Tema 7. Proves basades en rangs

1. S'han enregistrat els temps de funcionament de piles recarregables d'una certa marca. Les dades següents (en hores) corresponen a la mostra examinada

$$2.3, 4.7, 3.1, 3.3, 2.5, 2.9, 3.1, 4.0, 2.9, 3.1, 4.0, 2.9, 3.3, 3.5, 2.8, 3.2, 2.5, 3.5, 2.4, 2.3$$

   Utilitza la prova dels signes per a contrastar si la mediana del temps de funcionament és diferent de 3. Utilitza un nivell de significació d'$\alpha = 0.05$.

2. Per a mesurar la introversió s'aplica a 12 individus un test de personalitat en dues variants, 1 i 2, que se suposa que mesuren la introversió per igual. A partir de les dades de la taula, comprova amb un nivell de significació $\alpha = 0.05$, si certament les dues variants del test mesuren per igual la introversió.

Pacient	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Variant 1	12	18	21	10	15	27	39	16	13	19	8	15
Variant 2	10	17	29	5	22	24	29	3	7	10	4	4

3. Per a estudiar quin de dos tractaments contra l'artrosi és més eficaç s'escullen aleatòriament dues mostres de 10 i 15 pacients i se'ls tracta amb els medicaments 1 i 2, respectivament. Després de 3 mesos, es valoren ambdós tractaments de manera que el que tingui major puntuació serà més eficaç. Les dades obtingudes són:

Tractament 1	12	16	21	17	38	49	10	23	35	28					
Tractament 2	22	19	42	25	14	52	65	40	37	18	56	29	32	44	15

   Existeixen diferències significatives entre els dos tractaments? Nivell de significació $\alpha = 0.05$.

4. Tenim dos tractaments, A i B, per tractar la calvície. Escollim 20 persones a l'atzar i les aparallem per gènere i edat. Per a cada una de les parelles, escollim a l'atzar un d'ells i li donem el tractament A. A l'altre li donem el tractament B. Després d'un seguiment de 5 mesos un expert dictamina quin dels dos membres de la parella ha evolucionat millor. La dermatòloga estableix que en 6 parelles el tractament A és més efectiu que el B. Podeu afirmar que el tractament A per la calvície és millor que el B?

5. Tenim una mostra aleatòria de les notes de dos professors que corregeixen un mateix examen:

Examen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Professor 1	5.2	6.1	5.5	7	8.3	4.9	10	8.1	7.3	5.3
Professora 2	6.2	4.2	5.2	7.5	7.9	5	8	7.3	8.2	6.5

   Qualifiquen els professors de la mateixa manera?

6. Es vol estudiar 7 alumnes per saber quins mostren símptomes de ser superdotats. Se'ls hi fan resoldre dos testos (que mesuren la superdotació) a cada un. Els resultats obtinguts sobre 10 són els següents:

Estudiant	1	2	3	4	5	6	7
Test 1	8	6	6	10	10	8	4
Test 2	10	5	9	5	3	4	10

   Els dos testos mesuren la superdotació de la mateixa manera?

7. Volem comparar els resultats de dos mètodes d'ensenyament. Apliquem el mètode 1 en una classe amb 7 estudiants i el mètode 2 en una amb 5 estudiants. Anotem la nota final de cada estudiant a final de curs

Mètode 1	7.5	5	6.1	7	8	9	4
Mètode 2	9.1	5.2	4.8	5.7	6		

Hi ha diferències entre els resultats dels dos mètodes?

8. Un laboratori creu que el nou medicament que ha desenvoupat per tractar la hipertensió (al que anomenarem A) és més efectiu que el tractament estàndard (al que anomenarem B). Per intentar demostrar-ho, es fa un experiment sobre 36 rates de laboratori modificades genèticament per desenvolupar hipertensió. Les rates s'agrupen per parelles de manera homogènia i a cada membre de la parella se li assigna un dels dos medicaments. Dues setmanes després, s'observa que la disminució de la tensió arterial ha estat major en el fàrmac A en 8 de les 18 parelles. Creus que el nou medicament és millor que l'estàndard?

9. Una farmacèutica catalana vol posar a la venda un nou xampú contra els polls. Demana 16 voluntaris per fer una prova abans de sortir al mercat per comprovar si el seu xampú té possibilitats de desbancar el xampú que tothom utilitza fins ara. Aquests voluntaris s'agrupen de forma homogènia per parelles i s'administra a un membre de la parella el xampú nou i a l'altra el de sempre. Després de fer un seguiment durant 10 dies, s'observa que en 6 parelles el xampú nou ha donat més bon resultat que l'antic. És probable que el nou medicament tingui èxit?

10. En una fàbrica de llaminadures es disposa de dues màquines que introdueixen les llaminadures dins dels seus embalatges. Se sospita que la quantitat de llaminadures amb que cada màquina omple els embalatges és diferent. S'han pesat uns quants paquets de llaminadures procedents de les dues màquines i els resultats obtinguts han estat (en grams):

Màquina 1	100.7	102.0	115.3	117.6	117.5	101.1	118.6	111.8
Màquina 2	133.8	124.7	118.5	124.4	130.9	128.5		

Amb aquesta mostra, tenim evidència per afirmar que les dues màquines tenen un rendiment diferent?

Exercicis solucionats

1. Establim la hipòtesi:

$$\text{H}_0 : \text{La mediana és } 3$$
$$\text{H}_1 : \text{La mediana és diferent de } 3$$

Per aplicar la prova dels signes en aquest cas, ens cal comparar les nostres observacions amb la mediana que se'ns diu a l'enunciat. Construim la taula

Observació	x_i	$x_i - 3$	Observació	x_i	$x_i - 3$
1	2.3	-	11	4	+
2	4.7	+	12	2.9	-
3	3.1	+	13	3.3	+
4	3.3	+	14	3.5	+
5	2.5	-	15	2.8	-
6	2.9	-	16	3.2	+
7	3.1	+	17	2.5	-
8	4	+	18	3.5	+
9	2.9	-	19	2.4	-
10	3.1	+	20	2.3	-

Com que la mostra té mida $n \geq 20$, la distribució binomial es pot aproximar per la distribució normal. Per tant, com que la mitjana de la distribució binomial és np i la variancia és npq, la distribució de l'estadístic $T =$ número de signes positius, és aproximadament normal amb mitjana $0.5n$ i variància $0.25n$. Per tant, l'estadístic que necessitem per contrastar la hipòtesi és

$$Z_T = \frac{T - 0.5n}{0.5\sqrt{n}}.$$

Com que estem en el cas de dues cues i amb $\alpha = 0.05$, si trobem que $Z_T > z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$, rebutjarem H_0.

En el nostre cas, tenim $T = 11$ i ja podem calcular Z_T:

$$Z_T = \frac{11 - 0.5 \cdot 20}{0.5\sqrt{20}} = 0.45$$

Per tant, com que $Z_T = 0.45 < z_{0.025} = 1.96$, no tenim evidència per rebutjar H_0 i dir que la mediana del temps de funcionament de les piles és diferent de 3.

2. Utilitzem la prova de Wilcoxon dels rangs signats, que és un mètode no paramètric per a comparar dues variables contínues X i Y a partir de mostres aparellades de (X, Y). La mesura de discrepància W_n es basa en les diferències $D_i = X_i - Y_i$ i en el rang que ocupen.

En aquest cas X mesura l'introversió amb la variant 1 i Y mesura l'introversió amb la variant 2. Establim les hipòtesis:

$$\text{H}_0 : \text{La mediana } X = \text{La mediana } Y$$
$$\text{H}_1 : \text{La mediana } X \neq \text{La mediana } Y$$

O de forma equivalent:

$$\text{H}_0 : \text{La mediana } D = 0$$
$$\text{H}_1 : \text{La mediana } D \neq 0$$

Comencem fem la següent taula per les 12 parelles:

i	X_i	Y_i	D_i	$\|D_i\|$	signe	$1\{D_i > 0\}$	R_i	R_i+
1	12	10	2	2	+	1	2	+2
2	18	17	1	1	+	1	1	+1
3	21	29	-8	8	-	0	8	-8
4	10	5	5	5	+	1	5	+5
5	15	22	-7	7	-	0	7	-7
6	27	24	3	3	+	1	3	+3
7	39	29	10	10	+	1	10	+10
8	16	3	13	13	+	1	12	+12
9	13	7	6	6	+	1	6	+6
10	19	10	9	9	+	1	9	+9
11	8	4	4	4	+	1	4	+4
12	15	4	11	11	+	1	11	+11

La mesura de discrepància W_{12} es calcula com la suma dels rangs positius, o sigui, a $W_{12} = \sum_{i=1}^{12} R_i 1\{D_i > 0\}$

Tenint en compte que $n = 12$ hem vist a teoria que, sota H_0,

$$\begin{aligned} E(W_{12}) &= \frac{12(12+1)}{4} = 39 \\ V(W_{12}) &= \frac{12(12+1)(2\cdot 12+1)}{24} = 162.5 \\ \frac{W_{12} - E(W_{12})}{\sqrt{V(W_{12})}} &= \frac{W_{12} - 39}{\sqrt{162.5}} \approx N(0,1) \end{aligned}$$

La regió de rebuig

$$R = \{W_{12} : |\frac{W_{12} - 39}{\sqrt{162.5}}| > z_{\alpha/2} = 1.96\}$$

En el nostre cas $W_{12} = 2+1+5+3+10+12+6+9+4+11 = 63$ i estandaritzat $\frac{63-39}{\sqrt{162.5}} = 1.88 < 1.96$, per tant no podem concloure que hi ha diferències significatives entre les variants.

El valor p de la prova es calcula

$$2.P(W_{12} \geq 63) \approx P\Big(\frac{W_{12} - 39}{\sqrt{162.5}} \geq \frac{63 - 39}{\sqrt{162.5}}\Big) = 2P(Z > 1.88) = 0.06$$

Aquest $p = 0.06 > 0.05$, ens indica que no tenim evidència per rebutjar H_0.

3. Aplicarem la prova de Mann-Whitney-Wilcoxon per veure si les medianes de dues mostres diferents provenen de la mateixa població.

   En aquest cas X mesura l'eficàcia del tractament 1 Y mesura l'eficàcia del tractament 2. Establim les hipòtesis:

$$\mathrm{H}_0 : \text{La mediana } X = \text{La mediana } Y$$

$$\mathrm{H}_1 : \text{La mediana } X \neq \text{La mediana } Y$$

i/j	Tractament	x_i/y_j	rang	R_{x_i}	R_{y_j}
7	1	10	1	1	
1	1	12	2	2	
4	2	14	3		3
15	2	15	4		4
2	1	16	5	5	
4	1	17	6	6	
10	2	18	7		7
2	2	19	8		8
3	1	21	9	9	
1	2	22	10		10
8	1	23	11	11	
4	2	25	12		12
10	1	28	13	13	
12	2	29	14		14
13	2	32	15		15
9	1	35	16	16	
9	2	37	17		17
5	1	38	18	18	
8	2	40	19		19
3	2	42	20		20
14	2	44	21		21
6	1	49	22	22	
6	2	52	23		23
11	2	56	24		24
7	2	65	25		25

Tenim $n = 10$, $m = 15$ i $n + m = 25$. Calculem

$$M_X = \sum_{i=1}^{n} R_{x_i} = 1 + 2 + 5 + 6 + 9 + 11 + 13 + 16 + 18 + 22 = 103$$

i

$$M_Y = \sum_{i=1}^{n} R_{y_j} = 3 + 4 + 7 + 8 + 10 + 12 + 14 + 15 + 17 + 19 + 20 + 21 + 23 + 24 + 25 = 222$$

Podem fer servir M_X com a mesura de discrepància entre les dades i H_0 ja que sota H_0, els rangs corresponents a $X_1, \dots, X_n$ estaran distribuïts entre els $n + m$ valors sense cap patró concret, i no estaran concentrats ni en els valors més petits ni els més grans. Valors de M_X molt petits o molt grans ens donen idea de la llunyania de H_0.

Hem vist a classe com podem calcular

$$E(M_X) = n\frac{n + m + 1}{2} = 10\frac{10 + 15 + 1}{2} = 130$$

i

$$\mathrm{Var}(M_X) = \frac{nm(n + m + 1)}{12} = 325$$

i sabem que

$$\frac{M_X - E(M_X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(M_X)}} = \frac{M_X - 130}{\sqrt{325}} \sim N(0, 1)$$

Per un nivell de significació $\alpha = 0.05$, rebutgem H_0 si

$$\left|\frac{M_X - E(M_X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(M_X)}}\right| > z_{0.05/2}$$

Com que $z_{0.05/2} = 1.96$, hem observat $M_X = 103$ i hem calculat $E(M_X) = 130$ i $\text{Var}(M_X) = 325$ ja podem calcular

$$\left|\frac{M_X - E(M_X)}{\sqrt{\text{Var}(M_X)}}\right| = \left|\frac{103 - 130}{\sqrt{325}}\right| = \left|\frac{-27}{18.03}\right| = |-1.5| = 1.5$$

i com que $1.5 < 1.96$, no tenim evidència per rebutjar H_0 i podem dir que no hi ha diferència entre tractaments.

4. Com que tenim dades aparellades i no podem quantificar la diferència entre els tractaments A i B per la calvície, utilitzarem la prova dels signes. Les hipòtesis que estem contrastant en aquest cas són:

$$\text{H}_0: \text{ no hi ha diferència entre l'efectivitat dels dos tractaments per la calvícia}$$
$$\text{H}_1: \text{ el tractament A és més efectiu que el B}$$

La mesura de discrepància és S_{10} = nombre de parelles on A és més efectiu que B.

S_{10} segueix una Binomial $(10, p)$ i sota H_0: $S_{10} \sim \text{Bin}(10, 1/2)$.

La regió de rebuig $R = \{S_{10} : S_{10} > c_\alpha\}$ i per $\alpha = 0.05$ trobem a les taules de la Binomial

$$\text{P}(\text{Bin}(10, 0.5) \leq 7) = 0.9453$$
$$\text{P}(\text{Bin}(10, 0.5) \leq 8) = 0.9893$$

$$\text{P}(\text{Bin}(10, 0.5) > 7) = 1 - 0.9453 = 0.0547 > \alpha$$
$$\text{P}(\text{Bin}(10, 0.5) > 8) = 1 - 0.9893 = 0.0107 < \alpha$$

Per tant, $c_\alpha = c_{0.05} = 7$ i per un nivell de significació $\alpha = 0.0547$ tenim que la regió de rebuig és R= $\{(X_i, Y_i)|S_{10} > 7\}$. Com que hem observat $s_{10} = 6 < 7$, no tenim evidència per rebutjar H_0 i podem dir que no hi ha diferències entre l'efectivitat dels dos tractaments.

enim evidència per rebutjar H_0 i podem dir que no hi ha diferències entre l'efectivitat dels dos tractaments.

5. Utilitzarem la prova de Wilcoxon dels rangs signats. Ens cal construir la taula

i	X_i	Y_i	D_i	$\lvert D_i\rvert$	signe	R_i	R_i+
1	5.2	6.2	-1	1	-	7	-7
2	6.1	4.2	1.9	1.9	+	9	+9
3	5.5	5.2	0.3	0.3	+	2	+2
4	7	7.5	-0.5	0.5	-	4	-4
5	8.3	7.9	0.4	0.4	+	3	+3
6	4.9	5	-0.1	0.1	-	1	-1
7	10	8	2	2	+	10	+10
8	8.1	7.3	0.8	0.8	+	5	+5
9	7.3	8.2	-0.9	0.9	-	6	-6
10	5.3	6.5	-1.2	1.2	-	8	-8

La mesura de discrepància W_{10} es calcula com la suma dels rangs positius, o sigui

$$W_{10} = 9 + 2 + 3 + 10 + 5 = 29$$

Tenint en compte que $n = 10$ hem vist a teoria que, sota H_0,

$$E(W_{10}) = \frac{10(10+1)}{4} = 27.5$$

i,

$$V(W_{10}) = \frac{10(10+1)(2 \cdot 10 + 1)}{24} = 96.25$$

A teoria també hem vist que

$$\frac{W_n - E(W_n)}{\sqrt{V(W_n)}} \sim N(0,1)$$

En el nostre cas

$$\frac{W_{10} - E(W_{10})}{\sqrt{V(W_{10})}} = \frac{W_{10} - 27.5}{\sqrt{96.25}} \approx N(0,1)$$

Tenim que $W_{10} = 29$ i per tant podem calcular el valor p de la prova:

$$P(W_{10} \geq 29) = P\Big(\frac{W_{10} - 27.5}{\sqrt{96.25}} \geq \frac{29 - 27.5}{\sqrt{96.25}}\Big) = P(Z \geq 0.15) = 0.44$$

Aquest $p = 0.44$, més gran que 0.05, indica que no tenim evidència per rebutjar H_0 i podem concloure que els professors qualifiquen de la mateixa manera.

6.

7.

8.

9. Com que les dades que tenim són aparellades i sabem que hi ha diferències entre els dos xampús però no podem quantificar-les, utilitzarem la prova dels signes. Fem el contrast d'hipòtesi

$$\mathrm{H}_0 : \text{No hi ha diferències entre el xampú nou } (A) \text{ i l'antic } (B)$$

$$\mathrm{H}_1 : \text{El xampú nou } (A) \text{ és millor que l'antic } (B)$$

Com que s'ha observat que el xampú A és millor que el B en 6 parelles, tenim $s_8 = 6$. Sabem que $S_8 \sim \mathrm{Bin}(8, 0.5)$.

Consultant les taules de la binomial i tenint que $n = 8$, $p = 0.5$ i $\alpha = 0.05$, obtenim

$$\mathrm{P}(\mathrm{Bin}(8,0.5) \leq 5) = 0.855$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{Bin}(8,0.5) \leq 6) = 0.9648$$

i

$$\mathrm{P}(\mathrm{Bin}(8,0.5) > 5) = 1 - 0.855 = 0.145 > \alpha$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{Bin}(8,0.5) > 6) = 1 - 0.9648 = 0.0352 < \alpha$$

Per tant, $c_\alpha = c_{0.05} = 5$ i per un nivell de significació $\alpha = 0.145$ tenim que la regió de rebuig és R$= \{(X_i, Y_i) | S_8 > 5\}$. Com que hem observat $s_8 = 6 > 5$, tenim evidència per rebutjar H_0 i podem dir que el xampú nou és millor que l'antic.

10. Utilitzarem la prova de Mann-Whitney-Wilcoxon per contrastar si dues mostres independents provenen d'una mateixa població. Ens cal construir la taula

i/j	Màquina	x_i/y_j	rang	R_{x_i}	R_{y_j}
1	1	100.7	1	1	
6	1	101.1	2	2	
2	1	102.0	3	3	
8	1	111.8	4	4	
3	1	115.3	5	5	
5	1	117.5	6	6	
4	1	117.6	7	7	
3	2	118.5	8		8
7	1	118.6	9	9	
4	2	124.4	10		10
2	2	124.7	11		11
6	2	128.5	12		12
5	2	130.9	13		13
1	2	133.8	14		14

Tenim $n = 8$, $m = 6$ i $n + m = 14$. Calculem

$$M_X = \sum_{i=1}^{n} R_{x_i} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 = 37$$

i

$$M_Y = \sum_{i=1}^{n} R_{y_j} = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 69$$

Podem fer servir M_X com a mesura de discrepància entre les dades i H_0 ja que sota H_0, els rangs corresponents a $X_1, \ldots, X_n$ estaran distribuits entre els $n + m$ valors sense cap patró concret, i no estaran concentrats ni en els valors més petits ni els més grans. Valors de M_X molt petits o molt grans ens donen idea de la llunyania de H_0.

Hem vist a classe que

$$E(M_X) = n\frac{n + m + 1}{2} = 8\frac{8 + 6 + 1}{2} = 60$$

i

$$\mathrm{Var}(M_X) = \frac{nm(n + m + 1)}{12} = \frac{8 \cdot 6(8 + 6 + 1)}{12} = 60$$

i sabem que

$$\frac{M_X - E(M_X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(M_X)}} = \frac{M_x - 60}{\sqrt{60}} \sim N(0, 1)$$

Per un nivell de significació $\alpha = 0.05$, rebutgem H_0 si

$$\left| \frac{M_X - E(M_X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(M_X)}} \right| > z_{0.05/2}$$

Com que $z_{0.05/2} = 1.96$, hem observat $M_X = 37$ i hem calculat $E(M_X) = 60$ i $\mathrm{Var}(M_X) = 60$ ja podem calcular

$$\left| \frac{M_X - E(M_X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(M_X)}} \right| = \left| \frac{37 - 60}{\sqrt{60}} \right| = \left| \frac{-23}{7.75} \right| = 2.97$$

i com que $2.97 > 1.96$, tenim evidència per rebutjar H_0 i podem dir que els rendiments de les dues màquines són diferents.