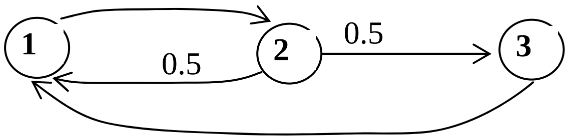
Diplomatura d'Estadística. I.O.E.
Examen Final Juny 2008

P1. (2 punts) Per a la cadena de Markov que es mostra el vector de probabilitats inicials és el p(0)=(1,0,0):



Es demana:

a) classes i periodicitat.
b) Probabilitats d'estat estacionari
c) Nombre mig de vegades que es visita l'estat 1 durant les 3 primeres transicions
d) Nombre mig de transicions fins visitar l'estat 3 per primera vegada

P2. (2,5 punts) En una població hi viuen famílies de 2, 3 i 4 persones. Els individus d'una mostra molt nombrosa declaren pertanyer a una família de 2 components el 10%, a una família de 3 components el 50% i la resta, a una família de 4 components.

a) calculeu la distribució de probabilitats de la variable grandària familiar.
b) Triada una família a l'atzar quina és la probabilitat de que estuigui composada per més de dos individus.

El Departament de Sanitat ha de fer uns controls sanitaris en un barri on hi viuen 20 famílies i hi assigna 20 metges els quals atenen un a cada família. El temps d'atenció de cada metge a cada famiia és proporcional al nombre de persones que composen la família (1 hora/persones)

c) En cas de que els metges només hi puguin dedicar com màxim 1h, quin és el nombre mig de persones que quedarien desateses.
d) En cas de que puguin atendre a tots els membres de la unitat familiar, quin és el temps mig en el que tots 20 metges hauran acabat la inspecció.

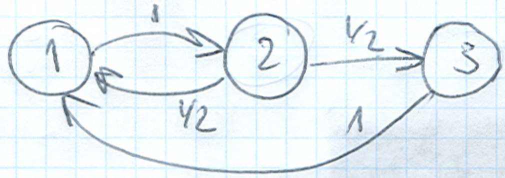
P3) (5,5 punts) Un aparcament disposa de capacitat per a vint places. Les arribades es produeixen de forma poissoniana a raó de un vehicle cada cinc minuts. El temps de permanència està distribuït exponencialment d'esperança cinc minuts. Es demana:

a) Model de cues a emprar per modelitzar el nombre de vehicles present al parking.
b) Distribució de probabilitats en estat estacionari.
c) Nº mig de vehicles presents al parking.
d) Temps mig per vehicle de permanència al parking.

Els qui no troben lloc per aparcar al parking de vint places tenen una segona oportunitat en una plaça no massa lluny d'enllà.

e) Quina és la probabilitat de poder aparcar en aquesta plaça aïllada?
f) Quina és la probabilitat de no poder aparcar en absolut?
g) Quants vehicles per hora no poden aparcar en absolut?

P1)



$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) 1 classe aperiodica

b) $P^T \pi = \pi$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5/4 & -1/4 \end{array}\right]$$

$\pi_1 = 2/5$
$\pi_2 = 2/5$
$\pi_3 = 1/5$

c) $p_{11}^{(1} + p_{11}^{(2} + p_{11}^{(3} = 0 + 1/2 + 1/2 = 1$

d)

$$\begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

P2) $f_W(u) = \dfrac{u\, f_Z(u)}{E[Z]}$ Z grandària familiar
W " segons mostra.

a) Equacions que es deriven de la relació anterior

$f_i = f_Z(u_i)$

$u_i = i = 2,3,4$

$$0'1 = \frac{2 \cdot f_2}{2f_2 + 3f_3 + 4f_4}$$

$$0'5 = \frac{3 \cdot f_3}{2f_2+3f_3+4f_4} \quad , \quad 0'4 = \frac{4 \cdot f_4}{2f_2+3f_3+4f_4}$$

$$0'2 f_2 + 0'3 f_3 + 0'4 f_4 = 2 f_2$$
$$f_2 + 1'5 f_3 + 2 f_4 = 3 f_3$$
$$0'8 f_2 + 1'2 f_3 + 1'6 f_4 = 4 f_4$$
$$f_2 + f_3 + f_4 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} -1'8 f_2 + 0'3 f_3 + 0'4 f_4 &= 0 \\ f_2 - 1'5 f_3 + 2 f_4 &= 0 \\ f_2 + f_3 + f_4 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} f_2 &= 0'1579 \\ f_3 &= 0'5266 \\ f_4 &= 0'3155 \end{aligned}$$

b) $P(N \geq 3) = P(N=3) + P(N=4) = f_3 + f_4 = 0'8421$

c) Si només poden atendre 1 hora totes les persones quedaran desateses. el nº mig de persones en 20 famílies serà

$$20 \cdot E[Z] = 20(2f_2 + 3f_3 + 4f_4) = 20 \cdot 3'1576 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad = 63'152 - 20 = 43'152 \text{ persones}$$

Si poguéssin atendre 2 hores:

$$20 \cdot E[Z] - 2 \cdot 20 \cdot f_2 = 63'152 - 40 \cdot 0'1579 = \underline{\underline{56'836}}$$

Suposem 1 hora d'atenció per persona

d) t = temps en acabar tots els metges

$P(t=2) = [P(\tau=2)]^{20} = f_2^{20} = 9'28 \cdot 10^{-17}$

$P(t \leq 3) = [P(\tau \leq 3)]^{20} = (f_2 + f_3)^{20} = 5'14 \cdot 10^{-4}$

$P(t \leq 4) = 1$

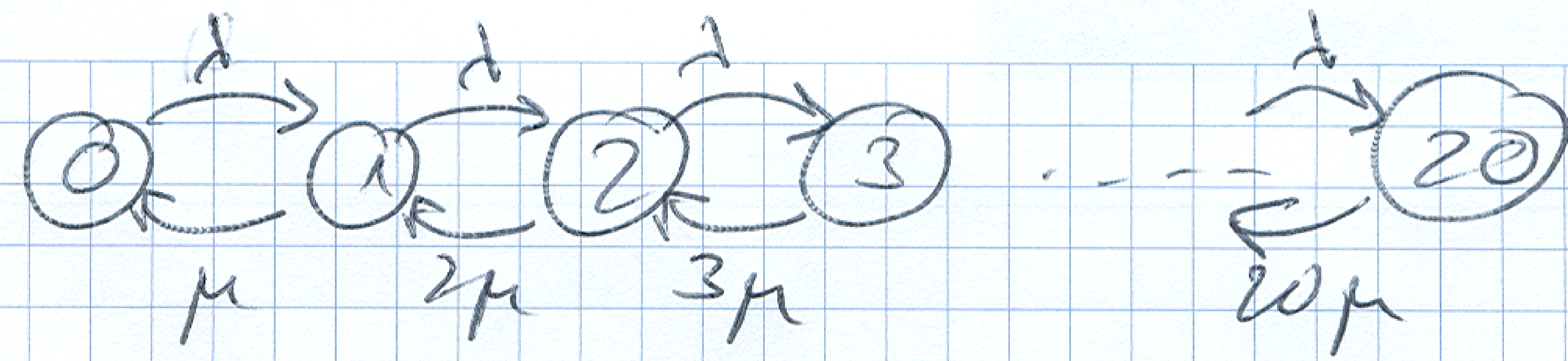
$P(t=3) = P(t \leq 3) - P(t=2) \approx 5'1 \cdot 10^{-4}$

$P(t=4) = P(t \leq 4) - P(t \leq 3) = 0'99949$

$E[t] = 2 \cdot 9'28 \cdot 10^{-17} + 3 \cdot 5'1 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 0'99949 =$

$= \underline{3'99949}$

P3)



a)

$\lambda = 1/12\, h^{-1}$, $\mu = 1/12\, h^{-1}$ $\quad \theta = \lambda/\mu = 1$

model M/M/20/20.

$$P_0 = \left[1 + \sum_{l=1}^{20} c_l\right]^{-1} = \left[1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \cdots \frac{\theta^{20}}{20!}\right]^{-1} \simeq$$

$$\simeq e^{-1} = 0'3678$$

b)

$$P_l = \frac{e^{-1}}{l!} \quad l = 0, 1, \ldots 20$$

c)

$$L = \sum_{l=0}^{20} l P_l = \sum_{l=1}^{20} \frac{l}{l!} e^{-1} = e^{-1}\left[1 + 1 + 1/2! + 1/3! + 1/4! \cdots\right] \simeq 1$$

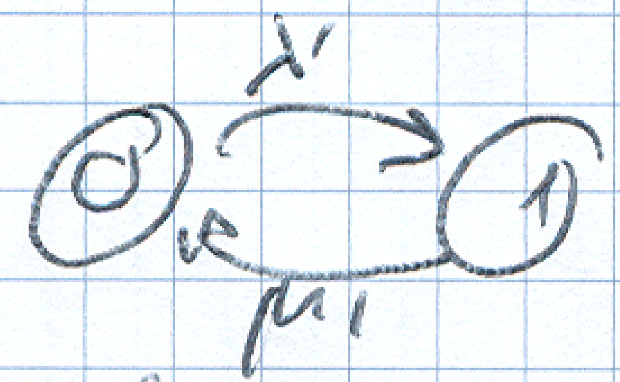
d)

$$W = L/\bar{\lambda}, \quad \bar{\lambda} = \lambda(1 - P_L)$$

$$P_{20} = e^{-1}/20! \simeq 1'7 \cdot 10^{-18} \simeq 0.$$

$W = 1/12\, h$ (tal i com s'esperava)

e)



$$\theta' = \frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{\mu'} = \frac{\lambda - \lambda(1 - P_{20})}{\mu'} =$$

s'adopta $\mu' = \mu = 12 h^{-1}$

$$= \frac{\lambda \cdot P_{20}}{\mu'} = P_{20} = 1'7 \cdot 10^{-18} \simeq 0.$$

f)

$$P_0' = [1 + c_1']^{-1} \simeq 1 \quad \left(c_1' = \frac{\lambda'}{\mu'} = P_{20}\right)$$

$$P_{20} \cdot P_1' = P_{20}(1 - P_0') \simeq 0$$

g)

$$\bar{\lambda}' = \lambda'(1 - P_1) \simeq \lambda' = \lambda \cdot P_{20}$$

taxa d'entrada al 2on parking: $\lambda - \bar{\lambda} - \bar{\lambda}'$

$$\lambda - \bar{\lambda} - \bar{\lambda}' \simeq \lambda - \lambda(1 - P_{20}) - \lambda P_{20} = \underline{\underline{0.}}$$