3. Regiones de confianza

1. Se efectúa un ensayo para determinar la riqueza en plata de cierta cantidad de Galena argentífera. Para ello se toman cinco muestras de 1 g del mineral y se determina su contenido en plata, obteniéndose los siguientes valores: 5,2 ; 4,8 ; 5,7 ; 5,3 y 5 cg. de plata. Determine un intervalo de confianza de nivel 0,95 para el valor medio de la cantidad de plata por gramo del citado mineral. Determine también un intervalo de confianza de nivel 0,95 para la varianza de dicha cantidad. Suponga que la distribución es aproximadamente normal.

2. Los pesos de 8 chicos de 14 años fue:

   58, 50, 60, 65, 64, 62, 56, 57 Kg.

   Suponiendo normalidad,

   a) Halle un intervalo de confianza de nivel 0,95 para la media sabiendo que $\sigma = 3$.

   b) Halle un intervalo de confianza de nivel 0,95 para la media si σ es desconocida.

3. El número de virus por centímetro cúbico en una determinada disolución sigue una distribución de Poisson de parámetro λ. A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 283$, se obtuvieron los siguientes resultados

número de virus	0	1	2	3	4	5
frecuencia	47	121	82	24	7	2

   Halle un intervalo de confianza pera λ de nivel aproximado $1 - \alpha = 0,90$.

4. Se desea comparar la longitud del cuerpo de especímenes de dos poblaciones de ranas, geográficamente aisladas. Para ello se toman sendas muestras de individuos machos en cada una de dos las poblaciones, resumiendo los resultados en la siguiente tabla:

	n	$\overline{X}_n$	$\widehat{S}_n^2$
Población 1	41	74	56,25
Población 2	46	78	44,89

   donde las unidades de la longitud de cuerpo se han tomado en mm, n es el tamaño muestral, $\overline{X}_n$ la media muestral y $\widehat{S}_n^2$ la varianza muestral corregida. Supongamos, para simplificar, que la variable longitud sigue una distribución normal en ambas poblaciones, con idéntica varianza.

   a) Determine un intervalo de confianza para la diferencia de las medias poblacionales y otro para el cociente de varianzas poblacionales, ambos con niveles de confianza del 95 %.

   b) ¿Cómo tendríamos que modificar los tamaños muestrales en la tabla de forma que la longitud del intervalo anterior para la diferencia tenga una longitud inferior a 2 mm?

5. Sean $X_1,\dots,X_n$ variables independientes con la misma distribución que X, una variable con distribución normal $N(\mu,\sigma=4)$. Halle el menor valor de n para que $[\overline{X}_n-1,\overline{X}_n+1]$ sea un intervalo de confianza para μ de nivel 0,95.

6. Sean $X_1,\dots,X_n$ e $Y_1,\dots,Y_m$ las variables aleatorias muestrales correspondientes a dos distribuciones exponenciales independientes de parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente. Determine un intervalo de confianza para el cociente λ_1/λ_2 con nivel de confianza $1-\alpha$.

7. Sean $X_1,\dots,X_n$ las variables aleatorias muestrales correspondientes a una variable X con distribución uniforme $U(0,\mu)$, con $\mu>0$. Sea $X_{(n)}$ el máximo de $X_1,\dots,X_n$. Calcule un intervalo de confianza para μ de nivel 0,90.

8. Suponga que la altura de los machos de una determinada especie en cierta área geográfica sigue una distribución normal de esperanza μ y desviación típica $\sigma=0{,}075$. Si para una muestra aleatoria simple de tamaño 12, $\bar{X}=1{,}75$, determine un intervalo de confianza pera μ de nivel 95 %. ¿Cual sería el tamaño muestral necesario para que dicho intervalo tuviera longitud menor que 0.01?

9. Suponga que el número de erratas por página en un libro sigue una distribución de Poisson. Elegidas al azar 95 páginas resultó que:

presencia de	0	1	2	3	4	5	6	erratas
en	40	30	15	7	2	1	0	páginas

   Halle un intervalo de confianza, de nivel aproximado $0,90$, para la esperanza del número de erratas por página. Con la misma media muestral, ¿Cuantas páginas tendríamos que haber examinado para que el intervalo de confianza obtenido tenga una longitud menor que 0.2?

10. Determine un intervalo de confianza de nivel $100(1-\alpha)$% para la media de una variable aleatoria con distribución exponencial y muestras de tamaño n.

11. Después de un número elevado, n, de lanzamientos de una moneda queremos construir un intervalo de confianza de nivel aproximado del $100(1-\alpha)$% para la probabilidad de obtener cara.

12. A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño n de una v.a. discreta con función de densidad de probabilidad:

$$p(x;\theta)=(1-p)p^{x-\theta}, \qquad x=\theta,\theta+1,\theta+2,\dots$$

   donde θ es un número natural desconocido y p es una probabilidad conocida. Determina un interval de confianza aproximado para θ con nivel del $100(1-\alpha)$%.

13. Considere una muestra de tamaño n de una variable aleatoria con función de densidad regular $f(x;\theta)$. Sea θ_n^* el estimador máximo-verosímil del parámetro θ basado en una muestra de tamaño n. Teniendo en cuenta las propiedades del

estimador máximo verosímil ¿cuál será un intervalo de confianza aproximado de nivel $1-\alpha$? Aplica la expresión anterior per hallar un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para θ si

$$f(x;\theta) = \theta \exp(-\theta x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad \theta > 0.$$

14. Sean $X_1, \ldots, X_n$ las variables aleatorias muestrales correspondientes a una variable X con distribución uniforme $U(\alpha, \beta)$, con $\alpha < \beta$. Calcule un intervalo de confianza para $\delta = \beta - \alpha$ de nivel $1-\alpha$.