Teoria de Cues i Simulació.
Grau Interuniversitari d'Estadística i Investigació Operativa.
Curs 2012-13. Convocatòria de Juliol.

P1. **(10 punts)** Tres pous de petroli abasteixen una petroquímica. El temps mig de funcionament d'un pou sense avaries és de 5 mesos i està exponencialment distribuït. El temps de reparació és també exponencialment distribuït d'esperança 1 mes. Hi ha un únic tècnic de reparacions i els pous que són reparats són immediatament posats en funcionament. Es demana:

a) (1.5) Model de cues per al número de pous avariats.
b) (1) Probabilitats d'estat estacionari. Fracció del temps en el que no hi ha cap pou de petroli en explotació funcionant.
c) (1) Nº mig de pous de petroli avariats.
d) (1) Temps mig de permanència per pou en estat de reparació.
e) (1.5) El cost de cada reparació és de 200.000 €. Calculeu el cost mig mensual per reparacions.
f) (3.25) En un instant determinat hi ha dos pous que encara no han estat reparats; caracteritzeu la distribució de probabilitats del temps fins que es repari l'últim dels dos pous. quin és el temps mig que passarà fins que tots dos pous estiguin operatius? Quina és la seva variança?
g) (0.75) Repetiu l'apartat anterior però sabent que el primer dels dos pous va avariar-se fa ara 1 mes.

P2. (6,0 punts) En un aeroport, el sistema de revisió de passaports dels passatgers que entren en el país està estructurat en una única cua que és atesa per un agent. Els passatgers arriben cada 30 segons exactament. Hi ha un 15% dels passatgers que són comunitaris amb un temps de revisió del passaport distribuït exponencialment de 20 segons, mentre que el 85% restant (extracomunitaris) tenen un temps de revisió també exponencialment distribuït però de 30 segons. Se suposa que les dues classes de passatgers arriben barrejats a l'atzar. En aquestes condicions es demana:

a) [2 punts] Caracteritzeu el sistema d'espera que millor s'ajusta a la descripció donada i el seu factor de càrrega. Calculeu els seus paràmetres: coeficient de variació del temps entre arribades i coeficient de variació del temps de serveis per al flux combinat de passatgers comunitaris-extracomunitaris.
b) [2.5 punts] Utilitzant una fòrmula d'aproximació calculeu: el temps mig d'espera en cua d'un passatger qualsevol i l'ocupació mitjana de la cua.
c) [1.5 punts] Quina és la probabilitat de que un passatger esperi en cua més de 1 minut?

2400	6771	7164	1821	6170	9245	5791	3453	8305	6658
7220	3688	7989	1439	9171	6567	6899	7151	9439	6219
3253	7880	1782	2299	4181	8936	1243	939	7819	0884
5221	9876	5305	6365	3369	324	4595	4558	2148	9635
1319	2803	2061	9608	4167	3831	3340	7509	3359	8669
9992	9590	4232	1480	6077	3465	1932	5370	1072	7807

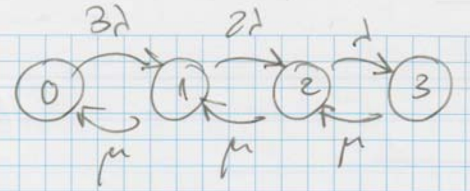
P3. (4 punts) La funció de densitat d'una variable aleatòria τ ve donada per:

$f_\tau(t) = t/15$ si $0 <= t <= 3$ i $f_\tau(t) = 1/5 - (t-3)/35$ si $3 <= t <= 10$

a) [2 punts] Usant la taula de nºs. a l'encapçalament genereu aleatòriament una mostra de grandària 2 per τ usant el mètode del rebuig.
b) [2 punts] Considereu la variable τ' distribuïda segons una 2-Erlang d'esperança 5; genereu un valor a l'atzar per la variable $\tau + \tau$' usant la definició de la llei 2-Erlang i el mètode de la i nversa per obtenir els valors de τ' (aprofitar un dels valors per τ obtingut en l'apartat anterior.

P1

a)



$\lambda = 0'2\ m^{-1}$

$\mu = 1\ m^{-1}$

b) $P_0 = [1 + 3\theta + 6\theta^2 + 6\theta^3]^{-1} = [1 + 0'6 + 0'24 + 0'048]^{-1} = 0'5296$

$P_1 = 0'3178,\ P_2 = 0'1271,\ P_3 = 2'54 \cdot 10^{-2}$

P_3 = fracció del temps que no hi ha cap pou en funcionament

c) $L = P_1 + 2P_2 + 3P_3 = 0'648$

d) $\bar{\lambda} = (N - L)\lambda = 0'2(3 - 0'648) = 0'47\ m^{-1}$, $W = \frac{0'648}{0'47} = 1'37\ m.$

e) flux efectiu de reparacions: $\bar{\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow 200000 \times 0'47 = 94000$ €/mes.

f) τ = temps de reparació dels dos; $\tau = t_1 + t_2$

el primer pou s'està reparant a l'instant actual; el temps que queda fins que sigui reparat és el temps de vida residual r; però $r \sim exp$ també $E[r] = 1$ mes t_2 també $t_2 \sim exp$, $E[t_2] = 1$ mes

$\Rightarrow \tau \sim$ 2-Erlang $E[\tau] = 2$ mesos, $C_\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sigma_\tau = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1'41$ mesos

f') $P(\tau \geq t) = e^{-\alpha t} \sum_{l=0}^{K-1} \frac{(\alpha t)^l}{l!} =$ $t = 2$

$= e^{-2}(1 + 2) = 3e^{-2} = 0'406.$

g) El resultat és el mateix que a f) ja que, per una distribució exponencial, el temps de vida condicionat és també exponencial.

P2) Procés d'arribades: D, $E[\tau] = 30$, $\sigma_\tau = 0$

Procés servei hiperexp.

$E[x] = 0'15 \cdot 20 + 0'85 \cdot 30 = 28'5\ s$

$Var[x] = 2(0'15 \cdot 20^2 + 0'85 \cdot 30^2) - 28'5^2 =$

$= 837'7\ s^2$

$C_x = \dfrac{\sqrt{837'7}}{28'5} = 1'015.$ MODEL D/Hip/1

(D/G/1)

$\rho = \dfrac{1/30}{1/28'5} = \dfrac{28'5}{30} = 0'95$

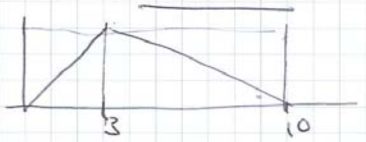
2) S'usarà fórmula de Köllerström

$$W_q = \frac{\lambda(\sigma_\tau^2 + \sigma_x^2/s^2)}{2(1-\rho)} = \frac{\frac{1}{30}\ 837'7}{2 \cdot 0'05} = 279'5$$

3) W_q aproximadament exponencial

$$P(w_q \geq 60) = e^{-60/279'5} = 0'8065$$

P3) $f_\tau(t)$



$\hat{f} = \max\limits_{0 \leq t \leq 10} f_\tau(t) = 1/5$

$u_1 = \dfrac{2400}{9999} \rightarrow t_1 = 10 \cdot \dfrac{2400}{9999} = 2'4002$, $f(t_1) = 0'16$

$u_2 = \dfrac{6771}{9999} \rightarrow f_1 = \dfrac{1}{5}\dfrac{6771}{9999} = 0'1354$

$f_1 < f(t_1) \Rightarrow$ s'accepta $t_1 = 2'4002$

$u_1 = \dfrac{7164}{9999} \rightarrow t_1 = 7'1647 \quad f(t_1) = 0'0810$

$u_2 = \dfrac{1821}{9999} \quad f_1 = \dfrac{1}{5}\dfrac{1821}{9999} = 3'642 \cdot 10^{-2}$

$f_1 < f(t_1) \Rightarrow$ s'accepta $t_1 = 7'1647$.

b) valor de la 2-Erlang; es generen 2 n°s exp pel mètode de la inversa.

$\tau^0 \sim 2\text{-Erlang} \quad \tau^0 = \tau_1 + \tau_2 \quad , \tau_i \sim \exp,$

$E[\tau] = 5 \qquad E[\tau_i] = 5/2$

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1^{0} = -\frac{2}{5} \ln \frac{6170}{9999} \\ \tau_2^{0} = -\frac{2}{5} \ln \frac{9245}{9999} \end{array}\right\} \tau = -\frac{2}{5} \ln \frac{6170 \cdot 9245}{9999^2} = \underline{\underline{0'2244}}$$

$\tau + \tau' = 0'2244 + 2'4002 = \underline{\underline{2'6246}}$

P2 [10 punts] Un equip de curses per relleus està entrenant de forma intensiva de cara a una competició. L'equip està format per tres corredors i només participa en una cursa a la vegada. Així, en un instant de temps només hi ha sempre un únic corredor actiu, estant tots els demés esperant per rellevar-lo quan es veu que el rendiment del que està corrent comença a baixar; això passa en promig cada minut que el corredor està corrent, estant aquest temps exponencialment distribuït. El temps de recuperació del corredor que acaba de ser rellevat està també exponencialment distribuït d'esperança 0.5 minuts i durant aquest temps de recuperació ha d'estar sota la supervisió d'un metge. L'equip només en disposa d'un de metge, així que si el metge està ocupat amb un corredor un altre que necessiti de supervisió s'ha d'esperar.

En aquestes condicions es demana:

1. [2 p] Suposant que hi haguessin infinits membres que constitueixen l'equip, determinar una cua i el seu diagrama d'estats i taxes per al número de corredors que hi ha en recuperació durant una cursa. Hi ha estat estacionari?
2. [2 p] Utilitzant l'anterior aproximació, quina és la probabilitat de que es calgui un relleu del corredor que està en actiu i hi hagin dos o més corredors en recuperació o esperant-la.
3. [1,5 p] Quin és el número mig de recuperacions que supervisa el metge per unitat de temps?
4. [1,5 p] Quin és el número mig de corredors en recuperació Quin és el temps mig dels corredors en recuperació?