2 Probabilitat condicionada i independència estocàstica.

2.1 Probabilitat condicionada

Exemple 8 *Juguem a la ruleta els números 3, 13 i 22. Els resultats possibles són tots els números de la ruleta, que van del 0 al 36. Si la ruleta no està trucada, és plausible pensar que la probabilitat que tenim de guanyar és* $3/37$. *Ara bé, si la ruleta està trucada de tal manera que sempre surt un nombre imparell, la probabilitat de guanyar ja no serà la mateixa d'abans.*

Per a tractar aquest tipus de qüestions introduïm el concepte de probabilitat condicionada. Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat associat a un cert experiment aleatori. Fixem un conjunt $B \in \mathcal{F}$ amb $P(B) > 0$. Es defineix la probabilitat d'un conjunt $A \in \mathcal{F}$ **condicionada per B** com

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1}$$

L'aplicació $P(\cdot/B) : \mathcal{F} \to [0,1]$ defineix una probabilitat sobre $(\Omega, \mathcal{F})$, és a dir, compleix les propietats (i), (ii), (iii) de probabilitat.
Aquesta probabilitat s'introdueix quan sabem "a priori" que l'esdeveniment B s'ha realitzat, ja que aleshores, la probabilitat de $\Omega \setminus B = \bar{B}$ passa a ser zero, és a dir, el conjunt d'esdeveniments possibles ja no és Ω, sinó B. I la probabilitat de A s'ha de calcular utilitzant la fórmula (1).
Exemple 8 (continuació): *L'espai mostral és el conjunt* $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$, *les nostres apostes són* $A = \{3, 13, 22\}$ *i els possibles resultats de la ruleta (quan està trucada) són tots els nombres imparells, és a dir,* $B = \{1, 3, 5, \ldots, 35\}$. *Sota aquestes condicions, la probabilitat que guanyem es calcula fent*

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{2/37}{18/37} = \frac{1}{9}.$$

De la definició de probabilitat condicionada podem obtenir la probabilitat de la intersecció com:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A), \quad \text{si } P(A) \neq 0,$$

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A/B), \quad \text{si } P(B) \neq 0.$$

2.2 Fórmula de les probabilitats compostes.

La següent fórmula proporciona una forma útil per a calcular la probabilitat d'una intersecció d'esdeveniments, a partir de la noció de probabilitat condicionada.

Fórmula de les probabilitats compostes. Siguin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ elements de $\mathcal{F}$ tals que $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$. Aleshores:

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P\Big(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\Big).$$

Demostració: Per inducció sobre n.
Per $n = 2$ s'obté $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)$, que és una conseqüència immediata de la definició de probabilitat condicionada.
Suposem que la fórmula és certa fins a $n-1$, és a dir,

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\Big) = P(A_1)\, P(A_2/A_1) \cdots P\Big(A_{n-1} / \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\Big),$$

i vegem que també és compleix per n:

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = P\Big(\Big(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \cap A_n\Big) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\Big)\, P\Big(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\Big)$$

$$= P(A_1)\, P(A_2/A_1) \cdots P\Big(A_{n-1} / \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\Big) P\Big(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\Big).$$

□

Exemple 9 *En una població de pacients hospitalitzats, la probabilitat que un d'ells tingui problemes cardíacs és de 0.35. La probabilitat que un pacient amb problemes cardíacs sigui fumador és de 0.86. ¿Quina és la probabilitat que un pacient escollit a l'atzar sigui fumador i tingui problemes cardíacs?*
Si anomenem C="el pacient té problemes cardíacs" i F="el pacient és fumador", l'enunciat del problema ens diu que

$$P(C) = 0.35, \quad P(F/C) = 0.86,$$

per tant, per a calcular $P(C \cap F)$, només cal aplicar la fórmula anterior,

$$P(C \cap F) = P(C)\, P(F/C) = 0.301.$$

Exemple 10 *Una urna conté 5 boles blanques i 3 boles negres. Tres jugadors A, B i C extreuen una bola, sense devolució, en aquest mateix ordre. Guanya el primer que treu una bola blanca. Calculeu la probabilitat que guanyi C.*
El jugador C guanya si és el primer en treure bola blanca, és a dir, si A i B han tret bola negra cadascun. Es tracta de calcular la probabilitat de l'esdeveniment $N_1 \cap N_2 \cap B_3$, on N_1 = "la primera bola és negra", N_2 = "la segona bola és negra", B_3 = "la tercera bola és blanca".

$$P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = P(N_1)\, P(N_2/N_1)\, P(B_3/N_1 \cap N_2) = \frac{3}{8}\,\frac{2}{7}\,\frac{5}{6} = \frac{5}{56}.$$

2.3 Independència estocàstica.

Es diu que dos esdeveniments $A, B \in \mathcal{F}$ són **independents** si

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

Si $P(A) > 0$, el fet que A i B siguin independents és equivalent a dir que $P(B/A) = P(B)$. És a dir, si sabem que A s'ha realitzat, la probabilitat de B no queda modificada, o el que és el mateix, la realització de l'esdeveniment A no influeix de cap manera sobre l'esdeveniment B.
Si $P(B) > 0$, podem fer un raonament simètric i concloure que la definició d'independència que hem donat equival a la noció intuïtiva d'independència entre la realització dels esdeveniments.

Propietats dels esdeveniments independents.

1. Ω i $\emptyset$ són independents de qualsevol $A \in \mathcal{F}$.
   En efecte, com que $A \cap \Omega = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$:
   $$P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A)\, P(\Omega), \quad P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = P(A)\, P(\emptyset).$$
2. Si un esdeveniment A és independent de sí mateix, aleshores $P(A) = 0$ ó $P(A) = 1$.
   En efecte, per la definició s'hauria de complir:
   $$P(A \cap A) = P(A)\, P(A) \Rightarrow P(A) = (P(A))^2 \Rightarrow P(A) = 0 \text{ ó } P(A) = 1.$$
3. Les afirmacions següents són equivalents:
   (a) A és independent de B,
   (b) $\bar{A}$ és independent de B,
   (c) $\bar{A}$ és independent de $\bar{B}$.

   En efecte, vegem per exemple que (a)⇒(b). Considerem
   $$B = B \cap (A \cup \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}),$$
   aleshores:
   $$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A) = P(B) - P(B)\, P(A) = P(B)\,(1 - P(A)) = P(B)\, P(\bar{A})$$
   (b)⇒(c). Considerem $\bar{A} = \bar{A} \cap (B \cup \bar{B}) = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$, aleshores:
   $$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})\,(1 - P(B)) = P(\bar{A})\, P(\bar{B})$$
   (c)⇒(a). Considerem $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} = \Omega \setminus (A \cup B)$, per tant,
   $$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B),$$
   però per altra banda, com que $\bar{A}$ i $\bar{B}$ són independents,
   $$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})\, P(\bar{B}) = (1 - P(A))\,(1 - P(B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)\, P(B).$$
   Així doncs, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\, P(B)$. Però sabem que la probabilitat de la unió de dos esdeveniments es calcula fent $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, per tant $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.
   □

Una col·lecció d'esdeveniments $A_1, A_2, \ldots, A_n$ són **independents** si i només si la probabilitat de la intersecció de qualsevol subcol·lecció de $2, 3, \ldots, n$ d'aquests esdeveniments és igual al producte de les seves probabilitats respectives.
Per exemple, en el cas de tres esdeveniments, A, B i C són independents si i només si

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B), \quad P(A \cap C) = P(A)\,P(C), \quad P(B \cap C) = P(B)\,P(C).$$

i

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C).$$

Cal observar que tres o més esdeveniments poden ser **independents per parelles** sense ser independents.

Observació: Les nocions d'esdeveniments disjunts i d'esdeveniments independents són *genèricament diferents.*

Exercici 3 *Es llança un dau no trucat dos cops. si A és l'esdeveniment que correspon a obtenir una puntuació parell en la primera tirada, B és l'esdeveniment que correspon a obtenir una puntuació parell en la segona tirada, i C és l'esdeveniment que correspon a obtenir la mateixa puntuació en les dues tirades,*

a) són A, B i C independents per parelles?
b) són A, B i C independents?

2.4 Fórmula de les probabilitats totals i fórmula de Bayes.

Un grup d'esdeveniments $A_1, A_2, \ldots A_n$ formen una **partició** de l'espai mostral Ω si

a) $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$,
b) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ són disjunts dos a dos, és a dir, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

Sigui $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una partició de l'espai mostral Ω, tal que $P(A_i) > 0$, $1 \leq i \leq n$. Donat un esdeveniment $B \in \mathcal{F}$, la coneixença de les probabilitats $P(A_i)$ i de les probabilitats condicionades $P(B/A_i)$ permet calcular la probabilitat de B de la manera següent:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B/A_i).$$

La primera d'aquestes igualtats s'anomena **fórmula de les probabilitats totals**, i és conseqüència de la descomposició en conjunts disjunts $B = \bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)$. La segona igualtat surt de la definició de probabilitat condicionada.

Exemple 11 *Considerem una baralla de pòquer, que té 52 cartes, 26 de negres i 26 de vermelles. Barregem bé les cartes i en traiem dues, una després de l'altra. Quina és la probabilitat que la segona carta extreta sigui negra?*
Si anomenem $N_i =$"la i-ena extracció és una carta negra" i $V_i =$"la i-ena extracció és una carta vermella", aleshores,

$$
\begin{aligned}
P(N_2) &= P(N_2/N_1)\,P(N_1) + P(N_2/V_1)\,P(V_1) \\
&= \frac{25}{51}\,\frac{1}{2} + \frac{26}{51}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Inversió de les condicions: Fórmula de Bayes. Ja hem vist que la fórmula de la probabilitat condicionada ens permet calcular la probabilitat d'un segon esdeveniment quan sabem que "a priori" se n'ha realitzat un altre. De vegades, però, ens interessarà la situació inversa, és a dir, calcular la probabilitat "a posteriori" d'un primer esdeveniment quan sabem que ja s'ha realitzat un segon.
Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat i $A_1, A_2, \ldots A_n$ una partició de Ω tal que $P(A_i) > 0$, $1 \leq i \leq n$. Si B és un esdeveniment tal que $P(B) > 0$, aleshores $\forall k = 1, 2, \ldots, n$:

$$
P(A_k/B) = \frac{P(B/A_k)\,P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\,P(A_i)}.
$$

Demostració: Si s'aplica la definició de probabilitat condicionada

$$
P(A_k/B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}. \tag{2}
$$

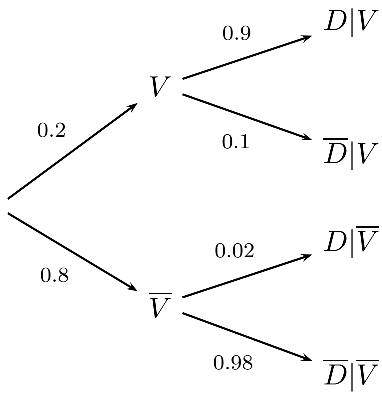
Utilitzant un altre cop la fórmula de la probabilitat condicionada, el numerador de (2) pot escriure's com $P(A_k \cap B) = P(B/A_k)\,P(A_k)$. Finalment, com que $A_1, A_2, \ldots A_n$ és una partició de Ω, B es pot escriure com una unió disjunta d'esdeveniments, és a dir, $B = \bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)$ i aplicant la fórmula de les probabilitats totals el denominador de (2) és

$$
P(B) = P(B/A_1)\,P(A_1) + P(B/A_2)\,P(A_2) + \ldots + P(B/A_n)\,P(A_n).
$$

□

Exemple 12 *S'instal·la un programa antivirus en un ordinador. La probabilitat que l'ordinador tingui el virus detectable per l'antivirus és* 0.2. *Si l'ordinador té el virus, la probabilitat que l'antivirus el detecti val* 0.9. *Si l'ordinador no té el virus, la probabilitat que l'antivirus doni un missatge d'existència de virus és* 0.02. *Es vol conèixer la probabilitat que aparegui un missatge d'existència de virus.*

Considerem els esdeveniments $V =$ *"l'ordinador té el virus" i* $D =$ *"l'antivirus detecta el virus". Per a interpretar més fàcilment l'enunciat del problema, dibuixem el diagrama d'arbre:*



Observeu que $P(V)+P(\overline{V}) = 1$ *i que dins de cada branca principal de l'arbre* $P(D|V) + P(\overline{D}|V) = 1$ *i* $P(D|\overline{V}) + P(\overline{D}|\overline{V}) = 1$.
Per tant, a partir del teorema de les probabilitats totals podem calcular

$$P(D) = P(D/V)\,P(V) + P(D/\overline{V})\,P(\overline{V}) = 0.9\ 0.2 + 0.02\ 0.8 = 0.196.$$

Suposem que ara volem conèixer la probabilitat que, si ha aparegut un missatge d'existència de virus, l'ordinador no tingui el virus. Fixem-nos que tenim les condicions invertides, és a dir, el missatge de virus ja ens ha aparegut. Per calcular aquesta probabilitat cal aplicar la fórmula de Bayes,

$$P(\overline{V}/D) = \frac{P(\overline{V} \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/\overline{V})\,P(\overline{V})}{P(D)} = \frac{0.02\ 0.8}{0.196} = 0.08.$$

Exercici 4 *En una mostra de sòl podem aïllar tres tipus de bacteris A, B i C, que es presenten en les proporcions 0.6, 0.3 i 0.1, respectivament. La probabilitat que una colònia de la classe A reaccioni a la prova del nitrat (transformant-lo en nitrit) és 0.15. Per a B i C la probabilitat és 0.8 i 0.6, respectivament. Aïllem una colònia i reacciona a la prova del nitrat, de quina classe (A, B o C) és més probable que sigui?*