

# ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES

1<sup>era</sup> Parte: ANÁLISIS DETERMINISTA

## TEMA 3.- ANÁLISIS DETERMINISTA II: Análisis de la Estacionalidad

**Autora: prof. Helena Chuliá**

### Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

- Este tema está dedicado al estudio de las series temporales que sí tienen componente estacional.
  - **SERIE TIPO 1:** Serie sin tendencia y sin componente estacional
  - **SERIE TIPO 2:** Serie sin tendencia y con componente estacional
  - **SERIE TIPO 3:** Serie con tendencia y sin componente estacional
  - **SERIE TIPO 4:** Serie con tendencia y con componente estacional

		Tendencia	
		Sí	No
Componente estacional	Sí	SERIE TIPO4	SERIE TIPO2
	No	SERIE TIPO3	SERIE TIPO1

## **Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad**

### **3.1. Métodos de previsión para series de tipo 2**

3.1.1. Método ingenuo estacional

3.1.2. Método de las medias estacionales

### **3.2. Métodos de previsión para series de tipo 4**

3.2.1. Método de descomposición

3.2.2. Método de Alisado exponencial de Holt-Winters

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.1. Métodos de previsión para series de tipo 2

- **SERIE TIPO 2:** Serie sin tendencia y con comp. estacional
- El **componente estacional** recogerá aquellos movimientos oscilatorios que se completan dentro del año y que pueden ser explicados por razones físicas, institucionales...
- El componente estacional tiene la característica de que su aportación a lo largo de todos los periodos del año es cero, compensándose la aportación de los unos con la realizada por los otros

$$S_{t+1} + S_{t+2} + S_{t+3} + \dots + S_{t+s} = 0$$

### Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

- Por tanto, la serie tipo 2 toma la siguiente forma:

$$y_t = \beta_0 + S_t + u_t$$

$y_t$  tiene:

- una **tendencia constante** e igual a  $\beta_0$  (no crece ni decrece),
- un **componente estacional**  $S_t$
- un **componente irregular** ( $u_t$  es el componente aleatorio)
- y sigue un esquema aditivo

Existen dos métodos de predicción que difieren en la forma de estimar  $\beta_0$  y el componente estacional

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.1.1. Método ingenuo estacional

- Es una regla simple que consiste en predecir el valor de una serie en una estación de un año con el valor tomado por la serie en esa estación en el año anterior.

- Periodo muestral:

$$\hat{y}_t(1) = \hat{y}_{t+1/t} = y_{t-s+1}$$

- Periodo extramuestral:

$$\hat{y}_T(m) = y_{T-s+m} \quad \text{para} \quad m = 1, 2, 3, \dots, H$$

- Nótese que las  $s$  primeras observaciones no tienen predicción

**OJO: es DIFERENTE  
al visto en tema 2.**

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.1.1. Método ingenuo estacional

Ilustración: para una serie temporal semestral ( $s=2$ )

<i>serie</i>	<i>predicción</i>	
$y_1$	—	$\hat{y}_2(1) = y_{2-2+1} = y_1$
$y_2$	—	$\hat{y}_3(1) = y_{3-2+1} = y_2$
$y_3$	$y_1$	$\hat{y}_4(1) = y_{4-2+1} = y_3$
$y_4$	$y_2$	$\hat{y}_4(2) = y_{4-2+2} = y_4$
$y_5$	$y_3$	$\hat{y}_4(3) = y_{4-2+3} = \hat{y}_5 = y_3$
$y_6$	$y_4$	$\hat{y}_4(4) = y_{4-2+4} = \hat{y}_6 = y_4$
$y_7$	$y_3$	
$y_8$	$y_4$	

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.1.1. Método ingenuo estacional

Ejemplo: Obtener predicciones para esta serie temporal trimestral de tipo 2 utilizando el método ingenuo

Serie 2	
90-1	17,27
90-2	39,89
90-3	9,18
90-4	8,92
91-1	14,44
91-2	34,70
91-3	9,05
91-4	14,90
92-1	19,45
92-2	39,05
92-3	8,98
92-4	6,52
93-1	24,28
93-2	37,39
93-3	8,66
93-4	4,65
94-1	15,43
94-2	43,03
94-3	12,20
94-4	11,75
95-1	20,04
95-2	37,36
95-3	14,55
95-4	9,21



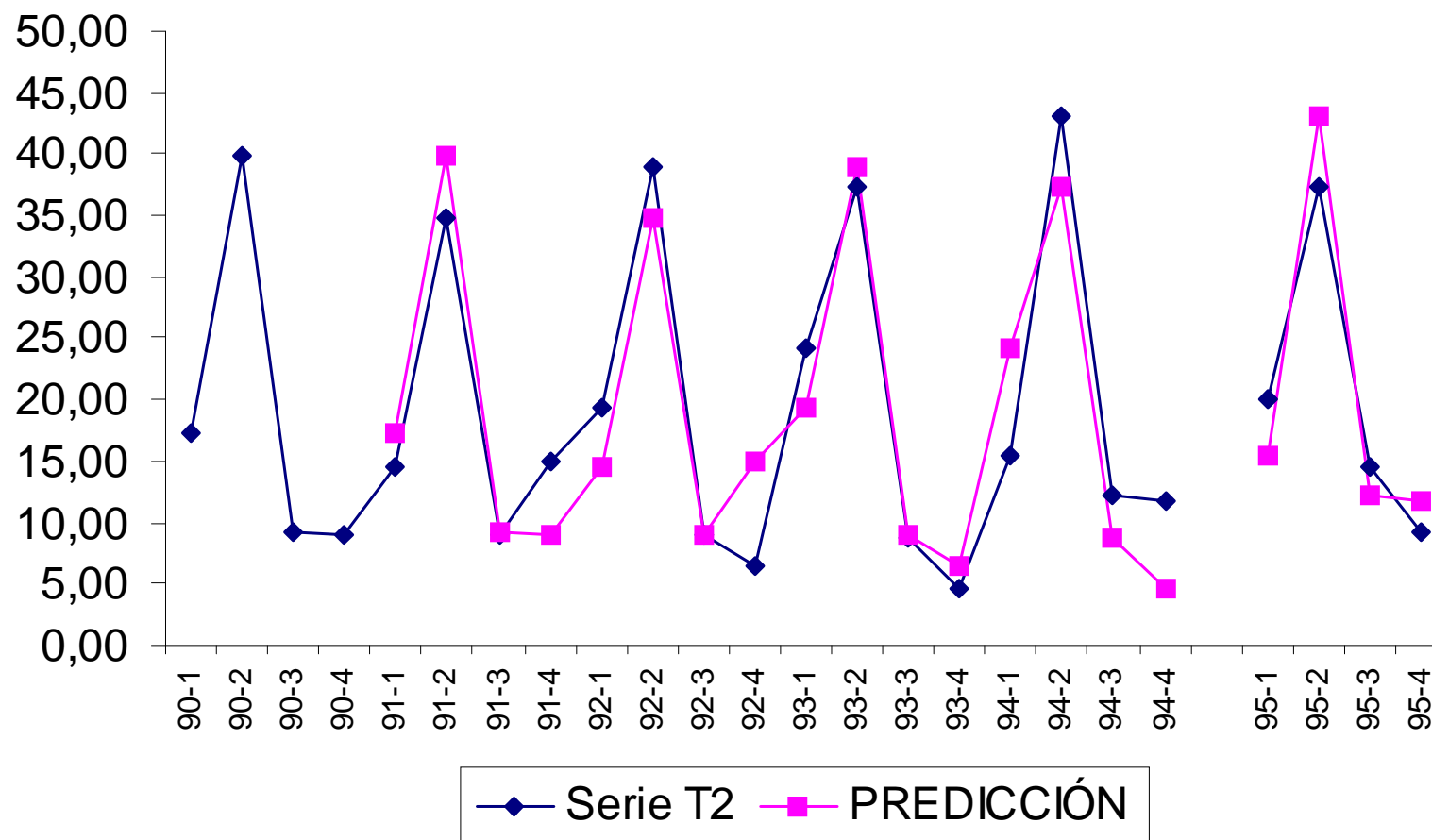
## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.1.1. Método ingenuo

	<b>Serie 2</b>	<b>PREDICCIÓN</b>	<b>ERROR</b>	<b>EA</b>	<b>EC</b>		
90-1	17,27	--	--	--	--		
90-2	39,89	--	--	--	--	<b>EAM(m)</b>	<b>4,109</b>
90-3	9,18	--	--	--	--	<b>ECM(m)</b>	<b>24,233</b>
90-4	8,92	--	--	--	--	<b>EAM(extra-m)</b>	<b>3,793</b>
91-1	14,44	17,27	-2,830	2,830	8,009	<b>ECM(extra-m)</b>	<b>16,344</b>
91-2	34,70	39,89	-5,190	5,190	26,936		
91-3	9,05	9,18	-0,130	0,130	0,017		
91-4	14,90	8,92	5,980	5,980	35,760		
92-1	19,45	14,44	5,010	5,010	25,100		
92-2	39,05	34,70	4,350	4,350	18,922		
92-3	8,98	9,05	-0,070	0,070	0,005		
92-4	6,52	14,90	-8,380	8,380	70,224		
93-1	24,28	19,45	4,830	4,830	23,329		
93-2	37,39	39,05	-1,660	1,660	2,756		
93-3	8,66	8,98	-0,320	0,320	0,102		
93-4	4,65	6,52	-1,870	1,870	3,497		
94-1	15,43	24,28	-8,850	8,850	78,323		
94-2	43,03	37,39	5,640	5,640	31,810		
94-3	12,20	8,66	3,540	3,540	12,532		
94-4	11,75	4,65	7,100	7,100	50,410		
95-1	20,04	15,43	4,610	4,610	21,252		
95-2	37,36	43,03	-5,670	5,670	32,149		
95-3	14,55	12,20	2,350	2,350	5,523		
95-4	9,21	11,75	-2,540	2,540	6,452		

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.1.1. Método ingenuo



## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.1.2. Método de las medias estacionales

- Es un método que define la predicción para cada periodo a partir de la media muestral de los periodos con idéntico componente estacional.
  - La media muestral para cada estación  $i$  se calcula como:

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{t \in T_i} y_t}{T_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, s$$

donde  $T_i$  es el total de observaciones de la estación  $i$ -ésima

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.1.2. Método de las medias estacionales

- Así, la predicción es:
  - Periodo muestral:

$$\hat{y}_t(1) = \bar{y}_i$$

considerando que el periodo  $t+1$  se corresponde con la estación  $i$ -ésima.

- Periodo extramuestral:

$$\hat{y}_T(m) = \bar{y}_i$$

considerando que el periodo  $t+m$  se corresponde con la estación  $i$ -ésima.

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.1.1. Método de las medias estacionales

Ilustración: para una serie temporal semestral ( $s=2$ )

t	$y_t$	Predicción	
1,00	3,60	3,03	$\hat{y}_0(1) = \bar{y}_1$
2,00	3,90	3,83	$\hat{y}_1(1) = \bar{y}_2$
3,00	3,00	3,03	$\hat{y}_2(1) = \bar{y}_1$
4,00	3,75	3,83	$\hat{y}_3(1) = \bar{y}_2$
5,00	2,50	3,03	$\hat{y}_4(1) = \bar{y}_1$
6,00	4,00	3,83	$\hat{y}_5(1) = \bar{y}_2$
7,00	3,25	3,03	$\hat{y}_5(2) = \bar{y}_1$

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t \in T_1} y_t}{T_1} = \frac{y_1 + y_3 + y_5}{3} = \frac{3.60 + 3.00 + 2.50}{3} = 3.03$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{t \in T_2} y_t}{T_2} = \frac{y_2 + y_4}{2} = \frac{3.90 + 3.75}{2} = 3.83$$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.1.2. Método de las medias estacionales

Ejemplo: Obtener predicciones para esta serie trimestral de tipo 2 utilizando el método de medias estacionales

Serie 2	
90-1	17,27
90-2	39,89
90-3	9,18
90-4	8,92
91-1	14,44
91-2	34,70
91-3	9,05
91-4	14,90
92-1	19,45
92-2	39,05
92-3	8,98
92-4	6,52
93-1	24,28
93-2	37,39
93-3	8,66
93-4	4,65
94-1	15,43
94-2	43,03
94-3	12,20
94-4	11,75
<hr/>	
95-1	20,04
95-2	37,36
95-3	14,55
95-4	9,21

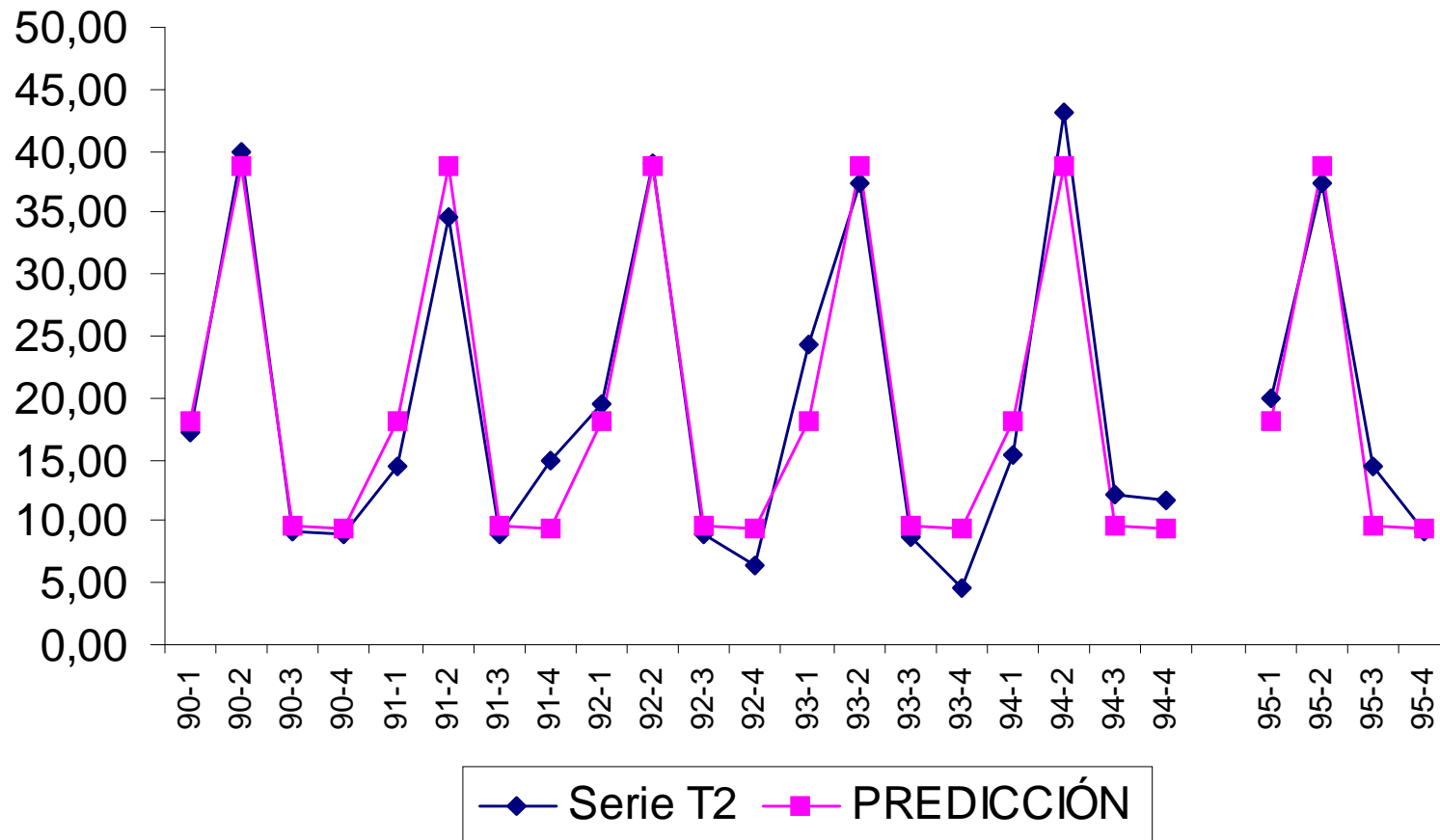
## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.1.2. Método de las medias estacionales

	<b>Serie 2</b>	<b>1Trim</b>	<b>2Trim</b>	<b>3Trim</b>	<b>4Trim</b>	<b>PREDICCIÓN</b>	<b>ERROR</b>	<b>EA</b>	<b>EC</b>		
90-1	17,27	17,27				18,17	-0,904	0,904	0,817	<b>EAM(m)</b>	<b>2,346</b>
90-2	39,89		39,89			38,81	1,078	1,078	1,162	<b>ECM(m)</b>	<b>8,725</b>
90-3	9,18			9,18		9,61	-0,434	0,434	0,188	<b>EAM(extra-m)</b>	<b>2,098</b>
90-4	8,92				8,92	9,35	-0,428	0,428	0,183	<b>ECM(extra-m)</b>	<b>7,493</b>
91-1	14,44	14,44				18,17	-3,734	3,734	13,943		
91-2	34,70		34,70			38,81	-4,112	4,112	16,909		
91-3	9,05			9,05		9,61	-0,564	0,564	0,318		
91-4	14,90				14,90	9,35	5,552	5,552	30,825		
92-1	19,45	19,45				18,17	1,276	1,276	1,628		
92-2	39,05		39,05			38,81	0,238	0,238	0,057		
92-3	8,98			8,98		9,61	-0,634	0,634	0,402		
92-4	6,52				6,52	9,35	-2,828	2,828	7,998		
93-1	24,28	24,28				18,17	6,106	6,106	37,283		
93-2	37,39		37,39			38,81	-1,422	1,422	2,022		
93-3	8,66			8,66		9,61	-0,954	0,954	0,910		
93-4	4,65				4,65	9,35	-4,698	4,698	22,071		
94-1	15,43	15,43				18,17	-2,744	2,744	7,530		
94-2	43,03		43,03			38,81	4,218	4,218	17,792		
94-3	12,20			12,20		9,61	2,586	2,586	6,687		
94-4	11,75				11,75	9,35	2,402	2,402	5,770		
95-1	20,04					18,17	1,866	1,866	3,482		
95-2	37,36					38,81	-1,452	1,452	2,108		
95-3	14,55					9,61	4,936	4,936	24,364		
95-4	9,21					9,35	-0,138	0,138	0,019		
		<u>18,17</u>	<u>38,81</u>	<u>9,61</u>	<u>9,35</u>						

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.1.2. Método de las medias estacionales





## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2. Métodos de previsión para series de tipo 4

- **SERIE TIPO 4:** Serie con tendencia y con comp. estacional
- La **estructura básica** de una serie temporal de tipo 4 es (suponiendo esquema aditivo):


$$y_t = T_t + S_t + u_t$$

- Puede seguir un esquema aditivo, multiplicativo o mixto.
- El componente estacional y el componente irregular se aplican como factores correctores de la tendencia.

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.1. Método de descomposición

- Es uno de los métodos más utilizados para la predicción.
- Se basa en **desestacionalizar** la serie (quitarle el componente estacional) para posteriormente estimar o predecir el componente tendencial en base a la serie desestacionalizada y añadirle posteriormente el componente estacional.

$$y_t = f(T_t, S_t, u_t)$$


- La predicción se obtiene tras un proceso que permite la identificación de los dos componentes con un patrón de conducta bien definido (tendencial y estacional), proyectando luego dicho patrón para dar lugar a la predicción.
- Este método **consta de 5 etapas:**

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.1. Método de descomposición

#### 1 **etapa:** *Primera estimación de la tendencia con el método de las medias móviles*

- Se calcula una serie igual al valor de la media móvil (MM) de longitud  $k$  ( $k=s$ ); asignando cada valor de la media móvil al periodo que es el centro de la misma
- Si la longitud es par, el centro no es un número entero y se calcula la media móvil centrada (MMC), que es la media móvil de longitud 2 de la media móvil calculada en primer lugar
- Obtenemos una primera estimación de la tendencia:
  - $k$  impar  $T_t^{(1)} = MM_t$
  - $k$  par  $T_t^{(1)} = MMC_t$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.1. Método de descomposición

#### 2 etapa: *Estimar los componentes estacionales*

- A partir de la primera estimación de la tendencia podemos estimar la aportación conjunta del componente estacional y el componente irregular:

$$S_t + u_t = y_t - T_t^{(1)}$$

- A continuación se calcula para cada estación  $i$  los valores medios de la aportación conjunta:

$$\bar{S}_i^* = \frac{\sum_{t \in T_i} S_t + u_t}{T_i} \quad i = 1, 2, \dots, s$$

- $T_i$  indica el número de observaciones de la estación  $i$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.1. Método de descomposición

- Acto seguido se calcula la media de dichos valores:

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^s \bar{S}_i^*}{s}$$

- Y:

$$\hat{S}_i = \bar{S}_i^* - \bar{S}$$

Este paso elimina los componentes irregulares que introducen la variación dentro de cada estación respecto al resto de estaciones. Si la media es muy pequeña, se puede obviar.

$\hat{S}_i$  se denomina Índice de variación estacional neto corregido (IVEN) y se ha de cumplir que  $\sum_{i=1}^s \hat{S}_i = 0$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.1. Método de descomposición

#### 3 etapa: Obtención de la serie desestacionalizada

- Una vez estimados los componentes estacionales puede definirse una nueva serie en la que estos no aparezcan, restándoselos a la serie temporal:

$$T_t^{(2)} = y_t - \hat{S}_i$$

OJO: a cada periodo  $t$  se le resta la estación  $i$  correspondiente

la nueva serie  $T_t^{(2)}$  se llama **serie desestacionalizada**

- Generalmente, el objetivo de desestacionalización es la obtención de cifras que sean comparables entre si para poder analizar con mayor rigor la evolución del fenómeno a largo plazo


## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.1. Método de descomposición

#### 4 etapa: Estimación de la tendencia lineal

- Es igual que en el método de tendencia lineal en series de tipo 3.
- Para ello se especifica el modelo:  $T_t^{(2)} = \beta_0 + \beta_1 t$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^T t T_t^{(2)} - \bar{T}_t^{(2)} \sum_{t=1}^T t}{\sum_{t=1}^T t^2 - \frac{1}{T} \left( \sum_{t=1}^T t \right)^2} \quad \hat{\beta}_0 = \bar{T}_t^{(2)} - \hat{\beta}_1 \bar{t}$$


$$\hat{T}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.1. Método de descomposición

#### 5 etapa: Cálculo de las **predicciones**:

- Periodo muestral:

$$\hat{y}_t(1) = \hat{T}_{t+1} + \hat{S}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * (t+1) + \hat{S}_i$$

donde  $S_i$  es el componente de la estación que corresponde con el periodo  $t+1$

- Periodo extra-muestral:

$$\hat{y}_T(m) = \hat{T}_{T+m} + \hat{S}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * (T+m) + \hat{S}_i$$

donde ahora  $S_i$  es el componente de la estación que corresponde con el periodo  $T+m$



## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.1. Método de descomposición

Ilustración: para una serie temporal semestral (s=2)

t	yt	MM(2)	$T_t^{(1)}$ MMC(2)	$y_t - T_t^{(1)}$ Estac
1	3,60			
2	3,90	3,75	3,80	0,10
3	3,80	3,85	3,93	-0,13
4	4,20	4,00	4,05	0,15
5	4,00	4,10	4,18	-0,18
6	4,50	4,25	4,33	0,18
7	4,30	4,40		
8	5,00			
9	4,60			

$$MM_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3.60 + 3.90}{2} = 3.75$$

$$MM_3 = \frac{y_2 + y_3}{2} = \frac{3.90 + 3.80}{2} = 3.85...$$

$$MMC_2 = \frac{MM_2 + MM_3}{2} = \frac{3.75 + 3.85}{2} = 3.80$$

$$MMC_3 = \frac{MM_3 + MM_4}{2} = \frac{3.85 + 4.00}{2} = 3.93....$$

$$S_2 + u_2 = y_2 - MMC_2 = 3.90 - 3.80 = 0.10$$

$$S_3 + u_3 = y_3 - MMC_3 = 3.80 - 3.93 = -0.13....$$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.1. Método de descomposición

Ilustración: para una serie temporal semestral ( $s=2$ )

$t$	$y_t$	$MM(2)$	$T_t^{(1)}$ MMC(2)	$y_t - T_t^{(1)}$ Estac
1	3,60			
2	3,90	3,75	3,80	0,10
3	3,80	3,85	3,93	-0,13
4	4,20	4,00	4,05	0,15
5	4,00	4,10	4,18	-0,18
6	4,50	4,25	4,33	0,18
7	4,30	4,40		
8	5,00			
9	4,60			

$$\bar{S}_1^* = \frac{-0.13 + (-0.18)}{2} = -0.155$$

$$\bar{S}_2^* = \frac{0.10 + 0.15 + 0.18}{3} = 0.143$$

$$\bar{S} = \frac{-0.155 + 0.143}{2} = -0.006$$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.1. Método de descomposición

Ilustración: para una serie temporal semestral ( $s=2$ )

			$T_t^{(1)}$	$y_t - T_t^{(1)}$	$T_t^{(2)}$
t	yt	MM(2)	MMC(2)	Estac	Desestac
1	3,60				3,75
2	3,90	3,75	3,80	0,10	3,75
3	3,80	3,85	3,93	-0,13	3,95
4	4,20	4,00	4,05	0,15	4,05
5	4,00	4,10	4,18	-0,18	4,15
6	4,50	4,25	4,33	0,18	4,35
7	4,30	4,40			4,45
8	5,00				
9	4,60				

$$T_1^{(2)} = y_1 - \hat{S}_1 = 3.60 - (-0.15) = 3.75$$

$$T_2^{(2)} = y_2 - \hat{S}_2 = 3.90 - 0.15 = 3.75$$

$$T_3^{(2)} = y_3 - \hat{S}_1 = 3.80 - (-0.15) = 3.95$$

$$T_4^{(2)} = y_4 - \hat{S}_2 = 4.20 - 0.15 = 4.05$$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.1. Método de descomposición

Ilustración: para una serie temporal semestral (s=2)

t	yt	MM(2)	MMC(2)	Estac	Desestac
1	3,60				3,75
2	3,90	3,75	3,80	0,10	3,75
3	3,80	3,85	3,93	-0,13	3,95
4	4,20	4,00	4,05	0,15	4,05
5	4,00	4,10	4,18	-0,18	4,15
6	4,50	4,25	4,33	0,18	4,35
7	4,30	4,40			4,45
8	5,00				
9	4,60				

$$T_t^{(2)} = \beta_0 + \beta_1 t$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^T t T_t^{(2)} - \bar{T}^{(2)} \sum_{t=1}^T t}{\sum_{t=1}^T t^2 - \frac{1}{T} \left( \sum_{t=1}^T t \right)^2} = \frac{117.14 - 4.07 * 28}{140 - \frac{1}{7} (28)^2} = 0.125$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{T}^{(2)} - \hat{\beta}_1 \bar{t} = 4.07 - 0.125 * 4 = 3.57$$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.1. Método de descomposición

Ilustración: para una serie temporal semestral (s=2)

			$T_t^{(1)}$	$y_t - T_t^{(1)}$	$T_t^{(2)}$	
t	yt	MM(2)	MMC(2)	Estac	Desestac	Predicc
1	3,60				3,75	3,54
2	3,90	3,75	3,80	0,10	3,75	3,96
3	3,80	3,85	3,93	-0,13	3,95	3,79
4	4,20	4,00	4,05	0,15	4,05	4,21
5	4,00	4,10	4,18	-0,18	4,15	4,04
6	4,50	4,25	4,33	0,18	4,35	4,46
7	4,30	4,40			4,45	4,29
8	5,00					4,71
9	4,60					4,54

$$\hat{y}_1(1) = \hat{T}_{1+1} + \hat{S}_2 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * (1+1) + \hat{S}_2 = 3.57 + 0.125 * 2 + 0.14 = 3.96$$

$$\hat{y}_2(1) = \hat{T}_{2+1} + \hat{S}_1 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * (2+1) + \hat{S}_1 = 3.57 + 0.125 * 3 + (-0.15) = 3.79$$

$$\hat{y}_3(1) = \hat{T}_{3+1} + \hat{S}_1 = 3.57 + 0.125 * 4 + 0.14 = 4.21$$

...

$$\hat{y}_7(1) = \hat{T}_{7+1} + \hat{S}_2 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * (7+1) + \hat{S}_2 = 3.57 + 0.125 * 8 + 0.14 = 4.71$$

$$\hat{y}_7(2) = \hat{T}_{7+2} + \hat{S}_1 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * (7+2) + \hat{S}_1 = 3.57 + 0.125 * 9 + (-0.15) = 4.54$$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.1. Método de descomposición

Ejemplo: Obtener predicciones para esta serie temporal trimestral de tipo 4 utilizando el método de descomp. ( $K=4$ ).

t		Serie 4
1	90-1	9,27
2	90-2	22,89
3	90-3	8,18
4	90-4	8,92
5	91-1	10,44
6	91-2	21,70
7	91-3	12,05
8	91-4	18,90
9	92-1	19,45
10	92-2	30,05
11	92-3	15,98
12	92-4	14,52
13	93-1	28,28
14	93-2	32,39
15	93-3	19,66
16	93-4	16,65
17	94-1	23,43
18	94-2	42,03
19	94-3	27,20
20	94-4	27,75
21	95-1	32,04
22	95-2	40,36
23	95-3	33,55
24	95-4	29,21

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

Serie 4	MM	MMC	y-T	Q1	Q2	Q3	Q4	S	y-S	t	Pred.	Error	ABS	Quad
9.27								-0.33	9.60	1	9.67	-0.40	0.40	0.16
22.89								9.63	13.26	2	20.73	2.16	2.16	4.65
8.18	12.32	12.46	-4.28			-4.28		-4.52	12.70	3	7.68	0.50	0.50	0.25
8.92	12.61	12.46	-3.54				-3.54	-4.79	13.71	4	8.52	0.40	0.40	0.16
10.44	12.31	12.79	-2.35	-2.35				-0.33	10.77	5	14.09	-3.65	3.65	13.31
21.7	13.28	14.53	7.18		7.18			9.63	12.07	6	25.15	-3.45	3.45	11.92
12.05	15.77	16.90	-4.85			-4.85		-4.52	16.57	7	12.10	-0.05	0.05	0.00
18.9	18.03	19.07	-0.17				-0.17	-4.79	23.69	8	12.94	5.96	5.96	35.51
19.45	20.11	20.60	-1.15	-1.15				-0.33	19.78	9	18.51	0.94	0.94	0.89
30.05	21.10	20.55	9.50		9.50			9.63	20.42	10	29.57	0.48	0.48	0.23
15.98	20.00	21.10	-5.12			-5.12		-4.52	20.50	11	16.51	-0.53	0.53	0.29
14.52	22.21	22.50	-7.98				-7.98	-4.79	19.31	12	17.36	-2.84	2.84	8.06
28.28	22.79	23.25	5.03	5.03				-0.33	28.61	13	22.92	5.36	5.36	28.70
32.39	23.71	23.98	8.41		8.41			9.63	22.76	14	33.99	-1.60	1.60	2.55
19.66	24.25	23.64	-3.98			-3.98		-4.52	24.18	15	20.93	-1.27	1.27	1.62
16.65	23.03	24.24	-7.59				-7.59	-4.79	21.44	16	21.78	-5.13	5.13	26.28
23.43	25.44	26.39	-2.96	-2.96				-0.33	23.76	17	27.34	-3.91	3.91	15.29
42.03	27.33	28.72	13.32		13.32			9.63	32.40	18	38.40	3.63	3.63	13.14
27.2	30.10							-4.52	31.72	19	25.35	1.85	1.85	3.42
27.75								-4.79	32.54	20	26.19	1.56	1.56	2.42
32.04								-0.33		21	31.76	0.28	0.28	0.08
40.36								9.63		22	42.82	-2.46	2.46	6.06
33.55								-4.52		23	29.77	3.78	3.78	14.31
29.21								-4.79		24	30.61	-1.40	1.40	1.96

-0.359 9.601 -4.56 -4.819 -0.03367 B0 8.890932  
 S1 S2 S3 S4 B1 1.104387  
 -0.325 9.635 -4.52 -4.785 0

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.1. Método de descomposición

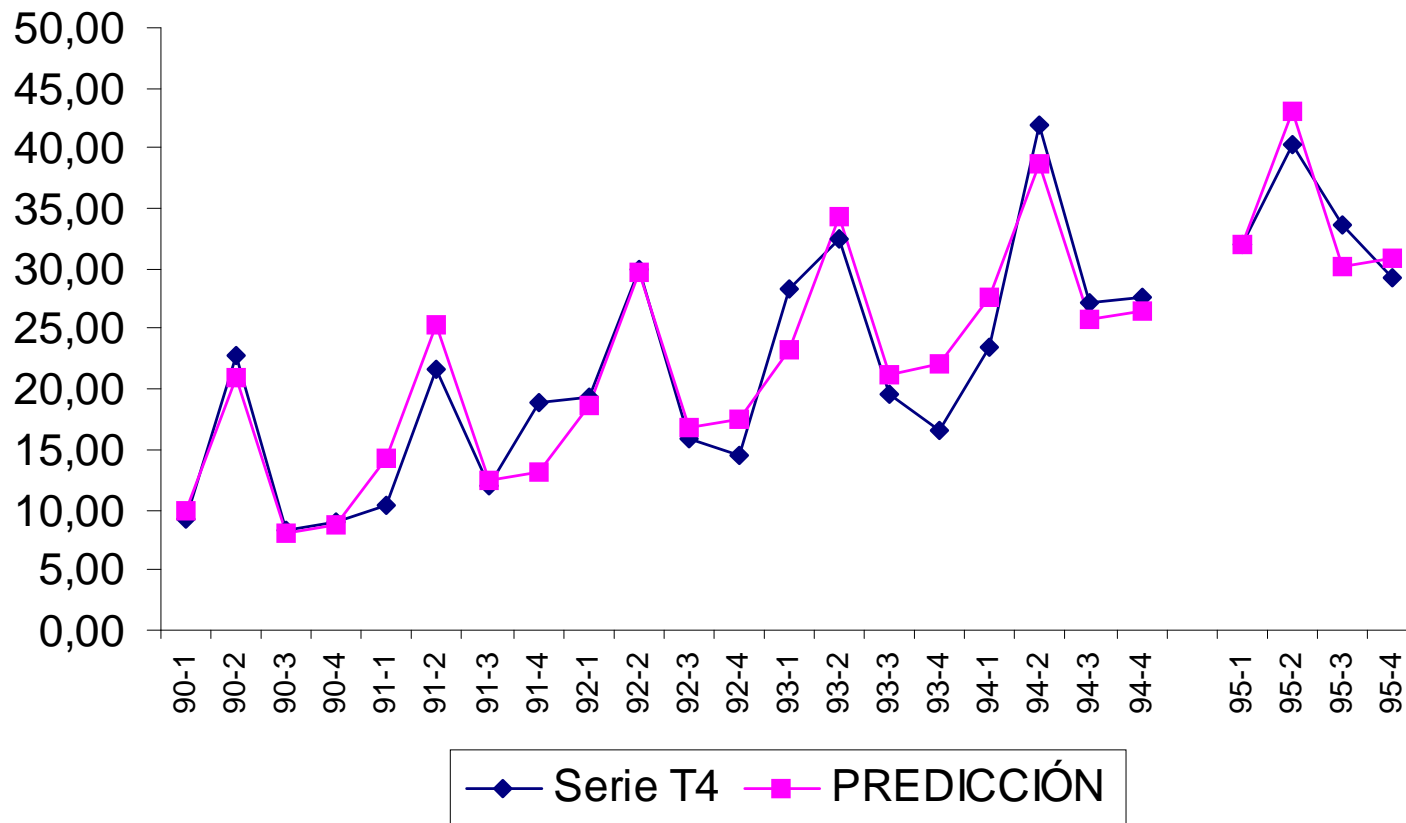
<b>EAM(m)</b>	<b>2,282</b>
<b>ECM(m)</b>	<b>8,442</b>
<b>EAM(ex)</b>	<b>1,982</b>
<b>ECM(ex)</b>	<b>5,603</b>



## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.1. Método de descomposición

Ejemplo: Obtener predicciones para esta serie temporal trimestral de tipo 4 utilizando el método de descomp. (K=4).



## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.2. Método de Alisado exponencial de Holt-Winters

- Es un método basado en la **reestimación** a lo largo de todos los periodos muestrales de la tendencia, la pendiente y el componente estacional mediante unas **ecuaciones de actualización**.
- La **predicción** en un periodo se obtiene en términos de los valores estimados de estos tres términos en el periodo para el cual se formula la predicción

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.2. Método de Alisado exponencial de Holt-Winters

- **Tres ecuaciones de actualización:**

- Estimación de la tendencia

$$\hat{T}_t = \alpha \left[ y_t - \hat{S}_i(t-s) \right] + (1-\alpha) \left[ \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_1(t-1) \right]$$

- Estimación de la pendiente

$$\hat{\beta}_1(t) = \gamma \left[ \hat{T}_t - \hat{T}_{t-1} \right] + (1-\gamma) \hat{\beta}_1(t-1)$$

- Estimación del componente estacional

$$\hat{S}_i(t) = \delta \left[ y_t - \hat{T}_t \right] + (1-\delta) \hat{S}_i(t-s)$$

donde  $\alpha, \gamma, \delta$  son constantes arbitrarias entre 0 y 1.

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.2. Método de Alisado exponencial de Holt-Winters

- **La predicción** se obtiene:
  - Periodo muestral:

$$\hat{y}_t(1) = \hat{T}_t + \hat{\beta}_1(t) + \hat{S}_i(t - s + 1)$$

Donde el periodo  $t+1$  corresponde con la estación  $i$ -ésima

- Periodo extra-muestral:

$$\hat{y}_T(m) = \hat{T}_T + \hat{\beta}_1(T) * m + \hat{S}_i(T - s + m)$$

Donde se escoge el componente estación acorde con la estación  $T+m$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.2. Método de Alisado exponencial de Holt-Winters

Ilustración: Serie temporal semestral ( $s=2$ ) con  $\alpha = 0.2$  y  $\gamma = \delta = 0.9$

t	yt	Tend	Pendt	Estac
1	3,60	2,29	0,06	1,72
2	3,90	1,97	-0,28	2,08
3	5,20	2,05	0,04	3,01
4	6,40	2,54	0,44	3,68
5	7,50	3,29	0,72	4,09
6	8,20			
7	9,20			

Suponemos :

$$\hat{S}_1(0) = 5.43$$

$$\hat{S}_2(0) = 3.43$$

$$T_1 = 2.29$$

$$\beta_1(1) = 0.06$$

$$\hat{S}_1(1) = 0.9 * [3.60 - 2.29] + (1 - 0.9) * 5.43 = 1.72$$

$$\hat{T}_2 = 0.2 * [y_2 - \hat{S}_2(0)] + (1 - 0.2) * [\hat{T}_1 + \hat{\beta}_1(1)] = 0.2 * (3.90 - 3.43) + (1 - 0.2) * (2.29 + 0.06) = 1.97$$

$$\hat{\beta}_1(2) = 0.9 * [\hat{T}_2 - \hat{T}_1] + (1 - 0.9) * \hat{\beta}_1(1) = 0.9 * (1.97 - 2.29) + (1 - 0.9) * 0.06 = -0.28$$

$$\hat{S}_2(2) = 0.9 * [y_2 - \hat{T}_2] + (1 - 0.9) * \hat{S}_2(0) = 0.9 * (3.90 - 1.97) + (1 - 0.9) * 3.43 = 2.08$$

$$\hat{T}_3 = 0.2 * [y_3 - \hat{S}_1(1)] + (1 - 0.2) * [\hat{T}_2 + \hat{\beta}_1(2)] = 0.2 * (5.20 - 1.72) + (1 - 0.2) * (1.97 + (-0.28)) = 2.05$$

$$\hat{\beta}_1(3) = 0.9 * [\hat{T}_3 - \hat{T}_2] + (1 - 0.9) * \hat{\beta}_1(2) = 0.9 * (2.05 - 1.97) + (1 - 0.9) * (-0.28) = 0.04$$

$$\hat{S}_1(3) = 0.9 * [y_3 - \hat{T}_3] + (1 - 0.9) * \hat{S}_1(1) = 0.9 * (5.02 - 2.05) + (1 - 0.9) * 1.72 = 3.01.....$$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.2. Método de Alisado exponencial de Holt-Winters

Ilustración: Serie temporal semestral ( $s=2$ ) con  $\alpha = 0.2$  y  $\gamma = \delta = 0.9$

t	yt	Tend	Pendt	Estac	PREDICCIÓN
1	3,60	2,29	0,06	1,72	
2	3,90	1,97	-0,28	2,08	5,78
3	5,20	2,05	0,04	3,01	3,42
4	6,40	2,54	0,44	3,68	4,17
5	7,50	3,29	0,72	4,09	5,99
6	8,20				7,68
7	9,20				8,81

$$\hat{y}_1(1) = \hat{y}_{2/1} = \hat{T}_1 + \hat{\beta}_1(1) + \hat{S}_2(0) = 2.29 + 0.06 + 3.43 = 5.78$$

$$\hat{y}_2(1) = \hat{y}_{3/2} = \hat{T}_2 + \hat{\beta}_1(2) + \hat{S}_1(1) = 1.97 + (-0.28) + 1.72 = 3.42$$

$$\hat{y}_3(1) = \hat{y}_{4/3} = \hat{T}_3 + \hat{\beta}_1(3) + \hat{S}_2(2) = 2.05 + 0.04 + 2.08 = 4.17$$

...

$$\hat{y}_5(1) = \hat{y}_{6/5} = \hat{T}_5 + \hat{\beta}_1(5) * 1 + \hat{S}_2(4) = 3.29 + 0.72 * 1 + 3.68 = 7.68$$

$$\hat{y}_5(2) = \hat{y}_{7/5} = \hat{T}_5 + \hat{\beta}_1(5) * 2 + \hat{S}_1(5) = 3.29 + 0.72 * 2 + 4.09 = 8.81$$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.2. Método de Alisado exponencial de Holt-Winters

Ejemplo: Obtener predicciones para esta serie temporal trimestral de tipo 4 con  $\alpha = 0.2$  y  $\gamma = \delta = 0.9$

t		Serie 4
1	90-1	9,27
2	90-2	22,89
3	90-3	8,18
4	90-4	8,92
5	91-1	10,44
6	91-2	21,70
7	91-3	12,05
8	91-4	18,90
9	92-1	19,45
10	92-2	30,05
11	92-3	15,98
12	92-4	14,52
13	93-1	28,28
14	93-2	32,39
15	93-3	19,66
16	93-4	16,65
17	94-1	23,43
18	94-2	42,03
19	94-3	27,20
20	94-4	27,75
21	95-1	32,04
22	95-2	40,36
23	95-3	33,55
24	95-4	29,21

Suponer :

$$\hat{S}_1(0) = -0.81$$

$$\hat{S}_2(0) = 9.83$$

$$\hat{S}_3(0) = -4.37$$

$$\hat{S}_4(0) = -4.64$$

$$T_1 = 10.80$$

$$\beta_1(1) = 0.84$$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

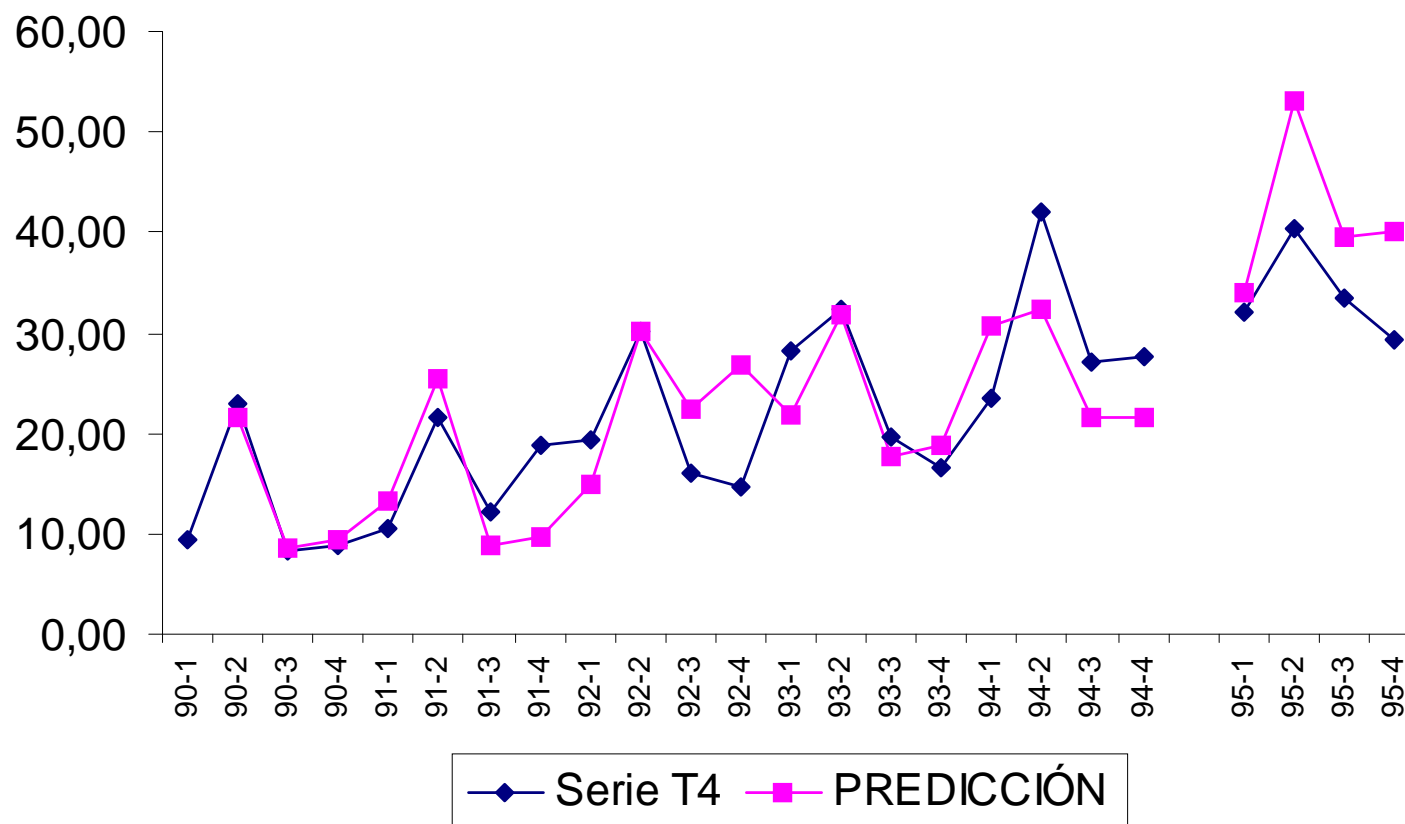
### 3.2.2. Método de Alisado exponencial de Holt-Winters

	<b>Serie 4</b>	<b>Tend</b>	<b>Pend</b>	<b>Estac</b>	<b>PREDICC.</b>	<b>ERROR</b>	<b>EA</b>	<b>EC</b>		
90-1	9,27	10,80	0,84	-1,46	--	--	--	--	<b>EAM(m)</b>	<b>4,294</b>
90-2	22,89	11,92	1,10	10,85	21,46	1,43	1,426	2,033	<b>ECM(m)</b>	<b>30,238</b>
90-3	8,18	12,93	1,01	-4,71	8,65	-0,47	0,467	0,218	<b>EAM(ex)</b>	<b>7,904</b>
90-4	8,92	13,86	0,94	-4,91	9,30	-0,38	0,378	0,143	<b>ECM(ex)</b>	<b>80,424</b>
91-1	10,44	14,23	0,42	-3,55	13,35	-2,91	2,909	8,464		
91-2	21,70	13,89	-0,26	8,12	25,50	-3,80	3,797	14,420		
91-3	12,05	14,25	0,30	-2,45	8,91	3,14	3,137	9,839		
91-4	18,90	16,40	1,97	1,76	9,64	9,26	9,261	85,774		
92-1	19,45	19,30	2,80	-0,22	14,82	4,63	4,630	21,440		
92-2	30,05	22,07	2,77	8,00	30,22	-0,17	0,168	0,028		
92-3	15,98	23,56	1,62	-7,06	22,39	-6,41	6,407	41,051		
92-4	14,52	22,69	-0,62	-7,18	26,93	-12,41	12,410	154,020		
93-1	28,28	23,36	0,54	4,40	21,86	6,42	6,421	41,231		
93-2	32,39	24,00	0,63	8,35	31,90	0,49	0,491	0,241		
93-3	19,66	25,05	1,01	-5,56	17,56	2,10	2,095	4,390		
93-4	16,65	25,61	0,61	-8,78	18,87	-2,22	2,224	4,944		
94-1	23,43	24,78	-0,69	-0,77	30,62	-7,19	7,189	51,685		
94-2	42,03	26,01	1,04	15,26	32,44	9,59	9,591	91,991		
94-3	27,20	28,19	2,07	-1,44	21,49	5,71	5,711	32,617		
94-4	27,75	31,51	3,20	-4,26	21,47	6,28	6,279	39,420		
95-1	32,04				33,93	-1,89	1,893	3,583		
95-2	40,36				53,16	-12,80	12,797	163,754		
95-3	33,55				39,65	-6,10	6,103	37,246		
95-4	29,21				40,03	-10,82	10,822	117,115		



## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.2.2. Método de Alisado exponencial de Holt-Winters



## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

Ejemplo: seleccionar un método para prever esta serie de tipo 4

### 3.2.1. Método de descomposición

<b>E A M ( m )</b>	<b>2,282</b>
<b>E C M ( m )</b>	<b>8,442</b>
<b>E A M ( e x )</b>	<b>1,982</b>
<b>E C M ( e x )</b>	<b>5,603</b>

### 3.2.2. Método de Alisado exponencial de Holt-Winters

<b>E A M ( m )</b>	<b>4,294</b>
<b>E C M ( m )</b>	<b>30,238</b>
<b>E A M ( e x )</b>	<b>7,904</b>
<b>E C M ( e x )</b>	<b>80,424</b>

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.3. Esquema multiplicativo

- Esta sección está dedicado al estudio de **las series temporales que siguen un esquema multiplicativo**, dado que anteriormente hemos supuesto que el esquema es aditivo.
- Una serie temporal  $y_t$  que tiene **tendencia**  $T$ , **componente estacional**  $S_t$  y **componente irregular** ( $u_t$ ) puede presentar diferentes esquemas de integración:

- **Esquema multiplicativo:**

$$y_t = T_t * S_t * u_t$$

- **Esquema aditivo:**

$$y_t = T_t + S_t + u_t$$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

Cuestiones:

1. **¿Cómo averiguar si la serie responde a un esquema aditivo o a un esquema multiplicativo?**
2. **En el caso de que la serie siga un esquema multiplicativo, ¿cómo afecta a los métodos de predicción?**

Nótese que este problema solo puede presentarse en la serie tipo 4 que es la única que tiene simultáneamente tendencia y componente estacional.

## **Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad**

### **3.3.1. Determinación del esquema de integración de una serie temporal**

### **3.3.2. Variación de los métodos de previsión para series de tipo 4 cuando sigue un esquema multiplicativo**

3.3.2.1. Variación en el Método de descomposición

3.3.2.2. Variación en el Método de Alisado exponencial de Holt-Winters

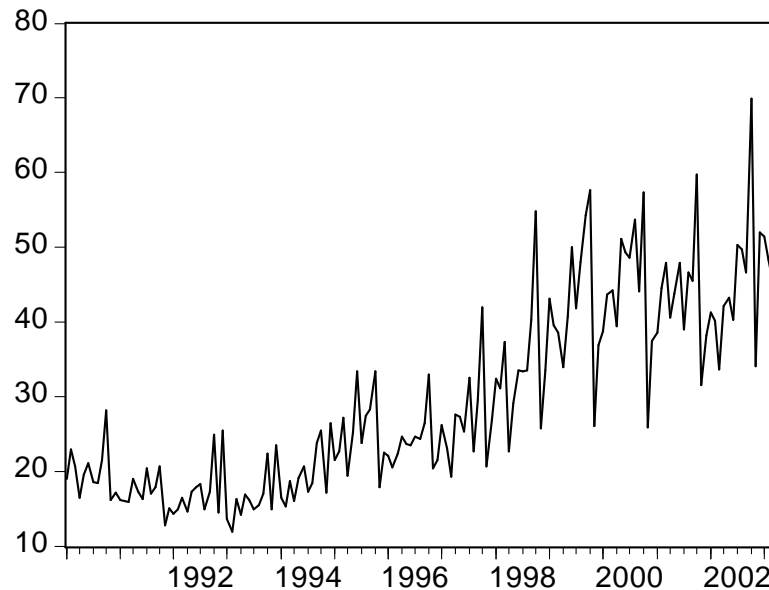
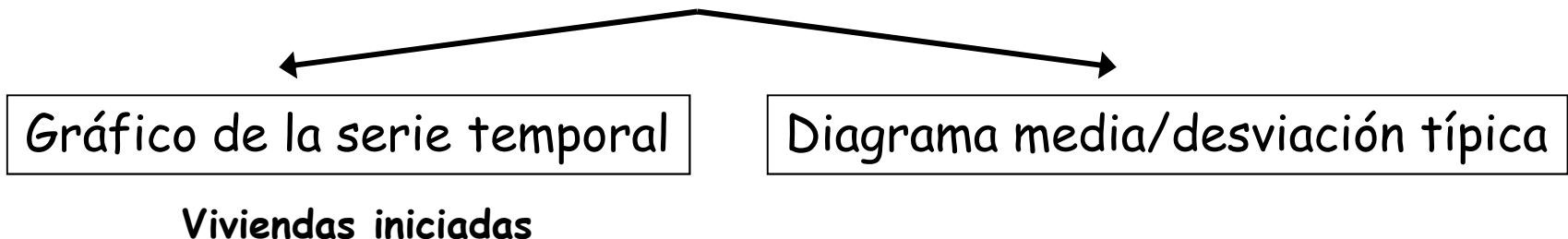
## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.3.1. Determinación del esquema de integración de una serie temporal

- Podemos determinar el esquema de la serie:
  1. Analizando las fluctuaciones de la serie a partir de su **representación gráfica**:
    - Si las fluctuaciones son más o menos regulares a lo largo de la serie, el esquema será **aditivo**.
    - Por el contrario, si observamos que la amplitud varía con la tendencia, el esquema será **multiplicativo**.

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 2. Analizando el gráfico media-desviación típica:



Nota: Miles. Periodo: 1990/01 a 2003/03 (mensual).  
Fuente: DGPC (A Coyuntura).

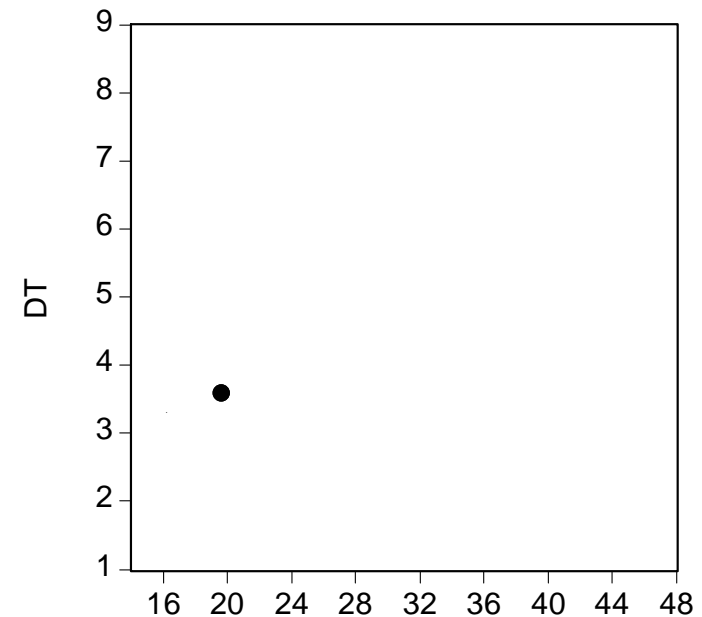
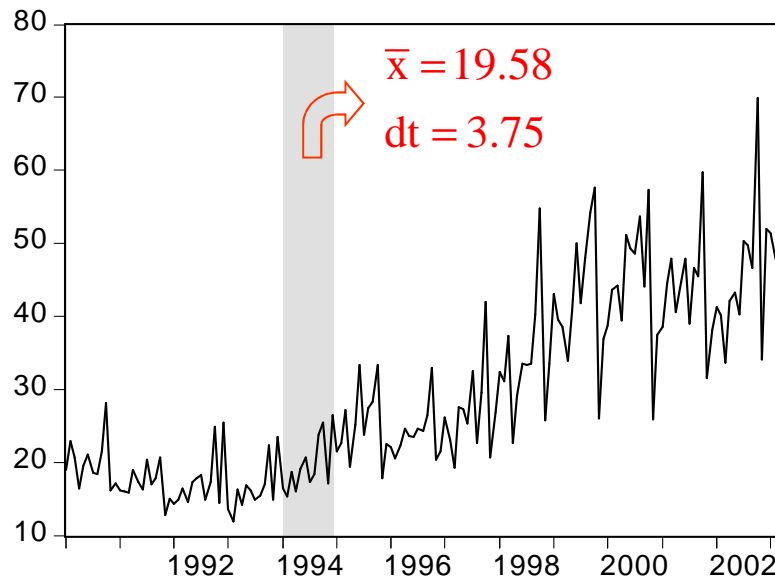
## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 2. Analizando el gráfico media-desviación típica:

Gráfico de la serie temporal

Diagrama media/desviación típica

Viviendas iniciadas



MEDIA

Nota: Miles. Periodo: 1990/01 a 2003/03 (mensual).  
Fuente: DGPC (A Coyuntura).



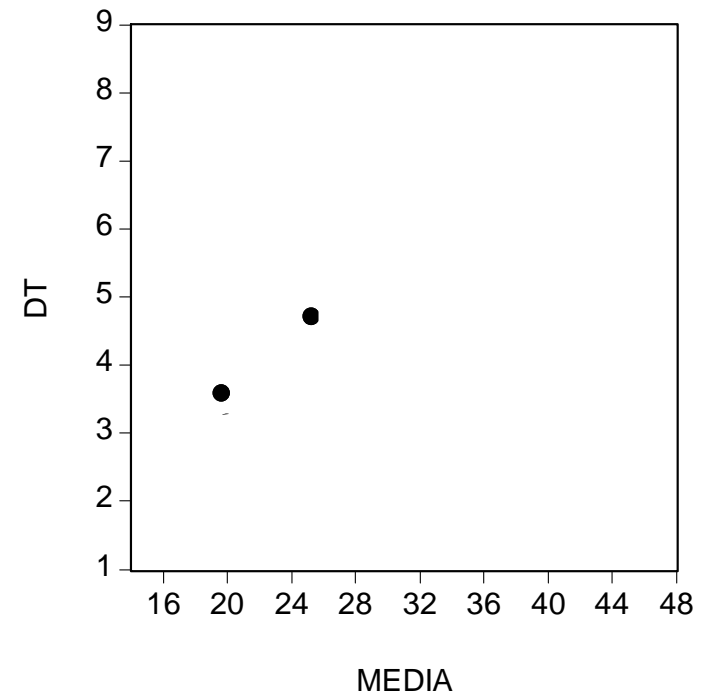
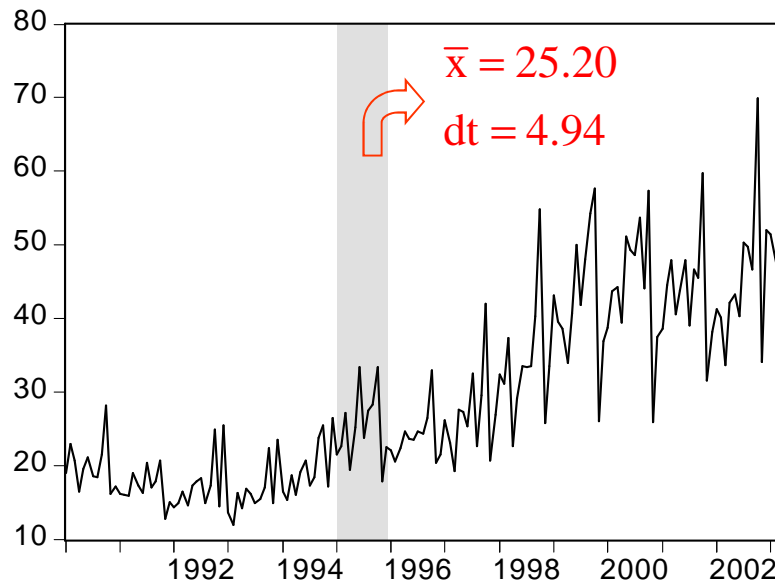
## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 2. Analizando el gráfico media-desviación típica:

Gráfico de la serie temporal

Diagrama media/desviación típica

Viviendas iniciadas



Nota: Miles. Periodo: 1990/01 a 2003/03 (mensual).  
Fuente: DGPC (A Coyuntura).

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 2. Analizando el gráfico media-desviación típica:

Gráfico de la serie temporal

Viviendas iniciadas

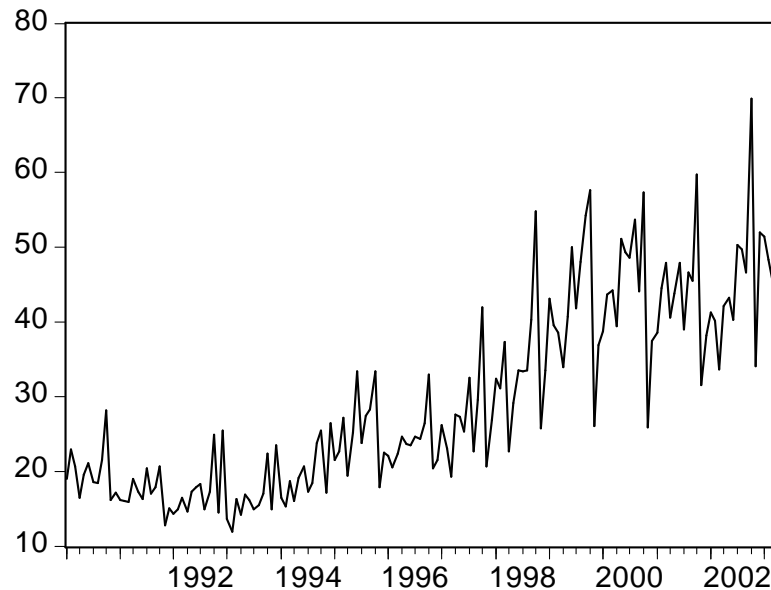
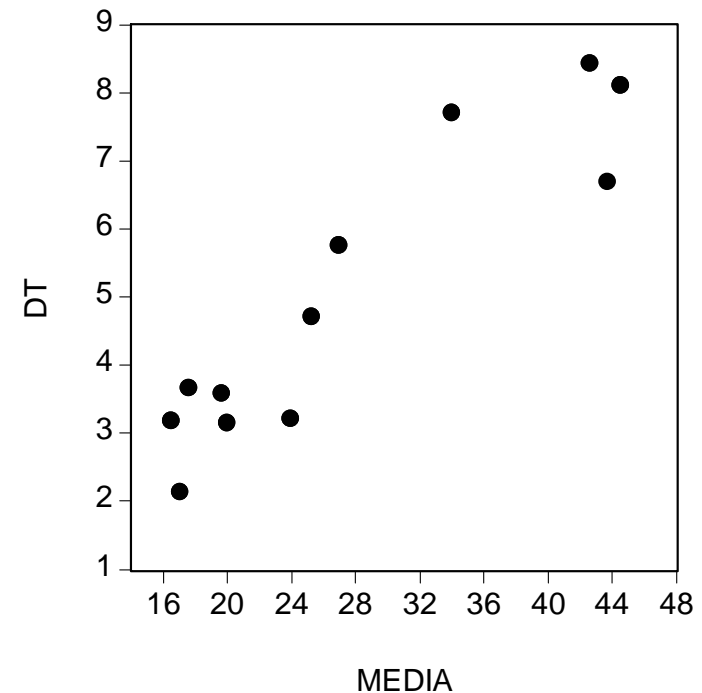


Diagrama media/desviación típica



Nota: Miles. Periodo: 1990/01 a 2003/03 (mensual).  
Fuente: DGPC (A Coyuntura).

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 2. Analizando el gráfico media-desviación típica:

Gráfico de la serie temporal

Viviendas iniciadas

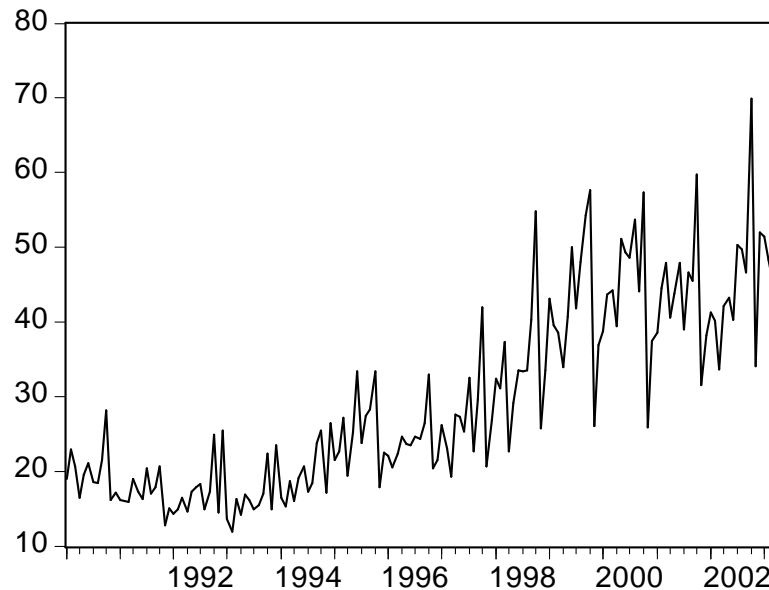
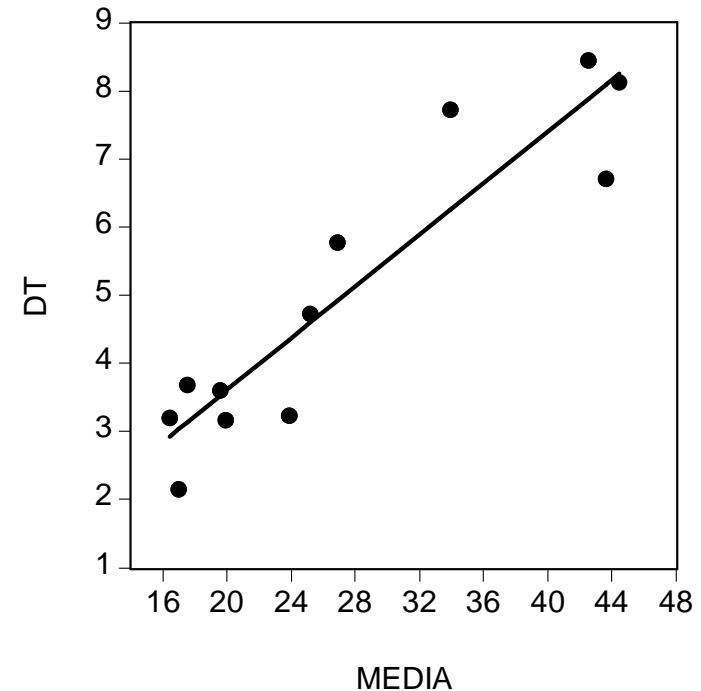


Diagrama media/desviación típica



Nota: Miles. Periodo: 1990/01 a 2003/03 (mensual).  
Fuente: DGPC (A Coyuntura).

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 2. Analizando el gráfico media-desviación típica:

Gráfico de la serie temporal

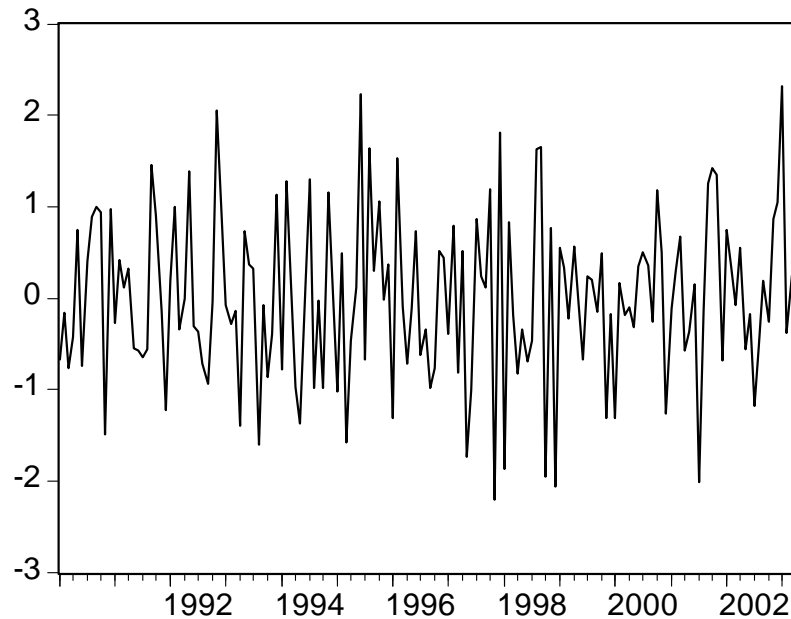
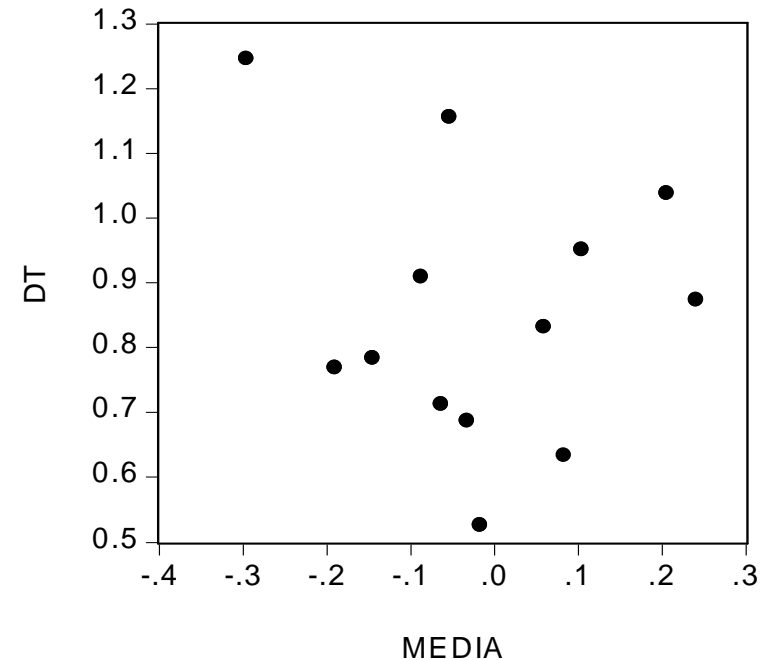


Diagrama media/desviación típica



## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 2. Analizando el **gráfico media-desviación típica**:

- Si los puntos están situados próximos a una recta horizontal (la estacionalidad y la tendencia son más o menos independientes), el esquema será **aditivo**.
- Por el contrario, si los puntos se encuentran alrededor de una recta con pendiente distinta de cero (la estacionalidad y la tendencia no son independientes), el esquema será **multiplicativo**

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.3.2. Variación de los métodos de previsión para series de tipo 4 cuando sigue un esquema multiplicativo

#### 3.3.2.1. Variación en el Método de descomposición

##### ADITIVO

$$y_t = T_t + S_t + u_t$$

2 paso:

$$S_t + u_t = y_t - T_t^{(1)}$$

$$\bar{S}_i^* = \frac{\sum_{t \in T_i} S_t + u_t}{T_i} \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$\begin{aligned} \bar{S} \approx 0 & \quad \hat{S}_i = \bar{S}_i^* \\ \bar{S} \neq 0 & \quad \hat{S}_i = \bar{S}_i^* - \bar{S} \end{aligned}$$

$$\sum \hat{S}_i = 0$$

##### MULTIPLICATIVO

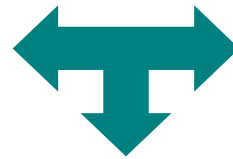
$$y_t = T_t * S_t * u_t$$

$$S_t * u_t = \frac{y_t}{T_t^{(1)}}$$

$$\bar{S}_i^* = \frac{\sum_{t \in T_i} S_t * u_t}{T_i} \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$\begin{aligned} \bar{S} \approx 0 & \quad \hat{S}_i = \bar{S}_i^* \\ \bar{S} \neq s & \quad \hat{S}_i = \bar{S}_i^* * \frac{s}{\sum_{i=1}^s \bar{S}_i^*} = \frac{\bar{S}_i^*}{\bar{S}} \end{aligned}$$

$$\sum \hat{S}_i = S$$



## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.3.2. Variación de los métodos de previsión para series de tipo 4 cuando sigue un esquema multiplicativo

#### 3.3.2.1. Variación en el Método de descomposición

##### ADITIVO

$$y_t = T_t + S_t + u_t$$

3 paso:

$$T_t^{(2)} = y_t - \hat{S}_i$$



$$\hat{y}_t(1) = \hat{T}_{t+1} + \hat{S}_i$$

##### MULTIPLICATIVO

$$y_t = T_t * S_t * u_t$$

$$T_t^{(2)} = \frac{y_t}{\hat{S}_i}$$



$$\hat{y}_t(1) = \hat{T}_{t+1} * \hat{S}_i$$

## Tema 3. Análisis de Series Temporales: Análisis de la estacionalidad

### 3.3.2. Variación de los métodos de previsión para series de tipo 4 cuando sigue un esquema multiplicativo

#### 3.3.2.1. Variación en el M. Alisado exponencial Holt-Winters

##### ADITIVO

$$y_t = T_t + S_t + u_t$$

$$\hat{T}_t = \alpha \left[ y_t - \hat{S}_i(t-s) \right] + (1-\alpha) \left[ \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_1(t-1) \right]$$

$$\hat{\beta}_1(t) = \gamma \left[ \hat{T}_t - \hat{T}_{t-1} \right] + (1-\gamma) \hat{\beta}_1(t-1)$$

$$\hat{S}_i(t) = \delta \left[ y_t - \hat{T}_t \right] + (1-\delta) \hat{S}_i(t-s)$$



$$\hat{y}_t(1) = \hat{T}_t + \hat{\beta}_1(t) + \hat{S}_i(t-s+1)$$

##### MULTIPLICATIVO

$$y_t = T_t * S_t * u_t$$

$$\hat{T}_t = \alpha \left[ \frac{y_t}{\hat{S}_i(t-s)} \right] + (1-\alpha) \left[ \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_1(t-1) \right]$$

$$\hat{\beta}_1(t) = \gamma \left[ \hat{T}_t - \hat{T}_{t-1} \right] + (1-\gamma) \hat{\beta}_1(t-1)$$

$$\hat{S}_i(t) = \delta \left[ \frac{y_t}{\hat{T}_t} \right] + (1-\delta) \hat{S}_i(t-s)$$



$$\hat{y}_t(1) = \left[ \hat{T}_t + \hat{\beta}_1(t) \right] * \hat{S}_i(t-s+1)$$