UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH Departament d'Estadística i Investigació Operativa	**PROVA DE TEORIA AVALUACIÓ FINAL/ÚNICA** Programació Lineal i Entera, curs 2016-17 2on curs Grau en Estadística UB-UPC
NOM ALUMNE:	

	Temps estimat	Punts	Puntuació			
Test	30 min	2 pts	C:	I:		**PROHIBIDA LA PRESÈNCIA DE MÒBILS DURANT LA PROVA. PARTICIPAR EN UN CAS DE CÒPIA IMPLICA SUSPENDRE LA PROVA AMB NOTA NUMÈRICA ZERO.**
Exercici 1	75 min	5 pts	a: 2.5pt	b: 1.5pt	c: 1.0pt	
Exercici 2	45 min	3 pts	a: 2.0pt	b: 1.0pt		
Total	150min	10 pts				

TEST (2 punts / 15 min / sense apunts)

- Encercleu **V** (vertader) o **F** (fals) o indiqueu a l'espai [   ] el contingut mancant a $\boxed{}$.
- Resposta correcta +1pt, incorrecta -0.4pts., en blanc 0.pts.

TEST 1. L'embolcall convex del conjunt finit de vectors $x^1, x^2, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$, $CH(x^1, \dots, x^k)$:

a) V / F Si $x^1, \dots, x^k$ són els punts extrems d'un políedre P, llavors $CH(x^1, \dots, x^k) \equiv P$. (F)

b) V / F És un politop. (V)

c) V / F És el conjunt de combinacions lineals de $x^1, x^2, \dots, x^k$. (F)

TEST 2. Considereu el problema $(PL)_e \ \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{c'x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ amb $rang(A) < m$:

a) V / F Si eliminem les constriccions associades a files de A linealment dependents amb la resta, el políedre P_e associat a la regió factible no queda afectat. V

b) V / F Si $P_e \neq \emptyset$, el políedre Q_e resultant d'eliminar les constriccions associades a files de A linealment dependents amb la resta és també no buit. V

c) V / F Si eliminem les constriccions associades a files de A linealment dependents amb la resta, el problema $(PL)_e$ té solució. F

TEST 3. Considerem la forma estàndard del següent problema

$$(PL) \ \min_{x \in R^2} \left\{ -2x_2 \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; x \geq 0 \right\} \text{ i la SBF } x = [1 \quad 0]' \text{ amb } \mathcal{B} = \{1,4\}:$$

a) V / F $d = [-1 \quad 0]'$ és una direcció bàsica de descens sobre $\mathcal{B}$. (F)

b) V / F $d = [-1 \quad 0]'$ és una direcció bàsica sobre $\mathcal{B}$. (V)

c) V / F $d = [0 \quad 1]'$ és una direcció bàsica de descens sobre $\mathcal{B}$. (V)

TEST 4. Segons el teorema que estableix les condicions d'optimalitat de les solucions bàsiques factibles:

a) V / F Si x és SBF òptima no degenerada llavors $r \geq 0$. (V)

b) V / F Si $r \geq 0$ llavors x és SBF òptima. (V)

c) V / F Si x és SBF òptima llavors $r \geq 0$. (F)

TEST 5. Si en acabar la fase I del símplex observem que la base òptima $\mathcal{B}_I^*$ conté variables artificials:

a) V / F El problema (PL) és factible. (F)

b) V / F El problema (PL) és infactible. (F)

c) V / F Si el problema (PL) és factible llavors la base $\mathcal{B}_I^*$ és una SBF degenerada de (PL_I). (V)

TEST 6. Sigui x SBF de P_e, $d \ngeq 0$ DBF sobre x i θ^* la longitud de pas màxima associada (si existeix). Llavors podem assegurar que:

a) V / F $y = x + \theta^* d$ és punt extrem de P_e. F
b) V / F $y = x + \theta^* d \neq x$. F
c) V / F $y = x + \theta^* d \in P_e$. V

TEST 7. El nombre d'iteracions de l'algorisme del símplex necessàries per a resoldre un problema de n variables i m constriccions:

a) V / F Sabem que es pot expressar com un polinomi de n i m. (F)
b) V / F En la pràctica s'aproxima al nombre de variables del problema n. (F)
c) V / F En la pràctica s'aproxima al nombre de constriccions del problema m. (V)

TEST 8. D'acord amb el Ta. feble de dualitat:

a) V / F Si λ^* i x^* són òptims primal i dual respectivament, llavors $\lambda^{*\prime} b = c' x^*$. (F)
b) V / F Si (P) és il.limitat $\Rightarrow$ (D) és infactible. (V)
c) V / F Si (P) és infactible $\Rightarrow$ (D) és il·limitat. (F)

TEST 9. Si el valor del terme independent $\phi_{b_j} = b_j + \Delta b_j$ surt fora del seu interval d'estabilitat llavors podem assegurar que:

a) V / F La nova solució òptima millorarà sempre el valor de l'actual. (F)
b) V / F Es podrà aplicar el símplex dual per a reoptimitzar. (V)
c) V / F Alguna variable dual canviarà. (V)

TEST 10. Segons el Ta. de folga complementària, les solucions x i λ factibles primals i duals :

a) V / F Satisfàn $\lambda' b \leq c' x$. F
a) [ ] Satisfàn $\lambda_j \left(\boxed{\ ?\ } \right) = 0,\ j = 1,2, \dots, m. \rightarrow \left(a_j' x - b_j \right)$
b) [ ] Satisfàn $\left(\boxed{\ ?\ } \right) x_i = 0,\ i = 1,2, \dots, n. \rightarrow (c_i - \lambda' A_i)$

TEST 11. Donades dues formulacions vàlides $(PE1)$ i $(PE2)$ del problema de maximització (PE):

a) V / F $K_{PE1} \subset K_{PE2}$. F
b) V / F $K_{RL1} \subset K_{RL2} \Rightarrow z_{PE1}^* > z_{PE2}^*$. F
c) V / F $K_{RL1} \subset K_{RL2} \Rightarrow (PE1)$ és més forta que $(PE2)$. V

TEST 12. A l'alg. de B&C, el criteris d'eliminació del subproblema (PEj) de minimització són:

a) [ ] $K_{RLj} = \boxed{\ ?\ }$. $\rightarrow \emptyset$
b) [ ] $\underline{z}_{PEj}^* \boxed{\ ?\ } z^*$. $\rightarrow \geq$
c) [ ] $x_{RLj}^* \boxed{\ ?\ } x_{PEj}^*$. $\rightarrow \equiv$

TEST 13. El tall associat a (PE) i x_{RL}^*és una constricció de desigualtat:

a) V / F Que no satisfà x_{RL}^*. V
b) V / F Que no satisfà x_{PE}^*. F
c) V / F Que defineix una formulació ideal de (PE). F

TEST 14. Considerem el següent problema (PE) $\min_{x \in R^2} \left\{ z_{PE} = x_1 + x_2 \mid x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}, x \text{ binària} \right\}$:

a) V / F $x_1 + x_2 \geq 3/4$ és un tall sobre x_{RL}^*. (V)
b) V / F $x_1 + x_2 \geq 1/4$ és un tall sobre x_{RL}^*. (F)
c) V / F $x_1 + x_2 \geq 1$ és un tall sobre x_{RL}^*. (V)

TEST 15. Quan apliquem un algorisme de Branch&Cut a un problema de (PE):

a) V / F Els criteris de ramificació son diferents als de l'algorisme de Branch&Bound. (F)
b) V / F En general, realitzarà menys iteracions que Branch&Bound. (V)
c) V / F Les fites $\underline{z}_{PEi}^*$ són, en general, millors que les que s'obtenen amb el B&B. (V)

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

PROVA DE TEORIA AVALUACIÓ FINAL/ÚNICA
Programació Lineal i Entera, curs 2016-17
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM :

EXERCICI 1. (5 punts / 75min / apunts i calculadora / RESPONEU A L'ESPAI INDICAT)

Considereu el següent problema de programació lineal (P):

$$(P)\begin{cases} \min & x_1 & & +x_3 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & +2x_3 & \leq 4 \\ & 4x_1 & -5x_2 & & = 10 \\ & x_{1,} & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}$$

a) **(2.5 punt)** Comproveu, aplicant l'algorisme del símplex de les dues fases, que la base òptima de (P) és $\mathcal{B}^* = \{1,4\}$.

Resposta:

b) **(1.5 punt)** Formuleu el problema dual de (P) i representeu-lo gràficament. Comproveu que la base òptima primal $\mathcal{B}^* = \{1,4\}$ és l'associada a la solució òptima dual λ^*.

Resposta:

c) **(1.0 punt)** Indiqueu quin és el valor mínim del terme b_1, que anomenarem b_1^{min}, que conserva l'optimalitat de $\mathcal{B}^* = \{1,4\}$.

Resposta:

NOM :

EXERCICI 2. (3 punts / 45min / apunts i calculadora / RESPONEU A L'ESPAI INDICAT)

Considereu el problema de programació lineal entera següent:

$$(PE)\begin{cases} \text{min} & -x_1 & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & \leq 2 & (r1) \\ & \frac{1}{2}x_1 & -x_2 & \leq \frac{1}{4} & (r2) \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, enteres & \end{cases}$$

a) **(2 punts)** Volem resoldre el problema anterior amb l'algorisme de ramificació i tall (Branch&Cut) amb les següents indicacions:

- Resoleu les relaxacions lineals **gràficament.**
- Reforceu les relaxacions lineals **amb un tall de Gomory**.
- Trieu com a variable de **generació de tall x_2 abans que x_1**.
- Trieu com a variables de **ramificació x_1 abans que x_2**.
- Exploreu primer la **branca de l'esquerra** ($x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$)

Heu d'indicar les passes de cada iteració de l'algorisme detallades i ordenades, la representació gràfica on es vegi la solucions a les relaxacions lineals i l'arbre d'exploració final.

Resposta:

b) **(1 punt)** Representeu l'arbre d'exploració de l'algorisme de ramificació i poda (B&B) pel mateix problema (PE) (no cal que escriviu les iteracions de l'algorisme). Quina és l'avantatge per a aquest problema en concret, si es que n'hi ha cap, d'aplicar l'algorisme de ramificació i tall (B&C) en comparació amb l'algorisme de ramificació i poda (B&B).

Resposta:

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

a) Forma estàndard (PL_e) i problema de fase I (PL_I):

$$(PL_e)\begin{cases}\min & x_1 & & +x_3 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & +2x_3 & +x_4 & =4\\ & 4x_1 & -5x_2 & & & =10\\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0\end{cases}$$

$$(PL_I)\begin{cases}\min & x_5 & & & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & +2x_3 & +x_4 & & =4\\ & 4x_1 & -5x_2 & & & +x_5 & =10\\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0\end{cases}$$

1a iteració fase I:

- $\mathcal{B} = \{4,5\}, B = I, x_B = [4 \quad 10]', \mathcal{N} = \{1,2,3\}, z_I = 10$
- Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q :
- $r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0] - [0 \quad 1] I \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & -5 & 0\end{bmatrix} = [-4 \quad 5 \quad 0] \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q=1}$
- Direcció bàsica de descens : $d_B = -B^{-1}A_1 = -I\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel·lecció VB de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i\in\mathcal{B}|d_{B(i)}<0}\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\} = \min\left\{\frac{4}{1}, \frac{10}{4}\right\} = \frac{5}{2} \Longrightarrow$ $\boxed{p=2, B(2)=5}$
- Actualitzacions i canvi de base :
  - $x_B = \begin{bmatrix}x_4\\x_5\end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix} + \frac{5}{2}\times\begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/2\\0\end{bmatrix}, x_1 = \theta^* = \frac{5}{2}, x_2 = x_3 = 0,\ z := z + \theta^* r_q = 10 + \frac{5}{2}\times(-4) = 0$
  - $\mathcal{B} := \{4,1\},\ \mathcal{N} := \{2,3,5\}$. Hem eliminat totes les variables artificials de la base: $\Rightarrow \mathcal{B} := \{4,1\}$ és una SBF inicial del problema (PL_e).

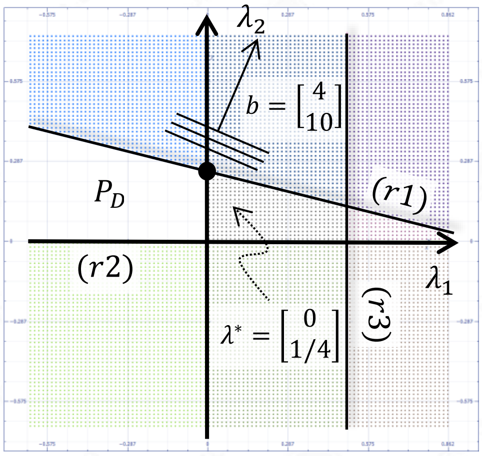
1a iteració fase II:

- $\mathcal{B} = \{4,1\}, B = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1/4\\0 & 1/4\end{bmatrix}, x_B = [3/2 \quad 5/2]',\ \mathcal{N} = \{2,3\}, z = 5/2$
- Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 1] - [0 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & -1/4\\0 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\-5 & 0\end{bmatrix} = [5/4 \quad 1] \geq 0 \rightarrow \boxed{\grave{o}ptim}$$

b) Formulació del problema dual:

$$(D)\begin{cases}\max & 4\lambda_1 & +10\lambda_2 & & \\ \text{s.a.:} & \lambda_1 & +4\lambda_2 & \leq 1 & (r1) \\ & & -5\lambda_2 & \leq 0 & (r2) \\ & 2\lambda_1 & & \leq 1 & (r3) \\ & \lambda_1 \leq 0 & & & (r4)\end{cases}$$



La solució dual corresponent a la base $\mathcal{B}^* = \{1,4\}$ és:

$$\lambda^* = c_B' B^{-1} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

Es pot observar fàcilment a la gràfica adjunta que aquest vector és òptim dual.

c) Interval d'estabilitat de b_1:

$$x_B(b_1) = \begin{bmatrix}x_4(b_1)\\x_1(b_1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1/4\\0 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1 - 5/2\\5/2\end{bmatrix} \overset{\substack{\text{cond.}\\\text{fact. (P)}}}{\geqq} \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{b_1 \geq b_1^{\min} = 5/2}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 2.

a) Problema a resoldre:

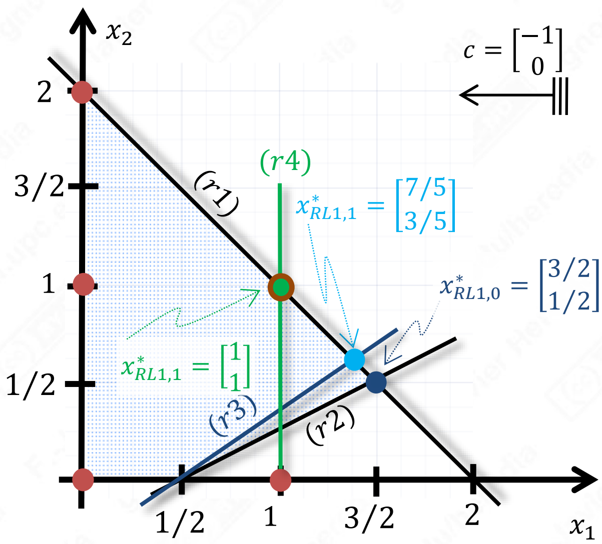
$$(PE1)\begin{cases}\min & -x_1 & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & \leq 2 & (r1) \\ & \frac{1}{2}x_1 & -x_2 & \leq \frac{1}{4} & (r2) \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, enteres & \end{cases}$$

$$\rightarrow (PE1)\begin{cases}\min & -x_1 & & & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2 & (r1) \\ & 2x_1 & -4x_2 & & +x_4 & = 1 & (r2) \\ & x_{1,} & x_{2,} & x_{3,} & x_4 & \geq 0, enteres & \end{cases}$$

Iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty \leq z_{PE1}^* \leq z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de $(RL1)$ amb un tall de Gomory**:
  - Resolució de $(RL1{,}0)$: $x_{RL1,0}^* = \begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}'$, $z_{RL1,0}^* = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{z}_{PE1}^* := \left\lceil -\frac{3}{2}\right\rceil = -1$
  - Tall de Gomory sobre $x_{RL1,0}^*$ associat a x_2:
    - $\mathcal{B} = \{1,2\}, B = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & -4\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}$
    - $A_N = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}$
    - $x_2 + \left\lfloor\frac{1}{3}\right\rfloor x_3 + \left\lfloor -\frac{1}{6}\right\rfloor x_4 \leq \left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor \rightarrow x_2 - x_4 \leq 0$

      $\xrightarrow{x_4 = 1 - 2x_1 + 4x_2} \boxed{2x_1 - 3x_2 \leq 1}\ (r3)$

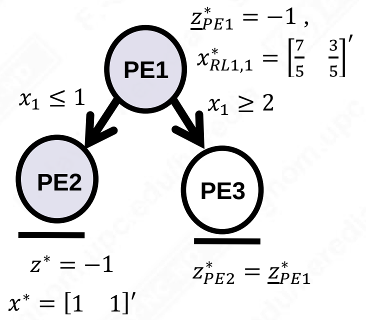


- Resolució de $(RL1{,}1) = (RL1{,}0) + (r3)$: $x_{RL1,1}^* = \begin{bmatrix}7/5\\3/5\end{bmatrix}, z_{RL1,1}^* = -\frac{7}{5} \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := \left\lceil -\frac{7}{5} \right\rceil = -1$.

- **Eliminació:** no es pot.
- **Separació:** $x_1^* = 7/5 \rightarrow \begin{cases}(PE2) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + (r3) + \boldsymbol{x_1 \le \lfloor 7/5 \rfloor = 1\ (r4)} \\ (PE3) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + (r3) + x_1 \ge \lceil 7/5 \rceil = 2\ (r5)\end{cases} \rightarrow$
$L \leftarrow \{(PE2), (PE3)\}$

Iteració 2: $L = \{(PE2), (PE3)\}, \underline{z}_{PE1} = -1 \le z_{PE1}^* \le z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE2)$.
- **Resolució de** $(\boldsymbol{RL2})$ amb un tall de Gomory:
  - Resolució de $(RL2{,}0)$: $x_{RL2,0}^* = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \equiv x_{PE2}^*, z_{RL2,0}^* = -1 \Rightarrow \underline{z}_{PE2} := -1$
- **Eliminació:** $x_{RL2,0}^* = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \equiv x_{PE2}^* \Rightarrow$ s'elimina $(PE2)$:
  - $z^* \leftarrow z_{PE2}^* = -1, x^* \leftarrow x_{PE2}^*, L \leftarrow L\backslash\{(PE2)\} = \{(PE3)\}$
  - $z^* = \underline{z}_{PE1} \Rightarrow$ eliminem $(PE3)$: $L \leftarrow L\backslash\{(PE3)\} = \emptyset$

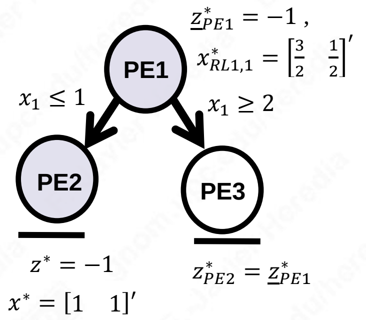


Arbre d'exploració del B&C

Iteració 3: $\boldsymbol{L = \emptyset \Rightarrow x_{PE1}^* = x^* = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, z_{PE1}^* = z^* = -1.}$

b) Resolució amb el B&B:

Si comparem l'arbre d'exploració del B&B amb el del B&C observem que l'única diferència resideix en la relaxació del primer node. B&C obté la solució de la relaxació reforçada $x_{RL1,1}^* = \begin{bmatrix}\frac{7}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}'$ mentre que B&C ho fa de la relaxació sense reforçar $x_{RL1}^* = \begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}'$. Tanmateix, això no modifica la fita inferior de z_{PE1}^*, que és $\underline{z}_{PE1} = -1$ en tots dos casos. Això fa que els arbres d'exploració siguin idèntics a partir del primer node. En aquest cas no surt a compte aplicar B&C perquè la mida de l'arbre és la mateixa (és a dir, l'ús de talls de Gomory no disminueix en nombre total de nodes tractats) i, a més, a B&C hem de resoldre una relaxació lineal més que a B&C (la relaxació $(RL1{,}1)$).



Arbre d'exploració del B&B