10. Programación con restricciones de igualdad

La formulación general de un programa con restricciones de igualdad es

$$\begin{array}{rc} \text{Opt} & f(\vec{x}) \\ \text{sujeto a:} & g_1(\vec{x}) = b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(\vec{x}) = b_m. \end{array} \quad \text{donde} \begin{cases} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \\ g_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \\ \vdots \\ g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

O bien

$$\begin{array}{cc} \text{Opt} & f(\vec{x}) \\ \text{s.a} & \vec{g}(\vec{x}) = \vec{b}, \end{array}$$

$$\text{donde} \begin{cases} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \\ \quad g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \quad \vec{x} \mapsto g(\vec{x}) = (g_1(\vec{x}), \cdots, g_m(\vec{x})) = (b_1, \cdots, b_m). \end{cases}$$

En el problema, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n son las variables instrumentales, f es la función objetivo y g_i son las restricciones. Las funciones f y g_i son continuamente diferenciables. El conjunto de las soluciones factibles o admisibles es $D = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\vec{x}) = \vec{b}\right\}$. Si la función f tuviera un dominio A entonces tendríamos que considerar como conjunto factible $A \cap D$. Supondremos siempre que $m < n$ ($k = n - m$, grados de libertad del problema).

Económicamente hablando, una restricción representa la limitación de los recursos propios de la actividad económica. En nuestro caso, una restricción de igualdad representa la utilización de todo los recursos disponibles.

10.1. Resolución de un programa con restricciones de igualdad por sustitución

El objetivo es disminuir las dimensiones del programa y reducir nuestro problema a la resolución de un programa sin restricciones equivalente.

Construyamos un algoritmo de funcionamiento.

Sea el problema 1 y queremos resolver la parte de minimización.

1. Dado que $m < n$, tenemos m variables que son básicas $(\vec{x}_B)$ y $n - m$ variables $(\vec{x}_{NB})$ que son no-básicas. Al resolver es sistema obtenemos

$$\left.\begin{array}{c} g_1(\vec{x}) = b_1 \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) = b_m. \end{array}\right\} \text{obtenemos} \to \vec{x}_B = \varphi(\vec{x}_{NB}).$$

2. Sustituimos en el problema de la siguiente forma

$$\min f(\vec{x}) = \min f(\vec{x}_B, \vec{x}_{NB}) = \min f(\varphi(\vec{x}_{NB}), \vec{x}_{NB}) = \min F(\vec{x}_{NB}),$$

resultando un problema equivalente al primero pero sin restriciones.

3. Encontramos la solución del problema $\min F(\vec{x}_{NB})$. Escribimos esta solución por $\vec{x}^*_{NB}$.

4. Volviendo al paso 1, obtenemos $\vec{x}^*_B = \varphi(\vec{x}^*_{NB})$ quedando como sólución del problema inicial

$$\vec{x}^* = (\vec{x}^*_B, \vec{x}^*_{NB}).$$

Por ejemplo, en el problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 16z \\ \text{sujeto a:} & x + y + z = 2, \\ & x + 2y = 0, \end{array}$$

despejamos las ($m = 2$ variables básicas del sistema) variables x e z en función de la y ($n - m = 3 - 2 = 1$ variables no básicas) y sustituimos en la función objetivo reduciremos el número de variables de la función objetivo a 1. Es decir,
$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x = -2y \\ z = 2 + y \end{array}$ $\Rightarrow$ la función objetivo queda reducida a $f(y) = 6y^2 - 12y - 28.$

Resolviendo el problema como un programa de óptimos sin restricciones, obtenemos como resultado $(x, y, z) = (-2, 1, 3)$.

Ejemplo 10.1 *Resolver el programa*

$$\begin{array}{cc} Opt & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2, \\ s.a: & x_1 + x_2 = 2. \end{array}$$

10.2. Condiciones necesarias de optimalidad de primer orden

Al analizar la geormetría del problema nos encontramos con el siguiente teorema

Teorema 10.2 *Sea el programa (1). Si* $F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \in D, \quad g_i(\vec{x}) = b_i \quad \forall i\}$ *es el conjunto de soluciones factible. Sea* $\vec{x}^* \in F$ *óptimo local del problema tal que* $J(g(\vec{x}^*))$ *tiene un menor de orden* m *distinto de cero. Entonces, existen* m *números reales* $\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*$ *tales que son solución del siguiente sistema de ecuaciones*

$$\nabla f(\vec{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla (b_i - g_i(\vec{x}^*)) = 0.$$

Analicemos el anterior teorema a un ejemplo.

Ejemplo 10.3

$$\begin{array}{rl} Opt & x_1 x_2, \\ s.a: & x_1^2 + x_2^2 = 2. \end{array}$$

La solución es:

$$\begin{array}{ll} f(x_1, x_2) = x_1 x_2 & \nabla f(x_1, x_2) = (x_2, x_1). \\ g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 & \nabla g(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2). \end{array}$$

Los posibles óptimos han de cumplir

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Además, también deben pertenecer al conjunto F. Por tanto tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{c} x_2 + \lambda 2x_1 = 0 \\ x_1 + \lambda 2x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} x_2 = -\lambda 2x_1, & \searrow \\ & x_1 - 4\lambda^2 x_1 = 0, \quad \Rightarrow x_1 = 0, \lambda = \pm\frac{1}{2}. \end{array}$$

Por consiguiente:

Si $x_1 = 0$ tenemos que $x_2 = \pm 1$, que nos da $(0, 1)$ y $(0, -1)$ que no cumplen las dos primeras ecuaciones.

Si $\lambda = \frac{1}{2}$ tenemos que $x_2 = -x_1$ y por la tercera ecuación $x_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, dando como resultado $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, que son mínimos locales.

Si $\lambda = -\frac{1}{2}$ tenemos que $x_2 = x_1$ y por la tercera ecuación $x_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, dando como resultado $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, que son máximos locales.

$\nabla g(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$ tiene menores de orden 1 distintos de cero en los máximos y en los mínimos.

A la vista del anterior teorema, odemos hacer la siguiente definición

Definición 10.4 *Al punto $\vec{x}^o$ se le llama regular $\Leftrightarrow$ los vectores $\nabla g_1(\vec{x}^o)$, $\nabla g_2(\vec{x}^o), \ldots$, $\nabla g_k(\vec{x}^o)$ son linealmente independientes.*

También podemos enunciar los siguientes teoremas de optimalidad.

Teorema 10.5 *(Condición necesaria de optimalidad de primer orden)* *Si un punto $\vec{x}^o \in D$ es óptimo local y regular entonces,*

$$\nabla \left(f(\vec{x}) + \lambda_1(b_1 - g_1(\vec{x})) + \cdots + \lambda_k(b_k - g_k(\vec{x})) \right) = \vec{0}$$

para cierto $\vec{\lambda}^o \in R^k$.

Teorema 10.6 *(Condición suficiente de optimalidad de segundo orden para mínimo)*

Sea dado un punto $\vec{x}^o$ *que es regular y satisface la condición necesaria*

$$\nabla\left(f(\vec{x})+\lambda_1(b_1-g_1(\vec{x}))+\cdots+\lambda_k(b_k-g_k(\vec{x}))\right)=\vec{0}$$

Si para todo $\vec{v}\in R^n\backslash\{0\}$ *tal que*

$$\left.\begin{array}{l}\nabla g_1(\vec{x}^o)\cdot\vec{v}=0\\ \ldots\ldots\ldots\\ \nabla g_k(\vec{x}^o)\cdot\vec{v}=0\end{array}\right\}$$

se cumple que

$$\vec{v}H((f(\vec{x}^o)+\lambda_1^o(b_1-g_1(\vec{x}^o))+\cdots+\lambda_k^o(b_k-g_k(\vec{x}^o)))\,\vec{v}>0$$

entonces, $\vec{x}^o$ *es un mínimo local del programa. Donde* H *es la matriz hessiana y a* $\vec{v}\in R^n\backslash\{0\}$ *se le llama dirección factible.*

También podemos enuncias

Teorema 10.7 *(Condición suficiente de optimalidad de segundo orden para máximo)*

Sea dado un punto $\vec{x}^o$ *que es regular y satisface la condición necesaria*

$$\nabla\left(f(\vec{x})+\lambda_1(b_1-g_1(\vec{x}))+\cdots+\lambda_k(b_k-g_k(\vec{x}))\right)=\vec{0}$$

Si para todo $\vec{v}\in R^n\backslash\{0\}$ *tal que*

$$\left.\begin{array}{l}\nabla g_1(\vec{x}^o)\cdot\vec{v}=0\\ \ldots\ldots\ldots\\ \nabla g_k(\vec{x}^o)\cdot\vec{v}=0\end{array}\right\}$$

se cumple que

$$\vec{v}H((f(\vec{x}^o)+\lambda_1^o(b_1-g_1(\vec{x}^o))+\cdots+\lambda_k^o(b_k-g_k(\vec{x}^o)))\,\vec{v}<0,$$

entonces, $\vec{x}^o$ *es un máximo local del programa.*

como final podemos enunciar

Corollary 10.8 *Sea* $\vec{x}^o$ *un punto regular que satisface la condición necesaria, es decir,*

$$\nabla\left(f(\vec{x})+\lambda_1(b_1-g_1(\vec{x}))+\cdots+\lambda_k(b_k-g_k(\vec{x}))\right)=\vec{0}.$$

Entonces, se cumple que

(a) Si $H\left(f(\vec{x})+\lambda_1(b_1-g_1(\vec{x}))+\cdots+\lambda_k(b_k-g_k(\vec{x}))\right)$ *es definida positiva* $\Rightarrow\vec{x}^o$ *es mínimo local del programa.*

(b) Si $H\left(f(\vec{x})+\lambda_1(b_1-g_1(\vec{x}))+\cdots+\lambda_k(b_k-g_k(\vec{x}))\right)$ *es definida negativa* $\Rightarrow\vec{x}^o$ *es máximo local del programa.*

10.3. Formulación en términos del Lagrangiano

Sea el problema

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Opt} & f\left(x_1,\ldots,x_n\right) \\ \text{sujeta a:} & g_1(x_1,\ldots,x_n)=b_1, \\ & g_2(x_1,\ldots,x_n)=b_2, \\ & \ldots\ldots\ldots, \\ & g_k(x_1,\ldots,x_n)=b_k, \end{array}\right\} \quad \text{con} \quad \left\{\begin{array}{l} k<n. \\ f\,,\,g_i\in\mathcal{C}^2(D). \\ D\subset R^n \text{ abierto.} \end{array}\right. \tag{2}$$

Vamos a formular el problema (2) en términos de un problema sin restricciones mediante una función que se llama Lagramgiana del problema.

La hipótesis son que $\vec{x}^*\in F$ es óptimo local del problema tal que $J\left(g\left(\vec{x}^*\right)\right)$ tiene un menor de orden m distinto de cero. Construimos la función siguiente:

$$L\left(\vec{x};\lambda\right)=f\left(\vec{x}\right)+\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\left(b_i-g_i\left(\vec{x}\right)\right)=f\left(\vec{x}\right)+\vec{\lambda}g\left(\vec{x}\right).$$

Esta función tiene las siguientes propiedades:

a) Si $\vec{x}^*\in F$es óptimo local del problema. Entonces, $L\left(\vec{x}^*;\lambda\right)=f\left(\vec{x}^*\right)+\vec{\lambda}0=f\left(\vec{x}^*\right)$ para todo λ.

b) Los puntos críticos vendrán dados por las soluciones de las ecuaciones

$$\vec{0}=\nabla L\left(\vec{x};\lambda\right)=\left[\begin{array}{c}\nabla_{\vec{x}}L\left(\vec{x};\lambda\right)\\ \nabla_{\lambda}L\left(\vec{x};\lambda\right)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\nabla f\left(\vec{x}\right)+\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\nabla g_i\left(\vec{x}\right)\\ b_i-g_i\left(\vec{x}\right)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}0_n\\ 0_m\end{array}\right].$$

Resumiendo lo anterior, enunciamos:

Teorema 10.9 *Sea el problema (2) y $\vec{x}^*\in F$ un punto que cumple las condiciones de regularidad (rango de $Jg\left(\vec{x}^*\right)$ es m).*

Si $\vec{x}^*$ es óptimo del problema se cumple que

$$\left\{\begin{array}{c}\nabla L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k)=\nabla f\left(\vec{x}\right)+\vec{\lambda}\nabla g\left(\vec{x}\right)=0,\\ g\left(\vec{x}\right)=\vec{b}.\end{array}\right.$$

Por tanto podemos escribir la condición necesaria de optimalidad de primer orden de una manera más sencilla

Teorema 10.10 *Si un punto $\vec{x}^o\in D$ es óptimo local y regular entonces,*

$$\nabla L(\vec{x}^o\vec{x}_0,\vec{\lambda}^o)=\vec{0}$$

para cierto $\vec{\lambda}^o\in R^k$.

La Hessiana del Lagrangiano asociada a este programa y con respecto a $\vec{x}$, es:

$$H_{\vec{x}}\left(L\left(\vec{x};\lambda\right)\right) = Hf\left(\vec{x}\right) + \vec{\lambda}Hg\left(\vec{x}\right)$$

es definido positivo (o negativo) en el punto $\left(\vec{x}^*;\lambda^*\right)$ con respecto a todos los vectores que pertenecen al plano tangente a $g\left(\vec{x}\right) = \vec{b}$ por $\vec{x}^*$. Es decir, no se exige que la Hessiana sea definida positiva (o definida negativa) en $\left(\vec{x}^*;\lambda^*\right)$, sino a los vectores $\vec{p}$ del plano tangente a la superficie representada por las restricciones que pasan por el punto $\vec{x}^*$.

Si $\vec{p}$ son los vectores que indican la dirección de los desplazamientos factibles a partir de $\vec{x}^*$, estos vienen dados por la solución de $\nabla g\left(\vec{x}^*\right)\cdot\vec{p} = 0$ por tanto

para todo $\vec{p}$ que $\nabla g\left(\vec{x}^*\right)\cdot\vec{p} = 0$ tenemos $\vec{p}^T H_{\vec{x}}\ L\left(\vec{x}^*;\lambda^*\right)\vec{p} > 0$ (< 0) en nuestro caso.

Todo esto nos permite enunciar las condiciones suficientes de segundo orden.

Teorema 10.11 *Sea el problema (1) y $\vec{x}^* \in F$ que es regular y satisface*

1) $g_i\left(\vec{x}^*\right) = b_i$ con $i = 1,\cdots,m$.

2) $\nabla L\left(\vec{x}^*;\lambda^*\right) = 0$ donde $L\left(\vec{x};\lambda\right) = f\left(\vec{x}\right) + \lambda\left(\vec{b} - g\left(\vec{x}\right)\right)$.

3) Para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \left\{\vec{0}\right\}$ tal que $\nabla g\left(\vec{x}^*\right)\cdot\vec{v} = 0$ entonces,

$$\vec{v}^T \cdot H_{\vec{x}}L\left(\vec{x}^*;\lambda^*\right)\cdot\vec{v} > 0 \qquad (< 0).$$

Entonces, $\vec{x}^*$ es un mínimo local (máximo local) del problema.

Si consideramos el determinante de hessiano ampliado (la hessiana orlada):

$$D\left(L(\vec{x};\lambda)\right) = \left|\begin{array}{ccc|ccc}
0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m(\vec{x})}{\partial x_n} \\
\hline
\dfrac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L\left(\vec{x};\vec{\lambda}\right)}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L\left(\vec{x};\vec{\lambda}\right)}{\partial x_1\partial x_n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\dfrac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial g_m(\vec{x})}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 L\left(\vec{x};\vec{\lambda}\right)}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L\left(\vec{x};\vec{\lambda}\right)}{\partial x_n\partial x_n}
\end{array}\right|$$

Una condición suficiente para que el punto $\left(\vec{x}^*;\lambda^*\right)$ resuelva el problema de optimización es que se satisfaga que el determinante de hessiano ampliado $D\left(L(\vec{x}^*;\lambda^*)\right)$ sea > 0 en el caso de maximización y sea < 0 en el caso de minimización.

Otra posiibilidad es: Para que el punto $\left(\vec{x}^*;\lambda^*\right)$ resuelva el problema de optimización es que para los $n - m$ últimos menores principales dominantes de $D\left(L(\vec{x}^*;\lambda^*)\right)$ a saber $D_{2m+1}(L(\vec{x}^*;\lambda^*)),\ldots,D_{m+n}(L(\vec{x}^*;\lambda^*))$ se cumpla

a) Si $(-1)^{m+k}\, D_{2m+k}(L(\vec{x}^*;\lambda^*)) > 0$ para todo $k = 1, \dots, n-m \Rightarrow (\vec{x}^*;\lambda^*)$ es un máximo local del problema.

b) Si $(-1)^{m+k}\, D_{2m+k}(L(\vec{x}^*;\lambda^*)) < 0$ para todo $k = 1, \dots, n-m \Rightarrow (\vec{x}^*;\lambda^*)$ es un mínimo local del problema.

10.4. Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange

Proposición 10.12 *Sea el programa (1) que para $\vec{b} = (b_1, \cdots, b_m)$ la función objetivo posee un óptimo local sobre el conjunto factible en el punto $(\vec{x}^*;\vec{\lambda}^*)$ que es regular. Entonces,*

$$\frac{\partial f(\vec{b})}{\partial b_i} = \lambda_i \qquad \textit{para } i = 1, \cdots, m.$$

Dem:

Consideramos el Lagrangiano del problema $L(\vec{x};\lambda) = f(\vec{x}) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(\vec{x}))$.

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} - \sum_{j=0}^{m} \lambda j \dfrac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_i} = 0 & \text{para } i = 1, \cdots, n. \\ b_j - g_j(\vec{x}) = 0 & \text{para } j = 1, \cdots, m. \end{array}$$

Como se cumplen las condiciones de teorema de existencia de la función implícita, podemos asegurar que existen $x_i = x_i(\vec{b})$ para $i = 1, \cdots, n$ y $\lambda_j = \lambda_j(\vec{b})$ para $j = 1, \cdots, m$.

Consideramos ahora la función $F = f \circ x$ tal que para cada b nos da el valor de f en el correspondiente óptimo de f sobre $F(\vec{b})$, en resumen, tenemos que $F(\vec{b}) = f\left(\vec{x}(\vec{b})\right)$, por tanto

$\dfrac{\partial F(\vec{b})}{\partial b_j} = \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial b_j} + \cdots + \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial b_j}$, agrupando obtenemos

$$\frac{\partial F(\vec{b})}{\partial b_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial b_j} \quad \text{para} \quad j = 1, \cdots, m. \tag{3}$$

Como $g_s(\vec{x}) = b_s$ para $s = 1, \cdots, m$ al derivar obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_s(\vec{x})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(\vec{b})}{\partial b_j} = \begin{cases} 1 \text{ si } s = j. \\ 0 \text{ si } s \neq j. \end{cases} \tag{4}$$

multiplicando (4) por el correspondiente λ_s con $s = 1, \cdots, m$ y sumando, obtenemos

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \lambda_s \frac{\partial g_s(\vec{x})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(\vec{b})}{\partial b_j} = \lambda_j \text{ para } j = 1, \cdots, m.$$

Si restamos este resultado con (3), obtenemos

$$\frac{\partial F(\vec{b})}{\partial b_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(\vec{b})}{\partial b_j} + \lambda_j - \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \lambda_s \frac{\partial g_s(\vec{x})}{\partial x_i}\frac{\partial x_i(\vec{b})}{\partial b_j} =$$

$$= \lambda_j + \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} - \sum_{s=1}^m \lambda_s \frac{\partial g_s(\vec{x})}{\partial x_i}}_{=0} \right) \frac{\partial x_i(\vec{b})}{\partial b_j} \text{ para } j = 1, \cdots, m.$$

Por tanto, $\dfrac{\partial F(\vec{b})}{\partial b_j} = \lambda_j$ para $j = 1, \cdots, m$. □

Las restricciones de igualdad obligan al uso de toda capacidad de los inputs (uso total de los recursos), es decir, no podemos disponer de más unidades de recursos o dejar de disparar algunas unidades.

La pregunta es ¿cuánto estaríamos dispuestos a pagar para que se nos liberase del cumplimiento de la restricción? la respuesta es obvia, tanto como su cumplimiento hace disminuir el valor óptimo de la función objetivo.

Veamoslo mediante un ejemplo.

Ejemplo 10.13 *La función de utilidad de un consumidor es*

$$U(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + x_2,$$

donde x_1, x_2 *representan las cantidades de los bienes* 1 *y* 2 *consumidos en un periodo de tiempo dado. Sean* 2 *euros y* 3 *euros los precios unitarios de cada uno de los bienes y* 100 *euros la cantidad de dinero disponible del individuo.*

a) Calcular la cantidad a consumir de cada uno de los bienes si el objetivo es maximizar la utilidad.

b) ¿Cuál es la variación que experimenta la utilidad máxima ante un cambi en la cantidad de dinero disponible?

Hagamos una aplicación de estos resultados:

La función de producción de una empresa es

$$f(x_1, x_2) = 200 - (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 2)^2$$

y tenemos una restricción $x_1 + x_2 = b$.

Nuestro problema es

$$\begin{array}{ll} \max & 200 - (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 2)^2, \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 = b. \end{array}$$

que nosotros resolveremos como

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - 200, \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 = b. \end{array}$$

Buscamos los puntos estacionarios:

$$L(x_1, x_2; \lambda) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - 200 + \lambda (b - x_1 - x_2).$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 2) - \lambda = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{4 + \lambda}{2}, \\ x_2 = \dfrac{4 + \lambda}{2}. \end{array}$$

De $x_1 + x_2 = b$. Tenemos que, $\dfrac{4+\lambda}{2} + \dfrac{4+\lambda}{2} = b \Rightarrow \lambda = b - 4$.

Luego la solución es $(x_1, x_2; \lambda) = \left(\dfrac{b}{2}, \dfrac{b}{2}; b - 4 \right)$.

Sustituyendo en la función objetivo

$$f(b) = -\left(\frac{b}{2} - 2 \right)^2 - \left(\frac{b}{2} - 2 \right)^2 + 200$$

y derivando obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -(b - 4) = -\lambda.$$

De aquí, podemos deducir que λ nos dá la tasa marginal de cambio del valor óptimo de la función objetivo ante la variación del término independiente de la restricción, con lo cuál se justifica el nombre de “valor sombra” que se suele dar a los multiplicadores.

Evidentemente no se trata de precios de mercado sino de precios de oportuniddad para el que utiliza estos recursos limitados. No es lo que cuestan sino lo que valen para nosotros.

En nuestro caso tenemos:

▲ Si $b < 4$.

$\lambda = b - 4 < 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial b} > 0$, por tanto, un incremento en la cantidad que debe consumirse de componente, tendría un efecto positivo en el valor de la función objetivo. Esta, se incrementaría en $b - 4$ unidades por unidad de incremento de b.

▲ Si $b = 4$.

$\lambda = b - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, por tanto, podemos decir que el óptimo libre coincide con el restringido. En general no se facilita la suficiente información para predecir la variación que experimentará el valor óptimo de la función objetivo si b aumenta marginalmente.

▲ Si $b > 4$.

$\lambda = b - 4 > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial b} < 0$, por tanto, un incremento en la cantidad que debe consumirse de componente tendría un efecto de disminuir el valor en el óptimo en $b - 4$ u.m. por unidad de incremento de b.

Nota: Falta la condición de suficiencia para caracterizar correctamente el óptimo.

Ejemplos:

Si $b = 3$ y nos ofrecen una unidad de producto por 6 unidades monetarias. Tendríamos que $\lambda = -1$ y $\dfrac{\partial f}{\partial b} = 1$. No deberiamos adquirirla porque si bien la operación arrojaría una mejora de 1 u.m. la operación en su conjunto tendría un balance de 5 u.m. de pérdida.

Si $b = 7$ y nos ofrecen una unidad de producto por 6 unidades monetarias. Tendríamos que $\lambda = 3$ y $\dfrac{\partial f}{\partial b} = -3$. No estamos a dispuestos a adquirir nuevas unidades de recursos, en realidad estaríamos dispuesstos a pagar 3 u.m. por unidad de componente que se nos eximiese de consumir disminuyendo el valor de b.