# Diferenciació

Començarem amb les derivades parcials:

Siguin $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $U$ obert, $(x_0, y_0) \in U$

La derivada parcial de $f$ respecte $x$ en $(x_0, y_0)$ és

$x_0 + h = x$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad \text{si } \exists$$

La derivada parcial de $f$ respecte $y$ en $(x_0, y_0)$ és

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \quad \text{si } \exists$$

Si els límits existeixen en tots els punts de $U$, les funcions

$$(x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \qquad (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

es diuen (funcions) derivades parcials.

Fixem-nos que per calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$

hem de fer el mateix que per calcular la derivada de

$$g: x \longmapsto f(x,y_0) \quad \text{en } x_0 : \quad g'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Això ens dóna un mètode per calcular funcions derivades parcials.

---

$\boxed{\text{Ex}}$ $f(x,y) = xy^2 + x^3$ ; $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 3x^2$ ; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$

Una vegada tenim la funció derivada parcial podem tenir la derivada en un punt.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1 + 3\cdot 4 = 13; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

De vegades no podem usar els mètodes de derivació de funcions d'una variable, per ex. a la funció següent en $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

perquè $\sqrt{x}$ no és derivable en $x=0$

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad (x,y) \neq (0,0)$$

Si $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\,\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{yx^2+y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - xy\,\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dots = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Si $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$\boxed{\text{Ex}}$ $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = x^{1/3}\, y^{1/3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

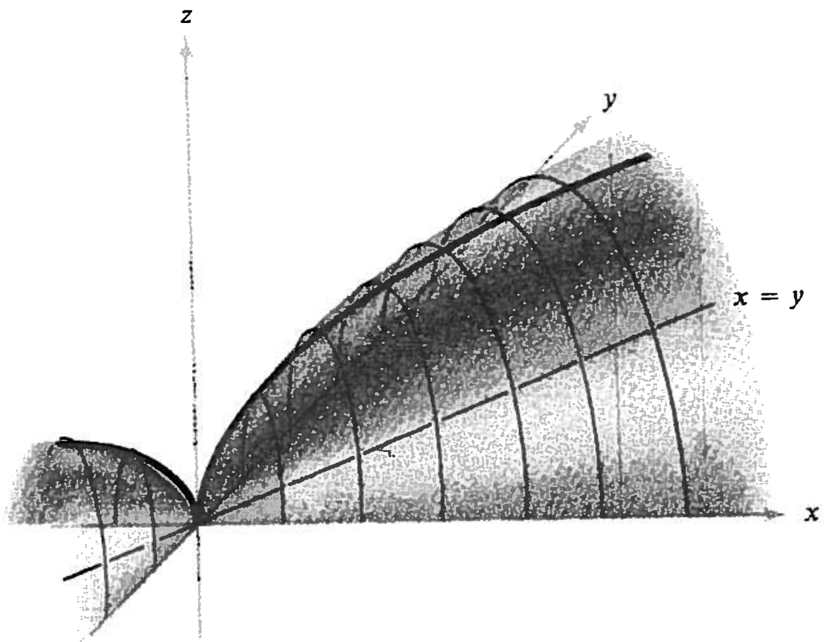
Si avaluem $f$ en la recta $y = mx$, $f(x, mx) = x^{1/3} m^{1/3} x^{1/3} = m^{1/3} x^{2/3}$

Si $\quad xy > 0$, $\quad f(x,y) > 0$

$\quad xy < 0$, $\quad f(x,y) < 0$

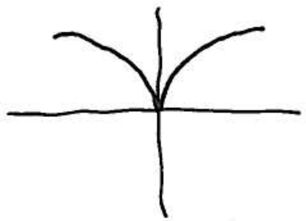
$f(x,0) = 0$

$f(0,y) = 0$




$g(x) = x^{2/3}$

$g'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$



$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = \infty$$

Aquest ex. mostra que l'existència de les dues derivades parcials no assegura que la gràfica de la funció tingui pla tangent

Introduirem el concepte de diferenciabilitat. Per a funcions $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, si $f$ és diferenciable en un punt existirà el pla tg a la gràfica en aquest punt.

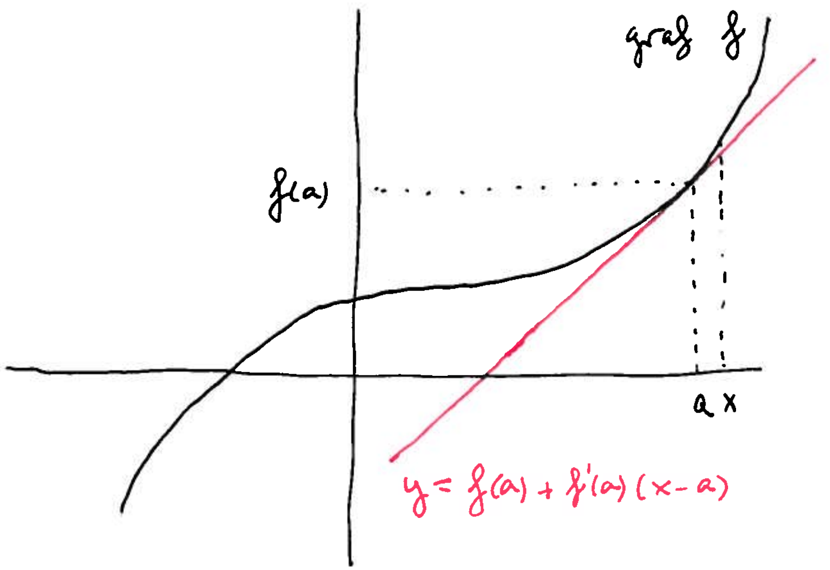
Repassem el que sabem en dim 1. Siguin $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

Si $f$ és derivable en $a$ $\exists \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $(a+h = x)$

$$\lim_{x \to a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x - a} = 0$$

Definim
$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$




El gràfic de $g$ és una recta

$f(x) - g(x)$ tendeix a zero més ràpidament que $x-a$ quan $x \to a$

Condició perquè un pla aproximi bé la gràfica de $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ prop d'un punt $(x_0, y_0)$.

Obviament el pla ha de passar pel punt $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Eq. d'un pla que passa per $P$:

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0), \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

Volem que el pla satisfagui (si existeix el límit)

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)}{\| (x,y) - (x_0,y_0) \|} = 0$$

Aquesta condició determina $A, B$: l'existència del límit $\Rightarrow \exists$ límits segons les rectes $y = y_0$ i $x = x_0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)-B(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}=0$$

Lím segons $y=y_0$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)}{|x-x_0|}=0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)|}{|x-x_0|}=0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)}{x-x_0}=0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}-A\right)=0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

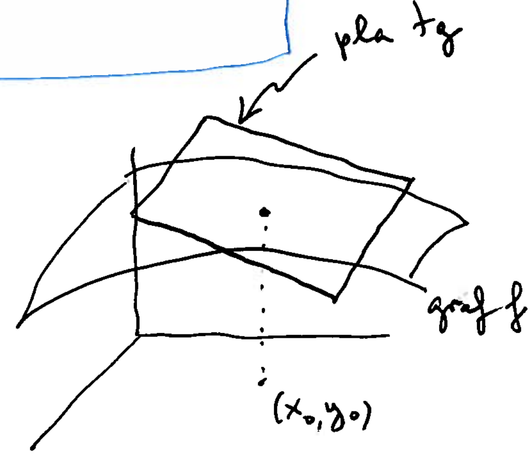
Fent lim segons $x=x_0$ obtenim

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

**Def** Donats $f: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in U$, $U$ obert diem que

$f$ és diferenciable en $(x_0,y_0)$ si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$




En aquest cas el pla (en $\mathbb{R}^3$) determinat per

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

és el pla tg a la gràfica de $f$ en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

**Def** L'aplicació lineal $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(s,t) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\, s + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\, t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$

es diu <u>derivada</u> de $f$ en $(x_0,y_0)$ i s'escriu $Df(x_0,y_0)$. La seva matriu és

**Def** Donats $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $U$ obert, $x_0 \in U$, diem que $f$ és diferenciable en $x_0$ si existeix $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal t.q.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x-x_0)}{\| x - x_0 \|} = 0 \qquad (*)$$

Si $f$ és diferenciable en $x_0$ només $\exists$ una $T$ lineal que verifica $(*)$.

Llavors aquesta $T$ es diu <u>derivada</u> de $f$ en $x_0$ i es representa per $Df(x_0)$

(alguns llibres l'anomenen diferencial de $f$ en $x_0$ i escriuen $df(x_0)$ )

A més (si $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ ) la matriu de $Df(x_0)$ és

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

L'existència de les derivades parcials és conseqüència de la diferenciabilitat

# Resultats generals bàsics de diferenciabilitat

**Def** Sigui $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Diem que $f$ és de classe $C^1$ si $\exists$ les funcions derivades parcials i són contínues.

**Teorema** Sigui $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Si $f$ és diferenciable en $x_0 \in \mathcal{U}$, $f$ és contínua en $x_0$

**Teorema**

Si $f$ és de classe $C^1$ en un entorn de $x_0 \in \mathcal{U}$, $f$ és diferenciable en $x_0$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} C^1 & \Longrightarrow & \text{diferenciabilitat} & \Longrightarrow & \text{continuïtat} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \exists \text{ derivades parcials} & & \end{array}}$$

Teorema Sigui $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$f$ diferenciable en $x_0 \in U \implies f$ contínua en $x_0$

Dem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left( f(x) - f(x_0) + f(x_0) \right)$$

$$= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \left( f(x) - f(x_0) \right) - \lim_{x \to x_0} Df(x_0)(x - x_0)$$

$$= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \left( f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0) \right)$$

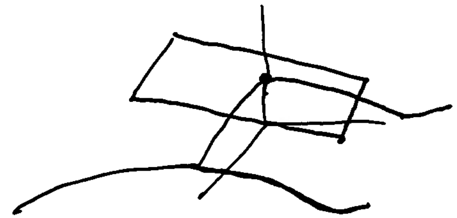
$$= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)}{\| x - x_0 \|} \| x - x_0 \|$$

$$= f(x_0)$$

**Ex** $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = x\cos y + y e^x$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y e^x$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin y + e^x$ són contínues $\Rightarrow f$ diferenciable

$Df(x,y) = \left( \cos y + y e^x, \ -x\sin y + e^x \right)$



Pla tg a la gràfica en $(0,\pi)$

$$z = f(0,\pi) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi)\,(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi)\,(y-\pi) = \pi + (-1+\pi)\,x + (y-\pi)$$

$$\boxed{z = (\pi-1)\,x + y}$$

**Ex** $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad f(x,y) = \left( e^x + y, \ xy + \cos(x+y) \right)$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 1 \\ y - \sin(x+y) & x - \sin(x+y) \end{pmatrix}$$

**Ex** $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\quad f(x,y) = \left( x^2 + xy, \ 2xy, \ e^{xy} \right)$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y & x \\ 2y & 2x \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}$$

## Regles de diferenciació

Siguin $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $U$ obert, $x_0 \in U$, $f, g$ diferenciables en $x_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(i) $\alpha f$ és diferenciable en $x_0$ i $D(\alpha f)(x_0) = \alpha Df(x_0)$

(ii) $f + g$ és diferenciable en $x_0$ i $D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$

(iii) Si $m = 1$, $f \cdot g$ és diferenciable en $x_0$ i $D(f \cdot g)(x_0) = g(x_0)\, Df(x_0) + f(x_0)\, Dg(x_0)$

(iv) Si $m = 1$ i $g(x) = 0$, $\frac{f}{g}$ és diferenciable en $x_0$ i

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)\, Df(x_0) - f(x_0)\, Dg(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}.$$

$\boxed{\text{Ex:}}$ $h(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+1} = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$

$$Dh(x,y) = \frac{(x^2+1)(2x, 2y) - (x^2+y^2)(2x, 0)}{(x^2+1)^2} = \frac{\left(2x\,(x^2+1-x^2-y^2),\ 2y\,(x^2+1)\right)}{(x^2+1)^2} = \left(\frac{2x\,(1-y^2)}{(x^2+1)^2},\ \frac{2y}{x^2+1}\right)$$

També $Dh(x,y) = \left(\dfrac{\partial h}{\partial x}, \dfrac{\partial h}{\partial y}\right) = \left(\dfrac{2x\,(x^2+1) - (x^2+y^2)\,2x}{(x^2+1)^2},\ \dfrac{2y\,(x^2+1) - (x^2+y^2)\cdot 0}{(x^2+1)^2}\right)$

## Diferenciació i components

Sigui $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $U$ obert, $x_0 \in U$, $f = (f_1, \dots, f_m)$

$f$ és diferenciable en $x_0 \Leftrightarrow f_i$ és diferenciable en $x_0$, $\forall i$

Llavors

$$Df(x_0)h = \begin{pmatrix} Df_1(x_0)h \\ Df_2(x_0)h \\ \vdots \\ Df_m(x_0)h \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Ex}}$ $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $f = (f_1, f_2)$, $f_1(x,y) = x^2 + y^2$, $f_2(x,y) = x\cos y - y\cos x$

$$Df_1(x,y) = (2x, \ 2y)$$

$$Df_2(x,y) = (\cos y + y\sin x, \ -x\sin y - \cos x)$$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ \cos y + y\sin x & -x\sin y - \cos x \end{pmatrix}$$

## Regla de la cadena

Siguem $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g: V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $U, V$ oberts, $f(U) \subset V$, $x_0 \in U$

Si $f$ és diferenciable en $x_0$ i $g$ és diferenciable en $f(x_0)$ llavors

(1) $g \circ f$ és diferenciable en $x_0$

(2) $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))\, Df(x_0)$

## Casos particulars

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$ $\quad g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto g(x,y)$

$$D(g \circ f)(t) = Dg(f(t))Df(t) = \left( \frac{\partial g}{\partial x}(f(t)), \frac{\partial g}{\partial y}(f(t)) \right) \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dt}(t) \\ \frac{df_2}{dt}(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d(g \circ f)}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left[ g(f_1(t), f_2(t)) \right] = \frac{\partial g}{\partial x}(f_1(t), f_2(t)) \frac{df_1}{dt}(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(f_1(t), f_2(t)) \frac{df_2}{dt}(t)$$

2)

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\qquad g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$(x,y)\longmapsto(u(x,y),v(x,y)),\qquad (u,v)\longmapsto g(u,v)$$

avaluades en $(u(x,y),v(x,y))$

avaluades en $(x,y)$

$$D(g\circ f)(x,y)=Dg(f(x,y))\,Df(x,y)=\left(\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial g}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$g\circ f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

3) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\quad g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y), w(x,y))$ $\quad (u,v,w) \longmapsto (g_1, g_2)$

$$D(g\circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_1}{\partial w} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} & \frac{\partial g_2}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}$$

avaluades en $(x,y)$

avaluades en $(u(x,y), v(x,y), w(x,y))$ $=$ $f(x,y)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g_1}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$g\circ f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (g_1(f(x,y)), g_2(f(x,y)))$

Les derivades parcials de $g\circ f$ s'obtenen comparant. Per ex.

$$\frac{\partial}{\partial x}[g_1(f(x,y))] = \frac{\partial}{\partial x}[g_1(u(x,y), v(x,y), w(x,y))] = \frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

4) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\quad (x,y) \longmapsto f(x,y)$ $\qquad$ $t \longmapsto (g_1(t), g_2(t))$

$$D(g \circ f)(x,y) = Dg(f(x,y))\, Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{dt} \\ \frac{dg_2}{dt} \end{pmatrix} \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{dt}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{dg_1}{dt}\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{dg_2}{dt}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{dg_2}{dt}\frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

avaluades en $(x,y)$

avaluades en $f(x,y)$

$g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\quad (x,y) \longmapsto (g_1(f(x,y)), g_2(f(x,y)))$

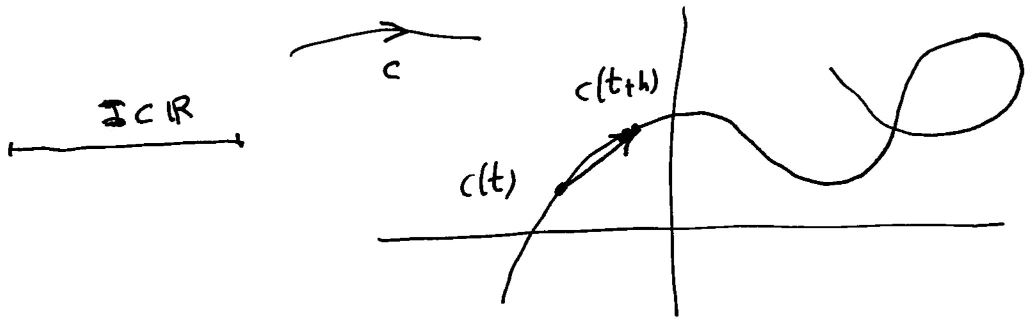
Derivades parcials de $g \circ f$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[ g_1(f(x,y)) \right] = \frac{dg_1}{dt} \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[ g_1(f(x,y)) \right] = \frac{dg_1}{dt} \frac{\partial f}{\partial y}$$

# Vectors tangents i transport de vectors tangents

Una funció $c : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ representa una corba a $\mathbb{R}^2$




$\frac{1}{h}\left[c(t+h) - c(t)\right]$ és un vector que quan fem $h$ petit tendeix a ser un vector tg a la corba

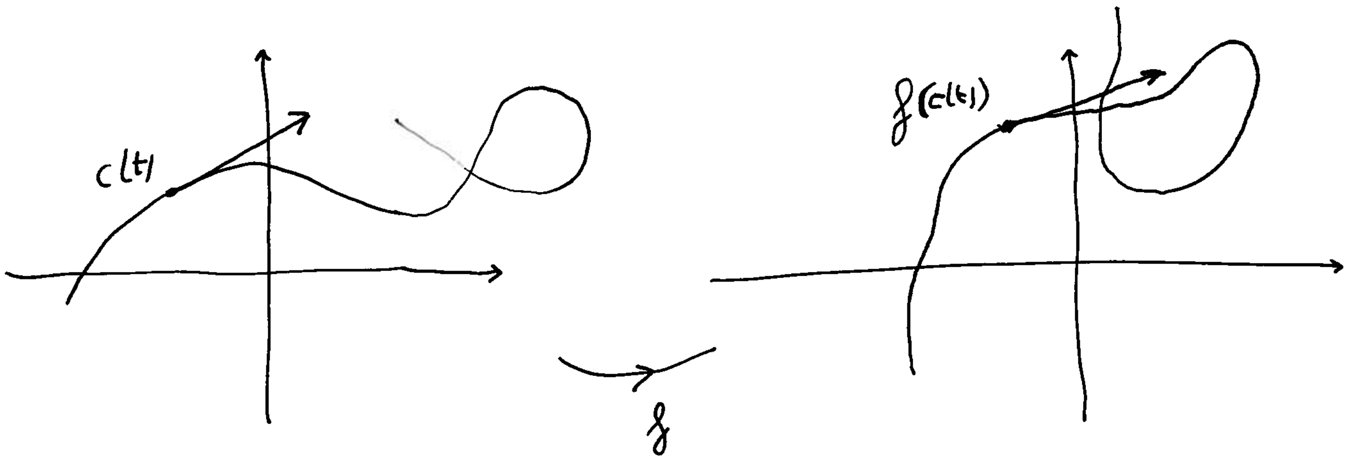
$$c'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{si existeix}$$

Llavors $0 = \lim_{h\to 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} - c'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{c(t+h) - c(t) - c'(t)\,h}{h}$

$\Rightarrow$ $c$ és diferenciable en $t$ i $Dc(t)\,h = c'(t)\,h$

$$\begin{aligned} Dc(t) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ h &\longmapsto c'(t) \cdot h \end{aligned}$$

Si considerem $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable, podem transportar la corba per $f$

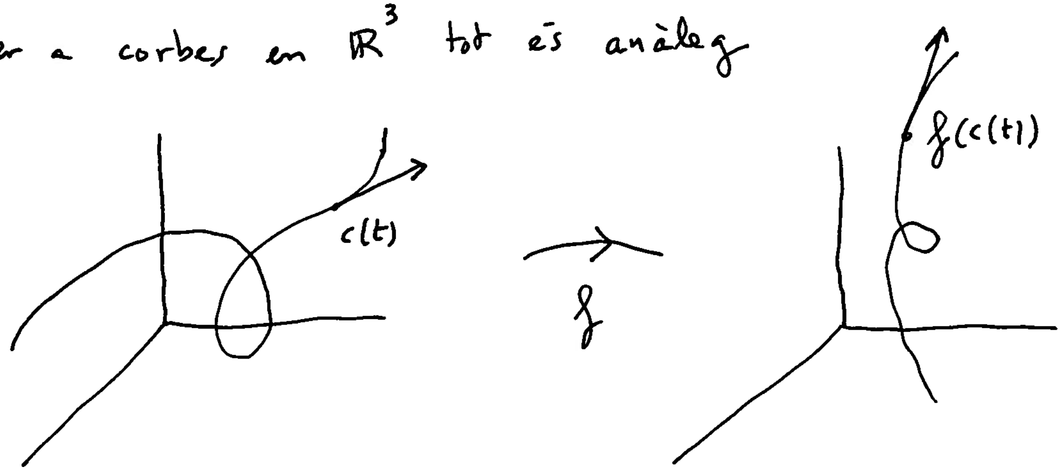



La corba transportada és $\tilde{c}(t) = f(c(t))$

El vector tangent a $\tilde{c}(t)$ és $\tilde{c}'(t) = D\tilde{c}(t) = D(f \circ c)(t) = Df(c(t))\,Dc(t) = Df(c(t))\,c'(t)$

Per tant $f$ transporta els punts i $Df$ transporta els vectors tangents

Per a corbes en $\mathbb{R}^3$ tot és anàleg



## Derivades direccionals

Recordem la def. de derivada parcial, $f: M \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

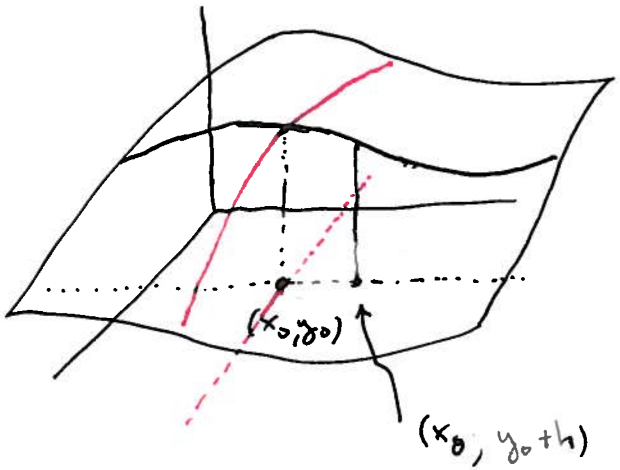
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f((x_0,y_0)+h\,e_1) - f(x_0,y_0)}{h}$$

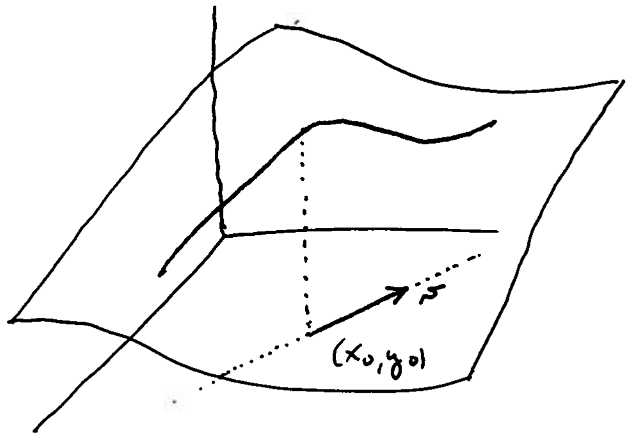
**Def** Sigui $\vec{v}$ un vector unitari : $\|\vec{v}\| = 1$, $f: M \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in M$

La derivada direccional de $f$ en $x_0$ en la direcció de $\vec{v}$ és

$$D_{\vec{v}} f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h\cdot\vec{v}) - f(x_0)}{h}$$

Així $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = D_{e_1} f(x_0,y_0)$



Sigui $\varphi(h) = f(x_0 + hv)$, $\quad \varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = D_v f(x_0)$$

<u>Teorema</u> Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ és diferenciable en $x_0 \in U$ llavors existeixen totes les derivades direccionals en $x_0$ i

$$D_v f(x_0) = Df(x_0)\, v = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

<u>Dem</u>

$D_v f(x_0)\ \exists$ si $\varphi$ és derivable en $0$.

$\varphi$ és derivable per la regla de la cadena:

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{g} & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & x_0 + hv & & \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

$$D_v f(x_0) = \varphi'(0) = D(f \circ g)(0) = Df(g(0))\, Dg(0)$$

$$g : I \to U, \quad g(h) = \begin{pmatrix} g_1(h) \\ \vdots \\ g_m(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0m} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \\ v_m \end{pmatrix}, \quad Dg(h) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad D_v f(x_0) = Df(x_0)\, v$$

## Gradient

**Def** Si $\exists$ les derivades parcials de $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en $x_0 \in U$

es diu gradient de $f$ en $x_0$ a

$$\text{grad } f(x_0) = \nabla f(x_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

Amb aquesta notació

$$D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v \qquad \text{(producte escalar)}$$

## Gradient i direcció de màxim creixement

De totes les direccions en que podem calcular la derivada direccional, grad $f$ és en la direcció en que la derivada és màxima:

**Teorema**

Siguin $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, $x_0 \in U$.

Si $\nabla f(a) \neq 0$, $\nabla f(a)$ és en la direcció en que $f$ creix més ràpidament

**Dem** $D_v f(a) = \nabla f(x_0) \cdot v = \| \nabla f(x_0) \| \, \|v\| \cos\theta = \| \nabla f(x_0) \| \cos\theta$

**També** $f$ decreix més ràpidament en la direcció donada per $-\nabla f(a)$.

# Gradient i recta normal a una corba

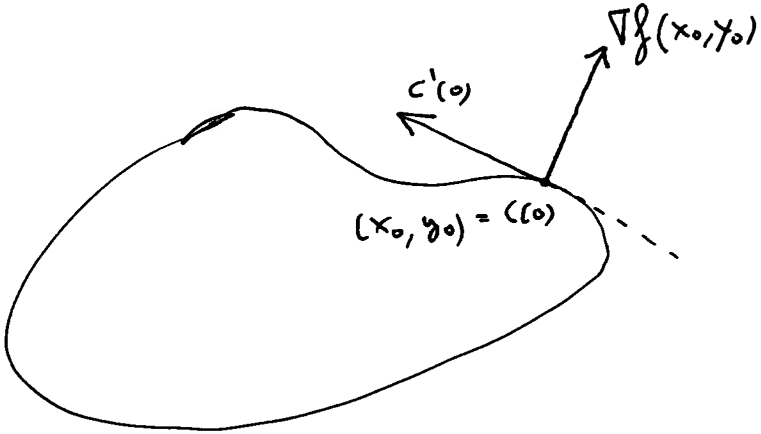
Suposem que $f(x,y) = a$ representa una corba. ($x^2+y^2=0$ no és una corba)

És una corba de nivell de $f: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sigui $(x_0,y_0)$ un punt de la corba: $f(x_0, y_0) = a$

Suposem que $f$ és de classe $C^1$.

$\nabla f(x_0,y_0)$ és un vector perpendicular a la corba en $(x_0,y_0)$




Prenem una corba $c: I \to \mathbb{R}^2$ (diferenciable)
$t \mapsto c(t)$

continguda en $f(x,y) = a$ i t.q. $c(0) = (x_0,y_0)$

Això vol dir $f(c(t)) = a$, $\forall t$

Per la regla de la cadena

$$Df(c(t))\, Dc(t) = 0 \Rightarrow Df(x_0,y_0)\, c'(0) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0,y_0) \cdot c'(0) = 0$$

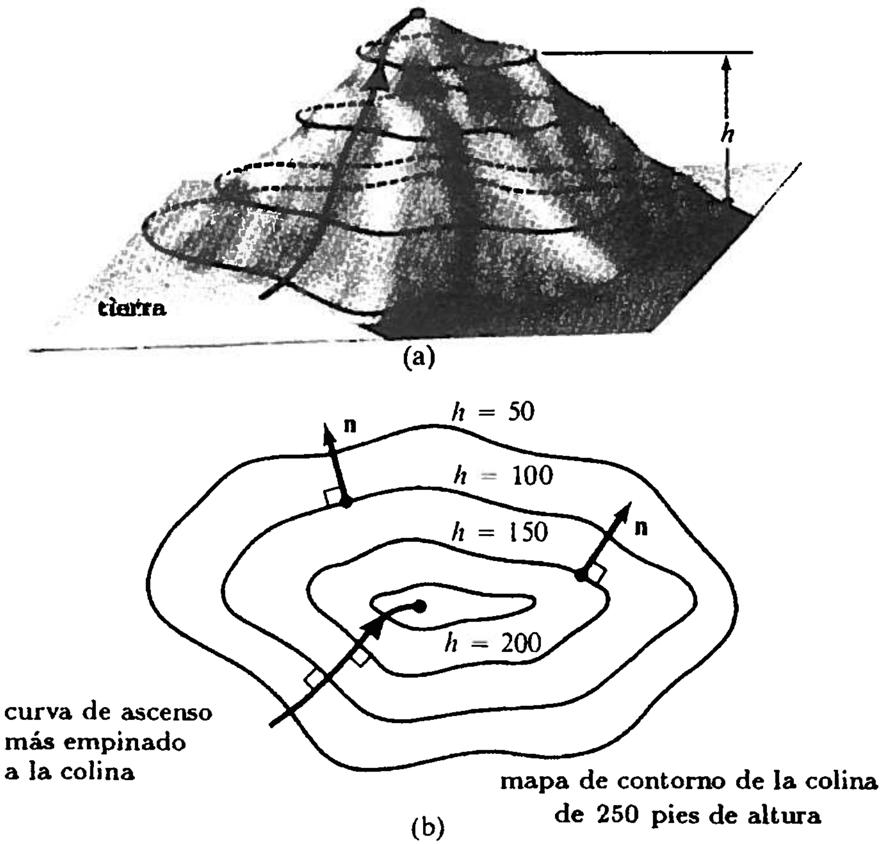



**Figura 2.5.6** Ilustración física de dos hechos (a) $\nabla f$ es la dirección de más rápido crecimiento de $f$ y (b) $\nabla f$ es ortogonal a las curvas de nivel.

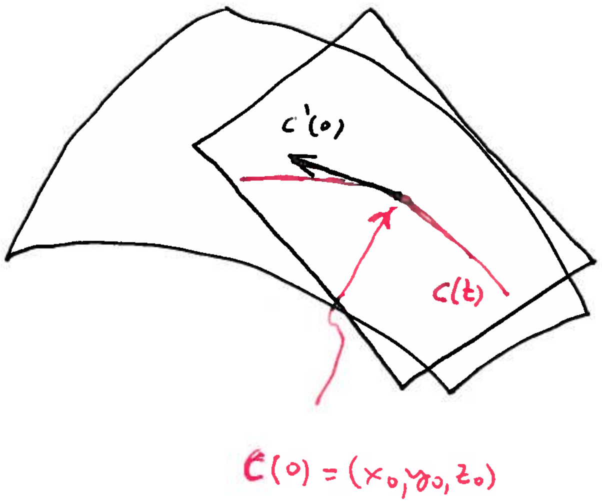
## Gradient i recta normal a una superfície

Suposem que $f(x,y,z)=a$ representa una superfície.

És una superfície de nivell de $f: U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Suposem $f$ és $C^1$

Sigui $(x_0,y_0,z_0)$ un punt de la superfície: $f(x_0,y_0,z_0)=a$.

Llavors $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ és perpendicular a la superfície en $(x_0,y_0,z_0)$




Sigui $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba continguda en la superfície $(f(c(t))=a, \ \forall t)$

t.q. $c(0)=(x_0,y_0,z_0)$

$c'(0)$ està contingut en el pla tg

Derivem $f \circ c = a$ :

$$Df(c(t))\, c'(t) = 0 \Rightarrow \nabla f(c(t)) \cdot c'(t) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot c'(0) = 0$$

Eq pla tg $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0)=0}$ (les derivades avaluades en $(x_0,y_0,z_0)$)