Le test de Friedman (1937)

Mise en situation

Dans la comparaison de $s = 2$ traitements,

- la formation de blocs élimine une partie de la variabilité entre les sujets ;
- on utilise le test des rangs signés de Wilcoxon.

Que faire quand on a s traitements ?

Blocs complets équilibrés

Si on a $s \geq 3$ traitements, il est naturel de former des blocs de s individus. Par exemple :

10 polis à ongle	$\longrightarrow$	10 doigts
4 médicaments	$\longrightarrow$	la même personne à 4 moments différents

Il est essentiel de randomiser les traitements au sein de chacun des n blocs.

Assignation des rangs

On classe les observations de 1 à s au sein de chaque bloc. Sous

H_0: absence de différences entre les traitements,

toutes les configurations possibles de rangs sont équiprobables au sein d'une même bloc :

$$\underbrace{\frac{1}{s!} \times \cdots \times \frac{1}{s!}}_{n \text{ fois}} = \left(\frac{1}{s!}\right)^n .$$

Contre-hypothèse

Les tests considérés ici sont de type “omnibus” :

- ils ne fixent pas une contre-hypothèse particulière ;
- ils sont conçus pour détecter une différence dans le niveau de la variable réponse.

On exclut que la différence se manifeste en terme de dispersion, par exemple.

Friedman vs Kruskall-Wallis

Dans le test de Kruskal-Wallis chaque reçoit un sore appartenant à l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$ avec $N = \sum n_i = ns$.

Pour le test de Friedman, l'ensemble des scores possibles est

$$\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \ldots, \underbrace{n, \ldots, n}_{s}\}.$$

Sous H_0, toutes les configurations de scores telles que $\{1, 2, \ldots, n\}$ se retrouvent dans chaque bloc sont équiprobables.

Notation

Soit

$$R_{ij} = \text{ rang du traitement } i \text{ dans le bloc } j$$

et

$$\bar{R}_{i\bullet} = \frac{1}{n}\left(R_{i1} + \cdots + R_{in}\right).$$

Soit aussi

$$\bar{R}_{\bullet\bullet} = \frac{1}{ns}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} R_{ij} = \frac{s+1}{2}.$$

Test de Friedman (1937)

À l'instar du test de Kruskal–Wallis, l'idée est de calculer la dispersion entre les $\bar{R}_{i\bullet}$ autour de $(s+1)/2$:

$$Q = \frac{12n}{s(s+1)} \sum_{i=1}^{s} \left(\bar{R}_{i\bullet} - \frac{s+1}{2} \right)^2 ,$$

où la constante est telle qu'asymptotiquement,

$$Q \approx \chi^2_{(s-1)}.$$

Valeurs critiques

Pour les cas où

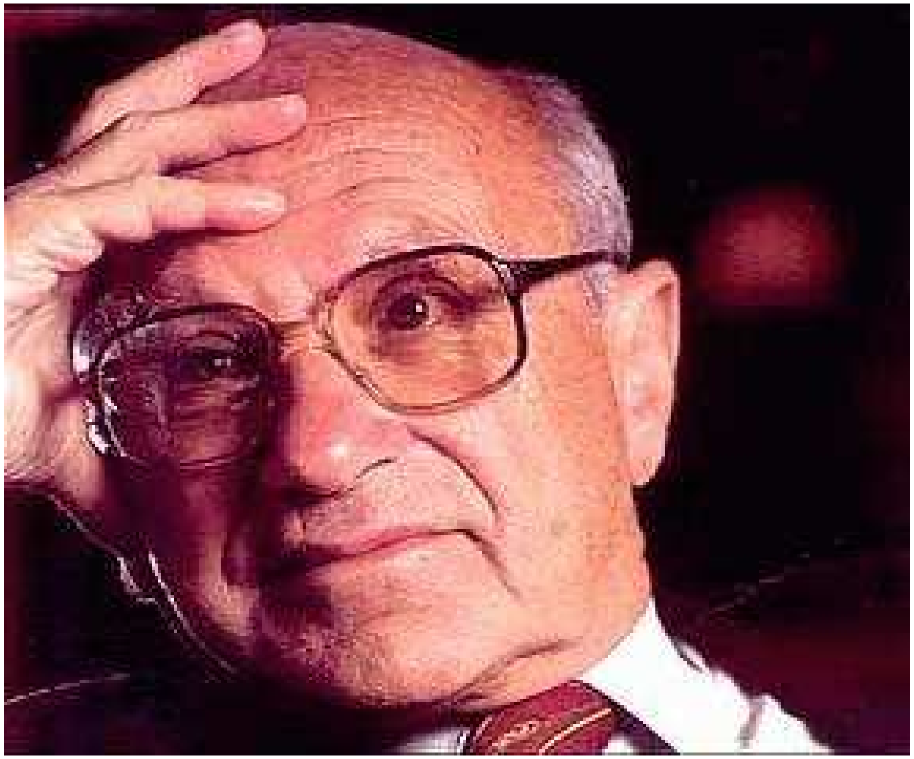
- le nombre n de blocs est petit ;
- le nombre s de traitements aussi.

Formule équivalente

On vérifie sans difficulté que

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{12n}{s(s+1)} \sum_{i=1}^{s} \left(\bar{R}_{i\bullet} - \frac{s+1}{2} \right)^2 \\
&= \frac{12}{ns(s+1)} \sum_{i=1}^{s} R_{i\bullet}^2 - 3n(s+1).
\end{aligned}
$$

Milton Friedman



Milton Friedman (1912–2006)
Surtout connu pour ses politiques monétaristes

Exemple 1

Les effets de $s = 3$ tranquilisants sont mesurés sur $n = 4$ patients :

Traitement	Sujets				Total
A	3	2	3	3	11
B	2	3	1	1	7
C	1	1	2	2	6

Exemple 1 (rangs)

On trouve

$$
\begin{array}{llll}
R_{11} = 3, & R_{12} = 2, & R_{13} = 3, & R_{14} = 3, \\
R_{21} = 2, & R_{22} = 3, & R_{23} = 1, & R_{24} = 1, \\
R_{31} = 1, & R_{32} = 1, & R_{33} = 2, & R_{34} = 2.
\end{array}
$$

et

$$R_{1\bullet} = 11, \quad R_{2\bullet} = 7, \quad R_{3\bullet} = 6.$$

Exemple 1 (calculs)

Dans cet exemple, on a $s = 3$, $n = 4$ et

$$Q = \frac{12}{4 \times 3 \times 4}(121 + 49 + 36) - 3 \times 4 \times 4 = 3.5.$$

La valeur critique au seuil 5% est 6.5. Ce test ne permet pas de rejeter H_0.

Cas $s = 2$

Il y a alors deux rangs par bloc : 1, 2.

Par abus de notation, appelons

$$A = \text{nombre de blocs où le traitement } A \text{ se classe premier.}$$

Dans les $n - A$ autres cas, il finit second.

Sommes de rangs

On a

$$R_{1\bullet} = A \times 1 + (n - A) \times 2 = 2n - A,$$

$$R_{2\bullet} = (n - A) \times 1 + A \times 2 = n + A$$

et bien sûr

$$\frac{s+1}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

“Calcul de Q”

Par suite,

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{12n}{2\times 3}\left\{\left(2-\frac{A}{n}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{A}{n}+1-\frac{3}{2}\right)^2\right\}\\
&= 2n\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{A}{n}\right)^2+\left(\frac{A}{n}-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\\
&= 4n\left(\frac{A}{n}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4}{n}\left(A-\frac{n}{2}\right)^2,
\end{aligned}
$$

une fonction de la statistique des signes !

Rappel

Sous H_0,

$$A \sim \mathcal{BIN}\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

Par suite,

$$\mathrm{E}(A) = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(A) = \frac{N}{4}.$$

Il n'est donc pas étonnant de trouver

$$Q = \left\{\frac{A - \mathrm{E}(A)}{\sqrt{\mathrm{var}(A)}}\right\}^2 \approx \chi^2_{(1)}.$$

Cas $s = 2$

On sait que le test des signes a une faible efficacité relative asymptotique par rapport au test t pairé. De même le test de Friedman est beaucoup moins puissant que le test F du plan complètement randomisé avec blocs lorsque le nombre de traitements s est faible.

Exemple 2

Huit sujets sous hypnose ont été soumis à quatre émotions.

Leur potentiel épidermique a été mesuré (en millivolts) dans chaque cas.

L'ordre des “traitements” a été randomisé.

Exemple 2 (données)

Émotion	1	2	3	4	5	6	7	8
Peur	23.1	57.6	10.5	23.6	11.9	54.6	21.0	20.3
Joie	22.7	53.2	9.7	19.6	13.8	47.1	13.6	23. 6
Tristesse	22.5	53.7	10.8	21.1	13.7	39.2	13.7	16.3
Calme	22.6	53.1	8.3	21.6	13.3	37.0	14.8	14.8
Peur	4	4	3	4	1	4	4	3
Joie	3	2	2	1	4	3	1	4
Tristesse	1	3	4	2	3	2	2	2
Calme	2	1	1	3	2	1	3	1

Exemple 2 (calculs)

Peur	Joie	Tristesse	Calme
$R_{1\bullet} = 27$	$R_{2\bullet} = 20$	$R_{3\bullet} = 19$	$R_{4\bullet} = 14$

$$Q = \frac{12}{Ns(s+1)} \sum_{i=1}^{4} R_{i\bullet}^2 - 3N(s+1) = 6.45.$$

Notez que la valeur critique exacte au seuil 5% est 7.65 et que

$$\mathrm{P}\left(\chi^2_{(3)} \geq 6.45\right) = 0.09.$$

Code SAS

```
options LS=60 nodate number=off;
data lecture;
input sujet traitement $ y;
cards;
1 peur 23.1
1 joie 22.7
. . .
8 calme 14.8
;
proc sort data=lecture;
by sujet;
proc rank data=lecture out=rang;
var y; by sujet; ranks ry;
run;
proc glm data=rang;
class sujet traitement;
model ry = sujet traitement;
run;
```

Sortie SAS

```
                    The SAS System

                  The GLM Procedure

               Class Level Information

           Classified by Variable regime

Class          Levels    Values
sujet               8    1 2 3 4 5 6 7 8
traitement          4    calme joie peur tristess

          Number of observations     32
```

Sortie SAS (suite)

```
                          The SAS System

                        The GLM Procedure

        Dependent Variable:  ry      Rank for Variable:  y

                                  Sum of
Source                DF         Squares    Mean Square    F Value
Model                 10     10.75000000     1.07500000       0.77
Error                 21     29.25000000     1.39285714
Corrected Total       31     40.00000000

            R-Square    Coeff Var    Root MSE     ry Mean
            0.268750     47.20775    1.180194    2.500000
```

Sortie SAS (suite)

```
                     The SAS System

                   The GLM Procedure

    Dependent Variable:  ry      Rank for Variable:  y

Source          DF       Type I SS     Mean Square     F Value
sujet            7      0.00000000      0.00000000        0.00
traitement       3     10.75000000      3.58333333        2.57

Source          DF     Type III SS     Mean Square     F Value
sujet            7      0.00000000      0.00000000        0.00
traitement       3     10.75000000      3.58333333        2.57
```

Remarque

La statistique F calculée par SAS est

$$F = \frac{(N-1)Q}{N(s-1)-Q} \approx \mathcal{F}[s-1,(N-1)(s-1)].$$

Puisque $F = 2.57$, on trouve

$$Q = \frac{N(s-1)F}{N-1+F} = \frac{24 \times 2.57}{7+2.57} = 6.45,$$

ce qui correspond bien à un seuil de 9%.

Traitement des égalités

En cas d'égalités au sein du bloc j, on emploie

$$R_{1j}^*, \ldots, R_{sj}^*$$

et alors

$$Q^* = \frac{\frac{12N}{s(s+1)} \sum_{i=1}^{s} (\bar{R}_{i\bullet}^* - \frac{s+1}{2})^2}{1 - \frac{1}{Ns(s^2-1)} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{\ell_j} (d_{ij}^3 - d_{ij})} \approx \chi_{s-1}^2,$$

approximation fort valable dès que $sN \geq 30$.

Exemple 3

On a montré brièvement 18 titres à 15 sujets.

Les livres étaient répartis en trois groupes égaux cotés (au hasard)

$$A, \quad B, \quad C.$$

Un peu plus tard, on a demandé aux sujets s'il se rappelaient des titres.

Exemple 3 (titres oubliés)

Titre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	3	5	3	2	1	1	2	3	1	1
B	3	1	0	4	0	4	2	1	4	5
C	4	3	3	5	1	3	3	5	1	4

Titre	11	12	13	14	15
A	3	2	0	1	1
B	3	1	3	1	3
C	4	3	2	2	0

Exemple 3 (rangs)

Titre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1.5	3	2.5	1	2.5	1	1.5	2	1.5	1
B	1.5	1	1	2	1	3	1.5	1	3	3
C	3	2	2.5	3	2.5	2	3	3	1.5	2

Titre	11	12	13	14	15
A	1.5	2	1	1.5	2
B	1.5	1	3	1.5	3
C	3	3	2	3	1

Exemple 3 (calculs)

A	B	C
25.5	28	36.5

Numérateur de $Q^* = 4.433$

$$\text{Dénominateur} = 1 - \frac{1}{15 \times 3 \times (9-1)}(7 \times 6) = 0.883.$$

$$\mathrm{P}(Q^* \geq 5.021) \approx \mathrm{P}\left(\chi^2_{(2)} \geq 5.021\right) = 0.082.$$