

1. Ejercicio 1

Como tenemos que utilizar interpolación fragmentaria lineal vamos a utilizar polinomios de Lagrange de grado 1 para cada fragmento que une $f(t_i)$ con $f(t_{i+1}) \forall i=0..n-1$.

Por la fórmula del error de los polinomios de Lagrange sabemos que:

$$f^1(x) = P_L^1(x) + E_L^1(x) \text{ con } E_L^1(x) = \frac{f^2(\xi(x))(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2!} \forall i = 0..n-1 \quad (1)$$

Queremos acotar:

$$|E_L^1(x)| \leq 10^{-3} km \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{f^2(\xi(x))(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2!} \right| \leq 10^{-3} km \quad (3)$$

Pero por el enunciado sabíamos que

$$f^2(x) \leq 1000 \frac{km}{h} \forall x \in R \quad (4)$$

Entonces

$$\left| \frac{f^2(\xi(x))(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2} \right| \leq \left| \frac{(1000km)(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2!} \right| \quad (5)$$

Veamos que se cumpla

$$\left| \frac{(1000km)(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2} \right| \leq 10^{-3} km \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow (1000 \frac{km}{h^2}) \left| \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2} \right| \leq 10^{-3} km \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2} \right| \leq \frac{10^{-3} km}{1000 \frac{km}{h^2}} \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2} \right| \leq 10^{-6} h^2 \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow |(x-x_j)(x-x_{j+1})| \leq 2 \cdot 10^{-6} h^2 \quad (10)$$

x es un punto entre x_j y x_{j+1} , entonces $(x-x_j) \leq \Delta t$ y $(x-x_{j+1}) \leq \Delta t$.

Entonces nos queda

$$|(x-x_j)(x-x_{j+1})| \leq |(\Delta t_i)^2| \quad (11)$$

Veamos entonces si

$$|(\Delta t_i)^2| \leq 2 \cdot 10^{-6} h^2 \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow \Delta t_i \leq 0,000125h \quad (13)$$

Volviendo tenemos que

$$\Delta t_i \leq 0,000125h \quad (14)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2} \right| \leq \frac{10^{-3} km}{1000 \frac{km}{h^2}} \quad (15)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{(1000km)(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2} \right| \leq 10^{-3} km \quad (16)$$

Entonces

$$|E_L^1(x)| = \left| \frac{f^2(\xi(x))(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2} \right| \leq \left| \frac{(1000km)(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2} \right| \leq 10^{-3} km \quad (17)$$

Por lo tanto nos queda que

$$\Delta t_i \leq 0,000125h \Rightarrow |E_L^1(x)| \leq 10^{-3} km \quad (18)$$