ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES

1era Parte: ANÁLISIS DETERMINISTA

TEMA 2.- ANÁLISIS DETERMINISTA I:
Análisis de la Tendencia

Autora: Helena Chuliá

Tema 2. Análisis de Series Temporales: Análisis de la tendencia

- Este tema está dedicado al estudio de las series temporales que no tienen componente estacional.
  - **SERIE TIPO 1**: Serie sin tendencia y sin componente estacional
  - **SERIE TIPO 2**: Serie sin tendencia y con componente estacional
  - **SERIE TIPO 3**: Serie con tendencia y sin componente estacional
  - **SERIE TIPO 4**: Serie con tendencia y con componente estacional

		Tendencia	
		Sí	**No**
Componente estacional	**Sí**	SERIE TIPO 4	SERIE TIPO 2
	No	$\boxed{\text{SERIE TIPO 3}}$	$\boxed{\text{SERIE TIPO 1}}$

Tema 2. Análisis de Series Temporales: Análisis de la tendencia

2.1. Métodos de previsión para <u>series de tipo 1</u>

2.1.1. Método ingenuo

2.1.2. Método de la media simple

2.1.3. Método de las medias móviles

2.1.4. Método de alisado exponencial

2.2. Métodos de previsión para <u>series de tipo 3</u>

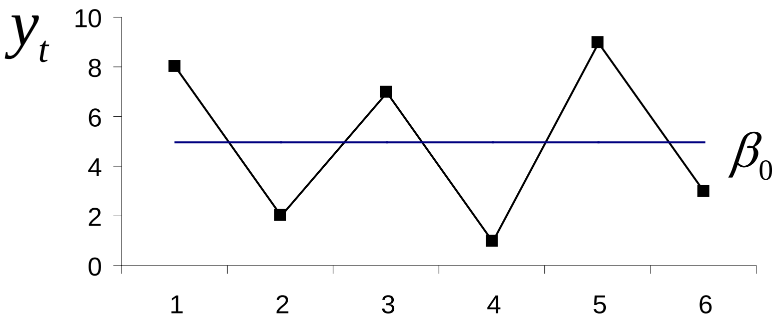
2.2.1. Método de tendencia lineal

2.2.2. Método de las dobles medias móviles

2.2.3. Método de Alisado exponencial lineal de Holt

2.1. Métodos de previsión para series de tipo 1

- **SERIE TIPO 1**: Serie sin tendencia y sin componente estacional
- Supondremos que la serie no crece ni decrece sistemáticamente a lo largo del tiempo. Por tanto, los valores se distribuyen aleatoriamente alrededor de un valor constante.



$$y_t = \beta_0 + u_t$$

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

- u_t es una componente aleatoria. No tiene una pauta de comportamiento estable,
- Y_t sigue un esquema aditivo
- Estamos suponiendo que únicamente existe un **componente irregular** (componente aleatorio) y una **tendencia pero constante** e igual a $ß_0$ (no crece ni decrece).

$$y_t = \beta_0 + u_t$$

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.1.1. Método ingenuo

- Método poco sofisticado que consiste en predecir el valor de la serie en un periodo con el valor que toma la serie en el periodo anterior.
  - Periodo muestral:

$$\hat{y}_t(1) = \hat{y}_{t+1/t} = y_t$$

  - Periodo extramuestral:

$$\hat{y}_T(m) = y_T \quad para \quad m = 1, 2, 3, \ldots, H$$

Se define la predicción a partir del valor que toma la serie en el último periodo para el cual tenemos información

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.1.1. Método ingenuo

Ejemplo: Obtener predicciones para esta serie temporal utilizando el método ingenuo

	Serie T1
90-1	-2,73
90-2	-0,11
90-3	-0,82
90-4	-1,08
91-1	-5,56
91-2	-5,30
91-3	-0,95
91-4	4,90
92-1	-0,55
92-2	-0,95
92-3	-1,02
92-4	-3,48
93-1	4,28
93-2	-2,61
93-3	-1,34
93-4	-5,35
94-1	-4,57
94-2	3,03
94-3	2,20
94-4	1,75
95-1	0,04
95-2	-2,64
95-3	4,55
95-4	-0,79

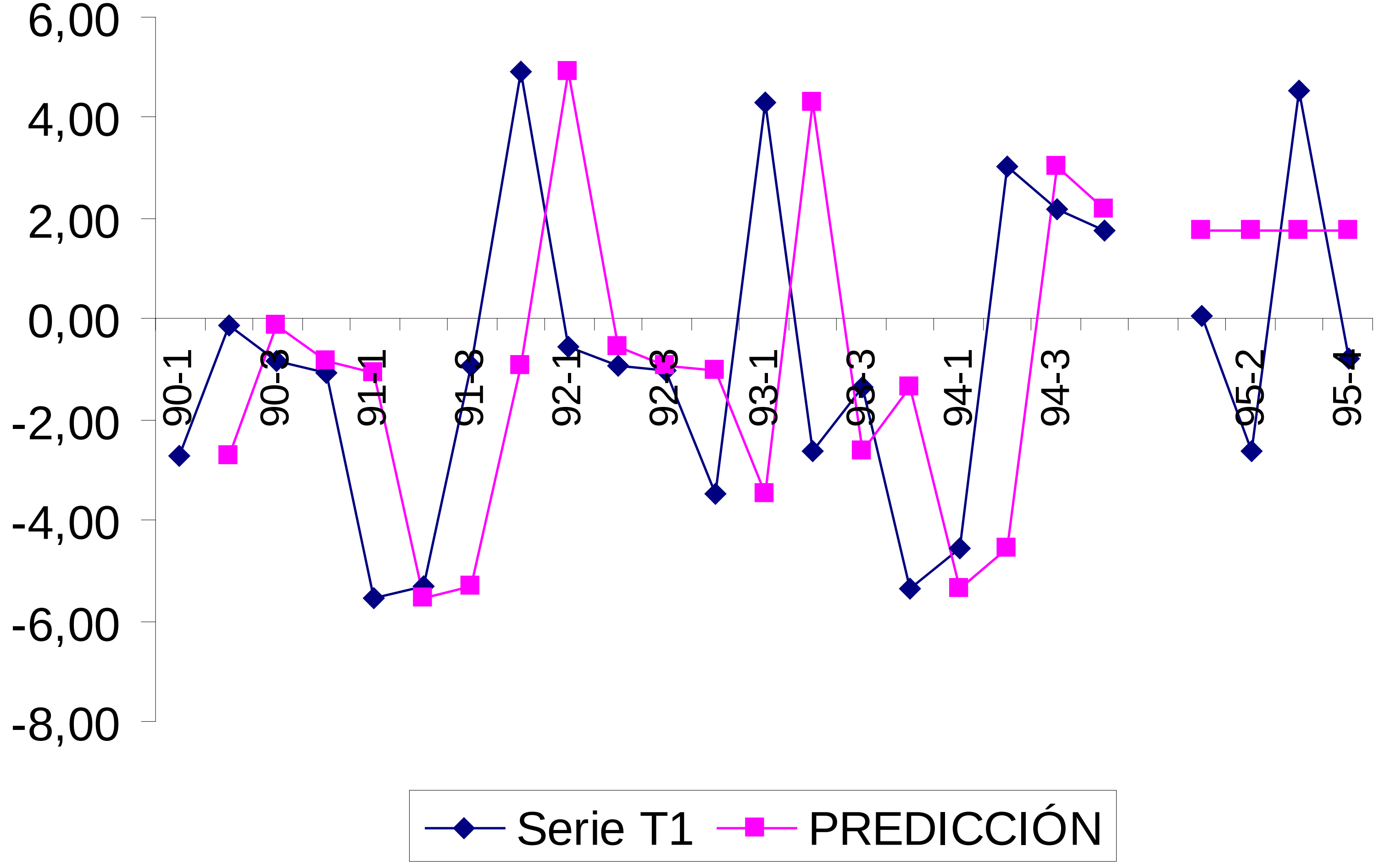
2.1.1. Método ingenuo

	Serie T1	PREDICCIÓN	ERROR	EA	EC
90-1	-2,73	--	--	--	--
90-2	-0,11	-2,73	2,62	2,62	6,86
90-3	-0,82	-0,11	-0,71	0,71	0,50
90-4	-1,08	-0,82	-0,26	0,26	0,07
91-1	-5,56	-1,08	-4,48	4,48	20,07
91-2	-5,30	-5,56	0,26	0,26	0,07
91-3	-0,95	-5,30	4,35	4,35	18,92
91-4	4,90	-0,95	5,85	5,85	34,22
92-1	-0,55	4,90	-5,45	5,45	29,70
92-2	-0,95	-0,55	-0,40	0,4	0,16
92-3	-1,02	-0,95	-0,07	0,07	0,00
92-4	-3,48	-1,02	-2,46	2,46	6,05
93-1	4,28	-3,48	7,76	7,76	60,22
93-2	-2,61	4,28	-6,89	6,89	47,47
93-3	-1,34	-2,61	1,27	1,27	1,61
93-4	-5,35	-1,34	-4,01	4,01	16,08
94-1	-4,57	-5,35	0,78	0,78	0,61
94-2	3,03	-4,57	7,60	7,6	57,76
94-3	2,20	3,03	-0,83	0,83	0,69
94-4	1,75	2,20	-0,45	0,45	0,20
95-1	0,04	1,75	-1,71	1,71	2,92
95-2	-2,64	1,75	-4,39	4,39	19,27
95-3	4,55	1,75	2,80	2,8	7,84
95-4	-0,79	1,75	-2,54	2,54	6,45

EAM(muest)	***2,974***
ECM(muest)	***15,857***
EAM(extram)	***2,860***
ECM(extram)	***9,122***

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.1.1. Método ingenuo



Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.1.2. Método de media simple

- Es un método que consiste en definir el predictor como **la media de los valores de la serie en el periodo muestral**, es decir,
  - Periodo muestral:

$$\hat{y}_t(1) = \overline{y} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{T} \quad t = 1, 2, 3, .., T$$

  - Periodo extramuestral:

$$\hat{y}_T(m) = \overline{y} \quad m = 1, 2, 3, ..., H$$

2.1.2. Método de media simple

Ejemplo: Obtener predicciones para la serie anterior utilizando el método de media simple

	Serie T1
90-1	-2,73
90-2	-0,11
90-3	-0,82
90-4	-1,08
91-1	-5,56
91-2	-5,30
91-3	-0,95
91-4	4,90
92-1	-0,55
92-2	-0,95
92-3	-1,02
92-4	-3,48
93-1	4,28
93-2	-2,61
93-3	-1,34
93-4	-5,35
94-1	-4,57
94-2	3,03
94-3	2,20
94-4	1,75
95-1	0,04
95-2	-2,64
95-3	4,55
95-4	-0,79

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

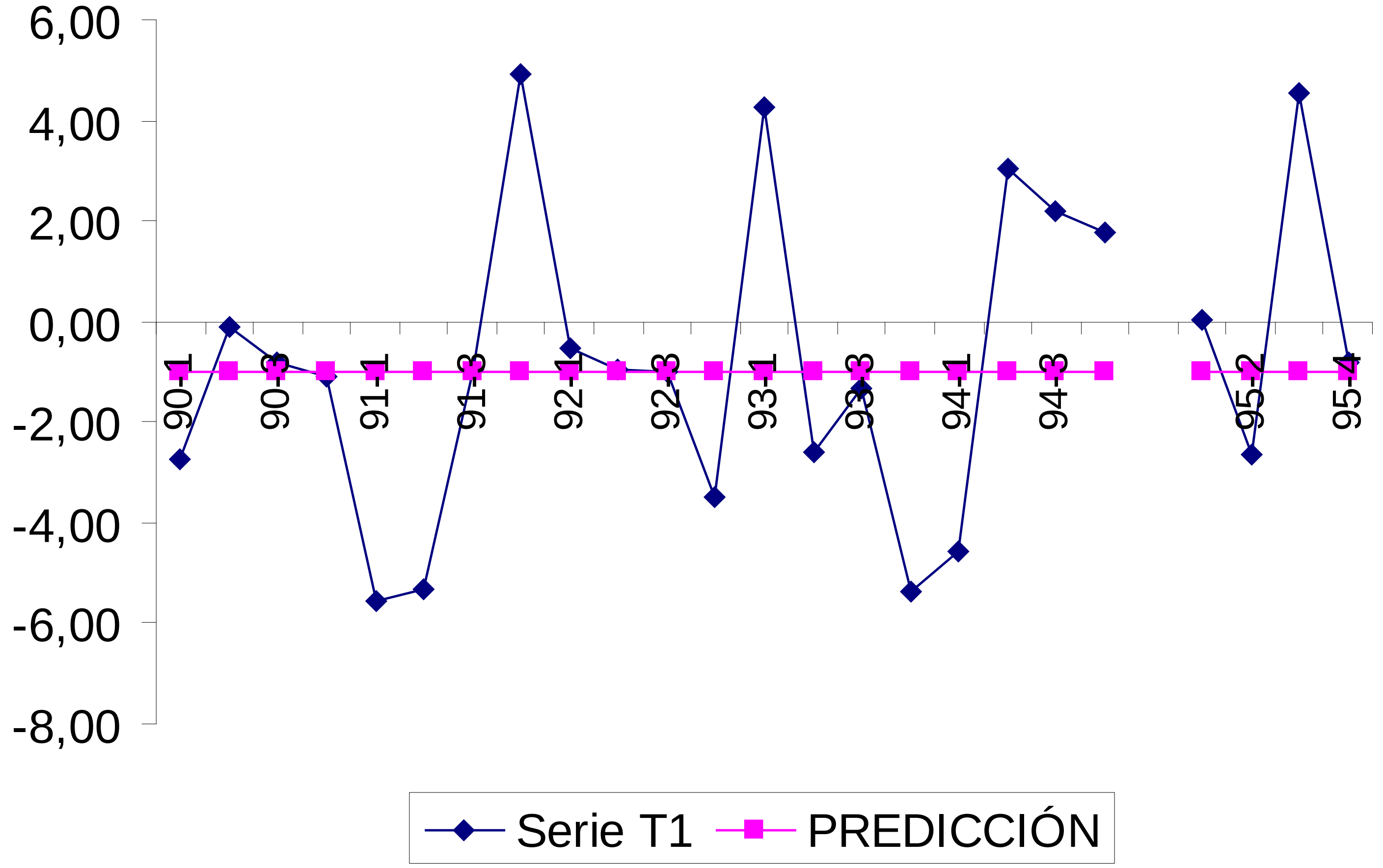
2.1.2. Método de media simple

	Serie 1	PREDICCIÓN	ERROR	EA	EC
90-1	-2,73	-1,01	-1,72	1,717	2,948
90-2	-0,11	-1,01	0,90	0,903	0,815
90-3	-0,82	-1,01	0,19	0,193	0,037
90-4	-1,08	-1,01	-0,07	0,067	0,004
91-1	-5,56	-1,01	-4,55	4,547	20,675
91-2	-5,30	-1,01	-4,29	4,287	18,378
91-3	-0,95	-1,01	0,06	0,063	0,004
91-4	4,90	-1,01	5,91	5,913	34,964
92-1	-0,55	-1,01	0,46	0,463	0,214
92-2	-0,95	-1,01	0,06	0,063	0,004
92-3	-1,02	-1,01	-0,01	0,007	0,000
92-4	-3,48	-1,01	-2,47	2,467	6,086
93-1	4,28	-1,01	5,29	5,293	28,016
93-2	-2,61	-1,01	-1,60	1,597	2,550
93-3	-1,34	-1,01	-0,33	0,327	0,107
93-4	-5,35	-1,01	-4,34	4,337	18,810
94-1	-4,57	-1,01	-3,56	3,557	12,652
94-2	3,03	-1,01	4,04	4,043	16,346
94-3	2,20	-1,01	3,21	3,213	10,323
94-4	1,75	-1,01	2,76	2,763	7,634
95-1	0,04	-1,01	1,05	1,053	1,109
95-2	-2,64	-1,01	-1,63	1,627	2,647
95-3	4,55	-1,01	5,56	5,563	30,947
95-4	-0,79	-1,01	0,22	0,223	0,050

EAM(muest)	***2,291***
ECM(muest)	***9,028***
EAM(extram)	***2,117***
ECM(extram)	***8,688***

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.1.2. Método de media simple



Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.1.3. Método de medias móviles

- Es un método que consiste en definir la predicción como **la media simple de unos cuantos periodos muestrales previos** al que corresponde la previsión.

- A diferencia del método de la media simple NO utiliza todas las observaciones, sino sólo un número reducido de ellas, precisamente las que están más próximas.

- A este número de observaciones que se utilizan para definir la media se le llama **longitud de la media móvil** y lo indicaremos por k.

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.1.3. Método de medias móviles

- El predictor del método de las medias móviles de longitud k es:
  - Periodo muestral:

$$MM(k) \qquad \hat{y}_t(1) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} y_{t-i}}{k} \quad t = 1, 2, 3, .., T$$

  - Periodo extramuestral:

$$\hat{y}_T(m) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} y_{T-i}}{k} \quad m = 1, 2, 3, ..., H$$

2.1.3. Método de medias móviles

- También podemos escribir la expresión del predictor siguiendo un proceso iterativo, es decir, la predicción de cada periodo se obtiene a partir de la calculada para el periodo anterior: introduciendo la información más próxima y no considerando la más alejada.
- **Ecuación de actualización**:
  - Periodo muestral:

$$\hat{y}_t(1) = \hat{y}_{t-1}(1) + \frac{1}{k} \cdot \left(y_t - y_{t-k} \right) \quad t = 1, 2, 3, .., T$$

  - Periodo extramuestral:

$$\hat{y}_T(m) = \hat{y}_{T-1}(1) + \frac{1}{k} \cdot \left(y_T - y_{T-k} \right) \quad m = 1, 2, 3, ..., H$$

2.1.3. Método de medias móviles

- Veamos el caso del periodo muestral:

$$\hat{y}_t(1) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} y_{t-i}}{k} = \frac{1}{k}\left(y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + \ldots + y_{t-k+1} \right) =$$

2.1.3. Método de medias móviles

- Veamos el caso del periodo muestral:

$$\hat{y}_t(1) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} y_{t-i}}{k} = \frac{1}{k}\left(y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + \ldots + y_{t-k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\left(y_{t-1} + y_{t-2} + \ldots + y_{t-k+1} + y_{t-k}\right) + \frac{1}{k} y_t - \frac{1}{k} y_{t-k} =$$

2.1.3. Método de medias móviles

- Veamos el caso del periodo muestral:

$$\hat{y}_t(1) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} y_{t-i}}{k} = \frac{1}{k}\left(y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + \ldots + y_{t-k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\left(y_{t-1} + y_{t-2} + \ldots + y_{t-k+1} + y_{t-k}\right) + \frac{1}{k} y_t - \frac{1}{k} y_{t-k} =$$

$$= \hat{y}_{t-1}(1) + \frac{1}{k}\left(y_t - y_{t-k}\right) \quad t = 1, 2, 3, .., T$$

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.1.3. Método de medias móviles

- Cuestiones importantes:

1) Para poder definir la predicción es preciso disponer de un número de observaciones igual a la longitud elegida
2) La longitud es el número de periodos iniciales para los cuales no puede definirse la predicción
3) No podemos hablar de un método de medias móviles, sino de tantos métodos como longitudes k de la media móvil se escojan.
   - Cuanto menor sea la longitud más sensible es la predicción a los valores recientes de la serie (menos alisada).
   - Cuanto mayor sea la longitud menos sensible será a los valores recientes (más alisada).

2.1.3. Método de medias móviles

Ilustración: Supongamos k=2

t	serie	predicción
1	5	--
2	8	--
3	10	6,5
4	15	9
5	23	12,5
6	21	19
7	25	19

$$\hat{y}_2(1) = \frac{\sum_{i=0}^{2-1} y_{t-i}}{2} = \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{8+5}{2} = 6.5$$

$$\hat{y}_3(1) = \frac{\sum_{i=0}^{2-1} y_{t-i}}{2} = \frac{y_3 + y_2}{2} = \frac{10+8}{2} = 9$$

...

$$\hat{y}_5(1) = \frac{\sum_{i=0}^{2-1} y_{t-i}}{2} = \frac{y_5 + y_4}{2} = \frac{23+15}{2} = 19$$

$$\hat{y}_5(2) = \frac{\sum_{i=0}^{2-1} y_{t-i}}{2} = \frac{y_5 + y_4}{2} = \frac{23+15}{2} = 19$$

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.1.3. Método de medias móviles

Ilustración: Supongamos k=2

y aplicando la regla de actualización:

$$\hat{y}_2(1) = 6.5$$

$$\hat{y}_3(1) = \hat{y}_2(1) + \frac{1}{2}(y_3 - y_1) = 6.5 + \frac{1}{2}(10-5) = 9$$

$$\hat{y}_4(1) = \hat{y}_3(1) + \frac{1}{2}(y_4 - y_2) = 9 + \frac{1}{2}(15-8) = 12.5$$

$$\ldots$$

$$\hat{y}_5(1) = \hat{y}_4(1) + \frac{1}{2}(y_5 - y_3) = 12.5 + \frac{1}{2}(23-10) = 19$$

$$\hat{y}_5(2) = \hat{y}_4(1) + \frac{1}{2}(y_5 - y_3) = 12.5 + \frac{1}{2}(23-10) = 19$$

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.1.3. Método de medias móviles

Ejemplo: Obtener predicciones para la serie anterior utilizando el método de medias móviles k=2

	Serie T1
90-1	-2,73
90-2	-0,11
90-3	-0,82
90-4	-1,08
91-1	-5,56
91-2	-5,30
91-3	-0,95
91-4	4,90
92-1	-0,55
92-2	-0,95
92-3	-1,02
92-4	-3,48
93-1	4,28
93-2	-2,61
93-3	-1,34
93-4	-5,35
94-1	-4,57
94-2	3,03
94-3	2,20
94-4	1,75
95-1	0,04
95-2	-2,64
95-3	4,55
95-4	-0,79

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

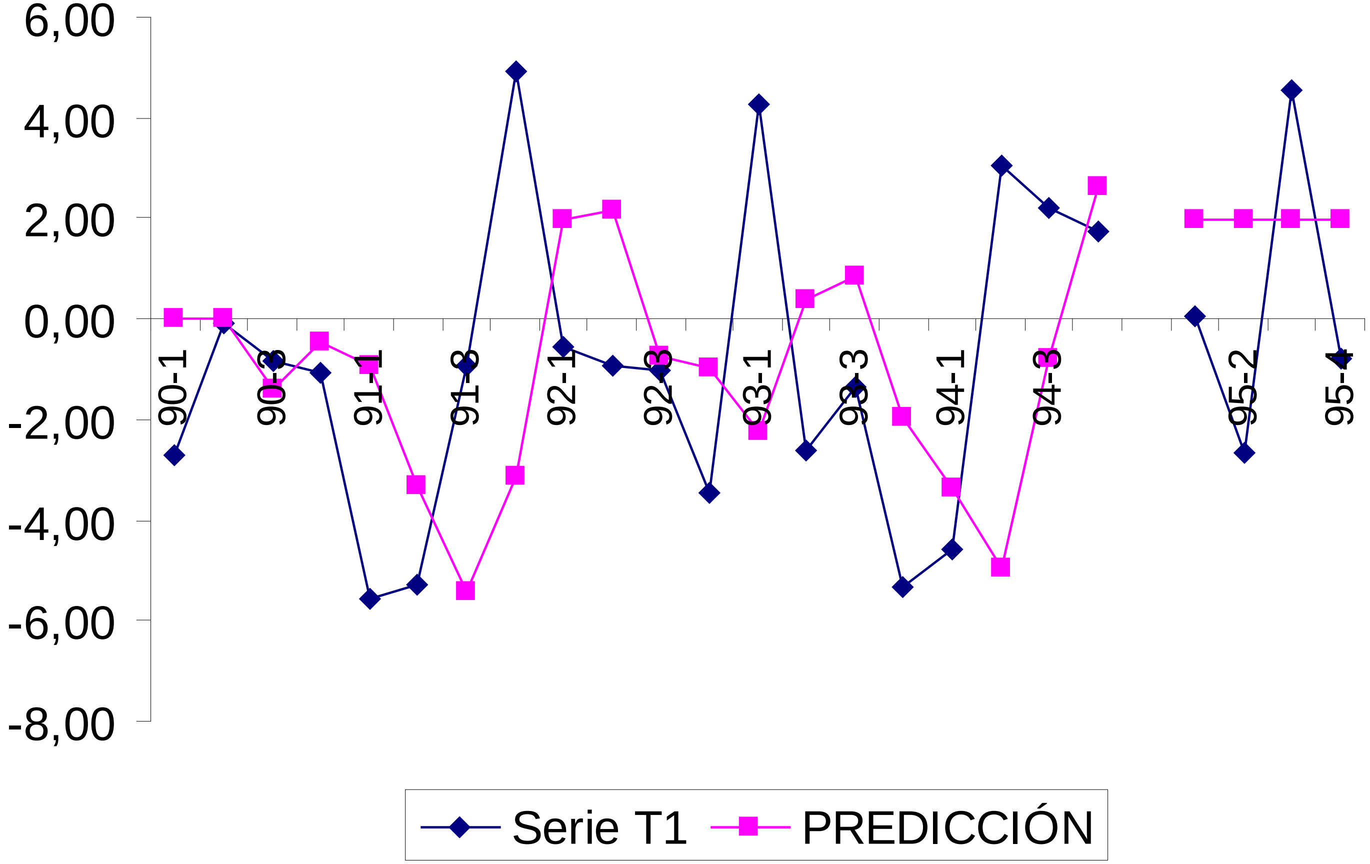
2.1.3. Método de medias móviles

	Serie 1	PREDICCIÓN	ERROR	EA	EC
90-1	-2,73	--	--	--	--
90-2	-0,11	--	--	--	--
90-3	-0,82	-1,42	0,60	0,600	0,360
90-4	-1,08	-0,47	-0,62	0,615	0,378
91-1	-5,56	-0,95	-4,61	4,610	21,252
91-2	-5,30	-3,32	-1,98	1,980	3,920
91-3	-0,95	-5,43	4,48	4,480	20,070
91-4	4,90	-3,13	8,03	8,025	64,401
92-1	-0,55	1,98	-2,53	2,525	6,376
92-2	-0,95	2,18	-3,13	3,125	9,766
92-3	-1,02	-0,75	-0,27	0,270	0,073
92-4	-3,48	-0,99	-2,50	2,495	6,225
93-1	4,28	-2,25	6,53	6,530	42,641
93-2	-2,61	0,40	-3,01	3,010	9,060
93-3	-1,34	0,84	-2,18	2,175	4,731
93-4	-5,35	-1,98	-3,38	3,375	11,391
94-1	-4,57	-3,35	-1,23	1,225	1,501
94-2	3,03	-4,96	7,99	7,990	63,840
94-3	2,20	-0,77	2,97	2,970	8,821
94-4	1,75	2,62	-0,87	0,865	0,748
95-1	0,04	1,98	-1,94	1,935	3,744
95-2	-2,64	1,98	-4,62	4,615	21,298
95-3	4,55	1,98	2,58	2,575	6,631
95-4	-0,79	1,98	-2,77	2,765	7,645

EAM(muest)	***3,159***
ECM(muest)	***15,309***
EAM(extram)	***2,973***
ECM(extram)	***9,830***

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.1.3. Método de medias móviles



Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.1.4. Método de alisado exponencial simple

- Este método define la predicción mediante una **suma ponderada de todos los valores previos de la serie al periodo para el que se formula la predicción.** La predicción puede escribirse como:

$$\hat{y}_t(1) = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha) y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 y_{t-3} + \dots$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i y_{t-i}$$

donde α es una constante arbitraria cuyo valor está entre 0 y 1. Se denomina **constante de alisamiento**.

Esto significa que la ponderación dada a una observación pasada se va haciendo menor cuanto más alejada está del periodo para el que se realiza la predicción.

2.1.4. Método de alisado exponencial simple

- El método de AES al igual que el método de medias móviles cuando definen el predictor no pondera todos los valores muestrales, sino solamente aquellos valores previos al periodo para el cual se hace la predicción.
- No obstante, el método de AES tiene **dos diferencias** importantes respecto al método de medias móviles:
  1) Pondera todos los valores previos y no sólo algunos de ellos
  2) Las ponderaciones asignadas a cada uno de los valores previos son diferentes

veámoslo

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

y_1

y_2

y_3

y_4

y_5

y_6

y_7

y_8 $\quad \boxed{\hat{y}_{8/7}}$

En el caso del método de media móvil con longitud k=4

- Sólo se utilizan 4 valores pasados
- Todos tienen la misma ponderación (1/4)

$$MM(4), \quad \hat{y}_{8/7} = \hat{y}_7(1) = \frac{1}{4}y_7 + \frac{1}{4}y_6 + \frac{1}{4}y_5 + \frac{1}{4}y_4$$

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

$$\begin{array}{ll} y_1 & \\ y_2 & \\ y_3 & \\ y_4 & \\ y_5 & \\ y_6 & \\ y_7 & \\ y_8 & \hat{y}_{8/7} \end{array}$$

En el caso del <u>método de alisado exponencial simple</u> con $\alpha = 0.5$

- Se utilizan <u>todos</u> los valores pasados
- tienen <u>diferente</u> ponderación
  - Las ponderaciones disminuyen cuando nos alejamos del periodo 8.

$$AES(\alpha = 0.5),$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{8/7} &= \hat{y}_7(1) = 0.5y_7 + 0.5(1-0.5)y_6 \\ &+ 0.5(1-0.5)^2 y_5 + 0.5(1-0.5)^3 y_4 \\ &+ 0.5(1-0.5)^4 y_3 + 0.5(1-0.5)^5 y_2 \\ &+ 0.5(1-0.5)^6 y_1 \\ &= 0.5y_7 + 0.250y_6 + 0.125y_5 \\ &+ 0.063y_4 + 0.031y_3 \\ &+ 0.016y_2 + 0.008y_1 \end{aligned}$$

2.1.4. Método de alisado exponencial simple

- De nuevo, podemos escribir la expresión del predictor siguiendo un proceso iterativo, es decir, utilizando una **ecuación de actualización**:

Es necesario **suponer** el primer valor

  - Periodo muestral:

$$\hat{y}_t(1) = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}(1) \qquad t = 1, 2, 3, \ldots, T$$

  - Periodo extramuestral:

$$\hat{y}_T(m) = \alpha y_T + (1-\alpha)\hat{y}_{T-1}(1) \qquad m = 1, 2, 3, \ldots, H$$

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.1.4. Método de alisado exponencial simple

- Demostración:
  - Periodo muestral:

$$\hat{y}_t(1) = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha) y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 y_{t-3} + \ldots$$

$$= \alpha y_t + (1-\alpha)\left[\alpha y_{t-1} + \alpha(1-\alpha) y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-3} + \ldots\right]$$

2.1.4. Método de alisado exponencial simple

- Demostración:
  - Periodo muestral:

$$\hat{y}_t(1) = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 y_{t-3} + \ldots$$

$$= \alpha y_t + (1-\alpha)\left[\alpha y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-3} + \ldots\right]$$

$$= \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}(1)$$

2.1.4. Método de alisado exponencial simple

- o alternativamente podemos obtener la predicción a partir del llamado **mecanismo de corrección de error**
  - Periodo muestral:

$$\hat{y}_t(1) = \hat{y}_{t-1}(1) + \alpha e_{t-1}(1) \qquad t = 1, 2, 3, \ldots, T$$

donde $$e_{t-1}(1) = y_t - \hat{y}_{t-1}(1)$$

Nótese que cuanto mayor es α mayor es la importancia asignada al error del predicción.

2.1.4. Método de alisado exponencial simple

Ilustración: Supongamos $\alpha = 0.2$

t	serie	predicción
1	5	--
2	8	5,00
3	10	5,60
4	15	6,48
5	23	8,18
6	21	11,15
7	25	11,15

suposición

$$\hat{y}_1(1) = y_1$$

$$\hat{y}_2(1) = 0.2y_2 + (1-0.2)\hat{y}_1(1) = 0.2*8 + 0.8*5 = 5.60$$

$$\hat{y}_3(1) = 0.2y_3 + (1-0.2)\hat{y}_2(1) = 0.2*10 + 0.8*5.60 = 6.48$$

....

$$\hat{y}_5(1) = 0.2y_5 + (1-0.2)\hat{y}_5(1) = 0.2*23 + 0.8*8.18 = 11.15$$

$$\hat{y}_5(2) = 0.2y_5 + (1-0.2)\hat{y}_5(1) = 11.15$$

2.1.4. Método de alisado exponencial simple

Ejemplo: Obtener predicciones para la serie de ejemplos anteriores utilizando el método de AES con $\alpha = 0.2$

	Serie T1
90-1	-2,73
90-2	-0,11
90-3	-0,82
90-4	-1,08
91-1	-5,56
91-2	-5,30
91-3	-0,95
91-4	4,90
92-1	-0,55
92-2	-0,95
92-3	-1,02
92-4	-3,48
93-1	4,28
93-2	-2,61
93-3	-1,34
93-4	-5,35
94-1	-4,57
94-2	3,03
94-3	2,20
94-4	1,75
95-1	0,04
95-2	-2,64
95-3	4,55
95-4	-0,79

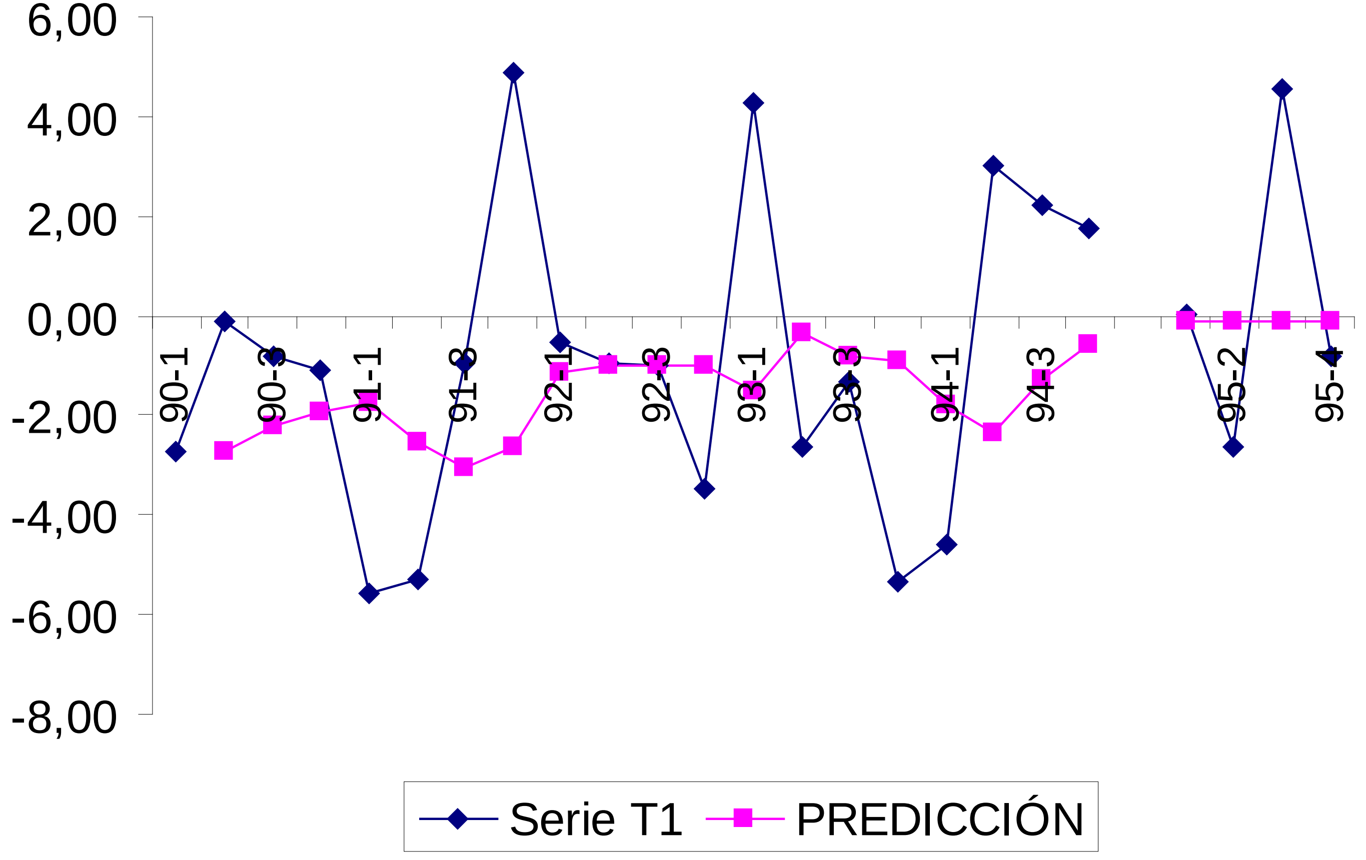
Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.1.4. Método de alisado exponencial simple

	Serie 1	PREDICCIÓN	ERROR	EA	EC
90-1	-2,73		--	--	--
90-2	-0,11	-2,73	2,62	2,620	6,864
90-3	-0,82	-2,21	1,39	1,386	1,921
90-4	-1,08	-1,93	0,85	0,849	0,720
91-1	-5,56	-1,76	-3,80	3,801	14,447
91-2	-5,30	-2,52	-2,78	2,781	7,733
91-3	-0,95	-3,08	2,13	2,125	4,517
91-4	4,90	-2,65	7,55	7,550	57,007
92-1	-0,55	-1,14	0,59	0,590	0,348
92-2	-0,95	-1,02	0,07	0,072	0,005
92-3	-1,02	-1,01	-0,01	0,012	0,000
92-4	-3,48	-1,01	-2,47	2,470	6,100
93-1	4,28	-1,50	5,78	5,784	33,457
93-2	-2,61	-0,35	-2,26	2,263	5,120
93-3	-1,34	-0,80	-0,54	0,540	0,292
93-4	-5,35	-0,91	-4,44	4,442	19,732
94-1	-4,57	-1,80	-2,77	2,774	7,693
94-2	3,03	-2,35	5,38	5,381	28,956
94-3	2,20	-1,27	3,47	3,475	12,075
94-4	1,75	-0,58	2,33	2,330	5,428
95-1	0,04	-0,11	0,15	0,154	0,024
95-2	-2,64	-0,11	-2,53	2,526	6,381
95-3	4,55	-0,11	4,66	4,664	21,752
95-4	-0,79	-0,11	-0,68	0,676	0,457

EAM(muest)	***2,697***
ECM(muest)	***11,180***
EAM(extram)	***2,005***
ECM(extram)	***7,153***

2.1.4. Método de alisado exponencial simple



2.1.4. Método de alisado exponencial simple

Ejemplo 2: Obtener predicciones para la serie de ejemplos anteriores utilizando el método de AES con $\alpha = 0.8$, ¿cómo cambian los resultados?

	Serie T1
90-1	-2,73
90-2	-0,11
90-3	-0,82
90-4	-1,08
91-1	-5,56
91-2	-5,30
91-3	-0,95
91-4	4,90
92-1	-0,55
92-2	-0,95
92-3	-1,02
92-4	-3,48
93-1	4,28
93-2	-2,61
93-3	-1,34
93-4	-5,35
94-1	-4,57
94-2	3,03
94-3	2,20
94-4	1,75
95-1	0,04
95-2	-2,64
95-3	4,55
95-4	-0,79

2.1.4. Método de alisado exponencial simple

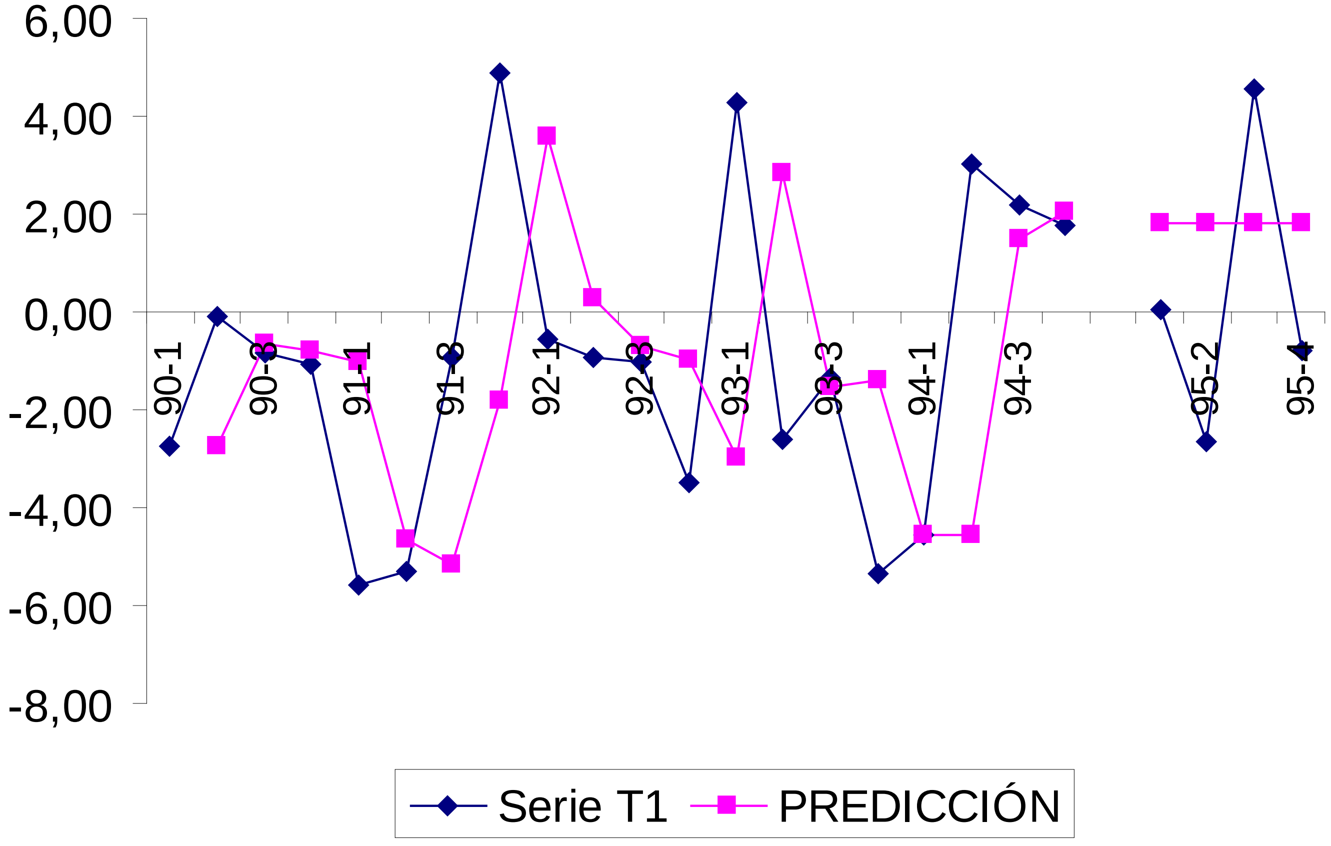
AES con $\alpha = 0.8$

	Serie 1	PREDICCIÓN	ERROR	EA	EC
90-1	-2,73		--	--	--
90-2	-0,11	-2,73	--	--	--
90-3	-0,82	-0,63	-0,19	0,186	0,035
90-4	-1,08	-0,78	-0,30	0,297	0,088
91-1	-5,56	-1,02	-4,54	4,539	20,607
91-2	-5,30	-4,65	-0,65	0,648	0,420
91-3	-0,95	-5,17	4,22	4,220	17,812
91-4	4,90	-1,79	6,69	6,694	44,811
92-1	-0,55	3,56	-4,11	4,111	16,902
92-2	-0,95	0,27	-1,22	1,222	1,494
92-3	-1,02	-0,71	-0,31	0,314	0,099
92-4	-3,48	-0,96	-2,52	2,523	6,365
93-1	4,28	-2,98	7,26	7,255	52,641
93-2	-2,61	2,83	-5,44	5,439	29,582
93-3	-1,34	-1,52	0,18	0,182	0,033
93-4	-5,35	-1,38	-3,97	3,974	15,789
94-1	-4,57	-4,56	-0,01	0,015	0,000
94-2	3,03	-4,57	7,60	7,597	57,715
94-3	2,20	1,51	0,69	0,689	0,475
94-4	1,75	2,06	-0,31	0,312	0,097
95-1	0,04	1,81	-1,77	1,772	3,141
95-2	-2,64	1,81	-4,45	4,452	19,824
95-3	4,55	1,81	2,74	2,738	7,494
95-4	-0,79	1,81	-2,60	2,602	6,773

EAM(muest)	***2,790***
ECM(muest)	***14,720***
EAM(extram)	***2,891***
ECM(extram)	***9,308***

2.1.4. Método de alisado exponencial simple

AES con $\alpha = 0.8$



Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

Fin del ejemplo con la serie tipo 1: ¿cuál es el modelo más adecuado para realizar predicciones?

1. Método ingenuo

EAM(muest)	***2,974***
ECM(muest)	***15,857***
EAM(extram)	***2,860***
ECM(extram)	***9,122***

2. Método de la media simple

EAM(muest)	***2,321***
ECM(muest)	***9,348***
EAM(extram)	***2,117***
ECM(extram)	***8,688***

3. Método de medias móviles

EAM(muest)	***3,159***
ECM(muest)	***15,309***
EAM(extram)	***2,973***
ECM(extram)	***9,830***

4. Método de alisado exponencial

$\alpha = 0.2$

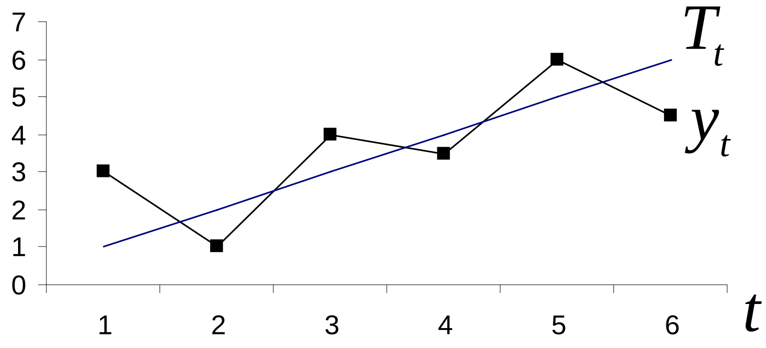
EAM(muest)	***2,701***
ECM(muest)	***11,420***
EAM(extram)	***2,005***
ECM(extram)	***7,153***

$\alpha = 0.8$

EAM(muest)	***2,790***
ECM(muest)	***14,720***
EAM(extram)	***2,891***
ECM(extram)	***9,308***

2.2. Métodos de previsión para series de tipo 3

- **SERIE TIPO 3**: Serie con tendencia y sin componente estacional
- Los valores se distribuyen aleatoriamente alrededor de una tendencia.
- Estructura básica: $y_t = T_t + u_t$



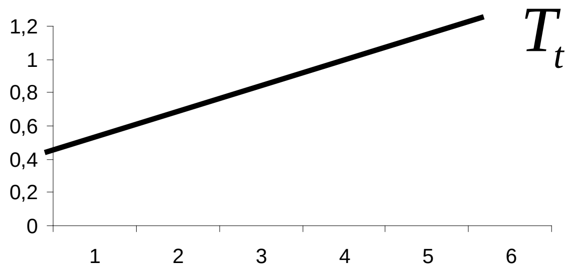
Tendencia lineal determinista

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t$$

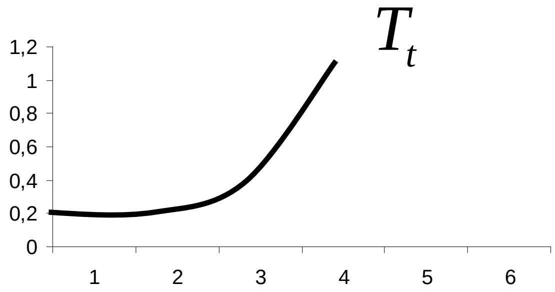
Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

- La tendencia puede aproximarse de diferentes formas:

a) Tendencia lineal determinista $T_t = \beta_0 + \beta_1 t$

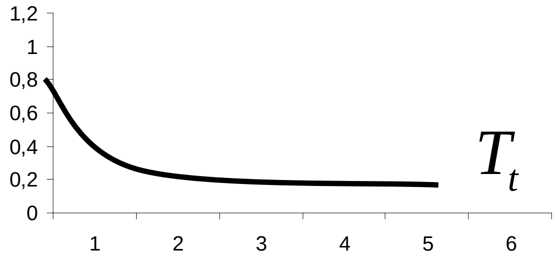


b) Tendencia cuadrática



Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

c) Tendencia exponencial



Y hay muchas otras posibilidades. Nosotros utilizaremos métodos de previsión basados en la tendencia lineal determinista o en una aproximación de la misma.

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.2.1. Método de tendencia lineal

- Es un método que formula la predicción aproximando la tendencia mediante una función lineal

$$y_t = T_t + u_t$$

$$\Downarrow$$

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t \quad \Rightarrow \quad y_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t$$

- La idea es estimar los valores de β_0 y β_1 utilizando toda la información muestral. Por tanto, se obtendrán los valores de β_0 y β_1 como resultado de una estimación por mínimos cuadrados ordinarios

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\operatorname{cov}(y_t, t)}{\operatorname{var}(t)} = \frac{\sum_{t=1}^{T} t\, y_t - \bar{y}\sum_{t=1}^{T} t}{\sum_{t=1}^{T} t^2 - \frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T} t\right)^2} \qquad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{t}$$

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.2.1. Método de tendencia lineal

- Por tanto, la estimación de la tendencia es:

$$\hat{T}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$$

- En consecuencia, la predicción se obtiene como:
  - Periodo muestral:

$$\hat{y}_t(1) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * (t+1) \qquad t = 1, 2, 3, \ldots., T-1$$

  - Periodo extramuestral:

$$\hat{y}_T(m) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * (T+m) \qquad m = 1, 2, 3, \ldots., H$$

2.2.1. Método de tendencia lineal

Ilustración:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} t\, y_t - \overline{y}\sum_{t=1}^{T} t}{\sum_{t=1}^{T} t^2 - \frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T} t\right)^2} = \frac{90.10 - 5.32 * 15}{55 - \frac{1}{5} * 15^2} = 1.03$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{t} = 5.32 - 1.03 * 3 = 2.23$$

t	yt	PREDICCIÓN
1	3,60	3,26
2	3,90	4,29
3	5,20	5,32
4	6,40	6,35
5	7,50	7,38
6	8,20	8,41
7	9,20	9,44

$$\hat{y}_1(1) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 * (t+1) = 2.23 + 1.03 * 2$$

$$\hat{y}_2(1) = 2.23 + 1.03 * 3$$

$$\hat{y}_3(1) = 2.23 + 1.03 * 4$$

....

$$\hat{y}_5(1) = 2.23 + 1.03 * 6$$

$$\hat{y}_5(2) = 2.23 + 1.03 * 7$$

2.2.1. Método de tendencia lineal

Ejemplo: Obtener predicciones para la siguiente serie temporal de tipo 3.

	Serie 3
90-1	-1,73
90-2	1,39
90-3	1,18
90-4	1,42
91-1	-2,56
91-2	-1,80
91-3	3,05
91-4	9,40
92-1	4,45
92-2	4,55
92-3	4,98
92-4	3,02
93-1	11,28
93-2	4,89
93-3	6,66
93-4	3,15
94-1	4,43
94-2	12,53
94-3	12,20
94-4	12,25
95-1	11,04
95-2	8,86
95-3	16,55
95-4	11,71

2.2.1. Método de tendencia lineal

t		Serie 3	PREDICCIÓN	ERROR	EA	EC
1	90-1	-1,73	-1,09	-0,64	0,637	0,406
2	90-2	1,39	-0,48	1,87	1,869	3,493
3	90-3	1,18	0,13	1,05	1,045	1,093
4	90-4	1,42	0,75	0,67	0,672	0,451
5	91-1	-2,56	1,36	-3,92	3,922	15,382
6	91-2	-1,80	1,98	-3,78	3,776	14,255
7	91-3	3,05	2,59	0,46	0,461	0,212
8	91-4	9,40	3,20	6,20	6,197	38,404
9	92-1	4,45	3,82	0,63	0,633	0,401
10	92-2	4,55	4,43	0,12	0,120	0,014
11	92-3	4,98	5,04	-0,06	0,064	0,004
12	92-4	3,02	5,66	-2,64	2,637	6,956
13	93-1	11,28	6,27	5,01	5,009	25,089
14	93-2	4,89	6,88	-1,99	1,995	3,979
15	93-3	6,66	7,50	-0,84	0,838	0,703
16	93-4	3,15	8,11	-4,96	4,962	24,622
17	94-1	4,43	8,73	-4,30	4,296	18,453
18	94-2	12,53	9,34	3,19	3,191	10,181
19	94-3	12,20	9,95	2,25	2,247	5,049
20	94-4	12,25	10,57	1,68	1,683	2,834
21	95-1	11,04	11,18	-0,14	0,140	0,020
22	95-2	8,86	11,79	-2,93	2,934	8,607
23	95-3	16,55	12,41	4,14	4,143	17,160
24	95-4	11,71	13,02	-1,31	1,311	1,719

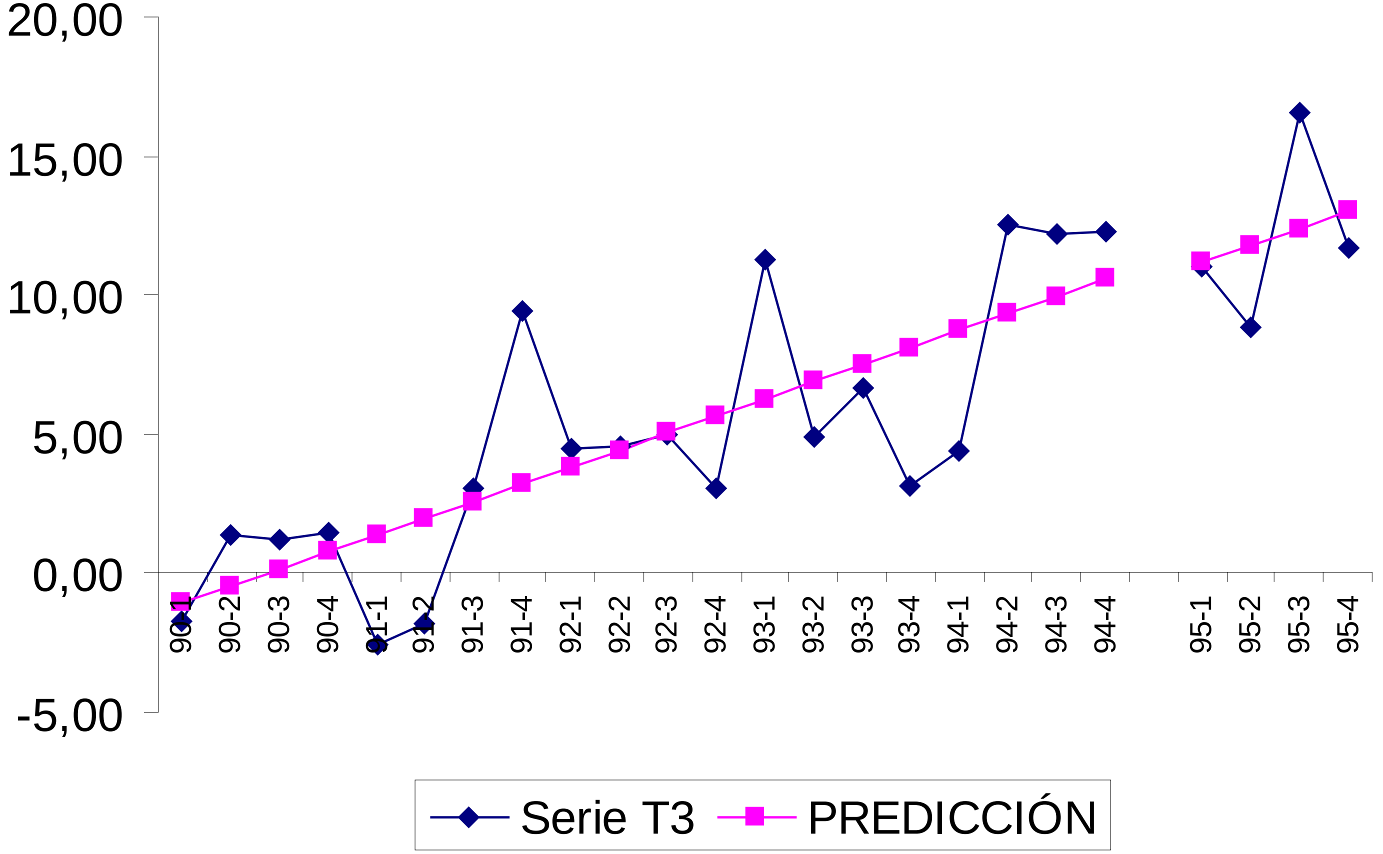
EAM(muest)	***2,313***
ECM(muest)	***8,599***
EAM(extram)	***2,132***
ECM(extram)	***6,877***

Estimaciones:

BETA1	*0,614*
BETA0	*-1,706*

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.2.1. Método de tendencia lineal



Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.2.2. Método de dobles medias móviles

- Es un método que obtiene la predicción suponiendo que la **tendencia es localmente lineal**, es decir, que la pendiente no es constante en todo el periodo muestral sino que se va redefiniendo conforme se incorpora nueva información.

- Nótese que en el método de tendencia lineal, la tendencia es constante en todo el periodo muestral.

- Los **pasos** que se han de seguir para obtener la predicción según este métodos son los siguientes:

2.2.2. Método de dobles medias móviles

1 PASO: Calcular las medias móviles (MM_t) de longitud k

$$MM_t = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} y_{t-i}}{k} = \frac{y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-k+1}}{k}$$

OJO: No es como ocurría en el método de las medias móviles en series tipo 1 que era la predicción. Ahora se refiere al instante t ya que NO ES UNA PREDICCIÓN.

2.2.2. Método de dobles medias móviles

2 PASO: Calcular las dobles medias móviles (MM'_t) también de longitud k

$$MM'_t = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} MM_{t-i}}{k} = \frac{MM_t + MM_{t-1} + \ldots + MM_{t-k+1}}{k}$$

OJO: Nótese que se trata de calcular las medias móviles de las medias móviles calculadas en el paso anterior.

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.2.2. Método de dobles medias móviles

3 PASO: Estimar el valor de la tendencia para el periodo t como:

$$\hat{T}_t = 2MM_t - MM'_t$$

Puede demostrarse.

4 PASO: Estimar la pendiente en el periodo t mediante la siguiente expresión:

$$\hat{\beta}_1(t) = \frac{2}{k-1}\left(MM_t - MM'_t\right)$$

Puede demostrarse.

2.2.2. Método de dobles medias móviles

Ejercicio: Suponer que la tendencia sigue localmente un esquema del tipo $\hat{T}_t = \beta_0 + \beta_1 t$ y demostrar que son ciertas las expresiones de los 2 pasos anteriores

$$MM_t = \frac{y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-k+1}}{k}$$

$$= \frac{\left[\beta_0 + \beta_1 t\right] + \left[\beta_0 + \beta_1 (t-1)\right] + \ldots + \left[\beta_0 + \beta_1 (t-k+1)\right]}{k}$$

$$= \frac{k\beta_0 + k\beta_1 t}{k} + \frac{1}{k}\left[-\beta_1 - 2\beta_1 - \ldots - (k-1)\beta_1\right]$$

$$= \beta_0 + \beta_1 t - \frac{\beta_1}{k}\left[1 + 2 + \ldots + (k-1)\right] = \beta_0 + \beta_1 t - \frac{\beta_1}{k}\left[\frac{(k-1)k}{2}\right]$$

$$= \beta_0 + \beta_1 \left[t - \frac{(k-1)}{2}\right]$$

$$\boxed{MM_t = \beta_0 + \beta_1 \left[t - \frac{(k-1)}{2} \right]}$$

$$MM'_t = \frac{MM_t + MM_{t-1} + \ldots + MM_{t-k+1}}{k} =$$

$$= \frac{1}{K} \left\{ \beta_0 + \beta_1 \left[t - \frac{(k-1)}{2} \right] + \beta_0 + \beta_1 \left[(t-1) - \frac{(k-1)}{2} \right] + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \beta_0 + \beta_1 \left[(t-K+1) - \frac{(k-1)}{2} \right] \right\} =$$

$$= \frac{k\beta_0 + k\beta_1 t}{k} - \frac{\beta_1}{k} \left[\frac{(k-1)}{2} + 1 + \frac{(k-1)}{2} + 2 + \ldots + \frac{(k-1)}{2} + (k-1) \right] =$$

$$= \beta_0 + \beta_1 t - \frac{\beta_1}{k} \left[\frac{(k-1)k}{2} + \frac{(k-1)k}{2} \right]$$

$$= \beta_0 + \beta_1 \left[t - (k-1) \right]$$

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

$$MM_t = \beta_0 + \beta_1\left[t - \frac{(k-1)}{2}\right]$$

$$MM'_t = \beta_0 + \beta_1\left[t - (k-1)\right]$$

$$\begin{aligned}
\hat{T}_t &= 2MM_t - MM'_t \\
&= 2*\left(\beta_0 + \beta_1\left[t - \frac{(k-1)}{2}\right]\right) - \left(\beta_0 + \beta_1\left[t-(k-1)\right]\right) \\
&= 2\beta_0 + 2\beta_1 t - 2\beta_1\frac{(k-1)}{2} - \beta_0 - \beta_1 t + \beta_1(k-1) \\
&= \beta_0 + \beta_1 t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
MM_t - MM'_t &= \left(\beta_0 + \beta_1\left[t - \frac{(k-1)}{2}\right]\right) - \left(\beta_0 + \beta_1\left[t-(k-1)\right]\right) \\
&= \beta_0 + \beta_1 t - \beta_1\frac{(k-1)}{2} - \beta_0 - \beta_1 t + \beta_1(k-1) \\
&= \beta_1\frac{(k-1)}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\beta}_1(t) = \frac{2}{k-1}\left(MM_t - MM'_t\right)
\end{aligned}$$

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.2.2. Método de dobles medias móviles

5 PASO: Teniendo en cuenta estos resultados, la predicción se define como:

- Periodo muestral

$$\hat{y}_t(1) = \hat{T}_t + \hat{\beta}_1(t) \qquad t = 2k-1,\ldots.,T$$

- Periodo extra-muestral

$$\hat{y}_T(m) = \hat{T}_T + \hat{\beta}_1(T) * m \qquad m = 1,2,3,\ldots.,H$$

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.2.2. Método de dobles medias móviles

Ilustración para k=2:

t	yt	MM(k=2)	MM'	T	Beta
1	3,60				
2	3,90	3,75			
3	5,20	4,55	4,15	4,95	0,8
4	6,40	5,80	5,18	6,425	1,25
5	7,50	6,95	6,38	7,525	1,15
6	8,20				
7	9,20				

$$MM_2 = \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{3.60 + 3.90}{2} = 3.75$$

$$MM_3 = \frac{y_3 + y_2}{2} = 4.55$$

$$MM'_2 = imposible$$

$$MM'_3 = \frac{MM_3 + MM_2}{2} = \frac{4.55 + 3.75}{2} = 4.15$$

$$\hat{T}_3 = 2MM_3 - MM'_3 = 2 * 4.55 - 4.15 = 4.95$$

$$\hat{T}_4 = 2MM_4 - MM'_4 = 2 * 5.80 - 5.18 = 6.425$$

$$\hat{\beta}_1(3) = \frac{2}{2-1}\left(MM_3 - MM'_3\right) = \frac{2}{2-1}\left(4.55 - 4.15\right) = 0.8$$

$$\hat{\beta}_1(4) = \frac{2}{2-1}\left(MM_4 - MM'_4\right) = \frac{2}{2-1}\left(5.80 - 5.18\right) = 1.25$$

2.2.2. Método de dobles medias móviles

t	yt	MM(k=2)	MM'	T	Beta	Predicción
1	3,60					
2	3,90	3,75				
3	5,20	4,55	4,15	4,95	0,8	
4	6,40	5,80	5,18	6,425	1,25	5,75
5	7,50	6,95	6,38	7,525	1,15	7,675
6	8,20					8,675
7	9,20					9,825

$$\hat{y}_3(1) = \hat{y}_{4/3} = \hat{T}_3 + \hat{\beta}_1(3) = 4.95 + 0.8 = 5.75$$

$$\hat{y}_4(1) = \hat{y}_{5/4} = \hat{T}_4 + \hat{\beta}_1(4) = 6.425 + 1.25 = 7.675$$

$$\hat{y}_5(1) = \hat{y}_{6/5} = \hat{T}_5 + \hat{\beta}_1(5) * 1 = 7.525 + 1.15 * 1 = 8.675$$

$$\hat{y}_5(2) = \hat{y}_{7/5} = \hat{T}_5 + \hat{\beta}_1(5) * 2 = 7.525 + 1.15 * 2 = 9.825$$

2.2.2. Método de dobles medias móviles

Ejemplo: Obtener predicciones para la siguiente serie temporal de tipo 3 por este nuevo método con k=4.

	Serie 3
90-1	-1,73
90-2	1,39
90-3	1,18
90-4	1,42
91-1	-2,56
91-2	-1,80
91-3	3,05
91-4	9,40
92-1	4,45
92-2	4,55
92-3	4,98
92-4	3,02
93-1	11,28
93-2	4,89
93-3	6,66
93-4	3,15
94-1	4,43
94-2	12,53
94-3	12,20
94-4	12,25
95-1	11,04
95-2	8,86
95-3	16,55
95-4	11,71

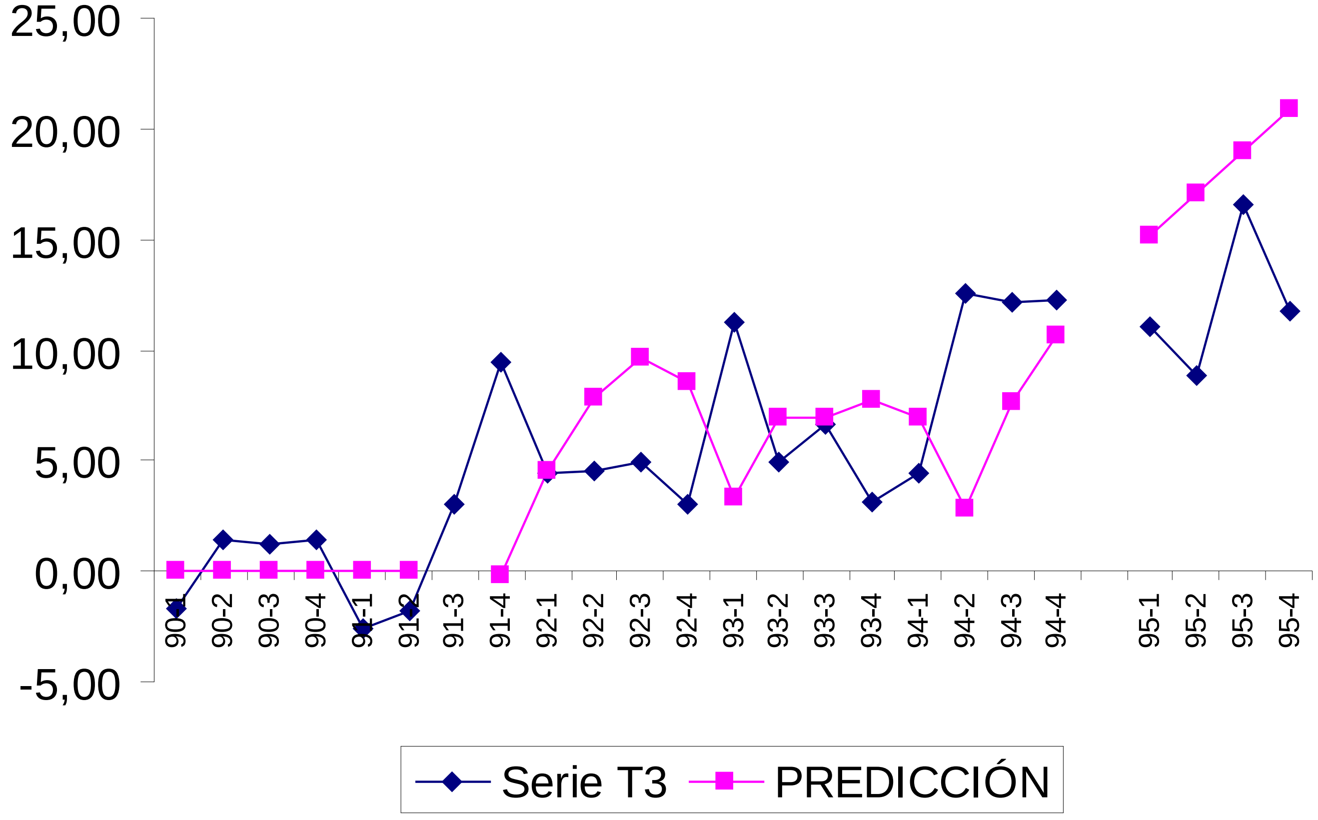
2.2.2. Método de dobles medias móviles

		Serie T3	$MM(4)_t$	$MM(4)'_t$	Tend	Pend	PREDIC	ERROR	EA	EC
1	90-1	-1,73	--	--	--	--	--	--	--	--
2	90-2	1,39	--	--	--	--	--	--	--	--
3	90-3	1,18	--	--	--	--	--	--	--	--
4	90-4	1,42	0,57	--	--	--	--	--	--	--
5	91-1	-2,56	0,36	--	--	--	--	--	--	--
6	91-2	-1,80	-0,44	--	--	--	--	--	--	--
7	91-3	3,05	0,03	0,13	-0,07	-0,07		3,05	3,05	9,30
8	91-4	9,40	2,02	0,49	3,55	1,02	-0,14	9,54	9,54	91,00
9	92-1	4,45	3,78	1,35	6,20	1,62	4,57	-0,12	0,12	0,02
10	92-2	4,55	5,36	2,80	7,93	1,71	7,82	-3,27	3,27	10,71
11	92-3	4,98	5,85	4,25	7,44	1,06	9,64	-4,66	4,66	21,70
12	92-4	3,02	4,25	4,81	3,69	-0,37	8,50	-5,48	5,48	30,04
13	93-1	11,28	5,96	5,35	6,56	0,40	3,32	7,96	7,96	63,36
14	93-2	4,89	6,04	5,52	6,56	0,35	6,96	-2,07	2,07	4,30
15	93-3	6,66	6,46	5,68	7,25	0,52	6,91	-0,25	0,25	0,06
16	93-4	3,15	6,50	6,24	6,75	0,17	7,77	-4,62	4,62	21,34
17	94-1	4,43	4,78	5,95	3,62	-0,78	6,92	-2,49	2,49	6,21
18	94-2	12,53	6,69	6,11	7,28	0,39	2,84	9,69	9,69	93,82
19	94-3	12,20	8,08	6,51	9,64	1,04	7,67	4,53	4,53	20,55
20	94-4	12,25	10,35	7,48	13,23	1,92	10,69	1,56	1,56	2,44
21	95-1	11,04					15,15	-4,11	4,11	16,86
22	95-2	8,86					17,06	-8,20	8,20	67,30
23	95-3	16,55					18,98	-2,43	2,43	5,91
24	95-4	11,71					20,90	-9,19	9,19	84,43

EAM(m)	***4,236***
ECM(m)	***26,776***
EAM(extra-m)	***5,982***
ECM(extra-m)	***43,627***

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.2.2. Método de dobles medias móviles



Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.2.3. Método de alisado exponencial lineal de Holt

- Este método, al igual que el anterior, supone que la **tendencia es localmente lineal**.

- La predicción está basada en una actualización de la estimación de la tendencia y la pendiente conforme se incorpora información.

- A diferencia del método anterior, la actualización se basa en TODOS los valores previos y no en un número reducido de ellos.

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.2.3. Método de alisado exponencial lineal de Holt

- Las **dos ecuaciones de actualización** son:

$$\hat{T}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}(1)$$

Es necesario **suponer** el primer valor de tendencia y pendiente

$$\hat{\beta}_1(t) = \gamma\left[\hat{T}_t - \hat{T}_{t-1}\right] + (1-\gamma)\hat{\beta}_1(t-1)$$

Donde α y γ están entre 0 y 1, siendo α la **constante de alisamiento de la tendencia** y γ la **constante de alisamiento de la pendiente**.

2.2.3. Método de alisado exponencial lineal de Holt

- Teniendo en cuenta estos resultados, la **predicción** se define como:
- Periodo muestral

$$\hat{y}_t(1) = \hat{T}_t + \hat{\beta}_1(t) \qquad t = 2, 3, \ldots, T$$

- Periodo extra-muestral

$$\hat{y}_T(m) = \hat{T}_T + \hat{\beta}_1(T) * m \qquad m = 1, 2, 3, \ldots, H$$

2.2.3. Método de alisado exponencial lineal de Holt

Ilustración para α=0.9 y γ=0.2:

Suponemos

$$\boxed{\begin{array}{l}\hat{T}_1 = y_1 \\ \hat{\beta}_1(1) = 0\end{array}}$$

t	y_t	T_t	$\beta_1(t)$
1,00	3,60	3,60	0,00
2,00	3,90	3,87	0,05
3,00	5,20	5,07	0,28
4,00	6,40	6,30	0,47
5,00	7,50	7,43	0,60
6,00	8,20		
7,00	9,20		

$$\hat{T}_2 = 0.9 * y_2 + (1-0.9) * \left[\hat{T}_1 + \hat{\beta}_1(1)\right] = 0.9 * 3.90 + (1-0.9) * (3.60 + 0) = 3.87$$

$$\hat{\beta}_1(2) = 0.2 * \left[\hat{T}_2 - \hat{T}_1\right] + (1-0.2) * \hat{\beta}_1(1) = 0.2 * (3.87 - 3.60) + (1-0.2) * 0 = 0.05$$

$$\hat{T}_3 = 0.9 * y_3 + (1-0.9) * \left[\hat{T}_2 + \hat{\beta}_1(2)\right] = 0.9 * 5.20 + (1-0.9) * (3.87 + 0.05) = 5.07$$

$$\hat{\beta}_1(3) = 0.2 * \left[\hat{T}_3 - \hat{T}_2\right] + (1-0.2) * \hat{\beta}_1(2) = 0.2(5.07 - 3.87) + (1-0.2) * 0.05 = 0.28 \quad \ldots$$

2.2.3. Método de alisado exponencial lineal de Holt

t	y_t	T_t	$\beta_1(t)$	Predicción
1,00	3,60	3,60	0,00	
2,00	3,90	3,87	0,05	3,60
3,00	5,20	5,07	0,28	3,92
4,00	6,40	6,30	0,47	5,36
5,00	7,50	7,43	0,60	6,77
6,00	8,20			8,03
7,00	9,20			8,63

$$\hat{y}_1(1) = \hat{y}_{2/1} = \hat{T}_1 + \hat{\beta}_1(1) = 3.60 + 0 = 3.60$$

$$\hat{y}_2(1) = \hat{y}_{3/2} = \hat{T}_2 + \hat{\beta}_1(2) = 3.87 + 0.05 = 3.92$$

...

$$\hat{y}_5(1) = \hat{y}_{6/5} = \hat{T}_5 + \hat{\beta}_1(5) * 1 = 7.43 + 0.60 * 1 = 8.03$$

$$\hat{y}_5(2) = \hat{y}_{7/5} = \hat{T}_5 + \hat{\beta}_1(5) * 2 = 7.43 + 0.60 * 2 = 8.63$$

2.2.3. Método de alisado exponencial lineal de Holt

- Alternativamente, podemos escribir las **dos ecuaciones de actualización** como función de los errores de predicción (**mecanismo de corrección del error**):
  - **Tendencia:**

$$\hat{T}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}(1)$$

$$= \alpha y_t + \hat{y}_{t-1}(1) + \alpha \hat{y}_{t-1}(1)$$

$$= \hat{y}_{t-1}(1) + \alpha \left[y_t - \hat{y}_{t-1}(1) \right]$$

$$\Rightarrow \quad \hat{T}_t = \hat{y}_{t-1}(1) + \alpha e_{t-1}(1)$$

2.2.3. Método de alisado exponencial lineal de Holt

- Alternativamente, podemos escribir las **dos ecuaciones de actualización** como función de los errores de predicción (**mecanismo de corrección del error**):
  - **Tendencia:** $\hat{T}_t = \hat{y}_{t-1}(1) + \alpha e_{t-1}(1)$
  - **Pendiente:**

$$\hat{\beta}_1(t) = \gamma\left[\hat{T}_t - \hat{T}_{t-1}\right] + (1-\gamma)\hat{\beta}_1(t-1)$$

$$= \gamma\left[\left\{\hat{y}_{t-1}(1) + \alpha e_{t-1}(1)\right\} - \left\{\hat{y}_{t-1}(1) - \hat{\beta}_1(t-1)\right\}\right] + (1-\gamma)\hat{\beta}_1(t-1)$$

$$= \gamma\left[\hat{y}_{t-1}(1) + \alpha e_{t-1}(1) - \hat{y}_{t-1}(1) + \hat{\beta}_1(t-1)\right] + (1-\gamma)\hat{\beta}_1(t-1)$$

$$= \gamma\alpha e_{t-1}(1) + \hat{\beta}_1(t-1)$$

2.2.3. Método de alisado exponencial lineal de Holt

Ejemplo: Obtener predicciones para la siguiente serie temporal de tipo 3 por este nuevo método con α=0.9 y γ=0.2.

	Serie 3
90-1	-1,73
90-2	1,39
90-3	1,18
90-4	1,42
91-1	-2,56
91-2	-1,80
91-3	3,05
91-4	9,40
92-1	4,45
92-2	4,55
92-3	4,98
92-4	3,02
93-1	11,28
93-2	4,89
93-3	6,66
93-4	3,15
94-1	4,43
94-2	12,53
94-3	12,20
94-4	12,25
95-1	11,04
95-2	8,86
95-3	16,55
95-4	11,71

2.2.3. Método de alisado exponencial lineal de Holt

	Serie T3	Tendencia	Pendiente	PREDICCIÓN	ERROR	EA	EC
90-1	-1,73	-1,73	0,00	--	--	--	--
90-2	1,39	1,08	0,56	-1,73	3,12	3,12	9,73
90-3	1,18	1,23	0,48	1,64	-0,46	0,46	0,21
90-4	1,42	1,45	0,43	1,70	-0,28	0,28	0,08
91-1	-2,56	-2,12	-0,37	1,88	-4,44	4,44	19,68
91-2	-1,80	-1,87	-0,25	-2,49	0,69	0,69	0,47
91-3	3,05	2,53	0,68	-2,12	5,17	5,17	26,69
91-4	9,40	8,78	1,80	3,22	6,18	6,18	38,24
92-1	4,45	5,06	0,69	10,58	-6,13	6,13	37,54
92-2	4,55	4,67	0,48	5,76	-1,21	1,21	1,45
92-3	4,98	5,00	0,45	5,15	-0,17	0,17	0,03
92-4	3,02	3,26	0,01	5,44	-2,42	2,42	5,87
93-1	11,28	10,48	1,45	3,27	8,01	8,01	64,13
93-2	4,89	5,59	0,18	11,93	-7,04	7,04	49,57
93-3	6,66	6,57	0,34	5,78	0,88	0,88	0,78
93-4	3,15	3,53	-0,33	6,91	-3,76	3,76	14,17
94-1	4,43	4,31	-0,11	3,19	1,24	1,24	1,53
94-2	12,53	11,70	1,39	4,19	8,34	8,34	69,49
94-3	12,20	12,29	1,23	13,08	-0,88	0,88	0,78
94-4	12,25	12,38	1,00	13,52	-1,27	1,27	1,61
95-1	11,04			13,38	-2,34	2,34	5,47
95-2	8,86			14,38	-5,52	5,52	30,46
95-3	16,55			15,38	1,17	1,17	1,37
95-4	11,71			16,38	-4,67	4,67	21,82

EAM(m)	***3,246***
ECM(m)	***18,003***
EAM(extra-m)	***3,424***
ECM(extra-m)	***14,777***

Tema 2. Análisis de Series T: Análisis de la tendencia

2.2.3. Método de alisado exponencial lineal de Holt