Análisis de series temporales

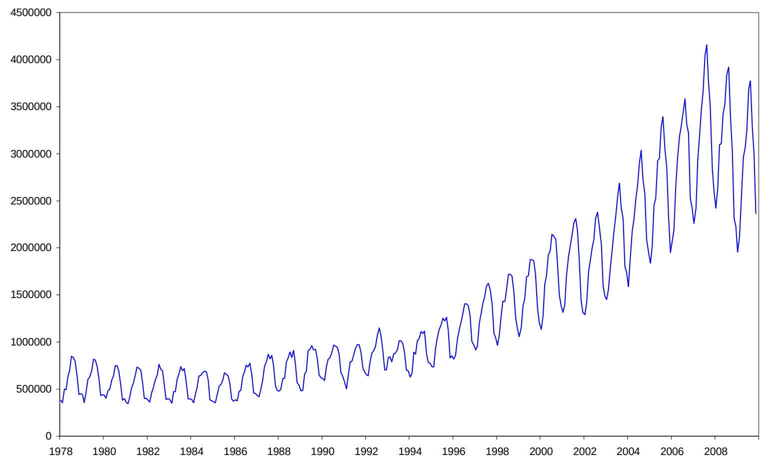
4. Análisis estocástico de series temporales

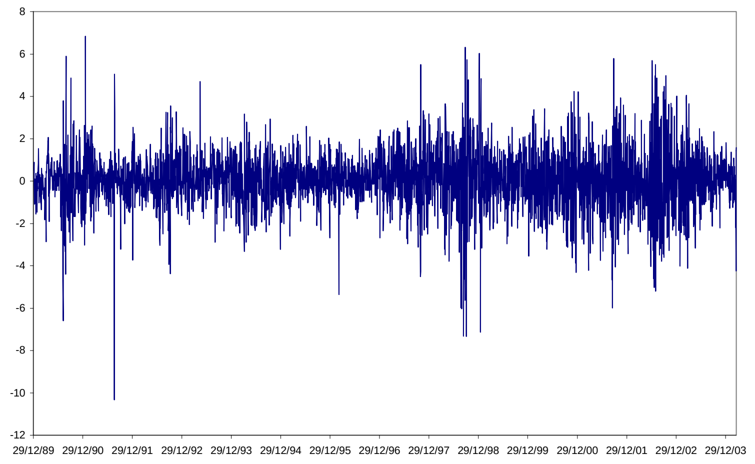
Autor: Dr. Ernest Pons Fanals

Grado en Estadística

Motivación

Ejemplos





Número de pasajeros en líneas aéreas

Rendimientos del IBEX35

Queremos aprovechar las herramientas estadísticas para:

a)Predecir valores futuros.
b)Con un mejor conocimiento de las propiedades de la predicción (varianza error, intervalos de confianza, etc..).
c)Seleccionar la mejor predicción.
d)Disponer de herramientas para ir mejorando la predicción.

Tema 4. Análisis estocástico de series temporales

Tres “niveles” de aplicación:

❑ Modelos univariantes

Se estudia una sola variable usando su evolución histórica como información para predecir su evolución futura.

❑ Modelos de función de transferencia

Se estudia la relación entre una variable output y un conjunto de variables explicativas (inputs). Se permite que sean los datos los que decidan la dinámica del modelo, es decir, cómo afecta cada input al output y además, el error de estos modelos no tiene por qué cumplir las hipótesis tradicionales (media nula, varianza constante y ausencia de autocorrelación).

❑ Modelos multivariantes

Se estudian las relaciones dinámicas entre dos o más variables y estas relaciones no tienen por qué ir en una sola dirección. Por ejemplo, las ventas de una empresa pueden estar influidas por los gastos en publicidad, pero a su vez, las ventas pueden influir en esos gastos.

Tema 4. Análisis estocástico de series temporales

Características de este enfoque

❑ Se pretende encontrar un modelo escueto, sencillo (con pocos parámetros) que pueda reproducir la **inercia** (autocorrelación) observada en muchas series reales.

❑ Esta metodología funciona de un **modo iterativo** a la hora de construir modelos. Las etapas de este proceso son:

(a) Identificación del modelo.
(b) Estimación del modelo identificado.
(c) Diagnosis del modelo estimado.
(d) Utilización del modelo

4.1. Procesos estocásticos

Definición 1:

El operador retardo, B, es un operador tal que aplicado a una variable temporal la retarda, es decir, $By_t=y_{t-1}$.

Propiedades: En general, $B^k y_t=y_{t-k}$. Cuando se aplica a una constante, $B\delta=\delta$.

Definición 2:

El operador diferencia regular es un operador tal que aplicado a una variable temporal la transforma de la siguiente forma: $\nabla y_t = (1-B)y_t = y_t - y_{t-1}$

Propiedades: En general, $\nabla^k y_t = (1-B)^k y_t$

4.1. Procesos estocásticos

Definición 3:

El operador diferencia estacional es un operador tal que aplicado a una variable temporal la transforma de la siguiente forma: $\nabla_s y_t = (1-B^s)y_t = y_t - y_{t-s}$

Observaciones:

a) $\nabla^k y_t \neq y_t - y_{t-k}$

b) $\nabla_s y_t = \nabla y_t (1 + B + ... + B^{s-1})$

4.1. Procesos estocásticos

Definición 4:

Definimos un proceso estocástico como una sucesión infinita de variables aleatorias, cada una de ellas referida a un instante de tiempo y ordenadas cronológicamente:

$$\{y_t, t \in \mathbb{Z}\} = \{\dots y_1, y_2, y_3 \dots\}$$

Definición 5:

Definimos una serie temporal como una realización finita (de tamaño uno) de unl proceso estocástico:

$$\{y_t\}_{t=1}^{T} = \{y_1, y_2, y_3 \dots, y_T\}$$

Recordatorio sobre teoría de la probabilidad

- **Espacio muestral**: $\Omega = \{\omega\}$, el conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio
- **Resultado**: $\omega \in \Omega$, un elemento cualquiera del Espacio Muestral
- **Suceso**: $E \subset \Omega$, un subconjunto del Espacio Muestral
- **σ-Álgebra**: $F = \{E : E \subset \Omega\}$, colección de sucesss que deseamos estudiar
- **Variable aleatoria**: $Z : \Omega \to S$ una función del Espacio Muestral al conjunto de estados S
- **Conjunto de Estados**: S, es el espacio que contiene todos los posibles valore de una variable aleatoria. Las elecciones más comunes son los números naturales **N**, los reales **R**, vectores de dimensión k $\mathbf{R}^k$, los reales positivos $\mathbf{R}_+$, etc.
- **Probabilidad**: $P : F \to [0,1]$, función que cumple las tres reglas básicas estudiadas
- **Distribución**: $\mu : B \to [0,1]$, donde $B \subset \{A : A \subset R\}$ es un espacio de Borel (o espacio de mesura)

Recordatorio sobre teoría de la probabilidad

- **El vector de variables aleatorias**: **Z**= (Z_1, Z_2 , ..., Z_k) es un vector de dimensión ***k*** donde cada componente es una variable aleatoria
- **La sucesión de variables aleatorias**: **Z**= (Z_1, Z_2 , ..., Z_n) es una sucesión de ***n*** variables aleatorias

Si interpretamos **t=1, ..., T** como momentos en la línea temporal, Z_t puede interpretarse como el resultado de un experimento aleatorio que se repite en cada momento del tiempo **t.**

Un aspecto diferente, en relación a la situación en que sólo consideramos una variable aleatoria es que ahora podemos analizar la estructura de dependencias dentro del vector de variables aleatorias

- **Función de distribución** F_Z de Z: Es la colección de probabilidades:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z_1 \leq z_1,\ldots,Z_n \leq z_n) \\ &= P(\{\omega : Z_1(\omega) \leq z_1,\ldots,Z_n(\omega) \leq z_n\}) \end{aligned}$$

Recordatorio sobre teoría de la probabilidad

En definitiva, un **proceso estocástico** es una sucesión de variables aleatoria indiciadas según el “tiempo” y definidas en un espacio muestral Ω

Supongamos un proceso estocástico $\left\{ y_t , t \in T \right\} = \left\{ y_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega \right\}$

(1) Si fijamos “t” tenemos: $Z_t(\omega), \quad Z_t : \Omega \rightarrow R$ es una variable aleatòria.

(2) Si fijamos “ω” tenemos $y_\omega : T \rightarrow R$ es una realización o trayectoria del PE

A la sucesión de variables aleatorias la denominamos **proceso estocástico**

Una realización concreta del proceso estocástico es una **serie temporal**

4.2. Conceptos de estacionariedad y ergodicidad

Idea "intuitiva":

De la misma manera en que en la inferencia estadística es habitual basarnos en la hipótesis de que tenemos variables aleatorias **i.i.d.** (independientes e idénticamente distribuidas), en el análisis de series temporales vamos a basarnos en dos hipótesis que tienen una función "equivalente":

- **Estacionariedad** (sustituye a la hipótesis de distribución idéntica)
- **Ergodicidad** (sustituye a la hipótesis de independencia)

4.2. Conceptos de estacionariedad y ergodicidad

Definición 6:

Un proceso estocástico es de segundo orden si para cualquiera de las variables aleatorias se cumple

$$E\left(|y_t|^2\right) < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Esta propiedad garantiza que podemos caracterizar un serie temporal a través de los dos primeros momentos de la función de distribución del proceso estocástico, es decir, su vector de medias y matriz de varianzas y covarianzas:

$$\begin{bmatrix} E(y_1) & E(y_2) & \ldots & E(y_T) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} var(y_1) & cov(y_1 y_2) & \ldots & cov(y_1 y_T) \\ cov(y_2 y_1) & var(y_2) & \ldots & cov(y_2 y_T) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ cov(y_T y_1) & cov(y_T y_2) & \ldots & var(y_T) \end{bmatrix}$$

4.2. Conceptos de estacionariedad y ergodicidad

Definiciones 7-10:

Para un proceso estocástico de segundo orden podemos definir varias funciones:

• La función media:

$$\mu_t = E(y_t), \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

• La función varianza:

$$\sigma_t^2 = var(y_t), \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

• La función autocovarianza:

$$\gamma_{t,s} = E[(y_t - \mu_t)(y_s - \mu_s)], \qquad \forall t,s \in \mathbb{Z}$$

• La función autocorrelación:

$$\rho_{t,s} = \frac{E[(y_t - \mu_t)(y_s - \mu_s)]}{\sqrt{\sigma_t^2 \sigma_s^2}}, \qquad \forall t,s \in \mathbb{Z}$$

4.2. Conceptos de estacionariedad y ergodicidad

Definición 11:

Un proceso estocástico es estacionario en sentido estricto si al realizar un mismo desplazamiento en el tiempo de todas las variables aleatorias la distribución no varia, es decir

$$F(y_{t_1}, y_{t_2}, y_{t_3}, \ldots y_{t_s}) = F(y_{t_1+k}, y_{t_2+k}, y_{t_3+k}, \ldots y_{t_s+k})$$

para cualquier k, t_1, t_2,…t_s:

Definición 12:

Un proceso estocástico es estacionario en sentido débil si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\forall t, k: \quad E(y_t) = \mu$$

$$E[(y_t - E(y_t))^2] = \sigma^2$$

$$E[(y_t - E(y_t))(y_{t-k} - E(y_t))] = \gamma_k$$

4.2. Conceptos de estacionariedad y ergodicidad

Idea "intuitiva":

Nuestros supuestos habituales en el análisis aplicado de series temporales serán los siguientes:

- **Estacionariedad** (débil): La media y la varianza de las variables aleatorias son constantes y las autocovarianzas entre dos variables aleatorias solo dependen de la distancia temporal que las separa
- **Ergodicidad.** Hipótesis "técnica" para poder realizar estimaciones.
- **Normalidad**: El proceso estocástico generador de los datos tienen una función de distribución normal.
- **Linealidad**: El valor de cada variable aleatoria depende de forma lineal de los valores del resto de variables aleatorias del proceso estocástico (o de otros procesos estocásticos).

4.2. Conceptos de estacionariedad y ergodicidad

Para realizar inferencia necesitaremos un supuesto adicional que no analizaremos en detalle:

Ergodicidad (condiciones suficientes)

Un proceso estocástico estacionario en sentido débil es ergódico respecto de la media cuando se cumple la siguiente propiedad:

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \mu$$

Un proceso estocástico estacionario en sentido débil es ergódico respecto de la varianza cuando se cumple la siguiente propiedad:

$$\frac{1}{T-k}\sum_{t=1}^{T-k} (y_{t+k}-\mu)(y_t-\mu) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \gamma_k$$

4.3. Funciones de autocovarianza y autocorrelación

Definición 13:

Para un proceso estocástico estacionario en sentido débil se define la función de autocovarianza como:

$$\gamma_k = E[(y_t - \mu_t)(y_{t-k} - \mu_{t-k})], \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Propiedades:

1) $\gamma_0 \geq 0$

2) $\gamma_k = \gamma_{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

3) $|\gamma_k| \leq \gamma_0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

4) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \gamma_{(i-j)} \geq 0, \quad \forall (a_1, \ldots a_n)$

4.3. Funciones de autocovarianza y autocorrelación

Debemos observar que gracias a la hipótesis de estacionariedad débil el vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas de una serie temporal de T observaciones ahora depende sólo de T+1 parámetros:

$$E(Y) = \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \text{var}(Y) = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{T-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{T-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{T-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{T-1} & \gamma_{T-2} & \gamma_{T-3} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

4.3. Funciones de autocovarianza y autocorrelación

Definición 14:

Para un proceso estocástico estacionario en sentido débil se define la función de autocorrelación como:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Propiedades:

1) $\rho_0 = 1$

2) $\rho_k = \rho_{-k}, \quad \forall k \in Z$

3) $|\rho_k| \leq 1, \quad \forall k \in Z$

4) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \rho_{(i-j)} \geq 0, \quad \forall (a_1, \ldots a_n)$

4.3. Funciones de autocovarianza y autocorrelación

Debemos observar que gracias a la hipótesis de estacionariedad débil la matriz de correlaciones de una serie temporal de T observaciones ahora depende sólo de T-1 parámetros:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{T-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{T-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{T-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{T-1} & \rho_{T-2} & \rho_{T-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

4.3. Funciones de autocovarianza y autocorrelación

Definición 15:

Para un proceso estocástico estacionario en sentido débil se define la función de autocorrelación parcial como:

$$\alpha_k = corr(y_t, y_{t-k} | y_{t-1}, \ldots, y_{t-k+1}) \quad \forall k \in Z$$

Observación:

A partir de los coeficientes de la función de autocorrelación pueden calcularse los coeficientes de la función de autocorrelación parcial. Es suficiente con resolver el siguiente sistema de ecuaciones y tomar $\alpha_k = \alpha_{kk}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \ldots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \rho_{k-2} \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{k1} \\ \ldots \\ \ldots \\ \alpha_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \ldots \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

4.4. Funciones de autocov. y autocorr. muestrales

Observación:

Para todos los conceptos del apartado anterior, aplicados a procesos estocásticos, pueden definirse los conceptos "equivalentes" a nivel muestral para cualquier serie temporal. En temas posteriores analizaremos sus propiedades como estimadores.

Definición 16:

Para una serie temporal $Y_1, Y_2, \ldots, Y_T$ se define la función de autocovarianza muestral como:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^{T} (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})$$

4.4. Funciones de autocov. y autocorr. muestrales

Definición 17:

Para una serie temporal $Y_1, Y_2, \ldots, Y_T$ se define la función de autocorrelación muestral como:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} \quad \forall k \in Z$$

Definición 18:

Para una serie temporal $Y_1, Y_2, \ldots, Y_T$ se define la función de autocorrelación parcial muestral como la sucesión $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_k, \ldots$ donde $\hat{\alpha}_0 = 1$ y obtiene tomando $\hat{\alpha}_k = \hat{\alpha}_{kk}$ de la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \ldots & \hat{\rho}_{k-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \hat{\rho}_{k-2} \\ \hat{\rho}_{k-1} & \hat{\rho}_{k-2} & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{k1} \\ \ldots \\ \ldots \\ \hat{\alpha}_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \ldots \\ \hat{\rho}_k \end{bmatrix}$$

4.5. Ruido blanco y camino aleatorio

Definición 19:

Diremos que un proceso estocástico $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ es un ruido blanco (white noise) cuando:

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad \forall t \in Z$$

$$\mathrm{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \forall t \in Z$$

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = 0 \quad \forall s \neq t \in Z$$

Habitualmente usaremos la siguiente notación abreviada:

$$\varepsilon_t \sim WN \quad o \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Podemos comprobar que se trata de un proceso estocástico de segundo orden estacionario en sentido débil.

4.5. Ruido blanco y camino aleatorio

Definición 20:

Diremos que un proceso estocástico $\{y_t, t \in Z\}$ es un camino aleatorio (random walk) cuando

$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$$

es ruido blanco.

En este caso podemos comprobar como $\{y_t, t \in Z\}$ no es estacionario en sentido débil.