

Mètodes Bayesians

Juliol 2014

1. Que és el model estadístic i que és el model bayesià?
2. Quina diferència hi ha entre la distribució a posteriori i la distribució predictiva a posteriori?

Assumim que el nombre de gols per partit que fa el Barça al seu camp en un partit de lliga segueix un model $Poisson(\lambda)$,

$$p(y|\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!},$$

amb espai de paràmetres $\Omega = [0, \infty)$, i per tant amb $E[y|\lambda] = \lambda$ i $Var[y|\lambda] = \lambda$. Les distribucions a priori conjugades per aquest model són les $Gamma(a, b)$,

$$\pi(\lambda) = \frac{b^a \lambda^{(a-1)} e^{-b\lambda}}{\Gamma(a)},$$

i per tant amb $E[\lambda] = a/b$ i $Var[\lambda] = a/b^2$. Aquesta última lliga els gols per partit que ha fet el Barça a casa han sigut 5, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 4, 4, 5, 6, 2, 2, 3, 5, 1, 4, 2 i 4. Suposant que el nombre de gols per partit són condicionalment independents i idènticament distribuïts:

3. Calcula la funció de versemblança, tria i justifica una distribució a priori conjugada per λ i calcula la distribució a posteriori.
4. Dona un estimador puntual per λ basat en aquesta distribució a posteriori, i compara'l amb $E[\lambda]$ i amb l'estimador màxim versemblant per λ .
5. Explica com calcularies un interval amb una credibilitat a posteriori del 90% per λ , i com triaries entre $H_1 : \lambda < 2$, $H_2 : 2 \leq \lambda < 3$ i $H_3 : 3 \leq \lambda$.

Una setmana abans del dia de les eleccions municipals es vol estimar el percentatge d'abstenció a la ciutat de Tarragona. Per això es disposa d'una mostra aleatòria simple de 2000 electors, dels quals 854 diuen que no aniran a votar.

6. Quin model estadístic faries servir i quina distribució a priori escolliries per analitzar aquestes dades?
7. Si el cens electoral de Tarragona el dia de les eleccions tindrà 90.000 electors, explica com faries un interval de credibilitat del 95% per a la predicció del nombre total d'electors que s'abstindran.