

2. Definiciones básicas

I hate definitions. (Benjamin Disraeli)

Empezamos estableciendo la terminología básicos que nos permiten hablar de las redes de flujo, para ello tomaremos el ejemplo siguiente

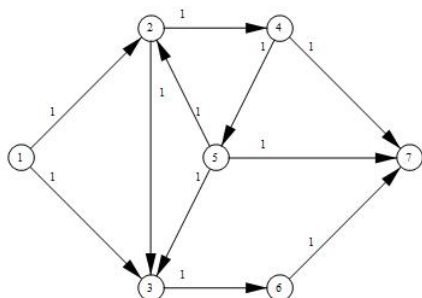


Figura 2. Grafo Dirigido.

2.1. Descripción de una red

Red (Network, Graph): (También llamado grafo) Una red consiste en un conjunto de puntos y un conjunto de líneas que unen ciertos pares de puntos. Los puntos se llaman *nodos* (o vértices). Las líneas se llaman *arcos* (o ligaduras, aristas o ramas).

Los arcos se etiquetan para dar nombres a los nodos en sus puntos terminales, por ejemplo, $(1, 2)$ es el arco entre los nodos 1 y 2.

En un problema de programación lineal, las redes pueden representar un conjunto de estaciones, campos petrolíferos, almacenes, fabricas, sucursales, ciudades, interconectadas entre si a través de caminos, conductos, tuberías que permiten fluir productos para la comercialización o la distribución.

Arcos Dirigidos (Directed Arcs): Se dice que un arco es dirigido cuando el arco tiene flujo en una dirección (como en una calle de un sentido). La dirección se indica agregando una cabeza de flecha al final de la línea que representa el arco.

Al etiquetar un arco dirigido con el nombre de los nodos que une, siempre se coloca primero al nodo de donde viene y después el nodo a donde va, esto es, un arco dirigido del nodo 1 al nodo 2 debe etiquetarse como $(1, 2)$ y no como $(2, 1)$. Otra manera es (12) .

En la etiqueta del arco (i, j) tenemos que i es la cola o Tail y j es la cabeza o head. También diremos que es saliente del nodo i (outgoing) y entrante del nodo j (incoming). Además, el nodo i es adyacente del nodo j .

Arcos No Dirigidos (Undirected Arcs): Si el flujo a través de un arco se permite en ambas direcciones (como una tubería que se puede usar para bombear fluido en ambas direcciones), se dice que es un arco no dirigido.

También se les llama ligadura o arista. Aunque se permita que el flujo a través de un arco no dirigido ocurra en cualquier dirección, se supone que ese flujo será en una dirección, en la seleccionada, y no se tendrá flujos simultáneos en direcciones opuestas.

Red Dirigida (Digrafo): (También llamado: grafo dirigido, digrafo, **Directed Graphs or Directed Network**)

Una red dirigida $G = (N, A)$ consiste en un conjunto de nodos (vértices, puntos) y un conjunto de arcos cuyos elementos son pares ordenados de nodos distintos. Es una red que tiene solo arcos dirigidos.

Para el ejemplo:

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 6), (4, 5), \\ (4, 7), (5, 2), (5, 3), (5, 7), (6, 7) \end{array} \right\}.$$

Una forma habitual de representar el grafo es:

$$A := \{(i, j) : i, j \in N\} = \{(i, j) : (i, j) \in N \times N\}$$

Red no Dirigida: (También llamado: grafo no dirigido, **Undirected Graphs or Undirected Network**)

Es una red donde todos sus arcos son no dirigidos.

2.2. Glosario de una red

Nodo Fuente: (También llamado: nodo de origen, vértice) tiene la propiedad de que el flujo que sale del nodo excede al flujo que entra a él.

Nodo Demanda: (o nodo destino) es el caso contrario al nodo fuente, donde el flujo que llega excede al que sale de él.

Nodo de Tránsito: (o nodo intermedio) satisface la conservación del flujo, es decir, el flujo que entra es igual al que sale.

Trayectoria, camino (path): Una trayectoria entre dos nodos es una sucesión de arcos distintos que conectan estos nodos sin repetición de nodos. Por ejemplo, una de las trayectorias que conectan los nodos 1 y 7 en la figura (2) es la sucesión de arcos $(1, 2) - (2, 3) - (3, 6) - (6, 7)$.

Cuando algunos o todos los arcos de una red son arcos dirigidos, se hace la distinción entre trayectorias dirigidas y trayectorias no dirigidas.

Trayectoria Dirigida: Una trayectoria dirigida del nodo i al nodo j , es una sucesión de arcos cuya dirección (si la tienen) es hacia el nodo j , de manera que el flujo del nodo i al nodo j , a través de esta trayectoria es factible.

Trayectoria No Dirigida: Una trayectoria no dirigida del nodo i al nodo j es una sucesión de arcos cuya dirección (si la tienen) pueden ser hacia o desde el nodo j . Con frecuencia alguna trayectoria no dirigida tendrá algunos arcos dirigidos hacia el nodo j y otros desde él (es decir, hacia el nodo i).

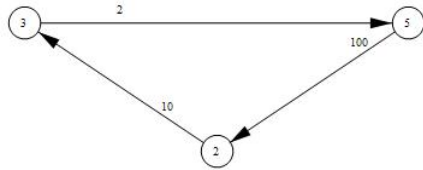


Figura 5. Ciclo dirigido.

Ciclo: Un ciclo es una trayectoria que comienza y termina en el mismo nodo. En la red dirigida que se muestra en la figura (5) existe un ciclo, 2-3-5.

Red Conexa: Una red conexa es una red en la que cada par de nodos está conectado. Se dice que dos nodos están conectados si la red contiene al menos una trayectoria no dirigida entre ellos. Se debe resaltar que no es necesario que la trayectoria sea dirigida aun cuando la red sea dirigida. La figura (6) representa una red no conexa.

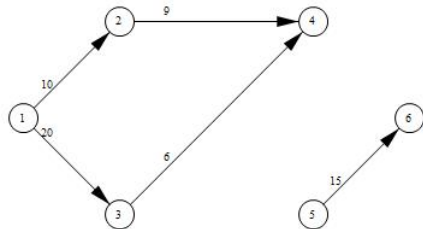


Figura 6. Red no conexa.

Árbol de Expansión: es una red conexa para los n nodos, que contiene ciclos no dirigidos. Todo árbol de expansión tiene justo $n - 1$ arcos, ya que este es el número mínimo de arcos necesarios para tener una red conexa y el máximo numero posible para que no haya ciclos no dirigidos.

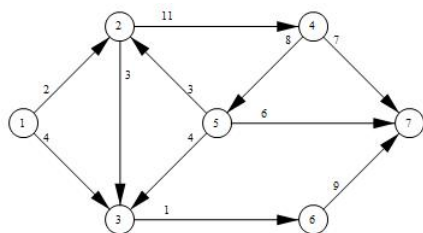


Figura 7. Red dirigida.

La figura (7) muestra los siete nodos de una red conexa.

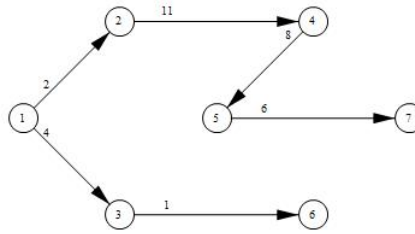


Figura 8. Árbol de expansión.

La figura 8, muestra un árbol de expansión. Teniendo en cuenta que los números son ficticios, puede haber varios árboles de expansión diferentes.

Capacidad de Arco: Es la cantidad máxima de flujo (quizás infinito) que puede circular en un arco dirigido.

2.3. Otras Definiciones

Red Residual: Una red residual muestra las capacidades restantes (llamadas capacidades residuales) para asignar flujos adicionales.

Trayectoria de Aumento: Una trayectoria de aumento es una trayectoria dirigida del nodo fuente al nodo destino en la red residual, tal que todos los arcos en esa trayectoria tienen capacidad residual estrictamente positiva. El mínimo de estas capacidades residuales se llama capacidad residual de la trayectoria de aumento porque representa la cantidad de flujo que es factible agregar en toda la trayectoria. Por lo tanto, cada trayectoria de aumento proporciona una oportunidad de aumento más el flujo a través de la red original.