Universitat Politècnica de Catalunya BarcelonaTech
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

SEGON CONTROL DE TEORIA

Programació Lineal i Entera, curs 2014-15
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM :

	Temps estimat	Punts	Puntuació
Test	15min	2 pt	
Exercici 1	75min	a) 1pt	
		b) 1pt	
		c) 1pt	
		d) 1pt	
		e) 2pt	
Total	90min	10 pt	

- **Prohibida la presència de mòbils durant la prova.**
- **Copiar o facilitar la còpia implica suspendre el control.**

TEST (2 punts / 15min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a), b)** i **c)** si és certa (**Si**) o falsa (**No**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. Indiqueu si les següents combinacions (P)-(D) son possibles (Si) o impossibles (No):

a) Si / No (P) òptim – (D) il·limitat. (N)

b) Si / No (P) òptim – (D) infactible. (N)

c) Si / No (D) il·limitat – (P) infactible. (S)

TEST 2. Considereu que hem resolt un problema (P) en forma estàndard amb $\mathcal{N} = \{1,2\}$ i $r^* = [2 \quad 3]'$:

a) Si / No Si $\Delta c_1 = -2$ la base actual deixa de ser òptima. (N)

b) Si / No Si $\Delta c_1 = -2$ hi ha bases òptimes diferents de la base actual. (S, òptims alternatius)

c) Si / No La base actual deixa de ser òptima si augmento massa el valor de c_2. (N)

TEST 3. Si introduïm la modificació $c_i \leftarrow c_i + \phi_{c_i}$amb $\phi_{c_i} \in \Phi_{c_i} = [\phi_{c_i}^{min}, \phi_{c_i}^{max}]$:

a) Si / No El valor de les variables òptimes pot canviar. (N)

b) Si / No El valor de la funció objectiu pot canviar. (S)

c) Si / No El valor de les variables dual pot canviar. (S)

TEST 4. Si volem trobar la solució òptima d'un problema (P) no degenerat en forma estàndard a partir d'una base $\mathcal{B}$ no òptima, l'algorisme que hem d'aplicar és:

a) Si / No El símplex dual si $r \geq 0$. (S)

b) Si / No El símplex primal si $r \ngeq 0$. (N, el símplex primal si $x_B \geq 0$)

c) Si / No El símplex primal si $x_B \leq 0$. (N, el símplex primal si $x_B \geq 0$)

TEST 5. El problema primal (P) associat al següent problema dual

$$(D)\begin{cases} \min & -\lambda_1 & +\lambda_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ & \lambda_1 & -2\lambda_2 & \leq 1 \\ & \lambda_1 & -\lambda_2 & \leq -1 \\ & \lambda_1 \leq 0, & \lambda_2 \geq 0 & \end{cases}$$

a) Si / No Té solució òptima. (S)

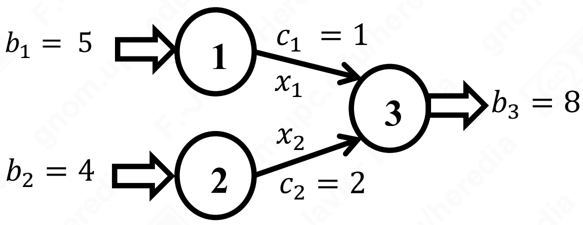
b) Si / No Té variables $x \leq 0$ i constriccions $Ax \geq b$. (N)

c) Si / No Té variables $x \geq 0$ i constriccions $Ax \geq b$. (N)

NOM :

EXERCICI 1. (8 punts / 75min / amb transparències de teoria i calculadora)

Considereu el problema de transport entre dos plantes de producció, amb capacitat b_1 i b_2 respectivament, i un centre de consum amb demanda b_3 :



$$(P)\begin{cases} \min & x_1 & +2x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & \leq 5 \\ & & x_2 & \leq 4 \\ & x_1 & +x_2 & \geq 8 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

La base òptima trivial d'aquest problema és $\mathcal{B}^* = \{1,2,4\}$ amb $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

a) **(1 punt)** Calculeu, amb l'ajut del corol·lari del teorema fort de dualitat, el valor òptim de les variables duals λ^*.

$$\lambda^{*\prime} = c_B' B^{-1} = [1 \quad 2 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [-1 \quad 0 \quad 2]$$

b) **(1 punts)** Formuleu el problema dual (D) i passeu-lo a la forma estàndard (D_e).

$$(D)\begin{cases} \max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}^3} z_D = & 5\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 & \\ s.t.: & \lambda_1 + \lambda_3 & \leq 1 \\ & \lambda_2 + \lambda_3 & \leq 2 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \leq 0, \lambda_3 \geq 0 & \end{cases} \xrightarrow[u_4, u_5 \text{ folgues}]{u_1 := -\lambda_1,\ u_2 := -\lambda_2,\ u_3 := \lambda_3} (D_e)\begin{cases} \min\limits_{u \in \mathbb{R}^5} z_D = & 5u_1 + 4u_2 - 8u_3 & \\ s.t.: & -u_1 + u_3 + u_4 & = 1 \\ & -u_2 + u_3 + u_5 & = 2 \\ & u \geq 0 & \end{cases}$$

c) **(2 punts)** Calculeu la base del problema (D_e) que correspon al vector λ^* trobat a l'apartat a) i comproveu que és òptima pel problema (D_e) fent servir els costos reduïts de (D_e).

- $\lambda^* = [-1 \quad 0 \quad 2]' \Rightarrow u^* = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0] \to \mathcal{B}^{D^*} = \{1,3\}, B^D = B^{D^{-1}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $r_N^D = c_N^{D\prime} - c_B^{D\prime}[B^D]^{-1}A_N^D = [4 \quad 0 \quad 0] - [5 \quad -8]\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 5 \quad 3] \geq 0 ■$

d) **(2 punts)** Calculeu l'interval d'estabilitat del coeficient c_2.

El canvi del cost c_2, $c_2 + \phi_{c_2}$, corresponent a una variable bàsica, pot afectar a totes les components del vector de costos reduïts. L'interval d'estabilitat demanat serà el rang de valors ϕ_{c_2} que conserva la factibilitat primal, $r(\phi_{c_2}) \geq 0$. Sabem que $\mathcal{B}^* = \{1,2,4\}$ i $\mathcal{N}^* = \{3,5\}$, llavors:

$$r_N(\phi_{c_2})' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N = [0 \quad 0] - [1 \quad 2 + \phi_{c_2} \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= [1 + \phi_{c_2} \quad 2 + \phi_{c_2}] \overset{\text{Cond. fact. } (D)}{\geq} [0 \quad 0] \Leftrightarrow \phi_{c_2} \geq -1 \Rightarrow \boxed{\Phi_{c_2} = [-1, +\infty[}$$

e) **(1 punt)** Usant anàlisi de sensibilitat, indiqueu fins a quin valor màxim b_3^{max} pot augmentar la demanda del node 3, sense que la base $\mathcal{B}^*$ deixi de ser òptima.

El terme b_3 podrà augmentar mentre el valor de les variables bàsiques $x_B(b_3)$ sigui no negatiu:

$$x_B(b_3) = B^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ b_3 - 5 \\ 9 - b_3 \end{bmatrix} \overset{Cond.\ fact.(P)}{\geq} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 5 \leq b_3 \leq 9 \Rightarrow \boxed{b_3^{max} = 9}$$

NOM :

f) **(1 punt)** Trobeu la nova solució òptima de (P) quan $b_3 > b_3^{max}$ amb l'ajut de l'algorisme del símplex dual.

Si $\mathrm{b}_3 > \mathrm{b}_3^{max}$ es perd la factibilitat primal ($x_{B(3)} = x_4 < 0$) i hem de recuperar l'optimalitat amb el símplex dual. Relitzaem la primera iteració a partir de la base $\mathcal{B} = \{1,2,4\}, \mathcal{N} = \{3,5\}$:

- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p: $x_{B(3)} = x_4 < 0 \rightarrow \boxed{B(3) = 4 \text{ v.b. sortint}}$
- Identificació de problema dual il·limitat: $d_{r_N} = \beta_3 A_{\mathrm{N}} = [1 \quad 1 \quad -1]\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ problema dual il·limitat $\Rightarrow$ primal infactible, (P) no té solució.

g) **(2 punts)** Analitzeu amb la metodologia pròpia de l'anàlisi de sensibilitat com afectaria a l'optimalitat de la base $\mathcal{B}^*$ un canvi en la desigualtat de la primera constricció, és a dir, substituir $x_1 \leq 5$ per $x_1 \geq 5$. En cas Que es perdi l'optimalitat, amb quina versió de l'algorisme del símplex caldria iterar per reoptimitzar?

Un canvi en el signe d'una desigualtat afecta al coeficient de la variable auxiliar (folga o escreix) de la forma estàndard. En el nostre cas la columna $a_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ passa a ser $\tilde{a}_3 = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$. Com que x_3 és variable no bàsica, aquest canvi no pot afectar la factibilitat primal de la base actual $x_B = B^{-1}b \geq [0]$, però si que pot afectar a la factibilitat dual, en concret, al valor del cost reduït d'aquesta mateixa variable r_3:

$$\tilde{r}_3 = c_3 - \lambda^{*\prime}\tilde{a}_3 = 0 - [-1 \quad 0 \quad 2]\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix} = -1$$

Com que $\tilde{r}_3 < 0$ la base $\mathcal{B} = \{1,2,4\}$ deixa de ser òptima per pèrdua de factibilitat dual, i caldria iterar amb l'algorisme del símplex primal.