Tema 5.Proves d'hipòtesis en dues poblacions

1. Una organització de consumidors ha demanat l'assessorament estadístic d'una consultoria per comparar dos calmants. L'organització de consumidors disposa de les dades de 9 pacients que van prendre el fàrmac genèric. Les dades fan referència al temps en que el medicament fa desaparèixer el dolor. Les dades són:

   14.2 14.7 13.9 15.3 14.8 13.6 14.6 14.9 14.2

   La consultaria va recorre al laboratori que produeix el calmant de marca, i el laboratori va cedir-li informació sobre el seu calmant. En una mostra de 12 pacients, els temps registrats van ser:

   14.3 14.6 14.4 13.8 14.2 14.5 14.4 14.7 14.6 13.8 14.5 14.3

   Suposa que la variable aleatòria X="temps en que el medicament fa desaparèixer el dolor"segueix la distribució normal.

   (a) Es pot acceptar la hipòtesis d'igualtat de variàncies amb un nivell de significació del 5%?

   (b) Estableixen les dades amb prou evidència que el medicament de marca elimina el dolor més ràpidament? Utilitza un nivell de significació del 5%.

2. Una empresa subministra tubs d'escapament a la industria del automòbil. En el tub d'escapament es col·loca un sensor que comunica a l'ordenador del cotxe el contingut de CO en els gasos d'escapament. L'empresa disposa de dos tipus de sensors A i B basats en principis de medició diferents. Tant un com l'altre es col·loquen en el silenciós del tub. El departament de I+D de l'empresa sospita que poden haver diferències entre les mesures efectuades pels dos tipus de sensors i decideix realitzar un experiment. La primera idea consisteix en seleccionar 10 sensors del tipus A i altres 10 del tipus B i col·locar-los en els tubs d'escapament de 20 cotxes distints. No obstant, un tècnic de qualitat de l'empresa amb coneixements d'estadística suggereix que l'experiment hauria de blocar-se per evitar que la variabilitat entre cotxes distints emmascari els resultats de l'experiment. Per aquest motiu suggereix que s'utilitzin 10 cotxes i que en cada un dels cotxes s'instal·li un sensor A i un altre de B, ambdós col·locats en el silenciós i en dues posicions properes entre si.

   El contingut en parts per milió (ppm) de CO observat en l'experiment va ser:

Cotxe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tipus A	72.1	68.2	70.9	74.3	70.7	66.6	69.5	70.8	68.8	73.3
Tipus B	74.0	68.8	71.2	74.2	71.8	66.4	69.8	71.3	69.3	73.6

   (a) Descriu com hauríem d'aleatoritzar l'experiment?

   (b) Suposant que l'experiment s'hagués dut a terme d'acord amb I+D i els resultats obtinguts corresponen a 20 cotxes (10 amb A i 10 amb B), quina seria la conclusió de l'experiment?

   (c) Atès que l'experiment es va realitzar segons el criteri del tècnic de qualitat (és a dir, amb 10 cotxes) quina conclusió trauríem de l'experiment?

3. Per verificar quan efectiva és una nova vacuna contra el refredat comú, es van separar a l'atzar els 204 treballadors d'una estació d'esquí, cada grup de 102. Als components del primer grup se'ls subministrà la vacuna mentre que els del segon grup se'ls subministrà un placebo. Al final de la temporada, va resultar que 29 dels treballadors que se'ls hi va submistrar vacuna van refredar-se alguna vegada, mentre que 34 dels que van prendre placebo també van refredar-se alguna vegada. Proven aquestes dades, amb un nivell de significació del 5%, que la vacuna és efectiva per prevenir el refredat?

4. En una recent investigació es va estudiar la relació entre la ingesta d'alcohol i el retard en la resposta a un estímul. Sis voluntaris van participar a l'estudi on es va mesurar el retard (en milisegons) en respondre a un estímul abans i després d'una dosi elevada d'alcohol. Els mesuraments van ser els següents

	1	2	3	4	5	6
Abans alcohol	3.85	3.81	3.60	3.68	3.78	3.83
Després alcohol	3.82	3.95	3.80	3.87	3.88	3.94

(a) Verifiqueu amb un nivell de significació del 5% si es produeix un increment en el temps de resposta.

(b) Efectueu el contrast fent servir un test (tot i que no sigui correcte) per a dades independents.

(c) Utilitzant les variàncies mostrals de les mesures S_1^2 i S_2^2 calculades abans i després, calculeu la variància de la diferència com si fossin mesures independents, anomeneu a aquesta variància Variància 1 i compareu-la amb la variància obtinguda en el test del primer apartat a la que podeu anomenar Variància 2. Perquè la Variància 1 és bastant més gran que la variància 2? En canvi, què passa amb la diferència de mitjanes respecte la mitjana de la diferència? El test per a dades aparellades i el de dades independents difereixen només en el denominador. Quin dels dos tests creus que es més potent en aquest cas?

5. De vegades només disposarem de les mitjanes i les desviacions típiques mostrals per realitzar una comparació entre dues poblacions. Per exemple, en un experiment dissenyat per estudiar la relació entre una dieta baixa en fenilalanina i la fenilcetonuria es van seleccionar un conjunt d'infants de 4 anys. Es va dividir la mostra de forma aleatòria en dos grups: el primer format per 5 infants va analitzar la seva dieta als 4 anys i el segon format per 4 infants va continuar la dieta fins els 6 anys. L'objectiu de la dieta és reduir els nivells de fenilalanina. Als 6 anys es va mesurar la quantitat de fenilalanina en els dos grups i es van obtenir els següents resultats:

	Dieta acabada	Dieta continuada
nombre d'infants	5	4
mitjana (mg/dl) de fenilalanina	26.9	16.7
desviació típica mostral corregida	4.1	7.3

(a) Verificar amb un nivell de significació del 5% si continuar amb la dieta fins els 6 anys millora els nivells de fenilalanina.

(b) Va ser argumentat que aquest estudi tenia molt poca potència. Interpreta la implicació del error de tipus II en aquest exemple. Quin dels dos tipus d'error és més important en aquest cas?

(c) Pots suggerir alguna modificació en l'anàlisi que faci l'estudi més eficient?

6. A la dècada de 1970, l'Administració d'Estats Units va dur a terme un experiment per comparar la cirurgia medicamentosa, com un tractament alternatiu de la malaltia de l'arteria coronaria. L'experiment involucrà a 596 pacients, dels quals 286 van ser triats aleatòriament per rebre un tractament quirúrgic, mentre que a la resta se'ls subministra la teràpia medicamentosa. Un total de 252 del operats i un total de 270 tractats amb la teràpia encara vivien després de 3 anys del tractament. Pots acceptar que les probabilitats de sobreviure són diferents segons el tractament? Utilitza un nivell de significació del 5%.

7. Un directiu d'una escola de negocis manté que el salari mitja dels graduats en la seva escola, després de 10 anys, és al menys 5000 euros més gran que el dels graduats similars d'una institució de la competència. Per validar aquesta hipòtesis, es seleccionà una mostra de 50 estudiants que s'havien graduat 10 anys abans, i es van anotar els seus salaris. També es va analitzar una mostra de 50 estudiants graduats a l'escola de la competència. Les dades van ser:

	Escola	Competència
mida mostral	50	50
mitjana mostral	85.2	74.8
variÃ ncia mostral	26.4	24.5

(a) Per corroborar la opinió del directiu, quines haurien de ser les hipòtesis del contrast?

(b) Resol el contrast amb un nivell de significació del 10%

8. Les dades següents representen els temps d'atenció al client, expressats en minuts, en dues mostres de clients recollides en els serveis d'informació de dues cadenes de grans magatzems de bricolatge:

Cadena 1	0.2	0.8	7.9	1.7	0.1	3.0	6.7	0.5	0.1	0.2	7.9	0.2	2.4	1.1
Cadena 2	0.7	2.6	0.2	3.2	0.4	3.0	1.3	1.8	0.5	0.3	0.6	0.9	0.4	0.5

Construïu un interval de confiança del 90% per a la diferencia de temps mitjans d'atenció al client en aquestes dues cadenes. Suposeu normalitat.

9. Es vol comparar l'eficàcia de dos mètodes diferents d'ensenyament d'anglés. Els del primer grup, format per 13 estudiants que van seguir el mètode A, obtenen una puntuació mitjana de 73 punts i una desviació estandar de 12 punts. El segon grup, format per 25 estudiants que van seguir el mètode B, obtenen una puntuació mitjana de 65 punts i una desviació estandar de 6 punts. Calculeu l'interval de confiança al 98% per la diferencia de mitjanes de les puntuacions.

10. Per estudiar si es podria reduir la dosi d'un fàrmac per a l'insomni es va fer una prova a 10 voluntaris. Un dia se'ls va subministrar la dosi normal del fàrmac i, al cap d'una setmana, se'ls va subministar una dosi reduïda. En ambdues ocasions es van anotar les hores de son de les 10 persones

Pacient	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dosi normal	6.5	5.3	7.2	5.4	8.1	7.8	5.6	5.9	7.1	6.9
Dosi reduïda	6.1	6.4	6.4	4.8	7.9	7.3	6.5	7.2	6.5	6.1

Calcula un interval de confiança del 95% per la diferencia de mitjanes. Es pot aconsellar la reducció de la dosi sense disminuir l'eficàcia del farmac? Suposeu normalitat.

11. El fàrmac *Oisnet* és utilitzat en el tractament de la hipertensió arterial, però té l'inconvenient de incrementar els nivells de potassi en sang. Un laboratori ha creat un nou fàrmac, anomenat *Issatop*, del que s'espera no tingui aquest efecte indesitjat. Per tal de comparar-los, un grup de 20 voluntaris amb hipertensió i nivells de potassi bassal similars son assignats ***aleatòriament*** a un dels dos fàrmacs deixant el temps de finestra terapèutica. Els nivells de potassi un cop finalitzat el tractament són els següents:

Oisnet	5.2	5.7	4.6	4.9	4.7	6.1	5.6	3.9	5.5	5.1
Issatop	4.5	4.8	5.2	3.7	4.4	5.1	4.9	4.5	4.0	3.2

Es demana:

(a) Quin és l'interval de confiança al 95% del nivell mig de potassi de la població de malalts tractats amb *Issatop*

(b) Assumint igualtat de variàncies, trobar un interval de confiança al 95% per la variable: *Diferència de nivells de potassi entre Oisnet i Issatop.*

12. En un estudi comparatiu sobre nudibranquis en certa zona protegida de les Balears s'ha intentat comparar la longitud de les antenes de *Cuthona ocellata* i *Cuthona caerulea*. Tal variable es suposa que segueix el model normal. També es suposa que les variàncies poblacionals no difereixen entre els dos grups. S'han observat mostres de grandària **9** per cada grup, on s'han trobat els següents valors:

C. ocellata	2.30	2.34	2.28	2.33	2.28	2.36	2.19	2.40	2.37
C. caerulea	2.43	2.29	2.53	2.55	2.35	2.29	2.31	2.47	2.50

D'altra banda, s'han observat 200 exemplars de *C. ocellata* i en cada cas s'ha anotat si els individus es podien associar a una determinada esponja $\boldsymbol{S}$. En concret, s'ha verificat que dels 200 exemplars, 30 es podien associar a S. Es demana:

(a) Calcular un interval de confiança amb un 90% de confiança per la diferència de mitjanes entre ambdues espécies. En funció del resultat, podem afirmar que mitjana de *C. caerulea* és superior a la de *C. ocellata*?

(b) Calcular un interval de confiança amb un 90% de confiança per a la proporció d'individus que s'associen a S. També en funció dels resultats, podem acceptar que més del 10% d'exemplars es poden associar a S?

Exercici solucionats

Exercici 3 Es tracta d'un test d'hipòtesis per comparar proporcions. En efecte, si la vacuna és efectiva cal esperar que la proporció de persones que agafan un refredat dintre de la població vacunda sigui inferior que en la població tractada amb placebo. Si p_1 denota la probabilitat d'agafar un refredat dintre de la població vacunada i p_2 la probabilitat en la població tractada amb placebo, aleshores formularem el contrast següent:

$$H_0 : p_1 = p_2, \qquad H_1 : p_1 < p_2$$

Una mesura de discrepància per resoldre aquest contrast ve donada per l'estadístic següent:

$$\hat{d} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)(1/n_1 + 1/n_2)}}$$

que té distribució aproximada (mostres grans) N(0,1). Tenint en compte les dades de l'estudi, resulten

$$\hat{p}_1 = \frac{29}{102} = 0.28, \qquad \hat{p}_2 = \frac{34}{102} = 0.33, \qquad \hat{p}_0 = \frac{102\frac{29}{102} + 102\frac{34}{102}}{204} = 0.305$$

Per tant, el valor experimental de la mesura de discrepància és:

$$\hat{d}_{exp} = \frac{0.28 - 0.33}{\sqrt{0.305 \cdot 0.695 \cdot (1/102 + 1/102)}} = -0.776$$

Al tractar-se d'una H_1 unilateral esquerra, la regió de rebuig estarà formada per valors "prou"negatius de la mesura de discrepància. Així, amb un nivell de significació $\alpha = 0.05$, la regió de rebuig vindrà determinada pel valor crític $-z_\alpha = -z_{0.05} = -1.64$.
Observa que:

$$\hat{d}_{exp} = -0.776 > -z_{0.05} = -1.64,$$

per tant mantenim H_0. Concluim que no hi ha evidències per afirmar que la vacuna és significativament efectiva.

Exercici 4 Apartat (a). Volem estudiar l'efecte de l'alcohol en el retard en la resposta a un estimul. Plantejarem aquest estudi, comparant les mitjanes del temps de resposta abans i després de la ingesta d'alcohol. Es tracta d'una comparació de mitjanes però hem de caure en el fet que les observacions s'efectuen sobre els mateixos individus això fa que les variables aleatòries que descriuen els temps de resposta, abans i després, siguin presumiblament dependents, i per tant, que es tracti d'una comparació de mitjanes amb *dades aparellades*. Si μ_1 denota la mitjana del temps de resposta abans de la ingesta i μ_2 la mitjana després de la ingesta, formularem el contrast següent:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2, \qquad H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

Una mesura de discrepància per resoldre aquest contrast ve donada per l'estadístic següent:

$$d = \frac{\bar{D}_n}{S_D}\sqrt{n}$$

que té distribució t de Student amb $n-1$ graus de llibertat.
Per calcular el valor experimental d_{exp}, haurem de calcular primer les diferències:

	1	2	3	4	5	6
Abans alcohol	3.85	3.81	3.60	3.68	3.78	3.83
Després alcohol	3.82	3.95	3.80	3.87	3.88	3.94
D=Abans-Després	0.03	-0.14	-0.2	-0.19	-0.1	-0.11

Resulten els valors següents:

$$\hat{d} = -0.1183, \qquad s_d = 0.0833$$

Això fa que

$$d_{exp} = \frac{\bar{d}_n}{s_D}\sqrt{n} = \frac{-0.1183}{0.0833}\sqrt{6} = -3.479$$

Al tractar-se d'una H_1 unilateral esquerra, la regió de rebuig estarà formada per valors "prou"negatius de la mesura de discrepància. Així, amb un nivell de significació $\alpha = 0.05$, la regió de rebuig vindrà determinada pel valor crític $-t_{n-1;\alpha} = -t_{5;0.05} = -2.015$.
Observa que:

$$d_{exp} = -3.479 < t_{5;0.05} = -2.015,$$

per tant acceptem H_1. Concluim que la mitjana del temps de resposta és significativament inferior abans de la ingesta d'alcohol.
Apartat (b). Es tracta de resoldre el mateix contrast però admeten que hi ha independència, és a dir, en el cas que les mesures abans i després corresponen a observacions efectuades en poblacions independents i també suposarem que les variàncies són iguals en les dues poblacions.
Una mesura de discrepància per resoldre aquest contrast ve donada per l'estadístic següent:

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S_p^2(1/n_1 + 1/n_2)}}$$

que té distribució t de Student amb $n_1 + n_2 - 2$ graus de llibertat.
Resulten els valors següents: Si denotem amb s_1^2 la variància de la mostra Abans, resulta $s_1^2 = 0.0096$, i si denotem amb s_2^2 la variància de la mostra Després, resulta $s_2^2 = 0.0037$. Aleshores

$$s_p^2 = \frac{5 \cdot 0.0096 + 5 \cdot 0.0037}{6 + 6 - 2} = 0.0067$$

I, per tant,

$$d_{exp} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_p^2(1/n_1 + 1/n_2)}} = \frac{3.7583 - 3.8766}{\sqrt{0.0067(1/6 + 1/6)}} = -2.516$$

Així, amb un nivell de significació $\alpha = 0.05$, la regió de rebuig vindrà determinada pel valor crític $-t_{n_1+n_2-2;\alpha} = -t_{10;0.05} = -1.812$. Observa que:

$$d_{exp} = -2.516 < t_{10;0.05} = -1.812,$$

per tant acceptem H_1. Concluim que la mitjana del temps de resposta és significativament inferior abans de la ingesta d'alcohol.
Apartat (c) En el cas que fossin independents la variància de la diferència, D, vindria donada per

$$\text{Var 1=var(Abans-Despres)=var(Abans)+var(Despres)}$$

I per tant, una estimació serà

$$\hat{\text{Var}}1 = s_1^2 + s_2^2 = 0.0096 + 0.0037 = 0.0133$$

En l'apartat a), on hem considerat dades aparellades, obteniem l'estimació

$$\hat{\text{Var}}2 = s_d^2 = 0.0833^2 = 0.0069$$

La variància de la variable diferència és superior en el cas d'independència. D'altra banda la mitjana de la variable diferència és la mateix en ambdós casos. És dir, les mesures de discrepància dels dos casos, només difereixen en els denominadors.
Per tant, donades unes dades, el tractament considerant dades independents proporcionarà un valor experimental de la mesura de discrepancia inferior en comparació amb el que obtindrem si resolem el contrast com dades aparellades.
En conlusió, unes diferències entre les mitjanes que poden ser significatives considerant dades aparellades, contrariament, poden ser no significatives considerant el problema com dades independents, i resultar per tant, un test de menys potència.

Exercici 7
Apartat (a)
Plantejarem aquest estudi, comparant les mitjanes dels salaris dels graduats en l'escola i dels graduats en altres escoles de la competència. De fet, el directiu afirma que el sou dels graduats en la seva escola és superior a 5000 euros. Per tant, plantejarem les hipòtesis

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 5000, \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 5000$$

on μ_1 denota la mitjana del salari dels graduats a l'escola i μ_2 la mitjana dels graduats en altres escoles. No fem cap suposició sobre la distribució de les variables aleatòries que descriuen els salaris però tenint en compte que les mostres són grans ($n_1 = n_2 = 50$) podem utilitzar com a mesura de discrepància l'estadístic:

$$d = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \mu_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

que té distribució aproximada $N(0, 1)$.
Apartat (b)
El valor experimental de la mesura de discrepància és:

$$d_{exp} = \frac{85.2 - 74.8 - 5}{\sqrt{\frac{26.4}{50} + \frac{24.5}{50}}} = 5.352$$

La regió de rebuig ve determinada pel valor crític $z_{0.1} = 1.282$. Per tant, atès que:

$$d_{exp} = 5.352 > z_{0.1} = 1.282$$

acceptem H_1. I afirmem, que de manera significativa el salari mig dels graduats en l'escola és superior en més de 5000 euros al salari dels graduats en altres escoles.

Exercici 8
Observem previament que degut as que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, sabem que la mitjana es distribueix $\bar{X}_i \sim N\left(\mu_i, \frac{\sigma_i^2}{n_1}\right)$ per $i = 1, 2$.

Com no hi ha cap relació entre els clients de ambdues companyies, es tracta de dues mostres independents i per tant definim la variable aleatòria diferencia de mitjanes com $\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ que, com és una diferència de distribucions normals, també segueix una distribució normal. A més com són independents, la distribució resultant té com a mitjana la diferència de mitjanes i com a variància la suma de les variàncies, és a dir,

$$\bar{D} \sim N(\mu_D, \sigma_D^2) = N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Estandaritzant (dividint per la desviació tipus) l'expressió anterior obtenim

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

Com no coneixem les variàncies σ_1^2 i σ_2^2 tampoc coneixem $\sigma_{\bar{D}}^2$. La manera d'estimar aquesta variància dependrà de si les variàncies són iguals o no. En aquest cas considerarem que les variancies són diferents i al final de l'exercici farem un contrast d'hipòtesi per tal de formalitzar-ho.

En el cas en que se suposen les variàncies diferents estimem $S_{\bar{D}}^2$ de la següent manera

$$S_{\bar{D}}^2 = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}$$

Per tal de calcular l'interval de confiança al 90% podem utilitzar el següent estadístic

$$T_{\bar{D}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{\bar{D}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{g,\alpha/2}$$

on els graus de llibertat g es calculen a partir de l'expressió següent

$$g = \frac{\left(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1+1} + \frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2+1}} - 2$$

Per tant l'interval de confiança és

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \hat{S}_{\bar{D}} \cdot t_{g,\alpha/2}\ ,\ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \hat{S}_{\bar{D}} \cdot t_{g,1-\alpha/2}\right)$$

Fem els càlculs de les estimacions de les mitjanes i les variancies a partir de les dades del problema

$$n_1 = 14 \quad \bar{x}_1 = 2.343 \quad S_1^2 = 8.673$$

$$n_2 = 14 \quad \bar{x}_2 = 1.171 \quad S_2^2 = 1.102$$

Calculem la variància de la diferència de mitjanes $\bar{D}$

$$\hat{S}_{\bar{D}}^2 = \frac{8.673}{14} + \frac{1.102}{14} = 0.698.$$

Per a trobar el valor teòric de l'estadístic t-Student hem de calcular primer els graus de llibertat

$$g = \frac{0.698^2}{0.384/15 + 0.006/15} - 2 = 18.752 - 2 = 16.752$$

Com els graus de llibertat ha de ser un nombre enter i positiu, escollirem el que ens doni un radi més gran entre l'enter anterior i l'enter següent. Al nostre cas tenim

$$t_{16,0.95} = 1.7459 \quad i \quad t_{17,0.95} = 1.7396$$

Amb tot això, ja podem calcular l'interval de confiança al 90% utilitzant $t_{16,0.95} = 1.7459$

$$\left(2.343 - 1.171 - 1.746 \cdot \sqrt{0.698}\ ,\ 2.343 - 1.171 + 1.746 \cdot \sqrt{0.698}\right) = (-0.287, 2.631)$$

Per tant, la diferència de mitjanes $\mu_1 - \mu_2$ es trobarà dins de l'interval $(-0.287, 2.631)$ amb una confiança del 90%.

Ara realitzarem un test d'hipòtesi amb un nivell de significació $\alpha = 0.05$ per a saber si podem considerar les variàncies diferents o no.

Observem que per a aquest test d'hipòtesi podem escollir la α que volguem, no ha de ser necessàriament la mateixa que per a l'interval de confiança que demana l'exercici.

$$\begin{cases} H_0: & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: & \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

Recordem que l'estadístic de cotrast per a aquest test és

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

que segueix una distribució F de Snedecor.

La regió crítica queda delimitada per $|F_{ob}| > F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}$. Per tant rebutjarem la hipòtesi nul-la si $F_{ob} > F_{13,13,0.975}$ o $F_{ob} < -F_{13,13,0.975}$.

Per una banda veiem que el valor observat és

$$F_{ob} = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} = \frac{8.673}{1.102} = 7.869$$

Per una altra banda a la taula de la F de Snedecor trobem que $F_{13,13,0.975} = 3.115$.

Com $F_{ob} = 7.869 > 3.115 = F$ (es troba a la regió crítica) podem rebutjar la hipòtesi nul·la, és a dir, podem considerar que les variàncies són diferents tal i com hem fet.

Exercici 10
Anomenem X i Y a les variables aleatòries que mesuren les hores de son pels pacients amb dosi normal i dosi reduida respectivament.

Les mostres són aparellades així que considerarem la v.a. diferència $D = X - Y \sim N(\mu_D, \sigma_D)$ on $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$ per ser diferència de normals.

Aleshores, com volem l'IC per $\mu_X - \mu_Y$ només cal que calculem l'IC per μ_D i veure si el zero hi pertany o no.

Com $D \sim N(\mu_D, \sigma_D)$ aleshores $\bar{D} \sim N\left(\mu_D, \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}\right)$ i per tant

$$\frac{\bar{D} - \mu_D}{\sigma_D/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Com no coneixem el valor de la variància σ_D^2, l'estimarem per S_D^2 (la qual es distribueix com una $\mathcal{X}_{n-1}$ khi-quadrat amb $n-1$ graus de llibertat) i per tant

$$\frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

Llavors l'interval de confiança és

$$\left(\bar{D} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{D} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_D}{\sqrt{n}}\right)$$

Les observacions de la variable aleatòria D són $d_i = x_i - y_i$

Pacient	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	6.5	5.3	7.2	5.4	8.1	7.8	5.6	5.9	7.1	6.9
y_i	6.1	6.4	6.4	4.8	7.9	7.3	6.5	7.2	6.5	6.1
d_i	0.4	-1.1	0.8	0.6	0.2	0.5	-0.9	-1.3	0.6	0.8

Fent els càlculs de la mitjana i la variància s'obtè

$$\bar{d} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} d_i = 0.06 \qquad \hat{S}_D^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(d_i - \bar{d})^2 = 0.6804 \longrightarrow \hat{S}_D = 0.8249$$

Per tant, substituint els valors observats es té que l'interval de confiança és

$$\left(0.06 - 2.2622 \cdot \frac{0.8249}{\sqrt{9}}\ ,\ 0.06 + 2.2622 \cdot \frac{0.8249}{\sqrt{9}}\right)$$

Llavors, l'interval de confiança per a la diferència de mitjanes al 95% és (-0.5620, 0.6820).

Donats els resultats, podem aconsellar la reducció de la dosi del fàrmac sense que això redueixi la seva eficàcia, ja que el zero pertany a l'interval de confiança.

Exercici 12

(a) Denotem per X_1 i X_2 a les variables aleatòries que mesuren la longitud de les antenes de la *Cuthona ocellata* i la *Cuthona caerulea* respectivament. Ambdues variables es distribueixen normalment $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ i per tant les seves mitjanes també són normals $\bar{X}_i \sim N\left(\mu_i, \frac{\sigma_i^2}{n_i}\right)$.

Definim la variable aleatòria diferència de mitjanes $D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$.

Tenint en compte que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, estandaritzant D es té

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}} \sim N(0,1).$$

Com no coneixem el valor de σ utilitzarem el mateix argument que a l'hora de trobar l'interval de confiança per a la mitjana. Tenim que l'estadístic

$$T = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

on S_p^2 o variància *pooled* és la ponderació de les dues variàncies estimades,

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

Per tant l'interval de confiança és

$$\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2}} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\ ,\ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2}} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$$

Fent el càlcul amb les dades proporcionades s'obtè

$$\begin{array}{l} n_1 = 9 \quad \bar{x}_1 = 2.3167 \quad \hat{S}_1 = 0.06265 \\ n_2 = 9 \quad \bar{x}_2 = 2.4133 \quad \hat{S}_2 = 0.10512 \end{array} \quad \longrightarrow \quad S_p = \sqrt{\frac{8 \cdot 0.003925 + 8 \cdot 0.01105}{16}} = 0.08653.$$

A més el valor teòric de l'estadístic és $t_{16,0.95} = 1.7459$, per tant l'interval de confiança resulta

$$(-0.16788\ ,\ -0.02545).$$

Això vol dir que amb un nivell de confiança del 90%, la diferència de mitjanes $\mu_1 - \mu_2$ es troba ente -0.16788 i -0.02545 els quals són nombres negatius, per tant podem afirmar que amb un 90% de confiança la mitjana de C. caerulea és superior a la mitjana de C. ocellata.

(b) La variable aleatòria que compte el nombre d'èxits (individus associats a una certa esponja) es distriubueix com una binomial $X \sim B(n,p)$ amb $n = 200$ i $p = \frac{30}{200} = 0.15$.

Com $n \geq 30$, $np \geq 5$ i $n(1-p) \geq 5$ podem aproximar la distribució binomial per una normal $N\left(np, np(1-p)\right)$.

Aleshores

$$\hat{p} = \frac{X}{n} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Estandaritzant

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$

Per tant l'interval de confiança obtingut és

$$\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ,\ \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

Substituint pels valors corresponents amb $z_{0.95} = 1.645$ es té

$$(0.15 - 1.645 \cdot 0.02525\ ,\ 0.15 + 1.645 \cdot 0.02525) \quad \longrightarrow \quad (0.10847\ ,\ 0.19153).$$

Com ambdós valors són més grans que 0.1, podem assegurar amb un nivell de confiança del 90% que la proporció d'exemplars que es poden associar a S és superior a un 10%.