UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH Departament d'Estadística i Investigació Operativa	**TERCER CONTROL DE TEORIA** Programació Lineal i Entera, curs 2012-13 2on curs Grau en Estadística UB-UPC
NOM ALUMNE:	

	Temps estimat	Punts	Correcció	Material d'ajut.
Test	15min	2.0 pt		Cap.
Exercici 1a	15min	3.0 pt		Amb transparències de teoria i calculadora.
Exercici 1a	60min	5.0 pt		
Total	90min	10 pt		

TEST (2 punts / 15min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a)**, **b)** i **c)** si és certa (**Sì**) o falsa (**No**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. Considereu el problema (PE1) de minimització i les relaxacions lineal (RL1) i (RL2) de les dues primeres iteracions de l'algorisme de plans secant de Gomory:

a) **Sí / No** $K_{PE1} \subseteq K_{RL2} \subseteq K_{RL1}$. – SI

b) **Sí / No** $z_{RL1} \geq z_{RL2} \geq z_{PE}$. – NO

c) **Sí / No** $x^*_{RL1} \in K_{RL2}$. – NO

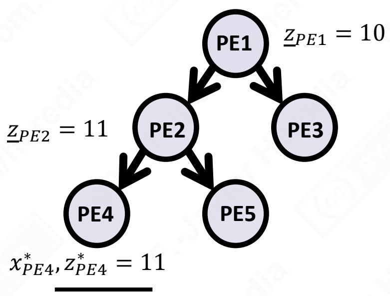
TEST 2. La formulació ideal (PEI) d'un problema de programació lineal entera (PE):

a) **Sí / No** És la formulació vàlida de (PE) que s'obté en finalitzar l'algorisme de plans de tall de Gomory. – NO

b) **Sí / No** Té la mateixa solució òptima que (PE). – SÍ

c) **Sí / No** Tots els punts extrems KRLI pertanyen a KPE. – SÍ

TEST 3. El següent arbre d'exploració del B&B d'un problema (PE1) de minimització mostra la situació després de realitzar tres iteracions i trobar l'òptim del subproblema (PE4):



a) **Sí / No** x^*_{PE4} és la solució de (PE1). – NO.

b) **Sí / No** Cal resoldre (RL5) per trobar la solució òptima de (PE1). – NO

c) **Sí / No** L'òptim de (PE1) es pot trobar a K_{PE3}. – SÍ

TEST 4. Si $x_{RL1} = [x_1, x_2]' = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$ i $V = \begin{bmatrix} 5/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ el tall de Gomory associat a x_1:

a) **Sí / No** És $x_1 \leq 0$. - NO

b) **Sí / No** És $x_1 - x_3 \leq 1$. - NO

c) **Sí / No** És $x_1 + x_3 - x_4 \leq 1$. – SÍ

TEST 5. Quan apliquem un algorisme de Branch&Cut a un problema de (PE):

a) **Sí / No** Farà, en general, menys iteracions del símplex que un alg. de Brach&Bound. – SÍ

b) **Sí / No** Generarà, en general, menys nodes que un alg. de Brach&Bound. – SÍ

c) **Sí / No** Les fites a z^*_{PEi} són, en general, millors que les que s'obtenen amb el Branch and Bound. – SÍ.

cc BY NC ND

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/ or send a letter to Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

EXERCICI 1. (Amb transparències de teoria i calculadora)

Considereu el següent problema de programació lineal entera (PE1):

$$(\text{PE1})\begin{cases} \min & x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \geq 1 \\ & 2x_1 & +x_2 & \geq 1 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, \text{ enteres} \end{cases}$$

a) **(3 punts / 15min)** Trobeu la solució òptima de (PE1) amb l'algorisme de ramificació i poda (branch&bound). Indiqueu detalladament les passes de cada iteració. Resoleu les relaxacions lineals gràficament i representeu l'arbre d'exploració.

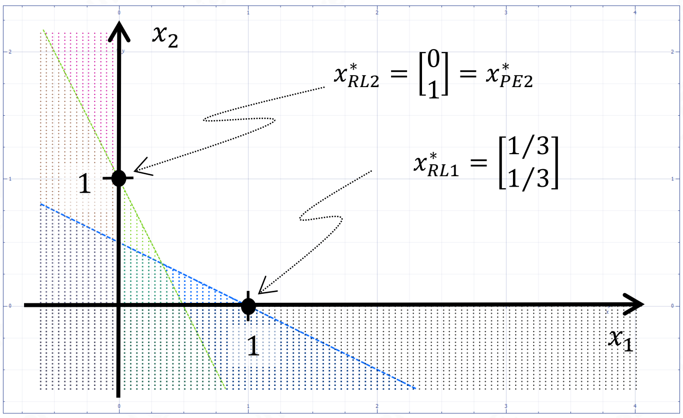
b) **(5 punts / 60min)** Trobeu la solució òptima de (PE1) amb l'algorisme de plans secants de Gomory aplicat d'acord amb les següents indicacions:

- Trobeu la solució de (RL1) gràficament.
- Resoleu les relaxacions lineals per reoptimització amb l'algorisme del símplex dual.
- Trieu com a variable de generació del tall x_1 abans que x_2.

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

a) Representació gràfica:

$$(PE1)\begin{cases} \min & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \geq 1 & (r1) \\ & 2x_1 & +x_2 & \geq 1 & (r2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, \text{ enteres} & \end{cases}$$



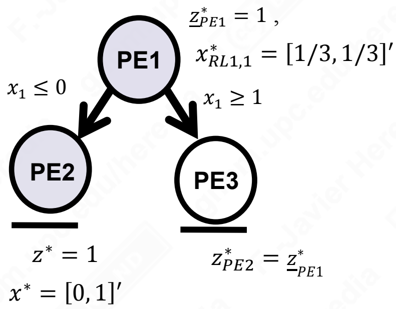
Inicialització: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$
Iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Relaxació**: $x^*_{RL1} = [1/3 \quad 1/3]', z^*_{RL1} = 2/3 \Rightarrow \underline{z}_{PE1} = \lceil z^*_{RL1} \rceil = 1$
- **Eliminació:** no es pot.
- **Separació:** $x_1^* = 1/3 \rightarrow \begin{cases}(PE2) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + x_1 \leq \lfloor 1/3 \rfloor = 0 \\ (PE3) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + x_1 \geq \lceil 1/3 \rceil = 1\end{cases} \rightarrow L \leftarrow \{(PE2), (PE3)\}$

Iteració 2: $L \leftarrow \{(PE2), (PE3)\}, \underline{z}_{PE1} = 1, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE2)$.
- **Relaxació**: $x^*_{RL2} = [0 \quad 1]', z^*_{RL1} = 1$
- **Eliminació:** $x^*_{RL2} = [0 \quad 1]' = x^*_{PE2} \Rightarrow$ s'elimina $(PE2)$:
  - $z^* \leftarrow z^*_{PE2} = 1, x^* \leftarrow x^*_{PE2}, L \leftarrow L \backslash \{(PE2)\} = \{(PE3)\}$
  - $z^* = \underline{z}_{PE1} \Rightarrow$ eliminem $(PE3)$: $L \leftarrow L\, \{(PE3)\} = \emptyset$

Iteració 3: $L = \emptyset \Rightarrow x^*_{PE1} = x^* = [0 \quad 1]', z^*_{PE1} = z^* = 1.$



b) Gomory:

1a iteració Gomory:

BY-NC-ND

- Solució òptima de la relaxació lineal de (PE1), trobada gràficament: $x_{RL1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$
- x_{RL1} no entera $\Rightarrow$ tall de Gomory: es selecciona $x_1 = 1/3$

$$\mathcal{B} = \{1,2\}\,;\; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\;;\; B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}\;;\; x_B = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} = \{3,4\}\,;\; A_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\;;\; V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + \lfloor v_{13} \rfloor x_3 + \lfloor v_{14} \rfloor x_4 \le \lfloor x_1^* \rfloor\;;\; x_1 + \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor x_3 + \left\lfloor \frac{-2}{3} \right\rfloor x_4 \le \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor\;;\; \boxed{x_1 - x_4 \le 0\ (r3)}$$

2a iteració Gomory:

- Solució de la relaxació lineal de (PE2): reoptimització amb el símplex dual a partir de $x_{RL1}^* = [x_1, x_2]' = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]'$ per adició de $x_1 - x_4 + x_5 = 0\ (r3)$
  - $\mathcal{B} = \{1,2,5\}, -a_B B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}$.
  - $\mathcal{N} = \{3,4\}, A_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
  - **Símplex dual, 1a iteració**: $\mathcal{B} = \{1,2,5\}\,, \mathcal{N} = \{3,4\}$
    - Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p :

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 4\ v.b.sortint}$$

    - Identificació de problema (D) il·limitat :

$$v = \beta_3 A_N = [1/3 \quad -2/3 \quad 1]\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{-1/3}^{v_3} & \overbrace{-1/3}^{v_4} \end{bmatrix} \ngeq 0$$

    - Sel. v.n.b. d'entrada q:

$$r' = r'_{RL1} = [0 \quad 0] - \overbrace{[1 \quad 2]\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}}^{\lambda'=[1/3 \quad 1/3]}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{1/3}^{r_3} & \overbrace{1/3}^{r_4} \end{bmatrix} \ge 0$$

$$\theta_D^* = \min\left\{ {}^{-r_j}/_{v_j} : j \in \mathcal{N}\,, v_j < 0 \right\} = \min\left\{ \frac{1/3}{1/3}, \frac{1/3}{1/3} \right\} = 1 \Rightarrow \boxed{q = 3}$$

    - Canvi de base i actualitzacions: $\mathcal{B} \leftarrow \{1,2,3\}\,, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$Bx_B = b\,, \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & & = & 1 \\ x_1 & & & = & 0 \end{cases} \rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - **Símplex dual, 2a iteració:** $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3\}\,, \boldsymbol{\mathcal{N}} = \{4, \mathbf{5}\}$
    - Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_B \ge 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{òptim}}$

- $\mathrm{x}_{\mathrm{RL2}}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ entera $\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{x}_{\mathrm{PE1}}^* = \mathrm{x}_{\mathrm{RL2}}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$

Es pot veure que quan s'afegeix la restricció (r3) al problema (PE1) s'obté la formulació ideal del problema: