Grau d'Estadística UB-UPC

Programació Lineal i Entera

Tema 2 : l'Algorisme del símplex

F.-Javier Heredia

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

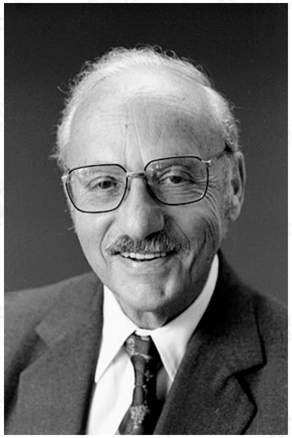
Algorisme del símplex

1. *Introducció i propietats geomètriques.*
2. **L'algorisme del símplex primal.**
   - Orígens històrics.
   - Desenvolupament de l'algorisme del símplex primal.
     - Justificació.
     - Canvi de SBF: direccions bàsiques factibles de descens.
     - Identificació de SBF òptimes: condicions d'optimalitat.
     - Identificació de problemes (PL) il·limitats.
     - Algorisme del símplex primal.
   - Càlcul de solucions bàsiques factibles inicials: fase I del símplex.
   - Convergència.
   - Complexitat algorísmica.

Bibliografia: Cap. 2 - 5 "*Introduction to Linear Optimization*", D. Bertsimas, N. Tsitsiklis

L'algorisme del símplex : origens

- **Leonid Kantorovich 1939, Unió Soviètica.**
- **George B. Dantzig, 1947 (data desclassificació), USAF.**



"A certain wide class of practical problems appears to be just beyond the range of modern computing machinery. These problems occur in everyday life; they run the gamut from some very simple situations that confront an individual to those connected with the national economy as a whole. Typically, these problems involve a complex of different activities in which one wishes to know which activities to emphasize in order to carry out desired objectives under known limitations (Dantzig 1948)."

- **Primer problema no trivial de LP documentat: problema de la dieta (G. Stigler, 1945, Premi Nobel Economia 1982)**
  - $n = 77$ variables, $m = 9$ constriccions. Nou persones treballant conjuntament amb calculadores electròniques: 120 homes-mes de treball.
- **Actualment (CPLEX)**:
  - $n =$ 1.369.624, $m =$ 3.520.024, $t < 10\text{min}$ (TFM-MEIO, http://hdl.handle.net/2099.1/13914)
- ***SIAM News, Volume 33, Number 4: The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms*** (http://www.siam.org/pdf/news/637.pdf)

"In terms of widespread application, Dantzig's algorithm is one of the most successful of all time: Linear programming dominates the world of industry, where economic survival depends on the ability to optimize within budgetary and other constraints."

L'algorisme del símplex: justificació

Recordem:

Teorema 2 (optimalitat dels pt.extrems)

Teorema 3 (equivalència pt.extrems - SBF)

$$\Downarrow$$

Corol·lari 1 (optimalitat de les SBF) :

"*Sigui* $(PL)\ min\{c'x : x \in P\}$, P *políedre. Suposem que* P *conté algun punt extrem i que existeix una solució òptima.*

Llavors ***existeix una solució òptima que és una SBF de*** P.*"*

- **Idea de l'algorisme del símplex:**

Passem d'una SBF x a un altre y tal que $c'y < c'x$, fins a trobar l'òptima.

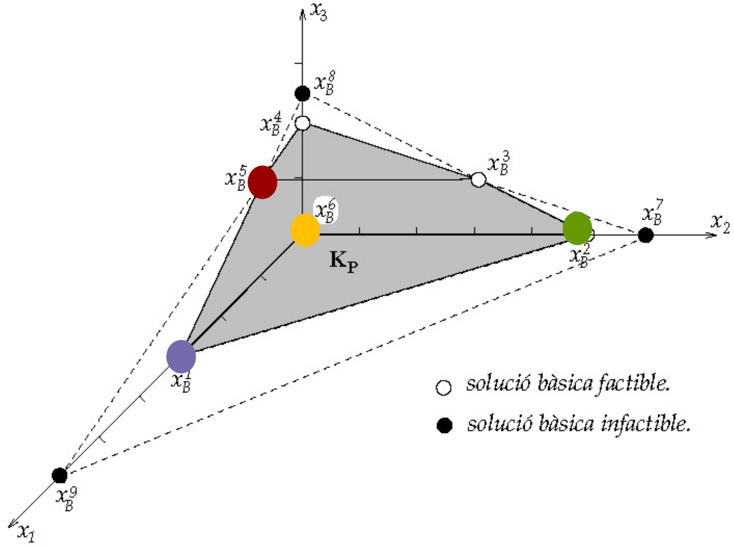
- **Qüestions a resoldre**:

1. Com trobem una SBF? → **Fase I del símplex**.
2. Com canviem d'una SBF a un altre millor? → **direccions bàsiques factibles de descens**
3. Com identifiquem la SBF òptima? → **condicions d'optimalitat**.
4. I si el problema no té solució? → **problemes il·limitats**

Canvi de SBF: direccions bàsiques factibles

- Considerem el problema:

$$(PL)\begin{cases} \min \quad z = & 5x_1 + 3x_2 + 9x_3 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \qquad = 6 \\ & 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_5 \quad = 15 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$



- **SBF adjacents**: dues SBF són adjacents si es distingueixen només per una variable bàsica.
- Estudiarem la s.b.f. x^1 i les seves SBF adjacents:

$$x^1: \mathcal{B} = \{1,4\}, x_B^1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, z^1 = c_B' x_B = 15$$

$$x^2: \mathcal{B} = \{2,4\}, x_B^2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, z^2 = c_B' x_B = 15$$

$$x^5: \mathcal{B} = \{1,3\}, x_B^5 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}, z^5 = c_B' x_B = 20$$

$$x^6: \mathcal{B} = \{4,5\}, x_B^6 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}, z^6 = c_B' x_B = 0$$

- Desenvoluparem el procediment mitjançant el qual símplex permet passar de x^1 a x^6 i identificar aquesta com la solució òptima.

Direcció bàsica factible d

- Sigui P_e, **no buit, rang complet, no degenerat**. Donades les SBF adjacents x i y, volem trobar la **direcció d** $\in \mathbb{R}^n$ i **l'escalar θ^*** $\in \mathbb{R}^+$ t.q. :
  $y = x + \theta^* d$ ($x = x^1$ i $y = x^2$ a l'exemple)

- **Direcció factible:** $d \in \mathbb{R}^n$ factible sobre $x \in P_e$

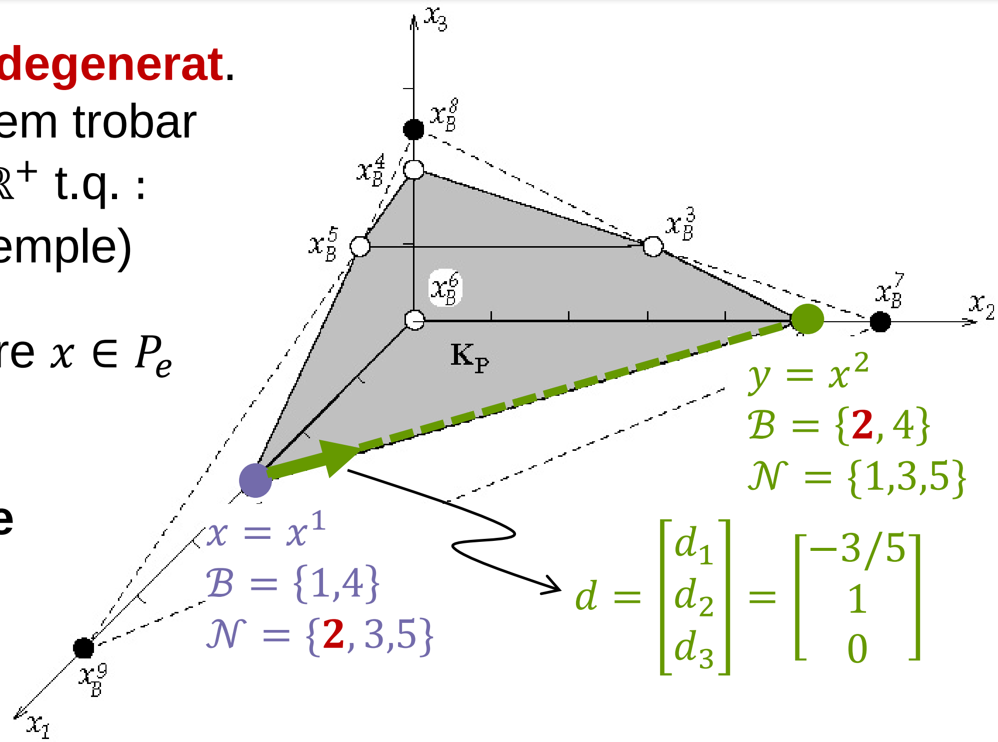
  si $\exists \theta \in \mathbb{R}^+$ tal que : $x + \theta d \in P_e$

- **Direcció bàsica factible (DBF) sobre la SBF $x \in P_e$ associada a $q \in \mathcal{N}$:**

  Direcció $d = \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ t.q:

  i. $$\boxed{d_{\mathcal{N}(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbf{1 \text{ si } \mathcal{N}(i) = q} \\ \mathbf{0 \text{ si } \mathcal{N}(i) \neq q} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n-m}$$

  ii. d_B tal que $A(x + \theta d) = b$ per a algun $\theta > 0 \Rightarrow \boxed{d_B \stackrel{\text{def}}{=} -B^{-1} A_q}$



- A l'exemple $q = 2$: $d_N = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $d_B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_4 \end{bmatrix} = -\mathrm{B}^{-1} A_2 = -\begin{bmatrix} 0 & 1/5 \\ 1 & -1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ -2/5 \end{bmatrix}$

Factibilitat de d i longitud de passa màxima θ^*

- La DBF $d \in \mathbb{R}^n$ és factible sobre la SBF $x \in P_e$

  si $\exists \theta \in \mathbb{R}^+$ tal que : $y = x + \theta d \in P_e$

- **Càlcul de $\boldsymbol{\theta^* \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\theta > 0 \mid y = x + \theta d \in P_e\}}$:**

$$y \in P_e = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \overbrace{Ax = b}^{(1)}, \overbrace{x \geq 0}^{(2)}\} :$$

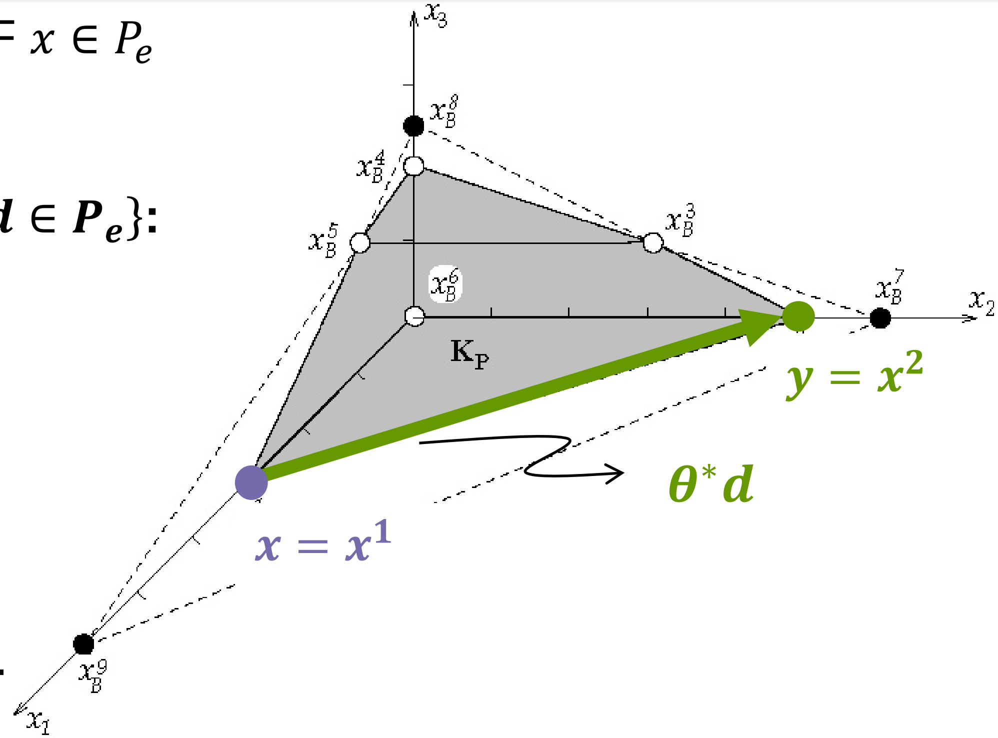
$(1) : Ay = A(x + \theta d) = b$, **cert $\forall\theta$**

$(2) : y = x + \theta d \geq 0$, **depén de θ**:

o $y_{N_i} = \begin{Bmatrix} 0 & i \neq q \\ \theta & i = q \end{Bmatrix} \geq 0 \quad \forall \theta > 0.$

o $y_B = \overbrace{x_B}^{>0} + \theta \overbrace{d_B}^{?} \geq [0]$, llavors $y_B \geq 0 \iff \theta \leq \theta^*$ amb :

$$\boxed{\theta^* = \max\{\theta > 0 \mid x + \theta d \geq 0\} = \min_{\{i=1,\ldots,m \mid d_{B(i)}<0\}} \{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\}}$$



- A l'exemple: $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} -3/5 \\ -2/5 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \theta \leq \theta^* = 5$

Propietats de la longitud de passa màxima θ^*

- $\boxed{\theta^* = \max\{\theta > 0 \mid x + \theta d \geq 0\} = \min_{\{i=1,\dots,m \mid d_{B(i)}<0\}} \{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\}}$
- **Propietats**:
  i. **Si P_e és no degenerat** ($x_{B(i)} > 0\ \forall i \in \mathcal{B}$) **$d$ és factible**:
     a) Si $d_B \ngeq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\theta^* > 0} \Rightarrow \boldsymbol{d}$ **factible**.
     b) Si $d_B \geq 0 \ \Rightarrow y_{B(i)} = x_{B(i)} + \theta d_{B(i)} \geq 0\ \forall \theta > 0$. Llavors θ^* no està definida, doncs $\forall \theta > 0 :\ x + \theta d \in P_e$ (***d* és un raig extrem**).
  ii. **Si P_e és degenerat** ($\exists i \in \mathcal{B} : x_{B(i)} > 0$) **$d$ pot no ser factible**:

     Si $\exists i \in \mathcal{B}$ tal que $x_{B(i)} = 0$ i $d_{B(i)} < 0$ llavors

$$\min_{\{i=1,\dots,m \mid d_{B(i)}<0\}} \{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\} = 0 \Rightarrow$$

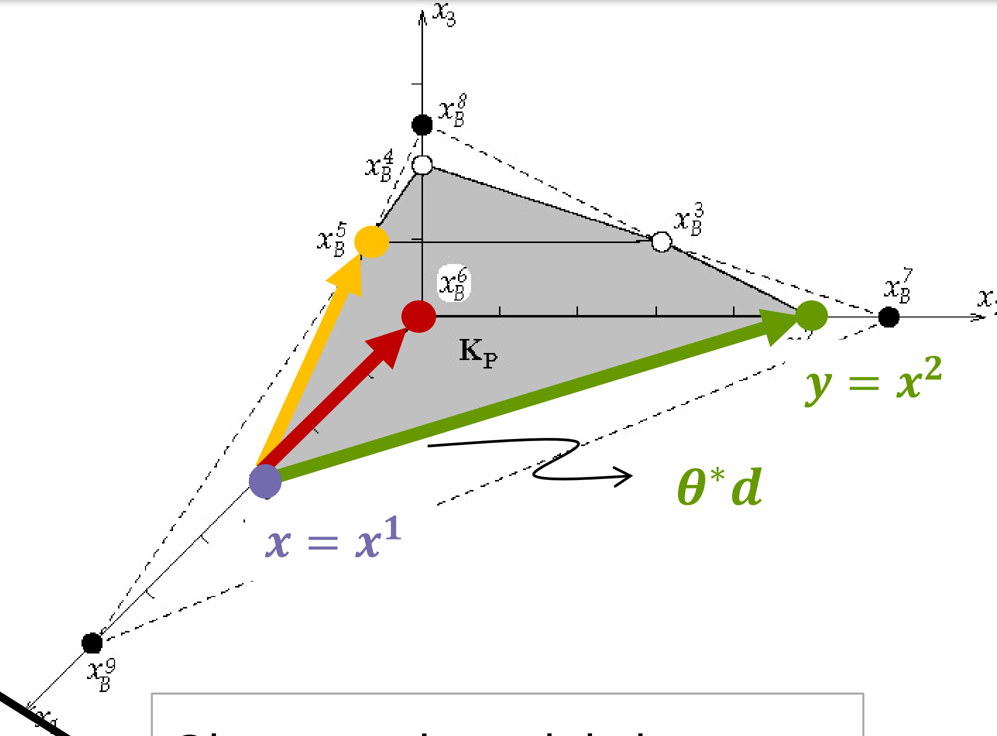
$$\Rightarrow \nexists \theta > 0 : y = x + \theta d \in P_e \Rightarrow \boldsymbol{d}\ \textbf{infactible}.$$

Actualització de les variables : $y = x + \theta^* d$

- **Obtenció de la nova SBF:**

$$y = x + \theta^* d = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} + \theta^* \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{array} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -3/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} y_1 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_5 \end{array}$$



Observeu el canvi de base

$\mathcal{B}^1 = \{1, 4\} \rightarrow \mathcal{B}^2 = \{2, 4\}$

(SBF adjacents)

Exercici: trobeu d i θ^* sobre $x = x^1$ associat a $y = x^6$ i $y = x^5$

$y = x + \theta^* d$ és SBF (1/3)

- Si q i $B(p)$ representen, respectivament, les variables que entren i surten de la base, llavors, $\bar{\mathcal{B}} \coloneqq \{\bar{B}(1), \bar{B}(2), \dots, \bar{B}(m)\}$ amb $\bar{B}(i) \coloneqq \begin{cases} B(i) & i \neq p \\ q & i = p \end{cases}$, i la nova base és: $\bar{B} = \left[A_{B(1)}, \dots, A_{B(p-1)}, \boldsymbol{A_q}, A_{B(p+1)}, \dots, A_{B(m)}\right]$.
- Veurem que $\bar{\mathcal{B}}$ és solució bàsica factible:

Teorema 4 (Ta. 3.2 B&T) :

"Sigui x SBF de P_e políedre estàndard de rang complet no buit no degenerat, d DBF sobre x i

$$\theta^* = \max\{\theta \geq 0 \mid y = x + \theta d \in P_e\}.$$

Llavors $y = x + \theta^* d$ és SBF de P_e"

$y = x + \theta^* d$ és SBF (1/3)

Teorema 4 (Ta. 3.2 B&T) :

"Sigui x SBF de P_e políedre estàndard de rang complet no buit no degenerat, d DBF sobre x i

$$\theta^* = \max\{\theta \geq 0 \mid y = x + \theta d \in P_e\}.$$

Llavors $y = x + \theta^* d$ és SBF de P_e"

Demo: Per construcció, $y \in P$ i té $n - m$ v.n.b. nul·les. Només cal demostrar que la base $\bar{B}$ associada al nou conjunt de variables bàsiques és no singular.

1. Si q i $B(p)$ representen, respectivament, les variables que entren i surten de la base, llavors, $\bar{\mathcal{B}} \coloneqq \{B(1), \dots, B(p-1), q, B(p+1), \dots, B(m)\}$ i la nova base és:

$$\bar{B} = \left[A_{\bar{B}(1)}, \dots, A_{\bar{B}(m)}\right] = \left[A_{B(1)}, \dots, A_{B(p-1)}, A_q, A_{B(p+1)}, \dots, A_{B(m)}\right]$$

Demostrarem que les columnes de $\bar{B}$ son linealment independents

$y = x + \theta^* d$ és SBF (3/3)

Demo (cont):

3. Les columnes de $\bar{B}$ son linealment independents: per reducció a l'absurd:

- Suposem $\bar{B}$ singular. Llavors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \neq 0$:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_{\bar{B}(i)} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i B^{-1} A_{\bar{B}(i)} = 0 \Rightarrow B^{-1} A_{\bar{B}(i)} \text{ lin. dependent}$$

- Demostrarem que $B^{-1} A_{\bar{B}(i)}$ són linealment independents :
  - Per $i \neq p$: $B^{-1} A_{\bar{B}(p)} = B^{-1} A_{B(i)} = B^{-1} B_i = e_i$ **vectors lin. indep. amb component $\boldsymbol{p}$-èssima nul·la**. (2)
  - Per $i = p$: $B^{-1} A_{\bar{B}(p)} = B^{-1} A_q = -d_B$, **vector amb component $\boldsymbol{p}$-èssima** $d_{B(p)} < 0$ **per definició**. (3)
  - $(2), (3) \Rightarrow B^{-1} A_{\bar{B}(p)}$ i $B^{-1} A_{\bar{B}(i)}$, $i \neq p$, linealment independents $\Rightarrow \bar{B}$ no singular $\Rightarrow y$ SBF ■

Condicions d'optimalitat: costos reduïts.

- Considerem els tres possibles canvis de base vistos a l'exemple

$$z^1 = 15 \begin{cases} z^2 = 15 = z^1 & \textbf{no millora} \\ z^5 = 20 > z^1 & \textbf{empitjora} \\ z^6 = \ \ 0 < z^1 & \textbf{millora} \end{cases}$$

$$r_2 = c_2 - c_B' B^{-1} A_2 = 3 - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$r_3 = c_3 - c_B' B^{-1} A_3 = 9 - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 > 0$$

$$r_5 = c_5 - c_B' B^{-1} A_5 = 0 - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 < 0$$

- Donats $\mathcal{B}$ i q es pot saber si $c'y < c'x$? Expressem $c'y$ en funció de $c'x$

$$c'y = c'(x + \theta^* d) = c'x + \theta^* c'd = c'x + \theta^* [c_B' \quad c_N'] \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} =$$

$$= c'x + \theta^* \Big(c_B' \underbrace{d_B}_{d_B = -B^{-1}A_q} + \underbrace{c_N' d_N}_{c_q} \Big) = c'x + \theta^* \underbrace{\left(c_q - c_B' B^{-1} A_q \right)}_{r_q} = c'x + \theta^* r_q$$

- $\boxed{c'y = c'x + \theta^* r_q}$ amb $\boxed{r_q \overset{\text{def}}{=} c_q - c_B' B^{-1} A_q}$ **costos reduïts de la v.n.b. q**

Condicions d'optimalitat: DBF de descens

- **Direccions de descens:** donat $(PL)_e$, direm que la direcció factible d és de descens sobre $x \in P_e$ si $c'(x + \theta d) < c'x,\ \theta > 0$

  i. d és de descens sobre $x \Leftrightarrow c'd < 0$

- Si $\boldsymbol{d}$ **és DBF sobre** $\boldsymbol{x}$ **SBF** sabem que

$$c'y = c'x + \theta^* c'd = c'x + \theta^* r_q \text{ i:}$$

  ii. Els costos reduïts es poden expressar com : $\boxed{\boldsymbol{r_q = c'd}}$

  iii. Si P_e no deg. ($\Rightarrow \theta^* > 0$), llavors

la DBF $\boldsymbol{d}$ assoc. a $\boldsymbol{q} \in \mathcal{N}$ és de descens $\Leftrightarrow \boldsymbol{r_q < 0}$

- Al següent teorema establirem les condicions d'optimalitat en termes del vector de costos reduïts.

Condicions d'optimalitat de SBF (1/3)

Teorema 5 (Ta. 3.1 B&T): condicions d'optimalitat de SBF

"*Sigui P_e políedre estàndard no buit de rang complet, i x SBF de P_e. Definim el **vector de costos reduïts** associat a x : $r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N$. Llavors:*

a) Si $r \geq [0] \Rightarrow x$ és SBF òptima.

b) Si x és SBF òptima i no degenerada $\Rightarrow r \geq [0]$."

Demo a)* : $r \geq [0] \Rightarrow x$ *SBF òptima

1. Sigui $y \in P$. Definim $d = y - x$. Llavors $Ad = A(y-x) = b - b = [0]$ i:

$$Ad = Bd_B + A_N d_N = [0] \rightarrow d_B = -B^{-1} A_N d_N$$

2. Calculem ara el valor de la funció objectiu sobre $y = x + d$:

$$c'y = c'x + c'd = c'x + \begin{bmatrix} c'_B & c'_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_B = -B^{-1} A_N d_N \\ d_N \end{bmatrix}$$
$$= c'x + (c'_N - c'_B B^{-1} A_N) d_N \rightarrow c'y = c'x + r' d_N$$

3. Atès que $d_N = y_N - \overbrace{x_N}^{=0} = y_N \geq 0$, si $r \geq [0]$ tenim que $r' d_N \geq [0]$ i:

$$c'y \geq c'x \ \ \forall y \in P \Rightarrow x \text{ òptima } \blacksquare$$

Condicions d'optimalitat de SBF (2/3)

Teorema 5 (Ta. 3.1 B&T): condicions d'optimalitat de SBF

"*Sigui P_e políedre estàndard no buit i de rang complet, i x SBF de P_e. Definim el* ***vector de costos reduïts*** *associat a x : $r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N$. Llavors:*

a) Si $r \geq [0] \Rightarrow x$ és SBF òptima.

b) Si x és SBF òptima i no degenerada $\Rightarrow r \geq [0]$."

Demo b) **: $\boldsymbol{x}$ *SBF òptima no degenerada* $\Rightarrow \boldsymbol{r} \geq [\mathbf{0}]$ (per reducció a l'absurd)**

– Suposem x SBF òptima no degenerada i que $\exists j \in \mathcal{N}\ t.q. r_j < 0$

– **Si $\boldsymbol{x}$ SBF no degenerada** existeixen vectors $y \in P$ tals que $y = x + \theta d$ amb d direcció bàsica factible associada a $d_N = e_j$ i $\theta > 0$. Llavors:

$$c'y = c'x + \theta r' d_N = c'x + \theta r' e_j = c'x + \overbrace{\theta r_j}^{<0} < c'x \qquad (1)$$

– Pero (1) implicaria que x no seria òptima (contradicció) $\Rightarrow r \geq [0]$ ■

Condicions d'optimalitat de SBF (3/3)

Teorema 5 (Ta. 3.1 B&T): condicions d'optimalitat de SBF

"*Sigui P_e políedre no buit en forma estàndard, x SBF de P_e i sigui el vector de costos reduïts associat a x : $r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N$. Llavors:*

a) Si $r \geq [0] \Rightarrow x$ és SBF òptima.

b) Si x és SBF òptima i no degenerada $\Rightarrow r \geq [0]$."

Interpretació: ***b)*** **$\Rightarrow$ si *x és SBF degenerada* pot ser òptima i $r \ngeq [0]$**

- Sigui (PL) amb $x^* = [0,1]'$ SBF de P_e amb $\mathcal{B}^* = \{2,3\}$:

$$(PL)\begin{cases} \min & z = & & c_2 x_2 & \\ s.a.: & & x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ & & & x_2 & \geq 1 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

- $r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0\ 0] - [c_2\ 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -[c_2\ 0]\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [\ 0\ c_2\ ]$:

$\forall c_2 < 0 : r_3 = c_2 < 0 \Rightarrow x^*$ SBF òptima amb $r \ngeq [0]$

Identificació de problemes (PL) il·limitats

- Si $\boldsymbol{d} \geq \boldsymbol{0}$ DBF associada a la v.n.b. x_q llavors per a tot $\theta > 0$:

$$y = x + \theta d \geq 0 \Rightarrow \boxed{y \in P_e \;\; \forall \theta > 0} .$$

- **Conseqüències:**
  i. La longitud de pas θ^* no està definida:

$$\theta^* = \max\{\theta > 0 \mid x + \theta d \geq 0\} = \min_{\{i \in \emptyset\}}\left\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\right\} = \text{"}+\infty\text{"} \; (\nexists \theta^*)$$

  ii. Al llarg de la semirecta $x + \theta d, \theta > 0$ (aresta del políedre) no existeix cap SBF.

  iii. **Si $r_q < 0$, $z = c'x$ decreix sense límit al llarg de d ((PL) il·limitat)**:

$$z(x + \theta d) = z(\theta) = c'(x + \theta d) = \overbrace{c'x}^{cte} + \overbrace{\theta r_q}^{<0} \xrightarrow{\theta \to +\infty} -\infty$$

L'algorisme del símple primal

1. Inicialització: sigui (PL) $min\{c'x \mid x \in P_e\}$ P_e políedre estàndard de rang complet no buit no degenerat i la SBF inicial repressentada per $\mathcal{B}$, $\mathcal{N}$, x_B i z

2. Identificació de SBF òptima i selecció de la variable no bàsica entrant q :

2.1 Es calculen els costos reduïts $r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N$

2.2. Si $r' \geq [0]$ llavors la s.b.f. actual és òptima: **STOP**.

Altrament, es selecciona una v.n.b. q amb $r_q < 0$ (v.n.b. entrant).

3. Càlcul de la DBF de descens. :

3.1. Es calcula $d_B = -B^{-1} A_q$ (DBF de descens associada a x_q)

3.2. Si $d_B \geq [0] \Rightarrow$ DBF de descens il·limitat: (PL) il.limitat: **STOP**

4. Càlcul de la passa màxima θ^* i selecció de la variable bàsica sortint $B(p)$:

4.1. Càlcul de la passa màxima al llarg de d_B : $\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m \mid d_{B(i)}<0\}} \left\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\right\}$

4.2. Variable bàsica de sortida: $B(p)$ t.q. $\theta^* = -x_{B(p)}/d_{B(p)}$

5. Actualitzacions i canvi de base :

5.1. Actualització de les v.b. i f.o.: $x_B \coloneqq x_B + \theta^* d_B$, $x_q \coloneqq \theta^*$; $z \coloneqq z + \theta^* r_q$

5.2. S'actualitzen $\mathcal{B} \coloneqq \mathcal{B} \setminus \{B(p)\} \cup \{q\}$, $\mathcal{N} \coloneqq \mathcal{N} \setminus \{q\} \cup \{B(p)\}$

6. Anada a 2.

Exemple algorisme del simplex (1/3)

- Trobeu la solució òptima del següent problema (PL) aplicant l'algorisme del símplex, prenent com a s.b.f. inicial l'associada al punt extrem $x' = [0,6]$.

$$(PL)\begin{cases} \text{min z=} & x_1 & +x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 8 \\ & & x_2 & & +x_4 & = 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

- **Càlculs previs:** $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathcal{B} = \{3,2\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, z = c_B' x_B = 6 \\ \mathcal{N} = \{1,4\}, A_N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, c_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Exemple algorisme del simplex (2/3)

- **1a iteració:** $\mathcal{B} = \{3,2\}, \mathcal{N} = \{1,4\}$
  - **Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada $\boldsymbol{q}$** :

$$r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N = [1 \quad 0] - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad -1] \ngeq 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} q = 4, \\ x_4 \text{ v.n.e.} \end{array}}$$

  - **DB factible de descens:** $d_B = -B^{-1} A_4 = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \ngeq 0$
  - **Passa màxima $\boldsymbol{\theta^*}$ i v.b. de sortida $\boldsymbol{p}$**: $\theta^* = \min_{\{i=2\}} \left\{ \frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\} = 6 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} p = 2, \\ x_{B(2)} \text{ v.b.s.} \end{array}}$
  - **Actualitzacions i canvi de base :** $q = 4 \leftrightarrow B(p) = 2$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}, x_4 := \theta^* = 6 \; ; z := z + \theta^* r_q = 6 + 6 \times (-1) = 0$$

$$\mathcal{B} := \{3,4\} \; , B = B^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; , \; x_B = \begin{bmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} \; , c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} := \{1,2\}, \qquad A_N := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \qquad c_N := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemple algorisme del simplex (3/3)

- **2a iteració:** $\mathcal{B} = \{3,4\}, \mathcal{N} = \{1,2\}$
  - **Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b. d'entrada *q*** :

$$r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N = [1 \quad 1] - [0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1] \geq 0 \rightarrow \text{òptim}$$

Solució òptima: $\boxed{\mathcal{B}^* = \{3,4\},\ \mathcal{N}^* = \{1,2\}, x_B^* = [\,8, 6]', z^* = 0}$

Càlcul d'una SBF inicial: Fase I del símplex

- **Definició** : *donat un problema de PL en forma estàndard:*

$$(P)\begin{cases}\min & z = c'x \\ \text{s.a.:} & Ax = b\,,\; b \geq [0] \\ & x \geq 0\end{cases} \quad \rightarrow (P)\begin{cases}\min & z = -x_1 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_1 - x_2 = 2 \\ & x_1,\; x_2,\; x_3,\; \geq 0\end{cases}$$

El seu problema associat de Fase I es defineix com:

$$(P_I)\begin{cases}\min & z_I = \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{s.a.:} & Ax + Iy = b \\ & x, y \geq 0\end{cases} \quad \rightarrow (P_I)\begin{cases}\min & z_I = x_4 + x_5 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ & x_1,\; x_2,\; x_3,\; x_4,\; x_5 \geq 0\end{cases}$$

Càlcul d'una SBF inicial: Fase I del símplex

- **Fase I del símplex** : resolució del problema P_I amb l'algorisme del símplex.

$$(\mathrm{P_I})\begin{cases} \min & z_I = \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{s.a.}: & Ax + Iy = b \\ & x, y \geq 0 \end{cases} \rightarrow$$

Es resol amb alg. símplex a partir de $y = b, x = [0]$ SBF trivial de $(\mathrm{P_I})$. $\rightarrow \mathcal{B}_I^*, z_I^*, y^*$

- **Fase I** : possibles resultats:

1. $z^*_\mathrm{I} > 0 \Rightarrow (\mathrm{P})$ infactible.
2. $z^*_\mathrm{I} = 0 \Rightarrow (\mathrm{P})$ factible. Dos possibles casos:
   a) $\mathcal{B}^*_\mathrm{I}$ no conté cap variable y $\Rightarrow \mathcal{B}^*_\mathrm{I}$ és una SBF de (P).
   b) $\mathcal{B}^*_\mathrm{I}$ conté alguna variable y :
      - $y^*_B = [0] \Rightarrow \mathcal{B}^*_\mathrm{I}$ és una s.b.f. degenerada de $(\mathrm{P_I})$.
      - Es pot obtenir una SBF de (P) a partir de $\mathcal{B}^*_\mathrm{I}$ (B&T,sec. 3.5)

Fase I del símplex: exemple (1/4)

- Trobeu la solució òptima del següent problema (P) aplicant l'algorisme del símplex revisat.

$$(P)\begin{cases}\min & z=-x_1 \\ \text{s.a.:} & \begin{array}{rrl} x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ 2x_1 & -x_2 & =2 \\ x_1, & x_2, & \geq 0\end{array}\end{cases} \rightarrow \text{Pas a la forma estàndard} \rightarrow (P)\begin{cases}\min & z=-x_1 \\ \text{s.a.:} & \begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & =4 \\ 2x_1 & -x_2 & & =2 \\ x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0\end{array}\end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Problema Fase I} \rightarrow (P_I)\begin{cases}\min & z_I=x_4+x_5 \\ \text{s.a.:} & \begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & =4 \\ 2x_1 & -x_2 & & & +x_5 & =2 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & x_5 & \geq 0\end{array}\end{cases}$$

- **Càlculs previs Fase I:** $\mathcal{B}=\{4,5\}\rightarrow B=B^{-1}=I\ ,\ x_B=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}, c_B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad z_I=6$

$$\mathcal{N}=\{1,2,3\}\rightarrow A_N=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}=I\ ,\ c_N=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Fase I del símplex: exemple (2/4)

- **1a iteració Fase I:** $\mathcal{B} = \{4, 5\}$, $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow q = 1$$

  - Identificació de problema il·limitat : $d_B = -B^{-1} A_1 = -I \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \ngeq [0]$
  - Selecció de la v.b. de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i=1,2} \left\{ \frac{x_{B(i)}}{-d_{B(i)}} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{1}, \frac{2}{2} \right\} = 1 \Rightarrow$ $x_{B(2)} = x_5$ v.b. sortint
  - Actualitzacions i canvi de base :

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \coloneqq x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \ x_1 \coloneqq \theta^* = 1 \ ; \ z_I \coloneqq z_I + \theta^* r_q = 6 + 1 \times (-3) = 3$$

$$\mathcal{B} \coloneqq \{4,1\} \ , \ B \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ B^{-1} \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \ , \ x_B = \begin{bmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \ , c_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} \coloneqq \{2,3,5\} \ , \qquad A_N \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \qquad c_N \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}'$$

Fase I del símplex: exemple (3/4)

- **2a iteració Fase I:** $\mathcal{B} = \{4,1\}$ $\mathcal{N} = \{2,3,5\}$
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow q = 2$$

  - Identificació de problema il·limitat : $d_B = -B^{-1} A_2 = -\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \ngeq 0$
  - Selecció de la v.b. de sortida p: $\theta^* = \min_{i=1} \left\{ \frac{x_{B(i)}}{-d_{B(i)}} \right\} = \min \left\{ \frac{3}{3/2} \right\} = 2 \Rightarrow$ $x_{B(1)} = x_4$ v.b. sortint
  - Actualitzacions i canvi de base :

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} \coloneqq x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \; x_2 \coloneqq \theta^* = 2 \; ; \; z \coloneqq z + \theta^* r_q = 3 + 2 \times \frac{-3}{2} = 0$$

$$\mathcal{B} \coloneqq \{2,1\} \; , \; B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \; B^{-1} := \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \; , \; x_B = \begin{bmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \; , c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} \coloneqq \{3,4,5\} \, , \quad A_N \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad c_N \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}'$$

Fase I del símplex: exemple (4/4)

- **3a iteració Fase I:** $\mathcal{B} = \{2,1\}$ $\mathcal{N} = \{3,4,5\}$
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \text{Òptim Fase I}$$

  - Solució Fase I: $\mathcal{B}_I^* = \{2,1\}$, $z_I^* = 0$, $y^* = \begin{bmatrix} x_4^* \\ x_5^* \end{bmatrix} = [0] \Rightarrow \mathcal{B} = \{2,1\}$ SBF inicial de (P)

- **1a iteració Fase II:** $\mathcal{B} = \{2,1\}$ $\mathcal{N} = \{3\}$
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = 0 - \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1/3 \geq 0 \Rightarrow \text{òptim Fase II}$$

- **Solució òptima:** $\mathcal{B}^* = \{2,1\}$, $\mathcal{N}^* = \{3\}$, $x^*_B = [\ 2\ \ 2\ ]'$, $z^* = -2$

Convergència de l'algorisme del símplex

Teorema 6 (Convergència del símplex) :

"*Sigui* $(PL)_e \min\{c'x | x \in P_e\}$ *problema de PL en forma estàndard, factible* ***sense cap solució bàsica factible degenerada****. Llavors:*

a) l'Algorisme del símplex finalitza en un nombre finit d'iteracions.

b) l'Algorisme del símplex finalitza en un dels següents estats:

i. Proporciona una solució bàsica factible òptima.

ii. Identifica una SBF associada a una direcció d *bàsica factible de descens il·limitat (problema (PL) és il·limitat).*"

Demo : immediata a partir de l'algorisme (Ta. 3.3 B&T)

- **Com pot afectar la degeneració a la convergència de algorisme del símplex?**

- **Exemple de ciclat de l'algorisme del simplex amb degeneració:**

$$
(\mathrm{P})\begin{cases}
\min & -\frac{3}{4}x_1 & +20x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +6x_4 & & & & \\
\text{s.a.:} & \frac{1}{4}x_1 & -8x_2 & -1x_3 & +9x_4 & +x_5 & & & =0 \\
 & \frac{1}{2}x_1 & -12x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +3x_4 & & +x_6 & & =0 \\
 & & & x_3 & & & & +x_7 & =1 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_6 & \geq 0
\end{cases}
$$

- **Aplicació de l'alg. del símplex amb selecció del cost reduït més negatiu:**

It. 1: $\mathcal{B}=\{5,6,7\}\quad \mathcal{N}=\{1,2,3,4\}$ $\quad x_B'=[0\ \ 0\ \ 1]\quad r'=[-3/4\ \ 20\ \ -1/2\ \ 6]\quad q=1\quad d_B'=[-1/4\ \ -1/2\ \ 0]\quad p=1$

It. 2: $\mathcal{B}=\{1,6,7\}\quad \mathcal{N}=\{2,3,4,5\}\quad x_B'=[0\ \ 0\ \ 1]\quad r'=[-4\ \ -7/2\ \ 33\ \ 3]\quad q=2\quad d_B'=[32\ \ -4\ \ 0]\quad p=2$

It. 3: $\mathcal{B}=\{1,2,7\}\quad \mathcal{N}=\{3,4,5,6\}\quad x_B'=[0\ \ 0\ \ 1]\quad r'=[-2\ \ 18\ \ 1\ \ 1]\quad q=3\quad d_B'=[-8\ \ -3/8\ \ -1]\quad p=1$

It. 4: $\mathcal{B}=\{3,2,7\}\quad \mathcal{N}=\{1,4,5,6\}\quad x_B'=[0\ \ 0\ \ 1]\quad r'=[1/4\ \ -3\ \ -2\ \ 3]\quad q=4\quad d_B'=[21/2\ \ -3/16\ \ -21/2]\quad p=2$

It. 5: $\mathcal{B}=\{3,4,7\}\quad \mathcal{N}=\{1,2,5,6\}\quad x_B'=[0\ \ 0\ \ 1]\quad r'=[-1/2\ \ 16\ \ -1\ \ 1]\quad q=5\quad d_B'=[-2\ \ -1/3\ \ 2]\quad p=1$

It. 6: $\mathcal{B}=\{5,4,7\}\quad \mathcal{N}=\{1,2,3,6\}\quad x_B'=[0\ \ 0\ \ 1]\quad r'=[-7/4\ \ 44\ \ 1/2\ \ -2]\quad q=6\quad d_B'=[3\ \ -1/3\ \ 0]\quad p=2$

It. 7: $\mathcal{B}=\{5,6,7\}\quad \mathcal{N}=\{1,2,3,4\}$ $\leftarrow$ mateixa base de la iteració 1 (**CICLAT**)

Eliminació del ciclat: regla de Bland

Regla de Bland (selecció del pivot de subíndex menor) :

1. *Seleccionar com a VNB d'entrada la corresponent a l'índex menor de les que tinguin cost reduït negatiu.*
2. *Si en la selecció de la variable de sortida de la base es produeix un empat, seleccionar la VB amb índex menor.*

- Es pot demostrar que si s'aplica l'algorisme del símplex amb aquest criteri de canvi de base mai es produeix ciclat $\Rightarrow$ **l'algorisme del símplex acaba en un nre. finit d'iteracions ($\Longrightarrow$ tot $(P)_e$ deg. amb òptim té SBF amb $r \geq 0$).**
- **Exemple:** aplicant la regla de Bland a l'exemple anterior obtindríem:

It. 5 : $\mathcal{B} = \{3,4,7\}$ $\mathcal{N} = \{1,2,5,6\}$ $x_B' = [0 \quad 0 \quad 1]$ $r' = [-1/2 \quad 16 \quad -1 \quad 1]$ $q = 1$ $d_B' = [5/2 \quad 1/4 \quad -5/2]$ $p = 3$

It. 6 : $\mathcal{B} = \{3,4,1\}$ $\mathcal{N} = \{2,5,6,7\}$ $x_B' = [1 \quad 1/10 \quad 2/5]$ $r' = [4.8 \quad -1.4 \quad 2.2 \quad 0.2]$ $q = 5$ $d_B' = [0 \quad -4/30 \quad 4/5]$ $p = 2$

It. 7 : $\mathcal{B} = \{3,5,1\}$ $\mathcal{N} = \{2,4,6,7\}$ $x_B' = [1 \quad 3/4 \quad 1]$ $r' = [2.0 \quad 10.5 \quad 1.5 \quad 1.25] \geq 0$

Complexitat algorísmica del símplex (1/6)

- **Cost computacional del simplex:**

$$\text{Cost computacional} = \frac{\text{nre. operacions}}{\text{iteració}} \times \text{nre. iteracions}$$

- **Nre. operacions/iteració :**

a. $c_B' B^{-1}$: resolució sistema $B'\lambda = c_B \longrightarrow O(m^2)$

b. $r' = c_N' - \lambda' A_N \longrightarrow O(m) \sim O(mn)$

c. $d_B = -B^{-1}A_q$: resolució sistema $Bd_B = -A_q \longrightarrow O(m^2)$

Llavors:

$$\boldsymbol{O(m^2) \leq \text{nre. operacions/iteració} \leq O(m^2 + mn)}$$ **: polinòmic**

Complexitat algorísmica del símplex (6/6)
(Vasek Chvatal, Linear Programming, 1983)

- **Nombre d'iteracions del simplex:** es pot expressar com a polinomi de n i m? No se sap. Qüestió fonamental de la matemàtica moderna. Estat actual:
  1. **En teoria:** en el pitjor dels casos, l'algorisme del símplex hauria de recórrer el conjunt complet de vèrtexs: què sabem sobre el nombre de vèrtexs $v(P)$ d'un políedre $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j' x \geq \mathrm{b_j} \,, j = 1, \ldots, l\}$ qualsevol?
     - **McMullen (1970)** : $v(P) \leq \binom{l - \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}{l-n} + \binom{l - \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor}{l-n}$
     - **Prékopa (1972) :** $E[v(P)] = \binom{l}{n} 2^{n-l}$
  2. **En la pràctica:** $\text{nre. iteracions} = O(m) \approx 3m$ (o $O(m \log n)$)
- **Temps d'execució:** problema de (PL) amb $n = 100, m = 50 \rightarrow l = 150$
  - **Titan - Cray XK7 (**http://www.top500.org/list/2012/11/**):** $\sim 10^{16}$ flops/segon
  - **Temps execució promig teòric (Prékopa)**:

$$10^{-16} \frac{seg.}{flops} \times 50^2 \frac{flops}{iter} \times \binom{150}{50} \times 2^{-50}\, iter \approx \mathbf{141.725\ anys!!!}$$

  - **Temps execució promig usual:** $10^{-16} \times 50^2 \times 150 \approx$ **10^{-11} segons!!**