Tema 3: Variabilitat. Causes i Mesura

- Concepte de variabilitat
- Causes comuns i causes assignables
- Tractament probabilístic de les causes comuns: La llei Normal
- Estudis de capacitat a curt i llarg termini
- Índexs de capacitat
- Llenguatge Sis Sigma

1

En acabar aquest tema ha d'estar clar:

• Que la variabilitat és un fenomen inevitable, però que més qualitat implica menys variabilitat

• Que la variabilitat pot ser deguda a causes comunes o causes assignables, i la variabilitat deguda a causes comunes té un fàcil* tractament estadístic

• Que la llei Normal és, en molts casos, un model útil per explicar la variabilitat deguda a causes aleatòries.

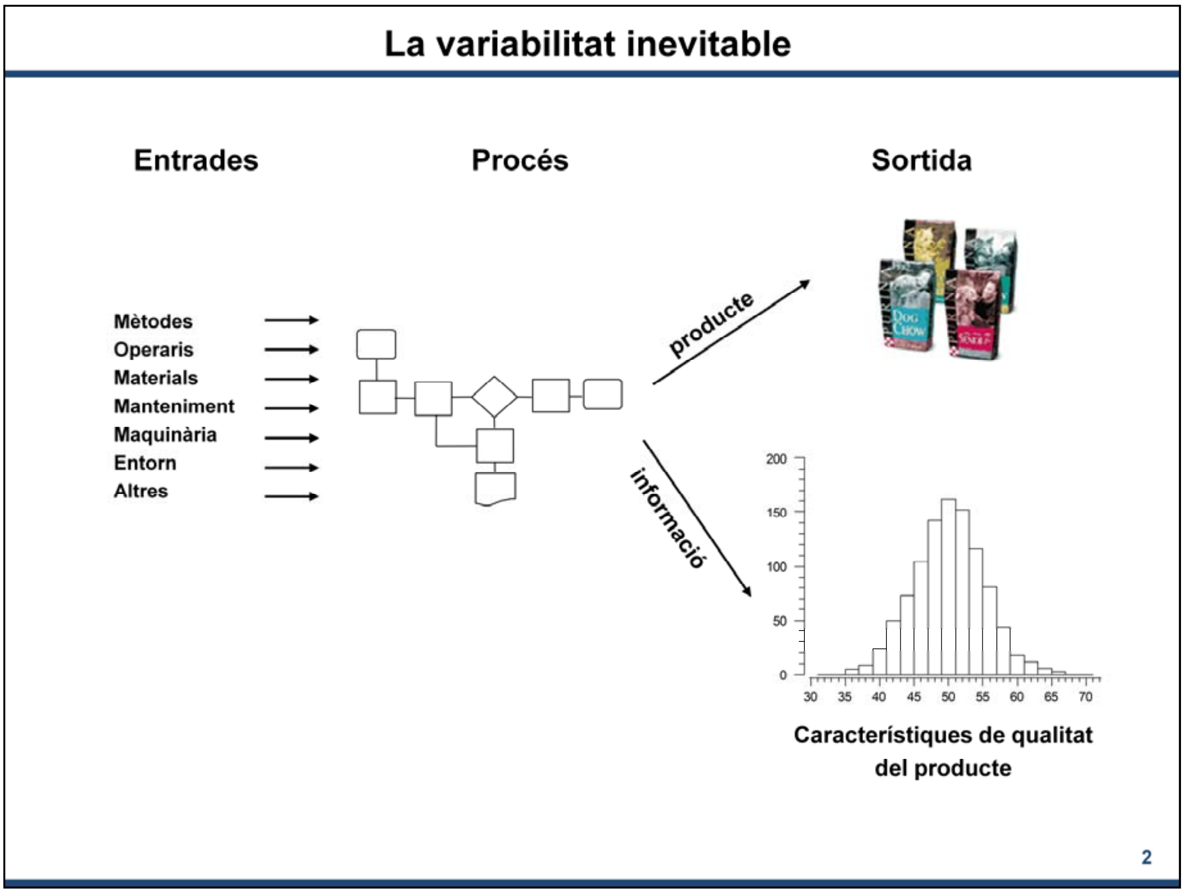
• Les característiques generals de la llei Normal i com es calculen probabilitats amb aquesta distribució.

• Què és un estudi de capacitat. Quina diferència hi ha entre la capacitat a curt i llarg termini.

• Què són i com es calculen els índexs de capacitat

---

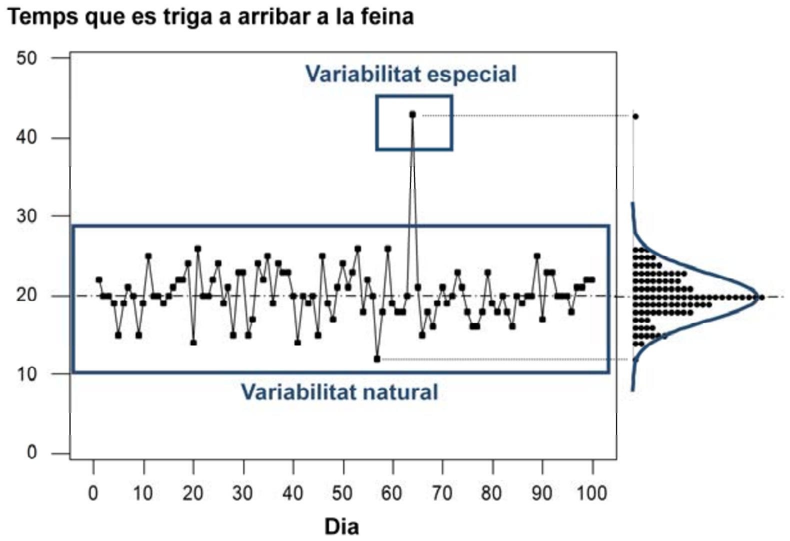
*Això de fàcil o difícil sempre és relatiu



Variabilitat en productes: Pes de productes envasats, durada d'una bombeta, cotes de la connexió USB d'un ordinador, ...

Variabilitat en serveis: Temps que triga a passar l'autobús, temps que triga l'administració en resoldre un tràmit, interès d'una classe, ...

Tipus de variabilitat segons la causa



3

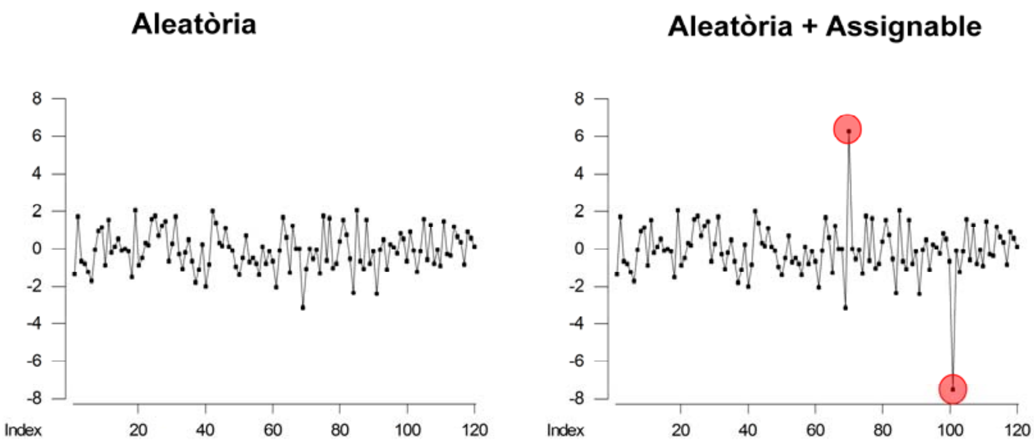
Les dades s'han obtingut d'una N (20, 3) i s'han arrodonit a valors enters. L'anomalia s'ha introduït "a mà".

Per què un dia es va trigar 19 minuts i un altre dia es va trigar 22? No hi ha causa concreta: Variabilitat natural

Per què un dia es va trigar 45 minuts?: La línia 5 del metro no funcionava. Causa concreta. Variabilitat especial.

Què és preferible: trigar sempre 25 minuts, o trigar 20 ± 10?

Causes de variabilitat



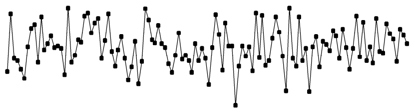
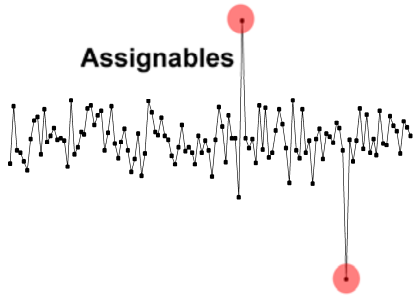
4

Lluitar contra la variabilitat és lluitar contra les causes. Hi ha dos grans tipus de causes que requereixen estratègies molt diferents per a ser atacades.

• Causes aleatòries (també anomenades causes comuns): Són les que originen la variabilitat natural.

• Causes assignables: Originen la variabilitat especial.

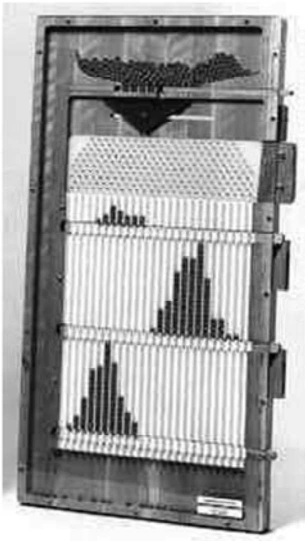
Caracterització de las causes de variabilitat

Aleatòries	Assignables
	
Són moltes, cadascuna d'elles produeix petites variacions	Són poques, però quan apareixen produeixen variacions importants
Són part permanent del procés	Apareixen esporàdicament
Difícils d'eliminar	Fàcils d'identificar (i per tant, fàcils d'eliminar)
Previsibles estadísticament	No previsibles estadísticament

5

ALEATÒRIA	ASSIGNABLE
Inevitable	Evitable
Estable	Inestable
Homogèni	Heterogeni
Constant	Erràtic
Normal	Anormal
Estacionàri	Descontrolat
Controlat	Imprevisible
Previsible	Inconsistent
Consistent	Esporàdic
Permanent	Diferent
No significatiu	Important
Estadísticament estable	Significatiu
Múltiples	Desgast
	Poques

Quincunx



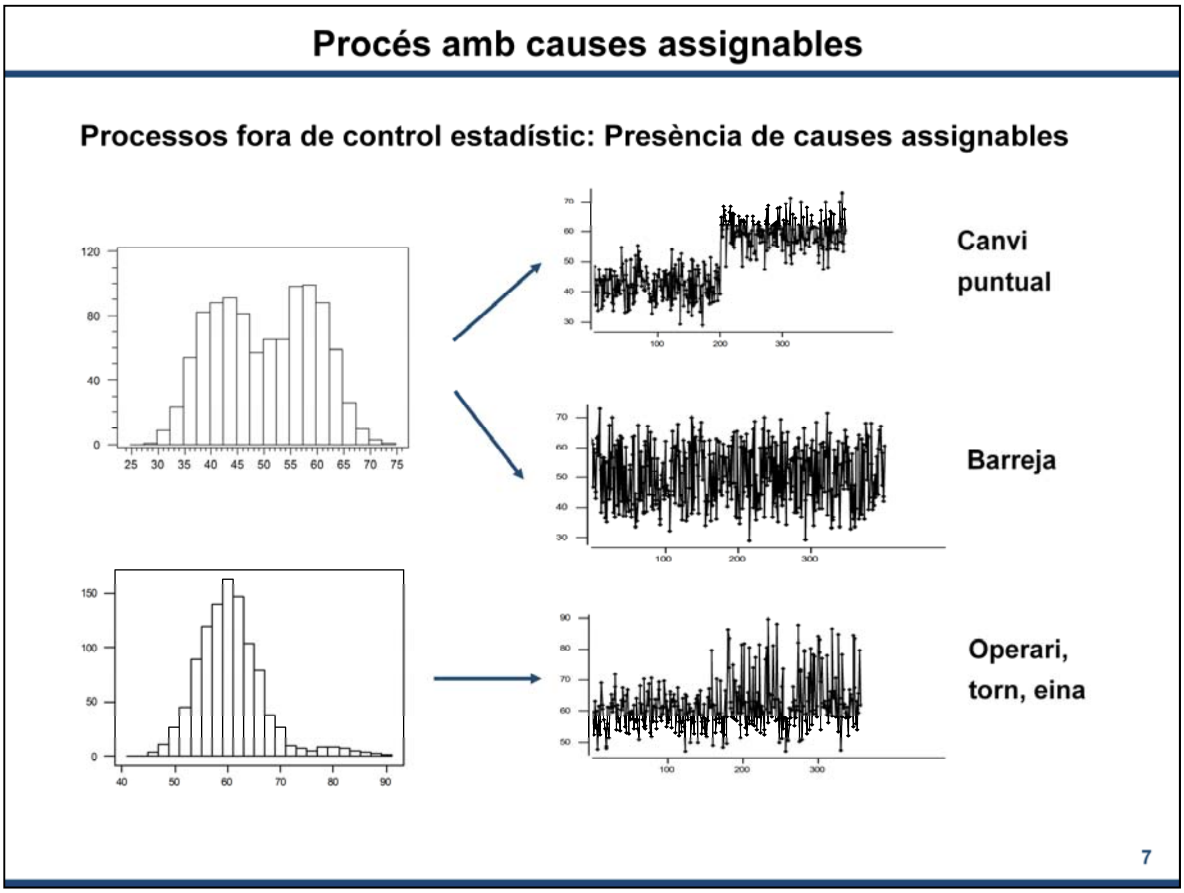
Francis Galton

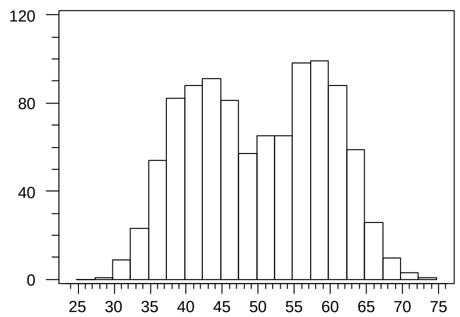
6

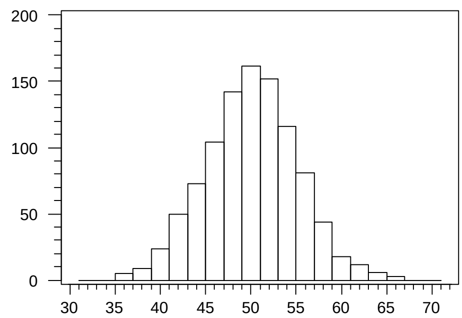
És impossible predir on caurà una bola. Però si és previsible la forma de la distribució si es deixen caure moltes.

Sobreajustament (moure l'embut) no disminueix la variabilitat, sinó que l'augmenta.

És important saber distingir entre el que és variabilitat intrínseca d'un procés, i el que és variabilitat deguda a causes assignables.



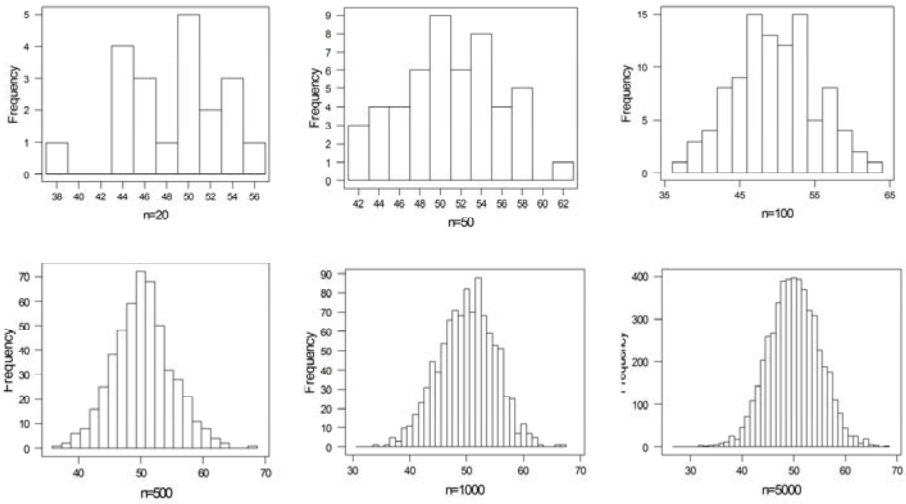




Variabilitat no estable	Variabilitat estable
Amb possibilitat de reducció	En el seu nivell mínim
No és previsible. La foto d'avui no coincideix amb la de demà	Previsible

Variabilitat deguda a causes assignables

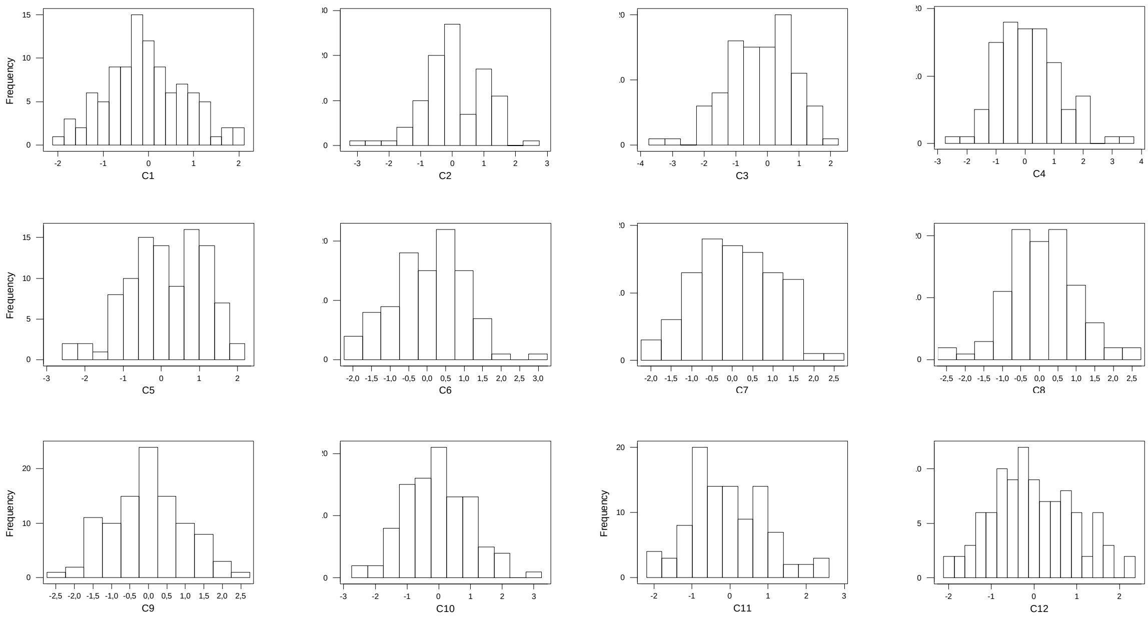
En augmentar el nombre de dades, el perfil de l'histograma va prenent forma de campana



8

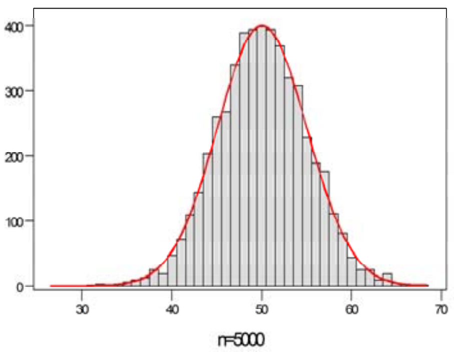
¡ATENCIÓ!: La forma de campana només apareix de forma clara quan es tenen moltes dades (a partir de 1000).

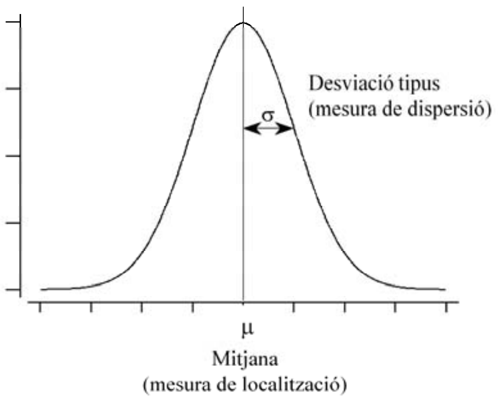
Histogrames construïts amb 100 números aleatoris d'una N (0, 1):



Model per a la variabilitat deguda a causes aleatories

La Llei Normal es pot utilitzar per representar la variabilitat deguda a causes aleatòries





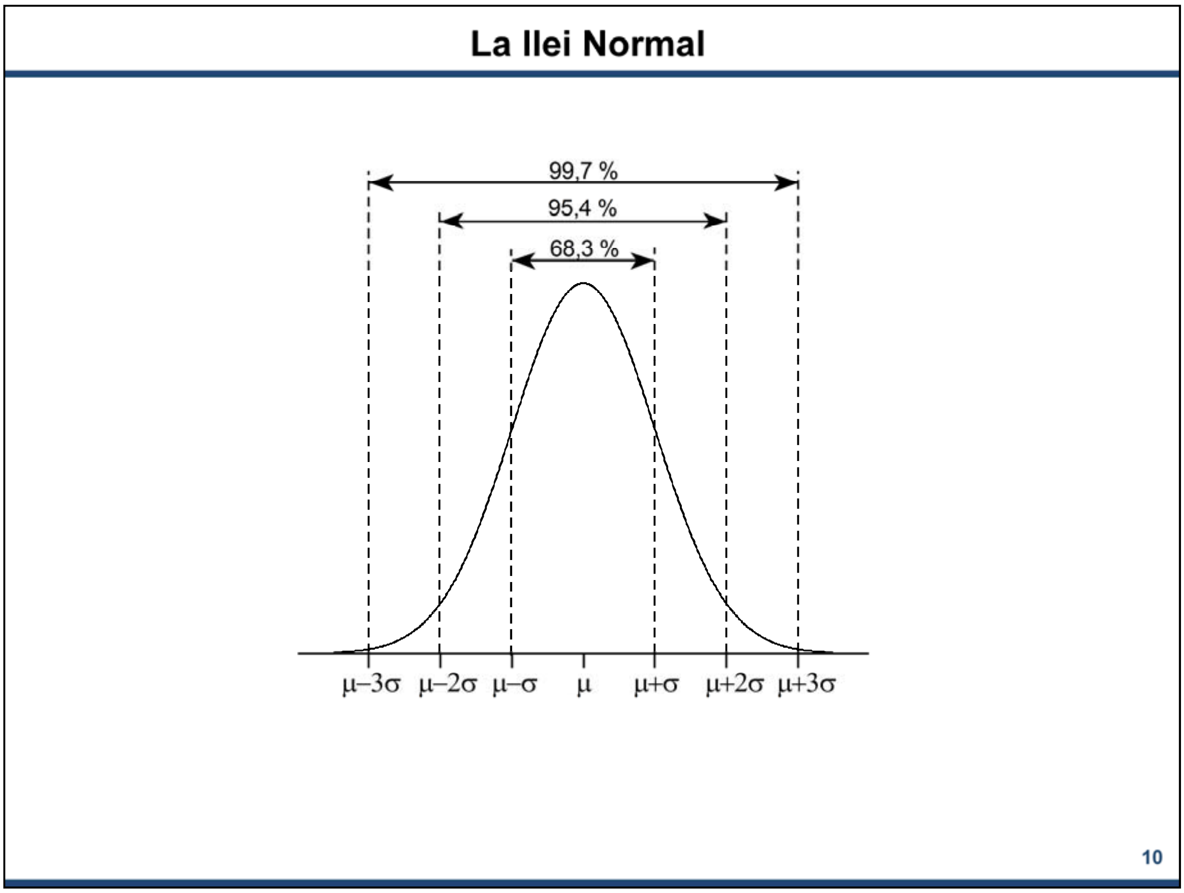
9

La llei Normal és un model teòric, útil per fer prediccions quan la variabilitat que presenten les dades s'ajusta a aquest patró

Moltes característiques de la naturalesa presenten una variabilitat que es pot caracteritzar mitjançant la distribució Normal

La mitjana mostral ("matèria primera" en la majoria d'estudis) presenta una variabilitat que s'adapta bé al model de la distribució Normal

Per definir una distribució normal només fan falta 2 paràmetres: μ i σ



Independentment de quins siguin els valors de μ i σ, aquests percentatges són constants.

Quant val la desviació tipus de l'alçada de les persones?

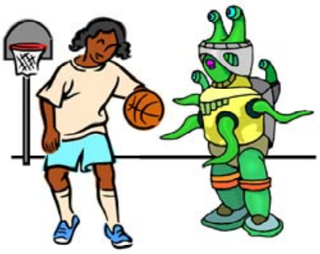
“Els marcians existeixen”

¡ Els marcians existeixen!

Cóm són?

Alçada: Mitjana = 1,5 m

Desv. tipus = 0,2 m

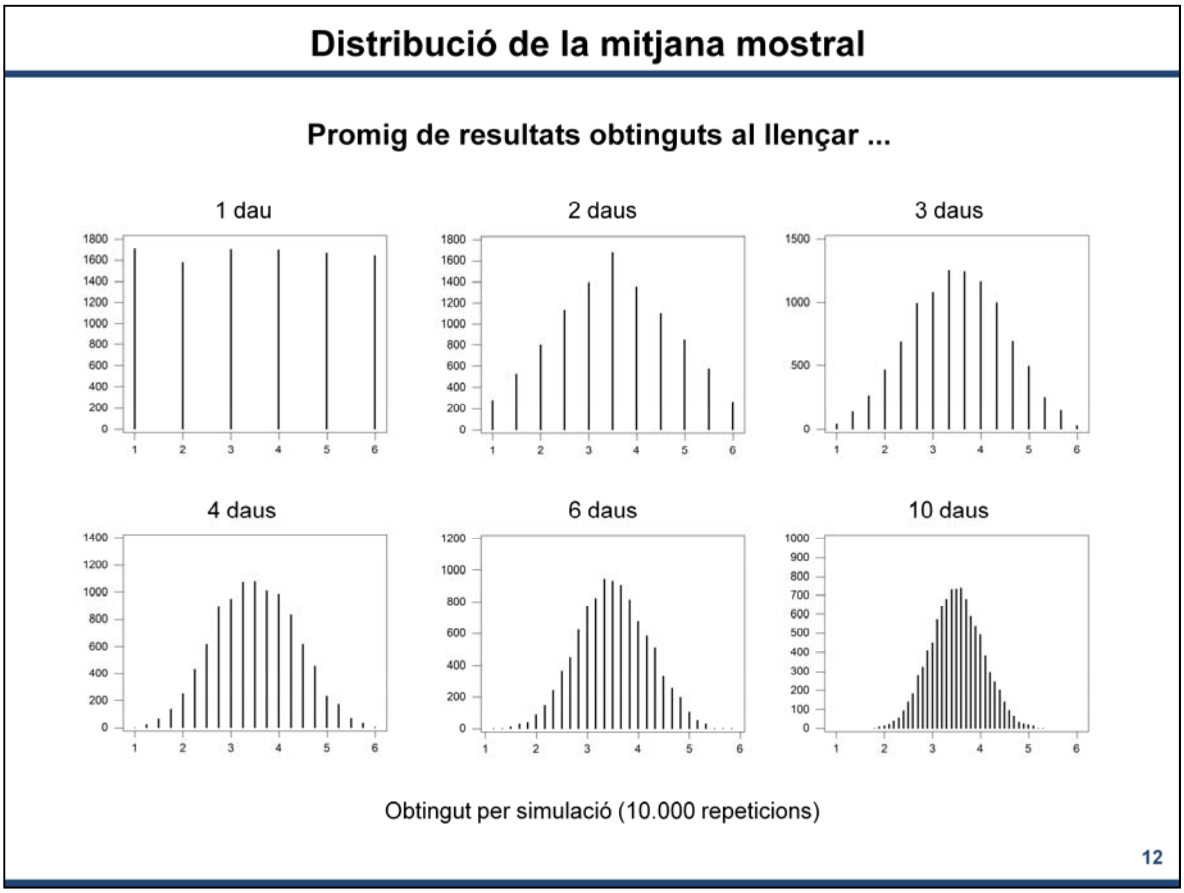


Quina alçada tenen els seus jugadors professionals de basquet?

11

La mitjana no informa sobre la variabilitat de les dades

En una distribució normal, el 99,7% dels valors estan en l'interval $\mu \pm 3\sigma$



Teorema Central del Límit (el central [de principal] és el teorema, no el límit)

Tot i que la població no sigui normal, la distribució de la mitjana mostral tendeix a la distribució Normal a mesura que augmenta la grandària de la mostra.

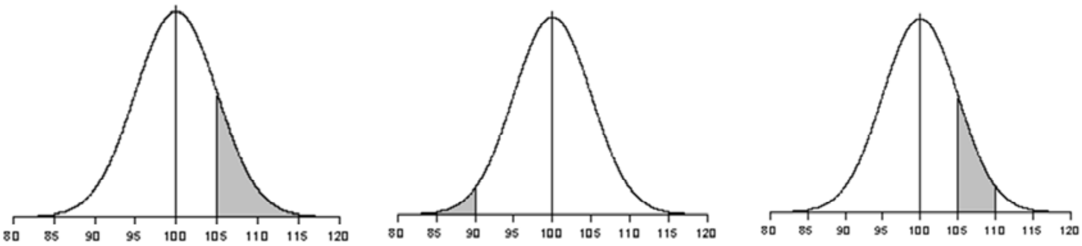
***

Si la població és normal, la mitjana mostral també ho és (Qualsevol combinació lineal de variables aleatòries Normals també és normal).

Càlcul de probabilitats en la llei Normal

X ~ N (100; 5)

Probabilitat = Àrea sota la corba



P (X > 105) **P (X < 90)** **P (105 < X < 110)**

13

$$\boldsymbol{P(X > 105)} = P\left(Z > \frac{105-100}{5} \right) = P(Z > 1) = 0{,}1587$$

$$\boldsymbol{P(X < 90)} = P\left(Z < \frac{90-100}{5} \right) = P(Z < -2) = P(Z > 2) = 0{,}0228$$

$$\boldsymbol{P(105 < X < 110)} = P(X > 105) - P(X > 110)$$

$$P(X > 105) = P\left(Z > \frac{105-100}{5} \right) = P(Z > 1) = 0{,}1587$$

$$P(X > 110) = P\left(Z > \frac{110-100}{5} \right) = P(Z > 2) = 0{,}0228$$

$$P(105 < X < 110) = 0{,}1587 - 0{,}0228 = 0{,}1359$$

Llei Normal. Exercici

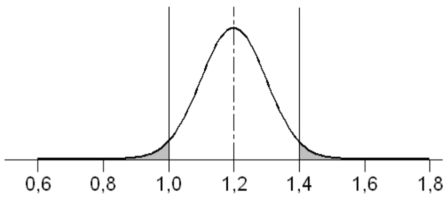
En un determinat punt d'un circuit la tensió ha de ser de 1,2 ± 0,2 V.

Determinar el percentatge de circuits amb aquesta tensió fora de toleràncies, si es distribueix segons:

a) N (1,2; 0,1)

b) N (1,3; 0,1)

14

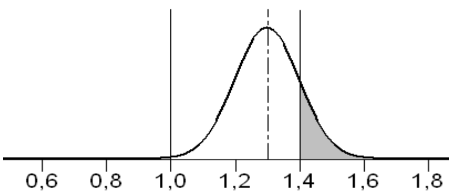


$$P(X > 1{,}4) = P\left(Z > \frac{1{,}4 - 1{,}2}{0{,}1}\right) = P(Z > 2) = 0{,}0228$$

$P(X < 1{,}0) = 0{,}0228$ (Per simetria)

Probabilitat fora de toleràncies:

$$P(X > 1{,}4) + P(X < 1{,}0) = 0{,}0456$$

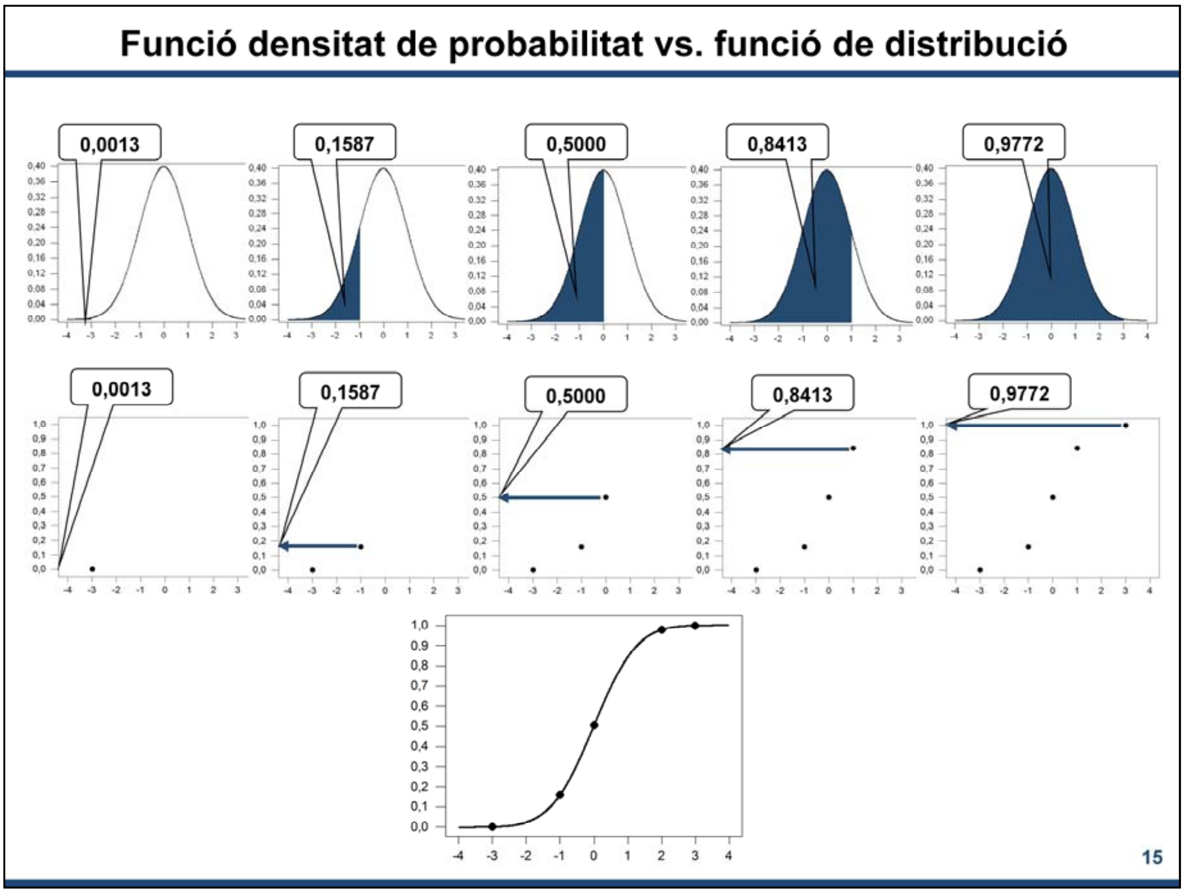


$$P(X > 1{,}4) = P\left(Z > \frac{1{,}4 - 1{,}3}{0{,}1}\right) = P(Z > 1) = 0{,}1587$$

$$P(X < 1{,}0) = P\left(Z < \frac{1{,}0 - 1{,}3}{0{,}1}\right) = P(Z < -3) = 0{,}0013$$

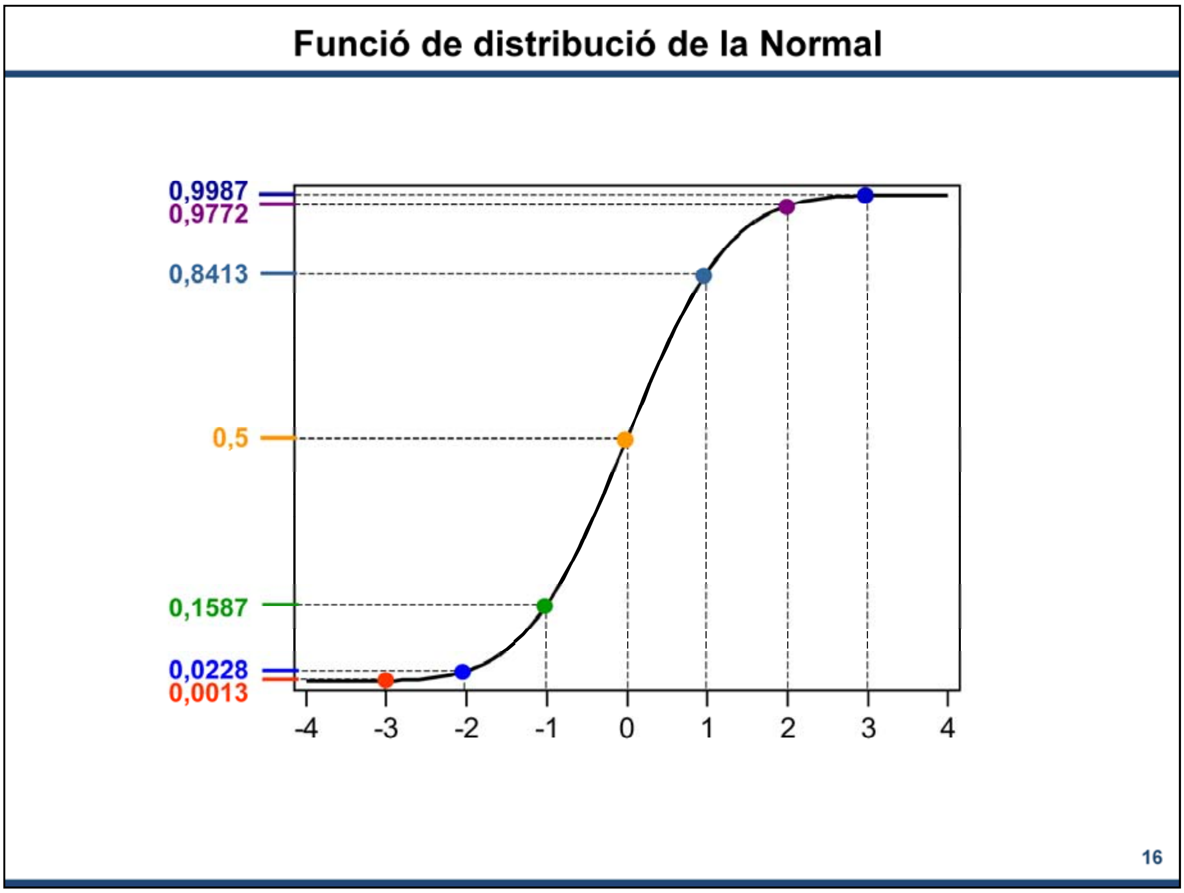
Probabilitat fora de toleràncies:

$$P(X > 1{,}4) + P(X < 1{,}0) = 0{,}1600$$



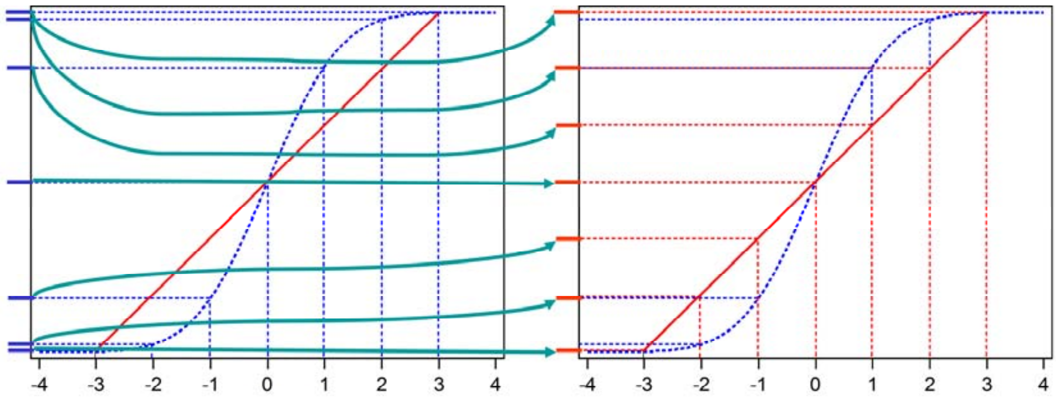
Funció densitat de probabilitat: Probabilitats = Àrees

Funció de distribució: Probabilitats = Ordenades



La representació gràfica de la funció de distribució de la Normal té forma de S allargada. Podem aconseguir que sigui una recta?

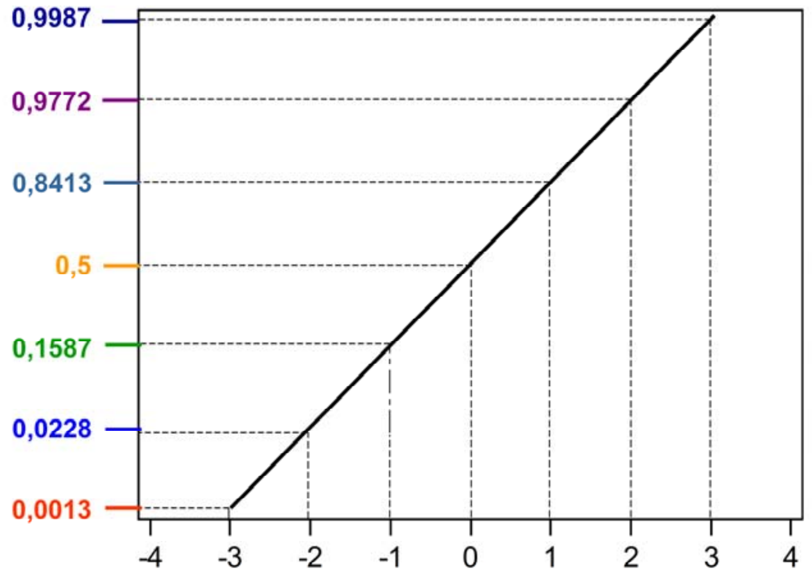
Nova escala d'ordenades



17

SÍ podem aconseguir que sigui una recta. Canviant l'escala de l'eix d'ordenades

Paper probabilístic normal

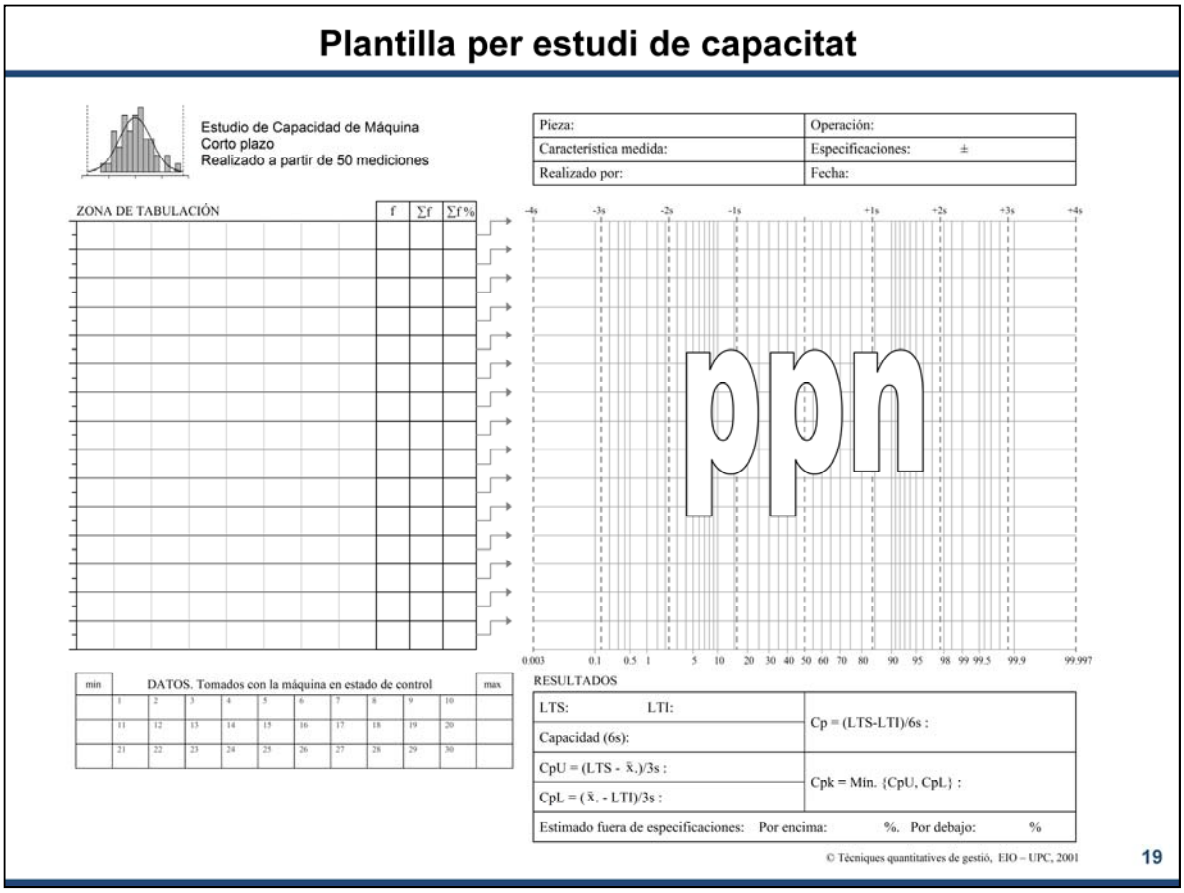


18

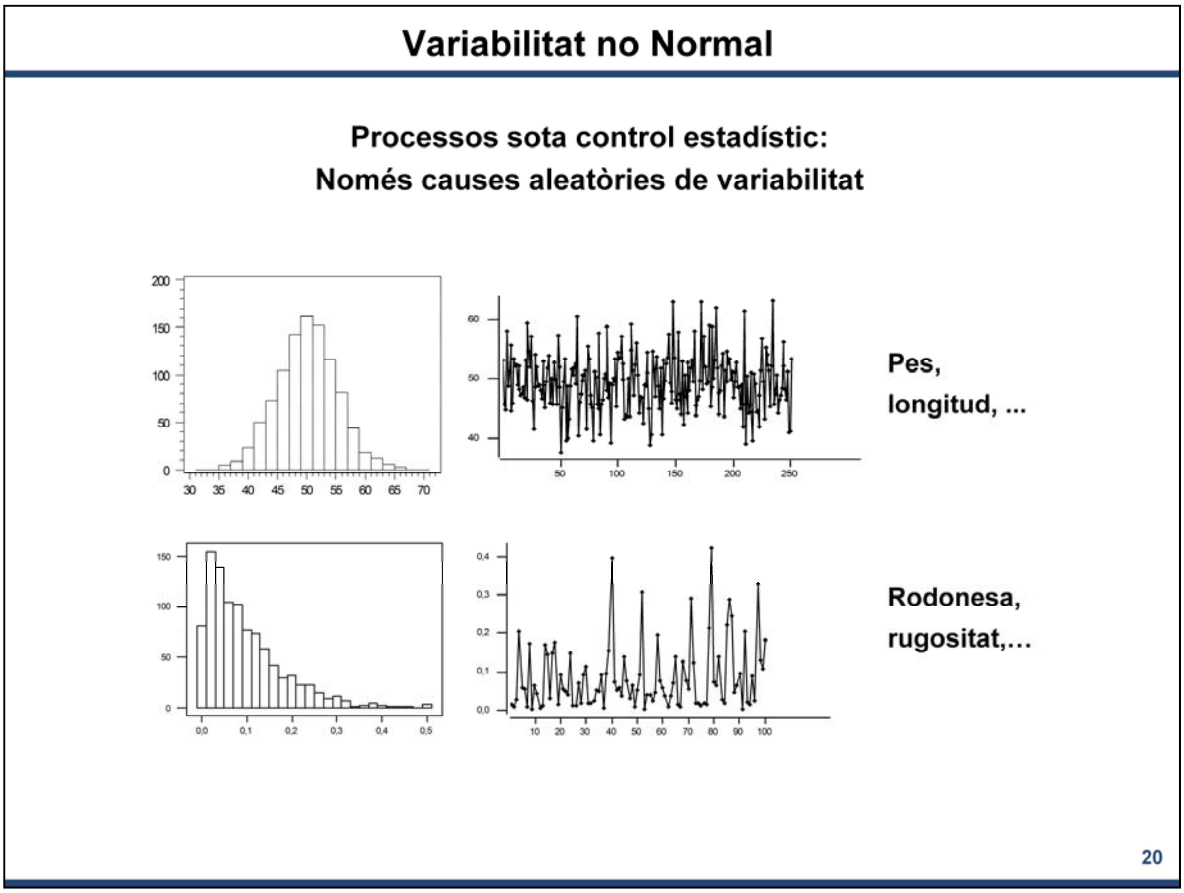
El paper amb aquestes ordenades s’anomena: Paper probabilístic normal (PPN)

La funció de distribució de la Normal, representada en (PPN), s'anomena: Recta d'Henry.

La representació de dades en PPN serveix per analitzar la hipòtesi de normalitat de la població

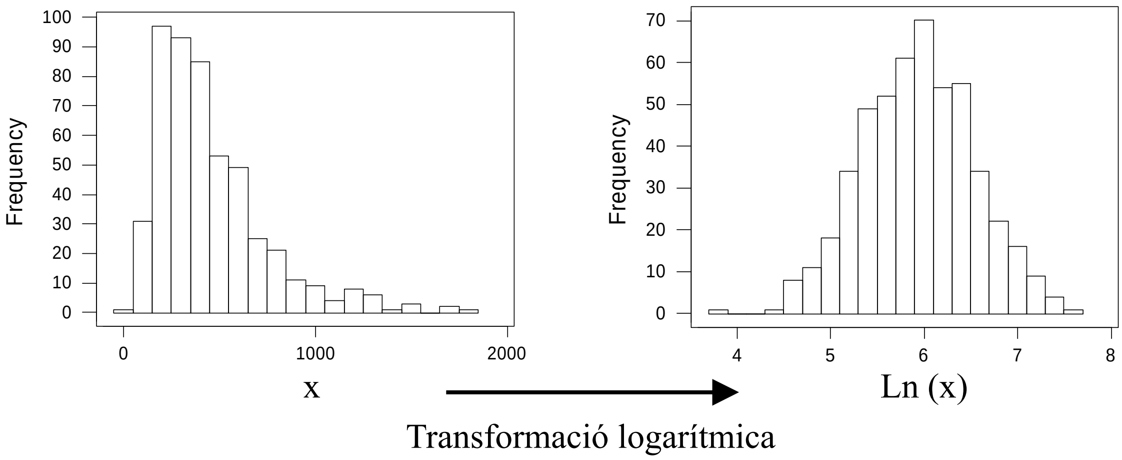


Més endavant veurem com s'utilitza aquesta plantilla.



No sempre la variabilitat deguda a causes aleatòries segueix una distribució normal. Les variables amb "zero natural" no segueixen una distribució normal.

Distribucions no Normals es poden tractar com a Normals transformant les dades.

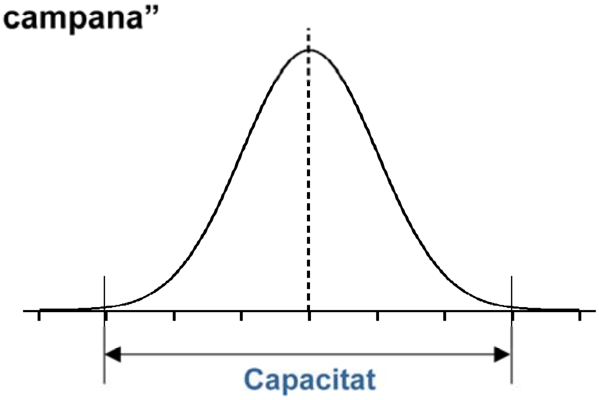


Concepte de capacitat

Variabilitat del procés en estat de control
(Només afecten causes aleatòries)

Capacitat = Mesura de variabilitat

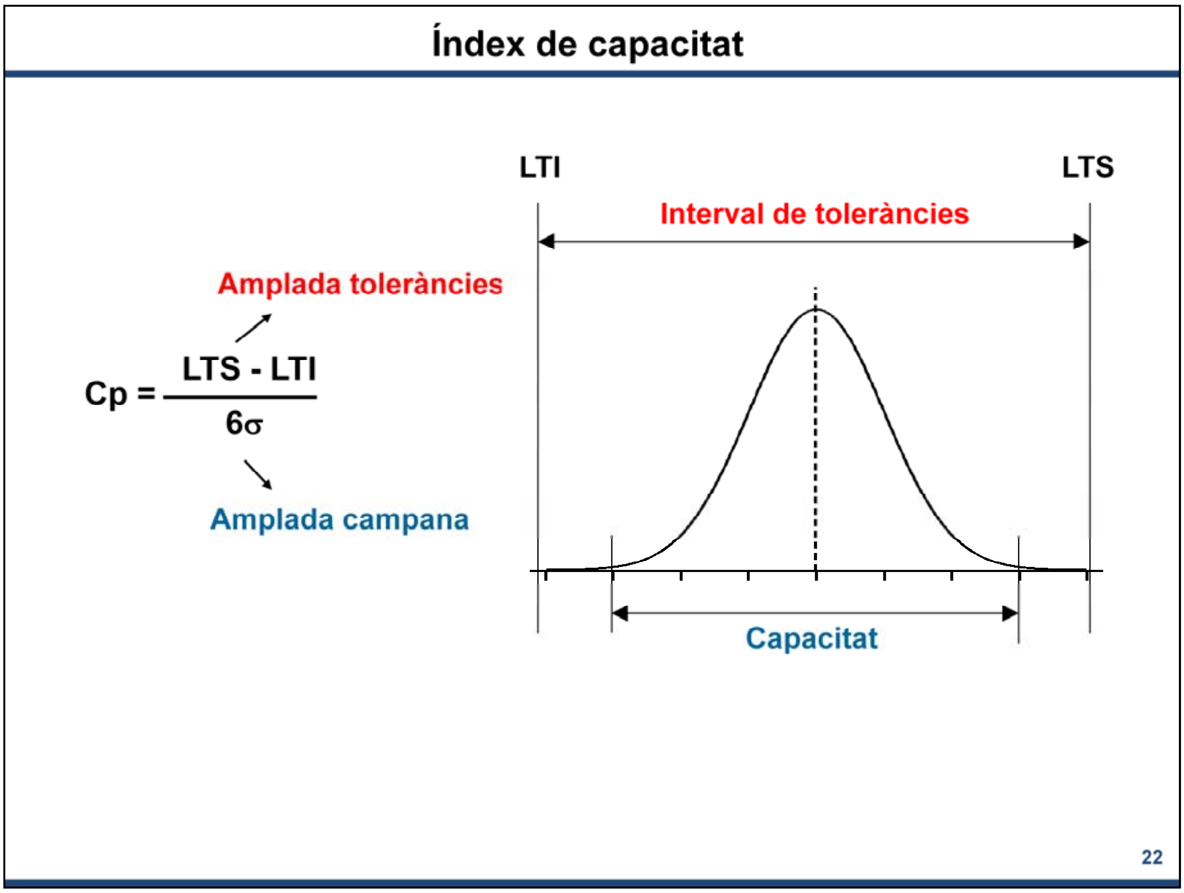
Capacitat = "Amplada de la campana"
(6 σ u 8 σ)



21

Realitzar un estudi de capacitat és quantificar la variabilitat natural de la màquina (o del procés).

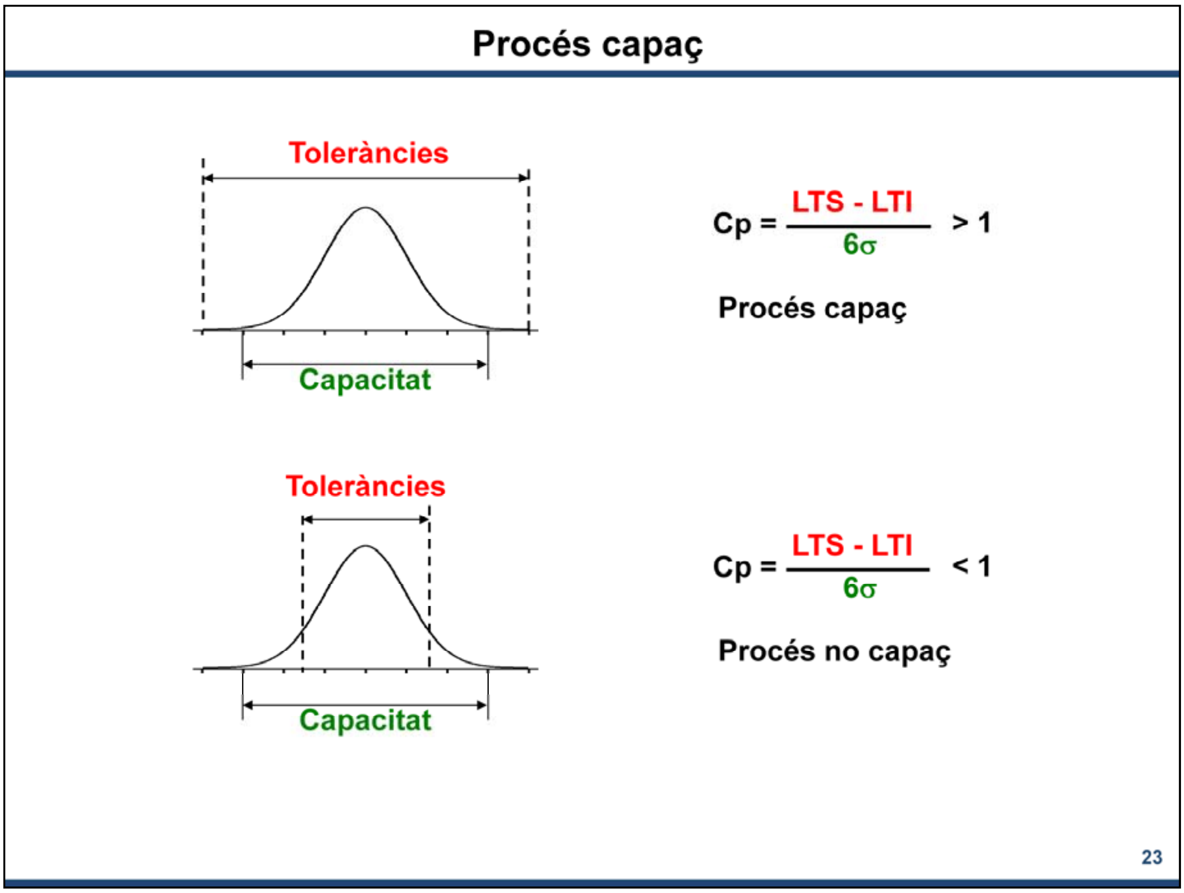
Capacitat = La variabilitat inevitable, la deguda a causes aleatòries.



Amplada de les toleràncies: En funció de les necessitats del client

Amplada de la campana: Característica de la màquina o del procés

Índex de capacitat: Relaciona les especificacions del producte amb la variabilitat natural de la màquina (procés).



Procés capaç:
És capaç de produir dins de toleràncies (és capaç de produir sense defectes)

Procés no capaç:
No és capaç de produir totes les unitats dins de toleràncies.

¿6σ o 8σ?. Cp=1 amb 8σ equival a Cp = 1,33 amb 6σ

N'hi ha prou amb ser capaç?

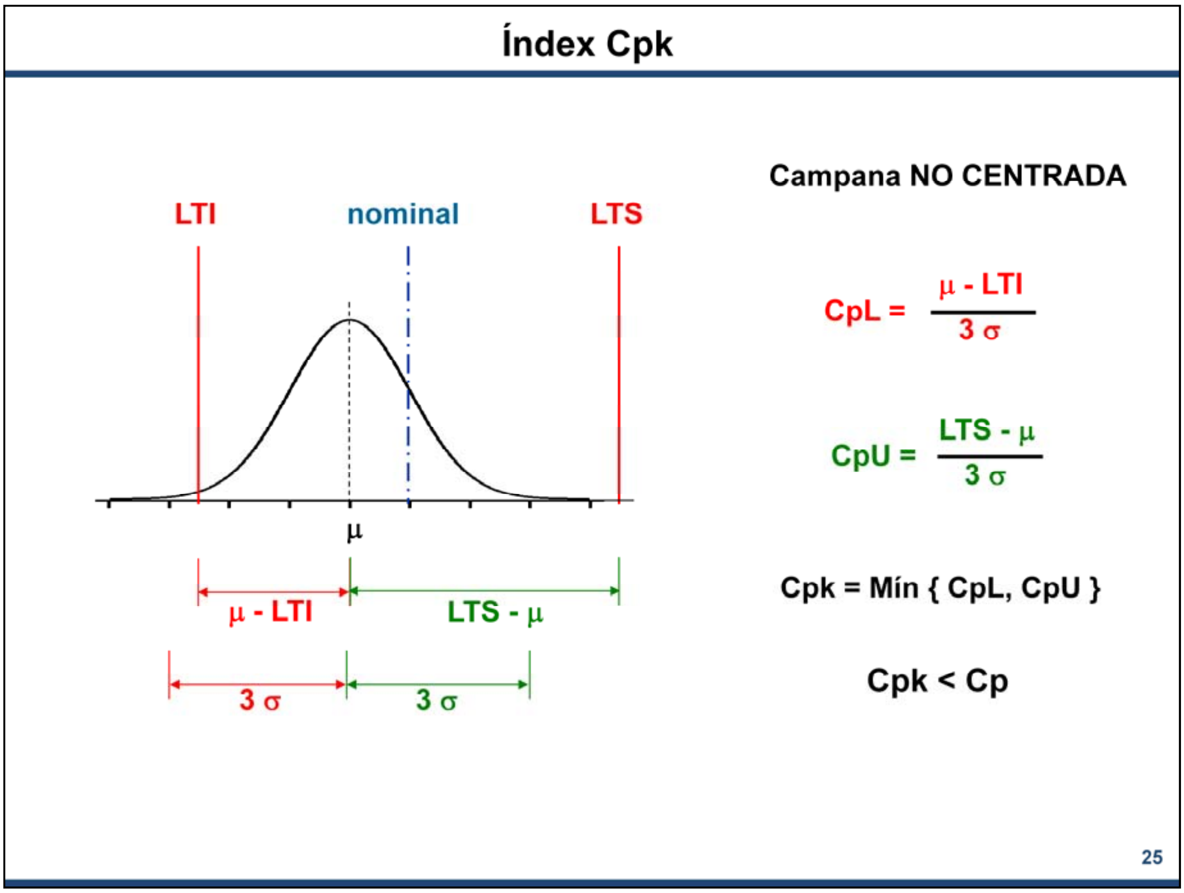
Pregunta: **Un procés àmpliament capaç, ¿Pot produir peces defectuoses?**

Resposta: **Sí, si está descentrat**

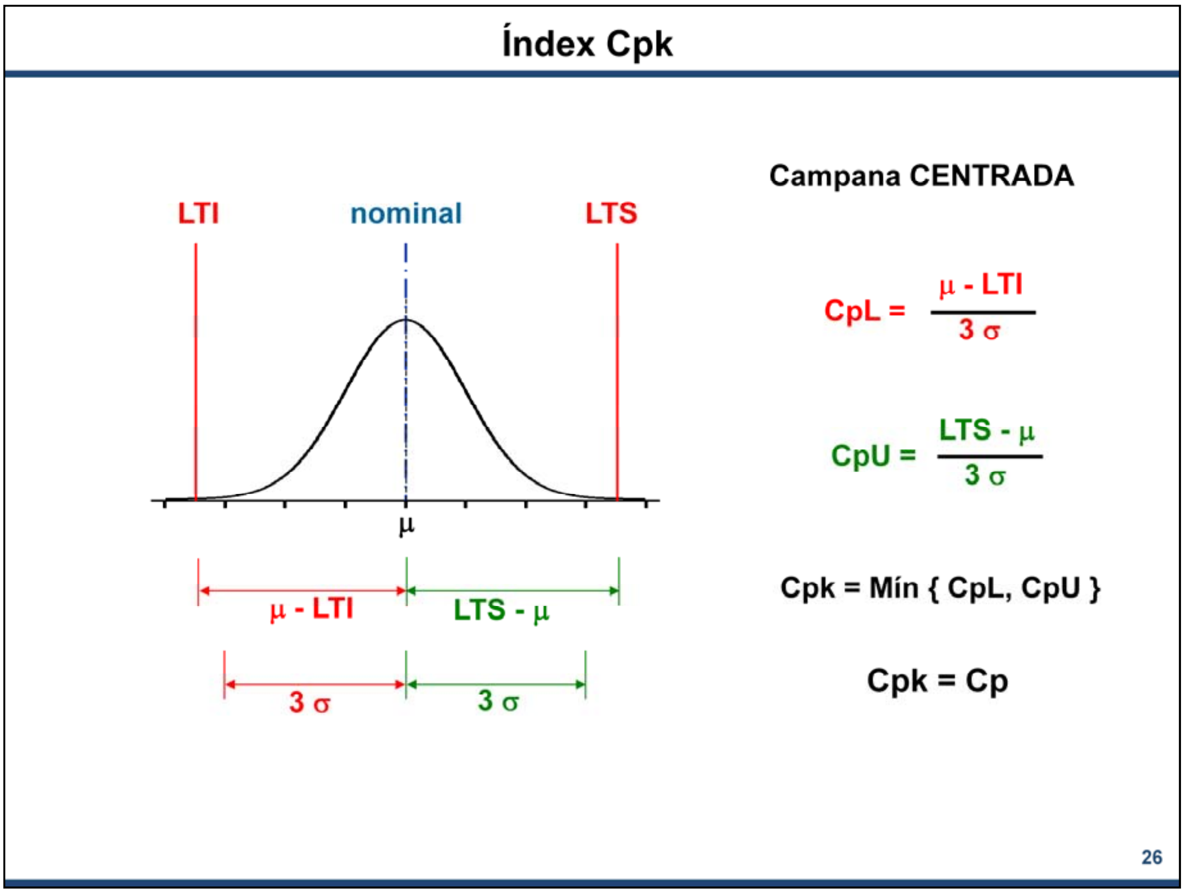
24

Procés capaç:
És capaç de produir dins de toleràncies (és capaç de produir sense defectes)

"És capaç", però això no garanteix que sempre fabriqui bé



Quin valor tindrà el Cpk si μ cau fora de l'interval de toleràncies?



Com a màxim Cpk = Cp (procés perfectament centrat)

Índexs de capacitat. Exemple

En un determinat punt d'un circuit a tensió ha de ser de 1,2 ± 0,2 V.

Si en la producció aquesta tensió es distribueix segons N (1,25; 0,15),

a) Calcular el Cp y Cpk del procés.

b) Calcular el percentatge de defectes que es produiran

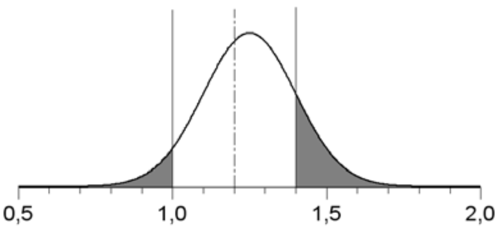
27

$$Cp = \frac{LTS - LTI}{6\sigma} = \frac{0,4}{0,90} = 0,44$$

$$CpL = \frac{\mu - LTI}{3\sigma} = \frac{1,25 - 1,0}{0,45} = 0,56$$

$$CpU = \frac{LTS - \mu}{3\sigma} = \frac{1,4 - 1,25}{0,45} = 0,33$$

$$Cpk = \min\left\{CpU; CpL\right\} = 0,33$$



$$P(X > 1,4) = P\left(Z > \frac{1,4 - 1,25}{0,15}\right) = P(Z > 1) = 0,1587$$

$$P(X < 1,0) = P\left(Z < \frac{1,0 - 1,25}{0,15}\right) = P(Z < -1,67) = 0,0478$$

$$P(X < 1,0) + P(X > 1,4) = 0,1587 + 0,0478 = 0,2065$$

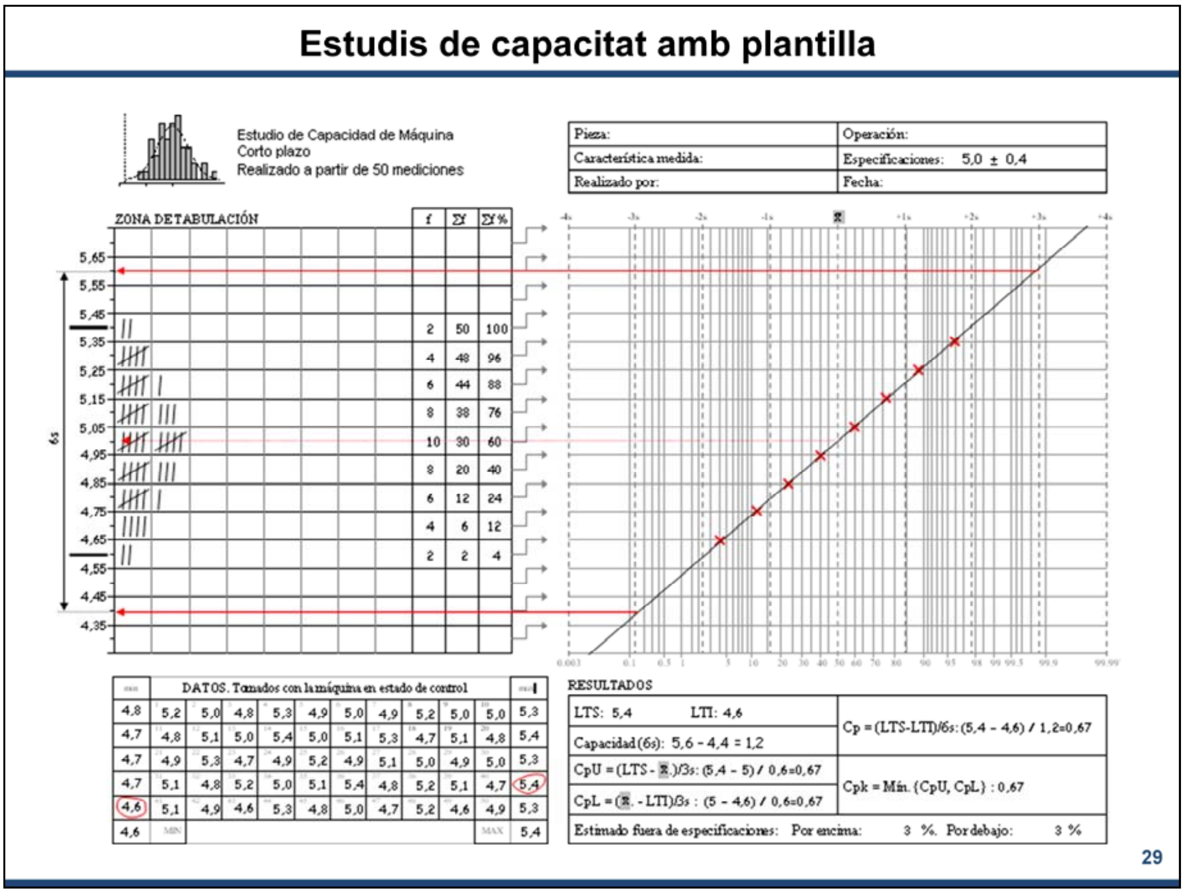
Estudis de capacitat de màquina. Etapes

1. **Portar la màquina a l'estat de control**
2. **Recollir una mostra representativa d'almenys 50 unitats**
3. **Revisar que les dades no evidencien una distribució no normal**
4. **Realitzar l'estudi**

28

Utilitzant la plantilla, faci un estudi de capacitat amb les següents dades:

DATOS. Tomados con la máquina en estado de control									
1 5,2	2 5,0	3 4,8	4 5,3	5 4,9	6 5,0	7 4,9	8 5,2	9 5,0	10 5,0
11 4,8	12 5,1	13 5,0	14 5,4	15 5,0	16 5,1	17 5,3	18 4,7	19 5,1	20 4,8
21 4,9	22 5,3	23 4,7	24 4,9	25 5,2	26 4,9	27 5,1	28 5,0	29 4,9	30 5,0
31 5,1	32 4,8	33 5,2	34 5,0	35 5,1	36 5,4	37 4,8	38 5,2	39 5,1	40 4,7
41 5,1	42 4,9	43 4,6	44 5,3	45 4,8	46 5,0	47 4,7	48 5,2	49 4,6	50 4,9

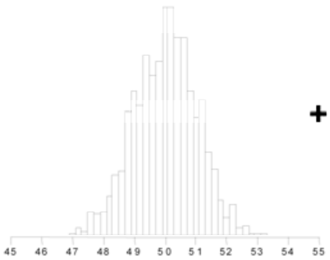


Passos a seguir:

1. Identificar el màxim i el mínim del conjunt de dades.
2. Establir l'escala per a la zona de tabulació. Al voltant de 10 intervals és un bon nombre (caben un màxim de 15). Si els extrems dels intervals tenen un decimal més que les dades, s'eviten possibles ambigüitats en assignar un valor a un interval.
3. Tabular les dades (veure exemple)
4. Omplir les taules de freqüències
5. Dibuixar els punts sobre el PPN
6. Traçar la recta que millor s'ajusti als punts (atendre més a l'ajust dels punts centrals)
7. Omplir la zona de resultats.

Estudis de capacitat. Curt i llarg termini

Variabilitat
a curt termini



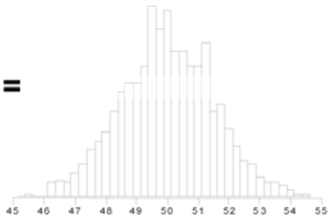
+

Variacions degudes
a canvis de:

Torn
Operari
Matèries primeres, etc

=

Variabilitat
a llarg termini



Capacitat de màquina

Capacitat de procés

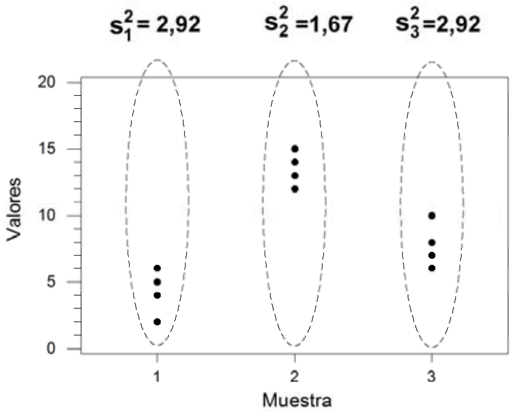
30

Situació A: Prenem 100 unitats fabricades seguides
Situació B: Prenem 5 unitats cada hora durant 20 hores
En quina situació tindrem més variabilitat?

La variabilitat en el magatzem és la variabilitat del procés.

Estimació de la variabilitat a curt termini

Mostra	Valors			
1	2	4	5	6
2	12	13	14	15
3	6	7	8	10



$$s_R^2 = (2,92 + 1,67 + 2,92)/3 = 2,50$$

$$s_R = \sqrt{2,50} = 1,58$$

31

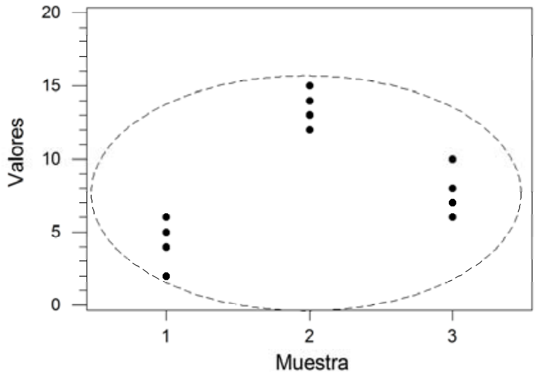
Millor estimador de la variància a curt termini: Mitjana, ponderat segons els graus de llibertat, de les variàncies de cada mostra.

Estimació de la variabilitat a llarg termini

Mostra	Valors			
1	2	4	5	6
2	12	13	14	15
3	6	7	8	10

Variància global dels 12 valors:

$s^2 = 17{,}91$



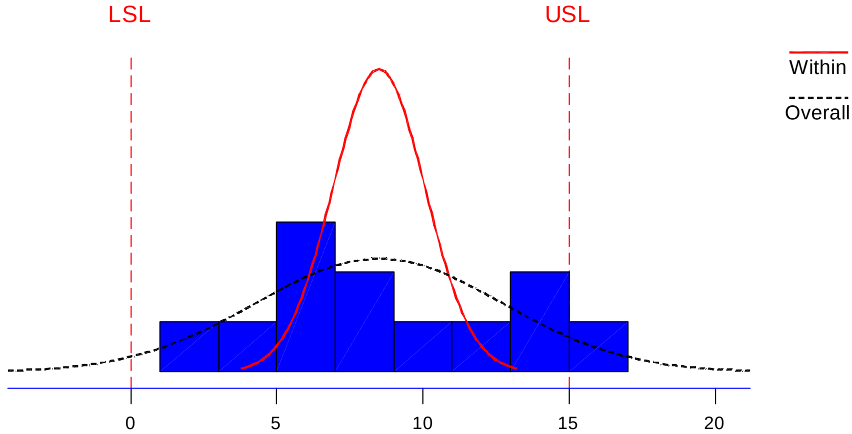
$$s = \sqrt{17{,}91} = 4{,}23$$

32

Millor estimador de la variància a llarg termini: Variància global de totes les dades

Process Data	
USL	15,0
Target	*
LSL	0,0
Mean	8,5
Sample N	12
StDev (Within)	1,58114
StDev (Overall)	4,23191

Potential (Within) Capability	
Cp	1,58
CPU	1,37
CPL	1,79
Cpk	1,37
Cpm	*



Overall Capability	
Pp	0,59
PPU	0,51
PPL	0,67
Ppk	0,51

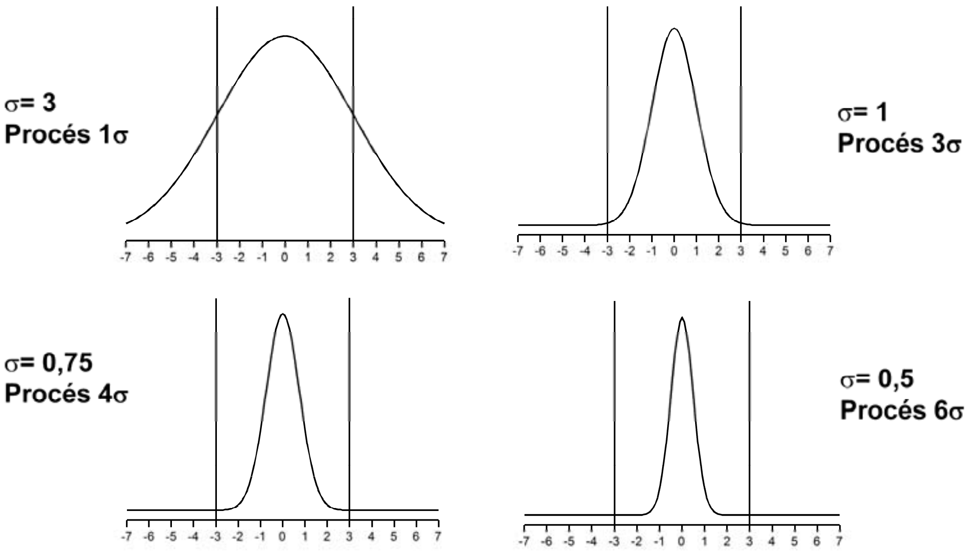
Observed Performance	
PPM < LSL	0,00
PPM > USL	0,00
PPM Total	0,00

Exp. "Within" Performance	
PPM < LSL	0,04
PPM > USL	19,70
PPM Total	19,74

Exp. "Overall" Performance	
PPM < LSL	22292,56
PPM > USL	62275,54
PPM Total	84568,10

Llenguatge Sis Sigma

Sigmes del procés: Nombre de desviacions tipus des del valor nominal fins a l'extrem de toleràncies.



33

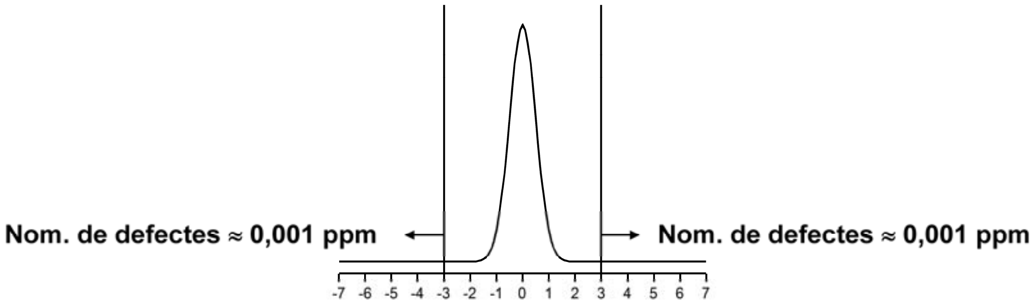
Quin percentatge de defectes produeix un procés amb σ = 2, si les especificacions són nominal ± 4?

En llenguatge Sis Sigma, quantes sigmes té aquest procés?

Procés Sis Gigma

Objectiu desitjat: Procés Sis Sigma

Toleràncies a 6σ del valor objectiu



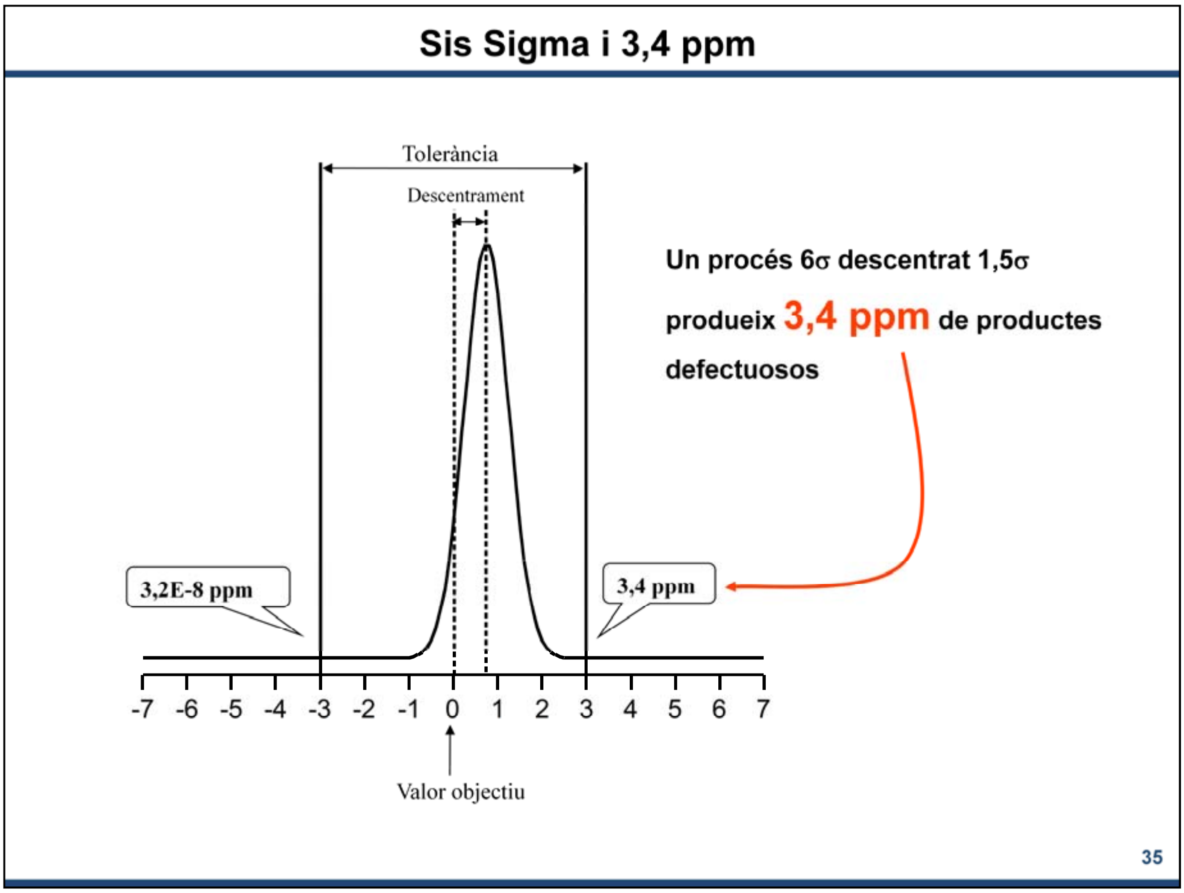
Un procés Sis Sigma, centrat, produeix de l'ordre de 0,002 ppm de defectes

34

Un procés Sis Sigma, centrat, produeix el 99,9999998% de productes correctes. No n'hi hauria prou amb el 99,9%?

Un 1 per mil de defectes significa:

Cada dia s'estavellarien 2 avions en el món
Cada hora es perdrien 300 cartes enviades per correu
Cada any es farien 20.000 receptes mèdiques equivocades
Cada hora es carregarien 3.500 xecs bancaris a comptes equivocades
Cada mes l'aigua de l'aixeta sortiria bruta durant una hora.

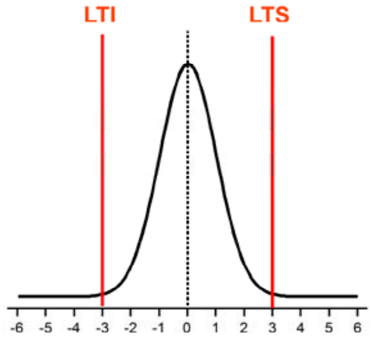


Es diu que un procés Sis Sigma produeix 3,4 ppm de defectes. D'on surt el 3,4 ppm?

Per ser realista, se suposa que el procés es descentra 1,5σ. Fent els càlculs amb aquest supòsit, s'obtenen les 3,4 ppm.

Cp, Cpk i sigmes del procés (1)

Procés centrat



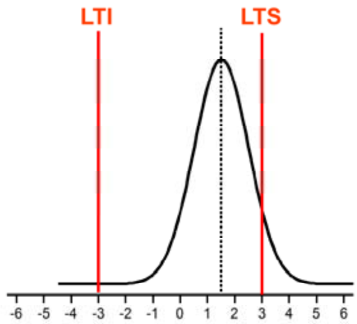
Límits de toleràncies	Producció dintre de toleràncies (%)	Producció defectuosa (ppm)	Cp	Cpk
± 1 sigma	68,27	317300	0,33	0,33
± 2 sigma	95,45	45500	0,66	0,66
± 3 sigma	99,73	2700	1	1
± 4 sigma	99,9937	63	1,33	1,33
± 5 sigma	99,999943	0,57	1,66	1,66
± 6 sigma	99,9999998	0,002	2	2

36

EXERCICI:
Triar alguns dels resultats de la taula anterior i comprovar que són correctes

Cp, Cpk i sigmes del procés (2)

Procés descentrat en 1,5 σ



Límits de toleràncies	Producció dintre de toleràncies (%)	Producció defectuosa (ppm)	Cp	Cpk
± 1 sigma	30,85	691462	0,33	- 0,17
± 2 sigma	69,15	308538	0,66	0,17
± 3 sigma	93,32	66807	1	0,5
± 4 sigma	99,3790	6210	1,33	0,83
± 5 sigma	99,9767	233	1,66	1,17
± 6 sigma	99,99966	3,4	2	1,5

37

EXERCICI:
Triar alguns dels resultats de la taula anterior i comprovar que són correctes

Tema 3: Bibliografia

Métodos Estadísticos. Control y mejora de la calidad
A. Prat; X. Tort-Martorell; P. Grima y L. Pozueta
Ed. UPC, 1997

Causes de la variabilitat: Capítol 3, apartats 3.1 a 3.5. La llei Normal: Capítol 4, apartat 4.1. Estudis de capacitat i índexs: Capítol 11, apartat 11.4.5.

Introduction to Statistical Quality Control
Douglas C. Montgomery
John Wiley, 2001

Estudis de capacitat: Capítol 7, apartats 7.1 a 7.3