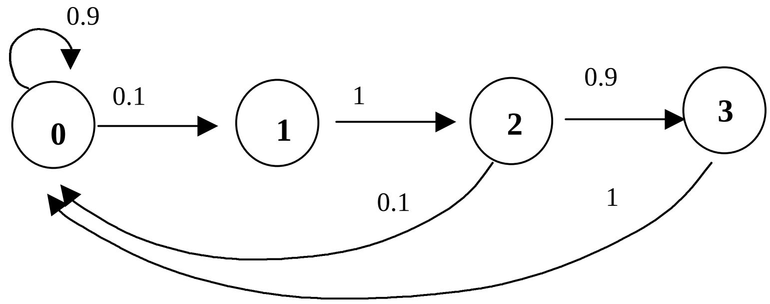
EXAMEN FINAL DE I.O.E. (Curs 01/02 2º Q). Cadenes de Markov
Convocatòria Extraordinària

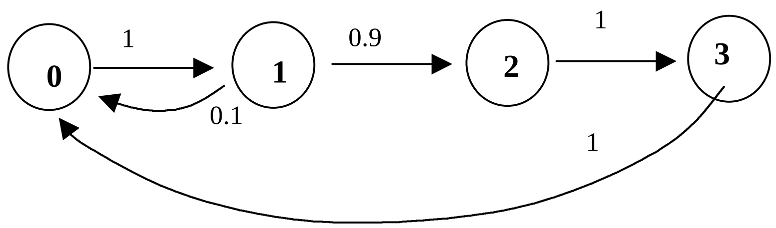
P1): La següent cadena de Markov modelitza les etapes per les passa una persona infectada d'una malaltia tropical :



L'estat 0 és una setmana sa. L'estat 1: porta una setmana malalt. L'estat 2: porta dues setmanes malalt. L'estat 3: porta tres setmanes malalt.

Es demana:
1) Classes i periodicitat de la cadena.
2) La fracció de la població que estarà sana.
3) Número mig de setmanes que dura la malaltia.
4) Fracció de la població infantil de 4 setmanes de vida que estarà malalta.

Un determinat segment de la població desenvolupa una varietat de la malaltia de forma permanent amb el següent model.



5) Calculeu la fracció del temps que un malalt crònic està sense símptomes.

EXAMEN FINAL DE I.O.E. (Curs 01/02 2º Q). Teoria de Cues. Convocatòria Extraordinària

P2) Una estació de peatge d'una autopista presenta 6 portes de peatge cada una d'elles amb carril d'espera propi. El flux total és de 2280 vehicles/hora essent les arribades poissonianes. No totes les portes reben la mateixa afluència de cotxes sinó que els 2289 vehicles/hora es reparteixen en les següents fraccions: per les portes 2, 3, i 5 és de 1/5 mentre que per les portes 1 i 6 és de 1/10. Cada porta de peatge tarda exactament 7,5 segons en expedir el títol d'entrada. Es demana:

1) Models de cues per cada una de les 6 portes.
2) Número mig de cotxes en cada carril de cada porta.
3) Esperança de la demora que experimentarà en l'estació de peatge un vehicle que arrii a l'autopista.

Un tècnic proposa un nou sistema a les portes de l'estació de peatge que pot atendre un vehicle cada 3 segons, però ara el temps no és constant sinó exponencialment distribuï t. Un altre millora, segons el tècnic, consisteix en que els vehicles esperen formant una única cua, essent atesos per ordre d'arribada a la primera porta que quedi lliure.
Per aquesta nova situació es demana:

4) Plantejar un model de cues pels cotxes que esperen a l'estació de peatge.
5) Calculeu la demora mitjana que experimentarà un vehicle que arribi des de l'autopista.
6) En arribar un vehicle se'n troba 6 davant fent cua. Quina demora mitjana experimentarà?

Solució Problema de Teoria de Cues.

1) Cada porta es comporta com una cua del tipus M/D/1.
t_s = temps de servei = 7,5 segons. Distribució degenerada. Var[t_s] = 0, E[t_s] = 7,5

Cal usar la fórmula de Polakzeck-Khintchine.

Taxa d'entrada per la porta i=2,3,4,5: λ_i = 2280/5 = 456 veh/hora.; ρ_i = 7,5 ·200/3600 = 0,475
Taxa d'entrada per la porta i=1,6: λ_i = 2280/10 = 228 veh/hora. .; ρ_i = 7,5 ·400/3600 = 0,95

2) $L_{qi} = \dfrac{l_i^2 s^2 + r_i^2}{2(1-r_i)} = \dfrac{r_i^2}{2(1-r_i^2)}$ ja que σ=0.; L_{qi}=*0.2148* per i=1, 6; L_{qi}=*9.025* per i=2,3,4,5

3) $W_i = \dfrac{L_{qi}}{l_i} + t_s = \dfrac{0.2148}{0.1266} + 7.5 = 9.5\,\mathrm{s}$; per i= 1,6; $W_i = \dfrac{L_{qi}}{l_i} + t_s = \dfrac{9.025}{0.2533} + 7.5 = 78.75$ s

$\overline{W} = W_i\,0.2 + W_i\,0.8 = 64.9$ s.

4) Model M/M/6:

5) $$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{5} \frac{s^i}{i!} + \frac{s^6}{6!}\frac{1}{1-r}\right]^{-1} = \left[6{,}5975 + 9.56\cdot 10^{-2}\right]^{-1} = 0.1494\,; \quad s = \frac{l}{m} = \frac{2280\cdot 3}{3600} = 1.9$$

$$r = \frac{s}{6} = 0.31666$$

$$L_q = \frac{s^s \cdot P_0}{s!}\frac{r}{(1-r)^2} = 6.62\cdot 10^{-3}\,vehicles; \quad W_q = \frac{L_q}{l} = \frac{6.62\cdot 10^{-3}\,3600}{2280} = 1.045\cdot 10^{-2}\,s$$

6) 6 vehicles fent cua. E[t_s] = 3 s de cada porta; $\boxed{6\cdot\frac{3}{6} + 3 = 6s}$

Solució problema de Cadenes de Markov:

1) Una única classe aperiòdica

2) $$P=\begin{pmatrix}0.9 & 0.1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0.1 & 0 & 0 & 0.9\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -0.1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -0.9 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_0\\ p_1\\ p_2\\ p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix}p_0=10p_1\\ p_1=p_2\\ 0.9p_2=p_3\end{matrix} \quad p_0(1+0.1+0.1+0.09)=1; \quad p_0=0.7752$$

3) Nº mig de períodes que dura la malaltia: μ_{10}

$$\begin{pmatrix}m_{10}\\ m_{20}\\ m_{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.9\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{10}\\ m_{20}\\ m_{30}\end{pmatrix}; \quad m_{10}=2.9$$

4) Fracció de la població de 4 setmanes que està malalta:

$$P^2=\begin{pmatrix}0.81 & 0.09 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 0 & 0 & 0.9\\ 0.99 & 0.01 & 0 & 0\\ 0.9 & 0.1 & 0 & 0\end{pmatrix}; \quad p_{00}^{(4}=0.81^2+0.009+0.099=0.8451; \quad \textbf{Re}\,sposta: 1-p_{00}^{(4}=0.1549$$

5) Cadena periòdica de període 2. (1 única classe)

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -0.9 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{p}_0\\ \bar{p}_1\\ \bar{p}_2\\ \bar{p}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \quad \bar{p}_0=0.2564$$