Examen resolt d'Introducció a la Probabilitat - Grau d'Estadística 06-febrer-2012

1. (3 pts.) En un estudi en l'àrea metropolitana es varen seleccionar una mostra aleatòria de 500 individus amb la finalitat de determinar aspectes relacionats amb el comportament dels consumidors. Els resultats obtinguts es troben en la següent taula de contingència.

Gaudeix comprant roba	Home	Dona
Si	136	224
No	104	36
Total	240	260

   (a) Suposem que hem escollit una dona. Quina és la probabilitat de que no gaudeixi comprant roba?. (0.75 pts.)

   (b) Suposem que hem escollit a l'atzar una persona que gaudeix de comprar roba. Quina és la probabilitat de que sigui un home?. (0.75 pts.)

   (c) Quina és la probabilitat de que una persona escollida a l'atzar gaudeix de comprar roba?. (0.75 pts.)

   (d) Els esdeveniments gaudir comprant roba i gènere (sexe) dels participants, són estadísticament independents? (0.75 pts.)

SOLUCIÓ

2. En primer lloc escriurem (de la manera més fàcil, no única) la informació que ens dona el problema:

   (a) Definim i etiquetem els esdeveniments o successos.
   Sigui G el succés "Gaudir", D, el succés "Dona", H el succés "Home"·

   (b) A partir de la taula obtenim la següent informació.
   $P(D) = \frac{260}{500}$ $P(H) = \frac{240}{500}$ $P(G \cap H) = \frac{136}{500}$ $P(G \cap D) = \frac{224}{500}$ $P(\bar{G} \cap H) = \frac{104}{500}$ $P(\bar{G} \cap D) = \frac{36}{500}$

   (c) Calculem cadascun dels apartats. Suposem que hem escollit una dona. Quina és la probabilitat de que no gaudeixi comprant roba?.
   $P(\bar{G}|D) = \frac{P(\bar{G} \cap D)}{P(D)} = \frac{36}{260}$

   (d) Suposem que hem escollit a l'atzar una persona que gaudeix de comprar roba. Quina és la probabilitat de que sigui un home?.
   Primer calculem esdeveniment $P(G) = P(G \cap H) + P(G \cap D) = \frac{136}{500} + \frac{224}{500} = \frac{360}{500}$
   Ara calculem el que ens demanen: $P(H|G) = \frac{P(G \cap H)}{P(G)}) = \frac{136}{360}$

   (e) Quina és la probabilitat de que una persona escollida a l'atzar gaudeix de comprar roba?.
   Calculat dins de l'apartat anterior, $P(G) = P(G \cap H) + P(G \cap D) = \frac{136}{500} + \frac{224}{500} = \frac{360}{500}$

   (f) Els esdeveniments comprar roba i genere (sexe) dels participants, són estadísticament independents?.
   A partir de resultats ja obtinguts podem demostrar el concepte d'indepèndencia: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
   Veiem-ho
   Si sabem que $P(H \cap G) = \frac{136}{500}$, la $P(H) = \frac{240}{500}$ i $P(G) = \frac{360}{500}$. Sembla obvi que: $P(H \cap G) \neq P(H)P(G)$

3. (3.5 pts.) Sigui X la variable aleatòria que mesura el temps (en hores), que funciona adequadament la pila d'una calculadora solar entre exposicions a la llum suficients per recarregar-la. La funció de densitat de probabilitat de la v.a. X ve donada per:

$$f(x) = \begin{cases} kx^{-3} & \text{si} \quad 2 < x < 10 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

   (a) Calculeu el valor de k per a que f sigui efectivament la funció de densitat de X. (0.5 pts.)

   (b) Calculeu la funció de distribució i feu-ne una gràfica aproximada. (1 pt.)

   (c) Quin és el temps mitjà que s'espera funcioni adequadament la pila entre recàrregues? Calculeu la desviació típica de X? (1 pt.)

   (d) Calculeu la probabilitat que la càrrega d'una pila solar seleccionada a l'atzar duri com a màxim, quatre hores abans que sigui necessari recarregar-la. Calculeu la probabilitat que, si ha durat més de quatre hores, en duri menys de vuit. (1 pt.)

SOLUCIÓ

(a) Per a que f sigui funció de densitat ha de complir:

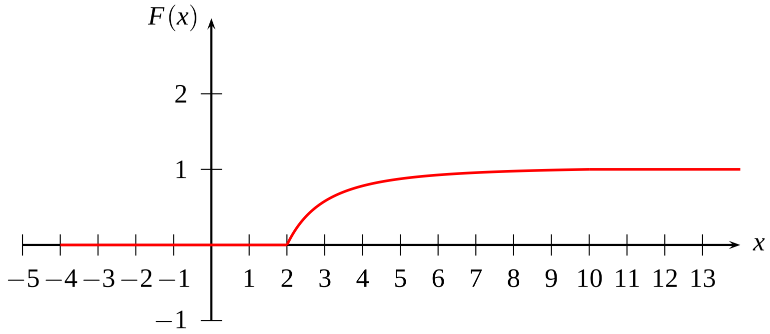
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{2}^{10} kx^{-3}\,dx = k\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_2^{10} = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{100}\right) = \frac{k}{2}\frac{24}{100}$$

Aleshores: $K = \dfrac{25}{3}$

(b) La funció de distribució és:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ \displaystyle\int_2^x \frac{25}{3} t^{-3}\,dt = \frac{25}{6}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si} \quad 2 \le x < 10 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 10 \end{cases}$$

Dibuix de la gràfica de la funció de distribució:



(c)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{-\infty} x\,f(x)\,dx = \frac{25}{3}\int_2^{10} \frac{x}{x^3}\,dx = \frac{-25}{3}\left[\frac{1}{x}\right]_2^{10} = \frac{10}{3}$$

Per tant el temps mitjà que s'espera funcioni adequadament la pila és de 3.33 hores aproximadament.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{-\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{25}{3}\int_2^{10} \frac{x^2}{x^3}\,dx = \frac{25}{3}[\ln(x)]_2^{10} = \frac{25}{3}\ln(5)$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{25}{3}\ln(5) - \left(\frac{10}{3}\right)^2 \approx 2.3$$

$$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{2.3} = 1.52$$

(d)

$$P(X \le 4) = F(4) = \frac{24}{6}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}\right) = \frac{25}{32}$$

$$P(X < 8 \mid X > 4) = \frac{P(4 < X < 8)}{P(X > 4)} = \frac{F(8)-F(4)}{1-F(4)} = \frac{\frac{125}{128}-\frac{25}{32}}{\frac{7}{32}} = \frac{25}{28}$$

4. (3.5 pts.) Tenim una nova xarxa social anomenada "facelrook" que permet als seus usuaris penjar textos i fotos a un lloc que es diu "el mur", enviar comentaris als amics i coses de l'estil. Un usuari que estudia al Grau ha determinat que rep comentaris dels seus col·legues d'acord amb una distribució de Poisson i mitjana 0.5 al dia. Els dies que rep més d'un comentari (i només aquests dies), per celebrar-ho ell penja una foto.

A tots els apartats, justifiqueu les respostes, explicant quines distribucions de probabilitat heu utilitzat.

(a) Quina és la probabilitat que un cert dia triat a l'atzar aquest usuari rebi més d'un comentari? (0.5 pts.)

(b) Hem vist que el cap de setmana (dos dies, és clar) ha penjat una foto. Digueu la probabilitat que durant aquest temps hagi rebut exactament tres comentaris (raonant la resposta). (0.75 pts.)

(c) Al llarg de n dies, quina és la distribució del nombre de fotos que va penjant? Digueu el nombre del model emprat, i els paràmetres amb el seu valor, si el coneixeu. Representeu gràficament, encara que de forma aproximada, la seva funció de probabilitat si considerem una setmana. (0.5 pts.)

(d) En mitjana, quants comentaris rep i quantes fotos es penjaran en un mes (de 31 dies)? (0.25 pts.)

(e) Trobeu la probabilitat que en un mes hagi de penjar més de 3 fotos al seu mur. (0.5 pts.)

(f) Quantes fotos pot necessitar penjar com a màxim en un any (365 dies), amb un marge d'error de l'1%? Expliqueu el procediment que heu escollit per trobar la solució. (1.0 pts.)

SOLUCIÓ:

(a) Sigui $C \sim$ Poisson(λ), on $\lambda = 0.5$, la distribució del nombre de comentaris rebuts per dia.

Per tant, la probabilitat és Prob($C > 1$) = 1 - Prob($C = 0$) - Prob($C = 1$).

La resposta és 1 - exp($-\lambda$) - exp($-\lambda$)λ = 1 - 0.6065 - 0.3033 = 0.0902.

(b) Diem A al esdeveniment "tres comentaris en dos dies", i B a "una foto en dos dies". El que es busca es Prob(A | B).

A∩B = "dos comentaris a un dia i un a l'altre dia, o tres a un dia i cap a l'altre". Si utilitzem els subindexes S per dissabte i D per diumenge:

Prob(A∩B) = Prob$((C_S = 2 \cap C_D = 1) \cup (C_S = 1 \cap C_D = 2) \cup (C_S = 3 \cap C_D = 0) \cup (C_S = 0 \cap C_D = 3))$ =
2 (Prob($C_S = 2 \cap C_D = 1$) + Prob($C_S = 3 \cap C_D = 0$)) [Com els dos dies són independents]:
2 (Prob($C_S = 2$) Prob($C_D = 1$) + Prob($C_S = 3$) Prob($C_D = 0$)) = 2(0.0758 0.3033 + 0.0126 0.6065) = 0.0613

Prob(B) = 2 Prob($C > 1$)Prob($C \leq 1$) = 2 0.0902(1-0.0902) = 0.1641

Prob(A | B) = 0.0613 / 0.1641 = 0.3736

(c) Com en un procés de Poisson cada dia és independent dels altres, si un dia es penja la foto o no, és un esdeveniment independent dels altres dies; i per a cada dia, la seva probabilitat és la mateixa (apartat a): per tant, en n dies, el nombre de fotos és Binomial(n, p=0.0902).

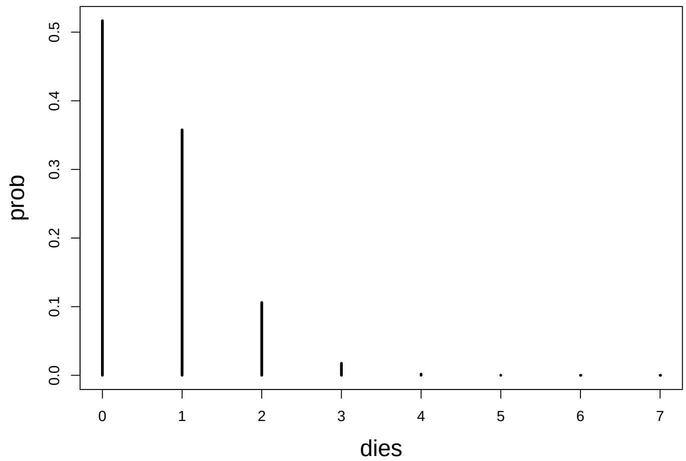


Figura 1: Distribució dels dies d'una setmana que es penja una foto.

(d) Valors esperats:

- comentaris per mes: 31 · 0.5 = 15.5
- fotos penjades per mes: 31 · 0.0902 = 2.7962

(e) Sigui $F \sim$ B(31, 0.0902) "nombre de fotos penjades mensualment". Demanen Prob($F > 3$) = 1 - Prob($F \leq 3$)

k	Prob($F = k$)
0	$(1-p)^{31}$ = 0.05337
1	$31p(1-p)^{30}$ = 0.16404
2	$465p^2(1-p)^{29}$ = 0.24395
3	$4495p^3(1-p)^{28}$ = 0.23380
	0.69516

La resposta és 0.30484.

(f) Les fotos a un any també és una distribució Binomial, amb (n=365, p=0.0902). Per tant, admet l'aproximació a la Normal i l'aproximació a la Poisson:

i. N(365·0.0902, $\sqrt{365\, 0.0902\, 0.9098}$)
ii. P(365·0.0902)

Però per trobar el valor que deixa només un 1% per sobre és preferible emprar l'aproximació per la Normal. Sigui $Y \sim$ N(32.85, 5.473) el nombre de fotos que es pengen al cap d'un any, aproximat per una llei continua. Volem trobar el valor y tal que Prob($Y \leq y$) = 0.99. Per a una variable $Z \sim N(0,1)$ aquest valor és 2.326 (taules), i $y = \mu + 2.326\sigma = 45.58$. Llavors, 46 és el màxim nombre de fotos penjades en un any, amb un error de l'1%.