1 Determineu l'error màxim en el càlcul de $y = \dfrac{x_1 x_2^2}{\sqrt{x_3}}$ amb $x_1 = 2.0 \pm 0.1$, $x_2 = 3.0 \pm 0.2$ i $x_3 = 1.0 \pm 0.1$. Quina de les dades contribueix més a l'error en y? Per què? *(5punts)*

Resposta. *Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable i $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$ i $\widetilde{x}_3$ aproximacions de x_1, x_2 i x_3 amb cotes d'error ϵ_1, ϵ_2 i ϵ_3, és a dir $x_1 = \widetilde{x}_1 \pm \epsilon_1$, $x_2 = \widetilde{x}_2 \pm \epsilon_2$ i $x_3 = \widetilde{x}_3 \pm \epsilon_3$, llavors l'error propagat en el càlcul de g és;*

$$|\Delta g| \approx \left|\frac{\partial g(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3)}{\partial x_1}\right| |\epsilon_1| + \left|\frac{\partial g(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3)}{\partial x_2}\right| |\epsilon_2| + \left|\frac{\partial g(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3)}{\partial x_3}\right| |\epsilon_3| .$$

En el nostre cas els càlculs són

$$\left|\frac{\partial g(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3)}{\partial x_1}\right| = \left|\frac{\widetilde{x}_2^2}{\sqrt{\widetilde{x}_3}}\right| = 9\,, \quad \left|\frac{\partial g(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3)}{\partial x_2}\right| = \left|\frac{2\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2}{\sqrt{\widetilde{x}_3}}\right| = 12\,, \quad \left|\frac{\partial g(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3)}{\partial x_3}\right| = \left|\frac{\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2}{2\sqrt{\widetilde{x}_3^3}}\right| = 9\,.$$

que substituint a l'error propagat ens dóna $|\Delta g| \approx 9 \cdot 0.1 + 12 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.1 = 4.2$ i pertant $y = 18 \pm 4.2$.

La dada que més contribueix és x_2, motiu tant ϵ_2 com $\left|\dfrac{\partial g(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3)}{\partial x_2}\right|$ són molt més grans que per a les altres dades.

2 Considereu el mètode iteratiu següent:

$$x_{n+1} = x_n - \lambda(x_n^3 - x_n^2 - x_n - 1)\,.$$

(a) Per a $1.5 \le x_0 \le 2$, estudieu la convergència del mètode a l'arrel real de $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ sense calcular les iteracions en `Matlab` a partir del teorema de convergència. *(4punts)*

`Resposta`

`El mètode iteratiu` $x^{n+1} = g(x^n)$ `és convergent si` $|g'(\alpha)| < 1$ `per a qualsevol` x^0 `de l'entorn de l'arrel` α `tal que` $|g'(x^0)| < 1$.
`En el nostre cas,` $g(x)$ `es correspon a` $g(x) = x - \lambda(x^3 - x^2 - x - 1)$. `L'expressió simplificada de la funció derivada és`

$$g'(x) = 1 - \lambda(3x^2 - 2x - 1)\,.$$

`La condició` $|g'(x^0)| < 1$ `resulta que`

$$|1-\lambda(3(x^0)^2-2x^0-1)| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1-\lambda(3(x^0)^2-2x^0-1) < 1 \Leftrightarrow 0 < \lambda(3(x^0)^2-2x^0-1) < 2\,.$$

(b) Per a $1.5 \le x_0 \le 2$ donat, doneu un l'interval per a λ que asseguri la convergència del mètode. *(2punts)*

Resposta

Del fet que $3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$ per a $1.5 \leq x_0 \leq 2$ és una funció positiva i creixent , resulta que

$$0 < \lambda(3(x^0)^2 - 2x^0 - 1) < 2 \Leftrightarrow \lambda \in \left(0, \frac{2}{3(x^0)^2 - 2x^0 - 1}\right) .$$

(c) Preneu $\lambda = 1/13$. Obteniu el punt fix amb un mínim de 8 decimals correctes. Doneu el punt inicial i els criteris d'aturada. Presenteu els resultats en una taula. *(4punts)*

Resposta

```
lambda = 1/13, resulta 1<x^0<3.352
alpha =    1.83928675521416
taula =      x^n            |x^n-x^(n-1)|        |f(x^n)|
1.845451923076923   0.004548076923077   0.033897604420609
1.842844415044569   0.002607508032354   0.019518885279589
1.841342962330754   0.001501452713815   0.011267290551325
1.840476247672960   0.000866714657794   0.006513338552828
1.839975221630435   0.000501026042525   0.003768296600682
1.839685352661151   0.000289868969283   0.002181186916767
1.839517569052169   0.000167783608982   0.001262874055720
1.839420424894037   0.000097144158132   0.000731301165990
1.839364170958192   0.000056253935845   0.000423518585910
1.839331592605429   0.000032578352762   0.000245285476164
1.839312724491878   0.000018868113551   0.000142064183746
1.839301796477744   0.000010928014134   0.000082282055418
1.839295467088866   0.000006329388878   0.000047657379727
1.839291801136579   0.000003665952287   0.000027603095869
1.839289677821512   0.000002123315067   0.000015987734798
1.839288447995758   0.000001229825754   0.000009260127177
1.839287735678283   0.000000712317475   0.000005363489971
1.839287323102131   0.000000412576152   0.000003106549569
1.839287084136780   0.000000238965352   0.000001799323584
1.839286945727273   0.000000138409507   0.000001042174290
1.839286865560020   0.000000080167253   0.000000603630945
1.839286819126871   0.000000046433150   0.000000349625152
1.839286792232628   0.000000026894242   0.000000202504118
1.839286776655388   0.000000015577240   0.000000117291101
1.839286767632996   0.000000009022392   0.000000067935422
```

```
1.839286762407195   0.000000005225802   0.000000039348437
1.839286759380392   0.000000003026803   0.000000022790755
1.839286757627257   0.000000001753135   0.000000013200486
1.839286756611835   0.000000001015422   0.000000007645769
```

Prenent $x^0 = 1.85$, la successió $|f(x^n)|$ és convergent a 0, i la successió x^n convergeix a un valor fix. Els criteris d'aturada són $tolx = tolf < 0.00000001$.

3 Per a les dades següents:

X	0	0.15	0.31	0.5	0.6	0.75
Y	1.0	1.004	1.031	1.117	1.223	1.422

a) Calculeu la recta que millor ajusta per mínims quadrats. Dóna l'error quadràtic mínim.
Cal explicar el mètode que escolliu, les matrius usades i tots els càlculs que es fan. *(5punts)* Resposta

Notem l'equació de la recta per $y = a_0x + a_1$, llavors la matriu del sistema A, és

```
A =
0           1
0.15        1
0.31        1
0.5         1
0.6         1
0.75        1
```

És un sistema sobredeterminat, incompatible i el rang de la matriu A Ã©s 2, podem trobar una solució per mínims quadrats, les equacions normals són $A'Ax = A'b$, on $b = Y$, $B = A'A$ i $c = A'b$. Aquestes matrius són

```
A'A =
|  1.2911          2.31|        c = [ 2.829, 6.797 ]'
|  2.31            6.0 |
```

La solució del mètode és $y = 0.5281x{+}0.92951$ i l'error quadràtic és $E_1 = 0.15674$

b) Calculeu el polinomi interpolador de grau 5 de tots els valors de la taula. *(5punts)*
Cal detallar la taula de diferències dividides i tots els càlculs que es fan. Resposta

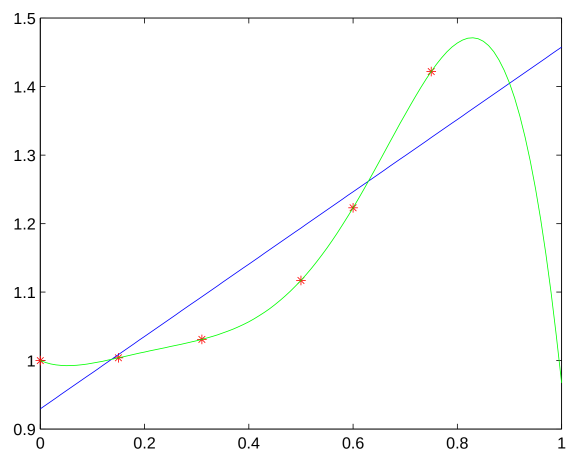
La taula de diferències dividides és

```
taula =
0         1          0.026667     0.45833      0.70551     3.577      -16.297
0.15      1.004      0.16875      0.81109      2.8517     -8.6457           0
0.31      1.031      0.45263      2.0944      -2.3357        0             0
0.5       1.117      1.06         1.0667         0           0             0
0.6       1.223      1.3267         0            0           0             0
0.75      1.422      0              0            0           0             0
pd =
-16.297          29       -16.622       4.2054      -0.31979            1
```

`i el polinomi és` $p(x) = -16.297x^5 + 29x^4 - 16.622x^3 + 4.2054x^2 - 0.31979x + 1$

c) Representa gràficament les dades (punts), la paràbola (blau) i el polinomi (verd) en un mateix gràfic. *(5punts)*

Cal escriure el codi i mostrar el grÃ fic al professor vigilant.



Exercici 3c Punts, paràbola i polinomi de grau 5

d) Doneu valors aproximats de $f'(0.5)$ i $f''(0.5)$ a partir de les dades de la taula prèvia i fent ús de fórmules centrades. *(5punts)*

Cal explicar el mètode que escolliu i tots els càlculs que es fan.

`Resposta Per a fórmules centrades ens falten dades,`

$$f'(0.5) \approx \frac{f(0.6) - f(0.4)}{0.2}, \qquad f''(0.5) \approx \frac{f(0.6) - 2f(0.5) + f(0.4)}{0.01}$$

`En aquest cas el millor potser seria derivar el polinomi interpolador i substituir.`

$$f'(0.5) \approx p'(0.5) = 0.82678\,, \qquad f''(0.5) \approx p''(0.5) = 4.8045\,.$$