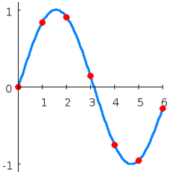
Taller
Interpolación - Integración

Métodos Numéricos

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

8 de junio de 2016

Interpolación



Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n + 1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \; \forall \; i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \;\; \forall i$.

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n + 1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \; \forall \; i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \;\; \forall i$.

- Polinomio Interpolador
  - Φ es un polinomio.

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \ \forall \ i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \ \ \forall i$.

- Polinomio Interpolador
  - Φ es un polinomio.
  - **Unicidad:** Existe un único polinomio p de grado menor o igual que n tal que $p(x_i) = f(x)_i$ para todo i.

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \ \forall \ i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \ \ \forall i$.

- Polinomio Interpolador
  - Φ es un polinomio.
  - **<u>Unicidad:</u>** Existe un único polinomio p de grado menor o igual que n tal que $p(x_i) = f(x)_i$ para todo i.
  - Interpolador de Lagrange:

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + \ldots f(x_n)L_n(x), \qquad \text{con} \ \ L_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \; \forall \; i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \;\; \forall i$.

- Polinomio Interpolador
  - Φ es un polinomio.
  - **Unicidad:** Existe un único polinomio p de grado menor o igual que n tal que $p(x_i) = f(x)_i$ para todo i.
  - Interpolador de Lagrange:

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + \ldots f(x_n)L_n(x), \qquad \text{con} \;\; L_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

  - Diferencias Divididas:

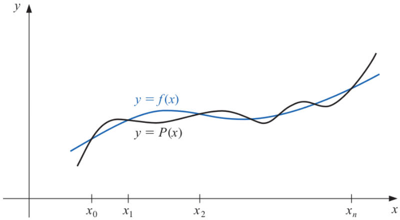
$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

$$\text{con} \quad \begin{cases} f[x_i] & = f(x_i) \\ f[x_i, \ldots, x_{i+k}] & = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \end{cases}$$

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \; \forall \; i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \;\; \forall i$.

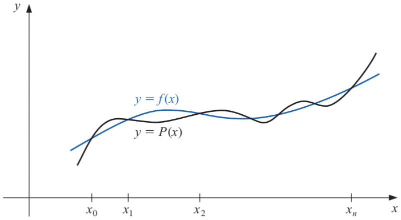
- Polinomio Interpolador



Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \; \forall \; i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \;\; \forall i$.

- Polinomio Interpolador



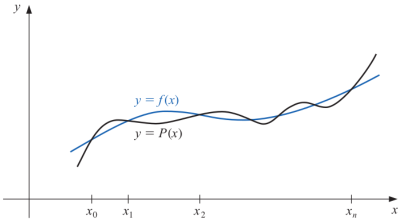
- **Prop:** Sea $f \in C^{n+1}[x_0, x_n]$, el error cometido al aproximar $f(x)$ usando $p(x)$ (con $gr(p) \leq n$), con $x \in [x_0, x_n]$ es:

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \quad \text{con} \quad \xi(x) \in (x_0, x_n)$$

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \ \forall \ i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \ \ \forall i$.

- Polinomio Interpolador



- **Prop:** Sea $f \in C^{n+1}[x_0, x_n]$, el error cometido al aproximar $f(x)$ usando $p(x)$ (con $gr(p) \leq n$), con $x \in [x_0, x_n]$ es:

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \quad \text{con} \quad \xi(x) \in (x_0, x_n)$$

- Ej: Error del polinomio interpolador lineal para $n = 1$ y $x \in [x_0, x_1]$

$$E(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}(x - x_0)(x - x_1), \quad \text{con} \quad \xi(x) \in (x_0, x_1)$$

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \ \forall \ i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \ \ \forall i$.

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \; \forall \; i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \;\; \forall i$.

- Interpolación Fragmentaria Lineal
  - Φ es una función partida. Une cada par $\{(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))\}$ con una recta (polinomio lineal).

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \; \forall \; i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \;\; \forall i$.

- Interpolación Fragmentaria Lineal
  - Φ es una función partida. Une cada par $\{(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))\}$ con una recta (polinomio lineal).
  - Puede pensarse como n (sub)problemas de interpolación lineal.

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \; \forall \; i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \;\; \forall i$.

- Interpolación Fragmentaria Lineal
  - Φ es una función partida. Une cada par $\{(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))\}$ con una recta (polinomio lineal).
  - Puede pensarse como n (sub)problemas de interpolación lineal.
  - El error cometido al interpolar $x \in [x_i, x_{i+1}]$ es:

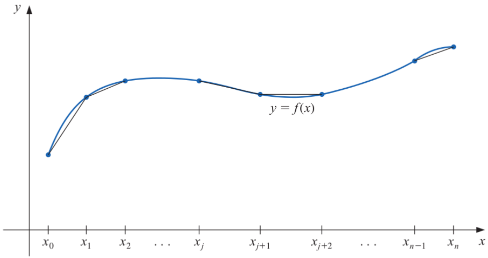
$$E_i(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad \text{con} \quad \xi(x) \in (x_i, x_{i+1})$$

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \ \forall \ i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \ \ \forall i$.

- Interpolación Fragmentaria Lineal
  - Φ es una función partida. Une cada par $\{(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))\}$ con una recta (polinomio lineal).
  - Puede pensarse como n (sub)problemas de interpolación lineal.
  - El error cometido al interpolar $x \in [x_i, x_{i+1}]$ es:

$$E_i(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad \text{con} \quad \xi(x) \in (x_i, x_{i+1})$$



Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \; \forall \; i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \;\; \forall i$.

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \; \forall \; i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \;\; \forall i$.

- Trazador Cúbico: Splines
  - Φ es una función partida. Une cada par $\{(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))\}$ con un polinomio S_i tal que:
    - $gr(S_i) \leq 3$
    - $S_i(x_i) = f(x_i)$ y $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad i = 0 \ldots n-1$ (interpola).

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \; \forall \; i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \;\; \forall i$.

- Trazador Cúbico: Splines
  - Φ es una función partida. Une cada par $\{(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))\}$ con un polinomio S_i tal que:
    - $gr(S_i) \leq 3$
    - $S_i(x_i) = f(x_i)$ y $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \;\; i = 0 \ldots n-1$ (interpola).
    - $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), \;\; i = 0 \ldots n-2$ (derivada primera contínua).

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \ \forall \ i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \ \ \forall i$.

- Trazador Cúbico: Splines
  - Φ es una función partida. Une cada par $\{(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))\}$ con un polinomio S_i tal que:
    - $gr(S_i) \leq 3$
    - $S_i(x_i) = f(x_i)$ y $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad i = 0 \ldots n-1$ (interpola).
    - $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), \quad i = 0 \ldots n-2$ (derivada primera contínua).
    - $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}), \quad i = 0 \ldots n-2$ (derivada segunda contínua).

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \ \forall \ i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \ \ \forall i$.

- Trazador Cúbico: Splines
  - Φ es una función partida. Une cada par $\{(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))\}$ con un polinomio S_i tal que:
    - $gr(S_i) \leq 3$
    - $S_i(x_i) = f(x_i)$ y $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad i = 0 \ldots n-1$ (interpola).
    - $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), \quad i = 0 \ldots n-2$ (derivada primera contínua).
    - $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}), \quad i = 0 \ldots n-2$ (derivada segunda contínua).
    - Si es natural, $S_0''(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$.

Repaso - Métodos de Interpolación

Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \; \forall \; i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \;\; \forall i$.

- Trazador Cúbico: Splines
  - Φ es una función partida. Une cada par $\{(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))\}$ con un polinomio S_i tal que:
    - $gr(S_i) \leq 3$
    - $S_i(x_i) = f(x_i)$ y $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad i = 0 \ldots n-1$ (interpola).
    - $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), \quad i = 0 \ldots n-2$ (derivada primera contínua).
    - $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}), \quad i = 0 \ldots n-2$ (derivada segunda contínua).
    - Si es natural, $S_0''(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$.
    - Si es sujeto a f, $S_0'(x_0) = f'(x_0)$ y $S_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$.

Repaso - Métodos de Interpolación

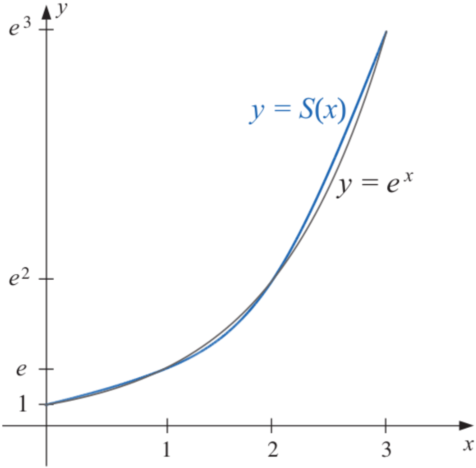
Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \ \forall \ i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \ \ \forall i$.

- Trazador Cúbico: Splines
  - Φ es una función partida. Une cada par $\{(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))\}$ con un polinomio S_i tal que:
    - $gr(S_i) \leq 3$
    - $S_i(x_i) = f(x_i)$ y $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \ \ i = 0 \ldots n-1$ (interpola).
    - $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), \ \ i = 0 \ldots n-2$ (derivada primera contínua).
    - $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}), \ \ i = 0 \ldots n-2$ (derivada segunda contínua).
    - Si es natural, $S_0''(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$.
    - Si es sujeto a f, $S_0'(x_0) = f'(x_0)$ y $S_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$.
  - Φ resulta en una interpolación “suave” de f.

Repaso - Métodos de Interpolación

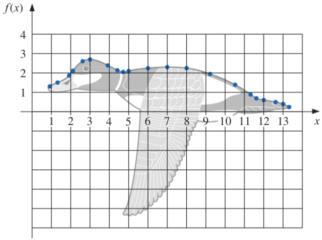
Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$, con $x_i \neq x_j \ \forall \ i \neq j$, buscamos una función Φ tal que $\Phi(x_i) = f(x_i) \ \ \forall i$.

- Trazador Cúbico: Splines



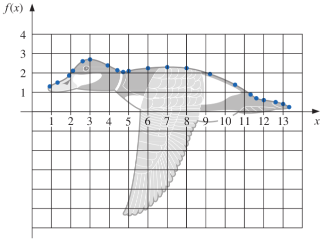
Ejemplo: Splines vs. Lagrange

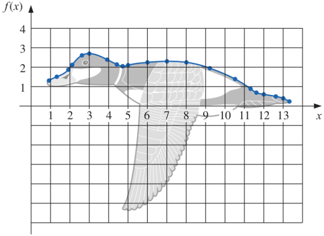
$n = 20$ (21 puntos)



Ejemplo: Splines vs. Lagrange

$n = 20$ (21 puntos)

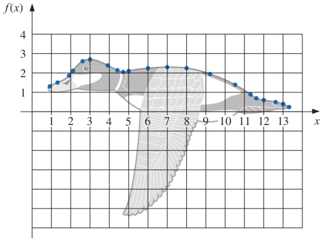


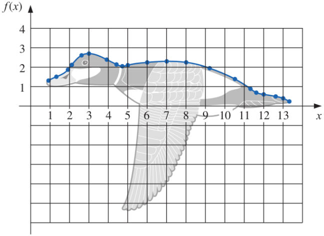


Splines

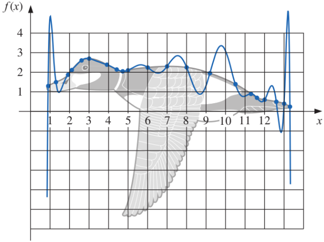
Ejemplo: Splines vs. Lagrange

$n = 20$ (21 puntos)





Splines



Lagrange

Ejercicio: Agencia de Inteligencia

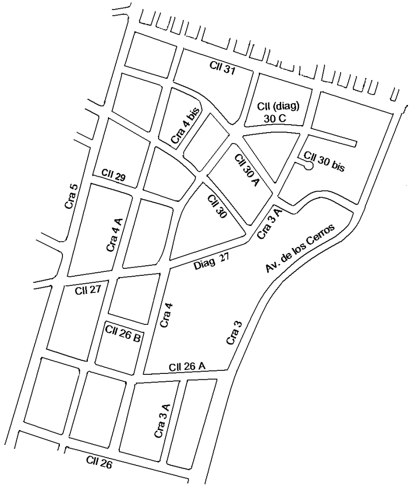
Ejercicio: Agencia de Inteligencia

SECRET INTELLIGENCE SERVICE MI6

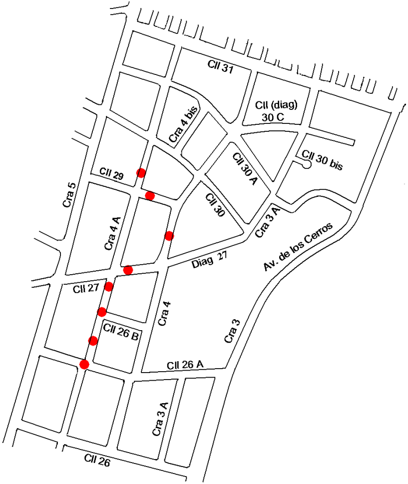
CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY
UNITED STATES OF AMERICA

METNUM INTELLIGENCE 2016 MNI6

Ejercicio: Agencia de Inteligencia

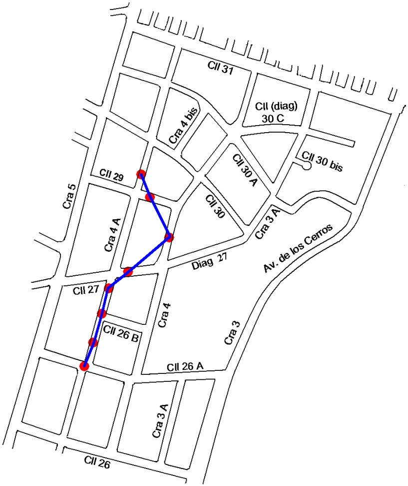


Ejercicio: Agencia de Inteligencia



METNUM
INTELLIGENCE
2016 MNI6

Ejercicio: Agencia de Inteligencia



METNUM INTELLIGENCE 2016 MNI6

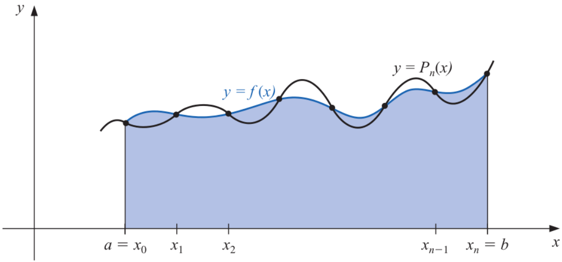
Ejercicio: Agencia de Inteligencia - Tips

- Ojo con las unidades!
  - $X(t[h])[km]$ pocisión (kilómetros) en cada instante (horas).
  - $X'(t[h])[\frac{km}{h}]$ velocidad ($\frac{km}{h}$) en cada instante (h).
  - $X''(t[h])[\frac{km}{h^2}]$ aceleración ($\frac{km}{h^2}$) en cada instante (h).
  - Al interpolar: $X(t[h])[km] = P_X(t[h])[km] + E_X(t[h])[km]$.
  - Al acotar el error: $|E_X(t[h])[km]| < C[km]$ (donce C es la cota).

Ejercicio: Agencia de Inteligencia - Tips

- Ojo con las unidades!
  - $X(t[h])[km]$ pocisión (kilómetros) en cada instante (horas).
  - $X'(t[h])[\frac{km}{h}]$ velocidad $(\frac{km}{h})$ en cada instante (h).
  - $X''(t[h])[\frac{km}{h^2}]$ aceleración $(\frac{km}{h^2})$ en cada instante (h).
  - Al interpolar: $X(t[h])[km] = P_X(t[h])[km] + E_X(t[h])[km]$.
  - Al acotar el error: $|E_X(t[h])[km]| < C[km]$ (donce C es la cota).
  - **Si se aseguran de trabajar todo en km y h, pueden ignorar las unidades y ser felices!!**

Integración Numérica



Repaso - Métodos de Integración Numérica

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, buscamos aproximar la integral propia $\int_a^b f(x)dx$.

Repaso - Métodos de Integración Numérica

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, buscamos aproximar la integral propia $\int_a^b f(x)dx$.

- Fórmulas de Newton-Cotes
  - Elegimos $n+1$ puntos $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$ en el intervalo $[a, b]$, de tal manera que:
    - $x_0 = a$
    - $x_n = b$
    - $x_{i+1} - x_i = h > 0$ para todo i (son equidistantes)
  - Calculamos el polinomio interpolador P de esos puntos (de grado $\leq n$).
  - $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P(x)dx + \int_a^b E(x)dx$,
    donde $E(x)$ es el error de la interpolación.
  - Calculamos $\int_a^b P(x)dx$ de forma exacta usando una fórmula cerrada (que dependerá del grado del polinomio).
  - $\int_a^b E(x)dx$ es el error cometido en la integración.

Repaso - Métodos de Integración Numérica

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, buscamos aproximar la integral propia $\int_a^b f(x)dx$.

- Fórmulas de Newton-Cotes

Repaso - Métodos de Integración Numérica

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, buscamos aproximar la integral propia $\int_a^b f(x)dx$.

- Fórmulas de Newton-Cotes
  - **Regla de Trapecios:** $n = 1$ (2 puntos), $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))\}$

$$\int_a^b P(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1))$$

$$\int_a^b E(x)dx = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad \text{con} \;\; \xi \in (x_0, x_1)$$

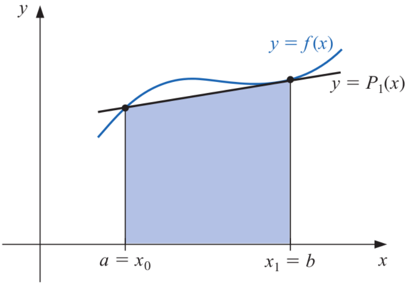
Repaso - Métodos de Integración Numérica

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, buscamos aproximar la integral propia $\int_a^b f(x)dx$.

- Fórmulas de Newton-Cotes
  - **Regla de Trapecios:** $n = 1$ (2 puntos), $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))\}$

$$\int_a^b P(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1))$$

$$\int_a^b E(x)dx = -\frac{h^3}{12}f''(\xi), \qquad \text{con} \quad \xi \in (x_0, x_1)$$



Repaso - Métodos de Integración Numérica

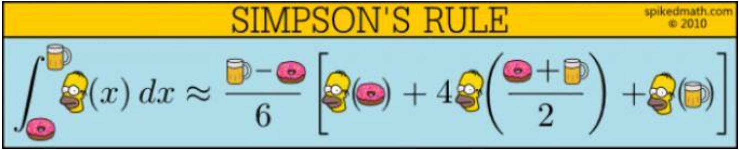
Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, buscamos aproximar la integral propia $\int_a^b f(x)dx$.

- Fórmulas de Newton-Cotes

Repaso - Métodos de Integración Numérica

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, buscamos aproximar la integral propia $\int_a^b f(x)dx$.

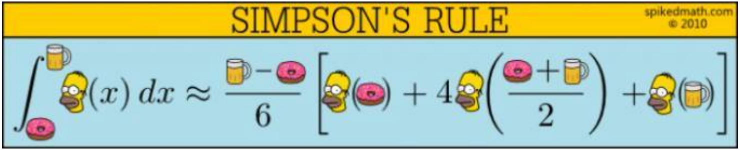
- Fórmulas de Newton-Cotes



Repaso - Métodos de Integración Numérica

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, buscamos aproximar la integral propia $\int_a^b f(x)dx$.

- Fórmulas de Newton-Cotes



(Chiste fácil)

Repaso - Métodos de Integración Numérica

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, buscamos aproximar la integral propia $\int_a^b f(x)dx$.

- Fórmulas de Newton-Cotes
  - **Regla de Simpson:** $n = 2$ (3 puntos), $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))\}$ ($x_1 = \frac{x_0+x_2}{2}$).

$$\int_a^b P(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

$$\int_a^b E(x)dx = -\frac{h^5}{90}f^{(iv)}(\xi), \quad \text{con} \;\; \xi \in (x_0, x_2)$$

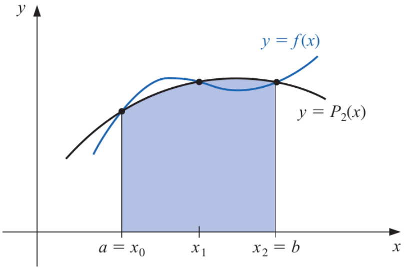
Repaso - Métodos de Integración Numérica

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, buscamos aproximar la integral propia $\int_a^b f(x)dx$.

- Fórmulas de Newton-Cotes
  - **Regla de Simpson:** $n = 2$ (3 puntos), $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))\}$ ($x_1 = \frac{x_0+x_2}{2}$).

$$\int_a^b P(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

$$\int_a^b E(x)dx = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi), \quad \text{con} \quad \xi \in (x_0, x_2)$$



Repaso - Métodos de Integración Numérica

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, buscamos aproximar la integral propia $\int_a^b f(x)dx$.

- Reglas Compuestas
  - **Regla de Trapecios Compuesta:** $n+1$ puntos, $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$ equidistantes ($x_{i+1} - x_i = h > 0$). $x_0 = a$, $x_n = b$.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left(\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right) + f(x_n)\right) \underbrace{-\frac{h^2}{12}(x_n - x_0)f''(\xi)}_{error}$$

$$\text{con} \quad \xi \in (x_0, x_n)$$

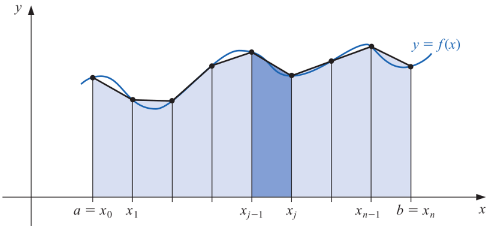
Repaso - Métodos de Integración Numérica

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, buscamos aproximar la integral propia $\int_a^b f(x)dx$.

- Reglas Compuestas
  - **Regla de Trapecios Compuesta:** $n+1$ puntos, $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$ equidistantes $(x_{i+1} - x_i = h > 0)$. $x_0 = a$, $x_n = b$.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left(\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right) + f(x_n)\right) \underbrace{-\frac{h^2}{12}(x_n - x_0)f''(\xi)}_{error}$$

$$\text{con} \quad \xi \in (x_0, x_n)$$



Repaso - Métodos de Integración Numérica

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, buscamos aproximar la integral propia $\int_a^b f(x)dx$.

- Reglas Compuestas
  - **Regla de Simpson Compuesta:** $n+1$ puntos, n **par**, $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$ equidistantes $(x_{i+1} - x_i = h > 0)$. $x_0 = a$, $x_n = b$.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(\sum_{j=1}^{n/2} \left(f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})\right)\right) \underbrace{-\frac{h^4}{180}(x_n - x_0)f^{(iv)}(\xi)}_{error}$$

$$\text{con} \quad \xi \in (x_0, x_n)$$

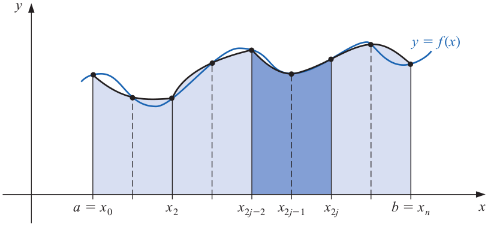
Repaso - Métodos de Integración Numérica

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, buscamos aproximar la integral propia $\int_a^b f(x)dx$.

- Reglas Compuestas
  - **Regla de Simpson Compuesta:** $n+1$ puntos, n **par**, $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$ equidistantes $(x_{i+1} - x_i = h > 0)$. $x_0 = a$, $x_n = b$.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(\sum_{j=1}^{n/2} \left(f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})\right)\right) \underbrace{-\frac{h^4}{180}(x_n - x_0)f^{(iv)}(\xi)}_{error}$$

$$\text{con} \quad \xi \in (x_0, x_n)$$



Ejercicio: Bit Error Rate

Ejercicio: Bit Error Rate

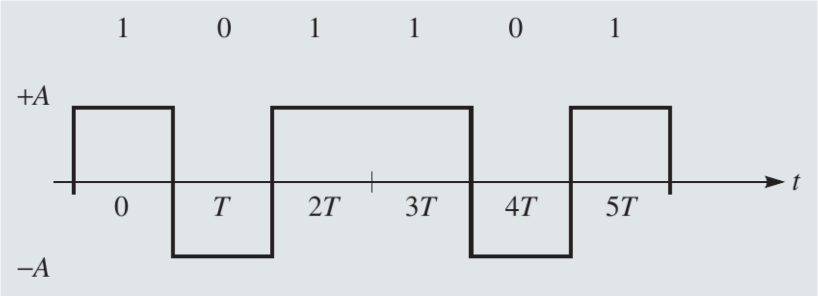


Figura : Algoritmo Polar Non Return to Zero

Ejercicio: Bit Error Rate

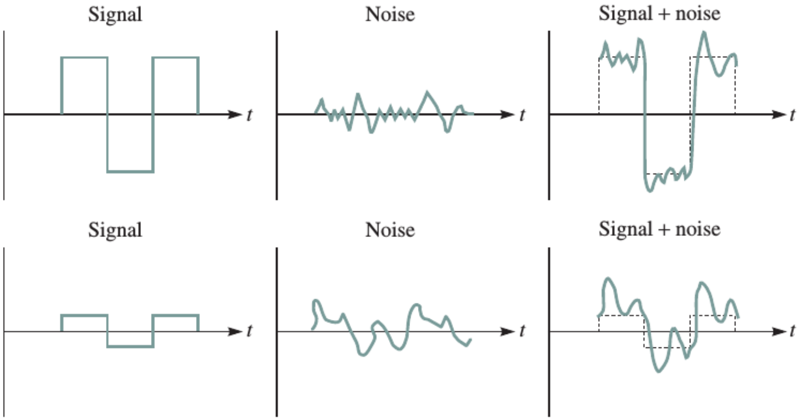


Figura : Introducción de ruido en el cable

Ejercicio: Bit Error Rate

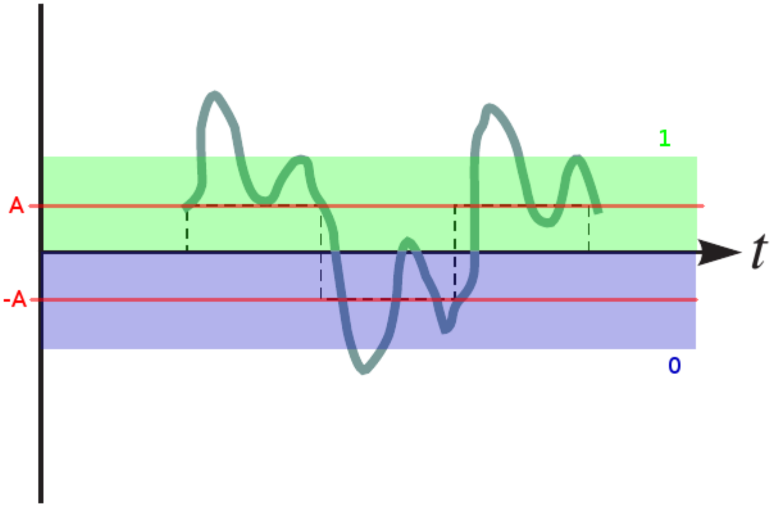


Figura : Interpretación de bits y errores

Ejercicio: Bit Error Rate

$$BER = \frac{\text{cantidad de bits interpretados de forma errónea}}{\text{cantidad de bits recibidos}}$$

Ejercicio: Bit Error Rate

$$BER = \frac{\text{cantidad de bits interpretados de forma errónea}}{\text{cantidad de bits recibidos}}$$

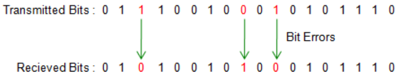


Figura : Ejemplo de transmisión de 18 bits

Ejercicio: Bit Error Rate

$$BER = \frac{\text{cantidad de bits interpretados de forma errónea}}{\text{cantidad de bits recibidos}} = \frac{3}{18} \approx 0,17$$

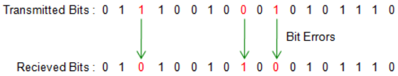


Figura : Ejemplo de transmisión de 18 bits

¿PREGUNTAS?

A TRABAJAR!!!

Bibliografía

- *Numerical Analysis*. Burden, Faires. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2005.
- *Communication Networks. Fundamental Concepts and Key Architectures.*. Leon-Garcia, Widjaja. The McGraw Companies, 2001.