Grau InterUniversitari d'Estadística UB-UPC

Teoria de Cues i Simulació
1er Examen Parcial. Curs 2012-13

P1 [4 punts] Els tècnics d'un sistema de transports volen avaluar unes unitats de metro en relació als fluxos de passatgers que suporta una estació. Les unitats de metro tenen una capacitat de 500 pax. i se suposa que arriben cada 4 minuts a la estació, sent aquest temps entre arribades totalment constant. Es vol saber:

a) **[2 punts]** Quina és la distribució de probabilitats que té el temps entre l'arribada d'un passatger qualsevol a la parada i el primer metro que ell veu arribar. Calculeu la seva funció de densitat de probabilitat i la seva esperança i variança.
b) **[0,5 punts]** Calculeu la probabilitat de que un usuari que arriba a la parada hagi d'esperar més de 1 minut.
c) **[1.5 punt]** Se suposa que els metros arriben sempre buits a la parada en qüestió. Durant una temporada de l'any el flux de passatgers arriba a ser de 120 passatgers per minut, seguint-se també un procés poissonià d'arribades. En aquestes condicions, calculeu la probabilitat de que, en marxar un metro encara quedin passatgers sense poder pujar.

P2. [6 punts] En una regió determinada una companyia petrolífera vol mantenir en funcionament tres torres d'extracció. El temps continuat amb el que una torre pot estar funcionant és aleatori, de distribució exponencial i d'esperança 3 mesos. Donada la importància de la seva producció, l'empresa disposa de tres equips de reparació, cada un dels quals pot tornar a posar en funcionament una torre en un temps aleatori, exponencialment distribuït i d'esperança tres mesos. Es demana:

a) **[1,7 punts]** Model de cues per al número de torres fora de servei; diagrama d'estats.
b) **[0,7 punts]** Probabilitat de que els sistema funcioni a ple rendiment (totes tres torres funcionant)
c) **[0,8 punts]** Número mig de torres funcionant
d) **[0,8 punts]** Número mig de reparacions per unitat de temps que atén el conjunt dels tres equips de reparació.
e) **[2 punts]** Un dels equips de reparació queda fora de servei quedant-ne només dos per atendre a les tres torres. En aquestes condicions calculeu: 1) temps mig en que una torre està avariada i b) la probabilitat de que una torre avariada tardi més de 3 mesos en tornar a ser posada en funcionament.

P1)

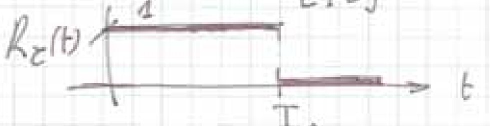
a) Temps d'espera a parada per passatger qualsevol ≡

≡ temps residual fins que arribi un metro.

τ = temps entre arribades de metro, $E[\tau] = 4$ min

$Var[\tau] = 0$ min^2

$$f_r(t) = \frac{R_\tau(t)}{E[\tau]} = \frac{1 - F_\tau(t)}{T} \qquad F_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < T = 4 \\ 1 & \text{si } t \geq T \end{cases}$$



$\Rightarrow r \sim unif[0, T]$

$$E[r] = \int_0^\infty t\, f_r(t)\, dt = \frac{1}{T} \frac{t^2}{2} \Big]_0^T = \frac{T}{2} = 2 \text{ min}$$

$$Var[r] = \int_0^\infty t^2 f_r(t)\, dt - E^2[r] = \frac{1}{T}\frac{t^3}{3}\Big]_0^T - \frac{T^2}{4} =$$

$$= \frac{T^2}{3} - \frac{T^2}{4} = \frac{T^2}{12} = \frac{16}{12} = 4/3 \text{ min}^2.$$

b) $$P(r \geq 1) = 1 - F_r(1) = 1 - \int_0^1 \frac{R_\tau(t)}{E[\tau]} dt = 1 - \frac{1}{T} t \Big]_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = 3/4$$

c) durant 4 minuts el nº de pax N_τ que arriben a la parada és Poisson $N_\tau \sim$ Poisson, $E[N_\tau] = 480$ pax

$\Rightarrow P(N_\tau > 500)$ pràcticament, $N_\tau \sim N(480, \sqrt{480})$

$$P(N_\tau > 500) \approx P\left(z > \frac{500 - 480}{\sqrt{480}}\right) = P(z > 0'913), \quad z \sim N(0,1)$$

$$P(z > 0'913) = 1 - F_z(0'913) = 1 - 0'819 = 0'181$$

P2) Model $M/M/3/\cdot/3$. Població finita.

$\lambda = \frac{1}{3}\ \text{mes}^{-1}$, $\mu = \frac{1}{3}\ \text{mes}^{-1}$ sempre hi ha e.e.

$\frac{\lambda}{\mu} = \theta = 1$

$C_0 = 1,\ C_1 = 3\theta,\ C_2 = 3\theta^2,\ C_3 = \theta^3$

b) $P_0 = \left[1 + 3\theta + 3\theta^2 + \theta^3\right]^{-1} = \left[1+3+3+1\right]^{-1} = \frac{1}{8}$

c) $L = P_1 + 2P_2 + 3P_3 = P_0\left(3\theta + 2\cdot 3\cdot\theta^2 + 3\cdot\theta^3\right) =$

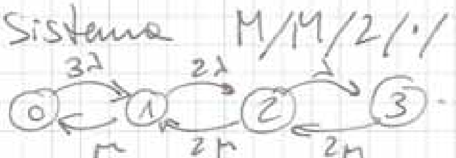
$= \frac{1}{8}(3+6+3) = \frac{3}{2}$ bombes avariades

nº mig bombes funcionant $= 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

d) $\bar{\lambda} = 3\lambda P_0 + 2\lambda P_1 + \lambda P_2 = P_0\lambda\left(3 + 6\theta + 3\theta^2\right) =$

$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}(12) = \frac{1}{2}\ \frac{\text{avaries}}{\text{mes}}$

e) Sistema $M/M/2/\cdot/3$



$C_0 = 1$
$C_1 = 3\theta$
$C_2 = 3\theta^2$
$C_3 = \frac{3}{2}\theta^3$

(1) $P_0 = \left[1 + 3 + 3 + \frac{3}{2}\right]^{-1} = \frac{2}{17}$

$L = P_1 + 2P_2 + 3P_3 = P_0\left(3\theta + 3\cdot 2\theta^2 + 3\cdot\frac{3}{2}\theta^3\right) =$

$= \frac{2}{17}\left(3 + 6 + \frac{9}{2}\right) = \frac{27}{17}$ bombes avariades

$\bar{\lambda} = 3\lambda P_0 + 2\lambda P_1 + \lambda P_2 = P_0\lambda\left(3 + 6\theta + 3\theta^2\right) =$

$= \frac{2}{17}\cdot\frac{1}{3}\cdot 12 = \frac{24}{51}\ \frac{\text{av.}}{\text{mes}}$; $W = \frac{27/17}{24/51} = 3'375$ mesos

(2) $w \mid N \leq 1 \sim \exp$, $E[w \mid N \leq 1] = 1/\mu = 3$ mesos

$(w \mid N = 2) = t_1 + x$; t_1 temps fins que alguna bomba avariada és reparada

$x \sim \exp$ $E[x] = 3$ mesos

$w | N=2 \sim \text{Hypo}, \quad t_1 \sim \exp, \quad E[t_1] = 3/2 \text{ mes}$

$$P((w|N=2) \geq t) = \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$P(w \geq 3) = P((w|N \leq 1) \geq 3) \cdot (P_0 + P_1) +$$
$$P((w|N=2) \geq 3) \cdot P_2 =$$
$$= \frac{2 \cdot 4}{17} \cdot e^{-3/3} + \frac{2}{17} \cdot 3 \cdot \left[\frac{2/3\, e^{-3/3} - 1/3\, e^{-3 \cdot 2/3}}{2/3 - 1/3} \right] =$$
$$= \frac{1}{17}\left(8 e^{-1} + 6\left(\underline{2e^{-1}} - e^{-2}\right)\right) = 0'3850.$$