Grau Interuniversitari d'Estadística. UB-UPC

Teoria de Cues i Simulació. Convocatòria de Juny. Curs 2011-12
Avaluació Continua.

1er Bloc

Problema 1 (5,0 punts)

Una central de reserves disposa de una línea en espera amb capacitat per a quatre trucades i de una operadora per atendre les trucades. El temps mig entre trucada i trucada és de 3 minuts i està exponencialment distribuït, mentre que el temps mig que triga una conversació és de 2minuts 30 segons i està també exponencialment distribuït. En el cas en que hi hagin tres o més trucades en espera, llavors part de les qüestions formulades al client són suprimides i la conversa dura només 1minut 30 segons (distr. Exponencial). En aquestes condicions es demana:

a) [**2p**] Model de cua que es seguirà per als clients que truquen a la central de reserves. Diagrama de taxes del model. Presenta estat estacionari? En cas afirmatiu, doneu la distribució de probabilitats en e.e.
b) [**1p**] Nº mig de trucades rebutjades.
c) [**1p**] Número mig de clients presents en la línea d'espera.
d) [**1p**] Temps mig d'espera fins a ser atès.

Problema 2 (**5,0 punts**)

La central de reserves del problema anterior està situada en una ciutat on hi viuen 20.000 famílies. Cada una d'elles efectua una trucada cada dos mesos en promig a la central. El temps entre trucada i trucada d'una familia està distribuït segons una Llei Weibull

a) [1,5p] Caracteritzeu de forma aproximada el temps entre dues trucades que rebrà la central provinent de la població?
b) [1,25p] Quin és la distribució de probabilitats per al numero de trucades en una hora?
c) [1,25p] Quina és la probabilitat de que en mitja hora es rebin 8 trucades?
d) [1p] Quin és el temps entre dues trucades parells?

2^{on} Bloc

Problema 1 (6,0 punts)

En un aeroport, el sistema de revisió de passaports dels passatgers que entren en el país està estructurat en una única cua que és atesa per dos agents. Els passatgers arriben seguint un patró poissonià, amb temps mig entre arribades de 15 segons. Hi ha un 15% dels passatgers que són comunitaris amb un temps de revisió del passaport distribuït exponencialment de 20 segons, mentre que el 85% restant (extracomunitaris) tenen un temps de revisió també exponencialment distribuït però de 30 segons. Se suposa que les dues classes de passatgers arriben barrejats a l'atzar. En aquestes condicions es demana:

a) [**2p**] Caracteritzeu el sistema d'espera que millor s'ajusta a la descripció donada i calculeu els seus paràmetres: coeficient de variació del temps entre arribades i coeficient de variació del temps de serveis per al flux combinat de passatgers comunitaris-extracomunitaris.
b) [**1,5p**] Utilitzant una fòrmula d'aproximació calculeu: el temps mig d'espera en cua d'un passatger qualsevol i l'ocupació mitjana de la cua.

Se suposa ara que es vol desdoblar el sistema d'espera anterior de forma que hi hagi una cua per comunitaris i un altre cua per als extracomunitaris, de forma que en cada cua hi ha un dels agents atenent-la. Es demana:

c) [**1p**] Model dels sistemes d'espera en aquesta nova situació, indicant el coeficient de variació del temps entre arribades i coeficient de variació del temps de serveis per al flux de passatgers de cada cua.
d) [**0,5p**] Quin és el temps mig d'un passatger comunitari? i d'un extracomunitari?. És necessari disminuïr el temps de servei de cap dels sistemes d'espera resultants?
e) [**1p**] Amb els nous temps de servei (si és que cal modificar-los), calculeu igualment les ocupacions mitjanes de les dues cues. Quina configuració és preferible?

Problema 2 (4,0 punts)

5221	9876	5305	6365	3369	324	4595	4558	2148	9635
1319	2803	2061	9608	4167	3831	3340	7509	3359	8669
9992	9590	4232	1480	6077	3465	1932	5370	1072	7807
2400	6771	7164	1821	6170	9245	5791	3453	8305	6658
7220	3688	7989	1439	9171	6567	6899	7151	9439	6219
3253	7880	1782	2299	4181	8936	1243	939	7819	0884

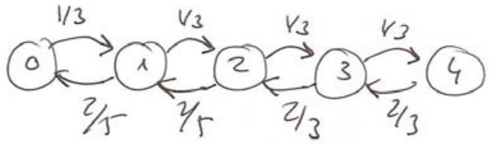
(Seleccioneu els n^{os} anteriors per columnes començant amb el 5221 inicial; accepteu que són una mostra de una distribució uniforme entre 0 i 9999.)

En una parada de metro, que és inici de línea, el temps entre l'arribada de dos passatgers consecutius és constant i de 1 segon (esperança=1 segon, variança =0 segons^2). El temps entre dues arribades de un tren obeeix a una llei 2-Erlang d'esperança 4 minuts. La capacitat dels trens és de 400 persones i, per ser inici de línea, arriben buits.

Un analista vol escriure un programa de simulació que permeti avaluar el n^o mig de passatgers que porten els N primers trens en sortir de la parada que operen en aquella línea.

a) [2p] Escriure un pseudo-codi que per aquest programa de simulació.
b) [2p] Avaluar el n^o mig de passatgers per al cas N=2 reproduïnt els resultats d'aquest programa, indicant en forma de taula:
   n^o de tren *i*.
   P*i* = passatgers arribats entre la arribada *i*-1 i la *i*.
   T*i* = temps entre arribada *i*-1 i la *i*
   Q*i* = passatgers que han quedat a l'estació sense poder pujar al tren *i*.

(1)



BLOC 1

$\lambda = 1/3 \; min^{-1}$

$\mu_1 = \frac{2}{5} \; min^{-1}$

$\mu_2 = 2/3 \; min^{-1}$

Sempre hi ha e.e. ja que presenta un nº finit d'estats

a)

$C_1 = \frac{1/3}{2/5} = \frac{5}{6}$, $C_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1/3}{2/5} = \frac{25}{36}$

$C_3 = \frac{25}{36} \frac{1/3}{2/3} = \frac{25}{72}$, $C_4 = \frac{25}{72} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{144}$

$P_0 = \left[1 + \frac{5}{6} + \frac{25}{36} + \frac{25}{72} + \frac{25}{144} \right]^{-1} = \frac{144}{439} = 0'3280$

$P_1 = \frac{5}{6} \cdot \frac{144}{439} = 0'2733$ $\quad P_2 = \frac{25}{36} \cdot \frac{144}{439} = 0'2278$ $\quad P_3 = \frac{25}{72} \frac{144}{439} = 0'1139$

$P_4 = \frac{25}{144} \cdot \frac{144}{439} = \frac{25}{439} = 0'0560$

b) $\bar{\lambda} = \lambda \cdot (1 - P_4) = \frac{1}{3} \frac{414}{439} \rightarrow$ acceptades

$\lambda_{rebutjades} = \lambda - \bar{\lambda} = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{439} = \frac{25}{1326} \; min^{-1}$

c) $L_q = P_2 + 2P_3 + 3P_4 = 0'6264$ trucades

d) $W_q = L_q / \bar{\lambda} = \underline{1'9927 \text{ minuts}}$

(2) a) Pel teorema de Palm l'arribada de trucades a la central seguirà, a llarg termini, un patró exponencial de taxa $N \cdot \lambda = 20000 \; \frac{1}{2} = 10^4$ trucades/mes $= \lambda_T$

b) $\lambda_T = 10^4 \; mes^{-1}$; adoptant 1 mes = 43200 minuts resulta

$\lambda_T = 10^4$ trucades/mes $\times \frac{1}{43200} \frac{mesos}{minut} = 0'23148 \frac{trucades}{minut}$.

Per tant en 1 hora : $60 \times 0'23148 = 13'\hat{8}$ trucades

El nº de trucades en una hora serà una Poisson de mitjana $13'\hat{8}$ trucades.

c) En mitja hora el nº mig de trucades serà

$\frac{13'\hat{8}}{2} = 6'9\hat{4}$ trucades $= \lambda_{1/2}$

$$P(N=8) = \frac{e^{-\lambda_{1/2}} (\lambda_{1/2})^8}{8!} = \frac{5213'94}{40320} = \underline{\underline{0'1293}}$$

d) El temps mig entre la trucada K i la K+2, serà una v.a. de distribució 2-Erlang temps mig entre trucada i trucada (K i K+1)

$$E[t] = 1/\lambda_T = 1/0'23148 = 4'32 \text{ minuts.}$$

Per tant, entre K i K+2 serà $2 \times 4'32 = 8'64$ min.

BLOC 2

15% comunitaris , 85% extracomunitaris

20 segons exp. 30 segons exp.

x = temps de servei és una mixtura dels dos tipus de clients ; $x \sim$ Hiperexponencial

$$E[x] = 0'15 \cdot 20 + 0'85 \cdot 30 = 28'5 \text{ s.}$$

$$Var[x] = 2\left(0'15 \cdot 20^2 + 0'85 \cdot 30^2\right) - 28'5^2 =$$

$$= 1650 - 28'5^2 = 837'75 \text{ s}^2$$

$$\sigma_x = 28'94 \text{ s.}$$

SISTEMA D'ESPERA tipus M/G/2

$$\rho = \frac{1/15}{2 \cdot 1/28'5} = \frac{28'5}{30} = 0'95$$ situació de "heavy traffic"!

$$C_x = \frac{\sigma_x}{E[x]} = \frac{28'94}{28'5} = 1'015$$

(2) S'usarà la fórmula de Köllerstrom:

$$W_q \approx \frac{\lambda(\sigma_\tau^2 + \frac{1}{2}\sigma_x^2)}{2(1-\rho)} = \frac{\frac{1}{15}\left(15^2 + \frac{1}{2}28'94^2\right)}{2(1-0'95)} =$$

$$= 289'5 \text{ seg}$$

$$L_q = W_q \cdot \lambda = \frac{1}{15} \cdot 289'5 = 19'3 \text{ pax}$$

(3) Els processos d'arribades i serveis són poissonians $\Rightarrow C_\tau = 1$, $C_x = 1$ per a les dues cues, que són una M/M/1.

(4) COMUNITARIS $\lambda_C = 0'15 \cdot \frac{1}{15} = 0'01 \text{ s}^{-1}$, $\mu_C = \frac{1}{20} \text{ s}^{-1}$

$$\rho_C = \frac{0'01}{1/20} = 0'2 < 1$$ la cua de COMUNITARIS té e.e.

$$\lambda_E = \frac{0'85}{15} = 5'\hat{6} \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$\mu_E = \frac{1}{30} \text{ s}^{-1} \qquad \rho_E = \frac{0'85/15}{1/30} = 1'7$$ no hi ha e.e.

El temps de servei dels Extracomunitaris hauria de quedar per sota de $1/\lambda_E = 17'64$ segons.

S'adopta $x'_E = 1/\lambda'_E = 15\,s$.

e) En aquesta nova situació per als Extracomunitaris és:

$$\rho_E = \frac{0'85/15}{1/15} = 0'85$$

$$Lq_E = \frac{\rho_E^2}{1-\rho_E} = \frac{0'85^2}{1-0'85} = 4'81\hat{6} \text{ pax}$$

$$Lq_C = \frac{\rho_C^2}{1-\rho_C} = \frac{0'04}{0'8} = 0'05 \text{ pax.}$$

És preferible la nova situació.

Fabricat Ecològicament

BLOC 2

Problema 2

$i=0$; $Q_0=0$
Mentre $i<N$ fer
$T_i =$ temps_entre_arribades ;
$P_i = \lfloor T_i \rfloor$;
$N_i = \min\{400, Q_i+P_i\}$;
$Q_i = Q_i + P_i - N_i$;
$i \leftarrow i+1$
Fi Mentre.

$N=2$

i	P_i	T_i	Q_i
1	321	321'04	0
2	171	171'32	0

Nº màx pax que pugen = 246.

$$T_1 = -2\left(\ln\frac{5221}{9999} + \ln\frac{1319}{9999}\right) = 5'35 \text{ minuts} = $$
$$= 321'04 \text{ segons}$$

hi caben 321 pax

$$T_2 = -2\left(\ln\frac{9992}{9999} + \ln\frac{2400}{9999}\right) = 2'855 \text{ minuts} = $$
$$= 171'32 \text{ segons}$$