ESTIMACIÓ DELS PARÀMETRES EN MODELS DE CUES

- TEST DE χ^2 PER ALS PROCESOS DE LLEGADA Y SERVEI.
- INTERVALS DE CONFIANÇA PER A λ, μ, ρ.
- SIMULACIÓ D'UNA CUA M/M/1.
- PRÀCTICA 3.

Pràctica 3

Objectiu: Es disposa de una mostra dels temps entre arribades a un S.E. i dels temps de servei del servidor d'aquest S.E. En ambdós casos la grandària de la mostra es de 1000 observacions. Se sap que corresponen a distribucions exponencials de temps. Es pretén:

a) Verificar mitjançant el test de χ^2 que efectivament corresponen a una distribució exponencial.

b) Obtenir els intervals de confiança per a la taxa d'arribades per unitat de temps (paràmetre λ de la distribució exponencial del procés de arribades) i per al factor de càrrega ρ del S.E.

c) Utilitzeu un programa de simulació de cues comparant les magnituds L, W, W_q obtingudes mitjançant la simulació amb aquelles que proporciona la teoria de cues.

Simulació del S.E. M/M/1.

La simulació pot efectuar-se mitjançant la macro mm1.mtb. Prèviament requereix que las constants K1, K2, K3, K4 estiguin degudament inicialitzades:

K1 = N, número de clients.

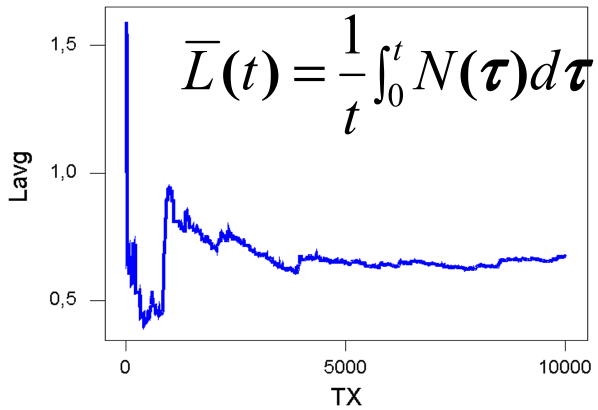
K2 = $1/\lambda$, temps mig entre arribades.

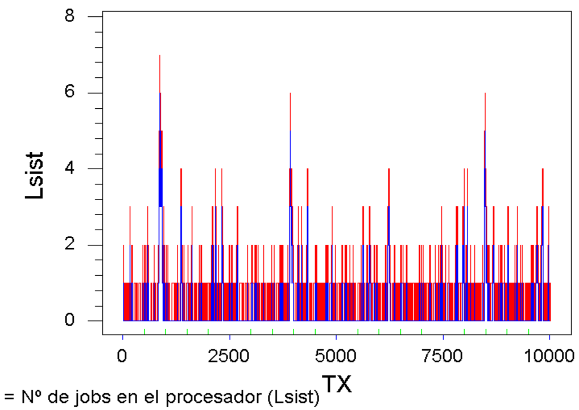
K3 = $1/\mu$ temps mig de servei.

```
MTB> let K1= 500
MTB> let K2= 20,0
MTB> let K3= 8,0
MTB> exec "mm1.mtb"
```

RESULTATS DE LA SIMULACIÓ

K1	500,000	N=Número de clients que han entrat en el S.E.
K2	20,0000	$1/\lambda$
K3	8,00000	$1/\mu$
P0	0,578429	P_0 Fracció de temps que el servidor està ociòs.
rho	0,421571	ρ (estimació per simulació)
inrate	0,049953	λ (estimació per simulació)
WaitS	13,4386	W
WaitQ	4,98271	W_q
Lsistavg	0,67130	L
LastWs	1,60498	Permanència del darrer client en el S.E.
T_H	10009,3	Temps entre la 1ª i darrera entrada.





Rojo = Nº de jobs en el procesador (Lsist)

Azul = Nº de jobs en cola (Queue)

Intervals de confiança per a les taxes λ y μ i per al factor de càrrega $\rho = \lambda/\mu$.

Es disposa de dues mostres $t_1, t_2, \ldots, t_n$ y $s_1, s_2, \ldots, s_m$ per als processos de arribada i de servei (temps distribuïts exponencialment).

Se vol determinar un interval de confiança de probabilitat **1-**α per a les taxes d'arribada λ , de servei μ i per al factor de càrrega ρ d'un S.E. **M/M/1** partint de les dues mostres.

El estimador màxim versemblant per a λ i μ és:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i} = \frac{n}{T_n} \qquad \hat{\mu} = \frac{m}{\sum_{i=1}^{m} s_i} = \frac{m}{S_m}$$

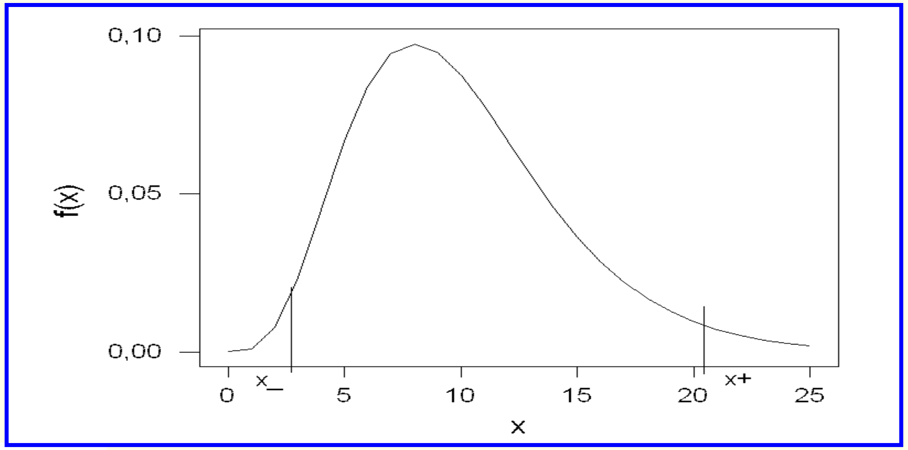
Universitat de Barcelona

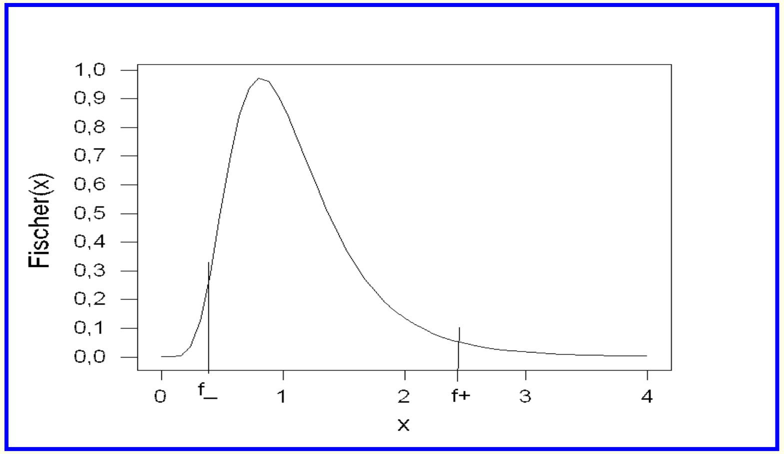
UPC

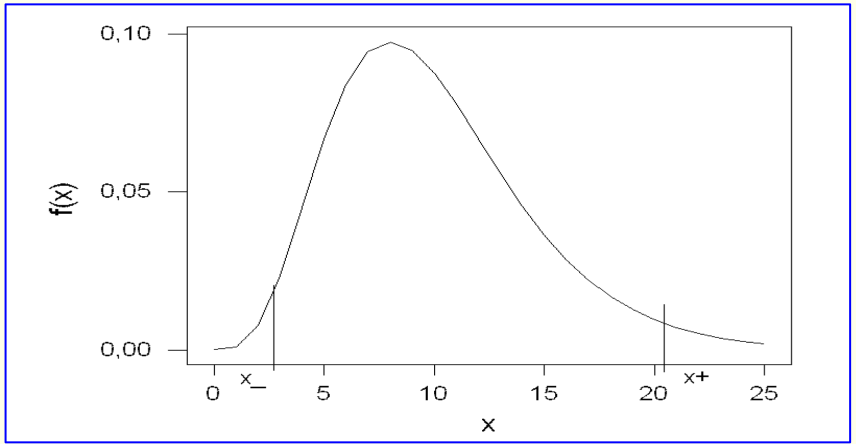
Ja que T_n es distribueix segons una llei n-Erlang de paràmetre $\theta = \lambda/k$ (o també una Gamma(λ, n)),

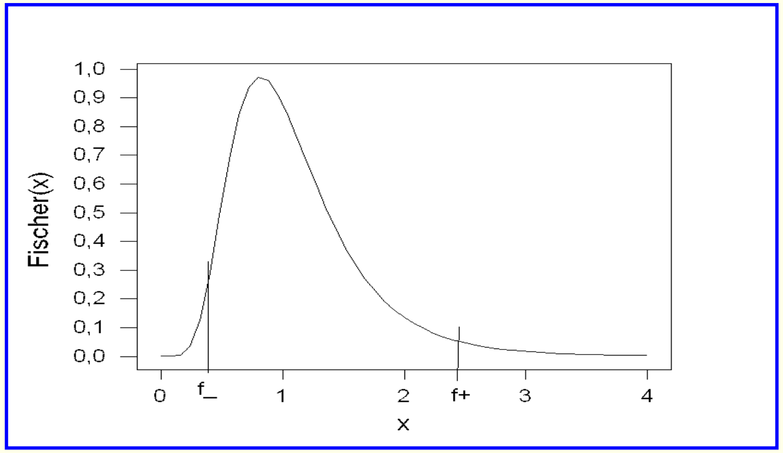
$$E\left[2\lambda\sum_{i=1}^{n} t_i\right] = E\left[2\lambda T_n\right] = 2n \Rightarrow 2\lambda T_n \sim Gamma\left(\frac{1}{2}, n\right) = \chi^2_{2n}$$

$$\boxed{2n\frac{\lambda}{\hat{\lambda}} \sim \chi^2_{2n}, \quad 2m\frac{\mu}{\hat{\mu}} \sim \chi^2_{2m} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda/\hat{\lambda}}{\mu/\hat{\mu}} = \frac{\rho}{\hat{\rho}} \sim F_{2n,2m}}$$









I.C. al 1-α per a λ: $\left[\dfrac{\hat{\lambda}}{2n}x_{-}\ ,\ \dfrac{\hat{\lambda}}{2n}x_{+}\right]$

I.C. al 1-α per a ρ $\left[\hat{\rho}\, f_{-}\quad ,\ \hat{\rho}\, f_{+}\right]$

Taula amb les grandàries de mostra necessàries per a obtenir un I.C. del 95% i sa amplitud.

$n=m$	$f-$	$f+$	$e_f(\%)$	$x-/2n$	$x_+/2n$	$e_x(\%)$.
10	0,405	2,461	143	0,479	1,708	112
100	0,757	1,321	54	0,813	1,205	38
1000	0,916	1,091	17	0,939	1,062	12
10000	0,972	1,028	5	0,980	1,019	3

Universitat de Barcelona

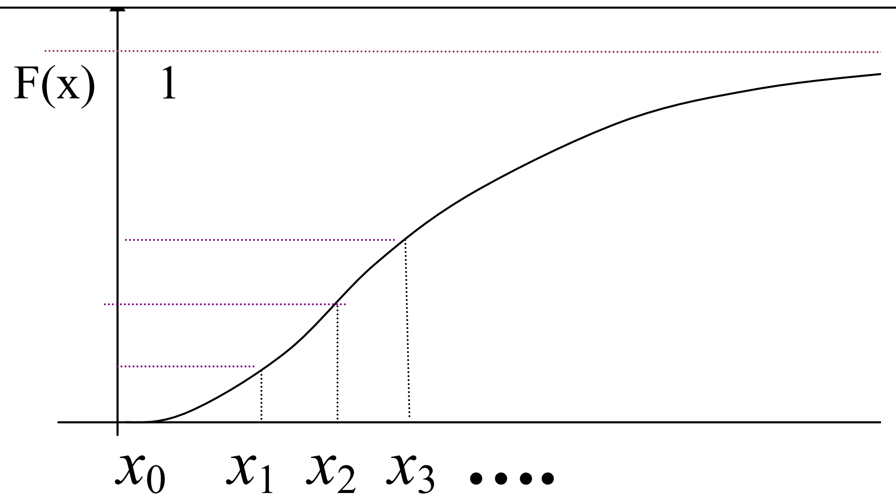
UPC

TEST DE BONANÇA D'AJUSTAMENT DE χ^2

Es vol comprovar la bondat d'ajustament de una mostra $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a una distribució (p.ex: k-Erlang de paràmetres: k etapes i $1/\lambda$=temps mig per etapa=$E[t]/k$ (o Gamma(λ,k)).

a) Es fixen un conjunt de subintervals $[x_i, x_{i+1}]$ en número total N que recobreixen tot l'interval de valors possibles per a la v.a. t de forma que $P(x_i \leq t \leq x_{i+1}) = 1/N$. El número esperat d'elements de la mostra que haurien d'estar compresos en cada subinterval hauria ser constant:

$$n_e = n/N.$$

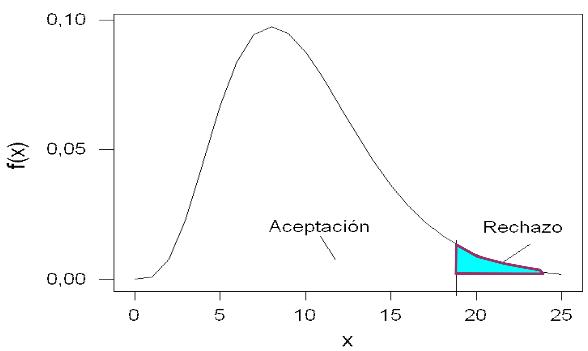


c) Es compte el número d'elements n_i de la mostra que cauen en cada subinterval i.

Es calcula una mesura global de la discrepància entre n_i y n_e :

$$X^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - n_e)^2}{n_e}$$

X^2 es distribueix aproximadament segons una llei χ^2_{N-m-1}, sent m el número de paràmetres de la distribució que hagin estat estimats utilitzant la mateixa mostra.



Se rebutjarà la distribució proposada si

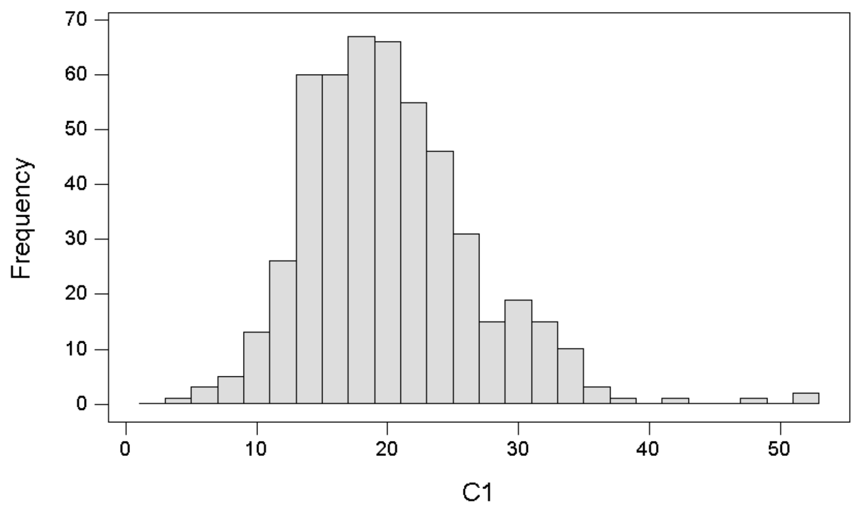
$P(x \geq X^2)$ = p-valor $< \alpha$

Procediment per a usar la macro "x2.mtb":

Suposem, por exemple, que es disposa d'una mostra per a la que les estadístiques bàsiques són:

Variable	N	Mean	Median	TrMean	StDev	SE Mean
sample	500	19,914	19,607	19,702	5,990	0,268

Variable	Minimum	Maximum	Q1	Q3
sample	6,607	41,172	15,660	23,373



1) Estimació dels paràmetres de la distribució:

Etapes $k = \left\lceil \left(\frac{\bar{t}}{s_t}\right)^2 \right\rceil = \left\lceil \left(\frac{19,91}{5,99}\right)^2 \right\rceil = \lceil 11,05 \rceil$; s'adopta 11; temps mig per etapa 19,91/11= 1,81036

2) Establiu els valors de les constants k100, k101, k102, k103.

```
MTB> let k100=11          N° de etapes
MTB> let k101=1,81036     Temps mig per etapa
MTB> let k102=500         Grandària de la mostra
MTB> let k103=7           Graus de llibertat
MTB> exec "x2.mtb"
```

Proporciona:

- El p-valor en la constant k105 i la resta de constants k100-k104 amb les que ha executat.
- El valor de X^2 en k104