UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH Departament d'Estadística i Investigació Operativa	**PROVA DE TEORIA AVALUACIÓ FINAL/ÚNICA** Programació Lineal i Entera, curs 2013-14 2on curs Grau en Estadística UB-UPC
NOM ALUMNE:	

	Temps estimat	Punts	Puntuació			Material d'ajut.
Test	30 min	2 pts	C:	I:		Cap.
Exercici 1	75 min	5 pts				Amb transparències de teoria i calculadora.
Exercici 2	45 min	3 pts				
Total	150min	10 pts				**PROHIBIDA LA PRESÈNCIA DE MÒBILS DURANT LA PROVA**

TEST (2 punts / 30 min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a)**, **b)** i **c)** si és certa (**Sí**) o falsa (**No**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}$:

a) **Sí** / **No** És tancat i afitat.

b) **Sí** / **No** És un polítop

c) **Sí** / **No** Conté alguna solució bàsica factible.

TEST 2. Donat el problema (PL) $\min_{x \in R^n}\left\{c'x \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x \geq 0\right\}$:

a) **Sí** / **No** Les bases de (PL) són $\mathcal{B} = \{1,2\}$, $\mathcal{B} = \{1,3\}$ i $\mathcal{B} = \{2,3\}$.

b) **Sí** / **No** $x_B = [x_1 \quad x_2]'$ és una solució bàsica factible.

c) **Sí** / **No** El políedre associat a (PL) té dos punts extrems.

TEST 3. Donat el problema (PL) $\min_{x \in R^n}\left\{c'x \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ x \geq 0\right\}$:

a) **Sí** / **No** El poliedre de associat a (PL) té tres punts extrems.

b) **Sí** / **No** El poliedre de associat a (PL) té tres solucions bàsiques factibles.

c) **Sí** / **No** Totes les solucions bàsiques de (PL) són factibles.

TEST 4. Donat el problema (PL) $\min_{x \in R^n}\left\{z = x_1 \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ x \geq 0\right\}$ i la base $\mathcal{B} = \{1,4\}$:

a) **Sí** / **No** La direcció bàsica factible associada a la v.n.b. $q = 2$ és $d_B = [-1 \quad -1]'$.

b) **Sí** / **No** La direcció bàsica factible associada a la v.n.b. $q = 2$ és de descens.

c) **Sí** / **No** $\mathcal{B} = \{1,4\}$ és òptima.

TEST 5. Sigui P un políedre no buit en forma estàndard, i sigui x s.b.f. de P amb costos reduïts $r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N$. Llavors:

a) **Sí** / **No** Si $r > 0 \Rightarrow x$ és òptima.

b) **Sí** / **No** Si x és òptima $\Rightarrow r \geq 0$.

c) **Sí** / **No** Si $r = 0 \Rightarrow x$ no és òptima.

TEST 6. Si en un problema (P) amb òptima $\mathcal{B}^*$ es modifica el valor d'un dels coeficients a_{ij} de la matriu de constriccions A:

a) **Sí** / **No** La base $\mathcal{B}^*$ pot perdre la factibilitat dual.

b) **Sí** / **No** La base $\mathcal{B}^*$ pot perdre la factibilitat primal.

c) **Sí** / **No** Sempre podré reoptimitzar amb el símplex primal o dual.

NOM ALUMNE:

TEST 7. En un joc finit de suma zero, el teorema minimax:

a) Sí / No Indica que és possible que per algun dels dos jugadors no existeixi estratègia òptima.

b) Sí / No Indica que és impossible que els dos jugadors tinguin un guany net positiu.

c) Sí / No Assegura que el problema del jugador 1 satisfà que $z_P^* \equiv z_D^*$.

TEST 8. Si un problema (P) és infactible, el seu dual (D):

a) Sí / No Segur que és il·limitat.

b) Sí / No Segur que és infactible.

c) Sí / No No tindrà solució.

TEST 9. Donat el problema primal (P) si una solució bàsica $\mathcal{B}$ és solució bàsica factible dual llavors:

a) Sí / No $r \leq 0$.

b) Sí / No $\mathcal{B}$ és factible primal.

c) Sí / No El vector $\lambda' = c_B' B^{-1}$ dona les coordenades d'un punt extrem del poliedre dual.

TEST 10. Si introduim la modificació $c_i \leftarrow c_i + \phi_{c_i}$amb $\phi_{c_i} \in \Phi_{c_i} = [\phi_{c_i}^{\min}, \phi_{c_i}^{\max}]$:

a) Sí / No El valor de les variables òptimes pot canviar.

b) Sí / No El valor de la funció objectiu pot canviar.

c) Sí / No El valor de les variables dual pot canviar.

TEST 11. Donat un problema de programació lineal entera (PE) de minimització i la seva relaxació lineal (RL) es satisfà:

a) Sí / No $KPE \supseteq KRL$.

b) Sí / No $z_{RL}^* \leq z_{PE}^*$.

c) Sí / No (PE) només té solució òptima si KRL és un polítop.

TEST 12. Donades dues formulacions vàlides (PE1) i (PE2) de (PE), si (PE1) és més forta que (PE2) podem assegurar que:

a) Sí / No $K_{PE1} \subset K_{PE2}$.

b) Sí / No $K_{RL1} \subset K_{RL2}$.

c) Sí / No $(PE1)$ conté més desigualtats vàlides que $(PE2)$.

TEST 13. La formulació ideal (PEI) d'un problema de programació lineal entera (PE):

a) Sí / No Té la mateixa solució òptima que (PE).

b) Sí / No Tots els punts extrems KRLI pertanyen a KPE.

c) Sí / No És la formulació vàlida de (PE) que s'obté en finalitzar l'algorisme de plans de tall de Gomory.

TEST 14. La formulació ideal (PEI):

a) Sí / No És la formulació més forta possible.

b) Sí / No Té associat un polièdre amb punts extrems enters.

c) Sí / No Necessitarà una única ramificació quan s'apliqui B&B.

TEST 15. El tall de Gomory $x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor x_{B(i)}^* \rfloor$ associat a (PE) i x_{RL}^*és una constricció de desigualtat:

a) Sí / No Que no satisfà x_{RL}^*.

b) Sí / No Que no satisfà x_{PE}^*.

c) Sí / No Que defineix una formulació ideal de (PE).

NOM ALUMNE:

EXERCICI 1. (5 punts / 75min / apunts i calculadora / RESPONEU AL MATEIX FULL)

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$
(P)\begin{cases}
\min & 3x_1 & +\boldsymbol{c_2}x_2 & +2x_3 & +4x_4 & \\
\text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & =2 \\
 & & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & =\boldsymbol{b_2} \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{cases}
$$

a) **(1 pt)** Trobeu totes solucions bàsiques té el problema (P), indicant només el conjunt $\mathcal{B}$ associat. Expliqueu clarament i concisa quin és el criteri que heu fet servir per identificar-les.

Criteri:

Bases:

b) **(1pt)** Calculeu el rang de valors possibles per als paràmetres c_2 i b_2 si sabem que la base òptima de (P) és $\mathcal{B}=\{2,4\}$ (amb $B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$).

Rang c_2:

Rang b_2:

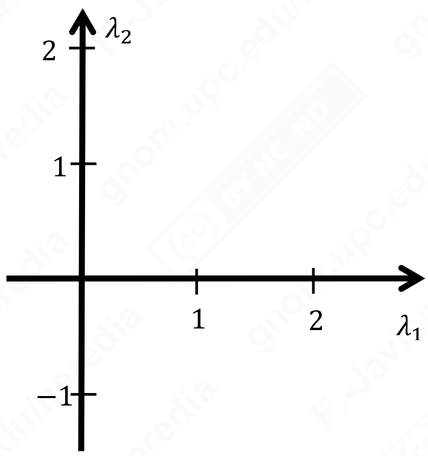
c) **(1pt)** Reoptimitzeu el problema a partir de la base $\mathcal{B}=\{2,4\}$ amb $c_2=-3$ i $b_2=-3$.

Resposta:

NOM ALUMNE:

CONSIDEREU A PARTIR D'ARA EL CAS $c_2 = 1$ i $b_2 = 0$.

d) **(1 pt)** Formuleu el problema dual de (P) i representeu-lo gràficament i indiqueu sobre la gràfica la solució dual òptima.

Formulació:	**Representació gràfica:**
	

e) **(1pt)** Seleccioneu dues solucións bàsiques factibles del problema primal (P). Indiqueu, sense calcular els valor dels costos reduïts, si aquestes dues bases són factibles duals, fent ús del corol·lari del Ta. fort de dualitat i dels resultats de l'apartat anterior.

Resposta:

NOM ALUMNE:

EXERCICI 2. (3 punts / 45min / apunts i calculadora / RESPONEU AL MATEIX FULL)

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases} \min & -x_1 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \leq -1 \\ & x_1 & +x_2 & \leq \dfrac{5}{2} \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, enteres \end{cases}$$

Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de Branch & Cut d'acord amb el següent criteri:

- Afegiu un tall de Gomory a cada node de l'arbre.
- Preneu com a variable de generació de tall i de separació x_1 abans que x_2.
- Resoleu la primera relaxació lineal de cada node gràficament i la resta reoptimitzant amb el símplex dual. Les podeu resoldre-les també totes gràficament, amb una penalització sobre la nota d'un punt.
- En acabar, representeu l'arbre d'exploració

Resposta:

NOM ALUMNE:

NOM ALUMNE:

SOLUCIÓ TEST:

Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)
1	N	N	N	**2**	N	N	N	**3**	S	N	S	**4**	S	S	N	**5**	S	N	N
6	S	S	N	**7**	N	S	S	**8**	N	N	S	**9**	N	N	S	**10**	N	S	S
11	N	S	N	**12**	N	S	N	**13**	S	S	N	**14**	S	S	N	**15**	S	N	N

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

a) **Criteri:** Serà solució bàsica $\mathcal{B}$ qualsevol conjunt de $m=2$ índexos de variables tals que la matriu bàsica associada sigui no singular.

Bases: Analitzant la matriu de coeficients $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ comprovem que totes les possibles combinacions de dues columnes de A tenen determinant diferent de zero. Així doncs, totes les combinacions $\mathcal{B}=\{i,j\}, i=1,2,\dots,4, i<j\le 4$ seran solucions bàsiques.

b) El rang de valors compatible amb l'optimalitat de la base $\mathcal{B}=\{2,4\}$ es aquell que satisfà les condicions d'optimalitat:

Rang $\boldsymbol{b_2}$: un canvi en b_2 només pot fer perdre la factibilitat primal:

$$x_B=B^{-1}b\ge 0\to\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1+\frac{1}{2}b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}\ge 0\Leftrightarrow\boxed{b_2\ge -2}$$

Rang $\boldsymbol{c_2}$: un canvi en c només pot fer perdre la factibilitat dual: $r_N'=c_N'-c_B'B^{-1}A_N\ge 0\to$

$$[3\quad 2]-[c_2\quad 4]\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=[-2c_2-1\quad -c_2-2]\ge 0\Leftrightarrow\boxed{c_2\le -2}$$

c) Si $c_2=-3$ i $b_2=-3$, en base al resultat de l'apartat anterior podem assegurar que $\mathcal{B}=\{2,4\}$ és factible dual infactible primal: s'ha de reoptimitzar aplicant l'algorisme del simplex dual:

- **Símplex dual, 1a iteració:** $\mathcal{B}=\{2,4\}, \mathcal{N}=\{1,3\}$
  - Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p :

$$x_B=\begin{bmatrix}2\\ 1+\frac{1}{2}(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\ngeq 0\Rightarrow p=2,\boxed{B(2)=3\text{ v.b.sortint}}$$

  - Identificació de problema (D) il·limitat :

$$d_{r_N}'=\beta_2A_N=[1/2\quad 1/2]\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=[1\quad 1]\ge 0\Rightarrow(D)\text{ il·limitat, }(P)\text{ infactible. STOP.}$$

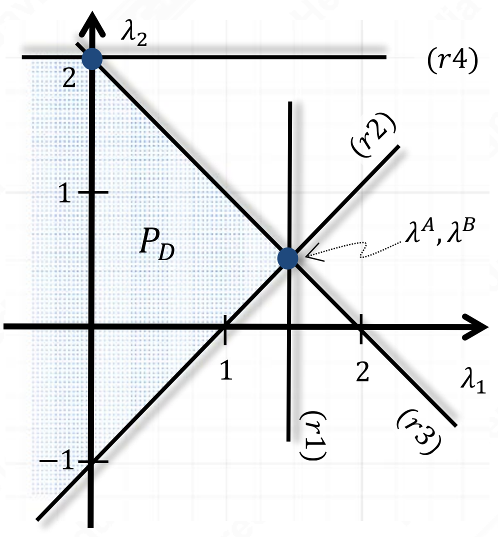
NOM ALUMNE:

d)

Formulació:

$$(D)\begin{cases}\max & 2\lambda_1 \\ \text{s.a.:} & \\ & 2\lambda_1 \qquad\qquad \le 3 \quad (r1)\\ & \lambda_1 \quad -\lambda_2 \le 1 \quad (r2) \\ & \lambda_1 \quad +\lambda_2 \le 2 \quad (r3) \\ & \qquad\quad 2\lambda_2 \le 4 \quad (r4)\end{cases}$$

Representació gràfica:



e) Cal primer trobar dues s.b.f. de (P). Provem las dues primeres s.b.:

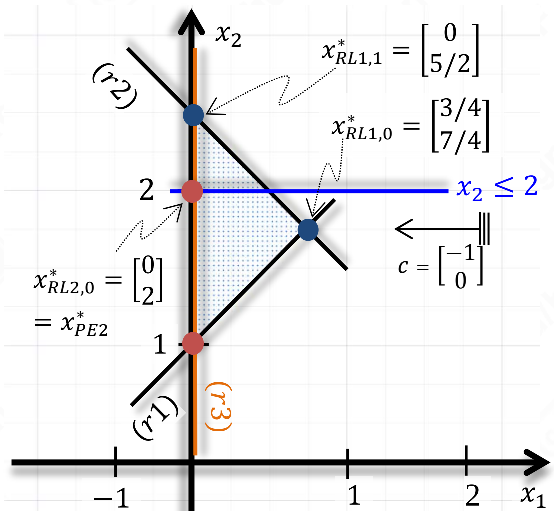
- $\mathcal{B}^A = \{1,2\}$: $Bx_B = b, \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \ge 0 \Rightarrow$ s.b. factible. El valor de les variables duals associat a aquesta base és $\lambda^{A'} = c_B' B^{-1} = [3 \quad 1]\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 0 & -1\end{bmatrix} = [3/2 \quad 1/2]$ factible dual (correspon al vèrtex λ^A de la gràfica anterior).
- $\mathcal{B}^B = \{1,3\}$: $Bx_B = b, \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \ge 0 \Rightarrow$ s.b. factible. El valor de les variables duals associat a aquesta base és $\lambda^{B'} = c_B' B^{-1} = [3 \quad 2]\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = [3/2 \quad 1/2]$ factible dual (correspon al mateix vèrtex λ^A de la base anterior).

SOLUCIÓ EXERCICI 2.

$$(PE1)\begin{cases}\min & -x_1 \\ \text{s.a.:} & \\ (r1) & x_1 \quad -x_2 \quad +x_3 \qquad\qquad = -1 \\ (r2) & 2x_1 \quad +2x_2 \qquad\quad +x_4 \quad = 5 \\ & x_1, \quad x_2 \qquad\qquad\qquad \ge 0, enteres\end{cases}$$

Iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de $(RL1)$ amb un tall de Gomory**:
  - Resolució gràfica de $(RL1,0)$: $x^*_{RL1,0} = [3/4 \quad 7/4]', z^*_{RL1,0} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \underline{z}^*_{PE1} := 0$
    - Tall de Gomory sobre $x^*_{RL1,0}$ associat a x_1:
      - o $\mathcal{B} = \{1,2\}, B = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1/2 & 1/4\\ -1/2 & 1/4\end{bmatrix}$



Gràfic apartat b)

NOM ALUMNE:

- $\mathcal{N} = \{3,4\}, A_N = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}1/2 & 1/4\\-1/2 & 1/4\end{bmatrix}$
- $x_1 + \lfloor 1/2 \rfloor x_3 + \lfloor 1/4 \rfloor x_4 \le \left\lfloor\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right\rfloor \to \boxed{x_1 \le 0\ (r3)}$

– Resolució de $(RL1{,}1) = (RL1{,}0) + (r3)$: reoptimització amb el símplex dual a partir de $x^*_{RL1,0} = [x_1, x_2]' = [3/4 \quad 7/4]'$ per addició de $x_1 + x_5 = 0\ (r3) \to a_{m+1} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

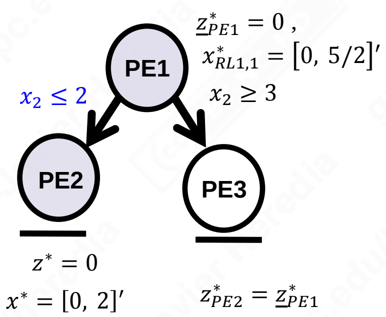
- $\mathcal{B} = \{1,2,5\},\ B^{-1} = \begin{bmatrix}B^{-1} & 0\\ -a_{\mathcal{B}m+1}B^{-1} & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2 & 1/4 & 0\\-1/2 & 1/4 & 0\\-1/2 & -1/4 & 1\end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix}3/4\\7/4\\-3/4\end{bmatrix}.$
- $\mathcal{N} = \{3,4\}, A_N = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} r' = [0 \quad 0] - [-1 \quad 0]\begin{bmatrix}1/2 & 1/4\\-1/2 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \left[\overbrace{1/2}^{r_3} \quad \overbrace{1/4}^{r_4}\right] \ge 0$
- **Símplex dual, 1a iteració**: $\mathcal{B} = \{1,2,5\}, \mathcal{N} = \{3,4\}$
  - Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p :
  $$x_B = \begin{bmatrix}3/4\\7/4\\-3/4\end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 5 \text{ v.b.sortint}}$$
  - Identificació de problema (D) il·limitat :
  $$d'_{r_N} = \beta_3 A_N = [-1/2 \quad -1/4 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} = [-1/2 \quad -1/4] \ngeq 0$$
  - Sel. v.n.b. d'entrada q:
  $$\theta^*_D = \min\left\{-r_j/d_{r_{N_j}} : j \in \mathcal{N}, d_{r_{N_j}} < 0\right\} = \min\left\{\frac{-1/2}{-1/2}, \frac{-1/4}{-1/4}\right\} = 1 \Rightarrow \boxed{q = 3}$$
  - Canvi de base i actualitzacions:
  $$\mathcal{B} \leftarrow \{1,2,3\}, B = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\2 & 2 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix} \to Bx_B = b, \begin{cases}x_1 & -x_2 & +x_3 & = & -1\\2x_1 & 2x_2 & & = & 5\\x_1 & & & = & 0\end{cases} \to x_B = \begin{bmatrix}0\\5/2\\3/2\end{bmatrix}$$
- **Símplex dual, 2a iteració: $\mathcal{B} = \{1,2,3\}, \mathcal{N} = \{4,5\}$**
  - Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_B \ge 0 \Rightarrow \boxed{\text{òptim}}$

– $\boxed{x^*_{RL1,1} = [0 \quad 5/2]', z^*_{RL1,1} = 0 \Rightarrow \underline{z}^*_{PE1} := 0}$.

- **Eliminació:** no es pot.
- **Separació:** $x^*_2 = 5/2 \to \begin{cases}(PE2) \overset{\text{def}}{=} (PE1) + (r3) + \boldsymbol{x_2 \le \lfloor 5/2 \rfloor = 2}\\(PE3) \overset{\text{def}}{=} (PE1) + (r3) + x_2 \ge \lceil 5/2 \rceil = 3\end{cases} \to L \leftarrow \{(PE2), (PE3)\}$

Iteració 2: $L = \{(PE2), (PE3)\}, \underline{z}^*_{PE1} = 0, z^* = +\infty$.

- **Selecció**: $(PE2)$.
- **Resolució de $(RL2)$ amb un tall de Gomory**:
  – Resolució gràfica de $(RL2{,}0)$: $x^*_{RL2,0} = [0 \quad 2]', z^*_{RL2,0} = 0$
- **Eliminació:** $x^*_{RL2,0} = [0 \quad 2]' \subset K_{PE2} : x^*_{PE2} = [0 \quad 2]' \Rightarrow$ s'elimina (PE2):
  – $z^* \leftarrow z^*_{PE2} = 0, x^* \leftarrow x^*_{PE2}, L \leftarrow L\backslash\{(PE2)\} = \{(PE3)\}$
  – $z^* = \underline{z}^*_{PE1} = 0 \Rightarrow$s'elimina $(PE3)$: $L \leftarrow L\backslash\{(PE3)\} = \emptyset$



Iteració 3: $L = \emptyset \Rightarrow \boxed{x^*_{PE1} = x^* = [0 \quad 2]',\ z^*_{PE1} = z^* = 0}$