Introducció a la Investigació Operativa
Grau en Estadística UB-UPC

Tema 3. Formulació i resolució dels models lineals d'optimització

Catalina Bolancé
Dept. Econometria, Estadística i Economia Espanyola

Javier Heredia
Dept. Estadística i Investigació Operativa

Objectius específics del Tema 3

- Identificar si un problema de presa de decisions (PPD) es pot formular com a problema de programació lineal (PL) genèric o específic.
- Davant d'un PPD associat a un problema de PL, ser capaç de formular un model d'optimització **clar, parametritzat, complet, consistent, eficient i amb expressions matemàticament correctes**.
- Davant d'un PPD associat a un problema de PL genèric, analitzar com trobar la solució numèrica óptima.
- Davant d'un PPD associat a un problema de PL genèric, trobar-ne la seva solució numèrica amb l'ajut d'Excel i SAS, mitjançant una implementació **clara, parametritzada i correcta**.

Introducció

- Resoldre problemes de PL gràficament només és possible si el nombre de variables de decisió és $n = 2$.
- Els problemes de PL del món real tenen moltes més de dues variables:

$$\text{Fins a } n > 10^6 \text{ i } m > 10^5$$

es necessiten eines especialitzades d'optimització.

- Afortunadament, és possible resoldre problemes de PL de dimensió moderada (fins a $n = 1000$ i $m = 8000$) amb FdC.

Solució del model

Consisteix en trobar-ne la millor solució (la que optimitza la funció objectiu) entre totes les que compleixen les restriccions del model i són "factibles".

Utilitzem l'exemple "*Blue Ridge Hot Tubs*":

$$\begin{array}{rll} max\, z = & 350x_1 + 300x_2 & \text{Maximització del bfci.} \\ s.a.: & 1x_1 + 1x_2 \leq 200 & \text{Limitació de bombes} \\ & 9x_1 + 6x_2 \leq 1566 & \text{Limitació d'hores de mà d'obra} \\ & 12x_1 + 16x_2 \leq 2880 & \text{Limitació de canonades} \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \text{No-negativitat} \end{array}$$

Solució del model

Afegim variables folgança (H_i, $i = 1, ...m$) amb les que aconseguim que les restriccions de menor o igual siguin d'igualtat.

$$\begin{aligned}
max\, z = \quad & 350x_1 + 300x_2 \\
s.a.: \quad & 1x_1 + 1x_2 + H_1 = 200 \\
& 9x_1 + 6x_2 + H_2 = 1566 \\
& 12x_1 + 16x_2 + H_3 = 2880 \\
& x_1, x_2 \geq 0, H_1 \geq 0, H_2 \geq 0, H_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Solució del model

Hem de resoldre un sistema de 3 equacions i 5 variables

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + H_1 &= 200 \\ 9x_1 + 6x_2 + H_2 &= 1566 \\ 12x_1 + 16x_2 + H_3 &= 2880 \end{aligned}$$

En total hi han:

$$\frac{n!}{(n-m)! \times m!}$$

Solució del model

Conjunt de solucions possibles.

Variables		Factibilitat
Fixades (no bàsiques)	**Calculades (bàsiques)**	**i optimalitat**
$X_1 = 0, X_2 = 0$	$H_1 = 200, H_2 = 1566, H_3 = 2880$	Factible
$X_1 = 0, H_1 = 0$	$X_2 = 200, H_2 = 366, H_3 = -320$	No factible
$X_1 = 0, H_2 = 0$	$X_2 = 261, H_1 = -61, H_3 = -1296$	No factible
$X_1 = 0, H_3 = 0$	$X_2 = 180, H_1 = 20, H_2 = 486$	Factible
$X_2 = 0, H_1 = 0$	$X_1 = 200, H_2 = -234, H_3 = 480$	No factible
$X_2 = 0, H_2 = 0$	$X_1 = 174, H_1 = 26, H_3 = 792$	Factible
$X_2 = 0, H_3 = 0$	$X_1 = 240, H_1 = -40, H_2 = -594$	No factible
$H_1 = 0, H_2 = 0$	$X_1 = 122, X_2 = 78, H_3 = 168$	Factible i òptima*
$H_1 = 0, H_3 = 0$	$X_1 = 80, X_2 = 120, H_2 = 126$	Factible
$H_2 = 0, H_3 = 0$	$X_1 = 108, X_2 = 99, H_1 = -7$	No factible
$z^* = 66.100$		

Solució del model

Interpretació

Desde la perspectiva econòmica els models de maximització (beneficis, vendes,...) solen tenir restriccions de menor i igual (limitacions de recursos).
Les variables de folgança ens quantifiquen el recurs sobrant.
Utilitzem l'exemple "*Blue Ridge Hot Tubs*" SOLUCIÓ ÓPTIMA:

$$X_1 = 122, X_2 = 78, H_1 = 0, H_2 = 0, H_3 = 168$$

$$z^* = 66.100$$

Sobren 168 canonades

Solució del model

Altres Exemples

Els models de minimització (costos) solen tenir restriccions de major o igual (exigències de demanda).

A la pràctica podem tenir restriccions de menor i igual, de major i igual i d'igualtat tant si és un model de maximització com de minimització.

Analitzem diferents exemples.

Solució del model

Altres Exemples

Exemple Comercial: Una empresa comercialitza quatre varietats d'un mateix producte (A, B, C i D). Els costos d'obtenció són, respectivament: 250, 260, 180 i 300 um per unitat de producte. L'empresa està obligada a servir diàriament 6000 unitats del producte. Aquesta comanda diària ha de complir que, com a mínim, contingui 50 unitats més de la varietat A que de la varietat B, que el nombre d'unitats de la varietat C sigui igual al de la varietat D i, finalment, no hi pot haver menys de 400 unitats de la varietat B. El model de programació lineal és.

$$
\begin{aligned}
min\, z = \quad & 250x_1 + 260x_2 + 180x_3 + 300x_4 \\
s.a.: \quad & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \geq 6000 \\
& 1x_1 - 1x_2 \geq 50 \\
& 1x_3 - 1x_4 = 0 \\
& 1x_2 \geq 400 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Afegim variables de excedència (E_i) amb les què aconseguim que les restriccions de menor o igual siguin d'igualtat.

$$\begin{aligned} min\, z = \quad & 250x_1 + 260x_2 + 180x_3 + 300x_4 \\ s.a.: \quad & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 - E_1 = 6000 \\ & 1x_1 - 1x_2 - E_2 = 50 \\ & 1x_3 - 1x_4 = 0 \\ & 1x_2 - E_4 = 400 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, E_1, E_2, E_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Solució del model

Altres Exemples

Exemple Barreja: Una empresa farmacèutica elabora certes pastilles a partir de la barreja dels extractes derivats de 3 components (I, II i III). El medicament ha d'incorporar certa quantitat de dos elements curatius (A i B). Cada unitat física d'I (D1) conté un 4% de la quantitat necessària del principi actiu A i un 5% de la precisa del B. Aquests percentatges són 2 i 4, en el cas de D2, i del 4 i 2% per D3. D'altra banda, sent el pes de l'extracte obtingut de cada component de 3, 1 i 3 mg, respectivament, es desitja que el pes de la pastilla no sobrepassi els 200 mg. El cost unitari dels components és de 40, 30 i 10 um A fi de determinar la composició òptima del fàrmac es planteja el model:

$$
\begin{aligned}
min\, z = \quad & 40x_1 + 30x_2 + 10x_3 \\
s.a.: \quad & 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 100 \\
& 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 100 \\
& 3x_1 + 1x_2 + 3x_3 \leq 200 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solució del model

Altres Exemples

Exemple 3: Afegim variables de excedència i de folgança(E_i i H_i).

$$
\begin{aligned}
min\, z = \quad & 40x_1 + 30x_2 + 10x_3 \\
s.a.: \quad & 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 - E_1 = 100 \\
& 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - E_2 = 100 \\
& 3x_1 + 1x_2 + 3x_3 + H_3 = 200 \\
& x_1, x_2, x_3, E_1, E_2, H_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Forma canònica d'un problema de Programació Lineal (PL)

$$\begin{aligned} max\, z = \quad & c_1 x_1 + ... + c_n x_n \\ s.a.: \quad & \\ & a_{11} x_1 + ... + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ & ... \\ & a_{m1} x_1 + ... + a_{mn} x_n \leq b_m \\ & x_1, ..., x_n \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} max\, z = \quad & c'x \\ s.a.: \quad & \\ Ax \leq b & \\ x \geq 0 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} min\, z = \quad & c_1 x_1 + ... + c_n x_n \\ s.a.: \quad & \\ & a_{11} x_1 + ... + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ & ... \\ & a_{m1} x_1 + ... + a_{mn} x_n \geq b_m \\ & x_1, ..., x_n \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} min\, z = \quad & c'x \\ s.a.: \quad & \\ Ax \geq b & \\ x \geq 0 & \end{aligned}$$

Forma estàndard d'un problema de PL

$$
\begin{aligned}
max\, z = &\quad c'x(min\, z = -c'x) \\
s.a.: & \\
Ax = b & \\
x \geq 0 &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
min\, z = &\quad c'x \\
s.a.: & \\
Ax = b & \\
x \geq 0 &
\end{aligned}
$$

Forma matricial d'un problema de PL

On:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

Notació i càlcul matricial de la solució d'un problema de PL

$$A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x^B \\ x^N \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c^B \\ c^N \end{pmatrix}$$

On B indica variables bàsiques (hi ha m variables bàsiques) i N no bàsiques (hi ha $n-m$ variables no bàsiques).

$$Bx^B + Nx^N = b \Longrightarrow Bx^B = b - Nx^N$$

$$\Longrightarrow x^B = B^{-1}(b - Nx^N) \Longrightarrow x^B = B^{-1}b$$

$$Z = c^{B'}x^B + c^{N'}x^N \Longrightarrow z = c^{B'}x^B$$

Notació i càlcul matricial de la solució d'un problema de PL

Exemple "*Blue Ridge Hot Tubs*"

$$
\begin{aligned}
max\, z = \quad & 350x_1 + 300x_2 \\
s.a.: \quad & 1x_1 + 1x_2 + H_1 = 200 \\
& 9x_1 + 6x_2 + H_2 = 1566 \\
& 12x_1 + 16x_2 + H_3 = 2880 \\
& x_1, x_2 \geq 0, H_1 \geq 0, H_2 \geq 0, H_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Considerem que les variables bàsiques són x_1, x_2 i H_3 (recordeu que eren les que estaven en la solució òptima).

$$
x^B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ H_3 \end{pmatrix}, \quad x^N = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}
$$

Notació i càlcul matricial de la solució d'un problema de PL

Exemple "*Blue Ridge Hot Tubs*"

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \\ 12 & 16 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \\ 12 & 16 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 1566 \\ 2880 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0.3333333 & 0 \\ 3 & -0.333333 & 0 \\ -24 & 1.3333333 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 1566 \\ 2880 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 \\ 78 \\ 168 \end{pmatrix}$$

$$z^* = \begin{pmatrix} 350 & 300 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 122 \\ 78 \\ 168 \end{pmatrix} = 66.100$$

Funcionament de l'algorisme Simplex

El **mètode Simplex utilitza** la forma estàndard del model de PL i consisteix en:
És el procediment pel qual es porta a terme el moviment de la solució bàsica factible inicial (o qualsevol altre) a una solució bàsica factible adjacent que millori o, al menys, no empitjori el valor de la funció objectiu.

Funcionament de l'algorisme Simplex

Es tracta d'un **algoritme iteratiu** que, bàsicament consta de tres passos:

- **Pas 1** Iniciar la cerca d'una solució bàsica factible.
- **Pas 2** Determinar si el pas a una solució bàsica factible adjacent pot millorar el valor de la funció objectiu. Si és així anar al pas següent, en altre cas haurem trobat la solució òptima.
- **Pas 3** Determinar la solució bàsica factible adjacent amb major millora en el valor de la funció objectiu. Tornar al pas 2 i repetir el procediment fins arribar a una solució òptima o bé concloure que és un problema infactible o no acotat.

Funcionament de l'algorisme Simplex

Solució factible inicial

Variables bàsiques en la solució inicial: Dependran del tipus de restriccions del model en la seva forma general.

- $\rightarrow$ Si les restriccions són $\leq$ les variables bàsiques inicials són les *variables de folgança*.
- $\rightarrow$ Si les restriccions són $\geq$ o $=$ les variables bàsiques inicials són les *variables artificials*.

Funcionament de l'algorisme Simplex

Solució factible inicial: Exemple

$$\begin{aligned} \mathit{max}: z = \quad & 350x_1 + 300x_2 \\ \mathit{s.a.}: \quad & 1x_1 + 1x_2 + H_1 = 200 \\ & 9x_1 + 6x_2 + H_2 = 1566 \\ & 12x_1 + 16x_2 + H_3 = 2880 \\ & x_1, x_2 \geq 0, H_1 \geq 0, H_2 \geq 0, H_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\mathrm{x}^B = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathit{min}: z = \quad & 250x_1 + 260x_2 + 180x_3 + 300x_4 \\ & +M_1A_1 + M_2A_2 + M_3A_3 + M_4A_4 \\ \mathit{s.a.}: \quad & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 - E_1 + A_1 = 6000 \\ & 1x_1 - 1x_2 - E_2 + A_2 = 50 \\ & 1x_3 - 1x_4 + A_3 = 0 \\ & 1x_2 - E_4 + A_4 = 400 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, E_1, E_2, E_4 \geq 0 \\ & A_1, A_2, A_3, A_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\mathrm{x}^B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}$$

Funcionament de l'algorisme Simplex

Criteri d'optimalitat

$$Z = c^{B'} x^B + c^{N'} x^N$$

$$Bx^B + Nx^N = b \Rightarrow x^B + B^{-1}Nx^N = B^{-1}b \Rightarrow x^B = b' - B^{-1}Nx^N$$

Anomenem ${b_i}'$ als elements de $B^{-1}b$ i ${a_{ij}}'$ als elements de $B^{-1}A$ on $A = (BN)$. Sustituint en la funció objectiu:

$$\begin{aligned}
z &= \textstyle\sum_{i \in x^B} c_i^B \left({b_i}' - \sum_{j \in x^N} {a_{ij}}' x_j^N \right) + \sum_{j \in x^N} c_j^N x_j^N = \\
&= \textstyle\sum_{i \in x^B} c_i^B {b_i}' - \sum_{i \in x^B} c_i^B \sum_{j \in x^N} {a_{ij}}' x_j^N + \sum_{j \in x^N} c_j^N x_j^N = \\
&= \textstyle\sum_{i \in x^B} c_i^B {b_i}' - \sum_{j \in x^N} \sum_{i \in x^B} c_i^B {a_{ij}}' x_j^N + \sum_{j \in x^N} c_j^N x_j^N = \\
&= \textstyle\sum_{i \in x^B} c_i^B {b_i}' - \sum_{j \in x^N} \left(\sum_{i \in x^B} c_i^B {a_{ij}}' - c_j^N \right) x_j^N = \\
&= z_0 - \textstyle\sum_{j \in x^N} \left(z_j - c_j^N \right) x_j^N
\end{aligned}$$

Analitzem com han de ser els $\left(z_j - c_j^N \right)$ si la solució és òptima.

Funcionament de l'algorisme Simplex

Criteri d'optimalitat

En un problema de **màxim**:

- Si $\left(z_j - c_j^N\right)$ és positiu i incrementem el valor de la variable x_j^N el valor de la funció objectiu decreix. Per tant, si tots els $\left(z_j - c_j^N\right)$ són positius la solucio és òptima.
- Si $\left(z_j - c_j^N\right)$ és negatiu i incrementem el valor de la variable x_j^N el valor de la funció objectiu augmenta. Per tant, si hi ha $\left(z_j - c_j^N\right)$ negatius la solució no és òptima i haurem de modificar-la.

Funcionament de l'algorisme Simplex

Criteri d'optimalitat

En un problema de **mínim**:

- Si $\left(z_j - c_j^N\right)$ és negatiu i incrementem el valor de la variable x_j^N el valor de la funció objectiu augmenta. Per tant, si tots els $\left(z_j - c_j^N\right)$ són negatius la solucio és òptima.
- Si $\left(z_j - c_j^N\right)$ és positiu i incrementem el valor de la variable x_j^N el valor de la funció objectiu decreix. Per tant, si hi ha $\left(z_j - c_j^N\right)$ positius la solucio no és òptima i haurem de modificar-la.

Funcionament de l'algorisme Simplex

Criteri d'optimalitat

En forma matricial podem calcular els $n - m$ criteris de optimalitat:

$$c^{B'} B^{-1} N - c^{N'}$$

En la solució inicial $B = I$, per tant:

$$c^{B'} N - c^{N'}$$

Funcionament de l'algorisme Simplex

Criteri d'optimalitat: Solució inicial

Exemple "*Blue Ridge Hot Tubs*"

$$x^B = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}, \quad x^N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 6 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

Funcionament de l'algorisme Simplex

Criteri d'optimalitat: Solució inicial

Exemple "*Blue Ridge Hot Tubs*"

$$c^B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^N = \begin{pmatrix} 350 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 200 \\ 1566 \\ 2880 \end{pmatrix}, \quad (c^{B\prime} N - c^{N\prime})' = \begin{pmatrix} -350 \\ -300 \end{pmatrix}$$

Tenim $\left(z_j - c_j^N\right) < 0$ i el problema és de màxim. La solució **no és òptima**.

Funcionament de l'algorisme Simplex

Modificació de la Solució

Consisteix en determinar quina és la variable que passa de ser no bàsica a bàsica (variable entrant) i viceversa (variable que surt).

- CRITERI DE SELECCIÓ DE LA VARIABLE ENTRANT: Hem de garantir que millora la solució existent.
- CRITERI DE SELECCIÓ DE LA VARIABLE QUE SURT: Hem de garantir que la nova solució sigui factible.

Exemple "*Blue Ridge Hot Tubs*"
Les noves variables bàsiques són x_2, x_1 i H_3 i les variables no bàsiques H_1 i H_2. La nova solució és:

$$x^B = \begin{pmatrix} 78 \\ 122 \\ 168 \end{pmatrix}, \quad x^N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 16 & 12 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1}N = \begin{pmatrix} 3 & -1/3 \\ -2 & 1/3 \\ -24 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Funcionament de l'algorisme Simplex

Criteri d'optimalitat

Exemple "*Blue Ridge Hot Tubs*"

Les noves variables bàsiques són x_2, x_1 i H_3 i les variables no bàsiques H_1 i H_2. La nova solució és:

$$c^B = \begin{pmatrix} 300 \\ 350 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b' = \begin{pmatrix} 78 \\ 122 \\ 168 \end{pmatrix}, \quad (c^{B'} B^{-1} N - c^{N'})' = \begin{pmatrix} 200 \\ 16,667 \end{pmatrix}$$

Tots els $\left(z_j - c_j^N\right) \geq 0$, per tant la solució és ÒPTIMA.

Funcionament de l'algorisme Simplex

Criteri d'optimalitat: Solució inicial

Exemple "*Barreja*"

$$x^B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ H_3 \end{pmatrix}, \quad x^N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Funcionament de l'algorisme Simplex

Criteri d'optimalitat: Solució inicial

Exemple "*Barreja*"

$$c^B = \begin{pmatrix} M \\ M \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^N = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}, \quad (c^{B'}N - c^{N'})' = \begin{pmatrix} 9M - 40 \\ 6M - 30 \\ 6M - 10 \\ -M \\ -M \end{pmatrix}$$

Tenim $\left(z_j - c_j^N\right) > 0$ i el problema és de mínim. La solució **no és òptima**.

Exemple "*Barreja*"

Les noves variables bàsiques són E_1, x_3 i H_3 i les variables no bàsiques x_1, x_2, E_2, A_1 i A_2. La nova solució és:

$$x^B = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad x^N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 & -1 & 2 \\ 2,5 & 2 & -0,5 & 0 & 0,5 \\ -4,5 & -5 & 1,5 & 0 & -1,5 \end{pmatrix}$$

Funcionament de l'algorisme Simplex

Criteri d'optimalitat

Exemple "*Barreja*"

Les noves variables bàsiques són E_1, x_3 i H_3 i les variables no bàsiques x_1, x_2, E_2, A_1 i A_2. La nova solució és:

$$c^B = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^N = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ M \\ M \end{pmatrix}$$

$$b' = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad (c^{B'} B^{-1} N - c^{N'})' = \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ -5 \\ -M \\ 5 - M \end{pmatrix}$$

Tots els $\left(z_j - c_j^N\right) \leq 0$, per tant la solució és ÒPTIMA.