CURS 2016-17 Q2- Teoria de Cues i Simulació. Grau Interuniversitari d'Estadística UB-UPC
Convocatòria extraordinària. (Avaluació CONTINUADA) Juliol

PART 1. Problema 1 (10 punts)

En una instal·lació hidràulica s'extrau aigua de dos pous usant bombes d'una capacitat de 2000 litres/min. Es disposa de dues bombes, una a cada pou, més una de reserva la qual és posada en funcionament per substituir la primera que falli de les altres dues. Les poden fer funcionar de forma continuada un temps aleatori d'esperança 200 hores i distribuït exponencialment. Un tècnic torna a posar en marxa les que queden avariades/obstruïdes i tarda unes 200 hores en mitjana per fer aquest servei, estant aquest temps també exponencialment distribuït. Es demana:

a) [2p] Establiu un model de cues, amb el corresponent diagrama de transicions, per al número de bombes que pot tenir de reparar el tècnic. Especifiqueu si estarà en estat estacionari i en cas afirmatiu Calculeu les probabilitats d'estat estacionari.
b) [1.5p] Calculeu el número de reparacions per unitat de temps que ha d'efectuar el tècnic.
c) [1.5p] Calculeu el temps mig que tarda una bomba entre que s'avaria i torna a ser posada en funcionament.
d) [1.5p] Calculeu el cabal mig (litres/hora) que la instal·lació extrau.
e) [1.5p] En un instant determinat només hi ha una bomba en funcionament (les altres dues estan al taller) i llavors queda avariada, per lo que queda interrompuda l'extracció d'aigua. Quina és la probabilitat de que no es reinici l'extracció d'aigua abans de 20h?
f) [2p] Quina és la probabilitat de que passin 400 hores sense que aquesta tercera bomba quedi reparada?

PART 2. Problema 1 (5 punts)

L'ordinador central d'una entitat financera té dos processadors per a les transaccions a la base de dades. Cadascuna de les tasques que es processen consta de dues etapes A i B, que han de ser executades de forma seqüencial. Després d'examinar una mostra que se sap que el temps de procés de l'etapa A segueix una distribució exponencial amb un temps mitjà de 5 s, mentre que la fase B també es distribueix de forma exponencial amb una mitjana de 2 s. En ambdues ocasions són independents entre si. El temps d'arribada de les tasques inter segueix també una llei exponencial de probabilitats amb un valor mitjà de 10 s. Cada tasca és atès per complet pel processador que ha estat assignat a la mateixa. Tasques esperar en una cua comú i s'assignen al primer processador que està disponible.

a) Estat d'un model de cua i calcular: la taxa mitjana d'arribades de tasques, el temps mitjà de servei per a una tasca i la seva desviació estàndard.
b) Calcular el temps mitjà que una tasca d'esperar des de la seva arribada a l'ordinador fins que comença a processar. A més, el temps de permanència mitjana d'una tasca i el nombre mitjà de tasques a l'ordinador.

Problema 2 (5 punts)

En una empresa de fabricació de llaunes de sardines es disposa de la següent cadena de producció. Un primer procés consisteix en un màquina que triga 10 minuts en mitjana en fabricar una llauna buida. El segon procés consisteix en omplir la llauna i tancar-la i el temps associat a aquesta tasca segueix una normal de mitjana 7 minuts i desviació de 2 minuts.

6134	231	4649	8716	9726	4581	3451	9641	2941	7166
5423	6532	5313	7231	6843	1563	3211	8168	9145	3546
3757	9135	7852	1915	5668	4868	3525	7243	1373	1002
1277	7857	9861	135	2432	8165	1434	7635	3215	6514

a) **[2.5p]** Escriviu un pseudo-codi que il·lustri el sistema de producció descrit en l'enunciat.
b) **[2.5p]** Escriviu la traça amb els valors de les següents variables orientades a cada una de les llaunes de l'apartat anterior.

Id tc to ts NLs NLP

Id = Id de la llauna
tc = Instant de temps en que s'ha creat la llauna buida
ts = Instant de temps en que s'ha completat la llauna creada i omplerta
to = Instant de temps en que comença a omplir-se la llauna
NLs = Número de llaunes buides a l'espera.
NLP = Número de llaunes processades.

P1

(a)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "2\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "2\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

$E[\tau] = 200h.$

$\lambda = \frac{1}{200} h^{-1}$

$\mu = \frac{1}{200} h^{-1}$

$C_0 = 1, \quad C_1 = \frac{1/100}{1/200} = 2, \quad C_2 = 2 \cdot \frac{1/100}{1/200} = 4$

$C_3 = 4$

$P_0 = [1 + 2 + 4 + 4]^{-1} = 1/11, \quad P_1 = \frac{2}{11}, \quad P_2 = \frac{4}{11}, \quad P_3 = \frac{4}{11}$

(b) $\bar{\lambda} = \bar{\mu} = \mu(1 - P_0) = \frac{10}{200 \cdot 11} = \frac{1}{220} h^{-1}$

(c) $W = L/\bar{\lambda}, \quad L = P_0(2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4) = \frac{22}{11} = 2$

$W = \frac{2}{\frac{1}{220}} = 440h.$

(d)

Estat	0	1	2	3
Cabal	4000	4000	2000	0

$E[\text{Cabal}] = 1'818'18 \frac{l}{min}$

(e) El reinici de l'extracció d'aigua depèn de quan acabi la reparació de la bomba que s'està reparant en curs. Per absència de memòria, aquest temps està exponencialment distribuït amb esperança 200h.

$P(\text{reinici} \geq 200) = 1 - e^{-200/200} = 0'6321.$

f) Temps fins reparar-se la bomba que s'acaba d'avariar $= T \sim$ 3-Erlang. $E[T] = 600h \rightarrow E[\text{etapa}] = 200h$

$P(T \geq 400) = e^{-\frac{400}{200}}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2}\right) =$

$= 5e^{-2} = 0'6766.$

c) T: Temps entre arribades ~ Exp(λ=6 tasks/min)

E[T]=10seg=1/6 min V[T]=1/36 min^2.

X_A: Temps requerit per processar una etapa A ~ Exp(μ_A=12 tasques/min) i E[X_A]=5 seg=1/12 min V[X_A]=1/124 min^2.

Let X_B: Temps requerit per processar una etapa B – Exp(μ_B=20 tasques/min) and E[X_B]=2 seg=1/30 min V[X_B]=1/900 min^2.

Let X: Temps Total pel procès d'una etapa X= X_{Ai} + X_B. IEs distribueix segons una llei hipoexponencial; Només cal calcular el seu valor mig i la seva desviació estàndar.

E[X]=5 + 2 = 7 s= 7/60 min V[X]=1/124 + 1/900 = 1044 / 129600 =29/3600= 0.00806 min^2, llavors la desviació estandard és 0.08975 min (o 5.385 sec)

M/G/2. Model de cues.

Cal calcular Wq, L and W usant. Allen-Cuneen; s'està lluny de la saturació.

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{6}{2(60/7)} = \frac{7}{20} = 0.35 << 1 \quad \theta = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{7}{10} = 0.7$$

$$W_q = \frac{C(s,\theta)\left(\lambda^2 \cdot \sigma_A^2 + \mu^2\sigma_S^2\right)}{2s\mu(1-\rho)} = \frac{\left(\frac{49}{270}\right)\left(6^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{60}{7}\right)^2\left(\frac{29}{3600}\right)^2\right)}{2 \cdot 2 \cdot (60/7) \cdot (1-0.35)} = \frac{7}{540} = 0.01296 \min$$

$$Aprox.\ Allen-Cuneen$$

$$C(s,\theta) = C(2,0.7) = \frac{\theta^s}{s!(1-\rho)} P_0 = \frac{(0.7)^2}{2!} \frac{1}{(1-0.35)} \frac{13}{27} = \frac{49}{270} = 0.1815$$

$$P_0\ de\, M/M/s = 2 \rightarrow P_0 = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\theta)^n}{n!} + \frac{(\theta)^s}{s!} \frac{1}{(1-\rho)}\right)^{-1} = \left(1 + 0.7 + \frac{(0.7)^2}{2!} \frac{1}{(1-0.35)}\right)^{-1} = \frac{13}{27} = 0.4815$$

$$W = W_q + W_s = \frac{7}{540} + \frac{1}{\mu} = \frac{7}{540} + \frac{7}{60} = \frac{7}{54} = 0.1296 \min \rightarrow L = \lambda W = 6 \cdot \frac{7}{54} = \frac{7}{9} = 0.\widehat{7}\ tasks$$

Problema 2

a) GNA/RNG Uniforma U[0,1) = #taula/10000=u

Arribades a = Dist. Servei Exponencial E=10

a = 10*ln(1-u1)

u1 = 0.6134 a1 = 10*ln(1-u1) = 9.504

u2 = 0.0231 a2 = 0.234

u3 = 0.4649 a3 = 6.253

u4 = 0.8716 a4 = 20.526

u5 = 0.9726 a5 = 35.972

Servei s = Dist. Servei Normal(10,2) m=7 d=2

s1 = m+d*((-2*ln(u1))1⁄2*cos(2π*u2))

s2 = m+d*((-2*ln(u2))1⁄2*cos(2π*u1))

u6 = 0.4581 u7 = 0.3451

s1 = m+d*((-2*ln(0.4581)1⁄2*cos(2π*0.3451)) = 6.122

s2 = m+d*((-2*ln(u0.3451)1⁄2*cos(2π*0.4581)) = 4.945

u8 = 0.9641 u9 = 0.2941

s3 = 6.98

s4 = 9.386

u10 = 0.9166 u11 = 0.5423

s5 = 6.831

b)

Id	**tc**	**to**	**ts**	**NLs**	**NLP**
1	9.504	9.504	15.626	0	1
2	9.738	15.626	21.879	1	2
3	15.991	21.879	28.132	1	3
4	36.517	36.517	45.903	0	4
5	72.489	72.489	79.32	0	5