UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

**PROVA DE TEORIA REAVALUACIÓ**
Programació Lineal i Entera, curs 2012-13
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM ALUMNE:

| | Temps estimat | Punts | Correcció | Material d'ajut. |
|---|---|---|---|---|
| **Test** | 30min | 2.0 pt | | Cap. |
| **Exercici 1** | 75min | 5.0 pt | | Amb transparències de teoria i calculadora. |
| **Exercici 2** | 45min | 3.0 pt | | |
| **Total** | 150min | 10 pt | | |

**TEST (2 punts / 30 min / sense apunts)**

- Encercleu a **cada** possible resposta **a), b)** i **c)** si és certa (**Sí**) o falsa (**No**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

**TEST 1.** El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n | \; Ax = b, x \geq 0\}$:

**a) Sí / No** És tancat i afitat. - N
**b) Sí / No** És un polítop - N
**c) Sí / No** Conté alguna solució bàsica factible. - N

**TEST 2.** Donat el problema $(PL)$ $\min_{x\in R^n}\left\{c'x \middle| \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, x \geq 0\right\}$:

**a) Sí / No** Les bases de $(PL)$ són $\mathcal{B} = \{1,2\}$, $\mathcal{B} = \{1,3\}$ i $\mathcal{B} = \{2,3\}$. - N
**b) Sí / No** $x_B = [x_1 \quad x_2]'$ és una solució bàsica factible. - N
**c) Sí / No** El políedre associat a $(PL)$ té dos punts extrems. - N

**TEST 3.** Donat el problema $(PL)$ $\min_{x\in R^n}\left\{c'x \middle| \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \; x \geq 0\right\}$:

**a) Sí / No** El poliedre de associat a $(PL)$ té tres punts extrems. - S
**b) Sí / No** El poliedre de associat a $(PL)$ té tres solucions bàsiques factibles - N
**c) Sí / No** Totes les solucions bàsiques de $(PL)$ són factibles. - S

**TEST 4.** Donat el problema $(PL)$ $\min_{x\in R^n}\left\{z = x_1 \middle| \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \; x \geq 0\right\}$ i la base $\mathcal{B} = \{1,4\}$:

**a) Sí / No** La direcció bàsica factible associada a la v.n.b. $q = 2$ és $d_B = [-1 \quad -1]'$. - S
**b) Sí / No** La direcció bàsica factible associada a la v.n.b. $q = 2$ és de descens. – S.
**c) Sí / No** $\mathcal{B} = \{1,4\}$ és òptima. –N.

**TEST 5.** Sigui $P$ un políedre no buit en forma estàndard, i sigui $x$ s.b.f. de $P$ amb costos reduïts $r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N$. Llavors:

**a) Sí / No** Si $r > 0 \Rightarrow x$ és òptima.- S
**b) Sí / No** Si $x$ és òptima $\Rightarrow \; r \geq 0$.- N
**c) Sí / No** Si $r = 0 \Rightarrow x$ no és òptima.- N.

**TEST 6.** Donat un problema $(PL)$ qualsevol amb $n$ variables i $m$ desigualtats, sabem que el nombre d'iteracions de l'algorisme:

**a) Sí / No** Es pot expressar com una expressió polinòmica de $n$ i $m$. – N (no se sap).
**b) Sí / No** No es pot expressar com una expressió polinòmica de $n$ i $m$. – N (no se sap).
**c) Sí / No** En la pràctica s'observa que depèn polinòmicament de $n$ i $m$. – S.

**TEST 7.** En un joc finit de suma zero, el teorema minimax:

**a) Sí / No** Indica que és possible que per algun dels dos jugadors no existeixi estratègia òptima. - N

**b) Sí / No** Indica que és impossible que els dos jugadors tinguin un guany net positiu. - S

**c) Sí / No** Assegura que el problema del jugador 1 satisfà que $z_P^* \equiv z_D^*$. – S.

**TEST 8.** Si un problema $(P)$ és infactible, el seu dual $(D)$:

**a) Sí / No** Segur que és il·limitat. – N.

**b) Sí / No** Segur que és infactible. – N.

**c) Sí / No** No tindrà solució.– S.

**TEST 9.** Donat el problema primal $(P)$ si una solució bàsica $\mathcal{B}$ és solució bàsica factible dual llavors:

**a) Sí / No** $r \leq 0$.- N

**b) Sí / No** $\mathcal{B}$ és factible primal.- N.

**c) Sí / No** El vector $\lambda' = c_B' B^{-1}$ dona les coordenades d'un punt extrem del poliedre dual. – S

**TEST 10.** Si introduim la modificació $c_i \leftarrow c_i + \phi_{c_i}$amb $\phi_{c_i} \in \Phi_{c_i} = [\phi_{c_i}^{min}, \phi_{c_i}^{max}]$:

**a) Sí / No** El valor de les variables òptimes pot canviar.- N

**b) Sí / No** El valor de la funció objectiu pot canviar.- S

**c) Sí / No** El valor de les variables dual pot canviar. – S.

**TEST 11.** Donat un problema de programació lineal entera $(PE)$ de minimització i la seva relaxació lineal $(RL)$ es satisfà:

**a) Sí / No** $KPE \supseteq KRL$ . – N.

**b) Sí / No** $z_{RL}^* \leq z_{PE}^*$. – S.

**c) Sí / No** $(PE)$ només té solució òptima si $KRL$ és un polítop. – N.

**TEST 12.** Donades dues formulacions vàlides $(PE1)$ i $(PE2)$ de $(PE)$, si $(PE1)$ és més forta que $(PE2)$ podem assegurar que:

**a) Sí / No** $K_{PE1} \subset K_{PE2}$. – N

**b) Sí / No** $K_{RL1} \subset K_{RL2}$. – S

**c) Sí / No** $(PE1)$ conté més desigualtats vàlides que $(PE2)$. - N

**TEST 13.** La formulació ideal $(PEI)$ d'un problema de programació lineal entera $(PE)$:

**a) Sí / No** Té la mateixa solució òptima que $(PE)$. – S.

**b) Sí / No** Tots els punts extrems KRLI pertanyen a KPE. – S.

**c) Sí / No** És la formulació vàlida de $(PE)$ que s'obté en finalitzar l'algorisme de plans de tall de Gomory. – N.

**TEST 14.** La formulació ideal $(PEI)$:

**a) Sí / No** És la formulació més forta possible. – S

**b) Sí / No** Té associat un polièdre amb punts extrems enters. – S.

**c) Sí / No** Necessitarà una única ramificació quan s'apliqui B&B.- N.

**TEST 15.** El tall de Gomory $x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor x_{B(i)}^* \rfloor$ associat a $(PE)$ i $x_{RL}^*$és una constricció de desigualtat:

**a) Sí / No** Que no satisfà $x_{RL}^*$. – S.

**b) Sí / No** Que no satisfà $x_{PE}^*$. – N.

**c) Sí / No** Que defineix una formulació ideal de $(PE)$. – N.

**EXERCICI 1. (5 punts / 1h 15min / amb transparències de teoria i calculadora)**

Certa empresa fabrica els productes A, B i C. En la fabricació d'aquests tres productes es consumeixen un tipus de recurs, amb una disponibilitat màxima de $b_1 = 20Tm$. A més, l'empresa s'ha compromès a satisfer una certa demanda no inferior a $b_2 = 15Tm$. Els costos de fabricació d'una unitat de producte A, B y C són, respectivament, 10, 2 i 3 u.m. (unitats monetàries). El problema lineal $(P)$ que permet calcular les quantitats de producte A $(x_1)$, B $(x_2)$ i C $(x_3)$ que minimitzen els costos de producció és:

$$(P)\begin{cases} \min & z = 10x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & \\ \text{s.a.:} & & & & & \\ & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 20 & \textit{Recurs} \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq 15 & \textit{Demanda} \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 & \end{cases}$$

a) **(1.0 punts)** Sense realitzar cap iteració del mètode del simplex, comproveu que la producció òptima correspon a la base $\mathcal{B} = \{2,3\}$

b) **(1.5 punts)** Formuleu el dual de $(P)$ i representeu-lo gràficament. Trobeu totes les solucions bàsiques factibles del problema dual i identifiqueu l'òptima. Comproveu que el valor de les variables duals a l'òptim $\lambda^*$ coincideix amb el que proporciona el corol·lari del teorema fort de dualitat.

c) **(1.5 punts)** Considereu que el cost de fabricació del producte A passés a ser $1/2$ u.m. Analitzeu si amb aquest canvi la base $\mathcal{B} = \{2,3\}$ continuaria essent òptima. En cas que la resposta sigui negativa, trobeu la nova solució òptima.

d) **(1.0 punts)** L'empresa vol saber quin és el mínim valor la disponibilitat de recursos $b_1^{\min}$ que permet satisfer la demanda actual $b_2 = 15Tm$. Trobeu aquest valor mínim usant la repressantació gràfica del problema dual $(D)$ i expliqueu què passaria si $b_1 < b_1^{\min}$. Quina repercussió econòmica té passar del valor original $b_1 = 20Tm$ al valor mínim $b_1^{\min}$?

**EXERCICI 2. (3 punts / 45min / amb transparències de teoria i calculadora)**

Considereu el següent problema de programació lineal entera $(PE)$:

$$(PE)\begin{cases} \min & x_1 & -x_2/2 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \leq 2 & (r1) \\ & 3x_1 & +x_2 & \geq 3 & (r2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, \text{ enteres} & \end{cases}$$

a) **(2 punts)** Trobeu la solució òptima de $(PE)$ amb l'algorisme de ramificació i tall (*Branch & Cut* ) aplicat seguint les següents indicacions:

- Ressoleu els problemes relaxats **gràficament**.
- Introduïu **un tall de Gomory** a cada node de l'arbre d'exploració..
- Trieu com a variable de generació del tall i de ramificació $\boldsymbol{x_1}$ **abans que** $\boldsymbol{x_2}$.
- Exploreu **primer la branca de l'esquerra** $(x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor)$.

b) **(1 punt)** Expliqueu quina és la millora que s'obté en aplicar l'algorisme de B&C al problema (PE) en relació a l'aplicació de l'algorisme de B&B comparant els respectius arbres d'exploració.

**SOLUCIÓ EXERCICI 1.**

a) Cal comprovar la factibilitat primal i dual de la base:

$$(PL)_e \begin{cases} \min & 10x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & & & \\ \text{s.a.:} & & & & & & & \\ & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & =20 & Recurs \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5 & =15 & Demanda \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 & \end{cases}$$

- $\mathcal{B}=\{2,3\}, B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$
- Factibilitat primal: $x_B=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\ 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 10\end{bmatrix}\geq 0 \Rightarrow$factible primal
- Factibilitat dual: $\mathcal{N}=\{1,4,5\}$

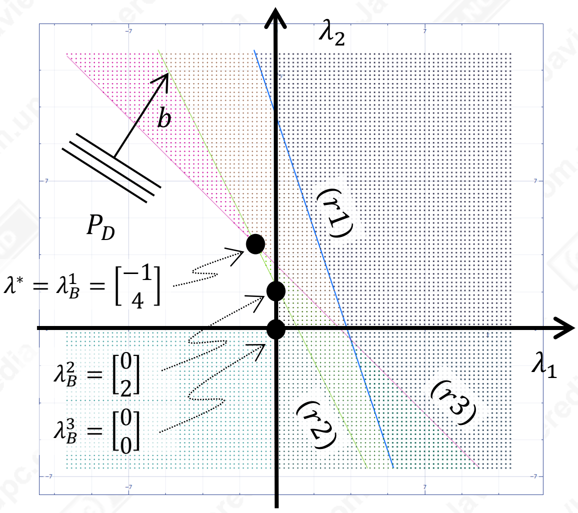
$$r'=c_N'-\lambda' A_N=[10 \quad 0 \quad 0]-\overbrace{[2 \quad 3]\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}}^{\lambda'=c_B'B^{-1}=[-1 \quad 4]}\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=[9 \quad 1 \quad 4]\geq 0 \Rightarrow \text{fact dual}$$

- $\mathcal{B}=\{2,3\}$ factible primal i dual $\Rightarrow$òptima.

b) El probleme dual és:

$$(D)\begin{cases} \max_\lambda z_D = & 20\lambda_1 & +15\lambda_2 & & \\ \text{s.a.:} & 3\lambda_1 & +\lambda_2 & \leq 10 & (r1) \\ & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & \leq 2 & (r2) \\ & \lambda_1 & +\lambda_2 & \leq 3 & (r3) \\ & \lambda_{1,} & & \leq 0 & \\ & & \lambda_2 & \geq 0 & \end{cases}$$

Les solucions bàsiques factibles coincideixen amb els punts extrems $\lambda_B^1$, $\lambda_B^2$, $\lambda_B^3$ amb conjunt de variables bàsiques $\mathcal{B}^1=\{1,2,3\}$, $\mathcal{B}^2=\{2,3,5\}$ i $\mathcal{B}^3=\{3,4,5\}$ respectivament.Observem que la s.b.f. òptima trobada gràficament ($\lambda^*=\lambda_B^1$) coincideix amb el valor de les variables duals trobat a l'apartat anterior: $\lambda'=c_B'B^{-1}=[-1 \quad 4]$




Gràfica apartat b): $(D)$.

c) La variable $x_1$ és v.n.b.: un canvi en el seu coeficient de cost només pot afectar a la factibilitat dual de la base a través del seu cost reduït $r_1$:

$r_1=1/2-\lambda' A_1=1/2-[-1 \quad 4]\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}=-1/2 \ngeq 0 \rightarrow$ es perd la factibilitat dual de la base, cal reoptimitzar amb l'algorisme del símplex primal.

- **1a iteració:** $\mathcal{B}=\{2,3\}, x_B=\begin{bmatrix}5\\ 10\end{bmatrix}, z=80, \mathcal{N}=\{1,4,5\}$
  - Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada $q$ :

$$r'=c'_N-c'_BB^{-1}A_N=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}-[-1 \quad 4]\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=$$
$$=[-1/2 \quad 2 \quad 4]\ngeq 0 \rightarrow \boxed{q=1}$$

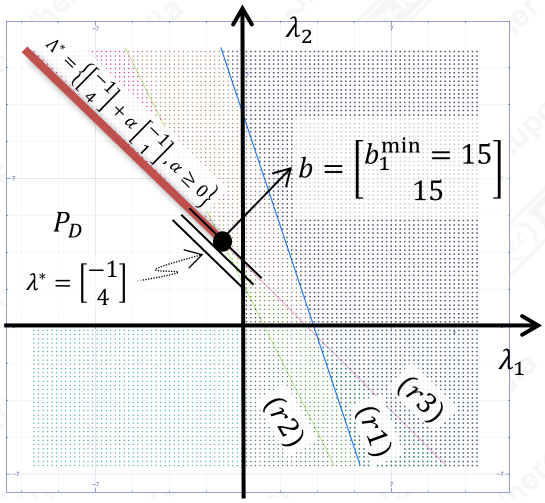
  - Id. de problema il·limitat : $d_B=-B^{-1}A_1=-\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix}\ngeq 0$
  - Sel. v.b. de sortida $B(p)$:

$\theta^* = \min\{-x_{B(i)}/d_{B(i)} : i = 1,3\} = \min\{5/2, 15/1\} = 5/2 \Rightarrow \boxed{p = 1, B(1) = 2}$

- Actualitzacions i canvi de base:
  - $x_B = \begin{bmatrix} x_{B(2)} \\ x_{B(3)} \end{bmatrix} \leftarrow x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} + \frac{5}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{15}{2} \end{bmatrix}, x_1 = \theta^* = \frac{5}{2}, z \leftarrow z + \theta^* r_q = 80 + \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{315}{4}$
  - $\mathcal{B} \leftarrow \{1,3\}, \mathcal{N} \leftarrow \{2,4,5\}, \mathrm{B} \leftarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$
- **2a iteració:** $\mathcal{B} = \{1,3\}, x_B = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix}', \mathcal{N} = \{2,4,5\}$
  - Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada $q$ :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [2 \quad 0 \quad 0] - \overbrace{[1/2 \quad 3] \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}}^{\lambda' = \left[-\frac{5}{4} \ \ \frac{17}{4}\right]} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [1/4 \quad 5/4 \quad 17/4]$$
$$\geq 0 \rightarrow \boxed{\mathcal{B} = \{1,3\} \text{ s.b.f. òptima}}$$

d) Analitzant gràficament el problema dual observem que una disminució del valor de $b_1$ comporta un canvi en la funció objectiu dual $z_D = b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2$. En particular, si mantenim fixa la demanda $b_2 = 15$, una disminució de $b_1$ provoca un canvi en la direcció del vector de costos duals $b$. Aquesta disminució té com a límit el valor $b_1^{\min} = b_2 = 15$, situació en la qual tota l'aresta del políedre dual $P_D$associada a la constricció dual $(r3)$ seria òptima $(\Lambda^*)$. Per sota de $b_1^{\min} = 15$ el problema dual esdevé il·limitat, doncs el vector director de $(r3)$, $v = [-1 \quad 1]'$és una direcció d'ascens il·limitada ($b'v = b_2 - b_1 > 0$ si $b_1 < 15$) i, conseqüentment, el problema primal és infactible.



Gràfica apartat d)

La repercussió econòmica $\Phi_z$ del canvi $\phi_{b_1} = b_1^{min} - b_1 = -5$ ens la proporcionen els preus ombra $\lambda^*$:

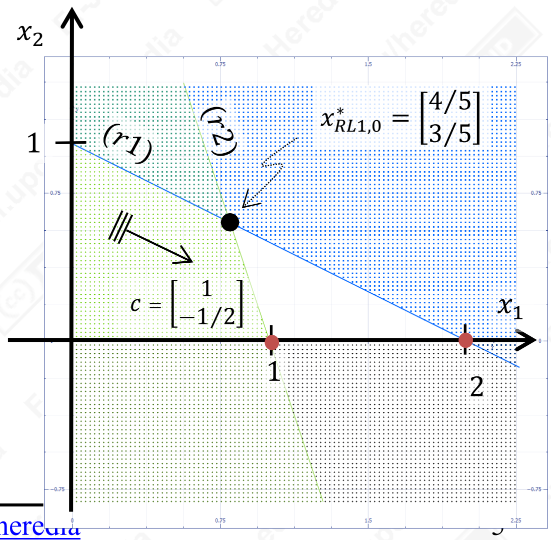
$$\Phi_z = \lambda^{*\prime}\Phi_b = \lambda^{*\prime}(\phi_{b_1} e_1) = \phi_{b_1}\lambda_1^* = -5(-1) = 5$$

Així doncs, una disminució de cinc toens en la disponibilitat dels recursos faria augm,entar en 5u.m. els costos de producció.

**SOLUCIÓ EXERCICI 2.**

a) Representació gràfica:

$$(PE1)\begin{cases} \min & x_1 & -x_2/2 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \leq 2 & (r1) \\ & 3x_1 & +x_2 & \geq 3 & (r2) \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, \text{enteres} & \end{cases}$$



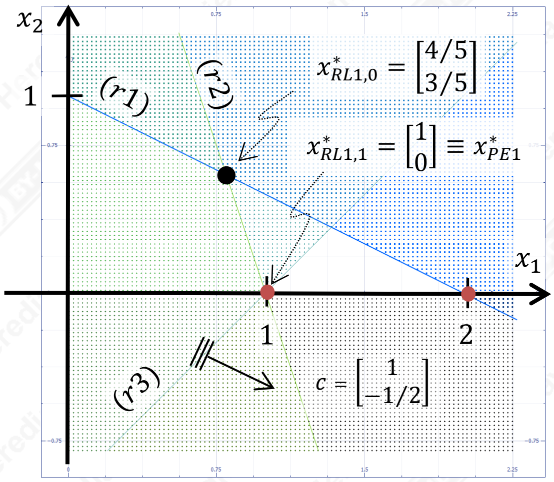
Gràfica apartat a): $(RL1,0)$.

**Inicialització:** $L = \{(PE1)\}, z_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

**Iteració 1:** $L = \{(PE1)\}, z_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.

- **Resolució de $(\boldsymbol{RL1})$ amb un tall de Gomory**:
  - Resolució de $(RL1{,}0)$: $x^*_{RL1,0} = [4/5 \quad 3/5]', z^*_{RL1,0} = 1/2 \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := 1/2$
  - Tall de Gomory sobre $x^*_{RL1,0}$ associat a $x_1$:
    - $\mathcal{B} = \{1,2\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{bmatrix}$
    - $A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} -1/5 & -2/5 \\ 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$
    - $x_1 + \lfloor -1/5 \rfloor x_3 + \lfloor -2/5 \rfloor x_4 \le \lfloor 4/5 \rfloor \to x_1 - x_3 - x_4 \le 0 \xrightarrow[(r1)]{(r2)} \boxed{-x_1 + x_2 \le -1 \;(r3)}$
  - Resolució de $(RL1{,}1) = (RL1{,}0) + (r3)$: $x^*_{RL1,1} = [1 \quad 0]', z^*_{RL1,1} = 1 \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := 1$.




Gràfic apartat a): $(RL1{,}1)$

- **Eliminació:** $x^*_{RL1,1} = [1 \quad 0]' = x^*_{PE1} \Rightarrow$ s'elimina $(PE1)$:
  - $z^* \leftarrow z^*_{PE1} = 1, x^* \leftarrow x^*_{PE1}, L \leftarrow L \backslash \{(PE1)\} = \emptyset$

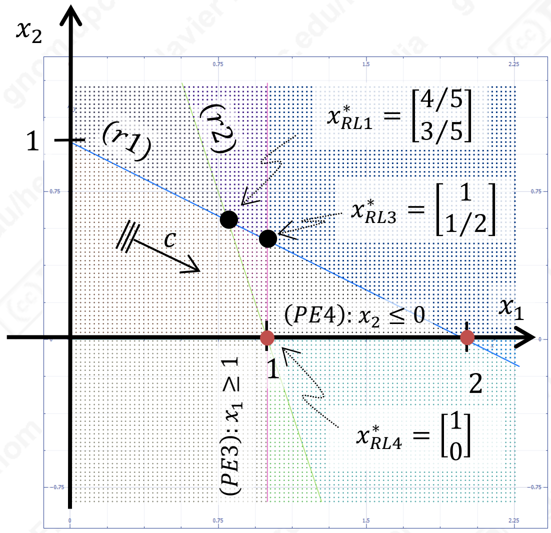
**Iteració 2:** $L = \emptyset \Rightarrow x^*_{PE1} = x^* = [1 \quad 0]', z^*_{PE1} = z^* = 1$.

b) Branch&Bound:

**Inicialització:** $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

**Iteració 1:** $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de $(\boldsymbol{RL1})$**: $x^*_{RL1} = [4/5 \quad 3/5]', z^*_{RL1} = 1/2 \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := 1/2$
- **Eliminació:** no es pot.
- **Separació:**
  $x^*_1 = 4/5 \to \begin{cases} (PE2) \overset{\text{def}}{=} (PE1) + x_1 \le \lfloor 4/5 \rfloor = 0 \\ (PE3) \overset{\text{def}}{=} (PE1) + x_1 \ge \lceil 4/5 \rceil = 1 \end{cases}$
  $L \leftarrow \{(PE2), (PE3)\}$




Gràfic apartat b): B&B

**Iteració 2:** $L = \{(PE2), (PE3)\}, \underline{z}_{PE1} = 1/2, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE2)$.
- **Resolució de $(\boldsymbol{RL2})$**: infactible
- **Eliminació:** $K_{PLE2} = \emptyset \Rightarrow L \leftarrow \{(PE3)\}$

**Iteració 3:** $L = \{(PE3)\}, \underline{z}_{PE1} = 1/2, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE3)$.
- **Resolució de $(\boldsymbol{RL3})$**: $x^*_{RL3} = [1 \quad 1/2]', z^*_{RL3} = 3/4 \Rightarrow \underline{z}_{PE3} := 3/4$
- **Eliminació:** no es pot.
- **Separació:** $x^*_2 = 1/2 \to \begin{cases} (PE4) \overset{\text{def}}{=} (PE3) + x_2 \le \lfloor 1/2 \rfloor = 0 \\ (PE5) \overset{\text{def}}{=} (PE3) + x_2 \ge \lceil 1/2 \rceil = 1 \end{cases} \to L \leftarrow \{(PE4), (PE5)\}$

**Iteració 4:** $L = \{(PE4), (PE5)\}, \underline{z}_{PE1} = 1/2, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE4)$

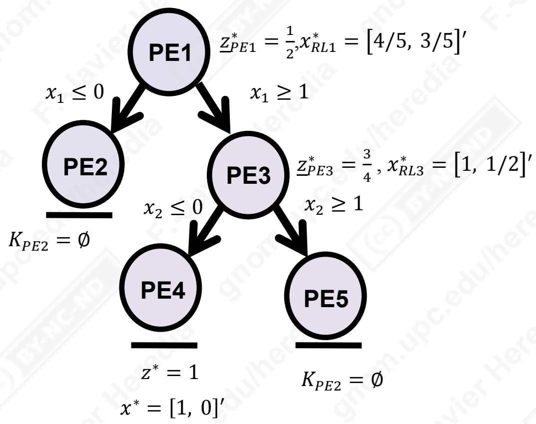
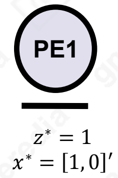
- **Resolució de $(\boldsymbol{RL4})$**: $(RL4) = \min\left\{x_1 - \frac{x_2}{2} : 1 \le x_1 \le 2, x_2 = 0\right\}$: $x^*_{RL4} = [1 \quad 0]', z^*_{RL4} = 1 \Rightarrow \underline{z}_{PE4} := 1$
- **Eliminació:** $x^*_{RL4} = [1 \quad 0]' \subset K_{PE4}$: $x^*_{PE4} = [1 \quad 0]' \Rightarrow$ s'elimina $(PE4)$:
  - $z^* \leftarrow z^*_{PE4} = 1, x^* \leftarrow x^*_{PE4}, L \leftarrow L\backslash\{(PE4)\} = \{(PE5)\}$

**Iteració 5:** $L = \{(PE5)\}, \underline{z}_{PE1} = 1/2, z^* = 1$

- **Selecció**: $(PE5) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + x_1 \ge 1 + x_2 \ge 1$.
- **Resolució de $(\boldsymbol{RL5})$**: infactible
- **Eliminació:** $K_{PLE5} = \emptyset \Rightarrow L \leftarrow \emptyset$

**Iteració 6:** $L = \emptyset, \boxed{x^*_{PE1} = x^* = [1 \quad 0]', z^* = 1}$

Comparativa B&B – B&C:

<table>
<tr><th>Branch & Bound</th><th>Branch & Cut</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

En el cas del B&B el cost computacional seria:

- Una resolució completa del símplex (càlcul de $x^*_{RL1}$).
- Tres reoptimitzacions amb el símplex dual (nodes 2,3 i 4)

En el cas del B&C el cost computacional seria:

- Una resolució completa del símplex (càlcul de $x^*_{RL1,0}$).
- Una reoptimització amb el símplex dual (càlcul de $x^*_{RL1,1}$).

Així doncs, observem que amb el B&C ens estalviem dues reoptimitzacions amb el símplex dual.