Àlgebra lineal. Curs 2015-2016

Llista 4. Espais vectorials.

1. Quins dels subconjunts següents són subespais vectorials de l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ corresponent?

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,4)\}$

(b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = x\}$

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

(d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$

(e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 2\}$

(f) $\{(x,0,0,t) \in \mathbb{R}^4 : 3x + t = 0\}$

(g) $\{(x,0,0,t) \in \mathbb{R}^4 : 3x + t = 0, x + t = 0\}$

(h) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = \sqrt{2}\,x\}$

2. Esbrineu si són o no linealment independents els conjunts de vectors següents:

a) $\{(1,2),(1,3),(5,8)\}$

b) $\{(1,2,3),(2,0,-1),(0,4,7)\}$

c) $\{(2,3,1,-1),(2,3,1,-2),(4,2,1,3)\}$.

3. a) Esbrineu si el vector $(2,-1,5)$ és combinació lineal dels vectors $(1,0,-1),(0,1,3),(5,2,2)$. En cas afirmatiu doneu l'expressió.

b) Feu el mateix que en el cas anterior per a la matriu

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

i les matrius

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Estudieu si són o no linealment independents les famílies de matrius de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

a)
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & 2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & 3 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Sigui $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespai vectorial generat pels vectors $u_1 = (1, 3, -2)$ i $u_2 = (4, 0, 1)$. Decidiu si el vector $v = (2, -6, 5)$ pertany a $\mathbb{F}$ i, en cas afirmatiu, escriviu-lo com a combinació lineal de u_1 i u_2.

6. Determineu els valors del paràmetre a que fan que el vector $v = (2, a, -8)$ pertanyi al subespai vectorial $\langle (1, 1, 3), (5, 2, 1) \rangle$ de $\mathbb{R}^3$.

7. Sigui E un espai vectorial i tres vectors $v_1, v_2, v_3 \in E$ linealment independents. Estudieu si ho són (linealment independents!) les següents ternes de vectors:

a) $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$, $v_1 + v_3$

b) $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$, $v_1 - v_3$

c) $v_1 + v_2 + v_3$, $v_1 + v_2$, v_1

d) $v_1 + v_2 + v_3$, $v_1 + v_2$, $v_2 + v_3$.

8. Considerem els vectors $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 0, -3)$, $w = (1, 1, 0)$, $z = (0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Descriviu el subespai $\langle u, v \rangle$ per mitjà d'equacions.

(b) Demostreu que els vectors v, w, z formen una base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Trobeu les coordenades del vector u en la base $\{v, w, z\}$ i calculeu la dimensió del subespai $\langle u, v, w, z \rangle$.

9. Trobeu una base i la dimensió dels següents espais vectorials:

a) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

b) $F =< (3,-1,-1),(1,-1,1),(1,1,-3) >\subset \mathbb{R}^3$

c)
$$F =< \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} >\subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

10. Calculeu una base i les equacions implícites dels subespais següents:

a) $F_1 =< (1,-1,1,0),(1,1,0,1),(2,0,1,1) >$

b) $F_2 =< (2,3,-1),(1,2,2),(1,1,-3) >$

c) $F_3 =< (1,-1,1,-1,1),(1,1,0,0,3),(3,1,1,-1,7) >$

11. Trobeu una base dels subespais de $\mathbb{R}^3$ definits per les equacions implícites següents:

a) $2x + 3y - z = 0$.

b)
$$\begin{cases} x & +2y & +z & == 0 \\ x & +y & -z & = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x & +2y & +5z & = 0 \\ -x & +3y & +z & = 0 \\ 2x & +5y & +6z & = 0 \end{cases}$$

12. Considereu els subespais vectorials $\mathbb{F} = \langle (1,1,-1,1),(2,0,0,1),(-1,1,-1,0) \rangle$ i
$\mathbb{G} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2y + z = 0, -x + 2y + 2t = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.

(a) Trobeu equacions per a $\mathbb{F}$ i calculeu la dimensió de $\mathbb{F}$.

(b) Doneu una base i la dimensió de $\mathbb{G}$.

(c) Calculeu les dimensions de $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ i de $\mathbb{F} + \mathbb{G}$.

13. Siguin $H =< (1,0,1,1),(-1,1,0,0) >$, $G =< (1,-1,0,3),(0,4,5,-2),(2,0,-5,7) >$, $T =< (3,4,6,2,8) >$ i

$$B = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Calculeu les equacions d'aquest subespais.

14. * Determineu una base dels següents subespais vectorials:

$$\mathbb{S} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_3 + x_4 = 0\}.$$

$$\mathbb{T} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 - x_4 = x_1 - 2x_3 + 4x_4 = 0\}.$$

$$\mathbb{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_4 - x_2 + x_1 = 0, x_3 - x_4 + 3x_2 = 0\}.$$

$$\mathbb{V} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 20x_1 - 30x_2 + 50x_3 - 87x_4 = 0\}.$$

$$\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 2x_1 - 5x_3 = 0, x_4 = x_5 - x_2 = 0\}.$$

Calculeu la dimensió de cadascun d'ells.

15. Sigui $\mathbb{S} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$. Trobeu un subespai $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^4$ que verifiqui simultàniament $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \langle(1, 0, 1, 1)$ i $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^4$. Justifiqueu els vostres raonaments.

16. Sigui $\mathbb{S}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$. Trobeu un subespai $\mathbb{S}_2 \subset \mathbb{R}^4$ de dimensió 2 tal que $\dim(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2) = 1$. Justifiqueu els vostres raonaments.

17.

i) Considerem els subespais vectorials $\mathbb{F}_1 = \langle(1, 2, 1), (-1, 0, 3), (3, 4, -1)\rangle$ i $\mathbb{F}_2 = \langle(1, 4, 1)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$. Doneu una base de cadascun dels subespais $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$, i calculeu-ne les dimensions.

ii) Feu el mateix que en i) amb els subespais de $\mathbb{R}^4$ $\mathbb{F}_1 = \langle(1, -1, 1, -1), (1, 2, 3, -1)\rangle$, i
$\mathbb{F}_2 = \langle(1, 1, 1, 1), (2, 1, 4, -2)\rangle$.

18. Considereu els subespais vectorials $\mathbb{F} = \langle(1, 1, -1, 1), (2, 0, 0, 1), (-1, 1, -1, 0)\rangle$ i
$\mathbb{G} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2y + z = 0, -x + 2y + 2t = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.

(a) Trobeu equacions per a $\mathbb{F}$ i calculeu la dimensió de $\mathbb{F}$.

(b) Doneu una base i la dimensió de $\mathbb{G}$.

(c) Calculeu les dimensions de $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ i de $\mathbb{F} + \mathbb{G}$.

19. Considerem els subespais vectorials $\mathbb{F} = \{(x, y, z, t) : x + y - t = y + z + 2t = 0\}$,
$\mathbb{G} = \{(x, y, z, t) : 2x + y = x + z - 3t = 0\}$ i $\mathbb{H} = \langle(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 2, 1)\rangle$ de $\mathbb{R}^4$. Calculeu una base de $\mathbb{F} \cap (\mathbb{G} + \mathbb{H})$.

20. Considereu els subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{F} = \langle(1,-2,0,3),(2,1,-2,4),(0,2,-1,1)\rangle$ i $\mathbb{G} = \langle(1,0,2,-1),(1,0,-1,4)\rangle$. Doneu la dimensió i una base dels subespais $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{F}+\mathbb{G}$ i $\mathbb{F}\cap\mathbb{G}$.

21. Amplieu $\{v_1 = (1,0,1,0),(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$ a una base de $\mathbb{R}^4$.

22. Donats els subespais de $\mathbb{R}^4$

$F =< (1,0,1,0),(0,1,1,0) >, G =< (1,-1,0,0),(0,0,0,1) >, H =< (0,1,2,0),(0,0,1,0) > .$

Proveu que els tres subespais tenen dimensió 2 i trobeu bases per a $F\bigcap G$, $F+G$, $G\bigcap H$, $G+H$ i $F+(G+H)$.

23. En $\mathbb{R}^4$ considerem el subespai vectorial F donat per

$$F = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 | \quad x+y-z-t=0, x-y+z-t=0\}.$$

a) Obteniu una base de F formada pel vector $(1,1,1,1)$ i un altre vector.

b) Considerant el subespai vectorial G de $\mathbb{R}^4$ donat per

$$G = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 | \quad x-y-z=0\},$$

doneu una base de G i una base de $F\bigcap G$.

c) Doneu una base de $F+G$.