Solucions problemes tema 4: Intervals de confiança

1.

2. (a) Si $\sigma = 3$ la funció pivot $Z = \dfrac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$ Aleshores busquem a i b tals que $P(a \leq Z \leq b) = 0.95$. Així doncs:

$$IC_{95\%}(\mu) = [59 \pm 1.96\,\frac{3}{\sqrt{8}}]$$

(b) Si σ desconeguda la funció pivot $t = \dfrac{\bar{X}_n - \mu}{\hat{S}_n}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$ Aleshores busquem a i b tals que $P(a \leq t \leq b) = 0.95$. Així doncs:

$$IC_{95\%}(\mu) = [59 \pm 2.365\,\frac{4.87}{\sqrt{8}}]$$

3. L'estimador màxim versemblant de λ és $\lambda_{MV} = \bar{X}_n$ i la informació de Fisher per una mostra de mida 1, $I(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$. Utilitzant les propietats asimptòtiques dels estimadors màxim versemblants, construïm la funció pivot:

$$P = \frac{(\bar{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\bar{X}_n}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

Aleshores busquem a i b tals que
$P(a \leq Z \leq b) = 0.90$. Així doncs:

$$IC_{95\%}(\mu) = [1.396 \pm 1.645\,\frac{1.1814}{16.8226}]$$

4. (a) Considerem la funció pivot

$$T = \frac{(\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)\hat{S}_1^2 + (n_2-1)\hat{S}_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

Aleshores busquem a i b tals que $P(a \leq T \leq b) = 0.95$. Així doncs, pel nostre paràmetre d'interès $\delta = \mu_1 - \mu_2$:

$$IC_{95\%}(\delta) = [-4 \pm 3.47]$$

Considerem la funció pivot

$$F = \frac{\frac{\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

Aleshores busquem a i b tals que $P(a \leq F \leq b) = 0.95$. Així doncs, pel nostre paràmetre d'interès $\gamma = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

$$IC_{95\%}(\gamma) = [0.6842, 2.32]$$

5. Sabem que

$$IC_{95\%}(\mu) = [\bar{X}_n \pm z_{0.05/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Tenint en compte que z_α és tal que $F_Z(z_\alpha) = 1 - \alpha$

Per tant volem que

$$z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1$$

$$1.96\frac{4}{\sqrt{n}} \leq 1 \Rightarrow n \geq 62$$

6. Sabem que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(\lambda_1, n) \Rightarrow \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(1, n) \Rightarrow 2\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(1/2, n) \equiv \chi^2_{2n}$$

$$\sum_{j=1}^{m} Y_j \sim G(\lambda_2, m) \Rightarrow \lambda_2 \sum_{j=1}^{m} Y_j \sim G(1, m) \Rightarrow 2\lambda_2 \sum_{j=1}^{m} Y_j \sim G(1/2, m) \equiv \chi^2_{2m}$$

Funció pivot:

$$F = \frac{\frac{2\lambda_1 \sum X_i}{2n}}{\frac{2\lambda_2 \sum Y_j}{2m}} \sim F_{2n,2m}$$

Aleshores busquem a i b tals que $P(a \leq F \leq b) = 1 - \alpha$.

$$IC_{(1-\alpha)\%}(\lambda_1/\lambda_2) = [a\frac{\bar{Y}_m}{\bar{X}_n}, b\frac{\bar{Y}_m}{\bar{X}_n}]$$

7. L'estimador màxim versemblant de μ és $X_{(n)}$ i la seva funció de distribució és

$$F_{X_{(n)}}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \leq 0 \\ \left(\frac{u}{\mu}\right)^n & \text{si} \quad 0 < u < \mu \\ 1 & \text{si} \quad u \geq \mu \end{cases}$$

Aplicant el mètode de Neyman existeixen $h(\mu)$ i $g(\mu)$ tals que $P(h(\mu) < X_{(n)} < g(\mu)) =$ 0.90 Llavors

$$\left(\frac{h(\mu)}{\mu}\right)^n = \alpha_1 \quad 1 - \left(\frac{g(\mu)}{\mu}\right)^n = \alpha_2 \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0.10$$

és a dir, $P(X_{(n)}(1-\alpha_2)^{-1/n} < \mu < X_{(n)}\alpha_1^{-1/n}) = 0.90$, la longitud de l'interval serà $X_{(n)}(\alpha_1^{-1/n} - (1-\alpha_2)^{-1/n})$, aquesta serà mínima per a $\alpha_1 = \alpha$ i $\alpha_2 = 0$. Aleshores l'interval quedarà:

$$IC_{90\%}(\mu) = [X_{(n)}, X_{(n)}(0.10)^{-1/n}]$$

8. (a) Aplicant el primer apartat del problema 2 tenim que:

$$IC_{95\%}(\mu) = [\bar{X}_n \pm z_{0.025}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

$$IC_{95\%}(\mu) = [1.75 \pm 1.96\,\frac{0.075}{\sqrt{12}}]$$

(b) Volem n tal que longitud$= 2\,z_{0.025}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.01$ Per tant,

$$n \geq \left(\frac{2 * 1.96 * 0.075}{0.01}\right)^2 \Rightarrow n \geq 865$$

9. La variable X="nombre d'errates per pàgina"$\sim Poiss(\lambda)$

Sabem que l'estimador màxim versemblant de λ és $\lambda_{MV} = \bar{X}_n$. Utilitzant les propietats asimptòtiques dels estimadors màxim versemblants, construïm la funció pivot:

$$P = \frac{(\bar{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\bar{X}_n}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

Aleshores busquem a i b tals que
$P(a \leq Z \leq b) = 0.90$. Així doncs:

$$IC_{90\%}(\lambda) = [0.9895 \pm 1.645 \, \frac{0.9947}{\sqrt{95}}]$$

Volem n tal que longitud$= 2\, z_{0.05} \, \frac{\sqrt{\bar{X}_n}}{\sqrt{n}} \leq 0.2$ Per tant,

$$n \geq \left(\frac{2 * 1.645 * 0.9547}{0.2} \right)^2 \Rightarrow n \geq 268$$

10. Sabem que si $X \sim exp(\lambda)$, $E(X) = 1/\lambda$, i

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(\lambda, n) \Rightarrow \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(1, n) \Rightarrow 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(1/2, n) \equiv \chi^2_{2n}$$

Funció pivot: $\chi = 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$ Hem de buscar a i b tals que $P(a \leq \chi \leq b) = 1 - \alpha$.
$a = F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(1 - \alpha/2)$ i $b = F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(\alpha/2)$, així

$$IC_{(1-\alpha)\%}(1/\lambda) = [\frac{2\bar{X}_n}{nb}, \frac{2\bar{X}_n}{na}]$$