Col·lecció de problemes resolts de Programació Lineal Entera

(v.11.00)

Jordi Castro Pérez, F. Javier Heredia Cervera

Group on Numerical Optimization and Modeling

(GNOM, http://gnom.upc.edu)

Dept. d'Estadística i Investigació Operativa

Universitat Politècnica de Catalunya

Introducció

Es presenta en aquest llibre una col·lecció de problemes de Programació Lineal i Entera. El nivell dels problemes presentats fa que la col·lecció sigui especialment adequada per a assignatures introductòries d'Investigació Operativa en cursos de diferents Enginyeries Superiors i Tècniques, així com Graus d'Estadística i Matematiques.

Els problemes s'han dividit en quatre apartats: problemes de modelització, problemes de programació lineal, problemes de programació lineal entera. Els exercicis de la part de modelització inclouen tant problemes provinents del camp de les enginyeries com problemes clàssics de la Investigació Operativa que tot futur titulat he de conixer. Pel que fa a les tres unitats de programació lineal, programació lineal entera i programació no lineal, els problemes presentats tenen l'objectiu de fixar i reforçar les nocions que els alumnes reben a les classes de teoria. La major part dels problemes d'aquestes unitats són de caràcter pràctic, tot i que també hi ha alguns teòrics de dificultat mitjana.

La col·lecció es troba constituïda per problemes inèdits, problemes clàssics d'Optimització, i variants de casos extrets de l'extensa bibliografia existent sobre la matèria. La col·lecció és fruit del treball dels autors durant els seus anys de docència a diferents assignatures de la UPC i de la Universitat Rovira i Virgili (URV) en les Enginyeries Informàtica i Química, Diplomatura d'Estadística, Llicenciatures de Matemàtiques i de CC. i TT. Estadístiques i en el Master Oficial d'Estadística i Ivestigació. Operativa.

Els professors Jordi Castro i F. Javier Heredia són professors titulars del departament d'Estadística i Investigació Operativa de la UPC i membres del grup de recerca en optimització numèrica i modelització de la UPC (GNOM, `http://gnom.upc.edu`).

Barcelona, febrer de 2011.

Índex

1 Problemes de programació lineal.

1.1 Resolució gràfica.

1. Solució de problemes pel mètode gràfic †

Determinar de forma gràfica la solució dels següents problemes de programació lineal:

$a)$
$$\begin{array}{ll} \min & -3x_1 - 4x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & 4x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

$b)$
$$\begin{array}{ll} \min & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & 4x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

$c)$
$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

$d)$
$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 + x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \text{ lliure} \end{array}$$

$e)$
$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \text{ lliure} \end{array}$$

$f)$
$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3/2 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

2. Resolució gràfica de problemes (PL)*

Considereu el següent problema de programació lineal **(PL)**:

$$\textbf{(PL)}\begin{cases} \min & z = c'x \\ \text{s.a.:} & \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Trobeu gràficament la solució de **(PL)** per $c' = [-3 \quad 1]$. Classifiqueu el problema.
b) Trobeu gràficament la solució de **(PL)** per $c' = [-2 \quad 1]$. Classifiqueu el problema.
c) Trobeu el valor del terme independent de la segona constricció a partir del qual **(PL)** seria infactible.

3. Resolució gràfica de problemes (PL)*

Considereu el següent problema de programació lineal **(PL)**:

$$\textbf{(PL)}\begin{cases} \min & z = c_1x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} & \\ & -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & 3x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Trobeu gràficament la solució del problema **(PL)** per als diferentes valors possibles de c_1.

4. El coeficient de la funció objectiu *

Determineu per a quin rang de valors del coeficient p té un únic punt òptim, té òptims alternatius, o es il·limitat el següent problema:

$$\begin{array}{ll} \min & px_1 - x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

Feu el mateix estudi que abans considerant ara la funció objectiu $px_1 + x_2$.

5. Minimització d'una folga *

Solucioneu de forma gràfica el següent problema de programació lineal:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_3 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & 3x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4 \end{aligned}$$

I si la funció objectiu fos $\max x_4$?

1.2 Transformació a la forma estàndar.

6. Més problemes de transformació a la forma estàndard

Transformeu a la forma estàndard els següents problema de programació lineal (i si és possible, intenteu-los simplificar eliminant variables i/o restriccions).

a)

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & -x_1 + 2x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & \begin{array}{llll} 2x_1 & +x_2 & \geq & 4 \\ 3x_1 & & \geq & 6 \end{array} \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & -x_1 - 2x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & \begin{array}{lllllll} 2 & \leq & 2x_1 & +3x_2 & \leq & 4 \\ 5 & \leq & 4x_1 & +6x_2 & \leq & 6 \end{array} \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2,x_3} \quad & -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & \frac{2x_1 + x_2 - 2x_3}{x_3} \geq 10 \\ & 3x_1 + 3x_3 = 6 \\ & x_1 + x_4 \geq 10 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 1 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & \begin{array}{llll} 3x_1 & +2x_2 & \leq & 5 \\ 2x_1 & -\ x_2 & \geq & 10 \end{array} \\ & -5 \leq x_1 \leq 5 \\ & -10 \leq x_2 \leq 10 \end{aligned}$$

7. Transformació a la forma estàndar*.

Transformeu el següent problema lineal a la forma estàndar:

$$
\textbf{(PL)} \begin{cases} \max & z = 6x_1 - 5x_2 + 3x_4 \\ \text{s.a.:} & \\ & x_1 - 3x_2 = -5 \\ & 6 \leq x_1 + x_2 - 5x_4 \leq 7 \\ & \dfrac{3x_1 + 7x_2}{3x_3} \geq 4 \\ & x_1 \text{ lliure },\ x_2 \geq 0 \ ,\ x_3 \leq 0 \ ,\ x_4 \geq 0 \end{cases}
$$

8. Transformació a la forma estàndard *

Transformeu a la forma estàndard el següent problema de programació lineal:

$$
\begin{array}{llcccccc}
\max\limits_{x_1,x_2,x_3} & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 & & & & & & \\
\text{subj. a} & & & & & & & \\
& 4 & \leq & 2x_1 & +x_2 & +\ x_3 & \leq & 20 \\
& & & 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq & 6 \\
& x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 3 \quad x_3 \text{ lliure} & & & & & &
\end{array}
$$

9. Un problema de programació lineal "disfressat" *

Formular com a problema de programació lineal (i simplificar-lo tot el possible):

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x_1,x_2,x_3} & \ln x_1 \\
\text{subj. a} & \\
& x_1 x_2 x_3 \geq e^5 \\
& \dfrac{x_1}{x_2} = x_3 \\
& 0 < x_1 \leq e^2 \quad x_2 \geq e^4 \quad x_3 > 0
\end{array}
$$

Per què creus que els límits de les variables x_1 i x_3 s'han definit com $x_1 > 0$ i $x_3 > 0$, en comptes de $x_1 \geq 0$ i $x_3 \geq 0$?

10. Valor absolut a les restriccions *

Escriure com a problema de programació lineal:

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x_1,x_2,x_3} & -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
\text{subj. a} & \\
& \begin{array}{ccccc} x_1 & +4x_2 & +x_3 & \geq & 5 \\ |3x_1 & -2x_2| & & \leq & 3 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0} \end{array}
\end{array}
$$

Podríem tranformar-lo en un problema de programació lineal si la segona restricció fos $|3x_1 + 2x_2| \geq 3$?

11. Valor absolut a la funció objectiu*

Formular com a problema de programació lineal

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x} & c^T|x| \\
\text{subj. a} & Ax = b
\end{array}
$$

sabent que totes les components c_i del vector de costos c verifiquen $c_i \geq 0$. (Nota: aquest problema és d'una certa dificultat).

12. Funció objectiu igual al màxim d'una sèrie de valors *

Una companyia vol minimitzar els costos de producció en una determinada planta. Té perfectament determinades les restriccions del problema, i sap que la funció objectiu és lineal. Ha encarregat a tres enginyers de la planta que determinin el vector de costos de la funció objectiu, i ha observat que tots ells han proporcionat tres vectors c_A, c_B i c_C semblants, però no iguals. Per curar-se en salut, la companyia decideix optimitzar el següent problema:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \max\{c_A^T x, c_B^T x, c_C^T x\} \\
\text{subj. a} & \\
& Ax = b \\
& x \geq 0
\end{array}
$$

D'aquesta forma, donat un punt x qualsevol, el seu valor de funció objectiu serà el que té un cost més elevat segons les estimacions del vector de costos dels tres enginyers.

La companyia, però, només disposa d'eines informàtiques per solucionar problemes de programació lineal. Aleshores, pot solucionar el problema anterior amb els paquets de programació lineal que té? Com hauria de transformar el problema?

13. Transformació en restriccions de desigualtat *

Sovint interessa considerar la regió factible d'un problema de programació lineal com el conjunt de punt formats per la intersecció d'un nombre finit de semiespais tancats, és a dir, com el conjunt de punts definit per $\{a_1^T x \leq b_1, \ldots, a_m^T x \leq b_m\}$. No sempre, però, trobem la nostra regió factible expressada de la forma anterior, ja que podem tenir restriccions d'igualtat i de $\geq$. Penseu com es pot transformar el problema

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{subj. a} & \\ & a_1^T x = b_1 \\ & a_2^T x \geq b_2 \\ & a_3^T x \leq b_3 \end{array}$$

en un d'equivalent de forma que totes les restriccions siguin de $\leq$. Feu-ho sense afegir variables artificials.

1.3 Solucions bàsiques.

14. Solucions bàsiques*

Trobeu totes les solucions bàsiques factibles dels següents problemes:

a)

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \min \quad z = 5x_1 - x_2 \\ \quad \text{s.a.:} \\ \qquad 2x_1 + x_2 = 6 \\ \qquad x_1 + x_2 \leq 4 \\ \qquad x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \min \quad z = -4x_1 + x_2 \\ \quad \text{s.a.:} \\ \qquad 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ \qquad -x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$$

15. Solucions bàsiques*

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \min \quad z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \quad \text{s.a.:} \\ \qquad x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ \qquad 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 15 \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Trobeu totes les soluciones bàsiques factibles de **(PL)**.
b) Trobeu totes les solucions bàsiques no factibles de **(PL)**.

3 Solucions dels problemes de programació lineal.

3.1 Resolució gràfica.

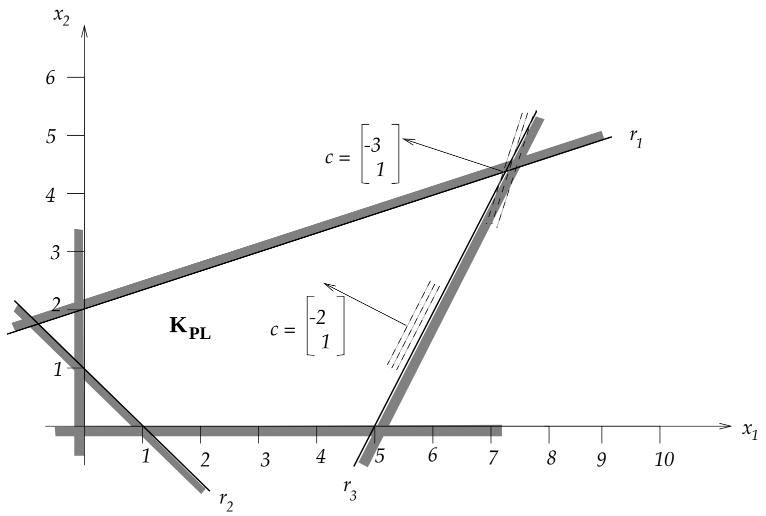
Solució del problema 1.

Els punts solució (x_1^*, x_2^*)de cada cas son els següents:

a) (0,2)
b) (1.5,0.5)
c) (0.8,0.6)
d) (0,2)
e) Problema il·limitat.
f) Problema infactible.

Solució del problema 2.

Representem gràficament la regió factible $\mathrm{K_{PL}}$:



a) $(c = [\,-3 \quad 1\,]')$ La solució es troba al vèrtex determinat per la intersecció de les rectes r_1

i r_3:

$$\begin{array}{ll} r_1: & -x_1^* + 3x_2^* = 6 \\ r_3: & 2x_1^* - x_2^* = 10 \end{array} \Bigg\} \boxed{x^* = \begin{bmatrix} 36/5 \\ 22/5 \end{bmatrix}}$$

El problema és factible amb solució única.

b) ($c = [\,-2 \quad 1\,]'$) En aquest cas, l'aresta del polítop associada a la recta r_3 és una aresta òptima:

$$\mathcal{X}^* = \{x \in \mathrm{K}_{\mathrm{PL}} \mid x = \alpha \begin{bmatrix} 36/5 \\ 22/5 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \forall \alpha \in [0,1]\}$$

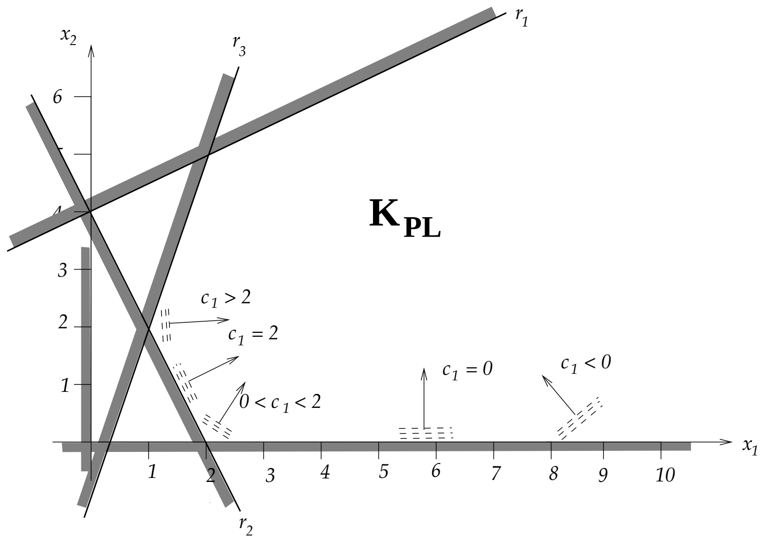
(PL) és un problema factible amb òptims alternatius.

c) Hem de trobar el valor del terme independent b_2 que fa que la recta r_2 passi pel punt intersecció $\tilde{x}$ de les rectes r_1 i r_3:

$$r_2: \quad x_1 + x_2 = b_2 \quad ; \quad \boxed{b_2 = \frac{36}{5} + \frac{22}{5} = \frac{58}{5}}$$

Solució del problema 3.

Representem gràficament la regió factible K_{PL}:



- $c_1 < 0$: problema il·limitat: $\mathcal{X}^* = \emptyset$
- $c_1 = 0$: l'aresta associada a la constricció $x_1 \geq 0$ és òptima. És un problema amb òptims alternatius:

$$\mathcal{X}^* = \{x \mid x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \forall \alpha \geq 0\}$$

- $0 < c_1 < 2$: $x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- $c_1 = 2$ l'aresta associada a la recta r_2 és òptima (òptims alternatius):

$$\mathcal{X}^* = \{x \mid x = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \forall \alpha [0,1]\}$$

- $c_1 > 2$: $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solució del problema 4.

La Fig. 1 mostra la regió factible del problema (àrea ombrejada) delimitada per les tres restriccions r1, r2 i r3. Aquesta és clarament il·limitada. També es mostren les corbes de nivell de la funció objectiu (junt amb el vector de costos negat $-c = (-p, 1)$), en quatre situacions diferents (corresponents a diferents valors de p). Recordem que el vector de costos negat ens indica la direcció en que hem de fer avançar les corbes de nivell per minimitzar la funció objectiu.

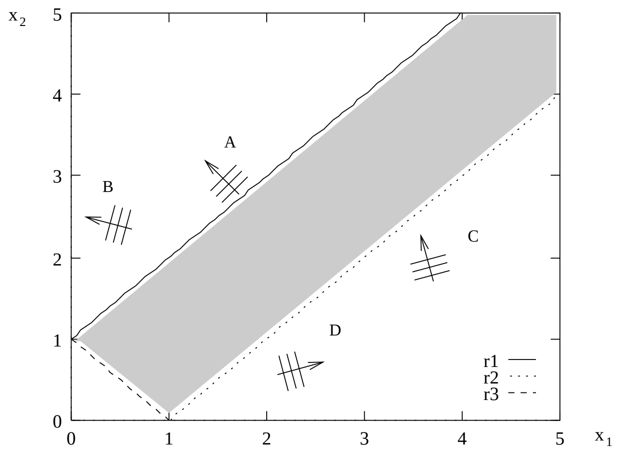


Figura 1. Regió factible i situacions segons el valor del paràmetre p.

En la situació A (funció objectiu paral·lela a $x_1 - x_2 = -1$) tenim que $p = 1$. En aquest cas qualsevol punt de $x_1 - x_2 = -1$ sobre el quadrant positiu és un òptim alternatiu, de valor de funció objectiu -1.

Per valors $p > 1$ (situació B) les corbes de nivell de la funció objectiu s'inclinen cap a l'eix $x_1 = 0$ (en el límit són paral·les a aquest eix) i el vector de costos negat $(-p, 1)$ ens empeny cap a l'esquerra. En aquest cas només hi ha un òptim alternatiu, que correspon amb el punt $(0, 1)$, però amb el mateix valor de funció objectiu que abans: -1.

Per valors $0 \leq p < 1$ (situació C) les corbes de nivell de la funció objectiu s'inclinen cap a l'eix $x_2 = 0$ (en el límit són paral·les a aquest eix) i el vector de costos negat $(-p, 1)$ ens empeny cap amunt. En aquest cas, podem fer disminuir tant com volem el valor de la funció objectiu. Ens trobem davant una situació de problema il·limitat.

Per valors $p < 0$ (situació D) les corbes de nivell de la funció objectiu s'inclinen de nou cap a l'eix $x_1 = 0$ (en el límit són paral·les a aquest eix) i el vector de costos negat $(-p, 1)$ ens empeny cap a la dreta. En aquest cas, una altra vegada ens trobem devant un problema il·limitat.

Per tant tenim:

$$\begin{cases} \text{Problema il·limitat} & \text{si } p < 1 \\ \text{Òptims alternatius} & \text{si } p = 1 \\ \text{Òptim únic} & \text{si } p > 1 \end{cases}$$

Si la funció objectiu fos $px_1 + x_2$ es faria un estudi equivalent (es deixa al lector la seva resolució).

Solució del problema 5.

El problema tal i com es presenta té més de dues variables, i això dificulta molt la seva representació. Podem veure, però, que x_3 i x_4 de fet actuen com a folgues, i podem considerar que el nostre problema és en realitat:

$$\begin{aligned}
\max \quad & x_3 \\
\text{subj. a} \quad & \\
& x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
& 3x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_1 + x_2 \geq 1 \\
& x_3 \text{ és la folga de la primera restricció} \\
& x_4 \text{ és la folga de la segona restricció} \\
& x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4
\end{aligned}$$

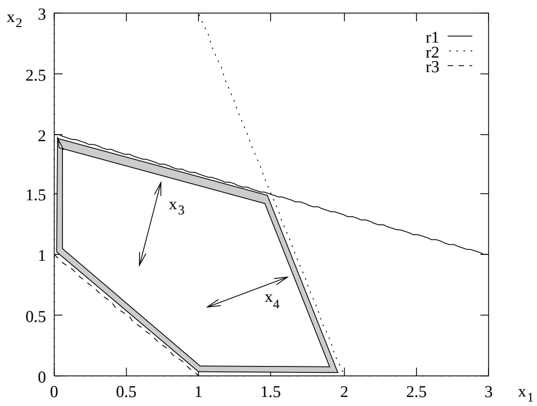


Figura 2. Regió factible i significat de les folgues x_3 i x_4

Les folgues de fet únicament ens indiquen quant allunyats estem de la frontera de la nostra regió factible (x_3 ens diu quant lluny estem de $x_1 + 3x_2 = 6$ i x_4 la distància a $3x_1 + x_2 = 6$. La Fig. 2 ens mostra precisament la regió factible (la part interior més propera a la frontera es troba ombrejada) i el significat de x_3 i x_4 (les distàncies a r1 i r2 respectivament) Observant la Fig. 2 podem comprovar que el punt més allunyat de la recta r1 és clarament el punt $(x_1, x_2) = (1, 0)$. Aquest serà doncs el que proporcionarà el valor màxim per x_3 (concretament $x_3 = 5$).

En el cas que la funció objectiu fos $\max x_4$ s'hauria de maximitzar l'altra folga. S'observa com el punt més allunyat de r2 és $(x_1, x_2) = (0, 1)$, el qual proporciona el valor màxim de la funció objectiu $x_4 = 5$.

3.2 Transformació a la forma estàndar.

Solució del problema 7.

Primer transformarem les constriccions. La primera constricció té el terme independent negatiu: es canvia el signe del dos membres:

$$-x_1 + 3x_2 = 5$$

La segona constricció està doblement afitada. Aquesta constricció es pot transformar en una constricció d'igualtat afegint una folga x_5 amb fita superior:

$$6 \leq x_1 + x_2 - 5x_4 \leq \ 7 \rightarrow x_1 + x_2 - 5x_4 + x_5 = \ 7 \quad ; \quad 0 \leq x_5 \leq 7 - 6 = 1$$

La forma estàndar no considera fites superiors a les variables: $x_5 \leq 1$ es transforma en una constricció d'igualtat:

$$x_5 \leq 1 \rightarrow x_5 + x_6 = 1 \quad ; \quad x_6 \geq 0$$

La tercera constricció, no lineal, es pot trasformar facilment en una constricció lineal d'igualtat:

$$\frac{3x_1 + 7x_2}{3x_3} \geq \ 4 \rightarrow 3x_1 + 7x_2 - 12x_3 \leq 0 \rightarrow 3x_1 + 7x_2 - 12x_3 + x_7 = 0 \quad ; \quad x_7 \geq 0$$

El problema que tenim fins ara, passant la funció objectiu de min a max, és:

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \text{min} \qquad z = -6x_1 - 5x_2 - 3x_4 \\ \text{s.a.:} \\ \qquad -x_1 + 3x_2 = 5 \\ \qquad x_1 + x_2 - 5x_4 + x_5 = 7 \\ \qquad x_5 + x_6 = 1 \\ \qquad 3x_1 + 7x_2 - 12x_3 + x_7 = 0 \\ \qquad x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \\ \qquad x_1 \text{lliure}, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

L'únic que queda per fer és tractar les variables x_1 i x_3. Primer canviem el signe de la fita de x_3 introduïnt el canvi de variable $\tilde{x}_3 = -x_3$:

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \text{min} \qquad z = -6x_1 - 5x_2 - 3x_4 \\ \text{s.a.:} \\ \qquad -x_1 + 3x_2 = 5 \\ \qquad x_1 + x_2 - 5x_4 + x_5 = 7 \\ \qquad x_5 + x_6 = 1 \\ \qquad 3x_1 + 7x_2 + 12\tilde{x}_3 + x_7 = 0 \\ \qquad x_2, \tilde{x}_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \\ \qquad x_1 \text{lliure} \end{cases}$$

Ara eliminem de la formulació la variable lliure x_1. De la primera constricció tenim que $x_1 =$

$3x_2 - 5$. Substituïm x_1 per aquesta expressió a tot el problema:

$$
\textbf{(PL)}\begin{cases}
\min & z = -23x_2 - 3x_4 \\
\text{s.a.:} & \\
& 4x_2 - 5x_4 + x_5 = 12 \\
& x_5 + x_6 = 1 \\
& 16x_2 + 12\tilde{x}_3 + x_7 = 15 \\
& x_2, \tilde{x}_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{cases}
$$

D'aquesta forma obtenim un problema amb una variable i constricció de menys. Noti's que la constant 30 provinent de la substitució $x_1 = 3x_2 - 5$ a la funció objectiu s'ha eliminat de la formulació, doncs no afecta al resultat. Un cop resolt el problema anterior les transformacions $x_3 = -\tilde{x}_3$ i $x_1 = 3x_2 - 5$ ens proporcionaran el valor òptim de les variables originals.

Solució del problema 8.

Fent els següents canvis de variable:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_3^+ - x_3^- \\
\tilde{x}_2 &= x_2 - 3
\end{aligned}
$$

(on $x_3^+ \geq 0$, $x_3^- \geq 0$, i $x_2 \geq 3 \Rightarrow \tilde{x}_2 \geq 0$) i afegint les variables (folgues) f_1 i f_2 a la primera i segona restriccions, el problema pot ser escrit de la següent forma:

$$
\begin{array}{rl}
\max & 3x_1 + 2(\tilde{x}_2 + 3) + 3(x_3^+ - x_3^-) \\
\text{subj. a} & \\
& \begin{array}{cccccccc}
2x_1 & +(\tilde{x}_2+3) & + & (x_3^+ - x_3^-) & +f_1 & & = & 20 \\
3x_1 & -(\tilde{x}_2+3) & & +2(x_3^+ - x_3^-) & & +f_2 & = & 6
\end{array} \\
& x_1 \geq 0 \quad \tilde{x}_2 \geq 0 \quad x_3^+ \geq 0 \quad x_3^- \geq 0 \quad 16 \geq f_1 \geq 0 \quad f_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{array}{rl}
\max & 3x_1 + 2\tilde{x}_2 + 3x_3^+ - 3x_3^- + 6 \\
\text{subj. a} & \\
& \begin{array}{ccccccc}
2x_1 & +\tilde{x}_2 & +\ x_3^+ & -\ x_3^- & +f_1 & & = 17 \\
3x_1 & -\tilde{x}_2 & +2x_3^+ & -2x_3^- & & +f_2 & = 9
\end{array} \\
& x_1 \geq 0 \quad \tilde{x}_2 \geq 0 \quad x_3^+ \geq 0 \quad x_3^- \geq 0 \quad 16 \geq f_1 \geq 0 \quad f_2 \geq 0
\end{array}
$$

Cal adonar-se que la folga f_1 té una fita superior de 16. Això és degut a que la primera restricció està limitada superior i inferiorment. Quan les restriccions es troben limitades per dalt i per baix, no hi ha prou amb afegir una folga $f \geq 0$. En aquests casos cal imposar una fita superior sobre aquesta folga, i aquesta serà sempre igual a la diferència entre els termes independents de la restricció (al nostre cas: $20 - 4 = 16$, que serà la fita superior de f_1). Si no imposem aquesta fita superior sobre f_1 el problema obtingut no seria equivalent a l'original, ja que permetriem situacions on $2x_1 + x_2 + x_3 < 4$. Una forma alternativa de solucionar el problema, sense haver de crear una folga amb una fita superior, hagués estat dividir la restricció en dues ($l \leq c^T x \leq u \equiv \{c^T x \leq u\ ,\ c^T x \geq l\}$) i afegir a cada una de les dues restriccions una folga i un escreix respectivament. En aquest cas, però, afegim una restricció més al problema, i també una nova variable, complicant-lo innecessàriament.

Encara no tenim el problema en la forma estàndard, ja que la folga f_1 té una fita superior. Per eliminar-la afegim una nova folga $f_3 \geq 0$ i una nova restricció $f_1 + f_3 = 16$:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 2\tilde{x}_2 + 3x_3^+ - 3x_3^- + 6 \\
\text{subj. a} & \\
& \begin{array}{cccccccc}
2x_1 & +\tilde{x}_2 & +\ x_3^+ & -\ x_3^- & +f_1 & & & = 17 \\
3x_1 & -\tilde{x}_2 & +2x_3^+ & -2x_3^- & & +f_2 & & = \ 9 \\
& & & & f_1 & & +f3 & = 16
\end{array} \\
& x_1 \geq 0 \quad \tilde{x}_2 \geq 0 \quad x_3^+ \geq 0 \quad x_3^- \geq 0 \quad f_1 \geq 0 \quad f_2 \geq 0 \quad f_3 \geq 0
\end{array}
$$

Cal fer notar que en comptes de considerar $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, es podria haver eliminat x_3 d'una restricció (després de transformar-la en restricció d'igualtat) i sustituir el seu valor a l'altra equació (tot reduint el nombre de files del problema). Es deixa al lector l'aplicació d'aquesta altra tècnica.

Solució del problema 9.

El fet de que a la funció objectiu aparegui la funció logarisme, que a les fites de variables intervingui la funció exponencial, i que les restriccions no siguin més que productes i quocients de variables, ens donen suficients arguments per considerar un canvi de variable com ara:

$$\tilde{x}_i = \ln x_i \quad i = 1, 2, 3$$

És important fer notar que la funció ln té la propietat de mantenir les desigualtats. És a dir:

$$a \geq b \Leftrightarrow \ln a \geq \ln b$$

Això és degut a que la funció ln és monòtona creixent (sempre creix). Per tant, podem aplicar la funció logarisme neperià a les restriccions de desigualtat i fites de les variables sense variar la naturalesa del problema. Per tant, el problema original pot ser escrit com:

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x_1,x_2,x_3} & \ln x_1 \\
\text{subj. a} & \\
& \ln(x_1 x_2 x_3) \geq \ln(e^5) \\
& \ln\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \ln x_3 \\
& \ln x_1 \leq \ln(e^2) \quad \ln x_2 \geq \ln(e^4) \\
& \ln x_3 > -\infty
\end{array}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x_1,x_2,x_3} & \tilde{x}_1 \\
\text{subj. a} & \\
& \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \geq 5 \\
& \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 = 0 \\
& \tilde{x}_1 \leq 2 \quad \tilde{x}_2 \geq 4 \quad \tilde{x}_3 \text{ lliure}
\end{array}
$$

Adonem-nos que el canvi de variable $\tilde{x}_i = \ln x_i$ està ben definit per a tots el valors possibles de x_i gràcies a que $x_1 > 0$ i $x_3 > 0$. Si x_1 o x_3 poguessin prendre el valor 0, no podríem definir la funció ln en aquests punts. Aquest és el motiu pel qual s'han definit les variables x_1 i x_3 com estrictament positives.

Podem simplificar el problema anterior aïllant $\tilde{x}_3$ de la segona equació (la d'igualtat), ja que $\tilde{x}_3$ és una variable lliure, obtenint:

$$\tilde{x}_3 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$$

Substituint el valor anterior de $\tilde{x}_3$ a la primera equació (la de desigualtat) obtenim:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 &\geq 5\\ \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) &\geq 5\\ 2\tilde{x}_1 &\geq 5\\ \tilde{x}_1 &\geq 5/2\end{aligned}$$

Hem obtingut un límit inferior de $\tilde{x}_1$, per tant. Observem, però, que $\tilde{x}_1$ tenia ja una fita superior de 2. Com que no es pot garantir alhora que $\tilde{x}_1 \geq 5/2$ i $\tilde{x}_1 \leq 2$, directament podem concloure que el nostre problema és infactible.

Solució del problema 10.

L'equació $|3x_1 - 2x_2| \leq 3$ ens està dient que $3x_1 - 2x_2$ ha de prendre valors entre -3 i 3. Per tant podem escriure aquesta restricció com:

$$-3 \leq 3x_1 - 2x_2 \leq 3$$

i ja tindríem un problema de programació lineal.

En el cas que la restricció fos $|3x_1 - 2x_2| \geq 3$, això voldria dir que $3x_1 - 2x_2$ ha de prendre valors ≥ 3 **o** ≤ -3. En el cas anterior, però, havia de prendre valors ≥ -3 **i** ≤ 3. La diferència està en que abans havíem de satisfer dues condicions alhora (per això tenim "**i**"), i ara tenim que només cal satisfer una o l'altra ("**o**"). Les condicions "**i**" són molt fàcils de tractar en programació lineal, només cal anar afegint una nova equació per a cada condició (ja que el punt solució ha de satisfer totes les restriccions del nostre problema). Les condicions "**o**" no poden ser tractades de forma tan simple. Caldria afegir variables enteres i, en aquest cas, no seria ja un problema de programació lineal.

Solució del problema 11.

El problema original

$$\begin{aligned}\min_x \quad & c^T|x|\\ \text{subj. a} \quad & Ax = b\end{aligned}$$

pot ser transformat en un d'equivalent dividint les variables x de forma

$$x = x^+ - x^- \quad x^+ \geq 0 \quad x^- \geq 0$$

En aquest cas estem considerant que els x_i^+ seran la part positiva de x_i, mentre que els x_i^- seran la part negativa de x_i (x_i^+, x_i^- i x_i fan referència a la component i-èssima del vector x^+, x^- i x respectivament). El nou problema equivalent és:

$$\begin{aligned}\min_x \quad & c^T(x^+ - x^-)\\ \text{subj. a} \quad & A(x^+ - x^-) = b\\ & x_i^+ \cdot x_i^- = 0 \quad \forall i\end{aligned}$$

La darrera restricció ens obliga a que es verifiqui sempre que $x_i^+ = 0$ o $x_i^- = 0$ (o les dues condicions alhora). Si $x_i^+ > 0$, llavors x_i és positiu. Si $x_i^- > 0$, x_i serà negatiu. Aleshores, la funció objectiu $c^T(x^+ - x^-)$ equival a $c^T|x|$.

El nou problema equivalent té l'inconvenient de que no és un problema de programació lineal (degut a les restriccions $x_i^+ \cdot x_i^- = 0$). Tanmateix, podem mirar de solucionar aquest problema sense aquestes restriccions. Si les eliminem, el problema resultant sí que és de programació lineal. El nou problema sense les restriccions no lineals s'anomena problema "relaxat" (rep aquest nom perque és un problema menys restrictiu, més "laxe", degut a que hem eliminat unes determinades restriccions). El que farem és, a partir de la solució òptima del problema relaxat lineal, trobar una d'alternativa que satisfaci les restriccions $x_i^+ \cdot x_i^- = 0$ i que sigui igualment òptima. Aleshores, ja haurem vist com solucionar el problema original a través de la solució d'un problema de programació no lineal.

Considerem que x_i^{*+}, x_i^{*-} és la solucó del nostre problema relaxat

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{x} & c^T(x^+ - x^-) \\ \text{subj. a} & A(x^+ - x^-) = b \end{array}$$

Podem definir una solució alternativa que satisfaci $x_i^+ \cdot x_i^- = 0$ de forma

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{x}_i^+ = x_i^{*+} - m_i \\ \tilde{x}_i^- = x_i^{*-} - m_i \end{array}\right. \qquad \text{on } m_i = \min\{x_i^{*+}, x_i^{*-}\}$$

Ara comprovem que el nou punt $\tilde{x}^+, \tilde{x}^+$ és factible i òptim per al problema relaxat:

$$\begin{array}{ll} \text{(Factible)} & A(\tilde{x}^+ - \tilde{x}^-) = A(x^{*+} - m - (x^{*-} - m)) = A(x^{*+} - x^{*-}) = b \\ \text{(Òptim)} & c^T(\tilde{x}^+ - \tilde{x}^-) = c^T(x^{*+} - m - (x^{*-} - m) = c^T(x^{*+} - x^{*-}) - 2c^Tm \leq c^T(x^{*+} - x^{*-}) \end{array}$$

En el darrer pas, podem garantir que $c^T(x^{*+} - x^{*-}) - 2c^Tm \leq c^T(x^{*+} - x^{*-})$ gràcies a que tots el valors m_i calculats són positius (ja que són el mínim de dues quantitats positives), i a que l'enunciat del problema ens diu que el vector de costos c té totes les components positives. Per tant el terme $-2c^Tm$ és sempre ≤ 0.

Donat que x_i^{*+}, x_i^{*-} era l'òptim del problema relaxat, això vol dir que cap altre punt factible pot tenir un valor més petit de funció objectiu. Això vol dir que el punt alternatiu $\tilde{x}^+, \tilde{x}^+$ té el mateix valor de funció objectiu que x_i^{*+}, x_i^{*-} (és a dir, que la desigualtat abans obtinguda $c^T(x^{*+} - x^{*-}) - 2c^Tm \leq c^T(x^{*+} - x^{*-})$ és de fet una igualtat). El nou punt $\tilde{x}^+, \tilde{x}^+$ és doncs òptim del problema relaxat, i satisfà les equacions $x_i^+ \cdot x_i^- = 0$. Per tant és òptim del problema no lineal, i també del problema original amb el valor absolut a la funció objectiu. Cal notar que hem solucionat el problema original mitjançant la resolució d'un problema de programació lineal, i una traslació a posteriori del punt solució d'aquest darrer.

Solució del problema 12.

La resposta és que la companyia sí podrà solucionar el problema amb els paquets de programació lineal de que disposa. El problema, però, ha de ser transformat prèviament. Una possible forma seria crear una nova variable $y \in \mathbb{R}$, que representarà el cost de producció i serà la variable a minimitzar. Donat que es vol que en un punt x el cost de producció sigui el màxim de c_A^Tx, c_B^Tx, i c_C^Tx, només hem d'imposar que y sigui més gran que els tres termes anteriors.

Llavors podem escriure el problema original com:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y \\
\text{subj. a} \quad & \\
& Ax = b \\
& y \geq c_A^T x \\
& y \geq c_B^T x \\
& y \geq c_C^T x \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

amb el qual queda transformat en un problema de programació lineal que ara sí pot ser solucionat per la companyia.

Solució del problema 13.

La tercera restricció ja té la desigualtat escrita de forma $\leq$. La segona desigualtat pot ser escrita com

$$a_2^T x \geq b_2 \quad \Leftrightarrow \quad -a_2^T x \leq -b_2$$

La primera restricció és d'igualtat. El conjunt de punts que satisfan $a_1^T x = b_1$ podem considerar-los com aquells que pertanyen a la intersecció dels dos semiespais:

$$
\begin{aligned}
a_1^T x &\leq b_1 \\
a_1^T x &\geq b_1
\end{aligned}
$$

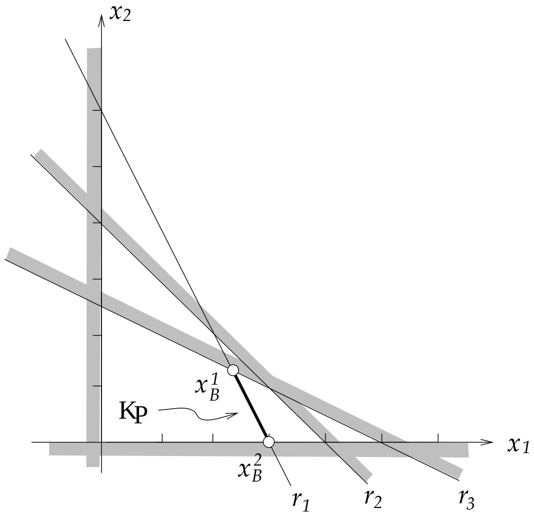
Llavors el problema original pot ser escrit amb totes les restriccions $\leq$ com:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
\text{subj. a} \quad & \\
& a_1^T x \leq b_1 \\
& -a_1^T x \leq -b_1 \\
& -a_2^T x \leq -b_2 \\
& a_3^T x \leq b_3
\end{aligned}
$$

3.3 Solucions bàsiques.

Solució del problema 14.

a) Representem gràficament la regió factible K_P:

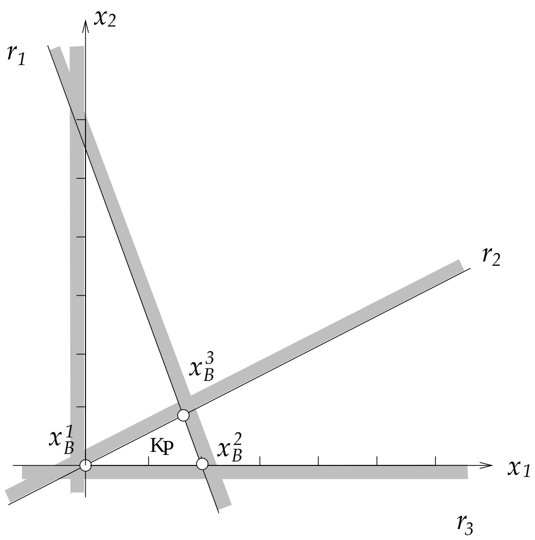


on r_1 és la recta associada a la primera constriccó, r_2 la recta associada a la segona constricció i r_3 la recta associada a la tercera constricció. Les variables x_3 i x_4 representaran les folgues de la segona i tercera constricció respectivament. En aquest cas, el polítop $\mathrm{K_P}$ és el segment de recta entre els dos únic punts extrems x_B^1 i x_B^2:

$$* \; x_B^1\text{: } \mathcal{B} = \{1,2,3\}\ ,\ x_B^1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}\ ,\ z^1 = 31/3$$

$$* \; x_B^2\text{: } \mathcal{B} = \{1,3,4\}\ ,\ x_B^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ ,\ z^1 = 15$$

b) Representem gràficament la regió factible $\mathrm{K_P}$:



on r_1 és la recta associada a la primera constriccó, r_2 la recta associada a la segona constricció i r_3 la recta associada a la tercera constricció. Les variables x_3 i x_4 repressentaran, respectivament, les folgues de la segona i tercera constricció. En aquest cas es produeix degeneració sobre el vèrtex situat a l'origen de coordenades: n'hi ha tres solucions bàsiques (x_B^{1a},x_B^{1b} i x_B^{1c}) associades a aquest vèrtex:

$* \ x_B^{1a}$: $\mathcal{B} = \{3, 2\}$, $x_B^{1a} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $z^{1a} = 0$

$* \ x_B^{1b}$: $\mathcal{B} = \{3, 1\}$, $x_B^{1b} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $z^{1b} = 0$

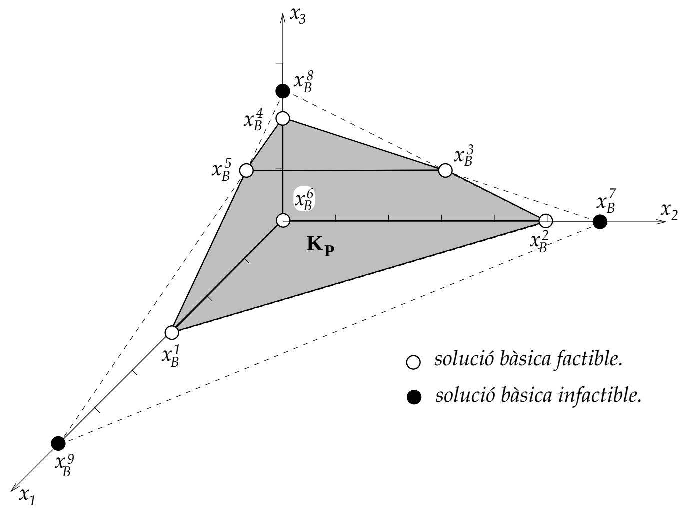
$* \ x_B^{1c}$: $\mathcal{B} = \{3, 4\}$, $x_B^{1c} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $z^{1c} = 0$

$* \ x_B^{2}$: $\mathcal{B} = \{1, 4\}$, $x_B^{2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $z^{2} = -8$

$* \ x_B^{3}$: $\mathcal{B} = \{1, 2\}$, $x_B^{3} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/7 \\ 6/7 \end{bmatrix}$, $z^{3} = -6$

Solució del problema 15.

Representem gràficament la regió factible K_P i els vèrtexs associats a les solucions bàsiques:



Introduïm les varibles de folga x_4 i x_5:

$$
\textbf{(PL)} \begin{cases} \min \quad z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \quad \text{s.a.:} \\ \qquad x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ \qquad 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_5 = 15 \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}
$$

a) Solucions bàsiques factibles:

$* \ x_B^{1}$: $\mathcal{B} = \{1, 4\}$, $x_B^{1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $z^{1} = 15$

$*\ x_B^2$: $\mathcal{B}=\{2,4\}$, $x_B^2=\begin{bmatrix}x_2\\x_4\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&1\\3&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$, $z^2=15$

$*\ x_B^3$: $\mathcal{B}=\{2,3\}$, $x_B^3=\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&3\\3&6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, $z^3=10$

$*\ x_B^4$: $\mathcal{B}=\{3,5\}$, $x_B^4=\begin{bmatrix}x_3\\x_5\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}3&0\\6&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$, $z^4=2$

$*\ x_B^5$: $\mathcal{B}=\{1,3\}$, $x_B^5=\begin{bmatrix}x_1\\x_3\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&3\\5&6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5/3\end{bmatrix}$, $z^5=20/3$

$*\ x_B^6$: $\mathcal{B}=\{4,5\}$, $x_B^6=\begin{bmatrix}x_4\\x_5\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}$, $z^6=0$

Observant el valors de la funció objectiu z^j queda clar que la solució del problema **(PL)** és $\mathcal{X}^*=x_B^6$. Observi's que si es desitjés maximitzar la funció objectiu $z=5x_1+3x_2+x_3$ ens trobariem devant d'una solució amb òptims alternatius: el conjunt solució $\mathcal{X}^*$ en aquest cas seria el segment de recta definit per les solucions bàsiques x_B^1 i x_B^2, és a dir :

$$\mathcal{X}^*=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid x=\alpha x_B^1+(1-\alpha)x_B^2\ ,\ \forall\alpha\in[0,1]\}$$

b) Solucions bàsiques infactibles:

$*\ x_B^7$: $\mathcal{B}=\{2,5\}$, $x_B^7=\begin{bmatrix}x_2\\x_5\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-3\end{bmatrix}\not\geq 0$

$*\ x_B^8$: $\mathcal{B}=\{3,4\}$, $x_B^8=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}3&1\\6&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.5\\-1.5\end{bmatrix}\not\geq 0$

$*\ x_B^9$: $\mathcal{B}=\{1,5\}$, $x_B^9=\begin{bmatrix}x_1\\x_5\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-15\end{bmatrix}\not\geq 0$