1 Per a calcular el punt mig de dos punts a i b a la recta real, podem utilitzar les dues expressions següents:

$$0.5(a+b) \quad \text{i} \quad a+0.5(b-a)$$

Calculeu les dues quan $a = 0.982$ i $b = 0.987$, amb una aritmètica de tres xifres bo i truncant. Repetiu els càlculs ara arrodonint. Comenteu els resultats obtinguts. *(5punts)*

Resposta

Truncant $a+b = 1.969$ *a tres xifres s'obté* 1.96 *que multiplicant per* 0.5 *dóna* 0.98*, valor que no es troba entremig de a i de b. En canvi, els càlculs amb la segona fórmula són* $b-a = 0.005$ *que multiplicat per* 0.5 *dóna* 0.0025 *que sumat amb a, dóna el valor aproximat* 0.9845*, que és valor exacte, que truncat a tres xifres és* 0.984 *valor aproximat amb tres xifres exactes. Arrodonint, la expressió* $0.5(a+b)$ *a tres xifres s'obté* 0.985*, valor aproximat, amb dues xifres exactes, que si es troba entremig de* a *i de* b*. Per la segona expressió,* $0.5(b-a) = 0.0025$ *que sumat a* a *dóna* 0.9845*, valor exacte que arrodonit a res xifres éss* 0.984 *valor aproximat amb tres xifres exactes.*

2 Considereu el mètode iteratiu següent:

$$x^{n+1} = x^n - \lambda((x^n)^3 + x^n - 9)\,.$$

(a) Per a $1.5 \leq x_0 \leq 2$, estudieu la convergència del mètode a l'arrel real de $x^3 + x - 9 = 0$ sense calcular les iteracions en `Matlab` a partir del teorema de convergència. *(4punts)*

`Resposta`

`El mètode iteratiu` $x^{n+1} = g(x^n)$ `és convergent si` $|g'(\alpha)| < 1$ `per a qualsevol` x^0 `de l'entorn de l'arrel` α `tal que` $|g'(x^0)| < 1$.

`En el nostre cas,` $g(x)$ `es correspon a` $g(x) = x - \lambda(x^3 + x - 9)$. `L'expressió simplificada de la funció derivada és`

$$g'(x) = 1 - \lambda(3x^2 + 1)\,.$$

`La condició` $|g'(x^0)| < 1$ `resulta que`

$$|1 - \lambda(3(x^0)^2 + 1)| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \lambda(3(x^0)^2 + 1) < 1 \Leftrightarrow 0 < \lambda(3(x^0)^2 + 1) < 2\,.$$

(b) Per a $1.5 \leq x_0 \leq 2$ donat, doneu un l'interval per a λ que asseguri la convergència del mètode. *(2punts)*

`Resposta`

`Del fet que` $3x^2+1$ `és una funció positiva i creixent per a` $1.5 \leq x_0 \leq 2$`, resulta que`

$$0 < \lambda(3(x^0)^2 + 1) < 2 \Leftrightarrow \lambda \in \left(0, \frac{2}{3(x^0)^2 + 1}\right) .$$

(c) Preneu $\lambda = 1/13$. Obteniu el punt fix amb un mínim de 8 decimals correctes. Doneu el punt inicial i els criteris d'aturada. Presenteu els resultats en una taula. *(4punts)*

```
Resposta
lambda = 1/13, resulta |x|<2.887
alpha =    1.92017512134718
taula =      x^n            |x^n-x^(n-1)|         |f(x^n)|
   1.905230769230769   0.105230769230769   0.178963899484751
   1.918997223037289   0.013766453806519   0.014198896922053
   1.920089445877447   0.001092222840158   0.001033308190726
   1.920168931122887   0.000079485245440   0.000074661420767
   1.920174674309100   0.000005743186213   0.000005391822354
   1.920175089064666   0.000000414755566   0.000000389366416
   1.920175119015928   0.000000029951263   0.000000028117729
   1.920175121178831   0.000000002162902   0.000000002030493
```

`Prenent` $x^0 = 1.8$`, la successió` $|f(x^n)|$ `és convergent a` 0`, i la successió` x^n `convergeix a un valor fix. Els criteris d'aturada són` $tolx = tolf < 0.00000001$.

3 Per a les dades següents:

X	1.0	1.125	1.250	1.375	1.500	1.625	1.750	1.875	2.0
Y	0	0.169925	0.321928	0.459432	0.584962	0.700440	0.807355	0.906891	1.0

(a) Calculeu la paràbola que millor ajusta per mínims quadrats. Dóna l'error quadràtic mínim.
Cal explicar el mètode que escolliu, les matrius usades i tots els càlculs que es fan. *(5punts)*

Resposta

Notem l'equació de la paràbola per $y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$, llavors la matriu del sistema A, és

A =

1	1	1
1.2656	1.125	1
1.5625	1.25	1
1.8906	1.375	1
2.25	1.5	1
2.6406	1.625	1
3.0625	1.75	1
3.5156	1.875	1
4	2	1

És un sistema sobredeterminat, incompatible i el rang de la matriu A és 3, podem trobar una solució per mínims quadrats, les equacions normals són $A'Ax = A'b$, on $b = Y$, $B = A'A$ i $c = A'b$. Aquestes matrius són

A'A =

58.392	34.594	21.188
34.594	21.188	13.5
21.188	13.5	9

A'b = [14.413 8.3542 4.9509]'

La solució del mètode és $y = -0.34034x^2 - 2.0107x + -1.6648$ i l'error quadràtic és $E_2 = 0.011592$

b) Calculeu el polinomi interpolador dels valors de la taula. *(5punts)*

Cal detallar la taula de diferències dividides i tots els càlculs que es fan. Resposta

La taula de diferències dividides és

Columns 1 through 8

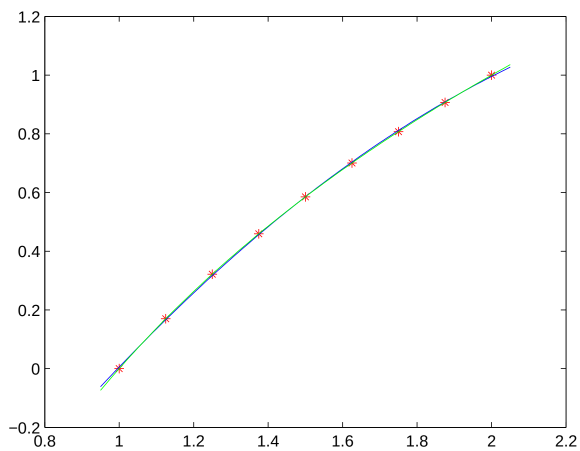
1.0000	0	1.3594	-0.5735	0.2921	-0.1533	0.0806	-0.0455
1.1250	0.1699	1.2160	-0.4640	0.2155	-0.1029	0.0464	-0.0153
1.2500	0.3219	1.1000	-0.3832	0.1640	-0.0739	0.0350	-0.0200
1.3750	0.4594	1.0042	-0.3217	0.1271	-0.0521	0.0199	0
1.5000	0.5850	0.9238	-0.2740	0.1010	-0.0396	0	0
1.6250	0.7004	0.8553	-0.2361	0.0812	0	0	0
1.7500	0.8074	0.7963	-0.2057	0	0	0	0
1.8750	0.9069	0.7449	0	0	0	0	0
2.0000	1.0000	0	0	0	0	0	0

```
Columns 9 through 10
0.0345   -0.0399
-0.0054         0
0         0
0         0
0         0
0         0
0         0
0         0
0         0
```

`i el polinomi és` $p(x) = -0.0399x^8 + 0.4939x^7 - 2.6761x^6 + 8.3344x^5 - 16.4517x^4 + 21.4352x^3 - 18.7758x^2 + 11.7425x - 4.0624$

c) Representa gràficament les dades (punts), la paràbola (blau) i el polinomi (verd) en un mateix gràfic. *(5punts)*

Cal escriure el codi i mostrar el gràfic al professor vigilant.



Exercici 3c Punts, paràbola i polinomi de grau 5

d) Calculeu $\int_1^2 f(x)\,dx$ fent ús de tots els punts. *(5punts)*

Cal explicar el mètode que escolliu i tots els càlculs que es fan. `Resposta`

`Per les dades que es tenen podem fer ús d'una fórmula composta: de rectangles, de trapezis o de Simpson. Per trapezis seria`

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left(\int_1^{1.125} + \int_{1.125}^{1.250} + \ldots \int_{1.875}^{2}\right) f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{8}(x_{i+1} - x_i)\left(\frac{y_{i+1} + y_i}{2}\right) = 0.5564$$