Exercicis de Teoria de Programació Lineal i Entera

(v6.0 - 02/17)

F.-Javier Heredia

http://gnom.upc.edu/heredia

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

Exercicis de Teoria de Programació Lineal i Entera.

F.-Javier Heredia (f.javier.heredia@upc.edu, http://gnom.upc.edu/heredia)

Group on Numerical Optimization and Modeling

Departament d'Estadística i Investigació Operativa, UPC

V6.0, febrer de 2017.

Certs exercicis de la col·lecció utilitzen codis i sortides del procediment `OPTMODEL` del paquet `SAS/OR` (http://support.sas.com/rnd/app/or/mp/OPTMODEL.html)

L'autor agrairia ésser informat de les possibles errates a l'adreça f.javier.heredia@upc.edu

INDEX

EXERCICIS RECOMENATS GRAU D'ESTADÍSTICA

Fonaments de programació lineal		
Forma estàndard i assumpció rang complet:	EXERCICI 10	EXERCICI 12
Solucions bàsiques:	EXERCICI 13 EXERCICI 18	EXERCICI 14
Algorisme del símplex		
Direccions bàsiques factibles:	EXERCICI 20 EXERCICI 22	EXERCICI 21 EXERCICI 26
Algorisme del símplex primal i Fase I:	EXERCICI 27 EXERCICI 39	EXERCICI 34 EXERCICI 41
Dualitat i anàlisi de sensibilitat		
Formulació problemes duals:	EXERCICI 46	EXERCICI 56 b).
Teoremes de dualitat i relacions bases (P)-(D):	EXERCICI 50 EXERCICI 59 a), b) EXERCICI 67 b), c), d) EXERCICI 70 a), b), c)	EXERCICI 53 EXERCICI 66 EXERCICI 68 d) , e)
Anàlisi de sensibilitat i símplex dual:	EXERCICI 56 c), d) EXERCICI 67 d), e). EXERCICI 62 a EXERCICI 65 EXERCICI 68 a), b), c).	EXERCICI 59 c), d). EXERCICI 58. EXERCICI 60 b). EXERCICI 70 d)-g)
Programació lineal entera		
Algorisme de ramificació i poda, resolució gràfica:	EXERCICI 81 EXERCICI 85	EXERCICI 83
Algorisme de plans secants amb resolució gràfica:	EXERCICI 89 EXERCICI 97 a)	EXERCICI 90
Algorisme de ramificació i tall amb resolució gràfica:	EXERCICI 93 EXERCICI 97 c)	EXERCICI 94
Algorisme de plans secants amb símplex dual:	EXERCICI 91 EXERCICI 97 b)	EXERCICI 92
Algorisme de ramificació i tall símplex dual:	EXERCICI 99 EXERCICI 101	EXERCICI 100 EXERCICI 102

EXERCICIS RECOMENATS GRAU DE MATEMÀTIQUES

Formulació de problemes de programació lineal		
	EXERCICI 10 EXERCICI 6	EXERCICI 2
Fonaments de programació lineal		
Convexitat, forma estàndard, assumpció de rang complet i solucions bàsiques:	EXERCICI 9 EXERCICI 11 EXERCICI 13	EXERCICI 10 EXERCICI 12
Algorisme del símplex		
Direccions bàsiques factibles i propietats de les solucions bàsiques factibles:	EXERCICI 23 EXERCICI 26	EXERCICI 25
Algorisme del símplex primal:	EXERCICI 27	EXERCICI 28
Fase I del símplex:	EXERCICI 36 EXERCICI 42	EXERCICI 39 EXERCICI 43
Dualitat i anàlisi de sensibilitat		
Formulació problemes duals:	EXERCICI 46 EXERCICI 49	EXERCICI 48
Teoremes de dualitat, símplex dual i anàlisi de sensibilitat:	EXERCICI 50 EXERCICI 53	EXERCICI 51 EXERCICI 67
Formulació de problemes de programació lineal entera		
	EXERCICI 74	EXERCICI 75
Programació lineal entera		
Algorisme de ramificació i poda, resolució gràfica:	EXERCICI 81	EXERCICI 83
Algorisme de plans secants amb resolució gràfica:	EXERCICI 89	EXERCICI 90
Algorisme de ramificació i tall amb resolució gràfica:	EXERCICI 93	EXERCICI 94
Algorisme de plans secants amb símplex dual:	EXERCICI 91	EXERCICI 92
Algorisme de ramificació i tall amb símplex dual:	EXERCICI 99	EXERCICI 101

FORMULACIÓ DE PROBLEMES DE PROGRAMACIÓ LINEAL

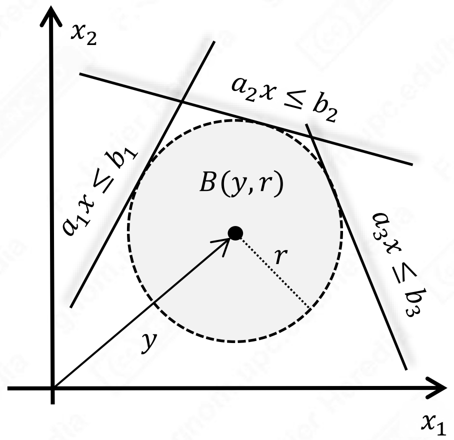
EXERCICI 1. Centre de Chebychev.

Considereu el poliedre $P = \{x \in \mathbb{R}^n | a_j x \leq b_j, j = 1,2, \dots, m\}$. Una bola amb centre y i radi r es defineix com el conjunt de tots els punts dins d'una distància Euclidiana r de y:

$$B(y,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - y\|_2 \leq r\}.$$

Formuleu el problema de programació lineal que permet obtenir el centre y i radi r de la bola de radi màxim inscrita en P: $\max\{r \in \mathbb{R}^+ | B(y,r) \subset P\}$

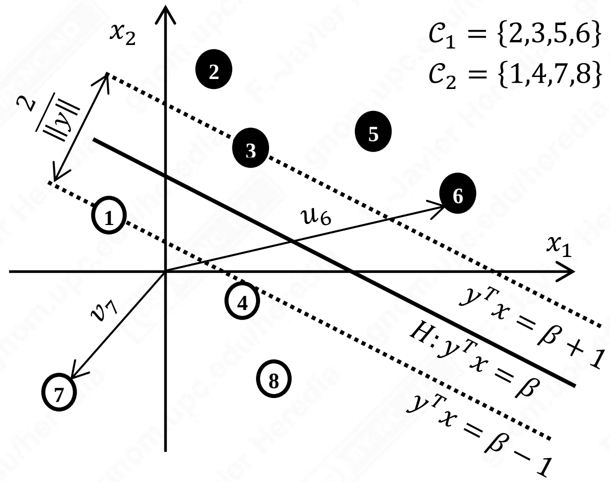
El centre y d'aquesta bola de radi màxim es coneix com a *centre de Chebychev*. (la figura adjunta mostra un cas per $n = 2$ i $m = 3$).



(SOLUCIÓ EXERCICI 1)

EXERCICI 2. Support Vector Machines.

Una de les tècniques més populars d'aprenentatge supervisat per a la classificació automàtica són les conegudes com a *Support Vector Machines* (SVM). Suposeu que representem a m individus en funció del valor de n atributs a través de vectors d'un espai de dimensió n. Els individus estan separats en dues classes $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$. A la gràfica adjunta es representen $m = 8$ individus amb $n = 2$ atributs (x_1, x_2), separats en dos classes. Per exemple, x_1 i x_2 poden ser el nivell en sang de dos marcadors d'una certa malaltia, $\mathcal{C}_1$ el conjunt de mesures en individus sans i $\mathcal{C}_2$ el conjunt de mesures en individus malats. Sigui $u_j, j \in \mathcal{C}_1$, i $v_j, j \in \mathcal{C}_2$, els vectors d'atributs de cada individu.



Les tècniques SVM es basen en trobar un hiperplà $H: y^T x = \beta$ que separi les observacions de les dues classes $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ i que ens permeti classificar dins de cada classe noves observacions.

Matemàticament consisteix en la cerca d'un vector normal $y \in \mathbb{R}^n$ i l'escalar β tals que:

$$\begin{cases} u_j^T y & \geq & \beta + 1 & j \in \mathcal{C}_1 \\ v_j^T y & \leq & \beta - 1 & j \in \mathcal{C}_2 \end{cases}$$

Formuleu el problema de programació lineal en forma estàndard que permet o bé trobar un hiperplà H que separi les observacions de les dues classes $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$, o bé determinar que no existeix tal hiperplà separador.

(SOLUCIÓ EXERCICI 2)

EXERCICI 3. Coalco.

L'empresa minera Coalco produeix carbó a dues mines per a dos clients. La següent taula mostra, per a cada mina, les següents dades: cost per tona transportada entre cada mina i cada client; cost per tona de carbó produïda; producció màxima i contingut en cendra i sulfur per a cada tona de carbó produïda. També s'indica la demanda de cada client.

Cost de transport (€/Tm)	Client 1	Client 2	Cost de producció (€/Tm)	Capacitat (Tm)	Contingut en cendra (Tm/Tm carbó)	Contingut en sulfur (Tm/Tm carbó)
Mina 1	4	6	50	120	0.1	0.04
Mina 2	9	6	55	100	0.05	0.09
Demanda (Tm)	90	110				

Cada client pot rebre carbó d'una única mina o de totes dues, mesclant, en aquest últim cas, els dos tipus de carbó rebut. En tot cas, la composició del carbó rebut, ja sigui d'una única mina o per mescla de totes dues, no pot contenir més d'un 8% de cendres i d'un 7% de sulfur.

Formuleu, un problema de programació lineal que optimitzi la forma en que Coalco ha de satisfer la demanda dels seus clients i resoleu-lo amb OPTMODEL.

(SOLUCIÓ EXERCICI 3)

EXERCICI 4. CSL.

L'empresa de consultoria CSL ha d'encetar en els pròxims 5 mesos un conjunt de projectes que necessitaran les següents quantitats d'hora de consultor qualificats per mes:

	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig
Demanda (h)	3000	4000	7500	10000	15000

Al començament de gener CSL té en plantilla 35 consultors qualificats que treballen 160 hores mensuals cadascú. Aquests consultors qualificats han de compaginar les tasques de consultoria amb la de formació dels nous consultors que s'hagin de contractar per tal de satisfer les hores de consultoria dels pròxims cinc mesos.

El període de formació d'un consultor recent contractat és de dos mesos, i requereix 50 hores de supervisió d'un consultor qualificat durant el primer mes de formació, i 10 hores durant el segon mes. Un consultor en formació no es pot dedicar a tasques de consultoria.

Cada consultor qualificat cobra 1800 euros/mes. El sou mensual dels consultors en formació és de 900 euros.

Degut a l'alta demanda de consultors qualificats, és habitual que aquests marxin de CSL a altres consultories. Es preveu que, al final de cada mes, un 5%, com a mínim, dels consultors qualificats, inclosos els que s'acaben de formar, deixin CSL.

Formuleu el problema de PL que permet aproximar el nombre de nous consultors a contractar durant els pròxims cinc mesos per tal de fer front a la demanda d'hores de consultoria tot minimitzant els costos de personal.

(SOLUCIÓ EXERCICI 4)

EXERCICI 5. Hospital del Mar.

l'Hospital del Mar té un problema amb el laboratori d'anàlisi de mostres. El laboratori té disponibles tres màquines que poden analitzar diferents mostres de fluids. Darrerament la demanda d'anàlisis de sang s'ha incrementat de tal forma que el director del laboratori té problemes per tenir els resultats a temps i fer front alhora a les analítiques de les restes de fluids. El laboratori treballa amb 5 tipus diferents de mostres fluids. Cada màquina pot ser usada per a analitzar qualsevol tipus de mostra, però el temps (minuts) que triga cadascuna depèn del tipus de mostra, segons s'indica a la següent taula:

	Màquina			
Temps de processat (minuts/ml)	A	B	C	Volum (ml)
Mostra 1	3	5	2	80
Mostra 2	4	3	5	75
Mostra 3	4	5	3	80
Mostra 4	5	4	3	12
Mostra 5	3	5	4	60

Cada màquina es pot usar un màxim de 8h al dia. Les mostres recollides un dia donat arriben al laboratori i esperen durant la nit a ser processades a l'endemà. Al començament de cada dia, el director del laboratori ha de determinar com repartir les mostres entre les diferents màquines. La quantitat de mostres a analitzar aquest matí s'indica a la darrera columna de la taula anterior.

a) Formuleu el problema de PL que permet trobar com distribuir de forma òptima les mostres entre les màquines i resoleu-lo amb OPTMODEL.
b) Considereu ara que es vol obtenir la distribució òptima de mostres tenint en compte les següents limitacions:
   b.1. No es vol que cap mostra ocupi més del 50% del temps total de funcionament d'una màquina.
   b.2. No es vol que cap màquina realitzi més del 40% de volum total de les proves:.

   Formuleu les constriccions lineals addicionals que permeten incloure en el model aquestes dues condicions.

(SOLUCIÓ EXERCICI 5Hospital del Mar.)

EXERCICI 6. Pelletier.

L'empresa Pelletier Corporation ha detectat que no tindrà prou espai de magatzem durant els pròxims 5 mesos. Les necessitats addicionals d'espai durant els pròxims 5 messos són:

Mes	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Espai adicional necessàri (1000 ft^2)	25	10	20	10	5

Per tal de cobrir aquestes necessitats d'espai, l'empresa preveu haver de llogar espai addicional. Una empresa local d'emmagatzematge ha acceptat llogar a Pelletier tant espai com necessiti durant el temps que necessiti. El preu de lloguer depén del temps de lloguer, segons indica la següent taula

Durada del contracte (en mesos)	1	2	3	4	5
Cost per cada 1000 ft^2 llogat	€300	€525	€775	€850	€975

Pelletier disposa de la llibertat de decidir al començament de cada mes quin contracte vol establir. Per exemple, la companyia podria decidir al començament del mes 1 llogar 5000 ft^2 durant 4 mesos i llogar 10000 ft^2 durant 2 mesos al començament del mes 3. Formuleu el problema de PL que permet minimitzar els costos de lloguer.

(SOLUCIÓ EXERCICI 6)

EXERCICI 7. Optirisk.

La societat de capital risc OptiRisk vol gestionar de la millor forma possible el capitat necessari per a posar en marxa un nou projecte empresarial que començarà d'aquí a cinc anys, i durarà tres anys. Durant el primer any, el projecte necessitarà realitzar uns pagaments de 120.000€, amb un increment anual de 20.000€ durant els dos anys següents. OptiRisk disposa de la següent cartera de productes financers:

Valor	Venciment	Rendiment	Factor de Risc
A	1 any	1.0%	1
B	2 anys	3.5%	3
C	3 anys	4.0%	6
D	4 anys	5.0%	8

D'acord amb la informació de la taula, considerarem que només es pot invertir en un valor l'any següent del venciment. Per exemple, només es pot invertir en el producte C al començament dels anys 1, 4, 7, etc. Optirisk vol determinar el capital mínim necessari a invertir al començament del primer any en els diferents productes per tal de fer front a les despeses previstes del nou projecte sense que el valor del risc promig ponderat del capital invertit a cada any superi el factor 2.5. El rescat i reinversió de capital al llarg del període de 8 anys es fa de forma que al començament del cada any:

i. Es rescata el capital de les inversions que vencen aquest any.
ii. Es reserva el diner necessari per a realitzar els pagament, si es que n'hi ha.
iii. Amb els diners sobrants, es decideix la quantitat a invertir en les inversions disponibles aquell any.

Aquesta estratègia d'inversió es pot representar a través del graf de flux de caixa representat a la Figura 1, on c repressenta el capital inicial, x_{ij}^k les quantitats invertides en cada producte I p_j els pagaments deguts.

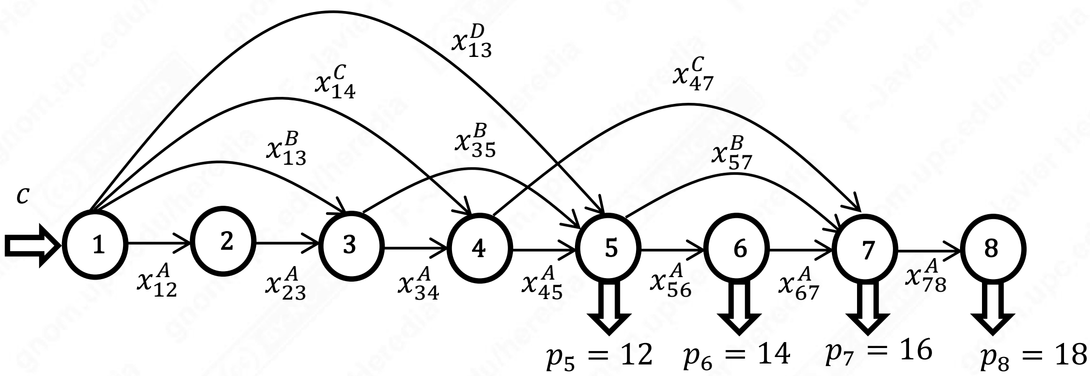


Figura 1: graf del problema de flux de caixa Optirisk.

Formuleu el problema d'Optirisk com a problema de programació lineal completament parametritzat.

(SOLUCIÓ EXERCICI 7)

FONAMENTS DE PROGRAMACIÓ LINEAL

EXERCICI 8. Test fonaments de programació lineal

TEST 1. Un politop és:

a) V / F El poliedre d'un problema (P) en forma estàndard.
b) V / F El poliedre d'un problema (P) amb solució única.
c) V / F Un poliedre no buit i afitat.

TEST 2. Sigui el problema de (P) $\min\{c'x|x \in P\}$, P politop. Llavors:

a) V / F Tots els punts extrems són òptims.
b) V / F Cap punt extrem és òptim.
c) V / F Algun punt extrem és òptim.

TEST 3. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}$:

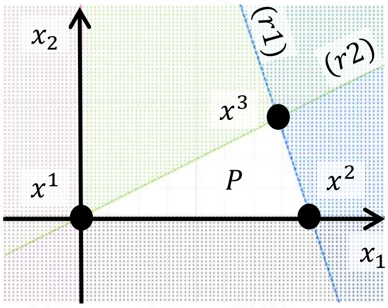
a) V / F Es pot assegurar que és un poliedre.
b) V / F Es pot assegurar que és un politop.
c) V / F Expressa de la regió factible de qualsevol problema de programació lineal.

TEST 4. Diem que un conjunt $S \subset \mathbb{R}^n$ és convex si:

a) V / F $\forall x, y \in S, \forall\lambda \in]0,1[: \lambda x + (1-\lambda)y \in S$
b) V / F $\forall x, y \in S, \forall\lambda \in [0,1]: \lambda x + (1-\lambda)y \in S$
c) V / F $\forall x, y \in S, \forall\lambda \in [0,1]: (1-\lambda)x + \lambda y \in S$

TEST 5. Considereu el següent problema (PL) i el seu politop factible P:

$$(PL)\begin{cases} \min z = & -4x_1 & +x_2 & & \\ s.a.: & 3x_1 & +x_2 & \leq 6 & (r1) \\ & -x_1 & +2x_2 & \leq 0 & (r2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases}$$



a) V / F El punt extrem x^1 està associat a la base a la base $\mathcal{B} = \{1,3\}$.
b) V / F El punt extrem x^1 està associat a la base a la base $\mathcal{B} = \{3,2\}$.
c) V / F El problema (P) té 3 solucions bàsiques.

TEST 6. Segons el teorema d'optimalitat dels punts extrems, si P és no fitat llavors:

a) V / F Pot no existir cap solució òptima de (PL).
b) V / F Si existeixen solucions optimes de (PL) cap d'elles serà punt extrem.
c) V / F Si existeixen solucions optimes de (PL) totes elles seran punts extrems.

TEST 7. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}$:

a) V / F És tancat i afitat.
b) V / F És un polítop

c) **V / F** Conté alguna solució bàsica factible.

TEST 8. Donat el problema $(PL)\ \min_{x\in R^n}\left\{c'x \middle| \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 0 & 4\end{bmatrix}x = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, x \geq 0\right\}$:

a) **V / F** Les bases de (PL) són $\mathcal{B} = \{1,2\}$, $\mathcal{B} = \{1,3\}$ i $\mathcal{B} = \{2,3\}$.

b) **V / F** $x_B = [x_1 \quad x_2]'$ és una solució bàsica factible.

c) **V / F** El políedre associat a (PL) té dos punts extrems.

TEST 9. Donat el problema $(PL)\ \min_{x\in R^n}\left\{c'x \middle| \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}x \leq \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ x \geq 0\right\}$:

a) **V / F** El poliedre associat a (PL) té tres punts extrems.

b) **V / F** El poliedre associat a (PL) té tres solucions bàsiques factibles

c) **V / F** Totes les solucions bàsiques de (PL) són factibles.

TEST 10. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n |\ Ax = b, x \geq 0\}$:

a) **V / F** Conté com a mínim una solució bàsica factible.

b) **V / F** Conté com a mínim una línia.

c) **V / F** És un polítop.

TEST 11. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n |\ Ax = b, x \geq 0\}$:

a) **V / F** És tancat i afitat.

b) **V / F** És un polítop

c) **V / F** Conté alguna solució bàsica factible.

TEST 12. El vector $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda^i x^i$, amb x i $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda^1, \dots, \lambda^k \in \mathbb{R}$, és combinació convexa de $x^1, \dots, x^k$ si:

a) **V / F** Si x pertany a l'embolcall convex de $x^1, \dots, x^k$.

b) **V / F** Si $\lambda^i \geq 0$.

c) **V / F** Si $\sum_{i=1}^{k} \lambda^i = 1$.

TEST 13. Els políedres no buits en forma estàndard:

a) **V / F** Poden no contenir cap punt extrem.

b) **V / F** No contenen bases degenerades.

c) **V / F** Sempre contenen alguna línia.

TEST 14. Tot punt extrem d'un políedre:

a) **V / F** Sempre té associada alguna solució bàsica factible.

b) **V / F** Sempre té associada una única solució bàsica factible.

c) **V / F** Pot tenir associada més d'una solució bàsica factible.

TEST 15. Donat el problema $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2}\left\{c'x \middle| \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}x \leq \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$:

a) **V / F** Si $c = [1 \quad 1]'$ (PL) no té solució òptima.

b) **V / F** Si $c = [1 \quad 0]'$ (PL) no té solució òptima.

c) **V / F** Si $c = [0 \quad -1]'$ (PL) no té solució òptima.

TEST 16. L'embolcall convex del conjunt finit de vectors $x^1, x^2, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$, $CH(x^1, \dots, x^k)$:

a) **V / F** És el conjunt de combinacions lineals de $x^1, x^2, \dots, x^k$.

b) **V / F** És un politop.

c) **V / F** Si $x^1, x^2, \dots, x^k$ són els punts extrems d'un políedre P, llavors $CH(x^1, \dots, x^k) \equiv P$.

TEST 17. Donat el problema $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2}\left\{c'x \middle| \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}x \geq \begin{bmatrix}1\\1/2\end{bmatrix}\right\}$:

a) **V / F** Si $c = [1 \quad 1]'$ (PL) té solució òptima única.

b) **V / F** Si $c = [1 \quad 0]'$ (PL) té solució òptima única.

c) **V / F** Si $c = [0 \quad 1]'$ (PL) té solució òptima única.

TEST 18. Considereu el problema $(PL)_e\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x|\ Ax = b, x \geq 0\}$ amb $rang(A) < m$:

a) **V / F** Si eliminem les constriccions associades a files de A linealment independents, el problema $(PL)_e$ té solució.

b) **V / F** Si eliminem les constriccions associades a files de A linealment independents, el políedre associat es conserva.

c) **V / F** Si $P_e \neq \emptyset$, el políedre Q_e resultant d'eliminar les constriccions associades a files de A linealment independents és també no buit.

(SOLUCIÓ EXERCICI 8)

EXERCICI 9. Propietats dels conjunts convexos i políedres.

Demostreu les següents propietats dels conjunts convexos i políedres:

a) La intersecció de conjunts convexos és convexa.
b) Tot políedre és un conjunt convex.
c) La combinació convexa d'un nombre finit d'elements d'un conjunt convex pertany al conjunt convex.
d) L'embolcall convex d'un conjunt finit de vectors és un conjunt convex.

(SOLUCIÓ EXERCICI 9)

EXERCICI 10. Equivalència del problema lineal en forma estàndard.

Analitzeu l'equivalència del problema $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{x_1 + x_2|x_1 + x_2 \leq 1, x \geq 0\}$ i la seva forma estàndard. En particular:

a) Representeu gràficament les regions factibles de (PL) i $(PL)_e$.
b) Comproveu que donada una solució factible de (PL) es pot trobar una solució factible $(PL)_e$ amb el mateix cost.
c) Comproveu que les solucions òptimes de tots dos problemes coincideixen.

(SOLUCIÓ EXERCICI 10)

EXERCICI 11. Assumpció de rang complet.

Es vol demostrar que l'assumpció de rang complet no afecta a l'estudi dels problemes de programació lineal, és a dir, que tot problema factible en forma estàndard es pot reduir a un problema factible en forma estàndard equivalent (mateixa funció objectiu i regió factible) on totes les constriccions d'igualtat son linealment independents. A tal efecte, considereu el problema factible en forma estàndard

$$(P)_e\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x|Ax = b, x \geq 0\}$$

amb políedre factible $P_e \neq \emptyset$ i $\mathrm{rang}(A) = k < m$. Considerem també el problema en forma estàndard

$$(Q)_e\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x|\tilde{A}x = \tilde{b}, x \geq 0\}$$

amb políedre factible Q_e, on $\tilde{A}x = \tilde{b}$ és el sistema resultant d'eliminar de $Ax = b$ totes les equacions que no son linealment independents. Demostreu que $Q_e = P_e$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 11)

EXERCICI 12. Políedre estàndard de rang no complet.

Considereu el políedre en forma estàndard

$$P_e = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{llll} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 2 \\ x_1 & +x_2 & & = 1 \\ x_1 & & +x_3 & = 1 \\ x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Comproveu gràficament que el políedre P_e es pot reduir a un políedre estàndard equivalent $Q_e \subset \mathbb{R}^3$ amb només dues constriccions d'igualtat.

(SOLUCIÓ EXERCICI 12)

EXERCICI 13. $(PL1)$: solucions bàsiques

Trobeu totes les solucions bàsiques del problema $(PL1)$ (tracteu la fita $x_2 \leq 6$ com si fos una constricció).

$$(PL1) \begin{cases} \min & z = & x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & & 2x_1 & +x_2 & \leq 8 \\ & & & x_2 & \leq 6 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 13)

EXERCICI 14. $(PL2)$: solucions bàsiques

Trobeu totes les solucions bàsiques del problema $(PL2)$.

$$(PL2) \begin{cases} \max & z = & x_1 & +2x_2 & \\ \text{s.a.:} & & 2x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & & x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 14)

EXERCICI 15. $(PL3)$: solucions bàsiques

Trobeu tres solucions bàsiques del problema $(PL3)$, indicant en cada cas si són fàctibles o no.

$$(PL3) \begin{cases} \max & z = & -5x_1 & +3x_2 & -x_3 & \\ \text{s.a.:} & & x_1 & -x_2 & +3x_3 & \leq 6 \\ & & 5x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = 15 \\ & & x_1 \geq 0 & x_2 \leq 0 & x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 15)

EXERCICI 16. **$(PL4)$: solucions bàsiques**

Trobeu totes les solucions bàsiques factibles del problema $(PL4)$.

$$(PL4)\begin{cases} \max & z = & -\frac{1}{2}x_1 & -x_2 & \\ \text{s.a.}: & & x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & & 2x_1 & -x_2 & \leq 10 \\ & & \frac{2}{3}x_1 & +x_2 & \geq -2 \\ & & x_1 \geq 0, & x_2 \leq 0 & \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 16)

EXERCICI 17. **$(PL5)$: solucions bàsiques**

Trobeu totes les solucions bàsiques del problema $(PL5)$, indicant en cada cas si són fàctibles o no.

$$(PL5)\begin{cases} \min & z = & -x_1 & & \\ \text{s.a.}: & & x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ & & 2x_1 & -x_2 & = 2 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 17)

EXERCICI 18. **Càlcul de solucions bàsiques.**

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(PL)\begin{cases} \min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & -x_1 & +2x_2 & \geq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Trobeu totes les solucions bàsiques de (PL) indicant, per cadascuna d'elles, si és factible i/o degenerada.
(SOLUCIÓ EXERCICI 18)

ALGORISME DEL SÍMPLEX

EXERCICI 19. **Test algorisme del símplex.**

TEST 1. Una direcció bàsica és:

a) V / F Una direcció factible al llarg de la qual només canvien les VB
b) V / F Una direcció factible al llarg de la qual només canvien les VNB
c) V / F Una direcció factible que permet passar d'un punt extrem de P a un altre d'adjacent.

TEST 2. Quan apliquem l'algorisme del símplex primal el criteri de selecció de la VB de sortida

$$\theta^* = \min_{i=1,\ldots,m|d_{B(i)}<0} \left\{ \frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\}$$

permet assegurar que:

a) V / F El problema no és il·limitat.
b) V / F Es produeix el màxim decrement de la funció objectiu.
c) V / F Es conserva la factibilitat de la nova base.

TEST 3. Sigui P un poliedre no buit en forma estàndard, i sigui x SBF de P i r el vector de costos reduits. Llavors:

a) V / F Si x és òptima $\Rightarrow$ $r \geq [0]$.
b) V / F Si $r \geq [0] \Rightarrow x$ és òptima .
c) V / F Existirà una solució bàsica factible òptima.

TEST 4. Si en una iteració de l'algorisme de símplex primal obtenim $x_B \ngeq 0$:

a) V / F Hem arribat a la solució òptima.
b) V / F Hem de continuar iterant usant el símplex dual.
c) V / F Haurem de revisar els càlculs.

TEST 5. Les direccions bàsiques que pren l'algorisme del símplex a cada iteració :

a) V / F Son direccions factibles al llarg de la qual només canvien les VB
b) V / F Són direccions factibles de descens (de millora de la funció objectiu).
c) V / F Són direccions factibles que permeten passar d'un punt extrem de P a un altre d'adjacent.

TEST 6. Si a cada iteració del símplex primal d'un problema (P) qualsevol triem la VNB d'entrada x_q associada al cost reduït més negatiu llavors podem assegurar que:

a) V / F Obtindrem la solució del problema (P).
b) V / F El valor de la funció objectiu disminueix a cada iteració.
c) V / F La disminució de la f.o. a cada iteració és la màxima possible.

TEST 7. L'algorisme del símplex primal amb la regla de Bland aplicat a la resolució d'un problema de programació lineal (P) factible:

a) V / F Sempre troba una solució òptima.
b) V / F Sempre acaba en un nombre finit d'iteracions.
c) V / F Sempre troba una solució òptima en un nombre finit d'iteracions.

TEST 8. Considerem la forma estàndard del següent problema (PL) $\min_{x\in\mathbb{R}^2}\{-2x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 1\,; x_1 \geq 0\,;\ x_2 \geq 1\}$ i la SBF $x = [0,1]'$ amb $\mathcal{B}^* = \{2,3\}$:

a) **V** / **F** $\mathcal{B}$ no és òptima perquè $r \ngeq 0$
b) **V** / **F** $\mathcal{B}$ és òptima però $r \ngeq 0$
c) **V** / **F** $\mathcal{B}$ no és òptima perquè el problema és il·limitat.

TEST 9. Donades y i x SBF adjacents no degenerades, la relació $c'y = c'x + \theta^* r_q$:

a) **V** / **F** Indica que $c'y < c'x$ si $\theta^* < 0$.
b) **V** / **F** Indica que $c'y < c'x$ si $r_q < 0$.
c) **V** / **F** Indica que la direcció $d = y - x$ és factible.

TEST 10. Les opcions de taxació de **`OPTLP`** que tenen en compte la direcció bàsica factible d de totes les variables no bàsiques, en general:

a) **V** / **F** Realitzen menys iteracions de l'algorisme del símplex.
b) **V** / **F** Fan iteracions més ràpides del símplex.
c) **V** / **F** Resolen els problemes més ràpidament.

TEST 11. Quan apliquem el símplex primal de **`SAS/OR`**, l'opció **`pricetype`**:

a) **V** / **F** Permet controlar el procediment de taxació.
b) **V** / **F** Permet controlar el procediment de selecció de la VNB d'entrada a la base.
c) **V** / **F** Permet controlar el procediment de selecció de la VB de sortida de la base.

TEST 12. Els procediments de taxació de OPTLP Devex pricing i Steepset-edge pricing (pricetype= 3 i 4):

a) **V** / **F** Tenen en compte la disminució total de la funció objectiu per unitat de desplaçament al llarg de la direcció bàsica.
b) **V** / **F** Avaluen tots els costos reduïts i trien el més negatiu.
c) **V** / **F** Provoquen, en general, un major nombre d'iteracions.

TEST 13. Donat el problema $(PL)\ \min_{x\in R^2}\left\{z = x_1 \middle| \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ x \geq 0\right\}$ i la base $\mathcal{B} = \{1,4\}$:

a) **V** / **F** La direcció bàsica factible associada a la VNB $q = 2$ és $d_B = [-1 \quad -1]'$.
b) **V** / **F** La direcció bàsica factible associada a la VNB $q = 2$ és de descens.
c) **V** / **F** $\mathcal{B} = \{1,4\}$ és òptima.

TEST 14. Sigui P_e un políedre no buit en forma estàndard, i sigui x SBF de P_e amb costos reduïts $r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N$. Llavors:

a) **V** / **F** Si $r > 0 \Rightarrow x$ és òptima.
b) **V** / **F** Si x és òptima $\Rightarrow\ r \geq 0$.
c) **V** / **F** Si $r = 0 \Rightarrow x$ no és òptima.

TEST 15. Donat un problema (PL) qualsevol amb n variables i m desigualtats, sabem que el nombre d'iteracions de l'algorisme:

a) **V** / **F** Es pot expressar com una expressió polinòmica de n i m.
b) **V** / **F** No es pot expressar com una expressió polinòmica de n i m.
c) **V** / **F** En la pràctica s'observa que depèn polinòmicament de n i m.

TEST 16. La longitud de pas θ^* de l'algorisme del símplex aplicat a un problema (PL) qualsevol

a) **V** / **F** Pot ser negativa.

b) **V / F** Sempre serà positiva.

c) **V / F** Sempre serà més gran o igual que zero.

TEST 17. Considereu x SBF no degenerada i d DBF de descens sobre x. Prenem $y = x + \theta d$ amb $\boldsymbol{\theta > \theta^*}$**.** Llavors:

a) **V / F** y és una SBF adjacent a x.

b) **V / F** y no és una SBF adjacent a x, però és una solució factible.

c) **V / F** y no és factible però $c'y < c'x$.

TEST 18. Sigui P un poliedre no buit en forma estàndard no degenerat, i sigui x SBF de P i r el vector de costos reduits. Llavors:

a) **V / F** Si x és òptima $\Rightarrow\ r \geq [0]$.

b) **V / F** Si $r \geq [0] \Rightarrow x$ és òptima.

c) **V / F** Existirà una solució bàsica factible òptima.

TEST 19. Donades y i x SBF adjacents no degenerades, la relació $c'y = c'x + \theta^* r_q$:

a) **V / F** Permet afirmar que $c'y \leq c'x$.

b) **V / F** Permet afirmar que $c'y \geq c'x$.

c) **V / F** Permet afirmar que $c'y \neq c'x$.

TEST 20. Considereu y i x SBF adjacents no degenerades i la seva relació $y = x + \theta^* d$

a) **V / F** d és una direcció factible.

b) **V / F** d és una direcció bàsica factible.

c) **V / F** d és una direcció bàsica factible de descens.

TEST 21. Considerem la forma estàndard del següent problema

$$(PL)\ \min_{x\in R^2}\left\{-2x_2 \mid \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} ; x \geq 0\right\}$$ i la SBF $x = [1 \quad 0]'$ amb $\mathcal{B} = \{1,4\}$:

a) **V / F** $d = [-1 \quad 0]'$ és una direcció bàsica sobre $\mathcal{B}$.

b) **V / F** $d = [-1 \quad 0]'$ és una direcció bàsica de descens sobre $\mathcal{B}$.

c) **V / F** $d = [0 \quad 1]'$ és una direcció bàsica de descens sobre $\mathcal{B}$.

TEST 22. Considereu l'expressió de la longitud de pas màxima $\theta^* = \max\{\theta \geq 0 | x + \theta d \geq 0\}$ de l'algorisme del símplex primal

a) **V / F** θ^* sempre serà ≥ 0 si d és una direcció bàsica.

b) **V / F** θ^* només serà ≥ 0 si d és una direcció bàsica de descens.

c) **V / F** Si $d_B \geq 0$ llavors $\theta^* = 0$.

TEST 23. Segons el teorema que estableix les condicions d'optimalitat de les solucions bàsiques factibles:

a) **V / F** Si x és SBF òptima llavors $r \geq 0$.

b) **V / F** Si x és SBF òptima no degenerada llavors $r \geq 0$.

c) **V / F** Si $r \geq 0$ llavors x és SBF òptima.

TEST 24. Si en acabar la fase I del símplex observem que la base òptima $\mathcal{B}_I^*$ conté variables artificials:

a) **V / F** El problema (PL) és infactible.

b) **V / F** El problema (PL) és factible i la base $\mathcal{B}_I^*$ és una SBF primal del problema (PL).

c) **V / F** El problema (PL) és factible i la base $\mathcal{B}_I^*$ és una SBF degenerada de (PL_I).

TEST 25. El nombre d'iteracions de l'algorisme del símplex per a resoldre un problema de n variables i m constriccions:

a) **V / F** Sabem que es pot expressar com un polinomi de n i m.

b) **V / F** En la pràctica s'aproxima al nombre de variables del problema n.

c) **V / F** En la pràctica s'aproxima al nombre de constriccions del problema m.

TEST 26. Donat el problema $(PL)\ \min_{x\in R^2}\left\{z = x_1 \middle| \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\ x \geq 0\right\}$ i la base $\mathcal{B} = \{2,4\}$:

a) **V / F** La DBF associada a la VNB $q = 1$ és de descens.

b) **V / F** La DBF associada a la VNB $q = 4$ és de descens.

c) **V / F** $\mathcal{B} = \{2,4\}$ és òptima.

TEST 27. Sigui x SBF de $P_e \neq \emptyset$ i $d \ngeq 0$ DBF sobre x. Llavors podem assegurar que:

a) **V / F** $y = x + \theta^* d$ és SBF de P_e.

b) **V / F** $y = x + \theta^* d$ és vèrtex de P_e.

c) **V / F** $y = x + \theta^* d \neq x$.

TEST 28. Si a cada iteració del símplex primal d'un problema $(PL)_e$ qualsevol triem la VNB d'entrada x_q associada al cost reduït més negatiu llavors podem assegurar que:

a) **V / F** La disminució de la f.o. a cada iteració és la màxima possible.

b) **V / F** Obtindrem, si existeix, la solució del problema $(PL)_e$.

c) **V / F** Si $(PL)_e$ és no degenerat, el valor de la funció objectiu disminueix a cada iteració.

TEST 29. A l'algorisme del símplex primal aplicat a un problema no degenerat el criteri de selecció de la VB de sortida

$$\theta^* = \min_{i=1,\dots,m \mid d_{B(i)}<0} \left\{\frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right\}$$

permet assegurar que:

a) **V / F** Es produeix el màxim decrement de la funció objectiu.

b) **V / F** Es conserva la factibilitat de la nova base.

c) **V / F** El valor d'alguna VB es farà zero.

(SOLUCIÓ EXERCICI 19)

EXERCICI 20. **Direccions bàsiques factibles sobre el políedre estàndard.**

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(PL)\begin{cases} \min & c_1x_1 & +c_2x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & = 3 \\ & x_1 & & \leq 2 \\ & x_1, & x_2, & \geq 0 \end{cases}$$

a) Representeu gràficament el poliedre estàndard P_e associat a (PL) i identifiqueu totes les solucions bàsiques factibles.

b) Calculeu totes les direccions bàsiques factibles existents.

c) Per a una DBF concreta d sobre la SBF x, comproveu que la passa $y = x + \theta^* d$ és una SBF adjacent a x.

(SOLUCIÓ EXERCICI 20)

EXERCICI 21. Direccions bàsiques factibles sobre el políedre general no degenerat.

Considereu el políedre $P = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, x \geq 0 \right\}$.

a) Representeu gràficament P indicant sobre la gràfica les coordenades dels punts extrems de P i les solucions bàsiques factibles (conjunt $\mathcal{B}$) que cadascun d'ells té associades.
b) Calculeu totes les direccions bàsiques factibles associades a la solució bàsica factible $\mathcal{B} = \{1,3\}$ indicant si aquestes direccions son factibles o no. Representeu-les sobre la gràfica de l'apartat a).
c) Expliqueu quines són les característiques que ha de tenir un problema de programació lineal per tal de poder assegurar que l'algorisme del símplex convergirà a una solució òptima. Podem assegurar que el problema $(PL)\ \min_{x \in \mathbb{R}^2}\{c'x | x \in P\}$ convergirà a una solució òptima?

(SOLUCIÓ EXERCICI 21)

EXERCICI 22. Direccions bàsiques factibles sobre el políedre general degenerat.

Considereu el políedre $P = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, x \geq 0 \right\}$.

a) Representeu gràficament P indicant sobre la gràfica les coordenades dels punts extrems de P i les solucions bàsiques factibles (conjunt $\mathcal{B}$) que cadascun d'ells té associades.
b) Calculeu totes les direccions bàsiques factibles associades a la solució bàsica factible $\mathcal{B} = \{1,3\}$ indicant si aquestes direccions son factibles o no. Representeu-les sobre la gràfica de l'apartat a).
c) Expliqueu quines són les característiques que ha de tenir un problema de programació lineal per tal de poder assegurar que l'algorisme del símplex convergirà a una solució òptima. Podem assegurar que el problema $(PL)\ \min_{x \in \mathbb{R}^2}\{c'x | x \in P\}$ convergirà a una solució òptima?

(SOLUCIÓ EXERCICI 22)

EXERCICI 23. Anàlisi de les propietats de les bases.

Volem estudiar les propietats del següent problema de programació lineal

$(PL)\ \min_{x \in \mathbb{R}^3}\{c'x \mid x \in P\}$ i $P = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, x \geq 0 \right\}$

En base a les propietats de la SBF associada a $\mathcal{B} = \{3,4\}$, trobeu una condició suficient sobre el vector de costos c que permeti assegurar que el problema (PL) no té solució.

(SOLUCIÓ EXERCICI 23)

EXERCICI 24. Propietats de la base òptima.

La solució bàsica òptima del següent problema de programació lineal (P) és $\mathcal{B} = \{2,4\}$:

$$(PL)\begin{cases} \min & 3x_1 & +\boldsymbol{c_2}x_2 & +2x_3 & +x_4 & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & =2 \\ & & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & =\boldsymbol{b_2} \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases} \quad \left(\text{amb } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\right)$$

a) Calculeu el valor que ha de tenir terme independent b_2 per tal que la base òptima $\mathcal{B} = \{2,4\}$ sigui degenerada primal.
b) Calculeu el valor que ha de tenir el coeficient c_2 per tal que la base òptima $\mathcal{B} = \{2,4\}$ sigui degenerada dual.

c) Considereu ara $b_2 = 3$ i el valor de c_2 calculat a l'apartat anterior. Trobeu les coordenades del punt extrem associat a una SBF adjacent a $\mathcal{B} = \{2,4\}$ que tingui el mateix valor de la funció objectiu que $\mathcal{B} = \{2,4\}$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 24)

EXERCICI 25. Direccions factibles de descens i caracterització d'optims (1).

Considereu el problema de programació lineal en forma estàndard $(P)\ \min_{x\in R^n}\{c'x|\ x \in P_e\}$. Demostreu que una solució factible $x \in P_e$ amb $\mathcal{Z} = \{i \mid x_i = 0\}$ és solució òptima de (P) si i només si el problema de programació lineal $(P_d)\ \min_{d\in\mathbb{R}^n}\{c'd|\ Ad = 0, d_i \geq 0\ i \in \mathcal{Z}\ \}$ té cost òptim zero.

(SOLUCIÓ EXERCICI 25)

EXERCICI 26. Direccions factibles de descens i caracterització d'òptims (2)

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(PL)\begin{cases} \min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & -x_1 & +2x_2 & \geq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Volem estudiar les direccions bàsiques factibles associades a la solució bàsica factible $B = \{2,3\}$. Responeu als següents dos apartats sense usar l'expressió $r_q = c_q - c_B' B^{-1} A_q$:

a) Trobeu totes les direccions bàsiques factibles existents sobre la SBF $\mathcal{B} = \{2,3\}$ indicant si són direccions de descens.
b) A la vista del resultat de l'apartat anterior, pot ser $\mathcal{B} = \{2,3\}$ la base òptima de (PL)? Perquè? Indiqueu, argumentant en base a les característiques de les DBF trobades, quina és la solució òptima de (PL).

(SOLUCIÓ EXERCICI 26)

EXERCICI 27. Símplex en forma estàndard

Considereu el següent problema de (PL) en forma estàndard:

$$(PL)\begin{cases} \min & z = & -x_1 & -2x_2 & & & \\ \text{s. a.:} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 3 \\ & & x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 2 \\ & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

Aplicant l'algorisme del símplex, obtingueu la solució òptima d'aquest problema a partir de la solució bàsica factible inicial $\mathcal{B} = \{1,2\}$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 27)

EXERCICI 28. (PL1): símplex

Trobeu la solució òptima del problema (PL1) aplicant l'algorisme del símplex, prenent com a SBF inicial l'associada al vèrtex $\mathrm{x} = [0, 6]'$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 28)

EXERCICI 29. **(PL2) : símplex**

Trobeu la solució òptima del problema (PL2) aplicant l'algorisme del símplex, prenent com a SBF inicial l'associada al vèrtex $x = [1,1]'$

(SOLUCIÓ EXERCICI 29)

EXERCICI 30. **(PL3) : símplex**

Trobeu la solució òptima del problema (PL3) aplicant l'algorisme del símplex, prenent com a SBF inicial l'associada al conjunt de variables bàsiques $\mathcal{B} = \{2,3\}$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 30)

EXERCICI 31. **(PL4) : símplex**

Trobeu la solució òptima del problema (PL4) aplicant l'algorisme del símplex, prenent com a SBF inicial l'associada al punt extrem $x = [4,-2]'$ de la formulació original.

(SOLUCIÓ EXERCICI 31)

EXERCICI 32. **(PL5) : símplex**

Trobeu la solució òptima del problema (PL5) aplicant l'algorisme del símplex, prenent com a SBF inicial $\mathcal{B} = \{1,3\}$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 32)

EXERCICI 33. **(PL6) : símplex**

Trobeu la solució òptima del problema $(PL6)$ aplicant l'algorisme del símplex, prenent com a SBF inicial $\mathcal{B} = \{2,3\}$.

$$(PL6)\begin{cases} \max & z = & 7x_1 & +4x_2 & \\ \text{s.a.:} & & 2x_1 & +x_2 & \leq 8 \\ & & x_1 & +x_2 & \leq 6 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 33)

EXERCICI 34. **Símplex amb fase I (1)**

Considereu el següent problema de programació lineal (PL):

$$(PL)\begin{cases} \min & -x_1 & -3x_2 & \\ \text{s.a.:} & -\frac{1}{4}x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & -x_2 & = \frac{3}{2} \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

a) Sense usar la representació gràfica del poliedre associat a (PL), calculeu raonadament totes les solucions bàsiques de (PL).
b) Trobeu una solució bàsica factible inicial $\mathcal{B}^0$de (PL) aplicant la fase I del símplex.

c) Trobeu la solució òptima de (PL) a partir de la base $\mathcal{B}^0$ obtinguda a l'apartat anterior. Si no heu trobat $\mathcal{B}^0$, comenceu a iterar a partir de la solució factible $x = [3/2 \quad 0]'$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 34)

EXERCICI 35. Símplex amb fase I (2)

Trobeu la solució òptima del següent problema de programació lineal (P) aplicant l'algorisme del símplex de les dues fases:

$$(PL)\begin{cases} \text{min} & 5x_1 & +3x_2 & +x_3 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq 6 \\ & 5x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = 15 \\ & x_{1,} & x_2 & & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 35)

EXERCICI 36. Símplex amb fase I (3)

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(PL)\begin{cases} \text{min} & 5x_1 & +3x_2 & +x_3 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +3x_3 & = 6 \\ & 5x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = 15 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & \geq 0 \end{cases}$$

a) Sense fer ús de la representació gràfica sobre $\mathbb{R}^3$ del políedre associat P, ni calcular explícitament les seves SBF, indiqueu raonadament si el políedre P és degenerat o no.
b) Trobeu la solució òptima del següent problema de programació lineal (P) aplicant l'algorisme del símplex de les dues fases.

(SOLUCIÓ EXERCICI 36)

EXERCICI 37. Símplex amb fase I (4)

Trobeu la solució òptima del següent problema de programació lineal amb l'algorisme del símplex primal de les dues fases:

$$(PL)\begin{cases} \text{min} & 2x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & \geq 2 \\ & x_1 & -x_2 & = 1 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 37)

EXERCICI 38. Símplex amb fase I (5).

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(PL)\begin{cases} \text{min} & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & -x_1 & +2x_2 & \geq 2 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Trobeu la solució òptima de (P) aplicant l'algorisme del símplex de les dues fases.

(SOLUCIÓ EXERCICI 38)

EXERCICI 39. Fase I, DBF de descens i problemes il·limitats.

Volem estudiar l'aplicació de l'algorisme de símplex primal a la resolució del problema de programació lineal (PL) $\min_{x\in\mathbb{R}^3}\{c'x \mid x \in P\}$ i $P = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, x \geq 0\right\}$

a) Sigui $c = [1 \quad 1 \quad 1]'$. Comproveu que la fase I de l'algorisme del símplex primal formulada amb una variable artificial troba la solució òptima de (PL) en una única iteració.
b) Sigui $c = [1 \quad 1 \quad 1]'$ i la base $\mathcal{B} = \{1,5\}$. Sense calcular els costos reduïts, comproveu l'optimalitat de la base $\mathcal{B}$ a partir de l'anàlisi de les propietats de les direccions bàsiques factibles de (PL) sobre $\mathcal{B}$.
c) Trobeu una condició suficient sobre les components del vector de costos c que permeti assegurar que el problema (PL) no té solució a partir de l'anàlisi de les propietats de la SBF associada a $\mathcal{B} = \{3,4\}$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 39)

EXERCICI 40. Joc finit de suma zero i símplex

Es vol analitzar la resolució del problema de PL associat al jugador 1 d'un joc finit de suma zero amb matriu de guanys $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rang complet estudiat a classe:

$$(P_1)\begin{cases} \max_{y,z_1} & z_1 & \\ \text{s.a.:} & A'y & \geq 1_n z_1 \\ & 1'_m y & = 1 \\ & y & \geq 0 \end{cases}, \quad 1_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ 1_m = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

La seva forma estàndard, fent servir la transformació $z_1 = u - v$, amb $u, v \geq 0$, és:

$$(P_1)\begin{cases} \min_{y,z_1} z = & -u + v & & & & \\ \text{s.a.:} & A'y & -1_n u & +1_n v & -w & = 0 \\ & 1'_m y & & & & = 1 \\ & y, & u, & v, & w & \geq 0 \end{cases}, \quad y \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n, u, v \in \mathbb{R}$$

Considereu la formulació de fase I pel problema (P_1) consistent en afegir una única variable artificial, que podem anomenar s, a l'última constricció del problema.

a) Trobeu una condició necessària i suficient per als elements de la matriu de guanys A que asseguri que l'algorisme de fase I troba una solució bàsica factible de (P_1) en una única iteració a partir de la SBF del problema de fase I formada per les variables $[w \quad s]$.
b) Trobeu, usant les fórmules d'actualització de variables de l'algorisme del símplex, el valor de les variables del problema (P_1) corresponents a aquesta SBF

(SOLUCIÓ EXERCICI 40)

EXERCICI 41. Símplex de les dues fases i OPTMODEL

Considereu el següent codi OPTMODEL d'un problema de programació lineal (P) i la seva solució:

```
proc optmodel;
var X{1..3} >=0;

min Z =     X[1]           +   X[3];

con C1:     X[1]           + 2*X[3] <=  4;
con C2:   4*X[1] - 5*X[2]           = 10;

solve;
print X.sol X.rc;
print C1.body C1.dual C2.body C2.dual;
```

[1]	X.SOL	X.RC
1	2.50	0.00
2	0.00	1.25
3	0.00	1.00

C1.BODY	C1.DUAL	C2.BODY	C2.DUAL
2.5	0	10	0.25

a) Indiqueu, raonadament, quantes solucions bàsiques té el problema (P) i quines variables les formen. Amb l'ajut de la sortida de SAS identifiqueu quina és la SBF òptima.
b) Trobeu l'òptim de (P) amb l'algorisme del símplex de les dues fases.

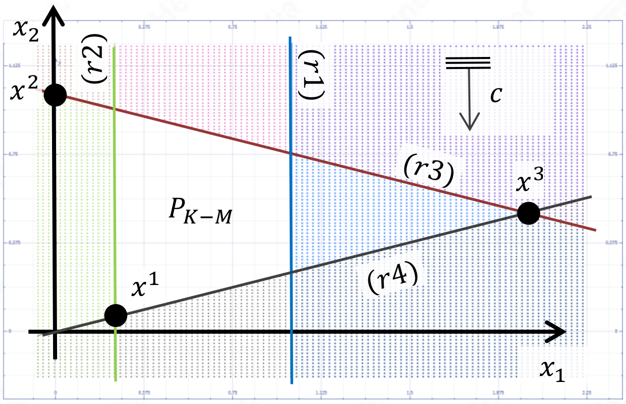
(SOLUCIÓ EXERCICI 41)

EXERCICI 42. Problema de Klee-Minty

Considereu el problema de Klee-Minty amb n= 2 i el seu políedre associat:

$$(P_{K-M})\begin{cases}\min & & -x_2 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & \le 1 & (r1)\\ & x_1 & & \ge \epsilon & (r2)\\ & \epsilon x_1 & +x_2 & \le 1 & (r3)\\ & -\epsilon x_1 & +x_2 & \ge 0 & (r4)\\ & x_1, & x_2 & \ge 0 & \end{cases}$$

$$(0 < \epsilon < \frac{1}{2})$$



a) Demostreu que l'algorisme del símplex primal arriba a la solució òptima a partir de x^1 en una única iteració si es selecciona la variable no bàsica associada al cost reduït més negatiu, independentment del valor de ϵ.
b) Demostreu que la base x^2 és factible dual analitzant el signe dels costos reduïts sense fer ús de l'expressió $r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N$.
c) Formuleu el dual de la forma estàndard del problema (P_{K-M}). Amb l'ajut del corol·lari del Ta. Fort de dualitat calculeu la solució bàsica $\Lambda' = [\Lambda_B' \ \Lambda_N']$ del problema dual associada a la solució bàsica primal x^3, indicant quines de les variables del problema dual en forma estàndard són bàsiques, no bàsiques i el seu valor numèric. A la vista del resultat, analitzeu la factibilitat primal i dual de x^3 i indiqueu quin algorisme hauríem d'usar per a optimitzar (P_{K-M}) a partir de la solució bàsica x^3.

(SOLUCIÓ EXERCICI 42)

EXERCICI 43. Propietats de les SBF i fase I.

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(PL)\begin{cases}\min & c_1x_1 & +c_2x_2 & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \le 0\\ & x_1 & +x_2 & \ge 2\\ & x_1, & x_2 & \ge 0\end{cases}$$

a) Trobeu totes les solucions bàsiques ($\mathcal{B}$ i x_B) indicant, per cadascuna d'elles, si és factible i/o degenerada.
b) Considereu ara que el vector de termes independents és $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Trobeu el valor de b_1 que fa que totes les solucions bàsiques factibles de problema (PL) siguin degenerades (us pot ajudar la representació gràfica del políedre).
c) Trobeu quina condició necessària i suficient que han de complir les components c_1 i c_2 per tal de poder assegurar que el problema (PL) no té solució òptima.
d) Trobeu la solució òptima quan $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ amb l'algorisme del símplex de les dues fases introduint una única variable artificial a la fase I.

(SOLUCIÓ EXERCICI 43)

EXERCICI 44. Propietats de les SBF i fase I amb OPTMODEL.

Considereu el següent codi OPTMODEL amb el que es defineix i resol un problema de programació lineal (P):

```
proc optmodel;
var X{1..2} >=0;

min Z = -X[1] + 2*X[2];

con r1: 2*X[1] - 2*X[2] <= 1;
con r2: 2*X[1] + 2*X[2] >= 3;

solve;
print X.sol;
print r1.body r1.dual r2.body r2.dual;
```

[1]	X.SOL
1	1.0
2	0.5

r1.BODY	r1.DUAL	r2.BODY	r2.DUAL
1	-0.75	3	0.25

a) Trobeu dues solucions bàsiques factibles primal i dues infactibles primal ($\mathcal{B}$ i x_B).
b) Comproveu com la fase I del símplex amb una única variable artificial i aplicat amb la regla de Bland troba una solució factible primal i òptima en dues iteracions.

(SOLUCIÓ EXERCICI 44)

DUALITAT I ANÀLISI DE SENSIBILITAT

EXERCICI 45. **Test dualitat i anàlisi de sensibilitat.**

TEST 1. El signe de les variables duals associades al següent problema primal

$$(P)\begin{cases}\max & -x_1 & -3x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \le 2 \\ & 2x_1 & +x_2 & = 3 \\ & -x_1 & & \ge 4\end{cases}$$

a) **V** / **F** És : λ_1 lliure, $\lambda_2 \ge 0$, $\lambda_3 \le 0$.

b) **V** / **F** És : $\lambda_1 \le 0$, λ_2 lliure, $\lambda_3 \ge 0$.

c) **V** / **F** És : $\lambda_1 \ge 0$, λ_2 lliure, $\lambda_3 \le 0$.

TEST 2. Indiqueu si les següents combinacions (P)-(D) son possibles (Si) o impossibles (No):

a) **V** / **F** (P) òptim – (D) il·limitat.

b) **V** / **F** (P) òptim – (D) infactible.

c) **V** / **F** (D) il·limitat – (P) infactible.

TEST 3. Donat un problema (P) en forma estàndard, diem que la base B és factible dual si:

a) **V** / **F** $r \le 0$ i $x_B \ge 0$.

b) **V** / **F** $r \ge 0$ i $x_B \ge 0$.

c) **V** / **F** $r \ge 0$ i $x_B \le 0$.

TEST 4. Que la solució bàsica òptima d'un problema de (P) sigui degenerada dual, implica que:

a) **V** / **F** Alguna variable bàsica és zero.

b) **V** / **F** Alguna variable dual és zero.

c) **V** / **F** El cost reduït d'alguna VNB és zero.

TEST 5. Si volem trobar la solució òptima d'un problema (P) en forma estàndard a partir d'una base $\mathcal{B}$ amb $r \ngeq 0$ i $x_B \ngeq 0$ l'algorisme que hem d'aplicar és:

a) **V** / **F** El símplex dual.

b) **V** / **F** El símplex primal.

c) **V** / **F** Qualsevol dels dos.

TEST 6. El problema primal (P) associat al següent problema dual

$$(D)\begin{cases}\max & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ & \lambda_1 & +\lambda_2 & \ge 1 \\ & 2\lambda_1 & & \ge 1 \\ & \lambda_1 \ge 0, & \lambda_2 \ge 0 & \end{cases}$$

a) **V** / **F** És il·limitat.

b) **V** / **F** Té variables $x \le 0$ i constriccions $Ax \ge b$.

c) **V** / **F** Té variables $x \ge 0$ i constriccions $Ax \ge b$.

TEST 7. Si a la solució òptima d'un problema (P) hi ha costos reduïts nuls, llavors:

a) **V** / **F** L'algorisme del símplex dual convergeix en un nombre finit d'iteracions.

b) **V** / **F** Existeixen infinites solucions òptimes de (P).

c) **V** / **F** La base és degenerada dual.

TEST 8. El sufix `.dual` que mostra OPTMODEL:

a) **V** / **F** Mostra el valor de terme independent de les constriccions.

b) **V** / **F** Mostra el valor del preu ombra de les constriccions.

c) **V** / **F** És el cost reduït de les folgues de les constriccions de ≤.

TEST 9. Si el valor del terme independent b_j es manté dins del seu interval d'estabilitat llavors podem assegurar que:

a) **V** / **F** El valor òptim de les variables x^* no canvia.

b) **V** / **F** El conjunt de les variables no bàsiques $\mathcal{N}$ no canvia.

c) **V** / **F** El valor dels costos reduïts no canvia.

TEST 10. Si el valor del terme independent $b_j$surt fora del seu interval d'estabilitat llavors podem assegurar que:

a) **V** / **F** La nova solució òptima millorarà sempre el valor de l'actual.

b) **V** / **F** Es podrà aplicar el símplex dual per a reoptimitzar.

c) **V** / **F** Alguna variable dual canviarà.

TEST 11. El preu ombra λ_j d'un problema (P) qualsevol:

a) **V** / **F** És el canvi en la funció objectiu per increment unitat del terme b_j.

b) **V** / **F** Augmenta sempre a mida que augmenta b_j.

c) **V** / **F** Disminueix sempre a mida que augmenta b_j.

TEST 12. Considereu que hem resolt un problema (P) en forma estàndard amb $\mathcal{N} = \{1,2\}$ i $r^* = [2 \quad 3]'$:

a) **V** / **F** Si $\phi_{c1} = -2$ la base actual deixa de ser òptima.

b) **V** / **F** Si $\phi_{c1} = -2$ hi ha bases òptimes diferents de la base actual.

c) **V** / **F** La base actual deixa de ser òptima si augmento massa el valor de c_2.

TEST 13. Si en un problema (P) amb base òptima $\mathcal{B}^*$ es modifica el valor d'un dels coeficients a_{ij} de la matriu de constriccions A:

a) **V** / **F** La base $\mathcal{B}^*$ pot perdre la factibilitat dual.

b) **V** / **F** La base $\mathcal{B}^*$ pot perdre la factibilitat primal.

c) **V** / **F** Sempre podré reoptimitzar amb el símplex primal o dual.

TEST 14. El signe de les variables i constriccions duals associades al següent problema primal

$$(P)\begin{cases} \text{max} & -6x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \leq 2 \\ & 2x_1 & +x_2 & = 3 \\ & & x_2 & \leq 0 \end{cases}$$

a) **V** / **F** són : $\lambda_1 + 2\lambda_2 = -6$ i λ_2 lliure.

b) **V** / **F** són : $-\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$ i $\lambda_2 \geq 0$.

c) **V** / **F** són : $-\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1$ i $\lambda_1 \leq 0$.

TEST 15. Donat un problema (P) en forma estàndard, diem que una base és factible primal si:

a) **V** / **F** $r \geq 0$ i $x_B \leq 0$.

b) **V** / **F** $r \leq 0$ i $x_B \geq 0$.

c) **V** / **F** $r \geq 0$ i $x_B \geq 0$.

TEST 16. Si volem trobar la solució òptima d'un problema (P) no degenerat en forma estàndard a partir d'una base $\mathcal{B}$ no òptima, l'algorisme que hem d'aplicar és:

a) **V** / **F** El símplex dual si $r \geq 0$.

b) **V** / **F** El símplex primal si $r \ngeq 0$.

c) **V** / **F** El símplex primal si $x_B \leq 0$.

TEST 17. Si el valor del terme independent b_j surt fora del seu interval d'estabilitat llavors podem assegurar que:

a) **V** / **F** La nova solució òptima millorarà sempre el valor de l'actual.

b) **V** / **F** Es podrà aplicar el símplex dual per a reoptimitzar.

c) **V** / **F** $\phi_z = \lambda' \phi_b$.

TEST 18. En un joc finit de suma zero, el teorema minimax:

a) **V** / **F** Indica que és possible que per algun dels dos jugadors no existeixi estratègia òptima.

b) **V** / **F** Indica que és impossible que els dos jugadors tinguin un guany net positiu.

c) **V** / **F** Assegura que el problema del jugador 1 satisfà que $z_P^* \equiv z_D^*$.

TEST 19. Si un problema (P) és infactible, el seu dual (D):

a) **V** / **F** Segur que és il·limitat.

b) **V** / **F** Segur que és infactible.

c) **V** / **F** No tindrà solució.

TEST 20. Donat el problema primal (P) si una solució bàsica $\mathcal{B}$ és solució bàsica factible dual llavors:

a) **V** / **F** $r \leq 0$.

b) **V** / **F** $\mathcal{B}$ és factible primal.

c) **V** / **F** El vector $\lambda' = c_B' B^{-1}$ dona les coordenades d'un punt extrem del poliedre dual.

TEST 21. Si introduïm la modificació $c_i \leftarrow c_i + \phi_{c_i}$amb $\phi_{c_i} \in \Phi_{c_i} = [\phi_{c_i}^{min}, \phi_{c_i}^{max}]$:

a) **V** / **F** El valor de les variables òptimes pot canviar.

b) **V** / **F** El valor de la funció objectiu canviarà.

c) **V** / **F** El valor de les variables dual canviarà.

TEST 22. La matriu de guanys A d'un joc finit de suma zero:

a) **V** / **F** És quadrada.

b) **V** / **F** Té files i columnes associades a estratègies pures.

c) **V** / **F** Té elements que representen els guanys del jugador 1.

TEST 23. D'acord amb el Ta. feble de dualitat:

a) **V** / **F** Si (P) és infactible $\Rightarrow$ (D) és il·limitat.

b) **V** / **F** Si (P) és il.limitat $\Rightarrow$ (D) és infactible.

c) **V** / **F** Si λ^* i x^* són òptims primal i dual respectivament, llavors $\lambda^{*\prime} b = c' x^*$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 45)

EXERCICI 46. Formulació del problema dual.

Formuleu el problema dual dels següent problemes primals:

$$(PL)\begin{cases} \max & 2x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & = 2 \\ & 2x_1 & -x_2 & \geq 3 \\ & x_1 & -x_2 & \leq 1 \\ & x_1 & & \geq 0 \end{cases} \qquad (PL)\begin{cases} \min & 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq 2 \\ & x_1 & & -x_3 & \geq 1 \\ & & x_2 & +x_3 & \geq 1 \\ & & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 46)

EXERCICI 47. Jocs finit de suma zero i parells primal- dual.

Demostreu que els problemes (P_1) i (P_2) dels dos jugadors d'un joc finit de suma zero formen un parell primal-dual.

(SOLUCIÓ EXERCICI 47)

EXERCICI 48. Dual de la forma estàndard.

Considereu el següent problema general de programació lineal:

$$(P)\begin{cases} \min\limits_{x} & [c'_x \quad c'_y]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ s.a.: & [A_x^1 \quad A_y^1]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b^1 \\ & [A_x^2 \quad A_y^2]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq b^2 \\ & [A_x^3 \quad A_y^3]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq b^3 \\ & x \geq 0 \\ & y \ lliure \end{cases}$$

Demostreu que el dual (D) d'aquest problema i el dual $(D)_e$ de la seva forma estàndard $(P)_e$ són equivalents.

(SOLUCIÓ EXERCICI 48)

EXERCICI 49. Dual després d'eliminar files redundants.

Considereu el problema en forma estàndard $(P)_e$ factible i el seu dual:

$$(P)_e\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \sum\limits_{i=1}^{n} c'_i x_i & \\ \text{s.a.:} & a'_j x = b_j & j = 1, \dots, m \\ & x_i \geq 0 & i = 1, \dots . n \end{cases} \quad ; \quad (D)_e\begin{cases} \max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^m} & \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j b_j \\ \text{s.a.:} & \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j a'_j \leq c' \end{cases}$$

Suposem que l'última fila de A és redundant, és a dir, es pot expressar com a combinació lineal de la resta, $\exists \alpha_i : a_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i a'_i$. Suposem ara que eliminem l'última constricció redundant de $(P)_e$, de forma que obtenim el problema primal amb A de rang complet

$$(\widetilde{P})_e \begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i' x_i \\ \text{s.a.:} & a_j' x = b_j \quad j = 1, \dots, m-1 \\ & x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots . n \end{cases}$$

Demostreu que els duals de $(P)_e$ i $(\widetilde{P})_e$ són equivalents en el sentit que o bé són tots dos infactibles o bé tenen el mateix cost òptim.

(SOLUCIÓ EXERCICI 49)

EXERCICI 50. Òptim dual a través del Ta de folga complementària

Donat $(P)_e$ amb $c = [13 \quad 10 \quad 6]'$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$, amb $x^* = [1 \quad 0 \quad 1]'$, comproveu que el Ta de folga complementària permet determinar la solució única del problema dual.

(SOLUCIÓ EXERCICI 50)

EXERCICI 51. Ta de folga complementària per SBF òptimes no degenerades.

Suposeu que x^* és la SBF òptima no degenerada del problema $(P)_e$ en forma estàndard. Utilitzeu el Ta de folga complementària per a deduir l'expressió $\lambda^{*\prime} = c_B' B^{-1}$ del corol·lari del Ta fort de dualitat.

(SOLUCIÓ EXERCICI 51)

EXERCICI 52. PROC OPTMODEL i símplex dual.

Considereu el següent codi OPTMODEL amb el que es defineix i resol un problema de programació lineal amb l'algorisme del símplex dual, mostrant el detall de cada iteració:

```
proc optmodel;
var X{1..2} >= 0;
min Z = 3*X[1] + 8*X[2];
con C1: 2*X[1] + 3*X[2] >= 15;
con C2: 4*X[1] -   X[2] >= 20;
solve with LP / solver = dual printfreq = 1;
print X.sol X.rc;
print C1.body C1.dual;
print C2.body C2.dual;
run;
```

El resultat que s'obté per pantalla és:

Finestra Log

```
NOTE: The DUAL SIMPLEX solver is called.
                        Objective      Entering     Leaving
      Phase Iteration   Value          Variable     Variable
        2           1      22.500000   X[1]         C1       (S)
NOTE: Optimal.
NOTE: Objective = 22.5.
```

Finestra Output

```
                    The OPTMODEL Procedure
                       Solution Summary
```

```
Solver                        Dual Simplex
Objective Function                       Z
Solution Status                    Optimal
Objective Value                       22.5
Iterations                               1

Primal Infeasibility                     0
Dual Infeasibility                       0
Bound Infeasibility                      0

          [1]     X.SOL      X.RC
           1        7.5       0.0
           2        0.0       3.5

           C1.BODY     C1.DUAL
                15         1.5

           C2.BODY     C2.DUAL
                30           0
```

a) Demostreu, a partir del corol·lari iii del teorema feble de dualitat, que el valor de les variables duals que indica la taula de sortida de OPTMODEL és la solució del dual del problema plantejat.

b) Deduïu, a partir de la informació sobre les iteracions de l'algorisme del símplex dual de la finestra Log, quina és la base inicial que pren SAS, i comproveu-ne que es tracta d'una solució bàsica factible dual trivial. Realitzeu la primera iteració de l'algorisme del símplex dual a partir d'aquesta s.b. factible dual i comproveu que coincideix amb la informació de la primera iteració realitzada per OPTMODEL.

(SOLUCIÓ EXERCICI 52)

EXERCICI 53. Dualitat i jocs finits de suma zero.

Considereu el cas particular del problema (P_1) del joc de parells o senars amb dos dits vist a classe, amb matriu de guanys $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. Recordeu que la reformulació de (P_1) com a problema de dues variables amb el canvi de variable $y_2 = 1 - y_1$ i la seva representació gràfica feta a classe és:

$$(P_1)\begin{cases} \max\limits_{y_1,z_1} & z_1 & & \\ \text{s.a.:} & & & \\ & -5y_1+3 & \geq z_1 & (r1) \\ & 7y_1-4 & \geq z_1 & (r2) \\ & y_1 & \leq 1 & (r3) \\ & y_1 & \geq 0 & \end{cases}$$

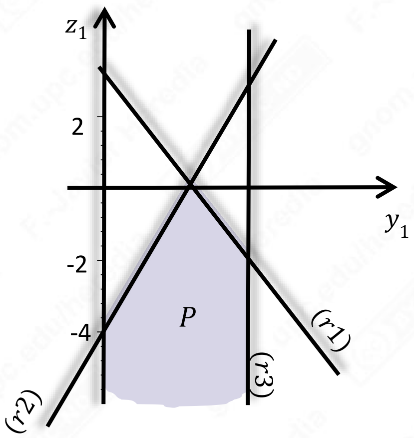


Figura 2

a) Deduïu, sense calcular els valor numèric dels costos reduïts ni de les variables bàsiques, la factibilitat primal i dual de les solucions bàsiques del problema (P_1) que s'observen a la Figura 1.

b) Formuleu el problema dual de (P_1). Transformeu-lo a un problema de dues variables i representeu sobre $\mathbb{R}^2$ el políedre dual.

c) Seleccioneu ara un s.b. factible dual i una s.b. infactible dual de (P_1). Per a cadascuna d'elles (a) trobeu els valors numèrics de les variables duals λ associades a la base primal i (b) identifiqueu, sobre la representació gràfica de l'apartat anterior, els punts associats a les dues solucions bàsiques duals calculades.

(SOLUCIÓ EXERCICI 53)

EXERCICI 54. Dualitat i anàlisi de sensibilitat amb PROC LP.

Considereu el següent problema de programació lineal $(PL7)$ i la seva resolució amb PROC LP:

$$(PL7)\begin{cases}\max & x_1 & +2x_2 & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0\end{cases}$$

```
data PL;
input      _row_ $ X1 X2 _type_ $ _rhs_;
datalines;
              z   1  2    MAX     .
             C1   2  1     LE     3
             C2   1  1     LE     2
;
run;
proc lp data=PL RANGERHS;
run;
```

La solución de $(PL7)$ que proporciona el procediment PROC LP de SAS és:

```
                         The LP Procedure
                         Variable Summary

              Variable                                      Reduced
          Col Name     Status Type        Price  Activity      Cost

            1 X1              NON-NEG         1         0        -1
            2 X2       BASIC  NON-NEG         2         2         0
            3 C1       BASIC  SLACK           0         1         0
            4 C2              SLACK           0         0        -2

                        Constraint Summary

       Constraint              S/S                       Dual
     Row Name         Type      Col       Rhs  Activity  Activity

       1 z          OBJECTVE     .          0         4         .
       2 C1         LE           3          3         2         0
       3 C2         LE           4          2         2         2

                        RHS Range Analysis

        ---------Minimum Phi-------- ---------Maximum Phi--------
    Row          Rhs Leaving  Objective        Rhs Leaving  Objective

    C1             2 C1               4  INFINITY .                 .
    C2             0 X2               0          3 C1               6
```

a) Comproveu que la solució primal i dual que mostra la sortida de PROC LP satisfà el teorema fort de dualitat.

b) La sortida de PROC LP ens mostra que l'interval d'estabilitat del terme independent b_2 (constricció C2) és [0,3]. Calculeu aquest valors aplicant l'anàlisi de sensibilitat local estudiat a teoria.

c) Considereu que el valor de b_2 passa a ser $b_2 = 4$. Trobeu la nova solució òptima reoptimitzant amb l'algorisme del símplex dual a partir de la solució bàsica proporcionada per PROC LP.

(SOLUCIÓ EXERCICI 54)

EXERCICI 55. Formulació del dual i anàlisi de sensibilitat.

Considereu el següent problema de programació lineal (P):

$$(PL)\begin{cases}\min & 4x_1 & +5x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +4x_2 & \geq 5\\ & 3x_1 & +2x_2 & \geq 7\\ & x_1, & x_2 & \geq 0\end{cases}$$

La base òptima és B={1,2}, amb $B^{-1}=\begin{bmatrix}-1/5 & 2/5\\ 3/10 & -1/10\end{bmatrix}$

a) Formuleu el problema dual de (PL).
b) Trobeu l'interval d'estabilitat del coeficient c_1.

(SOLUCIÓ EXERCICI 55)

EXERCICI 56. Prodem S.L.

L'empresa Prodem S.L. fabrica els productes A, B i C. En la fabricació d'aquests tres productes es consumeixen un tipus de recurs, amb una disponibilitat màxima de $b_1 = 20Tm$. A més, l'empresa s'ha compromès a satisfer una certa demanda no inferior a $b_2 = 15Tm$. Els costos de fabricació d'una unitat de producte A, B y C són, respectivament, 10, 2 i 3 u.m. (unitats monetàries). El problema lineal (P) que permet calcular les quantitats de producte A (x_1), B (x_2) i C (x_3) que minimitzen els costos de producció és:

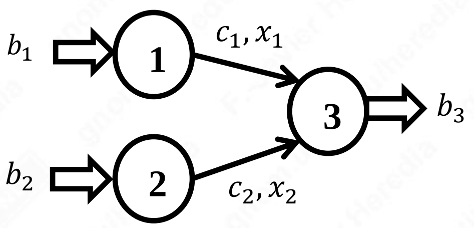
$$(P)\begin{cases}\min & z = 10x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & \\ \text{s.a.:} & & & & & \\ & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 20 & Recurs\\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq 15 & Demanda\\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 & \end{cases}$$

a) Sense realitzar cap iteració del mètode del símplex, comproveu que la producció òptima correspon a la base $\mathcal{B} = \{2,3\}$
b) Formuleu el dual de (P) i representeu-lo gràficament. Trobeu totes les solucions bàsiques factibles del problema dual i identifiqueu l'òptima. Comproveu que el valor de les variables duals a l'òptim λ^* coincideix amb el que proporciona el corol·lari del teorema fort de dualitat.
c) Considereu que el cost de fabricació del producte A passés a ser $1/2$ u.m. Analitzeu si amb aquest canvi la base $\mathcal{B} = \{2,3\}$ continuaria essent òptima. En cas que la resposta sigui negativa, trobeu la nova solució òptima.
d) L'empresa vol saber quin és el mínim valor la disponibilitat de recursos $b_1^{\min}$ que permet satisfer la demanda actual $b_2 = 15Tm$. Trobeu aquest valor mínim usant la representació gràfica del problema dual (D) i expliqueu què passaria $b_1 < b_1^{\min}$. Quina repercussió econòmica té passar del valor original $b_1 = 20Tm$ al valor mínim $b_1^{\min}$?

(SOLUCIÓ EXERCICI 56)

EXERCICI 57. Anàlisi de sensibilitat i transport (1).

Considereu el problema de transport entre dos plantes de producció, amb capacitat b_1 i b_2 respectivament, i un centre de consum amb demanda b_3 :



$$(P)\begin{cases}\min & c_1x_1 & +c_2x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & \leq b_1\\ & & x_2 & \leq b_2\\ & x_1 & +x_2 & = b_3\\ & x_1, & x_2 & \geq 0\end{cases}$$

Els costos unitaris totals de producció i transport de cada planta són c_1 i c_2. Considerarem les següents hipòtesis sobre els paràmetres del problema:

i. Les capacitats i costos son no negatius: $c_1, c_2, b_1, b_2 \geq 0$
ii. El problema és factible: $b_1 + b_2 \geq b_3$
iii. La planta 1 és la més rendible: $c_1 < c_2$.

Sota aquestes hipòtesis, la solució òptima trivial de (P) és $x_1^* = b_1, x_2^* = b_3 - b_1$.

Resoleu els següents apartats, justificant la vostra resposta usant la teoria d'anàlisi de sensibilitat local.

a) Indiqueu, basant-vos en els resultats de l'anàlisi de sensibilitat local si convindria o no, augmentar la capacitat de la planta 1 (b_1). En cas afirmatiu, indiqueu fins a quin valor convindria augmentar b_1 i quant estaríem disposats a pagar per cada unitat addicional de capacitat.

Un cop resolt el problema (P) s'observa que una fracció $\alpha \in [0,1]$ de la mercaderia subministrada des de la planta 1 es perd per deficiències del mitjà de transport (factor de pèrdua). El problema $(\tilde{P})$ resultant és:

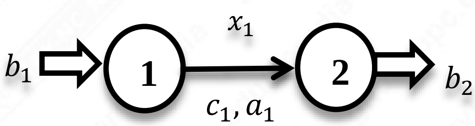
$$(\tilde{P}) \begin{cases} \min & c_1x_1 & +c_2x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & \leq b_1 \\ & & x_2 & \leq b_2 \\ & \boldsymbol{\alpha} x_1 & +x_2 & = b_3 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

b) Indiqueu quin és el valor mínim del factor de pèrdua α que conserva la solució òptima de (P) consistent en subministrar la capacitat total de la planta 1 ($x_1^* = b_1$) i la demanda residual des de la planta 2 ($x_2^* = b_3 - \alpha b_1$).

(SOLUCIÓ EXERCICI 57)

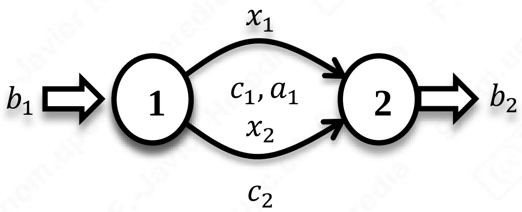
EXERCICI 58. Logistics: dualitat i anàlisi de sensibilitat.

L'empresa transportista Logistics ha de fer arribar cada setmana b_2 tones de productes alimentaris al mercat central d'una gran ciutat des dels centres de producció agrícola. Els aliments es transporten per carretera amb un cost per tona transportada igual a c_1. Degut al temps que triga en realitzar el transport sabem que una fracció $a_1 \in]0,1[$ de la quantitat total d'aliments es farà malbé. El centre de producció agrícola té una capacitat de producció màxima de b_1 tones suficient per subministrar tota la demanda ($b_1 \geq b_2/a_1$). La situació actual queda representada pel següent gràfic:



Òbviament, en l'actualitat l'única solució possible consisteix en transportar una quantitat $x_1 = b_2/a_1$ d'aliments per cobrir la demanda b_2.

Logistics es planteja substituir el transport per carretera per transport ferroviari. Transportar una tona d'aliment per ferrocarril costa c_2 ($c_2 > c_1$). A canvi de pagar més, no es perd cap tona d'aliment durant el transport. El problema de programació lineal (P) que permet decidir la quantitat òptima de tones a transportar per carretera (x_1) i ferrocarril (x_2) és:



$$(P)\begin{cases} \min & c_1x_1 & +c_2x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & \le b_1 \\ & a_1x_1 & +x_2 & = b_2 \\ & x_1, & x_2 & \ge 0 \end{cases}$$

a) Useu la teoria d'anàlisi de sensibilitat per calcular a partir de quin valor de c_2 és beneficiós substituir el transport per carretera pels transport ferroviari.
b) Considereu ara que $c_1 = 1€/t$, $c_2 = (6/5)€/t$, $a_1 = 4/5$, $b_1 = 20t$, $b_2 = 10t$. Demostreu, usant l'algorisme del símplex per trobar la solució òptima de (P), que amb aquestes dades l'opció de transport ferroviari és la millor.
c) Formuleu el problema dual de (P) i comproveu, usant el corol·lari iii del teorema feble de dualitat, que el valor de les variables duals λ corresponents a la solució trobada a l'apartat anterior són la solució òptima del problema dual de (P)

(SOLUCIÓ EXERCICI 58)

EXERCICI 59. Dualitat i anàlisi de sensibilitat amb OPTMODEL (1).

Considereu el següent codi OPTMODEL amb el que es defineix i resol un problema de programació lineal (P):

```
proc optmodel;
var X{1..3} >=0;
max Z = -2*X[1] +   X[2] + 2*X[3];
con C1:    X[1] + 3*X[2] + 5*X[3] <= 15;
con C2:  4*X[1] -   X[2]          = 20;
solve;
print X.sol X.rc;
print C1.body C1.dual;
print C2.body C2.dual;
```

[1]	X.SOL	X.RC
1	5	0.0
2	0	-0.8
3	2	-0.0

C1.BODY	C1.DUAL
15	0.4

C2.BODY	C2.DUAL
20	-0.6

a) Formuleu el problema dual (D) i ressoleu-lo gràficament.
b) Calculeu la solució del problema (D) usant l'expressió de λ^* que es deriva del teorema de dualitat forta. Comproveu que el valor de λ^*obtingut coincideix amb el valor que proporciona SAS i el trobat a l'apartat a).
c) Trobeu el valor de l'interval d'estabilitat del coeficient c_2. Comproveu, a partir de la representació de l'apartat a), que quan c_2 es troba sobre el límit de l'interval d'estabilitat, el problema dual es degenerat.
d) Indiqueu quin és el valor mínim del terme b_1 que conserva l'optimalitat de la base trobada per SAS. Amb l'ajut del símplex dual indiqueu quina és la solució òptima de (P) si $b_1$es redueix per sota d'aquest valor mínim. Expliqueu com hauríem pogut arribar al mateix resultat a partir de la representació gràfica del problema dual analitzant com afecta a la solució del problema dual el canvi en b_1 per sota del valor mínim.

(SOLUCIÓ EXERCICI 59)

EXERCICI 60. Dualitat i anàlisi de sensibilitat amb OPTMODEL (2).

Considereu el següent codi OPTMODEL d'un problema de programació lineal (P) i la seva solució:

```
proc optmodel;
var X{1..3} >=0;

min Z =     X[1]          +   X[3];

con C1:     X[1]          + 2*X[3] <=  4;
con C2:   4*X[1] - 5*X[2]          = 10;

solve;
print X.sol X.rc;
print C1.body C1.dual C2.body C2.dual;
```

[1]	X.SOL	X.RC
1	2.50	0.00
2	0.00	1.25
3	0.00	1.00

C1.BODY	C1.DUAL	C2.BODY	C2.DUAL
2.5	0	10	0.25

a) Formuleu el problema dual (D) i ressoleu-lo gràficament. Comproveu que la solució òptima coincideix amb els preus ombra λ^* i amb els valors que proporciona SAS.
b) Indiqueu quin és el valor mínim del terme b_1 que conserva l'optimalitat de la base trobada per SAS. Amb l'ajut del símplex dual indiqueu quina és la solució òptima de (P) si b_1 es redueix per sota d'aquest valor mínim. Expliqueu com hauríem pogut arribar a la mateixa conclusió analitzant gràficament com afecta a la solució òptima del problema dual el canvi en b_1 per sota del valor mínim.

(SOLUCIÓ EXERCICI 60)

EXERCICI 61. (PL1)**: anàlisi de sensibilitat.**

Trobeu l'interval d'estabilitat del coeficient c_1 del problema (PL1). Interpreteu geomètricament la situació que es produeix quan el coeficient val $c_1 + \phi_{c_1}^{\min}$. Indiqueu en quina seria la solució òptima si $\tilde{c_1} \leq c_1 + \phi_{c_1}^{\min}$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 61)

EXERCICI 62. (PL2)**: anàlisi de sensibilitat.**

Trobeu l'interval d'estabilitat del terme independent b_1 de l'EXERCICI 11. Interpreteu geomètricament la situació que es produeix quan el coeficient val $b_1 + \phi_{b_1}^{\min}$. Indiqueu quina seria la solució òptima si $\tilde{b} \leq b_1 + \phi_{b_1}^{\min}$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 62)

EXERCICI 63. (PL3) **: anàlisi de sensibilitat.**

Trobeu l'interval d'estabilitat del coeficient c_1 del problema (PL3).

(SOLUCIÓ EXERCICI 63)

EXERCICI 64. (PL4) **: anàlisi de sensibilitat.**

Trobeu l'interval d'estabilitat del terme independent b_2 del problema (PL4). Interpreteu geomètricament la situació que es produeix quan el coeficient val $b_2 + \phi_2^{\min}$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 64)

EXERCICI 65. (PL6) **: anàlisi de sensibilitat.**

Sabent que la solució òptima del problema (PL6) correspón a la base $\mathcal{B} = \{1,2\}$, calculeu l'interval d'estabilitat del coeficient c_1.

(SOLUCIÓ EXERCICI 65)

EXERCICI 66. Propietats de (PL) i base parametritzada

Considereu el problema (P) de programació lineal en forma estàndard amb $n = 7$ i $m = 3$ i la base $\mathcal{B} = \{1,2,3\}$ $(\mathcal{N} = \{4,5,6,7\})$ amb els següents valors associats:

$$x_B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad r' = [\beta \quad 3 \quad \gamma \quad \delta], \quad D_B = -B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} -\eta & -1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Trobeu un conjunt de valors dels paràmetres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i η que ens permetin assegurar que les següents afirmacions son certes:

a) El problema (P) té solució òptima única sense degeneració primal ni dual.
b) El problema (P) és il·limitat.
c) El problema (P) és infactible.

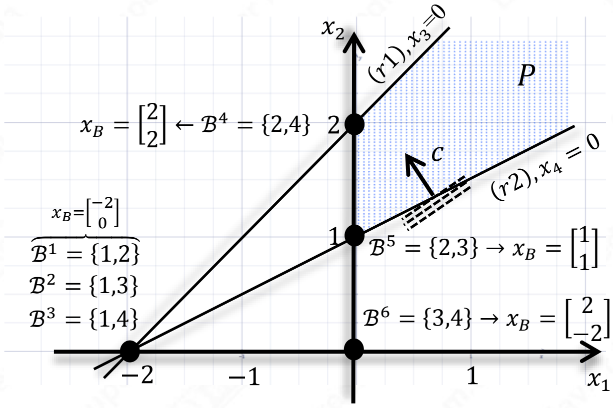
Justifiqueu les vostres respostes a partir de les propietats dels problemes de programació lineal i de les seves bases.

(SOLUCIÓ EXERCICI 66)

EXERCICI 67. Dualitat i anàlisi de sensibilitat (1).

Considereu el següent problema de programació lineal i la seva representació gràfica:

$$(P)\begin{cases} \min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & -x_1 & +2x_2 & \geq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$



a) Sense fer cap càlcul, indiqueu quina és la solució òptima del problema dual de (P) justificant la vostra resposta fent servir només el teorema feble de dualitat i els seus corol·laris.

Considereu a partir d'ara una funció objectiu del problema (P) igual a $c' = [1 \quad 1]$.

b) Formuleu el problema dual i representeu gràficament la seva regió factible:
c) Trobeu gràficament la solució òptima dual λ^* i comproveu que coincideix amb el valor de la solució dual que proporciona el corol·lari del teorema fort de dualitat.
d) Obtingueu la solució òptima del problema (P) realitzant una iteració del símplex dual a partir de la base $\mathcal{B}^6 = \{3,4\}$. Identifiqueu la iteració realitzada sobre el poliedre dual, és a dir, indiqueu al gràfic de l'apartat b) els vectors λ corresponents a $\mathcal{B}^6$ i a la base òptima $\mathcal{B}^*$.
e) Calculeu l'interval de valors de b_2, $[b_2^{\min}, b_2^{\max}]$ que conserva l'optimalitat del problema primal.$\Phi_{b_2} = [\phi_{b_2}^{\min}, \phi_{b_2}^{\max}]$. Trobeu gràficament la solució del problema dual quan $b_2 := \phi_{b_2}^{\min}$. Quina característica especial té el problema dual quan es formula per aquest nou valor de b_2?

(SOLUCIÓ EXERCICI 67)

EXERCICI 68. Anàlisi problema parametritzat.

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(P)\begin{cases} \min & 3x_1 & +\boldsymbol{c_2}x_2 & +2x_3 & +4x_4 & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & =2 \\ & & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & =\boldsymbol{b_2} \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

a) Trobeu totes solucions bàsiques té el problema (P), indicant només el conjunt $\mathcal{B}$ associat. Expliqueu clarament i concisa quin és el criteri que heu fet servir per identificar-les.
b) Calculeu el rang de valors possibles per als paràmetres c_2 i b_2 si sabem que la base òptima de (P) és $\mathcal{B}=\{2,4\}$.
c) Reoptimitzeu el problema a partir de la base $\mathcal{B}=\{2,4\}$ amb $c_2=-3$ i $b_2=-3$.

Considereu a partir d'ara el cas $c_2=1$ i $b_2=0$.

d) Formuleu el problema dual de (P) i representeu-lo gràficament i indiqueu sobre la gràfica la solució dual òptima.
e) Seleccioneu dues solucions bàsiques factibles del problema primal (P). Indiqueu, sense calcular els valor dels costos reduïts, si aquestes dues bases són factibles duals, fent ús del corol·lari del Ta. fort de dualitat i dels resultats de l'apartat anterior.

(SOLUCIÓ EXERCICI 68)

EXERCICI 69. Símplex dues fases, anàlisi de sensibilitat i reoptimització.

Considereu el següent problema de programació lineal (P):

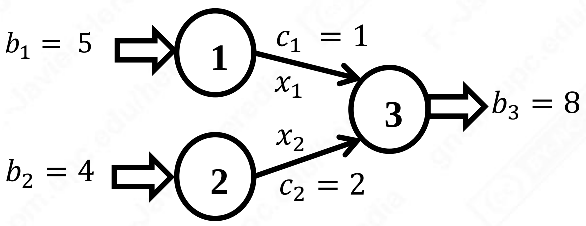
$$(P)\begin{cases} \min & x_1 & & +x_3 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & +2x_3 & \leq 4 \\ & 4x_1 & -5x_2 & & =10 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}$$

a) Comproveu, aplicant l'algorisme del símplex de les dues fases, que la base òptima de (P) és $\mathcal{B}^*=\{1,4\}$.
b) Indiqueu quin és el valor mínim del terme b_1, que anomenarem b_1^{min}, que conserva l'optimalitat $\mathcal{B}^*=\{1,4\}$.
c) Amb l'ajut del símplex dual indiqueu quina és la solució òptima de (P) si b_1 es redueix per sota de b_1^{min}.
d) A través de l'anàlisi de la representació gràfica del problema dual de (P) indiqueu quina és la solució òptima de (P) si b_1 es redueix per sota de b_1^{min}.

(SOLUCIÓ EXERCICI 69)

EXERCICI 70. Anàlisi de sensibilitat i transport (2).

Considereu el problema de transport entre dos plantes de producció, amb capacitat b_1 i b_2 respectivament, i un centre de consum amb demanda b_3 :



$$
(P)\begin{cases}
\min & x_1 & +\,2x_2 & \\
\text{s.a.:} & x_1 & & \leq 5 \\
 & & x_2 & \leq 4 \\
 & x_1 & +x_2 & \geq 8 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{cases}
$$

La base òptima trivial d'aquest problema és $\mathcal{B}^* = \{1,2,4\}$ amb $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

a) Calculeu, amb l'ajut del corol·lari del teorema fort de dualitat, el valor òptim de les variables duals λ^*.
b) Formuleu el problema dual (D) i passeu-lo a la forma estàndard (D_e).
c) Calculeu la base del problema (D_e) que correspon al vector λ^* trobat a l'apartat a) i comproveu que és òptima pel problema (D_e) fent servir els costos reduïts de (D_e).
d) Calculeu l'interval d'estabilitat del coeficient c_2.
e) Usant anàlisi de sensibilitat, indiqueu fins a quin valor màxim b_3^{max} pot augmentar la demanda del node 3, sense que la base $\mathcal{B}^*$ deixi de ser òptima.
f) Trobeu la nova solució òptima de (P) quan $b_3 > b_3^{max}$ amb l'ajut de l'algorisme del símplex dual.
g) Analitzeu amb la metodologia pròpia de l'anàlisi de sensibilitat com afectaria a l'optimalitat de la base $\mathcal{B}^*$ un canvi en la desigualtat de la primera constricció, és a dir, substituir $x_1 \leq 5$ per $x_1 \geq 5$. En cas Que es perdi l'optimalitat, amb quina versió de l'algorisme del símplex caldria iterar per reoptimitzar?

(SOLUCIÓ EXERCICI 70)

EXERCICI 71. Dual en forma estàndard i anàlisi de sensibilitat.

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$
(P)\begin{cases}
\min\limits_{x\in\mathbb{R}^2} z = & -x_1 & +2x_2 & \\
\text{s.a:} & 2x_1 & -2x_2 & \leq 1 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & \geq 3 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{cases}
$$

a) Formuleu el problema dual de (P), transformeu-lo a la forma estàndard $(D)_e$, i comproveu que la solució del problema dual que proporciona el corol·lari del Ta fort de dualitat satisfà les condicions d'optimalitat de $(D)_e$, és a dir, satisfà les condicions de factibilitat primal i dual de $(D)_e$.
b) Indiqueu quin és el valor mínim del terme b_2, que anomenarem b_2^{min}, que conserva l'optimalitat de la base de (P). Amb l'ajut de l'algorisme del símplex dual indiqueu quina és la solució òptima de (P) si b_2 adopta un valor no negatiu qualsevol per sota del valor mínim b_2^{min} trobat a l'apartat anterior.
c) Trobeu el valor de l'interval d'estabilitat del coeficient c_2. Comproveu, sense fer servir la repressentació gràfica de (D), que quan c_2 es troba sobre el límit de l'interval d'estabilitat, el problema dual presenta degeneració primal (és a dir, alguna de les variables bàsiques del problema $(D)_e$ son nul·les a l'òptim).

(SOLUCIÓ EXERCICI 71)

EXERCICI 72. Propietats dels problemes de (PL) i dels seus algorismes.

Considereu el mètode del símplex aplicat a un problema de programació lineal en forma estàndard $(P)\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x|Ax=b,x\geq 0\}$ amb matriu A de rang complet. Demostreu o refuteu en base als teoremes estudiats a classe, o amb un contraexemple, els següents enunciats:

a) En una iteració del mètode del símplex es pot fer un desplaçament estrictament positiu tot passant d'una solució factible a un altre de diferent sense canviar el valor de la funció objectiu.
b) Una variable que acaba de sortir d'una base no degenerada no pot tornar a entrar en la iteració següent.
c) Si existeix una base òptima no degenerada, llavors existeix una única base òptima.
d) Si (P) és infactible el seu dual (D) serà il·limitat.
e) Si la modificació d'un dels coeficients a_{ij} de la matriu A fa perdre l'optimalitat de la base $\mathcal{B}^*$ sempre es podrà reoptimitzar el problema a partir de la base òptima $\mathcal{B}^*$ ja sigui amb l'algorisme del símplex primal o dual.

(SOLUCIÓ EXERCICI 72)

EXERCICI 73. Dualitat i condicions de Karush-Kuhn-Tucker.

La teoria de dualitat en programació lineal està fortament relacionada amb les condicions d'optimalitat per a problemes d'optimització no lineal contínua. Efectivament, considerem el problema $(P)\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x|Ax\leq b\}$, factible no degenerat de rang complet, i el seu problema dual associat (D).

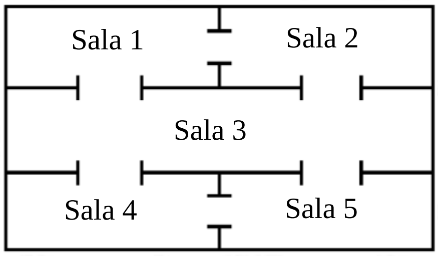
a) Formuleu el problema dual de (P).
b) Enuncieu i demostreu el teorema de folga complementària.
c) Recolzant-vos en el desenvolupament dels apartats a) i b) demostreu que si la solució primal factible x^* satisfà les condicions de Karush-Kuhn-Tucker amb multiplicadors de Lagrange μ^* llavors el vector $-\mu^*$ és solució òptima del problema dual (D).

(SOLUCIÓ EXERCICI 73)

FORMULACIÓ DE PROBLEMES DE PROGRAMACIÓ LINEAL ENTERA

EXERCICI 74. Vigilants.

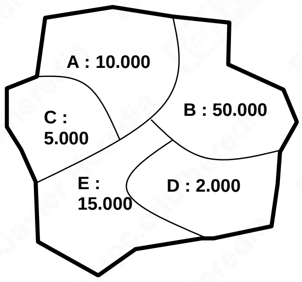
La figura adjunta representa el conjunt de sales d'un museu. El servei de seguretat d'aquest museu vol col·locar vigilants a les portes de comunicació entre sales. Cada vigilant pot controlar les dues sales adjacents a la porta que té assignada. Formuleu un problema de programació lineal entera completament parametritzat que permeti trobar la col·locació dels vigilants de forma que es puguin controlar totes les sales amb el mínim nombre possible de vigilants.



(SOLUCIÓ EXERCICI 74)

EXERCICI 75. Editorial Omega.

L'editorial Omega ven llibres de text universitaris. Opera en una regió amb cinc autonomies, A, B, C i D. La gràfica adjunta mostra la ubicació geogràfica de les diferents autonomies i el nombre d'alumnes universitaris a cada autonomia. L'editorial té dos representants disponibles per al conjunt de les cinc autonomies. Cadascú ha de tenir assignades dues autonomies, però aquestes han de ser contigües, és a dir, el mateix representant no pot cobrir l'autonomia A i la D, per exemple. L'objectiu d'Omega és que els seus dos representants donin servei al màxim nombre d'alumnes universitaris possible. Formuleu el model de PLE que permet resoldre aquest problema.



(SOLUCIÓ EXERCICI 75)

EXERCICI 76. Remington Manufacturing: problemes de càrrega fixa.

El procés de manufactura de l'empresa Remington Manufacturing consisteix en tres operacions, *mecanització, polvorització* i *assemblatge* amb les següents dades:

Operació	Hores consumides per unitat produïda:			Hores disponibles
	Prod 1	Prod 2	Prod 3	
Mecanització	2	3	6	600
Polvorització	6	3	4	300
Assemblatge	5	6	2	400
Benefici unitari (€)	48	55	50	
Costos fixos (€)	1000	800	900	

Formuleu matemàticament i ressoleu amb OPTMODEL el problema (PLE) completament parametritzat que permet la quantitat òptima de producte a fabricar.

(SOLUCIÓ EXERCICI 76)

EXERCICI 77. CRT-Technologies: problemes de selecció de projectes.

La Companyia tecnològica CRT-Technologies es planteja la possibilitat de posar en marxa 6 projectes per als pròxims 5 anys. Les dades amb les que s'ha de basar la decisió sobre quins d'ells encetar es troba a la següent taula:

Projecte	Valor esperat del NPV (10^3€)	Inversió necessària (10^3€)				
		Any 1	Any 2	Any 3	Any 4	Any 5
1	141	75	25	20	15	10
2	187	90	35	0	0	30
3	121	60	15	15	15	15
4	83	30	20	10	5	5
5	265	100	25	20	20	20
6	127	50	20	10	30	40
Capital disponible(10^3€):		250	75	50	50	50

CRT-Technologies vol determinar quins projectes ha de posar en marxa de forma que es maximitzi el valor total de NPV esperat, sense que la inversió total superi el capital disponible a cada any.

Formuleu matemàticament el problema (PLE) completament parametritzat que permet resoldre el problema de selecció de projectes de l'empresa CRT-Technologies.

(SOLUCIÓ EXERCICI 77)

EXERCICI 78. Air-Express: problemes de planificació de plantilles.

La companyia aèria *Air-Express* ha de confeccionar la programació de vol de la seva tripulació de cabina. La tripulació s'organitza per torns que descansen dos dies de la setmana d'acord amb la següent taula:

Torn	Dies descans	Sou
1	diumenge, dilluns	680€
2	dilluns, dimarts	705€
3	dimarts, dimecres.	705€
4	dimecres, dijous	705€
5	dijous, divendres	705€
6	divendres, dissabte	680€
7	dissabte, diumenge	680€

Les necessitats estimades de treballadors durant els diferents dies de la setmana són:

Dia	Treballadors
Diumenge	18
Dilluns	27
Dimarts	22
Dimecres	26
Dijous	25
Divendres	21
Dissabte	19

A banda del cost per treballador contractat a cada torn, si es decideix posar en marxa un torn (és a dir, si es contracta algun treballador per aquest torn) existeixen uns costos fixos mensuals, associats a la contractació i gestió laboral dels torns, que s'indiquen a la següent taula:

Torn→	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Cost fix (€) →	1000	950	950	950	950	1000	1000

Air-Express vol trobar el nombre de treballadors que s'han de contractar a cada torn de forma que s'asseguri el nombre de treballadors diaris necessaris i que el cost total de la plantilla sigui el mínim possible.

(SOLUCIÓ EXERCICI 78)

EXERCICI 79. Prodem S.L.

L'empresa Prodem SL. fabrica els productes A, B i C. En la fabricació d'aquests tres productes es fabriquen a través del procés de manufactura que consumeixen un recurs amb una disponibilitat màxima de $b = 40Tm$. A més, l'empresa s'ha compromès a satisfer una certa demanda no inferior a $d = 33Tm$. Els costos de fabricació d'una unitat de producte A, B y C són, respectivament, 10, 2 i 3 u.m. (unitats monetàries). El problema lineal (P) que permet calcular les quantitats de producte A (x_1), B (x_2) i C (x_3) que minimitzen els costos de producció és:

$$(P)\begin{cases} \min & 10x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & \\ \text{s.a.:} & & & & & \\ & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & \le 40 & \text{Procés manufactura 1} \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & \ge 33 & \text{Demanda} \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \ge 0 & \end{cases}$$

L'empresa té la possibilitat de substituir el procés de manufactura 1 per un procés alternatiu, al que denotarem per "procés de manufactura 2". Aquest procés és més eficient que el procés 1, de forma que el consum de tones de recurs per cada unitat de producte A, B i C fabricat és redueix a 1.5, 1 i 0.5 respectivament. Com a contrapartida, alguns dels costos de fabricació d'aquest procés de manufactura 2 augmenten, passant a ser 15, 2 i 4 respectivament. Els dos processos son incompatibles, és a dir, tot els productes A, B i C s'han de fabricar a través del procés 1 o del procés 2.

Formuleu el model matemàtic completament parametritzat del problema (PLE) que permet determinar quin dels dos processos de manufactura cal usar i la quantitat òptima a fabricar dels productes A, B i C.

(SOLUCIÓ EXERCICI 79)

ALGORISMES DE PROGRAMACIÓ LINEAL ENTERA

EXERCICI 80. **Test programació lineal entera.**

TEST 1. Donat un problema de programació lineal entera (PE) de minimització i la seva relaxació lineal (RL) es satisfà:

a) **V / F** $K_{PE} \supset K_{RL}$.
b) **V / F** $z_{RL}^* \leq z_{PE}^*$.
c) **V / F** (PE) només té solució òptima si K_{RL} és un polítop.

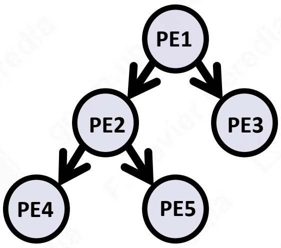
TEST 2. Considereu el problema (PE) de minimització i la seva relaxació lineal (RL):

a) **V / F** $\mathrm{K_{PE}} \subseteq \mathrm{K}_{RL}$.
b) **V / F** $c'x_{RL} \leq c'x_{PE}$, $\forall x_{RL} \in K_{RL}$, $\forall x_{PE} \in K_{PE}$.
c) **V / F** $x_{PE}^* \in K_{RL} \Rightarrow z_{PE}^* = z_{RL}^*$.

TEST 3. La formulació ideal (PEI) d'un problema de programació lineal entera (PE):

a) **V / F** Té la mateixa solució òptima que (PE).
b) **V / F** Tots els punts extrems K_{RLI} pertanyen a K_{PE}.
c) **V / F** És la formulació vàlida de (PE) que s'obté en finalitzar l'algorisme de plans de tall de Gomory.

TEST 4. Al següent arbre d'exploració del B&B d'un problema (PE) de minimització:



a) **V / F** $(PE4)$ i $(PE5)$ son una separació de $(PE1)$.
b) **V / F** $(PE2)$ i $(PE4)$ son formulacions vàlides de (PE) més fortes que $(PE1)$.
c) **V / F** z_{PE4}^* i z_{PE5}^* son $\geq$ z_{PE3}^*.

TEST 5. El tall de Gomory de (PE) associat a x_{RL}^* és una constricció de desigualtat tal que:

a) **V / F** Tota solució factible (PE) $x_{PE} \in K_{PE}$ la satisfà.
b) **V / F** Tota solució factible (RL) $x_{RL} \in K_{RL}$ la satisfà.
c) **V / F** Només la solució òptima de (RL), x_{RL}^* la satisfà.

TEST 6. El tall de Gomory $x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor x_{B(i)}^* \rfloor$ associat a (PE) i x_{RL}^*és una constricció de desigualtat:

a) **V / F** Que no satisfà x_{RL}^*.
b) **V / F** Que no satisfà x_{PE}^*.
c) **V / F** Que defineix una formulació ideal de (PE).

TEST 7. Quan apliquem un algorisme de plans secant de Gomory a un problema de (PE) de minimització:

a) **V / F** A cada iteració es millora, en general, la fita inferior de z_{PE}^*.

b) **V** / **F** A cada iteració s'obté una formulació vàlida més forta de (PE).

c) **V** / **F** S'obté la formulació ideal de (PE) a l'última iteració.

TEST 8. Per tal que una constricció lineal de desigualtat sigui una desigualtat vàlida cal que:

a) **V** / **F** Sigui satisfeta per totes les solucions factibles de (RL).

b) **V** / **F** Sigui violada per la incumbent.

c) **V** / **F** Es formi a través d'un tall de Gomory.

TEST 9. Quan apliquem un algorisme de Branch&Cut a un problema de (PE):

a) **V** / **F** Farà, en general, menys iteracions del símplex que un alg. de Brach&Bound.

b) **V** / **F** Generarà, en general, menys nodes que un alg. de Brach&Bound.

c) **V** / **F** Les fites a z^*_{PEi} són, en general, millors que les que s'obtenen amb el Branch and Bound.

TEST 10. Quan apliquem un algorisme de Branch&Cut a un problema de (PE):

a) **V** / **F** Les fites $\underline{z}^*_{\mathrm{PEi}}$ són, en general, millors que les que s'obtenen amb el Branch and Bound.

b) **V** / **F** Els criteris de ramificació son diferents als de l'algorisme de Branch&Bound.

c) **V** / **F** Sempre realitzarà un nombre d'iteracions igual o inferior a les del Branch&Bound.

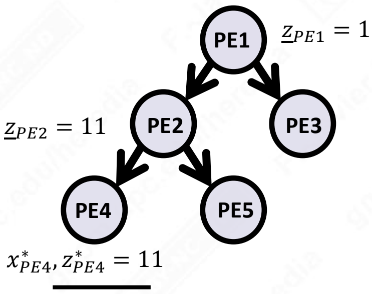
TEST 11. Considereu el problema (PE1) de minimització i les relaxacions lineal (RL1) i (RL2) de les dues primeres iteracions de l'algorisme de plans secant de Gomory:

a) **V** / **F** $\mathrm{K}_{\mathrm{PE1}} \subseteq \mathrm{K}_{RL2} \subseteq \mathrm{K}_{RL1}$.

b) **V** / **F** $z_{RL1} \geq z_{RL2} \geq z_{PE}$.

c) **V** / **F** $x^*_{RL1} \in K_{RL2}$.

TEST 12. El següent arbre d'exploració del B&B d'un problema (PE1) de minimització mostra la situació després de realitzar tres iteracions i trobar l'òptim del subproblema (PE4):



a) **V** / **F** x^*_{PE4} és la solució de (PE1).

b) **V** / **F** Cal resoldre (RL5) per trobar la solució òptima de (PE1).

c) **V** / **F** L'òptim de (PE1) es pot trobar a $\mathrm{K}_{\mathrm{PE3}}$.

TEST 13. Si $x_{RL1} = [x_1, x_2]' = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$ i $V = \begin{bmatrix} 5/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ el tall de Gomory associat a x_1:

a) **V** / **F** És $x_1 \leq 0$.

b) **V** / **F** És $x_1 - x_3 \leq 1$.

c) **V** / **F** És $x_1 + x_3 - x_4 \leq 1$.

TEST 14. Donades dues formulacions vàlides $(PE1)$ i $(PE2)$ de (PE), si $(PE1)$ és més forta que $(PE2)$ podem assegurar que:

a) **V** / **F** $K_{PE1} \subset K_{PE2}$.

b) **V** / **F** $K_{RL1} \subset K_{RL2}$.

c) **V** / **F** $(PE1)$ conté més desigualtats vàlides que $(PE2)$.

TEST 15. La formulació ideal (PEI):

a) **V** / **F** És la formulació més forta possible.
b) **V** / **F** Té associat un políedre amb punts extrems enters.
c) **V** / **F** Necessitarà una única ramificació quan s'apliqui B&B.

TEST 16. El tall de Gomory $x_{B(i)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor x^*_{B(i)} \rfloor$ associat a (PE) i x^*_{RL}és una constricció de desigualtat:

a) **V** / **F** Que no satisfà x^*_{RL}.
b) **V** / **F** Que no satisfà x^*_{PE}.
c) **V** / **F** Que defineix una formulació ideal de (PE).

TEST 17. Donades dues formulacions vàlides $(PE1)$ i $(PE2)$ del problema de maximització (PE), llavors:

a) **V** / **F** $K_{PE1} \subset K_{PE2}$.
b) **V** / **F** $K_{RL1} \subset K_{RL2} \Rightarrow (PE1)$ és més forta que $(PE2)$.
c) **V** / **F** $\mathrm{K_{RL1}} \subset \mathrm{K_{RL2}} \Rightarrow \mathrm{z}^*_{\mathrm{PE1}} > \mathrm{z}^*_{\mathrm{PE2}}$.

TEST 18. Sigui $\mathcal{B}^*$ l'òptim de la relaxació lineal del problema (PE1) a la iteració 1 de l'algorisme de Gomory i $\widetilde{\mathcal{B}}$ la base inicial a partir de la qual es reoptimitzarà amb el símplex dual:

a) **V** / **F** La base $\widetilde{\mathcal{B}}$ serà factible dual infactible primal.
b) **V** / **F** La base $\widetilde{\mathcal{B}}$ té les mateixes variables bàsiques que $\mathcal{B}^*$.
c) **V** / **F** Els vector de costos reduïts associat a $\widetilde{\mathcal{B}}$ té una component més que l'associat a $\mathcal{B}^*$.

TEST 19. Si x_1, x_2 i x_3 representen les variables binàries de selecció d'un projecte

a) **V** / **F** $x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$ imposa que es seleccionaran com mínim dos projectes.
b) **V** / **F** $x_1 + x_2 \leq 1$ imposa que es seleccionarà un dels dos projectes 1 o 2.
c) **V** / **F** $x_2 \geq x_3$ imposa que no es seleccionarà x_2 a no ser que es seleccioni x_3.

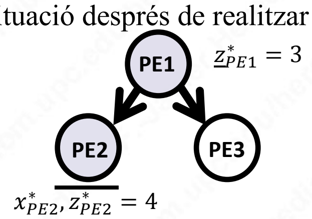
TEST 20. El tall de Gomory $x_{B(i)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor x^*_{B(i)} \rfloor$ associat a (PE) i x^*_{RL}:

a) **V** / **F** És una de les constriccions que defineixen (RL).
b) **V** / **F** És una constricció que no satisfà x^*_{PE}.
c) **V** / **F** És una constricció que forma part de la formulació ideal de (PE).

TEST 21. Donat un problema de PLE (PE) de minimització, la formulació vàlida $(PE1)$ és més forta que la formulació vàlida $(PE2)$

a) **V** / **F** Si $z^*_{PE1} \leq z^*_{PE2}$.
b) **V** / **F** Si $z^*_{RL1} \geq z^*_{RL2}$.
c) **V** / **F** Si $K_{RL1} \subset K_{RL2}$.

TEST 22. El següent arbre d'exploració del B&B d'un problema $(PE1)$ de minimització mostra la situació després de realitzar dues iteracions i trobar l'òptim del subproblema $(PE2)$:



a) **V** / **F** Es pot assegurar que x^*_{PE2} és la solució de (PE1).

b) **V** / **F** $(PE2)$ i $(PE3)$ són una separació de $(PE1)$.

c) **V** / **F** L'òptim de (PE1) es pot trobar a K_{PE3}.

TEST 23. Sigui $\mathcal{B}^*$ l'òptim de la relaxació lineal del problema (PE1) a la iteració 1 de l'algorisme de Gomory i $\tilde{\mathcal{B}}$ la base inicial a partir de la qual es reoptimitzarà amb el símplex dual:

a) **V** / **F** La base $\tilde{\mathcal{B}}$ serà factible dual infactible primal.

b) **V** / **F** La base $\tilde{\mathcal{B}}$ té les mateixes variables bàsiques que $\mathcal{B}^*$.

c) **V** / **F** Els vector de costos reduïts associat a $\tilde{\mathcal{B}}$ té una component més que l'associat a $\mathcal{B}^*$.

TEST 24. Donades dues formulacions vàlides $(PE1)$ i $(PE2)$ de (PE), si $(PE1)$ és més forta que $(PE2)$ podem assegurar que:

a) **V** / **F** $(PE1)$ conté menys desigualtats vàlides que $(PE2)$.

b) **V** / **F** $K_{RL1} \subset K_{RL2}$.

c) **V** / **F** $K_{PE1} \subset K_{RL2}$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 80)

EXERCICI 81. Algorisme de ramificació i poda (1).

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases} \min & -x_1 & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \leq & -1 \\ & 2x_1 & +2x_2 & \leq & 5 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq & 0, enteres \end{cases}$$

Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de Branch & Bound d'acord amb el següent criteri:

- Preneu com a variable de separació x_1 abans que x_2.
- Exploreu primer la branca associada a la fita $x_i \leq \lfloor x^*_{RL_i} \rfloor$.
- Resoleu totes les relaxacions lineal necessàries gràficament.
- En acabar representeu l'arbre d'exploració.

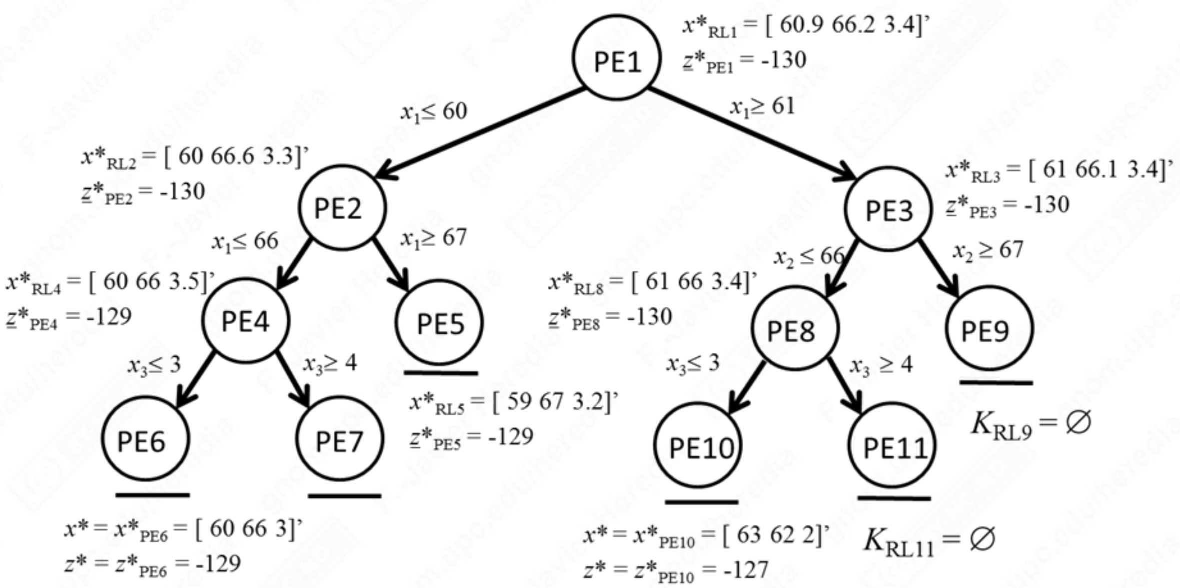
(SOLUCIÓ EXERCICI 81)

EXERCICI 82. Algorisme de ramificació i tall.

Considereu el següent problema de programació lineal entera (PE):

$$(PE)\begin{cases} \min & -x_1 & -x_2 & -x_3 & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ & & 3x_2 & +12x_3 & \leq 240 \\ & 3x_1 & & +5x_3 & \leq 200 \\ & 2x_1 & +3x_2 & -6x_3 & \leq 300 \\ & x_1 & & & \leq 90 \\ & x_{1,} & x_{2,} & x_2 & \geq 0, enteres \end{cases}$$

L'arbe d'exploració de l'algorisme *branch and cut* que resol aquest problema és:



L'ordre de visita dels nodes ha estat: PE1→ PE2→ PE4→ PE6→ PE5→ PE3→ PE8→ PE10→ PE11→ PE9

a) A la vista de l'arbre d'exploració, quina és la solució del problema (PE)?
b) Tenint en compte que la solució de la formulació vàlida associada al problema $(PE1)$ és $x^*_{RL1} = [60.9 \quad 66.2 \quad 3.4]'$, justifiqueu el valor de la fita inferior $\underline{z}^*_{PE1} = -130$.
c) Expliqueu per quina raó podem eliminar el subproblema $(PE7)$ sense necessitat de tractar-lo, és a dir, sense necessitat de resoldre la seva relaxació lineal, mentre que, pel contrari, cal tractar (resoldre la relaxació lineal) el problema $(PE5)$ abans de poder-ho eliminar.

(SOLUCIÓ EXERCICI 82)

EXERCICI 83. Algorismes de ramificació i poda (2).

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases} \min & -x_1 & -2x_2 & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & x_1 & +3x_2 & \leq 2 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0 \quad , enteres \end{cases}$$

Trobeu la solució òptima de (PE) mitjançant l'algorisme de B&B.

- Seleccioneu com a variables de ramificació x_1 abans que x_2.
- Exploreu primer la branca de l'esquerra ($x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$).
- Seleccioneu primer últims subproblemes generats.

Expliqueu els detalls de cada iteració.

(SOLUCIÓ EXERCICI 83)

EXERCICI 84. Algorisme de ramificació i poda (3).

Considereu el problema $(PE)\ \min_{x\in\mathbb{Z}^2}\left\{z_{PE}=-2x_1-5x_2 \middle| \begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}x \leq \begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}, x\geq 0\right\}$. Trobeu la solució òptima de (PE) amb l'algorisme de Branch&Bound d'acord amb el següent criteri:

- Preneu com a variable de separació x_2 abans que x_1.
- Exploreu primer la branca associada a la fita $x_i \geq \lceil x^*_{RL_i} \rceil$.
- Resoleu totes les relaxacions lineal necessàries gràficament.

En acabar representeu l'arbre d'exploració.

(SOLUCIÓ EXERCICI 84)

EXERCICI 85. Desigualtats de Chvátal-Gomory i algorisme de ramificació i poda.

Donat un problema de programació entera $(PE)\min\{c'x | x\in K_{PE}\}$ amb regió factible $K_{PE}=\{x\in\mathbb{Z}^n | \sum_{i=1}^n A_i x_i \leq b, x\geq 0\}$ el **procediment de Chvátal-Gomory** és un mètode per generar de forma sistemàtica noves desigualtats de formulacions vàlides, és a dir, que són satisfetes per tot $x\in K_{PE}$. Les passes d'aquest mètode són:

Passa 1: es genera la desigualtat $\sum_{i=1}^n u'A_i x_i \leq u'b$, amb un vector $u\in\mathbb{R}^m, u\geq 0$ qualsevol.

Passa 2: s'arrodoneixen els coeficients del terme de l'esquerra: $\sum_{i=1}^n \lfloor u'A_i\rfloor x_i \leq u'b$.

Passa 3: s'arrodoneix el terme de la dreta: $\sum_{i=1}^n \lfloor u'A_i\rfloor x_i \leq \lfloor u'b\rfloor$.

a) Demostreu que les desigualtats generades pel procediment de Chvátal-Gomory són vàlides per a (PE), és a dir, que $\sum_{i=1}^n \lfloor u'A_i\rfloor x_i \leq \lfloor u'b\rfloor$ per a tot $x\in K_{PE}$.

b) Sigui $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ i $b=\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$. Comproveu gràficament que si afegim a la formulació de (PE) la desigualtat de Chvátal-Gomory amb $u=\begin{bmatrix}2/3\\1/3\end{bmatrix}$ s'obté la formulació ideal de (PE).

(SOLUCIÓ EXERCICI 85)

EXERCICI 86. Talls de Gomory

Demostreu que el tall de Gomory $x_{B(i)}+\sum_{j\in\mathcal{N}}\lfloor v_{ij}\rfloor x_j \leq \lfloor x^*_{B(i)}\rfloor$ és un tall del problema $(PE)\{\min c'x\ | Ax=b, x\geq 0\ enteres\}$ sobre la solució de la relaxació lineal x^* amb $x^*_{B(i)}$ no entera, és a dir:

i. La desigualtat és satisfeta per totes les solucions enteres $x\in\mathcal{K}_{PE}$.

ii. La desigualtat és violada per la solució de la relaxació lineal x^*_{RL}.

(SOLUCIÓ EXERCICI 86)

EXERCICI 87. Algorisme de ramificació i poda i plans secants.

Considereu el següent problema de programació lineal entera $(PE1)$:

$$(PE1)\begin{cases}\min & x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \geq 1\\ & 2x_1 & +x_2 & \geq 1\\ & x_1, & x_2 & \geq 0,\ \text{enteres}\end{cases}$$

a) Trobeu la solució òptima de (PE1) amb l'algorisme de ramificació i poda (branch&bound). Indiqueu detalladament les passes de cada iteració. Resoleu les relaxacions lineals gràficament i representeu l'arbre d'exploració.
b) Trobeu la solució òptima de (PE1) amb l'algorisme de plans secants de Gomory. Resoleu les relaxacions lineals gràficament, triant com a variable de generació del tall $x_1$abans que x_2.
c) Torneu a aplicar ara l'algorisme de plans secants de Gomory aplicat d'acord amb les següents indicacions:
   - Trobeu la solució de (RL1) gràficament.
   - Resoleu les relaxacions lineals per reoptimització amb l'algorisme del símplex dual.
   - Trieu com a variable de generació del tall $x_1$abans que x_2.

(SOLUCIÓ EXERCICI 87)

EXERCICI 88. Formulació ideal i algorisme de plans de tall.

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases} \min & x_1 & +3x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & \frac{2}{5}x_1 & +x_2 & \geq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, enteres \end{cases}$$

a) Indiqueu raonadament si (PE) és la formulació ideal del problema que volem resoldre. En cas de resposta negativa, trobeu el conjunt de desigualtats vàlides que calen per obtenir la formulació ideal.
b) Trobeu la solució òptima de (PE) mitjançant l'algorisme de plans secants de Gomory, seguint les següents regles:
   - Seleccioneu com a variables de generació del tall la primera variable no entera.
   - Ressoleu les relaxacions lineals gràficament.

   Expliqueu el detall de cada iteració i afegiu el gràfic que representi el problema (PE) i els talls de Gomory generats.

(SOLUCIÓ EXERCICI 88)

EXERCICI 89. Algorisme de plans secants amb resolució gràfica (1).

Considereu el següent problema de programació lineal entera (PE):

$$(PE)\begin{cases} \min & -x_1 & -x_2 & \\ \text{s.a.:} & 3x_1 & +2x_2 & \leq 6 \\ & 2x_1 & +3x_2 & \leq 6 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, \text{enteres} \end{cases}$$

Trobeu la solució òptima de (PE) amb l'algorisme de plans secants de Gomory resolent els problemes relaxats gràficament i trieu com a variable de generació del tall $x_1$abans que x_2.

(SOLUCIÓ EXERCICI 89)

EXERCICI 90. Algorisme de plans secants amb resolució gràfica (2).

Resoleu el següent problema de (PE) amb l'algorisme de plans de tall de Gomory.:

$$(PE)\begin{cases}\text{min} & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ (r1) & x_1 & +x_2 & \geq & 1 \\ (r2) & 2x_1 & -x_2 & = & 0 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0, x \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

Resoleu les relaxacions lineals gràficament i seleccioneu com a variable de generació del tall la que tingui el menor índex.

(SOLUCIÓ EXERCICI 90)

EXERCICI 91. Algorismes de plans secants amb símplex dual (1)

Considereu el següent problema de programació lineal entera (PE):

$$(PE)\begin{cases}\text{min} & 4x_1 & +5x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +3x_2 & \geq 5 \\ & 3x_1 & +2x_2 & \geq 7 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, enteres\end{cases}$$

La solució òptima de la relaxació lineal de (PE) ve donada per:

$$\mathcal{B} = \{1,2\}\,;\; B = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\,;\; B^{-1} = \begin{bmatrix}-2/7 & 3/7\\ 3/7 & -1/7\end{bmatrix}\,;\; x_B = \begin{bmatrix}11/7\\ 8/7\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} = \{3,4\}\,;\; A_N = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\,;\; V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}2/7 & -3/7\\ -3/7 & 1/7\end{bmatrix}\,;\; r' = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

c) Trobeu el tall de Gomory associat a x_1.
d) Apliqueu l'algorisme de plans secants de Gomory a la resolució de (PE) i comproveu com, si definiu a la primera iteració el tall associat a x_1 , s'arriba a la solució òptima en només dues iteracions. Resoleu les relaxacions lineal per reoptimització amb el símplex dual.

(SOLUCIÓ EXERCICI 91)

EXERCICI 92. Algorismes de plans secants amb símplex dual (2)

Considereu el següent problema de programació lineal entera (PE1):

$$(PE1)\begin{cases}\text{min} & 4x_1 & +5x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +3x_2 & \geq 5 \\ & 3x_1 & +2x_2 & \geq 7 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, \text{ enteres}\end{cases}$$

La solució òptima de la relaxació lineal (RL1) ve donada per:

$$\mathcal{B} = \{1,2\}\,;\; B = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\,;\; B^{-1} = \begin{bmatrix}-2/7 & 3/7\\ 3/7 & -1/7\end{bmatrix}\,;\; x_B = \begin{bmatrix}11/7\\ 8/7\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} = \{3,4\}\,;\; A_N = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\,;\; V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}2/7 & -3/7\\ -3/7 & 1/7\end{bmatrix}\,;\; r' = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

Suposeu que esteu resolent (PE1) mitjançant l'algorisme de plans secants de Gomory, i que ja heu realitzat la primera iteració, on s'ha introduït el tall de Gomory associat a x_2. Realitzeu la segona iteració de l'algorisme resolent la relaxació lineal per reoptimització amb el símplex dual. En particular:

a) Trobeu el tall de Gomory associat a $\mathbf{x_2}$
b) Formuleu el problema (PE2) i trobeu l'òptim de la seva relaxació lineal (RL2) reoptimitzant amb l'algorisme del símplex dual a partir de la base òptima de (RL1).
c) Definiu el nou tall de Gomory associat a la variable de la solució obtinguda de (RL2) amb part fraccional més gran i el problema (PE3) resultant.

(SOLUCIÓ EXERCICI 92)

EXERCICI 93. Algorisme de ramificació i tall amb resolucions gràfiques (1).

Considereu el següent problema de programació lineal entera (PE1):

$$(PE)\begin{cases}\min & -x_1 & -x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \leq 1 \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, \text{ enteres}\end{cases}$$

a) Trobeu la solució òptima de (PE) amb l'algorisme de ramificació i tall (*Branch* & Cut) aplicat seguint les següents indicacions:
   - Ressoleu els problemes relaxats gràficament.
   - Introduïu un tall de Gomory a cada node de l'arbre d'exploració..
   - Trieu com a variable de generació del tall i de ramificació $x_1$abans que x_2.
   - Exploreu primer la branca de l'esquerra ($x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$).
b) Expliqueu quina és la millora que s'obté en aplicar l'algorisme de B&C al problema (PE) en relació a l'aplicació de l'algorisme de B&B comparant els respectius arbres d'exploració.

(SOLUCIÓ EXERCICI 93)

EXERCICI 94. Algorisme de ramificació i tall amb resolucions gràfiques (2).

Considereu el següent problema de programació lineal entera (PE):

$$(PE)\begin{cases}\min & x_1 & -x_2/2 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \leq 2 & (r1) \\ & 3x_1 & +x_2 & \geq 3 & (r2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, \text{ enteres} & \end{cases}$$

c) Trobeu la solució òptima de (PE) amb l'algorisme de ramificació i tall (Branch & Cut) aplicat seguint les següents indicacions:
   - Ressoleu els problemes relaxats gràficament.
   - Introduïu un tall de Gomory a cada node de l'arbre d'exploració..
   - Trieu com a variable de generació del tall i de ramificació $x_1$abans que x_2.
   - Exploreu primer la branca de l'esquerra ($x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$).
d) Expliqueu quina és la millora que s'obté en aplicar l'algorisme de B&C al problema (PE) en relació a l'aplicació de l'algorisme de B&B comparant els respectius arbres d'exploració.

(SOLUCIÓ EXERCICI 94)

EXERCICI 95. Algorisme de ramificació i tall amb resolucions gràfiques (3).

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases} \min & x_1 & -x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \leq -1 \\ & & x_2 & \leq \dfrac{5}{2} \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, enteres \end{cases}$$

Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de Branch & Cut fent:

- Afegiu un tall de Gomory a cada node de l'arbre.
- Preneu com a variable de generació de tall i de separació x_1 abans que x_2.
- Resoleu les relaxacions lineals gràficament.

(SOLUCIÓ EXERCICI 95)

EXERCICI 96. Algorisme de ramificació i tall amb resolucions gràfiques (4).

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases} \min & -x_1 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \leq -1 \\ & x_1 & +x_2 & \leq \dfrac{5}{2} \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, enteres \end{cases}$$

Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de Branch & Cut d'acord amb el següent criteri:

- Afegiu un tall de Gomory a cada node de l'arbre.
- Preneu com a variable de generació de tall i de separació x_1 abans que x_2.
- Resoleu la primera relaxació lineal de cada node gràficament i la resta reoptimitzant amb el símplex dual. Les podeu resoldre-les també totes gràficament, amb una penalització sobre la nota d'un punt.
- En acabar, representeu l'arbre d'exploració

(SOLUCIÓ EXERCICI 96)

EXERCICI 97. Algorisme de plans secants i B&B amb resolucions gràfiques.

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases} \min & x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & -2x_2 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & +2x_2 & \geq & 3 \\ & x \geq 0, & x \in \mathbb{Z} & & \end{cases}$$

a) Realitzeu la primera iteració de l'algorisme de plans secants de Gomory resolent la relaxació lineal $(RL1)$ gràficament.
b) Obtingueu la solució òptima del problema relaxat de la segona iteració de Gomory per reoptimització amb l'algorisme del símplex dual a partir de x^*_{RL1}.
c) Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de ramificació i tall (Branch&Cut) d'acord amb els següents criteris:

- Resoleu totes les relaxacions lineal gràficament.
- Introduïu un tall de Gomory (podeu aprofitar els càlculs fets a l'apartat a)).

- Preneu com a variable de separació x_1 abans que x_2.
- Exploreu primer la branca associada a la fita $x_i \leq \lfloor x^*_{RL_i} \rfloor$.

Indiqueu molt clarament les diferents passes de l'algorisme.

(SOLUCIÓ EXERCICI 97)

EXERCICI 98. Algorisme de ramificació i tall amb resolucions gràfiques (5).

Es vol resoldre el següent problema (PE) amb l'algorisme de ramificació i tall amb la introducció d'un tall de Gomory a cada iteració:

$$(PE)\begin{cases}\min & -x_1 & +2x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ (r1) & 2x_1 & -2x_2 & \leq & 1 \\ (r2) & 2x_1 & +2x_2 & \geq & 3 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0, x \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

Resoleu el problema (PE) amb l'algorisme de ramificació i tall tenint en compte que:

- Heu de resoldre totes les relaxacions lineal gràficament.
- Heu d'introduir un tall de Gomory a cada iteració.
- Heu de prendre com a variable de separació x_1 abans que x_2.
- Heu d'explorar primer la branca associada a la fita $x_i \leq \lfloor x^*_{RL_i} \rfloor$.

Podeu usar la següent informació:

- El tall de Gomory introduït a la primera iteració de l'algorisme és $(r3)$: $3x_2 \geq 2$.
- L'òptim del problema relaxat $(RL1{,}1)$ associat al tall de Gomory $(r3)$ és $x^*_{RL1,1} = \begin{bmatrix} 7/6 \\ 2/3 \end{bmatrix}$.

Indiqueu molt clarament les diferents passes de l'algorisme.

(SOLUCIÓ EXERCICI 98)

EXERCICI 99. Algorisme de ramificació i tall amb símplex dual (1).

Considereu el següent problema de PLE: $(PE)\begin{cases}\min & -x_1 & -2x_2 & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & x_1 & +3x_2 & \leq 2 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0 \quad , enteres\end{cases}$

Sabent que la base òptima de la relaxació lineal de (PE) és $\mathcal{B} = \{1,2\}$, amb $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$, realitzeu la primera iteració d'un algorisme B&C, explicant les diferents passes (selecció, relaxació, eliminació, separació) que apliqueu. Seguiu les següents indicacions:

- Genereu un únic tall de Gomory que sigui l'associat a la variable bàsica no entera d'índex menor.
- Resoleu les relaxacions lineals reoptimitzant amb l'algorisme del símplex dual.
- Preneu com a variable de separació la variable no entera d´index menor.

(SOLUCIÓ EXERCICI 99)

EXERCICI 100. Algorisme de plans secants amb símplex dual (2).

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases}\min & -x_1 & -x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \leq -1 \\ & & x_2 & \leq \frac{5}{2} \quad \leftarrow \text{ vigileu!!} \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, enteres\end{cases}$$

Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de plans secants de Gomory fent:

- Preneu com a variable de generació de tall x_1 abans que x_2.
- Resoleu la primera relaxació lineal gràficament i les restants reoptimitzant amb el símplex dual.

(SOLUCIÓ EXERCICI 100)

EXERCICI 101. Algorisme de ramificació i tall amb símplex dual (3).

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases}\min & -x_1 & & \\ \text{s.a.:} & & x_2 & \geq 1 \\ & 2x_1 & +2x_2 & \leq 5 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, enteres\end{cases}$$

Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de Branch & Cut d'acord amb el següent criteri:

- Afegiu un tall de Gomory a cada node de l'arbre.
- Preneu com a variable de generació de tall i de separació x_1 abans que x_2.
- Resoleu la primera relaxació lineal de cada node gràficament i la resta reoptimitzant amb el símplex dual.

(SOLUCIÓ EXERCICI 101)

EXERCICI 102. Arbre del B&B i algorisme de B&C amb símplex dual (4).

Considereu el següent problema de (PE)

$$(PE)\begin{cases}\min & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ & x_1 & +x_2 & \geq & 1 \\ & 2x_1 & -x_2 & = & 0 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0, x \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

Volem resoldre aquest problema amb l'algorisme del B&B i del B&C amb els següents criteris:

- Seleccioneu com a variable de ramificació i de generació del tall la que tingui el major índex.
- Exploreu l'arbre en profunditat triant primer la branca de la esquerra ($x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$).

a) Obtingueu l'arbre d'exploració de l'algorisme de ramificació i poda (no cal que indiqueu el detall de les iteracions de l'algorisme, només l'arbre d'exploració final). Indiqueu a cada node separat la fita $\underline{z}_{PEj}^*$ i el valor de x_{RLj}^* i a cada node eliminat els valors de z^* i x^* o el motiu de la seva eliminació.

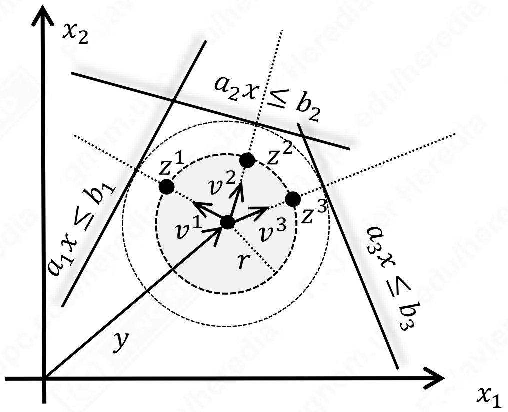
b) Resoleu el problema (PE) amb l'algorisme de ramificació i tall (B&C) reforçant les formulacions amb un tall de Gomory. Resoleu la primera relaxació lineal gràficament la resta reoptimitzant amb l'algorisme del símplex dual.

(SOLUCIÓ EXERCICI 102)

SOLUCIÓ EXERCICIS FORMULACIÓ PROBLEMES DE PROGRAMACIÓ LINEAL

SOLUCIÓ EXERCICI 1. Centre de Chebychev.

Considerem la bola $B(y,r)$ de centre y i radi r. Per tal d'assegurar que $B(y,r)$ es troba inscrita en el políedre P cal assegurar que la distància del centre y a cada hiperplà $a_j'x = b_j$ no supera r. Per tal d'imposar aquesta condició, podem considerar els punts $z^j \in \mathbb{R}^n, j = 1,2,\dots,m$ que es troben a una distància r del centre y sobre la semirecta definida pel centre y i el vector unitari $v^j = a_j/\|a_j\|_2$, que és ortogonal a $a_j'x = b_j$:



$$z^j = y + v^j r, j = 1,2,\dots,3$$

Per tal d'assegurar que la bola $B(y,r)$ es troba continguda dins del políedre P només cal imposar que els punts z^j satisfan totes les desigualtats que defineixen P:

$$a_j'z^j = a_j'(y + v^j r) = a_j'y + (a_j'v^j)r = a_j'y + \|a_j\|_2 r \leq b_j, j = 1,2,\dots,m$$

Llavors, la posició del centre de Chebichev vindrà donada per la solució del següent problema de programació lineal:

$$(PL)\begin{cases} \max\limits_{\substack{r\in\mathbb{R}\\ y\in\mathbb{R}^n}} z = & r & & \\ \text{s.a.:} & & & \\ & a_j'y + \|a_j\|_2 r & \leq b_j & j = 1,2,\dots,m \\ & r & \geq 0 & \end{cases}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 2. Support Vector Machines.

L'hiperplà de tall H està definit com una solució qualsevol al següent conjunt de desigualtats (políedre):

$$\begin{cases} u_j^T y & \geq & \beta + 1 & j \in \mathcal{C}_1 \\ v_j^T y & \leq & \beta - 1 & j \in \mathcal{C}_2 \end{cases} \quad (1)$$

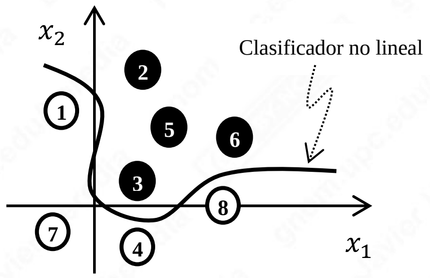
Aquest problema és equivalent al que resol la fase I del símplex: trobar una solució bàsica factible del políedre estàndard. Passem primer (1) a la forma estàndard:

$$\begin{cases} u_j^T y^+ & -u_j^T y^- & -\beta^+ & +\beta^- & -e_j & & = & 1 & j \in \mathcal{C}_1 \\ v_j^T y^+ & -v_j^T y^- & -\beta^+ & +\beta^- & & +f_j & = & -1 & j \in \mathcal{C}_2 \\ y^+, & y^-, & \beta^+, & \beta^-, & e, & f, & \geq & 0 & \end{cases} \quad (2)$$

on s'ha introduït la transformació $y = y^+ - y^-$, $\beta = \beta^+ - \beta^-$, $y^+, y^-, \beta^+, \beta^- \geq 0$. Formulem ara el problema de fase I introduint les variables artificials z:

$$
(P_{SVM}) \left\{ \begin{array}{lllllllllll}
\min & \displaystyle\sum_{j \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} z_j & & & & & & & & & \\
s.a.: & & & & & & & & & & \\
 & u_j^T y^+ & -u_j^T y^- & -\beta^+ & +\beta^- & -e_j & & z_j & & = & 1 \quad j \in \mathcal{C}_1 \\
 & -v_j^T y^+ & +v_j^T y^- & +\beta^+ & -\beta^- & & -f_j & & z_j & = & 1 \quad j \in \mathcal{C}_2 \\
 & y^+, & y^-, & \beta^+, & \beta^-, & e, & f, & z & & \geq & 0
\end{array} \right. \qquad (3)
$$

on la segona constricció de (2) s'ha canviat de signe per tenir un terme independent positiu. Si el problema (P_{SVM}) és factible llavors existeix l'hiperplà separador H. Si (P_{SVM}) és infactible, llavors no existeix cap hiperplà H que separi les dues classes. En aquest cas es poden usar classificadors no lineals, il·lustrat a la gràfica adjunta.



SOLUCIÓ EXERCICI 3. Coalco.

Paràmetres:	
Nombre de mines	$n^M = 2$
Nombre de clients	$n^C = 2$
Components carbó	$\mathcal{C} = \{cendra, sulfur\}$
Cost transport mina i →client j (€/Tm)	$t_{ij}, \quad i = 1, \dots, n^M, j = 1, \dots, n^C$ $t = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$
Per a cada mina $i = 1, \dots, n^M$ • Cost producció (€/Tm) • Capacitat mina i (Tm) • Contingut component $k \in \mathcal{C}$ (Tm/Tm carbó):	$p_i \;, p = [50 \quad 55]'$ $b_i \;, b = [120 \quad 100]'$ $\alpha_{ik}, \alpha = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.04 \\ 0.05 & 0.09 \end{bmatrix}$
Contingut màxim component $k \in \mathcal{C}$ carbó mescla (Tm/Tm mescla):	$\overline{\alpha}_k, \overline{\alpha} = [0.08 \quad 0.07]$
Demanda client j (Tm)	$d_j \;, j = 1, \dots, n^C$ $d = [90 \quad 110]'$

Variables	
Tones a transportar mina i → client j:	$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, \dots, n^M, j = 1, \dots, n^C$

Model de programació lineal	
Cost total producción més transport:	$$\min z = \sum_{i=1}^{n^M}\sum_{j=1}^{n^C}(p_i + t_{ij})x_{ij}$$
	s.a:
Capacitat mines:	$$\sum_{j=1}^{n^C} x_{ij} \leq b_i, \qquad i = 1, \dots, n^M$$
Demanda clients:	$$\sum_{i=1}^{n^M} x_{ij} \geq d_j, \qquad j = 1, \dots, n^C$$
Continguts màxims:	$$\frac{\sum_{i=1}^{n^M} \alpha_{ik} x_{ij}}{\sum_{i=1}^{n^M} x_{ij}} \leq \bar{\alpha}_k \rightarrow$$ $$\rightarrow \sum_{i=1}^{n^M} (\alpha_{ik} - \bar{\alpha}_k) x_{ij} \leq 0, \qquad k \in \mathcal{C}, j = 1, \dots, n^C$$ $$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, \dots, n^M, j = 1, \dots, n^C$$

Solució òptima (AMPL): $x^* = \begin{bmatrix} 54 & 66 \\ 36 & 44 \end{bmatrix}, z^* = 11600$

SOLUCIÓ EXERCICI 4. CSL.

Paràmetres:	
Nombre de mesos	$m = 5$
Demanda projectes mes i (h)	$d_i\ , i = 1,2,\dots,m$ $b = \begin{bmatrix} 3000 \\ 4000 \\ 7500 \\ 10000 \\ 15000 \end{bmatrix}$
Consultors qualificats: • Nre. inicial • Hores treball • Cost (€) • Fracció continuïtat	$n^Q = 35$ $h^Q = 160$ $c^Q = 1800$ $\alpha = 0.95$
Consultors en formació: • Hores supervisió i-èssim mes en formació • Cost (€)	$h^F = [50\ 10]'$ $c^F = 900$

Variables	
Nombre de consultors nous contractats el mes i (en primer mes de formació)	$x_i \geq 0, \quad i = 0,1,\dots,m$
Nombre de consultors en segon mes de formació en el mes i	$y_i \geq 0, \quad i = 0,1,\dots,m$
Nombre de consultors qualificats mes i	$w_i \geq 0, \quad i = 0,1,\dots,m$

Model de programació lineal	
Cost total nòmina	$$\min z = \sum_{i=1}^{m} [c^Q w_i + c^F(x_i + y_i)]$$
	s.a:
Els consultors qualificats han de fer front als projectes més formació	$h^Q w_i - h_1^F x_i - h_2^F y_i \geq d_i, \qquad i = 1,2,\dots,m$
Cada més es disposa del 95% dels consultors qualificats al final del mes anterior	$w_i - \alpha(w_{i-1} + y_{i-1}) \leq 0, \qquad i = 1,2,\dots,m$
Els consultors del mes i en primer mes de formació pasen a segon al mes $i+1$	$y_i - x_{i-1} = 0, i = 1,\dots,m$
Valors inicials:	$w_0 = n^Q$ $x_0 = y_0 = 0$
	$x_i, y_i, w_i \geq 0, \qquad i = 1,2,\dots,m$

Solució òptima: $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 31{,}1564 \\ 9{,}8942 \\ 34{,}0557 \\ 0{,}000 \\ 0 \end{bmatrix}, \ y^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 31{,}1564 \\ 9{,}8942 \\ 34{,}0557 \\ 0 \end{bmatrix}, \ w^* = \begin{bmatrix} 35{,}000 \\ 31{,}620 \\ 30{,}039 \\ 58{,}136 \\ 64{,}328 \\ 93{,}750 \end{bmatrix}, f(x^*, y^*, w^*) = 635903{,}97939$

SOLUCIÓ EXERCICI 5. Hospital del Mar.

Apartat a)

Paràmetres:	
Conjunt de mostres	$\mathcal{M} = \{1,2,\dots,5\}$
Conjunt de màquines	$Q = \{A, B, C\}$
Temps de processat d'un mil·lilitre de la mostra tipus i si s'assigna a la màquina j (minuts)	$t_{ij}, i \in \mathcal{M}, j \in Q$ $T = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$
Volum de mostres a analitzar del tipus i (ml)	$v_i, i \in \mathcal{M}$ $v = [80\ 75\ 80\ 12\ 60]'$
Temps diari disponible de les màquines (minuts)	$d_j = 480, j \in Q$

Variables	
Nombre d'unitats de la mostra tipus i assignats a la màquina j	$x_{ij} \geq 0, \quad i \in \mathcal{M}, j \in Q$

Model de programació lineal	
Temps total de processat de totes les mostres (minuts)	$\min z = \sum_{i\in\mathcal{M}, j \in Q} t_{ij} x_{ij}$
	s.a:
Límit de temps disponible de cada màquina (minuts)	$\sum_{i\in\mathcal{M}} t_{ij} x_{ij} \leq d_j, \quad j \in Q$
Es processa el volum total de cada mostra (ml)	$\sum_{j\in Q} x_{ij} \geq v_i, \quad i \in \mathcal{M}$
	$x_{ij} \geq 0, \quad i \in \mathcal{M}, j \in Q$

Solució òptima (AMPL): $x^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 80 \\ 0 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 12 \\ 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Apartat b)

S'haurien d'afegir els següents paràmetres i constriccions:

Paràmetres:	
Fracció màxima de temps de funcionament:	$\alpha = 0.5$
Fracció màxima de volum:	$\beta = 0.4$
Constriccions:	
b.1) Cap mostra més d'una fracció α del temps total de funcionament d'una màquina	$t_{ij}x_{ij} \leq \alpha \sum_{k\in\mathcal{M}} t_{kj}x_{kj}\,, \quad i \in \mathcal{M}, j \in \mathcal{Q}$
b.2) Cap màquina més d'una fracció β del volum total de les proves:	$\sum_{i\in\mathcal{M}} x_{ij} \leq \beta \sum_{i\in\mathcal{M}} v_i\,, \quad j \in \mathcal{Q}$

Solució òptima (AMPL):

$$x_a^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 80 \\ 0 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 12 \\ 60 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad x_{b.1}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 80 \\ 45 & 30 & 0 \\ 0 & 16{,}5185 & 63{,}4815 \\ 0 & 1{,}8519 & 10{,}1481 \\ 60 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad x_{b.2}^* = \begin{bmatrix} 6{,}320 & 0 & 73{,}680 \\ 27{,}988 & 47{,}013 & 0 \\ 12{,}273 & 18{,}608 & 49{,}120 \\ 0 & 12{,}000 & 0 \\ 60 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 6. Pelletier.

Paràmetres:	
Nombre de mesos	$m = 5$
Espai addicional mes i (en $10^3 \mathrm{m}^2$)	$b_i\,, \quad i = 1,2,\dots,m$ $b = [25\ 10\ 20\ 10\ 5]'$
Preu lloguer espai addicional durant j mesos $j = 1,2,\dots,5$ (€)	$c_j, \quad j = 1,2,\dots,m$ $c = [300\ 525\ 775\ 850\ 975]'$

Variables	
Espai addicional (m^2) llogats al començament l mes i durant j mesos.	$x_{ij} \geq 0, \quad i,j = 1,2,\dots,m$

Model de programació lineal	
Cost total lloguer	$\min z = \sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{i=1}^{m-j+1} x_{ij}$
Espai necessari cada mes	s.a: $\sum_{j=1}^{m-i+1} x_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1}\left(\sum_{l=i-k+1}^{m-k+1} x_{kl}\right) \geq b_i, \quad i = 1,2,\dots,m$
	$x_{ij} \geq 0, \quad i,j = 1,2,\dots,m$

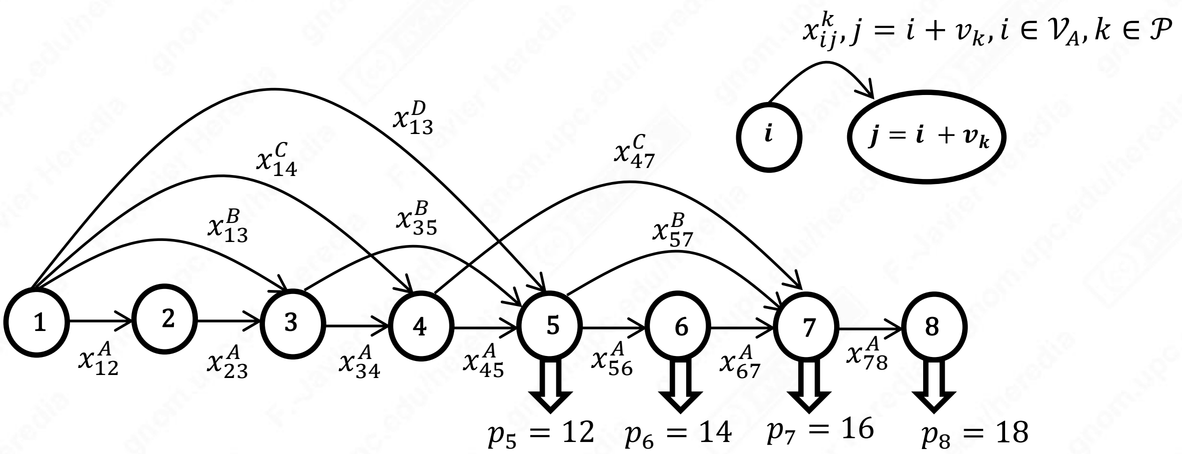
Solució òptima (AMPL): $x_{11}^* = 15, x_{14}^* = 5, x_{15}^* = 5, x_{31}^* = 10$, la resta $x_{ij}^* = 0$, $f(x^*) = 16625$.

SOLUCIÓ EXERCICI 7. Optirisk.

Paràmetres:	
Nombre de d'anys	$n^A = 8$
Conjunt anys inversió	$\mathcal{A} = 1,2,\dots,n^A$
Cartera productes financers ("Portfolio")	$\mathcal{P} = \{A,B,C,D\}$
Per a cada producte $k \in \mathcal{P}$	
• Termini venciment:	$v_k, \quad k \in \mathcal{P}$ $v = [1\ 2\ 3\ 4]'$
• Anys venciment:	$\mathcal{AV}_k, \quad k \in \mathcal{P}$ $\mathcal{AV}_A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ $\mathcal{AV}_B = \{1,3,5,7\}$ $\mathcal{AV}_C = \{1,4,7\}$ $\mathcal{AV}_D = \{1,5\}$
• Rendiment (tant per u):	$r_k, \quad k \in \mathcal{P}$ $r = [0.01\ 0.035\ 0.04\ 0.05]'$
• Índex de risc:	$s_k, \quad k \in \mathcal{P}$ $s = [1\ 3\ 6\ 8]$
Màxim índex risc inversió:	$\bar{s} = 2.5$
Pagaments anuals (10^3€)	$p_j\ , \quad j = 1,2,\dots,n^A$ $p = [0\ 0\ 0\ 12\ 14\ 16\ 18]'$

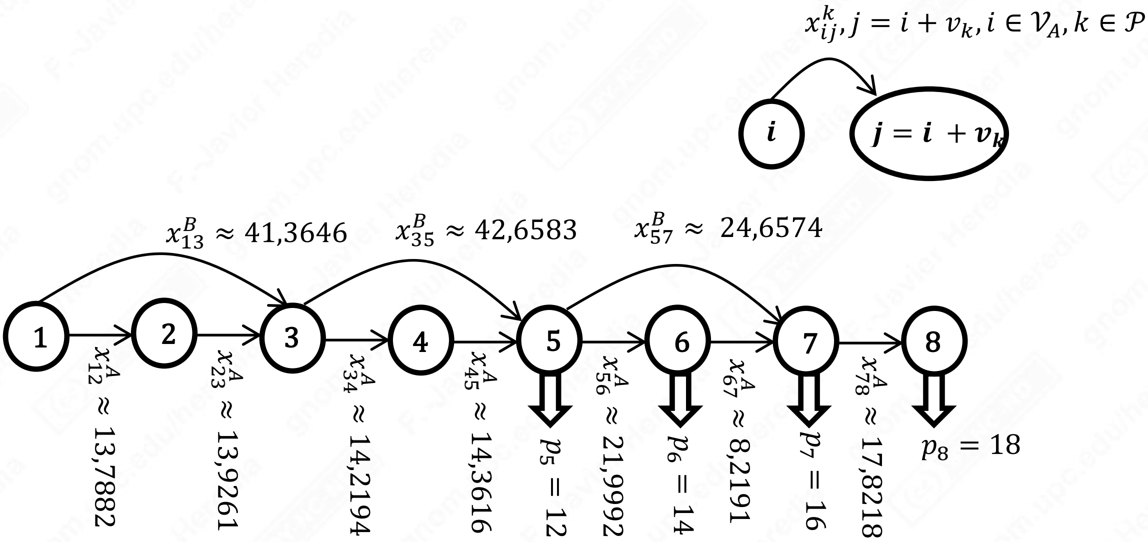
Variables	
Capital invertit en el producte $k \in \mathcal{P}$ a l'inici de l'any i i rescatat al començament de l'any j (10^3€):	$x_{ij}^k \geq 0,$ $k \in \mathcal{P}, \quad i \in \mathcal{AV}_k, \quad j = i + v_k : i + v_k \leq n^A$

El problema de flux de caixa correspon en realitat a un problema de fluxos en xarxes. La xarxa associada al cas concret de les dades de l'enunciat seria:



Model de programació lineal	
Capital total invertit	$$\min z = \sum_{k\in\mathcal{P}} x^k_{1,1+v_k}$$
Constricció de flux de caixa a començament de cada any (tret del primer) :	s.a: $$\sum_{k\in\mathcal{P}:j\in\mathcal{AV}_k} (1+r_k)x^k_{(j-v_k)j} + - \sum_{\substack{k\in\mathcal{P}:j\in\mathcal{AV}_k,\\ j+v_k\le n^A}} x^k_{(j-v_k)j} = p_j\ , j=2,\dots,n^A$$
Constricció de límit de risc ponderat:	$$\sum_{\substack{k\in\mathcal{P}:j\in\mathcal{AV}_k,\\ j+v_k\le n^A}} (s_k-\bar{s})x^k_{j(j+v_k)} + + \sum_{k\in\mathcal{P}:j\notin\mathcal{AV}_k} \sum_{\substack{i\in\mathcal{AV}_k:\\ i<j,\\ i+v_k>j,\\ i+v_k\le n^A}} (s_k-\bar{s})x^k_{i(i+v_k)} \le 0$$ $$j=1,2,\dots,n^A-1$$
	$$x^k_{ij}\ge 0$$ $$k\in\mathcal{P}, i\in\mathcal{AV}_k,$$ $$j=i+v_k : i+v_k\le n^A$$

Solució òptima (AMPL):



SOLUCIÓ EXERCICIS DE FONAMENTS DE PROGRAMACIÓ LINEAL

SOLUCIÓ EXERCICI 8. Test fonaments de programació lineal.

Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)
1	F	F	V	2	F	F	V	3	V	F	V	4	V	V	V	5	V	V	F
6	V	F	F	7	F	F	V	8	F	F	F	9	V	F	V	10	V	F	F
11	F	F	F	12	V	F	F	13	F	F	F	14	V	F	V	15	V	V	F
16	F	V	F	17	F	F	F	18	F	V	V	19	F	F	V				

SOLUCIÓ EXERCICI 9. Propietats dels conjunts convexos i políedres.

Apartat a)

La intersecció de conjunts convexos és convexa.

- Sigui $\mathcal{S}_i,\ i \in \mathcal{I}$ conjunts convexos, $x, y \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{S}_i$ i $\lambda \in [0,1]$.
- $\forall i \in \mathcal{I}$, $\mathcal{S}_i$ és convex i conté x i $y \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{S}_i$, $\forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{S}_i$ conv. ■

Apartat b)

Tot políedre és un conjunt convex.

- Sigui $x,y \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ i $w = \lambda x + (1-\lambda)y$. Llavors:

$$Aw = \lambda Ax + (1-\lambda)Ay \geq \lambda b + (1-\lambda)b = b \Rightarrow w \in P \Rightarrow P \text{ convex } ■$$

Apartat c)

La combinació convexa d'un nombre finit d'elements d'un conjunt convex pertany al conjunt convex.

Per inducció:

- Cert per $x^1,\ x^2 \in \mathcal{S}$, convex. Suposem que es satisfà per $x^1,\ \dots, x^k \in \mathcal{S}$ (1) i demostrem que es satisfà per $x^1,\ \dots, x^k, x^{k+1} \in \mathcal{S}$.
- Sigui $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \geq 0,\ \sum_i \lambda_i = 1$. Assumint que $\lambda_{k+1} \neq 1$ tenim:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^i = \lambda_{k+1} x^{k+1} + (1-\lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \overbrace{\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_{k+1})}}^{\tilde{\lambda}_i} x^i$$

- Els coeficients $\tilde{\lambda}_i$ son ≥ 0 i $\sum_i \tilde{\lambda}_i = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \tilde{x} = \sum_{i=1}^{k} \tilde{\lambda}_i x^i \in \mathcal{S}$
- $\mathcal{S}$ convex $\Rightarrow \lambda_{k+1} x^{k+1} + (1-\lambda_{k+1})\tilde{x} = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^i \in \mathcal{S}$ ■

Apartat b)

d) L'embolcall convex d'un conjunt finit de vectors és un conjunt convex.

- Sigui $\mathcal{S} = CH(x^1, \dots, x^k)$ i $y, z \in \mathcal{S}$. Podem escriure:

  $y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i \in \mathcal{S}$; $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$

  $z = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x^i \in \mathcal{S}$; $\beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1$

- Sigui $\lambda \in [0,1]$. Llavors:

$$\lambda y + (1+\lambda) z = \lambda \sum_{i=1}^{k} \beta_i x^i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{k} \beta_i x^i = \sum_{i=1}^{k} \overbrace{(\lambda \alpha_i + (1-\lambda)\beta_i)}^{\delta_i} x^i$$

Els coeficients δ_i satisfan $\delta_i \geq 0$ i $\sum_i \delta_i = 1 \Rightarrow \lambda y + (1+\lambda) z \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}$ convex ■

SOLUCIÓ EXERCICI 10. Equivalència del problema lineal en forma estàndard.

Apartat a)

La regió factible de (PL) és polítop de $\mathbb{R}^2$

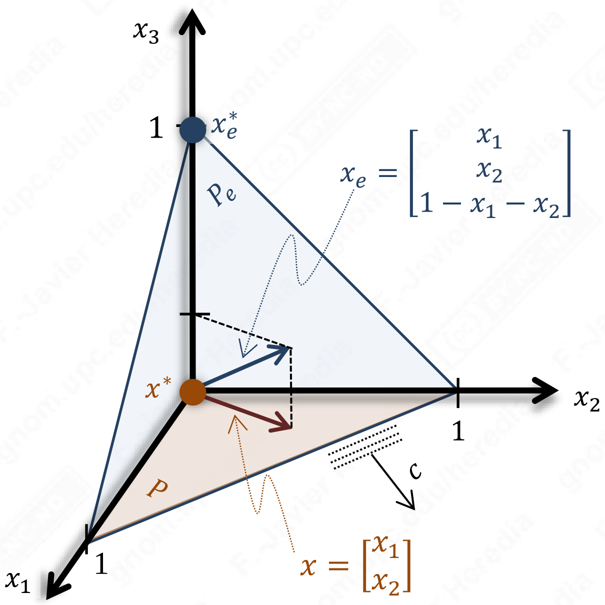
$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 + x_2 \leq 1, x \geq 0\}$$

que correspon a la regió del pla $x_1 - x_2$ de color taronja.

La regió factible de $(PL)_e$ és polítop de $\mathbb{R}^3$

$$P_e = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 1, x \geq 0\}$$

que correspon ala vectors del pla $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ continguts a l'octant positiu de $\mathbb{R}^3$, marcat en blau a la figura.



Apartat b)

Per a una solució qualsevol $x \in P$, com la representada a la figura, existeix una solució de $x_e \in P_e$ associada a x de forma unívoca a través de la relació

$$x_e(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 - x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

i els valors de la funció objectiu, evidentment, coincideixen, i son iguals a $x_1 + x_2$.

Apartat c)

La solució òptima del problema (PL) és $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ amb $z^* = 0$, i la de $(PL)_e$ és $x_e^*(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ amb $z_e^* = z^* = 0$.

SOLUCIÓ EXERCICI 11. Assumpció de rang complet.

Sigui el políedre estàndard P_e amb $\text{rang}(A) = k < m$. Reordenem les files de A de forma que les k files de A linealment independents ocupin les primeres posicions. Així doncs, els dos políedres estaran definits per

$$P_e = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \begin{array}{c} a_1' x = b_1 \\ \vdots \\ a_k' x = b_k \\ \vdots \\ a_m' x = b_m \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \quad ; \quad Q_e = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \begin{array}{c} a_1' x = b_1 \\ \vdots \\ a_k' x = b_k \\ x \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Evidentment, $P_e \subset Q_e$, donc cada vector de P_e satisfà totes les inequacions que defineixen Q_e.

Veiem ara que $Q_e \subset P_e$. Efectivament, atès que $\text{rang}(A) = k$ i que les k primeres files de A són linealment independents, totes les files a'_j de A es poden expressar com

$$a'_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji} a'_i$$

per a algun conjunt d'escalars α_{ji}. Si $x \in P_e$ podem escriure

$$b_j = a'_j x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji} a'_i\, x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji} b_i\,, \qquad j = 1, \dots, m.$$

Sigui ara $y \in Q_e$. Llavors

$$a'_j y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji} a'_i\, y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji} b_i = b_j, \qquad j = 1, \dots, m$$

és a dir, $y \in P_e \Rightarrow Q_e \subset P_e$ ■.

És important fer notar que per tal que el problema $(P)_e$ sigui factible cal que $b_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji} b_i$ per a les files a'_j de A que són linealment dependents, és a dir

$$[a'_j \quad b_j] = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji} [a'_i \quad b_i]\,, \qquad j = k+1, \dots, m.$$

SOLUCIÓ EXERCICI 12. Políedre estàndard de rang no complet.

La primera constricció del políedre

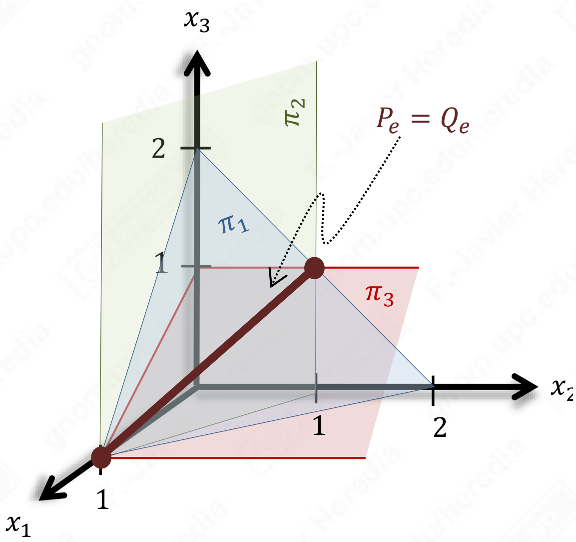
$$P_e = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{lllll} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 2 & : \pi_1 \\ x_1 & +x_2 & & = 1 & : \pi_2 \\ x_1 & & +x_3 & = 1 & : \pi_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 & \end{array} \right. \right\}$$

és combinació lineal les dues restants:

$$[a'_1 \quad b_1] = [a'_2 \quad b_2] + [a'_3 \quad b_3].$$

Així doncs, P_e és equivalent al políedre

$$Q_e = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & & = 1 \\ x_1 & & +x_3 & = 1 \\ x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. \right\}.$$



A la gràfica adjunta es pot observar com tant el políedre P_e com Q_e corresponen al segment de la intersecció de π_2 i π_3 contingut a l'octant positiu de $\mathbb{R}^3$. Així mateix, es pot veure com el pla π_1 definit per la primera constricció és redundant.

SOLUCIÓ EXERCICI 13. ($PL1$): solucions bàsiques

$$(PL1)\begin{cases}\min & z = & x_1 & +x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 8 \\ & & & x_2 & & +x_4 & = 6 \\ & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0\end{cases}$$

nre	factible?	x_B	x_N	x_1	x_2	x_3	x_4
1	si	x_3, x_4	x_1, x_2	0	0	8	6
2	si	x_1, x_4	x_2, x_3	4	0	0	6
3	si	x_1, x_2	x_3, x_4	1	6	0	0
4	si	x_2, x_3	x_1, x_4	0	6	2	0
5	no	x_2, x_4	x_1, x_3	0	8	0	-2

SOLUCIÓ EXERCICI 14. (PL2): solucions bàsiques

$$(PL2)\begin{cases}\min & z = & -x_1 & -2x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 3 \\ & & x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 2 \\ & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0\end{cases}$$

nre	factible?	x_B	x_N	x_1	x_2	x_3	x_4
1	si	x_3, x_4	x_1, x_2	0	0	3	2
2	si	x_1, x_4	x_2, x_3	3/2	0	0	1/2
3	si	x_1, x_2	x_3, x_4	1	1	0	0
4	si	x_2, x_3	x_1, x_4	0	2	1	0
5	no	x_2, x_4	x_1, x_3	0	3	0	-1
6	no	x_1, x_3	x_2, x_4	2	0	-1	0

SOLUCIÓ EXERCICI 15. ($PL3$) : solucions bàsiques.

La matriu de constriccions és $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 0\end{bmatrix}$. Serà solució bàsica qualssevol combinació de $m = 2$ variables x_i, x_j amb una matriu $B = [A_i A_j]$ no singular. En totes 6 combinacions possibles la matriu B és no singular. Resolent el sistema $Bx_B = b$ s'obté el valor de les variables bàsiques, i si $x_B \geq 0$, llavors la solució bàsica és factible El conjunt total de solucions bàsiques és

nre	factible?	x_B	x_N	x_1	x_2	x_3	x_4
1	no	x_1, x_2	x_3, x_4	-3/2	0	0	15/2
2	si	x_1, x_3	x_2, x_4	9/4	0	5/4	0
3	si	x_1, x_4	x_2, x_3	3	0	0	3
4	si	x_2, x_3	x_1, x_4	0	9/2	1/2	0
5	si	x_2, x_4	x_1, x_3	0	5	0	1
6	no	x_3, x_4	x_1, x_2	0	0	5	-9

SOLUCIÓ EXERCICI 16. $(PL4)$: solucions bàsiques.

Primer hem de passar a la forma estàndard. Fixeu-vos que cal canviar el signe de tots els coeficients de la variable $x_2 \leq 0$ per tal de que aquesta passi a ser $x_2 \geq 0$. També hem multiplicat la tercera constricció per 3 abans de passar a la forma estàndard per tal de facilitar els càlculs posteriors.

$$(PL4)_e \begin{cases} \min \quad z = & \frac{1}{2}x_1 & -x_2 & & & & \\ \text{s.a.}: & x_1 & -x_2 & +x_3 & & & = 2 \\ & 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = 10 \\ & 2x_1 & -3x_2 & & & -x_5 & = -6 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 & ,x_3 \geq 0 & ,x_4 \geq 0 & ,x_5 \geq 0 & \end{cases}$$

nre	$\mathcal{B}$	$\mathcal{N}$	x_B	Factible?
1	{1,2,3}	{4,5}	$[3 \quad 4 \quad 3]'$	Sí
2	{1,2,4}	{3,5}	$[12 \quad 10 \quad -24]'$	No
3	{1,2,5}	{3,4}	$[4 \quad 2 \quad 8]'$	Sí
4	{1,3,4}	{2,5}	$[-3 \quad 5 \quad 16]'$	No
5	{1,3,5}	{2,4}	$[5 \quad -3 \quad 16]'$	No
6	{1,4,5}	{2,3}	$[2 \quad 6 \quad 10]'$	Sí
7	{2,3,4}	{1,5}	$[2 \quad 4 \quad 8]'$	Sí
8	{2,3,5}	{1,4}	$[10 \quad 12 \quad -24]'$	No
9	{2,4,5}	{1,3}	$[-2 \quad 12 \quad 12]'$	No
10	{3,4,5}	{1,2}	$[2 \quad 10 \quad 6]'$	Sí

SOLUCIÓ EXERCICI 17. $(PL5)$: solucions bàsiques.

La matriu de constriccions és $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Serà solució bàsica qualssevol combinació de $m = 2$ variables x_i, x_j amb una matriu $B = [A_i A_j]$ no singular. En totes 3 combinacions possibles la matriu B és no singular. Resolent el sistema $Bx_B = b$ s'obté el valor de les variables bàsiques, i si $x_B \geq 0$, llavors la solució bàsica és factible El conjunt total de solucions bàsiques és

nre	factible?	x_B	x_N	x_1	x_2	x_3
1	si	x_1, x_2	x_3	2	2	0
2	si	x_1, x_3	x_2	1	0	3
3	no	x_2, x_3	x_1	0	-2	6

SOLUCIÓ EXERCICI 18. Càlcul de solucions bàsiques.

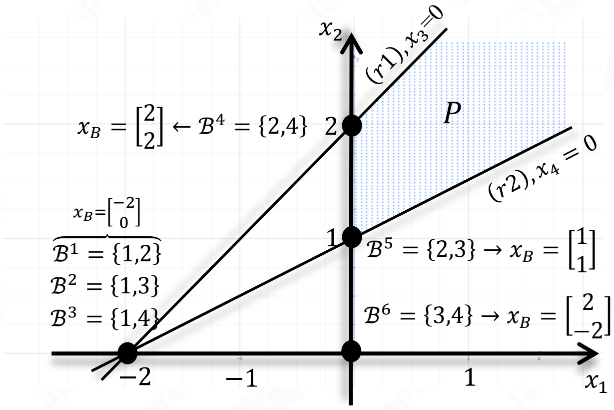
Passem a la forma estàndard:

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \leq 2 & (r1) \\ & -x_1 & +2x_2 & \geq 2 & (r2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases} \rightarrow (\mathrm{P})_e \begin{cases} \min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & & & & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2 & (r1) \\ & -x_1 & +2x_2 & & -x_4 & = 2 & (r2) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 & \end{cases}$$

Podem trobar les solucions bàsiques d'aquest problema provant totes les $\binom{4}{2} = 6$ combinacions de variables bàsiques $(\mathcal{B}^1 = \{1,2\}, \mathcal{B}^2 = \{1,3\}, \dots, \mathcal{B}^6 = \{3,4\})$ i, per aquelles que tinguin una base associada $B = [A_{B(1)} \quad A_{B(2)}]$ no singular, que ho son totes, calculant el valor de les variables bàsiques $x_B = B^{-1}b$. Per exemple, per la primera seria:

$$\mathcal{B}^1 = \{1,2\}\,,\ B^1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, x_B^1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = [B^1]^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}\,,\ z^1 = c_B' x_B = 4$$

També es pot fer utilitzant la representació gràfica de (P) per a calcular les coordenades dels vèrtexs:



$\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2, \mathcal{B}^3$:

$$x_B^{1,2,3} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_N^{1,2,3} = [0]$$

$$\mathcal{B}^4: x_B^4 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 = 2x_2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, x_N^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}^5: x_B^5 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 = 2 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_N^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}^6: x_B^6 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, x_N^6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓ EXERCICIS ALGORISME DEL SÍMPLEX

SOLUCIÓ EXERCICI 19. Test algorisme del símplex.

Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)
1	F	F	V	2	F	F	V	3	F	V	F	4	F	F	V	5	F	V	V
6	F	F	F	7	F	V	F	8	F	V	F	9	F	V	F	10	V	F	V
11	V	V	F	12	V	F	F	13	V	V	F	14	V	F	F	15	F	F	V
16	F	F	V	17	F	F	V	18	V	V	F	19	F	F	F	20	V	V	F
21	V	F	V	22	F	F	F	23	F	V	V	24	F	F	V	25	F	F	V
26	F	F	V	27	V	V	F	28	F	F	V	29	F	V	V				

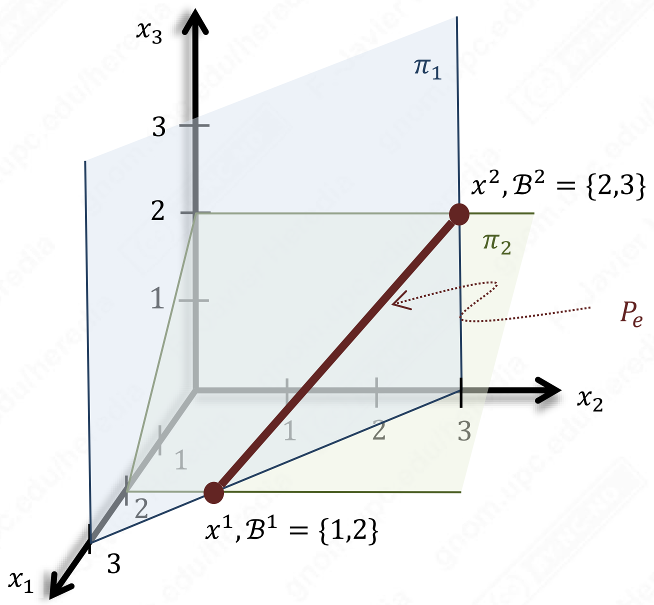
SOLUCIÓ EXERCICI 20. Direccions bàsiques factibles sobre el políedre estàndard.

Apartat a)

Forma estàndard de (PL) és

$$(PL)_e\begin{cases}\min & c_1x_1 & +c_2x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & & =3 & \pi_1\\ & x_1 & & x_3 & =2 & \pi_2\\ & x_{1,} & x_2, & & \geq 0 & \end{cases}$$

i la representació gràfica del políedre estàndard P_e



Observem que el políedre estàndard només té dues SBF:

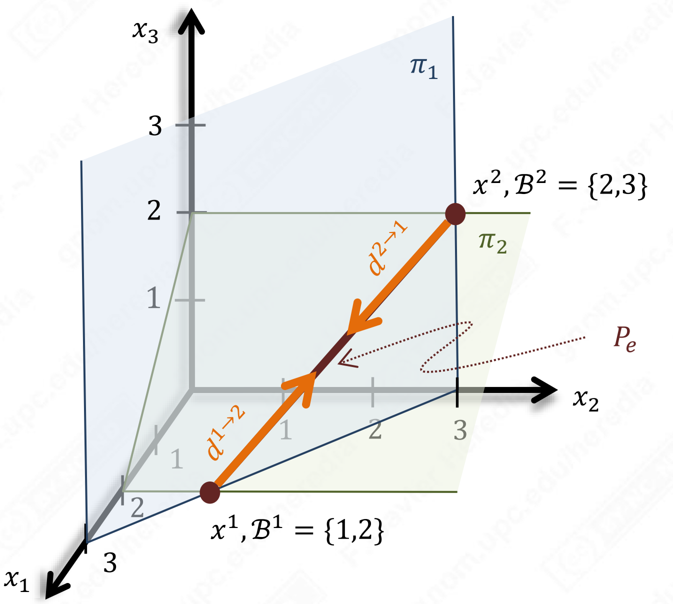
- $\mathcal{B}^1 = \{1,2\}, B = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}, x^1 = \begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}.$
- $\mathcal{B}^2 = \{2,3\}, B = B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}, x^2 = \begin{bmatrix}0\\ 3\\ 2\end{bmatrix}.$

Apartat b)

Es demana calcular totes les direccions bàsiques factibles existents. Observem de la gràfica anterior que només existeixen dues DBF, la que permet passar de $\mathcal{B}^1$ a $\mathcal{B}^2$ ($d^{1\to 2}$) i la que permet passar de $\mathcal{B}^2$ a $\mathcal{B}^1$ ($d^{2\to 1}$):

- $\boldsymbol{d^{1\to 2}}$**:** $\mathcal{B}^1 = \{1,2\}, q = 3, d_B^{1\to 2} = -B^{-1}A_3 = -\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}, d^{1\to 2} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}.$
- $\boldsymbol{d^{2\to 1}}$**:** $\mathcal{B}^2 = \{2,3\}, q = 1, d_B^{2\to 1} = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}, d^{2\to 1} = \begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}.$

Obviament, $d^{1\to 2} = -d^{2\to 1}$.



Apartat c)

Prenem, per exemple, $\mathcal{B}^1$ ($x^1 = \begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$) i comprovem que $x^2 = \begin{bmatrix}0\\ 3\\ 2\end{bmatrix} = x^1 + \theta^* d^{1\to 2}$:

$$\mathcal{B}^1 = \{1,2\}, x_B = \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}, d_B^{1\to 2} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}: \theta^* = \min_{\{i = 1,\dots,m | d_{B(i)} < 0\}} \left\{-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right\} = \min\left\{-\frac{x_{B(1)}}{d_{B(1)}}\right\}$$
$$= -\frac{2}{-1} = 2$$

$$x^2 = x^1 + \theta^* d^{1\to 2} = \begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 3\\ 2\end{bmatrix}.$$

Tot i que no es demana a l'enunciat, podem comprovar també que $x^1 = \begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix} = x^2 + \theta^* d^{2\to 1}$:

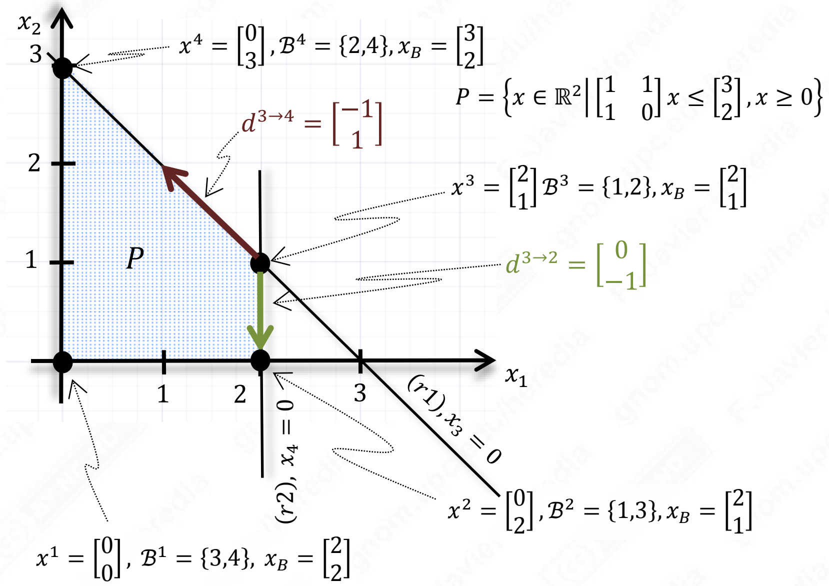
$$\mathcal{B}^2 = \{2,3\}, x_B = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}, d_B^{2\to1} = \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}:$$

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\dots,m|d_{B(i)}<0\}}\left\{-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right\} = \min\left\{-\frac{x_{B(1)}}{d_{B(1)}}, -\frac{x_{B(2)}}{d_{B(2)}}\right\} = \min\left\{-\frac{3}{-1}, -\frac{2}{-1}\right\} = 2$$

$$x^1 = x^2 + \theta^* d^{2\to1} = \begin{bmatrix}0\\3\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓ EXERCICI 21. Direccions bàsiques factibles sobre el políedre general no degenerat.

Apartat a)



El políedre P té els quatre punts extrems, x^1, x^2, x^3 i x^4 indicats a la gràfica.

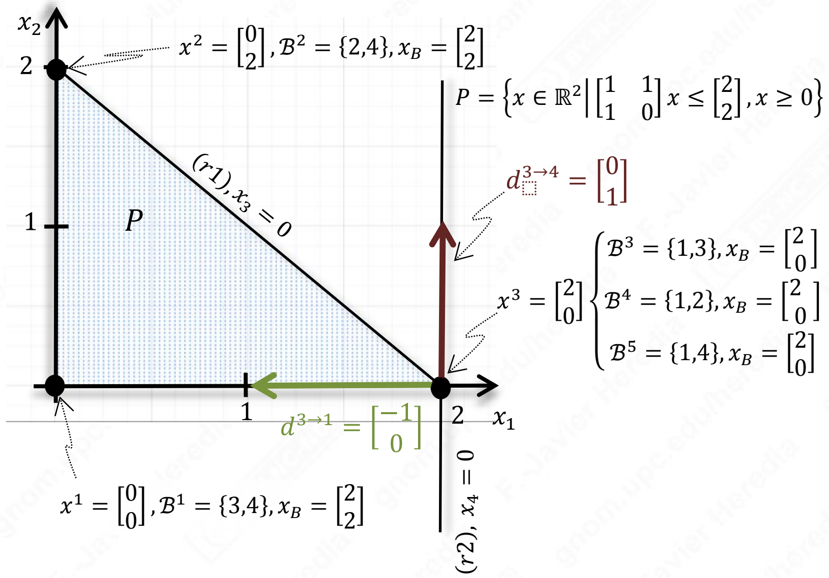
Apartat b)

Sobre la solució bàsica $\mathcal{B} = \{1,2\}$, amb $x_B = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ existeixen dues direccions bàsiques factibles, una associada a la variable no bàsica x_3, que passa de $\mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}^2$ i un altre a la variable no bàsica x_4, que passa de $\mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}^4$:

- $\underline{q=3}$: $d_B^{3\to2} = -B^{-1}A_3 = -\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$. La longitud de pas màxima és $\theta^* = -x_{B(2)}/d_{B(2)} = -1/-1 = 1$. Com que $\theta^* > 0$ la direcció és factible. La direcció sobre $\mathbb{R}^2$ associada a $d_B^{3\to2}$ és $d^{3\to2} = \begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$, representada a la gràfica.
- $\underline{q=4}$: $d_B^{3\to1} = -B^{-1}A_4 = -\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$. Aquesta direcció també és factible, doncs la longitud de pas màxima és positiva: $\theta^* = -x_{B(1)}/d_{B(1)} = -2/-1 = 2$. La direcció sobre $\mathbb{R}^2$ associada a $d_B^{3\to4}$ és $d^{3\to4} = \begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$, representada a la gràfica.

SOLUCIÓ EXERCICI 22. Direccions bàsiques factibles sobre el políedre general degenerat.

Apartat a)



El políedre P té els tres punts extrems, x^1, x^2 i x^3 indicats a la gràfica. Sobre el punt extrem x^3 es produeix degeneració (punt definit per la intersecció de més de n constriccions), i per aquesta raó té associades diverses solucions bàsiques factibles.

Apartat b)

Sobre la solució bàsica $\mathcal{B} = \{1,3\}$, amb $x_B = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ existeixen dues direccions bàsiques factibles, una associada a la variable no bàsica x_2, que passa de $\mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}^4$ i un altre a la variable no bàsica x_4, que passa de $\mathcal{B}^3 \to \mathcal{B}^1$:

- $\underline{q=2}$: $d_B^{3\to4} = -B^{-1}A_2 = -\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$. Observem que la component associada a la variable bàsica nul·la $x_{B(2)} = 0$ és negativa ($d_{B(2)} = -1$). Això fa que no sigui possible fer cap desplaçament a partir de x^3 al llarg de d_B, $x^3 + \theta d_B$, sense sortir del políedre i, per tant, que d_B sigui infactible. Un altre forma de visualitzar aquest fet és observar que la longitud de pas màxima és zero: $\theta^* = -x_{B(2)}/d_{B(2)} = -0/-1 = 0$. La direcció sobre $\mathbb{R}^2$ associada a $d_B^{3\to4}$ és $d^{3\to4} = \begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, representada a la gràfica.
- $\underline{q=4}$: $d_B^{3\to1} = -B^{-1}A_4 = -\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$. Aquesta direcció és factible, doncs la longitud de pas màxima és positiva: $\theta^* = -x_{B(1)}/d_{B(1)} = -1/-1 = 1$. La direcció sobre $\mathbb{R}^2$ associada a $d_B^{3\to1}$ és $d^{3\to1} = \begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$, representada a la gràfica.

Apartat c)

L'algorisme del símplex primal convergeix en un nombre finit d'iteracions a una solució òptima si (i) existeix solució òptima, és a dir, si (i) el problema és factible i (ii) el problema ni és il·limitat i, a més, (iii) si no existeix cap SBF degenerada. El nostre problema satisfà les dues primeres condicions ((P) és un polítop no buit) pero no la segona, doncs $\mathcal{B}^3, \mathcal{B}^4, \mathcal{B}^5$ són SBF degenerades. Tanmateix, sabem que existeixen criteris de selecció de les variables a pivotar (variables bàsica i no bàsica a intercanviar a cada iteració), com ara la regla de Bland, que assegurarien la convergència de l'algorisme.

SOLUCIÓ EXERCICI 23. Anàlisi de les propietats de les bases.

Atés que el problema (PL) és factible, l'única condició sota la qual el problema no tindrà solució és quan aquest sigui il·limitat. Les condicions suficients que permeten assegurar, sobre una SBF $\mathcal{B}$, que el problema és il·limitat son: que existeixin direccions bàsiques de descens ($r_q < 0$) no afitades ($d_B \geq 0$). Les tres DBF existents sobre $\mathcal{B} = \{3,4\}$ són:

- $q = 1: d_{B_1} = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ no afitada.
- $q = 2: d_{B_2} = -B^{-1}A_2 = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ no afitada
- $q = 5: d_{B_5} = -B^{-1}A_5 = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} < 0 \Rightarrow$ afitada.

Si d_{B_1} o d_{B_2} és de descens ($r_1 < 0$ o $r_2 < 0$) (PL) serà il·limitat:

- $r_1 < 0 : r_1 = c_1 - c'_B B^{-1}A_1 = c_1 - [c_3 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 < 0$
- $r_2 < 0 : r_2 = c_2 - c'_B B^{-1}A_2 = c_2 - [c_3 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = c_2 < 0$

Així doncs, la condició suficient que estàvem buscant és : $c_1 < 0$ o $c_2 < 0 \Rightarrow$ (PL) il·limitat.

SOLUCIÓ EXERCICI 24. Propietats de la base òptima.

Apartat a)

$\mathcal{B}$ degenerada **primal** $\Leftrightarrow \exists\, i \in \mathcal{B} = \{2,4\} \mid x_i = 0$

$$x_B = B^{-1}\tilde{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 + \frac{1}{2}b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{b_2 = -2}$$

Apartat b)

$\mathcal{B}$ degenerada **dual** $\Leftrightarrow \exists\, j \in \mathcal{N} = \{1,3\} \mid r_j = 0$:

$$r'_N = [3 \quad 2] - [c_2 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [2 - 2c_2 \quad 1 - c_2] \Rightarrow r_j = 0 \Leftrightarrow \boxed{c_2 = 1}$$

Apartat c)

Considerem (P) amb $b_2 = 3$ i $c_2 = 1$. Per tal de trobar una SBF adjacent amb el mateix valor de la f.o. que l'actual ($x_B = [2 \quad 5/2]'$, $z = 4{,}5$) cal fer un canvi de base de forma que el cost reduït de la VNB entrant sigui $r_q = 0$. De l'apartat anterior sabem que $r_N = [0]$, i podem triar $q = 1$. Comprovem que el canvi de base es possible observant que el vector $u = B^{-1}b = [2 \quad 1]' \nleq 0$. La variable sortint és l'associada a $\theta^* = min\left\{2/2, \frac{5}{2}/1\right\} = 1$, $x_{B(1)} = x_2$. Així doncs, la SBF adjacent que demanàvem és $\mathcal{B} = \{1,4\}$ amb:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}, \boxed{z = 4.5}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 25. Direccions factibles de descens i caracterització d'optims (1).

Es vol demostrar que, donat un problema en forma estàndard $(P)\ \min_{x \in \mathbb{R}^n}\{c'x \mid x \in P_e\}$, es satisfà:

$$x \in P_e \text{ és solució òptima de } (P) \Leftrightarrow c'd^* = 0, \text{ amb } d^* \text{ solució del problema } (P_d)\min_{d \in \mathbb{R}^n}\{c'd \mid Ad = 0, d_i \geq 0\ i \in \mathcal{Z} = \{i \mid x_i = 0\}\}$$

Fixem-nos que l'enunciat no indica que la solució òptima x sigui solució bàsica (sabem que una solució òptima no ha de ser necessàriament solució bàsica), per tant no podem fer servir aquesta propietat a la demostració.

Un punt fonamental de la demostració és adonar-se que el conjunt factible del problema (P_d) coincideix amb el conjunt de les direccions factibles de (P) sobre $x \in P_e$. Efectivament, sabem que $d \in \mathbb{R}^n$ factible si i només si $\exists\theta > 0$ tal que $x + \theta d \in P_e = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{Ax = b}_{(a)}, \underbrace{x \geq 0}_{(b)}\right\}$, és a dir:

$$d \in \mathbb{R}^n \text{ factible} \Leftrightarrow \exists\theta > 0 \; t.q. \begin{cases} (a): A(x + \theta d) = Ax + \theta Ad = b \Leftrightarrow \boxed{Ad = 0} \\ (b): x + \theta d \geq 0, \begin{Bmatrix} x_i + \theta d_i & i \notin \mathcal{Z} \\ \theta d_i & i \in \mathcal{Z} \end{Bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{d_i \geq 0 \; i \in \mathcal{Z}} \end{cases}$$

Veiem com les condicions de (a) i (b) que caracteritzen les direccions factibles són equivalents a les condicions de factibilitat del problema (P_d), és a dir: $d \in \mathbb{R}^n$ direcció factible $\Leftrightarrow$ $d \in P_d = \{d \in \mathbb{R}^n \mid Ad = 0, d_i \geq 0, i \in \mathcal{Z}\}$. Un cop establert aquest resultat, ja podem procedir a la demostració que ens demanen:

- $\boldsymbol{x}$ **òptim** $\Rightarrow \boldsymbol{c'd^* = 0}$: si x òptim llavors $c'd \geq 0 \; \forall d \in P_d$, doncs si $\exists d \in P_d$ amb $c'd < 0$ llavors $\exists\theta > 0$ tal que $y = x + \theta d \in P_e$ amb $c'y = c'x + \theta c'd < c'x$ i, conseqüentment, x no seria òptim. A més, òbviament $d = [0]$ pertany a P_d i $c'[0] = 0$. Així doncs podem assegurar que x òptim $\Rightarrow \min_{d \in P_d}\{c'd\} = 0$ ■
- $\boldsymbol{c'd^* = 0} \Rightarrow \boldsymbol{x}$ **òptim** : per reducció a l'absurd: considerem que es dona $c'd^* = 0$ i x no òptim. Llavors si x no òptim $\exists y = x + \theta d \in P_e$ amb $c'y < c'x \Rightarrow c'(y - x) = \theta c'd < 0$ per algun $\theta > 0$ i $d \in P_d$ $\Rightarrow$ existeix alguna direcció factible $d \in P_d$ amb $c'd < 0 \Rightarrow c'd^* \neq 0$ (contradicció). Així doncs $c'd^* = 0 \;\Rightarrow x$ òptim ■

SOLUCIÓ EXERCICI 26. Direccions factibles de descens i caracterització d'òptims (2).

Apartat a)

Passem a la forma estàndard:

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \leq 2 & (r1) \\ & -x_1 & +2x_2 & \geq 2 & (r2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases} \rightarrow (\mathrm{P})_e \begin{cases} \min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & & & & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2 & (r1) \\ & -x_1 & +2x_2 & & -x_4 & = 2 & (r2) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 & \end{cases}$$

Direccions bàsiques factibles associades a la solució bàsica factible $\mathcal{B} = \{2{,}3\}$:

$$q = 1:$$

$$d_B^1 = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, d_N = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q = 4:$$

$$d_B^4 = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = -B^{-1}A_4 = -\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, d_N^4 = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

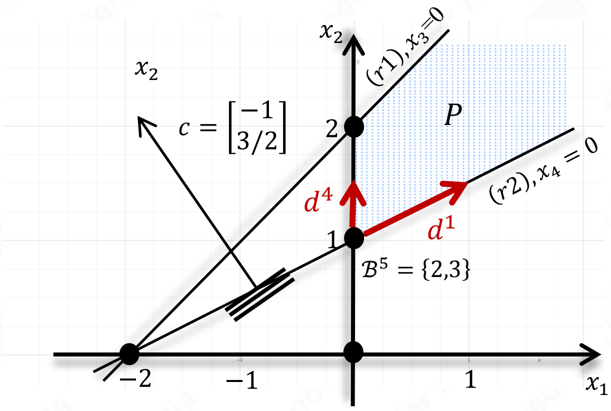
Per determinar si són de descens només cal comprovar la condició necessària i suficient de decreixement $c'd < 0$, que pel problema plantejat equival a $-d_1 + \frac{3}{2}d_2 < 0$

$q = 1: c'd = -d_1 + \frac{3}{2}d_2 = -1 + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow$ de descens.

$q = 4: c'd = -d_1 + \frac{3}{2}d_2 = 0 + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow$ d'ascens.

Apartat b)

La base $\mathcal{B}=\{2,3\}$ no pot ser la solució òptima de (P) perquè sobre aquesta base existeix una direcció bàsica factible de descens, l'associada a $q=1$, i això implica que tots els punts de la semirecta $x+\theta d$ tenen un valor de la funció objectiu estrictament inferior a $c'x$. A més, atès que aquesta DBF de descens és factible i il·limitada ($d_B \geq [0]$), podem assegurar que el problema (P) no té solució òptima, doncs és il·limitat.



SOLUCIÓ EXERCICI 27. Símplex en forma estàndard

Càlculs Previs:

$\mathcal{B}=\{1,2\}, \mathcal{N}=\{3,4\},\ B=\begin{bmatrix}2&2\\1&1\end{bmatrix}, B^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}, x_B=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\geq 0 \Rightarrow$ solució bàsica factible primal. $z=c_B'x_B=[-1\quad -2]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=-3$

1a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q amb $\mathcal{N}=\{3,4\}$:
   $r'=c_N'-c_B'B^{-1}N=[0\quad 0]-[-1\quad -2]\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=[-1\quad 3]\ngeq 0 \rightarrow q=3$
2. DBF i problema il·limitat : $d_B=-B^{-1}A_3=-\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\ngeq 0$
3. Sel. VB de sortida $\mathcal{B}(p)$: $\theta^*=min\left\{\frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}}: i=1\right\}=min\left\{\frac{1}{1}\right\}=1 \implies p=1, B(1)=1$
4. Actualitzacions i canvi de base :
   4.1. $x_B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x_1}\\x_2\end{bmatrix}\leftarrow x_B+\theta^*d_B=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\1\end{bmatrix}+1\times\begin{bmatrix}\mathbf{-1}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\2\end{bmatrix}, x_3=\theta^*=1, x_4=0$
   4.2. $z\leftarrow z+\theta^*r_q=-3+1\times(-1)=-4$
   4.3. $\mathcal{B}\leftarrow\ \{3,2\}, \mathcal{N}\leftarrow\ \{1,4\}, B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}, B^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}, x_B=\begin{bmatrix}x_3\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

2a iteració:

1) Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q amb $\mathcal{N}=\{1,4\}$:
$$r'=c_N'-c_B'B^{-1}N=[-1\quad 0]-[0\quad -2]\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}=[1\quad 2]>0\rightarrow \text{òptim}$$

Solució: $\boxed{\mathcal{B}^*=\ \{3,2\}, x_B^*=[1\quad 2]', z^*=-4}$

SOLUCIÓ EXERCICI 28. (PL1): símplex

Càlculs Previs:

$x = \begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix} \rightarrow \mathcal{B} = \{3,2\}, \mathcal{N} = \{1,4\}, B = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ solució bàsica factible primal. $z = c_B' x_B = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix} = 6$

1a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q amb $\mathcal{N} = \{1,4\}$:
   $r' = c_N' - c_B' B^{-1} N = [1 \quad 0] - [0 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = [1 \quad -1] \ngeq 0 \rightarrow q = 4$
2. DBF i problema il·limitat : $d_B = -B^{-1}A_4 = -\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \ngeq 0$
3. Sel. VB de sortida $\mathcal{B}(p)$: $\theta^* = min\left\{\frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}} : i = 1\right\} = min\left\{\frac{6}{1}\right\} = 6 \Longrightarrow p = 2, \mathcal{B}(2) = 2$
4. Actualitzacions i canvi de base :
   4.1. $x_B = \begin{bmatrix}x_3\\ \boldsymbol{x_2}\end{bmatrix} \leftarrow x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix}2\\ \boldsymbol{6}\end{bmatrix} + 6 \times \begin{bmatrix}1\\ \boldsymbol{-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}, x_4 = \theta^* = 6, x_1 = 0$
   4.2. $z \leftarrow z + \theta^* r_q = 6 + 6 \times (-1) = 0$
   4.3. $\mathcal{B} \leftarrow \{3,4\}, \mathcal{N} \leftarrow \{1,2\}, B = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}$

2a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q amb $\mathcal{N} = \{1,2\}$:
   $r' = c_N' - c_B' B^{-1} N = [1 \quad 1] - [0 \quad 0]\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = [1 \quad 1] > 0 \rightarrow$ òptim

Solució: $\boxed{\mathcal{B}^* = \{3,4\}, x_B^* = [8 \quad 6]', z^* = 0}$

SOLUCIÓ EXERCICI 29. (PL2) : símplex.

Càlculs Previs:

$x = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \rightarrow \mathcal{B} = \{1,2\}, \mathcal{N} = \{3,4\}, B = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ solució bàsica factible primal.

$z = c_B' x_B = [1 \quad 2]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 3$

1a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q amb $\mathcal{N} = \{3,4\}$:
   $r' = c_N' - c_B' B^{-1} N = [0 \quad 0] - [-1 \quad -2]\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = [-1 \quad 3] \ngeq 0 \rightarrow q = 3$
2. DBF i problema il·limitat : $d_B = -B^{-1}A_3 = -\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \ngeq 0$
3. Sel. VB de sortida $\mathcal{B}(p)$: $\theta^* = min\left\{\frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}} : i = 1\right\} = min\left\{\frac{1}{1}\right\} = 1 \Longrightarrow p = 1, \mathcal{B}(1) = 1$
4. Actualitzacions i canvi de base :
   4.1. $x_B = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x_1}\\x_2\end{bmatrix} \leftarrow x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix}\boldsymbol{1}\\1\end{bmatrix} + 1 \times \begin{bmatrix}\boldsymbol{-1}\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\2\end{bmatrix}, x_3 = \theta^* = 1, x_4 = 0$
   4.2. $z \leftarrow z + \theta^* r_q = 3 + 1 \times (-1) = 2$
   4.3. $\mathcal{B} \leftarrow \{3,2\}, \mathcal{N} \leftarrow \{1,4\}, B = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix}x_3\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

2a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q :
   $r' = c'_N - c'_B B^{-1} N = [\,-1 \quad 0] - [0 \quad -2]\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = [1 \quad 2] > 0 \rightarrow$ òptim

Solució: $\boxed{\mathcal{B}^* = \{3,2\}, x_B^* = [1 \quad 2]', z^* = 2}$

SOLUCIÓ EXERCICI 30. (PL3) : símplex.

Càlculs Previs:

$\mathcal{B} = \{2,3\}, \mathcal{N} = \{1,4\}, B = \begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}-1/2 & 1/2\\1/2 & -1/6\end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix}-1/2 & 1/2\\1/2 & -1/6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9/2\\1/2\end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ solució bàsica factible primal.

$z = c'_B x_B = [3 \quad -1]\begin{bmatrix}9/2\\1/2\end{bmatrix} = 13$

1a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q amb $\mathcal{N} = \{1,4\}$:
   $r' = c'_N - c'_B B^{-1} N = [\,5 \quad 0] - [3 \quad 1]\begin{bmatrix}-1/2 & 1/2\\1/2 & -1/6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\5 & 0\end{bmatrix} = [-2/3 \quad 1] \ngeq 0 \rightarrow q = 1$
2. DBF i problema il·limitat : $d_B = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix}-1/2 & 1/2\\1/2 & -1/6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\1/3\end{bmatrix} \ngeq 0$
3. Sel. VB de sortida $\mathcal{B}(p)$: $\theta^* = min\left\{\frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}} : i = 1\right\} = min\left\{\frac{9/2}{2}\right\} = 9/4 \Rightarrow p = 1, B(1) = 2$
4. Actualitzacions i canvi de base :
   4.1. $x_B = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x_2}\\x_3\end{bmatrix} \leftarrow x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix}\mathbf{9/2}\\1/2\end{bmatrix} + \frac{9}{4} \times \begin{bmatrix}\mathbf{-2}\\1/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\5/4\end{bmatrix}, x_1 = \theta^* = 9/4, x_4 = 0$
   4.2. $z \leftarrow z + \theta^* r_q = 13 + \frac{9}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 23/2$
   4.3. $\mathcal{B} \leftarrow \{1,3\}, \mathcal{N} \leftarrow \{2,4\}, B = \begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 3\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}-1/4 & 1/4\\5/12 & -1/12\end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix}x_1\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9/4\\5/4\end{bmatrix}$

2a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q amb $\mathcal{N} = \{2,4\}$:
   $r' = c'_N - c'_B B^{-1} N = [\,3 \quad 0] - [5 \quad 1]\begin{bmatrix}-1/4 & 1/4\\5/12 & -1/12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 0\end{bmatrix} = [1/3 \quad 5/6] > 0 \rightarrow$ òptim

Solució: $\boxed{\mathcal{B}^* = \{1,3\}, x_B^* = [9/4 \quad 5/4]', z^* = 23/2}$

SOLUCIÓ EXERCICI 31. (PL4) : símplex

Recordem la forma estàndard del problema (PL4) definida prèviament:

$$(PL4)_e \begin{cases} \min \quad z = & \frac{1}{2}x_1 & -x_2 & & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & +x_3 & & & = 2 \\ & 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = 10 \\ & 2x_1 & -3x_2 & & & -x_5 & = -6 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 & , x_3 \geq 0 & , x_4 \geq 0 & , x_5 \geq 0 & \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{B} = \{1,2,5\}, \mathcal{N} = \{3,4\}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 8/3 & -1/3 & -1 \end{bmatrix}, x_B =$$

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 8/3 & -1/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \text{solució bàsica factible primal.}$$

$$z = c_B' x_B = [1/2 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = 0$$

1a iteració:

---

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q amb $\mathcal{N} = \{3,4\}$:

$$r' = c_N' - c_B' B^{-1} N = [0 \quad 0] - [1/2 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 8/3 & -1/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [-5/6 \quad 1/6]$$

$$\ngeq 0 \rightarrow \boldsymbol{q = 3}$$

2. DBF i problema il·limitat : $d_B = -B^{-1}A_3 = -\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 8/3 & -1/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -8/3 \end{bmatrix} \ngeq 0$

3. Sel. VB de sortida $\mathcal{B}(p)$: $\theta^* = \min_{i=1,3} \left\{ \frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{1/3}, \frac{8}{8/3} \right\} = min\{12,3\} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 3, \boldsymbol{B(3) = 5}$

4. Actualitzacions i canvi de base :

4.1. $x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boldsymbol{x_5} \end{bmatrix} \leftarrow x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ \boldsymbol{8} \end{bmatrix} + 3 \times \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ \boldsymbol{-8/3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, x_3 = \theta^* = 3, x_4 = 0$

4.2. $z \leftarrow z + \theta^* r_q = 0 + 3 \times \left(-\frac{5}{6}\right) = -5/2$

4.3. $\mathcal{B} \leftarrow \{1,2,3\}, \mathcal{N} \leftarrow \{4,5\}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \\ 1 & -1/8 & -3/8 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

2a iteració:

---

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q amb $\mathcal{N} = \{4,5\}$:

$$r' = c_N' - c_B' B^{-1} N = [0 \quad 0] - [1/2 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 3/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \\ 1 & -1/8 & -3/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$[1/16 \quad 5/16] \geq 0 \rightarrow$ òptim

Solució: $\boxed{\mathcal{B}^* = \{1,2,3\}, x_B^* = [3 \quad 4 \quad 3]', z^* = -5/2}$

SOLUCIÓ EXERCICI 32. (PL5) : símplex.

Càlculs Previs:

$x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Rightarrow \mathcal{B}=\{1,3\},\mathcal{N}=\{2\},B=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix},B^{-1}=\begin{bmatrix}0&1/2\\1&-1/2\end{bmatrix},x_B=B^{-1}b=\begin{bmatrix}0&1/2\\1&-1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\geq 0\Rightarrow$ solució bàsica factible primal.

$z=c_B'x_B=[-1\quad 0]\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=-1$

1a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q amb $\mathcal{N}=\{2\}$:
   $r'=c_N'-c_B'B^{-1}N=[0]-[-1\quad 0]\begin{bmatrix}0&1/2\\1&-1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=-1/2\ngeq 0\rightarrow q=2$
2. DBF i problema il·limitat : $d_B=-B^{-1}A_2=-\begin{bmatrix}0&1/2\\1&-1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\-3/2\end{bmatrix}\ngeq 0$
3. Sel. VB de sortida $\mathcal{B}(p)$: $\theta^*=min\left\{\frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}}:i=2\right\}=min\left\{\frac{3}{3/2}\right\}=2\ \Rightarrow p=2,B(2)=3$
4. Actualitzacions i canvi de base :
   4.1. $x_B=\begin{bmatrix}x_1\\x_3\end{bmatrix}\leftarrow x_B+\theta^*d_B=\begin{bmatrix}1\\\mathbf{3}\end{bmatrix}+2\times\begin{bmatrix}1/2\\\mathbf{-3/2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\\mathbf{0}\end{bmatrix},x_2=\theta^*=2$
   4.2. $z\leftarrow z+\theta^*r_q=-1+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$
   4.3. $\mathcal{B}\leftarrow\{1,2\},\mathcal{N}\leftarrow\{3\},B=\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\end{bmatrix},B^{-1}=\begin{bmatrix}1/3&1/3\\2/3&-1/3\end{bmatrix},x_B=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

2a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q amb $\mathcal{N}=\{3\}$:
   $r'=c_N'-c_B'B^{-1}N=[0]-[-1\quad 0]\begin{bmatrix}1/3&1/3\\2/3&-1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=1/3>0\rightarrow$ òptim

Solució: $\boxed{\mathcal{B}^*=\{1,2\},x_B^*=[2\quad 2]',z^*=-2}$

SOLUCIÓ EXERCICI 33. (PL6) : símplex

Càlculs Previs:

$\mathcal{B}=\{2,3\},\mathcal{N}=\{1,4\},B=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},B^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix},x_B=B^{-1}b=\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}\geq 0\Rightarrow$ solució bàsica factible primal.

$z=c_B'x_B=[-4\quad 0]\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}=-24$

1a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q amb $\mathcal{N}=\{1,4\}$:
   $r'=c_N'-c_B'B^{-1}N=[-7\quad 0]-[-4\quad 0]\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}=[-3\quad 4]\ngeq 0\rightarrow q=1$
2. DBF i problema il·limitat : $d_B=-B^{-1}A_1=-\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}\ngeq 0$
3. Sel. VB de sortida $\mathcal{B}(p)$: $\theta^*=min\left\{\frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}}:i=1,2\right\}=min\left\{\frac{6}{1},\frac{2}{1}\right\}=2\ \Rightarrow p=2,B(2)=3$
4. Actualitzacions i canvi de base :
   4.1. $x_B=\begin{bmatrix}x_2\\\mathbf{x_3}\end{bmatrix}\leftarrow x_B+\theta^*d_B=\begin{bmatrix}6\\\mathbf{2}\end{bmatrix}+2\times\begin{bmatrix}-1\\\mathbf{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\\mathbf{0}\end{bmatrix},x_1=\theta^*=2,x_4=0$

4.2. $z \leftarrow z + \theta^* r_q = -24 + 2 \times (-3) = -30$

4.3. $\mathcal{B} \leftarrow \{2,1\}, \mathcal{N} \leftarrow \{3,4\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

2a iteració:

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q amb $\mathcal{N} = \{3,4\}$:

$r' = c'_N - c'_B B^{-1} N = [0 \quad 0] - [-4 \quad -7] \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [3 \quad 1] > 0 \rightarrow$ òptim

Solució: $\boxed{\mathcal{B}^* = \{2,1\}, x_B^* = [4 \quad 2]', z^* = -30}$

SOLUCIÓ EXERCICI 34. Símplex amb fase I (1).

Apartat a)

Una solució bàsica estarà formada per qualsevol combinació de dues variables bàsiques amb una matriu bàsica B no singular (no cal que les VB siguin no negatives):

1. $\mathcal{B} = \{1,2\}, B = \begin{bmatrix} -1/4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 4/3 & 4/3 \\ 4/3 & 1/3 \end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 14/3 \\ 19/6 \end{bmatrix}$
2. $\mathcal{B} = \{1,3\}, B = \begin{bmatrix} -1/4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/4 \end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 19/8 \end{bmatrix}$
3. $\mathcal{B} = \{2,3\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$

Aquesta darrera solució bàsica és infactible primal ($x_2 < 0$).

Apartat b)

Passem a la forma estàndard i formulem el problema de la fase I (noteu que només cal introduir una variable artificial a la segona constricció):

$$(P)\begin{cases} \min & -x_1 & -3x_2 & & \\ \text{s.a.:} & -\frac{1}{4}x_1 & +x_2 & +x_3 & = 2 \\ & x_1 & -x_2 & & = 3/2 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases} \qquad (P_I)\begin{cases} \min & x_4 & & & & \\ \text{s.a.:} & -\frac{1}{4}x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2 \\ & x_1 & -x_2 & & +x_4 & = 3/2 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

1a iteració Fase I: $\mathcal{B}_{\mathrm{I}} = \{3,4\}, x_B = \left[2 \; \frac{3}{2}\right]', \mathcal{N}_I = \{1,2\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0] - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [-1 \quad 1] \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q = 1}$$

- Id. de problema il·limitat : $d_B = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1 \end{bmatrix} \ngeq 0$

Sel. VB de sortida B(p): $\theta^* = \min\{-x_{B(i)}/d_{B(i)} : i = 2\} = 3/2 \implies \boxed{p = 2, B(2) = 4}$

Canvi de base : $\mathcal{B}_{\mathrm{I}} \leftarrow \{3,1\}, \mathcal{N}_I \leftarrow \{2,4\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/8 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

2a iteració Fase I: $\mathcal{B}_{\mathrm{I}} = \{3,1\}, \mathcal{N}_I = \{2,4\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 1] - [0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \geq 0 \rightarrow \boxed{\text{òptim fase I}}$$

- La base òptima de la fase I $\mathcal{B}_I = \{3,1\}$ no conté cap variable artificial $\Rightarrow \mathcal{B} = \{3,1\}$ és una solució bàsica factible del problema original (P).
- En cas que s'haguessin introduït dues variables artificials a (P_I):

$$(P_I)\begin{cases} \min & x_4 & +x_5 & & & & \\ \text{s.a.:} & -\frac{1}{4}x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 2 \\ & x_1 & -x_2 & & & +x_5 & = 3/2 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

La resolució hauria estat:

1a iteració Fase I: $\mathcal{B}_I = \{4,5\}$, $x_B = [2 \quad 3/2]'$, $\mathcal{N}_I = \{1,2,3\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0 \quad 0] - [1 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/4 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$r' = [-3/4 \quad 0 \quad -1] \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q = 3}$$

- Identificació de problema il·limitat : $d_B = -B^{-1}A_3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. VB de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min\left\{\frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}} : i = 1\right\} = 2 \Longrightarrow \boxed{p = 1, B(1) = 4}$
- Canvi de base : $\mathcal{B}_I \leftarrow \{3,5\}$, $\mathcal{N}_I \leftarrow \{1,2,4\}$. Aquesta base coincideix amb la base $\mathcal{B}_I = \{3,4\}$, de la resolució anterior, i es repetiria la iteració.

Apartat c)

Continuem a partir de la base trobada a l'apartat anterior, que coincideix amb el punt extrem $x = [3/2, 0]'$: B $= \{3,1\}$, $x_B = \begin{bmatrix}1 & 1/4\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19/8\\3/2\end{bmatrix}$, $\mathcal{N} = \{2\}$

1a iteració: B $= \{3,1\}$, $x_B = [19/8 \quad 3/2]'$, $\mathcal{N} = \{2\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q:

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = -3 - [0 \quad -1]\begin{bmatrix}1 & 1/4\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = -4 \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q = 2}$$

- Id. de problema il·limitat : $d_B = -B^{-1}A_2 = -\begin{bmatrix}1 & 1/4\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3/4\\1\end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. VB de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min\left\{\frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}} : i = 1\right\} = {}^{\frac{19}{8}}\!\Big/_{\frac{3}{4}} = 19/6 \Longrightarrow \boxed{p = 1, B(1) = 3}$
- Canvi de base : $\mathcal{B} \leftarrow \{2,1\}$, $\mathcal{N} \leftarrow \{3\}$

$$B = \begin{bmatrix}1 & -1/4\\-1 & 1\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}4/3 & 1/3\\4/3 & 4/3\end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix}19/6\\14/3\end{bmatrix}$$

2a iteració: $\mathcal{B} = \{2,1\}$, $\mathcal{N} = \{3\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = 0 - [-3 \quad -1]\begin{bmatrix}4/3 & 1/3\\4/3 & 4/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = {}^{16}\!/_{3} > 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\mathcal{B} = \{2,1\} \text{ SBF òptima}}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 35. Símplex amb fase I (2).

Passem a la forma estàndard i formulem el problema de la fase I (noteu que només cal introduir una variable artificial a la segona constricció):

$$(P)\begin{cases}\min & 5x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 6 \\ & 5x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & = & 15 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0\end{cases} \qquad (P_I)\begin{cases}\min & x_5 & & & & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & & = & 6 \\ & 5x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & +x_5 & = & 15 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0\end{cases}$$

1a iteració Fase I: $\mathcal{B}_{\mathrm{I}} = \{4,5\}$, $x_B = [6 \quad 15]'$, $\mathcal{N}_{\mathrm{I}} = \{1,2,3\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0] - [0 \quad 1] I \begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\5 & 3 & 3\end{bmatrix} = [-5 \quad -3 \quad -3] \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q = 1}$$

- Id. de problema il·limitat : $d_B = -B^{-1}A_1 = -I\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-5\end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. VB de sortida $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}(p)$: $\theta^* = min\left\{\frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}} : i = 1,2\right\} = min\left\{\frac{6}{1}, \frac{15}{5}\right\} = 3 \Rightarrow$

  $\boxed{p = 2, B(2) = 5}$
- Canvi de base : $\mathcal{B}_{\mathrm{I}} \leftarrow \{4,1\}$, $\mathcal{N}_{\mathrm{I}} \leftarrow \{2,3,5\}$

$$B = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 5\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1/5\\0 & 1/5\end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix}1 & -1/5\\0 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$$

2a iteració Fase I: $\mathcal{B}_{\mathrm{I}} = \{4,1\}$, $\mathcal{N}_{\mathrm{I}} = \{2,3,5\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0 \quad 1] - [0 \quad 0] B^{-1} A_N = [0 \quad 0 \quad 1] \geq 0 \rightarrow \boxed{\text{òptim fase I}}$$

La base òptima de la fase I $\mathcal{B}_{\mathrm{I}} = \{4,1\}$ no conté cap variable artificial $\Rightarrow \mathcal{B} = \{4,1\}$ és una solució bàsica factible del problema original (P).

1a iteració Fase II: $\mathcal{B} = \{4,1\}$, $x_B = [3 \quad 3]'$, $\mathcal{N} = \{2,3\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [3 \quad 1] - [0 \quad 5]\begin{bmatrix}1 & -1/5\\0 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 3\end{bmatrix} = [0 \quad -2] \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q = 3}$$

- Id. de problema il·limitat : $d_B = -B^{-1}A_3 = -\begin{bmatrix}1 & -1/5\\0 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-12/5\\-3/5\end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. VB de sortida $B(p)$: $\theta^* = min\left\{\frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}} : i = 4,1\right\} = 5/4 \Rightarrow \boxed{p = 1, B(1) = 4}$
- Canvi de base : $\mathcal{B} \leftarrow \{3,1\}$, $\mathcal{N} \leftarrow \{2,4\}$

$$B = \begin{bmatrix}3 & 1\\3 & 5\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}5/12 & -1/12\\-1/4 & 1/4\end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix}5/4\\9/4\end{bmatrix}$$

2a iteració: $\mathcal{B} = \{3,1\}$, $\mathcal{N} = \{2,4\}$

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [3 \quad 0] - [1 \quad 5]\begin{bmatrix}5/12 & -1/12\\-1/4 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 0\end{bmatrix} = [1/3 \quad 5/6] \geq 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\mathcal{B} = \{3,1\} \text{ SBF òptima}}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 36. Símplex amb fase I (3).

Apartat a)

Analitzem si el problema

$$(PL)\begin{cases} \min & 5x_1 & +3x_2 & +x_3 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +3x_3 & =6 & (r1) \\ & 5x_1 & +3x_2 & +3x_3 & =15 & (r2) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & \geq 0 & \end{cases}$$

pot ser degenerat (i.e. si tindrà alguna base degenerada). Una solució bàsica factible serà degenerada si sobre aquesta base son actives (es satisfan com a igualtat) més de $n=3$ de les 5 inequacions que defineixen el políedre del problema ($(r1),(r2)$ i $x_1,x_2,x_3\geq 0$). $(r1)$ i $(r2)$ sempre seran actives sobre qualsevol solució factible de (PL), doncs son d'igualtat. Així doncs, l'únic que hem de comprovar és si existeix cap solució del sistema d'equacions $(r1)-(r2)$ amb dues variables nul·les. Es pot comprovar que no hi ha cap, la qual cosa demostra que el problema (PL) no és degenerat.

Apartat b)

Símplex de les dues fases:

$$(P)_I\begin{cases} \min & x_4 & +x_5 & & & & \\ s.a.: & x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & & =6 \\ & 5x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & +x_5 & =15 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

1a iteració Fase I: $\mathcal{B}_\mathrm{I} = \{4,5\}$, $x_B=[6 \quad 15]'$, $\mathcal{N}_\mathrm{I} = \{1,2,3\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1}A_N = [0]-[1 \quad 1]I\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 3\end{bmatrix} = [-6 \quad -4 \quad -6] \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q=1}$$

- Id. de problema il·limitat : $d_B = -B^{-1}A_1 = -I\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-5\end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. VB de sortida $\mathcal{B}_\mathrm{I}(p)$: $\theta^* = min\left\{\frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}} : i=1,2\right\} = min\left\{\frac{6}{1},\frac{15}{5}\right\} = 3 \Rightarrow$

  $\boxed{p=2, B(2)=5}$
- Actualitzacions i canvi de base :
  - $x_B \leftarrow x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix}6\\15\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}-1\\-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_4\\x_5\end{bmatrix}$
  - $x_q = x_1 = \theta^* = 3, z \leftarrow z + \theta^* r_q = 3$
  - $\mathcal{B}_\mathrm{I} \leftarrow \{4,1\}, \mathcal{N}_\mathrm{I} \leftarrow \{2,3,5\}$
  - $B = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 5\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1/5\\0 & 1/5\end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix}x_4\\x_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$

2a iteració Fase I: $\mathcal{B}_\mathrm{I} = \{4,1\}$, $x_B=[3 \quad 3]'$, $\mathcal{N}_\mathrm{I} = \{2,3,5\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1}A_N = [0 \quad 0 \quad 1]-[1 \quad 0]\begin{bmatrix}1 & -1/5\\0 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\3 & 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{2}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{6}{5}\end{bmatrix} \ngeq 0$$
$$\rightarrow \boxed{q=3}$$

- Id. de problema il·limitat : $d_B = -B^{-1}A_3 = -\begin{bmatrix}1 & -1/5\\0 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-12/5\\-3/5\end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. VB de sortida $\mathcal{B}_\mathrm{I}(p)$:

$$\theta^* = min\left\{-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} : i = 1,2\right\} = min\left\{\frac{3}{12/5} = \frac{5}{4}, \frac{3}{3/5} = 5\right\} = \frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{p = 1, B(1) = 4}$$

- Actualitzacions i canvi de base :
  - $x_B \leftarrow x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{5}{4}\begin{bmatrix} -12/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \end{bmatrix}$
  - $x_q = x_3 = \theta^* = \frac{5}{4}, z \leftarrow z + \theta^* r_q = 0$
  - $\mathcal{B}_{\mathrm{I}} \leftarrow \{3,1\}, \mathcal{N}_{\mathrm{I}} \leftarrow \{2,4,5\}$
  - $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/12 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 5/2 \end{bmatrix}$

3a iteració Fase I: $\mathcal{B}_{\mathrm{I}} = \{3,1\}$ sense variables artificials: òptim fase I

1a iteració Fase II: $\mathcal{B} = \{3,1\}$, $x_B = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 5/2 \end{bmatrix}$ $\mathcal{N} = \{2\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [3] - [1 \quad 5]\begin{bmatrix} 5/12 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \geq 0 \rightarrow \boxed{\mathcal{B} = \{3,1\} \text{ òptima}}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 37. Símplex amb fase I (4).

- Forma estàndard i problema de la fase I:

$$(\mathrm{P})\begin{cases} \min & 2x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & -x_3 & = 2 \\ & x_1 & -x_2 & & = 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases} \qquad (P_I)\begin{cases} \min & x_4 & +x_5 & & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & & = 2 \\ & x_1 & -x_2 & & & +x_5 & = 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

- Iteracions del símplex primal:

Fase	Iter.	$\mathcal{B}$	$\mathcal{N}$	x'_B	z	r'	q	d'_B	p
I	1	{ 4, 5}	{ 1, 2, 3}	[2,1]	3	[-2, 0, 1]	1	[-1, -1]	2
I	2	{ 4, 1}	{ 5, 2, 3}	[1,1]	1	[2, -2, 1]	2	[-2, 1]	1
I	3	{ 2, 1}	{ 5, 4, 3}	[0.5, 1.5]	0	[1, 1, 0]	-	-	-
II	4	{ 2, 1}	{ 3}	[0.5,1.5]	3.5	[1.5]	-	-	-

SOLUCIÓ EXERCICI 38. Símplex amb fase I (5).

Símplex de les dues fases:

$$(\mathrm{P})_e\begin{cases} \min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & & & & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2 & (r1) \\ & -x_1 & +2x_2 & & -x_4 & = 2 & (r2) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 & \end{cases}$$

Problema de fase I:

$$(P_I)\begin{cases} \min & x_5 & & & & & & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 2 & (r1) \\ & -x_1 & +2x_2 & & -x_4 & +x_5 & = 2 & (r2) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & & \geq 0 & \end{cases}$$

1a iteració Fase I: $\mathcal{B}_\text{I} = \{3,5\}, x_B = [2 \quad 2]', \mathcal{N}_I = \{1,2,4\}, z_I = 2$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0 \quad 0] - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = [1 \quad -2 \quad 1] \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q = 2}$$

- Direcció bàsica factible : $d_B = -B^{-1} A_1 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. VB de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i: d_{B(i)} < 0} \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\} = \left\{ \frac{2}{1}, \frac{2}{2} \right\} = 1 \Rightarrow \boxed{p = 2, B(2) = 5}$
- Actualitzacions:
  - $x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 := \theta^* = 1, z_I := z_I + \theta^* r_2 = 0$
  - Canvi de base : $\mathcal{B}_\text{I} \leftarrow \{3,2\}, \mathcal{N}_I \leftarrow \{4,5\}, x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2a iteració Fase I: $\mathcal{B}_\text{I} = \{3,2\}, \mathcal{N}_I = \{1,4,5\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 1] - [0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \geq 0 \rightarrow\rightarrow \boxed{\text{òptim fase I}}$$

  - La base òptima de la fase I $\mathcal{B}_\text{I} = \{3,2\}$ no conté cap variable artificial $\Rightarrow \mathcal{B} = \{3,2\}$és una solució bàsica factible del problema original (P).

1a iteració Fase II: $\mathcal{B} = \{3,2\}$, $x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \{1,4\}, \ z = \frac{3}{2}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [-1 \quad 0] - \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow q = 1$$

- Direcció bàsica factible: $d_B = -B^{-1} A_1 = -\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} > 0 \Rightarrow$ **problema il·limitat**.

SOLUCIÓ EXERCICI 39. Fase I, DBF de descens i problemes il·limitats.

Apartat a)

Forma estàndard:

$$(PL_e) \begin{cases} \min & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & & = 1 \\ & & & x_3 & & +x_5 & = 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

Hi ha diverses formes de resoldre el problema de càlcul d'una SBF inicial. De més senzilla a més complicada:

1. **Sense necessitat d'aplicar fase I**: es pot observar que la matriu A de coeficients de (PL_e) ja conté dues submatrius identitat que permeten formar una SBF inicial trivial, i totes dues son òptimes per (PL_e):
   - $\mathcal{B} = \{1,5\}, B = I, x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, r' = [1 \quad 1 \quad 0] - [1 \quad 0] I \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1] \geq 0$
   - $\mathcal{B} = \{2,5\}, B = I, x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, r' = [1 \quad 1 \quad 0] - [1 \quad 0] I \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1] \geq 0$
2. Aplicant la fase I amb una variable artificial:

$$(PL_I)\begin{cases}\min & x_6 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 1 \\ & x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0\end{cases}$$

1a iteració fase I:

- $\mathcal{B} = \{6,5\}, B = I, x_B = [1 \quad 2]', \mathcal{N} = \{1,2,3,4\}, z_I = 1$
- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0] - [1 \quad 0] I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [-1 \quad -1 \quad -1 \quad 1] \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q = 1}$$

- Direcció bàsica de descens : $\mathrm{d_B} = -\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}_1 = -\mathrm{I}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. VB de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min\left\{-{x_{B(i)}}/{d_{B(i)}} : i = 1\right\} = \min\{1\} = 1 \Rightarrow \boxed{p = 1, B(1) = 6}$
- Actualitzacions i canvi de base :
  - $x_B = \begin{bmatrix}x_6\\x_5\end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 1 \times \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}, x_1 = \theta^* = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0,\ z := z + \theta^* r_q = 1 + 1 \times (-1) = 0$
  - $\mathcal{B} := \{1,5\},\ \mathcal{N} := \{2,3,4,6\}$ Hem eliminat totes les variables artificials de la base: SBF inicial del problema (PL_e).

1a iteració fase II:

- $\mathcal{B} = \{1,5\}, B = I, x_B = [1 \quad 2]', N = \{2,3,4\}, z = 1$
- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [1 \quad 1 \quad 0] - [1 \quad 0] I \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1] \geq 0 \rightarrow \boxed{\grave{o}ptima}$$

Apartat b)

En aquest cas, com que no podem calcular els costos reduïts per comprovar la condició de descens $r_q < 0$, cal usar l'expressió equivalent dels costos reduïts vista a classe: $r_q = c'd = d_1 + d_2 + d_3 < 0$. El políedre estàndard és $P_e = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, x \geq 0\right\}$. Tenint en compte que $B = B^{-1} = I$ i que $\mathcal{N} = \{2,3,4\}$, les direccions bàsiques factibles són:

- Cas $q = 2$: $d_B = \begin{bmatrix}d_1\\d_5\end{bmatrix} = -A_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}, d_N = \begin{bmatrix}d_2\\d_3\\d_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. Aquesta DBF ens porta a la base adjacent $\mathcal{B} = \{2,5\}$, pero no és de descens: $c'd = d_1 + d_2 + d_3 = -1 + 1 + 0 = 0$.
- Cas $q = 3$: $d_B = \begin{bmatrix}d_1\\d_5\end{bmatrix} = -A_3 = \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}, d_N = \begin{bmatrix}d_2\\d_3\\d_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$. Aquesta DBF ens porta a la base adjacent $\mathcal{B} = \{2,5\}$, pero no és de descens: $c'd = d_1 + d_2 + d_3 = -1 + 0 + 1 = 0$.
- Cas $q = 4$: $d_B = \begin{bmatrix}d_1\\d_5\end{bmatrix} = -A_4 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, d_N = \begin{bmatrix}d_2\\d_3\\d_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. Aquesta DBF no porta a cap base adjacent, doncs $d_B \geq 0$, i no és de descens: $c'd = d_1 + d_2 + d_3 = 1 + 0 + 0 = 1$.

Així doncs, de les tres DBF, cap és de descens. Dues ens porten a SBF adjacents amb el mateix valor de la f.o. ($\Delta z = \theta^* c'd = 0$) i la tercera no porta a cap SBF adjacent (aresta ilimitada del políedre). Com que no hi ha cap direcció bàsica de descens sobre $\mathcal{B} = \{1,5\}$, es satisfàn les condicions del teorema d'optimalitat i la base és optima.

Apartat c)

Atès que el problema (PL) és factible, l'única condició sota la qual el problema no tindrà solució és quan aquest sigui il·limitat. Les condicions suficients que permeten assegurar que el problema és il·limitat, a partir de l'anàlisi d'una SBF donada $\mathcal{B}$, és que existeixi alguna direcció bàsica de descens ($r_q < 0$) no afitada ($d_B \geq 0$). Si comprovem aquesta condició sobre les tres DBF existents sobre $\mathcal{B} = \{3,4\}$ tenim:

- $q = 1: d_B^1 = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ **no afitada**.
- $q = 2: d_B^2 = -B^{-1}A_2 = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ **no afitada**.
- $q = 5: d_B^5 = -B^{-1}A_5 = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow$ afitada.

Així doncs, si d_B^1 o d_B^2 són de descens ($r_1 < 0$ o $r_2 < 0$) llavors (PL) serà il·limitat. Comprovem-ho:

- $r_1 = c_1 - c'_B B^{-1}A_1 = c_1 - [c_3 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 < 0$
- $r_2 = c_2 - c'_B B^{-1}A_2 = c_2 - [c_3 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = c_2 < 0$

Així doncs, la condició suficient que estàvem buscant és : $c_1 < 0$ ó $c_2 < 0 \Rightarrow (PL)$ il·limitat.

SOLUCIÓ EXERCICI 40. Joc finit de suma zero i símplex.

Apartat a)

Solució:

- **Problema de fase I:**

$$(\mathrm{P_I})\begin{cases} \min \quad z_I = s \\ s.a.: \begin{bmatrix} A' & -1_n & 1_n & -I_n & 0 \\ 1'_m & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ u \\ v \\ w \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y, u, v, w, s \geq 0 \end{cases}$$

- **Solució bàsica factible inicial fase I:**

$$B = \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} w \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_N = \begin{bmatrix} y \\ u \\ v \end{bmatrix}, A_N = \begin{bmatrix} A' & -1_n & 1_n \\ 1'_m & 0 & 0 \end{bmatrix}, c_N = [0]$$

- **Selecció de la VNB entrant:**

$r_N = c'_N - c'_B B^{-1}A_N = [0] - [0 \quad 1]\begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & -1_n & 1_n \\ 1'_m & 0 & 0 \end{bmatrix} = [-1'_m \quad 0 \quad 0] \ngeq [0] \Rightarrow$ es pot seleccionar qualsevol variable y : seleccionem y_q.

- **Direcció bàsica factible:**

$d_B = -B^{-1}\begin{bmatrix} a'_q \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a'_q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_q \\ -1 \end{bmatrix}$ on a_q és la fila q-èssima de A. Veiem que existeix una solució bàsica factible (P) adjacent al llarg de d_B atès que l'última component de d_B és negativa ($d_B \ngeq [0]$).

- **Longitud de pas màxima/selecció de la VB sortint:**

$$\theta^* = \min_{\{i:d_{B(i)}<0\}}\left\{\frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right\} = \min\left\{\min_{\{i:a_{qi}<0\}}\left\{\frac{0}{a_{qi}}\right\}, 1\right\}$$

$$\theta^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists a_{qi} < 0 \\ 1 & \text{si } a_{qi} \geq 0, i = 1, \dots n \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \text{surt de la base la folga } w_i \text{ associada a l'element } a_{qi} \\ \Rightarrow \text{surt de la base } s, \text{i la nova base és factible per a } (P_1). \end{array}$$

- De l'anterior expressió de θ^* observem com la condició necessària i suficient per tal que la variable artificial s surti de la base a la primera iteració, si hem triat y_q com a variable d'entrada, és que $a_{qi} \geq 0, i = 1, \dots n$:
  - $a_{qi} \geq 0, i = 1, \dots n \Rightarrow \theta^* = 1$ i surt s
  - Si surt $s \Rightarrow \nexists a_{qi} < 0, i = 1, \dots n$.

  Com que aquesta situació es produeix independentment de quina sigui la variable y_q escollida, i podem escollir qualsevol $y_q, q = 1, \dots, m$, la condició necessària i suficient que ens demanen a l'enunciat és $A \geq 0$.

Apartat b)

Solució:

- Aplicant les fórmules d'actualització del símplex:

$$x_B := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} w \\ s \end{bmatrix} + \theta^* \begin{bmatrix} a'_q \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \times \begin{bmatrix} a'_q \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_q \\ 0 \end{bmatrix}, y_q := \theta^* = 1$$

- Així doncs, el valor de les variables sobre la SBF inicial proporcionada per la fase I serà: $x_B = \begin{bmatrix} w \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_q \\ 1 \end{bmatrix}$, i la resta de variables no bàsiques ($u = v = y_{j \neq q} = 0$).

SOLUCIÓ EXERCICI 41. Símplex de les dues fases i OPTMODEL.

Apartat a)

Formaran una base qualsevol conjunt de dues variables $\mathcal{B} = \{B(1), B(2)\}$ amb matriu associada $B = [A_{B(1)} \quad A_{B(2)}]$ no singular:

1. $\mathcal{B} = \{1,2\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ no singular $\Rightarrow$ base.
2. $\mathcal{B} = \{1,3\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ no singular $\Rightarrow$ base.
3. $\mathcal{B} = \{1,4\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ no singular $\Rightarrow$ base.
4. $\mathcal{B} = \{2,3\}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ no singular $\Rightarrow$ base.
5. $\mathcal{B} = \{2,4\}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ no singular $\Rightarrow$ base.
6. $\mathcal{B} = \{3,4\}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ singular $\Rightarrow$ no forma base.

Així doncs, hem obtingut 5 bases (fixeu-vos que l'enunciat només demana quines variables formen la base, no el seu valor). Observant la sortida de SAS/OR veiem que la solució òptima correspon a la tercera base $\mathcal{B} = \{1,4\}$.

Apartat b)

Forma estàndard (PL_e) i problema de fase I (PL_I):

$$(PL_e)\begin{cases} \min & x_1 & & +x_3 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & +2x_3 & +x_4 & = 4 \\ & 4x_1 & -5x_2 & & & = 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

$$(PL_I)\begin{cases}\min & x_5 \\ \text{s.a.:} & x_1 & & +2x_3 & +x_4 & & =4 \\ & 4x_1 & -5x_2 & & & +x_5 & =10 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0\end{cases}$$

1a iteració fase I:

- $B = \{4,5\}, B = I, x_B = [4 \quad 10]', N = \{1,2,3\}, z_I = 10$
- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0] - [0 \quad 1] I \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 0\end{bmatrix} = [-4 \quad 5 \quad 0] \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q=1}$$

- Direcció bàsica de descens : $d_B = -B^{-1}A_1 = -I\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. VB de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i\in\mathcal{B}|d_{B(i)}<0}\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\} = \min\left\{\frac{4}{1}, \frac{10}{4}\right\} = \frac{5}{2} \Longrightarrow \boxed{p=2, B(2)=5}$
- Actualitzacions i canvi de base :
  - $x_B = \begin{bmatrix}x_4\\x_5\end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix} + \frac{5}{2}\times\begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/2\\0\end{bmatrix}, x_1 = \theta^* = \frac{5}{2}, x_2 = x_3 = 0,\ z := z + \theta^* r_q = 10 + \frac{5}{2}\times(-4) = 0$
  - $\mathcal{B} := \{4,1\},\ \mathcal{N} := \{2,3,5\}$. Hem eliminat totes les variables artificials de la base: $\Rightarrow \mathcal{B} := \{4,1\}$ és una SBF inicial del problema (PL_e).

1a iteració fase II:

- $\mathcal{B} = \{4,1\}, B = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1/4\\0 & 1/4\end{bmatrix}, x_B = [3/2 \quad 5/2]',\ \mathcal{N} = \{2,3\}, z = 5/2$
- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 1] - [0 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & -1/4\\0 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\-5 & 0\end{bmatrix} = [5/4 \quad 1] \geq 0 \rightarrow \boxed{òptim}$$

Observem com aquesta solució coincideix amb la que proporciona SAS/OR:

$$x_B = \begin{bmatrix}x_4\\x_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 - \mathbf{C1.BODY}\\ \mathbf{X[1].SOL}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/2\\5/2\end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix}\mathbf{X[2].RC}\\ \mathbf{X[3].RC}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5/4\\0\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 42. Problema de Klee-Minty.

Apartat a)

Forma estàndard:

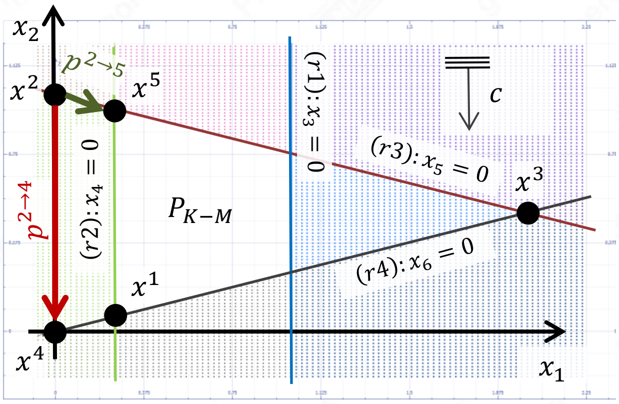
$$(P_{K-M})\begin{cases}\min & & -x_2 \\ \text{s.a.:} \\ & x_1 & & +x_3 & & & & =1 & (r1) \\ & x_1 & & & -x_4 & & & =\epsilon & (r2) \\ & \epsilon x_1 & +x_2 & & & +x_5 & & =1 & (r3) \\ & -\epsilon x_1 & +x_2 & & & & -x_6 & =0 & (r4) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0\end{cases}$$

De la gràfica podem obtenir les components del punt extrem x^1:

$$x^1 = [\epsilon \quad \epsilon^2 \quad 1-\epsilon \quad 0 \quad 1-2\epsilon^2 \quad 0]'$$

com que $\epsilon \in]0,1/2[$ sobre x^1, x_1, x_2, x_3 i x_4 són no nul·les i llavors $\mathcal{B} = \{1,2,3,5\}$ amb $\mathcal{N} = \{4,6\}$ i matriu bàsica:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 & 1 \\ -\epsilon & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Apliquem ara una iteració del símplex primal. Primer cal calcular els costos reduïts. Per estalviar-nos haver de calcular B^{-1} podem usar l'expressió $r' = c'_N - \lambda' A_N$ i calcular $\lambda' = c'_B B^{-1}$ resolent el sistema $B'\lambda = c_B$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \epsilon & -\epsilon \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ -\epsilon \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$r' = c'_N - \lambda' A_N = [0] - [0 \quad -\epsilon \quad 0 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [-\epsilon \quad -1] < 0$$

Així doncs, si $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ es satisfà $\min\{r_q\} = \min\{-\epsilon, -1\} = -1$ i la VNB de sortida serà sempre x_6. La direcció bàsica factible vindrà donada per $d_B = -B^{-1}A_6$, que podem obtenir resolent el sistema $Bd_B = -A_6$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 & 1 \\ -\epsilon & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{B(1)} \\ d_{B(2)} \\ d_{B(3)} \\ d_{B(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to d_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ngeq [0]$$

La variable bàsica de sortida serà $x_{B(4)} = x_5$ i el nou valor de x_6 serà $\theta^* = \frac{x_{B(4)}}{-d_{B(4)}} = 1 - 2\epsilon^2$. Comprovem que la nova base $\mathcal{B} = \{1,2,3,6\}$ serà òptima calculant novament els costos reduïts:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \epsilon & -\epsilon \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r' = c'_N - \lambda' A_N = [0] - [0 \quad \epsilon \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [\epsilon \quad 1] > 0$$

Així doncs, hem demostrat que amb una iteració obtenim la solució òptima de (P_{K-M})■

Apartat b)

La resposta d'aquest apartat admet múltiples enfocs, tots ells vàlids.

- Podem usar la relació $r_q = c'd$ on d és una direcció bàsica factible. Sabem que x^2 serà factible dual si $r \geq 0$. Per altre banda sabem que els costos reduïts es relacionen amb el canvi provocat en la funció objectiu quan passem de la s.b. x a la s.b. $y = x + p$ amb $p = \theta^* d$ a través de l'expressió $c'y = c'x + c'p = c'x + \theta^* r_q \Rightarrow r_q = \frac{c'p}{\theta^*}$. Com que $\theta^* > 0$ (x^2 no degenerada) tenim que $r_q \geq 0 \Leftrightarrow c'p \geq 0$. Si observem la gràfica veurem que les s.b. adjacents a x^2 són x^4 i x^5 amb $p^{2\to4} = x^4 - x^2$ i $p^{2\to5} = x^5 - x^2$. A la gràfica es pot observar com $c'p^{2\to5} > 0$ i $c'p^{2\to5} > 0 \Rightarrow r > 0 \Rightarrow x^2$ factible dual ■

Fixeu-vos que raonant sobre la representació gràfica no cal trobar el valor numèric de les coordenades de cap vector, ni x^i ni $p^{i\to j}$.

- Un enfoc alternatiu des del punt de vista del problema dual consisteix en formular el dual de la forma estàndard de (P_{K-M}) (veure problema (D_{K-M}) de l'apartat següent) i valorar la factibilitat de la base dual associada a x^2 ($\mathcal{B}_P^2 = \{2,3,4,6\}, \mathcal{N}_P^2 = \{1,5\}$). Per exemple, es pot usar el fet que les variables no bàsiques del dual són els costos reduïts de les variables bàsiques del primal, substituint $r_2 = r_3 = r_4 = r_6 = 0$ a les constriccions del dual i aïllant directament el valor de la resta de variables duals: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0, \lambda_3 = -1, r_1 = \epsilon, r_5 = 1$. S'obté d'aquesta forma que $r_N' = [r_1 \quad r_5] = [\epsilon \quad 1] > 0 \Rightarrow x^2$ factible dual. Alternativament, es pot calcular el vector $\lambda' = c_B' B^{-1}$ i comprovar que satisfà és constriccions del dual (D_{K-M}), ja sigui en forma estàndard o no.
- Un tercer enfoc es basa en anàlisi de sensibilitat, observant que x^2 és l'òptim del problema (P_{K-M}) amb b_2=0, i , conseqüentment, factible dual ($r \geq 0$). Llavors, en el nostre problema amb $b_2 = \epsilon$ la solució bàsica x^2 també serà factible dual, doncs un canvi en el vector b no pot modificar el valor dels costos reduïts.

Apartat c)

Dual de la forma estàndard del problema (P_{K-M}):

$$
(D_{K-M})\begin{cases}
\max & \lambda_1 + \epsilon\lambda_2 + \lambda_3 \\
\text{s.a.:} & \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \epsilon\lambda_3 - \epsilon\lambda_4 + r_1 = 0 \\
& \lambda_3 + \lambda_4 + r_2 = -1 \\
& \lambda_1 + r_3 = 0 \\
& -\lambda_2 + r_4 = 0 \\
& \lambda_3 + r_5 = 0 \\
& -\lambda_4 + r_6 = 0 \\
& r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 \geq 0
\end{cases}
$$

La base primal associada a x^3 és $\mathcal{B}_P = \{1,2,3,4\}, \mathcal{N}_P = \{5,6\}$. Sabem que la solució bàsica dual associada a $\mathcal{B}_P$ és $\Lambda_B' = [\lambda' \quad r_N'] = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \quad r_5 \quad r_6]$. El vector λ es pot calcular a partir de l'expressió del corol·lari del Ta. Fort de dualitat $\lambda' = c_B' B^{-1}$:

$$
\lambda' = c_B' B^{-1} \to B'\lambda = c_B \; ; \begin{bmatrix} 1 & 1 & \epsilon & -\epsilon \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

El valor de les folgues duals r_5, r_6 (costos reduïts primals) es pot calcular directament de les constriccions del dual:

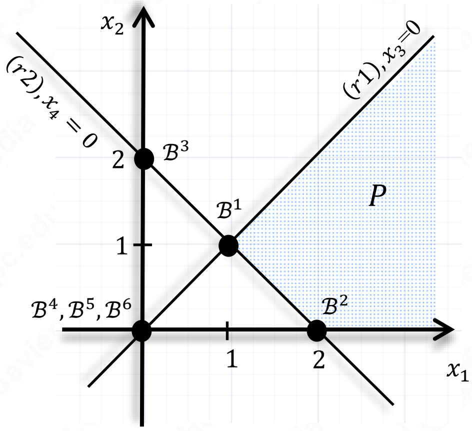
$$
r_5 = -\lambda_3 = \frac{1}{2} \,, r_6 = \lambda_4 = -\frac{1}{2}
$$

Així doncs veiem que, des de l'òptica del problema dual, Λ_B no és una solució bàsica dual factible, doncs hi ha una folga dual negativa. Des de l'òptica del problema primal, $\mathcal{B}_P$ no és òptima perquè ni ha un cost reduït negatiu. Veiem doncs que x^3 és simultàniament infactible primal i dual la qual cosa impedeix l'aplicació de cap dels algorismes de programació lineal estudiats a l'assignatura.

SOLUCIÓ EXERCICI 43. Propietats de les SBF i fase I.

Apartat a)

$$(PL)_e \begin{cases} \begin{array}{lllllll} \min & c_1x_1 & +c_2x_2 & & & \\ s.a.: & & & & & \\ (r1) & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 0 \\ (r2) & x_1 & +x_2 & & -x_4 & = 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{array} \end{cases}$$

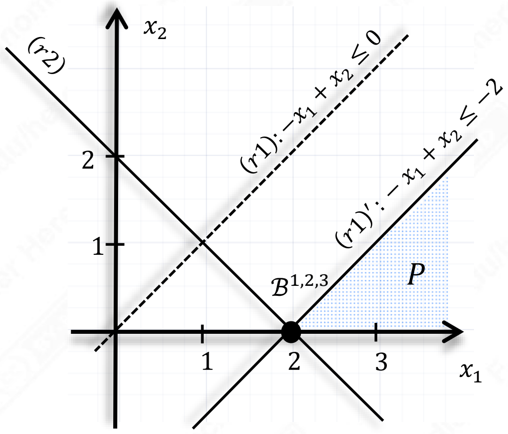


$\mathcal{B}$	x_B	**Factible?**	**Degenerada?**
$\mathcal{B}^1 = \{1,2\}$	$x_B^1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	Sí	No
$\mathcal{B}^2 = \{1,3\}$	$x_B^2 = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \leftarrow (r1): x_3 = x_1$	Sí	No
$\mathcal{B}^3 = \{2,3\}$	$x_B^3 = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} \leftarrow (r1): x_3 = -x_2$	No	No
$\mathcal{B}^4 = \{1,4\}$	$x_B^4 = \begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix} \leftarrow (r2): x_4 = x_1 + x_2 - 2$	No	Sí
$\mathcal{B}^5 = \{2,4\}$	$x_B^5 = \begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$	No	Sí
$\mathcal{B}^6 = \{3,4\}$	$x_B^6 = \begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$	No	Sí

Apartat b)

Modificar $b_1 = -x_1 + x_2$ equival a representar una nova inequació $(r1)'$ "paral·lela" a $(r1)$. Sabem que les SBF degenerades d'un políedre en $\mathbb{R}^2$ es poden identificar perquè sobre elles intersequen les rectes de més de dues constriccions. Observant la representació gràfica veiem que per tal de que el nou políedre tingui totes les SBF degenerades cal fer passar la recta associada a $(r1)'$ pel punt $x = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \Rightarrow b_1 = -2 + 0 = -2$. Llavors P tindria 3 SBF degenerades:

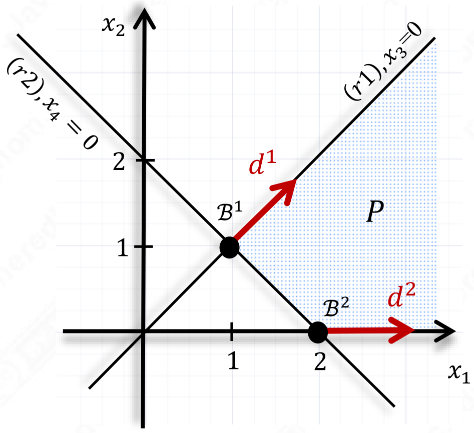
$$\left.\begin{cases}\mathcal{B}^1 = \{1,2\}\\ \mathcal{B}^2 = \{3,2\}\\ \mathcal{B}^3 = \{4,2\}\end{cases}\right\} \to x_B^{1,2,3} = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$$



Un altre forma de procedir, més complicada però vàlida, seria expressar el valor de les sis solucions bàsiques trobades a l'apartat anterior en funció de b_1 (per exemple, $x_B^1(b_1) = [B^1]^{-1}\begin{bmatrix}b_1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-b_1/2+1\\ b_1/2+1\end{bmatrix}$, $x_B^2(b_1) = [B^2]^{-1}\begin{bmatrix}b_1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ b_1+2\end{bmatrix}$) i observar que per $b_1 = -2$ totes les s.b. que són factibles tenen alguna component nul·la.

Apartat c)

Per tal que (PL), factible, no tingui solució òptima cal que sigui il·limitat. (PL) serà il·limitat alguna de les direccions bàsiques factibles il·limitades d^1 i d^2 (veure gràfica adjunta) són de descens:



d^1: $\mathcal{B}^1 = \{1,2\}$

$$d_B^1 = -B^{-1}A_4 = -\begin{bmatrix}-1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

$$c'd^1 = c_4 + c_B^{1\,\prime} d_B^1 = 0 + [c_1 \quad c_2]\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} < 0$$
$$\to \boxed{c_1 + c_2 < 0}$$

d^2: $\mathcal{B}^2 = \{1,3\}$

$$d_B^2 = -B^{-1}A_4 = -\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$c'd^2 = c_4 + c_B^{2\,\prime} d_B^2 = 0 + [c_1 \quad 0]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \boxed{c_1 < 0}$$

Així doncs, (PL) no tindrà solució òptima $\Leftrightarrow$ $c_1 + c_2 < 0$ ó $c_1 < 0$.

Apartat d)

$$(PL)_I \begin{cases} \min & z_I = x_5 \\ s.a.: & \\ (r1) & -x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad\quad\quad\quad\quad = 0 \\ (r2) & x_1 \quad +x_2 \quad\quad\quad -x_4 \quad +x_5 \quad = 2 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \quad \ge 0 \end{cases}$$

1a iteració fase I:

- $\mathcal{B} = \{3,5\}, B = I, x_B = [0 \quad 2]', \mathcal{N} = \{1,2,4\}, z_I = 2$
- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0] - [0 \quad 1] I \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [-1 \quad -1 \quad 1] \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q = 1}$$

- Direcció bàsica de descens : $d_B = -B^{-1} A_1 = -I \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. VB de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i=2}\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\} = \min\left\{-\frac{2}{-1}\right\} = 2 \Longrightarrow \boxed{p = 2, B(2) = 5}$
- Actualitzacions i canvi de base :
  - $x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 = \theta^* = 2, x_2 = x_4 = 0,\ z_I := z_I + \theta^* r_q = 2 + 2 \times (-1) = 0$
  - $\mathcal{B} := \{3,1\},\ \mathcal{N} := \{2,4,5\}$.

2a iteració fase I:

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0 \quad 1] - [0 \quad 0] B^{-1} A_N = [0 \quad 0 \quad 1] \geq 0$$

- Hem assolit l'òptim de la fase I havent eliminat totes les variables artificials de la base: $\mathcal{B} = \{3,1\}$ SBF inicial del problema $(PL)_e$.

1a iteració fase II:

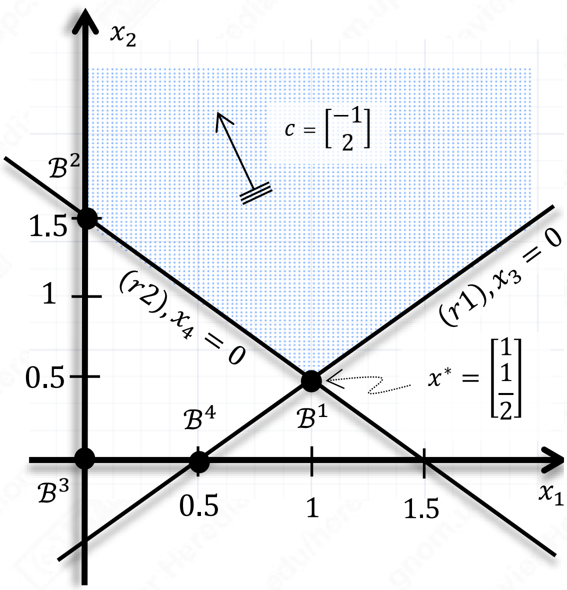
- $\mathcal{B} = \{3,1\}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_B = [2 \quad 2]', \mathcal{N} = \{2,4\}, z = 2$
- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [1 \quad 0] - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \geq 0 \rightarrow \boxed{òptima}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 44. Propietats de les SBF i fase I amb OPTMODEL.

Apartat a)

$$(PL_e) \begin{cases} \min & -x_1 & +2x_2 & & & & \\ \text{s.a.:} & & & & & & \\ (r1) & 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & 1 \\ (r2) & 2x_1 & +2x_2 & & -x_4 & = & 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \end{cases}$$



	$\mathcal{B}$	x_B
Factibles (P):	$\mathcal{B}^1 = \{1,2\}$	$x_B^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$
	$\mathcal{B}^2 = \{2,3\}$	$x_B^2 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow (r1) \end{matrix}$
Infactibles (P):	$\mathcal{B}^3 = \{3,4\}$	$x_B^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (r1) \\ \leftarrow (r2) \end{matrix}$
	$\mathcal{B}^4 = \{1,4\}$	$x_B^4 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow (r2) \end{matrix}$

Apartat b)

$$(PL_I)\begin{cases} \min & x_5 \\ \text{s.a.:} \\ (r1) & 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & = & 1 \\ (r2) & 2x_1 & +2x_2 & & -x_4 & +x_5 & = & 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{cases}$$

1a iteració fase I: $\mathcal{B} = \{3,5\}, B = I, x_B = [1 \quad 3]', \mathcal{N} = \{1,2,4\}, z_I = 3$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0] - [0 \quad 1] I \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = [-2 \quad -2 \quad 1] \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q = 1}$$

- Direcció bàsica de descens : $d_B = -B^{-1}A_1 = -I\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. VB de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i|d_{B(i)}<0}\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{p = 1, B(1) = 3}$
- Actualitzacions i canvi de base :
  - $x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, x_1 = \theta^* = \frac{1}{2}, x_2 = x_4 = 0,\ z_I := z_I + \theta^* r_q = 3 + \frac{1}{2}(-2) = 2$
  - $\mathcal{B} := \{1,5\},\ \mathcal{N} := \{2,3,4\}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, x_B = [1/2 \quad 2]'$.

2a iteració fase I: $\mathcal{B} := \{1,5\},\ \mathcal{N} := \{2,3,4\},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, x_B = [1/2 \quad 2]',\ z_I = 2.$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0] - [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [-4 \quad 1 \quad 1] \ngeq [0] \rightarrow \boxed{q = 2}$$

- Direcció bàsica de descens : $d_B = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \ngeq 0.$
- Sel. VB de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i|d_{B(i)}<0}\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\} = \min\left\{\frac{2}{4}\right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{p = 2, B(2) = 5}$
- Actualitzacions i canvi de base :
  - $x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \theta^* = \frac{1}{2}, x_3 = x_4 = 0,\ z_I := z_I + \theta^* r_q = 2 + \frac{1}{2}(-4) = 0$
  - $\mathcal{B} := \{1,2\},\ \mathcal{N} := \{3,4,5\}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}, x_B = [1 \quad 1/2]'$

3a iteració fase I: $\mathcal{B} := \{1,2\},\ \mathcal{N} := \{3,4,5\}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}, x_B = [1 \quad 1/2]'\ z_I = 0.$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0 \quad 1] - [0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1] \geq [0]$$
$$\rightarrow \boxed{\text{òptim fase I}}$$

Hem assolit l'òptim de la fase I havent eliminat totes les variables artificials de la base: $\mathcal{B} = \{1,2\}$ SBF inicial del problema $(PL)_e$.

1a iteració fase II:

- $\mathcal{B} = \{1,2\}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}, x_B = [1 \quad 1/2]', \mathcal{N} := \{3,4\}, z = 0$
- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0] - [-1 \quad 2] \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \geq 0 \rightarrow \boxed{òptima}$$

SOLUCIÓ EXERCICIS DUALITAT I ANÀLISI DE SENSIBILITAT

SOLUCIÓ EXERCICI 45. Test dualitat i anàlisi de sensibilitat.

Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)
1	F	F	V	2	F	F	V	3	F	V	V	4	F	V	V	5	F	F	F
6	F	V	F	7	F	V	V	8	F	V	F	9	F	V	V	10	F	V	V
11	V	F	F	12	F	V	F	13	V	V	F	14	V	F	F	15	F	V	V
16	V	F	F	17	F	V	V	18	F	V	V	19	F	F	V	20	F	F	V
21	F	V	V	22	F	V	V	23	F	V	F								

SOLUCIÓ EXERCICI 46. Formulació del problema dual.

Apartat 0

$$(D)\begin{cases} \min & 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & \\ \text{s.a.:} & \lambda_1 & +2\lambda_2 & +\lambda_3 & \geq 2 \\ & \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & = 1 \\ & & \lambda_2 \leq 0, & \lambda_3 \geq 0 & \end{cases}$$

Apartat 0

$$(D)\begin{cases} \max & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & \\ \text{s.a.:} & \lambda_1 & +\lambda_2 & & = 2 \\ & \lambda_1 & & +\lambda_3 & \leq 4 \\ & \lambda_1 & -\lambda_2 & +\lambda_3 & \leq 6 \\ & \lambda_1 \geq 0, & \lambda_2 \geq 0, & \lambda_3 \geq 0 & \end{cases}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 47. Jocs finit de suma zero i parells primal- dual.

$$(P_2)\begin{cases} \min\limits_{x,z_2} & z_2 & & \\ \text{s. a.:} & \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i - z_2 & \leq 0 & \mathrm{j} = 1,\dots,m \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i & = 1 & \\ & x_i & \geq 0 & i = 1,\dots,n \end{cases}$$

$$\rightarrow (P_2)\begin{cases} \min\limits_{x,z_2} & z_2 & \\ \text{s. a.:} & Ax - 1_m z_2 & \leq 0 \rightarrow \lambda \leq 0 \\ & 1_n' x + 0 z_2 & = 1 \rightarrow z_1 \\ & x & \geq 0 \end{cases} \quad \left(1_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n\right)$$

$$\rightarrow (D_2)\begin{cases} \max\limits_{\lambda,z_1} & z_1 & \\ \text{s. a.:} & A'\lambda + 1_n z_1 & \leq 0 \\ & -1_m' \lambda & = 1 \\ & \lambda & \leq 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{y=-\lambda} (D_2)\begin{cases} \max\limits_{y,z_1} & z_1 & \\ \text{s.a.:} & A'y - 1_n z_1 & \geq 0 \\ & 1'_m y & = 1 \\ & y & \geq 0 \end{cases} \equiv (P_1)$$

SOLUCIÓ EXERCICI 48. Dual de la forma estàndard.

Formulem el dual de (P) i de la seva forma estàndard $(P)_e$:

$$(P)\begin{cases} \min\limits_{x} & \begin{bmatrix} c'_x & c'_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ s.a.: & \\ & \begin{bmatrix} A^1_x & A^1_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b^1 \\ & \begin{bmatrix} A^2_x & A^2_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq b^2 \\ & \begin{bmatrix} A^3_x & A^3_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq b^3 \\ & x \geq 0 \\ & y\ lliure \end{cases} \rightarrow (D)\begin{cases} \max\limits_{\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3} & & \begin{bmatrix} \lambda^{1'} & \lambda^{2'} & \lambda^{3'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix} \\ s.a.: & & \\ & & \begin{bmatrix} \lambda^{1'} & \lambda^{2'} & \lambda^{3'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^1_x \\ A^2_x \\ A^3_x \end{bmatrix} \leq c'_x \\ & (1) & \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda^{1'}} & \boldsymbol{\lambda^{2'}} & \boldsymbol{\lambda^{3'}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A^1_y} \\ \boldsymbol{A^2_y} \\ \boldsymbol{A^3_y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{c'_y} \\ & & \lambda^1 lliure \\ & (2.a) & \boldsymbol{\lambda^2 \leq 0} \\ & (2.b) & \boldsymbol{\lambda^3 \geq 0} \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$(P)_e\begin{cases} \min\limits_{x,u,v,f,e} & \begin{bmatrix} c'_x & c'_y & -c'_y & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ u \\ v \\ f \\ e \end{bmatrix} \\ s.a.: & \\ & \begin{bmatrix} A^1_x & A^1_y & -A^1_y & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ u \\ v \\ f \\ e \end{bmatrix} = b^1 \\ & \begin{bmatrix} A^2_x & A^2_y & -A^2_y & I^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ u \\ v \\ f \\ e \end{bmatrix} = b^2 \\ & \begin{bmatrix} A^3_x & A^3_y & -A^3_y & 0 & -I^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ u \\ v \\ f \\ e \end{bmatrix} = b^3 \\ & x,u,v,f,e \geq 0 \end{cases} \rightarrow (D)_e\begin{cases} \max\limits_{\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3} & & \begin{bmatrix} \lambda^{1'} & \lambda^{2'} & \lambda^{3'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix} \\ s.a.: & & \\ & & \begin{bmatrix} \lambda^{1'} & \lambda^{2'} & \lambda^{3'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^1_x \\ A^2_x \\ A^3_x \end{bmatrix} \leq c'_x \\ & (1.a) & \begin{bmatrix} \lambda^{1'} & \lambda^{2'} & \lambda^{3'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^1_y \\ A^2_y \\ A^3_y \end{bmatrix} \leq c'_y \\ & (1.b) & \begin{bmatrix} \lambda^{1'} & \lambda^{2'} & \lambda^{3'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -A^1_y \\ -A^2_y \\ -A^3_y \end{bmatrix} \leq -c'_y \\ & (2) & \begin{bmatrix} \lambda^{1'} & \boldsymbol{\lambda^{2'}} & \boldsymbol{\lambda^{3'}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{I^2} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{I^3} \end{bmatrix} \leq 0 \\ & & \lambda^1,\lambda^2,\lambda^3\ lliure \end{cases}$$

Observem que les constriccions (1) de (D) i $(1.a),(1.b)$ de $(D)_e$ coincideixen, així com les condicions de signe $(2.a),(2.b)$ de (D) i (2) de $(D)_e$. Atès que la resta d'elements de (D) i $(D)_e$ són idèntics, podem concloure que són problemes equivalents ■.

SOLUCIÓ EXERCICI 49. Dual després d'eliminar files redundants.

Estem analitzant el problema primal en forma estàndard i el seu dual

$$(P)_e \begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i' x_i & \\ \text{s.a.:} & a_j' x = b_j & j=1,\dots,m \\ & x_i \geq 0 & i = 1,\dots.n \end{cases} \quad ; \quad (D)_e \begin{cases} \max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^m} & \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j b_j \\ \text{s.a.:} & \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j a_j' \leq c' \end{cases}$$

quan eliminem l'última constricció primal $a_m' x = b_m$ associada a una fila de A, a_m', que és combinació lineal de la resta:

$$a_m = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j a_j. \tag{1}$$

Sigui $x \in P_e$ una solució factible primal qualsevol, llavors

$$b_m = a_m' x = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j a_j' x = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j b_j. \tag{2}$$

Tenint en compte (1) les constriccions del problema dual $(D)_e$ es poden re-escriure com

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j' = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j a_j' + \lambda_m \left(\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j a_j' \right) = \sum_{j=1}^{m-1} (\lambda_j + \alpha_j \lambda_m) a_j' \leq c'. \tag{3}$$

Tenint ara en compte (2) la funció dual es pot expressar com

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j b_j = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j b_j + \lambda_m \left(\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j b_j \right) = \sum_{j=1}^{m-1} (\lambda_j + \alpha_j \lambda_m) b_j. \tag{4}$$

Si definim $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j + \alpha_j \lambda_m$, observem que $(D)_e$ es pot expressar com

$$\widetilde{(D)}_e \begin{cases} \max\limits_{\tilde{\lambda}\in\mathbb{R}^{m-1}} & \sum\limits_{j=1}^{m-1} \tilde{\lambda}_j b_j \\ \text{s.a.:} & \sum\limits_{j=1}^{m-1} \tilde{\lambda}_j a_j' \leq c'. \end{cases}$$

Els duals $(D)_e$ i $\widetilde{(D)}_e$ són tots dos infactibles o bé tenen el mateix cost òptim. Efectivament, pel que respecta a la factibilitat, si existeix alguna solució λ factible $(D)_e$ és evident, en virtut de l'expressió (3), que $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j + \alpha_j \lambda_m, j = 1 \dots, m-1$ és una solució factible $\widetilde{(D)}_e$. Recíprocament, si existeix alguna solució $\tilde{\lambda}$ factible $\widetilde{(D)}_e$, el vector $\lambda \in \mathbb{R}^n$ de components

$$\lambda_j := \begin{cases} \tilde{\lambda}_j - \alpha_j \beta & j < m \\ \beta & j = m \end{cases}, \qquad j = 1, \dots, m$$

satisfà les constriccions (3) per a qualsevol valor arbitrari de β i és, per tant, factible $(D)_e$. A més, això ens permet assegurar que el políedre factible $(D)_e$ és no fitat. Amb un raonament similar es demostra fàcilment en virtut de (4) que, donada una solució factible $(D)_e$ qualsevol, sempre es pot trobar un vector factible $\widetilde{(D)}_e$ amb el mateix valor de la funció i viceversa.

Fixem-nos ara que $\widetilde{(D)}_e$ correspon al problema dual associat a $(P)_e$ després d'eliminar l'última constricció $a_m' x = b_m$:

$$\widetilde{(P)}_e \begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i' x_i \\ \text{s. a.:} & a_j' x = b_j \quad j = 1, \dots, m-1 \\ & x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots . n \end{cases} \quad ; \quad \widetilde{(D)}_e \begin{cases} \max\limits_{\tilde{\lambda}\in\mathbb{R}^{m-1}} & \sum\limits_{j=1}^{m-1} \tilde{\lambda}_j b_j \\ \text{s. a.:} & \sum\limits_{j=1}^{m-1} \tilde{\lambda}_j a_j' \leq c' \end{cases}$$

Així doncs podem concloure que els duals de $(P)_e$ i $\widetilde{(P)}_e$ o bé són tots dos infactibles o bé tenen el mateix cost òptim ∎.

SOLUCIÓ EXERCICI 50. Òptim dual a través del Ta de folga complementària.

Els problemes primal i dual que estem considerant són:

$$(P) \begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^3} & 13x_1 & +10x_2 & +6x_3 & \\ \text{s.a.:} & 5x_1 & +x_2 & 3x_3 & = 8 \\ & 3x_1 & +x_2 & & = 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad (D) \begin{cases} \max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^2} & 8\lambda_1 & +3\lambda_2 & \\ \text{s.a.:} & 5\lambda_1 & +3\lambda & \leq 13 \\ & \lambda_1 & +\lambda_2 & \leq 10 \\ & 3\lambda_1 & & \leq 6 \end{cases}$$

i la solució òptima primal $x^* = [1 \quad 0 \quad 1]'$. Volem identificar la solució òptima dual λ^*a través dels expressions del Ta de folga complementària

$$\lambda_j^* \left(a_j' x^* - b_j \right) = 0 \quad j = 1,2, \dots, m$$
$$\left(c_i - \lambda^{*\prime} A_i \right) x_i^* = 0 \quad i = 1,2, \dots, n$$

La relació $\lambda_j^* \left(a_j' x^* - b_j \right) = 0$ es satisfà automàticament per a tot j atès que el problema està en forma estàndard. La segona relació es satisfà sempre per a $i = 2$, doncs $x_2^* = 0$, i les expressions corresponents a $i = 1$ i 3 són:

$$\begin{cases} i = 1: & 5\lambda_1^* + 3\lambda_2^* = 13 \\ i = 3: & 3\lambda_1 = 6 \end{cases} \rightarrow \boxed{\lambda^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Es pot comprovar que el vector $\lambda^* = [2 \quad 1]'$, única solució de les condicions de folga complementària associades a x^*, és factible dual (com, d'altre banda, ens assegura el Ta. Fort de dualitat atès que x^*és òptim primal). Així doncs, hem comprovat que, efectivament, el Ta. de folga complementària proporciona l'única solució dual existent.

SOLUCIÓ EXERCICI 51. Ta de folga complementària per SBF òptimes no degenerades.

Sigui x^* SBF òptima no degenerada de $(P)_e$. Atès que $x_i^* \neq 0$ per a tota variable bàsica, pel Ta de folga complementària tenim que

$$c_i - \lambda^{*\prime} A_i = 0, \qquad i \in \mathcal{B}^*$$

Aquesta relació és equivalent al sistema d'equacions $\lambda^{*\prime}[A_{B(1)} \quad \cdots \quad A\_B(m)] = \lambda^* B = c_B'$. Com que B és no singular, la solució única del sistema és $\lambda^{*\prime} = c_B' B^{-1}$∎

SOLUCIÓ EXERCICI 52. PROC OPTMODEL i símplex dual.

Apartat a)

Corol·lari : "Siguin x i λ solucions factibles (P) i (D) respectivament tals que $\lambda' b = c' x$. Llavors x i λ són òptimes.". Cal demostrar (i) que la solució dual trobada per SAS és factible dual i (ii) que $\lambda' b = c' x$.

i. El vector dual òptim que mostra la sortida de OPTMODEL (`C1.DUAL` i `C2.DUAL`) és $\lambda = [3/2 \quad 0]'$. La factibilitat dual d'aquesta solució dual es demostra comprovant que satisfà les constriccions del problema dual:

$$(D)\begin{cases} \max & 15\lambda_1 & +20\lambda_2 & \\ \text{s.a.:} & 2\lambda_1 & +4\lambda_2 & = 2\times\frac{3}{2}+4\times 0 = 3 = 3 \rightarrow \text{factible} \\ & 3\lambda_1 & -\lambda_2 & = 3\times\frac{3}{2}-0 = 4{,}5 < 8 \rightarrow \text{factible} \\ & \lambda_1 = \frac{3}{2}, & \lambda_2 = 0, & \geq 0 \rightarrow \text{factible} \end{cases}$$

ii. El valor de la funció objectiu dual és $\lambda' b = [3/2 \quad 0]' \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} = 22{,}5$. La base òptima primal és $\mathcal{B} = \{1,4\}$, amb x_4 escreix de la segona contricció. El valor de les variables primals proporcionat per SAS (`X.SOL`, `C*.BODY-C*.LB`) és $x' = [7.5 \quad 0 \quad 0 \quad 10]$ i el valor de la funció objectiu primal és $c' x = [3 \quad 8]' \begin{bmatrix} 7.5 \\ 0 \end{bmatrix} = 22.5 = \lambda' b$.

Apartat b)

- Forma estàndard:

$$(PL)\begin{cases} \min & 3x_1 & +8x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & & = 15 \\ & 4x_1 & -x_2 & & -x_4 & = 20 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

- **Càlculs previs:** la iteració del símplex dual que indica la finestra Log és:

```
NOTE: The DUAL SIMPLEX solver is called.
                           Objective      Entering      Leaving
      Phase Iteration      Value          Variable      Variable
        2           1        22.500000    X[1]          C1       (S)
NOTE: Optimal.
```

Així doncs, si desfem aquesta pivotació a partir de la solució bàsica òptima $\mathcal{B} = \{1,4\}$ obtenim que la base inicial trivial per al problema plantejat està formada per les dues variables d'escreix, $\mathcal{B} = \{3,4\}$, que és infactible primal ($x_B \ngeq 0$) i factible dual ($r \geq 0$):

$$\mathcal{B} = \{3,4\}, B = B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} -15 \\ -20 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \{1,2\}, r = c_N = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **1a iteració:** $\mathcal{B} = \{3,4\}, \mathcal{N} = \{1,2\}$
  - Selecció de la v.b de sortida p: $x_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} -15 \\ -20 \end{bmatrix} \ngeq$ 0 triarem com a VB de sortida la mateixa que SAS: `Leaving Variable C1 (s)` $\Rightarrow p = 1, B(1) = 3, x_3$ VBsortint
  - (D) il·limitat? : $d'_{r_N} = \beta_1 A_N = [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = [-2 \quad -3] \ngeq 0$
  - VNB d'entrada q:

$\theta_D^* = \min\left\{-r_j / d_{r_{N_j}} : j \in \mathcal{N}, d_{r_{N_j}} < 0\right\} = \min\left\{\frac{3}{2}, \frac{8}{3}\right\} = \frac{3}{2} \Rightarrow q = 1$ (**SAS**: `Entering Variable X[1]`)

- Canvi de base i actualitzacions:
  - Act. variables duals i f.o.:

    $r_N := r_N + \theta_D^* d_{r_N} = \begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\7/2\end{bmatrix}$, $r_{B(p)} = r_3 := \theta_D^* = \frac{3}{2}$

    $\lambda := \lambda - \theta_D^* \beta_p' = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/2\\0\end{bmatrix}$, $z := z - \theta_D^* x_{B(p)} = 0 - \frac{3}{2}(-15) = 22.5$
  - Act. variables primals:

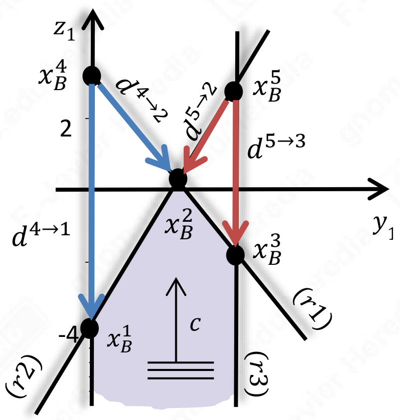
    $d_B = -B^{-1}A_1 = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$, $\theta^* = -\dfrac{x_{B(1)}}{d_{B(1)}} = \dfrac{15}{2}$.

    $x_B := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix}-15\\-20\end{bmatrix} + \frac{15}{2}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\10\end{bmatrix}$, $x_q = x_1 := \theta^* = \frac{15}{2}$
  - $\mathcal{B} \leftarrow \{1,4\}, \mathcal{N} \leftarrow \{2,3\}$

SOLUCIÓ EXERCICI 53. Dualitat i jocs finits de suma zero.

Apartat a)

Observant el políedre primal veiem que hi ha cinc solucions bàsiques[1]:



- Solució x_B^2: és factible (P) (pertany al políedre) i factible (D) (és la solució òptima).
- Solucions x_B^1 i x_B^3: factibles (P) (pertanyen al políedre) i infactibles (D) (no son òptimes).
- Solucions x_B^4 i x_B^5: infactibles (P) (fora del políedre). Per analitzar la seva factibilitat (D) observem que la funció objectiu empitjora (decreix en aquest cas) quan fem un moviment des de qualsevol d'aquestes dues s.b. en direcció a les seves s.b. adjacents: els productes escalars $c'd^{4\to1}$, $c'd^{4\to2}$, $c'd^{5\to2}$ i $c'd^{3\to2}$ son tots negatius ⇒ els costos reduïts ($r_q = c'd^{i\to j}/\theta_q^*$) associats a aquests quatre canvis de base són negatius⇒ factibles (D). Un procediment alternatiu consisteix en representar el políedre dual i comprovar sobre aquest la factibilitat dual de les bases.

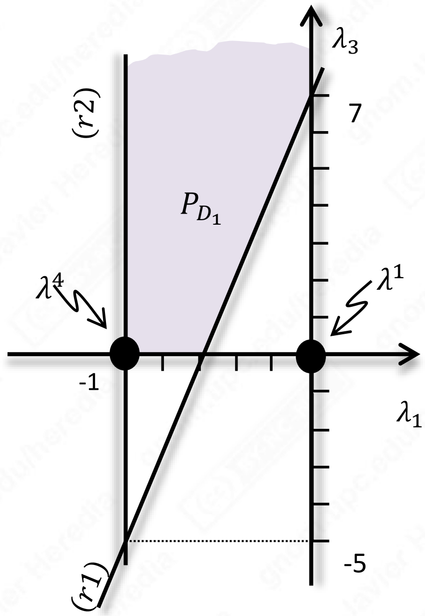
[1] En aquest cas la condició de factibilitat dual canvia de signe: $r \leq 0$.També s'hauria pogut fer tot a partir d'un primal de minimització.

Apartat b)

Formulació del problema dual (D_1) i del seu políedre P_{D_1}:

$$(D_1)\begin{cases} \min\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} \; z_D = & -3\lambda_1+4\lambda_2+\lambda_3 \\ \quad \text{s.a.:} & \\ & -5\lambda_1+7\lambda_2+\lambda_3 \quad \geq 0 \\ & -\lambda_1-\lambda_2 \qquad\quad = 1 \\ & \lambda_1,\lambda_2\leq 0, \lambda_3\geq 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\lambda_2=-1-\lambda_1}\begin{cases} \min\limits_{\lambda_1,\lambda_3} z_D = & -7\lambda_1+\lambda_3-4 \\ \quad \text{s.a.:} & \\ & -12\lambda_1+\lambda_3 \quad \geq 7 \quad (r1) \\ & \lambda_1 \qquad\qquad \geq -1 \quad (r2) \\ & \lambda_1\leq 0, \lambda_3\geq 0 \end{cases}$$



Apartat c)

Passem primer (P_1) a la forma estàndard "modificada" on es maximiza la funció objectiu:

$$(P_1)\begin{cases} \max\limits_{y_1,z_1} & z_1 \\ \text{s.a.:} & \\ & -5y_1+3 \geq z_1 \\ & 7y_1-4 \geq z_1 \\ & y_1 \leq 1 \\ & y_1 \geq 0 \end{cases} ; (P_1)_e \begin{cases} \max\limits_{y_1,z_1^+,z_1^-,w_1,w_2,w_3} & z_1^+-z_1^- \\ \text{s.a.:} & \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1^+ \\ z_1^- \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & y_1, z_1^+, z_1^-, w_1, w_2 w_3 \qquad \geq 0 \end{cases}$$

Tal com hem vist a classe, tota base primal B té associada una base dual B_D on el valors de λ vé donat per la solució del sistema $B'\lambda = c_B$

- Solució bàsica factible (D) x_B^4: en aquest cas triem $z_1 = z_1^+ > 0$, $z_1^- = 0$.

$$x_B^4 = \begin{bmatrix} z_1^+ \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, B^4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, c_B^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B^{4\prime}\lambda^4 = c_B^4, \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1^4 \\ \lambda_2^4 \\ \lambda_3^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\lambda^4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

- Solució bàsica infactible (D) x_B^1: en aquest cas triem $z_1 = -z_1^- < 0$ $(z_1^- > 0)$, $z_1^+ = 0$.

$$x_B^1 = \begin{bmatrix} z_1^- \\ w_1 \\ w_3 \end{bmatrix}, B^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, c_B^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1^1 \\ \lambda_2^1 \\ \lambda_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\lambda^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 54. Dualitat i anàlisi de sensibilitat amb PROC LP.

Apartat a)

Ta fort de dualitat: "Si un problema de programació lineal (P) té solució òptima, el seu dual (D) també en té, i els valors respectius de la funció objectiu coincideixen". A partir de la sortida de SAS tenim:

- Solució primal (`Activity X1, X2`) : $x = [0 \quad 2]'$
- Solució dual (Dual Activity C1, C2): $\lambda = [0 \quad 2]'$
- Valor de la funció objectiu primal i dual:

$$\left.\begin{array}{l} c'x = [1 \quad 2]\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = 4 \\ \lambda'b = [0 \quad 2]\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = 4 \end{array}\right\} \to c'x = \lambda'b = 4$$

efectivament, els valors de la funció objectiu primal i dual coincideixen, satisfent-se el teorema fort de dualitat.

Apartat b)

Una modificació de b_2 només pot fer perdre la factibilitat primal de la base òptima de (P). Així doncs, haurem de calcular l'interval de valors del terme independent b_2 que conserva la factibilitat primal ($x_B \geq 0$) de la base mostrada a la sortida de SAS:

- **Base òptima de (PL)** : $\mathcal{B} = \{2,3\}\,; B = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$
- Conservació de la factibilitat primal:

$$\tilde{x}_B = B^{-1}\phi_b = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ \phi_{b_2}\end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\phi_{b_2} \geq 0\\ 3-\phi_{b_2} \geq 0\end{cases} \Rightarrow \boxed{\phi_{b_2}^{min} = \overbrace{0}^{\substack{\text{Minimum}\\ \text{Phi C2}}} \leq \phi_{b_2} \leq \overbrace{3}^{\substack{\text{Maximum}\\ \text{Phi C2}}} = \phi_{b_2}^{max}}$$

Apartat c)

Forma estàndard:

$$(PL)\begin{cases}\max & x_1 & +2x_2 & & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & \leq & 3\\ & x_1 & +x_2 & \leq & 2\\ & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases} \to (PL)\begin{cases}\min & -x_1 & -2x_2 & & & & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 3\\ & x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 2\\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0\end{cases}$$

Càlculs previs: $b_2 = 4$

- $\mathcal{B} = \{2,3\}, B = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, z = -4$
- $\mathcal{N} = \{1,4\}, r' = [1 \quad 2]$ ($r_1 = -$ (`Reduced Cost X1`) i $r_4 =$ (`Dual Activity C2`))

1a iteració: $\mathcal{B} = \{2,3\}, \mathcal{N} = \{1,4\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p :

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 2, \boxed{B(2) = 3 \text{ VB sortint}}$$

- Identificació de problema (D) il·limitat :

$$d_{r_N}' = \beta_2 A_N = [1 \quad -1]\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} = [1 \quad -1] \ngeq 0$$

- Sel. VNB d'entrada q: $\theta_D^* = \min\left\{-r_j/d_{r_{N_j}} : j \in \mathcal{N}, d_{r_{N_j}} < 0\right\} = {-r_4}/{d_{r_{N_4}}} = 2 \Longrightarrow \boxed{q = 4}$
- Canvi de base i actualitzacions:

- Act. variables duals i f.o.:

$$r_N := r_N + \theta_D^* d_{r_N} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix},\ r_{B(2)} = r_3 := \theta_D^* = 2$$

$$\lambda := \lambda - \theta_D^* \beta_p' = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix},\ z := z - \theta_D^* x_{B(2)} = -4 - 2(4) = -4$$

- Act. variables primals:

$$d_B = -B^{-1}A_4 = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\ \theta^* = -\frac{x_{B(2)}}{d_{B(2)}} = -\frac{-1}{1} = 1$$

$$x_B := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix},\ x_q = x_4 := \theta^* = 1$$

- $\mathcal{B} \leftarrow \{2,4\}, \mathcal{N} \leftarrow \{1,3\},\ x_B = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}, z = -4$

2a iteració: $\mathcal{B} = \{2,4\}, \mathcal{N} = \{1,3\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la VB de sortida p :

$$x_B = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} > 0 \Rightarrow \text{s.b. factible primal i dual : òptim}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 55. Formulació del dual i anàlisi de sensibilitat.

Apartat a)

$$(D)\begin{cases} \max & 5\lambda_1 & +7\lambda_2 & \\ \text{s.a.:} & \lambda_1 & +3\lambda_2 & \leq 4 \\ & 4\lambda_1 & +2\lambda_2 & \leq 5 \\ & \lambda_1, & \lambda_2, & \geq 0 \end{cases}$$

Apartat b)

Una modificació de c_1 només pot fer perdre la factibilitat dual de la base òptima de (P). Així doncs, haurem de calcular l'interval de nous valors del coeficient c_1, ϕ_{c_1}, que conserva la factibilitat dual ($r \geq 0$) de la base:

$$r'(\phi_{c_1}) = c_N' - c_B' B^{-1} A_N = [0] - [\phi_{c_1} \quad 5]\begin{bmatrix}-1/5 & 2/5\\3/10 & -1/10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2} - \frac{\phi_{c_1}}{5} & \frac{2\phi_{c_1}}{5} - \frac{1}{2}\end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{\phi_{c_1}}{5} \geq 0 \longrightarrow \phi_{c_1} \leq \phi_{c_1}^{max} = \frac{15}{2} \\ \frac{2\phi_{c_1}}{5} - \frac{1}{2} \geq 0 \longrightarrow \phi_{c_1} \geq \phi_{c_1}^{min} = \frac{5}{4} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\phi_{c_1} \in \Phi_{c_1} = \left[\frac{5}{4}, \frac{15}{2}\right]}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 56. Prodem S.L.

Apartat a)

Cal comprovar la factibilitat primal i dual de la base:

$$(PL)_e \begin{cases} \min & 10x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & & \\ \text{s.a.:} & & & & & & \\ & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 20 & \mathit{Recurs} \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5 & = 15 & \mathit{Demanda} \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 & \end{cases}$$

- $\mathcal{B} = \{2,3\}, B = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$

- Factibilitat primal: $x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$factible primal
- Factibilitat dual: $\mathcal{N} = \{1,4,5\}$

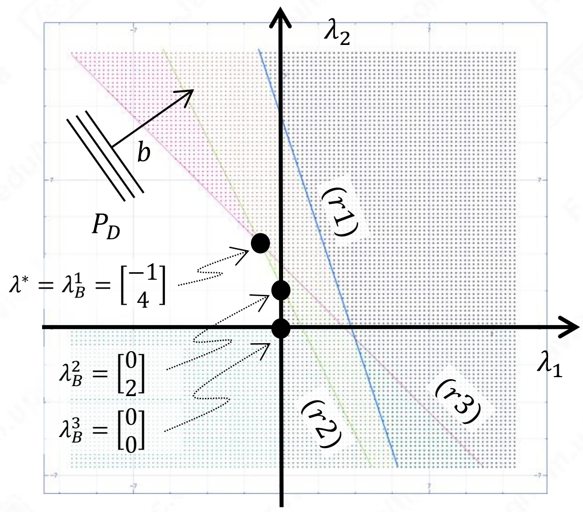
$$r' = c_N' - \lambda' A_N = [10 \quad 0 \quad 0] - \overbrace{[2 \quad 3]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}^{\lambda' = c_B' B^{-1} = [-1 \quad 4]}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [9 \quad 1 \quad 4] \geq 0 \Rightarrow \text{fact dual}$$

- $\mathcal{B} = \{2,3\}$ factible primal i dual $\Rightarrow$òptima.

Apartat b)

El probleme dual és:

$$(D)\begin{cases} \max\limits_{\lambda} z_D = & 20\lambda_1 & +15\lambda_2 & & \\ \text{s.a.:} & 3\lambda_1 & +\lambda_2 & \leq 10 & (r1) \\ & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & \leq 2 & (r2) \\ & \lambda_1 & +\lambda_2 & \leq 3 & (r3) \\ & \lambda_1, & & \leq 0 & \\ & & \lambda_2 & \geq 0 & \end{cases}$$



Gràfica apartat b): (D).

Les solucions bàsiques factibles coincideixen amb els punts extrems $\lambda_B^1, \lambda_B^2, \lambda_B^3$ amb conjunt de variables bàsiques $\mathcal{B}^1 = \{1,2,3\}$, $\mathcal{B}^2 = \{2,3,5\}$ i $\mathcal{B}^3 = \{3,4,5\}$ respectivament.Observem que la SBF òptima trobada gràficament ($\lambda^* = \lambda_B^1$) coincideix amb el valor de les variables duals trobat a l'apartat anterior: $\lambda' = c_B' B^{-1} = [-1 \quad 4]$

Apartat c)

La variable x_1 és VNB: un canvi en el seu coeficient de cost només pot afectar a la factibilitat dual de la base a través del seu cost reduït r_1:

$r_1 = 1/2 - \lambda' A_1 = 1/2 - [-1 \quad 4]\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -1/2 \ngeq 0 \rightarrow$ es perd la factibilitat dual de la base, cal reoptimitzar amb l'algorisme del símplex primal.

- **1a iteració:** $\mathcal{B} = \{2,3\}, x_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}, z = 80, \mathcal{N} = \{1,4,5\}$
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} - [-1 \quad 4]\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$
$$= [-1/2 \quad 2 \quad 4] \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q = 1}$$

  - Id. de problema il·limitat : $d_B = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \ngeq 0$
  - Sel. VB de sortida $B(p)$:

$$\theta^* = \min\{-x_{B(i)}/d_{B(i)} : i = 1,3\} = \min\left\{{}^5/_2, {}^{15}/_1\right\} = {}^5/_2 \Rightarrow \boxed{p = 1, B(1) = 2}$$

– Actualitzacions i canvi de base:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B(2)} \\ x_{B(3)} \end{bmatrix} \leftarrow x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} + \frac{5}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix}, x_1 = \theta^* = \frac{5}{2}, z \leftarrow z + \theta^* r_q$$

$$= 80 + \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{315}{4}$$

$$\mathcal{B} \leftarrow \{1,3\}, \mathcal{N} \leftarrow \{2,4,5\}, \mathrm{B} \leftarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

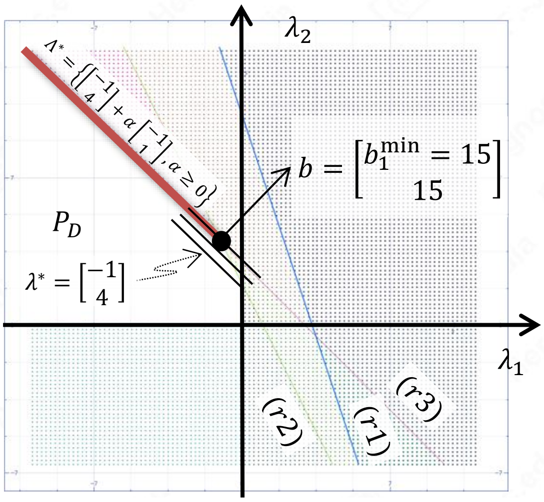
- **2a iteració:** $\mathcal{B} = \{1,3\}, x_B = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix}', \mathcal{N} = \{2,4,5\}$
  – Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [2 \quad 0 \quad 0] - \overbrace{[1/2 \quad 3]\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}}^{\lambda' = \left[-\frac{5}{4} \quad \frac{17}{4}\right]}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [1/4 \quad 5/4 \quad 17/4]$$

$$\geq 0 \rightarrow \boxed{\mathcal{B} = \{1,3\} \text{ SBF òptima}}$$

Apartat d)

Analitzant gràficament el problema dual observem que una disminució del valor de b_1 comporta un canvi en la funció objectiu dual $z_D = b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2$. En particular, si mantenim fixa la demanda $b_2 = 15$, una disminució de b_1 provoca un canvi en la direcció del vector de costos duals b. Aquesta disminució té com a límit el valor $b_1^{\min} = b_2 = 15$, situació en la qual tota l'aresta del políedre dual P_D associada a la constricció dual $(r3)$ seria òptima (Λ^*). Per sota de $b_1^{\min} = 15$ el problema dual esdevé il·limitat, doncs el vector director de $(r3)$, $v = [-1 \quad 1]'$és una direcció d'ascens il·limitada $(b'v = b_2 - b_1 > 0$ si $b_1 < 15)$ i, conseqüentment, el problema primal és infactible.



Gràfica apartat d)

La repercussió econòmica Δz del canvi $\Delta b_1 = b_1^{min} - b_1 = -5$ ens la proporcionen els preus ombra λ^*:

$$\Delta z = \lambda^{*\prime}\Delta b = \lambda^{*\prime}(\Delta b_1 e_1) = \Delta b_1 \lambda_1^* = -5(-1) = 5$$

Així doncs, una disminució de cinc tones en la disponibilitat dels recursos faria augmentar en 5u.m. els costos de producció.

SOLUCIÓ EXERCICI 57. Anàlisi de sensibilitat i transport (1).

Apartat a)

Resolució:

- Passem a la forma estàndard i determinem la base òptima:

$$(P)\begin{cases}\min & c_1x_1 & +c_2x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & +x_3 & & =b_1\\ & & x_2 & & +x_4 & =b_2\\ & x_1 & +x_2 & & & =b_3\\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0\end{cases}$$

$x_1^* = b_1 \Longrightarrow x_3^* = 0$. Prenem $x_4^* = b_2 + b_1 - b_3 \geq 0$ com a tercera bàsica, i comprovem que la base $\mathcal{B} = \{1,2,4\}$ és òptima:

$$B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}, x_B^* = \begin{bmatrix}b_1\\ b_3 - b_1\\ b_2 + b_1 - b_3\end{bmatrix} \geq 0$$

$\lambda' = c_B' B^{-1} = [c_1 - c_2 \quad 0 \quad c_2]$, $r_3 = c_3 - \lambda' A_3 = c_2 - c_1 > 0$

La base no pot ser $\mathcal{B} = \{1,2,3\}$, doncs correspon just a l'estratègia contaria $x_2^* = b_2, x_1^* = b_3 - b_2$ i és infactible dual ($r_4 = c_1 - c_2 < 0$).

- L'impacte econòmic d'un increment de b_1 be donat pel preu ombra de la primera constricció: $\lambda' = c_B' B^{-1} = [c_1 - c_2 \quad 0 \quad c_2]$, $\lambda_1 = c_1 - c_2 < 0 \Rightarrow$ convé augmentar la capacitat.
- Interval d'estabilitat de b_1:

$$x_B^*(\phi_{b_1}) = B^{-1}\phi_b = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{b_1}\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi_{b_1}\\ b_3 - \phi_{b_1}\\ \phi_{b_1}+b_2-b_3\end{bmatrix} \geq [0]$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_{b_1}^{min} = b_3 - b_2 \leq \phi_{b_1} \leq b_3 = \phi_{b_1}^{max}}$$

Així doncs, interessa augmentar la capacitat de la planta 1 fins a cobrir la demanda total b_3, pagant a un preu màxim de $\lambda_1 = c_1 - c_2$ per unitat d'increment de capacitat.

Apartat b)

Resolució:

$$(P)_\alpha\begin{cases}\min & c_1x_1 & +c_1x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & +x_3 & & =b_1\\ & & x_2 & & +x_4 & =b_2\\ & \alpha x_1 & +x_2 & & & =b_3\\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0\end{cases}$$

$$\mathcal{B} = \{1,2,4\}$$

$$B_\alpha = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ \alpha & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$B_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\alpha & 0 & 1\\ \alpha & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Cal comprovar com limiten les condicions de factibilitat primal i dual de la base els valors del paràmetre α.

- Condicions de factibilitat primal: $x_B^*(\alpha) = B_\alpha^{-1} b \geq [0]$

$$x_B^*(\alpha) = B_\alpha^{-1} b = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\alpha & 0 & 1\\ \alpha & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\ b_3 - \alpha b_1\\ \alpha b_1 + b_2 - b_3\end{bmatrix} \geq [0] \Rightarrow \boxed{\frac{b_3 - b_2}{b_1} \leq \alpha \leq \frac{b_3}{b_1}} \quad (1)$$

La fita superior no limita el valor de α, doncs si a la base anterior es verificava que $x_2^* = b_3 - b_1 \geq 0$ amb $\alpha \leq 1$ també es verificarà que $b_3 - \alpha b_1 \geq 0$.

Per la seva banda la fita inferior indica que el paràmetre α ha de ser prou elevat com per garantir que el problema serà factible, és a dir, que la producció útil de la planta 1 (αb_1) és major o igual a la part de la demanda que no es pot subministrar des de la planta 2 ($b_3 - b_2$). Si aquesta condició no es satisfà ($b_3 - b_2 < \alpha b_1$), el problema esdevé infactible.

- Condicions de factibilitat dual: $r(\alpha) \geq [0]$

$$r(\alpha) = r_3(\alpha) = c_3 - [c_1 \quad c_2 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha c_2 - c_1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{\alpha \geq \frac{c_1}{c_2}}$$

La fita inferior de α indica el moment en que les pèrdues de material a la ruta (1,3) son tan elevades que surt més a compte subministrar en primera opció des de la planta 2 que des de la planta 1. A partir d'aquest moment, passem a subministrar la capacitat total de la planta 2 ($x_2 = b_2, x_4 = 0$) i des de la planta 1 només la demanda residual $x_1(\alpha) = (b_3 - b_2)/\alpha\, , x_3(\alpha) = b_1 - (b_3 - b_2)/\alpha$. Noti's que la factibilitat d'aquesta solució queda condicionada per fita inferior de (1).

Conclusions: el valor mínim del factor de pèrdua α que conserven la solució actual (subministrar tota la capacitat des de la planta 1 i la demanda residual $b_3 - \alpha b_1$ des de la planta 2) és:

$$\boxed{\alpha \geq max\left\{\frac{b_3 - b_2}{b_1}, \frac{c_1}{c_2}\right\}}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 58. Logistics: dualitat i anàlisi de sensibilitat.

Apartat a)

La solució actual consistent en transportar només per carretera correspon a la base $\mathcal{B}^* = \{1,3\}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a_1} \\ 1 & -\frac{1}{a_1} \end{bmatrix}$. Interessarà transportar per ferrocarril si el cost reduït de la variable x_2 es fa negatiu:

$$r_2 = c_2 - c_B^T B^{-1} A_2 = c_2 - [c_1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a_1} \\ 1 & -\frac{1}{a_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_2 - [c_1 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ -\frac{1}{a_1} \end{bmatrix} = c_2 - \frac{c_1}{a_1} < 0$$
$$\Longrightarrow \boxed{c_2 < \frac{c_1}{a_1}}$$

Finalment es comprova que la variable x_2 pot entrar a la base: $d_B = -B^{-1}A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_1} < 0 \\ \frac{1}{a_1} > 0 \end{bmatrix}$. Veiem doncs que x_2 entraria a la base substituint x_1.

Apartat b)

Ens trobem al cas $c_2 = \frac{6}{5} < \frac{c_1}{a_1} = \frac{5}{4}$ analitzat a l'apartat anterior, o sigui que sabem que la base òptima serà $\mathcal{B}^* = \{2,3\}$.

$$(P)\begin{cases} \min & x_1 & +\left(\frac{6}{5}\right)x_2 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +x_3 & = 20 \\ & \left(\frac{4}{5}\right)x_1 & +x_2 & & = 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}, \quad (P_I)\begin{cases} \min & x_4 & & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 20 \\ & \left(\frac{4}{5}\right)x_1 & +x_2 & & -x_4 & = 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & & \geq 0 \end{cases}$$

Primera iteració Fase I: $\mathcal{B} = \{3,4\}$, $B = I$, $x_B = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$, $\mathcal{N} = \{1,2\}$

- $r = [0 \quad 0] - [0 \quad 1]I\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix} = [-4/5 \quad -1]$, $q = 2$.

- $d_B = -B^{-1}A_1 = -A_1 = \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} \ngeq [0]$
- $\theta^* = \min\{20,10\} = 10 \Rightarrow p = 2, B(p) = 4$

Segona iteració fase I: $\mathcal{B} = \{2,3\}$, $4 \notin \mathcal{B} \Rightarrow$fí fase I

Primera iteració fase II: $\mathcal{B} = \{2,3\}$, $B = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$, $x_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$, $\mathcal{N} = \{2\}$

- $r = [1] - \begin{bmatrix}\frac{6}{5} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\frac{4}{5}\end{bmatrix} = 1 - \frac{24}{25} = \frac{1}{25} \geq 0 \Rightarrow \mathcal{B} = \{2,3\}$ solució òptima.

Apartat c)

Resolució:

$$(D)\begin{cases}\max & \lambda_1 b_1 & +\lambda_2 b_2 & \\ \text{s.a.:} & \lambda_1 & +a_1\lambda_2 & \leq c_1 \\ & \lambda_1 & +\lambda_2 & \leq c_2 \\ & \lambda_1 \leq 0 & & \end{cases} \rightarrow (D)\begin{cases}\max & 20\lambda_1 & +10\lambda_2 & \\ \text{s.a.:} & \lambda_1 & +(4/5)\lambda_2 & \leq 1 \\ & \lambda_1 & +\lambda_2 & \leq 6/5 \\ & \lambda_1 \leq 0 & & \end{cases}$$

$$\lambda^* = c_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{6}{5} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 6/5\end{bmatrix}$$

- λ^* factible (D): $\begin{cases}A^T\lambda^* \leq c: \begin{bmatrix}1 & 4/5\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\6/5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}24/25\\6/5\end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix}1\\\frac{6}{5}\end{bmatrix} \\ \lambda_1 \leq 0\end{cases} \rightarrow$ factible dual
- λ^*òptim: $c'x^* = \begin{bmatrix}\frac{6}{5} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix} = 12 = \lambda^{*\prime} b = \begin{bmatrix}0 & 6/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\10\end{bmatrix} = 12$

SOLUCIÓ EXERCICI 59. Dualitat i anàlisi de sensibilitat amb OPTMODEL (1).

Apartat a)

$$(\mathrm{D})\begin{cases}\min & 15\lambda_1 & +20\lambda_2 & & \\ \text{s.a.:} & \lambda_1 & +4\lambda_2 & \geq -2 & (r1) \\ & 3\lambda_1 & -\lambda_2 & \geq 1 & (r2) \\ & 5\lambda_1 & & \geq 2 & (r3) \\ & \lambda_1 \geq 0 & & & (r4)\end{cases} \rightarrow$$

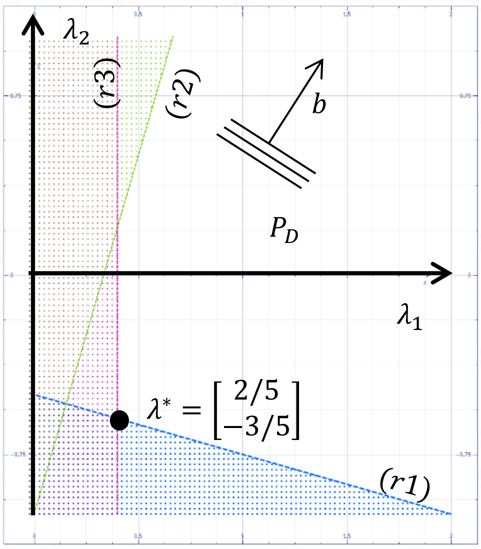


Figura 3: resolució gràfica de (D)

Apartat b)

Expressió de λ^* proporcionada pel corol·lari del Ta fort de dualitat:

$$\lambda^{*\prime} = c_B' B^{-1} = \left| \begin{matrix} \mathcal{B} = \{1,3\}, c_B' = [-2 \quad 2] \\ B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/5 & -1/20 \end{bmatrix} \end{matrix} \right| = [-2 \quad 2] \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/5 & -1/20 \end{bmatrix} = \left[\overbrace{\frac{2}{5}}^{\text{C1.DUAL}} \quad \overbrace{-\frac{3}{5}}^{\text{C2.DUAL}} \right]$$

Apartat c)

x_2 és VNB:

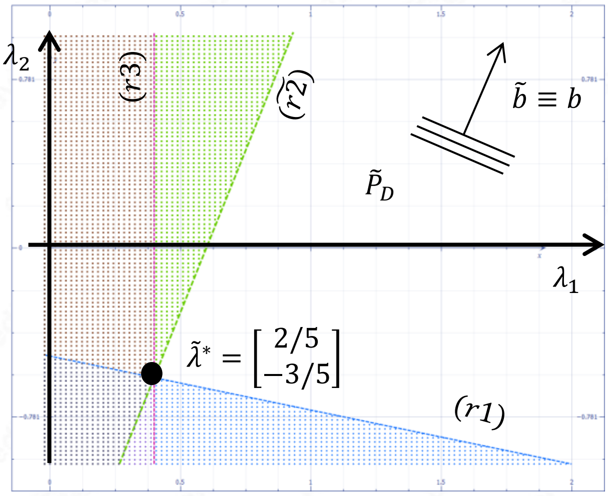
$$r_2(\phi_{c_2}) = (c_2 + \Delta c_2) - \lambda^{*\prime} A_2 = r_2 + \Delta c_2 \overset{\max z_P}{\overbrace{\leq}} 0 \Rightarrow \overbrace{-\frac{4}{5}}^{\text{X.RC(2)=0.8}} + \Delta c_2 \leq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta c_2 \leq \frac{4}{5}} \Rightarrow$$

$$\Phi_{c_2} = c_2 + \Delta c_2 \in \boxed{\Phi_{c_2} = \left[-\infty, \frac{9}{5}\right]}$$

Si $c_2 \leftarrow \phi_{c_2}^{\max} = \frac{9}{5}$ la segona constricció del dual passa a ser

$$3\lambda_1 - \lambda_2 \geq \frac{9}{5}.$$

Si es representa el nou politop dual $\tilde{P}_D$ s'observa gràficament que la solució dual és degenerada. A la gràfica es pot observar com el valor òptim de λ_1 i λ_2 no canvia però la folga dual de $(r2)$ (cost reduït de x_2), que era estrictament positiva sobre l'òptim de (D) s'anul·la sobre l'òptim de $(D)_{\phi_{c_2}}$.



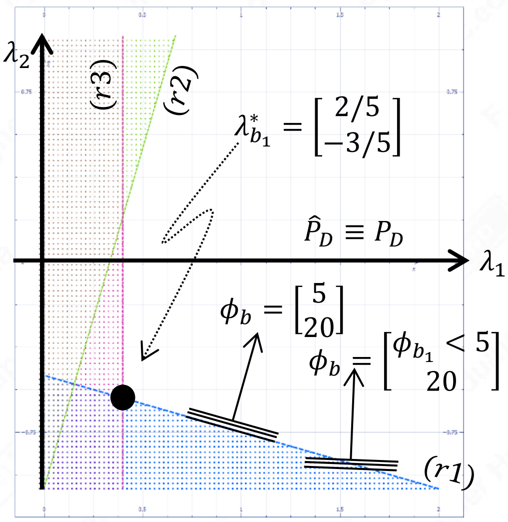
Apartat d)

$$x_B(\phi_{b_1}) = B^{-1} \begin{bmatrix} \phi_{b_1} \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/5 & -1/20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{b_1} \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{\phi_{b_1}}{5} - 1 \end{bmatrix} \overset{\text{cond. fact. (P)}}{\geq} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\phi_{b_1} \geq \phi_{b_1}^{min} = 5}$$

Si $\phi_{b_1} < \phi_{b_1}^{min}$ es perd la factibilitat primal i hem de recuperar l'optimalitat amb el símplex dual. Realitzem la primera iteració a partir de la base que proporciona SAS/OR, $\mathcal{B} = \{1,3\}, \mathcal{N} = \{2,4\}$:

- Identificació de SBF òptima i selecció de la VB de sortida $p : x_3 < 0$ $\boxed{B(2) = 3 \text{ VBsortint}}$
- Identificació de problema dual il·limitat: $d_{r_N} = \beta_2 A_N = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{20} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ problema dual il·limitat $\Rightarrow$ primal infactible.

Des del punt de vista del problema dual, un canvi $\phi_{b_1} < 5$ implica una modificació dels costos. Quan $\phi_{b_1} = 5$ el problema dual té òptims alternatius. Si $\phi_{b_1} < 5$ el problema dual esdevé il·limitat.

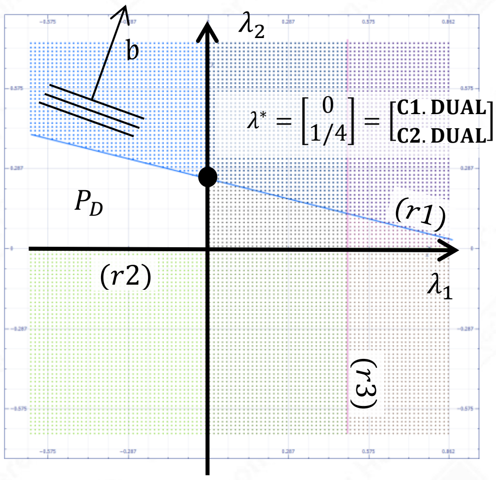


SOLUCIÓ EXERCICI 60. Dualitat i anàlisi de sensibilitat amb OPTMODEL (2).

Apartat a)

Problema dual:

$$(D)\begin{cases} \max & 4\lambda_1 & +10\lambda_2 & & \\ \text{s.a.:} & \lambda_1 & +4\lambda_2 & \leq 1 & (r1) \\ & & -5\lambda_2 & \leq 0 & (r2) \\ & 2\lambda_1 & & \leq 1 & (r3) \\ & \lambda_1 \leq 0 & & & (r4) \end{cases}$$



Preus ombra de (P):

$$\lambda^{*\prime} = c_B' B^{-1} = \left| \begin{matrix} \mathcal{B} = \{4,1\}, c_B' = [0 \quad 1] \\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \end{matrix} \right|$$

$$= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} = \left[\overbrace{0}^{\text{C1.DUAL}} \quad \overbrace{\frac{1}{4}}^{\text{C2.DUAL}} \right]$$

Apartat b)

Interval d'estabilitat de b_1:

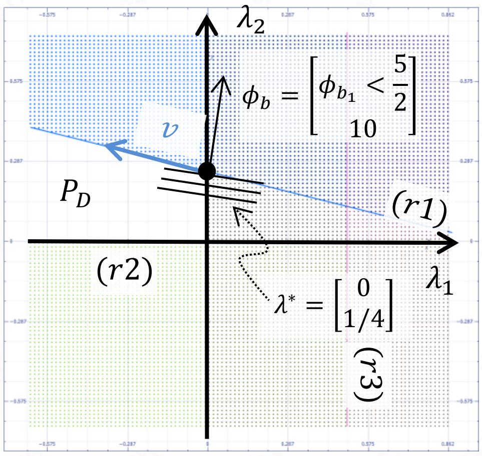
$$x_B(\phi_{b_1}) = \begin{bmatrix} x_4(\phi_{b_1}) \\ x_1(\phi_{b_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{b_1} \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{b_1} - 5/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} \overset{\text{cond. fact. (P)}}{\geq} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\phi_{b_1} \geq \phi_{b_1}^{min} = 5/2}$$

Si $\phi_{b_1} < \phi_{b_1}^{min} = 5/2$ es perd la factibilitat primal i hem de recuperar l'optimalitat amb el símplex dual. Relitzem la primera iteració a partir de la base òptima $\mathcal{B} = \{4,1\}$, $\mathcal{N} = \{2,3\}$:

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_{B(1)} < 0 \rightarrow B(1) = 4$ VB sortint.
- Identificació de problema dual il·limitat:

$$d_{r_N} = \beta_1 A_N = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} =$$

$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 2 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ problema dual il·limitat $\Rightarrow$ **primal infactible, el problema no té solució**.



Es pot arribar a la mateixa conclusió analitzant el problema dual. Des del punt de vista del problema dual, un canvi $\phi_{b_1} < 5/2$ implica una modificació dels costos. El problema dual per a un valor genèric ϕ_b és:

$$(D(\tilde{b}_1))\begin{cases}\max & \phi_{b_1}\lambda_1 & +10\lambda_2 & & \\ \text{s.a.:} & \lambda_1 & +4\lambda_2 & \le 1 & (r1)\\ & & -5\lambda_2 & \le 0 & (r2)\\ & 2\lambda_1 & & \le 1 & (r3)\\ & \lambda_1 \le 0 & & & (r4)\end{cases}$$

Si el representem gràficament podem observar que quan $\phi_{b_1} = 5/2$ el problema dual té òptims alternatius, doncs és perpendicular a la recta $(r1)$. Si $\phi_{b_1} < 5/2$ el problema dual esdevé il·limitat (el vector director $v = [-4 \quad 1]$' és una direcció d'ascens il·limitada, doncs $\phi_b' v = -4\phi_{b_1} + 10 > 0$) i el primal infactible.

SOLUCIÓ EXERCICI 61. (**PL1**): **anàlisi de sensibilitat**

- $(\text{PL1})\begin{cases}\min & z = & x_1 & +x_2 & \\ \text{s. a.}: & & 2x_1 & +x_2 & \le 8\\ & & & x_2 & \le 6\\ & & x_1, & x_2 & \ge 0\end{cases}$
- $c_1 \leftarrow \phi_{c_1} = c_1 + \Delta c_1, i \in \mathcal{N}, \Phi_{c_1} = [c_1 - r_1, +\infty[= [0, +\infty[$
- Si $\phi_{c_1} = \phi_{c_1}^{min}$ la base òptima esdevé degenerada dual (òptims alternatius): la solució òptima del problema passaria a ser l'aresta de poliedre $\mathcal{X}^* = \left\{x \in \mathbb{R}^2 | x = \alpha \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + (1-\alpha)\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}\right\}$.
- Si $\phi_{c_1} < \phi_{c_1}^{\min}$ la nova SBF òptima passaria a ser $\mathcal{B}^* := \{1,4\}$ que correspon al vèrtex $x = \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$.

SOLUCIÓ EXERCICI 62. (**PL2**): **anàlisi de sensibilitat**.

- $(\text{PL2})\begin{cases}\max & z = & x_1 & +2x_2 & \\ \text{s. a.}: & & 2x_1 & +x_2 & \le 3\\ & & x_1 & +x_2 & \le 2\\ & & x_1, & x_2 & \ge 0\end{cases}$
- $\mathcal{B}^* = \{3,2\}, B = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}, \gamma_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, b_1 \leftarrow \phi_{b_1} = b_1 + \Delta b_1$
- $\left.\begin{array}{l}\phi_{b_1}^{min} = \max\limits_{k=1,\dots,2}\left\{b_1 - \frac{x_{B(k)}}{\gamma_{k1}} : \gamma_{k1} > 0\right\} = \max\left\{3 - \frac{1}{1}\right\} = 2\\ \phi_{b_1}^{max} = \min\limits_{k=1,\dots,2}\left\{b_1 - \frac{x_{B(k)}}{\gamma_{k1}} : \gamma_{k1} < 0\right\} = "+\infty"\end{array}\right\} \boxed{\Phi_{b_1} = [2, +\infty[}$
- Si $\phi_{b_1} = \phi_{b_1}^{min} = 2$ la base actual seria una SBF degenerada primal on el punt extrem òptim $x = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ estaria associat a les solucions bàsiques $\mathcal{B}^* = \{2,3\}$, $\mathcal{B}^* = \{2,4\}$ i $\mathcal{B}^* = \{2,1\}$.
- Si $\phi_{b_1} < \phi_{b_1}^{min} = 2$, la nova SBF òptima serà l'associada a les variables bàsiques $\mathcal{B}^* = \{2,4\}$ amb $x_B = \begin{bmatrix}\phi_{b_1}\\ 2-\phi_{b_1}\end{bmatrix}$. Aquesta base serà òptima ($\equiv$ mantindrà la seva factibilitat primal) mentre $\phi_{b_1} \ge 0$. Quan $\phi_{b_1} = 0$, el problema passa a tenir un únic punt factible que, òbviament, és la solució òptima (degenerada, amb tres SBF associades). Si ϕ_{b_1} es fa negatiu, òbviament el problema esdevé infactible.

SOLUCIÓ EXERCICI 63. (PL3) : anàlisi de sensibilitat.

(ENUNCIAT)

- $(PL3)\begin{cases}\max & z = & -5x_1 & +3x_2 & -x_3 & \\ \text{s. a.}: & & x_1 & -x_2 & +3x_3 & \leq 6 \\ & & 5x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = 15 \\ & & x_1 \geq 0 & x_2 \leq 0 & x_3 \geq 0 & \end{cases}$
- $\mathcal{B}^* = \{1,3\}, B = \begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 3\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{12}\end{bmatrix}$
- $\mathcal{N}^* = \{2,4\}, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{12}\end{bmatrix}\begin{matrix}\to v_1\\ \to v_2\end{matrix}, r' = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}$
- $\begin{Bmatrix}\phi_{c_1}^{min} = \max_{j\in\mathcal{N}^*}\left\{c_i + \frac{r_j}{v_{1j}} : v_{1j} < 0\right\}\\ \phi_{c_1}^{max} = \min_{j\in\mathcal{N}^*}\left\{c_i + \frac{r_j}{v_{1j}} : v_{1j} > 0\right\}\end{Bmatrix}$ $\boxed{\Phi_{c_1} = \left[-5 + \frac{\frac{5}{6}}{-\frac{1}{4}}, -5 + \frac{1/3}{1/2}\right] = \left[-\frac{25}{3}, \frac{-13}{3}\right]}$

SOLUCIÓ EXERCICI 64. (PL4): anàlisi de sensibilitat

- $(\text{PL4})\begin{cases}\max & z = & \frac{1}{2}x_1 & -x_2 & \\ \text{s. a.}: & & x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & & 2x_1 & -x_2 & \leq 10 \\ & & \frac{2}{3}x_1 & +x_2 & \geq -2 \\ & & x_1 \geq 0, & x_2 \leq 0 & \end{cases}$
- $b_2 \leftarrow \phi_{b_2} = b_2 + \Delta b_2, \mathcal{B}^* = \{1,2,3\}, B = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 2/3 & -1 & 0\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8}\\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\\ 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{9}{8}\end{bmatrix}, \gamma_2 =$
$\begin{bmatrix}\frac{3}{8}\\ \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{8}\end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$
- $\begin{Bmatrix}\phi_{b_2}^{min} = \max_{k=1,\dots,3}\left\{b_2 - \frac{x_{B(k)}}{\gamma_{k2}} : \gamma_{k2} > 0\right\} = 10 + \max\left\{-\frac{3}{3/8}, -\frac{4}{1/8}\right\} = 2\\ \phi_{b_2}^{max} = \min_{k=1,\dots,2}\left\{b_2 - \frac{x_{B(k)}}{\gamma_{k2}} : \gamma_{k2} < 0\right\} = 10 - \frac{3}{-1/8} = 34\end{Bmatrix}$ $\boxed{\Phi_{b_2} = [10, 34]}$
- Si $\phi_{b_2} = \phi_{b_2}^{min}$ la solución òptima és degenerada.

SOLUCIÓ EXERCICI 65. (PL6) : anàlisi de sensibilitat.

- $(\text{PL6})\begin{cases}\max & z = & 7x_1 & +4x_2 & \\ \text{s. a.}: & & 2x_1 & +x_2 & \leq 8 \\ & & x_1 & +x_2 & \leq 6 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0\end{cases}$
- $c_1 \leftarrow \phi_{c_1} = c_1 + \Delta c_1, \mathcal{B}^* = \{1,2\}, B = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$

- $\mathcal{N}^* = \{3,4\}, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} \to v_1 \\ \to v_2 \end{matrix}, r' = [3 \quad 1]$
- $\left\{ \begin{matrix} \phi_{c_1}^{min} = \max_{j\in\mathcal{N}^*}\left\{ c_1 + \frac{r_j}{v_{1j}} : v_{1j} < 0 \right\} \\ \phi_{c_1}^{max} = \min_{j\in\mathcal{N}^*}\left\{ c_1 + \frac{r_j}{v_{1j}} : v_{1j} > 0 \right\} \end{matrix} \right\} \boxed{\Phi_{c_1} = \left[7 + \frac{1}{-1}, 7 + \frac{3}{1}\right] = [6, 10]}$

SOLUCIÓ EXERCICI 66. Propietats de (PL) i base parametritzada.

Tenim (P) en forma estàndard i la seva solució bàsica $\mathcal{B} = \{1,2,3\}, \mathcal{N} = \{4,5,6,7\}$ amb:

$$x_B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, r' = [\beta \quad 3 \quad \gamma \quad \delta], \qquad D_B = -B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} \eta & -1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Apartat a)

Per tal que el problema (P) tingui solució òptima única no degenerada cal que la base $\mathcal{B}$ sigui factible primal i dual, totes dues no degenerades:

i. $\mathcal{B}$ factible primal no degenerada: $x_B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} > 0 \Rightarrow \alpha > 0$.
ii. $\mathcal{B}$ factible dual no degenerada: $r' = [\beta \quad 3 \quad \gamma \quad \delta] > 0 \Rightarrow \beta, \gamma, \delta > 0$.

Així doncs podem afirmar que $\boxed{\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \Rightarrow (P) \text{ té solució òptima única no degenerada}}$.

Apartat b)

A partir de la informació que ens donen només podrem assegurar que (P) serà il·limitat si (i) $\mathcal{B}$ és factible primal i (ii) té alguna direcció bàsica de descens $d_B = -B^{-1}A_q$ no afitada:

i. $\mathcal{B}$ és factible primal: $x_B \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq 0$
ii. Hi ha alguna direcció bàsica de descens: l'única variable no bàsica que pot tenir associada una direcció d'aquest tipus és x_4 (l'associada a x_5 no és de descens i les associades a x_6 i x_7 no són il·limitades). Per tal que x_4 tingui una associada una direcció d_B de descens cal que $r_4 = \beta < 0$ i per tal que aquesta sigui no afitada cal que $d_B = D_{B_1} = \begin{bmatrix} \eta \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \eta \geq 0$

Així doncs podem afirmar que $\boxed{\alpha \geq 0, \beta < 0, \eta \geq 0 \Rightarrow (P) \text{ il·limitat}}$. Fixem-nos que no cal assegurar que x_4 entraria a la base en aquesta iteració, per exemple, fent que $\gamma, \delta \geq 0$ o que $\beta = \min\{\beta, \gamma, \delta\}$. Independentment de si x_4 entra o no, la direcció associada a $x_4$seria bàsica de descens no afitada.

Apartat c)

La teoria de dualitat ens permet assegurar que si el dual és il·limitat el primal serà infactible. El dual serà il·limitat si $\mathcal{B}$ és (i) factible dual i infactible primal i (ii) existeix alguna direcció bàsica dual de descens no afitada:

i. $\mathcal{B}$ és factible dual i infactible primal : $r' \geq 0 \Rightarrow \beta, \gamma, \delta \geq 0, x_B \ngeq 0 \Rightarrow \alpha < 0$
ii. Alguna de les direccions bàsiques dual de descens, associades a les variables bàsiques que poden sortir de la base ($x_{B_p} < 0$), són no afitades ($d_{r_N} = \left(\beta_p A_N\right)' \geq 0$). En el nostre cas això implica que $d'_{r_N} = \beta_1 A_N = [-\eta \quad 1 \quad 0 \quad 3] \geq 0 \Rightarrow \eta \leq 0$

Així doncs podem concloure que $\boxed{\alpha < 0, \beta, \gamma, \delta, \eta \leq 0 \Rightarrow (P) \text{ infactible}}$. Cal mencionar que l'altre situació que, d'acord amb la teoria de dualitat, (P) pot ser infactible és quan tant (P) com (D) ho són. Aquesta situació no es pot obtenir imposant condicions sobre els paràmetres, doncs si bé és cert que podríem trobar un conjunt de valors de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ que fes que $\mathcal{B}$ fos infactible primal i dual, això no asseguraria que no pogués existir un altre base $\tilde{\mathcal{B}}$ que fos factible primal.

SOLUCIÓ EXERCICI 67. Dualitat i anàlisi de sensibilitat (1).

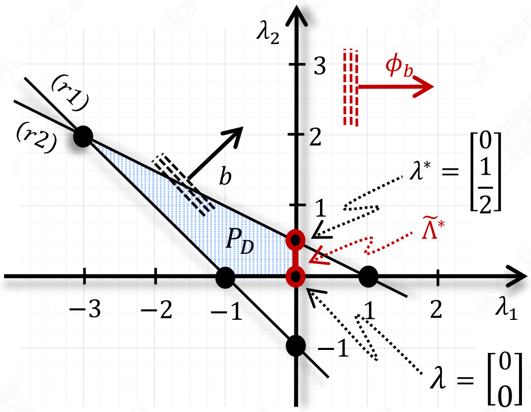
Apartat a)

S'observa que el problema primal és il·limitat. Llavors, pel corol·lari *i* del teorema feble de dualitat el dual serà infactible.

Apartat b)

Problema dual corresponent a $c = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ i representació gràfica:

$$(D)\begin{cases}\max & 2\lambda_1 & +2\lambda_2 & & \\ \text{s.a.:} & -\lambda_1 & -\lambda_2 & \leq 1 & (r1) \\ & \lambda_1 & +2x_2 & \leq 1 & (r2) \\ & \lambda_1 \leq 0 & \lambda_2 \geq 0 & & \end{cases}$$



$$\tilde{\Lambda}^* = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^2 \middle| \lambda = \begin{bmatrix}0\\ \lambda_2\end{bmatrix}, \lambda_2 \leq \frac{1}{2}\right\}$$

Apartat c)

Gràficament s'obté $\lambda^* = \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$. D'acord amb el corol·lari del Teorema fort de dualitat $\lambda^{*\prime} = c_B' B^{-1}$, on c_B' and B^{-1} corresponen a la base òptima primal $\mathcal{B}^5 = \{2,3\}$:

$$\lambda^{*\prime} = c_B' B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1/2\\ 1 & -1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Apartat d)

Símplex dual a partir de $\mathcal{B} = \{3,4\}$:

$$(\text{P})\begin{cases}\min & x_1 & +x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2 \\ & -x_1 & +2x_2 & & -x_4 & = 2 \\ & x_1, & x_2 & x_3, & x_4 & \geq 0\end{cases}$$

$$\mathcal{B} = \{3,4\}, B = B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}, \mathcal{N} = \{1,2\}, r = c_N = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, z = 0$$

- **1a iteració:** $\mathcal{B} = \{3,4\}, \mathcal{N} = \{1,2\}$
  - Selecció de la VB de sortida p: $x_B = \begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 2, B(2) = 4, x_4$ VB sortint.

– (D) il·limitat? : $d'_{r_N} = \beta_2 A_N = [0 \quad -1]\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix} = [1 \quad -2] \ngeq 0$

– VNB d'entrada: $\theta_D^* = \min_{j\in\mathcal{N}, d_{r_{N_j}}<0}\left\{\frac{-r_j}{d_{r_{N_j}}}\right\} = -\frac{r_2}{d_{r_{N_2}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow q = 2$

– Canvi de base i actualitzacions:

- Act. variables duals i f.o.:

$$r_N := r_N + \theta_D^* d_{r_N} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\0\end{bmatrix},\ r_{B(p)} = r_4 := \theta_D^* = \frac{1}{2}$$

$$\lambda := \lambda - \theta_D^* \beta'_p = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}, z := z - \theta_D^* x_{B(p)} = 0 - \frac{1}{2}(-2) = 1$$

- Act. variables primals:

$$d_B = -B^{-1}A_2 = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix},\ \theta^* = -\frac{x_{B(2)}}{d_{B(2)}} = -\frac{-2}{2} = 1.$$

$$x_B := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, x_q = x_2 := \theta^* = 1$$

- $\mathcal{B} \leftarrow \{3,2\}, \mathcal{N} \leftarrow \{1,4\}$

- **2a iteració:** $\mathcal{B} = \{3,2\}, \mathcal{N} = \{1,4\}$
  - $x_B = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ òptim.

Apartat e)

Condicions de conservació de la factibilitat primal:

$$x_B(\phi_{b_2}) = B^{-1}\begin{bmatrix}2\\\phi_{b_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\\phi_{b_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\\phi_{b_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 - \frac{\phi_{b_2}}{2}\\\frac{\phi_{b_2}}{2}\end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\phi_{b_2} \leq \phi_{b_2}^{max} = 4\\ \phi_{b_2} \geq \phi_{b_2}^{min} = 0\end{cases} \Rightarrow \boxed{\Phi_{b_2} = [0\,,4]}$$

Si fem $\phi_{b_2} := \phi_{b_2}^{min} = 0$ el problema dual té òptims alternatius, i la solució òptima dual ve definida pel conjunt $\tilde{\Lambda}^* = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^2 \middle| \lambda = \begin{bmatrix}0\\\lambda_2\end{bmatrix}, \lambda_2 \leq \frac{1}{2}\right\}$ (veure gràfica apartat b)).

SOLUCIÓ EXERCICI 68. Anàlisi problema parametritzat.

Apartat a)

Criteri: Serà solució bàsica $\mathcal{B}$ qualsevol conjunt de $m = 2$ índexos de variables tals que la matriu bàsica associada sigui no singular.

Bases: Analitzant la matriu de coeficients $A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ comprovem que totes les possibles combinacions de dues columnes de A tenen determinant diferent de zero. Així doncs, totes les combinacions $\mathcal{B} = \{i,j\}, i = 1,2,\ldots,4, i < j \leq 4$ seran solucions bàsiques.

Apartat b)

El rang de valors compatible amb l'optimalitat de la base $\mathcal{B} = \{2,4\}$ es aquell que satisfà les condicions d'optimalitat:

Rang b_2: un canvi en b_2 només pot fer perdre la factibilitat primal: $x_B(\phi_b) = B^{-1}\phi_b \geq 0 \rightarrow$
$\begin{bmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\\phi_{b_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1 + \frac{\phi_{b_2}}{2}\end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{\phi_{b_2} \geq -2}$

Rang c_2: un canvi en c només pot fer perdre la factibilitat dual: $r_N'(\phi_{c_2}) = c_N' - c_B'(\phi_{c_2})B^{-1}A_N \geq 0 \to [3 \quad 2] - [\phi_{c_2} \quad 4]\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = [-2\phi_{c_2} - 1 \quad -\phi_{c_2} - 2] \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{\phi_{c_2} \leq -2}$

Apartat c)

Si $c_2 = -3$ i $b_2 = -3$, en base al resultat de l'apartat anterior podem assegurar que $\mathcal{B} = \{2,4\}$ és factible dual infactible primal: s'ha de reoptimitzar aplicant l'algorisme del símplex dual:

- **Símplex dual, 1a iteració:** $\mathcal{B} = \{2,4\}\,, \mathcal{N} = \{1,3\}$
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p :

$$x_B = \begin{bmatrix}2\\ 1 + \frac{1}{2}(-3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 2, \boxed{B(2) = 3 \text{ VBsortint}}$$

  - Identificació de problema (D) il·limitat :

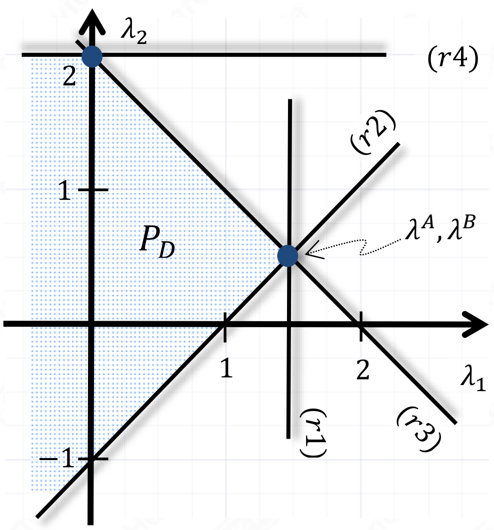
$$d_{r_N}' = \beta_2 A_N = [1/2 \quad 1/2]\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = [1 \quad 1] \geq 0 \Rightarrow (D) \text{ il·limitat, } (P) \text{ infactible. STOP.}$$

Apartat d)

Formulació:

$$(\mathrm{D})\begin{cases}\begin{array}{llll}\max & 2\lambda_1 & & \\ \text{s.a.:} & & & \\ & 2\lambda_1 & \leq 3 & (r1)\\ & \lambda_1 - \lambda_2 & \leq 1 & (r2)\\ & \lambda_1 + \lambda_2 & \leq 2 & (r3)\\ & 2\lambda_2 & \leq 4 & (r4)\end{array}\end{cases}$$

Representació gràfica:



Apartat e)

Cal primer trobar dues SBF de (P). Provem las dues primeres s.b.:

- $\mathcal{B}^A = \{1,2\}$: $Bx_B = b, \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ s.b. factible. El valor de les variables duals associat a aquesta base és $\lambda^{A'} = c_B' B^{-1} = [3 \quad 1]\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 0 & -1\end{bmatrix} = [3/2 \quad 1/2]$ factible dual (correspon al vèrtex λ^A de la gràfica anterior).
- $\mathcal{B}^B = \{1,3\}$: $Bx_B = b, \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow x_B = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ s.b. factible. El valor de les variables duals associat a aquesta base és $\lambda^{B'} = c_B' B^{-1} = [3 \quad 2]\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = [3/2 \quad 1/2]$ factible dual (correspon al mateix vèrtex λ^A de la base anterior).

SOLUCIÓ EXERCICI 69. Símplex dues fases, anàlisi de sensibilitat i reoptimització.

Apartat a)

Forma estàndard (PL_e) i problema de fase I (PL_I):

$$(PL_e)\begin{cases} \min & x_1 & & +x_3 & & \\ \text{s.a.}: & x_1 & & +2x_3 & +x_4 & =4 \\ & 4x_1 & -5x_2 & & & =10 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

$$(PL_I)\begin{cases} \min & x_5 & & & & & \\ \text{s.a.}: & x_1 & & +2x_3 & +x_4 & & =4 \\ & 4x_1 & -5x_2 & & & +x_5 & =10 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

1a iteració fase I:

- $B = \{4,5\}, B = I, x_B = [4 \quad 10]', N = \{1,2,3\}, z_I = 10$
- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :
- $r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0] - [0 \quad 1] I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} = [-4 \quad 5 \quad 0] \ngeq 0 \rightarrow \boxed{q=1}$
- Direcció bàsica de descens : $d_B = -B^{-1}A_1 = -I\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} \ngeq 0$
- Sel. VB de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i \in \mathcal{B} | d_{B(i)} < 0} \{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\} = \min\left\{\frac{4}{1}, \frac{10}{4}\right\} = \frac{5}{2} \Longrightarrow$ $\boxed{p = 2, B(2) = 5}$
- Actualitzacions i canvi de base :
  - $x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} + \frac{5}{2} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 = \theta^* = \frac{5}{2}, x_2 = x_3 = 0,\ z := z + \theta^* r_q = 10 + \frac{5}{2} \times (-4) = 0$
  - $\mathcal{B} := \{4,1\},\ \mathcal{N} := \{2,3,5\}$. Hem eliminat totes les variables artificials de la base: $\Rightarrow \mathcal{B} := \{4,1\}$ és una SBF inicial del problema (PL_e).

1a iteració fase II:

- $\mathcal{B} = \{4,1\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}, x_B = [3/2 \quad 5/2]',\ \mathcal{N} = \{2,3\}, z = 5/2$
- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 1] - [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = [5/4 \quad 1] \geq 0 \rightarrow \boxed{\grave{o}ptim}$$

Apartat b)

Interval d'estabilitat de b_1:

$$x_B(\phi_{b_1}) = \begin{bmatrix} x_4(\phi_{b_1}) \\ x_1(\phi_{b_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{b_1} \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{b_1} - 5/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} \overset{\text{cond. fact.(P)}}{\geqq} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\phi_{b_1} \geq \phi_{b_1}^{min} = 5/2}$$

Apartat c)

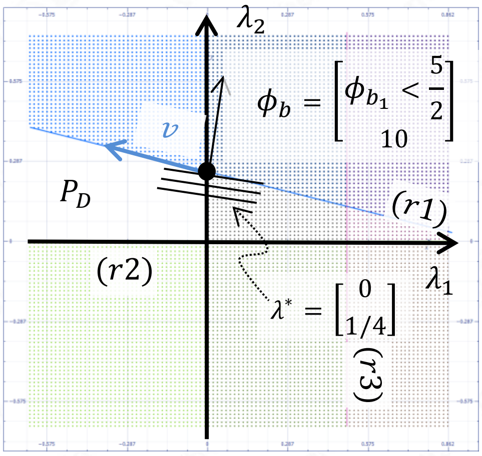
Si $\phi_{b_1} < \phi_{b_1}^{min} = 5/2$ es perd la factibilitat primal i hem de recuperar l'optimalitat amb el símplex dual. Realitzem la primera iteració a partir de la base òptima $\mathcal{B} = \{4,1\}, \mathcal{N} = \{2,3\}$:

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida $p : x_{B(1)} < 0 \rightarrow B(1) = 4$ VB sortint.
- Identificació de problema dual il·limitat: $v = \beta_1 A_N = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 2 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ problema dual il·limitat $\Rightarrow$ **primal infactible, el problema no té solució**.

Apartat d)

Es pot arribar a la mateixa conclusió analitzant el problema dual. Des del punt de vista del problema dual, un canvi $\phi_{b_1} < 5/2$ implica una modificació dels costos. El problema dual per a un valor genèric ϕ_{b_1} és:

$$(D)_{\phi_{b_1}} \begin{cases} \max & \phi_{b_1}\lambda_1 & +10\lambda_2 & & \\ \text{s.a.:} & \lambda_1 & +4\lambda_2 & \leq 1 & (r1) \\ & & -5\lambda_2 & \leq 0 & (r2) \\ & 2\lambda_1 & & \leq 1 & (r3) \\ & \lambda_1 \leq 0 & & & (r4) \end{cases}$$



Si el representem gràficament podem observar que quan $\phi_{b_1} = 5/2$ el problema dual té òptims alternatius, doncs és perpendicular a la recta $(r1)$. Si $\phi_{b_1} < 5/2$ el problema dual esdevé il·limitat (el vector director $v = [-4 \quad 1]'$ és una direcció d'ascens il·limitada, doncs $\phi_b' v = -4\phi_{b_1} + 10 > 0$) i el primal infactible.

SOLUCIÓ EXERCICI 70. Anàlisi de sensibilitat i transport (2).

Apartat a)

$$\lambda^{*\prime} = c_B' B^{-1} = [1 \quad 2 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [-1 \quad 0 \quad 2]$$

Apartat b)

$$(D) \begin{cases} \max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}^3} z_D = & 5\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 & \\ s.t.: & \lambda_1 + \lambda_3 & \leq 1 \\ & \lambda_2 + \lambda_3 & \leq 2 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \leq 0, \lambda_3 \geq 0 & \end{cases} \xrightarrow[u_4, u_5 \text{ folgues}]{u_1 := -\lambda_1,\ u_2 := -\lambda_2,\ u_3 := \lambda_3} (D_e) \begin{cases} \min\limits_{u \in \mathbb{R}^5} z_D = & 5u_1 + 4u_2 - 8u_3 & \\ s.t.: & -u_1 + u_3 + u_4 & = 1 \\ & -u_2 + u_3 + u_5 & = 2 \\ & u \geq 0 & \end{cases}$$

Apartat c)

- $\lambda^* = [-1 \quad 0 \quad 2]' \Rightarrow u^* = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0] \rightarrow \mathcal{B}^{D*} = \{1,3\}, B^D = B^{D^{-1}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $r_N^D = c_N^{D\prime} - c_B^{D\prime} [B^D]^{-1} A_N^D = [4 \quad 0 \quad 0] - [5 \quad -8] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 5 \quad 3] \geq 0 \blacksquare$

Apartat d)

$$r_N(\phi_{c_2}) = c_N' - c_B'(\phi_{c_2}) B^{-1} A_N = [3 \quad 5] - [1 \quad \phi_{c_2} \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= [\phi_{c_2} + 2 \quad \phi_{c_2} + 5] \overset{Cond.\ fact.(D)}{\geq} [0 \quad 0] \Leftrightarrow \phi_{c_2} \geq -2 \Rightarrow \boxed{\Phi_{c_2} = [-2, +\infty[}$$

Apartat e)

El terme b_3 podrà augmentar mentre el valor de les variables bàsiques $x_B(\phi_{b_3})$ sigui no negatiu:

$$x_B(\phi_{b_3}) = B^{-1}\begin{bmatrix}5\\4\\\phi_{b_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1\\1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\\\phi_{b_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\\phi_{b_3}-5\\9-\phi_{b_3}\end{bmatrix} \overset{\substack{Cond.\\fact.(P)}}{\geqq} \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\phi_{b_3}^{min} = 5 \le \phi_{b_3} \le \boxed{\phi_{b_3}^{max} = 9}$$

Apartat f)

Si $\phi_{b_3} > \phi_{b_3}^{max}$ es perd la factibilitat primal ($x_{B(3)} = x_4 < 0$) i hem de recuperar l'optimalitat amb el símplex dual. Relitzaem la primera iteració a partir de la base $\mathcal{B} = \{1,2,4\}, \mathcal{N} = \{3,5\}$**:**

- Identificació de SBF òptima i selecció de la VB de sortida p: $x_{B(3)} = x_4 < 0 \rightarrow$ $\boxed{B(3) = 4 \text{ VBsortint}}$
- Identificació de problema dual il·limitat: $d_{r_N} = \beta_3 A_{\mathrm{N}} = [1 \quad 1 \quad -1]\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \ge 0 \Rightarrow$ problema dual il·limitat $\Rightarrow$ primal infactible, (P) no té solució.

Apartat g)

Un canvi en el signe d'una desigualtat afecta al coeficient de la variable auxiliar (folga o escreix) de la forma estàndard. En el nostre cas la columna $a_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ passa a ser $\tilde{a}_3 = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$. Com que x_3 és variable no bàsica, aquest canvi només pot afectar a la factibilitat dual, en concret, al valor del cost reduït d'aquesta mateixa variable r_3:

$$\tilde{r}_3 = c_3 - \lambda^{*\prime}\tilde{a}_3 = 0 - [-1 \quad 0 \quad 2]\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix} = -1$$

Com que $\tilde{r}_3 < 0$ la base $\mathcal{B} = \{1,2,4\}$ deixa de ser òptima per pèrdua de factibilitat dual, i caldria iterar amb l'algorisme del símplex primal.

SOLUCIÓ EXERCICI 71. Dual en forma estàndard i anàlisi de sensibilitat.

Apartat a)

Problema dual en **forma estàndard** $(D)_e$:

$$(D)\begin{cases}\max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^2} z_D = & \lambda_1 + 3\lambda_2 & \\ s.t.: & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 & \le -1\\ & -2\lambda_2 + 2\lambda_2 & \le 2\\ & \lambda_1 \le 0, \lambda_2 \ge 0 & \end{cases} \xrightarrow[u_3,u_4 \text{ folgues}]{\substack{u_1:=-\lambda_1\\u_2:=\lambda_2}} (D)_e\begin{cases}\min\limits_{u\in\mathbb{R}^5} z_D = & u_1 - 3u_2 & \\ s.t.: & -2u_1 + 2u_2 + u_3 & = -1\\ & 2u_1 + 2u_2 + u_4 & = 2\\ & u \ge 0 & \end{cases}$$

La solució dual proporcionada pel Ta fort de dualitat és:

$$\lambda^{*\prime} = c_B' B^{-1} = [-1 \quad 2]\begin{bmatrix}1/4 & 1/4\\-1/4 & 1/4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix} \therefore u_B^* = \begin{bmatrix}u_1^*\\u_2^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\lambda_1^*\\\lambda_2^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/4\\1/4\end{bmatrix}$$

Comprovem que u_B^* satisfà les condicions d'optimalitat de $(D)_e$ (factibilitat primal i dual de $(D)_e$):

i. Comprovació $\mathcal{B}^{D^*} = \{1,2\}$ és SBF de (D_e): $B^D = \begin{bmatrix}-2 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}$, no singular amb $B^{D^{-1}} = \begin{bmatrix}-1/4 & 1/4\\1/4 & 1/4\end{bmatrix}$

ii. Factibilitat primal de $(D)_e$: $u_B^* = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} \geq [0]$

iii. Factibilitat dual de $(D)_e$: $r_N^D = c_N^{D\prime} - c_B^{D\prime} B^{D^{-1}} A_N^D = [0] - [1 \quad -3] \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$ $[1 \quad 1/2] \geq 0$.

Apartat b)

Valor mínim del terme b_2, que conserva l'optimalitat de la base òptima de (P): un canvi en b_2 només pot fer perdre la factibilitat primal: $x_B = B^{-1}b \geq 0$

$$x_B(\phi_{b_2}) = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{b_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\phi_{b_2}}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{\phi_{b_2}}{4} - \frac{1}{4} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\phi_{b_2} \geq \phi_{b_2}^{min} = 1}$$

Calculem la solució òptima de (P) si b_2 adopta un valor no negatiu qualsevol per sota del valor mínim $\phi_{b_2}^{min}$: cal reoptimitzar aplicant l'algorisme del símplex dual:

Símplex dual, 1a iteració: $\mathcal{B} = \{1,2\}, \mathcal{N} = \{3,4\}, x_B(\phi_{b_2}) = \begin{bmatrix} \frac{\phi_{b_2}+1}{4} \\ \frac{\phi_{b_2}-1}{4} \end{bmatrix}, r' = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, z = \frac{\phi_{b_2}-3}{4}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p : si $0 \leq \phi_{b_2} < \phi_{b_2}^{min} = 1$

$$x_B(\phi_{b_2}) = \begin{bmatrix} \frac{\phi_{b_2}+1}{4} > 0 \\ \frac{\phi_{b_2}-1}{4} < 0 \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 2, \boxed{B(2) = 2 \text{ VBsortint}}$$

- Identificació de problema (D) il·limitat :

$$d'_{r_N} = \beta_2 A_N = [-1/4 \quad 1/4] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [-1/4 \quad -1/4] \ngeq 0$$

- VNB d'entrada: $\theta_D^* = \min_{j \in \mathcal{N}, d_{r_{N_j}} < 0} \left\{ \frac{-r_j}{d_{r_{N_j}}} \right\} = \{3,1\} = 1 \Longrightarrow q = 4$
- Canvi de base i actualitzacions: si fem les actualitzacions tal com dicta l'algorisme:
  - Act. variables duals i f.o.:

$$r_N := r_N + \theta_D^* d_{r_N} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, r_{B(p)} = r_2 := \theta_D^* = 1$$

$$\lambda := \lambda - \theta_D^* \beta_p' = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, z := z - \theta_D^* x_{B(p)} = \frac{\phi_{b_2} - 3}{4} - 1\left(\frac{\phi_{b_2} - 1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

  - Act. variables primals:

$$d_B = -B^{-1}A_4 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \theta^* = -\frac{x_{B(2)}}{d_{B(2)}} = -\frac{\frac{\phi_{b_2} - 1}{4}}{-\frac{1}{4}} = \phi_{b_2} - 1$$

$$x_B := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} \frac{\phi_{b_2}+1}{4} \\ \frac{\phi_{b_2}-1}{4} \end{bmatrix} + (b_2 - 1)\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, x_q = x_4 := \theta^* = \phi_{b_2} - 1 \overset{\phi_{b_2}\in]0,1[}{\lesseqgtr} 0$$

- $\mathcal{B} \leftarrow \{1,4\}, \mathcal{N} \leftarrow \{2,3\}$

Símplex dual, 2a iteració: $\mathcal{B} = \{1,4\}, \mathcal{N} = \{2,3\}, x_B(\phi_{b_2}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \phi_{b_2} - 1 \end{bmatrix}, r' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, z = -\frac{1}{2}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p :

$$x_B(\phi_{b_2}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \phi_{b_2} - 1 \end{bmatrix} \overset{\phi_{b_2}\in]0,1[}{\lesseqgtr} 0 \Rightarrow \boxed{\text{Solució òptima}}$$

Apartat c)

El canvi del cost $c_2 \leftarrow \phi_{c_2}$, corresponent a una variable bàsica, pot afectar a totes les components del vector de costos reduïts. L'interval d'estabilitat demanat serà el rang de valors ϕ_{c_2} que conserva la factibilitat primal, $r(\phi_{c_2}) \geq 0$. Sabem que $\mathcal{B}^* = \{1,2,4\}$ i $\mathcal{N}^* = \{3,5\}$, llavors:

$$r_N(\phi_{c_2})' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & \phi_{c_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + \frac{2+\phi_{c_2}}{4} & \frac{1}{4} + \frac{2+\phi_{c_2}}{4} \end{bmatrix} \overset{\text{Cond. fact. }(D)}{\lesseqgtr} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \phi_{c_2} \geq 1 \Rightarrow \boxed{\Phi_{c_2} = [1, +\infty[}$$

Si $\phi_{c_2} = \Phi_{c_2}^{min} = 1$, el problema dual presenta degeneració primal (alguna de les variables bàsiques del problema (D_e) son nul·les a l'òptim). Efectivament:

$$u_B^* := \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{degeneració primal}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 72. Propietats dels problemes de (PL) i dels seus algorismes.

Apartat a)

En una iteració del mètode del símplex es pot fer un desplaçament estrictament positiu tot passant d'una solució factible a un altre de diferent sense canviar el valor de la funció objectiu. **fals**. Si fem un desplaçament positiu $\theta^* > 0$ llavors el canvi en la funció objectiu és $\Delta z = \theta^* r_q$ on r_q és el cost reduït de la variable no bàsica entrant, que és estrictament negatiu. Així doncs $\Delta z < 0$ ■

Apartat b)

Una variable que acaba de sortir d'una base no degenerada no pot tornar a entrar en la iteració següent. **cert**. Sigui x_p la variable que acaba de sortir de la base, y la SBF a la iteració actual i x la SBF a la iteració anterior. Si x_p entrés a la base la iteració del símplex en tornaria a portar a la SBF anterior x, és a dir, retrocediríem de y a x al llarg de la direcció, doncs desfaríem el canvi de base de la iteració anterior. Però sabem que $c'y < c'x \Rightarrow c'(x-y) > 0$. També sabem que si la variable no bàsica x_p entra a la base es satisfà que $c'(x-y) = c'\theta^* d = \theta^* c'd = \theta^* r_p > 0$. Atès que $\theta^* > 0 \Rightarrow r_p > 0$, és a dir, x_p té sempre un cost reduït positiu in no pot entrar a la base. Una demostració alternativa basada en l'algorisme del símplex dual és la següent: sabem que l'actualització dels cost reduït de la variable bàsica x_p sobre y serà $r_p := r_p + \theta_D^* d_{r_{N_p}} \overset{r_p=0}{\cong} \theta_D^* d_{r_{N_p}}$. Però $\theta_D^* = -r_q / -d_{B_p} > 0$ i $d_{r_{N_p}} \equiv -d_{B_p} > 0 \Rightarrow \boxed{r_p > 0}$ ■

Apartat c)

Si existeix una base òptima no degenerada, llavors existeix una única base òptima.

En aquest cas l'enunciat és ambigu:

- Si per degenerada entenem només degeneració primal llavors és **fals**. Contraexemple: considereu el següent problema $(P)\min_{x\in\mathbb{R}^n}\{x_1|0\leq x_1\leq 1, 0\leq x_2\leq 1\}$. Existeixen dues bases òptimes no degenerades: $\mathcal{B}^1=\{2,4\}$ i $\mathcal{B}^2=\{3,4\}$, amb x_3 i x_4 folgues de $x_1\leq 1$ i $x_2\leq 1$ respectivament.
- Si per degeneració entenem dual o primal i dual simultàniament, llavors és **vertader**, doncs si no hi ha degeneració dual ($r_N^*>0$) tots els punts factibles, incloses les bases, tenen pitjor valor de la funció objectiu. En efecte, $\forall y\in P, y\neq x^*, y=x^*+d, d\neq 0$ es satisfà
$$Ay=A(x^*+d)=Bx_B^*+Ad=b\rightarrow Bd_B+A_Nd_N=0\rightarrow d_B=-B^{-1}A_Nd_N \ (1).$$
Com que $d\neq 0\Rightarrow d_N\neq 0$. Per altre banda tenim que
$$c'y=c'x^*+c'd=c'x^*+c_B'd_B+c_N'd_N\overset{(1)}{=}c'x^*+(c_N'-c_B'B^{-1}A_N)d_N=c'x^*+{r_N^*}'d_N.$$
Atès que $x_N^*=0$ i $y_N^*\geq 0\rightarrow d_N=y_N-x_N^*\geq 0$. Com que $d_N\neq 0$ té alguna component diferent de zero i totes elles seran positives$\rightarrow {r_N^*}'d_N>0$ i $c'y>c'x^*$ ■

Qualsevol de les dues interpretacions es considera correcta.

Apartat d)

Si (P) és infactible el seu dual (D) serà il·limitat. **fals**. En base al teorema feble de dualitat sabem que (D) il·limitat $\Rightarrow$ (P) infactible, però el recíproc no és cert. (P) infactible $\Rightarrow$ (D) no pot tenir solució òptima, però tant pot ser il·limitat com infactible. Per exemple, el dual del primal infactible $(P)\max\left\{2x_1-x_2\middle|\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}, x\geq 0\right\}$ és el dual infactible:
$$(D)\min\left\{\lambda_1-\lambda_2\middle|\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, \lambda\geq 0\right\}$$ ■

Apartat e)

Si la modificació d'un dels coeficients a_{ij} de la matriu A fa perdre l'optimalitat de la base $\mathcal{B}^*$ sempre es podrà reoptimitzar el problema a partir de la base òptima $\mathcal{B}^*$ ja sigui amb l'algorisme del símplex primal o dual. **fals.** Si el coeficient a_{ij} correspon a la columna associada a una variable bàsica es pot perdre simultàniament la factibilitat primal i dual. Si això passes no es podria reoptimitzar amb cap dels dos algorismes estudiats a classe. També podria passar que si l'element a_{ij} és de la base provoqués la singularitat de la base òptima, la qual cosa implicaria que x^* ja no seria una solució bàsica impedint iterar amb cap dels algorismes. ■

SOLUCIÓ EXERCICI 73. Dualitat i condicions de Karush-Kuhn-Tucker.

Apartat a)

$$(D)\max_{\lambda\in\mathbb{R}^2}\{\lambda'b|\lambda'A=c',\lambda\leq 0\}$$

Apartat b)

Ta Folga complementaria:

Siguin x i λ solucions factibles de (P) i (D) respectivament. Els vectors x i λ són solucions òptimes si i només si

$$i)\quad \lambda_j\left(a_j'x-b_j\right)=0\quad j=1,2,\dots,m$$
$$ii)\quad (c_i-\lambda'A_i)x_i=0\quad i=1,2,\dots,n$$

Demo:

$\boxed{\Rightarrow}$ Assumim que $x \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}^m$ són òptimes. Definim: $\begin{cases} u_j = \lambda_j(a_j'x - b_j) & j = 1,2,\dots,m \\ v_i = (c_i - \lambda' A_i)x_i & i = 1,2,\dots,n \end{cases}$

Atès que x i λ son factibles llavors $\begin{Bmatrix} \text{Si } a_j'x \neq b_j, \text{ els signes de } \lambda_j \text{ i } (a_j'x - b_j) \text{ coincideixen} \\ \text{Si } \lambda' A_i \neq c_i, \text{ els signes de } x_i \text{ i } (c_i - \lambda' A_i) \text{ coincideixen} \end{Bmatrix}$ i podem escriure

$$u_j \geq 0,\ v_i \geq 0\ \forall i,j \ \ (1)$$

Per altre banda $\sum_j u_j = \lambda' A x - \lambda' b$ i $\sum_i v_i = c'x - \lambda' A x$, llavors:

$$\sum_j u_j + \sum_i v_i = c'x - \lambda' b \ \ (2)$$

Però, pel Ta. fort de dualitat, sabem que si x i λ són òptimes llavors $c'x = \lambda' b \xRightarrow{(1),(2)} \boxed{u_j = v_i = 0 \ \ \forall i,j}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Assumim que x i λ són factibles i $u_j = v_i = 0\ \forall i,j$. Llavors per (2) tenim que $c'x - \lambda' b = 0$ i pel Corol·lari del Ta. Feble de dualitat podem assegurar que x i λ són òptimes■

Apartat c)

Considerem una solució x^* factible primal de $(P)\ \min_{x \in \mathbb{R}^n}\{c'x | Ax \leq b\}$. Les condicions de KKT per a la solució x^* factible primal i punt regular són:

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \mu^{*\prime} \nabla g(x^*) = 0 & \rightarrow & c' + \mu^{*\prime} A = 0 & (1) \\ \mu^{*\prime} g(x^*) = 0 & \rightarrow & \mu_j^{*\prime}(a_j'x - b_j) = 0, j = 1,\dots,m & (2) \\ \mu^* \geq 0 & & & (4) \end{cases}$$

amb $\mu^* \in \mathbb{R}^m$. Notem que tot x^* factible primal serà punt regular perquè $\operatorname{rang}(A) = m$.

Per tal de demostrar que el vector $-\mu^*$ és òptim del dual demostrarem (i) que és factible primal i (ii) que és òptim dual perquè, conjuntament amb el vector factible primal x^*, satisfà, el teorema de folga complementària (la qual cosa demostra, de passada, l'optimalitat de x^*):

i. $-\mu^*$ factible dual: recordem que el problema dual es formula com $(D)\ \max_{\lambda \in \mathbb{R}^2}\{\lambda' b | \lambda' A = c', \lambda \leq 0\}$. Observem que les condicions (1) i (3) coincideixen amb les condicions de factibilitat dual:

$$(1) \Rightarrow \quad (-\mu^*)' A = c'$$
$$(3) \Rightarrow \quad (-\mu^*) \leq 0$$

Així doncs, $-\mu^*$ és una solució factible del problema dual (D).

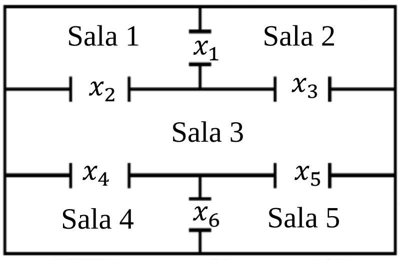
ii. $-\mu^*$ òptim dual: per tal de demostrar que la solució factible dual $-\mu^*$és òptima només cal demostrar que satisfà les condicions del teorema de folga complementària. La condició $ii)$ es satisfà per la condició de factibilitat dual (1), mentre que la condició $i)$ es redueixen a la condició $\lambda_j(a_j'x - b_j) = 0 \quad j = 1,2,\dots,m$. Prenent $\lambda = -\mu^*$ aquesta condició queda reduïda a la condició (2), és a dir, podem assegurar que el vector x^* (factible (P)) conjuntament amb $-\mu^*$ (factible (D)) satisfan les condicions del Ta de folga complementaria (2) i, com a conseqüència, tots dos són òptims dels seus respectius problemes ■

Observem que acabem de demostrar que en el cas de programació lineal les condicions de KKT $(1) - (3)$ són condicions necessàries i suficients de mínim per a punts factibles primals regulars. Això corrobora el que ja sabem, doncs els problemes de programació lineal son problemes convexos.

SOLUCIÓ EXERCICIS FORMULACIÓ DE PROBLEMES DE PROGRAMACIÓ LINEAL ENTERA.

SOLUCIÓ EXERCICI 74. Vigilants.

S'assigna una variable binaria $x_i, i = 1,2,\dots,6$ a cada una de les ubicacions possibles dels vigilants:



Per tal de parametritzar el problema definim:

- $\mathcal{V}$: conjunt de vigilants, $\mathcal{V} = \{1,2,\dots,6\}$
- $\mathcal{S}$: conjunt de sales, $\mathcal{S} = \{1,2,\dots,5\}$
- $\mathcal{C}_j$: conjunt de vigilants que cobreixen la sala $j \in \mathcal{S}$,

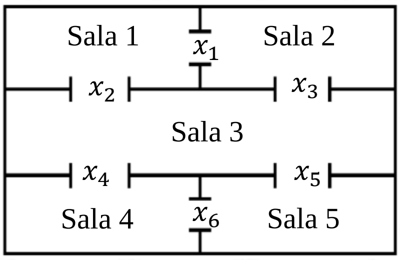
$$\mathcal{C}_1 = \{1,2\}, \mathcal{C}_2 = \{1,3\}, \mathcal{C}_3 = \{2,3,4,5\}, \mathcal{C}_4 = \{4,6\}, \mathcal{C}_5 = \{5,6\},$$

Llavors el problema que ens demanen és:

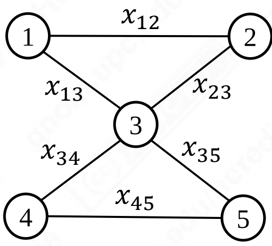
$$(PE)\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^{|\mathcal{V}|}} z = \sum\limits_{i\in\mathcal{V}} x_i & & \\ \text{s.a.:} & & \\ \sum\limits_{i\in\mathcal{C}_j} x_i & \geq 1 & j \in \mathcal{S} \\ x_i \in \{0,1\} & & i \in \mathcal{V} \end{cases}$$

La funció objectiu representa en nombre total de vigilants a instal·lar i les constriccions asseguren que totes les sales queden protegides com a mínim amb un vigilant.

Una formulació alternativa consisteix en considerar el graf no dirigit amb nodes (vèrtexs) $\mathcal{N} = \{1,2,3,4,5\}$ associats a les sales i arcs (arestes) $\mathcal{A} = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,4),(3,5),(4,5)\}$ associats a les portes del museu:



→



$$\rightarrow (PE)\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^{|\mathcal{V}|}} z = \sum\limits_{(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} & & \\ \text{s.a.:} & & \\ \sum\limits_{(k,l)\in\mathcal{I}_j} x_{kl} & \geq 1 & j \in \mathcal{N} \\ x_{ij} \in \{0,1\} & & i \in \mathcal{A} \end{cases}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 75. Editorial Omega.

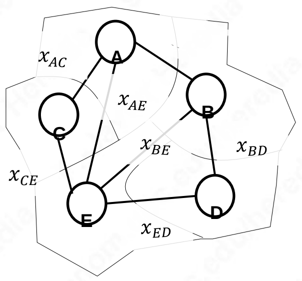
Paràmetres:

Nombre de representants:	$r = 2$
Nombre de zones assignades a cada representants:	$z = 2$
Conjunt d'autonomies:	$\mathcal{A} = \{\mathrm{A, B, C, D}\}$
Conjunt d'autonomies **no** contigües:	$\mathcal{N} = \{(\mathrm{A, D}), (\mathrm{C, D}), (\mathrm{C, B})\}$
Nombre d'alumnes per autonomia:	$c = [10000 \quad 50000 \quad 5000 \quad 2000 \quad 15000]$

Variables	
Assignació de representants a autonomies:	$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el representant } i \text{ s'assigna a l'autonomia } j \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \quad i = 1, \dots, r; j \in \mathcal{A}$

Model de programació lineal	
Nombre total d'alumnes coberts:	$\max z = \sum_{j \in \mathcal{A}} c_j \sum_{i=1}^{r} x_{ij}$
	s.a:
S'assignen z zones a cada representant:	$\sum_{j \in \mathcal{A}} x_{ij} = z \,, \quad i = 1, \dots, r$
Cap autonomia amb més d'un representant:	$\sum_{i=1}^{r} x_{ij} \le 1 \,, \quad j \in \mathcal{A}$
No es poden assignar zones no contigües al mateix representant:	$x_{ik} + x_{il} \le 1, \quad i = 1, \dots, r \,, (k, l) \in \mathcal{N}$
	$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, r \,, j \in \mathcal{A}$

Alternativament, es pot definir el graf no dirigit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ amb $\mathcal{V} = \{A, B, C, D\}$, $\mathcal{E} = \{(A,B), (A,C), (AE), (B,E), (B,D), (D,E)\}$ i les variables binàries $x_j \,, j \in \mathcal{E}$ amb cost associat $c_j \in \mathcal{E}$, formulant el següent problema sobre el graf $\mathcal{G}$:



$$
(\text{PLE}) \begin{cases} \max & z = \sum_{j \in \mathcal{E}} c_j x_j \\ \text{s.a.:} & \sum_{j \in \mathcal{E}} x_j = 2 & & \text{S'assignen 2 auton. contigües a cada rep.} \\ & \sum_{j \in \mathcal{E}: i \in j} x_j \le 1 & i \in \mathcal{V} & \text{Un rep. per auton. } (i \in j \Rightarrow j = (i,k) \text{ ó } j = (k,i)) \\ & x_j \in \{0,1\} & i \in \mathcal{E} & \end{cases}
$$

SOLUCIÓ EXERCICI 76. Remington Manufacturing: problemes de càrrega fixa.

Paràmetres:

Conjunt de productes	$\mathcal{P}$
Conjunt de processos	$\mathcal{O}$
Per a cada producte $i \in \mathcal{P}$: • Benefici unitari (€) • Costos fixos (€)	 b_i f_i
Hores disponibles operació $j \in \mathcal{O}$ (h).	h_j
Hores consumides d'operació $j \in \mathcal{O}$ per unitat de producció producte $i \in \mathcal{P}$ (h).	a_{ji}

Variables	
Quantitat producte $i \in \mathcal{P}$	$x_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$
Fabricació producte $i \in \mathcal{P}$ (1 es fabrica, 0 no es fabrica).	$y_i \in \{0,1\}$

Model de programació lineal entera	
Maximització del benefici total:	$\max_{x,y \in \mathbb{Z}} z = \sum_{i \in \mathcal{P}} (b_i x_i + f_i y_i)$
	s.a:
Disponibilitat hores operació:	$\sum_{i \in \mathcal{P}} a_{ji} x_i \leq h_j \quad j \in \mathcal{O}$
Acoblament $x_i - y_i$:	$x_i \leq M_i y_i \quad i \in \mathcal{P}$
	$x_i \geq 0, y_i \in \{0,1\} \quad i \in \mathcal{P}$

SOLUCIÓ EXERCICI 77. CRT-Technologies: problemes de selecció de projectes.

Paràmetres:	
Conjunt d'anys.	$\mathcal{Y}$
Conjunt de projectes.	$\mathcal{P}$
NPV projecte $i \in \mathcal{P}$ (k€).	n_i

Pressupost any $j \in \mathcal{Y}$ (k€).	b_j
Inversió necessària projecte $i \in \mathcal{P}$ any $j \in \mathcal{Y}$ (k€).	a_{ji}

Variables	
Decisió de seleccionar (1) o descartar (0) el projecte $i \in \mathcal{P}$.	$y_i \in \{0,1\}$

Model de programació lineal	
Es maximitza el NPV total de la inversió:	$\min_{x \in \mathbb{Z}} z = \sum_{i \in \mathcal{P}} n_i y_i$
	s.a:
Pressupost anual:	$\sum_{i \in \mathcal{P}} a_{ji} y_i \leq b_j \quad j \in \mathcal{Y}$
	$y_i \in \{0,1\} \quad i \in \mathcal{Y}$

SOLUCIÓ EXERCICI 78. Air-Express: problemes de planificació de plantilles.

Paràmetres:	
Conjunt de dies	$\mathcal{D}$
Conjunt de torns	$\mathcal{S}$
Per a cada torn $i \in \mathcal{D}$:	
• Dies de descans	$\mathcal{H}_i \subset \mathcal{D}$
• Salari treballador (€)	c_i
• Costos fixos torn (€):	k_i
• Fita superior x_i:	$M_i = \max_{j \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{H}_i} b_j$
Demanda treballadors dia $j \in \mathcal{D}$	$d_j \ , j \in \mathcal{D}$

Variables	
Nre. de treballadors a contractar torn i	$x_i \geq 0, i \in \mathcal{S}$
Contractació torn i (1 es contracta, 0 no es contracta)	$y_i \in \{0,1\}, i \in \mathcal{S}$

Model de programació lineal	
Cost total nòmina més fix:	$\min_{x,y} z = \sum_{i\in\mathcal{S}} (c_i x_i + k_i y_i)$
	s.a:
Demanda diaria:	$\sum_{i:j\notin\mathcal{H}_i} x_i \geq b_j \quad j\in\mathcal{D}$
Acoblament $x_i - y_i$:	$x_i \leq M_i y_i \quad i\in\mathcal{D}$
	$x_i \geq 0, y_i \in \{0,1\} \quad i\in\mathcal{D}$

Solució òptima (AMPL):

$$x^* = [0 \quad 6 \quad 5 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \quad 14]', \qquad y^* = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]', \qquad z^* = 26415$$

SOLUCIÓ EXERCICI 79. Prodem S.L.

Paràmetres:	
Conjunt de productes	$\mathcal{P} = \{A, B, C\}$
Conjunt de processos de manufactura	$\mathcal{M} = \{1,2\}$
Per a cada procés $p\in\mathcal{M}$ i producte $i\in\mathcal{P}$: • Consum de recurs [Tm/unitat] • Costos de producció [u.m./unitat]	$a_{pi}, \quad a = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $c_{pi}, \quad c = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 20 & 3 & 3 \end{bmatrix}$
Disponibilitat recurs [Tm]:	$b = 40$
Demanda [Tm]:	$d = 40$

Variables	
Per a cada procés $p\in\mathcal{M}$: • Quantitat fabricada producte $i\in\mathcal{P}$ [Tm]: • Selecció procés manufactura:	$x_{pi} \geq 0$ $y_p = \begin{cases} 1 & \text{es selecciona} \\ 0 & \text{no es selecciona} \end{cases}$

Model de programació lineal entera:	
Cost total producció [u.m.]:	$\min z = \sum_{p\in\mathcal{M}} \sum_{i\in\mathcal{P}} c_{pi} x_{pi}$
	s.a:

Disponibilitat recurs:	$\sum_{p \in \mathcal{M}} \sum_{i \in \mathcal{P}} a_{pi} x_{pi} \leq b$
Satisfacció demanda:	$\sum_{p \in \mathcal{M}} \sum_{i \in \mathcal{P}} x_{pi} \geq b$
Incompatibilitat processos:	$\sum_{p \in \mathcal{M}} y_p = 1$
Acoblament $x - y$ (b fa el paper de M_i)	$\sum_{i \in \mathcal{P}} x_{pi} \leq b y_p \quad p \in \mathcal{M}$

Solució òptima (AMPL): $x^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33 \end{bmatrix}$, $y^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $z^* = 99$.

SOLUCIÓ EXERCICIS ALGORISMES DE PROGRAMACIÓ LINEAL ENTERA

SOLUCIÓ EXERCICI 80. Test programació lineal entera.

Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)
1	F	V	F	2	V	F	F	3	V	V	F	4	F	F	F	5	V	F	F
6	V	F	F	7	V	V	F	8	F	F	F	9	V	V	V	10	V	F	F
11	V	F	F	12	F	F	V	13	F	F	V	14	F	V	F	15	V	V	F
16	V	F	F	17	F	V	F	18	V	F	F	19	V	F	F	20	F	F	F
21	F	F	V	22	F	V	V	23	F	V	F	24	F	V	V				

SOLUCIÓ EXERCICI 81. Algorisme de ramificació i poda (1).

$$(PE1)\begin{cases}\min & -x_1 \\ \text{s.a.:} \\ (r1) & x_1 \quad -x_2 \quad +x_3 \qquad\qquad = -1 \\ (r2) & 2x_1 \quad +2x_2 \qquad\quad +x_4 \quad = \ \ 5 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad \geq 0, enteres\end{cases}$$

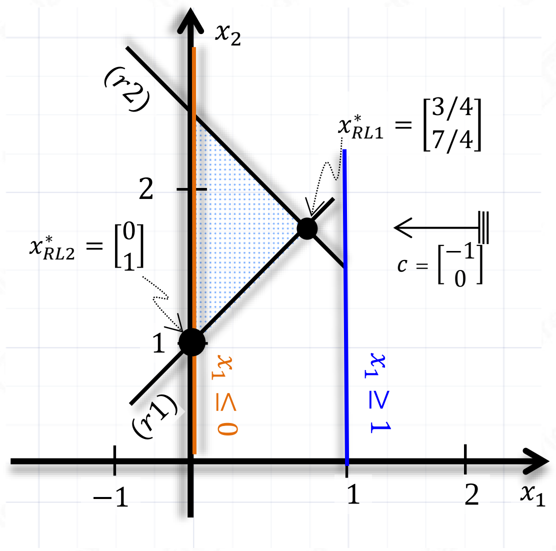
Iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

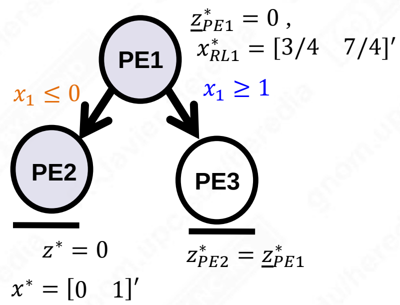
- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de** $(\boldsymbol{RL1})$: $x^*_{RL1} = [3/4 \quad 7/4]', z^*_{RL1} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \underline{z}^*_{PE1} := 0$
- **Eliminació:** no es pot.
- **Separació:** $x_1^* = 3/4 \rightarrow \begin{cases}(PE2) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + \boldsymbol{x_1 \leq \lfloor 3/4 \rfloor = 0} \\ (PE3) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + \boldsymbol{x_1 \geq \lceil 3/4 \rceil = 1}\end{cases} \rightarrow L \leftarrow \{(PE2), (PE3)\}$

Iteració 2: $L = \{(PE2), (PE3)\}, \underline{z}^*_{PE1} = 0, z^* = +\infty.$

- **Selecció**: $(PE2)$.
- **Resolució de** $(\boldsymbol{RL2})$: $x^*_{RL2} = [0 \quad 1]', z^*_{RL2,0} = 0$
- **Eliminació:** $x^*_{RL2} = [0 \quad 1]' \subset K_{PE2}: x^*_{PE2} = [0 \quad 1]' \Rightarrow$ s'elimina (PE2):
  - $z^* \leftarrow z^*_{PE2} = 0, x^* \leftarrow x^*_{PE2}, L \leftarrow L \backslash \{(PE2)\} = \{(PE3)\}$
  - $z^* = \underline{z}^*_{PE1} = 0 \Rightarrow$s'elimina $(PE3)$: $L \leftarrow L \backslash \{(PE3)\} = \emptyset$

Iteració 3: $L = \emptyset \Rightarrow \boxed{x^*_{PE1} = x^* = [0 \quad 1]',\ z^*_{PE1} = z^* = 0}$





SOLUCIÓ EXERCICI 82. Algorisme de ramificació i tall.

Apartat a)

La solució que proporciona l'algorisme de B&C és la de la incumbent, és a dir, la millor solució entera trobada per l'arbre d'exploració. Observant la gràfica, veiem que l'algorisme ha trobat dues solucions enteres, als nodes PE6 i PE10, sent la millor de totes dues la solució $x^*_{PE6} = [60, 66, 3]'$ amb un valor de la funció objectiu de $z^*_{PE6} = -129$

Apartat b)

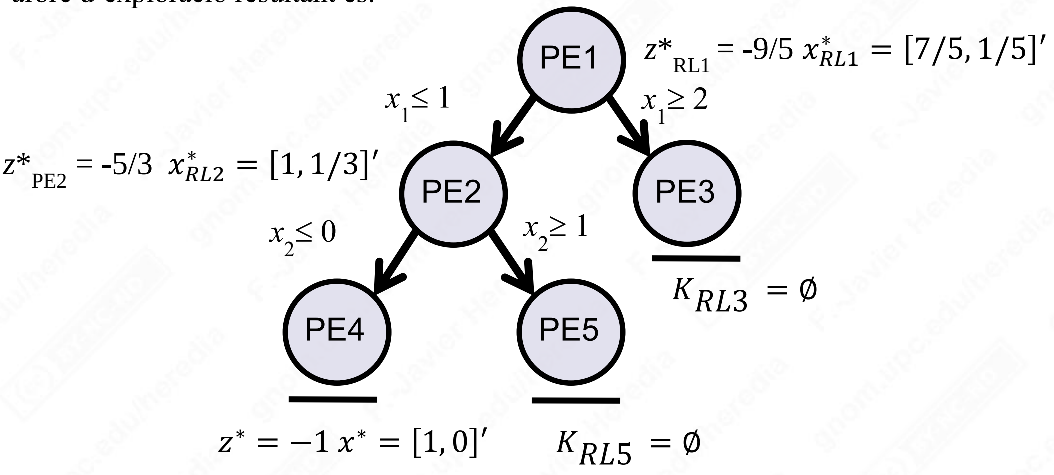
La fita inferior del valor de la funció objectiu de (PEi) que proporciona l'algorisme de B&C correspon a la solució de la relaxació lineal de la última formulació vàlida. En el cas del subproblema $(PE1)$, si la solució de la relaxació lineal és $x^*_{RL1} = [60.9 \quad 66.2 \quad 3.4]'$ substituint a la funció objectiu de (PE) obtindríem que $z^*_{RL1} = -130.5$. No obstant això, atés que sabem que la solució òptima de (PE) tindrà valor de la f.o. enter, doncs els coeficients de la funció objectiu son enters, es pot reforçar la fita inferior a l'enter per excés, en aquest cas $\underline{z}^*_{PE1} = \lceil z^*_{RL1} \rceil = \lceil 130{,}5 \rceil = 130$.

Apartat c)

El subproblema $(PE7)$ es s'elimina durant el tractament de $(PE6)$, atès que $z^*_{PE6} = \underline{z}^*_{PE4}$. Mentre que en el cas de $(PE5)$ no podem descartar $z^*_{PE5} = \underline{z}^*_{PE2} = -130$ sense resoldre'l.

SOLUCIÓ EXERCICI 83. Algorismes de ramificació i poda (2).

L'arbre d'exploració resultant és:

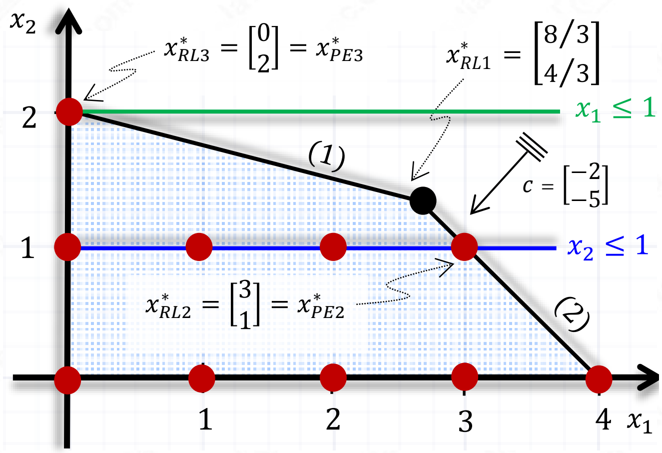


Ordre de tractament dels nodes: PE1, PE2, PE3, PE4, PE5, PE3

Si es fa servir el reforçament de la fita inferior de (PE1): $\underline{z}^*_{PE1} = \lceil z^*_{RL1} \rceil = -1$ llavors després de trobar la primera incumbent a la 3a iteració (tractament de (PE4)) podem eliminar directament (PE5) i (PE3) doncs es verifica que $z^*_{PE4} = \underline{z}^*_{PE1} = z^*_{PE} = -1$.

SOLUCIÓ EXERCICI 84. Algorisme de ramificació i poda (3).

$$(PE1)\begin{cases} \min & -2x_1 & -5x_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ (1) & x_1 & +4x_2 & \leq 8 \\ (2) & x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, \text{ enteres} \end{cases}$$



Iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció:** $(PE1)$.
- **Resolució de** $(\boldsymbol{RL1})$**:** $x^*_{RL1} = [8/3 \quad 4/3]', z^*_{RL1} = -12 \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := -12$
- **Eliminació:** no es pot.
- **Separació:** $x^*_2 = 4/3 \rightarrow \begin{cases} (PE2) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + x_2 \leq \lfloor 4/3 \rfloor = 1 \\ (PE3) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + x_2 \geq \lceil 4/3 \rceil = 2 \end{cases} \rightarrow L \leftarrow \{(PE2), (PE3)\}$

Iteració 2: $L = \{(PE2), (PE3)\}, \underline{z}_{PE1} = -12, z^* = +\infty$

- **Selecció:** $(PE3)$.
- **Resolució de** $(\boldsymbol{RL3})$**:** $x^*_{RL3} = [0 \quad 2]', z^*_{RL3} = -10 \Rightarrow \underline{z}_{PE3} := -10$
- **Eliminació:** $x^*_{RL3} = [0 \quad 2]' \in K_{PE3} \therefore x^*_{PE3} = [0 \quad 2]' \Rightarrow$ s'elimina (PE3):

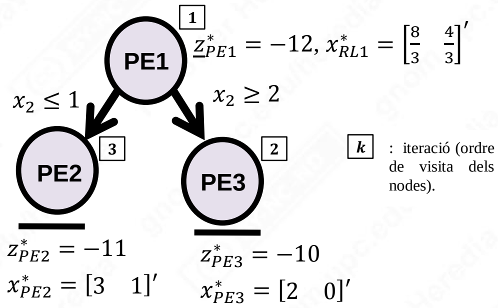
  - $z^*_{PE3} = -10 < z^* = +\infty \therefore\ z^* \leftarrow z^*_{PE3}, x^* \leftarrow x^*_{PE3}, L \leftarrow L\backslash\{(PE3)\} = \{(PE2)\}$.
  - $z^* = -10 > \underline{z}^*_{PE1} = -12 \Rightarrow$ no podem eliminar $(PE2)$.

Iteració 3: $L = \{(PE2)\},\ \underline{z}_{PE1} = -12, z^* = -10$

- **Selecció:** $(PE2)$.
- **Resolució de $(RL2)$:** $x^*_{RL2} = [3 \quad 1]', z^*_{RL2} = -11 \Rightarrow \underline{z}_{PE2} := -11$
- **Eliminació:** $x^*_{RL2} = [3 \quad 1]' \in K_{PE2} \therefore\ x^*_{PE2} = [3 \quad 1]' \Rightarrow$ s'elimina (PE2):
  - $z^*_{PE2} = -11 < z^* = -10 \therefore\ z^* \leftarrow z^*_{PE2}, x^* \leftarrow x^*_{PE2}, L \leftarrow L\backslash\{(PE2)\} = \emptyset$.

Iteració 4: $L = \emptyset \Rightarrow$

$$\boxed{x^*_{PE1} = x^* = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},\ z^*_{PE1} = z^* = -11}$$



SOLUCIÓ EXERCICI 85. Desigualtats de Chvátal-Gomory i algorisme de ramificació i poda.

Apartat a)

Passa 1: *es genera la desigualtat* $\sum_{i=1}^{n} u'A_i x_i \le u'b$, *amb un vector* $u \in \mathbb{R}^m, u \ge 0$ *qualsevol.*

El terme de l'esquerra de la desigualtat es pot expressar com $\sum_{j=1}^{m} u_j a_j' x$, on a_j' és la fila j-èssima de la matriu A. Si $x \in K_{PE}$ llavors sabem que cada terme del sumatori satisfà $a_j' x \le b_j$ i, si $u_j \ge 0$, podem escriure $u_j a_j' x \le u_j b_j$ i $\sum_{j=1}^{m} u_j a_j' x = \sum_{i=1}^{n} u'A_i x \le u'b$ per a tot $x \in K_{PE}$.

Passa 2: *s'arrodoneixen els coeficients del terme de l'esquerra:* $\sum_{i=1}^{n} \lfloor u'A_i \rfloor x_i \le u'b$.

Atès que $x_i \ge 0$ per a tota solució $x \in K_{PE}$, es satisfà que $\lfloor u'A_i \rfloor x_i \le u'A_i x_i$ i, conseqüentment, $\sum_{i=1}^{n} \lfloor u'A_i \rfloor x_i \le \sum_{i=1}^{n} u'A_i x_i \le u'b$.

Passa 3: *s'arrodoneix el terme de la dreta:* $\sum_{i=1}^{n} \lfloor u'A_i \rfloor x_i \le \lfloor u'b \rfloor$.

Atès que $x_i \in \mathbb{Z}$ per a tota solució $x \in K_{PE}$, el terme de l'esquerra de la desigualtat és enter, i podem arrodonir per defecte el terme de l'esquerre.

Apartat b)

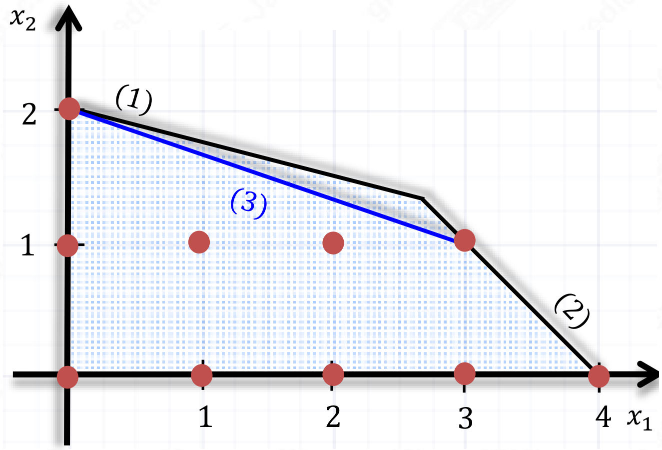
La regió factible és $K_{PE} = \left\{x \in \mathbb{Z}^2 \middle| \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 8 & (1) \\ x_1 + x_2 \leq 4 & (2) \end{cases}, x \geq 0\right\}$. Prenent $u = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ la desigualtat de Chvátal-Gomory és:

$$\lfloor u'A \rfloor x \leq \lfloor u'b \rfloor$$

$$\left\lfloor \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rfloor x \leq \left\lfloor \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rfloor$$

$$\lfloor [1 \quad 3] \rfloor x \leq \left\lfloor \frac{20}{3} \right\rfloor$$

$$\boxed{x_1 + 3x_2 \leq 6 \quad (3)}$$



S'observa com després d'afegir (3) tots els punts extrems del poliedre factible de la relaxació lineal pertanyen a K_{PE}. Llavors $K_{RL} = CH(K_{PE})$ i

$$\min_{x \in \mathbb{Z}^2} \left\{c'x \middle| \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 & (2) \\ x_1 + 3x_2 \leq 6 & (3) \end{cases}, x \geq 0\right\}$$

és la formulació ideal de (PE).

SOLUCIÓ EXERCICI 86. Talls de Gomory

i. La desigualtat és satisfeta per totes les solucions enteres $x \in \mathcal{K}_{PE}$:

Considerem la partició de columnes de A associada a la partició $\mathcal{B}, \mathcal{N}$. Llavors:

$$Ax = Ax_B + Nx_N = b$$

Premultiplicant per la inversa de la base queda:

$$x_B + B^{-1}Nx_N = x_B + Vx_N = B^{-1}b = x_B^*$$

La i-èssima equació és:

$$x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} v_{ij} x_j = x_{B(i)}^*$$

Atès que $x \geq 0$ si substituïm v_{ij} per $\lfloor v_{ij} \rfloor$ podem escriure:

$$x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq x_{B(i)}^*$$

Ara el terme de l'esquerra de la desigualtat és un valor enter, doncs és suma de valors enters, i es pot arrodonir el terme independent:

$$x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor x_{B(i)}^* \rfloor \blacksquare$$

ii. La desigualtat és violada per la solució de la relaxació lineal x^*:

Sobre x^* sabem que $x_N^* = [0]$, llavors el tall de Gomory es redueix a la desigualtat

$$x_{B(i)}^* \leq \lfloor x_{B(i)}^* \rfloor$$

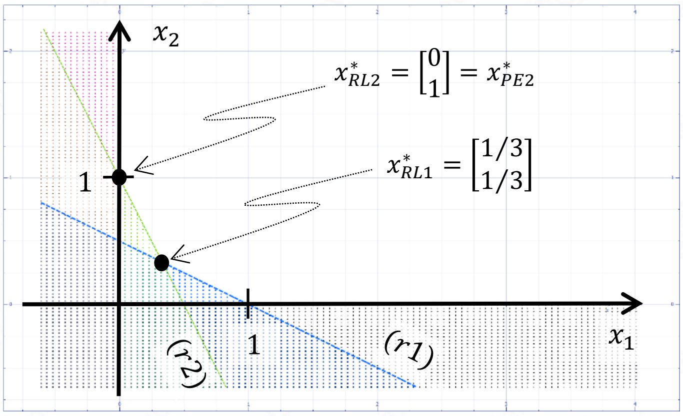
que és falsa si $x_{B(i)}^*$ és no entera $\blacksquare$.

SOLUCIÓ EXERCICI 87. Algorisme de ramificació i poda i plans secants.

Apartat a)

Ramificació i poda:

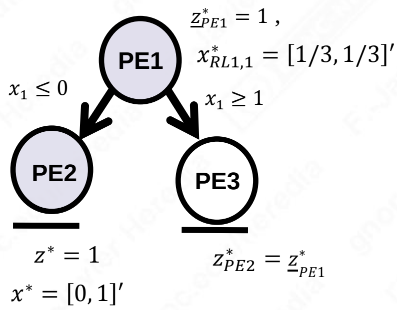
$$(PE1)\begin{cases} \min & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \geq 1 & (r1) \\ & 2x_1 & +x_2 & \geq 1 & (r2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, \text{ enteres} & \end{cases}$$



Inicialització: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

Iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Relaxació**: $x^*_{RL1} = [1/3 \quad 1/3]', z^*_{RL1} = 2/3 \Rightarrow \underline{z}_{PE1} = \lceil z^*_{RL1} \rceil = 1$
- Eliminació: no es pot.
- **Separació:** $x^*_1 = 1/3 \rightarrow$
  $\begin{cases}(PE2) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + x_1 \leq \lfloor 1/3 \rfloor = 0 \\ (PE3) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + x_1 \geq \lceil 1/3 \rceil = 1\end{cases} \rightarrow L \leftarrow \{(PE2),(PE3)\}$



Iteració 2: $L \leftarrow \{(PE2),(PE3)\}, \underline{z}_{PE1} = 1, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE2)$.
- **Relaxació**: $x^*_{RL2} = [0 \quad 1]', z^*_{RL1} = 1$
- **Eliminació:** $x^*_{RL2} = [0 \quad 1]' = x^*_{PE2} \Rightarrow$ s'elimina $(PE2)$:
  - $z^* \leftarrow z^*_{PE2} = 1, x^* \leftarrow x^*_{PE2}, L \leftarrow L\backslash\{(PE2)\} = \{(PE3)\}$
  - $z^* = \underline{z}_{PE1} \Rightarrow$ eliminem $(PE3)$: $L \leftarrow L \backslash\{(PE3)\} = \emptyset$

Iteració 3: $L = \emptyset \Rightarrow x^*_{PE1} = x^* = [0 \quad 1]', z^*_{PE1} = z^* = 1.$

Apartat b)

Gomory amb resolucions gràfiques:

1a iteració Gomory:

- Solució òptima de la relaxació lineal de (PE1), trobada gràficament: $x_{RL1} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3\\1/3\end{bmatrix}$
- x_{RL1} no entera $\Rightarrow$ tall de Gomory: es selecciona $x_1 = 1/3$

$$\mathcal{B} = \{1,2\}\,;\; B = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}\,;\; B^{-1} = \begin{bmatrix}-1/3 & 2/3\\2/3 & -1/3\end{bmatrix}\,;\; x_B = \begin{bmatrix}1/3\\1/3\end{bmatrix}$$

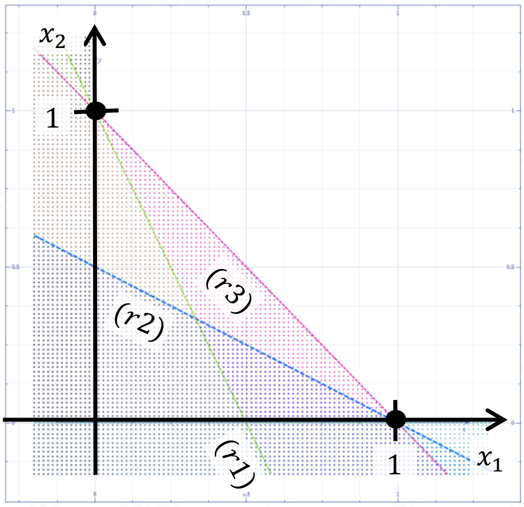
$$\mathcal{N} = \{3,4\}\,;\; A_N = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\,;\; V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}1/3 & -2/3\\-2/3 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$x_1 + \lfloor v_{13} \rfloor x_3 + \lfloor v_{14} \rfloor x_4 \leq \lfloor x_1^* \rfloor\,;\; x_1 + \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor x_3 + \left\lfloor \frac{-2}{3} \right\rfloor x_4 \leq \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor\,; x_1 - x_4 \leq 0 \rightarrow \boxed{x_1 + x_2 \geq 1 \ (3)}$$

2a iteració Gomory:

- Solució de la relaxació lineal de $(PE2)$: $x^*_{RL2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ entera $\Rightarrow$ $\boxed{x^*_{PE1} = x^*_{RL2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}$

Es pot veure que quan s'afegeix la restricció $(r3)$ al problema (PE1) s'obté la formulació ideal del problema:



Apartat c)

Gomory amb símplex dual:

1a iteració Gomory:

- Solució òptima de la relaxació lineal de (PE1), trobada gràficament: $x_{RL1} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3\\1/3\end{bmatrix}$
- x_{RL1} no entera $\Rightarrow$ tall de Gomory: es selecciona $x_1 = 1/3$

$$\mathcal{B} = \{1,2\}\,;\; B = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}\,;\; B^{-1} = \begin{bmatrix}-1/3 & 2/3\\2/3 & -1/3\end{bmatrix}\,;\; x_B = \begin{bmatrix}1/3\\1/3\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} = \{3,4\}\,;\; A_N = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\,;\; V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}1/3 & -2/3\\-2/3 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$x_1 + \lfloor v_{13}\rfloor x_3 + \lfloor v_{14}\rfloor x_4 \le \lfloor x_1^*\rfloor\,;\; x_1 + \left\lfloor\frac{1}{3}\right\rfloor x_3 + \left\lfloor\frac{-2}{3}\right\rfloor x_4 \le \left\lfloor\frac{1}{3}\right\rfloor\,;\; \boxed{x_1 - x_4 \le 0\;(r3)}$$

2a iteració Gomory:

- Solució de la relaxació lineal de (PE2): reoptimització amb el símplex dual a partir de $x^*_{RL1} = [x_1, x_2]' = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]'$ per adició de $x_1 - x_4 + x_5 = 0\;(r3)$
  - $\mathcal{B} = \{1,2,5\}, -a'_B B^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}-1/3 & 2/3 & 0\\2/3 & -1/3 & 0\\1/3 & -2/3 & 1\end{bmatrix}.$
  - $\mathcal{N} = \{3,4\}, A_N = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\\0 & -1\end{bmatrix}$
  - **Símplex dual, 1a iteració**: $\mathcal{B} = \{1,2,5\}\,, \mathcal{N} = \{3,4\}$
    - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p :

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 4\ v.b.sortint}$$

- Identificació de problema (D) il·limitat :

$$d_{r_N} = \beta_3 A_N = [1/3 \quad -2/3 \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{-1/3}^{d_{r_{N_3}}} & \overbrace{-1/3}^{d_{r_{N_4}}} \end{bmatrix} \ngeq 0$$

- Sel. VNB d'entrada q:

$$r' = r'_{RL1} = [0 \quad 0] - \overbrace{[1 \quad 1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}}^{\lambda' = [1/3 \quad 1/3]} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{1/3}^{r_3} & \overbrace{1/3}^{r_4} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\theta_D^* = \min\left\{ {}^{-r_j}\!/_{d_{r_{N_j}}} : j \in \mathcal{N}, v_j < 0 \right\} = \min\left\{ \frac{1/3}{1/3}, \frac{1/3}{1/3} \right\} = 1 \Longrightarrow \boxed{q = 3}$$

- Canvi de base i actualitzacions: $\mathcal{B} \leftarrow \{1, 2, 3\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$Bx_B = b, \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & & = & 1 \\ x_1 & & & = & 0 \end{cases} \rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

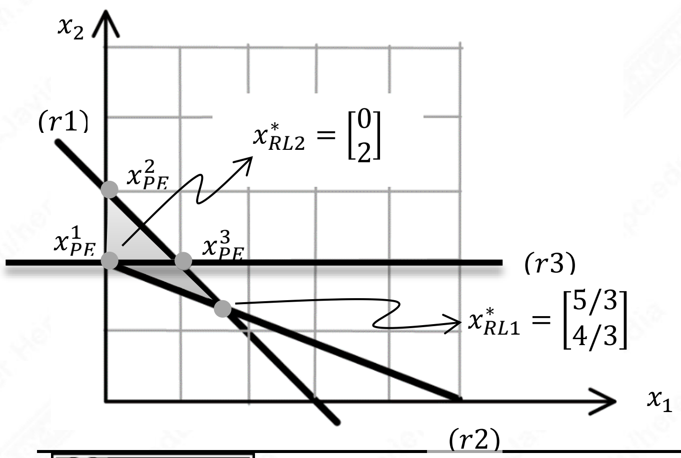
– **Símplex dual, 2a iteració:** $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}, \mathcal{N} = \{4, 5\}$
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_B \geq 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{òptim}}$

- $x^*_{RL2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ entera $\Rightarrow$ $\boxed{x^*_{PE1} = x^*_{RL2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$

SOLUCIÓ EXERCICI 88. Formulació ideal i algorisme de plans de tall.

Apartat a)

Com es pot apreciar a la representació gràfica de (PE), no és una formulació ideal, doncs el polítop factible de la relaxació lineal, K_{RL}, conté un pt. Extrem de components no enteres. La formulació ideal és aquella que té associada una regió factible de la RL, K_{RLI}, definida com la la combinació convexa de les tres solucions enteres de (PE): $K_{RLI} = CH(K_{PE}) = CH(x^1_{PE}, x^2_{PE}, x^3_{PE})$. Això es pot aconseguir afegint a la formulació de (PE)la desigualtat vàlida $x_2 \geq 2$:



$$(PEI) \begin{cases} \min & x_1 & +3x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & \frac{2}{5}x_1 & +x_2 & \geq 2 \\ & & x_2 & \geq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, enteres \end{cases}$$

Apartat b)

Passem (PE) a forma estàndard:

$$(PE)\begin{cases}\min & x_1 & +3x_2 & & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +x_3 & & =3 & (r1)\\ & 2x_1 & +5x_2 & & -x_4 & =10 & (r2)\\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0, enteres & \end{cases}$$

Prèviament al pas a la forma estàndard cal multiplicar la segona constricció per 5 per tal que la variable d'escreix x_4 sigui entera, doncs una de les hipòtesis en la que es basa la demostració de la validesa de la desigualtat de Gomory és que x és entera.

1a iteració Gomory:

- Solució òptima de la relaxació lineal de (PE1), trobada gràficament: $x_{RL1} = [x_1, x_2]' = \begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\ \frac{4}{3}\end{bmatrix}$
- x_{RL1} no entera ⇒ tall de Gomory: es selecciona $x_1 = 5/3$

$$\mathcal{B} = \{1,2\}\,;\ B = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 5\end{bmatrix}\,;\ B^{-1} = \begin{bmatrix}5/3 & -1/3\\ -2/3 & 1/3\end{bmatrix}\,;\ x_B = \begin{bmatrix}5/3\\ 4/3\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} = \{3,4\}\,;\ A_N = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\,;\ V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}5/3 & 1/3\\ -2/3 & -1/3\end{bmatrix}$$

$$x_1 + \lfloor v_{13}\rfloor x_3 + \lfloor v_{14}\rfloor x_4 \leq \lfloor x_1^*\rfloor\,;\ x_1 + \left\lfloor\frac{5}{3}\right\rfloor x_3 + \left\lfloor\frac{1}{3}\right\rfloor x_4 \leq \left\lfloor\frac{5}{3}\right\rfloor\,;\ x_1 + x_3 \leq 1\ (r3)$$

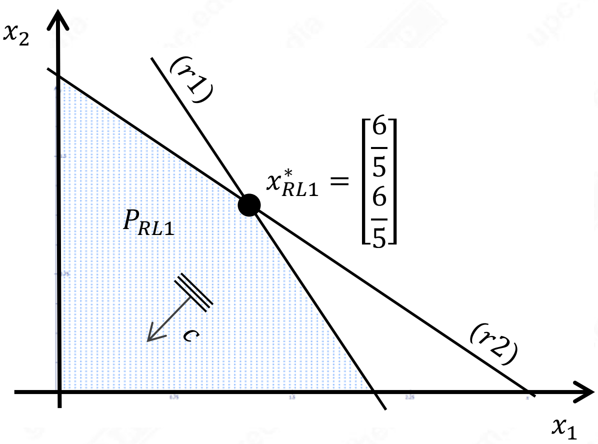
$$x_1 + x_3 \leq 1 \xrightarrow{(r1):\, x_3 = 3 - x_1 - x_2} \boxed{x_2 \geq 2\ (r3)}$$

2a iteració Gomory:

- solució de la relaxació lineal de (PE2): $x_{RL2}^* = [x_1, x_2]' = [0\ ,2]'$ entera ⇒ $\boxed{x_{PE}^* = x_{RL2}^* = [0{,}2]'}$. En aquest cas, Gomory identifica la formulació ideal en una iteració.

SOLUCIÓ EXERCICI 89. Algorisme de plans secants amb resolució gràfica (1).

$$(PE1)\begin{cases}\min & -x_1 & -x_2 & & \\ \text{s.a.:} & 3x_1 & +2x_2 & \leq 6 & (r1)\\ & 2x_1 & +3x_2 & \leq 6 & (r2)\\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, \text{enteres} & \end{cases}$$



1a iteració Gomory:

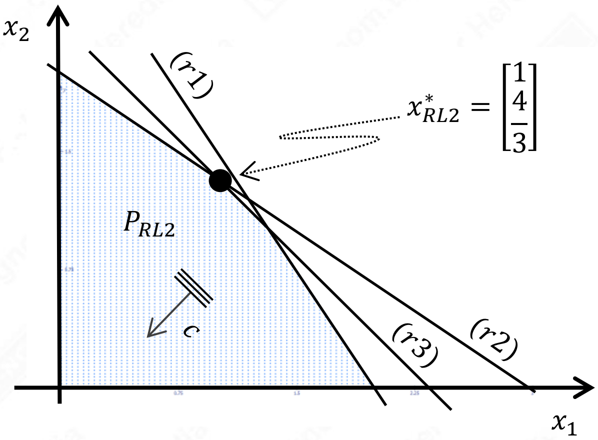
- La solució òptima de la relaxació lineal de $(PE1)$, trobada gràficament, és $x^*_{RL1} = [x^*_1, x^*_2]' = \begin{bmatrix} 6/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$ no entera: es defineix el primer tall de Gomory:
  - $\mathcal{B} = \{1,2\}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$; $x_B = \begin{bmatrix} 6/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$
  - $\mathcal{N} = \{3,4\}$; $A_N = I$; $V = B^{-1}I = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$
  - $x^*_{B(1)} = x^*_1$ no entera: tall de Gomory associat a $x_1 = 6/5$

$$x_1 + \lfloor v_{13} \rfloor x_3 + \lfloor v_{14} \rfloor x_4 \le \lfloor x^*_1 \rfloor \,;\; x_1 + \left\lfloor \frac{3}{5} \right\rfloor x_3 + \left\lfloor -\frac{2}{5} \right\rfloor x_4 \le \left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor \,;\; x_1 - x_4 \le 1$$

$$x_1 - x_4 \le 1 \xrightarrow{(r2):\, x_4 = 6 - 2x_1 - 3x_2} \boxed{3x_1 + 3x_2 \le 7 \;(r3)}$$

2a iteració Gomory:

$$(PE2) \begin{cases} \min & -x_1 & -x_2 & & \\ \text{s.a.:} & 3x_1 & +2x_2 & \le 6 & (r1) \\ & 2x_1 & +3x_2 & \le 6 & (r2) \\ & 3x_1 & +3x_2 & \le 7 & (r3) \\ & x_1, & x_2 & \ge 0, \text{ enteres} & \end{cases}$$



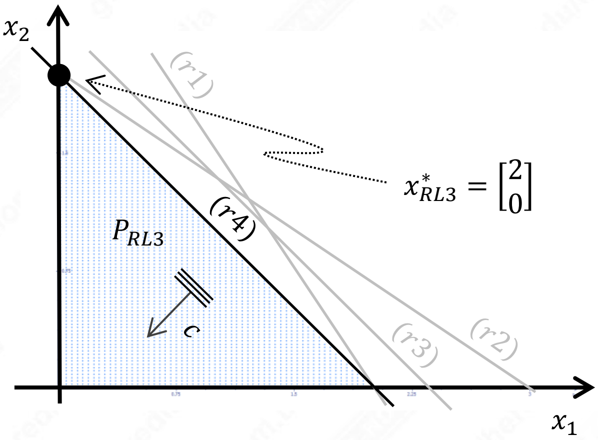
- La solució òptima de la relaxació lineal de $(PE2)$, trobada gràficament, és $x^*_{RL2} = [x^*_1, x^*_2]' = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}$ no entera (per simetria veiem que $x^*_{RL2} = [x^*_1, x^*_2]' = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ també és pt. extrem òptim): es defineix el segon tall de Gomory
  - $\mathcal{B} = \{1,2,3\}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 1 & 1 & -5/3 \end{bmatrix}$; $x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$
  - $\mathcal{N} = \{4,5\}$; $A_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2/3 \\ 1 & -5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$
  - $x^*_{B(2)} = x^*_2$ no entera: tall de Gomory associat a $x_2 = 4/3$

$$x_2 + \lfloor v_{24} \rfloor x_4 + \lfloor v_{25} \rfloor x_5 \le \lfloor x^*_2 \rfloor \,;\; x_2 + \lfloor 1 \rfloor x_4 + \left\lfloor -\frac{2}{3} \right\rfloor x_5 \le \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor \,;\; x_2 + x_4 - x_5 \le 1$$

$$x_2 + x_4 - x_5 \le 1 \xrightarrow[(r3):\, x_5 = 7 - 3x_1 - 3x_2]{(r2):\, x_4 = 6 - 2x_1 - 3x_2} \boxed{x_1 + x_2 \le 2 \;(r4)}$$

3a iteració Gomory:

$$(PE3)\begin{cases} \min & -x_1 & -x_2 & & \\ \text{s.a.:} & 3x_1 & +2x_2 & \leq 6 & (r1) \\ & 2x_1 & +3x_2 & \leq 6 & (r2) \\ & 3x_1 & +3x_2 & \leq 7 & (r3) \\ & x_1 & +x_2 & \leq 2 & (r4) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, \text{enteres} & \end{cases}$$

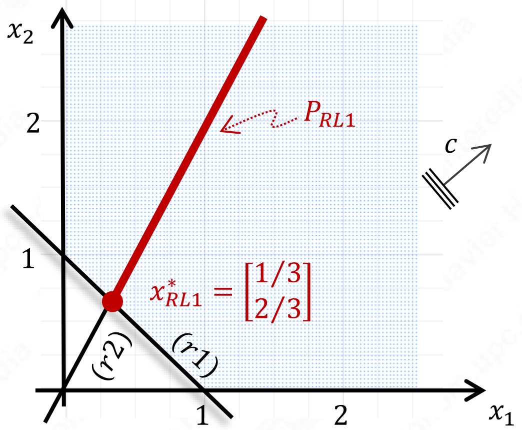


- Solució òptima de la relaxació lineal de $(PE3)$, trobada gràficament: $x^*_{RL3} = [x_1^*, x_2^*]' = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ entera: $x^*_{PE1} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$.

Un detall curiós és que el primer tall de Gomory $(r3)$: $3x_1 + 3x_2 \leq 7$ es podria haver expressant de forma equivalent com a $x_1 + x_2 \leq \frac{7}{3}$ i reforçat fent $x_1 + x_2 \leq \left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor = 2$, obtenint-se la formulació ideal en la primera iteració de Gomory.

SOLUCIÓ EXERCICI 90. Algorisme de plans secants amb resolució gràfica (2).

$$(PE1)\begin{cases} \min & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ & x_1 & +x_2 & \geq 1 & (r1) \\ & 2x_1 & -x_2 & = 0 & (r2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, x \in \mathbb{Z} & \end{cases}$$



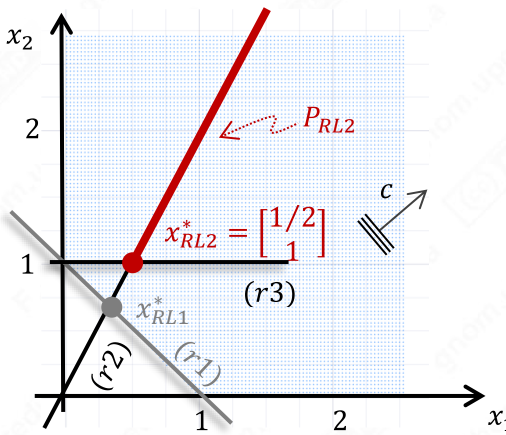
1a iteració Gomory:

- La solució òptima de la relaxació lineal de $(PE1)$, trobada gràficament, és $x^*_{RL1} = \begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3\\2/3\end{bmatrix}$ no entera: es defineix el primer tall de Gomory:
  - $\mathcal{B} = \{1,2\}$; $B = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix}1/3 & 1/3\\2/3 & -1/3\end{bmatrix}$; $x_B = \begin{bmatrix}1/3\\2/3\end{bmatrix}$
  - $\mathcal{N} = \{3\}$; $A_N = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$; $V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}-1/3\\-2/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\end{bmatrix}$
  - $x^*_{B(1)} = x_1^*$ no entera: tall de Gomory associat a $x_1 = 1/3$

$$x_1 + \lfloor v_{13} \rfloor x_3 \leq \lfloor x_1^* \rfloor \,;\; x_1 + \left\lfloor \frac{-1}{3} \right\rfloor x_3 \leq \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor \,;\; x_1 - x_3 \leq 0 \xrightarrow{(r2):\, -x_3 = 1 - x_1 - x_2} \boxed{x_2 \geq 1 (r3)}$$

2a iteració Gomory:

$$(PE2)\begin{cases}\min & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ & x_1 & +x_2 & \geq 1 & (r1) \\ & 2x_1 & -x_2 & = 0 & (r2) \\ & & x_2 & \geq 1 & (r3) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, x \in \mathbb{Z} & \end{cases}$$

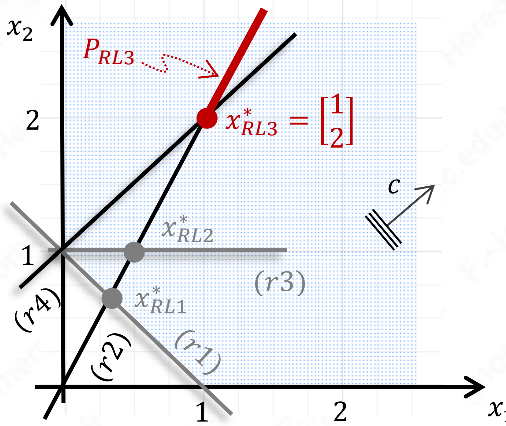


- La solució òptima de la relaxació lineal de $(PE2)$ trobada gràficament, és $x^*_{RL2} = \begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\1\end{bmatrix}$ no entera: es defineix el segon tall de Gomory (sense tenir en compte la restricció redundant $(r1)$)
  - $\mathcal{B} = \{1,2\}$; $B = \begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$; $x_B = \begin{bmatrix}1/2\\1\end{bmatrix}$
  - $\mathcal{N} = \{4\}$; $A_N = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$; $V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_{14}\\v_{24}\end{bmatrix}$
  - $x^*_{B(1)} = x_1^*$ no entera: tall de Gomory associat a $x_1 = 1/2$

$$x_1 + \lfloor v_{14}\rfloor x_4 \leq \lfloor x_1^*\rfloor \; ; \; x_1 + \lfloor -1/2\rfloor x_4 \leq \left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor \; ; \; x_1 - x_4 \leq 0 \xrightarrow{(r3):\, -x_4 = 1 - x_2} \boxed{x_1 - x_2 \leq -1 \; (r4)}$$

3a iteració Gomory:

$$(PE3)\begin{cases}\min & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ & x_1 & +x_2 & \geq 1 & (r1) \\ & 2x_1 & -x_2 & = 0 & (r2) \\ & & x_2 & \geq 1 & (r3) \\ & x_1 & -x_2 & \leq -1 & (r4) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, x \in \mathbb{Z} & \end{cases}$$



Solució òptima de la relaxació lineal de $(PE3)$, trobada gràficament: $x^*_{RL3} = \begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ entera: $\boxed{x^*_{PE1} = x^*_{RL3} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}.}$

SOLUCIÓ EXERCICI 91. Algorismes de plans secants amb símplex dual (1).

Apartat c)

$$x_1 + \lfloor v_{13}\rfloor x_3 + \lfloor v_{14}\rfloor x_4 \leq \lfloor x_1^*\rfloor \; ; \; x_1 + \left\lfloor\frac{2}{7}\right\rfloor x_3 + \left\lfloor\frac{-3}{7}\right\rfloor x_4 \leq \left\lfloor\frac{11}{7}\right\rfloor \; ; \; \boxed{x_1 - x_4 \leq 1}$$

Apartat d)

Resolució de $(RL2)$ a partir de la base $\mathcal{B} = \{1,2,5\}$

$$(RL2)\begin{cases} \min & 4x_1 & +5x_2 & & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +3x_2 & -x_3 & & & = 5 \\ & 3x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & = 7 \\ & x_1 & & & -x_4 & +x_5 & = 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

Càlcul de la nova inversa de la base: $B^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a'_{B,3}B^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/7 & 3/7 & 0 \\ 3/7 & -1/7 & 0 \\ 2/7 & -3/7 & 1 \end{bmatrix}$

Símplex dual, 1a iteració: $\mathcal{B} = \{1,2,5\}, \mathcal{N} = \{3,4\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p :

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{8}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 5\ v.b.\,sortint}$$

- Identificació de problema (D) il·limitat :

$$v = \beta_3 A_N = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix} \ngeq 0$$

- Sel. VNB d'entrada q: $r' = [0 \quad 0] - [4 \quad 5 \quad 0]B^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1]$

$$\theta_D^* = max\left\{{}^{r_j}/_{v_j} : j \in N, v_j < 0\right\} = max\{{}^{r_3}/_{v_3} = -7/2, {}^{r_4}/_{v_4} = -7/4\} \Longrightarrow \boxed{q = 4}$$

- Canvi de base i actualitzacions: $\mathcal{B} \leftarrow \{1,2,4\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$Bx_B = b, \begin{cases} x_1 & +3x_2 & & = & 5 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_4 & = & 7 \\ x_1 & & -x_4 & = & 1 \end{cases} \rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Símplex dual, 2a iteració: $\mathcal{B} = \{1,2,4\}, \mathcal{N} = \{3,5\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_B \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{òptim}}$

Criteri d'acabament de p.t. de Gomory: $x^*_{RL2} \in K_{PE} \Rightarrow \grave{o}ptim$

SOLUCIÓ EXERCICI 92. Algorismes de plans secants amb símplex dual (2).

Apartat a)

$$x_2 + \lfloor v_{23} \rfloor x_3 + \lfloor v_{24} \rfloor x_4 \leq \lfloor x_2^* \rfloor ;\ x_2 + \left\lfloor \frac{-3}{7} \right\rfloor x_3 + \left\lfloor \frac{1}{7} \right\rfloor x_4 \leq \left\lfloor \frac{8}{7} \right\rfloor ;\ \boxed{x_2 - x_3 \leq 1}$$

Apartat b)

2a iteració Gomory. Resolució de (RL2) a partir de la base $\mathcal{B} = \{1,2,5\}$.

$$(RL2)\begin{cases}\min & 4x_1 & +5x_2 & & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +3x_2 & -x_3 & & & =5 \\ & 3x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & =7 \\ & & x_2 & -x_3 & & +x_5 & =1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0\end{cases}$$

Càlcul de la nova inversa de la base:

$$a'_{B,3} = [0 \quad 1] \;\; ; \;\; B^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{B}^{-1} & 0 \\ -\mathrm{a'}_{\mathrm{B},3}\mathrm{B}^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/7 & 3/7 & 0 \\ 3/7 & -1/7 & 0 \\ -3/7 & 1/7 & 1 \end{bmatrix}$$

Símplex dual, 1a iteració: $\mathcal{B} = \{1,2,5\}, \mathcal{N} = \{3,4\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p :

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 11/7 \\ 8/7 \\ -1/7 \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 5 \; v.b.sortint}$$

- Identificació de problema (D) il·limitat :

$$v = \beta_3 A_N = [-3/7 \quad 1/7 \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [-4/7 \quad -1/7] \ngeq 0$$

- Sel. VNB d'entrada q:

$$\theta_D^* = max\left\{{}^{r_j}/_{v_j} : j \in N \,, v_j < 0\right\} = max\{{}^{r_3}/_{v_3} = -1.75, {}^{r_4}/_{v_4} = -7\} \Longrightarrow \boxed{q = 3}$$

- Canvi de base i actualitzacions:

$$\mathcal{B} \leftarrow \{1,2,3\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 & -3/4 \\ 3/4 & -1/4 & -7/4 \end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

Símplex dual, 2a iteració: $\mathcal{B} = \{1,2,3\}, \mathcal{N} = \{4,5\}$

- Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_B \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{òptim}}$

Apartat c)

3a iteració Gomory. Resolució de (RL3) a partir de la base $\mathcal{B} = \{1,2,3\}$

Variable amb part fraccional major: $x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} \rightarrow x_1$

Tall de Gomory associat a x_1:

$$V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 & -3/4 \\ 3/4 & -1/4 & -7/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -3/4 \\ 1/4 & -7/4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + \lfloor v_{14} \rfloor x_4 + \lfloor v_{15} \rfloor x_5 \leq \lfloor x_1^* \rfloor \; ; \; x_1 + \left\lfloor \frac{-1}{2} \right\rfloor x_4 + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor x_5 \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \; ; \; \boxed{x_1 - x_4 \leq 1}$$

Problema (PE3):

$$(PE3)\begin{cases} \min & 4x_1 & +5x_2 & & & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +3x_2 & -x_3 & & & & = 5 \\ & 3x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & & = 7 \\ & & x_2 & -x_3 & & +x_5 & & = 1 & \text{(tall de Gomory it. 1)} \\ & x_1 & & & -x_4 & & +x_6 & = 1 & \text{(tall de Gomory it. 2)} \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0, \text{ enteres} \end{cases}$$

SOLUCIÓ EXERCICI 93. Algorisme de ramificació i tall amb resolucions gràfiques (1).

Apartat a)

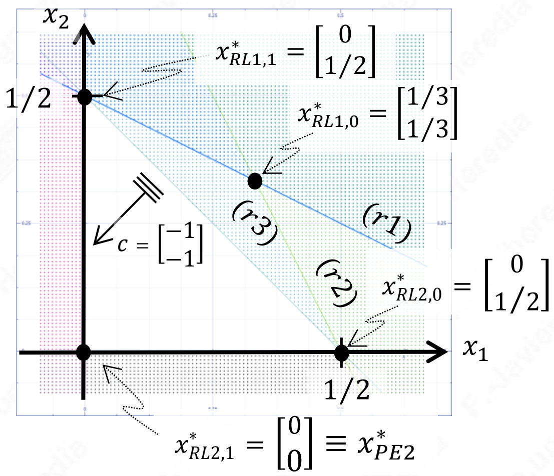
Representació gràfica:

$$(PE1)\begin{cases} \min & -x_1 & -x_2 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \leq 1 & (r1) \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq 1 & (r2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, \text{ enteres} \end{cases}$$

Inicialització: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

Iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- Resolució de $(\boldsymbol{RL1})$ amb un tall de Gomory:
  - Resolució de $(RL1{,}0)$: $x^*_{RL1,0} = [1/3 \quad 1/3]', z^*_{RL1,0} = -2/3 \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := \lceil z^*_{RL1,0} \rceil = 0$
  - Tall de Gomory sobre $x^*_{RL1,0}$ associat a x_1:
    - $\mathcal{B} = \{1,2\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_N = I, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$
    - $x_1 + \lfloor -1/3 \rfloor x_3 + \lfloor 2/3 \rfloor x_4 \leq \lfloor 1/3 \rfloor \rightarrow x_1 - x_3 \leq 0 \xrightarrow{(r1)} \boxed{x_1 + x_2 \leq 1/2 \ \ (r3)}$



  - Resolució de $(RL1{,}1) = (RL1{,}0) + (r3)$: $x^*_{RL1,1} = [0 \quad 1/2]', z^*_{RL1,1} = -1/2 \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := \lceil z^*_{RL1,1} \rceil = 0$.
- Eliminació: no es pot.
- **Separació:** $x_2^* = 1/2 \rightarrow \begin{cases} (PE2) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + (\boldsymbol{r3}) + x_2 \leq \lfloor 1/2 \rfloor = 0 \\ (PE3) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + (\boldsymbol{r3}) + x_2 \geq \lceil 1/2 \rceil = 1 \end{cases} \rightarrow L \leftarrow \{(PE2), (PE3)\}$

Iteració 2: $L \leftarrow \{(PE2), (PE3)\}, \underline{z}_{PE1} = 0, z^* = +\infty$

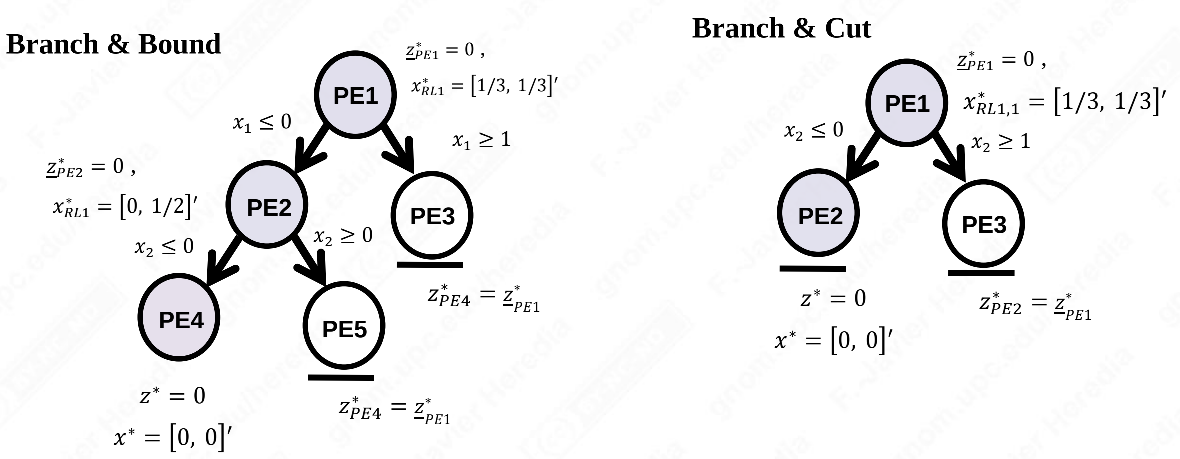
- **Selecció**: Seleccionem $(PE2)$. En aquest problema les constriccions $(r1)$ i $(r2)$ són redundants, i la fita $x_2 \leq 0$ fixa el valor de la variable x_2 a zero. Així doncs, el problema $(PE2)$ es pot expressar com el següent problema en una variable: $(PE2)\ \min_{x_1}\{-x_1 : 0 \leq x_1 \leq 1/2, \text{entera}\}$.

- Resolució de $(\boldsymbol{RL2})$ amb un tall de Gomory:
  - $x^*_{RL2,0} = [1/2 \quad 0]', z^*_{RL2,0} = -1/2 \Rightarrow \underline{z}_{PE2} := \lceil z^*_{RL2,0} \rceil = 0$
  - Tall de Gomory sobre $x^*_{RL2,0}$ associat a x_1: multiplicant $(r3)$ per 2 per tal que la folga sigui entera $(2x_1 + x_5 = 2 \ \ (r3))$, tenim:
    - $\mathcal{B} = \{1\}, B = [2], A_N = [1], V = B^{-1}A_N = [1/2]$
    - $x_1 + \lfloor 1/2 \rfloor x_5 \leq \lfloor 1/2 \rfloor \rightarrow \boxed{x_1 \leq 0 \ (r4)}$
  - Resolució de $(RL2{,}1) = (RL2{,}0) + (r4)$: $x^*_{RL2,1} = [0 \quad 0]', z^*_{RL2,1} = 0 \Rightarrow \underline{z}_{PE2} := 0$
- **Eliminació:** $x^*_{RL2,1} = [0 \quad 0]' = x^*_{PE2} \Rightarrow$ s'elimina $(PE2)$:
  - $z^* \leftarrow z^*_{PE2} = 0, x^* \leftarrow x^*_{PE2}, L \leftarrow L \backslash \{(PE2)\} = \{(PE3)\}$
  - $z^* = \underline{z}_{PE1} \Rightarrow$ eliminem (PE3): $L \leftarrow L \backslash \{(PE3)\} = \emptyset$

Iteració 3: $L = \emptyset \Rightarrow x^*_{PE1} = x^* = [0 \quad 0]', z^*_{PE1} = z^* = 0.$

Apartat b)

Comparativa B&B – B&C:



SOLUCIÓ EXERCICI 94. Algorisme de ramificació i tall amb resolucions gràfiques (2).

Apartat c)

$$(PE1)\begin{cases} \min & x_1 & -x_2/2 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \leq 2 & (r1) \\ & 3x_1 & +x_2 & \geq 3 & (r2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, \text{enteres} & \end{cases}$$

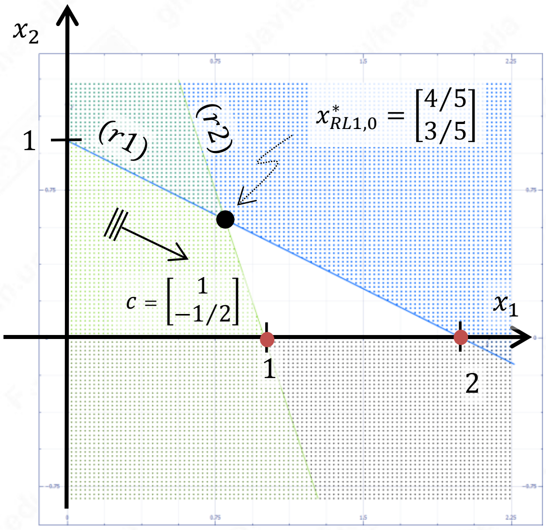
Inicialització: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

Iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

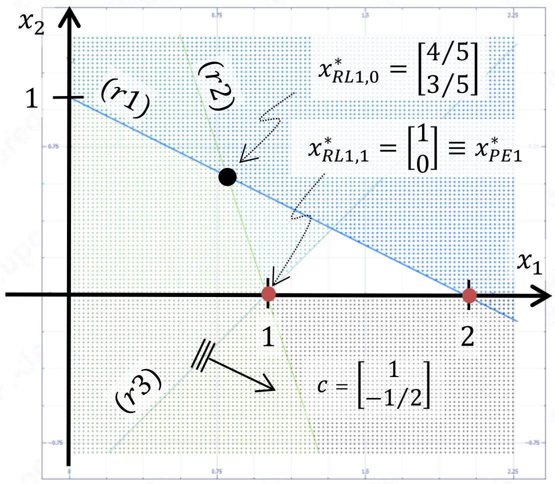
- **Selecció**: $(PE1)$.
- Resolució de $(\boldsymbol{RL1})$ amb un tall de Gomory:
  - Resolució de $(RL1{,}0)$: $x^*_{RL1,0} = [4/5 \quad 3/5]', z^*_{RL1,0} = 1/2 \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := 1/2$
  - Tall de Gomory sobre $x^*_{RL1,0}$ associat a x_1:
    - $\mathcal{B} = \{1,2\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{bmatrix}$
    - $A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} -1/5 & -2/5 \\ 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$

- ○ $x_1 + \lfloor -1/5 \rfloor x_3 + \lfloor -2/5 \rfloor x_4 \le \lfloor 4/5 \rfloor \to x_1 - x_3 - x_4 \le 0 \overset{(r1)}{\xrightarrow{(r2)}} \boxed{-x_1 + x_2 \le -1\ (r3)}$
  - Resolució de $(RL1{,}1) = (RL1{,}0) + (r3)$: $x^*_{RL1,1} = [1 \quad 0]', z^*_{RL1,1} = 1 \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := 1$.
- **Eliminació:** $x^*_{RL1,1} = [1 \quad 0]' = x^*_{PE1} \Rightarrow$ s'elimina $(PE1)$:
  - $z^* \leftarrow z^*_{PE1} = 1, x^* \leftarrow x^*_{PE1}, L \leftarrow L \backslash \{(PE1)\} = \emptyset$

Iteració 2: $L = \emptyset \Rightarrow x^*_{PE1} = x^* = [1 \quad 0]', z^*_{PE1} = z^* = 1$.



Gràfica apartat a): $(RL1{,}0)$.



Gràfic apartat a): $(RL1{,}1)$

Apartat d)

Branch&Bound:

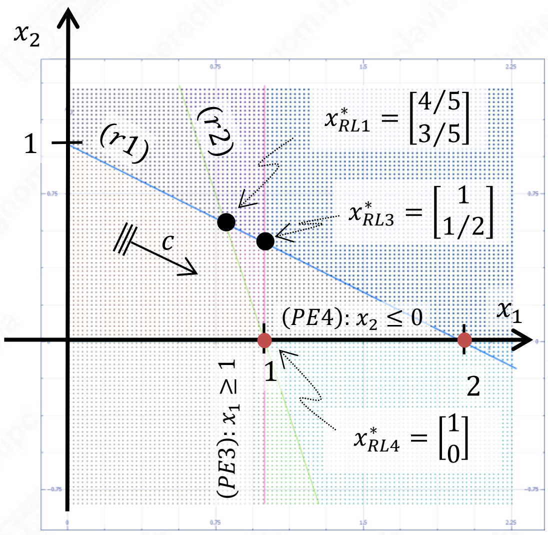
Inicialització: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

Iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de ($RL1$)**: $x^*_{RL1} = [4/5 \quad 3/5]', z^*_{RL1} = 1/2 \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := 1/2$
- **Eliminació:** no es pot.
- **Separació:** $x^*_1 = 4/5 \to$
$$\begin{cases} (PE2) \overset{\text{def}}{=} (PE1) + x_1 \le \lfloor 4/5 \rfloor = 0 \\ (PE3) \overset{\text{def}}{=} (PE1) + x_1 \ge \lceil 4/5 \rceil = 1 \end{cases}$$
$$L \leftarrow \{(PE2), (PE3)\}$$

Iteració 2: $L = \{(PE2), (PE3)\}, \underline{z}_{PE1} = 1/2, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE2)$.
- **Resolució de ($RL2$)**: infactible
- **Eliminació:** $K_{PLE2} = \emptyset \Rightarrow L \leftarrow \{(PE3)\}$



Gràfic apartat b): B&B

Iteració 3: $L = \{(PE3)\}, \underline{z}_{PE1} = 1/2, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE3)$.
- **Resolució de** $(\boldsymbol{RL3})$: $x^*_{RL3} = [1 \quad 1/2]', z^*_{RL3} = 3/4 \Rightarrow \underline{z}_{PE3} := 3/4$
- **Eliminació**: no es pot.
- **Separació:** $x^*_2 = 1/2 \rightarrow \begin{cases} (PE4) \stackrel{\text{def}}{=} (PE3) + x_2 \leq \lfloor 1/2 \rfloor = 0 \\ (PE5) \stackrel{\text{def}}{=} (PE3) + x_2 \geq \lceil 1/2 \rceil = 1 \end{cases} \rightarrow L \leftarrow \{(PE4), (PE5)\}$

Iteració 4: $L = \{(PE4), (PE5)\}$, $\underline{z}_{PE1} = 1/2, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE4)$
- **Resolució de** $(\boldsymbol{RL4})$: $(RL4) = \min\left\{x_1 - \frac{x_2}{2} : 1 \leq x_1 \leq 2, x_2 = 0\right\}$: $x^*_{RL4} = [1 \quad 0]', z^*_{RL4} = 1 \Rightarrow$ $\underline{z}_{PE4} := 1$
- **Eliminació:** $x^*_{RL4} = [1 \quad 0]' \subset K_{PE4}$: $x^*_{PE4} = [1 \quad 0]' \Rightarrow$ s'elimina $(PE4)$:
  - $z^* \leftarrow z^*_{PE4} = 1, x^* \leftarrow x^*_{PE4}, L \leftarrow L \backslash \{(PE4)\} = \{(PE5)\}$

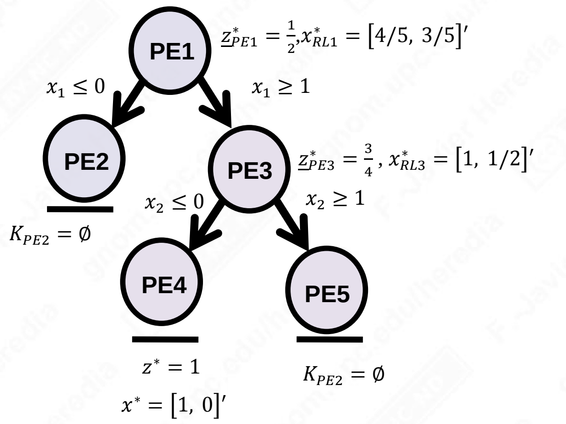
Iteració 5: $L = \{(PE5)\}, \underline{z}_{PE1} = 1/2, z^* = 1$

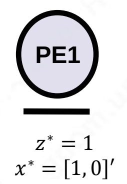
- **Selecció**: $(PE5) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + x_1 \geq 1 + x_2 \geq 1$.
- **Resolució de** $(\boldsymbol{RL5})$: infactible
- **Eliminació:** $K_{PLE5} = \emptyset \Rightarrow L \leftarrow \emptyset$

Iteració 6: $L = \emptyset$, $\boxed{x^*_{PE1} = x^* = [1 \quad 0]', z^* = 1}$

Comparativa B&B – B&C:

Branch & Bound





Branch & Cut

En el cas del B&B el cost computacional seria:

- Una resolució completa del símplex (càlcul de x^*_{RL1}).
- Tres reoptimitzacions amb el símplex dual (nodes 2,3 i 4)

En el cas del B&C el cost computacional seria:

- Una resolució completa del símplex (càlcul de $x^*_{RL1,0}$).
- Una reoptimització amb el símplex dual (càlcul de $x^*_{RL1,1}$).

Així doncs, observem que amb el B&C ens estalviem dues reoptimitzacions amb el símplex dual.

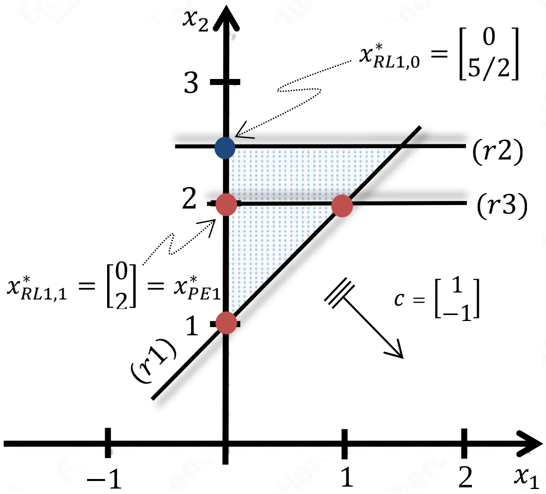
SOLUCIÓ EXERCICI 95. Algorisme de ramificació i tall amb resolucions gràfiques (3).

Representació gràfica:

$$(PE1)\begin{cases} \min & x_1 & -x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & +x_3 & & = -1 \\ & & 2x_2 & & +x_4 & = 5 \\ & x_1, & x_2 & & & \geq 0, enteres \end{cases}$$

Iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de $(RL1)$ amb un tall de Gomory**:
  - Resolució de $(RL1{,}0)$: $x^*_{RL1,0} = [0 \quad 5/2]', z^*_{RL1,0} = -\frac{5}{2} \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := -2$
  - Tall de Gomory sobre $x^*_{RL1,0}$ associat a x_2:
    - $\mathcal{B} = \{2,3\}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$
    - $A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$
    - $x_2 + \lfloor 1/2 \rfloor x_4 \leq \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightarrow \boxed{x_2 \leq 2\ (r3)}$
  - Resolució de $(RL1{,}1) = (RL1{,}0) + (r3)$: $x^*_{RL1,1} = [0 \quad 2]', z^*_{RL1,1} = -2 \Rightarrow \underline{z}_{PE1} := -2$.



Gràfic apartat b)

- **Eliminació:** $x^*_{RL1,1} = [0 \quad 2]' = x^*_{PE1} \Rightarrow$ s'elimina $(PE1)$: $z^* \leftarrow z^*_{PE1} = -2, x^* \leftarrow x^*_{PE1}, L \leftarrow L \backslash \{(PE1)\} = \emptyset$

Iteració 2: $L = \emptyset \Rightarrow x^*_{PE1} = x^* = [0 \quad 2]', z^*_{PE1} = z^* = -2$.

SOLUCIÓ EXERCICI 96. Algorisme de ramificació i tall amb resolucions gràfiques (4).

$$(PE1)\begin{cases} \min & -x_1 & & & & \\ \text{s.a.:} & & & & & \\ (r1) & x_1 & -x_2 & +x_3 & & = -1 \\ (r2) & 2x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = 5 \\ & x_1, & x_2 & & & \geq 0, enteres \end{cases}$$

Iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de $(RL1)$ amb un tall de Gomory**:
  - Resolució gràfica de $(RL1{,}0)$: $x^*_{RL1,0} = [3/4 \quad 7/4]', z^*_{RL1,0} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \underline{z}^*_{PE1} := 0$
    - Tall de Gomory sobre $x^*_{RL1,0}$ associat a x_1:
      - $\mathcal{B} = \{1,2\}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$
      - $\mathcal{N} = \{3,4\}, A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$

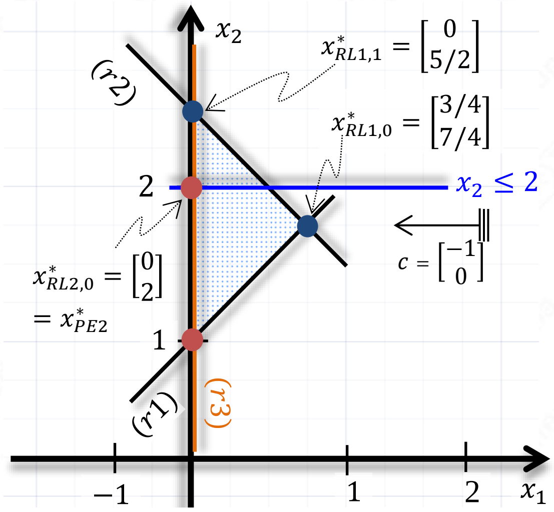
  - $x_1 + \lfloor 1/2 \rfloor x_3 + \lfloor 1/4 \rfloor x_4 \le \left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor \rightarrow \boxed{x_1 \le 0\ (r3)}$
- Resolució de $(RL1{,}1) = (RL1{,}0) + (r3)$: reoptimització amb el símplex dual a partir de $x^*_{RL1,0} = [x_1, x_2]' = [3/4 \quad 7/4]'$ per addició de $x_1 + x_5 = 0\ (r3) \rightarrow a_{m+1} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$
  - $\mathcal{B} = \{1,2,5\},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a_{B_{m+1}} B^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 0 \\ -1/2 & -1/4 & 1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 7/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}.$
  - $\mathcal{N} = \{3,4\}, A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r' = [0 \quad 0] - [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \Big[\overbrace{1/2}^{r_3} \quad \overbrace{1/4}^{r_4} \Big] \ge 0$
  - **Símplex dual, 1a iteració**: $\mathcal{B} = \{1,2,5\}, \mathcal{N} = \{3,4\}$
    - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p :
      $$x_B = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 7/4 \\ -3/4 \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 5 \text{ VB sortint}}$$
    - Identificació de problema (D) il·limitat :
      $$d'_{r_N} = \beta_3 A_N = [-1/2 \quad -1/4 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [-1/2 \quad -1/4] \ngeq 0$$
    - Sel. VNB d'entrada q:
      $$\theta_D^* = \min\left\{ -r_j / d_{r_{N_j}} : j \in \mathcal{N}, d_{r_{N_j}} < 0 \right\} = \min\left\{ \frac{-1/2}{-1/2}, \frac{-1/4}{-1/4} \right\} = 1 \Longrightarrow \boxed{q = 3}$$
    - Canvi de base i actualitzacions:
      $$\mathcal{B} \leftarrow \{1,2,3\}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow B x_B = b, \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & 2x_2 & & = & 5 \\ x_1 & & & = & 0 \end{cases} \rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$
  - **Símplex dual, 2a iteració: $\boldsymbol{\mathcal{B} = \{1,2,3\}, \mathcal{N} = \{4,5\}}$**
    - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_B \ge 0 \Rightarrow \boxed{\text{òptim}}$
- $\boxed{x^*_{RL1,1} = [0 \quad 5/2]', z^*_{RL1,1} = 0 \Rightarrow \underline{z}^*_{PE1} := 0}$.

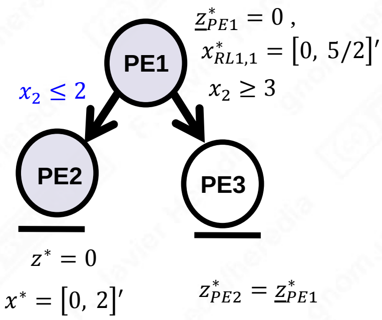
- **Eliminació:** no es pot.
- **Separació:** $x_2^* = 5/2 \rightarrow \begin{cases} (PE2) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + (r3) + \boldsymbol{x_2 \le \lfloor 5/2 \rfloor = 2} \\ (PE3) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + (r3) + x_2 \ge \lceil 5/2 \rceil = 3 \end{cases} \rightarrow L \leftarrow \{(PE2), (PE3)\}$

Iteració 2: $L = \{(PE2), (PE3)\}, \underline{z}^*_{PE1} = 0, z^* = +\infty.$

- **Selecció**: $(PE2)$.
- **Resolució de $(RL2)$ amb un tall de Gomory**:
  - Resolució gràfica de $(RL2{,}0)$: $x^*_{RL2,0} = [0 \quad 2]', z^*_{RL2,0} = 0$
- **Eliminació:** $x^*_{RL2,0} = [0 \quad 2]' \subset K_{PE2}: x^*_{PE2} = [0 \quad 2]' \Rightarrow$ s'elimina (PE2):
  - $z^* \leftarrow z^*_{PE2} = 0, x^* \leftarrow x^*_{PE2}, L \leftarrow L \backslash \{(PE2)\} = \{(PE3)\}$
  - $z^* = \underline{z}^*_{PE1} = 0 \Rightarrow$s'elimina $(PE3)$: $L \leftarrow L \backslash \{(PE3)\} = \emptyset$

Iteració 3: $L = \emptyset \Rightarrow \boxed{x^*_{PE1} = x^* = [0 \quad 2]',\ z^*_{PE1} = z^* = 0}$





SOLUCIÓ EXERCICI 97. Algorisme de plans secants i B&B amb resolucions gràfiques.

Aparat a)

1a iteració Gomory:

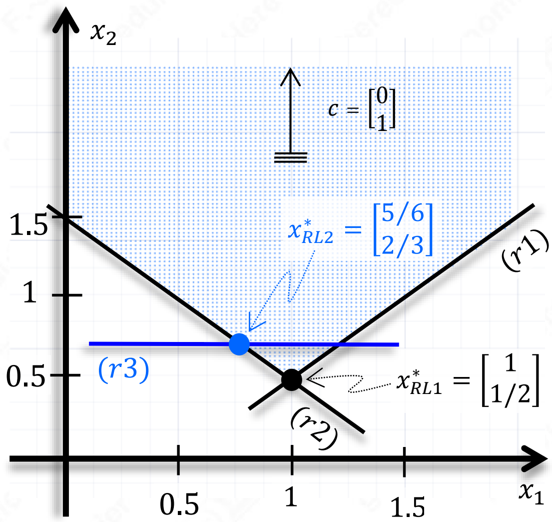
- Solució òptima de la relaxació lineal de $(PE1)$, trobada gràficament: $x^*_{RL1} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$
- x_{RL1} no entera ⇒ tall de Gomory: es selecciona $x_2 = 1/2$

$$\mathcal{B} = \{1,2\}\ ;\ B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix};\ B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}; x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} = \{1,2\}; A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$x_2 + \lfloor v_{23} \rfloor x_3 + \lfloor v_{24} \rfloor x_4 \le \lfloor x_2^* \rfloor$$

$$x_2 + \left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor x_3 + \left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor x_4 \le \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor\ ;\ \boxed{x_2 - x_3 - x_4 \le 0\ (r3)}$$



$x_2 - x_3 - x_4 \le 0 \rightarrow x_2 \ge \frac{2}{3}\ (r3)$

Apartat b)

Solució òptima del problema relaxat de la segona iteració de Gomory per reoptimització amb l'algorisme del símplex dual a partir de x^*_{RL1}:

- Problema relaxat de la segona iteració de Gomory:

$$(RL2)\begin{cases}\min & x_2 \\ \text{s.a.:} \\ & 2x_1 \quad -2x_2 \quad +x_3 \qquad\qquad\qquad = \quad 1 \quad (r1) \\ & 2x_1 \quad +2x_2 \qquad\quad -x_4 \qquad\quad = \quad 3 \quad (r2) \\ & \qquad\quad x_2 \quad -x_3 \quad -x_4 \quad +x_5 \quad = \quad 0 \quad (r3) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \quad \geq \quad 0 \end{cases}$$

- Reoptimització amb el símplex dual a partir de x^*_{RL1} per adició de $x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1\ (r3) \rightarrow a_{m+1} = a_3 = [0 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1]$, $a_{\mathcal{B},3} = [0 \quad 1]$
  - **Càlculs previs:** $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a_{\mathcal{B},3}B^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 1 \end{bmatrix}$, $x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$.

$$\mathcal{N} = \{3,4\}, A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, r' = r'_{RL1} = [0 \quad 0] - [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \geq 0$$

  - **Símplex dual, 1a iteració**: $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}, \mathcal{N} = \{3, 4\}$
    - Identificació de SBF òptima i selecció de la VB de sortida p :
$$x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 5 \text{ VB sortint}}$$
    - Identificació de problema (D) il·limitat :
$$d'_{r_N} = \beta_3 A_N = [1/4 \quad -1/4 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = [-3/4 \quad -3/4] \ngeq 0$$
    - Sel. VNB d'entrada q:
$$\theta^*_D = \min_{j \in \mathcal{N}, d_{r_{N_j}} < 0} \left\{ -r_j / d_{r_{N_j}} \right\} = \min \left\{ \frac{-1/4}{-3/4}, \frac{-1/4}{-3/4} \right\} = 1/3 \Rightarrow \boxed{q = 3}$$
    també s'hauria pogut triar $q = 4$.
    - Canvi de base i actualitzacions:
$$\mathcal{B} \leftarrow \{1, 2, 3\}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow Bx_B = b, \begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & & = & 3 \\ & x_2 & -x_3 & = & 0 \end{cases} \rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 5/6 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$
  - **Símplex dual, 2a iteració**: $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}, \mathcal{N} = \{4, 5\}$
    - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_B \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{òptim}}$
- $\boxed{x^*_{RL2} = \begin{bmatrix} 5/6 \\ 2/3 \end{bmatrix}}$ Alternativament, si s'hagués pres x_4 com a variable d'entrada, la solució seria $x^*_{RL2} = \begin{bmatrix} 7/6 \\ 2/3 \end{bmatrix}$.

Apartat c)
Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de ramificació i tall (Branch&Cut):

$$(PE1)\left\{\begin{array}{lllllcll}\min & x_2 & & & & & & \\ \text{s.a.:} & & & & & & & \\ & 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & 1 & (r1) \\ & 2x_1 & +2x_2 & & -x_4 & = & 3 & (r2) \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \quad x_5 & \geq & 0, x \in \mathbb{Z} & \end{array}\right.$$

Iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de $(RL1)$ amb un tall de Gomory** (dels apartats anteriors):

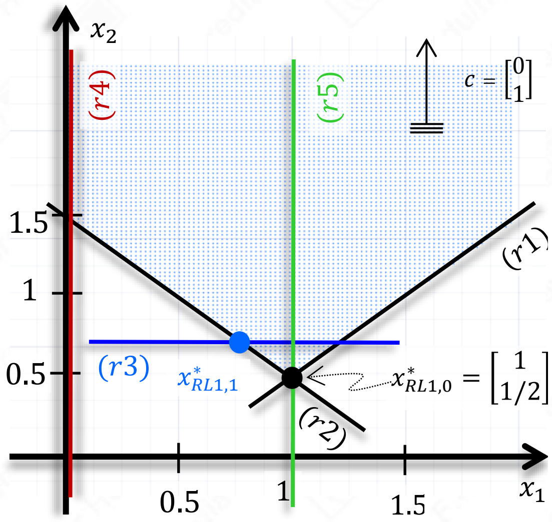
$$x^*_{RL1,1} = [5/6 \quad 2/3]', z^*_{RL1,1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{z}^*_{PE1} := \left\lceil \frac{2}{3} \right\rceil = 1$$

- **Eliminació:** no es pot.
- **Separació:**

$$x_2^* = 5/6$$

$$\rightarrow \begin{cases} (PE2) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + (r3) + \boldsymbol{x_1} \leq \left\lfloor \frac{5}{6} \right\rfloor = \mathbf{0}\ (\boldsymbol{r4}) \\ (PE3) \stackrel{\text{def}}{=} (PE1) + (r3) + \boldsymbol{x_1} \geq \left\lceil \frac{5}{6} \right\rceil = \mathbf{1}\ (\boldsymbol{r5}) \end{cases}$$

$$L \leftarrow \{(PE2), (PE3)\}$$



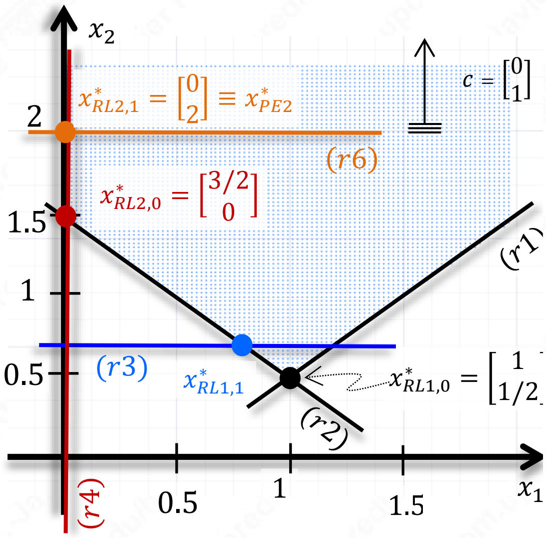
Iteració 2: $L = \{(PE2), (PE3)\}, \underline{z}^*_{PE1} = 1, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE2)$.
- **Resolució de $(RL2)$ amb un tall de Gomory**: prenem l'expressió $(r3)$ $3x_2 - x_5 = 2$ per facilitar els càlculs

$$(RL2{,}0)\left\{\begin{array}{lccccccccc}
\min & x_2 & & & & & & & & \\
\text{s.a.:} & & & & & & & & & \\
(r1) & 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & & & = & 1\\
(r2) & 2x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & & & = & 3\\
(r3) & & 3x_2 & & & -x_5 & & & = & 2\\
(r4) & x_1 & & & & & & +x_6 & = & 0\\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}\right.$$

– Gràficament veiem que el problema $(RL2{,}0)$ es equivalent a: $\min_{x_2}\{x_2|2x_2 \geq 3\}$ que, expressat en forma estàndard és:

$$(RL2{,}0)\left\{\begin{array}{lcccc}
\min & x_2 & & & \\
\text{s.a.:} & & & & \\
(r2) & 2x_2 & -x_4 & = & 3\\
 & x_2, & x_4, & \geq & 0
\end{array}\right.$$



– Resolució de $(RL2{,}0)$: $x^*_{RL2,0} = \left[\frac{3}{2}\right], z^*_{RL2,0} = 0$

– Tall de Gomory sobre $x^*_{RL2,0}$ associat a x_2:
  - $\mathcal{B} = \{2\}, B = [2], B^{-1} = [1/2]$
  - $A_N = [-1], V = B^{-1}A_N = [-1/2]$
  - $x_2 + \left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor x_4 \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \rightarrow x_2 - x_4 \leq 1$

    $\rightarrow \boldsymbol{x_2 \geq 2\ \ (r6)}$

– Resolució de (RL2,1) = (RL2,0) + (r5):
  $x^*_{RL2,1} = [0 \quad 2]', z^*_{RL2,1} = 2 \Rightarrow \underline{z}^*_{PE2} := 2$

- **Eliminació:** $x^*_{RL2,1} = [0 \quad 2]' \in K_{PE2} \therefore x^*_{PE2} = [0 \quad 2]' \Rightarrow$ s'elimina (PE2):
  – $z^* \leftarrow z^*_{PE2} = 2, x^* \leftarrow x^*_{PE2}, L \leftarrow L\backslash\{(PE2)\} = \{(PE3)\}$
  – $z^* = 2 > \underline{z}^*_{PE1} = 1 \Rightarrow$ no podem eliminar $(PE3)$

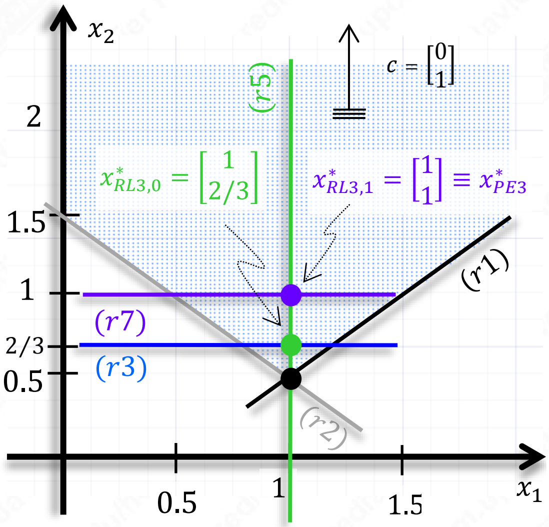
Iteració 3: $L = \{(PE3)\}, \underline{z}^*_{PE1} = 1, z^* = 2$

- **Selecció**: $(PE3)$.
- **Resolució de $(RL3)$ amb un tall de Gomory**:

$$(RL3{,}0)\left\{\begin{array}{lllllllll}
\min & x_2 & & & & & & & \\
\text{s.a.:} & & & & & & & & \\
(r1) & 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & & = & 1\\
(r2) & 2x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & & = & 3\\
(r3) & & 3x_2 & & & -x_5 & & = & 2\\
(r5) & x_1 & & & & & -x_7 & = & 1\\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_7 & \ge & 0
\end{array}\right.$$

– Gràficament veiem que la restricció $(r2)$ és redundant, i que el problema $(RL3{,}0)$ es equivalent a:

$$(\text{RL3,0})\left\{\begin{array}{llllllll}
\min & x_2 & & & & & & \\
\text{s.a.:} & & & & & & & \\
(r1) & 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & = & 1\\
(r3) & & 3x_2 & & -x_5 & & = & 2\\
(r5) & x_1 & & & & -x_7 & = & 1\\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_5, & x_7 & \ge & 0
\end{array}\right.$$



– Resolució de $(RL3{,}0)$: $x^*_{RL3,0} = \begin{bmatrix}1\\2/3\end{bmatrix}, z^*_{RL3,0} = \frac{2}{3}$.

– Tall de Gomory sobre $x^*_{RL3,0}$ associat a x_2:

- $\mathcal{B} = \{1,2,3\}, B = \begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\0 & 3 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

- $B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & \frac{1}{3} & 0\\1 & \frac{2}{3} & -2\end{bmatrix}, \mathcal{N} = \{5,7\}, A_N = \begin{bmatrix}0 & 0\\-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}0 & -1\\-\frac{1}{3} & 0\\-\frac{2}{3} & 2\end{bmatrix}$.

Alternativament podem trobar les columnes de V, V_i, resolent els sistemes $BV_i = A_{N_i}$:

$$\left.\begin{array}{l}
BV_1 = A_{N_1} = A_5; \left\{\begin{array}{llll}2v_{15} & -2v_{25} & +v_{35} & = 0\\ & 3v_{25} & & = -1\\ v_{15} & & & = 0\end{array}\right. \rightarrow V_1 = \begin{bmatrix}0\\-1/3\\-2/3\end{bmatrix}\\
BV_2 = A_{N_2} = A_7; \left\{\begin{array}{llll}2v_{17} & -2v_{27} & +v_{37} & = 0\\ & 3v_{27} & & = 0\\ v_{17} & & & = -1\end{array}\right. \rightarrow V_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}
\end{array}\right\} \rightarrow V = \begin{bmatrix}0 & -1\\-\frac{1}{3} & 0\\-\frac{2}{3} & 2\end{bmatrix}$$

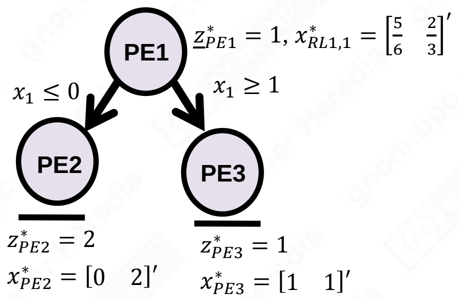
- $x_2 + \lfloor -1/3 \rfloor x_5 + \lfloor 0 \rfloor x_7 \le \lfloor 2/3 \rfloor \rightarrow x_2 - x_5 \le 0 \xrightarrow{(r3)} \boxed{\boldsymbol{x_2 \ge 1\ \ (r7)}}$

– Resolució de (RL3,1) = (RL3,0) + (r7): $\mathrm{x}^*_{\mathrm{RL3,1}} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \mathrm{z}^*_{\mathrm{RL3,1}} = 1 \Rightarrow \underline{\mathrm{z}}^*_{\mathrm{PE3}} := 1$

- **Eliminació:** $x^*_{RL3,1} = [1 \quad 1]' \subset K_{PE3}$: $x^*_{PE3} = [1 \quad 1]' \Rightarrow$ s'elimina $(PE3)$:
  – $z^* \leftarrow z^*_{PE3} = 1, x^* \leftarrow x^*_{PE3}, L \leftarrow L \backslash \{(PE3)\} = \emptyset$

Iteració 3: $L=\emptyset \Rightarrow$

$$\boxed{x_{PE1}^*=x^*=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ z_{PE1}^*=z^*=1}$$



SOLUCIÓ EXERCICI 98. Algorisme de ramificació i tall amb resolucions gràfiques (5).

Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de ramificació i tall (Branch&Cut):

$$(PE1)\begin{cases}\min & -x_1 & +2x_2 & & & & & \\ \text{s.a.:} & & & & & & & \\ & 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & 1 & (r1)\\ & 2x_1 & +2x_2 & & -x_4 & = & 3 & (r2)\\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & \ge & 0, x\in\mathbb{Z} & \end{cases}$$

Iteració 1: $L=\{(PE1)\},\ \underline{z}_{PE1}=-\infty, z^*=+\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de $(\boldsymbol{RL1})$ amb un tall de Gomory**:

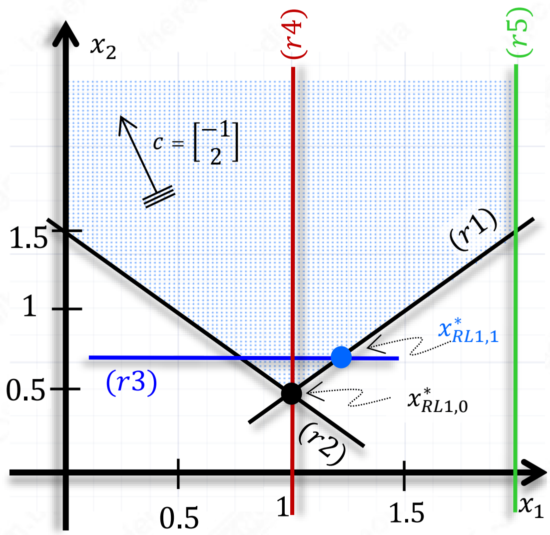
$$x_{RL1,1}^*=[7/6\quad 2/3]', z_{RL1,1}^*=\frac{1}{6}\Rightarrow \underline{z}_{PE1}^*:=\left\lceil\frac{1}{6}\right\rceil=1$$

- **Eliminació:** no es pot.
- **Separació:**

$$x_2^*=7/6$$

$$\rightarrow\begin{cases}(PE2)\overset{\text{def}}{=}(PE1)+(r3)+\boldsymbol{x_1}\le\left\lfloor\frac{7}{6}\right\rfloor=\mathbf{1}\ (\boldsymbol{r4})\\[2ex] (PE3)\overset{\text{def}}{=}(PE1)+(r3)+\boldsymbol{x_1}\ge\left\lceil\frac{7}{6}\right\rceil=\mathbf{2}\ (\boldsymbol{r5})\end{cases}$$

$$L\leftarrow\{(PE2),(PE3)\}$$



Iteració 2: $L=\{(PE2),(PE3)\}, \underline{z}_{PE1}^*=1, z^*=+\infty$

- **Selecció**: $(PE2)$.
- **Resolució de $(\boldsymbol{RL2})$ amb un tall de Gomory**:

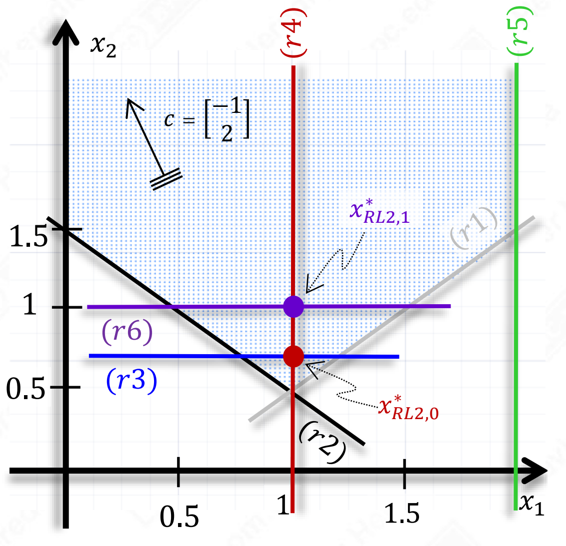
$$(RL2{,}0)\begin{cases}\min & -x_1 & +2x_2 & & & & & & \\ \text{s.a.:} & & & & & & & & \\ (r1) & 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & & = & 1 \quad\leftarrow \text{redundant}\\ (r2) & 2x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & & = & 3\\ (r3) & & 3x_2 & & & -x_5 & & = & 2\\ (r4) & x_1 & & & & & +x_6 & = & 1\\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \ge & 0\end{cases}$$

– Resolució de $(RL2{,}0)$: $x^*_{RL2,0} = \begin{bmatrix}1\\2/3\end{bmatrix}, z^*_{RL2,0} = 0$

– Tall de Gomory sobre $x^*_{RL2,0}$ associat a x_2:

- $\mathcal{B} = \{1,2,4\},\ \mathcal{N} = \{5,6\}$.
- $B = \begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\0 & 3 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1/3 & 0\\-1 & 2/3 & 2\end{bmatrix}$.
- $A_N = \begin{bmatrix}0 & 0\\-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1/3 & 0\\-2/3 & 2\end{bmatrix}$
- $x_2 + \left\lfloor -\frac{1}{3}\right\rfloor x_5 \le \left\lfloor \frac{2}{3}\right\rfloor \to x_2 - x_5 \le 0 \xrightarrow{(r3)} \boldsymbol{x_2 \ge 1\ \ (r6)}$

– Resolució de $(RL2{,}1) = (RL2{,}0) + (r5)$:
$x^*_{RL2,1} = [1 \quad 1]', z^*_{RL2,1} = 1 \Rightarrow \underline{z}^*_{PE2} := 1$



- **Eliminació:** $x^*_{RL2,1} = [1 \quad 1]' \subset K_{PE2}: x^*_{PE2} = [1 \quad 1]' \Rightarrow$ s'elimina $(PE2)$:
  – $z^* \leftarrow z^*_{PE2} = 1, x^* \leftarrow x^*_{PE2}, L \leftarrow L\backslash\{(PE2)\} = \{(PE3)\}$
  – $z^* = 1 = \underline{z}^*_{PE1} = 1 \Rightarrow$ s' elimina $(PE3)$:$L \leftarrow L\backslash\{(PE3)\} = \emptyset$

Iteració 3: $L = \emptyset \Rightarrow \boxed{x^*_{PE1} = x^* = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, z^*_{PE1} = 1}$

SOLUCIÓ EXERCICI 99. Algorisme de ramificació i tall amb símplex dual (1).

Relaxació: resolució de la relaxació lineal de (PE1) reforçada amb un tall de Gomory:

- La solució òptima de la relaxació lineal de (PE1):

$$\mathcal{B} = \{1,2\}\,;\ B = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}\,;\ B^{-1} = \begin{bmatrix}3/5 & -1/5\\-1/5 & 2/5\end{bmatrix}\,;\ x_B = \begin{bmatrix}7/5\\1/5\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} = \{3,4\}\,;\ A_N = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\,;\ r' = [1/5 \quad 3/5]$$

- Tall de Gomory associat a x_1: $V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$

$$x_1 + \lfloor v_{13}\rfloor x_3 + \lfloor v_{14}\rfloor x_4 \le \lfloor x_1^*\rfloor\,;\ x_1 + \left\lfloor\frac{3}{5}\right\rfloor x_3 + \left\lfloor\frac{-1}{5}\right\rfloor x_4 \le \left\lfloor\frac{7}{5}\right\rfloor\,;\ \boxed{x_1 - x_4 \le 1}$$

- S'afegeix a (PE) la constricció: $x_1 - x_4 \le 1\,;\ x_1 - x_4 + x_5 = 1\,;\ a'_{B,3} = [1 \quad 0]$
- Resolució de $(RL1{,}1)$ a partir de la base $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$

$$(RL1{,}1)\begin{cases}\min & -x_1 & -2x_2 & & & & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 3\\ & x_1 & +3x_2 & & +x_4 & & = 2\\ & x_1 & & & -x_4 & +x_5 & = 1\\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \ge 0\end{cases}$$

- Càlcul de la nova inversa de la base: $B^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a'_{B,3}B^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -3/5 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}$
- **Reoptimització amb el símplex dual, 1a iteració**: $\mathcal{B} = \{1,2,5\}, \mathcal{N} = \{3,4\}$
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p :

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1/5 \\ -2/5 \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow \text{p} = 3, \boxed{\text{B}(3) = 5 \text{ VBsortint}}$$

  - Identificació de problema (D) il·limitat :

$$d_{r_N} = \beta_3 A_N = [-3/5 \quad 1/5 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [-3/5 \quad -4/5] \ngeq 0$$

  - Sel. VNB d'entrada q: $r' = [1/5 \quad 3/5]$:

$$\theta_D^* = \min\left\{ {}^{-r_j}\!/_{d_{r_N j}} : j \in N, v_j < 0 \right\} = \min\left\{ \frac{1/5}{3/5} = \frac{1}{3}, \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} \right\} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{q = 3}$$

  - Canvi de base i actualitzacions: $B \leftarrow \{1,2,3\}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$Bx_B = b, \begin{cases} 2x_1 & +1x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & +3x_2 & & = & 2 \\ x_1 & & & = & 1 \end{cases} \rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

- **Símplex dual, 2a iteració**: $\mathcal{B} = \{1,2,3\}, \mathcal{N} = \{4,5\}$
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_B \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{òptim}}$

- Fita inferior $\underline{z}_{PE1}^* = \lceil z_{RL1,1}^* \rceil = \lceil -5/3 \rceil = -1$.

Separació: $x_2^* = \frac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} (PE2) = (PE1) + x_2 \leq 0 \\ (PE3) = (PE1) + x_2 \geq 1 \end{cases} \rightarrow L \leftarrow \{(PE2), (PE3)\}$

SOLUCIÓ EXERCICI 100. Algorisme de plans secants amb símplex dual (2).

Transformem la segona constricció per tal que la folga sigui entera i passem a forma estàndar:

$$(PE1) \begin{cases} \min & -x_1 & -x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & +x_3 & & = -1 \\ & & 2x_2 & & +x_4 & = 5 \\ & x_1, & x_2 & & & \geq 0, enteres \end{cases}$$

1a iteració Gomory:

- Solució òptima de la relaxació lineal de $(PE1)$, trobada gràficament: $x_{RL1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$
- x_{RL1} no entera $\Rightarrow$ tall de Gomory: es selecciona $x_1 = 3/2$

$$\mathcal{B} = \{1,2\};\ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix};\ x_B = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} = \{3,4\};\ A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + \lfloor v_{13} \rfloor x_3 + \lfloor v_{14} \rfloor x_4 \leq \lfloor x_1^* \rfloor \; ; \; x_1 + \lfloor 1 \rfloor x_3 + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor x_4 \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \; ; \; \boxed{x_1 + x_3 \leq 1 \; (r3)}$$

2a iteració Gomory:

- Solució de la relaxació lineal de (PE2): reoptimització amb el símplex dual a partir de $x_{RL1}^* = [x_1, x_2]' = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]'$ per adició de $x_1 + x_3 + x_5 = 1 \; (r3) \rightarrow a_{m+1} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$
  - $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}, \; B^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a_{B_{m+1}} B^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$

    $\mathcal{N} = \{3,4\}, A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} r' = r'_{RL1} = [0 \quad 0] - [-1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{1}^{r_3} & \overbrace{1}^{r_4} \end{bmatrix} \geq 0$
  - **Símplex dual, 1a iteració**: $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}, \mathcal{N} = \{3, 4\}$
    - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p :
      $$x_B = x_B = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 5 \text{ VBsortint}}$$
    - Identificació de problema (D) il·limitat :
      $$d'_{r_N} = \beta_3 A_N = [-1 \quad -1/2 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad -1/2] \ngeq 0$$
    - Sel. VNB d'entrada q:
      $$\theta_D^* = \min\left\{-r_j/d_{r_{N_j}} : j \in \mathcal{N}, d_{r_{N_j}} < 0\right\} = \min\left\{\frac{-1}{-1/2}\right\} = 2 \Longrightarrow \boxed{q = 4}$$
    - Canvi de base i actualitzacions:
      $$\mathcal{B} \leftarrow \{1, 2, 4\}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow B x_B = b, \begin{cases} x_1 & -x_2 & & = & -1 \\ & x_2 & +x_4 & = & 5 \\ x_1 & & & = & 1 \end{cases} \rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
  - Símplex dual, 2a iteració: $\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}, \mathcal{N} = \{3, 5\}$
    - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_B \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{òptim}}$
- $x_{RL2}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ entera $\Rightarrow \boxed{x_{PE1}^* = x_{RL2}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$

SOLUCIÓ EXERCICI 101. Algorisme de ramificació i tall amb símplex dual (3).

$$(PE1) \begin{cases} \min & -x_1 & & & & \\ \text{s. a.:} & & & & & \\ (r1) & & x_2 & -x_3 & & = 1 \\ (r2) & 2x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = 5 \\ & x_1, & x_2 & & & \geq 0, enteres \end{cases}$$

B&C, iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de $(RL1)$ amb un tall de Gomory**:
  - Resolució gràfica de $(RL1{,}0)$: $x_{RL1,0}^* = [3/2 \quad 1]', z_{RL1,0}^* = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{z}_{PE1}^* := \lceil z_{RL1,0}^* \rceil = -1$
    - Tall de Gomory sobre $x_{RL1,0}^*$ associat a x_1:
      - $\mathcal{B} = \{1,2\}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\mathcal{N} = \{3,4\},\ A_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
- $x_1 + \lfloor 1 \rfloor x_3 + \lfloor 1/2 \rfloor x_4 \le \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \to \boxed{x_1 + x_3 \le 1\ (r3)} (\equiv x_1 + x_2 \le 2)$

– Resolució de $(RL1{,}1) = (RL1{,}0) + (r3)$: reoptimització amb el símplex dual a partir de $x^*_{RL1,0} = [x_1, x_2]' = [3/2 \quad 1]'$ per addició de $x_1 + x_3 + x_5 = 1\ (r3) \to a_{m+1} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$

- $\mathcal{B} = \{1,2,5\},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a_{B_{m+1}}B^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$
- $\mathcal{N} = \{3,4\}, A_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} r' = [0 \quad 0] - [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{1}^{r_3} & \overbrace{1/2}^{r_4} \end{bmatrix} \ge 0$
- **Símplex dual, iteració 1**: $\mathcal{B} = \{1,2,5\}, \mathcal{N} = \{3,4\}$
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p :

$$x_B = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} . \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 5 \text{ VBsortint}}$$

  - Identificació de problema (D) il·limitat :

$$d'_{r_N} = \beta_3 A_N = [1 \quad -1/2 \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad -1/2] \ngeq 0$$

  - Sel. VNB d'entrada q:

$$\theta_D^* = \min\left\{-r_j/d_{r_{N_j}} : j \in \mathcal{N}, d_{r_{N_j}} < 0\right\} = \min\left\{\frac{-1/2}{-1/2}\right\} = 1 \Longrightarrow \boxed{q = 4}$$

  - Canvi de base i actualitzacions:

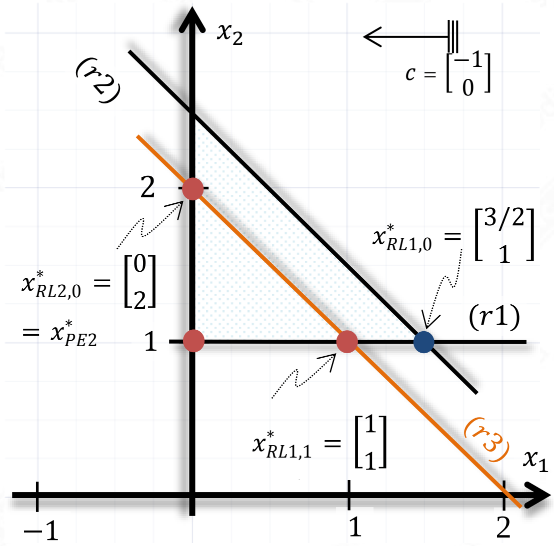
$$\mathcal{B} \leftarrow \{1,2,4\}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to Bx_B = b, \begin{cases} & x_2 & & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_4 & = & 5 \\ x_1 & & & = & 1 \end{cases} \to x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Símplex dual, iteració 2:** $\boldsymbol{\mathcal{B} = \{1,2,3\}, \mathcal{N} = \{4,5\}}$
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_B \ge 0 \Rightarrow \boxed{\text{òptim}}$.

- **Eliminació:** $x^*_{RL1,1} = [1 \quad 1]' = x^*_{PE1}$:

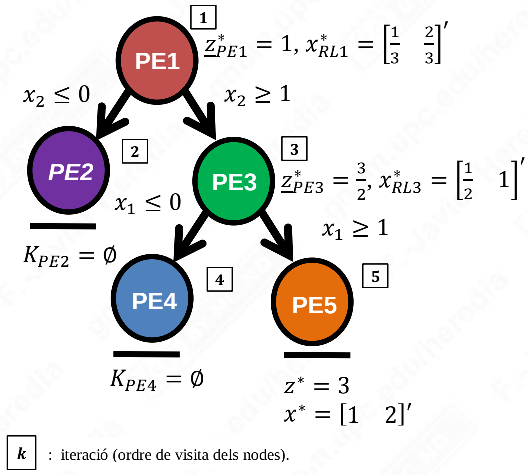
– Actualització incumbent: $z^*_{PE1} < z^* \Rightarrow z^* := -1, x^* := [1 \quad 1]', L \leftarrow L \backslash \{(PE1)\} = \emptyset$

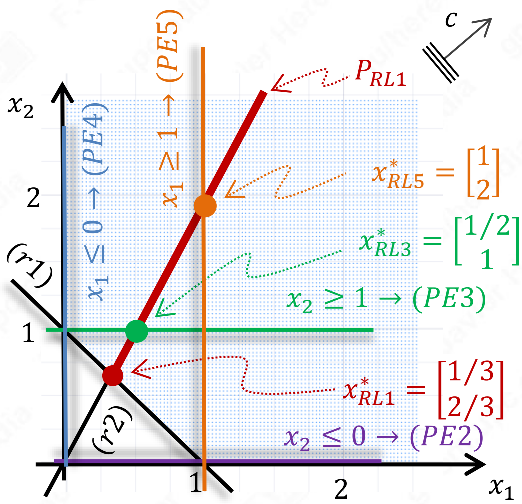
B&C, iteració 2: $L = \emptyset \Rightarrow \boxed{x^*_{PE1} = x^* = [1 \quad 1]',\ z^*_{PE1} = z^* = -1}$



SOLUCIÓ EXERCICI 102. Arbre del B&B i algorisme de B&C amb símplex dual (4).

Apartat b)





Apartat c)

B&C, iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de** $(\boldsymbol{RL1})$ **amb un tall de Gomory**:
  - **Resolució gràfica de** $(\boldsymbol{RL1,0})$: $x^*_{RL1,0} = [1/3 \quad 2/3]',\ z^*_{RL1,0} = 1 \Rightarrow \underline{z}^*_{PE1} := \lceil z^*_{RL1,0} \rceil = 1$
    - Tall de Gomory sobre $x^*_{RL1,0}$ associat a x_2:
      - $\mathcal{B} = \{1,2\}\,;\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\,;\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}\,;\ x_B = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$
      - $\mathcal{N} = \{3\}\,;\ A_N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\,;\ V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \end{bmatrix}$

- Tall de Gomory associat a $x_2 = \frac{2}{3}$:

$$x_2 + \lfloor v_{23} \rfloor \cdot x_3 \le \lfloor x_2^* \rfloor \;;\; x_2 + \left\lfloor \frac{-2}{3} \right\rfloor \cdot x_3 \le \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor \;;\; x_2 - x_3 \le 0\ (r3)$$

– **Resolució de $(RL1,1) = (RL1,0) + (r3)$** : reoptimització amb el símplex dual a partir de $x^*_{RL1,0} = [x_1, x_2]' = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}'$ per addició de $x_2 - x_3 + x_4 = 0\ (r3)$

- $a'_{m+1} = [0 \quad 1 \quad -1], a'_{B,m+1} = [0 \quad 1], -a'_{B,m+1}B^{-1} = [-2/3 \quad 1/3]$.
- $\mathcal{B} := \{1,2,4\},\ B^{-1} := \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a_{B_{m+1}}B^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$.
- $\mathcal{N} = \{3\}, A_N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, r' = [0 \quad 0] - [1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1] \ge 0$
- **Símplex dual, iteració 1:** $\mathcal{B} = \{1,2,4\}, \mathcal{N} = \{3\}$
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la VB de sortida p :

$$x_B = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 4 \text{ VB sortint}}$$

  - Identificació de problema (D) il·limitat :

$$d'_{r_N} = \beta_3 A_N = [-2/3 \quad 1/3 \quad 1]\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = [-1/3] \ngeq 0$$

  - Sel. VNB d'entrada q:

$$\theta_D^* = \min\left\{-r_j/d_{r_{N_j}} : j \in \mathcal{N}, d_{r_{N_j}} < 0\right\} = \min\left\{\frac{-1}{-1/3}\right\} = 3 \Longrightarrow \boxed{q = 3}$$

  - Canvi de base i actualitzacions:

$$d_B = -B^{-1}A_3 = -\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \theta^* = -\frac{x_{B(p)}}{d_{B(p)}} = 2$$

$$x_B := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_q = x_3 := \theta^* = 2$$

$$\mathcal{B} := \{1,2,3\}$$

- **Símplex dual, iteració 2: $\mathcal{B} = \{1,2,3\}, \mathcal{N} = \{4\}$**
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la VB de sortida p : $x_B \ge 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{òptim } (RL1{,}1)}$.
- $x^*_{RL1,1} = [1 \quad 2]',\ z^*_{RL1,1} = 2$

• **Eliminació:** $x^*_{RL1,1} = [1 \quad 2]' = x^*_{PE1}$:

– $L \leftarrow L \backslash \{(PE1)\} = \emptyset$.

– Actualització incumbent: $z^*_{PE1} < z^* \Rightarrow z^* := 2, x^* := [1 \quad 2]'$,

B&C, iteració 2: $L = \emptyset$: $\boxed{x^*_{PE1} = [1 \quad 1]', z^*_{PE1} = 2}$