UNIVERSITAT DE BARCELONA

Departament d'Estadística

Facultat de Biologia
Avda Diagonal, 645
08028 Barcelona

Unitat 3. Variables aleàtories i funcions de distribució. SOLUCIONS

1. (a) Si anomenem c ="s'ha obtingut una cara" i +="s'ha obtingut una creu", aleshores l'espai mostral és

$\Omega = \{\omega_1 = (c, c, c), \omega_2 = (c, c, +), \omega_3 = (c,+,c), \omega_4 = (+, c, c), \omega_5 = (c, +, +), \omega_6 = (+, c, +), \omega_7 = (+, +, c), \omega_8 = (+, +, +)\}$.

La variable aleatòria X pren els valors:

$X(\omega_1) = 3$, $X(\omega_2) = X(\omega_3) = X(\omega_4) = 1$, $X(\omega_5) = X(\omega_6) = X(\omega_7) = -1$, $X(\omega_8) = -3$.

$$(b)\ f(x) = \begin{cases} 1/27 & si\ x = -3, \\ 2/9 & si\ x = -1, \\ 4/9 & si\ x = 1, \\ 8/27 & si\ x = 3, \\ 0 & en\ altre\ cas, \end{cases} \qquad (c)\ F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < -3, \\ 1/27 & si\ -3 \le x < -1, \\ 7/27 & si\ -1 \le x < 1, \\ 19/27 & si\ 1 \le x < 3, \\ 1 & si\ x \ge 3. \end{cases}$$

(d) $P(X > 0) = 20/27$, $P(-1 < X \le 3) = 20/27$.

2.

$$f(x) = \begin{cases} 0.729 & si\ x = -250, \\ 0.243 & si\ x = 250, \\ 0.027 & si\ x = 750, \\ 0.001 & si\ x = 4750, \\ 0 & en\ altre\ cas, \end{cases}$$

3.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x<2, \\ (k-1)/10 & si\ k \le x < k+1,\ k = 2, 3, \ldots. 10, \\ 1 & si\ \ x \ge 11. \end{cases}$$

(b) $P(X > 7) = 2/5$, $P(X \le 5) = 2/5$, $P(3 \le X \le 8) = 3/5$.

4. $P(X = k) = 1/25$, per $k = 1, 2, \ldots, 25$.

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Departament d'Estadística

Facultat de Biologia
Avda Diagonal, 645
08028 Barcelona

5. (a)

k	$P(X = k)$	$P(X \leq k)$
0	0.0498	0.0498
1	0.1494	0.1992
2	0.2240	0.4232
3	0.2240	0.6472
4	0.1680	0.8152
5	0.1008	0.9160
6	0.0504	0.9664
7	0.0216	0.9880

6. $k = 12/25$, $P(1 \leq X \leq 3) = 22/25$.

7. (a) $k = 3/2$, (b) $F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x<-1, \\ 1/2(x^3 + 1) & si\ -1 \leq x < 1, \\ 1 & si\ x \geq 1. \end{cases}$

(c) $P(X \geq 2) = 0$, $P(-1/2 \leq X \leq 1/2) = 1/8$.

8. (a) $k = 1/5$,
(c) $P(X \leq 5) = 1-1/e \approx 0.6321$, $P(0 \leq X \leq 8) = 1-e-8/5 \approx 0.7981$.

9.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1/100e^{-x/100} & si\ x \geq 0, \\ 0 & si\ x<0 \end{cases}$

(b) $P(X > 200) = e-2 \approx 0.135$

(c) $P(X > 200/X > 150) = e-1/2 \approx 0.6065$

10. (b) $P(X < 1/2) = 3/4$, $P(X > 3/4) = 1/16$,

(c) $f(x) = 2(1 - x)$, si $0 < x < 1$, i $f(x) = 0$ en altre cas.

11.

(a) $k = 1/12$, (b) $F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x<0, \\ (1/12)\ x\ (1 + x^2/3) & si\ 0 \leq x < 3, \\ 1 & si\ x \geq 3. \end{cases}$

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Departament d'Estadística

Facultat de Biologia
Avda Diagonal, 645
08028 Barcelona

(c) P(1<X<2)=0.278, P(X<1)=0.111.

12. P(X > 65/X > 55) = 1/3.

13.

(a) k = 1/4, (b) $F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < -2, \\ x/4 + ½ & si\ -2 \le x < 2, \\ 1 & si\ x \ge 2. \end{cases}$

(c) P(X > 1.8) = 0.05.

14. (a) k = ¾,
(b) $f_Y(y) = 3/400\ (y/100 - 1)(3 - y/100),\ si\ 100 \le y \le 300$,
(c) $f_z(z) = 3/8\ (z/2 - 1)(3 - z/2),\ si\ 2 \le z \le 6$,
(d) la proporció d'eixos que es llencen és un 5.6%.

15. (a) $f_Y(y) = 1/(2\sqrt{y}),\ si\ 0 < y \le 1$,
(b) $f_Y(y) = 2y,\ si\ 0 < y \le 1$,
(c) $f_Y(y) = 1/y^2,\ si\ 1 \le y < +\infty$.