(1-X_i) \sim G(\theta, m)$$

Por tanto:

$$2\theta \sum_{i=1}^{m} Y_i = -2\theta \sum_{i=1}^{m} \ln(1-X_i) \sim G\left(\tfrac{1}{2}, m\right) = \chi^2_{2m}$$

Podemos usar esta expresión como pivote:

$$P\left(a \leq -2\theta \sum_{i=1}^{m} \ln(1-X_i) \leq b\right) = 1-\alpha$$

a y b determinados en tablas.

$$F_{\chi^2_{2n}}(a) = \alpha_1$$

con $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \in (0,1)$

$$F_{\chi^2_{2m}}(b) = 1-\alpha_2$$

$$a \leq -2\theta \sum_{i=1}^{m} \ln(1-X_i) \leq b.$$

$$-\frac{a}{2\sum_{i=1}^{m} \ln(1-X_i)} \geq \theta \geq -\frac{b}{2\sum_{i=1}^{m} \ln(1-X_i)}$$

$$\left[a = F^{-1}_{\chi^2_{2m}}(\alpha_1)\right]$$

$$\left[b = F^{-1}_{\chi^2_{2m}}(1-\alpha_2)\right]$$

[como aproximación podemos escoger $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ (1)]

$$\left[-\frac{b}{2\sum_{i=1}^{m} \ln(1-X_i)} \leq \theta \leq -\frac{a}{2\sum_{i=1}^{n} \ln(1-X_i)}\right]$$

(1) en caso contrario implementaríamos algún método numérico.

2a) La región crítica óptima vendrá dada por el lema o teorema de Neyman - Pearson

$$\tilde{f}_1(x_1 - x_n) \geq K f_0(x_1 - x_n)$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left\{2\lambda_1 x_i e^{-\lambda_1 x_i^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x_i)\right\} \geq K \prod_{i=1}^{n}\left\{2\lambda_0 x_i e^{-\lambda_0 x_i^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x_i)\right\}$$

$$2^n \lambda_1^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) e^{-\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x_{(1)}) \geq$$

$$\geq K\, 2^n \lambda_0^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) e^{-\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x_{(1)})$$

simplificando y teniendo en cuenta que con probabilidad 1 $X_{(1)} > 0$:

$$\lambda_1^n e^{-\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq K \lambda_0^n e^{-\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$e^{(\lambda_0 - \lambda_1) \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq K\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n$$

$$(\lambda_0 - \lambda_1) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \ln\left(K\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n\right)$$

como lo hemos de resolver para $\lambda_0 = 1$ y $\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_1 > \lambda_0$ resultará:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \underbrace{\frac{1}{\lambda_0 - \lambda_1} \ln\left(K\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n\right)}_{\text{llamémosle "c"}}$$

Una región crítica (óptima) será de la forma:

$$\boxed{W = \left\{(x_1 - x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq c\right\}}$$

donde c dependerá del nivel de significación α que queramos trabajar.

Si hacemos $\alpha = 0.05$ podemos hallar c teniendo en cuenta la indicación.

Si llamamos $Y = X^2$ entonces:

para $y > 0$

$$f_Y(y) = f_X(x(y)) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| =$$

$$= 2\lambda \sqrt{y}\, e^{-\lambda y} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \lambda e^{-\lambda y}$$

para $y > 0$ y cero en caso contrario; luego Y sigue una exponencial de parámetro λ.

Entonces:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim G(\lambda, n) \right]$$

y $\quad 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G\left(\frac{1}{2}, n\right) \equiv \chi^2_{2n}$

Por tanto hemos de determinar c de forma que:

$$0.05 = \alpha = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \leq c \,\middle|\, H_0 \right) = P\left(2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \leq 2c \right) = P(U \leq 2c)$$

donde U es una v.a que sigue una distribución χ^2 con $2n$ grados de libertad. Por tanto:

$$F_{\chi^2_{2n}}(2c) = 0.05 \Rightarrow 2c = F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(0.05)$$

$$c = \frac{1}{2} F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(0.05)$$

para $n = 6$ resultara:

$$\left[c = \frac{1}{2} F^{-1}_{\chi^2_{12}}(0.05) = \frac{1}{2}\, 5.226 = 2{,}613 \right]$$

2.b.) Observemos que la región crítica obtenida es idéntica a la que obtendríamos sustituyendo λ_1 por cualquier otro valor mayor que λ_0. Por tanto sí que existe una región crítica óptima uniformemente para contrastar

$H_0: \lambda = \lambda_0 \quad H_1: \lambda > \lambda_0$ → test UMP

$$\left[W = \{ (x_1 - x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le a \} \right]$$ con $a = 2c$ y determinado de forma que

$$\left[F_{\chi^2_{2n}}(a) = \alpha \quad a = F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(\alpha) \right]$$

2.c.) Observemos que $\Theta \equiv \mathbb{R}^+$ $\Theta_0 = \{\lambda_0\}$

$\dim \Theta = 1 \quad \dim \Theta_0 = 0$.

$$L_x(\lambda) = 2^n \lambda^n (\prod_{i=1}^{n} x_i)\, e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2}\, 1_{\mathbb{R}^+}(x_{(1)})$$

con probabilidad 1 igual a:

$$L_x(\lambda) = 2^n \lambda^n (\prod_{i=1}^{n} x_i)\, e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

teniendo en cuenta la indicación, al ser $X^2 \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ el MLE es bien sabido que es igual a:

$$\left[\lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \right]$$ (la inversa de la media) caso: modelo exponencial ordinario

por tanto:

$$L_x(\widehat{\Theta}) = L_x\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) = 2^n \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) e^{-n}$$

$$L_x(\widehat{\Theta_0}) = L_x(\lambda_0) = 2^n \lambda_0^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) e^{-\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\left[\Lambda(x_1 - x_n) = \frac{L_x(\widehat{\Theta_0})}{L_x(\widehat{\Theta})} = \left(\frac{\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}\right)^n e^{-\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n} \right]$$

Si introducimos la función

$$h(w) = w^n e^{-n(w-1)} \qquad \text{para } w \geq 0$$

resulta que

$$\Lambda(x_1 \ldots x_n) = h\left(\frac{\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \right)$$

observar que $h'(w) = n\, w^{n-1} e^{-n(w-1)} + w^n e^{-n(w-1)} (-n)$

$$= n\, w^{n-1} e^{-n(w-1)} \{1 - w\}$$

por tanto h es creciente cuando $0 \leq w < 1$ y decreciente cuando $w > 1$ y $\Lambda(x_1 \ldots x_n) = c$ cuando $h(A) = h(B) = c$ con $A < 1$ y $B > 1$. La región crítica será pues:

$$\boxed{W = \left\{ (x_1 - x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle/\; \frac{\lambda_0}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < A \text{ ó } \frac{\lambda_0}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > B \right\}}$$

donde A y B verifican:

$$A^n e^{-n(A-1)} = B^n e^{-n(B-1)}$$

equivalente a:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = e^{-n(B-A)}$$

y además como $P(W \mid H_0) = \alpha \Leftrightarrow P(W^c \mid H_0) = 1 - \alpha$

tendremos, como bajo H_0 $\frac{\lambda_0}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim G(n, n)$, que

$$\int_A^B \frac{n^n t^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-nt}\, dt = 1 - \alpha$$

Alternativamente, podemos usar una aproximación asintótica basada en el Teorema de Wilks.

Calculando:

$$-2\ln\Lambda(x_1 - x_n) = -2\left\{n\ln\left(\frac{\lambda_0\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}\right) - \lambda_0\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + n\right\}$$

$$= 2n\left\{\frac{\lambda_0\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n} - 1 - \ln\frac{\lambda_0\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}\right\}$$

pues sabemos que bajo la hipótesis nula con condiciones de regularidad, $-2\ln\Lambda \xrightarrow{\mathcal{L}} U$ con $U \sim \chi^2_r$ siendo

$r = \dim(\Theta) - \dim(\Theta_0) = 1 - 0 = 1$.

Por tanto, podemos determinar un valor A de forma que

$$P(U > A) = \alpha \iff P(U \leq A) = F_{\chi_1}(A) = 1-\alpha$$

$$A = F^{-1}_{\chi_1}(1-\alpha)$$

y la región crítica de nivel de significación α aproximado será:

$$W = \left\{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; -2\ln\Lambda(x_1 - x_n) > A\right\}$$