UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

SEGON CONTROL DE TEORIA
Programació Lineal i Entera, curs 2013-14
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM ALUMNE:

	Temps estimat	Punts	Puntuació			Material d'ajut.
Test	15min	2 pt	C:	I:		Cap.
Exercici 1	75min	a) 1.6pt				Amb transparències de teoria i calculadora.
		b) 1.6pt				
		c) 1.6pt				
		d) 1.6pt				
		e) 1.6pt				
Total	90min	10 pt				**PROHIBIT L'ÚS DE MÒBILS DURANT LA PROVA**

TEST (2 punts / 15min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a)**, **b)** i **c)** si és certa (**Si**) o falsa (**No**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. El signe de les variables duals associades al següent problema primal

$$(P)\begin{cases} \max & -x_1 & -3x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & =2 \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & -x_1 & & \geq 4 \end{cases}$$

a) **Si / No** És : λ_1 lliure, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \leq 0$. SÍ

b) **Si / No** És : λ_1 lliure, $\lambda_2 \leq 0$, $\lambda_3 \geq 0$. NO

c) **Si / No** És : $\lambda_1 \geq 0$, λ_2 lliure, $\lambda_3 \leq 0$. NO

TEST 2. Que la solució bàsica òptima d'un problema de (P) sigui degenerada dual, implica que:

a) **Si / No** Alguna variable dual és zero. NO

b) **Si / No** Alguna variable bàsica és zero. NO

c) **Si / No** El cost reduït d'alguna v.n.b. és zero. SÍ

TEST 3. En un joc finit de suma zero, el teorema minimax:

a) **Si / No** Assegura que el problema del jugador 1 satisfà que $z_P^* \equiv z_D^*$. SÍ

b) **Si / No** Indica que és possible que per algun dels dos jugadors no existeixi estratègia òptima. NO

c) **Si / No** Indica que el jugador 1 sempre tindrà un guany net positiu. NO

TEST 4. Si introduim la modificació $c_i \leftarrow c_i + \phi_{c_i}$amb $\phi_{c_i} \in \Phi_{c_i} = [\phi_{c_i}^{min}, \phi_{c_i}^{max}]$:

a) **Si / No** El valor de les variables dual pot canviar. SÍ

b) **Si / No** El valor de la funció objectiu pot canviar. SÍ

c) **Si / No** El valor de les variables òptimes pot canviar. NO

TEST 5. No superar la passa màxima dual $\theta_D^* = \min_{j\in\mathcal{N}, d_{r_{N_j}}<0}\left\{\frac{-r_j}{d_{r_{N_j}}}\right\}$ permet assegurar:

a) **Si / No** La conservació de la factibilitat primal. NO

b) **Si / No** La conservació de la factibilitat dual. SÍ

c) **Si / No** El caràcter de descens de la direcció de moviment. NO

cc BY NC ND

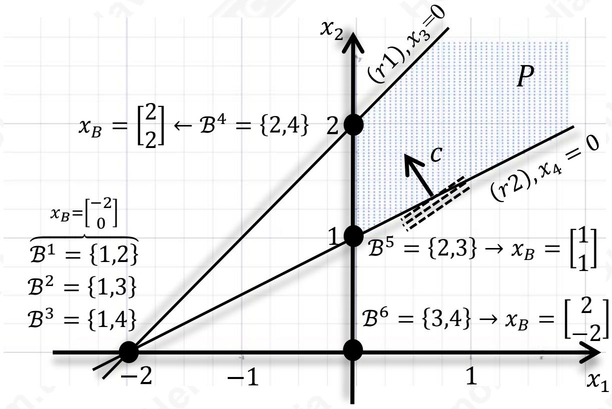
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/.

NOM ALUMNE:

EXERCICI 1. (8 punts / 75min / amb transparències de teoria i calculadora)

Considereu el següent problema de programació lineal i la seva representació gràfica:

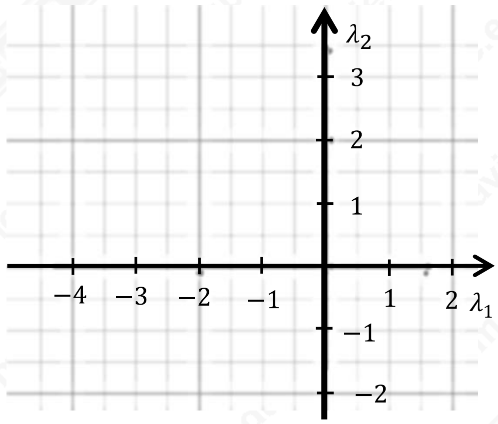
$$
(\mathrm{P})\begin{cases}
\min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & \\
\text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \leq 2 \\
 & -x_1 & +2x_2 & \geq 2 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{cases}
$$



a) **(1.6 punts)** Sense fer cap càlcul, indiqueu quina és la solució òptima del problema dual de (P) justificant la vostra resposta fent servir només el teorema feble de dualitat i els seus corol·laris.

Considereu a partir d'ara una funció objectiu del problema (P) igual a $c' = [1 \quad 1]$.

b) **(1.6 punts)** Formuleu el problema dual i representeu gràficament la seva regió factible:

<table>
<tr><th>Problema Dual</th><th>Regió factible:</th></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
</table>

c) **(1.6 punts)** Trobeu gràficament la solució òptima dual λ^* i comproveu que coincideix amb el valor de la solució dual que proporciona el corol·lari del teorema fort de dualitat.

d) **(1.6 punts)** Obtingueu la solució òptima del problema (P) realitzant una iteració del simplex dual a partir de la base $\mathcal{B}^6 = \{3,4\}$. Identifiqueu la iteració realitzada sobre el poliedre dual, és a dir, indiqueu al gràfic de l'apartat b) els vectors λ corresponents a $\mathcal{B}^6$ i a la base òptima $\mathcal{B}^*$.

e) **(1.6 punts)** Calculeu l'interval de valors de b_2, $[b_2^{\min}, b_2^{\max}]$ que conserva l'optimalitat del problema primal.$\Phi_{b_2} = [\phi_{b_2}^{\min}, \phi_{b_2}^{\max}]$. Trobeu gràficament la solució del problema dual quan $\tilde{b}_2 := b_2 + \phi_{b_2}^{\min}$. Quina característica especial té el problema dual quan es formula per aquest nou valor $\tilde{b}_2$?

BY-NC-ND

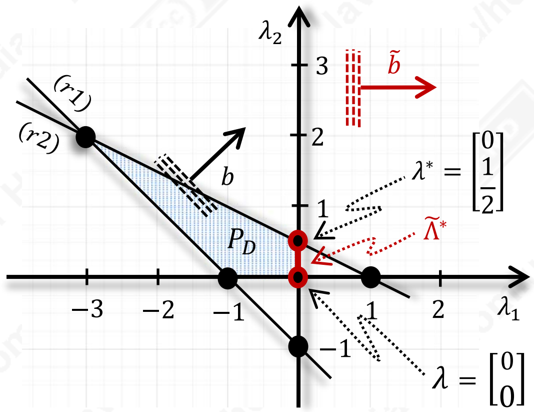
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH Departament d'Estadística i Investigació Operativa	**SEGON CONTROL DE TEORIA** Programació Lineal i Entera, curs 2013-14 2on curs Grau en Estadística UB-UPC
NOM ALUMNE:	

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

a) S'observa que el problema primal és il·limitat. Llavors, pel corol·lari *i* del teorema feble de dualitat el dual serà infactible.

b) Problema dual corresponent a $c = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ i representació gràfica:

$$(D)\begin{cases}\max & 2\lambda_1 & +2\lambda_2 & & \\ \text{s.a.:} & -\lambda_1 & -\lambda_2 & \le 1 & (r1)\\ & \lambda_1 & +2x_2 & \le 1 & (r2)\\ & \lambda_1 \le 0 & \lambda_2 \ge 0 & & \end{cases}$$



$$\tilde{\Lambda}^* = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^2 \middle| \lambda = \begin{bmatrix}0\\ \lambda_2\end{bmatrix}, \lambda_2 \le \tfrac{1}{2}\right\}$$

c) Gràficament s'obté $\lambda^* = \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$. D'acord amb el corol·lari del Teorema fort de dualitat $\lambda^{*\prime} = c_B' B^{-1}$, on c_B' and B^{-1} corresponen a la base òptima primal $\mathcal{B}^5 = \{2,3\}$:

$$\lambda^{*\prime} = c_B' B^{-1} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}^{-1} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}0 & 1/2\\ 1 & -1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

d) Simplex dual a partir de $\mathcal{B} = \{3,4\}$:

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\min & x_1 & +x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2\\ & -x_1 & +2x_2 & & -x_4 & = 2\\ & x_1, & x_2 & x_3, & x_4 & \ge 0\end{cases}$$

$$\mathcal{B} = \{3,4\}, B = B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}, \mathcal{N} = \{1,2\}, r = c_N = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, z = 0$$

- **1a iteració:** $\mathcal{B} = \{3,4\}, \mathcal{N} = \{1,2\}$
  - Selecció de la v.b de sortida p: $x_B = \begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 2, B(2) = 4, x_4$ v.b.s.
  - (D) il·limitat? : $d_{r_N}' = \beta_2 A_{\mathrm{N}} = [0 \quad -1]\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix} = [1 \quad -2] \ngeq 0$
  - v.n.b. d'entrada: $\theta_D^* = \min_{j\in\mathcal{N}, d_{r_{N_j}}<0}\left\{\frac{-r_j}{d_{r_{N_j}}}\right\} = -\frac{r_2}{d_{r_{N_2}}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow q = 2$
  - Canvi de base i actualitzacions:
    - Act. variables duals i f.o.:

      $$r_N := r_N + \theta_D^* d_{r_N} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ 0\end{bmatrix}, \ r_{B(p)} = r_4 := \theta_D^* = \frac{1}{2}$$

      $$\lambda := \lambda - \theta_D^* \beta_p' = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}, z := z - \theta_D^* x_{B(p)} = 0 - \frac{1}{2}(-2) = 1$$
    - Act. variables primals:

      $$d_B = -B^{-1}A_2 = \begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}, \ \theta^* = -\frac{x_{B(2)}}{d_{B(2)}} = -\frac{-2}{2} = 1.$$

BY-NC-ND

$x_B := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_q = x_2 := \theta^* = 1$

- o $\mathcal{B} \leftarrow \{3,2\}$, $\mathcal{N} \leftarrow \{1,4\}$

- **2a iteració:** $\mathcal{B} = \{3,2\}$, $\mathcal{N} = \{1,4\}$
  - o $x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ òptim.

e) Condicions de conservació de la factibilitat primal:

$$x_B(\phi_{b_2}) = B^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2+\phi_{b_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2+\phi_{b_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2+\phi_{b_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1-\dfrac{\phi_{b_2}}{2} \\ 1+\dfrac{\phi_{b_2}}{2} \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_{b_2} \leq 2 \\ \phi_{b_2} \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \Phi_{b_2} = [\phi_{b_2}^{\min}, \phi_{b_2}^{\max}] = [-2,2]$$

Si fem $\tilde{b}_2 := b_2 + \phi_{b_2}^{\min} = 2 - 2 = 0$ el problema dual té òptims alternatius, i la solució òptima dual ve definit pel conjunt $\widetilde{\Lambda}^* = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^2 \middle| \lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \lambda_2 \leq \frac{1}{2} \right\}$.