UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH Departament d'Estadística i Investigació Operativa	Programació Lineal i Entera, curs 2012-13 2on curs Grau en Estadística UB-UPC Segon control de teoria
NOM ALUMNE:	

	Temps estimat	Punts	Correcció	Material d'ajut.
Test	0.5h	2.0 pt		Cap.
Exercici 1	1.0h	8.0 pt		Amb apunts de classe i calculadora.
Total	1.5h	10 pt		

TEST (2 punts / 15min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a)**, **b)** i **c)** si és certa (**Sí**) o falsa (**No**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. El signe de les variables i constriccions duals associades al següent problema primal

$$(P)\begin{cases} \max & -6x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \leq 2 \\ & 2x_1 & +x_2 & = 3 \\ & & x_2 & \leq 0 \end{cases}$$

a) Sí / No són : $\lambda_1 + 2\lambda_2 = -6$ i λ_2 lliure. - SÍ

b) Sí / No són : $-\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$ i $\lambda_2 \geq 0$. - NO

c) Sí / No són : $-\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1$ i $\lambda_1 \leq 0$. - NO

TEST 2. Indiqueu si les següents combinacions (P)-(D) són possibles o no:

a) Sí / No (P) òptim – (D) il·limitat. - NO

b) Sí / No (P) òptim – (D) infactible. - NO

c) Sí / No (D) il·limitat – (P) infactible. - SÍ

TEST 3. Donat un problema (P) en forma estàndard, diem que una base és factible primal si:

a) Sí / No $r \geq 0$ i $x_B \leq 0$. - NO

b) Sí / No $r \leq 0$ i $x_B \geq 0$. - SÍ

c) Sí / No $r \geq 0$ i $x_B \geq 0$. - SÍ

TEST 4. Si volem trobar la solució òptima d'un problema (P) no degenerat en forma estàndard a partir d'una base $\mathcal{B}$ no òptima, l'algorisme que hem d'aplicar és:

a) Sí / No El símplex dual si $r \geq 0$ - SÍ

b) Sí / No El símplex primal si $r \ngeq 0$ - SÍ

c) Sí / No El símplex primal si $x_B \leq 0$. - NO

TEST 5. Si el valor del terme independent b_j surt fora del seu interval d'estabilitat llavors podem assegurar que:

a) Sí / No La nova solució òptima millorarà sempre el valor de l'actual. – NO.

b) Sí / No Es podrà aplicar el símplex dual per a reoptimitzar. - SÍ

c) Sí / No $\phi_z = \lambda' \phi_b$. - SÍ

EXERCICI 1. (8 punts / 1h45m / amb transparències de teoria i calculadora)

Considereu el següent codi OPTMODEL amb el que es defineix i resol un problema de programació lineal (P):

```
proc optmodel;
var X{1..3} >=0;
max Z = -2*X[1] +   X[2] + 2*X[3];
con C1:    X[1] + 3*X[2] + 5*X[3] <= 15;
con C2:  4*X[1] -   X[2]          = 20;
solve;
print X.sol X.rc;
print C1.body C1.dual;
print C2.body C2.dual;
```

[1]	X.SOL	X.RC
1	5	0.0
2	0	-0.8
3	2	-0.0

C1.BODY	C1.DUAL
15	0.4

C2.BODY	C2.DUAL
20	-0.6

a) **(2. punts)** Formuleu el problema dual (D) i ressoleu-lo gràficament.

b) **(2. punts)** Calculeu la solució del problema (D) usant l'expressió de λ^* que es deriva del teorema de dualitat forta. Comproveu que el valor de λ^*obtingut coincideix amb el valor que proporciona SAS i el trobat a l'apartat a).

c) **(2. punts)** Trobeu el valor de l'interval d'estabilitat del coeficient c_2. Comproveu, a partir de la representació de l'apartat a), que quan c_2 es troba sobre el límit de l'interval d'estabilitat, el problema dual es degenerat.

d) **(2. punts)** Indiqueu quin és el valor mínim del terme b_1 que conserva l'optimalitat de la base trobada per SAS. Amb l'ajut del símplex dual indiqueu quina és la solució òptima de (P) si $b_1$es redueix per sota d'aquest valor mínim. Expliqueu com hauríem pogut arribar al mateix resultat a partir de la representació gràfica del problema dual analitzant com afecta a la solució del problema dual el canvi en b_1 per sota del valor mínim.

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

a)

$$
(D)\left\{\begin{array}{llllll}
\min & 15\lambda_1 & +20\lambda_2 & & \\
\text{s.a.:} & \lambda_1 & +4\lambda_2 & \geq -2 & (r1) \\
 & 3\lambda_1 & -\lambda_2 & \geq 1 & (r2) \text{ -} \\
 & 5\lambda_1 & & \geq 2 & (r3) \\
 & \lambda_1 \geq 0 & & & (r4)
\end{array}\right.
$$

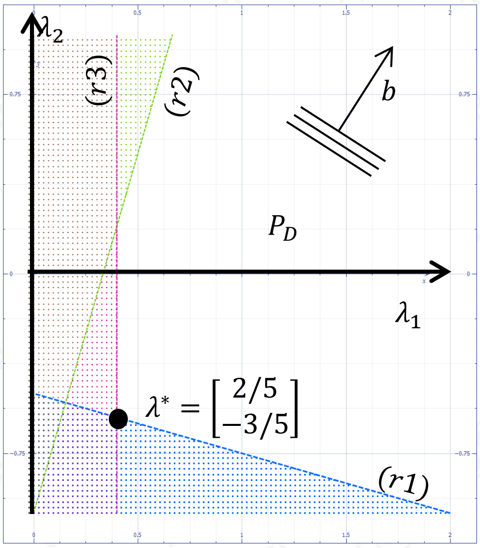

Figura 1: resolució gràfica de (D)

b) Expressió de λ^* proporcionada pel corol·lari del Ta fort de dualitat:

$$
\lambda^{*\prime} = c_B' B^{-1} = \left| \begin{array}{c} \mathcal{B} = \{1,3\}, c_B' = [-2 \quad 2] \\ B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/5 & -1/20 \end{bmatrix} \end{array} \right| = [-2 \quad 2] \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/5 & -1/20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{\frac{2}{5}}^{\text{C1.DUAL}} & \overbrace{-\frac{3}{5}}^{\text{C2.DUAL}} \end{bmatrix}
$$

c) x_2 és v.n.b.:

$$r_2(\phi_{c_2}) = (c_2 + \phi_{c_2}) - \lambda^{*\prime} A_2 = r_2 + \phi_{c_2} \overset{\max z_P}{\gtreqless} 0 \Rightarrow \overbrace{-\frac{4}{5}}^{\text{X.RC(2)=0.8}} + \phi_{c_2} \leq 0 \Rightarrow \boxed{\phi_{c_2} \leq \phi_{c_2}^{\max} = \frac{4}{5}}$$

Si $\tilde{c}_2 := c_2 + \phi_{c_2}^{\max} = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$ la segona constricció del dual passa a ser $3\lambda_1 - \lambda_2 \geq \frac{9}{5}$. Si es representa el nou politop dual $\tilde{P}_D$ s'observa gràficament que la solució dual és degenerada:

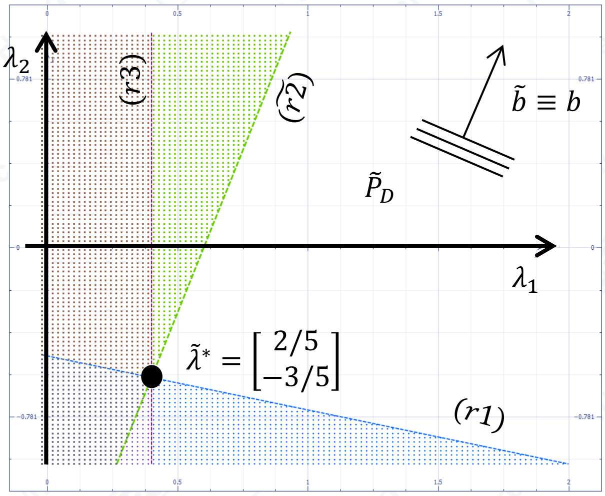

Figura 2: resolució gràfica de $(\tilde{D})$

Es pot observar com el valor òptim de λ_1 i λ_2 no canvia però la folga dual de $(r2)$ (cost reduït de x_2), que era estrictament positiva sobre l'òptim de (D) s'anul·la sobre l'òptim de $(\tilde{D})$.

d) $$x_B(b_1) = \begin{bmatrix} x_1(b_1) \\ x_3(b_1) \end{bmatrix} B^{-1} \begin{bmatrix} 15 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/5 & -1/20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{b_1}{5} - 1 \end{bmatrix} \overset{\text{cond. fact. (P)}}{\geqq} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{b_1 \geq 5}$$

Si $\hat{b}_1 < 5$ es perd la factibilitat primal i hem de recuperar l'optimalitat amb el símplex dual. Relitzaem la primera iteració a partir de la base que proporciona SAS/OR, $\mathcal{B} = \{1,3\}, \mathcal{N} = \{2,4\}$:

- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_3 < 0$ $\boxed{B(2) = 3 \text{ v. b. sortint}}$
- Identificació de problema dual il·limitat: $v = \beta_2 A_N = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ problema dual il·limitat $\Rightarrow$ primal infactible.

Des del punt de vista del problema dual, un canvi $\hat{b}_1 < 5$implica una modificació dels costos. Quan $\hat{b}_1 = 5$el problema dual té òptims alternatius. Si $\hat{b}_1 < 5$el problema dual esdevé il·limitat:

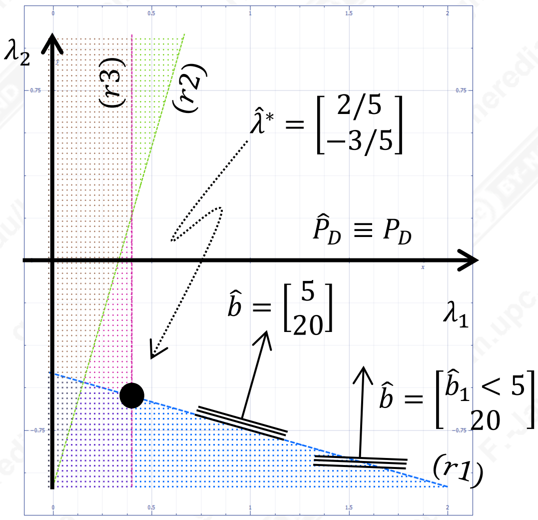

Figura 3: resolució gràfica de $(\hat{D})$