EJERCICIOS DE EXAMEN

1. Una compañía manufactura dos modelos de radar (A y B) para controlar la velocidad de los automóviles. Para la próxima semana tiene un pedido de 100 unidades del modelo A y 150 unidades del modelo B. Aunque la compañía compra a terceros todos los componentes electrónicos usados en ambos modelos, los receptáculos de plástico para los mismos los fabrica en su propia planta de producción. Cada receptáculo del modelo A requiere 4 minutos de tiempo de moldeado y 6 minutos de tiempo de ensamblado; cada receptáculo del modelo B requiere 3 minutos de tiempo de moldeado y 8 minutos de tiempo de ensamblado. Para la próxima semana la planta de producción dispone de 600 minutos de tiempo de moldeado y de 1080 minutos de tiempo de ensamblado. Los costes de producción de los receptáculos son de 10€ y 6€, respectivamente, para los modelos A y B. Dependiendo de la demanda la compañía puede comprar receptáculos a un proveedor externo para cubrir los pedidos de los clientes que no podrían cubrirse de otro modo. Los costes de compra de los receptáculos son 14€ y 9€, respectivamente para los modelos A y B.

   Plantear el modelo de programación lineal (PL) que permita determinar cuantos receptáculos deben fabricarse y/o comprarse de cada modelo para poder atender los pedidos de la próxima semana, minimizando el coste total de producción y compra.

2. Una compañía fabrica escritorios, mesas y sillas. Para ello dispone de dos tipos de mano de obra cualificada: acabado y carpintería. Los recursos necesarios para elaborar cada tipo de mueble se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1

Recurso	**Escritorios**	**Mesas**	**Sillas**
Madera (metros)	8	6	1
Horas de acabado	4	2	1,5
Horas de carpintería	2	1,5	0,5

En la actualidad se cuenta con 48 metros de tablón de madera, 20 horas de acabado y 8 horas de carpintería. Los precios de venta son 60€, 30€ y 20€ para los escritorios, mesas y sillas, respectivamente. La empresa opina que la demanda de escritorios y sillas es ilimitada, pero como mucho se van vender 5 mesas. Con el objetivo de determinar la producción que maximiza las ventas, se plantea el siguiente modelo de programación lineal:

$$\text{Max } Z = 60X_1+30X_2+20X_3$$

Sujeto a:

$$8X_1+6X_2+X_3\leq 48$$
$$4X_1+2X_2+1{,}5X_3\leq 20$$
$$2X_1+1{,}5X_2+0{,}5X_3\leq 8$$
$$X_2\leq 5$$
$$X_1,X_2,X_3\geq 0,$$

Replantear el modelo de PL anterior como un modelo de programación con las siguientes metas:

i. El gerente de la empresa desea conseguir una ventas de al menos 300€
ii. Consumir todo el recurso de madera para evitar almacenar stocks.
iii. Se permite realizar horas extras, pero estas no deben superar las 3 horas en el proceso de acabado y 1 hora en el proceso de carpintería.
iv. No producir ninguna mesa.

Plantear el modelo que permita determinar la producción de modo que se intente lograr todas las metas lo máximo posible.

3. Se dispone de una cantidad de dinero para invertir en tres valores de bolsa y se desea repartir la inversión total entre estos tres valores, de modo que se minimice el riesgo y se alcance un beneficio anual esperado del 3%. En la Tabla 4 se muestra la información disponible y la solución óptima obtenida con Solver de Excel y en la Tabla 5 se muestra el informe de confidencialidad.
    a. Plantear el modelo de programación no lineal (PNL) que se resuelve con Solver para obtener los resultados de la Tabla 4.
    b. ¿Podría resolver el modelo anterior con el algoritmo SIMPLEX?. Si la respuesta es negativa intente describir, en términos generales, un algoritmo que utilizaría.
    c. Describir la solución óptima que se muestra en la Tabla 4.
    d. Como interpreta, en términos económicos, el valor de los Multiplicadores de Lagrange de la Tabla 5.

Tabla 4

Problema de selección de cartera

	Rentabilidad Mensual		
Año	**V1**	**V2**	**V3**
1	0.82%	-19.13%	-8.00%
2	0.82%	1.57%	4.01%
3	0.00%	4.73%	5.30%
4	-4.90%	9.59%	-2.65%
5	-4.86%	4.86%	-9.37%
6	6.48%	4.91%	-1.35%
7	4.10%	2.47%	-1.36%
8	-4.10%	-5.75%	10.75%
9	9.05%	18.29%	2.65%
10	12.60%	20.71%	-5.32%
11	-0.85%	-0.88%	1.34%
12	-3.38%	10.65%	7.94%
Media Anual	1.32%	4.34%	0.33%

	Matriz de varianzas y covarianzas		
	V1	**V2**	**V3**
V1	0.00320	0.00270	-0.00070
V2	0.00270	0.01110	0.00040
V3	-0.00070	0.00040	0.00380

	V1	**V2**	**V3**	**Total**
Cartera	24.43%	60.65%	14.92%	100.00%
			Beneficio deseado	
Beneficio esperado		3.00%	3.00%	
Varianza de la cartera		0.0051798		

Tabla 5

Celdas de variables

Celda	**Nombre**	**Final Valor**	**Reducido Degradado**
G11	Cartera V1	0.244299915	0
H11	Cartera V2	0.606469079	0
I11	Cartera V3	0.149231006	0

Restricciones

Celda	**Nombre**	**Final Valor**	**Lagrange Multiplicador**
H13	Beneficio esperado V2	0.03	0.340081111
J11	Cartera Total	1	0.000

4. Una empresa produce dos tipos de minimotocicletas de 49cc: R y Z. En la próxima semana la empresa manufacturera quiere producir un máximo de 700 unidades y quiere asegurarse que el número de motocicletas tipo R no excede el de tipo Z en más de 300 unidades. Con el tipo Z la empresa obtiene un beneficio unitario de 70 euros y con el tipo R el beneficio unitario se reduce a 40 euros. Las bicicletas

poseen un mecanismo idéntico, sólo difieren en su apariencia. Por ello cada motocicleta de tipo R requiere 1 kilo de polímero y 3 horas de tiempo de producción, mientras que cada motocicleta de tipo Z requiere 0,5 kilos de polímero y 4 horas de producción. Se asume que la empresa dispone de 450 kilos de polímero y 2.400 horas para producción. El objetivo de la empresa es maximizar beneficios dadas las restricciones de recursos y producción.

a. Plantee el problema de programación lineal (PL) que permita determinar cuántas motocicletas deben producirse de modo que se maximice el beneficio y se cumplan las restricciones de materia prima y producción.
b. Resuelva el modelo utilizando el método gráfico. Debe determinar cuál es la región factible y el punto óptimo. También debe representar la recta ligada a la función objetivo que pasa por el punto óptimo. Interpretar la solución.

5. Una agencia de inversión necesita determinar cómo repartir 100.000 euros en el siguiente conjunto de bonos (Tabla 2) con el objetivo de maximizar el rendimiento anual:

Tabla 2.

Bono	**Rendimiento anual**	**Vencimiento**	**Riesgo**	**Libre de impuestos**
A	9,5%	Largo	Alto	Si
B	8,0%	Corto	Bajo	Si
C	9,0%	Largo	Bajo	No
D	9,0%	Largo	Alto	Si
E	9,0%	Corto	Alto	No

La agencia desea invertir al menos el 50% del dinero en el corto plazo y no más del 50% en bonos de alto riesgo. También, desea invertir al menos el 30% de los fondos en bonos libres de impuestos y, por último, el 40% de las ganancias anuales deben ser libres de impuestos.

El modelo de PL que permite determinar cómo repartir la inversión de forma que se maximice la rentabilidad y se cumplan las condiciones de la agencia es:

Max $Z=0{,}095X_1+0{,}08X_2+0{,}09X_3+0{,}09X_4+0{,}09X_5$

Sujeto a:

$X_2+X_5 \geq 50.000$

$X_1+X_4+X_5 \leq 50.000$

$X_1+X_2+X_4 \geq 30.000$

$0{,}057X_1+0{,}048X_2-0{,}036X_3+0{,}054X_4-0{,}036X_5 \geq 0$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

En las Tablas 3 y 4 se muestran los resultados obtenidos tras resolver el modelo anterior con el procedimiento PROC LP de SAS/OR, a partir de estos resultados responda a las preguntas planteadas posteriormente.

Tabla 3.

Procedimiento LP

Resumen de la variable

Col	Nombre de la variable	Estado	Tipo	Precio	Actividad	Coste reducida
1	x1	BASIC	NON-NEG	0.095	31578.947	0
2	x2	BASIC	NON-NEG	0.08	31578.947	0
3	x3	BASIC	NON-NEG	0.09	18421.053	0
4	x4		NON-NEG	0.09	0	-0.005053
5	x5	BASIC	NON-NEG	0.09	18421.053	0
6	Corto_plazo		SURPLUS	0	0	-0.007579
7	Riesgo		SLACK	0	0	-0.007579
8	Impuestos	BASIC	SURPLUS	0	33157.895	0
9	Rent		SURPLUS	0	0	-0.017544

Resumen de restricciones

Fila	Nombre de la restricción	Tipo	Col S/S	Rhs	Actividad	Actividad dual
1	rentabilitat	OBJECTVE	.	0	8842.1053	.
2	Corto_plazo	GE	6	50000	50000	-0.007579
3	Riesgo	LE	7	50000	50000	0.0075789
4	Impuestos	GE	8	30000	63157.895	0
5	Rent	GE	9	0	0	-0.017544
6	Total	EQ	.	100000	100000	0.0884211

Tabla 4.

Análisis de rango RHS

Fila	Phi mínimo: Rhs	Phi mínimo: Dejar	Phi mínimo: Objetivo	Phi máximo: Rhs	Phi máximo: Dejar	Phi máximo: Objetivo
Corto_plazo	11956.522	x5	9130.4348	85714.286	x3	8571.4286
Riesgo	14285.714	x5	8571.4286	88043.478	x3	9130.4348
Impuestos	-INFINIDA	.	.	63157.895	Impuestos	8842.1053
Rent	-4725	Impuestos	8925	5250	x5	8750
Total	73076.923	x3	6461.5385	158333.33	x5	14000

Análisis del rango del precio

Col	Nombre de la variable	Phi mínimo: Precio	Phi mínimo: Introducir	Phi mínimo: Objetivo	Phi máximo: Precio	Phi máximo: Introducir	Phi máximo: Objetivo
1	x1	0.0898936	x4	8680.8511	0.1	Rent	9000
2	x2	-INFINIDA	.	-INFINIDA	0.085	Rent	9000
3	x3	0.085	Rent	8750	0.1056522	Riesgo	9130.4348
4	x4	-INFINIDA	.	8842.1053	0.0950526	x4	8842.1053
5	x5	0.085	Rent	8750	0.1056522	Corto_plazo	9130.4348
6	Corto_plazo	-INFINIDA	.	8842.1053	0.0075789	Corto_plazo	8842.1053
7	Riesgo	-INFINIDA	.	8842.1053	0.0075789	Riesgo	8842.1053
8	Impuestos	-INFINIDA	.	-INFINIDA	0.0025	Rent	8925
9	Rent	-INFINIDA	.	8842.1053	0.0175439	Rent	8842.1053

Obs	_OBJ_ID_	_RHS_ID_	_BASIC_	INVB_R	x1	x2	x3	x4	x5	Corto_plazo	Riesgo	Impuestos	Rent	PHASE_1_OBJE	rentabilitat
1	rentabilitat	_rhs_	R_COSTS	.	0	-0	-0	-0.00505	0	-0.00758	-0.00758	0	-0.01754	0	0
2	rentabilitat	_rhs_	x3	18421.05	0	0	1	0.01053	0	0.51579	-0.48421	0	3.50877	0	0
3	rentabilitat	_rhs_	x2	31578.95	0	1	0	-0.01053	-0	-0.51579	-0.51579	0	-3.50877	0	0
4	rentabilitat	_rhs_	x1	31578.95	1	0	0	0.98947	-0	0.48421	0.48421	0	-3.50877	0	0
5	rentabilitat	_rhs_	Impuestos	33157.89	0	0	0	-0.02105	-0	-0.03158	-0.03158	1	-7.01754	0	0
6	rentabilitat	_rhs_	x5	18421.05	0	-0	0	0.01053	1	-0.48421	0.51579	0	3.50877	0	0
7	rentabilitat	_rhs_	PHASE_1_OBJE	0.00	0	0	0	0.00000	0	0.00000	0.00000	0	0.00000	1	0
8	rentabilitat	_rhs_	rentabilitat	8842.11	-0	0	0	0.00505	-0	0.00758	0.00758	0	0.01754	0	1

a. Interprete en términos económicos el modelo planteado al inicio del enunciado (función objetivo y restricciones y sus coeficientes).

b. Interprete en términos económicos la solución óptima (función objetivo, variables de decisión y restricciones).

c. Qué ocurriría con la solución óptima (función objetivo y variables) si la agencia decidiera invertir al menos un 70% de la inversión en el corto plazo y no el 50% actual.

d. Qué ocurriría con la solución óptima (función objetivo y variables) si la rentabilidad de los bonos D incrementara al 9,6%. (0,75 puntos)

e. Qué ocurriría con la solución óptima (función objetivo y variables) si la empresa se viera obligada a invertir el 5% de la inversión total en bonos del tipo D al 9%.

6. Una empresa manufactura tres tipos de *chips* para ordenadores, cada tipo de *chip* requiere diferente cantidad de tiempo en tres departamentos distintos que se resumen en la Tabla 5.

Tabla 5.

	Chip A	**Chip B**	**Chip C**	**Total de horas disponibles**
Dept. 1	3	2	4	80
Dept. 2	2	4	3	90
Dept. 3	3	4	2	90

Siendo X_1, X_2 y X_3 el número de unidades de *chips* A, B y C, respectivamente, el beneficio total asociado a cada tipo de *chip* es:

- ✓ para el *chip* A el beneficio es $-0.35X_1^2+8,3X_1+540$
- ✓ para el el *chip* B el beneficio es $-0.60\ X_2^2+9,45X_2+1.108$
- ✓ para el el *chip* C el beneficio es $-0.47\ X_3^2+11,0X_3+850$

a. Plantee el modelo de programación a resolver si el objetivo es maximizar el beneficio sujeto a la disponibilidad de horas en cada departamento. ¿Se trata de un modelo lineal o no lineal? Justifique la respuesta. (0,75 puntos)

b. En la Tabla 6 se muestra algunos resultados relacionados con la solución des modelo obtenida con Excel:

b.1. Interprete la solución óptima.

b.2. Interprete los valores de los multiplicadores de Lagrange.

Tabla 6.

NOM DELS PRODUCTES	A	B	C		
Número de unidades (producción)	9,517618151	6,965183911	9,379194431	Beneficio Total	
Efecto Lineal	8,3	9,45	11	146	
Efecto Cuadrático	-0,35	-0,6	-0,47		
Restricciones				Utilizado	Disponible
Dept. 1	3	2	4	80	80
Dept. 2	2	4	3	75,03355524	90
Dept. 3	3	4	2	75,17197896	90

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Lagrange Multiplicador
E10	Dept. 1 Utilizado	80	0,545888066
E11	Dept. 2 Utilizado	75,03355524	0
E12	Dept. 3 Utilizado	75,17197896	0

7. Una compañía produce dos tipos de cortadoras de césped: eléctricas y de gas. La compañía ha contratado un pedido de 30.000 modelos eléctricos y 15.000 de gas, que está obligada a servir. Sin embargo, la compañía tiene una capacidad de producción limitada, que se resume en la Tabla 2:

Tabla 2: Horas requeridas por cortacésped.

Proceso	Modelo Eléctrico	Modelo de Gas	Tiempo Total Disponible
Producción	0,2	0,4	10.000
Ensamblaje	0,3	0,5	15.000
Embalaje	0,1	0,1	5.000

El coste de producir un cortacésped eléctrico es de 55€ y el de producir un cortacésped de gas es de 85€. Alternativamente, la compañía puede comprar cortacésped eléctricos y de gas a un precio de 67€ y 95€, respectivamente. La compañía quiere saber cuántos cortacéspedes producir y cuantos tiene que comprar a un tercero para satisfacer el pedido. El modelo de PL a resolver es:

$$\begin{array}{|l|}
\hline
\text{Min } Z=55P_1+85P_2+67C_1+95C_2 \\
\text{Sujeto a:} \\
\quad (1)\ P_1+C_1 \geq 30.000 \\
\quad (2)\ P_2+C_2 \geq 15.000 \\
\quad (3)\ 0{,}2\ P_1+0{,}4P_2 \leq 10.000 \\
\quad (4)\ 0{,}3\ P_1+0{,}5P_2 \leq 15.000 \\
\quad (5)\ 0{,}1\ P_1+0{,}1P_2 \leq 5.000 \\
\quad (6)\ P_1,\ P_2,\ C_1,\ C_2 \geq 0 \\
\hline
\end{array}$$

Donde P_1 y P_2 son, respectivamente, el número de cortacéspedes que se fabrican: eléctricos y de gas; C_1 y C_2 son, respectivamente, el número de cortacéspedes que se compran a un tercero: eléctricos y de gas. A continuación, en las tablas 3 y 4 se muestran los resultados de la solución del modelo de PL anterior en SAS.

Tabla 3.

The LP Procedure

Variable Summary

Col	Variable Name	Status	Type	Price	Activity	Reduced Cost
1	p1	BASIC	NON-NEG	55	30000	0
2	p2	BASIC	NON-NEG	85	10000	0
3	c1		NON-NEG	67	0	7
4	c2	BASIC	NON-NEG	95	5000	0
5	Produccion		SLACK	0	0	25
6	Emsamblaje	BASIC	SLACK	0	1000	0
7	Embalaje	BASIC	SLACK	0	1000	0

Constraint Summary

Row	Constraint Name	Type	S/S Col	Rhs	Activity	Dual Activity
1	coste	OBJECTVE	.	0	2975000	.
2	demandaElec	EQ	.	30000	30000	60
3	demandaGas	EQ	.	15000	15000	95
4	Produccion	LE	5	10000	10000	-25
5	Emsamblaje	LE	6	15000	14000	0
6	Embalaje	LE	7	5000	4000	0

RHS Range Analysis

	-----------Minimum Phi----------			-----------Maximum Phi----------		
Row	Rhs	Leaving	Objective	Rhs	Leaving	Objective
demandaElec	20000	c2	2375000	50000	p2	4175000
demandaGas	10000	c2	2500000	INFINITY	.	.
Produccion	6000	p2	3075000	10800	Emsamblaje	2955000
Emsamblaje	14000	Emsamblaje	2975000	INFINITY	.	.
Embalaje	4000	Embalaje	2975000	INFINITY	.	.

Price Range Analysis

		-----------Minimum Phi----------			-----------Maximum Phi----------		
Col	Variable Name	Price	Entering	Objective	Price	Entering	Objective
1	p1	-INFINITY	.	-INFINITY	62	c1	3185000
2	p2	71	c1	2835000	95	Produccion	3075000
3	c1	60	c1	2975000	INFINITY	.	2975000
4	c2	85	Produccion	2925000	109	c1	3045000
5	Produccion	-25	Produccion	2975000	INFINITY	.	2975000
6	Emsamblaje	-20	Produccion	2955000	INFINITY	.	INFINITY
7	Embalaje	-100	Produccion	2875000	INFINITY	.	INFINITY

Tabla 4.

Obs	_OBJ_ID_	_RHS_ID_	_BASIC_	INVB_R	p1	p2	c1	c2	Produccion	Emsamblaje	Embalaje	PHASE_1_OBJE	coste
1	coste	_rhs_	R_COSTS	.	0	0	7.00	0	25.00	0	0	0	0
2	coste	_rhs_	p1	30000	1	0	1.00	0	0.00	0	0	0	0
3	coste	_rhs_	c2	5000	-0	-0	0.50	1	-2.50	0	0	0	0
4	coste	_rhs_	p2	10000	0	1	-0.50	0	2.50	0	0	0	0
5	coste	_rhs_	Emsamblaje	1000	0	0	-0.05	0	-1.25	1	0	0	0
6	coste	_rhs_	Embalaje	1000	0	0	-0.05	0	-0.25	0	1	0	0
7	coste	_rhs_	PHASE_1_OBJE	0	0	0	0.00	0	0.00	0	0	1	0
8	coste	_rhs_	coste	2975000	-0	-0	-7.00	0	-25.00	0	0	0	1

f. Interprete en términos económicos el modelo planteado al inicio del enunciado (función objetivo y restricciones y sus coeficientes).
g. Interprete en términos económicos la solución óptima (función objetivo, variables de decisión y restricciones).
h. ¿Qué ocurriría con la solución óptima (función objetivo y variables) si la empresa se viera obligada a comprar 100 cortacéspedes eléctricos?. Calcule los resultados y descríbalos.
i. ¿Hasta que valor tendría que reducirse el precio de los cortacéspedes eléctricos para que sea rentable su compra por parte de la empresa proveedora? Justifique la respuesta.
j. ¿Qué ocurriría con la solución óptima (función objetivo y variables) si el tiempo disponible para producción pasara a ser de 10.200 horas?. Calcule los resultados y descríbalos.

8 Una empresa manufacturera produce dos tipos de mesas: A y B, para ello utiliza tres tipos de máquinas: I, II y III. Los tiempos de producción requeridos (en horas) en cada máquina para cada mesa se muestran en la Tabla 1:

Tabla 1.

Máquina	**Mesa Tipo A**	**Mesa Tipo B**	**Tiempo Total Disponible**
I	1,5	2,0	1.000
II	3,0	4,5	2.000
III	2,5	1,5	1.500

Las mesas del tipo A se venden a 350 € la unidad y las de tipo B a 450€ la unidad. El gerente de la empresa determina que al menos el 20% de las mesas deben ser de tipo A y al menos el 30% de las mesas debe ser de tipo B.

a. Plantee el problema de programación lineal (PL) que permita determinar cuántas mesas deben producirse de cada tipo de modo que se maximicen las ventas y se cumplan las restricciones de disponibilidad de horas de producción y exigencias del gerente. Debe deducir las dos restricciones ligadas a las exigencias de producción (al menos el 20% de Tipo A y al menos el 30% de Tipo B).
b. La empresa se replantea su único objetivo de maximización de beneficios y a cambio desea determinar cuál es la producción óptima si se quieren alcanzar al máximo posible las siguientes metas:
   I. Alcanzar al menos unas ventas de 300.000 euros.
   II. Cumplir con las exigencias del gerente.
   III. No subutilizar la capacidad de producción de la empresa (horas de trabajo).

   Plantee el modelo de programación por metas.

c. Utilizando variables binarias, modifique el planteamiento del modelo del apartado a. de modo que se incorpore la existencia de unos costes fijos de producción CF1 y CF2.