UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

PRIMER CONTROL DE TEORIA
Programació Lineal i Entera, curs 2015-16
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM :

	Temps estimat	Punts	Puntuació
Test	30min	2 pt	
Exercici 1	60min	a) 2pt	
		b) 3pt	
		c) 3pt	
Total	90min	10 pt	

- **Prohibida la presència de mòbils durant la prova.**
- **Copiar o facilitar la còpia implica suspendre el control.**

TEST (2 punts / 30min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a)**, **b)** i **c)** si la frase és Vertadera (**V**) o Falsa (**F**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n |\ Ax = b, x \geq 0\}$:

a) V / F És tancat i afitat. (F)
b) V / F És un polítop. (F)
c) V / F Conté alguna solució bàsica factible. (V)

TEST 2. Considereu el problema $(PL)_e \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \{c'x |\ Ax = b, x \geq 0\}$ amb $rang(A) < m$:

a) V / F Si eliminem les constriccions associades a files de A linealment dependents amb la resta, el problema $(PL)_e$ té solució. (F)
b) V / F Si eliminem les constriccions associades a files de A linealment dependents amb la resta, el políedre resultant no queda afectat. (V)
c) V / F Si $P_e \neq \emptyset$, el políedre Q_e resultant d'eliminar les constriccions associades a files de A linealment dependents amb la resta és també no buit. (V)

TEST 3. Donat el problema $(PL) \min\limits_{x \in R^n} \left\{c'x \middle|\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x \geq 0 \right\}$:

a) V / F Les bases de (PL) són $\mathcal{B} = \{1,2\}$, $\mathcal{B} = \{1,3\}$ i $\mathcal{B} = \{2,3\}$. (F)
b) V / F $x_B = [x_2 \quad x_3]'$ és una solució bàsica factible. (F)
c) V / F El políedre associat a (PL) té dos punts extrems. (F)

TEST 4. Donat el problema $(PL) \min\limits_{x \in \mathbb{R}^2} \left\{c'x \middle|\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}$:

a) V / F Si $c = [1 \quad 1]'$ (PL) té solució òptima única. (F)
b) V / F Si $c = [1 \quad 0]'$ (PL) té solució òptima única. (F)
c) V / F Si $c = [0 \quad 1]'$ (PL) té solució òptima única. (F)

TEST 5. Donat el problema $(PL) \min\limits_{x \in R^2} \left\{z = x_1 \middle|\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ x \geq 0 \right\}$ i la base $\mathcal{B} = \{2,4\}$:

a) V / F La DBF associada a la VNB $q = 1$ és de descens. (F)
b) V / F La DBF associada a la VNB $q = 3$ és de descens. (F)
c) V / F $\mathcal{B} = \{2,4\}$ és òptima. (V)

TEST 6. A l'algorisme del símplex primal el criteri de selecció de la VB de sortida

$$\theta^* = \min_{i=1,\dots,m|d_{B(i)}<0} \left\{ \frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\}$$

permet assegurar que:

a) **V / F** Es produeix el màxim decrement de la funció objectiu. (F)
b) **V / F** Es conserva la factibilitat de la nova base. (V)
c) **V / F** El valor d'alguna VB es farà zero. (V)

TEST 7. Sigui x SBF de P_e i $d \ngeq 0$ DBF sobre x. Llavors podem assegurar que:

a) **V / F** $y = x + \theta^* d$ és SBF de P_e. (V)
b) **V / F** $y = x + \theta^* d$ és vèrtex de P_e. (V)
c) **V / F** $y = x + \theta^* d \neq x$. (F)

TEST 8. Sigui x SBF de $(PL)_e$ amb costos reduïts $r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N$. Llavors:

a) **V / F** Si $r > 0 \Rightarrow x$ és òptima. (V)
b) **V / F** Si $r = 0 \Rightarrow x$ no és òptima. (F)
c) **V / F** Si x és òptima $\Rightarrow$ $r \geq 0$. (F)

TEST 9. Si a cada iteració del símplex primal d'un problema $(PL)_e$ no degenerat triem la VNB d'entrada x_q associada al cost reduït més negatiu llavors podem assegurar que:

a) **V / F** La disminució de la f.o. a cada iteració és la màxima possible. (F)
b) **V / F** Obtindrem, si existeix, la solució del problema $(PL)_e$. (V)
c) **V / F** El valor de la funció objectiu disminueix a cada iteració. (V)

TEST 10. Donades y i x SBF adjacents no degenerades, l'actualització de la f.o. $c'y = c'x + \theta^* r_q$:

a) **V / F** Assegura que $c'y < c'x$ si $r_q < 0$. (V)
b) **V / F** Assegura que $c'y < c'x$ si $\theta^* < 0$. (F)
c) **V / F** Assegura que la direcció $d = y - x$ és factible. (F)

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

PRIMER CONTROL DE TEORIA
Programació Lineal i Entera, curs 2015-16
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM :

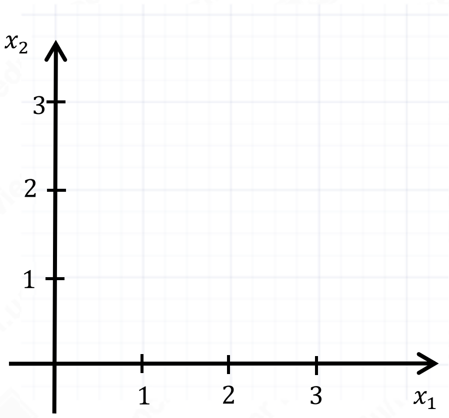
EXERCICI 1. (8 punts / 75min / amb transparències de teoria i calculadora)

Considereu el següent problema de programació lineal: $(PL)\begin{cases} \min & c_1x_1 & +c_2x_2 & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \geq 0 \\ & x_1 & +x_2 & \geq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$

a) **(2 punts)** Representeu, sobre la següent gràfica el políedres factible P i totes les solucions bàsiques existents (factibles i no factibles), indicant a la taula els valors de $\mathcal{B}$, x_B i si son factibles i/o degenerades:

Resposta:

$\mathcal{B}$	x_B	SBF?	SBD?



b) **(3 punts)** Trobeu quina condició han de complir les components c_1 i c_2 per tal de poder assegurar que el problema (PL) no té solució òptima, preferentment usant la propietat de descens de les DBF del problema. Us pot ajudar usar la representació gràfica de l'apartat anterior.

Resposta:

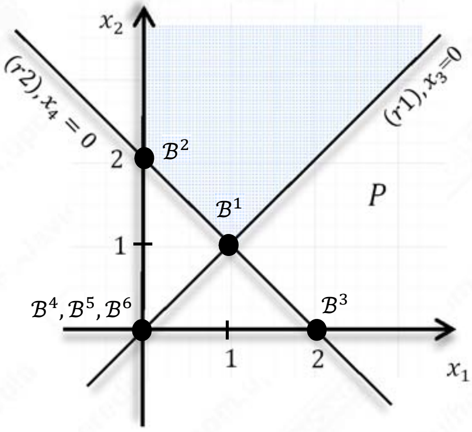
c) **(3 punts)** Trobeu la solució òptima quan $c = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ amb l'algorisme del símplex a partir de $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Resposta:

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

Apartat a)

$$(PL)_e \begin{cases} \min & c_1x_1 & +c_2x_2 & & & \\ s.a.: & & & & & \\ (r1) & -x_1 & +x_2 & -x_3 & & =0 \\ (r2) & x_1 & +x_2 & & -x_4 & =2 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

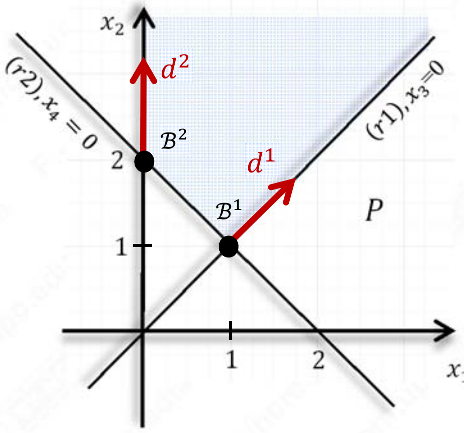


$\mathcal{B}$	x_B	SBF?	SBD?
$\mathcal{B}^1 = \{1,2\}$	$x_B^1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	Sí	No
$\mathcal{B}^2 = \{2,3\}$	$x_B^2 = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \leftarrow (r1): x_3 = x_2$	Sí	No
$\mathcal{B}^3 = \{1,3\}$	$x_B^3 = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} \leftarrow (r1): x_3 = -x_1$	No	No
$\mathcal{B}^4 = \{1,4\}$	$x_B^4 = \begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix} \leftarrow (r2): x_4 = x_1 + x_2 - 2$	No	Sí
$\mathcal{B}^5 = \{2,4\}$	$x_B^5 = \begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$	No	Sí
$\mathcal{B}^6 = \{3,4\}$	$x_B^6 = \begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$	No	Sí

Apartat b)

Per tal que (PL) no tingui solució òptima cal que sigui il·limitat. (PL) serà il·limitat si alguna de les direccions bàsiques factibles il·limitades d^1 i d^2 (veure gràfica adjunta) són de descens:

$$c'd = c_1d_1 + c_2d_2 < 0$$



- $d^1: \mathcal{B}^1 = \{1,2\}, q = 4, d_N^2 = [d_3^2 \quad d_4^2]' = [0 \quad 1]$

$$d_B^1 = -B^{-1}A_4 = -\begin{bmatrix}-1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d_1^1\\d_2^1\end{bmatrix}$$

$$c'd^1 = c_1d_1 + c_2d_2 = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} < 0 \rightarrow \boxed{c_1 + c_2 < 0}$$

- $d^2: \mathcal{B}^2 = \{2,3\}, q = 4, d_N^2 = [d_1^2 \quad d_4^2]' = [0 \quad 1]$

$$d_B^2 = -B^{-1}A_4 = -\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d_2^2\\d_3^2\end{bmatrix}$$

$$c'd^2 = c_1d_1^2 + c_2d_2^2 = c_2 < 0 \rightarrow \boxed{c_2 < 0}$$

Així doncs, (PL) no tindrà solució òptima $\Leftrightarrow c_1 + c_2 < 0$ ó $c_2 < 0$.

Apartat c)

$$(PL)_e \begin{cases} \min & x_1 & -x_2 & & & \\ s.a.: & & & & & \\ (r1) & -x_1 & +x_2 & -x_3 & & =0 \\ (r2) & x_1 & +x_2 & & -x_4 & =2 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

Incialització:

$x = [1 \quad 1]' \therefore \mathcal{B} = \{1,2\}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, x_B = [1 \quad 1]', \mathcal{N} = \{3,4\}, z = 0.$

1a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0] - [1 \quad -1] \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [-1 \quad 0] \ngeq 0 \rightarrow q = 3$$

2. Direcció bàsica de descens : $d_B = -B^{-1} A_3 = -\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \ngeq 0.$
3. Sel. VB de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i=1} \{-x_{B(1)}/d_{B(1)}\} = \min\left\{-\frac{1}{-1/2}\right\} = 2 \Longrightarrow p = 1, B(1) = 1$
4. Actualitzacions i canvi de base :
   4.1. $x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, x_3 = \theta^* = 2, x_2 = x_4 = 0,\ z := z + \theta^* r_q = 0 + 2 \times (-1) = -2$
   4.2. $\mathcal{B} := \{3,2\}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{N} := \{1,4\}.$

2a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [1 \quad 0] - [0 \quad -1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [2 \quad -1] \ngeq 0 \rightarrow q = 4$$

2. Direcció bàsica de descens : $d_B = -B^{-1} A_4 = -\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \boxed{(PL)\ il \cdot limitat}.$