Grau InterUniversitari d'Estadística UB-UPC. Teoria de Cues i Simulació

1er Examen Parcial. Curs 2015-16

.

P1. Una espècie d'insecte presenta una vida de durada τ, molt efímera, expressada en hores, que ve donada per aquesta distribució de probabilitats:

$$f_\tau(t) = 0.05 \text{ si } 0 \leq t \leq 3; \quad f_\tau(t) = 0.85 \text{ si } 3 \leq t \leq 4; \quad f_\tau(t) = 0 \text{ si } t > 4$$

Es demana:

1- **[2p]** Uns laboratoris tenen congelats una gran quantitat d'ous d'aquesta espècie, de forma que poden fer néixer un exemplar a conveniència, en quant un es produeix una baixa. Calculeu el temps mig de vida, $E[\tau]$.

2- **[2p]** Quatre d'aquests ous es descongelen i fecunden simultàniament. Quina és la probabilitat de que tots 4 individus continuïn vius després de 2 hores.

3- **[2p]** En un moment determinat es descongelen i fecunden tots els individus d'una gran partida, sense renovar-se els qui van morint. Quina és la fracció dels que moriran en els 10 minuts següents, de entre els que encara estaven vius des de feia dues hores?

4- **[2p]** Calculeu la probabilitat de que un individu que ja porta viu 1 hora continuï viu durant dues hores més.

5- **[2p]** Es descongelen i fecunden els ous d'un altre partida i aquesta vegada els individus que moren són renovats immediatament ja que es vol fer un experiment amb una població d'un número N molt gran i constant. Quina és l'edat mitjana dels individus d'aquesta població? Si es tria a l'atzar un individu viu, calculeu la probabilitat de que visqui encara una hora més.

P2. L'administrador d'un centre d'informació, proporciona tres consultors per a resoldre dubtes d'usuaris que arribin al centre. Els usuaris arriben a l'atzar seguint un procés Poissonià a una taxa mitjana de 20 persones en un dia de 8h. El temps que comporta l'atenció d'un consultor a un usuari és de 40 minuts en promig i està exponencialment distribuït. Es segueix l'ordre d'arribada dels usuaris.

1. [2p] Quina és la fracció del temps que cada consultor està ocupat?
2. [2.5p] Quin temps mig està cada usuari a la cua?
3. [1p] Quin és el nº mig d'usuaris esperant en cua per l'atenció d'un consultor?
4. [1.5p] Quin temps mig està cada usuari al centre d'informació?
5. [1p] Nº mig d'usuaris al centre.
6. [1p] Probabilitat de que tots els consultors estiguin lliures
7. [1p] Probabilitat de que tots els consultors estiguin ocupats però ningú estigui esperant en la cua del centre.

① $f_z(t) = \begin{cases} 0'05 & 0 \le t < 3 \\ 0'85 & 3 \le t \le 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases}$

$E[z] = \int_0^4 x f_z(x)\,dx = 0'05 \int_0^3 x\,dx + 0'85 \int_3^4 x\,dx =$

$= 0'05 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + 0'85 \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^4 = 3'2\,h.$

② $P(z \geq 2) = R_z(2) = 1 - F_z(2)$

$F_z(t) = \begin{cases} 0'05\,t & 0 \le t \le 3 \\ 0'15 + 0'85(t-3), & 3 \le t \le 4 \\ 1 & t \geq 4 \end{cases}$

$F_z(2) = 0'1 \rightarrow R_z(2) = 0'9$

Es demana $[R_z(2)]^4 = 0'6561$

③ La fracció durant 10 minuts del que s'apagarà dintre els que han funcionat 2 hores ve donada aproximadament per $h_z(2) \cdot \Delta z$

$\Delta z \simeq 1/6\,h$ i de forma exacta per

$\int_2^{2+1/6} h_z(x)\,dx$; $h_z(2) = \frac{f_z(2)}{R_z(2)} = \frac{0'05}{0'9} = 0'0\hat{5}$

$h_z(2)\,\Delta z = 0'0\hat{5} \cdot 1/6 = 9'25 \cdot 10^{-3}$

(s'apaga el $0'925\,\%$)

④ $P(\theta \le z \le \theta' \mid z \geq \theta) = \int_0^{\theta'-\theta} f_{s/\theta}(x)\,dx =$

$= \frac{1}{R_z(\theta)} \int_0^{\theta'-\theta} f_z(x+\theta)\,dx = \frac{1}{0'95} \int_0^2 0'05\,dt = \frac{0'1}{0'95} = 0'10526$

$1 - P(\theta \le z \le \theta' \mid z \geq \theta) = 1 - 0'10526 = \boxed{0'89474}$

⑤ Cal usar la v.a. temps de cicle residual r.

$$f_r(x) = \frac{R_Z(x)}{E[Z]}$$

$$P(r \geq 1) = 1 - \int_0^1 f_r(x)\,dx = 1 - \frac{1}{E[Z]} \int_0^1 R_Z(x)\,dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{3'2} \int_0^1 (1 - 0'05t)\,dt = 0'7031.$$

$$E[r] = \int_0^\infty t\, f_r(t)\,dt = \frac{1}{E[Z]} \int_0^\infty t\, R_Z(x)\,dx \;;$$

$$\int_0^\infty t\, R_Z(t)\,dt = \int_0^3 t\,(1 - 0'05t)\,dt + \int_3^4 t\left[0'85 - 0'85(t-3)\right]dt = 7'04$$

$$E[r] = \frac{7'04}{3'2} \simeq 2'2\ h.$$

Teoria de Cues

Model M/M/3 ; $\lambda = \frac{20}{8} h^{-1} = 2'5 h^{-1}$

Càlcul

$\mu = 3/2\ h^{-1}$ (40 minuts)

$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{2'5}{3 \cdot 3/2} = \frac{5}{9} = 0'\widehat{5}$. $\quad \theta = \frac{\lambda}{\mu} = 1'\widehat{6} = 5/3$

$$P_0 = \left[\left(1 + \theta + \frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{1}{3!}\theta^3 \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1} =$$

$$= \left[\left(1 + 5/3 + \tfrac{1}{2}(5/3)^2\right) + \frac{(5/3)^3}{3!} \frac{1}{1-5/9} \right]^{-1} = 0'17266$$

$$L_q = \frac{1}{3!}(5/3)^3 \frac{0'17266 \cdot 5/9}{(1-5/9)^2} = 0'374 \text{ usuaris}$$

1) Fracció del temps que cada servidor està ocupat.

$$1 - (P_0 + P_1 + P_2) + 2/3\, P_2 + 1/3\, P_1 =$$

$$\begin{pmatrix} C_1 = \theta \\ C_2 = \tfrac{1}{2}\theta^2 \end{pmatrix} \quad = 1 - P_0\left[(1 + C_1 + C_2) - 2/3\, C_2 - 1/3\, C_1\right] =$$

$$= 1 - P_0\left[1 + 2/3\, C_1 + 1/3\, C_2\right] = 0'5555$$

2) $W_q = L_q/\lambda = 0'374/2'5 = 0'1496 h = 8'9 \text{ min}$

3) $L_q = 0'374$ usuaris

4) $W = L/\lambda = W_q + 1/\mu = 0'1496 + 2/3 = 0'81626\ h \approx 49 \text{ min}$

5) $L = W \cdot \lambda = 0'81626 \cdot \frac{20}{8} = 2'04$ usuaris

6) $P_0 = 0'17266$

7) $P_3 = C_3 \cdot P_0 = \frac{1}{3!}\theta^3 P_0 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot P_0 = 0'1332$