12. Programación cuadrática

Un programa matemático se dice que es de programación cuadrática cuando, el dominio viene dado por restricciones lineales de desigualdad y la función objetivo es suma de una forma lineal y una forma cuadrática. La expresión general de un PQ de maximización es la siguiente:

$$\begin{array}{lllll} \text{Min} & f(\vec{x}), & & & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{jk} x_j x_k \\ \text{sujeto a:} & g_i(\vec{x}) \leq b_i,\ i \in \{1,2,\ldots,m\}, & := & & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i\ ,\ i \in \{1,2,\ldots,m\} \\ & x_j \geq 0\ ,\ j \in \{1,2,\ldots,n\}. & & & x_j \geq 0\ ,\ j \in \{1,2,\ldots,n\}, \end{array}$$

siendo $f\ ,\ g_i : D \subset R^n \longrightarrow R$ y $q_{jk} = q_{kj} \quad \forall j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

En forma matricial

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c^T \vec{x} + \vec{x}^T D \vec{x}, \\ \text{sujeto a:} & A\vec{x} \leq b, \\ & \vec{x} \geq 0, \end{array}$$

siendo las matrices $c, b \in M\,(n \times 1)\,,\ A \in M\,(m \times n)$ y $D \in M\,(n \times n)$ simétrica.

Si la forma cuadrática es semidefinida positiva, la función objetivo es convexa y como por otra parte el conjunto de soluciones factibles es un politopo convexo, las condiciones de Kuhn–Tucker para mínimo son suficientes y, además, el mínimo es global.

Cuando el programa es de máximización y la forma cuadrática es semidefinida negativa, las condiciones de Kuhn–Tucker para máximo son suficientes y el máximo es global.

En cualquiera de los dos casos, si la forma cuadrática es definida (definida positiva en el caso de minimización y definida negativa en el caso de maximización) el óptimo que buscamos es global.

12.1. Método de Wolfe

Uno de los métodos más usados de solución de un programa cuadrático es el algoritmo de Wolfe. Su descripción es la siguiente:

Sea

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(\vec{x}), \\ \text{s. a.} & g_i(\vec{x}) \leq 0,\ i \in \{1,2,\ldots,m\}, \\ & x_j \geq 0\ ,\ j \in \{1,2,\ldots,n\}. \end{array}$$

Paso 1. Comprobamos si la función objetivo es convexa.

Paso 2. Escribimos las condiciones de Kuhn-Tucker.

a) $\nabla f(\vec{x}) + \lambda \nabla g(\vec{x}) = 0$,

b) $\lambda \geq 0$,

c) $\lambda g(\vec{x}) = 0$,

d) $g(\vec{x}) \leq 0$.

Si separamos la restricciones de positividad del resto de los multiplicadores, las condiciones de KT quedan como sigue:

a) $\nabla f(\vec{x}) + \lambda \nabla g(\vec{x}) - \mu = 0$,
b) $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$,
c) $\lambda g(\vec{x}) = 0, \mu\vec{x} = 0$,
d) $g(\vec{x}) \leq 0, -\vec{x} \leq 0$.

Equivalentemente, teniendo en cuenta la positividad de μ, se puede escribir lo anterior así:
a) $\nabla f(\vec{x}) + \lambda \nabla g(\vec{x}) \geq 0$,
b) $\lambda \geq 0$,
c) $\lambda g(\vec{x}) = 0$,
d) $g(\vec{x}) \leq 0$.

Añadimos variables de excedencia o de holgura donde haga falta.

Paso 3. Se aplica una versión modificada del algoritmo del simplex de las dos fases.

El método de Wolfe nos garantiza que cuando se trata de un programa cuadrático de minimización y la forma cuadrática es definida positiva, encontraremos solución de la primera fase con las variables auxiliares nulas y por lo tanto ser solución para las condiciones de Kuhn–Tucker del programa cuadrático inicial.

Vamos a mostrar cómo se construye este algoritmo mediante la aplicación a un ejemplo.

Sea

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2, \\ \text{sujeta a:} & x_1 + x_2 \leq 3, \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 6,, \\ & x_1 \geq 0\,,\, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Estandarizamos el problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & z = -x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2, \\ \text{sujeta a:} & x_1 + x_2 - 3 \leq 0, \\ & -2x_1 - 3x_2 + 6 \leq 0, \\ & -x_1 \leq 0, \\ & -x_2 \leq 0. \end{array}$$

Aplicamos los pasos del algoritmo de Wolfe.

Paso 1. La matriz hessiana de función objetivo es $Hf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y es definida positiva. Por tanto, la forma cuadrática es convexa y, en este programa, las condiciones para mínimo de Kuhn–Tucker son necesarias y suficientes.

Paso 2. Construimos el Lagrangiano

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = -x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + \\ + \lambda_1(x_1 + x_2 - 3) + \lambda_2(-2x_1 - 3x_2 + 6) - \mu_1x_1 - \mu_2x_2.$$

Escribimos las condiciones de Kuhn–Tucker para mínimo aplicadas a este programa:
a1) $-1 + x_1 - x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - \mu_1 = 0\,.$
a2) $-1 - x_1 + 2x_2 + \lambda_1 - 3\lambda_2 - \mu_2 = 0\,.$
b) $\lambda_1 \leq 0\,,\ \lambda_2 \leq 0\,,\ \mu_1 \leq 0\,,\ \mu_2 \leq 0\,.$

c1) $\lambda_1(x_1+x_2-3)=0.$ c3) $\mu_1 x_1 = 0.$
c2) $\lambda_2(-2x_1-3x_2+6)=0.$ c4) $\mu_2 x_2 = 0\,.$
d1) $x_1+x_2-3 \leq 0\,.$ d3) $x_1 \geq 0.$
d2) -2$x_1 - 3x_2 + 6 \leq 0.$ d4) $x_2 \geq 0.$

Añadimos las variables e_1 y e_2 en las condiciones a1) y a2) correspondiendo a $\mu_1 = e_1$y $\mu_2 = e_2$ y de esta manera eliminamos las condiciones d3) y d4).

En la condición d1) añadimos s'_1 (el prima indica restricción y el subíndice primera restricción) una variable de holgura. En la condición d2) añadimos e'_2 una variable de exceso. Siendo ambas no negativas

El resultado final es

a1) $x_1 - x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - e_1 = 1\,.$
a2) $-x_1 + 2x_2 + \lambda_1 - 3\lambda_2 - e_2 = 1\,.$
d1) $x_1 + x_2 + s'_1 = 3\,.$
d2) $2x_1 + 3x_2 - e'_2 = 6.$

Sustituyendo d1) y d2), los c1),c2),c3) y c4) resultan:

c1) $\lambda_1 s'_1 = 0.$ c3) $e_1 x_1 = 0.$
c2) $\lambda_2 e'_2 = 0.$ c4) $e_2 x_2 = 0\,.$

Salvo estas cuatro últimas restricciones, las demás, son lineales. Las cuatro últimas restricciones se les llama de holgura complementaria y pueden expresarse de una manera verbal para este programa como sigue: "e_1 de la restricción i y x_1 no pueden ser positivos a la vez" y "la variable de holgura o exceso para la $i-$ésima restricción y λ_i no pueden ser positivos a la vez". Como explicación se dice que; si s'_1 es positiva, la restricción d1) no está saturada y por tanto $\lambda_i = 0$ en virtud de que nosotros hemos hecho la hipótesis de positividad para todas las variables.

Paso 3. Para encontrar un punto que satisfaga las condiciones de KT, el método de Wolf propone aplicar una versión modificada del algoritmo del simplex de las dos fases que contempla las condiciones de KT menos las de holgura complementaria. Este procedimiento se realiza añadiendo una variable artificial a cada restricción en las condiciones de KT que no tienen una variable básica obvia y después tratamos de minimizar la suma de las variables.

$$\begin{array}{ccccccccl}
+x_1 & -x_2 & +\lambda_1 & -2\lambda_2 & -e_1 & & & & =1\,. \\
-x_1 & +2x_2 & +\lambda_1 & -3\lambda_2 & & -e_2 & & & =1\,. \\
+x_1 & +x_2 & & & & & +s'_1\,. & & =3. \\
+2x_1 & +3x_2 & & & & & & -e'_2 & =6.
\end{array}$$

como sólo hay una variables básica, añadimos tres y nos queda:

Tabla1.

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
+x_1 & -x_2 & +\lambda_1 & -2\lambda_2 & -e_1 & & & & +a_1 & & & =1\,. \\
-x_1 & +2x_2 & +\lambda_1 & -3\lambda_2 & & -e_2 & & & & +a_2 & & =1\,. \\
+x_1 & +x_2 & & & & & +s'_1\,. & & & & & =3. \\
+2x_1 & +3x_2 & & & & & & -e'_2 & & & +a'_2 & =6.
\end{array}$$

donde a_1 , a_2 , a'_2 son las variables artificiales. El problema a resolver que resulta es el siguiente:

$$
\begin{array}{lll}
\text{mín} & a_1 + a_2 + a_3' & \\
\text{s.a.} & .\ + x_1 - x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - e_1 + a_1 & = 1\,. \\
 & \quad -x_1 + 2x_2 + \lambda_1 - 3\lambda_2 - e_2 + a_2 & = 1\,. \\
 & \quad +x_1 + x_2 + s_1'\,. & = 3. \\
 & \quad +2x_1 + 3x_2 - e_2' + a_2' & = 6. \\
 & \lambda_1 s_1' = 0, \quad e_1 x_1 = 0, \quad \lambda_2 e_2' = 0, & e_2 x_2 = 0\,.
\end{array}
$$

El modo de actuación es el siguiente:

1. No hay que realizar pivoteo que convierta e_i en variable básica.

2. No hay que realizar pivoteo que convierta a la variable de holgura (o de exceso) para la $i-$ ésima restricción y λ_i en variables básicas a la vez.

Cuadro inicial:

		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
		x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1'	e_2'	a_1	a_2	a_2'	b
a_1	1	1	-1	1	-2	-1	0	0	0	1	0	0	1
a_2	1	-1	**2**	1	-3	0	-1	0	0	0	1	0	1
s_1'	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3
a_2'	1	2	3	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	6
$c_j - z_j$		-2	**-4**	-2	5	1	1	0	1	0	0	0	8

El simplex nos dice que entra la variable x_2 y sale la variable a_2.

Primer cuadro:

		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
		x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1'	e_2'	a_1	a_2	a_2'	b
a_1	1	1/2	0	3/2	-7/2	-1	-1/2	0	0	1	1/2	0	3/2
x_2	0	-1/2	1	1/2	-3/2	0	-1/2	0	0	0	1/2	0	1/2
s_1'	0	3/2	0	-1/2	3/2	0	1/2	1	0	0	-1/2	0	5/2
a_2'	1	**7/2**	0	-3/2	9/2	0	3/2	0	-1	0	-3/2	1	9/2
$c_j - z_j$		**-4**	0	0	-1	1	-1	0	1	0	2	0	6

El simplex nos dice que entra la variable x_1 y sale la variable a_2'.

Segundo cuadro:

		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
		x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1'	e_2'	a_1	a_2	a_2'	b
a_1	1	0	0	**12/7**	-29/7	-1	-5/7	0	1/7	1	5/7	-1/7	6/7
x_2	0	0	1	2/7	-6/7	0	-2/7	0	-1/7	0	2/7	1/7	8/7
s_1'	0	0	0	1/7	-3/7	0	-1/7	1	**3/7**	0	1/7	-3/7	4/7
x_1	0	1	0	-3/7	9/7	0	3/7	0	-2/7	0	-3/7	2/7	9/7
$c_j - z_j$		0	0	-12/7	29/7	1	5/7	0	**-1/7**	0	2/7	8/7	6/7

El simplex nos recomienda sustituir a_1 por λ_1, pero esto no es posible debido a las condiciones de holgura complementaria. El simplex modificado nos dice que entra la variable e_2' y sale la variable s_1'.

La solución básica actual es $z = \frac{6}{7}$, $\left(a_1 = \frac{6}{7}, x_2 = \frac{8}{7}, s_1' = \frac{4}{2}, x_1 = \frac{9}{7}\right)$.

Tercer cuadro:

		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
		x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s'_1	e'_2	a_1	a_2	a'_2	b
a_1	1	0	0	**5/3**	-4	-1	-2/3	-1/3	0	1	2/3	0	2/3
x_2	0	0	1	1/3	-1	0	-1/3	1/3	0	0	1/3	0	4/3
e'_2	0	0	0	1/3	-1	0	1/3	7/3	1	0	1/3	-1	4/3
x_1	0	1	0	-1/3	1	0	1/3	2/3	0	0	-1/3	0	5/3
$c_j - z_j$		0	0	**-5/3**	4	1	2/3	1/3	0	0	1/3	1	2/3

El simplex nos dice que entra la variable λ_1 y sale la variable a_1.

Cuarto cuadro:

		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
		x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s'_1	e'_2	a_1	a_2	a'_2	b
λ_1	0	0	0	1	-12/5	-3/5	-2/5	-1/5	0	3/5	2/5	0	2/5
x_2	0	0	1	0	-1/5	1/5	-1/5	2/5	0	-1/5	1/5	0	6/5
e'_2	0	0	0	0	-1/5	1/5	-1/5	12/5	1	-1/5	1/5	-1	6/5
x_1	0	1	0	0	1/5	-1/5	1/5	3/5	0	1/5	-1/5	0	9/5
$c_j - z_j$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

La solución óptima es: $x_1 = \frac{9}{5}$, $x_2 = \frac{6}{5}$, $\lambda_1 = \frac{2}{5}$, $e'_2 = \frac{6}{5}$.

El método de Wolfe garantiza la obtención de la solución óptima para un PPC, si todos los menores principales dominantes del hessiano de la función son positivos.

Nota: En la práctica se hace el pivoteo complementario (Shapiro 1979).

12.2. Método de Lemke

Consideramos el programa tipo

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{x}^T Q\vec{x}, \\ \text{s.a.} & A\vec{x} \leq b, \\ & \vec{x} \geq 0, \end{array}$$

donde Q es una matriz simétrica de orden n y $A \in N(m \times n)$. El programa es convexo.

Paso 1. Añadimos las variables de holgura al problema resultando

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{x}^T Q\vec{x}, \\ \text{s.a.} & A\vec{x} + \vec{s} = b, \\ & \vec{x} \geq 0, \vec{s} \geq 0. \end{array}$$

El lagrangiano y las condiciones de KT son:

$$L(\vec{x};\lambda) = c^T\vec{x} + \tfrac{1}{2}\vec{x}^T Q\vec{x} + \lambda(-b + A\vec{x} + \vec{s}) - \mu\vec{x}$$

a) $c + Q\vec{x} + \lambda A - \mu = 0 \Rightarrow c = -Q\vec{x} - \lambda A + \mu$.

b) $\lambda \geq 0,\ \mu \geq 0$.

c) $\lambda(-b + A\vec{x}) = 0 \Rightarrow \lambda\vec{s} \geq 0$.
$\mu\vec{x} = 0 \Rightarrow \mu\vec{x} \geq 0$.

d) $A\vec{x} + \vec{s} = b$.

Escribiéndolas en forma tabular, resulta

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{x} & \lambda & \mu & \vec{s} \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{ccccc} -Q & -A^T & I_n & 0 & c \\ A & 0 & 0 & I_m & b \end{array}} \end{array} \begin{array}{l} \text{Condición a)} \\ \text{Condición d).} \end{array}$$

Las condiciones de ortogonalidad son:

$$\lambda_i \cdot s_i = 0, \qquad \mu_i \cdot x_i = 0 \qquad i = \{1 \cdots n\},$$

que nos lleva a decir que λ_i y s_i son complementarios, análogamente para μ_i y x_i.

Si $(\vec{x}^o, \lambda^o, \mu^o, \vec{s}^o)$ cumplen las condiciones de KT, entonces debe ser la solución óptima para el problema cuadrático.

Caso 1. Si suponemos que b y c son no negativos, una solución para las condiciones de KT es: $(\vec{x}^o, \lambda^o, \mu^o, \vec{s}^o) = (0, 0, c, b)$ y la solución óptima es $\vec{x}^o = \vec{0}$ que es factible en el programa original.

Caso 2. Si b y/ó c son negativos, tenemos el método de Lemke

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{x} & \lambda & \mu & \vec{s} \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{ccccc} -Q & -A^T & I_n & 0 & c \\ A & 0 & 0 & I_m & b \end{array}} \end{array} + Z^o \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 1. \end{array}}$$

Si Z^o es suficientemente grande el lado derecho es no negativo y se puede afirmar que la solución es $(\vec{x}^o, \lambda^o) = (0, 0)$, pero, al aparecer esta Z^o, no se cumple KT salvo que tengamos una solución no negativa $(\vec{x}^o, \lambda^o, \mu^o, \vec{s}^o)$, $Z^o = 0$ que sí las cumpliría.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -6x_1 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2, \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Tabla inicial

	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	s_1	Z^o	
μ_1	-4	2	-1	1	0	0	-1	**-6** (el + negativo)
μ_2	2	-4	-1	0	1	0	-1	0
s_1	1	1	0	0	0	1	-1	2

Entra la variable Z^o por μ_1.

Tabla segunda

	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	s_1	Z^o		
Z^o	4	-2	1	-1	0	0	1	6	6/4
μ_2	**6**	-6	0	-1	1	0	0	6	**6/6**
s_1	5	-1	1	-1	0	1	0	8	8/5

Al dejar de ser básica μ_1 entra a ser básica x_1. Entra la variable x_1 y sale μ_2.

	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	s_1	Z^o	
Z^o	0	2	-1	-1/3	-4/3	0	1	2
x_1	1	-1	0	-1/6	1/6	0	0	1
s_1	0	**4**	1	-1/6	-5/6	1	0	3

Entra la variable x_2 y sale s_1.

	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	s_1	Z^o	
Z^o	0	0	**1/2**	-1/4	-11/12	-1/2	1	1/2
x_1	1	0	1/4	-5/24	-1/12	1/4	0	7/4
x_2	0	1	1/4	-1/24	-5/24	1/4	0	3/4

Entra la variable λ_1 y sale Z^o.

	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	s_1	Z^o	
λ_1	0	0	1	-1/2	-11/6	-1	2	1
x_1	1	0	0	-1/12	9/24	1/2	-1/2	3/2
x_2	0	1	0	1/12	1/4	1/2	-1/2	1/2

La solución es $(x_1^o, x_2^o, \lambda_1^o, \mu_1^o, \mu_2^o, s_1^o) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0\right)$.

Ejercicio 12.1 *Resolver el problema del ejemplo anterior por Kuhn-Tucker.*

Ejercicio 12.2 *Resolver el problema del ejemplo anterior por el método de Wolfe.*

Ejemplo 12.3 *Resolver el problema siguiente*

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -x_1 - 2x_2 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2, \\ s.a. & x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ & -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

a) por el método de Lemke.
b) por el método de Wolfe.

Solución a):
Paso 0.
$Q = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.
La tabla inicial es:

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	s_1	s_2	Z^o	
μ_1	4	-2	-1	-2	1	0	0	0	-1	-1
μ_2	-2	4	2	-1	0	1	0	0	-1	-2(el + negativo)
s_1	1	2	0	0	0	0	1	0	-1	4
s_2	-2	1	0	0	0	0	0	1	-1	4

En la última columna se elige el más negativo, en consecuencia, entra la variable la Z^o y sale la variable μ_2 resultando la siguiente tabla después de operar

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	s_1	s_2	Z^o	
μ_1	-6	**6**	-1	3	1	-1	0	0	0	**1**(1/6)
Z^o	2	-4	-2	1	0	-1	0	0	1	2(1/2)
s_1	1	6	2	1	0	-1	1	0	0	6(6/6)
s_2	-4	5	2	1	0	-1	0	1	0	6(6/5)

La variable que deja de ser básica es μ_2 y su complementaria x_2 pasa a ser básica. Aplicando la regla de la mínima razón, se tiene que el pivote es 6. Resultando que, μ_1 deja de ser básica y se sustituye por x_2.

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	s_1	s_2	Z^o	
x_2	-1	1	1/6	1/2	1/6	-1/6	0	0	0	1/6
Z^o	**2**	0	4/3	-1	-2/3	-1/3	0	0	1	4/3
s_1	5	0	1	-2	-1	0	1	0	0	5
s_2	1	0	7/6	-3/2	-5/6	-1/6	0	1	0	31/6

La variable que deja de ser básica es μ_1 y su complementaria es x_1, así que aplicamos la regla de la mínima razón y se tiene que el pivote es 2, resultando

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	s_1	s_2	Z^o	
x_2	0	1	5/6	0	-1/6	-1/3	0	0	1/2	5/6
x_1	1	0	2/3	-1/2	-1/3	-1/6	0	0	1/2	2/3
s_1	0	0	-7/10	9/2	2/3	5/6	1	0	-1/2	5/3
s_2	0	0	1/2	-1	-7/6	0	0	1	-1/2	27/6

La variable Z^o ha dejado de ser básica, indicandonos que la solución es
$x^* = (x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, s_1, s_2) = (2/3, 5/6, 0, 0, 0, 0, 5/3, 27/6)$.
Solución b):

		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	
		x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s'_1	s'_2	a_1	a_2	b
a_1	1	4	-2	1	-2	-1	0	0	0	1	0	1
a_2	1	-2	**4**	2	1	0	-1	0	0	0	1	2
s'_1	0	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0	4
s'_2	0	-2	1	0	0	0	0	0	1	0	0	4
$c_j - z_j$		-2	**-2**	-3	1	1	1	0	0	0	0	3

La siguiente tabla es:

		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	
		x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s'_1	s'_2	a_1	a_2	b
a_1	1	**3**	0	2	-3/2	-1	-1/2	0	0	1	1/2	2
x_2	0	-1/2	1	1/2	1/4	0	-1/4	0	0	0	1/4	1/2
s'_1	0	2	0	-1	-1/2	0	1/2	1	0	0	-1/2	3
s'_2	0	-3/2	0	-1/2	-1/4	0	1/4	0	1	0	-1/4	7/2
$c_j - z_j$		**-3**	0	-2	3/2	1	1/2	0	0	-1	-1/2	2

La tabla final es:

		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	
		x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1'	s_2'	a_1	a_2	b
x_1	0	1	0	2/3	-1/2	-1/3	-1/6	0	0	1/3	1/6	2/3
x_2	0	0	1	5/6	-1/2	-1/2	-1/2	0	0	1/2	1/2	5/6
s_1'	0	0	0	-5	5/2	3	3/2	1	0	0	-2	5/3
s_2'	0	0	0	1/2	-1/2	-3/2	1/2	0	1	1/2	0	9/2
$c_j - z_j$		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

indicandonos que la solución es:
$x^* = (x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, e_1, e_2, s_1', s_2') = (2/3, 5/6, 0, 0, 0, 0, 5/3, 27/6)$.

12.3. Aplicación: Selección de cartera.

Ejemplo 12.4 *(Winston, p691) Disponemos de 1000\$ para invertir en tres tipos de acciones. llamamos S_i, $i \in \{1,2,3\}$ a la variable aleatoria que representa el rendimiento anual en centavos de 1\$ invertido en acciones del tipo i. (Es decir, si $S_i = 0{,}12$, 1\$ invertido en i a principio de año vale 1.12\$ al final del mismo). Tenemos también la siguiente información sobre el rendimiento esperado de cada tipo de acciones y las varianzas y covarianzas de las variables aleatorias.*

$$E(S_1) = 0{,}14\,,\ E(S_2) = 0{,}11\,,\ E(S_3) = 0{,}10.$$
$$var(S_1) = 0{,}20\,,\ var(S_2) = 0{,}08\,,\ var(S_3) = 0{,}18.$$
$$cov(S_1, S_2) = 0{,}05\,,\ cov(S_1, S_3) = 0{,}02\,,\ cov(S_2, S_3) = 0{,}03.$$

Hallar la cartera de varianza mínima que asegura un rendimiento anual de al menos un 12 %.

Sea x_i la cantidad en dólares invertida en acciones del tipo i, $i \in \{1,2,3\}$. El rendimiento unitario anual de esta cartera viene expresado por la siguiente variable aleatoria

$$\frac{x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3}{1000},$$

y por lo tanto, el rendimiento esperado es:

$$\frac{x_1E(S_1) + x_2E(S_2) + x_3E(S_3)}{1000}.$$

Para asegurarnos al menos un 12 % de rendimiento anual esperado

$$\frac{0{,}14x_1 + 0{,}11x_2 + 0{,}10x_3}{1000} \geq 0{,}12.$$

Otra restricción es la prsupuestaria $x_1 + x_2 + x_3 = 1000$.

La varianza de la cartera es:

$$var(x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3) =$$
$$= x_1^2 var(S_1) + x_2^2 var(S_2) + x_3^2 var(S_3) + x_1x_2 cov(S_1S_2) +$$
$$x_1x_3 cov(S_1S_3) + x_2x_3 cov(S_2S_3) =$$
$$= 0{,}20x_1^2 + 0{,}08x_2^2 + 0{,}18x_3^2 + 0{,}10x_1x_2 + 0{,}04x_1x_3 + 0{,}06x_2x_3$$

En resumen, el planteamiento del programa cuadrático es:

$$
\begin{array}{ll}
\text{mín} & 0{,}20x_1^2 + 0{,}08x_2^2 + 0{,}18x_3^2 + 0{,}10x_1x_2 + 0{,}04x_1x_3 + 0{,}06x_2x_3, \\
\text{sujeta a:} & 0{,}14x_1 + 0{,}11x_2 + 0{,}10x_3 \geq 120, \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 1000, \\
 & x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0\,,\ x_3 \geq 0.
\end{array}
$$

La solución de este programa (utilizando el QSB, por ejemplo) es:

$$x_1 = 380{,}95\ ,\ x_2 = 476{,}19\ ,\ x_3 = 142{,}86.$$

Los valores "shadow price" que da el QSB son 2761.90 y 180.95, que son los opuestos de los multiplicadores de Kuhn–Tucker; por lo tanto, los multiplicadores de Kuhn–Tucker son negativos como corresponde a un mínimo. (Comprobar que en este ejemplo el programa es convexo y por lo tanto las condiciones de Kuhn–Tucker son suficientes y por tanto el mínimo es global).

Ejercicio 12.5 *Representar gráficamente el problema anterior.*

Ejemplo 12.6 *Un individuo que tiene 10.000$ para invertir, ha identificado tres fondos mutualistas como oportunidades atractivas. Durante los pasados 5 años, los dividendos pagados (en centavos por dolar invertido) han sido los que se muestran en la tabla*

	1	2	3	4	5
Inversión 1	10	4	12	13	6
Inversión 2	6	9	6	5	9
Inversión 3	17	1	11	19	2

El individuo considera que estos pagos son indicadores de lo que puede esperarse en el futuro. Este individuo en particular, tiene dos requerimientos:

a) El rendimiento anual esperado, combinado, por sus inversiones no debe ser menor a 800$ (cantidad que los 10.000$ ganarían al 8 % de interés)

b) La varianza futura de dividendos deberá ser tan pequeña como sea posible.

¿Cuánto deberá invertir este individuo en cada fondo a fin de lograr estos requerimientos?

Sean $x_1,\ x_2,\ x_3$ las cantidades invertidas en cada fondo.

Deteminación de la matriz de covarianza

k año	s_{1k}	s_{2k}	s_{3k}	s_{1k}^2	s_{2k}^2	s_{3k}^2	$s_{1k}s_{2k}$	$s_{1k}s_{3k}$	$s_{2k}s_{3k}$
1	10	6	17	100	36	286	60	170	102
2	4	9	1	16	81	1	36	4	9
3	12	6	11	144	36	121	72	132	66
4	13	5	19	169	25	361	65	247	95
5	6	9	2	36	81	4	54	12	18
Sumas	45	35	50	465	259	76	287	565	290

de la tabla deducimos

$$E(s_1) = \frac{45}{5} = 9 \text{ c/\$} \quad E(s_2) = \frac{35}{5} = 7 \text{ c/\$} \quad E(s_3) = \frac{50}{5} = 10 \text{ c/\$}$$

$$\sigma_{11}^2 = \frac{465}{5} - \frac{(45)^2}{25} = 12 \qquad \sigma_{12}^2 = \sigma_{21}^2 = \frac{287}{5} - \frac{(45)(35)}{25} = -5{,}6$$

$$\sigma_{22}^2 = \frac{259}{5} - \frac{(35)^2}{25} = 2{,}8 \qquad \sigma_{13}^2 = \sigma_{31}^2 = \frac{565}{5} - \frac{(45)(50)}{25} = 23$$

$$\sigma_{33}^2 = \frac{772}{5} - \frac{(50)^2}{25} = 55{,}2 \qquad \sigma_{23}^2 = \sigma_{32}^2 = \frac{290}{5} - \frac{(35)(50)}{25} = -12$$

el problema queda

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 12x_1^2 + 2{,}8x_2^2 + 55{,}2x_3^2 - 11{,}2x_1x_2 + 46x_1x_3 - 24x_2x_3, \\ \text{sujeta a:} & 9x_1 + 7x_2 + 10x_3 \geq 80{,}000, \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 10{,}000, \\ & x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0\,,\ x_3 \geq 0. \end{array}$$

y la solución es $x_1 = x_2 = 5{,}000$ y $x_3 = 0$.

Ejercicio 12.7 *Un asesor en inversiones debe recomendar una cartera formada por dos inversiones a un cliente que dispone de 15.000\$ para invertir. Una inversión rinde un 20 % cada dos años, mientras que la otra rinde 30 % cada tres años. Determina la mejor combinación de inversiones, si la única condición establecida por el cliente es que el rendimiento anual esperado, combinado, varíe lo menos posible.*

(Comprueba las condiciones de KT para este problema)

Sol: $x_1 = 10{,}000, \quad x_2 = 5000.$