UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

TERCER CONTROL DE TEORIA
Programació Lineal i Entera, curs 2016-17
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM :

	Temps estimat	Punts	Puntuació			
Test	20min	2.0 pt	C:		I:	
Exercici 1	60min	a) 2.0pt				
		b) 2.0pt				
		c) 4.0pt				
Total	90min	10 pt				

- **Prohibida la presència de mòbils durant la prova.**
- **Copiar o facilitar la còpia implica suspendre el control.**

TEST (2 punts / 30min / sense apunts)

- Encercleu **V** (vertader) o **F** (fals) o indiqueu a l'espai [ ] el contingut mancant a $\boxed{}$.
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. Donades dues formulacions vàlides $(PE1)$ i $(PE2)$ del problema de maximització (PE), llavors:

a) **V / F** $K_{PE1} \subset K_{PE2}$. F

b) **V / F** $K_{RL1} \subset K_{RL2} \Rightarrow z^*_{PE1} > z^*_{PE2}$. F

c) **V / F** $K_{RL1} \subset K_{RL2} \Rightarrow (PE1)$ és més forta que $(PE2)$. V

TEST 2. Sigui $\mathcal{B}^*$ la base òptima de la relaxació lineal del problema $(PE1)$ a la iteració 1 de l'algorisme de plans de tall de Gomory i $\widetilde{\mathcal{B}}$ la base inicial a partir de la qual es reoptimitzarà amb el símplex dual:

a) **V / F** La base $\widetilde{\mathcal{B}}$ té les mateixes variables bàsiques que $\mathcal{B}^*$. F

b) **V / F** La base $\widetilde{\mathcal{B}}$ serà sempre factible dual infactible primal. V

c) **V / F** Els vector de costos reduïts associat a $\widetilde{\mathcal{B}}$ té una component més que l'associat a $\mathcal{B}^*$. F

TEST 3. A l'alg. de B&C, el criteris d'eliminació del subproblema (PEj) de minimització són:

a) [ ] $K_{RLj} = \boxed{?}$. $\rightarrow \emptyset$

b) [ ] $z^*_{PEj} \boxed{?}\, z^*$. $\rightarrow \geq$

c) [ ] $x^*_{RLj} \boxed{?}\, x^*_{PEj}$. $\rightarrow \equiv$

TEST 4. Donat un problema de PLE (PE) de minimització, la formulació vàlida $(PE1)$ és més forta que la formulació vàlida $(PE2)$

a) **V / F** Si $z^*_{RL1} \geq z^*_{RL2}$. V

b) **V / F** Si $z^*_{PE1} \leq z^*_{PE2}$. F

c) **V / F** Si $K_{RL1} \subset K_{RL2}$. V

TEST 5. Si la desigualtat $a_j x \leq b_j$ és un tall de (PE) sobre x^*_{RL} llavors:

a) **V / F** x^*_{RL} satisfà $a_j x \leq b_j$. F

b) **V / F** Si $x \in K_{RL}$ llavors $a_j x > b_j$. F

c) [ ] Si $x \in K_{PE}$ llavors $a_j x \boxed{?}\, b_j$. $\rightarrow \leq$

TEST 6. Sigui el problema $(\widetilde{PE})$ definit com el problema (PE) reforçat amb el tall de Gomory associat a x^*_{RL}. Quan obtenim l'òptim $x^*_{\widetilde{RL}}$, reoptimitzant a partir de x^*_{RL}amb l'algorisme del símplex dual:

a) **V / F** Sempre obtindrem $x^*_{\widetilde{RL}}$ en una única iteració. F

b) **V / F** x^*_{RL} serà infactible dual per al problema $(\widetilde{RL})$. F

c) **V / F** x^*_{RL} serà factible primal per al problema $(\widetilde{RL})$. F

NOM :

EXERCICI 1. (8 punts / 75min / apunts i calculadora / RESPONEU AL MATEIX FULL)

Considereu la següent formulació vàlida d'un problema de programació lineal entera (PE)

$$(PE1)\begin{cases} \min & x_1 & & & & \\ \text{s.a.:} & & & & & \\ & x_1 & +x_2 & = & 2 & (1) \\ & 2x_1 & & \geq & 1 & (2) \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0, x \in \mathbb{Z} & \end{cases}$$

a) **(2 punts)** Obtingueu:

- Una formulació vàlida del problema (PE) més forta que $(PE1)$ que no sigui la ideal.
- La formulació ideal del problema (PE).

Justifiqueu la vostra resposta

Formulació més forta no ideal:	**Formulació ideal:**
Justificació:	**Justificació**:

Volem resoldre ara el problema $(PE1)$ amb l'algorisme del B&B i del B&C amb els següents criteris:

- Seleccioneu com a variable de ramificació i de generació del tall la que tingui el menor índex.
- Exploreu l'arbre triant primer la branca de la esquerra ($x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$) dels últims nodes afegits.

b) **(2 punts)** Obtingueu l'arbre d'exploració de l'algorisme de ramificació i poda (B&B). No cal que indiqueu el detall de les iteracions de l'algorisme, només l'arbre d'exploració final. Indiqueu a cada node tractat la fita $\underline{z}_{PEj}^*$ i el valor de x_{RLj}^* i a cada node eliminat els valors de z^* i x^* o el motiu de la seva eliminació

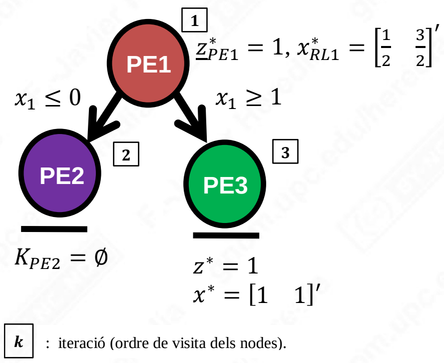
c) **(4 punts)** Resoleu el problema (PE) amb l'algorisme de ramificació i tall (B&C) reforçant les formulacions amb un tall de Gomory. Resoleu la **primera relaxació lineal gràficament** la resta reoptimitzant amb l'**algorisme del símplex dual**.

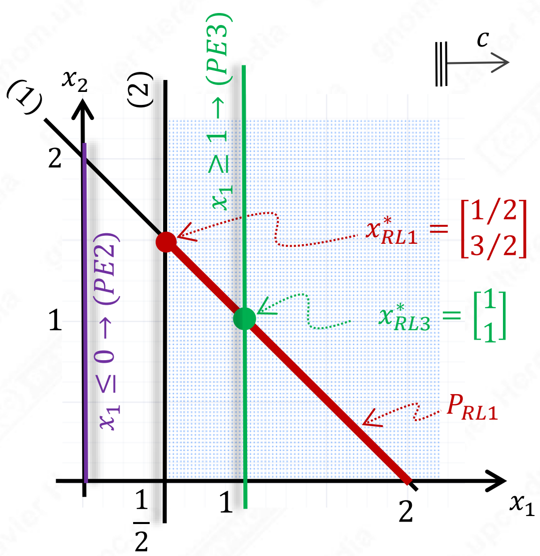
SOLUCIÓ EXERCICI 1.

Apartat a)

Formulació més forta no ideal	Formulació ideal
$(PE2)\begin{cases}\min & x_1 \\ \text{s.a.:} & \\ & x_1 + x_2 = 2 \quad (1) \\ & x_1 \geq \frac{3}{4} \quad (2.1) \\ & x_1,\ x_2 \geq 0, x \in \mathbb{Z}\end{cases}$	$(PEI)\begin{cases}\min & x_1 \\ \text{s.a.:} & \\ & x_1 + x_2 = 2 \quad (1) \\ & x_1 \geq 1 \quad (2.1) \\ & x_1,\ x_2 \geq 0, x \in \mathbb{Z}\end{cases}$
Justificació: $(PE2)$ és una formulació vàlida de (PE) perquè $z_{PE2} = z_{PE1}$ i $K_{PE} = K_{PE1} = K_{PE2} = \left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right\}$. És més forta que $(PE1)$ perquè $K_{RL2} \subset K_{RL1}$.	**Justificació**: (PEI) és una formulació ideal de (PE) perquè és una formulació vàlida i tots els punts extrems de (RLI) són enters.

Apartat b)





Apartat c)

$$PE)\begin{cases}\min & x_1 \\ \text{s.a.:} & \\ & x_1 + x_2 = 2 \quad (1) \\ & 2x_1 \geq 1 \quad (2) \\ & x_1,\ x_2 \geq 0, x \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

B&C, iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de $(RL1)$ amb un tall de Gomory**:
  - **Resolució gràfica de $(RL1, 0)$**: $x_{RL1,0}^* = [1/2 \quad 3/2]'$, $z_{RL1,0}^* = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{z}_{PE1}^* := \lceil z_{RL1,0}^* \rceil = 1$
    - Tall de Gomory sobre $x_{RL1,0}^*$ associat a x_2:
      - $\mathcal{B} = \{1,2\}$; $B = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1/2\\1 & -1/2\end{bmatrix}$; $x_B = \begin{bmatrix}1/2\\3/2\end{bmatrix}$
      - $\mathcal{N} = \{3\}$; $A_N = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$; $V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}-1/2\\1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\end{bmatrix}$
      - Tall de Gomory associat a $x_1 = \frac{1}{2}$:

$$x_1 + \lfloor v_{13} \rfloor \cdot x_3 \leq \lfloor x_1^* \rfloor \,;\; x_1 + \left\lfloor \frac{-1}{2} \right\rfloor \cdot x_3 \leq \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \,;\; x_1 - x_3 \leq 0 \; (r3)$$

- **Resolució de** $(\boldsymbol{RL1,1}) = (\boldsymbol{RL1,0}) + (\boldsymbol{r3})$: reoptimització amb el símplex dual a partir de $x_{RL1,0}^* = [x_1, x_2]' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}'$ per addició de $x_1 - x_3 \leq 0 \; (r3)$
  - Obtenció de la base inicial:
    - $a_3' = [1 \quad 0 \quad -1], a_{B,3}' = [1 \quad 0], -a_{B,3}' B^{-1} = [0 \quad -1/2]$.
    - $\mathcal{B} := \{1, 2, 4\},\; B^{-1} := \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a_{B_3} B^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$.
    - $\mathcal{N} = \{3\}, A_N = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, r' := [0] - [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = [1/2] \geq 0$
  - **Símplex dual, iteració 1**: $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}, \mathcal{N} = \{3\}$
    - Identificació de SBF òptima i selecció de la VB de sortida p :
$$x_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 4 \text{ VB sortint}}$$
    - Identificació de problema (D) il·limitat :
$$d_{r_N}' = \beta_3 A_N = [0 \quad -1/2 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = [-1/2] \ngeq 0$$
    - Selecció VNB d'entrada q:
$$\theta_D^* = \min\left\{-r_j / d_{r_{N_j}} : j \in \mathcal{N}, d_{r_{N_j}} < 0\right\} = \min\left\{\frac{-1/2}{-1/2}\right\} = 1 \Longrightarrow \boxed{q = 3}$$
    - Canvi de base i actualitzacions:
$$d_B = -B^{-1} A_3 = -\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \theta^* = -\frac{x_{B(3)}}{d_{B(3)}} = 1$$
$$x_B := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_q = x_3 := \theta^* = 1$$
$$\mathcal{B} := \{1,2,3\}$$
  - **Símplex dual, iteració 2:** $\boldsymbol{\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}, \mathcal{N} = \{4\}}$
    - Identificació de SBF òptima i selecció de la VB de sortida p : $x_B \geq 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{òptim } (RL1{,}1)}$.
  - $x_{RL1,1}^* = [1 \quad 1]',\; z_{RL1,1}^* = 1,\; \Rightarrow \underline{z}_{PE1}^* := \lceil z_{RL1,1}^* \rceil = 1$.

- **Eliminació:** $x_{RL1,1}^* = [1 \quad 1]' = x_{PE1}^*$:
  - $L \leftarrow L \backslash \{(PE1)\} = \emptyset$.
  - Actualització incumbent: $z_{PE1}^* < z^* \Rightarrow z^* := 1, x^* := [1 \quad 1]'$,

B&C, iteració 2: $L = \emptyset$: $\boxed{x_{PE1}^* = [1 \quad 1]', z_{PE1}^* = 1}$