MÈTODES NUMÈRICS
Informe pràctica 2A - QP1718
Grau en Estadística. UB-UPC

Laura Julià Melis
NIUB: 16810883
1 de juny de 2018

Índex

1.1. Àlgebra lineal numèrica: mètodes iteratius.

Sigui A la matriu i b el vector definits per:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & . & . & . & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Per a tots els ordres N tals que 3 ≤ N ≤ 20 es demana:

(a) Calculeu el determinant i el nombre de condició de les matrius A.

N	*Determinant*	*Nombre de condició*
3	-32	5.82842712474619
4	80	9.47213595499958
5	-192	13.9282032302755
6	448	19.1956693580892
7	-1024	25.2741423690882
8	2304	32.1634374775264
9	-5120	39.8634581890614
10	11264	48.3741500787084
11	-24576	57.6954805409814
12	53248	67.8274290696043
13	-114688	78.7699822409714
14	245760	90.5231309677744
15	-524288	103.086868919817
16	1114112	116.461191577488
17	-2359296	130.64609564386
18	4980736	145.641578668097
19	-10485760	161.44763879759
20	22020096	178.064274610862

S'observa que a mesura que l'orde de la matriu (N) augmenta, també ho fa el nombre de condició; això significa que el sistema Ax=b està cada cop pitjor condicionat.

Arxiu MATLAB: Exercici1_ApartatA.m

(b) Demostreu que $X = (1,1,...,1)^t$ és solució exacte per a qualsevol N .

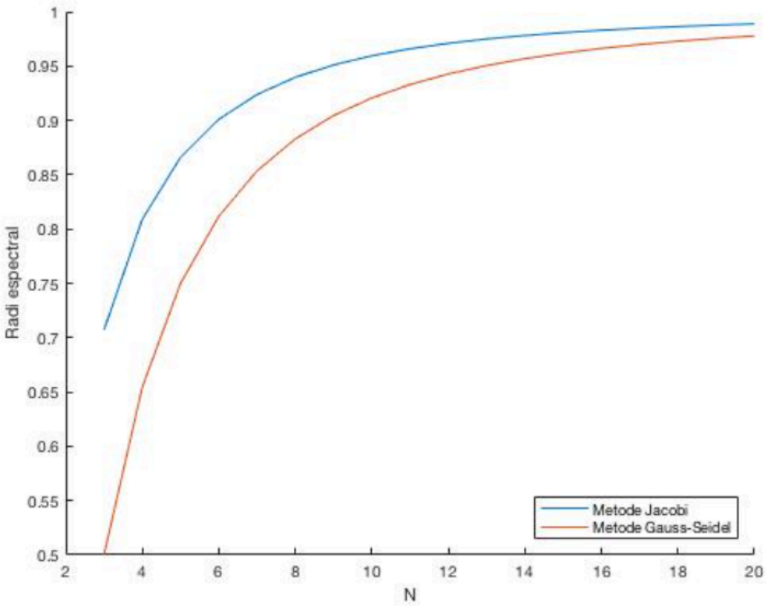
EL vector X serà solució exacta per a qualsevol N si el seu residu és 0 per a tots els ordres N tals que 3 ≤ N ≤ 20 . És a dir si $\| r(X) \|_2 = 0$, on $r(X) = b - AX$. Ho confirmem amb la següent taula obtinguda amb `MATLAB`:

N	$\| r(X) \|_2$	*N*	$\| r(X) \|_2$
3	0	12	0
4	0	13	0
5	0	14	0
6	0	15	0
7	0	16	0
8	0	17	0
9	0	18	0
10	0	19	0
11	0	20	0

Arxiu MATLAB: Exercici1_ApartatB.m

(c) Estudieu la convergència dels mètodes de Jacobi i Gauss-Seidel per a la resolució del sistema d'equacions lineals. Abans de calcular res, feu un gràfic d'evolució del radi espectral de la matriu d'iteració de cadascun dels mètodes estudiats en funció de N.

<u>Gràfic de l'evolució del radi espectral pels dos mètodes:</u>



S'observa com el radi espectral d'ambdós mètodes sembla ser inferior a 1. A continuació s'estudia la convergència resolent el sistema d'equacions linals per confirmar aquest fet.

<u>Estudi de convergència:</u>

El mètode de Jacobi convergeix si A és diagonal dominant estricte, és a dir:

$$max\left(\sum_{j=1,\quad j\neq i}^{N}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\right) < 1.$$

El mètode Gauss-Seidel convergeix si A és diagonal dominant estricte i si A és simètrica definida positiva.

En la taula de resultats adjuntada sota aquestes línies es confirma que tant el mètode de Jacobi com el de Gauss-Seidel tenen un radi espectral inferior a 1 i com, per tant, ambdós convergeixen.

N	***Radi estectral (Jacobi)***	***Radi estectral (Gauss-Seidel)***
3	0.707106781186548	0.5
4	0.809016994374948	0.654508497187474
5	0.866025403784439	0.75
6	0.90096886790242	0.811744900929367
7	0.923879532511287	0.853553390593274
8	0.939692620785908	0.883022221559489
9	0.951056516295154	0.904508497187474
10	0.959492973614497	0.920626766415592
11	0.965925826289068	0.933012701892218
12	0.970941817426052	0.942728012826605
13	0.974927912181824	0.950484433951209
14	0.978147600733806	0.956772728821301
15	0.98078528040323	0.961939766255645
16	0.982973099683902	0.966236114702178
17	0.984807753012208	0.969846310392955
18	0.986361303402723	0.972908620850319
19	0.987688340595138	0.975528258147578
20	0.988830826225129	0.977786402893073

<u>Arxiu MATLAB</u>: Exercici1_ApartatC.m

(d) Trobeu la solució X del sistema Ax = b per ambdós mètodes amb com a mínim 8 decimals correctes. Quantes iteracions calen en cada pas? Expliqueu els avantages i inconvenients dels mètodes per aquest cas concret, expliqueu les desviacions de la solució que s'obtenen.

N	Mètode Jacobi			Mètode Gauss-Seidel		
	X	Iteracions	Residu solució	X	Iteracions	Residu solució
3	0.999999851815695	52	4.2147e-08	0.99999984236	26	4.998e-08
4	0.99999980760931	82	4.2154e-08	0.99999979762	42	3.9948e-08
5	0.99999976770061	121	4.5101e-08	0.99999975837	60	4.855e-08
6	0.99999973298110	161	4.7389e-08	0.99999972536	82	4.2913e-08
7	0.99999970422636	214	4.7432e-08	0.99999969918	106	4.6566e-08
8	0.999999682078707	264	4.7617e-08	0.99999968027	133	4.8271e-08
9	0.999999667032889	331	4.7793e-08	0.99999966888	163	4.8694e-08
10	0.999999659425007	389	4.9656e-08	0.99999966509	196	4.8294e-08
11	0.999999659425007	471	4.8419e-08	0.99999966883	232	4.7373e-08
12	0.999999667032889	537	4.9811e-08	0.99999967985	270	4.8939e-08
13	0.999999682078707	633	4.9773e-08	0.99999969773	311	4.9496e-08
14	0.999999704226361	707	4.9925e-08	0.99999972193	355	4.9326e-08
15	0.999999732981109	818	4.9974e-08	0.99999975176	402	4.8647e-08
16	0.999999767700618	899	4.9717e-08	0.99999978645	451	4.9287e-08
17	0.999999807609312	1026	4.9399e-08	0.99999982511	503	4.9303e-08
18	0.999999851815695	1112	4.9851e-08	0.99999986680	558	4.8852e-08
19	0.999999899332271	1255	4.9535e-08	0.99999991052	615	4.9268e-08
	0.999999949097598	1347	4.9443e-08	0.99999995526	675	4.9194e-08
20						

S'observa en la taula que el mètode de Gauss-Seidel necessita menys iteracions per resoldre el sistema Ax = b. A més, el residu de la solució pel mètode de Jacobi és més gran en gairebé tots els casos (segons quina sigui laN). Per tant, el, mètode de Gauss-Seidel és més eficient que el de Jacobi per trobar la solució de X en aquest cas concret.

Arxiu MATLAB: Exercici1_ApartatD.m

1.2. Àlgebra lineal numèrica: valors propis.

Fent ús del mètode de la potència calculeu el valor propi de mòdul més gran i el valor propi de mòdul més petit de la matriu A definida per:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Cerca documentació sobre *les matrius de Wilkinson*. Escriu un breu resum del que has entès (màxim 1/2 full). Dóna les teves fonts bibliogràques.

Aquesta matriu rep el nom del britànic James H. Wilkinson, un distingit matemàtic que tingué molt d'interès en l'anàlisi numèric i descobrí nombrosos algorismes en aquest camp.

La matriu de Wilkinson és una matriu simètrica y tridiagonal. Això significa que és una matriu quadrada tal que $a_{ij}=a_{ji}$ (per a tot i, j = 1, …, n) que només té elements no nuls a la diagonal principal i les primeres diagonals sota i sobre d'aquesta.

Tots els elements de la subdiagonal i de la superdiagonal són uns (1); quant a la diagonal, aquesta és:

$$[k, k-1, k-2, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, k-2, k-1, k]$$

Cal observar que si k=3 (com és el cas de la matriu donada a l'enunciat), llavors n=2k+1=7; on n és el nombre de files i de columnes de la matriu (el que normalment s'anomena com l'ordre de la matriu).

Bibliografia:

- https://blogs.mathworks.com/cleve/2013/04/15/wilkinsons-matrices-2/#05fe0fd2-337c-432e-8f89-360e8c60182c
- http://libelemental.org/documentation/dev/matrices/deterministic/Wilkinson.html
- http://esfm.egormaximenko.com/numlinalg/special_matrices_tridiagonal_es.pdf

(b) Apliqueu el mètode de la potència per trobar el valor propi de mòdul més gran de les matrius A, fent ús de l'aritmètica de coma flotant de `Matlab` amb $tol_{min} = 10^{-8}$ (si és possible).

Sabem que els valors propis d'una matriu simètrica amb valors reals, com la de l'enunciat, es troben dins un interval tancat de valors també reals $[\rho_{min}, \rho_{max}]$. Així doncs, volem saber el valor de ρ_{max}.

S'ha creat una funció de MATLAB i, després de dues iteraccions, obtenim $\rho_{max} = 3.6512$.

Arxiu MATLAB: Exercici2_ApartatB_funcio.m i Exercici2_ApartatB_principal.m

(c) Apliqueu el mètode de la potència per trobar el valor propi de mòdul més petit de les matrius A, fent ús de l'aritmètica de coma flotant de `Matlab` amb $tol_{min} = 10^{-8}$ (si és possible).

Per trobar el valor propi del mòdul més petit utilitzarem la següent lògica: com que ρ_{max} és el valor propi de la matriu A més allunyat de ρ_{min}, s'aplicarà el mètode de la potència a la matriu $A - \rho_{max} I$ per obtenir el valor propi (que anomenarem ρ_{aux}) d'aquesta nova matriu. Així doncs, tendrem que $\rho_{min} = \rho_{aux} + \rho_{max}$.

Aplicant aquesta idea a la funció de MATLAB que ja haviem utilitzat abans, obtemin $\rho_{min} = 1.4636$.

Arxiu MATLAB: Exercici2_ApartatC.m i Exercici2_ApartatB_funcio.m

1.3. Integració numèrica: fórmules compostes.

Doneu una aproximació de l'àrea de la regió acotada per la corba

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x/\sigma)^2/2}$$

A l'interval$[-3\sigma, 3\sigma]$**:**

(a) Previ al càlcul numèric feu el canvi de variables $t = \frac{x}{\sigma}$ a la integral que defineix l'àrea a calcular.

Si $t = \frac{x}{\sigma}$, llavors: $dt = \frac{1}{\sigma}dx$ i $dx = \sigma dt$.

Cal observar que:

- Si $x = 3\sigma \quad \rightarrow \quad t = \frac{3\sigma}{\sigma} = 3.$
- Si $x = -3\sigma \quad \rightarrow \quad t = \frac{-3\sigma}{\sigma} = -3$

Aixi que l'interval és $[-3,3]$ i la integral queda:

$$\int_{-3}^{3} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

(b) Useu la regla composta dels trapezis per N = 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

Cal utilitzar la regla composta dels trapezis quan la partició és equiespaida sense tenir en compte l'error de truncament, que te l'expressió:

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{h}{2}\left[f(t_0) \quad + 2f(t_1) + \ldots + 2f(t_{N-1}) + f(t_N)\right] \quad \text{on} \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

Així, s'ha obtingut la següent taula de resultats:

N	***Trapezi***
2	1.21012238644011
4	0.993613980217731
8	0.996122616094574
16	0.99699295584903
32	0.997222573997465
64	0.997280745154286
128	0.997295336032441
256	0.997298986760083

Arxiu MATLAB: Exercici3_ApartatB.m

(c) Useu el mètode de Romberg per millorar l'aproximació obtinguda.

El mètode de Romberg consisteix en calcular:

$$T(h), T(\frac{h}{2}), \quad T(\frac{h}{4}), \ldots, T(\frac{h}{2^N})$$

on $h = \frac{b-a}{N}$, $\quad x_k = a + hk \quad i \quad k = 0,\ldots,n.$

Després cal usar l'extrapolació de Richardson per L ≥ 1:

$$T_{L+1}(h) = \quad T_L(h) + \frac{T_L(h) - T_L(2h)}{4^L - 1} \quad \text{on} \quad T_1(h) = T(h)$$

Aplicant-ho a `MATLAB` s'ha obtingut la taula:

$T_1(h)$	$T_2(h)$	$T_3(h)$	$T_4(h)$
1.21012238644011	0	0	0
0.993613980217731	0.921444511476938	0	0
0.996122616094574	0.996958828053521	1.00199311582529	0
0.99699295584903	0.997283069100516	0.997304685170316	0.99723026563611
0.997222573997465	0.997299113380276	0.997300182998927	0.997300111535889
0.997280745154286	0.997300135539894	0.997300203683868	0.9973002040122
0.997295336032441	0.997300199658492	0.997300203933066	0.997300203937021
0.997298986760083	0.997300203669297	0.997300203936684	0.997300203936741

$T_5(h)$	$T_6(h)$	$T_7(h)$	$T_8(h)$
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0.997300385441378	0	0	0
0.997300204374853	0.997300204197857	0	0
0.997300203936726	0.997300203936298	0.997300203936234	0
0.99730020393674	0.99730020393674	0.99730020393674	0.99730020393674

Arxiu MATLAB: Exercici3_ApartatC.m

(d) Calculeu el valor exacte `PRO` donat per `Matlab`.

```
p = normcdf([-3*sigma, 3*sigma]
PRO = p(2)-p(1)
```

Utilitzant la funció `normcdf` de `MATLAB` s'ha obtingut que la probabilitat que una observació que segueix una distribució nomral estàndard caigui dintre de l'interval [-3, 3] és 0.99730020393674.

Arxiu MATLAB: Exercici3_ApartatD.m

(e) Presenteu en taules els resultats i els errors absoluts obtinguts. Quants decimals correctes s'obtenen? Comenteu els resultats obtinguts.

Mètode	Resultats	Error absolut	Decimals correctes
Trapezi	1.21012238644011	0.212822467808574	0
	0.993613980217731	0.0036859384138066	2
	0.996122616094574	0.00117730253696435	2
	0.99699295584903	0.000306962782507414	3
	0.997222573997465	7.734463407294e-05	5
	0.997280745154286	1.9173477251444e-05	6
	0.997295336032441	4.58259909708048e-06	7
	0.997298986760083	9.31871455112088e-07	7
Romberg	0.99730020393674	2.85305202241126e-07	8
Normcdf	0.99730020393674	2.85305201908059e-07	8

S'observa com Romberg i normcdf són més eficients que el mètode del trapezi, tot i que el mètode del trapezi, a mesura que augmenta N, més eficient és.

Arxiu MATLAB: Exercici3_ApartatE.m

1.4. Aproximació de dades.

Les dades de la taula següent estan relacionats amb l'esperança de vida al nèixer dels ciutadants de dos països

any	*1975*	*1980*	*1985*	*1990*	*1995*	*2000*	*2005*	*2010*
Grècia	*72.3*	*73.6*	*75.1*	*77.0*	*77.6*	*77.9*	*79.2*	*80.4*
República Centreafricana	*45.9*	*48.9*	*49.8*	*48.7*	*46.2*	*43.9*	*44.4*	*47.5*

Es demana:

(a) Useu el polinomi interpolador de grau 7 per estimar l'esperança de vida el 1970, 1992, 2007 per cada pais. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials per cada pais, que són:

Valors oficials *any*	*1970*	*1992*	*2007*	*2015*
Grècia	*70.9*	*77.4*	*79.4*	*81.6*
República Centreafricana	*41.9*	*47.8*	*45.5*	*51.4*

Valors obtinguts *any*	*1970*	*1992*	*2007*
Grècia	*113*	*88.5*	*87.75*
República Centreafricana	*14.75*	*42.25*	*39.25*

S'observa que els valors obtinguts utilitzant el polinomi interpolador de grau 7 son molt diferents als valors oficials, molt especialment pel que fa a les estimacions de l'any 1970, que són molt extremes. Això ens fa pensar que el grau del polinomi no és l'adequat per a realitzar l'estimació.

Arxiu MATLAB: Exercici4_ApartatA.m

(b) Busqueu un polinomi del grau escaient per mínims quadrats. Justifiqueu l'elecció mostrant una cota de l'error d'aquest i de la resta amb els que heu provat. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials per cada pais.

Grau del polinomi		**Any 1970**	**1992**	**2007**	**Error Obtingut**
1	***Grècia***	71.6179	76.5260	79.8724	0.4357
	República Centreafricana	48.6000	46.9500	45.8250	1.8318
2	***Grècia***	70.6982	76.8472	79.6786	0.3330
	República Centreafricana	47.8411	47.2151	45.6651	1.8170
3	***Grècia***	69.7857	76.8642	79.6337	0.2927
	República Centreafricana	37.5286	47.4076	45.1576	0.2809
4	***Grècia***	72.1804	77.1244	79.3764	0.2015
	República Centreafricana	39.7625	47.6503	44.9176	0.1992
5	***Grècia***	75.2263	77.1477	79.6024	0.1639
	República Centreafricana	44.3019	47.6850	45.2543	0.0957
6	***Grècia***	**61.9531**	**77.2734**	**79.8867**	**0.1665**
	República Centreafricana	**36.4590**	**47.7617**	**45.4609**	**0.0855**
7	***Grècia***	*113.0000*	*88.5000*	*87.7500*	10.2766
	República Centreafricana	*14.7500*	*42.2500*	*39.2500*	5.9408

A la taula sobre aquestes línies s'observen els resultats obtinguts: les estimacions de l'esperança de vida de cada país segons el grau del polinomi interpolador y l'error quadràtic mig comès a l'aproximar la funció empírica per la teórica.

Com que a la taula inicial ens donen 8 dades, només s'ha aproximat amb polinomis de grau menor o igual a 7. A més, la expressió utilitzada per a calcular l'error ha sigut la següent:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) - y_i\right]^2}.$$

Com que els errors més petits han sigut els del polinomi interpolador de grau 6, aquest és el polinomi seleccionat com el més adequat per a realitzar l'estimació. Ara s'observen uns valors molt més semblants als de les xifres oficials.

Finalment, veiem com els errors del polinomi interpolador de grau 7 son molt grans, fet que explica per què en la qüestió anterior s'observaven dades tan allunyades de les oficials.

Arxiu MATLAB: Exercici4_ApartatB.m

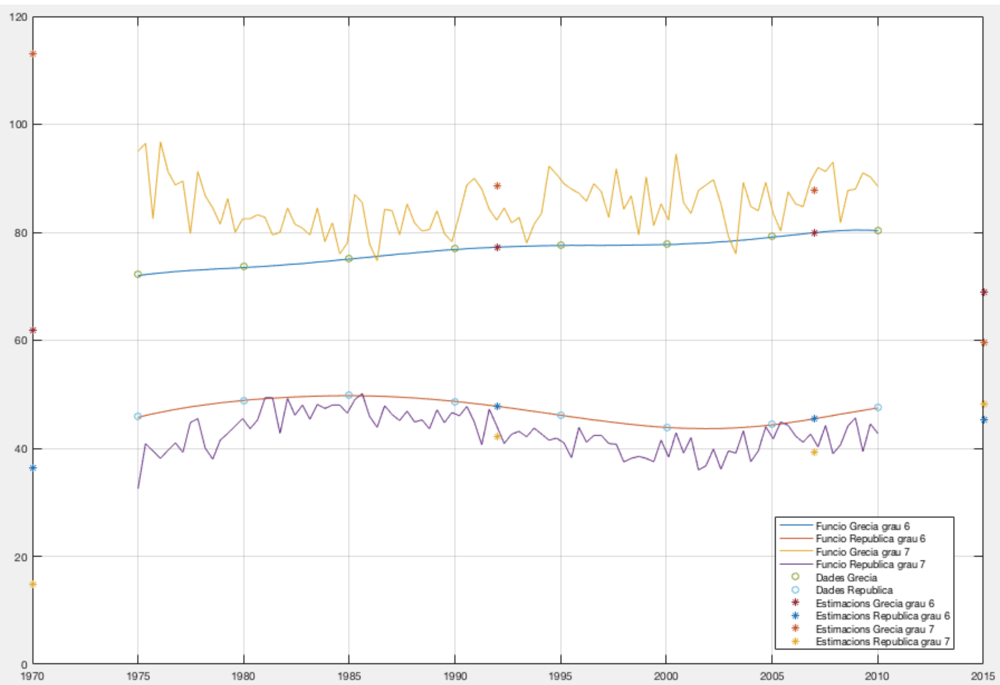
(c) Extrapoleu un valor per l'any 2015 pels dos models obtinguts per cada pais. Recordant les dades oficials i els resultats obtinguts, els models estudiats són vàlids per estimar amb precissió l'esperança de vida per l'any 2015?

Malgrat la precissió en l'estimació de l'esperança de vida per l'any 2015 sigui millor en el cas del model 1 (amb el polinomi interpolador de grau 6) que en el model 2 (de grau 7), ja que l'error en el primer cas es força inferior que en el segon, s'han realitzat les dues estimacions, així com es demana, i s'han obtingut els següents resultats:

Model	***País***	**Any 2015**
1	***Grècia***	68.82
(grau 6)	***República Centreafricana***	45.26
2	***Grècia***	59.5
(grau 7)	***República Centreafricana***	48.25

Arxiu MATLAB: Exercici4_ApartatC.m

(d) Feu una gràfica on apareguin les dades i les totes solucions trobades per pais.



Arxiu MATLAB: Exercici4_ApartatD.m

Annex

1.1. Àlgebra lineal numèrica: mètodes iteratius.

Exercici1_ApartatA.m

```
for N=3:20
d=linspace(-4,-4,N);
A=diag(d);
for i=1:N
    for j=1:N
        if abs(i-j)==1
            A(i,j)=2;
        end
    end
end
deter(N)=det(A);
if deter(N)==0
    ncond(N)=10.^10;
else
    ncond(N)=cond(A);
end
end

taula_resultats=[3:1:20;deter(3:20);ncond(3:20)]'
```

Exercici1_ApartatB.m

```
for N=3:20
d=linspace(-4,-4,N);
A=diag(d);
for i=1:N
    b(i,1)=0;
    b(1,1)=-2;
    b(N,1)=-2;
    for j=1:N
         X(j,1)=1;
        if abs(i-j)==1
            A(i,j)=2;
        end
    end
end
r=b-A*X;
error(N)=norm(r);
end

taula_resultats=[3:20;error(3:20)]'
```

Exercici1_ApartatC.m

```
for N=3:20
d=linspace(-4,-4,N);
A=diag(d);
for i=1:N
    b(i,1)=0;
    b(1,1)=-2;
    b(N,1)=-2;
    for j=1:N
        if abs(i-j)==1
            A(i,j)=2;
        end
    end
end
U=triu(A,1);
L=tril(A,-1);
D=diag(diag(A));
```

```
Bj=-(inv(D))*(L+U);
roBj(N)=max(abs(eig(Bj)));
Bgs = -inv(L+D)*U;
cgs = inv(L+D)*b;
roBgs(N)=max(abs(eig(Bgs)));
end

hold on
plot(3:20,roBj(3:20))
plot(3:20,roBgs(3:20))
xlabel('N')
ylabel('Radi espectral')
legend( 'Metode Jacobi','Metode Gauss-Seidel', 'Location', 'southeast')
hold off

taula_resultats=[3:20;roBj(3:20);roBgs(3:20)]'
```

Exercici1_ApartatD.m

```
for N=3:20
d=linspace(-4,-4,N);
A=diag(d);
for i=1:N
    x(i,1)=0;
    b(i,1)=0;
    b(1,1)=-2;
    b(N,1)=-2;
    for j=1:N
        if abs(i-j)==1
            A(i,j)=2;
        end
    end
end
U=triu(A,1);
L=tril(A,-1);
D=diag(diag(A));
Bj=-(inv(D))*(L+U);
cj=(inv(D))*b;

roBj=max(abs(eig(Bj)));
Bgs = -inv(L+D)*U;
cgs = inv(L+D)*b;
roBgs=max(abs(eig(Bgs)));
xJ=x;
xG=x;
errorJ=1;
iterJ(N)=0;

while errorJ>0.00000005
   iterJ(N)=iterJ(N)+1;
   xJ=Bj*xJ+cj;
   errorJ = norm(b-A*xJ);
end
residuJ(N)=norm(b-A*xJ);
errorG=1;
iterG(N)=0;

while errorG>0.00000005
   iterG(N)=iterG(N)+1;
   xG=Bgs*xG+cgs;
   errorG = norm(b-A*xG);
end
residuG(N)=norm(b-A*xG);
end
taula_resultats=[(3:20);xJ(3:20)';iterJ(3:20);residuJ(3:20);xG(3:20)';iterG(3:20
);residuG(3:20)]'
```

1.2. Àlgebra lineal numèrica: valors propis.

Exercici2_ApartatB_funcio.m

```
function [rho,x,iter]= Exercici2_ApartatB_funcio(A,tol,q)

[n,m] = size(A);
q = q/norm(q);
w = A*q;
rho = q'*w;
eps = tol*abs(rho) + 1;
iter = 0;

while eps>tol*abs(rho) & abs(rho)~=0
    x = w;
    x = x/norm(x);
    pro = A*x;
    rho_nova = x'*pro;
    eps = abs(rho_nova - rho);
    rho = rho_nova;
    iter = iter + 1;
end
return
```

Exercici2_ApartatB_principal.m

```
A=wilkinson(7);
q=ones(7,1);
tol=10*10^(-8);
[rho_max]=Exercici2_ApartatB_funcio(A,tol,q)
```

Exercici2_ApartatC.m

```
A=wilkinson(7);
q=ones(7,1);
tol=10*10^(-8);

[rho_max]=Exercici2_ApartatB_funcio(A,tol,q);
A2=A-rho_max*eye(7);

[rho_aux]=Exercici2_ApartatB_funcio(A2,tol,q);
rho_min=rho_aux+rho_max
```

1.3. Integració numèrica: fórmules compostes.

Exercici3_ApartatB.m

```
f=@(t)(1./(sqrt(2*pi)))*exp(-(t.^2)./2);

for n=1:8;
    N=2.^n;
    a=-3;
    b=3;
    h=(b-a)/N;
    s=f(a)+f(b);
    for i=1:(N-1);
        s=s+2*f(a+i*h);
    end
    T(n)=(h/2).*s;
end

p=1:8;
taula_resultats=[2.^p;T]'
```

Exercici3_ApartatC.m

```
T2(2)=T(2)+(T(2)-T(1))/(4.^1-1);
T2(3)=T(3)+(T(3)-T(2))/(4.^1-1);
T2(4)=T(4)+(T(4)-T(3))/(4.^1-1);
T2(5)=T(5)+(T(5)-T(4))/(4.^1-1);
T2(6)=T(6)+(T(6)-T(5))/(4.^1-1);
T2(7)=T(7)+(T(7)-T(6))/(4.^1-1);
T2(8)=T(8)+(T(8)-T(7))/(4.^1-1);

T3(3)=T2(3)+(T2(3)-T2(2))/(4.^2-1);
T3(4)=T2(4)+(T2(4)-T2(3))/(4.^2-1);
T3(5)=T2(5)+(T2(5)-T2(4))/(4.^2-1);
T3(6)=T2(6)+(T2(6)-T2(5))/(4.^2-1);
T3(7)=T2(7)+(T2(7)-T2(6))/(4.^2-1);
T3(8)=T2(8)+(T2(8)-T2(7))/(4.^2-1);

T4(4)=T3(4)+(T3(4)-T3(3))/(4.^3-1);
T4(5)=T3(5)+(T3(5)-T3(4))/(4.^3-1);
T4(6)=T3(6)+(T3(6)-T3(5))/(4.^3-1);
T4(7)=T3(7)+(T3(7)-T3(6))/(4.^3-1);
T4(8)=T3(8)+(T3(8)-T3(7))/(4.^3-1);

T5(5)=T4(5)+(T4(5)-T4(4))/(4.^4-1);
T5(6)=T4(6)+(T4(6)-T4(5))/(4.^4-1);
T5(7)=T4(7)+(T4(7)-T4(6))/(4.^4-1);
T5(8)=T4(8)+(T4(8)-T4(7))/(4.^4-1);

T6(6)=T5(6)+(T5(6)-T5(5))/(4.^5-1);
T6(7)=T5(7)+(T5(7)-T5(6))/(4.^5-1);
T6(8)=T5(8)+(T5(8)-T5(7))/(4.^5-1);

T7(7)=T6(7)+(T6(7)-T6(6))/(4.^6-1);
T7(8)=T6(8)+(T6(8)-T6(7))/(4.^6-1);

T8(8)=T7(8)+(T7(8)-T7(7))/(4.^7-1);

taula_resultats=[T;T2;T3;T4;T5;T6;T7;T8]'
```

Exercici3_ApartatD.m

```
p = normcdf([-3, 3]);
PRO = p(2)-p(1)
```

Exercici3_ApartatE.m

```
f=@(t)(1./(sqrt(2*pi)))*exp(-(t.^2)./2);
% Valor exacte de la integral
a=-3; b=3;
ve = quad(f,a,b)

% Trapezis
for n=1:8;
    N=2.^n;
    a=-3;
    b=3;
    h=(b-a)/N;
    s=f(a)+f(b);
    for i=1:(N-1);
        s=s+2*f(a+i*h);
    end
    T(n)=((b-a)./(2.*N)).*s;
    ea(n)=abs(T(n)-ve);
end

% Romberg
T2(2)=T(2)+(T(2)-T(1))/(4.^1-1);
T2(3)=T(3)+(T(3)-T(2))/(4.^1-1);
T2(4)=T(4)+(T(4)-T(3))/(4.^1-1);
T2(5)=T(5)+(T(5)-T(4))/(4.^1-1);
T2(6)=T(6)+(T(6)-T(5))/(4.^1-1);
T2(7)=T(7)+(T(7)-T(6))/(4.^1-1);
T2(8)=T(8)+(T(8)-T(7))/(4.^1-1);

T3(3)=T2(3)+(T2(3)-T2(2))/(4.^2-1);
T3(4)=T2(4)+(T2(4)-T2(3))/(4.^2-1);
T3(5)=T2(5)+(T2(5)-T2(4))/(4.^2-1);
T3(6)=T2(6)+(T2(6)-T2(5))/(4.^2-1);
T3(7)=T2(7)+(T2(7)-T2(6))/(4.^2-1);
T3(8)=T2(8)+(T2(8)-T2(7))/(4.^2-1);

T4(4)=T3(4)+(T3(4)-T3(3))/(4.^3-1);
T4(5)=T3(5)+(T3(5)-T3(4))/(4.^3-1);
T4(6)=T3(6)+(T3(6)-T3(5))/(4.^3-1);
T4(7)=T3(7)+(T3(7)-T3(6))/(4.^3-1);
T4(8)=T3(8)+(T3(8)-T3(7))/(4.^3-1);

T5(5)=T4(5)+(T4(5)-T4(4))/(4.^4-1);
T5(6)=T4(6)+(T4(6)-T4(5))/(4.^4-1);
T5(7)=T4(7)+(T4(7)-T4(6))/(4.^4-1);
T5(8)=T4(8)+(T4(8)-T4(7))/(4.^4-1);

T6(6)=T5(6)+(T5(6)-T5(5))/(4.^5-1);
T6(7)=T5(7)+(T5(7)-T5(6))/(4.^5-1);
T6(8)=T5(8)+(T5(8)-T5(7))/(4.^5-1);

T7(7)=T6(7)+(T6(7)-T6(6))/(4.^6-1);
T7(8)=T6(8)+(T6(8)-T6(7))/(4.^6-1);

T8(8)=T7(8)+(T7(8)-T7(7))/(4.^7-1);

T(n+1)=T8(8);
ea(n+1)=abs(T(n+1)-ve);

% normcdf
p = normcdf([-3, 3]);
T(n+2) = p(2)-p(1);
ea(n+2)=abs(T(n+2)-ve);

taula_resultats=[T;ea]'
```

1.4. Aproximació de dades.

Exercici4_ApartatA.m

```
any=[1975 1980 1985 1990 1995 2000 2005 2010];
grecia=[72.3 73.6 75.1 77.0 77.6 77.9 79.2 80.4];
republica=[45.9 48.9 49.8 48.7 46.2 43.9 44.4 47.5];

poli_G=polyfit(any,grecia,7);
poli_R=polyfit(any,republica,7);

estimacio_G=polyval(poli_G,[1970 1992 2007])
estimacio_R=polyval(poli_R,[1970 1992 2007])
```

Exercici4_ApartatB.m

```
any=[1975 1980 1985 1990 1995 2000 2005 2010];
grecia=[72.3 73.6 75.1 77.0 77.6 77.9 79.2 80.4];
republica=[45.9 48.9 49.8 48.7 46.2 43.9 44.4 47.5];

n=length(any);
for i = 1:7
poli_G=polyfit(any,grecia,i);
poli_R=polyfit(any,republica,i);

estimacio_G=polyval(poli_G,any);
estimacio_R=polyval(poli_R,any);

ECM1=sqrt(sum((estimacio_G-grecia).^2)/n);
ECM2=sqrt(sum((estimacio_R-republica).^2)/n);

i
taula=[estimacio_G ECM1; estimacio_R ECM2]
estimacio_demanada_G=polyval(poli_G,[1970 1992 2007])
estimacio_demanada_R=polyval(poli_R,[1970 1992 2007])
end
```

Exercici4_ApartatC.m

```
any=[1975 1980 1985 1990 1995 2000 2005 2010];
grecia=[72.3 73.6 75.1 77.0 77.6 77.9 79.2 80.4];
republica=[45.9 48.9 49.8 48.7 46.2 43.9 44.4 47.5];

poli_G_grau7=polyfit(any,grecia,7);
poli_R_grau7=polyfit(any,republica,7);

estimacio_G_grau7=polyval(poli_G_grau7,2015)
estimacio_R_grau7=polyval(poli_R_grau7,2015)

poli_G_grau6=polyfit(any,grecia,6);
poli_R_grau6=polyfit(any,republica,6);

estimacio_G_grau6=polyval(poli_G_grau6,2015)
estimacio_R_grau6=polyval(poli_R_grau6,2015)
```

Exercici4_ApartatD.m

```
x=[1975 1980 1985 1990 1995 2000 2005 2010];
y1=[72.3 73.6 75.1 77.0 77.6 77.9 79.2 80.4];
y2=[45.9 48.9 49.8 48.7 46.2 43.9 44.4 47.5];

c1=polyfit(x,y1,6);
c2=polyfit(x,y2,6);

c3=polyfit(x,y1,7);
c4=polyfit(x,y2,7);
```

```
z=linspace(x(1),x(end),100);

p1=polyval(c1,z);
p2=polyval(c2,z);

p3=polyval(c3,z);
p4=polyval(c4,z);

x2=[1970 1992 2007 2015];
estimacio_G_6=polyval(c1,[1970 1992 2007 2015]);
estimacio_R_6=polyval(c2,[1970 1992 2007 2015]);

estimacio_G_7=polyval(c3,[1970 1992 2007 2015]);
estimacio_R_7=polyval(c4,[1970 1992 2007 2015]);

plot(z,p1,z,p2,z,p3,z,p4, x,
y1,’o',x,y2,'o',x2,estimacio_G_6,'*',x2,estimacio_R_6,'*',x2,estimacio_G_7,'*',x
2,estimacio_R_7,'*');
grid on;
legend('Funcio Grecia grau 6','Funcio Republica grau 6','Funcio Grecia grau
7','Funcio Republica grau 7','Dades Grecia','Dades Republica','Estimacions
Grecia grau 6', 'Estimacions Republica grau 6','Estimacions Grecia grau 7',
'Estimacions Republica grau 7', 'Location', 'best')
```