

Introducció a la Investigació Operativa

Grau en Estadística UB-UPC

Tema 3. Formulació i resolució dels models lineals d'optimització (Continuació II)

Catalina Bolancé

Dept. Econometria, Estadística i Economia Espanyola

Javier Heredia

Dept. Estadística i Investigació Operativa

1 Exemples d'aplicació

- Problema de fabricar o comprar: The Electro-Poly Corporation
- Problema d'inversió: Retirement Planning Services, Inc.

Problema de “fabricar o comprar”: “*The Electro-Poly Corporation*”

L'empresa “*Electro-Poly*” és una empresa fabricant d'anells lliscants.

| | <i>Model 1</i> | <i>Model 2</i> | <i>Model 3</i> |
|--|----------------|----------------|----------------|
| Unitats demandades | 3000 | 2000 | 900 |
| Hores de cablejat/unitat | 2 | 1.5 | 3 |
| Hores de trenat/unitat | 1 | 2 | 1 |
| Costos de fabricació (en €) | 50 | 83 | 130 |
| Costos de compra a tercers (en €) | 61 | 97 | 145 |

La companyia té una capacitat de 10000 hores de cablejat i 5000 de trenat.

Problema de “fabricar o comprar”: variables de decisió

M_1 = # d'unitats del model 1 a fabricar.

M_2 = # d'unitats del model 2 a fabricar.

M_3 = # d'unitats del model 3 a fabricar.

B_1 = # d'unitats del model 1 a comprar a la competència.

B_2 = # d'unitats del model 2 a comprar a la competència.

B_3 = # d'unitats del model 3 a comprar a la competència.

Problema de “fabricar o comprar”: Funció objectiu i restriccions

- *Funció objectiu:*

$$\text{Min } z = 50M_1 + 83M_2 + 130M_3 + 61B_1 + 97B_2 + 145B_3$$

- *Restriccions de demanda:*

$$M_1 + B_1 = 3000 \longrightarrow \text{Model 1}$$

$$M_2 + B_2 = 2000 \longrightarrow \text{Model 2}$$

$$M_3 + B_3 = 900 \longrightarrow \text{Model 3}$$

- *Restriccions de capacitat:*

$$2M_1 + 1.5M_2 + 3M_3 \leq 10000 \longrightarrow \text{Hores de cablejat}$$

$$M_1 + 2M_2 + M_3 \leq 5000 \longrightarrow \text{Hores de trenat}$$

- *Condicions de no-negativitat:*

$$M_1, M_2, M_3, B_1, B_2, B_3 \geq 0$$

Problema de “fabricar o comprar”: Implementació del model en Excel

| | A | B | C | D | E | F |
|----|--------------------------|---------------------|---------------------------------|----------------|-------------------|-------------------|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | Electro-Poly Corporation | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | Nombre d'unitats | Model 1 | Model 2 | Model 3 | | |
| 7 | Fabricar | 0 | 0 | 0 | | |
| 8 | Comprar | 0 | 0 | 0 | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | Cost de | | | | | |
| 11 | Fabricar | 50 | 83 | 130 | Cost total | |
| 12 | Comprar | 61 | 97 | 145 | 0 | |
| 13 | | SB\$7:\$D\$8 | | | | |
| 14 | | | | | | |
| 15 | Disponible | 0 | 0 | 0 | | |
| 16 | | 3000 | 2000 | 900 | | |
| 17 | | | | | | |
| 18 | Hores necessaries | | | | Usado | Disponible |
| 19 | Cablejat | 2 | 1.5 | 3 | 0 | 10000 |
| 20 | Trenat | 1 | 2 | 1 | 0 | 5000 |

Problema de “fabricar o comprar”: Introducció de dades a Solver

Parámetros de Solver

Establecer objetivo:

Para: ☐ Máx. ☒ Mín ☐ Valor de:

Cambiando las celdas de variables:

Sujeto a las restricciones:

\$B\$15:\$D\$15 = \$B\$16:\$D\$16

\$B\$7:\$D\$8 >= 0

\$E\$19:\$E\$20 <= \$F\$19:\$F\$20

Agregar

Cambiar

Eliminar

Restablecer todo

Cargar/Guardar

☒ Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución:

Opciones

Método de resolución

Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Ayuda Resolver Cerrar

Problema de “fabricar o comprar”: Resolució del model

| | A | B | C | D | E | F |
|----|-------------------|---------------|--------------------------|---------|------------|------------|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | Electro-Poly Corporation | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | Nombre d'unitats | Model 1 | Model 2 | Model 3 | | |
| 7 | Fabricar | 3000 | 550 | 900 | | |
| 8 | Comprar | 0 | 1450 | 0 | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | Cost de | | | | | |
| 11 | Fabricar | 50 | 83 | 130 | Cost total | |
| 12 | Comprar | 61 | 97 | 145 | 453300 | |
| 13 | | \$B\$7:\$D\$8 | | | | |
| 14 | | | | | | |
| 15 | Disponible | 3000 | 2000 | 900 | | |
| 16 | | 3000 | 2000 | 900 | | |
| 17 | | | | | | |
| 18 | Hores necessaries | | | | Usado | Disponible |
| 19 | Cablejat | 2 | 1.5 | 3 | 9525 | 10000 |
| 20 | Trenat | 1 | 2 | 1 | 5000 | 5000 |

Problema de “fabricar o comprar”: Resolució del model

MIRAR INFORMES EN EL FITXER D'EXCEL: **Aplicació1_t3.xlsx**

Problema de “fabricar o comprar”: Implementació del model en SAS

```
Aplicacio_T3 *  
  
libname t3 '.';  
data t3.exem_f_c;  
  input _row_ $9. m1 m2 m3 b1 b2 b3 _type_ $ _rhs_;  
  datalines;  
cost      50 83 130 61 97 145 MIN .  
demanda1  1 0 0 1 0 0 EQ 3000  
demanda2  0 1 0 0 1 0 EQ 2000  
demanda3  0 0 1 0 0 1 EQ 900  
cablejat  2 1.5 3 0 0 0 LE 10000  
trenat    1 2 1 0 0 0 LE 5000  
;  
run;  
  
proc print data=t3.exem_f_c;  
run;  
proc lp data=t3.exem_f_c tableauout=t3.taula_opt;  
run;  
proc print data=t3.taula_opt;  
run;
```

Problema de “fabricar o comprar”: Resolució del model

MIRAR EL FITXER D'OUTPUT DE SAS **Aplicació1_t3.out**
PER MÉS RESULTATS MIRAR EL FITXER DE COMANDES DE SAS
Aplicació1_t3.sas

Problema de “fabricar o comprar”: Parametrització del model (I)

| Paràmetres: | |
|-----------------------------|---|
| <i>Símbol</i> | <i>Significat</i> |
| N | # de models ($N = 3$) |
| $f_i, i = 1, \dots, N$ | Costos de fabricació del model i (en €) |
| $c_i, i = 1, \dots, N$ | Costos de compra del model i (en €) |
| $d_i, i = 1, \dots, N$ | Demanda del model i |
| $g_i, h_i, i = 1, \dots, N$ | Hores de cablejat (g_i) i trenat (d_i) per unitat del model i |
| p, q | Hores de cablejat i trenat disponibles |

| Variables de decisió: | | |
|------------------------|--------------------------------------|---------------|
| <i>Símbol</i> | <i>Significat</i> | <i>Domini</i> |
| $x_i, i = 1, \dots, N$ | # d'unitats del model i a fabricar | $x_i \geq 0$ |
| $y_i, i = 1, \dots, N$ | # d'unitats del model i a comprar | $y_i \geq 0$ |

Problema de “fabricar o comprar”: Parametrització del model (II)

| Variables de decisió: | |
|------------------------------|--|
| <i>Significat</i> | <i>Coste total de fabricació i compra (en €)</i> |
| Expressió matemàtica | $z = \sum_{i=1}^N (f_i x_i + c_i y_i)$ |
| Restriccions: | |
| <i>Significat</i> | <i>Expressió matemàtica</i> |
| Demanda | $x_i + y_i = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$ |
| Capacitat de cablejat | $\sum_{i=1}^N g_i x_i \leq p$ |
| Capacitat de trenat | $\sum_{i=1}^N h_i x_i \leq q$ |

Problema de “fabricar o comprar”: Parametrització del model (III)

$$(P) = \begin{cases} \min_{x,y \in \mathbb{R}^n} & \sum_{i=1}^N (f_i x_i + c_i y_i) \\ \text{s.a.:} & x_i + y_i = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ & \sum_{i=1}^N g_i x_i \leq p \\ & \sum_{i=1}^N h_i x_i \leq q \\ & x, y \geq 0 \end{cases}$$

Problema de “fabricar o comprar”: Anàlisi de sensibilitat

```
proc lp data=t3.exem_f_c tableau=t3.taula_opt RANGERHS RANGEPRICE;
run;
```

Output - (Sin título)

The LP Procedure
Análisis de rango RHS

| Fila | -----Phi mínimo----- | | -----Phi máximo----- | |
|----------|----------------------|----------|----------------------|-----------|
| | Rhs Dejar | Objetivo | Rhs Dejar | Objetivo |
| demanda1 | 100 b2 | 288000 | 3380 cablejat | 474960 |
| demanda2 | 550 b2 | 312650 | INFINIDA . | . |
| demanda3 | 0 m3 | 330000 | 1111.1111 cablejat | 482222.22 |
| cablejat | 9525 cablejat | 453300 | INFINIDA . | . |
| trenat | 3900 m2 | 461000 | 5633.3333 cablejat | 448866.67 |

Output - (Sin título)

The LP Procedure
Análisis del rango del precio

| Nombre de la Col variable | -----Phi mínimo----- | | -----Phi máximo----- | |
|---------------------------------|----------------------|-----------|----------------------|----------|
| | Precio Introducir | Objetivo | Precio Introducir | Objetivo |
| 1 m1 | -INFINIDA . | -INFINIDA | 54 b1 | 465300 |
| 2 m2 | 75 b1 | 448900 | 97 trenat | 461000 |
| 3 m3 | -INFINIDA . | -INFINIDA | 138 b3 | 460500 |
| 4 b1 | 57 b1 | 453300 | INFINIDA . | 453300 |
| 5 b2 | 83 trenat | 433000 | 105 b1 | 464900 |
| 6 b3 | 137 b3 | 453300 | INFINIDA . | 453300 |
| 7 cablejat | -3.2 b1 | 451780 | INFINIDA . | INFINIDA |
| 8 trenat | -7 trenat | 453300 | INFINIDA . | 453300 |

Problema d'inversió: *Retirement Planning Services, Inc.*

Un client vol invertir 750000€ en els següents bons:

| Companyia | Rendiment | Anys de pagament | Valoració del risc |
|------------------------|-----------|------------------|-----------------------|
| Acme Chemical | 8.65% | 11 | 1 - <i>Excel·lent</i> |
| Dynastar | 9.5% | 10 | 3 - <i>Bo</i> |
| Eagle Vision | 10% | 6 | 4 - <i>Normal</i> |
| Micro Modelling | 8.75% | 10 | 1 - <i>Excel·lent</i> |
| OptiPro | 9.25% | 7 | 3 - <i>Bo</i> |
| Sabre Systems | 9% | 13 | 2 - <i>Molt bo</i> |

Problema d'inversió: restriccions a la inversió

- No es pot invertir més d'un 25% en la mateixa empresa: *diversificació*.
- Com a mínim, s'ha d'invertir el 50% en bons a llarg termini (amb venciment a 10 anys o més).
- No s'ha d'invertir més del 35% en l'empresa *DynaStar*, *Eagle Vision* i *OptiPro*, ja que són empreses d'alt risc.

Problema d'inversió: variables de decisió i funció objectiu

- Variables de decisió:

x_1 = capital a invertir en *Acme Chemical*.

x_2 = capital a invertir en *DynaStar*.

x_3 = capital a invertir en *Eagle Vision*.

x_4 = capital a invertir en *MicroModelling*.

x_5 = capital a invertir en *OptiPro*.

x_6 = capital a invertir en *Sabre Systems*.

- Funció objectiu \Rightarrow Maximitzar el rendiment anual total de la inversió:

$$Maxz = .0865x_1 + .095x_2 + .1x_3 + .0875x_4 + .0925x_5 + .09x_6$$

Problema d'inversió: formulació matemàtica de les restriccions

- S'inverteix el capital total:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 750000\text{€}$$

- No es pot invertir més del 25% del total en el mateix valor:

$$x_i \leq \frac{1}{4} \times 750000 = 187500\text{€}, \forall i$$

- Més del 50% del capital s'ha d'invertir a llarg termini (a més de 10 anys):

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \geq \frac{1}{2} \times 750000 = 375000\text{€}$$

- La inversió en *DynaStar*, *Eagle Vision* i *OptiPro* no pot superar el 35% del total:

$$x_2 + x_3 + x_5 \leq 35\% \times 750000 = 262500\text{€}$$

- Condicions de no-negativitat:

$$x_i \geq 0, \forall i$$

Problema d'inversió: Definició del model a Solver

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | |
|----|---|------------------------|---|----------------|-----------------|------------------|----------------------|-----------------|-----------------------|--------------|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | Retirement Planning Services, Inc. | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 4 | | | Amount | Maximum | Years to | 10+ Years | | | Good or worse? | |
| 5 | | Bond | Inverted | 25,0% | Return | Maturity | (1 yes, 0 no) | Rating | (1 yes, 0 no) | |
| 6 | | ACME Chemical | \$0.00 | \$187,500.00 | 8.65% | 11 | 1 | 1-Excellent | | 0 |
| 7 | | Dyna Star | \$0.00 | \$187,500.00 | 9.50% | 10 | 1 | 3-Good | | 1 |
| 8 | | Eagle Vision | \$0.00 | \$187,500.00 | 10.00% | 6 | 0 | 4-Fair | | 1 |
| 9 | | Micro Modeling | \$0.00 | \$187,500.00 | 8.75% | 10 | 1 | 1-Excellent | | 0 |
| 10 | | OptiPro | \$0.00 | \$187,500.00 | 9.25% | 7 | 0 | 3-Good | | 1 |
| 11 | | Sabre Systems | \$0.00 | \$187,500.00 | 9.00% | 13 | 1 | 2-Very-Good | | 0 |
| 12 | | Total Inverted | \$0.00 | Total: | \$0.00 | Total: | \$0.00 | Total: | | \$0.00 |
| 13 | | Total Available | \$750,000.00 | | | Required: | \$375,000.00 | Allowed: | | \$262,500.00 |
| 14 | | | | | | | | | | |

Problema d'inversió: Introducció de dades a Solver

Parámetros de Solver

Establecer objetivo:

Para: ☒ Máx. ☐ Mín ☐ Valor de:

Cambiando las celdas de variables:

Sujeto a las restricciones:

\$C\$12 = \$C\$13

\$C\$6:\$C\$11 <= \$D\$6:\$D\$11

\$G\$12 >= \$G\$13

\$I\$12 <= \$I\$13

Agregar

Cambiar

Eliminar

Restablecer todo

Cargar/Guardar

☒ Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución:

Opciones

Método de resolución

Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Ayuda Resolver Cerrar

Problema d'inversió: Solució del model

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | |
|----|---|------------------------|---|----------------|---------------|------------------|----------------------|-----------------|-----------------------|--|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | Retirement Planning Services, Inc. | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 4 | | | Amount | Maximum | | Years to | 10+ Years | | Good or worse? | |
| 5 | | Bond | Inverted | 25,0% | Return | Maturity | (1 yes, 0 no) | Rating | (1 yes, 0 no) | |
| 6 | | ACME Chemical | \$112,500.00 | \$187,500.00 | 8.65% | 11 | 1 | 1-Excellent | 0 | |
| 7 | | Dyna Star | \$75,000.00 | \$187,500.00 | 9.50% | 10 | 1 | 3-Good | 1 | |
| 8 | | Eagle Vision | \$187,500.00 | \$187,500.00 | 10.00% | 6 | 0 | 4-Fair | 1 | |
| 9 | | Micro Modeling | \$187,500.00 | \$187,500.00 | 8.75% | 10 | 1 | 1-Excellent | 0 | |
| 10 | | OptiPro | \$0.00 | \$187,500.00 | 9.25% | 7 | 0 | 3-Good | 1 | |
| 11 | | Sabre Systems | \$187,500.00 | \$187,500.00 | 9.00% | 13 | 1 | 2-Very-Good | 0 | |
| 12 | | Total Inverted | \$750,000.00 | Total: | \$68,887.50 | Total: | \$562,500.00 | Total: | \$262,500.00 | |
| 13 | | SCS6:SCS11 | | | | | | | | |
| 14 | | Total Available | \$750,000.00 | | | Required: | \$375,000.00 | Allowed: | \$262,500.00 | |

Problema d'inversió: Resolució del model

MIRAR INFORMES EN EL FITXER D'EXCEL: **Aplicació2_t3.xlsx**

Problema d'inversió: Implementació del model en SAS

```
Aplicacio2_T3

libname t3 '.';
data t3.exem_inv;
  input _row_ $12. x1 x2 x3 x4 x5 x6 _type_ $ _rhs_;
  datalines;
rentabilitat 0.0865 0.0950 0.1000 0.0875 0.0925 0.0900 MAX .
inversio1 1 0 0 0 0 0 LE 187500
inversio2 0 1 0 0 0 0 LE 187500
inversio3 0 0 1 0 0 0 LE 187500
inversio4 0 0 0 1 0 0 LE 187500
inversio5 0 0 0 0 1 0 LE 187500
inversio6 0 0 0 0 0 1 LE 187500
total 1 1 1 1 1 1 EQ 750000
largtermini3 1 1 0 1 0 1 GE 375000
risc 0 1 1 0 1 0 LE 262500
;
run;

proc print data=t3.exem_inv;
run;

proc lp data=t3.exem_inv tableauout=t3.taula_opt RANGERHS RANGEPRICE;
run;

proc print data=t3.taula_opt;
run;
```


Problema d'inversió: Resolució del model

MIRAR EL FITXER D'OUTPUT DE SAS **Aplicació2_t3.out**

Problema d'inversió: Parametrització del model (I)

Paràmetres:

| <i>Símbol</i> | <i>Significat</i> |
|----------------------------|--|
| N | # de bons ($N = 6$) |
| $r_i, i = 1, \dots, N$ | Rendiment del bo i (en tant per u) |
| α | Inversió màxima en la mateixa companyia (en tant per u) |
| β | Inversió mínima en bons a llarg termini (en tant per u) |
| γ | Inversió màxima en empreses d'alt risc |
| \mathcal{L}, \mathcal{R} | Conjunt de bons a llarg termini i d'alt risc, respectivament |
| c | Capital total a invertir |

Variables de decisió:

| <i>Símbol</i> | <i>Significat</i> | <i>Domini</i> |
|------------------------|--|---------------|
| $x_i, i = 1, \dots, N$ | Capital (en €) a invertir en bons de l'empresa i | $x_i \geq 0$ |

Problema d'inversió: Parametrització del model (II)

| Variables de decisió: | |
|--|---|
| <i>Significat</i> | <i>Maximitzar el Benefici total anual de la inversió (en €)</i> |
| Expressió matemàtica | $\max_{x \in \mathbb{R}^N} z = \sum_{i=1}^N (r_i x_i)$ |
| Restriccions: | |
| <i>Significat</i> | <i>Expressió matemàtica</i> |
| Inversió del capital total (en €) | $\sum_{i=1}^N x_i = c$ |
| Límit d'inversió al mateix valor (en €) | $x_i \leq \alpha c, i = 1, 2, \dots, N$ |
| Màxim d'inversió a llarg termini i en actius d'alt risc (en €) | $\sum_{i \in \mathcal{L}} x_i \geq \beta c; \quad \sum_{i \in \mathcal{R}} x_i \leq \gamma c$ |

Problema d'inversió: Parametrització del model (III)

$$(P) = \left\{ \begin{array}{ll} \max_{x \in \mathbb{R}^n} & z = \sum_{i=1}^N r_i x_i \\ \text{s.a.:} & \sum_{i=1}^N x_i = c \\ & x_i \leq \alpha c, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ & \sum_{i \in \mathcal{L}} x_i \geq \beta c \\ & \sum_{i \in \mathcal{R}} x_i \leq \gamma c \\ & x_i \geq 0, \quad \forall i \end{array} \right.$$