Trabajo final

Teoria de Cues i Simulació

Sofía Touceda Suárez
Laura Julià Melis
19.06.2018

Resolución con la aproximación de Allen Cuneen.

Planteamiento del problema

- Parametrización:

i: paquetes (i=1,2,3,4)
j: clientes (j=1,2,…,p_i)
x_i^j: tiempo de servicio del cliente j del paquete i.
x_i: tiempo de servicio del paquete i.
μ: tasa de salida del S.E del paquete i.
t_i: tiempo de llegada del paquete i.
λ: tasa de llegadas (o tiempo entre llegadas)

Cálculos para los paquetes

Sabemos que el tiempo de servicio de cada cliente sigue una distribución Uniforme [38,98] y el tiempo de llegadas de cada paquete, una 4-Erlang. Por lo que:

$$x_i^j \sim Uniforme[38{,}98]$$
$$t_i \sim 4 - Erlang$$

Además, la distribución del número de clientes p_i para cada paquete i es:

j	Prob$(p_i = j)$
1	0,125
2	0,275
3	0,350
4	0,250

- **Factor de carga:**

$$E[x_i] = E[j] \cdot E[x_i^j] = \left(\sum_{j=1}^{p_i} j \cdot (p_i = j)\right) \cdot \left(\frac{38+98}{2}\right) = \left[(1 \cdot 0.125) + (2 \cdot 0.275) + (3 \cdot 0.350) + (4 \cdot 0.250)\right] \cdot 68 = 185.3$$

$$E[t_i] = k * E[etapa] = 4 * 173.91 = 695.64$$

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{\frac{1}{695.64}}{1 * \frac{1}{185.3}} = 0.266 \text{ , donde } \lambda = \frac{1}{E[t_i]} \text{ y } \mu = \frac{1}{E[x_i]}.$$

- **Aproximación de Allen Cuneen:**

- Buscamos la varianza de x_i:

$$\sigma_x^2 = E[x_i^2] - E[\,x_i]^2 = 38726 - (185.3)^2 = 4389.91$$

donde $E[x_i^2] = E[j^2] \cdot E[(x_i^j)^2] = \left(\sum_{j=1}^{p_i} j^2 \cdot (p_i = j)\right) \cdot 68^2 =$

$$= \left[(1^2 \cdot 0.125) + (2^2 \cdot 0.275) + (3^2 \cdot 0.350) + (4^2 \cdot 0.250)\right] \cdot 68^2 = 185.3$$

- Buscamos la varianza de t_i:

Como la tasa de llegadas sigue una k-Erlang calculamos su varianza con la siguiente expresión:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{k * \lambda^2} = \frac{1}{4 * (\frac{1}{695.64})^2} = 120978.7524$$

- <u>Aproximación:</u>

$$E\left[W_q\right] = W_q \approx \frac{C(s,\theta)\left(\lambda^2\sigma_t^2 + \mu^2\sigma_x^2\right)}{2s\mu\left(1-\rho\right)} = 12.6863 \approx 12.7$$

$$C(s,\theta) = \frac{\frac{\theta^s}{s!(1-\rho)}}{\sum \frac{\theta^\ell}{\ell!} + \frac{\theta^s}{s!(1-\rho)}} = \frac{\frac{0.266^1}{1!(1-0.266)}}{1 + \frac{0.266}{1!(1-0.266)}} = \frac{0.3623978}{1.3623978} = 0.26599$$

- **Fórmulas de Little:**

Ya podemos calcular L_q, L y W:

$$W = W_q + W_s = 12.7 * \frac{1}{\mu} = 12.7 + \frac{1}{\frac{1}{185.3}} = 2353.31$$

$$L = \lambda * W = \frac{1}{695.64} * 2353.31 = 3.383$$

$$L_q = \lambda * W_q = \frac{1}{695.64} * 12.7 = 0.018$$

Cálculos para los clientes

- **Factor de carga:**

La esperanza del tiempo de servicio de cada cliente ya sabemos que es 68. Pero en cuanto al tiempo de llegadas de cada cliente (t_i^j), como k=4, por el teorema central del limite sabemos que esta variable será más cercana a una v.a de distribución normal T de esperanza $\mu = 1$.

Al aproximar t_i^j a una normal y, sabiendo que su esperanza es $E(t_i^j) = \mu = 1$, observamos que:

$$\lambda = \frac{1}{E[t_i^j]} = 1$$

y por lo tanto el factor de carga es mayor que uno, o sea que no se alcanza estado estacionario:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{68}} > 1$$

• **Aproximación de Allen Cuneen:**

- Buscamos la varianza de x_i^j

Como el tiempo de servicio de cada cliente sigue una distribución uniforme de parámetros 38 y 98 usamos la fórmula de la varianza de esta distribución:

$$\sigma^2_{x_i^j} = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(98-38)^2}{12} = 300$$

- Buscamos la varianza de t_i^j

Como hemos visto anteriormente el tiempo de llegada del cliente j del paquete i sigue una normal por lo que:

$\sigma = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2}$ y por lo tanto tenemos que la varianza es $\sigma^2_{t_i^j} = \frac{1}{4}$

No podremos hacer más cálculos ni usar las formulas de Little ya que el factor de carga nos da mayor que 1.

Resolución del problema con el programa.

Código

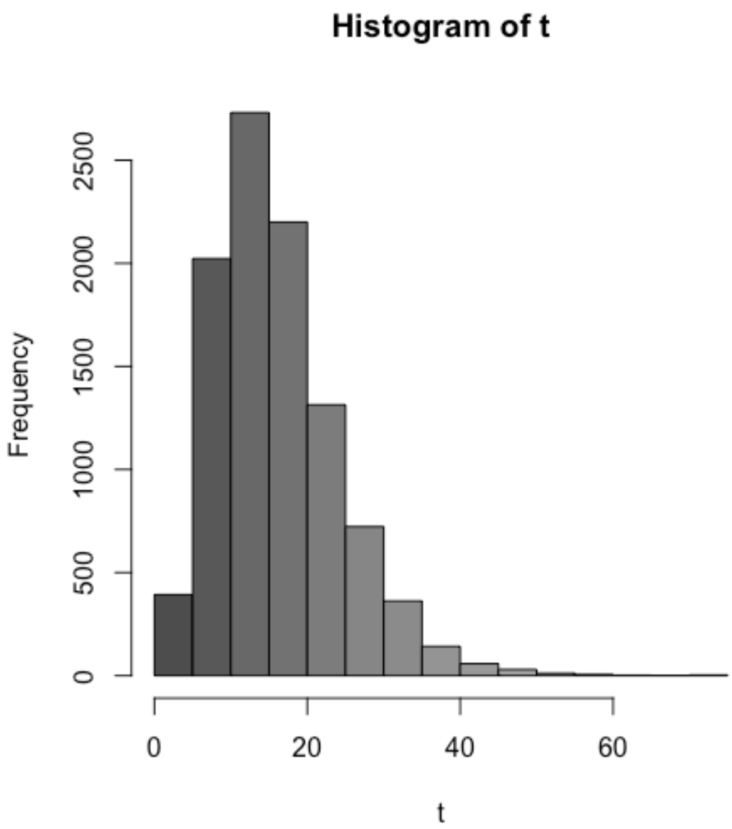
* Las variables con una p como subíndice hacen referencia a las magnitudes para los paquetes. Aquellas que no la tienen se refieren a los clientes.

```
set.seed(1906)
# Creación de las muestras a partir de núúmeros pseudoaleatorios
# Uniforme: a+(b-a)*ui
ui<-runif(10000,0,1)
naleatoriosunif <- function (a,b,ui){
  xij<-a+(b-a)*(ui)
return(xij)
}

a<-38; b<-98
u<-naleatoriosunif(a,b,ui)
hist(u, col=grey.colors(22)) #Histograma tiempo de servicio de los clientes

a2<-155.3; b2<-215.3
u2<-naleatoriosunif(a2,b2,ui)
hist(u2, col=grey.colors(22)) #Histograma tiempo de servicio de los paquetes

# 4-Erlang:
naleatoriosearl <- function(e,n){
   t<-c()
  for(i in 1:n){
    tau<- (-e*sum(log(runif(e,0,1))))
    t<-c(t,tau)
  }
  return(t)
}

e<-4; t<-naleatoriosearl(e,n)
hist(t, col=grey.colors(22)) # Histograma tiempo de llegadas

# Obtención de los resultados
Lp=0; W=0; Lpq=0; Wq=0; thetai=0; ti=0;
N=0 ; pi=0; thetaij=0; L=0; Lq=0; Wp=0; Wpq=0; n<-10000

for (i in 1:n){
  pi <- sample(c(1,2,3,4), size = 1, prob = c(0.125, 0.275, 0.350, 0.250))
  tS_ij <- max(thetaij, ti)
  xij <- u[i]
  xi <- xij
  thetaij <- tS_ij + xij

  L_ij <- thetaij - ti
  L <- L + L_ij
  W <- W + L_ij
  Lq_ij <- tS_ij - ti
  Lq <- Lq + Lq_ij
  Wq <- Wq + Lq_ij

  for (j in 2:pi){
    tS_ij <- max(thetaij, ti)
    xij <-u[j]
    thetaij <- tS_ij + xij
    xi <- xi + xij

    L_ij <- thetaij - ti
    L <- L + L_ij
    W <- W + L_ij
    Lq_ij <- tS_ij - ti
    Lq <- Lq + Lq_ij
    Wq <- Wq + Lq_ij
  }
```

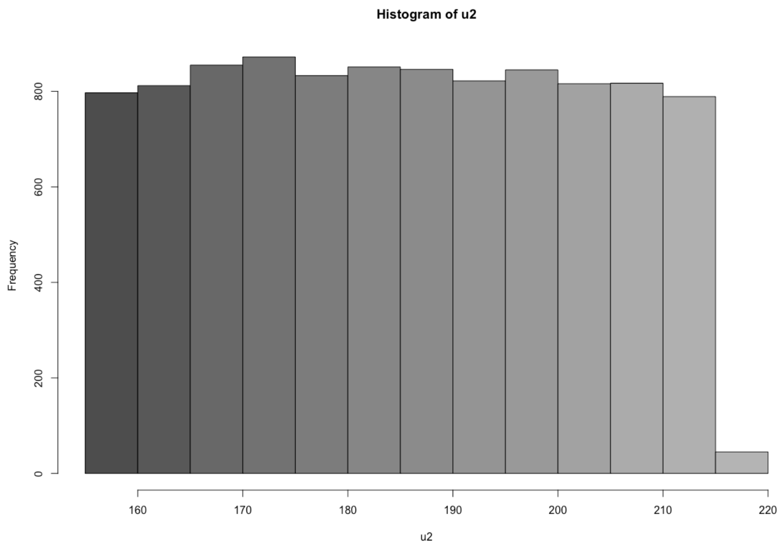
```
tS_i <- max(thetai, ti)
  thetai <- tS_i + xi
  N = N + pi

  if( i < n){
    tau_i <- t[i]
    ti <- ti + tau_i
}

  Lp_i <- thetai - ti
  Lp <- Lp + Lp_i
  Lp_T <- Lp/ti
  Wp <- Wp + Lp_i
  Lpq_i <- tS_i - ti
  Lpq <- Lpq + Lpq_i
  Wpq <- Wpq + Lpq_i
}

Wp <- Wp/n
Wpq <- Wpq/n
Lp <- Lp/ti
Lpq <- Lpq/ti
W <- W/N
Wq <- Wq/N
L <- L/ti
Lq <- Lq/ti
```

Gráficos de las muestras

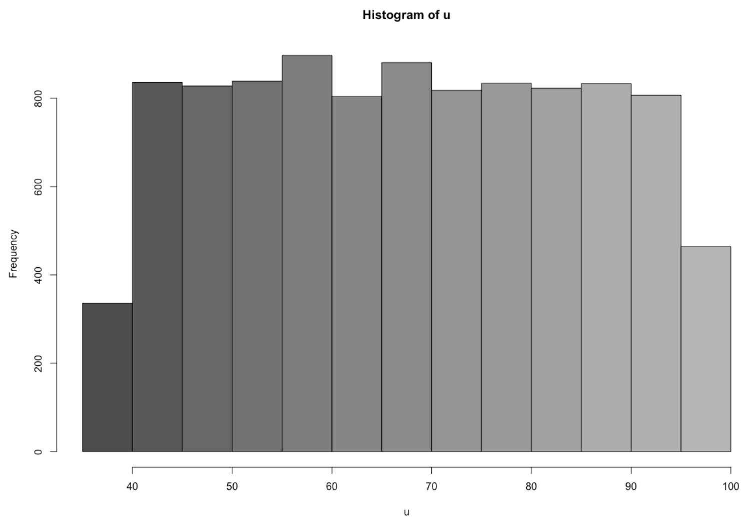
Histograma del tiempo entre llegadas:



Histograma del tiempo de servicio de los paquetes:



Histograma del tiempo de servicio de los clientes:



- Comparación de resultados:

	Manualmente	Simulando
ρ	0,266	—
L (paquetes)	3,383	56112.24
L_q (paquetes)	0,018	56100.05
W (paquetes)	2353,31	894533.4
W_q (paquetes)	12,7	894339.1
L (clientes)	—	166673
L_q (clientes)	—	166660.8
W (clientes)	—	973966.1
W_q (clientes)	—	973894.9