2. Estimación puntual: propiedades básicas

1. Consideremos una muestra aleatoria simple de tamaño 3 de una variable aleatoria X con momentos de primer y segundo orden finitos. Consideremos a los estimadores siguientes de $\mu = E(X)$

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3 \\ U_2 &= \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}X_3 \\ U_3 &= \frac{1}{8}X_1 + \frac{3}{8}X_2 + \frac{1}{2}X_3 \end{aligned}$$

   Estudie su sesgo y su varianza y compárelos.

2. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como una cierta variable aleatoria a valores reales X y con esperanza y varianza finitas. Demuestre que cualquier combinación lineal $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ que satisfaga $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ es un estimador insesgado de $\mu = E(X)$. Determine, dentro de dicha clase de estimadores, el de mínima varianza.

3. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como una cierta variable aleatoria a valores reales X con esperanza y varianza finitas. Demuestre que S_n^2 es un estimador sesgado de $\sigma^2 = \mathrm{var}(X)$, mientras que

$$\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \qquad \text{donde} \qquad \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

   es un estimador insesgado de σ^2.

4. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como una cierta variable aleatoria a valores reales X con esperanza y varianza finitas. Para estimar la media poblacional se considera el estimador $a\bar{X}_n$, donde $\bar{X}_n$ es la media muestral. Halle el error cuadrático medio de dicho estimador en función de a, de $E(X)$ y $\mathrm{var}(X)$. Determine el valor de a que minimiza el error cuadrático medio de la estimación. ¿Define este valor de a un estimador? Discutir el resultado.

5. Demuestre que la media correspondiente a dos observaciones cualquiera de una muestra aleatoria simple de tamaño n ($n > 2$), de una variable X con varianza finita y estrictamente positiva, es un estimador insesgado de la media poblacional, pero no es un estimador consistente.

6. Caracterice a los estimadores insesgados del parámetro p de una distribución geométrica (Pascal) basados en una muestra de tamaño $n = 1$. El único estimador obtenido ¿es razonable? Razone la respuesta.

7. Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson $P(\lambda)$

a) Compruebe que $\bar{X}_n$ y $\hat{S}_n^2$ (varianza muestral corregida) son dos estimadores insesgados de λ.

b) ¿cuál es mejor, atendiendo a su error cuadrático medio?

8. Sean $X_1,\dots,X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como una cierta variable aleatoria a valores reales X con momentos de orden k finitos, $\mu_k = E(X^k)$. Demuestre que

$$\overline{X^k}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

es un estimador sin sesgo de μ_k.

9. Sean $X_1,\dots,X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como una cierta variable aleatoria a valores reales X con distribución exponencial de parámetro λ, siendo su función de densidad de probabilidad igual a

$$f(x;\alpha) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \qquad \lambda > 0$$

a) Demuestre que $\bar{X}_n$ es un estimador insesgado de λ.

b) Demuestre que $Z_n = n \min\{X_1,\dots,X_n\}$ también es un estimador insesgado de λ.

c) ¿Cuál de estos dos estimadores es preferible?

10. Sean $X_1,\dots,X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como una cierta variable aleatoria a valores reales X con distribución exponencial de parámetro α, siendo función de densidad de probabilidad igual a

$$f(x;\alpha) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \qquad \alpha > 0$$

a) Demuestre que $U = 1/\bar{X}_n$ es un estimador consistente de α.

b) Determine el sesgo de U. Halle un estimador W insesgado de α.

c) Determine la varianza y el error cuadrático medio de ambos estimadores.

d) Respecto la pérdida cuadrática, ¿cuál de ellos es preferible?

11. Consideremos una variable aleatoria X con distribución $N(\mu,\sigma)$ y dos estimadores de la media poblacional μ, basados en muestras de tamaño n,

$$\hat{\mu} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n-1}, \qquad \tilde{\mu} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n+1}$$

¿Cuál es el mejor, atendiendo al error cuadrático medio, de ambos estimadores?

12. Sea X una variable aleatoria con distribución normal $N(\mu,\sigma)$ con σ conocida.

a) Determine la información de Fisher correspondiente a una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 1$.

b) Determine la información de Fisher correspondiente a una muestra aleatoria simple de tamaño n.

c) Calcule la cota de Cramér-Rao para estimadores insesgados de μ y muestras aleatorias simples de tamaño n.

13. Compruebe que la frecuencia relativa de un suceso, obtenida a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño n de una variable aleatoria con distribución de Bernouilli, $Be(p)$, es un estimador insesgado del parámetro p. Calcule su error cuadrático medio. ¿Es un estimador consistente? ¿Es un estimador eficiente?

14. Para muestras aleatorias simples de tamaño n correspondientes a una variable con distribución de Poisson de parámetro λ, compruebe que la media muestral es un estimador insesgado y de varianza mínima.

15. Consideremos muestras aleatorias simples de tamaño n correspondientes a una variable aleatoria con distribución Gamma, con función de densidad

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

siendo $\alpha > 0$ conocida. Proponga un estimador insesgado de β basado en la media muestral y estudie su eficiencia.

16. Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro λ. Para estimar λ^2 se considera el estimador

$$T = \bar{X}_n(\bar{X}_n - \frac{1}{n})$$

Estudie su sesgo y varianza. ¿Se trata de un estimador eficiente?

17. Si X sigue una distribución de Poisson parámetro λ, y $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria simple de tamaño n correspondiente a X, demuestre, a partir de la definición de suficiencia, que el estadístico $S = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estadístico suficiente.

18. Halle estadísticos suficientes basados en una muestra aleatoria simple de tamaño n de la misma dimensión, siempre que sea posible, que el parámetro que se trata de estimar, en los casos siguientes:

    a) X sigue una distribución exponencial, $Exp(\alpha)$.

    b) X sigue una distribución Gamma, $G(\beta,\alpha)$.

    c) X sigue una distribución uniforme $\mathcal{U}(\alpha,\beta)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha < \beta$.

    d) X sigue una distribución de Bernouilli, $Be(p)$.

    e) X sigue una distribución de Geométrica (Pascal), $Geom(p)$.

    f) X sigue una distribución Normal, $N(\mu,\sigma)$.

19. Considerando las distribuciones del problema anterior, indicar que casos corresponden a modelos dentro de la familia exponencial.

20. Si X sigue una distribución de Poisson parámetro λ, y $X_1,\dots,X_n$ es una muestra aleatoria simple de tamaño n correspondiente a X, justifique que el estadístico $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico completo correspondiente a dicho modelo.

21. Si X sigue una distribución exponencial de parámetro α, y $X_1,\dots,X_n$ es una muestra aleatoria simple de tamaño n correspondiente a X, justifique que el estadístico $\sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico completo correspondiente a dicho modelo.

22. Si X sigue una distribución uniforme de parámetro β, con $\beta>0$, y $X_1,\dots,X_n$ es una muestra aleatoria simple de tamaño n correspondiente a X, justifique que el estadístico $\max\{X_1,\dots,X_n\}$ es un estadístico completo correspondiente a dicho modelo.

23. Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro λ. Hallar el estimador insesgado y uniformemente de mínima varianza UMVU (Uniformly Minimum Variance Unbiased) para estimar la probabilidad $P(X=0)=e^{-\lambda}$ sabiendo que $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico suficiente y completo. ¿Dicho estimador, es un estadístico eficiente?

24. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro α. Hallar el estimador insesgado y uniformemente de mínima varianza UMVU (Uniformly Minimum Variance Unbiased) para estimar la probabilidad $P(X\leq a)=1-e^{-\alpha a}$, donde $a>0$ es una cantidad conocida, sabiendo que $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico suficiente y completo. ¿Dicho estimador, es un estadístico eficiente?

25. Si X sigue una distribución Normal, $N(\mu,\sigma)$ hallar el estimador $UMVU$ basado en una muestra aleatoria simple de tamaño n, del parámetro (bidimensional) $\theta=(\mu,\sigma^2)$.

26. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme $\mathcal{U}(0,\beta)$ donde $\beta>0$ es un parámetro desconocido. Sea $X_1,\dots,X_n$ variables aleatorias correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n de dicha variable (independientes idénticamente distribuidas como X). Consideremos los estimadores $U_1=\max\{X_1,\dots,X_n\}$ y $U_2=2\bar{X}_n$. Halle el sesgo, la varianza y el error cuadrático medio de ambos. A continuación, corrija el sesgo del primero obteniendo un nuevo estimador U_3. Halle también su varianza y error cuadrático medio. Demuestre que es el estimador UMVU de β.

27. Si X sigue una distribución Normal, $N(\mu,\sigma)$ y $X_1,\dots,X_n$ son variables aleatorias correspondientes a una muestra aleatoria simple de tamaño n de dicha variable (independientes idénticamente distribuidas como X)

    a) Si suponemos que σ es conocida, demuestre que $\bar{X}_n$ es un estimador eficiente de μ. Calcule la cota de Cramér-Rao correspondiente.

    b) Si suponemos que μ es conocida, demuestre que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ es un estimador eficiente de σ^2. ¿Cuál es su distribución? Calcule la cota de Cramér-Rao correspondiente.

28. Halle la cota de Cramér-Rao para estimadores insesgados correspondiente a los siguientes modelos estadísticos y para muestras de tamaño n:

    a) X sigue una distribución exponencial, $Exp(\alpha)$.

    b) X sigue una distribución de Bernouilli, $Be(p)$.

    c) X sigue una distribución de Poisson, $P(\lambda)$.

    d) X sigue una distribución de Geométrica (Pascal), $Geom(p)$.

29. Consideremos una muestra aleatoria simple de tamaño n de una variable aleatoria X absolutamente continua con densidad de probabilidad:

$$f(x;\theta) = e^{x-\theta}\mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x) \qquad \theta > 0$$

    a) Sea $T = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\}$. ¿Es un estimador centrado (sesgado) de θ? En caso afirmativo halle a partir de T un estimador centrado (insesgado) de θ, al que llamaremos S. Halle también el error cuadrático medio (riesgo correspondiente a la media cuadrática) de ambos.

    b) Consideremos ahora al estimador $U = \bar{X}_n - 1$ ¿tiene sesgo? ¿es mejor estimador que S?

    c) ¿Podemos hallar de forma habitual la cota de Cramér-Rao en este caso? Razone la respuesta.

Algunas indicaciones y soluciones de los ejercicios propuestos

1. Tanto U_1 como U_2 y U_3 son insesgados. Por otra parte $\text{var}(U_1) = \frac{1}{3}\text{var}(x) = 0,33333\ \text{var}(x)$, $\text{var}(U_2) = \frac{3}{8}\text{var}(x) = 0,37500\ \text{var}(x)$ y $\text{var}(U_3) = \frac{13}{32}\text{var}(x) = 0,40625\,\text{var}(x)$. El más eficiente de éstos es U_1.

2. Si llamamos $U = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ al estimador, la condición $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ garantiza que el estimador obtenido sea insesgado para μ. Hay que minimizar $\text{var}(U) = (\sum_{i=1}^n a_i^2)\ \text{var}(X)$. Podemos plantear el problema como un problema de máximos y mínimos condicionados, y resolverlo mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange: la función a minimizar es $f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i^2$ con la ligadura $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Este es el camino más rutinario y algo largo. Un camino más corto, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$1 = \sum_{i=1}^n 1 \cdot a_i \ \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1}\ \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} = \sqrt{n}\ \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

   y por tanto

$$\frac{1}{n}\ \text{var}(X) \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \text{var}(X) = \text{var}(U)$$

   alcanzando la igualdad cuando $a_1 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}$.

3. Hallar la esperanza de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - (\overline{X}_n)^2$, teniendo en cuenta que

$$(\overline{X}_n)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i \neq j = 1}^n X_i X_j$$

   y que al ser X_i independiente de X_j, cuando $i \neq j$, implica que $E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j)$.

4. Exprésese el error cuadrático medio como suma de la varianza del estimador más su sesgo al cuadrado, teniendo en cuenta que $\text{var}(\overline{X}_n) = \text{var}(X)/n$ y $E(\overline{X}_n = E(X)$. Obsérvese que el valor de a depende de los parámetros desconocidos $E(X)$ y $\text{var}(X)$.

5. Obsérvese que el estimador es $(X_i + X_j)/2$ y su distribución no depende de ni i ni de j, y posee esperanza y varianza finitas, siendo ésta última estrictamente positiva. Si fuese consistente implicaría que $(X_i + X_j)/2 - E(X) = 0$ con probabilidad 1, y por tanto su varianza sería 0, resultando contradictorio, puesto que suponemos que $\text{var}(X) > 0$.

6. Si $U(k)$ es un estimador insesgado de p satisface

$$E_p(U) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(1-p)^k p = p \qquad \forall p \in [0,1]$$

de ahí se deduce que

$$U(k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

pero este estimador es claramente absurdo.

7. En este problema es fácil comprobar que tanto $\overline{X}_n$ como $\hat{S}_n^2$ son insesgados y que la varianza del primero alcanza la cota de Cramér-Rao; luego la varianza del segundo será mayor o igual que la del primero. La demostración de que la varianza de $\hat{S}_n^2$ es estrictamente mayor que la de $\overline{X}_n$ puede hacerse o bien por el cálculo directo de la varianza de $\hat{S}_n^2$, que supone bastantes cálculos y, en particular, la evaluación de los momentos de una Poisson hasta el de orden cuatro. También puede hacerse a partir basándonos en que $\overline{X}_n$ es un estadístico suficiente y completo y aplicando el Teorema de Lehmann-Scheffé.

8. Es consecuencia inmediata de linealidad de la esperanza.

9. Para el apartado *a)* resulta de interés

$$E_\lambda(X^m) = \int_0^\infty x^m \, \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} dx = \lambda^m \Gamma(m+1) \quad \text{para} \quad m > 0$$

Para el apartado *b)*, obsérvese que la distribución de Z_n es

$$F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z) = 1 - P(Z_n > z) = 1 - P(\text{mín}\{X_1, \ldots, n\} > \frac{z}{n}) = 1 - P(X > \frac{z}{n})^n$$

para $z > 0$ es igual a:

$$F_{Z_n}(z) = 1 - \left(\int_{z/n}^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} dx \right)^n = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}z}$$

y $F_{Z_n}(z) = 0$ en caso contrario. Por tanto Z_n sigue una distribución exponencial de parámetro λ.
Para el apartado *c)*, obsérvese que la varianza de $\overline{X}_n$ es igual a λ^2/n, mientras que la varianza de Z_n es λ^2, concluyendo que $\overline{X}_n$ es preferible.

10. Para el apartado *a)* basta considerar que $\overline{X}_n$ es un estimador consistente de $1/\alpha$, y definiendo $g(z) = 1/z$ ésta es una función continua (excepto en $x = 0$, valor que se toma con probabilidad cero) por tanto $g(\overline{X}_n)$ es un estimador consistente de $g(1/\alpha) = \alpha$.
Para el apartado *b)*, puede comprobarde que $E_\alpha(U) = n/(n-1)$ (para $n > 1$). Por tanto $W = (n-1)U/n$ es un estimador insesgado para α.
Para los apartados *c)* y *d)*, téngase en cuenta que

$$E_\alpha(X^m) = \int_0^\infty x^m \, \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{\Gamma(m+1)}{\alpha^m} \quad \text{para} \quad m > 0$$

y que el error cuadrático medio (riesgo cuadrático) de un estimador U es igual a $R_\alpha(U) = \text{var}_\alpha(U) + B_\alpha(U)^2$.

11. Tenga en cuenta que el error cuadrático medio es igual a la varianza más el sesgo al cuadrado. Calcúlense éstas cantidades para ambos estimadores y compare: el error cuadrático medio del segundo estimador es inferior al error cuadrático medio del primero.

12. En este ejercicio, puede ser pertinente recordar que los momentos impares de una variable aleatoria Z con distribución normal estandarizada son cero y que

$$E(Z^{2k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^{2k} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} z^{2k} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma(k + \frac{1}{2})$$

esta última igualdad obtenida mediante el cambio de variable $t = \frac{1}{2} z^2$.

13. Por cálculo directo puede comprobarse que es un estimador insesgado y su varianza coincide con la cota de Cramér-Rao, por tanto se trata de un estimador eficiente. Todo estimador eficiente es consistente, como puede comprobarse a través de la desigualdad de Chebyshev y un paso al límite.

14. Puede obtenerse por cálculo directo o bien comprobando que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(X_i, \lambda)}{\partial \lambda} = K(\lambda, n)(\overline{X}_n - \lambda)$$

donde $K(\lambda, n)$ es una expresión que no depende de $X_1, \ldots, X_n$.

15. Calcule la esperanza de X y justifique que $\overline{X}_n$ es un estimador consistente esta. Obtenga un estimador consistente de β, y, teniendo en cuenta que la suma de variables aleatorias independientes, con los mismos parámetros, sigue una distribución Gamma, obtenga la esperanza de dicho estimador. Finalmente corrija su sesgo, multiplicando el estimador por un factor adecuado.

16. Nótese que $\overline{X}_n = \frac{S}{n}$, donde S_n sigue una distribución de Poisson de parámetro $n\lambda$. A partir de aquí, la esperanza de T se deduce de los dos primeros momentos de una Poisson. La varianza, de los cuatro primeros momentos de una Poisson. Para comprobar que no es un estimador eficiente, basta calcular la información de Fisher correspondiente al parámetro λ^2 y comparar.

17. Puede comprobarse directamente la suficiencia de S a partir de la definición o bien aplicando el Teorema de factorización de Neyman-Fisher.

18. Trate de escribir de la forma más compacta posible y posteriormente aplicar el Teorema de factorización de Neyman-Fisher.

19. Todos los ejemplos son de la familia exponencial exceptuando la uniforma entre dos valores α y β.

20. Aplique la definición de completitud y recurra al hecho de que una serie de potencias idénticamente nula solo ocurre si todos los coeficientes de la serie son nulos. Tambien puede identificar a la familia de distribuciones de Poisson como un caso particular de la familia exponencial y aplicar la teoria general de esta.

21. Aplique la definición de completitud y recurra al hecho de que una transformada de Laplace (una especie de "media ponderada") es nula cuando la función a la aplicamos la transformada es (casi seguramente) nula (considere que notas tiene un alumno en diversos exámenes si cualqier media poderada de estos es nula). Tambien puede identificar a la familia de distribuciones de tipo *Exponencial* como un caso particular de la familia exponencial (en sentido amplio) y aplicar la teoria general de esta.

22. Aplique la definición de completitud y recurra al hecho de que una función integrable en un intervalo con primitiva identicamente nula ha de ser la función (casi seguramente) constante igual a cero.

23. Teniendo en cuenta que $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico suficiente y completo para el modelo, hallar un estimador insesgado del parámetro y aplicar a este los Teoremas de Rao-Blackwell y Lemhan-Scheffé.

24. Teniendo en cuenta que $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico suficiente y completo para el modelo, hallar un estimador insesgado del parámetro y aplicar a este los Teoremas de Rao-Blackwell y Lemhan-Scheffé.

25. Puede identificar a la familia Normal univariante como un caso particular de la familia exponencial y aplicar la teoria general de esta y determinar un estadíadistico suficiente bidimensional. Concluya que $(\overline{X}_n, S_n^2)$ es un estadístico suficiente. Halle su sesgo y corregirlo. Finalmente por Lehman-Scheffé determine el estimador UMVU.

26. Muestre que $X_{(n)}$ es un estadístico suficiente y completo para β. Halle su sesgo y corríjalo. Aplique Lehman-Scheffé,

27. Muéstrese, en cada caso, que la familia paramétriDeterminese por el Teorema de factorización de Neyman-Fisher, estadísticos suficientes.

28. Ambos casos pueden resolverse a través del Teorema de caracterización de la eficiencia, observando si

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log f(X_i, \theta)}{\partial \theta} = K(\theta, n)(U(X_1, \ldots, X_n) - \theta)$$

con $\theta = \mu$ o $\theta = \sigma^2$ respectivamente u U un estimador convenientemente.

29. Puede aplicar el mismo método que el apartado anterior, o ver cada una de estas familias como un modelo exponencial y aplicar la teoria general, o bien proponer un estimador razonable, calcular su varianza y ver que coincide con la cota de Cramér-Rao.

30. Calcule la distribución de T, así como sus primeros momentos. Obsétvese que el soporte de la densidad (la adherencia del conjunto donde la densidad es positiva) depende del parámetro θ,