UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH Departament d'Estadística i Investigació Operativa	**TERCER CONTROL DE TEORIA** Programació Lineal i Entera, curs 2013-14 2on curs Grau en Estadística UB-UPC
NOM ALUMNE:	

	Temps estimat	Punts	Puntuació			Material d'ajut.
Test	15min	2 pt	C:	I:		Cap.
Exercici 1	75min	a) 4.pts				Amb transparències de teoria i calculadora.
		b) 4 pts				
Total	90min	10 pt				**PROHIBIT L'ÚS DE MÒBILS DURANT LA PROVA**

TEST (2 punts / 15min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a), b)** i **c)** si és certa (**Si**) o falsa (**No**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. Considereu el problema (PE) de minimització i la seva relaxació lineal (RL):

a) **Si / No** $K_{PE} \subseteq K_{RL}$. SI

b) **Si / No** $c'x_{RL} \leq c'x_{PE}$, $\forall x_{RL} \in K_{RL}$, $\forall x_{PE} \in K_{PE}$. SÍ

c) **Si / No** $x^*_{PE} \in K_{RL} \Rightarrow z^*_{PE} = z^*_{RL}$. NO

TEST 2. Donades dues formulacions vàlides $(PE1)$ i $(PE2)$ del problema de maximització (PE), llavors:

a) **Si / No** $K_{PE1} \subset K_{PE2}$. NO

b) **Si / No** $K_{RL1} \subset K_{RL2} \Rightarrow (PE1)$ és més forta que $(PE2)$. SÍ

a) **Si / No** $K_{RL1} \subset K_{RL2} \Rightarrow z^*_{PE1} > z^*_{PE2}$. NO

TEST 3. Considereu el problema (PE1) de minimització i les relaxacions lineal (RL1) i (RL2) de les dues primeres iteracions de l'algorisme de plans secant de Gomory:

a) **Si / No** $K_{PE1} \subseteq K_{RL2} \subseteq K_{RL1}$. SÍ

b) **Si / No** $z_{RL1} \geq z_{RL2} \geq z_{PE}$. NO

c) **Si / No** $x^*_{RL1} \in K_{RL2}$. NO

TEST 4. Quan apliquem un algorisme de Branch&Cut a un problema de (PE):

a) **Si / No** Les fites $\underline{z}^*_{PEi}$ són, en general, millors que les que s'obtenen amb el Branch and Bound. SÍ

b) **Si / No** Els criteris de ramificació son diferents als de l'algorisme de Branch&Bound. NO

c) **Si / No** Sempre realitzarà un nombre d'iteracions igual o inferior a les del Branch&Bound. SÍ

TEST 5. Sigui $\mathcal{B}^*$ l'òptim de la relaxació lineal del problema (PE1) a la iteració 1 de l'algorisme de Gomory i $\widetilde{\mathcal{B}}$ la base inicial a partir de la qual es reoptimitzarà amb el símplex dual:

b) **Si / No** La base $\widetilde{\mathcal{B}}$ serà factible dual infactible primal. SÍ

c) **Si / No** La base $\widetilde{\mathcal{B}}$ té les mateixes variables bàsiques que $\mathcal{B}^*$. NO

d) **Si / No** Els vector de costos reduïts associat a $\widetilde{\mathcal{B}}$ té una component més que l'associat a $\mathcal{B}^*$. NO

NOM ALUMNE:

EXERCICI 1. (8 punts / 75min / amb transparències de teoria i calculadora)
Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases}\min & c_1x_1 & +c_2x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \leq -1 \\ & & x_2 & \leq \dfrac{5}{2} \quad \leftarrow \text{ vigileu!!} \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, enteres\end{cases}$$

a) **(4 punts)** Resoleu el problema (PE) amb $c = [-1 \quad -1]'$ aplicant l'algorisme de plans secants de Gomory fent:
- Preneu com a variable de generació de tall x_1 abans que x_2.
- Resoleu la primera relaxació lineal gràficament i les restants reoptimitzant amb el símplex dual.

b) **(4 punts)** Resoleu el problema (PE) amb $c = [1 \quad -1]'$ aplicant l'algorisme de Branch & Cut fent:
- Preneu com a variable de generació de tall i de separació x_1 abans que x_2.
- Resoleu les relaxacións lineals gràficament.

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

a) Transformem la segona constricció per tal que la folga sigui entera i passem a forma estàndar:

$$(PE1)\begin{cases}\min & c_1x_1 & +c_2x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & +x_3 & & = -1 \\ & & 2x_2 & & +x_4 & = 5 \\ & x_1, & x_2 & & & \geq 0, enteres\end{cases}$$

1a iteració Gomory:

- Solució òptima de la relaxació lineal de $(PE1)$, trobada gràficament: $x_{RL1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$
- x_{RL1} no entera ⇒ tall de Gomory: es selecciona $x_1 = 3/2$

$$\mathcal{B} = \{1,2\}\,;\; B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\,;\; B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\,;\; x_B = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} = \{3,4\}\,;\; A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\,;\; V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + \lfloor v_{13} \rfloor x_3 + \lfloor v_{14} \rfloor x_4 \leq \lfloor x_1^* \rfloor\,;\; x_1 + \lfloor 1 \rfloor x_3 + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor x_4 \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor\,;\; \boxed{x_1 + x_3 \leq 1\ (r3)}$$

2a iteració Gomory:

- Solució de la relaxació lineal de (PE2): reoptimització amb el símplex dual a partir de $x_{RL1}^* = [x_1, x_2]' = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]'$ per adició de $x_1 + x_3 + x_5 = 1\ (r3) \rightarrow a_{m+1} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$
  - $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a_{B_{m+1}}B^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$

$$\mathcal{N} = \{3,4\}, A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} r' = r'_{RL1} = [0 \quad 0] - [-1 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{r_3}{1} & \overset{r_4}{1} \end{bmatrix} \geq 0$$

  - **Símplex dual, 1a iteració**: $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}\,, \mathcal{N} = \{3, 4\}$

NOM ALUMNE:

- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p :

$$x_B = x_B = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 5 \text{ v.b.sortint}}$$

- Identificació de problema (D) il·limitat :

$$d'_{r_N} = \beta_3 A_N = [-1 \quad -1/2 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad -1/2] \ngeq 0$$

- Sel. v.n.b. d'entrada q:

$$\theta_D^* = \min\left\{-r_j/d_{r_{N_j}} : j \in \mathcal{N}, d_{r_{N_j}} < 0\right\} = \min\left\{\frac{-1}{-1/2}\right\} = 2 \Longrightarrow \boxed{q = 4}$$

- Canvi de base i actualitzacions:

$$\mathcal{B} \leftarrow \{1,2,4\}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to Bx_B = b, \begin{cases} x_1 & -x_2 & & = & -1 \\ & x_2 & +x_4 & = & 5 \\ x_1 & & & = & 1 \end{cases} \to x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

– Símplex dual, 2a iteració: $\mathcal{B} = \{1,2,4\}, \mathcal{N} = \{3,5\}$

- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_B \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{òptim}}$

• $x_{RL2}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ entera $\Rightarrow \boxed{x_{PE1}^* = x_{RL2}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$

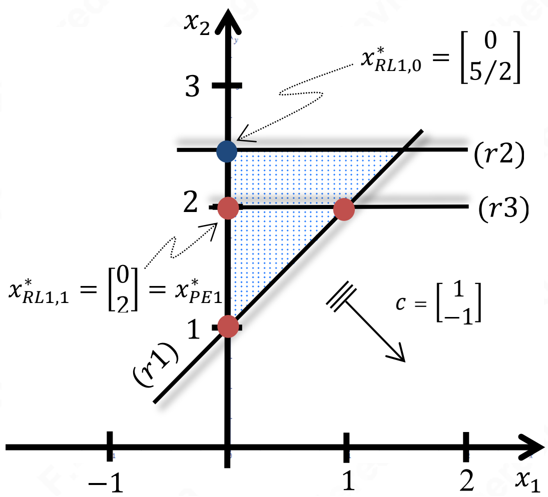
b) Representació gràfica:

$$(PE1) \begin{cases} \min & x_1 & -x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & +x_3 & & = -1 \\ & & 2x_2 & & +x_4 & = 5 \\ & x_1, & x_2 & & & \geq 0, enteres \end{cases}$$

Iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de $(RL1)$ amb un tall de Gomory**:
  – Resolució de $(RL1{,}0)$: $x_{RL1,0}^* = [0 \quad 5/2]', z_{RL1,0}^* = -\frac{5}{2} \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := -2$
  – Tall de Gomory sobre $x_{RL1,0}^*$ associat a x_2:
    - $\mathcal{B} = \{2,3\}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$
    - $A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$
    - $x_2 + \lfloor 1/2 \rfloor x_4 \leq \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \to \boxed{x_2 \leq 2 \; (r3)}$
  – Resolució de $(RL1{,}1) = (RL1{,}0) + (r3)$: $x_{RL1,1}^* = [0 \quad 2]', z_{RL1,1}^* = -2 \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := -2$.
- **Eliminació:** $x_{RL1,1}^* = [0 \quad 2]' = x_{PE1}^* \Rightarrow$ s'elimina $(PE1)$: $z^* \leftarrow z_{PE1}^* = -2, x^* \leftarrow x_{PE1}^*, L \leftarrow L \backslash \{(PE1)\} = \emptyset$

Iteració 2: $L = \emptyset \Rightarrow x_{PE1}^* = x^* = [0 \quad 2]', z_{PE1}^* = z^* = -2.$



Gràfic apartat b)