## DIPLOMATURA D’ESTADÍSTICA. Curs 03/04. 2on Q

**EXAMEN FINAL. Convocatòria Ordinària. Cadenes de Markov**.

Una nau de transport precisa de tres unitats de potència en bon estat per mantenir correctament la seva velocitat de creuer. Cada unitat de potència pot subministrar energia durant un període de 4 mesos i després ha de ser recarregada novament per una nau auxiliar mòbil que pot igualment efectuar reparacions de les unitats de potència avariades. La companyia es planteja disposar un conjunt de naus auxiliars al llarg del trajecte de les naus de transport per les tasques de recàrrega i reparació. La velocitat de les naus auxiliars és molt superior a la de la nau de transport però la seva autonomia és bastant limitada en comparació amb la de les distàncies que pot recórrer la nau de transport. Se sap que després de tenir una fallida, les unitats de potència estaran al menys un mes sense avaries. Passat el primer mes la probabilitat de tenir una avaria en el mes següent és de 0.05, mentre que si no s'han avariat en el segon mes, llavors la probabilitat d'avaria durant el tercer mes és de 0.06. No poden haver-hi avaries durant l'últim i quart mes i llavors al final d'aquest la unitat de potència s'esgota. La distància recorreguda en un mes per la nau de transport és de 10 u.a. Suposem, per simplificar, que les avaries de les unitats de potència només poden tenir lloc al final de mes i que l'arribada de les naus auxiliars és pràcticament instantània en quant se les reclama.

Es demana:

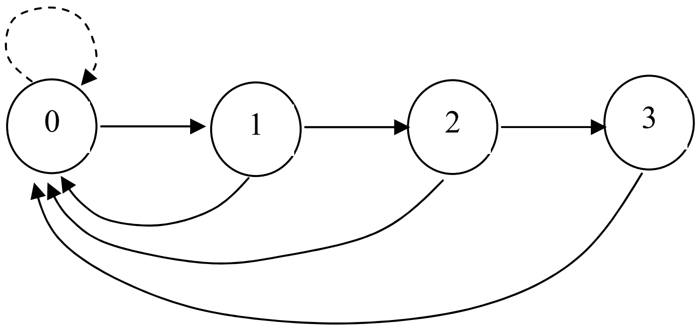
1- Establir una cadena de Markov $\{X_k\}$ corresponent al número de mesos recorreguts per la nau de transport des de l'última avaria o recàrrega. Calcular la matriu de probabilitats de transició, dibuixar el diagrama corresponent, les classes de la cadena i la periodicitat dels seus estats.
2- Distància mitjana que recorre una unitat de potència entre dues intervencions per part de una nau auxiliar.
3- Distància mitjana que la nau de transport recorre entre dos arribades d'una nau auxiliar. Freqüència amb la que es sol.licita la intervenció d'una nau de transport.
4- Una deficiència en les transmissions de la nau de transport els obliga a estalviar energia i decideixen, per guanyar temps, fer funcionar només una unitat de potència a la vegada amb lo que la velocitat queda reduïda al 40 %. En avariar-se o esgotar-se la unitat de potencia faran funcionar la següent fins que s'en quedin sense cap. Es vol conèixer l’esperança del número d’unitats de potencia que estaran avariades (no esgotades, però avariades) quan la nau es quedi definitivament aturada.

## DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA. Curs 03/04. 2on Q

**EXAMEN FINAL. Convocatòria Ordinària. Teoria de Cues**.

El magatzem de recollida de mercaderies d'una botiga de mobles pel automuntatge disposa d'un àrea d'aparcament per la recollida de mercaderies per un únic vehicle i un espai addicional al carrer per tres vehicles més en espera (és a dir un total de quatre places). Quan hi ha un únic client per a la recollida de mercaderies, el client entra recull i carrega ell mateix el paquet, observant-se un en mitjana ocupa l'àrea d'aparcament durant 1.5 minuts. Suposi's que els clients només poden recollir un paquet a la vegada i si no hi ha espai per esperar-se, llavors la botiga li portarà la mercaderia a casa de franc. Quan hi ha més d'un client pendent de recollir la seva compra, un empleat surt del mostrador del magatzem i ajuda a carregar als clients. En aquest cas, el temps mig per recollir el paquet és de només un minut. En tots dos casos, la distribució del temps requerit per recollir una mercaderia és exponencial. El número de clients que volen recollir mercaderies en hora punta el cap de setmana s'estima que segueix una distribució de Poisson d'esperança 30 per hora. El magatzem de recollida de mercaderies està obert 8 hores al dia i el benefici mig addicional per client que s'emporta la seva compra en el seu vehicle en capn de setmana es de 250€.

1. Quina és la probabilitat de que en un quart d'hora arribin menys de 5 clients ?.
2. Usa un model de cues adequat per estudiar la situació descrita anteriorment. Descriu els estats del sistema, les taxes d'arribada i de servei dels diferents estats. Dibuixa el diagrama de fluxes i calcula les probabilitats d'estat estacionari.
3. Quin és el temps mig que tarda un client en recollir una mercaderia des de que arriba a la botiga?.
4. Pròximament començaran unes obres al carrer on es troba el magatzem, lo qual permetrà ampliar l'espai per la recollida de mercaderies i incrementaria el benefici en cap de setmana. El cost d'obra estimat per cada plaça addicional es de 3000€. En quant de temps l'increment del benefici permetrà amortitzar una plaça addicional.?




$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0 & 0.94 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Una única classe aperiòdica}$$

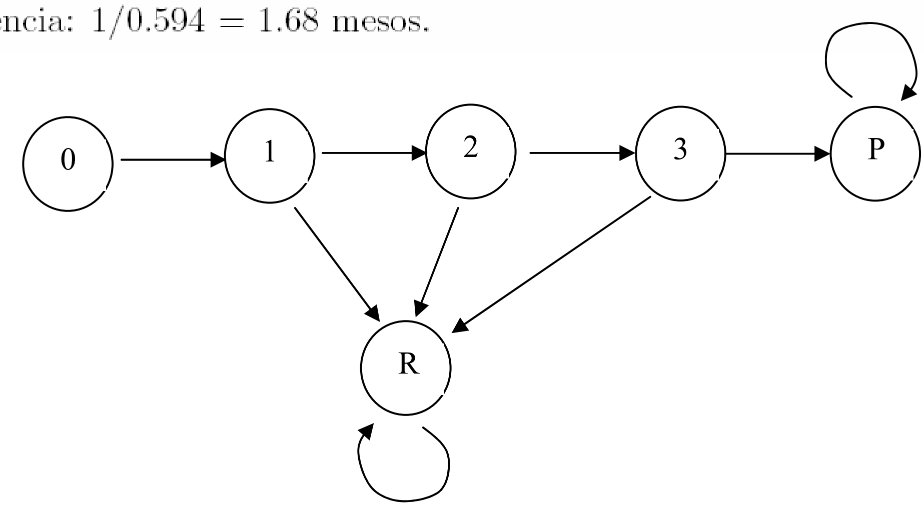
$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0 & 0.94 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.26, 0.26, 0.247, 0.23218)$$

2) Distància mitjana, $E[\ell]$, entre $X_k = 0$ i $X_{k+\ell} = 0$:
$\mu_{0,0} = 1/\pi_0 = 3.84$ mesos; $\rightarrow$ 38.4 u.a.

3) $\pi_0 = 0.26$; Probabilitat de que alguna unitat de potència falli/s'esgoti : $1 - (1 - \pi_0)^3 = 1 - 0.74^3 = 0.594$.
Freqüència: $1/0.594 = 1.68$ mesos.



4)

$$P = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.94 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} R \\ P \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline R & Q \end{array}\right), \; Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.94 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La probabilitat de que una unitat s'avarïi abans de esgotar-se és $f_{0,R}$

$$\begin{pmatrix} f_{0,R} \\ f_{1,R} \\ f_{2,R} \\ f_{3,R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.94 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.05 \\ 0.06 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.107 \\ 0.107 \\ 0.06 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Número mig de unitats avariades: $3 \cdot f_{0,R} = 0.321$.

**TEORIA de CUES. SOLUCIÓ**.

1. En un procés poissonià d'esperança $\lambda$ arribades per unitat de temps, la probabilitat de n arribades a l'interval [0,t] és:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, n \geq 0, t \geq 0$$

Per tant la probabilitat de menys de *n* arribades és :

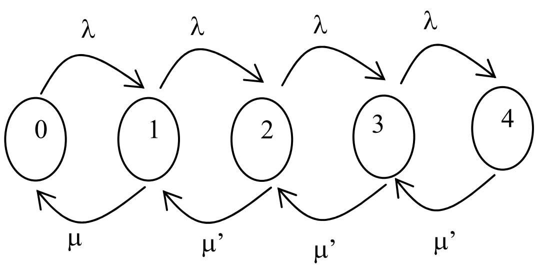
$$\sum_{i=1}^{n-1} P_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

15 minuts = 0.25 hores $\Rightarrow$ $\lambda t$ =30 (0.25) = 7.5 vehicles cada 15 minuts

P(n<5)=P(n=0)+P(n=1)+P(n=2)+P(n=3)+P(n=4)=

0,000553+0,004148+0.015555+0.038888+0,072916 = 0.13206

2. Variació del model de cua finita en la que la taxa de servei depen de l'estat.




$\lambda$=30 coches/hora
$\mu$= 40 coches/hora
$\mu$'= 60 coches/hora

$C_1 = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ P$_1$=24/77

$C_2 = \frac{30.30}{40.60} = \left(\frac{3}{8}\right) \Rightarrow$ P$_2$=12/77

$C_3 = \frac{30.30.30}{40.60.60} = \left(\frac{3}{16}\right) \Rightarrow$ P$_3$ = 6/77

$C_4 = \frac{30.30.30.30}{40.60.60.60} = \left(\frac{3}{32}\right) \Rightarrow$ P$_4$ = 3/77

$$P_0 = \frac{1}{1+C_1+C_2+C_3+C_4} = \frac{32}{77}$$

2.

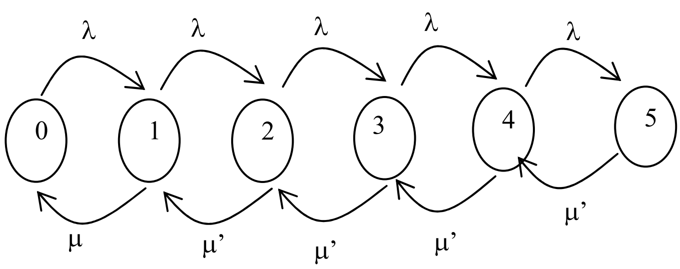
$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

$\bar{\lambda} = \lambda(P_0+P_1+P_2+P_3)=\lambda(1-P_4)= 30(74/77)$

$L= P_1+ 2\ P_2+ 3\ P_3+ 4\ P_4 =24/77+24/77+18/77+12/77=78/77$

4. El benefici diari actual és:
8 hores/día . $\bar{\lambda}$ cotxes/hora . 250 euros/cotxe = 57662,33euros/día

Si s'amplies l'espai en una plaça




λ=30 coches/hora
μ= 40 coches/hora
μ’= 60 coches/hora

Ara cal tornar a estudiar les probabilitats per recalcular la taxa mitjana d'arribada i en funció d'això, estimar el benefici esperat diari. D'aquí obtindrem l'increment del benefici diari que permetrà saber quants han de passar per tenir un augment de benefici de 3000€.

$C_1 = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ P$_1$=48/157

$C_2 = \frac{30.30}{40.60} = \left(\frac{3}{8}\right) \Rightarrow$ P$_2$=24/157

$C_3 = \frac{30.30.30}{40.60.60} = \left(\frac{3}{16}\right) \Rightarrow$ P$_3$ = 12/157

$$C_4 = \frac{30.30.30.30}{40.60.60.60} = \left(\frac{3}{32}\right) \Rightarrow \mathrm{P}_4 = 6/157$$

$$C_5 = \frac{30.30.30.30.30}{40.60.60.60.60} = \left(\frac{3}{64}\right) \Rightarrow \mathrm{P}_5 = 3/157$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5} = \frac{64}{157}$$

$\bar{\lambda} = \lambda(1\text{-}P_5) = 30.(154/157)$

El nou benefici diari és:

8 hores/día . $\bar{\lambda}$ cotxes/hora . 25 €/coche = 58853,50 €/día

Es a dir un increment diari del benefici de 58853,50-57662,33 = 1191,17 €/día

Es tardarien 3000/1191,17 = 2,518 dies en amortitzar la plaça addicional.