Examen final de Inferencia Estadística

16 de junio de 2014

1. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua, cuya función de densidad es

$$f(x;\alpha) = \frac{1}{24}\,\alpha^5 x^4 e^{-\alpha x}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

donde $\alpha > 0$. Sean $X_1, \ldots, X_n$ las variables aleatorias muestrales correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n de X.

- Halle un estadístico suficiente para α, razonando la respuesta.
- Halle el estimador MLE (máximo verosímil) de α.
- Sabiendo, además que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ es completo, halle el estimador UMVU (uniformemente de varianza mínima e insesgado) de α.
- Calcule el error cuadrático medio de los estimadores MLE y UMVU.

2. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua, cuya función de densidad es

$$f(x,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

donde $\lambda > 0$. Sean $X_1, \ldots, X_n$ las variables aleatorias muestrales correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n de X.

- Halle un intervalo de confianza $1-\alpha$ para el parámetro λ.

3. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua, cuya función de densidad es

$$f(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

donde $(\mu,\sigma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Sean $X_1, \ldots, X_n$ las variables aleatorias muestrales correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n de X.

- Halle un intervalo de confianza $1-\alpha$ para el parámetro μ.
- Con $\sigma = 1$, halle un test UMP, si existe, para un nivel de significación α del problema de contraste de hipótesis: $H_0 : \mu = \mu_0$ frente $H_1 : \mu < \mu_0$, con μ_0 conocido. Halle también, en dicho caso, la función de potencia del test.
- Con $\sigma = 1$, halle un test UMP, si existe, para un nivel de significación α del problema de contraste de hipótesis: $H_0 : \mu = \mu_0$ frente $H_1 : \mu \neq \mu_0$, con μ_0 conocido. En caso de que no exista, aplique el test de la razón de verosimilitud para resolver dicho problema de contraste de hipótesis.

4. Contestar verdadero o falso, en esta misma hoja.

F - Un estimador asintóticamente insesgado es siempre consistente, si su varianza es finita.

F - La varianza de un estimador UMVU, si existe, coincide con la cota de Cramér-Rao.

V - Si el error cuadrático medio de un estimador tiende a cero cuando el tamaño muestral tiende a infinito, entonces este estimador es consistente.

V - Dado un problema de contraste de hipótesis, con hipótesis nula y alternativa simple y fijado un nivel de significación α, siempre existe un test, no necesariamente puro, de potencia máxima.

V - Fijado un contraste de hipótesis determinado y su error de tipo I, la única forma de disminuir el error de tipo II consiste en aumentar el tamaño muestral.

V - Si X e Y son variables aleatorias con distribución Gamma(α,n) su cociente sigue una distribución F de Fisher con $2n$ y $2n$ grados de libertad.

F - Un pivote es un estadístico.

F - Si en un contrate de hipótesis tanto la hipótesis nula como la alternativa son simples, si fijamos un nivel de significación α arbitrario, siempre existe un test puro, de potencia máxima.

NOTA: Cada apartado de los tres problemas vale 1 punto. Las respuestas deben estar debidamente justificadas, exceptuando las preguntas tipo test finales. El test vale 2 puntos de la nota final del examen. La nota del test, sobre 2 puntos, es igual a 0,25 multiplicado por el número de aciertos menos el número de fallos.

1.- Sea X una v.a. absolutamente continua, cuya función de densidad es:

$$f(x;\alpha) = \frac{1}{24}\alpha^5 x^4 e^{-\alpha x}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

donde $\alpha > 0$. Sean $X_1, \dots, X_n$ las variables aleatorias muestrales correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n de X.

* Halle un estadístico suficiente para α, razonando la respuesta.

La función de densidad conjunta será:

$$\mathcal{f}(x_1, \dots, x_n;\alpha) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha) = \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{24}\alpha^5 x_i^4 e^{-\alpha x_i}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_i)\right\} =$$

$$= \frac{1}{24^n}\alpha^{5n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^4 e^{-\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_{(1)})$$

donde $x_{(1)} \equiv \min\{x_1, \dots, x_n\}$

por tanto:

$$\mathcal{f}(x_1, \dots, x_n;\alpha) = \underbrace{\alpha^{5n} e^{-\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i}}_{g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i,\, \alpha\right)}\ \underbrace{\frac{1}{24^n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^4 \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_{(1)})}_{h(x_1, \dots, x_n)}$$

y por el criterio de factorización de Neyman-Fisher, podemos pues asegurar que el estadístico $\sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico suficiente.

---

* Halle el estimador MLE (máximo-verosímil) de α.

La función de verosimilitud será:

$$L_x(\alpha) = \alpha^{5n} e^{-\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i}\, \frac{1}{24^n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^4 \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_{(1)})$$

Al ser $x_{(1)} > 0$ con probabilidad 1, la verosimilitud será (con probabilidad 1) igual a:

$$L_x(\alpha) = \alpha^{5n} e^{-\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i}\, \frac{1}{24^n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^4$$

Vamos a maximizar dicha función, tomando previamente logaritmo:

$$\ln L_x(\alpha) = 5n \ln \alpha - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i - n \ln 24 - 4 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

derivando respecto α:

$$\frac{\partial \ln L_x(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{5n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

La ecuación de verosimilitud será:

$$\frac{5n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{5n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Este valor corresponde a un máximo puesto que:

$$\frac{\partial \ln L_x(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{5n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} x_i < 0 \quad \text{para } \alpha > \frac{5n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\frac{\partial \ln L_x(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{5n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} x_i > 0 \quad \text{para } 0 < \alpha < \frac{5n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

luego el MLE es:

$$\overset{*}{\alpha} = \frac{5n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

* Sabiendo que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ es completo halle el estimador UMVU de α.

En primer lugar observemos que $S \equiv \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(\alpha, 5n)$

puesto que cada $X_i \sim G(\alpha, 5)$. Por tanto

$$E_\alpha(\overset{*}{\alpha}) = E_\alpha\left(\frac{5n}{S}\right) = 5n \int_0^\infty \frac{1}{s} \alpha^{5n} \frac{s^{5n-1}}{\Gamma(5n)} e^{-\alpha s} ds =$$

$$= \frac{5n}{\Gamma(5n)} \alpha \int_0^\infty (\alpha s)^{5n-2} e^{-\alpha s} \alpha ds = \frac{5n}{\Gamma(5n)} \alpha \int_0^\infty t^{5n-2} e^{-t} dt =$$

$$\alpha s = t$$

$$\alpha ds = dt$$

$$= \frac{5n}{\Gamma(5n)} \alpha \Gamma(5n-1) = \frac{5n}{5n-1} \alpha \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

por tanto el estadístico:

$$\mathcal{U} = \frac{\alpha^*}{5m/(5m-1)} = \frac{5m-1}{\sum_{i=1}^{m} X_i}$$ es un estimador insesgado de α: $E_\alpha(\mathcal{U}) = \alpha$

y al ser función del estadístico suficiente $\sum_{i=1}^{m} X_i$ (apartado 1) y al informarnos que es completo, por el Teorema de Lehmann-Scheffé $\mathcal{U}$ será el estimador UMVU de α, siendo su varianza:

$$var_\alpha(\mathcal{U}) = var_\alpha\left(\frac{5m-1}{S}\right) = E_\alpha\left(\left(\frac{5m-1}{S}\right)^2\right) - E_\alpha\left(\frac{5m-1}{S}\right)^2 =$$

$$= (5m-1)^2 E_\alpha\left(\frac{1}{S^2}\right) - \alpha^2$$

$$E_\alpha\left(\frac{1}{S^2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{s^2} \alpha^{5m} \frac{s^{5m-1}}{\Gamma(5m)} e^{-\alpha s} ds = \frac{\alpha^2}{\Gamma(5m)} \int_0^\infty t^{5m-3} e^{-t} dt$$

$\alpha s = t$

$\alpha ds = dt$

$$= \frac{\alpha^2}{\Gamma(5m)} \Gamma(5m-2) =$$

$$= \frac{\alpha^2}{(5m-1)(5m-2)} \qquad \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Por tanto:

$$var_\alpha(\mathcal{U}) = \frac{5m-1}{5m-2}\alpha^2 - \alpha^2 = \frac{\alpha^2}{5m-2} < \infty$$

---

* Calcule el error cuadrático medio del MLE y del UMVU.

$$EQM_\alpha(\mathcal{U}) = var_\alpha(\mathcal{U}) + \underbrace{B_\alpha(\mathcal{U})^2}_{=0} = \frac{\alpha^2}{5m-2}$$

(ya que el UMVU es insesgado)

$$EQM_\alpha(\overset{*}{\alpha}) = var_\alpha(\alpha^*) + B_\alpha(\alpha^*)^2$$

$$B_\alpha(\alpha^*)^2 = \left\{ E_\alpha(\alpha^*) - \alpha \right\}^2 = \left\{ \frac{5m}{5m-1}\alpha - \alpha \right\}^2 =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{5m-1}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{(5m-1)^2}$$

$$var_\alpha(\alpha^*) = var_\alpha\left(\frac{5m}{5m-1}u\right) = \frac{25m^2}{(5m-1)^2} var_\alpha(u) =$$

$$= \frac{25m^2}{(5m-1)^2}\frac{\alpha^2}{(5m-2)}$$

$$EQM_\alpha(\overset{*}{\alpha}) = \frac{25m^2 \alpha^2}{(5m-1)^2(5m-2)} + \frac{\alpha^2}{(5m-1)^2}$$

$$EQM_\alpha(\alpha^*) = \frac{\alpha^2}{(5m-1)^2}\left\{\frac{25m^2}{5m-2} + 1\right\} = \frac{5m+2}{(5m-1)(5m-2)}\alpha^2$$

Obsérvese que:

$$EQM_\alpha(u) < EQM_\alpha(\overset{*}{\alpha})$$

2.- Sea X una variable aleatoria absolutamente continua, cuya función de densidad es:

$$f(x,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \qquad \lambda > 0$$

Sean $X_1, \ldots, X_n$ las variables aleatorias muestrales correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n de X.

* Halle un intervalo de confianza $1-\alpha$ para el parámetro λ

Observamos que si $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ entonces

si $\beta > 0 \qquad \beta X \sim \text{Exponencial}\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)$

Por tanto: $2\lambda X \sim \text{Exponencial}\left(\frac{1}{2}\right)$

y $\qquad 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}\left(\frac{1}{2}, n\right) = \chi^2_{2n}$

Por tanto $\quad 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$ es un pivote.

Hagamos

$$P\left(a \leq 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \leq b\right) = 1-\alpha \qquad a, b \in \mathbb{R}^+$$

por tanto

$$\frac{a}{2\sum_{i=1}^{n} X_i} \leq \lambda \leq \frac{b}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

a y b son tales que:

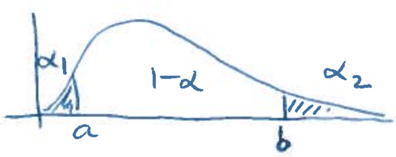
$$F_{\chi^2_{2n}}(a) = \alpha_1 \qquad y \qquad F_{\chi^2_{2n}}(b) = 1-\alpha_2$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \qquad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$$

(donde $F_{\chi^2_{2n}}$ es la función de distribución de una ji-cuadrado con $2n$ grados de libertad.)

Por sencillez podemos requerir $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$: $\quad a = F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(\alpha/2)$

$$b = F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(1-\alpha/2)$$



3.- Sea X una variable aleatoria absolutamente continua cuya función de densidad es:

$$f(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad x\in\mathbb{R}$$

$X_1\ldots X_n$ v.a. i.i.d X. $\qquad (\mu,\sigma)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$

* Halle un intervalo de confianza para μ.

Por el Teorema de Fisher:

$\bar{X}_n=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$ sigue una distribución $N\left(\mu, var=\frac{\sigma^2}{n}\right)$ independiente de

$\frac{nS_n^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2$ sigue una distribución χ^2_{n-1} $n-1$ grados de libertad.

La variable

$$T=\frac{(\bar{X}_n-\mu)/\sigma/\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{nS_n^2}{\sigma^2}/n-1}}$$

sigue una distribución t- de Student con $n-1$ g.l.

simplificando:

$$T=\sqrt{n-1}\,\frac{(\bar{X}_n-\mu)}{\sqrt{S_n^2}}$$

es pues un pivote para μ.

El intervalo vendrá dado por:

$$P\left(a\leq\sqrt{n-1}\,\frac{(\bar{X}_n-\mu)}{\sqrt{S_n^2}}\leq b\right)=1-\alpha$$

por simetría de la densidad respecto al origen escogeremos $a=-b$

Por tanto:

$$-b\leq\sqrt{n-1}\,\frac{(\bar{X}_n-\mu)}{\sqrt{S_n^2}}\leq b$$

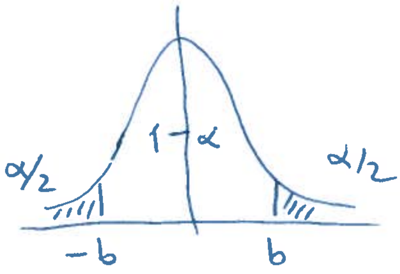
equivalente a:

$$-b\,\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n-1}}\leq\bar{X}_n-\mu\leq b\,\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n-1}}$$

$$\bar{X}_n - b\,\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n-1}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + b\,\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n-1}}$$

donde b es tal que $F_{t_{n-1}}(b) = 1-\alpha/2$

$$b = F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha/2)$$



siendo $F_{t_{n-1}}(x)$ la función de distribución de una t- de Student con $n-1$ grados de libertad

---

* Con $\sigma = 1$, halle un test UMP, si existe, para un nivel de significación α del problema de contraste de hipótesis:

$H_0: \mu = \mu_0$ frente $H_1: \mu < \mu_0$ con μ_0 conocido. Halle también la función de potencia.

Por Neyman-Pearson la región crítica, si existe, vendrá dada por

$$f_1(x_1 - x_n) = \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2}\right\} > K \prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu_0)^2}\right\} = f_0(x_1-x_n)$$

(con $\mu < \mu_0$)

simplificando, es equivalente a:

$$e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} > K\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}$$

igual a:

$$e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2} > K$$

$$e^{-\frac{n}{2}\mu^2 + \mu\sum_{i=1}^{n}x_i + \frac{n}{2}\mu_0^2 - \mu_0\sum_{i=1}^{n}x_i} > K$$

$$e^{(\mu-\mu_0)\sum_{i=1}^{n}x_i} > K\, e^{\frac{n}{2}(\mu^2-\mu_0^2)}$$

$$(\mu-\mu_0)\sum_{i=1}^{n} x_i > \ln\left(k\, e^{\frac{n}{2}(\mu^2-\mu_0^2)}\right) = \ln k + \frac{n}{2}(\mu^2-\mu_0^2)$$

pero $\mu-\mu_0<0$ por tanto equivale a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i < \underbrace{\frac{1}{\mu-\mu_0}\ln k + \frac{n}{2}(\mu+\mu_0)}_{cte}$$

la región crítica será pues:

$$W=\left\{(x_1 \ldots x_n)\in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i < A\right\}$$

donde la A vendría fijado por el nivel de significación α del test. Por Neyman-Pearson existiría pues un test puro definido por

$$\phi(x_1 \ldots x_n)=\begin{cases} 1 & \iff (x_1 \ldots x_n)\in W \\ 0 & \iff (x_1 \ldots x_n)\notin W \end{cases}$$

tal que:

$$\alpha = E_{\mu_0}(\phi(X_1 \ldots X_n)) = P_{\mu_0}(W) = P_{\mu_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < A\right)$$

y que será de potencia máxima (o error de tipo II mínimo sea cual sea $\mu<\mu_0$)

Sólo hace falta determinar A:

Como, bajo H_0, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu_0, var=n)$

resultará que:

$$Z=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_0}{\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\alpha = P_{\mu_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < A\right) = P\left(Z < \frac{A-n\mu_0}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= F_Z\left(\frac{A-n\mu_0}{\sqrt{n}}\right)$$ donde $F_Z(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

(la función de distribución de Z)

Por tanto:

$$F_Z^{-1}(\alpha)=\frac{A-n\mu_0}{\sqrt{n}} \qquad A = n\mu_0+\sqrt{n}\,F_Z^{-1}(\alpha)$$

La función de potencia será:

$$\tilde{\alpha}(\mu) = E_\mu(\phi(X_1 - X_n)) = P_\mu(W) = P_\mu\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < n\mu_0 + \sqrt{n}\, F_Z^{-1}(\alpha)\right)$$

pero ahora $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, \text{var} = n)$

$$y \qquad Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} - n\mu}{\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

por tanto:

$$\tilde{\alpha}(\mu) = P\left(Z < \frac{n\mu_0 + \sqrt{n}\, F_Z^{-1}(\alpha) - n\mu}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P(Z < \sqrt{n}(\mu_0 - \mu) + F_Z^{-1}(\alpha))$$

$$= F_Z(\sqrt{n}(\mu_0 - \mu) + F_Z^{-1}(\alpha))$$

---

* Con $\sigma = 1$, halle el test UMP, si existe, para el problema de contraste de hipótesis: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$, con μ_0 conocido. En el caso de que no exista aplique el test de la razón de verosimilitud.

Es claro que por aplicación de Neyman-Pearson llegaremos, como en el apartado anterior a la desigualdad:

$$(\mu - \mu_0) \sum_{i=1}^{n} x_i > \text{cte}$$

pero ahora no sabremos cuál es el signo de $\mu - \mu_0$. Por tanto no existe una única región crítica, independiente del valor de μ (bajo H_1) y por tanto no existe un test UMP.

Para aplicar el test de la razón de verosimilitud, observemos que $\Theta = \mathbb{R}$ y $\Theta_0 = \{\mu_0\}$.

La función de verosimilitud es:

$$L_x(\mu) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2} \right\} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left\{n S_n^2 + n(\bar{x}_n-\mu)^2\right\}}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}S_n^2} e^{-\frac{n}{2}(\bar{x}_n-\mu)^2}$$

El estimador máximo-verosímil de μ en Θ es, claramente,

$\mu^* = \bar{x}_n$ $\quad \left(\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2 \right)$

por tanto:

$$L_x(\hat{\Theta}) = L_x(\mu^*) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}S_n^2}$$

$$L_x(\hat{\Theta}_0) = L_x(\mu_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}S_n^2} e^{-\frac{n}{2}(\bar{x}_n-\mu_0)^2}$$

$$\Lambda(x_1 - x_n) = e^{-\frac{n}{2}(\bar{x}_n-\mu_0)^2}$$

La región crítica obtenida por el test de la razón de verosimilitud es:

$$W = \left\{ (x_1 - x_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; e^{-\frac{n}{2}(\bar{x}_n-\mu_0)^2} < A \right\}$$

equivalente a:

$$-\frac{n}{2}(\bar{x}_n-\mu_0)^2 < \ln A$$

$$(\bar{x}_n-\mu_0)^2 > -\frac{2}{n}\ln A$$

$$|\bar{x}_n-\mu_0| > \underbrace{\sqrt{-\frac{2}{n}\ln A}}_{cte \,=\, C}$$

por tanto:

$$W = \left\{ (x_1 - x_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; |\bar{x}_n-\mu_0| > C \right\}$$

Dicha constante c se determinará atendiendo al nivel de significación:

$$\alpha = P_{\mu_0}(W) = P_{\mu_0}\left(|\bar{X}_n - \mu_0| > c \right)$$

bajo $\bar{X}_n - \mu_0 \sim N\left(0, var = \frac{1}{n}\right)$

por tanto $\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - \mu_0) \sim N(0,1)$

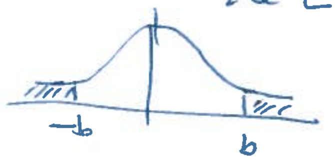
luego resulta:

$$\alpha = P\left(|Z| > \sqrt{n}\, c \right) = 1 - P\left(|Z| \leq \sqrt{n}\, c \right)$$

$$= 1 - \left\{ F_Z(\sqrt{n}\, c) - F_Z(-\sqrt{n}\, c) \right\}$$

pero $F_Z(-\sqrt{n}\, c) = 1 - F_Z(\sqrt{n}\, c)$ (por la simetría de la densidad de Z)

por tanto:



$$\alpha = 1 - \left\{ F_Z(\sqrt{n}\, c) - (1 - F_Z(\sqrt{n}\, c)) \right\}$$

$$\alpha = 2 F_Z(\sqrt{n}\, c) \iff F_Z(\sqrt{n}\, c) = \alpha/2$$

$$\sqrt{n}\, c = F_Z^{-1}(\alpha/2)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{n}} F_Z^{-1}(\alpha/2)$$

Por tanto la región crítica del test (puro) de nivel de significación α obtenido por la Razón de verosimilitud es:

$$W = \left\{ (x_1 - x_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; |\bar{x}_n - \mu_0| > \frac{1}{\sqrt{n}} F_Z^{-1}(\alpha/2) \right\}$$