

EXAMEN FINAL DE I.O.E. (Curso 02/03 2º Q). Cadenas de Markov

P1) Se ha comprobado que la probabilidad de que un determinado partido político gane unas elecciones depende de si las ganó en los dos comicios inmediatamente anteriores de la siguiente forma: si ganó las dos elecciones anteriores, entonces la probabilidad de que vuelva a ganar es del 95 %. Si ganó las últimas elecciones pero no las penúltimas, entonces la probabilidad de que gane es del 70%. Si ganó las penúltimas pero perdió en las últimas, entonces la probabilidad de que pierda es del 60%. Finalmente, si perdió en las dos elecciones anteriores, entonces perderá con una probabilidad del 80%.

1. Usad la información anterior para establecer un modelo basado en cadenas de Markov en la que los estados sean $X_i = (\text{resultado penúltimo}, \text{resultado último})$. Determinad las clases de equivalencia de la cadena y sus periodicidades.
2. Si el resultado de las elecciones actuales y de las anteriores ha sido desfavorable, cual es la probabilidad de que dentro de dos comicios gane las elecciones.
3. Si el resultado de las elecciones actuales y de las anteriores ha sido desfavorable, ¿cuantos comicios pasaran en promedio hasta que gane por primera vez las elecciones ?, y si el resultado de las anteriores elecciones fue favorable pero ha perdido las actuales?
4. Calculad la fracción del tiempo que este partido está en el poder.

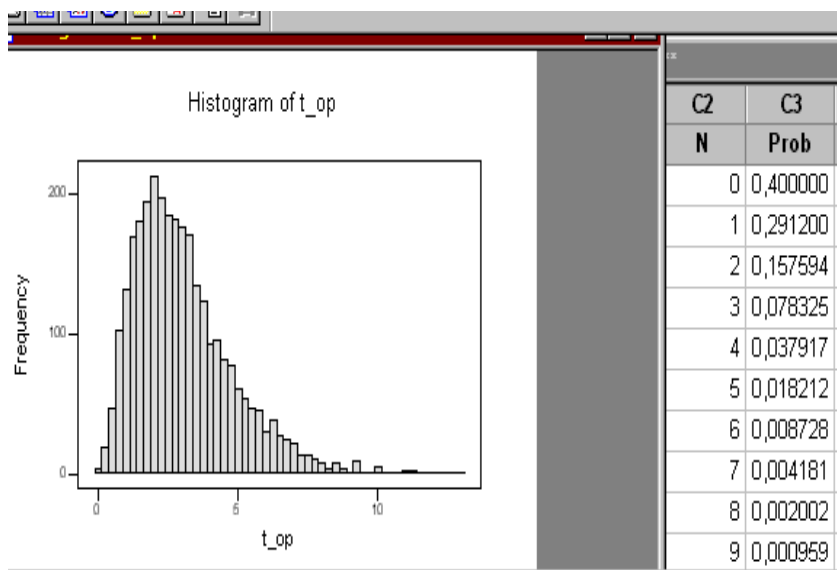
EXAMEN FINAL DE I.O.E. (Curso 02/03 2º Q). Teoría de Colas.

P2) Los médicos de un hospital especializado en un cierto tipo de operaciones han tomado una muestra de los tiempos (en horas) de 3000 de las intervenciones que realizó su equipo de cirujanos. Los valores de la media (Mean) y la desviación estándar (StDev) de estos tiempos aparecen la tabla siguiente:

Variable	N	Mean	Median	TrMean	StDev	SE Mean
t_op	3000	3,0381	2,7072	2,9153	1,7608	0,0321

El tipo de intervención quirúrgica exige que ésta se realice en varias etapas independientes entre sí, de igual tiempo medio de duración y que se distribuye exponencialmente. No puede iniciarse una nueva operación hasta que no se ha completado la última etapa de la operación anterior. El número de pacientes que llegan al hospital se distribuye poissonianamente de esperanza 1 cada 5 horas. Los pacientes esperan ingresados en el hospital por orden de llegada hasta que son intervenidos por el equipo de cirujanos.

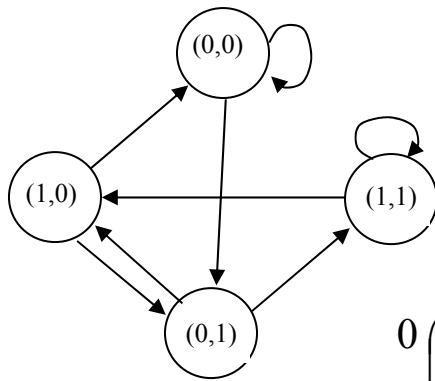
Asimismo, en la figura siguiente aparecen el histograma de los tiempos de la muestra de las 3000 operaciones. La parte de la derecha de la figura muestra una tabla con las probabilidades de encontrar N pacientes en el hospital para $N=0,1,2,\dots,9$.



- 1) Establecer un modelo de colas para el número de pacientes en el hospital y calcular los parámetros de la ley de probabilidades del tiempo de operación.
- 2) En un instante determinado el número de pacientes en el hospital es de dos. Calcular la probabilidad de que el tiempo total de las dos intervenciones supere las 6 horas.
- 3) Calcular el número medio de pacientes en el hospital.
- 4) Calcular el tiempo medio de permanencia de un paciente en el hospital.
- 5) En el instante en que llega un paciente al hospital se sabe que, como máximo hay tres pacientes ingresados. Calcular la probabilidad de que dicho paciente permanezca en el hospital más de 3 horas.
- 6) El equipo de cirujanos pasa a desdoblarse en dos equipos tardando en promedio cada uno de ellos el doble que el equipo único inicial. Cada intervención tiene ahora un tiempo exponencialmente distribuido y los dos equipos pueden operar en paralelo a dos pacientes. Calcular para estas nuevas condiciones: a) la probabilidad de que el hospital se encuentre sin pacientes. b) el número medio de pacientes en el hospital.

CADENAS DE MARKOV. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

1)



Estado 0 = (0,0)
Estado 1 = (1,0)
Estado 2 = (1,1)
Estado 3 = (0,1)

Una única clase aperiódica

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,05 & 0,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

2) $p_{02}^{(2)} + p_{03}^{(2)} = 0,14 + 0,22 = 0,36$

$$p_{02}^{(2)} = 0,2 \cdot 0,7 = 0,14$$

$$p_{03}^{(2)} = 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,22$$

3) Debe calcularse μ_{03}

$$\mu_3 = [1] + P_3 \mu_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} \mu_{03} \\ \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ -0,6 & 1 & 0 \\ 0 & -0,05 & 0,05 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 24 \end{pmatrix}$$

4) $P^T \pi = \pi; \quad \sum_j \pi_j = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0 & -0,05 & 0,7 \\ 0,2 & 0,4 & 0 & -0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1179 \\ 0,0393 \\ 0,7865 \\ 0,0563 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 + \pi_3 = 0,8426$$

TEORIA de COLAS. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

1) Del enunciado se desprende que el tiempo de reparación T es una k -Erlang. Se adopta $E[T]=3,0381$ horas.

$\frac{E[T]}{\text{Var}^{1/2}[T]} = \sqrt{k} \approx \frac{\bar{T}}{s_T} = \frac{3,0381}{1,7608} = 1,72 \Rightarrow 1,72^2 = 2,97$. Se adopta un número de etapas de la ley k -Erlang para el tiempo de servicio de 3.

$$\rho = \lambda E[T] = 3,0381/5 = 0,60762 < 1$$

2) $T_{per} = T_1 + T_2$; T_{per} se distribuye según una k -erlang con $k=6$; $E[T_{per}] = 2 \cdot 3,0381 = 6,0762$

$$P(\{T_{per} \geq t\}) = e^{-k\mu t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\mu t)^i}{i!}$$

$$\mu k t = \frac{6 \cdot 6}{6,0762} \approx 6$$

$$P(\{T_{per} \geq 6\}) = e^{-6} \sum_{i=0}^5 \frac{(6)^i}{i!} = 0,4457$$

3)

$$\sigma^2 = 3 \cdot \left(\frac{3,0381}{3} \right)^2 = 3,0766 \text{ horas}^2$$

$$L_q = \frac{\sigma^2 \lambda^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\frac{3,0766}{5^2} + 0,60762^2}{2 \cdot (1-0,60762)} = 0,6272 \text{ pacientes}$$

$$L = L_q + \rho = 1,235 \text{ pacientes}$$

4)

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1,235}{1/5} = 6,17 \text{ horas}$$

5) $P(N \leq 3) = 0,4 + 0,2912 + 0,1575 + 0,0783 = 0,927$

$$P(N=0 | N \leq 3) = 0,4 / 0,927 = 0,4315$$

$$P(N=1 | N \leq 3) = 0,2912 / 0,927 = 0,3141$$

$$P(N=2 | N \leq 3) = 0,1575 / 0,927 = 0,17$$

$$P(N=3 | N \leq 3) = 0,0783 / 0,927 = 0,0844$$

$$T_n = \text{v.a. } 2_n\text{-Erlang, } E[T_n] = n \cdot 3,0381$$

$$P(\{T_n \geq t\}) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{2nt}{E[T_n]} \right)^i \right) e^{-\frac{2nt}{E[T_n]}}$$

$$\frac{2nt}{E[T_n]} = \frac{2 \cdot n \cdot 3}{n \cdot 3,0381} \approx 2$$

$$P(\{T_1 \geq 3\}) = \left(\sum_{i=0}^2 \frac{1}{i!} 2^i \right) e^{-2} = 0,6767$$

$$P(\{T_1 \geq 3\}) = \left(\sum_{i=0}^5 \frac{1}{i!} 2^i \right) e^{-2} = 0,9834$$

$$P(\{T_1 \geq 3\}) = \left(\sum_{i=0}^8 \frac{1}{i!} 2^i \right) e^{-2} = 0,9998$$

$$P(\{T_1 \geq 3\}) = \left(\sum_{i=0}^{11} \frac{1}{i!} 2^i \right) e^{-2} = 0,9999$$

$$P(T \geq 3 | N \leq 3) = P(N=0 | N \leq 3) P(T_1 \geq 3) + P(N=1 | N \leq 3) P(T_1 \geq 3) + P(N=2 | N \leq 3) P(T_1 \geq 3) + P(N=3 | N \leq 3) P(T_1 \geq 3) = 0,8552$$

6) Modelo M/M/2

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1-\rho}} = 0,2482$$

$$L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = 0,6976 \text{ pacientes}, \quad L = L_q + \lambda / \mu = 1,92 \text{ pacientes}$$

.