INVESTIGACIÓ OPERATIVA ESTOCÀSTICA:

TEORIA DE CUES

(Apunts de l'assignatura)

FACULTAT de MATEMÀTIQUES i ESTADÍSTICA

(Diplomatura d'Estadística)

Esteve Codina Sancho
Lídia Montero Mercadé
Departament Estadística i Investigació Operativa

Març del 2.000

TAULA DE CONTINGUTS

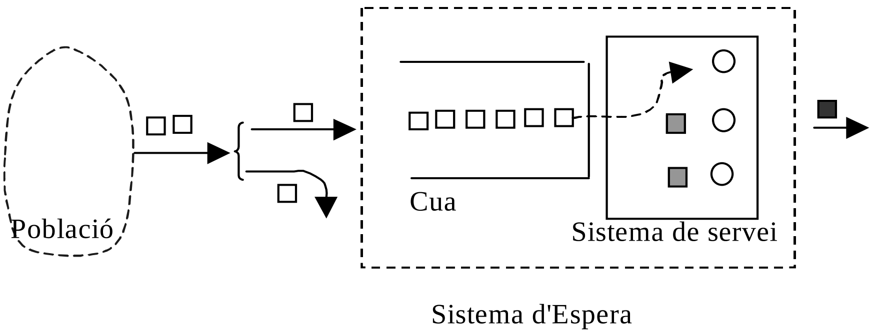
INDEX DE FIGURES

2. TEORIA DE CUES

Molts sistemes en la realitat i la vida diària incorporen en el seu funcionament procediments en que persones, màquines, components etc. experimenten *esperes* abans d'efectuar-se amb ells unes determinades operacions. La teoria de cues tracta l'estudi matemàtic dels sistemes d'espera o sistemes de cues. La formació d'una cua obeeix a un excés de demanda que supera la capacitat de proporcionar servei de forma immediata per part del servidor. La teoria de cues ajuda a prendre decisions sobre la capacitat del servei, i els nivells d'ocupació del sistema de manera que s'assoleixi un equilibri entre el Cost del Servei i el Cost de l'Espera.

2.1 Components d'un Sistema d'Espera

L'estructura d'un sistema d'espera s'il.lustra a la figura i està composada dels següents elements:



- La **població** conté els elements que requereixen de servei per part del servidor, els quals solen anomenar-se **clients**. La població pot contemplar-se com una *font de clients*, en el sentit de que aquestos abandonen la població per passar al sistema d'espera, lloc on acabaran rebent servei. En general s'assumeix que els clients generats per la població, abandonen aquesta en instants de temps diferents entre sí, i de no dir-se el contrari d'un en un (el cas d'abandonar la població en paquets és en general complex i no es tractarà en aquest curs). El temps entre dues sortides de clients de la població és en general una variable aleatòria. El procés d'arribada dels clients es determinant en l'estudi dels sistemes d'espera. La hipòtesi més comuna és que la variable aleatòria nombre de clients que surten de la població per interval de temps segueix una llei de Poisson, o el que és el mateix, que l'interval de temps entre dues sortides de clients segueix una llei exponencial. Contemplada la població com una font de clients i en relació a les característiques de generació de clients que pugui tenir podem classificar les poblacions com *finites* o *infinites.* Una població l'anomenarem infinita quan, independentment del nombre de clients que ja hagi generat, la taxa temporal de clients que genera no es veu disminuïda. En canvi una població es diu *finita* quan és susceptible d'esgotar-se (és a dir, arribar a generar una taxa nul.la de clients per unitat de temps).

- La **cua** és una component del sistema d'espera que allotja els clients provinents de la població que han d'esperar rebre servei. Es caracteritza per la seva capacitat= nombre màxim de clients que pot contenir (finit o infinit) i la disciplina que la gestiona, és a dir, l'ordre en que els clients són servits: FIFO, LIFO, Prioritats, etc. Si no s'indica el contrari, es pressuposa una disciplina FIFO (*First In First Out*).

- El **sistema de servei** ve integrat pels servidors els quals atenen als clients que estan esperant servei en la cua. En completar un servidor el procés de servei sobre un client, aquest últim se suposa que abandona el sistema d'espera i que el servidor escull de la cua un nou client , en cas de que la cua no estigui buida, o be, en cas de que la cua estigui buida, resta ociós fins que acudeixin al sistema d'espera nous clients. La característica més rellevant del sistema de servei és el temps que pot durar una operació de servei per part dels servidors. Aquest temps de servei es considera com una variable aleatòria amb una distribució coneguda. Habitualment aquesta variable aleatòria temps de servei es tracta segons la llei exponencial, constant o *k*-Erlang. El procés de servei pot estar constituït per diversos servidors en sèrie i/o paral·lel i el temps de servei de servidors diferents pot obeir a distribucions de probabilitat diferentes.

En el context informàtic, el sistema de cues d'impressora és un exemple de sistema d'espera. La majoria dels models que s'estudiaran al llarg del curs pressuposen que els intervals entre arribades de clients al sistema són independents i idènticament distribuïts. La mateixa hipòtesi s'assumeix pels temps de servei.

2.2 La notació de Kendall-Lee

Per descriure de forma compacta un sistema d'espera s'utilitza la notació de Kendall-Lee. La nomenclatura habitual en teoria de cues és simple si s'assumeix que:

1. Els temps entre arribades successives, $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$, són variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb funció de distribució de probabilitat $F_Y(y)$.

2. Els temps de servei $S_1, S_2, S_3, \ldots$, són a la vegada variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb funció de distribució de probabilitat $F_S(s)$.

3. El número de servidors és *s*.

4. La capacitat de la cua és *K*. Pot ser infinita.

5. La població és finita de dimensió *N*. Pot ser infinita.

Llavors la notació $F_Y / F_S / s / K / N$ descriu el sistema de cues. Si la capacitat de cua K i/o el tamany de la població N són infinits aleshores s'ometen el quart i/o cinquè descriptor.

Per notar tipus específics de distribucions d'interarribades o de servei s'empren habitualment els següents símbols:

M Per la distribució exponencial (*memoryless*: denota absència de memòria)

D Per la distribució determinista (temps interarribades o servei constant)

E_k Per la distribució k-Erlang

G Per una distribució general

GI Per una distribució general de temps interarribades o de servei independents

Per exemple, M/G/1 denota un sistema de cues amb un únic servidor amb temps interarribades exponencial i una distribució dels temps de servei arbitrària, mentre que la notació M/D/1 indica un sistema de cues amb un únic servidor amb temps interarribades exponencial i temps de servei constant per tots els clients.

2.3 El paper de la distribució exponencial en els sistemes d'espera

Les característiques operatives dels sistemes d'espera venen determinades bàsicament per la distribució de probabilitat dels temps entre arribades al sistema i la distribució dels temps de servei. Els models més tractables per la Teoria de Cues pressuposen una distribució exponencial de les dues variables aleatòries: temps entre arribades i temps dels serveis. L'aplicació d'aquestes hipòtesis a l'estudi de la realitat requereix que siguin realistes en el context, altrament els resultats i conclusions facilitats per la Teoria de Cues podrien mancar totalment de validesa. Per tant, prèviament a continuar qualsevol exposició es considera necessari conèixer les propietats més importants de la distribució exponencial de probabilitats, així com d'una distribució derivada d'ella, la distribució k-Erlang.

Sigui la variable aleatòria T que representa temps entre ocurrències d'esdeveniments o incidents, be siguin arribades o serveis del sistema d'espera, aleshores T es distribueix segons una llei exponencial de paràmetre α si la seva funció densitat de probabilitat, f_T, és:

$$f_T(t) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & altrament \end{cases}$$

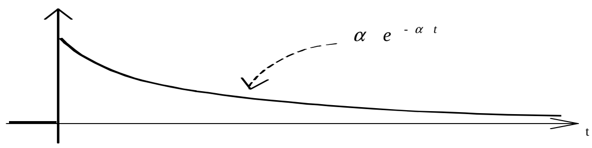


Figura 1. Funció de densitat de probabilitat per la llei exponencial

La funció de distribució de probabilitat de la variable *T*, F_T , és

$$F_T(t) = P(\{T \le t\}) = \int_{-\infty}^{t} f_T(t) \cdot dt = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t} & t \ge 0 \\ 0 & altrament \end{cases}$$

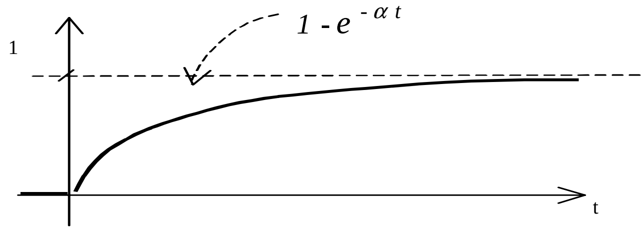


Figura 2. Funció de distribució de probabilitats per la llei exponencial.

D'on es despren que $P(\{T > t \ge 0\}) = e^{-\alpha t}$.

L'esperança matemàtica de la variable aleatòria *T* és,

$$E[T] = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f_T(t) \cdot dt = \int_0^{+\infty} t \cdot \left(\alpha \cdot e^{-\alpha t}\right) \cdot dt = \cdots = \frac{1}{\alpha}$$

La variança de la variable aleatòria *T* és,

$$Var[T] = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E[T])^2 \cdot f_T(t) \cdot dt = E[T^2] - E[T]^2 = \int_0^{+\infty} t^2 \cdot \left(\alpha \cdot e^{-\alpha t}\right) \cdot dt - \frac{1}{\alpha^2} = \cdots = \frac{1}{\alpha^2}$$

La distribució exponencial té unes propietats que es detallen a continuació i que són les que confereixen la simplicitat d'anàlisi als sistemes d'espera basats en temps entre arribades i sortides amb aquesta distribució.

Propietat 1:

La funció densitat de probabilitat d'una variable aleatòria *T*, exponencial de paràmetre α, $f_T(t)$ és una funció estrictament decreixent en *t*.

És a dir, en termes matemàtics, per $t, \Delta t \ge 0$,

$$P(\{t \le T \le t + \Delta t\}) = P(\{T \le t + \Delta t\}) - P(\{T \le t\}) = \left(1 - e^{-\alpha(t+\Delta t)}\right) - \left(1 - e^{-\alpha(t)}\right) = e^{-\alpha t}\left(1 - e^{-\alpha \Delta t}\right) \le 1 - e^{-\alpha \Delta t} =$$
$$= P(\{0 \le T \le \Delta t\})$$

Només cal observar la **Figura 1** on es mostra la gràfica de la densitat de probabilitat per la llei exponencial.

■

Propietat 2:

La distribució de probabilitat exponencial gaudeix de la **propietat d'absència de memòria** que pot formular-se en termes matemàtics com,

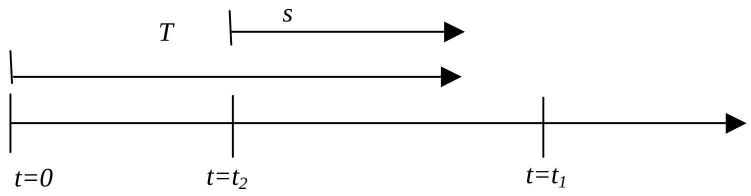
$$P\left(\{T \geq t+\Delta t\} \big/ \{T \geq t\}\right) = P(\{T \geq \Delta t\}) \text{ per } t, \Delta t \geq 0\,,$$

I és fàcil de verificar,

$$P\left(\{T \geq t+\Delta t\} \big/ \{T \geq t\}\right) = \frac{P(\{T \geq t+\Delta t\} \cap \{T \geq t\})}{P(\{T \geq t\})} = \frac{P(\{T \geq t+\Delta t\})}{P(\{T \geq t\})} = \frac{e^{-\alpha(t+\Delta t)}}{e^{-\alpha t}} = e^{-\alpha \Delta t} = P(\{T \geq \Delta t\})$$

La interpretació que té en el cas de la distribució del temps entre arribades al sistema d'espera, és que la propera arribada no depèn en absolut de l'instant en que es va produir l'anterior.

Donada la importància d'aquesta propietat es donarà un altre forma d'exposar-la. Considerem que a t=0 es va produïr un succés per última vegada i que la variable aleatòria T temps entre dos successos consecutius es distribueix segons la llei exponencial. Suposem ara que l'instant actual és t_2 (>0) i que encara no s'ha produït un nou succés. Considerem la variable aleatòria $s = T - t_2$ temps que queda comptat a partir de t_2 fins al nou succés *donat que abans de* t_2 *no ha passat res.*



Fixem un instant $t_1 > t_2$ i calculem P(s ≤ t_1 - t_2); arribarem a la conclusió de que s es distribueix exponencialment també amb paràmetre α*:*

$$P(\{s \leq t_1 - t_2\}) = P\left(\{T \leq t_1\} \big/ \{T \geq t_2\}\right) = \frac{P(\{t_2 \leq T \leq t_1\})}{P(\{T \geq t_2\})} = \frac{P(\{T \leq t_1\}) - P(\{T \leq t_2\})}{P(\{T \geq t_2\})} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha t_2} - e^{-\alpha t_1}}{e^{-\alpha t_2}} = 1 - e^{-\alpha(t_1 - t_2)}$$

D'aquí es despren que $E[s] = 1/\alpha$*, és a dir el temps mig d'espera que queda és el mateix com si s es mesures des de* $t_2 = 0$.

La propietat d'absència de memòria és una **característica exclusiva de la distribució exponencial**, és a dir, cap altre distribució de probabilitats per una variable aleatòria continua gaudeix d'aquesta característica. Precisament per la seva singularitat, en intentar interpretar-la a la realitat s'arriba a conclusions que, pel sentit comú de les persones, semblen paradoxes. Consideri's com exemple la següent situació:

La paradoxa de la parada d'autobusos. En una parada d'autobusos corresponent a una sola línia se sap que els temps entre dues arribades d'un autobús és una variable aleatòria que es distribueix exponencialment i que la seva esperança és de 10 minuts. Altrament dit, és d'esperar que durant 10 hores el número de autobusos que s'aturen a la parada estigui als voltants de 60 etc. També és d'esperar que aquest període de temps, 10 minuts, també conegut com la "freqüència de la línia", hagi d'estar relacionat amb l'esperança del temps d'espera d'un viatger que arribi a la parada. A més a més pensis que les companyies d'autobusos informen als seus usuaris de la freqüència de les línies precisament per aquest motiu.

Suposem que a les 12h arriba un viatger A a la parada coneixedor de la freqüència de la linia (10 minuts) i es troba un altre persona B que ja està esperant i que, malhauradament ha perdut per molt poc l'anterior autobús, veient-lo marxar. El viatger A s'assabenta de la mala sort del viatger B i per tal de intentar millorar la seva informació en relació al que *encara* tindran que esperar (temps comptat des de les 12h) li pregunta quan va marxar el darrer autobús. La resposta del viatger B és que fa 18 minuts que està a la parada (o sigui que el darrer autobús va arribar a les 11h42m, pensa el viatger A). El viatger A anima al viatger B donant-li el següent argument: "No desesperi més, en mitjana cada 10 minuts arriba un autobús i donat que fa 18 minuts que va arribar l'últim, el temps que ens queda per esperar, tot i sent aleatori, segur que és ja molt curt en mitjana".

L'argument del viatger A sembla raonable, encara que no te coneixements en teoria de probabilitats. Ben segur que moltes persones pensarien el mateix.

No obstant, el viatger B sí que te coneixements en teoria de probabilitats i a més a més sap que la distribució de probabilitats del temps entre dues arribades és exponencial i li respon al viatger A: "No em prengui per pessimista, però el temps mig que encara hem d'esperar és de 10 minuts; el temps que ja porto esperant no condiciona en absolut el temps que encara ens queda per esperar. *De fet, és com si acabèssim de perdre l'autobús* !!".

El viatger A no s'ho pot creure i el viatger B li explica la propietat d'absència de memòria, pròpia i exclusiva de la distribució exponencial. El viatger A finalment queda perplex i confús a la vegada.

Quin és el fonament de l'argumentació del viatger A ? Per que és invàlid el seu argument?.

El planteig del viatger A en principi és correcte. Intuïtivament pensa en la distribució de les probabilitats condicionals del temps que encara cal esperar respecte del temps ja esperat: $P\left(\{T \geq t + \Delta t\} \big/ \{T \geq t\}\right)$. La resposta és que, si la distribució de probabilitats dels temps entre arribades fora qualsevol altre que no l'exponencial llavors el temps esperat t sí influiria en el temps que queda per esperar. Suposem que, en lloc de distribuïr-se exponencialment, els temps entre dues arribades estès distribuït uniformement entre 0 i 20 minuts, de forma que en esperança els autobusos arribessin a la parada cada 10 minuts com abans. Si el viatger A ha arribat als 18 minuts d'haver-se produït l´última arribada llavors:

$$P\left(\{T \le t+\Delta t\} / \{T \ge t\}\right) = \frac{P(\{T \le t+\Delta t\} \cap \{T \ge t\})}{P(\{T \ge t\})} = \frac{P(\{t \le T \le t+\Delta t\})}{1-P(\{T \le t\})} = \frac{\Delta t / (b-a)}{1-\frac{(t-a)}{(b-a)}} = \frac{\Delta t}{b-t}$$

Per tant, per un instant d'arribada *t* determinat del viatger A, la variable aleatòria *T-t* = temps que queda fins la següent arribada comptat a partir de l'instant *t*, *presenta una distribució de probabilitats uniforme dins de l'interval de valors [0,b-t] i per tant la seva esperança ha de ser:*

$$E[T-t] = (b-t)/2$$

Per tant, en aquest cas l'esperança del temps que queda per esperar havent arribat el viatger A als 18 minuts des de l'última arribada és de 1 minut i per tant en aquest cas sí que l'argument del viatger A: "No desesperi més, en mitjana cada 10 minuts arriba un autobús i donat que fa 18 minuts que va arribar l'últim, el temps que ens queda per esperar, tot i sent aleatori, segur que és ja molt curt en mitjana" no es veuria refutat ja que efectivament esperarien 1 minut en mitjana.

■

Propietat 3:

Si la funció densitat de probabilitat de la variable aleatòria *T*, temps entre incidents (arribades o sortides del sistema d'espera) és exponencial de paràmetre α, aleshores la variable aleatòria *X* definida com el nombre d'incidents en un interval fix $[0,t]$ segueix una distribució de Poisson de paràmetre $\lambda = \alpha \cdot t$.

És a dir, $X \approx \wp(\lambda = \alpha \cdot t)$ on $f_X(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{(\alpha \cdot t)^n}{n!} e^{-\alpha \cdot t}$ i $E[X] = Var[X] = \lambda = \alpha \cdot t$.

La interpretació del paràmetre α és la taxa mitjana d'incidents per unitat de temps i la demostració de la propietat és estrictament matemàtica, raó per la qual s'omet d'aquests apunts. Es pot donar una justificació que facilita la interpretació de la propietat en el següents termes: sigui el succés A definit com que no arribi cap incident en el interval $[0,t]$, calculem la seva probabilitat a partir de la definició de la variable *X*,

$$P(A) = P(\{X = 0\}) = f_X(0) = \frac{(\alpha \cdot t)^0}{0!} e^{-\alpha \cdot t} = \frac{1}{1} \cdot e^{-\alpha \cdot t} = e^{-\alpha \cdot t}$$

Ara bé en termes de la variable *T*, el càlcul de la probabilitat del succés A es pot expressar com la probabilitat que la variable *T* prengui un valor superior a *t*,

$$P(A) = P(\{T > t\}) = 1 - P(\{T \le t\}) = e^{-\alpha \cdot t}\ .$$

Òbviament, el càlcul de probabilitats del succés A pren el mateix valor, si es fa a partir de la definició de la variable *X* o de la variable *T*, donat que ambdues compleixen la propietat de relació entre nombre d'incidents en un interval poissonià i temps entre incidents exponencial.

■

Propietat 4:

La variable aleatòria *U* definida com el mínim d'un conjunt de *n* variables aleatòries independents i exponencials $T_1, \cdots, T_n$, de paràmetres respectius $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, segueix una llei exponencial de paràmetre $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

És a dir, $U = Min\{T_1, \ldots, T_n\}$ i per tant la funció de distribució de *U* pot expressar-se com,

$$F_U(t) = P(\{U \le t\}) = 1 - P(\{U > t\}) = 1 - P(\{T_1 > t, \ldots, T_n > t\}) = 1 - P(\{T_1 > t\}) \cdots P(\{T_n > t\}) =$$
$$= 1 - e^{-\alpha_1 t} \cdots e^{-\alpha_n t} = 1 - e^{-t \sum_{i=1}^{n} \alpha_i} = 1 - e^{-\alpha t}$$

La interpretació que pot donar-se de la propietat en el cas del temps entre arribades és que si la població està constituïda per diferents classes de clients que arriben cadascuna al sistema d'espera segons una llei exponencial vinculada a la classe, aleshores el temps entre les arribades de 2 clients qualsevol, siguin o no de la mateixa classe segueix una llei exponencial, o el que és equivalent, la població pot tractar-se des del punt de vista de la distribució entre arribades al sistema d'espera com si fos homogènia.

Les implicacions de la present propietat són marcadament més importants en les conseqüències sobre els temps entre complertacions de serveis: si hi ha *n* servidors, el temps que resta fins la propera completació de servei no depèn de l'instant ni del servidor que ha completat el darrer servei i segueix una distribució exponencial, el que permet tractar els sistemes d'espera amb *n>1* servidors, com si tinguessin un únic servidor però que *treballa tant ràpid com els n junts*.

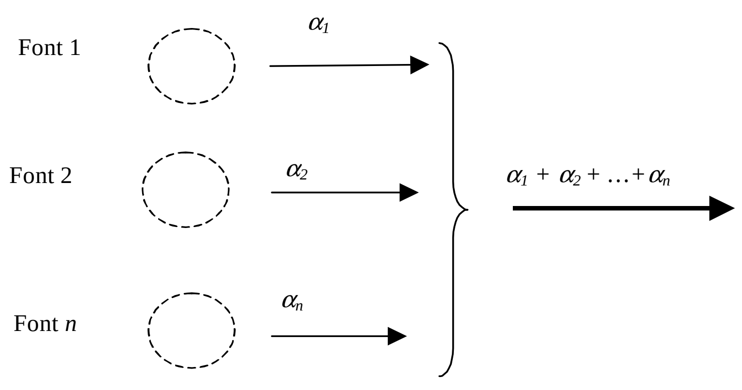


Figura 3. *n* fonts de successos exponencials. La primera font genera successos amb taxa α_1 , la segona amb taxa α_2 …, la *n*-èssima amb taxa α_n . El temps entre dos

successos consecutius, no importa de quina font provinguin es distribueix també exponencialment de forma que la taxa resultant és la suma o superposició de les taxes.

Suposem n fonts exponencials i siguin $r_1 \ldots r_n$ els intervals de temps transcurrits des de l'últim succés per les fonts 1 … n respectivement. Considerem les variables aleatòries $s_1 \ldots s_n$, temps comptat des de l'instant actual fins el proper succés per cada una de les n fonts. La **Figura 4** il.lustra aquesta situació.

Gràcies a la propietat de l'absència de memòria les variables aleatòries $s_1, \ldots s_n$ també es distribueixen exponencialment amb paràmetres α_1 , α_2 …, α_n i per tant el temps comptat a partir de l'instant actual fins que algun o altre succés provinent de les n fonts es produeixi es distribueix exponencialment amb paràmetre $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. La **Figura 3** il.lustra aquest principi de superposició de taxes de successos.

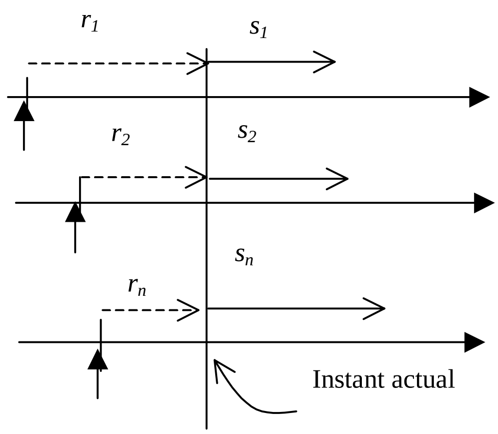


Figura 4. Cronograma per les variables aleatòries temps fins proper succés generat per la font 1 o la font 2 o la font n-èssima.

■

Propietat 5:

Si la distribució de temps entre incidents segueix una llei exponencial de paràmetre α, aleshores la probabilitat que es produeixi un incident en un interval de temps $\Delta t \to 0$ si ja fa un temps t des de la darrera ocurrència és proporcional a la taxa d'arribades per unitat de temps α i a Δt .

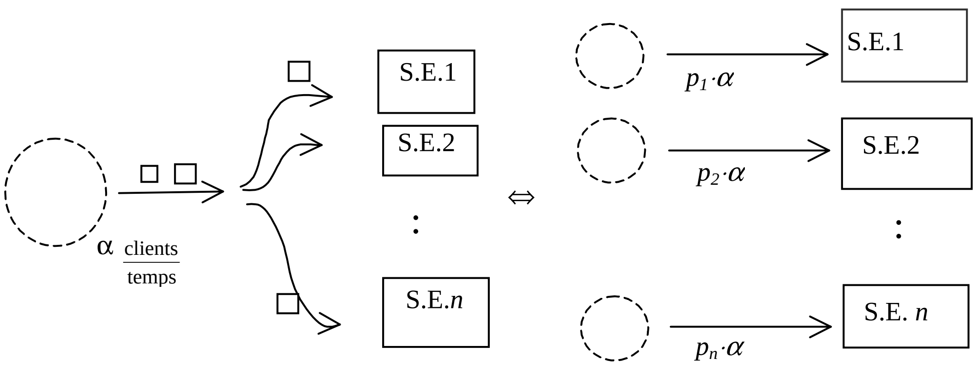
Si s'expressa en termes matemàtics l'enunciat de la proposició i s'usa l'expansió en sèrie de Taylor de la funció $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$, es immediat de verificar la propietat,

$$P\left(\{T \leq t+\Delta t\} / \{T > t\}\right) = P(\{T \leq \Delta t\}) = 1 - e^{-\alpha \cdot \Delta t} = 1 - \left(1 + (-\alpha \cdot \Delta t)^1 + (-\alpha \cdot \Delta t)^2 + (-\alpha \cdot \Delta t)^3 + \ldots\right) \underset{\Delta t \to 0}{\cong} \alpha \cdot \Delta t$$

■

Propietat 6

Si en sortir els clients d'una font exponencial de paràmetre α aquests són assignats amb probabilitats $p_1, p_2, \ldots p_n$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, a n sistemes d'espera segons un procés multinomial, llavors el sistema d'espera i observa arribades de clients com si estiguessin generats per una font exponencial de paràmetre $p_i \cdot \alpha$



■

La distribució k-Erlang

Suposem que una estació de servei te un únic servidor que en atendre un client efectua una operació de servei consistent en una sèrie de k etapes consecutives i fins que no ha finalitzat amb la última etapa de les k pel client amb el que està ocupat no passa a ocupar-se del següent client de la cua (en cas de que hi hagi en aquell moment un client següent). Suposem a més a més que el temps T_i que comporta cada etapa de servei i és una variable aleatòria que *és independent dels altres temps de servei de la resta d'etapes* i es distribueix exponencialment amb paràmetre o taxa de servei $\mu \cdot k$ essent aquest paràmetre $\mu \cdot k$ comú per totes les etapes de servei. El temps total de servei T serà doncs una variable aleatòria i pot expressar-se com la suma dels temps de servei de les k etapes:

$$T = \sum_{i=1}^{k} T_i$$

En aquestes condicions la variable aleatòria T es distribueix segons la llei de probabilitats **k-Erlang** (o Erlang de paràmetres k, μ) que presenta la següent funció de distribució:

$$\boxed{F_T(t) = P(\{T \le t\}) = 1 - e^{-k\mu t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\mu\, t)^i}{i!} \qquad \text{per } t \ge 0 \qquad \mu, k > 0}$$

i la funció densitat de probabilitat:

$$\boxed{f_T(t) = \frac{d}{dt}(F_T(t)) = e^{-k\mu t}\, \frac{(k\mu)^k}{(k-1)!} t^{k-1} \quad \text{per } \ t \ge 0}.$$

L'esperança matemàtica i la variància de la v. aleatòria T d'Erlang de paràmetres μ i k són:

$$E[T] = E[T_1] + \cdots + E[T_k] = \frac{1}{k\cdot\mu} + \cdots + \frac{1}{k\cdot\mu} = \frac{1}{\mu} \quad ;$$

$$Var[T] = Var[T_1] + \cdots + Var[T_k] = \left(\frac{1}{k\cdot\mu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{k\cdot\mu}\right)^2 = \frac{1}{k\cdot\mu^2}\ .$$

Així doncs la relació entre la desviació tipus i l'esperança matemàtica θ és sempre inferior a la unitat per $k > 1$:

$$\theta = \frac{(Var[T])^{1/2}}{E[T]} = \frac{1}{k^{1/2}} < 1 \text{ si } k > 1$$

Una representació gràfica de la funció de densitat de probabilitat per la distribució k-Erlang per diferents valors dels paràmetres k, μ però mantenint-se $\mu = 1$, ve donada en la següent figura:

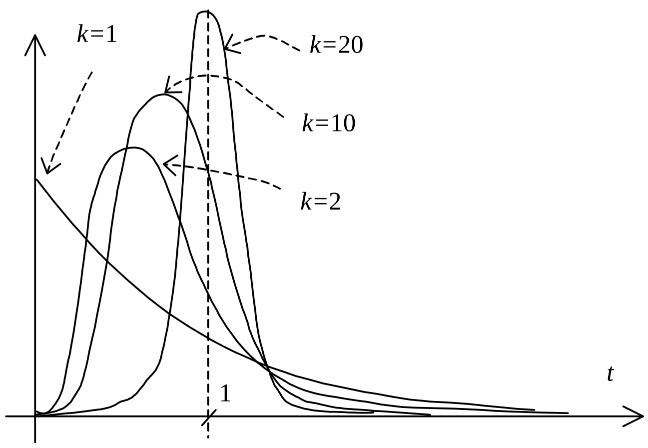


Figura 5. Funcions de densitat de la familia k-Erlang de paràmetres k, μ mantenint-se el paràmetre μ constant : $\mu = 1$

Tal i com pot observar-se per k = 1 la variable 1-Erlang coincideix amb una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\mu = 1$. A mida que k= número de etapes exponencials que conformen la variable k-Erlang, és més alt llavors, degut al teorema central del límit la variable T serà més propera a una v.a. de distribució normal X d'esperança $\mu = 1$ i de desviació decreixent amb k segons $\sigma = \frac{1}{k^{1/2}}$, de forma que en el límit la desviació s'an.nularà. Per tant, en el límit $k \to \infty$, la desviació esdevé zero i la variable aleatòria T és degenerada (temps de servei constant igual a 1).

■

2.4 Terminologia i Notació.

Aquest apartat conté els termes més emprats per les magnituds de la teoria de cues exposada en la resta d'aquests apunts. Tots ells i d'altres s'analitzen amb més detall en el següent apartat 2.5, el qual pot ometre's per passar a l'apartat 2.6 en el que es desenvolupen les fórmules de Little. L'estat del sistema és el nombre de clients en el sistema d'espera. La longitud de la cua és el nombre de clients que resten en espera de servei, és a dir, l'estat del sistema menys el nombre de clients en procés de servei.

$N(t)$ -Nombre de clients en el sistema d'espera a l'instant t. També s'anomena estat del sistema d'espera en l'instant t.

$P_n(t)$ -Probabilitat de l'estat del sistema amb n clients a l'instant t.

s -Nombre de canals de servei paral·lels en el sistema d'espera o servidors.

λ_n -Nombre esperat d'arribades de clients al sistema d'espera per unitat de temps quan ja hi ha n clients en el sistema. Si λ_n és constant per tot n, aleshores el nombre mig d'arribades per unitat de temps es nota λ.

μ_n -Nombre esperat de clients que completen el seu servei per interval de temps quan hi ha n clients en el sistema. Si la taxa de servei és constant per tot n, aleshores el nombre mig de serveis per unitat de temps i servidor ocupat es nota μ i si $n > s$ aleshores $\mu_n = s\mu$.

Un sistema d'espera quan comença a funcionar es troba en règim transitori, quan ha passat un temps suficient, en general, entra en règim estacionari. La major part dels resultats de la Teoria de Cues s'han desenvolupat pel règim estacionari.

En règim estacionari, es defineix la següent notació:

P_n Probabilitat de que l'estat del sistema sigui n clients.

L Nombre esperat de clients al sistema d'espera.

L_q Nombre esperat de clients en la cua o longitud esperada de la cua.

W Temps mig d'espera en el sistema (inclou el servei).

$\underline{W}$ Variable aleatòria temps d'espera en el sistema (inclou el servei). $E[\underline{W}] = W$.

W_q Temps mig d'espera en la cua del sistema.

$\underline{W}_q$ Variable aleatòria temps d'espera en la cua del sistema. $E[\underline{W}_q] = W_q$.

2.5 Magnituds d'un Sistema d'Espera

En aquest apartat s'examinen un conjunt de magnituds comunes a qualsevol sistema d'espera i que en general són les que tenen interès de ser calculades. L'objectiu d'aquest apartat no és sino donar entrada a les importants *fórmules de Little* donant-ne una justificació (no una demostració). En principi pot ometre's la seva lectura i passar directament a l'apartat 2.6 acceptant les fórmules de Little com intuïtives.

Les magnituds a que es fa referència són de tres classes: a) les relacionades amb l'estat del sistema d'espera $N(t)$, b) les relacionades amb els temps d'espera per client en el sistema d'espera o en els subsistemes que el composen (cua i sistema de servei) i c) la taxa temporal de clients que entren el sistema d'espera. Una altre classificació d'aquestes magnituds pot ser la de: a) magnituds instantànies, les quals són variables aleatòries donat el caràcter estocàstic dels sistemes d'espera que s'estudiaran. La notació les distingeix per anar acompanyades de (t), b) magnituds en règim estacionari o per $t=\infty$ i c) magnituds que són esperances matemàtiques de les de tipus b). Són aquestes, les magnituds de tipus c), aquelles que tenen interès de ser calculades.

Suposarem que el número de servidors es s=1, malgrat això no comporta cap limitació en els resultats que s'obtindran i que això només es fa per facilitar l'exposició.

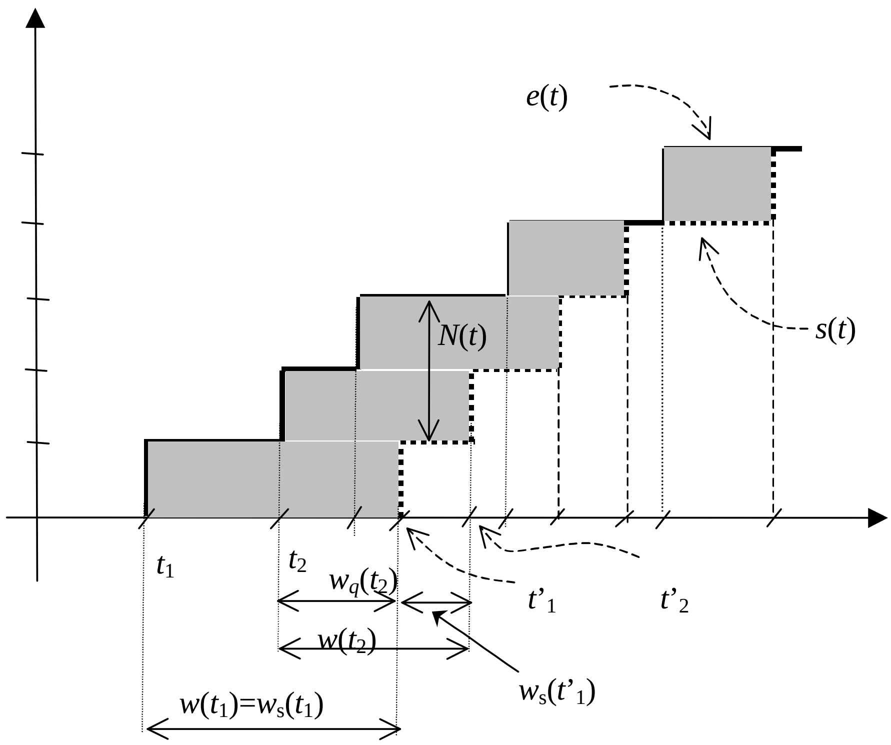


Figura 6. Diagrama d'entrades i sortides i de **magnituds instantànies** d'un sistema d'espera amb un únic servidor.

- $e(t)$: Número de clients que han entrat al sistema d'espera (S.E.) fins l'*instant t*.
- $s(t)$: Número de clients que han sortit del S.E. fins *l'instant t*
- $w(t)$: Temps de permanència en el S.E. del client que entra exactament a l'*instant t*
- $w_q(t)$: Temps d'espera en ser atès un client que entra en el sistema d'espera a l'*instant t*.
- $w_s(t)$: Durada del servei del client havent-se iniciat el servei a l'*instant t*.

Es pot observar a la Figura 1.4 que $w(t_2) = w_q(t_2) + w_s(t_1')$

Les **magnituds instantànies** vinculades al número de clients, suposant *s* servidors, són:

- $N(t) = e(t) - s(t)$; Número de clients presents al S.E. a l'*instant t*.
- $N_q(t) = [N(t) - s]^+$; Número de clients al S.E. a l'*instant t* que esperen ser atesos per algún dels *s* servidors. *Constitueixen la* ***cua*** *del sistema d'espera*.

$$N_q(t) = [N(t) - s]+ = \begin{cases} 0 & N(t) - s \leq 0 \\ N(t) - s & N(t) - s > 0 \end{cases}$$

- $N_s(t) = N(t) - N_q(t)$; Número de clients al S.E. a l'instant *t* que estan essent atesos pels servidors. Aquests clients estan en *el Sistema de Servei* (S.S.) i per tant també és el nombre de servidors ocupats.

Les **magnituds instantànies** vinculades al **temps d'espera totals**, suposant *s* servidors, són:

$$W_T(t) = \int_0^t N(t)dt, \quad W_{qT}(t) = \int_0^t N_q(t)dt, \quad W_{sT}(t) = \int_0^t N_s(t)dt$$

- $W_T(t)$ Temps total esperat pels clients que han entrat al S.E. fins l'*instant t* o estat del sistema d'espera en l'*instant t*.
- $W_{qT}(t)$ Temps total d'espera pel servei pels clients que han entrat al S.E. fins l'*instant t*.
- $W_{sT}(t)$ Temps total d'espera mentre reben servei de tots els clients que han entrat al S.E. fins l'*instant t*.

Es cumpleix que:

$$W_T(t) = W_{qT}(t) + W_{sT}(t).$$

Les **magnituds instantànies** vinculades al **temps d'espera per client** són:

- $\underline{W}(t) = W_T(t) / e(t)$: Temps mig per client de permanència, pels clients que han entrat al S.E. fins l'*instant t*.
- $\underline{W}_q(t) = W_{qT}(t) / e(t)$: Temps mig per client d'espera fins servei pels clients que han entrat al S.E. fins l'*instant t*.
- $\underline{W}_s(t) = W_{sT}(t) / e(t)$: Temps mig per client d'espera fins servei pels clients que han entrat al S.E. fins l'*instant t*.

Es verifica:

$$\underline{W}(t) = \underline{W}_q(t) + \underline{W}_s(t)$$

Podem ara definir diverses **magnituds instantànies que són promig temporal** d'algunes altres magnituds ja definides

$\lambda(t) = e(t) / t$ és la taxa mitjana d'arribada de clients (clients entrats al S.E. per unitat de temps) fins l'*instant t*.

$\overline{N}(t)$ = El promig temporal del número de clients presents al S.E. fins l'*instant t*.

$\overline{N}_q(t)$= El promig temporal del número de clients presents a la cua fins l'*instant t*.

$\overline{N}_s(t)$= El promig temporal del número mig de clients presents al S.S. fins l'*instant t*.

Es a dir:

$$\overline{N}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t N(t)dt = \frac{W_T(t)}{t} \qquad \overline{N}_q(t) = \frac{1}{t}\int_0^t N_q(t)dt = \frac{Wq_T(t)}{t}$$

$$\overline{N}_s(t) = \frac{1}{t}\int_0^t N_s(t)dt = \frac{Ws_T(t)}{t}$$

Es verifica l'important relació:

$$\overline{N}(t) = \frac{W_T(t)}{t} = \frac{W_T(t)}{e(t)} \cdot \frac{e(t)}{t} = \lambda(t).\underline{W}(t)$$

Igualment es pot obtenir: $\overline{N}_q(t) = \lambda(t).\underline{W}_q(t), \qquad \overline{N}_s(t) = \lambda(t).\underline{W}_S(t)$

2.6 Fórmules de Little

Les anteriors magnituds, $\overline{N}(t)$, $\overline{N}_s(t)$, $\overline{N}_q(t)$, $\underline{W}(t)$, $\underline{W}_s(t)$, $\underline{W}_q(t)$, $\lambda(t)$, en general són aleatòries i s'ha vist que verifiquen les següents relacions:

1. $\overline{N}(t) = \lambda(t)\cdot\underline{W}(t)$,
2. $\overline{N}_s(t) = \lambda(t)\cdot\underline{W}_s(t)$,
3. $\overline{N}_q(t) = \lambda(t)\cdot\underline{W}_q(t)$,
4. $\underline{W}(t) = \underline{W}_s(t) + \underline{W}_q(t)$,
5. $\overline{N}(t) = \overline{N}_s(t) + \overline{N}_q(t)$

Si existeix estat estacionari, llavors:

- Existiran les probabilitats P_i, i = 0, 1, 2, 3, … de que al S.E. hi hagin *i* clients:

$$P_i = \lim_{t \to \infty} Prob(N(t) = i)$$

- Les anteriors magnituds han de tenir límit:

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[\ \overline{N}(t)\ ],\\ L_q &= \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[\ \overline{N}_q(t)\ ],\\ L_s &= \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[\ \overline{N}_s(t)\ ],\\ \overline{\lambda} &= \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[\ \lambda(t)\ ],\\ W &= \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[\ \underline{W}(t)\ ],\\ W_q &= \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[\ \underline{W}_q(t)\ ],\\ W_s &= \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[\ \underline{W}_s(t)\ ] \end{aligned}}$$

John Little a l'any 1.961 va ser el primer en demostrar formalment que pel règim estacionari les anteriors magnituds L, L_q, L_s, $\overline{\lambda}$, W, W_q, W_s verifiquen les anomenades **fórmules de Little** que són idèntiques relacions a les 1 a 5 anteriors:

Fórmules de Little

$$L = \overline{\lambda} W, \quad L_s = \overline{\lambda} W_s,\ L_q = \overline{\lambda} W_q\ ,\ \ L = L_s + L_q\ ,\ W = W_s + W_q$$

Una interpretació intuïtiva de la fórmula de Little $L = \overline{\lambda}\, W$ és la següent: suposi's que a un sistema d'espera arriben $\overline{\lambda}$ clients per unitat de temps i que el temps mig de permanència en el sistema d'espera és de W unitats de temps. Suposi's que cada client paga una unitat monetària per unitat de temps de permanència en el sistema d'espera. Llavors l'ingrés obtingut serà de $\bar{\lambda}\, W$ unitats monetàries per unitat de temps. Aquest ingrés haurà de ser igual al que s'obtindria si es considerés el número mig de clients presents en el sistema L : els ingressos han de ser L unitats monetàries per unitat de temps i per tant $L = \bar{\lambda} W$.

Cal remarcar que aquestes relacions *són independents de les característiques particulars dels sistema d'espera* i per tant poden ser aplicades en qualsevol situació sempre i quan existeixi el règim estacionari.

Les fórmules de Little són d'ampli ús en teoria de cues i la seva utilitat resideix en que, si per un sistema d'espera es coneix la distribució de probabilitats en règim estacionari P_0 , P_1 , P_2 , … , llavors poden calcular-se els temps mitjos d'espera per client en estat estacionari en el sistema d'espera (W) i en la cua (W_q) una vegada s'han calculat les longituts L del sistema, la longitut de la cua L_q i la taxa mitjana d'arribades al sistema $\bar{\lambda}$. En cas de que un sistema d'espera pugui presentar un número màxim de clients N_{max} (que pot arribar a ser ∞) aquestes magnituds L, L_q i $\bar{\lambda}$ obeeixen a les expressions:

$$\boxed{\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{N_{max}} n\,\lambda_n ; \quad L = \sum_{n=0}^{N_{max}} n\,P_n \ ; \quad L_q = \sum_{n=s}^{N_{max}} (n-s)\,P_n}$$

A continuació es detallen les etapes mitjançant les quals es calculen W i W_q en un sistema d'espera que presenti estat estacionari:

1. Es calcula la distribució de probabilitats en règim d'estat estacionari: P_0, P_1, P_2, …
2. S'estableix quina és la taxa mitjana d'entrada de clients al sistema d'espera $\bar{\lambda}$.
3. Es calculen les longituts del sistema d'espera L i de la cua L_q utilitzant les fórmules anteriors.
4. Per calcular els temps d'espera W i W_q s'utilitzen les fórmules de Little: $W=L / \bar{\lambda}$, $Wq=Lq / \bar{\lambda}$.
5. Si és precís es calculen llavors el temps mig de permanència en el sistema de servei W_s i la longitut mitjana del sistema de servei L_s :

$$W_s = W - W_q\ , \quad L_s = L - L_q\,.$$

2.7 Els processos de naixement i mort

El terme naixement en el context de la Teoria de Cues indica arribada al sistema d'espera i el terme mort indica sortida del sistema. El procés de naixement i mort descriu probabilísticament com evoluciona l'estat del sistema al llarg del temps: $N(t)$, nombre de clients en el sistema d'espera. Són necessàries algunes assumpcions:

1. Si $N(t) = n$ aleshores la distribució de probabilitat del temps fins la propera arribada (naixement) és exponencial de paràmetre λ_n.

2. Si $N(t) = n$ aleshores la distribució de probabilitat del temps fins la propera sortida del sistema (mort) és exponencial de paràmetre μ_n.

3. Només una arribada o una sortida al/del sistema pot donar-se a cada instant *t*.

El diagrama de taxes de transició d'un procés de naixement i mort (**Figura 7**) mostra només les possibles transicions permeses en l'estat del sistema en un instant, l'etiqueta d'una transició indica la taxa mitjana de la transició: nombre mig d'ocurrències per unitat de temps.

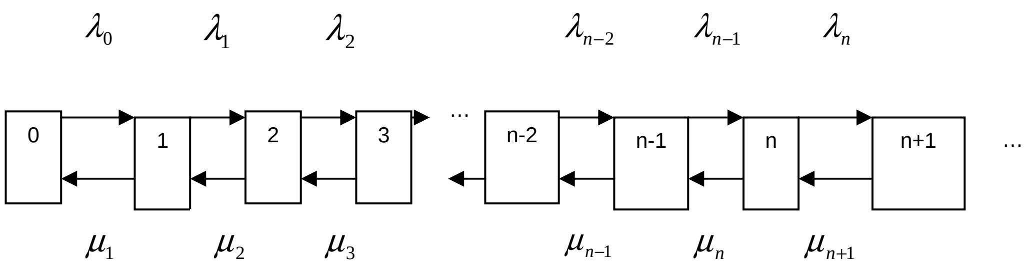


Figura 7. Diagrama de taxes de transició d'un procés de naixement i mort

La distribució de probabilitat de l'estat del sistema, *N(t)*, en règim estacionari és relativament intuïtiva de deduir a partir del diagrama de taxes de transició. Cal recordar que la probabilitat dels estats en règim estacionari en les cadenes de Markov pot interpretar-se com la fracció del temps que el procés es passa en els estats a llarg termini.

Si es considera un estat arbitrari n i es suposa que es compta el nombre de vegades que el procés entra en l'estat *n* i el nombre de vegades que el procés surt de l'estat *n*, aquestes dues xifres coincideixen o bé difereixen en màxim una unitat, doncs emprant un argument d'ergodicitat implícit, són situacions que s'alternen en el temps. A la llarga però la diferència en una unitat esdevé insignificant i per tant es pot considerar que el nombre d'entrades i el nombre de sortides de l'estat *n* coincideixen. Aleshores això dona lloc al ***principi d'equilibri de fluxos***: Per qualsevol estat del sistema la *taxa mitjana d'entrada (nombre mig d'ocurrències d'entrada per unitat de temps) iguala la taxa mitjana de sortida (nombre mig d'ocurrències de sortida per unitat de temps).*

Ara només resta detallar l'equació de balanç de fluxos per cada estat del sistema (estat del diagrama) en termes de les probabilitats dels estats en règim estacionari P_n, tenint en compta les taxes d'entrada i de sortida (etiquetes de les transicions incidents i emergents):

Estat	Taxa incident	=	Taxa emergent
0	$\mu_1 \cdot P_1$	$=$	$\lambda_0 \cdot P_0$
1	$\lambda_0 \cdot P_0 + \mu_2 \cdot P_2$	$=$	$(\lambda_1 + \mu_1) \cdot P_1$
2	$\lambda_1 \cdot P_1 + \mu_3 \cdot P_3$	$=$	$(\lambda_2 + \mu_2) \cdot P_2$
$\vdots$		$\vdots$	
$n-1$	$\lambda_{n-2} \cdot P_{n-2} + \mu_n \cdot P_n$	$=$	$(\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) \cdot P_{n-1}$
n	$\lambda_{n-1} \cdot P_{n-1} + \mu_{n+1} \cdot P_{n+1}$	$=$	$(\lambda_n + \mu_n) \cdot P_n$
$\vdots$		$\vdots$	

Per exemple, per l'estat del sistema *n = 2*; li arriben entrades de l'estat 1 (λ_1) i sortides de l'estat 3 (μ_3) i per la seva part el nombre de sortides és la suma de la taxa d'entrada (λ_2) i sortida (μ_2) del propi estat 2.

Cal remarcar que hi ha tantes equacions com valors pugui presentar *N*(*t*), per tant, si per algun motiu al sistema d'espera només poden haver-hi com màxim *M* clients, hi hauran *M+1* equacions. Pel contrari, si no hi ha cap limitació pel nombre de clients al sistema d'espera hi hauran infinites equacions en l'anterior sistema.

Resolent el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot P_0 \\ P_2 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot P_1 + \dfrac{1}{\mu_2} \cdot (\mu_1 \cdot P_1 - \lambda_0 \cdot P_0) = \dfrac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot P_1 = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \cdot P_0 \\ P_3 = \dfrac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot P_2 + \dfrac{1}{\mu_3} \cdot (\mu_2 \cdot P_2 - \lambda_1 \cdot P_1) = \dfrac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot P_2 + \dfrac{1}{\mu_3} \cdot (\mu_1 \cdot P_1 - \lambda_0 \cdot P_0) = \dfrac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot P_2 = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \cdot P_0 \\ \quad \vdots \\ P_n = \dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot P_{n-1} + \dfrac{1}{\mu_n} \cdot (\mu_{n-1} \cdot P_{n-1} - \lambda_{n-2} \cdot P_{n-2}) = \dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot P_{n-1} + \dfrac{1}{\mu_n} \cdot (\mu_1 \cdot P_1 - \lambda_0 \cdot P_0) = \dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot P_{n-1} = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} \cdot P_0 \\ P_{n+1} = \cdots = \dfrac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} \cdot P_n = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{n+1}} \cdot P_0 \\ \quad \vdots \end{cases}$$

Per simplificar la notació, es defineix:

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} \qquad n = 1, 2, \ldots \quad ; \qquad C_0 = 1$$

El que dona lloc a la rescriptura de la solució del sistema d'equacions que facilita l'estat del sistema en règim estacionari com,

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} \cdot P_0 = C_n \cdot P_0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Ara bé, com les P_n defineixen una distribució de probabilitat de l'estat del sistema aleshores han de verificar,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n}$$

L'esperança matemàtica de la variable aleatòria estat del sistema és,

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n$$

L'esperança matemàtica de la variable aleatòria longitud de cua en un sistema d'espera amb s servidors en paral·lel és,

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n - s) \cdot P_n$$

La taxa mitjana d'arribades al sistema d'espera es nota com $\bar{\lambda}$, és la mitjana de λ_n i té per expressió,

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot P_n$$

Totes aquestes expressions per L, L_q i $\bar{\lambda}$ són vàlides tant si el nombre de possibles valors per $N(t)$ és finit o infinit.

Les anteriors equacions que proporcionen les probabilitats d'estat estacionari P_0, P_1, … han pogut ser resoltes ja que s'ha suposat que:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} C_n < +\infty}$$

Es a dir, la suma o sèrie dels coeficients C_n és convergent. De fet pot demostrar-se que aquesta condició és necessària i suficient per que existeixi l'estat estacionari. En particular, si el nombre màxim de clients que pot arribar-hi a haver en el sistema d'espera mai pot excedir d'un enter M, no importa per quin motiu, llavors la suma dels coeficients C_n serà sempre finita i per tant, en aquests tipus de sistemes d'espera existirà sempre l'estat estacionari.

2.8 Models de Cues basats en Processos de Naixement i Mort

Els processos de naixement i mort ofereixen una gran flexibilitat alhora de modelitzar sistemes d'espera, doncs les taxes de naixement i mort dels estats poden prendre valors particulars segons el model d'espera. Els models de cues que tenen un procés de naixement i mort subjacent són els més senzills d'analitzar.

2.8.1 Model M/M/1

El model M/M/1 és el sistema d'espera més simple i pressuposa:

1. Temps entre arribades independents i idènticament distribuïts segons una llei exponencial de paràmetre $\lambda_n = \lambda$.

2. Temps de serveis independents i idènticament distribuïts segons una llei exponencial de paràmetre $\mu_n = \mu$.

3. Un únic servidor, és a dir *s = 1*.

És un cas particular de procés de naixement i mort on la taxa d'arribades per unitat de temps i la taxa de sortides per unitat de temps són constants, és a dir,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda_n = \lambda & n = 0,1,2,\ldots \\ \mu_n = \mu & n = 1,2,\ldots \end{array}}$$

El diagrama de les taxes de transició en el model M/M/1 pot veure's a la **Figura 8**.

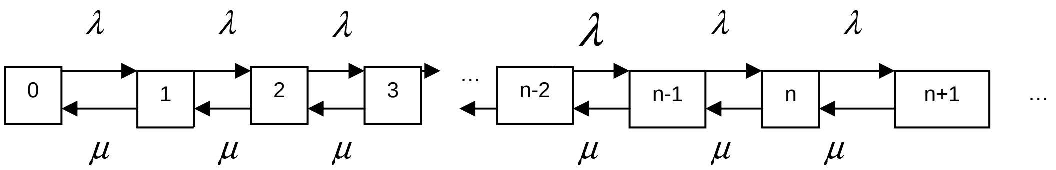


Figura 8. Diagrama de taxes de transició en el model M/M/1

El sistema d'espera assolirà un règim estacionari si el quocient entre la taxa mitjana d'arribades i la taxa mitjana de sortides és inferior a la unitat, $\lambda/\mu < 1$. El quocient anterior es sol notar com a ρ, $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ i denota el *factor de càrrega del sistema d'espera*.

En aquest cas,

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n \qquad n = 1,2,\ldots \quad C_0 = 1$$

El que facilita l'estat del sistema en règim estacionari com,

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \rho^n \cdot P_0 \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Ara bé, com les P_n defineixen una distribució de probabilitat de l'estat del sistema aleshores han de verificar,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}} = 1-\rho \quad \text{si } \rho < 1 \text{ i per tant}$$

$$\boxed{P_n = C_n \cdot P_0 = \rho^n \cdot (1-\rho) \quad n = 0,1,2,\ldots}$$

L'esperança matemàtica de la variable aleatòria estat del sistema és,

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (1-\rho) \cdot \rho^n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^n = \rho \cdot (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^{n-1} = \rho \cdot (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\left(\rho^n\right) =$$
$$= \rho \cdot (1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n\right) = \rho \cdot (1-\rho) \cdot \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \rho \cdot (1-\rho) \cdot \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

L'esperança matemàtica de la variable aleatòria longitud de cua en un sistema d'espera M/M/1 és,

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot P_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = (L) - (1-P_0) = (L) - (\rho) = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu \cdot (\mu - \lambda)}$$

> En la deducció de les fórmules s'ha suposat l'existència de règim estacionari, és a dir, $\rho < 1$, altrament les sèries que apareixen són divergents i la seva suma pren per valor infinit.

El tractament analític dels models M/M/1 és abordable i sense massa dificultat es poden treure conclusions sobre altres prestacions d'interès en l'anàlisi d'aquests models, com la funció de distribució de probabilitat de la variable aleatòria temps d'espera en el sistema en règim estacionari, $\underline{W}$, i temps d'espera en la cua del sistema en règim estacionari, $\underline{W}_q$.

Per començar, es suposa que l'estat del sistema és *n*, és a dir hi ha *n-1* clients a la cua i *1* client està en procés de servei, si es produeix una nova arribada al sistema d'espera, el client haurà d'esperar la completació de *n* serveis més el seu propi, és a dir, *n+1* serveis abans no abandoni el sistema. Siguin els temps entre finalització de serveis $T_1,\ldots,T_n,T_{n+1}$, variables exponencials independents i de paràmetre comú μ. Es defineix S_{n+1} com la suma dels *n+1* temps de servei $T_1,\ldots,T_n,T_{n+1}$,

$$S_{n+1} = T_1 + \ldots + T_n + T_{n+1} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

S_{n+1} ***representa el temps d'espera en el sistema del client n+1 condicionat a que hi han n clients en el sistema quan arriba***.

La variable aleatòria S_{n+1} segueix la distribució d'Erlang, de paràmetres μ i $n+1$.

Es important **recordar** en aquest punt que:

Tal i com ja s'ha vist al final de l'apartat 2.3, la funció de distribució de probabilitat d'una variable aleatòria *X*, distribuïda segons una llei d'Erlang de paràmetres μ i k té per expressió,

$$F_X(t) = P(\{X \le t\}) = 1 - e^{-k\mu t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\mu t)^i}{i!} \quad t \ge 0 \quad \mu, k > 0 \quad k \text{ enter}$$

i la funció densitat de probabilitat $f_X(t) = \frac{d}{dt}(F_X(t)) = e^{-k\mu t} \frac{(k\mu)^k}{(k-1)!} t^{k-1} \quad t \ge 0$.

L'esperança matemàtica i la variança de la variable aleatòria X d'Erlang de paràmetres μ i k són:

$$E[X] = \frac{1}{\mu} \quad \text{i} \quad Var[X] = \frac{1}{k \cdot \mu^2}.$$

En aquest punt es disposa de tots els elements per deduir l'expressió de la funció de distribució de la variable aleatòria $\underline{W}$, temps d'espera en el sistema (en règim estacionari),

$$1 - F_{\underline{W}}(t) = P(\{\underline{W} > t\}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot P(\{S_{n+1} > t\}) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho) \cdot \rho^n \cdot P(\{S_{n+1} > t\}) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho) \cdot \rho^n \cdot \left(e^{-(n+1)\mu t} \sum_{i=0}^{n} \frac{((n+1)\mu t)^i}{i!} \right) = \cdots = e^{-\mu(1-\rho)t} \Rightarrow F_{\underline{W}}(t) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t}$$

que resulta ser exponencial de paràmetre $\mu \cdot (1-\rho)$, d'on es desprèn que la seva esperança matemàtica és,

$$\boxed{E[\underline{W}] = \frac{1}{\mu \cdot (1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}}$$

Per deduir l'expressió de la funció de distribució de la variable aleatòria $\underline{W}_q$, temps d'espera en la cua del sistema (en règim estacionari), es procedeix de manera similar,

$$1 - F_{\underline{W}_q}(t) = P(\{\underline{W}_q > t\}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cdot P(\{S_n > t\}) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\rho) \cdot \rho^n \cdot P(\{S_n > t\}) =$$
$$= \rho \sum_{n=1}^{\infty} (1-\rho) \cdot \rho^{n-1} \cdot P(\{S_n > t\}) = \rho \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot P(\{S_{n+1} > t\}) = \rho \cdot e^{-\mu(1-\rho)t} \Rightarrow F_{\underline{W}_q}(t) = 1 - \rho \cdot e^{-\mu(1-\rho)t}$$

La seva esperança matemàtica és el temps mig al sistema menys el temps mig de servei, és a dir,

$$\boxed{E[\underline{W}_q] = E[\underline{W}] - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu \cdot (1-\rho)} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu \cdot (\mu - \lambda)}}$$

2.8.2 Utilització de les fórmules de Little

A l'apartat 2.6 s'han introduït les *fórmules de Little* i s'ha indicat la seva utilitat per proporcionar una forma simple de calcular l'esperança dels temps mitjos d'espera per client en els sistema d'espera (*W*) i en la cua (W_q). Ara que s'ha descrit la cua M/M/1 podrà il.lustrar-se l'ús d'aquestes fórmules millor. Recordem-les:

- $L = \lambda \cdot W$: el nombre esperat de clients al sistema d'espera és el producte de la taxa d'arribades per unitat de temps λ pel temps mig d'espera en el sistema.
- $L_q = \lambda \cdot W_q$: el nombre esperat de clients a la cua del sistema d'espera és el producte de la taxa d'arribades per unitat de temps λ pel temps mig d'espera en la cua.
- Si la taxa de servei per unitat de temps i servidor ocupat és contant, aleshores $W = W_q + \frac{1}{\mu}$: el temps esperat en el sistema és la suma del temps esperat a la cua més el temps esperat de servei.

Si les taxes d'arribades per unitat de temps són variables segons l'estat del sistema aleshores les fórmules de Little segueixen essent vàlides, però cal definir la taxa promig d'arribades per unitat de temps $\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \cdot P_n$ i reemplaçar λ per $\bar{\lambda}$ en les fórmules anteriors: $L = \bar{\lambda} \cdot W$ i $L_q = \bar{\lambda} \cdot W_q$.

Les fórmules de Little, tal i com seran anomenades a partir d'aquest punt, són extremadament importants, doncs donat un sistema de cues només cal ocupar-se de calcular una de les magnituds L, L_q, W, W_q, la que més fàcil resulti donades les característiques del sistema, la resta de magnituds surten a partir de les relacions demostrades per Little.

Exemple: La grua dels estibadors

Un port opera amb una grua contractada per cada prestació de servei. La distribució del nombre de vaixells que arriba al port diàriament segueix una distribució de Poisson de mitjana 1.4 vaixells per dia. El temps mig que triga la grua en descarregar els contenidors és de 4 hores i s'accepta la hipòtesi de distribució exponencial dels temps de servei. Es demana:

1. El factor de càrrega i el temps mig de desocupació del sistema.
2. El nombre mig de vaixells al port i el nombre mig de vaixells al port en espera de ser descarregats.
3. El nombre mig de dies de permanència al port per vaixell i el nombre mig de dies de permanència abans de ser descarregat.
4. Quina és la probabilitat de tenir més d'un vaixell esperant ser descarregat?

1. El factor de càrrega i el temps mig de desocupació del sistema. La unitat de temps són els dies.

   El factor de càrrega o factor d'utilització del sistema s'ha definit com $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1.4}{2} = 0.7$ (es suposa un dia feiner amb 8 hores i per tant un temps de servei de 4 hores implica una taxa de servei de 2 vaixells per dia).

   El percentatge del temps que la grua està inactiva és $P_0 = 1 - \rho = 1 - 0.7 = 0.3$, és a dir el 30% del temps.

2. El nombre mig de vaixells al port, *L*, i el nombre mig de vaixells al port en espera de ser descarregats, L_q.

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.7}{1-0.7} = 2.33 \text{ vaixells en el port.}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.7^2}{1-0.7} = 1.63 \text{ vaixells esperant ser descarregats.}$$

3. El nombre mig de dies de permanència al port per vaixell, *W*, i el nombre mig de dies de permanència abans de ser descarregat, W_q.

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2.33}{1.4} = 1.66 \text{ dies de permanència al port.}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 1.66 - 0.5 = 1.16 \text{ dies esperant ser descarregats.}$$

4. Quina és la probabilitat de tenir més d'un vaixell esperant ser descarregat?

$$\begin{aligned} P(\{n > 2\}) &= 1 - P(\{n \le 2\}) = 1 - P_0 - P_1 - P_2 = 1 - P_0 - \rho \cdot P_0 - \rho^2 \cdot P_0 \\ &= 1 - (1-\rho) - \rho \cdot (1-\rho) - \rho^2 \cdot (1-\rho) = \rho^3 = 0.7^3 = 0.343 \end{aligned}$$

■

2.8.3 Model M/M/s

El model M/M/s és el sistema d'espera que pressuposa:

1. Temps entre arribades independents i idènticament distribuïts segons una llei exponencial de paràmetre $\lambda_n = \lambda$.

2. Temps de serveis independents. Temps de servei per servidor independent i idènticament distribuïts segons una llei exponencial de paràmetre μ.

3. Un conjunt de servidors en paral·lel *s > 1*.

És un cas particular de procés de naixement i mort on la taxa d'arribades per unitat de temps i la taxa de sortides per unitat de temps i servidor ocupat són constants, és a dir,

$$\boxed{\begin{aligned} &\lambda_n = \lambda \qquad\qquad n = 0,1,2,\dots \\ &\mu_n = \begin{cases} n\cdot\mu & n = 1,2,\dots,s-1 \\ s\cdot\mu & n = s, s+1,\dots \end{cases} \end{aligned}}$$

El diagrama de les taxes de transició en el model M/M/s pot veure's a la **Figura 9**.

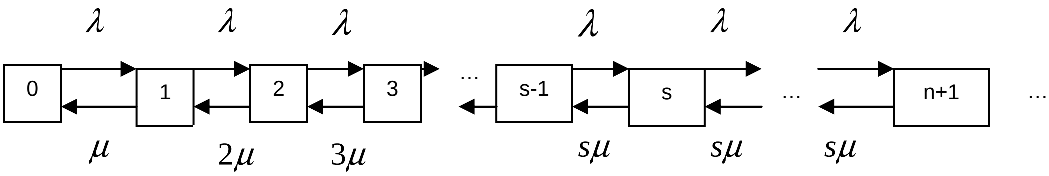


Figura 9. Diagrama de taxes de transició en el model M/M/s

El sistema d'espera assolirà un règim estacionari si el quocient entre la taxa promig d'arribades i la taxa promig de sortides és inferior a la unitat, $\lambda/(s\mu) < 1$. El quocient anterior és sol notar com a ρ, $\rho = \dfrac{\lambda}{s\cdot\mu}$ i denota el *factor de càrrega del sistema d'espera*.

En aquest cas,

$$C_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & n = 1,2,\dots,s-1 \\ \dfrac{1}{s!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(\dfrac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} & n = s, s+1,\dots \end{cases}$$

El que facilita l'estat del sistema en règim estacionari com,

$$P_n = C_n\cdot P_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n\cdot P_0 & n = 1,2,\dots,s-1 \\ \dfrac{1}{s!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(\dfrac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}\cdot P_0 & n = s, s+1,\dots \end{cases}$$

Ara bé, com les P_n defineixen una distribució de probabilitat de l'estat del sistema aleshores han de verificar,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-\rho}}$$

$$\text{si } \rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} < 1 \ .$$

L'esperança matemàtica de la variable aleatòria estat del sistema és pràcticament inabordable per la via directe, de manera que a continuació s'indica el seu valor que pot deduir-se a partir L_q i les fórmules de Little que es presenten a la Secció 2.8.2.

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \lambda \cdot W = \lambda \cdot \left(W_q + \frac{1}{\mu} \right) = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

L'esperança matemàtica de la variable aleatòria longitud de cua en un sistema d'espera M/M/s és,

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \cdot P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_{s+n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s (\rho)^{s+n-s} P_0 = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n =$$
$$= \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \rho \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1} = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\left(\rho^n\right) = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \rho \frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n\right) =$$
$$= \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \rho \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \ .$$

> En la deducció de les fórmules s'ha suposat l'existència de règim estacionari, és a dir, $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} < 1$, altrament les sèries que apareixen són divergents i la seva suma pren per valor infinit.

La funció de distribució de probabilitat de la variable aleatòria temps d'espera en el sistema en règim estacionari, $\underline{W}$, i temps d'espera en la cua del sistema en règim estacionari, $\underline{W}_q$, en els models M/M/s pot deduir-se pel mateix procediment emprat en el cas M/M/1.

Per començar, suposis que l'estat del sistema és *n*, és a dir hi ha *n-s* clients a la cua i *s* clients estan en procés de servei, si es produeix una nova arribada al sistema d'espera, el client haurà d'esperar la completació de *n-s* serveis més el seu propi, és a dir, *n-s+1* serveis abans no abandoni el sistema. Siguin els temps entre finalització de serveis $T_1, \ldots, T_{n-s}, T_{n-s+1}$, variables exponencials independents i de paràmetre comú μ. Es defineix S_{n-s+1} com la suma dels *n-s+1* temps de servei $T_1, \ldots, T_{n-s}, T_{n-s+1}$,

$$S_{n-s+1} = T_1 + \ldots + T_{n-s} + T_{n-s+1} \quad n = s, s+1, s+2, \ldots$$

S_{n-s+1} ***representa el temps d'espera en el sistema del client n+1 condicionat a que hi han n>s clients en el sistema quan arriba***. Si $n < s$ el temps d'espera en el sistema del client *n+1* és el propi temps d'espera, és a dir $S_1 = T_1$, distribuït exponencialment amb paràmetre μ.

La variable aleatòria S_{n-s+1} , *per n>s*, és un cas particular de distribució d'Erlang de paràmetres μ i $n-s+1$. Per *n<s*, $S_1 = T_1$ també és un cas particular de distribució d'Erlang de paràmetres μ i 1.

En aquest punt ja es disposa de tots els elements per deduir l'expressió de la funció de distribució de la variable aleatòria $\underline{W}$, temps d'espera en el sistema (en règim estacionari),

$$F_{\underline{W}}(t) = P(\{\underline{W} \le t\}) = \sum_{n=0}^{s-1} P_n P(\{S_1 \le t\}) + \sum_{n=s}^{\infty} P_n P(\{S_{n-s+1} \le t\}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0\left(1-e^{-\mu \cdot t}\right) + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} P_0 P(\{S_{n-s+1} \le t\}) = \cdots =$$

$$= \begin{cases} 1-e^{-\mu \cdot t}\left(1+\dfrac{1}{s!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^s \dfrac{P_0}{1-\rho}\left(\dfrac{1-e^{-\mu \cdot t\left(s-1-\lambda/\mu\right)}}{s-1-\lambda/\mu}\right)\right) & s-1-\lambda/\mu \ne 0 \\ 1-e^{-\mu \cdot t}\left(1+\dfrac{1}{s!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^s \dfrac{P_0}{1-\rho}\mu \cdot t\right) & s-1-\lambda/\mu = 0 \end{cases} \qquad t \ge 0$$

Per deduir l'expressió de la funció de distribució de la variable aleatòria $\underline{W_q}$, temps d'espera en la cua del sistema (en règim estacionari), es procedeix de manera similar,

$$F_{\underline{W_q}}(t) = P\left(\left\{\underline{W_q} \le t\right\}\right) = 1-\left(1-P\left(\left\{\underline{W_q} = 0\right\}\right)\right)\cdot e^{-s\cdot\mu\cdot(1-\rho)\cdot t} = 1-\left(1-\sum_{n=0}^{s-1} P_n\right)\cdot e^{-s\cdot\mu\cdot(1-\rho)\cdot t} \qquad t \ge 0$$

Aplicant les fórmules de Little a partir de L_q, permet d'obtenir còmodament $W_q = E\left[\underline{W_q}\right]$ i $W = E[\underline{W}]$,

$$\boxed{W_q = E\left[\underline{W_q}\right] = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \Big/ \lambda = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \frac{1}{s\cdot\mu\cdot(1-\rho)^2}} \quad \text{i} \quad \boxed{W = E[\underline{W}] = W_q + \frac{1}{\mu}}$$

Altres cuestions d'interès en el model M/M/s són:

- La probabilitat que tots els servidors estiguin ocupats: $P(\{n \ge s\})$,

$$\boxed{P(\{n \ge s\}) = \sum_{n=s}^{\infty} P_n = \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \rho^{n-s} P_0 = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{P_0}{1-\rho}}$$

- El valor esperat de la variable $N_s(t)$ *en estat estacionari*, nombre de servidors ocupats:

$$L_S = \sum_{n=0}^{s-1} n \cdot P_n + \sum_{n=s}^{\infty} s \cdot P_n = \sum_{n=0}^{s-1} n \cdot \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 + s \cdot \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{P_0}{1-\rho} = \cdots = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Exemple: Terminal de facturació d'equipatge

Una terminal de facturació disposa de 2 operaris que atenen els clients que arriben segons una distribució de Poisson de mitjana 80 clients per hora i esperen en una cua única fins que algun dels operaris estigui lliure. El temps requerit per atendre un client està distribuït exponencialment amb mitjana 1.2 minuts.

1. Quin és el nombre esperat de clients en la terminal de facturació?
2. Quin és el temps mig que un client passa a la terminal de facturació?
3. Quin percentatge del temps està lliure un determinat operari?

El model és M/M/2 amb una taxa d'arribades $\lambda = 80$ clients per hora i una taxa de servei per operari de $\mu = \frac{60}{1.2} = 50$ clients per hora. El factor de càrrega del sistema és $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{80}{2 \cdot 50} = 0.8$.

Cal obtenir $L_q = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$ i després per Little $L = \lambda \cdot W = \lambda \cdot \left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$ Però abans cal determinar quina és la probabilitat de trobar buit el sistema, P_o.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!}\left(\frac{80}{50}\right)^n + \frac{1}{2!}\left(\frac{80}{50}\right)^2 \frac{1}{1-0.8}} = 0.111$$

$$L_q = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{2!}\left(\frac{8}{5}\right)^2 (0.111) \frac{0.8}{(1-0.8)^2} = 2.84 \text{ clients}$$

1. El nombre mig de clients a la terminal de facturació és $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 2.84 + \frac{80}{50} = 4.44$ clients.

2. Un client passa en promig a la terminal de facturació $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{4.44}{80} = 0.0555$ hores = 3.33 minuts.

3. $1 \cdot P_0 + 1/2 \cdot P_1 = (1 + 1/2 \cdot C_1) \cdot P_0 = (1 + 1/2 \cdot 8/5) \cdot P_0 = 0.2$

■

Exemple: El servei d'urgències d'un hospital

El servei d'urgències d'un hospital disposa permanentment d'un metge de guàrdia, però s'han detectat temps d'espera desaconsellables en moltes ocasions, de manera que la Junta de Govern vol avaluar els beneficis de disposar d'un segon metge d'urgències. La taxa d'arribada de malalts al servei d'urgències és de 1 pacient cada 30 minuts i el temps mig de servei és de 20 minuts per pacient. Determinar els paràmetres ρ, P_0, L_q, L, W_q *i* W amb *s=1* i *s=2* metges de guàrdia. Determinar la funció de distribució de probabilitat del temps d'espera fins ser examinat un pacient en ambdues situacions.

En el cas M/M/1,

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} \quad P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{2/3}{1-2/3} = 2 \text{ pacients}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(2/3)^2}{1-2/3} = \frac{4}{3} \text{pacients}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{1} = 1 \text{ hora}$$

$$W_q = \rho \cdot W = (2/3) \cdot 1 = \frac{2}{3} \text{ hora.}$$

En el cas M/M/2,

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Cal obtenir $L_q = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$ i després per Little $L = \lambda \cdot W = \lambda \cdot \left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$ Però abans cal determinar quina és la probabilitat de trobar buit el sistema, P_o.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{1-1/3}} = \frac{1}{2}$$

$$L_q = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{1/3}{(1-1/3)^2} = \frac{1}{12} \text{ pacients}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \text{ pacients}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \text{ hores}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24} \text{ hores}$$

■

2.8.4 Model M/M/1/K

El model M/M/1/K és el sistema d'espera amb limitació de capacitat més simple i pressuposa:

1. Temps entre arribades independents i idènticament distribuïts segons una llei exponencial de paràmetre $\lambda_n = \lambda$.

2. Temps de serveis independents i idènticament distribuïts segons una llei exponencial de paràmetre $\mu_n = \mu$.

3. Un únic servidor, és a dir *s = 1*.

4. El nombre de clients al sistema d'espera no pot superar el valor positiu K.

És un cas particular de procés de naixement i mort on la taxa d'arribades per unitat de temps és constant fins assolir la capacitat del sistema i la taxa de sortides per unitat de temps també és constants, és a dir,

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_n = \begin{cases} \lambda & n = 0,1,2,\dots,K-1 \\ 0 & n = K, K+1, K+2,\dots \end{cases} \\ \mu_n = \begin{cases} \mu & n = 1,2,\dots K \\ 0 & n = K+1, K+2,\dots \end{cases} \end{array}}$$

El diagrama de les taxes de transició en el model M/M/1/K pot veure's a la **Figura 10**.

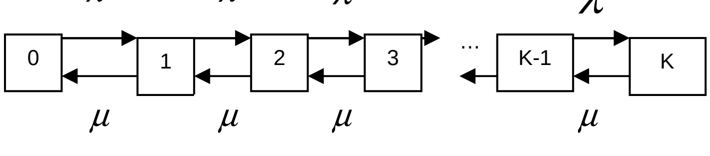


Figura 10. Diagrama de taxes de transició en el model M/M/1/K

El sistema d'espera ***sempre assolirà un règim estacionari***, en virtut d'una proposició que pot trobar-se al text de Kleinrock que garanteix l'existència del règim estacionari si $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ és finita. En aquest cas segur que es verifica doncs la taxa d'arribades és nul·la per *n>K-1*,

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n & n = 1,2,\ldots,K \\ 0 & n = K+1, K+2, \ldots \end{cases} \qquad C_0 = 1$$

El que facilita l'estat del sistema en règim estacionari com,

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \rho^n \cdot P_0 & n = 0,1,2,\ldots,K \\ 0 & n > K \end{cases}$$

Ara bé, com les P_n defineixen una distribució de probabilitat de l'estat del sistema aleshores han de verificar,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{K} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K} \rho^n} = \frac{1}{\frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \quad \text{si } \rho \neq 1 \text{ i per tant}$$

$$\boxed{P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \rho^n \cdot \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} & n = 0,1,2,\ldots,K \\ 0 & n = K+1, K+2, \ldots \end{cases} \qquad \rho \neq 1}$$

Si $\rho = 1$ es pot demostrar aplicant la regla de L'Hôpital que tots els estats són equiprobables:

$$\boxed{P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{K+1} & n = 0,1,2,\ldots,K \\ 0 & n = K+1, K+2, \ldots \end{cases} \qquad \rho = 1} \quad \text{i} \quad L = \frac{K}{2}.$$

L'esperança matemàtica de la variable aleatòria estat del sistema és,

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \sum_{n=0}^{K} n \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \cdot \rho^n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \sum_{n=0}^{K} n \cdot \rho^n = \rho \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \sum_{n=0}^{K} n \cdot \rho^{n-1} = \rho \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \sum_{n=0}^{K} \frac{d}{d\rho}\left(\rho^n\right) =$$

$$= \rho \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=0}^{K} \rho^n\right) = \rho \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \cdot \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}\right) = \rho \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \left(\frac{(K+1)\rho^K (1-\rho) + (1-\rho^{K+1})}{(1-\rho)^2}\right) =$$

$$= \cdots = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$$

L'esperança matemàtica de la variable aleatòria longitud de cua en un sistema d'espera M/M/1/K és,

$$\boxed{L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\cdot P_n = \sum_{n=1}^{K} n\cdot P_n - \sum_{n=1}^{K} P_n = (L)-(1-P_0) = \left(\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}\right) - \left(1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\right)}$$

En la deducció de les fórmules s'ha suposat $\rho \neq 1$.

L'aplicació de les fórmules de Little permet deduir el temps mig d'espera en el sistema *W*, però al no tenir una taxa d'arribades per unitat de temps constant, cal determinar $\bar{\lambda}$,

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \cdot P_n = \sum_{n=0}^{K-1}\lambda\cdot P_n = \lambda\cdot\sum_{n=0}^{K-1}P_n = \lambda\cdot(1-P_K) = \lambda\cdot\left(1 - \frac{\rho^K - \rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}\right)$$

$$\boxed{W = E[\underline{W}] = \frac{L}{\bar{\lambda}}}$$

L' esperança matemàtica del temps mig a la cua W_q és $\boxed{W_q = E[\underline{W_q}] = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}}$.

Exemple: L'Assessor Fiscal

Un assessor fiscal disposa d'un local per atendre els seus clients, els quals es concentren majoritàriament durant els mesos de maig i juny. El local té una capacitat màxima de 8 seients en espera, el clients se'n van si no troben un seient lliure, i el temps entre arribades de clients es pot considerar distribuït exponencialment segons un paràmetre $\lambda = 20$ clients per hora en període punta. El temps d'una consulta està distribuït exponencial amb una mitjana de 12 minuts,

1. Quantes consultes per hora realitzarà en promig? Quants clients perd?
2. Quin és el temps mig de permanència al local?

En promig tots els clients que entrin i es quedin són atesos, la cuestió és quin és el nombre mig de clients que entren mentre hi ha seient, és a dir $\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda\cdot P_n = \sum_{n=0}^{K-1}\lambda\cdot P_n = \lambda\cdot(1-P_K)$. El model és M/M/1/9.

Ara bé, $\boxed{P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \rho^n \cdot \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} & n = 0,1,2,\dots,K \\ 0 & n = K+1, K+2,\dots \end{cases} \qquad K = 9}$ i $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{5} = 4$,

$$P_9 = C_9 \cdot P_0 = \rho^9 \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{10}} = 4^9 \cdot \frac{1-4}{1-4^{10}} = 0.75 \qquad \text{i d'aquí,}$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda\cdot P_n = \lambda\cdot(1-P_9) = 20\cdot(1-0.75) = 5 \text{ clients per hora}$$

Per tant perd un promig desastrós de 15 clients per hora !!!

Per obtenir el temps mig de permanència al local, *W*, s'emprarà la fórmula de Little a partir del nombre mig de clients al local, *L*.

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} = \frac{4}{1-4} - \frac{10 \cdot 4^{10}}{1-4^{10}} = 8.\widehat{6} \text{ clients i per tant,}$$

$$W = E[W] = \frac{L}{\lambda} = \frac{8.\widehat{6}}{5} = 1.7\widehat{3} \text{ hores de promig de permanència al local.}$$

■

2.8.5 Model M/M/s/K

El model M/M/s/K és el sistema d'espera amb limitació de capacitat que pressuposa:

1. Temps entre arribades independents i idènticament distribuïts segons una llei exponencial de paràmetre $\lambda_n = \lambda$.

2. Temps de serveis independents. Temps de servei independents i idènticament distribuïts segons una llei exponencial de paràmetre μ.

3. Un conjunt de servidors en paral·lel *s > 1*.

4. Un nombre de clients en el sistema limitat al valor estrictament positiu *K*. Per simplificar es suposa $K \geq s$.

És un cas particular de procés de naixement i mort on la taxa d'arribades per unitat de temps és constant fins assolir la capacitat i la taxa de sortides per unitat de temps i servidor ocupat també és constant fins el límit de capacitat, és a dir,

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_n = \begin{cases} \lambda & n = 0,1,2,\ldots,K-1 \\ 0 & n = K, K+1,\cdots \end{cases} \\ \mu_n = \begin{cases} n \cdot \mu & n = 1,2,\ldots,s-1 \\ s \cdot \mu & n = s, s+1,\ldots,K \\ 0 & n = K+1, K+2,\cdots \end{cases} \end{array}}$$

El diagrama de les taxes de transició en el model M/M/s/K pot veure's a la **Figura 11**.

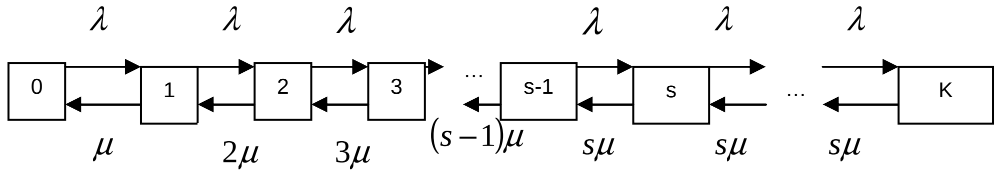


Figura 11. Diagrama de taxes de transició en el model M/M/s/K

El sistema d'espera ***sempre assolirà un règim estacionari***. El quocient ρ, $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu}$, denota el *factor de càrrega del sistema d'espera.*

En aquest cas,

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & n = 1, 2, \ldots, s-1 \\ \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} & n = s, s+1, \ldots, K \qquad i \;\; C_0 = 1 \\ 0 & n = K+1, K+2, \ldots \end{cases}$$

El que facilita l'estat del sistema en règim estacionari com,

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 & n = 1, 2, \ldots, s-1 \\ \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} \cdot P_0 & n = s, s+1, \ldots, K \\ 0 & n = K+1, K+2, \ldots \end{cases}$$

Ara bé, com les P_n defineixen una distribució de probabilitat de l'estat del sistema aleshores han de verificar,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{K} \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}} \quad \text{si } \rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} \neq 1 \;.$$

L'esperança matemàtica de la variable aleatòria longitud de cua en un sistema d'espera M/M/s/K és,

$$
\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)\cdot P_n = \sum_{n=0}^{K-s} n\cdot P_{s+n} = \sum_{n=0}^{K-s} n\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s (\rho)^{s+n-s} P_0 = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \sum_{n=0}^{K-s} n\rho^n = \\
&= \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0\rho\sum_{n=0}^{K-s} n\rho^{n-1} = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0\rho\sum_{n=0}^{K-s}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^n\right) = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0\rho\frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=0}^{K-s}\rho^n\right) = \\
&= \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{K-s+1}}{1-\rho}\right) = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0\frac{\rho}{(1-\rho)^2}\left(1-\rho^{K-s}-(K-s)\cdot\rho^{K-s}\cdot(1-\rho)\right).
\end{aligned}
$$

En les fórmules presentades s'ha suposat $\rho = \dfrac{\lambda}{s\cdot\mu} \neq 1$.

L'esperança matemàtica de la variable aleatòria estat del sistema és pot deduir-se a partir L_q i les fórmules de Little que es presenten a la Secció 2.8.2., però al no tenir una taxa d'arribades per unitat de temps constant, cal determinar $\bar{\lambda}$,

$$
\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\cdot P_n = \sum_{n=0}^{K-1}\lambda\cdot P_n = \lambda\cdot\sum_{n=0}^{K-1}P_n = \lambda\cdot\left(1-P_K\right)
$$

$$
\boxed{L = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot P_n = \bar{\lambda}\cdot W = \bar{\lambda}\cdot\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = L_q + \frac{\bar{\lambda}}{\mu}}
$$

L'aplicació de les fórmules de Little permet també deduir el temps mig d'espera en el sistema *W*,

$$
\boxed{W = E[\underline{W}] = \frac{L}{\bar{\lambda}}}
$$

L' esperança matemàtica del temps mig a la cua W_q és $\boxed{W_q = E\left[\underline{W}_q\right] = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}}$.

2.8.6 Model M/M/1//N

El model M/M/1//N és el sistema d'espera amb població finita més simple i pressuposa:

1. Temps entre arribades independents i distribuïts segons una llei exponencial de paràmetre λ_n.

2. Temps de serveis independents i idènticament distribuïts segons una llei exponencial de paràmetre $\mu_n = \mu$.

3. Un únic servidor, és a dir *s = 1*.

4. La població de clients del sistema d'espera està limitada al valor N. Es, per tant, una població finita.

És un cas particular de procés de naixement i mort on la taxa d'arribades per unitat de temps és variable segons l'estat del sistema, si hi ha *n* clients al sistema aleshores resta una població potencial de *N-n* clients, i la taxa de sortides per unitat de temps és constant, és a dir,

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_n = \begin{cases} (N-n)\cdot\lambda & n = 0,1,2,\ldots,N \\ 0 & n = N, N+1, N+2,\ldots \end{cases} \\ \mu_n = \begin{cases} \mu & n = 1,2,\ldots N \\ 0 & n = N+1, N+2,\ldots \end{cases} \end{array}}$$

El diagrama de les taxes de transició en el model M/M/1//N pot veure's a la **Figura 12**.

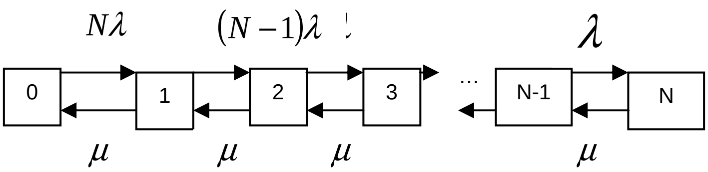


Figura 12. Diagrama de taxes de transició en el model M/M/1//N

El sistema d'espera ***sempre assolirà un règim estacionari*** , doncs la taxa d'arribades és nul·la per *n>N-1*. En aquest cas i definint $\rho = \lambda / \mu$,

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = \begin{cases} N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1)\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n = \dfrac{N!}{(N-n)!}\rho^n & n = 1,2,\ldots,N \\ 0 & n = N+1, N+2,\ldots \end{cases} \qquad C_0 = 1$$

El que facilita l'estat del sistema en règim estacionari com,

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!}\rho^n \cdot P_0 & n = 0,1,2,\ldots,N \\ 0 & n = N+1, N+2,\ldots \end{cases}$$

Ara bé, com les P_n defineixen una distribució de probabilitat de l'estat del sistema aleshores han de verificar,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{N} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \dfrac{N!}{(N-n)!}\rho^n} .$$

L'esperança matemàtica de la variable aleatòria longitud de cua en un sistema d'espera M/M/1//N és,

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\cdot P_n = \sum_{n=1}^{N}(n-1)\cdot P_n = \sum_{n=0}^{N-1} n\cdot P_{n+1} = \cdot\sum_{n=0}^{N-1} n\cdot \frac{N!}{(N-n-1)!}\rho^{n+1}\cdot P_0 = P_0\cdot\rho\cdot\sum_{n=0}^{N-1} n\cdot\frac{N!}{(N-n-1)!}\rho^n = \\ = \ldots = N - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1-P_0)$$

L'esperança matemàtica de la variable aleatòria estat del sistema és,

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot P_n = \sum_{n=0}^{N} n\cdot P_n = \sum_{n=0}^{N}(n-1+1)\cdot P_n = \sum_{n=1}^{N}(n-1)\cdot P_n - P_0 + \sum_{n=0}^{N} P_n = L_q + (1-P_0) = \\ = N - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0)$$

L'aplicació de les fórmules de Little permet deduir el temps mig d'espera en el sistema *W*, però al no tenir una taxa d'arribades per unitat de temps constant, cal determinar $\bar{\lambda}$,

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\cdot P_n = \sum_{n=0}^{N}(N-n)\lambda\cdot P_n = \sum_{n=0}^{N} N\cdot\lambda\cdot P_n - \sum_{n=0}^{N} n\cdot\lambda\cdot P_n = N\cdot\lambda - \lambda\cdot\sum_{n=0}^{N} n\cdot P_n = N\cdot\lambda - L\cdot\lambda\cdot = (N-L)\cdot\lambda$$

$$\boxed{W = E[\underline{W}] = \frac{L}{\bar{\lambda}}}$$

L' esperança matemàtica del temps mig a la cua W_q és $\boxed{W_q = E[\underline{W_q}] = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}}$.

2.8.7 *Model M/M/s//N*

El model M/M/s//N és el sistema d'espera amb població finita que pressuposa:

1. Temps entre arribades independents segons una llei exponencial de paràmetre λ_n.
2. Temps de serveis per servidor ocupat independents i idènticament distribuïts segons una llei exponencial de paràmetre μ.
3. Un conjunt de servidors en paral·lel $s > 1$.
4. Una població finita de clients limitat al valor N. Per simplificar es suposa $N \geq s$.

És un cas particular de procés de naixement i mort on la taxa d'arribades per unitat de temps és variable en funció de l'estat del sistema i la taxa de sortides per unitat de temps i servidor ocupat és constant fins el límit de capacitat, és a dir,

$$\lambda_n = \begin{cases} (N-n)\cdot\lambda & n = 0,1,2,\ldots,N \\ 0 & n = N+1,\cdots \end{cases}$$
$$\mu_n = \begin{cases} n\cdot\mu & n = 1,2,\ldots,s-1 \\ s\cdot\mu & n = s,s+1,\ldots,N \\ 0 & n = N+1,N+2,\cdots \end{cases}$$

El diagrama de les taxes de transició en el model M/M/s//N pot veure's a la **Figura 13**.

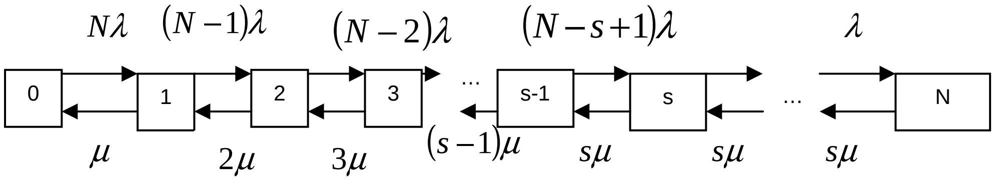


Figura 13. Diagrama de taxes de transició en el model M/M/s//N

El sistema d'espera ***sempre assolirà un règim estacionari***. El quocient ρ, $\rho = \frac{\lambda}{s\cdot\mu}$, denota el *factor de càrrega del sistema d'espera*.

En aquest cas,

$$C_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & n = 1,2,\ldots,s-1 \\ \frac{N!}{(N-n)!s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} & n = s,s+1,\ldots,N \\ 0 & n = N+1,N+2,\ldots \end{cases} \quad i \;\; C_0 = 1$$

El que facilita l'estat del sistema en règim estacionari com,

$$P_n = C_n\cdot P_0 = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\cdot P_0 & n = 1,2,\ldots,s-1 \\ \frac{N!}{(N-n)!s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}\cdot P_0 & n = s,s+1,\ldots,N \\ 0 & n = N+1,N+2,\ldots \end{cases}$$

Ara bé, com les P_n defineixen una distribució de probabilitat de l'estat del sistema aleshores han de verificar,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{N!}{(N-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{N} \frac{N!}{(N-n)!s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}}$$

L'esperança matemàtica de la variable aleatòria longitud de cua en un sistema d'espera M/M/s//N és,

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \cdot P_n = \sum_{n=s}^{N} (n-s) \cdot P_n$$

No es pot assolir una expressió analítica compacta i els càlculs amb població finita es desenvolupen a partir de taules específiques.

L'esperança matemàtica de la variable aleatòria estat del sistema és pot deduir a partir de L_q,

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \sum_{n=0}^{s-1} n \cdot P_n + \sum_{n=s}^{N} n \cdot P_n = \sum_{n=0}^{s-1} n \cdot P_n + \sum_{n=s}^{N} (n-s+s) \cdot P_n = \sum_{n=0}^{s-1} n \cdot P_n + \sum_{n=s}^{N} (n-s) \cdot P_n + \sum_{n=s}^{N} s \cdot P_n =$$
$$= \sum_{n=0}^{s-1} n \cdot P_n + L_q + s \cdot \sum_{n=s}^{N} P_n = \sum_{n=0}^{s-1} n \cdot P_n + L_q + s \cdot \left(1 - \sum_{n=0}^{s-1} P_n\right)$$

Les fórmules de Little que es presenten a la Secció 2.8.2., al no tenir una taxa d'arribades per unitat de temps constant, requereixen del càlcul de la taxa promig d'arribades per unitat de temps, $\overline{\lambda}$,

$$\overline{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot P_n = \sum_{n=0}^{N} (N-n) \cdot \lambda \cdot P_n = \sum_{n=0}^{N} N \cdot \lambda \cdot P_n - \sum_{n=0}^{N} n \cdot \lambda \cdot P_n = N \cdot \lambda - \lambda \cdot \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n = N \cdot \lambda - L \cdot \lambda \cdot = (N-L) \cdot \lambda$$

L'aplicació de les fórmules de Little permet deduir el temps mig d'espera en el sistema *W*,

$$\boxed{W = E[\underline{W}] = \frac{L}{\overline{\lambda}}}$$

L' esperança matemàtica del temps mig a la cua W_q és $\boxed{W_q = E[\underline{W_q}] = \frac{L_q}{\overline{\lambda}}}$.

Exemple: Model de Reparació d'Avionetes

Una petita companyia aèria d'una illa de les Antilles disposa de 5 avionetes, que cal reparar amb una taxa de 1 cada 30 dies. Es disposen de 2 tècnics per reparacions, cadascun dels quals necessita un promig de 3 dies per una reparació. Els temps entre avaries i de reparació són exponencials.

1. Determinar el nombre mig d'avionetes en funcionament.
2. Calcular el temps mig que una avioneta està fora de servei quan requereix una reparació.
3. Calcular el percentatge del temps que un determinat tècnic està lliure.

El model és de exponencial i de població finita: M/M/2//5. La taxa d'avaries és $\lambda = \frac{1}{30}$ avionetes per dia i la taxa de reparacions és $\mu = \frac{1}{3}$ avionetes per dia.

El nombre mig d'avionetes en funcionament és el nombre total d'avionetes, N, menys el nombre esperat d'avionetes en reparació, L: $\boxed{N - L = 5 - L = 5 - \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n}$.

Cal determinar les $P_n = C_n \cdot P_0$ i per això calen les C_n i P_0.

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = \begin{cases} \frac{5!}{(5-n)!n!}\left(\frac{1}{10}\right)^n & n = 1 \\ \frac{5!}{(5-n)!2!}\left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{1}{2 \cdot 10}\right)^{n-2} & n = 2,\ldots,5 \end{cases} \quad i \;\; C_0 = 1$$

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \frac{5!}{(5-n)!n!}\left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot P_0 & n = 1 \\ \frac{5!}{(5-n)!2!}\left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{1}{2 \cdot 10}\right)^{n-2} \cdot P_0 & n = 2,\ldots,5 \end{cases}$$

i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
C_i	1	0.5	0.1	0.015	0.0015	0.000075

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \;\rightarrow\; P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{5} C_n} = \frac{1}{1 + 0.5 + 0.1 + 0.015 + 0.0015 + 0.000075} = 0.619$$

I d'aquí,

i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
P_i	0.619	0.310	0.062	0.009	0.001	0.00004

$N - L = 5 - L = 5 - \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n = 5 - 0.465 = 4.535$ avionetes en promig en funcionament .

El temps mig que una avioneta passa en reparació és *W*.

$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{0.465}{0.151} = 3.08$ dies on $\bar{\lambda} = \lambda \cdot (N - L) = \frac{1}{30} \cdot (5 - 0.465) = \frac{1}{30} \cdot (4.535) = 0.151$

La fracció de temps que un determinat tècnic passa inactiu és $P_0 + 0.5 \cdot P_1 = 0.619 + 0.5 \cdot 0.310 = 0.774$, és a dir el 77,4% del temps. La ma d'obra és òbviament molt barata !!!

■

2.8.8 Models amb taxes d'arribades i servei en funció de l'estat

Fins ara s'ha suposat que la taxa de servei per servidor era constant, però aquesta hipòtesi no sembla massa vàlida en la realitat, per exemple, quan hi ha acumulació de treball en un sistema d'espera com una perruqueria o la caixa d'un supermercat, el servidor tendeix a treballar més ràpidament tot incrementant la taxa de serveis per unitat de temps. Per la banda de les arribades també es freqüent d'observar sistemes reals en que les cues llargues provoquen una disminució de la taxa d'arribades, les mateixes situacions concretes que il·lustraven la variació en la taxa de servei són susceptibles de provocar la reducció de la taxa d'arribades, per exemple, en una perruqueria amb molta cua hom pensa que ja hi tornarà un altre dia i en un supermercat molt ple i amb molta cua per pagar es pensa en comprar l'imprescindible en una altra banda menys congestionada o esperar una altra ocasió per la compra.

El tractament analític dels models d'espera que incorporen la variació de taxes d'arribada i servei en funció de l'estat del sistema, sense abandonar la hipòtesi de temps entre incidents exponencials, són més complexes i no solen tenir-se disponibles expressions analítiques compactes, tot forçant l'ús de taules per la determinació de P_0, L, L_q, W, W_q .

A continuació es proposa un model que compleix amb la variabilitat de taxes d'arribada i servei en funció de l'estat. Es suposa una població infinita i una capacitat de la cua del sistema il·limitada.

Sigui μ_1 la taxa de servei promig per unitat de temps quan només hi ha un client al sistema i sigui λ_0 la taxa d'arribades promig per unitat de temps quan el sistema està buit.

Es defineixen addicionalment,

- El coeficient de pressió *a*, que impulsa l'increment de la velocitat de servei.
- El coeficient de rebuig *b* que facilita el decrement de la taxa d'arribades a mesura que el sistema es col·lapsa.

En un sistema d'espera amb un únic servidor (*s=1*) es pot definir,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda_n = (n+1)^{-b}\lambda_0 & n = 0,1,2,\ldots \\ \mu_n = n^a \cdot \mu_1 & n = 1,2,\ldots \end{array}}$$

En aquest cas,

$$C_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \frac{\lambda_0\cdot\left(2^{-b}\lambda_0\right)\cdot\left(3^{-b}\lambda_0\right)\ldots\left(n^{-b}\lambda_0\right)}{\mu_1\cdot\left(2^a\mu_1\right)\cdot\left(2^a\mu_1\right)\ldots\left(n^a\mu_1\right)} = \frac{(\lambda_0/\mu_1)^n}{(n!)^{a+b}} \qquad n = 1,2,\ldots \quad C_0 = 1$$

En un sistema d'espera amb s servidors es pot definir un model genèric que relaciona les taxes d'incidents amb el nombre de clients en el sistema per servidor,

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_n = \begin{cases} \lambda_0 & n = 0,1,2,\ldots,s-1 \\ \left(\dfrac{s}{n+1}\right)^b \cdot \lambda_0 & n = s, s+1, \ldots \end{cases} \\ \mu_n = \begin{cases} n\cdot\mu_1 & n = 1,2,\ldots,s \\ \left(\dfrac{n}{s}\right)^a \cdot s\cdot\mu_1 & n = s+1,\ldots \end{cases} \end{array}}$$

En aquest cas,

$$C_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda_0}{\mu_1}\right)^n & n = 1,2,\ldots,s-1 \\ \dfrac{1}{s!}\left(\dfrac{\lambda_0}{\mu_1}\right)^n \dfrac{1}{(n!/s!)^{a+b}\cdot s^{(1-a-b)(n-s)}} & n = s, s+1,\ldots \end{cases} \qquad C_0 = 1$$

2.9 Models de Cues no Exponencials

Els models de cues que s'han vist fins el moment estaven basats en els processos de naixement i mort i suposaven una distribució inter incidents (entre arribades o entre inici i fi de servei) de caire exponencial. Aquesta hipòtesi pot resultar inexacta per modelar determinades situacions, com per exemple les arribades programades a la consulta d'un metge o les cues que es formen cíclicament en els semàfors de les ciutats. En el cas del servei, si el temps que requereix cada client és més o menys constant perquè les tasques a realitzar, per exemple en una cadena de muntatge, són les mateixes aleshores la distribució exponencial tampoc és adequada. L'anàlisi dels models no exponencials, especialment en el cas de les arribades, és més complexa i requereix d'eines matemàtiques i desenvolupaments molt més sofisticats i que s'escapen de l'abast d'aquest curs. De tota manera, existeixen alguns casos particulars de models no exponencials, el tractament dels quals es abordable a la pràctica: les expressions per determinar les prestacions del model són resultats senzills, no en demostració, però sí en la seva aplicació.

2.9.1 Model M/G/1

Els sistemes d'espera que responen a models M/G/1 són aquells que:

1. Les arribades al sistema per unitat de temps tenen una taxa constant igual a λ i estan distribuïdes segons una llei de Poisson, és a dir els temps entre arribades al sistema són independents i idènticament distribuïts exponencialment.

2. Els temps de serveis tenen una distribució de probabilitat comuna qualsevol i són mútuament independents, d'esperança matemàtica $1/\mu$ i variança σ^2.

3. El sistema d'espera disposa d'un únic servidor: *s=1*.

La teoria dels models no exponencials demostra que per assolir un estat estacionari és suficient que la relació entre la taxa d'arribades i la taxa de sortides del sistema per unitat de temps sigui inferior a la unitat, és a dir, el factor de càrrega del sistema ρ ha de complir $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

La fórmula de Pollaczek-Khintchine determina l'esperança matemàtica de la longitud de cua en règim estacionari: L_q. A partir de les fórmules de Little surten la resta d'indicadors del model L, W *i* W_q.

La fórmula de Pollaczek-Khintchine és $\boxed{L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}}$.

És una fórmula molt senzilla per la gran potència modelística dels models que tracta i ha facilitat que els models M/G/1 siguin emprats habitualment a la pràctica. Es pot observar que per un factor de càrrega determinat, la longitud de la cua augmenta proporcionalment a la variança del temps de servei, la qual cosa és coherent traslladat a la realitat.

En el cas particular M/M/1, tenim $\sigma^2 = \frac{1}{\mu^2}$ i la fórmula de Pollaczek-Khintchine esdevé,

$$L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\cdot \lambda^2/\mu^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{2\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

tot coincidint amb el resultat trobat a la Secció 2.8.1.

En el cas particular del model M/E$_k$/1, on la distribució dels temps de servei és Erlang de paràmetres k i μ, i per tant el temps mig de servei és $1/\mu$ i la seva variança és $1/k\mu^2$, la fórmula de Pollaczek-Khintchine determina l'expressió de la longitud mitjana de la cua com,

$$L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\cdot \lambda^2 / k\mu^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1+k}{2k} \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

En el cas particular del model M/D/1, la distribució dels temps de servei és constant, de mitjana $1/\mu$ unitats de temps (μ serveis per unitat de temps) i variança $\sigma^2 = 0$, la fórmula de Pollaczek-Khintchine determina l'expressió de la longitud mitja de la cua com,

$$L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

és a dir en promig té una magnitud la meitat del cas de servei exponencial.

Un altre resultat important és que la probabilitat de trobar el sistema d'espera buit és 1 menys el factor de càrrega del sistema ρ, és a dir ,

$$\boxed{P_0 = 1-\rho}$$

Les fórmules de Little permeten calcular en el cas general la resta dels indicadors de prestació del model:

- $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$: el temps esperat a la cua del sistema d'espera és la raó entre la longitud esperada de la cua i la taxa d'arribades λ per unitat de temps.
- Si la taxa de servei per unitat de temps és contant, és a dir $\mu_n = \mu \quad n = 1,2,\ldots$, aleshores el temps esperat de permanència al sistema és $W = W_q + \frac{1}{\mu}$ i el nombre esperat de clients al sistema és $L = \lambda \cdot W = \lambda\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = L_q + \rho$.

2.9.2 Model M/G/s

Només existeixen resultats analítics per alguns casos particulars, no pel cas general. Ni tan sols els models *senzills* : M/D/s o M/E_k/s disposen de resultats analítics, la solució és aleshores:

- Emprar les taules en el cas de models amb distribucions tabulades.
- Emprar simulació.

La simulació resulta imprescindible en els models generals d'arribades i sortides, doncs només es disposen de resultats computacionals organitzats en forma de taules pels casos: E_m/E_k/s, D/E_k/s i E_k/D/s.

2.10 Xarxes de Cues Exponencials

Els sistemes de cues exponencials formant una xarxa poden aparèixer fàcilment en la modelització de la realitat (cadenes de muntatge d'ordinadors o cotxes, per exemple) i sota determinades condicions que s'examinaran en aquest apartat és possible analitzar-los amb la teoria de cues vista en aquests apunts.

A grans trets podem considerar dos tipus de xarxes de sistemes d'espera: a) aquelles que reben entrades de clients procedents de una o vàries poblacions externes i que tenen sortides cap a l'exterior; són les anomenades *xarxes obertes*. b) aquelles que no reben entrades de poblacions externes ni tenen sortides a l'exterior sino que mantenen un número constant i finit de clients circulant dins de la xarxa. Són les anomenades *xarxes tancades*.

Exemple. Xarxa oberta de sistemes d'espera

Considerem, per exemple, el sistema representat en la següent figura:

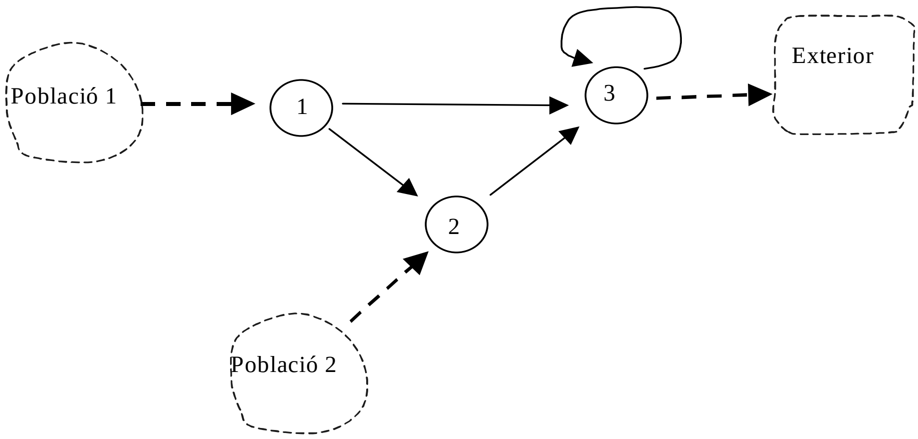


Figura 14. Exemple de xarxa oberta de sistemes d'espera.

Els nusos 1, 2, 3 representen sistemes d'espera. El sistema d'espera 1 rep entrades de clients de la població 1. Els clients servits pel sistema d'espera 1 passen al sistema d'espera 2 o al sistema d'espera 3. El sistema d'espera 2 rep entrades de clients procedents de la població 2 i en acabar de ser servits passen tots ells al sistema d'espera 3. Finalment el sistema d'espera 3 rep clients provinents del sistema d'espera 1, del sistema d'espera 2 i part dels que han sortit del propi sistema d'espera 3 tornen a entrar en ell per rebre servei de nou, mentre que la resta surten a l'exterior. Clarament és una xarxa oberta de sistemes d'espera.

Exemple. Xarxa tancada de sistemes d'espera

Considerem, per exemple, el sistema representat en la següent figura on no hi ha entrades ni sortides cap a l'exterior:

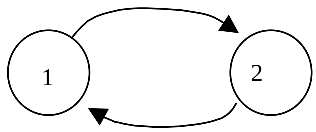


Figura 15. Exemple de xarxa tancada de sistemes d'espera.

El número de clients total en els dos sistemes d'espera és sempre N. Si suposem que inicialment el sistema 1 te tots N clients llavors el sistema 2 estarà buit. En acabar el servei del primer client dels del sistema 1, aquest passarà al sistema 2 on rebrà servei i, en acabar de rebre'l tornarà al sistema d'espera 1 etc. Clarament és una xarxa tancada de sistemes d'espera.

Donat que considerarem els sistemes d'espera com a nusos d'un graf dirigit s'introdueix aquí una mínima notació al respecte. Un graf vindrà notat per $G=(N,A)$ on N denota un conjunt de nusos i A el conjunt d'arcs direccionals. Donat un nus $i \in N$, per E(i) es denotarà el conjunt de nusos emergents del nus i mentre que per I(i) es denotarà el conjunt de nusos incidents al nus i.

Anem a enunciar ara les condicions sota les que les xarxes de sistemes d'espera, ja siguin tancades o obertes, presenten propietats que es presentaran en les subseccions següents per les que pot efectuar-se un anàlisi per descomposició.

Condicions requerides per la descomposició:

1. El sistema d'espera (nus) i te un nombre de servidors s_i de característiques idèntiques entre sí i els temps de servei de cada servidor tenen distribució exponencial de probabilitats amb capacitat individual de servei μ_i .
2. La capacitat de la cua a cada sistema d'espera és il·limitada
3. Els clients que han estat servits al nus i es reparteixen entre els nusos $j \in$ E(i), emergents del i, amb probabilitats $p_{ij} > 0$ que es mantenen constants al llarg de tota l'evolució del sistema.
4. El temps o demora associada entre la sortida d'un sistema de servei i i la entrada al sistema de servei $j \in$ E(i) és zero. (altrament dit, el cost en temps associat a l'arc (i,j) és zero)

En el cas de xarxes obertes, si totes les arribades externes estan distribuïdes poissonianament.i es verifiquen les condicions anteriors llavors s'anomenen *xarxes de Jackson* i sobre elles pot aplicar-se el resultat del teorema que porta el nom del mateix autor (teorema de Jackson (1957)).

En el cas de xarxes tancades, en verificar les condicions anteriors s'anomenen xarxes de Gordon-Newell i sobre elles pot aplicar-se el resultat del teorema que porta el nom dels mateixos autors (teorema de Gordon-Newell (1967)). No es veuran en el curs per cuestions d'extensió.

2.10.1 Xarxes obertes. Teorema de Jackson

Suposem N sistemes d'espera formant una xarxa oberta i que es verifiquin les condicions per la descomposició anteriors. Suposem que cada sistema d'espera consisteix en s_i servidors exponencials de taxa μ_i. La taxa d'arribades externes a cada estació i és r_i i està distribuïda exponencialment. La probabilitat que un client que finalitza el seu servei a l'estació i s'adreci a l'estació j és p_{ij} . Si suposem que tots els sistemes d'espera de la xarxa poden arribar a l'estat estacionari i per tant que, per cada un dels sistemes d'espera, la taxa total d'entrades ha de ser igual a la taxa total de sortides, llavors la taxa d'arribades externes més internes a l'estació j ha de verificar:

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{ij} \quad j = 1, \ldots, N \quad \text{o matricialment:}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{N1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N} & p_{2N} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix}$$

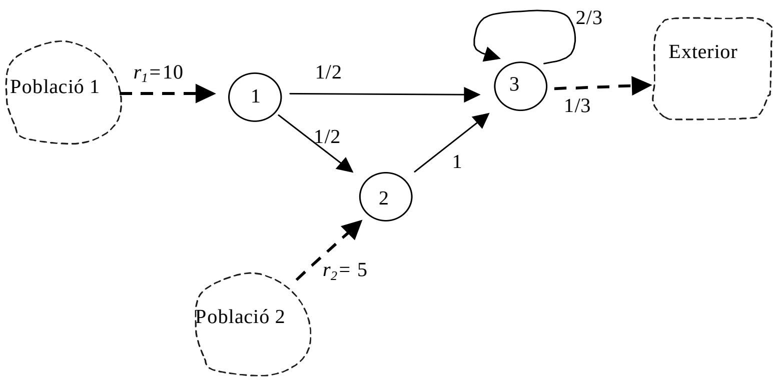


Figura 16. L'exemple anterior amb probabilitats p_{ij} constants.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \right.$$

$$\begin{array}{r} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = 5 + 1/2\,\lambda_1 \\ \lambda_3 = 1/2\,\lambda_1 + \lambda_2 + 2/3\,\lambda_3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = 10 \\ \lambda_3 = 45 \end{cases}$$

Podem ara enunciar el teorema de Jackson:

Teorema de Jackson.

Suposem que per una xarxa oberta de sistemes d'espera verificant les condicions per la descomposició anteriors, es verifica que les solucions del sistema:

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{ij} \quad j = 1, \dots, N$$

compleixen la condició $\lambda_i < s_i \cdot \mu_i$ per tot sistema d'espera *i=1,…,N*. Llavors cada sistema d'espera es comporta com una cua M/M/s_i que rep entrades de clients amb taxa λ_i i que presentarà en estat estacionari una distribució de probabilitats pròpia de les cues M/M/s (veure apartat 2.8.3) i independent de la dels altres sistemes dins la xarxa.

Per tant les xarxes de Jackson gaudeixen de la propietat que la distribució de probabilitat del nombre de clients en una estació *i* i el nombre mig de clients en l'estació pot trobar-se tractant l'estació *i* com un model M/M/s_i amb taxa d'arribades λ_i i taxa de servei per servidor ocupat μ_i

El procediment d'anàlisi consisteix dels següents punts:

1. Establir la matriu d'incidències entre nodes **P** constituïda per la probabilitat p_{ij} de cada possible transició de node.
2. Resoldre el sistema d'equacions lineal: $\underline{\lambda} = \mathbf{r} + \underline{\lambda} \cdot \mathbf{P}$.
3. Verificar que $\lambda_i < s_i \cdot \mu_i$ per *i=1,…,N*.
4. El nombre de clients total en la xarxa, L_{Total}, és la suma dels clients a cada estació de servei: $L_{Total} = \sum_{i=1}^{N} L_i$.

El temps esperat de permanència en el sistema és $W = \frac{L_{Total}}{\lambda}$ on $\lambda = \sum_{i=1}^{N} r_i$ és el nombre mig de clients que arriben des de l'exterior al sistema per unitat de temps.

Exemple.

Es vol dimensionar una xarxa de sistemes d'espera amb la configuració mostrada a la **Figura 16** i es disposa de servidors amb taxa individual de servei $\mu = 12$. Determinar en cada nus el número mínim de servidors de forma que la xarxa de sistemes d'espera presenti estat estacionari i calcular les demores mitjanes en tots els sistemes d'espera de la xarxa.

Se sap que les entrades als sistemes d'espera 1, 2 i 3 són respectivament: 10, 10, 45. Per tant:

Pel nus 1 si s_1= 1 , $\rho_1 = \lambda_1/\mu_1$ = 10/12 <1.

Pel nus 2 si s_2= 1 , $\rho_2 = \lambda_2/\mu_2$ = 10/12 <1.

Pel nus 3 cal dotar-lo de s_3= 4 servidors i llavors $\rho_3 = \lambda_3/(s_3 \cdot \mu_3)$ = 45/(4·12) <1.

Els nusos 1 i 2 amb un sol servidor són cues de tipus M/M/1 amb les mateixes taxes d'entrada:

$$L_1 = L_2 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = 5, \quad W_1 = W_2 = \frac{L_1}{\lambda_1} = 1/2$$

$P_0 = 1 - \rho_1$ = 1-10/12 = 1/6;

El nus 3 es comporta com una cua M/M/4:

Si $\theta = \lambda_3/\mu_3$ =45/12 llavors:

$$P_0 = \left[1+\theta+\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{4!}\theta^4\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\right]^{-1} = \left[28{,}81+\frac{1}{4!}\left(\frac{45}{12}\right)^4\cdot 15\right]^{-1} = 0{,}006561$$

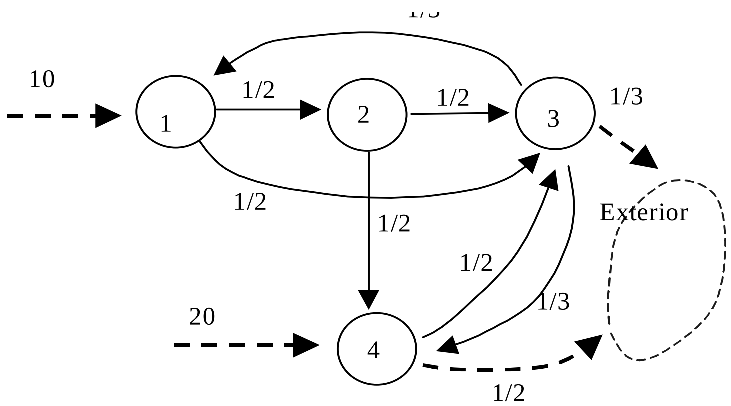


Figura 17. Xarxa oberta de S.E.

Exemple

Es disposa de servidors amb taxa de servei μ=1/2. Per la xarxa de sistemes d'espera de la **Figura 17** determinar:

a) el nombre mínim de servidors en cada sistema d'espera de forma que s'arribi a l'estat estacionari.

b) La taxa de sortida de clients a l'exterior pels sistemes d'espera 3 i 4.

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 0\\ 0\\ 20\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 1/3 & 0\\ 1/2 & 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/3 & 0\\ -1/2 & 1 & 0 & 0\\ -1/2 & -1/2 & 1 & -1/2\\ 0 & -1/2 & -1/3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 0\\ 0\\ 20\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5{,}714\\ 2{,}857\\ 12{,}857\\ 17{,}142\end{bmatrix}$$

Per tant pel sistema d'espera 1 calen 3 servidors, pel nus 2 calen 2 servidors, pel nus 3 calen 7 servidors i pel nus 4 calen 9 servidors. Sortides a l'exterior pel nus 3 = 12,857/3=4,28. Sortides pel nus 4 = 17,142/2=8,571.

Pel nus 1, $\rho = \lambda_1/3\mu = 0{,}9523$ $\theta=\lambda_1/\mu_1 = 5{,}714/(1/2) = 2{,}857$

$$P_0 = \left[1+\theta+\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{3!}\theta^3\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\right]^{-1} = [17{,}411+9{,}98]^{-1} = 0{,}045$$

Pel nus 2, $\rho = \lambda_2/2\mu = 2{,}857/4=0{,}714$, $\theta=\lambda_2/\mu = 1{,}428$

$$L_q = \frac{P_0\theta^3\rho}{3!(1-\rho)^2} = 77{,}4; \quad W = \frac{L_q}{\lambda_1}+\frac{1}{\mu} = 15{,}55$$

2.11 Aplicacions de la Teoria de Cues

Si es considera que l'objectiu de la Investigació Operativa consisteix en la presa de decisions òptimes, aleshores la Teoria de Cues, com a eina de la I.O., proporciona a la seva vegada les eines per l'anàlisi dels sistemes de cues.

A continuació es proposa detallar:

- Les consideracions bàsiques sobre el procés de presa de decisions basat en Teoria de Cues.
- Alguns models de decisió pel disseny òptim de sistemes de cues.

Exemple1:

Una empresa que fabrica peces per ordinadors disposa de 10 màquines per tal finalitat. Les màquines s'esgavellen freqüentment, de manera que només es disposa de 8 operaris per treure endavant la producció. Si el nombre de màquines en reparació és superior a 2, la pèrdua de producció per màquina s'estima en 100 Euros/dia. El temps entre avaries consecutives d'una mateixa màquina està distribuït exponencialment amb una taxa d'una avaria cada 20 dies. L'empresa disposa d'un únic mecànic que requereix en promig de 2 dies per reparar una màquina, distribuït exponencialment. El sou d'un mecànic és de 70 Euros diaris. L'empresa estudia la contractació d'un segon mecànic per tal de reduir la pèrdua de producció degut a avaries. Quina és l'opció òptima?

Exemple 2:

Una escola universitària disposa d'un Centre de Càlcul amb un únic ordinador compartit per tota la comunitat universitària: professors, estudiants i personal d'administració. En un determinat moment, al final dels quatrimestres, el sistema té una congestió notòria i es planteja la possibilitat de llogar una altra màquina per passar programes en batch pertanyents als estudiants: hi han dues possibilitats, màquina A i màquina B, amb costos i prestacions diferents. El cost de la màquina A és de 100 Euros per hora i el cost de la màquina B és 75 Euros per hora. En promig, la màquina A executa 30 programes d'estudiant per hora i la màquina B 25 programes per hora. La població actual d'estudiants envia a executar un programa cada 3 minuts. Tots els temps implicats tenen una distribució exponencial. El cost de l'espera d'un estudiant és $\mathrm{h}(\underline{\mathrm{W}}) = 10 \cdot W + 8 \cdot W^2$. Quina és l'opció òptima?

Exemple 3:

La UPC es planteja unificar el centre d'impressió de llistats del Campus Nord, hores d'ara distribuït entre les diferents escoles i facultats. Actualment, cada centre d'impressió disposa d'una o més impressores amb el seu cost de compra i manteniment. Cada centre d'impressió suposa un cost de posta en marxa i manteniment (personal, etc.). L'increment del temps d'espera dels llistats per part dels estudiants provoca un cost social avaluable, perquè retarda el termini de lliurament de pràctiques, que en molts casos repercuteix en un increment dels suspensos i a la vegada un increment de la durada de la carrera, amb el consegüent increment en el cost social d'un titulat de la UPC. Si disposéssim de tots els costos anteriors, quina seria l'opció òptima?

2.11.1 Processos de Presa de Decisions basats en Models de Cues

El ventall de possibilitats és molt ampli i no pot determinar-se un procediment de presa de decisions aplicable a totes les situacions (models de cues).

Un gran nombre de problemes basats en models de cues solen combinar una o vàries de les següents decisions de cara a *obtenir un nivell de servei adequat*:

- Sobre el número de servidors en cada estació de servei (cua). Implica una decisió sobre *s*. Cas de l'exemple1.
- Sobre l'eficiència dels servidors (taxa de serveis per unitat de temps). Implica una decisió sobre μ. Cas de l'exemple 2.
- Sobre el número d'estacions de servei (cues). Implica decisions sobre el número de cues i sobre la taxa d'arribades a cada cua, λ_i, donada una taxa total d'arribades a repartir entre les diferents cues. Cas de l'exemple 3.

Les decisions sobre el nivell de servei a proporcionar es basen en un equilibri entre el cost per proporcionar el servei i el cost que suposa l'espera. En general, si augmenta el nivell de servei augmenta el cost del servei i disminueix el temps d'espera: si es redueix el cost aleshores el nivell de servei minva i si es redueix l'espera el nivell de servei s'incrementa. La presa de decisions consisteix en resoldre aquests conflictes i trobar el balanç més adequat entre cost i temps d'espera (que també podrà avaluar-se sovint en termes de costos). El cost de l'espera pot ser un cost per beneficis perduts (negocis perduts, clients que se'n van i no tornen mai) o directe, en l'exemple 1 el sou d'un operari inactiu en espera de la reparació d'alguna màquina.

En el procés de presa de decisions cal calcular el **cost del servei i el cost de l'espera** i l'objectiu consisteix en determinar **el nivell de servei que minimitzi el cost total** (servei més espera).

2.11.1.1 Funcions de Cost d 'Espera

L'expressió de l'esperança del cost d'espera, E[CE] sol emprar bàsicament dues opcions:

- **Situació de clients interns:** comporta que el cost principal de l'espera és pèrdua de beneficis per la pèrdua de productivitat . La taxa de pèrdua de productivitat es considera proporcional a l'estat del sistema, de manera que es defineix $g(N)$ com el cost de l'espera per unitat de temps, funció creixent de la variable aleatòria discreta *N*, estat del sistema $\mathrm{E[CE]} = \mathrm{E}[\mathrm{g}(\mathrm{N})]$.

$$\mathrm{E[CE]} = \mathrm{E}[\mathrm{g}(\mathrm{N})] = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) \cdot P_n$$

Si $g(N)$ és lineal, és a dir $g(N) = C \cdot N$, aleshores

$$\mathrm{E[CE]} = \mathrm{E}[\mathrm{g}(\mathrm{N})] = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) \cdot P_n = C \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = C \cdot L$$

- **Situació de clients externs**: comporta una pèrdua de beneficis per negocis o clients perduts. Per exemple, sistemes de serveis comercials on els clients se'n van i no tornen, sistemes de transport o serveis socials. El cost de l'espera per client depèn del temps d'espera dels clients, de manera que es defineix $h(W)$ com el cost d'espera per client, funció creixent de la variable aleatòria contínua temps d'espera $\underline{W}$.

$$\mathrm{E[CE]} = \lambda \cdot \mathrm{E}\left[\mathrm{h}\left(\underline{\mathrm{W}}\right)\right] = \lambda \cdot \int_0^\infty h(w) \cdot f_{\underline{W}}(w) \cdot dw$$

Es pot estimar $h(W)$ per varis valors w i interpolar un polinomi al conjunt de punts. Els cost d'espera per unitat de temps és el producte del cost d'espera per client pel nombre esperat de clients per unitat de temps (la taxa d'arribades, λ).

Si $h(W)$ és una funció lineal del temps d'espera individual, $h(W) = C \cdot W$, aleshores

$$\mathrm{E[CE]} = \lambda \cdot \mathrm{E}\left[\mathrm{h}\left(\underline{\mathrm{W}}\right)\right] = \lambda \cdot \mathrm{E}\left[\mathrm{C} \cdot \underline{\mathrm{W}}\right] = C\lambda \cdot W = C \cdot L .$$

Resolució de l'Exemple 1

El model de cues és M/M/s//N on N és 10, el màxim nombre de màquines operatives és 8, la taxa d'avaries per màquina és $\lambda = \frac{1}{20}$ avaries per dia i la taxa de reparació per mecànic és $\mu = \frac{1}{2}$ màquina per dia, el que configura unes taxes,

$$\lambda_n = \begin{cases} (10-n)/20 & n = 0,\ldots,10 \\ 0 & n = 11,\ldots \end{cases} \qquad \lambda_n = \begin{cases} (10-n)/20 & n = 0,1,2,\ldots,10 \\ 0 & n = 11,\cdots \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 1/2 & n = 1,2,\ldots,10 \\ 0 & n = 11,\ldots \end{cases} \qquad \mu_n = \begin{cases} n/2 & n = 1 \\ 1 & n = 2,\ldots,10 \\ 0 & n = 11,\cdots \end{cases}$$

$$s = 1 \qquad\qquad s = 2$$

La funció de cost de l'avaria per unitat de temps (dia) és,

$$g(n) = \begin{cases} 0 & n = 0,1,2 \\ 100(n-2) & n = 3,4,\ldots,10 \end{cases}$$

El cost del servei, per mecànic i dia és de 70 Euros, és a dir $E[CS] = 70 \cdot s$.

En el cas *s=1*, on $\rho = \frac{1}{10}$,

$$\mathrm{E[CE]} = \mathrm{E}[\mathrm{g}(\mathrm{N})] = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\cdot P_n = \sum_{n=3}^{10} 100\cdot(n-2)\cdot P_n = \sum_{n=3}^{10} 100\cdot(n-2)\cdot\frac{N!}{(N-n)!}\rho^n\cdot P_0 =$$
$$= 14+19+17+12+6+2+0+0 = 70$$

$E[CT] = E[CE] + E[CS] = 70 + 70 = 140$ Euros per dia.

En el cas *s=2*,

$$\mathrm{E[CE]} = \mathrm{E}[\mathrm{g}(\mathrm{N})] = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\cdot P_n = \sum_{n=3}^{10} 100\cdot(n-2)\cdot P_n = \sum_{n=3}^{10} 100\cdot(n-2)\cdot\frac{N!}{(N-n)!\,s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-1}\cdot P_0 =$$
$$= 6+4+2+0+0+0+0+0 = 12$$

$E[CT] = E[CE] + E[CS] = 12 + 70\cdot 2 = 152$ Euros per dia.

Resolució de l'Exemple 2:

El model és M/M/1, però s'estudiaran 2 opcions de lloguer. La taxa d'arribades de programes és constant $\lambda = 20$ programes per hora.

En l'opció A, la taxa de servei és $\mu = 30$ programes per hora. El factor de càrrega és $\rho = \frac{2}{3}$.

La funció densitat de probabilitat del temps de permanència en el sistema M/M/1 es pot obtenir derivant l'expressió de la funció de distribució obtinguda a la Secció 2.8.1.

$$f_{\underline{W}}(t) = \frac{d}{dt}\left(F_{\underline{W}}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\mu(1-\rho)t}\right) = (\mu\cdot(1-\rho))\cdot e^{-\mu(1-\rho)t}$$

$$\mathrm{E[CE]} = \lambda\cdot\mathrm{E}[\mathrm{h}(\underline{\mathrm{W}})] = \lambda\cdot\int_0^{\infty} h(w)\cdot f_{\underline{W}}(w)\cdot dw = 20\cdot\int_0^{\infty}\left(10w + 8w^2\right)\cdot(\mu\cdot(1-\rho))\cdot e^{-\mu(1-\rho)w}\cdot dw =$$
$$= \ldots = 20\cdot 1.16 = 23.2$$

$E[CT] = E[CE] + E[CS] = 23.2 + 100 = 123.2$ Euros per hora.

En l'opció B, la taxa de servei és $\mu = 25$ programes per hora. El factor de càrrega és $\rho = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$.

$$\mathrm{E[CE]} = \lambda\cdot\mathrm{E}[\mathrm{h}(\underline{\mathrm{W}})] = \lambda\cdot\int_0^{\infty} h(w)\cdot f_{\underline{W}}(w)\cdot dw = 20\cdot\int_0^{\infty}\left(10w + 8w^2\right)\cdot(\mu\cdot(1-\rho))\cdot e^{-\mu(1-\rho)w}\cdot dw =$$
$$= \ldots = 20\cdot 2.64 = 52.8$$

$E[CT] = E[CE] + E[CS] = 52.8 + 75 = 127.8$ Euros per hora.

2.11.2 Models de Decisió

Les variables de decisió en el disseny dels sistemes de cues són majoritàriament:

- El número de servidors, s.
- La taxa de servei per unitat temps, μ i s es veuen implicats.
- La taxa d'arribades a cada estació o cua del sistema, λ_i.

2.11.2.1 Model de Decisió sobre el número de servidors, s

Es suposa que la taxa d'arribades i de servei per servidor ocupat són constants. El model es formula de la següent manera,

Si C_s és el cost d'un servidor per unitat de temps i es suposen coneguts λ, μ, C_s aleshores cal trobar s tal que faciliti el mínim del cost total esperat,

$$Min_s \quad E[CT(s)] = E[CE(s)] + E[CS(s)] = E[CE(s)] + s \cdot C_s$$

Normalment es proven uns pocs valors de *s*, per cadascun es calcula $E[CT(s)]$ i es conclou quin dona el mínim.

L'Exemple 1 il·lustra una situació on quedar-se amb un sol mecànic és el més econòmic.

2.11.2.2 Model de Decisió sobre la taxa de servei

Les variables de decisió són el número de servidors *s* i la qualitat dels servidors μ.

En l'Exemple 3 del Centre d'Impressió, tan importa la quantitat impressores (*s*), com la seva qualitat (μ).

El model es pot formular de la següent manera,

Sigui $f(\mu)$ el cost d'un servidor per unitat de temps quan la taxa de servei és μ.

Sigui A el conjunt de valors possibles de μ.

Suposem coneguts $\lambda, f(\mu)$ i A aleshores el problema consisteix en trobar els valors μ i *s* tals que minimitzen el cost total esperat, $E[CT(\mu, s)]$,

$$Min_{\mu, s} \quad E[CT(\mu, s)] = E[CE(\mu, s)] + E[CS(\mu, s)] = E[CE(\mu, s)] + s \cdot f(\mu)$$
$$subjecte \;\; a \;\; \mu \in A$$

2.11.2.3 Model de decisió sobre el número d'estacions de servei

Es suposa que la taxa global d'arribades al sistema λ_p es reparteix proporcionalment entre totes les estacions, de manera que λ és la taxa d'arribades a cada estació. Per simplificar el número de servidor per estació *s*, es considera constant.

La formulació del model requereix del coneixement dels següents paràmetres:

1. C_s: Cost de un servidor per estació i unitat de temps (fix).
2. C_f: Cost fix d'una estació per unitat de temps.
3. λ_p: Taxa d'arribades global del sistema.
4. n: Número d'estacions de servei, pertanyent a un conjunt de valors B. Òbviament, $n = \lambda_p / \lambda$.

El problema consisteix en trobar λ i *s* tals que minimitzin el cost esperat total subjecte a un conjunt de valors determinat B pel número d'estacions del sistema,

$$\boxed{\begin{array}{c} Min_{n,\,s} \quad E[CT(n,\lambda,s)] = E[CE(n,\lambda,\ s)] + E[CS(n,\lambda,\ s)] = n \cdot \left(E[CE(\lambda,s)] + \left(s \cdot C_s + C_f\right)\right) \\ subjecte\ \ a\ \ \lambda = \lambda_p / n \qquad i \quad n \in B \end{array}}$$

Exemple 4: El supermercat

Un supermercat té un únic caixer per cobrar. En període punta es calcula que els clients arriben a la caixa amb una distribució de Poisson de promig 30 clients per hora. La distribució del temps de servei és exponencial de mitjana 1.5 minuts, el que provoca cues que no poden solventar-se posant una altra caixa perquè no hi ha lloc. La proposta consisteix en contractar una persona per ajudar els clients a emplenar les bosses, de manera que el temps de servei quedaria reduït a 1 minut. El sou del caixer és de 10 Euros per hora i el sou de l'emplenador de bosses de 5 Euros per hora. El cost de l'espera per client i unitat de temps es calcula que implica una pèrdua de beneficis de 0.05 Euros per minut. És convenient contractar l'emplenador de bosses?

Es tracta d'un model de decisions tipus 2 amb μ variable i *s=1* fix. El model de cues és M/M/1 amb $\lambda = 30$ clients per hora i μ pertanyen al conjunt $A = \{40, 60\}$, on $\mu_1 = \frac{1}{1.5/60} = 40$ clients per hora és la taxa de servei sense l'emplenador de bosses i $\mu_2 = \frac{1}{1/60} = 60$ clients per hora és la taxa de servei amb l'emplenador de bosses.

El model 1, sense emplenador de bosses, té un factor de càrrega $\rho_1 = \frac{3}{4}$.

El model 2, amb emplenador de bosses, té un factor de càrrega $\rho_2 = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} &Min_{\mu} \quad E[CT(\mu)] = E[CE(\mu)] + f(\mu) \\ &\quad subjecte \;\; a \;\; \mu \in A = \{40,60\} \end{aligned}$$

$$f(\mu) = \begin{cases} 10 & \mu = 40 \\ 15 & \mu = 60 \end{cases} \text{ Euros per hora}$$

$$E[CE(\mu)] = \lambda \cdot E[h(\underline{W(\mu)})] = \lambda \cdot C \cdot W(\mu) = 0.05 \cdot \frac{60min}{1h} \cdot L(\mu) = \begin{cases} 3 \cdot \dfrac{\rho_1}{1-\rho_1} = 9 & \mu = 40 \\ 3 \cdot \dfrac{\rho_2}{1-\rho_2} = 3 & \mu = 60 \end{cases}$$

$$E[CT(\mu)] = E[CE(\mu)] + f(\mu) = \begin{cases} 9+10=19 & \mu = 40 \\ 3+15=18 & \mu = 60 \end{cases} \text{ Euros per hora.}$$

I per tant interessa contractar un ajudant per emplenar bosses.

2.11.3 Conclusions

Les aplicacions de la Teoria de Cues al disseny de sistemes de cues es poc sistematitzable, doncs depèn directament de les característiques particulars del model de sistema de cues. Les consideracions generals exposades a la Secció 2.11 poden adaptar-se a la majoria de casos, però les variables de decisió tractades λ, μ *i* s no són les úniques que poden aparèixer en el disseny d'aquests sistemes.

2.12 Formulari

Variable exponencial de paràmetre α,

$$F_T(t) = P(\{T \le t\}) = \int_{-\infty}^{t} f_T(t)\cdot dt = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t} & t \ge 0 \\ 0 & altrament \end{cases}$$

La llei de probabilitats **k-Erlang** (o Erlang de paràmetres k, μ):

$$\boxed{F_T(t) = P(\{T \le t\}) = 1 - e^{-k\mu t}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k\mu t)^i}{i!} \qquad \text{per } t \ge 0 \quad \mu, k > 0}$$

Fórmules de Little:

$$L = \bar{\lambda} W, \quad L_s = \bar{\lambda} W_s, L_q = \bar{\lambda} W_q, \ L = L_s + L_q, W = W_s + W_q$$

Processos de naixement i mort:

$$C_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \quad n = 1, 2, \ldots \ ; \ C_0 = 1$$

$$P_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\cdot P_0 = C_n \cdot P_0 \quad n = 1, 2, \ldots \quad ; \ \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_0 = 1 \rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n}$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n \qquad L_q = \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)\cdot P_n \qquad \bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \cdot P_n$$

M/M/1:

$$C_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n \quad n = 1, 2, \ldots \ C_0 = 1 \ P_n = C_n \cdot P_0 = \rho^n \cdot P_0 \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n} = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}} = 1 - \rho \qquad L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu\cdot(\mu-\lambda)}$$

M/M/s:

$$C_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & n = 1, 2, \ldots, s-1 \\ \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} & n = s, s+1, \ldots \end{cases} \qquad P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 & n = 1, 2, \ldots, s-1 \\ \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}\cdot P_0 & n = s, s+1, \ldots \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}} \qquad L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \lambda \cdot W = \lambda \cdot \left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \cdot P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_{s+n} = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

M/M/1/K:

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n & n = 1, 2, \ldots, K \\ 0 & n = K+1, K+2, \ldots \end{cases} \qquad C_0 = 1$$

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \rho^n \cdot P_0 & n = 0, 1, 2, \ldots, K \\ 0 & n > K \end{cases} \qquad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K} \rho^n} = \frac{1}{\frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} \qquad L_q = (L) - (1 - P_0) \qquad \overline{\lambda} = \lambda(1 - P_K)$$

M/M/s/K:

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & n = 1, 2, \ldots, s-1 \\ \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} & n = s, s+1, \ldots, K \\ 0 & n = K+1, K+2, \ldots \end{cases} \qquad i \ C_0 = 1$$

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 & n = 1, 2, \ldots, s-1 \\ \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} \cdot P_0 & n = s, s+1, \ldots, K \\ 0 & n = K+1, K+2, \ldots \end{cases} \qquad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{K} \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}}$$

$$L_q = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2}\left(1 - \rho^{K-s} - (K-s) \cdot \rho^{K-s} \cdot (1-\rho)\right). \quad \overline{\lambda} = \lambda \cdot (1 - P_K) \qquad L = L_q + \frac{\overline{\lambda}}{\mu}$$

M/M/1//N:

$$\rho = \lambda / \mu$$

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = \begin{cases} N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{N!}{(N-n)!}\rho^n & n = 1,2,\ldots,N \\ 0 & n = N+1, N+2,\ldots \end{cases} \qquad C_0 = 1$$

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!}\rho^n \cdot P_0 & n = 0,1,2,\ldots,N \\ 0 & n = N+1, N+2,\ldots \end{cases} \qquad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\rho^n}$$

$$L_q = N - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1-P_0) \qquad \bar{\lambda} = (N-L)\cdot\lambda$$

M/M/s//N:

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & n = 1,2,\ldots,s-1 \\ \frac{N!}{(N-n)!\,s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} & n = s, s+1,\ldots,N \\ 0 & n = N+1, N+2,\ldots \end{cases} \quad i \;\; C_0 = 1$$

$$P_n = C_n \cdot P_0 = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 & n = 1,2,\ldots,s-1 \\ \frac{N!}{(N-n)!\,s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} \cdot P_0 & n = s, s+1,\ldots,N \\ 0 & n = N+1, N+2,\ldots \end{cases} \qquad \bar{\lambda} = (N-L)\cdot\lambda$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{N!}{(N-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{N} \frac{N!}{(N-n)!\,s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}} \qquad L_q = \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)\cdot P_n = \sum_{n=s}^{N-s}(n-s)\cdot P_n$$

M/G/1:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \qquad L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} \qquad P_0 = 1-\rho$$

2.13 Bibliografia

- Hillier F.S., Lieberman J.G. "Introduction to Operations Research". Holden Day, 1986
- Winston W.L. "Operations Research. Applications and Algorithms". PWS-Kent Publishing Company. 1991.
- Trivedi K.S. "Probability and Statistics with Reliability, Queueing and Computer Science Applications". Prentice Hall Inc. 1982.
- Kleinrock L. "Queueing Systems. Vols. I and II". Wiley Science 1976.