



NOM ALUMNE:

	Temps estimat	Punts	Correcció	Material
Apartat a)	20min	3.0 pt		Tot el material usat a laboratori.
Apartat b)	50min	4.0 pt		
Apartat c)	20min	3.0 pt		
Total	90min	10 pt		

### EXERCICI 1.

Considereu el problema de planificació dels torns de la flota de la companyia *Air-Express* estudiat a classe:

$$(PE) \begin{cases} \min_x & z = \sum_{i \in \mathcal{S}} c_i x_i \\ \text{s. a.:} & \sum_{i: j \in \mathcal{H}_i} x_i \geq b_j \quad j \in \mathcal{D} \\ & x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z} \quad i \in \mathcal{S} \end{cases}$$

Amb :

$\mathcal{S}$ : conjunt de torns.

$\mathcal{D}$ : conjunt de dies.

$c_i$ : salari mensual treballadors torn  $i$ ,  $i \in \mathcal{S}$ .

$\mathcal{H}_i \subset \mathcal{D}$ : dies de descans torn  $i$ ,  $i \in \mathcal{S}$ .

$b_j$ : demanda de treballadors dia  $j$ ,  $j \in \mathcal{D}$ .

$x_i$ : nombre de treballadors a contractar torn  $i$ ,  $i \in \mathcal{S}$ .

A banda del cost per treballador contractat a cada torn, si es decideix posar en marxa un torn (és a dir, si es contracta algun treballador per aquest torn) existeixen uns costos fixos mensuals, associats a la contractació i gestió laboral dels torns, que s'indiquen a la següent taula:

Torn →	1	2	3	4	5	6	7
Cost fix (€) →	1000	950	950	950	950	1000	1000

- a) (3.pt) Desenvolpeu la formulació matemàtica completament parametritzada del problema (PE) amb costos fixos (li direm  $(PE)_a$ ), definint clarament els nous elements introduïts en el model.

Volem ara trobar el resultat del model plantejat a l'apartat a) amb **OPTMODEL** a partir del fitxer **Airexpress.sas** estudiat a classe:

- b) (4.pt) Afegiu les modificacions necessàries al codi del fitxer **Airexpress.sas** per tal de resoldre el problema  $(PE)_a$ : paràmetres, variables, funció objectiu, contriccions (no es necessari que modifiqui els conjunts de dades **Airexp.Days** i **Airexp.Shift**). (3.pt) Si no ho heu fet ja, torneu a resoldre ara el problema  $(PE)_a$  amb el codi **OPTMODEL** de l'apartat b) però modificant els conjunts de dades **Airexp.Days** i **Airexp.Shift**, és a dir:
- Afegiu a **Airexp.Days** i **Airexp.Shift** les dades necessàries per resoldre el problema  $(PE)_a$  i llegiu-los desde **OPTMODEL**.
  - Un cop resolt el problema, escriviu als conjunts de dades una nova columna que indiqui quins projectes es sel·leccionen.



## SOLUCIÓ EXERCICI 1.

- Fitxers: Airexpress (2) .sas
- Model matemàtic:

Paràmetres:		
Conjunt de dies	$\mathcal{D}$	<code>set &lt;str&gt; DAYS;</code>
Conjunt de torns	$\mathcal{S}$	<code>set &lt;num&gt; SHIFTS;</code>
Per a cada torn $i \in \mathcal{D}$ :		
• Dies de descans	$\mathcal{H}_i \subset \mathcal{D}$	<code>string holy{SHIFTS, 1..2};</code>
• Salari treballador (€)	$c_i$	<code>number lab_costs{SHIFTS};</code>
• Costos fixos torn (€):	$k_i$	<code>number fix_costs{SHIFTS};</code>
• Fita superior $x_i$ :	$M_i = \max_{j \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{H}_i} b_j$	<code>number M{i in SHIFTS} =</code> <code>max{</code> <code>  j in DAYS : and{k in 1..2} j NE holy[i,k]</code> <code>  } workforce[j];</code>
Demanda treballadors dia $j \in \mathcal{D}$	$d_j, j \in \mathcal{D}$	<code>number workforce{DAYS};</code>

Variables		
Nre. de treballadors a contractar torn $i$	$x_i \geq 0, i \in \mathcal{S}$	<code>var Workers{SHIFTS} &gt;=0 integer;</code>
Contractació torn $i$ (1 es contracta, 0 no es contracta)	$y_i \in \{0,1\}, i \in \mathcal{S}$	<code>var Select{SHIFTS} binary;</code>

Model de programació lineal		
Cost total nòmina més fix:	$\min_{x,y} z = \sum_{i \in \mathcal{S}} (c_i x_i + k_i y_i)$	<code>minimize tot_cost=</code> <code>sum{ i in SHIFTS</code> <code>  (lab_costs[i]*Workers[i] +</code> <code>  fix_costs[i]*Select[i]);</code>
Demanda diària:	s.a: $\sum_{i: j \in \mathcal{H}_i} x_i \geq b_j \quad j \in \mathcal{D}$	<code>con Workforce_con{j in DAYS}:</code> <code>sum{ i in SHIFTS :</code> <code>  and{k in 1..2} j NE holy[i,k]</code> <code>  }</code> <code>  Workers[i] &gt;= workforce[j];</code>
Acoblament $x_i - y_i$ :	$x_i \leq M_i y_i \quad i \in \mathcal{D}$	<code>con Coupling_con{i in SHIFTS}:</code> <code>  Workers[i] &lt;= M[i]*Select[i];</code>
	$x_i \geq 0, y_i \in \{0,1\} \quad i \in \mathcal{D}$	

- Codi SAS/OR:

Fitxer Airexpress (2) .sas
<code>LIBNAME Airexp ".";</code> <code>data Airexp.Days;</code> <code>input day \$ workforce ;</code> <code>datalines;</code> <code>  Sun      18</code>

```

Mon    27
Tue    22
Wed    26
Thu    25
Fri    21
Sat    19
;

data Airexp.Shifts;
input      shift  lab_costs fix_costs holy1 $ holy2 $;
datalines;
          1      680      1000    Sun    Mon
          2      705      950    Mon    Tue
          3      705      950    Tue    Wed
          4      705      950    Wed    Thu
          5      705      950    Thu    Fri
          6      680      1000    Fri    Sat
          7      655      1000    Sat    Sun
;

proc optmodel;

/* Parameters of the model */
set <str> DAYS; /* Set of days */
set <num> SHIFTS; /* Set of shifts */
string holy{SHIFTS, 1..2}; /* Pair of non-working days per shift */
number lab_costs{SHIFTS}; /* Individual monthly labour costs (€) */
number fix_costs{SHIFTS}; /* Monthly fix shit management costs (€) */
number workforce{DAYS}; /* Daily workforce requirement */
number M{i in SHIFTS} /* Coupling x-y constraint constant s.t. x_i <= M_i */
      = max{j in DAYS : and{k in 1..2} j NE holy[i,k]}workforce[j];

/* Parameters reading */

/* DAYS */
read data Airexp.Days into DAYS=[day] workforce;

/* SHIFTS */
read data Airexp.Shifts
      into
          SHIFTS=[shift]
          lab_costs fix_costs {i in 1..2} <holy[shift,i]=col("holy"||i)>
;

/* Decision variables */
var Workers{SHIFTS} >=0 integer; /* Number of workers per shift */
var Select{SHIFTS} binary; /* Selection of shift i */

/* Objective function: to minimize labour and fix costs */
minimize tot_cost= sum{ i in SHIFTS} (lab_costs[i]*Workers[i] +
fix_costs[i]*Select[i]);

/* Subject to daily workforce requirements. */
con Workforce_con{j in DAYS}:
      sum{ i in SHIFTS : and{k in 1..2} j NE holy[i,k]} Workers[i] >= workforce[j];

/* x-y coupling constraints */
con Coupling_con{i in SHIFTS}:
      Workers[i]<= M[i]*Select[i];

/* Extended model */
expand;

/* Optimize and output */
solve;

/* Display */
number cost_lab = sum{ i in SHIFTS} lab_costs[i]*Workers[i].sol;
number cost_fix = sum{ i in SHIFTS} fix_costs[i]*Select[i].sol;
print tot_cost cost_lab cost_fix;

```

```
print _var_.name _var_.lb _var_.sol _var_.ub;
print _con_.name _con_.lb _con_.body _con_.ub;

/* Solution writing to data sets */
create data Airexp.Sol
  from [ shift ] = SHIFTS
  workers = Workers select=Select;
create data Airexp.workforce
  from [ day ] = DAYS
  workers = Workforce_con.body; run;

/* Merging the optimal solution with the parameters datasets */

/* Writing optimal shifts's related information to data sets. */
proc sort data=Airexp.Shifts; by shift; run;
proc sort data=Airexp.Sol; by shift; run;
data Airexp.Shifts; merge Airexp.Shifts Airexp.Sol; by shift; run;
proc datasets library=Airexp; delete Sol; run;

/* Writing optimal worker's related information to data sets. */
proc sort data=Airexp.Days; by day; run;
proc sort data=Airexp.Workforce; by day; run;
data Airexp.Days; merge Airexp.Days Airexp.Workforce; by day; run;
proc datasets library=Airexp; delete Workforce; run;
```

- Solució optimal mostrada a la finestra SAS Output:

tot_cost	cost_lab	cost_fix
26415	22565	3850

[1]	_VAR_.NAME	_VAR_.LB	_VAR_.SOL	_VAR_.UB
1	Workers[1]	0	-0	1.7977E308
2	Workers[2]	0	6	1.7977E308
3	Workers[3]	0	5	1.7977E308
4	Workers[4]	0	0	1.7977E308
5	Workers[5]	0	8	1.7977E308
6	Workers[6]	0	0	1.7977E308
7	Workers[7]	0	14	1.7977E308
8	Select[1]	0	-0	1
9	Select[2]	0	1	1
10	Select[3]	0	1	1
11	Select[4]	0	0	1
12	Select[5]	0	1	1
13	Select[6]	0	0	1
14	Select[7]	0	1	1

[1]	_CON_.NAME	_CON_.LB	_CON_.BODY	_CON_.UB
1	Workforce_con[Sun]	18	19	1.7977E308
2	Workforce_con[Mon]	27	27	1.7977E308
3	Workforce_con[Tue]	22	22	1.7977E308
4	Workforce_con[Wed]	26	28	1.7977E308
5	Workforce_con[Thu]	25	25	1.7977E308
6	Workforce_con[Fri]	21	25	1.7977E308
7	Workforce_con[Sat]	19	19	1.7977E308
8	Coupling_con[1]	-1.7977E308	0	0
9	Coupling_con[2]	-1.7977E308	-20	0
10	Coupling_con[3]	-1.7977E308	-22	0
11	Coupling_con[4]	-1.7977E308	0	0
12	Coupling_con[5]	-1.7977E308	-19	0
13	Coupling_con[6]	-1.7977E308	0	0
14	Coupling_con[7]	-1.7977E308	-13	0

• Solució òptima al conjunt de dades:

day	workforce	workers	shift	lab_costs	fix_costs	holy1	holy2	workers	select
Fri	21	25	1	680	1000	Sun	Mon	0	0
Mon	27	27	2	705	950	Mon	Tue	6	1
Sat	19	19	3	705	950	Tue	Wed	5	1
Sun	18	19	4	705	950	Wed	Thu	0	0
Thu	25	25	5	705	950	Thu	Fri	8	1
Tue	22	22	6	680	1000	Fri	Sat	0	0
Wed	26	28	7	655	1000	Sat	Sun	14	1