UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH Departament d'Estadística i Investigació Operativa	Programació Lineal i Entera, curs 2012-13 2on curs Grau en Estadística UB-UPC Primera prova de seguiment de teoria
NOM ALUMNE:	

	Temps estimat	Punts	Correcció	Material
Test	0.5h	3.0 pt		Només calculadora
Exercici 1	1.0h	7.0 pt		Amb apunts de classe i calculadora
Total	1.5h	10 pt		

TEST (3 punts / 30min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a)**, **b)** i **c)** si és certa (**Si**) o falsa (**No**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. Un politop és:

a) Sí / No El poliedre d'un problema (P) en forma estàndard. - N

b) Sí / No El poliedre d'un problema (P) amb solució única. - N

c) Sí / No Un poliedre no buit i afitat. - S

TEST 2. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$:

a) Sí / No Es pot assegurar que és un poliedre. - S

b) Sí / No Es pot assegurar que és un politop. - N

c) Sí / No Expressa de la regió factible de qualsevol problema de programació lineal. - S

TEST 3. Sigui P un poliedre no buit en forma estàndar, i sigui x s.b.f. de P i r el vector de costos reduits. Llavors:

a) Sí / No Si x és òptima $\Rightarrow r \geq [0]$. – N (cal que no sigui degenerada)

b) Sí / No Si $r \geq [0] \Rightarrow x$ és òptima . - S

c) Sí / No Existirà una solució bàsica factible òptima. - N

TEST 4. Les direccions bàsiques que pren l'algorisme del símplex a cada iteració :

a) Sí / No Son direccions factibles al llarg de la qual només canvien les v.b. - N

b) Sí / No Són direccions factibles de descens (de millora de la funció objectiu). - S

c) Sí / No Són direccions factibles que permeten passar d'un punt extrem de P a un altre d'adjacent. – N (no més si no hi ha degeneració)

TEST 5. El teorema d'optimalitat dels punts extrems diu:

"Sigui (PL) $min\{c'x: x \in P\}$, P politop, llavors existeix un punt extrem de P que és solució òptima de (PL)"

En base a aquest teorema, si P és no afitat llavors:

a) Sí / No Pot no existir cap solució òptima de (PL). - S

b) Sí / No Si existeixen solucions optimes de (PL) cap d'elles serà punt extrem.- N

c) Sí / No Si existeixen solucions optimes de (PL) totes elles seran punts extrems.- N

TEST 6. Donades y i x s.b.f. adjacents no degenerades, la relació $c'y = c'x + \theta^* r_q$:

a) Sí / No Indica que $c'y < c'x$ si $\theta^* < 0$. – N ($\theta^* > 0$)

b) Sí / No Indica que $c'y < c'x$ si $r_q < 0$. – S

c) Sí / No Indica que la direcció $d = y - x$ és factible. - N

TEST 7. Al simplex primal el criteri de selecció de la v.b. de sortida $\theta^* = \min_{i=1,\dots,m|d_{B(i)}<0}\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\}$

Cal per assegurar que:

a) **Sí / No** El problema no és il·limitat. - N

b) **Sí / No** Es produeix el màxim decrement de la funció objectiu. - N

TEST 8. Si a cada iteració del símplex primal d'un problema (P) qualsevol triem la v.n.b. d'entrada x_q associada al cost reduït més negatiu llavors podem assegurar que:

a) **Sí / No** Obtindrem, si existeix, la solució del problema (P). – N (només si (P) és no degenerat)

b) **Sí / No** El valor de la funció objectiu disminueix a cada iteració. - N (només si (P) és no degenerat)

c) **Sí / No** La disminució de la f.o. a cada iteració és el màxim possible. - N

TEST 9. L'algorisme del símplex primal amb la regla de Bland aplicat a la resolució d'un problema de programació lineal (P) factible:

a) **Sí / No** Sempre troba una solució òptima. – N (pot no existir)

b) **Sí / No** Sempre acaba en un nombre finit d'iteracions. - S

c) **Sí / No** Sempre troba una solució òptima en un nombre finit d'iteracions. – N (pot no existir)

TEST 10. Considerem la forma estàndard del següent problema (PL) $\min_{x\in\mathbb{R}^2}\{-2x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 1\,;\, x_1 \geq 0\,;\; x_2 \geq 1\}$ i la s.b.f. $x = [0,1]'$ amb $\mathcal{B}^* = \{2,3\}$:

a) **Sí / No** $\mathcal{B}$ no és òptima perquè $r \ngeq 0$. - N

b) **Sí / No** $\mathcal{B}$ és òptima però $r \ngeq 0$. - S

c) **Sí / No** $\mathcal{B}$ no és òptima perquè el problema és il·limitat. - N

EXERCICI 1. (7 punts / 1h / amb transparències de teoria i calculadora)

Volem estudiar l'aplicació de l'algorisme de simplex primal a la resolució del problema de programació lineal (PL) $\min_{x\in\mathbb{R}^3}\{c'x \mid x \in P\}$ i $P = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, x \geq 0\right\}$

a) **(4 punts)** Sigui $c = [1 \quad 1 \quad 1]'$. Comproveu que la fase I de l'algorisme del símplex primal troba la solució òptima de (PL) en una única iteració.

Respongueu a un dels dos apartats següents:

b) **(3 punts)** Considereu la s.b.f. associada a $\mathcal{B} = \{3,4\}$ i el vector de costos genèric $c = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]'$. Demostreu, fent servir l'algorisme del símplex, que (PL) és il·limitat si $c_1 < 0$ o $c_2 < 0$.

c) **(3 punts)** Trobeu dues direccions bàsiques factibles pel políedre P sobre la base $\mathcal{B} = \{1,5\}$. Sense calcular els costos reduïts, comproveu si les direccions bàsiques trobades son de descens i, a la vista dels resultats, indiqueu si aquesta base és òptima.

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

a) Forma estàndar:

$$(PL_e)\begin{cases}\min & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & & =1\\ & & & x_3 & & +x_5 & =2\\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0\end{cases}$$

Hi ha diverses formes de resoldre el problema de càlcul d'una s.b.f. inicial. De més senzilla a més complicada:

1. **Sense necessitat d'aplicar fase I**: es pot observar que la matriu A de coeficients de (PL_e) ja conté dues submatrius identitat que permeten formar una s.b.f. inicial trivial, i totes dues son òptimes per (PL_e):
   - $\mathcal{B}=\{1,5\}, B=I, x_B=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, r'=[1\quad 1\quad 0]-[1\quad 0]I\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\end{bmatrix}=[0\quad 0\quad 1]\geq 0$
   - $\mathcal{B}=\{2,5\}, B=I, x_B=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, r'=[1\quad 1\quad 0]-[1\quad 0]I\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\end{bmatrix}=[0\quad 0\quad 1]\geq 0$
2. **Aplicant la fase I amb una variable artificial**:

$$(PL_I)\begin{cases}\min & x_6 & & & & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & & +x_6 & =1\\ & & & x_3 & & +x_5 & & =2\\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0\end{cases}$$

1a iteració fase I:

- $\mathcal{B}=\{6,5\}, \mathrm{B}=\mathrm{I}, \mathrm{x_B}=[1\quad 2]', \mathcal{N}=\{1,2,3,4\}, \mathrm{z_I}=1$
- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :
- $r'=c'_N-c'_BB^{-1}A_N=[0]-[1\quad 0]I\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}=[-1\quad -1\quad -1\quad 1]\ngeq 0\rightarrow \boxed{q=1}$
- Direcció bàsica de descens : $d_B=-B^{-1}A_1=-I\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\ngeq 0$
- Sel. v.b. de sortida $B(p)$:
  $\theta^*=\min\left\{-{x_{B(i)}}/{d_{B(i)}}: i=1\right\}=\min\{1\}=1\Rightarrow \boxed{p=2, B(2)=4}$
- Actualitzacions i canvi de base :
  - $x_B=\begin{bmatrix}x_6\\x_5\end{bmatrix}:=x_B+\theta^* d_B=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+1\times\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}, x_1=\theta^*=1, x_2=x_3=x_4=0,$
    $z:=z+\theta^* r_q=1+1\times(-1)=0$
  - $\mathcal{B}:=\{1,5\},\ \mathcal{N}:=\{2,3,4,6\}$ Hem eliminat totes les variables artificials de la base: s.b.f. inicial del problema (PL_e).

1a iteració fase II:

- $\mathcal{B}=\{1,5\}, \mathrm{B}=I, \mathrm{x_B}=[1\quad 2]', \mathcal{N}=\{2,3,4\}, z=1$
- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r'=c'_N-c'_BB^{-1}A_N=[1\quad 1\quad 0]-[1\quad 0]I\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\end{bmatrix}=[0\quad 0\quad 1]\geq 0\rightarrow \boxed{òptima}$$

b) La convergència de l'algorisme del símplex ens assegura que si sobre un s.b.f. $\mathcal{B}$ existeixin dirección bàsiques de descens ($r_q<0$) no afitades ($d_B\geq 0$) el problema és il·limitat. Sabem que sobre $\mathcal{B}=\{3,4\}$ la d.b.f. associada a $q=5$ és afitada. Per les altres dues d.b.f. tenim que:

- $q=1: d_B=-B^{-1}A_1=-\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\geq 0\Rightarrow$ no afitada.
- $q=2: d_B=-B^{-1}A_2=-\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\geq 0\Rightarrow$ no afitada

És a dir, totes dues son no afitades. Si alguna d'aquestes direccions és de descens ($r_1 < 0$ o $r_2 < 0$) (PL) serà il·limitat:

- $r_1 < 0 : r_1 = c_1 - c'_B B^{-1} A_1 = c_1 - [c_3 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 < 0$
- $r_2 < 0 : r_2 = c_2 - c'_B B^{-1} A_2 = c_2 - [c_3 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = c_2 < 0$

Així doncs, $c_1 < 0$ o $c_2 < 0 \Rightarrow$ (PL) il·limitat □.

c) En aquest cas, com que no podem calcular els costos reduïts per comprovar la condició de descens $r_q < 0$, cal usar l'expressió equivalent dels costos reduïts vista a classe: $r_q = c'd = d_1 + d_2 + d_3 < 0$. El políedre estándar és $P_e = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x \geq 0 \right\}$. Hem d'identificar dues d.b.f., és a dir, direccions factibles sobre $\mathcal{B} = \{1,5\}$ que ens portin a s.b.f. adjacents. La no singularitat de la base ens permet descartar les bases $\mathcal{B} = \{1,2\}$ i $\mathcal{B} = \{1,4\}$. Tenint en compte que $B = B^{-1} = I$ i que $\mathcal{N} = \{2,3,4\}$, les direccions bàsiques factibles son:

- Cas $q = 2$: $d_B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_5 \end{bmatrix} = -A_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, d_N = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Aquesta d.b.f. ens porta a la base adjacent $\mathcal{B} = \{2,5\}$, pero no és de descens: $c'd = d_1 + d_2 + d_3 = -1 + 1 + 0 = 0$.
- Cas $q = 3$: $d_B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_5 \end{bmatrix} = -A_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, d_N = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Aquesta d.b.f. ens porta a la base adjacent $\mathcal{B} = \{2,5\}$, pero no és de descens: $c'd = d_1 + d_2 + d_3 = -1 + 0 + 1 = 0$.
- Cas $q = 4$: $d_B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_5 \end{bmatrix} = -A_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, d_N = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Aquesta d.b.f. no porta a cap base adjacent, doncs $d_B \geq 0$, i no és de descens: $c'd = d_1 + d_2 + d_3 = 1 + 0 + 0 = 1$.

Així doncs, de les tres d.b.f., cap és de descens. Dues ens porten a s.b.f. adjacents amb el mateix valor de la f.o. ($\Delta z = \theta^* c'd = 0$) i la tercera no porta a cap s.b.f. adjacent (aresta ilimitada del políedre). Com que no hi ha cap direcció bàsica de descens sobre $\mathcal{B} = \{1,5\}$, es satisfàn les condicions del teorema d'optimalitat i la base és optima.