4. Contrastes e hipótesis

1. Hay dos hipótesis acerca de la función de densidad de una v.a. X con distribución discreta:

$$H_0 : f_0(1) = f_0(2) = \frac{1}{50}; \qquad f_0(i) = \frac{1}{25}; i = 3, \ldots, 26$$

$$H_1 : f_1(1) = f_1(2) = \frac{1}{4}; \qquad f_1(i) = \frac{1}{48}; i = 3, \ldots, 26$$

   a) Demuestre que, pera un nivel de significación $\alpha = 0,05$ y muestras aleatorias simples de tamaño 1, $W_1 = \{1, 2\}$ i $W_2 = \{3\}$ son regiones críticas.

   b) Si el valor muestral observado fuese $x = 3$, ¿qué hipótesis aceptaríamos utilizando W_1 como rgión crítica? ¿y empleando W_2? Calcule la potencia y el error de segunda especie de cada test.

   c) Demuestre que W_1 es una región crítica óptima.

2. Una empresa produce lotes de piezas con dos calidades diferentes, con proporciones de piezas correctas θ_0 i θ_1 respectivamente, con $\theta_0 < \theta_1$. Compramos un lote de la primera calidad. A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño n de dicho lote y con un nivel de significación α, construya un test de hipótesis de potencia máxima para comprobar que efectivamente se trata de un lote de primera calidad y no de segunda.

3. El número de partículas por segundo que emite una fuente radioactiva sigue una distribución de Poisson de parámetro λ. Se desea contrastar $H_0 : \lambda = \lambda_0$ frente a $H_1 : \lambda = \lambda_1$, con $\lambda_0 < \lambda_1$, a partir de una muestra de tamaño n y nivel de significación α. Halle un test UMP.

4. Consideremos una muestra aleatoria simple de tamaño n de una v.a. con ley $N(\mu, \sigma^2)$ con μ conocida. Fijemos un nivel de significación $\alpha \in (0, 1)$. Sean $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ (ambos positivos). Halle un test UMP al nivel α para contrastar: $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ frente a $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$.

5. Sea X una v.a. poblacional con función de densidad

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} \exp\{-x/\theta\}, \qquad x > 0, \qquad \theta > 0$$

   Contraste con la razón de verosimilitud las hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a la alternativa $H_1 : \theta > \theta_0$. Considere muestras de tamaño n y un nivel de significación α.

6. Con la finalidad de comparar la virulencia de dos organismos patógenos, se inocula con el patógeno I a n conejillos de indias, de los que x manifestaron signos de enfermedad, y a otros m con el patógeno II, de los que y enfermaron. Los animales se mantuvieron aislados de tal manera que podemos asumir independencia entre los dos grupos experimentales. Sean p_1 y p_2 las probabilidades con que cada patógeno produce síntomas de enfermedad. Determine

el test de la razón de verosimiltud para contrastar $H_0 : p_1 = p_2$ frente la alternativa $H_1 : p_1 \neq p_2$. Aplica los resultados al caso $n = 60$, $x = 18$, $m = 100$ i $y = 42$.

7. Sea X una v.a. poblacional $N(\mu, \sigma^2)$ con μ conocida. Contrasta, en muestras de tamaño n, con la razón de verosimilitud las hipótesis $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ frente la alternativa $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

8. Las fluctuaciones $X_1, \ldots, X_n$ en la cotización de un determinado valor bursátil, respecto su valor nominal, a lo largo de sesiones consecutivas, se supone que siguen el modelo
$$X_i = \theta X_{i-1} + e_i$$
donde $X_0 = 0$ y e_i son v.a. independientes y $N(0, \sigma)$. Determine el contraste de la razón de verosimilitud para contrastar la hipótesis $H_0 : \theta = 0$ frente a la alternativa $H_1 : \theta \neq 0$. Distinga el caso σ conocida del caso σ desconocida.

9. Un estudio sociológico ha constatado que la proporción de su renta que una familia gasta en bienes de primera necesidad sigue una distribución con función de densidad
$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta - 1} \qquad 0 < x < 1$$
donde θ es un parámetro relacionado con la pobreza de la sociedad. Para comparar dos poblaciones independientes, se ha observado la característica de interés en n families de la primera y en m de la segunda. Determine el test de la razón de verosimilitud, con un nivel de significación α, para contrastar $H_0 : \theta_1 \leq \theta_2$ front $H_1 : \theta_1 > \theta_2$.