En una granja de cría de animales vacunos están valorando la optimización de los costes de alimentación de las terneras. Se ha determinado que las necesidades mínimas diarias para una ternera de menos de un año son: 700 g de proteínas, 32 g de calcio y 90 mg de vitaminas. El coste unitario de tres tipos distintos de alimentos que la granja emplea (pienso, forraje y un concentrado energético) es de 0.30, 0.27 y 0.35 €/kg, respectivamente. La composición nutritiva por kg de alimento se muestra en la siguiente tabla:

Aportación por kg	Proteínas (g)	Calcio (g)	Vitaminas (mg)
Pienso	125	5	17
Forraje	100	7	13
Concentrado energético	150	8	12

Primera parte.

a) **Formula matemáticamente** el problema de programación completamente parametrizado que permite encontrar la composición de coste mínimo para la alimentación diaria de una ternera, que cumpla con las necesidades mínimas establecidas: indica cuáles son los parámetros del problema y define formalmente las variables de decisión, las restricciones y la función objetivo.

Parámetros:

J={Pienso, Forraje, Concentrado}: Conjunto de alimentos

I={Proteínas, Calcio, Vitaminas} conjunto de nutrientes necesarios

$A = \begin{bmatrix} 125 & 100 & 150 \\ 5 & 7 & 8 \\ 17 & 13 & 12 \end{bmatrix}$: Matriz cuyas filas están indexadas en I y las columnas en J. El elemento a_{ij} de la matriz indica la aportación del nutriente i por Kg consumido del alimento j. Las unidades de los elementos a_{ij} son gr, gr y mg, para proteínas, calcio, y vitaminas, respectivamente (Nota: no es necesario transformar para que todos los nutrientes usan las mismas unidades. *Los nutrientes no se mezclan*)

$b = [700 \quad 32 \quad 90]$, vector (indexado en I), cuyos elementos indican las necesidades mínimas diarias de cada uno de los nutrientes. En cada caso, las unidades son las indicadas anteriormente.

$c = [0.3 \quad 0.27 \quad 0.35]$ vector (indexado en J) cuyos elementos indican el coste en euros por Kg de cada alimento.

Variables de decisión: Para cada $j \in J$,

x_j: kg de alimento j consumidos por ternera diariamente.

Formulación matemática:

$$Min \quad \sum_{j \in J} c_j x_j$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad i \in I$$

$$x_j \geq 0, j \in J$$

b) **Resuelve** con OPTMODEL el problema anterior y presenta la solución final y el coste que supone. (Ver apéndice OPTMODEL)

c) Utiliza análisis de sensibilidad para indicar en cuanto variaría el costo diario de alimentación de cada ternera si las necesidades diarias de calcio se incrementasen a 33 g.

La variable dual de la restricción vale 0.01075, así que el coste aumentaría de 1.7035€ a 1.71425€.

Segunda parte.

En la actualidad hay en la granja 40 terneras de menos de un año y 60 de entre 1 y 2 años. Los requisitos nutricionales de las terneras de más de un año se muestran a continuación:

Necesidades mínimas/día	Proteínas (g)	Calcio (g)	Vitaminas (mg)
	800	36	110

a) **Formula matemáticamente** el problema de programación completamente parametrizado que permite minimizar el coste diario de alimentación de todos los animales de la granja, determinando cuál es la composición de alimentos que cada animal debe recibir, según su edad, teniendo en cuenta que *la granja solo dispone de 500 kg de pienso al día.*

Parámetros adicionales:

T={1,2}, para indicar los dos tipos de terneras que se consideran ahora

Usamos el vector $n = [40 \quad 60]$ indicar el número de terneras de cada tipo. Es decir, n_t indica el número de terneras de tipo $t \in$T. Además, z_{pienso} representa la cantidad de pienso disponible al día.

Extendemos el vector de necesidades diarias, para tener en cuenta las necesidades de las terneras de 1-2 años. Ahora b será una matriz, con dos filas, en la que los elementos de cada fila indican las necesidades de cada tipo de terneras. Es decir

$$b = \begin{bmatrix} 700 & 32 & 90 \\ 800 & 36 & 110 \end{bmatrix}$$

Denotamos por b_{ti}, $t \in T$, $i \in I$, al elemento de la fila t y columna i de la matriz anterior. Es decir, a las necesidades diarias de nutriente i de las terneras de tipo t.

Variables de decisión: Extendemos el conjunto de variables de decisión para cada tener en cuenta cada tipo de ternera. Ahora, para cada $j \in J$, $t \in$T,

x_{jt}: kg de alimento j consumidos diariamente por ternera de tipo t.

La nueva formulación es la siguiente:

$$Min \quad \sum_{t \in T} n_t \sum_{j \in J} c_j x_{jt}$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_{jt} \geq b_{it} \qquad i \in I, t \in T$$

$$\sum_{t \in T} n_t x_{\text{pienso},t} \leq z_{\text{pienso}}$$

$$x_{jt} \geq 0, j \in J, t \in T$$

b) **Resuelve** con OPTMODEL el problema anterior y presenta la solución final y el coste que supone. (Ver apéndice OPTMODEL)

A destacar que si este problema no tuviera una restricción de límite de pienso podría ser resuelto como dos problemas separables: uno para las terneras jóvenes y otro para las mayores.

Tercera parte.

Volvemos a la versión inicial centrándonos en las terneras de menos de un año. Por necesidades de capacidad de almacenamiento es necesario eliminar uno de los 3 alimentos de la dieta. Sin embargo, las deficiencias producidas por la eliminación de dicho alimento deberán suplirse mediante un suplemento que se consumirá diariamente. Los costes (por animal) derivados de la administración del suplemento dependen pues del alimento suprimido, y son: 0.40€ en el caso del pienso, 0.53€ en el caso del forraje, 0.58€ en el caso del concentrado.

a) Nuevamente, **formula matemáticamente** el problema de programación completamente parametrizado que permite minimizar el coste diario de alimentación de una ternera de menos de un año en las nuevas condiciones, determinando la composición de alimentos que debe recibir.

   Para decidir el alimento que debe eliminarse es necesario introducir, además de las variables x_j, un nuevo conjunto de variables binarias de decisión, una asociada a cada uno de los alimentos. En concreto:

   Para cada $j \in J$,

   $y_j \in \{0, 1\}$: $y_j = 1 \Leftrightarrow$ el alimento j se elimina de la dieta.

   La relación entre las variables x y las nuevas variables y debe establecerse mediante las restricciones

   $$x_j \leq M(1-y_j),\ j \in J,$$

   donde M es una constante suficientemente grande. Además, solo se puede eliminar un alimento:

   $$\sum_{j \in J} y_j = 1.$$

   La función objetivo del nuevo problema es: $Min \quad \sum_{j \in J} c_j x_j + \sum_{j \in J} f_j y_j$, donde los coeficientes f_j son los costes del suplemento en cada caso. Es decir, $f = [0.4 \quad 0.53 \quad 0.58]$.

b) **Resuelve** con OPTMODEL el problema anterior y presenta la solución final y el coste que supone. (Ver apéndice OPTMODEL)

Solución SAS

```
proc optmodel presolver = 0;

/* Paràmetres */
set<string> NUTRIENTS = {'Prot', 'Ca', 'Vitam'};
set<string> MENJARS   = {'Pin', 'Far', 'Conc'};
number contingut{ MENJARS, NUTRIENTS} =       /* units/Kg */
[       125     5     17
 100    7       13
 150    8       12];
number apor{NUTRIENTS} = [700 32 90];        /* units: g., g., mg. */
number preu{MENJARS}   = [0.30 0.27 0.35];     /* €/Kg */

/* Model d'optimització */

var Quantitat {MENJARS} >= 0;
min Total_cost = sum {i in MENJARS} preu[i]*Quantitat[i];
con Aportacio_min {j in NUTRIENTS}:
    sum {i in MENJARS} contingut[i,j]*Quantitat[i] >= apor[j];

/* Optimització i resultats */
solve;
```

Objective Value 1.7035

[1]	Quantitat.LB	Quantitat.SOL	Quantitat.UB	Quantitat.RC	Quantitat.STATUS
Conc	0	0.55000	1.7977E+308	0	B
Far	0	0.96667	1.7977E+308	0	B
Pin	0	4.16667	1.7977E+308	0	B

[1]	Aportacio_min.LB	Aportacio_min.BODY	Aportacio_min.UB	Aportacio_min.DUAL	Aportacio_min.STATUS
Ca	32	32	1.7977E+308	0.01075	U
Prot	700	700	1.7977E+308	0.00146	U
Vitam	90	90	1.7977E+308	0.00375	U

```
proc optmodel presolver = 0;

/* Paràmetres */
set<string> NUTRIENTS = {'Prot', 'Ca', 'Vitam'};
set<string> MENJARS   = {'Pin', 'Far', 'Conc'};
set<string> EDAT = {'<1', '1-2'};
number contingut{ MENJARS, NUTRIENTS} =       /* units/Kg */
[     125     5     17
100   7       13
150   8       12];
number apor{EDAT, NUTRIENTS} =
[ 700 32 90
  800 36 110 ];        /* units: g., g., mg. */
number preu{MENJARS}   = [0.30 0.27 0.35];     /* €/Kg */
number m{EDAT} = [40 60];
number LimPin = 500;

/* Model d'optimització */

var Quantitat {MENJARS, EDAT} >= 0;
min Total_cost = sum {k in EDAT, i in MENJARS} m[k]*preu[i]*Quantitat[i,k];
con Aportacio_min {j in NUTRIENTS, k in EDAT}:
    sum {i in MENJARS} contingut[i,j]*Quantitat[i,k] >= apor[k, j];
con Pienso: sum {k in EDAT} m[k]*Quantitat['Pin',k] <= LimPin;
```

Objective Value	187.50222222

[1]	[2]	Quantitat.LB	Quantitat.SOL	Quantitat.UB	Quantitat.STATUS
Conc	**1-2**	0	0.00000	1.7977E+308	L
Conc	**<1**	0	0.54444	1.7977E+308	B
Far	**1-2**	0	1.14815	1.7977E+308	B
Far	**<1**	0	1.04444	1.7977E+308	B
Pin	**1-2**	0	5.59259	1.7977E+308	B
Pin	**<1**	0	4.11111	1.7977E+308	B

[1]	[2]	Aportacio_min.LB	Aportacio_min.BODY	Aportacio_min.UB	Aportacio_min.DUAL	Aportacio_min.STATUS
Ca	**1-2**	36	36.00	1.7977E+308	0.14556	U
Ca	**<1**	32	32.22	1.7977E+308	0.00000	B
Prot	**1-2**	800	813.89	1.7977E+308	0.00000	B
Prot	**<1**	700	700.00	1.7977E+308	0.06987	U
Vitam	**1-2**	110	110.00	1.7977E+308	1.16778	U
Vitam	**<1**	90	90.00	1.7977E+308	0.29333	U

```
proc optmodel presolver = 0;

/* Paràmetres */
set<string> NUTRIENTS = {'Prot', 'Ca', 'Vitam'};
set<string> MENJARS   = {'Pin', 'Far', 'Conc'};

number contingut{ MENJARS, NUTRIENTS} =       /* units/Kg */
[       125      5     17
 100    7        13
 150    8        12];
number apor{NUTRIENTS} =
[ 700 32 90 ];        /* units: g., g., mg. */
number preu{MENJARS}   = [0.30 0.27 0.35];     /* €/Kg */

number sup{MENJARS} = [0.40  0.53  0.58];   /* € */

/* Model d'optimització */

var Quantitat {MENJARS} >= 0;
var Select {MENJARS} binary;    /* 1: suprimir */
min Total_cost = sum {i in MENJARS} (preu[i]*Quantitat[i] +
sup[i]*Select[i]);
con Aportacio_min {j in NUTRIENTS}:
 sum {i in MENJARS} contingut[i,j]*Quantitat[i] >= apor[j];
con coupling {i in MENJARS}:
 Quantitat[i] <= (1-Select[i]) * (max {j in NUTRIENTS}
apor[j]/contingut[i,j]);
con unique : sum {i in MENJARS} Select[i] = 1;
```

Objective Value	2.2826666667

[1]	Quantitat
Conc	0.13333
Far	6.80000
Pin	0.00000

[1]	Select
Conc	0
Far	0
Pin	1

[1]	Aportacio_min.LB	Aportacio_min.BODY	Aportacio_min.UB
Ca	32	48.667	1.7977E+308
Prot	700	700.000	1.7977E+308
Vitam	90	90.000	1.7977E+308