Econometria
Tema 2: MRLM: Especificació i Estimació

Ramon Alemany

Grau Estadística UB-UPC

Curs 2017-18

Presentació

1. Bibliografia
2. Formulació i Hipòtesis Bàsiques del Model
3. Estimació per Mínims Quadrats Ordinaris (MQO)
   Propietats estadístiques
4. Residus de l'estimació
5. Estimació de la variància del terme de pertorbació
6. L'estimador Màxim Versemblant (MV). Propietats

Bibliografia

- GREENE, W. (1999)
  Análisis econométrico. 3a Ed.
  Capítol 6

- WOOLDRIDGE, J. (2009)
  Introducción a la Econometría. Un enfoque moderno. 4a Ed.
  Capítol 3

- STOCK, J. & WATSON, M. (2012)
  Introducción a la Econometría. 3a Ed.
  Capítol 6

Formulació i Hipòtesis Bàsiques del Model

Formulació del Model de Regressió Lineal Múltiple

Especificarem un model economètric per a explicar el comportament d'una variable econòmica $\boldsymbol{Y}$, que anomenarem variable endògena, variable dependent o variable a explicar, a partir dels valors observats per a un conjunt de $\boldsymbol{k}$ variables que anomenarem explicatives (independents o exògenes) i que, en general, representarem mitjançant la lletra $\boldsymbol{X}$.

És a dir:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k)$$

Aquesta relació de causalitat és unidireccional

Formulació i Hipòtesis Bàsiques del Model

Formulació del Model de Regressió Lineal Múltiple

El Model de Regressió Lineal Múltiple és doncs:

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \ldots + \beta_k x_{kt} + u_t \quad t = 1, 2, \ldots, T$$

- La variable y és l'ENDÒGENA i les $x_1, x_2, \ldots, x_k$ les EXÒGENES
- $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ són els PARÀMETRES a estimar.
- El subíndex t indica un moment en el temps i s'utilitza quan treballem amb dades de sèrie temporal. Si treballem amb dades transversals utilitzarem el subíndex i amb $i = 1, 2, \ldots, N$
- El terme independent en l'equació es pot interpretar com la presència d'una variable constant $x_{1t} = 1 \ \forall t$.
- u_t és el terme de pertorbació aleatòria.

Formulació i Hipòtesis Bàsiques del Model

Formulació del Model de Regressió Lineal Múltiple

Agafant dades de tall transversal ($i = 1, 2, \ldots, N$) podem especificar una equació per cada individu:

$$\begin{cases} y_1 = \beta_1 + \beta_2 x_{21} + \ldots + \beta_k x_{k1} + u_1 \\ y_2 = \beta_1 + \beta_2 x_{22} + \ldots + \beta_k x_{k2} + u_2 \\ y_3 = \beta_1 + \beta_2 x_{23} + \ldots + \beta_k x_{k3} + u_3 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ y_N = \beta_1 + \beta_2 x_{2N} + \ldots + \beta_k x_{kN} + u_N \end{cases}$$

Formulació i Hipòtesis Bàsiques del Model

Formulació del Model de Regressió Lineal Múltiple

Aquest sistema es pot escriure en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_{2N} & x_{3N} & \cdots & x_{kN} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

$$Y = X\beta + U$$

$$Y_{(N\times 1)} \quad X_{(N\times k)} \quad \beta_{(k\times 1)} \quad U_{(N\times 1)}$$

Formulació i Hipòtesis Bàsiques del Model

Hipòtesis del MRLM

Per poder determinar les propietats dels estimadors i el tipus de contrastos a realitzar és necessari formular un conjunt d'hipòtesis bàsiques:

a) Hipòtesis bàsiques generals sobre el model

b) Hipòtesis bàsiques sobre el terme de pertorbació

c) Hipòtesis bàsiques sobre les variables explicatives

d) Hipòtesis bàsiques sobre els paràmetres

Hipòtesis Bàsiques del MRLM

a) Hipòtesis bàsiques generals sobre el model

1.- El model és ESTOCÀSTIC

La introducció del terme de pertorbació aleatòria u_t en el model fa que la relació no sigui determinista i que la variable y_t sigui també aleatòria.

La inclusió de u_t ve justificada per:

- Omissió de variables que també expliquen l'endògena y_t però no introduïdes com a explicatives (d'efecte conjunt sobre y_t nul).
- El propi comportament aleatori de y_t (en general, de totes les relacions econòmiques).
- Errors de mesura en les variables incloses dins el model o possibles errors d'especificació.

Hipòtesis Bàsiques del MRLM

a) Hipòtesis bàsiques generals sobre el model

2.- El model és LINEAL o linealitzable

La relació que lliga la variable endògena y_t amb les explicatives $x_1, x_2, \ldots, x_k$ és lineal.

Hi ha relacions que són no lineals però que es poden linealitzar fent alguna transformació en el model. Són lineals respecte els paràmetres però no respecte les variables.

$$Y_i = A\, L_i^{\beta_1}\, K_i^{\beta_2} \quad \Longrightarrow \quad \ln Y_i = \ln A + \beta_1 \ln L_i + \beta_2 \ln K_i$$

No podrem treballar amb models intrínsecament no lineals; aquells que no es poden linealitzar, que són no lineals respecte els paràmetres.

Hipòtesis Bàsiques del MRLM

a) Hipòtesis bàsiques generals sobre el model

3.- Informació estadística suficient

El requisit mínim és que el nombre d'observacions sigui més gran o igual que el nombre de paràmetres a estimar.

Tot i que això és el mínim, és desitjable tenir un nombre relativament elevat d'observacions per garantir la fiabilitat de les estimacions

$$N \geq k \quad \Longrightarrow \quad N - k \geq 0$$

$$\Downarrow$$

Graus de llibertat

Hipòtesis Bàsiques del MRLM

b) Hipòtesis bàsiques sobre el terme de pertorbació

1.- L'esperança matemàtica de U és igual a 0

$$E(u_i) = 0 \quad \forall i$$

$$E(U) = 0_{N\times 1} \qquad E(U) = \begin{bmatrix} E(u_1) \\ E(u_2) \\ \vdots \\ E(u_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hipòtesis Bàsiques del MRLM

b) Hipòtesis bàsiques sobre el terme de pertorbació

2.- Homoscedasticitat

La variància del terme de pertorbació és constant:

$$Var(u_i) = \sigma_u^2 \quad \forall i$$

Tenim Heteroscedasticitat quan no es verifica aquesta hipòtesi.

$$Var(u_i) = \sigma_{ui}^2 \quad \neq \quad Var(u_j) = \sigma_{uj}^2 \qquad \forall i \neq j$$

Hipòtesis Bàsiques del MRLM

b) Hipòtesis bàsiques sobre el terme de pertorbació

3.- No Autocorrelació

Els termes de pertorbació associats a dues observacions diferents són independents entre sí, és a dir, no existeix autocorrelació entre els diferents termes de pertorbació.

$$Cov(u_i u_j) = E\left[(u_i - E(u_i))(u_j - E(u_j))\right] = E(u_i u_j) = 0$$

$$\forall i, j = 1, 2, \ldots N \quad i \neq j$$

Hipòtesis Bàsiques del MRLM

b) Hipòtesis bàsiques sobre el terme de pertorbació

Si el terme de pertorbació és homoscedàstic i no autocorrelacionat direm que és ESFÈRIC, i la matriu de variàncies i covariàncies de U aleshores és escalar.

$$\Omega = \begin{bmatrix} Var(u_1) & Cov(u_1\, u_2) & \cdots & Cov(u_1\, u_N) \\ & Var(u_2) & \cdots & Cov(u_2\, u_N) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & Var(u_N) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_u^2 \end{bmatrix} = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma_u^2\, I_N$$

Hipòtesis Bàsiques del MRLM

b) Hipòtesis bàsiques sobre el terme de pertorbació

4.- U es distribueix segons una Normal multivariant

Per tant, les Hipòtesis Bàsiques del terme de pertorbació es poden resumir mitjançant l'expressió:

$$u_i \sim N(0, \sigma_u^2) \qquad U \sim N(0, \sigma_u^2 I_N)$$

Hipòtesis Bàsiques del MRLM

c) Hipòtesis bàsiques sobre les variables explicatives

1.- Regressors fixes

Les variables explicatives del model són fixes o deterministes, és a dir, són no aleatòries. Les úniques variables aleatòries són l'endógena i el terme de pertorbació.

2.- Les exògenes estan incorrelacionades amb el terme de pertorbació

$$E(x_{ji}\, u_i) = 0 \qquad \begin{array}{l} \forall i = 1, 2, \ldots N \\ \forall j = 1, 2, \ldots k \end{array}$$

Hipòtesis Bàsiques del MRLM

c) Hipòtesis bàsiques sobre les variables explicatives

3.- Les exògenes són linealment independents

No existeix cap combinació lineal exacta entre les variables explicatives.

No existeix multicol·linealitat perfecta.

Les columnes de la matriu X són linealment independents i el seu rang és màxim i igual al número de variables explicatives del model:

$$\rho(X) = k$$

Hipòtesis Bàsiques del MRLM

c) Hipòtesis bàsiques sobre les variables explicatives

4.- Les exògenes estan mesurades sense error

5.- Absència d'errors d'especificació

En el model no s'ha omès cap variable rellevant ni s'ha inclòs cap variable irrellevant.

Hipòtesis Bàsiques del MRLM

d) Hipòtesis bàsiques sobre els paràmetres

1.- Hipòtesi de permanència estructural

Els coeficients β_j són constants per tota la mostra

Formulació del model

Amb les anteriors hipòtesis, els valors que prenen l'Esperança i la Variància de la variable endògena són:

$$E(Y) = E(X\beta + U) = X\beta + E(U) = X\beta$$

$$Var(Y) = E\Big[(X\beta + U) - E(Y)\Big]\Big[(X\beta + U) - E(Y)\Big]' =$$

$$= E\Big[(X\beta + U) - X\beta\Big]\Big[(X\beta + U) - X\beta\Big]' =$$

$$= E\Big[U\,U'\Big] = \sigma_u^2 I_N$$

$$\boxed{Y \sim N(X\beta, \sigma_u^2 I_N)}$$

Estimació dels paràmetres del model

Mètodes d'estimació

Un cop hem especificat el model de regressió, el següent pas és estimar-lo, és a dir, obtenir valors numèrics dels paràmetres del MRLM a partir de la informació mostral disponible:

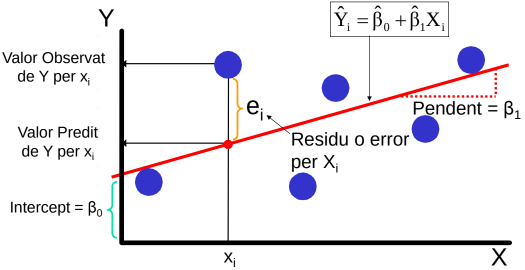
$$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_k$$

Analitzarem dos mètodes d'estimació:

a) Estimació per Mínims Quadrats Ordinaris (MQO)
b) Estimació per Màxima Versemblança (MV)

Estimació per Mínims Quadrats Ordinaris (MQO)

Començarem pel primer mètode, l'estimació per MQO, i ho aplicarem al cas més senzill, el MRLS: $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$



La recta que millor ajusta el núvol de punts, és a dir, que faci menor la distància entre cada punt i la seva representació a la recta.

Estimació per Mínims Quadrats Ordinaris (MQO)

Així, definint els errors o RESIDUS com:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i)$$

O en termes matricials:

$$e = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}$$

Caldrà obtenir els valors de $\hat{\beta}_1$ i $\hat{\beta}_2$ que facin mínims els errors o residus de l'estimació.

Estimació per Mínims Quadrats Ordinaris (MQO)

Per tal de minimitzar els errors podríem usar diferents criteris:

- Minimitzar la suma dels errors comesos.
  Això, però, no resulta útil ja que els errors poden ser positius o negatius i en sumar-los es poden compensar.
- Minimitzar la suma dels errors en valor absolut.
  Aquesta, però, tampoc no és una alternativa útil ja que l'operador "valor absolut" no és diferenciable.
- Minimitzar la suma dels quadrats dels errors.
  Aquesta és l'alternativa emprada.

Estimació per Mínims Quadrats Ordinaris (MQO)

Caldrà obtenir els valors de $\hat{\beta}_1$ i $\hat{\beta}_2$ que facin mínima la SUMA DE QUADRATS DEL ERRORS (SQE) o del residus de l'estimació.

On:

$$SQE = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2 = e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_N^2$$

Estimació per Mínims Quadrats Ordinaris (MQO)

O en termes matricials:

$$SQE = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = e'e = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix} =$$

$$= (Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y}) = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) =$$

$$= (Y' - \hat{\beta}'X')(Y - X\hat{\beta}) = Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} =$$

$$= Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

Estimació per Mínims Quadrats Ordinaris (MQO)

Així doncs:

$$Min\ SQE = Min\ \left(Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}\right)$$

$$\frac{\partial SQE}{\partial \hat{\beta}} = \frac{\partial e'e}{\partial \hat{\beta}} = \frac{\partial\left(Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}\right)}{\partial \hat{\beta}} =$$

$$= -2X'Y + 2X'X\hat{\beta}$$

$$\frac{\partial SQE}{\partial \hat{\beta}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

$$\boxed{\hat{\beta}_{MQO} = (X'X)^{-1}X'Y}$$

Estimació per Mínims Quadrats Ordinaris (MQO)

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{2N} & \cdots & x_{kN} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_{ki} \\ \sum_{i=1}^{N} x_{2i} & \sum_{i=1}^{N} x_{2i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_{2i}x_{ki} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^{N} x_{ki} & \sum_{i=1}^{N} x_{ki}x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

Estimació per Mínims Quadrats Ordinaris (MQO)

$$(X'Y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_{2i} y_i \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^{N} x_{ki} y_i \end{bmatrix}$$

Estimació per Mínims Quadrats Ordinaris (MQO)

Per comprovar que realment s'ha obtingut un mínim cal calcular la segona derivada i veure si el resultat és positiu:

$$\frac{\partial^2 SQE}{\partial \hat{\beta}^2} = \frac{\partial^2 e'e}{\partial \hat{\beta}^2} = \frac{\partial^2 \left(Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \right)}{\partial \hat{\beta}^2} =$$

$$= \frac{\partial(-2X'Y + 2X'X\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = 2X'X$$

I aquesta expressió és positiva ja que la matriu $X'X$ és sempre definida positiva.

Això és així perquè a la diagonal principal d'aquesta matriu hi ha la suma de quadrats de les observacions per a cada variable explicativa.

Estimació per Mínims Quadrats Ordinaris (MQO)

És important observar que si no es verifica la hipòtesi que les variables explicatives són linealment independents, $\rho(X) = k$, aleshores:

- la matriu $X'X$ és SINGULAR,
- és a dir, el seu determinant $\mid X'X \mid = 0$,
- no existeix la seva inversa $\nexists\, (X'X)^{-1}$,
- i no hi ha una solució única al sistema d'EQUACIONS NORMALS MQO:

$$X'Y = (X'X)\hat{\beta}$$

Propietats estadístiques dels estimadors MQO

LINEALITAT

Els estimadors MQO són una combinació lineal dels veritables paràmetres poblacionals β, de les variables explicatives i del terme de pertorbació. Així,

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{MQO} &= (X'X)^{-1}X'Y = (X'X)^{-1}X'(X\beta + U) = \\
&= (X'X)^{-1}(X'X)\beta + (X'X)^{-1}(X'U) = \\
&= \beta + (X'X)^{-1}(X'U)
\end{aligned}$$

Atès que el terme de pertorbació és una variable aleatòria que es distribueix segons una llei normal, aleshores l'estimador MQO també és una variable aleatòria normal.

Propietats estadístiques dels estimadors MQO

ESPERANÇA MATEMÀTICA - BIAIX

Un estimador és NO ESBIAIXAT quan el seu valor esperat coincideix amb el paràmetre poblacional que es vol estimar:

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= E\Big((X'X)^{-1}X'Y\Big) = E\Big(\beta + (X'X)^{-1}(X'U)\Big) = \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'E(U) = \beta \end{aligned}$$

$$Biaix(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta}) - \beta = 0$$

L'estimador MQO és doncs NO ESBIAIXAT.

Propietats estadístiques dels estimadors MQO

VARIANÇA - EFICIÈNCIA

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{\beta}_{MQO}) &= E\left[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\right] = \\
&= E\left[\Big((X'X)^{-1}(X'U)\Big)\Big((X'X)^{-1}(X'U)\Big)'\right] = \\
&= (X'X)^{-1}X'\,E(UU')\,X(X'X)^{-1} = \\
&= \sigma_u^2(X'X)^{-1}X'\,I_N\,X(X'X)^{-1} = \\
&= \sigma_u^2(X'X)^{-1}
\end{aligned}
$$

Propietats estadístiques dels estimadors MQO

Matricialment:

$$\boxed{Var(\hat{\beta}_{MQO}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}}$$

Per cada paràmetre:

$$\boxed{Var(\hat{\beta}_j) = \sigma_u^2 a_{jj} \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k}$$

a_{jj} és l'element j-éssim de la diagonal principal de $(X'X)^{-1}$.

Propietats estadístiques dels estimadors MQO

TEOREMA DE GAUSS-MARKOV

L'estimador MQO és Lineal, No Esbiaixat i Òptim (ELIO) atès que, de tots els estimadors lineals i no esbiaixats, els estimadors MQO són els que tenen variància mínima.

Sigui $\tilde{\beta} = \left[(X'X)^{-1}X' + A\right]Y$ un estimador lineal de β.
Aleshores,

$$\tilde{\beta} = \left[(X'X)^{-1}X' + A\right]Y = \left[(X'X)^{-1}X' + A\right]\left(X\beta + U\right) =$$

$$= \left[(X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'U + AX\beta + AU\right]$$

$$E\left[\tilde{\beta}\right] = \beta + AX\beta$$

Propietats estadístiques dels estimadors MQO

L'estimador $\tilde{\beta}$ serà NO ESBIAIXAT només si $AX = 0$.

$$E\left[\tilde{\beta}\right] = \beta + AX\beta = \beta$$

Aleshores,

$$\tilde{\beta} = \beta + \left[(X'X)^{-1}X' + A\right]U$$

$$\begin{aligned}
Var(\tilde{\beta}) &= E\left[(\tilde{\beta}-\beta)(\tilde{\beta}-\beta)'\right] = \\
&= E\left[\left((X'X)^{-1}X' + A\right)UU'\left(A' + X(X'X)^{-1}\right)\right] = \\
&= \left[\left((X'X)^{-1}X' + A\right)E(UU')\left(A' + X(X'X)^{-1}\right)\right] = \\
&= \sigma_u^2\left[(X'X)^{-1}X'A' + AX(X'X)^{-1} + AA' + (X'X)^{-1}\right] \\
&= \sigma_u^2\left[AA' + (X'X)^{-1}\right] = \sigma_u^2 AA' + \sigma_u^2 (X'X)^{-1}
\end{aligned}$$

Propietats estadístiques dels estimadors MQO

$$\begin{cases} Var(\hat{\beta}_{MQO}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} \\ Var(\tilde{\beta}) = \sigma_u^2 AA' + \sigma_u^2 (X'X)^{-1} \end{cases}$$

$Var(\tilde{\beta}) - Var(\hat{\beta}_{MQO}) = \sigma_u^2 AA'$ i $Var(\tilde{\beta}) > Var(\hat{\beta}_{MQO})$ atès que AA' és semidefinida positiva.

Així doncs l'estimador MQO és de variància mínima.

Aquesta propietat és important perquè l'absència de biaix no garanteix que el valor numèric d'un estimador estigui molt a prop del veritable valor poblacional, sinó que només diu que en mitjana coincidirà amb aquest valor (o que la seva distribució estarà centrada al voltant del valor poblacional).

Propietats estadístiques dels estimadors MQO

CONSISTÈNCIA

Un estimador és consistent si s'aproxima al seu valor poblacional a mesura que s'incrementa la mida de la mostra.

També es diu que un estimador és consistent quan el límit del seu error quadràtic mig quan N tendeix a infinit és igual a 0:

$$\lim_{n \to \infty} EQM(\hat{\beta}) = 0$$

Propietats estadístiques dels estimadors MQO

Sabent que:

$$EQM(\hat{\beta}) = Var(\hat{\beta}) + \left[Biaix(\hat{\beta})\right]^2$$

i que:

$$Var(\hat{\beta}_{MQO}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} \qquad Biaix(\hat{\beta}_{MQO}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} EQM(\hat{\beta}_{MQO})) &= \lim_{n\to\infty} Var(\hat{\beta}_{MQO}) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \sigma_u^2 (X'X)^{-1} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_u^2}{N} \left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1} = 0
\end{aligned}$$

Suposem que $\left(\frac{X'X}{N}\right)^{-1}$ existeix i és un número finit.

Propietats estadístiques dels estimadors MQO

L'estimador MQO és doncs:

$$\boxed{\hat{\beta}_{MQO} \sim N\left(\beta, \sigma_u^2 (X'X)^{-1}\right)}$$

$$\boxed{\hat{\beta}_{j,MQO} \sim N\left(\beta_j, \sigma_u^2 a_{jj}\right) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k}$$

Anàlisi dels residus de l'estimació

S'utilitzen els errors o residus de l'estimació com estimadors de les pertorbacions:

$$\boxed{e_{MQO} = Y - X\hat{\beta}_{MQO}}$$

Propietats dels errors o residus de l'estimació MQO

1ª) *El vector e és una combinació lineal de la variable endògena.*

$$\begin{aligned} e_{MQO} &= Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta} = Y - X(X'X)^{-1}X'Y = \\ &= \left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]Y = MY \end{aligned}$$

Anàlisi dels residus de l'estimació

on $M = I - X(X'X)^{-1}X'$ és:

- una matriu quadrada de dimensió $N \times N$
- simètrica
- idempotent $(MM = M)$. Donat que és simètrica es compleix també que $MM' = M'M = M'M' = M$
- matriu singular: $\mid M \mid = 0$
- ortogonal respecte $X \quad (MX = 0)$
- traça $M = N - k$

Anàlisi dels residus de l'estimació

2ª) *e és una combinació lineal de U*

$$e = MY = M(X\beta + U) = MX\beta + MU = MU$$

3ª) *e és ortogonal a la matriu X*

$$e'X = (MY)'X = (MU)'X = U'M'X = 0$$
$$X'e = X'(MY) = 0$$

Anàlisi dels residus de l'estimació

4ª) *La mitjana mostral dels residus és igual a 0 quan el model té terme independent*

$$X'e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{N} e_i = 0 \quad \text{i} \quad \bar{e} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} e_i = 0$$

Anàlisi dels residus de l'estimació

5ª) *e es distribueix segons una llei Normal*

Atès que $e = MU$ i que $U \sim N(0, \sigma_u^2 I_N)$, llavors:

$$e \sim N(0, \sigma_u^2 M)$$

$$\begin{aligned} E(e) &= E(MU) = ME(U) = 0 \\ Var(e) &= E(ee') = E(MUU'M') = \\ &= ME(UU')M' = \sigma_u^2\, MM' = \sigma_u^2\, M \end{aligned}$$

Per tant, els residus no són esfèrics

Estimació de la variància del terme de pertorbació

Donat que U és un terme no observable, tampoc ho és la seva variància $\sigma_u^2 I_N$.

Aquest fet és molt important donat que necessitem conèixer aquesta variància del terme de pertorbació per tal de poder fer contrastos relatius al vector de coeficients estimats per MQO.

$$\hat{\beta}_{MQO} \sim N\left(\beta, \sigma_u^2 (X'X)^{-1}\right)$$

Així, precisarem d'una estimació de σ_u^2.

Per obtenir-la, partirem de la idea que el vector e de residus de l'estimació MQO és una estimació del vector U.

Estimació de la variància del terme de pertorbació

$$
\begin{aligned}
E(SQE) &= E(e'e) = E\left[(MU)'(MU)\right] = E\left[U'M'MU\right] = \\
&= E\left[U'MU\right] = E\left[tr(UU'M)\right] = E\left[tr(MUU')\right] = \\
&= tr\left(E\left[MUU'\right]\right) = tr\left(ME\left[UU'\right]\right) = tr\left(M\sigma_u^2 I_N\right) = \\
&= \sigma_u^2 \, tr\left(MI_N\right) = \sigma_u^2 \, tr\left(M\right) = \sigma_u^2 \; (N-k)
\end{aligned}
$$

D'aquesta manera, obtenim l'estimador no esbiaixat de la variància del terme de pertorbació com:

$$\boxed{\hat{\sigma}^2_{u,MQO} = \frac{e'e}{N-k}}$$

Estimació de la variància del terme de pertorbació

Per tant tindrem que:

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{Var}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}_u^2 (X'X)^{-1}$$

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 a_{jj} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{Var}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}_u^2 a_{jj}$$

Calcularem la SQE a partir de qualsevol d'aquestes tres vies:

$$\begin{aligned} e'e &= \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \\ e'e &= Y'Y - \hat{\beta}'X'Y \\ e'e &= Y'Y - \hat{Y}'\hat{Y} \end{aligned}$$

Estimació Màxim Versemblant (MV)

El mètode de màxima versemblança proposa com a estimador del paràmetre aquell valor que maximitza la probabilitat d'obtenir les observacions mostrals disponibles.

Aquest mètode d'estimació es basa en les hipòtesis que s'estableixin per a la distribució de les variables aleatòries que apareixen en el model:

$$Y = X\beta + U$$

suposant que:

$$U \sim N(0, \sigma_u^2 I_N)$$

Estimació Màxim Versemblant (MV)

A partir de la hipòtesi sobre la distribució de U es deriva que cadascun dels termes de pertorbació tindrà la funció de densitat següent:

$$f(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_u^2}(u_i)^2 \right\} \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, N$$

Amb una funció de densitat conjunta pel vector U (atès que les u_i són i.i.d.):

$$f(U) = \prod_{i=1}^{N} f(u_i) = (2\pi\sigma_u^2)^{-N/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_u^2} \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \right\} =$$

$$= (2\pi)^{-N/2}(\sigma_u^2)^{-N/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_u^2} U'U \right\}$$

Estimació Màxim Versemblant (MV)

Donat que U es distribueix segons una normal multivariant d'ordre N, aleshores Y també ho farà (atès que $Y = X\beta + U$):

$$f^*(Y) = f(U) = (2\pi)^{-N/2}(\sigma_u^2)^{-N/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_u^2} U'U \right\}$$

Per aconseguir que la funció de densitat sigui una funció de versemblança, s'haurà d'expressar el vector U en funció de Y $U = Y - X\beta$, de manera que:

$$L(Y; \beta, \sigma_u^2) = (2\pi)^{-N/2}(\sigma_u^2)^{-N/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_u^2} (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \right\}$$

Estimació Màxim Versemblant (MV)

Els estimadors per màxima versemblança s'obtindran a partir de maximitzar la funció de versemblança L.

Així, caldrà calcular les derivades parcials de la funció de versemblança respecte β i σ_u^2, i igualar-les a 0.

Per facilitar els càlculs, aquesta maximització es farà, no de la funció de versemblança, sinó del seu logaritme:

$$\ln L(Y;\beta,\sigma_u^2) = -\frac{N}{2}\ln(2\pi) - \frac{N}{2}\ln(\sigma_u^2) - \frac{1}{2\sigma_u^2}(Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$

Estimació Màxim Versemblant (MV)

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = -\frac{1}{2\hat{\sigma}_u^2}\Big[-2X'(Y - X\hat{\beta})\Big] = 0$$
$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{N}{2\hat{\sigma}_u^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}_u^4}\Big[(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})\Big] = 0$$

Aïllant, obtindrem les estimacions per màxima versemblança de β i σ_u^2:

$$\hat{\beta}_{MV} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{\sigma}^2_{u,MV} = \frac{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})}{N} = \frac{e'e}{N}$$

Estimació Màxim Versemblant (MV)

$\hat{\beta}_{MQO} = \hat{\beta}_{MV}$ de manera que l'estimador MV tindrà les mateixes propietats que l'estimador per MQO.

No succeeix el mateix, però, amb l'estimació MV de σ_u^2. De fet aquest estimador serà esbiaixat:

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}^2_{u.MV}) &= E\left[\frac{e'e}{N}\right] = \frac{1}{N}E\left[e'e\right] = \frac{1}{N}E\left[\sigma_u^2(N-k)\right] = \\ &= \frac{N-k}{N}\sigma_u^2 \neq \sigma_u^2 \end{aligned}$$

Tanmateix, l'estimador MV de σ_u^2 és asimptòticament no esbiaixat donat que el biaix s'aproxima a 0 a mesura que creix la mida mostral.

Econometria
Tema 2: MRLM: Especificació i Estimació

Ramon Alemany

Grau Estadística UB-UPC

Curs 2017-18