

## Mètodes Bayesians

Novembre 2013

1. Que és el model estadístic i que és el model bayesià?

Assumim que el temps que tarda una determinada partícula radioactiva a desintegrar-se segueix un model *Exponential*( $\lambda$ ),

$$p(y|\lambda) = \lambda e^{-\lambda y},$$

amb espai de paràmetres  $\Omega = [0, \infty)$ , i per tant amb  $E[y|\lambda] = 1/\lambda$  i  $Var[y|\lambda] = 1/\lambda^2$ . La distribució a priori conjugada per aquest model és la *Gamma*( $a, b$ ),

$$\pi(\lambda) = \frac{b^a \lambda^{(a-1)} e^{-b\lambda}}{\Gamma(a)},$$

i per tant amb  $E[\lambda] = a/b$  i  $Var[\lambda] = a/b^2$ . Els físics s'han posat d'acord amb escollir per a la distribució a priori per a aquest paràmetre una *Gamma*( $a = 10, b = 10$ ). S'han pogut recollir els temps he han trigat tres partícules a desintegrar-se, aquests han estat 0.9, 1.1 i 1.

2. Calcula la funció de versemblança.
3. Calcula la distribució a posteriori per  $\lambda$ .
4. Suposa que els físics han pogut mesurar el temps de milions de partícules, en aquest cas quina forma creus que tindria la distribució predictiva a posteriori?
5. En el supòsit de que els físics no disposessin de cap mena d'informació a priori, proposa i justifica una distribució a priori.

Concreta la resposta a totes aquestes preguntes tant com puguis.

# Bayesian Methods

November 2013

1. What is a Statistical Model? and What is a Bayesian Model?

Assume that the time needed for a specific radioactive particle to disintegrate follows an *Exponential*( $\lambda$ ) model,

$$p(y|\lambda) = \lambda e^{-\lambda y},$$

with parameter space  $\Omega = [0, \infty)$ , and hence with  $E[y|\lambda] = 1/\lambda$  and with  $Var[y|\lambda] = 1/\lambda^2$ . The conjugate prior distribution for this model is the *Gamma*( $a, b$ ),

$$\pi(\lambda) = \frac{b^a \lambda^{(a-1)} e^{-b\lambda}}{\Gamma(a)},$$

and hence with  $E[\lambda] = a/b$  and with  $Var[\lambda] = a/b^2$ . The physicists agree to use a *Gamma*( $a = 10, b = 10$ ) as a prior distribution. They have collected only the time disintegration for three particles. These are 0.9, 1.1 and 1.

2. Compute the likelihood function.
3. Compute the posterior distribution for  $\lambda$ .
4. Suppose that the physicists have collected the time of millions of particles. In this case which shape do you think the posterior predictive distribution will have?
5. In case that the physicists have no any priori information, what prior distribution would you recommend them? Can you justify that?

Be as specific as you can when answering all these questions.