Diplomatura d'Estadística. Curs 2008/09. 2^{on} Q.

Investigació Operativa Estocàstica. Examen Parcial.

Cadenes de Markov

[6 punts] Un equip de metges en un hospital s'ha especialitzat en un determinat tipus de tractament d'una malaltia. Es disposa només de tres llits on els pacients que ingressen poden allotjar-se i l'equip de metges només pot fer-se'n càrrec d'un pacient a la vegada, és a dir que en ingressar un pacient a l'hospital ha d'esperar fins que pugui ser tractat si és que l'equip de metges està ocupat en el dia d'ingrés o bé comença immediatament el tractament si l'equip de metges està lliure. Se sap que quan un pacient entra en tractament, llavors el número de dies que dura aquest és una variable aleatòria que segueix la llei geomètrica de probabilitat 0'5. El número de pacients D_k que demanen ingressar a l'hospital en un dia k és aleatori, i mai excedeix de quatre. A més a més:

$$P(D_k = i) = 1/4, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

En cas de que en un dia hi hagin més peticions que vacants a l'hospital llavors les peticions que no puguin ser ateses són desestimades. La quantitat que paga cada malalt a l'hospital pel tractament és de 100 € independentment del número de dies de permanència. Durant un dia el número d'admissions a l'hospital vindrà donat per la disponibilitat del nº de llits al inici del dia.
Es demana:

1) **[3 punts]** Considereu la col.lecció de variables aleatòries $\{X_k\}$ on X_k és el número de pacients que hi ha a l'hospital a l'inici del dia k-èssim. Justifiqueu breument que és una cadena de Markov i calculeu la matriu de probabilitats de transició. Representeu el diagrama de la cadena, determineu les seves classes i la seva periodicitat.
2) **[1 punt]** Comptant des d'un dia en que l'hospital te dos pacients, quin número mig de dies es tarda en arribar a un dia en que l'hospital és ple ?
3) **[2 punts]** Quin número mig de malalts entrarà al any? Quins seran els ingressos durant un any en mitjana ? Quin és el número mig de pacients que hi ha a l'hospital ?.

Temps de Vida

[4 punts] En una parada de autobusos el temps τ entre dues arribades dels busos d'una determinada línia segueix una llei uniforme, $\tau \sim$unif [0,10] expressada en minuts. Se suposa que els passatgers arriben a la parada a l'atzar amb una taxa de 10 clients/minut. La capacitat dels autobusos és de 100 passatgers.
Es pregunta:

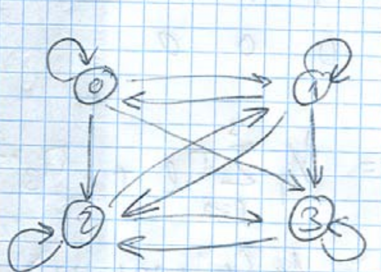
a) **[0,75 punts]** Un passatger en arribar a la parada acaba de perdre un bus. Quina és la probabilitat de que tingui que esperar 5 minuts?
b) **[1 punt]** Un altre passatger en arribar a la parada s'assabenta de que fa ja 4 minuts que ha sortit el darrer bus. Quin és el temps mig que li queda per esperar al següent bus? Quina és la probabilitat de que encara hagi d'esperar al menys 4 minuts?
c) **[1,25 punt]** En arribar un autobús a la parada carrega tots els passatgers presents que estan esperant en ella. Se suposa que els autobusos arriben buits. Per simplificar, suposem que si el bus arriba a t minuts des de l'anterior, llavors carregarà 10t passatgers. Quina serà la càrrega mitjana en passatgers d'un bus en sortir de la parada? Si el nivell de confort es degrada quan es superen els 50 passatgers presents al bus (es considera llavors que el bus està massa ple), llavors quina serà la fracció de passatgers que efectuaran un viatge incòmodes en el bus?
d) **[1 punt]** Quina és la probabilitat de que un passatger que arriba a l'atzar a la parada acabi pujant en un bus massa ple? Quin és el temps mig que esperen el passatgers a la parada?

1)

$X_k \backslash D_k$	0	1	2	3
0	0 / 0	0 / 1	1 / 2	2 / 3
1	0 / 1	1 / 2	2 / 3	2 / 3
2	1 / 2	2 / 3	2 / 3	2 / 3
3	2 / 3	2 / 3	2 / 3	2 / 3

$p = 1/8$

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 3/8 & 1/4 & 1/4 & 1/8 \\ 1/8 & 1/4 & 3/8 & 1/4 \\ 0 & 1/8 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$



2) $\underline{\mu_{23}}$

$$\begin{bmatrix} \mu_{03} \\ \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/8 & 1/4 & 1/4 \\ 1/8 & 1/4 & 3/8 \\ 0 & 1/8 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{03} \\ \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5/8 & -1/4 & -1/4 \\ -1/8 & 3/4 & -3/8 \\ 0 & -1/8 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{03} \\ \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \mu_{03} = \frac{1444}{485} \quad \mu_{13} = \frac{312}{97} \quad \mu_{23} = \frac{272}{97} \approx 2'804$$

3) $P^T \pi = \pi \qquad \sum_{l=0}^{3} \pi_l = 1$

$$\begin{bmatrix} 3/8 & 1/8 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/8 & 0 \\ 1/4 & 3/8 & 1/2 & 1/2 \\ 1/8 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -5/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & -3/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/8 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\pi_0 = \frac{4}{233}, \quad \pi_1 = \frac{20}{233}, \quad \pi_2 = \frac{112}{233}, \quad \pi_3 = \frac{97}{233}$

Nº mig de pacients a l'hospital:

$$\sum_{l=0}^{3} l\,\pi_l = 0\cdot\pi_0 + 1\cdot\pi_1 + 2\cdot\pi_2 + 3\cdot\pi_3 = \frac{535}{233} \simeq 2'29$$

Nº mig d'entrades

π	$X_k \backslash D_k$	0	1	2	3
4/233	0	0	1	2	3
20/233	1	0	1	2	2
112/233	2	0	1	1	1
97/233	3	0	0	0	0

← N = nº d'entrades

$$P(N=0) = \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{3}\pi_l + \pi_3\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{97}{233}\cdot\frac{3}{4} = \frac{131}{233}$$

$$P(N=1) = \frac{1}{4}(4+20+112)\frac{1}{233} + \frac{112}{233}\cdot\frac{1}{2} = \frac{90}{233}$$

$$P(N=2) = \frac{1}{4}\,\frac{24}{233} + \frac{20}{233}\cdot\frac{1}{4} = \frac{4}{233}$$

$$P(N=3) = \frac{4}{233}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{233}$$

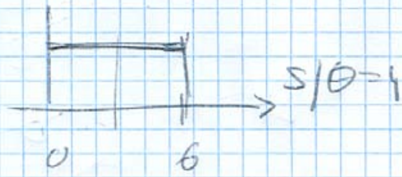
$$E[N] = 0\cdot\frac{131}{233} + \frac{90}{233} + \frac{22}{233} + \frac{3}{233} = \frac{115}{233}$$

Ingressos $\frac{11500}{233}$ €/dia.

TEMPS DE VIDA

1) $P(\tau \geq 5) = 1/2$

2) $E[S \mid \Theta = 4] = 3$ minuts.



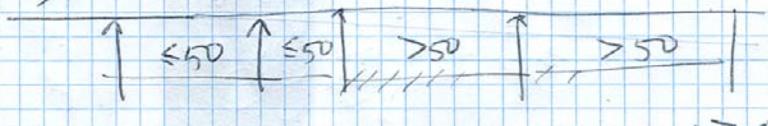
$P(S \mid \Theta = 4 \geq 4) = 1/3$

$S \mid \Theta = 4 \sim \text{unif}[0, 6]$

3) Càrrega d'un bus $= 10\tau$

$E[10\tau] = 10 \cdot E[\tau] = 5 = 50$ passatges.

Se suposa que si es comparteixen més de 50 passatgers, tots estan incòmodes.



N° passatgers incòmodes si triga $\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \leq 5 \\ 10\tau & \text{si } \tau > 5 \end{cases}$

$P(t \leq \tau \leq t + dt) = f_\tau(t) =$ fracció d'interval entre $[t, t+dt]$

$$\frac{\int_5^{10} 10 \cdot \alpha f_\tau(\alpha)\, d\alpha}{\int_0^{10} 10 \alpha f_\tau(\alpha)\, d\alpha} = \frac{\int_5^{10} \alpha\, d\alpha}{\int_0^{10} \alpha\, d\alpha} = \frac{\frac{\alpha^2}{2}\Big]_5^{10}}{\frac{\alpha^2}{2}\Big]_0^{10}} = \frac{75/2}{100/2} = 0'75$$

4) $P(w \geq 5 \text{ minuts})$ $\quad w =$ v.a. temps observat per passatger que arriba a l'atzar a la parada

$$f_w(u) = \frac{u f_\tau(u)}{E[\tau]}$$

$$P(w \geq 5) = \frac{1}{5} \int_5^{10} \alpha f_\tau(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} \int_5^{10} \alpha\, d\alpha = \frac{75/2}{50} = 0'75$$