TEORIA DE CUES

INTRODUCCIÓ i PROPIETATS BÀSIQUES

1. **OBJECTIU i MOTIVACIÓ dels SISTEMES d'ESPERA.**
   Exemples.
2. **ESTRUCTURA DELS S.E.**
   Característiques de les components. Procés d'arribades i de servei. Notació de KENDALL-LEE
3. **MAGNITUTS FONAMENTALS dels S.E.**
   Temps d'espera per client. Comportament d'un S.E.
4. **FÒRMULA de LITTLE.**
   Resultat de Little i ocupació mitjana del S.E.
5. **ESTAT ESTACIONARI.**
   Valors mitjos a llarg termini.

OBJECTIU i MOTIVACIÓ dels SISTEMES d'ESPERA

Sovint es presenta la situació en que els elements d'una població sol·licitan, en instants de temps diferents, un servei el qual es ofert por un sistema S que tan sols pot atendre simultàniament a un número limitat de peticions.

Habitualment es dona la circumstància de què, estant el sistema S totalment ocupat, es produeixen noves peticions de servei, les quals no poden ser ateses immediatament i per tant, aquestes han d'esperar a ser ateses.

CONFLICTE: ¿ quina de les peticions que resten a l'espera passarà a ser atesa en 1er lloc ?

S'estableix una regla per a decidir la primera petició que passarà a ser atesa entre les que esperen servei.

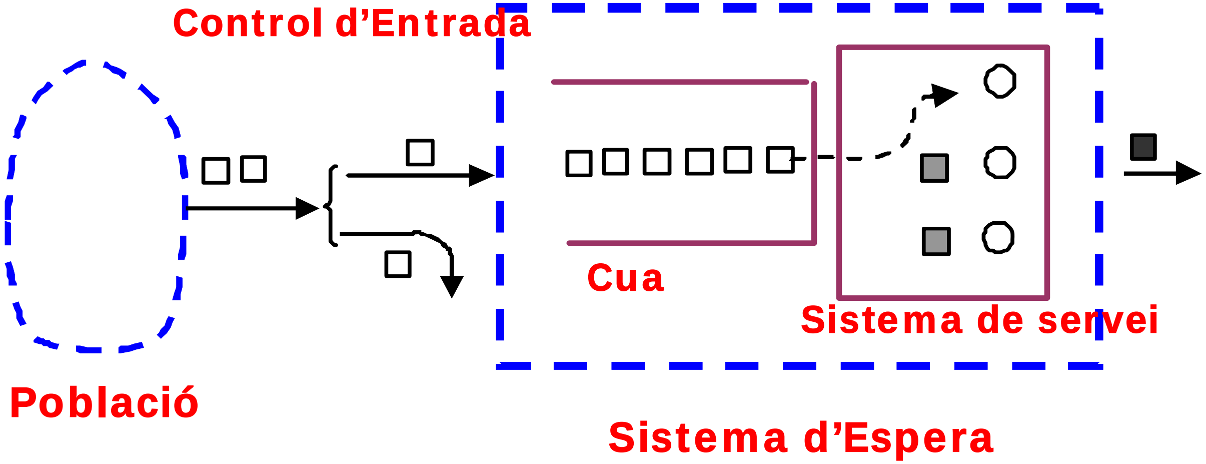
Típicament: per antiguitat de la petició.

ES FORMA AIXÍ UN SISTEMA D'ESPERA

EXEMPLES QUOTIDIANS

- PERSONES QUE ENTREN A UNA BOTIGA PER COMPRAR UN PRODUCTE; HI HA UN NÚMERO LIMITAT DE EMPLEATS QUE ATENEN ALS COMPRADORS.
- AUTOMÒBILS QUE ENTREN EN UNA ESTACIÓ DE PEATGE D'UNA AUTOPISTA.
- SISTEMA INFORMÀTIC AMB UNA IMPRESSORA EN UN CENTRE DE TREBALL ON HA D'IMPRIMIR-SE DOCUMENTACIÓ.
- OFICINA BANCÀRIA AMB UN NÚMERO LIMITAT DE FINESTRETES PER ATENDRE ALS CLIENTS DEL BANC.

ESTRUCTURA GENERAL DELS SISTEMES D'ESPERA (S.E.)



COMPONENTS:

POBLACIÓ de CLIENTS: GENERA CLIENTS/PETICIONS DE SERVEI

CONTROL d'ENTRADA: CRITERI QUE PERMET O DENEGA L'ENTRADA DELS CLIENTS

SISTEMA d'ESPERA: CUA: Lloc físic on s'espera servei.

SISTEMA DE SERVEI: Lloc on es rep el servei.

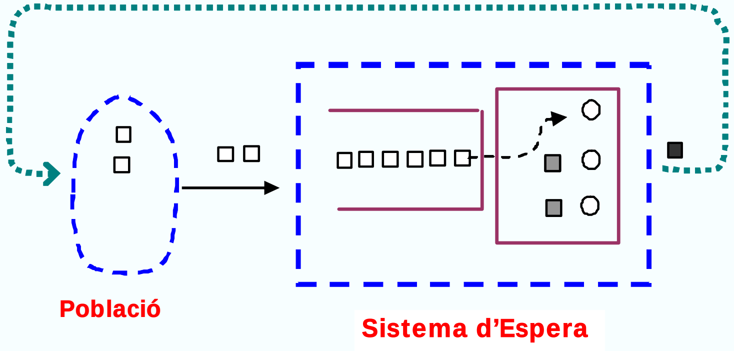
POLÍTICA DE SERVEI: REGLA QUE DETERMINA QUIN DELS CLIENTES EN ESPERA ("FENT CUA") PASSARÀ A SER ATÈS PRIMER.

CARACTERÍSTIQUES dels COMPONENTS dels S.E.

POBLACIÓ de CLIENTS: **Finita o Infinita.**

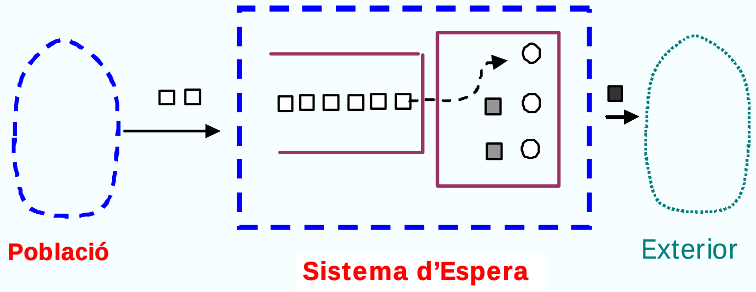
FINITA. **Corresponents a S.E. tancats: Hi ha sempre N clients (població+S.E.)**

Després de sortir del S.E. el client es reintegra a la Població



INFINITA: Corresponent a S.E. oberts.

Després de sortir del S.E. el client surt a l'exterior (es perd)



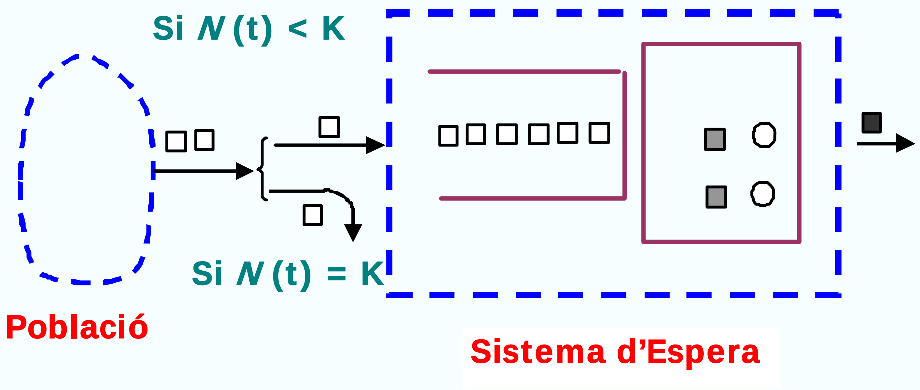
CARACTERÍSTIQUES dels COMPONENTS dels S.E.

CAPACITAT del S.E.: Finita o Infinita

INFINITA: No hi ha limitació per al número de clients $N(t)$ que en un moment donat t pot contenir el S.E.

FINITA (K): El número màxim de clients $N(t)$ presents en el S.E. ha de ser $\leq$ K

Si el S.E. està ple, en arribar un client, aquest es perd:



La capacitat del S.E. és una forma natural de control d'entrada.

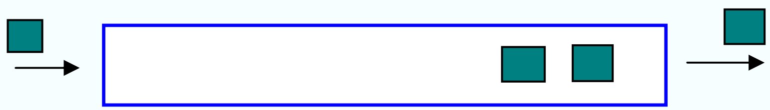
CARACTERÍSTIQUES dels COMPONENTS dels S.E.

SISTEMA DE SERVEI:

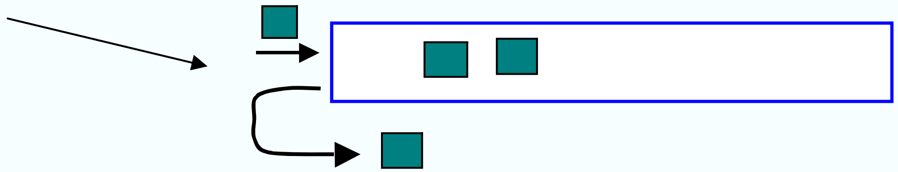
- **Integrat per una o més unitats de servei** (**servidors**) en número *s*.
- **Generalment els servidors es suposen idèntics entre sí.**
- **Cadascun dels servidors només pot atendre un client a la vegada.**
- **Al finalitzar un servei el servidor queda lliure i selecciona, d'acord amb la "POLÍTICA de SERVEI", un client dels qui esperen a la CUA.**

POLÍTICA DE SERVEI:

- **FIFO (First In First Out)**



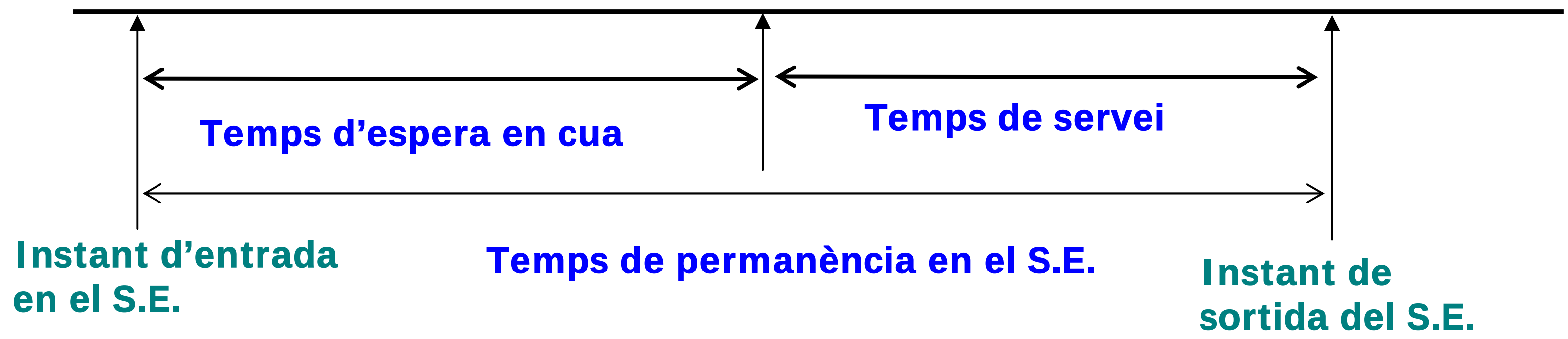
- **LIFO (Last In First Out)**



- **A l'atzar**

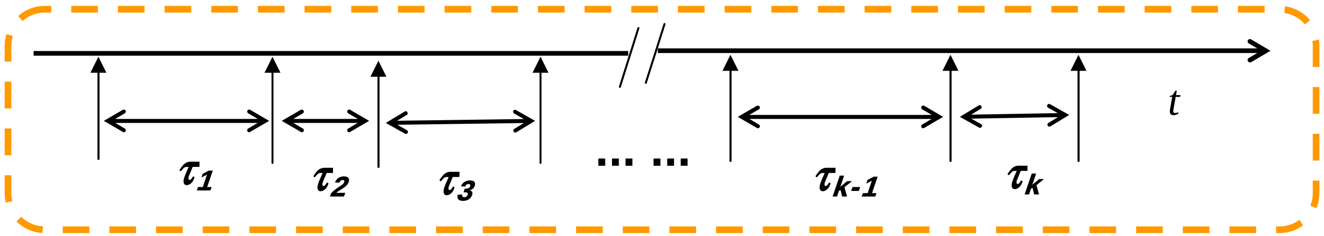
CARACTERÍSTIQUES COMUNES EN ELS S.E.

Temps de permanència en el S.E. = temps d'espera (en cua) + temps de servei



Procés d'arribades:

Els instants en els que es produeixen les peticions són aleatoris:
(P.ex. els instants d'arribada dels clients a una botiga)



Modelització:

Interval τ entre arribades:

Procés de renovació

Procés de servei:

Els temps de servei són també aleatoris: (v.a. contínua)

Universitat de Barcelona

NOTACIÓ de KENDALL-LEE

X / Y / s / [K] / [N]

Sigla que especifica el procés d'arribades

Sigla que especifica la v.a. temps de servei d'un servidor

Número de servidors. Idèntics entre sí, amb temps de servei Y

Capacitat del S.E. (Opcional).

Si no apareix s'entén $K=\infty$

Població. (Opcional).

Si no apareix s'entén $N=\infty$

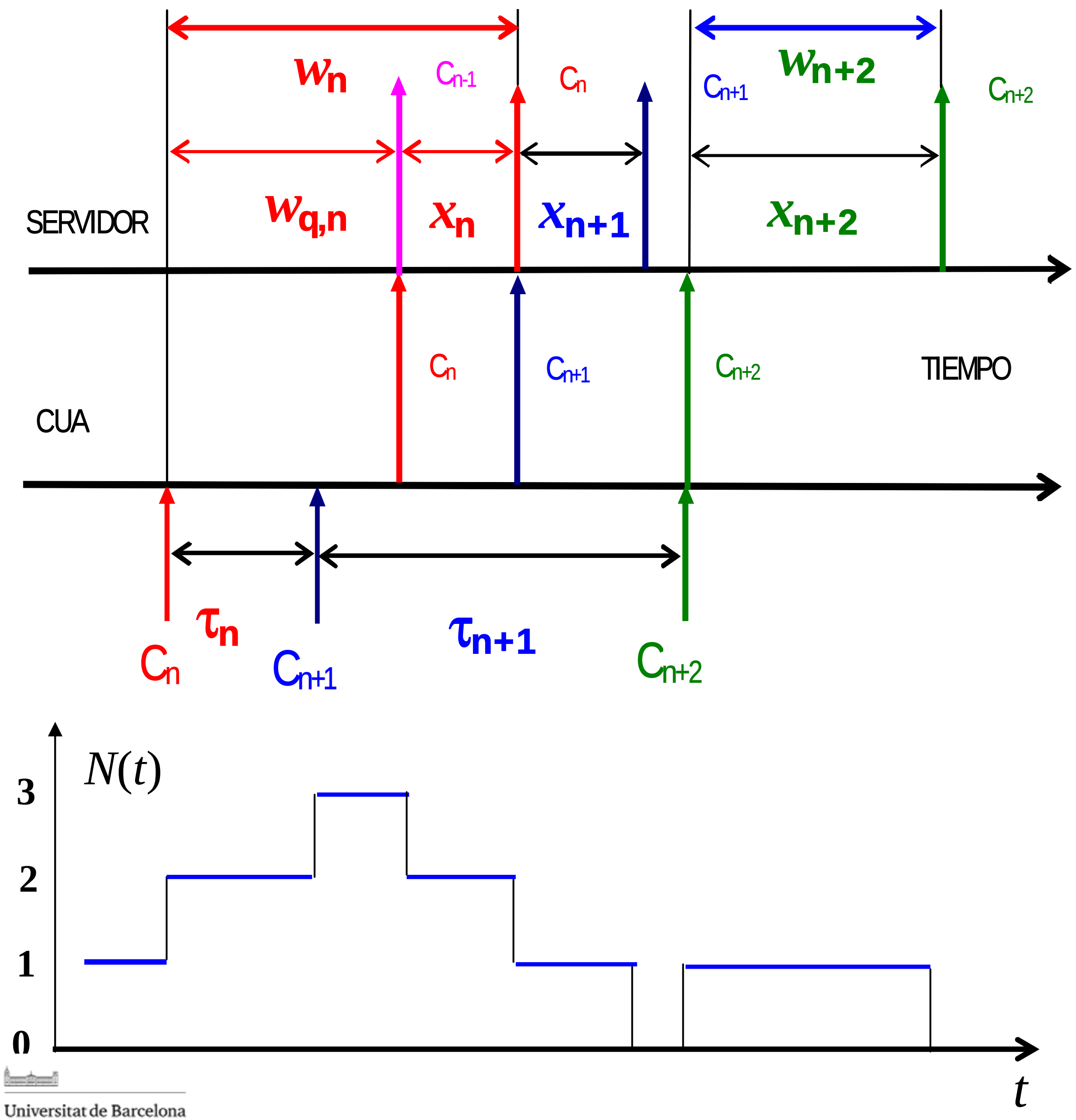
X, Y

- **M** - v.a. exponencial.
- **D** - v.a. degenerada $E[\tau]=T$, $Var[\tau]=0$.
- E_n - v.a. n-Erlang.
- **G** - v.a. qualsevol (temps correlacionats entre sí o no)
- **GI** - v.a. qualsevol. Temps mútuament independents.

EXEMPLES

- **M/M/2** Procés d'arribades: temps entre llegadas =procés de renovació amb variable τ exponencial,
  Procés de servei: temps de servei iguals en cada servidor aleatoris i exponencials,
  s=2 servidors, K=∞, N=∞.
- **M/M/2/8** Igual que l'anterior però com màxim 8 clients en el S.E.
- **M/M/1/./4** Procés d'arribades: temps entre arribades =procés de renovació amb variable τ exponencial,
  Procés de servei: temps de servei v.a. exponencial,
  s=1 servidor, K=∞, N=4.
- **M/D/1** Procés d'arribades: temps entre arribades =procés de renovació amb variable τ exponencial,
  Procés de servei: temps de servei constants,
  s=1 servidors, K=∞, N=∞.
- **GI/M/1** Procés d'arribades: temps entre arribades =procés de renovació amb variable τ qualsevol,
  Procés de servei: temps de servei v.a. exponencial,
  s=1 servidor, K=∞, N=∞.

MAGNITUTS FONAMENTALS en els S.E.



τ_n - Temps entre arribades del client n i n+1.

w_n - Temps de permanència al S.E. del client n.

$w_{q\ n}$ - Temps de permanència en cua. del client n.

x_n - Temps de servei del client n.

$N(t)$ - Número de clients en l'instant t en el S.E.

$N_q(t)$ - Número de clients en l'instant t en cua.

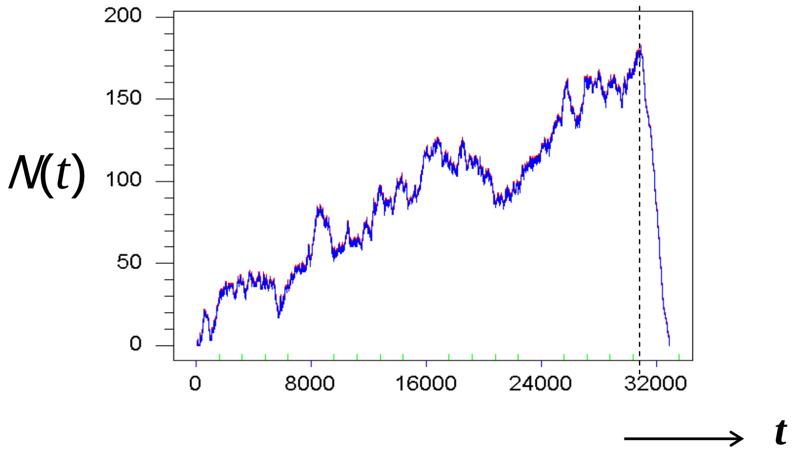
$P_n(t)$ = P ($N(t)$ =n)

MAGNITUTS FONAMENTALS en els S.E.

COMPORTAMENT: Poden presentar-se dues situacions:

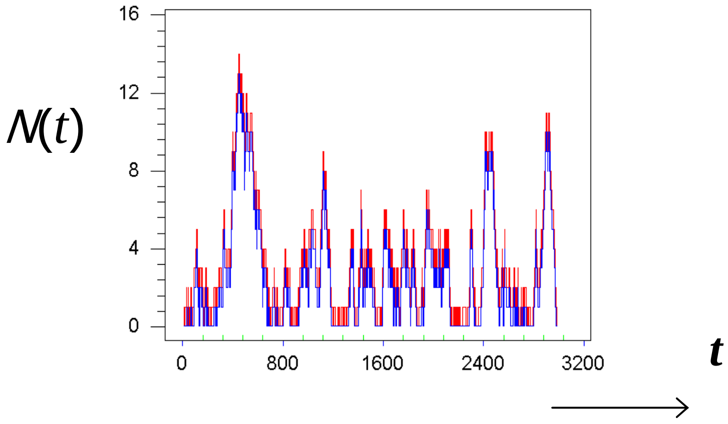
1. En promig l'afluència de clients al S.E. ultrapassa la capacitat de treball del Sistema de Servei:

   $N(t)$ PRESENTA UNA TENDÈNCIA CREIXENT



2. El Sistema de Servei té suficient capacitat de treball davant la afluència de clients:

   $N(t)$ pot créixer ocasionalment, però el S.E. sempre retorna a l'estat 0 (buit)



MAGNITUTS FONAMENTALS en els S.E.

Temps mig d'espera per client en el S.E.

$$\bar{w}_n = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} w_\ell, \qquad W = \ell im_{\,n\to\infty} \mathrm{E}[\bar{w}_n]$$

Temps mig d'espera per client en Cua.

$$\bar{w}_{q,n} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} w_{q,\ell}, \qquad W_q = \ell im_{\,n\to\infty} \mathrm{E}[\bar{w}_{q,n}]$$

Número d'arribades en [0,t]: $e(t)$

Taxa mitjana d'arribades en [0,t], **Taxa mitjana d'arribades a llarg termini:**

$$\frac{1}{t}\,\mathrm{E}[e(t)]$$

$$\bar{\lambda} = \ell im_{\,t\to\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{E}[e(t)] = \frac{1}{\mathrm{E}[\tau]}$$

Teorema de renovació

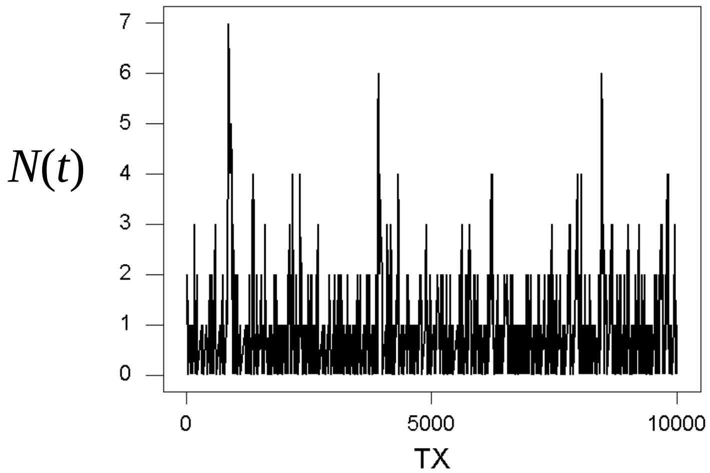
Universitat de Barcelona

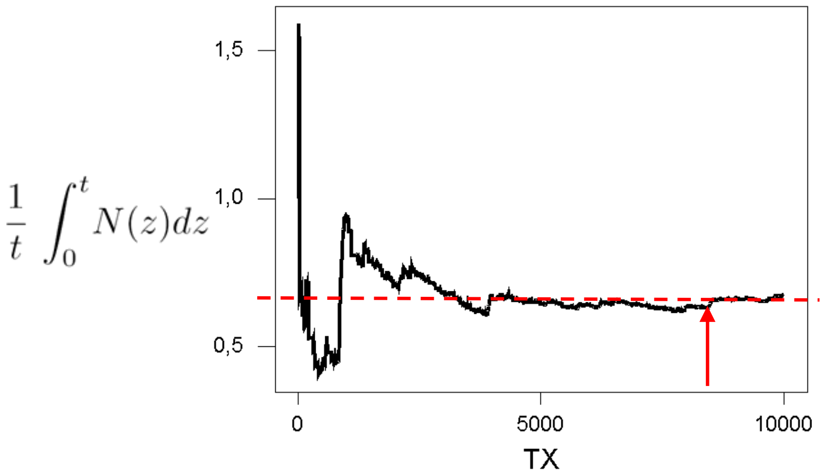
MAGNITUTS FONAMENTALS en els S.E.

Resultat de Little. Per a qualsevol $N(t)$ possible es verifica:

$$\ell im_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t N(z)dz\right) = L$$

Ocupació mitjana (nº mig de clientes) del S.E. al llarg del temps.





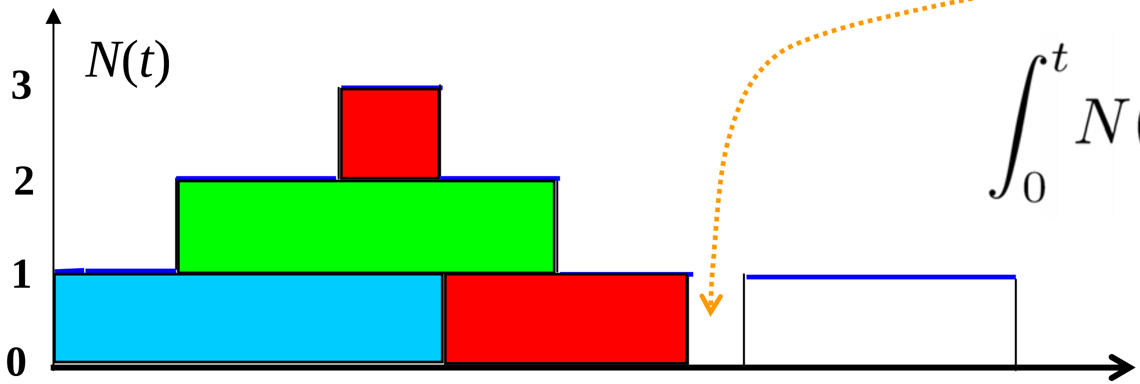
Anàlogament, per a qualsevol $N_q(t)$ possible es verifica:

$$\ell im_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t N_q(z)dz\right) = L_q$$

FÒRMULA DE LITTLE

Situació 2.

sempre existeix un número il·limitat d'intervals I_o = [t', t''] con N(*t*)=0, t ∈ I_o.



$$\int_0^t N(z)dz = \underline{w_1} + \underline{w_2} + \underline{w_3}, \quad t \in I_0$$

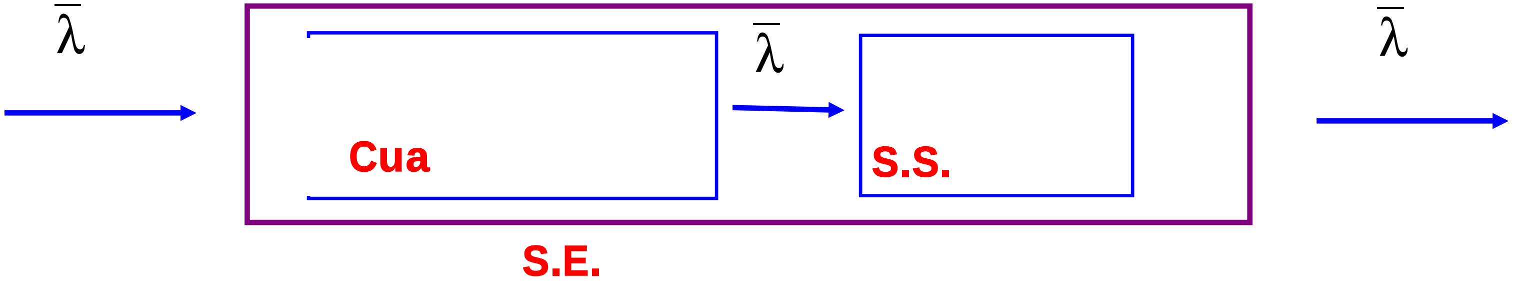
$$\int_0^t N(z)dz = \sum_{i=1}^{e(t)} w_i, \quad t \in I_0$$

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t N(z)dz\right] = \mathrm{E}[w] \cdot \mathrm{E}[e(t)]$$

$$\ell im_{\,t\to\infty} \left(\frac{1}{t} \int_0^t N(z)dz \right) = \left(\ell im_{\,t\to\infty} \frac{\mathrm{E}[e(t)]}{t} \right) \mathrm{E}[w]$$

$$L = \frac{\mathrm{E}[w]}{\mathrm{E}[\tau]} = \bar{\lambda} W$$

FÒRMULA DE LITTLE



$$L = \bar\lambda W$$

$$L_q = \bar\lambda W_q$$

$$L_s = \bar\lambda W_s = \bar\lambda \mathrm{E}[x]$$

$$W = W_q + W_s$$

$$L = L_q + L_s$$

- W_s = Temps de permanència mig en el S.S.
- L_s = Longitud mitjana de clients en el S.S.

5 equacions, 6 incògnites:

L, L_q, L_s, W, W_q, W_s

($\bar\lambda$ es suposa coneguda)

ESTAT ESTACIONARI (E.E.)

Definició: Existeix e.e. quan:

$$\ell im_{t\to\infty} P(N(t)=n) = P_n, \quad n = 0,1,2,\ldots K \,(\leq \infty)$$

P_n : Interpretació: fracció del temps que el sistema està a l'estado n.

Si es coneixen P_n , $n=0,1,\ldots K$ ($\leq\infty$) es poden calcular L, L_q

- Mitjançant les **fòrmules de Little** es poden determinar la resta de magnituds.

$$L = \mathrm{E}[L] = \ell im_{t\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{t}\int_0^t N(z)dz\right] = \ell im_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{E}[N(z)]dz\right) =$$

$$= \ell im_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \left(\sum_{n=0}^{K} n\cdot P(N(z)=n)\right)dz\right) = \ell im_{t\to\infty}\sum_{n=0}^{K} n\cdot P(N(t)=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{K} n\cdot P_n$$

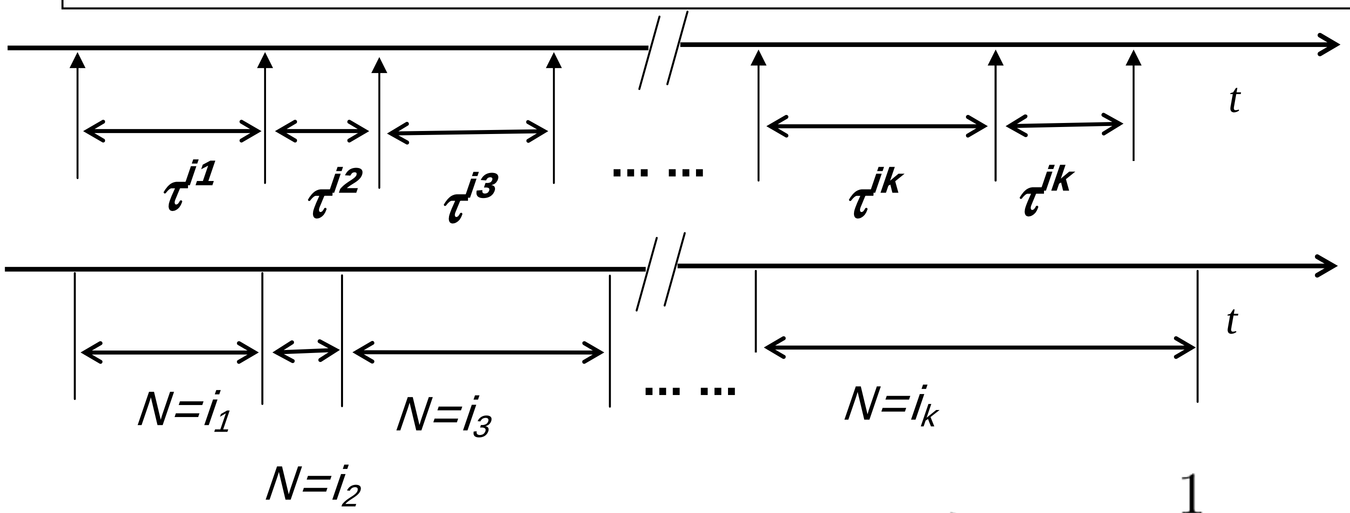
Per a L_q:

$$L_q = \sum_{n=s}^{K} (n-s) \cdot P_n$$

(**Sistema de Servei: *s* servidors**)

Taxa mitjana $\bar{\lambda}$ d'arribades al S.E. : **Pot ocórrer que el temps entre arribades τ sigui v.a. amb distribució dependent de l'estat N del sistema.**

Exemple: els clients d'una botiga arriben amb menys freqüència si observen que la botiga està molt plena (N alt)



$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{K} \lambda_n \cdot P_n$$

$$\lambda_n = \frac{1}{\mathrm{E}[\tau^{(n)}]}\ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots K\ (\leq \infty)$$

Pràctica 3. Comportament de la cua M/M/1. Estimació dels paràmetres d'entrada

Objectiu: Es disposa d'una mostra dels temps entre arribades a un S.E. i dels temps de servei del servidor d'aquest S.E. En ambdós casos la grandària de la mostra és de 1000 observacions. Se sap que corresponen a distribucions exponencials de temps. Es pretén:

a) Verificar mitjançant el test de χ^2 què, efectivament, corresponen a una distribució exponencial.

b) Obtenir els intervals de confiança per a la taxa d'arribades per unitat de temps (paràmetre λ de la distribució exponencial del procés d'arribades) i per al factor de càrrega ρ del S.E.

c) Simular mitjançant el programa `CUA.exe` el comportament del S.E. comparant les magnituds L, W, W_q obtingudes mitjançant la simulació amb aquells valors que proporciona la teoria de cues.

3. Simulació del S.E. M / M / 1.

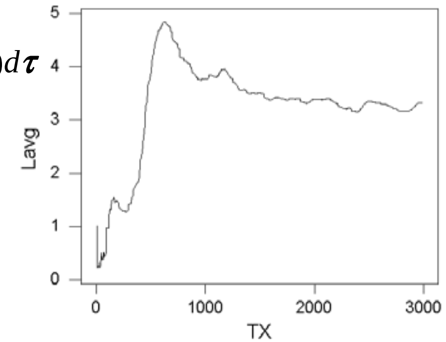
La simulació pot efectuar-se mitjançant la macro `mm1.mtb`.

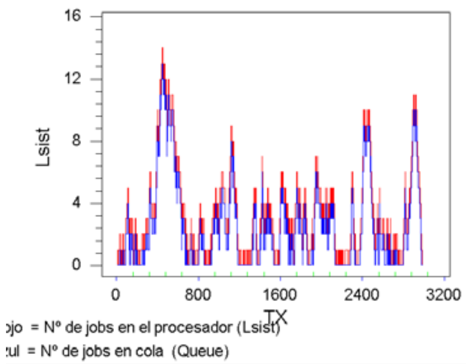
K1 = N, número de clients.
K2 = $1/\lambda$, temps mig entre arribades.
K3 = $1/\mu$ temps mig de servei.

```
MTB> let K1= 300
MTB> let K2= 10
MTB> let K3= 11
MTB> let K4= 0,9
MTB> exec "mm1.mtb"
```

4. Presentació de resultats de la macro "`mm1.mtb`".

$$\overline{L}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t N(\tau)\,d\tau$$





5. Intervals de confiança per a las taxes λ y μ y per al factor de càrrega $\rho = \lambda/\mu$.

Es disposa de dues mostres $t_1, t_2, \ldots, t_n$ i $s_1, s_2, \ldots, s_m$ per als processos d'arribada i de servei (temps distribuïts exponencialment). Es vol trobar un interval de confiança de probabilitat 1-α per a les taxes de arribada λ i de servei μ a partir de les dues mostres.

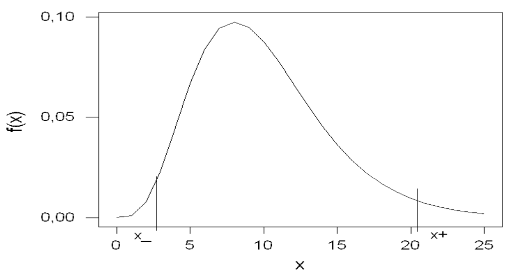
El estimador màxim versemblant per a λ y μ és:

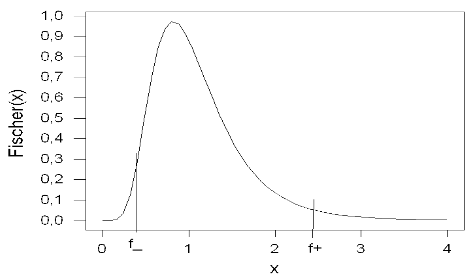
$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i} = \frac{n}{T_n}, \quad \hat{\mu} = \frac{m}{\sum_{i=1}^{m} s_i} = \frac{m}{S_m}$$

Donat que T_n es distribueix segons una llei n-Erlang de paràmetre $\theta = \lambda/k$ (o també una Gamma(λ, n)),

$$E\left[2\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i\right] = E[2\lambda T_n] = 2n \Rightarrow 2\lambda T_n \sim Gamma\left(\frac{1}{2}, n\right) = \chi^2_{2n}$$

$$\boxed{2n\frac{\lambda}{\hat{\lambda}} \sim \chi^2_{2n}, \quad 2m\frac{\mu}{\hat{\mu}} \sim \chi^2_{2m} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda/\hat{\lambda}}{\mu/\hat{\mu}} = \frac{\rho}{\hat{\rho}} \sim F_{2n,2m}}$$





Intervalo de confiança a 1-α per a λ : $\left[\frac{\hat{\lambda}}{2n} x_- \ , \ \frac{\hat{\lambda}}{2n} x_+\right]$

Intervalo de confiança a 1-α per a ρ : $[\hat{\rho}\, f_- \ , \ \hat{\rho}\, f_+]$

La següent taula il·lustra les grandàries de mostra necessaris per a obtenir intervals de confiança del 95% i la amplitud dels mateixos.

n=m	***f-***	***f+***	***e$_f$(%)***	***x-/2n***	***x$_+$/2n***	***e$_x$(%) .***
10	0,405	2,461	143	0,479	1,708	112
100	0,757	1,321	54	0,813	1,205	38
1000	0,916	1,091	17	0,939	1,062	12
10000	0,972	1,028	5	0,980	1,019	3

6. Test de bonança d'ajustament de χ^2

Utilitzeu la macro "x2.mtb" per a efectuar un test de bonança d'ajustament de χ^2 a una distribució k-Erlang a partir d'una mostra de temps per als processos d'arribades i/o de serveis a un S.E.

Calcula una mesura global de la discrepància entre n_i y n_e :

$$X^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - n_e)^2}{n_e}$$

La variable X^2 se distribueix segons una llei χ^2_{N-m-1}, Es rebutjarà la distribució proposada si $P(x \geq X^2) = p\text{-}valor < \alpha$

7. Procediment per a usar la macro "`x2.mtb`":

Suposem, per exemple, que hom disposa d'una mostra per a la que les estadístiques bàsiques són:

```
Variable              N        Mean      Median      TrMean       StDev     SE Mean
sample              500      19,914      19,607      19,702       5,990       0,268

Variable        Minimum     Maximum          Q1          Q3
sample            6,607      41,172      15,660      23,373
```

1) Feu una estimació dels paràmetres de la distribució de la que presumiblement prové la mostra.
2) Establiu els valors de les constants k100, k101, k102, k103.

```
MTB> let k100=9,95
MTB> let k101=2
MTB> let k102=500
MTB> let k103=7
```

Proporciona:

- El p-valor en la constant k105 i la resta de constants k100-k104 amb les que ha executat.
- El valor de X^2
- Gràfics con l'histograma de la mostra, la funció de densitat de probabilitat per a la distribució i el diagrama de barres per a les freqüències n_i.