Examen de Inferencia Estadística **(primera prueba evaluación continua)**

11 de abril de 2012

Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función de densidad de probabilidad:

$$f(x;\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \text{con } \sigma > 0$$

1. Hallar estimadores de σ por máxima verosimilitud y por el método de los momentos.
2. Calcular el sesgo y el error cuadrático medio de los mismos.
3. Comprobar que $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ es un estadístico suficiente para el modelo. Sabiendo además que es un estadístico completo, hallar el estimador UMVU de σ.
4. Determinar la consistencia del estimador UMVU de σ.
5. Determinar si el estimador UMVU de σ es eficiente .

1. La función de verosimilitud es:

$$L_x(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}} \right\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

función con dominio los reales positivos $(\sigma > 0)$.

Para hallar el estimador máximo-verosímil maximizaremos el logaritmo de L_x:

$$\ln L_x(\sigma) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\frac{\partial \ln L_x}{\partial\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$ igualando a cero, tendremos la ecuación de verosimilitud:

$$\left[-\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \right]$$

y multiplicando por $\frac{\sigma^3}{n}$, resulta:

$$-\sigma^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \overset{*}{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Observar que:

$$\frac{\partial \ln L_x}{\partial\sigma} = \frac{n}{\sigma^3}\left(-\sigma^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = \begin{cases} < 0 & \text{si } \sigma > \overset{*}{\sigma} \\ = 0 & \text{si } \sigma = \overset{*}{\sigma} \\ > 0 & \text{si } 0 < \sigma < \overset{*}{\sigma} \end{cases}$$

por tanto $\ln L_x$ es creciente antes de $\overset{*}{\sigma}$ y decreciente después: en $\sigma = \overset{*}{\sigma}$ $\ln L_x$ tiene un máximo absoluto. En conclusión el estimador máximo-verosímil de σ, (MLE) es:

$$\boxed{\overset{*}{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

← MLE (Maximum-likelihood-estimator)

Para obtener el estimador de σ por el método de los momentos, basta observar que $X \sim N(0,\sigma)$, y, por tanto, el momento de primer orden no proporciona información sobre σ, por tanto recurriremos al de segundo orden:

$$E(X^2) = \sigma^2$$

por tanto:

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sigma^2\right]$$

y

$$\boxed{\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

← estimador obtenido por el método de los momentos

observar que hemos obtenido el mismo estimador que el MLE.

2. Hemos de hallar la esperanza de $\overset{*}{\sigma}$ ó $\hat{\sigma}$. Observemos que si

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sigma^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sigma}\right)^2}_{u} = \sigma^2 u$$

u, al ser una suma de n cuadrados de normales tipificados, ($N(0,1)$) sigue una distribución χ^2 con n grados de libertad $\left(\text{Gamma}\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)\right)$

Por tanto:

$$E(\overset{*}{\sigma}) = E\left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}u}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}E(\sqrt{u})$$

$$E(\sqrt{u}) = \int_0^\infty \sqrt{u}\,\frac{u^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-\frac{u}{2}}\,du = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty t^{\frac{n+1}{2}-1}e^{-t}\,dt =$$

$$\begin{matrix}\frac{1}{2}u = t \\ du = 2\,dt\end{matrix} \qquad = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

por tanto:

$$\boxed{E(\overset{*}{\sigma}) = \frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\,\sigma}$$

Su sesgo será:

$$\boxed{B_\sigma(\overset{*}{\sigma}) = E(\overset{*}{\sigma}) - \sigma = \left(\frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} - 1\right)\sigma}$$

Para calcular su error cuadrático medio calcularemos en primer lugar su varianza, igual a

$$var(\overset{*}{\sigma}) = E(\overset{*}{\sigma}{}^2) - E(\overset{*}{\sigma})^2$$

$$\boxed{E(\overset{*}{\sigma}{}^2) = E\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2\right) = \frac{1}{m}\, m\, E(X^2) = \sigma^2} \qquad \left(\text{ya que } \begin{array}{l} var(X) = \sigma^2 \\ E(X) = 0 \end{array}\right)$$

por tanto:

$$\boxed{var(\overset{*}{\sigma}) = \sigma^2 - \frac{2\,\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}{m\,\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}\,\sigma^2 = \left(1 - \frac{2\,\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}{m\,\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}\right)\sigma^2}$$

el error cuadrático medio será

$$\boxed{ECM_\sigma(\overset{*}{\sigma}) = var_\sigma(\overset{*}{\sigma}) + B_\sigma(\overset{*}{\sigma})^2}$$

$$\boxed{ECM_\sigma(\overset{*}{\sigma})} = \left\{\left(1 - \frac{2\,\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}{m\,\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} - 1\right)^2\right\}\sigma^2$$

$$= \left(2 - 2\,\frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\right)\sigma^2 = \boxed{2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\right)\sigma^2}$$

3.- La función de densidad conjunta de la muestra es:

$$f(x_1,\dots,x_m,\sigma) = \prod_{i=1}^{m}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}}\right\} = \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{m}{2}}}_{h(x_1,\dots,x_n)}\;\underbrace{\frac{1}{\sigma^m}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m} x_i^2}}_{g\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2,\ \sigma\right)}$$

por tanto, a partir del teorema de factorización de Neyman-Fisher podemos asegurar que $\sum_{i=1}^{m} X_i^2$ es un estadístico suficiente

Para obtener el estimador UMVU (uniformemente insesgado y de mínima varianza) bastará corregir el sesgo de $\overset{*}{\sigma}$, ya que éste es función del estadístico suficiente, y completo, $\sum_{i=1}^{m} X_i^2$ (recordar los teoremas de Rao-Blackwell y Lehmann-Scheffé)

Ahora bien, para corregir el sesgo de $\overset{*}{\sigma}$ bastará dividirlo por $\dfrac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$, es decir:

$$\boxed{W = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\,\overset{*}{\sigma} = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} X_i^2}}$$

↑

Estimador UMVU de σ.

4.- El error cuadrático medio de W es igual a su varianza

$$ECM_\sigma(W) = var_\sigma(W) = var_\sigma\left(\frac{\sqrt{m}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\,\overset{*}{\sigma}\right) =$$

$$= \frac{m\,\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}{2\,\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}\,var(\overset{*}{\sigma}) =$$

$$= \frac{m\,\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}{2\,\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}\left(1 - \frac{2\,\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}{m\,\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}\right)\sigma^2$$

$$= \left(\frac{m\,\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}{2\,\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)} - 1\right)\sigma^2$$

Será suficiente probar que $\lim_{m\to\infty} ECM_\sigma(W) = 0$

para ello podemos usar la fórmula de Stirling que permite aproximar "factoriales":

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

en el sentido que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\Gamma(x+1)\Big/\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\right) = 1$$

por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\Gamma^2(\frac{n}{2})}{2\Gamma^2(\frac{n+1}{2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left\{\sqrt{2\pi(\frac{n}{2}-1)}\left(\frac{\frac{n}{2}-1}{e}\right)^{\frac{n}{2}-1}\right\}^2}{2\left\{\sqrt{2\pi\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{\frac{n-1}{2}}{e}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\}^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-2)(n-2)^{n-2}}{2(n-1)(n-1)^{n-1}} 2e = e \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-1} =$$

$$= e \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e\cdot e^{-1} = 1$$

por tanto

$$\lim_{n\to\infty} ECM_\sigma(W) = \lim_{n\to\infty} var_\sigma(W) = 0$$

y por la desigualdad de Markov o Chebishev se concluye que el estimador es consistente.

5.- Un estimador eficiente cumplirá:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x_i,\sigma)}{\partial\sigma} = K\,(W(x_1 - x_n) - \sigma) \qquad (*)$$

para una cierta K que depende de n y σ pero no de $x_1 - x_n$.

En nuestro caso:

$$\ln f(x,\sigma) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi - \ln\sigma - \frac{x^2}{2\sigma^2} \qquad \frac{\partial \ln f}{\partial\sigma} = -\frac{1}{\sigma} + \frac{x^2}{\sigma^3}$$

por tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x,\sigma)}{\partial\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{n}{\sigma^3}\left(\overline{X^2} - \sigma^2\right)$$

donde $\overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Como $W(x_1 - x_n) = \frac{\sqrt{n}\,\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}\overline{X^2}$

resulta que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x,\sigma)}{\partial\sigma}}{W - \sigma} = \frac{\frac{n}{\sigma^3}\left(\overline{X^2} - \sigma^2\right)}{\frac{\sqrt{n}\,\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}\overline{X^2} - \sigma}$$

no se "simplifican" las $\overline{X^2}$

y esta expresión no es independiente de $x_1 - x_n$.

Por tanto W no satisface (*) y el estimador no es eficiente.

Otra posibilidad: calcular $var(W)$ y mostrar que es mayor que $\frac{1}{nI(\sigma)}$.