UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

PROVA DE TEORIA DE REAVALUACIÓ

Programació Lineal i Entera, curs 2014-15
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM ALUMNE:

	Temps estimat	Punts	Puntuació				
Test	30 min	2 pts	C:	I:			PROHIBIDA LA PRESÈNCIA DE MÒBILS DURANT LA PROVA. PARTICIPAR EN UN CAS DE CÒPIA IMPLICA SUSPENDRE LA PROVA AMB NOTA NUMÈRICA ZERO.
Exercici 1	75 min	5 pts	a: 1pt	b: 1.5pt	c: 1pt	d: 1.5pt	
Exercici 2	45 min	3 pts					
Total	150min	10 pts					

TEST (2 punts / 30 min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a), b)** i **c)** si és certa (**Sí**) o falsa (**No**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n |\ Ax = b, x \geq 0\}$:

a) **Sí** / **No** És un polítop - N

b) **Sí** / **No** Conté alguna solució bàsica factible. – N

c) **Sí** / **No** És tancat i afitat. - N

TEST 2. Donat el problema (PL) $\min_{x\in R^n}\left\{c'x \middle|\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, x \geq 0\right\}$:

a) **Sí** / **No** $x_B = [x_1 \quad x_2]'$ és una solució bàsica factible. - N

b) **Sí** / **No** Les bases de (PL) són $\mathcal{B} = \{1,2\}$, $\mathcal{B} = \{1,3\}$ i $\mathcal{B} = \{2,3\}$. - N

c) **Sí** / **No** El políedre associat a (PL) té dos punts extrems. - N

TEST 3. Donat el problema (PL) $\min_{x\in R^n}\left\{c'x \middle|\ \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ x \geq 0\right\}$:

a) **Sí** / **No** El poliedre de associat a (PL) té tres solucions bàsiques factibles - N

b) **Sí** / **No** Totes les solucions bàsiques de (PL) són factibles. - S

c) **Sí** / **No** El poliedre de associat a (PL) té tres punts extrems. - S

TEST 4. Donat el problema (PL) $\min_{x\in R^n}\left\{z = x_1 \middle|\ \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ x \geq 0\right\}$ i la base $\mathcal{B} = \{1,4\}$:

a) **Sí** / **No** La direcció bàsica factible associada a la v.n.b. $q = 2$ és de descens. – S.

b) **Sí** / **No** La direcció bàsica factible associada a la v.n.b. $q = 2$ és $d_B = [-1 \quad -1]'$. - S

c) **Sí** / **No** $\mathcal{B} = \{1,4\}$ és òptima. –N.

TEST 5. Sigui P un políedre no buit en forma estàndard, i sigui x s.b.f. de P amb costos reduïts $r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N$. Llavors:

a) **Sí** / **No** Si x és òptima $\Rightarrow$ $r \geq 0$.- N

b) **Sí** / **No** Si $r > 0 \Rightarrow x$ és òptima.- S

c) **Sí** / **No** Si $r = 0 \Rightarrow x$ no és òptima.- N.

TEST 6. Donat un problema (PL) qualsevol amb n variables i m desigualtats, sabem que el nombre d'iteracions de l'algorisme:

a) **Sí** / **No** En la pràctica s'observa que depèn polinòmicament de n i m. – S.

b) **Sí** / **No** Es pot expressar com una expressió polinòmica de n i m. – N (no se sap).

c) **Sí** / **No** No es pot expressar com una expressió polinòmica de n i m. – N (no se sap).

NOM ALUMNE:

TEST 7. En un joc finit de suma zero, el teorema minimax:

a) Sí / No Indica que és possible que per algun dels dos jugadors no existeixi estratègia òptima. - N

b) Sí / No Assegura que el problema del jugador 1 satisfà que $z_P^* \equiv z_D^*$. – S.

c) Sí / No Indica que és impossible que els dos jugadors tinguin un guany net positiu. - S

TEST 8. Si un problema (P) és infactible, el seu dual (D):

a) Sí / No Segur que és il·limitat. – N.

b) Sí / No Segur que és infactible. – N.

c) Sí / No No tindrà solució.– S.

TEST 9. Donat el problema primal (P) si una solució bàsica $\mathcal{B}$ és solució bàsica factible dual llavors:

a) Sí / No $\mathcal{B}$ és factible primal.- N.

b) Sí / No $r \leq 0$.- N

c) Sí / No El vector $\lambda' = c_B' B^{-1}$ dona les coordenades d'un punt extrem del poliedre dual. – S

TEST 10. Si introduim la modificació $c_i \leftarrow c_i + \phi_{c_i}$amb $\phi_{c_i} \in \Phi_{c_i} = [\phi_{c_i}^{min}, \phi_{c_i}^{max}]$:

a) Sí / No El valor de les variables òptimes pot canviar.- N

b) Sí / No El valor de les variables dual pot canviar. – S.

c) Sí / No El valor de la funció objectiu pot canviar.- S

TEST 11. Donat un problema de programació lineal entera (PE) de minimització i la seva relaxació lineal (RL) es satisfà:

a) Sí / No $z_{RL}^* \leq z_{PE}^*$. – S.

b) Sí / No $KPE \supseteq KRL$. – N.

c) Sí / No (PE) només té solució òptima si KRL és un polítop. – N.

TEST 12. Donades dues formulacions vàlides $(PE1)$ i $(PE2)$ de (PE), si $(PE1)$ és més forta que $(PE2)$ podem assegurar que:

a) Sí / No $K_{PE1} \subset K_{PE2}$. – N

b) Sí / No $K_{RL1} \subset K_{RL2}$. – S

c) Sí / No $(PE1)$ conté més desigualtats vàlides que $(PE2)$. - N

TEST 13. La formulació ideal (PEI) d'un problema de programació lineal entera (PE):

a) Sí / No Tots els punts extrems KRLI pertanyen a KPE. – S.

b) Sí / No Té la mateixa solució òptima que (PE). – S.

c) Sí / No És la formulació vàlida de (PE) que s'obté en finalitzar l'algorisme de plans de tall de Gomory. – N.

TEST 14. La formulació ideal (PEI):

a) Sí / No Té associat un polièdre amb punts extrems enters. – S.

b) Sí / No És la formulació més forta possible. – S

c) Sí / No Necessitarà una única ramificació quan s'apliqui B&B.- N.

TEST 15. El tall de Gomory $x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor x_{B(i)}^* \rfloor$ associat a (PE) i x_{RL}^*és una constricció de desigualtat:

a) Sí / No Que no satisfà x_{RL}^*. – S.

b) Sí / No Que no satisfà x_{PE}^*. – N.

c) Sí / No Que defineix una formulació ideal de (PE). – N.

NOM ALUMNE:

EXERCICI 1. (5 punts / 75min / apunts i calculadora / RESPONEU AL MATEIX FULL)

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(P)\begin{cases} \min & 3x_1 & +\boldsymbol{c_2}x_2 & +2x_3 & +4x_4 & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & =2 \\ & & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & =\boldsymbol{b_2} \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

a) **(1 punt)** Calculeu el rang de valors possibles per als paràmetres c_2 i b_2 si sabem que la base òptima de (P) és $\mathcal{B}=\{2,4\}$.

Resposta:

b) **(1.5 punts)** Reoptimitzeu el problema a partir de la base $\mathcal{B}=\{2,4\}$ amb $c_2=-3$ i $b_2=-3$.

Resposta:

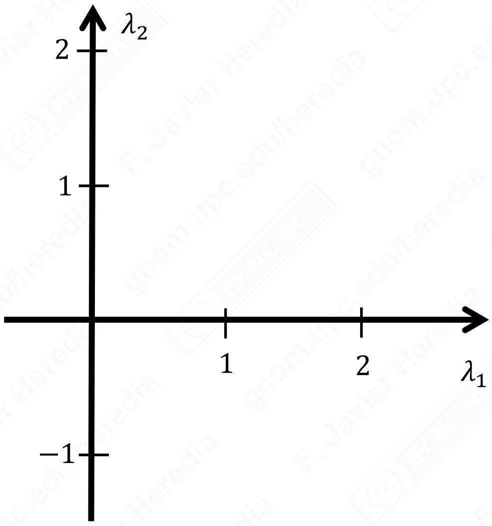
NOM ALUMNE:

Considereu a partir d'ara el cas $c_2 = 1$ i $b_2 = 0$.

c) **(1 punt)** Formuleu el problema dual de (P) i representeu-lo gràficament i indiqueu sobre la gràfica la solució dual òptima.

Formulació:

Representació gràfica:



d) **(1.5 punts)** Seleccioneu dues solucions bàsiques factibles **del problema primal** $(\boldsymbol{P})$. Indiqueu, sense calcular els valor dels costos reduïts, si aquestes dues bases són factibles duals, fent ús del corol·lari del Ta. fort de dualitat i dels resultats de l'apartat anterior.

Resposta:

NOM ALUMNE:

EXERCICI 2. (3 punts / 45min / apunts i calculadora / RESPONEU AL MATEIX FULL)

Resoleu el següent problema de (PE) amb l'algorisme de plans de tall de Gomory.:

$$(PE)\begin{cases} \min & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ (r1) & x_1 & +x_2 & \geq & 1 \\ (r2) & 2x_1 & -x_2 & = & 0 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0, x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Resoleu les relaxacions lineals gràficament i seleccioneu com a variable de generació del tall la que tingui el menor índex.

Resposta:

(podeu usar la cara posterior d'aquest full per respondre)

NOM ALUMNE:

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

Apartat a)

El rang de valors compatible amb l'optimalitat de la base $\mathcal{B} = \{2,4\}$ es aquell que satisfà les condicions d'optimalitat:

Rang b_2: un canvi en b_2 només pot fer perdre la factibilitat primal:

$$x_B = B^{-1}b \geq 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+\frac{1}{2}b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{b_2 \geq -2}$$

Rang c_2: un canvi en c només pot fer perdre la factibilitat dual: $r_N' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N \geq 0 \rightarrow$

$$[3 \quad 2] - [c_2 \quad 4]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-2c_2 - 1 \quad -c_2 - 2] \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{c_2 \leq -2}$$

Apartat b)

Si $c_2 = -3$ i $b_2 = -3$, en base al resultat de l'apartat anterior podem assegurar que $\mathcal{B} = \{2,4\}$ és factible dual infactible primal: s'ha de reoptimitzar aplicant l'algorisme del simplex dual:

- **Símplex dual, 1a iteració:** $\mathcal{B} = \{2,4\}, \mathcal{N} = \{1,3\}$
  - Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p :

$$x_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+\frac{1}{2}(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 2, \boxed{B(2) = 3 \text{ v.b.sortint}}$$

  - Identificació de problema (D) il·limitat :

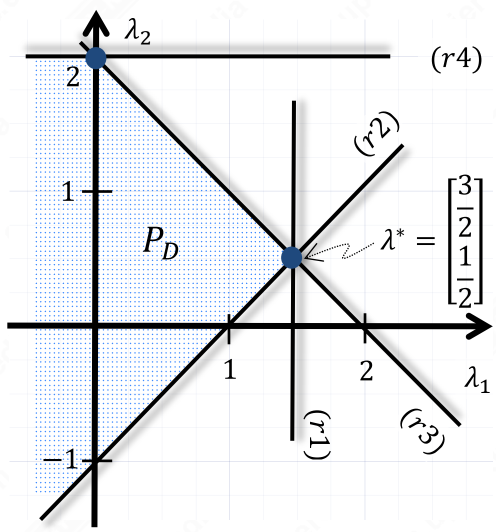
$$d_{r_N}' = \beta_2 A_N = [1/2 \quad 1/2]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1] \geq 0 \Rightarrow (D) \text{ il·limitat, } (P) \text{ infactible. STOP.}$$

Apartat c)

Formulació:

$$(D)\begin{cases} \max & 2\lambda_1 \\ \text{s.a.:} & \\ & 2\lambda_1 \qquad\quad \leq 3 \quad (r1) \\ & \lambda_1 \quad -\lambda_2 \leq 1 \quad (r2) \\ & \lambda_1 \quad +\lambda_2 \leq 2 \quad (r3) \\ & \qquad\quad 2\lambda_2 \leq 4 \quad (r4) \end{cases}$$

Representació gràfica:



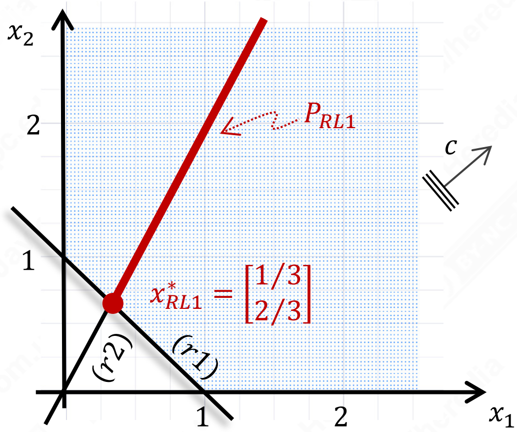
Apartat d)

Cal primer trobar dues s.b.f. de (P). Provem las dues primeres s.b.:

- $\mathcal{B}^A = \{1,2\}$: $Bx_B = b$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ s.b. factible. El valor de les variables duals associat a aquesta base és $\lambda^{A'} = c_B' B^{-1} = [3 \quad 1]\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [3/2 \quad 1/2]$ factible dual (correspon al vèrtex λ^* de la gràfica anterior).
- $\mathcal{B}^B = \{1,3\}$: $Bx_B = b$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ s.b. factible. El valor de les variables duals associat a aquesta base és $\lambda^{B'} = c_B' B^{-1} = [3 \quad 2]\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [3/2 \quad 1/2]$ factible dual (correspon al mateix vèrtex λ^* de la base anterior).

SOLUCIÓ EXERCICI 2.

$$(PE1)\begin{cases} \min & x_1 \quad +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & \\ & x_1 \quad +x_2 & \geq 1 & (r1) \\ & 2x_1 \quad -x_2 & = 0 & (r2) \\ & x_1, \quad x_2 & \geq 0, x \in \mathbb{Z} & \end{cases}$$



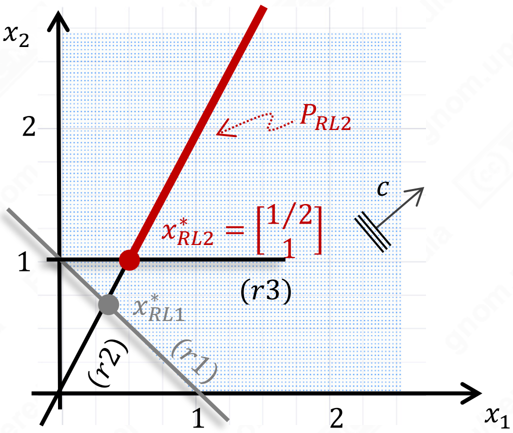
1a iteració Gomory:

- La solució òptima de la relaxació lineal de $(PE1)$, trobada gràficament, és $x_{RL1}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ no entera: es defineix el primer tall de Gomory:
  - $\mathcal{B} = \{1,2\}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$; $x_B = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$
  - $\mathcal{N} = \{3\}$; $A_N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \end{bmatrix}$
  - $x_{B(1)}^* = x_1^*$ no entera: tall de Gomory associat a $x_1 = 1/3$

$$x_1 + \lfloor v_{13} \rfloor x_3 \leq \lfloor x_1^* \rfloor \; ; \; x_1 + \left\lfloor \frac{-1}{3} \right\rfloor x_3 \leq \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor \; ; \; x_1 - x_3 \leq 0 \xrightarrow{(r2):\, -x_3 = 1 - x_1 - x_2} \boxed{x_2 \geq 1 (r3)}$$

2a iteració Gomory:

$$(PE2)\begin{cases}\min & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ & x_1 & +x_2 & \geq 1 & (r1) \\ & 2x_1 & -x_2 & = 0 & (r2) \\ & & x_2 & \geq 1 & (r3) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, x \in \mathbb{Z} & \end{cases}$$

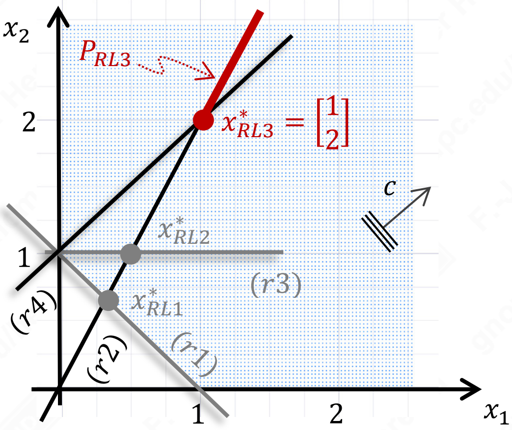


- Tot i que la restricció $(r1)$ de $(PE2)$ és redundant i es podria eliminar de la formulació la mantindrem. La solució òptima de la relaxació lineal de $(PE2)$, trobada gràficament, és $x^*_{RL2} = \begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\1\end{bmatrix}$ no entera: es defineix el segon tall de Gomory
  - $\mathcal{B} = \{1,2\}$; $B = \begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$; $x_B = \begin{bmatrix}1/2\\1\end{bmatrix}$
  - $\mathcal{N} = \{4\}$; $A_N = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$; $V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_{14}\\v_{24}\end{bmatrix}$
  - $x^*_{B(1)} = x_1^*$ no entera: tall de Gomory associat a $x_1 = 1/2$

$$x_1 + \lfloor v_{14}\rfloor x_4 \leq \lfloor x_1^*\rfloor \;;\; x_1 + \lfloor -1/2\rfloor x_4 \leq \left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor \;;\; x_1 - x_4 \leq 0 \xrightarrow{(r3):\, -x_4 = 1 - x_2} \boxed{x_1 - x_2 \leq -1\ (r4)}$$

3a iteració Gomory:

$$(PE3)\begin{cases}\min & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ & x_1 & +x_2 & \geq 1 & (r1) \\ & 2x_1 & -x_2 & = 0 & (r2) \\ & & x_2 & \geq 1 & (r3) \\ & x_1 & -x_2 & \leq -1 & (r4) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, x \in \mathbb{Z} & \end{cases}$$



- Solució òptima de la relaxació lineal de $(PE3)$, trobada gràficament: $x^*_{RL3} = \begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ entera:

  $\boxed{x^*_{PE1} = x^*_{RL3} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}.}$