Diplomatura d'Estadística. Curs 2000/01. 2^{on} Q.

Investigació Operativa Estocàstica. Examen Parcial.

Un equip de metges en un hospital s'ha especialitzat en un determinat tipus de tractament d'una malaltia. Es disposa només de tres llits on els pacients que ingressen poden allotjar-se i l'equip de metges només pot fer-se'n càrrec d'un pacient a la vegada, és a dir que en ingressar un pacient a l'hospital ha d'esperar fins que pugui ser tractat si és que l'equip de metges està ocupat en el dia d'ingrés o bé comença immediatament el tractament si l'equip de metges està lliure. Se sap que quan un pacient entra en tractament, llavors el número de dies que dura aquest és una variable aleatòria que segueix la llei geomètrica de probabilitat 0'5. El número de pacients D_k que demanen ingressar a l'hospital en un dia k és aleatori, i mai excedeix de quatre. A més a més:

$$P(D_k = i) = 1/5, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

En cas de que en un dia hi hagin més peticions que vacants a l'hospital llavors les peticions que no puguin ser ateses són desestimades. La quantitat que paga cada malalt a l'hospital pel tractament és de 500 ECU's independentment del número de dies de permanència. Per qüestions sanitàries es vol que l'ocupació de l'hospital no sigui massa alta i es manté la política de tancar les admissions el dia $k+1$ si al final del dia k hi ha dos o més de dos pacients ingressats.

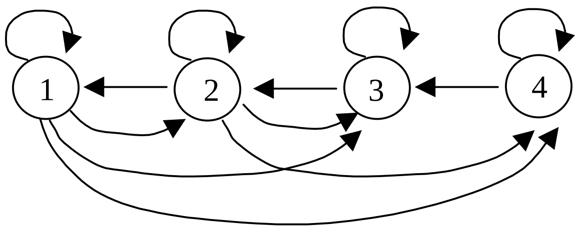
Es demana:

1) Considereu la col.lecció de variables aleatòries $\{X_k\}$ on X_k és el número de pacients que hi ha a l'hospital el dia k-èssim. Justifiqueu breument que és una cadena de Markov i calculeu la matriu de probabilitats de transició. Representeu el diagrama de la cadena, determineu les seves classes i la seva periodicitat.

   Resposta:

	X_k *- Estats, M=4*	Y_k
O ingressats	*1*	*0*
1 ingressat	*2*	*1*
2 ingressats	*3*	*2*
3 ingressats	*4*	*3*

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



És una cadena amb una única classe aperiòdica

2) Comptant des d'un dia en que l'hospital te dos pacients, quin número mig de dies es tarda en arribar a un dia en que l'hospital és ple ?

Resposta:

El sistema d'equacions 3x3 per $\underline{m}_4$ facilita com a tercera component el valor desitjat m_{34}

$$\underline{m}_4 = \mathbf{1} + \mathbf{P}_4 \cdot \underline{m}_4 \quad \text{o bé} \quad \boxed{\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_4\right) \cdot \underline{m}_4 = \mathbf{1}}$$

On $\mathbf{P}_4$ és la matriu de dimensió *3x3* que conté les components de la matriu de probabilitats condicionals de transició en un pas **P** ***menys la fila i la columna quarta***:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{m}_4 = \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_4\right)^{-1} \mathbf{1} = \begin{bmatrix} m_{14} \\ m_{24} \\ m_{341} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \frac{107}{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 4.86 \end{bmatrix} \text{ dies}$$

3) Quin número mig de malalts entrarà al any? Quins seran els ingressos durant un any en mitjana ? Quin és el número mig de pacients que hi ha a l'hospital ?.

Resposta:

Cal calcular les probabilitats d'estat estacionari primer de res.

$$\begin{matrix} \mathbf{P}^{\mathbf{T}} \cdot \underline{p} = \underline{p} \\ \underline{p}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{1} = 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{\mathbf{T}}) \cdot \underline{p} = \mathbf{0} \\ \underline{p}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{1} = 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1-\frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & 0 & 1-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}03311 \\ 0{,}26490 \\ 0{,}41060 \\ 0{,}29139 \end{bmatrix}$$

Sigui Z: v.a. número d'ingressats diaris, aleshores el nombre mig d'ingressats diaris serà la seva esperança matemàtica, que multiplicada per 365 dies/any facilitarà la xifra d'ingressats anual en promig sol.licitada a l'enunciat.

Z	*0*	*1*	*2*	*3*
p_Z	x	$p_0 P(D_k = 1) + p_1 P(D_k = 1) =$ $0.0331 \cdot 0.2 + 0{,}2649 \cdot 0.2 = 0.0596$	$p_0 P(D_k = 2) + p_1 P(D_k \geq 2) =$ $0.0331 \cdot 0.2 + 0{,}2649 \cdot 0.6 = 0.16556$	$p_0 P(D_k \geq 2) =$ $0.0331 \cdot 0.6 = 0.01986$

$$\mathrm{E}[Z] = 1 p_Z(1) + 2 p_Z(2) + 3 p_Z(3) = 0.4503 \rightarrow \; 365 x 0.4503 = 164.36 \approx 164$$

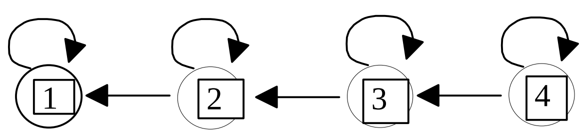
ingressats/any en promig

Cada ingressat aporta una ingrés fix de 500 Euros, per tant els ingressos anuals en promig són de 164.36 ingressats/any x 500 Euros /ingressat = 82180 Euros /any.

Sigui W: v.a.d número de pacients hospitalitzats en un dia, es demana
$\mathrm{E}[W] = 0 \cdot p_1 + 1 p_2 + 2 p_3 + 3 p_4 = 1{,}96$ hospitalitzats/dia

4) Per qüestions de reestructuració interna es decideix tancar les admissions de pacients a l'hospital el 1 de gener del 2002. En aquest dia el número de pacients ingressats resulta ser de tres, per la qual cosa la reestructuració no podrà començar fins que tots els pacients ingressats hagin abandonat l'hospital quedant sans. Quin és el número mig de dies, comptats des d'el 1 de gener, que es tardarà en començar la reestructuració?

Resposta: Nova cadena:



Hi ha una classe absorbent constituï da només per l'estat 1, que és absorbent. La qüestió demana el temps mig de primer pas des de l'estat 4 a l'estat 1 (l'absorbent): m_{41}.

La matriu de probabilitats condicionals de transició en un pas ha canviat i ara respon a :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Sigui $\mathbf{P_1}$ una matriu de dimensió *M-1=3* que conté les components de la matriu **P** ***menys la fila i la columna primera***:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{m}_1 = \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\right)^{-1}\mathbf{1} = \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ dies}$$