

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD (REPASO)

P1. Supongamos que un sistema de colas tiene dos sirvientes, distribución de tiempo entre llegadas exponencial, de media 2 horas, y distribución de tiempos de servicio exponencial de media 2 horas. Sabemos que un cliente ha llegado al las 12:00 de mediodía.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente llegada sea antes de la 1:00pm?, ¿Entre 1:00 pm y 2:00 pm.?, ¿Después de las 2:00pm?
2. Supongamos que no llegan más clientes antes de la 1:00 pm ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente llegada sea entre 1:00pm y 2:00pm?
3. Cuál es la probabilidad de que el número de llegadas entre 1:00pm y 2:00pm sea cero?, ¿Uno?, ¿Dos o más?.
4. Supongamos que a la 1:00pm ambos sirvientes están atendiendo clientes. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los 2 clientes haya completado su servicio antes de las 2:00 pm.?, ¿antes de la 1:10pm?, ¿Antes de la 1:01pm?.

P2. El empleado de una tienda realiza tres operaciones consecutivas antes de almacenar un producto. Todas las tareas tienen duraciones que pueden considerarse variables aleatorias de distribución exponencial y tienen igual esperanza (45 minutos) y son independientes entre sí. Se pide:

1. ¿Cuál es la distribución de probabilidad con la que modelizaremos el tiempo total hasta almacenar un producto? Calcular su esperanza, su varianza y el coeficiente de dispersión.
2. Calcular la probabilidad de que, al llegar una unidad el empleado tarde más de tres horas en guardarla en el almacén.

P3. En el problema anterior, las unidades a almacenar son ahora de diversa índole de forma que, para almacenar una unidad pueden tener que realizarse una, dos, tres o cuatro operaciones, todas ellas de duración exponencialmente distribuida y de esperanza 45 minutos). A la tienda llega una partida de 1000 unidades de

forma que un 10% de ellas pueden almacenarse en una operación, el 40% mediante 2 operaciones, el 30% mediante 3 y el resto mediante 4 operaciones. Se pide:

1. ¿Cuánto tiempo tardará en promedio el operario en almacenar las 1000 unidades?
2. Escogida una unidad al azar sin saberse de qué tipo se trata cuál es la probabilidad de que tarde más de 3 horas en completar su almacenamiento.

P4. En un centro logístico se almacenan productos de 3 clases determinadas en proporciones iguales. Los tiempos de almacenamiento de estos productos poseen una distribución exponencial. El tiempo medio de almacenamiento de los productos de la clase 1 es de 1 hora; para la clase 2 de 1h30min y para la clase 3 de 2 horas. Se pide:

1. ¿Cuál es la distribución de probabilidad con la que modelizaremos el tiempo total hasta almacenar un producto sin saber de qué clase es? Calcular su esperanza, su varianza y el coeficiente de dispersión?
2. Escogida una unidad al azar sin saberse de qué tipo se trata cuál es la probabilidad de que tarde más de 3 horas en completar su almacenamiento.

P5 Los tiempos entre dos llegadas de clientes a la cola de un cine están distribuidos según una ley Weibull de parámetros $b=15$ segundos y $a=2$. Calcular:

1. Tiempo medio entre llegadas y desviación estándar.
2. Si la capacidad de la sala es para 100 personas, calcular la
3. Probabilidad de que pasen 2 minutos sin que llegue nadie desde la última llegada a la cola.
4. Un viandante se fija en la cola que se está formando en un instante determinado. ¿Cuál es la probabilidad de que pasen 1/2 minuto sin que llegue nadie desde ese momento?

P6 En una parada de autobuses el temps τ entre dues arribades dels busos d'una determinada línia segueix una llei uniforme, $\tau \sim \text{unif}[0,10]$ expressada en minuts. Se suposa que els passatgers arriben a la parada a l'atzar amb una taxa de 10 clients/minut. La capacitat dels autobusos és de 100 passatgers.

Es pregunta:

1. Un passatger en arribar a la parada acaba de perdre un bus. Quina és la probabilitat de que tingui que esperar 5 minuts?
2. Un altre passatger en arribar a la parada s'assabenta de que fa ja 4 minuts que ha sortit el darrer bus. Quin és el temps mig que li queda per esperar al següent bus? Quina és la probabilitat de que encara hagi d'esperar al menys 4 minuts?
3. En arribar un autobús a la parada carrega tots els passatgers presents que estan esperant en ella. Se suposa que els autobusos arriben buits. Per simplificar, suposem que si el bus arriba a t minuts des de l'anterior, llavors carregarà 10t passatgers. Quina serà la càrrega mitjana en passatgers d'un bus en sortir de la parada? Si el nivell de confort es degrada quan es superen els 50 passatgers presents al bus (es considera llavors que el bus està massa ple), llavors quina serà la fracció de passatgers que efectuaran un viatge incòmodes en el bus?
4. Quina és la probabilitat de que un passatger que arriba a l'atzar a la parada acabi pujant en un bus massa ple? Quin és el temps mig que esperen el passatgers a la parada?

P7 En una ciutat hi han instal·lats 400 parquímetres que són alimentats per bateries de 10Ah. Cada operació amb el parquímetre consumeix 10^{-3} Ah (=1mAh). L'accés als parquímetres es produeix amb una taxa de 75 transaccions al dia en promig estant aquesta xifra distribuïda Poissonianament. Es demana:

1. Temps mig de funcionament d'un parquímetre.
2. Calcular la taxa mitjana diària de parquímetres que es queden sense bateria

P8 Una factoria disposa de 40 equips de producció idèntics entre si. Cada un d'ells és capaç de fabricar una unitat en un temps τ aleatori distribuït segons una lognormal d'esperança 10hores i desviació 5hores.

1. Utilitzant el teorema de Palm doneu una aproximació a la taxa de unitats produïdes per unitat de temps en aquesta factoria.
2. Calculeu la probabilitat de que una unitat tardi en ser fabricada més de 15 hores.

EXERCICIS DE SIMULACIÓ

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 5221 | 9876 | 5305 | 6365 | 3369 | 324 | 4595 | 4558 | 2148 | 9635 |
| 1319 | 2803 | 2061 | 9608 | 4167 | 3831 | 3340 | 7509 | 3359 | 8669 |
| 9992 | 9590 | 4232 | 1480 | 6077 | 3465 | 1932 | 5370 | 1072 | 7807 |
| 2400 | 6771 | 7164 | 1821 | 6170 | 9245 | 5791 | 3453 | 8305 | 6658 |
| 7220 | 3688 | 7989 | 1439 | 9171 | 6567 | 6899 | 7151 | 9439 | 6219 |
| 3253 | 7880 | 1782 | 2299 | 4181 | 8936 | 1243 | 939 | 7819 | 0884 |
| 7237 | 4062 | 2316 | 2239 | 6181 | 3452 | 8527 | 3262 | 3083 | 1377 |
| 1146 | 3454 | 8029 | 4914 | 9608 | 8179 | 3798 | 5258 | 2192 | 6160 |
| 7743 | 9980 | 1518 | 6891 | 6326 | 4949 | 2152 | 9601 | 4554 | 6939 |
| 5675 | 594 | 6583 | 7222 | 7591 | 3838 | 4615 | 1300 | 9575 | 8421 |

S1 Calculeu utilitzant els n n^{os} aleatoris inicials de la taula anterior (acceptant-los uniformement distribuïts entre 0 i 9999):

- Per a $n=5$, una mostra de 5 valors del temps entre successos exponencialment distribuït amb esperança 2 segons usant el mètode de la inversa.
- Per a $n=15$, una mostra de 5 valors de temps entre successos seguint una distribució 3-Erlang d'esperança 6 segons.
- Per als $m = 4$ valors finals (en sentit invers) genereu una mostra de dos valors de distribució normal amb esperança 10 i desviació 2, seguint el mètode de Box-Muller.
- Per a $n= 30$, una mostra de dos valors de distribució normal amb esperança 10 i desviació 2, seguint el mètode basat en el teorema del límit central.

S2 Usant els n^{os} de la primera fila calculeu una mostra de 2 valors distribuïts segons una llei Weibull de paràmetres $a=3$ i $b=10$ truncada entre 0 i 15. Utilitzeu dos mètodes:

- Pel mètode de la inversa.
- Pel mètode del rebuig.

S3 Seguint el mètode d'event scheduling vist a classe per a una cua X/Y/1 obteniu la traça per a cinc clients i calculeu a) la ocupació mitjana del sistema d'espera, b) el temps mig de permanència en el sistema d'espera. Supposeu temps entre arribades exponencialment distribuït d'esperança 3 minuts i temps de servei constant i igual a 2 minuts.

S4. Un magatzem segueix una política (Q,r) per a reabastir-se. Els clients setmanals arriben seguint una llei de Poisson d'esperança 8; cada un d'ells demana una unitat la qual és venuda a un preu de 10€ El magatzem per recuperar el nivell d'inventari efectua una comanda de 30 unitats quan queda per sota de les $r=16$ unitats al final de la setmana, la qual és servida per la central, arribant aquesta comanda sempre al dilluns al matí amb una setmana de retard. Només hi ha costs de penalització per no poder servir una venda (penalització de 1€ per cada venda no satisfeta). Es demana avaluar el sistema per simulació per a un número N de setmanes determinat. (utilitzeu la taula de nos aleatoris)

- Escriure un pseudo-codi que il·lustri la simulació
- Avaluar el nivell mig d'inventari durant aquestes n setmanes i els beneficis nets setmanals obtinguts.

PROBLEMAS DE TEORIA DE COLAS

Q1 Una tienda de alimentación tiene un único dependiente. Los clientes llegan a la tienda según una distribución de Poisson de tasa media 30 por hora. Cuando hay un cliente, éste es atendido por el dependiente con un tiempo de servicio esperado de 1.5 minutos; la distribución de los tiempos de servicio es exponencial.

1. Construir el diagrama de flujos para este sistema de colas. ¿Cual es la distribución de probabilidad del n° de clientes en la tienda en el estado estacionario?
2. Obtener L (longitud esperada del sistema) para este sistema. Utilizar la información obtenida para determinar L_q , W y W_q

Q2 En el problema anterior. Los clientes llegan a la tienda según una distribución de Poisson de tasa media 30 por hora. Cuando solamente hay un cliente, éste es atendido por el dependiente con un tiempo de servicio esperado de 1.5 minutos. Sin embargo, cuando hay más de un cliente en la tienda, se ha dado instrucciones al encargado del almacén para que ayude al dependiente a envolver los productos comprados. Esta ayuda reduce el tiempo de servicio empleado a 1 minuto. En ambos casos, la distribución de los tiempos de servicio es exponencial.

3. Construir el diagrama de flujos para este sistema de colas. ¿Cual es la distribución de probabilidad del n° de clientes en la tienda en el estado estacionario?
4. Obtener L (longitud esperada del sistema) para este sistema. Utilizar la información obtenida para determinar L_q , W y W_q

Q3. Una compañía aérea tiene dos empleados que recogen las reservas de billetes que se realizan por teléfono. Además una llamada puede situarse en una línea de espera hasta que uno de los empleados quede libre para atenderla. Si las 3 líneas telefónicas (las dos de los empleados y la línea de espera) están ocupadas, un cliente potencial recibe una señal de que el sistema está ocupado y la llamada se pierde. Se supone que las llamadas llegan según una distribución de Poisson de tasa media de 15 por hora. La duración de una conversación telefónica tiene una distribución exponencial de media 4 minutos.

- a) construir el diagrama de flujos para este sistema
- b) Hallar la probabilidad de estado estacionario de:
 - i) Una llamada sea atendida inmediatamente
 - ii) Una llamada se pase a la línea de espera
 - iii) Una llamada reciba señal de ocupado.

Q4. Una tienda en la que se realizan fotocopias está abierta 5 días a la semana. Disponen de 3 máquinas idénticas, pero solamente hay 2 operadores trabajando con ellas, de forma que la 3ª máquina sólo se usa cuando alguna de las otras dos se estropea. Cuando una máquina está en servicio, el tiempo hasta que se estropea sigue una distribución exponencial de media 2 semanas. Si la máquina se estropea mientras las otras 2 están operativas, se llama a un técnico para su reparación cuyo tiempo medio hasta que se repara sigue una distribución exponencial de tasa media 0.2 semanas. Sin embargo, si una 2ª máquina se estropea antes de que la 1ª se haya arreglado, la 3ª máquina se para mientras que los 2 operadores trabajan juntos para arreglarla rápidamente. La distribución del tiempo que transcurre hasta que los dos operadores consiguen arreglar ésta 2ª máquina es exponencial de media únicamente 1/15 semanas. Si el técnico acaba de arreglar la 1ª máquina antes que los 2 operadores terminen el arreglo de la 2ª, los operadores vuelven a hacer servir las 2 máquinas operativas, mientras que el técnico termina el 2º arreglo, en cuyo caso el tiempo restante de arreglo sigue una distribución exponencial de media 0.2 semanas.

- a) Suponiendo que los estados del sistema son el número de máquinas que no están funcionando, construir el diagrama de flujos.
- b) Hallar la distribución de estado estacionario del número de máquinas que no funcionan.
- c) ¿Cuál es el número esperado de operadores haciendo copias?

Q5. Un técnico en reparaciones se ocupa del mantenimiento de 3 máquinas. Para cada máquina, la distribución de probabilidades del tiempo antes de que se estropee es exponencial de media 9 horas. El tiempo de reparación también es exponencial de media 2 horas.

- a) Calcular la distribución de probabilidades en el estado estacionario del nº de máquinas que no funcionan
- b) Haciendo una aproximación muy burda, supongamos que la población de llegada es infinita de forma que el proceso de llegada sigue una distribución de Poisson de tasa media de 3 cada 9 horas. Comparar el resultado obtenido en a) con el que se obtiene al hacer esta aproximación:
 - 1) Utilizando el modelo de cola infinita
 - 2) Utilizando el modelo de cola finita
- c) Supongamos ahora que podemos disponer de un 2º técnico para reparar las máquinas siempre que haya más de una máquina estropeada. Calcular en este caso, lo mismo que en el apartado a).

Q6. Actualmente se está realizando la planificación para una nueva fábrica. Un departamento va a recibir una gran cantidad de ciertas máquinas automáticas y deseamos determinar cuantas máquinas deberían asignarse a cada operador para su servicio (carga, descarga, ajuste, arranque, etc.) Para realizar este análisis se proporciona la siguiente información:

El tiempo de espera (tiempo desde que se completa un servicio hasta que la máquina requiere un nuevo servicio) de cada máquina, es exponencial de media 150 minutos.

El tiempo de servicio tiene una distribución exponencial de media 15 minutos. Cada operador atiende únicamente tres máquinas y no ayuda ni recibe ayuda de los otros operadores.

Para que el departamento alcance la tasa de producción necesaria, las máquinas deben funcionar por lo menos el 89 % del tiempo en media.

- a) ¿Cuál es el máximo nº de máquinas que puede asignarse a cada operador manteniendo la tasa de producción?
- b) Cuando a cada operador se le asigna el máximo nº obtenido en a), ¿Cuál es la fracción de tiempo esperada en la que los operadores estarán ocupados atendiendo las máquinas?

Q7. Consideremos un sistema de colas con llegadas de Poisson, en el que el sirviente debe realizar dos tareas diferenciadas de forma secuencial para cada cliente, de forma que el tiempo total de servicio es la suma de los tiempos de las 2 tareas (estadísticamente independientes).

- a) Supongamos que el tiempo de la 1ª tarea es exponencial de media 3 minutos y que el tiempo de la 2ª tarea tiene una distribución de Erlang de media 9 minutos y $K = 3$. ¿Qué modelo debe utilizarse para representar este sistema?
- b) supongamos que a) se modifica de forma que el tiempo de la 1ª tarea también sigue una distribución de Erlang con $K = 3$ (la media se mantiene en 3 minutos). ¿Qué modelo debería utilizarse para representar este sistema?

Q8. Una base de mantenimiento de aviones dispone de recursos para revisar únicamente un motor de avión a la vez. Por tanto, para devolver los aviones lo antes posible, la política que se sigue consiste en aplazar la revisión de los 4 motores de cada avión. En otras palabras, solamente se revisa un motor del avión cada vez que un avión llega a la base. con esta política, los aviones llegan según una distribución de Poisson de tasa media uno al día. El tiempo requerido para revisar un motor (una vez que se empieza el trabajo) tiene una distribución exponencial de media 1/2 día. Se ha hecho una propuesta para cambiar la política de revisión de manera que los 4 motores se revisen de forma consecutiva cada vez que un avión llegue a la base. a pesar de que ello supondría cuadruplicar el tiempo esperado de servicio, cada avión necesitaría ser revisado únicamente con una frecuencia 4 veces menor.

Utilizar la Teoría de colas para comparar las 2 alternativas.

Q9. El servicio de información telefónica de un instituto meteorológico consta de una centralita con 4 líneas atendida por una única persona que es la que proporciona la información. Cuando llega una llamada, ésta se rechaza si en ese momento todas las líneas están ocupadas; en caso contrario, se aceptará la llamada y ésta ocupará alguna línea desocupada. la telefonista atiende las llamadas según una disciplina FIFO, tardando en cada una de ellas una media de 60 segundos. La tasa de llegada de las llamadas es de 3 por minuto. Suponiendo que el número de llamadas que se reciben sigue una distribución de Poisson y que el tiempo que se tarda en atenderlas sigue una distribución exponencial, responder a las siguientes cuestiones;

a) ¿Qué modelo permite estudiar el comportamiento de la centralita?.

Dibujar el diagrama de tasas

b) ¿Cual es el tiempo medio de espera hasta que se atiende una llamada?

c) ¿Con qué probabilidad se rechaza una llamada?

d) Actualmente se está considerando la posibilidad de ampliar el servicio de la centralita para reducir la probabilidad de rechazar una llamada. Las posibilidades que se están estudiando son:

1) Conectar a la centralita otras 4 líneas nuevas, manteniendo una única telefonista

2) Mantener las 4 líneas actuales pero contratar una nueva telefonista que trabajaría conjuntamente con la que ya está y a un ritmo de trabajo similar.

¿Cual de las 2 alternativas te parece más conveniente?

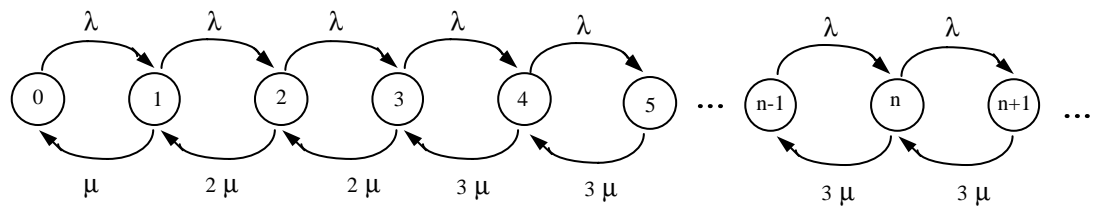
Q10. Consideremos los siguientes diagramas de tasas, correspondientes a diferentes modelos de colas para procesos de nacimiento y muerte.

1)



Donde c es una constante, $0 < c < 1$

2)



3)



Responder a las siguientes cuestiones:

- Para todos los modelos anteriores (1,2 y 3) describir brevemente con qué tipo de situaciones se corresponden.
- Para los modelos 2 y 3 dar una expresión (lo más compacta posible) de P_0 .
- Para el modelo 3 obtener el tiempo medio de espera en el sistema. ¿Cuál será la longitud media del sistema cuando $\lambda=\mu$?

Nota:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \text{ si } a < 1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$$

Q11. Una gestoría dispone de tres personas que atienden al público; cada una de ellas tarda una media de 10 minutos en atender a un cliente.

- a) Supongamos que los clientes llegan con una tasa de 15 por hora.
 - a.1) ¿Con qué probabilidad un cliente tiene que esperar para ser atendido?
 - a.2) ¿Cual es el número medio de clientes en la cola?
 - a.3) ¿Cual es el tiempo medio de espera en el sistema?
- b) Supongamos que se estructura la gestoría en tres servicios: uno dedicado a las gestiones de compra/venta, el segundo para documentación (DNI, pasaportes, carnets de conducir,...) y el tercero para las restantes gestiones. Ahora, la tasa de llegada de los clientes a cada uno de los servicios es de 5 por hora. Además, cada uno de los tres empleados está asignado a un único servicio.
 - b.1) ¿Con qué probabilidad un cliente tiene que esperar para ser atendido?
 - b.2) ¿Cual es el número medio de clientes en la cola?
 - b.3) ¿Cual es el tiempo medio de espera en el sistema?
- c) ¿Cual de las 2 alternativas anteriores te parece más conveniente? Razónalo.

Q12. Una estación de servicio tiene una única bomba de gasolina. Los coches que requieren servicio llegan según un proceso de Poisson con una tasa media de 20 vehículos por hora. Si la bomba ya está sirviendo a un cliente los clientes potenciales pueden marcharse para ser atendidos en otra estación de servicio próxima. En particular si hay n coches en la estación de servicio, la probabilidad de que un cliente potencial se marche es de $n / 4$ para $n = 1,2,3,4$. El tiempo requerido para servir un coche es exponencial de media 3 minutos.

- a) Hallar la distribución de probabilidad del estado estacionario
- b) Encontrar el tiempo medio de permanencia en el sistema

Q13. Un vendedor de helados ha instalado un puesto de venta en un area de descanso de una autopista de manera que puede atender a los clientes sin que tengan que apearse. El concesionario de la autopista le ha alquilado un espacio con capacidad para cuatro vehículos contando el que esta siendo atendido. La tasa media de llegadas de los clientes es de 40 coches por hora y el puesto puede servir hasta 50 coches por hora. El beneficio neto por los helados vendidos a cada coche es de 50 pesetas. Teniendo en cuenta que el puesto de venta de helados está abierto durante 14 horas diarias, y que el concesionario de autopistas está dispuesto a alquilarle espacio adicional a 500 pesetas/día por plaza de coche, ¿Qué debe hacer? ¿Ha de alquilar plazas extra?. En caso afirmativo, ¿cuantas?.

Q14. En cierto centro oficial existe un aparcamiento público gratuito con cuatro plazas. Los coches con intención de aparcar llegan a un ritmo de 6 por hora en promedio. Si encuentran plaza aparcan, si no deben buscar otro lugar, por ejemplo un aparcamiento subterráneo, de pago cerca de allí. En promedio cada coche permanece aparcado 30 minutos. Se pregunta:

- a) Probabilidad de que un coche que llegue al aparcamiento público gratuito pueda aparcar.
- b) Suponiendo que el aparcamiento público gratuito esté completo ¿Cuánto deberá aguardar, en promedio, un coche situado en doble fila, hasta que quede plaza libre?
- c) ¿Cuántas plazas de aparcamiento público gratuito deberían existir para que el 85% de los coches que se dirigen al centro oficial puedan aparcar en él?

Q15. Un taller cuenta con tres máquinas idénticas que se averían según un proceso poissoniano de parámetro λ . El coste de tener una máquina parada durante un día es de A pts.

El taller cuenta, asimismo, con dos equipos para la detección y reparación de averías. Para cada uno de ellos el tiempo necesario para una reparación se distribuye según una ley exponencial. Uno de los equipos, el más antiguo, tiene un coste de funcionamiento de R pts/día y puede realizar hasta μ reparaciones/día, el doble de la tasa de averías de cada máquina. El otro equipo, más moderno, tiene un rendimiento triple que el del primero y un coste de funcionamiento también triple.

El jefe de taller tiene que decidir entre dos políticas, para lo cual desea estimar los costes medios:

- a) Utilizar el equipo antiguo cuando sólo hay una máquina averiada
- b) Utilizar el equipo moderno cuando sólo hay una máquina averiada (Evidentemente, cuando hay dos máquinas averiadas, o las tres, trabajan los dos equipos de reparación)
- c) ¿Cual es la política óptima en función de la relación de costes A/R)

Q16. En un taller hay cuatro máquinas que se averían, en promedio, cada 200 horas. Las averías son reparadas por un único equipo que tarda un promedio de 8 horas por avería. Cada máquina parada produce una pérdida de 8.000 pts/hora.

- a) ¿Qué fracción de tiempo hay por lo menos dos máquinas trabajando?
- b) ¿Resultaría rentable la instalación de una máquina que funcionase cuando alguna de las otras se avería sustituyendola, si la instalación supone una inversión de 10.000.000 pts a amortizar en cuatro años, considerando que hay 2000 horas de trabajo al año?

Q17. Una estación de servicio tiene una bomba de gasolina. Los coches que requieren servicio llegan según un proceso de Poisson con una tasa media de 20 vehículos por hora. Si la bomba está ocupada los clientes potenciales pueden marcharse para ser atendidos en otra estación. En particular, si hay n coches en la estación, la probabilidad de que un cliente potencial se marche es de $n/5$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$. El tiempo requerido para servir un coche es de 3 minutos, en promedio, exponencialmente distribuidos.

- a) Identificar el modelo de colas y calcular el porcentaje de clientes perdidos.
- b) Calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema
- c) ¿Cual sería la ventaja si hubiesen 2 bombas de gasolina?

Q18. En una pequeña ciudad operan dos empresas de taxis. Cada una de ellas tiene dos taxis, y ambas se reparten el mercado en condiciones de igualdad. Esto resulta evidente por el hecho de que las llamadas telefónicas que llegan al servicio de atención al público de cada una de las empresas, siguen una distribución de Poisson de tasa media $\lambda=10$ llamadas por hora en ambos casos. La duración media de una carrera de taxi es de 11.5 minutos, y sigue una distribución de probabilidad exponencial.

Uno de los hombres de negocios de la ciudad ha comprado recientemente las dos empresas, y su primera preocupación es fusionar los dos servicios de atención al público en uno sólo, con el objetivo de ofrecer un servicio más rápido a los clientes, es decir, que tengan que esperar menos a que los recoja el taxi solicitado. ¿Es esto cierto, qué un único servicio de recepción de llamadas que fusione los dos existentes será más eficiente que los dos trabajando independientemente?.

A pesar de todo, operando con un servicio único de atención al cliente, el propietario de la empresa fusionada piensa que el tiempo de espera hasta que el cliente recibe el servicio es excesivo, y como no dispone de capital para incrementar el número de taxis decide que la oficina que atiende las llamadas de los clientes para pedir servicio les comunique que no puede atender su petición cuando la lista de clientes a la espera de ser atendidos sea de 16. ¿Qué efectos tendrá esta decisión en los tiempos de espera?. ¿Cuál será el porcentaje de clientes perdidos?.

Q19. Cada año, durante el mes de agosto, el edificio de la FME permanece cerrado con llave. Para poder entrar salir, alguno de los 3 guardias de seguridad nos tiene que abrir la puerta. La misión de estos guardias no es tan solo controlar la puerta sino que también deben hacer rondas de vigilancia de forma aleatoria por el edificio. Un guardia pasa una media de 1 hora en la entrada y entonces decide hacer una ronda que por termino medio dura 40 minutos (se supone que tanto el tiempo de duración de las rondas como el de permanencia en la entrada están distribuidos exponencialmente, y que el comportamiento de cada guardia es independiente del de los demás).

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que alguien que llega a la FME tenga que esperar a que vuelva algún guardia de su ronda para que le abra la puerta?
- b) ¿Cuántos guardias habrá en la puerta de entrada, por termino medio?
- c) ¿Cuál es el número medio de rondas que se hacen por día (24 horas) entre todos?

Q20. El Tri-Cities Bank disposa d'un únic caixer tipus drive-in. Els divendres pel matí, els clients arriben a la finestreta de forma aleatòria, seguint una distribució de Poisson amb una taxa mitjana de 30 per hora.

- a) Quants clients arriben per minut en mitjana.
- b) Quants clients s'esperaria que arribessin en un interval de 10 minuts ?
- c) Seguint la llei de Poisson determini's la probabilitat de que exactament hi hagin $n=0$, $n=1$, $n=2$ i $n=3$ arribades en un interval de 10 minuts. (Utilitzeu la funció **POISSON()** de l'Excel).
- d) Quina és la probabilitat de que hi hagin més de tres arribades en un interval de 10 minuts ?.

Q21. Fent referència a la situació descrita en el problema 1. anterior, suposem ara que la taxa de servei és de 40 clients per hora i segueix una distribució exponencial. Es demana:

- a) Quina és l'esperança del temps de servei per client?
- b) Seguint l'equació:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \mu e^{-\mu x} dx = e^{-\mu a} - e^{-\mu b}$$

determineu quina és la probabilitat de que el temps de servei d'un client sigui inferior o igual a 1 minut.

- c) Calculeu les probabilitats de que el temps de servei d'un client estigui entre dos i cinc minuts, menys de quatre minuts i més de tres minuts.

Q22. Un concepte extremadament important en teoria de cues és la diferència entre taxes i temps. Si λ és una taxa d'arribades de clients per unitat de temps, raoni's perquè $1/\lambda$ és un temps entre dues arribades.

Q23. Exposi's la relació bàsica que existeix entre la distribució exponencial i un procés de Poisson. Exposin-se també les diferències entre la distribució exponencial i la distribució de Poisson en relació als tipus de variables que descriuen aquestes dues distribucions.

Q24. Genereu en un full de càlcul 200 números aleatoris que segueixin una distribució exponencial de taxa $\lambda = 1/3$. Utilitzeu l'expressió **-3*LN(RAND())** . Inserir, per exemple, aquesta expressió en la cel.la A4 i copieu-la en el rang de cel.lles A5:A203. Trieu la comanda Edit/Paste Special amb l'opció Values (l'efecte és el de congelar els números generats, de forma que no canviïn si es recalcula la fulla). Exploreu les propietats d'aquests números de la forma següent:

a) Determineu la mitjana dels 200 números amb la funció AVERAGE. A quin valor teòric hauria d'aproximar-se aquesta mitjana?.

b) Determineu la desviació standard dels 200 números amb la funció STDEV. A quin valor teòric hauria d'aproximar-se aquesta desviació?.

c) Dibuixeu un histograma dels números aleatoris generats, utilitzant 15 subinterval de longitud unitat pels valors possibles de la variable aleatòria (el primer subinterval seria el $[0, 1]$). Té l'histograma la forma que és d'esperar ?

d) Supposeu que els números aleatoris generats corresponen als temps entre arribades a un magatzem. Així, el valor a la cel.la A4 seria el temps en minuts fins la primera arribada, el valor a la cel.la A5 seria el temps en minuts entre la primera i la segona arribada, el valor a la cel.la A6 el temps entre la segona i tercera arribada... etc. Com comprovaries que els temps entre arribades es corresponen de fet amb una distribució exponencial ? . Quin hauria de ser el valor de la taxa d'arribades en clients per minut que caracteritzaria aquesta distribució exponencial ?

Q25. Fent referència a la situacions descrites en els problemes 1 i 2 anteriors, es demana:

a) Quina és la probabilitat de que la finestra estigui buida?

b) Quina és la probabilitat de que un client hagi d'esperar a ésser atès ?

c) Quina és l'esperança del número de cotxes que estan esperant a ésser servits ?

d) Quin és el temps mig emprat per un client des de que arriba al banc fins que surt d'ell?

e) Quin és el temps mig emprat per un client fent cua?

f) Quina hauria de ser la taxa de servei per tal de reduir el temps mig emprat per un client en el banc a uns dos minuts ?.