SOLUCIÓN

Examen parcial de Inferencia Estadística

21 de abril de 2015

1. Sea X una variable aleatoria discreta, cuya función de densidad discreta es

$$f(x;p) = p^x\,(1-p)^{1-x}\,\mathbf{1}_{\{0,1\}}(x)$$

donde $p \in (0,1)$. Sean $X_1, \ldots, X_n$ las variables aleatorias muestrales correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n de X.

- Halle el estimador máximo verosímil de p. ¿Es un estimador insesgado?
- Compruebe que $\sum_{i=1}^n X_i$ es un estadístico suficiente de modelo.
- Halle la cota de Cramér-Rao para estimadores insesgados de p.
- Halle el estimador UMVU de p. ¿Es eficiente?
- Sabiendo, además, que $\sum_{i=1}^n X_i$ es completo, halle el estimador UMVU de p^2, para muestras de tamaño $n \geq 2$. ¿Puede existir un estimador insesgado de p^2 para muestras de tamaño $n = 1$?

2. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua, cuya función de densidad es

$$f(x,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

donde $\sigma > 0$. Sean $X_1, \ldots, X_n$ las variables aleatorias muestrales correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n de X.

- Halle dos estadísticos suficientes y que difieran con probabilidad 1 para este modelo.
- Halle la esperanza del estadístico $\sum_{i=1}^n X_i^2$.
- Halle la varianza del estadístico $\sum_{i=1}^n X_i^2$.

3. Conteste verdadero o falso, en esta misma hoja.

- Un estimador asintóticamente insesgado es siempre consistente. F
- Un estimador UMVU es un estimador eficiente. F
- El error cuadrático medio es igual a la norma al cuadrado del vector de sesgo más la traza de la matriz de varianzas y covarianzas del estimador, supuesta la existencia de todos estos objetos matemáticos. V
- Para el caso uniparamétrico, bajo condiciones de regularidad, si θ_n^* es el MLE basado en una muestra de tamaño n entonces $\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta)$ converge en ley a una variable aleatoria Y que sigue una distribución normal centrada en cero y cuya varianza es igual a $1/I(\theta)$, donde I es la correspondiente información de Fisher. V
- El estimador de Bayes depende de la distribución *a priori* pero no de la función de pérdida que elijamos. F
- El estimador de Bayes de θ basado en la pérdida cuadrática es igual a la mediana de la distribución a posteriori de θ. F
- Dado un modelo estadístico y una muestra aleatoria simple de tamaño n correspondiente a dicho modelo, siempre existe un estadístico suficiente basado en dicha muestra, sea cual sea el valor de $n \in \mathbb{N}$. V
- Todo estimador consistente es eficiente. F

Examen 21 de abril de 2015

1.- Sea X una v.a. discreta cuya función de densidad de probabilidad discreta es:

$$f(x,p) = p^{x}(1-p)^{1-x}\,\mathbb{1}_{\{0,1\}}(x) \qquad p\in(0,1)$$

Sean $X_1,\dots,X_n$ v.a. muestrales correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n de X.

* Halle el estimador Máximo-Verosímil de p. ¿Es un estimador insesgado?

La función de verosimilitud será:

$$L_x(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,p) = \prod_{i=1}^{n}\left\{p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}\,\mathbb{1}_{\{0,1\}}(x_i)\right\}$$

$$\underset{\uparrow}{=} p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

con probabilidad 1 tendremos la igualdad ya que todos los $x_i\in\{0,1\}$ con probabilidad 1

Tomando logaritmos:

$$\ln L_x(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln p + \left(n-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-p)$$

$$\frac{\partial \ln L_x(p)}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{\left(n-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{1-p} =$$

$$= \frac{(1-p)\sum_{i=1}^{n} x_i - \left(n-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)p}{p(1-p)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - np}{p(1-p)} =$$

$$= \frac{n}{p(1-p)}\Big(\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}_{\bar{x}_n} - p\Big) = \frac{n}{p(1-p)}\left(\bar{x}_n - p\right)$$

El MLE satisface:

$$\frac{n}{p(1-p)}\left(\bar{x}_n - p\right) = 0 \implies \underline{p^* = \bar{X}_n}$$

Además, es claro que

$$\text{Si } p < \bar{x}_n \Rightarrow \frac{\partial \ln L_x(p)}{\partial p} > 0$$

$$\text{Si } p > \bar{x}_n \Rightarrow \frac{\partial \ln L_x(p)}{\partial p} < 0$$

luego $\ln L_x(p)$ crece antes de p^* y decrece después $\Rightarrow$ en p^* tenemos un máximo (absoluto).

Además:

$$E_p(p^*) = E_p(\bar{X}_n) = E_p(X) = 0(1-p) + 1\cdot p = p$$

luego p^* es un estimador insesgado de p.

* Compruebe que $\sum_{i=1}^n X_i$ es un estadístico suficiente para el modelo.

$$f(x_1, \dots x_n, p) = p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x_i)\right)$$

$$= \underbrace{\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x_i)\right)}_{h(x_1 - x_n)} \underbrace{(1-p)^n\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}}_{g\left(\sum_{i=1}^n x_i,\, p\right)}$$

por el criterio de factorización de Neyman-Fisher, podemos afirmar que $S = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estadístico suficiente para el modelo.

* Cota de Cramér-Rao para estimadores insesgados de p.

$$f(x, p) = p^x (1-p)^{1-x} \qquad x \in \{0,1\}$$

$$\ln f(x,p) = x \ln p + (1-x)\ln(1-p)$$

$$\frac{\partial \ln f(x,p)}{\partial p} = \frac{x}{p} + \frac{(1-x)}{1-p}(-1) = \frac{x(1-p) - (1-x)p}{p(1-p)} = \frac{x-p}{p(1-p)}$$

$$I(p) = E\left(\left\{\frac{X-p}{p(1-p)}\right\}^2\right) = \left(\frac{0-p}{p(1-p)}\right)^2 \cdot \underbrace{P(X=0)}_{1-p} + \left(\frac{1-p}{p(1-p)}\right)^2 \underbrace{P(X=1)}_{p}$$

$$= \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p(1-p)}$$

La cota de Cramér-Rao será:

$$\boxed{\frac{1}{n I(p)} = \frac{1}{n \frac{1}{p(1-p)}} = \frac{p(1-p)}{n}}$$

* El estimador UMVU de p será el MLE puesto que es eficiente:

$$var_p(p^*) = var_p(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} var_p(X) = \frac{1}{n}\{E_p(X^2) - \underbrace{E_p(X)^2}_{p^2}\}$$

$$E_p(X^2) = 0^2 \cdot \underbrace{P(X=0)}_{1-p} + 1^2 \underbrace{P(X=1)}_{p} = p$$

$$\Rightarrow \boxed{var_p(p^*) = \frac{1}{n}\{p - p^2\} = \frac{p(1-p)}{n}}$$

coincide pues con la cota de Cramér-Rao: es eficiente y por tanto UMVU. (eficiente $\Rightarrow$ UMVU, recíproco FALSO)

* Sabiendo que $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es completo hallar UMVU de p^2.

$$E_p(S) = np \quad var_p(S) = np(1-p) \quad (\text{ya que } S \sim B(n,p))$$

por tanto $E_p(S^2) = var_p(S) + E_p(S)^2 =$

$$= np(1-p) + n^2p^2$$

$$= (n^2 - n)p^2 + np$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

$$E_p(S^2 - S) = n(n-1)p^2$$

si $n > 1$ $E_p\left(\frac{1}{n(n-1)}(S^2 - S)\right) = p^2$ $\quad \frac{1}{n(n-1)}(S^2-S)$ estimador insesgado de p^2 $(n>1)$

y al ser función de S, suficiente y completo, es por Lehmann-Scheffé el estimador UMVU de p^2

Para $n=1$ no existe ningún estimador insesgado de p^2 ya que para que lo fuera se precisaría que

$$p^2 = E_p(U) = U(0) \cdot P(X=0) + U(1) \cdot P(X=1) = U(0)(1-p) + U(1)p$$

$$= U(0) + p(U(1) - U(0))$$

Por tanto no es posible $\forall p$ que tengamos:

$$p^2 = u(0) + (u(1)-u(0))\,p$$

(a la izquierda de la igualdad sólo aparecen términos de 1er grado).

2.- Sea X una v.a. absolutamente continua cuya función de densidad es:

$$f(x,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} \qquad x \in \mathbb{N}$$

donde $\sigma > 0$. Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a. muestrales correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n de X.

* Halle dos estadísticos suficientes (que difieran con probabilidad 1).

$$f(x_1, \dots x_n, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x_i^2} \right\} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}}_{h(x_1 \dots x_n)} \underbrace{\frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}_{g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ \sigma\right)}$$

por Neyman - Fisher podemos afirmar que $S = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ es un estadístico suficiente.

Otro diferente (con probabilidad 1) puede ser:

(S, X_i) o bien e^S o toda la muestra $(X_1 \dots X_n)$

* $$E_\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} E_\sigma(X_i^2) = n\, E_\sigma(X^2)$$

pero $X \sim N(0,\sigma)$

$$\mathrm{var}_\sigma(X) = \sigma^2 = E_\sigma(X^2) - \underbrace{E_\sigma(X)}_{0}{}^2$$

por tanto

$$\boxed{E_\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = n\sigma^2}$$

* $\mathrm{var}_\sigma\left(\sum_{i=1}^{m} X_i^2\right) = m\,\mathrm{var}_\sigma(X_i^2) = m\left\{E_\sigma(X_i^4) - E_\sigma(X_i^2)^2\right\}$

$$E_\sigma(X_i^2) = E_\sigma(X^2) = \sigma^2$$

$$E_\sigma(X_i^4) = E_\sigma(X^4) = \sigma^4 E_\sigma\left(\left(\frac{X}{\sigma}\right)^4\right) = 3\sigma^4$$

ya que $\frac{X}{\sigma} \sim N(0,1)$ y $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z^4 e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz = 3$

por tanto:

$$\mathrm{var}_\sigma\left(\sum_{i=1}^{m} X_i^2\right) = m\left\{3\sigma^4 - \sigma^4\right\} = 2m\sigma^4$$

$$\boxed{\mathrm{var}_\sigma\left(\sum_{i=1}^{m} X_i^2\right) = 2m\sigma^4}$$

Otra forma: $S = \sum_{i=1}^{m} X_i^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2$ $\quad \frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$ $\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2$

$S = \sigma^2 \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2$ es suma de χ^2 con 1 grado de libertad e independientes, por tanto sigue una χ^2 con m-grados de libertad.

Sus momentos de orden "p" son:

$$E(S^p) = \sigma^2\int_0^\infty s^p \frac{s^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} e^{-\frac{s}{2}}\,ds = \frac{2^p}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\sigma^2\int_0^\infty \left(\frac{s}{2}\right)^{p+\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{s}{2}}\,\frac{1}{2}\,ds$$

$$= \frac{2^p\sigma^2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{m}{2}+p\right) \Rightarrow \boxed{E(S) = \frac{2\sigma^2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\frac{m}{2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) = m\sigma^2}$$

$$E(S^2) = \frac{2^2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{m}{2}+2\right)\sigma^2 = 4\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2}\sigma^2 = (m^2+2m)\sigma^2$$

$$\boxed{\mathrm{var}(S^2) = E(S^2) - E(S)^2 = (m^2+2m)\sigma^2 - (m\sigma)^2 = 2m\sigma^2}$$

entre otras formas de calcularlo.