Distribución t-de Student con n grados de libertad.

normal estandarizada ji-cuadrado con n grados de libertad

Sea $Z \sim N(0,1)$ $\quad u \sim \chi^2_n$ v.a. independientes

$$\chi^2_n = \text{Gama}\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

Definimos

$$\boxed{T = \frac{Z}{\sqrt{u/n}}}$$

A la distribución de T la llamaremos "distribución t-de Student con n grados de libertad"

VAMOS a obtener su función de densidad de probabilidad

En primer lugar partiremos de la distribución conjunta de Z y u

$$f_{Zu}(z,u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{u^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{u}{2}}$$

$u>0$, $z \in \mathbb{R}$ (cero en caso contrario)

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})\, 2^{\frac{n+1}{2}}} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(z^2+u)}$$

$u>0$, $z \in \mathbb{R}$ (cero en caso contrario)

Estudiemos el cambio:

$$(Z,u) \rightarrow (T,W) \quad \text{con} \quad W=u$$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{u/n}} \qquad Z = T\sqrt{\frac{u}{n}} = T\sqrt{\frac{W}{n}}$$

$$W = u \qquad u = W$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial w} \\ \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{w}{n}} & t\,\frac{1}{2}\left(\frac{w}{n}\right)^{-1/2}\frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\det J| = \sqrt{\frac{w}{n}}$$

observemos que $W \in (0, \infty)$ con probabilidad 1

y que $T \in (-\infty, \infty)$ independientemente del valor de W

Por tanto el conjunto de puntos donde la densidad f_{TW} es

no nula será $(-\infty, \infty) \times (0, \infty)$. Tendremos:

$$f_{TW}(t, w) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{m}{2})\, 2^{\frac{m+1}{2}}} \quad w^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\left(t^2 \frac{w}{m} + w\right)} \sqrt{\frac{w}{m}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi m}\,\Gamma(\frac{m}{2})\, 2^{\frac{m+1}{2}}} \quad w^{\frac{m-1}{2}} \quad e^{-\frac{1}{2} w \left(\frac{t^2}{m}+1\right)}$$

para $t \in \mathbb{R}$
$w > 0$

(cero en caso contrario)

$$f_T(t) = \int_0^{\infty} f_{TW}(t, w)\, dw =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi m}\;\Gamma(\frac{m}{2})\, 2^{\frac{m+1}{2}}} \quad w^{\frac{m-1}{2}} \quad e^{-\frac{1}{2} w \left(\frac{t^2}{m}+1\right)} dw$$

Con el cambio:

$$\frac{1}{2} w \left(\frac{t^2}{m}+1\right) = y \qquad w = \frac{2y}{\frac{t^2}{m}+1}$$

$$dw = \frac{2}{\frac{t^2}{m}+1}\, dy$$

Resultará:

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi m}\;\Gamma(\frac{m}{2})\, 2^{\frac{m+1}{2}}} \int_0^{\infty} \left(\frac{2y}{\frac{t^2}{m}+1}\right)^{\frac{m-1}{2}} e^{-y}\, \frac{2}{\frac{t^2}{m}+1}\, dy =$$

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi m}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) 2^{\frac{m+1}{2}}} \frac{2^{\frac{m+1}{2}}}{\left(\frac{t^2}{m}+1\right)^{\frac{m+1}{2}}} \underbrace{\int_0^{\infty} y^{\frac{m+1}{2}-1} e^{-y}\,dy}_{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi m}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{m}\right)^{\frac{m+1}{2}}} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(esta es la función de densidad de la t- de student con n-grados de libertad)

$$\boxed{f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi m}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{m}\right)^{\frac{m+1}{2}}} \qquad t \in \mathbb{R}}$$

función de densidad t- de Student con n grados de libertad.

Distribución F- de Fisher con "m" y "n" grados de libertad.

Sea $U \sim \chi^2_m$ y $V \sim \chi^2_n$ independientes.
Entonces:

$$\boxed{F = \frac{U/m}{V/n}}$$

diremos que sigue una distribución F de Fisher con "m" y "n" grados de libertad. Abreviadamente: $F \sim F^m_n$

Vamos a obtener su función de densidad de probabilidad. Partiremos de la distribución conjunta:

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{u^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{u}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{v^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{v}{2}}$$

$u, v > 0$

(cero en caso contrario)

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2}) \, 2^{\frac{n+m}{2}}} u^{\frac{m}{2}-1} v^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(u+v)}$$

Estudiemos el cambio:

$$(U, V) \rightarrow (Y, W)$$

con

$$Y = \frac{n}{m}\frac{U}{V} \qquad W = V$$

entonces:

$$U = \frac{m}{n} YW \qquad V = W$$

(observar que $Y \sim F^m_n$)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial w} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{n} w & \frac{m}{n} y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det J = \frac{m}{n} w$$

Y y W toman valores en $(0,\infty)^2$ con probabilidad 1.

$$f_{YW}(y,w)=\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})\,2^{\frac{n+m}{2}}}\left(\frac{m}{n}\,y\,w\right)^{\frac{m}{2}-1}w^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}yw+w\right)}\cdot\frac{m}{n}w$$

para $y,w>0$
(cero en caso contrario)

$$=\frac{(m/n)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})\,2^{\frac{n+m}{2}}}\;w^{\frac{n+m}{2}-1}\,y^{\frac{m}{2}-1}\,e^{-\frac{1}{2}w\left(\frac{m}{n}y+1\right)}$$

$$f_Y(y)=\int_0^\infty f_{YW}(y,w)\,dw= \qquad y>0$$

$$=\frac{(m/n)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})\,2^{\frac{n+m}{2}}}\;y^{\frac{m}{2}-1}\int_0^\infty w^{\frac{n+m}{2}-1}\,e^{-\frac{1}{2}w\left(\frac{m}{n}y+1\right)}\,dw$$

que con el cambio: $t=\frac{1}{2}w\left(\frac{m}{n}y+1\right)$

$dt=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}y+1\right)dw$

resulta:

$$f_Y(y)=\frac{(m/n)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})\,2^{\frac{n+m}{2}}}\;y^{\frac{m}{2}-1}\int_0^\infty\left(\frac{2\,t}{(\frac{m}{n}y+1)}\right)^{\frac{n+m}{2}-1}e^{-t}\cdot\frac{2}{(\frac{m}{n}y+1)}\,dt$$

$$=\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})\,2^{\frac{n+m}{2}}}\;y^{\frac{m}{2}-1}\,\frac{2^{\frac{n+m}{2}}}{\left(\frac{m}{n}y+1\right)^{\frac{n+m}{2}}}\,\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right) \qquad y>0$$

(cero en caso contrario)

finalmente:

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\left(y\right)^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}y\right)^{\frac{n+m}{2}}} \qquad y > 0$$

(cero en caso contrario)

o alternativamente:

$$\boxed{\begin{array}{ll} f_Y(y) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \dfrac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \; y^{\frac{m}{2}-1}}{\left(n+my\right)^{\frac{n+m}{2}}} & y > 0 \\ f_Y(y) = 0 & y \leq 0 \end{array}}$$

función de densidad de probabilidad de $Y \sim F^m_n$
(distribución F de Fisher con m y n grados de libertad)