

FACULTAT de MATEMÀTIQUES i ESTADÍSTICA.
CURS 2006-2007. 2^{on} QUADRIMESTRE
Examen Parcial de Cadenes de Markov (IOE)
19 de Març del 2007

Problema 1. Una xarxa de 20 computadors s'utilitza per transmetre missatges que poden tenir grandàries de 5Mb, 10Mb i 15Mb. Aquests missatges són transmesos fraccionats en paquets de 1 Mb i recompostos en el centre de recepció. Un missatge és enviat per només 1 computador, és a dir un missatge mai és enviat a trossos per varis computadors sinó que els paquets de 1Mb que componen un missatge són enviats seqüencialment sempre per un mateix computador. Se sap addicionalment que la velocitat de transmissió és de 1Mb/s.

1. [2 punts] Es selecciona una mostra molt quantiosa de paquets dels que se sap que el 50% provenen de missatges de 5Mb, el 25% de missatges de 10 Mb i el 25% restant prové de missatges de 15Mb. Calculeu les fraccions del número de missatges de 5, 10 i 15 Mb que envien els computadors.
2. [1.5 punts] Sabent que un paquet d'un missatge és el 8é, quina és la probabilitat de que el missatge sigui de llargada màxima.
3. [1 punts] Simultàniament tots 20 computadors envien un missatge al centre de destí. Quina és l'esperança del número de missatges que encara no hauran acabat de ser transmesos als 10 segons d'iniciar-se la transmissió dels 20 missatges? Supposeu ara que les fraccions del número de missatges són 0.5 pels missatges de grandària 5Mb, 0.30 pels missatges de 10Mb i 0.2 pels missatges de 15Mb. Sigui ara $\{X_k\}$ una cadena de Markov on la v.a. X_k pot prendre els valors 5, 10 i 15; te com significat el número de Mb transmesos en un missatge cada 5 segons. Es demana ara:
 4. [1 punts] Escriviu la matriu de probabilitats de transició de la cadena i el seu diagrama. Indiqueu el número de classes i la periodicitat d'aquestes.
 5. [1.5 punts] Quin temps mig passa entre el final d'un missatge de 15 Mb i el següent missatge també de 15 Mb.
 6. [1.5 punts] Pels primers 5 segons de transmissió d'un missatge es paga 1 cèntim, pels 5 segons següents 2 i pels últims 5 segons 4cèntims (així un missatge de 10 Mb pagaria $1+2=3$, mentre que un missatge de 15 pagaria $1+2+4=7$ cèntims). Calculeu quin és el cost per segon que es paga en la transmissió dels missatges dels 20 computadors.
 7. [1.5 punts] Després de transmetre el segon bloc de 5Mb el computador pot presentar una avaria durant la transmissió de l'últim bloc de 5 Mb i no poder completar així la transmissió d'un missatge de 15Mb. La probabilitat de que es doni aquesta avaria és de 0,5. Quina és el temps mig que tarda en reproduir-se una avaria? (suggeriment: definir un 4rt estat de la cadena i reformular-la)

Assignatura: _____

Estudiant/a: _____

Data: _____

① Es tracta d'obtenir la distribució de temps de creu i (distribució de grandària de missatges) a partir dels observats w . Venen relacionats per

$$f_w(u) = \frac{u \cdot f_{\tau}(u)}{E[\tau]}$$

la variable grandària del missatge pot prendre els valors 5, 10, 15 i les freqüències observades són:

$$g_1 = f_w(u=5) = \frac{1}{2}, g_2 = f_w(u=10) = \frac{1}{4}, g_3 = f_w(u=15) = \frac{1}{4}$$

$$E[\tau] \cdot f_w(u) = u \cdot f_{\tau}(u) \Rightarrow$$

$$u_i \cdot f_i = \left(\sum_{e=1}^3 u_e f_e \right) g_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$5 \cdot f_1 = \frac{1}{2} (5 \cdot f_1 + 10 \cdot f_2 + 15 \cdot f_3)$$

$$10 \cdot f_2 = \frac{1}{4} (5 \cdot f_1 + 10 \cdot f_2 + 15 \cdot f_3)$$

$$15 \cdot f_3 = \frac{1}{4} (5 \cdot f_1 + 10 \cdot f_2 + 15 \cdot f_3)$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = 1.$$

$$-5 \cdot f_1 + 5 \cdot f_2 + 15 \cdot f_3 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad f_1 = \frac{12}{17}$$

$$5 \cdot f_1 - 10 \cdot f_2 + 15 \cdot f_3 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \rightarrow f_2 = \frac{3}{17}$$

$$5 \cdot f_1 + 10 \cdot f_2 - 15 \cdot f_3 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad f_3 = \frac{2}{17}$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad P(u=15 | u \geq 10) = \frac{P(u=15)}{P(u \geq 10)} = \frac{\frac{2}{17}}{\frac{5}{17}} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$$

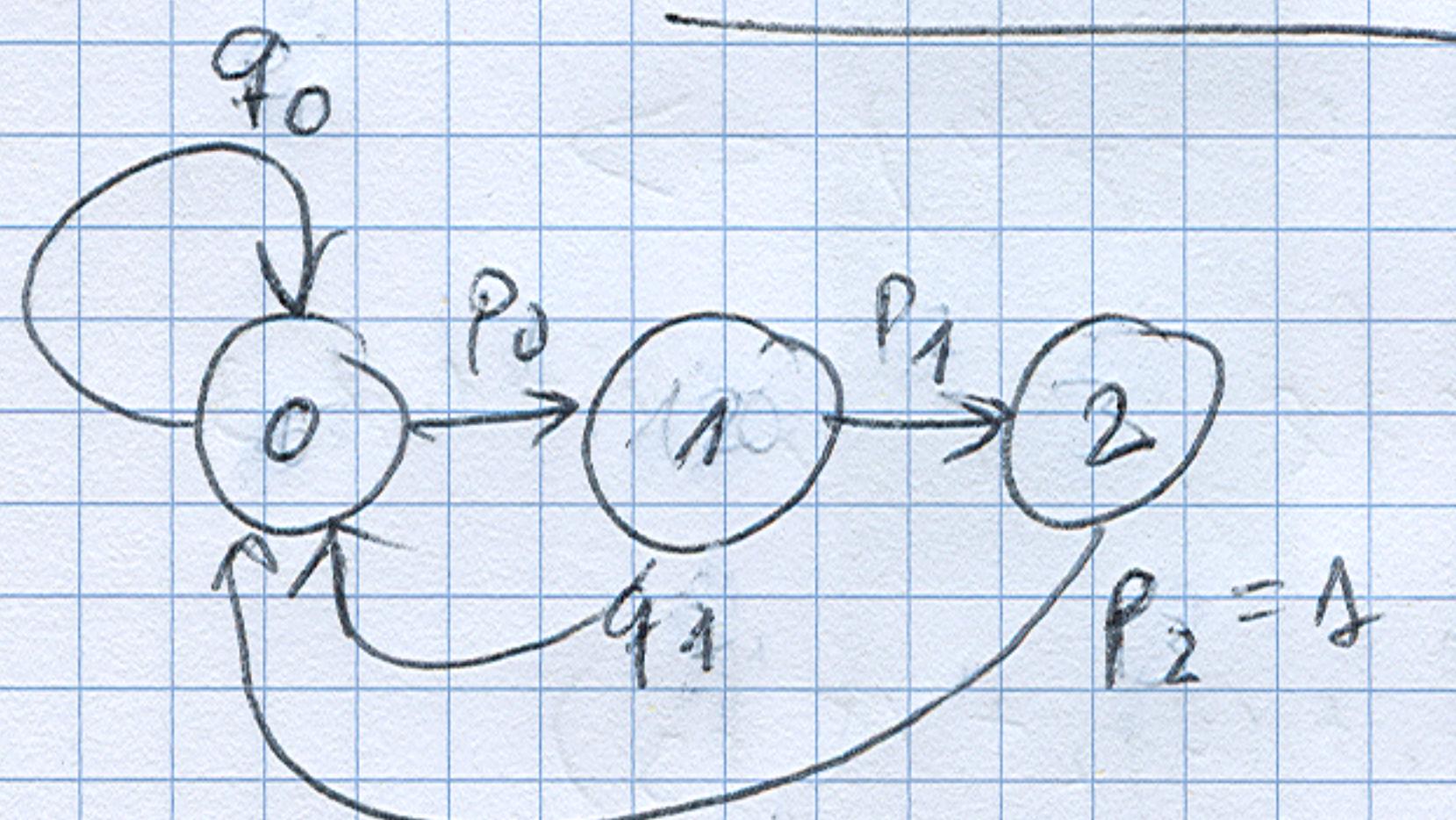
$$\textcircled{3} \quad P(u=15) = \frac{2}{17} \quad \text{seu:}$$

Un missatge que dà 10 segons encara no ha estat transmés del tot i que té 15 MB de grandària.

Si hi han 20 computadors llavors el n° de missatges R de 15 MB que combin serà una binomial $N=20, p = \frac{2}{17}$

$$E[n] = N \cdot p = 20 \cdot \frac{2}{17} = \frac{40}{17} \approx 2'35 \text{ missatges.}$$

\textcircled{4}



Se suposa que

$$f_1 = \frac{1}{2}$$

$$f_2 = 0'3, f_3 = 0'2$$

Suposeu $M_0 = 100$

$$f_1 = \frac{M_0 - M_1}{M_0}, \quad f_2 = \frac{M_1 - M_2}{M_0}, \quad f_3 = \frac{M_2 - M_3}{M_0}$$

$$f_1 = 1 - M_1 \Rightarrow M_1 = \frac{1}{2}, \quad f_2 = M_1 - M_2 \Rightarrow M_2 = \frac{1}{2} - 0'3 = 0'2$$

$$p_0 = \frac{M_1}{M_0} = \frac{1}{2}, \quad p_1 = \frac{M_2}{M_1} = \frac{0'2}{0'5} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}, \quad p_2 = 1$$

aperiòdica, 1 classe.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{5} \quad \mu_{22} = \gamma_{12} \quad (I - P^*) \pi = 0$$

$$P^* \pi = \pi \quad \rightarrow \quad \sum_{j=0}^2 \pi_j = 1$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_2 & -\gamma_5 & -1 \\ -\gamma_2 & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma_5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\gamma_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_5 & 1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3\gamma_2 & \gamma_2 & \gamma_2 \\ 0 & -\gamma_5 & 1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/15 \end{array}$$

$$\pi_2 = \frac{1}{15} \rightarrow \mu_{22} = \frac{1}{2} \text{ en períodes de 5 seg}$$

$$\frac{15}{2} \times 5 = \frac{75}{2} = 37.5 \text{ s.}$$

$$\textcircled{6} \quad c_0 = 1 \quad q = 3 \quad c_2 = 7$$

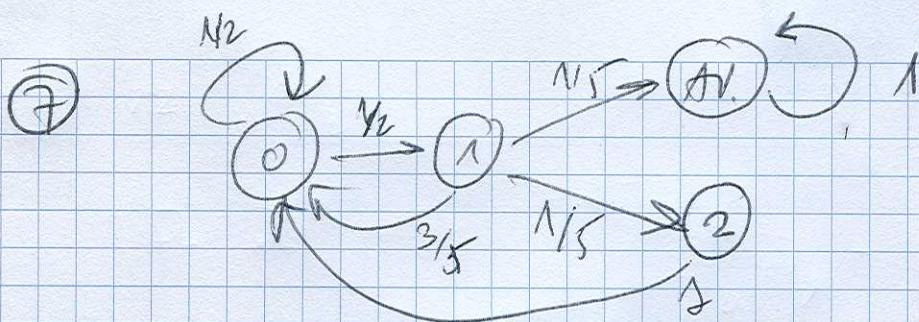
$$\text{cost unit per període} = c_0 \pi_0 + c_1 \pi_1 + c_2 \pi_2 =$$

$$\pi_1 = (\gamma_2 - \gamma_2 \cdot \frac{1}{15}) \frac{1}{3} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{15}) \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{30} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{90} = \frac{13}{45}$$

$$\pi_0 = 1 - \frac{13}{45} - \frac{1}{15} = \frac{26}{45}$$

$$\frac{26}{45} + 3 \cdot \frac{13}{45} + 7 \cdot \frac{1}{45} = \frac{26+39+14}{45} = \frac{79}{45} \text{ euros per s.}$$

$$20 \times \frac{79}{45} \cdot \frac{1}{5} = \frac{316}{45} \text{ céntims s.}$$



$$\mu_{0N} \rightarrow \begin{pmatrix} \mu_{03} \\ \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_2 & N_1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 1/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{03} \\ \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} N_2 - 1/2 & 0 & | & \mu_{03} \\ -3/5 & 1 - 1/5 & | & \mu_{13} \\ -1 & 0 & | & \mu_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3/5 & 1 - 1/5 & | & 1 \\ N_2 - 1/2 & 0 & | & 1 \\ -1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -3/5 & 1 - 1/5 & | & 1 \\ 1/2 - 1/2 & 0 & | & 1 \\ -1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3/5 & 1 - 1/5 & | & 1 \\ 0 & -1/2 & | & 1 \\ 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mu_{03} = 16} \quad \mu_{13} = (1 - 1/2 \cdot 16)(-2) = 14$$

$$\mu_{23} = (1 + 3/5 \cdot 16 - 14)(-5) = 85$$