Àlgebra lineal. Curs 2015-2016

Llista 8. Diagonalització.

1. Estudieu si són diagonalitzables i en el seu cas diagonalitzeu les matrius:

$$i)\begin{pmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}, ii)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, iii)\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$iv)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, v)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, vi)\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Calculeu els valors propis i els vectors propis de cadascuna de les matrius següents i decidiu si són diagonalitzables:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 8 & 6 \\ 4 & -16 & -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Considerem l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que, en la base canònica, té matriu associada

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculeu els valors propis de f.
2. És f diagonalitzable? En cas afirmatiu, doneu la matriu diagonal que li correspon i una base en la qual f té aquesta forma diagonal.

4. Considerem l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida com

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 3x_1 + 4x_2 - x_3, 3x_1 + 5x_2 - 2x_3).$$

1. Doneu la matriu de f en la base canònica.
2. Calculeu els valors propis de f.

3. És f diagonalitzable? En cas afirmatiu, doneu la matriu diagonal i una base en la qual f té aquesta forma diagonal.

5. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ donat per $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, a\,x_2)$, on $a \in \mathbb{R}$ és un nombre real.

1. Per a quins valors de a el vector $v = (1, 1)$ és un vector propi de f? De quin valor propi?
2. Per a quins valors de a l'endomorfisme f diagonalitza?

6. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ definit per

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + ax_2 + 2x_3 + 3x_4, x_2 + 3x_3 + 5x_4, 2x_3 + 6x_4, 3x_4),$$

on a és un paràmetre real. Decidiu per a quins valors de a aquest endomorfisme diagonalitza. En cas que diagonalitzi, doneu una forma diagonal de f.

7. Siguin $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 0, 1), (-3, 2, 1)\}$ i $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que

$$M_{\mathcal{B},E}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 9 \\ 4 & 4 & -9 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

on E és la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Decidiu si f és diagonalitzable. En cas afirmatiu, trobeu una base $\mathcal{B}'$ de vectors propis de f.

8. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Estudieu per a quins valors de α la matriu A és diagonalitzable.
2. Per a $\alpha = 2$ i $n \in \mathbb{N}$, trobeu A^n.

9. Comproveu que la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 10 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

és diagonalitzable i calculeu A^n.

10. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

comproveu que és diagonalitzable i trobeu una matriu B tal que $B^2 = A$.