UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

PRIMER CONTROL DE TEORIA
Programació Lineal i Entera, curs 2013-14
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM ALUMNE:

	Temps estimat	Punts	Puntuació	Material d'ajut.
Test	15min	2 pt		Cap.
Exercici 1	75min	a) 2pt		Amb transparències de teoria i calculadora.
		b1) 1pt		
		b2) 1pt		
		b3) 1pt		
		c) 3pt		
Total	90min	10 pt		**PROHIBIT L'ÚS DE MÒBILS DURANT LA PROVA**

TEST (2 punts / 15min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a), b)** i **c)** si és certa (**Si**) o falsa (**No**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. Diem que un conjunt $S \subset \mathbb{R}^n$ és convex si:

a) **Si / No** $\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0,1]: \lambda x + (1-\lambda) y \in S$ **(S)**

b) **Si / No** $\forall x, y \in S, \forall \lambda \in]0,1[: \lambda x + (1-\lambda) y \in S$ **(N)**

c) **Si / No** $\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0,1]: (1-\lambda) x + \lambda y \in S$ **(N)**

TEST 2. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n | \, Ax = b, x \geq 0\}$:

a) **Si / No** Conté com a mínim una solució bàsica factible. **(S)**

b) **Si / No** Conté com a mínim una linia. **(N)**

c) **Si / No** És un polítop. **(N)**

TEST 3. Considereu x s.b.f. no degenerada i d d.b.f. de descens sobre x. Prenem $y = x + \theta d$ amb $\boldsymbol{\theta} > \boldsymbol{\theta}^*$. Llavors:

a) **Si / No** y és una s.b.f. adjacent a x. **(N)**

b) **Si / No** y no és una s.b.f. adjacent a x, però és una solució factible. **(N)**

c) **Si / No** y no és factible però $c'y < c'x$. **(S)**

TEST 4. Sigui P un poliedre no buit en forma estàndar no degenerat, i sigui x s.b.f. de P i r el vector de costos reduits. Llavors:

a) **Si / No** Si x és òptima $\Rightarrow \; r \geq [0]$. **(S)**

b) **Si / No** Si $r \geq [0] \Rightarrow x$ és òptima. **(S)**

c) **Si / No** Existirà una solució bàsica factible òptima. **(N)**

TEST 5. Donades y i x s.b.f. adjacents no degenerades, la relació $c'y = c'x + \theta^* r_q$:

a) **Si / No** Ens diu que el valor de la funció objectiu és menor sobre y que sobre x. **(N)**

b) **Si / No** Ens diu que el valor de la funció objectiu és menor sobre x que sobre y. **(N)**

c) **Si / No** Permet afirmar que $\theta^* > 0$. **(N)**

EXERCICI 1. (8 punts / 75min / amb transparències de teoria i calculadora)

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(\mathrm{P})\begin{cases} \min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & -x_1 & +2x_2 & \geq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

a) **(2 punts)** Trobeu totes les solucions bàsiques de (P) indicant, per cadascuna d'elles, si és factible i/o degenerada.

b) Volem estudiar ara les direccions bàsiques factibles associades a la solució bàsica factible $\mathrm{B}=\{2,3\}$. Respongueu a les següents qüestions sense usar l'expressió $r_q = c_q - c_B' B^{-1} A_q$:

   1) **(1 punt)** Trobeu totes les direccions bàsiques factibles existents sobre la s.b.f. $\mathcal{B}=\{2,3\}$.

   2) **(1 punt)** Indiqueu si les direccions trobades a l'apartat anterior son o no direccions de descens.

   3) **(1 punt)** A la vista del resultat de l'apartat 2), pot ser $\mathrm{B}=\{2,3\}$ la base òptima de (P)? Perquè? Indiqueu, argumentant en base a les característiques de les d.b.f. trobades, quina és la solució òptima de (P).

c) **(3 punts)** Trobeu la solució òptima de (P) aplicant l'algorisme del símplex de les dues fases.

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

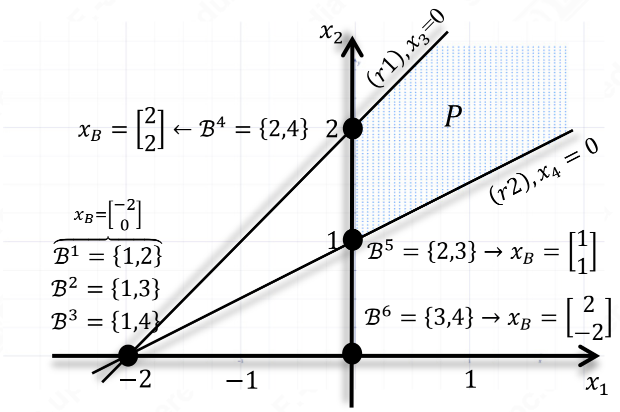
a) Passem a la forma estàndar:

$$(\mathrm{P})\begin{cases} \min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \leq 2 & (r1) \\ & -x_1 & +2x_2 & \geq 2 & (r2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases} \rightarrow (\mathrm{P})_e \begin{cases} \min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & & & & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & =2 & (r1) \\ & -x_1 & +2x_2 & & -x_4 & =2 & (r2) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 & \end{cases}$$

Podem trobar les solucions bàsiques d'aquest problema provant totes les $\binom{4}{2}=6$ combinacions de variables bàsiques ($\mathcal{B}^1=\{1,2\}, \mathcal{B}^2=\{1,3\}, \dots, \mathcal{B}^6=\{3,4\}$) i, per aquelles que tinguin una base associada $B=[A_{B(1)} \quad A_{B(2)}]$ no singular, que ho son totes, calculant el valor de les variables bàsiques $x_B = B^{-1}b$. Per exemple, per la primera seria:

$$\mathcal{B}^1=\{1,2\}\,,\ B^1=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}, x_B^1=\begin{bmatrix}x_1\\ x_4\end{bmatrix}=[B^1]^{-1}b=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 0\end{bmatrix}\,,\ z^1=c_B'x_B=4$$

També es pot fer utilitzant la repressentació gràfica de (P) per a calcular les coordenades dels vèrtexs:



$\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2, \mathcal{B}^3$:

$$x_B^{1,2,3}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 0\end{bmatrix}, x_N^{1,2,3}=[0]$$

$$\mathcal{B}^4: x_B^4=\begin{bmatrix}x_2\\ x_4=2x_2-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}, x_N^4=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}^5: x_B^5=\begin{bmatrix}x_2\\ x_3=2-x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, x_N^5=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}^6: x_B^6=\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}, x_N^6=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

b) Direccions bàsiques factibles associades a la solució bàsica factible B = {2,3}

1) Direccions bàsiques factibles existents sobre la s.b.f. $\mathcal{B} = \{2,3\}$:

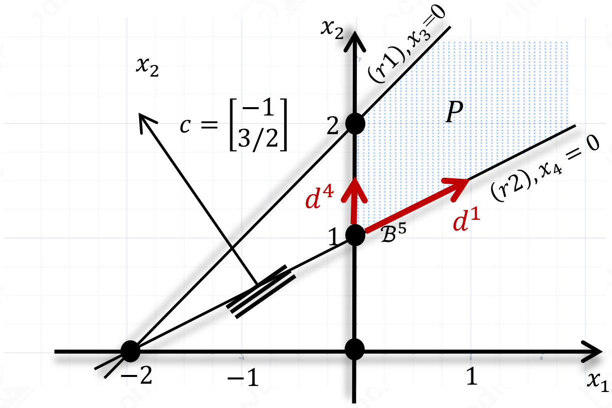
- $q = 1$:
$$d_B^1 = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$
$$d_N = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
- $q = 4$:
$$d_B^4 = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = -B^{-1}A_4 = -\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, d_N^4 = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) De descens? Només cal comprovar la condició necessària i suficient de decreixement $c'd < 0$, que pel problema plantejat equival a $-d_1 + \frac{3}{2}d_2 < 0$

$q = 1: c'd = -d_1 + \frac{3}{2}d_2 = -1 + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow$ de descens.

$q = 4: c'd = -d_1 + \frac{3}{2}d_2 = 0 + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow$ d'ascens.

3) La base $\mathcal{B} = \{2,3\}$ no pot ser la solució òptima de (P) perquè sobre aquesta base existeix una direcció bàsica factible de descens, l'associada a $q = 1$, i això implica que tots els punts de la semirecta $x + \theta d$ tenen un valor de la funció objectiu estrictament inferior a $c'x$. A més, atès que aquesta direcció factible de descens és il·limitada ($d_B \geq [0]$), podem assegurar que el problema (P) no té solució òptima, doncs és il·limitat.



c) Símplex de les dues fases:

$$(\mathrm{P})_e \begin{cases} \min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2 \quad (r1) \\ & -x_1 & +2x_2 & & -x_4 & = 2 \quad (r2) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

Problema de fase I:

$$(P_I) \begin{cases} \min & x_5 & & & & & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 2 \quad (r1) \\ & -x_1 & +2x_2 & & -x_4 & +x_5 & = 2 \quad (r2) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & & \geq 0 \end{cases}$$

1a iteració Fase I: $\mathcal{B}_\mathrm{I} = \{3,5\}, x_B = [2 \quad 2]', \mathcal{N}_I = \{1,2,4\}, z_I = 2$

- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0 \quad 0] - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = [1 \quad -2 \quad 1] \ngeq 0$$
$$\rightarrow \boxed{q = 2}$$

- Direcció bàsica factible : $d_B = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. v.b. de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i: d_{B(i)} < 0} \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\} = \left\{ \frac{2}{1}, \frac{2}{2} \right\} = 1 \Longrightarrow \boxed{p = 2, B(2) = 5}$
- Actualitzacions:
  - $x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 := \theta^* = 1, z_I := z_I + \theta^* r_2 = 0$

- Canvi de base : $\mathcal{B}_{\mathrm{I}} \leftarrow \{3,2\}, \mathcal{N}_I \leftarrow \{4,5\}, x_B = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

2a iteració Fase I: $\mathcal{B}_{\mathrm{I}} = \{3,2\}, \mathcal{N}_I = \{1,4,5\}$

- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 1] - [0 \quad 0] \begin{bmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix} = [0 \quad 1] \geq 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \boxed{\text{òptim fase I}}$$

- La base òptima de la fase I $\mathcal{B}_{\mathrm{I}} = \{3,2\}$ no conté cap variable artificial $\Rightarrow \mathcal{B} = \{3,2\}$és una solució bàsica factible del problema original (P).

1a iteració Fase II: $\mathcal{B} = \{3, 2\}$, $x_B = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \mathcal{N} = \{1,4\}, z = \frac{3}{2}$

- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [-1 \quad 0] - \begin{bmatrix}0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}-1 & 0\\-1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow q = 1$$

- Direcció bàsica factible: $d_B = -B^{-1} A_1 = -\begin{bmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} > 0 \Rightarrow$ **problema il·limitat**.

