Estadística Industrial

Dissenys Robustos

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

Planteamiento general de Taguchi. "Filosofía". Función de pérdidas

Conceptos de factor de ruido y de producto robusto

Neutralización de la influencia de los factores de ruido (visión teórica)

Neutralización de la influencia de los factores de ruido a través de la experimentación:
- Matriz producto
- Matriz única

Contenido

Planteamiento general de Taguchi. "Filosofía". Función de pérdidas

Conceptos de factor de ruido y de producto robusto

Neutralización de la influencia de los factores de ruido (visión teórica)

Neutralización de la influencia de los factores de ruido a través de la experimentación:
- Matriz producto
- Matriz única

Genichi Taguchi

Uno de los nombres más conocidos y valorados en el terreno de la Ingeniería de la Calidad

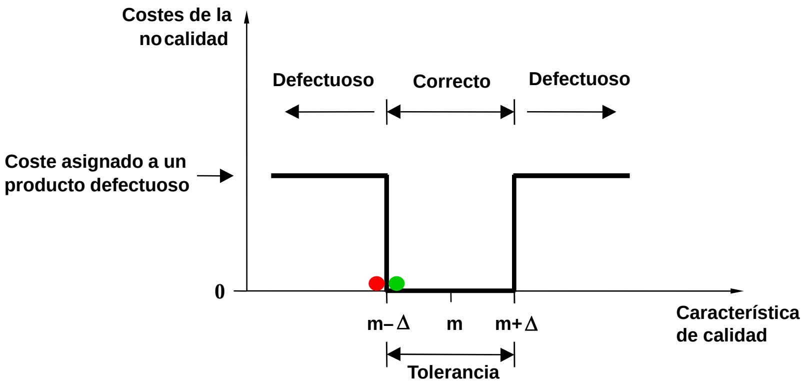
- **Aportación más destacada:**

  Lucha contra la variabilidad en la fase de diseño del producto a través de la experimentación.

- **Aspectos controvertidos de su metodología:**

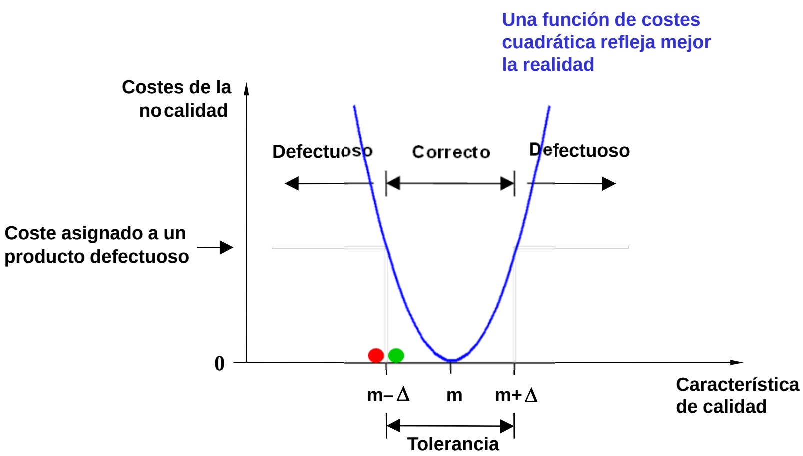
  Análisis de los datos
  Planteamiento experimental

Producto correcto / producto incorrecto: Visión clásica



5. Diseños robustos

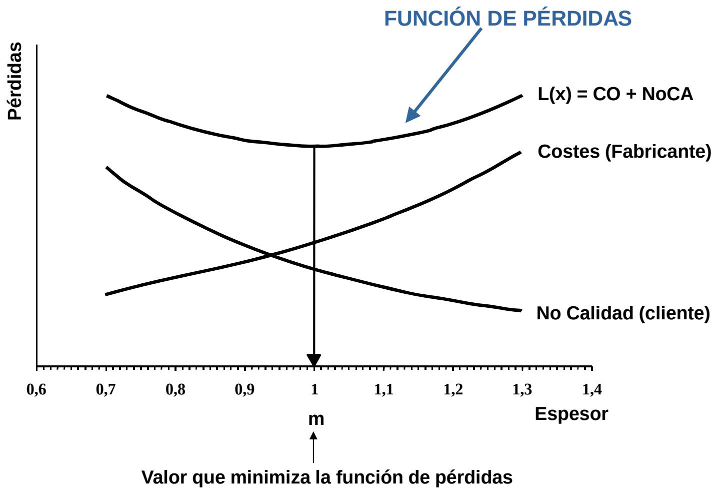
Producto correcto / producto incorrecto: Visión Taguchi



6. Diseños robustos

Función de pérdidas: Valor objetivo para el espesor

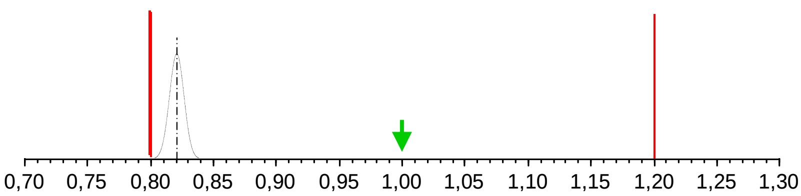
Ejemplo: fabricación de plástico para retractilar



Fabricación en torno a un valor distinto del objetivo

Supongamos: Especificaciones = 1.00 ± 0.20

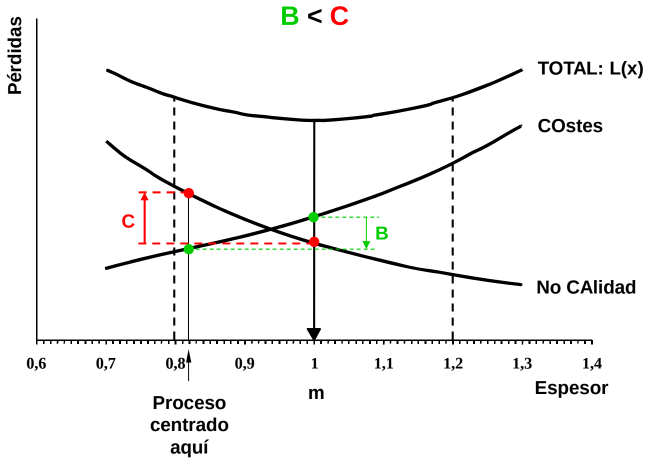
El fabricante puede producir con especificaciones ± 0.02



Por tanto, centrando su proceso en 0,82 fabricará siempre dentro de tolerancias, pero…

Si el proceso no está centrado en m ...

Disminución de costes de producción: B
Aumento de los costes de no calidad: C



... Aumenta el valor de L(X)

"... Mover el valor medio de la producción con el objetivo de disminuir costos es más inmoral que la acción de un ladrón..."

Taguchi y Wu, 1985

Caracterización de L(x)

L(x) es una curva con un mínimo en x = m

Descomponiendo L(x) en serie de Taylor en torno a m:

$$L(x) = L(m) + \frac{L'(m)}{1!}(x-m) + \frac{L''(m)}{2!}(x-m)^2 + \ldots$$

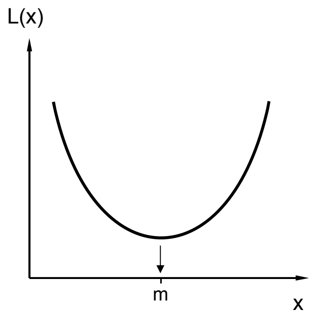
Tomando L(m) = 0, y como L'(m) = 0, despreciando los términos más allá de L''(x):

$L(x) = k\,(x - m)^2$

y es fácil deducir que:

$$E\left[k\,(x-m)^2\right] = k\left[\sigma^2 + (\mu-m)^2\right]$$

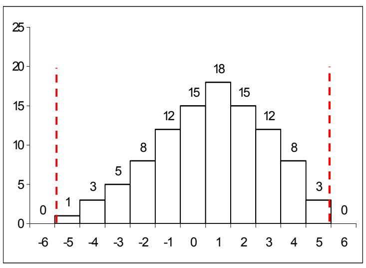
Término de variabilidad — Término de sesgo



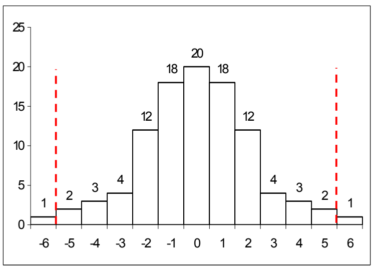
Ejercicio

El valor objetivo es 0, y las tolerancias son ± 5,5.
¿Cuál es el valor de L(x) en ambas situaciones?

A



B



El caso de la masa para hacer bizcochos

(Fuente: G. Box & S. Jones, Technical Report N. 28. Universidad de Madison)

Objetivo:

Diseñar una mezcla para ser vendida en una caja junto con las instrucciones para hacer un bizcocho

Factores de control:

Harina	Ha
Mantequilla	M
Huevo	Hu

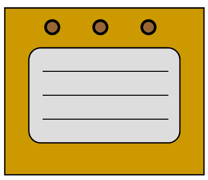
Respuesta:

Puntuación de 1 a 10

13. Diseños robustos

El caso de la masa para hacer bizcochos

Mezcla → Horno → Bizcocho



Temp. = 180 ºC
tiempo = 20 min.

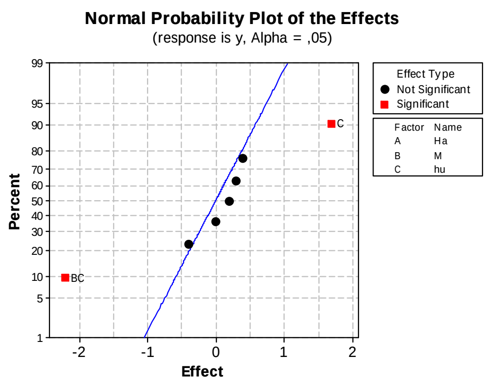
14. Diseños robustos

El caso de la masa... Diseño experimental

Ha	M	hu	Sabor (y)
-	-	-	2,7
+	-	-	2,8
-	+	-	4,8
+	+	-	4,3
-	-	+	6,5
+	-	+	6,8
-	+	+	3,6
+	+	+	4.5

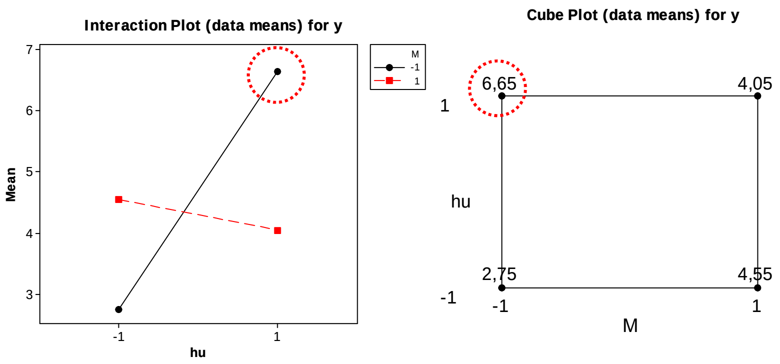
El caso de la masa... Análisis de los resultados

Term	Effect	Coef
Constant		4,500
Ha	0,200	0,100
M	-0,400	-0,200
hu	1,700	0,850
Ha*M	0,000	0,000
Ha*hu	0,400	0,200
M*hu	-2,200	-1,100
Ha*M*hu	0,300	0,150



El caso de la masa... Interpretación de los resultados

Consideramos la interacción Mantequilla-huevo:



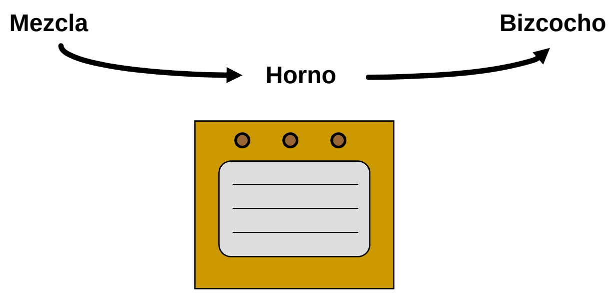
La máxima respuesta se obtiene con la mantequilla a nivel – y el huevo a nivel +

El caso de la masa... Conclusiones

Factor	Nivel
Harina	Indiferente
Mantequilla	–
huevo	+

Pero ...

El caso de la masa para hacer bizcochos

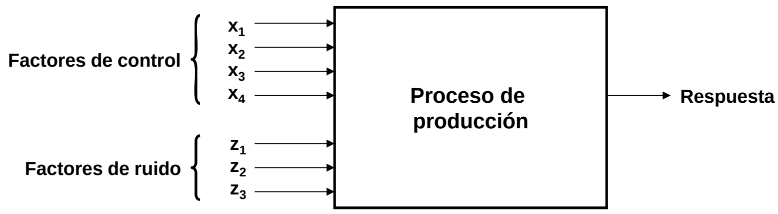


Temp. = 180 ºC
tiempo = 20 min.

© Los autores

19. Diseños robustos

Factores de control y factores de ruido



Producto robusto:

Es aquel cuyas características de calidad se mantienen a un nivel satisfactorio con independencia del valor que tomen los factores de ruido (dentro de un margen razonable)

© Los autores

20. Diseños robustos

Tipos de factores de ruido

Tipos de ruido	División	Ejemplos
Externo	Factores ambientales	Humedad, temperatura, polvo, vibraciones, ...
	Uso del producto	Mantenimiento deficiente, errores “típicos” del usuario, abuso del producto dentro de márgenes razonables, ...
Interno	Cambio en las características de los componentes	Un muelle pierde propiedades elásticas, el valor de una resistencia electrica aumenta ligeramente con el tiempo, ...
	Variabilidad en la fabricación	Varibilidad en las dimensiones o en las cantidades exactas de los componentes

Plan de experimentación

Factores de control			Factores de ruido								
			z1	-	+	-	+	-	+	-	+
			z2	-	-	+	+	-	-	+	+
x1	x2	x3	z3	-	-	-	-	+	+	+	+
-	-	-									
+	-	-									
-	+	-									
+	+	-									
-	-	+									
+	-	+									
-	+	+									
+	+	+									

Area de Resultados

Caso de la masa de bizcocho: Diseño robusto

Nivel de la respuesta

Variabilidad de la respuesta

Receta	Factores de control			Factores de ruido				
				T:	-	+	-	+
	Ha	M	hu	t:	-	-	+	+
1	-	-	-		1,1	5,5	6,1	1,3
2	+	-	-		3,6	4,0	4,1	2,1
3	-	+	-		3,7	5,1	6,7	3,0
4	+	+	-		4,3	6,2	5,7	4,9
5	-	-	+		4,2	6,8	6,5	3,5
6	+	-	+		4,9	6,8	5,8	5,6
7	-	+	+		3,1	6,3	6,4	2,9
8	+	+	+		3,8	5,3	4,9	5,3

23. Diseños robustos

Caso de la masa de bizcocho: Diseño robusto

Nivel de la respuesta

Variabilidad de la respuesta

Receta	Factores de control			Factores de ruido					Resultados		
				T:	-	+	-	+			
	Ha	M	hu	t:	-	-	+	+	Media	s	Log s
1	-	-	-		1,1	5,5	6,1	1,3	3,50	2,67	0,98
2	+	-	-		3,6	4,0	4,1	2,1	3,45	0,93	-0,08
3	-	+	-		3,7	5,1	6,7	3,0	4,63	1,64	0,49
4	+	+	-		4,3	6,2	5,7	4,9	5,28	0,84	-0,17
5	-	-	+		4,2	6,8	6,5	3,5	5,25	1,65	0,50
6	+	-	+		4,9	6,8	5,8	5,6	5,78	0,78	-0,24
7	-	+	+		3,1	6,3	6,4	2,9	4,68	1,94	0,66
8	+	+	+		3,8	5,3	4,9	5,3	4,83	0,71	-0,34

Este tipo de diseños se denominan matriz producto y se utiliza la notación $2^k x 2^p$

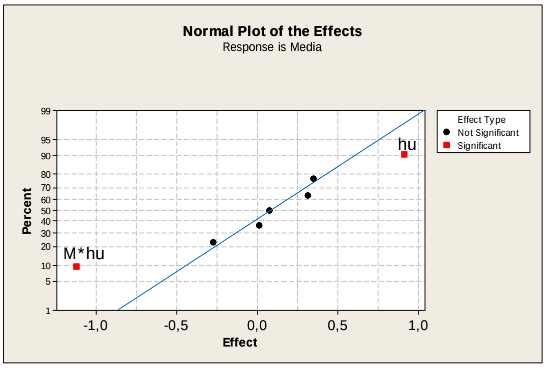
Este es un $2^3 x 2^2$

24. Diseños robustos

Caso bizcocho: Efectos sobre la MEDIA

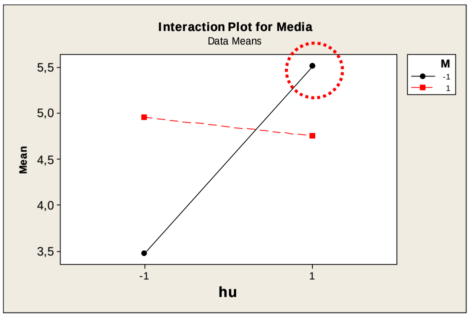
Factorial Fit: Media versus Ha; M; hu

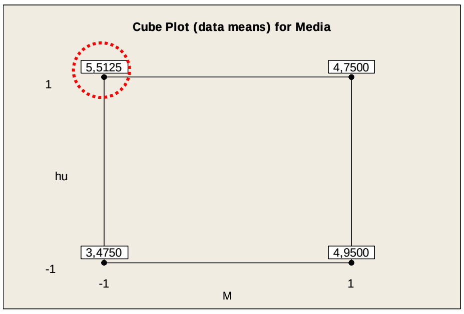
Term	Effect	Coef
Constant		4,6719
Ha	0,3188	0,1594
M	0,3563	0,1781
hu	0,9188	0,4594
Ha*M	0,0813	0,0406
Ha*hu	0,0188	0,0094
M*hu	-1,1188	-0,5594
Ha*M*hu	-0,2688	-0,1344



25. Diseños robustos

Caso bizcocho: Efectos sobre la MEDIA – Interacción Mhu



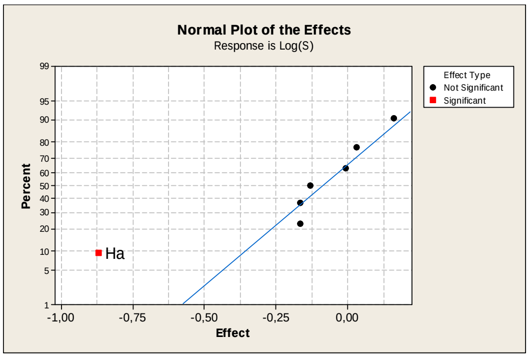


26. Diseños robustos

Caso bizcocho: Efectos sobre la VARIABILIDAD

Factorial Fit: Log(S) versus Ha; M; hu

Term	Effect	Coef
Constant		0,2246
Ha	-0,8671	-0,4336
M	-0,1308	-0,0654
hu	-0,1629	-0,0815
Ha*M	0,0327	0,0164
Ha*hu	-0,0057	-0,0029
M*hu	0,1611	0,0806
Ha*M*hu	-0,1647	-0,0824



Caso bizcocho... Conclusiones

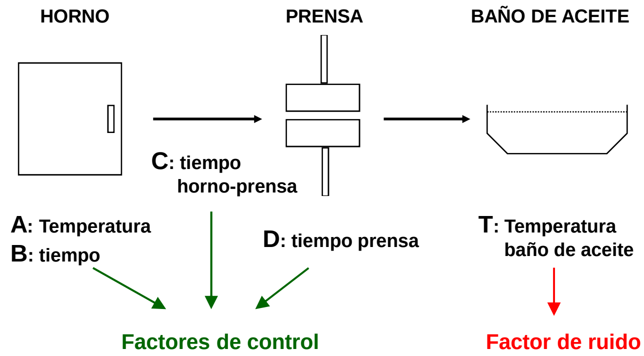
Factor	Nivel	Objetivo
Harina	+	Minimizar variabilidad
Mantequilla	-	Maximizar respuesta
huevo	+	Maximizar respuesta

El caso de las láminas para ballesta. Presentación

(Fuente: Pignatiello y Ramberg, Journal of Quality Technology, Octubre de 1985)

Característica de calidad: ***Longitud en reposo***

Objetivo: ***Longitud 8", mínima variabilidad***



29. Diseños robustos

El caso de las láminas para ballesta. ¿Qué hacer?

La experiencia demuestra que la temperatura del baño de aceite afecta a la respuesta. ***¿Qué hacer?***

Enfoque tradicional:

Instalar los sistemas de regulación necesarios para asegurar que esa temperatura se mantiene dentro de los márgenes convenientes

Enfoque "Taguchi"

1. Intentar que el proceso sea robusto frente a las variaciones de T
2. Si no queda más remedio instalar un sistema de regulación

30. Diseños robustos

El caso de las láminas para ballesta. Experimentar

Seleccionar variables:

Factores de control:
- Temp. del horno (A)
- Tiempo en el horno (B)
- Tiempo horno - prensa (C)
- Tiempo en la prensa (D)

Factor de ruido: Temp. baño de aceite (T)

Elegir niveles

	-	+	unid.
A: Temp. del horno	1840	1880	° F
B: Tiempo en el horno	25	30	seg.
C: Tiempo horno - prensa	12	15	seg.
D: Tiempo prensa	2	3	seg.
T: Temp. baño de aceite	140	160	° F

El caso de las láminas para ballesta. Diseño experimental

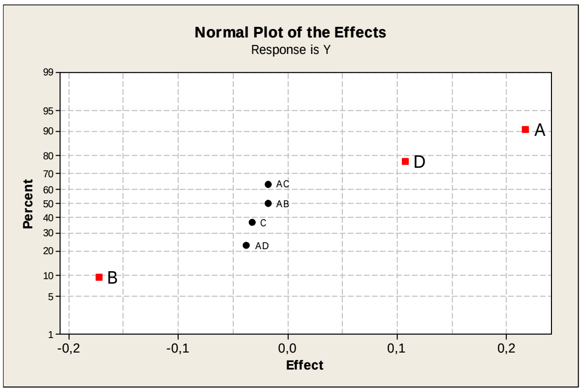
2^{4-1} D=ABC $\qquad 2^1$

Factores control				Factor ruido T		Respuestas		
A	B	C	D	(-)	(+)	Y	s	Log s
-1	-1	-1	-1	7.79	7.29	7.54	0.35	-1.04
1	-1	-1	1	8.07	7.73	7.90	0.24	-1.44
-1	1	-1	1	7.52	7.53	7.53	0.01	-4.95
1	1	-1	-1	7.63	7.65	7.64	0.01	-4.66
-1	-1	1	1	7.94	7.40	7.67	0.38	-0.96
1	-1	1	-1	7.95	7.62	7.78	0.23	-1.48
-1	1	1	-1	7.54	7.20	7.37	0.24	-1.44
1	1	1	1	7.69	7.63	7.66	0.04	-3.28

Es un diseño 2^{4-1}x2^1 con generador D=ABC

El caso de las láminas ... Efectos sobre la media

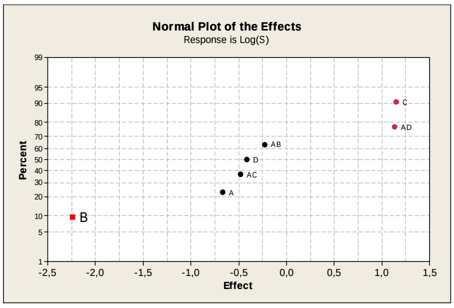
Media	7,64
A	0,22
B	-0,17
C	-0,03
D	0,11
AB+CD	-0,02
AC+BD	-0,20
AD+BC	-0,04

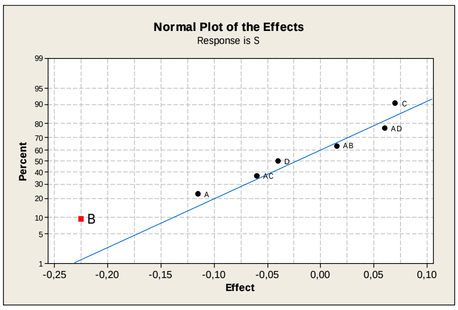


33. Diseños robustos

El caso de las láminas ... Efectos sobre la variabilidad

	S	Log S
Media	0,19	-2,34
A	-0,11	-0,67
B	-0,23	-2,24
C	0,07	1,15
D	-0,04	-0,42
AB+CD	0,02	0,23
AC+BD	-0,06	-0,48
AD+BC	0,06	1,13



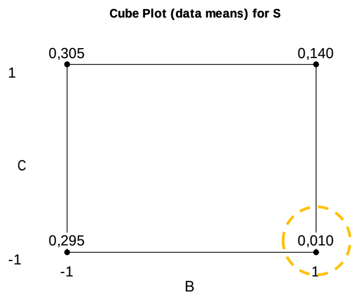


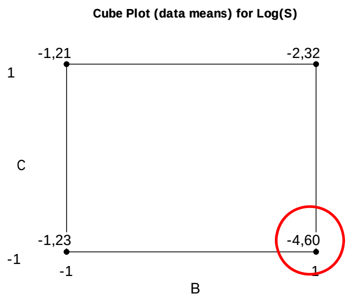
34. Diseños robustos

El caso de las láminas ... Conclusiones

Variabilidad

B (y quizá C, BC)





B + ⇨ **Minimiza la variabilidad**
C -

© Los autores

35. Diseños robustos

El caso de las láminas ... Conclusiones

Media

A: Temp. del horno: 0.22
B: Tiempo en el horno: -0.17
D: Tiempo en la prensa 0.10

GLOBALMENTE

Dejar B (+) y C (-) para minimizar la variabilidad y ajustar el nivel actuando sobre A y D. sabiendo que:

$$Longitud = 7{,}64 + 0{,}11A - 0{,}085B + 0{,}05D$$

Como B (+):

$$Longitud = 7{,}56 + 0{,}11A + 0{,}05D$$

Para conseguir una longitud de 8" habrá que colocar (unidades codificadas):

- **A a nivel (+3)**
- **D a nivel (+2)**

OJO Gran extrapolación

© Los autores

36. Diseños robustos

Un nuevo enfoque

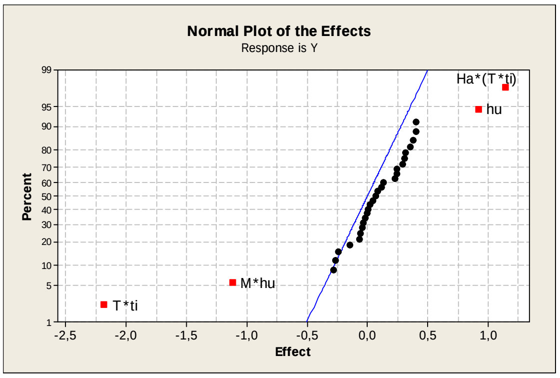
- Utilizar una única matriz de diseño
- Colocar factores de control y factores de ruido en la misma matriz
- Explotar las interacciones entre factores de control y factores de ruido

Ejemplo bizcocho: Análisis conjunto 2^5

Ha	M	hu	T	ti	Y
-1	-1	-1	-1	-1	1,1
1	-1	-1	-1	-1	3,6
-1	1	-1	-1	-1	3,7
1	1	-1	-1	-1	4,3
-1	-1	1	-1	-1	4,2
1	-1	1	-1	-1	4,9
-1	1	1	-1	-1	3,1
1	1	1	-1	-1	3,8
-1	-1	-1	1	-1	5,5
1	-1	-1	1	-1	4,0
-1	1	-1	1	-1	5,1
1	1	-1	1	-1	6,2
-1	-1	1	1	-1	6,8
1	-1	1	1	-1	6,8
-1	1	1	1	-1	6,3
1	1	1	1	-1	5,3
-1	-1	-1	-1	1	6,1
1	-1	-1	-1	1	4,1
-1	1	-1	-1	1	6,7
1	1	-1	-1	1	5,7
-1	-1	1	-1	1	6,5
1	-1	1	-1	1	5,8
-1	1	1	-1	1	6,4
1	1	1	-1	1	4,9
-1	-1	-1	1	1	1,3
1	-1	-1	1	1	2,1
-1	1	-1	1	1	3,0
1	1	-1	1	1	4,9
-1	-1	1	1	1	3,5
1	-1	1	1	1	5,6
-1	1	1	1	1	2,9
1	1	1	1	1	5,3

Term	Effect	Coef
Constant		4,672
Ha	0,319	0,159
M	0,356	0,178
hu	0,919	0,459
T	-0,019	-0,009
ti	0,006	0,003
Ha*M	0,081	0,041
Ha*hu	0,019	0,009
Ha*T	0,406	0,203
Ha*ti	-0,069	-0,034
M*hu	-1,119	-0,559
M*T	0,069	0,034
M*ti	0,244	0,122
hu*T	0,381	0,191
hu*ti	-0,044	-0,022
T*ti	-2,181	-1,091
Ha*M*hu	-0,269	-0,134
Ha*M*T	0,294	0,147
Ha*M*ti	0,119	0,059
Ha*hu*T	0,131	0,066
Ha*hu*ti	0,306	0,153
Ha*T*ti	1,144	0,572
M*hu*T	-0,031	-0,016
M*hu*ti	0,044	0,022
M*T*ti	0,231	0,116
hu*T*ti	0,244	0,122
Ha*M*hu*T	-0,281	-0,141
Ha*M*hu*ti	-0,056	-0,028
Ha*M*T*ti	-0,144	-0,072
Ha*hu*T*ti	-0,006	-0,003
M*hu*T*ti	-0,244	-0,122
Ha*M*hu*T*ti	0,406	0,203

Ejemplo bizcocho: Análisis conjunto 2^5 - Efectos

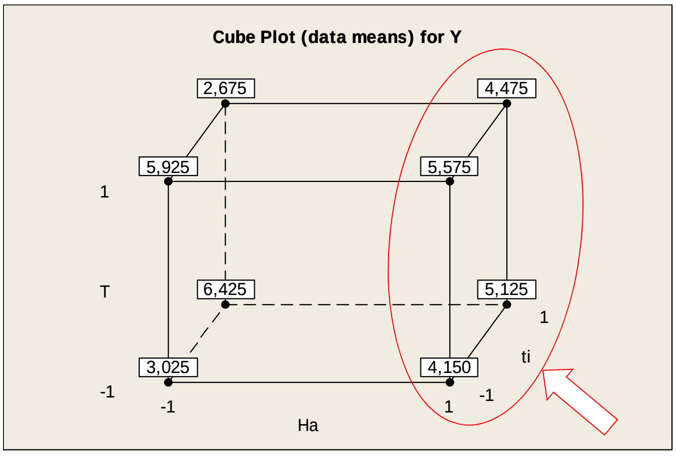


El análisis de la interacción Ha*T*ti permite descubrir el valor de Ha que minimiza la variabilidad.
Es una interacción de 3 porque Temperatura y tiempo en el horno se acoplan actuando como un solo factor (Cocción).

La interacción T*ti (efecto conjunto de Temperatura y Tiempo) refleja ese acoplamiento y no interesa a efectos prácticos (son factores ruido y por tanto no controlables).

Los efectos hu y M*hu ya aparecían en el análisis anterior (naturalmente con los mismos valores)

Ejemplo bizcocho: Análisis conjunto 2^5 - Interpretación



Con la harina a nivel +
la variabilidad de la respuesta
es menor

Neutralización de la influencia del factor ruido

La robustez se consigue gracias a las interacciones entre los factores de control y los factores ruido

Supongamos que la respuesta (Y) depende únicamente de un factor de control (X) y de un factor ruido (Z) que además interaccionan. En ese caso el modelo será:

$$Y = b_0 + b_1X + b_2Z + b_3XZ$$

Y como b_0, b_1, y X son constantes:

$$V(Y) = (b_2 + b_3X)^2\, V(Z)$$

Por tanto si

$$X = -(b_2 / b_3)$$

$$\Downarrow$$

$$V(y) = 0$$

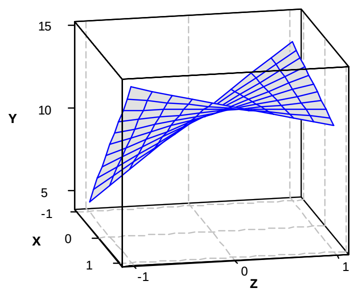
Neutralización de la influencia del factor ruido. Ejemplo

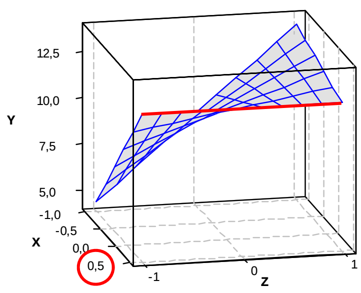
Si el modelo obtenido fuese: Y = 11 + 2 X + 1,5 Z – 3 XZ

Entonces $V(Y) = (1.5 - 3\,X)^2\, V(Z)$ y por tanto haciendo

X = 0.5 se consigue: V(Y) = 0 con Y = 12

Gráficamente:





Ejemplo bizcocho: Análisis conjunto 2^5 - Efectos

El modelo obtenido es

$$Y = 4{,}6 + 0{,}46\ hu - 0{,}56\ M{*}hu + 0{,}57\ Ha{*}T{*}ti - 1{,}09\ T{*}ti$$

Cómo M y hu son constantes

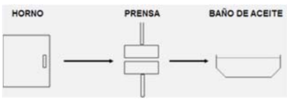
$$V(Y) = (0{,}57\ Ha - 1{,}09)^2\ T{*}ti$$

Con lo que

$V(Y) \approx 0$ cuando $Ha = 2$ (ojo son unidades codificadas y por tanto significa el doble de Harina de la que se ponía en el nivel alto)

43. Diseños robustos

Ejemplo ballesta: Análisis conjunto 2^{5-1}



A	B	C	D	T	Y	S
-1	-1	-1	-1	-1	7,79	
1	-1	-1	1	-1	8,07	
-1	1	-1	1	-1	7,52	
1	1	-1	-1	-1	7,63	
-1	-1	1	1	-1	7,94	
1	-1	1	-1	-1	7,95	
-1	1	1	-1	-1	7,54	
1	1	1	1	-1	7,69	
-1	-1	-1	-1	1	7,29	
1	-1	-1	1	1	7,73	
-1	1	-1	1	1	7,53	
1	1	-1	-1	1	7,65	
-1	-1	1	1	1	7,40	
1	-1	1	-1	1	7,62	
-1	1	1	-1	1	7,20	
1	1	1	1	1	7,63	

Es un diseño 2^{5-1} con resolución IV

Generador: D= ABC ➧ I = ABCD

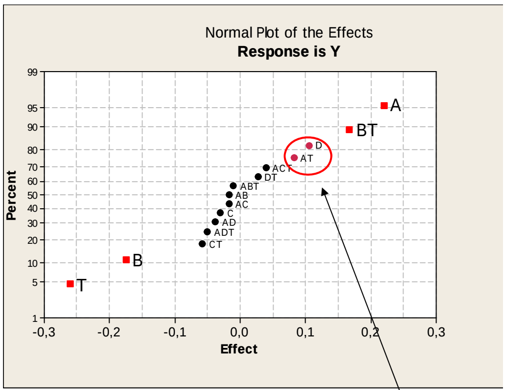
I + ABCD	T + ABCDT
A + BCD	AT + BCDT
B + ACD	BT + ACDT
C + ABD	CT + ABDT
D + ABC	DT + ABCT
AB + CD	ABT + CDT
AC + BD	ACT + BDT
AD + BC	ADT + BCT

A cambio de perder resolución las interacciones en las que está involucrado T están muy bien tratadas (confundidas con interacciones de orden superior).

44. Diseños robustos

Ejemplo ballesta: Análisis conjunto 2^{5-1}- Efectos

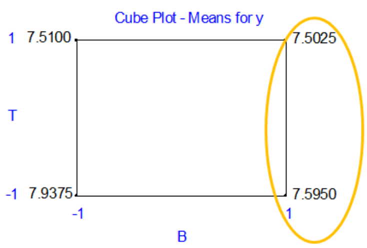
Term	Effect	Coef
Constant		7,6363
A	0,2200	0,1100
B	-0,1750	-0,0875
C	-0,0300	-0,0150
D	0,1050	0,0525
T	-0,2600	-0,1300
A*B	-0,0175	-0,0087
A*C	-0,0175	-0,0088
A*D	-0,0375	-0,0188
A*T	0,0825	0,0412
B*T	0,1675	0,0838
C*T	-0,0575	-0,0288
D*T	0,0275	0,0137
A*B*T	-0,0100	-0,0050
A*C*T	0,0400	0,0200
A*D*T	-0,0500	-0,0250

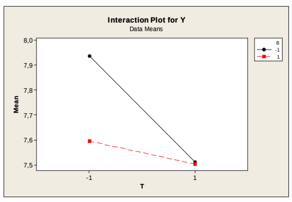


dudosos

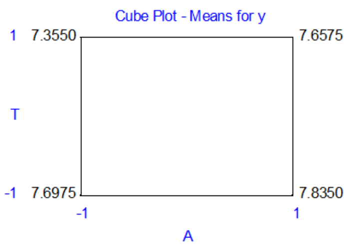
Los efectos significativos no tienen
confusiones importantes (en principio)

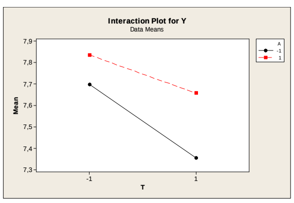
Ejemplo ballesta: Análisis conjunto 2^{5-1}- Interpretación





Menor
variabilidad
con B a nivel +

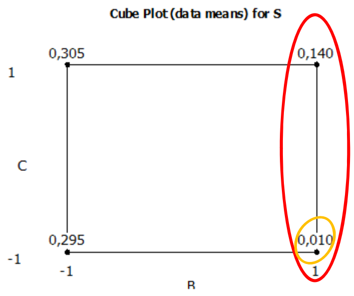




No parece que
A afecte

Ejemplo ballesta: Comparación

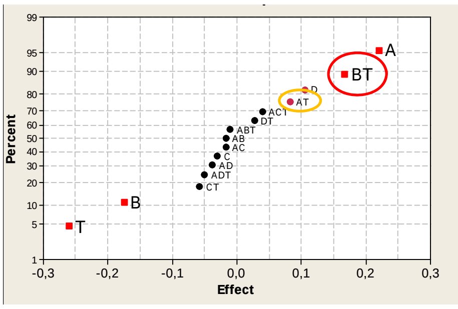
Matriz producto ($2^4 \times 2^1$)



B + ⇨ Minimizes variability
C -

Matriz "conjunta" (2^{5-1})

(Análisis conjunto)



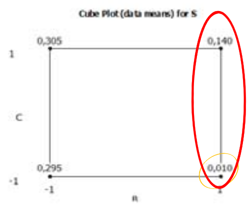
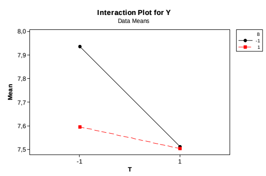
B + ⇨ Minimizes variability
A +

Ejemplo ballesta: Comparación

Nivel

	Matriz Producto	Matriz ampliada
A	0,22	0,22
B	-0,17	-0,17
D	0,11	0,10

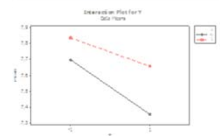
Variabilidad

Matriz producto	Matriz "conjunta"
	

Factor B

Interacción BC

Factor B



Factor A

Ejemplo ballesta: Comparación

Factor	Matriz producto		Matriz Conjunta	
	Nivel	Variab.	Nivel	Variab.
A	✱ ✱ ✱		✱ ✱ ✱	✱
B	✱ ✱ ✱	✱ ✱ ✱	✱ ✱ ✱	✱ ✱ ✱
C		✱		
D	✱ ✱		✱ ✱	

49. Diseños robustos

Diseño, confusiones y aleatorización

- ¿Qué diseños utilizar?
- ¿Qué confusiones se generan?
- ¿Por qué es importante como se realiza la aleatorización?

50. Diseños robustos

Ejemplo del motor de gasolina (I)

Se desea minimizar el consumo de un motor de gasolina. Se pueden realizar 8 experimentos y se consideran tres factores control:

- Dos tipos de carburador (A)
- Dos tipos de bujía (B)
- Dos ratios de compresión (C)

Y un factor ruido:

- Dos tipos de gasolina (P)

¿Qué diseño recomendaría?
¿Cómo se aleatorizaría el experimento?

51. Diseños robustos

Ejemplo del motor de gasolina (II)

2^{4-1} Tiene resolución IV

El generador es: P = ABC (I=ABCP) y por lo tanto el patrón de confusión sería:

A, B, C y P libres de confusión, pero: AB = CP, AC = BP y AP = BC

A	B	C	P
-	-	-	-
+	-	-	+
-	+	-	+
+	+	-	-
-	-	+	+
+	-	+	-
-	+	+	-
+	+	+	+

El experimento se tendría que ejecutar en un orden totalmente aleatorio, esto es: construir 8 motores y probar cada uno con la gasolina que tocase.

52. Diseños robustos

Ejemplo del motor de gasolina (III)

$2^{3-1} \times 2^1$ Tiene resolución III

El generador es: C = AB (I=ABC) y por lo tanto el patrón de confusión sería:

A = BC, B = AC, C = AB y P, CP, BP y AP libres de confusiones

El experimento se puede ejecutar en un orden totalmente aleatorio, esto es: construir 8 motores y probar cada uno con la gasolina que tocase.

A	B	C	P
-	-	+	-
+	-	-	-
-	+	-	-
+	+	+	-
-	-	+	+
+	-	-	+
-	+	-	+
+	+	+	+

			P	
A	B	C	-	+
-	-	+		
+	-	-		
-	+	-		
+	+	+		

También se puede ejecutar de forma que sólo requiera construir 4 motores y probar cada uno con las dos gasolinas. ¡Es lo más lógico!

SPLIT PLOT (parcela dividida)

Elección de diseño

Dependiendo de:

• Los objetivos

• Las restricciones (y el coste) que se tienen al experimentar

Será preferible un tipo o diseño u otro.

Los diseños se escogen atendiendo a:

- El patrón de confusión (atención a las interacciones entre los factores control y los factores de ruido)
- La facilidad o dificultad de cambiar los niveles de los factores (posibilidades de aleatorizar)
- Los efectos que se desea estimar con mayor precisión (en diseños Split- Plot no todos los efectos tienen la misma variabilidad)

Diseño, confusiones y aleatorización

EJERCICIO

Se tienen 3 factores de control (A, B y C) y 3 factores de ruido (P, Q y R) y se desea realizar un experimento con un máximo de 16 experimentos.

- ¿Qué diseños se le ocurren?
- Para cada uno de ellos proporcione el patrón de confusión y la forma de aleatorizarlos

Diseños y confusiones

2^{6-2} Tiene resolución IV

Los generadores según Minitab (o tablas) serían:

Q = ABC y R = BCP (I=ABCQ=BCPR=AQPR) y por lo tanto el patrón de confusión sería:

A, B, C, P, Q y R confundidas con interacciones de orden superior
AB = CQ
AC = BQ
AP = QR
AQ = BC = PR
AR = PQ
BP = CR
BR = CP

Restan dos grados de libertad con interacciones de orden superior

Aleatorización

A	B	C	P	Q	R
-	-	-	-	-	-
+	-	-	-	+	-
-	+	-	-	+	+
+	+	-	-	-	+
-	-	+	-	+	+
+	-	+	-	-	+
-	+	+	-	-	-
+	+	+	-	+	-
-	-	-	+	-	+
+	-	-	+	+	+
-	+	-	+	+	-
+	+	-	+	-	-
-	-	+	+	+	-
+	-	+	+	-	-
-	+	+	+	-	+
+	+	+	+	+	+

Esta sería la matriz de diseño y el experimento se tendría que ejecutar en un orden totalmente aleatorio

57. Diseños robustos

Diseños y confusiones

2^{3-1}x 2^{3-1} Tiene resolución III

Los generadores serían:

C = AB y R = PQ (I=ABC=PQR=ABCPQR) y por lo tanto el patrón de confusión sería:

A = BC B = AC C = AB P = QR Q = PR R = PQ

Todos los efectos principales, tanto de los factores control como de los factores ruido (esto último seguramente no nos preocupa mucho) están confundidos con interacciones de 2

A cambio las interacciones: AP, AQ, AR, BP, BQ, BR, CP, CQ y CR están confundidas con interacciones de orden superior!! Y esas son las interesantes desde el punto de vista de la robustez

58. Diseños robustos

Aleatorización

		P	-	+	-	+
		Q	-	-	+	+
		R=PQ	+	-	-	+
A	B	C=AB				
-	-	+				
+	-	-				
-	+	-				
+	+	+				

Se podría aleatorizar “los factores de control” y para cada combinación realizar en orden aleatorio los 4 experimentos correspondientes a las 4 combinaciones de factores ruido

		A	-	+	-	+
		B	-	-	+	+
		A=BC	+	-	-	+
P	Q	R=PQ				
-	-	+				
+	-	-				
-	+	-				
+	+	+				

Se podría aleatorizar “los factores ruido” y para cada combinación realizar en orden aleatorio los 4 experimentos correspondientes a las 4 combinaciones de factores control

También se podrían aleatorizar totalmente los 16 experimentos (como si fuese un 2^{6-2}, aunque con resolución III y unos generadores más beneficiosos desde el punto de vista de la robustez)

Diseños y confusiones

Para diseñar, en general (aunque puede haber excepciones dependiendo del sistema con el que se experimenta y de los objetivos) la mejor estrategia es utilizar la matriz producto ya que proporciona diseños en los que las interacciones entre factores control y factores ruido no están confundidas con ningún otro efecto.

Luego aleatorizaremos y analizaremos el diseño como nos parezca más conveniente: calculando la S para cada combinación de los factores de control o analizando las interacciones entre los factores de control y los factores ruido.

Análisis según el tipo de diseño

Dependiendo del tipo de diseño y del tipo de aleatorización se presentan tres situaciones diferentes:

• **Matriz conjunta:** diseños completos o fraccionales en los que no se ha distinguido entre los factores de control y los factores ruido (y que por tanto se han realizado en forma totalmente aleatorizada)

• **Matriz producto totalmente aleatorizada:** diseños a base de la matriz producto, separando los factores de control de los factores ruido, y en los que se ha aleatorizado completamente el orden de realización

• **Matriz producto con aleatorización Split-plot:** diseños a base de la matriz producto, separando los factores de control de los factores ruido, y en los que la aleatorización se ha realizado en dos partes, los ***whole-plots*** y los ***sub-plots***

61. Diseños robustos

Análisis. Matriz conjunta

En el ejemplo del "motor de gasolina" sería cuando se planifica un diseño 2^{4-1}

A	B	C	P	Y
-	-	-	-	y_1
+	-	-	+	y_2
-	+	-	+	y_3
+	+	-	-	y_4
-	-	+	+	y_5
+	-	+	-	y_6
-	+	+	-	y_7
+	+	+	+	y_8

El experimento se habría tenido que ejecutar en un orden totalmente aleatorio, esto es: construir 8 motores (las combinaciones de A, B y C) y probar cada uno con la gasolina que tocase (P- o P+)

La única manera posible de analizarlo es a base de estudiar las interacciones entre los factores de control y el factor ruido, naturalmente teniendo en cuenta las confusiones si, como en esta ocasión, es el caso.

Recuérdese que el generador es: P = ABC (I=ABCP) y por lo tanto el patrón de confusión: A, B, C y P libres de confusión, pero: AB = CP, AC = BP y AP = BC

62. Diseños robustos

Análisis. Matriz producto totalmente aleatorizada (I)

En el "motor de gasolina" sería cuando se planifica un diseño $2^{3-1} \times 2^1$ y se ejecuta en un orden totalmente aleatorio

A	B	C	P	Y
-	-	+	-	y_{11}
+	-	-	-	y_{12}
-	+	-	-	y_{13}
+	+	+	-	y_{14}
-	-	+	+	y_{21}
+	-	-	+	y_{22}
-	+	-	+	y_{23}
+	+	+	+	y_{24}

Hay dos opciones:

Se puede analizar a base de estudiar las interacciones entre los factores de control y el factor ruido, naturalmente teniendo en cuenta las confusiones si, como en esta ocasión, es el caso.

El generador es: A = BC (I=ABC) y por lo tanto el patrón de confusión sería:

A = BC, B = AC, C = AB y P, CP, BP y AP libres de confusiones

63. Diseños robustos

Análisis. Matriz producto totalmente aleatorizada (II)

			P			
A	B	C	-	+	Media	Desv. Tipo
-	-	-	y_{11}	y_{21}	$\bar{y}_1$	S_1
+	-	+	y_{12}	y_{22}	$\bar{y}_2$	S_2
-	+	+	y_{13}	y_{23}	$\bar{y}_3$	S_3
+	+	-	y_{14}	y_{24}	$\bar{y}_4$	S_4

Nótese que es el mismo diseño de la transparencia anterior. Un $2^{3-1} \times 2^1$ ejecutado en un orden totalmente aleatorio

Se puede analizar a base de estudiar los efectos sobre el nivel (media) y los efectos sobre la variabilidad (desviación tipo o su logaritmo). Naturalmente teniendo en cuenta las confusiones entre los factores de control si, como en esta ocasión, es el caso. Las confusiones entre los factores ruido (en este caso no las hay) no afectarían para nada el análisis.

Tiene el inconveniente de que los factores control significativos sobre la variabilidad no se sabe frente a que factor ruido actúan

Es lo que hemos planteado en el ejemplo introductorio del pastel

64. Diseños robustos

Variabilidad de los efectos en diseños Split-plot

Considérese el diseño Split-plot $2^1 \times 2^2$ siguiente:

A	B	−	+	−	+
	C	−	−	+	+
−		$y_{1(1)}$	$y_{2(1)}$	$y_{3(1)}$	$y_{4(1)}$
+		$y_{1(2)}$	$y_{2(2)}$	$y_{3(2)}$	$y_{4(2)}$

Es obvio que:

- El efecto de A se estima con la variabilidad "whole-plot"
- Los efectos de B, C y BC con la variabilidad "sub-plot"

¿Con que variabilidad se estiman los efectos AB, AC y ABC?

Variabilidad de los efectos en diseños Split-plot

El modelo para un diseño Split-plot es:

$$Y_{i(j)} = f(x_{ij}) + \varepsilon_{1j} + \varepsilon_{0i(j)} \quad \text{con } i=1, 2, 3, 4 \text{ y } j=1, 2$$

Donde:

- x_{ij} son las filas de la matriz de diseño
- f es una función lineal
- ε_{1j} son los errores whole-plot y tienen varianza σ_1^2
- $\varepsilon_{0i(j)}$ son los errores sub-plot y tienen varianza σ_0^2

La notación i(j) indica que el experimento i se ha realizado dentro del plot j

Variabilidad de los efectos en diseños Split-plot

Escribiendo el diseño en columna y añadiendo las correspondientes a las interacciones para poder aplicar el algoritmo de los signos se tiene:

A	B	C	AB	AC	BC	ABC	$Obs.$
−	−	−	+	+	+	−	$y_{1(1)}$
−	+	−	−	+	−	+	$y_{2(1)}$
−	−	+	+	−	−	+	$y_{3(1)}$
−	+	+	−	−	+	−	$y_{4(1)}$
+	−	−	−	−	+	+	$y_{1(2)}$
+	+	−	+	−	−	−	$y_{2(2)}$
+	−	+	−	+	−	−	$y_{3(2)}$
+	+	+	+	+	+	+	$y_{4(2)}$

Aplicando el modelo $Y_{i(j)} = f(x_{ij}) + \varepsilon_{1j} + \varepsilon_{0i(j)}$ y recordando que los efectos se calculan como la media de la mitad de observaciones menos la media de la otra mitad, para el cálculo de la variabilidad de los efectos podemos prescindir de la parte determinística $f(x_{ij})$

Recordando que la varianza de ε_{1j} es σ_1^2 y la de $\varepsilon_{0i(j)}$ es σ_0^2

Obtener la expresión de la varianza del efecto estimado del factor A

Variabilidad de los efectos en diseños Split-plot

Primero obtenemos la estimación del efecto de A (obviando la parte determinística):

$$\widehat{A} = \frac{1}{4}\left(4\epsilon_{11} - 4\epsilon_{12} + \sum_{j=1}^{4}\epsilon_{0j(1)} - \sum_{j=1}^{4}\epsilon_{0j(2)}\right)$$

Y a continuación aplicamos el operador variancia a esta combinación lineal:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\{\widehat{A}\} &= \frac{1}{16}\left(16\sigma_1^2 + 16\sigma_1^2 + 4\sigma_0^2 + 4\sigma_0^2\right) \\ &= 2\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_0^2,\end{aligned}$$

Esta es la varianza del efecto principal del factor “whole-plot” A

Obtener ahora la expresión de la varianza del efecto estimado del factor B

Variabilidad de los efectos en diseños Split-plot

La estimación de B es:

$$\widehat{\beta} = \frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{4} \pm\epsilon_{0j(1)} - \sum_{j=1}^{4} \mp\epsilon_{0j(2)}\right)$$

Y la varianza de este factor "sub-plot":

$$\begin{aligned}\text{Var}\{\widehat{\beta}\} &= \frac{1}{16}\left(4\sigma_0^2 + 4\sigma_0^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\sigma_0^2,\end{aligned}$$

Resulta obvio que los efectos Sub-plot tienen menos varianza que los efectos "whole-plot".

Examinando de nuevo la matriz de diseño queda claro que para todos los efectos excepto A, los errores ε_1 correspondientes al whole-plot se anulan, por lo que los efectos: B, C, AB, AC, BC y ABC tienen todos varianza

$$\frac{1}{2}\sigma_0^2,$$

69. Diseños robustos

Variabilidad de los efectos en diseños Split-plot

En general para un diseño split-plot $2^{k-p} \times 2^{q-r}$ las varianzas son:

- Para los 2^{k-p} -1 efectos (y sus confusiones) del whole-plot:

$$\begin{aligned}\text{Var}\{\widehat{A}\} &= \text{Var}\left\{\frac{2}{N}\left(2^{q-r}\sum_{j=1}^{2^{k-p}} \pm\epsilon_{1j} + \sum_{j=1}^{N} \mp\epsilon_{0j}\right)\right\}\\ &= \frac{4}{N^2}\left(2^{k-p} \times 2^{2(q-r)}\sigma_1^2 + N\sigma_0^2\right)\\ &= \frac{4}{N}\left(2^{q-r}\sigma_1^2 + \sigma_0^2\right),\end{aligned}$$

Siendo $N = 2^{k-p} \times 2^{q-r}$

- Para los efectos (y sus confusiones) del sub-plot:

$$\begin{aligned}\text{Var}\{\widehat{P}\} &= \text{Var}\left\{\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} \pm\epsilon_{0j} +\right\}\\ &= \frac{4}{N^2}N\sigma_0^2\\ &= \frac{4}{N}\sigma_0^2.\end{aligned}$$

70. Diseños robustos

Análisis. Matriz producto con aleatorización Split-plot

			P	
A	B	C	-	+
-	-	-	$y_{1(1)}$	$y_{2(1)}$
+	-	+	$y_{1(2)}$	$y_{2(2)}$
-	+	+	$y_{1(3)}$	$y_{2(3)}$
+	+	-	$y_{1(4)}$	$y_{2(4)}$

Un 2^{3-1} x 2^1, se han aleatorizado los experimentos del *whole-plot*. Dentro de cada fila, se ha aleatorizado los experimentos del *sub-plot*.

Dibujar:

- **Los efectos y sus confusiones del whole-plot en ppn.**
- **Los efectos y sus confusiones del sub-plot en ppn.**

Variabilidad de los efectos en diseños Split-plot

Conclusiones y recomendaciones

• En general diseñar y realizar los experimentos para la robustez en split-plot facilita su realización

• Tiene la ventaja de que reduce la variabilidad de los efectos sub-plot y por tanto aumenta la capacidad de detectarlos

• Habitualmente en los estudios de robustez los efectos de interés son: los efectos de los factores control (incluidas sus interacciones) y las interacciones entre estos y los factores ruido; por contra los efectos de los factores ruido y sus interacciones son de escaso interés. Por ello si se puede es recomendable que los factores control sean sub-plot y los factores ruido sean whole-plot

Ejemplo Detergentes

Product Number	Eight Products Produced by *Design* Factors A, B, C, and D				Four Washing Conditions Produced by *Environmental* Factors T, H, and R					
					T: −1	+1	−1	+1		
					H: −1	−1	+1	+1		
					R: +1	−1	−1	+1		
	A	B	C	D	i	ii	iii	iv	Average	Range
1	−1	−1	−1	−1	88	85	88	85	86.5	3
2	+1	−1	−1	+1	80	77	80	76	78.2	4
3	−1	+1	−1	+1	90	84	91	86	87.8	7
4	+1	+1	−1	−1	95	87	93	88	90.8	8
5	−1	−1	+1	+1	84	82	83	84	83.2	2
6	+1	−1	+1	−1	85	84	82	82	83.2	3
7	−1	+1	+1	−1	91	93	92	92	92.0	2
8	+1	+1	+1	+1	89	88	89	87	88.2	2

73. Diseños robustos