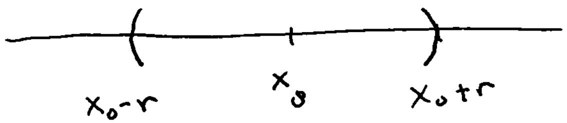
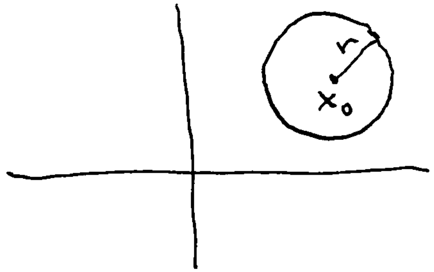
# Una mica de topologia a $\mathbb{R}^n$

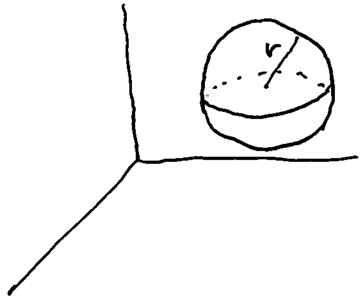
Donats $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $r>0$ definim

Bola oberta (disc obert) de centre $x_0$ i radi $r$ : $\boxed{B(x_0,r)=\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-x_0\|<r\}}$

$\boxed{n=1}$ $\boxed{n=2}$ $\boxed{n=3}$

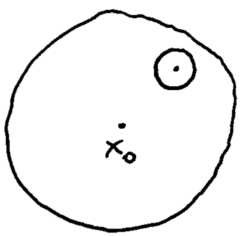


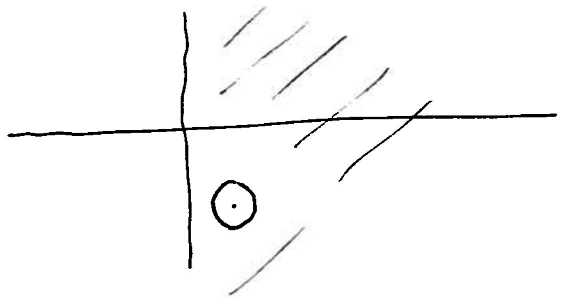

**Def** $U \subset \mathbb{R}^n$ es diu <u>conjunt obert</u> si $\forall x \in U$ $\exists r>0$ tal que $B(x,r) \subset U$.

**Ex. 1** Les boles obertes són conjunts oberts




**Ex. 2**

$U=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0\}$



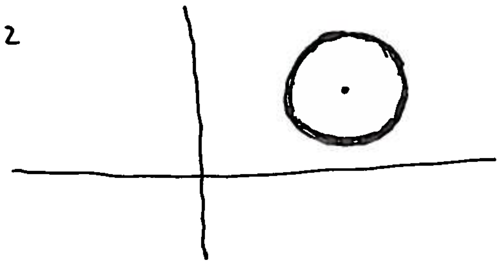
Un conjunt obert que conté un punt $x_0$ es diu <u>entorn</u> de $x_0$

Per convenció el conjunt $\phi$ és obert

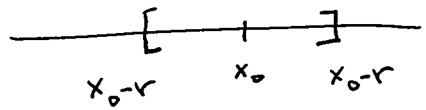
<u>Def</u> $A \subset \mathbb{R}^m$ es diu <u>conjunt tancat</u> si el seu complementari $\mathbb{R}^m \setminus A$ és obert

**Ex. 1** La bola tancada $\overline{B}(x_0,r) = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x_0\| \leq r \}$

$m=2$



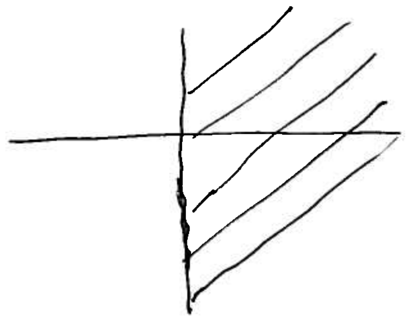
$m=1$




**Ex. 2**

$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \}$

$\mathbb{R}^2 \setminus A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \}$



**Ex. 3**

$\mathbb{R}^m$ és obert i també tancat pq $\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{R}^m = \phi$ és obert

<u>Def</u> Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$. $x \in \mathbb{R}^n$ es diu <u>punt frontera</u> de $A$ si

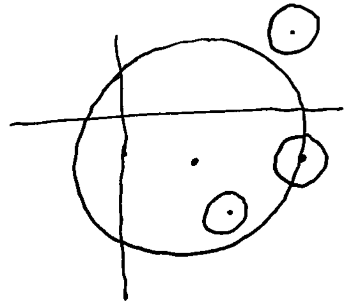
$$\forall r > 0 \qquad B(x,r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{i} \quad B(x,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$$

El conjunt de tots els punts frontera de $A$ es representa per $\text{Fr}\, A$

<u>Exemples</u>

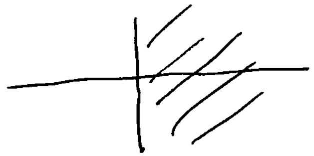
- $(a,b) \subset \mathbb{R}$  $\text{Fr}\,(a,b) = \{a, b\}$

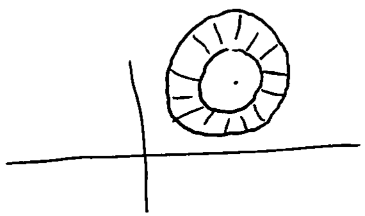


- $B(x_0,r) \subset \mathbb{R}^n$  $\text{Fr}\, B(x_0,r) = \{(x,y) \mid \|x - x_0\| = r\}$

- $\overline{B}(x_0,r) \subset \mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ $\qquad \text{Fr}\, \mathbb{R}^n = \emptyset$

- $A = \{(x,y) \mid x > 0\}$  $\text{Fr}\, A = \{(x,y) \mid x = 0\}$

- $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid a < \|x - x_0\| < b\}$  $\text{Fr}\, A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| = a\} \cup$
$\cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| = b\}$

Notes

- Si un conjunt és obert no conté cap dels seus punts frontera : $\mathcal{U} \cap \mathrm{Fr}\,\mathcal{U} = \emptyset$
- Si un conjunt és tancat conté tots els seus punts frontera : $A \supset \mathrm{Fr}\,A$
- Hi ha conjunts que no són oberts ni tancats.

# Límits

**Def.** Siguin $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{U}$ obert, $x_0 \in \mathcal{U}$ o $x_0 \in \operatorname{Fr} \mathcal{U}$

Diem que $f$ té límit $\ell$ quan $x$ tendeix a $x_0$ si

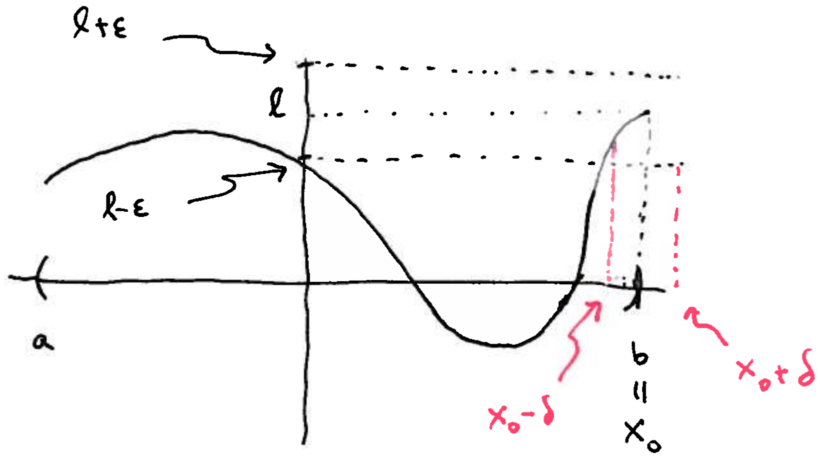
> per a tota bola $B_2$ centrada en $\ell$ existeix una bola $B_1$ centrada en $x_0$ de manera que per a tot $x$ de $(B_1 \setminus \{x_0\}) \cap \mathcal{U}$, $f(x)$ pertany a $B_2$.

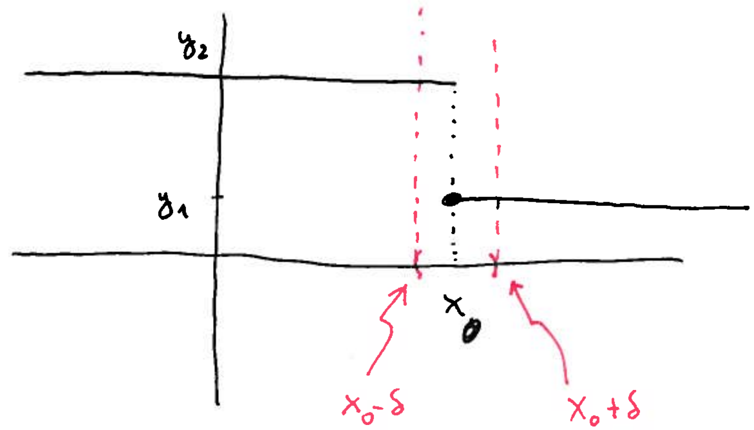
Escrivim

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad , \quad f(x) \longrightarrow \ell \quad \text{quan} \quad x \to x_0$$

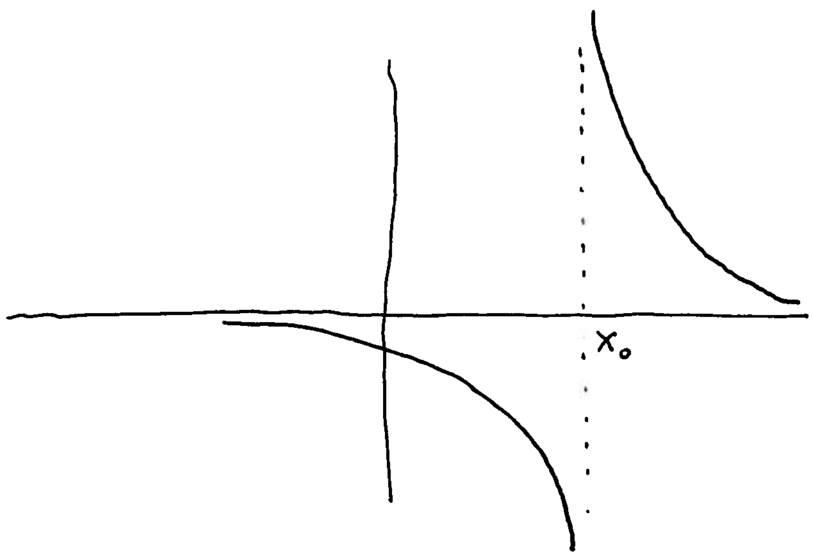
Com que les boles tenen un centre i un radi, la definició es pot escriure de forma més compacte

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \forall \varepsilon > 0 & \exists \delta > 0 & \text{t.q.} & \underbrace{0 < \| x - x_0 \| < \delta}_{x \in B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}} \ \text{i} \ x \in \mathcal{U} & \Rightarrow \ \underbrace{\| f(x) - \ell \| < \varepsilon}_{f(x) \in B(\ell,\varepsilon)} \\ \updownarrow & \updownarrow & & & \\ B(\ell,\varepsilon) & B(x_0,\delta) & & & \\ \wr\wr & \wr\wr & & & \\ B_2 & B_1 & & & \end{array}}$$

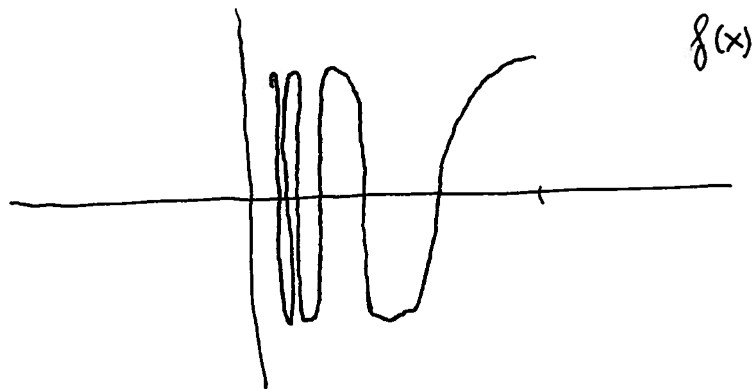


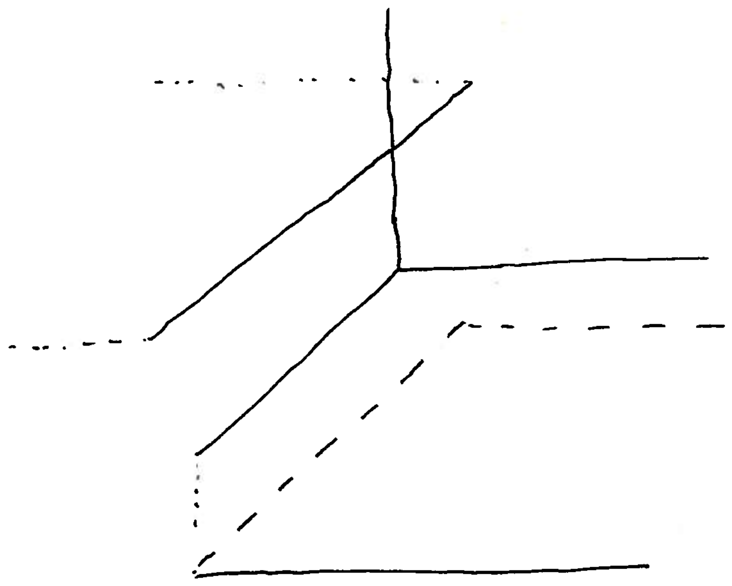




$f(B(x_0,\delta)) = \{y_1, y_2\}$




$f(x) = \sin\frac{1}{x}$



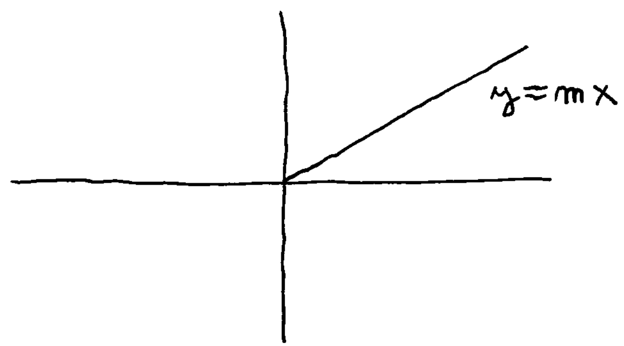


$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \le 0 \\ -1 & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

---

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \ ?$$

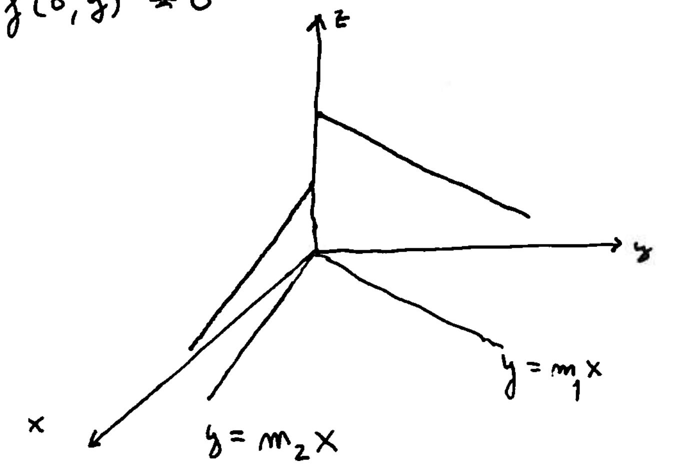



Domini de $f$

$$f(x,mx) = \frac{2xmx}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

$$f(x,0) = 0$$

$$f(0,y) = 0$$



## Unicitat del límit

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_2$ llavors $l_1 = l_2$

## Regles de càlcul de límits

Siguin $f, g : M \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in M \cup \mathrm{Fr}\, M$, $\exists\ l_1 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $l_2 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{x\to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

3) si $m=1$, $\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\, g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

4) si $m=1$ i $g(x) \neq 0$ $\forall x \in M$, $\quad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

## Exemples bàsics

$f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = c$, $\quad \boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = c}$

Com que $|f(x) - c| = |c - c| = 0$

donat $\varepsilon > 0$ prenem $\delta$ qualsevol i si $\|x - x_0\| < \delta$, $|f(x) - c| < \varepsilon$

---

$f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_i$ $\quad$ $\boxed{\left( \text{p. ex. } f(x,y,z) = x, \quad \lim_{(x,y,z) \to (2,2,1)} f(x,y,z) = 2 \right)}$

$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = x_{0i}}$. $\quad$ on $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0m})$

$$|f(x) - x_{0i}| = |x_i - x_{0i}| = \sqrt{|x_i - x_{0i}|^2} \leq \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + \ldots + (x_m - x_{0m})^2}$$

$$= \|x - x_0\|$$

donat $\varepsilon > 0$ prenem $\delta = \varepsilon$ : si $\|x - x_0\| < \delta = \varepsilon$, $|f(x) - x_{0i}| < \|x - x_0\| < \varepsilon$

---

## Aplicació

$f_1(x,y,z) = x^2 + z^2$, $\quad f_2(x,y,z) = 3x^2y - 7xyz$, $\quad f_3(x,y,z) = \dfrac{x^2 - xy + 2z}{1 + x^2}$

(en general, funcions polinòmiques i racionals de diverses variables)

$\lim_{(x,y,z) \to (2,1,4)} f_1(x,y,z) = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 20$, $\quad \lim_{(x,y,z) \to (1,1,1)} f_2(x,y,z) = 3 - 7 = -4$, etc

# Límits de funcions vectorials

$f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , $\quad f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ on $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

( p. ex. $\quad f(x,y) = \left( xy - y^2, \ \frac{x-y}{1+y^2} \right)$ )

Existeix $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l = (l_1, l_2, \dots, l_m) \iff$ Existeixen $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = l_i$ , $\forall i$

---

Ex:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} f_1(x,y) = \lim xy - y^2 = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} f_2(x,y) = \lim \frac{x-y}{1+y^2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$\boxed{\underline{\text{Exercici}}}$ Siguin $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{U} \cup \operatorname{Fr} \mathcal{U}$

Proveu que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

<u>Solució</u>: Escrivim les dues condicions en termes de la seva definició en $\varepsilon - \delta$.

La cond. de l'esquerra és

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \quad \text{i} \quad x \in \mathcal{U}, \quad \underbrace{|f(x) - 0|}_{|f(x)|} < \varepsilon$$

La cond. de la dreta és

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.q} \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta \quad \text{i} \quad x \in \mathcal{U}, \quad \underbrace{\big|\,|f(x)| - 0\,\big|}_{|f(x)|} < \varepsilon$$

Veiem que coincideixen

# Acotació i càlcul de límits

Siguin $f: M \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_1, g_2: M \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in M \cup Fr\, M$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g_2(x) = l$ i $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$, $\forall x \in M$

Llavors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

---

Ex. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Nota: $\left| \dfrac{xy}{x^2+y^2} \right| \leq \dfrac{1}{2}$. En efecte

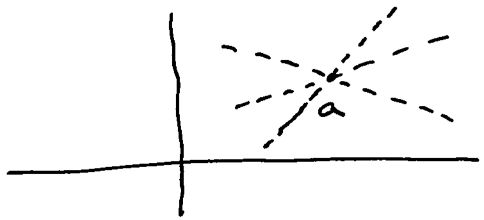
$$0 \leq (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy \Rightarrow -2xy \leq x^2+y^2 \Rightarrow \frac{-xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq (x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \Rightarrow 2xy \leq x^2+y^2 \Rightarrow \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| = |x| \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{2}|x|} \Longrightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$

## Límits segons rectes

Per a funcions de dues o més variables podem tendir a un punt segons una recta. En dimensió 2, donat $a \in M \subset \mathbb{R}^2$ podem tendir a $a$ segons la recta $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ o també $y = a_2 + m(x - a_1)$

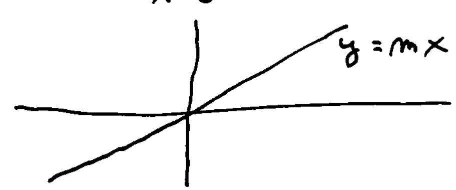



$\left( m = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{si} \quad v_1 \neq 0 \right)$

o bé $x = a_1$, si $v_1 = 0$.

Si $\exists \lim_{(x,y)\to a} f(x,y)$ llavors han d'existir els límits segons **totes** les rectes que passen per $a$ i han de coincidir amb $\lim_{(x,y)\to a} f(x,y)$.

Ex: $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$.



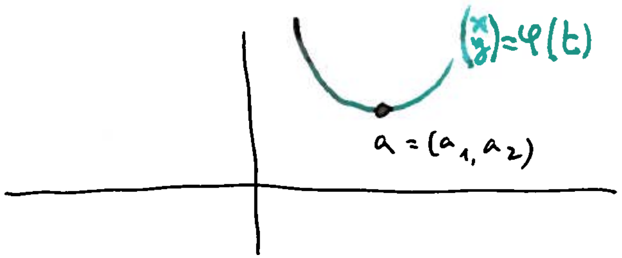

Ex: $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$

límit a $(0,0)$ segons la recta $y = mx$: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim \frac{1}{1+m^2} = \frac{1}{1+m^2}$

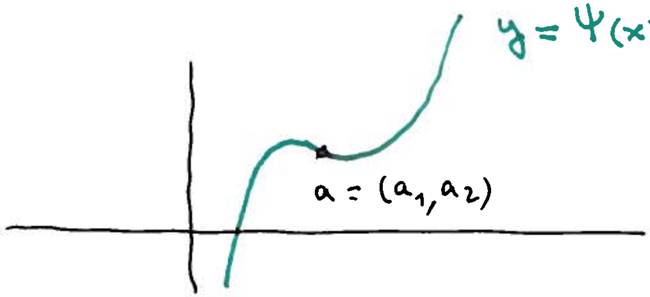
" " $x = 0$: $\lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2} = 0$

# Límits segons corbes

Per a funcions de dues o més variables també podem tendir a un punt segons una corba. Si $a \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$



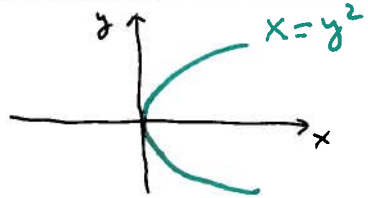

t.q. $\varphi(0) = a$




t.q. $\Psi(a_1) = a_2$

Si $\exists \lim_{(x,y)\to a} f(x,y)$ llavors han d'existir els límits segons totes les corbes que passen per $a$ i han de coincidir amb $\lim_{(x,y)\to a} f(x,y)$.

**Ex** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x y^2}{x^2+y^4}$ segons la paràbola $x = y^2$




Podem representar la paràbola per $\binom{x}{y} = \binom{t^2}{t}$, "$y = \sqrt{x}$", $x = y^2$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2 t^2}{t^4+t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{x\,x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \; ; \; \lim_{y\to 0} \frac{y^2 y^2}{y^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Si els límits segons totes les rectes existeixen i són iguals, el límit no té perquè existir:

---

<u>Ex</u> $f: \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \mid x \neq -y\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x + y + y^2}{x + y}$

límit a $(0,0)$ segons la recta $y = mx$:

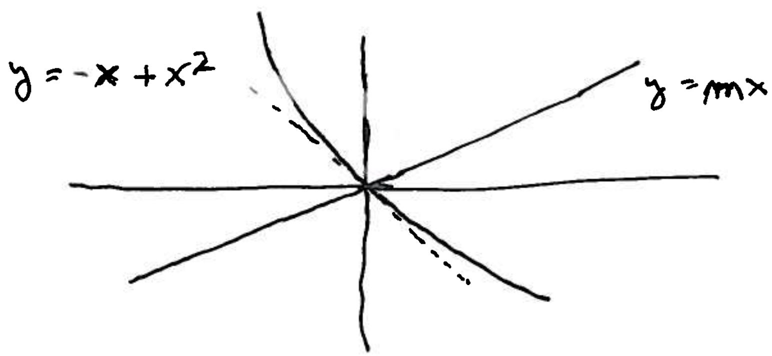
$$\lim_{x\to 0} \frac{x + mx + m^2x^2}{x + mx} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + m + m^2 x}{1 + m} = 1$$

segons $x = 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{y + y^2}{y} = 1$$

límit a $(0,0)$ segons la corba $y = -x + x^2$ (que passa per l'origen)

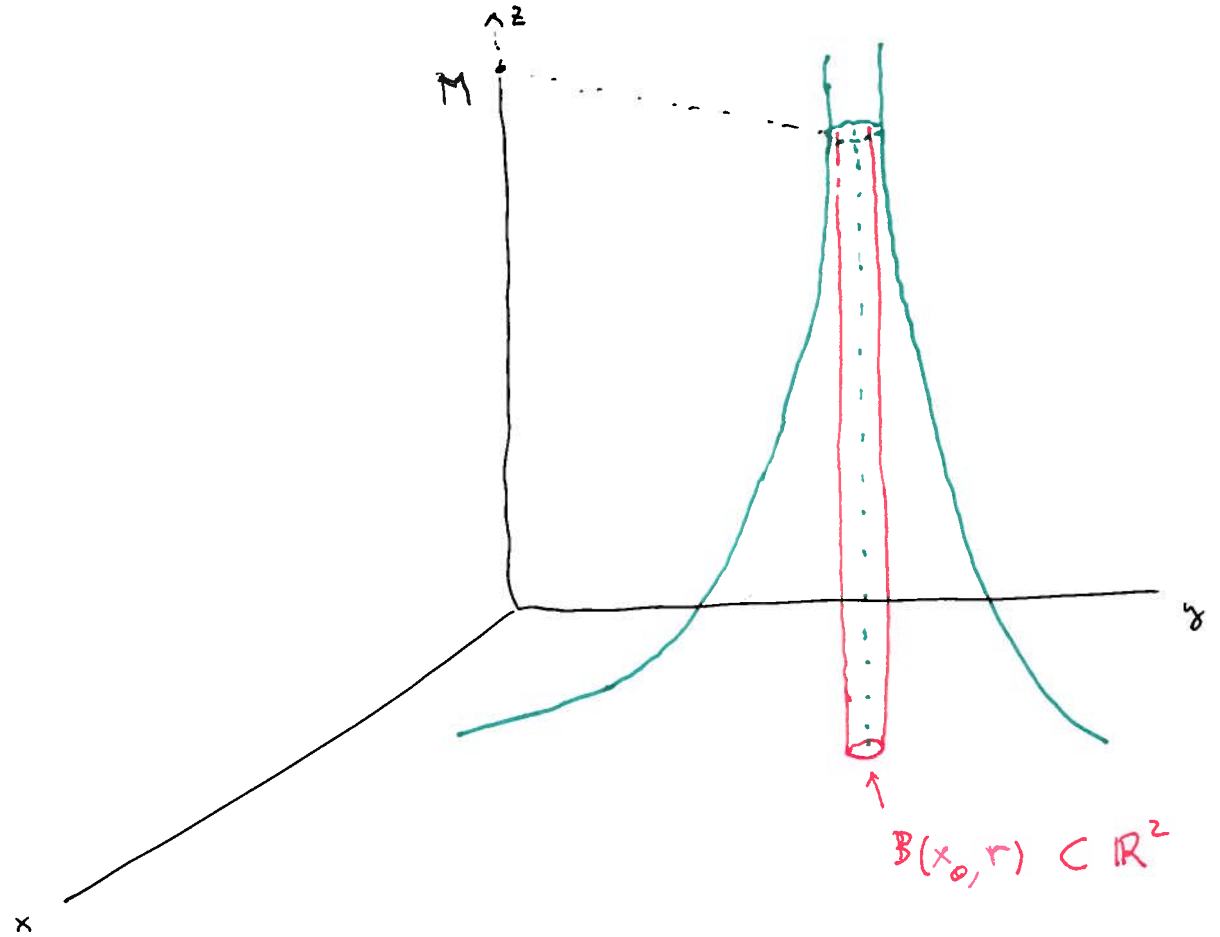
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - x + x^2 + (-x + x^2)^2}{x - x + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 2x^3 + x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2x + x^2}{1} = 2$$



## Límits $\infty$

Siguin $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in \mathcal{U} \cup \operatorname{Fr} \mathcal{U}$

$$\lim_{x \to x_0} f = \infty \iff \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad \|x - x_0\| < \delta,\ x \in \mathcal{U} \Rightarrow f(x) > M$$



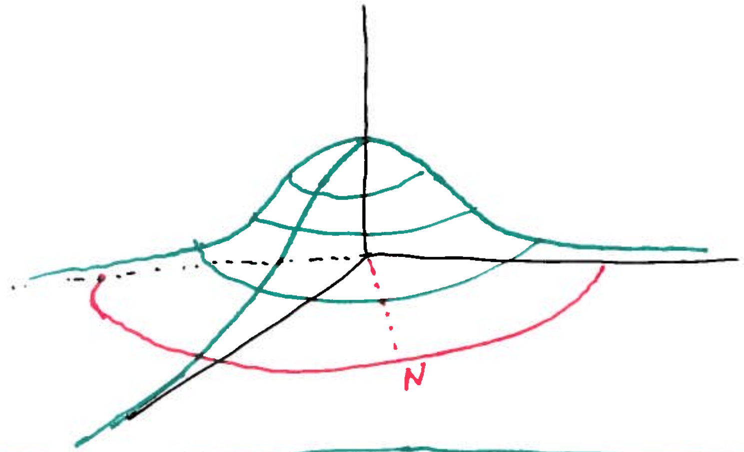

**Ex** $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty$, $\quad \displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2-y^2}$ no existeix

## Límits a l'$\infty$

Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad t.q. \quad \|x\| > N \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

**Ex** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\infty} e^{-(x^2+y^2)} = 0$




$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \iff \forall M > 0 \quad \exists N > 0 \quad t.q. \quad \|x\| > N \Rightarrow f(x) > M$$

**Ex** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\infty} (x^2+y^2) = \infty$ ; $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\infty} (x^2-y^2)$ no existeix

# $\boxed{\text{Continuïtat}}$

**Def** Siguin $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ i $x_0 \in \mathcal{U}$.

$f$ és contínua en $x_0$ $\iff$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$f$ és contínua en $\mathcal{U}$ $\iff$ $f$ és contínua en tot punt $x_0$ de $\mathcal{U}$.

## $\boxed{\text{Ex.}}$ de funcions contínues

1. Funcions polinòmiques, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 y,\ x^2 + 5xy^3)$

2. Funcions racionals en els conjunts on no n'anul·la el denominador

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) = \left( \frac{x^2 y}{1+x^2},\ xy+1,\ \frac{2x - x^2 y}{(x^2+y^2)^2 + 1} \right)$$

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x = 1\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \frac{2x^2 - 7y^2}{x-1}$$

3. Funcions elementals d'una variable

3.1 $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

3.2 $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

3.3 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ ; $f: (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$

3.4 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $a > 0$ ; $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$

(Recordem que $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ com es comprova prenent logaritmes a ambdos costats)

3.5 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ ; $f: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$

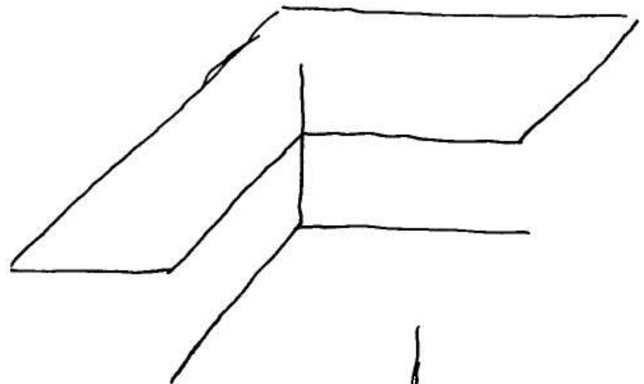
3.6 $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ ; $f: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos x$

3.7 $f: \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ ; $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$

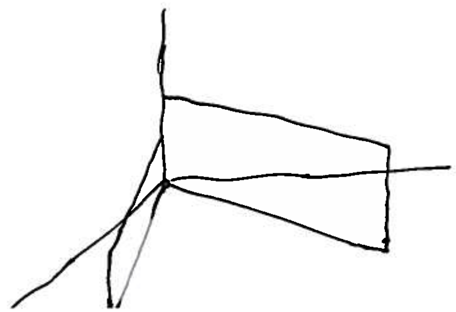
---

**Ex** de funcions no contínues en algun punt

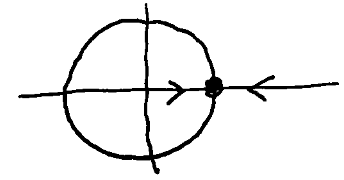
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 0 \text{ o } y \le 0 \\ 0 & \text{altre cas} \end{cases}$$



$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



**Ex** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}, & \text{si } x^2+y^2 \neq 1 \\ 1, & \text{si } x^2+y^2 = 1 \end{cases}$



En $(1,0)$ si fem límit segons la recta $y=0$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{1-x^2} = \text{no } \exists$

$\boxed{\text{Definició de continuïtat en termes de } \varepsilon-\delta}$

Siguin $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ i $x_0 \in U$

$f$ és contínua en $x_0$ $\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \text{t.q.} \quad \|x-x_0\|<\delta \text{ i } x \in U, \quad \|f(x)-f(x_0)\| < \varepsilon$$

## Criteris de continuïtat

Siguin $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ contínues en $x_0 \in \mathcal{U}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(i) $\alpha f$ és contínua en $x_0$

(ii) $f+g$ és contínua en $x_0$

(iii) si $m=1$, $f \cdot g$ és contínua en $x_0$

(iv) si $m=1$ i $g(x) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ és contínua en $x_0$

## Continuïtat i funcions components

Sigui $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathcal{U}$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$

$f$ és contínua en $x_0$ $\Longleftrightarrow$ $f_i$ és contínua en $x_0$, $\forall i$, $1 \leq i \leq m$.

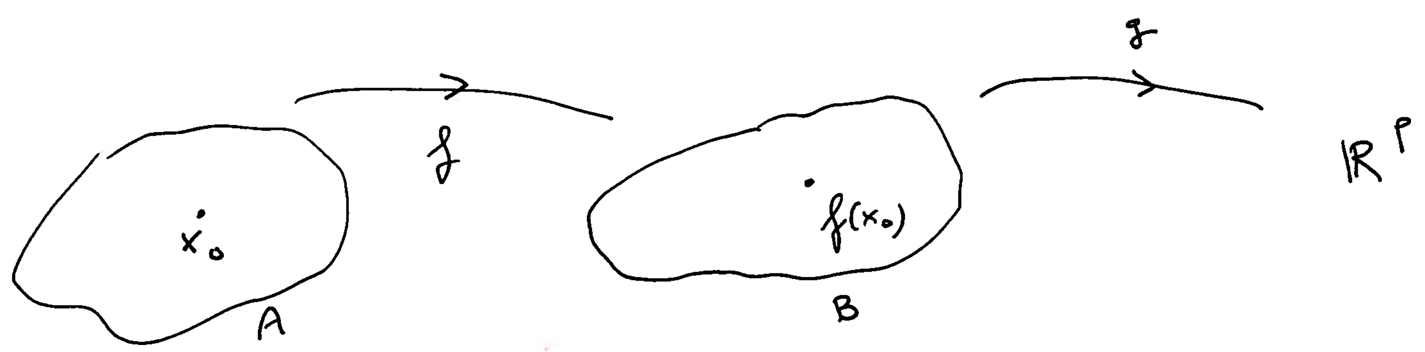
<u>Ex</u>

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = \left(x + 2y^2, \frac{1+x^2}{1+y^2}\right)$$

# Composició de funcions contínues

Siguin $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\quad g : B \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\quad f(A) \subset B$, $\quad x_0 \in A$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ contínua en } x_0 \\ g \text{ contínua en } f(x_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \text{ contínua en } x_0$$




Ex

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

$$(x,y) \longmapsto x^2+y^2$$
$$t \longmapsto \sin t$$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x,y,z) = e^z$

$$(x,y,z) \longmapsto z$$
$$t \longmapsto e^t$$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$(x,y,z) \longmapsto x^2+y^2+z^2$$
$$t \longmapsto \sqrt{t}$$