Algunos Ejercicios

Ejercicio 1

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias a valores reales independientes e idénticamente distribuidas como X. Sea F la función de distribución de X. Hallar la función de distribución conjunta de la variable aleatoria bidimensional $(X_{(1)}, X_{(n)})$, donde $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ y $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ (Suponer $n \geq 2$)

Sea G la función de distribución de $(X_{(1)}, X_{(2)})$.

Entonces:

$$G(s,t) = P(X_{(1)} \leq s,\ X_{(n)} \leq t)$$

Observemos que el suceso

$$[X_{(n)} \leq t] = [X_{(n)} \leq t] \cap [X_{(1)} \leq s] \cup [X_{(n)} \leq t] \cap [X_{(1)} > s]$$

sucesos disjuntos

por tanto:

$$P(X_{(n)} \leq t) = P(X_{(1)} \leq s,\ X_n \leq t) + P(X_{(1)} > s,\ X_{(n)} \leq t)$$

pero:

$$P(X_{(n)} \leq t) = P([X_1 \leq t] \cap \ldots \cap [X_n \leq t]) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq t) = F(t)^n$$

al ser X_i independientes $[X_1 \leq t], \ldots, [X_n \leq t]$ son sucesos independientes

y, si $s \leq t$,

$$P(X_{(1)} > s,\ X_{(n)} \leq t) = P([s < X_1 \leq t] \cap [s < X_2 \leq t] \cap \ldots \cap [s < X_n \leq t])$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(s < X_i \leq t) = (F(t) - F(s))^n$$

por la independencia de $X_1 \ldots X_n$.

Por tanto, si $s \leq t$,

$$G(s,t) = F(t)^n - (F(t) - F(s))^n$$

si $s > t$ $\quad [s < X_i \leq t] = \emptyset$ y entonces

$$P(X_{(1)} > s,\ X_{(n)} \leq t) = 0$$

resultando finalmente para $s>t$

$$G(s,t) = F(t)^n$$

En resumen:

$$\boxed{G(s,t) = \begin{cases} F(t)^n - (F(t)-F(s))^n & s \leq t \\ F(t)^n & s > t \end{cases}}$$

Ejercicio 2

Supongamos que X es una variable aleatoria a valores reales absolutamente continua, con función de densidad $f(x)$.
Hallar una expresión para la función de densidad conjunta de $(X_{(1)}, X_{(n)})$. (Suponer $n \geq 2$).

Obtendremos la función de densidad conjunta de $(X_{(1)}, X_{(n)})$, derivando la función de distribución G respecto sus variables.
Si dicha función de densidad la llamamos g, resultará:

$$g(s,t) = \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial t}$$

para $s<t$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s \partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left\{ n F^{n-1}(t)\, F'(t) - n\,(F(t)-F(s))^{n-1} F'(t) \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left\{ n F^{n-1}(t)\, f(t) - n\,(F(t)-F(s))^{n-1} f(t) \right\}$$

$$= -n(n-1)\,(F(t)-F(s))^{n-2}\,(-F'(s))\, f(t) =$$

$$= n(n-1)\,(F(t)-F(s))^{n-2} f(s) f(t)$$

para $s>t$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s \partial t} = 0$$

NOTA: el valor de G en $s=t$ podemos definirlo también igual a cero, puesto que se trata de un conjunto de "área" cero.

Por tanto:

$$g(s,t) = n(n-1)\,(F(t)-F(s))^{n-2} f(s) f(t)\, \mathbb{1}_A(s,t)$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x < y\} \quad \text{y} \quad \mathbb{1}_A(s,t) = \begin{cases} 1 & \Longleftrightarrow (s,t) \in A \\ 0 & \Longleftrightarrow (s,t) \notin A \end{cases}$$

equivalentemente:

$$\boxed{\begin{aligned} g(s,t) &= n(n-1)\,(F(t)-F(s))^{n-2} f(s) f(t) & s < t \\ &= 0 & s \geq t \end{aligned}}$$

Ejercicio 3

Hallemos a continuación, a partir del ejercicio 2, una expresión para la función de densidad del recorrido, $R = X_{(n)} - X_{(1}$ (continuamos suponiendo $n \geq 2$ y X absolutamente continua).

Un camino sería introducir un cambio bivariante adecuado, usar la fórmula del cambio de variable para densidades, y finalmente hallar la distribución de R. Concretamente:

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}$$
$$U = X_{(n)} + X_{(1)}$$

Se trata de un cambio lineal biyectivo, de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.
La función de densidad de (R,U) en términos de $g(s,t)$, será:

$$f_{(R,U)}(r,u) = g\big(s(r,u), t(r,u)\big) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial r} & \frac{\partial s}{\partial u} \\ \frac{\partial t}{\partial r} & \frac{\partial t}{\partial u} \end{pmatrix} \right|$$

Como
$$r = t - s$$
$$u = t + s$$
resulta $\begin{pmatrix} r \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$s = \tfrac{1}{2}(u - r)$$
$$t = \tfrac{1}{2}(u + r)$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial r} & \frac{\partial s}{\partial u} \\ \frac{\partial t}{\partial r} & \frac{\partial t}{\partial u} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$f_{(R,U)}(r,u) = g\left(\tfrac{1}{2}(u-r), \tfrac{1}{2}(u+r)\right) \cdot \tfrac{1}{2}$$

cuando $\frac{1}{2}(u-r) < \frac{1}{2}(u+r)$, es decir cuando $r > 0$ resultará:

$$f_{(R,U)}(r,u) = \frac{1}{2} n(n-1) \left\{ F\left(\tfrac{1}{2}(u+r)\right) - F\left(\tfrac{1}{2}(u-r)\right)\right\}^{n-2} f\left(\tfrac{1}{2}(u-r)\right) f\left(\tfrac{1}{2}(u+r)\right)$$

$$f_R(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(R,U)}(r,u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} n(n-1) \left\{ F\left(\tfrac{1}{2}(u+r)\right) - F\left(\tfrac{1}{2}(u-r)\right)\right\}^{n-2} f\left(\tfrac{1}{2}(u-r)\right) \cdot f\left(\tfrac{1}{2}(u+r)\right) du$$

si introducimos el cambio:

$$x = \tfrac{1}{2}(u-r) \qquad dx = \tfrac{1}{2} du \qquad u = 2x+r$$
$$u+r = 2x+2r = 2(x+r)$$

por tanto:

$$\boxed{f_R(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(n-1)\left\{F(x+r) - F(x)\right\}^{n-2} f(x) f(x+r)\, dx \qquad r>0}$$

y $f_R(r) = 0$ en caso contrario.

Ejercicio 4

Sea $X \sim$ Uniforme (α, β) ; $\alpha < \beta$; Hallar la función de densidad del recorrido $R = X_{(n)} - X_{(1)}$, basado en una muestra de tamaño n.

La función de densidad de X podemos tomarla como:

$$f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha} \qquad \alpha < x < \beta$$

R con probabilidad 1 estará entre 0 y $\beta-\alpha$, por tanto $f_R(r) = 0$ para $r \leq 0$ ó bien $r \geq \beta-\alpha$.

En caso contrario, cuando $0 < r < \beta-\alpha$, tendremos

$$f_R(r) = n(n-1) \int_{\alpha}^{\beta-r} \left\{F(x+r) - F(x)\right\}^{n-2} \frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\, dx$$

pero

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & x \in (\alpha, \beta) \\ 1 & x \geq \beta \end{cases}$$

por tanto, para $\alpha < x < x+r < \beta$, resulta:

$$F(x+r) - F(x) = \frac{x+r-\alpha}{\beta-\alpha} - \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{r}{\beta-\alpha}$$

por consiguiente,

$$f_R(r) = n(n-1) \int_{\alpha}^{\beta-r} \left(\frac{r}{\beta-\alpha}\right)^{n-2} \frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\, dx$$

$$= n(n-1)\left(\frac{r}{\beta-\alpha}\right)^{n-2} \frac{1}{(\beta-\alpha)^2} \Big[x\Big]_{\alpha}^{\beta-r} =$$

$$= n(n-1)\left(\frac{r}{\beta-\alpha}\right)^{n-2} \frac{1}{(\beta-\alpha)^2} (\beta-r-\alpha)$$

finalmente:

$$\left[f_R(r) = \frac{n(n-1)}{(\beta-\alpha)^2}\, r^{n-2} (\beta-r-\alpha) \right] \quad (\text{para } 0 < r < \beta-\alpha)$$

$$= 0 \quad \text{en caso contrario}$$