DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA. Curs 03/04. 2on Q

EXAMEN FINAL. Convocatòria Extraordinària..

Cadenes de Markov. Una plataforma petrolífera disposa d'equips de submarinistes per les reparacions i les tasques de manteniment que cal efectuar sota l'aigua. Les condicions de treball són veritablement dures i no és estrany que durant una operació de manteniment algún dels tres integrants que composen un equip pateixi fatiga amb lo que el risc d'accident augmenta notablement podent-se posar en perill la vida de tots tres submarinistes. Per proves efectuades per la companyia se sap que en les condicions en les que els submarinistes han de treballar, el número de submarinistes sense manifestar fatiga al llarg de vàries operacions consecutives de un número inicial de 200 fluctua com segueix:

Operació	Després de la 1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª
	200	190	178	160	128	64	0

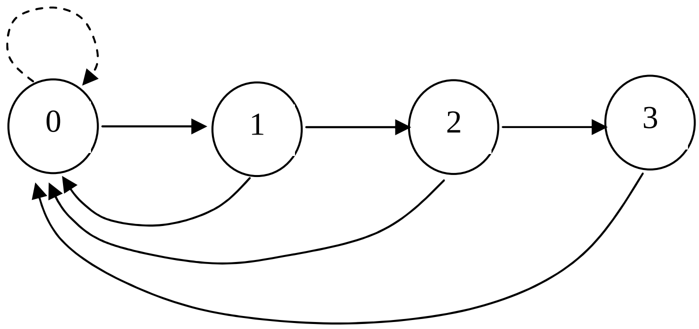
Per tal de rebaixar el risc d'accident la companyia ha establert que un submarinista ha de ser reemplaçat per un de fresc en quan pateixi símptomes de fatiga o be després de la 3ª operació

Es demana:

1- Establir una cadena de Markov $\{X_k\}$ corresponent al número de operacions completades per un submarinista el dia k-èssim sense haver patit fatiga. Suposeu que les operacions s'efectuen al final del dia. Calcular la matriu de probabilitats de transició, dibuixar el diagrama corresponent, les classes de la cadena y la periodicitat dels seus estats.
2- Número mig d'operacions consecutives que efectua un submarinista abans de ser rellevat..
3- Probabilitat de que en una missió de manteniment hi hagi al menys un submarinista que presenti símptomes de fatiga.
4- Si les operacions de manteniment són diàries, i es treballa cada dia de la setmana, calcular el número mig de reemplaçaments per setmana.
5- Si un submarinista suporta tres operacions consecutives sense símptomes de fatiga llavors rep una bonificació. Calcular la probabilitat que te un submarinista que acaba de sortir de un període de recuperació i s'incorpora a l'equip de manteniment de rebre aquesta bonificació.

Teoria de Cues. Una petita companyia aèria d'una illa de les Antilles disposa de 5 avionetes, que cal reparar amb una taxa de 1 cada 30 dies. Es disposen de 2 tècnics per reparacions, cadascun dels quals necessita un promig de 3 dies per una reparació. Els temps entre avaries i de reparació són exponencials.

1. Determinar el nombre mig d'avionetes en funcionament.
2. Calcular el temps mig que una avioneta està fora de servei quan requereix una reparació.
3. Calcular el percentatge del temps que un determinat tècnic està lliure.
4. Cada turista lloga una avioneta per 500€. Determinar els ingressos anuals de la companyia.



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0 & 0.94 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Una única classe aperiòdica}$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0 & 0.94 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

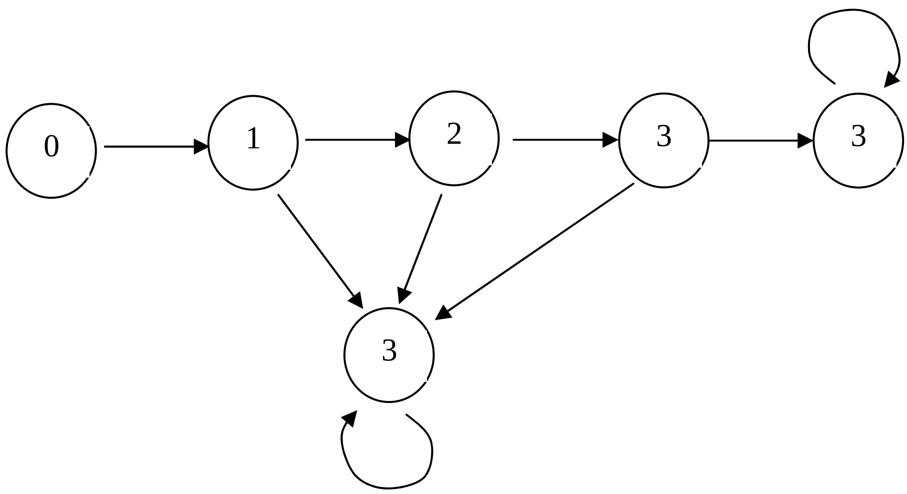
$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.26, 0.26, 0.247, 0.23218)$$

2) Número mig d'operacions consecutives, $E[\ell]$, entre $X_k = 0$ i $X_{k+\ell} = 0$: $\mu_{0,0} = 1/\pi_0 = 3.84.$ $\rightarrow 2,84$ operacions.

3) Probabilitat de simptoma de fatiga: $\alpha = \pi_1 p_{10} + \pi_2 p_{20} = 0,02817$;
Probabilitat de algn simptoma de fatiga: $1 - (1-\alpha)^3 = 1 - 0,9718^3 = 0,0821$.

4) $7 \cdot 3 \cdot \pi_0 = 5,53$ reemplaçaments cada setmana.



$$P = \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.94 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline R & Q \end{array}\right),\ Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.94 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{0,P} \\ f_{1,P} \\ f_{2,P} \\ f_{3,P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.94 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.893 \\ 0.893 \\ 0.94 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

Teoria de Cues. Solució. El model és de exponencial i de població finita: M/M/2//5. La taxa d'avaries és $\lambda = \frac{1}{30}$ avionetes per dia i la taxa de reparacions és $\mu = \frac{1}{3}$ avionetes per dia.

El nombre mig d'avionetes en funcionament és el nombre total d'avionetes, N, menys el nombre esperat d'avionetes en reparació, *L*:

$$\boxed{N - L = 5 - L = 5 - \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n}.$$

Cal determinar les $P_n = C_n \cdot P_0$ i per això calen les C_n i P_0 .

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = \begin{cases} \dfrac{5!}{(5-n)!\,n!}\left(\dfrac{1}{10}\right)^n & n = 1 \\ \dfrac{5!}{(5-n)!\,2!}\left(\dfrac{1}{10}\right)^2\left(\dfrac{1}{2 \cdot 10}\right)^{n-2} & n = 2,\ldots,5 \end{cases} \quad i \;\; C_0 = 1$$

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \dfrac{5!}{(5-n)!\,n!}\left(\dfrac{1}{10}\right)^n \cdot P_0 & n = 1 \\ \dfrac{5!}{(5-n)!\,2!}\left(\dfrac{1}{10}\right)^2\left(\dfrac{1}{2 \cdot 10}\right)^{n-2} \cdot P_0 & n = 2,\ldots,5 \end{cases}$$

i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
C_i	1	0.5	0.1	0.015	0.0015	0.000075

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{5} C_n} = \frac{1}{1 + 0.5 + 0.1 + 0.015 + 0.0015 + 0.000075} = 0.619$$

i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
P_i	0.619	0.310	0.062	0.009	0.001	0.00004

➡ $N - L = 5 - L = 5 - \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n = 5 - 0.465 = 4.535$ avionetes en promig en funcionament .

➡ El temps mig que una avioneta passa en reparació és *W*.

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{0.465}{0.151} = 3.08 \text{ dies on}$$

$$\bar{\lambda} = \lambda \cdot (N - L) = \frac{1}{30} \cdot (5 - 0.465) = \frac{1}{30} \cdot (4.535) = 0.151$$

➡ La fracció de temps que un determinat tècnic passa inactiu és $P_0 + 0.5 \cdot P_1 = 0.619 + 0.5 \cdot 0.310 = 0.774$