Análisis de series temporales

5. Modelos lineales de series temporales

Autor: Ernest Pons i Fanals

Grado en Estadística

5.0. Introducción

Definición 1:

Diremos que un proceso estocástico es lineal cuando lo podemos escribir como el resultado de una transformación lineal de un proceso ruido blanco, es decir,

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$

5.0. Introducción

Vamos a considerar tres tipos de procesos estocásticos lineales;

- Procesos autoregresivos (AR)

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

- Procesos media móvil (MA)

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- Procesos “mixtos” ARMA (la combinación de AR y MA)

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Todos estos son procesos llamados “sin deriva” (sin constante)

5.0. Introducción

Si añadimos una constante tenemos:

- Procesos autoregresivos (AR)

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

- Procesos media móvil (MA)

$$y_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- Procesos “mixtos” ARMA (la combinación de AR y MA)

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

5.0. Introducción

Utilizando el operador de retardos podemos escribir estos procesos lineales como:

•Procesos autoregresivos (AR)

$$\phi(B) y_t = \delta + \varepsilon_t$$

•Procesos media móvil (MA)

$$y_t = \delta + \theta(B)\varepsilon_t$$

•Procesos "mixtos" ARMA (la combinación de AR y MA)

$$\phi(B) y_t = \delta + \theta(B)\varepsilon_t$$

donde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$ y $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$

5.0. Introducción

Teorema de representación de Wold

Teorema 1:

Cualquier proceso estocástico estacionario en sentido débil se puede representar como suma de dos procesos:

$$y_t = z_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

Donde z_t es un proceso puramente determinista y ε_t es un proceso ruido blanco,

$$E(\varepsilon_t) = 0$$
$$Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$$
$$\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0 \quad k > 0$$

Demostración: Brockwell, P.J. y Davis, R.A. (1991). Time Series: Theory and methods. Springer.

5.0. Introducción

Según el teorema de representación de Wold la parte no determinista de cualquier proceso estocástico estacionario en sentido débil se puede representar como un modelo MA(∞),

$$y_t - z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \psi(B)\varepsilon_t$$

Pero intentaremos encontrar una aproximación finita mediante un cociente de polinomios del tipo

$$\psi(B) \approx \frac{\theta(B)}{\phi(B)}$$

donde $\phi(B)$ y $\theta(B)$ corresponden a los polinomios de un modelo AR y de un modelo MA, respectivamente.

5.0. Introducción

Definición 2:

Diremos que un proceso estocástico $\{y_t, t \in Z\}$ es causal si y solo si existen $\{\psi_j, j \geq 0\}$ cumpliendo:

1) $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$

2) $y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$

es decir que podemos escribir $y_t = \psi(B)\varepsilon_t$

Teorema: Si un proceso ARMA es causal entonces es estacionario en sentido débil.

5.0. Introducción

Definición 3:

Diremos que un proceso estocástico $\{y_t, t \in Z\}$ es invertible si y solo si existen $\{\pi_j, j \geq 0\}$ cumpliendo:

1) $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$

2) $\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j y_{t-j}$

es decir que podemos escribir $\varepsilon_t = \pi(B) y_t$

5.0. Introducción

Dos teoremas muy útiles

Teorema 2:

Sea un proceso estocástico $\{y_t, t \in Z\}$ con $E(y_t) = 0$, de manera que existen $\theta(B)$ y $\phi(B)$ cumpliendo $\phi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t$ y no existe x_0 tal que $\phi(x_0) = \theta(x_0) = 0$ entonces son equivalentes las dos condiciones siguientes:

a) $\{y_t, t \in Z\}$ es causal

b) $\phi(z) \neq 0 \quad |z| \leq 1$

5.0. Introducción

Dos teoremas muy útiles

Teorema 3:

Sea un proceso estocástico $\{y_t, t \in Z\}$ con $E(y_t) = 0$, de manera que existen $\theta(B)$ y $\phi(B)$ cumpliendo $\phi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t$ y no existe x_0 tal que $\phi(x_0) = \theta(x_0) = 0$ entonces son equivalentes las dos condiciones siguientes:

a) $\{y_t, t \in Z\}$ es invertible

b) $\theta(z) \neq 0 \quad |z| \leq 1$

5.1. Modelos media móvil (MA)

Definición 4:

Diremos que un proceso estocástico es un proceso MA de orden q si existen coeficientes δ, θ_1, …, θ_q tales que

$$y_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q} =$$
$$= \delta + \theta(B)\varepsilon_t$$

donde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$

En este caso diremos que $y_t \sim MA(q)$

5.1. Modelos media móvil (MA)

Propiedades:

1) Los procesos MA(q) siempre son estacionarios (los momentos de primer y segundo orden son siempre finitos y constantes a largo del tiempo).

2) Un proceso MA(q) es invertible si y solo si las raíces del polinomio en el operador de retardos (B) están fuera del círculo de unidad. Los procesos MA(q) no invertibles no permiten una representación autoregresiva convergente.

Para averiguar si es invertible analizaremos las raíces de la ecuación siguiente:

$$\theta(z) = 0$$

5.1. Modelos media móvil (MA)

Modelo MA(1)

- MA(1): $y_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$
- La condición de invertibilidad es para un proceso MA(1) es $|\theta_1| < 1$
- Esperanza: $\mu = E(y_t) = E(\delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}) = \delta$

5.1. Modelos media móvil (MA)

Modelo MA(1)

- Varianza: $$\gamma_0 = E(y_t - \mu)^2 = E(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2 = E(\varepsilon_t^2) + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) - 2\theta_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1})$$ $$= \left(1 + \theta_1^2\right)\sigma_\varepsilon^2$$

- Autocovarianzas:

$$\gamma_1 = E\left[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)\right] = E\left[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2})\right] = -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$
$$\gamma_2 = E\left[(y_t - \mu)(y_{t-2} - \mu)\right] = E\left[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-3})\right] = 0$$
$$\gamma_k = 0 \quad \forall k > 2$$

5.1. Modelos media móvil (MA)

Modelo MA(1)

- La FAS (ACF) es:

$$\rho_k = \begin{cases} -\dfrac{\theta_1}{(1+\theta_1^2)} & k=1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

- La FAP (PACF) presenta un decrecimiento exponencial.

- Se puede llegar al siguiente resultado general.

$$\alpha_k = -\frac{\theta_1^k (1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(k+1)}}$$

5.1. Modelos media móvil (MA)

$$\alpha_1 = \rho = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} = -\frac{\theta_1^2}{1+\theta_1^2+\theta_1^4}$$

$$\alpha_3 = \frac{\rho_3 + \rho_1^3 + \rho_1\rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 - \rho_1^2\rho_3}{1+2\rho_1^2\rho_2 - 2\rho_1^2 - \rho_2^2} = -\frac{\rho_1^3}{1-2\rho_1^2}$$

$$= \frac{\left(-\dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2}\right)^3}{1-2\left(-\dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2}\right)^2} = \frac{\theta_1^3}{1+\theta_1^2+\theta_1^4+\theta_1^6}$$

Resumiendo: un proceso MA(1) se caracteriza por tener el primer coeficiente de autocorrelación diferente de cero y los coeficientes de autocorrelación parcial decrecen exponencialmente en valor absoluto hacia cero

5.1. Modelos media móvil (MA)

Modelo MA(2)

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$
$$y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\varepsilon_t$$
$$y_t = \theta(B)\varepsilon_t$$
$$\text{con} \quad \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$$

- Para comprobar si es invertible debemos analizar las soluciones de la ecuación $(1 - \theta_1 B - \theta_1 B^2) = 0$
- Las dos soluciones son:

$$z_1 = \frac{-\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{2\theta_2}$$
$$z_2 = \frac{-\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{2\theta_2}$$

5.1. Modelos media móvil (MA)

Modelo MA(2)

- Las condiciones para tener un modelo estable (invertible) son las siguientes:

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$
$$\theta_2 + \theta_1 < 1$$
$$|\theta_2| < 1$$

5.1. Modelos media móvil (MA)

Modelo MA(2)

- Si calculamos el momento de primer orden directamente tenemos:

$$
\begin{aligned}
E(y_t) &= E(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}) = \\
&= E(\varepsilon_t) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) - \theta_2(\varepsilon_{t-2}) = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- La varianza del proceso es:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(y_t) &= \mathrm{var}(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}) = \\
&= \mathrm{var}(\varepsilon_t) + \theta_1^2\,\mathrm{var}(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2^2\,\mathrm{var}(\varepsilon_{t-2}) = \\
&= \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)
\end{aligned}
$$

5.1. Modelos media móvil (MA)

Modelo MA(2)

- En cuanto a las autocovarianzas:

$$\gamma_1 = \operatorname{cov}(y_t, y_{t-1}) = E(y_t y_{t-1}) = E(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} - \theta_2\varepsilon_{t-3}) =$$
$$= \sigma_\varepsilon^2(-\theta_1 + \theta_1\theta_2)$$

$$\gamma_2 = \operatorname{cov}(y_t, y_{t-2}) = E(y_t y_{t-2}) = E(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} - \theta_1\varepsilon_{t-3} - \theta_2\varepsilon_{t-4}) =$$
$$= -\sigma_\varepsilon^2\theta_2$$

$$\gamma_k = 0 \quad k > 2$$

5.1. Modelos media móvil (MA)

Modelo MA(2)

- Función de autocorrelación simple

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} & k = 1 \\ \dfrac{-\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} & k = 2 \\ 0 & k > 2 \end{cases}$$

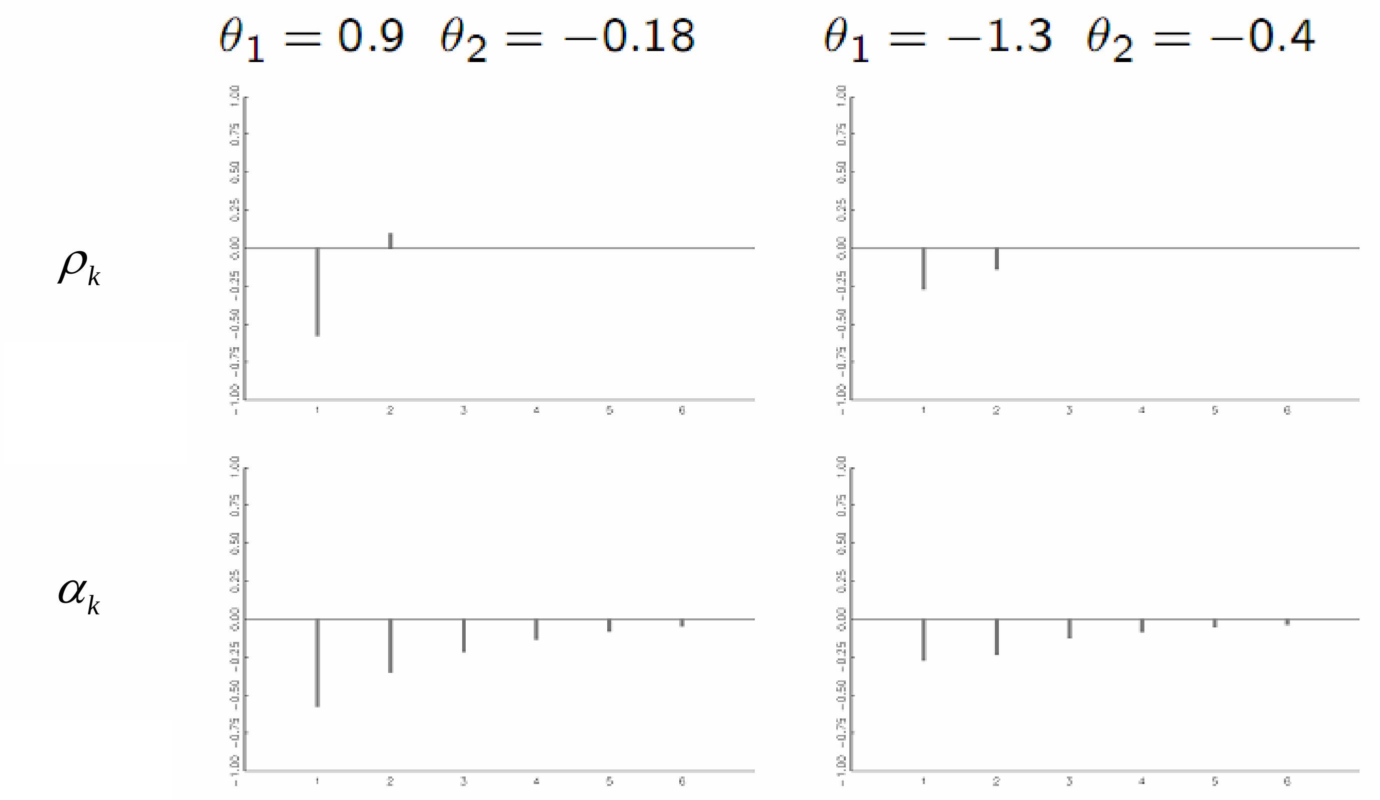
5.1. Modelos media móvil (MA)

Modelo MA(2)

- Por tanto de forma equivalente al MA(1), un proceso MA(2) se caracteriza por tener los dos primeros coeficientes de la FAS distintos de cero, mientras que los coeficientes de la FAP irán disminuyendo exponencialmente en valor absoluto.

5.1. Modelos media móvil (MA)

Modelo MA(2)



5.1. Modelos media móvil (MA)

Modelo MA(q)

- MA(q) con deriva:

$$\mu = E(x_t) = E(\delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}) = \delta$$

- (el mismo resultado)

$$\gamma_0 = E(x_t - \mu)^2 = E(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q})^2 =$$
$$= \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2\right)\sigma_\varepsilon^2$$

5.1. Modelos media móvil (MA)

Modelo MA(q)

$$\gamma_\tau = E\left[(x_t-\mu)(x_{t-\tau}-\mu)\right] = E\left[(\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\ldots-\theta_q\varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-\tau}-\theta_1\varepsilon_{t-\tau-1}-\theta_2\varepsilon_{t-\tau-1}-\ldots-\theta_q\varepsilon_{t-\tau-q})\right]$$

$$= \begin{cases} (-\theta_\tau+\theta_{\tau+1}\theta_1+\ldots+\theta_q\theta_{q-\tau})\sigma_\varepsilon^2 & si \quad \tau\le q \\ 0 & si \quad \tau>q \end{cases}$$

- Resumiendo, los procesos MA(q) se caracterizan por tener una FAP con coeficientes que decrecen exponencialmente en valor absoluto hacia cero y por tener tantos coeficientes distintos de cero en la FAS como orden tenga el proceso. Los procesos más habituales son los de orden 1 y 2, y las condiciones de invertibilidad son:

MA(1) $\quad |\theta_1|<1$

MA(2) $\quad \theta_2-\theta_1<1, \quad \theta_2+\theta_1<1, \quad |\theta_2|<1$

5.1. Modelos media móvil (MA)

Modelo MA(q)

- Si un proceso MA(q) es invertible, admite una representación autoregresiva convergente, es decir, es posible expresarlo como un proceso autoregresivo infinito. Para el caso particular de un MA(1), si se cumple $|\theta_1| < 1$ es posible escribir:

$$y_t = (1-\theta_1 B)\varepsilon_t$$

$$\frac{y_t}{(1-\theta_1 B)} = \varepsilon_t$$

como $$\frac{y_t}{(1-\theta_1 B)} = 1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \theta_1^3 B^3 + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \theta_1^i B^i$$

entonces $$\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \theta_1^i B^i\right) y_t = \varepsilon_t$$

5.2. Modelos autoregresivos (AR)

<u>Definición 5</u>:

Diremos que un proceso estocástico es un proceso AR de orden p si existen coeficientes δ, ϕ_1, …, ϕ_p tales que

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

donde $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$

En este caso diremos que $y_t \sim AR(p)$

Podemos representar el proceso de la siguiente forma $\phi(B) y_t = \delta + \varepsilon_t$

5.2. Modelos autoregresivos (AR)

- Un proceso autoregresivo se puede escribir de formas alternativas,

$$\phi_p(B)x_t = \delta + \varepsilon_t$$

$$(1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p)x_t = \delta + \varepsilon_t$$

$$x_t = \delta + \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} - ... - \phi_p x_{t-p} + \varepsilon$$

- Para que un proceso AR sea estacionario el polinomio en el operador de retardos $\phi_p(L)$ asociado al proceso tiene que ser estable, es decir, al calcular las raíces del polinomio,

$$\phi_p(B) = (1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p) = 0$$

estas tienen de caer fuera del círculo unidad.

- Si hay alguno raíz igual a 1 (raíz unitario) el proceso AR no es estacionario, y no se pueden expresar como proceso MA(∞). Si hay alguna raíz inferior a 1 el proceso es explosivo y no estacionario.

5.2. Modelos autoregresivos (AR)

Algunas condiciones útiles para comprobar la estacionariedad:

•Condición necesaria pero no suficiente: $$\sum_{j=1}^{p} \phi_j < 1$$

•Condición suficiente pero no necesaria: $$\sum_{j=1}^{p} \left| \phi_j \right| < 1$$

5.2. Modelos autoregresivos (AR)

Modelo AR(1)

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$(1-\phi L) y_t = \delta + \varepsilon_t$$

- La condición necesaria y suficiente para que sea estacionario es:

$$|\phi| < 1$$

- Un proceso AR(1) estacionario se puede escribir como un proceso MA(∞):

$$y_t = \frac{\delta + \varepsilon_t}{(1-\phi B)} = (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \ldots)(\delta + \varepsilon_t)$$
$$= \frac{\delta}{1-\phi} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$$

- Se puede llegar a la misma solución a través de substitución recursiva:

$$y_t = \delta + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

5.2. Modelos autoregresivos (AR)

Modelo AR(1)

- Esta sustitución e usa para calcular los momentos del proceso. También se puede usar para enseñar el siguiente resultado, valido para h>0:

$$E(y_t \varepsilon_{t+h}) = E\left[\left(\frac{\delta}{1-\phi} + \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \ldots\right)\varepsilon_{t+h}\right] = 0$$

Dado que $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ para todos $t \neq s$.

5.2. Modelos autoregresivos (AR)

Modelo AR(1)

- Si calculamos el momento de primer orden directamente tenemos:

$$\mu = E(y_t) = E\left(\frac{\delta}{1-\phi} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}\right) = \frac{\delta}{1-\phi}$$

- Aplicando la hipótesis de estacionariedad $(E(x_t) = E(x_{t-1}) = \mu)$ tenemos el mismo resultado:

$$\mu = E(y_t) = E(\delta + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t) = \delta + \phi\mu = \delta(1-\phi)^{-1}$$

5.2. Modelos autoregresivos (AR)

Modelo AR(1)

- La varianza del proceso es;

$$\gamma_0 = E(y_t - \mu)^2 = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}\right)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$$

- También se puede llegar a este resultado a través;

$$\gamma_0 = \mathrm{var}(y_t) = \mathrm{var}(\delta + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t) = \phi^2 \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1-\phi^2)^{-1}$$

5.2. Modelos autoregresivos (AR)

Modelo AR(1)

- Las autocovarianzas del proceso son iguales a:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1 = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-1}) = E((\phi \tilde{y}_{t-1} + \varepsilon_t)\tilde{y}_{t-1}) = \phi \gamma_0 \\
&\gamma_2 = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-2}) = E((\phi \tilde{y}_{t-1} + \varepsilon_t)\tilde{y}_{t-2}) = \phi \gamma_1 = \phi^2 \gamma_0 \\
&\ldots \\
&\gamma_k = E(\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-k}) = E((\phi \tilde{y}_{t-1} + \varepsilon_t)\tilde{y}_{t-k}) = \phi \gamma_{k-1} = \phi^k \gamma_0
\end{aligned}
$$

donde $\tilde{y}_t$ indica la desviación con respecto a la media.

5.2. Modelos autoregresivos (AR)

Modelo AR(1)

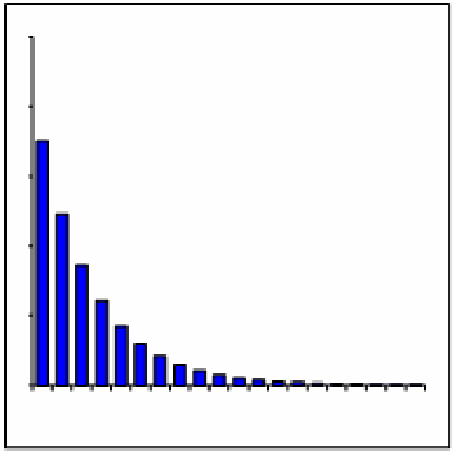
- La función de autocorrelación simple es igual a:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k$$

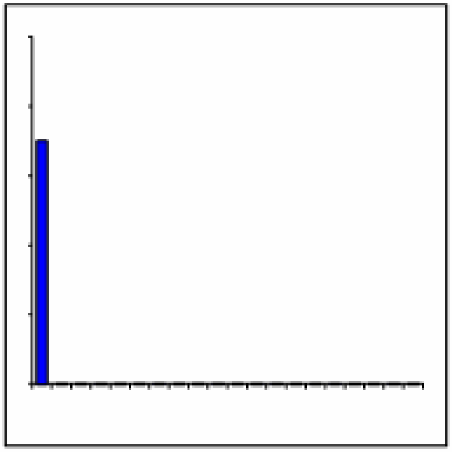
- Y, por tanto, presenta un decrecimiento exponencial.

- En cuanto a la FAP, sólo tiene un coeficiente diferente de cero. Se puede demostrar con las ecuaciones de Yule-Walker.

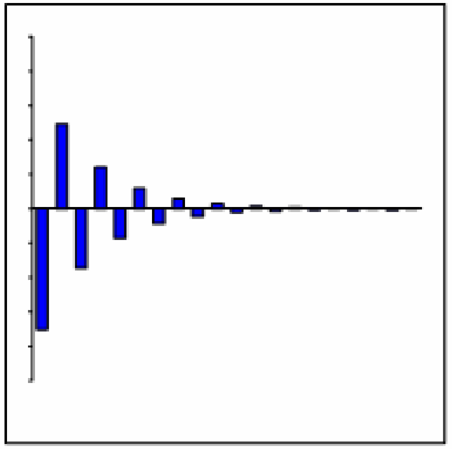
5.2. Modelos autoregresivos (AR)



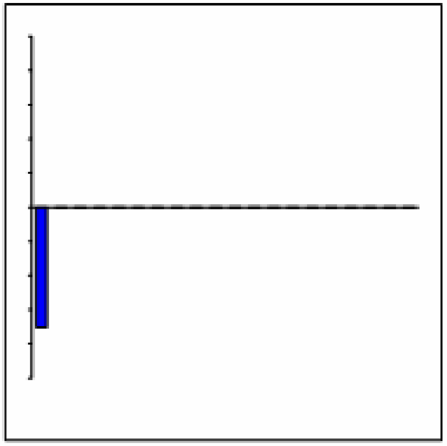
$Gràfic\ 10.\ FAS\ teòrica\ d'un\ AR(1)$
$amb\ 0 < \phi < 1$



$Gràfic\ 11.\ FAP\ teòrica\ d'un\ AR(1)$
$amb\ 0 < \phi < 1$



$Gràfic\ 12.\ FAS\ teòrica\ d'un\ AR(1)$
$amb\ -1 < \phi < 0$



$Gràfic\ 13.\ FAP\ teòrica\ d'un\ AR(1)$
$amb\ -1 < \phi < 0$

5.2. Modelos autoregresivos (AR)

Modelo AR(2)

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) y_t = \delta + \varepsilon_t$$

$$\phi_2(B) y_t = \delta + \varepsilon_t$$

$$\text{donde} \quad \phi_2(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)$$

- Al calcular las raíces del polinomio $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = 0$

  tendríamos dos soluciones y deben cumplirse los siguientes requisitos (simultáneamente) para tener un polinomio estable.

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

$$\phi_2 + \phi_1 < 1$$

$$|\phi_2| < 1$$

5.2. Modelos autoregresivos (AR)

Modelo AR(2)

- Los resultados para las covarianzas se pueden generalizar a un AR(p):

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$y_t y_{t-k} = \phi_1 y_{t-1} y_{t-k} + \phi_2 y_{t-2} y_{t-k} + \ldots + \phi_p y_{t-p} y_{t-k} + \varepsilon_t y_{t-k}$$

$$\gamma_k = E(y_t y_{t-k}) = \phi_1 E(y_{t-1} y_{t-k}) + \phi_2 E(y_{t-2} y_{t-k}) + \ldots + \phi_p E(y_{t-p} y_{t-k}) + E(\varepsilon_t y_{t-k}) =$$

$$= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \ldots + \phi_k \gamma_k$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2 + \ldots + \phi_k \rho_k$$

5.2. Modelos autoregresivos (AR)

Modelo AR(p)

- Resumiendo, los modelos AR(p) se caracterizan por tener una FAS con coeficientes que decrecen exponencialmente en valor absoluto hacia cero y por tener tantos coeficientes distintos de cero en la FAP como orden tenga el modelo (orden del polinomio). Los modelos más habituales son los de orden 1 y 2, y las condiciones de estacionariedad las siguientes:

AR(1) $\quad |\phi_1| < 1$

AR(2) $\quad \phi_2 - \phi_1 < 1, \quad \phi_2 + \phi_1 < 1, \quad |\phi_2| < 1$

5.3. Modelos mixtos (ARMA)

- Un modelo autoregresivo media móvil (ARMA(p,q)) sigue la forma;

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \ldots - \phi_p y_{t-p} = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$\phi(B)\varepsilon_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

donde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$$

- Es decir, tiene una parte autoregresivo y otra parte media móvil.

5.3. Modelos mixtos (ARMA)

- Debemos comprobar si la parte autoregresiva es estacionaria y la parte media móvil es invertible.

- Si la parte AR es estacionario, se puede escribir como un MA(∞)

$$y_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}\varepsilon_t = \psi_\infty(B)\varepsilon_t$$

donde :

$$\psi_\infty(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 \ldots$$

5.3. Modelos mixtos (ARMA)

- Si la parte MA es invertible, se puede expresarlo como un AR(∞)

$$\frac{\theta(B)}{\phi(B)} y_t = \varepsilon_t$$

$$\pi_\infty(B) y_t = \varepsilon_t$$

$$\text{donde:}$$

$$\pi_\infty(B) = \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \pi_3 B^3 \ldots$$

$$\pi_\infty(B) = \psi_\infty^{-1}(B)$$

5.3. Modelos mixtos (ARMA)

- Los procesos ARMA tienen un FAS como la de su parte AR y una
- FAP como su parte MA.
- ARMA tiene FAS y FAP que decrecen exponencialmente en valor absoluta hacia cero.
- No se puede determinar el orden.

		FAS (ACF)	
		Finita	Infinita
FAP (PACF)	Finita	Ruido blanco	AR
	Infinita	MA	ARMA

5.3. Modelos mixtos (ARMA)

Modelo ARMA(1,1)

$$y_t = \delta + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

- Esperanza: $$\mu = (1-\phi_1)^{-1}\delta$$

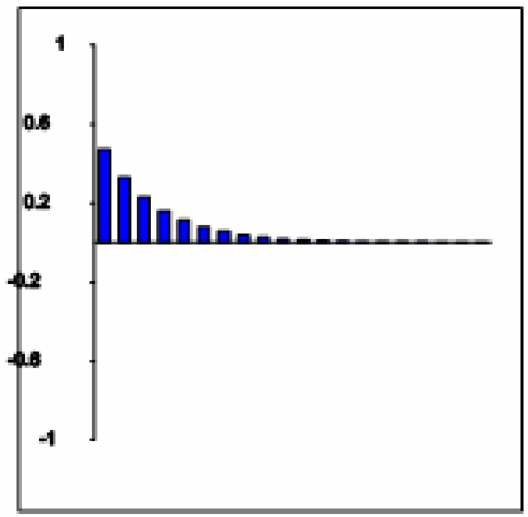
- Varianza: $$\gamma_0 = \frac{1-2\phi_1\theta_1+\theta_1^2}{1-\phi_1^2}\sigma_\varepsilon^2$$

- FAS:

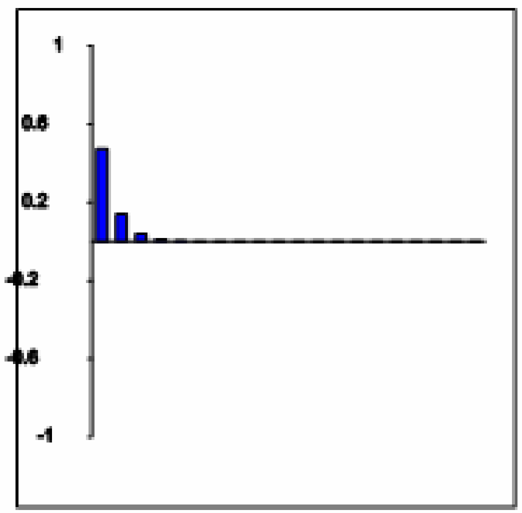
$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1-2\phi_1\theta_1+\theta_1^2} & k=1 \\ \phi_1\rho_{k-1} & k>1 \end{cases}$$

5.3. Modelos mixtos (ARMA)

Modelo ARMA(1,1)



Gràfic 27. FAS teòrica d'un ARMA(1,1)
$0 < \phi < 1, 0 < \theta < 1$



Gràfic 28. FAP teòrica d'un ARMA(1,1)
$0 < \phi < 1, 0 < \theta < 1$

5.3. Modelos mixtos (ARMA)

Modelo ARMA(p,q)

$$y_t = \delta + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

- Esperanza: $\mu = \phi_p(1)^{-1}\delta$

- Varianza: $\gamma_0 = E(x_t - \mu)^2 = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$

- Teniendo en cuenta que se puede representar como un MA(∞):

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \mu + \psi_\infty(L)\varepsilon_t$$

- Se puede expresar la FAS como:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E\left[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)\right] = \\ &= E\left[(\psi_0 \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots)(\psi_0 \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots)\right] = \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=k}^{\infty} \psi_j \psi_{j-k} \end{aligned}$$

5.4. Modelos integrados (ARIMA)

Modelos ARIMA:

Si extendemos un modelo ARMA para permitir que incluya raíces unitarias nos referiremos a modelos ARIMA de orden *(p,d,q)* donde *d* es el número de veces que se aplica el operador diferencia:

$$\phi_p(B)(1-B)^d y_t = c + \theta_q(B)\varepsilon_t$$

<u>Ejemplo:</u>

El proceso AR(2) no estacionario: $(1-1.5B+0.5B^2)y_t = \varepsilon_t$ es equivalente a un proceso ARIMA(1,1,0):

$$(1-0.5B)(1-B)y_t = \varepsilon_t$$

5.4. Modelos integrados (ARIMA)

La presencia de tendencias estocásticas puede captarse mediante el uso de raíces unitarias en el polinomio AR. Por eso podemos plantear la utilización de modelos ARIMA (p,d,q) en general:

$$\phi(B)(1-B)^d y_t = \delta + \theta(B)\varepsilon_t$$

donde:

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p \quad \text{(polinomio AR}(p))$$

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q \quad \text{(polinomio MA}(q))$$

Si los polinomios AR y MA tienen las raíces fuera del círculo unidad, el proceso ARIMA puede representarse de varias formas equivalentes:

$$(1-B)^d y_t = \delta^* + \frac{\theta(B)}{\phi(B)}\varepsilon_t$$

$$(1-B)^d y_t = \delta^* + \psi(B)\varepsilon_t$$

5.4. Modelos integrados (ARIMA)

Representaciones alternativas: Recordemos que cuando un proceso estocástico no tiene raíces AR ni MA dentro del círculo unidad, puede escribirse de forma equivalente como un AR(∞) o un MA(∞):

Ejemplo A. Un AR(1) no explosivo se puede escribir como: $(1-\phi B)y_t = c + \varepsilon_t$

o, alternativamente, como un proceso media móvil infinito:

$$y_t = \frac{c}{1-\phi} + \frac{1}{1-\phi B}\varepsilon_t = \mu + (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \ldots)\varepsilon_t$$

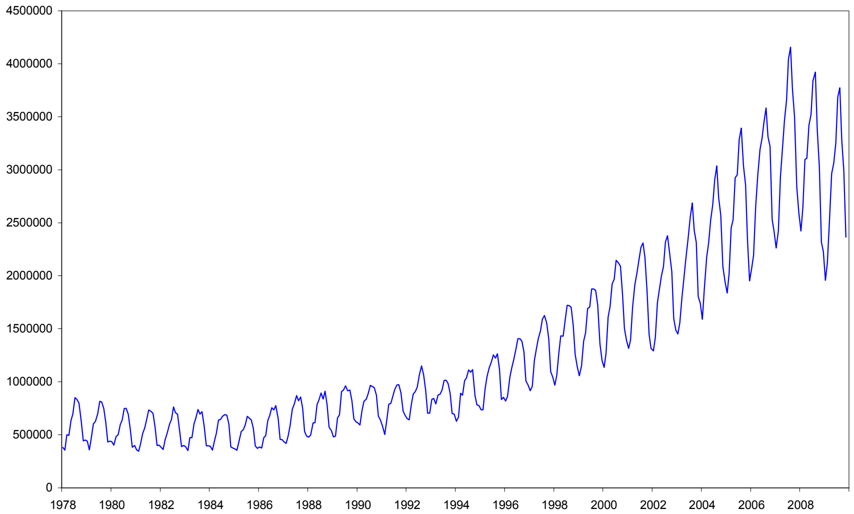
Ejemplo B. Un MA(1) con raíces fuera del círculo unidad se puede escribir como: $y_t = \mu + (1-\theta B)\varepsilon_t$ o, alternativamente, como:

$$\frac{1}{1-\theta B} y_t = \frac{\mu}{1-\theta} + \varepsilon_t \; ; \; (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \ldots) y_t = c + \varepsilon_t$$

Esto implica que un proceso ARIMA no deja de ser una aproximación con finitos parámetros a procesos estocásticos lineales generales:

- Forma A: $y_t = c + \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 y_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t$
- Forma B: $y_t = \mu + \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots$

5.5. Modelos estacionales (SARIMA)



Pasajeros aeropuertos catalanes

A menudo nos encontramos con series temporales que presentan un claro comportamiento estacional. Para modelizar dichas series tenemos dos opciones: considerar oscilaciones estacionales deterministas o bien estocásticas.

En el caso estocástico, es habitual definir “s” como el número de observaciones incluidas en un ciclo estacional completo (s=12 para datos mensuales, s=4 para datos trimestrales, etc.)

5.5. Modelos estacionales (SARIMA)

Para captar de forma simultanea la componente “regular” y la componente estacional (estocásticas), podemos usar un modelo ampliado que denominaremos SARIMA(p,d,q)x(P,D,Q)$_S$:

$$\phi(B)\Phi_s(B)(1-B)^d(1-B^s)^D y_t = \delta + \theta(B)\Theta_s(B)\varepsilon_t$$

que incluye tres elementos novedosos:

$$\Phi_P(B^S) = 1 - \Phi_1 B^S - \Phi_2 B^{2\cdot S} - \ldots - \Phi_P B^{P\cdot S} \quad \text{(polinomio AR}(P)_S)$$

$$\Theta_Q(B^S) = 1 - \Theta_1 B^S - \Theta_2 B^{2\cdot S} - \ldots - \Theta_Q B^{Q\cdot S} \quad \text{(polinomio MA}(Q)_S)$$

$$\nabla_S = 1 - B^S \qquad \text{(operador diferencia estacional)}$$

5.5. Modelos estacionales (SARIMA)

Modelo $SAR_4(1)$

$$y_t = \Phi_1 y_{t-4} + \varepsilon_t$$

- Esperanza:

$$\mu = E(y_t) = \Phi_1 E(y_{t-4}) = 0$$

- Varianza:

$$\gamma_0 = \text{var}(y_t) = \Phi_1^2 \text{var}(y_{t-4}) + \sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{1-\Phi_1^2}\sigma_\varepsilon^2$$

5.5. Modelos estacionales (SARIMA)

Modelo $SAR_4(1)$

- Función de autocovarianzas:

$$\gamma_1 = E(y_t y_{t-1}) = E[(\Phi_1 y_{t-4} + \varepsilon_t) y_{t-1}] = 0$$

$$\gamma_2 = \gamma_3 = 0$$

$$\gamma_4 = E(y_t y_{t-4}) = E[(\Phi_1 y_{t-4} + \varepsilon_t) y_{t-4}] = \Phi_1 \gamma_0$$

$$\gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = 0$$

$$\gamma_8 = E(y_t y_{t-8}) = E[(\Phi_1 y_{t-4} + \varepsilon_t) y_{t-8}] = \Phi_1 \gamma_4 = \Phi_1^2 \gamma_0$$

$$\gamma_9 = \gamma_{10} = \gamma_{11} = 0$$

- ………….

5.5. Modelos estacionales (SARIMA)

En general

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^S)y_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^S)\varepsilon_t$$

Se puede demostrar que, si r_i son las autocorrelaciones del modelo ARMA(p,q) "regular":

$$\phi_p(B)x_t = \theta_q(B)u_t$$

R_{si} son las autocorrelaciones del modelo ARMA(P,Q) "estacional":

$$\Phi_P(B^S)z_t = \Theta_Q(B^S)v_t$$

y ρ_j son las autocorrelaciones del modelo completo, se cumple la siguiente relación:

$$\rho_j = \frac{r_j + \sum_{i=1}^{\infty} R_{si}(r_{si+j} + r_{si-j})}{1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} r_{si}R_{si}}$$

5.5. Modelos estacionales (SARIMA)

$$\rho_j = \frac{r_j + \sum_{i=1}^{\infty} R_{si}(r_{si+j} + r_{si-j})}{1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} r_{si} R_{si}}$$

1) Para j “pequeños”, (j=1..6) se cumple: $\rho_j \simeq r_j$

2) Para j=12×i (retardos estacionales): (suponiendo s=12)

$$\rho_{12i} \simeq R_{12i}(r_{24i} + r_0) + R_{24i}(r_{36i} + r_{12i})$$

Como $\rho_{12i} \simeq 0$ entonces $\rho_{12i} \simeq R_{12i}$

3) Alrededor de los retardos estacionales podemos observar la interacción de las dos partes (regular y estacional).