Grau d'Estadística UB-UPC

Programació Lineal i Entera

Tema 4 : Programació Lineal Entera

F.-Javier Heredia

http://gnom.upc.edu/heredia

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

Tema 4 : Programació Lineal Entera

1. **Conceptes bàsics:**
   - Definició de problemes de PLE i exemples.
   - Relaxació lineal
   - Formulacions ideals i fortes
2. **Algorismes de programació lineal entera**
   - Classificació.
   - Algorisme de ramificació i poda (Branch& Bound).
   - Algorisme de plans de tall de Gomory.
   - Algorisme de ramificació i tall (Branch & Cut)
   - Resolució eficient dels subproblemes relaxats: símplex dual

Bibliografia:

Bertsimas i Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization*. Cap 10, 11.

Definició de problema de PLE

- Quan una o diverses variables d'un problema de PL només pot adoptar valors enters, es té un problema de **Programació Lineal Entera** (PLE):

$$(PLE)\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & c'x \\ s.a.: & Ax=b \\ & x\geq 0 \\ & x_i\in\mathbb{Z}, i\in\mathcal{I}\end{cases}$$

- Els problemes de PLE són habituals quan les solucions fraccionals no tenen sentit:
- Les variables enteres també ens ajuden a construir models més acurats per a un gran nombre de problemes de presa de decisions.
- Veurem alguns exemples de models de PLE:
  - Planificació de plantilles laborals.
  - Selecció de projectes/inversions.
  - Problemes de producció amb costos fixos.

Planificació de plantilles: *Air-Express*

Dades:

Dia setmana	Treballadors necessaris
Dillluns	18
Dimarts	27
Dimecres	22
Dijous	26
Divendres	25
Dissabte	21
Diumenge	19

Torn	Dies descans	Sou
1	Dium+Dill	680€
2	Dill+Dima	705€
3	Dima+Dime	705€
4	Dime+Dij	705€
5	Dij+Div	705€
6	Div+Diss	680€
7	Diss+Dium	655€

Objectiu: obtenir quants treballadors contractar a cada torn de forma que es minimitzin els costos de personal tot satisfent les necessitats de treballadors de cada dia.

Planificació de plantilles: formulació genèrica

- **Paràmetres:**

  n : nombre de torns.

  c_i: salari torn i, $i = 1,2,\dots,n$

  $\mathcal{D}_i$: dies de descans torn i, $i = 1,2,\dots,n$

  b_j: nombre de treballadors necessaris dia j, $j = 1,2,\dots,7$

- **Variables de decisió**:

  x_i = nombre de treballadors assignats al torn i, $i = 1,2,\dots,n$

- **Formulació :**

$$
(\mathrm{PE})\begin{cases}
\min_{x} & z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & & \text{Es minimitza el cost salarial} \\
s.a.: & \sum_{i:j\notin\mathcal{D}_i} x_i \geq b_j & j = 1,2,\dots,7 & \text{Es satisfàn les necessiats laborals} \\
& x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z} & i = 1,2,\dots,n &
\end{cases}
$$

Planificació de plantilles: formulació específica

$$
(\mathrm{PE})\begin{cases}
\min\limits_{x} & z=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i \\
s.a.: & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{bmatrix} \\
 & x \geq 0, \qquad x \in \mathbb{Z}^n
\end{cases}
$$

Selecció de projectes: *CRT Technologies*

Dades:

Projecte	*Net Present Value* ($\times 10^3$€)	Inversió necessària ($\times 10^3$€) Any 1	Any 2	Any 3	Any 4	Any 5
1	141	75	25	20	15	10
2	187	90	35	0	0	30
3	121	60	15	15	15	15
4	83	30	20	10	5	5
5	265	100	25	20	20	20
6	127	50	20	10	30	40

Objectiu: La companyia disposa de 250.000€ per a invertir en nous projectes el primer any. Ha pressupostat €75.000 pel finançament dels projectes a l'any 2 i €50.000 pels anys 3,4 i 5.

Selecció de projectes: variables de decisió i f.o.

- **Paràmetres:**
  n : nombre de projectes.
  m : nombre de d'anys.
  c_i : benefici esperat del projecte i (NPV), $i = 1,2,\dots,n$
  a_{ij} : capital necessari projecte i any j , $i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,m$
  b_j : capital total disponible any j, $j = 1,2,\dots,m$
- **Variables de decisió:** $x_i = \begin{cases} 1, & \text{el projecte es selecciona} \\ 0, & \text{el projecte no es selecciona} \end{cases} \quad , i = 1,2,\dots,n$
- **Formulació :**

$$(\text{PE}) \begin{cases} \max\limits_{x} & z = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i & & \text{Es maximitza el NPV} \\ s.a.: & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j & j = 1,2,\dots,m & \text{sense superar el capital disponible} \\ & x \in \{0,1\}^n & & \end{cases}$$

Variables binàries i condicions lògiques

- Les variables binàries són útils per a modelitzar **condicions lògiques**. Per exemple, considereu que:
  - Entre els projectes 1, 4 i 5, no es poden seleccionar més d'un simultàniament:

$$x_1 + x_4 + x_5 \leq 1$$

  - Entre els projectes 4, 5 i 6, s'ha de seleccionar exàctament un:

$$x_4 + x_5 + x_6 = 1$$

  - El projecte 4 no es pot seleccionar a no ser que es sel·leccioni també el projecte 3:

$$x_4 \leq x_3$$

El problema de la motxilla (*Knapsack problem*)

El problema de *CRT Technologies* és una extensió del que es coneix com a Problema de la Motxilla **(*knapsack problem*)**.

$$\begin{cases} \max\limits_{x} z = & c'x & \\ s.a.: & a'x & \leq b \\ & x \in \{0,1\}^n & \end{cases}$$

on:

- c_i: “utilitat” de l’objecte i.
- a_i: pes de l’objecte i.
- b: pes total que es pot transportar.

Problema de càrrega fixa

- Moltes decisions depenen de **costos fixos** :
  - El cost d'inicialització d'una màquina o d'una línia de producció quan es comença la fabricació d'un nou producte.
  - El cost de construcció d'un nova línia o planta de producció.
  - El cost de contractar a personal addicional.

Problema de Càrrega Fixa: *Remington Manufacturing*

Dades:

Operació	Hores consumides Prod. 1	Prod. 2	Prod. 3	Hores disponibles
Mecanització	2	3	6	600
Pulverització	6	3	4	300
Ensamblatge	5	6	2	400
Benefici unitari	48€	55€	50€	
Costos configuració	1000€	800€	900€	

Objectiu: obtenir el programa de producció que maximitzi el benefici net (benefici menys costos) tot satisfent la disponibilitat de recursos.

Càrrega fixa: paràmetres I variables de decisió

- **Paràmetres:**

  n : nombre de productes.

  m : nombre de processos.

  c_i : benefici unitari producte i, $i = 1,2,\dots,n$

  a_{ij} : hores consumides producte i procés j , $i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,m$

  b_j : hores totals disponibles procés j, $j = 1,2,\dots,m$

  k_i : costos configuració producte i, $i = 1,2,\dots,n$.

- **Variables de decisió:**

  x_i : quantitat producte i, $i = 1,2,\dots,n$

  $$y_i = \begin{cases} 1, & x_i > 0 \\ 0, & x_i = 0 \end{cases} ,i = 1,2,\dots,n$$

Càrrega fixa: funció objectiu i constriccions

- **Formulació :**

$$
(PE)\begin{cases}
\max\limits_{x,y} & z = \sum\limits_{i=1}^{n}(c_i x_i - k_i y_i) & & \text{Es maximitza el benefici net} \\
s.a.: & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j & j = 1,2,\dots,m & \text{Disponibilitat de recursos} \\
& x_i \le M_i y_i & i = 1,2,\dots,n & \text{Acoblament } x_i - y_i \\
& x \ge 0 & & \\
& y \in \{0,1\}^n & &
\end{cases}
$$

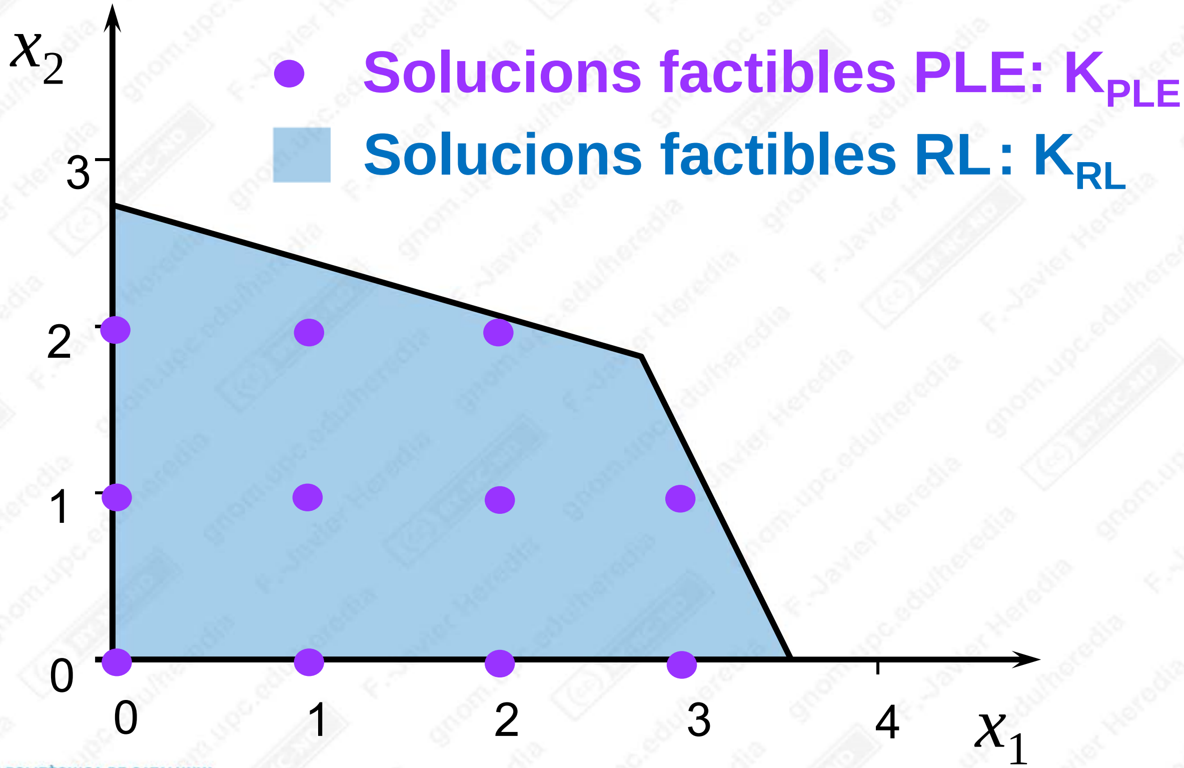
Relaxació Lineal

- **PLE**

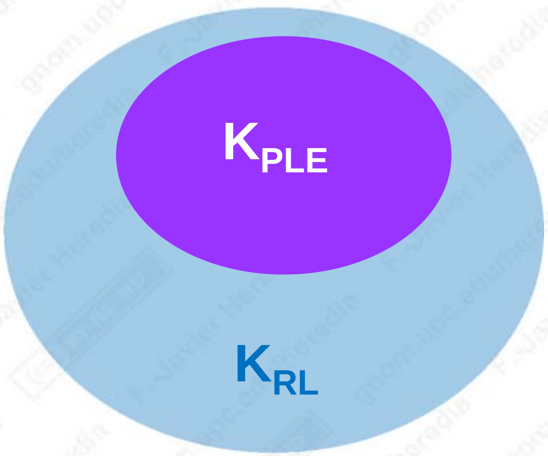
$$\begin{array}{lrl} \max & z_{PLE} = & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.:} & & x_1 + 3x_2 \le 8.25 \\ & & 2.5x_1 + x_2 \le 8.75 \\ & & x_1, x_2 \ge 0 \\ & & \mathbf{x_1, x_2 \text{ enteres}} \end{array}$$

- **Relaxació Lineal (RL)**

$$\begin{array}{lrl} \max & z_{RL} = & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.:} & & x_1 + 3x_2 \le 8.25 \\ & & 2.5x_1 + x_2 \le 8.75 \\ & & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$



$K_{PLE} \subseteq K_{RL}$



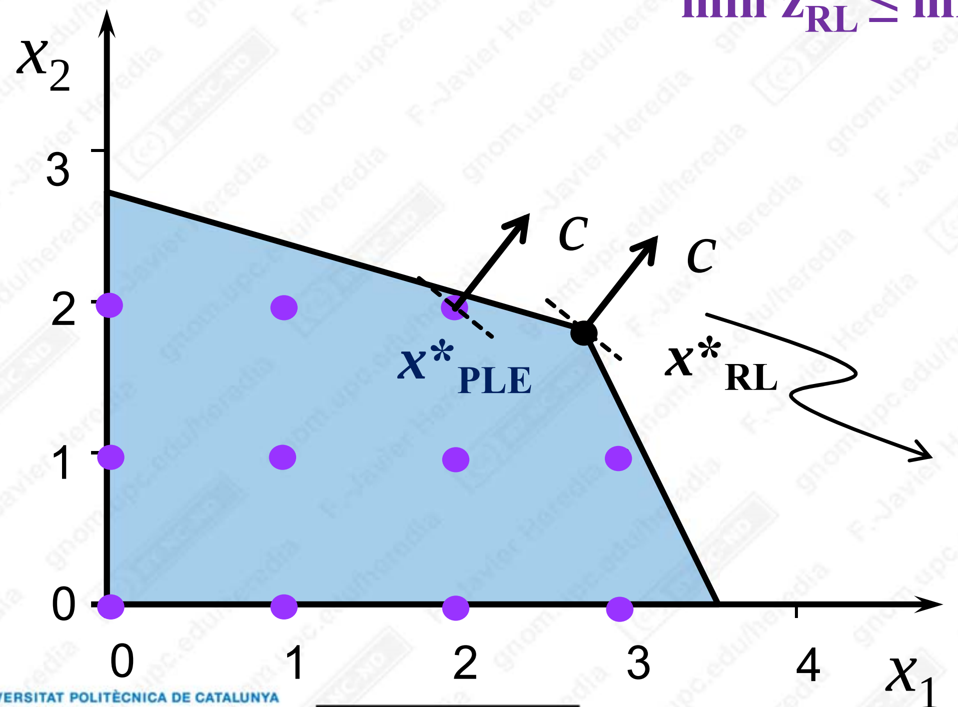
Relació f.o. PLE i RL

- $\mathbf{K_{PLE}} \subseteq \mathbf{K_{RL}} \Rightarrow$ la solució òptima de la relaxació lineal z^*_{RL} proporciona una **fita** del valor òptim de la funció objectiu del problema PLE z^*_{PLE} .
  - Per a problemes de **maximització** el valor òptim de la relaxació lineal és una **fita superior** del valor òptim de la f.o. del problema PLE:

$$\max z_{PLE} \leq \max z_{RL}$$

  - Per a problemes de **minimització** el valor òptim de la relaxació lineal és una **fita inferior** del valor òptim de la f.o. del problema PLE:

$$\min z_{RL} \leq \min z_{PLE}$$

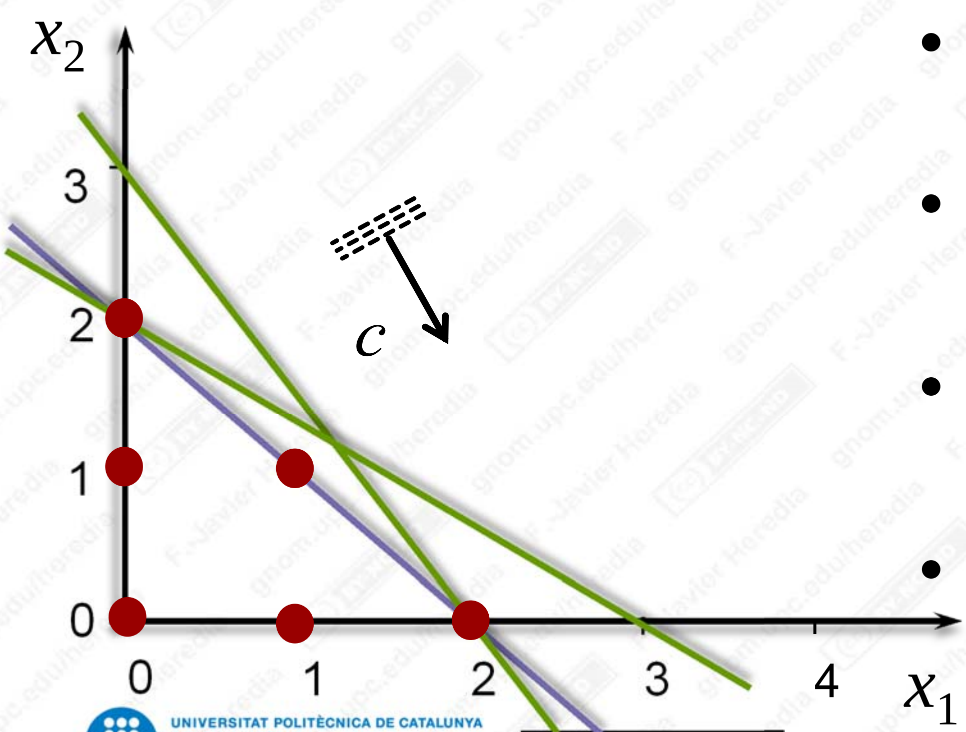


$$\max z_{PLE} = z^*_{PLE} < \max z_{RL}\ z^*_{RL}$$

Formulacións fortes de problemes PLE

- Sigui el $(PE)\ \min\{c'x \mid K_{PE} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(2,0)\}\}$ (K_{PE} finit).
- Generalment hi ha més d'una forma de definir la regió factible de (PE) :

$$(PE1)\begin{cases}\min & z_{PE1} = c'x \\ \text{s.a.:} & \boxed{x_1 + x_2 \le 2} \\ & x \ge 0, \text{entera}\end{cases} \qquad (PE2)\begin{cases}\min & z_{PE2} = c'x \\ \text{s.a.:} & \boxed{\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 & \le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 & \le 6 \end{array}} \\ & x \ge 0, \text{entera}\end{cases}$$



- **Def. desigualtat vàlida**: $a_j'x \le b_j$ és desigualtat vàlida per a K_{PE} si $a_j'x \le b_j$ per a tot $x \in K_{PE}$
- $(PE1)$ i $(PE2)$ són **formulacions vàlides**, doncs

$$K_{PE} = K_{PE1} = K_{PE2} \text{ (i } x_{PE}^* = x_{PE1}^* = x_{PE2}^*\text{).}$$

- Quina formulació és millor? Observem que:

$$K_{RL1} \subset K_{RL2} \Rightarrow z_{RL2}^* \le z_{RL1}^* \le z_{PE1}^* = z_{PE2}^*$$

- **Def:** *direm que la formulació PE1 és **més forta** que PE2 si $K_{RL1} \subset K_{RL2} \Rightarrow$ la relaxació lineal RL1 proporciona una fita millor (més forta) de z_{PE}^*.*

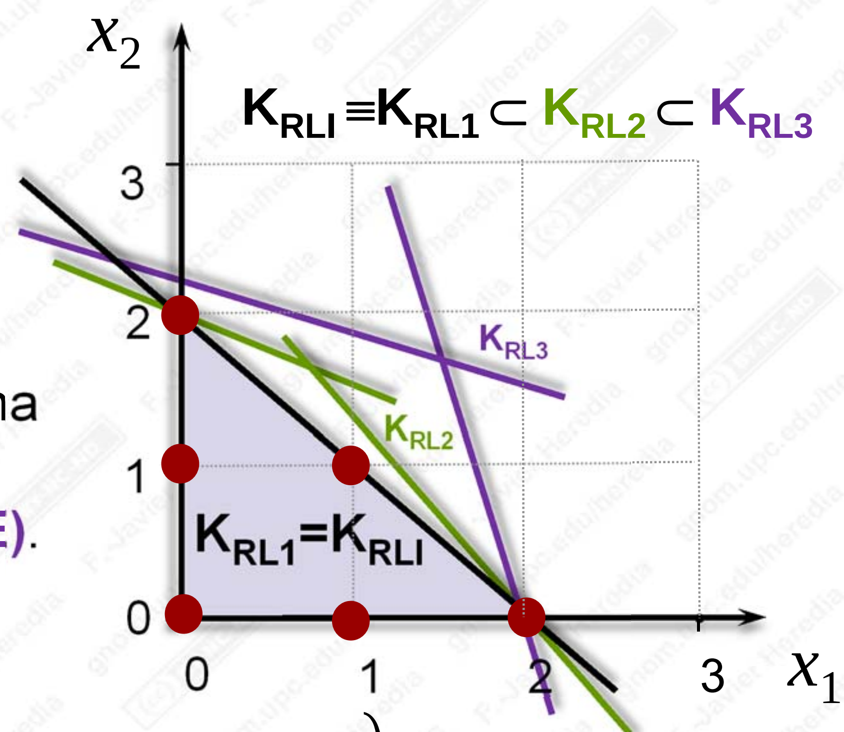
Formulació ideal d'un problema PLE

- La formulació més forta possible de (PE) s'anomena **formulació ideal** (PEI) :

(PEI) formulació vàlida t.q. $K_{RLI} \subseteq K_{RL_j}$ per a tota formulació vàlida (PEj) de (PEI).

- Analitzem la formulació (PE1) anterior:

$$(\text{PE1})\begin{cases} \min & z_{PE1} = c'x \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \quad \leq 2 \\ & x \geq 0, \text{entera} \end{cases}$$



- Observant el dibuix és evident que no hi ha cap altre formulació alternativa més forta que (PE1) : **és la formulació ideal de (PE)**.
- Això és així perque K_{RL1} coincideix amb **l'embolcall convex** de K_{PE}, **CH(K_{PE})** :

$$K_{RL1} = CH(K_{PE}) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, x^i \in K_{PE} \right\}$$

- **El problema $(\mathrm{PE})\ min\{c'x|x \in K_{PE}\}$ equival a $(P) min\{c'x|x \in CH(K_{PE})\}$.**

Algorismes de PLE: classificació

- Considerem el següent problema de PLE:

$$(PE)\begin{cases}\min & z_{PE} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 7x_1 + 10x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0, \text{entera}\end{cases}$$

- Volem analitzar com es resoldria aquest problema amb tres algorismes:
  - **Branch-and-Bound (ramifica i poda)** : es basa en la identificació de x^*_{PE} després de visitar un conjunt "reduit" de solucions enteres del problema PE usant les fites z^*_{RL}.
  - **Cutting Planes (plans de tall)** : afegeix constriccions addicionals (talls) fins aconsseguir una formulació (PEj) t.q. $x^*_{RLj} \in K_{PEJ}$.
  - **Branch-and-Cut (ramifica i talla)**: una combinació dels anteriors.

Algorisme de Branch&Bound

- Volem resoldre el següent (PE) amb l'algorisme de B&B:

$$(PE)\begin{cases} \min & z_{PE} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 7x_1 + 10x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0, \text{entera} \end{cases}$$

Algorisme genèric de Branch and Bound (B&B)[1]

Inicialització: $L = \{PE1\}$; $z^* = +\infty$ (incumbent, $z^*_{PE1} \leq z^*$); $\underline{z}^*_{PE1} = -\infty$.

Mentre $L \neq \emptyset$ **fer**

Es selecciona un problema $PEj \in L$ (**Selecció**)

Es resol la relaxació lineal RLj : x^*_{RLj} ; $\underline{z}^*_{PEj} \leftarrow z^*_{RLj}$ (**Relaxació**)

Si $K_{RLj} = \emptyset$ ó $z^*_{RLj} \geq z^*$ ó $x^*_{RLj} \equiv x^*_{PEj}$ **fer (Eliminació)**

$L \leftarrow L \backslash \{PEj\}$

Si $x^*_{RLj} \equiv x^*_{PEj}$ **fer**

Si $z^*_{RLj} \leq z^*$: $x^* \leftarrow x^*_{RLj}$, $z^* \leftarrow z^*_{RLj}$

Si $z^* = \underline{z}^*_{PEi}$ per a algun PEi : $L \leftarrow L \backslash \{PEl\}\ \forall (PEl)$ descendent de PEi

Fi Si

Altrament (Separació de PE*j*):

Es separa PEj en els subproblemes $PE(j+1)$, $PE(j+2)$ t.q:

i. $K_{PEj} = K_{PE(j+1)} \cup K_{PE(j+2)}$; $K_{j+1} \cap K_{PE(j+2)} = \emptyset$

ii. $z_{PEj} = z_{PE(j+1)} = z_{PE(j+2)}$

Es substitueix PEj pels seus descendents :

$$L \leftarrow L \backslash \{PEj\} \cup \{PE(j+1)\} \cup \{PE(j+2)\}$$

Fi Si

Fi Mentre (**Òptim**: $x^*_{PE1} \equiv x^*$; $z^*_{PE1} \equiv z^*$)

(1) : A. H. Land and A. G. Doig (1960). "An automatic method of solving discrete programming problems". *Econometrica* 28 (3): pp. 497–520. doi:10.2307/1910129

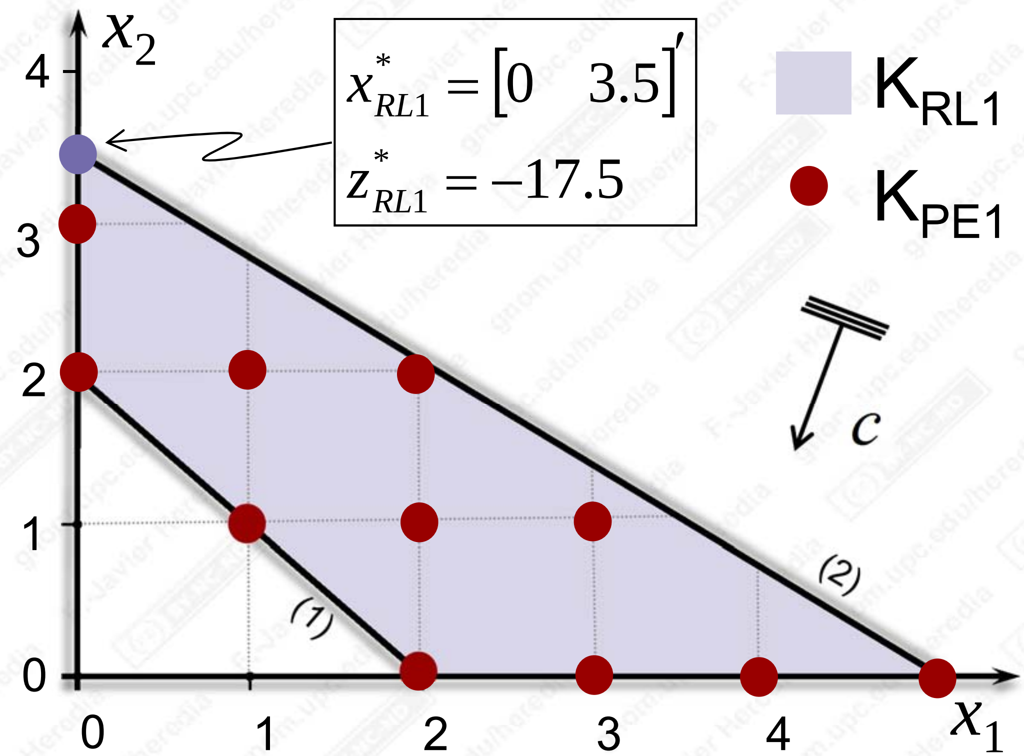
Exemple Branch&Bound: tractament de (PE1)

B&B, Iteració 1: L={(PE1)}, $\underline{z}^*_{PE1} = +\infty \leq z^*_{PE1} \leq z^* = +\infty$

- **Selecció**: (PE1)
- **Relaxació**: resolució de (RL1):

$$(PE1)\begin{cases} \text{min} & z_{PE1} = -3x_1 - 5x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \geq 2 & (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 \leq 35 & (2) \\ & x \geq 0 \text{, entera} & \end{cases}$$

$$\underline{z}^*_{PE1} \leftarrow \lceil -17.5 \rceil = -17$$



- **Separació:** $x_2^* = 7/2 \leftarrow \begin{cases} (PE1) \wedge x_2 \leq \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 3 \rightarrow (PE2) \\ (PE1) \wedge x_2 \geq \left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil = 4 \rightarrow (PE3) \end{cases}, L \rightarrow \{(PE2),(PE3)\}$

Arbre d'exploració

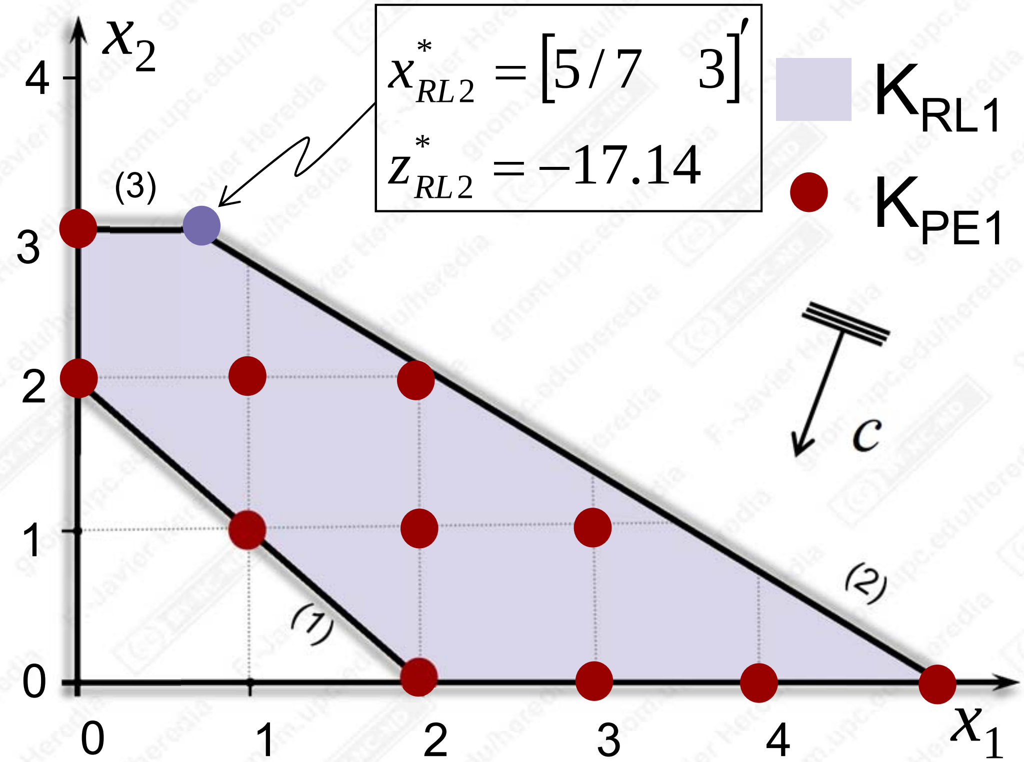
Exemple Branch&Bound: tractament de (PE2)

B&B, Iteració 2: L={(PE2),(PE3)}, $\underline{z}^*_{PE1} = -17 \leq z^*_{PE1} \leq \overline{z}^* = +\infty$

- **Selecció**: (PE2)
- **Relaxació**: resolució de (RL2):

$$(PE2)\begin{cases} \min & z_{PE2} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \geq 2 \quad (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 \leq 35 \quad (2) \\ & x_2 \leq 3 \quad (3) \\ & x \geq 0 \text{, entera} \end{cases}$$

$$\underline{z}^*_{PE2} \leftarrow \lceil -17.14 \rceil = -17$$



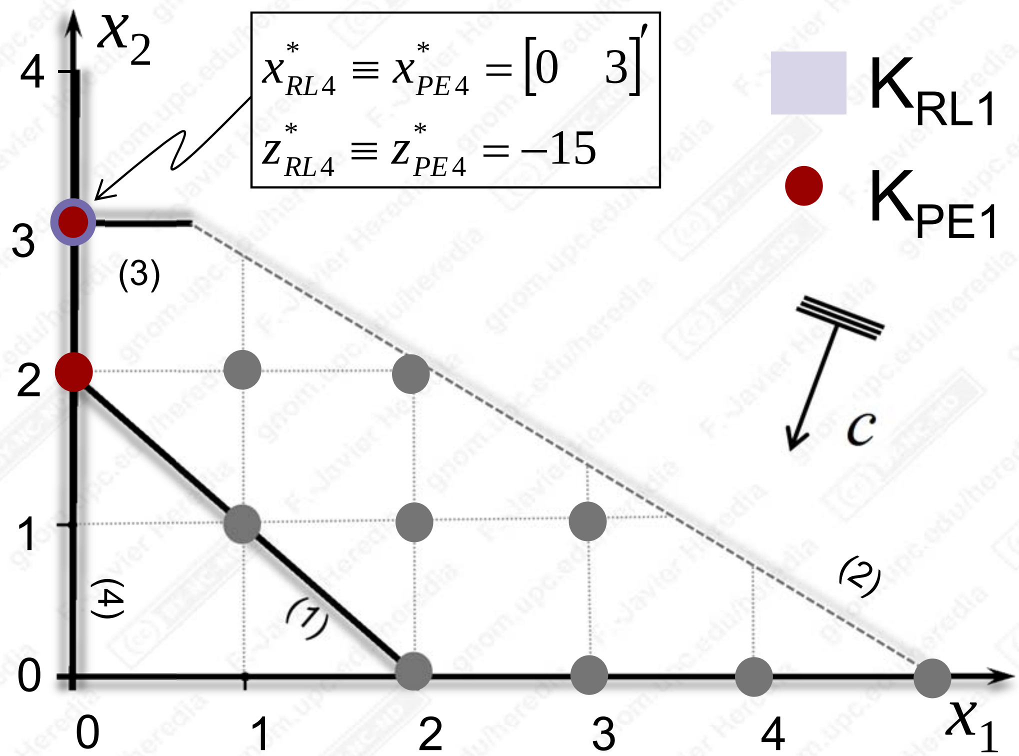
- **Separació:** $x_1^* = 5/7 \leftarrow \begin{cases} (PE2) \wedge x_1 \leq 0 \rightarrow (PE4) \\ (PE2) \wedge x_1 \geq 1 \rightarrow (PE5) \end{cases}$, $L \rightarrow \{(PE4),(PE5),(PE3)\}$

Arbre d'exploració

B&B, Iteració 3: L={(PE4),(PE5),(PE3)}, $\underline{z}^*_{PE1} = -17 \leq z^*_{PE1} \leq z^* = +\infty$

- **Selecció**: (PE4)
- **Relaxació**: resolució de (RL4):

$$(PE4)\begin{cases} \text{min} & z_{PE4} = -3x_1 - 5x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \geq 2 & (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 \leq 35 & (2) \\ & x_2 \leq 3 & (3) \\ & x_1 \leq 0 & (4) \\ & x \geq 0 \text{, entera} & \end{cases}$$



- **Eliminació:** $x^*_{RL4} \equiv x^*_{PE4}$
  - S'elimina (PE4): $L \leftarrow L \setminus$ {(PE4)} = {(PE5),(PE3)}
  - $z^*_{PE4} < z^* \Rightarrow$ s'actualitza la incumbent: $x^* \leftarrow x^*_{PE4} = [\,0,\,3\,]'$, $z^* \leftarrow z^*_{PE4} = -15$
  - $z^* > \underline{z}^*_{PE1}, \underline{z}^*_{PE2}$

Arbre d'exploració

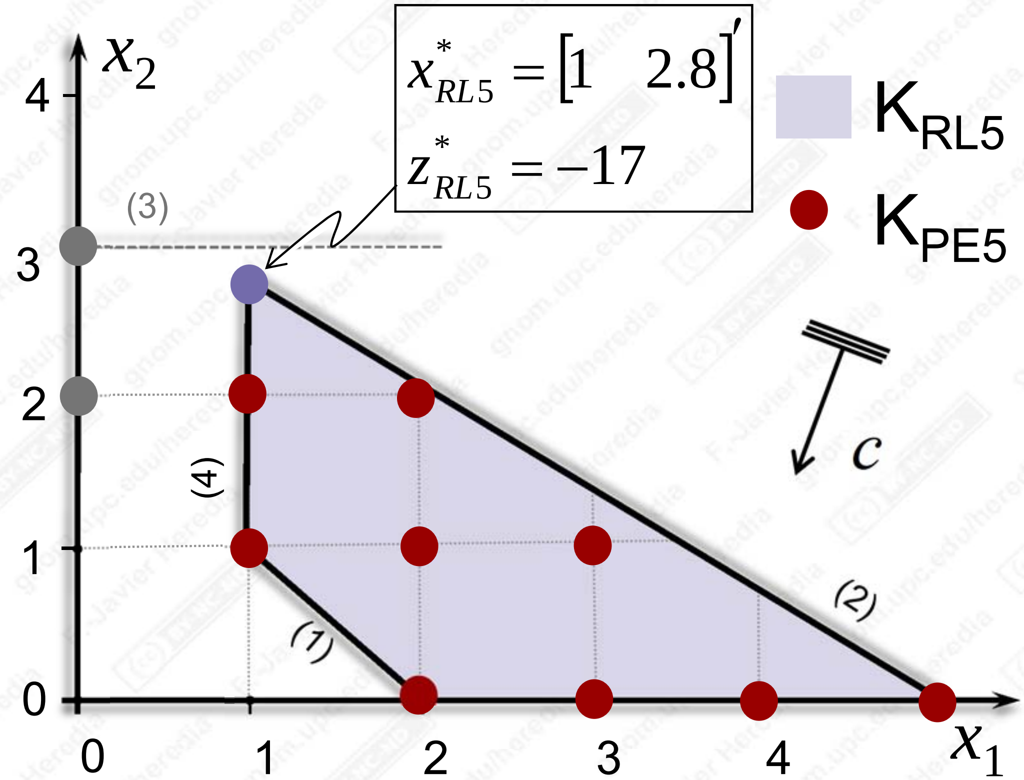
Exemple Branch&Bound: tractament de (PE5)

B&B, Iteració 4: L={(PE5),(PE3)}, $\underline{z}^*_{PE1}= -17 \leq z^*_{PE1} \leq z^* = -15$, $x^*=[0,3]'$

- **Selecció**: (PE5)
- **Relaxació**: resolució de (RL5):

$$
(PE5)\begin{cases}
\min & z_{PE5} = -3x_1 - 5x_2 & \\
\text{s.a.}: & x_1 + x_2 \geq 2 & (1)\\
 & 7x_1 + 10x_2 \leq 35 & (2)\\
 & x_2 \leq 3 & (3)\\
 & x_1 \geq 1 & (4)\\
 & x \geq 0 \text{, entera} &
\end{cases}
$$

$\underline{z}^*_{PE5} \leftarrow -17$



- **Separació:** $x_2^* = 2.8 \leftarrow \begin{cases} (PE5) \wedge x_2 \leq 2 \rightarrow (PE6) \\ (PE5) \wedge x_2 \geq 3 \rightarrow (PE7) \end{cases}$, $L \rightarrow \{(PE6),(PE7),(PE3)\}$

Arbre d'exploració

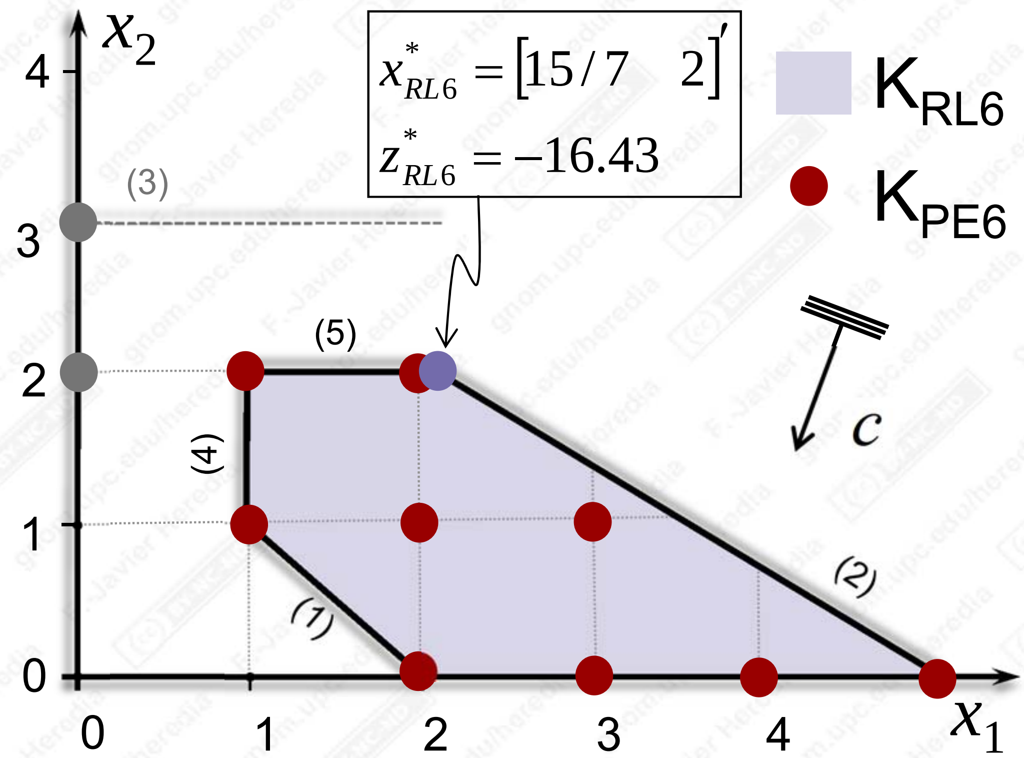
Exemple Branch&Bound: tractament de (PE6)

B&B, Iteració 5: L={(PE6), (PE7),(PE3)}, $\underline{z}^*_{PE1} = -17 \le z^*_{PE1} \le z^* = -15$, $x^* = [0,3]'$

- **Selecció**: (PE6)
- **Relaxació**: resolució de (RL6):

$$(PE6)\begin{cases} \min & z_{PE6} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \ge 2 \quad (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 \le 35 \quad (2) \\ & x_2 \le 3 \quad (3) \\ & x_1 \ge 1 \quad (4) \\ & x_2 \le 2 \quad (5) \\ & x \ge 0, \text{entera} \end{cases}$$

$$\underline{z}^*_{PE6} \leftarrow \lceil -16.43 \rceil = -16$$



- **Separació:** $x_1^* = 15/7 \leftarrow \begin{cases} (PE6) \wedge x_1 \le 2 \rightarrow (PE8) \\ (PE6) \wedge x_1 \ge 3 \rightarrow (PE9) \end{cases}$, $L \rightarrow \{(PE8),(PE9),(PE7),(PE3)\}$

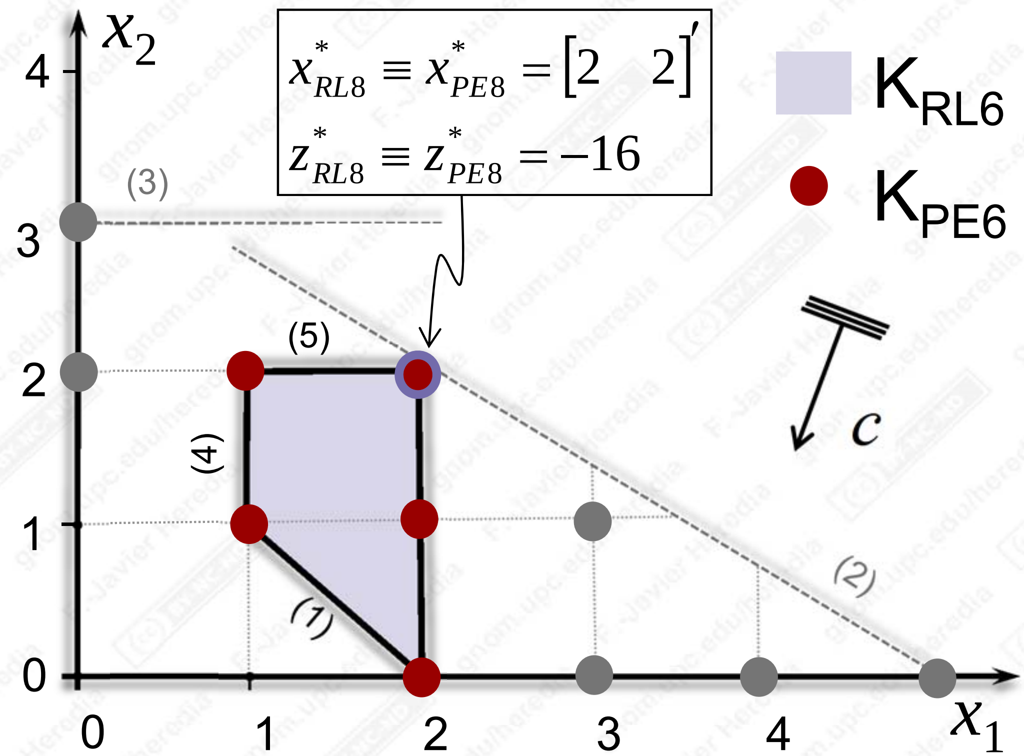
Arbre d'exploració

Exemple Branch&Bound: tractament de (PE8)

B&B, Iteració 6: L={(PE8), (PE9),(PE7),(PE3)}, $\underline{z}^*_{PE1} = -17 \leq z^*_{PE1} \leq z^* = -15$

- **Selecció**: (PE8)
- **Relaxació**: resolució de (RL8):

$$
(PE8)\begin{cases}
\text{min} & z_{PE8} = -3x_1 - 5x_2 & \\
\text{s.a.:} & x_1 + x_2 \geq 2 & (1) \\
& 7x_1 + 10x_2 \leq 35 & (2) \\
& x_2 \leq 3 & (3) \\
& x_1 \geq 1 & (4) \\
& x_2 \leq 2 & (5) \\
& x_1 \leq 2 & (6) \\
& x \geq 0 \text{, entera} &
\end{cases}
$$



- **Eliminació:** $x^*_{RL8} \equiv x^*_{PE8}$
  - S'elimina (PE8): $L \leftarrow L \backslash$ {(PE8)} = {(PE9),(PE7),(PE3)}
  - $z^*_{PE8} < z^* \Rightarrow$ s'actualitza la incumbent: $x^* \leftarrow x^*_{PE8}$=[2, 2]' , $z^* \leftarrow z^*_{PE8}$ = -16
  - $z^* < \underline{z}^*_{PE6} \Rightarrow$ s'eliminen descendents de (PE6): $L \leftarrow L \backslash$ {(PE9)} = {(PE7),(PE3)}

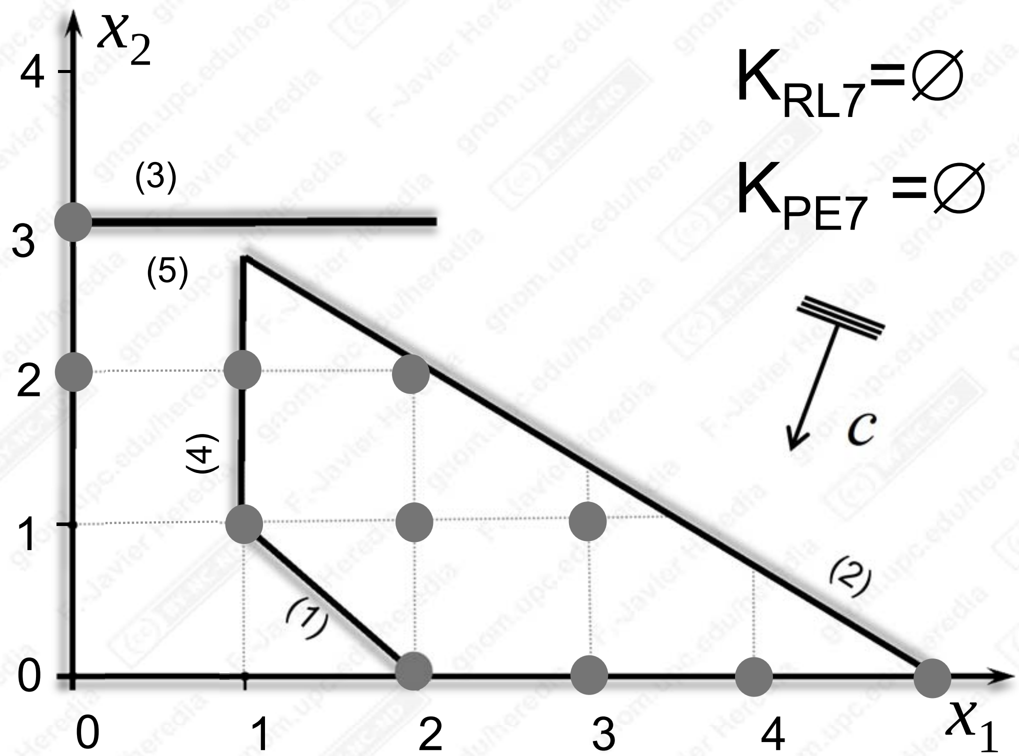
Arbre d'exploració

Exemple Branch&Bound: tractament de (PE7)

B&B, Iteració 7: L={(PE7),(PE3)}, $\underline{z}^*_{PE1}$= -17 ≤ z^*_{PE1}≤ z^*= -16, x^*=[2,2]'

- **Selecció**: (PE7)
- **Relaxació**: resolució de (RL7):

$$(PE7)\begin{cases} \text{min} & z_{PE7} = -3x_1 - 5x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \geq 2 & (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 \leq 35 & (2) \\ & x_2 \leq 3 & (3) \\ & x_1 \geq 1 & (4) \\ & x_2 \geq 3 & (5) \\ & x \geq 0 \text{, entera} & \end{cases}$$



$K_{RL7}=\varnothing$

$K_{PE7}=\varnothing$

- **Eliminació:** $K_{RL7} \equiv K_{PE7} = \varnothing$
  - S'elimina (PE7): $L \leftarrow L \backslash \{(PE7)\} = \{(PE3)\}$

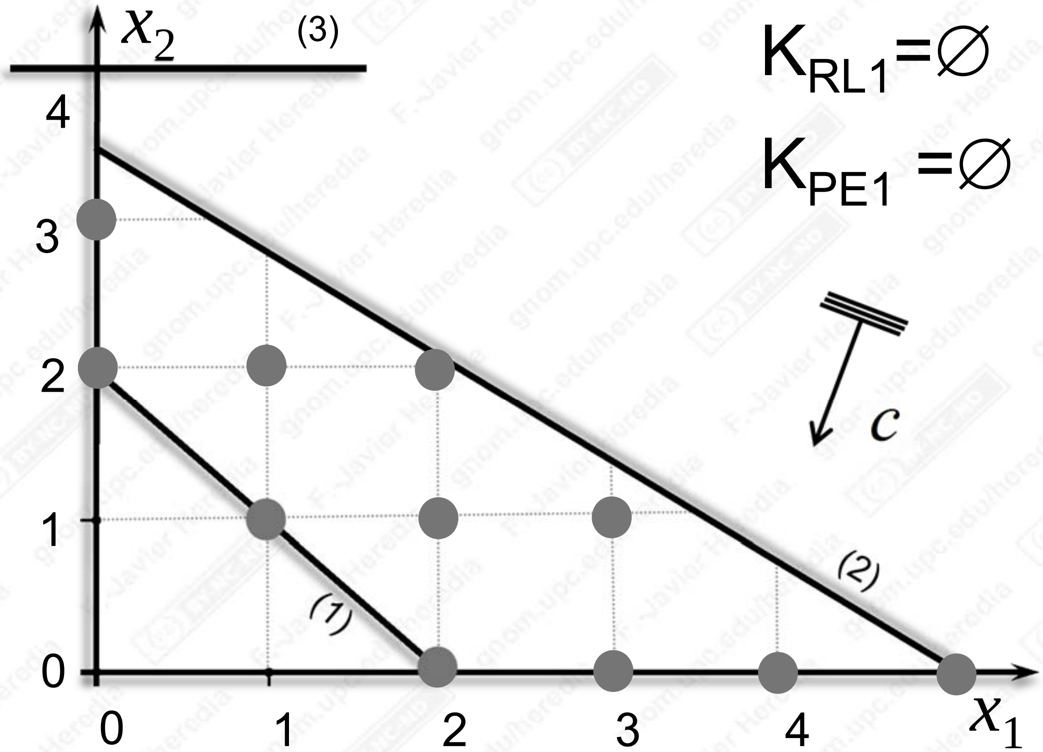
Arbre d'exploració

Exemple Branch&Bound: tractament de (PE3)

B&B, Iteració 8: L={(PE3)}, $\underline{z}^*_{PE1}= -17 \le z^*_{PE1} \le z^* = -16$, $x^*=[2,2]'$

- **Selecció**: (PE3)
- **Relaxació**: resolució de (RL1):

$$
(PE3)\begin{cases}
\text{min} & z_{PE3} = -3x_1 - 5x_2 & \\
\text{s.a.:} & x_1 + x_2 \ge 2 & (1) \\
 & 7x_1 + 10x_2 \le 35 & (2) \\
 & x_2 \ge 4 & (3) \\
 & x \ge 0 \text{, entera} &
\end{cases}
$$



$K_{RL1} = \varnothing$

$K_{PE1} = \varnothing$

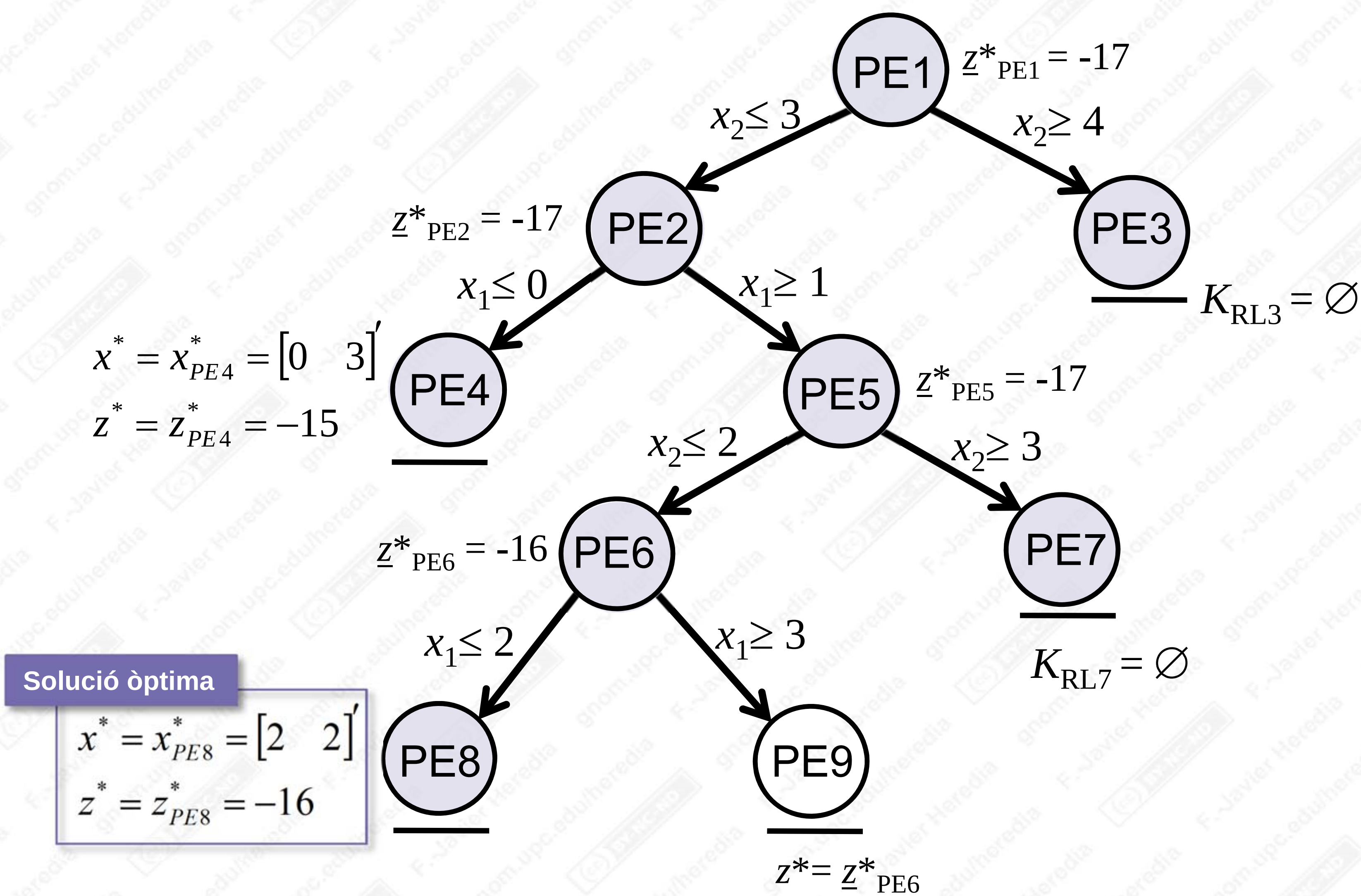
- **Eliminació:** $K_{RL3} \equiv K_{PE3} = \varnothing$
  - S'elimina (PE3): $L \leftarrow L \setminus \{(PE3)\} = \varnothing$

B&B, Iteració 9: L= $\varnothing \Rightarrow z^*_{PE1} = z^* = -16$, $x^*_{PE1} = x^* = [2,2]'$

Arbre d'exploració

Exemple Branch&Bound: arbre d'exploració

- **Arbre d'exploració B&B:**



Talls de Gomory: definició (1/3)

- Els talls de Gomory proporcionen un **mètode sistemàtic de generació de desigualtats vàlides de problemes PLE**. Considereu el problema PLE i la seva relaxació lineal.

$$(PE)\begin{cases}\min & c'x \\ s.t.: & Ax=b \\ & x\geq 0, x\in\mathbb{Z}\end{cases}, (RL)\begin{cases}\min & c'x \\ s.t.: & Ax=b \\ & x\geq 0\end{cases}$$

- **Def.: desigualtat vàlida de $(\boldsymbol{PE})$**: *la inequació $a_j x \leq b_j$ és una desigualtat vàlida de (PE) sii $a_j x\leq b_j$ és satisfeta per totes les solucions enteres de (PE).*

- **Def.: tall de $(\boldsymbol{PE})$ sobre $\boldsymbol{x^*_{RL}}$**: *la inequació $a_j x\leq b_j$ és un tall de (PE) sobre x^*_{RL} sii:*

  i. $a_j x\leq b_j$ *és una desigualtat vàlida.*

  ii. $a_j x\leq b_j$ *és violada per x^*_{RL}.*

Talls de Gomory: definició (2/3)

- Els talls de Gomory proporcionen un **mètode sistemàtic de generació de desigualtats vàlides de problemes PLE**. Considereu el problema PLE i la seva relaxació lineal.

$$(\text{PE})\begin{cases}\min & c'x \\ \text{s.a.:} & Ax=b \\ & x\geq 0, \text{ entera}\end{cases} \quad , \quad (\text{RL})\begin{cases}\min & c'x \\ \text{s.a.:} & Ax=b \\ & x\geq 0\end{cases}$$

- Considereu que hem resolt (RL) amb l'algorisme del símplex obtenint la solució x^*_{RL}. Usant teoria de programació lineal podem "re-escriure" el sistema $Ax = b$ de la següent forma:

$$Ax = Bx_B + A_N x_N = b \rightarrow B^{-1}\left(Bx_B + A_N x_N\right) = B^{-1}b = x_B^*$$

$$\rightarrow x_B + \underbrace{\left(B^{-1}A_N\right)}_{V} x_N = x_B^* \rightarrow \boxed{x_{B(i)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} v_{ij} x_j = x^*_{B(i)}}$$

Usarem aquesta relació per a generar plans de tall.

Talls de Gomory: definició (3/3)

- Considerem la relació (1) associada a una componen de x^*_{RL} no entera:

$$x_{B(i)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} v_{ij} x_j = x^*_{B(i)} \text{ no entera} \quad (1)$$

  – Totes les solucions factibles de (PE) ($x_{PE} \in K_{PE}$) han de satisfer (1), doncs son també factibles de (RL).

  – Transformarem (1) en una desigualtat vàlida usant la informació que tenim sobre x_{PE}, és a dir, que **x_{PE} és ≥ 0 (transf. 1) i entera (transf. 2)**.

- **Transformació 1**: atés que $x_{PE} \geq 0$ es satisfà, per tot $x_{PE} \in K_{PE}$:

$$x_{B(i)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} v_{ij} x_j = x^*_{B(i)} \xrightarrow{x_N \geq 0} x_{B(i)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq x^*_{B(i)}$$

- **Transformació 2**: atés que x_{PE} és enter es satisfà, per tot $x_{PE} \in K_{PE}$:

$$x_{B(i)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq x^*_{B(i)} \xrightarrow{x \text{ enter}} \boxed{x_{B(i)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor x^*_{B(i)} \rfloor}$$

Tall de Gomory

Algorisme de plans secants de Gomory[1]

- El tall de Gomory $x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \le \lfloor x^*_{B(i)} \rfloor \quad (2)$

  és una constricció de desigualtat amb les següents propietats:

  1. Tota solució factible (PE), $x_{PE} \in K_{PE}$, satisfà (2) (per construcció).
  2. La solució x^*_{RL} viola (2), doncs $x^*_{B(i)} > \lfloor x^*_{B(i)} \rfloor$.

  Llavors, **el tall de Gomory (2) és una desigualtat vàlida**.

Algorisme de plans secants de Gomory:

1. Es resol (RL) : x^*_{RL}
2. Si x^*_{RL} és entera, **STOP**: $x^*_{RL} \equiv x^*_{PE}$
3. Si x^*_{RL} no és entera: seleccionar una component de x^*_{RL} fraccional i afegir a (PE) el tall de Gomory (2) associat.
4. Anada a 1

(1) Ralph E. Gomory. "*Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs*". Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 275-278. http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9904-1958-10224-4

Alg. de plans de tall de Gomory

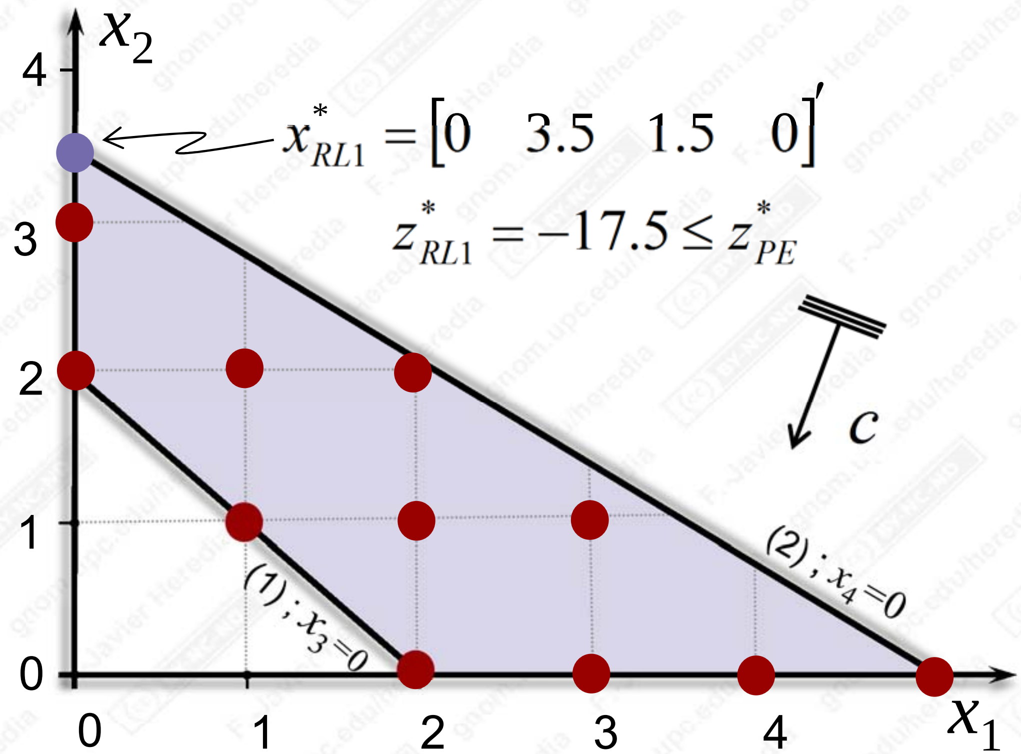
- Resoleu el següent problema amb l'algorisme de plans de tall (plans secants) secants de Gomory

$$(PE)\begin{cases} \text{min} & z_{PE} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 7x_1 + 10x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0 \text{, entera} \end{cases}$$

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 1**

1. Resolució de (RL1):

$$(PE1)\begin{cases}\text{min} & z_{PE1} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \quad (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 + x_4 = 35 \quad (2) \\ & x \ge 0\text{, entera}\end{cases}$$



2. x^*_{RL1} no és entera: es defineix el **tall de Gomory**

$$x_B = [x_2 \quad x_3]' = [3.5 \quad 1.5]', V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -1 & 0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

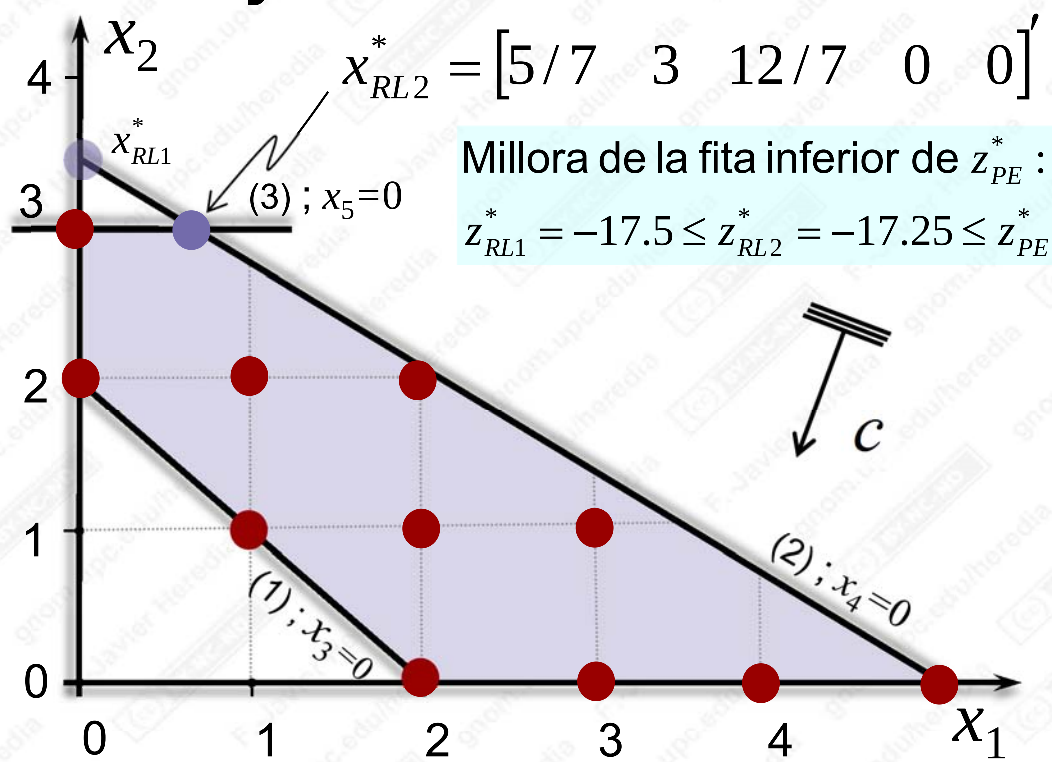
$$x_{B(1)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{1j} \rfloor x_j \le \lfloor x_2^* \rfloor \rightarrow x_2 + \lfloor 0.7 \rfloor x_1 + \lfloor 0.1 \rfloor x_4 \le \lfloor 3.5 \rfloor \rightarrow \boxed{x_2 \le 3}$$

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 2**

1. Resolució de (RL2):

$$(PE2)\begin{cases}\text{min} & z_{PE2} = -3x_1 - 5x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 & (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 + x_4 = 35 & (2) \\ & x_2 + x_5 = 3 & (3)\ \text{nou tall} \\ & x \geq 0,\ \text{entera} & \end{cases}$$

2. x^*_{RL2} no és entera: es defineix el **tall de Gomory**



$$x_B = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]',\ V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 0 & 1/7 & -10/7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1/7 & -3/7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & -10/7 \\ 0 & 1 \\ 1/7 & -3/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$x_{B(1)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{1j} \rfloor x_j \leq \lfloor x_1^* \rfloor \ \rightarrow\ x_1 + \lfloor 1/7 \rfloor x_4 + \lfloor -10/7 \rfloor x_5 \leq \lfloor 5/7 \rfloor \ \rightarrow\ x_1 - 2x_5 \leq 0 \ \xrightarrow{(3)}\ \boxed{x_1 + 2x_2 \leq 6}$$

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 3**

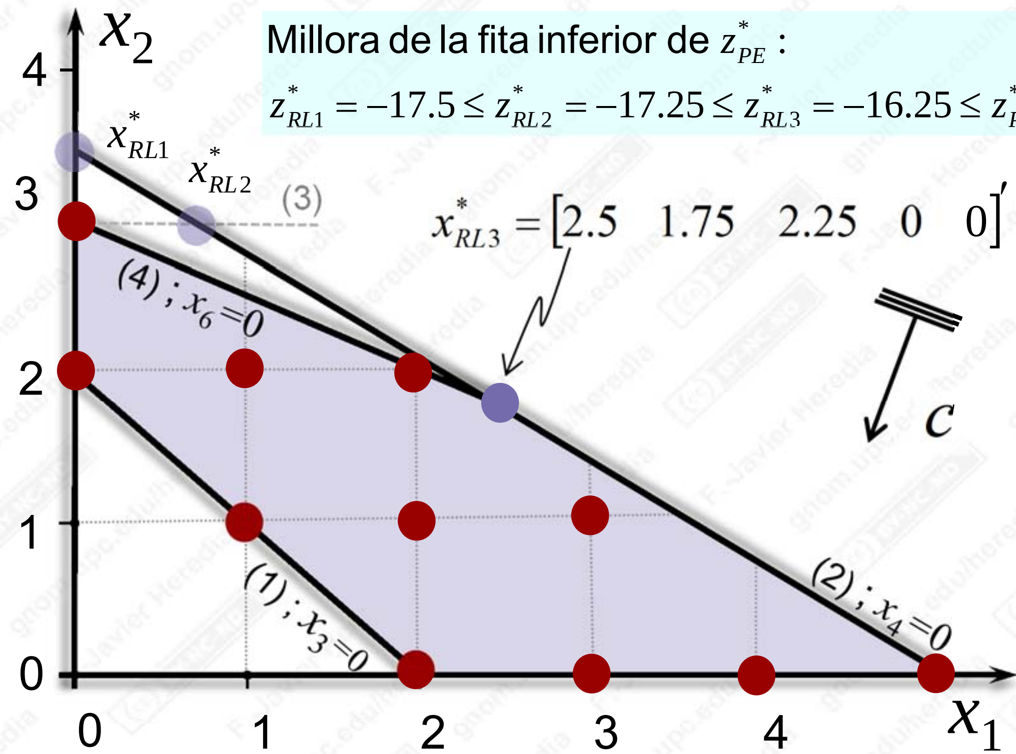
1. Resolució de (RL2):

$$(PE3)\begin{cases} \min & z_{PE3} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \quad (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 + x_4 = 35 \quad (2) \\ & x_2 + x_5 = 3 \quad (3)\ \text{redundant} \\ & x_1 + 2x_2 + x_6 = 6 \quad (4)\ \text{nou tall} \\ & x \geq 0,\ \text{entera} \end{cases}$$

2. x^*_{RL2} no és entera: es defineix el **tall de Gomory**

Millora de la fita inferior de z^*_{PE} :

$z^*_{RL1} = -17.5 \leq z^*_{RL2} = -17.25 \leq z^*_{RL3} = -16.25 \leq z^*_{PE}$



$$x_B = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]',\ V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & -1/4 & 7/4 \\ -1 & 1/4 & -3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -5/2 \\ -1/4 & 7/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$x_{B(2)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{2j} \rfloor x_j \leq \lfloor x_2^* \rfloor \ \rightarrow\ x_2 + \lfloor -0.25 \rfloor x_4 + \lfloor 1.75 \rfloor x_6 \leq \lfloor 1.75 \rfloor \ \rightarrow\ x_2 - x_4 + x_6 \leq 1$$

Alg. de plans secants de Gomory: exemple (4/5)

- Per tal de poder continuar resolent el problema (RL) gràficament, expressem el darrer tall de Gomory en termes de les variables x_1 i x_2 usant les constriccions (2) i (4) de (PE3):

$$(\text{PE3})\begin{cases} \text{min} & z_{PE3} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \quad (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 + x_4 = 35 \quad (2) \\ & x_1 + 2x_2 + x_6 = 6 \quad (4) \\ & x \geq 0\text{, entera} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \quad x_4 = 35 - 7x_1 - 10x_2 \\ \rightarrow \quad x_6 = 6 - x_1 - 2x_2 \\ \hline -x_4 + x_6 = 6x_1 + 8x_2 - 29 \end{array}$$

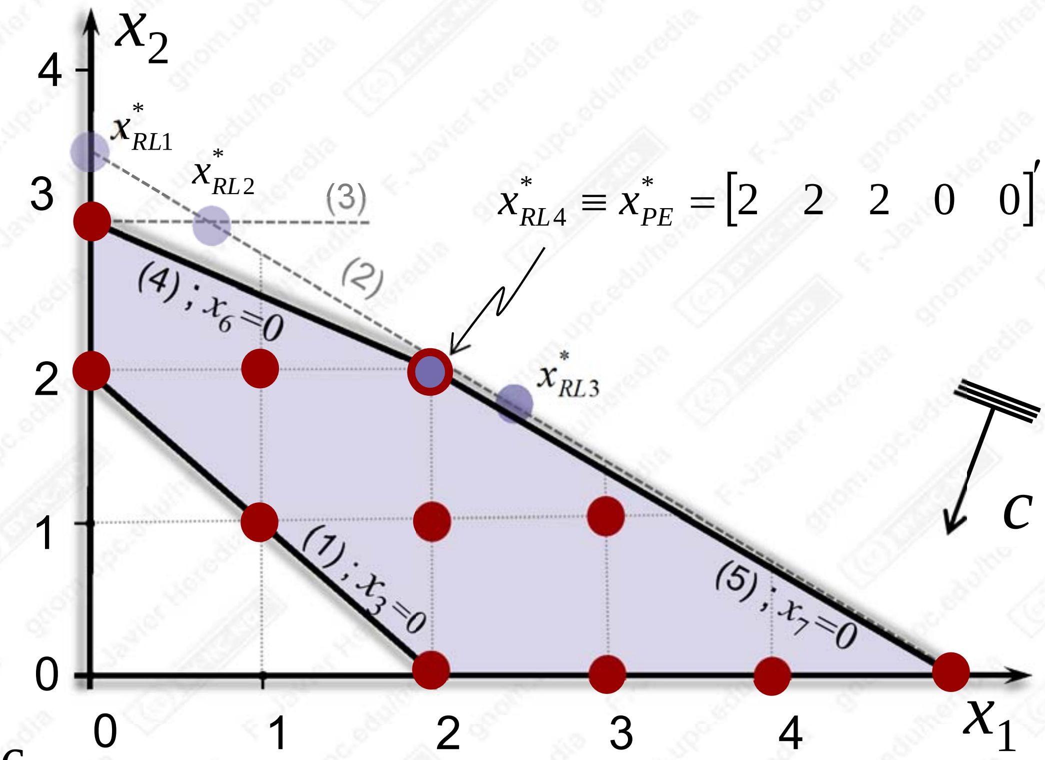
$$x_2 - x_4 + x_6 \leq 1 \;\rightarrow\; 6x_1 + 9x_2 \leq 30 \;\rightarrow\; \boxed{2x_1 + 3x_2 \leq 10}$$

Alg. de plans secants de Gomory: exemple (5/5)

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 4**

1. Resolució de (RL2):

$$
(PE4)\begin{cases}
\text{min} & z_{PE4} = -3x_1 - 5x_2 & \\
\text{s.a.:} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 & (1) \\
& 7x_1 + 10x_2 + x_4 = 35 & (2)\ \text{redundant} \\
& x_2 + x_5 = 3 & (3)\ \text{redundant} \\
& x_1 + 2x_2 + x_6 = 6 & (4) \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_7 = 10 & (5)\ \text{nou tall} \\
& x \geq 0,\ \text{entera} &
\end{cases}
$$



2. x^*_{RL2} entera: solució òptima

$$x^*_{PE} \equiv x^*_{RL4} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad z^*_{PE} \equiv z^*_{RL4} = -16$$

Comentaris:

- Les formulacions de (PE) a cada iteració son cada vegada més fortes:

$$z^*_{RL1} = -17.5 \leq z^*_{RL2} = -17.25 \leq z^*_{RL3} = -16.25 \leq z^*_{RL4} = -16 \equiv z^*_{PE}$$

- **En aquest exemple**, (PE4) és la formulació ideal: (PE4) = (PEI) = CH(K_{PE})

Algorisme de Branch&Cut

- Es resoldrà ara amb l'algorisme de B&C

$$
(\text{PE})\begin{cases}
\min & z_{PE} = -3x_1 - 5x_2 \\
\text{s.a.:} & x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & 7x_1 + 10x_2 \leq 35 \\
 & x \geq 0 \text{, entera}
\end{cases}
$$

Algorisme genèric de Branch and Cut (B&C)

Inicialització: L={PE1} ; $\underline{z}^*_{PE1} = -\infty$; $z^* = +\infty$

Mentre $L \neq \emptyset$ **fer**

Selecció: es selecciona un problema PE$j \in L$

Relaxació: es resol la relaxació lineal RLj

d'una formulació de PEj reforçada amb desigualtats vàlides. $\underline{z}^*_{PEj} \leftarrow z^*_{RLj}$

Si $K_{RLj} = \emptyset$ ó $z^*_{RLj} \geq z^*$ ó $x^*_{RLj} \equiv x^*_{PEj}$ **fer**

Eliminació:

$L \leftarrow L \backslash \{PEj\}$

Si $x^*_{RLj} \equiv x^*_{PEj}$ **fer**

Si $z^*_{RLj} < z^*$: $x^* \leftarrow x^*_{RLj}$, $z^* \leftarrow z^*_{RLj}$

Si $z^* = \underline{z}^*_{PEi}$ per a algun (PEi) : $L \leftarrow L \backslash \{PEl\}$ $\forall$ (PEl) descendent de (PEi)

Fi Si

altrament

Separació: $L \leftarrow L \backslash \{PEj\} \cup \{PE(j+1)\} \cup \{PE(j+2)\}$

Fi Si

Fi Mentre

Òptim: $x^*_{PE1} \equiv x^*$; $z^*_{PE1} \equiv z^*$.

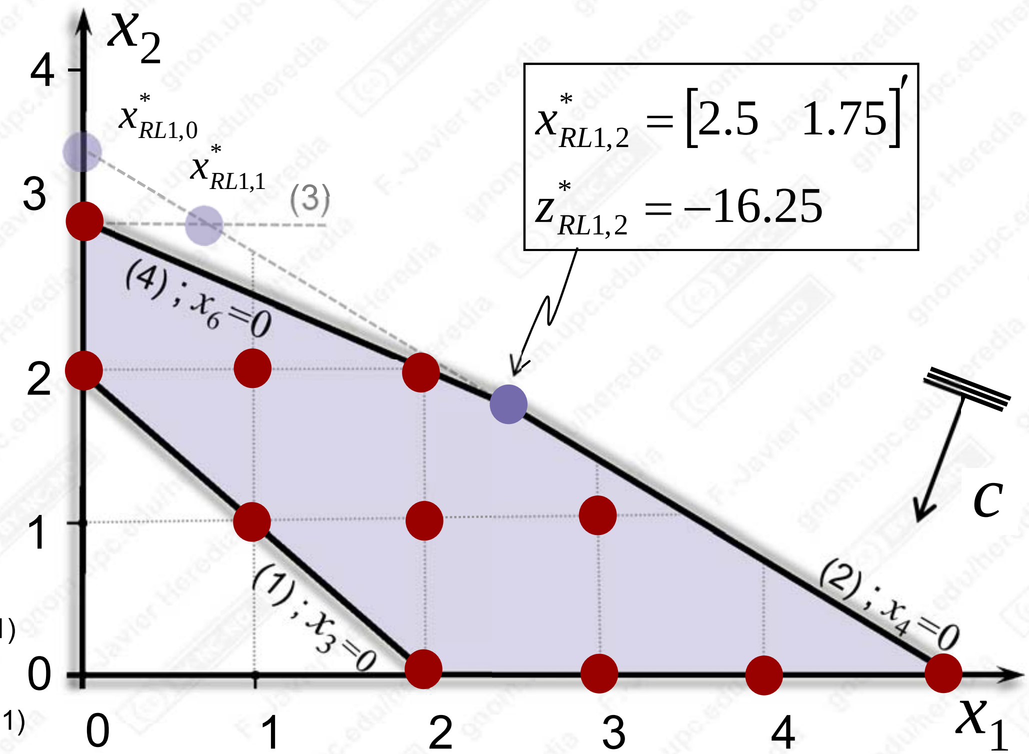
Diferència entre B&B i B&C

Exemple Branch&Cut: tractament (PE1)

B&C: Iteració 1: $L=\{(PE1)\}$, $\underline{z}^*_{PE1} = +\infty \leq z^*_{PE} \leq z^* = +\infty$

- **Selecció:** (PE1)
- **Relaxació:** resolució de la (RL) de (PE) amb dos talls de Gomory (transparència PLE-52):

$$(PE1)\begin{cases} \min & z_{PE1} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 & (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 + x_4 = 35 & (2) \\ & x_2 + x_5 = 3 & (3) \text{ 1er tall G. (PE1)} \\ & x_1 + 2x_2 + x_6 = 6 & (4) \text{ 2on tall G. (PE1)} \\ & x \geq 0 \text{, entera} \end{cases}$$



Actualització : $\underline{z}_{PE1}^* \leftarrow \lceil -16.25 \rceil = -16$

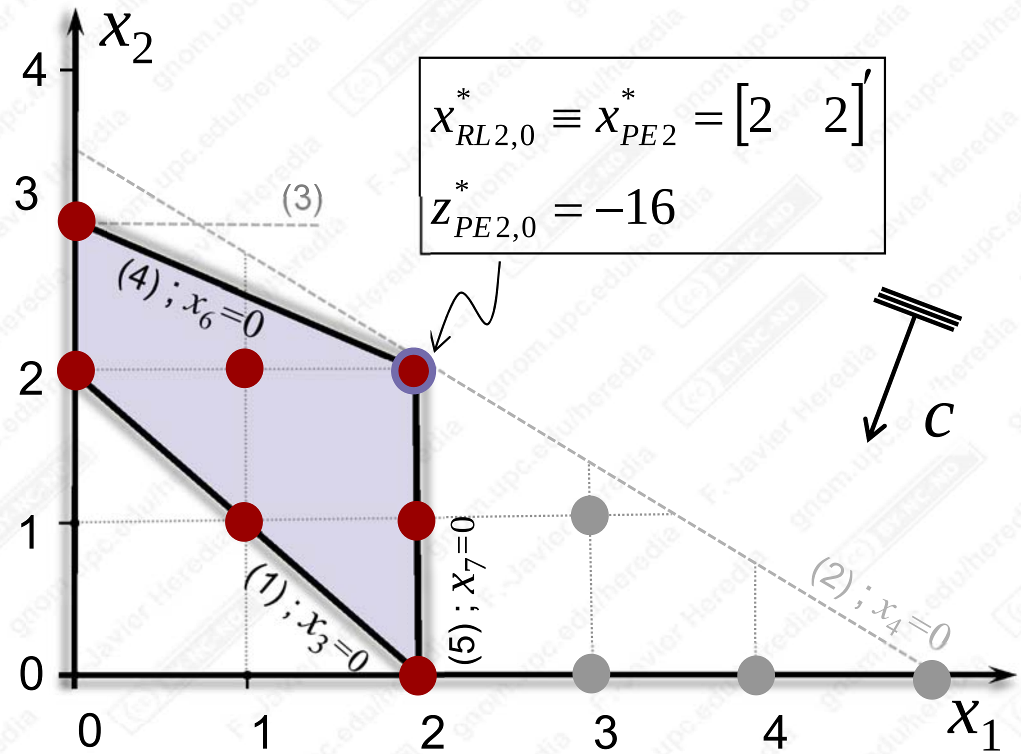
- **Separació:** $x_1^* = 2.5 \rightarrow \begin{cases} (PE1) + x_1 \leq 2 \rightarrow (PE2) \\ (PE1) + x_1 \geq 3 \rightarrow (PE3) \end{cases}, L \leftarrow \{(PE2),(PE3)\}$

Exemple Branch&Cut: tractament (PE2)

B&C, Iteració 2: L={(PE2), (PE3)}, $\underline{z}^*_{PE1} = -16 \leq z^*_{PE} \leq z^* = +\infty$

- **Selecció:** (PE2)
- **Relaxació:** resolució de la (RL) de (PE2) :

$$
(PE2)\begin{cases}
\text{min} & z_{PE2} = -3x_1 - 5x_2 & \\
\text{s.a.:} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 & (1) \\
 & 7x_1 + 10x_2 + x_4 = 35 & (2) \\
 & x_2 + x_5 = 3 & (3) \text{ 1er tall G. (PE1)} \\
 & x_1 + 2x_2 + x_6 = 6 & (4) \text{ 2on tall G. (PE1)} \\
 & x_1 + x_7 = 2 & (5) \text{ sep. B \& B (PE2)} \\
 & x \geq 0 \text{, entera} &
\end{cases}
$$



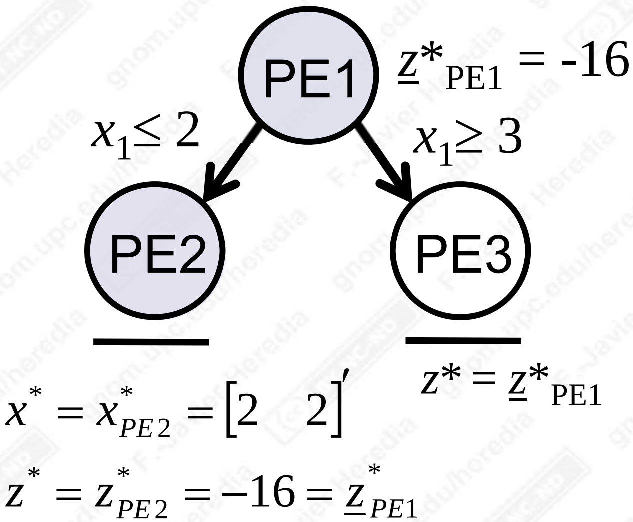
- **Eliminació:** $x^*_{RL2} \equiv x^*_{PE2}$
  - S'elimina (PE2): $L \leftarrow L \backslash \{(PE2)\} = \{(PE3)\}$
  - $z^*_{PE2} < z^* \Rightarrow x^* \leftarrow x^*_{PE2,0} = [\,2, 2\,]'$, $z^* \leftarrow z^*_{PE2,0} = -16$
  - $z^* = \underline{z}^*_{PE1} \Rightarrow$ eliminem (PE3) $L \leftarrow L \backslash \{(PE3)\} = \varnothing$

Exercici: repetiu la segona iteració del B&C seleccionant (PE3) (dos talls de Gomory)

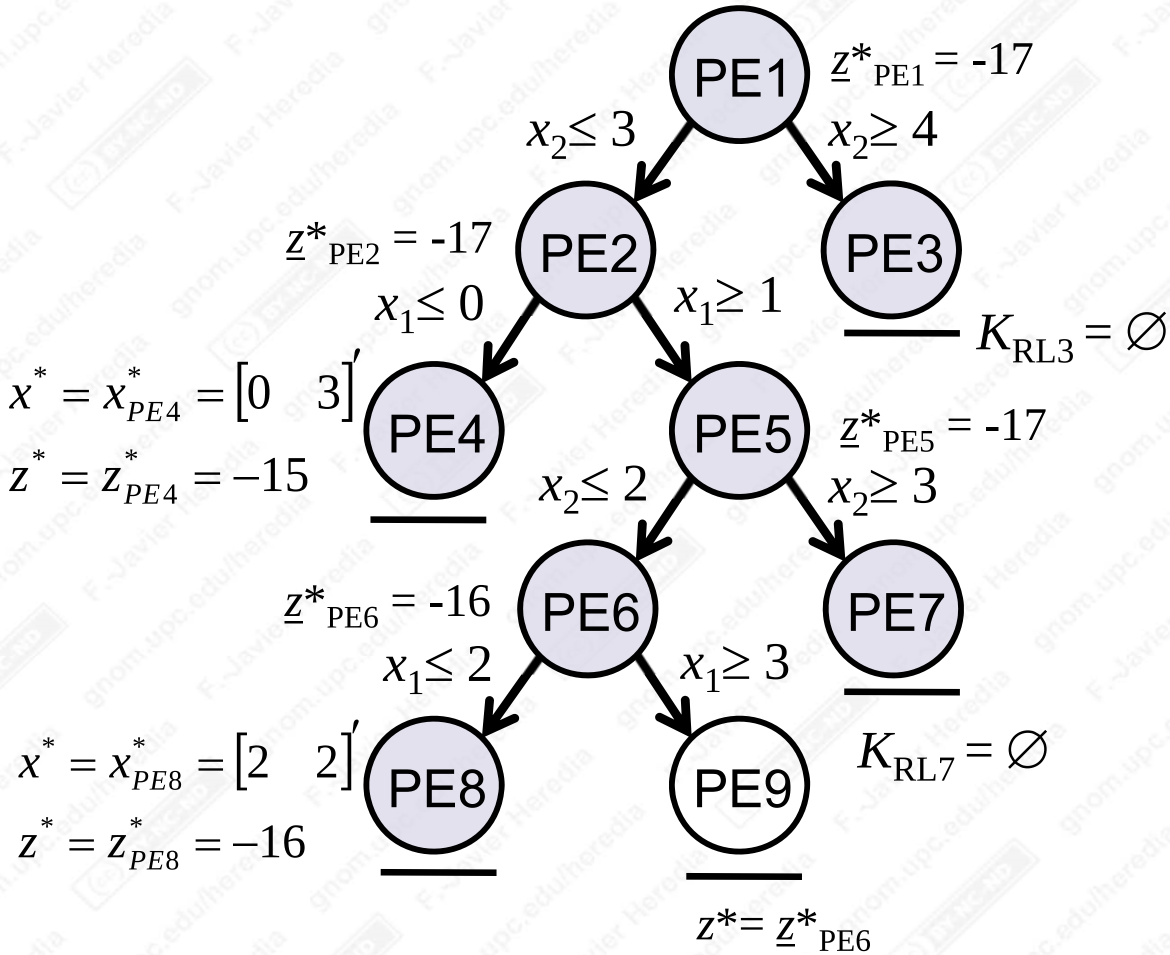
Exemple Branch&Cut: arbre d'exploració

B&C, Iteració 3: $L=\emptyset \Rightarrow x^*_{PE1} = x^* = [2,2]', z^*_{PE1} = z^* = -16$

Arbre d'exploració amb Branch and Cut



Arbre d'exploració amb Branch and Bound



Reoptimització dels problemes relaxats: símplex dual

- Considereu el següent problema de PLE:

$$
(\mathrm{PE})\begin{cases}\min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 \le 9 \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x \ge 0\text{, entera}\end{cases}
\rightarrow (\mathrm{PE})\begin{cases}\min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x \ge 0\text{, entera}\end{cases}
$$

- El resoldrem amb l'algorisme de plans secant de Gomory:
  - Resolent les relaxacions lineals gràficament.
  - Resolent les relaxacions lineals reoptimitzant amb el símplex dual.
- Aquesta reoptimització també és vàlida per a B&B i B&C.

Alg. de plans secants de Gomory: exemple

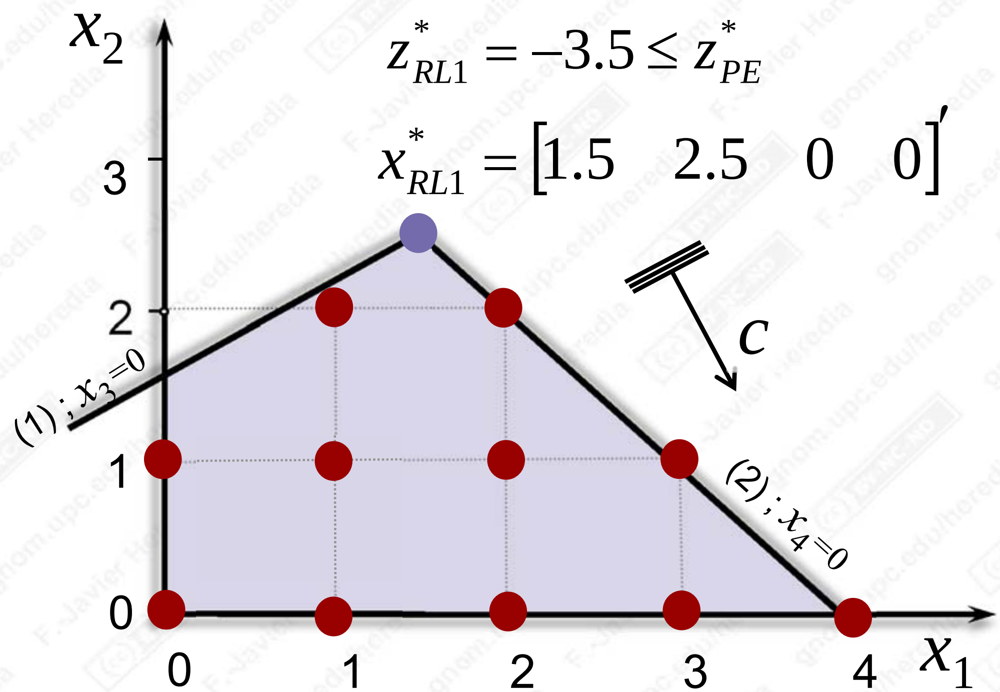
- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 1**

1. Resolució de (RL1):

$$(\text{PE1})\begin{cases}\min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 \quad (1) \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \quad (2) \\ & x \geq 0, \text{entera}\end{cases}$$

$$z^*_{RL1} = -3.5 \leq z^*_{PE}$$

$$x^*_{RL1} = [1.5 \quad 2.5 \quad 0 \quad 0]'$$



2. x^*_{RL1} no és entera: es defineix el **tall de Gomory**

$$x_B = [x_1 \quad x_2]' = [1.5 \quad 2.5]', V = B^{-1}A_N = B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$x_{B(2)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{2j} \rfloor x_j \leq \lfloor x_2^* \rfloor \rightarrow x_2 + \lfloor 0.1 \rfloor x_3 + \lfloor 0.4 \rfloor x_4 \leq \lfloor 2.5 \rfloor \quad \rightarrow \boxed{x_2 \leq 2}$$

Alg. de plans secants de Gomory: exemple

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 2**

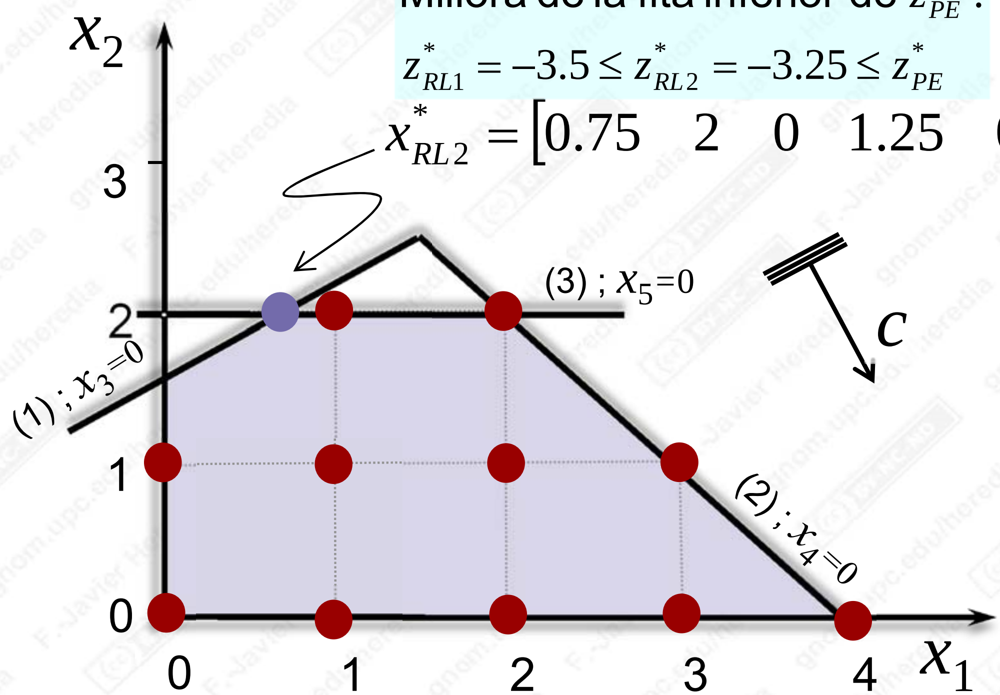
1. Resolució de (RL2):

$$
(PE2)\begin{cases} \min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 \quad (1) \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \quad (2) \\ & x_2 + x_5 = 2 \quad (3) \\ & x \geq 0 \text{, entera} \end{cases}
$$

Millora de la fita inferior de z^*_{PE} :

$z^*_{RL1} = -3.5 \leq z^*_{RL2} = -3.25 \leq z^*_{PE}$

$x^*_{RL2} = [0.75 \quad 2 \quad 0 \quad 1.25 \quad 0]'$



2. x^*_{RL2} no és entera: es defineix el tall de Gomory

$$
x_B = [x_1 \quad x_2 \quad x_4]' = [0.75 \quad 2 \quad 1.25]', V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} -0.25 & 1.5 \\ 0 & 1 \\ 0.25 & -2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}
$$

$$
x_{B(1)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{1j} \rfloor x_j \leq \lfloor x_1^* \rfloor \rightarrow x_1 + \lfloor -0.25 \rfloor x_3 + \lfloor 1.5 \rfloor x_5 \leq \lfloor 0.75 \rfloor \rightarrow \boxed{x_1 - x_3 + x_5 \leq 0}
$$

Alg. de plans secants de Gomory: exemple

- Per tal de poder continuar ressolent el problema (RL) gràficament, expressem el darrer tall de Gomory en termes de les variables x_1 i x_2 usant les constriccions de (PE2):

$$
\text{(PE2)}\begin{cases}
\min & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 \quad \rightarrow x_3 = 9 + 4x_1 - 6x_2 \quad (1) \\
 & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\
 & x_2 + x_5 = 2 \quad \rightarrow x_5 = 2 - x_2 \quad (2) \\
 & x \geq 0 \text{ , enteres}
\end{cases}
$$

$$
x_1 - x_3 + x_5 \leq 0 \xrightarrow{(1)} -3x_1 + 6x_2 + x_5 \leq 9 \xrightarrow{(2)} \boxed{-3x_1 + 5x_2 \leq 7}
$$

Alg. de plans secants de Gomory: exemple

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 3**

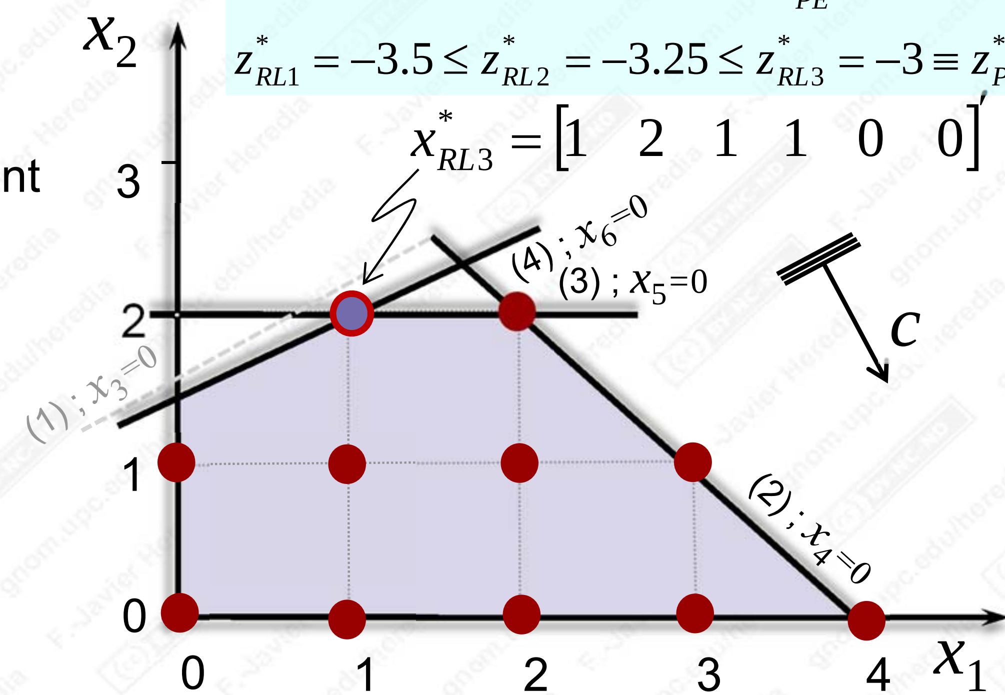
1. Resolució de (RL3):

$$(PE3)\begin{cases} \min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 \quad (1) \text{ redundant} \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \quad (2) \\ & x_2 + x_5 = 2 \quad (3) \\ & -3x_1 + 5x_2 + x_6 = 7 \quad (4) \\ & x \geq 0 \text{, entera} \end{cases}$$

Millora de la fita inferior de z^*_{PE} :

$z^*_{RL1} = -3.5 \leq z^*_{RL2} = -3.25 \leq z^*_{RL3} = -3 \equiv z^*_{PE}$

$x^*_{RL3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$



2. x^*_{RL3} és entera: STOP

$$(PE)\begin{cases} \min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x \geq 0 \text{, entera} \end{cases}$$

$x^*_{PE} \equiv x^*_{RL3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

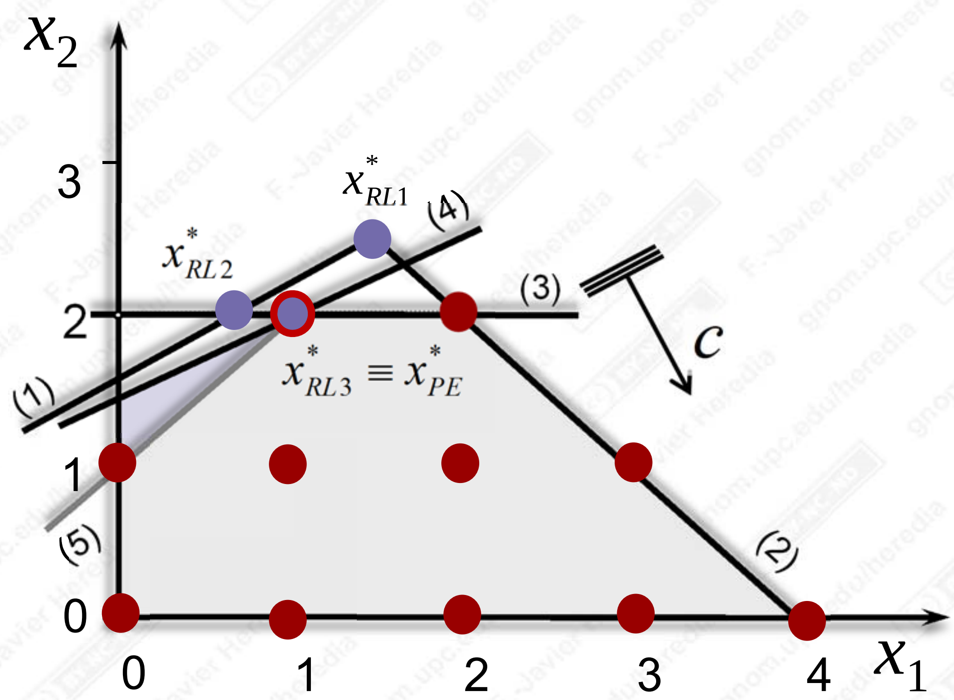
$z^*_{PE} \equiv z^*_{RL3} = -3$

$$(PE) \equiv (PE3)\begin{cases} \min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \quad (1) \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (2) \\ & x_2 \leq 2 \quad (3) \\ & -3x_1 + 5x_2 \leq 7 \quad (4) \\ & x \geq 0 \text{, entera} \end{cases}$$

Algorismes de plans secant i formulacions fortes.

- Las formulacions (PE1), (PE2) i (PE3) són equivalents al problema (PE) :

$$\text{(PE)}\min\left\{ z = c'x : x \in K_{PE} = \begin{Bmatrix} (0,0) & (0,1) & (0,2) \\ (0,3) & (0,4) & (1,0) \\ (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & \end{Bmatrix} \right\}$$



- A mida que afegim talls, les formulacions son cada vegada més fortes:

$$K_{RL1} \supseteq K_{RL2} \supseteq K_{RL3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^*_{RL1} = -3.5 \le z^*_{RL2} = -3.25 \le z^*_{RL3} = -3 \equiv z^*_{PE}$$

- L’última formulació, (PE3), tot i ser la més forta i proporcionar l’òptim del problema, no és la ideal:

$$\text{(PEI)}\begin{cases} \min & x_1 - 2x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \le 4 & (2) \\ & x_2 \le 2 & (3) \\ & -x_1 + x_2 \le 1 & (5) \\ & x \ge 0, \text{entera} & \end{cases}$$

Reoptimització dels problemes relaxats: símplex dual

- Considereu el següent problema de PLE que hem resolt amb l'algorisme de plans secants de Gomory. :

$$
(\mathrm{PE})\begin{cases}
\text{min} & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 \le 9 \\
 & x_1 + x_2 \le 4 \\
 & x \ge 0\text{, entera}
\end{cases}
$$

- Veurem ara com s'usa **en la pràctica** la reoptimització amb l'algorisme del **símplex dual** per a resoldre **eficientment** les relaxacions lineals (RLj) que apareixen en l'aplicació de l'algorisme de plans secants de Gomory.

Addició d'una nova constricció: anàlisi

- S'introdueix una nova constricció definida per:

$$a'_{m+1}x \leq b_{m+1} \rightarrow a'_{m+1}x + x_{n+1} = b_{m+1}$$

$$\tilde{A}_N = \begin{bmatrix} A_N \\ a'_{m+1} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ a'_{B,m+1} & 1 \end{bmatrix}, \tilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a'_{B,m+1}B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

- Analitzem com afecta el canvi a les condicions d'optimalitat :
  - Factibilitat primal: $x_B = B^{-1}b \geq 0$

$$\tilde{x}_B = \begin{bmatrix} x_B \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a'_{B,m+1}B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ b_{m+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overbrace{x_B}^{\geq 0} \\ b_{m+1} - a'_{B,m+1}x_B \end{bmatrix} \overbrace{\geq}^{?} 0$$

La fact. primal es conserva $\Leftrightarrow x_{n+1} = b_{m+1} - a'_{B,m+1}x_B \geq 0$

Addició d'una nova constricció: anàlisi

- Recordem que hem introduït una nova constricció:

$$a'_{m+1} \le b_{m+1} \to a'_{m+1}x + x_{n+1} = b_{m+1}$$

$$\tilde{A}_N = \begin{bmatrix} A_N \\ a'_{m+1} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ a'_{B,m+1} & 1 \end{bmatrix}, \tilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a'_{B,m+1}B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

- Analitzem com afecta això a les condicions d'optimalitat :
  - Factibilitat dual: $r' = c'_N - \lambda' A_N \ge 0$

$$\tilde{\lambda}' = [c'_B \quad 0] \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a'_{B,m+1}B^{-1} & 1 \end{bmatrix} = [\lambda' \quad 0]$$

$$\tilde{r}' = c'_N - \tilde{\lambda}'\tilde{A}_N = c'_N - [\lambda' \quad 0] \begin{bmatrix} A_N \\ a'_{N,m+1} \end{bmatrix} = \overbrace{c'_N - \lambda' A_N}^{r'} \ge 0$$

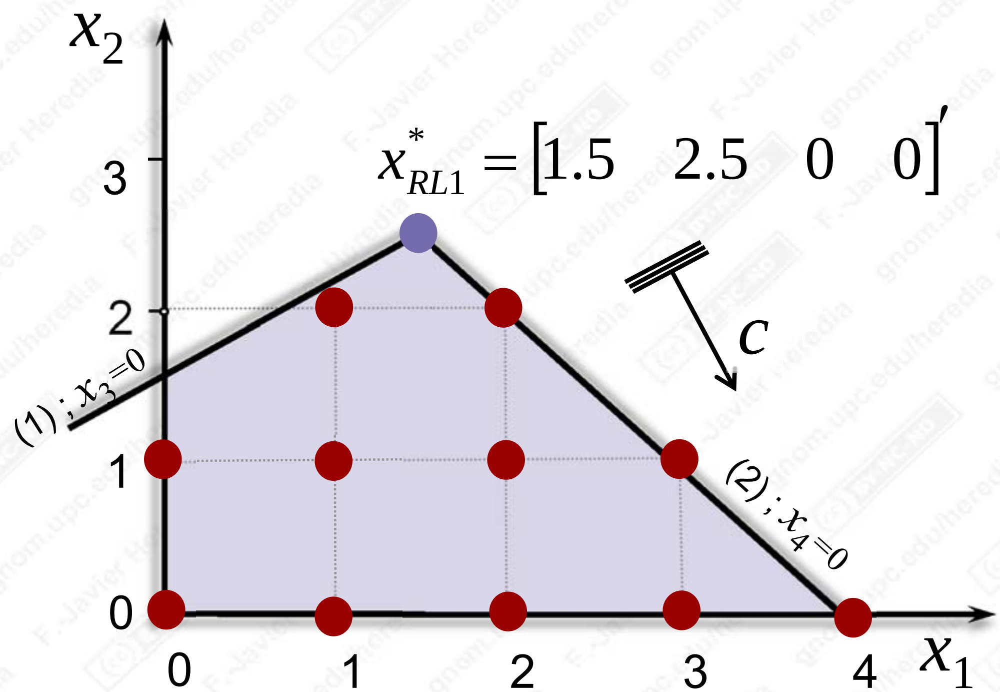
$\Rightarrow$ la factibilitat dual es conserva: si $x_{n+1} = b_{m+1} - a'_{B,m+1}x_B < 0 \Rightarrow$ reoptimització amb l'ASD

Reoptimització amb el símplex dual i PLE

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 1**

Resolució de (RL1):

$$(\text{PE1})\begin{cases} \min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 \quad (1) \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \quad (2) \\ & x \geq 0\text{, entera} \end{cases}$$



Solució òptima de (RL1):

$$\mathcal{B} = \{1,2\},\ B = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/10 & 3/5 \\ 1/10 & 2/5 \end{bmatrix},\quad x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} = \{3,4\},\ r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0] - [1 \quad -2]\begin{bmatrix} -1/10 & 3/5 \\ 1/10 & 2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0.3 \quad 0.2]$$

Reoptimització amb el símplex dual

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 2**

  Resolució de (RL2): reoptimització per addició de la constricció (3)

$$
\text{(RL2)}\begin{cases}
\min & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 \quad (1) \\
& x_1 + x_2 + x_4 = 4 \quad (2) \\
& x_2 + x_5 = 2 \quad (3) \\
& x \geq 0
\end{cases}
$$

$$\mathcal{B} \leftarrow \{1,2,5\}, \ \mathcal{N} \leftarrow \{3,4\}$$

$$a'_{m+1}x + x_{n+1} = b_{m+1}, \ x_2 + x_5 = 2$$

$$A_N \leftarrow \left[\frac{A_N}{a'_{N,m+1}}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$B \leftarrow \left[\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline a'_{B,m+1} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \ B^{-1} \leftarrow \left[\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline -a'_{B,m+1}B^{-1} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1/10 & 3/5 & 0 \\ 1/10 & 2/5 & 0 \\ \hline -1/10 & -2/5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} x_B \leftarrow \left[\frac{x_B}{x_{n+1}}\right] = \left[\begin{array}{c} 1.5 \\ 2.5 \\ \hline -0.5 \end{array}\right] \ngeq 0 \Rightarrow \text{infactible (P)} \\ r' \leftarrow r' = [0.3 \quad 0.2] \geq 0 \Rightarrow \text{factible (D)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{reoptimització amb el símplex (D)}$$

Reoptimització amb el símplex dual

- **1ª iteració:** $\mathcal{B} = \{1,2,5\}, \mathcal{N} = \{3,4\}$
  - Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b. sortint $B(p)$:

$$x_B = [1.5 \quad 2.5 \quad -0.5]' \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, B(3) = 5 \text{ v.b. sortint.}$$

  - Identificació de problema (D) il·limitat :

$$d_{r_N} = \left(\beta_p A_N\right)' = (\beta_3 A_N)' = \begin{bmatrix} \frac{-1}{10} & \frac{-2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{10} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix} \ngeq 0$$

  - Selecció de la v.n.b. entrant q:

$$\theta_D^* = \min_{\{j\in\mathcal{N} \mid d_{r_{N_j}}<0\}} \left\{-r_j/d_{r_{N_j}}\right\} = \min\left\{\frac{-0{,}3}{-1/10}, \frac{-0{,}2}{-2/5}\right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow q = 4$$

  - Canvi de base i actualitzacions:

$$\mathcal{B} = \{1,2,4\}, B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1 & -5/2 \end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 2 \\ 5/4 \end{bmatrix} \geq 0$$

$x_B \geq 0 \Rightarrow$ **òptima**

Intenteu fer la 2a iteració de Gomory amb simplex dual