UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

PROVA DE TEORIA REAVALUACIÓ
Programació Lineal i Entera, curs 2013-14
2on curs Grau en Estadística UB-UPC

NOM ALUMNE:

	Temps estimat	Punts	Puntuació		
Test :	30 min	2	C:	I:	
Exercici 1 :	30 min	2			
Exercici 2 :	60 min	3			
Exercici 3 :	30 min	3			
Total :	150min	10			

- **Prohibida la presència de mòbils durant la prova.**
- **Copiar o facilitar la còpia implica suspendre l'assignatura.**

TEST (2 punts / sense apunts)

- Encercleu a **cada** possible resposta **a)**, **b)** i **c)** si és certa (**Sí**) o falsa (**No**).
- Resposta **correcta +1pt**, **incorrecta -0.4pts.**, en **blanc 0.pts.**

TEST 1. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in \mathbb{R}^n | \; Ax = b, x \geq 0\}$:

a) **Sí** / **No** Es pot assegurar que és un poliedre.
b) **Sí** / **No** Es pot assegurar que és un politop.
c) **Sí** / **No** Expressa de la regió factible de qualsevol problema de programació lineal.

TEST 2. Sigui P un poliedre no buit en forma estàndar, i sigui x s.b.f. de P i r el vector de costos reduits. Llavors:

a) **Sí** / **No** Si x és òptima $\Rightarrow$ $r \geq [0]$.
b) **Sí** / **No** Si $r \geq [0] \Rightarrow x$ és òptima .
c) **Sí** / **No** Existirà una solució bàsica factible òptima.

TEST 3. Les direccions bàsiques que pren l'algorisme del símplex a cada iteració :

a) **Sí** / **No** Són direccions factibles de descens (de millora de la funció objectiu).
b) **Sí** / **No** Son direccions factibles al llarg de la qual només canvien les v.b.
c) **Sí** / **No** Són direccions factibles que permeten passar d'un punt extrem de P a un altre d'adjacent.

TEST 4. El teorema d'optimalitat dels punts extrems diu:

"Sigui (PL) $min\{c'x: x \in P\}$, P politop, llavors existeix un punt extrem de P que és solució òptima de (PL)"

En base a aquest teorema, si P és no afitat llavors:

a) **Sí** / **No** Si existeixen solucions optimes de (PL) totes elles seran punts extrems.
b) **Sí** / **No** Pot no existir cap solució òptima de (PL).
c) **Sí** / **No** Si existeixen solucions optimes de (PL) cap d'elles serà punt extrem.

TEST 5. Considerem la forma estàndard del següent problema (PL) $\min_{x \in \mathbb{R}^2}\{-2x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 1\,; x_1 \geq 0\,;\; x_2 \geq 1\}$ i la s.b.f. $x = [0,1]'$ amb $\mathcal{B}^* = \{2,3\}$:

a) **Sí** / **No** $\mathcal{B}$ no és òptima perquè $r \ngeq 0$.
b) **Sí** / **No** $\mathcal{B}$ és òptima però $r \ngeq 0$.
c) **Sí** / **No** $\mathcal{B}$ no és òptima perquè el problema és il·limitat.

NOM ALUMNE:

TEST 6. Els procediments de taxació de **`OPTLP Devex pricing`** i **`Steepset-edge pricing`** (**`pricetype= 3`** i **`4`**):

a) Sí / No Tenen en compte la disminució total de la funció objectiu per unitat de desplaçament al llarg de la direcció bàsica.

b) Sí / No Avaluen tots els costos reduïts i trien el més negatiu.

c) Sí / No Provoquen, en general, un major nombre d'iteracions.

TEST 7. El preu ombra λ_j d'un problema (P) qualsevol:

a) Sí / No És el canvi en la funció objectiu per increment unitat del terme b_j.

b) Sí / No Disminueix sempre a mida que augmenta b_j.

c) Sí / No Augmenta sempre a mida que augmenta b_j.

TEST 8. El problema primal (P) associat al següent problema dual

$$(\mathrm{D})\begin{cases}\max & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ & \lambda_1 & +\lambda_2 & \geq 1 \\ & 2\lambda_1 & & \geq 1 \\ & \lambda_1 \geq 0, & \lambda_2 \geq 0 & \end{cases}$$

a) Sí / No Té variables $x \leq 0$ y constriccions $Ax \geq b$.

b) Sí / No Té variables $x \geq 0$ y constriccions $Ax \geq b$.

c) Sí / No És il·limitat.

TEST 9. Si en un problema (P) amb òptima $\mathcal{B}^*$ es modifica el valor d'un dels coeficients a_{ij} de la matriu de constriccions A:

a) Sí / No La base $\mathcal{B}^*$ pot perdre la factibilitat dual.

b) Sí / No La base $\mathcal{B}^*$ pot perdre la factibilitat primal.

c) Sí / No Sempre podré reoptimitzar amb el símplex primal o dual.

TEST 10. Quan apliquem un algorisme de plans secant de Gomory a un problema de (PE) de minimització:

a) Sí / No A cada iteració s'obté una millor fita inferior de $\mathbf{z}^*_{\mathbf{PE}}$.

b) Sí / No S'obté la formulació ideal de (PE) a l'última iteració.

c) Sí / No A cada iteració s'obté una formulació vàlida més forta de (PE).

TEST 11. Quan apliquem un algorisme de Branch&Cut a un problema de (PE):

a) Sí / No Farà, en general, menys iteracions del símplex que un alg. de Brach&Bound.

b) Sí / No Generarà, en general, menys nodes del símplex que un alg. de Brach&Bound.

c) Sí / No Les fites a $\mathrm{z}^*_{\mathrm{PEi}}$ són, en general, millors que les que s'obtenen amb el Branch and Bound.

TEST 12. La formulació ideal (PEI) d'un problema de programació lineal entera (PE):

a) Sí / No Té la mateixa solució òptima que (PE).

b) Sí / No Tots els punts extrems K_{RLI} pertanyen a K_{PE}.

c) Sí / No És la formulació vàlida de (PE) que s'obté en finalitzar l'algorisme de plans de tall de Gomory.

NOM ALUMNE:

EXERCICI 1. (2 punts / amb apunts i calculadora)

Volem estudiar les propietats del següent problema de programació lineal

$(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^3}\{c'x \mid x \in P\}$ i $P = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}, x \geq 0\right\}$

En base a les propietats de la s.b.f. associada a $\mathcal{B} = \{3,4\}$, trobeu una condició suficient sobre el vector de costos c que permeti assegurar que el problema (PL) no té solució.

Resposta:

EXERCICI 2. (3 punts / amb apunts i calculadora)

Considereu el següent problema de programació lineal (P):

$$(P)\begin{cases}\min & x_1 & & +x_3 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & +2x_3 & \leq 4\\ & 4x_1 & -5x_2 & & = 10\\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0\end{cases}$$

a) **(1. punt)** Comproveu, aplicant l'algorisme del símplex de les dues fases, que la base òptima de (P) és $\mathcal{B}^* = \{1,4\}$.

Resposta:

NOM ALUMNE:

(cont.)

b) **(1/2 punt)** Indiqueu quin és el valor mínim del terme b_1, que anomenarem b_1^{min}, que conserva l'optimalitat $\mathcal{B}^* = \{1,4\}$.

Resposta:

NOM ALUMNE:

c) **(1 punt) Amb l'ajut del símplex dual** indiqueu quina és la solució òptima de (P) si b_1 es redueix per sota de b_1^{min}.

Resposta:

d) **(1/2 punt) A través de l'anàlisi de la representació gràfica del problema dual de $(\boldsymbol{P})$** indiqueu quina és la solució òptima de (P) si b_1 es redueix per sota de b_1^{min}.

Resposta:

EXERCICI 3. (3 punts / amb apunts i calculadora)

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases} \min & -x_1 & & \\ \text{s.a.:} & & x_2 & \geq 1 \\ & 2x_1 & +2x_2 & \leq 5 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, enteres \end{cases}$$

Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de Branch & Cut d'acord amb el següent criteri:

- Afegiu un tall de Gomory a cada node de l'arbre.

NOM ALUMNE:

- Preneu com a variable de generació de tall i de separació x_1 abans que x_2.
- Resoleu la primera relaxació lineal de cada node gràficament i la resta reoptimitzant amb el símplex dual.

Resposta:

NOM ALUMNE:

SOLUCIÓ TEST:

Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)	Test	a)	b)	c)
1	S	N	S	**2**	N	S	N	**3**	S	N	S	**4**	N	S	N	**5**	N	S	N
6	S	N	N	**7**	S	N	N	**8**	S	N	N	**9**	S	S	N	**10**	S	N	S
11	N	S	S	**12**	S	S	N												

SOLUCIÓ EXERCICI 1.

Atés que el problema (PL) és factible, l'única condició sota la qual el problema no tindrà solució és quan aquest sigui il·limitat. Les condicions suficients que permeten assegurar, sobre una s.b.f. $\mathcal{B}$, que el problema és il·limitat son: que existeixin direccions bàsiques de descens $(r_q < 0)$ no afitades $(d_B \geq 0)$. Les tres d.b.f. existents sobre $\mathcal{B} = \{3,4\}$ són:

- $q = 1: d_{B_1} = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ no afitada.
- $q = 2: d_{B_2} = -B^{-1}A_2 = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ no afitada
- $q = 5: d_{B_5} = -B^{-1}A_5 = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} < 0 \Rightarrow$ afitada.

Si d_{B_1} o d_{B_2} és de descens ($r_1 < 0$ o $r_2 < 0$) (PL) serà il·limitat:

- $r_1 < 0 : r_1 = c_1 - c'_B B^{-1}A_1 = c_1 - [c_3 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 < 0$
- $r_2 < 0 : r_2 = c_2 - c'_B B^{-1}A_2 = c_2 - [c_3 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = c_2 < 0$

Així doncs, la condició suficient que estàvem buscant és : $c_1 < 0$ o $c_2 < 0 \Rightarrow$ (PL) il·limitat.

SOLUCIÓ EXERCICI 2.

a) Forma estàndard (PL_e) i problema de fase I (PL_I):

$$(PL_e)\begin{cases} \min & x_1 & & +x_3 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & +2x_3 & +x_4 & = 4 \\ & 4x_1 & -5x_2 & & & = 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

$$(PL_I)\begin{cases} \min & x_5 & & & & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & +2x_3 & +x_4 & & = 4 \\ & 4x_1 & -5x_2 & & & +x_5 & = 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

1a iteració fase I:

- $B = \{4,5\}, B = I, x_B = [4 \quad 10]', N = \{1,2,3\}, z_I = 10$
- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :
- $r' = c'_N - c'_B B^{-1}A_N = [0] - [0 \quad 1]I\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} = [-4 \quad 5 \quad 0] \ngeq 0 \to \boxed{q = 1}$
- Direcció bàsica de descens : $d_B = -B^{-1}A_1 = -I\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} \ngeq 0$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH Departament d'Estadística i Investigació Operativa	**PROVA DE TEORIA REAVALUACIÓ** Programació Lineal i Entera, curs 2013-14 2on curs Grau en Estadística UB-UPC
NOM ALUMNE:	

- Sel. v.b. de sortida $B(p)$: $\theta^* = \min_{i\in\mathcal{B}|d_{B(i)}<0}\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\} = \min\left\{\frac{4}{1},\frac{10}{4}\right\} = \frac{5}{2} \Longrightarrow$ $\boxed{p = 2, B(2) = 5}$
- Actualitzacions i canvi de base :
  - $x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} + \frac{5}{2} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 = \theta^* = \frac{5}{2}, x_2 = x_3 = 0,\ z := z + \theta^* r_q = 10 + \frac{5}{2} \times (-4) = 0$
  - $\mathcal{B} := \{4{,}1\},\ \mathcal{N} := \{2{,}3{,}5\}$. Hem eliminat totes les variables artificials de la base: $\Rightarrow \mathcal{B} := \{4{,}1\}$ és una s.b.f. inicial del problema $(PL_e\ )$.

1a iteració fase II:

- $\mathcal{B}\ = \{4{,}1\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}, x_B = [3/2 \quad 5/2]', \mathcal{N} = \{2{,}3\}, z = 5/2$
- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.n.b d'entrada q :

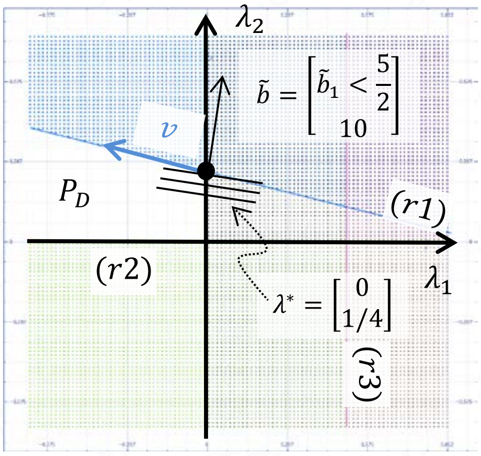
$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 1] - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = [5/4 \quad 1] \geq 0 \rightarrow \boxed{\grave{o}ptim}$$

b) Interval d'estabilitat de b_1:

$$x_B(b_1) = \begin{bmatrix} x_4(b_1) \\ x_1(b_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_1 - 5/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} \overset{\text{cond. fact. (P)}}{\geq} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{b_1 \geq \mathrm{b}_1^{\min} = 5/2}$$

c) Si $\hat{b}_1 < 5/2$ es perd la factibilitat primal i hem de recuperar l'optimalitat amb el símplex dual. Relitzem la primera iteració a partir de la base òptima $\mathcal{B} = \{4{,}1\}\,, \mathcal{N} = \{2,3\}$:

- Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_{B(1)} < 0 \rightarrow B(1) = 4$ v. b. sortint.
- Identificació de problema dual il·limitat: $v = \beta_1 A_N = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 2 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ problema dual il·limitat $\Rightarrow$ **primal infactible, el problema no té solució**.



d) Es pot arribar a la mateixa conclusió analitzant el problema dual. Des del punt de vista del problema dual, un canvi $\tilde{b}_1 < 5/2$ implica una modificació dels costos. El problema dual per a un valor genèric $\tilde{b}_1$ és:

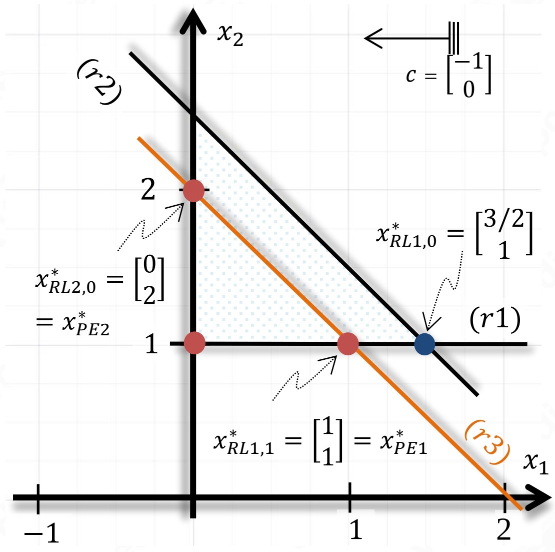
$$(D(\tilde{b}_1)) \begin{cases} \max & \tilde{b}_1\lambda_1 & +10\lambda_2 & & \\ \text{s.a.:} & \lambda_1 & +4\lambda_2 & \leq 1 & (r1) \\ & & -5\lambda_2 & \leq 0 & (r2) \\ & 2\lambda_1 & & \leq 1 & (r3) \\ & \lambda_1 \leq 0 & & & (r4) \end{cases}$$

Si el representem gràficament podem observar que quan $\tilde{b}_1 = 5/2$ el problema dual té òptims alternatius, doncs és perpendicular a la recta $(r1)$. Si $\tilde{b}_1 < 5/2$ el problema dual esdevé il·limitat (el vector director $v = [-4 \quad 1]'$ és una direcció d'ascens il·limitada, doncs $\tilde{b}'v = -4\tilde{b}_1 + 10 > 0$) i el primal infactible.

NOM ALUMNE:

SOLUCIÓ EXERCICI 3.

$$(PE1)\begin{cases} \min & -x_1 \\ \text{s.a.:} & \\ (r1) & \quad x_2 \quad -x_3 \qquad\qquad = 1 \\ (r2) & 2x_1 \quad +2x_2 \qquad +x_4 \quad = 5 \\ & x_1, \quad x_2 \qquad\qquad \geq 0, enteres \end{cases}$$



B&C, iteració 1: $L = \{(PE1)\}, \underline{z}_{PE1} = -\infty, z^* = +\infty$

- **Selecció**: $(PE1)$.
- **Resolució de $(RL1)$ amb un tall de Gomory**:
  - Resolució gràfica de $(RL1{,}0)$: $x^*_{RL1,0} = [3/2 \quad 1]', z^*_{RL1,0} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{z}^*_{PE1} := \lceil z^*_{RL1,0} \rceil = -1$
    - Tall de Gomory sobre $x^*_{RL1,0}$ associat a x_1:
      - o $\mathcal{B} = \{1,2\}, B = \begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$

        $B^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 1/2\\1 & 0\end{bmatrix}$
      - o $\mathcal{N} = \{3,4\},\ A_N = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix}1 & 1/2\\-1 & 0\end{bmatrix}$
      - o $x_1 + \lfloor 1 \rfloor x_3 + \lfloor 1/2 \rfloor x_4 \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \rightarrow \boxed{x_1 + x_3 \leq 1\ (r3)} (\equiv x_1 + x_2 \leq 2)$
  - Resolució de $(RL1{,}1) = (RL1{,}0) + (r3)$: reoptimització amb el símplex dual a partir de $x^*_{RL1,0} = [x_1, x_2]' = [3/2 \quad 1]'$ per addició de $x_1 + x_3 + x_5 = 1\ (r3) \rightarrow a_{m+1} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$

- $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a_{B_{m+1}}B^{-1} & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1/2 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & -1/2 & 1\end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix}3/2\\1\\-1/2\end{bmatrix}$.
- $\mathcal{N} = \{3,4\}, A_N = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} r' = [0 \quad 0] - [-1 \quad 0]\begin{bmatrix}-1 & 1/2\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = [\overbrace{1}^{r_3} \quad \overbrace{1/2}^{r_4}] \geq 0$
- **Simplex dual, iteració 1**: $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}, \mathcal{N} = \{3, 4\}$
  - o Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p :

    $$x_B = \begin{bmatrix}3/2\\1\\-1/2\end{bmatrix}. \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, \boxed{B(3) = 5 \text{ v.b.sortint}}$$
  - o Identificació de problema (D) il·limitat :

    $$d'_{r_N} = \beta_3 A_N = [1 \quad -1/2 \quad 1]\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = [0 \quad -1/2] \ngeq 0$$
  - o Sel. v.n.b. d'entrada q:

    $$\theta^*_D = \min\left\{-r_j/d_{r_{N_j}} : j \in \mathcal{N}, d_{r_{N_j}} < 0\right\} = \min\left\{\frac{-1/2}{-1/2}\right\} = 1 \Rightarrow \boxed{q = 4}$$
  - o Canvi de base i actualitzacions:

NOM ALUMNE:

$$\mathcal{B} \leftarrow \{1,2,4\}\,, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow Bx_B = b\,, \begin{cases} & x_2 & & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_4 & = & 5 \\ x_1 & & & = & 1 \end{cases} \rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Simplex dual, iteració 2:** $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}\,, \boldsymbol{\mathcal{N}} = \{\mathbf{4}, \mathbf{5}\}$
  - Identificació de s.b.f. òptima i selecció de la v.b de sortida p : $x_B \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{òptim}}$

– $\boxed{x^*_{RL1,1} = [1 \quad 1]', z^*_{RL1,1} = -1 \Rightarrow \underline{z}^*_{PE1} := 0}$.

- **Eliminació:** $x^*_{RL1,1} = [1 \quad 1]' = x^*_{PE1}$:
  – Actualització incumbent: $z^*_{PE1} < z^* \Rightarrow z^* := -1, x^* := [1 \quad 1]', L \leftarrow L\backslash\{(PE1)\} = \emptyset$

B&C, iteració 2: $L = \emptyset \Rightarrow \boxed{x^*_{PE1} = x^* = [1 \quad 1]',\ z^*_{PE1} = z^* = -1}$