Variància de l'error de predicció per construir la predicció per interval

Si Y_{N+H} és el vector dels valors futurs o extra-mostrals dels quals volem obtenir les prediccions, $Y_{N+H} = (y_{N+1}, y_{N+2,\dots,} y_{N+H})$. D'acord amb el model economètric tenim que:

$$Y_{N+H} = X_{N+H}\beta_{N+H} + U_{N+H}$$

L'error de predicció es defineix per:

$$\begin{aligned} e_N(H) = Y_{N+H} - \hat{Y}_{N+H} = X_{N+H}\beta_{N+H} + U_{N+H} - \hat{Y}_{N+H} = X_{N+H}\beta_{N+H} + U_{N+H} - X_{N+H}(X'X)^{-1}X'Y \\ = X_{N+H}\beta_{N+H} + U_{N+H} - X_{N+H}(X'X)^{-1}X'(X\beta + U) \\ = X_{N+H}\beta_{N+H} + U_{N+H} - X_{N+H}\beta - X_{N+H}(X'X)^{-1}X'U \\ = X_{N+H}(\beta_{N+H} - \beta) - X_{N+H}(X'X)^{-1}X'U + U_{N+H} \end{aligned}$$

Si es manté la hipòtesi de permanència estructural, aleshores $\beta = \beta_{N+H}$ i per tant:

$$e_N(H) = U_{N+H} - X_{N+H}(X'X)^{-1}X'U$$

L'esperança de l'error de predicció serà:

$$E(e_N(H)) = 0$$

i la variància de l'error de predicció serà:

$$Var\big(e_N(H)\big) = Var(U_{N+H}) + X_{N+H}(X'X)^{-1}X'Var(U)X(X'X)^{-1}X'_{N+H} - 2Cov(X_{N+H}(X'X)^{-1}X'U, U_{N+H})$$

Si mantenim les hipòtesis d'homoscedasticitat i de no autocorrelació del terme de pertorbació, aleshores

$$Var(U) = Var(U_{N+H}) = \sigma_u^2$$

$$Cov(U, U_{N+H}) = 0$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} Var\big(e_N(H)\big) = Var(U_{N+H}) + X_{N+H}(X'X)^{-1}X'Var(U)X(X'X)^{-1}X'_{N+H} = \sigma_u^2 I_N + \sigma_u^2 X_{N+H}(X'X)^{-1}X'_{N+H} \\ = \sigma_u^2[I_N + X_{N+H}(X'X)^{-1}X'_{N+H}] \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{Var\big(e_N(H)\big) = \sigma_u^2[I_N + X_{N+H}(X'X)^{-1}X'_{N+H}]}$$