Teoria de Cues i Simulació. 1er Ex. Parcial. Curs 2014-15

P1. [5 punts] En un aeroport a les afores de la ciutat, els passatgers agafen un servei llançadora per arribar al centre operat per unes unitats minibus amb una capacitat per a 30 persones. Els minibus surten d'una terminal on hi ha una única plataforma d'espera (marquesina) on espera sempre una unitat fins quedar plena amb 30 passatgers, moment en el que surt d'immediat en direcció a la ciutat. En sortir un minibus de la plataforma, aquest és reemplaçat immediatament per un nou minibus buit, de forma que el servei sempre està operatiu contínuament. Els tècnics de l'aeroport han estat enregistrant les arribades de passatgers al servei de minibus i han determinat que el temps entre dues arribades de passatgers presenta aproximadament una distribució exponencial d'esperança 5 segons. Es demana:

a) [1.3 punt] Distribució de probabilitats del temps τ entre dues sortides consecutives de minibus de la terminal. Valor de l'esperança, la desviació i el coeficient de desviació de τ. Calculeu el número mig de minibus plens per unitat de temps que surten de la terminal.
b) [1.2 punt] Quina és la probabilitat de que un minibus estigui a la terminal més de 3 minuts.
c) [1.2] En esperar en la plataforma, els conductors tenen sempre la radio engegada en un canal publicitari, que emet anuncis contínuament. Cada anunci te una durada mitjana de 10 segons amb un temps distribuït exponencialment. Quin és el número mig d'anuncis que escolta un passatger mentre espera en el minibus a que aquest s'acabi d'emplenar i surti de l'aeroport?
d) [1.3] Se sap que el trajecte d'anada i tornada es fa en exactament 40 minuts. Els tècnics han dimensionat el número de minibus necessaris en 15 unitats, de forma que estimen que la probabilitat de que tots 15 busos estiguin en el trajecte d'anada-tornada (i per tant no n'hi hagi cap per atendre els passatgers a la terminal) és força baixa. Calculeu aquesta probabilitat.

P2. [5 punts] Una estació de servei té 3 bombes de benzina i només té espai per encabir a 4 vehicles, incloent els que estan abastint-se de benzina. El temps que necessita un vehicle per servir-se de combustible és aleatori, d'esperança 2 minuts i distribuït exponencialment. El número de vehicles que volen accedir a la benzinera és de 2 per minut i les arribades segueixen un procés de Poisson. Si un cotxe que vol carregar combustible es troba la benzinera plena llavors renúncia a entrar-hi. Es demana:

a) [1p] Establir un model de cues per als cotxes que entren a l'estació de servei.
b) [1p] Calculeu les probabilitats de 1) trobar l'estació buida, 2) trobar l'estació plena, 3) haver d'esperar en cua.
c) [1p]Quin és el número de cotxes per unitat de temps que no aconsegueixen entrar en l'estació? L'encarregat de l'estació suggereix augmentar la capacitat de l'estació de forma que s'eliminin completament els cotxes que no aconsegueixen entrar. Té sentit la proposta?
d) [1p] Ocupació mitjana de l'estació i temps mig d'espera en cua.
e) [1p] Quin és el temps mig d'espera en cua dels qui efectivament han de fer cua? Compareu-lo amb el temps mig d'espera en cua de l'apartat anterior.

P1) a) $\tau \sim 30$-Erlang, $E[\tau] = 30 \cdot 5 = 150\,s = 2'5$ min

$C_\tau = \frac{1}{\sqrt{30}} = 0'1825$

$\sigma_\tau = 0'1825 \cdot 2'5 = 0'4564$ min

$\lambda = \frac{1}{2'5} = 0'4$ minibus/min $= 24\ h^{-1}$

b) Paràmetre α de cada etapa: $\alpha = 1/5\ s^{-1}$; $\alpha t = \frac{150}{5} = 30$

$P(\tau \geq 150) = e^{-30} \sum_{l=0}^{29} \frac{30^l}{l!} = 0'4757$

c) w v.a. renovació observada.

$\frac{1}{2} E[w] = \frac{1}{2} E[\tau](1 + C_\tau^2) = \frac{1}{2} 2'5 \left(1 + \frac{1}{30}\right) = 1'2916$ min $=$

$= 77'5\,s \rightarrow$ nº mig d'ammunts $= \frac{77'5}{10} = 7'75$ an.

d) Per tal que no hi hagi cap bus a l'estació han d'haver sortit tots dins d'un interval de temps $T \leq 30$ min

El temps T necessari per 15 sortides és $T = \sum_{l=1}^{30} T_l$

sent $T_l =$ v.a. temps que triga en sortir l'autobús l-èssim. Es sumen $15 \cdot 30 = 450$ etapes;

Pràcticament $T \sim$ Normal, $E[T] = 450 \cdot 5 = 2250\,s$.

$Var[T] = 450 \cdot 5^2 = 11250\,s^2 \rightarrow \sigma_T = 106'06\,s$

$T \sim N(2250, 106'06)$

$P(T \leq 2400) = P\left(Z \leq \frac{2400 - 2250}{106'06}\right) = P(Z \leq -1'4142)$

$= 1 - P(Z \leq 1'4142) = 1 - 0'9213 = 0'0787$

P2) M/M/3/4

b)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "3\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 4 \arrow[l, bend left, "3\mu"]
\end{tikzcd}$$

$\lambda = 2 \text{ min}^{-1}$

$\mu = 0'5 \text{ min}^{-1}$

$\theta = \frac{\lambda}{\mu} = 4$

b.1) $P_0 = \left[1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{3\cdot 3!}\right]^{-1} = 2'639\cdot 10^{-2}$

b.2) $P_4 = P_0 \cdot \frac{4^4}{3\cdot 3!} = 0'3753$

b.3) $P_3 = P_0 \cdot \frac{4^3}{3!} = 0'28115$

c) $\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_4) = 2(1 - 0'3753) = 1'2494 \text{ min}^{-1}$

$\lambda - \bar{\lambda} = 2 - 1'2494 = 0'7506 \text{ min}^{-1}$

No té sentit; sempre serà una cua de capacitat finita i sempre hi haurà una probabilitat de no poder entrar.

d) $L = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 = P_0\left(4 + 2\cdot\frac{4^2}{2!} + 3\cdot\frac{4^3}{3!} + 4\cdot\frac{4^4}{3\cdot 3!}\right) =$

$= P_0(4 + 16 + 32 + 56'\hat{8}) = 2'639\cdot 10^{-2}\cdot 108'\hat{8} = 2'87$

$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{2'87}{1'2494} = 2'3 \text{ min} \Rightarrow W_q = W - \frac{1}{\mu} = 0'3 \text{ min}.$

e) Temps d'espera en cua del quart cotxe: $2/3$ min.
Evidentment $W_q = 0'3$ min és més petit ja que inclou els qui no esperen.