# 5. Modelo de flujo máximo

Si oigo olvido.
Si veo comprendo.
Pero, si lo hago, aprendo.
Confucio.

Nuestro objetivo en una red trata de enlazar un nodo fuente y un nodo destino a través de una red de arcos dirigidos. Cada arco tiene una capacidad máxima de flujo admisible. El objetivo es el de obtener la máxima capacidad de flujo entre la fuente y el destino.

Características:

1. Todo flujo a través de una red conexa dirigida se origina en un nodo, llamado fuente (i.e. $s$), y termina en otro nodo llamado destino (i.e. $t$).

2. Los nodos restantes son nodos de trasbordo.

3. Se permite el flujo a través de un arco sólo en la dirección indicada por la flecha, donde la cantidad máxima de flujo está dada por la capacidad del arco. En la fuente, todos los arcos señalan hacia fuera. En el destino, todos señalan hacia el nodo.

4. El objetivo es maximizar la cantidad total de flujo de la fuente al destino. Esta cantidad se mide en cualquiera de las dos maneras equivalentes, esto es, la cantidad que sale de la fuente o la cantidad que entra al destino.

## 5.1. Programa lineal del problema

El problema de flujo máximo se puede formular como un problema de programación lineal, se puede resolver con el método símplex y usar cualquier software.

Dado un grafo $G(N, A)$ que representa un problema de flujo máximo tenemos los siguientes datos.

**Nodos:**

• Nodo fuente, de él sólo parten arcos y tiene una capacidad positiva (oferta).

• Nodo terminal (o sumidero), a él sólo llegan arcos y tiene capacidad negativa (demanda).

• Nodos de transición, llegan y salen arcos.

**Arcos:**

• $(i, j)$ son los arcos que van del nodo $i$ al nodo $j$. En particular, $(s, i)$ es el arco que va del nodo fuente al nodo $i$ y el arco $(j, t)$ es el que va del nodo $j$ al nodo terminal $t$.

**Variables y constantes del problema:**

• La variable de decisión $x_{ij}$ representa la cantidad de flujo que pasa del nodo $i$ al nodo $j$.

• La constante $l_{ij} \geq 0$ representa la cantidad mínima de flujo que debe fluir por el arco $(i, j)$.

• La constante $u_{ij}$ representa la cantidad máxima de flujo que debe fluir por el arco $(i, j)$.

**Características del PL:**

Con el objeto de facilitar la programación, *añadimos a la red el arco* $(t, s)$ con capacidad $x_{ts}$ que representa la cantidad máximo que el sistema va a transportar.

El flujo a través de cualquier red sea factible debe satisfacer las siguientes restricciones:

(a) El flujo que entra en en un nodo debe de ser equilibrado. Es decir, para el nodo $j$ el flujo de entrada ha de ser igual al flujo de salida. Esto se representa por la ecuación

$$\sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = 0 \text{ para todo nodo } j \in N.$$

teniendo en cuenta que si el arco no existe $x_{jk} = 0$.

(b) El flujo en cada arco debe de ser mayor o igual que la cantidad mínima de flujo que el arco debe de llevar y menor que la cantidad máxima de flujo que el arco puede soportar. Esto se representa por las ecuaciones

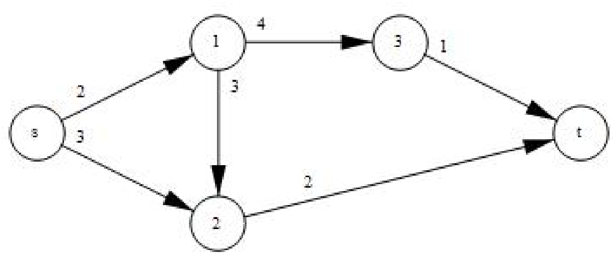
$$0 \leq l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \text{ para todo arco } (i, j).$$

Entonces, el PL que escrito por

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & x_{ts} \\ \text{s a:} & \sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = 0 \text{ para todo nodo } j \in N. \\ & 0 \leq l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \text{ para todo arco } (i, j). \end{array}$$

### 5.1.1. Ejemplo

La compañía de gas Gas Seo SA quiere enviar la máxima cantidad de gas licuado ($m^3$/hora) del puerto a su centro de almacenamiento para la posterior distribución via su red de gaseoductos que tiene como gráfico el siguiente:




Los números sobre los arcos son las capacidades del arco y representan en número máximo en miles de metros cúbicos de gas licuados que puede pasar en una hora.

Suponemos que no se pierde gas mientras lo bombeamos, por tanto siempre se tiene la conservación de flujo. Calcular el flujo máximo de gas que puede pasar por la red de tuberias.

Primero introducimos el arco artificial $(t, s)$. El planteo del PL es el siguiente:

$$\begin{array}{lllll} \text{máx} & x_{ts} & & \\ \text{s a:} & x_{ts} = x_{s1} + x_{s2}, & 0 \leq x_{s1} \leq 2, & 0 \leq x_{13} \leq 4, \\ & x_{s1} = x_{12} + x_{13}, & 0 \leq x_{s2} \leq 3, & 0 \leq x_{3t} \leq 1, \\ & x_{s2} + x_{12} = x_{2t}, & 0 \leq x_{12} \leq 3, & \\ & x_{3t} + x_{2t} = x_{ts}, & 0 \leq x_{2t} \leq 2, & \\ & x_{13} = x_{3t}, & 0 \leq x_{2t} \leq 2. & \end{array}$$

Una solución óptima es:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_{ts} = 3$ | Flujo máximo. | | |
| $x_{s1} = 2$ | Flujo arco $(s, 1)$. | $x_{s2} = 1$ | Flujo arco $(s, 2)$. |
| $x_{13} = 1$ | Flujo arco $(1, 3)$. | $x_{12} = 0$ | Flujo arco $(1, 2)$. |
| $x_{3t} = 1$ | Flujo arco $(3, t)$. | $x_{2t} = 2$ | Flujo arco $(2, t)$. |

## 5.2. Algoritmo

Se dispone de un algoritmo de trayectorias aumentadas eficiente. El algoritmo se basa en dos conceptos intuitivos, el de capacidad residual y el de trayectoria o camino de aumento. La trayectoria de aumento es una trayectoria que va desde el nodo fuente hasta el nodo término que puede llevar más flujo y la capacidad residual es la capacidad adicional de flujo que un arco puede llevar.

### 5.2.1. Algoritmo de la trayectoria de aumento para el problema de flujo máximo

1. Se identifica una trayectoria o camino de aumento encontrando alguna trayectoria dirigida del origen al destino en la red residual, tal que cada arco sobre esta trayectoria tiene capacidad residual estrictamente positiva. (Si no existe una, los flujos netos asignados constituyen un patrón del flujo óptimo).

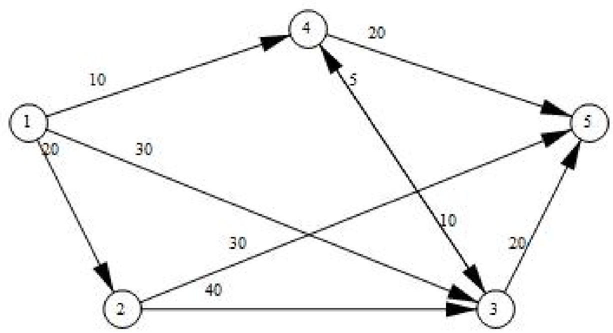
2. Se identifica la capacidad residual, c*, de esta trayectoria de aumento encontrando el mínimo de las capacidades residuales de los arcos sobre esta trayectoria. Se aumenta en c* el flujo de esta trayectoria.

3. Se disminuye en c* la capacidad residual de cada arco en esta trayectoria de aumento. Se aumenta en c* la capacidad residual de cada arco en la dirección opuesta en esta trayectoria. Se regresa la paso 1.

Regla: En caso de empate, elegiremos el Nodo ordenado primero en el conjunto empatado.

### 5.2.2. Ejemplo

Consideramos la red siguiente:



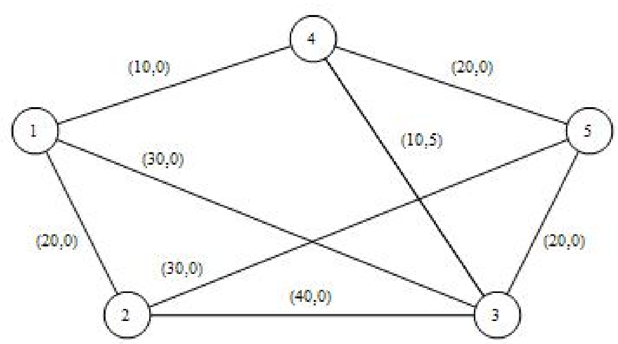

los números marcan las capacidades de los arcos, estos están dirigidos y el arco $(4,3)$ es de doble sentido. La capacidad del sentido inexistente es 0.

Queremos encontrar el flujo máximo que va del Nodo 1 al Nodo 5. La tabla de las etiquetas de los arcos es:

| **Flujo de/ a:** | Nodo 1 | Nodo 2 | Nodo 3 | Nodo 4 | Nodo 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nodo 1 | - | $(20,0)$ | $(30,0)$ | $(10,0)$ | |
| Nodo 2 | - | - | $(40,0)$ | | $(30,0)$ |
| Nodo 3 | - | - | - | $(10,5)$ | $(20,0)$ |
| Nodo 4 | - | - | - | - | $(20,0)$ |
| Nodo 5 | - | - | - | - | - |

donde $(20,0)$ indica 20 u. de flujo del Nodo 1 al Nodo 2 y 0 u. al revés. La relación entre el Nodo 3 y el Nodo 4 la podemos escribir $(5,10)$.

Colocados en el grafo resulta:




► **Iteración 1**.

**Paso 1**. Empezamos en el Nodo 1.

Como tiene capacidad 0 y ningún nodo precedente, lo etiquetaremos con $[\infty.-]$ .

**Paso 2**. Hacemos el máximo de las capacidades de salida de flujo del Nodo 1.

$$\text{máx}\,\{10,20,30\}=30.$$

Por tanto, conectamos Nodo 1 con Nodo 3, ponemos la etiqueta $[30, 1]$ en el Nodo 3 y marcamos el arco $(1, 3)$.
**Paso 3**. Hacemos el máximo de las capacidades de salida de flujo del Nodo 3. Esto es, con los Nodos 4 y 5, pero no con el Nodo 2 puesto que su capacidad es 0.

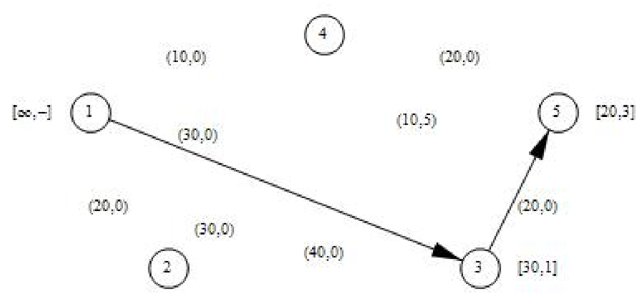
$$\max\{10, 20\} = 20.$$

Por tanto, conectamos Nodo 3 con Nodo 5, ponemos la etiqueta $[20, 3]$ en el Nodo 5 y marcamos el arco $(3, 5)$.
**Paso 4**. Dado que estamos en el Nodo 5 que es el nodo destino, calculamos el flujo comprometido y ajustamos la figura. La tabla de etiquetas es:

| | Nodo 1 | Nodo 2 | Nodo 3 | Nodo 4 | Nodo 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Etiquetas** | $[\infty.-]$ | - | $[30, 1]$ | - | $[20, 3]$ |

Por tanto, la capacidad mínima es $c^* = \min\{\infty, 30, 20\} = 20$, (son los valores de las etiquetas).

■ **Final iteración 1**:




Teniendo en cuenta que $c^* = 20$ u. son las comprometidas, ajustamos los flujos:

| **Flujo de/ a**: | Nodo 1 | Nodo 2 | Nodo 3 | Nodo 4 | Nodo 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nodo 1 | - | $(20, 0)$ | $(\mathbf{10}, \mathbf{20})$ | $(10, 0)$ | |
| Nodo 2 | - | - | $(40, 0)$ | | $(30, 0)$ |
| Nodo 3 | - | - | - | $(10, 5)$ | $(\mathbf{0}, \mathbf{20})$ |
| Nodo 4 | - | - | - | - | $(20, 0)$ |
| Nodo 5 | - | - | - | - | - |

Los Nodos resaltados son los activos en la iteración.

▶ **Iteración 2**.

Usaremos los nuevos flujos.
**Paso 1**. Empezamos en el Nodo 1. Hacemos el máximo de las capacidades de salida de flujo del Nodo 1.

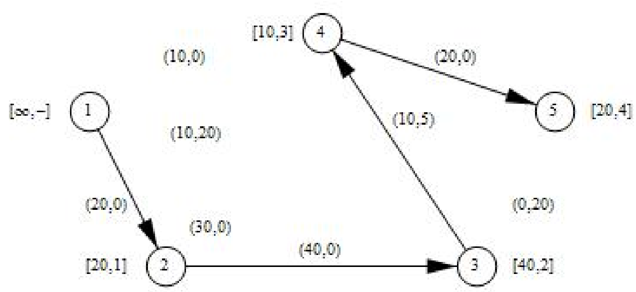
$$\max\{20, 10, 10\} = 20.$$

Por tanto, conectamos Nodo 1 con Nodo 2, ponemos la etiqueta $[20, 1]$ en el Nodo 2 y marcamos el arco $(1, 2)$.
**Paso 2**. Hacemos el máximo de las capacidades de salida de flujo del Nodo 2.
$\max \{30, 40\} = 40$.
Por tanto, conectamos Nodo 2 con Nodo 3, ponemos la etiqueta $[40, 2]$ en el Nodo 3 $y$ marcamos el arco $(2, 3)$.
**Paso 3**. Hacemos el máximo de las capacidades de salida de flujo del Nodo 3. El Nodo 2 queda excluido puesto que su capacidad es cero.
$\max \{10, 0\} = 10$.
Por tanto, conectamos Nodo 3 con Nodo 4, ponemos la etiqueta $[10, 3]$ en el Nodo 4 y marcamos el arco $(3, 4)$.
**Paso 4**. Hacemos el máximo de las capacidades de salida de flujo del Nodo 4.
$\max \{20\} = 20$.
Por tanto, conectamos Nodo 4 con Nodo 5, ponemos la etiqueta $[20, 4]$ en el Nodo 5 y marcamos el arco $(4, 5)$. Dado que estamos en el Nodo 5 que es el nodo destino, calculamos el flujo comprometido y ajustamos la figura. La tabla de etiquetas es:

| | Nodo 1 | Nodo 2 | Nodo 3 | Nodo 4 | Nodo 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Etiquetas** | $[\infty . -]$ | $[20, 1]$ | $[40, 2]$ | $[10, 3]$ | $[20, 4]$ |

Por tanto, la capacida mínima es $c^* = \min \{\infty, 20, 40, 10, 20\} = 10$. (son los valores de las etiquetas).

- **Final iteración 2**:




Teniendo en cuenta que $c^* = 10$ u. son los flujos comprometidas, ajustamos los flujos:

| **Flujo de/ a:** | Nodo 1 | Nodo 2 | Nodo 3 | Nodo 4 | Nodo 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nodo 1 | - | $(\mathbf{10}, \mathbf{10})$ | $(10, 20)$ | $(10, 0)$ | |
| Nodo 2 | - | - | $(\mathbf{30}, \mathbf{10})$ | | $(30, 0)$ |
| Nodo 3 | - | - | - | $(\mathbf{0}, \mathbf{15})$ | $(0, 20)$ |
| Nodo 4 | - | - | - | - | $(\mathbf{10}, \mathbf{10})$ |
| Nodo 5 | - | - | - | - | - |

Los Nodos resaltados son los activos en la iteración.

▶ **Iteración 3**. Usaremos los nuevos flujos.

**Paso 1**. Empezamos en el Nodo 1. Hacemos el máximo de las capacidades de salida de flujo del Nodo 1.

$\max\{10, 10, 10\} = 10.$

Por tanto, por el principio heurístico conectamos con el Nodo 2. Conectamos Nodo 1 con Nodo 2, ponemos la etiqueta $[10, 1]$ en el Nodo 2 y marcamos el arco $(1, 2)$.

**Paso 2**. Hacemos el máximo de las capacidades de salida de flujo del Nodo 2.

$\max\{30, 30\} = 30.$

Conectaríamos con el Nodo 3, pero desesde este Nodo no podemos conectarnos con el Nodo 4 o con el Nodo 5 (el Nodo 1 ya está etiquetado) puesto que los arcos tienen capacidades nulas. Retrocedemos del Nodo 3 al Nodo 2 y cancelamos Nodo 3 de manera que no se etiquete durante esta iteración. Conectamos el Nodo 2 con el Nodo 5.

$\max\{30\} = 30.$

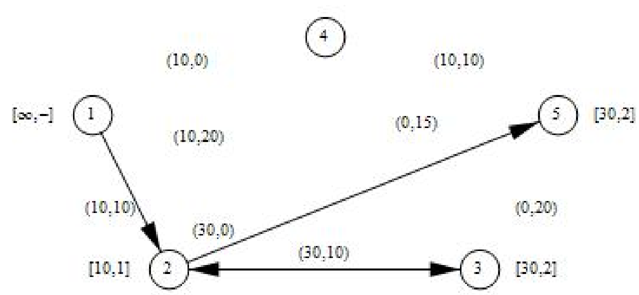
Conectamos Nodo 2 con Nodo 5, ponemos la etiqueta $[30, 2]$ en el Nodo 5 y marcamos el arco $(2, 5)$.

**Paso 3**. Dado que estamos en el Nodo 5 que es el nodo destino, calculamos el flujo comprometido y ajustamos la figura. La tabla de etiquetas es:

| | Nodo 1 | Nodo 2 | Nodo 3 | Nodo 4 | Nodo 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Etiquetas** | $[\infty.-]$ | $[10, 1]$ | - | - | $[30, 2]$ |

Por tanto, la capacidad mínima es $c^* = \min\{\infty, 10, 30\} = 10$. (son los valores de las etiquetas).

■ **Final iteración 3**:




Teniendo en cuenta que $c^* = 10$ u. son los flujos comprometidas, ajustamos los flujos:

| **Flujo de/ a**: | Nodo 1 | Nodo 2 | Nodo 3 | Nodo 4 | Nodo 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nodo 1 | - | $(\mathbf{0}, \mathbf{20})$ | $(10, 20)$ | $(10, 0)$ | |
| Nodo 2 | - | - | $(30, 10)$ | | $(\mathbf{20}, \mathbf{10})$ |
| Nodo 3 | - | - | - | $(0, 15)$ | $(0, 20)$ |
| Nodo 4 | - | - | - | - | $(10, 10)$ |
| Nodo 5 | - | - | - | - | - |

Los Nodos resaltados son los activos en la iteración.

**Observación 5.1** *El proceso de penetración debe aplicarse hasta que tengamos una trayectoria de llegada al nodo destino o hasta que el retroceso no nos conduzca al nodo fuente.*

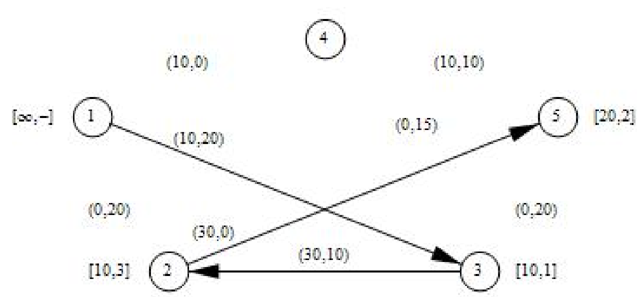
▶ **Iteración 4**.

Usaremos los nuevos flujos.
**Paso 1**. Empezamos en el Nodo 1.
$$\max\{10, 10\} = 10.$$
Por tanto, por el principio heurístico conectamos con el Nodo 3. Conectamos Nodo 1 con Nodo 3 y ponemos la etiqueta $[10, 1]$ en el Nodo 3 *y* marcamos el arco $(1, 3)$.
**Paso 2**. Empezamos en el Nodo 3.
$$\max\{0, 10\} = 10.$$
Conectamos Nodo 3 con Nodo 2, ponemos la etiqueta $[10, 3]$ en el Nodo 2 y marcamos el arco $(3, 2)$.
**Paso 3**. Empezamos en el Nodo 2.
$$\max\{20\} = 20.$$
Conectamos Nodo 2 con Nodo 5,y ponemos la etiqueta $[20, 2]$ en el Nodo 5 y marcamos el arco $(2, 5)$.
**Paso 4**. Dado que estamos en el Nodo 5 que es el nodo destino, calculamos el flujo comprometido y ajustamos la figura. La tabla de etiquetas es:

| | Nodo 1 | Nodo 2 | Nodo 3 | Nodo 4 | Nodo 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Etiquetas** | $[\infty .-]$ | $[10, 1]$ | $[10, 3]$ | - | $[20, 2]$ |

Por tanto, la capacidad mínima es $c^* = \min\{\infty, 10, 10, 20\} = 10$, (son los valores de las etiquetas).

■ **Final iteración 4**:



Ajustamos los flujos: Teniendo en cuenta que $c^* = 10$ u. son las comprometidas.

| **Flujo de/ a**: | Nodo 1 | Nodo 2 | Nodo 3 | Nodo 4 | Nodo 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nodo 1 | - | $(0, 20)$ | $(\mathbf{0}, \mathbf{30})$ | $(10, 0)$ | |
| Nodo 2 | - | - | $(\mathbf{40}, \mathbf{0})$ | | $(\mathbf{10}, \mathbf{20})$ |
| Nodo 3 | - | - | - | $(0, 15)$ | $(0, 20)$ |
| Nodo 4 | - | - | - | - | $(10, 10)$ |
| Nodo 5 | - | - | - | - | - |

Los Nodos resaltados son los activos en la iteración.

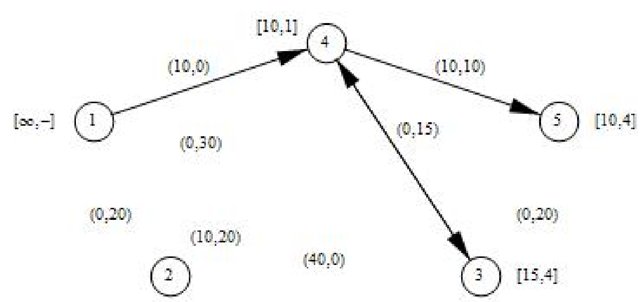
▶ **Iteración 5**.

Usaremos los nuevos flujos.
**Paso 1**. Empezamos en el Nodo 1.
$\max\{10\} = 10.$
Conectamos Nodo 1 con Nodo 4 y ponemos la etiqueta $[10, 1]$ en el Nodo 4 $y$ marcamos el arco $(1, 4)$.
**Paso 2**. Empezamos en el Nodo 4.
$\max\{15, 10\} = 15.$
Conectamos Nodo 4 con Nodo 3, pero el Nodo 3 no tiene capacidad para llegar al Nodo 5 y con el Nodo 2 la capacidad es 0, por tanto, lo anulamos y conectamos con Nodo 5, ponemos la etiqueta $[10, 4]$ en el Nodo 5 y marcamos el arco $(4, 5)$.
**Paso 3**. Dado que estamos en el Nodo 5 que es el nodo destino, calculamos el flujo comprometido y ajustamos la figura. La tabla de etiquetas es:

| | Nodo 1 | Nodo 2 | Nodo 3 | Nodo 4 | Nodo 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Etiquetas** | $[\infty.-]$ | - | - | $[10, 1]$ | $[10, 4]$ |

Por tanto, la capacidad mínima es $c^* = \min\{\infty, 10, 10, 20\} = 10$, (son los valores de las etiquetas).

■ **Final iteración 5**:




Teniendo en cuenta que $c^* = 10$ u. son las comprometidas, ajustamos los flujos:

| **Flujo de/ a:** | Nodo 1 | Nodo 2 | Nodo 3 | Nodo 4 | Nodo 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nodo 1 | - | $(0, 20)$ | $(0, 30)$ | $(\mathbf{0}, \mathbf{10})$ | |
| Nodo 2 | - | - | $(40, 0)$ | | $(10, 20)$ |
| Nodo 3 | - | - | - | $(0, 15)$ | $(0, 20)$ |
| Nodo 4 | - | - | - | - | $(\mathbf{0}, \mathbf{20})$ |
| Nodo 5 | - | - | - | - | - |

Los Nodos resaltados son los activos en la iteración.

▶ **Iteración 6**.

Usaremos los nuevos flujos.

**Paso 1**. Empezamos en el Nodo 1. Todas las capacidades de flujo que salen del Nodo 1 son cero.

Por tanto, podemos obtener el flujo óptimo en la red, restando los flujos modificados $(a^*, b^*)$ del último cuadro de los originales $(a, b)$ del primer cuadro. La regla será:

Cada arco $(i, j)$ del grafo final se representa por $(a^*, b^*)$ y cada arco del grafo inicial por $(a, b)$.

Se hace la diferencia $(a - a^*, b - b^*)$.

Si $a - a^* > 0$ tendrá flujo $a - a^*$ en la dirección $i$ hacia $j$.

Si $b - b^* > 0$ tendrá flujo $b - b^*$ en la dirección $j$ hacia $i$.

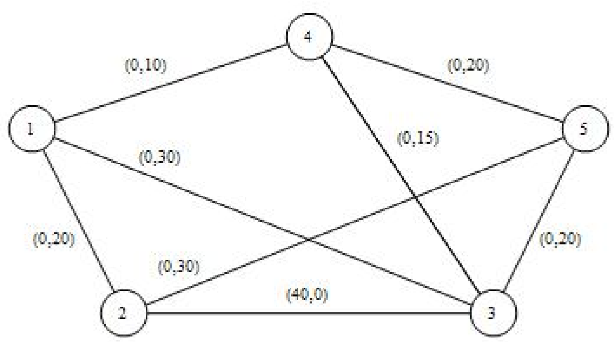
Ejemplo:

Nodo 1 hacia Nodo 4. $(a, b) = (10, 0)$ y $(a^*, b^*) = (0, 10)$.

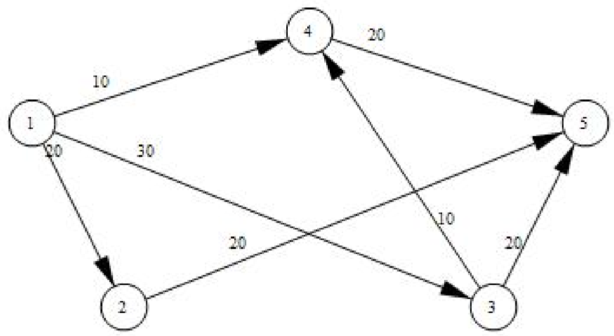
$a - a^* = 10 - 0 = 10 > 0 \Rightarrow$ flujo de Nodo 1 hacia Nodo 4, de 10 unidades.

$b - b^* = 0 - 10 = -10 < 0$.

En caso de igualdad a cero de las dos restas, indicará que no habrá flujo.




El grafo resultado es:




## 5.3. Método de Ford-Fulkerson

El problema trata de obtener, en una red, la mayor cantidad de flujo que se pueda transportar cumpliendo las condiciones preestablecidas.

Las condiciones de este método son:

1. Existe un único nodo origen (con capacidad positiva) y un único nodo destino (con capacidad negativa).
2. Todos los demás nodos son de transición (con capacidad cero).
3. Cada arco tiene una capacidad asociada pero no un coste.

Este algoritmo depende de tres conceptos y un teorema , a saber:

- Un **camino de aumento**, que es una trayectoria desde el nodo origen al nodo destino por la que puede circula más flujo.
- La **capacidad residual** que es la capacidad adicional de flujo que un arco puede llevar.
- El **corte** es la división de la red en dos partes.

**Teorema 5.2** *(Ford-Fulkerson, 1962) En una red cualquiera, el flujo máximo que fluye del nodo fuente al nodo destino es igual a la capacidad del corte mínimo que separa el nodo fuente y el nodo destino.*

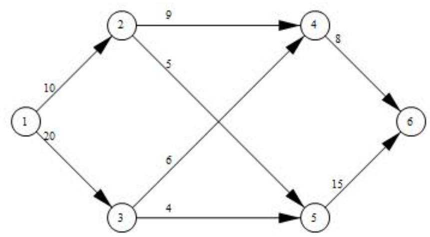
### 5.3.1. Ejemplo

**Ejemplo 5.3** *Dada la red dirigida de tuberias donde los flujos de gas vienen representados por la siguiente tabla*

| ***Flujo de/ a:*** | *Nodo* 1 | *Nodo* 2 | *Nodo* 3 | *Nodo* 4 | *Nodo* 5 | *Nodo* 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Nodo* 1 | | 10 | 20 | | | |
| *Nodo* 2 | | | | 9 | 5 | |
| *Nodo* 3 | | | | 6 | 4 | |
| *Nodo* 4 | | | | | | 8 |
| *Nodo* 5 | | | | | | 15 |
| *Nodo* 6 | | | | | | |

*Encontrar el flujo máximo que puede pasar del Nodo* 1 *al Nodo* 6*.*

La solución es:
El grafo asociado es




Si observamos el grafo vemos que los posibles cortes son:
$(1,2),(1,3)$ con capacidad 30.
$(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)$ con capacidad 24.
$(1,2),(3,5),(3,4)$ con capacidad 20.
$(4,6),(5,6)$ con capacidad 23.
$(4,6),(2,5),(3,5)$ con capacidad 17.
Luego el flujo máximo que puede pasar del Nodo 1 al Nodo 6 es 17.
Falta calcular el flujo que pasará por cada arco que lo haríamos con el algoritmo anterior.
De forma gráfica, la solució es: