

Diplomatura d'Estadística.

Investigació Operativa Estocàstica. Examen Parcial

Curs 2001/02

Un aparell està compost per tres components i pel seu correcte funcionament precisa de tots tres en bon estat. Per conèixer com es distribueix el temps de vida d'aquests components s'ha efectuat una prova amb 122 unitats deixant-les funcionar fins que s'ha produït un fallo.

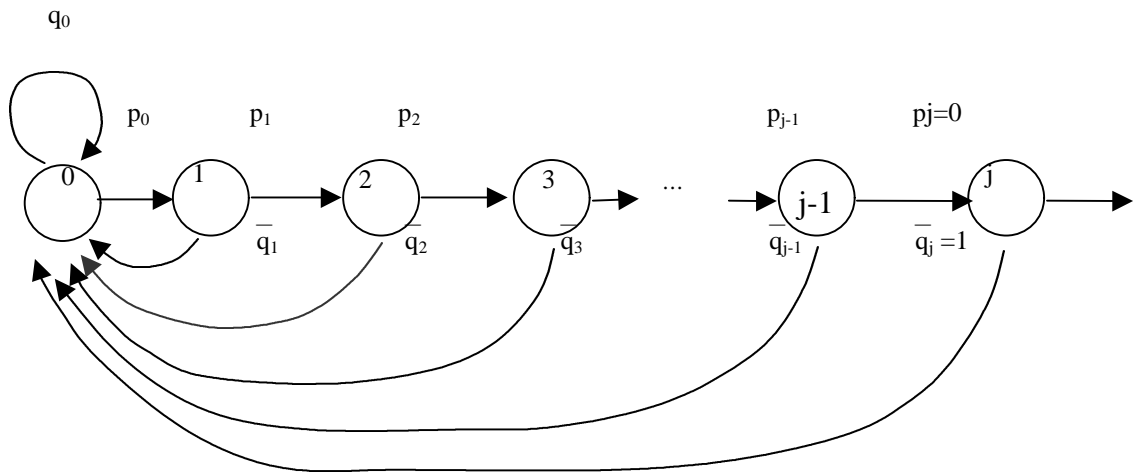
Setmanes d'ús	0	1	2	3	4	5	6	7
Unitats en funcionament	122	122	116	109	98	78	39	0
Fracció d'unitats avariades	0	0.05	0.06	0.1	0.2	0.5	1	

En produir-se el fallo del component es considera que aquest queda inservible i ha de ser reemplaçat per un de nou amb un cost total (operació+preu del component) de 6€. En fallar un component l'aparell pateix una aturada la qual provoca un cost de 8€. Es disposa d'una política de manteniment consistent en: un component es substitueix quan a) falla o b) finalitza la seva 3ª setmana de vida ja que se'l considera massa vell.

Es demana:

1. Establir la cadena de Markov corresponent al temps de vida d'un component utilitzant X_t = Número de setmanes complertes de vida del component. Calcular la matriu de probabilitats de transició, el diagrama corresponent, les classes de la cadena i la periodicitat de cada una d'elles.
2. Temps mig de funcionament d'una component dins l'aparell.
3. Probabilitat de que l'aparell pateixi una avaria en una setmana qualsevol.
4. Cost setmanal (cost dels reemplaçaments + cost de les avaries de l'aparell) a llarg termini que haurà de pagar-se per part dels propietaris.
5. Una empresa de tractament de ferralla compra els components ja siguin avariats o que hagin estat substituïts amb tres setmanes de vida. Paga 1 € si el component resulta avariats o be 2 € si el component ha estat substituït però encara funciona. Replantant la cadena de Markov pel model de vida d'un component utilitzat en els apartats anteriors, es demana:
 - A) Calculeu la fracció de components que aquesta empresa comprarà que estiguin avariats.
 - B) Calculeu l'esperança dels diners que, setmanalment pagarà aquesta empresa per les components reemplaçades de l'aparell.

Solució: (j =3)



1)

$$p_0 = 1 \quad p_1 = 0,95 \quad p_2 = 0,94 \quad p_3 = 0 \quad \bar{q}_3 = 0,05 \quad \bar{q}_3 = 0,06 \quad \bar{q}_3 = 1$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0 & 0,95 & 0 \\ 0,06 & 0 & 0 & 0,94 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Una única classe aperiódica.}$$

2) Per k=3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ p_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & p_{k-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{p}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per tant:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 P_0$$

...

$$\mathbf{p}_{k-1} = \mathbf{p}_0 P_{k-2} \dots P_0$$

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_0 P_{k-1} \dots P_0$$

i ja que $\sum \mathbf{p}_i = 1$ obtindrem: $\mathbf{p}_0 (1 + p_0 + p_0 p_1 + p_0 p_1 p_2 + \dots + \prod_{j=0}^{k-1} p_j) = 1$

$$\boxed{p_0=0,26} \quad p_1=0,26 \quad p_2=0,247 \quad p_3=0,23218; \quad m_{b0} = (1/p_0) = 3,84 \text{ setmanes}$$

(Se suposa que el reemplaçament de les unitats pels tècnics de manteniment es fa entre la 3^a i 4^a setmana)

(en cas de que se suposi que es fa exactament a les 3 setmanes de vida llavors la resposta és 2,84)

3) Probabilitat de fallo d'un component = $p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 = 0,051038$

Probabilitat de funcionament d'una component = $1 - 0,051038 = 0,948962$

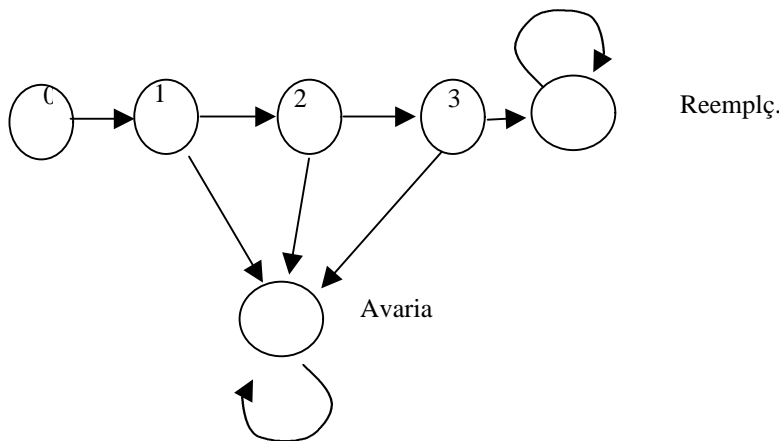
Probabilitat d'avaría de l'aparell = $1 - (0,948962)^3 = 0,14543$

4) Freqüència de reemplaçament = $3 \cdot 0,26 = 0,78$

Cost = $8 \times 0,14543 + 6 \times 0,78 = 5,843 \text{ €/període}$

5) Classes: $C(0)=\{0\}$, $C(1)=\{1\}$, $C(2)=\{2\}$, $C(3)=\{3\}$ Transitòries.

$C(\text{Avaria})=\{\text{Avaria}\}$, $C(\text{Reemplç})=\{\text{Reemplç}\}$ Absorbents



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.94 \\ 0.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ R \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.94 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a)

$$\begin{bmatrix} f_{0r} \\ f_{1r} \\ f_{2r} \\ f_{3r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.94 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8037 \\ 0.8037 \\ 0.846 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \quad f_{oA} = 1 - f_{or} = 0.1963$$

b) $(0.1964 + 2 \cdot 0.8037 = 5.411 \text{ €/component;}$

Nº de components setmanals reemplaçades pels propietaris de l'aparell: $3/\mu_{00} = 3\pi_0 =$

$3 \times 0.26 = 0.78 \text{ components/setmana}$

Esperança dels diners pagats per l'empresa de ferralla:

$5.411 \times 0.78 = 4.22 \text{ €/setmana}$