DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA. Curs 04/05. 2on Q

EXAMEN PARCIAL.

Cadenes de Markov. (6 punts) Un comerciant ha d'abonar en concepte d'impostos la quantitat de 2000€ cada mes. El volum del seu negoci no es prou gran com per gaudir del crèdit d'entitats bancàries que el permetrien d'endeutar-se i per tant en quedar en xifres vermelles haurà de tancar el negoci. Els beneficis mensuals B_k durant el mes *k* venen donats per una variable aleatòria que pot prendre els valors 1000,2000,3000 € de forma equiprobable. Sigui X_k el capital del negoci al final del mes *k* una vegada s'han acumulat els beneficis B_k i s'han deduït els impostos corresponents. Donat que el comerciant veu que el risc de perdre el negoci en un curt període de temps és molt alt, pren la decisió de traspassar del capital del negoci al seu compte bancari particular només les quantitats que excedeixin de 3000 € del capital.

Es demana:

a) Modelitzeu el capital del negoci X_k usant una cadena de Markov. Calculeu la matriu de probabilitats de transició P, i analitzeu les classes d'equivalència de la cadena resultant.
b) Calculeu el número mig de mesos en que tardarà el negoci en tancar sabent que s'inicia amb un capital X_0 =2000 €.
c) Calculeu la probabilitat de que hagi de tancar en tres mesos.

Models de Temps de Vida i Reemplaçaments. (**4 punts**) Un fabricant ven un aparell en el que un dels seus components es determinant pel seu temps de funcionament. El temps de funcionament τ del component és una v.a. de distribució exponencial d'esperança $1/\lambda$. Per un error, s'han barrejat tres partides d'aquestos components i hores d'ara resulta impossible determinar si un determinat component prové d'una partida o altre. Se sap, però que de la 1ª partida hi ha un 40% de components, hi ha un 50% de la segona i un 10% de la tercera. També se sap que per la 1ª partida λ_1 = 0,0001 h^{-1}, λ_2 = 0,0002 h^{-1} per la segona partida i λ_3 = 0,0003 h^{-1} per la tercera.

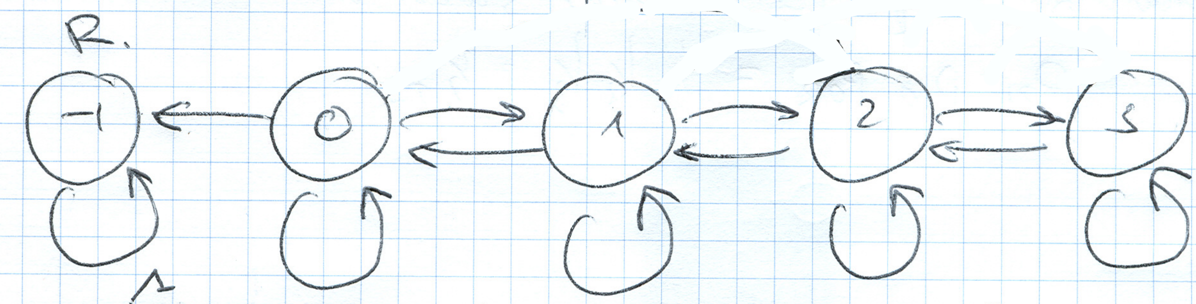
Es demana:

a) Fracció dels aparells que superaran les 5000 hores de funcionament ininterromput.
b) Es necessari establir alguna política de reemplaçaments per tal d'allargar el temps de funcionament sense avaries de l'aparell? Justifica la teva resposta.
c) Calculeu el temps mig de funcionament ininterromput d'un aparell.
d) Per efectuar un reemplaçament del component són necessàries dues operacions que són consecutives. La primera operació te una durada x_1 i la segona una durada x_2. Se sap que x_1 és una v.a. exponencial i $E[x_1]$ = 2 hores, mentre que x_2 és una v.a. exponencial i $E[x_2]$ = 3 hores. Es demana calcular la disponibilitat a llarg termini de l'aparell.
e) Per un criteri determinat es decideix reemplaçar un component quan aquest porta T=5000 hores funcionant. Calculeu en aquestes condicions quin és el nou temps mig de funcionament ininterromput d'un aparell.

CdM

X_k \ B_k	1	2	3
0	-1	0	1
1	0	1	2
2	1	2	3
3	2	3	4

$$X_{k+1} = \min\{X_k + B_{k+1} - 2,\ 3\}$$



$$P = \begin{array}{c|ccccc} & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{array}$$

b) $\mu_{2,R}$ $\qquad \mu_R = [1] + P_R \cdot \mu_R \rightarrow (I - P_R)\mu_R = [1]$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right)$$

$\mu_{0R} = 12$, $\mu_{1R} = 21$, $\mu_{2R} = 27$, $\mu_{4R} = 30$

Tardarà 27 mesos en arruïnar-se.

c) Probabilitat de que en 3 mesos s'arruïni.

$$p_{21} \cdot p_{10} \cdot p_{0R} = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

Solució examen (Temps de vida i Reemplaçaments)
PARCIAL.

τ es distribueix segons una hiperexponencial
$$\alpha_1 = 0'4, \quad \alpha_2 = 0'5, \quad \alpha_3 = 0'1$$
$$\lambda_1 = 10^{-4} \quad \lambda_2 = 2\cdot10^{-4} \quad \lambda_3 = 3\cdot10^{-4}$$

a) $R_\tau(5000)$; $R_\tau(t) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i e^{-\lambda_i t}$

$$R_\tau(5000) = 0'4\, e^{-0'5} + 0'5\, e^{-1} + 0'1\, e^{-1'5} = 0'4488$$

No és necessari una política de reempl. ja que $h_\tau(t) \downarrow$

c) $$E[\tau] = \sum_{i=1}^{3} \frac{\alpha_i}{\lambda_i} = \frac{0'4}{10^{-4}} + \frac{0'5}{2\cdot10^{-4}} + \frac{0'1}{3\cdot10^{-4}} =$$

$$= 10^4\left(0'4 + 0'25 + 0'0\overline{3}\right) = 6833 \text{ hores.}$$

e) si hi ha truncament a $T = 5000$ hores.

$$E[\tau_T] = \int_0^T R_\tau(t)\,dt = \int_0^T \sum \alpha_i e^{-\lambda_i t}\,dt$$

$$= \sum_i \alpha_i/\lambda_i \left(1 - e^{-\lambda_i T}\right) =$$

$$= 10^4\left(0'4(1-e^{-0'5}) + 0'25(1-e^{-1}) + 0'1(1-e^{-1'5})\right) =$$

$= 3931$ hores

d) Disponibilitat a llarg termini $A = \dfrac{E[\tau]}{E[\tau] + E[X]} = \dfrac{6833}{6838} =$

$= 99'9\,\%$

$E[X] = E[X_1] + E[X_2] = 5$ hores