Ejercicio 1

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en $[0,\beta]$, i.e. $X \sim U[0,\beta]$, donde $\beta \in \mathbb{R}^+$. Sea $X_1, \dots, X_n$ las variables aleatorias muestrales correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamano n (i.e. $X_1, \dots, X_n$ iid X). Halle el estimador máximo verosímil. (MLE).

Sean $x_1, \dots, x_n$ los valores muestrales. La función de verosimilitud será:

$$L_x(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\beta) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\beta} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_i) \mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_i) \right\}$$

$$= \frac{1}{\beta^n} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_{(1)}) \mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_{(n)})$$

donde $x_{(1)} = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ y $x_{(n)} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$

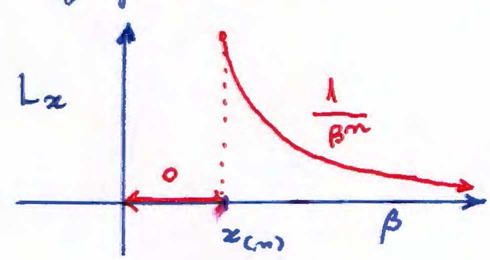
Con probabilidad 1 $x_i \geq 0$ por tanto, con probabilidad 1 podremos escribir:

$$L_x(\beta) = \frac{1}{\beta^n} \mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_{(n)})$$

donde $\beta > 0$. Dado $x_{(n)}$, el valor de la función de verosimilitud es:

$$L_x(\beta) = \begin{cases} 0 & \beta < x_{(n)} \\ \dfrac{1}{\beta^n} & x_{(n)} \leq \beta \end{cases}$$

gráficamente:



Nótese que $L_x(\beta)$ es estrictamente decreciente a partir de $x_{(n)}$ (ya que $L'_x(\beta) = -n \frac{1}{\beta^{n+1}} < 0$ para $\beta > x_{(n)}$). Por tanto el máximo de la función de verosimilitud se alcanza cuando:

$$\beta = x_{(n)}$$

El MLE es: $\boxed{\beta^* = X_{(n)}}$ con $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

Ejercicio 2

Estudie el sesgo, varianza y error cuadrático medio del estimador obtenido.

En primer lugar hallaremos la función de distribución de $X_{(n)}$

$$F_{X_{(n)}}(u) = P(X_{(n)} \leq u) = P([X_1 \leq u] \cap [X_2 \leq u] \cap \ldots \cap [X_n \leq u])$$

$$= P(X_1 \leq u) \cdot P(X_2 \leq u) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq u)$$

$$= P(X \leq u)^n \qquad \text{al ser las } X_1, \ldots, X_n \text{ independientes}$$

$$= F_X(u)^n \qquad \text{e idénticamente distribuidas.}$$

En el caso que nos ocupa $X \sim \mathcal{U}[0, \beta]$, la función de distribución de X es:

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ \frac{u}{\beta} & u \in (0, \beta) \\ 1 & u \geq 1 \end{cases}$$

por tanto:

$$F_{X_{(n)}}(u) = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ \left(\frac{u}{\beta}\right)^n & u \in (0, \beta) \\ 1 & u \geq \beta \end{cases}$$

pudiendo tomar como función de densidad:

$$f_{X_{(n)}}(u) = F'_{X_{(n)}}(u) = n \left(\frac{u}{\beta}\right)^{n-1} \frac{1}{\beta} \qquad u \in (0, \beta)$$

$$= 0 \qquad u \notin (0, \beta)$$

Entonces:

$$E(X_{(n)}) = \int_0^\beta u \cdot n \left(\frac{u}{\beta}\right)^{n-1} \frac{1}{\beta}\, du = \frac{n}{\beta^n} \int_0^\beta u^n \, du =$$

$$= \frac{n}{\beta^n} \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_0^\beta = \frac{n}{n+1} \beta$$

Por otra parte:

$$E(X_{(n)}^2) = \int_0^\beta u^2\, n \cdot \left(\frac{u}{\beta}\right)^{n-1} \frac{1}{\beta}\, du = \frac{n}{\beta^n} \int_0^\beta u^{n+1}\, du$$

$$= \frac{n}{\beta^n} \left[\frac{u^{n+2}}{n+2} \right]_0^\beta = \frac{n}{n+2} \beta^2$$

luego:

$$var(X_{(n)}) = \frac{n}{n+2}\beta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\beta\right)^2 = \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}\beta^2$$

$$= \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\beta^2$$

Sesgo:

$$\boxed{B_\beta(\beta^*) = \frac{n}{n+1}\beta - \beta = -\frac{1}{n+1}\beta}$$

varianza:

$$\boxed{var_\beta(\beta^*) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\beta^2}$$

Error cuadrático medio:

$$ECM_\beta(\beta^*) = B_\beta(\beta^*)^2 + var_\beta(\beta^*) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}\beta^2 + \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\beta^2 =$$

$$= \frac{(n+2)+n}{(n+2)(n+1)^2}\beta^2 =$$

$$= \frac{2}{(n+2)(n+1)}\beta^2$$

Ejercicio 3

Halle el estimador UMVU de β.

Basta corregir el sesgo del estimador MLE.

Consideremos el estimador:

$$u(X_1 \dots X_n) = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$$

Observemos que

$$E(u) = \frac{n+1}{n} E(X_n) = \frac{n+1}{n} \left(\frac{n}{n+1} \beta\right) = \beta$$

por tanto su sesgo es:

$$\left[B_\beta(u) = \beta - \beta = 0 \right] \quad \text{(insesgado)}$$

Su varianza es:

$$\left[var_\beta(u) = var_\beta\left(\frac{n+1}{n} X_{(n)}\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2} var_\beta(X_{(n)}) = \right.$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{n}{(n+2)\ (n+1)^2} \beta^2 =$$

$$\left. = \frac{1}{n(n+2)} \beta^2 \right]$$

y el error cuadrático medio será:

$$\left[ECM_\beta(u) = B_\beta(u)^2 + var_\beta(u)^2 = \right.$$

$$= 0 + \frac{1}{n(n+2)} \beta^2$$

$$\left. = \frac{1}{n(n+2)} \beta^2 \right]$$

En primer lugar podemos comprobar que su $ECM_\beta(u)$ es inferior al $ECM_\beta(\beta^*)$:

$$\left[\frac{ECM_\beta(u)}{ECM_\beta(\beta^*)} = \frac{\frac{1}{n(n+2)}}{\frac{2}{(n+2)(n+1)}} = \frac{n+1}{2n} \leq 1\right]$$ (la igualdad sólo ocurre si $n=1$)

por tanto u es preferible a β^* desde el punto de vista de la pérdida cuadrática.

Fuera de programa vamos a justificar que es en realidad el estimador UMVU.

a) $X_{(n)}$ es un estadístico suficiente para β.

un estadístico suficiente "resume" toda la información útil para estimar β. Esto es comprobable por el teorema a factorización de Neyman-Fisher:

$$f(x_1 \dots x_n, \beta) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\beta} \mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_i)\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_i) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\beta^n} \mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_{(n)})\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_{(1)})$$

$$= g(x_{(n)}, \beta)\, h(x_1 \dots x_n)$$

para una g y h convenientes: $g(x_{(n)}, \beta) = \frac{1}{\beta^n} \mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_{(n)})$

y $h(x_1 - x_n) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_{(1)})$

por tanto $X_{(n)} = \max\{X_1 - X_n\}$ es suficiente.

b) $X_{(n)}$ es completo: hemos de demostrar que

$\forall_{\beta > 0} \quad E_\beta(\varphi(X_{(n)})) = 0 \Rightarrow$ es "casi" constantemente igual a cero"

partimos de:

$$E_\beta(\varphi(X_{(n)})) = \int_0^\beta \varphi(u) \cdot n\left(\frac{u}{\beta}\right)^{n-1} \frac{1}{\beta}\, du = 0$$

equivalente a:

$$\int_0^\beta \varphi(u)\, u^{n-1}\, du = 0 \qquad \forall_\beta > 0$$

observad que esto es igual a

$$\int_0^\beta \psi(u)\, du = 0 \quad \forall_\beta > 0$$

ello solo es posible si ψ es casi seguramente cero para $\beta > 0$ (es obvio si ψ fuera continua: teorema fundamental del cálculo pero también puede comprobarse en teoría de la medida la anterior afirmación). Pero si $\psi(u) = 0$ c.s. entonces

$$\varphi(u) = 0 \quad \text{c.s.}$$

c) U es función de un estadístico suficiente y completo.

Een efecto:

$$U(X_1 \ldots X_n) = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$$

portanto, por el Teorema de Lehman-Schefee,

es el estimador UMVU de β.

(uniformly minimum variance unbiased)

Ejercicio 4

Halle un intervalo de confianza para β, de confianza $1-\alpha$.

$X \sim \mathcal{U}[0,\beta]$ entonces $\frac{X}{\beta} \sim \mathcal{U}[0,1]$

Por tanto $X_1, \dots, X_n$ iid X entonces:

$$\frac{X_{(n)}}{\beta} = \frac{1}{\beta} \max\{X_1 \dots X_n\} = \max\left\{\frac{X_1}{\beta}, \dots, \frac{X_n}{\beta}\right\}$$

siendo su distribución independiente de β, pues $X_i/\beta \sim \mathcal{U}[0,1]$. Se trata pues de un pivote. pivote!

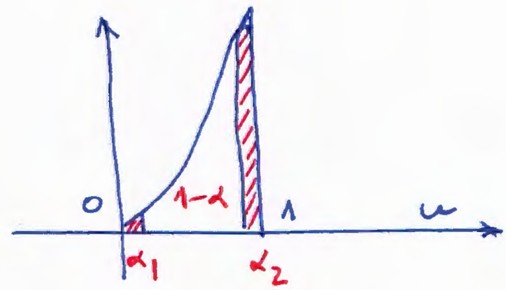
Determinemos a y b de forma que:

$$P\left(a \le \frac{X_{(n)}}{\beta} \le b\right) = 1-\alpha$$

donde $a, b \in [0,1]$.

Nótese que ya hemos hallado la distribución de $\frac{X_{(n)}}{\beta}$, en el ejercicio 2, con $\beta = 1$.

$$F_{\frac{X_{(n)}}{\beta}}(u) = \begin{cases} 0 & u \le 0 \\ u^n & u \in (0,1) \\ 1 & u \ge 1 \end{cases}$$



$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$

por tanto:

$$F_{\frac{X_{(n)}}{\beta}}(a) = \alpha_1$$

$$\text{con} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

$$F_{\frac{X_{(n)}}{\beta}}(b) = 1 - \alpha_2$$

por tanto: $\quad a^n = \alpha_1 \implies a = \sqrt[n]{\alpha_1}$

y $\quad b^n = 1-\alpha_2 \implies b = \sqrt[n]{1-\alpha_2}$

además $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ por tanto:

$$a = \sqrt[n]{\alpha_1} \qquad b = \sqrt[n]{1-\alpha+\alpha_1}$$

Por tanto:

$$\sqrt[n]{\alpha_1} \leq \frac{X_{(n)}}{\beta} \leq \sqrt[n]{1-\alpha+\alpha_1}$$

y por consiguiente, equivalente a:

$$\frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{1-\alpha+\alpha_1}} \leq \beta \leq \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha_1}}$$

La longitud del intervalo será:

$$l(X_{(n)}) = X_{(n)} \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha_1}} - \frac{1}{\sqrt[n]{1-\alpha+\alpha_1}} \right\}$$

para conseguir el intervalo más corto posible, sea cual sea X, resultará que habrá que minimizar:

$$g(\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha_1}} - \frac{1}{\sqrt[n]{1-\alpha+\alpha_1}} \qquad \text{para } \alpha_1 \in [0, \alpha]$$

obsérvese que

$$g'(\alpha_1) = -\frac{1}{n}\alpha_1^{-\frac{1}{n}-1} + \frac{1}{n}(1-\alpha+\alpha_1)^{-\frac{1}{n}-1}$$

$$= -\frac{1}{n}\frac{1}{\alpha_1^{\frac{1}{n}+1}} + \frac{1}{n}\frac{1}{(1-\alpha+\alpha_1)^{\frac{1}{n}+1}} < 0$$

por tanto el menor valor de $g(\alpha_1)$ se toma cuando $\alpha_1 = \alpha \Rightarrow \alpha_2 = 0$. Finalmente el intervalo obtenido es:

$$\boxed{X_{(n)} \leq \beta \leq \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha}}}$$

Ejercicio 5

Sea $X \sim \mathcal{U}[0,\beta]$ con $\beta > 0$. Dada una muestra aleatoria simple de tamaño n, $X_1,\dots,X_n$ iid X, testar:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: & \beta = \beta_0 \\ H_1: & \beta < \beta_0 \end{array}\right\}$$

Trataremos en primer lugar de hallar un test puro vía el Lema de Neyman-Pearson.

$$f_1(x_1 \dots x_n, \beta) \geq K f_0(x_1 \dots x_n, \beta_0)$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\beta}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_i)\,\mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_i)\right\} \geq K \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\beta_0}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_i)\,\mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_i)\right\}$$

$$\frac{1}{\beta^n}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_{(1)})\,\mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_{(n)}) \geq K \frac{1}{\beta_0^n}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_{(1)})\,\mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_{(n)})$$

Con probabilidad 1, ello ocurrirá si

$$\mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_{(n)}) \geq K\left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^n$$

es decir si $x_{(n)}$ es "suficientemente" pequeño.

$$\left[x_{(n)} \leq C\right]$$

existe una región crítica determinada por la desigualdad. Existe un test UMP pues.

donde C depende del nivel de significación.

Determinaremos C de forma que

$$P\left(X_{(n)} \leq C \mid H_0\right) = \alpha$$

por tanto:

$$F_{X_{(n)}}(c) = \left(\frac{c}{\beta_0}\right)^n = \alpha \Rightarrow \frac{c}{\beta_0} = \sqrt[n]{\alpha}$$

$$\left[C = \beta_0\sqrt[n]{\alpha}\right]$$

→ sólo depende de α con $\alpha \in (0,1)$

Por tanto existe un test UMP para testar $H_0: \beta = \beta_0$ frente a $H_1: \beta < \beta_0$. Es, en particular, un test puro cuya región crítica puede expresarse como: $\left[W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{(n)} < \beta_0\sqrt[n]{\alpha}\}\right]$

Ejercicio 6

Sea $X \sim \mathcal{U}[0,\beta_1]$ e $Y \sim \mathcal{U}[0,\beta_2]$ con $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^+$, X e Y independientes. Sea $X_1 \dots X_n$ i.i.d X e $Y_1 \dots Y_m$ i.i.d Y las variables aleatorias muestrales correspondientes a sendas muestras aleatorias simples de tamaños, n y m respectivamente. Consideremos el problema de contraste de hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \beta_1 = \beta_2 \\ H_1: \beta_1 \neq \beta_2 \end{array}\right\}$$

Desarrollar el test de la razón de verosimilitud e implementarlo para un nivel de significación $\alpha \in (0,1)$.

Cálculo de $\widehat{L_{(x,y)}(\Theta)}$:

$$L_{(x,y)}(\beta_1,\beta_2) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\beta_1} \mathbb{1}_{(-\infty,\beta_1]}(x_i) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_i) \right\} \cdot$$

$$\prod_{j=1}^{m} \left\{ \frac{1}{\beta_2} \mathbb{1}_{(-\infty,\beta_2]}(y_{(j)}) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y_{(j)}) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\beta_1^n} \frac{1}{\beta_2^m} \mathbb{1}_{(-\infty,\beta_1]}(x_{(n)}) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_{(1)}) \cdot$$

$$\mathbb{1}_{(-\infty,\beta_2]}(y_{(m)}) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y_{(1)})$$

que con probabilidad 1 es:

$$L_{(x,y)}(\beta_1,\beta_2) = \frac{1}{\beta_1^n \beta_2^m} \mathbb{1}_{(-\infty,\beta_1]}(x_{(n)}) \mathbb{1}_{(-\infty,\beta_2]}(y_{(m)})$$

$$= \begin{cases} 0 & x_{(n)} > \beta_1 \text{ ó } y_{(m)} > \beta_2 \\ \dfrac{1}{\beta_1^n \beta_2^m} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\beta_1^* = x_{(n)} \qquad \beta_2^* = y_{(m)} \Rightarrow \boxed{\widehat{L_{(x,y)}(\Theta)} = \frac{1}{x_{(n)}^n \, y_{(m)}^m}}$$

Cálculo de $\widehat{L_{(x,y)}}(\Theta_0)$

$$L_{(x,y)}(\beta) \equiv L_{(x,y)}(\beta,\beta) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\beta}\mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_i)\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_i)\right)\cdot$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\beta}\mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(y_j)\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y_j)\right)$$

$$= \frac{1}{\beta^{n+m}}\mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_{(n)})\,\mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(y_{(m)})\cdot$$

$$\cdot\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_{(1)})\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y_{(1)})$$

que con probabilidad 1 es:

$$L_{(x,y)}(\beta) = \frac{1}{\beta^{n+m}}\mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_{(n)})\,\mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(y_{(m)})$$

$$= \begin{cases} 0 & x_{(n)} > \beta \ \text{ó} \ y_{(m)} > \beta \\[2ex] \dfrac{1}{\beta^{n+m}} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$\beta^* = \text{máx}\{x_{(n)}, y_{(m)}\}$ y $\boxed{\widehat{L_{(x,y)}}(\Theta_0) = \dfrac{1}{\text{máx}\{x_{(n)}, y_{(m)}\}^{n+m}}}$

y la razón de verosimilitud será:

$\boxed{\Lambda(x,y) = \dfrac{x_{(n)}^{n}\ y_{(m)}^{m}}{\text{máx}\{x_{(n)}, y_{(m)}\}^{n+m}}}$, que está evidentemente entre 0 y 1.

La función de distribución de Λ, bajo H_0 : igualdad $\beta_1=\beta_2$, es:

$$\boxed{F_\Lambda(u)} = P(\Lambda \leq u) = P(X_{(n)} \geq Y_{(m)}) \cdot P(\Lambda \leq u \mid X_{(n)} \geq Y_{(m)}) +$$

$$+ P(X_{(n)} < Y_{(m)}) \cdot P(\Lambda \leq u \mid X_{(n)} < Y_{(m)}) =$$

$$= P(X_{(n)} \geq Y_{(m)}) \cdot P\left(\left(\frac{Y_{(m)}}{X_{(n)}}\right)^m \leq u \,\middle|\, X_{(n)} \geq Y_{(m)}\right)$$

$$+ P(X_{(n)} < Y_{(m)}) \cdot P\left(\left(\frac{X_{(n)}}{Y_{(m)}}\right)^n \leq u \,\middle|\, X_{(n)} < Y_{(m)}\right)$$

$\beta_1=\beta_2\equiv\beta$

$$P(X_{(n)} \geq Y_{(m)}) = \int_0^\beta \int_0^u n\left(\frac{u}{\beta}\right)^{n-1}\frac{1}{\beta}\, m\left(\frac{v}{\beta}\right)^{m-1}\frac{1}{\beta}\, dv\, du$$

$$= \frac{n}{\beta^{n+m}} \int_0^\beta u^{n-1}\left(\int_0^u m v^{m-1}\, dv\right) du$$

$$= \frac{n}{\beta^{n+m}} \int_0^\beta u^{n-1}\left[v^m\right]_0^u du =$$

$$= \frac{n}{\beta^{n+m}} \int_0^\beta u^{n+m-1}\, du = \frac{n}{\beta^{n+m}}\left[\frac{u^{n+m}}{n+m}\right]_0^\beta$$

$$= \frac{n}{n+m}$$

Por otra parte:

$$P(X_{(n)} < Y_{(m)}) = 1 - P(X_{(n)} \geq Y_{(m)}) = \frac{m}{n+m}$$

$$P\left(\frac{Y_{(m)}^m}{X_{(n)}^m} \leq u \,\middle|\, X_{(n)} \geq Y_{(m)}\right) = \frac{P\left(\left[\frac{Y_{(m)}^m}{X_{(n)}^m} \leq u\right] \cap \left[X_{(n)} \geq Y_{(m)}\right]\right)}{P(X_{(n)} \geq Y_{(m)})} =$$

$u \in (0,1)$

$$= \frac{P(Y_{(m)} \leq u^{\frac{1}{m}} X_{(n)})}{P(X_{(n)} \geq Y_{(m)})}$$

$$\Big[\, P(Y_{(m)} \leq u^{\frac{1}{m}} X_{(n)}) = \int_0^{\beta} \int_0^{u^{\frac{1}{m}} w} n \left(\frac{w}{\beta}\right)^{n-1} \frac{1}{\beta}\, m \left(\frac{v}{\beta}\right)^{m-1} \frac{1}{\beta}\, dv\, dw =$$

$$= \frac{1}{\beta^{n+m}} \int_0^{\beta} n\, w^{n-1} \left(\int_0^{u^{\frac{1}{m}} w} m\, v^{m-1}\, dv \right) dw =$$

$$= \frac{1}{\beta^{n+m}} \int_0^{\beta} n\, w^{n-1} \left[v^{m} \right]_0^{u^{\frac{1}{m}} w} dw =$$

$$= \frac{1}{\beta^{n+m}} \int_0^{\beta} n\, w^{n-1}\, u\, w^{m}\, dw =$$

$$= \frac{1}{\beta^{n+m}} \frac{n}{n+m} u \left[w^{n+m} \right]_0^{\beta} = \frac{n}{n+m} u \,\Big]$$

$$P\left(\frac{X_{(n)}^{m}}{Y_{(m)}^{m}} \leq u \,\Big|\, X_{(n)} < Y_{(m)} \right) = \frac{P\left(\left[\frac{X_{(n)}^{m}}{Y_{(m)}^{m}} \leq u \right] \cap \left[X_{(n)} < Y_{(m)} \right] \right)}{P(X_{(n)} < Y_{(m)})} =$$

$$= \frac{P(X_{(n)} \leq u^{\frac{1}{m}} Y_{(m)})}{P(X_{(n)} < Y_{(m)})} \qquad u \in (0,1)$$

$$\Big[\, P(X_{(n)} \leq u^{\frac{1}{m}} Y_{(m)}) = \int_0^{\beta} \int_0^{u^{\frac{1}{m}} v} n \left(\frac{w}{\beta}\right)^{n-1} \frac{1}{\beta}\, m \left(\frac{v}{\beta}\right)^{m-1} dw\, dv =$$

$$= \frac{1}{\beta^{n+m}} \int_0^{\beta} m\, v^{m-1} \left(\int_0^{u^{\frac{1}{m}} v} n\, w^{n-1}\, dw \right) dv =$$

$$= \frac{1}{\beta^{n+m}} \int_0^{\beta} m\, v^{m-1} \left[w^{n} \right]_0^{u^{\frac{1}{m}} v} dv = \frac{1}{\beta^{n+m}}\, u \int_0^{\beta} m\, v^{m+n-1}\, dv$$

$$= \frac{1}{\beta^{n+m}}\, u\, m \left[\frac{v^{m+n}}{n+m} \right]_0^{\beta} = \frac{m}{n+m} u \,\Big]$$

sustituyendo resulta

$$F_\Lambda(u) = u \qquad u \in (0,1)$$

es decir:

$$\boxed{F_\Lambda(u) = \begin{cases} 0 & u \leqslant 0 \\ u & u \in (0,1) \\ 1 & u \in (0,1) \end{cases}}$$

es decir Λ sigue una distribución uniforme en $[0,1]$.

Si deseamos implementar el test de la razón de verosimilitud con nivel de significación α, la región crítica será:

$$\left[W = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \;\middle|\; \frac{x_{(n)}^{n} \; y_{(m)}^{m}}{\text{máx}\{x_{(n)}, y_{(m)}\}^{n+m}} \leqslant \alpha \right\} \right]$$