FACULTAT de MATEMÀTIQUES i ESTADÍSTICA.
CURS 2005-2006. 2^{on} QUADRIMESTRE
Examen Final de IOE. 1 de Juny de 2006

P1) Cadenes de Markov. Una empresa turística organitza excursions per visitar una illa en barca esportiva, durant tot un dia la visita completa. Al llarg del dia s'accepten reserves per la jornada següent i deixen d'acceptar-se en quant n'hi ha dues d'efectives. El número N de turistes te per mitjana 3 diaris i segueix una llei de Poisson. El bot te una capacitat de dues persones únicament i en el cas de que, durant un dia carregui dues persones, al dia següent hauria d'inspeccionar-se per prevenir danys, quedant llavors suspès el servei. Es demana:

a) **2p** Plantejar el diagrama d'estats d'una cadena de Markov per la variable N*i* = número de persones carregades el dia *i*.
b) **2p** Si cada persona paga 100 € calcular el ingrés mig de l'empresa.
c) **1p** Calcular el número mig de dies consecutius en els que el bot està de servei i el número mig de reparacions en un any.

P2) Temps de vida. Se sap que el temps de vida d'un determinat organisme simple obeeix a un model exponencial, d'esperança T, estant T determinat únicament per les condicions de l'hàbitat i de la varietat a la que pertany l'organisme. Quan l'hàbitat és la selva amazònica, el temps de vida mig per la varietat europea es de T=8 setmanes, mentre que la varietat amazònica presenta un temps de vida mig de T=12 setmanes. Es vol repoblar una vasta zona de la selva amazònica amb una mescla del 40 % de varietat europea i un 60% de varietat amazònica. Suposant que cada organisme en morir sempre deixa un únic descendent es demana:

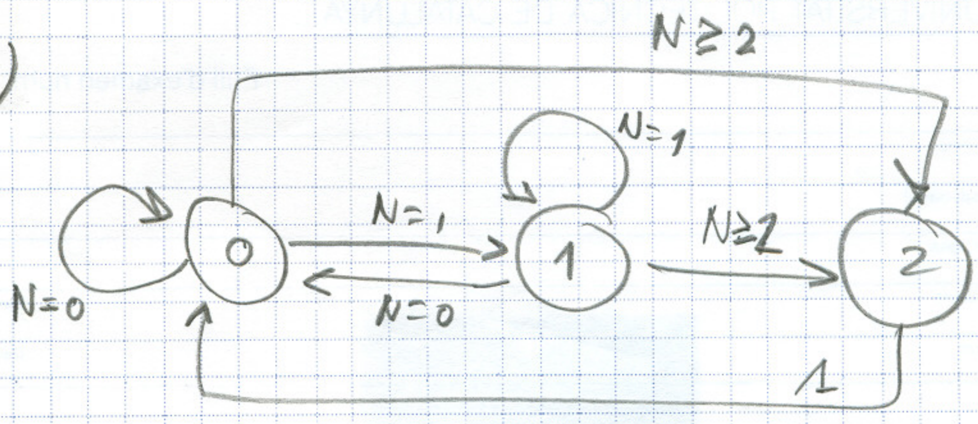
a) **1p** Distribució de probabilitats del temps de vida a la que obeeix un organisme seleccionat a l'atzar de entre els que habiti la zona a repoblar.
b) **0.5p** Temps mig de vida d'un d'aquests organismes.
c) **0.5p** Temps fins que la població inicial amb la que es va fer la repoblació quedi al 20%.
d) **1p** Quin és la fracció esperada d'organismes morts en un dia de entre la població inicial quan han passat 10 setmanes de la repoblació?
e) **1p** Si inicialment es va repoblar amb 100 d'aquests organismes la zona, quina distribució de probabilitats a llarg termini que seguirà el temps entre dues morts?
f) **1p** Quina és la probabilitat de que es donin 6 morts en un interval de temps de 5 setmanes?

P3) Teoria de Cues. Un taller de muntatge efectua dues operacions A i B, consecutivament, en cada unitat U de les que fabrica abans de completar cada unitat U. El temps de cada operació presenta una distribució exponencial d'esperança 3 dies. La cadena de muntatge del taller està integrat per dos grups. En el primer grup es fabriquen les unitats a raó de 1 cada 7 dies en promig i s'entreguen a la segona unitat on s'efectuen les operacions A, B anteriors. El temps entre dues unitats lliurades pel primer grup segueix una distribució exponencial. Al segon grup i treballen dos operaris. Cada operari és hàbil en efectuar les operacions A i B i treballen per separat, recollint les unitats U acabades pel primer grup d'una mateixa cua d'espera.
Es demana:

a) **1.5p** Amb quin model de cua podem caracteritzar el segon grup de treball del taller?
b) **2p** Calcular, usant una aproximació, el temps mig que una unitat espera a que s'efectuïn les operacions A, B abans de estar completament acabada.
c) **2p** Calcular el número mig d'unitats presents en el pabelló de treball del segon grup de treball.
d) **2p** Si el temps d'espera d'una unitat en rebre atenció pel segon grup de treball, un cop ha estat lliurada pel primer grup de treball, supera els 6 dies, llavors la unitat serà defectuosa. Calculeu segons això la fracció de unitats que seran defectuoses en ser acabades.
e) **2.5p** Es vol reorganitzar el segon grup de treball de forma que el operari A efectuï només operacions A i l'operari B només operacions B sobre les unitats que són lliurades pel primer grup de treball. En aquestes condicions, ara el temps per efectuar una operació A és de 2 dies i una operació B de 2 dies. Els dos operaris treballen disposats en tàndem (de forma que una unitat amb l'operació A completada passa a la cua d'espera de l'operari B). Es més eficient aquesta disposició? Efectueu els càlculs oportuns per raonar la vostra afirmació.

P1)

1)



$P(N=0|3) = e^{-3}$ = 0'0497 = 0'05

$P(N=1|3) = 3 \cdot e^{-3}$ = 0'1493 = 0'15

$P(N\geq 2|3) = 1 - P(N=0) - P(N=1)$

$= 1 - e^{-3} - 3e^{-3} = 1 - 4e^{-3} =$

= 0'8

$$\underline{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0'05 & 0'15 & 0'8 \\ 0'05 & 0'15 & 0'8 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) $P^T \Pi = \Pi$, $\sum \Pi_i = 1$

7)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0'15 & -0'85 & 0 \\ 0'8 & +0'8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0'85 n_1 = 0'15 n_0 \rightarrow n_1 = \frac{0'15}{0'85} n_0 = \frac{3}{17} n_0$$

$$0'8 \left(\frac{0'15}{0'85} + 1 \right) n_0 - n_2 = 0$$

$$0'8 \cdot \frac{20}{17} n_0 - n_2 = 0 \qquad \frac{16}{17} n_0 - n_2 = 0$$

$$n_0 \left(1 + \frac{3}{17} + \frac{16}{17} \right) = 1 \rightarrow \boxed{n_0 = \frac{17}{36}}$$

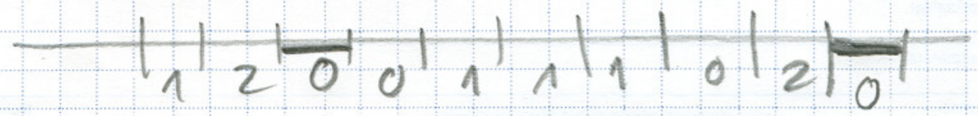
$$n_1 = \frac{3}{\cancel{17}} \cdot \frac{\cancel{17}}{36} = \frac{1}{12}$$

$$n_2 = \frac{16}{\cancel{17}} \cdot \frac{\cancel{17}}{36} = 4/9$$

$$\overline{C} = \cancel{0 \cdot n_0} + 100 \cdot n_1 + 200 \cdot n_2$$

$$= \frac{100}{12} + \frac{800}{9} = \frac{10500}{108} \simeq 97'2\ \$$$

3) Nº mig dies consecutius en servei: $\mu_{22}-1$



$\mu_{22} = \frac{1}{\Pi_2} = 2$ dies $\qquad \mu_{22}-1 = 1$

Nº mig de reparacions en 1 any $\frac{365}{2} = 182'5$

P2) τ = temps de vida de l'organisme

$\sim$ hypo amb $\alpha_1 = 0'4$, $\alpha_2 = 0'6$

a) $\alpha_1 = 40\%$ europea $T = 8$ set

$\alpha_2 = 60\%$ amazònica $T = 12$ set

b) $E[\tau] = 0'4 \cdot 8 + 0'6 \cdot 12 = 10'4$ set

c) $P(\tau \geq t) = 0'2 = \alpha_1 \cdot e^{-t/8} + \alpha_2 e^{-t/12}$

$0'2 = 0'4\, e^{-t/8} + 0'6\, e^{-t/12}$

$1 = 2e^{-t/8} + 3e^{-t/12} = f(t)$ (de forma aproximada)

t	$f(t)$
10	1'47
15	1'16
20	0'73
16'5	1'01

$\rightarrow$ $\boxed{t \simeq 16'5 \text{ set}}$

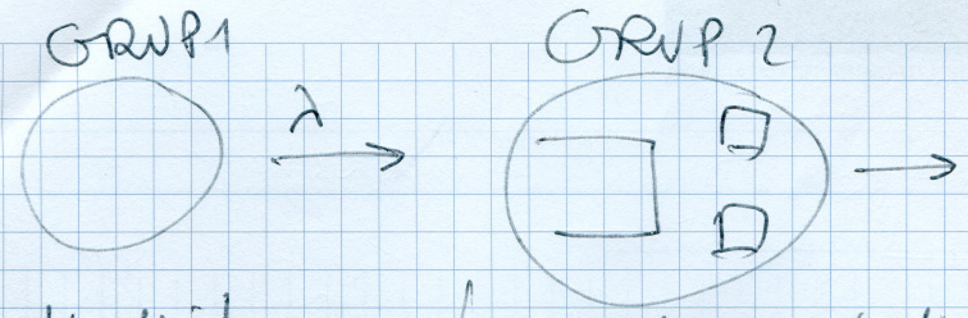
d) $h_\tau(10) = \dfrac{f_\tau(10)}{R_\tau(10)} = \dfrac{\alpha_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{\alpha_1 e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{-\lambda_2 t}} =$

$= \dfrac{0'4 \cdot \dfrac{e^{-t/8}}{8} + 0'6 \cdot \dfrac{e^{-t/12}}{12}}{0'4\, e^{-t/8} + 0'6\, e^{-t/12}} = \dfrac{0'05\left(e^{-10/8} + e^{-10/12}\right)}{0'294} =$

$= \dfrac{3'6 \cdot 10^{-2}}{0'294} = 0'1226\ \dfrac{\text{organismes}}{\text{dia}}$

$\leftarrow$ 1 dia aprox 0'1226 organismes moren

P3)



a) $\lambda = 1/7 \text{ dia}^{-1}$ x = temps de servei d'un operari

$= x_A + x_B \sim 2\text{-Erlang}$

$E[x] = 6 \text{ dia} \; ; \; V[x] = 3^2 + 3^2 = 18 \text{ dia}^2$

Cua $\boxed{M/E_2/2}$

b) $\rho = \dfrac{\lambda}{2\mu} = \dfrac{1}{2}\lambda E[x] = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{7} = 0'4285$

S'usa aproximació d'Allen-Cuneen

$$W_q = \frac{C(s,\theta)\left(\lambda^2\sigma_T^2 + \mu^2\sigma_S^2\right)}{2s\mu(1-\rho)} = \frac{0'2571\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)}{2\cdot 2\cdot \frac{1}{6}\,\frac{8}{14}} = 1'0123 \text{ dia}$$

$$C(s,\theta) = \frac{\dfrac{\theta^s}{s!(1-\rho)}}{\displaystyle\sum_{l=0}^{s-1}\frac{\theta^l}{l!} + \frac{\theta^s}{s!(1-\rho)}} = \frac{9/14}{\frac{13}{7} + 9/14} = 0'2571 \qquad \theta = \frac{6}{7}$$

$$\sum_{l=0}^{1}\frac{\theta^l}{l!} = 1 + \frac{6}{7} = \frac{13}{7} \; , \; \frac{\theta^s}{s!(1-\rho)} = \frac{(6/7)^2}{2\cdot 4/7} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$$

c) $L = W\cdot\lambda = \left(W_q + E[x]\right)\lambda = (1'0123 + 6)\,\dfrac{1}{7} = 1'001 \text{ unit.}$

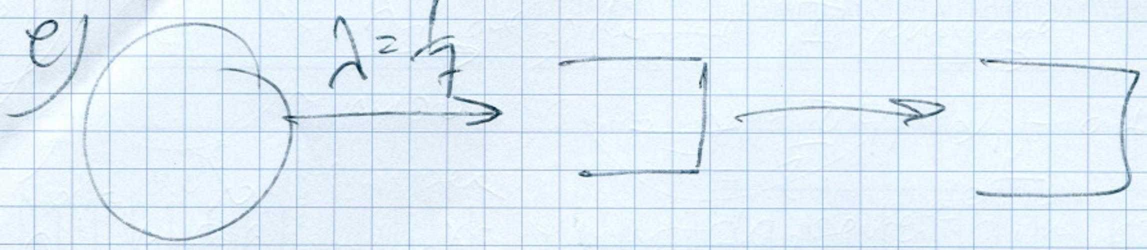
d) S'assumeix distr. exp. per $W_q | W_q > 0$

Fracció dels que esperen $\approx C(s,\theta) = 0'2571$

$P(W_q / W_q > 0 \geq 6) = e^{-6/7'0123} = 0'425$

Fracció d'unitats malmeses $0'2571 \cdot 0'425 = 0'1092$

e)



GRUP1

OP. A
$X_A \sim exp$
$E[X_A] = 2$

OP. B
$X_B \sim exp$
$E[X_B] = 2$

Per Jackson dos nusos M/M/1

$$\rho_A = \frac{\lambda}{\mu_A} = \frac{1/7}{1/2} = 2/7 = \rho_B = \frac{1/7}{1/2} = 2/7$$

Temps necessitat per una unitat: $\boxed{W_A + W_B = \frac{28}{5} \text{ dias}}$

$$W_A = W_B = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{2/7}{1/7(5/7)} = \frac{14}{5} \text{ dias}$$

abans

$$W = W_q + E[X] = 1'0123 + 6 = 7'0123$$

és més eficient ara.

e) Pel teorema de Palm a llarg termini el temps entre dues morts serà exponencialment distribuida. τ' = temps entre dues morts amb pobl inicial de 100.

$$E[\tau'] = E[\tau]/_{100} = 0'104 \text{ setmanes}$$

f) si $\tau' \sim exp$ $E[\tau'] = 0'104$ setmanes

$N_T \sim$ Poisson número de morts en $[0, T]$

$$\lambda = \frac{1}{E[\tau']} = 9'61 \ \frac{\text{morts}}{\text{set}} \ ; \ E[N_T] = \lambda \cdot T = 9'61 \cdot 5 \approx 48$$

$$P(N_T = n) = \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^n}{n!} = \frac{e^{-48} (48)^5}{5!} \approx 0.$$