CURS 15-16 Teoria de Cues i Simulació. Grau Int. d'Estadística UB-UPC Convocatòria ordinària. Juny 2015-16.

PART 1. Problema 1 (10 punts)

x	P(X <= x)	x	P(X <= x)	x	P(X <= x)	x	P(X <= x)
0,10	0,539828	0,15	0,559618	0,20	0,579260	0,25	0,598706

(Per X~N(0,1))

P1. [10 punts] Un usuari de telefonia mòbil té un contracte que el permet un volum d'operacions de 10Gb cada mes com màxim. Tant si arriba com si no als 10Gb en iniciar-se el mes cal pagar la quota corresponent. (suposarem mesos de 30 dies per simplificar). Se sap que el consum diari ve donat per una variable aleatòria exponencial d'esperança 1/3 Gb.

1) [1] Quina fracció dels mesos haurà exhaurit la cobertura?
2) [1.5] El dia 21 vol descarregar-se, primer de tot, un vídeo que ocupa 3 Gb. Quina és la probabilitat de que pugui descarregar-lo complet?

Entre les descàrregues es troben cançons que poden tenir una durada de 2 minuts (el 30%) o de 6 minuts (el 70%). Aquestes cançons les escolta sempre mentre espera el tren a que arribi.

3) [1.5] Sabent que sempre que es presenta a l'estació es posa a escoltar una cançó i que arriba sempre amb una antelació de 5 minuts abans de que arribi el tren, calculeu la fracció de cançons que es veuen interrompudes per l'arribada del tren. Suposeu que només vol escoltar una cançó.
4) [1.5] També escolta cançons passejant pel carrer. De tant en tant, un vianant l'atura per demanar-li l'hora. El nostre personatge interromp llavors la cançó que està escoltant per atendre'l (Suposeu ara que en acabar una cançó en comença un altre.). Calculeu el temps mig que li queda de cançó en produir-se una d'aquestes interrupcions.

Totes les descàrregues fetes en un dia son empaquetades i són passades amb una periodicitat irregular (1 paquet cada 1,1 dies en mitjana, estant aquest temps exponencialment distribuït) al seu PC, on les tracta amb un programa de filtratge de so que pot processar 1Gb cada tres dies, estant aquest temps distribuït també exponencialment. Usant un model de cues per al nombre de paquets processats pel seu PC, calculeu:

5) [1.5] La fracció del temps que el PC està lliure per altres tasques.
6) [1.5] El temps mig que espera en cua un paquet en iniciar el seu procés i el nº mig de paquets en el PC
7) [1.5] La probabilitat de que un paquet que acaba de ser enviat a l'ordinador tardi més de 2 dies en ser processat.

P2. [10 punts] Una oficina bancària disposa d'un caixa d'atenció personalitzada pels diferents clients que arriben. El temps que l'empleat de caixa està amb cada client es distribueix amb una distribució 1-Erlang d'esperança 6 minuts. Els clients comencen a arribar tan bon punt l'oficina obre i el seu temps entre arribades té una durada aleatòria d'esperança 6 minuts amb distribució exponencial. Tant bon punt arriben els clients són atesos pel caixer, sempre que estigui lliure, si no el client s'espera a l'oficina fent cua.

Es demana que us plantegeu la simulació del sistema mitjançant la metodologia event-scheduling. Considereu les variables d'estat N=nombre de clients, i Tck= instant de rellotge. Simuleu el sistema amb els números aleatoris que es proporcionen, utilitzant-los per columnes començant amb el 1319 inicial (1319, 3252, 2400...); accepteu que són una mostra de una distribució uniforme entre 0 i 9999:

1319	2803	0061	9608	4167	3831	3340	7509	3359	8669
3252	3688	4232	9590	6077	3465	1932	5370	1072	7807
2400	1782	7164	1821	6170	9245	5791	3453	8305	6658
7220	1480	7989	1439	9171	6567	6899	7151	9439	6219
9992	2880	6771	2299	4181	8936	1243	939	7819	0884

Responeu les següents preguntes:

a) [4 punts] Utilitzeu la taula de números aleatoris de la capçalera per generar les variables INPUT fins el client número 6 amb el següent format i ordre:

N_i	τ_i	t_i	x_i	s_i

tenint en compte que:

τ_i = instant entre arribades a la consulta (S.E.) pel client i
t_i = instant d'arribada a la consulta (S.E.) pel client i
x_i = temps de servei (atenció de caixer) del client i
s_i = temps de sortida del caixer del client i

b) [6 punts] Reproduïu la llista d'events de simulació fins que surti el 4art client de l'oficina d'acord amb els temps calculats. Accepteu els successos A=arribada i S=sortida del servei. Cada cop que inspeccioneu un element de la llista de successos deixeu indicat el valor final de totes les variables d'estat, així com els elements que formen part de la llista. Partiu de la situació inicial: Tck=0, cua=0

P1) X_{30} = Total descarregat en 30 dies sense limitacions

1) $X_{30} = \sum_{l=1}^{30} x_l \sim 30\text{-Erlang}$; $E[X_{30}] = 30 \cdot 0'\hat{3} = 10$ Gb.

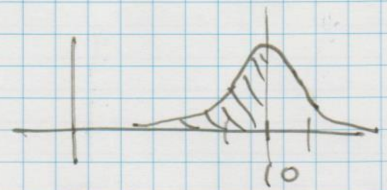
$E[x_l] = 0'\hat{3}$ Gb.

$C_{X_{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}} = 0'1825$

$1-P(X_{30}\le 10) = e^{-10/0'\hat{3}}\left(\sum_{l=0}^{29} \left(\frac{10}{0'\hat{3}}\right)^{l} \frac{1}{l!}\right)$ (de difícil càlcul)

X_{30} pel TCL $\sim N(10, 1'8257)$

$1-P(X_{30}\le 10) \simeq 1/2 \leftarrow$



2) $P(X_{20}\le 7)$; $X_{20} \sim 20\text{-Erlang}$.

de forma aproximada, també pel TCL,

$X_{20}\sim N\left(20\cdot\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{20}}\cdot 20\cdot\frac{1}{3}\right) = N(6'\hat{6}, 1'4907)$

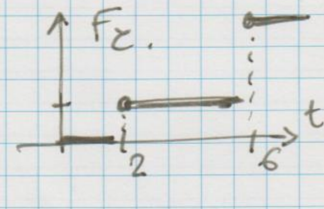
$P(X_{20}\le 7) = P\left(Z \le \frac{1}{\sqrt{20}}\right) = P(Z\le 0'223) = 0'5882$

$(Z\sim N(0,1))$

3) τ = durada d'una cançó $P(\tau=2)=0'3$, $P(\tau=6)=0'7$

$P(\tau>5) = 1-P(\tau\le 5)$ τ és discreta.

$$P(\tau\le t) = F_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0\le t<2 \\ 0'3 & \text{si } 2\le t<6 \\ 1 & \text{si } t\ge 6 \end{cases}$$



$P(\tau>5) = 1-P(\tau\le 5) = 1-0'3 = 0'7$

4) el temps que li queda per escoltar és el temps de vida residual $f_r(t) = \frac{R_\tau(t)}{E[\tau]} = \frac{1-F_\tau(t)}{E[\tau]}$

$E[\tau] = 2\cdot 0'3 + 6\cdot 0'7 = 4'8$

$E[r] = \frac{1}{E[\tau]}\int_0^6 t\, f_r(t)\,dt = \frac{1}{E[\tau]}\left[\int_0^2 t\,dt + \int_2^6 t\, 0'7\,dt\right] =$

$= \frac{1}{4'8}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 + \frac{0'7}{4'8}\left[\frac{t^2}{2}\right]_2^6 = \frac{5}{12} + \frac{7}{3} = \frac{33}{12} = 2'75$ min.

5) M/M/1 $\quad$ τ temps entre arribaments ~ exp

$E[\tau] = 1'1$ dies

$\rho = \frac{1}{1'1} = 0'9\widehat{09}$

x = temps de processat

(heavy traffic)

$E[x] = \frac{1}{3} Gb \cdot \frac{3 \text{ dies}}{Gb} = 1$ dia.

$P_0 = 1 - \rho = \frac{0'1}{1'1} = 9'\widehat{09} \cdot 10^{-2}$

6) $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0'9\widehat{09}}{9'\widehat{09} \cdot 10^{-2}} = 10$ paquets

$W_q = L_q / \lambda = 1'1 \cdot 9'\widehat{09} = 10$ dies

7) $w \sim \exp$, $E[w] = W$ per ser M/M/1.

$W = W_q + E(x) = 10 + 1 = 11$ dies

$P(w \geq 2) = e^{-2/11} = 0'8337$.

$\boxed{P2}$

a) Sabem que 1-Erlang(6) equival a una Exp(6).
Pel mètode de la transformada inversa podem calcular una Exp(6) : $-6 \ln U_i$

N_i	τ_i	t_i	x_i	s_i
1	12,1537	12,1537	6,7351	18,8887
2	8,5621	20,7158	1,9538	22,6695
3	0,0042	20,7199	7,6308	30,3003
4	5,9844	26,7044	10,3485	40,6488
5	11,4626	38,1670	7,4681	48,1170
6	30,5962	68,7632	5,1588	73,9221

$\tau_1 = -6 \cdot \ln\left(\frac{1319}{9999}\right) = 12,1537$

$t_1 = 0 + \tau_1 = 12,1537$

$x_1 = -6 \cdot \ln\left(\frac{3252}{9999}\right) = 6,7351$

$s_1 = t_1 + x_1 = 18,8887$

$\tau_2 = -6 \cdot \ln\left(\frac{2400}{9999}\right) = 8,5621$

$t_2 = t_1 + \tau_2 = 20,7158$

$x_2 = -6 \cdot \ln\left(\frac{7220}{9999}\right) = 1,9538$

$s_2 = t_2 + x_2 = 22,6695$

$\tau_3 = -6 \cdot \ln\left(\frac{9992}{9999}\right) = 0,0042$

$t_3 = t_2 + \tau_3 = 20,7199$

$x_3 = -6 \ln\left(\frac{2803}{9999}\right) = 7,6308$

$s_3 = \max\{t_3, s_2\} + x_3 = 30,3003$

$\tau_4 = -6 \cdot \ln\left(\frac{3688}{9999}\right) = 5,9844$

$t_4 = t_3 + \tau_4 = 26,7044$

$x_4 = -6 \ln\left(\frac{1782}{9999}\right) = 10,3485$

$s_4 = \max\{t_4, s_3\} + x_4 = 40,6488$

$\tau_5 = -6 \cdot \ln\left(\frac{1480}{9999}\right) = 11,4626$

$t_5 = t_4 + \tau_5 = 38,1670$

$x_5 = -6 \cdot \ln\left(\frac{2880}{9999}\right) = 7,4681$

$s_5 = \max\{t_5, s_4\} + x_5 = 48,1170$

$\tau_6 = -6 \ln\left(\frac{0061}{9999}\right) = 30,5962$

$t_6 = t_5 + \tau_6 = 68,7632$

$x_6 = -6 \cdot \ln\left(\frac{4232}{9999}\right) = 5,1588$

$s_6 = \max\{t_6, s_5\} = 73,9221$

$\boxed{P2}$

b)

0) Tck=0 , cua=0

12,1537	18,8887
A	S
client1	client 1

1) Tck= 12,1537 ; cua=0

12,1537	18,8887	20,7158
A	S	A
	client 1	client 2

2) Tck= 18,8887

18,8887	20,7158	22,6695	20,7199
S	A	S	A
	client2	client2	client 3

cua=0

3) Tck=20,7158

20,7158	20,7199	22,6695	30,3003
A	A	S	S
	client 3	client2	client 3

cua=0

4) Tck=20,7199

20,7199	22,6695	30,3003	26,7044
A	S	S	A
	client2	client3	client 4

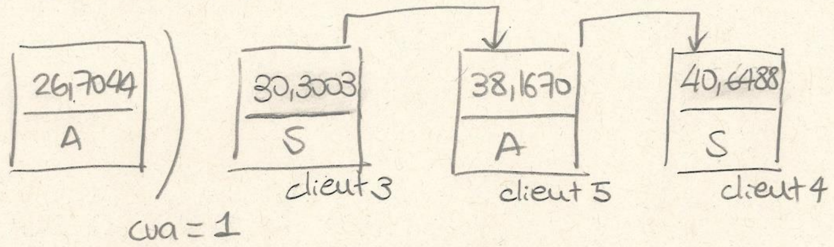
cua=1

5) Tck= 22,6695

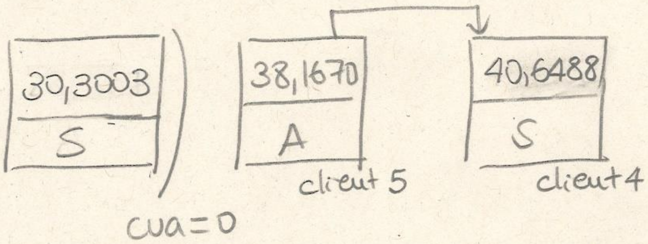
22,6695	26,7044	30,3003	38,1670
S	A	S	A
	client 4	client3	client 5

cua=0

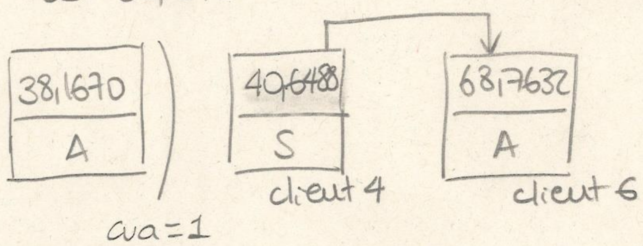
6) Tck = 26,7044



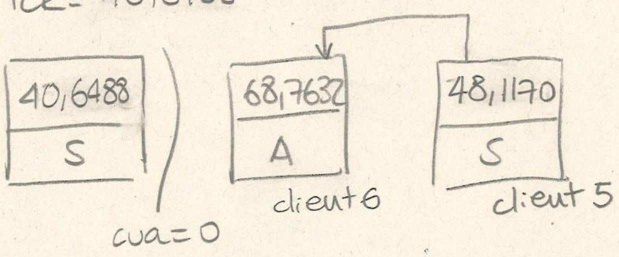
7) Tck = 30,3003



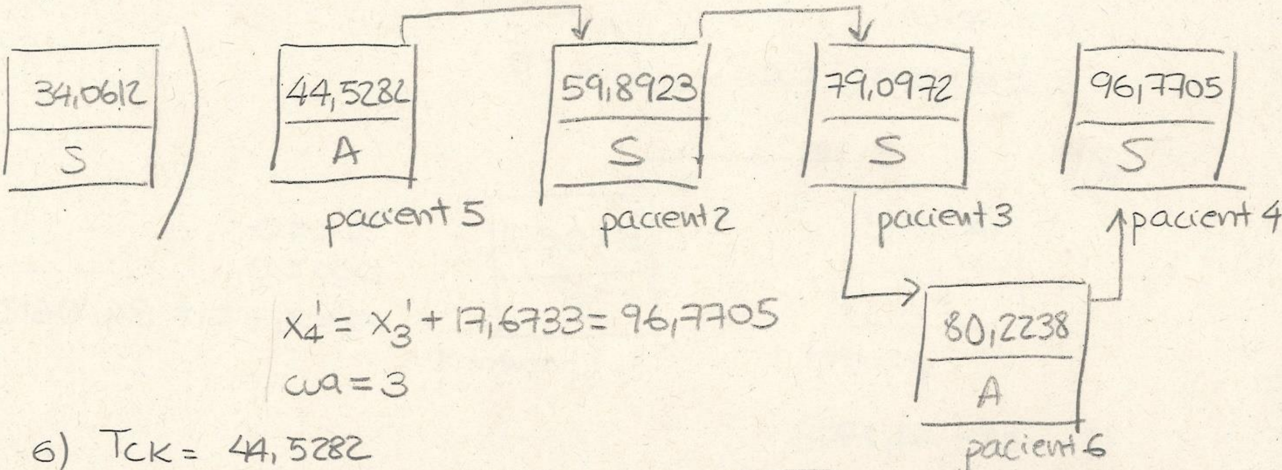
8) Tck = 38,1670



9) Tck = 40,6488



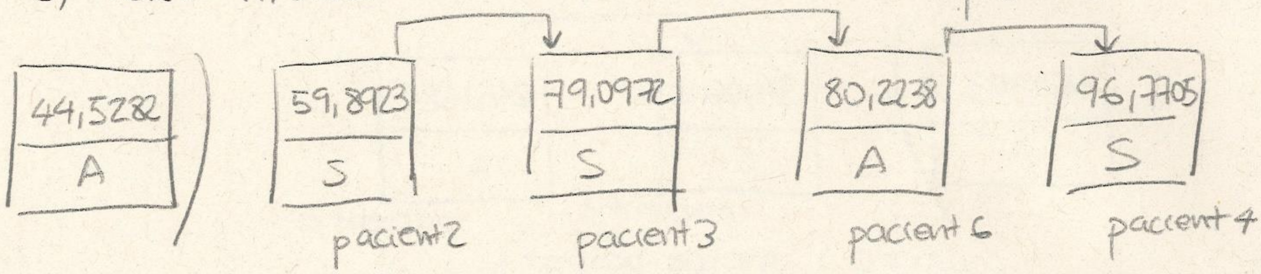
5) $T_{CK} = 34,0612$



$x_4' = x_3' + 17,6733 = 96,7705$

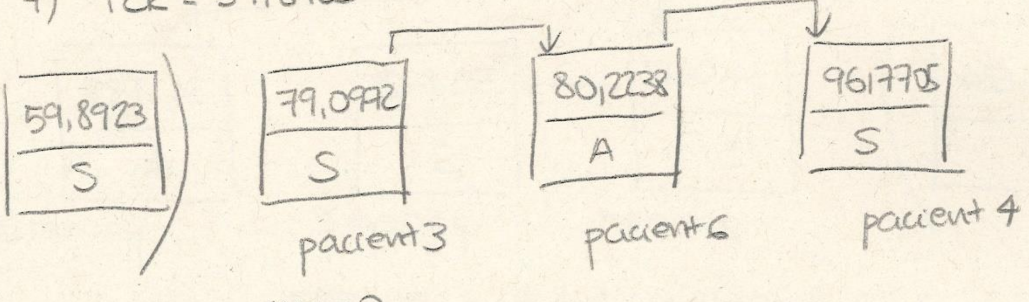
cwa = 3

6) $T_{CK} = 44,5282$



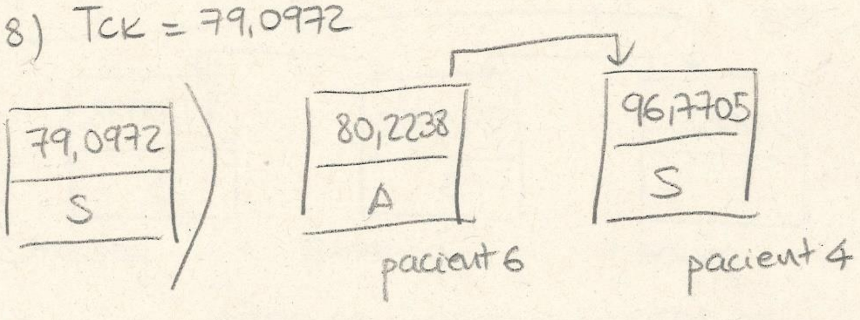
cwa = 4

7) $T_{CK} = 59,8923$



cwa = 3

8) $T_{CK} = 79,0972$



cwa = 2