1 Introducció.

1.1 Espai mostral i esdeveniments aleatoris.

La teoria de la probabilitat analitza fenòmens dels quals coneixem per endavant tots els resultats possibles, però a partir de les condicions inicials no podem predir exactament el resultat que es produirà. Aquests fenòmens s'anomenen **fenòmens aleatoris** o **experiments aleatoris** en contraposició als fenòmens deterministes, per als quals sí que existeix una clara relació causa–efecte.
Són exemples de fenòmens aleatoris els jocs d'atzar, un procés de producció, el pas de cotxes per un peatge.

Tot experiment aleatori té associat un conjunt Ω, anomenat **espai mostral**, que està format per tots els resultats possibles d'aquest experiment. Cadascun dels elements que formen l'espai mostral Ω rep el nom de **punt mostral**.
Exemples: L'espai mostral corresponent a l'experiment aleatori *llancem un dau* és el conjunt format per totes les puntuacions del dau, és a dir,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

L'espai mostral corresponent a l'experiment aleatori *llancem dues monedes* és el conjunt de resultats

$$\Omega = \{(cara, cara), (cara, creu), (creu, cara), (creu, creu)\}.$$

Un espai mostral (corresponent a un determinat experiment aleatori) té associada una col·lecció $\mathcal{F}$ no buida de subconjunts de Ω. Els elements de $\mathcal{F}$ s'anomenen **esdeveniments** (o **successos**) i es denoten normalment per les lletres $A, B, C, \ldots$. El conjunt Ω sempre forma part de $\mathcal{F}$ i també s'anomena **esdeveniment segur**. Un altre esdeveniment que sempre forma part de $\mathcal{F}$ és l'**esdeveniment impossible** $\emptyset$. S'anomena **esdeveniment elemental** aquell esdeveniment que està format per un sol punt mostral.
Exemples: En l'experiment aleatori *llancem un dau* podríem considerar els esdeveniments A= *"obtenir una puntuació senar"*, B= *"obtenir una puntuació major de 4"*, que a partir dels punts mostrals s'expressarien de la forma:

$$A = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{5, 6\}.$$

En l'experiment aleatori *llancem dues monedes* podríem considerar l'esdeveniment A= *"obtenir una cara i una creu"*, que estaria format per dos punts mostrals:

$$A = \{(cara, creu), (creu, cara)\}.$$

Vegem a través d'un exemple les operacions més habituals que poden realitzar-se amb esdeveniments:

Exemple 1 *Tirem un dau. L'espai mostral és:*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Els esdeveniments A="surt un nombre parell", B="surt un nombre major de 4", C="surt un 5" s'expressen de la següent manera en funció dels punts mostrals:

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{5, 6\}, \quad C = \{5\}.$$

S'anomena ***unió*** *de A i B, i es representa per $A \cup B$, l'esdeveniment format per tots aquells punts mostrals que o bé són de A o bé són de B. En aquest exemple,*

$$A \cup B = \{2, 4, 6, 5\}.$$

S'anomena ***intersecció*** *de A i B, i es representa per $A \cap B$, l'esdeveniment format per tots aquells punts mostrals que són de A i també són de B. En aquest exemple,*

$$A \cap B = \{6\}.$$

S'anomenen ***esdeveniments disjunts*** *aquells que no tenen cap punt mostral en comú. En aquest exemple, A i C són esdeveniments disjunts, ja que*

$$A \cap C = \emptyset.$$

S'anomena ***esdeveniment diferència*** *$B \setminus C$ l'esdeveniment format per tots aquells punts mostrals que són de B, però no són de C. En aquest exemple,*

$$B \setminus C = \{6\}.$$

S'anomena ***esdeveniment contrari o complementari*** *de A, i es representa per $\bar{A}$, a l'esdeveniment format per tots els punts mostrals que no són de A. En aquest exemple,*

$$\bar{A} = \Omega \setminus A = \{1, 3, 5\}.$$

1.2 Definicions de probabilitat.

Definició clàssica i freqüentista de probabilitat. L'inici del càlcul de probabilitats va lligat a l'estudi dels jocs d'atzar des del punt de vista matemàtic. Blaise Pascal i Pierre de Fermat donen la *primera definició de probabilitat*: consideren una experiència que pot produir n resultats, tots ells igualment possibles (simetria) i mútuament excloents. Aleshores la probabilitat d'un esdeveniment serà el quocient entre el nombre de resultats favorables a l'esdeveniment i el nombre de resultats possibles. Per exemple, si considerem l'experiment que consisteix en *llançar un dau*, el conjunt de resultats possibles és $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'esdeveniment $A =$"*obtenir una puntuació parell*" està format per $A = \{2, 4, 6\}$, per tant, la probabilitat de A és $P(A) = 3/6 = 1/2$.

En general, si Ω és el conjunt de resultats igualment possibles i $A \subseteq \Omega$, aleshores la probabilitat de A és el quocient

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Observació: La probabilitat d'un conjunt es redueix a calcular el seu cardinal, és a dir, el nombre d'elements que conté. Aquí serà de molta utilitat la combinatòria, en el cas que Ω sigui un conjunt finit. Vegeu la secció 1.4.
Aquesta definició, anomenada **definició clàssica** o **model uniforme de probabilitat** és molt útil per a resoldre problemes relacionats amb els jocs d'atzar. Determinats problemes complexos poden reformular-se i plantejar-se en termes del model uniforme. Per exemple, tirem *dues monedes idèntiques* i observem el *nombre de cares obtingudes.* Els resultats possibles són $0, 1, 2$, però tots no són igualment possibles. Això pot solucionar-se considerant el següent conjunt de resultats:

$$\Omega = \{(cara, cara), (cara, creu), (creu, cara), (creu, creu)\},$$

on ara sí que cada un d'aquests resultats és igualment possible.

La definició clàssica de probabilitat no és completament satisfactòria perquè:

1) no dóna cap criteri per a decidir si els esdeveniments elementals són o no igualment possibles,
2) de vegades no és possible establir el conjunt Ω, o bé aquest conjunt pot ser infinit.

Aquests problemes van portar a la **definició freqüentista de probabilitat**: Sigui A un esdeveniment que pot presentar-se en un experiment aleatori. Repetim n vegades l'experiment i denotem per $n(A)$ la freqüència de A, és a dir, el nombre de vegades que s'ha presentat A. Definim la **freqüència relativa de** A com el quocient $f_n(A) = n(A)/n$. Empíricament, pot observar-se que $f_n(A)$ convergeix a un límit quan n augmenta. Aquest límit és per definició la probabilitat de A. Es tracta d'una definició experimental de la probabilitat.
Així, la probabilitat d'obtenir una cara en una moneda trucada s'obté tirant moltes vegades la moneda i calculant la freqüència relativa de cara. Mitjançant una enquesta pot estimar-se el percentatge de vots que obtindrà un determinat partit polític a les eleccions.

Interpretació subjectiva de la probabilitat. La repetició d'un experiment sota les mateixes condicions és la base per a les interpretacions clàssica i de freqüència relativa de la probabilitat. Però hi ha molts fenòmens que no poden repetir-se i que malgrat això requereixen una noció de probabilitat.

Per exemple, quan s'assegura contra robatori o contra desperfectes escultures o pintures d'alt valor, les companyies asseguradores han de tenir una idea dels riscs adquirits a l'hora de fixar el preu de l'assegurança. Està clar que, en aquest cas, la probabilitat no pot fonamentar-se en la freqüència relativa de l'esdeveniment. La **probabilitat subjectiva** o **personal** és el grau de creença o de convicció respecte de l'ocurrència d'una afirmació. En aquest context, la probabilitat representa un judici personal respecte d'un fenomen que no pot predir-se. La probabilitat subjectiva també pot aplicar-se a experiments repetitius.

Definició axiomàtica de probabilitat. El punt de vista basat en les freqüències relatives tampoc va resultar ser completament satisfactori, ja que depenia massa dels fenòmens experimentals. El 1933 A. Kolmogorov va proposar una *teoria axiomàtica de la probabilitat* sense cap lligam amb els fenòmens experimentals. Aquesta teoria axiomàtica es construeix respectant les propietats bàsiques de les freqüències relatives:

(a) $0 \leq f_n(A) \leq 1$,
(b) si Ω és l'esdeveniment segur, $f_n(\Omega) = 1$,
(c) si A i B són esdeveniments disjunts, llavors $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$.

L'axiomàtica de Kolmogorov es concreta en la noció d'*espai de probabilitat.* Els conceptes matemàtics que s'utilitzen provenen de la teoria de la mesura, desenvolupada a partir de l'any 1900 per H. Lebesgue, M. Fréchet, E. Borel, J. Radon, C. Carathéodory, entre d'altres.

1.3 Espais de probabilitat.

Un **espai de probabilitat** és un model matemàtic que intenta descriure un experiment aleatori. Consta de tres elements:

(a) l'espai mostral Ω,
(b) una família $\mathcal{F}$ de subconjunts de Ω, anomenada σ-àlgebra,
(c) una aplicació $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$, anomenada probabilitat,

de manera que es compleixen les següents propietats:

(a) **l'espai mostral** Ω és un conjunt que descriu els resultats possibles. Els seus elements són, per tant, els punts mostrals.
(b) **la σ-àlgebra** $\mathcal{F}$ és una família formada per tots els subconjunts de Ω per als quals està definida la probabilitat, i té les propietats:
   i) $\Omega \in \mathcal{F}$,
   ii) si $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$,
   iii) si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$,
(c) **la probabilitat** P és una aplicació $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$, que compleix:

i) $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \in \mathcal{F}$,

ii) $P(\Omega) = 1$,

iii) si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ és una família numerable d'esdeveniments disjunts dos a dos, aleshores $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Recordem que $\mathcal{F}$ amb la unió i la intersecció té una estructura d'àlgebra de Boole. En particular, si $A, B, C \in \mathcal{F}$ es compleixen les següents propietats:

a) Commutativa: $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

b) Associativa:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

c) Existència d'element neutre:

$$A \cup \emptyset = A, \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad A \cap \Omega = A, \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

d) Distributiva:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

L'esdeveniment contrari d'una unió o d'una intersecció satisfà les lleis de Morgan (o lleis de dualitat):

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Aquestes propietats ens permeten obtenir diverses fórmules útils en el càlcul de probabilitats. Per exemple, són especialment importants:

1) $P(\emptyset) = 0$. En efecte, sigui $A \in \mathcal{F}$ i considerem la successió infinita d'esdeveniments $A, \emptyset, \emptyset, \ldots$. Aleshores aplicant la propietat (iii) de probabilitat:

$$P(A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots) = P(A) + \sum P(\emptyset),$$

per tant, $P(\emptyset) = 0$.

2) si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ és una successió finita d'esdeveniments disjunts dos a dos, aleshores $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
En efecte, considerem la successió infinita $A_1, A_2, \ldots, A_n, \emptyset, \emptyset, \ldots$ i apliquem la propietat (iii) de σ-additivitat.

3) si $A \in \mathcal{F}$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

$$\Omega = A \cup \bar{A} \Rightarrow 1 = P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A}).$$

4) si $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
Com que $A \subset B$, podem escriure $B = A \cup (\bar{A} \cap B)$. Per tant

$$P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \geq P(A), \text{ ja que } P(\bar{A} \cap B) \geq 0.$$

5) si $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Considerem els esdeveniments disjunts: $A \cap \bar{B}$, $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$. Aleshores,

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) - P(A \cap B)$$
$$= P[(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)] + P[(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)] - P(A \cap B)$$
$$= P[A \cap (\bar{B} \cup B)] + P[(\bar{A} \cup A) \cap B] - P(A \cap B).$$

Una altra demostració:
considerem $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, aleshores:

$$P(A) + P(B) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(B)$$

$$= P(A \cap B) + P((A \cap \bar{B}) \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cup B),$$

ja que

$$(A \cap \bar{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) = (A \cup B) \cap \Omega = (A \cup B).$$

Alguns exemples.

1. Llançament d'un dau:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \quad P(\{k\}) = 1/6, \ k = 1, 2, \ldots, 6.$$

2. Llançament de dues monedes:

$$\Omega_1 = \{\omega_1 = (c, c), \omega_2 = (c, +), \omega_3 = (+, c), \omega_4 = (+, +)\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega_1)$$
$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = P(\omega_4) = 1/4.$$
$$\Omega_2 = \{\omega_1 = (c, c), \omega_2 = (c, +), \omega_3 = (+, +)\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega_2)$$
$$P(\omega_1) = P(\omega_3) = 1/4, \quad P(\omega_2) = 1/2.$$

3. Llei uniforme contínua en l'interval $[0, 1]$:
$\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ la σ-àlgebra generada pels intervals $[a, b] \subset [0, 1]$,

$$P([a, b]) = \frac{b - a}{1 - 0} = b - a.$$

4. Suma de punts al llançar dos daus:
   $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, amb probabilitats

$$P(2) = P(12) = 1/36, \quad P(3) = P(11) = 2/36, \quad P(4) = P(10) = 3/36,$$

$$P(5) = P(9) = 4/36, \quad P(6) = P(8) = 5/36, \quad P(7) = 6/36.$$

   Pregunta: Què és preferible apostar a $\{7\}$ o a $\{3, 4\}$?
   Resposta: és preferible apostar a $\{7\}$, ja que

$$P(\{3, 4\}) = P(\{3\} \cup \{4\}) = P(3) + P(4) = 2/36 + 3/36 = 5/36 < P(7) = 1/6.$$

Exemple 2 *Si A i B són dos esdeveniments disjunts amb probabilitats $P(A) = 0.37$ i $P(B) = 0.44$, calculeu:*
a) $P(\overline{A})$, b) $P(\overline{B})$,
c) $P(A \cup B)$, d) $P(A \cap B)$,
e) $P(A \cap \overline{B})$, f) $P(\overline{A} \cap B)$.
a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.37 = 0.63$,
b) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.44 = 0.56$,
c) i d) Com que A i B són disjunts, aleshores, $A \cap B = \emptyset$, i per tant, $P(A \cap B) = 0$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.37 + 0.44 = 0.81.$$

e) En ser A i B disjunts, $A \cap \overline{B} = A$, per tant, $P(A \cap \overline{B}) = P(A) = 0.37$.
f) En ser A i B disjunts, $\overline{A} \cap B = B$, per tant, $P(\overline{A} \cap B) = P(B) = 0.44$.

Exercici 1 *S'ha realitzat una enquesta a 100 persones demanant-los les seves preferències sobre tres tipus de productes A, B i C. 30 persones han preferit A, 20 persones han preferit B, 15 persones han preferit C, 12 han triat A i B, 9 han triat A i C, 6 han triat B i C, i només 3 han triat A, B i C. Volem saber la probabilitat que una persona escollida a l'atzar:*

a) hagi triat almenys un tipus de producte,

b) hagi triat només A,

c) hagi triat B o C, però no A,

d) hagi triat A o bé no hagi triat ni B ni C.

Exercici 2 *Demostreu les següents igualtats de conjunts:*
a) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$,
b) $((A \cap B) \cup \overline{A}) \cap B = B$,
c) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = B \cap \overline{A}$.

1.4 Repàs de combinatòria.

Regla del producte i regla de la suma. Suposem que es disposa de k grups d'elements formats de la següent manera:
el primer grup conté n_1 elements,
el segon grup conté n_2 elements,
$\cdots$,
el k-è grup conté n_k elements.
Suposem també que tots els elements són distingibles entre sí.

- Si es volen escollir k elements de manera que *n'hi hagi un de cada grup*, aquesta selecció es pot fer de $n_1 \, n_2 \cdots n_k$ maneres diferents. aquest resultat s'anomena **regla del producte**.
- Si es vol escollir *un i només un element entre tots*, aquesta selecció es pot fer de $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ maneres diferents. Aquest resultat s'anomena **regla de la suma**.

Permutació sense repetició de n elements distingibles és qualsevol conjunt obtingut a través de l'ordenació en una filera dels n elements donats.

$$P_n = n!$$

Exemple 3 *Les permutacions de 3 elements anomenats A, B i C són:*

$$P_3 = 3! = 6, \quad ABC,\, BAC,\, CAB,\, ACB,\, BCA,\, CAB.$$

Variació sense repetició de n elements distingibles agafats de k en k és qualsevol conjunt obtingut de la manera següent: primer s'agafen k elements, tots diferents, d'un conjunt de n elements distingibles i després aquests k elements s'ordenen en una filera. Dues variacions es consideren diferents si no estan formades pels mateixos elements, o bé si els elements són els mateixos però varia l'ordre en què estan disposats en la filera.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad \forall k \leq n.$$

Observeu que $V_n^n = P_n$.

Exemple 4 *Tenim* $n = 3$ *objectes A, B, C i volem fer totes les variacions sense repetició, agafats de* 2 *en* 2.

$$V_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6, \quad AB,\, AC,\, BA,\, BC,\, CA,\, CB.$$

Un exemple típic on apareixen variacions sense repetició és quan els n elements es col·loquen en una capsa i es trien, un per un, k objectes *sense devolució*.

Variació amb repetició de n elements distingibles agafats de k en k és qualsevol conjunt obtingut de la següent manera: se suposa que cada element té tantes còpies com es vulgui i s'omple una filera ordenada amb k elements, cadascun dels quals pot ser qualsevol dels n elements disponibles. És a dir, la filera pot contenir elements repetits.

$$VR_n^k = n^k.$$

No cal que k sigui menor que n.

Exemple 5 *Tenim $n = 2$ elements A, B, i volem fer totes les variacions amb repetició, agafats de 3 en 3.*

$$VR_2^3 = 2^3 = 8, \quad \begin{array}{cc} AAA & ABB \\ AAB & BAB \\ ABA & BBA \\ BAA & BBB \end{array}$$

Un exemple típic de variacions amb repetició es produeix quan els n elements es col·loquen en una capsa i es trien, un per un, k elements *amb devolució*.

Combinació és un conjunt d'elements en què l'ordre d'aparició no té importància, és a dir, les variacions AB i BA formen la mateixa combinació AB.

Combinació sense repetició de n elements distingibles agafats de k en k és qualsevol subconjunt de k elements, tots ells diferents, extrets de n elements disponibles. En els k elements agafats no importa l'ordre.

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}, \quad \forall k \leq n.$$

Exemple 6 *Tenim $n = 3$ elements A, B, C i volem fer totes les combinacions sense repetició, agafats de 2 en 2.*

$$C_3^2 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3, \quad AB,\ AC,\ BC.$$

Es compleix la següent relació:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \text{ és a dir, } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Combinació amb repetició de n elements agafats de k en k difereix de la combinació sense repetició en el fet que es permet repetir els elements agafats.

$$CR_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}.$$

No cal que k sigui menor que n.

Exemple 7 *Tenim $n = 2$ elements A, B i volem fer totes les combinacions amb repetició, agafats de 3 en 3.*

$$CR_2^3 = C_4^3 = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4, \quad AAA,\ AAB,\ ABB,\ BBB.$$

Permutació amb repetició. Suposem que hi ha n elements dividits en grups que són parcialment distingibles en el següent sentit:
no es pot distingir entre dos elements del mateix grup, sí que es pot distingir entre dos elements de diferents grups.
Suposem que el nombre de grups és r i que n_r representa el nombre d'elements en el grup r-è, de manera que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

$$PR_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

TEOREMA 1 ***Teorema del binomi.*** *$a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.*

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r}\, b^r.$$

TEOREMA 2 ***Teorema multinomial.*** *$a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n = \sum_{0 \le n_1, n_2, \ldots, n_r \le n} PR_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_r^{n_r},$$

on $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = 1$.