## DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA. Curs 04/05. 2on Q

## EXAMEN FINAL DE I.O.E. Convocatòria Extraordinària

**Cadenes de Markov** (3 punts) S'ha comprovat que la probabilitat de que una subvenció anual sigui renovada depèn de si va estar concedida en els dos anys immediatament anteriors. Si va estar renovada en els dos anys anteriors, llavors la probabilitat de que torni a atorgar-se és de 0,95. Si va estar concedida l'any passat però no l'anterior, llavors la probabilitat de que torni a concedir-se és de 0,7. Si no va estar concedida l'any passat però si l'anterior, llavors la probabilitat és de 0,6. Finalment, si no va estar concedida en els dos anys immediatament anteriors la probabilitat de que es concedeixi enguany és de 0,2.

1. Utilitzeu la informació anterior per establir un model basat en cadenes de Markov en la que els estats siguin $Xi$=(resultat penúltim, resultat últim). Determineu les classes d'equivalència i les periodicitats de cada classe.
2. Si resulta que la subvenció s'ha concedit enguany i però l'any passat no, llavors quina és la probabilitat de que dins de dos anys es concedeixi la subvenció.
3. Si enguany no s'ha concedit la subvenció i tampoc l'any anterior, quants anys passaràn en esperança fins que torni a concedir-se la subvenció ?, i si la subvenció va concedir-se l'any passat però no l'actual ?
4. Calculeu la fracció del temps en que hi ha subvenció.

**Temps de vida i Reemplaçaments. (2 puntos)** En una determinada cadena de muntatge resulta essencial la concentració dels seus operaris, de forma que en produir-se una errada es perd la unitat de producte en la que es treballava. Se sap que el temps entre dues errades d'un operari segueix una llei hipoexponencial amb $\lambda_1 = 1\ h^{-1}$ i $\lambda_2 = 0{,}5\ h^{-1}$

Es demana:
1. D'una plantilla de 100 operaris, calculeu-ne el nº mig d'ells que, després de dues hores hauran fet, al menys una errada.
2. Després de fer una errada cal que l'operari tingui un temps de descans de 15 minuts. El cost d'una errada és de 1000 € (que inclou el cost de la unitat perduda de la producció), mentre que el cost per deixar descansar l'operari durant 15 minuts s'estima en 100 €. Calculeu de forma aproximada el temps T* que ha d'estar un operari treballant continuadament de forma que s'optimitzin les pèrdues econòmiques per errades/períodes de descans. Proveu, p.exemple, T des de 0,7 h, incrementant en 0,1h.
3. Pel valor T* determinat en el apartat anterior, calculeu el temps mig que passa un operari treballant de forma continuada en la cadena de producció.
4. Calculeu la disponibilitat a llarg termini d'un operari per T*.

**DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA. Curs 04/05. 2on Q**

# EXAMEN FINAL DE I.O.E. Convocatòria Extraordinària

**Teoria de Cues (5 punts)**. L'ordinador central d'una entitat financera te dos processadors amb els que atén les tasques que efectuen transaccions al banc de dades de la entitat. Cada una de les tasques que arriben a l'ordinador consta de dues etapes A i B, les quals han d'executar-se seqüencialment. Després d'examinar-se una mostra se sap que el temps de procés de la etapa A segueix una distribució exponencial d'esperança 5 seg., mentre que la etapa B també és exponencial però d'esperança 2 seg. Els temps de les dues etapes són independents entre sí. El temps entre l'arribada de dues tasques és també exponencial d'esperança 10 seg.

El tècnic de sistemes ha de decidir entre dues configuracions possibles dels dos processadors: en la 1ª configuració, cada tasca és atesa completament pel processador al que ha estat assignada. Les tasques esperen en una cua comú i són assignades al primer processador que estigui lliure. En la 2ª configuració totes les tasques esperen torn a ser ateses inicialment per un dels processadors, el qual executa la primera etapa de la tasca. Després de acabar l'execució de aquesta 1ª etapa, la tasca passa a la cua de l'altre processador, on s'executa la segona etapa i, per tant completa la tasca.

Es demana:

a) Per la 1ª configuració: establiu un model de cues que modelitzi el comportament dels dos processadors de l'ordinador. Calculeu també: la taxa mitjana d'arribades de tasques a l'ordinador, el temps mig de servei d'una tasca i la seva desviació estàndar.

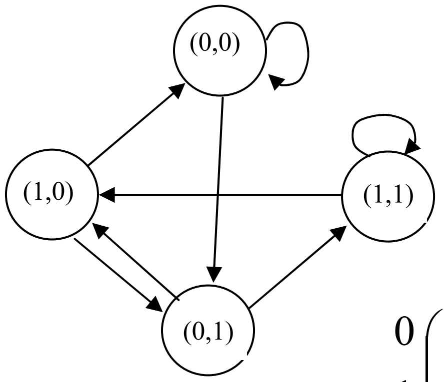
b) Calculeu: el temps mig que ha d'esperar una tasca des de que arriba a l'ordinador fins que s'inicia el seu procés. El temps mig d'una tasca dins de l'ordinador i el número mig de tasques presents a l'ordinador.

c) Per la 2ª configuració: establiu un model de cues que permeti calcular c.1) el temps mig de permanència en l'ordinador, c.2) el número mig de tasques presents a l'ordinador.

d) Quina de les dues configuracions et sembla més eficient? Raona la resposta examinant alguna de les magnituds calculades als apartats anteriors. Raona la resposta de forma independentment dels resultats obtinguts en els apartats anteriors.

## CADENAS DE MARKOV. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

1)




Estado 0 = (0,0)
Estado 1 = (1,0)
Estado 2 = (1,1)
Estado 3 = (0,1)

Una única clase aperiódica

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

2) $p_{02}^{(2} + p_{03}^{(2} = 0{,}14 + 0{,}22 = 0{,}36$

$p_{02}^{(2} = 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}14$

$p_{03}^{(2} = 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}22$

3) Debe calcularse $\mu_{03}$

$$\mu_3 = [1] + P_3 \mu_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} \mu_{03} \\ \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0 \\ -0{,}6 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}05 & 0{,}05 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 24 \end{pmatrix}$$

4) $P^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}; \qquad \sum_j \pi_j = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}05 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 & -0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1179 \\ 0{,}0393 \\ 0{,}7865 \\ 0{,}0563 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 + \pi_3 = 0{,}8426$$

Solució examen. Temps de ordre i reemplaçaments.

a) $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1/2$

$$F_Z(t) = 1 + \theta_1 e^{-\lambda_1 t} + \theta_2 e^{-\lambda_2 t} \qquad \theta_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1$$

$$\theta_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = -2$$

$$F_Z(t) = 1 + e^{-t} - 2e^{-t/2} =$$

$$= 1 + e^{-2} - 2e^{-1} = 0'3995 \quad (t = 2)\ (\sim 40\%)$$

b) $$C(T) = \frac{c_f F_Z(T) + c_R}{\int_0^T R_Z(t)\,dt} = \frac{10\left(1 + e^{-T} - 2e^{-T/2}\right) + 1}{3 + e^{-T} - 4e^{-T/2}}$$

$$\int_0^T R_Z(t)\,dt = \int_0^T \left(2e^{-t/2} - e^{-t}\right)dt =$$

$$= 4\left(1 - e^{-T/2}\right) - \left(1 - e^{-T}\right) = e^{-T} - 4e^{-T/2} + 3$$

| $T$ | 0'7 | 0'8 | 0'9 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $C(T)$ | 2'76 | 2'71 | 2'702 | 2'705 |

aproximadament $T^* \approx 0'9$

c) $$E[Z_{T^*}] = \int_0^{T^*} R_Z(t)\,dt = e^{-0'9} - 4e^{-0'45} + 3 = 0'855$$

d) $$A^* = \frac{0'85}{0'85 + 0'25} = 0'7727 \rightarrow \boxed{77'27\%}$$

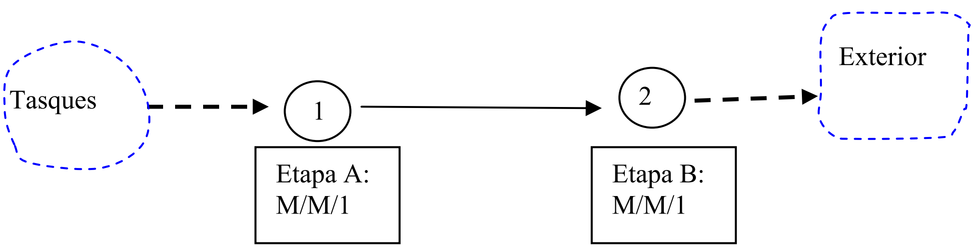
Per la 1ª configuració: establiu un model de cues que modelitzi el comportament dels dos processadors de l'ordinador. Calculeu també: la taxa mitjana d'arribades de tasques a l'ordinador, el temps mig de servei d'una tasca i la seva desviació estàndar.

> Sigui T: Temps entre arribades de tasques al sistema – Exp($\lambda$=6 tasques/min)
>
> i E[T]=10seg=1/6 min   V[T]=1/36 min$^2$.
>
> Sigui $X_A$: Temps d'execució de l'etapa de servei A – Exp($\mu_A$=12 tasques/min)
>
> i E[$X_A$]=5 seg=1/12 min   V[$X_A$]=1/124 min$^2$.
>
> Sigui $X_B$: Temps d'execució de l'etapa de servei A – Exp($\mu_B$=20 tasques/min)
>
> i E[$X_B$]=2 seg=1/30 min   V[$X_B$]=1/900 min$^2$.
>
> Sigui X: Temps d'execució/servei tota l– X= $X_A$ + $X_B$. No té distribució Erlang, té distribució hipoexponencial, però no és necessari caracteritzar la distribució només el moments de primer i segon ordre, usant que són estad. independents.
>
> E[X]=5 + 2 = 7 seg= 7/60 min   V[X]=1/124 + 1/900 = 1044 / 129600 =29/3600= 0.00806 min$^2$. O bé responent exactament a la pregunta la desviació tipus és 0.08975 min (o 5.385 seg)
>
> La configuració és un Model de Sistemes de Cues M/G/2.

Calculeu: el temps mig que ha d'esperar una tasca des de que arriba a l'ordinador fins que s'inicia el seu procés. El temps mig d'una tasca dins de l'ordinador i el número mig de tasques presents a l'ordinador.

> Demana Wq, L i W. Cal iniciar els càlculs a partir de l'aproximació d'Allen-Cuneen (el sistema té estat estacionari i es troba lluny de la saturació). Les unitats emprades són relatives a minuts (no segons, però donaria el mateix resultat si s'és consistent).
>
> $$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{6}{2(60/7)} = \frac{7}{20} = 0.35 << 1 \quad \theta = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{7}{10} = 0.7$$
>
> $$W_q = \frac{C(s,\theta)\left(\lambda^2 \cdot \sigma_A^2 + \mu^2 \sigma_S^2\right)}{2\, s\mu(1-\rho)} = \frac{\left(\frac{49}{270}\right)\left(6^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{60}{7}\right)^2 \left(\frac{29}{3600}\right)^2\right)}{2 \cdot 2 \cdot (60/7) \cdot (1-0.35)} = \frac{7}{540} = 0.01296 \min$$
>
> $$\textit{Aprox. Allen-Cuneen}$$
>
> $$C(s,\theta) = C(2,0.7) = \frac{\theta^s}{s!(1-\rho)} P_0 = \frac{(0.7)^2}{2!} \frac{1}{(1-0.35)} \frac{13}{27} = \frac{49}{270} = 0.1815$$
>
> $$on\ \ P_0 \ de\, M/M/s = 2 \rightarrow P_0 = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\theta)^n}{n!} + \frac{(\theta)^s}{s!} \frac{1}{(1-\rho)}\right)^{-1} = \left(1 + 0.7 + \frac{(0.7)^2}{2!} \frac{1}{(1-0.35)}\right)^{-1} = \frac{13}{27} = 0.4815$$
>
> $$W = W_q + W_s = \frac{7}{540} + \frac{1}{\mu} = \frac{7}{540} + \frac{7}{60} = \frac{7}{54} = 0.1296 \min \rightarrow L = \lambda W = 6 \cdot \frac{7}{54} = \frac{7}{9} = 0.\widehat{7}\ tasques$$

Per la 2ª configuració: establiu un model de cues que permeti calcular c.1) el temps mig de permanència en l'ordinador, c.2) el número mig de tasques presents a l'ordinador.



El model respondria a una xarxa de cues, constituïda per dos sistemes d'espera, cadascun d'ells amb entrades i serveis exponencials i un únic servidor.

El ***node 1 – Sistema d'espera per l'execució de la Tasca A*** i el ***node 2 – Sistema d'espera per l'execució de la Tasca B***.

Es compleixen les condicions per la descomposició del sistema del Teorema de Jackson, de fet és una xarxa de Jackson, sempre que verifiquem que per cada node la taxa efectiva d'entrades dugui a un factor de càrrega inferior a la unitat (i per tant, garanteixi l'existència de règim estacionari a cada node-sistema d'espera).

Primer cal determinar les taxes d'entrada a cada node:

$$\boxed{\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\right)\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{r}\rightarrow\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathbf{T}}\right)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 6\end{pmatrix}}$$

$\rho_1=\dfrac{\lambda_1}{s_1\cdot\mu_1}=\dfrac{6}{1\cdot 12}=\dfrac{1}{2}<1$ i $\rho_2=\dfrac{\lambda_2}{s_2\cdot\mu_2}=\dfrac{6}{1\cdot 30}=\dfrac{1}{5}<1$ en ambdós sistemes d'espera ( nodes) s'assoleix règim estacionari.

El nombre mig de tasques a cada sistema d'espera es pot calcular a partir de les fòrmules dels sistemes d'espera estàndard M/M/1.

$L_1=\dfrac{\rho_1}{1-\rho_1}=\dfrac{1/2}{1-1/2}=1\ \ tasques$ i

$L_2=\dfrac{\rho_2}{1-\rho_2}=\dfrac{1/5}{1-1/5}=\dfrac{1}{4}\ \ tasques$, per tant en nombre total de tasques en la xarxa de Jackson és :

$L=L_1+L_2=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}\ tasques$.

La taxa d'entrada global a la xarxa és la suma de les taxes des de l'exterior: $\lambda=r_1+r_2=6+0=6\ tasca/\min$.

Ara ja es pot aplicar Little per determinar el temps de permanença mig en la xarxa: $W=\dfrac{L}{\lambda}=\dfrac{5/4}{6}=\dfrac{5}{24}\ \min\equiv 12{,}5\,seg$.

Quina de les dues configuracions et sembla més eficient? Raona la resposta examinant alguna de les magnituds calculades als apartats anteriors. Raona la resposta de forma independentment dels resultats obtinguts en els apartats anteriors.

Una característica coneguda és l'eficiència dels sistemes en paral.lel en quant a l'augment de potència de treball. Les dades ho confirmen: el temps global d'execució d'una tasca es multiplica per 16 en passar de la configuració paral.lel a la configuració sèrie.