UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

SEGON CONTROL DE TEORIA

Programació Lineal i Entera, curs 2016-17
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM :

	Temps estimat	Punts		Puntuació	
Test	20min	2.0 pt	C:	I:	
Exercici 1	60min	a) 2.0pt		d) 1.0pt	
		b) 2.0pt		e) 0.5pt	
		c) 0.5pt		f) 2.0pt	
Total	90min	10 pt			

- **Prohibida la presència de mòbils durant la prova.**
- **Copiar o facilitar la còpia implica suspendre el control.**

TEST (2 punts / 30min / sense apunts)

- Encercleu **V** (vertader) o **F** (fals) o indiqueu a l'espai [ ] el contingut mancant a $\boxed{}$.
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. El problema (D) del següent problema primal

$$(P)\begin{cases} \max & -x_1 & -3x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \le 2 \\ & 2x_1 & +x_2 & =3 \\ & -x_1 & & \ge 4 \end{cases}$$

a) **V / F** Té $\lambda_1 \le 0$, λ_2 lliure i $\lambda_3 \ge 0$. F
b) **V / F** Té totes les constriccions d'igualtat. V
c) **V / F** És de minimització. V

TEST 2. Que la solució bàsica òptima d'un problema (P) sigui degenerada dual, implica que:

a) **V / F** El cost reduït d'alguna VNB és zero. V
b) **V / F** Alguna variable bàsica és zero. F
c) **V / F** Alguna variable dual λ és zero. F

TEST 3. Segons el Ta. de folga complementària, les solucions x i λ factibles primals i duals :

a) [ ] Satisfàn $\lambda_j(\boxed{\ ?\ }) = 0,\ j = 1,2,\dots,m. \to (a_j'x - b_j)$
b) [ ] Satisfàn $(\boxed{\ ?\ })x_i = 0,\ i = 1,2,\dots,n. \to (c_i - \lambda' A_i)$
c) **V / F** Satisfàn $\lambda' b \le c' x$. F

TEST 4. En un joc finit de suma zero, el teorema minimax assegura:

a) **V / F** Que per algun dels dos jugadors pot no existir una estratègia òptima. F
b) **V / F** Que el problema (P) del jugador 1 satisfà $z_P^* \equiv z_D^*$. V
c) **V / F** Que és impossible que els dos jugadors tinguin un guany net positiu. V

TEST 5. Donat el problema primal (P) si una solució bàsica $\mathcal{B}$ és solució bàsica factible dual llavors:

a) **V / F** $\mathcal{B}$ és factible primal. F
b) **V / F** $r \le 0$. F
c) [ ] El vector $\lambda' = \boxed{\ ?\ }$ dona les coordenades d'un punt extrem del poliedre dual.

TEST 6. D'acord amb el Ta. feble de dualitat i els seus corol·laris, podem afirmar que:

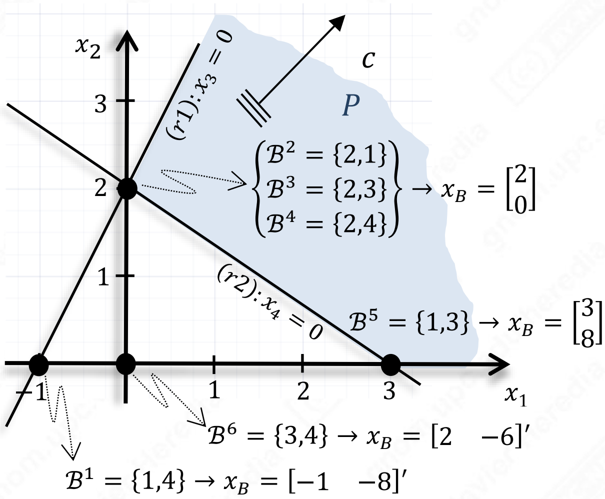
a) [ ] (P) infactible $\boxed{\Rightarrow \text{ ó } \Leftarrow}$ (D) il·limitat. $\Leftarrow$
b) [ ] Si λ^* i x^* són factibles, llavors $\lambda^{*\prime} b = c' x^*$ $\boxed{\Rightarrow \text{ ó } \Leftarrow}$ λ^* i x^* òptims (P) i (D).$\Rightarrow$
c) [ ] $c' x^*$ $\boxed{\le \text{ ó } \ge}$ $\lambda^{*\prime} b$. $\ge$

NOM :

EXERCICI 1. (8 punts / 75min / amb transparències de teoria i calculadora)

Considereu el següent problema de programació lineal:

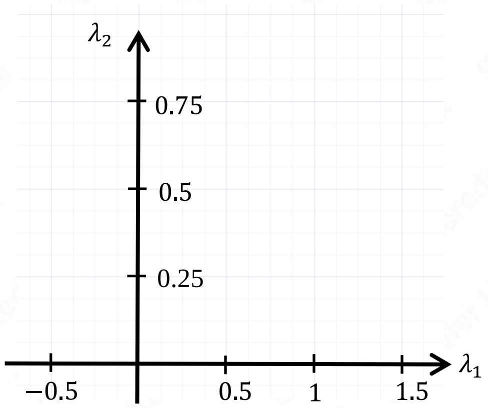
$$(P)\left\{\begin{array}{lrrl} \min & x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ (r1) & -2x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ (r2) & 2x_1 & +3x_2 & \geq 6 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}\right.$$



a) **(2 punts)** Formuleu el problema dual i representeu gràficament la seva regió factible P_D, identificant la solució òptima λ^*.

$(D)\left\{ \right.$

Solució òptima:



b) **(2 punts)** Calculeu les solucions duals λ^2, λ^3 i λ^4 associades a les tres bases òptimes de (P) $\mathcal{B}^2$, $\mathcal{B}^3$ i $\mathcal{B}^4$ respectivament, d'acord amb el Ta fort de dualitat. Marqueu aquestes solucions duals a la gràfica de l'apartat a).

- $\lambda^2 =$
- $\lambda^3 =$
- $\lambda^4 =$

c) **(0.5 punts)** Quina relació s'observa entre la degeneració de les solucions primal i dual?

d) **(1 punt)** A l'apartat b) podeu observar que el vector λ^4 que, segons el corol·lari del Ta fort de dualitat, correspon a la **base primal $\mathcal{B}^4$ associada al punt extrem òptim de (P) no és solució òptima de (D)**, fet que contradiu aparentment el mencionat corol·lari. Discutiu raonadament si aquesta contradicció realment existeix.

Volem ara calcular la solució òptima de (P) a partir de la base $\mathcal{B}^6$.

e) **(0.5 punts)** Indiqueu quin algorisme hauríem de fer servir i perquè.

f) **(2 punts)** Calculeu l'òptim x^* a partir de $\mathcal{B}^6$ amb l'algorisme triat a l'apartat anterior. Identifiqueu sobre les gràfiques de l'enunciat i de l'apartat a) les diferents iteracions de l'algorisme.

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

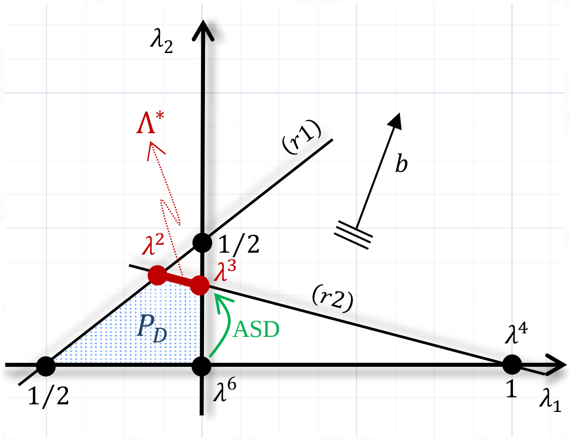
Apartat a)

$$(D)\begin{cases}\max & 2\lambda_1 & +6\lambda_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ (r1) & -2\lambda_1 & +2\lambda_2 & \leq 1 \\ (r2) & \lambda_1 & +3\lambda_2 & \leq 1 \\ & \lambda_1 \leq 0, & \lambda_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Gràficament observem que (D) té òptims alternatius. El conjunt de solucions òptimes de (D) és:

$$\Lambda^* = \{\lambda \in \mathbb{R}^2 | \lambda = \alpha\lambda^2 + (1-\alpha)\lambda^3, \alpha \in [0,1]\}$$

amb $\lambda^2 = [-1/8 \quad 3/8]'$ i $\lambda^3 = [0 \quad 1/3]'$.



Apartat b)

- $\lambda^{2\prime} = c_B'[B^2]^{-1} = [1 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 2\end{bmatrix}^{-1} = [1 \quad 1]\begin{bmatrix}1/4 & 1/4\\-3/8 & 1/8\end{bmatrix} = [-1/8 \quad 3/8]$
- $\lambda^{3\prime} = c_B'[B^3]^{-1} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}^{-1} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}0 & 1/3\\1 & -1/3\end{bmatrix} = [0 \quad 1/3]$
- $\lambda^{4\prime} = c_B'[B^4]^{-1} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & -1\end{bmatrix}^{-1} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & -1\end{bmatrix} = [1 \quad 0]$

Apartat c)

S'observa que per al cas estudiat les solucions primals òptimes degenerades corresponen a solucions duals bàsiques que són òptims alternatius, però també poden correspondre a solucions duals bàsiques infactibles duals.

Apartat d)

Aquesta situació no representa cap contradicció amb el corol·lari del Ta. fort de dualitat. La matriu bàsica B que apareix a l'expressió $\lambda' = c_B'B^{-1}$ correspon a una SBF òptima **factible dual** ($r_N \geq 0$). La base $\mathcal{B}^4 = \{2,4\}$ ($\mathcal{N}^4 = \{1,3\}$) associada a la solució infactible dual λ^4 viola aquesta condició, doncs té un cost reduït negatiu: $r_N' = c_N' - \lambda^{4\prime}A_N = [1 \quad 0] - [1 \quad 0]\begin{bmatrix}-2 & 1\\2 & 0\end{bmatrix} = [3 \quad \mathbf{-1}]$.

Apartat e)

L'algorisme a aplicar, ASP ó ASD, depèn de la factibilitat de la base $\mathcal{B}^6 = \{3,4\}$:

- $\mathcal{B}^6$ amb $x_B = [2 \quad -6]'$és infactible primal, quedant així descartada l'aplicació de l'algorisme del símplex primal.
- $\mathcal{B}^6$ amb amb $r_N' = c_N' - c_B'[B^6]^{-1} = [1 \quad 1] - [0 \quad 0]\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\2 & 3\end{bmatrix} = [1 \quad 1] \geq 0$ és factible dual, i per tant és vàlida l'aplicació de l'algorisme del símplex dual.

Apartat f)

Símplex dual a partir de $\mathcal{B} = \{3,4\}$:

$$(P)\begin{cases}\min & x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ (r1) & -2x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ (r2) & 2x_1 & +3x_2 & \geq 6 \\ & x_{1,} & x_{2,} & \geq \ 0\end{cases}$$

$$\mathcal{B} = \{3,4\}, B = B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}, \mathcal{N} = \{1,2\}, r_N = c_N = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, z = 0$$

- **1a iteració:** $\mathcal{B} = \{3,4\}, \mathcal{N} = \{1,2\}$

- Selecció de la VB de sortida p: $x_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 2, B(2) = 4, x_4$ VB sortint.
- Identificació problema (D) il·limitat: $d'_{r_N} = \beta_2 A_N = [0 \quad -1]\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = [-2 \quad -3] \ngeq 0$
- VNB d'entrada: $\theta_D^* = \min_{j\in\mathcal{N}, d_{r_{N_j}}<0} \left\{ \frac{-r_j}{d_{r_{N_j}}} \right\} = \min\left\{-\frac{1}{-2}, -\frac{1}{-3}\right\} = \frac{1}{3} \Rightarrow q = 2$
- Canvi de base i actualitzacions:
    - Actualització variables duals i f.o.:

      $r_N := r_N + \theta_D^* d_{r_N} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$, $r_{B(p)} = r_4 := \theta_D^* = \frac{1}{3}$

      $\lambda := \lambda - \theta_D^* \beta'_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $z := z - \theta_D^* x_{B(p)} = 0 - \frac{1}{3}(-6) = 2$
    - Actualització variables primals:

      $d_B = -B^{-1}A_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\theta^* = -\frac{x_{B(2)}}{d_{B(2)}} = -\frac{-6}{3} = 2.$

      $x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_q = x_2 := \theta^* = 2$
    - $\mathcal{B} \leftarrow \{3,2\}, \mathcal{N} \leftarrow \{1,4\}$

- **2a iteració:** $\mathcal{B} = \{3,2\}, \mathcal{N} = \{1,4\}$
    - Selecció de la VB de sortida p: $x_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ òptim.

La iteració s'indica a les gràfiques amb el símbol $\xrightarrow{\text{ASD}}$.