UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

PROVA DE TEORIA AVALUACIÓ FINAL/ÚNICA

Programació Lineal i Entera, curs 2015-16
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM ALUMNE:

	Temps estimat	Punts	Puntuació			
Test	30 min	2 pts	C:	I:		
Exercici 1	75 min	5 pts	a: 1pt	b: 1pt	c: 2pt	d: 1pt
Exercici 2	45 min	3 pts				
Total	150min	10 pts				

PROHIBIDA LA PRESÈNCIA DE MÒBILS DURANT LA PROVA. PARTICIPAR EN UN CAS DE CÒPIA IMPLICA SUSPENDRE LA PROVA AMB NOTA NUMÈRICA ZERO.

TEST (2 punts / 15 min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a), b)** i **c)** si la frase és Vertadera (**V**) o Falsa (**F**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n | \; Ax \geq 0\}$:

a) V / F És un polítop. (F)

b) V / F Conté com a mínim una solució bàsica factible. (F)

c) V / F Conté com a mínim una línia. (F)

TEST 2. Donat el problema $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2}\left\{c'x \middle| \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}x \leq \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$:

a) V / F Si $c = [1 \quad 0]'$ (PL) no té solució òptima. (F)

b) V / F Si $c = [0 \quad 1]'$ (PL) no té solució òptima. (V)

c) V / F Si $c = [1 \quad 1]'$ (PL) no té solució òptima. (F)

TEST 3. L'embolcall convex del conjunt finit de vectors $x^1, x^2, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$, $CH(x^1, \dots, x^k)$:

a) V / F És un politop. (V)

b) V / F Si $x^1, x^2, \dots, x^k$ són els punts extrems d'un políedre P, llavors $CH(x^1, \dots, x^k) \equiv P$. (F)

c) V / F És el conjunt de combinacions lineals de $x^1, x^2, \dots, x^k$. (F)

TEST 4. Considerem la forma estàndard del següent problema

$$(PL)\ \min_{x\in R^2}\left\{-2x_2 \;\middle|\; \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}x \leq \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix};\ x \geq 0\right\}$$ i la s.b.f. $x = [1 \quad 0]'$ amb $\mathcal{B} = \{1,4\}$:

a) V / F $d = [-1 \quad 0]'$ és una direcció bàsica de descens sobre $\mathcal{B}$. (F)

b) V / F $d = [0 \quad 1]'$ és una direcció bàsica de descens sobre $\mathcal{B}$. (V)

c) V / F $d = [-1 \quad 0]'$ és una direcció bàsica sobre $\mathcal{B}$. (V)

TEST 5. Considereu l'expressió de la longitud de pas màxima $\theta^* = \max\{\theta \geq 0 | x + \theta d \geq 0\}$ de l'algorisme del símplex primal

a) V / F θ^* només serà ≥ 0 si d és una direcció bàsica de descens. (F)

b) V / F θ^* sempre serà ≥ 0 si d és una direcció bàsica. (F)

c) V / F Si $d_B \geq 0$ llavors $\theta^* = 0$. (F)

TEST 6. Segons el teorema que estableix les condicions d'optimalitat de les solucions bàsiques factibles:

a) V / F Si x és s.b.f. òptima llavors $r \geq 0$. (F)

b) V / F Si x és s.b.f. òptima no degenerada llavors $r \geq 0$. (V)

c) V / F Si $r \geq 0$ llavors x és s.b.f. òptima. (V)

TEST 7. Si en acabar la fase I del símplex observem que la base òptima $\mathcal{B}_I^*$ conté variables artificials:

a) V / F El problema (PL) és infactible. (F)

b) V / F El problema (PL) és factible i la base $\mathcal{B}_I^*$ és una s.b.f. degenerada de (PL_I). (V)

c) V / F El problema (PL) és factible i la base $\mathcal{B}_I^*$ és una s.b.f. primal del problema (PL). (F)

TEST 8. El nombre d'iteracions de l'algorisme del símplex per a resoldre un problema de n variables i m constriccions:

a) V / F En la pràctica s'aproxima al nombre de variables del problema n. (F)

b) V / F Sabem que es pot expressar com un polinomi de n i m. (F)

c) V / F En la pràctica s'aproxima al nombre de constriccions del problema m. (V)

TEST 9. La matriu de guanys A d'un joc finit de suma zero:

a) V / F Té files i columnes associades a estratègies pures. (V)

b) V / F Té elements que representen els guanys del jugador 1. (V)

c) V / F És quadrada. (F)

TEST 10. D'acord amb el Ta. feble de dualitat:

a) V / F Si (P) és il.limitat $\Rightarrow$ (D) és infactible. (V)

b) V / F Si (P) és infactible $\Rightarrow$ (D) és il·limitat. (F)

c) V / F Si λ^* i x^* són òptims primal i dual respectivament, llavors $\lambda^{*\prime} b = c' x^*$. (F)

TEST 11. Si el valor del terme independent b_j surt fora del seu interval d'estabilitat llavors podem assegurar que:

a) V / F Es podrà aplicar el símplex dual per a reoptimitzar. (V)

b) V / F La nova solució òptima millorarà sempre el valor de l'actual. (F)

c) V / F Alguna variable dual canviarà. (V)

TEST 12. El tall de Gomory $x_{B(i)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \le \lfloor x_{B(i)}^* \rfloor$ associat a (PE) i x_{RL}^*és una constricció de desigualtat:

a) V / F Que no satisfà x_{PE}^*. (F)

b) V / F Que forma part d'una formulació vàlida de (PE). (V)

c) V / F Que no satisfà x_{RL}^*. (V)

TEST 13. Considerem el següent problema (PE) $\min_{x\in R^2}\{z_{PE} = x_1 + x_2 \mid x \text{ binària}\}$:

a) V / F $x_1 + x_2 \ge 1/2$ és un tall sobre x_{RL}^*. (V)

b) V / F $x_1 + x_2 \le 1/2$ és un tall sobre x_{RL}^*. (F)

c) V / F $x_1 + x_2 = 1/2$ és un tall sobre x_{RL}^*. (F)

TEST 14. Donades dues formulacions vàlides $(PE1)$ i $(PE2)$ de (PE), si $(PE1)$ és més forta que $(PE2)$ podem assegurar que:

a) V / F $(PE1)$ conté menys desigualtats vàlides que $(PE2)$. (F)

b) V / F $K_{PE1} \subset K_{RL2}$. (V)

c) V / F $K_{RL1} \subset K_{RL2}$. (V)

TEST 15. Si x_1, x_2 i x_3 representen les variables binàries de selecció d'un projecte, llavors:

a) V / F $x_1 + x_2 + x_3 \ge 2$ imposa que es seleccionaran com mínim dos projectes. (V)

b) V / F $x_1 + x_2 \le 1$ imposa que no es seleccionarà més d'un dels dos projectes 1 o 2. (V)

c) V / F $x_2 \ge x_3$ imposa que és seleccionarà x_2 sempre que es seleccioni x_3. (F)

PROVA DE TEORIA AVALUACIÓ FINAL/ÚNICA
Programació Lineal i Entera, curs 2015-16
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM :

EXERCICI 1. (5 punts / 75min / apunts i calculadora / RESPONEU AL MATEIX FULL)

Considereu el següent codi OPTMODEL amb el que es defineix i resol un problema de programació lineal (P):

```
proc optmodel;
var X{1..2} >=0;

min Z = X[1] + X[2];

con r1:   X[1] +   X[2] <= 1;
con r2: 2*X[1] +   X[2] >= 1;

solve;
print X.sol;
print r1.body r1.dual r2.body r2.dual;
```

[1]	X.SOL	X.RC
1	0.5	0.0
2	0.0	0.5

r1.BODY	r1.DUAL	r2.BODY	r2.DUAL
.5	0	1	0.5

a) **(1 punt)** Trobeu dues solucions bàsiques factibles primal (indicant $\mathcal{B}$ i x_B) associades al mateix punt extrem del poliedre factible P.

b) **(1 punt)** Trobeu totes les direccions bàsiques factibles associades a la base $\mathcal{B} = \{2,3\}$ indicant si són direccions factibles i si són de descens.

c) **(2 punts)** Comproveu com la fase I del símplex amb una única variable artificial i aplicat amb la regla de Bland troba una solució factible primal i òptima en dues iteracions.

NOM :

d) **(1 punt)** Formuleu el problema dual de (P) i obtingueu la solució òptima dual λ^* a partir de la solució primal x^* que indica la sortida de SAS/OR usant el teorema de folga complementaria. Comproveu que la solució òptima dual obtinguda coincideix amb la solució dual proporcionada per SAS/OR.

EXERCICI 2. (3 punts / 45min / apunts i calculadora / RESPONEU AL MATEIX FULL)

Considereu el següent problema (PE) (és el mateix problema dels exercicis anteriors amb variables enteres):

$$(PE)\begin{cases} \min & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ (r1) & x_1 & +x_2 & \leq & 1 \\ (r2) & 2x_1 & +x_2 & \geq & 1 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0, enteres \end{cases}$$

Resoleu aquest problema aplicant l'algorisme de plans de talls de Gomory d'acord a les següents indicacions:

- Heu de resoldre la relaxació lineal de la primera iteració gràficament i la resta reoptimitzant amb l'algorisme del símplex dual amb la regla de Bland.
- Heu de prendre com a variable de separació x_1 abans que x_2.

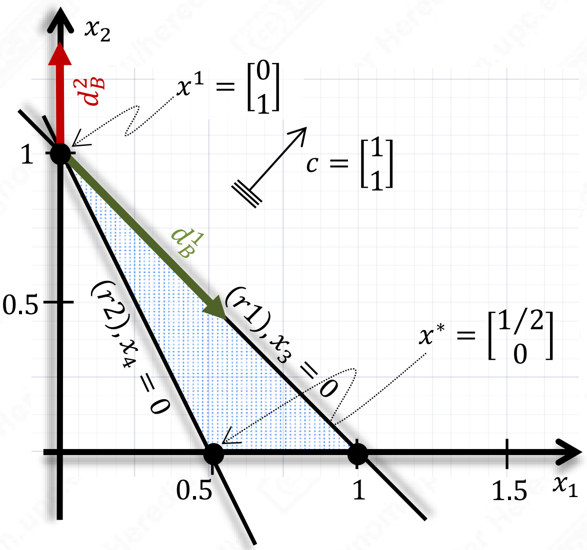
Indiqueu molt clarament les diferents passes de l'algorisme.

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

Apartat a)

Sigui el problema passat a la forma estàndard:

$$(PL_e)\begin{cases} \min & x_1 & +x_2 & & & & \\ \text{s.a.:} & & & & & & \\ (r1) & x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 1 \\ (r2) & 2x_1 & +x_2 & & -x_4 & = & 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \end{cases}$$



Observem a la gràfica que el punt extrem $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ correspon a les següent solucions bàsiques factibles degenerades:

$$x^1 \rightarrow \begin{Bmatrix} \mathcal{B}^1 = \{2,1\} \\ \mathcal{B}^2 = \{2,3\} \\ \mathcal{B}^3 = \{2,4\} \end{Bmatrix} \rightarrow x_B^{1,2,3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Apartat b)

Existeixen dues direccions bàsiques factibles associades a la base $\mathcal{B} = \{2,3\}$ ($B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$), l'associada a la VNB $q = 1$ i $q = 4$:

- $\boldsymbol{q = 1}$: $d_B^1 = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $\theta^* = -\frac{x_{B(1)}}{d_{B(1)}} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{direcció factible}}$.
  - $c'd = c_B' d_B + c_1 d_1 = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = -1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{direcció de descens}}$.
- $\boldsymbol{q = 4}$: $d_B^2 = -B^{-1}A_4 = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
  - $\theta^* = -\frac{x_{B(2)}}{d_{B(2)}} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{direcció infactible}}$.
  - $c'd = c_B' d_B + c_4 d_4 = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 = 1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{direcció d'ascens}}$.

Apartat c)

$$(PL_I)\begin{cases} \min & x_5 & & & & & & \\ \text{s.a.:} & & & & & & & \\ (r1) & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 1 \\ (r2) & 2x_1 & +x_2 & & -x_4 & +x_5 & = & 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{cases}$$

1a iteració fase I: $\mathcal{B} = \{3,5\}, B = I, x_B = [1 \quad 1]', \mathcal{N} = \{1,2,4\}, z_I = 1$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0] - [0 \quad 1] I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [-2 \quad -1 \quad 1] \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q = 1}$$

- Direcció bàsica de descens : $d_B = -B^{-1}A_1 = -I\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. v.b. de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i | d_{B(i)} < 0} \{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\} = \min\left\{\frac{-1}{-1}, \frac{-1}{-2}\right\} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{p = 2, B(2) = 5}$
- Actualitzacions i canvi de base :

- $x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 = \theta^* = \frac{1}{2}, x_2 = x_4 = 0,\ z_I := z_I + \theta^* r_q = 1 + \frac{1}{2}(-2) = 0$
- $\mathcal{B} := \{1,3\},\ \mathcal{N} := \{2,4,5\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}, x_B = [1/2 \quad 1/2]'$.

2a iteració fase I: $\mathcal{B} := \{1,3\},\ \mathcal{N} := \{2,4,5\},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}, x_B = [1/2 \quad 1/2]',\ z_I = 0.$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la VMB d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0 \quad 1] - [0 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1] \geq [0] \rightarrow$$
$$\rightarrow \boxed{\text{òptim fase I}}$$

Hem assolit l'òptim de la fase I havent eliminat totes les variables artificials de la base. Llavors $\mathcal{B} = \{1,3\}$ és SBF. inicial del problema $(PL)_e$. Comencem la fase II

1a iteració fase II:

- $\mathcal{B} = \{1,3\},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \{3,4\}, z = 1/2$
- Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [1 \quad 0] - [1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \geq 0 \rightarrow \boxed{\text{òptima}}$$

Apartat d)

Problema dual:

$$(D)\begin{cases} \max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}^2} z_D = & \lambda_1 + \lambda_2 & \\ s.t.: & \lambda_1 + 2\lambda_2 & \leq 1 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 & \leq 1 \\ & \lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Pel Ta de folga complementaria sabem les solucions x^* i λ^* factibles primal-dual seran òptimes si i només si satisfan el sistema:

$$\lambda_j(a'_j x - b_j) = 0 \quad j = 1,2,\dots,m$$
$$(c_i - \lambda' A_i)x_i = 0 \quad i = 1,2,\dots,n$$

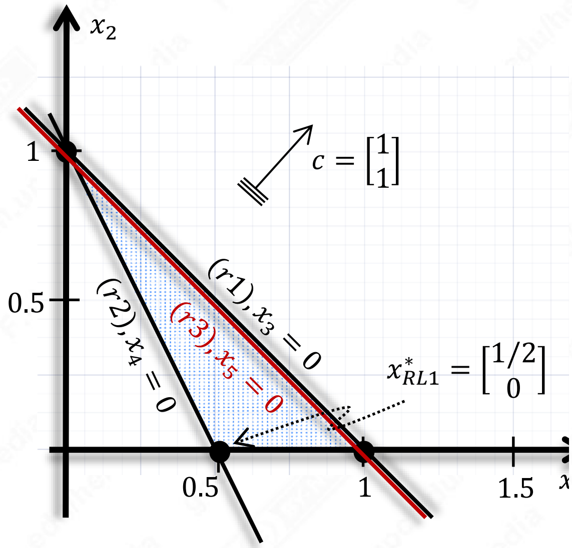
Formulem aquest sistema pel nostre problema i substituïm per la s solució òptima primal $x^* = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ i resolem per λ:

$$\begin{cases} \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) & = 0 \\ \lambda_2(2x_1 + x_2 - 1) & = 0 \\ (1 - \lambda_1 - 2\lambda_2)x_1 & = 0 \\ (1 - \lambda_1 - \lambda_2)x_2 & = 0 \end{cases} \xrightarrow{x^* = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \lambda_1 & = 0 & \Rightarrow \boxed{\lambda_1^* = 0} \\ 0 \cdot \lambda_2 & = 0 & \\ (1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) \cdot \frac{1}{2} & = 0 & \rightarrow \boxed{\lambda_2^* = \frac{1}{2}} \\ (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot 0 & = 0 & \end{cases}$$

Efectivament coincideix amb el valor proporcionat per SAS/OR: $\lambda^* = \begin{bmatrix} \texttt{r1.DUAL} \\ \texttt{r2.DUAL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓ EXERCICI 2.

$$(PE1)_e \begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{Z}^2} & x_1 & +x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & & & & & \\ (r1) & x_1 & +x_2 & +x_3 & & =1 \\ (r2) & 2x_1 & +x_2 & & -x_4 & =1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$



1a iteració Gomory:

- Solució òptima de la relaxació lineal de $(PE1)$, trobada gràficament: $x_{RL1}^* = \begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}$
- x_{RL1}^* no entera: es defineix un tall de Gomory:
  - $\mathcal{B} = \{1,3\}$; $B = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1/2\\1 & -1/2\end{bmatrix}$; $x_B = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}$
  - $\mathcal{N} = \{2,4\}$; $A_N = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}$; $V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\1/2 & 1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$
  - $x_{B(1)}^* = x_1^*$ no entera: tall de Gomory associat a $x_1 = 1/2$

$$x_1 + \lfloor v_{12}\rfloor x_2 + \lfloor v_{14}\rfloor x_4 \leq \lfloor x_1^*\rfloor\ ;\ x_1 + \left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor x_3 + \left\lfloor\frac{-1}{2}\right\rfloor x_4 \leq \left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor, \boxed{x_1 - x_4 \leq 0\ (r3)}\ (\equiv x_1 + x_2 \geq 1)$$

2a iteració Gomory:

- Solució òptima de la relaxació lineal de $(PE2) = (PE1) + (r3)$ per optimització a partir de x_{RL1}^*:
  - $a_3' = [1 \quad 0 \quad 0 \quad -1], a_{B,3}' = [1 \quad 0], -a_{B,3}'B^{-1} = [0 \quad -1/2]$.
  - $\mathcal{B} := \{1,3,5\},\ B^{-1} := \begin{bmatrix}B^{-1} & 0\\ -a_{B_3}B^{-1} & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1/2 & 0\\1 & -1/2 & 0\\0 & -1/2 & 1\end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{bmatrix}$.
  - $\mathcal{N} = \{2,4\}, A_N = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & -1\\0 & -1\end{bmatrix}, r' = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \geq 0$
  - **1a iteració del símplex dual**: $\mathcal{B} = \{1,3,5\}$, $\mathcal{N} = \{2,4\}$.
    - Identificació de SBF òptima i selecció de la VB de sortida p :

    $$x_B = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 5 \text{ VB sortint}}$$

    - Identificació de problema (D) il·limitat :

    $$d_{r_N}' = \beta_3 A_N = \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & -1\\0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix} \ngeq 0$$

    - Selecció VNB d'entrada q:

    $$\theta_D^* = \min\left\{-r_j/d_{r_{N_j}} : j \in \mathcal{N}, d_{r_{N_j}} < 0\right\} = \min\left\{\frac{-1/2}{-1/2}, \frac{-1/2}{-1/2}\right\} = 1 \xRightarrow{\text{Bland}} \boxed{q = 2}$$

- Canvi de base i actualitzacions:

$$r' := r' + \theta_D^* \cdot d'_{r_N} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = [0 \quad 0].$$

$$d_B = -B^{-1}A_3 = -\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \theta^* = -\frac{x_{B(p)}}{d_{B(p)}} = 1$$

$$x_B := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_q = x_2 := \theta^* = 1$$

$$\mathcal{B} := \{1,3,2\}, x_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Símplex dual, iteració 2**: $\mathcal{B} = \{1, 3, 2\}, \mathcal{N} = \{4,5\}$
- Identificació de SBF òptima i selecció de la VB de sortida p : $x_B \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{òptim } (RL2)}$

- x^*_{RL2} entera, **STOP**: $\boxed{x^*_{PE1} = x^*_{RL2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$