EXAMEN FINAL DE I.O.E. (Curso 02/03 2º Q). Cadenas de Markov

P1) El objetivo de todo licenciado en informática que entra a trabajar en una determinada empresa es llegar a ser Jefe de Proyectos. Al entrar en la empresa, lo hacen como programadores. Cada año un 25 % de los programadores son ascendidos a programadores/analistas, un 60 % continúan trabajando como programadores y un 15 % son despedidos. De los programadores/analistas, cada año el 20 % son promocionados a analistas, un 70 % continúan como programadores/analistas y un 10 % son despedidos. Por último, cada año, un 15 % de los analistas consigue una plaza de Jefe de Proyectos, un 80 % continúa como analista y un 5 % resultan despedidos.

1- Modelizar la trayectoria de un licenciado en informática dentro de esta empresa mediante Cadenas de Markov. Dibujar el diagrama de transiciones, hallar la matriz de probabilidades de transición y determinar las clases y tipos de estados de dicha cadena.

2- Cuál es la probabilidad de que un licenciado contratado por la empresa llegue a Jefe de Proyectos. ¿Qué porcentaje de ingenieros que entran en esta empresa alcanzan la categoría de Jefe de Proyectos exactamente en 3 años ? ¿Cuántos en 4 años exactamente ?

3- El seguro de desempleo del país donde se ubica la empresa en cuestión establece que se pagará durante el primer año de despido y tan sólo durante este periodo, el 80 % del sueldo a los trabajadores cuando éstos hayan trabajado dos años consecutivamente en la misma empresa de la que resulten despedidos. El sueldo anual de un programador es de 2 MM ; el de un analista/programador, de 3 MM y el de un analista de 4 MM. Sabiendo que la empresa contrata anualmente 100 programadores, calcular el promedio anual total pagado por el seguro de desempleo a los trabajadores de esta empresa que resulten despedidos. (Replantear adecuadamente la cadena de Markov para responder a esta pregunta)

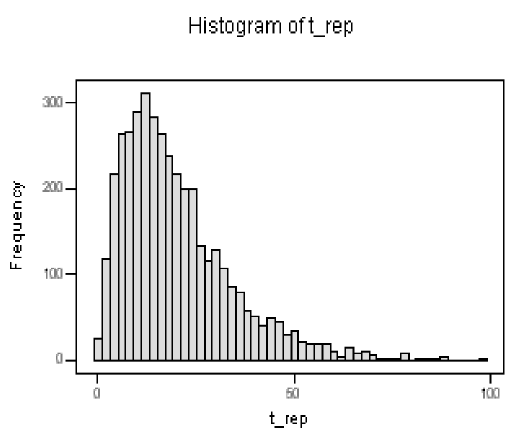
EXAMEN FINAL DE I.O.E. (Curso 02/03 2º Q). Teoría de Colas.

P2) Los técnicos de un taller especializado en reparar un cierto tipo de motores han tomado una muestra de los tiempos de reparación en horas que necesitó su equipo de mecánicos para reparar 4000 motores. Los valores de la media (`Mean`) y la desviación estándar (`StDev`) de estos tiempos aparecen la tabla siguiente:

Variable	N	Mean	Median	TrMean	StDev	SE Mean
t_rep	4000	19,899	16,675	18,736	13,938	0,220

El tipo de reparación exige que ésta se realice en dos etapas independientes entre sí, de igual tiempo medio de duración y que se distribuye exponencialmente. No puede iniciarse una nueva reparación hasta que no se ha completado la segunda etapa de la reparación anterior. El número de motores que llegan al taller se distribuye poissonianamente de esperanza 1 cada 30 horas.

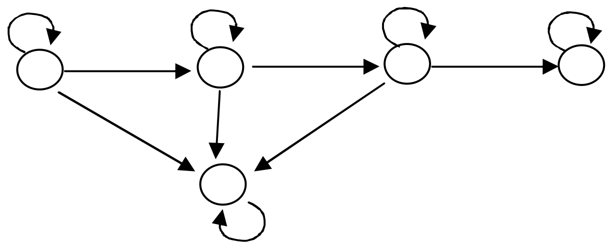
Asimismo, en la figura siguiente aparecen el histograma de los tiempos de reparación de la muestra. La parte de la derecha de la figura muestra una tabla con las probabilidades de encontrar N motores en el taller para N=0,1,2,…9.



↓	C4	C5
	N	Prob
1	0	0,333340
2	1	0,259261
3	2	0,164608
4	3	0,099221
5	4	0,058882
6	5	0,034772
7	6	0,020502
8	7	0,012083
9	8	0,007119
10	9	0,004195

1) Establecer un modelo de colas para el número de motores en el taller y calcular los parámetros de la ley de probabilidades del tiempo de servicio.
2) En un instante determinado el número medio de motores en el taller es de dos. Calcular la probabilidad de que el tiempo de reparación de estos dos motores supere las 50 horas.
3) Calcular el número medio de motores en el taller.
4) Calcular el tiempo medio de permanencia de un motor en el taller.
5) En el instante en que se envía un motor al taller se sabe que, como máximo hay tres motores en dicho taller. Calcular la probabilidad de que dicho motor tarde en ser reparado más de 30 horas.
6) Durante una temporada el taller recibe vehículos de un modelo equipado con dos motores. Cada vez que acude un vehículo al taller deben repararse sus dos motores por el equuipo de técnicos. Sabiendo que dichos vehículos llegan uno cada 150 horas, calcular a) la fracción del tiempo que el equipo de mecánicos está ocioso y b) el número medio de motores en el taller.

CADENAS DE MARKOV.



Classes {1},{2},{3}, transitorias. Classes {4}, {5} absorbentes

$$P=\begin{pmatrix}0,6 & 0,25 & 0 & 0 & 0,15\\ 0 & 0,7 & 0,2 & 0 & 0,1\\ 0 & 0 & 0,8 & 0,15 & 0,05\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2) F = MR

$$(I-Q)F=R\Rightarrow\begin{pmatrix}0,4 & -0,25 & 0\\ 0 & 0,3 & -0,2\\ 0 & 0 & 0,2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{14}\\ b_{24}\\ b_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0,15\end{pmatrix},\ b_{14}=0,3125$$

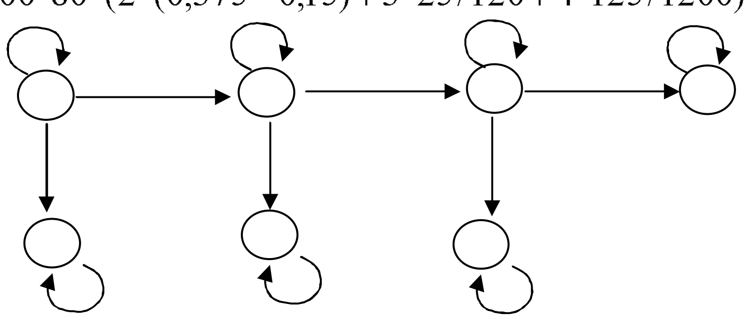
$$p_{14}^{(3}=0,25\cdot 0,2\cdot 0,15=0,0075$$

$$f_{14}^{(4}=0,6\cdot 0,25\cdot 0,2\cdot 0,15+0,25\cdot 0,7\cdot 0,2\cdot 0,15+0,25\cdot 0,2\cdot 0,8\cdot 0,15=0,01575$$

3)

$$F=MR=\begin{pmatrix}2,5 & 25/12 & 25/12\\ 0 & 10/3 & 10/3\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,15 & 0 & 0\\ 0 & 0,1 & 0\\ 0 & 0 & 0,25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,375 & 25/120 & 25/1200\\ X & X & X\\ X & X & X\end{pmatrix};$$

$$100\cdot 80\cdot(2\cdot(0,375-0,15)+3\cdot 25/120+4\cdot 125/1200)=119,33MM$$



TEORIA de COLAS. PROBLEMA 1.

1) Del enunciado se desprende que el tiempo de reparación T es una 2-Erlang. Se adopta E[T]=19,899

$$\frac{E[T]}{Var^{1/2}[T]} = \sqrt{k} \approx \frac{\overline{T}}{s_T} = \frac{19{,}899}{13{,}938} = 1{,}4276 \Rightarrow 1{,}4276^2 = 2{,}03$$. Efectivamente, el número de etapas de la ley k-Erlang para el tiempo de servicio es de 2.

$\rho=\lambda\, E[T]=19{,}899/30 = 0{,}6633 < 1$

2) Trep = $T_1 + T_2$; Trep se distribuye según una k-erlang con k=4; E[Trep]= 2 · 19,899=39,798

$$P(\{T_{rep} \geq t\}) = e^{-k\mu t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\mu t)^i}{i!}$$

$$\mu k t = \frac{4 \cdot 50}{39{,}798} = 5{,}025$$

$$P(\{T_{rep} \geq 50\}) = e^{-5{,}025} \sum_{i=0}^{3} \frac{(5{,}025)^i}{i!} = 0{,}2615$$

3)

$$\sigma^2 = 2 \cdot \left(\frac{19{,}899}{2}\right)^2 = 197{,}98\, hores^2$$

$$L_q = \frac{\sigma^2\lambda^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\frac{197{,}98}{30^2} + 0{,}6633^2}{2 \cdot (1-0{,}6633)} = 0{,}9796\, motores$$

$$L = L_q + \rho = 1{,}643\, motores$$

4)

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1{,}643}{1/30} = 49{,}28\, horas$$

5) P(N≤3)=0,3333+0,2592+0,1646+0,0992=0,8563

P(N=0 | N≤3) = 0,3333 / 0,8563 = 0,3892

P(N=1 | N≤3) = 0,2592 / 0,8563 = 0,3027

P(N=2 | N≤3) = 0,1646 / 0,8563 = 0,1992

P(N=3 | N≤3) = 0,0992 / 0,8563 = 0,1158

T_n = v.a. 2_n-Erlang, E[T_n]= n·19,899

$$P(\{T_n \geq t\}) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{2nt}{E[T_n]}\right)^i\right) e^{-\frac{2nt}{E[T_n]}}$$

$$\frac{2nt}{E[T_n]} = \frac{2 \cdot n \cdot 30}{n \cdot 19{,}899} \approx 3$$

$$P(\{T_1 \geq 30\}) = \left(\sum_{i=0}^{1} \frac{1}{i!} 3^i\right) e^{-3} = 0{,}1991$$

$$P(\{T_2 \geq 30\}) = \left(\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!} 3^i\right) e^{-3} = 0{,}6472$$

$$P(\{T_1 \geq 30\}) = \left(\sum_{i=0}^{7} \frac{1}{i!} 3^i \right) e^{-3} = 0{,}9881$$

$P(T \geq 30 | N \leq 3) = P(N=0 \mid N \leq 3)\, P(T_1 \geq 30) + P(N=0 \mid N \leq 3)\, P(T_1 \geq 30) + P(N=0 \mid N \leq 3)\, P(T_1 \geq 30) +$
$+ P(N=0 \mid N \leq 3)\, P(T_1 \geq 30) + P(N=0 \mid N \leq 3)\, P(T_1 \geq 30) = 0{,}5638$

6)

$M/E_4/1$

$\lambda = 1/150\ h^{-1}$

$E[T_{rep}] = 2 \cdot 19{,}899 = 39{,}79$ horas

$\rho = 39{,}79 / 150 = 0{,}2653$; $P0 = 1 - \rho = 0{,}7346$

$$L = L_q + \rho = \frac{\sigma^2 \lambda^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} + \rho = \frac{0{,}2653^2 + \frac{395{,}97}{150^2}}{2 \cdot (1 - 0{,}2653)} + 0{,}2653 = 0{,}3251\, \textit{vehículos} \Rightarrow 0{,}6503\, \textit{motores};$$