

(3.b) MODELOS EXPONENCIALES de COLAS

INTRODUCCIÓN A LOS PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE.

Ecuaciones de equilibrio. Condición de E.E.

APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO:

La cola M/M/1. Ilustración del comportamiento.

MODELOS DE COLAS EXPONENCIALES.

Trabajo de servidores en paralelo.

Casos importantes:

M/M/s , M/M/s/K , M/M/s/./N. Propiedades.

Longitudes medias y Tiempos de permanencia.

Cap. 15 Hillier F.S., Lieberman G.J. "Introduction to Operations Research" Holden day Inc. 1986.□

Cap. 4 Gross D., Harris C.M."Fundamentals of queueing theory" John Wiley and Sons. 1998.□

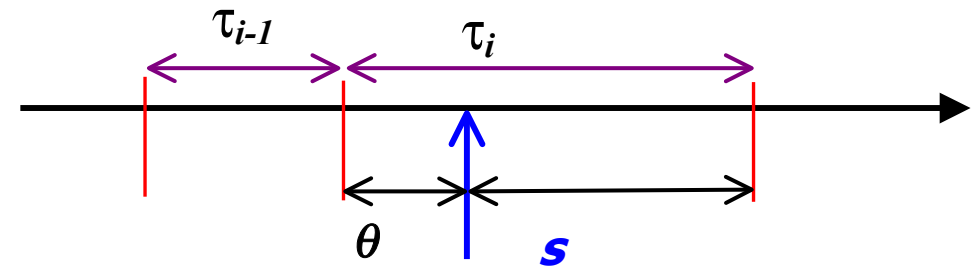
TIEMPO DE VIDA CONDICIONAL

$$f_{s|\theta}(x) = P(x \leq s \leq x + dx \mid \tau \geq \theta) = \frac{f_{\tau}(x + \theta)}{R_{\tau}(\theta)}$$

PROPIEDAD 2. Caso exponencial. Ausencia de memoria

$$f_{s|\theta}(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda(x+\theta)}}{e^{-\lambda\theta}} = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\text{Si } \tau \sim \text{exp} \Rightarrow E[s|\theta] = E[\tau]$$



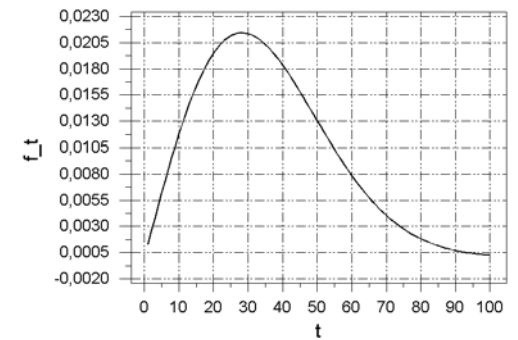
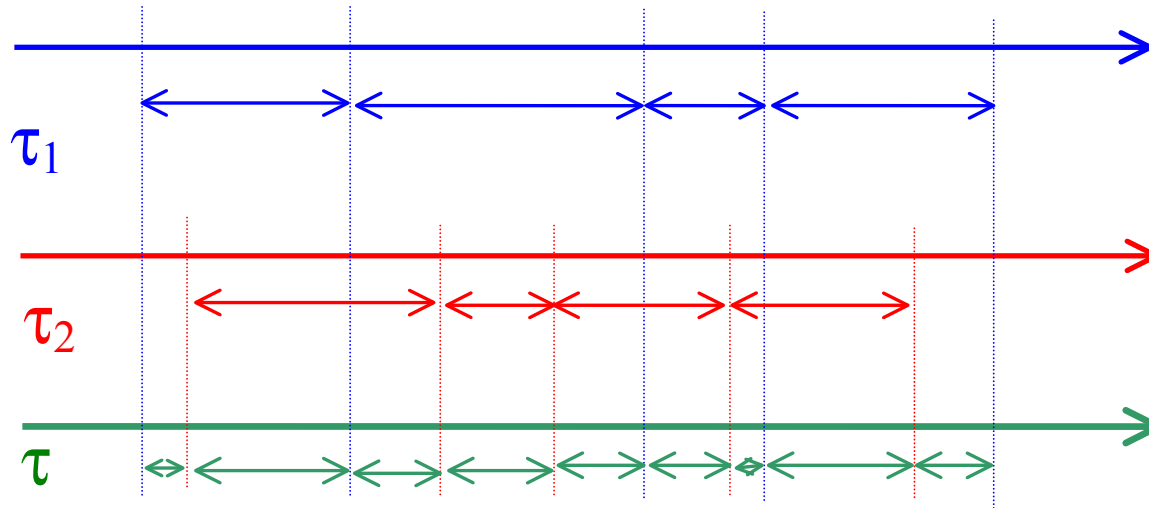
$$\tau \sim \text{unif}[0, T], \quad F_{\tau}(t) = t/T, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$f_{s|\theta}(x) = \frac{1/T}{1 - \theta/T}, \quad 0 \leq x \leq T - \theta$$

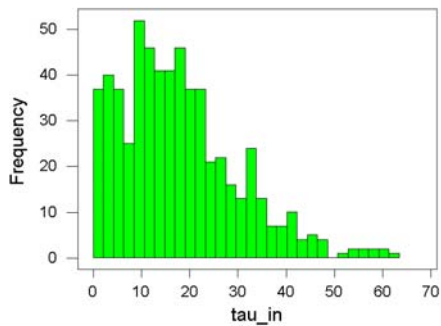
$$s|\theta \sim \text{unif}[0, T] \rightarrow E[s|\theta] = \frac{T - \theta}{2}$$

Máquina 1

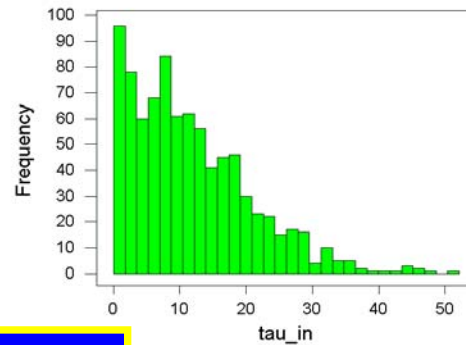
Máquina 2



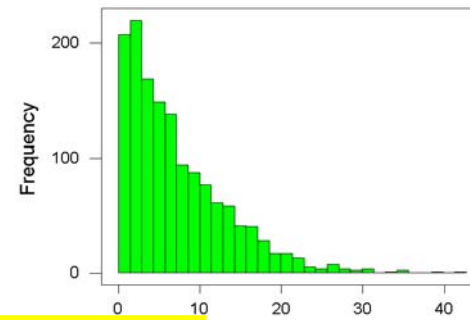
N=2



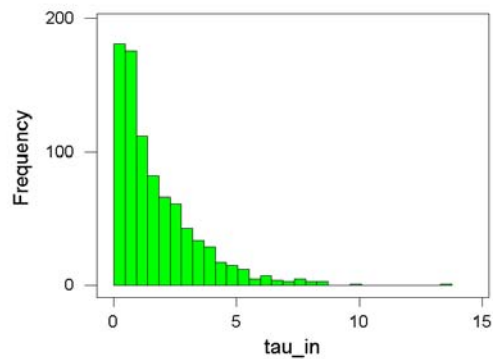
N=3



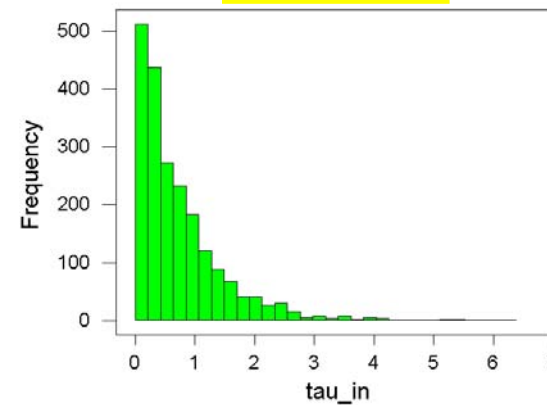
N=5



N=20



N=50

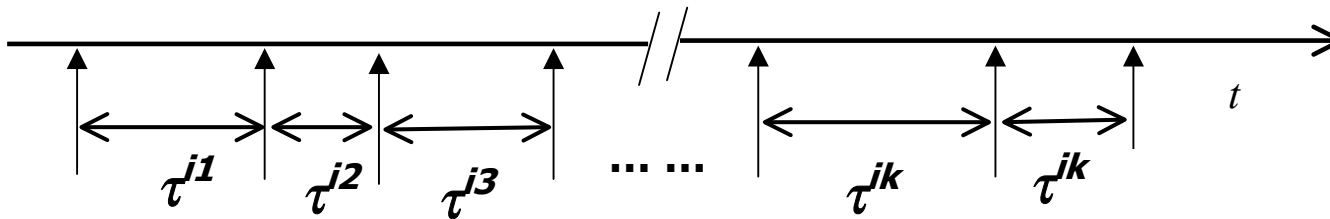


**Palm
(1943)**

PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

- "Nacimiento" indica llegada al S.E
- "Muerte" indica salida del S.E.

Puede ocurrir que el tiempo entre llegadas τ sea v.a. con distribución dependiente del estado N del sistema.



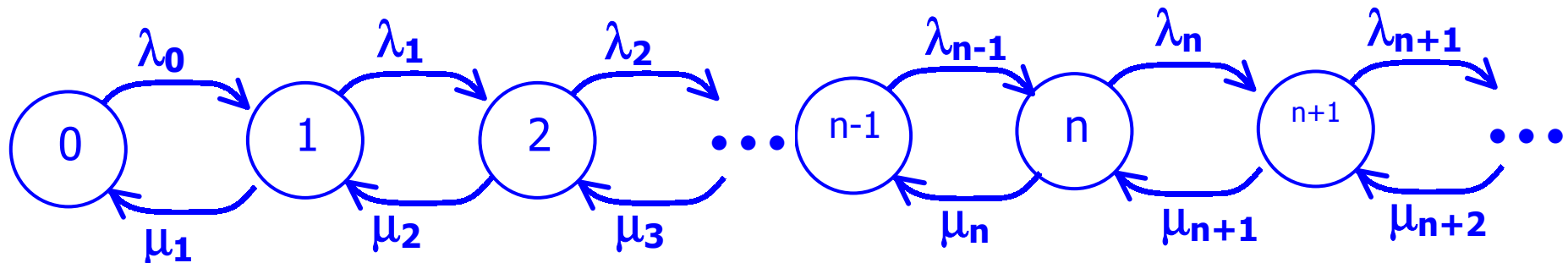
1. Si $N(t) = n$ el tiempo entre llegadas $\tau \sim \text{exp.}$ de parámetro λ_n .
2. Si $N(t) = n$ el tiempo de servicio $\sim \text{exp.}$ De parámetro μ_n .

Sólo una llegada o una salida al/del sistema puede darse en cada instante t .

Diagrama de tasas de transición

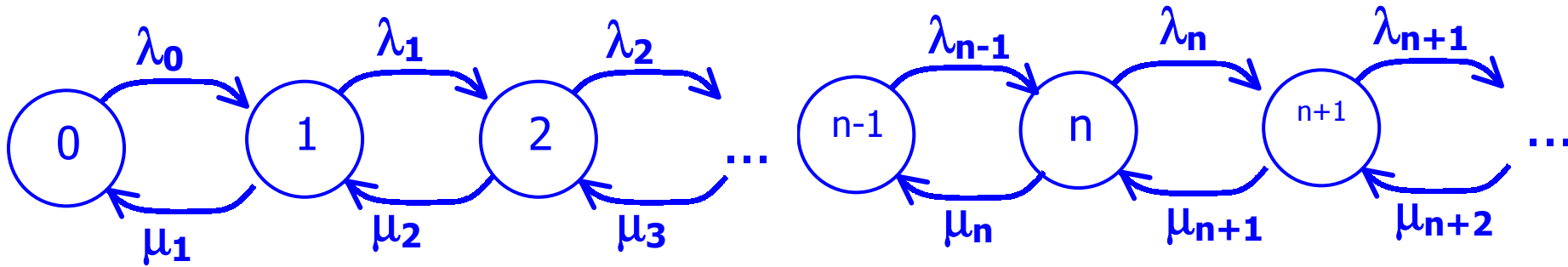
Muestra las posibles transiciones permitidas en el estado del sistema en un instante.

Tasas del proceso de llegadas al S.E.



Tasas del proceso de servicio en el S.E.

La **distribución de probabilidades** del estado del sistema, $N(t)$, en **régimen estacionario** es relativamente intuitivo de deducir a partir del diagrama de tasas de transición.



<i>Estado</i>	<i>Tasa incidente</i>	<i>= Tasa emergente</i>
0	$\mu_1 \cdot P_1$	$\lambda_0 \cdot P_0$
1	$\lambda_0 \cdot P_0 + \mu_2 \cdot P_2$	$(\lambda_1 + \mu_1) \cdot P_1$
2	$\lambda_1 \cdot P_1 + \mu_3 \cdot P_3$	$(\lambda_2 + \mu_2) \cdot P_2$
\vdots	\vdots	\vdots
$n-1$	$\lambda_{n-2} \cdot P_{n-2} + \mu_n \cdot P_n$	$(\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) \cdot P_{n-1}$
n	$\lambda_{n-1} \cdot P_{n-1} + \mu_{n+1} \cdot P_{n+1}$	$(\lambda_n + \mu_n) \cdot P_n$
\vdots	\vdots	\vdots

Hay tantas ecuaciones como valores pueda presentar $N(t)$, por tanto, si en el S.E. sólo pueden haber como máximo K clientes, habrán $K+1$ ecuaciones.

Resolución del sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l}
 P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot P_0 \\
 P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot P_1 + \frac{1}{\mu_2} \cdot (\mu_1 \cdot P_1 - \lambda_0 \cdot P_0) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot P_1 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \cdot P_0 \\
 P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot P_2 + \frac{1}{\mu_3} \cdot (\mu_2 \cdot P_2 - \lambda_1 \cdot P_1) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot P_2 + \frac{1}{\mu_3} \cdot (\mu_1 \cdot P_1 - \lambda_0 \cdot P_0) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot P_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \cdot P_0 \\
 \vdots \\
 P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot P_{n-1} + \frac{1}{\mu_n} \cdot (\mu_{n-1} \cdot P_{n-1} - \lambda_{n-2} \cdot P_{n-2}) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot P_{n-1} + \frac{1}{\mu_n} \cdot (\mu_1 \cdot P_1 - \lambda_0 \cdot P_0) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot P_{n-1} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \cdot P_0 \\
 P_{n+1} = \dots = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} \cdot P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n+1}} \cdot P_0 \\
 \vdots
 \end{array} \right.$$

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \quad n = 1, 2, \dots ; \quad C_0 = 1$$

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \cdot P_0 = C_n \cdot P_0 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n}$$

Las probabilidades de estado estacionario quedan definidas si:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n < +\infty$$

En caso de que el S.E. pueda contener sólo K clientes como máximo, el sumatorio se extiende de $n=0$ a $n=K$ y siempre será finito.

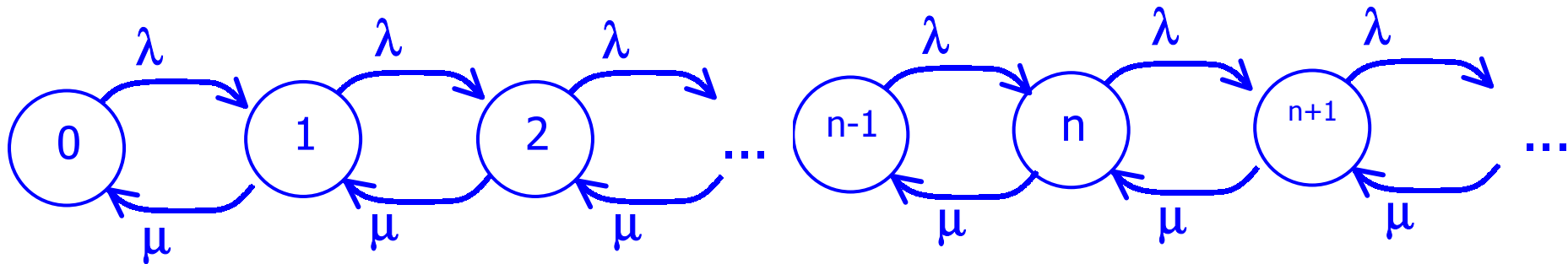
APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO: el modelo M/M/1

Hipótesis del modelo:

- Tiempos entre llegadas i.i.d. de ley exponencial con parámetro $\lambda_n = \lambda$.
- Tiempos de servicio i.i.d. según una ley exponencial de parámetro $\mu_n = \mu$.
- Un único servidor, $s = 1$.

$$\lambda_n = \lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_n = \mu \quad n = 1, 2, \dots$$



➡ Hay régimen estacionario si el *factor de carga del S.E.* es $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

➡ Dado que $\rho < 1$

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \rho^n \quad n=1,2,\dots \quad C_0 = 1 \rightarrow$$

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \rho^n \cdot P_0 \quad n=0,1,2,\dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}} = 1 - \rho$$

y por tanto,

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \rho^n \cdot (1 - \rho) \quad n=0,1,2,\dots$$

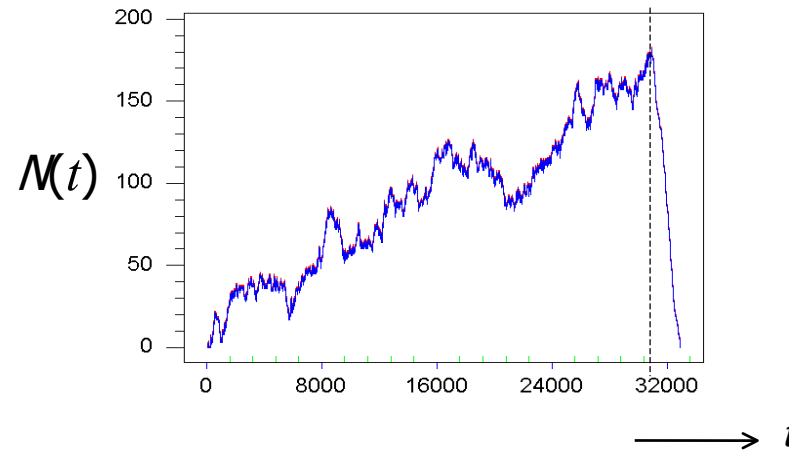
(Distribución geométrica)

EJEMPLO DE LA EVOLUCIÓN DE UNA COLA M/M/1

COMPORTAMIENTO: Pueden presentarse dos situaciones:

1. En promedio la afluencia de clientes al S.E. **sobrepasa** la capacidad de trabajo del Sistema de Servicio:

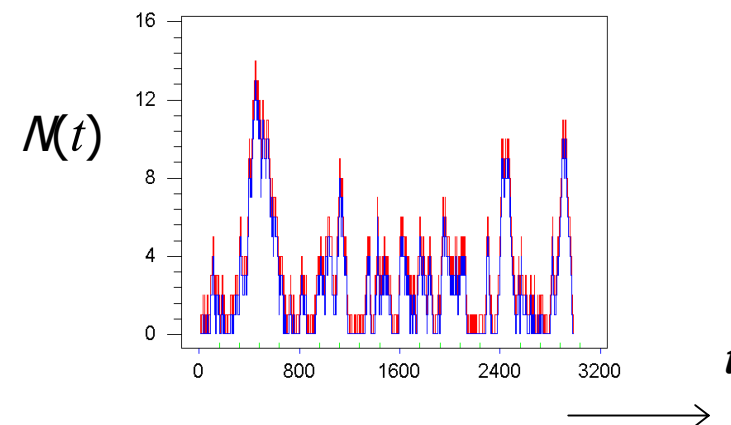
$N(t)$ **PRESENTA UNA TENDENCIA CRECIENTE**



$$\rho \geq 1$$

2. El Sistema de Servicio tiene suficiente capacidad de trabajo frente a la afluencia de clientes:

$N(t)$ puede crecer en ocasiones, pero el S.E. **siempre retorna al estado 0 (vacío)**



$$\rho < 1$$

➔ **La esperanza matemática de la variable aleatoria estado del sistema** ($\rho < 1$)

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (1-\rho) \cdot \rho^n = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^n = \rho \cdot (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^{n-1} = \\
 &= \rho \cdot (1-\rho) \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right) = \rho \cdot (1-\rho) \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) = \\
 &= \rho \cdot (1-\rho) \cdot \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}
 \end{aligned}$$

➔ **La esperanza matemática de la variable aleatoria longitud de cola** en un sistema de espera M/M/1 ($\rho < 1$)

$$\begin{aligned}
 L_q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot P_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = (L) - (1 - P_0) = \\
 &= (L) - (\rho) = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu \cdot (\mu - \lambda)}
 \end{aligned}$$

UTILIZACIÓN DE LAS FÓRMULAS DE LITTLE

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot P_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \lambda$$

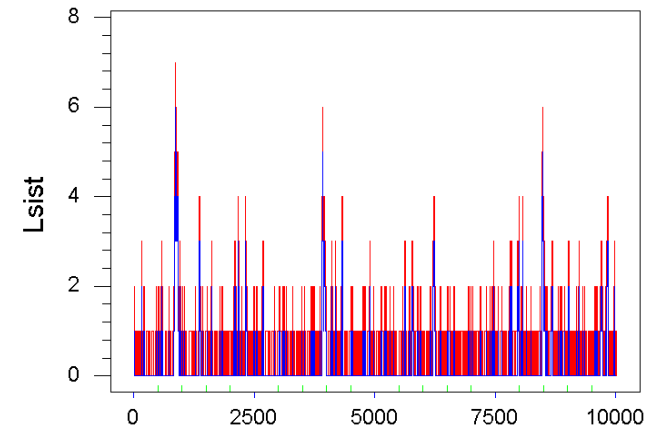
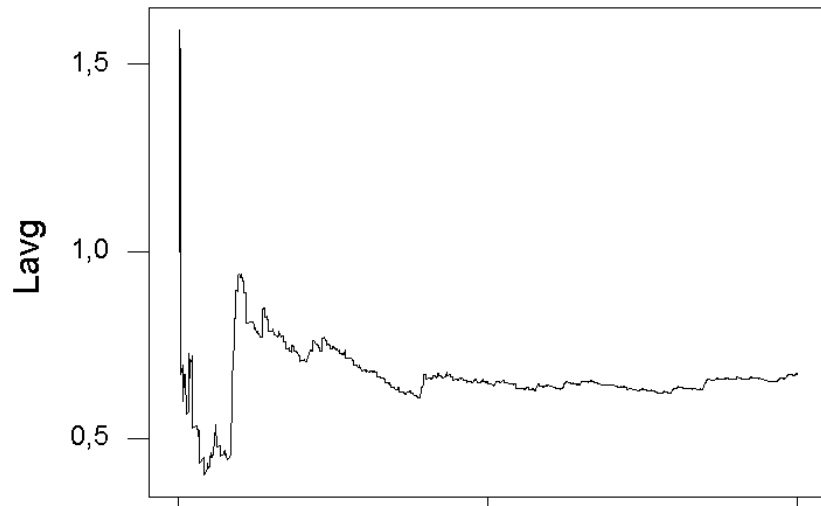
$$L = \bar{\lambda}W = \lambda W \rightarrow W = \frac{L}{\lambda}$$

$$L_q = \bar{\lambda}W_q = \lambda W_q \rightarrow W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

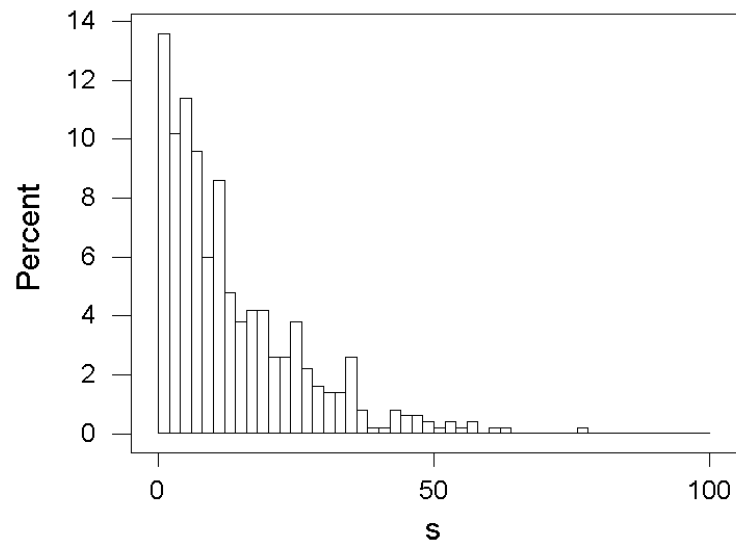
$$L_s = \bar{\lambda}W_s = \bar{\lambda}E[x] = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

$$W = W_q + W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = L_q + L_s = L_q + \rho$$



Rojo = N° de jobs en el procesador (Lsist)^{TX}
 Azul = N° de jobs en cola (Queue)



Distribución de la v.a. tiempo de permanencia en el S.E. de un cliente:

$$w \sim \text{exp. } E[w]=W$$

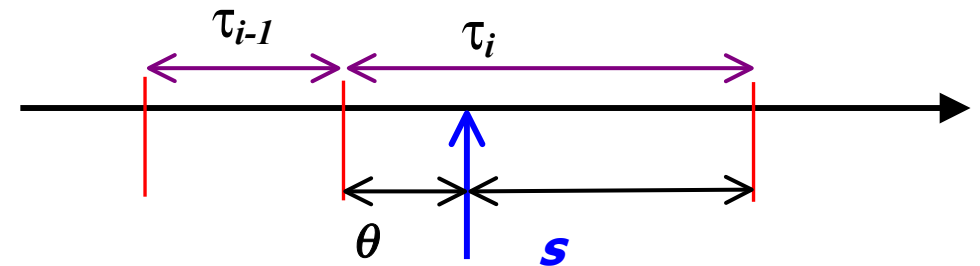
TIEMPO DE VIDA CONDICIONAL

$$f_{s|\theta}(x) = P(x \leq s \leq x + dx \mid \tau \geq \theta) = \frac{f_{\tau}(x + \theta)}{R_{\tau}(\theta)}$$

PROPIEDAD 2. Caso exponencial. Ausencia de memoria

$$f_{s|\theta}(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda(x+\theta)}}{e^{-\lambda\theta}} = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\text{Si } \tau \sim \text{exp} \Rightarrow E[s|\theta] = E[\tau]$$



$$\tau \sim \text{unif}[0, T], \quad F_{\tau}(t) = t/T, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$f_{s|\theta}(x) = \frac{1/T}{1 - \theta/T}, \quad 0 \leq x \leq T - \theta$$

$$s|\theta \sim \text{unif}[0, T] \rightarrow E[s|\theta] = \frac{T - \theta}{2}$$

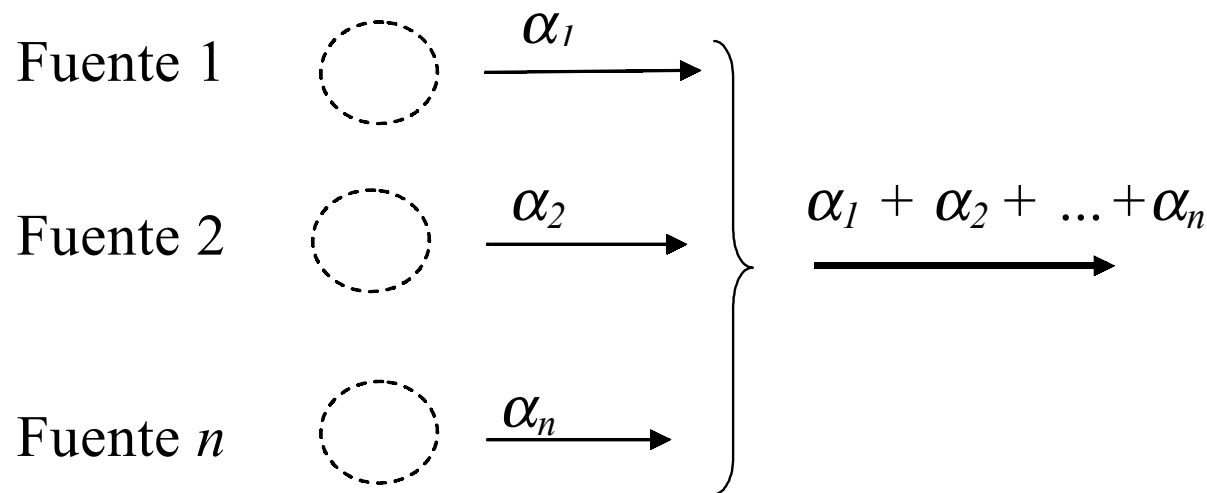
TRABAJO DE SERVIDORES EN PARALELO

La variable aleatoria U definida como el mínimo de entre n variables aleatorias independientes y exponenciales T_1, \dots, T_n , de parámetros respectivos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, sigue una ley exponencial de parámetro $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

→ es decir, $U = \text{Min}\{T_1, \dots, T_n\}$ y por tanto la función de distribución de U ,

$$\begin{aligned} F_U(t) &= P(\{U \leq t\}) = 1 - P(\{U > t\}) = 1 - P(\{T_1 > t, \dots, T_n > t\}) = 1 - P(\{T_1 > t\}) \cdots P(\{T_n > t\}) = \\ &= 1 - e^{-\alpha_1 t} \cdots e^{-\alpha_n t} = 1 - e^{-t \sum_{i=1}^n \alpha_i} = 1 - e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

La interpretación que puede darse de la propiedad en el caso del tiempo entre llegadas es que si la población esta constituida para diferentes clases de clientes que llegan cada una al sistema de espera según una ley exponencial vinculada a la clase, entonces el tiempos entre las llegadas de 2 clientes cualesquiera sigue una ley exponencial, o el que es equivalente, la población puede tratarse desde el punto de vista de la distribución entre llegadas al sistema de espera como si fuera homogénea.

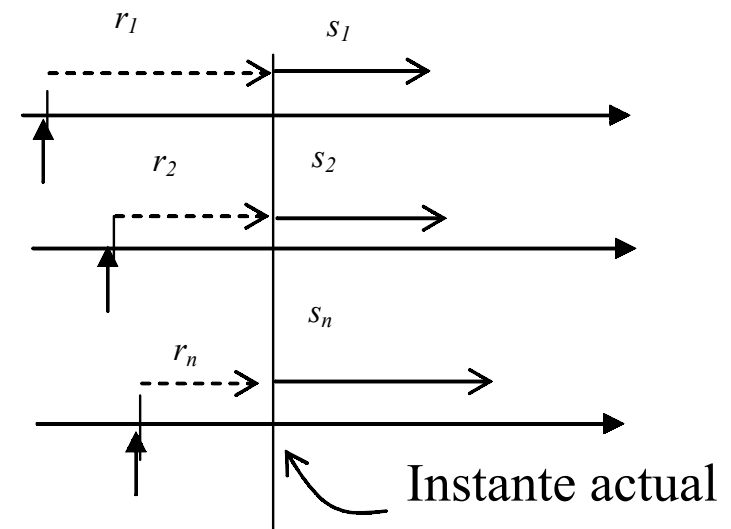


- Si hay n servidores, el tiempo que resta hasta la próxima finalización de servicio no depende del instante ni del servidor que ha completado el último servicio y sigue una distribución exponencial, lo que permite tratar sistemas de espera con $n > 1$ servidores, como si tuvieran un único servidor pero que *trabaja tan rápido como los n juntos*.
- Supongamos n fuentes exponenciales y sean $r_1 \dots r_n$ los intervalos de tiempo transcurridos desde el último suceso para las fuentes $1 \dots n$ respectivamente. Consideremos variables aleatorias $s_1 \dots s_n$, tiempos contados desde el instante actual hasta el próximo suceso para cada una de las n fuentes.

Por la propiedad de ausencia de memoria las variables aleatorias s_1, \dots, s_n también se distribuyen exp. con parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

el tiempo contado a partir del instante actual hasta que algún otro suceso proveniente de las n fuentes se produzca, se distribuye

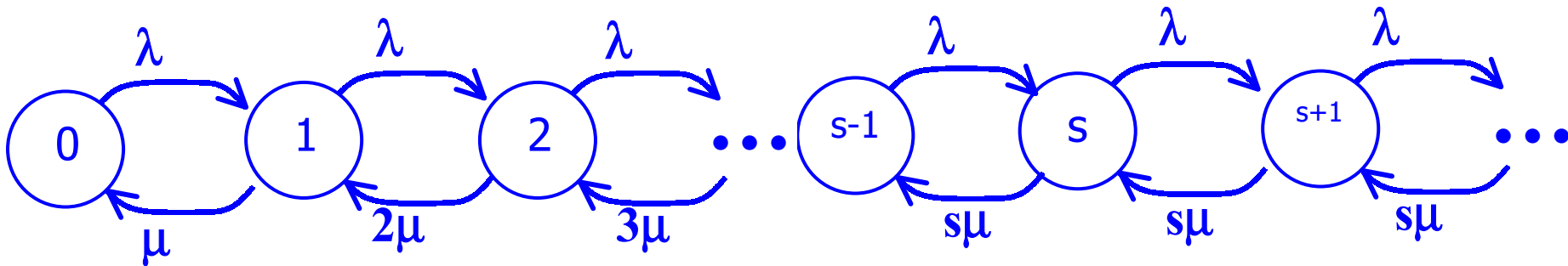
exponencialmente con parámetro $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.



MODELO M/M/s

- **Tiempos entre llegadas τ i.i.d. de ley exp. con parámetro λ .**
- **$s > 1$ servidores iguales.**
- **Tiempo de servicio x i.i.d. según una ley exp. de parámetro μ .**

$$\lambda_n = \lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
$$\mu_n = \begin{cases} n \cdot \mu & n = 1, 2, \dots, s-1 \\ s \cdot \mu & n = s, s+1, \dots \end{cases}$$



Si el factor de carga ρ del S.E. $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} < 1$ $C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n & n = 1, 2, \dots, s-1 \\ \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} & n = s, s+1, \dots \end{cases}$

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot P_0 & n = 1, 2, \dots, s-1 \\ \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} \cdot P_0 & n = s, s+1, \dots \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1-\rho}}$$

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \cdot P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_{s+n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s (\rho)^{s+n-s} P = \dots =_0$$

$$= \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \lambda \cdot W = \lambda \cdot \left(W_q + \frac{1}{\mu} \right) = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Resumen del cálculo de una cola M/M/s (se conocen λ, μ, s)

$$P_0 \rightarrow L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{P_0 \rho}{(1-\rho)^2} \rightarrow \begin{cases} W_q = \frac{L_q}{\lambda} \\ L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow W = \frac{L}{\lambda} \end{cases}$$

$$P(\{n \geq s\}) = \sum_{n=s}^{\infty} P_n = \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \rho^{n-s} P_0 =$$

$$= \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{P_0}{1-\rho}$$

Fórmula C-Erlang

Si $s \rightarrow \infty$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1-\rho}} \rightarrow e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$n \leq s, \quad P_n = C_n P_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \left(\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right)$$

Distribución de Poisson

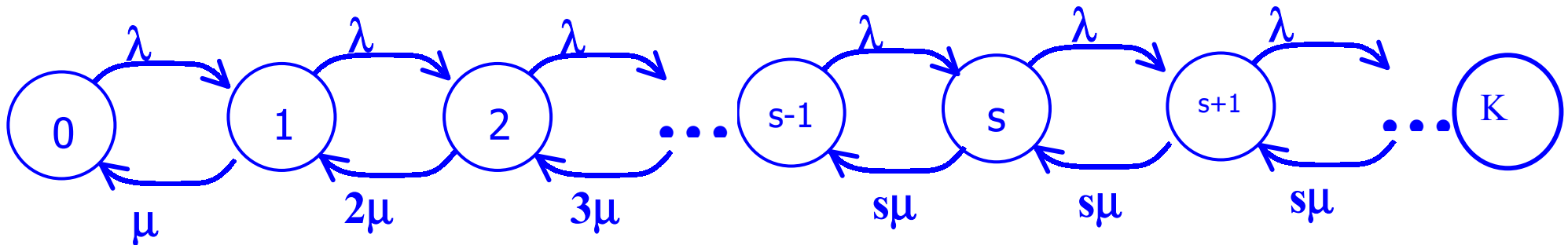
El modelo M/M/s/K

Sistema de espera con limitación de capacidad que presupone:

- 1. Tiempos entre llegadas τ i.i.d. exp. de parámetro $\lambda_n = \lambda$.**
- 2. Tiempos de servicio x i.i.d. exp. de parámetro μ .**
- 3. Un conjunto de servidores en paralelo $s > 1$.**
- 4. El número de clientes al sistema de espera es $\leq K$.**

El número máximo de clientes $N(t)$ presentes en el S.E. debe ser $\leq K$

Si el S.E. está lleno al llegar un cliente éste se pierde:



➔ **Siempre alcanzará régimen estacionario.**

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n & n = 1, 2, \dots, s-1 \\ \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} & n = s, s+1, \dots, K \\ 0 & n = K+1, K+2, \dots \end{cases} \quad i \quad C_0 = 1$$

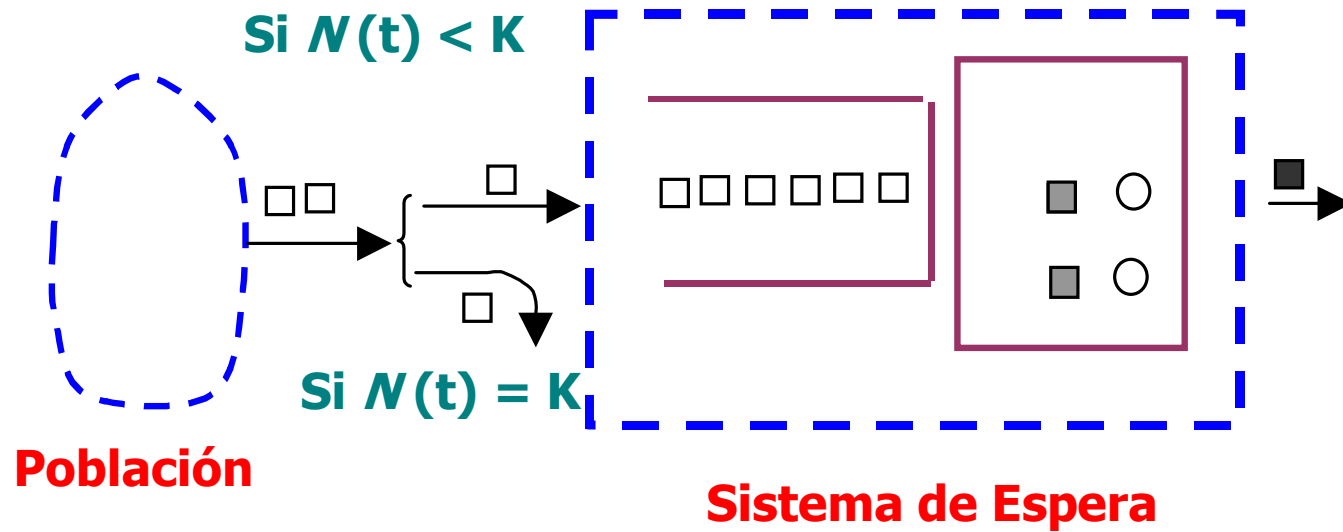
➔ Lo que facilita el estado del sistema en régimen estacionario: $P_n = C_n \cdot P_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=s}^K \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s}} \quad ; \quad \rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} \neq 1 .$$

Si K no es demasiado alto es aconsejable utilizar las fórmulas generales para procesos de nacimiento y muerte en equilibrio.

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot P_n = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda \cdot P_n = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{K-1} P_n = \lambda \cdot (1 - P_K)$$



- **La esperanza matemática de la variable aleatoria longitud de cola**

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \cdot P_n = \sum_{n=0}^{K-s} n \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s (\rho)^{s+n-s} P_0 = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s P_0 \sum_{n=0}^{K-s} n \rho^n = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} (1 - \rho^{K-s} - (K-s) \cdot \rho^{K-s} \cdot (1-\rho)).$$

En las fórmulas presentadas se ha supuesto $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} \neq 1$.

- **La esperanza matemática de la variable aleatoria estado del sistema.**

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \bar{\lambda} \cdot W = \bar{\lambda} \cdot \left(W_q + \frac{1}{\mu} \right) = L_q + \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

Aplicación de las **fórmulas de Little** para el calculo de W y W_q .

$$W = E[W] = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

$$W_q = E[W_q] = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

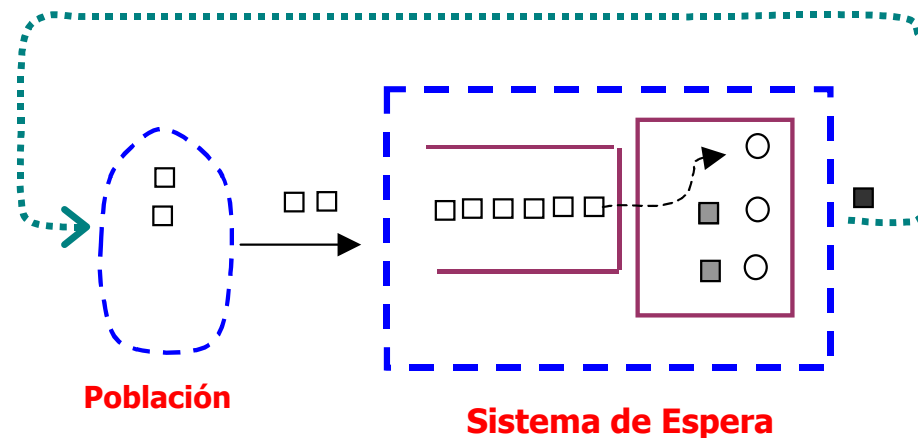
MODELO M/M/s/. /N

S.E. con población finita (N) que presupone:

- Tiempo de permanencia en la población de los clientes i.i.d según ley exp. de parámetro λ
- Tiempos de servicio por servidor i.i.d. según ley exp. de parámetro μ .
- Un conjunto de servidores en paralelo $s > 1$.
- Una población finita de clientes limitado al valor N . Para simplificar se supone $N > s$.

Es un S.E. cerrado: Hay siempre N clientes (población+S.E.)

Tras salir del **S.E.** el cliente se reintegra en la **Población**

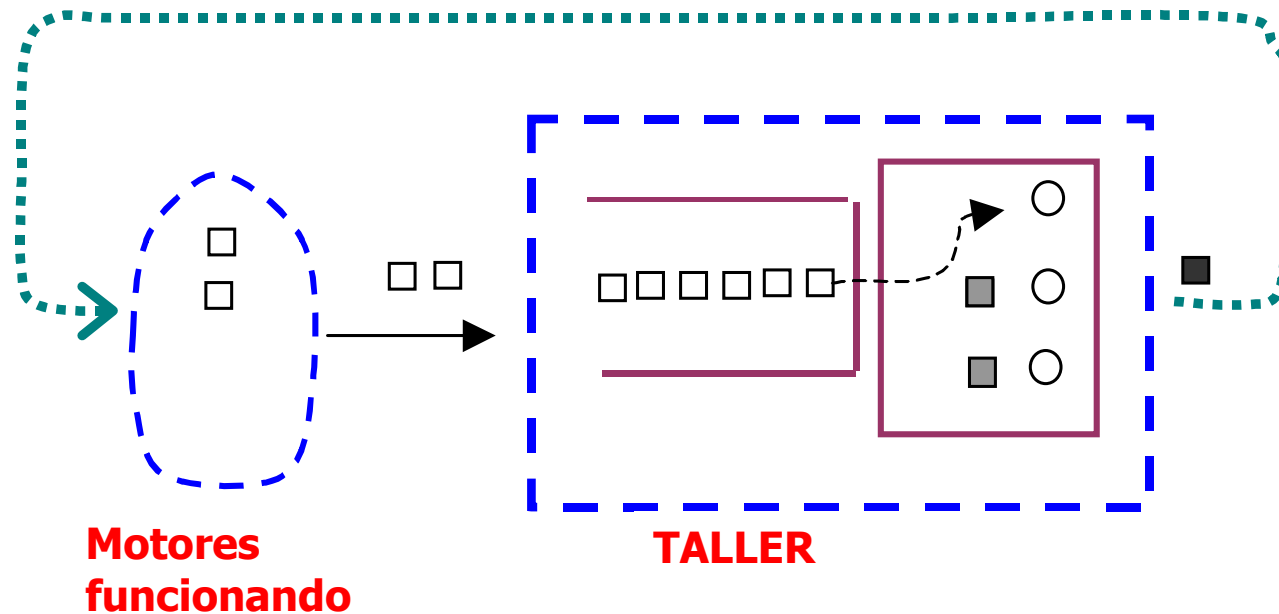


EJEMPLO: TALLER DE REPARACIONES

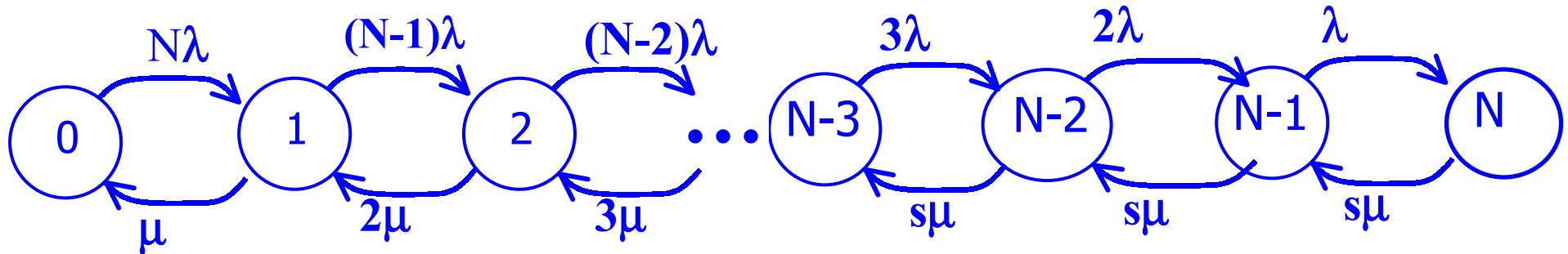
En un taller de reparación de motores hay 3 mecánicos.

Atienden un conjunto de 12 motores de una planta.

- **Cada mecánico repara un motor en un tiempo $x \sim \text{exp.}$ $E[x]=1\text{día.}$**
- **Tras repararse un motor es puesto en servicio inmediatamente.**
- **El tiempo entre averías de un motor $\tau \sim \text{exp.}$ $E[\tau]=20 \text{ días.}$**



M/M/s/. /N: DIAGRAMA DE TASAS



$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)! n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n & n = 1, 2, \dots, s-1 \\ \frac{N!}{(N-n)! s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} & n = s, s+1, \dots, N \\ 0 & n = N+1, N+2, \dots \end{cases} \quad i \quad C_0 = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{N!}{(N-n)! n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=s}^N \frac{N!}{(N-n)! s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s}}$$

No se puede conseguir una expresión analítica compacta y los cálculos con población finita se desarrollan a partir de tablas específicas.

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \cdot P_n = \sum_{n=s}^N (n-s) \cdot P_n$$

- ➔ **La esperanza matemática de la variable aleatoria estado del sistema** se puede deducir a partir de L_q ,

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \sum_{n=0}^{s-1} n \cdot P_n + \sum_{n=s}^N n \cdot P_n = \sum_{n=0}^{s-1} n \cdot P_n + L_q + s \cdot \left(1 - \sum_{n=0}^{s-1} P_n\right)$$

- ➔ Cálculo de la tasa media efectiva de llegadas por unidad de tiempo,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot P_n = \sum_{n=0}^N (N-n) \cdot \lambda \cdot P_n = \sum_{n=0}^N N \cdot \lambda \cdot P_n - \sum_{n=0}^N n \cdot \lambda \cdot P_n = \\ &= N \cdot \lambda - \lambda \cdot \sum_{n=0}^N n \cdot P_n = N \cdot \lambda - L \cdot \lambda = (N-L) \cdot \lambda \end{aligned}$$

- ➔ La aplicación de las fórmulas de Little permite deducir el tiempo medio de espera en el sistema W y en la cola de los sistema W_q

$$\boxed{W = E[W] = \frac{L}{\bar{\lambda}}} \quad \text{y} \quad \boxed{W_q = E[W_q] = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}}$$

SESION DE PROBLEMAS: USO de QTS_EXCEL

CHAPTER 2:

m-m-1

M/M/1: Single-Server/Unlimited Markovian Queue

m-m-1-k

M/M/1/K: Single-Server/Space-Limited Markovian Queue

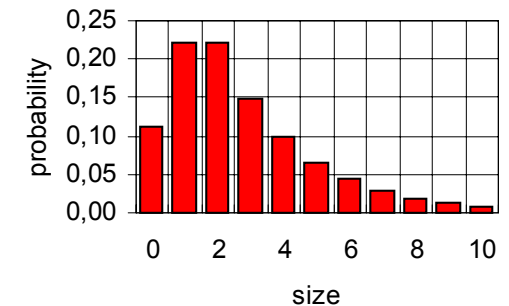
m-m-c

M/M/c: Multiple-Servers/Unlimited Markovian Queue

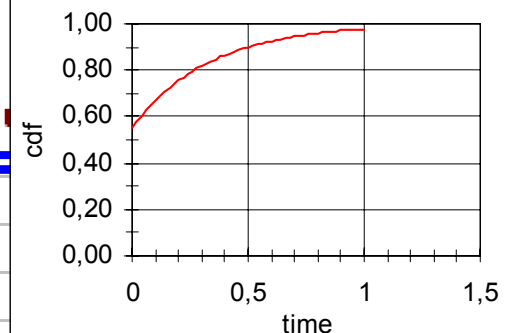
m-m-c-k

M/M/c/K: Multiple-Servers/Space-Limited Markovian Queue

M/M/c system-size probabilities



CDF for M/M/c line waiting times



OUTPUT VARIABLES:

18	OUTPUT VARIABLES:		
19			
20	iat	0,166667	Mean interarrival time
21	mu	3,0	Service rate (# served/unit of time)
22	r	2,0	Average # arrivals during mean service time
23	rho	0,666667	Fraction of time each server is busy [MUST BE < 1]
24	p0	0,111111	Fraction of time all servers are idle
25			
26	Lq	0,888889	Expected queue size
27	L	2,888889	Expected system size
28	Wq	0,148148	Expected waiting time in the queue
29	W	0,481481	Expected waiting time in the system

Terminal de facturación de equipaje

Un terminal de facturación dispone de 2 operarios que **atienden** los clientes que llegan según una distribución de Poisson de media **80 clientes por hora y esperen en una cola única** hasta que alguno de los operarios esté libre. El tiempo requerido para atender un cliente esta distribuido exponencialmente con media 1.2 minutos.

1. Cual es el número esperado de clientes en la terminal de facturación?
2. Cual es el tiempo medio que un cliente pasa a la terminal de facturación?
3. Qué porcentaje del tiempo está libre un determinado operario?

Modelo M/M/2

Tasa de llegadas $\lambda = 80$ clientes/hora $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{80}{2 \cdot 50} = 0.8$

Tasa de servicio *por operario* $\mu = \frac{60}{1.2} = 50$ clientes/hora.

$$P_0 \rightarrow L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{P_0 \rho}{(1-\rho)^2} \rightarrow \begin{cases} W_q = \frac{L_q}{\lambda} \\ L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow W = \frac{L}{\lambda} \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{1}{n!} \left(\frac{80}{50}\right)^n + \frac{1}{2!} \left(\frac{80}{50}\right)^2 \frac{1}{1-0.8}} = 0.111$$

$$L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{2!} \left(\frac{8}{5}\right)^2 (0.111) \frac{0.8}{(1-0.8)^2} = 2.84 \text{ clientes}$$

1. El número medio de clientes en el terminal de facturación es

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 2.84 + \frac{80}{50} = 4.44 \text{ clientes.}$$

2. Un cliente pasa en promedio en el terminal de facturación $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{4.44}{80} = 0.0555$ horas
= 3.33 minutos.

$$3. 1 \cdot P_0 + 1/2 \cdot P_1 = (1 + 1/2 \cdot C_1) \cdot P_0 = (1 + 1/2 \cdot 8/5) \cdot P_0 = 0.2$$



El servicio de urgencias de un hospital

El **servicio de urgencias de un hospital** dispone permanentemente de un médico de guardia, pero se han detectado tiempos de espera desaconsejables en muchas ocasiones, de manera que Dirección del Hospital quiere **avaluar los beneficios de disponer de un segundo médico de urgencias**. La tasa de llegada de enfermos al servicio de urgencias es de 1 paciente cada 30 minutos y el tiempo medio de servicio es de 20 minutos para paciente. Determinar los parámetros ρ, P_0, L_q, L, W_q i W con $s=1$ y $s=2$ médicos de guardia. Determinar la función de distribución de probabilidad del tiempo de espera hasta ser examinado un paciente en ambas situaciones.

En el caso **M/M/1**,

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} ; P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{2/3}{1 - 2/3} = 2 \text{ pacientes}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{(2/3)^2}{1 - 2/3} = \frac{4}{3} \text{ pacientes}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{1} = 2 \text{ horas} \quad W_q = \rho \cdot W = (2/3) \cdot 2 = \frac{4}{3} \text{ horas}$$

En el caso **M/M/2**, $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$.

$$P_0 \rightarrow L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{P_0 \rho}{(1-\rho)^2} \rightarrow \begin{cases} W_q = \frac{L_q}{\lambda} \\ L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow W = \frac{L}{\lambda} \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{1}{2!} \left(\frac{2}{3} \right)^2 \frac{1}{1-1/3}} = \frac{1}{2}$$

$$L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{2!} \left(\frac{2}{3} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{1/3}{(1-1/3)^2} = \frac{1}{12} \text{ pacientes}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \text{ pacientes}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \text{ horas} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24} \text{ horas}$$



El asesor fiscal

Un asesor fiscal dispone de un local para atender a sus clientes, los cuales se concentran mayoritariamente durante los meses de mayo y junio. **El local tiene una capacidad máxima de 8 asientos en espera**, el cliente se va si no encuentra un asiento libre, y el **tiempo entre llegadas de clientes** se puede considerar **distribuido exponencialmente** según un parámetro $\lambda = 20$ **clientes** por hora en período punta. **El tiempo de una consulta** esta distribuido exponencial con una **media de 12 minutos**,

1. ¿Cuántas consultas por hora realizará en promedio?
2. ¿Cuál es el tiempo medio de permanencia en el local?

El modelo es **M/M/1/9** $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{5} = 4$

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \rho^n \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} & n = 0, 1, 2, \dots, K \\ 0 & n = K+1, K+2, \dots \end{cases} \quad K=9, \quad P_9 = C_9 \cdot P_0 = \rho^9 \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{10}} = 4^9 \cdot \frac{1-4}{1-4^{10}} = 0.75$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \cdot P_n = \lambda \cdot (1 - P_9) = 20 \cdot (1 - 0.75) = 5 \text{ clientes/hora}$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} = \frac{4}{1-4} - \frac{10 \cdot 4^{10}}{1-4^{10}} = 8.6 \text{ clientes} \quad W = E[W] = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{8.6}{5} = 1.73 \text{ horas.}$$

Modelo de Reparación de Avionetas

Una pequeña compañía aérea de una isla de las Antillas dispone de 5 avionetas, que hay que reparar con una tasa de 1 cada 30 días. Se disponen de 2 técnicos para reparaciones, cada uno de los cuales necesita un promedio de 3 días para una reparación. Los tiempos entre averías y de reparación son exponenciales.

1. Determinar el número medios de avionetas en funcionamiento.
2. Calcular el tiempo medio que una avioneta esta fuera de servicio cuando requiere una reparación.
3. Calcular el porcentaje del tiempo que un determinado técnico esta libre.

El modelo es exponencial y de población finita: M/M/2//5. La tasa de averías es $\lambda = \frac{1}{30}$ avionetas por día y la tasa de reparaciones es $\mu = \frac{1}{3}$ avionetas por día.

El número medios de avionetas en funcionamiento es el número total de avionetas, N , menos el número esperado de avionetas en reparación, L :

$$N - L = 5 - L = 5 - \sum_{n=0}^N n \cdot P_n.$$

Hay que determinar las $P_n = C_n \cdot P_0$ y para esto hacen falta las C_n y P_0 .

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \begin{cases} \frac{5!}{(5-n)!n!} \left(\frac{1}{10}\right)^n & n = 1 \\ \frac{5!}{(5-n)!2!} \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{1}{2 \cdot 10}\right)^{n-2} & n = 2, \dots, 5 \end{cases} \quad y \quad C_0 = 1$$

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \frac{5!}{(5-n)!n!} \left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot P_0 & n = 1 \\ \frac{5!}{(5-n)!2!} \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{1}{2 \cdot 10}\right)^{n-2} \cdot P_0 & n = 2, \dots, 5 \end{cases}$$

i	0	1	2	3	4	5
C_i	1	0.5	0.1	0.015	0.0015	0.000075

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^5 C_n} = \frac{1}{1 + 0.5 + 0.1 + 0.015 + 0.0015 + 0.000075} = 0.619$$

i	0	1	2	3	4	5
P_i	0.619	0.310	0.062	0.009	0.001	0.00004

➡ $N - L = 5 - L = 5 - \sum_{n=0}^N n \cdot P_n = 5 - 0.465 = 4.535$ avionetas en promedio en funcionamiento.

- ➡ El tiempo medio que una avioneta pasa en reparación es W .

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{0.465}{0.151} = 3.08 \text{ días}$$

$$\text{donde } \bar{\lambda} = \lambda \cdot (N - L) = \frac{1}{30} \cdot (5 - 0.465) = \frac{1}{30} \cdot (4.535) = 0.151$$

- ➡ La fracción de tiempo que un determinado técnico pasa inactivo es $P_0 + 0.5 \cdot P_1 = 0.619 + 0.5 \cdot 0.310 = 0.774$.

(3.c) INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS NO EXPONENCIALES Y REDES DE COLAS

- **INTRODUCCIÓN A LAS REDES DE COLAS.**
Concepto de red abierta y cerrada.
Redes abiertas y Teorema de Jackson.
- **MODELOS NO EXPONENCIALES**
Cola M/G/1: Fórmula de Pollaczek-Khintchine.
Cola G/M/1: casos Ek/M/1, Hip/M/1, Hyp/M/1.
Uso de QTS_EXCEL.
- **APROXIMACIONES PARA COLAS GI/G/s.**
Aproximación de Allen-Cunneen.
Aproximaciones para colas congestionadas
(Heavy Traffic)

Cap. 5 Allen A. O. "Probability, Statistics and Queueing Theory" Academic Press. 1998. □