

Exercicis de laboratori de Programació Lineal i Entera amb SAS/OR

(v4.0 - 02/17)

F.-Javier Heredia Cervera

<http://gnom.upc.edu/heredia>



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Departament d'Estadística
i Investigació Operativa



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

Exercicis de laboratori de Programació Lineal i Entera amb SAS/OR

F.-Javier Heredia (f.javier.heredia@upc.edu, <http://gnom.upc.edu/heredia>)

Group on Numerical Optimization and Modeling

Departament d'Estadística i Investigació Operativa, UPC

V4.0, febrer de 2017

L'autor agrairia ésser informat de les possibles errates a l'adreça f.javier.heredia@upc.edu

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

Índex

PROC OPTMODEL : resolució de problemes de (PL)	5
EXERCICI 1. Planificació de la producció*	5
EXERCICI 2. Problema de la dieta*	5
EXERCICI 3. Problema de mescla*	5
EXERCICI 4. Problema de transport*	6
EXERCICI 5. Prodem S.L.*	6
EXERCICI 6. Coalco**	7
EXERCICI 7. CSL**	7
EXERCICI 8. Hospital del Mar**	8
EXERCICI 9. Pelletier***	8
EXERCICI 10. Optirisk***	9
EXERCICI 11. Coalco (2)*	9
EXERCICI 12. Coalco (3)**	10
EXERCICI 13. Pelletier i base de dades*	10
EXERCICI 14. Hospital del Mar i bases de dades**	11
PROC OPTLP : algorisme del símplex i anàlisi de sensibilitat	12
EXERCICI 15. SBF inicial del problema de transport*	12
EXERCICI 16. Planificació de la producció: taxació-eficiència computacional*	12
EXERCICI 17. Coalco: estudi taxació-eficiència computacional**	12
EXERCICI 18. Anàlisi de sensibilitat problema Pelletier**	13
PROC OPTMODEL : resolució de problemes de (PLE)	14
EXERCICI 19. Remington Manufacturing: problemes de càrrega fixa*	14
EXERCICI 20. Air-Express: problemes de planificació de plantilles**	14
EXERCICI 21. CRT-Technologies: problemes de selecció de projectes**	15
EXERCICI 22. Airexpress(2): planificació de plantilla amb cost fix*	17
EXERCICI 23. Coalco (4): transport i mescla amb costos fixos*	17
EXERCICI 24. Prodem S.L. (2)**	18
SOLUCIONS	19
SOLUCIÓ EXERCICI 1. Planificació de la producció*	19
SOLUCIÓ EXERCICI 2. Problema de la dieta	21
SOLUCIÓ EXERCICI 3. Problema de mescla	23
SOLUCIÓ EXERCICI 4. Problema de transport	25
SOLUCIÓ EXERCICI 5. Prodem S.L.	27
SOLUCIÓ EXERCICI 6. Coalco	28
SOLUCIÓ EXERCICI 7. CSL	31
SOLUCIÓ EXERCICI 8. Hospital del Mar	33

SOLUCIÓ EXERCICI 9. Pelletier	35
SOLUCIÓ EXERCICI 10. Optirisk	37
SOLUCIÓ EXERCICI 11. Coalco (2).	42
SOLUCIÓ EXERCICI 12. Coalco (3)	44
SOLUCIÓ EXERCICI 13. Pelletier i base de dades*	46
SOLUCIÓ EXERCICI 14. Hospital del Mar i bases de dades.....	47
SOLUCIÓ EXERCICI 15. SBF inicial del problema de transport*	49
SOLUCIÓ EXERCICI 16. Planificació de la producció: taxació-eficiència computacional*.....	53
SOLUCIÓ EXERCICI 17. Coalco: estudi taxació-eficiència computacional**	54
SOLUCIÓ EXERCICI 18. Anàlisi de sensibilitat problema Pelletier**	55
SOLUCIÓ EXERCICI 19. Remington Manufacturing: problemes de càrrega fixa*	61
SOLUCIÓ EXERCICI 20. Air-Express: problemes de planificació de plantilles**	64
SOLUCIÓ EXERCICI 21. CRT-Technologies: problemes de selecció de projectes**	67
SOLUCIÓ EXERCICI 22. Airexpress (2): planificació de plantilles amb cost fix*	73
SOLUCIÓ EXERCICI 23. Coalco (4): transport i mescla amb costos fixos*	77
SOLUCIÓ EXERCICI 24. Prodem S.L. (2)**	79

*: dificultat baixa ; **: dificultat mitjana ; ***: dificultat elevada.

PROC OPTMODEL : resolució de problemes de (PL)

EXERCICI 1. Planificació de la producció*.

Considereu el següent problema de planificació de la producció:

	Consum unitari mà obra (h)	Consum unitari fusta (kg)	Consum plastic (kg)	Benefici unitari (€)	x^* (kg)
Producte A	1	3	2	300	50
Producte B	2	2	-	250	50
Disponibilitat	150h/dia	300kg/dia	100kg/dia		

- Formuleu la modelització matemàtica parametritzada
- Implementeu i resoleu amb OPTMODEL
- Indiqueu els valors de la solució òptima: \mathcal{B}^* , x_B^* , \mathcal{N}^* , r^* i λ^* (SOLUCIÓ)

EXERCICI 2. Problema de la dieta*.

Considereu el següent problema de la dieta:

	Contingut per kg de menjar				Preu (€/kg)	x^* (kg)
	Vitamines (ui)	Hidrats de Carboni (u.i.)	Oligoelements (u.i.)	Proteïnes (u.i.)		
Carn	25	20	10	150	8	0.0
Peix	200	50	10	200	10	0.0
Cereals	300	300	10	50	2	0.2
Fruita	-	160	50	20	1.5	0.0
Pa	-	120	100	20	0.5	4.5
Aportació mínima diària	60u.i./dia	40u.i./dia	100u.i./dia	100 u.i./dia		

- Formuleu la modelització matemàtica parametritzada
- Implementeu i resoleu amb OPTMODEL
- Indiqueu els valors de la solució òptima: \mathcal{B}^* , x_B^* , \mathcal{N}^* , r^* i λ^* (SOLUCIÓ EXERCICI 2)

EXERCICI 3. Problema de mescla*.

Considereu el següent problema de mescla:

	Disolvents				Contingut mescla (ml/l)
	1	2	3	4	
Clor (ml/l)	180	120	90	60	≥ 90

Amoníac (ml/l)	3	2	6	5	≤ 4
Cost (€/l)	16	12	10	11	
x^*	0.0	0.5	0.5	0.0	

- Formuleu la modelització matemàtica parametritzada
- Implementeu i resoleu amb OPTMODEL
- Indiqueu els valors de la solució òptima: \mathcal{B}^* , x_B^* , \mathcal{N}^* , r^* i λ^*
(SOLUCIÓ EXERCICI 3)

EXERCICI 4. Problema de transport*.

Considereu el següent problema transport:

$(10^6 \text{€}/Hm^3)$	Mercats				
(Hm^3)					
Refineries	1	2	3	4	Producció refinaria (Hm^3)
1	4	7	9	10	6
	5	1	0	0	
2	6	4	3	6	10
	0	2	4	4	
3	9	6	4	8	4
	0	0	4	0	
Demanda (Hm^3)	5	3	8	4	

- Formuleu la modelització matemàtica parametritzada
- Implementeu i resoleu amb OPTMODEL
- Indiqueu els valors de la solució òptima: \mathcal{B}^* , x_B^* , \mathcal{N}^* , r^* i λ^*
(0)

EXERCICI 5. Prodem S.L.*

L'empresa Prodem SL. fabrica els productes A, B i C. En la fabricació d'aquests tres productes es fabriquen a través del procés de manufactura que consumeixen un recurs amb una disponibilitat màxima de $b = 40Tm$. A més, l'empresa s'ha compromès a satisfer una certa demanda no inferior a $d = 33Tm$. Els costos de fabricació d'una unitat de producte A, B y C són, respectivament, 10, 2 i 3 u.m. (unitats monetàries). El problema lineal (P) que permet calcular les quantitats de producte A (x_1), B (x_2) i C (x_3) que minimitzen els costos de producció és:

$$(P) \begin{cases} \min & 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a.:} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 40 \quad \text{Procés manufactura 1} \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 33 \quad \text{Demanda} \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Desenvolueu el codi **OPTMODEL** completament parametritzat que resol el problema (P) i ompliu la següent taula amb els valors del problema (P) en forma estàndard associats a la solució:

Variables	x_1	x_2	x_3	Constriccions	Procés	Demanda
-----------	-------	-------	-------	---------------	--------	---------

Valor a l'òptim x^*			
Estat variable $(\mathcal{B}, \mathcal{N})$			
Cost reduït (r_i^*)			
Costos de producció (z^*)			

Valor folga/escreix a l'òptim		
Estat folga $(\mathcal{B}, \mathcal{N})$		
Variable dual (λ_j^*)		

(Prodem S.L.)

EXERCICI 6. Coalco **.

L'empresa minera Coalco produeix carbó a dues mines per a dos clients. La següent taula mostra, per a cada mina, les següents dades: cost per tona transportada entre cada mina i cada client; cost per tona de carbó produïda; producció màxima i contingut en cendra i sulfur per a cada tona de carbó produïda. També s'indica la demanda de cada client.

Cost de transport (€/Tm)	Client 1	Client 2	Cost de producció (€/Tm)	Capacitat (Tm)	Contingut en cendra (Tm/Tm carbó)	Contingut en sulfur (Tm/Tm carbó)
Mina 1	4	6	50	120	0.1	0.04
Mina 2	9	6	55	100	0.05	0.09
Demanda (Tm)	90	110		Contingut màxim.	8%	7%

Cada client pot rebre carbó d'una única mina o de totes dues, mesclant, en aquest últim cas, els dos tipus de carbó rebut. En tot cas, la composició del carbó rebut, ja sigui d'una única mina o per mescla de totes dues, no pot contenir més d'un 8% de cendres i d'un 7% de sulfur.

Formuleu, un problema de programació lineal que optimitzi la forma en que Coalco ha de satisfer la demanda dels seus clients i resolcu-lo amb OPTMODEL.

(SOLUCIÓ EXERCICI 5)

EXERCICI 7. CSL **.

L'empresa de consultoria CSL ha d'encetar en els pròxims 5 mesos un conjunt de projectes que necessitaran les següents quantitats d'hora de consultor qualificats per mes:

	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig
Demanda (h)	3000	4000	7500	10000	15000

Al començament de gener CSL té en plantilla 35 consultors qualificats que treballen 160 hores mensuals cadascú. Aquests consultors qualificats han de compaginar les tasques de consultoria amb la de formació dels nous consultors que s'hagin de contractar per tal de satisfer les hores de consultoria dels pròxims cinc mesos.

El període de formació d'un consultor recent contractat és de dos mesos, i requereix 50 hores de supervisió d'un consultor qualificat durant el primer mes de formació, i 10 hores durant el segon mes. Un consultor en formació no es pot dedicar a tasques de consultoria.

Cada consultor qualificat cobra 1800 euros/mes. El sou mensual dels consultors en formació és de 900 euros.

Degut a l'alta demanda de consultors qualificats, és habitual que aquests marxin de CSL a altres consultories. Es preveu que, al final de cada mes, un 5%, com a mínim, dels consultors qualificats, inclosos els que s'acaben de formar, deixin CSL.

Formuleu el problema de PL que permet aproximar el nombre de nous consultors a contractar durant els pròxims cinc mesos per tal de fer front a la demanda d'hores de consultoria tot minimitzant els costos de personal.

(SOLUCIÓ)

EXERCICI 8. Hospital del Mar.**

L'Hospital del Mar té un problema amb el laboratori d'anàlisi de mostres. El laboratori té disponibles tres màquines que poden analitzar diferents mostres de fluids. Darrerament la demanda d'anàlisis de sang s'ha incrementat de tal forma que el director del laboratori té problemes per tenir els resultats a temps i fer front alhora a les analítiques de les restes de fluids. El laboratori treballa amb 5 tipus diferents de mostres fluids. Cada màquina pot ser usada per a analitzar qualsevol tipus de mostra, però el temps (minuts) que triga cadascuna depèn del tipus de mostra, segons s'indica a la següent taula:

Temps de processat (minuts/ml)	Màquina			Volum (ml)
	A	B	C	
Mostra 1	3	5	2	80
Mostra 2	4	3	5	75
Mostra 3	4	5	3	80
Mostra 4	5	4	3	12
Mostra 5	3	5	4	60

Cada màquina es pot usar un màxim de 8h al dia. Les mostres recollides un dia donat arriben al laboratori i esperen durant la nit a ser processades a l'endemà. Al començament de cada dia, el director del laboratori ha de determinar com repartir les mostres entre les diferents màquines. La quantitat de mostres a analitzar aquest matí s'indica a la darrera columna de la taula anterior.

- Formuleu el problema de PL que permet trobar com distribuir de forma òptima les mostres entre les màquines i resoleu-lo amb OPTMODEL.
- Considereu ara que es vol obtenir la distribució òptima de mostres tenint en compte les següents limitacions:
 - No es vol que cap mostra ocupi més del 50% del temps total de funcionament d'una màquina.
 - No es vol que cap màquina realitzi més del 40% de volum total de les proves.

Formuleu les restriccions lineals addicionals que permeten incloure en el model aquestes dues condicions. Modifiqueu el codi OPTMODEL de l'apartat a) de forma que resolgui automàticament els casos a), b.1) i b.2) i generi unes taules comparatives de resultats.

(SOLUCIÓ)

EXERCICI 9. Pelletier*.**

L'empresa Pelletier Corporation ha detectat que no tindrà prou espai de magatzem durant els pròxims 5 mesos. Les necessitats addicionals d'espai durant els pròxims 5 mesos són:

Mes	1	2	3	4	5
Espai adicional necessari (1000 m²)	25	10	20	10	5

Per tal de cobrir aquestes necessitats d'espai, l'empresa preveu haver de llogar espai addicional. Una empresa local d'emmagatzematge ha acceptat llogar a Pelletier tant espai com necessiti durant el temps que necessiti. El preu de lloguer depèn del temps de lloguer, segons indica la següent taula

Durada del contracte (en mesos)	1	2	3	4	5
Cost per cada 1000 m ² llogat	€300	€525	€775	€850	€975

Pelletier disposa de la llibertat de decidir al començament de cada mes quin contracte vol establir. Per exemple, la companyia podria decidir al començament del mes 1 llogar 5000 m² durant 4 mesos i llogar 10000 m² durant 2 mesos al començament del mes 3. Formuleu el problema de PL que permet minimitzar els costos totals de lloguer.

(SOLUCIÓ)

EXERCICI 10. Optirisk*.**

La societat de capital risc OptiRisk vol gestionar de la millor forma possible el capital necessari per a posar en marxa un nou projecte empresarial que començarà d'aquí a cinc anys, i durarà tres anys. Durant el primer any, el projecte necessitarà realitzar uns pagaments de 120.000€, amb un increment anual de 20.000€ durant els dos anys següents. OptiRisk disposa de la següent cartera de productes financers:

Valor	Venciment	Rendiment	Factor de Risc
A	1 any	1.0%	1
B	2 anys	3.5%	3
C	3 anys	4.0%	6
D	4 anys	5.0%	8

D'acord amb la informació de la taula, considerarem que només es pot invertir en un valor l'any següent del venciment. Per exemple, només es pot invertir en el producte C al començament dels anys 1, 4, 7, etc. Optirisk vol determinar el capital mínim necessari a invertir al començament del primer any en els diferents productes per tal de fer front a les despeses previstes del nou projecte sense que el valor del risc promig ponderat del capital invertit a cada any superi el factor 2.5. El rescat i reinversió de capital al llarg del període de 8 anys es fa de forma que al començament del cada any:

- Es rescata el capital de les inversions que vencen aquest any.
- Es reserva el diner necessari per a realitzar els pagament, si es que n'hi ha.
- Amb els diners sobrants, es decideix la quantitat a invertir en les inversions disponibles aquell any.

Aquesta estratègia d'inversió es pot repressantar a través del graf de flux de caixa representat a la Figura 1, on c representa el capital inicial, x_{ij}^k les quantitats invertides en cada producte i p_j els pagaments deguts.

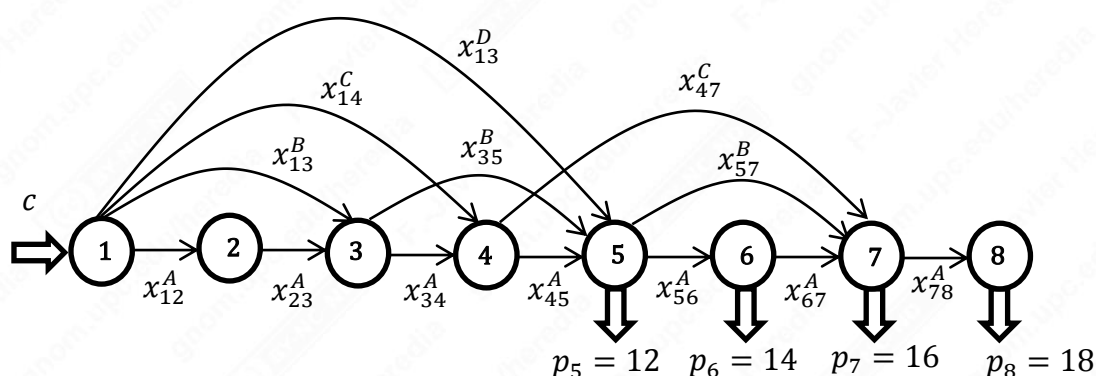


Figura 1: graf del problema de flux de caixa Optirisk.

- Formuleu el problema d'Optirisk com a problema de programació lineal completament parametritzat i resoleu-lo amb OPTMODEL.
- Amplieu el codi de la rutina OPTMODEL de l'apartat a) de forma que resolgui successivament el problema amb i sense la constricció de risc i mostri una comparativa de les dues solucions trobades.

(SOLUCIÓ)

EXERCICI 11. Coalco (2)*.

Considereu el següent cas del problema Coalco:

Cost de transport (€/Tm)	Client 1	Client 2	Cost de producció (€/Tm)	Capacitat mensual mina (Tm)	Contingut en cendra	Contingut en sulfur	Contingut en nitrats
Mina 1	4	6	10	200	10%	4%	1%
Mina 2	9	6	55	100	5%	9%	0.7%
Mina 3	1	2	80	80	3%	2%	0.5%
Demanda mes (Tm)	150	110	Contingut maxím:		7%	8%	0.9%

Taula 1: Coalco (2) a)

- a) Resoleu aquest problema amb OPTMODEL i indiqueu:
- El valor òptim de les tones transportades de cada mina a cada client, i el cost total.
 - El conjunt \mathcal{B}^* , \mathcal{N}^* i el vector r^* de la forma estàndar del problema resolt.
- b) Supposeu ara que es vol modificar el model de la Taula 1 de forma que el contingut màxim de cada component del carbó depengui del clients segons les dades següents:

Client	Contingut màxim cendra	Contingut maxím sulfur	Contingut maxím nitrats
1	8%	5%	1%
2	6%	7%	0.7%

Taula 2: Coalco(2) b

Obtingueu el valor òptim de les tones transportades de cada mina a cada client, i el cost total amb OPTMODEL. És profitós per l'empresa Coalco el canvi introduït?

(SOLUCIÓ EXERCICI 11)

EXERCICI 12. Coalco (3) **

Tornem al problema Coalco (2) representat per la Taula 1. L'extracció de carbó a cadascuna de les tres mines passa per tres operacions bàsiques: arranc, càrrega i transport. Les hores de cadascuna de les operacions necessàries per extreure una tona de carbó a les diferents mines i el total d'hores de cada operació de que disposa Coalco són:

h/Tm	Operació		
	Arranc	Càrrega	Transport
Mina 1	10	11	8
Mina 2	10	13	6
Mina 3	25	20	16
Total disponible mes (h)	3.300	3.600	2.200

Taula 3: Coalco(2) c

- a) Obtingueu la formulació matemàtica totalment parametritzada de les constriccions que cal afegir al model de l'apartat a) per tal d'assegurar que l'extracció de carbó a les tres mines no supera el total d'hores de que disposa Coalco per extracció, càrrega i transport.
- b) Incorporeu les constriccions formulades a l'apartat anterior al codi OPTMODEL de l'apartat a) i trobeu el valor òptim de les tones transportades de cada mina a cada client, i el cost total amb OPTMODEL.

(SOLUCIÓ EXERCICI 12)

EXERCICI 13. Pelletier i base de dades*.

Volem adaptar el codi del procediment OPTMODEL del problema Pelletier per a llegir les dades del problema del següent conjunt de dades:

```
data Pelletier;
input mes b c;
```

```
datalines;
    1 25 300
    2 10 525
    3 20 775
    4 10 850
    5  5 975
;
```

Anomenarem **Pelletier_DB.sas** al nou codi **SAS**.

- Introduïu al codi **Pelletier.sas** la comanda **read data** que permeti llegir els valors del paràmetres **b** i **c**. Caldrà definir un nou conjunt numèric **MESOS** que contindrà el contingut de la primera columna, i que farà les funcions del conjunt **{1..m}** del codi original. El valor del paràmetre **m**, necessari per la definició de la funció objectiu i constriccions, es pot obtenir amb la comanda **m = CARD (MESOS)** . Comproveu que, el codi modificat obté la mateixa solució que el codi original.
- Afegiu la solució òptima al conjunt de dades **Pelletier**. Per tal de fer-ho necessitareu crea una matriu auxiliar que contingui els valors del vector solució **X**:

```
number sol{MESOS,MESOS} init 0;
for {i in MESOS, j in 1..m-i+1} sol[i,j]=X[i,j].sol;
```

Un cop creada aquesta matriu auxiliar caldrà escriure-la en un conjunt de dades temporal per, posteriorment, fusionar-la amb les dades originals.

(SOLUCIÓ EXERCICI 13)

EXERCICI 14. Hospital del Mar i bases de dades**.

L'Hospital del Mar usa SAS com a software de gestió de les seves bases de dades. La informació referent a les anàlisis diàries del laboratori està continguda a les següents taules de dades:

```
LIBNAME HM ".";
data HM.Maquines;
input  maquina $ tp_1 tp_2 tp_3 tp_4 tp_5 temps;
datalines;
    A      3      4      4      5      3    480
    B      5      3      5      4      5    480
    C      2      5      3      3      4    480;

data HM.Mostres;
input  mostra $  volum_mostra;
datalines;
    1      80
    2      75
    3      80
    4      12
    5      60;
```

Modifiqueu el codi **OPTMODEL** que resol el problema d'assignació òptima de mostres desenvolupat a l'exercici Hospital del Mar de forma que:

- Carregui l'estructura de dades a partir de la informació continguda a la llibreria **HM**.
- Un cop trobada la solució, ompli la taula **HM.Maquines** amb el valor del volum de cada mostra assignat a cada màquina.

(SOLUCIÓ EXERCICI 14)

PROC OPTLP : algorisme del símplex i anàlisi de sensibilitat.

EXERCICI 15. SBF inicial del problema de transport*.

Considereu la versió del problema de transport de l'EXERCICI 4 amb generació aleatòria de paràmetres:

```
proc optmodel;
call streaminit(DNI);
number nREF = 5;
number nMER = 10;
set<number> REFINERIES = 1..nREF;
set<number> MERCATS = 1..nMER;
number demanda { j in MERCATS } = 100*rand('uniform');
number dem_tot = sum{j in MERCATS} demanda[j];
number produccio{ i in REFINERIES } = dem_tot/nREF;
number cost { i in REFINERIES, j in MERCATS } = 10*rand('uniform');
...
```

Taula 4

On **DNI** és el vostre número de DNI, usat com a llavor dels generador de nombres aleatoris. Amb l'ajut de les opcions de **OPTLP PRINTFREQ** i **MAXITER**:

- Trobeu s.b. a l'inici de l'última iteració de la fase I i observeu les seves infactibilitats.
- Trobeu ara la solució bàsica factible inicial que troba la Fase I del símplex (base al final de l'última iteració de fase I) i observeu com, efectivament, les infactibilitats detectades a l'apartat anterior han desaparegut.

(Error! Reference source not found.)

EXERCICI 16. Planificació de la producció: taxació-eficiència computacional*.

Considereu la següent variant del problema de planificació de la producció

```
call streaminit(DNI);

/* Paràmetres */
set PRODUCTE = 1..10000;
set RECURS = 1..100;
number consum{ j in RECURS, i in PRODUCTE } = 100*rand('uniform');
number benefici{i in PRODUCTE} = 200*rand('uniform');
number disp{j in RECURS} = sum{i in PRODUCTE} consum[j,i]*10;
```

Taula 5

On **DNI** és el vostre número de DNI, usat com a llavor dels generador de nombres aleatoris. Realitzeu i analitzeu la taula comparativa de nombre d'iteracions, temps per iteració i temps total d'execució d'aquest problema amb totes les variants de taxació disponibles a OPTLP. Si el vostre ordinador no té prou memòria (missatge ERROR: Out of memory during expression evaluation a la finestra Log de SAS), reduïu el nombre de variables del problema.

(Error! Reference source not found.)

EXERCICI 17. Coalco: estudi taxació-eficiència computacional**.

Considereu la variant del problema Coalco amb les següents dades:

- $|C| = 10$ components.
- $n^M = 100$ mines.
- $n^C = 2000$ clients.

- Costos de transport $t_{ij} \sim U[10,20]$.
- Costos de producció $p_i \sim U[30,50]$
- Contingut de components $\alpha_{ik} \sim U[0,0.7]$.
- Contingut màxim $\bar{\alpha}_k \sim U[0.6,0.9]$.
- Demanda dels clients uniformement $d_j \sim U[5,15]$.
- Producció mines $b_i \sim U[200,400]$.

Realitzeu i analitzeu la taula comparativa de nombre d'iteracions, temps per iteració i temps total d'execució d'aquest problema amb totes les variants de taxació disponibles a OPTLP. Si el vostre ordinador no té prou memòria (missatge ERROR: Out of memory during expression evaluation a la finestra Log de SAS), reduïu el nombre de mines i clients de forma proporcional.

(Error! Reference source not found.)

EXERCICI 18. Anàlisi de sensibilitat problema Pelletier**

Volem realitzar anàlisi de sensibilitat del problema Pelletier definit a l'EXERCICI 9 amb l'ajut del procediment **LP** de **SAS/OR**. Recordem que aquest procediment necessita conèixer l'expressió explícita dels vectors i matrius c , A i b del problema a resoldre.

- Decidiu l'ordre de les variables de decisió i determineu els elements del vector c .
- Decidiu l'ordre de les constriccions i determineu les components del vector b i els elements de la matriu A .
- Escriviu el fitxer **PelletierLP.sas** que permet resoldre el problema Pelletier amb el **PROC LP**. Resoleu el problema i obtingueu els valors dels intervals d'estabilitat del vector de costos i termes independents (Φ_c i Φ_b , taules **Range Analysis** a **SAS output**) amb la comanda

```
proc lp data=PelletierLP rangeprice rangerhs;
```

Comproveu que la solució òptima x^* coincideix amb l'obtinguda amb el **PROC OPTMODEL** a l'EXERCICI 9.

- En els pròxims apartats utilitzarem la base òptima i la seva inversa. Obtingueu la base òptima B^* i la matriu bàsica associada B corresponent al problema Pelletier a partir de la informació que mostra **PROC LP**.
- Amb la matriu bàsica obtinguda a l'apartat anterior, comproveu que els valors de Φ_{b_1} , Φ_{c_2} i Φ_{c_4} de les taules **RHS** and **Price Range Analysis** coincideixen amb les obtingudes aplicant les expressions desenvolupades a classe.

Un cop resolt el problema Pelletier amb el **PROC LP** volem analitzar, en base només a la informació continguda a les taules **Range Analysis**, com afecta a la solució òptima d'aquest problema diversos canvis en les dades del problema:

- Suposem que els requisits d'espai del primer mes augmentessin de 25.000m² a 40.000m² mentre que els del quart mes passen a ser de 0m² (és a dir, no es necessita espai addicional). A partir de la informació continguda a la taula **RHS Range Analysis** analitzeu com afectari aquest canvi $\phi_b = [40 \ 10 \ 20 \ 10 \ 0]'$ a la solució òptima i calculeu els valors de $B_{\phi_b}^*$, $x_{\phi_b}^*$ i $z_{\phi_b}^*$. Comproveu que la solució trobada amb l'anàlisi de sensibilitat coincideix amb l'obtinguda modificant el valor de b al fitxer **PelletierLP.sas** i resolent de nou.

(SOLUCIÓ EXERCICI 18)

PROC OPTMODEL : resolució de problemes de (PLE)

EXERCICI 19. Remington Manufacturing: problemes de càrrega fixa*.

El procés de manufactura de l'empresa Remington Manufacturing consisteix en tres operacions, *mecanització*, *pulverització* i *ensamblatge* amb les següents dades:

Operació	Hores consumides per unitat produïda:			Hores disponibles
	Prod 1	Prod 2	Prod 3	
Mecanització	2	3	6	600
Pulverització	6	3	4	300
Ensamblatge	5	6	2	400
Benefici unitari (€)	48	55	50	
Costos fixos (€)	1000	800	900	

Taula 6: dades problema Remington Manufacturing

La llibreria de dades SAS que defineix aquestes dades és:

```
LIBNAME Reming ".";
data Reming.Product;
input product incomes fix_cost;
datalines;
    1      48      1000
    2      55       800
    3      50       900
;
data Reming.Process;
input process $ h_avail h_req_p1 h_req_p2 h_req_p3;
datalines;
    Mach      600      2      3      6
    Grin      300      6      3      4
    Asse      400      5      6      2
;
```

Formuleu matemàticament i resoleu amb OPTMODEL el problema (PLE) completament parametritzat que, a partir de la informació continguda a la llibreria **Reming**, permet trobar la quantitat òptima de producte a fabricar.

(SOLUCIÓ EXERCICI 19)

EXERCICI 20. Air-Express: problemes de planificació de plantilles**.

La companyia aèria *Air-Express* ha de confeccionar la programació de vol de la seva tripulació de cabina. La tripulació s'organitza per torns que descansen dos dies de la setmana d'acord amb la següent taula:

Torn	Dies descans	Sou
1	diumenge, dilluns	680€
2	dilluns, dimarts	705€
3	dimarts, dimecres.	705€
4	dimecres, dijous	705€
5	dijous, divendres	705€
6	divendres, dissabte	680€
7	dissabte, diumenge	680€

Taula 7: dades torns problema Air-Express

Les necessitats estimades de treballadors durant els diferents dies de la setmana són:

Dia	Treballadors
-----	--------------

Diumenge	18
Dilluns	27
Dimarts	22
Dimecres	26
Dijous	25
Divendres	21
Dissabte	19

Taula 8: necessitats diàries treballadors problema Air-Express.

Les anteriors dades es poden definir a SAS a través de les següents taules:

```
LIBNAME Airexp ". ";
data Airexp.Days;
input DAYS $ workforce ;
datalines;
    Sun    18
    Mon    27
    Tue    22
    Wed    26
    Thu    25
    Fri    21
    Sat    19
;

data Airexp.Shifts;
input shifts lab_costs holy1 $ holy2 $;
datalines;
    1      680    Sun    Mon
    2      705    Mon    Tue
    3      705    Tue    Wed
    4      705    Wed    Thu
    5      705    Thu    Fri
    6      680    Fri    Sat
    7      655    Sat    Sun
;
```

Taula 9: llibreries del problema Air-Express

Air-Express vol trobar el nombre de treballadors que s'han de contractar a cada torn de forma que s'asseguri que el nombre de treballadors diaris és el que indica la Taula 8 i que el cost total de la plantilla sigui el mínim possible. Formuleu el problema de Air-Express com a problema de programació lineal entera completament parametritzat i resoleu-lo amb OPTMODEL a partir de la informació continguda a la llibreria **Airexp** definida a la Taula 9

(SOLUCIÓ EXERCICI 20)

EXERCICI 21. CRT-Technologies: problemes de selecció de projectes**.

La Companyia tecnològica CRT-Technologies es planteja la possibilitat de posar en marxa 6 projectes per als pròxims 5 anys. Les dades amb les que s'ha de basar la decisió sobre quins d'ells encetar es troba a la tegüent taula:

Projecte	Valor esperat del NPV (k€)	Inversió necessària (k€)				
		Any 1	Any 2	Any 3	Any 4	Any 5
1	141	75	25	20	15	10
2	187	90	35	0	0	30
3	121	60	15	15	15	15
4	83	30	20	10	5	5
5	265	100	25	20	20	20
6	127	50	20	10	30	40
Pressupost (k€):		250	75	50	50	50

Taula 10: dades problema CRT-Technologies

CRT-Technologies vol determinar quins projectes ha de posar en marxa de forma que es maximitzi el valor total de NPV esperat, sense que la inversió total superi el capital disponible a cada any. Les dades de la

Projecte	Valor esperat del NPV (k€)	Inversió necessària (k€)				
		Any 1	Any 2	Any 3	Any 4	Any 5
1	141	75	25	20	15	10
2	187	90	35	0	0	30
3	121	60	15	15	15	15
4	83	30	20	10	5	5
5	265	100	25	20	20	20
6	127	50	20	10	30	40
Pressupost (k€):		250	75	50	50	50

Taula 10 es troben disponibles a SAS en els següents datasets:

```
LIBNAME CRT ".";
data CRT.Years;
input years budget ;
datalines;
1 250
2 75
3 50
4 50
5 50
;
data CRT.Projects;
input project npv inv_y1 inv_y2 inv_y3 inv_y4 inv_y5;
datalines;
1 141 75 25 20 12 20
2 187 90 35 0 0 30
3 121 60 15 15 15 15
4 83 30 20 10 5 5
5 265 100 25 20 20 20
6 127 50 20 10 30 40
;
```

Taula 11 : llibreries del problema CRT-Technologies.

- Formuleu matemàticament i resolueu amb OPTMODEL el problema (PLE) completament parametritzat que permet resoldre el problema de selecció de projectes de l'empresa CRT-Technologies a partir de la llibreria **CRT** definida a la Taula 11.
- Considereu ara que es vol evitar que alguns projectes es posin en marxa simultàniament. La informació de quins projectes son incompatibles (no es poden posar en marxa simultàniament) està continguda en el següent conjunt de dades:

```
data CRT.Incomp;
input proj ip1 ip2 ip3 ip4 ip5 ip6;
datalines;
1 . 1 0 1 0 0
2 . . 1 0 0 0
3 . . . 0 0 0
4 . . . . 0 0
5 . . . . . 1
6 . . . . . .;
;
```

Taula 12: matriu d'incompatibilitats projectes problema CRT.

Els elements marcats amb 1 indiquen els projectes que son incompatibles, és a dir, els projectes 1,2 i 4 són incompatibles (només un dels tres es pot seleccionar), els 2 i el 3 també ho son i, finalment, el 5 i el 6. Modifiquen la formulació matemàtica i la implementació del problema desenvolupat a l'apartat anterior per tenir en compte el quadre d'incompatibilitats de la taula anterior.

(SOLUCIÓ EXERCICI 21)

EXERCICI 22. Airexpress(2): planificació de plantilla amb cost fix*.

Considereu el problema de planificació dels torns de la flota de la companyia *Air-Express* estudiat a classe:

$$(PE) \begin{cases} \min_x & z = \sum_{i \in \mathcal{S}} c_i x_i \\ \text{s. a.:} & \sum_{i: j \in \mathcal{H}_i} x_i \geq b_j \quad j \in \mathcal{D} \\ & x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z} \quad i \in \mathcal{S} \end{cases}$$

Amb :

\mathcal{S} : conjunt de torns.

\mathcal{D} : conjunt de dies.

c_i : salari mensual treballadors torn $i, i \in \mathcal{S}$.

$\mathcal{H}_i \subset \mathcal{D}$: dies de descans torn $i, i \in \mathcal{S}$.

b_j : demanda de treballadors dia $j, j \in \mathcal{D}$.

x_i : nombre de treballadors a contractar torn $i, i \in \mathcal{S}$.

A banda del cost per treballador contractat a cada torn, si es decideix posar en marxa un torn (és a dir, si es contracta algun treballador per aquest torn) existeixen uns costos fixos mensuals, associats a la contractació i gestió laboral dels torns, que s'indiquen a la següent taula:

Torn →	1	2	3	4	5	6	7
Cost fix (€) →	1000	950	950	950	950	1000	1000

- a) Desenvolpeu la formulació matemàtica completament parametritzada del problema (PE) amb costos fixos (li direm $(PE)_a$), definint clarament els nous elements introduïts en el model.

Volem ara trobar el resultat del model plantejat a l'apartat a) amb **OPTMODEL** a partir del fitxer **Airexpress.sas** estudiat a classe:

- b) Afegiu les modificacions necessàries al codi del fitxer **Airexpress.sas** per tal de resoldre el problema $(PE)_a$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 22)

EXERCICI 23. Coalco (4): transport i mescla amb costos fixos*.

Considereu la següent ampliació del problema Coalco(2) plantejat a l'apartat d) de l'exercici EXERCICI 11. Degut a la crisi internacional, la demanda dels clients de Coalco s'ha reduït a 40Tm pel client 1 i 30Tm pel client 2 ($d = [40 \ 30]'$). Com a conseqüència d'això, Coalco es planteja la possibilitat de tancar alguna de les tres mines. Per tal de prendre la decisió de quines mines tancar, el departament d'investigació operativa de l'empresa disposa de les següents dades de costos fixos de funcionament i costos de tancament (deguts a desmantellament d'instal·lacions i indemnitzacions):

Mina	1	2	3
Cost fix funcionament (€/mes)	4000	3000	1000
Cost tancament (equivalent €/mes)	1000	1000	2000

A banda de les consideracions econòmiques de la taula anterior, la negociació amb els sindicats ha determinat que de les tres plantes només es pot tancar una.

- a) Indiqueu quines modificacions caldria introduir al model matemàtic del problema Coalco(2)_d per tal de tenir en compte als costos fixos, de tancament i la constricció sindical (paràmetres, variables, funció objectiu i constriccions).
- b) Trobeu la solució òptima amb l'ajut de SAS/OR del nou problema i indiqueu-la a la següent taula:

	x^* amb costos de funcionament i tancament			x^* amb costos de funcionament + tancament i constricció sindical		
Mina	1	2	3	1	2	3
Client 1						
Client 2						
Costos totals (€/mes)						

(SOLUCIÓ EXERCICI 23)

EXERCICI 24. Prodem S.L. (2)**

L'empresa Prodem SL. fabrica els productes A, B i C. En la fabricació d'aquests tres productes es fabriquen a través del procés de manufactura que consumeixen un recurs amb una disponibilitat màxima de $b = 40Tm$. A més, l'empresa s'ha compromès a satisfer una certa demanda no inferior a $d = 33Tm$. Els costos de fabricació d'una unitat de producte A, B y C són, respectivament, 10, 2 i 3 u.m. (unitats monetàries). El problema lineal (P) que permet calcular les quantitats de producte A (x_1), B (x_2) i C (x_3) que minimitzen els costos de producció és:

$$(P) \begin{cases} \min & 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a.:} & \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 40 \quad \text{Procés manufactura 1} \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 33 \quad \text{Demanda} \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

L'empresa té la possibilitat de substituir el procés de manufactura 1 per un procés alternatiu, al que denotarem per "procés de manufactura 2". Aquest procés és més eficient que el procés 1, de forma que el consum de tones de recurs per cada unitat de producte A, B i C fabricat és redueix a 1.5, 1 i 0.5 respectivament. Com a contrapartida, alguns dels costos de fabricació d'aquest procés de manufactura 2 augmenten, passant a ser 15, 2 i 4 respectivament. Els dos processos son incompatibles, és a dir, tot els productes A, B i C s'han de fabricar a través del procés 1 o del procés 2.

- Formuleu el model matemàtic completament parametritzat del problema (PLE) que permet determinar quin dels dos processos de manufactura cal usar i la quantitat òptima a fabricar dels productes A, B i C.
- Implementeu el model desenvolupat a l'apartat anterior (**model2.sas**) amb **OPTMODEL** i indiqueu la solució òptima obtinguda

(SOLUCIÓ EXERCICI 24)