UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

PROVA DE TEORIA AVALUACIÓ FINAL/ÚNICA
Programació Lineal i Entera, curs 2014-15
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM ALUMNE:

	Temps estimat	Punts	Puntuació				
Test	30 min	2 pts	C:	I:			
Exercici 1	75 min	5 pts	a: 1pt	b: 1pt	c: 1pt	d: 1pt	e: 1pt
Exercici 2	45 min	3 pts					
Total	150min	10 pts					

PROHIBIDA LA PRESÈNCIA DE MÒBILS DURANT LA PROVA. PARTICIPAR EN UN CAS DE CÒPIA IMPLICA SUSPENDRE LA PROVA AMB NOTA NUMÈRICA ZERO.

TEST (2 punts / 30 min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a), b)** i **c)** si és certa (**Si**) o falsa (**No**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n | \; Ax = b, x \geq 0\}$:

a) Sí / No És un polítop. (N)

b) Sí / No Conté com a mínim una solució bàsica factible. (N)

c) Sí / No Conté com a mínim una linia. (N)

TEST 2. Donat el problema $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2}\left\{c'x \middle| \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$:

a) Sí / No Si $c = [1 \quad 1]'$ (PL) no té solució òptima. (N)

b) Sí / No Si $c = [1 \quad 0]'$ (PL) no té solució òptima. (N)

c) Sí / No Si $c = [0 \quad 1]'$ (PL) no té solució òptima. (S)

TEST 3. L'embolcall convex del conjunt finit de vectors $x^1, x^2, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$, $CH(x^1, \dots, x^k)$:

a) Sí / No És el conjunt de combinacions lineals de $x^1, x^2, \dots, x^k$. (N)

b) Sí / No És un politop. (S)

c) Sí / No Si $x^1, x^2, \dots, x^k$ són els punts extrems d'un políedre P, llavors $CH(x^1, \dots, x^k) \equiv P$. (N)

TEST 4. Considerem la forma estàndard del següent problema

$(PL)\ min_{x\in R^2}\left\{-2x_2 \;\middle|\; \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} ; x \geq 0\right\}$ i la s.b.f. $x = [1 \quad 0]'$ amb $\mathcal{B} = \{1,4\}$:

a) Sí / No $d = [-1 \quad 0]'$ és una direcció bàsica sobre $\mathcal{B}$. (S)

b) Sí / No $d = [-1 \quad 0]'$ és una direcció bàsica de descens sobre $\mathcal{B}$. (N)

c) Sí / No $d = [0 \quad 1]'$ és una direcció bàsica de descens sobre $\mathcal{B}$. (S)

TEST 5. Considereu l'expressió de la longitud de pas màxima $\theta^* = \max\{\theta \geq 0 | x + \theta d \geq 0\}$ de l'algorisme del símplex primal

a) Sí / No θ^* sempre serà ≥ 0 si d és una direcció bàsica. (N)

b) Sí / No θ^* només serà ≥ 0 si d és una direcció bàsica de descens. (N)

c) Sí / No Si $d_B \geq 0$ llavors $\theta^* = 0$. (N)

TEST 6. Segons el teorema que estableix les condicions d'optimalitat de les solucions bàsiques factibles:

a) Sí / No Si x és s.b.f. òptima llavors $r \geq 0$. (N)

b) Sí / No Si x és s.b.f. òptima no degenerada llavors $r \geq 0$. (S)

c) Sí / No Si $r \geq 0$ llavors x és s.b.f. òptima. (S)

NOM ALUMNE:

TEST 7. Si en acabar la fase I del símplex observem que la base òptima $\mathcal{B}_I^*$ conté variables artificials:

a) Sí / No El problema (PL) és infactible. (N)

b) Sí / No El problema (PL) és factible i la base $\mathcal{B}_I^*$ és una s.b.f. primal del problema (PL). (N)

c) Sí / No El problema (PL) és factible i la base $\mathcal{B}_I^*$ és una s.b.f. degenerada de (PL_I). (S)

TEST 8. El nombre d'teracions de l'algorisme del símplex per a resoldre un problema de n variables i m constriccions:

a) Sí / No Sabem que es pot expressar com un polinomi de n i m. (N)

b) Sí / No En la pràctica s'aproxima al nombre de variables del problema n. (N)

c) Sí / No En la pràctica s'aproxima al nombre de constriccions del problema m. (S)

TEST 9. La matriu de guanys A d'un joc finit de suma zero:

a) Sí / No És quadrada. (N)

b) Sí / No Té files i columnes associades a estratègies pures. (S)

c) Sí / No Té elements que repressanten els guanys del jugador 1. (S)

TEST 10. D'acord amb el Ta. feble de dualitat:

a) Sí / No Si (P) és infactible $\Rightarrow$ (D) és il·limitat. (N)

b) Sí / No Si (P) és il.limitat $\Rightarrow$ (D) és infactible. (S)

c) Sí / No Si λ^* i x^* són òptims primal i dual respectivament, llavors $\lambda^{*\prime} b = c' x^*$. (N)

TEST 11. Si el valor del terme independent b_j surt fora del seu interval d'estabilitat llavors podem assegurar que:

a) Sí / No La nova solució òptima millorarà sempre el valor de l'actual. (N)

b) Sí / No Es podrà aplicar el símplex dual per a reoptimitzar. (S)

c) Sí / No Alguna variable dual canviarà. (S)

TEST 12. El tall de Gomory $x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor x^*_{B(i)} \rfloor$ associat a (PE) i x^*_{RL}és una constricció de desigualtat:

a) Sí / No Que no satisfà x^*_{PE}. (N)

b) Sí / No Que no satisfà x^*_{RL}. (S)

c) Sí / No Que forma part d'una formulació vàlida de (PE). (S)

TEST 13. Considerem el següent problema (PE) $min_{x \in R^2}\{z_{PE} = x_1 + x_2 \mid x\ binària\}$:

a) Sí / No $x_1 + x_2 \leq 1/2$ és un tall sobre x^*_{RL}. (N)

b) Sí / No $x_1 + x_2 \geq 1/2$ és un tall sobre x^*_{RL}. (S)

c) Sí / No $x_1 + x_2 = 1/2$ és un tall sobre x^*_{RL}. (N)

TEST 14. Donades dues formulacions vàlides $(PE1)$ i $(PE2)$ de (PE), si $(PE1)$ és més forta que $(PE2)$ podem assegurar que:

a) Sí / No $(PE1)$ conté menys desigualtats vàlides que $(PE2)$. (N)

b) Sí / No $K_{RL1} \subset K_{RL2}$. (S)

c) Sí / No $K_{PE1} \subset K_{RL2}$. (S)

TEST 15. Si x_1, x_2 i x_3 representen les variables binàries de selecció d'un projecte, llavors:

a) Sí / No $x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$ imposa que es seleccionaran com mínim dos projectes. (S)

b) Sí / No $x_1 + x_2 \leq 1$ imposa que no es seleccionarà més d'un dels dos projectes 1 o 2. (S)

c) Sí / No $x_2 \geq x_3$ imposa que és seleccionarà x_2 sempre que es seleccioni x_3. (N)

NOM ALUMNE:

EXERCICI 1. (5 punts / 75min / apunts i calculadora / RESPONEU AL MATEIX FULL)

Considereu el següent codi OPTMODEL amb el que es defineix i resol un problema de programació lineal (P):

```
proc optmodel;
var X{1..2} >=0;

min Z = -X[1] + 2*X[2];

con r1: 2*X[1] - 2*X[2] <= 1;
con r2: 2*X[1] + 2*X[2] >= 3;

solve;
print X.sol;
print r1.body r1.dual r2.body r2.dual;
```

[1]	X.SOL
1	1.0
2	0.5

r1.BODY	r1.DUAL	r2.BODY	r2.DUAL
1	-0.75	3	0.25

a) **(1 punt)** Trobeu dues solucions bàsiques factibles primal i dues infactibles primal ($\mathcal{B}$ i x_B).

b) **(1 punt)** Comproveu com la fase I del símplex amb una única variable artificial i aplicat amb la regla de Bland troba una solució factible primal i òptima en dues iteracions.

c) **(1 punt)** Formuleu el problema dual en **forma estàndard**, (D_e) i comproveu que la solució del problema dual que proporciona SAS satisfà les condicions d'optimalitat de (D_e) (factibilitat primal i dual de (D_e).

d) **(1 punt)** Indiqueu quin és el valor mínim del terme b_2, que anomenarem b_2^{min}, que conserva l'optimalitat de la base trobada per SAS.

e) **(1 punt)** Amb l'ajut de l'algorisme del símplex dual indiqueu quina és la solució òptima de (P) si b_2 adopta un valor no negatiu qualsevol per sota del valor mínim b_2^{min} trobat a l'apartat anterior.

EXERCICI 2. (3 punts / 45min / apunts i calculadora / RESPONEU AL MATEIX FULL)

Es vol resoldre el següent problema (PE) amb l'algorisme de ramificació i tall amb la introducció d'un tall de Gomory a cada iteració:

$$(PE)\begin{cases} \min & -x_1 & +2x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ (r1) & 2x_1 & -2x_2 & \leq & 1 \\ (r2) & 2x_1 & +2x_2 & \geq & 3 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0, x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Resoleu el problema (PE) amb l'algorisme de ramificació i tall tenint en compte que:

- Heu de resoldre totes les relaxacions lineal gràficament.
- Heu d'introduïr un tall de Gomory a cada iteració.
- Heu de prendre com a variable de separació x_1 abans que x_2.
- Heu d'explorar primer la branca associada a la fita $x_i \leq \lfloor x^*_{RL_i} \rfloor$.

Podeu usar la següent informació:

- El tall de Gómory introduït a la primera iteració de l'algorisme és $(r3)$: $3x_2 \geq 2$.
- L'òptim del problema relaxat $(RL1{,}1)$ associat al tall de Gomory $(r3)$ és $x^*_{RL1,1} = \begin{bmatrix} 7/6 \\ 2/3 \end{bmatrix}$.

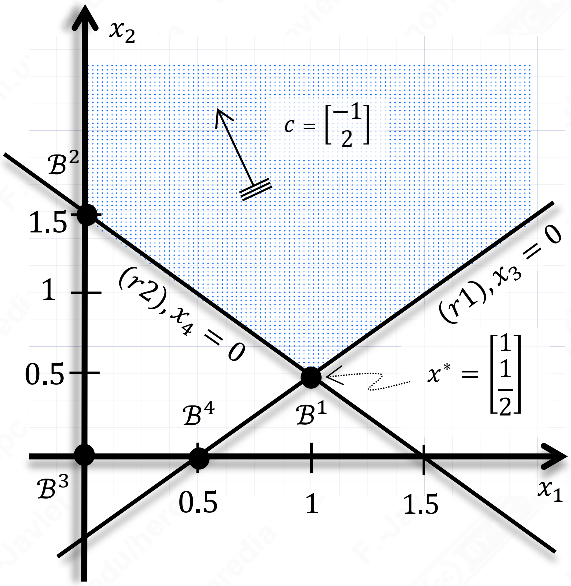
Indiqueu molt clarament les diferents passes de l'algorisme.

NOM ALUMNE:

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

Apartat a)

$$(PL_e)\begin{cases}\min & -x_1 & +2x_2 & & & & \\ \text{s.a.:} & & & & & & \\ (r1) & 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & 1 \\ (r2) & 2x_1 & +2x_2 & & -x_4 & = & 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0\end{cases}$$



	$\mathcal{B}$	x_B
Factibles (P):	$\mathcal{B}^1 = \{1,2\}$	$x_B^1 = \begin{bmatrix}1\\1/2\end{bmatrix}$
	$\mathcal{B}^2 = \{2,3\}$	$x_B^2 = \begin{bmatrix}3/2\\4\end{bmatrix} \leftarrow (r1)$
Infactibles (P):	$\mathcal{B}^3 = \{3,4\}$	$x_B^3 = \begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}\begin{matrix}\leftarrow (r1)\\ \leftarrow (r2)\end{matrix}$
	$\mathcal{B}^4 = \{1,4\}$	$x_B^4 = \begin{bmatrix}1/2\\-2\end{bmatrix} \leftarrow (r2)$

Apartat b)

$$(PL_I)\begin{cases}\min & x_5 & & & & & & \\ \text{s.a.:} & & & & & & & \\ (r1) & 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & = & 1 \\ (r2) & 2x_1 & +2x_2 & & -x_4 & +x_5 & = & 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0\end{cases}$$

1a iteració fase I: $\mathcal{B} = \{3,5\}, B = I, x_B = [1 \quad 3]', \mathcal{N} = \{1,2,4\}, z_I = 3$

- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0] - [0 \quad 1] I \begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\2 & 2 & -1\end{bmatrix} = [-2 \quad -2 \quad 1] \ngeq 0 \to \boxed{q = 1}$$

- Direcció bàsica de descens : $d_B = -B^{-1}A_1 = -I\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. v.b. de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i|d_{B(i)}<0}\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{p = 1, B(1) = 3}$

- Actualitzacions i canvi de base :
  - $x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, x_1 = \theta^* = \frac{1}{2}, x_2 = x_4 = 0,\ z_I := z_I + \theta^* r_q = 3 + \frac{1}{2}(-2) = 2$
  - $\mathcal{B} := \{1,5\},\ \mathcal{N} := \{2,3,4\}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, x_B = [1/2 \quad 2]'.$

2a iteració fase I: $\mathcal{B} := \{1,5\},\ \mathcal{N} := \{2,3,4\},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, x_B = [1/2 \quad 2]',\ z_I = 2.$

- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0] - [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [-4 \quad 1 \quad 1] \ngeq [0] \to \boxed{q = 2}$$

- Direcció bàsica de descens : $d_B = -B^{-1} A_1 = -\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \ngeq 0.$
- Sel. v.b. de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i|d_{B(i)}<0}\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\} = \min\left\{\frac{2}{4}\right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{p = 2, B(2) = 5}$
- Actualitzacions i canvi de base :
  - $x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \theta^* = \frac{1}{2}, x_3 = x_4 = 0,\ z_I := z_I + \theta^* r_q = 2 + \frac{1}{2}(-4) = 0$
  - $\mathcal{B} := \{1,2\},\ \mathcal{N} := \{3,4,5\}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}, x_B = [1 \quad 1/2]'$

3a iteració fase I: $\mathcal{B} := \{1,2\},\ \mathcal{N} := \{3,4,5\}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}, x_B = [1 \quad 1/2]'\ z_I = 0.$

- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0 \quad 1] - [0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1] \geq [0]$$
$$\to \boxed{\text{òptim fase I}}$$

Hem assolit l'òptim de la fase I havent eliminat totes les variables artificials de la base: $\mathcal{B} = \{1,2\}$ s.b.f. inicial del problema $(PL)_e$.

1a iteració fase II:

- $\mathcal{B} = \{1,2\}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}, x_B = [1 \quad 1/2]', \mathcal{N} := \{3,4\}, z = 0$
- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0] - [-1 \quad 2]\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \geq 0 \to \boxed{\text{òptima}}$$

Apartat c)

Problema dual en **forma estàndard** (D_e):

$$(D)\begin{cases} \max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^2} z_D = & \lambda_1 + 3\lambda_2 & \\ s.t.: & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 & \leq -1 \\ & -2\lambda_1 + 2\lambda_2 & \leq 2 \\ & \lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \geq 0 & \end{cases} \xrightarrow[u_3,u_4 \text{ folgues}]{u_1:=-\lambda_1,\ u_2:=\lambda_2} (D_e)\begin{cases} \min\limits_{u\in\mathbb{R}^5} z_D = & u_1 - 3u_2 & \\ s.t.: & -2u_1 + 2u_2 + u_3 & = -1 \\ & 2u_1 + 2u_2 + u_4 & = 2 \\ & u \geq 0 & \end{cases}$$

Comprovem que la solució del problema dual que proporciona SAS

$$u_B^* = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\texttt{r1.DUAL} \\ \texttt{r1.DUAL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

satisfà les condicions d'optimalitat de (D_e) (factibilitat primal i dual de (D_e)):

i. Comprovació $\mathcal{B}^{D^*}=\{1,2\}$ és s.b.f. del (D_e): $B^D=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$, no singular amb $B^{D^{-1}}=\begin{bmatrix}-1/4 & 1/4\\ 1/4 & 1/4\end{bmatrix}$

ii. Factibilitat primal de (D_e): $u_B^*=\begin{bmatrix}-1/4 & 1/4\\ 1/4 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/4\\ 1/4\end{bmatrix}\geq[0]$

iii. Factibilitat dual de (D_e): $r_N^D=c_N^{D'}-c_B^{D'}B^{D^{-1}}A_N^D=[0]-[1\quad -3]\begin{bmatrix}-1/4 & 1/4\\ 1/4 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=[1\quad 1/2]\geq 0.$

Apartat d)

Valor mínim del terme b_2, que conserva l'optimalitat de la base trobada per SAS: un canvi en b_2 només pot fer perdre la factibilitat primal: $x_B=B^{-1}b\geq 0$

$$x_B(b_2)=\begin{bmatrix}1/4 & 1/4\\ -1/4 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{b_2}{4}+\frac{1}{4}\\ \frac{b_2}{4}-\frac{1}{4}\end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\boxed{b_2\geq b_2^{min}=1}$$

Apartat e)

Solució òptima de (P) si b_2 adopta un valor no negatiu qualsevol per sota del valor mínim b_2^{min} trobat a l'apartat anterior: cal reoptimitzar aplicant l'algorisme del simplex dual:

Símplex dual, 1a iteració:

$$\mathcal{B}=\{1,2\},\mathcal{N}=\{3,4\},x_B(b_2)=\begin{bmatrix}\frac{b_2+1}{4}\\ \frac{b_2-1}{4}\end{bmatrix},r'=\begin{bmatrix}\texttt{-r1.dual}\\ \texttt{r2.dual}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/4\\ 1/4\end{bmatrix},z=\frac{b_2-3}{4}$$

- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p : si $0\leq b_2<b_2^{min}=1$

$$x_B(b_2)=\begin{bmatrix}\frac{b_2+1}{4}>0\\ \frac{b_2-1}{4}<0\end{bmatrix}\ngeq 0\Rightarrow p=2,\boxed{B(2)=2\text{ v.b.sortint}}$$

- Identificació de problema (D) il·limitat :

$$d'_{r_N}=\beta_2A_N=[-1/4\quad 1/4]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=[-1/4\quad -1/4]\ngeq 0$$

- v.n.b. d'entrada: $\theta_D^*=\min_{j\in\mathcal{N},d_{r_{N_j}}<0}\left\{\frac{-r_j}{d_{r_{N_j}}}\right\}=\min\{3,1\}=1\Longrightarrow q=4$
- Canvi de base i actualitzacions: si fem les actualitzacions tal com dicta l'algorisme:
  - Act. variables duals i f.o.:

$$r_N:=r_N+\theta_D^*d_{r_N}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix},r_{B(p)}=r_2:=\theta_D^*=1$$

$$\lambda:=\lambda-\theta_D^*\beta_p'=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix},z:=z-\theta_D^*x_{B(p)}=\frac{b_2-3}{4}-1\left(\frac{b_2-1}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

  - Act. variables primals:

NOM ALUMNE:

$$d_B = -B^{-1}A_4 = -\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \ \theta^* = -\frac{x_{B(2)}}{d_{B(2)}} = -\frac{\frac{b_2-1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1 - b_2$$

$$x_B := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} \frac{b_2+1}{4} \\ \frac{b_2-1}{4} \end{bmatrix} + (1-b_2)\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, x_q = x_4 := \theta^* = 1 - b_2 \overset{b_2 \in]0,1[}{\gtrless} 0$$

- $\mathcal{B} \leftarrow \{1,4\}, \mathcal{N} \leftarrow \{2,3\}$

Símplex dual, 2a iteració: $\mathcal{B} = \{1,4\}, \mathcal{N} = \{2,3\}, x_B(b_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ b_2 - 1 \end{bmatrix}, r' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, z = -\frac{1}{2}$

- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p :

$$x_B(b_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 - b_2 \end{bmatrix} \overset{b_2 \in]0,1[}{\gtrless} 0 \Rightarrow \boxed{\text{Solució òptima}}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 2.

Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de ramificació i tall (Branch&Cut):

$$(PE1)\begin{cases} \min & -x_1 & +2x_2 & & & & & \\ \text{s.a.:} & & & & & & & \\ & 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & 1 & (r1) \\ & 2x_1 & +2x_2 & & -x_4 & = & 3 & (r2) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & \geq & 0, x \in \mathbb{Z} & \end{cases}$$

Iteració 1: $L = \{(PE1)\},\ \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de $(RL1)$ amb un tall de Gomory**:

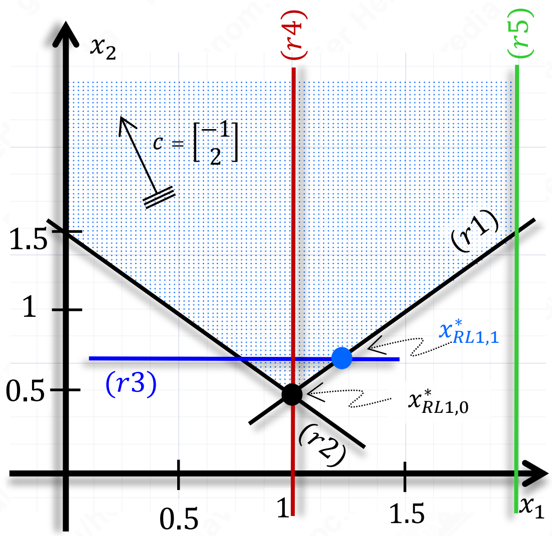
$$x^*_{RL1,1} = [7/6 \quad 2/3]', z^*_{RL1,1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \underline{z}^*_{PE1} := \left\lceil \frac{1}{6} \right\rceil = 1$$

- **Eliminació:** no es pot.
- **Separació:**

$$x_2^* = 7/6$$

$$\rightarrow \begin{cases} (PE2) \overset{\text{def}}{=} (PE1) + (r3) + \boldsymbol{x_1} \leq \left\lfloor \frac{7}{6} \right\rfloor = \mathbf{1}\ (\boldsymbol{r4}) \\ (PE3) \overset{\text{def}}{=} (PE1) + (r3) + \boldsymbol{x_1} \geq \left\lceil \frac{7}{6} \right\rceil = \mathbf{2}\ (\boldsymbol{r5}) \end{cases}$$

$$L \leftarrow \{(PE2),(PE3)\}$$



Iteració 2: $L = \{(PE2),(PE3)\}, \underline{z}^*_{PE1} = 1, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE2)$.
- **Resolució de $(RL2)$ amb un tall de Gomory**:

NOM ALUMNE:

$$
(RL2{,}0)\begin{cases}
\min & -x_1 & +2x_2 & & & & & & \\
\text{s.a.:} & & & & & & & & \\
(r1) & 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & & = & 1 \quad \leftarrow \text{redundant} \\
(r2) & 2x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & & = & 3 \\
(r3) & & 3x_2 & & & -x_5 & & = & 2 \\
(r4) & x_1 & & & & & +x_6 & = & 1 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0
\end{cases}
$$

– Resolució de $(RL2{,}0)$: $x^*_{RL2,0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix}, z^*_{RL2,0} = 0$

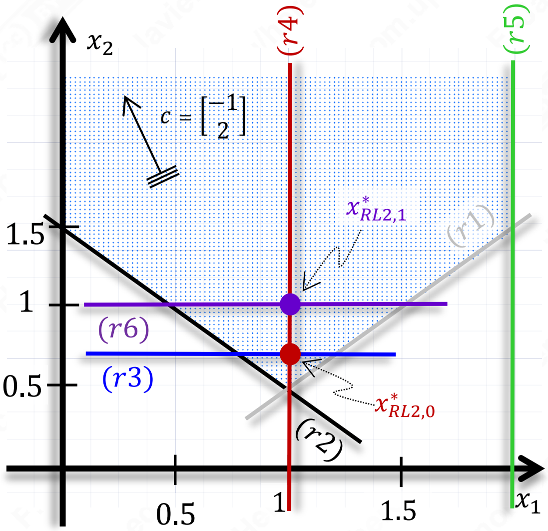
– Tall de Gomory sobre $x^*_{RL2,0}$ associat a x_2:

- $\mathcal{B} = \{1,2,4\},\ \mathcal{N} = \{5,6\}$.
- $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 2 \end{bmatrix}$.
- $A_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/3 & 0 \\ -2/3 & 2 \end{bmatrix}$
- $x_2 + \left\lfloor -\frac{1}{3} \right\rfloor x_5 \leq \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor \rightarrow x_2 - x_5 \leq 0$

  $\xrightarrow{(r3)} \boldsymbol{x_2 \geq 1\ \ (r6)}$

– Resolució de $(RL2{,}1) = (RL2{,}0) + (r5)$:

$x^*_{RL2,1} = [1 \quad 1]', z^*_{RL2,1} = 1 \Rightarrow \underline{z}^*_{PE2} := 1$



- **Eliminació:** $x^*_{RL2,1} = [1 \quad 1]' \subset K_{PE2}$: $x^*_{PE2} = [1 \quad 1]' \Rightarrow$ s'elimina $(PE2)$:

– $z^* \leftarrow z^*_{PE2} = 1, x^* \leftarrow x^*_{PE2}, L \leftarrow L \backslash \{(PE2)\} = \{(PE3)\}$

– $z^* = 1 = \underline{z}^*_{PE1} = 1 \Rightarrow$ s' elimina $(PE3)$:$L \leftarrow L \backslash \{(PE3)\} = \emptyset$

Iteració 3: $L = \emptyset \Rightarrow \boxed{x^*_{PE1} = x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, z^*_{PE1} = 1}$