I.O.E. DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA.

Examen Final de Juny. Convocatòria Ordinària. Curs 2000/01.

1. Cadenes de Markov.

Se sap que un determinat model de motor d'aviació pot patir problemes durant un vol amb una probabilitat de 0'05. Un model comercial d'avió està format per quatre d'aquests motors. Per un determinat fallo de disseny se sap també que el problema es presentarà de forma segura durant el quart vol. Si durant un vol es presenten problemes en algún motor dels quatre llavors els motors que han presentat l'anomalia són revisats i tornats a posar a punt, quedant pel següent vol "com si fossin nous". El cost d'una revisió es de 2000 ECU. En cas de que es presenti un fallo en més de un motor i per qüestions de seguretat és aconsellable que l'avió retorni sense completar el vol. En aquest cas, addicionalment al cost de les corresponents revisions, la companyia ha de pagar en concepte d'indemnitzacions una suma de 20000 ECU.

Es demana:

1. Establir un model basat en cadenes de Markov pel número de vols de un motor comptats des de la última revisió. Determineu les classes de la cadena i les seves periodicitats.

2. Quin és el número mig de vols que pot efectuar un motor sense que hagi de ser revisat? Quina és la probabilitat de que un motor falli durant un vol sabent que fa molt de temps que va ser instal.lat a l'avió ?

3. Quin és el número mig de revisions que haurà tingut un motor que ha efectuat el seu 4^{rt} vol des de que va ser instal.lat nou a l'avió?

4. Sabent que un avió ha d'efectuar un vol diari, quin és el cost mig anual de les revisions? Quin és el cost mig anual de les indemnitzacions?

La companyia aèria es planteja implantar una política de manteniment consistent en efectuar forçosament una revisió a tots els motors després del tercer vol, des de l'última revisió, que ha efectuat el motor encara que no hagin patit cap problema en el tercer vol.

5. Plantejar la nova cadena de Markov pel número de vols de un motor comptats des de la última revisió. Quina és ara la probabilitat de que un motor falli durant un vol sabent que fa molt de temps que va ser instal.lat a l'avió ?

6. Reporta estalvis econòmics per l'empresa aquesta política de manteniment respecte de la situació anterior, és a dir quan únicament es revisaven els motors si aquests havien tingut problemes ?

Nota: Si N v.a. discreta distribuïda segons una llei binomial de paràmetres *n, p* llavors:

$$P(N=s)=\binom{n}{s}p^{s}(1-p)^{n-s}=\frac{n!}{s!(n-s)!}p^{s}(1-p)^{n-s}$$

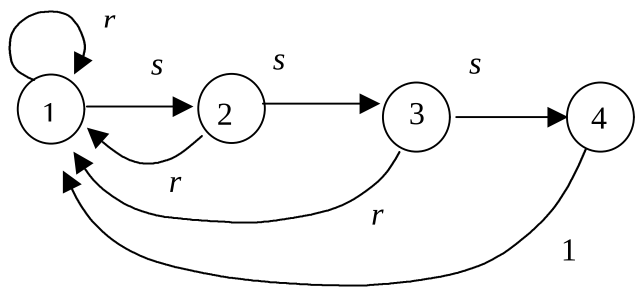
2. Teoria de Cues

Una petita empresa d'esports de risc disposa de tres avionetes per llogar-les als seus clients. En promig cada 5 hores arriba un client demanant si hi ha alguna avioneta lliure per llogar-la. Se sap que la durada mitjana d'un vol és també de 5 hores. El temps entre dues arribades de clients i el temps de vol estan exponencialment distribuïts. L'oferta d'aquest tipus d'empreses en la zona és tant alta que, si no hi ha cap avioneta disponible en el moment en que es produeix l'arribada d'un client, llavors aquest intenta trobar una avioneta lliure en empreses de la competència, no esperant a que alguna de les tres avionetes finalitzi el seu vol.
Es demana:

1) Justificar un model de cues pel número de avionetes *que no estan volant.* Existeix estat estacionari ? En cas afirmatiu calculeu les probabilitats en estat estacionari.
2) Calculeu la probabilitat que te un client de trobar una avioneta lliure.
3) Número mig d'avionetes *volant*.
4) Temps mig de permanència d'una avioneta en terra i número mig de clients per unitat de temps que aconsegueixen una avioneta lliure.
5) L'empresa estableix el sistema de pagament del lloguer següent: el preu d'una hora de vol o fracció és de 100€ en cas de que el vol duri dues hores o menys. En cas de que el vol duri més de dues hores llavors es paga una tarifa plana de 300 €. Calculeu el cost mig del lloguer d'un vol que haurà de pagar un client.
6) Es canvia el sistema de lloguer implantant-se ara un peru estrictament proporcional al temps de vol. El preu per hora és de 100€/hora (sigui que, per exemple, per 1 hora i 45 minuts es pagaran 175 €). Calculeu en aquestes condicions l'ingrés mig per dia de l'empresa.
7) Estant tots el avions volant arriba un client que sí decideix esperar a que alguna de les avionetes aterri. Quina és la llei de probabilitats (i els seus paràmetres) per la variable aleatòria del temps d'espera en poder abordar alguna avioneta per part d'aquest client ?
8) Abans de que el client de l'apartat anterior aconsegueixi alguna avioneta, n'arriba un segon el qual també decideix esperar. Quina és la llei de probabilitats (i els seus paràmetres) per la variable aleatòria del temps d'espera en poder enlairar-se d'aquest segon client ?

Solució P1.

1)



(r = 0’05; s=1- r = 0’95)   1 classe aperiòdica.

$$P = \begin{pmatrix} r & s & 0 & 0 \\ r & 0 & s & 0 \\ r & 0 & 0 & s \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Presenta estat estacionari. Sistema $P^T\pi = \pi$, $\Sigma\, \pi_i = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} p_4 = s p_3 \\ p_3 = s p_2 \\ p_2 = s p_1 \end{array} \quad p_1(1 + s + s^2 + s^3) = 1$$

$$p_1 = \frac{1-s}{1-s^4} = 0'2695$$

- Número mig de vols sense revisió μ_{11}=1/p_1 = 3’709 vols.
- Probabilitat de que un motor falli durant un vol:

$$r\, p_1 + r\, p_2 + r\, p_3 + p_4 = r + (1- r)\, p_4 = r + \frac{r\, s^4}{1-s^4} = p_1 = 0’26955$$

3) Nº mig de revisions en un horitzó de 4 vols =

= nº mig de vegades que es visita l’estat 1 al llarg del període = $\sum_{n=1}^{4} p_{11}^{(n}$

$$\begin{aligned} p_{11} &= r = 0'05 \\ p_{11}^{(2} &= r^2 + rs = 0'05 \\ p_{11}^{(3} &= r^3 + 2s\, r^2 + r\, s^2 = 0'05 \\ p_{11}^{(4} &= r^4 + 3s\, r^3 + 2\, r^2\, s^2 + s^3 = 0'86225 \end{aligned} \qquad \sum_{n=1}^{4} p_{11}^{(n} = 1'01225 \textit{ revisions}$$

4) Suposant 365 dies hàbils a l’any,

- <u>Cost anual per avió de les revisions</u>: 2000 ECU $\times$ 4$\times$ 365 $\times$ p_1 = 787.088 ECU
- Cost anual per avió de les indemnitzacions:

Si N és el número de motors avariats durant un vol, N es distribueix segons una binomial de paràmetres n=4, p=$p_{1.}$ (q = 1- p)

P(N > 1) = 1 – P(N=0) – P(N=1) = 1- 0'28468 - 0'42021 = 0'29511.

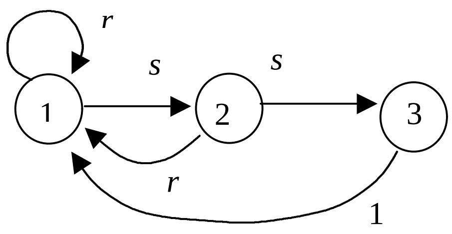
P(N=0) = q^4 = 0'28468, P(N=1) = 4 $p\, q^3$ = 0'42021.

<u>Cost anual per avió de les indemnitzacions</u>:

20.000 ECU × 365 × 0'29511 = 2.154.272 ECU

$\boxed{\text{Cost total anual per avió: 2.154.272 ECU + 787.088 ECU = 2.941.360 ECU}}$

5)



$$P = \begin{pmatrix} r & s & 0 \\ r & 0 & s \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow p'_1 = \frac{1-s}{1-s^3} = 0'3505$$

- <u>Probabilitat de que falli un motor</u>: $r\, p'_1 + r\, p'_2 + r\, p'_3 = r$ =0'05.

6) <u>Cost anual per avió de les revisions</u>: 2000 ECU × 4× 365 × p'_1 = 1.023.663 ECU

- <u>Probabilitat d'una indemnització</u> = P(número N' de motors amb fallo > 1)

P(N' > 1) = 1 – P(N'=0) – P(N'=1) = 1- 0'8145 - 0'1714 = 0'0140.

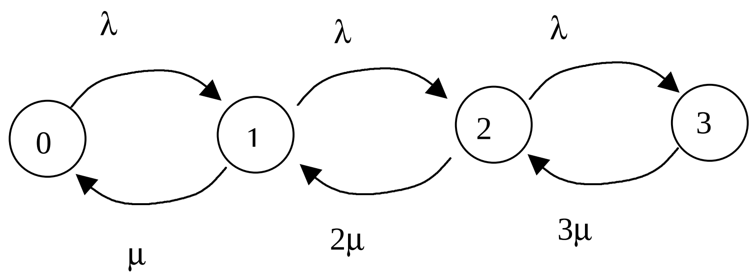
P(N'=0) = s^4 = 0'8145, P(N'=1) = 4 $r\, s^3$ = 0'1714.

<u>Cost anual per avió de les indemnitzacions</u>: 20.000 ECU × 365 × 0'0140 = 102.382 ECU

Cost anual per avió: 102.382 ECU + 1023663 ECU = 1.126.045 ECU

<u>Sí reporta estalvis per la companyia</u>.

Solució P2.



μ = 0.2 vols/hora λ = 0.2 aterratges/hora

$$P_0 = [1+C_1+C_2+C_3]^{-1} = \left[1+r+\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{6}r^3\right]^{-1} = \left[1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right]^{-1} = \frac{3}{8}$$

$$P_1 = \frac{3}{8},\ P_2 = \frac{3}{16},\ P_3 = \frac{1}{16}$$

2) $1 - P_3 = \frac{15}{16}$

3) $L = P_1 + 2P_2 + 3P_3 = \frac{3}{8} + \frac{6}{16} + \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$ avionetes.

4) $\bar{l} = l(1-P_3) = 0.2\frac{15}{16} = \frac{3}{16}$ clients/hora. $W = \frac{L}{\bar{l}} = \frac{15/16}{3/16} = 5 hores$

5) t – temps d'un vol; v.a. exponencial de par. μ = 0.2 vols/hora

$$P(t_1 \le t \le t_2) = P(t \ge t_1)P(t \le t_2 \mid t \ge t_1) = e^{-mt_1}(1-e^{-m(t_2-t_1)})$$

t	$0 \le t \le 1$	$1 \le t \le 2$	$t \ge 2$
c	100	200	300

$$E[c] = 100P(0 \le t \le 1) + 200P(1 \le t \le 2) + 300P(t \ge 3) = 100((1-e^{-m}) + 2e^{-m}(1-e^{-m}) + 3e^{-2m}) =$$

$$= 100(1+e^{-m}+e^{-2m}) = 100\frac{1-e^{-3m}}{1-e^{-m}} = 248.9 ECU$$

6)

$$E[c] = 100(P_1 + 2P_2 + 3P_3) = 100L = 100\frac{15}{16} = 93.75 \text{ €/hora}$$

7) El client espera a que quedi lliure alguna de les 3 avionetes. El temps d'espera $s = Min\{s_1, s_2, s_3\}$ és v.a. exponencial de par. $a_s = 3m = 0.6,\quad E[s] = \frac{1}{0.6} = 1.66 hores$

9) t_5=temps d'espera del 2on client. t_4=temps d'espera del 1er client;
t'_5=temps d'espera del segon quan el primer client ha aconseguit una avioneta.
t_4, t'_5 v.a. exp. de paràmetre 3μ. t_5 és v.a. 2-Erlang.
$t_5 = t_4 + t'_5$; $E[t_5]=E[t_4]+E[t'_5]$=10/3 hores.
$Var[t_5]=Var[t_4]+Var[t'_5]$=1/0.36 +1/0.36=5.555hores^2.

I.O.E. DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA.
Examen Final de Juliol. Convocatòria Extraordinària. Curs 2000/01.
Teoria de Cues.

Un escultor principiant s'ha especialitzat en la reproducció de peces clàssiques per encàrrec. Inicialment, la tècnica que utilitza el permet fer una rèplica a partir d'un bloc de marbre en un temps distribuït exponencialment de mitjana 9 dies. Els encàrrecs són processats per estricte ordre d'entrada al taller. Les arribades d'encàrrecs poden considerar-se poissonianes amb un promig de un encàrrec cada 15 dies. En aquestes condicions es demana:

1. Model de cues pel número de encàrrecs que hi ha al taller de l'escultor.
2. Número mig d'encàrrecs que en un moment determinat poden haver-hi pendents al taller. Temps mig necessari per servir un encàrrec.
3. Probabilitat de que un encàrrec tardi més de 30 dies en ser servit.
4. L'import d'una obra que es factura al client consta de dues components. Per una part es cobra un quantitat fixa de 2000 ECU per encàrrec i per altre part es cobra una quantitat proporcional al temps emprat en la realització de l'obra. El preu del dia de treball és de 500 ECU. Calcular els ingressos mitjos per any de l'artista (preneu 250 dies laborals a l'any).
5. L'escultor ha desenvolupat una tècnica per millorar els seus productes consistent en aplicar una segona fase a les seves obres consistent en un procés d'envelliment que dura un temps exponencialment distribuït d'esperança un dia. En aquestes noves condicions es demana: a) model de cues pel número de encàrrecs que hi ha al taller de l'escultor, b) número mig d'encàrrecs que en un moment determinat poden haver-hi pendents al taller. c) Temps mig necessari per servir un encàrrec.

L'artista ha format un taller incloent-hi a dos socis A i B. Ara a cada encàrrec s'assigna inicialment un bloc de marbre i es segueix el següent procés: l'escultor tracta els blocs de pedra segons una cua FIFO i converteix el bloc de pedra en l'esbós bàsic de l'obra, tardant igual que abans un temps exponencial d'esperança 9 dies. Si l'esbós acaba correctament llavors passa a ser tractat en una segona etapa pel soci A, de lo contrari, si fracassa es pot considerar treball perdut i cal assignar un nou bloc de marbre a l'encàrrec el qual es posarà a la cua dels blocs que ha de processar l'escultor com si fos un nou encàrrec. Se sap que un de cada deu esbossos ha de tornar a repetir-se. Els esbossos correctes entren a la cua de treballs de el soci A, el qual tarda un temps exp. distribuït d'esperança 1 dia. Si el soci A acaba correctament el seu procés llavors l'obra pot donar-se per finalitzada i llesta per lliurar al client. Això només es dona en el 80 % dels casos. El 20 % de les obres que no són tractades correctament pel soci A són passades a la cua de treballs de el soci B, el qual tarda també un temps exp. distribuït d'esperança 1 dia. Les obres tractades per B són passades a el soci A de nou per veure si pot finalitzar l'obra. Aquest procés cíclic pels treballs que A no pugui acabar correctament a la primera pot donar-se un número il.limitat de vegades fins que el soci A completi finalment l'obra. En aquestes condicions es demana:

6. Quin és el màxim número d'encàrrecs per any que pot acceptar el taller?.
7. En les condicions actuals (els clients demanen 1 encàrrec cada 15 dies), quina fracció del temps estan ociosos a) l'escultor, b) el soci A, c) el soci B.
8. Número mig d'encàrrecs que hi ha presents al taller. Temps mig que tarda un client en obtenir el seu encàrrec.
9. Se sap que la demanda per part dels clients por arribar a augmentar fins 1 encàrrec cada 11 dies per lo que es planteja incloure un nou soci C. Quines haurien de ser les tasques del nou soci de forma que pogués absorbir-se la demanda? (treballar en la cua de treballs de l'escultor, en la cua del soci A, en la cua del soci B) per qué?

Solució Problema T. De Cues.

1. El model de cua és una M/M/1. λ=1/15, μ=1/9, ρ=0.6 < 1 presenta e.e. $P_0 = 1 - r = 0.4$
2. L=ρ/(1-ρ) = 1.5 encàrrecs. W = L/ λ = 22.5 dies
3. $P(w \geq t) = e^{-t/W}$, $P(w \geq 30) = e^{-30/22.5} = 0.2635$
4. $2000 \times \frac{250}{15} + 500 \times 250 \times 0.4 = 83333$€/any
5. a) el model és ara una M/G/1, λ=1/15, E[t_s] = 9 + 1 dies -> μ=0.1, ρ=2/3 < 1 presenta e.e. $P_0 = 1 - r = 1/3$

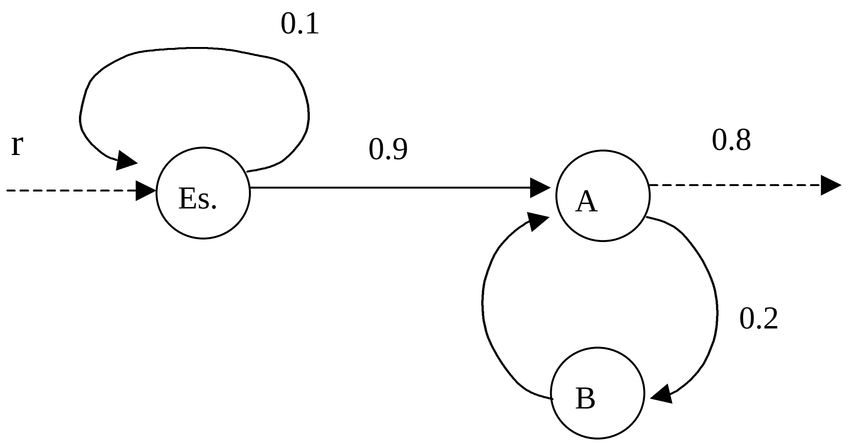
   b) Per la fórmula de Pollaczeck-Khintchine: $L = L_q + r = \frac{l^2 s^2 + r^2}{2(1-r)} + r$

   $s^2 = 81 + 1 = 82\, dies^2$, $L_q = \frac{l^2 s^2 + r^2}{2(1-r)} = \frac{\frac{82}{15^2} + \frac{4}{9}}{2/3} = 1.213\, encàrrecs$

   $\boxed{L = 1.88\ encàrrecs}$

   c) $\boxed{W = L/\lambda = 15 \times 1.88 = 28.2 \text{ dies}}$

6.



L'escultor, el soci A i el soci B formen una xarxa de sistemes d'espera. Estarà en e.e. si els factors de càrrega ρ de cada nus són <1. En aquestes condicions cada S.E. funciona com una M/M/1.

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 1 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ -0.9 & 1 & -1 \\ 0 & -0.2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$l_1 = \frac{r}{0.9} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0.2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.8} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{0.9} \\ \frac{r}{0.8} \\ \frac{r}{4} \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{9r}{0.9} < 1 \\ \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{r}{0.8} < 1 \\ \rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{r}{4} < 1 \end{matrix} \quad \rightarrow r < 0.1 \frac{encàrrecs}{dia}$$

7) Escultor: $p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{10}{15} = \frac{1}{3}$,

Soci A: $p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{1}{0.8 \times 15} = \frac{11}{12}$,

Soci B: $p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{1}{4 \times 15} = \frac{59}{60}$

8) No. Mig d'encàrrecs de l'escultor : $L = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} = 2$

No. Mig d'encàrrecs soci A : $L = \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} = \frac{1}{11}$

No. Mig d'encàrrecs soci A : $L = \frac{\rho_3}{1 - \rho_3} = \frac{1}{59}$; Total: L_T =2 + 1/11 + 1/59 = 2.107 encàrrecs

Fòrmula de Little: W = L_T / r = 2.107 × 15 = 31.61 dies.

9) Si el nou soci passa a treballar en la cua de l'escultor llavors aquesta passarà a tenir dos servidors amb lo que la màxima capacitat de servei del sistema d'espera augmentarà. Si la demanda passa a 1 encàrrec cada 11 dies, els sistemes d'espera soci A i soci B encara suportarien la càrrega només amb un servidor, però en canvi el S.E. on es fan els esbossos no, per lo que caldria en aquest cas augmentar el seu número de servidors. Si suposem que el nou soci pot treballar a igual ritme que l'escultor llavors la xarxa tornarà a presentar e.e.