

P1) (5 punts) El temps de vida d'un component electrònic C que fabrica una empresa presenta una distribució exponencial. Els components de la gama A tenen temps mig de vida de 2 anys, mentre que els de la gama B tenen temps mig de 1,5 anys. Una empresa X que fabrica dispositius compra una partida híbrida P d'aquests components a un preu especialment econòmic en el que hi ha mesclats 20 % de la gama A i 80% de la gama B per a integrar-los en els seus dispositius. Se suposa que en fallar el component electrònic deixa de funcionar el dispositiu.

- a) **(0.5p)** Distribució de probabilitats del temps de funcionament del dispositiu que fabrica l'empresa X.
- b) **(0.5p)** Temps mig de funcionament del dispositiu.
- c) **(0.5p)** Una empresa Y compra a la X una partida inicial de 1000 dispositius. Calcular el temps mig que passarà fins que només quedin la meitat dels dispositius inicials de la partida.
- d) **(1p)** Gradualment, els 1000 dispositius van sent posats en funcionament. Triat un d'ells a l'atzar que encara funciona, quina és la probabilitat de que funcioni menys de 1 any?
- e) **[2.5p]** Una tercera empresa, Z, té un contracte per tal que li siguin subministrats dispositius de la classe A (amb temps mig de vida de 2 anys). Concretament n'hi arriben en mitjana 1 cada tres anys amb temps entre arribades exponencialment distribuït. En arribar a l'empresa els nous dispositius o bé són posats en marxa immediatament si no n'hi ha cap funcionant o bé, si n'hi ha un funcionant, el nou que arriba es guarda al magatzem. En avariar-se el dispositiu aquest és reemplaçat per un altre si n'hi al magatzem. Es demana:
 - e.1) **[1p]** Model de cues pel número de dispositius classe A que té l'empresa Z i probabilitat de que a Z no hi hagi cap dispositiu.
 - e.2) **[0.75p]** Número mig de dispositius a Z i temps mig de permanència a d'un dispositiu a l'empresa Z.
 - e.3) **[0.75p]** Probabilitat de que un dispositiu estigui a l'empresa dos anys o més.

5221 9876 5305 6365 3369 324 4595 4558 2148 9635
1319 2803 2061 9608 4167 3831 3340 7509 3359 8669
9992 9590 4232 1480 6077 3465 1932 5370 1072 7807

P2) (5 punts) El temps de vida d'un component electrònic C que fabrica una empresa presenta una distribució exponencial. Els components de la gama A tenen temps mig de vida de 2 anys, mentre que els de la gama B tenen temps mig de 1,5 anys. Una empresa Z en rep en promig 1 cada dos anys amb temps entre arribades exponencialment distribuït. En arribar un component, aquest ingressa en un estoc en cas de que n'hi hagi ja cap d'actiu; en cas contrari és posat en funcionament. Quan s'acaba la vida del component que està en actiu, se'l reemplaça per algun de l'estoc; si no n'hi ha de disponibles cal esperar a n'arribi un. Els components que els arriben provenen d'una gran partida que conté 20 % de la gama A i 80% de la gama B. En cap cas l'empresa Z té informació de quan un component és de la classe A o de la B. Es demana:

- 1) **[0.75p]** Model de cues pel número de dispositius que té l'empresa Z i probabilitat de que a Z no hi hagi cap dispositiu.
- 2) **[0.75p]** Número mig de dispositius a Z i temps mig de permanència a d'un dispositiu a l'empresa Z.
- 3) **[0.75p]** Probabilitat de que un dispositiu estigui a l'estoc de l'empresa Z dos anys o més abans de ser usat. Quina distribució segueix el temps de permanència en l'estoc?
- 4) **[2.75p]** Es demana que us plantegeu efectuar una simulació de la cua anterior mitjançant la metodologia event-scheduling. Considereu les variables d'estat NZ = número de components en l'empresa Z, S =component actiu o inactiu (estat del servidor) i tCK = instant de rellotge així com els successos: A =Arribada a l'empresa Z d'un component, $S=Fi$ de la vida del component.
 - 4.1) **[0.75p]** Escriviu les accions que desencadenarien cada succés sobre les variables d'estat i quins nous successos serien generats.
 - 4.2) **[2p]** Efectueu la simulació del sistema fins que es completi el funcionament del 2on component que hagi arribat a l'empresa Z. Cada cop que inspeccioneu un element de la llista de successos deixeu indicat el valor final de totes les variables d'estat, així com els elements que formen part de la llista. Partiu de la situació inicial: $NZ=0$ i $S=lliure$; genereu inicialment una llista amb un succés A (arribada)

p1) a) temps distribuït segons una hipereixponencial

$$f_Z(t) = \alpha_A \lambda_A e^{-\lambda_A t} + \alpha_B \lambda_B e^{-\lambda_B t} \quad \alpha_A = 0.2$$

$$\alpha_B = 0.8$$

$$b) E[Z] = 0.2 \cdot 2 + 0.8 \cdot 1.5 = 1.5 \text{ anys}$$

$$\lambda_A = 0.5 \text{ anys}^{-1}$$

$$\lambda_B = 2/3 \text{ anys}^{-1}$$

$$c) P(Z \geq t) = 1/2 \Rightarrow$$

$$1/2 = 0.2 \cdot e^{-0.5t} + 0.8 \cdot e^{-2/3 t} \Rightarrow t \approx 1.1 \text{ any}$$

$$d) P(r \leq 1) : f_r(t) = \frac{R_Z(t)}{E[Z]} = \frac{1}{1.5} \left(0.1 e^{-t/2} + \frac{1.6}{3} e^{-2/3 t} \right)$$

$$P(r \leq 1) = \int_0^1 f_r(t) dt = \frac{1}{1.5} \int_0^1 0.1 e^{-t/2} dt + \frac{1}{1.5} \int_0^1 \frac{1.6}{3} e^{-2/3 t} dt =$$

$$= \frac{1}{8} (1 - e^{-1/2}) + \frac{1}{2} (1 - e^{-2/3}) = 0.2924$$

$$e) E[Z] = 3 \text{ anys}, E[X] = 2 \text{ anys} \quad Z, X \sim \exp$$

$$e.1) M/M/1. \quad P_0 = 1 - \rho = 1 - 2/3 = 1/3$$

$$e.2) L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{2/3}{1/3} = 2, W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{1/3} = 6 \text{ unitats}$$

$$e.3) w \sim \exp. \text{ per una cua } M/M/1.$$

$$P(w \geq 2) = e^{-2/6} = 0.716$$



22) M/G/1. $x \sim \text{Hiper}$

fama A 2 anys
" B 1'5 anys

1) $E[x] = 0.2 \cdot 2 + 0.8 \cdot 1.5 = 1.6 \text{ anys}$

$$\text{Var}(x) = 2 \sum_{i=1}^2 \frac{x_i^2}{p_i} - \left(\sum_{i=1}^2 \frac{x_i}{p_i} \right)^2 =$$

$$= 2 (2^2 \cdot 0.2 + 1.5^2 \cdot 0.8) - (1.6)^2 =$$

$$= 2.64 \text{ anys}^2 \rightarrow \sigma_x = 1.62 \text{ anys}$$

$$C_x = \frac{1.62}{1.6} = 1.015 \quad ; \quad \rho = \frac{1.6}{2} = 0.8$$

2) $W_q = W_{qM/G/1} \left(\frac{1 + C_x^2}{2} \right) = \frac{0.8^2}{0.2} \left(\frac{1 + 1.015^2}{2} \right) = 3.24$

$$W_q = W_q / \lambda = 3.24 / 0.5 = 6.48$$

$$W = W_q + E[x] = 6.48 + 1.6 = 8.08 \text{ anys}$$

$$L = W_q + \rho = 3.24 + 0.8 = 4.04$$

3) $P(W_q \geq 2) \sim e^{-2/6.48} = 0.7347$

(el sistema està bastant carregat $\rho = 0.8$ per tant W_q es distribuirà entre els clients de forma exponencial aproximadament.)

ARRIBADA

4.1)

Successos: A = arribada, $S_{A,B}$ = Fi de servei de comp. A, B.

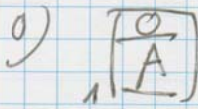
$\frac{S_i}{\sum S_i}$ Servidor = L. lavors
generar sortida (tipus A o B)

$S = 0$; $N_2 = N_2 + 1$; generar següent arribada

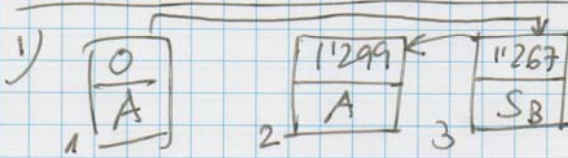
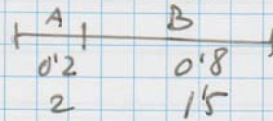
Fi de servei

$\frac{S_i}{\sum S_i}$ $N_2 = 1$ lavors
 $S = L$
altrament
generar Fi de servei
 $N_2 = N_2 - 1$

4.2) Inicialització: succeïr arribada a $t_k = 0$



$$N_z = 0, S = L$$



$$t_k = 0$$

següent arribada

$$z = -2 \ln \frac{5221}{9999} = 1'299$$

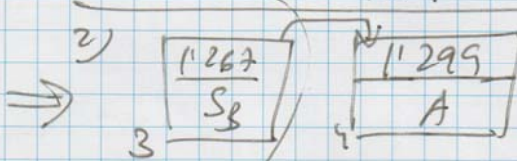
$$t = t_k + z = 1'299$$

Es genera servei: tipus de servei:

$$x = -2 \ln \frac{5305}{9999} = 1'267$$

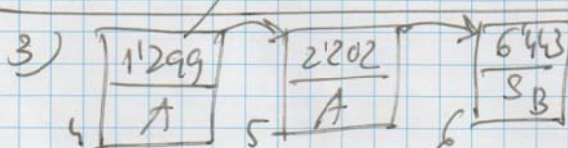
$$\frac{9876}{9999} > 0.2 \Rightarrow B$$

$$N_z = 1, S = O_c$$



$$N_z = 0, S = L$$

$$t_k = 1'267$$



$$t_k = 1'299$$

següent arribada

$$z = -2 \ln \frac{6365}{9999} = 0'903$$

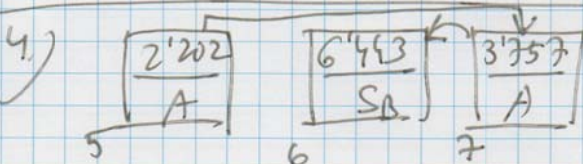
$$t = 1'299 + 0'903 = 2'202$$

Es genera servei de 4

$$\text{tipus: } \frac{3369}{9999} > 0.2 \Rightarrow B, x = -1.5 \ln \frac{329}{9999} = 5'144$$

$$\text{fi servei: } 1'299 + 5'144 = 6'443$$

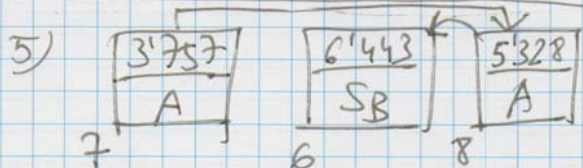
$$N_z = 1, S = O_c$$



$$t_k = 2'202, z = -2 \ln \frac{4595}{9999} = 1'555$$

$$t = 2'202 + 1'555 = 3'757$$

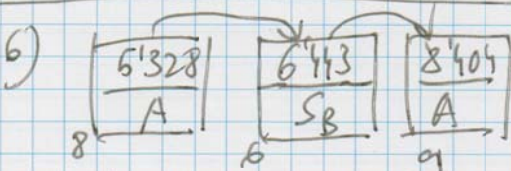
$$N_z = 2, S = O_c$$



$$t_k = 3'757, z = -2 \ln \frac{4558}{9999} = 1'571$$

$$t = 3'757 + 1'571 = 5'328$$

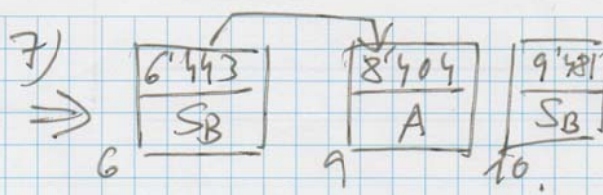
$$N_z = 3, S = O_c$$



$$t_k = 5'328, z = -2 \ln \frac{2148}{9999} = 3'076$$

$$t = t_k + z = 8'404$$

$$N_z = 4, S = O_c$$



$t_{ex} = 6'443$
 non fi servei. (per l'arribada de 4)
 tipus: $\frac{9635}{9999} > 0.2 \Rightarrow B$

Fi de simulació
 (2 fevers processats)

$$x = -1.5 \ln \frac{1319}{9999} = 3'038$$

$$t = t_{ex} + x = 9'481$$