Resolució Examen Final Problemes 12/6/2012

Les vostres respostes han de mostrar els càlculs intermitjos així com les dades emprades

1. Determineu l'error màxim en el càlcul de $y = \dfrac{x_1 x_2^2}{\sqrt{x_3}}$ amb $x_1 = 2.0 \pm 0.1$, $x_2 = 3.0 \pm 0.2$ i $x_3 = 1.0 \pm 0.1$. Quina de les dades contribueix més a l'error en y? Per què?

Resposta. *Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable i $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$ i $\widetilde{x}_3$ aproximacions de x_1, x_2 i x_3 amb cotes d'error ϵ_1, ϵ_2 i ϵ_3, és a dir $x_1 = \widetilde{x}_1 \pm \epsilon_1$, $x_2 = \widetilde{x}_2 \pm \epsilon_2$ i $x_3 = \widetilde{x}_3 \pm \epsilon_3$, llavors l'error propagat en el càlcul de g és;*

$$|\Delta g| \approx \left|\frac{\partial g(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)}{\partial x_1}\right| |\epsilon_1| + \left|\frac{\partial g(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)}{\partial x_2}\right| |\epsilon_2| + \left|\frac{\partial g(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)}{\partial x_3}\right| |\epsilon_3|.$$

En el nostre cas els càlculs són

$$\left|\frac{\partial g(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)}{\partial x_1}\right| = \left|\frac{\widetilde{x}_2^2}{\sqrt{\widetilde{x}_3}}\right| = 9\,, \quad \left|\frac{\partial g(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)}{\partial x_2}\right| = \left|\frac{2\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2}{\sqrt{\widetilde{x}_3}}\right| = 12\,, \quad \left|\frac{\partial g(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)}{\partial x_3}\right| = \left|\frac{\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2}{2\sqrt{\widetilde{x}_3^3}}\right| = 9\,.$$

que substituint a l'error propagat ens dóna $|\Delta g| \approx 9 \cdot 0.1 + 12 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.1 = 4.2$ i pertant $y = 18 \pm 4.2$.
La dada que més contribueix és x_2, motiu tant ϵ_2 com $\left|\dfrac{\partial g(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)}{\partial x_2}\right|$ són molt més grans que per a les altres dades.

2. Determineu el radi espectral de les matrius d'iteració dels mètodes de Jacobi i de Gauss-Seidel per resoldre el sistema lineal $Ax = b$ de valors:

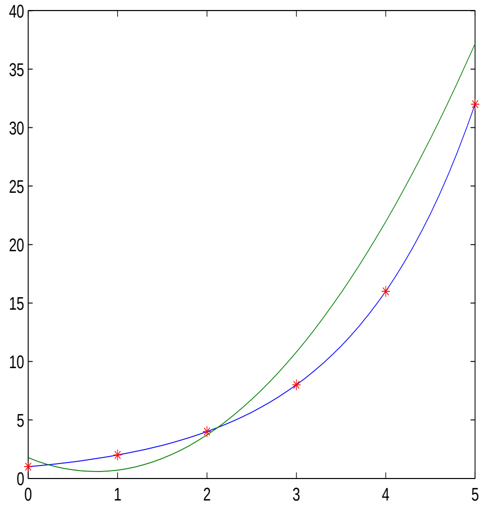
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu la solució del sistema lineal $Ax = b$ aplicant el mètode més ràpid (dels dos anteriors) fins que la diferència entre una iteració i la següent sigui inferior a $0.5 \cdot 10^{-8}$, comenceu amb $x^{(0)} = 0$. Quantes iteracions són necessàries?
Doneu la longitud del vector residu cada 4 iteracions, doneu també el primer i darrer residu calculat.

Resposta. *Ambdós mètodes són divergents.*

```
BJ =      0    0.2500    0.2500    0.2500    0.2500              rhoJ =     1
    0.2500         0    0.2500    0.2500    0.2500
    0.2500    0.2500         0    0.2500    0.2500
    0.2500    0.2500    0.2500         0    0.2500
    0.2500    0.2500    0.2500    0.2500         0

Bgs =     0    0.2500    0.2500    0.2500    0.2500              rhoGS =     1.0000
          0    0.0625    0.3125    0.3125    0.3125
          0    0.0781    0.1406    0.3906    0.3906
          0    0.0977    0.1758    0.2383    0.4883
          0    0.1221    0.2197    0.2979    0.3604
```



Exercici 3. Corba $y = 2^x$, polinomi $p(x)$ i punts.

3. Trobeu un polinomi de grau 2 que aproximi la funció 2^x en els punts $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Representeu gràficament el polinomi obtingut, els punts i la corba 2^x.

Resposta. *Per al polinomi* $p(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$, *les condicions donen lloc al sistema lineal* $Ax = b$ *de valors*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \\ 32 \end{pmatrix},$$

És un sistema lineal incompatible, $rank(A) = 3$ *i* $rank([A, b]) = 4$.
La solució per mínims quadrats és A^+b, *els valors obtinguts són* $(a_1\,, a_2\,, a_3) = (2.0357, -3.0964, 1.7679)$, *així el polinomi* $p(x) = 2.0357 - 3.0964x + 1.7679x^2$ *minimitza el residu. En la representació gràfica es mostren els punts* $(x_i, 2^x_i)$ *amb* $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ *(vermell), la corba* $y = 2^x$ *(blau), el polinomi* $p(x)$ *(verd).*

4. Demostreu que $x = 4$ és solució de les tres equacions següents:

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}(8x_n - x_n^2)\,, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 - 4)\,, \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}\,.$$

Tots són convergents a la solució $x = 4$? Quin convergeix més ràpidament? Calculeu 6 iteracions de cada un dels mètodes, escollint x_0 adient.

Resposta.
Per demostrar que $x = 4$ *és solució només cal substituir* x_n *i* x_{n+1} *per 4 en les equacions, i obtenir les igualtats.*
Per demostrar que són convergents, cal verificar les hipotesis del teorema de convergència, trobar l'interval on la funció d'iteració té derivada entre -1 *i* 1 *i verifcar si 4 és dins l'interval.*

1. *Sigui* $g_1(x) = \frac{1}{4}(8x - x^2)$, *llavors* $x_{n+1} = \frac{1}{4}(8x_n - x_n^2)$ *s'escriu* $x_{n+1} = g_1(x_n)$. *La derivada de la funció d'iteració és* $g_1'(x) = 2 - \frac{x}{2}$, *la condició* $|g_1'(x)| < 1$ *és compleix per* $x = 4$ *i equival a* $2 < x < 6$. *Si es pren* $x_0 = 1$ *la successió d'iterats serà convergent. Els sis iterats de* $x_{n+1} = \frac{1}{4}(8x_n - x_n^2)$ *són:*

```
[n,x] = [   0,      1]
[n,x] = [   1.000000000000000    1.750000000000000]
```

```
[n,x] = [   2.000000000000000   2.734375000000000]
[n,x] = [   3.000000000000000   3.599548339843750]
[n,x] = [   4.000000000000000   3.959909616969526]
[n,x] = [   5.000000000000000   3.999598190297117]
[n,x] = [   6.000000000000000   3.999999959637241]
```

2. *Sigui $g_2(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 4)$, llavors $x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 - 4)$ s'escriu $x_{n+1} = g_2(x_n)$. La derivada de la funció d'iteració és $g_2'(x) = \frac{2x}{3}$, la condició $|g_2'(x)| < 1$ és compleix per a $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$, però no per a $x = 4$. Si es pren $x_0 = 1$ la successió d'iterats no serà convergent. Els sis iterats de $x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 - 4)$ són:*

```
[n,x] = [   0,       1]
[n,x] = [   1,      -1]
[n,x] = [   2,      -1]
[n,x] = [   3,      -1]
[n,x] = [   4,      -1]
[n,x] = [   5,      -1]
[n,x] = [   6,      -1]
```

3. *Sigui $g_3(x) = \sqrt{3x+4}$, llavors $x_{n+1} = \sqrt{3x_n+4}$ s'escriu $x_{n+1} = g_3(x_n)$. La derivada de la funció d'iteració és $g_3'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$, la condició $|g_3'(x)| < 1$ és compleix per $x = 4$ i equival a $x \in (-\infty, -\frac{25}{12}) \cup (-\frac{7}{12}, +\infty)$. Si es pren $x_0 = 1$ la successió d'iterats serà convergent. Els sis iterats de $x_{n+1} = \sqrt{3x_n+4}$ són:*

```
[n,x] = [   0       1]
[n,x] = [   1.000000000000000   2.645751311064591]
[n,x] = [   2.000000000000000   3.455033130549369]
[n,x] = [   3.000000000000000   3.790131843570630]
[n,x] = [   4.000000000000000   3.920509600895258]
[n,x] = [   5.000000000000000   3.970079193503043]
[n,x] = [   6.000000000000000   3.988763916366715]
```

Són convergents els mètodes definits per $g_1(x)$ i $g_3(x)$, la successió $x_{n+1} = g_1(x_n)$ és més ràpida que $x_{n+1} = g_3(x_n)$ ja que en sis iterats la primera té més decimals iguals, començant les dues en el mateix x_0.

5. Calculeu pel mètode de Simpson el valor de $\displaystyle\int_{1.8}^{3.4} f(x)\,dx$ a fent ús de la següent taula de valors $y_i = f(x_i)$: Doneu una cota superior de l'error comès.

x_i	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3	3.2	3.4
y_i	6.050	7.389	9.025	11.023	13.464	16.445	20.086	24.533	29.964

Resposta.
Primer de tot s'observa que amb les dades de la taula el càlcul és:

$$\int_{1.8}^{3.4} f(x)\,dx = \int_{1.8}^{2.2} f(x)\,dx + \int_{2.2}^{2.6} f(x)\,dx + \int_{2.6}^{3.0} f(x)\,dx + \int_{3.0}^{3.4} f(x)\,dx.$$

A continuació, s'aplica la fórmula de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

a cada una de les àrees a calcular, el resultat és

$$\int_{1.8}^{3.4} f(x)\,dx \approx \frac{0.4}{6}\left(f(1.8) + 4f(2.0) + 2f(2.2) + 4f(2.4) + 2f(2.6) + 4f(2.8) + 2f(3.0) + 4f(3.2) + f(3.4)\right) = 23.9149.$$

Si es nota per $K = \max_{1.8<x<3.4} |f^{iv}(x)|$, una cota superior de l'error és $0.0002276K$.