Àlgebra lineal. Curs 2015-2016

Llista 5. Aplicacions lineals.

1. Estudieu quines de les aplicacions següents són lineals:

$$\begin{array}{ll}
1.f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, & f(x,y)=(x+y,x)\\
2.f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; & f(x,y)=(xy,x)\\
3.f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, & f(x,y)=(x,y,x+y)\\
4.f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, & f(x,y)=x^2y^2
\end{array}$$

2. Es consideren espais vectorials E, amb base e_1, e_2, e_3, i F, amb base v_1, v_2, v_3, v_4. Escriu la matriu, relativa a aquestes bases, de l'aplicació lineal

$$f : E \longrightarrow F$$

que compleix

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= v_1 - v_2 + v_3\\
f(e_2) &= 2v_1 + v_2 - v_4\\
f(e_3) &= 3v_2 - 2v_3 - v_4.
\end{aligned}$$

Determina la imatge de $w = e_1 + 3e_2 + 2e_3$ i tots els vectors que tenen la mateixa imatge que w.

3. Es considera un espai vectorial E, amb base e_1, e_2, e_3, i l'aplicació lineal

$$f : E \longrightarrow E$$

que compleix $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$ i $f(e_3) = 0$. Escriu-ne la matriu relativa a la base citada. Demostra que $f^3 = 0$.

4. Es considera un espai vectorial E, amb base e_1, e_2, e_3, i l'aplicació lineal

$$f : E \longrightarrow E$$

que compleix

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= e_1 - e_2 + e_3\\
f(e_2) &= 2e_1 + e_2 - e_3\\
f(e_3) &= 3e_1 - 2e_2 - 6e_3.
\end{aligned}$$

Escriu-ne la matriu relativa a la base citada. Determina els vectors $v \in E$ que compleixen $f^2(v) = f(v)$.

5. Sigui $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x, y, z, t) = (x + y - z, x + 2y + z + t, -x - 3y - 3z - 2t).$$

Trobeu la matriu de f en les bases estàndard de $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{R}^3$ i trobeu bases de Ker f i de Im f.

6. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal donada per

$$f(1, 0) = (2, 3, 0), \quad f(0, 1) = (-1, 1, 1)$$

i sigui $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ donada per

$$g(1, 0, 0) = (2, -1, 0, 0), \quad g(0, 1, 0) = (3, 0, 1, 0), \quad g(0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$$

Trobeu l'expressió matricial de f, g i $g \circ f$, respecte de les corresponents bases canòniques de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$.

7. Sigui f l'endomorfisme (aplicació lineal 'dun espai vectorial en ell mateix) de $\mathbb{R}^3$ que té

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

per matriu associada en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Proveu que $\{e_3, f(e_3), f^2(e_3)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ i trobeu la matriu associada de f en aquesta nova base.

8. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicació lineal amb matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

en les bases estàndard. Comproveu que $\{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ i $\{(1, -1), (2, 0)\}$ són bases de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ respectivament i trobeu la matriu de f en aquestes bases. Doneu Ker f i Im f en les bases estàndard i en les últimes bases.

9. Sigui $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal que té per matriu en les bases canòniques

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Trobeu bases de Ker f i de Im f
- Té sol·lució l'equació $f(x) = (2, 2, 4)$?

10. La matriu associada a l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en les bases canòniques és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donats els subespais $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - 2y - 2t = 0\}$, F subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$, i el subespai $G =< (2, -1, 1), (1, -1, 1) >$ de $\mathbb{R}^3$. Trobeu una mase i les equacions implícites dels subespais $f(F)$ i $f^{-1}(G)$.

11. Considerem els vectors de $\mathbb{R}^3$, $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (-1, 2, 1)$ i $e_3 = (0, 1, 1)$, i l'endomorfisme $f : \mathbb{R}`3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definit per

$$f(e_1 - e_2) = 0$$

$$f(e_1 + e_2 + e_3) = 4e_2 + 5e_3$$
$$f(e_2 + e_3) = 3e_2 + 3e_3$$

a) Calculeu la matriu associada a f en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

b) Calculeu la matriu associada a f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

12. Es considera l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que, respecte de les bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathbb{R}^4$, compleix:

$$e_1 + 2e_2 - 3e_3 \in Kerf, \quad f(e_2) = u_1 + u_2 + u_4, \quad f(3e_3) = 3u_1 + u_3$$

Trobeu

- $f(2, 1, -3)$.
- Ker f i Im f.

13. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació donada per

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3,\ x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + 2x_3).$$

1. Demostreu que f és una aplicació lineal.
2. Doneu la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculeu bases dels subespais Im(f) i Ker(f).

14. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'aplicació definida per

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3,\ x_2, x_2,\ x_1 + x_2 + x_3).$$

1. Proveu que f és una aplicació lineal.
2. Trobeu la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$.
3. Trobeu bases i dimensions del subespais $\mathrm{Ker}(f)$ i $\mathrm{Im}(f)$.

15. Sigui $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal que té per matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Calculeu $g(2, -1, 3)$.
- Calculeu el rang de A.
- Siguin $S =< (1,1,1) >$ i $T = \{(x_1, x_2, x_3) | 2x_1 + x_3 - x_2 = 0\}$. Calculeu bases i equacions de $g(S)$, $g^{-1}(S)$, $g(T)$, $g^{-1}(T)$.
- Calculeu la matriu de $g \circ g$ en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

16. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que la seva matriu en la base canònica és

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculeu la matriu de l'aplicació lineal $f \circ f$ en la base canòniques de $\mathbb{R}^3$ així com les dimensions dels subespais $\mathrm{Im}(f \circ f)$ i $\mathrm{Ker}(f \circ f)$.

17. Sigui $\mathbb{V}$ un espai vectorial de dimensió 4, $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una base de $\mathbb{V}$, i siguin

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4,$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4, \qquad \mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4.$$

Demostreu que $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ és una base de $\mathbb{V}$ i calculeu les matrius de canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, i de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

18. Sigui $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^3$ i considereu els vectors

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 + e_3 \\ u_2 &= e_2 + e_3 \\ u_3 &= e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

1. Demostreu que el conjunt $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$.

2. Determineu les coordenades en la base $\mathcal{U}$ del vector $v \in \mathbb{R}^3$ que té coordenades $(1, 2, 1)$ en la base $\mathcal{B}$.

19. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal que té com a matriu en la base canònica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la matriu de $f \circ f$ en la base canònica.

(b) Calculeu la matriu de $f \circ f$ en la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

20. Considerem l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que té per matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comprova que $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (2, 0, 1))$ i $((3, 1), (2, 0))$ són bases de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ respectivament, i troba la matriu de f en aquestes bases.

21. Sigui (v_1, v_2, v_3) una base de d'un espai vectorial E i sigui $f : E \to E$ un endomorfisme que compleix

$$v_1 + v_2 \in kerf, \quad f(v_3) = v_1, \quad i \quad f(v_1) = v_1 + v_2.$$

(i) Troba la matriu de f en la base (v_1, v_2, v_3).

(ii) Calcula $f(4v_1 - v_2 + 2v_3)$

(iii) Calcula el Ker i la imatge de f.