Diplomatura d'Estadística. I.O.E.
Examen Final Juny 2009

Cadenes de Markov

P1. [4.5 punts] Unes accions es cotitzen en borsa entre 50 i 53€ de forma que, de dia en dia, la seva cotització pot incrementar-se i disminuir només en 1€ o be quedar inalterada respecte del dia anterior. Si la seva cotització no és de 50€ (valor mínim) llavors la probabilitat de que disminueixi en 1€ és de 1/3, mentre que si la seva cotització no és de 53€ (valor màxim) llavors la probabilitat de que augmenti en 1€ és de 1/3. Un determinat inversor compra un paquet d'aquests valors al preu de 52€ l'acció. Considereu la seqüència { X_k } on la variable aleatòria X_k és la cotització del dia *k*èssim.

Es demana:

1) **[1.5 punts]** Establiu el diagrama d'estats per la cadena { X_k } així com la matriu de probabilitats de transició. Analitzeu les classes de la cadena així com la seva periodicitat.
2) **[1.5 punts]** Un dia determinat les accions estan a la seva màxima cotització i l'inversor vol fer-se amb un nou paquet. Per tal d'assegurar-se guanys vol comprar quan les accions estiguin al seu valor mínim. Quin número mig de dies haurà d'esperar a que les accions baixin al màxim
3) **[1.5 punts]** En situació financera delicada l'inversor vol vendre les accions que va comprar a 52€. Aquesta vegada dona la següent ordre de venda quan les accions estan a 51€: fixa un preu de venda a 53€ i un plaç màxim de venda de tres dies. Per tant les accions es venen a 53€ si es que el primer, segón o tercer dia pujen a aquest preu o be el tercer dia són venudes al preu que tinguin a aquell dia. Quina és la probabilitat de vendre a 53€? Quina és l'esperança del guany que obtindrà per acció?

Teoria de Cues

P2. [5.5 punts] En una mina en mig del desert el sistema d'il.luminació i ventilació depèn completament d'un generador elèctric el qual es vol mantenir en funcionament continuat el 95% del temps. Per al seu funcionament es vital una peça de la qual es disposa un stock de 4 unitats actualment (comptant fins i tot la que estigui en servei). L'empresa explotadora de la mina disposa d'un equip de reparació d'aquestes peces. El temps mig entre avaries d'aquest tipus de components és de 4 dies estant exponencialment distribuït. El temps que tarda el taller en fer una reparació és de tres dies, estant també exponencialment distribuït. El preu de cada component és de 1000€. Es contempla la possibilitat de muntar un altre taller de reparació al preu de 1200€.

a) **[1.3 punts]** Establiu un model de cues exponencials per a modelitzar de forma aproximada el número de components avariats. En l'actualitat quina és la probabilitat de que en un moment determinat totes les peces estiguin avariades o en reparació i que, per tant, el generador no funcioni.
b) **[1.2 punts]** Quin és el número mig de peces que hi haurà al taller?.
c) **[1.3 punts]** En la situació actual, les peces passen a posar-se en funcionament de forma cíclica i per ordre d'arribada al stock, és a dir, es passa per una seqüència del tipus

    funcionament, taller de reparació, stock, funcionament...

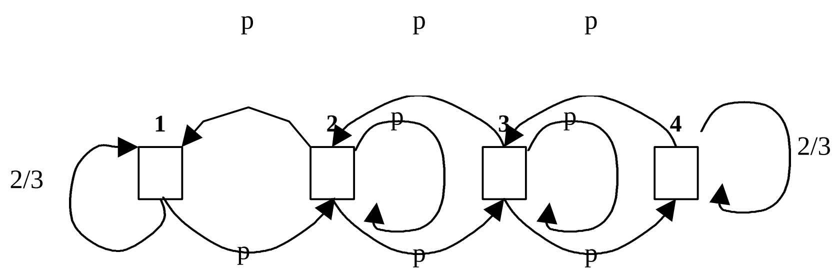
   Determineu el % del temps que un component està en funcionament.
d) **[1.7 punts]** Determineu quin és el número òptim de peces extra a comprar i de tallers a muntar per tal d'assumir que la fracció del temps en que no funciona el generador és <5%.

Unes accions es cotitzen en borsa entre 50 i 53€ de forma que, de dia en dia, la seva cotització pot incrementar-se i disminuir només en 1€ o be quedar inalterada respecte del dia anterior. Si la seva cotització no és de 50€ (valor mínim) llavors la probabilitat de que disminueixi en 1€ és de 1/3, mentre que si la seva cotització no és de 53€ (valor màxim) llavors la probabilitat de que augmenti en 1€ és de 1/3. Un determinat inversor compra un paquet d'aquests valors al preu de 52€ l'acció.

Considereu la seqüència { X_k } on la variable aleatòria X_k és la cotització del dia *k*-èssim.

Es demana:

1) Establiu el diagrama d'estats per la cadena { X_k } així com la matriu de probabilitats de transició. Analitzeu les classes de la cadena així com la seva periodicitat.



p=1/3

Hi ha única classe, aperiòdica.

X_k - Estats, M=4	Y_k - Preu per acció
1	*50*
2	*51*
3	*52*
4	*53*

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

2) Un dia determinat les accions estan a la seva màxima cotització i l'inversor vol fer-se amb un nou paquet. Per tal d'assegurar-se guanys vol comprar quan les accions estiguin al seu valor mínim. Quin número mig de dies haurà d'esperar a que les accions baixin al màxim?

Demana el temps mig de primer pas des de l'estat 4 a l'estat 1: $\mu_{41} = 18$ dies.

Sigui $\mathbf{P_1}$ una matriu de dimensió *M-1=3* que conté les components de la matriu **P** ***menys la fila i la columna primera***:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mu}_1 = \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_1\right)^{-1}\mathbf{1} = \begin{bmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{31} \\ \mu_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} \text{ dies}$$

Notem $\underline{\mu}_1$ al vector columna que té totes les components μ_{i1} excepte la primera μ_{11}, és a dir: $\underline{\mu}_1^T = \left[\mu_{21}\ \ \mu_{31}\ \mu_{41}\right]$. La resposta és que haurà d'esperar un promig de 18 dies per tal de trobar el preu del paquet en el seu valor mínim, a partir d'un dia en que es trobi al preu màxim.

3)

Inicialment, l'estat és 2 (preu a 51 Euros). L'estat 4 esdevé un estat absorbent.

La probabilitat de vendre a 53 Euros $p_{24}^{(3)}$.

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

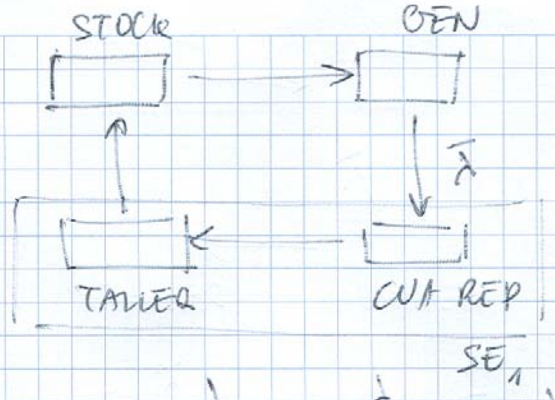
$$\mathbf{P}^{(3)} = \mathbf{P}^{(2)}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{27} & \frac{1}{3} & \frac{4}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{27} & \frac{5}{27} & \frac{5}{27} \\ \frac{4}{27} & \frac{5}{27} & \frac{4}{27} & \frac{14}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'on $p_{42}^{(3)}$, la probabilitat de comprar a 51 Euros demanada és de $p_{24}^{(3)} = \frac{5}{27}$.

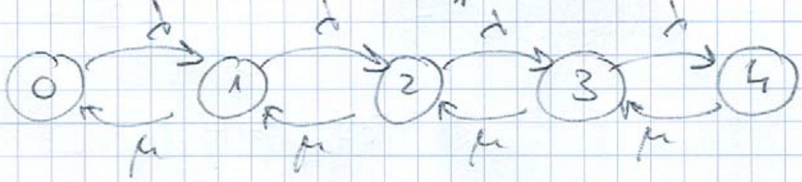
L'esperança del guany que obtindrà per paquet és l'esperança de la v.a Z :

- Un guany de –2 Euro té per probabilitat $p_{21}^{(3)} = \frac{1}{3}$.
- Un guany de –1 Euro té per probabilitat $p_{22}^{(3)} = \frac{8}{27}$.
- Un guany de 0 Euro té una probabilitat $p_{23}^{(3)} = \frac{5}{27}$.
- Un guany de 1 Euro té per probabilitat $p_{24}^{(3)} = \frac{5}{27}$.

$\mathrm{E}[Z] = -2p_Z(-2) - 1p_Z(0-1) + 1p_Z(1) = (-2)\frac{1}{3} + (-1)\frac{8}{27} + 1\frac{5}{27} = -\frac{7}{9}Euro$ en promig el guany per paquet, és a dir 7/9 de pèrdua promig per paquet en la tessitura descrita.

1) 

Es un sistema tancat
El sistema d'espera SE_1 pot representar-se per una cua $M/M/1/4$.



Sempre hi ha e.e.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/4}{1/3} = 0'75$$

$$P_0 = [1+\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4]^{-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^5} = \frac{0'25}{1-(3/4)^5} = 0'3277$$

$$P_4 = P_0\rho^4 = 0'3277\left(\frac{3}{4}\right)^4 = 0'1037 \rightarrow 89'62\% \text{ funciona}$$

2) $$L_{SE_1} = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 = P_0(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + 4\rho^4) =$$
$= 1'44$ peces

3) $$W_{SE_1} = L_{SE_1}/\bar{\lambda} = \frac{1'44}{1/4(1-0'1037)} = 6'42 \text{ dies} \; ; \; \bar{\lambda} = 0'224 \text{ dies}^{-1}$$

Si $L_{SE_1} = 1'44 \Rightarrow L_{SE_2} = 4 - 1'44 = 2'56$ peces

$$(W_{STOCK} + W_{OEN})\bar{\lambda} = L_{SE2} \rightarrow W_{STOCK} = \frac{L_{SE2}}{\bar{\lambda}} - W_{OEN}$$

$$W_{STOCK} = \frac{2'56}{0'2241} = 11'424 \text{ dies}$$

$$100\frac{W_{OEN}}{W_{OEN} + W_{STOCK} + W_{SE_1}} = 100\frac{4}{4 + 11'424 + 6'42} = 18'31\%$$

4) Si es compra una peça més : M/M/1/5

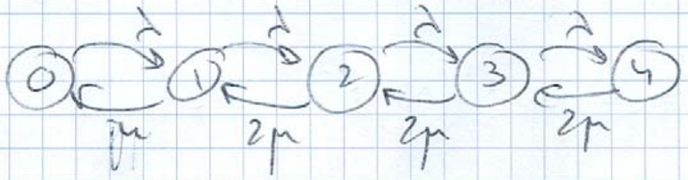
$P_5 = \frac{1-\rho}{1-\rho^6}\rho^5 = 0'0721 \longrightarrow +1000$ €

Si se'n compren dues :

$P_6 = \frac{1-\rho}{1-\rho^7}\cdot\rho^6 = 0'0513 \longrightarrow +2000$ €

Si es compra un nou taller M/M/2/4

$P_0' = \left[1+\rho+\frac{1}{2}\rho^2+\frac{1}{4}\rho^3+\frac{1}{8}\rho^4\right]^{-1} = 0'4595$



$\longrightarrow +1200$ €

$P_4' = P_0' \frac{1}{8}\rho^4 = 0'01817 \longrightarrow 98'18\%$ temps funcionant

El més econòmic és comprar un nou taller.