

Examen de INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

19 de junio de 2014

1. Sea el siguiente modelo de programación lineal (PL):

Cuadro 1.

$$\text{Max } Z = -3X_1 + X_2$$

Sujeto a:

$$-4X_1 + 3X_2 \leq 60$$

$$2X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$X_1 - X_2 \leq 20$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

- a. Analizad gráficamente la solución del modelo del Cuadro 1. Comentar la gráfica obtenida.
- b. Analizad gráficamente la solución del modelo Cuadro 1 suponiendo que la función objetivo es de mínimo ($\text{Min } Z = -3X_1 + X_2$). Comentar la gráfica obtenida.
2. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero solo dispone de 9 conductores, además todos los autocares tienen dos asientos delante para 2 profesores. El alquiler de un autocar grande cuesta 80 euros y el de uno pequeño, 60 euros.
- a. Plantead el modelo de programación lineal que permita determinar cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.
- b. Escriba el programa de SAS/OR que permita obtener la solución del modelo que habéis planteado en el apartado a.. (SOLO PARA LOS QUE NO HAN REALIZADO LA EVALUACIÓN CONTINUA)
- c. Imaginad que la escuela se replantea el objetivo de minimización de costes y, sin embargo tiene una serie de metas que desea cumplir en la medida de lo posible. Además de la información al inicio del enunciado, se sabe que la escuela dispone de un presupuesto de 450 euros para gastos de transporte de la excursión. Además, se sabe que los 400 alumnos están repartidos en grupos de 20, cada uno con un profesor responsable. Plantee el modelo de programación por metas que permita determinar

cuántos autobuses de cada tipo tiene que contratar la empresa de modo que se alcancen al máximo posible las siguientes metas:

- i. No superar el presupuesto para gastos de transporte.
- ii. Contratar todos los autobuses de 40 plazas.
- iii. Que el total de plazas contratadas no supere las 400.

3. Una entidad financiera ofrece los siguientes cuatro tipos de préstamos para sus clientes:

- i. Préstamos de primera hipoteca al 7% de interés (X_1).
- ii. Préstamos de segunda hipoteca al 10% de interés (X_2).
- iii. Préstamos de acondicionamiento de vivienda al 10% de interés (X_3).
- iv. Préstamos personales al 12% de interés (X_4).

La entidad dispone de 2 millones de euros para repartir entre los cuatro tipos de préstamos. Los préstamos de primera hipoteca deben ser al menos el 55% del total de los préstamos hipotecarios. Los préstamos de segunda hipoteca no deben exceder el 25% del total. Por razones impositivas para la entidad financiera, el tipo medio de interés del total de los préstamos no debe exceder el 15%. El modelo de PL que hay que resolver para determinar la distribución de los préstamos que maximice las ganancias asociadas a los intereses cobrados es:

Cuadro 2.

| |
|---|
| $\text{Max } Z = 0,07X_1 + 0,1X_2 + 0,1X_3 + 0,12X_4$ |
| Sujeto a: |
| $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 2.000.000$ |
| $0,45X_1 - 0,55X_2 \geq 0$ |
| $0,25X_1 - 0,75X_2 + 0,25X_3 + 0,25X_4 \geq 0$ |
| $-0,02X_1 + 0,01X_2 + 0,01X_3 + 0,03X_4 \leq 0$ |
| $X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$ |

- a. Analizad detalladamente cómo se han obtenido los coeficientes asociados a las variables de decisión en la función objetivo y en las restricciones del modelo del Cuadro 2.
- b. En los cuadros 3 y 4 mostramos los resultados de la estimación del modelo obtenidos con el procedimiento LP de SAS/OR.

Cuadro 3.

Procedimiento LP

Resumen de la variable

| Nombre de la Col variable | Estado | Tipo | Precio | Actividad | Coste reducida |
|------------------------------|--------|---------|--------|-----------|-------------------|
| 1 x1 | BASIC | NON-NEG | 0.07 | 1200000 | 0 |
| 2 x2 | | NON-NEG | 0.1 | 0 | 0 |
| 3 x3 | | NON-NEG | 0.1 | 0 | 0 |
| 4 x4 | BASIC | NON-NEG | 0.12 | 800000 | 0 |
| 5 Total | | SLACK | 0 | 0 | -0.09 |
| 6 Hipot1 | BASIC | SURPLUS | 0 | 540000 | 0 |
| 7 Hipot2 | BASIC | SURPLUS | 0 | 500000 | 0 |
| 8 Interes | | SLACK | 0 | 0 | -1 |

Resumen de restricciones

| Nombre de la Fila restricción | Tipo | Col S/S | Rhs | Actividad | Actividad dual |
|----------------------------------|----------|------------|---------|-----------|-------------------|
| 1 rentabilitat | OBJECTVE | . | 0 | 180000 | . |
| 2 Total | LE | 5 | 2000000 | 2000000 | 0.09 |
| 3 Hipot1 | GE | 6 | 0 | 540000 | 0 |
| 4 Hipot2 | GE | 7 | 0 | 500000 | 0 |
| 5 Interes | LE | 8 | 0 | 0 | 1 |

Análisis de rango RHS

| | -----Phi mínimo----- | | -----Phi máximo----- | | | |
|---------|----------------------|--------|----------------------|----------|--------|----------|
| Fila | Rhs | Dejar | Objetivo | Rhs | Dejar | Objetivo |
| Total | 2.328E-10 | Hipot1 | 0 | INFINIDA | . | . |
| Hipot1 | -INFINIDA | . | . | 540000 | Hipot1 | 180000 |
| Hipot2 | -INFINIDA | . | . | 500000 | Hipot2 | 180000 |
| Interes | -40000 | x4 | 140000 | 60000 | x1 | 240000 |

Análisis del rango del precio

| Nombre de la | | -----Phi mínimo----- | | -----Phi máximo----- | | |
|--------------|-----------|----------------------|----------|----------------------|------------|----------|
| Col variable | Precio | Introducir | Objetivo | Precio | Introducir | Objetivo |
| 1 x1 | 0.07 | x3 | 180000 | 0.12 | Interes | 240000 |
| 2 x2 | -INFINIDA | . | 180000 | 0.1 | x2 | 180000 |
| 3 x3 | -INFINIDA | . | 180000 | 0.1 | x3 | 180000 |
| 4 x4 | 0.12 | x2 | 180000 | INFINIDA | . | INFINIDA |
| 5 Total | -INFINIDA | . | 180000 | 0.09 | Total | 180000 |
| 6 Hipot1 | 0 | x3 | 180000 | 0.1111111 | Interes | 240000 |
| 7 Hipot2 | 0 | x2 | 180000 | INFINIDA | . | INFINIDA |
| 8 Interes | -INFINIDA | . | 180000 | 1 | Interes | 180000 |

Cuadro 4.

| | | | | | | | | | | | | | | P | r | | | | |
|---|--------------|-------|--------------|---------|----|-------|-------|----|-------|---|---|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | H | e | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | A | n | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | S | t | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | E | a | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | I | b | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | n | 1 | i | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | T | i | i | t | _ | l |
| | | | | | | | | | | | | | | o | p | p | e | O | i |
| 0 | I | I | I | B | | | | | t | o | o | r | B | t | | | | | |
| b | D | D | C | _ | x | x | x | x | a | t | t | e | J | a | | | | | |
| s | - | - | - | R | 1 | 2 | 3 | 4 | l | 1 | 2 | s | E | t | | | | | |
| 1 | rentabilitat | _rhs_ | R_COSTS | . | -0 | 0.00 | 0.00 | 0 | -0.09 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | | | | | |
| 2 | rentabilitat | _rhs_ | x1 | 1200000 | 1 | 0.40 | 0.40 | 0 | 0.60 | 0 | 0 | -20 | 0 | 0 | | | | | |
| 3 | rentabilitat | _rhs_ | Hipot1 | 540000 | 0 | 0.73 | 0.18 | -0 | 0.27 | 1 | 0 | -9 | 0 | 0 | | | | | |
| 4 | rentabilitat | _rhs_ | Hipot2 | 500000 | 0 | 1.00 | 0.00 | 0 | 0.25 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| 5 | rentabilitat | _rhs_ | x4 | 800000 | 0 | 0.60 | 0.60 | 1 | 0.40 | 0 | 0 | 20 | 0 | 0 | | | | | |
| 6 | rentabilitat | _rhs_ | PHASE_1_OBJE | 0 | 0 | 0.00 | 0.00 | 0 | 0.00 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | | | | |
| 7 | rentabilitat | _rhs_ | rentabilitat | 180000 | 0 | -0.00 | -0.00 | -0 | 0.09 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | | | | | |

Responded a las siguientes cuestiones, todos los análisis deben realizarse respecto a la solución del modelo que se muestra en los cuadros 3 y 4.

b.1. Describid la distribución de préstamos óptima y indicad cuáles son las ganancias máximas por tipos de interés.

b.2. Si la entidad financiera decidiera destinar 100.000 euros más para repartir en créditos, ¿cuál sería el incremento de las ganancias por intereses?, ¿cómo repartiría de forma óptima estos 100.000 euros entre los distintos tipos de préstamos? Justificad las respuestas.

b.3. Por motivos comerciales, la empresa se ve obligada a repartir 300.000 euros en préstamos de segunda hipoteca, analizad la nueva solución óptima (valores de las variables y de la función objetivo).

b.4. ¿Cuál es la opción o las opciones del procedimiento de programación lineal de SAS/OR que hemos utilizado para realizar el análisis de sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo y de los términos independientes?. Interprete los resultados del análisis de sensibilidad. (SOLO PARA LOS QUE NO HAN REALIZADO LA EVALUACIÓN CONTINUA)

4. Supongamos que la entidad financiera del ejercicio anterior todavía no ha puesto en marcha los servicios de concesión de los 4 préstamos que desea ofrecer a sus clientes. La compañía estima que la puesta en marcha del servicio de préstamos hipotecarios, de primera y segunda

hipoteca, posee un coste fijo 6000 euros. Además, la puesta en marcha del servicio de préstamos personales posee un coste fijo de 5000 euros y para los de restauración de vivienda el coste fijo es de 3000 euros. Plantee el modelo de programación que permita incorporar la existencia de costes fijos en el modelo de PL del Cuadro 2.

5. Escriba el programa de SAS/OR con el que obtendría la solución del modelo que ha planteado en el ejercicio 4. (SOLO PARA LOS QUE NO HAN REALIZADO LA EVALUACIÓN CONTINUA)
6. Un individuo quiere invertir en bolsa y ha considerado tres posibles tipos de valores: I, II y III. Los rendimientos medios de estos valores son, respectivamente, 30%, 20% y 8%. El objetivo del individuo es minimizar el riesgo de su inversión garantizándose una ganancia esperada de al menos el 12%. El individuo sabe que el riesgo se mide a partir de la siguiente función: $f(p_1, p_2, p_3) = 3p_1^2 + 2p_2^2 + p_3^2 + 2(2p_1p_2 - p_1p_3 - 0,8p_2p_3)$.
 - a. En la Tablas 1 se muestran los resultados de la estimación del modelo de programación que permite determinar el reparto óptimo de la inversión que minimiza el riesgo y garantiza una ganancia esperada de al menos el 12%. Describid la solución óptima (valores de las variables y función objetivo). ¿Cuál es el algoritmo que se ha utilizado para obtener la solución óptima? Justificad la respuesta.

Tabla 1.

Celda objetivo (Mín)

| Celda | Nombre | Valor original | Valor final |
|---------|-----------------------|----------------|-------------|
| \$H\$14 | Portfolio Variance II | 0.280701754 | 0.280701754 |

Celdas de variables

| Celda | Nombre | Valor original | Valor final | Entero |
|---------|---------------|----------------|-------------|-----------|
| \$G\$11 | Portfolio I | 12.28% | 12.28% | Continuar |
| \$H\$11 | Portfolio II | 26.32% | 26.32% | Continuar |
| \$I\$11 | Portfolio III | 61.40% | 61.40% | Continuar |

Restricciones

| Celda | Nombre | Valor de la celda | Fórmula | Estado | Demora |
|---------|--------------------|-------------------|------------------------|---------------|-------------|
| \$H\$13 | Expected Return II | 13.86% | $\$H\$13 \geq \$I\13 | No vinculante | 1.86% |
| \$J\$11 | Portfolio Total | 100.00% | $\$J\$11 = 1$ | Vinculante | 0 |
| \$G\$11 | Portfolio I | 12.28% | $\$G\$11 \leq 1$ | No vinculante | 0.877193035 |
| \$H\$11 | Portfolio II | 26.32% | $\$H\$11 \leq 1$ | No vinculante | 0.73684212 |
| \$I\$11 | Portfolio III | 61.40% | $\$I\$11 \leq 1$ | No vinculante | 0.385964844 |
| \$G\$11 | Portfolio I | 12.28% | $\$G\$11 \geq 0$ | No vinculante | 12.28% |
| \$H\$11 | Portfolio II | 26.32% | $\$H\$11 \geq 0$ | No vinculante | 26.32% |
| \$I\$11 | Portfolio III | 61.40% | $\$I\$11 \geq 0$ | No vinculante | 61.40% |

- b. En la Tabla 2 se muestran algunos resultados relacionados con el análisis de sensibilidad del modelo que permite determinar el reparto óptimo de la inversión. Interprete los valores de los gradientes reducidos (Reducido Degradado) y de los Multiplicadores de Lagrange (Lagrange Multiplicador).

Tabla 2.

Celdas de variables

| Celda | Nombre | Final Valor | Reducido Degradado |
|--------------|---------------|------------------------|-------------------------------|
| \$G\$11 | Portfolio I | 0.122806965 | 0 |
| \$H\$11 | Portfolio II | 0.26315788 | 0 |
| \$I\$11 | Portfolio III | 0.614035156 | 0 |

Restricciones

| Celda | Nombre | Final Valor | Lagrange Multiplicador |
|--------------|--------------------|------------------------|-----------------------------------|
| \$H\$13 | Expected Return II | 0.138596478 | 0 |
| \$J\$11 | Portfolio Total | 1 | 0.561405035 |

- c. Imaginad que en el modelo de programación cuyos resultados se muestran en la Tabla 1 se desea incorporar la aversión al riesgo del individuo. Se sabe que en una escala entre 0 y 1, dicho individuo posee una versión al riesgo que se valora en 0,7. Plantee el modelo de programación que permita tener en cuenta la aversión al riesgo del individuo, eliminando para ello la restricción que garantiza una ganancia esperada de al menos el 12%. ¿Cree que tras resolver el modelo que ha planteado el beneficio esperado obtenido será mayor o menor que el que se obtiene en la Tabla 1? Justificad la respuesta.
- d. Escriba el programa de SAS/OR con el que obtendría la solución del modelo que ha planteado en el apartado c. de este ejercicio 6. (SOLO PARA LOS QUE NO HAN REALIZADO LA EVALUACIÓN CONTINUA)

NOTA: Las puntuaciones de los apartados son las siguientes:

PARTE CONJUNTA EVALUACIÓN CONTINUA Y FINAL

PARTE EVALUACIÓN FINAL