## 3. Estimación puntual: métodos de estimación

1. Halle un estimador de los parámetros correspondientes a una distribución Gamma, $G(\alpha, p)$, a partir del método de los momentos y basándose en una muestra aleatoria simple de tamaño $n$.

2. Una variable aleatoria sigue una distribución uniforme en el intervalo $(\alpha, \beta)$. Estime mediante el método de los momentos a la función paramétrica $\theta = \alpha - \beta$.

3. La función de densidad de una variable aleatoria $X$ es:

$$f(x,\ \theta) = (\theta + 1)\, x^{\theta}\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño $n$, determine un estimador de $\theta$ utilizando:

*a*) El método de los momentos.

*b*) El método de la máxima verosimilitud.

4. El número de glóbulos blancos en muestras de sangre procedentes de personas sanas, sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda$. Tomando muestras de sangre de 10 personas sanas, se observó que 8 de ellas contenían al menos un glóbulo blanco. Halle la estimación máximo-verosímil de $\lambda$.

5. Demuestre que, si $\theta^*$ es el estimador máximo-verosímil de un parámetro $\theta \in \Theta$, siendo $\Theta$ un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, entonces, si $g$ es una función real de variable real, cuyo dominio incluye a $\Theta$, a la vez que derivable con derivada no nula en $\Theta$, entonces si $\beta = g(\theta)$ resulta que $\beta^* = g(\theta^*)$ es el estimador máximo-verosímil de $\beta$. Aplique esta propiedad para demostrar que:

*a*) $S_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}$ es el estimador máximo-verosímil de $\sigma$ en poblaciones normales con $\mu = \mu_0$ conocida, hallando primero el correspondiente estimador máximo-verosímil de $\sigma^2$.

*b*) $\frac{X(n)}{2}$ es el estimador máximo-verosímil del valor medio de una distribución uniforme $\mathcal{U}(0, \beta)$, hallando primero el estimador máximo-verosímil de $\beta$.

6. Considere una muestra aleatoria simple de tamaño $n$, $X_1, \ldots, X_n$, correspondiente a una variable aleatoria absolutamente continua $X$ con densidad de probabilidad:

$$f(x) = 2\,\theta^{-2}\, x\, \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x) \qquad\qquad \theta > 0$$

Halle la función de verosimilitud así como el estimador máximo-verosímil de $\theta$. Deduzca un estimador de $\theta$ insesgado y compárelo con

$$S = \frac{3}{2}\,\overline{X}_n$$

7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de tamaño $n$ de una variable aleatoria $X$ con función de densidad

$$f(x;\theta) = 2\theta\, x\, \exp(-\theta x^2)\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

con $\theta > 0$.

   *a*) Calcule el estimador de $\theta$ por el método de los momentos y determine su distribución.

   *b*) Calcule el estimador de $\theta$ por el método de la máxima verosimilitud. Calcula su sesgo. ¿Cuál es su distribución? ¿Cuál es su distribución asintótica?

8. Una determinada clase de condensador, en condiciones normales, tiene una vida no inferior a 1200 horas. Pasadas dichas horas, el tiempo de vida restante del condensador sigue sigue una distribución exponencial con densidad

$$f(x,\ \theta) = \theta\, e^{-\theta x}\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

Se desea estimar $\theta$. Por razones prácticas sólo se registraran las duraciones de los condensadores hasta un máximo de 24 horas después de haber funcionado 1200 horas. De una muestra de $n = 30$ condensadores que ya habían funcionado 1200 horas, se obtuvieron los siguientes resultados:

   *a*) 9 dejaron de funcionar durante las primeras 24 horas; las duraciones de funcionamiento fueron 21,55; 22,74; 17,65; 9,42; 1,78; 6,15; 2,50; 3,45 y 23,97 horas.

   *b*) 21 continuaban funcionando después de 24 horas, momento que concluyó el experimento. Halle la estimación máximo-verosímil de $\theta$ y la vida media de un condensador.

9. En familias de tres hijos, la probabilidad de que un hijo tenga una determinada característica A es igual a $p$ . A partir de una muestra de 100 familias de de tres hijos, se han obtenido las siguientes frecuencias:

| nº hijos con A | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| frecuencia | 84 | 15 | 1 | 0 |

Estime el parámetro $p$.

10. Consideremos una muestra aleatoria simple de tamaño $n$, $X_1, \ldots, X_n$ correspondiente a una variable aleatoria $X$ con distribución Binomial $B(3, p)$ condicionada a valores positivos, ya que el valor $X = 0$ no puede presentarse por motivos experimentales. Halle la estimación máximo-verosímil de $p$ a partir de una muestra de tamaño $n = 100$, y que ha presentado las siguientes frecuencias:

| X | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| frecuencia | 30 | 52 | 18 |

11. El tiempo de vida de los individuos de una determinada especie de seres vivos es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(t,\ \alpha) = \frac{1}{\alpha}\, e^{-\frac{t}{\alpha}}\, \mathbb{1}_{(0,\alpha)}(t)$$

Halle la estimación máximo-verosímil de $\alpha$ sabiendo que para una muestra de tamaño $n = 100$ cuando $T = 1$ hay 82 individuos vivos.

12. Dada una muestra aleatoria simple de tamaño $n$ de una variable aleatoria con distribución Log-normal de parámetros $(\mu,\ \sigma^2)$ (es decir, $\ln X$ sigue una distribución normal $N(\mu,\ \sigma^2)$).

   *a*) Demuestre que si $\sigma^2$ es conocido el estimador máximo-verosímil de $\mu$ es:

   $$\mu^* = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)$$

   Halle el estimador máximo-verosímil de $E(X)$.

   *b*) Si $\mu$ es conocida, halle el estimador máximo-verosímil de $\sigma^2$.

   *c*) Halle el estimador máximo-verosímil de $\theta = (\mu,\ \sigma^2)$.

13. Sea $X$ una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(a, b)$, $\sim U(a, a+b)$. Determine, en muestras de tamaño $n$, los estimadores de $a$ y $b$ por el método de los momentos.

14. Dada una muestra de tamaño $n$ de una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{(1+x)^{(1+\theta)}}, \qquad x > 0$$

Determine el estimador de $\theta$ por el método de los momentos. Suponga que $\theta > 1$.

15. Dada una muestra aleatoria simple de tamaño $n$ de una variable aleatoria con distribución Binomial de parámetros $k$ y $p$. Determine los estimadores de $k$ y $p$ por el método de los momentos.

16. Sea $X$ una variable aleatoria con distribución uniforme $U(-\theta, \theta)$. Considere una muestra de tamaño $n$ de $X$ para estimar $\theta$. ¿Que estimador de $\theta$ se obtendrá aplicando el método de los momentos?

17. Calcule el estimador máximo-verosímil de $\theta$ para muestras de tamaño $n$ de la variable aleatoria $X$ con función de densidad $f(x;\theta) = \theta(1-x)^{\theta-1}$, $0 < x < 1$.

18. Un zoólogo estudia el gen que determina el tamaño de las manchas en las alas de las mariposas de la especie *Callimorpha dominula*. Se trata de un gen autosómico del que se conocen dos alelos $A$ y $a$, presentes en la población en proporción $p$ y $1-p$ respectivamente. De acuerdo con la ley de Hardy-Weinberg, que supone apareamiento al azar, así como ausencia de selección natural y

mutaciones, las proporciones poblacionales de los tres posibles genotipos para este gen $AA$, $Aa$ y $aa$ son $p^2$, $2p(1-p)$ y $(1-p)^2$ respectivamente. Halle el estimador máximo-verosímil de $p$ y la estimación de $p$ a partir de los siguientes datos:

| Genotipo | AA | Aa | aa |
|---|---|---|---|
| Frecuencia | 1469 | 138 | 5 |

19. Halle la estimación del parámetro $\lambda$ de una distribución de Poisson, con la única información de que en una muestra de tamaño $n$ hay $r$ observaciones iguales a cero.

20. Estime, a partir del método de máxima-verosimilitud y para muestras de tamaño $n$, la probabilidad $P(X \geq 1)$ donde $X$ es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\alpha$. ¿Cuál es la distribución asintótica del estimador máximo-verosímil del parámetro $\alpha$?

21. Con el objetivo de estimar un número desconocido, $N$, de peces de un lago se capturan $M$ peces, se marcan y se devuelven al lago. Al cabo de unos pocos días se capturan $n$ peces y se observa que hay $m$ peces marcados. Halle el estimador máximo-verosímil de $N$ bajo el supuesto simplificador de que las capturas se han realizado con reemplazamiento.

22. Suponga que en el lanzamiento de cierta moneda desconocemos la probabilidad de obtener cara, $\theta$. Se realiza $n$ veces el experimento consistente en lanzar dicha moneda hasta obtener la primera cara, anotando, en cada repetición, el número de cruces obtenidas antes de obtener la primera cara.

    *a*) Halle el estimador de $\theta$ por el método de los momentos.

    *b*) Halle el estimador de $\theta$ por el método de máxima-verosimilitud.

    *c*) Determine la distribución asintótica del estimador máximo-verosímil.

23. La variable aleatoria $X$ tiene la función de densidad siguiente:

$$f(x;\theta) = \theta \exp(-\theta x)\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

    El parámetro $\theta$ toma valores en el conjunto $\{1,2,3\}$. Si en una muestra de tamaño 5 hemos obtenido tres valores entre 0,003 y 0,06 y dos valores más grandes que 0,5. Con esta información, ¿cuál valor del parámetro corresponde a la estimación máximo-verosímil del mismo?

24. Halle el estimador del máximo-verosímil de $p_1, \ldots, p_k$ de una distribución multinomial. Considere que dispone de una muestra de tamaño $N$ con las frecuencias $n_1, \ldots, n_k$ de las $k$ clases, respectivamente.