

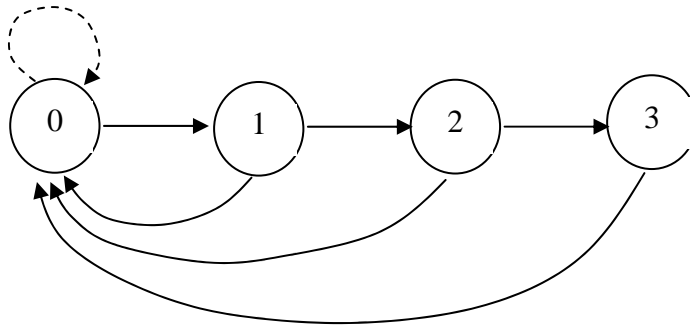
DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA. Curs 03/04. 2on Q

EXAMEN PARCIAL. Cadenes de Markov.

Es celebra una cursa d'obstacles en la que hi participen tres corredors amb idèntiques característiques de preparació atlètica. Els obstacles estan distanciats 50 metres un d'altre i en acabar la cursa han de ser aixecats de nou per la següent tanda de corredors pel equip de manteniment de la pista. Se sap que després d'haver tirat un obstacle el següent serà superat sempre, però que el segon obstacle té una probabilitat de ser tirat de 0.05 i que el tercer serà superat només amb probabilitat 0.94 si es va superar el segon. Curiosament mai aconsegueixen superar un quart obstacle. Corrent sense obstacles la velocitat dels atletes per la modalitat de la cursa és de 25 km/h. Cada obstacle abatut els retarda 0.3 segons.

Es demana:

- 1- Establir una cadena de Markov $\{X_k\}$ corresponent al número de trams (50 metres) recorreguts per un atleta des de l'últim obstacle abatut. Calcular la matriu de probabilitats de transició, dibuixar el diagrama corresponent, les classes de la cadena y la periodicitat dels seus estats.
- 2- Distància mitjana que un corredor recorre entre dos obstacles abatuts.
- 3- Fracció dels trams abatuts en un carril y probabilitat de que un tram de 50 metres tingui al menys un obstacle abatut. Distància mitjana que l'equip de manteniment de pista ha de recórrer fins arribar al següent punt on hi hagi algun obstacle abatut
- 4- Velocitat mitjana dels atletes en la cursa d'obstacles.
- 5- La cursa es repeteix però ara en la modalitat de relleus i hi participen tres equips. Un atleta es rellevat per un company del seu equip si aconsegueix superar tres obstacles sense abatre'ls, mentre que si un atleta abat un obstacle llavors tot el seu equip perd la cursa i ha de retirar-se. Calcular la probabilitat de que un atleta faci perdre la cursa al seu equip per abatre un obstacle.



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0 & 0.94 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Una única classe aperiòdica}$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0 & 0.94 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.26, 0.26, 0.247, 0.23218)$$

2) Número mig de trams, $E[\ell]$, entre $X_k = 0$ i $X_{k+\ell} = 0$:

$\mu_{0,0} = 1/\pi_0 = 3.84$ trams; $\rightarrow 192.3$ metres.

3) $\pi_0 = 0.26$; Probabilitat de que algún carril d'un tram hage estat tumbat:
 $1 - (1 - \pi_0)^3 = 1 - 0.74^3 = 0.594$.

4) Donat el retard de 0.3 segons si es derriba un obstacle la velocitat passa a ser en aquest cas:

$$\frac{50 \cdot 3.6}{\frac{50 \cdot 3.6}{25} + 0.3} = 24 \text{ km/h}$$

Per tant la velocitat mitjana és: $25 \cdot (1 - \pi_0) + 24 \cdot \pi_0 = 24.74 \text{ km/h}$

5)

$$P = \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.94 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R \\ P \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} = \left(\frac{I}{R} \middle| \frac{0}{Q} \right), Q = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.94 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La probabilitat de que un corredor faci perdre el seu equip és ve donada per la de absorció pel estat P , $f_{0,P}$: $1-f_{0,P} = 0.107$.

$$\begin{pmatrix} f_{0,P} \\ f_{1,P} \\ f_{2,P} \\ f_{3,P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.94 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.893 \\ 0.893 \\ 0.94 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

