UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

TERCER CONTROL DE TEORIA

Programació Lineal i Entera, curs 2015-16
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM :

	Temps estimat	Punts	Puntuació
Test	15min	2 pt	
Exercici 1	75min	a) 3pt	
		b) 5pt	
Total	90min	10 pt	

- **Prohibida la presència de mòbils durant la prova.**
- **Copiar o facilitar la còpia implica suspendre el control.**

TEST (2 punts / 15 min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a), b)** i **c)** si la frase és Vertadera (**V**) o Falsa (**F**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. Per tal que una constricció lineal de desigualtat sigui una desigualtat vàlida cal que:

a) **V / F** Sigui violada per la incumbent. (F)
b) **V / F** Sigui satisfeta per totes les solucions factibles de (PE). (V)
c) **V / F** Es formi a través d'un tall de Gomory. (F)

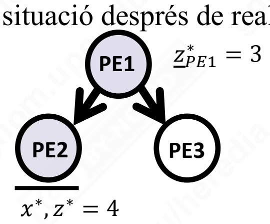
TEST 2. La formulació ideal (PEI):

a) **V / F** S'obté a l'última iteració del mètode de plans de tall de Gomory. (F)
b) **V / F** És la formulació vàlida amb el millor valor de la funció objectiu. (F)
c) **V / F** Té associat un políedre amb punts extrems enters. (V)

TEST 3. Sigui $\mathcal{B}^*$ l'òptim de la relaxació lineal del problema $(PE1)$ a la iteració 1 de l'algorisme de Gomory i $\tilde{\mathcal{B}}$ la base inicial a partir de la qual es reoptimitzarà amb el símplex dual:

a) **V / F** La base $\tilde{\mathcal{B}}$ serà factible dual infactible primal. (V)
b) **V / F** La base $\tilde{\mathcal{B}}$ té les mateixes variables bàsiques que $\mathcal{B}^*$. (F)
c) **V / F** Els vector de costos reduïts associat a $\tilde{\mathcal{B}}$ té una component més que l'associat a $\mathcal{B}^*$. (F)

TEST 4. El següent arbre d'exploració del B&B d'un problema $(PE1)$ de minimització mostra la situació després de realitzar dues iteracions i trobar l'òptim del subproblema $(PE2)$:



a) **V / F** Es pot assegurar que x^*_{PE2} és la solució de $(PE1)$. (F)
b) **V / F** $(PE2)$ i $(PE3)$ són formulacions vàlides de $(PE1)$. (F)
c) **V / F** L'òptim de $(PE1)$ es troba segur a K_{PE3}. (F)

TEST 5. Si x_1, x_2 i x_3 representen les variables binàries de selecció d'un projecte

a) **V / F** $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ imposa que es seleccionaran com mínim dos projectes. (F)
b) **V / F** $x_2 \leq x_3$ imposa que no es seleccionarà x_2 a no ser que es seleccioni x_3. (V)
c) **V / F** $x_1 + x_2 \geq 1$ imposa que es seleccionarà un dels dos projectes 1 o 2. (V)

NOM :

EXERCICI 1. (8 punts / 75min / apunts i calculadora / RESPONEU AL MATEIX FULL)

Considereu el següent problema de (PE)

$$(PE)\begin{cases} \min & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ & x_1 & +x_2 & \geq & 1 \\ & 2x_1 & -x_2 & = & 0 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0, x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Volem resoldre aquest problema amb l'algorisme del B&B i del B&C amb els següents criteris:

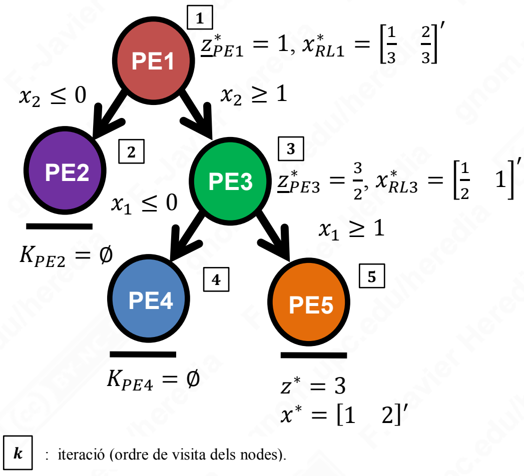
- Seleccioneu com a variable de ramificació i de generació del tall la que tingui el **major** índex.
- Exploreu l'arbre triant primer la branca de la esquerra ($x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$) dels últims nodes afegits.

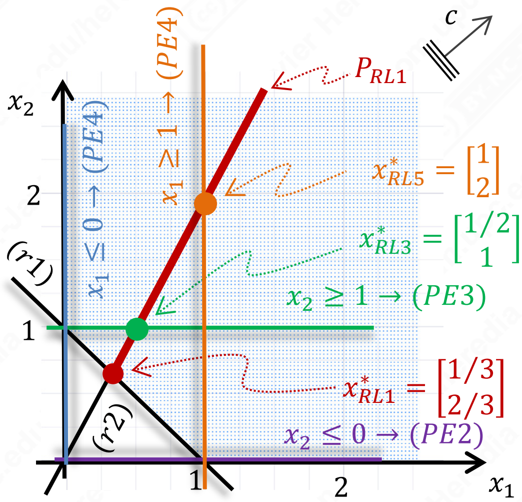
a) **(3 punts)** Obtingueu l'arbre d'exploració de l'algorisme de ramificació i poda (no cal que indiqueu el detall de les iteracions de l'algorisme, només l'arbre d'exploració final). Indiqueu a cada node separat la fita $\underline{z}_{PEj}^*$ i el valor de x_{RLj}^* i a cada node eliminat els valors de z^* i x^* o el motiu de la seva eliminació

b) **(5 punts)** Resoleu el problema (PE) amb l'algorisme de ramificació i tall (B&C) reforçant les formulacions amb un tall de Gomory. Resoleu la primera relaxació lineal gràficament la resta reoptimitzant amb l'algorisme del símplex dual.

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

Apartat a)





Apartat b)

B&C, iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de $(RL1)$ amb un tall de Gomory**:
  - **Resolució gràfica de $(RL1,0)$**: $x^*_{RL1,0} = [1/3 \quad 2/3]',\ z^*_{RL1,0} = 1 \Rightarrow \underline{z}^*_{PE1} := \lceil z^*_{RL1,0} \rceil = 1$
    - Tall de Gomory sobre $x^*_{RL1,0}$ associat a x_2:
      - $\mathcal{B} = \{1,2\}\ ;\ B = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}\ ;\ B^{-1} = \begin{bmatrix}1/3 & 1/3\\2/3 & -1/3\end{bmatrix}\ ;\ x_B = \begin{bmatrix}1/3\\2/3\end{bmatrix}$
      - $\mathcal{N} = \{3\}\ ;\ A_N = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\ ;\ V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}-1/3\\-2/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\end{bmatrix}$
      - Tall de Gomory associat a $x_2 = \frac{2}{3}$:

$$x_2 + \lfloor v_{23} \rfloor \cdot x_3 \le \lfloor x_2^* \rfloor\ ;\ x_2 + \left\lfloor \frac{-2}{3} \right\rfloor \cdot x_3 \le \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor\ ;\ x_2 - x_3 \le 0\ (r3)$$

  - **Resolució de $(RL1,1) = (RL1,0) + (r3)$** : reoptimització amb el símplex dual a partir de $x^*_{RL1,0} = [x_1, x_2]' = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}'$ per addició de $x_2 - x_3 + x_4 = 0\ (r4)$
    - $a'_{m+1} = [0 \quad 1 \quad -1], a'_{B,m+1} = [0 \quad 1], -a'_{B,m+1}B^{-1} = [-2/3 \quad 1/3]$.
    - $\mathcal{B} := \{1,2,4\},\ B^{-1} := \begin{bmatrix} B^{-1} & 0\\ -a_{B_{m+1}}B^{-1} & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 0\\2/3 & -1/3 & 0\\-2/3 & 1/3 & 1\end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{bmatrix}$.
    - $\mathcal{N} = \{3\}, A_N = \begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}, r' = [0 \quad 0] - [1 \quad 1]\begin{bmatrix}1/3 & 1/3\\2/3 & -1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} = [1] \ge 0$
    - **Símplex dual, iteració 1**: $\mathcal{B} = \{1,2,4\}, \mathcal{N} = \{3\}$
      - Identificació de SBF òptima i selecció de la VB de sortida p :

$$x_B = \begin{bmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 4 \text{ VB sortint}}$$

      - Identificació de problema (D) il·limitat :

$$d'_{r_N} = \beta_3 A_N = [-2/3 \quad 1/3 \quad 1]\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix} = [-1/3] \ngeq 0$$

- Sel. VNB d'entrada q:

$$\theta_D^* = \min\left\{-r_j/d_{r_{N_j}} : j \in \mathcal{N}, d_{r_{N_j}} < 0\right\} = \min\left\{\frac{-1}{-1/3}\right\} = 3 \Longrightarrow \boxed{q = 3}$$

- Canvi de base i actualitzacions:

$$d_B = -B^{-1}A_3 = -\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 0\\2/3 & -1/3 & 0\\-2/3 & 1/3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3\\2/3\\1/3\end{bmatrix}, \theta^* = -\frac{x_{B(p)}}{d_{B(p)}} = 2$$

$$x_B := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix}1/3\\2/3\\1/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, x_q = x_3 := \theta^* = 2$$

$$\mathcal{B} := \{1,2,3\}$$

- **Símplex dual, iteració 2:** $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\}, \boldsymbol{\mathcal{N}} = \{\mathbf{4}\}$
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la VB de sortida p :
    $x_B \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{òptim } (RL1,1)}$.
- $x^*_{RL1,1} = [1 \quad 2]'$, $z^*_{RL1,1} = 2$

- **Eliminació:** $x^*_{RL1,1} = [1 \quad 2]' = x^*_{PE1}$:
  - $L \leftarrow L \backslash \{(PE1)\} = \emptyset$.
  - Actualització incumbent: $z^*_{PE1} < z^* \Rightarrow z^* := 2, x^* := [1 \quad 2]'$,

B&C, iteració 2: $L = \emptyset$: $\boxed{x^*_{PE1} = [1 \quad 1]', z^*_{PE1} = 2}$