Teoria de Cues i Simulació.
Grau Interuniversitari d'Estadística i Investigació Operativa.
Curs 2013-14. 1er Parcial.

P1. (10 punts) Unes instal·lacions aeroportuàries disposen de forces grups de places de parking per a taxis amb capacitat per allotjar a 4 vehicles, que van fent fila de forma que els clients sempre pugen en el taxi que està primer de la cua. Els clients arriben en promig, cada 3 minuts, amb temps exponencialment distribuïts y els taxis arriben amb una taxa de 1 cada minut, amb temps entre arribades també exponencialment distribuït. Si en arribar un taxi es troba la plaça de parquing plena se'n va a cercar una altre plaça immediatament.

Contesteu les següents qüestions:

a) **[0.8 p]** Quin model permet estudiar el comportament d'una parada de taxis? Dibuixeu el diagrama de taxes i calculeu-les.

b) **[0.5 p]** Amb quina probabilitat un taxi no pot entrar a una parada?

c) **[1.7 p]** Quin és el temps mig d'espera d'un taxi fins que passa a ser ell el qui s'emporti el següent client que arribi (o també fins que marxi el taxi que te per davant en la parada)?

d) **[3 p]** Quina de les dues alternatives següents permetrà millorar els ingressos dels taxistes, sabent que per cada carrera es cobren 12€:
<u>Alternativa</u> 1: ampliar els parquings de forma que hi càpiguen 8 taxis.
<u>Alternativa</u> 2: doblar el flux de clients a les parades. En aquest cas si només hi veuen un taxi llavors el temps entre arribades dels clients seria, com abans, de 3 minuts, mentre que si hi ha dos o més taxis el temps mig entre arribades de clients seria de 1,5 minuts en promig.
Es demana avaluar les dues alternatives calculant quins són en cada cas els ingressos en €/min.

e) **[4 p]** (**EN FULL APART**)
Considereu el temps entre les arribades parells de taxis.
e1) [**1,3 p**] En un instant determinat se sap que el darrer taxi que ha arribat a la parada és el 44é en el que va de dia. Quin és el temps mig que trigarà en arribar el següent taxi (el 45)? i la seva desviació estàndar? Quina és la probabilitat de que arribin 2 taxis en un període de 5 minuts a una parada?
e2) [**1 p**] En les mateixes condicions de l'apartat e1) anterior quina és la distribució del temps fins l'arribada del taxi 46? Calculeu la seva mitjana i el seva desviació estàndar.
e3) [**1,7** p] En un instant determinat, quina és la probabilitat de que el temps fins al següent taxi parell sigui superior a un minut?

($\int te^{-t}dt = -e^{-t}(1+t)$)

P1 SOLUCIÓ

a) Es tracta d'una M/M/1/4. cua finita: λ= 1 taxi/minut   μ=1/3 *taxi /minut*

b) $P_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} = \dfrac{1-3}{1-3^5} = \dfrac{1}{121}$

$P_4 = \rho^4 P_0 = 3^4 \dfrac{1}{121} = \dfrac{81}{121} \approx 66{,}94\%\ \textit{pèrdues}$

c)

$L_q = L - (1 - P_0) = 426/121 - (1 - 1/121) = 306/121\ \textit{taxis}$

$\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_4) = 120/363\ \textit{taxis}/\min \qquad W_q = \dfrac{L_q}{\bar{\lambda}} = \dfrac{306/121}{120/363} = 7{,}65 \min$

d) Alternativa 1: es passaria a un model M/M/1/8
Alternativa 2: "   "   "   M/M/2/4

En la actualitat els ingressos són $I_0 = c\bar{\lambda}_0 = 3{,}96€/\min$,
sent *c*= 12€

En la <u>alternativa 1</u> (model M/M/1/8) el flux d'entrada $\bar{\lambda}_1$ és

$P^{(1}{}_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} = \dfrac{1-3}{1-3^9} = \dfrac{1}{9841}$;

Percentatge de pèrdues: $P^{(1}{}_8 = \rho^8 P^{(1}{}_0 = 3^8 \dfrac{1}{9841} = \dfrac{6561}{9841} \approx 2/3$

$\bar{\lambda}_1 = \lambda(1 - P^{(1}{}_8) = 1 \times (1 - 6561/9841) = 0{,}33329\textit{taxis}/\min$

(Observis que encara que hi hagués espai per a $k >> 8$, $\bar{\lambda}_1$ seria pràcticament igual.)

$I_1 = c\bar{\lambda}_1 = 3{,}99€/\min$

En l'<u>alternativa 2</u>: Pèrdues en el model M/M/2/4:
$P_4^{(2} = C_4 P_0^{(2} = 81/8 \times 8/203 = 81/203 \approx 0{,}399$

Com que només hi ha un ~40% de pèrdues aquest sistema proporcionarà ingressos més alts:

$\bar{\lambda}_2 = \lambda(1 - P^{(2}{}_4) = 1 \times (1 - 81/203) = 0{,}600\textit{taxis}/\min$ **(!!)**

$$I_2 = c\bar{\lambda}_2 = 7{,}21€/\min$$

e) D1) El temps residual fins al següent taxi es distribueix també exponencialment; E[r45]=1/ minut = σ
N en 5 minuts ~Poisson E[N]=λT=5taxis;
P(N=2) = $e^{-5}(5^2/2)$ =0,0844
D2) r46 ~2-Erlang, r46 = r45 + $\tau_{45\text{->}46}$ → E[r46] = 1 + 1= 2 minuts
σ = $1/2^{1/2}$ 2 = 1.4142 minuts.
D3) Cal calcular la densitat del temps de vida residual d'una 2-Erlang i calcular llavors la probabilitat.

$f_r(t) = \dfrac{R_\tau}{E[\tau]} = \dfrac{1}{2} e^{-t}(1+t)$

$P(r \geq 1) = 1 - \dfrac{1}{2}\int_0^1 e^{-t}(1+t)dt = 1 - \dfrac{1}{2}\left(1 - (2+t)e^{-t}\right)\Big]_0^1 = 0.5518$