Examen d'Introducció a la Probabilitat - Grau d'Estadística 25-gener-2011

1. (3 pts.) En els darrers anys, les qualificacions d'una determinada assignatura del grau sota les directrius de Bolonya és una v.a. X que segueix una distribució Normal amb mitjana 7 i desviació típica 0.8 pel que fa als nois i de mitjana 7.2 i de desviació 1.1 per a les noies. En aquest grau, la proporció d'alumnes de sexe masculí suposa un 48% del total d'alumnes.

   (a) Si escollim un alumne a l'atzar, calculeu la probabilitat que la seva nota sigui superior a 7.5. (1.5 pts.)

   (b) Aquesta assignatura de grau simultaneja la seva existència amb la mateixa assignatura de la llicenciatura, i és conegut que en la llicenciatura la v. a. Y que en mesura les qualificacions, en el cas de les noies s'ajusta a una distribució $N(\mu = 6.2, \sigma = 1.2)$, amb una presencia per a les noies del 53% del total d'alumnes de la llicenciatura. Si una noia obté, en aquesta assignatura, una qualificació final superior a 5.5, què és més probable, que sigui una alumna de grau o de llicenciatura? (1.5 pts.)

   Solució

   (a) En primer lloc escriurem la informació que ens dóna el problema:

   Sigui X la "Qualificacions d'una determinada assignatura en el **grau de Bolonya**"que modelitzarem com $X \sim N(\mu, \sigma)$
   X_A "Qualificacions de les noies d'una determinada assignatura en el grau de Bolonya"
   $X_A \sim N(\mu = 7, \sigma = 0.8)$
   X_B "Qualificacions dels nois d'una determinada assignatura en el grau de Bolonya"
   $X_B \sim N(\mu = 7.2, \sigma = 1.1)$
   Sigui A **Proporció de noies** d'una determinada assignatura en el grau de Bolonya per tant: $P(A) = 0.52$
   Sigui B **Proporció de nois** d'una determinada assignatura en el grau de Bolonya i per tant : $P(B) = 0.48$

   Ens demanen $P(X > 7.5) = P(X_A > 7.5\,|A)\,P(A) + P(X_B > 7.5\,|B)\,P(B) = 0.33$
   Aplicació del *Teorema de Probabilitats Totals*

   (b) Recuperem X "Qualificacions de les noies d'una determinada assignatura en el grau de Bolonya"
   $X \sim N(\mu = 7, \sigma = 0.8)$
   Sigui Y "Qualificacions de les noies d'una determinada assignatura en la **llicenciatura**"que modelitzarem com $Y \sim N(\mu = 6.2, \sigma = 1.2)$
   C **Proporció de noies** d'una determinada assignatura en el grau de Bolonya = $\frac{0.52}{0.52+0.53} = 0.49$ i
   D **Proporció de noies** d'una determinada assignatura en la llicenciatura = $\frac{0.53}{0.52+0.53} = 0.50$
   Definim: Q "Qualificacions de les noies d'una determinada assignatura"
   Ara calculem a partir de l'aplicació de Teorema de Bayes
   $P(X\,|Q > 5.5) = 0.46$
   $P(Y\,|Q > 5.5) = 0.36$
   per tant és més probable que sigui del Grau.

2. (3.5 pts.) Una determinada empresa té quatre tipus de treballadors amb els següents sous mensuals: directius amb 15000 (u.m.), especialistes amb 5000 (u.m.), obrers amb 2000 (u.m.) i aprenents amb 1000 (u.m.). Sabem que l'empresa té 4 directrius, 40 especialistes, 200 obrers i 100 aprenents. Agafem un treballador a l'atzar i anomenem X a la v.a. que ens dóna el sou d'aquest treballador.

   (a) Expresseu la funció de probabilitat i la funció de distribució de la v.a. X. (1pt.)

   (b) Calculeu l'esperança i la variància de X. (1 pt.)

   (c) Si l'empresa fa un augment de 200 (u.m.) mensuals a tots els treballadors, com variaran l'esperança i la variància? I si fa un augment del 10%? (0.5 pts.)

   (d) Calculeu $P(X = 15000\,|\,X \geq 5000)$. (1 pt.)

   Solució

   (a) Es tracta d'una variable aleatòria discreta amb la següent funció de probabilitat:

$$P(X=x)=\begin{cases} \dfrac{100}{344}=0.2907 & \text{si} \quad x=x_1=1000 \\ \dfrac{200}{344}=0.5814 & \text{si} \quad x=x_2=2000 \\ \dfrac{40}{344}=0.1163 & \text{si} \quad x=x_3=5000 \\ \dfrac{4}{344}=0.0116 & \text{si} \quad x=x_4=15000 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

La seva funció de distribució és:

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<1000 \\ \dfrac{100}{344}=0.2907 & \text{si} \quad 1000\le x<2000 \\ \dfrac{300}{200}=0.8721 & \text{si} \quad 2000\le x<5000 \\ \dfrac{340}{344}=0.9884 & \text{si} \quad 5000\le x<15000 \\ 1 & \text{si} \quad x\ge 15000 \end{cases}$$

(b)

$$E(X)=\sum_{1=1}^{4} x_i P(X=x_i)=1000\frac{100}{344}+\cdots+15000\frac{4}{344}=2209.30\,(\text{u.m.})$$

$$E(X^2)=\sum_{1=1}^{4} x_i^2 P(X=x_i)=1000^2\frac{100}{344}+\cdots+15000^2\frac{4}{344}=8139534.884\,(\text{u.m.})^2$$

$$Var(x)=E(X^2)-(E(X))^2=8139534.884-(2209.30)^2=3258518.12\,(\text{u.m.})^2$$

(c) Considerem una nova variable $Y=X+200$ que representa els sous mensuals amb un augment de 200 (u.m.), donades les propietats de linealitat de l'esperança i que l'esperança d'una constant és la mateixa constant, tindrem:

$$E(Y)=E(X+200)=E(X)+E(200)=E(X)+200$$

l'esperança augmentarà també 200(u.m.).

$$\begin{aligned} Var(Y) &= E[(Y-E(Y))^2]=E[(X+200-(E(X)+200))^2]=E[(X+200-E(X)-200)^2] \\ &= E[(X-E(X))^2]=Var(X) \end{aligned}$$

la variància no es modificarà.

Considerem ara una nova variable $W=X+0.1X=(1.1)X$ que representa els sous mensuals amb un augment del 10%. Si tornem a considerar les propietats de linealitat de l'esperança i que quan calculem la variància d'una variable multiplicada per una constant, aquesta constant surt fora de la variància elevada al quadrat tindrem:

$$E(W)=E[(1.1)X]=(1.1)E(X)$$

l'esperança augmentarà també un 10%.

$$Var(W)=Var[(1.1)X]=(1.1)^2Var(X)]=(1.21)Var(X)=Var(X)+(0.21)Var(X)$$

la variància augmenta un 21%.

(d)

$$P(X=15000\,|\,X\ge 5000)=\frac{P(X=15000)}{P(X\ge 5000)}=\frac{\frac{4}{344}}{\frac{44}{344}}=\frac{1}{11}\simeq 0.091$$

3. (3.5 pts.) En el concert de Any Nou interpretat per l'Orquestra Filharmònica de Viena, els espectadors eviten tossir, com en tots els concerts. No obstant això, alguns atacs de tos solen pertorbar als espectadors i els músics. Està establert que el nombre d'atacs de tos segueix una distribució de Poisson de paràmetre 2 per hora.

   El concert consta de dues parts: la primera part dura 45 minuts i la segona part dura 50 minuts, amb un descans d'un quart d'hora.

   A tots els apartats, justifiqueu les respostes, explicant quines distribucions de probabilitat heu utilitzat.

   Calculeu:

   (a) La probabilitat que no hi hagi cap atac de tos a la primera part. (0.5 pts.)

   (b) La probabilitat que hi hagi entre 3 i 5 atacs de tos en tot el concert (excloent l'intermedi). (0.5 pts.)

   (c) Sabent que han transcorregut 30 minuts de concert sense cap tos, trobeu la probabilitat que acabi tot el concert amb una sola pertorbació. (0.75 pts.)

   (d) Si considerem els 5 darrers concerts, quina és la probabilitat que, com a mínim, en tres d'ells només hi hagués una pertorbació en tot el concert? Si consideréssim ara 100 concerts, quina seria la probabilitat que només hi hagués una interrupció per atac de tos (pertorbació) com a màxim en 20 concerts? (Nota: si no heu calculat la probabilitat de l'apartat anterior useu una probabilitat p qualsevol tal que $0.1 < p < 0.9$) (1.0 pt.)

   (e) Al final del concert sol haver bisos, la durada dels quals es pot considerar Normal de mitjana 15 minuts i desviació típica 5 minuts. Calculeu la durada màxima del concert, incloent-hi el descans, amb un error del 5%. (0.75 pts.)

Solució

(a) Sigui $T_H \sim \text{Poisson}(H\lambda)$, on $\lambda = 2$, la distribució del nombre d'atacs de tos en un període d'H hores.

Per a la primera part, la distribució seria $T_{3/4} \sim \text{P}(1.5)$.

La qüestió és trobar $\text{Prob}(T_{3/4} = 0) = \exp(-1.5) = 0.223$.

(b) Per a les dues parts, la durada és 95 minuts (1h35m, o 1.5833 hores). La distribució adequada seria $T_{1h35} \sim \text{P}(3.167)$.

Calculem la funció de probabilitat d'aquesta variable per als valors 3, 4 i 5:

k	$\text{Prob}(T_{1h35} = k)$
3	0.2230
4	0.1766
5	0.1118
	0.5115

$\text{Prob}(3 \leq T_{1h35} \leq 5) = 0.5115$.

(c) Una sola pertorbació al concert, si no ha passat als primers 30 minuts, ha de produir-se en els 65 minuts restants. Per tant, definim una nova variable per aquest temps, i avaluem la probabilitat que sigui exactament 1:

$T_{1h05} \sim \text{P}(2.167)$, i $\text{Prob}(T_{1h05} = 1) = \exp(-2.167)\, 2.167 = 0.2482$.

(d) $\text{N} \sim \text{B}(5, p)$, on $p = \text{Prob}(T_{1h35} = 1) = 0.1335$.

$\text{Prob}(\text{N} \geq 3) = 0.0193$.

Amb 100 concerts, $\text{M} \sim \text{B}(100, p)$, i la qüestió és $\text{Prob}(\text{M} \leq 20)$. Calcularem la probabilitat per aproximació a una Normal:

$\text{M} \approx \text{N}(100p, \sqrt{100p(1-p)}) = \text{N}(13.35, 3.4)$.

$$\text{Prob}(\text{M} \leq 20) \approx \text{Prob}\left(\frac{M - 13.35}{3.4} \leq \frac{20 - 13.35}{3.4}\right) = \text{Prob}(Z \leq 1.956) = 0.9748$$

(e) Abans del bisos, la durada és constant i igual a 110 minuts (95 del concert més 15 del intermedi). La part final F és aleatòria: $F \sim N(15, 5)$, i volem un valor x tal que $\text{Prob}(F < x) = 0.95$.

Per a una variable $Z \sim N(0,1)$ aquest valor és 1.645 (taules), i $x = \mu + 1.645\sigma = 23.22$. Llavors la durada demanada és 133.22 minuts.