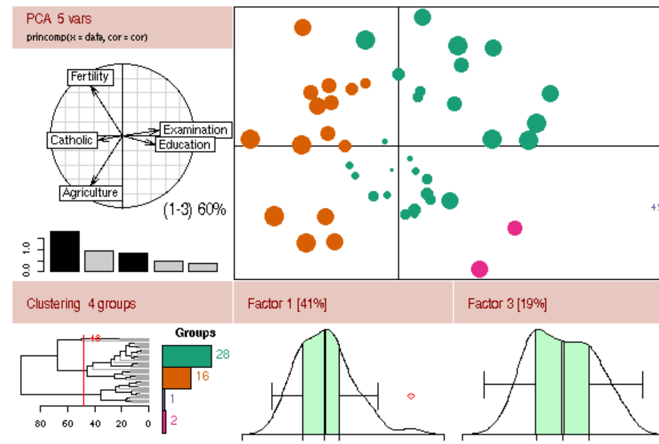
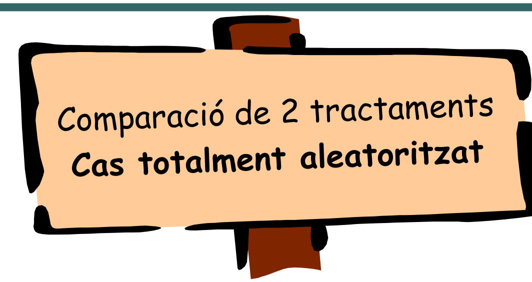
Comparació de dos tractaments

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$$

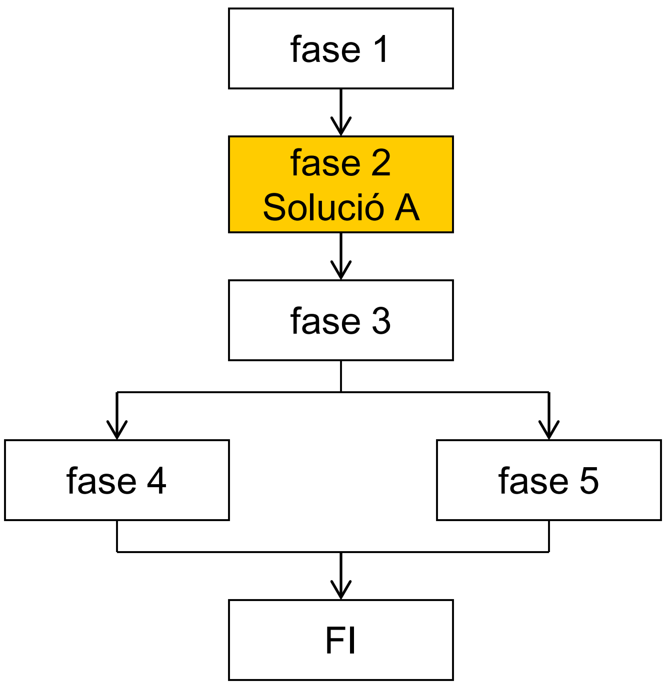


Introducció: exemple del curtit de pells

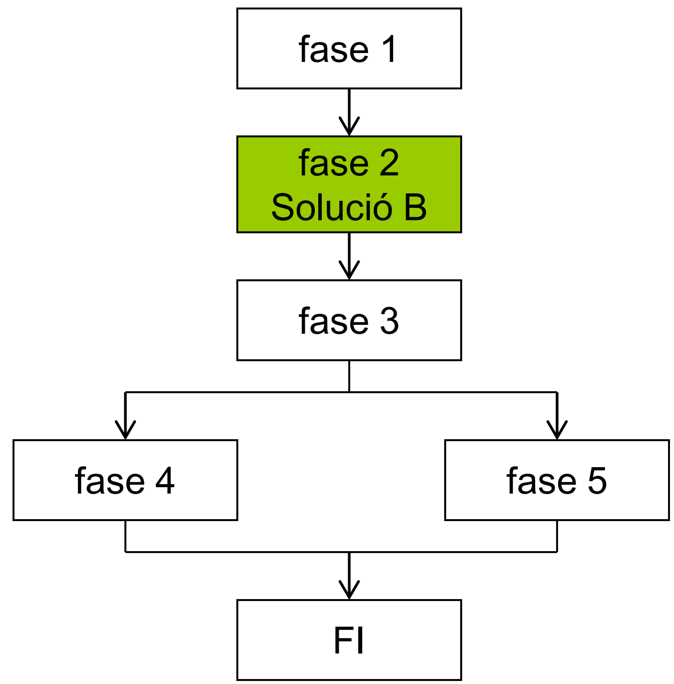
Tenim un procés de curtit de pells, que es pot dur a terme mitjançant dos mètodes diferents:



MÈTODE A



MÈTODE B



Introducció: exemple del curtit de pells

Tractament habitual:

Es submergeix el cuir durant 4 hores a la solució A

Tractament alternatiu:

Substituir la solució A per una altra solució, B

Avantatges del canvi:

B és més barata que A

Possible inconvenient:

La resistència a la tracció obtinguda amb B podria ser menor que la que s'obté amb A

Per sortir de dubtes, cal fer un experiment.

Plantejament del problema

1. **Definir les hipòtesis:**

La que se suposa certa fins que no es demostri el contrari

S'escull una opció o l'altra segons el coneixement físic que es tingui sobre el problema. Dependrà de la situació

Hipòtesis nul·la

$$H_0 : \mu_A = \mu_B$$

Hipòtesis alternativa

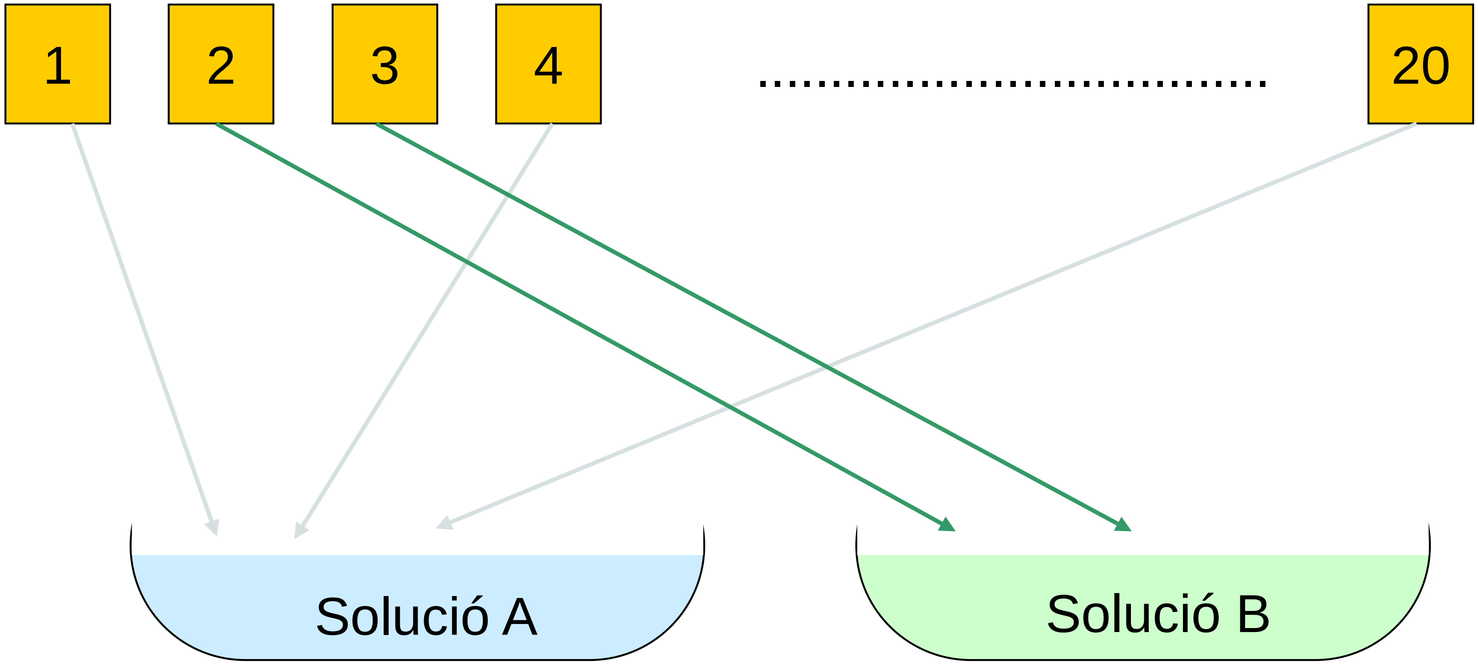
$$H_1 : \mu_A > \mu_B \quad \text{o bé} \quad H_1 : \mu_A < \mu_B \quad \text{o bé} \quad H_1 : \mu_A \neq \mu_B$$

La més raonable en aquest cas

2. **Recollir les dades.**

   Com?

Disseny de la recollida de dades



Les 20 peces s'assignen aleatòriament a una o l'altra solució

Disseny de la recollida de dades

Es deixen les peces de cuir submergides durant quatre hores en cadascuna de les solucions.

Per recollir les mesures de resistència a tracció:

- Es necessita una metodologia de mesura perfectament definida
- Es mesura en ordre aleatòri (per evitar derives en l'aparell o vicis del procés de mesura)

Variable	N	Mean	StDev
A	10	25,140	1,242
B	10	23,620	1,237

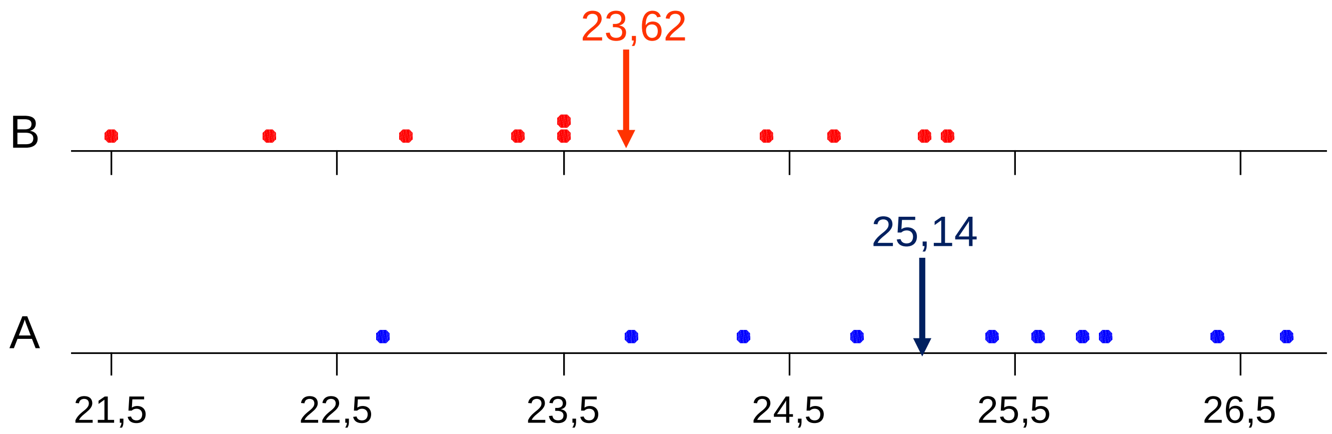
Resultats:

A: 24,3(2) 25,6(3) 26,7(5) 22,7(9) 24,8(11) 23,8(12) 25,9(14) 26,4(16) 25,8(17) 25,4(18)

B: 24,4(1) 21,5(6) 25,1(4) 22,8(7) 25,2(8) 23,5(10) 22,2(13) 23,5(15) 23,3(19) 24,7(20)

Anàlisi exploratòria de dades

3. Fer un gràfic que permeti:
   - Veure què està passant.
   - Detectar possibles valors anòmals.



Amb les dades resultants, es pot dir que la solució B dóna una resistència a la tracció de les peces menor que la solució A?
O bé la diferència entre les mitjanes es deu a l'atzar, i si es tornés a fer l'experiment potser les mitjanes tindrien el mateix valor o fins i tot la mitjana de B seria més gran que la de A?

Verificació de supòsits

4. Verificar els supòsits en què es basa la metodologia:

a) Normalitat de les dades.
No és un supòsit crític pel Teorema Central del Límit

b) Independència
Ve donada per l'estructura física del problema.

c) Aleatorietat
Cal garantir-la quan es recullen les dades.
Si les dades es recullen malament (sense aleatoritzar), això ja no té solució després!

Verificació de supòsits

d) Igualtat de variances poblacionals.
Cal comprovar-ho amb el test de la F-Snedecor. Aquí si és important el supòsit de normalitat.

$$H_0^{'} : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$$
$$H_1^{'} : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$$

Estadístic de prova

$$F_0 = \frac{s_A^2}{s_B^2} = \frac{1{,}242^2}{1{,}237^2} = 1{,}008$$

Variable	N	Mean	StDev
A	10	25,140	1,242
B	10	23,620	1,237

Distribució de referència: F-Snedecor$_{(9;9)}$

p-valor = 0,991

S'ha obtingut un p-valor molt gran (> 0,05).
No podem rebutjar la hipòtesi d'igualtat de variances.

Estadístic de prova per comparar dues mitjanes

Sabem que si les 2 mostres provenen de poblacions normals independents...

$$\left.\begin{array}{l}\bar{y}_A \sim N\left(\mu_A, \sqrt{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}}\right) \\ \bar{y}_B \sim N\left(\mu_B, \sqrt{\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{y}_A - \bar{y}_B \sim N\left(\mu_A - \mu_B, \sqrt{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A} + \dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}\right)$$

Si centrem i reduïm... $$\frac{(\bar{y}_A - \bar{y}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A} + \dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}} \sim N(0,1)$$

Si $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$ $$z = \frac{(\bar{y}_A - \bar{y}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}}} \sim N(0,1)$$

Estadístic de prova per comparar dues mitjanes

Si la variança poblacional és la mateixa (σ^2), es pot trobar un estimador d'aquesta σ^2 fent la mitjana ponderada de la variança de les dues mostres:

$$s^2 = \frac{(n_A - 1)\, s_A^2 + (n_B - 1)\, s_B^2}{n_A + n_B - 2}$$

A aquesta s l'anomenem s-combinada

I per tant

$$t = \frac{(\bar{y}_A - \bar{y}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{s\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \sim t_{n_A + n_B - 2}$$

$$H_0 : \mu_A = \mu_B$$

Si H_0 és certa, $\mu_A - \mu_B = 0$

Per tant, l'estadístic de prova serà

$$t_0 = \frac{\bar{y}_A - \bar{y}_B}{s\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$$

Càlcul de l'estadístic de prova

5. Trobar un estimador de la variança poblacional única:

$$\overline{Y}_A = 25{,}140$$

$$\overline{Y}_B = 23{,}620$$

$$s^2 = \frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{9\cdot 1{,}5426 + 9\cdot 1{,}5302}{10 + 10 - 2} = 1{,}5364 \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{s^2} = 1{,}2395$$

6. Calcular l'estadístic de prova

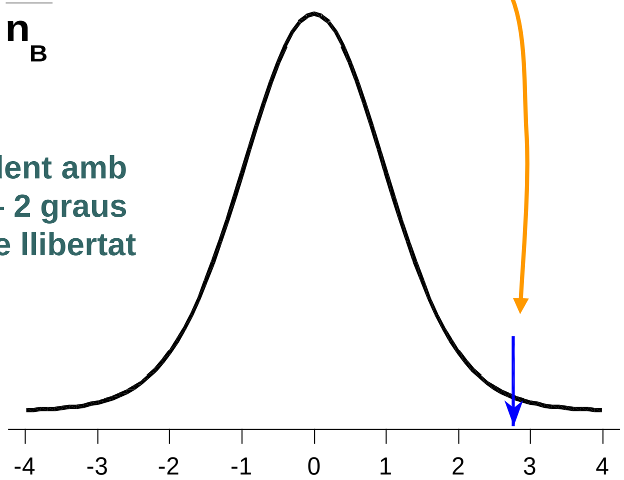
$$t_0 = \frac{\overline{Y}_A - \overline{Y}_B}{s\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} = \frac{25{,}140 - 23{,}620}{1{,}2365\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = 2{,}749 \sim t\text{ - Student}_{(v=18)}$$

7. Comparar l'estadístic de prova trobat amb la distribució de referència.

Càlcul del p-valor

$$t_0 = \frac{\bar{y}_A - \bar{y}_B}{s\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$$

t de Student amb
$n = n_A + n_B - 2$ graus
de llibertat



8. Trobar el p-valor i decidir si rebutgem o no la H_0

En el nostre cas, p-valor = 0,007.

Rebutgem H_0 i ens quedem amb H_1

Distribució del quocient de 2 variancies mostrals

Tenim dues poblacions normals independents:

$$(n_y - 1)\frac{s_y^2}{\sigma_y^2} \sim \chi^2_{n_y-1} \qquad (n_x - 1)\frac{s_x^2}{\sigma_x^2} \sim \chi^2_{n_x-1}$$

Com es distribueix $\frac{s_Y^2}{s_X^2}$ **?**

$U \sim \chi^2_{n_Y-1}$

$$\frac{s_Y^2}{s_X^2} = \frac{(n_Y - 1)\frac{s_Y^2}{\sigma_Y^2}\frac{\sigma_Y^2}{(n_Y - 1)}}{(n_X - 1)\frac{s_X^2}{\sigma_X^2}\frac{\sigma_X^2}{(n_X - 1)}} = \frac{\frac{U}{(n_Y - 1)}\sigma_Y^2}{\frac{V}{(n_X - 1)}\sigma_X^2}$$

$V \sim \chi^2_{n_X-1}$

Per tant: $$\frac{s_Y^2}{s_X^2} \sim \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} F_{(n_Y-1, n_X-1)}$$

Test de la F per comprovar la igualtat de variàncies

Com comprovar si 2 variances són iguals?

Sabem que: $$\frac{s_Y^2}{s_X^2} \sim \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} F_{(n_Y-1,n_X-1)}$$

Plantegem la hipòtesi nul·la i la hipòtesi alternativa

H_0: $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2$

H_1: $\sigma_Y^2 \neq \sigma_X^2$

Si H_0 és certa: $$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \Rightarrow \frac{s_Y^2}{s_X^2} \sim F_{(n_Y-1,n_X-1)}$$

Per poder fer el test de la F-Snedecor cal que les dades vinguin de 2 poblacions normals

L'estadístic de prova és $$F_0 = \frac{s_Y^2}{s_X^2}$$

La distribució de referència és una F-Snedecor amb n_Y-1 g.l. al numerador, i n_X-1 g.l. al denominador

Què fer quan les variàncies són diferents?

Si, durant l'anàlisi, s'arriba a la conclusió que les variances són diferents, es pot fer servir l'aproximació de Satterthwaite per calcular els graus de llibertat. Aquest procediment també s'anomena Welch's t-test.

$$df = \frac{\left(\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_A^2}{n_A}\right)^2}{n_A - 1} + \frac{\left(\frac{s_B^2}{n_B}\right)^2}{n_B - 1}}$$

Això és el que fa R amb la comanda t.test quan es fa servir l'argument

`var.equal = FALSE`

Exemple: cas on les variàncies són diferents

Suposem que, en el cas dels curtits de pell, les dades obtingudes en l'experiment haguéssin estat:

A	B
24.2	18.9
26.7	22.8
26.2	21.9
25.7	25.1
24.9	21.5
24.3	25.8
24.9	22.3
24.0	20.5
25.8	26.3
25.3	25.2

Calculem:

$$\overline{Y}_A = 25.209$$
$$s_A^2 = 0.796$$
$$\overline{Y}_B = 23.032$$
$$s_B^2 = 6{,}101$$

Igualtat de variances

$$H_0' : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$$
$$H_1' : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$$

$$\frac{S_B^2}{S_A^2} = \frac{6.101}{0.796} = 7.665 \sim F_{9,9} \Rightarrow p - \text{valor} = 0.0057$$

S'ha obtingut un p-valor molt petit, per tant es rebutja H_0'.

Exemple: cas on les variàncies són diferents

$$df = \frac{\left(\frac{0,796}{10} + \frac{6,101}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{0,796}{10}\right)^2}{10-1} + \frac{\left(\frac{6,101}{10}\right)^2}{10-1}}$$

L'estadístic de prova és:

$$t_0^{'} = \frac{\overline{Y}_A - \overline{Y}_B}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}}} = \frac{25.209 - 23,032}{\sqrt{\frac{0.796}{10} + \frac{6,101}{10}}} = 2.621 \sim t\text{-Student}_{11,3}$$

$$\Rightarrow \quad p\text{-valor} = 0.012 \quad \Rightarrow \quad \text{Rebutgem } H_0$$

Com a norma general, rebutjarem H_0 si el p-valor < 5 % Però atenció, això dependrà de les conseqüències que tingui equivocar-se!

Exemple: tractament superficial per a lents

Cal escollir entre 2 tipus de tractament antirreflectant de lents per a ulleres

Ens preguntem
¿El tipus de tractament afecta al deteriorament de la lent (desgast, ratlladures, ...)?

Per sortir de dubtes cal fer un experiment.

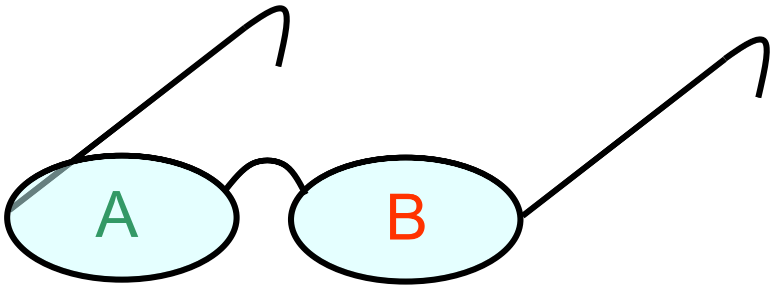
Exemple: tractament superficial per a lents

- Una idea és escollir 10 persones, representatives del conjunt d'usuaris.
- Assignar a 5 el tractament A i a les altres 5 el tractament B
- ¿Quin risc es corre?

Hi ha gent que desgasta més les lents que d'altres

No podrem aconseguir tenir 10 persones que gastin las ulleres exactament igual

Una solució millor és posar dues lents tractades diferents a cada persona



Recollida de les dades

1. **Definir les hipòtesis:**

Hipòtesis nul·la

$$H_0: \mu_A = \mu_B \Rightarrow \delta = \mu_A - \mu_B = 0$$

Hipòtesis alternativa

$$H_1: \mu_A > \mu_B \Rightarrow \delta = \mu_A - \mu_B > 0$$ **o bé**

$$H_1: \mu_A < \mu_B \Rightarrow \delta = \mu_A - \mu_B < 0$$ **o bé**

$$H_1: \mu_A \neq \mu_B \Rightarrow \delta = \mu_A - \mu_B \neq 0$$

2. **Recollir les dades.**

Com?

Recollida de les dades

Cada individu constitueix un bloc

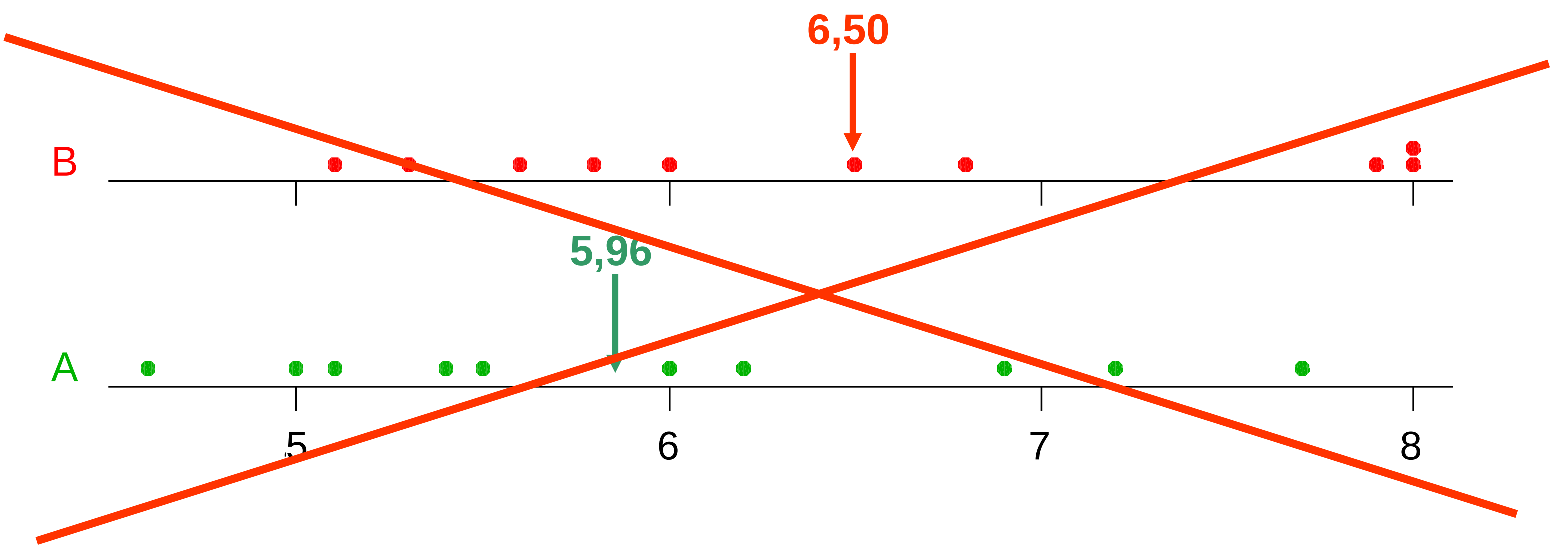
Dintre de cada bloc aleatoritzem

Individu	Desgast lent A	Desgast lent B	Diferència B-A
1	7,7 (e)	7,9 (d)	0,2
2	6,0 (e)	6,8 (d)	0,8
3	4,6 (d)	5,1 (e)	0,5
4	7,2 (e)	8,0 (d)	0,8
5	6,9 (d)	8,0 (e)	1,1
6	5,0 (d)	5,6 (e)	0,6
7	6,2 (d)	6,5 (e)	0,3
8	5,5 (e)	6,0 (d)	0,5
9	5,4 (d)	5,3 (e)	-0,1
10	5,1 (e)	5,8 (d)	0,7
Mitjana	**5,96**	**6,50**	**0,55**

Desviació tipus: $s_d = 0,344$

Anàlisi exploratòria de les dades

3. Fer anàlisi exploratòria de dades

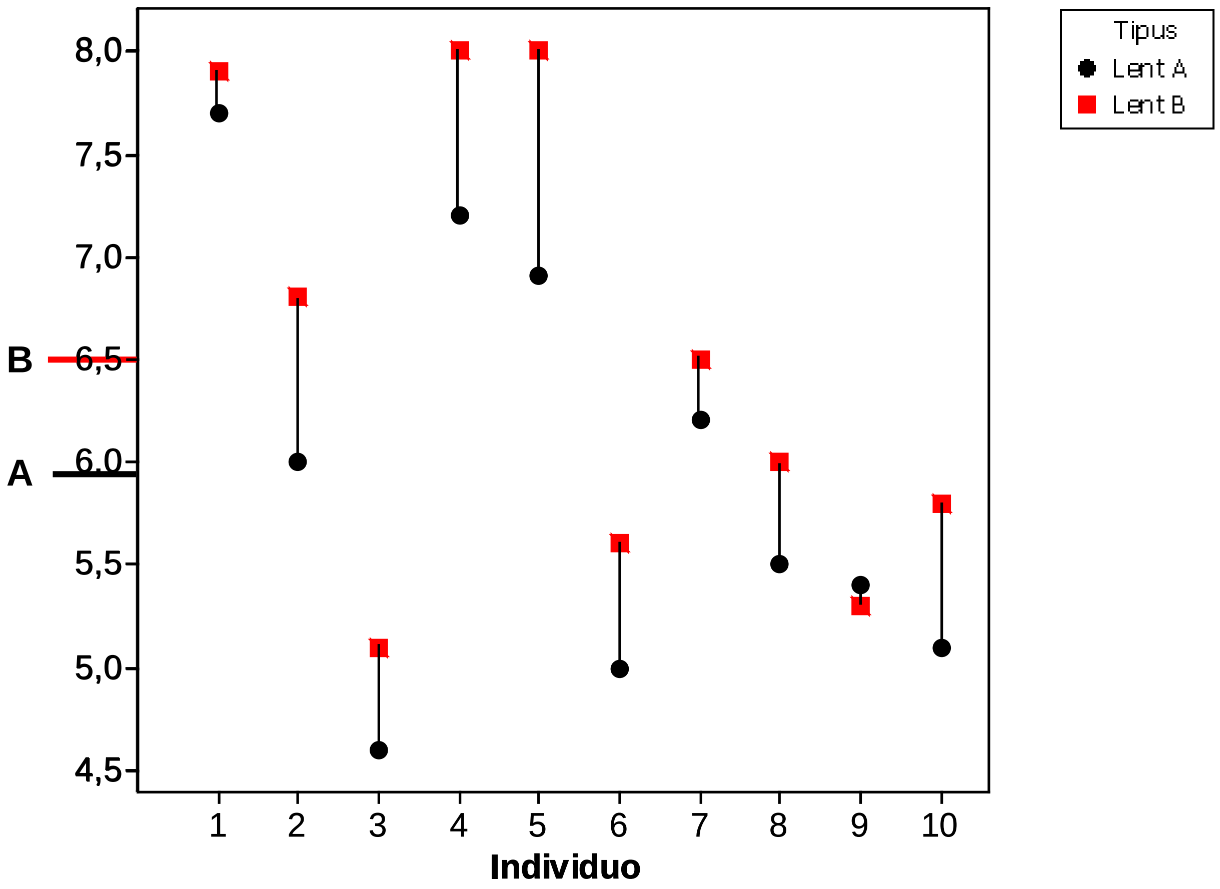


¿És aquest un bon gràfic per a veure per on van els trets en aquest cas?

NO, perquè aquí es barregen 2 fonts de variabilitat: la deguda als tractaments, però també la deguda als individus

Anàlisi exploratòria de les dades

El gràfic adequat per dissenys bloquejats:



Verificació dels supòsits

4. Verificar els supòsits en què es basa la metodologia:

a) Normalitat de les dades.
No és un supòsit crític. Es pot comprovar representant els valors en paper probabilístic normal.

b) Independència de les diferències.

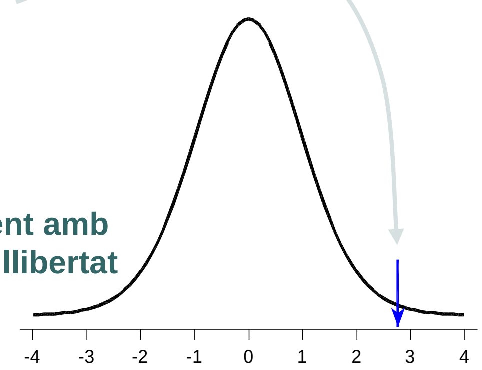
5. Calcular l'estadístic de prova

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{0{,}55}{\frac{0{,}344}{\sqrt{10}}} = 4{,}97$$

6. Comparar l'estadístic de prova trobat amb la distribució de referència.

Càlcul del p-valor

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$



t de Student amb
n = n-1 graus de llibertat

8. Trobar el p-valor i decidir si rebutgem o no la H_0

En el nostre cas, p-valor = 0,00077.

Rebutgem H_0 i ens quedem amb H_1.
El desgast de les lents és diferent.

Aleatorització i bloqueig

Es tracta d'estratègies de recollida de dades. El mètode d'anàlisi depèn de l'estratègia escollida.

BLOQUEJAR:
Per neutralitzar l'efecte d'un factor conegut que no es pot mantenir constant

ALEATORITZAR:
Per neutralitzar l'efecte de factors desconeguts que puguin afectar a la resposta

Bloquejar el que es pugui i aleatoritzar la resta

IC per la diferència de mitjanes

Una altra possibilitat és, enlloc de calcular p-valors, trobar intervals de confiança (IC) 1 – α per la diferència de mitjanes :

Disseny totalment aleatoritzat

$$\left(\bar{y}_A - \bar{y}_B\right) \pm \left(t_{n_A + n_B - 2;\, \alpha/2}\; s \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} \right)$$

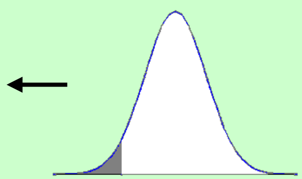
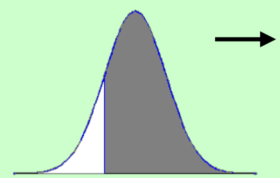
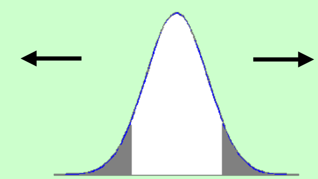
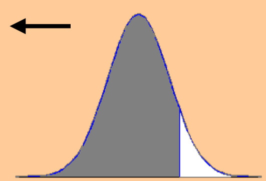
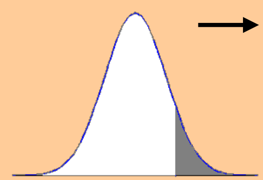
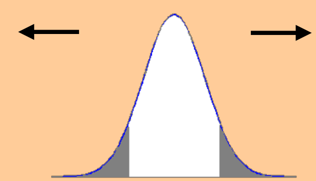
Disseny bloquejat

$$\bar{d} \pm t_{n-1;\, \alpha/2} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

H_0 vs H_1: plantejament i resultats

Amb l'estadístic de prova calculat amb A – B

Plantejament del contrast

Resultat obtingut	$H_0: \mu_A = \mu_B$ $H_1: \mu_A < \mu_B$	$H_0: \mu_A = \mu_B$ $H_1: \mu_A > \mu_B$	$H_0: \mu_A = \mu_B$ $H_1: \mu_A \neq \mu_B$
$\overline{y}_A < \overline{y}_B$	**Resultat esperat.** **Cal veure si la diferència és estadísticament significativa.** 	**No cal fer el test.** **No es pot rebutjar H_0.** 	**Cal veure si la diferència és estadísticament significativa.** 
$\overline{y}_A > \overline{y}_B$	**No cal fer el test.** **No es pot rebutjar H_0.** 	**Resultat esperat.** **Cal veure si la diferència és estadísticament significativa.** 	**Cal veure si la diferència és estadísticament significativa.** 
$\overline{y}_A = \overline{y}_B$	**No es pot rebutjar H_0.**	**No es pot rebutjar H_0.**	**No es pot rebutjar H_0.**

En resum

Test		Estadístic de prova	Distribució de referència
Comparar una mitjana amb un valor	$H_0: \mu = a$ $H_1: \mu \neq a$	$t_0 = \dfrac{\bar{Y} - a}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$	t-Student $_{n-1}$
Comparar 2 variances	$H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ $H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$	$F_0 = \dfrac{s_A^2}{s_B^2}$	F-Snedecor $_{n_A-1\,;\,n_B-1}$
Comparar 2 mitjanes. Cas totalment aleatoritzat	$H_0: \mu_A = \mu_B$ $H_1: \mu_A \neq \mu_B$	$t_0 = \dfrac{\bar{Y}_A - \bar{Y}_B}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}}}$	t-Student $_{n_A+n_B-2}$
Comparar 2 mitjanes. Cas bloquejat	$H_0: \mu_A = \mu_B \Rightarrow \delta = 0$ $H_1: \mu_A \neq \mu_B \Rightarrow \delta \neq 0$	$t_0 = \dfrac{\bar{d}}{\dfrac{s_d}{\sqrt{n}}}$	t-Student $_{n-1}$