Mètodes basats en rangs tècniques concretes: test de Mann-Whitney-Wilcoxon per dues mostres independents

Mètodes no paramètrics i de remostratge
Grau interuniversitari en Estadística UB – UPC

Prof. Jordi Ocaña Rebull
Departament d'Estadística, Universitat de Barcelona

- Adequada per **comparar** paràmetres de **localització** de **2 grups independents**
- **Y** = (Y_{11},…,Y_{1n}, Y_{21},…,Y_{2m}) mostra aleatòria
- {Y_{1j}}, {Y_{2j}} obtingudes independentment, sota 2 condicions diferents associades a distribucions F_1 i F_2, respectivament
- F_1 i F_2 contínues univariants
- $N = n + m$ mida mostral total

Prova de Mann-Whitney-Wilcoxon
planteig – condicions de validesa

- μ_i i σ_i paràmetres de localització i escala (o dispersió) per cada grup i = 1,2
  - (no necessàriament mitjana i desviació típica)
- La distribució de $\{Y_{1i}\}$ i $\{Y_{2i}\}$ és la mateixa excepte possibles ≠ de localització i escala:

$$F_1\left(\frac{y-\mu_1}{\sigma_1}\right)=F_2\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)$$

- Però també suposarem que $\sigma_1 = \sigma_2$ → hipòtesi d'igualtat de distribucions esdevé:

Prova de Mann-Whitney-Wilcoxon
planteig – condicions de validesa

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2 \qquad H_1: \ \mu_1 > \mu_2 \qquad H_1: \ \mu_1 < \mu_2$$

(bilateral) (unilateral) (unilateral)

(o equivalentment

$H_0: \ \delta = 0$ vs $H_1: \ \delta \neq 0$ (o $\delta > 0$, o $\delta < 0$)

per $\delta = \mu_1 - \mu_2$)

Prova de Mann-Whitney-Wilcoxon

hipòtesis nul·la i alternativa

- **R** = (R_{11},…,R_{1n}, R_{21},…,R_{2m}) rangs de la mostra
- Suma de rangs dins cada grup:

$$R_{1.} = \sum_{j=1}^{n} R_{1j} \qquad R_{2.} = \sum_{j=1}^{m} R_{2j}$$

$$R_{1.} + R_{2.} = 1 + 2 + \ldots + N = \frac{N(N+1)}{2}$$

com més gran $R_{1.}$ més petit $R_{2.}$ i viceversa, un determina l'altre. Suficient tabular distribució de $R_{1.}$

Estadístic de Wilcoxon: suma de rangs

- Mínim valor de $R_{1.}$ és $n(n + 1)/2$, i de $R_{2.}$ és $m(m + 1)/2$
- Per comoditat (brevetat de la taula) als textos "clàssics" d'estadística no paramètrica s'acostuma a tabular l'estadístic "U de Mann-Whitney":

$$U = \min\left\{R_{1.} - \frac{n(n+1)}{2}, R_{2.} - \frac{m(m+1)}{2}\right\}$$

- Convé també saber-ho (a molts llocs explicat així)

Estadístic "*U*"

- Modernament s'acostuma a utilitzar la suma dels rangs del primer grup:

$$W = R_{1.} = \sum_{j=1}^{n} R_{1j}$$

- O bé:

$$W = R_{1.} - \frac{n(n+1)}{2}$$

- Aquesta **segona definició** de "*W*" és la que utilitza la funció 'wilcox.test' de R. És **la que farem servir**

Estadístic "*W*" de Wilcoxon

- També es podria muntar tot el test al voltant de l'estadístic:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} I_{\{Y_{1i} < Y_{2j}\}} = nm - W$$

- És a dir, vegades que una observació del primer grup és menor que una del segon
- Lògicament, encara que el resultat final és el mateix, les taules, les expressions per la mitjana, etc. són diferents

Estadístic de Mann-Whitney

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$$

$H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2$	$H_1: \ \mu_1 > \mu_2$	$H_1: \ \mu_1 < \mu_2$
es rebutja H_0 si:	es rebutja H_0 si:	es rebutja H_0 si:
$U \leq u_\alpha(n,m)$	$U \leq u_\alpha^*(n,m)$	$U \leq u_\alpha^*(n,m)$
	i $\bar{R}_{1.} > \bar{R}_{2.}$	i $\bar{R}_{1.} < \bar{R}_{2.}$

$u_\alpha(n,m)$ valor crític a taula per prova bilateral

$u_\alpha^*(n,m)$ valor crític a taula per prova unilateral

per nivell de significació α i mides mostrals n, m

Procediment "a ma", criteri de test amb estadístic *U*

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$$

$H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2$	$H_1: \ \mu_1 > \mu_2$	$H_1: \ \mu_1 < \mu_2$
es rebutja H_0 si:	es rebutja H_0 si:	es rebutja H_0 si:
$W \leq w_{\alpha/2}(n,m)$	$W \geq w_{1-\alpha}(n,m)$	$W \leq w_{\alpha}(n,m)$
o $W \geq w_{1-\alpha/2}(n,m)$		

Procediment "a ma", criteri de test amb estadístic *W*

Prova de MWW:
esperança i variància de W si H_0 és certa

- Si H_0 és certa:
  - (conseqüència de les propietats bàsiques de rangs, veieu presentació general sobre rangs)

$$E(W) = \frac{nm}{2}$$

$$\mathrm{var}(W) = \frac{nm(n+m+1)}{12}$$

- Per mides mostrals “grans”
  - (si l’aproximació pel Teorema central del límit es considera prou vàlida; a la pràctica per *n* i *m* fora de la taula)

$$Z \approx N(0,1)$$

$$Z = \frac{W - \frac{nm}{2}}{\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}}$$

Prova de Mann-Whitney-Wilcoxon
aproximació normal

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$$

$H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2$	$H_1: \ \mu_1 > \mu_2$	$H_1: \ \mu_1 < \mu_2$
es rebutja H_0 si:	es rebutja H_0 si:	es rebutja H_0 si:
$\lvert Z \rvert \geq z_\alpha$	$Z \geq z_{2\alpha}$	$Z \leq -z_{2\alpha}$

z_p valor crític >0 a taula $N(0,1)$ per prova bilateral per nivell de significació p, és a dir:

z_p valor t.q. $\Pr\left(\lvert Z \rvert \leq z_p\right) = 1 - p$, $Z \sim N(0,1)$

Prova de MWW

criteri de test per l'aproximació normal

Prova de MWW amb empats

- Si en realitat *Y* es mesura en escala ordinal o amb insuficient precisió, hi poden haver "empats" (ties)
- Estratègia habitual: assignar a cada sèrie de valors empatats els rangs que els tocarien (com si no estesin empatats) i posteriorment substituir-los per la seva mitjana → tota la sèrie de valors empatats queda amb el mateix rang mitjà

- Si hi ha empats, criteri de decisió pel test de rangs exacte (taula) NO 100% correcte
- Aproximació normal: es recomana aquesta aproximació per variància d'U:

$$\frac{nm(n+m+1)}{12} - \frac{nm\left(\sum_{i=1}^{s}\left(t_i^3 - t_i\right)\right)}{12(n+m)(n+m-1)}$$

$s =$ nombre de sèries de valors empatats

$t_i =$ llargada de sèrie i de valors empatats

Empats: correcció de var

Correcció per continuïtat

- Independentment de presència d'empats, atès que els ***rangs*** són ***discrets***, per l'aproximació a la normal (contínua) es recomana:

$$Z = \frac{\left| W - \frac{nm}{2} \right| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}}$$

- No unanimitat que representi cap millora

- Normalment s'interpreta δ com la diferència de medianes
- Les variables Y_{1j} i $Y_{2j} - \delta$ tindrien la mateixa distribució
- Estimar δ com el valor $\hat{\delta}$ que faria que la distribució de rangs de Y_{1j} i $Y_{2j} - \hat{\delta}$ fos el màxim de semblant
- Valor que satisfà aquesta condició: mediana de les *nm* diferències $Y_{1j} - Y_{2k}$

Estimació puntual de δ

- Calcular les nm diferències $d_{jk} = Y_{1j} - Y_{2k}$, per $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$
- Ordenar-les de menor a més gran: $d_{(1)} < d_{(2)} < \ldots < d_{(nm-1)} < d_{(nm)}$
- Interval de confiança de nivell $1 - \alpha$: $[d(\lambda), d(\upsilon)]$
- Càlcul dels índexos $1 \leq \lambda < \upsilon \leq nm$: $\lambda = u_\alpha(n,m) + 1$, $\upsilon = nm - \lambda + 1$

  ($u_\alpha(n,m)$ és el valor crític bilateral a la taula del test de Mann-Whitney-Wilcoxon pel nivell α)

Interval de confiança per δ

- Per n i m no inclosos a les taules:

$$\lambda^* = \frac{nm}{2} - z_\alpha \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}$$

$$\upsilon^* = 1 + \frac{nm}{2} + z_\alpha \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}$$

$(\lambda, \upsilon) =$ arrodoniment de (λ^*, υ^*)

tal que verifiqui $\lambda + \upsilon = nm + 1$

Prova de Mann-Whitney-Wilcoxon

interval de confiança asimptòtic per δ

- Alternativa vàlida a l'enfoc paramètric normal si possibles diferències al paràmetre de localització, però no al d'escala
- De fet, molt sensible a ≠ en dispersió
- En enfoc paramètric, no normalitat menys perturbadora que heteroscedasticitat → hi ha autors que recomanen no utilitzar mai el test de M-W-W, millor prova paramètrica robusta com el test de Welch (però per dades ordinals això no seria possible!)

Prova de Mann-Whitney-Wilcoxon
comentaris finals