Màxims i mínims de funcions reals

Def (Extrems relatius) Siguin $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in U$

* x_0 es diu mínim $\left\{\begin{array}{l}\text{relatiu}\\ \text{local}\end{array}\right.$ de f si $\exists\, V$ entorn de x_0 t.q.

$$f(x) \geqslant f(x_0), \qquad \forall x \in V$$

* x_0 es diu màxim $\left\{\begin{array}{l}\text{relatiu}\\ \text{local}\end{array}\right.$ de f si $\exists\, V$ entorn de x_0 t.q.

$$f(x) \leqslant f(x_0), \qquad \forall x \in V.$$

* x_0 es diu extrem local (o relatiu) si és màxim local o mínim local.

* x_0 es diu mínim local (o relatiu) estricte si $\exists\, V$ entorn de x_0 t.q.

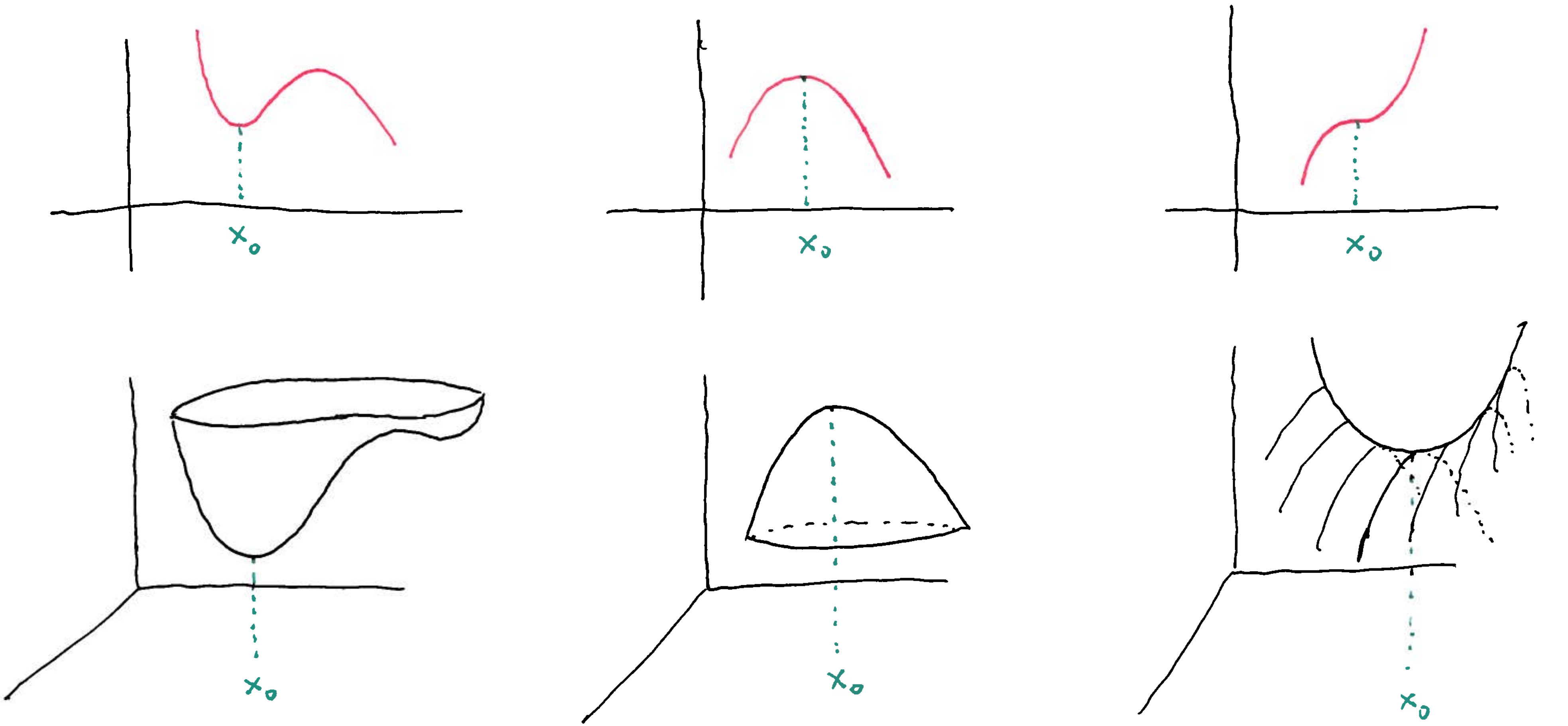
$$f(x) > f(x_0), \qquad \forall x \in V \setminus \{x_0\}$$

* Anàlog. màxim local (o relatiu) estricte.

* Si f és diferenciable en x_0, x_0 es diu <u>punt crític</u> de f si

$$Df(x_0) = 0$$

* Si f és un punt crític que no és extrem local es diu <u>punt sella</u>



Teorema Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, U és obert, f és diferenciable en $x_0 \in U$ i x_0 és extrem local

llavors x_0 és un punt crític de f (i.e., $Df(x_0) = 0$)

Dem Sup. que x_0 és mínim local : $\exists V$, $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in V$

Evaluem una derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

* si $t > 0$, $f(x_0 + te_i) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_0+te_i) - f(x_0)}{t} \geq 0$

* si $t < 0$, $f(x_0 + te_i) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_0+te_i) - f(x_0)}{t} \leq 0$

llavors $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$

i $Df(x_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) = 0$

Ex $f(x,y) = x^2 + y^2$

punts crítics : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ l'únic punt crític és $(0,0)$

que és mínim

Ex $f(x,y) = x^2 - y^2$

punts crítics $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ l'únic punt crític és $(0,0)$

que és sella

Ex $f(x,y) = x^2 y + x y^2$

punts crítics $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy = 0 \end{cases}$

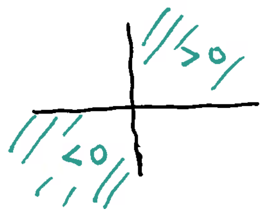
$y(2x+y) = 0 \to y = 0$, $\to y = -2x$

$x^2 = 0 \to x = 0$

$x^2 - 4x^2 = 0 \to -3x^2 = 0 \to x = 0 \to y = 0$

l'únic punt crític és $(0,0)$

$f(x,y) = xy(x+y)$



$\longrightarrow$ $(0,0)$ és sella

Condicions suficients per a l'existència d'extrem

Recordem que per a funcions d'una variable $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

si f és 2 vegades derivable en $x_0 \in I$ i $f'(x_0) = 0$ llavors

$$\begin{cases} \text{si } f''(x_0) > 0 & x_0 \text{ és mínim relatiu estricte} \\ \text{si } f''(x_0) < 0 & x_0 \text{ és màxim relatiu estricte} \end{cases}$$

Per a funcions de diverses variables hi ha moltes derivades parcials segones.

El que importa és el tercer terme del polinomi de Taylor:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, h_i \cdot h_j$$

ja que si $Df(x_0) = 0$, $\quad f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, h_i h_j + R_2$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, h_i h_j = \sum_{i=1}^{n} h_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, h_j$$

totes les derivades avaluades en x_0

$$= (h_1, h_2, \dots, h_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}}_{\text{matriu Hessiana de } f \text{ en } x_0 \text{ (definició)}} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

<u>Definició</u> Una funció quadràtica és una funció $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$g(h) = g(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \,, \qquad \text{on} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

Les funcions quadràtiques verifiquen

$$\boxed{g(\lambda h)} = g(\lambda h_1, \dots, \lambda h_n) = \sum a_{ij} (\lambda h_i)(\lambda h_j) = \lambda^2 \sum a_{ij} h_i h_j = \boxed{\lambda^2 g(h)}$$

Def Una funció quadràtica és diu

- definida positiva si $g(h) > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$
- definida negativa si $g(h) < 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$
- indefinida si $\exists K_1$ t.q. $g(K_1) > 0$ i $\exists K_2$ t.q. $g(K_2) < 0$

Ex $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(h) = a h^2$, $\begin{cases} \text{si } a > 0 & g \text{ és def. positiva} \\ \text{si } a < 0 & g \text{ és def. negativa} \end{cases}$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(h) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} h_i h_j = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$$= a_{11} h_1^2 + a_{12} h_1 h_2 + a_{21} h_1 h_2 + a_{22} h_2 h_2 = a_{11} h_1^2 + 2 a_{12} h_1 h_2 + a_{22} h_2^2$$

Casos concrets:

$g(h_1, h_2) = h_1^2 + 2 h_2^2$ és definida positiva

$g(h_1, h_2) = -h_1^2 - 5 h_2^2$ és def. negativa

$g(h_1, h_2) = h_1^2 - 3 h_2^2$ és indefinida

$$g(h_1,h_2) = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2 = (h_1+h_2)^2$$ no és def. positiva

$$g(h_1,h_2) = h_1^2 + 2h_1h_2 + 5h_2^2 = (h_1+h_2)^2 + 4h_2^2$$ és def. positiva

Teorema Sigui $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$ i $A = (a_{ij})$ matriu simètrica

(1) g és def. positiva $\Leftrightarrow$ tots els vaps de A són positius

(2) g és def. negativa $\Leftrightarrow$ tots els vaps de A són negatius

(3) g és indefinida $\Leftrightarrow$ A té vaps positius i vaps negatius

Ex

$$g(h_1,h_2) = h_1^2 + 2h_2^2 = (h_1, h_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ vaps $= 1, 2$

$$g(h_1,h_2) = h_1^2 + 2h_1h_2 + 5h_2^2 = (h_1, h_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

vaps $A \rightarrow (1-\lambda)(5-\lambda) - 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} > 0$

Per al cas de funcions quadràtiques en dim. 2 tenim

Teorema Sigui $g(h) = (h_1, h_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$.

(1) g és def. positiva $\Leftrightarrow$ $a_{11} > 0$ i $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$

(2) g és def. negativa $\Leftrightarrow$ $a_{11} < 0$ i $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$

(3) g és indefinida $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} < 0$

Dem (1)

$$g(h) = (h_1, h_2)\begin{pmatrix} a_{11}h_1 + a_{12}h_2 \\ a_{12}h_1 + a_{22}h_2 \end{pmatrix} = a_{11}h_1^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}h_2^2 = a_{11}\left(h_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}h_1h_2 + \underline{\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^2 h_2^2}\right)$$

$$+ a_{22}h_2^2 - \underline{\frac{a_{12}^2}{a_{11}}}h_2^2$$

$$= a_{11}\left(h_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}h_2\right)^2 + \left(\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}\right)h_2^2$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $g(h_1, 0) > 0$ si $h_1 \neq 0$ $\Rightarrow$ $a_{11}h_1^2 > 0$ $\Rightarrow$ $a_{11} > 0$ $\|$ $g\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}h_2, h_2\right) > 0$ si $h_2 \neq 0$

$\Rightarrow \left(\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}\right)h_2^2 > 0 \Rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ g és suma de quadrats. $g(h) = 0 \Leftrightarrow (h_1, h_2) = (0, 0)$

Lema Sigui $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció quadràtica

(1) Si g és def. positiva $\exists M > 0$ t. q. $g(h) \geq M \|h\|^2$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

(2) Si g és def. negativa $\exists N > 0$ t.q $g(h) \leq -N \|h\|^2$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$

Dem (1) si $h \neq 0$

$$g(h) = g\left(\frac{h}{\|h\|} \|h\|\right) = \|h\|^2 g\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geq M \|h\|^2, \qquad \text{on} \quad M = \min_{\|u\|=1} g(u) > 0$$

Si $h=0$ la desigualtat és òbvia.

Teorema Siguin $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 i $x_0 \in \mathcal{U}$ un punt crític de f

(1) Si $Hf(x_0)$ és def. positiva, x_0 és un mínim relatiu estricte.

(2) Si $Hf(x_0)$ és def. negativa, x_0 és un màxim relatiu estricte

(3) Si $Hf(x_0)$ és indefinida, x_0 és un punt sella.

Dem

Pel teorema de Taylor $f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2!} Hf(x_0)(h) + R_2(h,x_0)$ i

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_2(h,x_0)}{\|h\|^2} = 0$$

(1) $\exists M > 0$ t.q. $Hf(x_0)(h) \geq M\|h\|^2$

$\exists \delta > 0$ t.q. si $h \in B(0,\delta)$ $\left| \frac{R_2(h,x_0)}{\|h\|^2} \right| < \frac{M}{2}$ $\Leftrightarrow |R_2(h,x_0)| \leq \frac{M}{2}\|h\|^2$

$\Leftrightarrow -\frac{M}{2}\|h\|^2 \leq R_2(h,x_0) \leq \frac{M}{2}\|h\|^2$

Llavors $\forall h \in B(0,\delta)$ $f(x_0+h) - f(x_0) \geq M\|h\|^2 - \frac{M}{2}\|h\|^2 = \frac{M}{2}\|h\|^2$

$\Rightarrow$ x_0 és mín. relatiu estricte

(2),(3) Anàlogament.

<u>Ex</u> Trobar els extrems relatius de $f(x,y) = \log(x^2+y^2+1)$

Primer busquem els punts crítics:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2+1} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2+1} = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow (x,y) = (0,0)$$

Càlcul del Hessià:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2x\cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2}$$

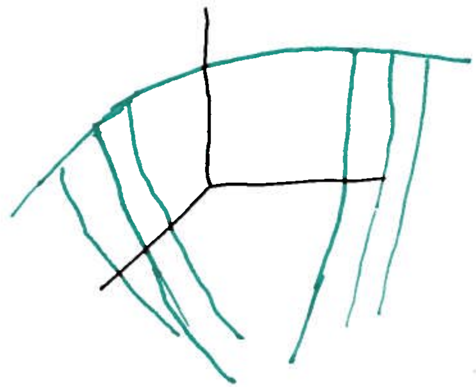
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2+1) - 2y\cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Els vaps són 2, 2 positius

$\Longrightarrow$ (0,0) és un mínim relatiu estricte

Ex Trobar els punts de la gràfica de $g(x,y) = \frac{1}{xy}$ que estan més propers a l'origen.



Hem de trobar el mínim de

$$d\left(\left(x,y,\frac{1}{xy}\right),(0,0,0)\right) = \sqrt{x^2+y^2+\left(\frac{1}{xy}\right)^2}$$

Equivalentment podem buscar el mínim de

$$f(x,y) = x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}$$

Punts crítics :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{2}{x^3y^2} = 0 \iff x = \frac{1}{x^3y^2} \iff x^4y^2 = 1 \to y^2 = \frac{1}{x^4} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{2}{x^2y^3} = 0 \iff y = \frac{1}{x^2y^3} \iff x^2y^4 = 1 \qquad x^2\frac{1}{x^8} = 1 \Rightarrow x^6 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm 1$$

Hi ha 4 punts crítics $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.

Càlcul del Hessià :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \frac{6}{x^4 y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{4}{x^3 y^3} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \frac{6}{x^2 y^4}$$

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} a_{11} > 0 \\ \det = 8\cdot 8 - 4\cdot 4 > 0 \end{array}\right\} \to Hf(1,1) \text{ és def. positiva} \to (1,1) \text{ min}$$

$$Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} a_{11} > 0 \\ \det = 8\cdot 8 - (-4)(-4) > 0 \end{array}\right\} \to (1,-1) \text{ min}$$

$$Hf(-1,1) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \to (-1,1) \text{ min}$$

$$Hf(-1,-1) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \to (-1,-1) \text{ min}$$

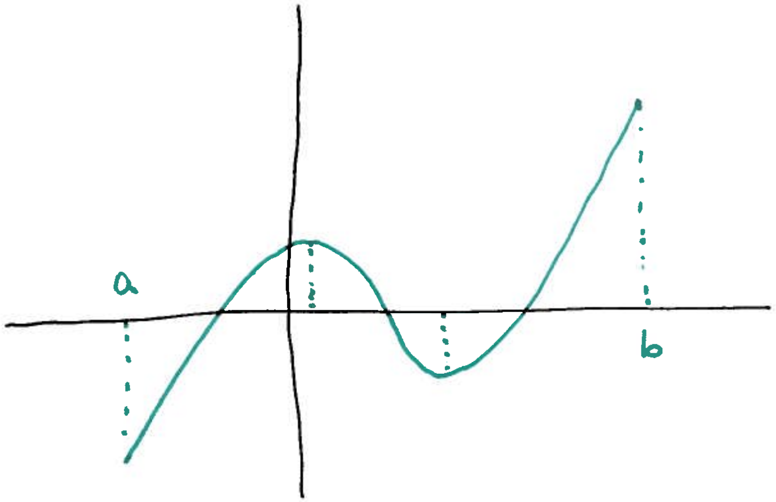
Màxims i mínims absoluts

Def Siguin $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in A$.

x_0 és un màxim absolut de f si $f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in A$

x_0 és un mínim absolut de f si $f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in A$

Ex d'una dimensió : $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$



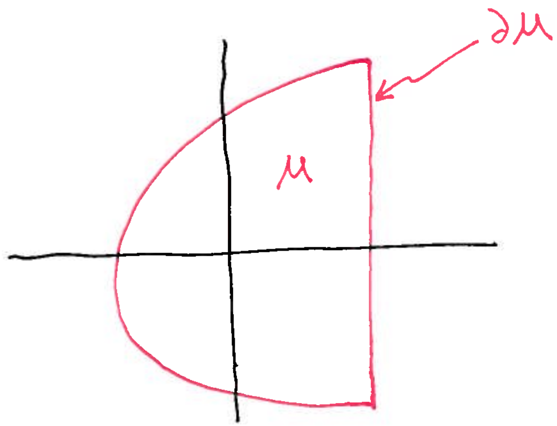
Teorema (Weierstrass)

Siguin $D \subset \mathbb{R}^n$ tancat i acotat, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua.

Llavors f té màxim i mínim absoluts i s'assoleixen en alguns punts $x_0, x_1 \in D$.

Mètode per trobar extrems absoluts en conjunts tancats i acotats

* Escrivim $D = \mathcal{U} \cup \partial \mathcal{U}$ amb $\mathcal{U}$ obert i $\partial \mathcal{U}$ corba o superfície suau a trossos



* Trobem els punts crítics de f en $\mathcal{U}$
* Trobem els extrems de f en $\partial \mathcal{U}$
* Calculem les imatges dels punts trobats i seleccionem la més gran i la més petita

Ex Buscar els extrems absoluts de $f : [-3, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + \frac{1}{3}$

$f'(x) = 2x^2 + 2x - 4 = 0$, $2(x^2 + x - 2) = 0$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

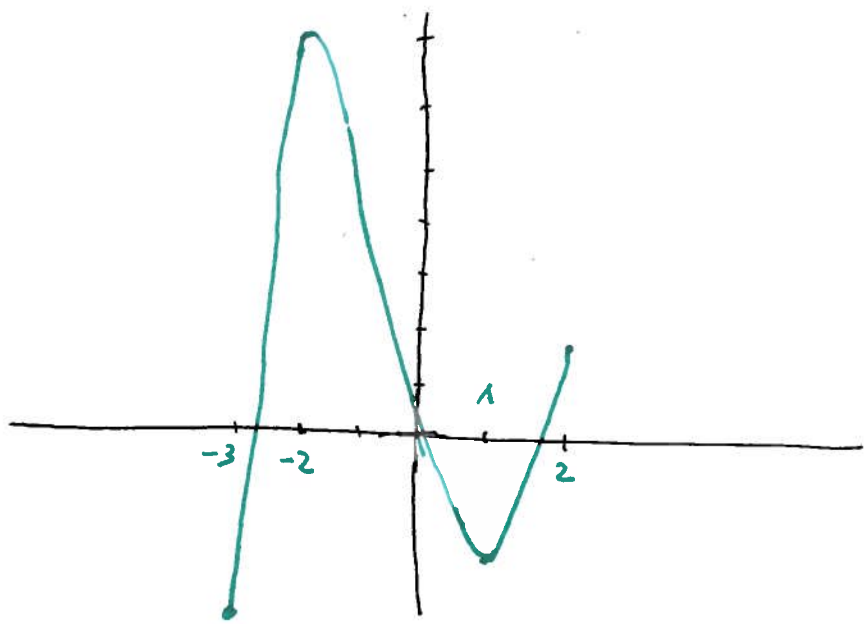
$f''(x) = 4x + 2 \longrightarrow \begin{cases} f''(1) = 6 > 0 & \Rightarrow 1 \text{ mín rel. estricte} \\ f''(-2) = -6 < 0 & \Rightarrow -2 \text{ màx rel. estricte} \end{cases}$

$f(1) = \frac{2}{3} + 1 - 4 + \frac{1}{3} = -2$

$f(-2) = -\frac{16}{3} + 4 + 8 + \frac{1}{3} = 7$

$f(-3) = -18 + 9 + 12 + \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$

$f(2) = \frac{16}{3} + 4 - 8 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$



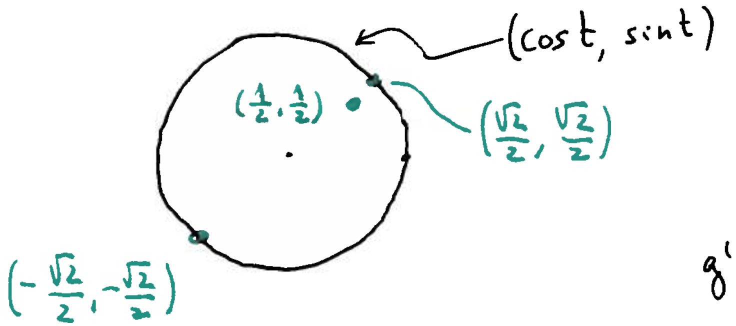
Ex Buscar els extrems absoluts de $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en $A = \{ x^2 + y^2 \leq 1 \}$

punts crítics:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 = 0 \qquad x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 1 = 0 \qquad y = \frac{1}{2}$$

punts crítics en ∂A: parametritzem ∂A per $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$



$$f(\sigma(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t - \cos t - \sin t + 1 = \underbrace{2 - \cos t - \sin t}_{\equiv\, g(t)}$$

$$g'(t) = \sin t - \cos t = 0 \iff \sin t = \cos t$$

$$\iff \operatorname{tg} t = 1$$

$$\iff t = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 - \sqrt{2} = 0.5857\ldots$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 + \sqrt{2}$$

Extrems lligats i multiplicadors de Lagrange

Es tracta de resoldre el següent problema: (en dues variables)

* donada $f(x,y)$ trobar els extrems quan les variables verifiquen una relació del tipus $\boxed{g(x,y) = c.}$ ← eq. de lligadura

  Ex Trobar el màxim i el mínim de $f(x,y) = x^2 - y^2$ quan $x^2+y^2=1$ (sobre la circumferència de radi 1).

* donada $f(x,y,z)$ trobar els extrems quan les variables verifiquen una relació $g(x,y,z) = c$ o bé les relacions $\boxed{\begin{cases} g_1(x,y,z) = c_1 \\ g_2(x,y,z) = c_2 \end{cases}}$

  ↑ eq'ns de lligadura

  Ex Trobar el màxim i el mínim de $f(x,y,z) = z^2$ sobre l'esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Teorema dels multiplicadors de Lagrange

Siguin $f: M \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable i $g: M \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable

i considerem la superfície $g(x) = c$ (si $m=3$), corba $g(x) = c$ (si $m=2$)

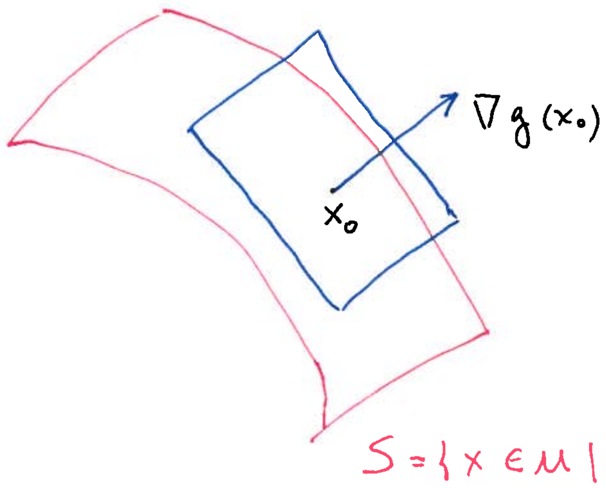
Si f restringida a $S = \{ x \in M \mid g(x) = c \}$ té un extrem en $x_0 \in S$ i $\nabla g(x_0) \neq 0$

llavors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

(λ es diu multiplicador de Lagrange)

Interpretació geomètrica



$\nabla f(x_0)$ és perpendicular a S en x_0

(2^n cas) funcions restringides a corbes de $\mathbb{R}^3$

Siguin f diferenciable i $g_1, g_2 : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables.

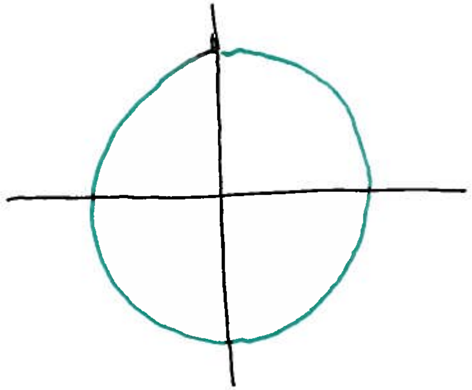
Considerem la corba $C = \{ x \in U \mid g_1(x) = c_1, \quad g_2(x) = c_2 \}$ (suposant que ho sigui)

Si f restringida a C té un extrem en $x_0 \in C$ i $\nabla g_1(x_0) \times \nabla g_2(x_0) \neq 0$

llavors $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0)$$

Ex Buscar els extrems de $f(x,y) = x^2 - y^2$ en el cercle unitat.



$$g(x,y) = 1 = x^2 + y^2$$

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0) \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases}$$

(1) $2x = \lambda\, 2x \rightarrow 2x(1-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; \rightarrow x = 0 \xrightarrow{(3)} y^2 = 1 \xrightarrow{(2)} \lambda = -1$

(2) $-2y = \lambda\, 2y \longrightarrow$ si $\lambda = 1 \xrightarrow[(2)]{} y = 0 \underset{(3)}{\Rightarrow} x^2 = 1$

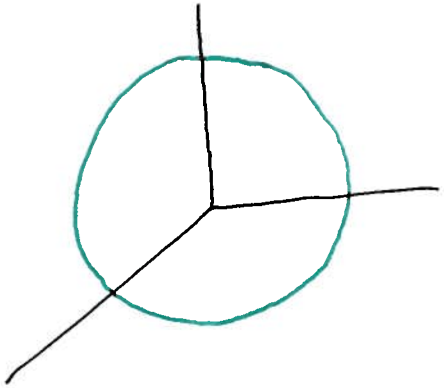
(3) $x^2 + y^2 = 1$

Hi ha 4 candidats

$(1,0)$ $(-1,0)$, $f(\pm 1, 0) = 1$ Màx

$(0,1)$ $(0,-1)$, $f(0, \pm 1) = -1$ Mín

Ex Buscar els extrems de $f(x,y,z) = x+z$ en l'esfera unitat.



$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 1$$

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0,z_0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \lambda 2x \\ 0 = \lambda 2y \\ 1 = \lambda 2z \end{array}\right. \Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow y = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2\lambda} \\ z = \frac{1}{2\lambda} \end{array}\right. \Rightarrow x = z$$

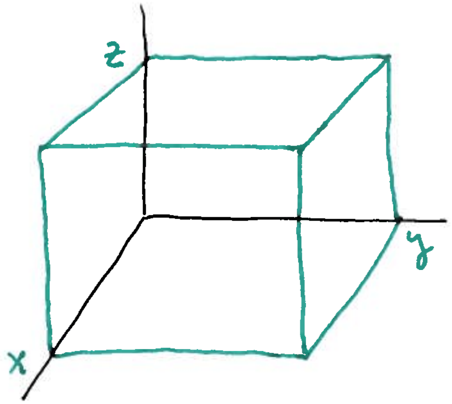
$$x^2+y^2+z^2=1 \longrightarrow x^2+0+x^2=1 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad i \quad z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dos candidats

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ Màxim

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ Mínim

Ex: Trobeu el volum màxim d'una caixa rectangular tal que la seva superfície és 10 m^2.



volum $= xyz = f(x,y,z)$

superfície $= 2xy + 2xz + 2yz = g(x,y,z)$

Considerem f definida en $\{x>0,\ y>0,\ z>0\}$

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0,z_0)$$

$$yz = 2\lambda(y+z)$$
$$xz = 2\lambda(x+z)$$
$$xy = 2\lambda(x+y)$$
$$2(xy+xz+yz) = 10$$

$$2\lambda = \frac{yz}{y+z} = \frac{xz}{x+z} \rightarrow yzx + yz^2 = yxz + xz^2 \rightarrow yz^2 = xz^2 \rightarrow y = x$$

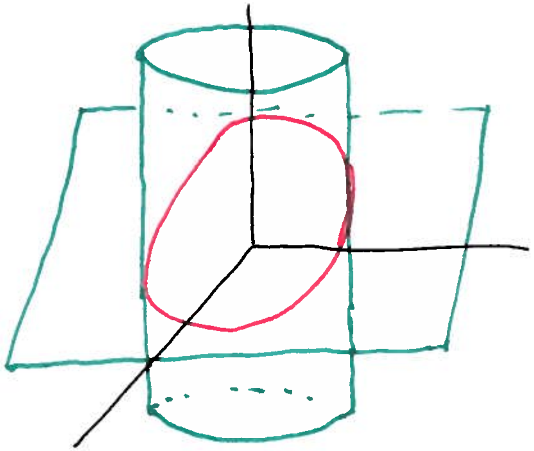
$$2\lambda = \frac{xz}{x+z} = \frac{xy}{x+y} \rightarrow x^2z + xzy = x^2y + xyz \rightarrow x^2z = x^2y \rightarrow z = y$$

$$2(x^2+x^2+x^2) = 10 \rightarrow 3x^2 = 5 \rightarrow x = \sqrt{\tfrac{5}{3}} > 0$$

Únic candidat $\left(\sqrt{\tfrac{5}{3}}, \sqrt{\tfrac{5}{3}}, \sqrt{\tfrac{5}{3}}\right)$. Volum màx $= \left(\tfrac{5}{3}\right)^{3/2}$

<u>Ex</u> Càlcul dels extrems de $f(x,y,z) = x+y+z$ amb les condicions

$x^2+y^2=2, \quad x+z=1$



$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2$$

$$g_2(x,y,z) = x+z$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\left.\begin{array}{lll} 1 = \lambda_1 2x + \lambda_2 \cdot 1 & \rightarrow & 2x\lambda_1 = 0 \\ 1 = \lambda_1 2y + \lambda_2 \cdot 0 & \rightarrow & 2y\lambda_1 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow x = 0$$

$$1 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = 1$$

$$x^2+y^2 = 2 \xrightarrow[x=0]{} y = \pm\sqrt{2}$$

$$x+z = 1 \longrightarrow z = 1$$

Candidats $(0, \pm\sqrt{2}, 1)$

$f(0,\sqrt{2},1) = \sqrt{2}+1$ Màxim

$f(0,-\sqrt{2},1) = -\sqrt{2}+1$ Mínim