FACULTAT de MATEMÀTIQUES i ESTADÍSTICA.
CURS 2005-2006. 2^{on} QUADRIMESTRE
Examen Parcial de Cadenes de Markov (IOE)
29 de Maig del 2006

Problema 1. (6 punts) Una petrolera rep una subvenció estatal mensual de $1\cdot10^6$ \$, que ingressa en el seu compte bancari a l'inici de mes. De resultes de les seves vendes mensuals pot tenir uns ingressos I_n al llarg del mes n-èssim de 0, 1, 2, 3, o $4\cdot10^6$ \$, estant aquests ingressos distribuïts equiprobablement ($P(I_n = i) = 1/5$, $i = 0,1, \dots , 4$). Per altre banda l'empresa te unes despeses fixes de $1\cdot10^6$ \$ cada mes i unes despeses variables D_n que pot controlar a voluntat durant cada mes. Per qüestions fiscals el compte bancari mai ha d'excedir els $2\cdot10^6$ \$ i ja que es rep una subvenció estatal l'empresa no disposa de crèdit per lo que el compte no pot quedar en números vermells en cap moment. Considereu la col.lecció de v.a. $\{D_n\}$ on D_n és la despesa variable feta durant el mes n-èssim y per altre part la col.lecció de v.a. $\{X_n\}$, essent X_n estat del compte bancari al final del mes n-èssim. La política de despeses de l'empresa, ara per ara, és que les despeses D_n siguin lo és properes possibles a la quantitat $\bar{D}=2\cdot10^6$ \$

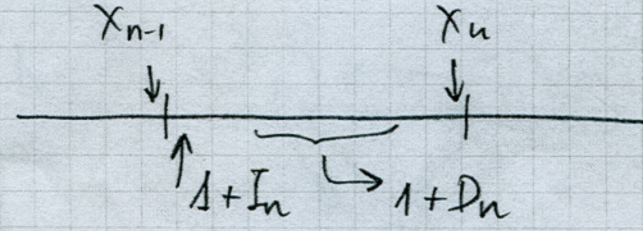
Suposeu que inicialment el compte bancari està buit.

1. Demostreu que en funció de l'estat del compte al final del més anterior X_{n-1} i dels ingressos I_n, les despeses de l'empresa expressades en MM de \$ han de ser:
$$D_n = \begin{cases} X_{n-1} + I_n - 2 & \text{si} \quad X_{n-1} + I_n - 2 > 2 \\ 2 & \text{si} \quad 0 \le X_{n-1} + I_n - 2 \le 2 \\ X_{n-1} + I_n & \text{si} \quad X_{n-1} + I_n - 2 < 0 \end{cases}$$
2. Justifiqueu que $\{X_n\}$ és una cadena de Markov i calculeu la matriu de probabilitats de transició. Analitzeu les classes de la cadena i la seva periodicitat.
3. Quina fracció dels mesos es quedarà el compte buit?
4. Quin és el saldo mig del compte a llarg termini?
5. Suposant que ara el compte està buit, quina és la probabilitat de que tardi més de 2 mesos en estar plena ($2\cdot10^6$ \$). ?

Problema 2. (4 punts) El temps de funcionament d'una unitat de potència obeeix a una distribució de probabilitats uniforme de durada màxima 10000 hores. Es demana:

1. Desenvolupeu les expressions de les funcions de: a) fiabilitat, b) taxa de fallides c) temps de vida residual.
2. Quina és la probabilitat de que una unitat que va ser posada en funcionament fa ara 4000 hores continuï funcionant ?
3. Una planta d'energia incorpora 10 d'aquestes unitats i va ser posada en marxa ara fa 20 anys aproximadament. En un instant determinat, un equip de manteniment rep l'ordre de reemplaçar les unitats que portin més de 7000 hores de funcionament? Quin número mig d'unitats reemplaçaran ? Quina és la probabilitat de reemplaçar-ne 5?
4. Se sap que una de les unitats porta funcionant 4000 hores. Quina és la probabilitat de que funcioni encara 2000 hores més ?

SOLUCIO



$\bar{D}=2$

1) & 2) $\quad 0 \leq X_n = X_{n-1}+1+I_n-D_n-1 = X_{n-1}+I_n-D_n \leq 2$

$0 \leq X_{n-1}+I_n-D_n \leq 2$ sempre

$$D_n = \begin{cases} X_{n-1}+I_n-2 & \text{si } X_{n-1}+I_n-2 > 2 \\ 2 & \text{si } 0 \leq X_{n-1}+I_n-2 \leq 2 \\ X_{n-1}+I_n & \text{si } X_{n-1}+I_n-2 < 0 \end{cases}$$

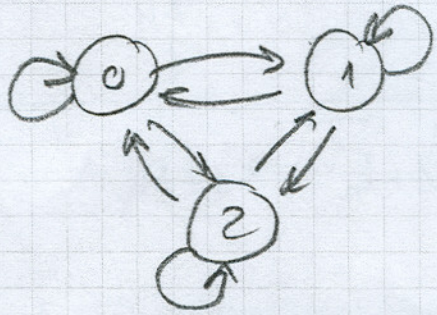
X_{n-1}	I_n	D_n	X_n	P_{ij}
0	0	0	0	3/5
	1	1	0	
	2	2	0	
	3	2	1	1/5
	4	2	2	1/5
1	0	1	0	2/5
	1	2	0	
	2	2	1	1/5
	3	2	2	2/5
	4	3	2	
2	0	2	0	1/5
	1	2	1	1/5
	2	2	2	3/5
	3	3	2	
	4	4	2	

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Es verifica que:

$P(X_n=j \mid X_{n-1}=i, \ldots X_1=a) =$
$= P(X_n=j \mid X_{n-1}=i) = P_{ij} =$
$=$ ctant

Per tant $\{X_n\}$ és una c. de Markov



1 classe irreductible
aperiòdica
presenta per tant,
estat estacionari.

3) La fracció de mesos a llarg termini que $X_n = 0$
ve donada per π_0.

$$\left.\begin{array}{l} P^T \pi = \pi \\ \sum_{i=0}^{2} \pi = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/5 & -4/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/5 & -4/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & -2/5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/5 & -4/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 6/5 & -3/5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 6/5 & -3/5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\pi_1 = 1/5 \; ; \; 6/5\,\pi_1 - 3/5\,\pi_2 = 0 \; ; \; \pi_2 = 2\pi_1 = 2/5$$

$$\boxed{\pi_0 = 2/5 \quad \pi_1 = 1/5 \quad \pi_2 = 2/5}$$

4)

Saldo	X_n
0	0
1	1
2	2

$\rightarrow \dfrac{\text{Saldo mig}}{\text{mes}} = \cancel{0 \cdot \pi_0} + 1 \cdot \pi_1 + 2\pi_2$

$= 1/5 + 4/5 = \boxed{1}$

5) La cadena és ergòdica per tant s'ha de verificar que $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$

Probabilitat de que es visiti l'estat 2 per 1ª vegada partint del 0 més tard de 2 vegades =

$$= \sum_{n=3}^{\infty} f_{02}^{(n)} = 1 - f_{02}^{(1)} - f_{02}^{(2)}$$

$$f_{02}^{(1)} = p_{02} = 1/5$$

$$f_{02}^{(2)} = p_{02}^{(2)} - f_{02}^{(1)} \cdot p_{22}^{(1)} = \frac{8}{25} - 1/5 \cdot 3/5 = \frac{1}{5}$$

$$p_{02}^{(2)} = 2/5 \cdot 1/5 + 1/5 \cdot 2/5 + 1/5 \cdot 3/5 = 8/25$$

$$1 - f_{02}^{(1)} - f_{02}^{(2)} = 1 - 2/5 = \boxed{3/5}$$

Facultat de Matemàtiques i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full .... de ....

QUALIFICACIÓ

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

4) $f_{S|\Theta}(x) = \dfrac{f_Z(x+\Theta)}{R_Z(\Theta)} = \dfrac{1/T}{1-\Theta/T} = \dfrac{1}{T-\Theta}$

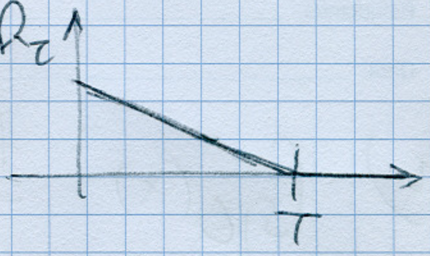
$P(S|\Theta \geq 2000) = 1 - \int_0^{2000} f_{S|\Theta}(x)\,dx =$

$= 1 - \int_0^{2000} \dfrac{dx}{T-\Theta} = 1 - \dfrac{2000}{T-\Theta} = 1 - \dfrac{0'2}{0'6} = \boxed{2/3}$

P2) $\tau \sim unif\,[0, T]$ $\qquad T = 10^4\, h.$

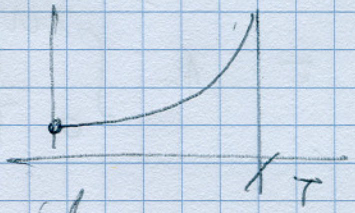
1) - Fiabilitat

$$R_\tau(t) = \begin{cases} 1 - t/T & 0 \le t \le T \\ 0 & t > T \end{cases}$$



- Taxa de fallides

$$h_\tau(t) = \frac{f_\tau(t)}{R_\tau(t)} = \frac{1/T}{1 - t/T} = \frac{1}{T - t} \quad \text{si } t \le T$$



- Dens. de prob. del temps residual de vida

$$f_r(t) = \frac{R_\tau(t)}{E[\tau]} = \frac{1 - t/T}{T/2} = \frac{2(T-t)}{T^2} \qquad 0 \le t \le T$$

2) $R_\tau(4000) = 1 - \frac{4000}{10000} = 0'6$

3) Si r = temps residual de vida

$$P(r \ge 7000) = 1 - \int_0^{0'7T} \frac{2(T-t)}{T^2} = \frac{2}{T^2}\left(T^2 \cdot 0'7 - \frac{(0'7T)^2}{2}\right) =$$
$$= 0'09$$

N° mig $\quad N \cdot p = 10 \cdot 0'09 = 0'9$

Prob de reemplaçar-ne 5 $\quad \binom{10}{5} 0'09^5\, 0'91^5 \simeq$

$$= \frac{10!}{5!\,5!}\, 0'09^5 \cdot 0'91^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 0'09^5 \cdot 0'91^5$$

$$= 9'28 \cdot 10^{-4}$$