FACULTAT de MATEMÀTIQUES i ESTADÍSTICA.
CURS 2005-2006. 2^{on} QUADRIMESTRE
Examen Final de IOE. (Convocatòria extraordinària) Juliol de 2006

P1 Cadenes de Markov (5 punts) S'ha comprovat que la probabilitat de que una subvenció anual sigui renovada depèn de si va estar concedida en els dos anys immediatament anteriors. Si va estar renovada en els dos anys anteriors, llavors la probabilitat de que torni a atorgar-se és de 0,95. Si va estar concedida l'any passat però no l'anterior, llavors la probabilitat de que torni a concedir-se és de 0,7. Si no va estar concedida l'any passat però si l'anterior, llavors la probabilitat és de 0,6. Finalment, si no va estar concedida en els dos anys immediatament anteriors la probabilitat de que es concedeixi enguany és de 0,2.

1. **(5/4p)** Utilitzeu la informació anterior per establir un model basat en cadenes de Markov en la que els estats siguin X*i*=(resultat penúltim, resultat últim). Determineu les classes d'equivalència i les periodicitats de cada classe.
2. **(5/4p)** Si resulta que la subvenció s'ha concedit enguany i però l'any passat no, llavors quina és la probabilitat de que dins de dos anys es concedeixi la subvenció.
3. **(5/4p)** Si enguany no s'ha concedit la subvenció i tampoc l'any anterior, quants anys passaran en esperança fins que torni a concedir-se la subvenció ?, i si la subvenció va concedir-se l'any passat però no l'actual ?
4. **(5/4p)** Calculeu la fracció del temps en que hi ha subvenció.

P2) Temps de vida. **(5 punts)** El temps de vida d'un determinat component electrònic C que fabrica una empresa presenta una distribució exponencial. Els components de la gama A tenen temps mig de vida de 2 anys, mentre que els de la gama B tenen temps mig de 1,5 anys. Una empresa X que fabrica dispositius compra una partida híbrida P d'aquests components a un preu especialment econòmic en el que hi ha mesclats 20 % de la gama A i 80% de la gama B per a integrar-los en els seus dispositius. Se suposa que en fallar el component electrònic deixa de funcionar el dispositiu. Es demana:

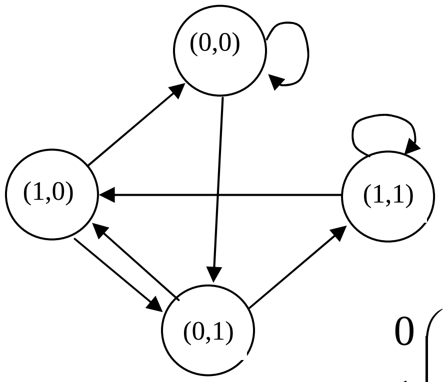
a) **(1p)** Distribució de probabilitats del temps de funcionament del dispositiu que fabrica l'empresa X.
b) **(1p)** Temps mig de funcionament del dispositiu.
c) **(1p)** Una empresa Y compra a la X una partida inicial de 1000 dispositius. Calcular el temps mig que passarà fins que només quedin la meitat dels dispositius inicials de la partida.
d) **(1p)** Quin és el numero esperat de dispositius que fallaran en un dia quan hagin passat 13 setmanes de l'adquisició de la partida.
e) **(1p)** Si l'empresa Y hagués decidit reemplaçar els components C que fallen per altres de nous provinents de la mateixa partida P, quina seria la distribució de probabilitats a llarg termini del temps entre dos dispositius avariats?

P3) Teoria de Cues. **(10 punts)** Un aparcament oficial te capacitat per quatre places. Els vehicles amb intenció d'aparcar arriben a un ritme de 8 per hora en promig, En cas de que no trobin plaça van a altre lloc. En promig cada vehicle està aparcat l'aparcament oficial durant 30 minuts. Es demana:

a) **(3p)** Model de cues a emprar i diagrama d'estats.
b) **(1.5p)** Probabilitat de que un vehicle que arribi a l'aparcament pugui aparcar,
c) **(2p)** Suposant que l'aparcament estigui complet, quant haurà d'esperar un cotxe situat e doble fila fins trobar una plaça lliure?
d) **(3.5p)** Quantes places d'aparcament haurien d'existir per tal de que poguessin aparcar el 85% dels cotxes que ho volen fer?

CADENAS DE MARKOV. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

1)



Estado 0 = (0,0)
Estado 1 = (1,0)
Estado 2 = (1,1)
Estado 3 = (0,1)

Una única clase aperiódica

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,05 & 0,95 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$$

2) $p_{02}^{(2} + p_{03}^{(2} = 0,14 + 0,22 = 0,36$

$p_{02}^{(2} = 0,2 \cdot 0,7 = 0,14$

$p_{03}^{(2} = 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,22$

3) Debe calcularse μ_{03}

$$\mu_3 = [1] + P_3 \mu_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} \mu_{03} \\ \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ -0,6 & 1 & 0 \\ 0 & -0,05 & 0,05 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 24 \end{pmatrix}$$

4) $P^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}; \quad \sum_j \pi_j = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0 & -0,05 & 0,7 \\ 0,2 & 0,4 & 0 & -0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1179 \\ 0,0393 \\ 0,7865 \\ 0,0563 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 + \pi_3 = 0,8426$$

Fabricat Ecològicament

P2) τ = temps distribuït segons una hiperexp.

a) $f_\tau(t) = 0'2\,\lambda_A e^{-\lambda_A t} + 0'8\,\lambda_B e^{-\lambda_B t}$

$\lambda_A = 1/2$ any^{-1} $\quad \lambda_B = \frac{1}{1'5} = 2/3$ any^{-1}

b) $E[\tau] = 0'2 \cdot 1/\lambda_A + 0'8 \cdot 1/\lambda_B = 0'2 \cdot 2 + 0'8 \cdot 1'5 = 1'6$ anys

c) $P(\tau \geq t) = 0'5 = 0'2\, e^{-t/\lambda_A} + 0'8\, e^{-t/\lambda_B}$

resolent de forma aproximada en t l'anterior equació dona $t \simeq 1'1$ anys ≈ 60 set.

d) La funció de taxa de fallides $h_\tau(t)$ ve donada per

$$h_\tau(t) = \frac{f_\tau(t)}{R_\tau(t)} = \frac{\alpha_A \lambda_A e^{-\lambda_A t} + \alpha_B \lambda_B e^{-\lambda_B t}}{\alpha_A e^{-\lambda_A t} + \alpha_B e^{-\lambda_B t}} =$$

$$= \frac{0'2/2\, e^{-13/2} + 0'8/1'5\, e^{-13/1'5}}{0'2\, e^{-13/2} + 0'8\, e^{-13/1'5}} = \frac{2'42 \cdot 10^{-4}}{4'384 \cdot 10^{-4}} =$$

$= 0'55 \frac{\text{fallides}}{\text{any}} \rightarrow$ en 1 dia $\boxed{1'51 \cdot 10^{-3}}$

e) Pel teorema de Palm la distribució entre avaries hauria de ser exponencial; l'esperança hauria de ser

$$\frac{1'6 \text{ anys}}{1000} = 1'6 \cdot 10^{-3} \text{ anys} = 0'58 \text{ dies}$$

P3) Model M/M/4/4

a)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "3\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 4 \arrow[l, bend left, "4\mu"] \end{tikzcd}$$

$\lambda = 8\,h^{-1}$

$\mu = 2\,h^{-1}$

$$C_1 = \frac{\lambda}{\mu} = 4 \qquad C_2 = 4 \cdot 2 = 8$$

$$C_3 = 8 \cdot \frac{8}{6} = \frac{32}{3} \qquad C_4 = 32/3 \cdot 1 = 32/3$$

$$P_0 = \left[1 + 4 + 8 + \frac{32}{3} + \frac{32}{3}\right]^{-1} = \left[\frac{3 + 12 + 24 + 64}{3}\right]^{-1} = \frac{3}{103}$$

b) $P_4 = P_0 \cdot C_4 = \frac{3}{103} \cdot \frac{32}{3} = \frac{32}{103}$

$P(\text{Poder aparcar}) = 1 - P_4 = \frac{71}{103} \simeq 0'689$

c) Si hi han 4 vehicles llavors el temps fins que hi hagi una plaça lliure d'entre les 4 és exp.

$E[Z] = \frac{1}{4 \cdot \mu} = 1/8$ hora

d) M/M/K/K per $K = 5, 6, 7, \ldots$, $\theta = \lambda/\mu = 4$

$$P_0^{(K} = \left[1 + \theta + \theta^2/2 + \frac{\theta^3}{3!} + \cdots \frac{\theta^K}{K!}\right]^{-1} = \frac{e^{-\theta}}{P(N \le K)}$$

$N \sim$ Poisson, $E[N] = \theta = 4$

$$P_K^{(K} = \frac{\theta^K}{K!} \cdot P_0^{(K} = \frac{P(N = K)}{P(N \le K)}$$

Taules Poisson

K	$P(N \le K)$	$P_K^{(K}$
5	0'7851	0'199
6	0'8893	0'117
7	0'9488	0'062
8	0'9786	0'030

6 places

$1 - P_6^{(6} = 0'883 >$

$> 0'85$