DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA. Curs 09/10. 2on Q

EXAMEN Final. Convocatòria Ordinària..

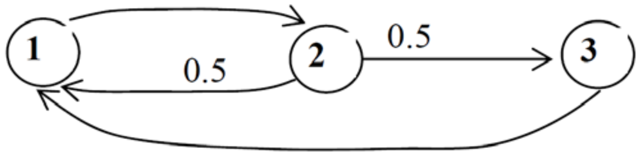
P1. Temps de vida Unes bateries elèctriques alimenten uns ordinadors portàtils que han de funcionar en condicions molt dures de temperatura, per lo qual presenten una determinada variabilitat en quant al nº d'hores que permeten de funcionament d'aquests ordinadors.
El temps de funcionament continuat τ d'aquestes bateries ve donat per la següent funció de densitat de probabilitat:

$$f_\tau(t) = 0.05 \text{ si } 0 \le t \le 3; \quad 0.85 \text{ si } 3 \le t \le 4; \quad 0 \text{ si } t > 4$$

Es demana:

1- [2p] Una empresa compra una gran quantitat d'aquests ordinadors per a fer-los funcionar sense estar connectats a la xarxa elèctrica. Els ordinadors estan sempre en funcionament continu i en esgotar-se la bateria aquesta és reemplaçada immediatament per una de carregada. Calculeu el temps mig de funcionament $E[\tau]$.
2- [2p] Quatre d'aquests ordinadors s'engeguen simultàniament amb una bateria completament carregada. Quina és la probabilitat de que tots 4 continuïn funcionant després de 2 hores.
3- [2p] El dia 1 de gener a les 12h s'engeguen tots els ordinadors amb una bateria completament carregada. Quina és la fracció dels que deixaran de funcionar en els 10 minuts següents, de entre els que ho estaven fent sense interrupció des de feia dues hores?
4- [2p] Calculeu la probabilitat de que un ordinador que ja porta funcionant 1 hora continuï fent-ho durant dues hores més.
5- [2p] Triat un ordinador a l'atzar d'entre els que estan funcionant calculeu la probabilitat de que funcioni encara una hora més.

P2 Cadenes de Markov. Per a la cadena de Markov que es mostra el vector de probabilitats inicials és el p(0)=(1,0,0):



Es demana:
a) [2.5p] classes i periodicitat.
b) [2.5p] Probabilitats d'estat estacionari
c) [2.5p] Nombre mig de vegades que es visita l'estat 1 durant les 3 primeres transicions
d) [2.5p] Nombre mig de transicions fins visitar l'estat 3 per primera vegada

P3. Teoria de Cues.

L'administrador d'un centre d'informació, proporciona tres consultors per a resoldre dubtes d'usuaris que arribin al centre. Els usuaris arriben a l'atzar seguint un procés Poissonià a una taxa mitjana de 20 persones en un dia de 8h. El temps que comporta l'atenció d'un consultor a un usuari és de 40 minuts en promig i està exponencialment distribuït. Es segueix l'ordre d'arribada dels usuaris.

1. [2p] Quina és la fracció del temps que cada consultor està ocupat?
2. [2.5p] Quin temps mig està cada usuari a la cua?
3. [1p] Quin és el nº mig d'usuaris esperant en cua per l'atenció d'un consultor?
4. [1.5p] Quin temps mig està cada usuari al centre d'informació?
5. [1p] Nº mig d'usuaris al centre.
6. [1p] Probabilitat de que tots els consultors estiguin lliures
7. [1p] Probabilitat de que tots els consultors estiguin ocupats però ningú estigui esperant en la cua del centre.

Fabricat ecològicament

(1)
$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0'05 & 0 \le t < 3 \\ 0'85 & 3 \le t \le 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases}$$

$$E[\tau] = \int_0^4 x\, f_\tau(x)\, dx = 0'05 \int_0^3 x\, dx + 0'85 \int_3^4 x\, dx =$$
$$= 0'05 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + 0'85 \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^4 = 3'2\ h.$$

(2) $P(\tau \geq 2) = R_\tau(2) = 1 - F_\tau(2)$

$$F_\tau(t) = \begin{cases} 0'05\, t & 0 \le t \le 3 \\ 0'15 + 0'85(t-3), & 3 \le t \le 4 \\ 1 & t \geq 4 \end{cases}$$

$F_\tau(2) = 0'1 \rightarrow R_\tau(2) = 0'9$

Es demana $[R_\tau(2)]^4 = 0'6561$

(3) la fracció durant 10 minuts dels que s'apagarà dintre els que han funcionat 2 hores ve donada aproximadament per $h_\tau(2)\cdot\Delta\tau$

$\Delta\tau \simeq 1/6\ h$ i, de forma exacta per

$$\int_2^{2+1/6} h_\tau(x)\, dx \quad ; \quad h_\tau(2) = \frac{f_\tau(2)}{R_\tau(2)} = \frac{0'05}{0'9} = 0'0\hat{5}$$

$$h_\tau(2)\,\Delta\tau = 0'0\hat{5} \cdot 1/6 = 9'25 \cdot 10^{-3}$$

(s'apaga el $0'925\ \%$)

(4)
$$P(\theta \le \tau \le \theta' \mid \tau \geq \theta) = \int_\theta^{\theta'} f_{S/\theta}(x)\, dx = \frac{1}{R_\tau(\theta)} \int_\theta^{\theta'} f_\tau(x+\theta)\, dx$$

$\theta = 1h,\ \theta' = 3h$

$$\frac{1}{R_\tau(\theta)} \int_\theta^{\theta'} f_\tau(x+\theta)\, dx = \frac{1}{0'95} \int_1^3 0'05\, dt = \frac{0'1}{0'95} = 0'10526$$

Fabricat Ecològicament

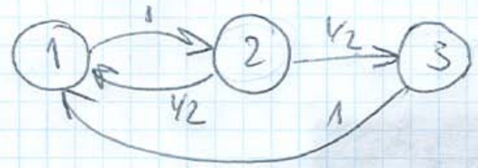
(5) Cal usar la v.a. temps de cicle residual r.

$$f_r(x) = \frac{R_Z(x)}{E[Z]}$$

$$P(r \geq 1) = 1 - \int_0^1 f_r(x)\,dx = 1 - \frac{1}{E[Z]}\int_0^1 R_Z(x)\,dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{3'2}\int_0^1 (1 - 0'05t)\,dt = 0'7031.$$

P1)



$$P = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

a) 1 classe aperiodica

b) $P^T \pi = \pi$
$$\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5/4 & -1/4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \pi_1 = 2/5 \\ \pi_2 = 2/5 \\ \pi_3 = 1/5 \end{array}$$

c) $p_{11}^{(1)} + p_{11}^{(2)} + p_{11}^{(3)} = 0 + 1/2 + 1/2 = 1$

d)
$$\begin{pmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Teoria de Cues

Model M/M/3 ; $\lambda = \frac{20}{8} h^{-1} = 2'5 h^{-1}$

Càlcul

$\mu = 3/2 \; h^{-1}$ (40 minuts)

$\rho = \frac{\lambda}{S\mu} = \frac{2'5}{3 \cdot 3/2} = \frac{5}{9} = 0'\widehat{5}$. $\quad \theta = \frac{\lambda}{\mu} = 1'\widehat{6} = 5/3$

$$P_0 = \left[\left(1 + \theta + \frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{1}{3!}\theta^3 \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1} =$$

$$= \left[\left(1 + 5/3 + \tfrac{1}{2}(5/3)^2\right) + \frac{(5/3)^3}{3!} \; \frac{1}{1-5/9} \right]^{-1} = 0'17266$$

$$L_q = \frac{1}{3!}\left(5/3\right)^3 \frac{0'17266 \cdot 5/9}{(1-5/9)^2} = 0'374 \text{ usuaris}$$

1) Fracció del temps que cada servidor està ocupat.

$$1 - (P_0 + P_1 + P_2) + 2/3 \, P_2 + 1/3 \, P_1 =$$

$\begin{pmatrix} C_1 = \theta \\ C_2 = \frac{1}{2}\theta^2 \end{pmatrix}$ $\quad = 1 - P_0 \left[(1 + C_1 + C_2) - 2/3 \, C_2 - 1/3 \, C_1 \right] =$

$$= 1 - P_0 \left[1 + 2/3 \, C_1 + 1/3 \, C_2 \right] = 0'5555$$

2) $W_q = L_q/\lambda = 0'374/2'5 = 0'14964 = 8'9$ min

3) $L_q = 0'374$ usuaris

4) $W = L/\lambda = W_q + 1/\mu = 0'1496 + 2/3 = 0'81626 \; h \approx 49$ min

5) $L = W \cdot \lambda = 0'81626 \cdot \frac{20}{8} = 2'04$ usuaris

6) $P_0 = 0'17266$

7) $P_3 = C_3 \cdot P_0 = \frac{1}{3!}\theta^3 P_0 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot P_0 = 0'1332$