Nom: Laura Julià Melis 7/12/2016
NIUB: 16810883

CONVERGÈNCIA EN DISTRIBUCIÓ

Sigui $\lambda > 0$. Per a $n > \lambda$ sigui $X_n \sim BinNeg(n, p_n)$, amb $p_n = 1 - \left(\frac{\lambda}{n}\right)$
Sigui $Y \sim Poisson(\lambda)$.

Proveu: $X_n \to_n Y$ en distribució.

de dues formes diferents:

(1) Feu servir la convergència de les funcions de probabilitat.

Funció de probabilitat d'una Binomial Negativa: $\binom{n+x-1}{x} p^n (1-p)^x$
Funció de probabilitat d'una Poisson: $\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n+x-1}{x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+x-1)!}{x!\,(n-1)!} \cdot \left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x =$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+x-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{n^x} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \longrightarrow \text{Sabem que } \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+x-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{n^x} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^x} \cdot \frac{(n+x-1)(n+x-2)\cdots 1}{(n-1)(n-2)\cdots 1}$$

Observem que els primers factors del numerador dins el límit es comporten com $(n+\lambda)^x$ i els del denominador com n^x.

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+\lambda}{n^2}\right)^x}_{1} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \quad \blacksquare$$

(2) Feu servir la convergència de les funcions generadores de moments.

Fgm d'una BN: $\left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^n$; Fgm d'una Poisson: $e^{\lambda(e^t-1)}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\frac{\lambda}{n}}{1-\left(1-1+\frac{\lambda}{n}\right)e^t}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\frac{\lambda}{n}}{1-\left(\frac{\lambda}{n}\cdot e^t\right)}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}}{\left(1-\frac{\lambda e^t}{n}\right)^n \to e^{-\lambda e^t}} =$$

$$= \lim \frac{e^{-\lambda}}{\frac{1}{e^{\lambda e^t}}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} = \boxed{e^{\lambda(e^t-1)}} \quad \blacksquare$$