Diplomatura d'Estadística. Curs 2009/10
Examen Final de Juliol

Cadenes de Markov i Temps de vida.
P1. [10 punts] Unes bateries elèctriques alimenten uns ordinadors portàtils que han de funcionar en condicions molt dures de temperatura, per lo qual presenten una determinada variabilitat en quant al nº d'hores que permeten de funcionament d'aquests ordinadors.
Per establir un model per al temps de funcionament dels ordinadors amb aquestes bateries elèctriques s'ha efectuat un experiment reproduint les condicions en les que es veuran sotmeses en la pràctica i de 1000 ordinadors inicials es mostren d'hora en hora els que varen continuar en funcionament:

	1	2h	3h	4h	5h
1000	900	800	700	100	0

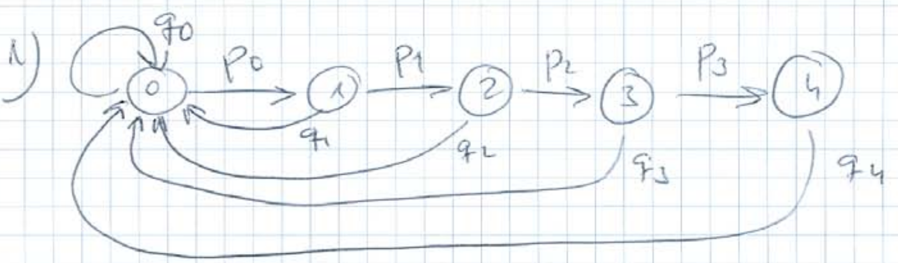
1 **[2p]** Establir una cadena de Markov corresponent al número d'hores que porta en funcionament un ordinador. Calcular la matriu de probabilitats de transició, dibuixar el diagrama corresponent, les classes de la cadena i la periodicitat dels seus estats.
2 **[1.5p]** Quina és la probabilitat de que un ordinador que opera amb una d'aquestes bateries funcioni 2 o més hores?
3 **[2p]** Un dia qualsevol calculeu les fraccions (%) d'ordinadors que estan en la seva primera hora de funcionament. Idem per als que estan entre la 1ª i 2ª. Id per als que estan entre la 2ª i 3ª etc.
4 **[1p]** Una empresa compra una gran quantitat d'aquests ordinadors i de bateries per a fer-los funcionar sense connexió a la xarxa elèctrica. En esgotar-se la bateria aquesta és reemplaçada de forma immediata. Calculeu el temps mig de funcionament continuat d'aquests ordinadors.
5 **[1.5p]** Per a les seves tasques un tècnic sempre porta 2 ordinadors, els quals fa treballar de forma redundant (d'aquesta forma pot allargar el temps que pot treballar de forma continuada). En avariar-se el primer ordinador treballa llavors només amb el segon. Quan s'esgota la bateria d'aquest últim llavors recarrega bateries noves als dos i els reinicia.. Es demana: probabilitat de que el tècnic pugui treballar 2 o més hores de forma continuada
6 **[2p]** Se sap que les bateries són defectuoses i que poden explotar durant la tercera hora de funcionament amb una probabilitat de 0.5, quedant inutilitzable l'ordinador. Sota aquesta situació, quin és el temps mig de vida d'un ordinador?

Teoria de Cues

P2. [10 punts] Un generador elèctric serveix per a suplir potència a un hospital en casos de talls de subministrament elèctric. El generador elèctric utilitza un component especial, el qual pot patir avaries, en promig cada hora (amb temps entre avaries distribuït exponencialment). Es disposa de un stock de tres components (incloent el que està en funcionament + 2 de reserva). En patir una avaria el component és reemplaçat en el generador immediatament per un altre de idèntiques característiques que està en reserva i l'avariat es porta a un taller de reparació el qual tarda en promig mitja hora en reparar-lo i reintegrar-lo a l'stock de components en reserva. El temps de reparació està distribuït exponencialment. En aquestes condicions es demana:

1. **[2 p]** Diagrama d'estats i taxes per al número de components en el taller de reparació. Hi ha estat estacionari? Hi ha potser cap model de cues al que s'adapti el diagrama anterior?
2. **[2 p]** Quina és la probabilitat de es produeixi l'avaria del component que està en el generador i que no hi hagi cap altre en stock per reemplaçar-lo immediatament? (en altres paraules, quina és la probabilitat de quedar-se a fosques?)
3. **[2 p]** Quan l'hospital es queda a fosques per no haver-hi cap component de recanvi en l'stock, quina és la probabilitat de que sobrepassi 1 hora aquest període?
4. **[2 p]** Quin és el número mig de reparacions que es fan al taller per unitat de temps?
5. **[2 p]** Quin és el número mig de peces que hi ha al taller? Quin és el temps mig d'espera de les peces dins del taller?

1)



$p_0 = \frac{900}{1000}$, $p_1 = \frac{800}{900}$, $p_2 = \frac{700}{800}$, $p_3 = \frac{100}{700}$, $p_4 = 0$

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 1/10 & 9/10 & 0 & 0 & 0 \\ 1/9 & 0 & 8/9 & 0 & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 & 7/8 & 0 \\ 6/7 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Temps mig:

$f_0 = \frac{M_0 - M_1}{M_0} = \frac{100}{1000} = 0'1$, $f_1 = \frac{100}{1000} = 0'1$, $f_2 = \frac{100}{1000} = 0'1$

$f_3 = 0'6$ $\quad f_4 = 0'1$

Temps mig $\simeq \frac{1}{2}\, 0'1 + \frac{3}{2}\, 0'1 + \frac{5}{2}\, 0'1 + \frac{7}{2} \cdot 0'6 + \frac{9}{2}\, 0'1 =$

$= 3$ hores

2) $P(Z \geq 2) = 1 - F_Z(2) = R_Z(2) \simeq \frac{M_2}{M_0} = \frac{800}{1000} = 0'8$

3) $\pi_0 = \left(1 + p_0(1 + p_1(1 + p_2(1 + p_3)))\right)^{-1} =$

$= (1 + 0'9(1 + 8/9(1 + 7/8(1 + 1/7))))^{-1} = \frac{1}{3'5} = 0'2857$

$\pi_1 = p_0 \pi_0 = 9/10 \cdot \frac{1}{3'5} = \frac{9}{35}$

$\pi_2 = p_1 \pi_1 = 8/9 \cdot 9/35 = 8/35$

$\pi_3 = p_2 \pi_2 = 7/8 \cdot 8/35 = 7/35$

$\pi_4 = \pi_3 p_3 = 7/35 \cdot 1/7 = 1/35$

5) τ = temps de treball continuat de l'operari

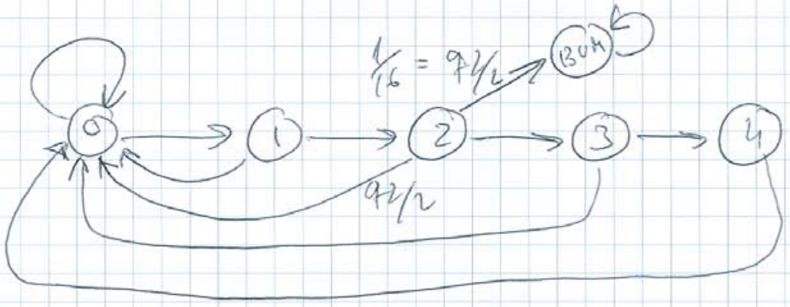
$$P(\tau \le t) = F_\tau(t) = P(T \le t)^2$$

T = temps de treball continuat d'un ordinador

$$R_\tau(t) = 1 - F_\tau(t) = 1 - P(T \le t)^2 =$$

$$= 1 - 0'2^2 = 0'96$$

6)



Temps mig de vida $\mu_{0,BUM}$

$$P' = \begin{array}{c} BUM \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 9/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 8/9 & 0 & 0 \\ 1/16 & 1/16 & 0 & 0 & 7/8 & 0 \\ 0 & 6/7 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu_{BUM} = [1] + P_{BUM}\,\mu_{BUM} \rightarrow \mu_{BUM} = (I - P_{BUM})^{-1}[1]$$

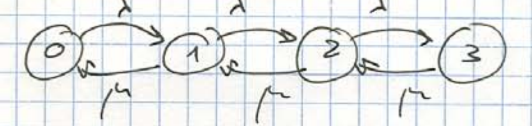
$$\mu_{BUM} = \begin{bmatrix} 9/10 & -9/10 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 1 & -8/9 & 0 & 0 \\ -1/16 & 0 & 1 & -7/8 & 0 \\ -6/7 & 0 & 0 & 1 & -1/7 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mu_{0,BUM} \\ \mu_{1,BUM} \\ \mu_{2,BUM} \\ \mu_{3,BUM} \\ \mu_{4,BUM} \end{bmatrix}$$

$$\mu_{0,BUM} = \frac{35}{8} = 4'375$$

$\lambda = 1h^{-1}$

$\mu = 2h^{-1}$

1)



Sempre hi haurà e.e. ja que el diagrama és finit. Formalment és idèntic al M/M/1/3

2) $\sum_{n=0}^{3} C_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1-\frac{1}{2}} =$

$= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right) = \frac{2(2^4-1)}{2^4} = \frac{2^4-1}{2^3}$

$P_0 = \left(\sum C_n\right)^{-1} = \frac{2^3}{2^4-1} = 0'5\hat{3}$

P_3 = probabilitat de que tots tres components estiguin al taller.

$P_3 = P_0 \cdot C_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{2^3}{2^4-1} = \frac{1}{2^4-1} = 6'\hat{6} \cdot 10^{-2}$

3) El temps de servei és exponencialment distribuït

$P(x \geq 1h) = e^{-2\cdot 1} = 0'1353$

4) $\bar{\lambda} = \lambda(1-P_3) = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^4-1}\right) = \frac{2^4-2}{2^4-1} = 2\left(\frac{2^3-1}{2^4-1}\right)$

$= 0'9\hat{3}\ h^{-1}$

5) $L = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 = P_0(C_1 + 2C_2 + 3C_3) =$

$= \frac{2^3}{2^4-1}\left(\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = \frac{11}{15}$ peces

$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{11/15}{0'9\hat{3}} = 0'7857\ h$ (≈ 47 min)