

## EXAMEN DE MODELS LINEALS

15 de gener de 2003

1. La matriu de disseny d'un cert model lineal és

$$\begin{array}{ccccc} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Raoneu acuradament cadascuna de les qüestions següents:

- (a) És un model de rang màxim? Què implica la teva resposta a l'hora d'estimar els paràmetres del model?
- (b) Són estimables les següents funcions paramètriques?  $\beta_1$ ,  $\beta_1 - \beta_3$ ,  $\beta_3 - \beta_4$ .
2. Desitgem fer alguns contrastos d'hipòtesis sobre un model de rang màxim amb els paràmetres  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_4$ .
- (a) Obteniu la matriu **A** associada a les següents hipòtesis nul·les:
- i.  $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$
  - ii.  $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$
  - iii.  $H_0 : \beta_0 = 3; \beta_1 = \beta_2$
  - iv.  $H_0 : \beta_1 = \beta_3$
- (b) En quins casos es podria utilitzar un estadístic  $t$  per contrastar la mateixa hipòtesis? En quin cas la suma de quadrats de la hipòtesi coincideix amb la suma de quadrats de la regressió?
3. Suposem que hem estimat la següent equació amb el mètode dels mínims quadrats (amb les variables mesurades en logaritmes)

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t, \quad t = 1, \dots, 17$$

i les estimacions dels paràmetres són:

$$\hat{\beta}_0 = 1.37 \quad \hat{\beta}_1 = 1.14 \quad \hat{\beta}_2 = -0.83$$

També hem obtingut la següent expressió escalar:

$$\mathbf{Y}'[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}']\mathbf{Y} = 0.0028$$

i els elements triangulars de la matriu  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  són:

$$\begin{pmatrix} 510.89 & -254.35 & 0.42 \\ & 132.70 & -6.82 \\ & & 7.11 \end{pmatrix}$$

Es demana:

- (a) Calculeu les variàncies dels estimadors MQ de  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ .
- (b) Si  $X_{1t}$  augmenta en un 1 per 100 i  $X_{2t}$  en un 2 per 100, quin seria l'efecte estimat en  $Y_t$ ?
- (c) Feu un test estadístic per verificar la hipòtesi que  $\beta_1 = 1$  i  $\beta_2 = -1$  i doneu el valor d'aquest estadístic. Quines són les taules que necessitarem per realitzar el test i quins són els graus de llibertat?

4. El període d'oscil·lació d'un pèndul és  $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , on  $l$  és la longitud i  $g$  és la constant de gravitació. En un experiment observem  $t_{ij}$  ( $j = 1, \dots, n_i$ ) períodes corresponents a  $l_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) longituds.

- (a) Proposeu un model, amb les hipòtesis que calguin, per tal d'estimar la constant  $\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$  pel mètode dels mínims quadrats.
- (b) En un experiment s'observen les següents dades:

longitud	període
18.3	8.58 7.9 8.2 7.8
20	8.4 9.2
21.5	9.7 8.95 9.2
15	7.5 8

Contrasteu la hipòtesi  $H_0 : \frac{2\pi}{\sqrt{g}} = 2$ .

5. La psoriasi és una malaltia autoimmunitària, la intensitat de la qual varia amb l'estació de l'any. Es desitja comparar tres fàrmacs  $A$ ,  $B$  i  $C$  per controlar la intensitat dels brots en cada estació de l'any. Prenem una mostra de 48 persones amb psoriasis d'intensitat i modalitat anàlogues, que s'assignen aleatòriament a 12 grups, un per cada fàrmac i estació, amb 4 malalts assignats a l'atzar a cada grup. Els resultats es van avaluar en una escala objectiva que anava de 0 a 100.

- (a) Indiqueu si es tracta d'un estudi de camp o un estudi experimental. Descriviu el tipus de disseny experimental utilitzat i escriviu el model lineal corresponent.
- (b) Sabent que es van obtenir les següents sumes de quadrats:

$$\begin{aligned}
 SS(\text{Estacions}) &= 4342.89 \\
 SS(\text{Fàrmac}) &= 6487.04 \\
 SS(\text{Error}) &= 920.25 \\
 SS(\text{Total}) &= 12023.47
 \end{aligned}$$

Construiu la taula de l'anàlisi de la variància corresponent a aquest model i feu-la servir per respondre les qüestions següents:

- Determineu si hi ha diferències significatives entre els fàrmacs  $A$ ,  $B$  i  $C$  i entre les estacions.
  - És significativa la interacció? Què haureu de fer per completar l'anàlisi si no ho és?
- (c) Feu les comparacions múltiples necessàries entre els fàrmacs per determinar quins tenen efecte diferent. Feu servir el test de Scheffé i el de la mínima diferència significativa. S'obté el mateix resultat? Si no és així, a què és degut?