7. Juegos cooperativos y redes de expansión a coste mínimo

Esta sección está hecha para facilitar la comprensión de la teoría de los juegos cooperativos con utilidad transferible. No pretende ser una visión exhaustiva de la teoría de juegos cooperativos, sino iniciar un camino para poder trabajar con ellos y aplicar los resultados obtenidos a las redes de expansión a coste mínimo.

La idea de cooperar a estado crucial para el desarrollo de la humanidad. La cooperación, en general, lleva a la obención de unas utilidades que pertenecen al grupo, entonces y de una forma natural surge el problema de cómo repartir entre los cooperantes lo conseguido con dicha cooperación.

7.1. Descripción del juego

Al problema de repartir la utilidad lo llamaremos juego y a los cooperantes les llamaremos agentes o jugadores. Consideraremos que hay un número finito de jugadores que quieren coooperar. Los jugadores se pueden agrupar según su voluntad y a cada agrupación la llamaremos coalición. A la función que nos indica el valor de cada coalición la llamaremos funcion característica del juego. Y que la utilidad sea transferible nos indica que los jugadores negocian con un bien infinitamente divisible.

Los datos esenciales del juego son:

1. El conjunto finito de jugadores, que llamaremos N.
2. Las coaliciones, que son todos los subconjuntos de N y existen 2^N.
3. La función característica del juego que asigna a cada coalición el valor de la coalición en la cooperación. La llamaremos v y es definida

$$v: \begin{array}{ll} 2^N & \longrightarrow \mathbb{R} \\ S & \mapsto v(S) \end{array}$$

con la convención $v(\varnothing) = 0$.

4. La utilidad es transferible.

7.2. Notación del juego

En lo que sigue al conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3, ..., n\}$ lo llamaremos jugadores (e.g. para cuatro jugadores haremos $\{1, 2, 3, 4\}$).

Los subconjuntos de N son las llamadas coaliciones, se representarán por letras mayúsculas $S, T, R, ...$ y la letra minúscula correspondiente $s, t, r, ...$ representará el número de jugadores de la coalición (cardinalidad). Así, S tendrá s jugadores. La coalición sin jugadores se denota con el símbolo $\varnothing$ y se llama coalición vacía.

Podemos clasificar los juegos cooperativos en dos tipos , los juegos de ganancias v y los juegos de costes c. Nosotros a partir de ahora nos referiremos a los juegos de costes.

7.3. Problemas introductorios

Problema 7.1 *[Juego de ganancias] Tres jóvenes músicos (**A**ndrea, **B**iel y **C**ósima) deciden formar un conjunto y quieren pactar como cobrar por las actuaciones. Para ello repasan los ingresos anteriores, si **A**, **B** y **C** trabajan solos ganan 100, 150 y 200 euros diarios respectivamente. Cuando formaban los duos **AB**, **AC** y **BC** ganan 300, 250 y 350 euros diarios y si forman el trio **ABC** ganan 600 euros diarios. Aplicar la teoría de juegos para encontrar un reparto que convenza a todos.*

Problema 7.2 *[Juego de costes] Tres vecinos* $1, 2, 3$ *se quieren conectar a un red de cable óptico, la compañia suministradora de servicios les ha dado la siguiente tabla de costes:* $c(1) = 300$ *euros,* $c(2) = 600$ *euros,* $c(3) = 400$ $c(12) = 700$ *euros,* $c(13) = 500$ *euros,* $c(23) = 900$ *euros,* $c(123) = 1000$ *euros. Encontrar un reparto de los costes que convenza a todos los vecinos.*

Problema 7.3 *Tres hermanos se quieren repartir una herencia de 10000 euros pero cada uno de ellos cree que tiene unos derechos por razones especiales de afecto y cercanía con el difunto. El primer hermano piensa que debe recibir 7000 euros, el segundo 6000 y el tercero 4000. Proponer un reparto adecuado que evite la discusión entre los hermanos.*

Ejemplo 7.4 *Sean tres vecinos que viven en casas aisladas* $\{1, 2, 3\}$*, deciden cooperar para instalarse la electricidad en cada una de las casas. Consultada la compa nia de electricidad les da los siguientes números:*

costes individuales	*costes por parejas*	*coste colaborativo*
$c(1) = 5000$ *euros*	$c(12) = 6000$ *euros*	
$c(2) = 3000$ *euros*	$c(13) = 10000$ *euros*	$c(123) = 10500$ *euros*
$c(3) = 5000$ *euros*	$c(23) = 7000$ *euros*	

Encontrar un reparto de costes que no rompa la cooperación entre los vecinos.

7.4. El juego de ahorro

Damos una manera sencilla de convertir un juego de costes en un juego de ganancia.

Dado un juego de costes (N, c) asociamos el juego de ahorro (N, v_c) de la sighiente manera

$$v_c(S) := \sum_{i \in S} c(i) - c(S) \text{ para todo } S \subseteq N.$$

7.5. El juego 0-normalizado

Damos una manera sencilla de convertir un juego en un juego cuyos valores individuales son cero.

Dado un juego (N, v) asociamos el juego (N, v_o) de la sighiente manera

$$v_o(S) := v(S) - \sum_{i \in S} v(i) \text{ para todo } S \subseteq N.$$

7.6. El reparto de costes

El problema consiste en distribuir entre los n agentes el coste del juego, $v(N)$, para ello tomaremos una distribución de los costes que asociará a cada uno de los jugadores un número real x_i para $i = 1, \cdots, n$ el coste que le corresponde. Se puede representar por un vextor $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Re^n$. Es común utilizar la notación $x(S)$ para indicar $\sum_{i \in S} x_i$ que se interpreta como el coste de la coalición S. Por convenio $x(\varnothing) = 0$. El conjunto de todas las distribuciones posibles se denomina conjunto de preimputaciones $I^*(c)$.

Definición 7.5 *El conjunto de preimputaciones de un juego de costes $c \in G^n$ es*

$$I^*(c) := \{x \in \Re^n : x(N) = \sum_{i \in N} x_i = c(N)\}$$

La condición de que la suma de las distribuciones sea igual al coste total del juego $x(N) = c(N)$ se le llama principio de eficiencia.

También podemos definir las imputaciones

Definición 7.6 *El conjunto de imputaciones de un juego de costes $c \in G^n$ es*

$$I(c) := \{x \in \Re^n : x(N) = c(N),\ x_i \leq c(i) \text{ para todo } i = 1, ..., n\}$$

La condición de que el coste adjudicado a un agente sea a lo más el coste individual se le llama principio de racionalidad individual.

7.7. Core del juego

El concepto de Core va ser definido dentro de la Teoría de Juego por Gillies (1953). La idea subyacente en este concepto es la siguiente: Dado que los agentes pueden negociar entre si y formar las coaliciones que les convengan se trata de impedir que una coalición abandone la cooperación debido a que pague menos si va sola de lo que la distribución del juego les dice que tienen que pagar.

Definición 7.7 *Dado un juego cooperativo con función característica c, i conjunto de jugadores o agentes $N = \{1, 2, ..., n\}$, el core del juego c, que denotamos por $C(c)$, es el conjunto de imputaciones $(x_1, ..., x_n)$ que para toda coalición $S \subseteq N$, safisface $x(S) = \sum_{i \in S} x_i \leq c(S)$.*

En forma compacta

$$C(c) = \{x \in \Re^n : x(N) = c(N),\ x(S) \leq c(S) \text{ para toda coalición } S \subseteq N\}.$$

El core no analiza si una distribución es preferida a otra o si una cierta distribución se basa o se deduce de unos determinados principios o axiomas.

Core del problema 7.1

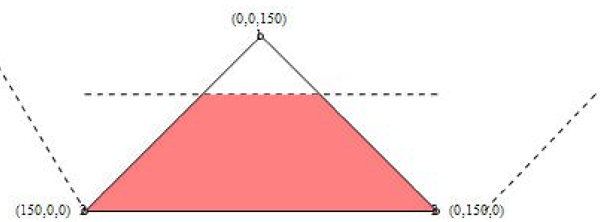
El juego es:

ingresos individuales	ingresos por parejas	ingreso colaborativo
$v(1) = 100$ euros $v(2) = 150$ euros $v(3) = 200$ euros	$v(12) = 300$ euros $v(13) = 250$ euros $v(23) = 350$ euros	$v(123) = 600$ euros

El juego 0-normalizado es:

individuales	por parejas	colaborativo
$v(1) = 0$ euros $v(2) = 0$ euros $v(3) = 0$ euros	$v(12) = 50$ euros $v(13) = -50$ euros $v(23) = 0$ euros	$v(123) = 150$ euros

El core es:



Core del problema 7.2

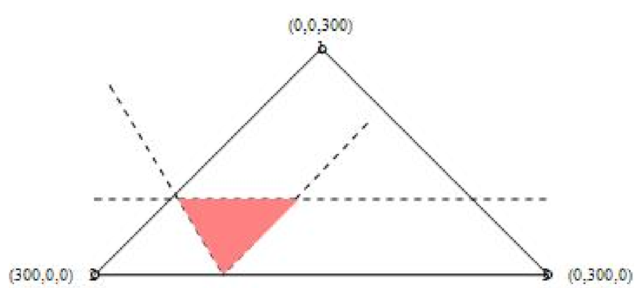
El juego de costes es:

costes individuales	costes por parejas	coste colaborativo
$c(1) = 300$ euros $c(2) = 600$ euros $c(3) = 400$ euros	$c(12) = 700$ euros $c(13) = 500$ euros $c(23) = 900$ euros	$c(123) = 1000$ euros

El juego de ahorro asociado es:

individuales	por parejas	colaborativo
$v_c(1) = 0$ euros $v_c(2) = 0$ euros $v_c(3) = 0$ euros	$v_c(12) = 200$ euros $v_c(13) = 200$ euros $v_c(23) = 100$ euros	$v_c(123) = 300$ euros

El core del juego de ahorro es:



Core del problema 7.3

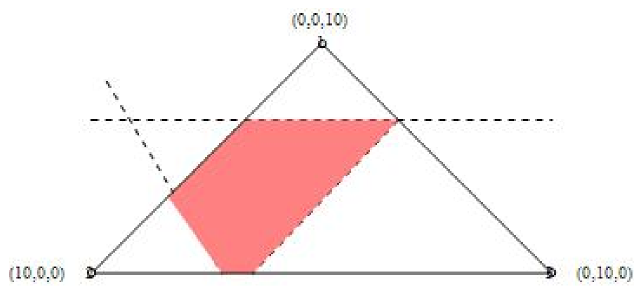
El juego de Bancarrota es: $E = 10000$ y las demandas $d(1) = 7000$, $d(2) = 6000$ y $d(3) = 4000$ euros. La fórmula del juego es

$$v(S) := \text{máx}\{0, E - \sum_{i \in N \setminus S} d(i) \text{ para toda } S \subseteq N\}.$$

si calculamos resulta (en miles de euros)

cobros individuales	cobros por parejas	cobro colaborativo
$v(1) = 0$ euros	$v(12) = 6$ miles de euros	
$v(2) = 0$ euros	$v(13) = 4$ miles de euros	$v(123) = 10$ miles de euros
$v(3) = 0$ euros	$v(23) = 3$ miles de euros	

El core del juego de Bancarrota es:



Core del problema 7.4

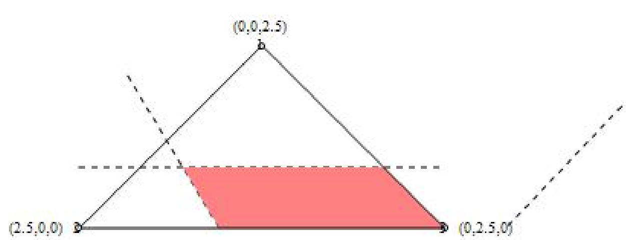
El juego de costes (en miles de euros) es:

costes individuales	costes por parejas	coste colaborativo
$c(1) = 5$ euros	$c(12) = 6$ euros	
$c(2) = 3$ euros	$c(13) = 10$ euros	$c(123) = 10{,}5$ euros
$c(3) = 5$ euros	$c(23) = 7$ euros	

El juego de ahorro asociado es:

individuales	por parejas	colaborativo
$v_c(1) = 0$ euros	$v_c(12) = 2$ euros	
$v_c(2) = 0$ euros	$v_c(13) = 0$ euros	$v_c(123) = 2{,}5$ euros
$v_c(3) = 0$ euros	$v_c(23) = 1$ euros	

El core del juego de ahorro es:



7.8. Valor de Shapley del juego

Primero analizaremos el concepto de marginalidad, básico para entender el análisis del valor de Shapley.

El coste marginal, $C(N) - c(N\backslash i)$, que representa servir a un determinado usuario i es un importante indicador en el momento de repartir los costes totales derivados de un cierto proyecto entre sus participantes. Podemos distinguir entre *costes separables*, directamente imputables a cada usuario y los *costes no separables*. Los primeros se identifican con los costes marginales derivados del servicio a cada agente, mientras que los segundos son los que no son claramente atribuibles a cada agente y se acostumbran a repartir basandose en criterios de proporcionalidad.

En la mayoria de los casos la asignació directa como pago a cada agente de las contribuciones marginales nos llevará probablemente a una infraasignación (o sobreasignación) de los costes.

Veamos el cálculo de las contribuciones marginales con un ejemplo. Sea el juego de costes del ejemplo anterior, los costes marginales son:

Del agente 1	$c(123) - c(23) = 10500 - 7000 = 3500$ euros
Del agente 2	$c(123) - c(13) = 10500 - 10000 = 500$ euros
Del agente 3	$c(123) - c(12) = 10500 - 6000 = 4500$ euros
Total	8500 euros

En este caso hay una infraasignación (es menor que 10500 euros), es decir, la asignación es ineficiente.

Para evitar el problema de la ineficiencia se puede plantear la hipótesis de que los agentes se incorporan al colectivo siguiendo un sierto orden, y que la valoración de la contribución marginal (la medida de la su aportación) se ha de hacer en el momento de su incorporación.

En el problema anterior, simbolizamos el orden por $\theta = \{3, 1, 2\}$, teniendo en cuenta esta ordenación, las contribuciones marginales a las colaliciones sucesivas serian:

	Contribución marginal	
Agente 3	$c(3) = 5000$ euros	es el primero que paga
Agente 1	$c(13) - c(3) = 5000$ euros	se incorpora después del agente 3
Agente 2	$c(123) - c(13) = 500$ euros	llega en último lugar

Según ese orden el reparto de costes seria $m^\theta(c) = (5000, 500, 5000)$ que es eficiente ($m^\theta(c)$ se le llama vector de contribuciones marginales asociado al orden θ). Para resolver la arbitrariedad de la ordenación escogida y, por tanto, de los costes de los agentes Shapley pensó en proponer alguna distribución que tuviese en cuenta todas las posibles ordenaciones de los agentes. En general:

Ordenación θ	Agente 1	Agente 2	Agente 3
$(1,2,3)$	$c(1)$	$c(12)-c(1)$	$c(123)-c(12)$
$(1,3,2)$	$c(1)$	$c(123)-c(13)$	$c(13)-c(1)$
$(2,1,3)$	$c(12)-c(2)$	$c(2)$	$c(123)-c(12)$
$(2,3,1)$	$c(123)-c(23)$	$c(2)$	$c(23)-c(2)$
$(3,1,2)$	$c(13)-c(3)$	$c(123)-c(13)$	$c(3)$
$(3,2,1)$	$c(123)-c(23)$	$c(23)-c(3)$	$c(3)$

En nuestro caso:

Ordenación θ	Agente 1	Agente 2	Agente 3
$(1,2,3)$	5000	$6000-5000=1000$	$10500-6000=4500$
$(1,3,2)$	5000	$10500-10000=500$	$10000-5000=5000$
$(2,1,3)$	$6000-3000=3000$	3000	$10500-6000=4500$
$(2,3,1)$	$10500-7000=3500$	3000	$7000-3000=4000$
$(3,1,2)$	$10000-5000=5000$	$10500-10000=500$	5000
$(3,2,1)$	$10500-7000=3500$	$7000-5000=2000$	5000
Total	25000	10000	28000
Media $\Phi(c)$:	4166,66	1666,66	4666,66

En este cuadro el cobro de cada agente se interpreta como la suma ponderada de las contribuciones marginales del agente en las diferentes coaliciones. El factor de ponderación es la probabilidad que tiene el agente de ser valorado de acuerdo con una determinada contribución marginal. Esta interpretación probabilíca hace que el valor de Shapley se pueda entender coomo el valor que cada uno de los agentes puede esperar, como una medida a priori de su contribución al juego. Teniendo esto en cuenta podemos expresar el valor de Shapley como

$$\Phi(c) = \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in S_\pi} m^\theta(c).$$

En general

Definición 7.8 *Sea (N,c) un juego cooperativo de utilidad transferible. El valor de Shapley de este juego $\Phi(c) = (\Phi_1(c), \Phi_2(c), ..., \Phi_n(c))$, se define como*

$$\Phi_i(c) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma(S) \cdot [c(S \cup i) - c(S)], \quad i = 1,..,n,$$

donde $\gamma(S) = \frac{s!(n-s-1)!}{n!}$ y s es el número de agentes que hay en la coalición S.

Valor de Shapley del problema 7.1

Ordenación θ	Agente 1	Agente 2	Agente 3
$(1,2,3)$	100	$300-100=200$	$600-300=300$
$(1,3,2)$	100	$600-250=350$	$250-100=150$
$(2,1,3)$	$300-150=150$	150	$600-300=300$
$(2,3,1)$	$600-350=250$	150	$350-150=200$
$(3,1,2)$	$250-200=50$	$600-250=350$	200
$(3,2,1)$	$600-350=250$	$350-200=150$	200
Total	900	1350	1350
Media $\Phi(v)$:	150	225	225

El valor de Shapley es $\Phi(v)=\{150,225,225\}$. Que pertenece al core.

Valor de Shapley del problema 7.2

Lo calcularemos en el juego de ahorro asociado.

Ordenación θ	Agente 1	Agente 2	Agente 3
$(1,2,3)$	0	200	100
$(1,3,2)$	0	100	200
$(2,1,3)$	200	0	100
$(2,3,1)$	200	0	100
$(3,1,2)$	200	100	0
$(3,2,1)$	200	100	0
Total	800	500	500
Media $\Phi(v_c)$:	133,33	83,33	83,33

El valor de Shapley es $\Phi(c)=\{300,600,400\}-\{133{,}33,83{,}33,83{,}33\}=\{166{,}66,516{,}66,316{,}66\}$. Que pertenece al core.

Valor de Shapley del problema 7.3

Ordenación θ	Agente 1	Agente 2	Agente 3
$(1,2,3)$	0	6	4
$(1,3,2)$	0	4	6
$(2,1,3)$	6	0	4
$(2,3,1)$	7	0	3
$(3,1,2)$	4	6	0
$(3,2,1)$	7	3	0
Total	24	19	17
Media $\Phi(v)$:	4	3,16	2,83

El valor de Shapley es $\Phi(vc)=\{4,3{,}16,2{,}83\}$. Que pertenece al core.

Valor de Shapley del problema 7.4

Lo calcularemos en el juego de ahorro asociado.

Ordenación θ	Agente 1	Agente 2	Agente 3
$(1,2,3)$	0	2	0,5
$(1,3,2)$	0	2,5	0
$(2,1,3)$	2	0	0,5
$(2,3,1)$	1,5	0	1
$(3,1,2)$	0	2,5	0
$(3,2,1)$	1	1,5	0
Total	4,5	8,5	2
Media $\Phi(v_c)$:	0,75	1,41	0,33

El valor de Shapley es $\Phi(c) = \{5,3,5\} - \{0{,}75, 1{,}41, 0{,}33\} = \{4{,}25, 1{,}59, 4{,}67\}$. Que pertenece al core.

7.9. Juegos asociados a una red

Sea $N = \{1,2,3,...,n\}$ representando el conjunto de agentes o nodos, y sea $\{0\}$ el nodo que representa la *fuente* o el *suministrador* y representaremos por N_0 al conjunto $N_0 = \{0,1,2,3,...,n\}$.

Consideramos el grafo $G = (N_0,\ Arcos)$ asumiendo que es completo, no dirigido, no contiene bucles ni, múltiples arcos unen dos nodos dados.

Los costes vienen dados por la matriz simétrica $C = \{c_{ij}\}$ en la cual $c_{ii} = 0$ para todo $i \in N$ y $c_{ij} \geq 0$ define el coste del arco (i,j) con $i \neq j$.

También asumimos que el suministro se puede hacer a cualquier coalición $S \subseteq N$ mediante los arcos que unen los agentes de $S \cup \{0\}$ entre si.

Para cualquier coalición $S \subseteq N$, asumiremos que $T_{S_0} = (S \cup \{0\}, C_{S_0})$ representa el grafo conectado de coste mínimo (necesariamente este grafo está contenido en G) y es necesariamente un árbol de expansión de coste mínimo (minimal cost spanning tree, en corto *mcst*).

Dado un grafo, un *mcst* puede ser construido eficientemente mediante una algoritmo (i.e. Kruskal (1956) o Prim (1957)). Nosotros construiremos el juego usando los *mcst* hallados.

7.9.1. Juegos de árboles de expansión con coste mínimo

Sea el grafo completo $G = (N_0, E)$ donde E es el conjunto de arcos del mismo. Para cada coalición de agentes $S \subseteq N$ definiremos $T_S = (N_S, E_s)$ el grafo de coste mínimo que conecta S con la fuente y, además, escribiremos E_{S_0} como el subconjunto de arcos que unen los nodos del conjunto $S_0 = S \cup \{0\}$.

Sea $C = \{c_{ij}\}$ la matriz de costes. El juego de árbol de expansión con coste mínimo se define como sigue

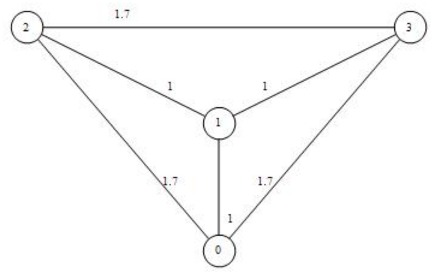
Definición 7.9 *El juego mcst(N,c), es el definido mediante el conjunto de jugadores o agentes N y la función de costes c*

$$c(S) = \sum_{(i,j)\in E_{S_0}} c_{ij} \ \textit{para cada}\ S \subseteq N,$$

conviniendo que $c(\varnothing) = 0$.

En este juego, y en orden a calcular la función c, sólo se permite a la coalición usar los costes de los arcos que están contenidos en E_{S_0}.

Ejemplo 7.10 *Aplicar lo anterior al grafo de la figura*



La función del juego $c(S)$ es:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$c(S)$	1	1.7	1.7	2	2	3.4	3

7.9.2. Juegos de conexión a una fuente mediante un árbol fijo

Consideramos ahora el problema de conexión de n usuarios a una fuente 0 con coste mínimo pero con la condición de que únicamente son posibles las conexiones dentro de un árbol fijo, este problema ha sido estudiado por T (Mejiddo 1978), Koster, Molina, Spprumont y Tijs (1998)). Todo árbol tiene la propiedad de que para cada Nodo $i \in N$ existe un único camino que une el Nodo i con la fuente.

El coste $c(i)$ lo podemos interpretar como el coste de conectar cada agente i con su predecesor inmediato en el árbol T o el coste de construcción de la arista (predecesor de i, i). Podemos suponer que la fuente no está ocupada por un agente.

El juego de conexión a una fuente mediante un árbol fijo se define como sigue

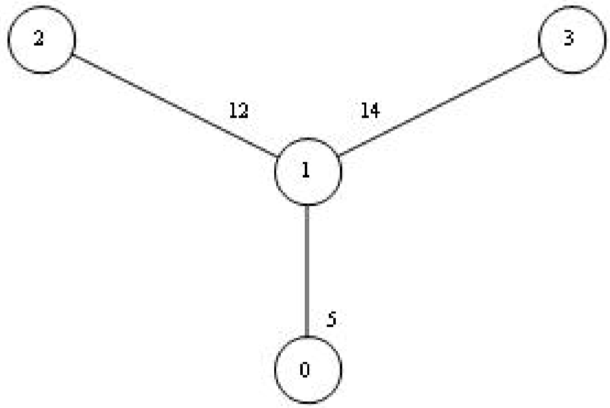
Definición 7.11 *El juego de conexión a una fuente mediante un árbol fijo (N, c), es el definido mediante el conjunto de jugadores o agentes N y la función de costes c*

$$c(S) = \sum_{i \in T_S} c(i) \text{ para toda } S \subseteq N,$$

conviniendo que $c(\varnothing) = 0$.

Recordamos que T_S es el subárbol con los arcos estrictamente necesarios para conectar los nodos de S a la fuente.

Ejemplo 7.12 *Aplicar esta definición al grafo siguiente*



La función del juego $c(S)$ es:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$c(S)$	5	17	19	17	19	31	31

7.9.3. El juego del optimista

Dado el grafo (N_o, C), Bergantiños y Vidal Puga (2007) le asocian el juego TU que llaman del optimista v_C^o definiendolo como sigue:

Para cada coalición de agentes $S \subset N$ tenemos que $v_C^o(S) =$ mínimo coste de conectar los agentes de S al fuente asumiendo que los agentes de $N \diagdown S$ ya están conectados y los agentes en S pueden conectarse a la fuente a través de los agentes en $N \diagdown S$.

Formalizando, dado un $mcst(N_o, C)$ y $S, T \subseteq N$ junto con que $S \cap T = \varnothing$. El grafo (S_0, C^{+T}) es el $mcst$ obtenido desde (N_o, C) asumiendo que los agentes en S han de ser conectados a la fuente, donde los agentes en T ya están conectados a la fuente y los agentes en S pueden conectarse a través de los agentes en T. Esto significa que

$$c_{ij}^{+T} = c_{ij} \text{ para todo } i, j \in S, \quad c_{0i}^{+T} = \min_{j \in T_0} c_{ji} \text{ para todo } i \in S,$$

Entonces

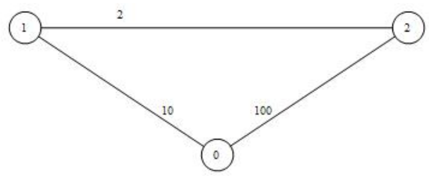
$$v_C^o(S) = mincost(S_o, C^{+N \diagdown S}),$$

Ejemplo 7.13 *Aplicar esta definición al grafo del ejemplo 7.10*

La función del juego $c(S)$ es:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$c(S)$	1	1	1	2	2	2.7	3

Ejemplo 7.14 *Aplicar la definición anterior al grafo de la figura*



La función del juego $v_C^o(S)$ es:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{12\}$
$v_C^o(S)$	2	2	12

7.10. Repartos de costes entre los agentes de una red

Basándonos en los trabajos sobre redes, calculamos el reparto del coste total entre los agentes.

7.10.1. Regla basada en Kruskal

Esta subsección está basada en Feltkamp, Tijs y Muto (1994).

La idea:

En cada paso del algoritmo de Kruskal se añade un arco a la red. El coste de ese arco será pagado por los agentes que se benefician al añadir dicho arco. Cada uno de esos agentes paga la diferencia entre su obligación antes y después de que el arco sea añadido a la red.

El modelo: Tenemos un número finito de agentes $N = \{1, 2, \dots, n\}$, una fuente $\{0\}$ y definimos $N_o = N \cup \{0\}$. Sea C el conjunto de los costes de los arcos.

Dado (N_o, C) consideramos un problema de árbol de expansión de mínimo coste, denotado por $mcstp(N_o, C)$ y sea g^n un árbol obtenido aplicando el algoritmo de Kruskal (Existe la posibilidad de que haya varias soluciones al algoritmo y el superíndice n nos indica que elegida una de ellas, podemos tomar subárboles que se indicarán mediante superíndices menores que n).

Definimos la función obligación para cada agente.

Definición 7.15 *Dado $i \in S \subset N_o$, definimos la obligación para cada $i \in S$ como*

$$\mathcal{O}_i(S) = \begin{cases} 0 & \textit{si la fuente pertenece a } S. \\ \frac{1}{|S|} & \textit{otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, para cada $i \in N$ tenemos que

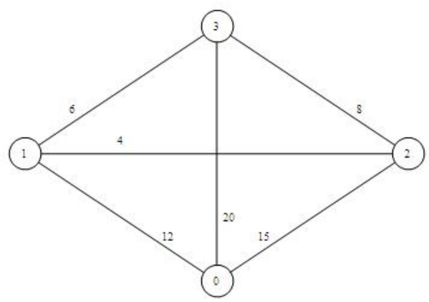
$$\mathcal{K}_i(N_o, C) = \sum_{p=1}^{n} c_{(i^p, j^p)}(\mathcal{O}_i(S(P(g^{p-1}), i)) - \mathcal{O}_i(S(P(g^p), i)))$$

donde g^p nos indica un subárbol de g^n y con la convención $g^0 = \varnothing$. Además, $P(g^{p-1})$ nos da la partición de N_o en componentes conectadas inducidas por el subárbol g^{p-1} y $S(P(g^{p-1}), i)$ nos da el elemento de $P(g^{p-1})$ al cual pertenence i.

El valor de $\mathcal{K}$ no depende del *mcstp* g^n elegido.

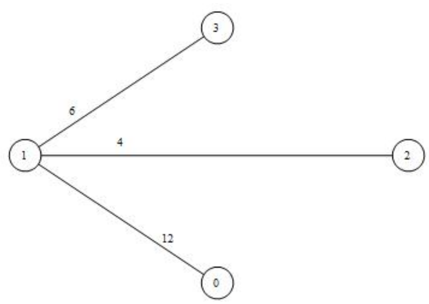
7.10.2. Ejemplo del algoritmo de Kruskal

Dado el grafo siguiente



Se pide repartir el coste final entre los agentes.

El *mcstp* es



Entonces $g^n = \{(1,2),(1,3),(0,1)\}$.

Inicio: Tenemos que $g^0 = \varnothing$. Entonces

$$P(g^0) = P(\varnothing) = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\}\} \text{ y } \mathcal{O}P(g^0) = (1,1,1)$$

Paso 1: El arco seleccionado por Kruskal es el $(1,2)$ (es el de menos coste). Tenemos que $g^1 = \{(1,2)\}$. Entonces

$$P(g^1) = \{\{0\},\{1,2\},\{3\}\} \text{ y } \mathcal{O}P(g^1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1).$$

Así, el coste del arco $(1,2)$ es pagado por los agentes 1 y 2.

Agente 1 paga:	$(1-\frac{1}{2})\cdot 4 = 2$	Recuerda que $c_{12} = 4$.
Agente 2 paga:	$(1-\frac{1}{2})\cdot 4 = 2$	

Paso 2: El arco seleccionado por Kruskal es el $(1,3)$ (es el de menos coste de los que quedan por seleccionar).
Tenemos que $g^2 = \{(1,2),(1,3)\}$. Entonces

$$P(g^2) = \{\{0\},\{1,2,3\}\} \text{ y } \mathcal{O}P(g^2) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$$

Así el coste del arco $(1,3)$ es pagado por los agentes 1, 2 y 3.

Agente 1 paga:	$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\cdot 6 = 1$
Agente 2 paga:	$(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\cdot 6 = 1$
Agente 3 paga:	$(1-\frac{1}{3})\cdot 6 = 4$

Paso 3: El arco seleccionado por Kruskal es el $(0,1)$.
Tenemos que $g^3 = \{(1,2),(1,3),(0,1)\}$. Entonces

$$P(g^3) = \{\{0,1,2,3\}\} \text{ y } \mathcal{O}P(g^3) = (0,0,0)$$

Así el coste del arco $(0,1)$ es pagado por los agentes 1, 2 y 3.

Agente 1 paga:	$(\frac{1}{3}-0)\cdot 12 = 4$
Agente 2 paga:	$(\frac{1}{3}-0)\cdot 12 = 4$
Agente 3 paga:	$(\frac{1}{3}-0)\cdot 12 = 4$

Así el coste para cada agente será $K = (2+1+4, 2+1+4, 4+4) = (7,7,8)$

7.10.3. Regla basada en Borůvka β^π

Esta subsección sobre el algoritmo de Borůvka está basada en Bergantiños y Vidal Puga (2009).
Idea: Inicialmente los agentes están aislados. En el paso $s-1$ los agentes están particionados en componentes conectadas con pagos.

Describamos el paso s.
Cada una de estas componentes selecciona un arco nopagado siguiendo el algoritmo de Borůvka. El coste de los arcos seleccionados en el paso s se divide de acuerdo con los siguientes principios:

(a) Cada agente paga una proporción p del coste del arco seleccionado según la componente a la que pertenezca.

(b) Esta proporción es igual para todos los agentes, no sólo dentro de la componente sino para todas las componentes.

(c) La proporción pagada debe ser tan grande como sea posible.

Si cada agente paga $p' > p$, entonces existe un arco tal que la cantidad pagada por los agentes asignados a ese arco es mayor que el coste del arco.

Describamos β^π formalmente:

Sea π algún orden de los arcos y t^n (o simplemente t) el árbol seleccionado siguiendo el algoritmo de Borùvka asociado con π.

Definimos las siguientes variables:

1. $a_i^{s,\pi}$ que denota el arco del árbol t que el agente i paga parcialmente en el Paso s.

   $a_i^{0,\pi} = \varnothing \qquad \forall i \in N.$

2. $p^{s,\pi}$ que denota la proporción del coste del arco que cada agente paga en el Paso s.

   $p^{0,\pi} = 0.$

3. $\rho_{ij}^{s,\pi}$ que denota la proporción del coste del arco (i,j) ya pagado en el Paso s.

   $\rho_{ij}^{0,\pi} = 0 \qquad \forall (i,j) \in t.$

$$\rho_{ij}^{s,\pi} = \sum_{r=0}^{s} \rho_{ij}^{s,\pi}$$

4. $A^{s,\pi}$ que denota el conjunto de arcos no completamente pagados en el Paso s.

   $A^{0,\pi} = t.$

$$\begin{aligned} A^s &= \{(i,j) \in t : \ \rho_{ij}^{s,\pi} < 1\} \\ \bar{A}^s &= t \setminus A^s = \{(i,j) \in t : \ \rho_{ij}^{s,\pi} = 1\} \end{aligned}$$

5. $f_i^{s,\pi}$ que denota el coste que el agente i paga en el Paso s.

   $f_i^{0,\pi} = 0 \qquad \forall i \in N$. Además, $f_i^{s,\pi} = p^{s,\pi} \cdot c_{a_i^{s,\pi}}$.

Supongamos realizados los pasos $r \leqslant s-1$. Sin pérdida de generalidad podemos considerar una permutación cualquiera π. Definamos el Paso s.

Primero asociamos para cada agente $k \in T \in P(N_o, \bar{A}^{s-1})$ el arco a_k^s, que el agente pagará en el Paso s.

Seleccionamos cada arco (i^T, j^T) como en el algoritmo de Borùvka

$$c_{i^T j^T} = \min\{c_{ij} : \ i \in T, \ j \in N_o \setminus T\}.$$

Es obvio que $(i^T, j^T) \in t$. Además, si la componente T selecciona (i^T, j^T) en el Paso $s-1$ y este arco no fué pagado completamente al comienzo del Paso s (i.e. $(i^T, j^T) \in \bar{A}^{s-1}$) la componente T también selecciona (i^T, j^T) en el Paso s.

- Definiremos $a_k^s = (i^T, j^T)$

  esto es, se pagará el coste del arco seleccionado por el algoritmo Boruúvka entre los componentes del arco.

- Calculamos p^s

  Para cada arco $(i,j) \in A^{s-1}$ definimos $N_{ij}^s = \{k \in N : a_k^s = (i,j)\}$ y de aquí

$$p^s = \text{mín}\{\frac{1-\rho_{ij}^{s-1}}{|N_{ij}^s|} : (i,j) \in A^{s-1},\ N_{ij}^s \neq \varnothing\}$$

- Calculamos ρ_{ij}^s

  Para cada $(i,j) \in A^{s-1}$ definimos $\rho_{ij}^s = \rho_{ij}^{s-1} + |N_{ij}^s| \cdot p^s$.

  Proposición 7.16 $\rho_{ij}^s \leq 1 \qquad \forall (i,j) \in A^{s-1}$.

  Proposición 7.17 *Existe al menos un* $(i,j) \in A^{s-1}$ *tal que* $\rho_{ij}^s = 1$.

- Calculamos A^s y $\bar{A}^s$.

  $A^s = \{(i,j) \in T : \rho_{ij}^s < 1\}$.

  $\bar{A}^s = t \setminus A^s = \{(i,j) \in T : \rho_{ij}^s = 1\}$.

  Así, $A^s \subsetneq A^{s-1}$ y $\bar{A}^{s-1} \subsetneq \bar{A}^s$ que nos dice que hay más arcos pagados completamente.

- Cálculo de los costes de los agentes en el Paso s.

$$f_i^s = p^s \cdot C_{a_i^s} \qquad \forall i.$$

  El proceso se para cuando $\bar{A}^s = t$

Observación 7.18 *Dado que* $a_i^s \leq t \ \ \forall i$ *y en el Paso* s *tenemos que* $\bar{A}^{s-1} \subsetneq \bar{A}^s$ *este proceso se acaba en un número finito de pasos (al menos* $|N|$*). Sea este número* γ*, tenemos que*

$$\sum_{s=1}^{\gamma} p^s = 1.$$

Definición 7.19 *Dado un orden* π *del conjunto de arcos y una matriz de costes* C*, definiremos la regla de Borùvka inducida por el orden* π.

$$\beta_i^\pi(N_o, C) = \sum_{s=1}^{\gamma} f_i^s \qquad (i \in N).$$

Proposición 7.20 *Dados dos ódenes* π *y* π' *tenemos que* $\beta^\pi = \beta^{\pi'}$.

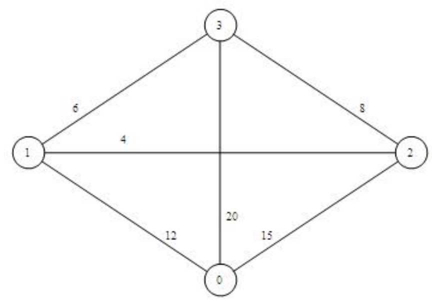
Definición 7.21 *Para cada problema mcst* (N_o, C) *y cada* $i \in N$ *definiremos*

$$\beta_i(N_o, C) = \beta_i^\pi(N_o, C)$$

donde π *es cualquier orden.*

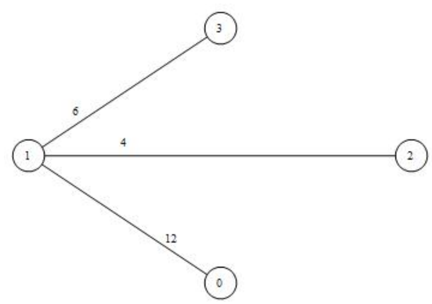
7.10.4. Ejemplo del algoritmo de β^{π}

Ejemplo 7.22 *Dado el grafo siguiente*



Se pide repartir el coste final entre los agentes.

El *mcstp* es



Entonces $t = \{(1,2),(1,3),(0,1)\}$, $A^0 = \{(1,2),(1,3),(0,1)\}$ y $\bar{A}^0 = \{\varnothing\}$.

Paso 1: Para cada uno de los agentes elegimos el arco que lo tiene como extremo de coste menor:

$a_1^1 = (1,2)$	$c_{12} = 4$ para en Nodo 1,
$a_2^1 = (1,2)$	$c_{12} = 4$ para en Nodo 2,
$a_3^1 = (1,3)$	$c_{13} = 6$ para en Nodo 3,

Calculamos las veces que cada agente aparece en los arcos seccionados.

$N_{12}^1 = \{1,2\}$	$\{k \in N : a_1^1 = (1,2) = a_2^1\} \Rightarrow \{1,2\}$
$N_{13}^1 = \{3\}$	
$N_{01}^1 = \{\varnothing\}$	Dado que $\rho_{ij}^o = 0 \; \forall (i,j)$

Calculamos la proporció del mínimo coste del Paso 1 a repartir:

$$p^1 = \text{mín}\{\frac{1-0}{|2|}, \frac{1-0}{1}, no\} = \frac{1}{2}$$

Repartimos:

$(1,2)$	$\rho'_{12} = 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$
$(1,3)$	$\rho'_{13} = 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$
$(0,1)$	$\rho'_{01} = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$.

Coste de los agentes en el Paso 1

$f_1^1 = \frac{1}{2} \cdot C_{12}$	$= \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$
$f_2^1 = \frac{1}{2} \cdot C_{12}$	$= \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$
$f_3^1 = \frac{1}{2} \cdot C_{13}$	$= \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

También tenemos los conjuntos de los arcos completamente pagados y de los no pagados, a saber: $A^1 = \{(1,3),(0,1)\}$ y $\bar{A}^1 = \{(1,2)\}$.

Comprobamos que $\bar{A}^1 \neq t$ si lo es el proceso acaba, en caso contrario continua.

Paso 2: $A^1 = \{(1,3),(0,1)\}$ y $\bar{A}^1 = \{(1,2)\}$.

$a_1^2 = (1,3)$	$c_{13} = 6$
$a_2^2 = (1,3)$	$c_{13} = 6$
$a_3^2 = (1,3)$	$c_{13} = 6$

$N_{13}^2 = \{1,2,3\}$	
$N_{01}^2 = \{\varnothing\}$	

$$p^2 = \text{mín}\{\frac{1-\frac{1}{2}}{|3|}\} = \frac{1}{6}$$

$(1,3)$	$\rho'_{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot 3 = 1$
$(0,1)$	$\rho'_{01} = 0 + \frac{1}{6} \cdot 0 = 0$.

Coste de los agentes en el Paso 2

$f_1^2 = \frac{1}{6} \cdot C_{13}$	$= \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$
$f_2^2 = \frac{1}{6} \cdot C_{13}$	$= \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$
$f_3^2 = \frac{1}{6} \cdot C_{13}$	$= \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$

También tenemos que $A^2 = \{(0,1)\}$ y $\bar{A}^2 = \{(1,2),(1,3)\}$.

Paso 3:

$a_1^3 = (0,1)$	$c_{01} = 12$
$a_2^3 = (0,1)$	$c_{01} = 12$
$a_3^3 = (0,1)$	$c_{01} = 12$

$N_{01}^3 = \{1,2,3\}$	

$$\rho' = \text{mín}\{\frac{1-0}{|3|}\} = \frac{1}{3}$$

$(0,1)$	$\rho'_{01} = 0 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$.

Coste de los agentes en el Paso 3

$f_1^3 = \frac{1}{3} \cdot C_{01}$	$= \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$
$f_2^3 = \frac{1}{3} \cdot C_{01}$	$= \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$
$f_3^3 = \frac{1}{3} \cdot C_{01}$	$= \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$

También tenemos que $A^3 = \{\varnothing\}$ y $\bar{A}^3 = \{(1,2)(1,3),(0,1)\}$.

β_1	$= f_1^1 + f_1^2 + f_1^3$	$= \frac{1}{2} \cdot C_{12} + \frac{1}{6} \cdot C_{13} + \frac{1}{3} \cdot C_{01} = 7,$
β_2	$= f_2^1 + f_2^2 + f_2^3$	$= \frac{1}{2} \cdot C_{12} + \frac{1}{6} \cdot C_{13} + \frac{1}{3} \cdot C_{01} = 7,$
β_3	$= f_3^1 + f_3^2 + f_3^3$	$= \frac{1}{3} \cdot C_{13} + \frac{1}{6} \cdot C_{13} + \frac{1}{3} \cdot C_{01} = 8.$

Para finalizar enunciamos los siguientes resultados:

Proposición 7.23 *Dados dos ódenes π y π', tenemos que $\beta^\pi = \beta^{\pi'}$.*

Definición 7.24 *Para cada (N_0, C) y cada $i \in N$, definimos $\beta_i(N_0, C) = \beta_i^\pi(N_0, C)$ donde π es un orden cualquiera.*

7.10.5. Proposición final

Proposición 7.25 *(Bergantiños et alii) Las siguientes reglas coinciden:*

- *$Sh(v_C^o)$, el valor de Shapley del juego optimista.*
- *$\mathcal{K}$, la regla basada en el algoritmo de Kruskal.*
- *β, la regla basada en el algoritmo de Borůvka*