

CURS 11-12 Q2- Teoria de Cues i Simulació
Grau Interuniversitari d'Estadística UB-UPC
Convocatòria extraordinària. Juliol. Avaluació continuada

[10 punts] Una empresa disposa d'una flota de 55 vehicles experimentals amb una distribució del temps de funcionament uniforme entre 0 i 100 setmanes. Disposa de un taller que inicialment té un equip de reparació, el qual pot reparar 1 vehicle cada 2 setmanes en promig, estant aquest temps exponencialment distribuït. Un cop un vehicle es repara és reintegrat al servei immediatament.

1. [1,5 punts] Suposant que les reparacions fossin instantànies, quina seria aproximadament la llei de probabilitats del temps entre dues arribades consecutives de un vehicle al taller de reparacions?.
2. [1,5 punts] Supposeu ara que les reparacions d'un equip segueixen, tal i com es diu a l'enunciat, una llei exponencial d'esperança 2 setmanes. Adopteu també com llei per al procés de les arribades al taller la determinada a l'apartat anterior. Establiu un model de cues que reflecteixi el nº de vehicles dins del taller. Amb un sol equip de reparació presentaria la cua estat estacionari? Perquè? En cas de que no es presenti estat estacionari quin seria en promig, l'increment de vehicles per unitat de temps que patiria el taller?
3. [1 punt] Quin hauria de ser el nº mínim d'equips de reparació que haurien d'operar al taller per tal de que hi hagués estat estacionari? Perquè?

Amb el nº mínim d'equips de reparació determinat en l'apartat anterior i seguint el corresponent model de cues determinat anteriorment, es demana:

4. [2,5 punts] Calculeu la probabilitat de que el taller estigui buit (sense vehicles per reparar) i la distribució de probabilitats del nº de vehicles al taller
5. [1,25 punt] Calculeu el temps mig de permanència d'un vehicle al taller en patir una avaria.
6. [1,25 punt] Calculeu el nº mig de vehicles presents al taller i esperant ser reparats.
7. [1 punt] A la vista dels resultats dels apartats 5) i 6) quines correccions establiríeu en el procés d'arribades de vehicles al taller?

- ① Aplicant el teorema de Palm el temps entre arribades al taller seria exponencialment distribuïda.

$$Z_{\text{func}} \sim [0, 100] \quad , \quad E[Z_{\text{func}}] = 50 \text{ set.}$$

$$\lambda_{\text{func}} = \frac{1}{50} \text{ set}^{-1} \quad , \quad \lambda = 55/50 = 1.1 \text{ set}^{-1}$$

$$E[Z] = \frac{1}{\lambda} = 0.909 \text{ set.}$$

- ②.3 Model M/M/s aproximat. Amb només un servidor no hi hauria c.e.; en caldríen 3

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{1.1}{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2.2}{3} = 0.73 < 1.$$

Si només n'hi ha un de servidor l'increment de longitud de cua del M/M/1 seria $\lambda - \mu = 1.1 - \frac{1}{2} = 0.61 \text{ veh/set.}$

$$④ \quad P_0 = \left[\sum_{l=0}^{s-1} \frac{\theta^l}{l!} + \frac{\theta^s}{s!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1} \quad , \quad \theta = \frac{\lambda}{\mu} = 2.2$$

$$\sum_{l=0}^s \frac{\theta^l}{l!} = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2} = 1 + 2.2 + \frac{2.2^2}{2} = 5.12$$

$$\frac{\theta^3}{6} \frac{1}{1 - \frac{1.1}{1.5}} = 6.655 \quad , \quad P_0 = [6.655 + 5.12]^{-1} = 0.081466$$

$$P_1 = G_1 \cdot P_0 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = 0.179 \quad , \quad P_2 = G_2 \cdot P_0 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0 = 0.1971$$

$$P_3 = \frac{\lambda^3}{6\mu^3} \cdot P_0 = 0.144577 \quad P_n = P_0 \cdot \rho^{n-3} \quad n \geq 3$$

$$⑤ \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad , \quad L_q = \rho \frac{\theta^s}{s!} \frac{1}{(1-\rho)^2} P_0 = \frac{\rho}{1-\rho} P_0 \frac{\theta^s}{s!(1-\rho)} =$$

$$W_q = \frac{1.49}{1.1} = \underline{\underline{1.35 \text{ set}}} = \frac{2.2 \cdot 0.081466}{3 - 2.2} \cdot 6.655 = 1.49 \text{ veh.}$$

$$\textcircled{6} \quad L = L_q + L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = L_q + 0 = 1'49 + 2'2 = 3'69 \text{ veh}$$

$\textcircled{7}$ Ja que hi hem 3'69 vehicles presents, en podem establir una connexió en el n° de vehicles a la guàrdia que mena seria j= de 55 en podem dir de $55 - 3'69 = 51'31 \text{ veh}$.

També el temps entre funciament consecutius d'un vehicle passant a fer $Z_{\text{func}} + X_{\text{reparació}}$

$$E[Z_{\text{func}} + X_{\text{reparació}}] = E[Z_{\text{func}}] + W_q = 50 + 1'35 = 51'35 \text{ seg.}$$

Per tant hem de recalculat el $\mu/\mu/s$ amb $\lambda = 51'31 / 51'35 \approx 0'9992 \text{ seg}^{-1} \text{ etc.}$

El n° de servidors podria ser de 2, encara que seria una mica anticipat ja que p podria estar massa proper a 1.