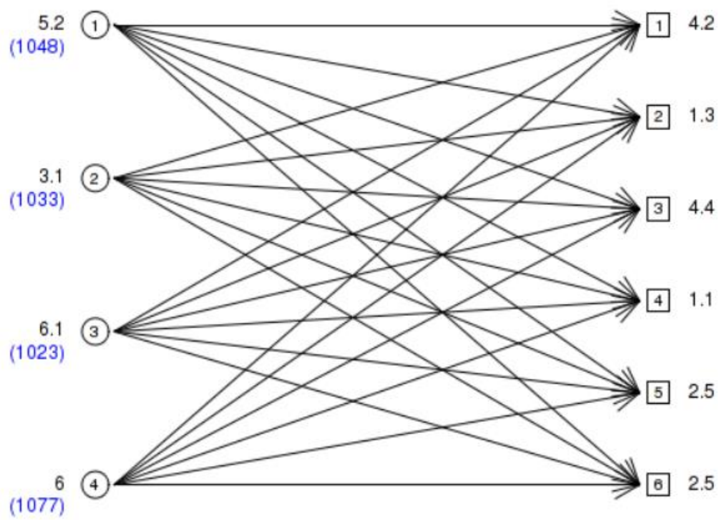
Laura Julià Melis
16810883

Control de laboratorio 2

En el problema siguiente se tiene que hallar la forma óptima de distribuir el aceite que se produce en las plantas de refinado (en el gráfico, a la izquierda) hacia los centros de embotellado (a la derecha). Cualquier planta puede suministrar a cualquier centro.

Las plantas tienen una capacidad de producción diaria que se muestra en la figura (a la izquierda de cada símbolo, en miles de litros), y un coste de producción (en azul, euros/1000 l). Se trata de proveer la demanda diaria de los centros, que aparece en la figura, a la derecha del símbolo respectivo.



El coste de transporte de 1000 litros de aceite desde una planta *i* a un centro *j* se muestra en la tabla siguiente:

	1	2	3	4	5	6
1	210	134	204	78	109	83
2	78	85	143	89	72	118
3	82	199	75	117	130	107
4	266	81	208	165	90	78

Responde a las preguntas siguientes usando *proc LP* de SAS. No olvides justificar las respuestas en el documento que adjuntarás en el campus virtual.

Planteamiento del problema.

- **Parámetros.**

n: nº de plantas de producción (n=4).
m: nº de centros de demanda (m=6).
c_i: coste de producción de aceite en la planta i (i=1, …, n).
t_{ij}: coste unitario del transporte de la planta i hasta el centro j.
p_j: producción de la planta i.
d_j: demanda del centro j (j=1, …, m).

- **Variables de decisión.**

X_{ij}: cantidad de aceite (en miles de litros) a transportar de i a j.

- <u>Dominio:</u> $x_{ij} \geq 0$.

- **Función objetivo.**

Se quieren minimizar los costes totales de la distribución del aceite que se produce en las plantas de refinado:

$$z = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \sum_{j=1}^{m} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} t_{ij}$$

Así pues, se tiene que la función objetivo con nuestros datos es:

$$\text{Min} \quad z = 1258x_{11} + 1182x_{12} + 1251x_{13} + 1126x_{14} + 1157x_{15} + 1131x_{16} + 1111x_{21} + 1118x_{22} + 1176x_{23} + 1122x_{24} + 1105x_{25} + 1151x_{26} + 1105x_{31} + 1222x_{32} + 1098x_{33} + 1140x_{34} + 1153x_{35} + 1130x_{36} + 1343x_{41} + 1158x_{42} + 1285x_{43} + 1242x_{44} + 1167x_{45} + 1155x_{46}$$

- **Constricciones.**

i. Las plantas deben enviar una cantidad de aceite no superior a su capacidad de producción.

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq p_i$$

ii. Cada centro debe recibir su demanda.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = d_j$$

De esta manera, las matrices A y b asociadas al problema son:

$$A=\begin{pmatrix}
1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1\\
1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}5.2\\3.1\\6.1\\6.0\\4.2\\1.3\\4.4\\1.1\\2.5\\2.5\\.\end{pmatrix}$$

Introducción al SAS.

En el cuadro bajo estas líneas se muestra el código utilizado para implementar en el programa SAS el problema planteado anteriormente.

```
DATA aceite;
INPUT
_row_$ x11 x12 x13 x14 x15 x16 x21 x22 x23 x24 x25 x26 x31 x32 x33 x34 x35 x36 x41 x42 x43 x44 x45 x46 _type_$ _rhs_;
DATALINES;
Costos 1258 1182 1252 1126 1157 1131 1111 1118 1176 1122 1105 1151 1105 1222 1098 1140 1153 1130 1343 1158 1285 1242 1167 1155   MIN .
p1      1    1    1    1    1    1    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    LE 5.2
p2      0    0    0    0    0    0    1    1    1    1    1    1    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    LE 3.1
p3      0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    1    1    1    1    1    1    0    0    0    0    0    0    LE 6.1
p4      0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    1    1    1    1    1    1    LE 6.0
c1      1    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    EQ 4.2
c2      0    1    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    EQ 1.3
c3      0    0    1    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    1    0    0    0    EQ 4.4
c4      0    0    0    1    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    1    0    0    EQ 1.1
c5      0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    1    0    EQ 2.5
c6      0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    1    EQ 2.5
Noneg   0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    lowerbd.
;
RUN;

PROC PRINT data=aceite;
RUN;

PROC LP data=aceite rangeprice rangerhs;
RUN;
```

La siguiente tabla es la impresión por pantalla de la tabla introducida con "datalines". Cada columna corresponde a una de las variables de decisión, mientras que en las filas encontramos la función objetivo (fila1), las restricciones de producción (filas 2-5) y las restricciones de demanda (filas 6-11).

Obs	_row_	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x31	x32	x33	x34	x35	x36	x41	x42	x43	x44	x45	x46	_type_	_rhs_
1	Costos	1258	1182	1252	1126	1157	1131	1111	1118	1176	1122	1105	1151	1105	1222	1098	1140	1153	1130	1343	1158	1285	1242	1167	1155	MIN	.
2	p1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	LE	5.2
3	p2	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	LE	3.1
4	p3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	LE	6.1
5	p4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	LE	6.0
6	c1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	EQ	4.2
7	c2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	EQ	1.3
8	c3	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	EQ	4.4
9	c4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	EQ	1.1
10	c5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	EQ	2.5
11	c6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	EQ	2.5

Preguntas e-status.

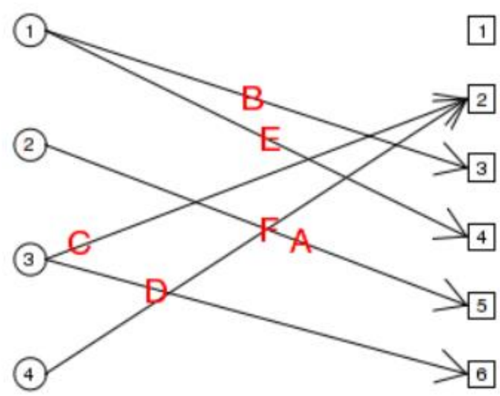
1. ¿Cuál es el coste total diario de la distribución del aceite en una solución óptima?

En la tabla 1, adjuntada en el anexo, se observa que el valor del coste total diario en la distribución del aceite en la solución óptima es 17923 euros.

En la tabla 2 se obtienen los valores que toma cada variable de decisión en el óptimo. Sustituyendo estos valores en la función objetivo obtenemos la solución óptima z*:

$$z^* = 1126 \cdot 1.1 + 1157 \cdot 1.6 + 1131 \cdot 2.5 + 1111 \cdot 2.5 + 1105 \cdot 0.6 + 1105 \cdot 1.7 + 1098 \cdot 4.4 + 1158 \cdot 1.3 + 1167 \cdot 0.3 = \boxed{17923}$$

2. Introduce los valores óptimos (en miles de litros) de las cantidades de aceite que se han marcado en la figura con las letras A, B, C ... (en orden, valores separados por un espacio, con un decimal).



Las variables correspondientes a las letras A, B, C D, E y F son, respectivamente, x_{25}, x_{13}, x_{32}, x_{36}, x_{14} y x_{42}. Mirando en la tabla 2, se puede observar que estas variables, en la solución óptima, toman los valores siguientes (en miles de litros):

x_{25}	x_{13}	x_{32}	x_{36}	x_{14}	x_{42}
0.6	0	0	0	1.1	1.3

Cabe mencionar que las variables x_{25}, x_{14} y x_{42} son variables básicas de la solución óptima mientras que las otras tres son no básicas (toman valor 0). Esto significa que, en el óptimo, no se debe distribuir aceite en los trayectos B, C y D, mientras que en los trayectos A, E y F, se deberán distribuir 0.6, 1.1 y 1.3 miles de litros de aceite, respectivamente.

3. Responde a las siguientes preguntas utilizando las técnicas de análisis de sensibilidad que conoces. En las respuestas utiliza al menos un decimal. Si algún valor es limitado, pon un número muy grande; por ejemplo, 9e+09 [$9 \cdot 10^9$], con el signo que corresponda.

Actualmente la planta 1 tiene una capacidad de suministro de 5.2 (x1000) litros de aceite. ¿En qué rango de valores puede variar la capacidad de esta planta sin que cambie la base óptima?

En la tabla 3 se encuentra el intervalo de estabilidad para el término independiente de la constricción correspondiente a la planta 1. El intervalo es [3.6, 5.5], lo que significa que, si la capacidad de esta planta varía en valores que se encuentran dentro del intervalo, la base óptima seguirá siendo la misma.

También es posible calcular este intervalo a mano. Se muestran los cálculos a continuación.

Para calcular el intervalo de estabilidad ϕ_{p1} es necesario aplicar la fórmula siguiente:

$$\phi_{b_j} \in \Phi_{b_j} = [\phi_{b_j}^{min}, \phi_{b_j}^{max}] \Rightarrow \begin{cases} \phi_{b_j} \geq \phi_{b_j}^{min} = \max\limits_{k=1,\dots,m} \left\{ b_j - \dfrac{x_{B(k)}}{\gamma_{kj}} : \gamma_{kj} > 0 \right\} \\ \phi_{b_j} \leq \phi_{b_j}^{max} = \min\limits_{k=1,\dots,m} \left\{ b_j - \dfrac{x_{B(k)}}{\gamma_{kj}} : \gamma_{kj} < 0 \right\} \end{cases}$$

Para ello, necesitamos conocer B (y su inversa), b y x_B:

- SAS nos dice que las variables básicas son: B= {14, 15, 16, 21, 25, 31, 33, 42, 45, p4}, por lo que la matriz B será:

$$B=\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \text{i su inversa:} \quad B^{-1}=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&-1&0&-1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&-1&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ -1&-1&-1&0&1&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1 \end{pmatrix}$$

- El vector b es el que contiene los términos independientes, por lo que:

$$b = [5.2, 3.1, 6.1, 6.0, 4.2, 1.3, 4.4, 1.1, 2.5, 2.5]'$$

- El vector x_B contiene los valores de las variables básicas, que los obtenemos en la tabla 2, o bien con la fórmula:

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&-1&0&-1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&-1&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ -1&-1&-1&0&1&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5.2 \\ 3.1 \\ 6.1 \\ 6.0 \\ 4.2 \\ 1.3 \\ 4.4 \\ 1.1 \\ 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.6 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 0.6 \\ 1.7 \\ 4.4 \\ 1.3 \\ 0.3 \\ 4.4 \end{pmatrix}$$

Así ya podemos calcular $\gamma_1 = B^{-1} \cdot e_1$ y consecuentemente, obtenemos que:

$$\gamma_{k1} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&-1&0&-1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&-1&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ -1&-1&-1&0&1&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donde e_1 es un vector fila de ceros con un 1 en la posición de la planta 1 (p1) por ser la planta que cambia su capacidad.

Ahora tenemos que calcular $b_1 - \frac{x_{B(k)}}{\gamma_{k1}}$ para todo K= 1, … , m. Obtenemos:

$$\left\{5.2 - \frac{1.1}{0}, 5.2 - \frac{1.6}{1}, 5.2 - \frac{2.5}{0}, 5.2 - \frac{2.5}{0}, 5.2 - \frac{0.6}{0}, 5.2 - \frac{1.7}{0}, 5.2 - \frac{4.4}{0}, 5.2 - \frac{1.3}{0}, 5.2 - \frac{0.3}{-1}, 5.2 - \frac{4.4}{1}\right\} =$$

$$= \{inf, 3.6, inf, inf, inf, inf, inf, inf, 5.5, 0.8\}.$$

Y finalmente, siguiendo la fórmula para el intervalo de estabilidad de ϕ_{p1} obtenemos:

$$\phi_{p1} = \left[\Phi_{p1}^{min}, \Phi_{p1}^{max}\right] = \boxed{[3.6, 5.5]}.$$

4. **Actualmente el centro 1 tiene una demanda de 4.2 (x1000) litros de aceite. ¿En qué rango de valores puede variar esta demanda sin que cambie la base óptima?**

Obtenemos el intervalo de estabilidad de la tabla 3 y vemos que es [3.9, 4.8], por lo que la demanda del centro 1 pueden variar en ese rango de valores sin que la base óptima cambie.

Se puede obtener el intervalo a mano como ya se ha ilustrado en el ejercicio 3. Lo calculamos:

- La matriz B i su inversa son las mismas, ya que las variables básicas del problema siguen siendo las mismas.
- Igualmente, los vectores b i x_B siguen siendo los calculados en el ejercicio anterior.
- Debemos calcular $\gamma_5 = B^{-1} \cdot e_5$ ya que el centro 1 se encuentra en la fila 5 (j=5). Así pues, obtenemos que:

$$\gamma_{k5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora ya podemos calcular $b_5 - \frac{x_{B(k)}}{\gamma_{k5}}$ para todo K= 1, … , m.

$$\left\{4.2 - \frac{1.1}{0}, 4.2 - \frac{1.6}{0}, 4.2 - \frac{2.5}{0}, 4.2 - \frac{2.5}{1}, 4.2 - \frac{0.6}{-1}, 4.2 - \frac{1.7}{0}, 4.2 - \frac{4.4}{0}, 4.2 - \frac{1.3}{0}, 4.2 - \frac{0.3}{1}, 4.2 - \frac{4.4}{-1}\right\} =$$

$$= \{inf, inf, inf, 1.7, 4.8, inf, inf, inf, 3.9, 8.6\}.$$

Y finalmente, igual q con SAS, obtendremos:

$$\phi_{c1} = \left[\Phi_{c1}^{min}, \Phi_{c1}^{max}\right] = \boxed{[3.9, 4.8]}.$$

5. **¿Cuánto se modificaría el coste diario de la operación si hubiese un decremento de 200 litros en la demanda de aceite del centro 1? Pista: no reoptimices. Utiliza los precios sombra.**

Para conocer el cambio que provoca en la función objetivo un incremento unitario del término independiente se debe observar la variable dual λ_j.

Como se nos pregunta que valoremos un decremento de 200 litros en c1, debemos calcular:

$$\lambda_1 \cdot \Delta_{c1} = 1173 \cdot 0.2 = -234.6$$

Observar que para responder a esta pregunta se ha utilizado la tabla de resumen de las constricciones (tabla 4) donde se encuentran los precios sombra, λ_j. Además, se han tenido que utilizar las unidades del aceite en miles de litros y, al tratarse de un decremento, se ha cambiado el signo.

Así pues, si hubiese un decremento de 200 litros en la demanda de aceite del centro 1, el coste diario de la operación disminuiría en 234.6 euros.

6. ¿Cuál es el intervalo de estabilidad para el coste de transporte desde la planta 2 hasta el centro 1?

Los intervalos de estabilidad para los costes de transporte se encuentran en la tabla 5.

El intervalo de estabilidad para el coste de transporte preguntado se corresponde con el coste asociado a la variable x_{21} y en la tabla vemos que el intervalo es [1057, 1183]. Su interpretación es que, si el coste de transporte desde la planta 2 hasta el centro 1 varía en un rango de valores dentro de ese intervalo, la solución seguirá siendo óptima, y la función objetivo tomata valores dentro del intervalo [17788, 18103].

También es posible calcular el intervalo de estabilidad ϕ_{c7} a mano, aplicando la siguiente fórmula:

$$\phi_{c_i} \in \Phi_{c_i} = \left[\Phi_{c_i}^{min}, \Phi_{c_i}^{max}\right]: \begin{cases} \phi_{c_i} \geq \phi_{c_i}^{min} = \max\limits_{j \in \mathcal{N}^*} \left\{ c_i + \dfrac{r_j}{v_{pj}} : v_{pj} < 0 \right\} \\ \phi_{c_i} \leq \phi_{c_i}^{max} = \min\limits_{j \in \mathcal{N}^*} \left\{ c_i + \dfrac{r_j}{v_{pj}} : v_{pj} > 0 \right\} \end{cases}$$

Para ello, necesitamos conocer N, r_N y V:

- SAS nos dice que las variables no básicas son N= {11, 12, 13, 22, 23, 24, 26, 32, 34, 35, 36, 41, 43, 44, 46, p1, p2, p3}, por lo que la matriz N es:

$$N = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

- El vector de los costes reducidos de las variables no básicas es: $r_N = c'_N - c'_B B^{-1} N$.

Tenemos B^{-1} y N. Necesitamos pues, obtener los vectores de costes de las variables no básicas (c'_N), el de las básicas(c'_B):

$$c'_N = [1258\ 1182\ 1252\ 1118\ 1176\ 1122\ 1151\ 1222\ 1140\ 1153\ 1130\ 1343\ 1285\ 1242\ 1155\ 0\ 0\ 0]$$

$$c'_B = [1126\ 1157\ 1131\ 1111\ 1105\ 1105\ 1098\ 1158\ 1167\ 0]$$

Si sustituimos i realizamos los cálculos en la fórmula obtenemos, al igual que en la tabla 2 (Reduced Cost):

$$r_N = [95, 34, 96, 22, 72, 48, 72, 132, 72, 54, 57, 170, 119, 106, 14, 10, 62, 68]$$

Ahora es necesario calcular la matriz V:

$$V = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ya se puede obtener el vector v_{pj} (en nuestro caso v_{4j} por ser la variable x_{21} la cuarta variable básica) que es el vector de la fila 4 de la matriz V:

$$v_{4j} = (1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1 \; -1 \; -1 \; -1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \; -1)$$

Calculamos finalmente $c_i - \frac{r_j}{v_{pj}}$:

$c_7 - \frac{r_j}{v_{4j}} = \left\{1111 - \frac{95}{1}, 1111 - \frac{34}{0}, 1111 - \frac{96}{1}, 1111 - \frac{22}{0}, 1111 - \frac{72}{1},, 1111 - \frac{48}{0},, 1111 - \frac{72}{0}, 1111 - \frac{132}{-1}, 1111 - \frac{72}{-1}, 1111 - \frac{54}{-1}, 1111 - \frac{57}{-1}, 1111 - \frac{170}{1}, 1111 - \frac{119}{1}, 1111 - \frac{106}{0}, 1111 - \frac{14}{0}, 1111 - \frac{10}{0}, 1111 - \frac{62}{0}, 1111 - \frac{68}{-1}\right\}$ = $\{1016, -, 1015, -, 1039, -, -, 1243, 1183, 1165, 1168, 941, 992, -, -, -, -, 1179\}$

Así, si cogemos el valor máximo de entre los que tienen un v_{pj} negativo, y el mínimo de los que tienen un v_{pj} positivo, obtendremos:

$\phi_{c7} = [\, \Phi_{c7}^{min}, \Phi_{pc7}^{max}]$ = [1057, 1183].

7. Repite el ejercicio anterior para el coste de transporte correspondiente al trayecto: planta 3 > centro 4.

Igual que en la pregunta anterior, miramos la tabla 5 para obtener el intervalo de estabilidad, en esta caso, el de la variable x_{34}. Observamos que el coste de transporte desde la planta 3 hasta el centro 4 pueden variar dentro del intervalo [1068, ∞) sin que la solución óptima deje de serlo. En estos casos, la función objetivo siempre será 17923.

Debido a que la variable asociada a los costes en cuestión es no básica, para obtener el intervalo de estabilidad de ϕ_{c16} debemos aplicar la siguiente fórmula:

$$\boxed{\phi_{c_i} \in \Phi_{c_i} = \left[\phi_{c_i}^{min}, \phi_{c_i}^{max}\right] = [c_i - r_i, +\infty[}$$

Obteniendo el coeficiente del vector de costes de la variable x_{34} y su coste reducido en la tabla 2, tenemos que

$$\phi_{c16} = \left[\,\Phi_{c16}^{min}, \Phi_{c16}^{max}\right] = [1140 - 72, \infty] = [1068, \infty].$$

Anexo

Solution Summary	
Terminated Successfully	
Objective Value	17923
Phase 1 Iterations	2
Phase 2 Iterations	10
Phase 3 Iterations	0
Integer Iterations	0
Integer Solutions	0
Initial Basic Feasible Variables	12
Time Used (seconds)	0
Number of Inversions	3
Epsilon	1E-8
Infinity	1.797693E308
Maximum Phase 1 Iterations	100
Maximum Phase 2 Iterations	100
Maximum Phase 3 Iterations	99999999
Maximum Integer Iterations	100
Time Limit (seconds)	120

Tabla 1. *Resumen de la solución (pregunta 1).*

Variable Summary						
Col	Variable Name	Status	Type	Price	Activity	Reduced Cost
1	x11		NON-NEG	1258	0	95
2	x12		NON-NEG	1182	0	34
3	x13		NON-NEG	1252	0	96
4	x14	BASIC	NON-NEG	1126	1.1	0
5	x15	BASIC	NON-NEG	1157	1.6	0
6	x16	BASIC	NON-NEG	1131	2.5	0
7	x21	BASIC	NON-NEG	1111	2.5	0
8	x22		NON-NEG	1118	0	22
9	x23		NON-NEG	1176	0	72
10	x24		NON-NEG	1122	0	48
11	x25	BASIC	NON-NEG	1105	0.6	0
12	x26		NON-NEG	1151	0	72
13	x31	BASIC	NON-NEG	1105	1.7	0
14	x32		NON-NEG	1222	0	132
15	x33	BASIC	NON-NEG	1098	4.4	0
16	x34		NON-NEG	1140	0	72
17	x35		NON-NEG	1153	0	54
18	x36		NON-NEG	1130	0	57
19	x41		NON-NEG	1343	0	170
20	x42	BASIC	NON-NEG	1158	1.3	0
21	x43		NON-NEG	1285	0	119
22	x44		NON-NEG	1242	0	106
23	x45	BASIC	NON-NEG	1167	0.3	0
24	x46		NON-NEG	1155	0	14
25	p1		SLACK	0	0	10
26	p2		SLACK	0	0	62
27	p3		SLACK	0	0	68
28	p4	BASIC	SLACK	0	4.4	0

Tabla 2. *Resumen de las variables de decisión (pregunta 2).*

RHS Range Analysis						
	Minimum Phi			Maximum Phi		
Row	Rhs	Leaving	Objective	Rhs	Leaving	Objective
p1	3.6	x15	17939	5.5	x45	17920
p2	2.5	x25	17960.2	3.4	x45	17904.4
p3	5.5	x25	17963.8	6.4	x45	17902.6
p4	1.6	p4	17923	INFINITY	.	.
c1	3.9	x45	17571.1	4.8	x25	18626.8
c2	0	x42	16417.6	5.7	p4	23018.2
c3	4.1	x45	17573.2	5	x25	18622.6
c4	0.8	x45	17582.2	2.7	x15	19740.6
c5	2.2	x45	17572.9	6.9	p4	23057.8
c6	2.2	x45	17580.7	4.1	x15	19748.6

Pregunta 3

Pregunta 4

Tabla 3. *Análisis del rango del término independiente (preguntas 3 y 4).*

Constraint Summary						
Row	Constraint Name	Type	S/S Col	Rhs	Activity	Dual Activity
1	Costos	OBJECTVE	.	0	17923	.
2	p1	LE	25	5.2	5.2	-10
3	p2	LE	26	3.1	3.1	-62
4	p3	LE	27	6.1	6.1	-68
5	p4	LE	28	6	1.6	0
6	c1	EQ	.	4.2	4.2	1173
7	c2	EQ	.	1.3	1.3	1158
8	c3	EQ	.	4.4	4.4	1166
9	c4	EQ	.	1.1	1.1	1136
10	c5	EQ	.	2.5	2.5	1167
11	c6	EQ	.	2.5	2.5	1141

***Tabla 4**. Resumen de las restricciones (pregunta 5).*

Price Range Analysis							
		Minimum Phi			Maximum Phi		
Col	Variable Name	Price	Entering	Objective	Price	Entering	Objective
1	x11	1163	x11	17923	INFINITY	.	17923
2	x12	1148	x12	17923	INFINITY	.	17923
3	x13	1156	x13	17923	INFINITY	.	17923
4	x14	-INFINITY	.	-INFINITY	1174	x24	17975.8
5	x15	1143	x46	17900.6	1167	p1	17939
6	x16	-INFINITY	.	-INFINITY	1145	x46	17958
7	x21	1057	x35	17788	1183	x23	18103
8	x22	1096	x22	17923	INFINITY	.	17923
9	x23	1104	x23	17923	INFINITY	.	17923
10	x24	1074	x24	17923	INFINITY	.	17923
11	x25	1010	x11	17866	1127	x22	17936.2
12	x26	1079	x26	17923	INFINITY	.	17923
13	x31	1033	x23	17800.6	1159	x35	18014.8
14	x32	1090	x32	17923	INFINITY	.	17923
15	x33	-INFINITY	.	-INFINITY	1170	x23	18239.8
16	x34	1068	x34	17923	INFINITY	.	17923
17	x35	1099	x35	17923	INFINITY	.	17923
18	x36	1073	x36	17923	INFINITY	.	17923
19	x41	1173	x41	17923	INFINITY	.	17923
20	x42	-INFINITY	.	-INFINITY	1180	x22	17951.6
21	x43	1166	x43	17923	INFINITY	.	17923
22	x44	1136	x44	17923	INFINITY	.	17923
23	x45	1157	p1	17920	1181	x46	17927.2
24	x46	1141	x46	17923	INFINITY	.	17923
25	p1	-10	p1	17923	INFINITY	.	17923
26	p2	-62	p2	17923	INFINITY	.	17923
27	p3	-68	p3	17923	INFINITY	.	17923
28	p4	-INFINITY	.	-INFINITY	10	p1	17967

Pregunta 6

Pregunta 7

***Tabla 5.** Análisis del rango de costes (preguntas 6 y 7).*