

# Econometria

## Tema 7: Autocorrelació

Ramon Alemany

Grau Estadística UB-UPC

**Curs 2017-18**

# Presentació

- 1 Bibliografia
- 2 Definició i causes
- 3 Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG
- 4 Detecció de l'autocorrelació

# Bibliografia

- GREENE, W. (1999)  
**Análisis econométrico. 3a Ed.**  
*Capítol 13*
- WOOLDRIDGE, J. (2009)  
**Introducción a la Econometría. Un enfoque moderno. 4a Ed.**  
*Capítol 12*
- STOCK, J. & WATSON, M. (2012)  
**Introducción a la Econometría. 3a Ed.**  
*Capítol 18*

# Definició i causes

## 1. Definició d'Autocorrelació

- Hi ha autocorrelació quan els elements del terme de pertorbació estan correlacionats entre ells: al llarg del temps o entre els individus
- Els elements de la diagonal principal de la matriu de variàncies i covariàncies del terme de pertorbació són iguals entre sí, però els elements que hi ha fora de la diagonal són diferents de zero
- Habitualment apareix quan es treballa amb sèries temporals

# Definició i causes

$$Y = X\beta + U \quad E(U_i, U_j) \neq 0$$

$$\text{Var}(U) = E(UU') = \sigma^2 \Omega = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & 1 & \dots & \gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \gamma_{1N} & \gamma_{2N} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$E(U_i, U_j) = \sigma^2 \gamma_{ij} \quad \text{amb } \gamma_{ij} \neq 0$$

# Definició i causes

Punt de partida:

## Estructura d'autocorrelació “senzilla”

Esquema autoregressiu de primer ordre  $\longrightarrow$   $AR(1)$

$$Y = X\beta + U \quad \text{amb } t = 1, 2, \dots, T$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2 I_T) \quad |\rho| < 1$$

$$\Omega = f(\rho)$$

Per poder aplicar MQG necessitem obtenir una estimació de  $\rho$ .  
(MQGF:  $\hat{\Omega} = f(\hat{\rho})$ ).

# Definició i causes

## **2. Causes de l'autocorrelació**

(més habitual en sèries temporals)

- Existència de cicles i tendències
- Omissió de variables rellevants
- Relacions no lineals entre les variables
- Relacions dinàmiques (variable endògena retardada com a explicativa)

# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

## 3. Estimació amb autocorrelació

### a) Estimadors MQO

- Propietats
- Presència de l'endògena retardada com a explicativa.

### b) Estimadors MQG

- $\Omega$  coneguda
- $\Omega$  desconeguda
  - Mètode de Cochrane-Orcutt
  - Mètode de Prais-Winsten
  - Mètode de Durbin



# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

## Estimadors MQO

### Propietats $\hat{\beta}_{MQO}$

- No esbiaixats (amb excepció important)
- Consistents
- INEFICIENTS

$$\text{Var}(\hat{\beta}_{MQO}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} X' \Omega X (X'X)^{-1} \geq \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$$

# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

## Estimadors MQO

L'estimador  $\hat{\beta}_{\text{MQO}}$  serà ESBIAIXAT si la variable endògena retardada està com explicativa del model.

$$Y = X\beta + u \quad \text{amb } t = 1, 2, \dots, T$$

$$\mathbf{AR(1)} \quad u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2 I_T) \quad |\rho| < 1$$

$$\text{Cov}(Y_{t-1}, u_t) = E(Y_{t-1}, \rho u_{t-1} + \varepsilon_t) = \rho E(Y_{t-1}, u_{t-1}) \neq 0$$

# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

## Estimadors MQG

### Amb $\Omega$ coneguda

- 1a alternativa: transformació del model

$$\begin{array}{lcl} Y = X\beta + U & \longrightarrow & Y^* = X^*\beta + U^* \\ U \sim N(0, \sigma^2\Omega) & & U^* \sim N(0, \sigma^2 I) \end{array} \quad \begin{array}{l} Y^* = TY \\ X^* = TX \\ U^* = TU \end{array}$$

$$\hat{\beta}_{\text{MQG}} = (X^{*'}X^*)^{-1}(X^{*'}Y^*)$$

- 2a alternativa: estimació directa

$$\hat{\beta}_{\text{MQG}} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}Y)$$

# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

Esquema autoregressiu d'ordre 1 AR(1)

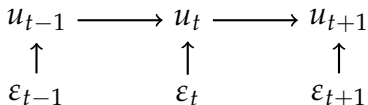
$$Y = X\beta + u \quad \text{amb } t = 1, 2, \dots, T$$

$$\mathbf{AR(1)} \quad u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2 I_T) \quad |\rho| < 1$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(u_t) = \gamma_0 &= E[u_t^2] = E[\rho u_{t-1} + \varepsilon_t]^2 = \\ &= E[\rho^2 u_{t-1}^2 + 2\rho \varepsilon_t u_{t-1} + \varepsilon_t^2] = \\ &= \rho^2 E[u_{t-1}^2] + 2\rho E[\varepsilon_t u_{t-1}] + E[\varepsilon_t^2] = \\ &= \rho^2 \gamma_0 + 2\rho E[\varepsilon_t u_{t-1}] + \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

Esquema autoregressiu d'ordre 1 AR(1)



Per tant:

$$E[\varepsilon_t u_{t-1}] = 0$$

$$\gamma_0 = \rho^2 \gamma_0 + 2\rho E[\varepsilon_t u_{t-1}] + \sigma_\varepsilon^2 = \rho^2 \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2$$

0

$$\text{Var}(u_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2}$$

# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

Esquema autoregressiu d'ordre 1 AR(1)

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(u_t, u_{t-1}) &= \gamma_1 = E[u_t, u_{t-1}] = E[(\rho u_{t-1} + \varepsilon_t), u_{t-1}] = \\
 &= E[\rho u_{t-1}^2 + \varepsilon_t u_{t-1}] = \rho E[u_{t-1}^2] + E[\varepsilon_t u_{t-1}] = \\
 &= \rho E[\rho u_{t-1}^2] = \rho \gamma_0
 \end{aligned}$$

0 ←

$$\gamma_1 = \rho \gamma_0$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(u_t, u_{t-2}) &= \gamma_2 = E[u_t, u_{t-2}] = E[(\rho u_{t-1} + \varepsilon_t), u_{t-2}] = \\
 &= \rho E[u_{t-1} u_{t-2}] + E[\varepsilon_t u_{t-2}] = \rho E[(\rho u_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) u_{t-2}] = \\
 &= \rho^2 E[u_{t-2}^2] + \rho E[\varepsilon_{t-1} u_{t-2}] = \rho^2 \gamma_0
 \end{aligned}$$

0 ←

$$\gamma_2 = \rho^2 \gamma_0$$

$$\vdots$$

$$\gamma_k = \rho^k \gamma_0$$

# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

## Esquema autoregressiu d'ordre 1 AR(1)

Així doncs, si el model és:

$$Y = X\beta + u \quad \text{amb } t = 1, 2, \dots, T$$

$$\mathbf{AR(1)} \quad u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2 I_T) \quad |\rho| < 1$$

Aleshores,

$$\text{Var}(U) = E(UU') = \sigma^2 \Omega$$

$$\text{Var}(u_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2} \quad \text{Cov}(u_t, u_{t-k}) = \text{Cov}(u_{t-k}, u_t) = \rho^k \sigma_u^2$$

# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

Esquema autoregressiu d'ordre 1 AR(1)

$$E(UU') = \sigma^2 \Omega = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{T-3} \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{T-4} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \rho^{T-4} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{T-3} \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{T-4} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \rho^{T-4} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$



# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

Esquema autoregressiu d'ordre 1 AR(1)

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^{-1} = T' T \quad T = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

Esquema autoregressiu d'ordre 1 AR(1)

$$Y^* = TY = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}Y_1 \\ Y_2 - \rho Y_1 \\ \vdots \\ Y_T - \rho Y_{T-1} \end{bmatrix} \quad X^* = TX = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}X_1 \\ X_2 - \rho X_1 \\ \vdots \\ X_T - \rho X_{T-1} \end{bmatrix}$$

# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

Esquema autoregressiu d'ordre 1 AR(1)

## Transformació del model: Quasi-diferències

$$\left. \begin{aligned} Y^* &= TY = Y_t - \rho Y_{t-1} \\ X^* &= TX = X_t - \rho X_{t-1} \\ U^* &= TU = U_t - \rho U_{t-1} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &\text{Excepte per la primera observació} \\ &Y_1^* = \sqrt{1 - \rho^2} Y_1 \\ &X_1^* = \sqrt{1 - \rho^2} X_1 \end{aligned}$$

Si omitim la primera observació, el model transformat equivaldria a un model en “quasi-diferències”:

$$(Y_t - \rho Y_{t-1}) = (X_t - \rho X_{t-1})\beta + (U_t - \rho U_{t-1}) \quad \text{amb } t = 2, 3, \dots, T$$

Si  $N$  és gran aleshores no és important ometre la primera observació.

# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

## Estimadors MQGF

### Amb $\Omega$ desconeguda

$$\left. \begin{array}{l} Y = X\beta + U \\ U_t = \rho U_{t-1} + \varepsilon_t \end{array} \right\} \longrightarrow \Omega = f(\rho)$$

$$\hat{\rho} \longrightarrow \hat{\Omega}(\hat{\rho}) \longrightarrow \hat{\beta}_{\text{MQGF}}$$

Alternatives d'estimació del paràmetre  $\rho$ :

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^T e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^T e_t^2}$$

$$\begin{array}{c} e_t = \rho e_{t-1} + \varepsilon_t \\ \downarrow \\ \hat{\rho}_{\text{MQO}} \end{array}$$

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2}$$

# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

## Mètode de Cochrane-Orcutt

### Procediment de Cochrane-Orcutt

1. S'estima per MQO el model original:  $Y_t = X_t\beta + U_t$
2. S'obtenen els residus  $e_t$
3. S'obté  $\hat{\rho}$  per qualsevol dels mètodes proposats anteriorment
4. S'estima per MQO el model de regressió:  
$$(y_t - \hat{\rho}y_{t-1}) = \beta_0(1 - \hat{\rho}) + \beta_1(x_{1,t} - \hat{\rho}x_{1,t-1}) + \dots + \beta_k(x_{k,t} - \hat{\rho}x_{k,t-1}) + (u_t - \hat{\rho}u_{t-1})$$
5. Es guarden les estimacions de  $\hat{\beta}$  i es torna a l'etapa 2 fins que el procediment iteratiu convergeixi.

# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

## Mètode de Prais-Winsten

### Procediment de Prais-Winsten

1. S'estima per MQO el model original:  $Y_t = X_t\beta + U_t$
2. S'obtenen els residus  $e_t$
3. S'obté  $\hat{\rho}$  per qualsevol dels mètodes proposats anteriorment
4. S'estima per MQO el model de regressió:

$$\sqrt{1 - \hat{\rho}^2}y_1 = \beta_0\sqrt{1 - \hat{\rho}^2} + \beta_1\sqrt{1 - \hat{\rho}^2}x_{1,1} + \dots + \beta_k\sqrt{1 - \hat{\rho}^2}x_{k,1} + \sqrt{1 - \hat{\rho}^2}u_1 \quad t = 1$$

$$(y_t - \hat{\rho}y_{t-1}) = \beta_0(1 - \hat{\rho}) + \beta_1(x_{1,t} - \hat{\rho}x_{1,t-1}) + \dots + \beta_k(x_{k,t} - \hat{\rho}x_{k,t-1}) + (u_t - \hat{\rho}u_{t-1}) \quad t = 2, 3, \dots, T$$

5. Es guarden les estimacions de  $\hat{\beta}$  i es torna a l'etapa 2 fins que el procediment iteratiu convergeixi.

# Estimació amb autocorrelació: MQO versus MQG

## Mètode de Durbin

### Procediment de Durbin

1. S'estima per MQO la regressió auxiliar:

$$y_t = \rho y_{t-1} + \alpha_0 + \alpha_{11}x_{1,t} + \alpha_{12}x_{1,t-1} + \dots + \alpha_{k1}x_{k,t} + \alpha_{k2}x_{k,t-1} + u_t$$

2. A partir d'aquest model, s'obté  $\hat{\rho}$

3. Amb aquest valor, s'estima el següent model:

$$(y_t - \hat{\rho}y_{t-1}) = \beta_0(1 - \hat{\rho}) + \beta_1(x_{1,t} - \hat{\rho}x_{1,t-1}) + \dots + \beta_k(x_{k,t} - \hat{\rho}x_{k,t-1}) + (u_t - \hat{\rho}u_{t-1})$$

4. Etapa 5 de Cochrane-Orcutt

# Detecció de l'autocorrelació

## 3.Detecció de l'autocorrelació

### 1. Mètodes gràfics

### 2. Contrastos

- Contrast de Durbin-Watson
- Contrast de H de Durbin
- Contrast de Breusch-Godfrey

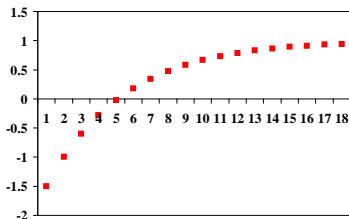


# Detecció de l'autocorrelació

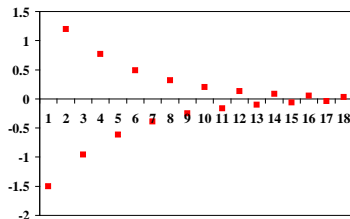
## Mètodes gràfics

### Mètodes gràfics

Consisteix en fer un gràfic d'evolució dels residus al llarg del temps i/o un gràfic de dispersió entre els residus i els residus retardats, i observar si hi ha algun tipus de relació.



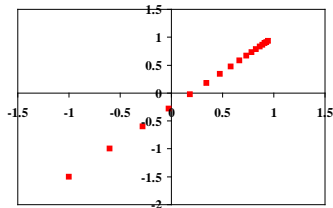
$AR(1)$  amb  $\rho > 0$



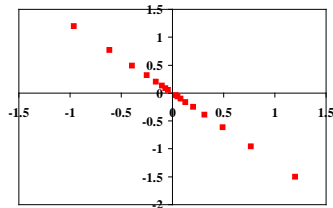
$AR(1)$  amb  $\rho < 0$

# Detecció de l'autocorrelació

## Mètodes gràfics



$AR(1)$  amb  $\rho > 0$



$AR(1)$  amb  $\rho < 0$

# Detecció de l'autocorrelació

## Contrastos d'autocorrelació

### Contrastos d'autocorrelació

- La finalitat principal consisteix a identificar la presència d'autocorrelació al terme pertorbació del model
- Tots els contrastos amb que treballarem es fonamenten en analitzar el comportament dels residus MQO, i les seves  $H_0$  i  $H_A$  es poden resumir com:
  - $H_0$ : no autocorrelació  $E(U_i, U_j) = 0$
  - $H_A$ : autocorrelació  $E(U_i, U_j) \neq 0$

# Detecció de l'autocorrelació

## Contrast de Durbin-Watson

### Contrast de Durbin-Watson

- $H_0$ : no autocorrelació
- $H_A$ : autocorrelació  $AR(1)$   $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$   $\begin{cases} \rho > 0 \\ \rho < 0 \end{cases}$

### Fases del contrast:

1. Estimar  $Y = X\beta + U$  per MQO
2. Obtenir els residus  $e_t$
3. Es calcula l'estadístic de prova:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2}$$

# Detecció de l'autocorrelació

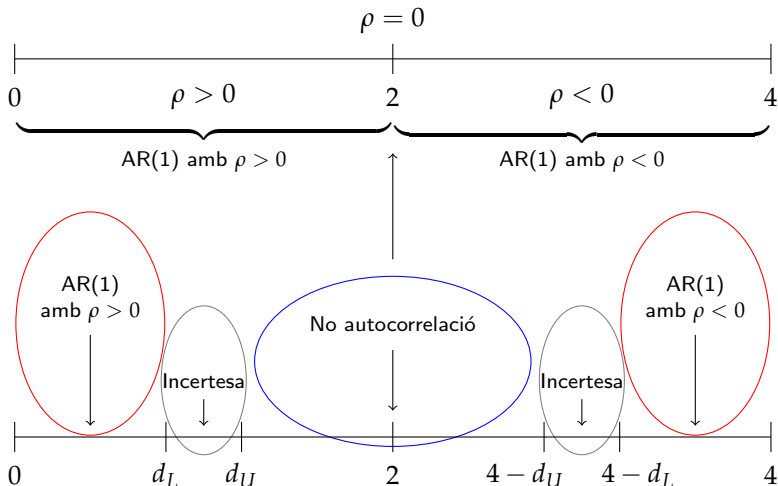
## Contrast de Durbin-Watson

$$\begin{aligned} DW &= \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^T e_t^2 + \sum_{t=2}^T e_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=2}^T e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^T e_t^2} = \\ &\cong \frac{2 \left( \sum_{t=2}^T e_t^2 - \sum_{t=2}^T e_t e_{t-1} \right)}{\sum_{t=1}^T e_t^2} = 2 \left( 1 - \frac{\sum_{t=2}^T e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^T e_t^2} \right) = 2(1 - \rho) \end{aligned}$$

Si  $DW \cong 2(1 - \rho)$  com  $-1 \leq \rho \leq 1$ , aleshores  $0 \leq DW \leq 4$ .

# Detecció de l'autocorrelació

## Contrast de Durbin-Watson



# Detecció de l'autocorrelació

## Contrast de Durbin-Watson

### Característiques i limitacions

- Només serveix per a contrastar la hipòtesi que el terme de pertorbació està autocorrelacionat segons un  $AR(1)$ .
- $d_L$  i  $d_U$  només són vàlids si hi ha un terme independent al model original.
- Presenta zones d'incertesa
- Només és vàlid si tots els regressors són deterministes, és a dir, no seria vàlid si una de les explicatives és la variable endògena retardada  $h$  de Durbin).

# Detecció de l'autocorrelació

## Contrast $h$ Durbin

### Contrast $h$ Durbin

- $H_0$ : no autocorrelació
- $H_A$ : autocorrelació  $AR(1)$   $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon$   $\begin{cases} \rho > 0 \\ \rho < 0 \end{cases}$

### Fases del contrast:

1. Estimar per MQO el model original:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_r y_{t-r} + u_t$$

2. Es calcula l'estadístic de prova:

$$h = \hat{\rho} \sqrt{\frac{T}{1 - T\text{Var}(\hat{\alpha}_1)}} = \left(1 - \frac{DW}{2}\right) \sqrt{\frac{T}{1 - T\text{Var}(\hat{\alpha}_1)}} \sim N(0, 1)$$



# Detecció de l'autocorrelació

## Contrast $h$ Durbin

### Característiques i limitacions

- Només és vàlid asimptòticament.
- Si  $T\text{Var}(\hat{\alpha}_1) > 1$  aleshores  $\rightarrow$  Mètode alternatiu:
  1. Estimar per MQO el model original i obtenir els residus  $e_t$ .
  2. S'estima per MQO la regressió auxiliar:

$$\begin{aligned} e_t = & \delta_1 + \delta_2 X_{2t} + \dots + \delta_k X_{kt} + \\ & + \delta_{k+1} y_{t-1} + \delta_{k+2} y_{t-2} + \dots + \delta_{k+r} y_{t-r} + \\ & + \delta_{k+r+1} e_{t-1} + v_t \end{aligned}$$

3. Es realitza un contrast t-Student de significació individual del paràmetre  $\delta_{k+r+1}$  i si és rebutja la hipòtesi nul·la de que és igual a zero, aleshores es rebutja la no autocorrelació.

# Detecció de l'autocorrelació

## Contrast de Breusch-Godfrey

### Contrast de Breusch-Godfrey

Esquema més general d'autocorrelació

- $H_0$ : no autocorrelació
- $H_A$ : autocorrelació segons  $AR(p)$

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \dots + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t$$

És a dir,

- $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_p = 0$
- $H_A: \exists \rho_j \neq 0$

# Detecció de l'autocorrelació

## Contrast de Breusch-Godfrey

### Fases del contrast:

1. Estimar per MQO el model original i obtenir els residus  $e_t$
2. S'estima per MQO la regressió auxiliar:

$$e_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \delta_1 e_{t-1} + \delta_2 e_{t-2} + \dots + \delta_p e_{t-p} + v_t$$

i es calcula el  $R^2$ .

3. Es calcula l'estadístic de prova:

$$BG = TR^2 \sim \chi_p^2$$

### Limitacions:

- Només és vàlid asimptòticament.
- Com es determina P?

# Econometria

## Tema 7: Autocorrelació

Ramon Alemany

Grau Estadística UB-UPC

**Curs 2017-18**