Llista de problemes

1.1 Trobeu la recta que passa per $(0,2,1)$ i té direcció $2i-k$. Trobeu la forma vectorial i les seves equacions.

1.2 Trobeu la recta que passa per $(-5,0,4)$ i $(6,-3,2)$. (forma vectorial i equacions)

1.3 Trobeu els punts d'intersecció de la recta $\ell(t)=(3+2t,\ 7+8t,\ -2+t)$ amb els plans de coordenades.

1.4 Proveu que no hi ha punts $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ que satisfacin $2x-3y+z-2=0$ i estiguin sobre la recta $\ell(t)=(2,-2,-1)+t(1,1,1)$.

1.5 Trobeu l'àrea del triangle que té per vèrtexs $(1,0,0)$, $(1,1,1)$ i $(0,-2,3)$.

1.6 Calculeu el volum del paral·lelepípede generat per $2i+j-k$, $5i-3k$, $i-2j+k$.

1.7 Trobeu l'eq. del pla perpendicular a la recta $\ell(t)=(5,0,2)t+(3,-1,1)$ i passa pel punt $(5,-1,0)$.

1.8 Trobeu l'eq. del pla que passa per $(2,-1,3)$, $(0,0,5)$, $(5,7,-1)$.

1.9 Troben l'equació de la recta que passa per $(1,-2,-3)$ i és perpendicular al pla $3x - y - 2z + 4 = 0$

1.10 Troben l'equació del pla que conté les rectes

$$\ell_1(t) = (0,1,-2) + t\,(2,3,-1)\,, \qquad \ell_2(t) = (2,-1,0) + t\,(2,3,-1)$$

1.11 Troben l'equació del pla que conté a la recta $\ell(t) = (-1,1,2) + t\,(3,2,4)$ i és perpendicular al pla $2x + y - 3z + 4 = 0$

1.12 Troben l'eq. vectorial de la recta $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x - 4z + 1 = 0 \end{cases}$

Solucions

1.1 $a = (0,2,1)$, $v = 2i - k = (2,0,-1)$

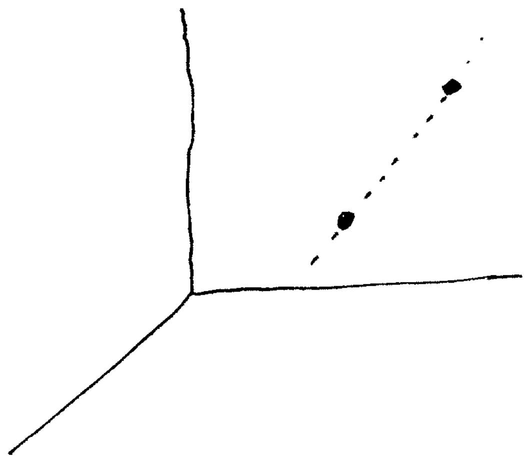
forma vectorial:

$$\ell(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{2} = \dfrac{z-1}{-1} \\ y = 2 \end{cases} \longrightarrow -x = 2z - 2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x + 2z - 2 = 0 \\ y = 2 \end{array}}$$

1.2



prenem $a = (-5, 0, 4)$

$v = (-5, 0, 4) - (6, -3, 2) = (-11, 3, 2)$

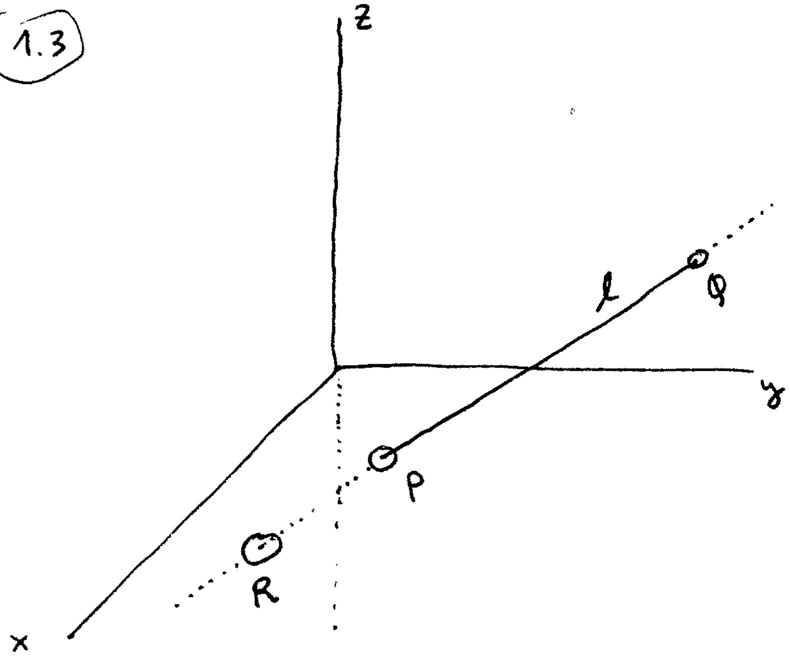
forma vectorial : $\ell(t) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x &= -5 - 11t \\ y &= 3t \\ z &= 4 + 2t \end{aligned}$

$$t = \frac{x+5}{-11} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{2}$$

$$\begin{cases} 3x + 15 = -11y \\ 2y = 3z - 12 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 3x + 11y + 15 &= 0 \\ 2y - 3z + 12 &= 0 \end{aligned}}$$

1.3



$\ell(t) = (3+2t,\ 7+8t,\ -2+t)$

pla x-y. La seva eq. és $z=0$

La intersecció de ℓ amb $z=0$ es dóna

quan $-2+t=0 \longrightarrow t=2$.

El punt d'intersecció és $P = (3+2\cdot 2,\ 7+8\cdot 2,\ 0) = (7, 23, 0)$

---

pla y-z. La seva eq. és $x=0$. Cond. d'intersecció $3+2t=0 \rightarrow t = -\frac{3}{2}$

El punt d'intersecció és $Q = \left(0,\ 7+8\frac{-3}{2},\ -2-\frac{3}{2}\right) = \left(0, -5, -\frac{7}{2}\right)$

---

pla x-z. La seva eq. és $y=0$. Cond. d'intersecció $7+8t=0 \rightarrow t = -\frac{7}{8}$

El punt d'intersecció és $R = \left(3+2\frac{-7}{8},\ 0,\ -2-\frac{7}{8}\right) = \left(-\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{23}{8}\right)$

(1.4) Si hi haguessin punts del pla $2x-3y+z-2=0$ sobre la recta $\ell(t)=(2,-2,-1)+t(1,1,1)$ hauria d'existir t tal que

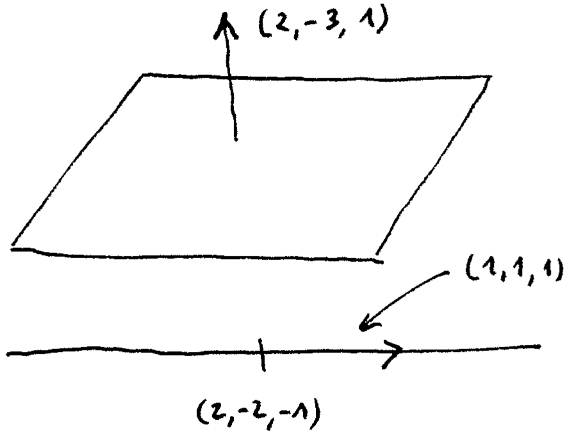
$(2+t,-2+t,-1+t)$ estigués en el pla, és a dir

$$2(2+t)-3(-2+t)+(-1+t)-2=0$$

$$\Rightarrow \quad 7+0.t-2=0 \qquad (\text{No existeix } t)$$

<u>Geomètricament</u>

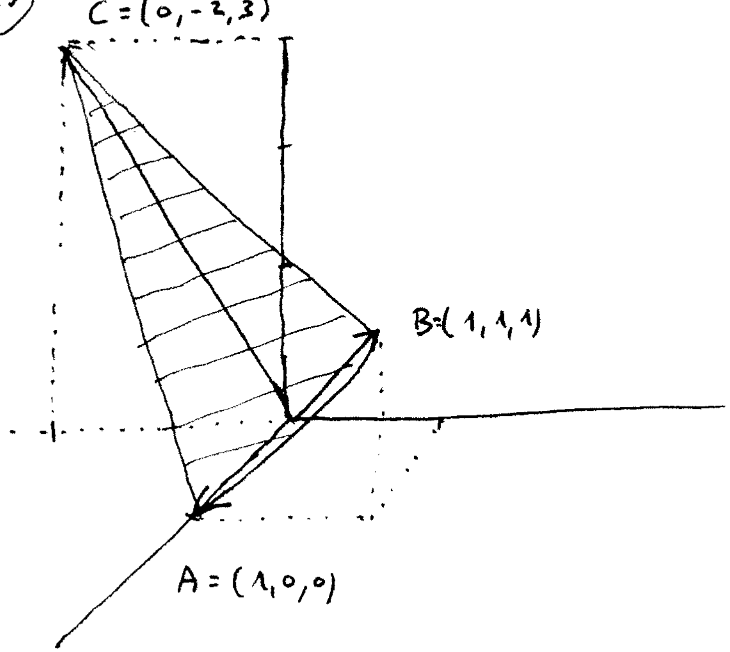
La recta és paral·lela al pla:



$$(2,-3,1)\cdot(1,1,1)=0$$

$$(2,-2,-1)\notin \text{pla} \; : \; 2.2-3(-2)-1-2=7\neq 0$$

15



Prenc A com a punt de referència i considero els vectors $B-A = (0,1,1)$ i $C-A = (-1,-2,3)$

$$\text{Àrea} = \| (B-A) \times (C-A) \| = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \right\| =$$

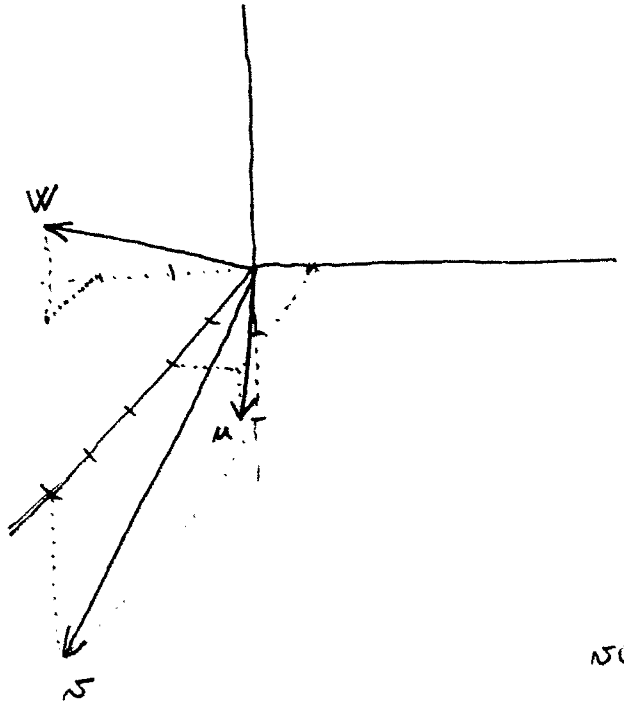
$$\left\| \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} k \right\| = \| (5,-1,1) \| = \sqrt{25+1+1} = \sqrt{27}$$

Si prenc C com a punt de referència haig de considerar $A-C = (1,2,-3)$ i $B-C = (1,3,-2)$

$$\text{Àrea} = \| (A-C) \times (B-C) \|$$

$$= \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} k \right\| = \| (5,-1,1) \| = \sqrt{27}$$

1.6



$u = 2i + j - k$

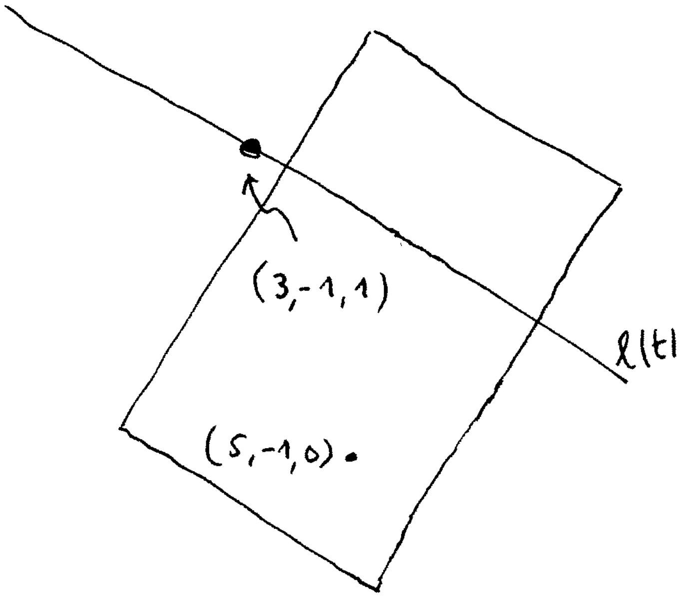
$v = 5i - 3k$

$w = i - 2j + k$

El càlcul del volum és l'aplicació directa de la fórmula

$$\text{volum} = \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| -3 + 10 - 12 - 5 \right| = |-10| = 10$$

(1.7) Pla perpendicular a $l(t) = (5,0,2)t + (3,-1,1)$ passant per $(5,-1,0)$



$(5,0,2)$ ha de ser perpendicular al pla: el pla ha de ser

$$5x + 0 \cdot y + 2z + D = 0$$

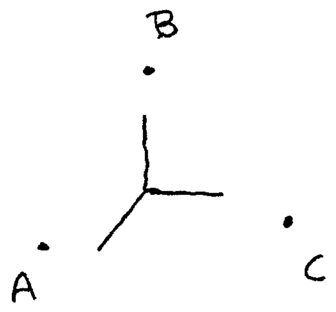
determinem D perquè $(5,-1,0)$ pertanyi al pla

$$5 \cdot 5 + 0 + 0 + D = 0 \longrightarrow D = -25$$

$$\boxed{5x + 2z - 25 = 0}$$

1.8

$A = (2,-1,3)$, $B = (0,0,5)$, $C = (5,7,-1)$



Forma vectorial:

$$p(t,s) = A + t(B-A) + s(C-A) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} s$$

vector normal al pla:

$$m = (B-A) \times (C-A) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & -4 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \right) = (-20, -2, -19)$$

Eq pla

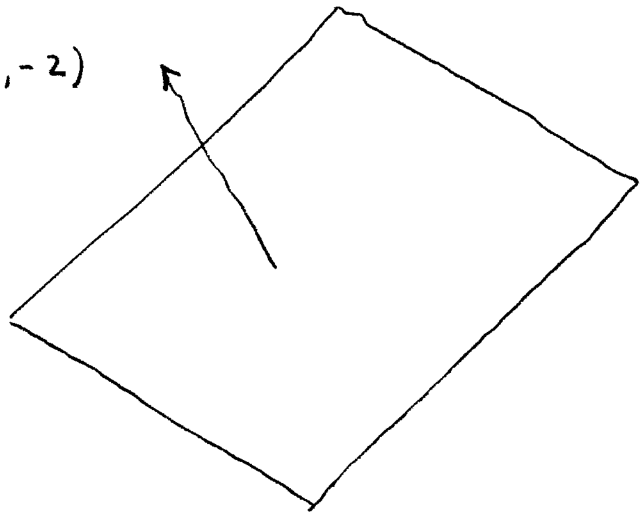
$$20x + 2y + 19z + D = 0$$

Imposem que B pertanyi al pla: $0 + 0 + 19 \cdot 5 + D = 0 \longrightarrow D = -95$

$$\boxed{20x + 2y + 19z - 95 = 0}$$

1.9 recta que passa per $(1,-2,-3)$ i $\perp$ a $3x - y - 2z + 4 = 0$

$(3,-1,-2)$



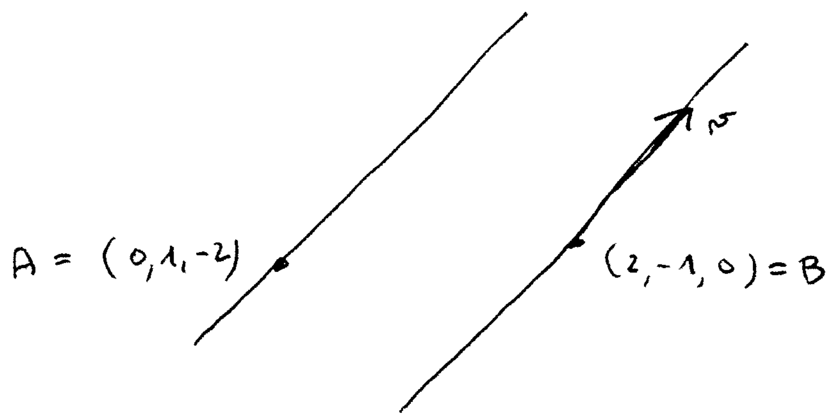
forma vectorial : $\ell(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 - t \\ z = -3 - 2t \end{cases} \longrightarrow \quad t = \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{-2} \longrightarrow \quad \begin{matrix} -x + 1 = 3y + 6 \\ -2y - 4 = -z - 3 \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x + 3y + 5 = 0 \\ 2y - z + 1 = 0 \end{matrix}}$$

1.10 pla que conté $\ell_1(t) = (0,1,-2) + t(2,3,-1)$, $\ell_2(t) = (2,-1,0) + t(2,3,-1)$

Fixem-nos que les rectes són paral·leles



forma vectorial: $p(t,s) = A + t(B-A) + s\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

eq. pla:

vector normal al pla $(B-A)\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-4, 6, 10)$

$-4x + 6y + 10z + D = 0$

determinació de D: imposem que A pertanyi al pla: $6 - 20 + D = 0$

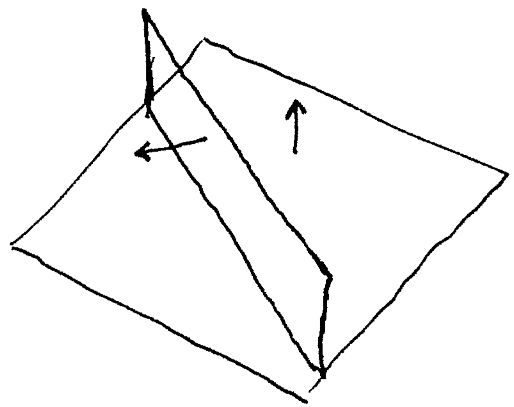
$\Rightarrow D = 14$

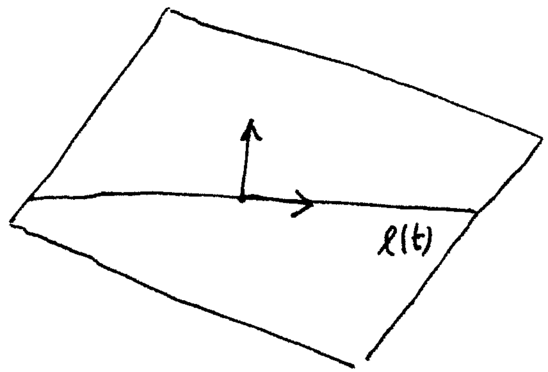
$\boxed{-4x + 6y + 10z + 14 = 0}$

1.11

pla que conté $\ell(t) = (-1,1,2) + t(3,2,4)$ i $\perp$ a $2x + y - 3z + 4 = 0$

Dos plans són perpendiculars si els seus vectors normals són perpendiculars





vector normal al pla que busquem

$$n = (2,1,-3) \times (3,2,4) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

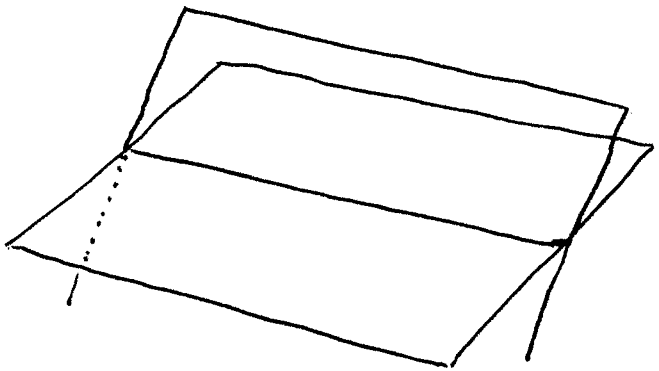
$$= (10, -17, 1)$$

pla : $10x - 17y + z + D = 0$

imposem que $(-1,1,2)$ pertanyi al pla : $-10 - 17 + 2 + D = 0 \rightarrow D = 25$

$$\boxed{10x - 17y + z + 25 = 0}$$

1.12 forma vectorial de $\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ 2x-4z+1=0 \end{cases}$



vector director de la recta: $v = (1,-2,1) \times (2,0,-4) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

$$= \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (8,6,4)$$

punt pel qual passa: hem de trobar un punt.

Fixo una variable, per ex. $z=0$

$\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x = -1 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} - 3 = 2y \rightarrow y = -\frac{7}{4}$

$$\boxed{\ell(t) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -7/4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}}$$