

## DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA. Curs 09/10. 2on Q

### EXAMEN Parcial. Cadenes de Markov.

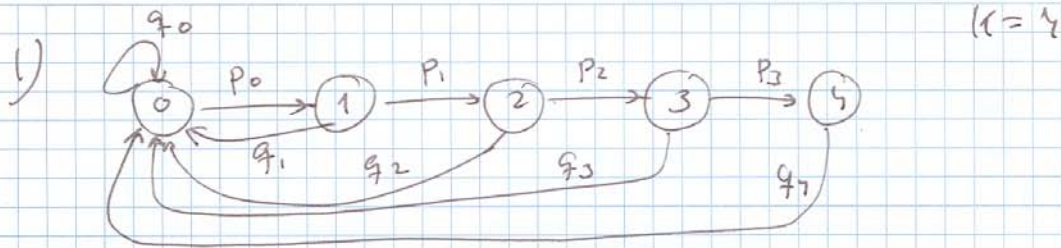
Unes bateries elèctriques alimenten uns ordinadors portàtils que han de funcionar en condicions molt dures de temperatura, per lo qual presenten una determinada variabilitat en quant al n° d'hores que permeten de funcionament d'aquests ordinadors.

Per establir un model per al temps de funcionament dels ordinadors amb aquestes bateries elèctriques s'ha efectuat un experiment reproduint les condicions en les que es veuran sotmeses en la pràctica i de 1000 ordinadors inicials es mostren d'hora en hora els que varen continuar en funcionament:

	1h	2h	3h	4h	5h
1000	950	900	850	100	0

Es demana:

- 1- [2p] Establir una cadena de Markov  $\{X_k\}$  corresponent al número de hores que porta en funcionament un ordinador. Calcular la matriu de probabilitats de transició, dibuixar el diagrama corresponent, les classes de la cadena i la periodicitat dels seus estats.
- 2- [1p] Una empresa compra una gran quantitat d'aquests ordinadors per a fer-los funcionar sense estar connectats a la xarxa elèctrica. Els ordinadors estan sempre en funcionament continu i en esgotar-se la bateria aquesta és reemplaçada immediatament per una de carregada. Calculeu el temps mig de funcionament dels ordinadors sense recanviar la bateria.
- 3- [1.5p] Quatre d'aquests ordinadors s'engeguen simultàniament amb una bateria completament carregada. Quina és la probabilitat de que tots 4 continuïn funcionant després de 2 hores.
- 4- [1p] El dia 1 de gener a les 12h s'engeguen tots els ordinadors amb una bateria completament carregada. Quina és la fracció dels que deixaran de funcionar en l'hora següent, de entre els que ho estaven fent sense interrupció des de feia dues hores?
- 5- [2p] Per al dia 26 de juliol: calculeu les fraccions (%) d'ordinadors que hi ha durant la seva primera hora de funcionament des del darrer reemplaçament de la bateria. Id per als que porten entre 1 i 2 hores. Id per als que porten entre 2 i 3, Id. per als que porten entre 3 i 4, Id. per als que porten entre 4 i 5 hores.
- 6- [1.25p] Quina és la edat mitjana (en hores de funcionament continuat) dels ordinadors el dia 26 de juliol.?
- 7- [1.25p] Quina és la probabilitat de que un ordinador que ja porta una hora funcionant ho continuï fent sense interrupció durant dues hores més.?



$$p_0 = \frac{950}{1000} = 0.95, \quad p_1 = \frac{900}{950} = 0.9473, \quad p_2 = \frac{850}{900} = 0.9444,$$

$$p_3 = \frac{100}{850} = 0.1176, \quad p_4 = \frac{0}{100} = 0$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.05 & 0.95 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 50/950 & 0 & 900/950 & 0 & 0 \\ 2 & 50/900 & 0 & 0 & 850/900 & 0 \\ 3 & 750/850 & 0 & 0 & 0 & 100/850 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Temps mitjà:

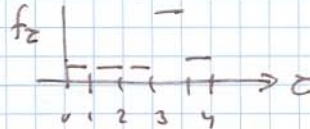
$$f_0 = \frac{M_0 - M_1}{M_0} = \frac{50}{1000} = 0.05, \quad f_1 = \frac{50}{1000} = 0.05$$

$$f_2 = \frac{50}{1000} = 0.05, \quad f_3 = \frac{750}{1000} = 0.75, \quad f_4 = \frac{100}{1000} = 0.1$$

Temps mitjà  $\approx$

$$\frac{1}{2} \cdot 0.05 + \frac{3}{2} \cdot 0.05 + \frac{5}{2} \cdot 0.05 + \frac{7}{2} \cdot 0.75 + \frac{9}{2} \cdot 0.1$$

$$= 3.3 \text{ hores}$$



3)  $P(Z \geq 2) = 1 - F_Z(2) = R_Z(2) \approx \frac{M_2}{M_0} = \frac{900}{1000} = 0.9$

$$P(Z \geq 2)^4 \approx 0.9^4 = 0.6561$$

4)  $q_2 = 1 - p_2 = 0.0556$

5) Es tracta de calcular les probabilitats d'estat estacionari:

$$\pi_0 = (1 + p_0 + p_0 p_1 + p_0 p_1 p_2 + p_0 p_1 p_2 p_3)^{-1} =$$

$$= (1 + p_0 (1 + p_1 (1 + p_2 (1 + p_3))))^{-1} = 0'2632$$

$$\pi_1 = \pi_0 p_0 = 0'9473 \cdot 0'2632 = 0'2493$$

$$\pi_2 = \pi_1 p_1 = 0'2493 \cdot 0'9473 = 0'2361$$

$$\pi_3 = \pi_2 p_2 = 0'2361 \cdot 0'9444 = 0'2230$$

$$\pi_4 = \pi_3 p_3 = 0'2230 \cdot 0'1175 = 0'0262$$

6)  $\sum_{j=0}^4 j \pi_j = 1'4953h$     ó d'acord amb l'estimació feta a l'apartat 2

$$\sum_{j=0}^4 (12+j) \pi_j = 1'9953h.$$

7)  $p_1 p_2 = 0'9473 \cdot 0'9444 = \underline{0'8946}$