UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

TERCER CONTROL DE TEORIA

Programació Lineal i Entera, curs 2014-15
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM :

	Temps estimat	Punts	Puntuació
Test	15min	2pt	
Exercici 1	75min	a) 2pt	
		b) 2pt	
		c) 2pt	
		d) 2pt	
Total	90min	10 pt	

- **Prohibida la presència de mòbils durant la prova.**
- **Copiar o facilitar la còpia implica suspendre el control.**

TEST (2 punts / 15min / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a), b)** i **c)** si és certa (**Si**) o falsa (**No**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. Si x_1, x_2 i x_3 representen les variables binàries de selecció d'un projecte.

a) **Si** / **No** $x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$ imposa que es seleccionaran com mínim dos projectes. (S)

b) **Si** / **No** $x_1 + x_2 \leq 1$ imposa que es seleccionarà un dels dos projectes 1 o 2. (N)

c) **Si** / **No** $x_2 \geq x_3$ imposa que no es seleccionarà x_2 a no ser que es seleccioni x_3. (S)

TEST 2. Considereu el problema (PE) de maximització i la seva relaxació lineal (RL):

a) **Si** / **No** $K_{PE} \subseteq K_{RL}$. (S)

b) **Si** / **No** $c'x_{RL} \leq c'x_{PE}$, $\forall x_{RL} \in K_{RL}$, $\forall x_{PE} \in K_{PE}$. (N)

c) **Si** / **No** $x^*_{PE} \in K_{RL} \Rightarrow z^*_{PE} = z^*_{RL}$. (N)

TEST 3. Donat un problema de PLE (PE) de minimització, la formulació vàlida $(PE1)$ és més forta que la formulació vàlida $(PE2)$

d) **Si** / **No** Si $z^*_{PE1} \leq z^*_{PE2}$. (N)

e) **Si** / **No** Si $z^*_{RL1} \geq z^*_{RL2}$. (N)

f) **Si** / **No** Si $K_{RL1} \subset K_{RL2}$. (S)

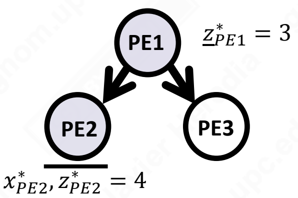
TEST 4. El tall de Gomory $x_{B(i)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor x^*_{B(i)} \rfloor$ associat a (PE) i x^*_{RL}:

a) **Si** / **No** És una de les constriccions que defineixen (RL). (N)

b) **Si** / **No** És una constricció que no satisfà x^*_{PE}. (N)

c) **Si** / **No** És una constricció que forma part de la formulació ideal de (PE). (N)

TEST 5. El següent arbre d'exploració del B&B d'un problema $(PE1)$ de minimització mostra la situació després de realitzar dues iteracions i trobar l'òptim del subproblema $(PE2)$:



a) **Si** / **No** Es pot assegurar que x^*_{PE2} és la solució de (PE1). (N)

b) **Si** / **No** $(PE2)$ i $(PE3)$ són una separació de $(PE1)$. (S)

c) **Si** / **No** L'òptim de (PE1) es pot trobar a K_{PE3}. (S)

NOM :

PROBLEMA 1. **(8 punt / 75min / amb apunts i calculadora.)**

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases} \min & x_2 \\ \text{s.a.:} & 2x_1 \quad -2x_2 \quad \leq \quad 1 \\ & 2x_1 \quad +2x_2 \quad \geq \quad 3 \\ & x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) **(2 punts)** Realitzeu la primera iteració de l'algorisme de **plans secants de Gomory** resolent la relaxació lineal $(RL1)$ gràficament.

b) **(3 punts)** Obtingueu la solució òptima del problema relaxat de la **segona iteració de Gomory** per reoptimització amb l'algorisme del símplex dual a partir de x^*_{RL1}.

c) **(3 punts)** Resoleu el problema (PE) aplicant l'**algorisme de ramificació i tall (Branch&Cut)** d'acord amb els següents criteris:

- Resoleu **totes** les relaxacions lineal gràficament.
- Introduïu **un** tall de Gomory (podeu aprofitar els càlculs fets a l'apartat a)).
- Preneu com a variable de separació x_1 abans que x_2.
- Exploreu primer la branca associada a la fita $x_i \leq \lfloor x^*_{RL_i} \rfloor$.

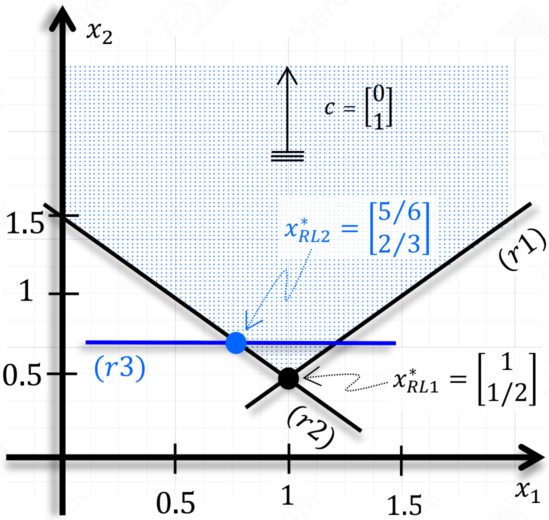
Indiqueu molt clarament les diferents passes de l'algorisme.

NOM :

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

Aparat a)

1a iteració Gomory:



$x_2 - x_3 - x_4 \le 0 \rightarrow x_2 \ge \frac{2}{3}\ (r3)$

- Solució òptima de la relaxació lineal de $(PE1)$, trobada gràficament: $x^*_{RL1} = \begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1/2\end{bmatrix}$
- x_{RL1} no entera $\Rightarrow$ tall de Gomory: es selecciona $x_2 = 1/2$

$$\mathcal{B} = \{1,2\}\,;\ B = \begin{bmatrix}2 & -3\\2 & 2\end{bmatrix};\ B^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix};x_B = \begin{bmatrix}1\\1/2\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} = \{1,2\}; A_N = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}; V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$x_2 + \lfloor v_{23}\rfloor x_3 + \lfloor v_{24}\rfloor x_4 \le \lfloor x_2^*\rfloor$$

$$x_2 + \left\lfloor -\frac{1}{4}\right\rfloor x_3 + \left\lfloor -\frac{1}{4}\right\rfloor x_4 \le \left\lfloor \frac{1}{2}\right\rfloor\ ;\ \boxed{x_2 - x_3 - x_4 \le 0\ (r3)}$$

Apartat b)

Solució òptima del problema relaxat de la segona iteració de Gomory per reoptimització amb l'algorisme del símplex dual a partir de x^*_{RL1}:

- Problema relaxat de la segona iteració de Gomory:

$$(RL2)\begin{cases}\min & x_2 \\ \text{s.a.:} & \\ & \begin{array}{cccccccl} 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & = & 1 & (r1)\\ 2x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & = & 3 & (r2)\\ & x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 0 & (r3)\\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \ge & 0 & \end{array}\end{cases}$$

- Reoptimització amb el símplex dual a partir de x^*_{RL1} per adició de $x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1\ (r3) \rightarrow$ $a_{m+1} = a_3 = [0 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1]$, $a_{B,3} = [0 \quad 1]$
  - **Càlculs previs:** $\mathcal{B} = \{1,2,5\}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix}B^{-1} & 0\\-a_{B,3}B^{-1} & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/4 & 1/4 & 0\\-1/4 & 1/4 & 0\\1/4 & -1/4 & 1\end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix}1\\1/2\\-1/2\end{bmatrix}$.

$$\mathcal{N} = \{3,4\}, A_N = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}, r' = r'_{RL1} = [0 \quad 0] - [-1 \quad 0]\begin{bmatrix}1/4 & 1/4\\-1/4 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix} \ge 0$$

  - **Símplex dual, 1a iteració**: $\mathcal{B} = \{1,2,5\}, \mathcal{N} = \{3,4\}$
    - Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b. de sortida p :

$$x_B = \begin{bmatrix}1\\1/2\\-1/2\end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 5 \text{ v.b. sortint}}$$

    - Identificació de problema (D) il·limitat :

$$d'_{r_N} = \beta_3 A_N = [1/4 \quad -1/4 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix} = [-3/4 \quad -3/4] \ngeq 0$$

- Sel. v.n.b. d'entrada q:

$$\theta_D^* = \min_{j\in\mathcal{N},\, d_{r_{N_j}}<0}\left\{-r_j/d_{r_{N_j}}\right\} = \min\left\{\frac{-1/4}{-3/4}, \frac{-1/4}{-3/4}\right\} = 1/3 \Rightarrow \boxed{q=3}$$

també s'hauria pogut triar $q = 4$.

- Canvi de base i actualitzacions:

$$\mathcal{B} \leftarrow \{1,2,3\}, B = \begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \rightarrow Bx_B = b, \begin{cases}2x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 1\\ 2x_1 & +2x_2 & & = & 3\\ & x_2 & -x_3 & = & 0\end{cases} \rightarrow x_B = \begin{bmatrix}5/6\\ 2/3\\ 2/3\end{bmatrix}$$

– **Símplex dual, 2a iteració**: $\mathcal{B} = \{1,2,3\}, \mathcal{N} = \{4,5\}$

- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_B \geq 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{òptim}}$

- $\boxed{x_{RL2}^* = \begin{bmatrix}5/6\\ 2/3\end{bmatrix}}$ Alternativament, si s'hagués pres x_4 com a variable d'entrada, la solució seria $x_{RL2}^* = \begin{bmatrix}7/6\\ 2/3\end{bmatrix}$.

Apartat c)

Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de ramificació i tall (Branch&Cut):

$$(PE1)\begin{cases}\min & x_2 \\ \text{s.a.:} \\ & 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & = & 1 & (r1)\\ & 2x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & = & 3 & (r2)\\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0, x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de $(RL1)$ amb un tall de Gomory** (dels apartats anteriors):

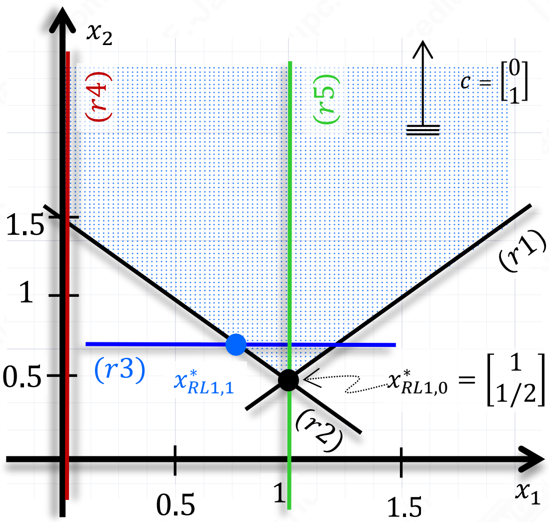
$$x_{RL1,1}^* = [5/6 \quad 2/3]', z_{RL1,1}^* = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{z}_{PE1}^* := \left\lceil\frac{2}{3}\right\rceil = 1$$

- **Eliminació:** no es pot.
- **Separació:**

$$x_2^* = 5/6$$

$$\rightarrow\begin{cases}(PE2) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + (r3) + \mathbf{x_1} \leq \left\lfloor\frac{5}{6}\right\rfloor = \mathbf{0}\ (\mathbf{r4})\\ (PE3) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + (r3) + \mathbf{x_1} \geq \left\lceil\frac{5}{6}\right\rceil = \mathbf{1}\ (\mathbf{r5})\end{cases}$$

$$L \leftarrow \{(PE2),(PE3)\}$$



Iteració 2: $L = \{(PE2),(PE3)\}, \underline{z}_{PE1}^* = 1, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE2)$.
- **Resolució de $(RL2)$ amb un tall de Gomory**: prenem l'expressió $(r3)$ $3x_2 - x_5 = 2$ per facilitar els càlculs

$$(RL2{,}0)\begin{cases} \min & x_2 \\ \text{s.a.:} \\ (r1) & 2x_1 \quad -2x_2 \quad +x_3 \qquad\qquad\qquad\qquad = 1 \\ (r2) & 2x_1 \quad +2x_2 \qquad\quad -x_4 \qquad\qquad\quad = 3 \\ (r3) & \qquad\quad 3x_2 \qquad\qquad\qquad -x_5 \qquad = 2 \\ (r4) & x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +x_6 = 0 \\ & x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4, \; x_5, \; x_6 \ge 0 \end{cases}$$

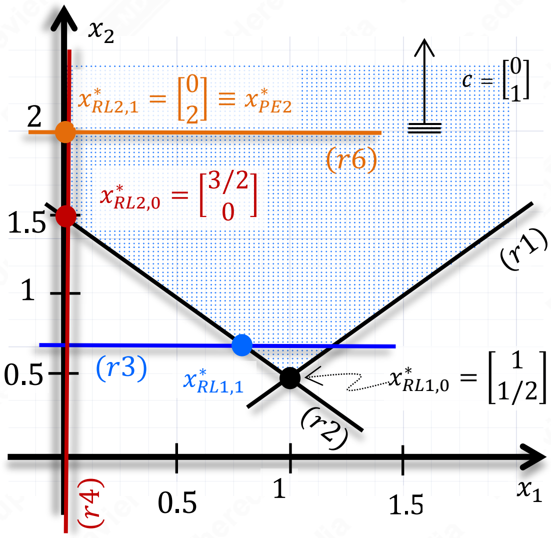
- Gràficament veiem que el problema $(RL2{,}0)$ es equivalent a: $\min_{x_2}\{x_2|2x_2 \ge 3\}$ que, expressat en forma estàndard és:

$$(RL2{,}0)\begin{cases} \min & x_2 \\ \text{s.a.:} \\ (r2) & 2x_2 \quad -x_4 \quad = \quad 3 \\ & x_2, \quad x_4, \quad \ge \quad 0 \end{cases}$$

- Resolució de $(RL2{,}0)$: $x^*_{RL2,0} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \end{bmatrix}, z^*_{RL2,0} = 0$
- Tall de Gomory sobre $x^*_{RL2,0}$ associat a x_2:
  - $\mathcal{B} = \{2\}, B = [2], B^{-1} = [1/2]$
  - $A_N = [-1], V = B^{-1}A_N = [-1/2]$
  - $x_2 + \left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor x_4 \le \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \to x_2 - x_4 \le 1$

    $\to \boldsymbol{x_2 \ge 2}$ **(r6)**
- Resolució de (RL2,1) = (RL2,0) + (r5):

  $x^*_{RL2,1} = [0 \quad 2]', z^*_{RL2,1} = 2 \Rightarrow \underline{z}^*_{PE2} := 2$



- **Eliminació:** $x^*_{RL2,1} = [0 \quad 2]' \subset K_{PE2}$: $x^*_{PE2} = [0 \quad 2]' \Rightarrow$ s'elimina $(PE2)$:
  - $z^* \leftarrow z^*_{PE2} = 2, x^* \leftarrow x^*_{PE2}, L \leftarrow L\backslash\{(PE2)\} = \{(PE3)\}$
  - $z^* = 2 > \underline{z}^*_{PE1} = 1 \Rightarrow$ no podem eliminar $(PE3)$

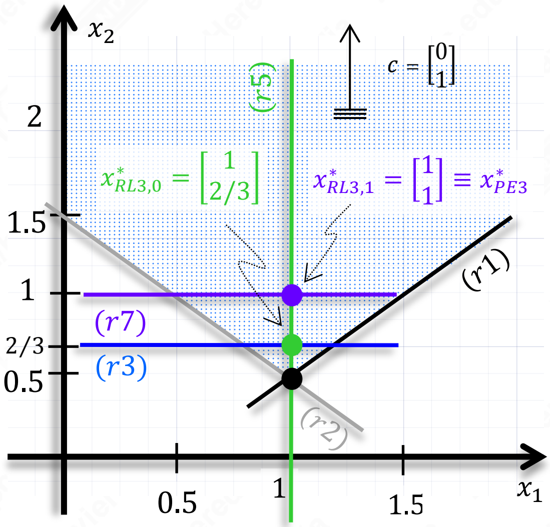
Iteració 3: $L = \{(PE3)\}, \underline{z}^*_{PE1} = 1, z^* = 2$

- **Selecció**: $(PE3)$.
- **Resolució de $(RL3)$ amb un tall de Gomory**:

NOM :

$$(RL3{,}0)\begin{cases}\min & x_2 \\ \text{s.a.:} \\ (r1) & 2x_1 \quad -2x_2 \quad +x_3 & = 1 \\ (r2) & 2x_1 \quad +2x_2 \quad -x_4 & = 3 \\ (r3) & 3x_2 \quad -x_5 & = 2 \\ (r5) & x_1 \quad -x_7 & = 1 \\ & x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4, \; x_5, \; x_7 & \geq 0\end{cases}$$

– Gràficament veiem que la restricció $(r2)$ és redundant, i que el problema $(RL3{,}0)$ es equivalent a:



$$(\text{RL3,0})\begin{cases}\min & x_2 \\ \text{s.a.:} \\ (r1) & 2x_1 \quad -2x_2 \quad +x_3 & = 1 \\ (r3) & 3x_2 \quad -x_5 & = 2 \\ (r5) & x_1 \quad -x_7 & = 1 \\ & x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_5, \; x_7 & \geq 0\end{cases}$$

– Resolució de $(RL3{,}0)$: $x^*_{RL3,0} = \begin{bmatrix}1\\2/3\end{bmatrix}, z^*_{RL3,0} = \frac{2}{3}$.

– Tall de Gomory sobre $x^*_{RL3,0}$ associat a x_2:

- $\mathcal{B} = \{1,2,3\}, B = \begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

- $B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 1 & \frac{2}{3} & -2\end{bmatrix}, \mathcal{N} = \{5,7\}, A_{\mathcal{N}} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, V = B^{-1}A_{\mathcal{N}} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ -\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{2}{3} & 2\end{bmatrix}$.

Alternativament podem trobar les columnes de V, V_i, resolent els sistemes $BV_i = A_{N_i}$:

$$\left.\begin{array}{l} BV_1 = A_{N_1} = A_5; \begin{cases} 2v_{15} \quad -2v_{25} \quad +v_{35} & = 0 \\ 3v_{25} & = -1 \\ v_{15} & = 0 \end{cases} \rightarrow V_1 = \begin{bmatrix}0\\-1/3\\-2/3\end{bmatrix} \\ BV_2 = A_{N_2} = A_7; \begin{cases} 2v_{17} \quad -2v_{27} \quad +v_{37} & = 0 \\ 3v_{27} & = 0 \\ v_{17} & = -1 \end{cases} \rightarrow V_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow V = \begin{bmatrix}0 & -1\\ -\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{2}{3} & 2\end{bmatrix}$$

- $x_2 + \lfloor -1/3 \rfloor x_5 + \lfloor 0 \rfloor x_7 \leq \lfloor 2/3 \rfloor \rightarrow x_2 - x_5 \leq 0 \xrightarrow{(r3)} \boxed{\mathbf{x_2 \geq 1 \;\; (r7)}}$

– Resolució de $(\text{RL3,1}) = (\text{RL3,0}) + (\text{r7})$: $\text{x}^*_{\text{RL3,1}} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \text{z}^*_{\text{RL3,1}} = 1 \Rightarrow \underline{\text{z}}^*_{\text{PE3}} := 1$

- **Eliminació:** $x^*_{RL3,1} = [1 \quad 1]' \subset K_{PE3}: x^*_{PE3} = [1 \quad 1]' \Rightarrow$ s'elimina $(PE3)$:
  – $z^* \leftarrow z^*_{PE3} = 1, x^* \leftarrow x^*_{PE3}, L \leftarrow L \backslash \{(PE3)\} = \emptyset$

Iteració 3:

$L = \emptyset \Rightarrow \boxed{x^*_{PE1} = x^* = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \; z^*_{PE1} = z^* = 1}$