PRIMER CONTROL DE TEORIA
Programació Lineal i Entera, curs 2016-17
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

NOM :

	Temps estimat	Punts	Puntuació
Test	30min	2 pt	
Exercici 1	60min	a) 2pt	
		b) 3pt	
		c) 3pt	
Total	90min	10 pt	

- **Prohibida la presència de mòbils durant la prova.**
- **Copiar o facilitar la còpia implica suspendre el control.**

TEST (2 punts / 30min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a)**, **b)** i **c)** si la frase és Vertadera (**V**) o Falsa (**F**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. Un políedre P és un conjunt de $\mathbb{R}^n$ que pot ser expressat com a

a) **V / F** intersecció de semiespais. V
b) **V / F** intersecció de conjunts convexos qualssevol. F
c) **V / F** solució d'un sistema d'inequacions. V

TEST 2. Considereu el problema $(PL)_e \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x|\; Ax = b, x \geq 0\}$ amb $rang(A) < m$:

a) **V / F** Si eliminem les constriccions associades a files de A linealment dependents amb la resta, el políedre resultant no queda afectat. V
b) **V / F** Si $P_e \neq \emptyset$, el políedre Q_e resultant d'eliminar les constriccions associades a files de A linealment dependents amb la resta és també no buit. V
c) **V / F** Si eliminem les constriccions associades a files de A linealment dependents amb la resta, el problema $(PL)_e$ té solució. F

TEST 3. Sigui $(PL)\; \underset{x\in R^n}{min}\{c'x|x \in P\}$, P políedre. Suposem que P conté algun punt extrem i que existeix una solució òptima. Llavors:

a) **V / F** Existeix una solució òptima que és un punt extrem de P. V
b) **V / F** Tota solució òptima és un punt extrem de P. F
c) **V / F** Tot punt extrem de P és solució òptima. F

TEST 4. Donat el problema $(PL)\; \min\limits_{x\in\mathbb{R}^2}\left\{c'x \middle|\; \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$:

a) **V / F** Si $c = [1 \quad 0]'$ (PL) té solució òptima única. F
b) **V / F** Si $c = [1 \quad 1]'$ (PL) té solució òptima única. F
c) **V / F** Si $c = [0 \quad -1]'$ (PL) és il·limitat. V

TEST 5. La direcció bàsica factible d associada a la base $\mathcal{B}$ del problema (PL) factible de rang complet:

a) **V / F** Sempre serà factible. F
b) **V / F** Només serà factible si $\mathcal{B}$ és no degenerada. F
c) **V / F** Pot ser d'ascens. V

TEST 6. Longitud de pas θ^* de l'algorisme del símplex aplicat a un problema (PL) qualsevol

a) **V / F** Pot ser negativa. F
b) **V / F** Pot ser igual a zero. V
c) **V / F** Sempre serà més gran que zero. F

TEST 7. Sigui x SBF de P_e i $d \ngeq 0$ DBF sobre x. Llavors podem assegurar que:

a) V / F $y = x + \theta^* d$ és SBF de P_e. V
b) V / F $y = x + \theta^* d$ és punt extrem de P_e. V
c) V / F $y = x + \theta^* d \neq x$. F

TEST 8. Sigui x SBF de $(PL)_e$ amb costos reduïts r. Llavors:

a) V / F Si $r > 0 \Rightarrow x$ és òptima. V
b) V / F Si $r = 0 \nRightarrow x$ és òptima. F
c) V / F Si x és òptima $\Rightarrow r \geq 0$. F

TEST 9. Si a cada iteració del símplex primal d'un problema $(PL)_e$ no degenerat triem la VNB d'entrada x_q associada al cost reduït més negatiu llavors podem assegurar que:

a) V / F La disminució de la f.o. a cada iteració és la màxima possible. F
b) V / F El valor de la funció objectiu disminueix a cada iteració. V
c) V / F Obtindrem, si existeix, la solució del problema $(PL)_e$. V

TEST 10. Si apliquem l'algorisme del símplex sense la regla de Bland a un problema de programació lineal (P) factible i de rang complet:

a) V / F L'algorisme sempre convergirà. F
b) V / F L'algorisme només convergirà si (P) és no degenerat. F
c) V / F L'algorisme sempre trobarà una solució òptima. F

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

PRIMER CONTROL DE TEORIA
Programació Lineal i Entera, curs 2016-17
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM :

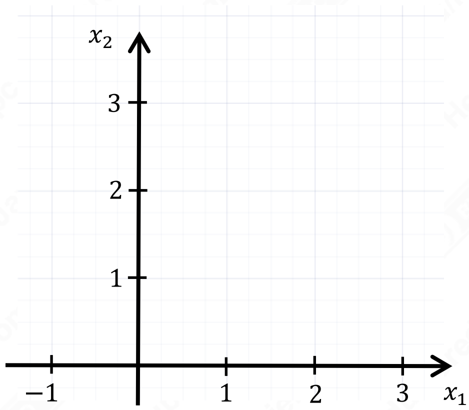
EXERCICI 1. (8 punts / 75min / amb transparències de teoria i calculadora)

Considereu el següent problema de programació lineal: $(PL)\begin{cases} \text{min} & -x_1 & -x_2 & & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & -x_2 & \geq & -2 \\ & 2x_1 & +3x_2 & \geq & 6 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq & 0 \end{cases}$

a) **(2 punts)** Representeu, sobre la següent gràfica el políedre factible P i totes les solucions bàsiques existents (factibles i no factibles), indicant a la taula els valors de $\mathcal{B}$, x_B i si són factibles (**SBF?**) i/o degenerades (**SBD?**):

Resposta:

$\mathcal{B}$	x_B	SBF?	SBD?



b) **(3 punts)** Trobeu totes les direccions bàsiques factibles associades a la base $\mathcal{B} = \{2,4\}$ indicant (a) si són factibles i (b) si son de descens. Representeu gràficament les direccions sobre la gràfica de l'apartat anterior

Resposta:

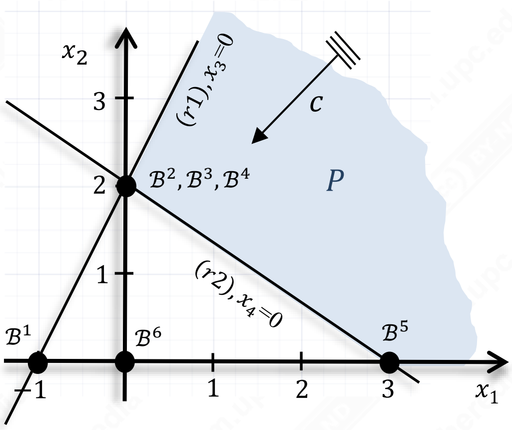
c) **(3 punts)** Resoleu el problema (P) amb l'algorisme del símplex de les dues fases usant la regla de Bland.

Resposta:

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

Apartat a)

$$(PL)_e \begin{cases} \min & -x_1 & -x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & & & & & \\ (r1) & -2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2 \\ (r2) & 2x_1 & +3x_2 & & -x_4 & = 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

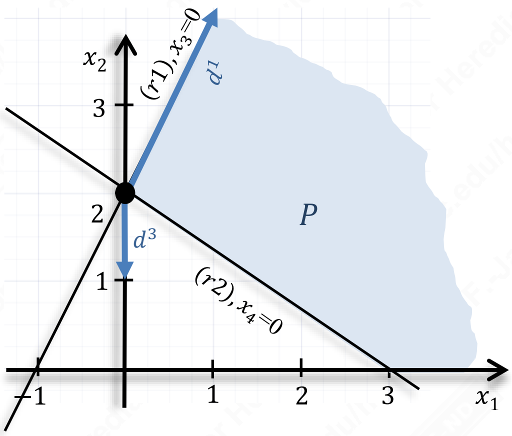


$\mathcal{B}$	x_B	SBF?	SBD?
$\mathcal{B}^1 = \{1,4\}$	$x_B^1 = \begin{bmatrix}-1\\8\end{bmatrix}$	No	No
$\mathcal{B}^2 = \{2,1\}$	$x_B^{2,3,4} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$	Sí	Sí
$\mathcal{B}^3 = \{2,3\}$			
$\mathcal{B}^4 = \{2,4\}$			
$\mathcal{B}^5 = \{1,3\}$	$x_B^5 = \begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}$	Sí	No
$\mathcal{B}^6 = \{3,4\}$	$x_B^6 = \begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}$	No	No

Apartat b)

Les DBF que existeixen sobre la base $\mathcal{B}^4 = \{2,4\}$ (amb $B = B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & -1\end{bmatrix}$ i $x_B = [2 \quad 0]'$) són les associades a les variables no bàsiques $\mathcal{N} = \{1,3\}$:

- $q = 1$:
  - $d_N^1 = [d_1 \quad d_3]' = [1 \quad 0]'$
  - $d_B^1 = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d_2\\d_4\end{bmatrix}$
  - Atès que $d_B^1 \geq 0$ la longitud de pas no està limitada i la DBF és factible.
  - $c'd^1 = -d_1 - d_2 = -3 < 0 \Rightarrow$ de descens.
- $q = 3$:
  - $d_N^3 = [d_1 \quad d_3]' = [0 \quad 1]'$
  - $d_B^3 = -B^{-1}A_3 = -\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d_2\\d_4\end{bmatrix}$
  - $\theta^* = \min\{-2/-2, -0/-3\} = 0 \Rightarrow$ infactible.
  - $c'd^1 = -d_1 - d_2 = 1 > 0 \Rightarrow$ d'ascens.



Apartat c)

$$(PL)_I \begin{cases} \min & x_5 \\ \text{s.a.:} \\ (r1) & -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ (r2) & 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Fase I

Incialització:

$\mathcal{B} = \{3,5\}, B^{-1} = I, x_B = [2 \quad 6]', \mathcal{N} = \{1,2,4\}, z_I = 6.$

1a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0 \quad 0] - [0 \quad 1] I \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = [-2 \quad -3 \quad 1] \ngeq 0 \xrightarrow{Bland} q = 1$$

2. Direcció bàsica de descens : $d_B = -B^{-1}A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \ngeq 0.$
3. Sel. VB de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i=2}\{-x_{B(2)}/d_{B(2)}\} = \min\left\{-\frac{6}{-2}\right\} = 3 \Rightarrow p = 2, B(2) = 5$
4. Actualitzacions i canvi de base :
   4.1. $x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 3 \times \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 = \theta^* = 3, z_I := z_I + \theta^* r_1 = 0$
   4.2. $\mathcal{B} := \{3,1\}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \mathcal{N} := \{2,4,5\}.$

2a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0 \quad 1] - [0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1] \geq 0 \Rightarrow \text{òptim}$$

Fase II

Incialització:

$\mathcal{B} := \{3,1\}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathcal{N} := \{2,4\}, z = -3.$

1a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [-1 \quad 0] - [0 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = [1/2 \quad -1/2] \ngeq 0 \xrightarrow{Bland} q = 4$$

2. Direcció bàsica de descens : $d_B = -B^{-1}A_4 = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ il·limitat.