Marta Piñol Palau
Niub 16819025

Enunciat – A

1.1 Aproximacions asimptòtiques.

Avaluar l'exactitud de l'aproximació de Stirling:

$$\mathbf{n!} \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}, \ \mathbf{n} \in \mathbf{N}.$$

Es demana:

1. **Cerca documentació sobre l'aproximació de Stirling i sobre les aproximacions asimptòtiques en general. Escriu un breu resum del que has entès (màxim 1/2full). Dóna les teves fonts bibliogràfiques.**

   L'objectiu principal de les aproximacions asimptòtiques és obtenir una aproximació a una funció d'expressió analítica complicada en termes de funcions senzilles vàlida en un cert límit i en un sentit asimptòtic.

   L'aproximació de Stirling, nom en honor al matemàtic escocès del segle XVIII James Stirling, és una aproximació asimptòtica per factorials grans.
   Ens diu: $n! \approx n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n}$
   O el que és el mateix: $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n}} = 1$.

   És a dir, n! és equivalent a l'expressió $n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n}$. Això vol dir que per calcular un límit en el qual n! és un factor del numerador o del denominador d'una successió podem substituir-lo per ella. Aquesta substitució sol ser molt útil en els casos en què la presència de n! com a factor ens dificulta operar dins de la successió.

   Aquesta fórmula és més "equivalent" quan major és n. En el cas de n = 4 es produeix un error relatiu del 2%. L'error relatiu comença a ser inferior al 1% quan n és major que 9. I un error relatiu menor que el 0.1% es produeix a partir de quan n és major que 84.

   http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Math/stirling.html
   https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_Stirling
   http://gaussianos.com/una-mejora-par-ramanujan-de-la-formula-de-stirling/

Marta Piñol Palau
Niub 16819025

2. Escriure una funció en Matlab (STIRLING) per calcular el valor de

$$n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}, \text{ n } \in \text{ N.}$$

Feu un joc de proves per a valors de n, per exemple n = 5,10,50,100,150,... . Comenta els resultats obtinguts.

Aquesta funció, en quant més gran és la n, menor és l'error relatiu que s'obté en funció de n!. Però no serveix per a qualsevol valor de n. Com s'observa a la taula.

n	n!	Stirling(n)
5	120	1.180191679575900e+02
10	3628800	3.598695618741032e+06
50	3.0414e+64	3.036344593938140e+64
100	9.3326e+157	9.324847625269240e+157
150	5.7134e+262	Inf

STIRLING.m

3. Escriure una funció en Matlab (APROX) per calcular el valor de

$$\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \text{ n } \in \text{ N.}$$

Feu un joc de proves per a valors de n, n = 5,10,50,100,150,... . Comenta els resultats obtinguts.

Com major és el valor de n més s'acosta la funció a 1. Però, al igual que amb la funció STIRLING, APROX no serveix per a qualsevol valor de n.

n	Aprox(n)
5	1.016783985827809
10	1.008365359132401
50	1.001668034070741
100	1.000833677872023
150	0

APROX.m

4. **Avaluar l'exactitud de l'aproximació de Stirling, es a dir comproveu fent ús de Matlab que**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Es compleix que en l'aproximació de Stirling quan n tendeix a infinit és igual a 1.

Aquest límit es pot comprovar amb la funció APROX ja que retorna el quocient entre el factorial de n i l'aproximació de Stirling de n.

Com s'observa a la taula anterior, com major és el valor de n més s'acosta la funció a 1.

Tanmateix, a l'apartat següent es pot observar més clarament la taula de la funció APROX millorada. Aquesta, inclou valors de n més grans i veiem que cada vegada el valor retornat d'APROX s'acosta més a 1.

5. **Quin és el màxim n pel qual Matlab pot calcular STIRLING? Quin és el màxim n pel qual Matlab pot calcular APROX? Millora el codi de APROX per incrementar n fins a 1500. Explica que has de fer i per què. Raona totes les teves respostes.**

Tant amb la funció STIRLING com amb la funció APROX, el màxim n pel qual Matlab pot calcular APROX és 143. És lògic ja que APROX depèn de la funció STIRLING.

Per millorar el codi d'APROX, s'ha utilitzat l'expressió següent:

$$\frac{n!}{n^n e^{-n}} = \frac{ne*n!}{n^n} = \frac{e}{n} * \frac{2e}{n} *\dots* \frac{ne}{n}.$$

Així s'ha millorat el codi perquè matlab pugui calcular fins a n=2000.

n	APROX	APROX (millorat)
5	1.016783985827809	1.016783985827809
10	1.008365359132401	1.008365359132402
50	1.001668034070741	1.001668034070741
100	1.000833677872023	1.000833677872023
150	0	1.000555709081649
1500	-	1.000055557098134
2000	-	1.000041322813259

maxSTIRLING.m

maxAPROX.m

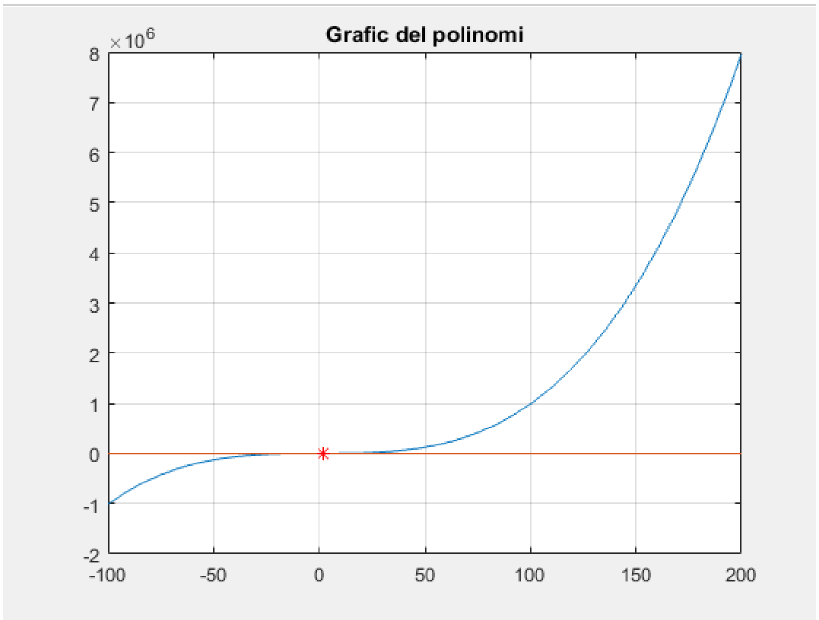
APROX2.m

1.2 Solucions d'equacions no lineals

Calcular valors aproximats de l'arrel positiva de l'equació $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.

Es demana:

1. **Quantes arrels diferents té el polinomi $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$? Doneu intervals que separin les arrels. Justifica les teves respostes.**



El polinomi $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ té una única arrel.
Segons el teorema de Bolzano, si f(x) = $x^3 - x^2 - x - 1$ contínua en [1, 2] i f(1) = -2 < 0 i f(2) = 1 > 0, per tant, existeix x_0 pertanyent a (1, 2) tal que f(x_0) = 0.

2. **Calculeu la arrel positiva propera a x = 2 (mínim 6 decimals correctes) per cadascun dels següents mètodes:**

(a) Mètode de la bisecció. Presenteu els resultats en una taula.

taula_resultats =

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\frac{(a_n - b_n)}{2}$
1.0000	0	0	1.5000	-1.3750	1.0000
2.0000	1.0000	2.0000	0	-1.0000	0
3.0000	1.5000	2.0000	1.7500	-0.4531	0.5000
4.0000	0	2.0000	1.0000	-2.0000	2.0000
5.0000	1.7500	2.0000	1.8750	0.2012	0.2500
6.0000	1.0000	2.0000	1.5000	-1.3750	1.0000
7.0000	1.0000	1.8750	1.4375	-1.5334	0.8750
8.0000	1.5000	1.8750	1.6875	-0.7297	0.3750
9.0000	1.4375	1.8750	1.6563	-0.8560	0.4375
10.0000	1.6875	1.8750	1.7813	-0.3025	0.1875
11.0000	1.6563	1.8750	1.7656	-0.3788	0.2188
12.0000	1.7813	1.8750	1.8281	-0.0605	0.0938
13.0000	1.7656	1.8750	1.8203	-0.1022	0.1094
14.0000	1.8281	1.8750	1.8516	0.0678	0.0469

15.0000	1.8203	1.8750	1.8477	0.0461	0.0547
16.0000	1.8203	1.8516	1.8359	-0.0183	0.0313
17.0000	1.8203	1.8477	1.8340	-0.0289	0.0273
18.0000	1.8359	1.8477	1.8418	0.0138	0.0117
19.0000	1.8340	1.8477	1.8408	0.0084	0.0137
20.0000	1.8340	1.8418	1.8379	-0.0076	0.0078
21.0000	1.8340	1.8408	1.8374	-0.0103	0.0068
22.0000	1.8379	1.8408	1.8394	0.0004	0.0029
23.0000	1.8374	1.8408	1.8391	-0.0010	0.0034
24.0000	1.8374	1.8394	1.8384	-0.0050	0.0020
25.0000	1.8391	1.8394	1.8392	-0.0003	0.0002
26.0000	1.8384	1.8394	1.8389	-0.0023	0.0010
27.0000	1.8392	1.8394	1.8393	0.0000	0.0001
28.0000	1.8389	1.8394	1.8391	-0.0010	0.0005
29.0000	1.8389	1.8393	1.8391	-0.0011	0.0004
30.0000	1.8391	1.8393	1.8392	-0.0005	0.0002
31.0000	1.8391	1.8393	1.8392	-0.0005	0.0002
32.0000	1.8392	1.8393	1.8392	-0.0002	0.0001
33.0000	1.8392	1.8393	1.8392	-0.0003	0.0001
34.0000	1.8392	1.8393	1.8393	-0.0001	0.0000
35.0000	1.8392	1.8393	1.8393	-0.0001	0.0001
36.0000	1.8393	1.8393	1.8393	-0.0000	0.0000
37.0000	1.8393	1.8393	1.8393	-0.0000	0.0000
38.0000	1.8393	1.8393	1.8393	0.0000	0.0000
39.0000	1.8393	1.8393	1.8393	0.0000	0.0000
40.0000	1.8393	1.8393	1.8393	-0.0000	0.0000
41.0000	1.8393	1.8393	1.8393	-0.0000	0.0000
42.0000	1.8393	1.8393	1.8393	-0.0000	0.0000
43.0000	1.8393	1.8393	1.8393	-0.0000	0.0000
44.0000	1.8393	1.8393	1.8393	0.0000	0.0000
45.0000	1.8393	1.8393	1.8393	0.0000	0.0000
46.0000	1.8393	1.8393	1.8393	-0.0000	0.0000
47.0000	1.8393	1.8393	1.8393	-0.0000	0.0000
48.0000	1.8393	1.8393	1.8393	-0.0000	0.0000

L'arrel positiva propera a x=2 és aproximadament 1.8393. L'interval inicial és [1, 2] i el criteri d'aturada $\eta=0.5*10^{-6}$.

biseccio.m

(b) Mètode de Newton. Presenteu els resultats en una taula. Per cada mètode, doneu els punts inicials i el criteri d'aturada.

taula_resultats =

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_n - _1$
1.0000	2.0000	1.0000	0
2.0000	1.8571	0.0991	-0.1429
3.0000	1.8395	0.0014	-0.1429
4.0000	1.8393	0.0000	-0.0176

L'arrel positiva propera a x=2 és aproximadament 1.8393. El punt inicial és 2 i el criteri d'aturada η=0.5*10-6.

newton.m

3. Considereu el mètode iteratiu següent:

$$x_{n+1} = x_n - \lambda(x_n{}^3 - x_n{}^2 - x_n - 1), \lambda > 0.$$

(a) Per a 1.5 ≤ x_0 ≤ 2, estudieu la convergència del mètode a l'arrel real de $x^3 - x \quad -x- 1 = 0$ sense calcular les iteracions en Matlab a partir del teorema de convergència.

f(x) = x – λ(x^3 – x^2 – x -1)
f'(x) = 1 - λ(3x^2 – 2x – 1)
f'(1.5) = 1 - λ(3(1.5)^2 – 2(1.5) – 1) = 1 – 2.75 λ
f'(2) = 1 - λ(3(2)^2 – 2(2) – 1) = 1 - 7 λ

El mètode serà convergent si |f'(1.5)| < 1 i |f'(2)|<1:

(b) Per a 1.5 ≤ x0 ≤ 2 donat, doneu un l'interval per a λ que asseguri la convergència del mètode.

El mètode serà convergent si |f'(1.5)| < 1 i |f'(2)|<1:
-1 < 1 – 2.75 λ < 1 => 0 < λ < 0.72
-1 < 1 - 7 λ < 1 => 0 < λ < 0.2857143

Per tant, el mètode convergirà si 0 < λ < 0.2857143=2/7.

(c) Preneu λ = 1/9. Obteniu el punt fix amb la mateixa tolerància que els apartats anteriors. Doneu el punt inicial i el criteri d'aturada (fins a 6 decimals correctes). Presenteu els resultats en una taula.

taula_resultats =

n	x_n	f(x_n)	$x_n - x_{n-1}$
1	1.5	1.34722222222222	0
2	1.34722222222222	1.15644319892166	-0.152777777777778
3	1.15644319892166	0.940085178261508	-0.152777777777778
4	0.940085178261508	0.718636788300151	-0.190779023300564
5	0.718636788300151	0.511531935284621	-0.216358020660151
6	0.511531935284621	0.329382280533562	-0.221448389961356
7	0.329382280533562	0.173589014012798	-0.20710485301553
8	0.173589014012798	0.0404233054869479	-0.182149654751059
9	0.0404233054869479	-0.0753535051429128	-0.155793266520764
10	-0.0753535051429128	-0.178770451160157	-0.13316570852585
11	-0.178770451160157	-0.274203976205555	-0.115776810629861
12	-0.274203976205555	-0.365492936619229	-0.103416946017244
13	-0.365492936619229	-0.456261442811742	-0.0954335250453983
14	-0.456261442811742	-0.550360894036886	-0.0912889604136739
15	-0.550360894036886	-0.652498554696564	-0.0907685061925128
16	-0.652498554696564	-0.769282989837978	-0.0940994512251438
17	-0.769282989837978	-0.911257675377036	-0.102137660659679
18	-0.911257675377036	-1.09746130189429	-0.116784435141413

19	-1.09746130189429	-1.36732416692054	-0.141974685539058
20	-1.36732416692054	-1.81827603425215	-0.186203626517255
21	-1.81827603425215	-2.76264320451509	-0.269862865026251
22	-2.76264320451509	-5.75759795585031	-0.45095186733161
23	-5.75759795585031	-30.1194123751816	-0.944367170262941
24	-30.1194123751816	-3163.648083882	-2.99495475133522
25	-3163.648083882	-3519326790.21134	-24.3618144193313
26	-3519326790.21134	-4.84324319803299e+27	-3133.52867150682
27	-4.84324319803299e+27	-1.26231087044266e+82	-3519323626.56326
28	-1.26231087044266e+82	-2.2348915686073e+245	-4.84324319803299e+27
29	-2.2348915686073e+245	-Inf	-1.26231087044266e+82
30	-Inf	NaN	-2.2348915686073e+245

El punt inicial és x_0 = 1.5 i el criteri d'aturada és quan $|x_{n+1} - x_n| < 0.5*10^{-6}$ i fins que f $(x_{n+1}) < 0.5*10^{-6}$.

puntfixC.m

(d) Preneu λ = 2/7. Obteniu el punt fix amb la mateixa tolerància prèvia. Doneu el punt inicial i el criteri d'aturada (fins a 6 decimals correctes). Presenteu els resultats en una taula.

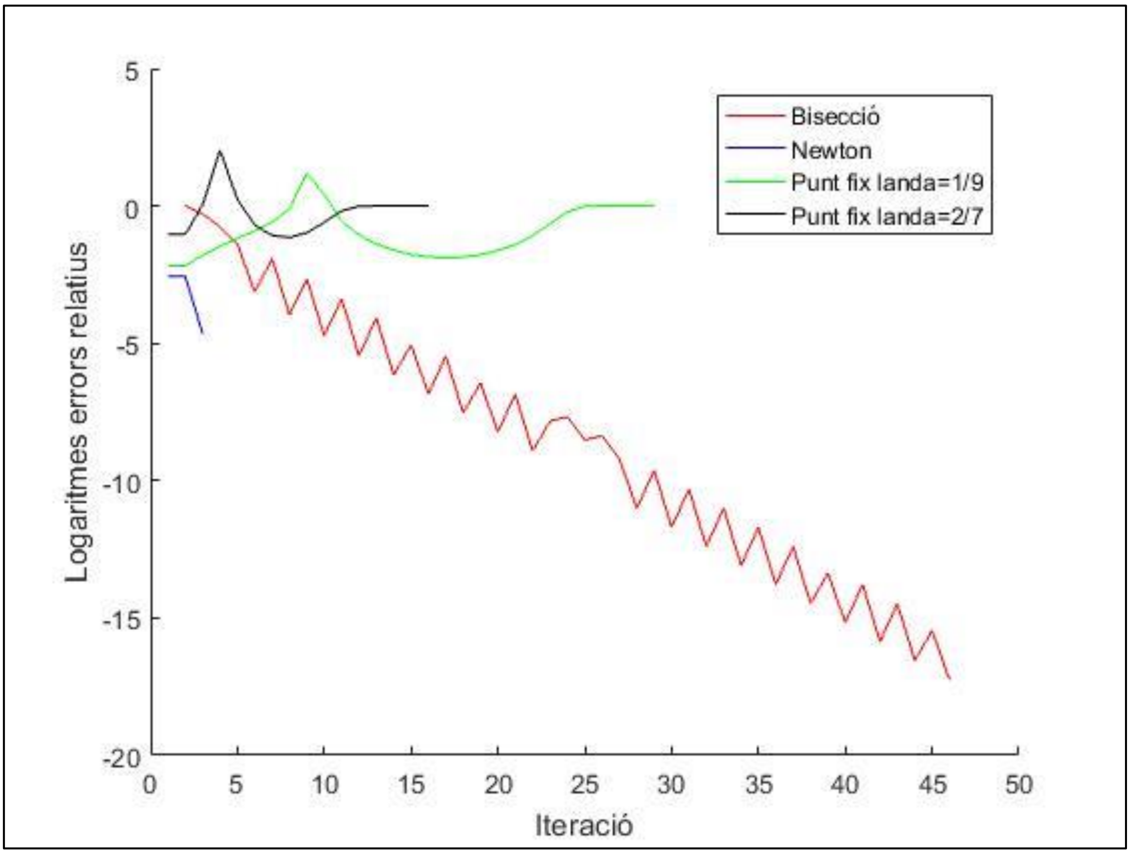
taula_resultats =

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_n -_1$
1	1.5	1.10714285714286	0
2	1.10714285714286	0.542625468554769	-0.392857142857143
3	0.542625468554769	0.0633980620142411	-0.392857142857143
4	0.0633980620142411	-0.241505526427541	-0.564517388588088
5	-0.241505526427541	-0.478907007343454	-0.479227406540528
6	-0.478907007343454	-0.72470219499509	-0.304903588441782
7	0.72470219499509	-1.06215927872026	-0.237401480915913
8	-1.06215927872026	-1.70911138961458	-0.245795187651635
9	-1.70911138961458	-3.76750288838711	-0.337457083725169
10	-3.76750288838711	-22.311161471637	-0.646952110894325
11	-22.311161471637	-3331.65503722068	-2.05839149877252
12	-3331.65503722068	-10569208643.0736	-18.5436585832499
13	-10569208643.0736	-3.37333420042594e+029	-3309.34387574904
14	-3.37333420042594e+029	-1.09675611346574e+088	-10569205311.4186
15	-1.09675611346574e+088	-3.76931252281537e+263	-3.37333420042e+029
16	-3.76931252281537e+263	Inf	-1.09675611346574e+088
17	-Inf	NaN	-3.76931252281537e+263

El punt inicial és x_0 = 1.5 i el criteri d'aturada és quan $|x_{n+1} - x_n| < 0.5*10^{-6}$ i fins que f $(x_{n+1}) < 0.5*10^{-6}$.

puntfixD.m

4. **Representeu en un gràfic els logaritmes dels valors absoluts dels errors relatius aproximats: $r^{n+1} = \frac{x^{n+1} - x^{n}}{x^{n+1}}$. Cada mètode un color diferent.**



grafic.fig

5. **A partir de les gràfiques realitzades, quin seria el millor procediment per obtenir la arrel propera a x = 2 de $x^3 - x^2 - x - 1$ = 0. Raona les teves respostes.**

El millor mètode és el de Newton (blau) ja que és el que disminueix més ràpid i necessita menys iteracions per tenir 6 decimals correctes. Per tant, és el que convergeix més ràpidament.