Llista de problemes (3)

1.23 Estudieu si són oberts els següents conjunts:

(a) $A = \{(x,y) \mid x > 0,\ y < x^2\}$, (b) $B = \{(x,y) \mid x \neq 0,\ y \neq 0\}$

(c) $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$ (d) $D = \{(x,y,z) \mid z > x^2+y^2\}$

1.24 Determineu les fronteres dels conjunts del problema anterior

1.25 Calculeu els següents límits (si existeixen)

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos xy}{1+y}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x - 1}{x^2+y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$

1.26 Calculeu els límits de

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (e^{x^2}, 1+x)$ en $x_0 = 2$

(b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(\dfrac{y}{2-\sin x}, \operatorname{arctg}(xy)\right)$ en $(x_0,y_0) = (1,1)$

1.27 (a) Useu la regla de l'Hôpital per calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^3}$

(b) Existeix $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sin 2x - 2x + y}{x^3 + y}$?

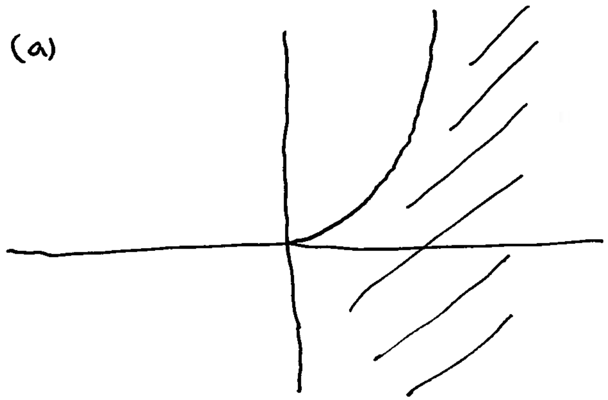
1.28 Proveu que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y e^x + \sin x + (xy)^4$ és contínua.

1.29 Es pot fer $f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$ contínua definint-la convenientment en $\{(x,y) \mid x+y=0\}$

1.30 Proveu que si $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és lineal, llavors és contínua

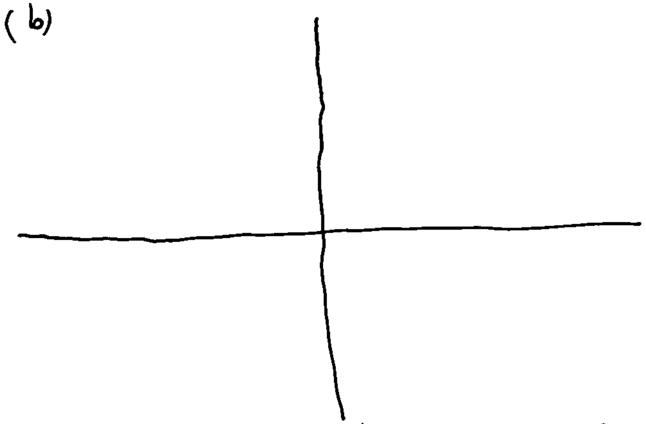
1.23, 1.24

(a)



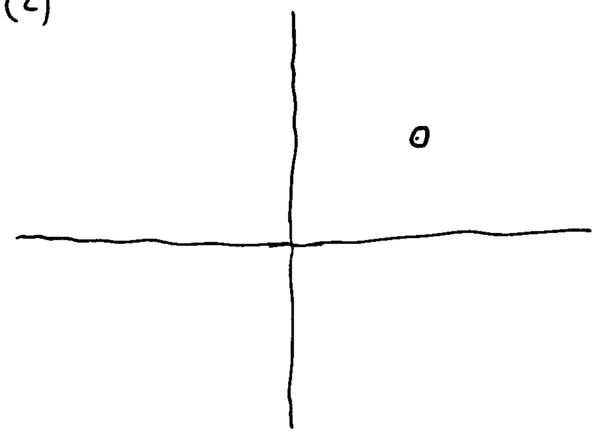
$Fr\ A = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y = x^2\} \cup \{(x,y) \mid x = 0,\ y \leq 0\}$

(b)



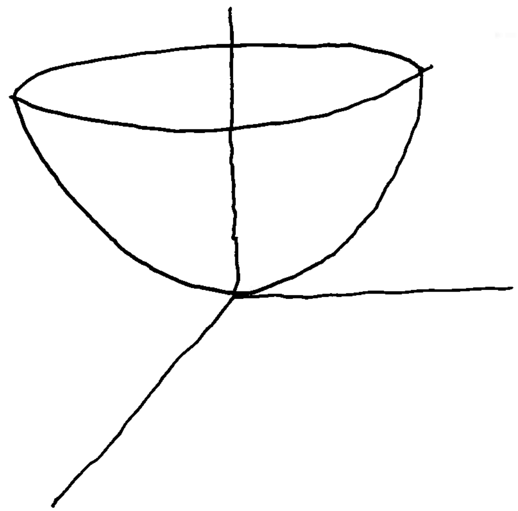
$Fr\ B = \{(x,y) \mid x = 0\} \cup \{(x,y) \mid y = 0\}$

(c)



$Fr\ C = \{(1,1)\}$

(d)



$Fr\ D = \{(x,y,z) \mid z = x^2 + y^2\}$

1.25

(a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy)}{1+y} = \frac{\cos 0}{1+0} = 1$$

(b) és indeterminat

límit segons $y = mx$, $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2 + m^2x^2} \overset{\text{si } \exists}{=} \frac{1}{1+m^2} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

El límit depèn de la recta $\Rightarrow \nexists \lim$

(c) és indeterminat

límit segons $y = mx$, $$\lim_{x\to 0} \frac{(mx)^2}{\sqrt{x^2 + (mx)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2}{\sqrt{(1+m^2)\,x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}} \frac{x^2}{|x|} = 0$$

Acotem

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \le \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{y^2}{\sqrt{y^2}} = \frac{y^2}{|y|} = \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{y}{|y|}\, y} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

1.25 (d) $\lim \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$

és indeterminat.

límit segons $y = mx$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-mx)^2}{x^2+m^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-m)^2 x^2}{(1+m^2)\, x^2} = \dfrac{(1-m)^2}{1+m^2}$

El límit depèn de la recta $\Rightarrow \nexists \lim$

1.26

(a) $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2} f_1(x) = \lim_{x \to 2} e^{x^2} = e^4 \\ \\ \lim_{x \to 2} f_2(x) = \lim_{x \to 2} (1+x) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = (e^4, 3)$$

(b) $f(x,y) = \left(f_1(x,y), f_2(x,y)\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{(x,y)\to(1,1)} f_1(x,y) = \lim \dfrac{y}{2-\sin x} = \dfrac{1}{2-\sin 1} \\ \\ \lim_{(x,y)\to(1,1)} f_2(x,y) = \lim \operatorname{arctg}(xy) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \left(\frac{1}{2-\sin 1}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$\sin x$ és la composició : $(x,y) \longmapsto x$ (és contínua)
$t \longmapsto \sin t$

$\operatorname{arctg}(xy)$ " $(x,y) \longmapsto xy$ (és contínua)
$t \longmapsto \operatorname{arctg} t$

1.27

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)\cdot 2 - 2}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(2x)\cdot 4}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(2x)\cdot 8}{6} = -\frac{8}{6}$$

El límit és indeterminat

Límit segons la recta $y=0$: $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^3} = -\frac{4}{3}$$

Límit segons la recta $x=0$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{0+y}{0+y} = \lim_{y\to 0} 1 = 1$$

No existeix $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$

1.28 $f(x,y) = y e^x + \sin x + (xy)^4$

$(x,y) \longmapsto x$
$t \longmapsto e^t$ $\Rightarrow$ $(x,y) \mapsto e^x$ és contínua $\Rightarrow$ $y e^x$ és contínua en $\mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto x$
$t \longmapsto \sin t$ $\Rightarrow$ $\sin x$ és contínua en $\mathbb{R}^2$

$(xy)^4$ és polinomi

$\Rightarrow$ f és contínua en $\mathbb{R}^2$

1.29

$$f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$$

$$(x,y) \xmapsto{g} x+y$$

$$t \xmapsto[h]{} \frac{\sin t}{t}$$

Podem estendre $h(t)=\frac{\sin t}{t}$ a $t=0$ per fer-la contínua ?

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{1} = 1$$

Llavors $h(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & , \text{ si } t \neq 0 \\ 1 & , \text{ si } t = 0 \end{cases}$ és contínua en $\mathbb{R}$

Definim

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y} & , \text{ si } x+y \neq 0 \\ 1 & , \text{ si } x+y=0 \end{cases}$$

Llavors $f = h \circ g$ i és contínua.

1.30 Comencem amb el cas particular $n = m = 2$

Si $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ és lineal, A té matriu $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

Cada component és contínua $\Rightarrow$ A és contínua

En el cas general $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A té matriu $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Cada component és polinòmica (de grau 1) i per tant és contínua.