

Mètodes Bayesianes

octubre 2015

El temps en anys que dura una bombeta, x_i , segueix un model *Exponencial*(λ), amb funció de densitat de probabilitat:

$$p(x_i|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x_i},$$

per $x_i \geq 0$, i així $E[x_i|\lambda] = 1/\lambda$, i $Var[x_i|\lambda] = 1/\lambda^2$. Es va fer un experiment amb $n = 10$ bombetes, i els temps de durada obtinguts van ser 2.05, 0.37, 0.47, 6.18, 0.28, 1.24, 3.95, 0.49, 1.33 i 0.90. La suma d'aquestes observacions és 17.26.

Els experts estan d'acord a triar com a distribució a priori per λ una distribució *Gamma*($a = 10, b = 10$), amb funció de densitat de probabilitat:

$$\pi(\lambda) = \frac{b^a \lambda^{(a-1)} e^{-b\lambda}}{\Gamma(a)},$$

i així amb $E[\lambda] = a/b$ i $Var[\lambda] = a/b^2$.

1. Quin és el model estadístic i el model Bayesià quan es dissenya un experiment per observar una mostra de n temps de durada?
2. Quina és la distribució predictiva a priori (per a una nova observació)?
3. Quina és la funció de versemblança quan s'ha observat una mostra de $n = 10$ temps de durada, amb $\sum_{i=1}^{10} x_i = 17.26$?
4. Quina és la distribució a posteriori per λ quan s'ha observat una mostra de $n = 10$ temps de durada, amb $\sum_{i=1}^{10} x_i = 17.26$?
5. Quina és la distribució predictiva a posteriori (per a una nova observació) quan s'ha observat una mostra de $n = 10$ temps de durada, amb $\sum_{i=1}^{10} x_i = 17.26$?

L'experiment abans comentat va durar 6.18 anys. Per estalviar temps, es podria dissenyar un experiment consistent en començar n proves independents però parar quan s'observa la primera bombeta que falla, això en el nostre exemple va ser a $y = 0.28$ anys. En aquest cas, la funció de densitat de probabilitat per a l'observació més petita és:

$$p(y|\lambda) = n\lambda e^{-\lambda n y},$$

amb $y \geq 0$, i on $1/\lambda$ és també el temps de vida esperat per a una bombeta qualsevol.

6. Quin és el model estadístic i el model Bayesià quan es dissenya un experiment per observar només el temps de durada més petit d'entre 10 bombetes?
7. Quina és la distribució predictiva a priori (per a una nova observació)?
8. Quina és la funció de versemblança quan s'ha observat només el temps més petit, $y = 0.28$, d'entre 10 bombetes?
9. Quina és la distribució a posteriori per λ quan s'ha observat només el temps més petit, $y = 0.28$, d'entre 10 bombetes?
10. Quina és la distribució predictiva a posteriori (per a una nova observació) quan s'ha observat només el temps més petit, $y = 0.28$, d'entre 10 bombetes?