Grau d'Estadística UB-UPC

Programació Lineal i Entera

Tema 1 :

Fonaments de Programació Lineal

F.-Javier Heredia

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

Programació Lineal: introducció i propietats

1. **Introducció**
   – Definició problema de Programació Lineal, exemples i origen històric.
2. **Propietats geomètriques dels problemes de (PL)**
   – Políedres i polítops.
   – Classificació dels problemes (PL).
   – Políedre en forma estàndard.
   – Convexitat i poliedres.
   – Punts extrems: definició, teoremes d'existència i optimalitat.
   – Solucions bàsiques factibles: definició, càlcul i teorema d'equivalència.

Bibliografia: Cap. 2 - 5 "*Introduction to Linear Optimization*", D. Bertsimas, N. Tsitsiklis

Def. problema de Programació Lineal (PL)

- **Def. Problema de programació lineal**: donats els vectors $c, l, u \in \mathbb{R}^n$,$b \in \mathbb{R}^m$ i la matriu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es defineix el problema de programació lineal com:

$$(\mathrm{PL})\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} z = & c'x & & & \textbf{funció objectiu} \\ s.a.: & & & & \\ & Ax & \lesseqqgtr & b & \textbf{constriccions} \\ & l \le x \le u & & & \textbf{fites} \end{cases}$$

- **Regió factible de** (PL) **:** $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \lesseqqgtr b, l \le x \le u\}$
- **Solució factible:** $x \in \mathbb{R}^n$ *factible de* $(PL) \Leftrightarrow x \in \mathcal{F}$
- **Solució òptima:** $x^* \in \mathcal{F}$ *tal que* $c'x^* \le c'y, \forall y \in \mathcal{F}$.
- **Altres formes d'expressar** (PL) **:**

$$(\mathrm{PL}) \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x | x \in \mathcal{F}\} \quad ; \quad (\mathrm{PL})\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} z = & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i & & & \\ s.a.: & & & & \\ & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_j & \lesseqqgtr & b_j & j = 1,2,\dots,m \\ & l_i \le x_i \le u_i & & & i = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

Exemples prob. de Programació Lineal (PL)

Problema de programació de la producció

Paràmetres:

- n: nre. productes a fabricar
- m: nre. recursos consumits
- c_i: benfici producte $i, i = 1, \ldots, n$
- b_j: disponibilitat recurs $j, j = 1, \ldots, m$
- a_{ji}: quantitat recurs j consumit pel producte i.

Variables:

- x_i: quantitat a fabricar producte i

Funció objectiu: es maximitzen els beneficis totals.

Constriccions: el programa de producció no consumeix més recursos dels existents.

$$
(\mathrm{PL}) \begin{cases} \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i & \\ s.a.: & \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j & j = 1,2, \ldots, m \\ x_i \geq 0 & i = 1,2, \ldots, n \end{cases}
$$

Exemples prob. de Programació Lineal (PL)

Problema de la dieta

Paràmetres:

- n: nre. aliments diferents disponibles.
- m: nre. de nutrients essencials dieta.
- c_i: cost aliment i, i $= 1, \ldots, n$
- b_j: quantitat diària mínima nutrient $j, j = 1, \ldots, m$
- a_{ji}: quantitat nutrient j aportat per kg aliment i.

Variables:

- x_i: quantitat diària aliment i a la dieta.

Funció objectiu: es minimitzen el preu total de la dieta.

Constriccions: la dieta aporta les quantitats necessàries de cada nutrient.

$$(\text{PL}) \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} z = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i & \\ s.a.: & \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \geq b_j & j = 1,2, \ldots, m \\ x_i \geq 0 & i = 1,2, \ldots, n \end{cases}$$

Exemples prob. de Programació Lineal (PL)

Problema de transport

Paràmetres:

- n: nre. centres producció.
- m: nre. centres consum
- c_{ij}: cost unitari transport entre centres i, j
- p_j: producció centre $i, i = 1, \dots, n$
- d_j: demanda centre consum $j, j = 1, \dots, m$

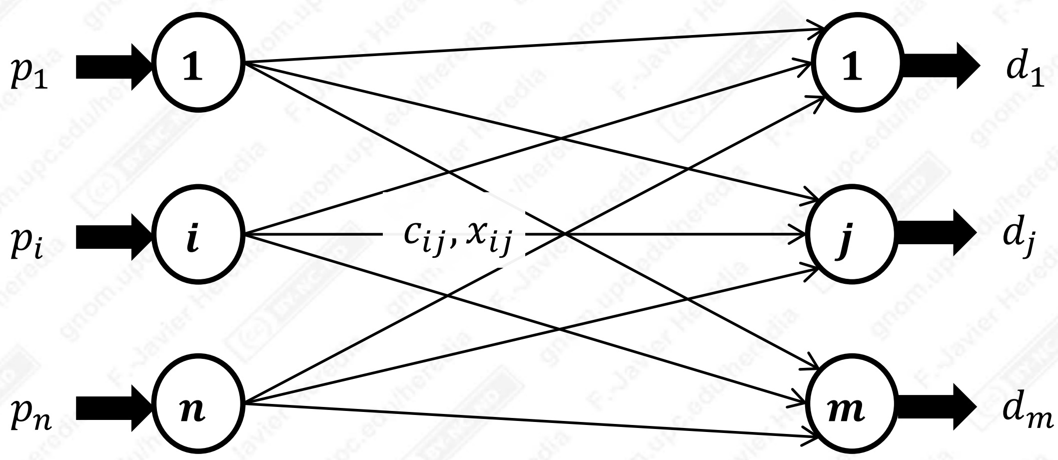
Variables:

- x_{ij}: quantitat de producte a transportar de i a j.

Funció objectiu: es minimitzen els costos totals de transport

Constriccions:

1) Cada centre de producció envia tota la seva producció.
2) Cada centre de consum rep la seva demanda.



Exemples prob. de Programació Lineal (PL)

Problema de transport

Paràmetres:

- n: nre. centres producció.
- m: nre. centres consum
- c_{ij}: cost unitari transport entre centres $i,$ j
- p_j: producció centre $i, i = 1, \dots, n$
- d_j: demanda centre consum $j, j = 1, \dots, m$

Variables:

- x_{ij}: quantitat de producte a transportar de i a j.

Funció objectiu: es minimitzen els costos totals de transport

Constriccions:

1) Cada centre de producció envia tota la seva producció.
2) Cada centre de consum rep la seva demanda.

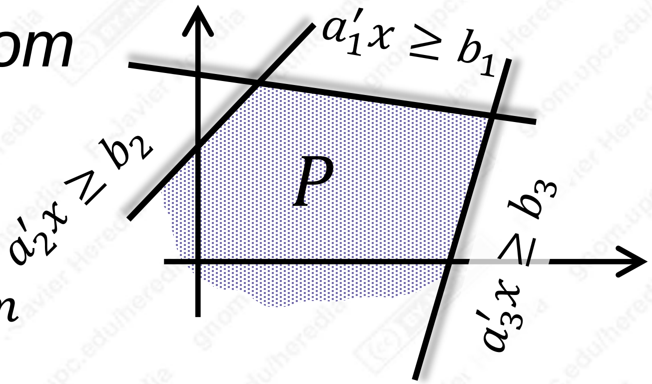
$$
(\text{PL}) \begin{cases} \min\limits_{x \in R^{n \times m}} z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \\ s.a.: \\ 1) \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = p_i \quad i = 1,2, \dots, n \\ 2) \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = d_j \quad j = 1, \dots, m \\ \quad x_{ij} \geq 0 \quad \begin{array}{l} i = 1,2, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{array} \end{cases}
$$

Orígens històrics de la PL

- **Període clàssic, fonaments:**
  - **Fourier, 1826**: mètode per a resoldre sistemes d'inequacions lineals (eliminació de Fourier-Motzkin, secció 2.8 Bertsimas).
  - **Farkas, Caratheodory, Minkowsky, 1870-1930**: fonaments.
  - **von Neumann, 1928**: teoria de dualitat a partir de la teoria de jocs.
  - **Kantorovich, Koopmans, 1939**: formulacions com a PL de problemes d'economia (Premis Nobel d'economia 1975).
- **Període modern, algorismes:**
  - **George Dantzig, 1947: mètode del símplex**.
    - **1950:** aplicacions.
    - **1960:** optimizació de grans dimensions (algorisme Dantzig-Wolfe).
    - **1970:** complexitat algorísmica.
  - **Khachyan, 1979:** mètode de l'el·lipsoide.
  - **Karmarkar, 1984:** mètodes de punt interior.

Políedres i polítops : definicions

- **Def. de políedre**: *un políedre* P *és un conjunt de* $\mathbb{R}^n$ *que pot ser expressat com a intersecció d'una col·lecció finita de semiespais:*



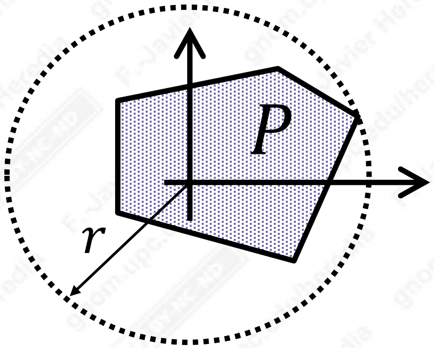
$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

- **Propietat**: *la regió factible de qualsevol problema* (PL) *és un políedre:*

$$(PL) \min_{x\in\mathbb{R}^n} \{c'x | x \in \mathcal{F} \equiv P\}$$

$$\leftarrow \begin{cases} A^1x \leq b^1 \\ A^2x \geq b^2 \\ A^3x = b^3 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -A^1 \\ A^2 \\ A^3 \\ -A^3 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} -b^1 \\ b^2 \\ b^3 \\ -b^3 \end{bmatrix}$$

- **Def. de polítop**: *un polítop és un políedre no buit i fitat.*
  - **Prop:** *els polítops són conjunts compactes (tancats i fitats)*



Classificació dels problemes (PL) (1/3)

- **Def. Problema $(\boldsymbol{PL})$ amb solució òptima:**
  - *Problema (PL) t.q. $\exists x^* \in P : c'x^* \leq c'y, \forall y \in P, y \neq x^*$ (x^* solució òptima).*
  - *Problema (PL) t.q. $\{c'x | x \in P\}$ està fitat inferiorment.*
  - *Si x^* no és únic, les (infinites) solucions òptimes de (PL) s'anomenen **òptims alternatius***
- **Def. Problema $(\boldsymbol{PL})$ infactible:** problema (PL) amb $P = \emptyset$.
- **Def. Problema $(\boldsymbol{PL})$ il·limitat:**
  - *Problema (PL) factible t.q. $\{c'x | x \in P\}$ no està fitat inferiorment.*
  - *Problema (PL) factible t.q. $\exists x \in P, d \in \mathbb{R}^n$ que satisfan:*
    i. $x + \theta d \in P, \forall \theta > 0$ *(diem que d és un raig del políedre P).*
    ii. $c'd < 0$ *(diem que d és una direcció de descens sobre x).*

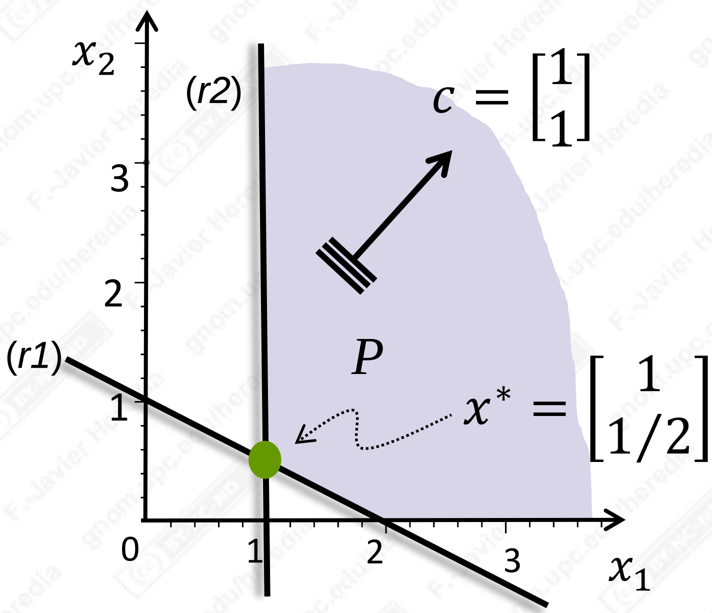
Classificació dels problemes (PL) (2/3)

- **(PL) amb solució òptima**

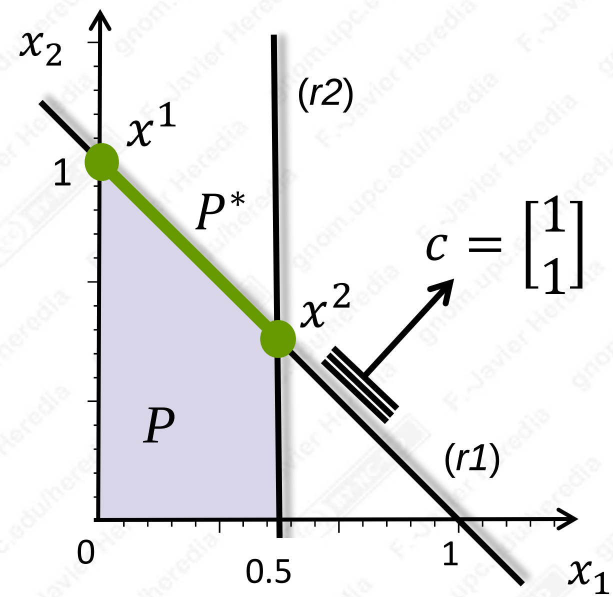
$$(PL)\begin{cases}\min & z = & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & x_1 & +2x_2 & \geq 2 & (r1) \\ & & x_1 & & \geq 1 & (r2) \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases}$$

$$(PL)\begin{cases}\max & z = & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & x_1 & +x_2 & \leq 1 & (r1) \\ & & 2x_1 & & \leq 1 & (r2) \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases}$$

Solució única:



Infinites solucions (òptims alternatius):

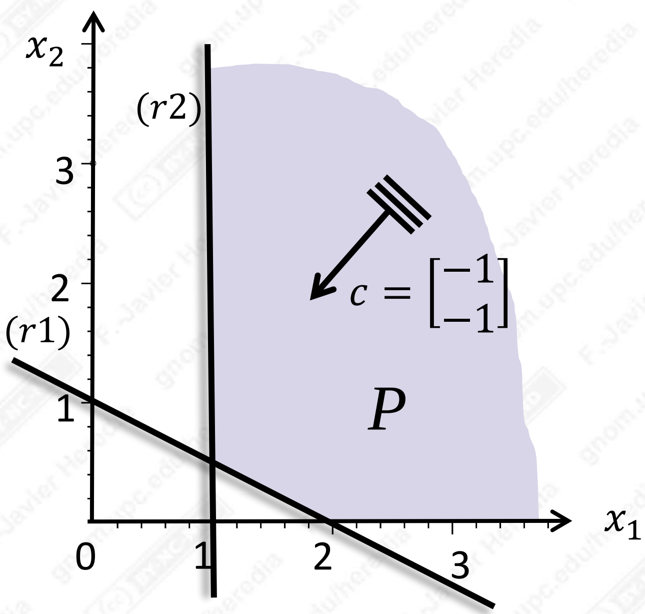


$$P^* = \{x \in \mathbb{R}^2 | \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \lambda \in [0,1]\}$$

Classificació dels problemes (PL) (3/3)

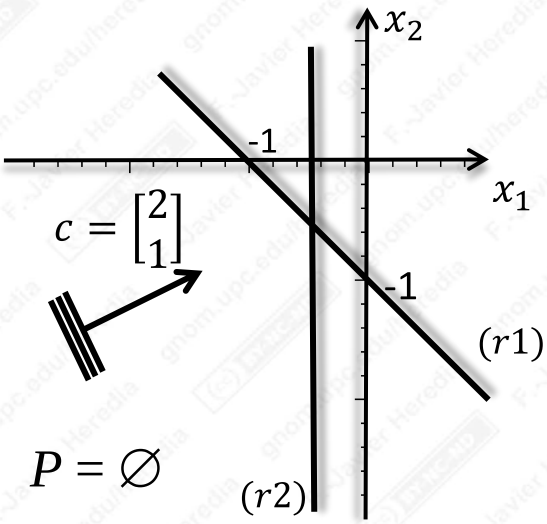
- **(PL) il·limitat (∄mínim):**

$$(PL)\begin{cases}\min & z = & -x_1 & -x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & & x_1 & +2x_2 & \geq & 2 & (r1) \\ & & x_1 & & \geq & 1 & (r2) \\ & & x_1, & x_2 & \geq & 0 & \end{cases}$$



- **(PL) infactible (∄solució factible):**

$$(PL)\begin{cases}\max & z = & 2x_1 & +x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & & x_1 & +x_2 & \leq & -1 & (r1) \\ & & 2x_1 & & \leq & -1 & (r2) \\ & & x_1, & x_2 & \geq & 0 & \end{cases}$$



Políedres en forma estàndard

- **Def. de políedre en forma estàndard**: $P_e = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$
  i. P_e és un políedre: $Ax = b, x \geq 0 \rightarrow \begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{bmatrix}$
  ii. Tot políedre $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}$ es pot expressar com a políedre en forma estàndard:

$$Ax \geq b \xrightarrow[w \geq 0]{\substack{x=u-v \\ u,v\geq 0}} \overbrace{\begin{bmatrix} A & -A & -I \end{bmatrix}}^{A_e} \overbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}^{x_e} = A_e x_e = b, x_e \geq 0$$

- **Def.** $(\boldsymbol{PL})$ **en forma estàndard:** $(PL)_e \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{c'x : x \in P_e\}$
- **Proposició:** *Tot problema (PL) es pot transformar en un problema equivalent en forma estàndard $(PL)_e$, en el sentit que:*
  a) *donada una solució factible d'un problema podem trobar una solució factible de l'altre amb el mateix cost, i*
  b) *les solucions òptimes de (PL) i $(PL)_e$ coincideixen.*

Transformació a la forma estàndard

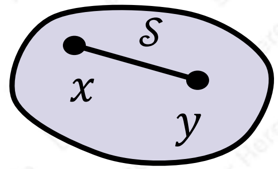
$(\boldsymbol{PL})$	$(\boldsymbol{PL})_e$
$a_j'x \leq b_j$	$a_j'x + x_k = b_j, x_k \geq 0, (x_k$ **variable de folga**)
$a_j'x \geq b_j$	$a_j'x - x_k = b_j, x_k \geq 0, (x_k$ **variable d'escreix**)
$\underline{b}_j \leq a_j'x \leq \overline{b}_j$	$a_j'x + x_k = \overline{b}_j, \qquad 0 \leq x_k \leq \overline{b}_j - \underline{b}_j$
$x_i \leq 0$	Canvi de variable: $y_i = -x_i \quad , \quad y_i \geq 0$
x_i lliure	Mètode 1: $x_i = u_i - v_i \quad , \quad u_i \quad , \quad v_i \geq 0$ Mètode 2: s'elimina x_i d'una constricció $a_j'x = b_j$
$x_i \leq u_i$	Canvi de variable: $y_i = u_i - x_i \quad , \quad y_i \geq 0$
$l_i \leq x_i$	Canvi de variable: $y_i = x_i - l_i \quad , \quad y_i \geq 0$
$\max c'x$	$\min -c'x$

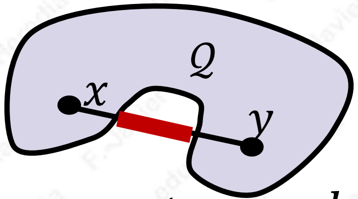
- Analitzeu l'equivalència de les solucions factibles i de l'òptim del següent problema i el seu problema estàndard associat: $(PL) \min\{x_1 + x_2 | x_1 + x_2 \leq 1, x \geq 0\}$
- Transformeu a la forma estàndard $(PL) \begin{cases} \max\limits_{x \in \mathbb{R}^3} z = & 3x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \\ \quad s.a.: & & & & \\ & 4 \leq 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 20 \\ & 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq 6 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 3 & & \end{cases}$

Convexitat i políedres (1/2)

- **Def. conjunt convex**: *un conjunt* $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ *és convex si* $\forall x, y \in \mathcal{S}$, $\forall \lambda \in [0,1]$ *:* $\lambda x + (1-\lambda) y \in \mathcal{S}$*.*

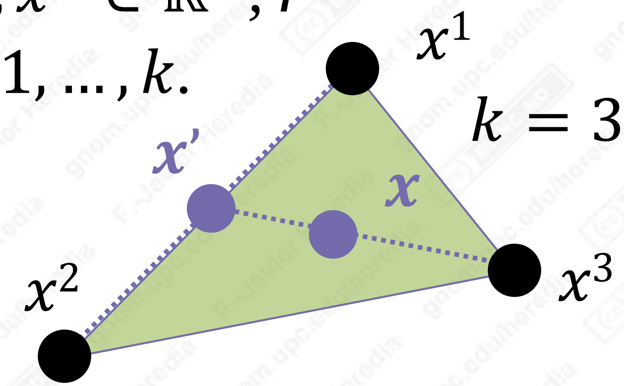
Convex





No Convex

- **Def.** **combinació convexa**: siguin $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$, *i* $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ t.q. $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, k$.
  Llavors, $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$
  és combinació convexa de $x^1, \dots, x^k$



- **Def.** **embolcall convex** **(*convex hull*) de $x^1, \dots, x^k$** :
  conjunt de totes les combinacions convexes de $x^1, \dots, x^k$*:*

$$\mathrm{CH}(x^1, \dots, x^k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \, , \lambda_i \geq 0 \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

Convexitat i políedres (2/2)

- **Propietats** (Ta 2.1 B&T):
  a) La intersecció de conjunts convexos és convexa.
  b) **Tot políedre és un conjunt convex**.
  c) La combinació convexa d'un nombre finit d'elements d'un conjunt convex pertany al conjunt convex.
  d) **L'embolcall convex d'un conjunt finit de vectors és un conjunt convex**.
- b) ⇒ **La regió factible dels problemes (PL) és un conjunt convex.**

Propietats convexitat (1/3)

Propietats *(Ta 2.1 B&T):*

a) La intersecció de conjunts convexos és convexa.

Demo:

- Sigui $S_i, i \in \mathcal{I}$ conjunts convexos, $x, y \in \cap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{S}_i$ i $\lambda \in [0,1]$.
- $\forall i \in \mathcal{I}$, S_i és convex i conté x i $y \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in S_i, \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \cap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{S}_i$ conv. ■

b) Tot políedre és un conjunt convex.

Demo:

- Sigui $x, y \in P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}$ i $w = \lambda x + (1-\lambda)y$. Llavors:

$$Aw = \lambda Ax + (1-\lambda)Ay \geq \lambda b + (1-\lambda)b = b \Rightarrow w \in P \Rightarrow P \text{ convex } \blacksquare$$

Propietats convexitat (2/3)

Propietats *(Ta 2.1 B&T)*

c) *La combinació convexa d'un nombre finit d'elements d'un conjunt convex pertany al conjunt convex.*

Demo:

- Per inducció:
  - Cert per $x^1, x^2 \in \mathcal{S}$, convex. Suposem que es satisfà per $x^1, \dots, x^k \in \mathcal{S}$ (1) i demostrem que es satisfà per $x^1, \dots, x^k, x^{k+1} \in \mathcal{S}$.
  - Sigui $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1$. Assumint que $\lambda_{k+1} \neq 1$ tenim:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^i = \lambda_{k+1} x^{k+1} + (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \overbrace{\frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_{k+1})}}^{\tilde{\lambda}_i} x^i$$

  - Els coeficients $\tilde{\lambda}_i$ son ≥ 0 i $\sum_i \tilde{\lambda}_i = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \tilde{x} = \sum_{i=1}^{k} \tilde{\lambda}_i x^i \in \mathcal{S}$
  - $\mathcal{S}$ convex $\Rightarrow \lambda_{k+1} x^{k+1} + (1 - \lambda_{k+1}) \tilde{x} = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^i \in \mathcal{S}$ ■

Propietats convexitat (3/3)

Propietats *(Ta 2.1 B&T)*

d) L'embolcall convex d'un conjunt finit de vectors és un conjunt convex.

Demo:

- Sigui: $\mathcal{S} = CH\left(x^1, \dots, x^k\right)$ i $y, z \in \mathcal{S}$
  - $y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i \in \mathcal{S}$; $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$
  - $z = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x^i \in \mathcal{S}$; $\beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1$
- Sigui $\lambda \in [0,1]$. Llavors:

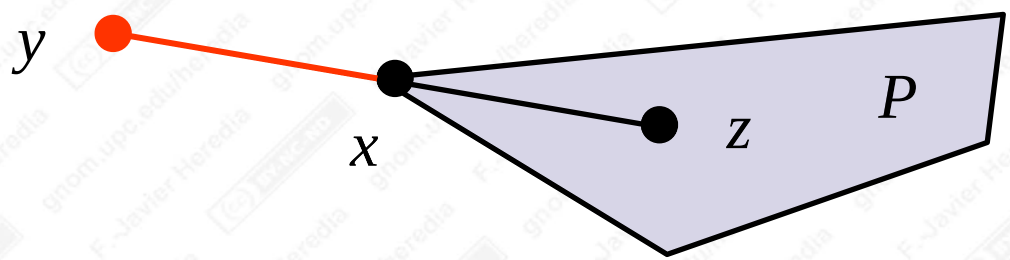
$$\lambda y + (1 + \lambda) z = \lambda \sum_{i=1}^{k} \beta_i x^i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{k} \beta_i x^i = \sum_{i=1}^{k} \overbrace{(\lambda \alpha_i + (1 - \lambda)\beta_i)}^{\delta_i} x^i$$

Els coeficients δ_i satisfan $\delta_i \geq 0$ i $\sum_i \delta_i = 1 \Rightarrow \lambda y + (1 + \lambda) z \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}$ convex ■

Punts extrems, definició

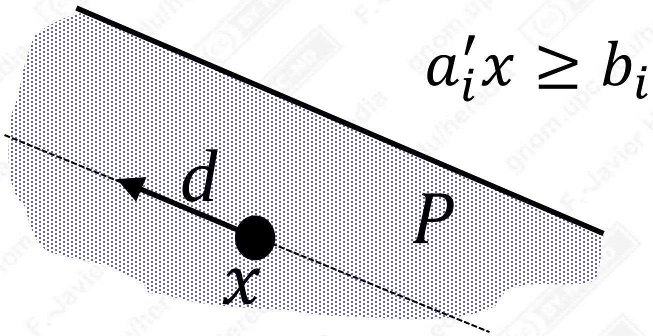
- **Def. punt extrem**: *sigui el políedre* P. *Un vector* $x \in P$ *és un punt extrem de* P *si no existeix cap parell de vectors* $y, z \in P$, *diferents de* x, *ni cap escalar* $\lambda \in [0,1]$ *tals que*:

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) z$$



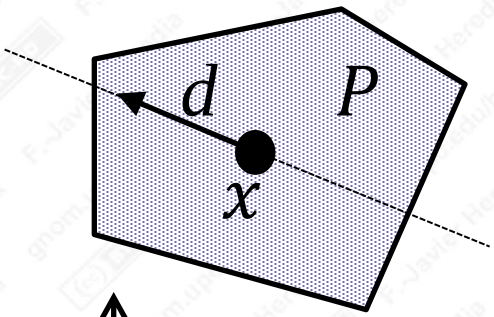
Punts extrems, existència

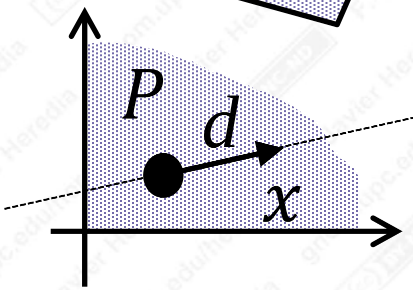
- **Definició:** *direm que el políedre* $P \subset \mathbb{R}^n$ ***conté una línia*** *si existeix el vector* $x \in P$ *i el vector no nul* $d \in \mathbb{R}^n$ *tals que* $x + \lambda d \in P$ *per a tot escalar* λ.



- **Teorema 1:** *sigui el políedre no buit* $P = \{x \in \mathbb{R}^n |\ a_i'x \geq b_i, i = 1, \dots, m\}$ *Llavors* P *té com a mínim un punt extrem* $\Leftrightarrow$ P *no conté cap línia.* *(Ta 2.6 B&T)*

- **Corol·laris**:
  - *i.* *Tot políedre no buit* ***fitat*** *(**polítop**) té, com a mínim, un punt extrem.*
  - *ii.* *Tot políedre en forma estàndard no buit té, com a mínim, un punt extrem (doncs* $P_e \subset \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0\}$*) .*





Punts extrems, optimalitat (1/3)

Teorema 2 *"Sigui* (PL) $\min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x | x \in P\}$, P *políedre. Suposem que* P *conté algun punt extrem i que existeix una solució òptima. Llavors existeix una solució òptima que és un pt. extrem de* P*."* *(Ta 2.7 B&T)*

Demo:

1. El conjunt $Q \neq \emptyset$ de solucions òptimes de (PL) **és un políedre que conté un punt extrem**:
   - Sigui z^* el valor òptim de la funció objectiu. Llavors $P^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, c'x = z^*\}$ **és un políedre**.
   - $\left.\begin{array}{c} P^* \subset P \\ P \text{ no conté cap línia} \end{array}\right\} \Rightarrow P^*$ no conté cap línia $\Rightarrow P^*$ **té punts extrems**.

Punts extrems, optimalitat (1/2)

Demo (cont):

2. **Sigui $\boldsymbol{x}^*$ un punt extrem de $\boldsymbol{P}^*$**. Demostrarem, per reducció a l'absurd, que $\boldsymbol{x}^*$ **és punt extrem de $\boldsymbol{P}$**:

- Si x^* **no** és pt. extrem de P llavors:

$$\exists y, w \in P, y \neq x^*, v \neq x^* \text{ i } \lambda \in [0,1] \text{ t.q.: } x^* = \lambda y + (1-\lambda) v$$

- Aleshores:

$$c'x^* = \lambda \overbrace{c'y}^{\geq z^*} + (1-\lambda) \overbrace{c'v}^{\geq z^*} = z^* \Rightarrow c'y = c'v = c'x^* \Rightarrow y, v \in \mathrm{Q} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ***$\boldsymbol{x}^*$no és pt. extrem de $\boldsymbol{P}^*$*: contradicció.**

- Llavors, existeix un vector x^*, pt. extrem del conjunt solució P^*, que és punt extrem de P ■

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

Punts extrems, optimalitat (1/3)

Teorema 2 *"Sigui* $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x|x \in P\}$, P *políedre. Suposem que* P *conté algun punt extrem i que existeix una solució òptima. Llavors existeix una solució òptima que és un pt. extrem de* P*."* *(Ta 2.7 B&T)*

Interpretació:

- **Hipòtesis:** analitzem els següents (PL) a la vista de les hipòtesis:
  - a) $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2}\{c'x \mid x_1 + x_2 \geq 3\}$
  - b) $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2}\{c'x|x_1 + x_2 \geq 3, x_1 + x_2 \leq 1\}$
  - c) $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2}\{-x_1 - x_2|x_1 + x_2 \geq 3, x \geq 0\}$
- **Tesis:**

  Considerem $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2}\{c'x|x_1 + x_2 \leq 1, x \geq 0\}$.On podem trobar l'òptim?

Solucions Bàsiques Factibles : definició

- **Comentari:** La caracterització de les solucions òptimes de problemes (PL) com a punts extrems no permet el seu tractament computacional

$\rightarrow$ **solucions bàsiques factibles**

- **Def.: Solució Bàsica (SB)**:
  - *Sigui* $(PL)_e \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{c'x | Ax = b, x \geq 0\}$, A *matriu* $m \times n$ ***de rang complet***.
  - *El vector* $x \in \mathbb{R}^n$ *és una solució bàsica de* $(P)_e$ *sii* $Ax = b$ *i existeixen índexs* $\mathcal{B} = \{B(1), \dots, B(m)\}$ *tals que:*

    i. *La* ***matriu bàsica*** $B \stackrel{\text{def}}{=} \left[A_{B(1)}, A_{B(2)} \dots, A_{B(m)}\right]$ *és no singular.*

    ii. Si $i \notin \mathcal{B}$ *llavors* $x_i = 0$.

- **Def.: Solució Bàsica Factible (SBF)**: *solució bàsica tal que* $x \geq 0$.
- **Def.: Solució Bàsica Degenerada (SBD)** : *s.b. tal que* $\exists i \in \mathcal{B} : x_i = 0$.

Assumpció de rang complet de A

Teorema 3 : "*Sigui P_e un políedre estàndard no buit amb $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i files $a'_1, \ldots, a'_m$. Suposem que* $\mathrm{rang}(A) = k < m$ *i que les files $a'_{i_1}, \ldots, a'_{i_k}$ són linealment independents. Considerem el políedre*

$$Q_e = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| a'_{i_1}x = b_{i_1}, \ldots, a'_{i_k}x = b_{i_k}, x \geq 0\right\}$$

Llavors $Q_e = P_e$."

Demostració: exercici.

- Així doncs, si A no és de rang complet i P_e no és buit, les files linealment dependents de A tenen associades constriccions redundants i es poden eliminar de la formulació del problema sense que la regió factible canviï.
- Exemple: $P_e = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x \geq 0 \right\}$

Solucions Bàsiques: càlcul.

- **Càlcul d'una SB**: considerem el següent políedre:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 | \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, x \geq 0 \right\}$$

1. Es sel·leccionen m variables d'indexos $\mathcal{B} = \{B(1), \dots, B(m)\}$ amb columnes de A linealment independents (**variables bàsiques**):

$$x_B = \left[x_{B(1)}, x_{B(2)}, \dots, x_{B(m)} \right]' , B \stackrel{\text{def}}{=} \left[A_{B(1)}, A_{B(2)} \dots, A_{B(m)} \right]$$

2. Es fixen les $n - m$ **variables no bàsiques** a zero:

$$\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{ i \mid i \notin \mathcal{B} \} \equiv \{ N(1), \dots, N(n-m) \}$$

$$x_N = [0] \quad , A_N \stackrel{\text{def}}{=} \left[A_{N(1)}, A_{N(2)}, \dots, A_{N(n-m)} \right]$$ (**matriu no-bàsica**)

3. Es calcula el valor de les variables bàsiques:

$$Ax = [B \quad A_N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = B x_B + A_N \overbrace{x_N}^{=0} = B x_B = b, \ \boxed{x_B = B^{-1} b}$$

Conjunt de les SB d'un problema PL

- **Problema de planificació de la producció en forma estàndard:**

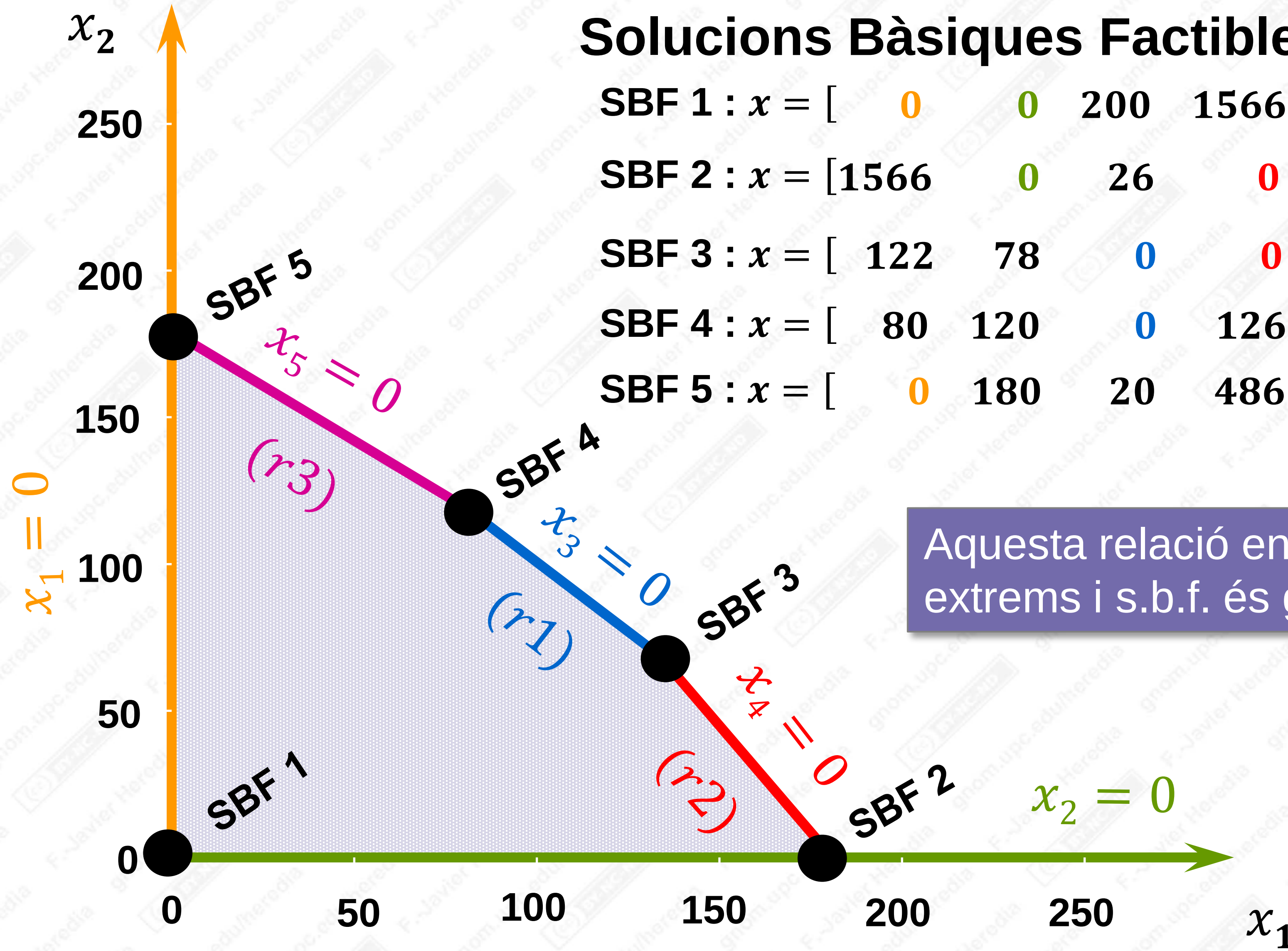
$$(PL)\begin{cases}\min & z = -350x_1 - 300x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 = 200 \quad (r1) \\ & 9x_1 + 6x_2 + x_4 = 1566 \quad (r2) \\ & 12x_1 + 16x_2 + x_5 = 2880 \quad (r3) \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0\ \ x_5 \geq 0\end{cases}$$

- **Nombre total de SB** $\leq \binom{n}{m} = \binom{5}{3} = 5!/3!\,2! = 10$

s.b.	x_B	x_N	x	z
1	x_3, x_4, x_5	x_1, x_2	$x = [0 \quad 0 \quad 200 \quad 1566 \quad 2880]'$	0
2	x_1, x_3, x_5	x_2, x_4	$x = [174 \quad 0 \quad 26 \quad 0 \quad 792]'$	-60900
3	$\boldsymbol{x_1, x_2, x_5}$	$\boldsymbol{x_3, x_4}$	$\boldsymbol{x = [122 \quad 78 \quad 0 \quad 0 \quad 168]' = x^*}$	**-66100**
4	x_1, x_2, x_4	x_3, x_5	$x = [80 \quad 120 \quad 0 \quad 126 \quad 0]'$	-64000
5	x_2, x_3, x_4	x_1, x_5	$x = [0 \quad 180 \quad 20 \quad 486 \quad 0]'$	-54000
6	x_1, x_2, x_3	x_4, x_5	$x = [108 \quad 99 \quad -7 \quad 0 \quad 0]'$	-67500
7	x_1, x_3, x_4	x_2, x_5	$x = [240 \quad 0 \quad -40 \quad -594 \quad 0]'$	-84000
8	x_1, x_4, x_5	x_2, x_3	$x = [200 \quad 0 \quad 0 \quad -234 \quad 480]'$	-70000
9	x_2, x_4, x_5	x_1, x_3	$x = [0 \quad 200 \quad 0 \quad 366 \quad -320]'$	-60000
10	x_2, x_3, x_5	x_1, x_4	$x = [0 \quad 261 \quad -61 \quad 0 \quad -1296]'$	-78300

Solucions bàsiques factibles | solució bàsica factible òptima | solucions bàsiques infactibles

Solucions Bàsiques Factibles i punts extrems



Solucions Bàsiques Factibles :

SBF 1 : $x = [\ 0 \quad 0 \quad 200 \quad 1566 \quad 2880]'$

SBF 2 : $x = [1566 \quad 0 \quad 26 \quad 0 \quad 792]'$

SBF 3 : $x = [\ 122 \quad 78 \quad 0 \quad 0 \quad 168]'$

SBF 4 : $x = [\ 80 \quad 120 \quad 0 \quad 126 \quad 0]'$

SBF 5 : $x = [\ 0 \quad 180 \quad 20 \quad 486 \quad 0]'$

Aquesta relació entre pts. extrems i s.b.f. és general.

Ta. equivalència punts extrems - SBF

Teorema 3 : "*Sigui P un políedre no buit en forma estàndard de rang complet, i sigui $x^* \in P$. Llavors: x^* és un punt extrem $\Leftrightarrow$ x^* és una solució bàsica factible.*"

***Demo*: (pt. extrem ⇒ SBF)**

1. Sigui $x = [x_1, x_2, \dots, x_r, 0, \dots, 0]'$ punt extrem de $P \Rightarrow Ax = b \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} A_i x_i = b \quad (1)$
2. Els vectors $A_i \; i = 1,2, \dots, r$ son linealment independents (per red. l'absurd) :
   - ❖ Considerem que x és punt extrem i $\exists \alpha_i \neq 0 : \sum_{i=1}^{r} \alpha_i A_i = 0 \quad (2)$
   - ❖ Considerant (1), (2) i $\theta > 0$ tenim:

     $\sum_{i=1}^{r} A_i(x_i + \theta\alpha_i) = b$ i $\sum_{i=1}^{r} A_i(x_i - \theta\alpha_i) = b \quad (3)$
   - ❖ Sigui θ prou petit com per que $(x_i + \theta\alpha_i) > 0$ i $(x_i - \theta\alpha_i) > 0$, $i = 1,2, \dots, r$, llavors:
     - $x^1 = [x_1 + \theta\alpha_1, \dots, x_r + \theta\alpha_r, 0, \dots, 0\,]', x^2 = [x_1 - \theta\alpha_1, \dots, x_r - \theta\alpha_r, 0, \dots, 0]'$,
     - $x^1, x^2 \in \mathrm{P} : (3) \Rightarrow Ax^1 = b, Ax^2 = b \,; x^1, x^2 \geq 0$
     - $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x$ no és pt. extrem $\Rightarrow A_i, i = 1,2, \dots, r$ lin. independents
3. $A_i \in \mathbb{R}^m, i = 1,2, \dots, r$ son linealment independents (⇒$\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{m}$) ⇒ **formen una base (amb altres columnes de $\boldsymbol{A}$ si $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{m}$)** □

Ta. equivalència punts extrems - SBF

Demo (cont.) **: (SBF⇒ pt. extrem)**

1. Sigui $x \in \mathrm{P}$, SBF $\Rightarrow x = [x_1, x_2, \dots, x_s, 0, \dots, 0]'$ amb $x_j > 0, j = 1,2, \dots, s, s \leq \mathrm{m}.$ $\quad (1)$
2. Llavors $\sum_{i=1}^{s} A_i x_i = b$ i $A_i, i = 1,2, \dots, s$ son linealment independents (doncs x SBF).
3. x és un pt. extrem (per reducció l'absurd) :

❖ Considerem que x NO és punt extrem. Llavors x es pot expressar com a combinació convexa dels vectors de P x^1 i x^2:

$$x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2,\ x^1, x^2 \in P,\ x^1 \neq x^2,\ 0 < \lambda < 1 \qquad (2)$$

❖ $x^1, x^2 \geq 0, \lambda > 0 \xrightarrow{(1),(2)} x_i^1 = x_i^2 = 0, i = s+1, \dots, n \qquad (3)$

❖ $x^1, x^2 \in P \overset{(3)}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{s} A_i x_i^1 = \sum_{i=1}^{s} A_i x_i^2 = b \qquad (4)$

❖ $(4) \xrightarrow{A_i \text{ lin. independent}} x_i^1 = x_i^2, i = 1, \dots, s \Rightarrow x^1 = x^2 \Rightarrow$ ***x* pt. extrem** ∎

Ta. equivalència punts extrems - SBF

Teorema 3 : "*Sigui P un políedre no buit en forma estàndard de rang complet, i sigui $x^* \in P$. Llavors: x^* és un punt extrem $\Leftrightarrow$ x^* és una solució bàsica factible.*"

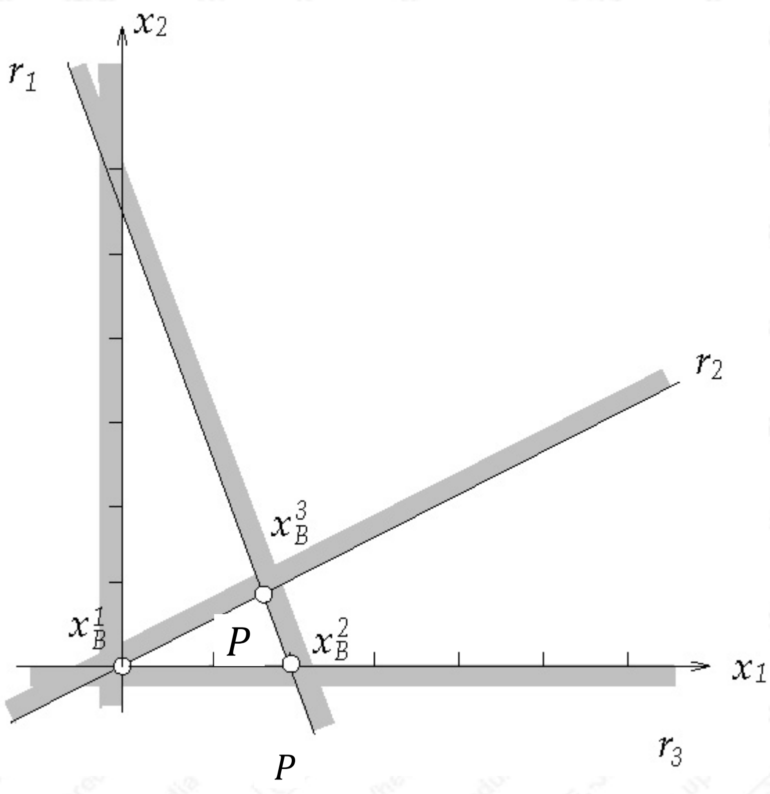
Interpretació:

- **Hipòtesis:** P un políedre estàndard no buit $\xRightarrow{\text{Cor. ii Ta 1}}$ $\exists$ **un pt extrem**.
- **Tesi:** la correspondència pt. extrem – s.b.f. **és biunívoca**?
  - Considerem les SBF de (PL) en funció del valor de $b_2 \in [0,1]$:

$$
(PL)\begin{cases}
\min & z = & c_1x_1 & +c_2x_2 & & \\
s.a.: & & x_1 & +x_2 & \leq 1 & (r1) \\
 & & & x_2 & \leq b_2 & (r2) \\
 & & x_1, & x_2 & \geq 0 &
\end{cases}
$$

Solucions bàsiques: exemple 1

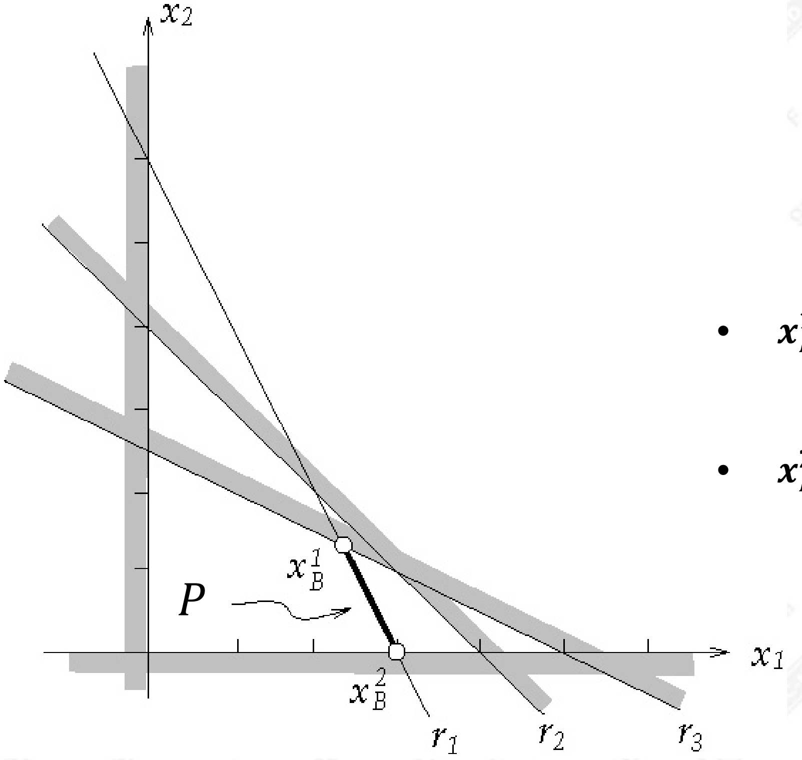
$$
(\mathrm{PL})\begin{cases}
\min & z = & -4x_1 & +x_2 & & \\
\text{s.a.:} & & 3x_1 & +x_2 & \le 6 & (r1) \\
& & -x_1 & +2x_2 & \le 0 & (r2) \\
& & x_1, & x_2 & \ge 0 &
\end{cases}
$$



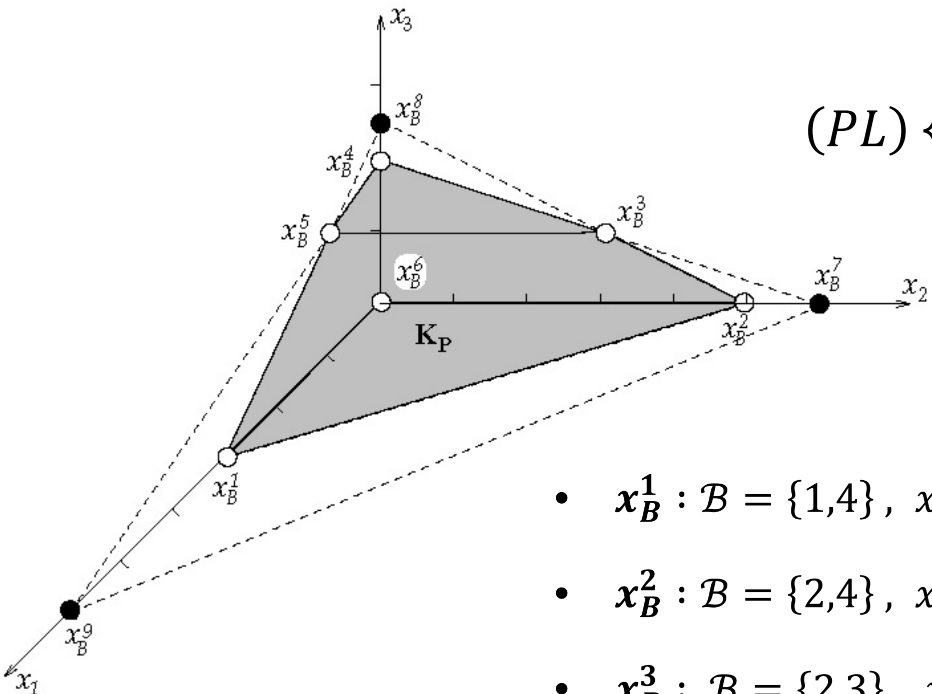
- $\boldsymbol{x_B^1}$: $\begin{cases} \mathcal{B}=\{3,1\},\ x_B^1=\begin{bmatrix}x_3\\x_1\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&3\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix} \\ \mathcal{B}=\{3,2\},\ x_B^1=\begin{bmatrix}x_3\\x_2\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix} \\ \mathcal{B}=\{3,4\},\ x_B^1=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix} \end{cases}$
- $\boldsymbol{x_B^2}$: $\mathcal{B}=\{1,4\},\ x_B^2=\begin{bmatrix}x_1\\x_4\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}3&0\\-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x_B^3}$: $\mathcal{B}=\{1,2\},\ x_B^3=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}3&1\\-1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12/7\\6/7\end{bmatrix}$

Solucions bàsiques: exemple 2

$$(\mathrm{PL})\begin{cases}\min & z = & 5x_1 & -x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & 2x_1 & +x_2 & = 6 & (r1) \\ & & x_1 & +x_2 & \le 4 & (r2) \\ & & x_1 & +2x_2 & \le 5 & (r3) \\ & & x_1, & x_2 & \ge 0 & \end{cases}$$



- $\boldsymbol{x_B^1}$: $\mathcal{B}=\{1,2,3\}$, $x_B^1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&1\\1&2&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7/3\\4/3\\1/3\end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x_B^2}$: $\mathcal{B}=\{1,3,4\}$, $x_B^2=\begin{bmatrix}x_1\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$



$$(PL)\begin{cases}\min & z = & 5x_1 + 3x_2 + 9x_3 & \\ \text{s.a.:} & & x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 & = 6 \\ & & 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_5 & = 15 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0\end{cases}$$

- $\boldsymbol{x_B^1} : \mathcal{B} = \{1,4\},\ x_B^1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x_B^2} : \mathcal{B} = \{2,4\},\ x_B^2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x_B^3} : \mathcal{B} = \{2,3\},\ x_B^3 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x_B^4} : \mathcal{B} = \{3,5\},\ x_B^4 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x_B^5} : \mathcal{B} = \{1,3\},\ x_B^5 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x_B^6} : \mathcal{B} = \{4,5\},\ x_B^6 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}$