UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

SEGON CONTROL DE TEORIA
Programació Lineal i Entera, curs 2015-16
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM :

	Temps estimat	Punts	Puntuació
Test	15min	2 pt	
Exercici 1	75min	a) 2pt	
		b) 2pt	
		c) 2pt	
		d) 2pt	
Total	90min	10 pt	

- **Prohibida la presència de mòbils durant la prova.**
- **Copiar o facilitar la còpia implica suspendre el control.**

TEST (2 punts / 15 min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a), b)** i **c)** si la frase és Vertadera (**V**) o Falsa (**F**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. El problema primal (P) associat al següent problema dual

$$(D)\begin{cases} \min & -\lambda_1 & +\lambda_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ & \lambda_1 & -2\lambda_2 & \leq 1 \\ & \lambda_1 & -\lambda_2 & \leq -1 \\ & \lambda_1 \leq 0, & \lambda_2 \geq 0 & \end{cases}$$

a) **V** / **F** Té variables $x \geq 0$ i constriccions $Ax \geq b$. (F)
b) **V** / **F** Té solució òptima. (V)
c) **V** / **F** Té variables $x \leq 0$ i constriccions $Ax \geq b$. (F)

TEST 2. Indiqueu si les següents combinacions (P)-(D) son possibles (V) o impossibles (F):

a) **V** / **F** (D) il·limitat – (P) infactible. (V)
b) **V** / **F** (P) òptim – (D) il·limitat. (F)
c) **V** / **F** (P) òptim – (D) infactible. (F)

TEST 3. Si volem trobar la solució òptima d'un problema (P) no degenerat en forma estàndard a partir d'una base $\mathcal{B}$ no òptima, l'algorisme que hem d'aplicar és:

a) **V** / **F** El símplex dual si $r \geq 0$. (V)
b) **V** / **F** El símplex primal si $r \ngeq 0$. (F)
c) **V** / **F** El símplex primal si $x_B \leq 0$. (F)

TEST 4. Considereu que hem resolt un problema (P) en forma estàndard amb $\mathcal{N} = \{1,2\}$ i $r^* = [2 \quad 3]'$:

a) **V** / **F** Si $\Delta c_1 = -2$ hi ha bases òptimes diferents de la base actual. (V)
b) **V** / **F** La base actual deixa de ser òptima si augmento massa el valor de c_2. (F)
c) **V** / **F** Si $\Delta c_1 = -2$ la base actual deixa de ser òptima. (F)

TEST 5. Si introduïm la modificació $b_j \leftarrow \phi_{b_j}$ amb $\phi_{b_j} \in \Phi_{b_j} = \left[\phi_{b_j}^{min}, \phi_{b_j}^{max}\right]$:

a) **V** / **F** El valor de les variables dual λ^* pot canviar. (F)
b) **V** / **F** El valor de les variables òptimes x^* pot canviar. (V)
c) **V** / **F** El valor de la funció objectiu pot canviar. (V)

NOM :

EXERCICI 1. (8 punts / 75min / apunts i calculadora / RESPONEU AL MATEIX FULL)

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(P)\begin{cases} \min & 3x_1 & +\boldsymbol{c_2}x_2 & +2x_3 & +4x_4 & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & =2 \\ & & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & =\boldsymbol{b_2} \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

a) **(2 punts)** Calculeu l'interval d'estabilitat de c_2 i b_2 si sabem que la base òptima de (P) és $\mathcal{B}=\{2,4\}$.

Resposta:

b) **(2 punts)** Reoptimitzeu el problema a partir de la base $\mathcal{B}=\{2,4\}$ amb $c_2=-3$ i $b_2=-3$.

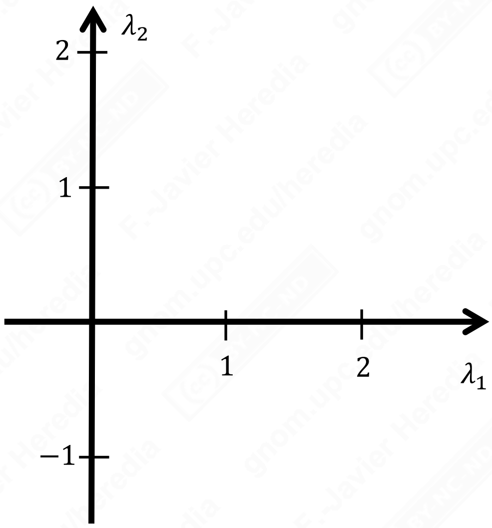
Resposta:

Considereu a partir d'ara el cas $c_2 = 1$ i $b_2 = 0$.

c) **(2 punts)** Formuleu el problema dual de (P), representeu-lo gràficament i indiqueu sobre la gràfica la solució dual òptima λ^*.

Formulació:

Representació gràfica:



d) **(2 punts)** Calculeu la solució òptima primal x^*amb l'ajut del teorema de folga complementària i el valor de λ^*obtingut a l'apartat anterior.

Resposta:

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

Apartat a)

L'interval d'estabilitat és el rang de valors que assegura la factibilitat primal i dual de la base $\mathcal{B}=\{2,4\}$:

$\boldsymbol{\Phi_{b_2}}$**:** un canvi en b_2 només pot fer perdre la factibilitat primal:

$$x_B(\phi_{b_2}) = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ \phi_{b_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+\frac{1}{2}\phi_{b_2} \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \phi_{b_2} \geq -2 \rightarrow \boxed{\Phi_{b_2} = [-2,+\infty[}$$

$\boldsymbol{\Phi_{c_2}}$**:** un canvi en c_2 només pot fer perdre la factibilitat dual: $r_N' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N \geq 0 \rightarrow [3 \quad 2] -$
$[\phi_{c_2} \quad 4]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-2\phi_{c_2} - 1 \quad -\phi_{c_2} - 2] \geq 0 \Leftrightarrow \phi_{c_2} \leq -2 \rightarrow \boxed{\Phi_{c_2} =]-\infty,-2]}$

Apartat b)

Si $c_2 = -3$ i $b_2 = -3$, en base al resultat de l'apartat anterior podem assegurar que $\mathcal{B}=\{2,4\}$ és factible dual infactible primal: s'ha de reoptimitzar aplicant l'algorisme del símplex dual:

- **Símplex dual, 1a iteració:** $\mathcal{B}=\{2,4\}, \mathcal{N}=\{1,3\}$
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la VB de sortida p :

$$x_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+\frac{1}{2}(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 2, \boxed{B(2) = 3 \text{ VB sortint}}$$

  - Identificació de problema (D) il·limitat :

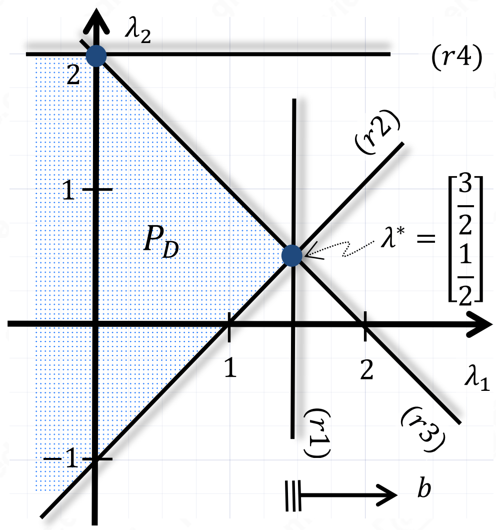
$$d_{r_N}' = \beta_2 A_N = [1/2 \quad 1/2]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1] \geq 0 \Rightarrow (D) \text{ il·limitat, } (P) \text{ infactible. STOP.}$$

Apartat c)

Formulació:

$$(D)\begin{cases} \max & 2\lambda_1 & & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ & 2\lambda_1 & & \leq 3 & (r1) \\ & \lambda_1 & -\lambda_2 & \leq 1 & (r2) \\ & \lambda_1 & +\lambda_2 & \leq 2 & (r3) \\ & & 2\lambda_2 & \leq 4 & (r4) \end{cases}$$

Representació gràfica:



Apartat d)

Sabem que la solució òptima dual és $\lambda^* = [3/2 \quad 1/2]'$. Llavors, el teorema de folga complementària ens diu que serà solució òptima primal tota solució factible primal (equacions $(3)-(4)$) que satisfaci les condicions de folga complementària (equacions $(1)-(2)$), és a dir, serà òptim primal tota solució del sistema:

$$\begin{cases} \lambda_j^*\left(a_j' x^* - b_j\right) = 0 & j = 1,2,\dots,m & (1) \\ \left(c_i - \lambda^{*\prime} A_i\right) x_i^* = 0 & i = 1,2,\dots,n & (2) \\ a_j' x^* = b_j & j = 1,2,\dots,m & (3) \\ x_i^* \geq 0 & i = 1,2,\dots,n & (4) \end{cases}$$

Atès que (3) implica (1) podem eliminar del sistema les equacions (1). Substituint $\lambda^* = [3/2 \quad 1/2]'$ a $(2)-(4)$, tenim

$$\begin{cases} \left(3 - 2\cdot\frac{3}{2}\right) x_1^* = 0 \cdot x_1^* & = 0 & (5) \\ \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\cdot x_2^* = 0 \cdot x_2^* & = 0 & (6) \\ \left(2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\cdot x_3^* = 0 \cdot x_3^* & = 0 & (7) \\ \left(4 - 2\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot x_4^* = 3 \cdot x_4^* & = 0 & (8) \\ 2x_1^* + x_2^* + x_3^* & = 2 & (9) \\ -x_2^* + x_3^* + 2x_4^* & = 0 & (10) \\ x^* & \geq 0 & (11) \end{cases}$$

Les tres primeres equacions son una identitat trivial i es poden eliminar. De l'equació (8) es dedueix que $\boxed{x_4^* = 0}$. Substituint aquest valor a les equacions $(9)-(11)$ el sistema queda reduït a

$$\begin{cases} 2x_1^* + x_2^* + x_3^* & = 2 & (9) \\ -x_2^* + x_3^* & = 0 & (10) \\ x_1^*, x_2^*, x_3^* \geq 0 & & (11) \end{cases}$$

L'equació (10) implica que $x_3^* = x_2^*$. De (9) s'obté $\boxed{x_1^* = 1 - x_2^*}$. Així doncs, si anomenem $x_2^* = \alpha$ i tenim en compte les condicions de non negativitat (11), la solució al sistema $(1)-(4)$ és pot expressar com

$$\boxed{x^*(\alpha) = \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha \in [0,1]}$$

Tot i que no ens ho demanen a l'enunciat, observem com efectivament aquesta solució és òptima primal, doncs és factible i el valor de la funció objectiu primal $z_P^* = 3\cdot(1-\alpha) + \alpha + 2\alpha = 3$ coincideix amb el de la funció objectiu dual sobre λ^*. També observem que el problema primal presenta òptims alternatius (degeneració dual) com era d'esperar pel fet que la solució dual és degenerada primal. Finalment podem induir que la solució primal tindrà una solució degenerada primal. Efectivament, els valors extrems de α, 0 i 1, proporcionen el valor de x^* sobre dues solucions bàsiques adjacents òptimes

$$x^*(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x^*(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

on, clarament, la primera, $x^*(0)$, és degenerada primal, a més de ser degenerada dual.