Grau d'Estadística UB-UPC

Programació Lineal

Tema 3 : Dualitat i anàlisi de sensibilitat

F.-Javier Heredia

http://gnom.upc.edu/heredia

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

1. **Teoria de dualitat.**
   - Origen de la Ta. de dualitat: teoria de jocs.
   - Definició i formulació del problema dual.
   - Teoremes de dualitat.
   - Solucions bàsiques factibles duals.
   - Algorisme del símplex dual.
2. **Anàlisi de sensibilitat**
   - l'Anàlisi de sensibilitat: definició i concepte.
   - Modificació del vector de costos c.
   - Modificació del vector de termes independents b.
   - Preus ombra.
   - Addició d'una nova variable.
   - Addició d'una nova constricció.
   - Reoptimització.

Origens de la dualitat: teoria de jocs (1/8)

- **Joc finit de suma zero amb dos jugadors**.
  - *John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics*. H. W. **Kuhn** and A. W. **Tucker** Bull. Amer. Math. Soc. Volume 64, Number 3, Part 2 (1958), 100-122. Permanent link: http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183522375
- Cada jugador té un conjunt d'**estratègies pures**:
  - Estratègies pures jugador 1: $J_1 = \{1, 2, \dots, m\}$
  - Estratègies pures jugador 2: $J_2 = \{1, 2, \dots, n\}$
- Matriu de guanys (J_1) / pèrdues (J_2) associades a les estratègies pures:

$$\text{"payoff matrix": } A = \begin{array}{c} \text{estratègies jugador 2} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{estratègies} \\ \text{jugador 1} \end{array}$$

Si es produeix la jugada $(J_1, J_2) = (i, j) \Rightarrow$ el jugador 1 rep a_{ij} i el jugador 2 paga a_{ij} (**joc de suma zero**).

Origens de la dualitat: teoria de jocs (2/8)

- **Estratègia mixta**: distribució de probabilitat del conjunt d'estratègies pures (freqüència amb la que es jugarà cada estratègia):
  - **Jugador 1**: $Y = \{y \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m y_i = 1, 0 \le y_i \le 1, i = 1, \dots, m\}$
  - **Jugador 2**: $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, 0 \le x_i \le 1, i = 1, \dots, n\}$
- Valor esperat dels guanys/pèrdues associada a una estratègia mixta:

J_1/J_2	x_1	x_2	…	x_n
y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

$$E[\text{pèrdues } J_2 = x \mid J_1 = y_j]$$
$$\downarrow$$
$$\sum_{i=1}^n a_{1i} x_i$$
$$\sum_{i=1}^n a_{2i} x_i$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i=1}^n a_{mi} x_i$$

$$E[\text{guanys } J_1 = y \mid J_2 = x_i] \rightarrow \sum_{j=1}^m a_{j1} y_j \quad \sum_{j=1}^m a_{j2} y_j \quad \dots \quad \sum_{j=1}^m a_{jn} y_j$$

Origens de la dualitat: teoria de jocs (3/8)

- **Jugada òptima jugador 1, criteri $\boldsymbol{maximin}$:**

  "El jugador 1 maximitza l'esperança matemàtica del seu guany mínim"

$$z_1^* = \max_y \left\{ z_1(y) = \min_{i=1,\dots,n} \left\{ \sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j \right\} \right\}$$

- **El problema de (PL) associat a la jugada òptima del jugador 1 és:**

$$(P_1) \begin{cases} \max\limits_{y,z_1} & z_1 & & \\ \text{s.a.:} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j & \geq z_1 & i = 1, \dots, n \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} y_j & = 1 & \\ & y_j & \geq 0 & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Origens de la dualitat: teoria de jocs (4/8)

- **Jugada òptima jugador 2, criteri $\boldsymbol{minimax}$:**

  “El jugador 2 minimitza l’esperança matemàtica de la seva pèrdua màxima”

$$z_2^* = \min_x \left\{ z_2(x) = \max_{\mathrm{j}=1,\dots,m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \right\} \right\}$$

- **El problema de (PL) associat a la jugada òptima del jugador 2 és:**

$$(P_2)\begin{cases} \min\limits_{x,z_2} & z_2 & & \\ \text{s.a.:} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_i & \leq z_2 & j = 1, \dots, m \\ & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & = 1 & \\ & x_i & \geq 0 & i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Origens de la dualitat: teoria de jocs (5/8)

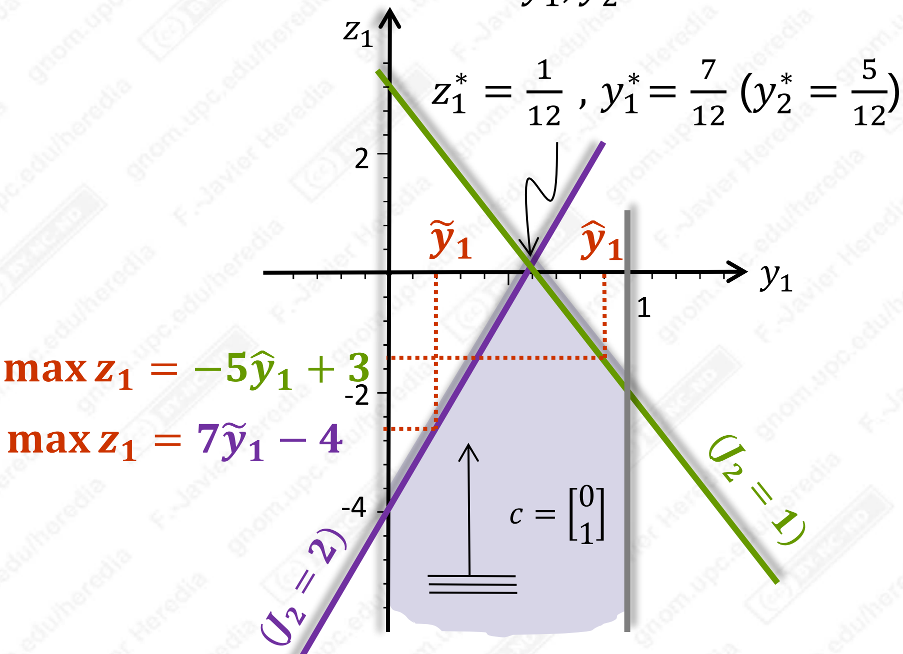
- **Exemple: “pares o nones” amb dos dits**
  - Si la suma dels dits és senar, el jugador 1 rep del jugador 2 la suma dels dits en euros.
  - Si la suma dels dits és parell, el jugador 1 paga al jugador 2 la suma dels dits en euros.
  - Matriu de guanys J_1:

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array}}^{J_2} \\ \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \Big\} J_1$$

  - Problema maximin jugador 1: $(P_1)\begin{cases} \max\limits_{y,z_1} & z_1 \\ \text{s.a.:} & \\ & -2y_1 + 3y_2 \geq z_1 \\ & 3y_1 - 4y_2 \geq z_1 \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$

- **Exemple: "pares o nones" amb dos dits**
  - Resolució del problema maximin jugador 1:

$$(P_1)\begin{cases}\max\limits_{y_1,y_2,z_1} & z_1 \\ \text{s.a.:} & \\ & -2y_1+3y_2 \geq z_1 \\ & 3y_1-4y_2 \geq z_1 \\ & y_1+y_2 = 1 \\ & y_1,y_2 \geq 0\end{cases} \xrightarrow{y_2=1-y_1} (P_1)\begin{cases}\max\limits_{y_1,z_1} & z_1 \\ \text{s.a.:} & \\ & -5y_1+3 \geq z_1 \quad (J_2=1) \\ & 7y_1-4 \geq z_1 \quad (J_2=2) \\ & y_1 \in [0,1]\end{cases}$$



- La **recta** $z_1 = -5y_1 + 3$ representa el valor esperat dels beneficis de J_1 en funció del valor de y_1 a les partides on J_2 juga l'estratègia 1.
- La **recta** $z_1 = 7y_1 - 4$ representa el valor esperat dels beneficis de J_1 en funció del valor de y_1 en les partides on J_2 juga l'estratègia 2.
- Per a cada valor de $y_1 \in [0,1]$:

$$\max z_1 = \min\{-5y_1+3\,,\,7y_1-4\}.$$

- $y_1^* = \frac{7}{12}$ $(y_2^* = \frac{5}{12})$ és el valor de y_1 on el mínim entre les dues rectes és màxim ($z_1^* = \frac{1}{12}$).

Ta Minimax de von Neuman (7/8)

- **PL jugador 1:** $(P_1)\begin{cases} \max\limits_{y,z_1} & z_1 & & \\ \text{s.a.:} & \sum_{j=1}^{m} a_{ji}y_j - z_1 & \geq 0 & i=1,\dots,n \\ & \sum_{j=1}^{m} y_j & =1 & \\ & y_j & \geq 0 & j=1,\dots,m \end{cases}$

- **PL jugador 2:** $(P_2)\begin{cases} \min\limits_{x,z_2} & z_2 & & \\ \text{s.a.:} & \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i - z_2 & \leq 0 & \text{j}=1,\dots,m \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i & =1 & \\ & x_i & \geq 0 & i=1,\dots,n \end{cases}$

- **Ta. Minimax (Ta. Principal de Ta. de Jocs, von Neumann 1928[(1)]) :**

Les estratègies òptimes y^* i x^* pels jugadors 1 i 2 existeixen i satisfan:

$$z_1^* = z_2^*.$$

(1) : Von Neumann, J: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* Math. Annalen. **100** (1928) 295-320, DOI: 10.1007/BF01448847

Aplicacions de la dualitat: teoria de jocs (8/8)

- **Exemple 2 : “parells o senars” amb tres dits**
  - Si la suma dels dits és senar, el jugador 1 rep del jugador 2 la suma dels dits en euros.
  - Si la suma dels dits és parell, el jugador 1 paga al jugador 2 la suma dels dits en euros.
  - Si ensenyen el mateix nombre de dits, hi ha empat i ningú paga
  - Matriu de guanys J_1: $A = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}}^{J_2} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \left.\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right\} J_1 \end{array}$
  - Estratègia òptima (**calculeu-la amb SAS**):
    - ❖ $J_1: y^* \approx [0.36 \quad 0.57 \quad 0.07]'$; $J_2: x^* \approx [0.36 \quad 0.57 \quad 0.07]'$
    - ❖ $z_1^* = z_2^* \approx 1{,}43€ > 0 \Rightarrow$ l’esperança matemàtica dels guanys del jugador 1 és estrictament positiva: el joc beneficia al jugador 1

Definició del problema dual (D) (1/3)

Def. problema dual:

Sigui el problema de programació lineal $(P)\ \min\{c'x \mid x \in P\}$. *El **problema dual*** $(\boldsymbol{D})$ *associat a* (P) *es defineix com el problema de programació lineal que s'obté a través de la següent taula de transformació:*

Problema primal $(\boldsymbol{P})$			Problema dual $(\boldsymbol{D})$	
Funció objectiu	$\min c'x$	$\leftrightarrow$	$\max\ \lambda' b$	**Funció objectiu**
Constriccions primals $\boldsymbol{j = 1,2,\dots,m}$	$a_j x \geq b_j$	$\leftrightarrow$	$\lambda_j \geq 0$	**Variables Duals** $\boldsymbol{j = 1,2,\dots,m}$
	$a_j x \leq b_j$	$\leftrightarrow$	$\lambda_j \leq 0$	
	$a_j x = b_j$	$\leftrightarrow$	λ_j lliure	
Variables primals $\boldsymbol{i = 1,2,\dots,n}$	$x_i \geq 0$	$\leftrightarrow$	$\lambda' A_i \leq c_i$	**Constriccions duals** $\boldsymbol{i = 1,2,\dots,n}$
	$x_i \leq 0$	$\leftrightarrow$	$\lambda' A_i \geq c_i$	
	x_i lliure	$\leftrightarrow$	$\lambda' A_i = c_i$	

Definició del problema dual (D) (2/3)

- Exemple formulació problema dual:

$$
(P)\begin{cases}
\min & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{s.a.:} & -x_1 + 3x_2 = 5 \\
& 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6 \\
& x_3 \leq 4 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \leq 0 \\
& x_3 \text{ lliure}
\end{cases}
\rightarrow
(D)\begin{cases}
\max & 5\lambda_1 + 6\lambda_2 + 4\lambda_3 \\
\text{s.a.:} & \lambda_1 \text{ lliure} \\
& \lambda_2 \geq 0 \\
& \lambda_3 \leq 0 \\
& -\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 1 \\
& 3\lambda_1 - \lambda_2 \geq 2 \\
& 3\lambda_2 + \lambda_3 = 3
\end{cases}
$$

- **Propietat :** "*El dual del dual és el primal* "

$$
(D)\equiv(\tilde{P})\begin{cases}
\min & -5x_1 - 6x_2 - 4x_3 \\
\text{s.a.:} & x_1 \text{ lliure} \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \leq 0 \\
& x_1 - 2x_2 \geq -1 \\
& -3x_1 + x_2 \leq -2 \\
& -3x_2 - x_3 = -3
\end{cases}
\rightarrow
(\tilde{D})\equiv(P)\begin{cases}
\max & -\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 \\
\text{s.a.:} & \lambda_1 - 3\lambda_2 = -5 \\
& -2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 \leq -6 \\
& -\lambda_3 \geq -4 \\
& \lambda_1 \geq 0 \\
& \lambda_2 \leq 0 \\
& \lambda_3 \text{ lliure}
\end{cases}
$$

- **Exercici:** demostreu que els problemes (P_1) i (P_2) són un parell primal-dual

Relacions $(P) - (D)$: teoremes de dualitat.

- **Teoremes de dualitat:** Estudien les relacions entre les propietats dels problemes (P) i (D).
- En ocasions usarem el fet que **el dual (D) d'un problema (P) qualsevol i el dual $(D)_e$ de la seva forma estàndard $(P)_e$ son equivalents**:

> **Teorema 7:**
>
> **Equivalència duals forma estàndard** (Ta. 4.2 B&T):
>
> *Suposem que hem transformat un problema (P) a la seva forma estàndard $(P)_e$ de rang complet. Llavors els problemes duals de (P) i $(P)_e$ són equivalents en el sentit que o bé són tots dos infactibles o bé tenen el mateix cost òptim.*

Demo: exercici "Dual de la forma estàndard".

Relacions $(P) - (D)$: teorema feble de dualitat (1/2)

Teorema 8: Ta. feble de dualitat (Ta. 4.3 B&T, *weak duality)*:

Sigui x solució factible del problema (P), i sigui λ solució factible del problema dual (D) associat. Llavors es satisfà:

$$\lambda' b \leq c' x.$$

Demo:

- Per a tot i $x \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}^m$ definim:

$$\begin{cases} u_j = \lambda_j\left(a_j' x - b_j\right) & j = 1,2,\dots,m \\ v_i = (c_i - \lambda' A_i) x_i & i = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

- Si x i λ son factibles $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } a_j' x \neq b_j, \text{ els signes de } \lambda_j \text{ i } \left(a_j' x - b_j\right) \\ \text{Si } \lambda' A_i \neq c_i, \text{ els signes de } x_i \text{ i } (c_i - \lambda' A_i) \end{array} \right\}$ coincideixen $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{u_j \geq 0, v_i \geq 0 \ \forall i,j}.$$

- Llavors : $\left\{ \begin{array}{l} \sum_j u_j = \lambda' A x - \lambda' b \\ \sum_i v_i = c' x - \lambda' A x \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_j u_j + \sum_i v_i = c' x - \lambda' b \overset{u \geq 0, v \geq 0}{\geq} 0 \Rightarrow \lambda' b \leq c' x$

- Comentari: si (P) en forma estàndard, trivial: $\forall x, \lambda$ factibles: $\lambda' b = \lambda' A x \leq c' x$ ■

Relacions $(\boldsymbol{P})$ – $(\boldsymbol{D})$: teorema feble de dualitat (2/2)

Teorema 8: Ta. feble de dualitat (Ta. 4.3 B&T, *weak duality)*:

Sigui x solució factible del problema (P), i sigui λ solució factible del problema dual (D) associat. Llavors es satisfà:

$$\lambda' b \leq c' x.$$

Corol·laris :

i. *Si (P) és il·limitat llavors (D) infactible.* (**Demo:** $\nexists \lambda \in \mathbb{R}^m$: $\lambda' b \leq -\infty$)

ii. *Si (D) és il·limitat llavors (P) infactible.* (**Demo:** $\nexists x \in \mathbb{R}^n$: $c' x \geq +\infty$)

iii. *Siguin x i λ solucions factibles (P) i (D) respectivament tals que $\lambda' b = c' x$. Llavors x i λ són òptimes.* (***Demo**: trivial*)

Relacions $(\boldsymbol{P}) - (\boldsymbol{D})$: teorema fort de dualitat (1/4)

Teorema 9: Ta. fort de dualitat (*von Neumann 1947, Ta. Minimax*) :

Si un problema de programació lineal (P) té solució òptima, el seu dual (D) també en té, i els valors respectius de la funció objectiu coincideixen.

Demo:

1. Sigui (P) en forma estàndard de rang complet amb sol. òptima. Sigui B base òptima obtinguda per l'algorisme del símplex amb regla de Bland. Llavors $r \geq 0$. Es demostrarà (a) que $\lambda' = c_B' B^{-1}$ és una solució factible (D) i (b) que és òptima:
   a) $x_B = B^{-1}b$ solució òptima $(P) \Rightarrow r = c_N - c_B' B^{-1} A_N \geq 0 \Rightarrow c_B' B^{-1} A_N \leq c_N$. Llavors:
   $$\lambda' A = c_B' B^{-1} [B \quad A_N] = [c_B' \quad c_B' B^{-1} A_N] \leq [c_B' \quad c_N'] = c' \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow \lambda' = c_B' B^{-1} \text{ factible } (D)$$
   b) $\lambda' b = c_B' B^{-1} b = c_B' x_B \Rightarrow \lambda' = c_B' B^{-1}$ òptima (D).
2. Si (P) és un problema general el podem transformar a un problema $(P)_e$ estàndard amb $\operatorname{rang}(A) = m$. Llavors en virtut del Ta. 7 i l'aparat (1) anterior tenim que
   $$z^*_{(P)} = z^*_{(P)_e} \overset{(1)}{=} z^*_{(D)_e} \overset{Ta.7}{=} z^*_{(D)} \blacksquare$$

Relacions $(\boldsymbol{P}) - (\boldsymbol{D})$: teorema fort de dualitat (2/4)

Teorema 9: Ta. fort de dualitat (*von Neumann 1947, Ta. Minimax*) :

Si un problema de programació lineal (P) té solució òptima, el seu dual (D) també en té, i els valors respectius de la funció objectiu coincideixen.

Corol·lari : si $(P)_e$ de rang complet té solució llavors (D) té solució i l'òptim dual és $\lambda' = c'_B B^{-1}$

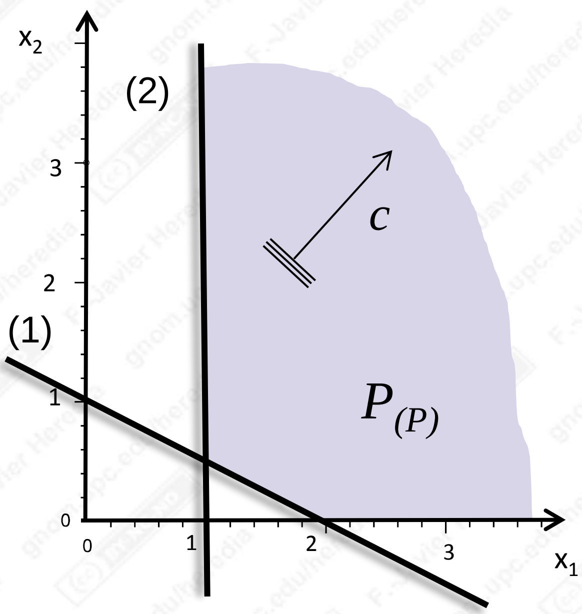
- **Possibles combinación $(\boldsymbol{P}) - (\boldsymbol{D})$:** els Ta. de dualitat fixen la següent relació de possibles casos:

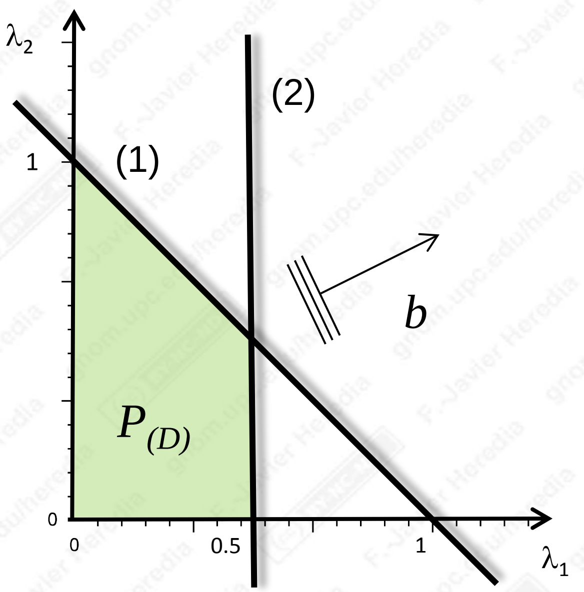
		(D)		
		Òptim	**Il·limitat**	**Infactible**
(P)	**Òptim**	Possible	Impossible	Impossible
	Il·limitat	Impossible	Impossible	Possible
	Infactible	Impossible	Possible	Possible

Possibles combinacions (P)-(D)

- **Exemple:** (P) i (D) amb solució òptima

$$
(P)\begin{cases}
\min & x_1 + x_2 & \\
\text{s.a.:} & x_1 + 2x_2 \geq 2 & (1)\\
& x_1 \geq 1 & (2)\\
& x_1,\ x_2 \geq 0 &
\end{cases}
\qquad
(D)\begin{cases}
\max & 2\lambda_1 + \lambda_2 & \\
\text{s.a.:} & \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 & (1)\\
& 2\lambda_1 \leq 1 & (2)\\
& \lambda_1,\ \lambda_2 \geq 0 &
\end{cases}
$$

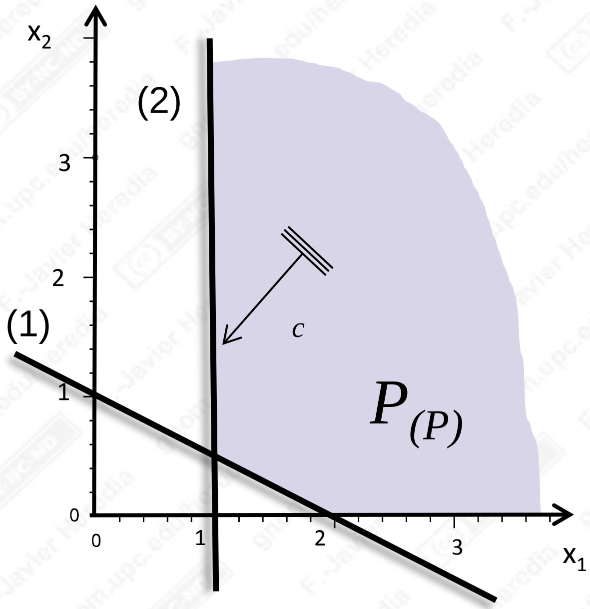


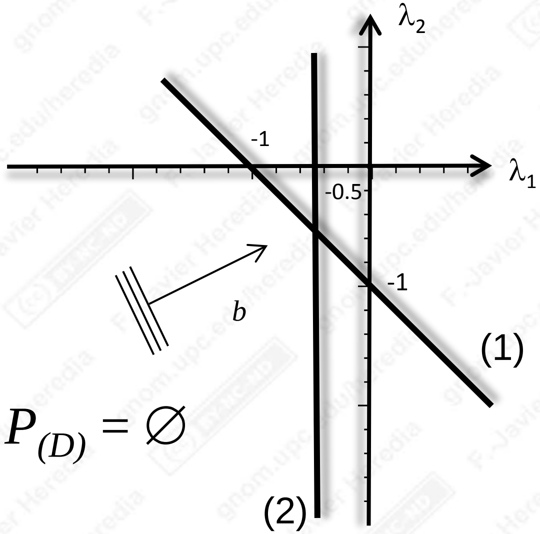


Possibles combinacions (P)-(D)

- **Exemple:** (P) il·limitat i (D) infactible

$$
(P)\begin{cases}
\min & -x_1 & -x_2 & & \\
\text{s.a.}: & x_1 & +2x_2 & \geq 2 & (1)\\
 & x_1 & & \geq 1 & (2)\\
 & x_1, & x_2 & \geq 0 &
\end{cases}
\qquad
(D)\begin{cases}
\max & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & & \\
\text{s.a.}: & \lambda_1 & +\lambda_2 & \leq -1 & (1)\\
 & 2\lambda_1 & & \leq -1 & (2)\\
 & \lambda_1, & \lambda_2 & \geq 0 &
\end{cases}
$$





- **Exercici:** penseu i representeu gràficament les dues situacions que queden: (D) il·limitat - (P) infactible i (P) infactible - (D) infactible

Relacions $(P) - (D)$: Ta. de folga complementària.

Teorema 10: Ta. de folga complementària :

Siguin x i λ solucions factibles de (P) i (D) respectivament. Els vectors x i λ són solucions òptimes si i només si:

$$\lambda_j\left(a_j'x - b_j\right) = 0 \quad j = 1,2,\dots,m$$
$$(c_i - \lambda' A_i)x_i = 0 \quad i = 1,2,\dots,n$$

Demo:

$\boxed{\Rightarrow}$ Si x i λ factibles, de la demostració del Ta. feble de dualitat sabem que:

i. $u_j = \lambda_j\left(a_j'x - b_j\right) \geq 0 \quad , \; v_i = (c_i - \lambda' A_i)x_i \geq 0 \;\; \forall i,j$

ii. $c'x - \lambda b = \sum_j u_j + \sum_i v_i$

Pel Ta. fort de dualitat sabem que si x i λ òptimes llavors $c'x = \lambda' b \Rightarrow$ $\boxed{u_j = v_i = 0 \;\; \forall i,j}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $u_j = v_i = 0 \; \forall i,j \overset{\text{ii}}{\Rightarrow} c'x - \lambda' b = 0 \xrightarrow{Cor.8.3}$ $\boxed{x, \lambda \text{ òptimes}}$ ■.

Solucions bàsiques factibles duals

Def. Solució bàsica factible dual:

Sigui el problema de programació lineal (P) en forma estàndard. Una ***solució bàsica factible dual*** *és tota solució bàsica amb* $\mathbf{r} \geq \mathbf{0}$

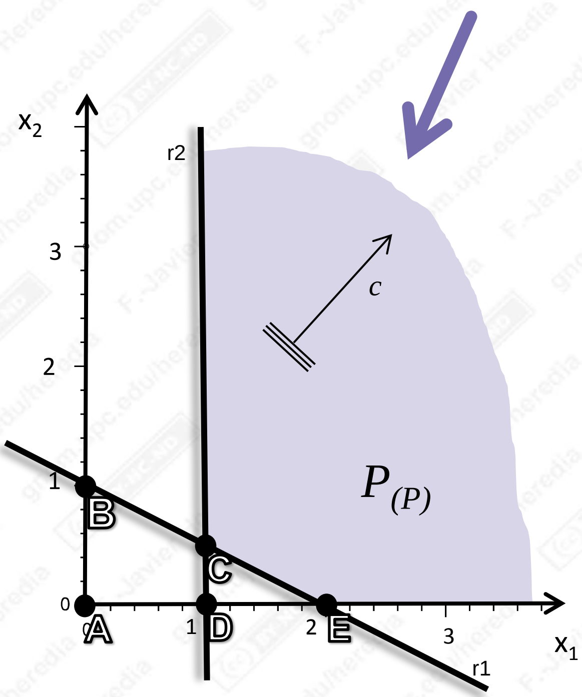
- **Comentaris:**
  - Si $r \geq 0$ llavors pel Tª fort de dualitat sabem que $\boldsymbol{\lambda' = c'_B B^{-1}}$ **és una solució factible pel problema dual (D)**.
  - Una solució bàsica factible dual **pot no ser factible primal**.
  - Una solució bàsica **factible dual i factible primal** és **òptima**:

    - Factibilitat primal: $x_B = B^{-1} b \geq 0$
    - Factibilitat dual: $r' = c'_N - \lambda' A_N \geq 0$

Solucions bàsiques factibles duals

- Solució bàsica factible dual, exemple:

$$(P)\begin{cases} \min & x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \geq 2 \\ & x_1 & & \geq 1 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \max & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & \\ \text{s.a.:} & \lambda_1 & +\lambda_2 & \leq 1 \\ & 2\lambda_1 & & \leq 1 \\ & \lambda_1, & \lambda_2 & \geq 0 \end{cases}$$

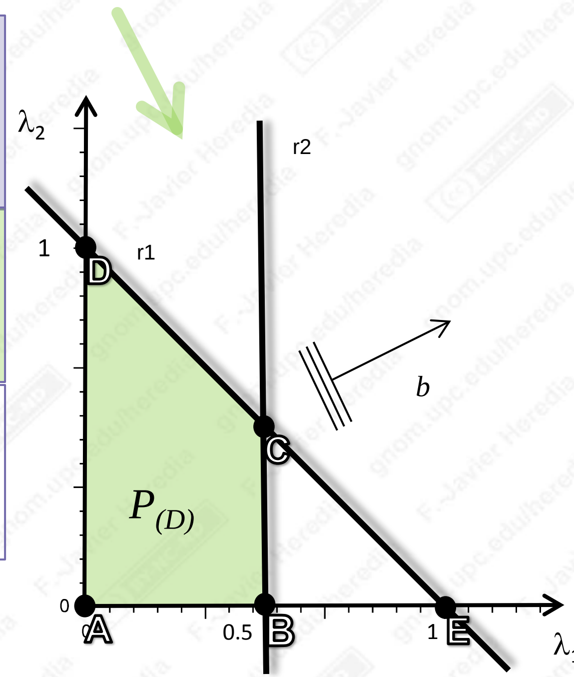


Solucións bàsiques **factibles primal**: C , E

Solucións bàsiques **factibles dual**: A , B , C , D

C solució bàsica **factible primal i dual** ⇒ **òptima**

Pregunta: poden existir bases infactibles (P) i (D)?



Algorisme del símplex dual

- L'algorisme del símplex dual és un algorisme que permet resoldre problemes de PL en forma estàndard **a partir de solucions bàsiques factibles dual** basant-se en la següent estratègia:
  a) Es determina si la s.b.f. (D) actual és factible (P) $\Rightarrow$ òptima.
  b) Si la s.b.f. (D) actual no és factible (P), es troba, si existeix, una s.b.f. (D) adjacent a l'actual que millori el valor de la f.o. dual, i es pren aquesta com a nova s.b. actual.
- Desenvolupament teòric: s'obté aplicant el símplex primal sobre el problema dual expressat en forma estàndard a partir d'una s.b. factible dual (**fora de temari**).
- **Interès del símplex dual**:
  - Situacions on es disposa d'una s.b.f. (D) infactible (P):
    - Anàlisi de sensibilitat: canvis en A i/o b.
    - Algorismes de programació lineal **entera.**

Algorisme del símplex dual

1. Sigui la s.b.f. (D) $\mathcal{B}$ amb valors: $B, x_B, r, c_B, c_N, A_N, z$.

2. Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la variable bàsica sortint $\boldsymbol{B(p)}$:

2.1. Si $x_B \geq [0]$ llavors la s.b.f. actual és òptima: **STOP**.

Altrament, es selecciona una v.b. p amb $x_{B(p)} < 0$ (v.b. sortint).

3. Identificació de problema il·limitat:

3.1. Es calcula $d_{r_N} = (\beta_p A_N)'$ (β_p: fila p-èssima de B^{-1})

3.2. Si $d_{r_N} \geq [0]$ llavors problema (D) il.limitat ($\Rightarrow$ (P) infactible): **STOP**

4. Selecció de la variable no bàsica entrant $\boldsymbol{q}$:

4.1. Càlcul de $\theta_D^* = \min_{\{j \in \mathcal{N} \mid d_{r_{N_j}} < 0\}} \left\{ \frac{-r_j}{d_{r_{N_j}}} \right\} = \frac{-r_q}{d_{r_{N_q}}}$. Es selecciona q com a v.n.b. entrant.

5. Canvi de base i actualitzacions :

5.2. Act. variables duals: $r_N := r_N + \theta_D^* d_{r_N}$, $\lambda := \lambda - \theta_D^* \beta_p'$, $r_{B(p)} := \theta_D^*$; $z := z - \theta_D^* x_{B(p)}$

5.1. Act. variables primals: $d_B = -B^{-1} A_q$, $\theta^* = -\frac{x_{B(p)}}{d_{B(p)}}$, $x_B := x_B + \theta^* d_B$, $x_q := \theta^*$

5.2. S'actualitzen $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B(p)\} \cup \{q\}$, $\mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{q\} \cup \{B(p)\}$.

6. Anada a 2.

Algorisme del símplex dual : exemple (1/4)

Exemple: Trobeu la solució òptima del següent problema (P) aplicant l'algorisme del símplex dual com a s.b. inicial l'associada a $x' = [0,0]$.

$$(P)\begin{cases} \min\ z = & x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a:} & x_1 & +2x_2 & \geq 2 \\ & x_1 & & \geq 1 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases} \rightarrow (P)\begin{cases} \min\ z = & x_1 & +x_2 & & & \\ \text{s.a:} & x_1 & +2x_2 & -x_3 & & = 2 \\ & x_1 & & & -x_4 & = 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

- **Càlculs previs:**

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathcal{B} = \{3,4\}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, x_b = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, c_B == \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{N} = \{1,2\}, A_N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, c_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda' = c_B' B^{-1} = [0], r_N' = c_N' - \lambda' A_N = [1 \quad 1] \geq 0 \end{cases}$$

Algorisme del símplex dual : exemple (2/4)

- **1ª iteració:** $\mathcal{B} = \{3,4\}, \mathcal{N} = \{1,2\}$
  - Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b. sortint $B(p)$:
    $$x_B = [-2 \quad -1]' \ngeq 0 \Rightarrow p = 1, B(1) = 3 \text{ v.b. sortint}$$
  - Identificació de problema (D) il·limitat :
    $$\beta_1 = e_1' B^{-1} = [-1 \quad 0], d_{r_N}' = \beta_1 A_N = [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [-1 \quad -2] \ngeq 0$$
  - Selecció de la v.n.b. entrant q: $\theta_D^* = \min_{\{j \in \mathcal{N} | d_{r_{N_j}} < 0\}} \left\{ \frac{-r_j}{d_{r_{N_j}}} \right\} = \min\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow q = 2$
  - Canvi de base i actualitzacions:
    - o $r_N = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} := r_N + \theta_D^* d_{r_N} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r_{B(1)} = r_3 := \theta_D^* = \frac{1}{2}$,
    - o $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} := \lambda - \theta_D^* \beta_p' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $z := z - \theta_D^* x_{B(3)} = 0 - \frac{1}{2}(-2) = 1$
    - o $d_B = -B^{-1} A_2 = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \theta^* = -\frac{x_{B(1)}}{d_{B(1)}} = 1$
    - o $x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $x_2 := \theta^* = 1$
    - o $\mathcal{B} := \{2, 4\}, \mathcal{N} := \{1, 3\}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, r_N = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Algorisme del símplex dual : exemple (3/4)

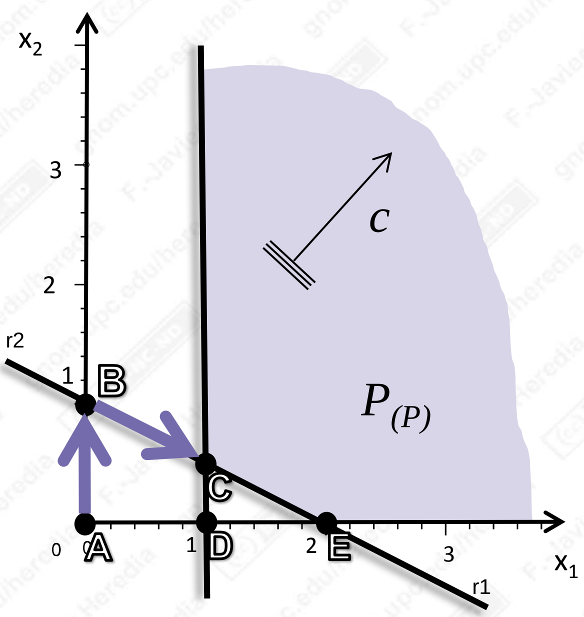
- **2ª iteració:** $\mathcal{B}=\{2,4\}, \mathcal{N}=\{1,3\}$
  - Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b. sortint $B(p)$:
  $$x_B=[1 \quad -1]' \ngeq 0 \Rightarrow p=2, B(2)=4 \text{ v.b. sortint}$$
  - Identificació de problema (D) il·limitat :
  $$\beta_2=e_2'B^{-1}=[0 \quad -1], d_{r_N}'=\beta_2 A_N=[0 \quad -1]\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=[-1 \quad 0]\ngeq 0$$
  - Selecció de la v.n.b. entrant q: $\theta_D^*=\min_{\{j\in\mathcal{N}|d_{r_{N_j}}<0\}}\left\{\frac{-r_j}{d_{r_{N_j}}}\right\}=\min\left\{-\frac{1/2}{-1}\right\}=\frac{1}{2}\Rightarrow q=1$
  - Canvi de base i actualitzacions:
    - o $r_N=\begin{bmatrix}r_1\\ r_3\end{bmatrix}:=r_N+\theta_D^* d_{r_N}=\begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1/2\end{bmatrix}, r_{B(2)}=r_4:=\theta_D^*=\frac{1}{2}$
    - o $\lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}:=\lambda-\theta_D^*\beta_p'=\begin{bmatrix}-1/2\\ 0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2\\ 1/2\end{bmatrix}, \; z:=z-\theta_D^* x_{B(2)}=1-\frac{1}{2}(-1)=\frac{3}{2}$
    - o $d_B=-B^{-1}A_1=-\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2\\ 1\end{bmatrix}, \theta^*=-\frac{x_{B(2)}}{d_{B(2)}}=-\frac{-1}{1}=1$
    - o $x_B=\begin{bmatrix}x_2\\ x_4\end{bmatrix}:=x_B+\theta^* d_B=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-1/2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\ 0\end{bmatrix}, x_q=x_1:=\theta^*=1$
    - o $\mathcal{B}:=\{2,\mathbf{1}\}, \mathcal{N}:=\{3,\mathbf{4}\}, \; B^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}, x_B=\begin{bmatrix}1/2\\ 1\end{bmatrix}, r_N=\begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\end{bmatrix}, \lambda=\begin{bmatrix}-1/2\\ 1/2\end{bmatrix}$

- **3a iteració:** $\mathcal{B} = \{2,1\}, \mathcal{N} = \{3,4\}$
  - Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b. sortint $B(p)$:

$$x_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \text{s.b. factible } (P) \text{ i } (D)\text{: òptim}$$

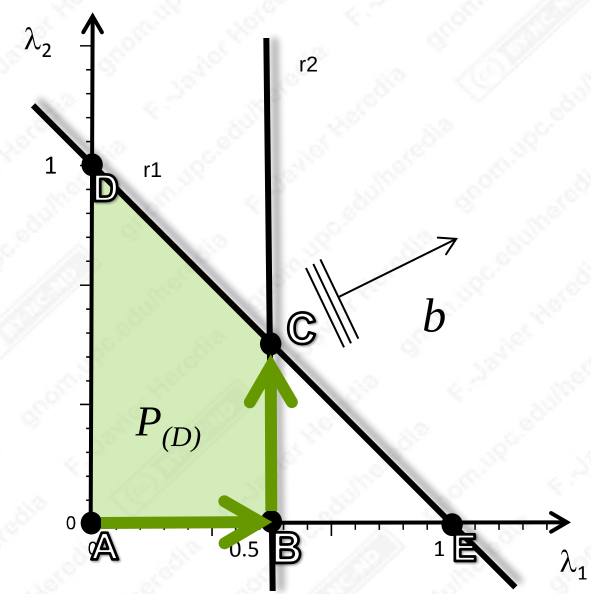
- **Solució òptima:** $\boxed{\mathcal{B}^* = \{2,1\}, \mathcal{N}^* = \{3,4\}, x_B^* = [1/2 \quad 1]', z^* = 3/2}$

- **Interpretació geomètrica:**



Iteració 1: A → B

Iteració 2: B → C



Algorisme del símplex dual : convergència

- **Degeneració dual**: es diu que una s.b. és **degenerada dual** si :

$$r_j = 0 \text{ per algun } j \in \mathcal{N} \; (\equiv \textbf{òptims alternatius}).$$

- **Tª (convergència del símplex dual)**: *Si el problema (P) no té cap s.b.f. dual amb degeneració dual, llavors l'algorisme del símplex dual estudiat convergeix en un nombre finit d'iteracions.*
  - **Demo**: cada iteració augmenta estrictament el valor de la funció dual $\lambda' b \Rightarrow$ no es repeteix cap s.b.f. dual i el nre. de s.b.f. duals és finit.
- Si (P) té s.b.f. duals degenerades, la regla de Bland (entre d'altres) assegura la convergència.

Anàlisi de sensibilitat: definició

- Sigui el problema de programació lineal (PL) en forma estàndard:

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\min & c'x \\ \text{s.a.:} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{cases}$$

- L'anàlisi de sensibilitat consisteix en l'estudi de com afecta a la solució òptima x^* de (P):
  – Un canvi en ***c***, ***A*** o ***b***
  – L'addició d'una nova variable o constricció.
- Interés:
  – Decidir si un canvi en les dades modifica la solució òptima sense necessitat de tornar a resoldre el problema.
  – Realitzar anàlisis econòmiques relacionades amb modificacions dels paràmetres del model.

Anàlisi de sensibilitat : concepte

- Sigui el problema de programació lineal (P) en forma estàndard, i siguin B la base òptimes. Llavors, per teoria de dualitat sabem que B satisfà les **condicions d'optimalitat:**

$$\boxed{\begin{array}{rr} \text{Factibilitat primal:} & x_B = B^{-1}b \geq 0 \\ \text{Factibilitat dual:} & r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N \geq 0 \end{array}}$$

- Suposem que algun element ϕ de $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ o $\boldsymbol{c}$ de (P) **ha estat modificat**, o que s'introdueix una nova variable, o una nova constricció, **definint un nou problema $(\boldsymbol{P})_{\boldsymbol{\phi}}$.**
- Imposant les condicions d'optimalitat al nou problema $(\boldsymbol{P})_{\boldsymbol{\phi}}$ s'obtenen les **condicions sota les quals la base $\boldsymbol{B}$ conserva la seva optimalitat** (***interval d'estabilitat***).

Anàlisi de sensibilitat en *c*

- S'introdueix el canvi: $c_i \leftarrow \boxed{\phi_{c_i} = c_i + \Delta c_i}$
- Analitzem com afecta el canvi a les condicions d'optimalitat :

Factibilitat primal: $x_B = B^{-1} b \geq 0 \quad \rightarrow$ no es pot perdre

Factibilitat dual: $r' = c'_N - c'_B B^{-1} N \geq 0 \quad \rightarrow$ es pot perdre

- Cal diferenciar dos casos d'anàlisi:

a) $i \in \mathcal{N}^*$

b) $i \in \mathcal{B}^*$

Interval d'estabilitat de $c_i, i \in \mathcal{N}^*$

Cas a) : $i \in \mathcal{N}^*$

- En aquest cas, només ens hem de preocupar del possible canvi de signe del nou cost reduït de la VNB x_i :
  $$\tilde{r}_i = (c_i + \Delta c_i) - c_B' B^{-1} A_i = \Delta c_i + r_i \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{\Delta c_i \geq -r_i} \qquad (1)$$
  - Si la desigualtat (1) es satisfà, la base actual $\mathcal{B}$ conserva l'optimalitat.
  - Si la desigualtat (1) no es satisfà, la base actual $\mathcal{B}$ perd l'optimalitat: La v.n.b. x_i té cost reduït negatiu, i pot entrar a la base millorant la solució actual (si no provoca un problema $(P)_{\phi_{c_i}}$ il·limitat).

- **Interval d'estabilitat de** $c_i, i \in \mathcal{N}^*$: interval de valors de ϕ_{c_i} que conserva l'optimalitat de $\mathcal{B}$ ($\Leftrightarrow \tilde{r}_i \geq 0$):

$$\boxed{\phi_{c_i} \in \Phi_{c_i} = \left[\phi_{c_i}^{min}, \phi_{c_i}^{max}\right] = [c_i - r_i, +\infty[}$$

Interval d'estabilitat de $c_i, i \in \mathcal{B}^*$

Cas b) : $i \in \mathcal{B}^*$

- Sigui x_i la p-èssima VB (i=B(p)). Llavors $c_B \leftarrow \phi_{c_B} = c_B + \Delta c_i \cdot e_p$
- Aquest canvi afecta als costos reduïts de **totes** les variables no bàsiques $j \in \mathcal{N}^*$:

$$\tilde{r}_j = c_j - \left(c_B + \Delta c_i \cdot e_p\right)' B^{-1} A_j = -\Delta c_i \cdot \overbrace{e_p' B^{-1} A_j}^{v_{pj}} + r_j = -\Delta c_i \cdot v_{pj} + r_j \geq 0$$

$$\boxed{\Delta c_i \cdot v_{pj} \leq r_j \;\;,\;\; j \in \mathcal{N}^*} \qquad (1)$$

  - Si (1) es satisfà, la base actual B conserva l'optimalitat.
  - Si (1) no es satisfà la base actual B perd l'optimalitat: la VNB x_j té cost reduit negatiu, i pot entrar a la base, millorant la solució actual (si no provoca un problema $(P)_{\phi_{c_i}}$ il·limitat).

- **Interval d'estabilitat de** $c_i, i \in \mathcal{B}^*$:

$$\boxed{\phi_{c_i} \in \Phi_{c_i} = \left[\Phi_{c_i}^{min}, \Phi_{c_i}^{max}\right] : \begin{cases} \phi_{c_i} \geq \phi_{c_i}^{min} = \max\limits_{j \in \mathcal{N}^*} \left\{ c_i + \dfrac{r_j}{v_{pj}} : v_{pj} < 0 \right\} \\ \phi_{c_i} \leq \phi_{c_i}^{max} = \min\limits_{j \in \mathcal{N}^*} \left\{ c_i + \dfrac{r_j}{v_{pj}} : v_{pj} > 0 \right\} \end{cases}}$$

Exemple: prob. de planificació de la producció

$$
(P)\begin{cases}
\min & -350x_1 & -300x_2 & & & & \\
\text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 200 \\
 & 9x_1 & +6x_2 & & +x_4 & & = 1566 \\
 & 12x_1 & +16x_2 & & & +x_5 & = 2880 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & \geq 0
\end{cases}
$$

- Solució òptima:

$$
\mathcal{B}^* = \{2,1,5\},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 16 & 12 & 1 \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 0 \\ -2 & 1/3 & 0 \\ -24 & 4/3 & 1 \end{bmatrix},\ x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 78 \\ 128 \\ 168 \end{bmatrix},\ z^* = c_B' x_B = -66100
$$

$$
\mathcal{N}^* = \{3,4\},\ r' = \begin{bmatrix} 200 & 50/3 \end{bmatrix},\ A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Interval d'estabilitat de c_i, exemple

- A la solució òptima de l'exemple teníem:

$$\mathcal{B}^* = \{2,1,5\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 16 & 12 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 0 \\ -2 & 1/3 & 0 \\ -24 & 4/3 & 1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 78 \\ 128 \\ 168 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}^* = \{3,4\}, r' = [200 \quad 50/3], A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 3 & -1/3 \\ -2 & 1/3 \\ -24 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow v_1 \\ \rightarrow v_2 \\ \rightarrow v_3 \end{array}$$

- Interval d'estabilitat de $c_i, i \in \mathcal{N}^*$: $\Phi_{c_i} = \left[\phi_{c_i}^{min}, \phi_{c_i}^{max}\right[= [c_i - r_i, +\infty[$

$$\phi_{c_3} \in [-200, +\infty[\,, \phi_{c_4} \in [-50/3, +\infty[$$

- Interval d'estabilitat de $c_i, i \in \mathcal{B}^*$:

$$\begin{cases} \phi_{c_i}^{min} = \max_{j \in \mathcal{N}^*} \left\{ c_i + \dfrac{r_j}{v_{pj}} : v_{pj} < 0 \right\} \\ \phi_{c_i}^{max} = \min_{j \in \mathcal{N}^*} \left\{ c_i + \dfrac{r_j}{v_{pj}} : v_{pj} > 0 \right\} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i = 2 \rightarrow p = 1, \phi_{c_2} \in \left[-400, \dfrac{-700}{3}\right] \\ i = 1 \rightarrow p = 2, \phi_{c_1} \in [-450, -300] \\ i = 5 \rightarrow p = 3, \phi_{c_5} \in \left[-\dfrac{25}{3}, \dfrac{25}{2}\right] \end{cases}$$

Anàlisi de sensibilitat en *b*

- S'introdueix el canvi: $b_j \leftarrow \phi_{b_j} = b_j + \Delta b_j$

- Condicions d'optimalitat :

Factibilitat primal: $x_B = B^{-1}b \geq 0$ $\rightarrow$ es pot perdre

Factibilitat dual: $r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N \geq 0$ $\rightarrow$ no es pot perdre

- Volem trobar l'interval de valors de ϕ_{b_j} pels quals la base actual es manté òptima

Interval d'estabilitat de b_j : $\Phi_{b_j} = \left[\phi_{b_j}^{min}, \phi_{b_j}^{max}\right]$

- Imposem la condició de factibilitat primal $\tilde{x}_B = B^{-1}\left(b + \Delta b_j \cdot e_j\right) \geq 0$ on e_j és el vector unitari j-èssim.
- Sigui $\gamma_j = \left[\gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \dots, \gamma_{mj}\right]'$ la columna j-èssima de B^{-1}. Llavors, la condició de factibilitat primal imposa:

$$\tilde{x}_B = x_B + \Delta b_j \cdot \gamma_j \geq 0 \rightarrow x_{B(k)} + \Delta b_j \cdot \gamma_{kj} \geq 0\, , k = 1, \dots, m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_{b_j} \in \Phi_{b_j} = [\phi_{b_j}^{min}, \phi_{b_j}^{max}] \Rightarrow \begin{cases} \phi_{b_j} \geq \phi_{b_j}^{min} = \max\limits_{k=1,\dots,m} \left\{ b_j - \dfrac{x_{B(k)}}{\gamma_{kj}} : \gamma_{kj} > 0 \right\} \\ \phi_{b_j} \leq \phi_{b_j}^{max} = \min\limits_{k=1,\dots,m} \left\{ b_j - \dfrac{x_{B(k)}}{\gamma_{kj}} : \gamma_{kj} < 0 \right\} \end{cases}}$$

- **Si $\phi_{b_j} \in \Phi_{b_j} \Rightarrow \tilde{x}_B \geq 0 \Rightarrow$ es conserva l'optimalitat de $\mathcal{B}^*$**
- **Si $b \leftarrow \phi_b$ i $\forall j$: $\phi_{b_j} \in \Phi_{b_j} \Rightarrow$ es conserva la optimalitat de $\mathcal{B}^*$**

Interval d'estabilitat de b_j, exemple

- A la solució òptima de l'exemple teníem:

$$\mathcal{B}^* = \{2,1,5\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 16 & 12 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 0 \\ -2 & 1/3 & 0 \\ -24 & 4/3 & 1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 78 \\ 128 \\ 168 \end{bmatrix}$$

- Interval d'estabilitat de b_2:

$$\gamma_2 = B^{-1} e_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 0 \\ -2 & 1/3 & 0 \\ -24 & 4/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\phi_{b_2}^{min} = \max_{k=1,\dots,3} \left\{ b_2 - \frac{x_{B(k)}}{\gamma_{k2}} : \gamma_{k2} > 0 \right\} = 1566 + \max \left\{ -\frac{128}{\frac{1}{3}}, -\frac{168}{\frac{4}{3}} \right\} = -1440$$

$$\phi_{b_2}^{max} = \min_{k=1,\dots,3} \left\{ b_2 - \frac{x_{B(k)}}{\gamma_{k2}} : \gamma_{k2} < 0 \right\} = 1566 + \min \left\{ -\frac{78}{-\frac{1}{3}} \right\} = 1800$$

Intervals d'estabilitat amb SAS/OR

PPP_LP.sas *

```
data PPP_LP;
      input _row_ $ x1   x2 _type_ $ _rhs_;
      datalines;
              z  -350 -300    MIN      .
             c1   1    1       LE    200
             c2   9    6       LE   1566
             c3  12   16       LE   2880
         nonneg   0    0   lowerbd     .
;
run;
proc print  data=PPP_LP;
run;
proc lp data=PPP_LP rangeprice rangerhs;
run;
```

RHS Range Analysis

Row	Minimum Phi			Maximum Phi		
	Rhs	Leaving	Objective	Rhs	Leaving	Objective
c1	174	x2	-60900	207	c3	-67500
c2	1440	c3	-64000	1800	x2	-70000
c3	2712	c3	-66100	INFINITY	.	.

Price Range Analysis

Col	Variable Name	Minimum Phi			Maximum Phi		
		Price	Entering	Objective	Price	Entering	Objective
1	x1	-450	c1	-78300	-300	c2	-60000
2	x2	-350	c2	-70000	-233.3333	c1	-60900
3	c1	-200	c1	-66100	INFINITY	.	-66100
4	c2	-16.66667	c2	-66100	INFINITY	.	-66100
5	c3	-8.333333	c1	-67500	12.5	c2	-64000

Cost òptim en funció de Δb : preus ombra

- **Si $\boldsymbol{\phi_{b_j} \in \Phi_{b_j}, j = 1, \dots, m}$** $\Rightarrow$ la funció objectiu es pot expressar com:

$$\tilde{z} = c_B' B^{-1}(b + \Delta b) = \overbrace{c_B' B^{-1} b}^{z} + \overbrace{c_B' B^{-1}}^{\lambda'} \Delta b = z + \overbrace{\lambda' \Delta b}^{\Delta z} \Rightarrow \boxed{\Delta z = \lambda' \Delta b}$$

- El vector de variables duals $\lambda' = c_B' B^{-1}$ es coneix també com el vector de ***preus ombra***, o ***costos marginals*** i en el nostre exemple és:

$$\lambda' = c_B' B^{-1} = \begin{bmatrix} -300 & -350 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1/3 & 0 \\ -2 & 1/3 & 0 \\ -24 & 4/3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 & -\frac{50}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

- La variable dual λ_j s'interpreta com el **canvi que provoca en la funció objectiu un increment unitari del terme independent:**

$$\boxed{\tilde{z} \overset{\Delta b = e_j}{\triangleq} = z + \lambda' e_j = z + \lambda_j}$$

Addició d'una nova variable: anàlisi

- S'introdueix una nova variable definida per:

$$x_{n+1} \geq 0, c_{n+1}, A_{n+1}$$

- Analitzem com afecta el canvi a les condicions d'optimalitat :
  - Factibilitat primal: $x_B = B^{-1}b \geq 0 \rightarrow$ es conserva.
  - Factibilitat dual: $r' = c_N' - \lambda' A_N \geq 0 \rightarrow$ **es pot perdre**

- Condicions de conservació de l'optimalitat de $\mathcal{B}$:

$$\tilde{r}' = [c_N' \quad c_{n+1}] - \lambda'[A_N \quad A_{n+1}] = \begin{bmatrix} \overbrace{r'}^{\geq 0} & r_{n+1} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\boxed{\tilde{r} \geq 0 \Leftrightarrow r_{n+1} \geq 0}$$

- **Exercici "Logistics"**

Addició d'una nova constricció: anàlisi

- S'introdueix una nova constricció definida per:

$$a'_{m+1}x \le b_{m+1} \rightarrow a'_{m+1}x + \overbrace{x_{n+1}}^{folga \rightarrow v.b.} = b_{m+1}$$

$$\tilde{A}_N = \begin{bmatrix} A_N \\ a'_{m+1} \end{bmatrix}, \tilde{\mathcal{B}} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{n+1\}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ a'_{B,m+1} & 1 \end{bmatrix}, \tilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a'_{B,m+1}B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

- Analitzem com afecta el canvi a les condicions d'optimalitat :
  - Factibilitat primal: $\tilde{x}_B = \tilde{B}^{-1}\tilde{b} \ge 0$

$$\tilde{x}_B = \begin{bmatrix} x_B \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a'_{B,m+1}B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ b_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{B^{-1}b}^{x_B \ge 0} \\ b_{m+1} - a'_{B,m+1}\overbrace{B^{-1}b}^{x_B} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\tilde{x}_B \ge 0 \Leftrightarrow x_{n+1} = b_{m+1} - a'_{B,m+1}x_B \ge 0}$$

Addició d’una nova constricció: anàlisi

- S’introdueix una nova constricció definida per:

$$a'_{m+1}x \leq b_{m+1} \rightarrow a'_{m+1}x + \overbrace{x_{n+1}}^{folga \rightarrow v.b.} = b_{m+1}$$

$$\tilde{A}_N = \begin{bmatrix} A_N \\ a'_{m+1} \end{bmatrix}, \tilde{\mathcal{B}} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{n+1\}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ a'_{B,m+1} & 1 \end{bmatrix}, \tilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a'_{B,m+1}B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

- Analitzem com afecta el canvi a les condicions d’optimalitat :
  - Factibilitat dual: $\tilde{r}' = c'_N - \tilde{\lambda}'\tilde{A}_N \overbrace{\geq}^{?} [0]$

$$\tilde{\lambda}' = [c'_b \quad 0] \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a'_{B,m+1}B^{-1} & 1 \end{bmatrix} = [\lambda' \quad 0]$$

$$\tilde{r}' = c'_N - \tilde{\lambda}'\tilde{A}_N = c'_N - [\lambda' \quad 0] \begin{bmatrix} A_N \\ a'_{m+1} \end{bmatrix} = c'_N - \lambda' A_N = r' \geq 0$$

$$\boxed{\tilde{r} \geq 0}$$

Addició d'una nova constricció: exemple

$$
(P)\begin{cases}
\min & -350x_1 & -300x_2 & & & & & \\
\text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 200 \\
 & 9x_1 & +6x_2 & & +x_4 & & = & 1566 \\
 & 12x_1 & +16x_2 & & & +x_5 & = & 2880 \\
 & x_{1,} & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & \geq & 0
\end{cases}
$$

$$\mathcal{B}^* = \{2,1,5\}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 78 \\ 128 \\ 168 \end{bmatrix}$$

- S'afegeix un dispositiu de millora del flux d'aigua a la banyera:

$$2x_1 + x_2 \leq 300 \quad \rightarrow \quad 2x_1 + x_2 + x_6 = 300$$

- Condició de conservació de fact. (P):

$$x_{n+1} = b_{m+1} - a'_{B,m+1}x_B \overset{?}{\geq} 0 \rightarrow x_6 = 300 - (2\times 128 + 78) = 300 - 334 = -34 < 0$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Es perd l'optimalitat de la base}$$

Pèrdua de l'optimalitat i reoptimització

- Els canvis de formulació que hem analitzat poden provocar la pèrdua de l'optimalitat de la base $\mathcal{B}$. En aquest cas caldrà **reoptimitzar amb l'algorisme apropiat:**
  - Si es perd la factibilitat primal: es reoptimitza amb el símplex dual.
  - Si es perd la factibilitat dual: es reoptimitza amb el símplex primal.