Mètodes Numèrics — GIE - UPC - UB

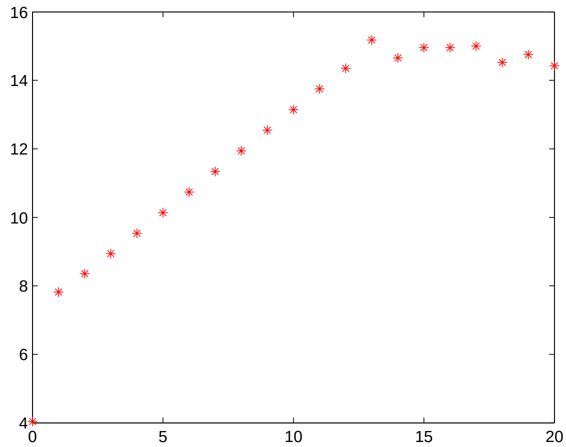
Examen Final Problemes — Enunciat-v2 — 17 de juny de 2017

1. Considerem el càlcul de la integral $\int_{-4}^{0} e^{-x^2}\,dx$ emprant la regla dels trapezis $T(h)$ amb passos h cada vegada més petits. Calculeu $T(h)$ per $h = 2^{-k}$, $k = 0, 1, \ldots, 20$ treballant amb 6 xifres decimals com a mínim. A partir de quin valor de k és inutil continuar fent els càlculs degut als errors d'arrodoniment? Per què?

Resposta. El valor exacte s'obté per `I=quad(f,-4,0,tol)`. La successió d'errors $|I-T(h)|$ és decreixent a 0 fins la iteració 13. Per a les iteracions següents, l'error no disminueix. Els errors d'arrodoniment fan que tots els càlculs posteriors no millorin el valor aproximat

Taula de valors on h=1/2^k i xd el nombre de decimals iguals.

k	T(h)	|I-T(h)|	xd	k	T(h)	|I-T(h)|	xd
0	0.8863185461	9.16e-005	4				
1	0.8862268965	1.53e-008	7	11	0.8862269118	1.78e-014	13
2	0.8862269074	4.43e-009	8	12	0.8862269118	4.44e-015	14
3	0.8862269106	1.15e-009	8	13	0.8862269118	6.66e-016	15
4	0.8862269115	2.92e-010	9	14	0.8862269118	2.22e-015	14
5	0.8862269117	7.32e-011	10	15	0.8862269118	1.11e-015	14
6	0.8862269118	1.83e-011	10	16	0.8862269118	1.11e-015	14
7	0.8862269118	4.58e-012	11	17	0.8862269118	9.99e-016	15
8	0.8862269118	1.14e-012	11	18	0.8862269118	3.00e-015	14
9	0.8862269118	2.86e-013	12	19	0.8862269118	1.78e-015	14
10	0.8862269118	7.15e-014	13	20	0.8862269118	3.77e-015	14



Exercici 1 Gràfic, abscises h i ordenades xifres decimals correctes

2. Per al sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= 1 \\ x + 4y - z &= 3 \\ x - y - 5z &= -2 \end{aligned}$$

(a) Formula el mètode de Gauss-Seidel.
(b) Estudia la convergència del mètode.
(c) Calculeu les 10 primeres iteracions del mètode partint del vector inicial $x^0 = 0$
(d) Calcula la solució exacta fent ús de funcions de `MATLAB`.
(e) Estimeu els errors absolut i relatiu corresponents a la darrera iteració calculada. Quantes xifres significatives heu obtingut?

Resposta. (a) El mètode de Gauss-Seidel seria

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \\ z^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & -1/12 & 1/3 \\ 0 & 1/12 & -2/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

(b) El radi espectral de la matriu de Gauss Seidel és 0.276865, el fet que $\rho(B_g s) < 1$ ens indica que és un mètode convergent.
(c) Les 10 primeres iteracions són ç

```
-----------------------------------------
    k       x^k          y^k          z^k
1  0.333333333  0.666666667  0.333333333
2  0.444444444  0.722222222  0.344444444
3  0.459259259  0.721296296  0.347592593
4  0.457901235  0.72242284   0.347095679
5  0.458442387  0.722163323  0.347255813
6  0.458302503  0.722238327  0.347212835
7  0.458341831  0.722217751  0.347224816
8  0.458330978  0.722223459  0.347221504
9  0.458333985  0.72222188   0.347222421
10  0.458333153  0.722222317  0.347222167
------------------------------------------
```

(d) La solució exacte en `MATLAB` es pot obtenir per $A\backslash b$, que en aquest cas és

$$\chi^* = (0.45833, 0.72222, 0.34722)^t.$$

(e) L'error absolut és $|\chi^{10} - \chi^*| = 0.2112e - 006$. L'error relatiu és

$$\frac{|\chi^{10} - \chi^*|}{|\chi^*|} = 0.2288e - 006 < 0.510^{-6},$$

s'obtenen sis xifres significatives.

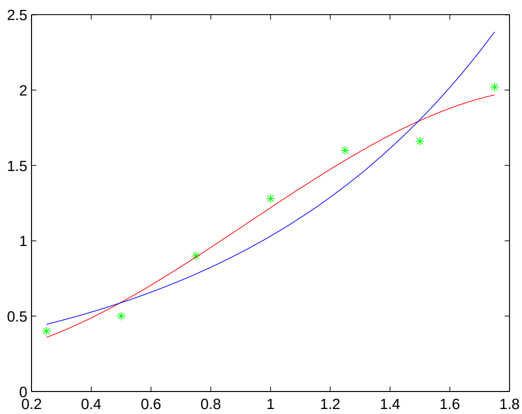
3. Plantegeu el mètode de la potència per a la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 8 \\ 10 & 5 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

per a calcular el valor propi de mòdul mínim, i realitzeu les iteracions necessàries per a determinar el valor propi i el vector propi amb tres decimals correctes. Realment, caldria fer nombroses iteracions per a obtenir un resultat que s'aproximi suficientment a la solució; quins criteris cal utilitzar per a aturar el procés iteratiu?

Prenen com a vector inicial $\chi = (0, 0, -1)^t$, un valor aproximat amb $tol = 0.0005$ calen 15 iteracions, i $\lambda_{15} \approx 4.79143$ $v_\lambda = (-0.09066, 0.64602, -0.75792)^t$ fent els càlculs amb $\|\cdot\|_2$. El criteri d'aturada és $\|A * x - r(k) * x\|_\infty < tol$ concretament per 8 decimals correctes, calen 22 iteracions. Les iteracions són:

vap	vep		
1/0.084097859327217	-0.431194736503518	0.767526630976263	-0.47431421015387
1/0.140164463494481	0.0893762321284636	0.421920230948783	-0.90221682972922
1/0.174013589584056	-0.22847678161577	0.748086009373291	-0.623029439787915
1/0.191944500499989	0.00352213658173692	0.552639088339655	-0.833413242391201
1/0.200823877166656	-0.152732099644703	0.698474400724659	-0.699146921090589
1/0.205050857321427	-0.0461179794717944	0.604396796411789	-0.795347499182971
1/0.207023080035295	-0.118507319464052	0.670464121902001	-0.732416463820703
1/0.207934495413481	-0.0695242428474793	0.626687315030089	-0.776163248831625
1/0.208353806503194	-0.102747126549969	0.656786687040536	-0.747043690631305
1/0.208546319966602	-0.0802750191980122	0.636609243693589	-0.766997126550443
1/0.208634622755325	-0.0955018146829836	0.650363506906723	-0.753595854736639
1/0.208675108201765	-0.0851986031273405	0.641094084181162	-0.762718541306731
1/0.208693666445354	-0.0921765542843079	0.647388969749933	-0.756565267961986
1/0.208702172636171	-0.0874537244339436	0.643136259758133	-0.760741478734367
1/0.20870607129453	-0.0906516091177298	0.646019394762971	-0.757919011078658



Exercici 4 Gràfic, els punts (verd), el polinomi (vermell) i la corba $y = Be^{\beta x}$ (blau)

4. Empreu una tècnica de mínims quadrats per ajustar la taula de dades:

X	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
Y	0.40	0.50	0.90	1.28	1.60	1.66	2.02

a funcions del tipus següents: (4a) $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ (4b) $y = Be^{\beta x}$. Es demana:

(a) Explicitar els sistemes lineals resoldre en ambdós casos.

(b) Donar els valors ajustats, a_0, a_1, a_2, a_3, B i β així com el valor del residu obtingut per cada equació.

(c) Representeu conjuntament els punts (verd), el polinomi (vermell) i la corba $y = Be^{\beta x}$ (blau).

(d) Quin d'aquests tipus sembla el més adequat?

(4a) Per a $y = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ el sistema lineal a resoldre per mínims quadrats és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.25^2 & 0.25^3 \\ 1 & 0.5 & 0.5^2 & 0.5^3 \\ 1 & 0.75 & 0.75^2 & 0.75^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.25 & 1.25^2 & 1.25^3 \\ 1 & 1.5 & 1.5^2 & 1.5^3 \\ 1 & 1.75 & 1.75^2 & 1.75^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0.9 \\ 1.28 \\ 1.60 \\ 1.66 \\ 2.02 \end{pmatrix}.$$

Els valors obtinguts són $a_0 = 0.2343$ $a_1 = 0.2305$ $a_2 = 1.1810$ $a_3 = -0.4267$ i el residu és $r = 0.1992$

(4b) Per a $y = Be^{\beta x}$ el sistema lineal a resoldre per mínims quadrats és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.25 \\ 1 & 0.5 \\ 1 & 0.75 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1.25 \\ 1 & 1.5 \\ 1 & 1.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(B) \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(0.4) \\ \ln(0.5) \\ \ln(0.9) \\ \ln(1.28) \\ \ln(1.60) \\ \ln(1.66) \\ \ln(2.02) \end{pmatrix}.$$

Els valors obtinguts són $B = 0.3366$ $\beta = 1.1191$ i el residu és $r = 0.5451$.

Per valor de residu, el millor dels dos és el polinomi de grau 3.