Introducció a la Investigació Operativa
Grau en Estadística UB-UPC

Tema 3. Formulació i resolució dels models lineals d'optimització (Continuació I)

Catalina Bolancé
Dept. Econometria, Estadística i Economia Espanyola

Javier Heredia
Dept. Estadística i Investigació Operativa

1. Solució del model amb Excel i SAS/OR
   - Solució del model en Solver
     - Exemple Blue Ridge Hot Tubs
   - Funcionament de l'eina Solver
     - Elements que conformen el model
   - Solució del model en SAS/OR
     - Exemple Blue Ridge Hot Tubs

2. Interpretació dels resultats amb exemples
   - Interpretació dels elements de la taula SIMPLEX
   - Correcció d'òptims no factibles: Algorisme Simplex Dual
   - Anàlisi de sensibilitat
   - Situacions especials

Solució del model en Solver

Optimitzadors de FdC

- La companyia creadora del "*Solver*" d'Excel, Lotus 1-2-3 i Quattro Pro és Frontline Systems, Inc. (http://www.solver.com).
- Utilitzarem el Solver que hi ha per defecte a l'Excel però hi ha una versió més completa(*Premium Solver*) que és la que utilitza el llibre del Ragsdale, C. T. (2008).
- Altres paquets per a resoldre poblemes de PM: AMPL, MINOS, CPLEX, LoQo, . . .

Solució del model en Solver

Passos en la implementació de models de PL en FdC

1. S'organitzen les **dades** del model sobre el FdC.
2. Es reserven cel·les separades al FdC per a representar cada **variable de decisió** del model.
3. Es crea una fórmula en una cel·la que correspongui a la **funció objectiu**.
4. Per a cada restricció, es crea una fórmula en una cel·la separada que correspongui al **terme de l'esquerra de la restricció** (LHS, "*left-hand side*".

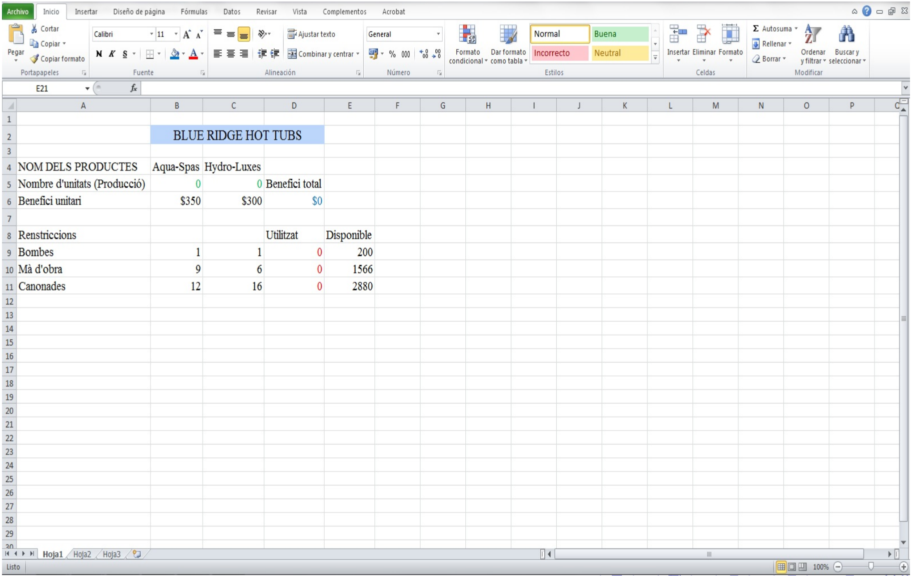
Solució del model en Solver

Implementació del model del problema "*Blue Ridge Hot Tubs*"

$$
\begin{array}{rll}
\max z = & 350x_1 + 300x_2 & \text{Benefici} \\
\text{s.a.:} & x_1 + x_2 \leq 200 & \text{Bombes} \\
& 9x_1 + 6x_2 \leq 1566 & \text{Mà d'obra} \\
& 12x_1 + 16x_2 \leq 2880 & \text{Canonades} \\
& x_1,\ x_2 \geq 0 & \text{No-negativitat}
\end{array}
$$

Solució del model en Solver

Implementació del model del problema "*Blue Ridge Hot Tubs*"



	A	B	C	D	E
1					
2		BLUE RIDGE HOT TUBS			
3					
4	NOM DELS PRODUCTES	Aqua-Spas	Hydro-Luxes		
5	Nombre d'unitats (Producció)	0	0	Benefici total	
6	Benefici unitari	$350	$300	$0	
7					
8	Renstriccions			Utilitzat	Disponible
9	Bombes	1	1	0	200
10	Mà d'obra	9	6	0	1566
11	Canonades	12	16	0	2880

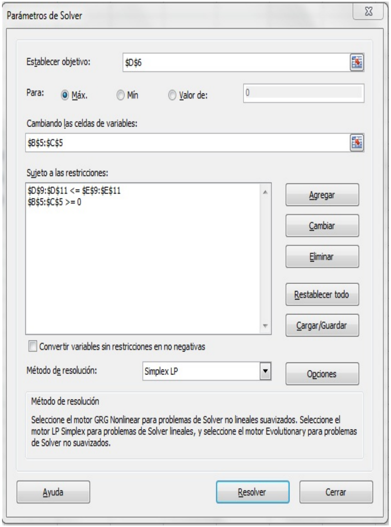
Funcionament de l'eina Solver

Com veu "*Solver*" el model?

- **Target cell** (o **set cell**): és la cel·la del FdC que representa la **funció objectiu**.
- **Changing cells**: són les cel·les associades a les **variables de decisió**.
- **Constraint cells**: són les cel·les associades a les fórmules dels **termes de l'esquerra (LHS)** de les restriccions.

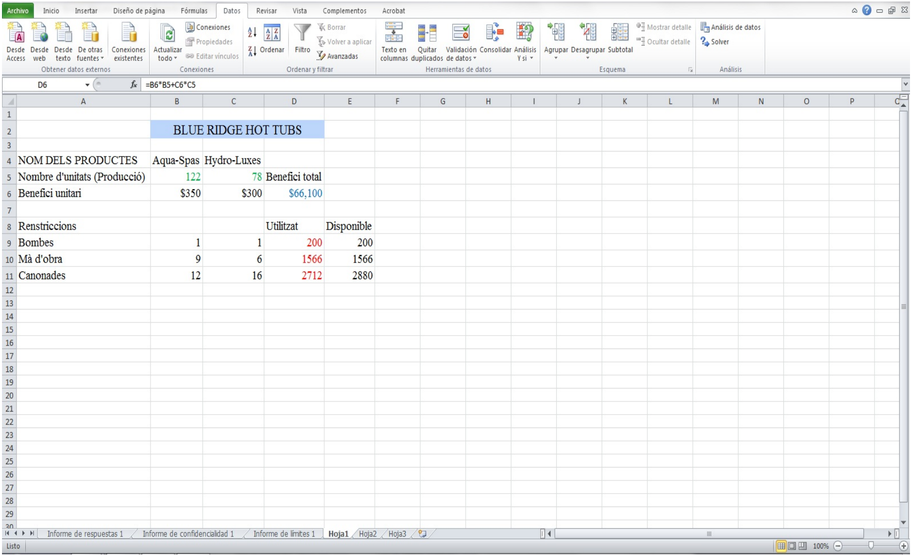
Funcionament de l'eina Solver

Menú *Herramientas* del "*Solver*"



Funcionament de l'eina Solver

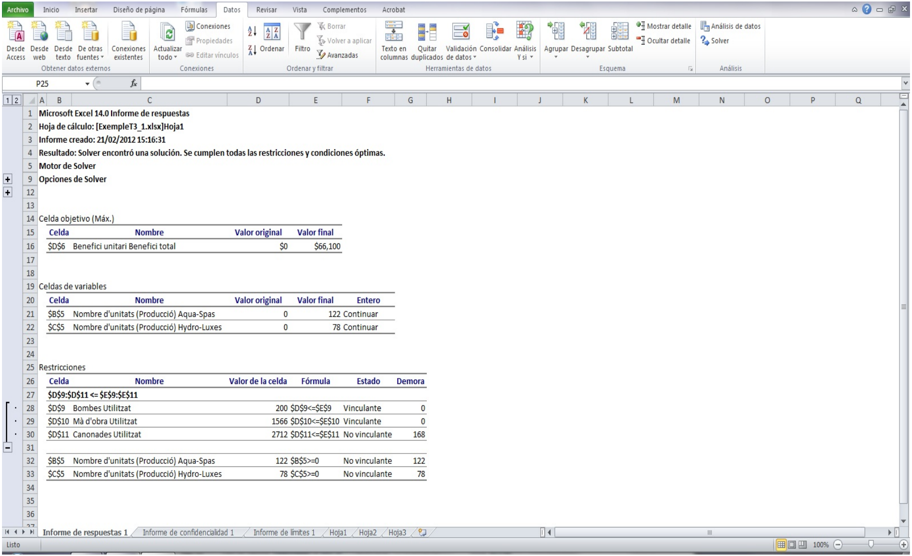
Resolució del model



	A	B	C	D	E
2		BLUE RIDGE HOT TUBS			
4	NOM DELS PRODUCTES	Aqua-Spas	Hydro-Luxes		
5	Nombre d'unitats (Producció)	122	78	Benefici total	
6	Benefici unitari	$350	$300	$66,100	
8	Renstriccions			Utilitzat	Disponible
9	Bombes	1	1	200	200
10	Mà d'obra	9	6	1566	1566
11	Canonades	12	16	2712	2880

Funcionament de l'eina Solver

Resolució del model



Microsoft Excel 14.0 Informe de respuestas
Hoja de cálculo: [ExempleT3_1.xlsx]Hoja1
Informe creado: 21/02/2012 15:16:31
Resultado: Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.
Motor de Solver
Opciones de Solver

Celda objetivo (Máx.)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$D$6	Benefici unitari Benefici total	$0	$66,100

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$B$5	Nombre d'unitats (Producció) Aqua-Spas	0	122	Continuar
$C$5	Nombre d'unitats (Producció) Hydro-Luxes	0	78	Continuar

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$D$9:$D$11 <= $E$9:$E$11					
$D$9	Bombes Utilitzat	200	$D$9<=$E$9	Vinculante	0
$D$10	Mà d'obra Utilitzat	1566	$D$10<=$E$10	Vinculante	0
$D$11	Canonades Utilitzat	2712	$D$11<=$E$11	No vinculante	168
$B$5	Nombre d'unitats (Producció) Aqua-Spas	122	$B$5>=0	No vinculante	122
$C$5	Nombre d'unitats (Producció) Hydro-Luxes	78	$C$5>=0	No vinculante	78

Informe de respuestas 1 / Informe de confidencialidad 1 / Informe de límites 1 / Hoja1 / Hoja2 / Hoja3

Funcionament de l'eina Solver

Resolució del model

Microsoft Excel 14.0 Informe de confidencialidad
Hoja de cálculo: [ExempleT3_1.xlsx]Hoja1
Informe creado: 21/02/2012 15:16:31

Celdas de variables

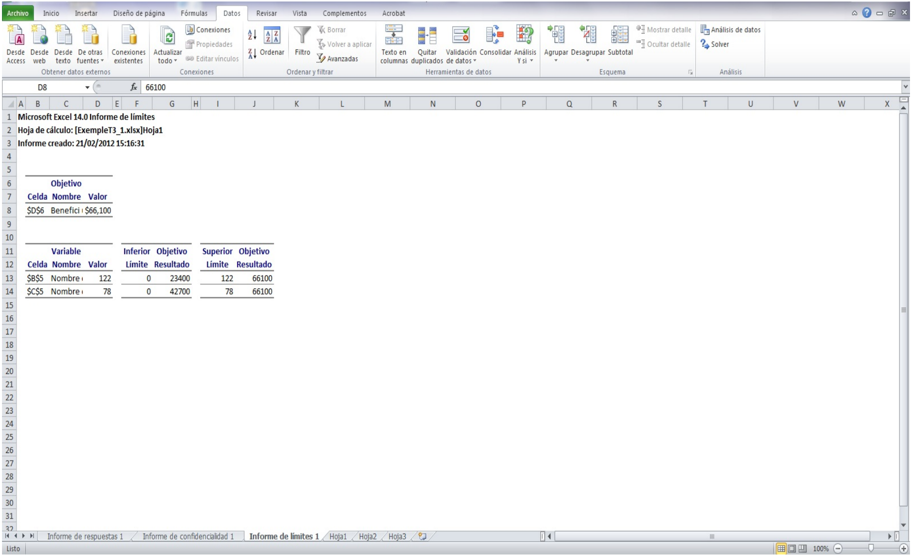
Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$5	Nombre d'unitats (Producció) Aqua-Spas	122	0	350	100	50
$C$5	Nombre d'unitats (Producció) Hydro-Luxes	78	0	300	50	66.66666667

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$D$9:$D$11 <= $E$9:$E$11						
$D$9	Bombes Utilitzat	200	200	200	7	26
$D$10	Mà d'obra Utilitzat	1566	16.66666667	1566	234	126
$D$11	Canonades Utilitzat	2712	0	2880	1E+30	168

Funcionament de l'eina Solver

Resolució del model



Microsoft Excel 14.0 Informe de límites
Hoja de cálculo: [ExempleT3_1.xlsx]Hoja1
Informe creado: 21/02/2012 15:16:31

Objetivo		
Celda	Nombre	Valor
$D$6	Benefici	$66,100

Variable			Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo
Celda	Nombre	Valor	Límite	Resultado	Límite	Resultado
$B$5	Nombre	122	0	23400	122	66100
$C$5	Nombre	78	0	42700	78	66100

Formulació de model d'optimització

- **Identificació i definició dels elements del model:**
  - La formulació és *completa*: conté tots els elements del model (*variables, funció objectiu i restriccions*).
  - Els elements del model estan explicats de forma *clara* i *correcta*.
- **Correcció i parametrització de les expressions matemàtiques:**
  - Els elements del model s'expressen mitjançant *expressions matemàtiques correctes*?
  - Les expressions matemàtiques estan suficientment parametritzades?
- **Consistència, eficiència i correcció del model d'optimització:**
  - El model és matemàticament consistent? (*Dóna lloc a un problema amb solució òptima?*)
  - El model és eficient? (*És el més senzill i de menor dimensió?*)
  - El model és correcte? (*Resol el problema plantejat?*)

Resolució de model d'optimització

- **Claredat global del FdC:**
  - El full de càlcul permet identificar clarament les dades del problema, les variables de decisió, la funció objectiu i les restriccions del model?
  - El full de càlcul inclou comentaris que faciliten la comprensió del model? S'han especificat les unitats quan cal?
  - La distribució dels elements del model al full de càlcul permet comprendre clarament la seva relació mútua i coherència global del model?
- **Definició dels elements del model (variables, funció objectiu i restriccions)?**
  - L'FdC incorpora tots els elements del model?
  - Les fórmules de les cel·les que defineixen el model són correctes?
  - Les fórmules de les cel·les que defineixen el model estan parametritzades?
- **Definició del model al Solver.**
  - El model definit a *Solver* conté tots els elements definits al FdC?
  - La declaració del model a *Solver* (Max/Min, signe de les restriccions, domini de les variables, ...) correspon al model matemàtic?
  - S'ha triat l'algorisme de resolució adequat?
  - La solució numèrica és la correcta?

Solució del model en SAS/OR

El mòdul SAS/OR

Font: Emrouznejad, A. i Ho W. (2012) Applied Operational Research with SAS. *Chapman & Hall, CRC Press*. US.

SAS/OR inclou una completa generació de nous procediments que permeten resoldre una amplia tipologia de problemes d'optimització que inclouen:

- Optimització matemàtica, amb i sense restriccions, lineals i no lineals.
- Tractament de variables discretes.
- Programació per metes o multiobjectiu.
- Xarxes i gestió de projectes.
- ...

Solució del model en SAS/OR

El mòdul SAS/OR: Alguns procediments

- PROC LP
- PROC NLP
- PROC OPTMODEL
- PROC PM
- PROC CPM
- ...

Solució del model en SAS/OR

El mòdul SAS/OR: El procediment PROC LP

Previous Page | Next Page

The LP Procedure

Syntax: LP Procedure

Below are statements used in PROC LP, listed in alphabetical order as they appear in the text that follows.

```
PROC LP options ;
    COEF variables ;
    COL variable ;
    ID variable(s) ;
    IPIVOT;
    PIVOT;
    PRINT options ;
    QUIT options ;
    RANGE variable ;
    RESET options ;
    RHS variables ;
    RHSSEN variables ;
    ROW variable(s) ;
    RUN;
    SHOW options ;
    TYPE variable ;
    VAR variables ;
```

El procediment PROC OPTMODEL també permet solucionar models de PL.

PROC OPTMODEL és un procediment que funciona com a un llenguatge de programació.

Solució del model en SAS/OR

PROC LP: Exemple Blue Ridge Hot Tubs

ExempleT3

```
libname t3 '.';
data t3.exemBRHT;
 input _row_ $12. Aqua Hydro _type_ $ _rhs_;
      datalines;
       benefici    350  300   MAX      .
       bombes        1    1   LE     200
       treball       9    6   LE    1566
       canonades    12   16   LE    2880
;
run;

proc print data=t3.exemBRHT;
run;
proc lp data=t3.exemBRHT;
 coef Aqua Hydro;
 run;
```

Directori de treball

Base de dades permanent amb la informació del model.

Imprimint la base de dades.

Estimació del model de PL.

Solució del model en SAS/OR

PROC LP: Exemple Blue Ridge Hot Tubs

Output - (Untitled)

The SAS System 22:40 Tuesday, February 21, 2012 1

Obs	_row_	Aqua	Hydro	_type_	_rhs_
1	benefici	350	300	MAX	.
2	bombes	1	1	LE	200
3	treball	9	6	LE	1566
4	canonades	12	16	LE	2880

Output - (Untitled)

The SAS System 22:40 Tuesday, February 21, 2012 4

The LP Procedure

Variable Summary

Col	Variable Name	Status	Type	Price	Activity	Reduced Cost
1	Aqua	BASIC	NON-NEG	350	122	0
2	Hydro	BASIC	NON-NEG	300	78	0
3	bombes		SLACK	0	0	-200
4	treball		SLACK	0	0	-16.66667
5	canonades	BASIC	SLACK	0	168	0

Output - (Untitled)

The SAS System 22:40 Tuesday, February 21, 2012 5

The LP Procedure

Constraint Summary

Row	Constraint Name	Type	S/S Col	Rhs	Activity	Dual Activity
1	benefici	OBJECTVE	.	0	66100	.
2	bombes	LE	3	200	200	200
3	treball	LE	4	1566	1566	16.666667
4	canonades	LE	5	2880	2712	0

Solució del model en SAS/OR

PROC LP: Exemple Blue Ridge Hot Tubs

ExempleT3b *

```
proc optmodel;
   * Paràmetres del model;
    number c{1..2} = [350,300];
    number b{1..3} = [200,1566,2880];
    number a{1..3, 1..2} = [ 1, 1,
                             9, 6,
                            12,16];

    print a b c;

   * Variables de decisió;
    var x{1..2} >= 0;

   * Funció objectiu;
    max z= sum{i in 1..2} (c[i]*x[i]);

   * Restriccions;
    con constraint{i in 1..3}:
     sum{j in 1..2} (a[i,j]*x[j]) <= b[i];

   * Impressió del model lineal;
    expand;

   * Resolució del model;
    solve with lp/solver = primal;

   * Impressió de la solució òptima;
    print x.sol;

quit;
```

Solució del model en SAS/OR

PROC LP: Exemple Blue Ridge Hot Tubs

Output - (Untitled)

```
                        The SAS System        22:40 Tuesday, February 21, 2012  27

                      The OPTMODEL Procedure

                                 a
                                 1      2

                          1      1      1
                          2      9      6
                          3     12     16

                        [1]        b        c

                         1       200      350
                         2      1566      300
                         3      2880
Var x[1] >= 0
Var x[2] >= 0
Maximize z=350*x[1] + 300*x[2]
Constraint constraint[1]: x[1] + x[2] <= 200
Constraint constraint[2]: 9*x[1] + 6*x[2] <= 1566
Constraint constraint[3]: 12*x[1] + 16*x[2] <= 2880
```

Output - (Untitled)

```
                        The SAS System        22:40 Tuesday, February 21, 2012  28

                      The OPTMODEL Procedure

                         Problem Summary

               Objective Sense              Maximization
               Objective Function                      z
               Objective Type                     Linear

               Number of Variables                     2
               Bounded Above                           0
               Bounded Below                           2
               Bounded Below and Above                 0
               Free                                    0
               Fixed                                   0

               Number of Constraints                   3
               Linear LE (<=)                          3
               Linear EQ (=)                           0
               Linear GE (>=)                          0
               Linear Range                            0
```

Output - (Untitled)

```
                        The SAS System        22:40 Tuesday, February 21, 2012  29

                      The OPTMODEL Procedure

                         Solution Summary

               Solver                     Primal Simplex
               Objective Function                      z
               Solution Status                   Optimal
               Objective Value                     66100
               Iterations                              2

               Primal Infeasibility                    0
               Dual Infeasibility                      0
               Bound Infeasibility                     0

                          [1]     x.SOL

                           1        122
                           2         78
```

Interpretació dels resultats

Interpretació dels següents valors associats a la solució òptima del model de programació lineal:

- Els ${a_{ij}}'$:
  - De les variables de decisió.
  - De les variables de folgança o artificials.
- Els $(z_j - c_j)$:
  - De les variables de decisió.
  - De les variables de folgança o artificials.
- Situacions especials:
  - Solució il.limitada.
  - Solucions múltiples.
  - Inexistència de solució.

Interpretació dels resultats

Els ${a_{ij}}'$ de les variables de decisió

Partint dels valors de les variables bàsiques en forma matricial:

$$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Nx^N,$$

es dedueix que:

$$x_i^B = {b_i}' - \sum_{j \in x^N} {a_{ij}}' x_j^N.$$

Si una variable en x^N pren valor 1 i la resta són zero:

$$x_i^B = {b_i}' - {a_{ij}}'.$$

Per tant, ${a_{ij}}'$ és igual al canvi en el valor de la variable bàsica si la variable secundaria j pren valor 1.

Interpretació dels resultats: Exemple

Els ${a_{ij}}'$ de les variables de decisió: Exemple "*Barreja*"

QUESTIÓ: Com afecta a la solució el fet d'afegir dues unitats de component II a la barreja?

$$c^B = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^N = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ M \\ M \end{pmatrix},$$

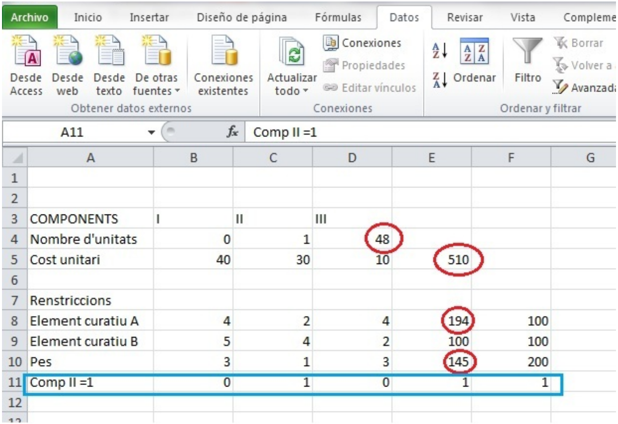
$$B^{-1}N = ({a_{ij}}') = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 & -1 & 2 \\ 2,5 & 2 & -0,5 & 0 & 0,5 \\ -4,5 & -5 & 1,5 & 0 & -1,5 \end{pmatrix}$$

$$b' = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad (c^{B'} B^{-1} N - c^{N'})' = \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ -5 \\ -M \\ 5 - M \end{pmatrix}$$

Interpretació dels resultats: Exemple "*Barreja*"

Els $a_{ij}{}'$ de les variables de decisió: Exemple "*Barreja*"

QUESTIÓ: Com afecta a la solució el fet d'afegir dues unitats de component II a la barreja?



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	COMPONENTS	I	II	III			
4	Nombre d'unitats	0	1	48			
5	Cost unitari	40	30	10	510		
6							
7	Renstriccions						
8	Element curatiu A	4	2	4	194	100	
9	Element curatiu B	5	4	2	100	100	
10	Pes	3	1	3	145	200	
11	Comp II =1	0	1	0	1	1	
12							

Interpretació dels resultats: Exemple

Els $a_{ij}{}'$ de les variables de decisió: Exemple "*Barreja*"

QUESTIÓ: Com afecta a la solució el fet d'afegir dues unitats de component II a la barreja?

ExempleT3_barreja

```
libname t3 '.';
data t3.exem_barreja;
 input _row_ $ I II III _type_ $ _rhs_;
      datalines;
cost    40   30 10   MIN      .
A        4    2  4   GE     100
B        5    4  2   GE     100
Pes      3    1  3   LE     200
;
run;

proc print data=t3.exem_barreja;
run;
proc lp data=t3.exem_barreja tableauout=t3.taula_opt noprint;
run;
proc print data=t3.taula_opt;
run;
```

Output - (Untitled)

The SAS System 16:22 Wednesday, February 29, 2012 66

Obs	_OBJ_ID_	_RHS_ID_	_BASIC_	INVB_R	I	II	III	A	B	Pes	PHASE_1_	cost
1	cost	_rhs_	R_COSTS	.	15.0	10	0	0	5.0	0	0	0
2	cost	_rhs_	A	100	6.0	6	0	1	-2.0	0	0	0
3	cost	_rhs_	III	50	2.5	2	1	0	-0.5	0	0	0
4	cost	_rhs_	Pes	50	-4.5	-5	0	0	1.5	1	0	0
5	cost	_rhs_	PHASE_1_	0	0.0	0	0	0	0.0	0	1	0
6	cost	_rhs_	cost	500	-15.0	-10	0	0	-5.0	0	0	1

Interpretació dels resultats

Els $a_{ij}{}'$ de les variables de folgança o artificials

Sigui x^D un vector de variables de decisió i x^{ND} el vector de variables de folgança o artificials:

$$A^D x^D + I x^{ND} = b$$

Multipliquem per B^{-1} en la solució òptima:

$$B^{-1} A^D x^D + B^{-1} x^{ND} = B^{-1} b$$

Per tant a B^{-1} hi ha els $a_{ij}{}'$ de les variables de folgança o artificials en qualsevol solució.

$$B^{-1} b = \begin{pmatrix} a_{11}{}' & a_{12}{}' & \dots & a_{1n}{}' \\ a_{21}{}' & a_{22}{}' & \dots & a_{2n}{}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}{}' & a_{m2}{}' & \dots & a_{mn}{}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Interpretació dels resultats

Els a_{ij}' de les variables de folgança o artificials

$$\Rightarrow x_i^B = \sum_{k \in x^{ND}} a_{ik}' b_k$$

$$\Rightarrow x_i^B = \sum_{k \neq r} a_{ik}' b_k + a_{ir}'(b_r + 1) = \sum_{k \in x^{ND}} a_{ik}' b_k + a_{ir}'$$

Els a_{ij}' de les variables de folgança (per les restriccions de $\leq$) o artificials (per les restriccions de $\geq$ ó $=$) són iguals al canvi de les variables bàsiques quan els termes independents de les restriccions incrementen una unitat.

EFECTE SOBRE LA FUNCIÓ OBJECTIU:

$$z = \sum_{i \in x^B} c_i^B ({b_i}' + {a_{ir}}') = \sum_{i \in x^B} c_i^B {b_i}' + \sum_{i \in x^B} c_i^B {a_{ir}}' =$$
$$= z_o + \sum_{i \in x^B} c_i^B {a_{ir}}' = z_o + z_r.$$

- Per restriccions de $\leq$, z_r correspon a una variable de folgança. Sempre representa la millora en l'objectiu si dispossesin d'una unitat més de recurs. És un cost d'oportunitat o preu màxim del recurs.
- Per restriccions de $\geq$ ó $=$, z_r correspon a una variable artificial. Si la restricció és de $\geq$ sempre representa un empitjorament de l'objectiu si augmenten l'exigència en una unitat. Si la restricció és de $=$ no hi ha restricció en el signe.

Interpretació dels resultats

Els $a_{ij}{}'$ de les variables de folgança o artificials: Exemple "*Blue Ridge Hot Tubs*"

QUESTIONS:

1. Quin és l'efecte en les variables bàsiques i en la funció objectiu si augmenten el número de bombes a 210?
2. Quin és l'efecte en les variables bàsiques i en la funció objectiu si augmenten les canonades a 2900?
3. Quin és l'efecte en les variables bàsiques i en la funció objectiu si augmenten la mà d'obra a 1600?

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 3 & -1/3 \\ -2 & 1/3 \\ -24 & 4/3 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} 78 \\ 122 \\ 168 \end{pmatrix},$$

$$(c^{B'}B^{-1}N - c^{N'})' = \begin{pmatrix} 200 \\ 16,667 \end{pmatrix},$$

$$z = 66.100$$

.

Interpretació dels resultats

Els a_{ij}' de les variables de folgança o artificials: Exemple "*Blue Ridge Hot Tubs*"

	A	B	C	D	E
4	NOM DELS PRODUCTES	Aqua-Spas	Hydro-Luxes		
5	Nombre d'unitats (Producció)	108	99	Benefici total	
6	Benefici unitari	$350	$300	$67,500	
7					
8	Renstriccions			Utilitzat	Disponible
9	Bombes	1	1	207	210
10	Mà d'obra	9	6	1566	1566
11	Canonades	12	16	2880	2880

	A	B	C	D	E
4	NOM DELS PRODUCTES	Aqua-Spas	Hydro-Luxes		
5	Nombre d'unitats (Producció)	133.33333	66.66666667	Benefici total	
6	Benefici unitari	$350	$300	$66,667	
7					
8	Renstriccions			Utilitzat	Disponible
9	Bombes	1	1	200	200
10	Mà d'obra	9	6	1600	1600
11	Canonades	12	16	2666.666667	2880

	A	B	C	D	E
4	NOM DELS PRODUCTES	Aqua-Spas	Hydro-Luxes		
5	Nombre d'unitats (Producció)	122	78	Benefici total	
6	Benefici unitari	$350	$300	$66,100	
7					
8	Renstriccions			Utilitzat	Disponible
9	Bombes	1	1	200	200
10	Mà d'obra	9	6	1566	1566
11	Canonades	12	16	2712	2900

Interpretació dels resultats

Correcció d'òptims no factibles: Algorisme Simplex Dual

Una solució és no factible (encara que òptima) quan una o més variables bàsiques prenen valors negatius:

MÀXIM:

$z_j - c_j^N \geq 0 \; \forall x_j^N$ i una o més variables bàsiques $x_i^B < 0$

MÍNIM:

$z_j - c_j^N \leq 0 \; \forall x_j^N$ i una o més variables bàsiques $x_i^B < 0$

Per modificar la solució i trobar una solució factible s'utilitza l'algorisme SIMPLEX-DUAL.

Interpretació dels resultats

Correcció d'òptims no factibles: Algorisme Simplex Dual

EN PROBLEMES DE MÀXIM I DE MÍNIM:

- Si anomenem $x_{i_s}^B$ a la variable bàsica que surt, aquesta ha de complir el següent:

$$x_{i_s}^B \Longrightarrow b_s{}' = Max\left[\left|b_i{}'\right| \forall b_i{}' < 0\right].$$

- Si anomenem $x_{j_e}^N$ a la variable no bàsica entrant, aquesta ha de complir el següent:

$$x_{j_e}^N \Longrightarrow \left(\frac{z_{j_e} - c_{j_e}^N}{a_{se}{}'}\right) = Min_{j \in x^N}\left[\left|\frac{z_j - c_j^N}{a_{sj}{}'}\right|, \forall a_{sj}{}' < 0\right],$$

si volem garantir $\frac{b_s{}'}{a_{se}{}'} > 0$.

QUESTION:

Quina és la nova solució òptima factible si l'empresa decideix comprar 10 bombes més?

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 3 & -1/3 \\ -2 & 1/3 \\ -24 & 4/3 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} 108 \\ 102 \\ -72 \end{pmatrix},$$

$$c^B = \begin{pmatrix} 300 \\ 350 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c^{B'} B^{-1} N - c^{N'})' = \begin{pmatrix} 200 \\ 16,667 \end{pmatrix},$$

$$z = 68.100$$

. Surt H_3 i entra H_1.

Interpretació dels resultats

Algorisme Simplex Dual: Exemple "*Blue Ridge Hot Tubs*"

QUESTION:
Quina és la nova solució òptima factible si l'empresa decideix comprar 10 bombes més?

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} -1,667 & 0,125 \\ 0,222 & -0,083 \\ -0,056 & -0,042 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} 99 \\ 108 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$c^B = \begin{pmatrix} 300 \\ 350 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c^{B'} B^{-1} N - c^{N'})' = \begin{pmatrix} 27,778 \\ 8,333 \end{pmatrix},$$

$$z = 67.500$$

.

Interpretació dels resultats

Anàlisi de sensibilitat

S'estudien els marges de variació en els paràmetres del model sense afectar a la composició del vector bàsic:

- Coeficients de la funció objectiu
- Termes independents de les restriccions

MODIFICACIÓ DELS COEFICIENTS DE LA FUNCIÓ OBJECTIU DE LES VARIABLES DE DECISIÓ SECUNDÀRIES:

MÀXIM:

$$-\infty \leq \triangle c_j^N \leq (z_j - c_j^N)$$

MÍNIM:

$$(z_j - c_j^N) \leq \triangle c_j^N \leq +\infty$$

Interpretació dels resultats

Anàlisi de sensibilitat: Coeficients de la funció objectiu

MODIFICACIÓ DELS COEFICIENTS DE LA FUNCIÓ OBJECTIU DE LES VARIABLES DE DECISIÓ BÀSIQUES:

Sigui c_r^B el coeficient en la funció objectiu de la variable de decisió bàsica x_r^B,

MÀXIM:

$$Max_{a_{rj}'>0}\left[\frac{-(z_j - c_j^N)}{|a_{rj}'|}\right] \leq \triangle c_r^B \leq Min_{a_{rj}'<0}\left[\frac{(z_j - c_j^N)}{|a_{rj}'|}\right]$$

MÍNIM:

$$Max_{a_{rj}'<0}\left[\frac{(z_j - c_j^N)}{|a_{rj}'|}\right] \leq \triangle c_r^B \leq Min_{a_{rj}'>0}\left[\frac{-(z_j - c_j^N)}{|a_{rj}'|}\right]$$

L'efecte en la funció objectiu és:

$$z = z_o + b_r{}' \triangle c_r^B$$

Interpretació dels resultats

Anàlisi de sensibilitat: Termes independents de les restriccions

Sigui b_r el terme independent que volem analitzar, tant per problemes de Màxim com de Mínim:

$$Max_{a_{ir}'>0}\left[\frac{-b_i'}{|a_{ir}'|}\right] \leq \triangle b_r \leq Min_{a_{ir}'<0}\left[\frac{b_i'}{|a_{ir}'|}\right]$$

L'efecte en la funció objectiu és:

$$z = z_o + z_r \triangle b_r,$$

on z_r es correspon amb la variable de folgança o artificial de la restricció analitzada.

Interpretació dels resultats

Anàlisi de sensibilitat: Coeficients de la funció objectiu. Exemple "*Barreja*"

Coeficient de la variable de decisió secundària x_1:

$$-15 \leq \triangle c_1 \leq +\infty$$

.

Coeficient de la variable de decisió bàsica x_3:

$$\frac{-5}{0.5} \leq \triangle c_3 \leq Min\left[\frac{15}{2.5}, \frac{10}{2}, \frac{5-M}{0.5}\right]$$

$$-10 \leq \triangle c_3 \leq 5$$

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$4:$D$4						
$B$4	Nombre d'unitats I	0	15	40	1E+30	15
$C$4	Nombre d'unitats II	0	10	30	1E+30	10
$D$4	Nombre d'unitats III	50	0	10	5	10

Interpretació dels resultats

Anàlisi de sensibilitat: Coeficients de la funció objectiu. Exemple "*Barreja*"

```
proc lp data=t3.exem_barreja rangeprice;
run;
```

Output - (Untitled)

Price Range Analysis

Col	Variable Name	Minimum Phi: Price	Minimum Phi: Entering	Minimum Phi: Objective	Maximum Phi: Price	Maximum Phi: Entering	Maximum Phi: Objective
1	I	25	I	500	INFINITY	.	500
2	II	20	II	500	INFINITY	.	500
3	III	0	B	0	15	II	750
4	A	-2.5	B	250	1.6666667	II	666.66667
5	B	-5	B	500	INFINITY	.	500
6	Pes	-2	II	400	3.3333333	B	666.66667

Interpretació dels resultats

Anàlisi de sensibilitat: Termes independents de les restriccions. Exemple "*Blue Ridge Hot Tubs*"

Terme independent de la primera restricció b_1:

$$\frac{-78}{3} \leq \triangle b_1 \leq Min\left[\frac{122}{2}, \frac{168}{24}\right]$$

$$-26 \leq \triangle c_3 \leq 7$$

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$D$9:$D$11 <= $E$9:$E$11						
$D$9	Bombes Utilitzat	200	200	200	7	26
$D$10	Mà d'obra Utilitzat	1566	16.66666667	1566	234	126
$D$11	Canonades Utilitzat	2712	0	2880	1E+30	168

Interpretació dels resultats

Anàlisi de sensibilitat: Termes independents de les restriccions. Exemple "*Blue Ridge Hot Tubs*"

```
proc lp data=t3.exemBRHT rangerhs;
run;
```

Output - (Untitled)

The SAS System 16:22 Wednesday, February 29, 2012 90

The LP Procedure

RHS Range Analysis

Row	---------Minimum Phi---------			---------Maximum Phi---------		
	Rhs	Leaving	Objective	Rhs	Leaving	Objective
bombes	174	Hydro	60900	207	canonades	67500
treball	1440	canonades	64000	1800	Hydro	70000
canonades	2712	canonades	66100	INFINITY	.	.

Interpretació dels resultats

Situacions especials

- El valor de la funció objectiu no està limitat.
- Solucions múltiples.
- Inexistència de solució.

Interpretació dels resultats

Situacions especials: El valor de la funció objectiu no està limitat

Ens trobarem en les següents situacions:
MÀXIM: Existeix una variable secundària x_j^N tal que $z_j - c_j^N < 0$.
MÍNIM: Existeix una variable secundària x_j^N tal que $z_j - c_j^N > 0$.
A més a més no podem aplicar el criteri de la variable que surt en el algorisme SIMPLEX: $a_{ij} \leq 0 \forall i$.
Per valorar la solució hem de donar valors arbitraris $x_j = a > 0$, obtenint solucions factibles però no bàsiques.

Interpretació dels resultats

El valor de la funció objectiu no està limitat: Exemple

$$\begin{aligned} max\, z = \;& x_1 + x_2 \\ s.a.: \;& x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 5x_1 - 2x_2 \leq 16 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Les variables bàsiques són: x_1 i x_2.

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ -5/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

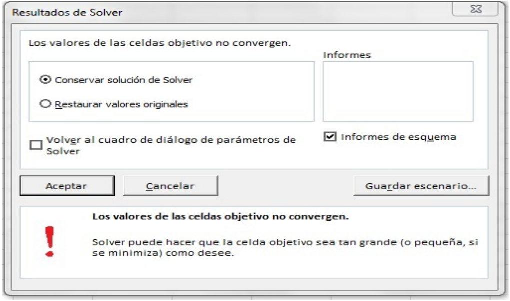
$$c^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c^{B'} B^{-1} N - c^{N'})' = \begin{pmatrix} -7/3 \\ 2/3 \end{pmatrix},$$

$$z = 6 + a\frac{7}{3}$$

.

Interpretació dels resultats

El valor de la funció objectiu no està limitat: Exemple



	A	B	C	D	E
1					
2					
3	Variables	x1	x2		
4	Nombre d'unitats	4	2		
5	z	1	1	6	
6					
7	Renstriccions				
8	Primera	1	-1	2	2
9	Segona	5	-2	16	16

Interpretació dels resultats

El valor de la funció objectiu no està limitat: Exemple

```
311   proc lp data=t3.exem_ilimitat;
312   run;

ERROR: Unbounded objective. Note the variable in the variable summary that is identified as
       unbounded.
NOTE: There were 3 observations read from the data set T3.EXEM_ILIMITAT.
NOTE: PROCEDURE LP used (Total process time):
      real time           0.03 seconds
      cpu time            0.01 seconds
```

Output - (Untitled)

```
                                  The SAS System      16:22 Wednesday, February 29, 2012 105

                                 The LP Procedure

                                 Variable Summary

              Variable                                                   Reduced
         Col  Name       Status  Type          Price    Activity           Cost

           1  x1                 NON-NEG           1           0              1
      *UBD*   x2                 NON-NEG           1           0              1
           3  res1       BASIC   SLACK             0           2              0
           4  res2       BASIC   SLACK             0          16              0
```

Interpretació dels resultats

Situacions especials: Solucions múltiples

Ens trobarem en les següents situacions:
En l'òptim una o més variables secundàries tenen

$$z_j - c_j^N = 0 \Rightarrow z = z_o - \sum_j (z_j - c_j^N) x_j^N.$$

La funció objectiu és paral·lela a una restricció.

Interpretació dels resultats

Solucions múltiples: Exemple

$$\begin{aligned} max\, z = & \quad 6x_1 + 10x_2 \\ s.a.: & \quad 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & \quad 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Les variables bàsiques són: x_1 i x_2.

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 0,263 & -0,105 \\ -0,158 & 0,263 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} 1,05 \\ 2,37 \end{pmatrix},$$

$$c^B = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad c^N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c^{B'}B^{-1}N - c^{N'})' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Les variables bàsiques són: H_1 i x_2.

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 3,8 & -0,4 \\ 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$c^B = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad c^N = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c^{B'}B^{-1}N - c^{N'})' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

També coinambcions convexes.

Interpretació dels resultats

Solucions múltiples: Exemple

Conjunt d'infinites solucions:

$$\alpha(1,05;2,37;0;0)+(1-\alpha)(0;3;4;0), 0 \leq \alpha \leq 1$$

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$4	Nombre d'unitats x1	0	-8.88178E-16	6	8.88178E-16	1E+30
$C$4	Nombre d'unitats x2	3	0	10	1E+30	1.4803E-15

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$D$8	Primera	6	0	10	1E+30	4
$D$9	Segona	15	2	15	10	15

Output - (Untitled)

The SAS System 16:22 Wednesday, February 29, 2012 115

Obs	_OBJ_ID_	_RHS_ID_	_BASIC_	INVB_R	x1	x2	res1	res2	PHAS	z
1	z	_rhs_	R_COSTS	.	0.0	0	0	-2.0	0	0
2	z	_rhs_	res1	4	3.8	-0	1	-0.4	0	0
3	z	_rhs_	x2	3	0.6	1	0	0.2	0	0
4	z	_rhs_	PHAS	0	0.0	0	0	0.0	1	0
5	z	_rhs_	z	30	0.0	0	0	2.0	0	1

Interpretació dels resultats

Situacions especials: Inexistència de solució

En la taula òptima una variable artificial pren valor positiu (és bàsica).
EXEMPLE:

$$\begin{aligned} max\, z = & \quad 5x_1 - 3x_2 \\ s.a.: & \quad 2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & \quad 4x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

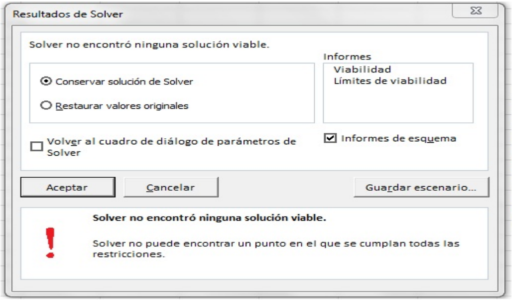
Les variables bàsiques són: x_1 i A_2.

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$c^B = \begin{pmatrix} 5 \\ -M \end{pmatrix}, \quad c^N = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c^{B'} B^{-1} N - c^{N'})' = \begin{pmatrix} 5,5 \\ 0,5 + 2M \\ M \end{pmatrix}$$

Interpretació dels resultats

Inexistència de solució: Exemple



	A	B	C	D	E
1					
2					
3	Variables	x1	x2		
4	Nombre d'unitats	1	0		
5	z	5	-3	3	
6					
7	Renstriccions				
8	Primera	2	1	1	1
9	Segona	4	2	2	6

Interpretació dels resultats

Inexistència de solució: Exemple

```
354  proc lp data=t3.exem_nosol tableauout=t3.taula_mult;
355  run;

ERROR: Infeasible problem. Note the constraints in the constraint summary that are identified as
       infeasible. If none of the constraints are flagged then check the implicit bounds on the
       variables.
WARNING: The TABLEAUOUT= data set corresponds to a solution that resulted from  an unsuccessful
         termination.
NOTE: There were 3 observations read from the data set T3.EXEM_NOSOL.
NOTE: The data set T3.TAULA_MULT has 5 observations and 10 variables.
NOTE: PROCEDURE LP used (Total process time):
      real time           0.03 seconds
      cpu time            0.01 seconds
```

ExempleT3_nosol *

```
libname t3 '.';
data t3.exem_nosol;
  input _row_ $4. x1 x2 _type_ $ _rhs_;
      datalines;
z       5  -3    MAX     .
res1    2   1     LE     1
res2    4   2     GE     6
;
run;
proc lp data=t3.exem_nosol tableauout=t3.taula_mult noprint;
run;

proc print data=t3.taula_mult;
run;
```

Output - (Untitled)

The SAS System 16:22 Wednesday, February 29, 2012 133

Obs	_OBJ_ID_	_RHS_ID_	_BASIC_	INVB_R	x1	x2	res1	res2	PHAS	z
1	z	_rhs_	R_COSTS	.	0	-5.5	-2.5	0	0	0
2	z	_rhs_	x1	0.5	1	0.5	0.5	0	0	0
3	z	_rhs_	res2	-4.0	0	0.0	2.0	1	0	0
4	z	_rhs_	PHAS	0.0	0	0.0	0.0	0	1	0
5	z	_rhs_	z	2.5	0	5.5	2.5	0	0	1