Àlgebra lineal. Curs 2015-2016

Llista 3. Matrius-determinants.

1. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trobeu sengles matrius regulars P i Q tals que $AP = C$ i $BQ = C$.

2. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Trobeu una matriu regular Q de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de manera que

$$QA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Proveu que la suma de matrius simètriques és una matriu simètrica, però el producte de matrius simètriques no és en general simètrica.

4. Calculeu els determinants següents:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

5. Calculeu el rang de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 12 & -10 & -9 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & -13 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & -8 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Calculeu el rang de les matrius següents segons els valors de a i b:

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & ab \\ b & a^2 & a^2b \end{pmatrix}$$

7. Calculeu els determinants següents:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 55 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 21 & 17 & 5 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & 0 & a & a \\ a & a & 0 & a \\ a & a & a & 0 \end{vmatrix}$$

8. Calculeu la inversa de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8$, calculeu els determinants següents:

a) $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 2a_{11} - 3a_{21} & 2a_{12} - 3a_{22} & 2a_{13} - 3a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

10. Calculeu el determinant de la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1+x & x & x \\ 1+x & x & x & x \\ x & x & 1+x & x \\ x & x & & 1+x \end{pmatrix}$$

11. Calculeu, en funció del paràmetre $a \in \mathbb{R}$, el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2a-2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

12. Trobeu el determinant de Vandermonde en el cas de 4 columnes, o sigui

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

13. Discutir el següents sistema d'equacions en funció dels valors del paràmetre a.

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} ax & +y & +z & = 1 \\ x & +ay & +z & = a \\ x & +y & +az & = a^2 \end{array} \right.$$