

Tema 5: Inspecció per mostreig

- **Què és inspecció per mostreig?**
- **Què és un pla de mostreig?**
- **Risc del comprador i risc del venedor**
- **Càlcul dels riscos**
- **Corba característica d'un pla de mostreig**
- **Disseny de plans de mostreig**
- **Normes MIL-STD 105 D**

1

En acabar aquest tema ha d'estar clar :

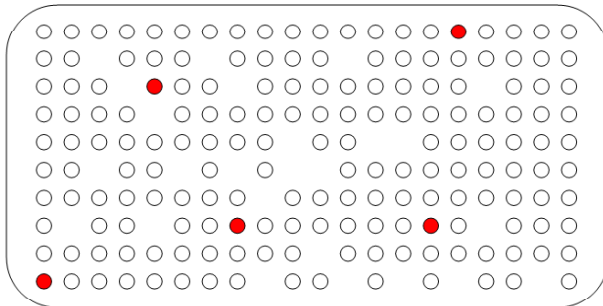
- Que és un pla de mostreig i quins són els seus avantatges i inconvenients
- Que són i com es calculen el risc del comprador i el risc del venedor
- Que és, com s'interpreta i com es construeix la corba característica d'un pla de mostreig
- Com s'utilitzen les Normes MIL-STD 105 D

[Se suposa familiaritat amb les distribucions binomial i Poisson]

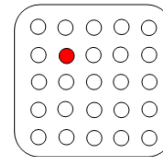
Inspecció per mostreig: Què és?

És revisar (“*inspeccionar*”) només una part (“*mostra*”) del material que es vol verificar (“*lot*”)

Lote



Muestra



Es tracta de fer inferència sobre el lot a partir de la mostra. Aquesta és una de les tècniques clàssiques de la metodologia estadística.

Inspecció per mostreig: Avantatges

**Amb un esforç molt menor que la
inspecció al 100% permet prendre
decisiones sobre la qualitat del lot...**

**... AMB RISCOS D'ERROR
CONEGUTS**

(A més, assaigs destructius, cansament ...)

3

A més :

- Si els assajos són destructius...
- Inspecció al 100% no implica seguretat absoluta en el resultat obtingut (*cansament, ...*)
- A major mida del lot, més estalvi en l'esforç d'inspecció

Però :

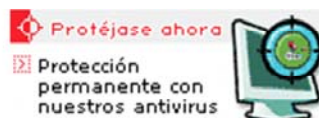
Els riscos existeixen, encara que siguin coneguts.

Altres opcions: Mirar-lo tot o no mirar res

Cost d'inspecció és baix

Cost de deixar passar una unitat defectuosa molt alt

El millor pot ser la
INSPECCIÓ AL 100 %



Cost d'inspecció és molt alt

Cost de deixar passar una unitat defectuosa és baix

El millor pot ser
NO MIRAR RES



4

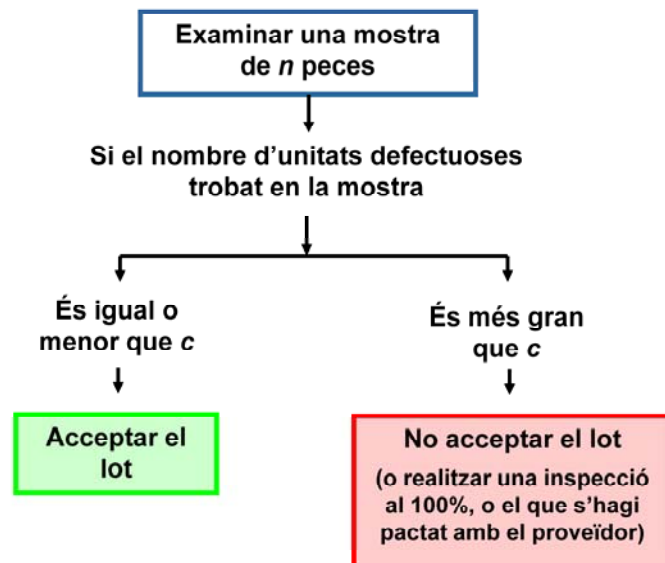
En alguns casos, mirar-ho tot o no mirar res són les opcions més raonables, si es prenen després d'analitzar els pros i els contres de cada alternativa, inclosa la inspecció per mostreig.

Exemples :

Millor mirar-ho tot: És millor mirar tots els arxius de l'ordinador (desenes de milers) quan es passa l'antivirus per saber si hi ha algun arxiu infectat. No seria raonable treure conclusions a partir d'una mostra agafada a l'atzar.

Millor no mirar res: a les borses de festucs sempre hi ha algun fruit que no té la closca oberta i no es pot menjar. No obstant això, no és raonable evitar l'existència d'aquestes unitats amb un pla d'inspecció exhaustiu.

Què és un pla de mostreig?



5

Un pla de mostreig (simple) es resumeix en dos números i unes quantes lletres :

- Els dos números són n (grandària de la mostra) i c (nombre màxim de faltes tolerable)
- Les lletres són la descripció de com s'ha de prendre la mostra per assegurar que és representativa del lot.

Conceptes clau

LOT: Conjunt homogeni de material

No és el mateix lot que comanda

La grandària de mostra no augmenta
de manera proporcional a la mida del lot



MOSTRA ALEATÒRIA: Presa realment a l'atzar
(assegurant que sigui representativa)

No és fàcil triar mostres aleatòries

Cal especificar com es tria la mostra



6

Sobre mostres aleatòries :

- Cal definir clarament com s'ha de seleccionar la mostra
- Si les peces són numerables: taula de nombres aleatoris
- Criteris de selecció reproduïbles

Errors típics :

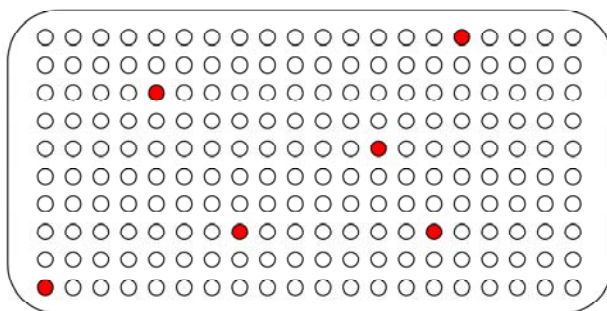
- Prendre les peces que semblin defectuoses
- Ignorar les parts del lot de difícil accés
- Prendre la mostra sempre dels mateixos llocs

Plans de mostreig: Riscos

Pacte establert:

Estem disposats a tolerar fins a un 4% de defectes en els lots

És correcte aquest lot?



N = 200
defectes = 6

7

Sí que ho és.

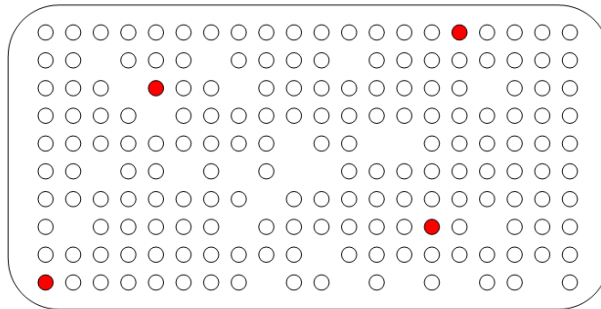
Estem disposats a tolerar un 4% de defectes i en el lot només hi ha un 3%.

Plans de mostreig: Riscos

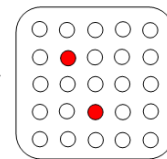
Inspeccionar per mostreig (tolerem 4% de defectes):

Si $n = 25$, sembla raonable considerar $c=1$

Lote



Muestra



**Han caigut 2 defectes en la mostra :
EL LOT ÉS REBUTJAT INJUSTAMENT
(risc del venedor)**

8

Risc del venedor (error tipus I, probabilitat α)

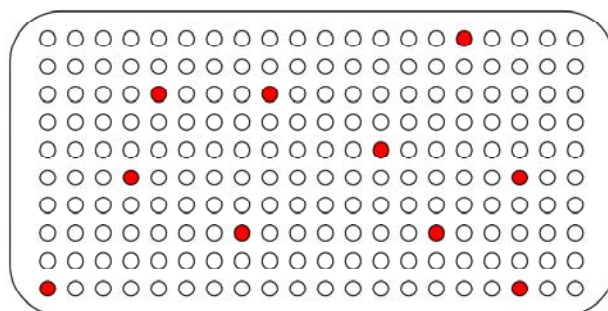
Probabilitat de rebutjar un lot sent bo.

Plans de mostreig: Riscos

NOVA SITUACIÓ :

(Estem disposats a acceptar lots amb un 4% de defectes)

¿ És correcte aquest altre lot?



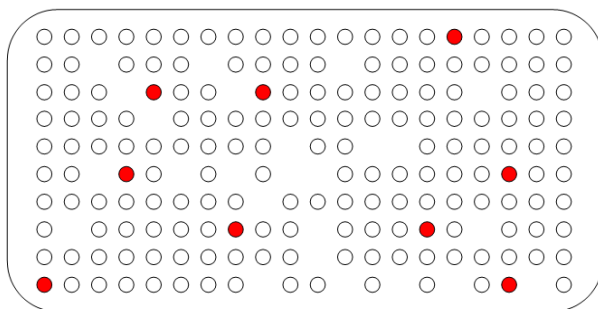
N = 200
defectes = 10

No, evidentment no és correcte, perquè té un 5% de defectes.

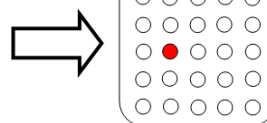
Plans de mostreig: Riscos

Pla de mostreig : $n = 25$; $c = 1$

Lote



Muestra



Ha caigut 1 sol defecte en la mostra :
EL LOT ÉS acceptat INJUSTAMENT
(risc del comprador)

10

Risc del comprador (error tipus II, probabilitat β)

Probabilitat d'acceptar un lot sent dolent.

Els 2 tipus de risc

Inevitablement, tot pla de mostreig implica la possibilitat de cometre 2 tipus d'error :

RISC DEL VENEDOR :
(o error tipus I, o probabilitat α)

És la probabilitat
REBUTJAR un lot
sent **BO**

RISC DEL COMPRADOR :
(o error tipus II, o probabilitat β)

És la probabilitat
d'**ACCEPTAR** un lot
sent **DOLENT**

11

En qualsevol pla de mostreig és inevitable córrer els dos tipus de risc.

Càlcul dels riscos

En teoria... Distribució hipergeomètrica

A la pràctica : Distribució binomial
($n < 0.1 N$)

Distribució de Poisson
($n > 50$ y $p < 0.05$)

12

Distribució hipergeomètrica :

Mida del lot :	N	$P(X = x) = h(x; n, M, N) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$
Nombre de defectes en el lot :	M	
Mida de la mostra :	n	
Nombre de defectes en la mostra : X		

Distribució binomial :

Mida de la mostra :	n	$P(X = x) = b(x; n; p) = \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$
Proporció defectes en la població: p		
Nombre de defectes en la mostra : X		

Distribució de Poisson

Mida de la mostra :	n	$P(X = x) = P(x; \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$
Proporció defectes en la població: p		
Valor mitjà de defectes	$\lambda = n \cdot p$	
Nombre de defectes en la mostra: X		

Càlcul del risc del VENEDOR. Exemple

*** Es tolera un 4% de defectes ***

LOT	Mida $N = 200$	Nom. de defectes $M = 6$	Propor. de defectes $p = 0,03$
------------	--	--	--

MOSTRA	Mida $n = 25$	Nom. màx. de defectes $X = 1$
---------------	---	---

S' hauria d'acceptar el lot $p < 0,04$

Prob. d'acceptar (el correcte)

	Hipergeomètrica	Binomial	Poisson
$P(X \leq 1)$	0,8356	0,8280	0,8266

$1 - P(X \leq 1)$	0,1644	0,1720	0,1734
-------------------------------------	---------------	---------------	---------------

Prob. de rebutjar (error tipus I)

Probabilitats exactes

Aproximacions

13

Hypergeometric Distribution

☐ Probability
☒ Cumulative probability
☐ Inverse cumulative probability

Population size (N): 200
 Successes in population (K): 6
 Sample size (n): 25

☐ Input column:
 Optional storage:
☒ Input constant: 1

CDF 1;

SUBC> Hypergeometric 200 6 25.

Cumulative Distribution Function

Hypergeometric with N=200, X=6, and n=25

x	P(X <= x)
1,00	0,8356

Binomial Distribution

☐ Probability
☒ Cumulative probability
☐ Inverse cumulative probability

Number of trials: 25
 Probability of success: 0,03

☐ Input column:
 Optional storage:
☒ Input constant: 1

CDF 1;

SUBC> Binomial 25 0,03.

Cumulative Distribution Function

Binomial with n = 25 and p = 0,0300000

x	P(X <= x)
1,00	0,8280

Poisson Distribution

☐ Probability
☒ Cumulative probability
☐ Inverse cumulative probability

Mean: 0,75

☐ Input column:
 Optional storage:
☒ Input constant: 1

CDF 1;

SUBC> Poisson 0,75.

Cumulative Distribution Function

Poisson with mu = 0,750000

x	P(X <= x)
1,00	0,8266

Càlcul del risc del COMPRADOR. Exemple

*** Es tolera un 4% de defectes ***

LOT	Mida $N = 200$	Nom. de defectes $M = 10$	Propor. de defectes $p = 0,05$
-----	-------------------	------------------------------	-----------------------------------

MOSTRA	Mida $n = 25$	Nom. màx. de defectes $X = 1$
--------	------------------	----------------------------------

S'hauria de rebutjar el lot $p < 0,04$

Prob. d'acceptar
(error tipus II)

Hipergeomètrica

Binomial

Poisson

$P(X \leq 1)$

0,6377

0,6424

0,6446

$1 - P(X \leq 1)$

0,3623

0,3576

0,3554

Prob. de rebutjar
(el correcte)

Probabilitats
exactes

Aproximacions

14

```
MTB > CDF 1;
SUBC> Hypergeometric 200 10 25.
```

Cumulative Distribution Function

Hypergeometric with $N = 200$, $X = 10$, and $n = 25$

x	P(X <= x)
1,00	0,6377

```
MTB > CDF 1;
SUBC> Binomial 25 0,05.
```

Cumulative Distribution Function

Binomial with $n = 25$ and $p = 0,0500000$

x	P(X <= x)
1,00	0,6424

```
MTB > CDF 1;
SUBC> Poisson 1,25.
```

Cumulative Distribution Function

Poisson with $\mu = 1,25000$

x	P(X <= x)
1,00	0,6446

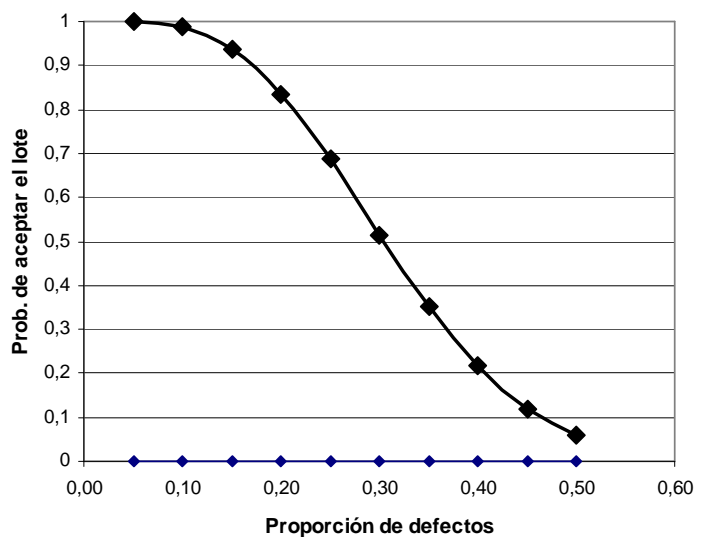
Exercici

Per decidir l'acceptació d'un lot de productes rebuts, es pren una mostra de 15 unitats acceptant el lot si el nombre de defectes és igual o inferior a 4.

Dibuixi una corba que representi com evoluciona la probabilitat d'acceptar el lot en funció del percentatge de defectes que contingui. (Es considera que la mida del lot és molt superior a la grandària de la mostra, utilitzeu l'aproximació binomial).

15

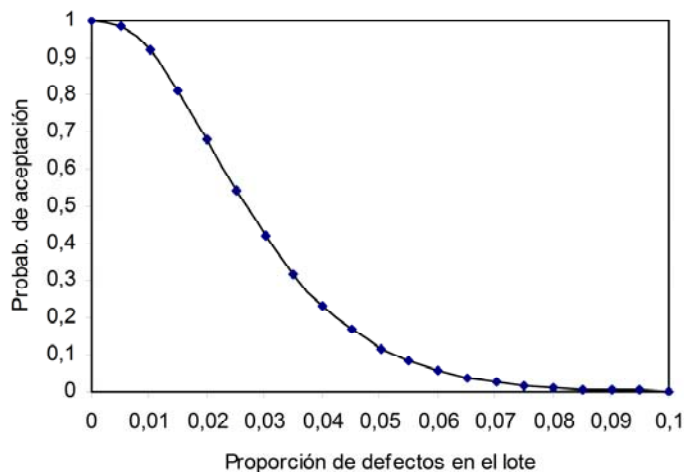
Proporció de defectes	Prob. D'acceptar el lot
0,05	$B(4, 15; 0,05) = 0,99939$
0,10	$B(4, 15; 0,10) = 0,98728$
0,15	$B(4, 15; 0,15) = 0,93829$
0,20	$B(4, 15; 0,20) = 0,83577$
0,25	$B(4, 15; 0,25) = 0,68649$
0,30	$B(4, 15; 0,30) = 0,51549$
0,35	$B(4, 15; 0,35) = 0,35194$
0,40	$B(4, 15; 0,40) = 0,21728$
0,45	$B(4, 15; 0,45) = 0,12040$
0,50	$B(4, 15; 0,50) = 0,05923$



Es pot veure a les taules

Corba característica d'un Pla de Mostreig

Per visualitzar els riscos d'un pla de mostreig s'utilitza la representació de la seva **CORBA CARACTERÍSTICA**



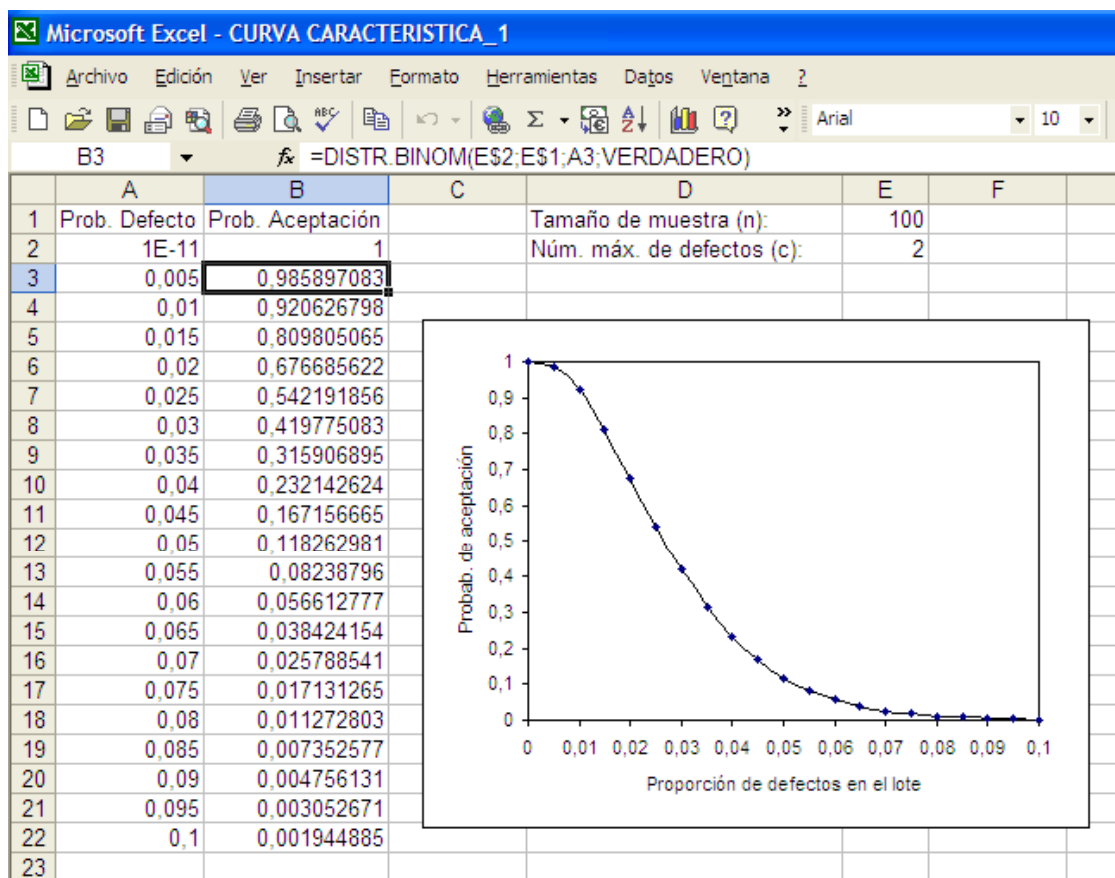
n = 100

c = 2

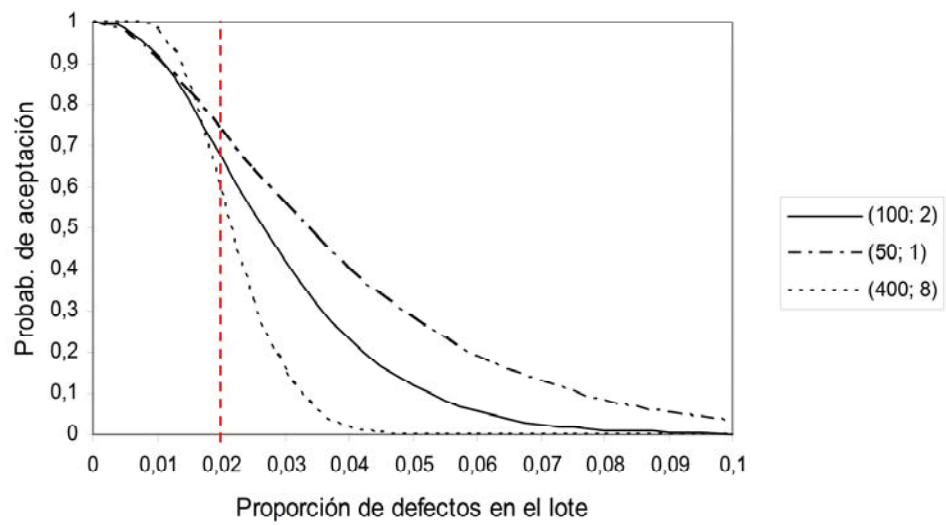


[Curva característica_1.xls]

16



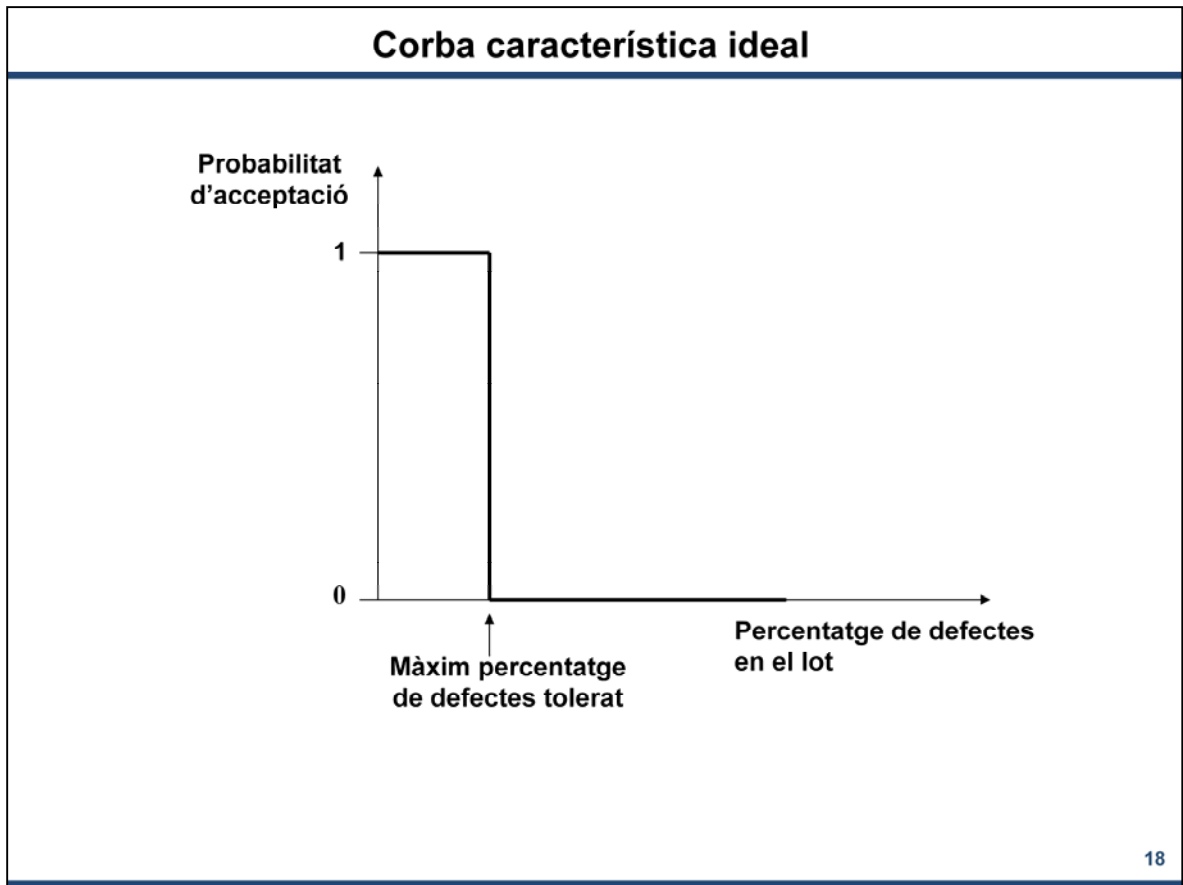
Comparació de corbes característiques



17

Tots els plans permeten el mateix percentatge de defectes.

Es pot observar que discrimina millor el que té major grandària de mostra.

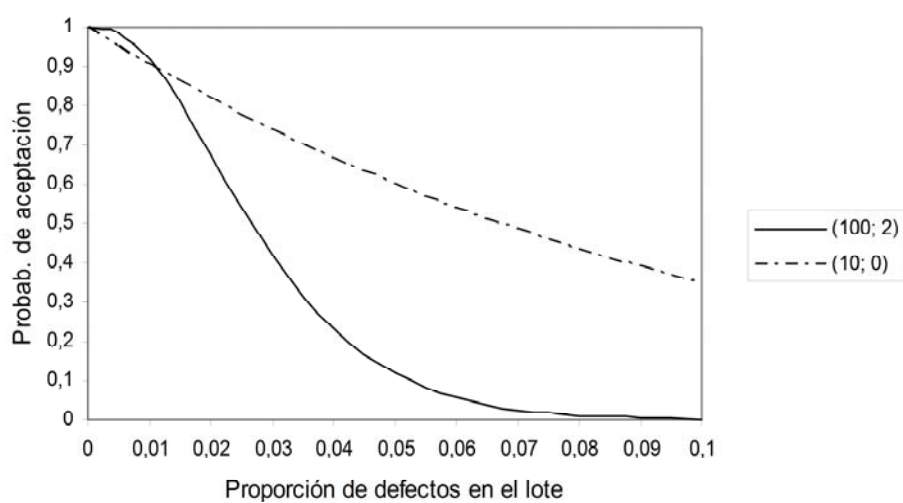


Pla de mostreig perfecte:

S'accepten tots els lots amb un percentatge de defectes igual o menor al màxim permès, i es rebutgen tots els que tinguin un percentatge major.

La corba ideal s'arrodoneix al treballar amb mostres

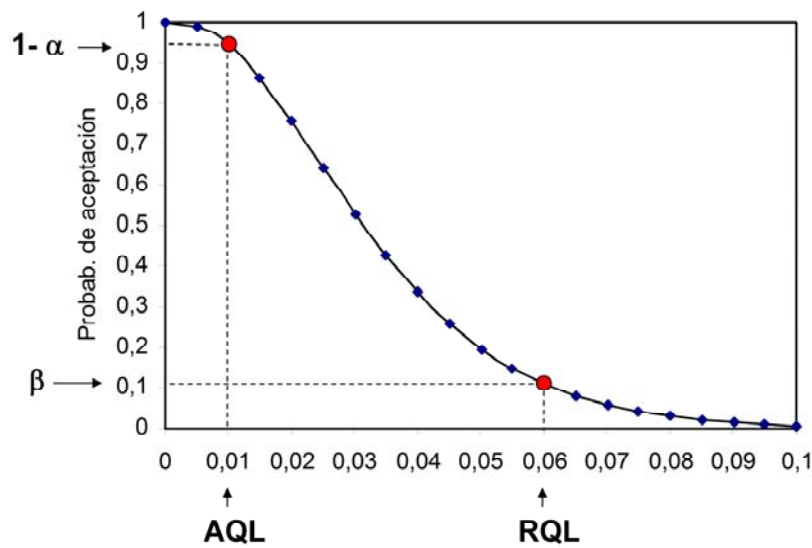
Plans de mostreig amb zero defectes



19

Un pla que només permeti zero defectes no necessàriament és més exigent que un altre que permeti alguns defectes. També depèn de la grandària de la mostra.

Disseny de plans de mostreig: Punts clau en la CC



20

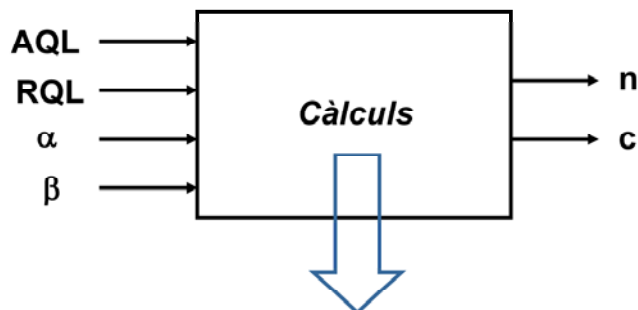
AQL (*Acceptable Quality Level*, Nivell de qualitat acceptable): Si la proporció de defectes és aquesta, volem que la probabilitat d'acceptar el lot sigui gran = $1-\alpha$

RQL (*Rejectable Quality Level*, Nivell de qualitat rebutjable): Si la proporció de defectes és aquesta, volem que la probabilitat d'acceptar el lot sigui petita = β

Es tracta de determinar quin és el pla de mostreig que té una corba que passa (o s'acosta al màxim) als 2 punts definits (AQL, $1-\alpha$) y (RQL, β).

Disseny de plans de mostreig: *Inputs y Outputs*

Esquema:



$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha &= \sum_{i=0}^c \frac{n!}{i!(n-i)!} p_{AQL}^i (1 - p_{AQL})^{n-i} \\ \beta &= \sum_{i=0}^c \frac{n!}{i!(n-i)!} p_{RQL}^i (1 - p_{RQL})^{n-i} \end{aligned} \right\}$$


21

Si s'utilitza l'aproximació binomial cal resoldre el sistema d'equacions que apareix a la transparència.

Són dues equacions amb dues incògnites ($n; c$) però no tenen solució analítica directa.

És més fàcil utilitzar l'aproximació de Poisson

Disseny de plans de mostreig: Ús de la dist. de Poisson

$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha &= \sum_{i=0}^c \frac{n!}{i!(n-i)!} p_{AQL}^i (1 - p_{AQL})^{n-i} \\ \beta &= \sum_{i=0}^c \frac{n!}{i!(n-i)!} p_{RQL}^i (1 - p_{RQL})^{n-i} \end{aligned} \right\} \quad \text{S'aproxima a través de la dist. de Poisson}$$


$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha &= \sum_{i=0}^c e^{-\lambda_{AQL}} \frac{\lambda_{AQL}^i}{i!} \\ \beta &= \sum_{i=0}^c e^{-\lambda_{RQL}} \frac{\lambda_{RQL}^i}{i!} \end{aligned} \right\}$$

Hi ha taules que ajuden a realitzar els càlculs

Taula per determinar plans de mostreig

La taula dóna els valors de λ que verifiquen l'expressió :

$$p = \sum_{i=0}^c e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

Valors de p

c	0,99	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05
0	0,01	0,051	0,105	0,693	2,303	2,996
1	0,149	0,355	0,532	1,678	3,89	4,744
2	0,436	0,818	1,102	2,674	5,322	6,296
3	0,823	1,366	1,745	3,672	6,681	7,754
4	1,279	1,97	2,433	4,671	7,994	9,154
5	1,785	2,613	3,152	5,67	9,275	10,513

Valors de λ

23

Exemple :

$$e^{-0,818} + e^{-0,818} \cdot 0,818 + e^{-0,818} \frac{0,818^2}{2!} = 0,95$$

$$= \sum_{i=0}^2 \lambda \frac{\lambda^i}{i!}$$

c	0,99	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05
0	0,01	0,051	0,105	0,693	2,303	2,996
1	0,149	0,355	0,532	1,678	3,89	4,744
2	0,436	0,818	1,102	2,674	5,322	6,296
3	0,823	1,366	1,745	3,672	6,681	7,754
4	1,279	1,97	2,433	4,671	7,994	9,154
5	1,785	2,613	3,152	5,67	9,275	10,513

Disseny de plans de mostreig: Procediment (1)

Exemple :

Determinar el pla de mostreig que millor s'adapta als següents valors :

$$AQL = 0.01 \quad \alpha = 0.05$$

$$RQL = 0.06 \quad \beta = 0.10$$

1. Calcular RQL / AQL. En el nostre cas $RQL/AQL = 6$
2. A la taula de lambdas (*veure taules*) triar les columnes corresponents a les probabilitats d'acceptació.
En el nostre cas $1 - \alpha = 0,95$ y $\beta = 0,10$
3. Trobar els quocients per a aquestes columnes i determinar quin valor de c s'aproxima més el quocient RQL / AQL.
En el nostre cas $c = 2$.

24

		$1 - \alpha = 0,95$				$\beta = 0,10$		Quocients
c		0,99	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	
0		0,01	0,051	0,105	0,693	2,303	2,996	45,16
1		0,149	0,355	0,532	1,678	3,89	4,744	10,96
2		0,436	0,818	1,102	2,674	5,322	6,296	6,51
3		0,823	1,366	1,745	3,672	6,681	7,754	4,89
4		1,279	1,97	2,433	4,671	7,994	9,154	
5		1,785	2,613	3,152	5,67	9,275	10,513	

Valor que més s'apropa a RQL/AQL

Disseny de plans de mostreig: Procediment (2)

4. Calcular n mantenint constant el valor de AQL :

$$n = \frac{\lambda_A}{AQL} = \frac{0,82}{0,01} = 82$$

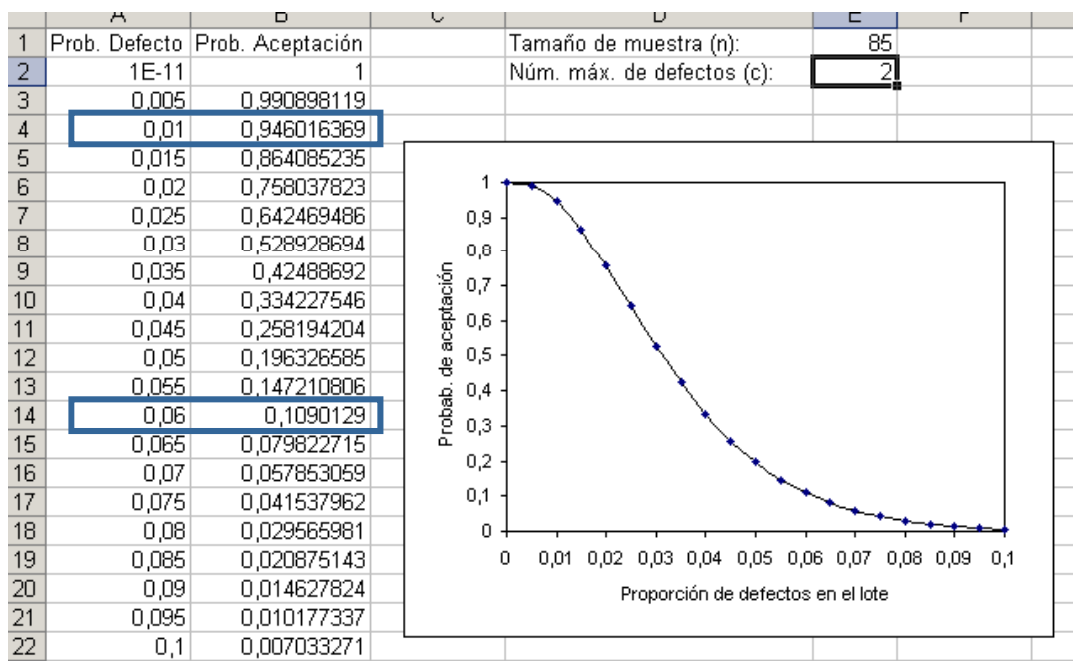
5. Calcular n mantenint constant el valor de RQL :

$$n = \frac{\lambda_R}{RQL} = \frac{5,3}{0,06} = 88$$

6. Millor pla disponible :

$$n = 85; \quad c = 2$$

25



Exercici

Calcular el pla de mostreig que millor s'adapta a les següents condicions :

$$AQL = 0.005 \quad \alpha = 0.05$$

$$RQL = 0.04 \quad \beta = 0.10$$

26

$$RQL/AQL = 8$$

							Quocients
c	0,99	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	
0	0,01	0,051	0,105	0,693	2,303	2,996	45,16
1	0,149	0,355	0,532	1,678	3,89	4,744	10,96
2	0,436	0,818	1,102	2,674	5,322	6,296	6,51
3	0,823	1,366	1,745	3,672	6,681	7,754	4,89
4	1,279	1,97	2,433	4,671	7,994	9,154	
5	1,785	2,613	3,152	5,67	9,275	10,513	

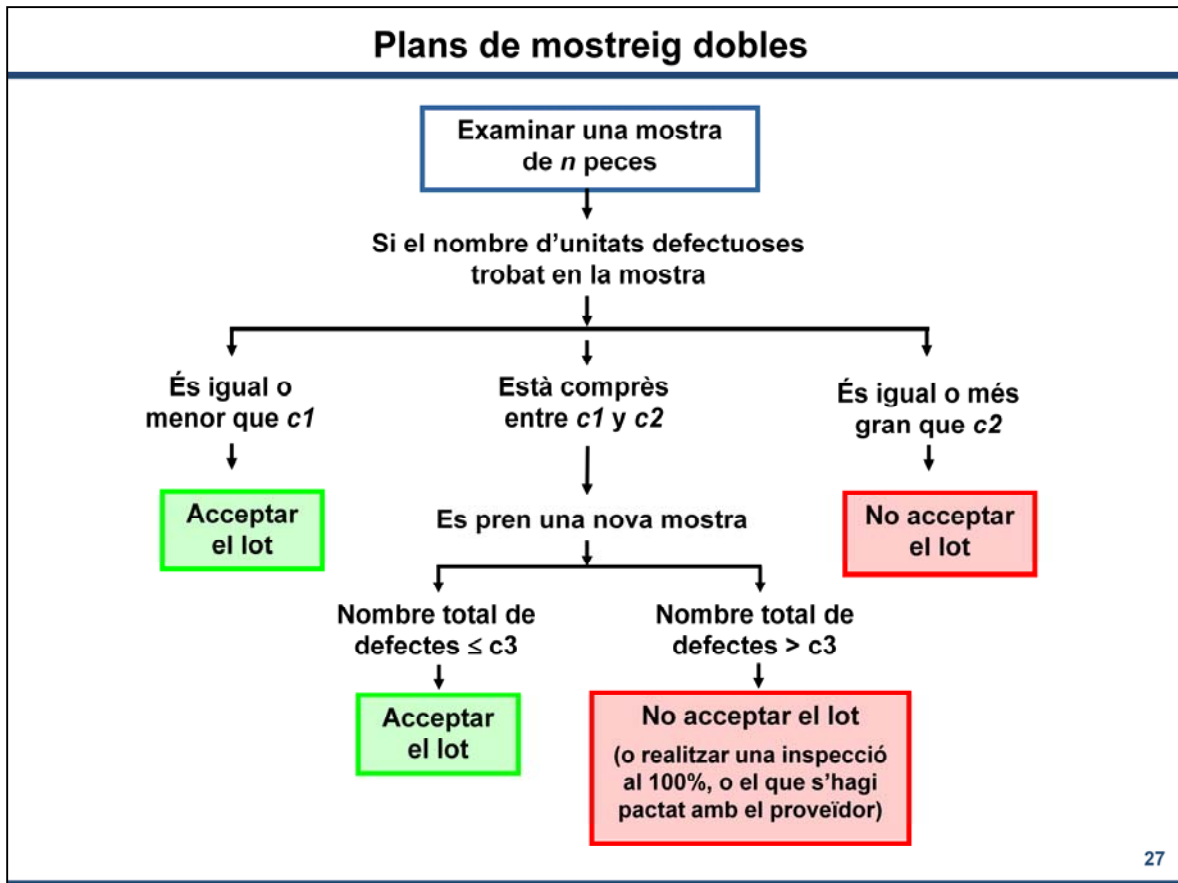
$$c=2$$

$$n_A = \frac{\lambda_A}{AQL} = \frac{0,82}{0,005} = 164$$

$$n_R = \frac{\lambda_R}{RQL} = \frac{5,3}{0,04} = 132,5$$

$$n = \frac{n_A + n_R}{2} = 148 \quad \text{arrodonit per excés}$$

Pla: $n = 148$; $c = 2$.



- Sembla que amb aquests plans es dóna una segona oportunitat al proveïdor, encara que en realitat la duresa d'un pla de mostreig no té a veure amb que sigui simple o doble.
- A la llarga s'inspecciona menys amb els plans dobles que amb els simples (per a una corba característica), especialment si els lots són molt bons o molt dolents.
- Els plans simples tenen l'avantatge que són més senzills, permeten donar consignes més clares i és més fàcil verificar els resultats.

Norma MIL-STD 105-D

- **Són les més conegudes i utilitzades.**
Referència còmoda en els contractes de subministrament
- **Els plans de mostreig que proposa tenen en compte l'historial del proveïdor**
- **Coincideix amb les UNE 66-020-73**

28

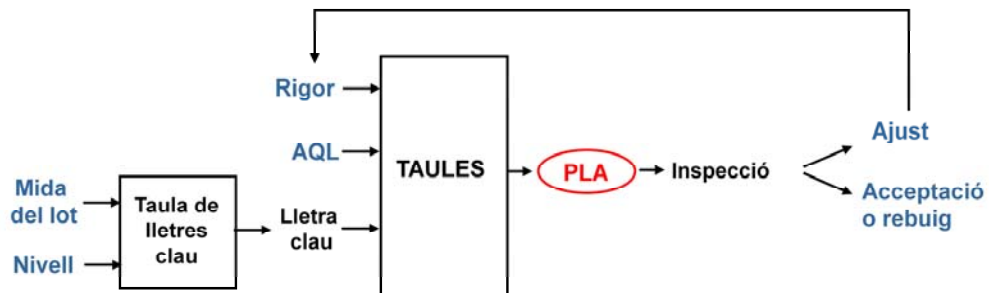
Esquema d'aplicació :

- Fixar el AQL
- Determinar el nivell d'inspecció. Aquest nivell està relacionat amb els costos associats a la inspecció. Segons siguin aquests es prenen els nivells :
 - I: Cost d'inspecció alt
 - II: Cost estàndard
 - III: Cost d'inspecció baix
 - S1 a S4: Assaigs destructius
- Determinar el rigor de la inspecció : Existeixen 3 tipus: Reduït, Normal i Rigorós. Es comença pel Normal i després es va canviant aplicant l'esquema d'ajust.
- Decidir l'aplicació de mostreig simple, doble o múltiple (fins a 7 etapes)

Norma MIL-STD 105-D

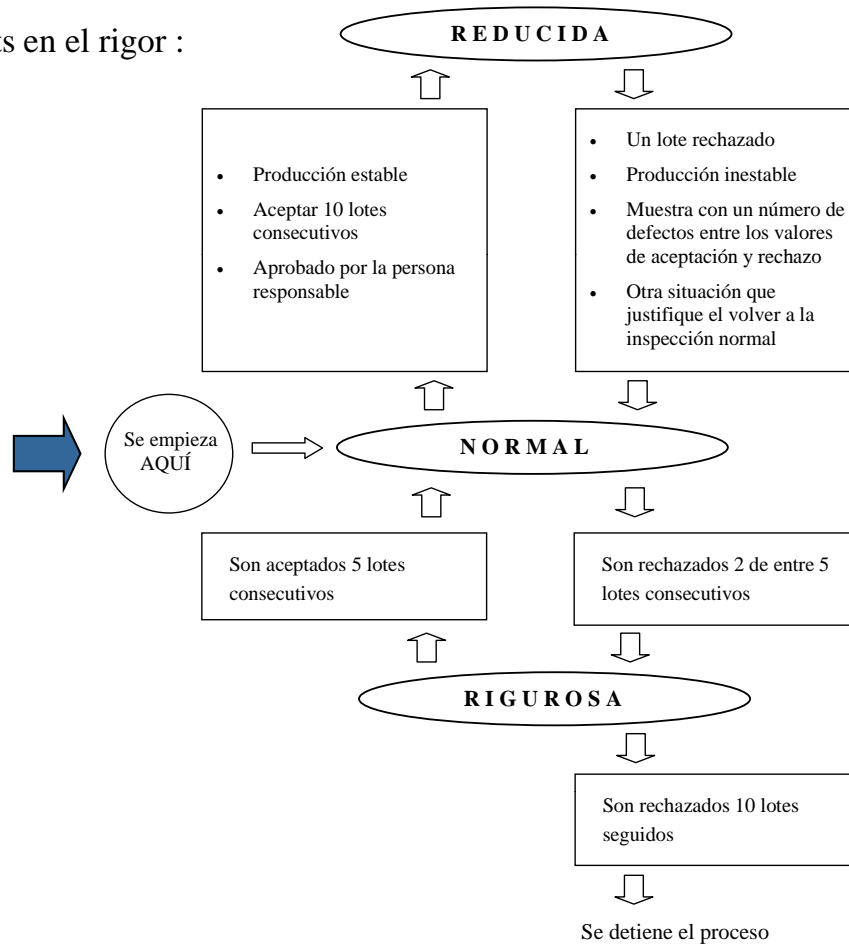
Utilització de la Norma :

Fase prèvia: Definir exactament el que és un producte defectuós



29

Ajustaments en el rigor :



Norma MIL-STD 105-D: Exemple

INPUTS:

Mida del lot : 1000
 Nivell d'inspecció : II
 Rigor: Normal
 AQL: 1,0

RESULTATS :

Mida de la mostra : 80
 N. màx. defectes : 2

30

Lletra clau : J

TABLA 7.6. MIL II-A. Inspección normal

c	n	Valor													
		0,010	0,015	0,025	0,040	0,065	0,10	0,15	0,25	0,40	0,65	1,0	1,5		
		Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A	2														
B	3														
C	5														
D	8														
E	13														
F	20														
G	32														
H	50														
J	80														
K	125														
L	200														
M	315														

Plan: n = 80; c = 2.

Norma MIL-STD 105-D: Alguns aspectes

AQL > 10: Nombre de defectes per 100 unitats

Fletxa : Se segueix per als valors d'acceptació i rebuig,
i també per a la grandària de la mostra

Inspecció reduïda: Valors no seguits d'acceptació
i rebuig per ajustos en la inspecció

31

Veure taules de la Norma al final (Taules)

Tema 5: Bibliografia

Quality Control and Industrial Statistics

A. J. Duncan

John Wiley & Sons, 2000

Segurament aquest és el llibre més conegut, i el més complet, sobre control de recepció i inspecció per mostreig. (*Versió espanyola, d'una edició anterior, a Editorial Alfaomega, México, 1990*)

Manual de Calidad de Juran (5ª edición)

J. M. Juran y B. Godfrey

Madrid, McGrawHill, 2001

Tot està bé en aquesta “enciclopèdia”. En particular també està ben tractat pel que fa a la inspecció per mostreig. Es nota un enfocament més modern que en el text de Duncan

Control de Calidad. Teoría y Aplicaciones

B. L. Hansen y P. Ghare

Ad. Díaz de Santos, 1990

Crec que aquest és el millor text per aprendre les tècniques estadístiques que s'utilitzen en la inspecció per mostreig. És clar, didàctic, amb exemples, exercicis, ... També és un bon llibre sobre SPC.