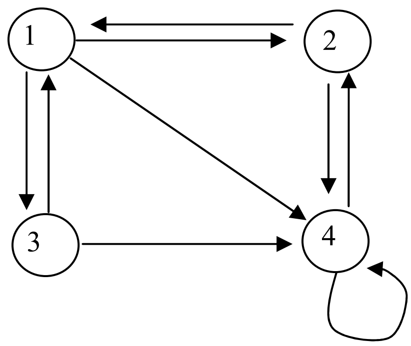
DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA. Curs 06/07. 2on Q

EXAMEN FINAL. Convocatòria Ordinària.

P1. [45%] El següent diagrama representa la xarxa viària d'un petit poble:



Cada nus representa una cruïlla i cada arc el sentit d'un carrer (p.ex. l'arc 1->4 és un carrer d'una sola direcció). El temps de pas de cada arc és de 15 segons. Un conductor que ve de fora vol aparcar i desconeix que l'únic lloc on pot fer-ho és el nus 4. El comportament del conductor en arribar a un nus és el d'anar a qualsevol altre nus dels immediatament accessibles de forma equiprobable. L'arc 4->4 representa espera en el nus 4 durant 15 segons. Suposant que aquest conductor entra pel nus 1, es demana:

a) [1 punt] Escriure al matriu de probabilitats de transició on l'estat a cada període de temps de 15 segons és el número de cruïlla. Analitzar les classes i la periodicitat.

b) [2 punt] Si parteix del nus 1 determineu quant de temps en promig tardarà en arribar al parking del nus 4.

c) [2,5 punt] Fracció del temps que el conductor estarà aparcat.

Per usuaris que sí coneixen la ubicació del parking al nus 4 el model a usar és diferent. Aquests usuaris, en entrar pel nus 1 segueixen directament el carrer i->4 (15 segons) i arriben al parking. El temps de permanència en el parking pot considerar-se una variable aleatòria exponencial d'esperança 60 segons. Es demana:

a) [1 punt] Calcular el temps mig que un usuari està en el poble des que entra pel nus 1 fins que surt del parking.

Un grup de quatre cotxes entren al poble i arriben simultàniament al parking ocupant cada cotxe una plaça.

b) [1,5 punt] Quin és el temps mig que passarà fins que algun cotxe dels quatre marxi. Quina és la probabilitat de que en 40 segons des que han arribat al parking hagi ja marxat algun cotxe.

c) [2 punts] quina es la probabilitat que als 120 segons d'haver arribat tots quatre cotxes al parking encara hi hagi algun cotxe aparcat.

P2. [55%] Una perruqueria te capacitat per 6 persones comptant als que estan sent atesos. En la perruqueria hi treballen dos perruquers amb idèntica habilitat. L'afluència de clients és de 2 cada hora i el temps entre arribades és exponencialment distribuït. Cada client que arriba necessita en promig 45 minuts per ser servit, estant el temps de servei també exponencialment distribuït.

Es demana:

a) [1 punt] Identifiqueu un model de cues pels clients que entren a la perruqueria.

b) [2 punts] Calculeu les probabilitats d'estat estacionari corresponents al número de clients presents en l'establiment.

c) [2 punts] Idem. Però pels clients presents a l'establiment que estan esperant ser servits.

d) [1 punt] Calculeu l'ocupació mitjana de la perruqueria.

e) [1 punt] Calculeu el temps mig que està un client a la perruqueria.

f) [1 punt] Cada client reporta un ingrés promig de 15 €. Si l'establiment està obert 8 hores al dia calculeu els ingressos mensuals (24 dies).

g) [2 punt] En un instant determinat l'establiment està ple. Sovint els dependents saben que si es dona aquesta situació abans de tancar, llavors corren el risc de plegar massa tard ja que no poden deixar d'atendre els clients que hi ha dins. Per tant els dependents volen conèixer a modus de previsió, estant l'establiment ple en un instant determinat i si es tanqués la porta de la perruqueria, quin seria el temps mig que es tardaria en quedar en buit.

Fabricat Ecològicament

P1)

1)

$$P = \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}$$

1 classe irreduïble aperiòdica

2) μ_{14}

$$\begin{pmatrix} \mu_{14} \\ \mu_{24} \\ \mu_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{14} \\ \mu_{24} \\ \mu_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{14} \\ \mu_{24} \\ \mu_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \mu_{24} = 621/351 \\ \mu_{14} = \dfrac{270}{117} \\ \mu_{34} = \dfrac{504}{234} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & -1/3 & 1 \\ -1/3 & 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 5/6 & -1/3 & 0 & 4/3 \\ -1/3 & 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 39/54 & 0 & 0 & 5/3 \\ -1/3 & 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\frac{39}{54}\mu_{14} = \frac{5}{3} \longrightarrow \mu_{14} = \frac{5}{3} \cdot \frac{54}{39} = \frac{270}{117}.$$

3)

$$\mu_{44} = 1 + \cancel{p_{41}}\mu_{14} + p_{42}\mu_{24} + \cancel{p_{43}}\mu_{34}$$

$$\mu_{44} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{621}{351} = 1 + \frac{621}{702} = \frac{1324}{702}$$

$$\pi_4 = 1/\mu_{44} = \frac{702}{1324} = 0'5306$$

4) $15 + 60 = 75$ s.

5) τ_i = temps de permanència del cotxe i
$i = 1, 2, 3, 4$

τ = temps de permanència del 1er que marxa

$\tau_i \sim \exp \quad E[\tau_i] = 60$ s

$\tau = \min_{1 \leq i \leq 4} \{ \tau_i \} \sim \exp, \quad E[\tau] = \frac{60}{4}$ s $= 15$ s

$$P(\tau \leq 40) = 1 - e^{-40/15} = 1 - e^{-8/3} = 0'93$$

6) N = nº cotxes al parking després de 120 s

$$P(N=1) + P(N=2) + P(N=3) + P(N=4) =$$
$$= 1 - P(N=0) = 0'4412$$

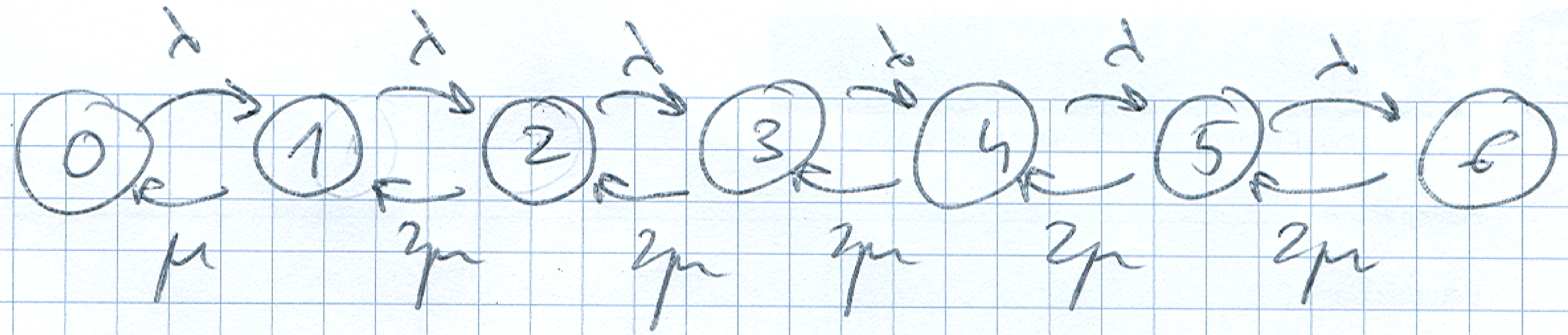
$$P(\tau_i \leq 120) = 1 - e^{-120/60} = 1 - e^{-2} = 0'8646$$

$$P(N=0) = \prod_{l=1}^{4} P(\tau_l \leq 120) = (1 - e^{-2})^4 = 0'5588$$

També pot abordar-se com un sistema paral·lel de 4 components. Si T és el temps fins la pana del sistema es demana

$$1 - P(T \leq 120) = R_T(120)$$

P2)



M/M/2/6

1) $\lambda = 2h^{-1}$, $\mu = \frac{4}{3}h^{-1}$ $\quad \rho = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{2}{2\cdot 4/3} = 3/4$, $\theta = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{4/3} = 3/2$

2) $C_1 = \theta = 3/2$, $C_2 = \theta\frac{\theta}{2} = \frac{\theta^2}{2}$ $\quad C_3 = \theta\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$

$C_4 = \theta\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 \quad C_5 = \theta\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 \quad C_6 = \theta\left(\frac{\theta}{2}\right)^5$

$$P_0 = \left[1+\sum_{\ell=1}^{6} C_\ell\right]^{-1} = \left[1+\theta\left(1+\frac{\theta}{2}+\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \dots \left(\frac{\theta}{2}\right)^5\right)\right]^{-1}$$

$$= \left[1+\theta\left[\frac{1-(\theta/2)^6}{1-\theta/2}\right]\right]^{-1} = \left[1+\frac{3}{2}\left[\frac{1-(3/4)^6}{1/4}\right]\right]^{-1}$$

$= 0'1685$

$P_1 = 0'2528$, $P_2 = 0'1896$ $\quad P_3 = 0'1422$, $P_4 = 0'1066$

$P_5 = 8\cdot 10^{-2} \quad P_6 = 6\cdot 10^{-2}$

3)

N_q	0	1	2	3	4
P'_{n_q}	0'6109	0'1422	0'1066	$8\cdot 10^{-2}$	$6\cdot 10^{-2}$

4+5) $\boxed{L = W\bar{\lambda}}$ $\quad \bar{\lambda} = \sum_{\ell=0}^{5} \lambda_\ell P_\ell = \lambda(1-P_6) = 2(1-6\cdot 10^{-2})$

$= 1'88\ h^{-1}$

$$W = W_q + 1/\mu = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} + \frac{1}{\mu} = \frac{0'8354}{1'88} + \frac{3}{4} = 1'194\ h$$

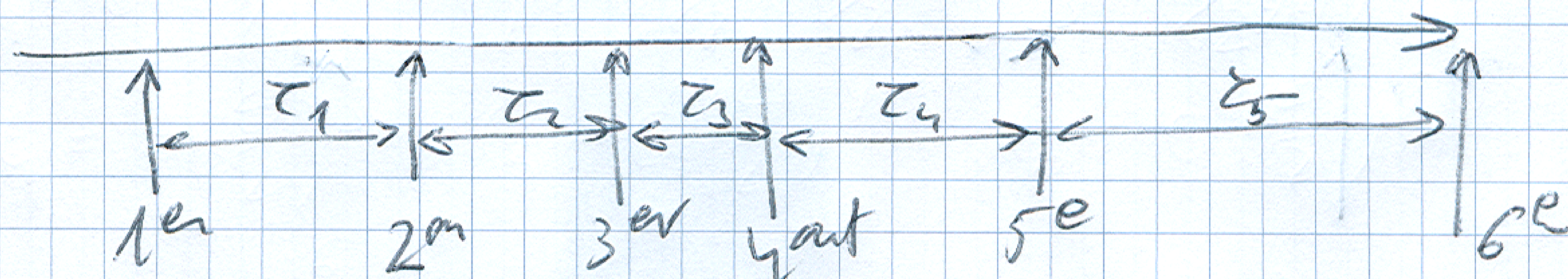
$L_q = P'_1 + 2P'_2 + 3P'_3 + 4P'_4 = 0'8354$

$L = 1'194 \cdot 1'88 = 2'24$ clients.

6) $\bar{\lambda} = 1'88\ h^{-1}$ (Calculat a l'apartat anterior)

Ingressos $= \bar{\lambda} \cdot 15 \cdot 8 \cdot 24 = 5414'4$ €/mes.

7) Si es tanca l'establiment estant ple (6 clients) el temps que tardaria en sortir l'últim



$$\tau_i \sim \exp \quad E[\tau_i] = \frac{1}{2\mu} = \frac{3}{8}\ h \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\tau_5 \sim \exp \quad E[\tau_5] = \frac{1}{\mu} = \frac{3}{4}\ h$$

$$\tau = \sum_{l=1}^{5} \tau_l \longrightarrow E[\tau] = 4 \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{4} = \frac{18}{8} = 2'25\ h$$