Grau Interuniversitari d'Estadística UB-UPC.
Teoria de Cues i Simulació. Examen Parcial 2 curs 2014-15

P1) [5 punts] El temps de vida d'un component electrònic C que fabrica una empresa Y presenta una distribució exponencial. Els components de la gama A tenen temps mig de vida de 2 mesos, mentre que els de la gama B tenen temps mig de 1,5 mesos. Una empresa X estableix un contracte amb l'empresa Y segons el qual cada 2 mesos (interval de temps constant) s'enviarà a l'empresa X un d'aquests components. Amb un 60 % de probabilitats, i completament a l'atzar, s'envien components de la gama A i amb un 40% de probabilitats, de la gama B. L'empresa X els usa de un en un, de forma que únicament els reemplaça quan el component en ús deix de funcionar i si té disponibilitat en stock. Es demana:

1-[1.5 punts] Establiu un model de cues per als components que rep l'empresa X, indicant si hi haurà estat estacionari. Quina és la distribució de probabilitats del temps de servei del model? Calculeu la probabilitat de que en un moment determinat a l'empresa X no hi hagi existències d'aquest component.
2- [2 punts] Calculeu usant una aproximació el nº mig de components que hi ha presents a l'empresa X.
3- [1.5 punts] Calculeu la probabilitat de que un component rebut per l'empresa X hagi d'esperar més de 1 mes en ser utilitzat.

3253	7880	1782	2299	4181	8936	1243	939	7819	884
7237	4062	2316	2239	6181	3452	8527	3262	3083	1377
1146	3454	8029	4914	9608	8179	3798	5258	2192	6160
7743	9980	1518	6891	6326	4949	2152	9601	4554	6939
594	6583	7222	7591	3838	4615	1300	9575	8421	7453

P2) [5 punts] Dues unitats mòbils alimentades amb bateries efectuen contínuament tasques d'inspecció/vigilància en un sistema de canonades. Cada missió d'inspecció és efectuada per una de les unitats i té una durada aleatòria d'esperança 4 hores amb distribució exponencial; en esgotar-se la bateria la unitat retorna per la seva recàrrega i inicia immediatament una nova missió d'inspecció. El temps per la recàrrega és constant i de valor 3 hores. L'únic equip de recàrrega de què es disposa és capaç d'atendre únicament una unitat a la vegada. Es demana que us plantegeu efectuar una simulació del sistema mitjançant la metodologia event-scheduling. Considereu les variables d'estat NP = número d'unitats en tasca d'inspecció, S= estat del servidor i tCK = instant de rellotge així com els successos:

E- bateria esgotada
R-bateria recarregada

a) [1 punt] Indiqueu al menys dues magnituds que permetin avaluar la cobertura temporal del sistema en quan a tasques de vigilància.
b) [1 punt] Escriviu les accions que desencadenarien cada succès sobre les variables d'estat i quins nous successos serien generats.
c) [2,5 punts] Efectueu la simulació del sistema fins que es completi la tercera recàrrega. Cada cop que inspeccioneu un element de la llista de successos deixeu indicat el valor final de totes les variables d'estat, així com els elements que formen part de la llista. Partiu de la situació inicial: NP=2 i S=lliure; genereu inicialment una llista amb dos successos B (descàrrega de bateria)
d) [0,5 punts] Calculeu, d'acord amb la vostra simulació l'estimador de les dues magnituds que hagueu considerat a l'apartat a).

Per la generació dels números pseudoaleatoris que necessiteu feu servir a) el mètode de la inversa i b) la taula anterior començant pel extrem superior esquerra i seguint per files (es a dir: 3253, 7880, ...)

P1) Model D/Hiper/1 x = temps entre component generis

1) $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/2}{1/1'8} = 0'9$ $E[x] = 0'6 \cdot 2 + 0'4 \cdot 1'5 =$

$= \underline{1'8 \text{ mesos}}$

$P_0 = 1 - \rho = 0'1.$

2) $Var[x] = 2(0'6 \cdot 4 + 0'4 \cdot 2'25) - 1'8^2 =$

$= 3'36$

$C_x^2 = \frac{Var[x]}{E[x]^2} = \frac{3'36}{1'8^2} = 1'037$; $C_\tau = 0$

Adoptem aproximació de Köllerström:

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma_\tau^2 + \rho^2 \mu^2 \sigma_x^2}{2(1-\rho)} = \frac{C_\tau^2 + \rho^2 C_x^2}{2(1-\rho)} =$$

$$= \frac{0'81 \cdot 1'037}{2 \cdot 0'1} = 4'2 \text{ ; } L = L_q + \rho = 5'1 \text{ components.}$$

3) $P(w_q \geq 1) = e^{-1/W_q}$ (distribució de w_q exponencial per heavy traffic).

$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{4'2}{1/2} = 8'4$ mesos

$P(w_q \geq 1) = e^{-1/8'4} = 0'8877.$

P2) Es tracta d'una cua de població finita D/M/1/·/2

Variables d'estat: N_P = número d'unitats d'inspecció

S = estat del servidor { L lliure, O ocupat }

Succesos: B – bateria esgotada

R – " recarregada

Accions

B – (bateria esgotada)

$NP = NP - 1$;

si $S = L$ llavors { $S = 0$; generar succés R; inserir-lo en la llista }

R – (bateria recarregada)

$NP = NP + 1$;

generar succés tipus B; inserir-lo en la llista;

si $NP = 1$ llavors { generar succés R; inserir-lo en llista }

altrament { $S = L$ }

generar un succés B, el comporta calcular l'instant de temps en el que es produirà, tenint en compte l'instant de rellotge t_{ck}.

Magnituds: P_0 – probabilitat de trobar el sistema sense vigilància

P_2 – probabilitat de que el sistema usi tots els recursos.

Inicialització $N_p = 2$; $S = L$; $t_{ac} = 0$; creació de dos successos inicials B :

0)

0'953	4'49
B	B

$t_{B_1} = t_{ac} + \tau_1 = 0 - 4 \ln \frac{3253}{9999} = 4'49$

$t_{B_2} = t_{ac} + \tau_2 = 0 - 4 \ln \frac{7880}{9999} = 0'953$

1)

0'953	4'49	3'953
B	B	R

$N_P = N_P - 1 = 1$; $t_{ac} = 0'953$

$S = 0$

$t_R = 0'953 + 3 = 3'953$

2)

3'953	4'49	10'85
R	B	B

$N_P = 2$ $t_{ac} = 3'953$

$t_B = 3'953 - 4 \ln \frac{1782}{9999} = 10'85$

$S = L$.

3)

4'49	10'85	7'49
B	B	R

$N_P = 1$; $t_{ac} = 4'49$

$S = 0$

$t_R = 4'49 + 3 = 7'49$

4)

7'49	10'85	13'37
R	B	B

$N_P = 2$ $t_{ac} = 7'49$

$t_B = 7'49 - 4 \ln \frac{2199}{9999} = 13'37$

$S = L$

5)

10'85	13'37	13'85
B	B	R

$N_P = N_P - 1 = 1$ $t_{ac} = 10'85$

$S = 0$

$t_R = 10'85 + 3 = 13'85$

6)

13'37	13'85
B	R

$N_P = 0$ $t_{ac} = 13'37$

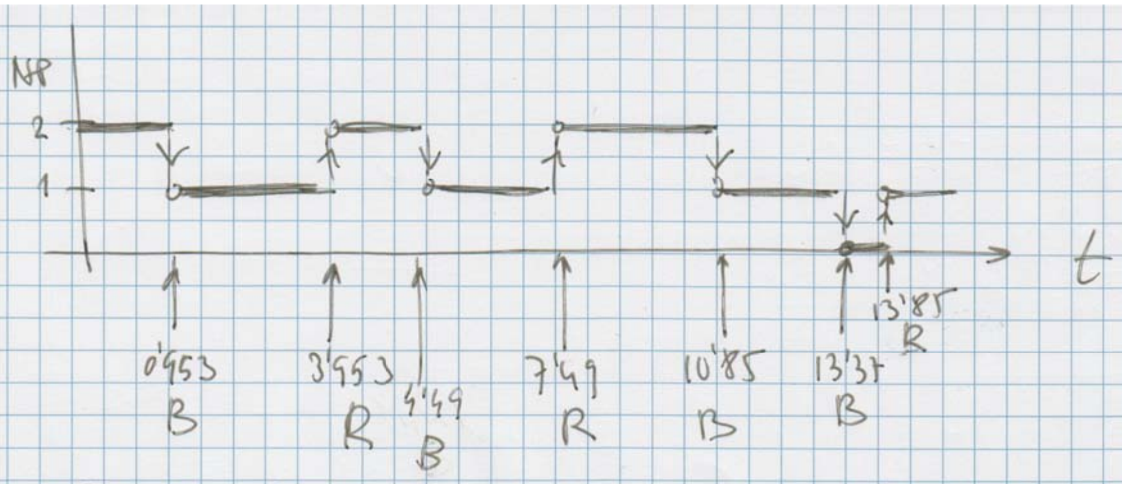
7)

13'85	17'33	16'85
R	B	R

$N_P = 1$ $t_{ac} = 13'85$

$t_B = t_{ac} - 4 \ln \frac{4181}{9999} = 17'33$

$t_R = t_{ac} + 3 = 16'85$



$$P_0 = \frac{13'85 - 13'37}{13'85} = 3'46 \cdot 10^{-2}$$

$$P_2 = \frac{0'953 + (4'49 - 3'953) + (10'85 - 7'49)}{13'85} = \frac{4'85}{13'85} = 0'3501$$