# INTRODUCCIÓ ALS MODELS NO EXPONENCIALS I XARXES DE CUES

- **INTRODUCCIÓ A LES XARXES DE CUES.**
  - Concepte de xarxa oberta i tancada.
  - Xarxes obertes i Teorema de Jackson.
- **MODELS NO EXPONENCIALS**
  - Cua M/G/1: Fòrmula de Pollaczeck-Khintchine.
  - Cua G/M/1: casos Ek/M/1, Hip/M/1, Hyp/M/1.
  - Ús de QTS_EXCEL.
- **APROXIMACIONS PER A CUES GI/G/s.**
  - Aproximació d'Allen-Cuneen.
  - Aproximacions per a cues congestionades (Heavy Traffic)

# XARXES DE CUES EXPONENCIALS

- **Sistemes de cues exponencials formant una xarxa de muntatge de ordenadors o cotxes, per exemple.**

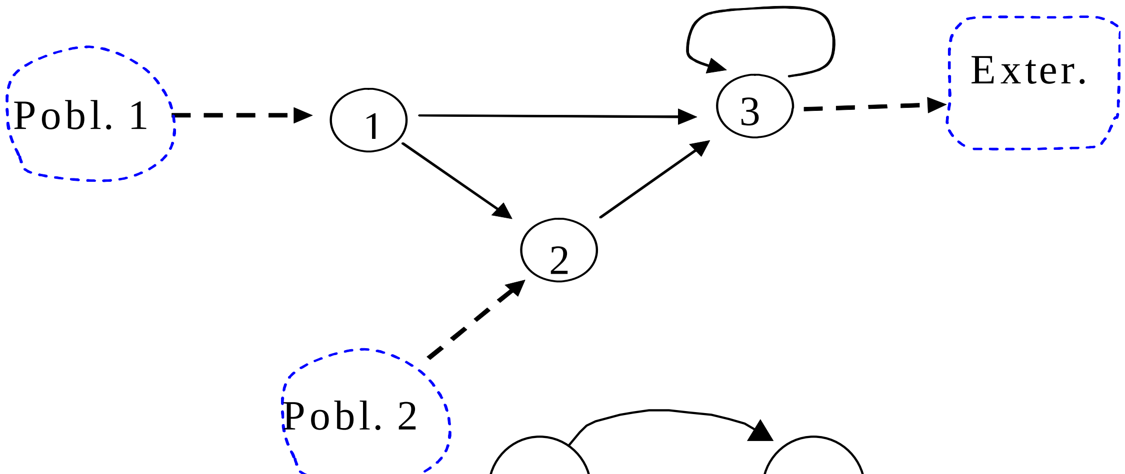
- **Podem considerar dos tipus de xarxes de S.E.:**

  **a) OBERTES. reben entrades de clients procedents de una o varies poblacions externes i que tenen sortides cap a l'exterior;.**

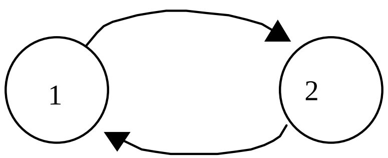
  **b) TANCADES. No reben entrades de poblacions externes ni tenen sortides a l'exterior. Número constant de clientes circulant dins de la xarxa.**

**Exemple.**

**Xarxa oberta de S.E.**




**Exemple. Sistema M/M/s/./N:**



# Xarxes Obertes. Teorema de Jackson

- **Condicions sota les que les xarxes obertes de S.E. presenten propietats per efectuar una anàlisis per descomposició.**

1. El S.E. (nodo) $i$ té un número de servidors $s_i$ de característiques idèntiques entre sí. Els temps de servei de cada servidor tenen distribució exponencial de probabilitats amb capacitat individual de servei $\mu_i$.
2. La capacitat de la cua en cada S.E. és il·limitada.
3. Els clients que han estat servits en el nus $i$ es reparteixen entre els nusos $j \in E(i)$, emergents del $i$ $i$, amb probabilitats $p_{ij} > 0$ constants al llarg de tota l'evolució del sistema.
4. el temps associat a l'arc $(i,j)$ és zero.

- Si totes les arribades externes estan distribuïdes poissonianament i es verifiquen les condicions anteriors llavors s'anomenen *xarxes de Jackson* i sobre elles pot aplicar-se el resultat del teorema de Jackson (1957) .

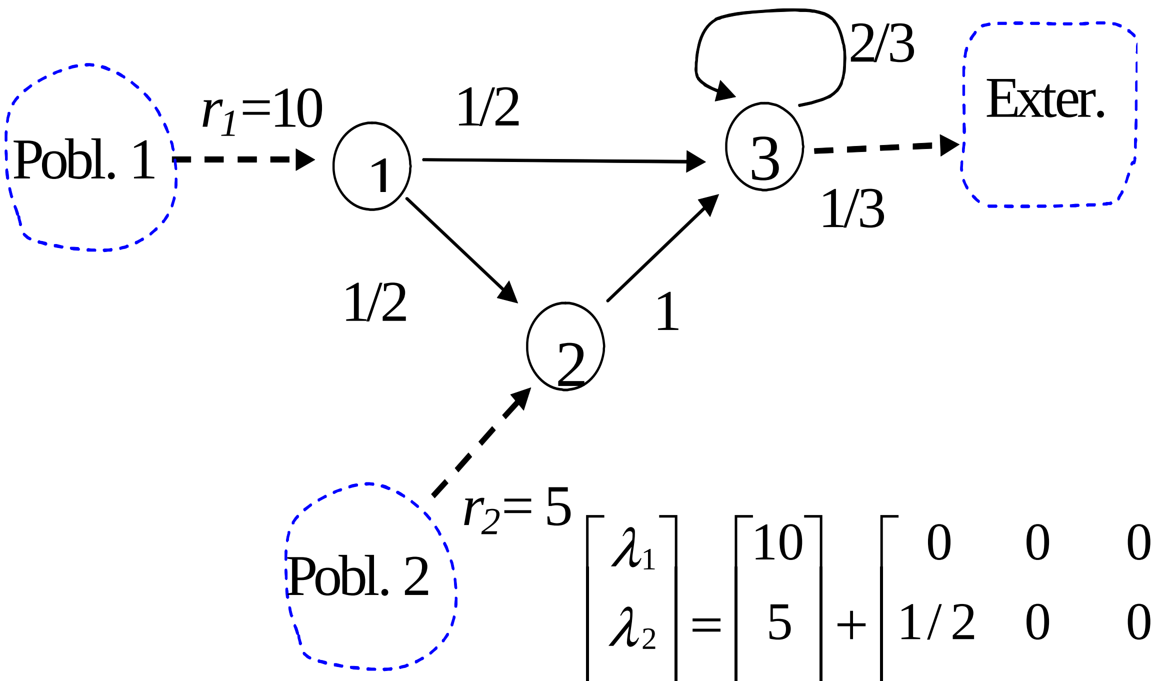
**Teorema de Jackson.** **Segui una xarxa oberta de S.E. verificant les condiciones per a la descomposició anteriors, amb solucions del sistema:**

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{ij} \quad j = 1, \dots, N$$

**tals que** $\lambda_i < s_i \cdot \mu_i$ **per a tot S.E.** ***i=1,...,N.***

**Llavors cada S.E. es comporta com una cua M/M/$s_i$ amb entrades de clientes con taxa** $\lambda_i$ **i que presentarà en estat estacionari una distribució de probabilitats pròpia de les cues M/M/s i independent de la dels altres sistemes dins de la xarxa.**

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{N1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N} & p_{2N} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix}$$




$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\ 5\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1 & 2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix} \to \left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1/2 & 1 & 0\\ -1/2 & -1 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\ 5\\ 0\end{bmatrix}\right.$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 10\\ \lambda_2 &= 5 + 1/2\,\lambda_1\\ \lambda_3 &= 1/2\,\lambda_1 + \lambda_2 + 2/3\,\lambda_3\end{aligned} \quad \to \quad \begin{cases}\lambda_1 = 10\\ \lambda_2 = 10\\ \lambda_3 = 45\end{cases}$$

- Per tant les xarxes de Jackson exhibeixen de la propietat que la distribució de probabilitats del número de clients en una estació *i* y el número mig de clients en la estació es pot calcular tractant l'estació *i* como un modelo M/M/$s_i$ amb taxa d'arribades $\lambda_i$ i taxa de servei per servei $\mu_i$.

- El procediment d'anàlisis consisteix en els següents punts:

1. Estableix la matriu d'incidències entre nusos, **P,** constituïda per la probabilitat $p_{ij}$ de cada possible transició de nus.
2. Resoldre el sistema de equacions lineal: $\underline{\lambda} = \mathbf{r} + \underline{\lambda} \cdot \mathbf{P}$.
3. Verificar que $\lambda_i < s_i \cdot \mu_i$ para *i=1,...,N.*
4. El número de clientes total en la xarxa, $L_{Total}$, és la suma dels clientes en cada estació de servei: $L_{Total} = \sum_{i=1}^{N} L_i$.

5. El temps esperat de permanència al sistema es $W = \frac{L_{Total}}{\lambda}$ on $\lambda = \sum_{i=1}^{N} r_i$ és el número mig de clients que arriben des de l'exterior al sistema per unitat de temps.

Exemple. Es vol dimensionar la xarxa de S.E. anterior i es disposa de servidors con taxa individual de servei $\mu = 12$. Determinar en cada nus el número mínim de servidors de forma que la xarxa de S.E. presenti estat estacionari i calcular les demores mitjanes en tots els S.E. de la xarxa.

Se sap que les entrades als S.E. 1, 2 i 3 són respectivament: 10, 10, 45. Per tant:

1. Per al nus 1, si $s_1 = 1$, $\rho_1 = \lambda_1/\mu_1 = 10/12 < 1$.
2. Per al nus 2, si $s_2 = 1$, $\rho_2 = \lambda_2/\mu_2 = 10/12 < 1$.
3. Per al nus 3, cal dotar-lo de $s_3 = 4$ servidors i llavors $\rho_3 = \lambda_3/(s_3 \cdot \mu_3) = 45/(4 \cdot 12) < 1$.

Els nusos 1 i 2 amb un sol servidor són cues de tipus M/M/1 amb les mateixes taxes d'entrada:

$$L_1 = L_2 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = 5, \quad W_1 = W_2 = \frac{L_1}{\lambda_1} = 1/2$$

$P_0 = 1 - \rho_1 = 1 - 10/12 = 1/6;$

El <u>nus 3</u> es comporta com una cua M/M/4:

Si $\theta=\lambda_3/\mu_3$ =45/12 llavors:

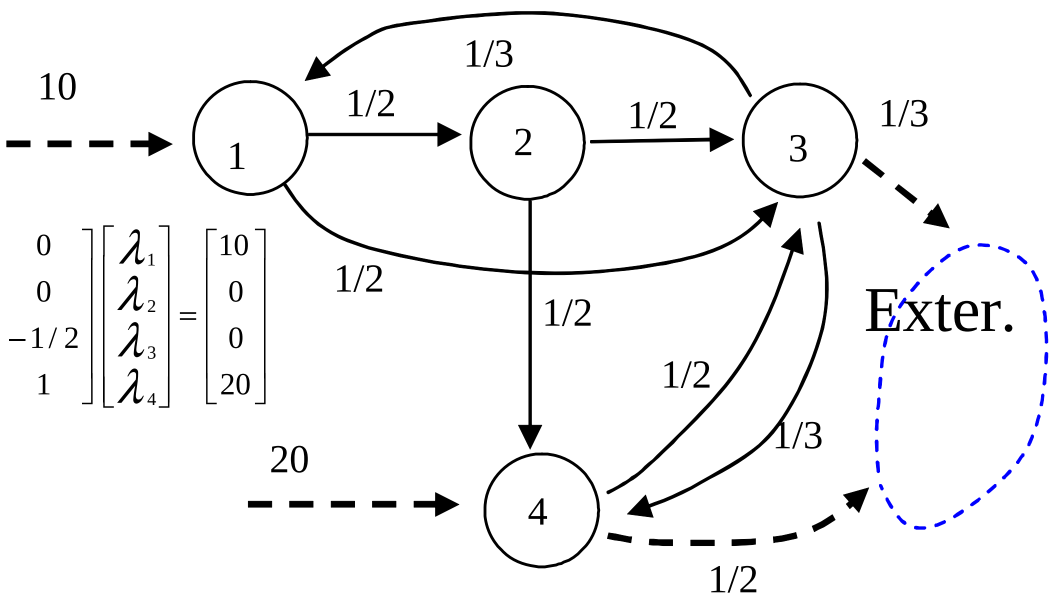
$$P_0 = \left[1+\theta+\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{4!}\theta^4\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\right]^{-1} = \left[28{,}81+\frac{1}{4!}\left(\frac{45}{12}\right)^4\cdot 15\right]^{-1} = 0{,}006561$$

Exemple

Es disposa de servidors amb taxa de servei μ=1/2. Per a la xarxa determinar:

a) El número mínim de servidors en cada sistema de espera de forma que s'arribi a l'estat estacionari.

b) La taxa de sortida de clients a l'exterior per als S.E. 3 i 4.




$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}714 \\ 2{,}857 \\ 12{,}857 \\ 17{,}142 \end{bmatrix}$$

- Per tant, per al sistema d'espera 1 són necessaris 3 servidors, per al nus 2, 2 servidors, per al nus 3 són necessaris 7 servidors i per al nus 4, 9 servidors.
- Les sortides a l'exterior per al nus 3 = 12,857/3=4,28.
- Les sortides per al nus 4 = 17,142/2=8,571.
- Per al nus 1, $\rho = \lambda_1/3\mu$ = 0,9523 $\theta=\lambda_1/\mu_1$ = 5,714/(1/2) = 2,857

$$\boxed{P_0 = \left[1+\theta+\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{3!}\theta^3\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\right]^{-1} = [17,411+9,98]^{-1} = 0,045}$$

- Per al nus 2, $\rho = \lambda_2/2\mu$ = 2,857/4=0,714, $\theta=\lambda_2/\mu$ = 1,428

$$L_q = \frac{P_0\theta^3\rho}{3!(1-\rho)^2} = 77,4; \quad W = \frac{L_q}{\lambda_1} + \frac{1}{\mu} = 15,55$$

# El model M/G/1

**Els S.E. que responen a model M/G/1 són aquelles que:**

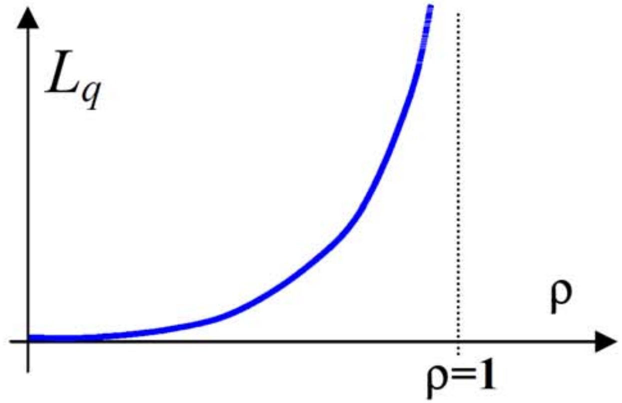
- **Les arribades segueixen un procés de Poisson amb taxa constant i igual a $\lambda$ i són i.i.d.**
- **Els temps de servei obeeixen a una distribució de probabilitat comuna qualsevol i són i.i.d, d'esperança $1/\mu$ i variança $\sigma^2$**
- **Hi ha un únic servidor al sistema.**

**Per aconseguir que s'arribi a l'estat estacionari n'hi ha prou amb que el factor de càrrega sigui < 1. ($\rho < 1$)**

$$P_0 = 1 - \rho$$

La fórmula de Pollaczek-Khintchine determina l'esperança matemàtica de la longitud de cua en règim estacionari: $L_q$

$$L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \left(1 + \mu^2 \sigma^2\right) \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$




A partir de las fórmules de Little s'obtenen la resta de magnituds, ***L, W, W<sub></sub>***$_q$.

La fórmula reflecteix la influència de la dispersió dels temps de servei (variança $\sigma^2$) en el comportament del S.E.:

A major $\sigma^2$, major serà la longitud mitjana de cua $L_q$ a igualtat de $\rho$ i $\lambda$

**Cas particular M/M/1**, tenemos $\sigma^2 = 1/\mu^2$ i la fórmula de Pollaczek-Khintchine es converteix en,

$$L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\cdot \lambda^2 / \mu^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{2\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

coincidint amb el resultat trobat anteriorment.

➡ **Cas particular M/E$_k$/1:** la distribució dels tempos de servei és Erlang de paràmetres **k** y $\mu$ = **1/E[$x$]**, sa variança és **1/(k$\mu^2$)** , i en aplicar la fórmula de Pollaczek-Khintchine:

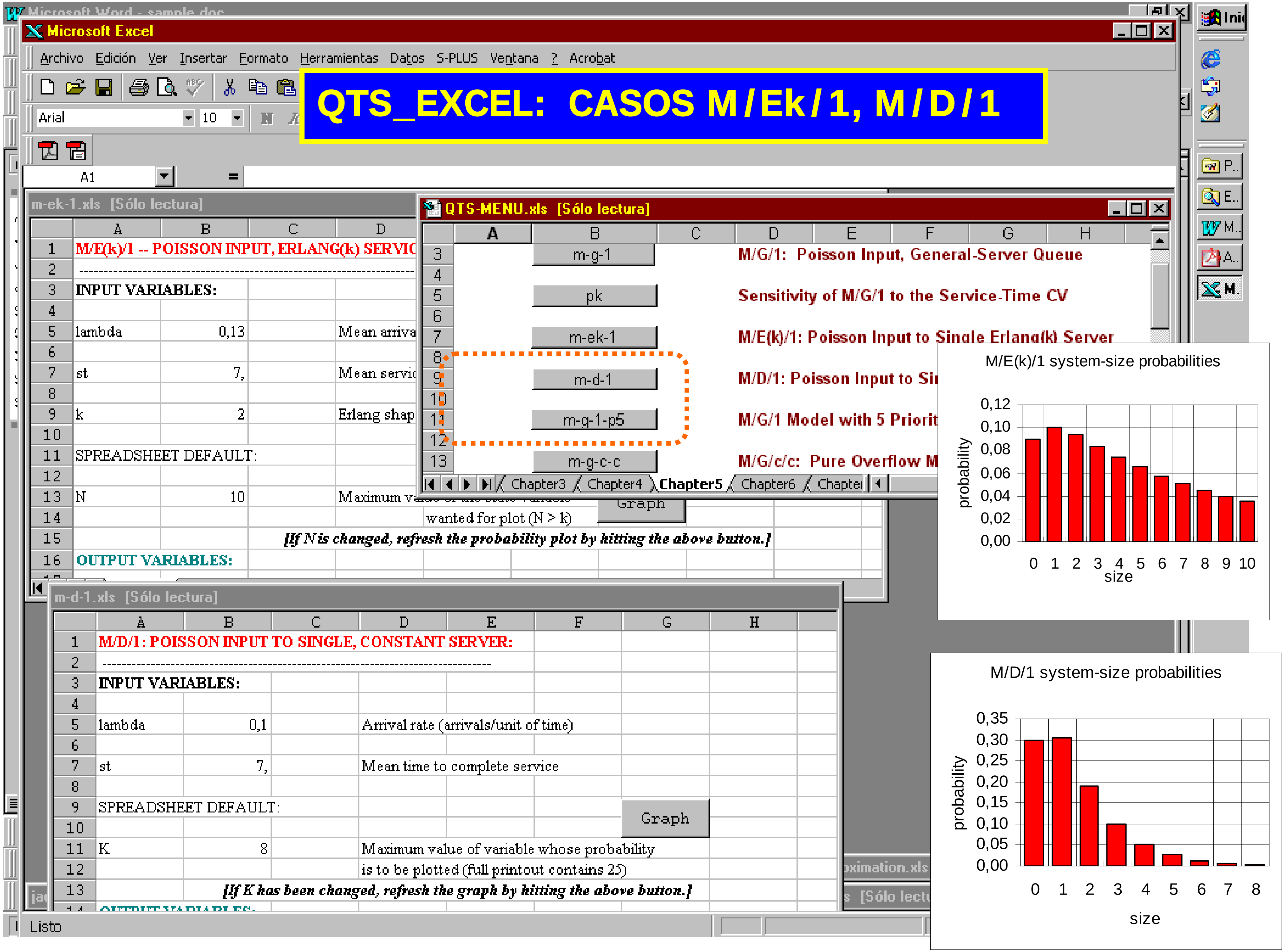
$$L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\cdot \lambda^2 / k\mu^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1+k}{2k} \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

- En el cas M/D/1, la distribució dels temps de servei és constant, de mitjana 1/$\mu$ unitats de temps ($\mu$ serveis per unitat de temps) y variança $\sigma^2 = 0$, la fórmula de Pollaczek-Khintchine determina l'expressió de la longitud mitjana de la cua com,

$$L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}.$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $L_q$ | $\le$ | $L_q$ | $\le$ | $L_q$ |
| $D$ | | $E_k$ | | $M$ |

# QTS_EXCEL: CASOS M/Ek/1, M/D/1



# Fórmula d'aproximació d'Allen-Cuneen

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}[\tau]}, \ \mu = \frac{1}{\mathrm{E}[x]}, \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = 1 - \epsilon$$

$$\sigma_\tau^2 = \mathrm{Var}[\tau], \ \sigma_x^2 = \mathrm{Var}[x]$$

**Exacta per a M/M/s, M/G/1**

# Per a qualsevol sistema GI/G/s es verifica:

$$\boxed{\mathrm{E}[w_q] = W_q \approx \frac{C(s,\theta)(\lambda^2\sigma_\tau^2 + \mu^2\sigma_x^2)}{2s\mu(1-\rho)}}$$

$$C(s,\theta) = P_{M/M/s}(N \geq s) = \frac{\frac{\theta^s}{s!(1-\rho)}}{\sum_{\ell=0}^{s-1}\frac{\theta^\ell}{\ell!} + \frac{\theta^s}{s!(1-\rho)}}, \quad \theta = \frac{\lambda}{\mu}$$

Universitat de Barcelona

U P C

# APROXIMACIÓ DE LA CUA GI/G/s

## Condicions properes a la saturació: “heavy traffic”

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}[\tau]}\,,\ \mu = \frac{1}{\mathrm{E}[x]}\,,\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = 1 - \epsilon$$

$$\sigma_\tau^2 = \mathrm{Var}[\tau],\ \sigma_x^2 = \mathrm{Var}[x]$$

## Teorema de Köllerström.

Per a la cua GI/G/s, $w_q$ (v.a. temps d’espera en cua) segueix una distr. aprox. exponencial i:

$$\mathrm{E}[w_q] = W_q \approx \frac{\lambda(\sigma_\tau^2 + \frac{1}{s}\sigma_x^2)}{2(1-\rho)} \rightarrow L_q = \frac{\lambda^2\sigma_\tau^2 + \rho^2\mu^2\sigma_x^2}{2(1-\rho)}$$

# Exemple: $E_2/M/1$

arribades $\tau \sim 2-$Erlang, $\mathrm{E}[\tau]=4$,

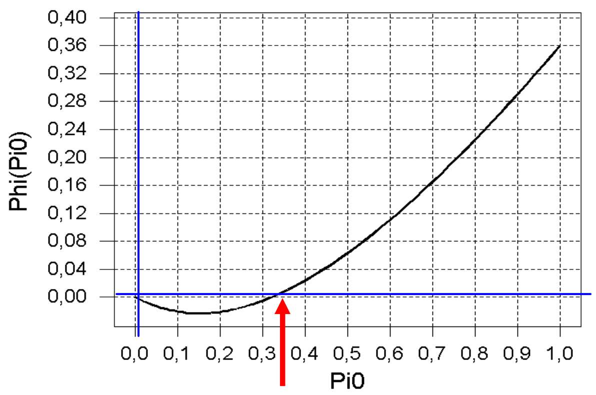
servei $x \sim \exp$, $\mathrm{E}[x]=3$

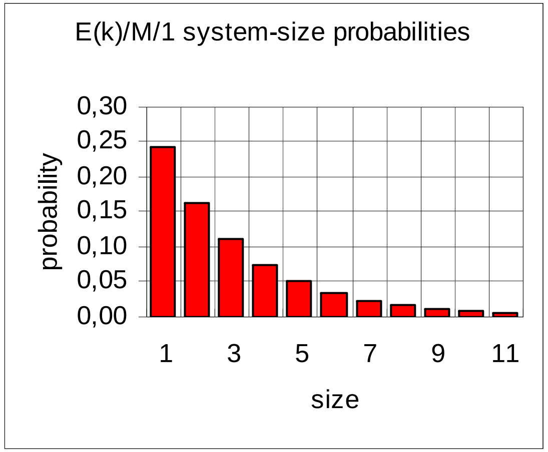
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\mathrm{E}[x]}{\mathrm{E}[\tau]} = 0,75$$

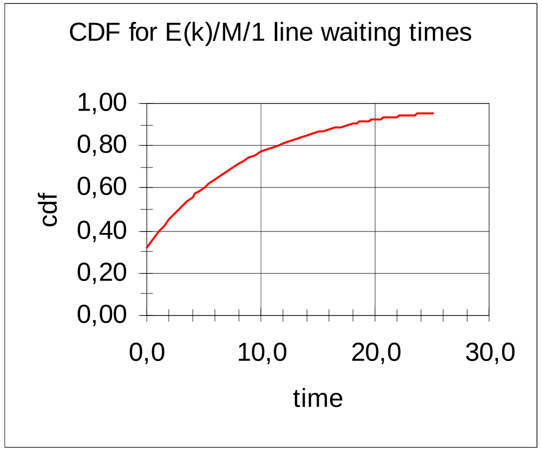
$$\phi(\pi_0) = \left( \frac{1/2}{1/2+\pi_0/3} \right)^2 - (1-\pi_0) = 0 \rightarrow \pi_0^* = 0,322876$$

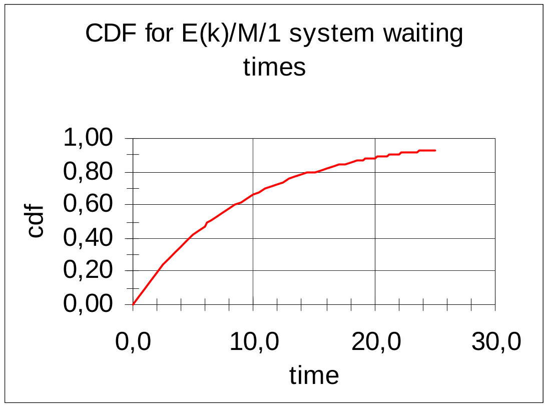
$$W = \frac{1}{\mu\pi_0} = 9,29,\ L = \frac{\rho}{\pi_0} = 2,3228 \text{ clients},$$

$$W_q = (1-\pi_0)W = 6,29,\ L_q = W_q/\mathrm{E}[\tau] = 1,57 \text{ clients}$$



# CUA G / M / 1

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}[\tau]}\ ,\ \mu = \frac{1}{\mathrm{E}[x]}\ ,\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$X_k =$ n$^o$ de clients dins del S.E. al produïr-se l'arribada $k$. (C.de M.)

$\pi_n$= Prob. en e.e. de que una arribada al S.E. trobi $n$ clients.

$$\pi_n = \pi_0(1-\pi_0)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1-\pi_0}{\pi_0} \neq L, \ (!!) \qquad \mathrm{Var}[X] = \frac{1-\pi_0}{\pi_0^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\phi(\pi_0) = A(\mu\pi_0) + \pi_0 - 1 = 0, \ (\text{Solució única } \pi_0^* \text{ en } ]0,1]) \\ \qquad \left(A(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_\tau(x)dx\right)\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}P_0 = 1 - \rho \\ P_n = \rho\pi_0(1-\pi_0)^n, \ n = 1, 2, 3, \ldots\end{array}} \rightarrow L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{\rho}{\pi_0}\ ,$$

$$\rightarrow W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu\pi_0}$$

# CUA G / M / 1

A més a més es verifica:

$P(w \leq t) = 1 - e^{-\frac{t}{W}}$ ($w$ es distribueix exponencialment).

$P(w_q \leq t) = 1 - (1 - \pi_0) e^{-\frac{t}{W}}$

$\rightarrow \; \mathrm{E}[w_q] = W_q = (1 - \pi_0) W, \; \mathrm{Var}[w_q] = (1 - \pi_0^2) W^2$

$w'_q = w_q | w_q > 0 =$ v.a. temps d'espera en cua (dels que sí fan cua)

$P(w'_q \leq t) = 1 - e^{-\frac{t}{W}}$ ($w'_q$ es distribueix exponencialment (!!)).

$\mathrm{E}[w'_q] = W$

$$\phi(\pi_0) = A(\mu\pi_0) + \pi_0 - 1 = 0,$$

Caso $E_k/M/1$: $\mathrm{E}[\tau] = k/\lambda$, $A(s) = \left( \dfrac{\lambda}{\lambda + s} \right)^k$

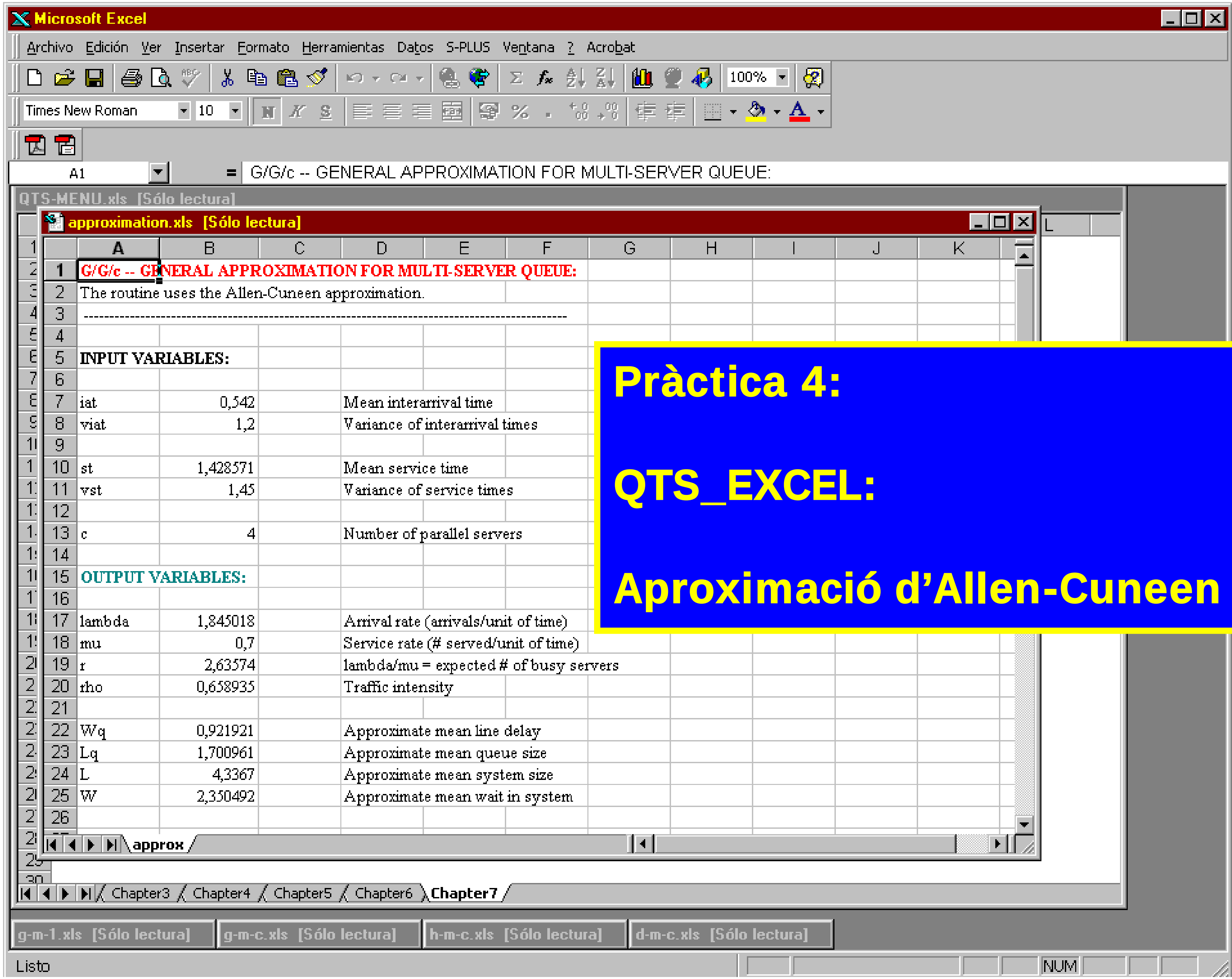
Caso $Hiper/M/1$: $A(s) = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i + s}$

Caso $Hipo/M/1$: $A(s) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i \lambda_i}{\lambda_i + s}$

# Pràctica 4:

# QTS_EXCEL:

# Aproximació d'Allen-Cuneen




| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | G/G/c -- GENERAL APPROXIMATION FOR MULTI-SERVER QUEUE: | | | |
| 2 | The routine uses the Allen-Cuneen approximation. | | | |
| 3 | ---------------------------------------------------------------- | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | INPUT VARIABLES: | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | iat | 0,542 | | Mean interarrival time |
| 8 | viat | 1,2 | | Variance of interarrival times |
| 9 | | | | |
| 10 | st | 1,428571 | | Mean service time |
| 11 | vst | 1,45 | | Variance of service times |
| 12 | | | | |
| 13 | c | 4 | | Number of parallel servers |
| 14 | | | | |
| 15 | OUTPUT VARIABLES: | | | |
| 16 | | | | |
| 17 | lambda | 1,845018 | | Arrival rate (arrivals/unit of time) |
| 18 | mu | 0,7 | | Service rate (# served/unit of time) |
| 19 | r | 2,63574 | | lambda/mu = expected # of busy servers |
| 20 | rho | 0,658935 | | Traffic intensity |
| 21 | | | | |
| 22 | Wq | 0,921921 | | Approximate mean line delay |
| 23 | Lq | 1,700961 | | Approximate mean queue size |
| 24 | L | 4,3367 | | Approximate mean system size |
| 25 | W | 2,350492 | | Approximate mean wait in system |
| 26 | | | | |