

Mètodes Estadístics Bayesians

Febrer 2013

1. Explica i defineix el model Bayesià.
2. Partint d'un model estadístic per y , d'una priori i d'una mostra, com calcularies un interval de credibilitat a posteriori del 90% per predir un valor futur de y ?
3. Suposa que vols utilitzar l'algoritme *Gibbs Sampling* per obtenir simulacions de la distribució a posteriori d'un paràmetre θ (per exemple amb el WinBUGS). Que faries per assegurar-te de que les simulacions amb les que faràs la inferència corresponen realment a simulacions de la distribució a posteriori $\pi(\theta|y)$?

Assumim que el temps que tarda una determinada partícula radioactiva a desintegrar-se segueix un model *Exponencial* de paràmetre λ , $p(y|\lambda) = \lambda e^{-\lambda y}$, i que els físics s'han posat d'acord amb escollir per a la distribució a priori per a aquest paràmetre una *Gamma* ($a = 10, b = 10$), la densitat de la *Gamma* és $\pi(\lambda) = \frac{b^a \lambda^{(a-1)} e^{-b\lambda}}{\Gamma(a)}$. S'han pogut recollir els temps que han trigat tres partícules a desintegrar-se, aquests han estat 0.9, 1.1 i 1.

4. Dóna la distribució a posteriori per al paràmetre λ .
5. Com faries el següent contrast d'hipòtesis:

$$H_1 : \lambda < 1$$

$$H_2 : \lambda \geq 1,$$

sigues tant explícit com puguis per aquest cas concret.

PART II

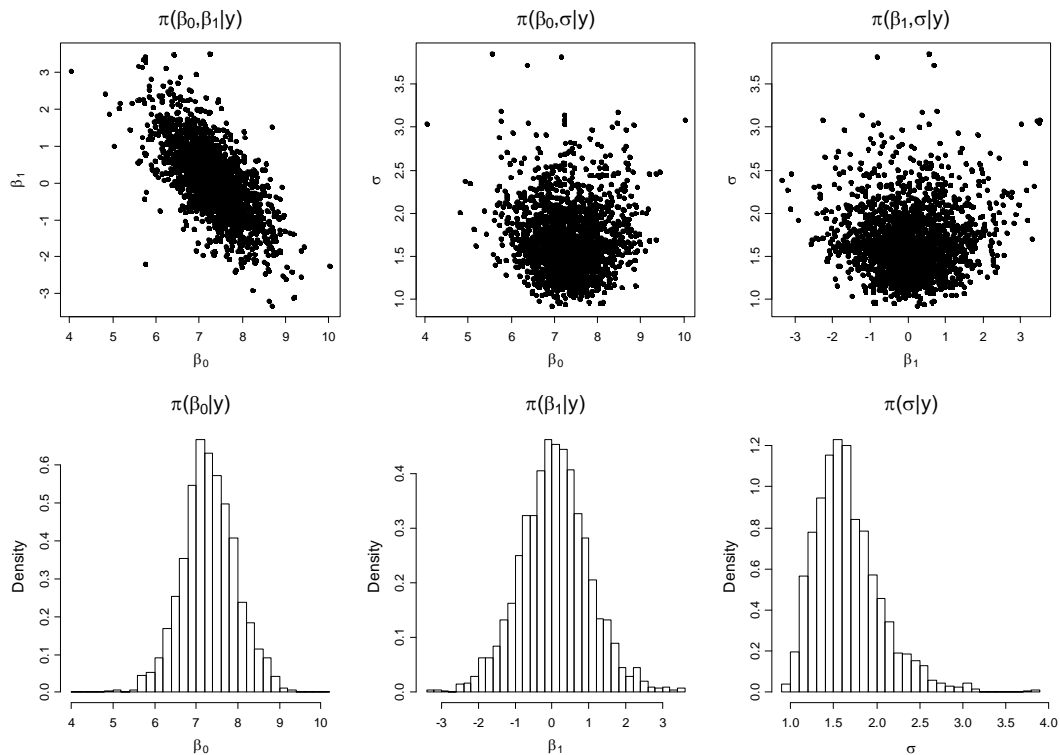
Els professors de l'assignatura d'Inferència Bayesiana volen saber si hi ha diferències significatives en el rendiment dels estudiants a l'assignatura en funció del sexe de l'estudiant. Les notes finals a l'assignatura del curs 2007-2008, excloent els no presentats són:

Nois	Noies
9.6	6.1
7.0	9.1
5.0	8.8
8.0	5.7
8.4	8.9
6.4	6.1
	6.5

Per això formulen el model :

$$\begin{aligned}
 y | \beta_0, \beta_1, \sigma &\sim \text{Normal}(\beta_0 + \beta_1 \text{sexe}, \sigma) \\
 \beta_0 &\sim \text{Normal}(0, 1000) \\
 \beta_1 &\sim \text{Normal}(0, 1000) \\
 \tau = (1/\sigma^2) &\sim \text{Gamma}(0.001, 0.001)
 \end{aligned}$$

on la variable *sexe* val 1 per als nois i 0 per les noies. Els gràfics següents presenten una mostra de 2000 observacions de la distribució a posteriori dels paràmetres del model.



A partir també de les 2000 simulacions de la distribució a posteriori s'ha calculat per a cada paràmetre la mitjana, la desviació i els percentils 5%, 25%, 50%, 75% i 95%.

	mean	sd	5%	25%	50%	75%	95%
β_0	7.31	0.66	6.27	6.90	7.31	7.73	8.42
β_1	0.07	0.95	-1.49	-0.55	0.07	0.66	1.64
σ	1.67	1.11	1.16	1.40	1.61	1.88	2.40

Respon a les següents preguntes:

6. El model bayesià l'han construït de pressa i corrents, sense pensar-s'hi gaire a l'hora de triar la distribució a priori, i s'han descuidat d'indicar explícitament quin és l'espai de paràmetres, tot i que implícitament és el suport de la distribució a priori. Creus que aquest espai de paràmetres és l'adequat? Quina distribució a priori hauries triat?
7. Partint del que veus als diagrames adjunts, creus que hi ha diferències significatives entre els nois i les noies? Explica en base a què arribes a aquesta conclusió.
8. Com creus que hauria sortit la distribució a posteriori, si en comptes de 13 alumnes n'hi hagués hagut 130?

La Raquel és una alumna que no va poder fer l'examen per que es va quedar atrapada dins d'un ascensor.

9. Com calcularies un interval de credibilitat del 90% per la nota final de la Raquel?
10. Creus que la probabilitat de que la Raquel hagués tret una nota inferior al 6 és menor del 5%? Raona la teva resposta.