Transformacions de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$

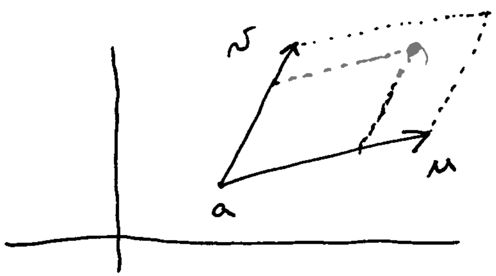
s'usen per fer canvis de variables en integrals dobles.

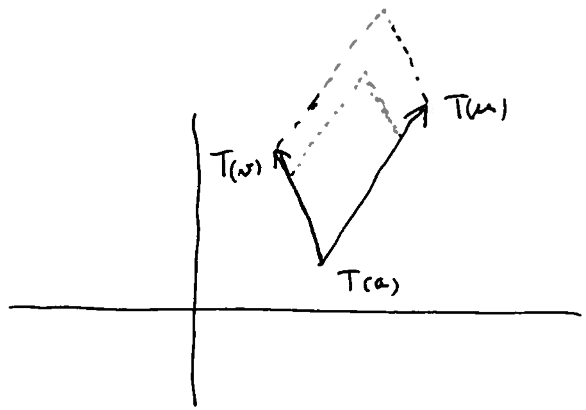
Les més senzilles són les lineals, $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$

Si $\det A \neq 0$ T envia paral·lelograms a paral·lelograms.

un paral·lelogram és un conjunt

del tipus $P = \{ a + tu + sv \mid t \in [0,1], s \in [0,1] \}$, u, v l.i.





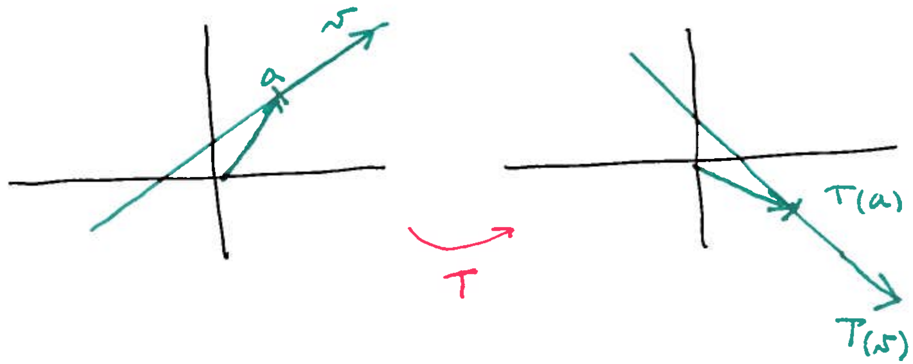
$$T(P) = \{ \underbrace{T(a + tu + sv)}_{T(a) + tT(u) + sT(v)} \mid t \in [0,1], s \in [0,1] \}$$

A més T envia els costats als costats i els vertexs als vertexs.

Si $\det A \neq 0$, T envia rectes en rectes.

Si $r = a + t v$, $a, v \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$

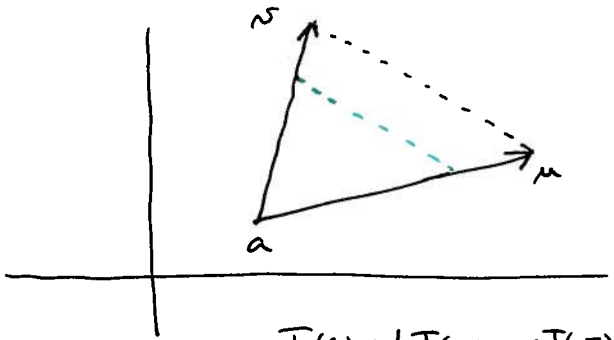
$$T(a + t v) = T(a) + t\,T(v)$$

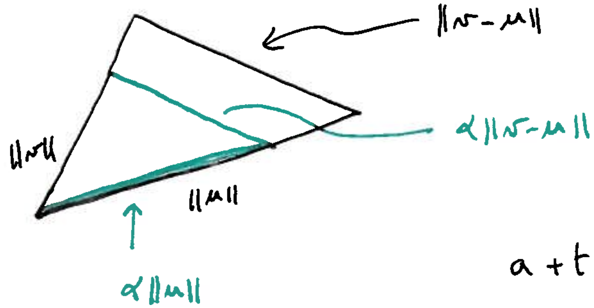


Si $\det A \neq 0$, T envia triangles en triangles

$$\tau = \{ a + t u + s v \mid s \geq 0,\ t \geq 0,\ t + s \leq 1 \}, \quad u, v \text{ l.i.}$$

Si $t + s = \alpha \in [0, 1]$ $\quad a + t u + s v$ descriu un segment dins el triangle





$$a + t u + s v = a + (\alpha - s) u + s v$$
$$= a + \alpha u + s (v - u)$$
$$0 \leq s \leq \alpha$$

$$T(\tau) = \{ \overbrace{T(a + t u + s v)}^{T(a) + t T(u) + s T(v)} \mid s \geq 0,\ t \geq 0,\ t + s \leq 1 \}$$

Def Sigui $T: A \longrightarrow B$. T és injectiva en A si $T(x,y) = T(x',y') \Rightarrow (x,y) = (x',y')$

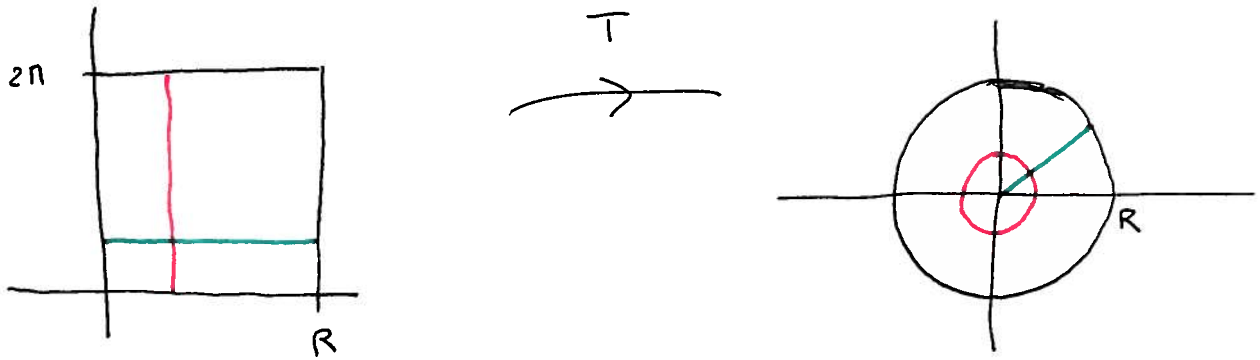
T és exhaustiva si $\forall\, (x,y) \in B \quad \exists\, (x^*,y^*) \in A$ t.q. $T(x^*,y^*) = (x,y)$.

T és bijectiva si és injectiva i exhaustiva

Ex $T(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

$$T: [0,R] \times [0,2\pi] \longrightarrow \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$$

no és injectiva
ni exhaustiva

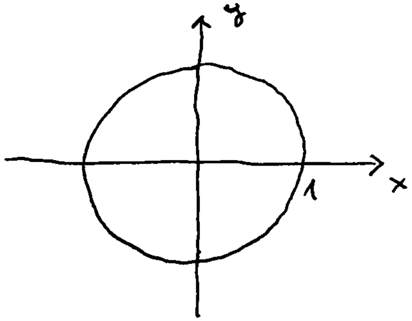


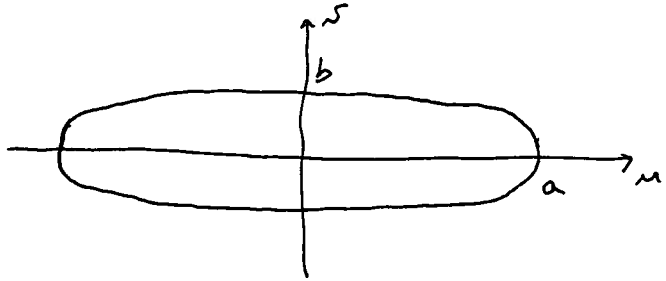
$$T: (0,R] \times [0,2\pi) \longrightarrow \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\} \setminus \{(0,0)\}$$

és bijectiva

Ex La transformació $T(x,y) = (ax, by)$, $a, b > 0$

envia la circumferència de radi 1 a l'el·lipse de semieixos a, b.



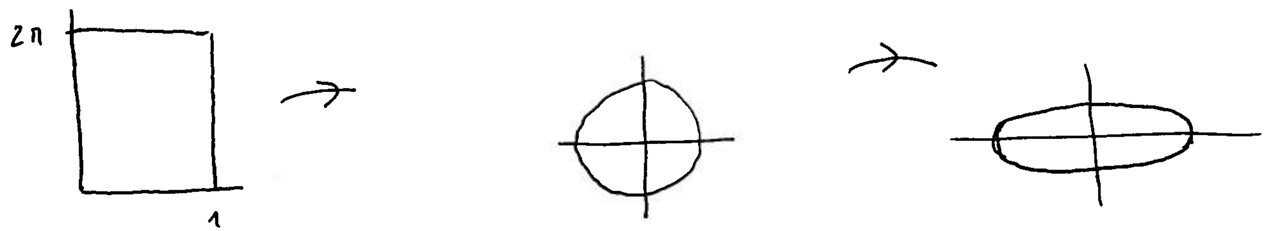


$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = ax \\ v = by \end{array} \right.$$

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

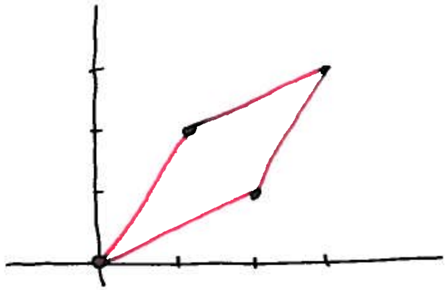
$$(r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \longmapsto (ar\cos\theta, br\sin\theta)$$



(r, θ) t.q. $\left\{ \begin{array}{l} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{array} \right.$ es diuen coordenades el·líptiques

Ex Siguin $T(x,y) = (2x+y,\ x-2y)$ i P el paral·lelogram de vertexs $(0,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,3)$

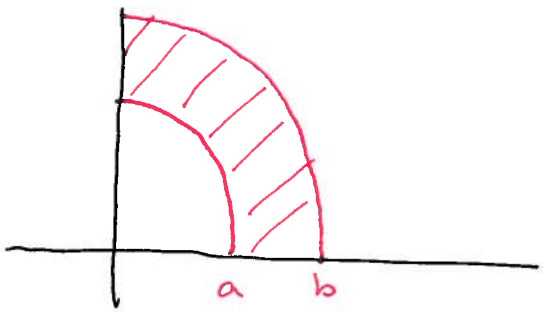
Determinem $T(P)$



$\xrightarrow{T}$

$T(0,0) = (0,0)$, $T(1,2) = (4,-3)$, $T(2,1) = (5,0)$, $T(3,3) = (9,-3)$

Ex Sigui $D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2\}$. Determinem A t.q. $T(A) = D$ on T és el canvi a polars



$$A = [a,b] \times [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

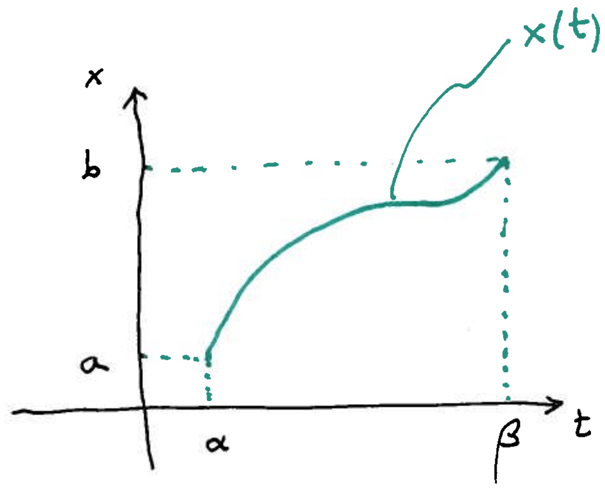
El teorema del canvi de variable

Cas d'una variable

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad , \qquad \text{canvi} \qquad x = x(t)$$

$$\|$$

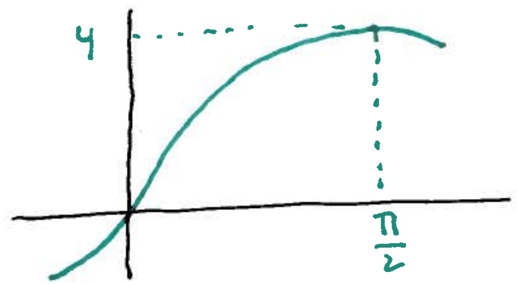
$$\int_\alpha^\beta f(x(t))\; x'(t)\,dt$$



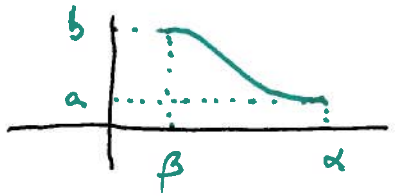
Ex $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx \quad , \qquad \text{canvi} \qquad x = 4\sin t$

$$\|$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{16-16\sin^2 t}\cdot 4\cos t\;dt$$



Si $x(t)$ és decreixent



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\,x'(t)\,dt = \int_\beta^\alpha f(x(t))\,|x'(t)|\,dt$$

Cas de dues variables

Sigui $T : \underset{(u,v) \longmapsto (x,y)}{B \longrightarrow A}$ una transformació bijectiva i de classe C^1.

per ex. $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $\quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ és integrable, $f \circ T \cdot |\det DT|$ és integrable en B i

$$\boxed{\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_B f(T(u,v))\,|\det DT(u,v)|\,du\,dv}$$

Notació $\det DT(u,v)$ es diu Jacobià de T en (u,v).

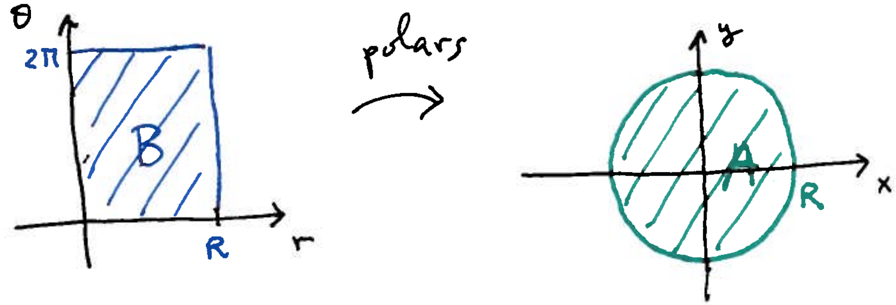
Com que T ens dóna $x(u,v)$, $y(u,v)$ també s'usa la notació

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Ex Jacobià de la transformació a coordenades polars

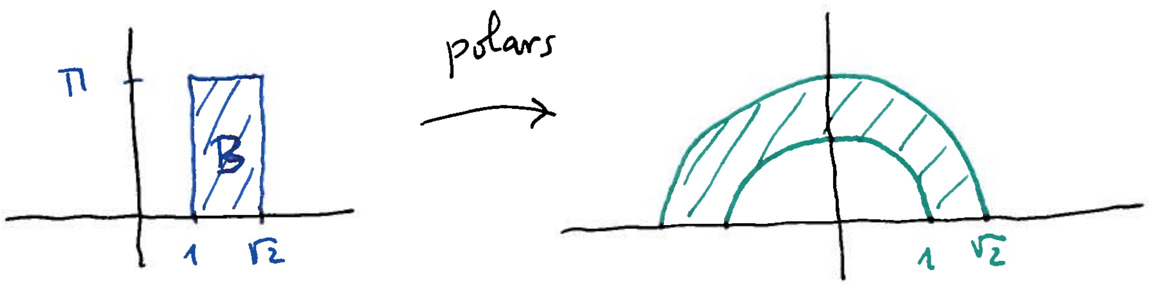
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = \underline{\underline{r}}$$

Ex Àrea del cercle de radi R



$$\int_A 1\,dx\,dy = \int_B 1\circ T\,|\det DT|\,dr\,d\theta = \int_0^R\left(\int_0^{2\pi} r\,d\theta\right)dr = \int_0^R r\int_0^{2\pi} d\theta\,dr = 2\pi \left.\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2$$

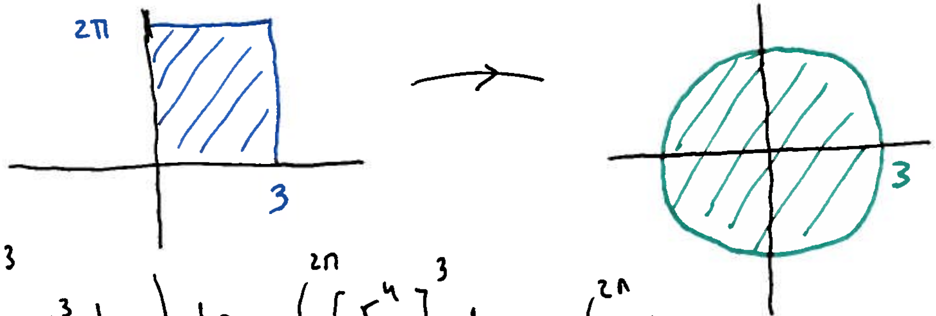
Ex $I=\int_D (1+xy)\,dx\,dy$, $\quad D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 2,\ y\geq 0\}$



$$I = \int_B (1+r\sin\theta\, r\cos\theta)\, r\,dr\,d\theta = \int_1^{\sqrt2}\left(\int_0^\pi (r+r^3\sin\theta\cos\theta)\,d\theta\right)dr = \int_1^{\sqrt2}\left[r\theta + r^3\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^\pi dr$$

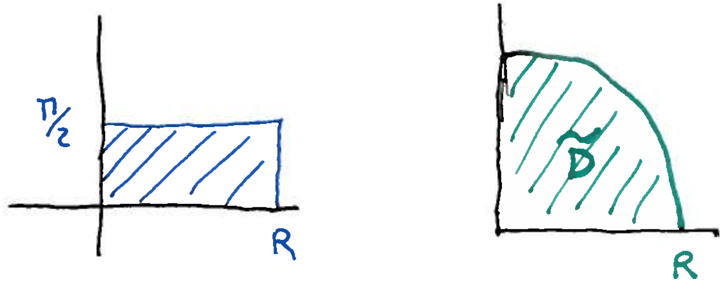
$$= \int_1^{\sqrt2} r\pi\,dr = \pi\left.\frac{r^2}{2}\right]_1^{\sqrt2} = \pi\left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Ex $\quad I = \int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy \quad , \quad D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 9\}$



$$I = \int_B (r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta)\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^3 r^3\,dr\right) d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{81}{4}\,d\theta = \frac{81}{4}\,2\pi = \frac{81}{2}\pi$$

Ex



$$\text{Volum con} = 4\int_{\tilde{D}}\left(h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy$$

$$= 4\int_B \left(h - \frac{h}{R} r\right) r\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^R \left(hr - \frac{h}{R}r^2\right) dr\right) d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\left[h\frac{r^2}{2} - \frac{h}{R}\frac{r^3}{3}\right]_0^R d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\left(h\frac{R^2}{2} - \frac{h}{R}\frac{R^3}{3}\right) d\theta = 4h\frac{R^2}{6}\int_0^{\pi/2} d\theta = 2h\frac{R^2}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}h\pi R^2$$

Integrals triples en un paral·lelepípede

Siguin $P = [a,b] \times [c,d] \times [u,v] \subset \mathbb{R}^3$ un paral·lelepípede recte i $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$

Considerem una partició de P en paral·lelepípedes $P_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$

on

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \,, \qquad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d \,, \qquad u = z_0 < z_1 < \dots < z_n = v$$

Escollim $c_{ijk} \in P_{ijk}$ i formem les sumes de Riemann

$$S_n = \sum_{i,j,k=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \, \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \qquad \text{on} \qquad \begin{cases} \Delta x = x_{i+1} - x_i & \forall i \\ \Delta y = y_{j+1} - y_j & \forall j \\ \Delta z = z_{k+1} - z_k & \forall k \end{cases}$$

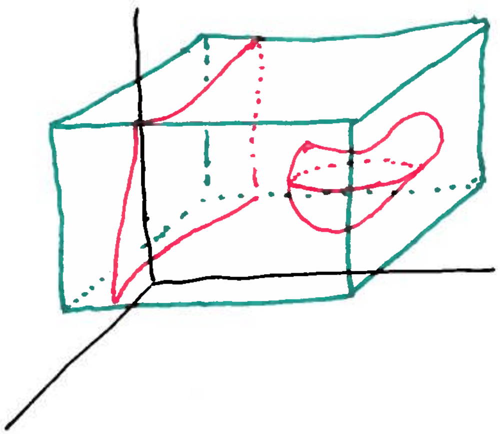
Notem que $\Delta x \, \Delta y \, \Delta z = \text{volum}(P_{ijk})$

<u>Def</u> $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ és integrable si $\exists \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ i és independent de l'elecció dels punts $c_{ijk} \in P_{ijk}$

Llavors el valor del límit es diu integral de f en P, $\int_P f$, $\iiint_P f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$

Es verifiquen propietats com per a les integrals dobles:

1) Si $f: P \longrightarrow \mathbb{R}$ és acotada i contínua excepte potser sobre un subconjunt de P format per una unió finita de gràfics de funcions contínues, llavors f és integrable



2) Si $f, g: P \longrightarrow \mathbb{R}$ són integrables, $c \in \mathbb{R}$,

- $f+g$, cf són integrables i $\int_P (f+g) = \int_P f + \int_P g$, $\int_P cf = c \int_P f$.
- si $f \geq g \Rightarrow \int_P f \geq \int_P g$

3) Si $P_1, P_2, \dots, P_m$ són paral·lelepípedes t.q.

(a) $P_i \cap P_j$ només conté punts frontera quan $i \neq j$

(b) $Q = P_1 \cup \dots \cup P_m$ és un paral·lelepípede

llavors si f és integrable en P_i, $\forall i$,

f és integrable en Q i $\displaystyle\int_Q f = \sum_{i=1}^{m} \int_{P_i} f$

4) Si f és integrable en P, $\left| \int_P f \right| \leq \int_P |f|$.

5) <u>Teorema de Fubini</u>

Si $f : [a,b] \times [c,d] \times [u,v] \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua

$$\int_P f = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_u^v f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx = \int_u^v \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y,z)\, dy \right) dx \right) dz = \text{etc}$$

(hi ha 6 ordres possibles)

El teorema de Fubini també és cert quan f és acotada i contínua excepte en una unió finita de gràfiques de funcions contínues.

Integració en un domini més general

Sigui D un domini acotat de $\mathbb{R}^3$. Sigui P un paral·lelepípede t.q. $D \subset P$

Definim

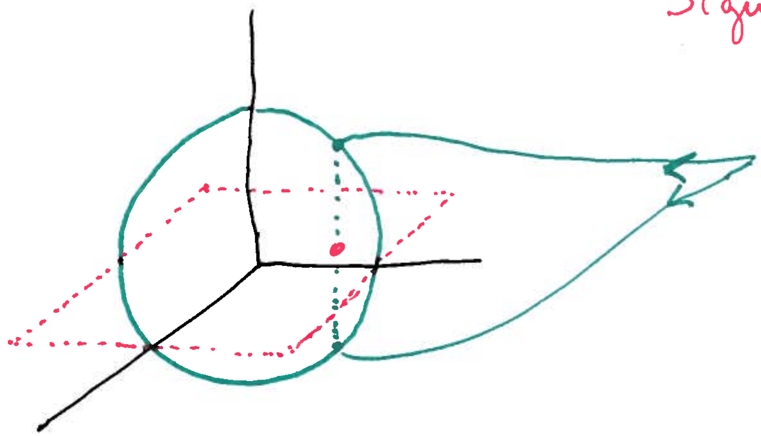
$$f^*(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & \text{si } (x,y,z) \in D \\ 0, & \text{si } (x,y,z) \in P \setminus D \end{cases}$$

i

$$\boxed{\int_D f = \int_P f^*}$$

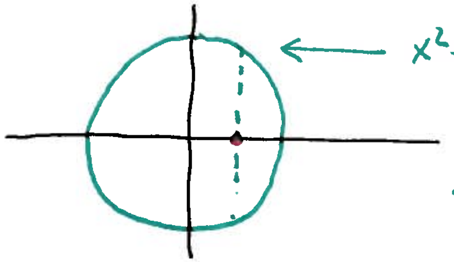
Ex $\displaystyle\int_D 1$, $D = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \}$

Sigui $P = [-R,R] \times [-R,R] \times [-R,R] \supset D$



$x^2+y^2+z^2=R^2 \rightarrow z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$$\int_D 1 = \int_P f^* = \underbrace{\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R}}_{x^2+y^2\leq R^2}\int_{-R}^{R} f^*(x,y,z)\,dz\,\underbrace{dy\,dx} = \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f^*(x,y,z)\,dz\right)dy\,dx$$



$x^2+y^2=R^2$

$\downarrow$

$y=\sqrt{R^2-x^2}$

$$= \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1 \cdot dz\,dy\,dx$$

Canvi de variables en integrals triples

Sigui $T : B \longrightarrow A$ una transformació bijectiva i de classe C^1.
$(u,v,w) \longmapsto (x,y,z)$

Si f és integrable en A, $(f : A \longrightarrow \mathbb{R})$, $f \circ T \; |\det DT|$ és integrable en B

i

$$\boxed{\int_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_B f(T(u,v,w))\, |\det DT(u,v,w)|\, du\, dv\, dw}$$

Ex coordenades cilíndriques $T : (0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\}$

$(r,\theta,z) \longmapsto (x,y,z)$

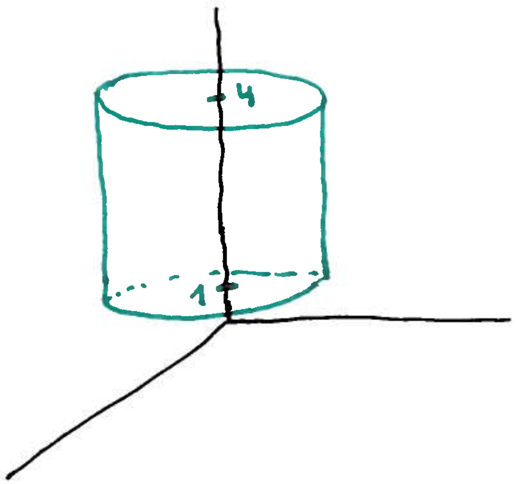
$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$

$$\det DT(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Ex $\displaystyle\int_A z\, e^{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$, $\quad A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 4, \; 1 \le z \le 4\}$



$B = [0,2] \times [0,2\pi) \times [1,4]$

$\quad (r, \quad \theta, \quad z)$

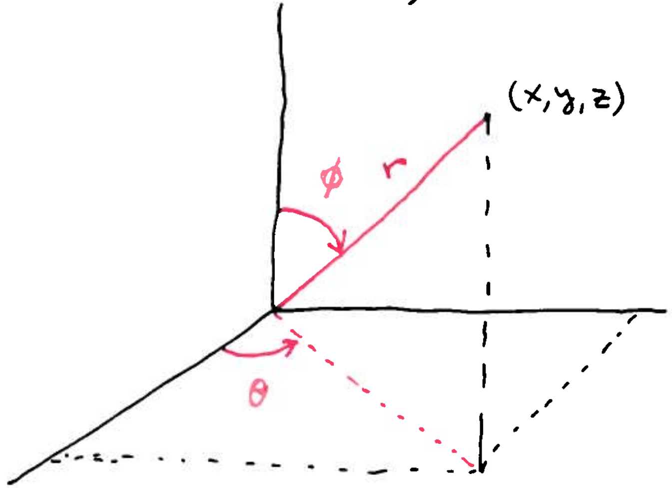
$$I = \int_1^4 \int_0^{2\pi} \int_0^2 z\, e^{r^2} r \, dr\, d\theta\, dz = \int_1^4 \int_0^{2\pi} z \left[\frac{e^{r^2}}{2} \right]_0^2 d\theta\, dz$$

$$= \frac{e^4-1}{2} \int_1^4 z \int_0^{2\pi} d\theta\, dz = \frac{e^4-1}{2}\, 2\pi \int_1^4 z\, dz = \frac{e^4-1}{2}\, 2\pi \left. \frac{z^2}{2} \right]_1^4 = (e^4-1)\pi\, \frac{16-1}{2}$$

<u>Ex</u> coordenades esfèriques

$$x = r\sin\phi\cos\theta$$
$$y = r\sin\phi\sin\theta$$
$$z = r\cos\phi$$

$$T : (0,\infty)\times[0,2\pi)\times(0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\}$$



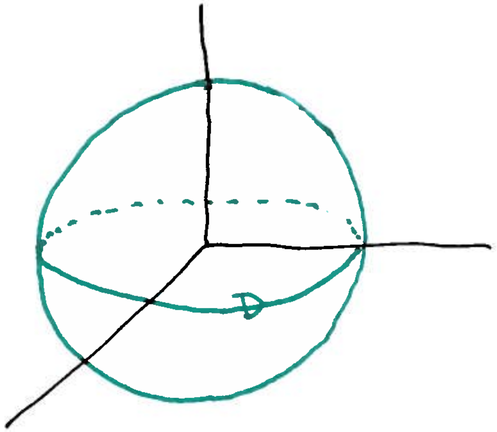
$$\boxed{\det DT(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{vmatrix}$$

$$= \cos\phi \begin{vmatrix} -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \end{vmatrix} - r\sin\phi \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\phi\, r\sin\phi\, r\cos\phi \underbrace{\begin{vmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}}_{=-1} - r\sin\phi\sin\phi\, r\sin\phi \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}}_{=1}$$

$$= -r^2\sin\phi\cos^2\phi - r^2\sin\phi\sin^2\phi = \boxed{-r^2\sin\phi}$$

Ex Càlcul del volum d'una esfera de radi R



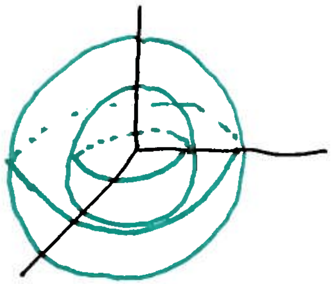
$$\text{volum} = \int_D 1 = \int_B 1 \cdot r^2 \sin\phi =$$

$$B = [0,R] \times [0,2\pi) \times (0,\pi)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 \sin\phi \, dr \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi \int_0^{R} r^2 \, dr$$

$$= 2\pi \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{R} = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Ex Calculeu $\displaystyle\int_D \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $D = \{(x,y,z) \mid a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\}$, $0<a<b$



$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{b} \frac{1}{(r^2)^{3/2}} r^2 \sin\phi \, dr \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi \int_a^{b} \frac{1}{r} dr$$

$$= 2\pi \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} \left[\log r\right]_a^{b} = 2\pi \cdot 2 \cdot (\log b - \log a) = 4\pi \log\frac{b}{a}$$

Per integrar en un cilindre el·líptic $D = \{ (x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \ \alpha \leq z \leq \beta \}$

les coordenades més útils són

$$x = a r \cos\theta$$
$$y = b r \sin\theta$$
$$z = z$$

$$[0,1] \times [0,2\pi) \times [\alpha,\beta] \xrightarrow{T} D$$

Jacobià $= abr$

Per integrar en un el·lipsoide $D = \{ (x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \}$

les coordenades més útils són

$$x = a r \sin\phi \cos\theta$$
$$y = b r \sin\phi \sin\theta$$
$$z = c r \cos\phi$$

$$(0,1] \times [0,\pi) \times [0,2\pi) \longrightarrow D$$

Jacobià $= -abc\, r^2 \sin\phi$