Taller de Interpolación e Integración
Lautaro Leonel Alvarez
Libreta Nro 268/14
Primer Cuatrimestre del 2016

1. Ejercicio 1

Como tenemos que utilizar interpolación fragmentaria lineal vamos a utilizar polinomios de Lagrange de grado 1 para cada fragmento que une $f(t_i)$ con $f(t_{i+1})$ ∀i=0..n-1.

Por la fórmula del error de los polinomios de Lagrange sabemos que:

$$f^1(x) = P_L^1(x) + E_L^1(x) \; con \; E_L^1(x) = \frac{f^2(\xi(x))(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2!} \; \forall i = 0..n-1 \tag{1}$$

Queremos acotar:

$$|E_L^1(x)| \leq 10^{-3}km \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow |\frac{f^2(\xi(x))(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2!}| \leq 10^{-3}km \tag{3}$$

Pero por el enunciado sabíamos que

$$f^2(x) \leq 1000\frac{km}{h} \forall x \in R \tag{4}$$

Entonces

$$|\frac{f^2(\xi(x))(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2}| \leq |\frac{(1000km)(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2!}| \tag{5}$$

Veamos que se cumpla

$$|\frac{(1000km)(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2}| \leq 10^{-3}km \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow (1000\frac{km}{h^2})|\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2}| \leq 10^{-3}km \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow |\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2}| \leq \frac{10^{-3}km}{1000\frac{km}{h^2}} \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow |\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2}| \leq 10^{-6}h^2 \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow |(x-x_j)(x-x_{j+1})| \leq 20^{-6}h^2 \tag{10}$$

x es un punto entre x_j y x_{j+1}, entonces $(x - x_j) \leq \Delta t$ y $(x - x_{j+1}) \leq \Delta t$.
Entonces nos queda

$$|(x-x_j)(x-x_{j+1})| \leq |(\Delta t_i)^2| \tag{11}$$

Veamos entonces si

$$|(\Delta t_i)^2| \leq 20^{-6}h^2 \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow \Delta t_i \leq 0{,}000125h \tag{13}$$

Volviendo tenemos que

$$\Delta t_i \leq 0{,}000125h \tag{14}$$

$$\Rightarrow |\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2}| \leq \frac{10^{-3}km}{1000\frac{km}{h^2}} \tag{15}$$

$$\Rightarrow |\frac{(1000km)(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2}| \leq 10^{-3}km \tag{16}$$

Entonces

$$|E_L^1(x)| = |\frac{f^2(\xi(x))(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2}| \leq |\frac{(1000km)(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2}| \leq 10^{-3}km \tag{17}$$

Por lo tanto nos queda que

$$\Delta t_i \leq 0{,}000125h \Rightarrow |E_L^1(x)| \leq 10^{-3}km \tag{18}$$

Sabemos entonces que si tomamos intervalos de tiempo iguales a 0.000125 horas vamos a estar respetando la cota de error impuesta.

2. Ejercicio 1

Veamos

$$E_L^1(x) = \frac{f^2(\xi(x))(x - x_j)(x - x_{j+1})}{2!} \tag{19}$$

Pero por el enunciado sabíamos que

$$f^2(x) \leq (1000\frac{km}{h^2}, 1000\frac{km}{h^2})\forall x \in R \tag{20}$$

Entonces

$$E_L^1(x) \leq \frac{(1000\frac{km}{h^2}, 1000\frac{km}{h^2})(x - x_j)(x - x_{j+1})}{2} \tag{21}$$

x es un punto entre x_j y x_{j+1}, entonces $(x - x_j) \leq \Delta t$ y $(x - x_{j+1}) \leq \Delta t$.
Entonces nos queda

$$(x - x_j)(x - x_{j+1}) \leq (\Delta t_i)^2 \tag{22}$$

Volviendo nos queda que

$$E_L^1(x) \leq \frac{(1000\frac{km}{h^2}, 1000\frac{km}{h^2})(x - x_j)(x - x_{j+1})}{2} \leq \frac{(1000\frac{km}{h^2}, 1000\frac{km}{h^2})(\Delta t_i)^2}{2} \tag{23}$$

$$E_L^1(x) \leq \frac{(1000\frac{km}{h^2}, 1000\frac{km}{h^2})(\Delta t_i)^2}{2} = (\frac{1000\frac{km}{h^2} * (\Delta t_i)^2}{2}, \frac{1000\frac{km}{h^2} * (\Delta t_i)^2}{2}) \tag{24}$$

Queremos que el error sea menor que $10^{-3}km$. Para esto vamos a plantear la ecuación de la circunferencia con $radio = 10^{-3}km$ y veremos que valores de x e y nos sirven para manternernos dentro de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 \leq (10^{-3}km)^2 \tag{25}$$

Vamos a tomar como x e y los valores obtenidos de $E_L^1(t)$) y buscaremos que cumplan la ecuación planteada.

$$(\frac{1000\frac{km}{h^2} * (\Delta t_i)^2}{2})^2 + (\frac{1000\frac{km}{h^2} * (\Delta t_i)^2}{2})^2 \leq (10^{-3}km)^2 \tag{26}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1000000\frac{km^2}{h^4} * (\Delta t_i)^4}{4} + \frac{1000000\frac{km^2}{h^4} * (\Delta t_i)^4}{4} \leq 10^{-6}km^2 \tag{27}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1000000\frac{km^2}{h^4} * (\Delta t_i)^4}{2} \leq 10^{-6}km^2 \tag{28}$$

$$\Leftrightarrow (\Delta t_i)^4 \leq \frac{10^{-6}km^2 * 2}{1000000\frac{km^2}{h^4}} \tag{29}$$

$$\Leftrightarrow (\Delta t_i)^4 \leq 20^{-12}h^4 \tag{30}$$

$$\Leftrightarrow |\Delta t_i| \leq 0{,}001h \tag{31}$$

Sabemos entonces que si tomamos intervalos $\Delta t menores o igual e que 0{,}001 h estaremos respetando la cota de error impuesta. Tom$
$0{,}001 h para tener la cota superior.$

3. Ejercicio 2