# Regiones de confianza

Consideremos un modelo estadístico paramétrico, determinado, para fijar ideas, por una función de densidad $f(x,\theta)$ $\theta \in \Theta$

Podemos suponer, para simplificar, $x \in \mathbb{R}^k$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$

y que si $X \sim f(x,\theta)$, disponemos de una muestra aleatoria simple de tamaño $n$, con sus correspondientes variables aleatorias muestrales $X_1, \dots, X_n$ iid $X$.

En este contexto, el espacio muestral lo podemos identificar con: $\Omega = (\mathbb{R}^k)^n = \mathbb{R}^{k \times n}$.

Supongamos que tenemos un parámetro de interés, $\psi = g(\theta)$, con $g : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}^q$.

Trataremos de hallar métodos que nos permitan, dada una muestra, proponer una región en $g(\Theta)$ en la que esperamos se halle el verdadero valor de $\psi = g(\theta)$, con "alta expectabilidad".

Para ello introduciremos las siguientes definiciones:

**Definición 1**

Una región de confianza de nivel $1-\alpha$ (o simplemente una región de confianza $1-\alpha$), con $\alpha \in [0,1]$, para $\psi = g(\theta)$, es una familia de partes de $g(\Theta)$ indexada por $x \in \Omega$:

$$\{ S(x) \mid x \in \Omega \quad \text{con } S(x) \in \mathbb{P}(g(\Theta)) \}$$

($\mathbb{P}(g(\Theta))$: conjunto de partes de $g(\Theta)$, es decir: $S(x) \subset g(\Theta)$)

tal que:

a) $\forall \theta \in \Theta, \quad \{ x \in \Omega \mid g(\theta) \in S(x) \} \in \mathcal{A}$

donde $\mathcal{A}$ es el algebra de sucesos del espacio muestral $\Omega$

NOTA: ésta es una condición "técnica" de la teoría de la probabilidad para garantizar poder hablar después de "probabilidades".

b) $\forall \theta \in \Theta, \quad P_\theta \{ x \in \Omega \mid g(\theta) \in S(x) \} = 1-\alpha$

probabilidad (dependiente del "verdadero parámetro" $\theta$)

**NOTA:**

Si reemplazamos la condición (b) por:

$$(b') \quad \forall \theta \in \Theta \;, \quad P_\theta \{ x \in \Omega \mid g(\theta) \in S(x) \} \geq 1-\alpha$$

diremos que se trata de una región de nivel superior o igual a $1-\alpha$.

---

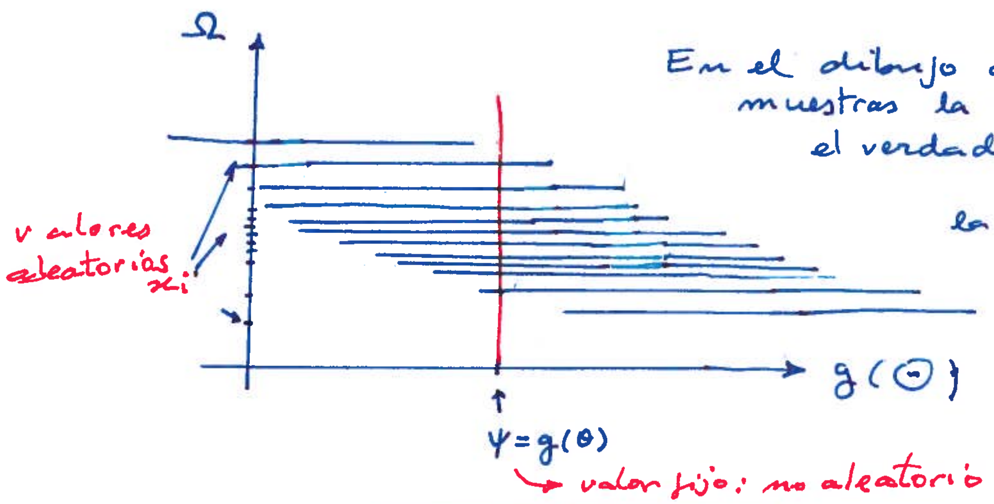
**NOTA:**

Observar que la confianza es la probabilidad, fijado $\theta$, del suceso aleatorio:

$$\{ x \in \Omega \mid g(\theta) \in S(x) \}$$

no es la probabilidad de, fijado $x$, $g(\theta) \in S(x)$.

Dado $x$ propondremos como valores de $g(\theta)$ aquellos que estan en $S(x)$. Si repitieramos muchas veces el procedimiento, la frecuencia relativa del número de veces que el verdadero valor de $\psi = g(\theta)$ está en $S(x)$ tendería a $1-\alpha$; el siguiente esquema puede ayudar a comprenderlo:




En el dibujo de $n=12$ muestras la región "cubre" el verdadero valor en 10 ocasiones

la frecuencia relativa en el límite tiende a $1-\alpha$

---

Un caso particular, y muy utilizado, de regiones de confianza, ocurre cuando $g(\theta) \in \mathbb{R}$ y $S(x)$ es un intervalo, limitado pues por sus extremos inferior y superior $U(x), V(x) \in \mathbb{R}$.

La exigencia a) se traduce en este caso a exigir que $U(x)$ y $V(x)$ sean estadísticos (y por tanto variables aleatorias), con $U(x) \leq V(x)$ con probabilidad 1, mientras que b) se reescribe como:

$$\forall \theta \in \Theta \;, \quad P_\theta ( U \leq g(\theta) \leq V ) = 1-\alpha$$

$[U, V]$ definirá pues un intervalo de confianza $1-\alpha$

b') en este caso se reescribe de forma obvia:

$$\forall \theta \in \Theta \ , \quad P_\theta ( U \leq g(\theta) \leq V ) \geq 1-\alpha$$

definiendo en este caso $[U, V]$ un intervalo de confianza superior o igual a $1-\alpha$.

---

Los estadísticos $U$ y $V$ de un intervalo de confianza pueden verse como estimadores por defecto y por exceso de $g(\theta)$.

La construcción de regiones de confianza (o intervalos de confianza) es una forma de implementar lo que podemos denominar "estimación por regiones" y puede considerarse una extensión de la estimación puntual, que podría considerarse como un caso límite, cuando $S(x)$ contuviera siempre un único elemento de $g(\Theta)$. Como norma general, si queremos confianzas elevadas tendremos regiones de confianza grandes (poco precisas, en el sentido que podremos precisar poco el valor de $\psi = g(\theta)$), mientras que regiones más precisas tendrán una confianza baja.

---

Los siguientes conceptos, introducidos en diversas definiciones, nos ayudarán a "calificar" el funcionamiento de las regiones de confianza.

**Definición 2**

Sean $S_1(x)$ y $S_2(x)$ dos regiones de confianza $1-\alpha$ para $g(\theta)$. Diremos que $S_1(x)$ es preferible a $S_2(x)$ y escribiremos $(S_1(x) \succeq S_2(x))$ si y sólo si

$$\forall \theta, \theta^* \in \Theta \qquad P_\theta ( g(\theta^*) \in S_1(X) ) \leq P_\theta ( g(\theta^*) \in S_2(X) )$$

**NOTA:**

La desigualdad nos indica que con $S_1(x)$ es más difícil "cubrir" el valor erróneo $g(\theta^*)$ que con $S_2(x)$ (el verdadero valor sería $g(\theta)$)

## Definición 3

Una región de confianza de nivel $1-\alpha$, $S(x)$, para $g(\theta)$ diremos que es **UMA** (uniformly most accurate) (uniformemente más precisa) si y sólo si $S(x)$ es preferible a cualquier otra región de nivel $1-\alpha$ para $g(\theta)$.

**NOTA:** una tal región no tiene porqué existir en todos los casos.

## Definición 4

Una región de confianza $1-\alpha$ para $g(\theta)$, $S(x)$, diremos que es **insesgada** si y sólo si

$$\forall \theta, \theta^* \in \Theta \qquad P_\theta\left(g(\theta^*) \in S(X)\right) \leq P_\theta\left(g(\theta) \in S(X)\right)$$

**NOTA:**

La desigualdad nos indica que para una región insesgada, es más fácil "cubrir" el verdadero valor $g(\theta)$ que un valor erróneo $g(\theta^*)$.

---

## Métodos de construcción de regiones e intervalos de confianza

## Definición 5

Una **función pivotal** (o simplemente un **pivote**) para $g(\theta)$ es una función $\Pi : \Omega \times g(\Theta) \to E$ (donde $E$ para fijar ideas puede ser $\mathbb{R}^q$) tal que

a) $\forall \theta$, la función $x \to \Pi(x, g(\theta))$ es una variable (o vector) aleatoria/o

b) La ley probabilística de $\Pi(x, g(\theta))$ no depende de $\theta$ (i.e.: es la misma cualquiera que sea el verdadero valor de $\theta$).

Una función pivotal nos permite construir una región de confianza, de nivel $1-\alpha$, como sigue:

**MÉTODO DEL PIVOTE**

Determinemos un conjunto $B \subset E$ (del álgebra de sucesos de $E$) de forma que:

$$P_\theta\left(\pi(X, g(\theta)) \in B\right) = 1-\alpha \qquad \forall \theta \in \Theta$$

↑ observar que, en realidad, dicha probabilidad no depende de $\theta$, puesto que $\pi$ es un pivote (condición b) )

Definamos:

$$S(x) = \{\psi \in g(\Theta) \;/\; \pi(x, \psi) \in B\}$$

entonces $\{S(x),\ x \in \Omega\}$ es una región de confianza $1-\alpha$ para $g(\theta)$ puesto que:

$\forall \theta \in \Theta \quad \{x \mid g(\theta) \in S(x)\} = \{x \mid \pi(x, g(\theta)) \in B\}$ pertenece al álgebra de sucesos de $\Omega$ (al ser $\pi(x, g(\theta))$ una v.a.) y:

$$\forall \theta \in \Theta, \quad P_\theta\left(g(\theta) \in S(X)\right) = P_\theta\left(\pi(X, g(\theta)) \in B\right) = 1-\alpha$$

Veamos algunos ejemplos aplicados a intervalos de confianza.

**Ejemplo 1**

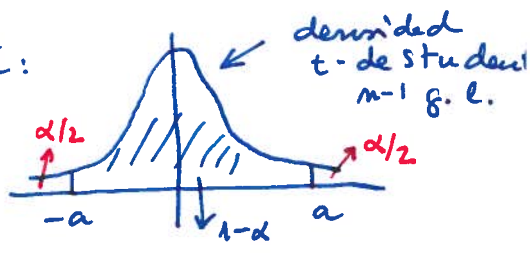
Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$, $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $X$. Consideremos el parámetro de interés $\mu = g(\mu, \sigma)$ (aquí, $k=1$, $q=1$, $m=2$).

Sabemos, por el Teorema de Fisher, que $T = \sqrt{n-1}\,\dfrac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}$ sigue una distribución t-de Student con $n-1$ grados de libertad, sea cual sea el valor de $\theta = (\mu, \sigma)$. Puesto que $T$ es una función de la muestra y del parámetro de interés, de forma que $T$ es una variable aleatoria cuya distribución no depende del parámetro, $T$ es una función pivotal o pivote. Hallemos ahora un intervalo $B = [-a, a]$ de forma que

$$P\left(T \in [-a, a]\right) = 1-\alpha$$

por tablas, por ejemplo, determinamos $a$.

gráficamente:



Equivalentemente:

$$P\left(-a \leq \sqrt{n-1}\,\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sqrt{S_n^2}} \leq a\right)=1-\alpha$$

a queda determinado por $\alpha$:

$F_{T_{n-1}}(a) = 1-\alpha/2$

$a = F^{-1}_{T_{n-1}}(1-\alpha/2)$

donde $F_{T_{n-1}}$ es la función de distribución de una t-de Student con n-1 grados de libertad.

las dos desigualdades son equivalentes a:

$$-a\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n-1}} \leq \bar{X}_n-\mu \leq a\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n-1}}$$

igual a:

$$-\bar{X}_n-a\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n-1}} \leq -\mu \leq -\bar{X}_n+a\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n-1}}$$

y finalmente:

intervalo de confianza $1-\alpha$ para $\mu$

$$\underbrace{\bar{X}_n-a\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n-1}}}_{U(X)} \leq \underbrace{\mu}_{g(\theta)} \leq \underbrace{\bar{X}_n+a\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n-1}}}_{V(X)}$$

simboliza toda la muestra

$$P\left(U(X) \leq g(\theta) \leq V(X)\right) = 1-\alpha \qquad \forall \theta \in \Theta$$

por tanto $[U,V]$ es un intervalo de confianza para $\mu$.

**NOTA:**

La elección del intervalo $B=[-a,a]$ entre los infinitos posibles, podría demostrarse que garantiza que la longitud final del intervalo de confianza para $\mu$ así obtenido, $[U(x),V(x)]$ es la menor posible.

**Ejemplo 2**

$X \sim U(0,\beta)$ $\beta>0$ $X_1,\dots,X_n$ iid $X$

Hallar un intervalo de confianza $1-\alpha$, $\alpha\in(0,1)$, para $\beta$.

Observemos que si $X\sim U(0,\beta)$, entonces $Z=X/\beta \sim U(0,1)$

por tanto

$$\frac{X_{(n)}}{\beta} = \frac{1}{\beta}\,\text{máx}\{x_1,\dots,x_n\} = \text{máx}\left\{\frac{x_1}{\beta},\dots,\frac{x_n}{\beta}\right\} = \text{máx}\{Z_1,\dots,Z_n\}$$

siendo pues la distribución de $\frac{X_{(n)}}{\beta}$ independiente de $\beta$: se trata de una función pivotal o pivote concretamente, la función de distribución de $\frac{X_{(m)}}{\beta}$ vendrá dada por:

$$F(u) = P\left(\frac{X_{(m)}}{\beta} \leq u\right) = P\left(Z_{(m)} \leq u\right) = P(Z \leq u)^m$$

$$= \begin{cases} 0 & u < 0 \\ u^m & u \in [0,1] \\ 1 & u > 1 \end{cases}$$

(ya que $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ z & z \in [0,1] \\ 1 & z > 1 \end{cases}$

Determinemos a continuación un intervalo $[a,b]$ tal que

$$P\left(a \leq \frac{X_{(m)}}{\beta} \leq b\right) = 1-\alpha$$

$a$ y $b$ deberán verificar:

$$F(a) = \alpha_1 \qquad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \text{ y } \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$
$$F(b) = 1-\alpha_2$$

En tal caso,

$$a \leq \frac{X_{(m)}}{\beta} \leq b$$

es equivalente a:

$$\underbrace{\frac{X_{(m)}}{b}}_{U(X_1 \dots X_m)} \leq \beta \leq \underbrace{\frac{X_{(m)}}{a}}_{V(X_1 \dots X_m)}$$

Podemos escoger $a$ y $b$ según diversas estrategias. En el presente ejemplo parece razonable hacerlo procurando encontrar intervalos de confianza lo más cortos posibles.

La longitud del intervalo será:

$$\ell = V - U = X_{(m)} \left\{ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right\}$$

por tanto hay que minimizar $\left\{ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right\}$ teniendo en cuenta $F(a) = \alpha_1$, $F(b) = 1-\alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$

por tanto:

$$F(a) = a^m = \alpha_1 \qquad F(b) = b^m = 1-\alpha_2$$

$a = \sqrt[m]{\alpha_1}$ $\quad b = \sqrt[m]{1-\alpha_2}$ $\quad$ y como $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$

bastará minimizar a la función $h : [0, \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}$

definida por $\quad h(\alpha_1) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\alpha_1}} - \dfrac{1}{\sqrt[n]{1-\alpha+\alpha_1}}$

para ello, observemos que:

$$h'(\alpha_1) = -\frac{1}{m}\,\frac{1}{\alpha_1^{\,1+\frac{1}{m}}} + \frac{1}{m}\,\frac{1}{(1-\alpha+\alpha_1)^{1+\frac{1}{m}}}$$

y como $\alpha_1 < 1-\alpha+\alpha_1$ resulta que $h'(\alpha_1) < 0$

siendo pues $h$ monotona decreciente; el valor mínimo de $h$ en $[0, \alpha]$ se hallará cuando $\alpha_1 = \alpha$ y por tanto $\alpha_2 = 0$

Así pues, el intervalo de confianza $1-\alpha$ para $\beta$ será, teniendo en cuenta que $b = 1$ y $a = \sqrt[m]{\alpha}$, igual a:

$$\left[ X_{(m)},\ X_{(m)}/\sqrt[m]{\alpha} \right]$$ intervalo de confianza $1-\alpha$ para $\beta$

---

## MÉTODO DE NEYMAN

Consideremos un modelo estadístico $X \sim f(x, \theta)$ una muestra aleatoria simple de tamaño $n$, $X_1, \dots, X_n$ iid $X$, y un parámetro de interes escalar $\psi = g(\theta)$ $\quad \theta \in \Theta$ $\quad \psi \in \mathbb{R}$

Queremos hallar un intervalo de confianza $1-\alpha$ para $\psi = g(\theta)$.

Para ello supongamos que disponemos de un estimador de $\psi$,

$U = U(X_1, \dots, X_m)$ con la propiedad de que la ley probabilística que sigue depende del parámetro pero sólo a través de $\psi = g(\theta)$, es decir su función de distribución (o de densidad) es de la forma $F_U(u, g(\theta))$.

En tal caso, procederemos como sigue:

a) Determinaremos, fijado $\theta$, unos valores $a$ y $b$ de forma que

$$P_\theta\,(a \leq u \leq b) = 1-\alpha$$

como $P_\theta$ en realidad depende de $\theta$ a través de $\psi = g(\theta)$, resultara que $a$ y $b$ seran funciones de $\psi = g(\theta)$, es decir podemos escribir:

$$P_\psi\,(a(\psi) \leq u \leq b(\psi)) = 1-\alpha \qquad \forall \theta \in \Theta \text{ con } \psi = g(\theta)$$

NOTA:

Obsérvese que el problema es indeterminado: podemos escoger $a(\psi)$ y $b(\psi)$ de forma que satisfagan:

$$F_u(a(\psi), \psi) = \alpha_1$$

$$F_u(b(\psi), \psi) = 1-\alpha_2$$

con $\alpha_1$ y $\alpha_2 \geq 0$ y $\alpha_1+\alpha_2 = \alpha$

La determinación de $\alpha_1$ y $\alpha_2$ puede hacerse o bien basándose en criterios de simplicidad (por ejemplo imponiendo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$) o bien en criterios basados en la longitud del intervalo resultante, como veremos en algun problema.

b) A partir de las dos desigualdades

$$a(\psi) \leq u \leq b(\psi)$$

trataremos de hallar unas desigualdades equivalentes de la forma:

$$r(u) \leq \psi \leq s(u)$$

en este caso, como

$$P_\psi\,(r(u) \leq \psi \leq s(u)) = 1-\alpha \qquad \forall \theta \in \Theta$$

tendriamos que $[r(u), s(u)]$ definirían un intervalo de confianza $1-\alpha$.

**Ejemplo 3**

Sea $X \sim f(x,\beta) = \begin{cases} e^{-(x-\beta)} & x \geq \beta \\ 0 & x < \beta \end{cases}$ con $\beta \in \mathbb{R}$

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $X$

Hallar un intervalo de confianza $1-\alpha$, $(\alpha \in (0,1))$, para el parámetro $\beta$.

Podemos partir del estimador máximo-verosímil y a partir de éste hallar un intervalo de confianza $1-\alpha$, para $\beta$.

**Determinación del MLE:**

$$L_x(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ e^{-(x_i-\beta)} \mathbb{1}_{[\beta,\infty)}(x_i) \right\} = e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\beta)} \mathbb{1}_{[\beta,\infty)}(x_{(1)})$$

siendo $x_{(1)} = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$, y si hacemos $\bar{x}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

tendremos también:

$$L_x(\beta) = e^{-n(\bar{x}_n-\beta)} \mathbb{1}_{[\beta,\infty)}(x_{(1)}) = e^{-n\bar{x}_n} e^{n\beta} \mathbb{1}_{[\beta,\infty)}(x_{(1)})$$

$$= e^{-n\bar{x}_n} e^{n\beta} \mathbb{1}_{(-\infty, x_{(1)}]}(\beta)$$

esta función de $\beta$ ($x_{(1)}$ y $\bar{x}_n$ son constantes, fijados los valores muestrales) es creciente en $\beta$ siempre que $\beta \leq x_{(1)}$. Por tanto un máximo absoluto se obtiene cuando $\beta = x_{(1)}$

por tanto el MLE es:

$$\boxed{\beta^* = X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}}$$

La distribución de $X_{(1)}$ dependerá de $\beta$, y podemos tratar de hallar un intervalo de confianza $1-\alpha$ para $\beta$ a partir del método de Neyman.

En primer lugar hallaremos la función de distribución de $X_{(1)}$:

$$F(u,\beta) = P_\beta(X_{(1)} \leq u) = 1 - P(X_{(1)} > u) = 1 - P([X_1 > u] \cap \ldots \cap [X_n > u]) =$$
$$= 1 - P(X > u)^n = 1 - (1 - F_X(u))^n$$

Ahora bien

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & u < \beta \\ \int_\beta^u e^{-(t-\beta)}dt = \left[-e^{-(t-\beta)}\right]_\beta^u = 1 - e^{-(u-\beta)} & u \geq \beta \end{cases}$$

Por tanto:

$$F(u,\beta) = 1 - (1-(1-e^{-(u-\beta)}))^m = 1 - e^{-m(u-\beta)} \qquad u \geq \beta$$

$$= 0 \qquad u < \beta$$

Fijemos mentalmente $\alpha_1$ y $\alpha_2$ de forma que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ y $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$

Resultará:

$$F(a(\beta),\beta) = 1 - e^{-m(a(\beta)-\beta)} = \alpha_1$$

$$F(b(\beta),\beta) = 1 - e^{-m(b(\beta)-\beta)} = 1-\alpha_2$$

equivalentes a:

$$\ln(1-\alpha_1) = -m(a(\beta)-\beta)$$

$$\ln(\alpha_2) = -m(b(\beta)-\beta)$$

igual a:

$$a(\beta) = \beta - \frac{1}{m}\ln(1-\alpha_1)$$

$$b(\beta) = \beta - \frac{1}{m}\ln(\alpha_2)$$

por tanto partiremos de las desigualdades:

$$\beta - \frac{1}{m}\ln(1-\alpha_1) \leq X_{(1)} \leq \beta - \frac{1}{m}\ln\alpha_2$$

equivalente a:

$$X_{(1)} + \frac{1}{m}\ln\alpha_2 \leq \beta \leq X_{(1)} + \frac{1}{m}\ln(1-\alpha_1)$$

Para determinar explícitamente el intervalo habrá que fijar $\alpha_1$ y $\alpha_2$. Para ello, observemos en primer lugar que $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$ y además, la longitud del intervalo es igual a:

$$l = \frac{1}{m}\ln(1-\alpha_1) - \frac{1}{m}\ln(\alpha_2) = \frac{1}{m}\ln(1-\alpha_1) - \frac{1}{m}\ln(\alpha-\alpha_1)$$

con $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha$

$$\frac{dl}{d\alpha_1} = \frac{1}{n}\,\frac{-1}{1-\alpha_1} - \frac{\lambda}{n}\,\frac{-1}{\alpha-\alpha_1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\alpha-\alpha_1} - \frac{1}{1-\alpha_1}\right) > 0$$

por tanto el mínimo se alcanza cuando $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = \alpha$, y el intervalo resultara ser:

$$\left[ X_{(1)} + \frac{\lambda}{n}\ln\alpha \leq \beta \leq X_{(1)} \right]$$ intervalo de confianza $1-\alpha$ para $\beta$.

---

A veces puede resultar difícil disponer de un pivote o conocer la distribución exacta de un estadístico para poder aplicar el método de Neyman; entonces podemos considerar la posibilidad de aplicar dichos métodos usando aproximaciones asintóticas, basadas en muestras grandes, determinando entonces intervalos de confianza o regiones confidenciales con confianza aproximada $1-\alpha$.

Así, si consideramos una familia probabilística regular, en el sentido de garantizar las propiedades asintóticas del estimador máximo-verosímil, si llamamos $\theta_n^*$ al MLE obtenido a partir de una muestra de tamaño $n$, sabemos que en el caso en que $\theta$ sea un escalar:

converge en ley

$$\sqrt{n}\,(\theta_n^* - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \sim N\left(0,\ var = \frac{1}{I(\theta)}\right)$$

donde $I(\theta)$ es la información de Fisher. Por tanto, tendremos

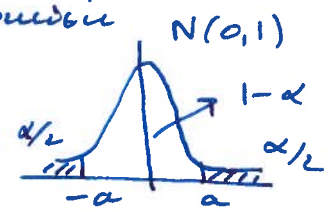
$$\sqrt{n}\; I^{1/2}(\theta)\,(\theta_n^* - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim N(0,1)$$

siendo pues $\sqrt{n}\, I^{1/2}(\theta)\,(\theta_n^* - \theta)$ un pivote "asintótico": su distribución asintótica es siempre la misma (no es un pivote ordinario pues dado $n$, su distribución, en general, dependerá de $\theta$)

Por tanto podemos determinar un intervalo:

$$P_\theta\left(-a \leq \sqrt{n}\, I^{1/2}(\theta)\,(\theta_n^* - \theta) \leq a\right) = 1-\alpha$$

de forma aproximada, a partir de la distribución límite:




$$P(-a \leq Z \leq a) = 1-\alpha$$

y por tanto $a = F_Z^{-1}(1-\alpha/2)$

donde $F_Z$ es la función de distribución de $Z$, una normal estandarizada.

Observar que $P_\theta(-a \leq \sqrt{n}\, I^{1/2}(\theta)(\theta_n^* - \theta) \leq a)$ no será exactamente igual a $1-\alpha$, sólo lo será asintóticamente, pero

$\forall \theta \in \Theta$ $$P_\theta(-a \leq \sqrt{n}\, I^{1/2}(\theta)(\theta_n^* - \theta) \leq a) \simeq 1-\alpha$$

a partir de $$-a \leq \sqrt{n}\, I^{1/2}(\theta)(\theta_n^* - \theta) \leq a \qquad (I)$$

trataremos de hallar unas desigualdades equivalentes de la forma:

$$U(\theta_n^*, a, n) \leq \theta \leq V(\theta_n^*, a, n) \qquad (II)$$

dependiendo de la forma funcional de $I(\theta)$, desigualdades estas últimas que determinarán nuestro intervalo de confianza asintótico.

El paso de (I) a (II) puede ser laborioso dependiendo de $I(\theta)$.

Hay un procedimiento que facilitará la obtención de intervalos de confianza asintóticos: se tratará de una modificación del método anterior, aplicable cuando $I(\theta)$ sea una función continua.

Entonces, por las propiedades de la convergencia en probabilidad, tendremos:

$$I(\theta_n^*) \xrightarrow{c.p.} I(\theta)$$

puesto que $\theta_n^* \xrightarrow{cp} \theta$; y a partir de propiedades de las convergencias en ley y en probabilidad (Teorema de Slutsky, ...) tendremos:

$$\boxed{\sqrt{n}\, I^{1/2}(\theta_n^*)(\theta_n^* - \theta) = \underbrace{\frac{I^{1/2}(\theta_n^*)}{I^{1/2}(\theta)}}_{\downarrow c.p. \atop 1} \underbrace{\sqrt{n}\, I^{1/2}(\theta)(\theta_n^* - \theta)}_{\downarrow \mathcal{L} \atop Z} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim N(0,1)}$$

ya que $$\frac{I^{1/2}(\theta_n^*)}{I^{1/2}(\theta)} \xrightarrow{c.p.} 1$$

Por tanto $\sqrt{n}\, I^{1/2}(\theta_n^*)\,(\theta_n^*-\theta)$ es tambien un pivote asintótico, más fácil de manejar que el anterior.

Hacemos:

$$P_\theta\left(-a \leq \sqrt{n}\, I^{1/2}(\theta_n^*)\,(\theta_n^*-\theta) \leq a\right) = 1-\alpha$$

fijando a en términos de la distribución límite: $\left[a = F_Z^{-1}(1-\alpha/2)\right]$

pero ahora la desigualdad

$$-a \leq \sqrt{n}\, I^{1/2}(\theta_n^*)\,(\theta_n^*-\theta) \leq a$$

permite obtener facilmente las desigualdades equivalentes:

$$\left[\theta_n^* - \frac{a}{\sqrt{n}}\frac{1}{I^{1/2}(\theta_n^*)} \leq \theta \leq \theta_n^* + \frac{a}{\sqrt{n}}\frac{1}{I^{1/2}(\theta_n^*)}\right]$$

que definen un intervalo asintótico de confianza $1-\alpha$.

---

En el caso multidimensional, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$, tendremos analogamente:

$$\sqrt{n}\,(\theta_n^*-\theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \sim \underbrace{N_m(0,\ cov = I^{-1}(\theta))}_{\text{distribución normal multivariante}}$$

vector columna $m\times 1$

equivalente a:

$$\sqrt{n}\, I^{1/2}(\theta)\,(\theta_n^*-\theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim N_m(0, I)$$

$I(\theta)$ matriz $m\times m$ de información de Fisher

si $I(\theta)$ es continua, también:

$$\sqrt{n}\, I^{1/2}(\theta_n^*)\,(\theta_n^*-\theta) \overset{\mathcal{L}}{\sim} Z \sim N_m(0,I)$$

por tanto (a partir de propiedades de la convergencia en ley)

$$\underbrace{n\,(\theta_n^*-\theta)^t\, I(\theta_n^*)\,(\theta_n^*-\theta)}_{\text{pivote asintótico}} \xrightarrow{\mathcal{L}} U \sim \chi^2_m = G\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{m}{2}\right)$$

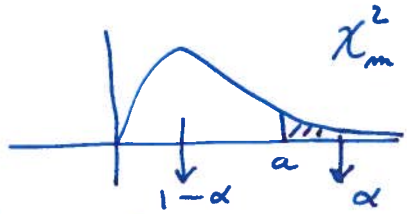
que permitirá una región de confianza asintótica $1-\alpha$:

$$P\left(n\,(\theta_n^*-\theta)^t\, I(\theta_n^*)\,(\theta_n^*-\theta) \leq a\right) = 1-\alpha$$

Hallando $a$ en términos de la distribución límite:

$$P(\,u \leq a\,) = 1 - \alpha$$

$$a = F_U^{-1}(1-\alpha)$$ (siendo $F_U$ la función de distribución de $U$)




A partir de

$$n\,(\theta_n^* - \theta)^t\, I\,(\theta_n^*)\,(\theta_n^* - \theta) \leq a$$

obtenemos la región de confianza, que podemos expresar como:

$$\left[\, n\,(\theta - \theta_n^*)^t\, I\,(\theta_n^*)\,(\theta - \theta_n^*) \leq a \,\right]$$ confianza aprox $1-\alpha$

se trata de un elipsoide m-dimensional centrado en $\theta_n^*$ y cuyos semiejes se obtendrán en términos de los vectores propios de $I(\theta_n^*)$.