8. Programación Matemática

8.1. Introducción

Caracterizaremos los problemas de programación matemática mediante las afirmaciones:

1. Existe un único centro de decisión independiente.

   Afirmación que permite separar los problemas de Programación Matemática de los de Teoría de Juegos.

2. En la formulación del problema, el tiempo no interviene como variable.

   Afirmación que permite separar los problemas de Programación Matemática de los de Programación Dinámica.

3. Existe un único objetivo a optimizar.

   Afirmación que permite separar los problemas de Programación Matemática de los de Programación Multiobjetivo.

Nuestro problema consiste en encontrar el máximo o el mínimo de una función que llamaremos OBJETIVO sobre un determinado conjunto de posibles soluciones que llamaremos conjunto FACTIBLE.

8.2. Planteo general del problema

La formulación general del problema es

$$\begin{array}{cc} \text{mín} & f(\vec{x}), \\ \text{sujeta a:} & \vec{x} \in F. \end{array} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, & \text{función objetivo.} \\ F \subseteq \mathbb{R}^n, & \text{conjunto factible.} \end{array} \tag{1}$$

Que se puede interpretar como: Encontrar los puntos $\vec{x} \in F$ tales que sea mínimo el valor que la función objetivo toma en los puntos del conjunto factible.

El conjunto factible puede venir dado mediante restricciones que pueden ser de igualdad o de desigualdad, ej.

$$\begin{array}{c} g_1(\vec{x}) = b_1, \quad g_2(\vec{x}) \leq b_2, \quad g_3(\vec{x}) \geq b_3, \quad \text{o} \\ g_1(\vec{x}) = 0, \quad g_2(\vec{x}) \leq 0, \quad g_3(\vec{x}) \geq 0. \end{array}$$

Ejemplo 8.1 *Calcular las dimensiones del rectángulo de perímetro 2 metros que tiene área máxima.*

Ejemplo 8.2 *Una empresa produce dos bienes en competencia perfecta. En este caso, los precios se toman como exógenos y son p_1 y p_2 respectivamente. La función de costes viene dada por $C(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2$, donde x_1, x_2 son las cantidades producidas de cada bien respectivamente. Plantear el programa que lleva a la empresa a encontrar una producción que maximice el beneficio.*

8.3. Caracterización del óptimo

Sean la función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con D abierto y un punto $\vec{x}^* \in D$.

Definición 8.3 *La función f posee un mínimo local en $\vec{x}^* \in D \Leftrightarrow$ Existe $\delta > 0$ tal que, para todo $\vec{x} \in D \cap B_\delta(\vec{x}^*)$ se tiene que $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}^*)$.*

Definición 8.4 *La función f posee un máximo local en $\vec{x}^* \in D \Leftrightarrow$ Existe $\delta > 0$ tal que, para todo $\vec{x} \in D \cap B_\delta(\vec{x}^*)$ se tiene que $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}^*)$.*

Definición 8.5 *La función f posee un mínimo global en $\vec{x}^* \in D \Leftrightarrow$ Se tiene que $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}^*)$ para todo $\vec{x} \in D$.*

Definición 8.6 *La función f posee un máximo global en $\vec{x}^* \in D \Leftrightarrow$ Se tiene que $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}^*)$ para todo $\vec{x} \in D$.*

En el caso de que $\vec{x} \neq \vec{x}^*$ y que las desigualdades de las definiciones anteriores sean estrictas, decimos que los óptimos son estrictos.

Proposición 8.7 *Todo óptimo global es local.*

Ejemplo 8.8 *Encontrar los óptimos en el problema*

$$\begin{array}{rl} \text{máx(mín)} & x_1^2 + x_2^2, \\ \textit{sujeta a:} & x_1^2 + x_2^2 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}$$

8.4. Existencia de óptimos

Una vez definidos los óptimos, las preguntas que nos podemos hacer son del tipo: ¿cuándo podemos afirmar que un programa matemático tiene solución? ¿cómo podemos asegurar la existencia de óptimos globales o locales? ¿ cómo calcularemos estos óptimos?

Teniendo en cuenta estos objetivos, analicemos algunos ejemplos.

Ejemplo 8.9 *Encontrar los óptimos en el problema*

$$\begin{array}{rl} \text{máx(mín)} & x^2, \\ \textit{sujeta a:} & x \in [0, 1]. \end{array}$$

Ejemplo 8.10 *Encontrar los óptimos en el problema*

$$\begin{array}{rl} \text{máx(mín)} & x^2, \\ \textit{sujeta a:} & x \in [0, 1). \end{array}$$

Ejemplo 8.11 *Encontrar los óptimos en el problema* máx(mín) $f(x)$ *donde*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Como sugerencia de estos ejemplos, podemos formular:

Teorema 8.12 (Weierstrass) *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en D conjunto cerrado y acotado. Entonces, la función f posee un máximo global y un mínimo global en D.*

Dem:

Si D es cerrado y acotado y, f es continua en D entonces, $f(D)$ es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Por consiguiente, existen $m = \min f(D)$ y $M = \max f(D)$.

Por continuidad, existe $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D$ tales que $f(\vec{x}_1) = m$ y $f(\vec{x}_2) = M$.

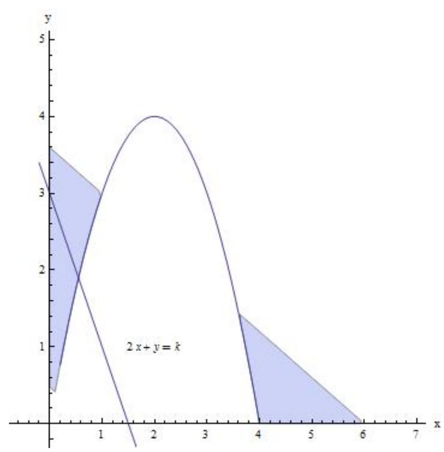
Por tanto, $m = f(\vec{x}_1) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_2) = M$ para todo $\vec{x} \in D$. $\square$

8.5. Análisis gráfico del óptimo

Con el objeto de tener una primera visión gráfica de los óptimos, estudiemos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{cl} \text{máx(mín)} & 2x_1 + x_2, \\ \text{sujeta a:} & -x_1^2 + 4x_1 - x_2 \leq 0, \\ & 3x_1 + 5x_2 \leq 18, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}$$

El conjunto factibles es:



Los vértices son la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

Punto 1:

$$\left.\begin{array}{r} -x_1^2 + 4x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\} \text{con solución } (0,0)\,. \text{ Es mínimo global.}$$

Punto 2:

$$\left.\begin{array}{c} 3x_1+5x_2=18 \\ x_2=0 \end{array}\right\} \text{con solución } (6,0)\,\text{. Es máximo global.}$$

Puntos 3 y 4:

$$\left.\begin{array}{c} 3x_1+5x_2=18 \\ -x_1^2+4x_1-x_2=0 \end{array}\right\} \text{con solución } (1,3) \text{ y } \left(3{,}6,\tfrac{1}{3}\right)\text{. El punto } (1,3) \text{ es}$$
máximo local.

Puntos 5 y 6:

$$\left.\begin{array}{c} x_2=0 \\ -x_1^2+4x_1-x_2=0 \end{array}\right\} \text{con solución } (0,0) \text{ y } (4,0)\,\text{.El punto } (4,0) \text{ es mínimo}$$
local.

Punto 7:

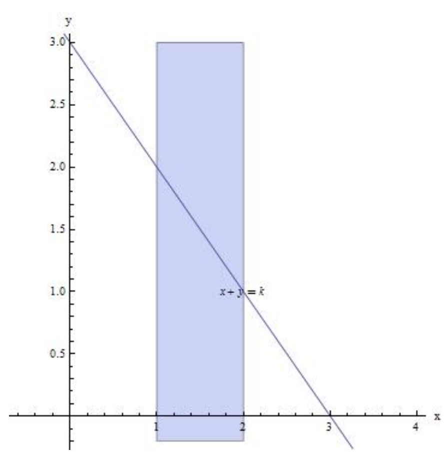
$$\left.\begin{array}{c} 3x_1+5x_2=18 \\ x_1=0 \end{array}\right\} \text{con solución } (0,18/5)\,\text{. No es ni máximo ni mínimo.}$$

Proposición 8.13 *Todo mínimo (máximo) global es mínimo (máximo) local.*

Ejemplo 8.14 *Resolver el problema*

$$\begin{array}{ll} \text{máx(mín)} & x_1+x_2, \\ \textit{sujeta a:} & 1\le x_1\le 2. \end{array}$$

El dibujo es:



Problema 8.15 *Una empresa fabrica dos tipos de cinturones, el A y el B. El tipo A es de mejor calidad que el tipo B. El beneficio neto es de* 2 *euros para el tipo A y* 1,50 *euros para el tipo B. El tiempo consumido en la fabricación de A es el doble del consumido por el B y, si los cinturones fuesen del tipo B la*

empresa podría fabricar $1,000$ *diarios. El abastecimiento de cuero es suficiente para fabricar* 800 *cinturones al día (tipo A o B). Por último, se puede disponer diariamente de* 400 *hebillas para el tipo A y* 700 *para el tipo B. Se pide:*

a) Plantear el programa que maximice el beneficio total.

b) Resolverlo gráficamente.