Diplomatura d'Estadística. Curs 2000/01. 2on Q.

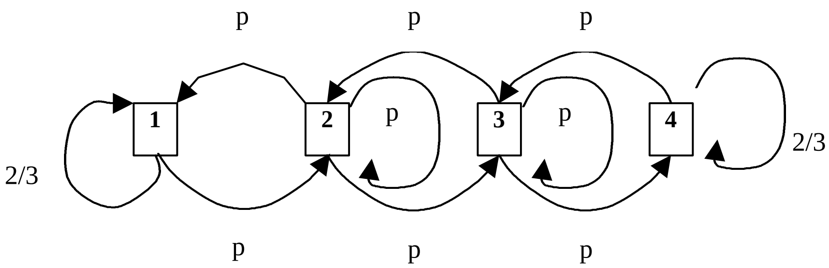
**Investigació Operativa Estocàstica. Examen Final. Segona Convocatòria.**
**Juliol 2001.**

Unes accions es cotitzen en borsa entre 50 i 53€ de forma que, de dia en dia, la seva cotització pot incrementar-se i disminuir només en 1€ o be quedar inalterada respecte del dia anterior. Si la seva cotització no és de 50€ (valor mínim) llavors la probabilitat de que disminueixi en 1€ és de 1/3, mentre que si la seva cotització no és de 53€ (valor màxim) llavors la probabilitat de que augmenti en 1€ és de 1/3. Un determinat inversor compra un paquet d'aquests valors al preu de 52€ l'acció.

Considereu la seqüència { $X_k$ } on la variable aleatòria $X_k$ és la cotització del dia $k$-èssim.

Es demana:

1) Establiu el diagrama d'estats per la cadena { $X_k$ } així com la matriu de probabilitats de transició. Analitzeu les classes de la cadena així com la seva periodicitat.




p=1/3

Hi ha única classe, aperiòdica.

| $X_k$ - Estats, M=4 | $Y_k$ - Preu per acció |
|---|---|
| 1 | 50 |
| 2 | 51 |
| 3 | 52 |
| 4 | 53 |

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}^{(1)}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

2) Suposem que el nostre inversor passa per una situació financera desesperada en un dia arbitrari i ha de donar ordre immediata de venda del paquet d'accions. Quina és l'esperança del guany per acció que podrà obtenir?

$$\begin{matrix}\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\cdot \underline{p}=\underline{p}\\ \underline{p}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{1}=1\end{matrix}\;\rightarrow\;\begin{matrix}\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\right)\cdot\underline{p}=\mathbf{0}\\ \underline{p}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{1}=1\end{matrix}\;\rightarrow\left\{\begin{matrix}\begin{bmatrix}1-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & 1-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 1-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1-\frac{2}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\\ p_1+p_2+p_3+p_4=1\end{matrix}\right.\rightarrow\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

Sigui Z: v.a. guanys per accio (preu de venda – 52), és un guany associat a l'estat i aleshores el guany mig per acció serà la seva esperança matemàtica de Z amb la probabilitat dels estat en règim estacionari (la cadena és ergòdica).

| *Z* | *-2* | *-1* | *0* | *1* |
|---|---|---|---|---|
| *P(Z)* | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4 |
| $X_t$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $Y_t$ | 50 | 51 | 52 | 53 |

$\mathrm{E}[Z]=-2p_Z(-2)-1p_Z(-1)+0p_Z(0)+1p_Z(1)=-\frac{1}{2}\,Euro$ en promig de guany per acció

3) Un dia determinat les accions estan a la seva màxima cotització i l'inversor vol fer-se amb un nou paquet. Per tal d'assegurar-se guanys vol comprar quan les accions estiguin al seu valor mínim. Quin número mig de dies haurà d'esperar a que les accions baixin al màxim?

Demana el temps mig de primer pas des de l'estat 4 a l'estat 1: $m_{41}=18$ dies.

Sigui $\mathbf{P_1}$ una matriu de dimensió *M-1=3* que conté les components de la matriu **P** ***menys la fila i la columna primera***:

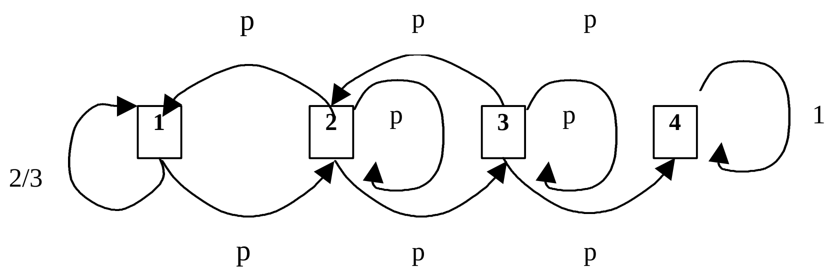
$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix}p_{22} & p_{23} & p_{24}\\ p_{32} & p_{33} & p_{34}\\ p_{42} & p_{43} & p_{44}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$\underline{m}_1=\left(\mathbf{I}-\mathbf{P}_1\right)^{-1}\mathbf{1}=\begin{bmatrix}m_{21}\\m_{31}\\m_{41}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\15\\18\end{bmatrix}\text{ dies}$$

Notem $\underline{m}_1$ al vector columna que té totes les components $m_{i1}$ excepte la primera $m_{11}$, és a dir: $\underline{m}_1^T=\left[m_{21}\ m_{31}\ m_{41}\right]$. La resposta és que haurà d'esperar un promig de 18 dies per tal de trobar el preu del paquet en el seu valor mínim, a partir d'un dia en que es trobi al preu màxim.

1) En un altre situació financera delicada l'inversor vol vendre les accions que va comprar a 52€. Aquesta vegada dona la següent ordre de venda quan les accions estan a 51€: fixa un preu de venda a 53€ i un plaç màxim de venda de tres dies. Per tant les accions es venen a 53€ si es que el primer, segón o tercer dia pujen a aquest preu o be el tercer dia són venudes al preu que tinguin a aquell dia. Quina és la probabilitat de vendre a 53€? Quina és l'esperança del guany que obtindrà per acció?

p=1/3




| $X_t$ - *Estats, M=4* | $Y_t$ - *Preu acció* |
|---|---|
| *1* | *50* |
| *2- Inicial* | *51* |
| *3* | *52* |
| *4* | *53* |

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inicialment, l'estat és 2 (preu a 51 Euros). L'estat 4 esdevé un estat absorbent.

La probabilitat de vendre a 53 Euros $p_{24}^{(3)}$.

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(3)} = \mathbf{P}^{(2)}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{27} & \frac{1}{3} & \frac{4}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{27} & \frac{5}{27} & \frac{5}{27} \\ \frac{4}{27} & \frac{5}{27} & \frac{4}{27} & \frac{14}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'on $p_{42}^{(3)}$ , la probabilitat de comprar a 51 Euros demanada és de $p_{24}^{(3)} = \frac{5}{27}$.

L'esperança del guany que obtindrà per paquet és l'esperança de la v.a Z :

- Un guany de –2 Euro té per probabilitat $p_{21}^{(3)} = \frac{1}{3}$.
- Un guany de –1 Euro té per probabilitat $p_{22}^{(3)} = \frac{8}{27}$.
- Un guany de 0 Euro té una probabilitat $p_{23}^{(3)} = \frac{5}{27}$.
- Un guany de 1 Euro té per probabilitat $p_{24}^{(3)} = \frac{5}{27}$.

$\mathrm{E}[Z] = -2p_Z(-2) - 1p_Z(0-1) + 1p_Z(1) = (-2)\frac{1}{3} + (-1)\frac{8}{27} + 1\frac{5}{27} = -\frac{7}{9}\,Euro$ en promig el guany per paquet, és a dir 7/9 de pèrdua promig per paquet en la tessitura descrita.