UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

PROVA DE TEORIA REAVALUACIÓ
Programació Lineal i Entera, curs 2015-16
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM ALUMNE:

	Temps estimat	Punts	Puntuació		
Test	30 min	2.0 pts	C:	I:	**PROHIBIDA LA PRESÈNCIA DE MÒBILS DURANT LA PROVA. PARTICIPAR EN UN CAS DE CÒPIA IMPLICA SUSPENDRE LA PROVA AMB NOTA NUMÈRICA ZERO.**
Exercici 1	45 min	2.5 pts	a: 1pt	b: 1.5pt	
Exercici 2	45 min	2.5 pts	a: 1pt	b: 1.5pt	
Exercici 3	30 min	3.0 pts	a: 2pt	b: 1pt	
Total	150min	10 pts			

TEST (2 punts / 30 min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a)**, **b)** i **c)** si és vertadera (**V**) o falsa (**F**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. Un políedre P és un conjunt de $\mathbb{R}^n$ que pot ser expressat com a

a) V / F intersecció de conjunts convexos qualssevol. (F)
b) V / F intersecció de semiespais. (V)
c) V / F solució d'un sistema d'inequacions. (V)

TEST 2. Considereu el problema (PL) factible i una solució factible $x \in P$ amb una direcció factible $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $x + \theta d \in P,\ \forall \theta > 0$. Llavors:

a) V / F Podem assegurar (PL) és il·limitat. (F)
b) V / F La regió factible de (PL) és un polítop. (F)
c) V / F La regió factible de (PL) no és fitada. (V)

TEST 3. Sigui (PL) $\min\limits_{x\in R^n}\{c'x | x \in P\}$, P políedre. Suposem que P conté algun punt extrem i que existeix una solució òptima. Llavors:

a) V / F Tota solució òptima és un punt extrem de P. (F)
b) V / F Tot punt extrem de P és solució òptima. (F)
c) V / F Existeix una solució òptima que és un punt extrem de P. (V)

TEST 4. Sigui (PL) $\min\limits_{x\in R^n}\{c'x | x \in P_e\}$ amd P_e políedre estàndard no buit amb $A \in R^{m\times n}$ i $rang(A) = k < m$. Llavors

a) V / F Si eliminem les constriccions redundants no es modificarà P_e. (V)
b) V / F Si eliminem les constriccions redundants es modificarà P_e pero no x^*. (F)
c) V / F Si eliminem les constriccions redundants no es modificarà P_e pero sí x^*. (F)

TEST 5. La direcció bàsica factible $d \in \mathbb{R}^n$ sobre la SBF $x \in P_e$ associada a $q \in \mathcal{N}$:

a) V / F Sempre té associada una longitud de pas $\theta^* > 0$. (F)
b) V / F És una direcció de millora de la funció objectiu. (F)
c) V / F Sempre té $m + 1$ component no nules. (F)

TEST 6. Donat un problema $(PL)_e$, la longitud de pas màxima $\theta^* = max\{\theta > 0 \mid x + \theta d \geq 0\}$ associada a una x SBF i d DBF:

a) V / F Sempre existirà. (F)
b) V / F Sempre existirà si $(PL)_e$ és no degenerat. (V)
c) V / F Pot existir si $(PL)_e$ és degenerat. (V)

CC BY NC ND
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/ or send a letter to Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

NOM ALUMNE:

TEST 7. Sigui P_e políedre estàndard no buit no degenerat, x SBF de P_e. Llavors:

a) V / F $r \geq [0] \Rightarrow x$ òptima. (V)

b) V / F x òptima $\Rightarrow r \geq [0]$. (V)

c) V / F x òptima $\Leftrightarrow r \geq [0]$. (V)

TEST 8. Si el problema lineal $(PL)_e$ té alguna SBF degenerada, l'algorisme del símplex primal sense regla de Bland

a) V / F Podem assegurar que no finalitzarà. (F)

b) V / F Podem assegurar que finalitzarà, però sense haver trobar la solució òptima. (F)

c) V / F Pot finalitzar trobant la solució òptima. (V)

TEST 9. En els jocs finits de suma zero, la solució del problema *maximin* del jugador 1:

a) V / F Maximitza l'esperança matemàtica del seu guany mínim. (V)

b) V / F Minimitza l'esperança matemàtica del seu guany màxim. (F)

c) V / F Minimitza l'esperança matemàtica de la pèrdua màxima del jugador 2. (V)

TEST 10. El teorema d'equivalència dels duals en forma estàndar estableix que els problemes duals de (P) i la seva forma estandard $(P)_e$ ((D) i $(D)_e$ respectivament):

a) V / F Són idèntics (mateixes variables i constriccions). (F)

b) V / F Si (D) és infactible $(D)_e$ és il·limitat (i viceversa). (F)

c) V / F Si (D) és infactible $(D)_e$ també ho és. (V)

TEST 11. Si dos vectors $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ satisfan les condicions de folga complementària

$$\lambda_j(a_j'x - b_j) = 0 \quad j = 1,2,\dots,m$$
$$(c_i - \lambda' A_i)x_i = 0 \quad i = 1,2,\dots,n$$

a) V / F Llavors $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ són òptims (P) i (D) respectivament. (F)

b) V / F Llavors $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ poden ser òptims (P) i (D) respectivament. (V)

c) V / F Llavors $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ seran factibles (P) i (D) respectivament. (F)

TEST 12. En el problema (PE) $\min\{x_1 + x_2 | x_1 \in [0,1.5], x_2 \in [0,1.5]\}$

a) V / F La constricció $x_1 + x_2 \leq 3$ és una tall. (F)

b) V / F La constricció $x_1 + x_2 \leq 3$ és una desigualtat vàlida. (V)

c) V / F La constricció $x_1 \leq 1.5$ és una desigualtat vàlida. (V)

TEST 13. La formulació ideal d'un problema de (PE)

a) V / F S'obté a l'ultima iteració d'un algorisme de plans de tall de Gomory. (F)

b) V / F Satisfà que l'embolcall convex de la seva regió factible és no buit. (F)

c) V / F Té regió factible que és un políedre. (F)

TEST 14. Quan s'utilitza reoptimització amb el símplex dual per resoldre $(RL_{j,0})$ amb $(P_j) \stackrel{\text{def}}{=} (P_{j-1}) + x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$ a l'algorisme del B&C

a) V / F x_i entrarà a la base a la primera iteració. (F)

b) V / F x_i sortirà de la base a la primera iteració. (F)

c) V / F x_i es conserva a la base a la primera iteració. (V)

TEST 15. A l'algorisme del B&C

a) V / F Es visitaran, en general, menys nodes que al B&B. (V)

b) V / F A cada iteració es realitzaran, en general, menys iteracions del símplex. (V)

c) V / F Identificarà, en general, menys solucions enteres que el B&B. (V)

BY-NC-ND

NOM ALUMNE:

EXERCICI 1. (2.5 punts / 75min / apunts i calculadora / RESPONEU AL MATEIX FULL)

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(P)\begin{cases} \min & -\frac{1}{2}x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & \geq 1 \\ & & x_2 & \geq 1 \\ & x_1, & x_2, & \geq 0 \end{cases}$$

És trivial comprovar gràficament que aquest problema és il·limitat. Volem però demostrar-ho rigorosament mitjançant la teoria estudiada a classe:

a) **(1 punt)** Calculeu totes les direccions bàsiques factibles existents i useu-les per demostrar que aquest problema és il·limitat.

Resposta:

BY-NC-ND

NOM ALUMNE:

b) **(1.5 punt)** Demostreu, usant el l'algorisme del símplex, que el problema (P) és il·limitat.

Resposta:

BY-NC-ND

NOM ALUMNE:

EXERCICI 2. (2.5 punts / 45min / apunts i calculadora / RESPONEU AL MATEIX FULL)

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(P)\begin{cases}\min & x_1 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & \geq 1 \\ & x_1 & & \geq \frac{1}{2} \\ & x_{1,} & x_2, & \geq 0\end{cases}$$

a) **(1 punt)** Representeu gràficament el problema (P) i el seu dual (D), indicant les solucións optimes primal i dual.

Resposta:

BY-NC-ND

NOM ALUMNE:

b) **(1.5 punt)** A l'apartat anterior heu pogut comprovar que el problema primal (P) presenta òptims alternatius. Sigui $\mathcal{X}^*$ el conjunt format per totes les solucions òptimes de (P). Useu el teorema de folga complementària per demostrar que qualsevol vector $x^* \in \mathcal{X}^*$ és solució òptima de (P) (no us limiteu a fer el desenvolupament numèric, expliqueu la lògica del procediment que apliqueu).

Resposta:

BY-NC-ND

NOM ALUMNE:

EXERCICI 3. (3 punts / 45min / apunts i calculadora / RESPONEU AL MATEIX FULL)

Resoleu el següent problema de (PE) amb l'algorisme de plans de tall de Gomory.:

$$(PE)\begin{cases} \min & -x_1 & -2x_2 & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & x_1 & +3x_2 & \leq 2 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0 \quad , enteres \end{cases}$$

a) **(2 punts)** Resoleu el següent problema de (PE) amb l'algorisme de plans de tall de Gomory Resoleu les relaxacions lineals gràficament i seleccioneu com a variable de generació del tall la que tingui el menor índex.

Resposta:

BY-NC-ND

NOM ALUMNE:

b) **(1 punt)** Un cop resolt el problema, comproveu:

i. Que les formulacions valides trobades a cada iteració són cada vegada més fortes.

ii. Que les fites de les relaxacions lineals $(RL_{j,l}), l = 0,1, \ldots$ a cada iteració són cada vegada millors.

iii. Que la formulació obtinguda a l'última iteració és la formulació ideal.

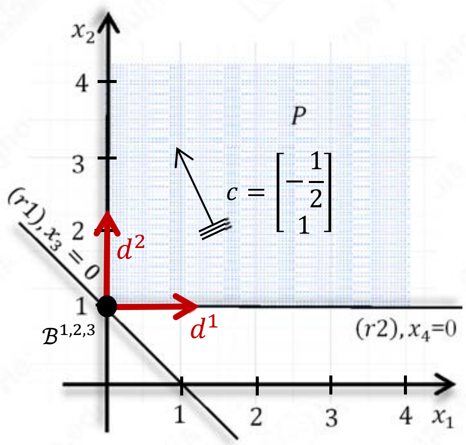
Resposta:

NOM ALUMNE:

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

Apartat a)

$$(P)\begin{cases}\min & -\frac{1}{2}x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & \geq 1 \\ & & x_2 & \geq 1 \\ & x_1, & x_2, & \geq 0\end{cases}$$



De la representació gràfica s'observa que hi ha un únic punt extrem amb tres SBF associades:

$$\begin{Bmatrix}\mathcal{B}^1 = \{1,2\} \\ \mathcal{B}^2 = \{3,2\} \\ \mathcal{B}^3 = \{4,2\}\end{Bmatrix} \rightarrow x_B^{1,2,3} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Calculem totes les DBF existents sobre les tres SBF $\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2$ i $\mathcal{B}^3$:

1. $\mathcal{B}^1 = \{1,2\}\begin{cases} q=3: d_B^{1\to 2} = -\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \geq 0, \quad \nexists\theta^*, \quad c'd = -\frac{1}{2} < 0 \\ q=4: d_B^{1\to 3} = -\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \ngeq 0, \quad \theta^* = 0\end{cases}$
2. $\mathcal{B}^2 = \{3,2\}\begin{cases} q=1: d_B^{2\to 1} = -\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \geq 0, \quad \nexists\theta^*, \quad c'd = -\frac{1}{2} < 0 \\ q=4: d_B^{2\to 3} = -\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \geq 0, \quad \nexists\theta^*, \quad c'd = 1 > 0\end{cases}$
3. $\mathcal{B}^3 = \{4,2\}\begin{cases} q=1: d_B^{3\to 1} = -\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} \ngeq 0, \quad \theta^* = 0 \\ q=3: d_B^{3\to 2} = -\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \geq 0, \quad \nexists\theta^*, \quad c'd = 1 > 0\end{cases}$

Recapitulant:

- La DBF $d^1 = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]'$, que correspon a $d_B^{1\to 2}$ i $d_B^{2\to 1}$, és una direcció il·limitada ($d_B \geq 0$) de descens ($c'd < 0$).
- La DBF $d^2 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]'$, que correspon a $d_B^{2\to 3}$ i $d_B^{3\to 2}$, és una direcció il·limitada ($d_B \geq 0$) d'ascens ($c'd > 0$).
- Les DBF $d^3 = [-1 \quad 1 \quad 0 \quad 1]'$ ($d_B^{1\to 3}$) i $d^4 = [1 \quad -1 \quad 0 \quad -1]'$ ($d_B^{3\to 2}$) són DBF infactibles ($\theta^* = 0$).

Llavors, atés que d^1 és una direcció factible il·limitada de descens, el problema (P) és il·limitat ■

Apartat b)

Per tal de demostrar amb l'algorisme del símplex que (P) és il·limitat fem una iteració de l'algorisme a partir de la SBF factible $\mathcal{B}^1 = \{1,2\}$:

Càlculs Previs:

$\mathcal{B} = \{1,2\}, \mathcal{N} = \{3,4\}, B = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$

$z = c_B' x_B = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 1$

BY-NC-ND

NOM ALUMNE:

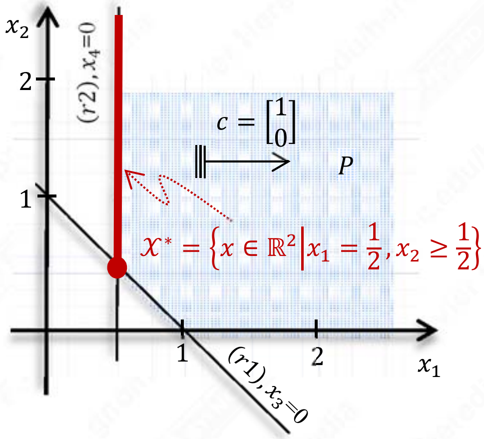
1a iteració:

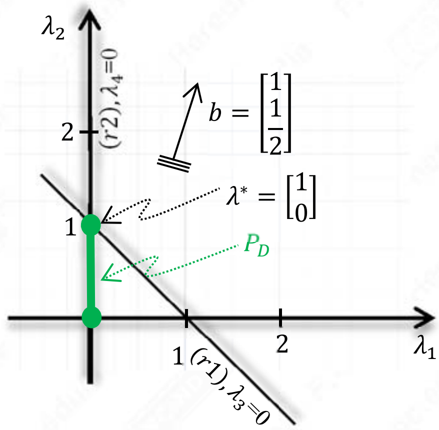
1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q amb $\mathcal{N} = \{3,4\}$:
   $$r' = c_N' - c_B'B^{-1}N = [0] - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \ngeq 0 \rightarrow q = 3$$
2. DBF i problema il·limitat : $d_B = -B^{-1}A_3 = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow (P)$ il·limitat.

SOLUCIÓ EXERCICI 2.

Apartat a)

$$(P)\begin{cases} \min & x_1 & & \\ \text{s.a.:} & & & \\ (r1) & x_1 & +x_2 & \geq 1 \\ (r2) & x_1 & & \geq \frac{1}{2} \\ & x_1, & x_2, & \geq 0 \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \max & \lambda_1 & +\frac{1}{2}\lambda_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ (r1) & \lambda_1 & +\lambda_2 & \leq 1 \\ (r2) & \lambda_1 & & \leq 0 \\ & \lambda_1, & \lambda_2, & \geq 0 \end{cases}$$





Apartat b)

Volem demostrar que qualsevol vector $x^* \in \mathcal{X}^* = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \middle| x_1 = \frac{1}{2}, x_2 \geq \frac{1}{2}\right\}$ és solució òptima de (P) usant el teorema de flga complementària. Aquest teorema estableix que donades unes solucions x i λ factibles (P) i (D) respectivament, aquestes solucions seran òptimes sii es satisfan les Condicions de Folga Complementària:

$$(CFC)\begin{cases} \lambda_j(a_j'x - b_j) = 0 & j = 1,2,\dots,m \\ (c_i - \lambda'A_i)x_i = 0 & i = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

Que pel nostre problema són:

$$(CFC)\begin{cases} \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) & = 0 & (1) \\ \lambda_2\left(x_1 - \frac{1}{2}\right) & = 0 & (2) \\ (1 - \lambda_1 - \lambda_2)x_1 & = 0 & (3) \\ (-\lambda_1)x_2 & = 0 & (4) \end{cases}$$

BY-NC-ND

NOM ALUMNE:

Si $x^* \in \mathcal{X}^*$ sabem que $x_1^* = \frac{1}{2}$, $x_2^* \geq \frac{1}{2}$. Llavors de (3) i (4) tenim que $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \therefore \lambda^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Com que $\lambda_1^* = 0$, (1) es satisfà trivialment, i de (2) s'obté $x_1^* = \frac{1}{2}$. Així doncs tenim $x^* \in \mathcal{X}^*$, $\lambda^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ satisfan les CFC. Podem comprovar que λ^* és factible dual

$$\begin{cases} \lambda_1^* + \lambda_2^* = 0 + 1 \leq b_1 = 1 \\ \lambda_1^* = 1 \leq b_2 = 0 \end{cases}$$

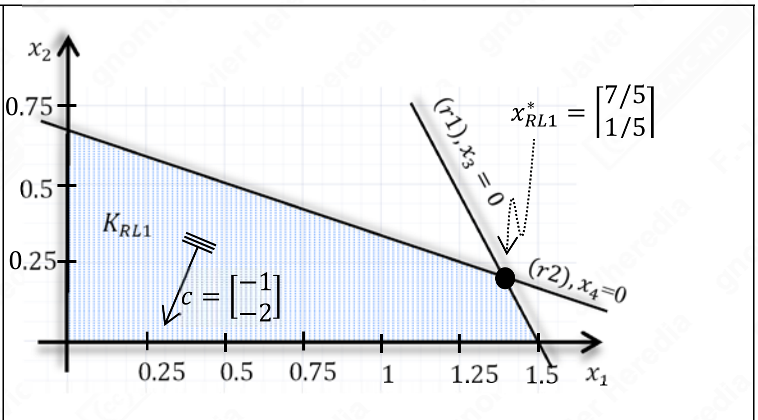
i x^* és factible primal per hipòtesi. Llavors, pel teorema de folga complementària podem assegurar que qualsevol $x^* \in \mathcal{X}^*$ és òptim ■

SOLUCIÓ EXERCICI 3.

Apartat a)

1a iteració Gomory:

$$(PE1) \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{Z}} & -x_1 & -2x_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ (r1) & 2x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ (r2) & x_1 & +3x_2 & \leq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$



- Solució òptima de la relaxació lineal de $(PE1)$, trobada gràficament: $x^*_{RL1} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$
- x^*_{RL1} no entera ⇒ tall de Gomory: es selecciona $x_1^* = 7/5$
  - $\mathcal{B} = \{1,2\}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$; $x_B^* = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$
  - $\mathcal{N} = \{3,4\}$; $A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$
  - $x^*_{B(1)} = x_1^*$ no entera: tall de Gomory associat a $x_1 = 7/5$

$$x_1 + \lfloor v_{13} \rfloor x_3 + \lfloor v_{14} \rfloor x_4 \leq \lfloor x_1^* \rfloor \; ; \; x_1 + \left\lfloor \frac{3}{5} \right\rfloor x_3 + \left\lfloor -\frac{1}{5} \right\rfloor x_4 \leq \left\lfloor \frac{7}{5} \right\rfloor \; ; \; x_1 - x_4 \leq 1 \xrightarrow{(r2):\, -x_4 = x_1 + 3x_2 - 2} \boxed{2x_1 + 3x_2 \leq 3 \; (r3)}$$

BY-NC-ND

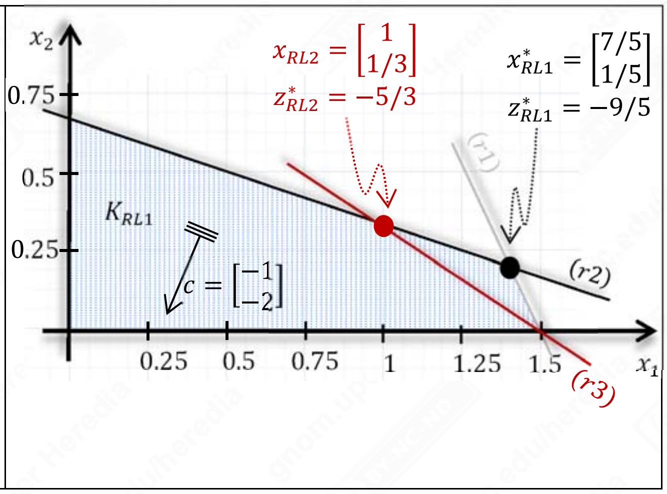
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

PROVA DE TEORIA DE REAVALUACIÓ
Programació Lineal i Entera, curs 2015-16
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM ALUMNE:

2a iteració Gomory:

$$(PE2)\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{Z}} & -x_1 & -2x_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ (r1) & 2x_1 & +x_2 & \le 3 \\ (r2) & x_1 & +3x_2 & \le 2 \\ (r3) & 2x_1 & +3x_2 & \le 3 \\ & x_1, & x_2 & \ge 0 \end{cases}$$



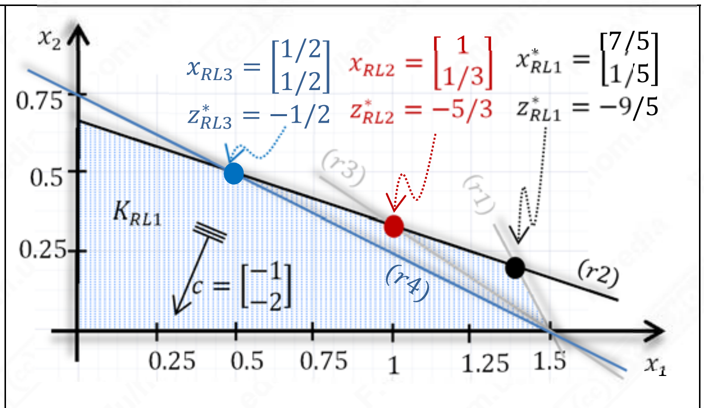
- Solució òptima de la relaxació lineal de $(PE2)$, trobada gràficament: $x^*_{RL2} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}$
- x^*_{RL2} no entera $\Rightarrow$ tall de Gomory. Observem que la restricció $(r1)$ és redundant, i no es tindrà en compte per calcular la SBF associada a x^*_{RL2}

  – $\mathcal{B} = \{1,2\}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$; $x_B^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}$
  – $\mathcal{N} = \{4,5\}$; $A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$
  – $x^*_{B(2)} = x_2^*$ no entera: tall de Gomory associat a $x_2^* = 2/3$

$$x_2 + \lfloor v_{24} \rfloor x_4 + \lfloor v_{25} \rfloor x_5 \le \lfloor x_2^* \rfloor \text{ ; } x_2 + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor x_4 + \left\lfloor -\frac{1}{3} \right\rfloor x_5 \le \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor \text{ ; } x_2 - x_5 \le 0 \xrightarrow{(r3):\, -x_5 = 2x_1 + 3x_2 - 3} \boxed{2x_1 + 4x_2 \le 3 \; (r4)}$$

3a iteració Gomory:

$$(PE3)\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{Z}} & -x_1 & -2x_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ (r1) & 2x_1 & +x_2 & \le 3 \\ (r2) & x_1 & +3x_2 & \le 2 \\ (r3) & 2x_1 & +3x_2 & \le 3 \\ (r4) & 2x_1 & +4x_2 & \le 3 \\ & x_1, & x_2 & \ge 0 \end{cases}$$



- Solució òptima de la relaxació lineal de $(PE3)$, trobada gràficament: $x^*_{RL3} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ (també s'hauria pogut prendre $x^*_{RL3} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$).

cc BY-NC-ND

NOM ALUMNE:

- x^*_{RL3} no entera ⇒ tall de Gomory. Observem que les restriccions $(r1)$ i $(r3)$ són redundants, i no es tindran en compte per calcular la SBF associada a x^*_{RL3}.

  – $\mathcal{B} = \{1,2\}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$; $x^*_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

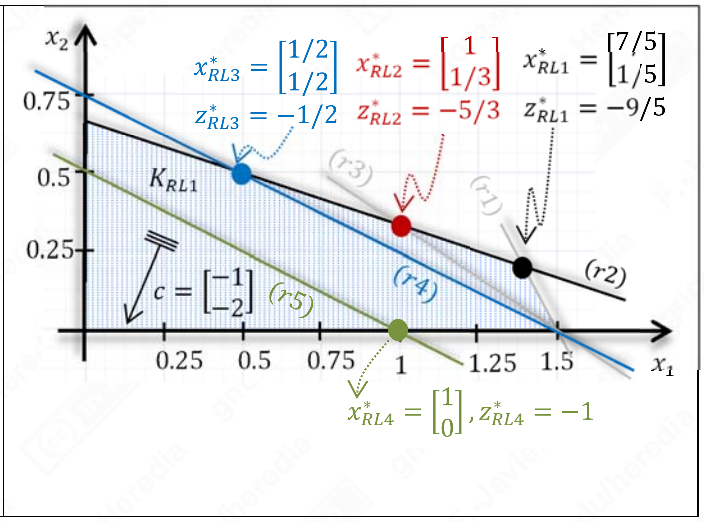
  – $\mathcal{N} = \{4,6\}$; $A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

  – $x^*_{B(1)} = x^*_1$ no entera: tall de Gomory associat a $x^*_1 = 1/2$

$$x_1 + \lfloor v_{14} \rfloor x_4 + \lfloor v_{16} \rfloor x_6 \le \lfloor x^*_1 \rfloor \; ; \; x_1 + \lfloor -2 \rfloor x_4 + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor x_6 \le \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \; ; \; x_1 - 2x_4 + x_6 \le 0 \xrightarrow{\substack{(r2):\, x_4 = 2 - x_1 - 3x_2 \\ (r4):\, x_6 = 3 - 2x_1 - 4x_2}} \boxed{x_1 + 2x_2 \le 1 \; (r5)}$$

4a iteració Gomory:

$$(PE3) \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{Z}} & -x_1 & -2x_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ (r1) & 2x_1 & +x_2 & \le 3 \\ (r2) & x_1 & +3x_2 & \le 2 \\ (r3) & 2x_1 & +3x_2 & \le 3 \\ (r4) & 2x_1 & +4x_2 & \le 3 \\ (r5) & x_1 & +2x_2 & \le 1 \\ & x_1, & x_2 & \ge 0 \end{cases}$$



- Solució òptima de la relaxació lineal de $(PE4)$, trobada gràficament: $x^*_{RL4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in K_{PE4} \Rightarrow$ $\boxed{x^*_{PE4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$.

BY-NC-ND

NOM ALUMNE:

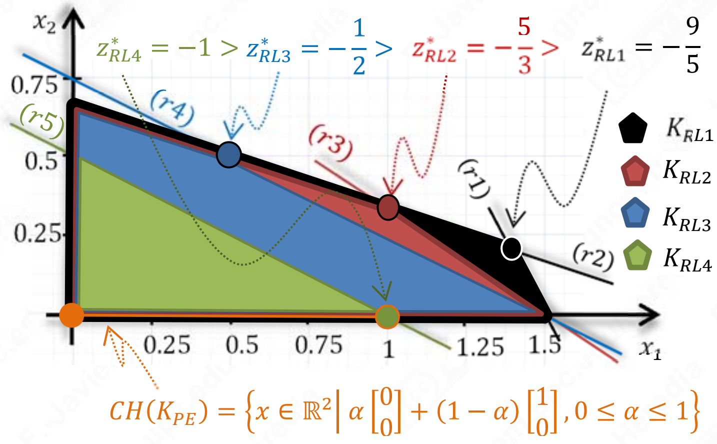
Apartat b)

Comprovem:

i. *Que les formulacions valides trobades a cada iteració són cada vegada més fortes.*

Efectivament, de la gràfica adjunta s'observa que la regió factible de la relaxació linea a cada iteració està continguda en l'anterior:

$$K_{RL4} \subset K_{RL3} \subset K_{RL2} \subset K_{RL1}$$



ii. *Que les fites de les relaxacions lineals $(RL_{j,l}), l = 0,1, \ldots$ a cada iteració són cada vegada millors.*

Podem comprovar que els valors de la funció objectiu de les relaxacions lineals son cada vegada majors

$$z^*_{RL4} = z^*_{PE4} > z^*_{RL3} > z^*_{Rl2} > z^*_{RL1}$$

es a dir, son fites inferiors del valor òptim z^*_{PE} cada vegada majors (millors).

iii. *Que la formulació obtinguda a l'última iteració és la formulació ideal.*

Aquesta afirmació no és certa, doncs veiem que el poliedre de l'última relaxació lineal, K_{RL4}, té un punt extrem de components no enteres, $x = \begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}$, és a dir,

$$K_{RL4} \neq CH(K_{PE}) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \middle| \alpha \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + (1-\alpha)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, 0 \le \alpha \le 1\right\}$$

BY-NC-ND