Econometria
Tema 5: Incompliment de les hipòtesis bàsiques sobre el terme de pertorbació

Ramon Alemany

Grau Estadística UB-UPC

Curs 2017-18

Presentació

1. Bibliografia
2. Normalitat
3. Pertorbacions no esfèriques
4. Estimació MQO amb pertorbacions no esfèriques
5. Estimació per MQG. Propietats dels estimadors

Bibliografia

- GREENE, W. (1999)
  Anàlisis econométrico. 3a Ed.
  Capítol 11

- WOOLDRIDGE, J. (2009)
  Introducción a la Econometría. Un enfoque moderno. 4a Ed.
  Capítols 8 i 12

- STOCK, J. & WATSON, M. (2012)
  Introducción a la Econometría. 3a Ed.
  Capítol 18

Normalitat

1. Normalitat

a) Conseqüències de la violació del supòsit de normalitat de la pertorbació aleatòria
   - Efectes sobre la distribució de l'estimador dels paràmetres MQO
   - Implicacions pels contrastos d'hipòtesis sobre β
   - L'estimador Màxim Versemblant (MV)

b) Com contrastar la normalitat del terme de pertorbació
   - Contrast de Bera-Jarque

Normalitat

Conseqüències de la No Normalitat

a) Conseqüències de la violació del supòsit de normalitat del terme de pertorbació aleatòria

Hipòtesi bàsica del MRLM: $\longrightarrow \mathsf{U} \sim N(0, \sigma_u^2 I_{\mathsf{N}})$

$$\downarrow$$

Sota aquesta hipòtesi, aplicant MQO: $\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma_u^2 (X'X)^{-1})$

$$\downarrow$$

Estimadors no esbiaixats, eficients i consistents $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)$

Normalitat

Conseqüències de la No Normalitat

- Però, si U $\nsim N(0, \sigma_u^2 I_{\mathrm{N}}) \longrightarrow \hat{\beta} \nsim N(\beta, \sigma_u^2 (X'X)^{-1})$
- Si no coneixem la distribució de U, no sabrem quina és la distribució de $\hat{\beta}$
- Aquest problema és especialment important en mostres finites perquè en mostres grans podem aplicar el Teorema Central del Límit.

Normalitat

Conseqüències de la No Normalitat

Si no coneixem la distribució de $\hat{\beta}$, aleshores els contrastos sobre els paràmetres (significació individual, global) no seran fiables (excepte a nivell asimptòtic).

Com a conseqüència que U no es distribueixi normalment, l'**estimador Màxim versemblant** ja no coincidirà amb l'estimador obtingut per mínims quadrats ordinaris i, per tant, **no serà eficient**.

Normalitat

Contrastos de Normalitat

b) Com contrastar la normalitat del terme de pertorbació

- La distribució normal es caracteritza per ser:
  - Simètrica i
  - Mesocúrtica

- Es tracta de contrastar si el terme de pertorbació, aproximat pels residus del model, presenta aquestes característiques.

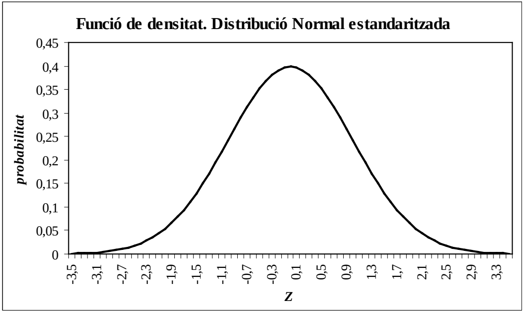
Normalitat

Contrastos de Normalitat

Distribució normal

$$x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}\right]$$



Normalitat

Contrastos de Normalitat

Coeficient d'asimetria de Fisher

$$b_1 = \frac{m_3}{\sigma_x^3} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_x)^3}{N\sigma_x^3} \Longrightarrow \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \quad \text{asimetria positiva} \\ = 0 & \Rightarrow \quad \text{simetria} \\ < 0 & \Rightarrow \quad \text{asimetria negativa} \end{cases}$$

Coeficient de curtosi

$$b_2 = \frac{m_4}{\sigma_x^4} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_x)^4}{N\sigma_x^4} \Longrightarrow \begin{cases} > 3 & \Rightarrow \quad \text{leptocúrtica} \\ = 3 & \Rightarrow \quad \text{mesocúrtica} \\ < 3 & \Rightarrow \quad \text{platicúrtica} \end{cases}$$

Normalitat

Contrast de Bera-Jarque

Contrast de Bera-Jarque

$$\begin{array}{ll} H_0: & \mathsf{U} \sim Normal \\ H_A: & \mathsf{U} \not\sim Normal \end{array}$$

$$\mathsf{BJ} = N\left(\frac{b_1^2}{6} + \frac{(b_2 - 3)^2}{24}\right) \sim \chi_2^2$$

Normalitat

Contrast de Bera-Jarque

Limitacions:

- Si es Rebutja la H_0, la hipòtesi alternativa no ens aporta informació sobre el comportament d'U.
- El fet de No Rebutjar la H_0 implica no rebutjar la normalitat però no confirma que el terme de pertorbació segueixi una distribució normal, ja que únicament és un contrast de simetria i curtosi.
- Cal anar amb compte amb la seva interpretació quan disposem de mostres petites: la potència del contrast és baixa i el contrast pot estar, fins i tot, esbiaixat.
- No el podem utilitzar si sospitem d'heteroscedasticitat o autocorrelació en el terme de pertorbació

Normalitat

Caldrà complementar l'anàlisi de la normalitat del terme de pertorbació a través d'altres eines com:

- altres contrastos de normalitat
- l'anàlisi gràfica a partir de l'histograma dels residus
- l'anàlisi de la seva funció de densitat.

Pertorbacions no esfèriques

2. Pertorbacions no esfèriques

- Hipòtesi bàsica del MRLM: $\mathsf{U} \sim N(0, \sigma^2 I_{\mathsf{N}})$
- Terme de pertorbació esfèric:

$$\mathsf{Var}(\mathsf{U}) = \mathsf{E}(\mathsf{U}\mathsf{U}') = \sigma^2 I_{\mathsf{N}}$$

- Però, hi ha un cas més general ...

$$\mathsf{Var}(\mathsf{U}) = \mathsf{E}(\mathsf{U}\mathsf{U}') = \sigma^2 \Omega$$

- Model de Regressió Lineal Múltiple Generalitzat (MRLMG)

Pertorbacions no esfèriques

Model de Regressió Lineal Múltiple Generalitzat (MRLMG)

MRLMG

$$Y = X\beta + \mathsf{U} \qquad \mathsf{U} \sim N(0, \sigma^2\Omega)$$

$$\mathsf{Var}(\mathsf{U}) = \mathsf{E}(\mathsf{UU}') = \sigma^2\Omega = \sigma^2 \begin{bmatrix} \delta_1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & \delta_2 & \dots & \gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \dots & \delta_N \end{bmatrix}$$

Terme de pertorbació no esfèric:

- Heteroscedasticitat: $\mathsf{Var}(\mathsf{U}_i) \neq \mathsf{Var}(\mathsf{U}_j) \quad \forall\, i \neq j$
- Autocorrelació: $\mathsf{Cov}(\mathsf{U}_i, \mathsf{U}_j) = \mathsf{Cov}(\mathsf{U}_j, \mathsf{U}_i) \neq 0 \quad \forall\, i \neq j$

Pertorbacions no esfèriques

Casos particulars del MRLMG: el MRLM

Cas particular: MRLM

$$\mathsf{U} \sim N(0, \sigma^2 \Omega) \rightarrow \left\{ \text{si } \Omega = I_{\mathsf{N}} \right\} \rightarrow \mathsf{U} \sim N(0, \sigma^2 I_{\mathsf{N}})$$

$$\mathsf{Var}(\mathsf{U}) = \mathsf{E}(\mathsf{UU}') = \sigma^2 I_{\mathsf{N}} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Terme de pertorbació no esfèric:

- Homoscedasticitat: $\mathsf{Var}(\mathsf{U}_i) = \mathsf{Var}(\mathsf{U}_j) = \sigma^2 \quad \forall\, i \neq j$
- No autocorrelació: $\mathsf{Cov}(\mathsf{U}_i, \mathsf{U}_j) = \mathsf{Cov}(\mathsf{U}_j, \mathsf{U}_i) = 0 \quad \forall\, i \neq j$

Pertorbacions no esfèriques

Casos particulars del MRLMG: Heteroscedasticitat

Cas particular: Heteroscedasticitat

$$\mathsf{U} \sim N(0, \sigma^2\Omega) \qquad \text{si } \Omega = \text{matriu diagonal}$$

$$\mathsf{Var(U)} = \mathsf{E(UU')} = \sigma^2\Omega = \sigma^2 \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_N \end{bmatrix}$$

Terme de pertorbació no esfèric:

- Heteroscedasticitat: $\mathsf{Var}(\mathsf{U}_i) \neq \mathsf{Var}(\mathsf{U}_j) \quad \forall\, i \neq j$
- No autocorrelació: $\mathsf{Cov}(\mathsf{U}_i, \mathsf{U}_j) = \mathsf{Cov}(\mathsf{U}_j, \mathsf{U}_i) = 0 \quad \forall\, i \neq j$

Pertorbacions no esfèriques

Casos particulars del MRLMG: Autocorrelació

Cas particular: Autocorrelació

$$\mathsf{U} \sim N(0, \sigma^2 \Omega)$$

Si $\Omega =$ elements de la diagonal principal constants però fora de la diagonal principal són diferents de zero.

$$\mathsf{Var}(\mathsf{U}) = \mathsf{E}(\mathsf{UU}') = \sigma^2 \Omega = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & 1 & \dots & \gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Terme de pertorbació no esfèric:

- Homoscedasticitat: $\mathsf{Var}(\mathsf{U}_i) = \mathsf{Var}(\mathsf{U}_j) = \sigma^2 \quad \forall\, i \neq j$
- Autocorrelació: $\mathsf{Cov}(\mathsf{U}_i, \mathsf{U}_j) = \mathsf{Cov}(\mathsf{U}_j, \mathsf{U}_i) \neq 0 \quad \forall\, i \neq j$

Pertorbacions no esfèriques

MRLMG

$$Y = X\beta + \mathsf{U}$$

$$\mathsf{U} \sim N(0, \sigma^2\Omega)$$

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & \delta_2 & \dots & \gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \dots & \delta_N \end{bmatrix}$$

$\Omega = I_N$

MRLM

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$\Omega =$ diag

Heteroscedasticitat

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_N \end{bmatrix}$$

Dades de tall transversal

Autocorrelació

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & 1 & \dots & \gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Sèries temporals

Estimació MQO amb pertorbacions no esfèriques

3. Estimació MQO d'un model amb pertorbació no esfèrica. Propietats dels estimadors

- Efectes sobre el biaix dels estimadors
- Efectes sobre l'eficiència dels estimadors
- Conseqüències

Estimació MQO amb pertorbacions no esfèriques

Conseqüències

En un model amb terme de pertorbació NO esfèric, els estimadors de β per MQO seran:

- No esbiaixats (i consistents):

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(\hat{\beta}_{\mathsf{MQO}}) &= \mathsf{E}\left[(X'X)^{-1}X'Y\right] = \\ &= \mathsf{E}\left[\beta + (X'X)^{-1}(X'U)\right] = \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'\mathsf{E}(U) = \beta \end{aligned}$$

$$Biaix(\hat{\beta}_{\mathsf{MQO}}) = \mathsf{E}(\hat{\beta}_{\mathsf{MQO}}) - \beta = 0$$

Estimació MQO amb pertorbacions no esfèriques

Conseqüències

Però els estimadors de β per MQO seran:

- Ineficients:

$$
\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{\beta}_{\text{MQO}}) &= E\left[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\right] = \\
&= E\left[\left[(X'X)^{-1}(X'U)\right]\left[(X'X)^{-1}(X'U)\right]'\right] = \\
&= (X'X)^{-1}X'\,E(UU')\,X(X'X)^{-1} = \\
&= \sigma_u^2(X'X)^{-1}X'\,\Omega\,X(X'X)^{-1} \neq \sigma_u^2(X'X)^{-1}
\end{aligned}
$$

Estimació MQO amb pertorbacions no esfèriques

Conseqüències

Conseqüències:

- Si MQO és ineficient, la variància dels estimadors és més gran de la que hauria de ser.
- L'estimació serà, per tant, menys precisa.
- Ara bé, la principal conseqüència és que els contrastos de significació individual i global no serien vàlids per la inferència. Segurament tendiríem a no Rebutjar H_0 més vegades de les que hauríem de fer-ho.

Estimació per MQG. Propietats dels estimadors

4. Estimació per MQG. Propietats dels estimadors

- Punt de partida:
  - Incorporar la informació sobre la matriu Ω en el procés d'estimació.
  - Cal conèixer els valors dels elements d'Ω per tal que l'estimador sigui eficient.
- Dues situacions diferents:
  - Suposem que Ω és coneguda.
  - Suposem que Ω és desconeguda (podrem estimar-la?)

Estimació per MQG. Propietats dels estimadors

Suposem Ω coneguda

Suposem Ω coneguda

Dues alternatives d'estimació per MQG:

- 1a alternativa: transformació del model
- 2a alternativa: estimació directa

Estimació per MQG. Propietats dels estimadors

Suposem Ω coneguda

- 1a alternativa: transformació del model

$$\begin{array}{c} Y = X\beta + \mathsf{U} \\ \mathsf{U} \sim N(0, \sigma^2\Omega) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} Y^* = X^*\beta + \mathsf{U}^* \\ \mathsf{U}^* \sim N(0, \sigma^2 I) \end{array} \qquad \begin{array}{c} Y^* = \mathsf{T}Y \\ X^* = \mathsf{T}X \\ \mathsf{U}^* = \mathsf{TU} \end{array}$$

Quina T? $\qquad \mathsf{E}[\mathsf{U}^*\mathsf{U}^{*\prime}] = \mathsf{E}[T\mathsf{U}(T\mathsf{U})'] = T\,\mathsf{E}[\mathsf{UU}']T'$

$$\sigma^2 I_{\mathsf{N}} = \sigma^2 T\Omega T' \qquad I_{\mathsf{N}} = T\Omega T'$$

Com Ω és Simètrica i definida positiva es descomposa en PP' (Factorització de Cholesky):

$$I_{\mathsf{N}} = T\Omega T' = TPP'T' \quad \longrightarrow \quad T = P^{-1}$$

Estimació per MQG. Propietats dels estimadors

Suposem Ω coneguda

- Es calcula $T = P^{-1}$ i es transformen les variables del model original: $Y^* = TY$ i $X^* = TX$
- S'estima el model aplicant les expressions dels estimadors MQO sobre les variables transformades:

$$\hat{\beta}_{\text{MQG}} = (X^{*\prime}X^*)^{-1}(X^{*\prime}Y^*)$$

$$\hat{\sigma}^2_{\text{MQG}} = \frac{\mathrm{e}^{*\prime}\mathrm{e}^*}{N-k}$$

- Els paràmetres del model transformat són els mateixos que els del model original.

Estimació per MQG. Propietats dels estimadors

Suposem Ω coneguda

- <u>2a alternativa</u>: estimació directa

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_{\mathsf{MQG}} &= (X^{*\prime}X^{*})^{-1}(X^{*\prime}Y^{*}) = \\
&= ((TX)'TX)^{-1}((TX)'TY) = \\
&= (X'T'TX)^{-1}(X'T'TY) = \\
&= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}Y)
\end{aligned}
$$

$$T'T = (P^{-1})'(P^{-1}) = (P'P)^{-1} = \Omega^{-1}$$

Estimació per MQG. Propietats dels estimadors

Suposem Ω coneguda

$$\mathrm{e}^* = T\,\mathrm{e}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2_{\mathsf{MQG}} &= \frac{\mathrm{e}^{*\prime}\mathrm{e}^*}{N-k} = \frac{(Y^* - X^*\hat{\beta})'(Y^* - X^{*\prime}\hat{\beta})}{N-k} = \\
&= \frac{(Y - \hat{\beta}'X')T'T(Y - X\hat{\beta})}{N-k} = \\
&= \frac{\mathrm{e}'T'T\mathrm{e}}{N-k} = \frac{\mathrm{e}'\Omega^{-1}\mathrm{e}}{N-k}
\end{aligned}$$

Estimació per MQG. Propietats dels estimadors

Suposem Ω coneguda

Propietats dels estimadors MQG

- Biaix:

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_{\mathsf{MQG}} &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y = \\
&= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}(X\beta + \mathsf{U}) = \\
&= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}X\beta + (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\mathsf{U} = \\
&= \beta + (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\mathsf{U}
\end{aligned}
$$

$$\mathsf{E}(\hat{\beta}_{\mathsf{MQG}}) = \beta$$

Estimació per MQG. Propietats dels estimadors

Suposem Ω coneguda

Propietats dels estimadors MQG

- Eficiència:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{\mathrm{MQG}}) &= \mathrm{E}\left[(\hat{\beta}-\mathrm{E}(\hat{\beta}))(\hat{\beta}-\mathrm{E}(\hat{\beta}))'\right] = \mathrm{E}\left[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\right] = \\
&= \mathrm{E}\left(\left[(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\mathrm{U}\right]\left[(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\mathrm{U}\right]'\right) \\
&= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\mathrm{E}(\mathrm{UU}')\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1} = \\
&= \sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\Omega\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1} = \\
&= \sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{\mathrm{MQG}}) \leq \mathrm{Var}(\hat{\beta}_{\mathrm{MQO}}) = \sigma^2(X'X)^{-1}(X'\Omega X)^{-1}(X'X)^{-1}$$

Estimació per MQG. Propietats dels estimadors

Suposem Ω coneguda

Validació

- Els contrastos d'hipòtesis es realitzen de manera semblant a la utilitzada al MRLM però enlloc de fer servir els residus MQO (e) es fan servir els MQG (e*).

- Hi han problemes d'interpretació del R^2:
  No ens interessa saber quina proporció expliquem de la variància d'Y^* sinó d'Y. La solució és utilitzar:

$$R_{\mathrm{G}}^2 = 1 - \frac{(Y - X\hat{\beta}_{\mathrm{MQG}})'(Y - X\hat{\beta}_{\mathrm{MQG}})}{Y'Y}$$

  però no podem garantir que $R^2 \in [0, 1]$.

Estimació per MQG. Propietats dels estimadors

Suposem Ω desconeguda

Suposem Ω desconeguda:

Serà possible estimar els valors dels seus elements?

- Tenint en compte que és tracta d'una matriu d'ordre $(N \times N)$ i que és simètrica, el nombre de paràmetres a estimar és de $\frac{N(N+1)}{2}$.
- La informació disponible a partir de les observacions d'X i Y podrien definir N equacions.
- Com $\frac{N(N+1)}{2} > N$, no és possible estimar els valors dels elements d'Ω.
- Caldrà fer supòsits sobre l'estructura d'Ω per tal de disminuir el nombre de paràmetres.

Estimació per MQG. Propietats dels estimadors

Suposem Ω desconeguda

- Imposant una determinada estructura a la matriu Ω, serà possible aplicar el procediment d'estimació conegut com **Mínims Quadrats Generalitzats Factibles (MQGF)**.

$$\hat{\beta}_{\mathsf{MQG}} = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}(X'\hat{\Omega}^{-1}Y)$$

- Les seves propietats serien:
    - Semblants a les de MQG, però només a nivell asimptòtic.
    - Només serà eficient si $\hat{\Omega}^{-1}$ és consistent amb Ω^{-1}.

Econometria
Tema 5: Incompliment de les hipòtesis bàsiques sobre el terme de pertorbació

Ramon Alemany

Grau Estadística UB-UPC

Curs 2017-18