# Árboles - Cómo demostrar

Alejandro Strejilevich de Loma

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Abril de 2016

# Equivalencia

## Propiedad 1 (Teórica)

*Sea $T$ un grafo de $n$ vértices y $m$ ejes. Son equivalentes:*

1. *$T$ es un árbol.*
2. *$T$ es conexo y $m = n - 1$.*
3. *$T$ no tiene ciclos (simples) y $m = n - 1$.*

# Equivalencia

## Propiedad 1 (Teórica)

*Sea $T$ un grafo de $n$ vértices y $m$ ejes. Son equivalentes:*

1. *$T$ es un árbol.*
2. *$T$ es conexo y $m = n - 1$.*
3. *$T$ no tiene ciclos (simples) y $m = n - 1$.*
4. *$T$ tiene exactamente un camino simple entre cada par de vértices.*

# Equivalencia

## Propiedad 1 (Teórica)

*Sea $T$ un grafo de $n$ vértices y $m$ ejes. Son equivalentes:*

1. *$T$ es un árbol.*
2. *$T$ es conexo y $m = n - 1$.*
3. *$T$ no tiene ciclos (simples) y $m = n - 1$.*
4. *$T$ tiene exactamente un camino simple entre cada par de vértices.*
5. *$T$ no tiene ciclos (simples), pero si se le agrega cualquier eje $e$ resulta un grafo con exactamente un ciclo (simple), y ese ciclo contiene a $e$.*

# Equivalencia

## Propiedad 1 (Teórica)

*Sea $T$ un grafo de $n$ vértices y $m$ ejes. Son equivalentes:*

1. *$T$ es un árbol.*
2. *$T$ es conexo y $m = n - 1$.*
3. *$T$ no tiene ciclos (simples) y $m = n - 1$.*
4. *$T$ tiene exactamente un camino simple entre cada par de vértices.*
5. *$T$ no tiene ciclos (simples), pero si se le agrega cualquier eje $e$ resulta un grafo con exactamente un ciclo (simple), y ese ciclo contiene a $e$.* *¿Cómo está formado el ciclo exactamente?*

# Equivalencia

**Propiedad 1 (Teórica)**

*Sea $T$ un grafo de $n$ vértices y $m$ ejes. Son equivalentes:*

1. *$T$ es un árbol.*
2. *$T$ es conexo y $m = n - 1$.*
3. *$T$ no tiene ciclos (simples) y $m = n - 1$.*
4. *$T$ tiene exactamente un camino simple entre cada par de vértices.*
5. *$T$ no tiene ciclos (simples), pero si se le agrega cualquier eje $e$ resulta un grafo con exactamente un ciclo (simple), y ese ciclo contiene a $e$.* *¿Cómo está formado el ciclo exactamente?*
6. *$T$ es conexo pero si se le saca cualquier eje $f$ resulta un grafo no conexo.*

# Equivalencia

## Propiedad 1 (Teórica)

*Sea $T$ un grafo de $n$ vértices y $m$ ejes. Son equivalentes:*

1. *$T$ es un árbol.*
2. *$T$ es conexo y $m = n - 1$.*
3. *$T$ no tiene ciclos (simples) y $m = n - 1$.*
4. *$T$ tiene exactamente un camino simple entre cada par de vértices.*
5. *$T$ no tiene ciclos (simples), pero si se le agrega cualquier eje $e$ resulta un grafo con exactamente un ciclo (simple), y ese ciclo contiene a $e$.* ¿Cómo está formado el ciclo exactamente?
6. *$T$ es conexo pero si se le saca cualquier eje $f$ resulta un grafo no conexo.* ¿Cuántas componentes conexas?

# Inducción "facilitada" en la cantidad de vértices

**Propiedad 2 (Teórica y Ejercicio 6.5)**

*Todo árbol no trivial tiene al menos 2 hojas.*

**Propiedad 3**

*Si $T$ es un bosque (en particular, un árbol) no trivial y $v$ un vértice de $T$ entonces $T - v$ es un bosque.*

**Propiedad 4**

*Si $T$ es un árbol y $h$ una hoja de $T$ entonces $T - h$ es un árbol.*

# Agregar un eje y sacar un eje $(T + e - f)$

## Propiedad 1 (Teórica)

*Sea $T$ un grafo de $n$ vértices y $m$ ejes. Son equivalentes:*

- (i) *$T$ es un árbol.*
- (v) *$T$ no tiene ciclos, pero si se le agrega un eje $e$ resulta un grafo con exactamente un ciclo, y ese ciclo contiene a $e$.*

## Propiedad 5

*Sea $T$ un árbol, $e$ un eje que no está en $T$, $C$ el único ciclo (simple) de $T + e$, $f$ un eje cualquiera de $C$. Entonces $T + e - f$ es un árbol.*

# Agregar un eje y sacar un eje $(T + e - f)$

**Propiedad 1 (Teórica)**

*Sea $T$ un grafo de $n$ vértices y $m$ ejes. Son equivalentes:*

- i) *$T$ es un árbol.*
- v) *$T$ no tiene ciclos, pero si se le agrega un eje $e$ resulta un grafo con exactamente un ciclo, y ese ciclo contiene a $e$.*

**Propiedad 5**

*Sea $T$ un árbol, $e$ un eje que no está en $T$, $C$ el único ciclo (simple) de $T + e$, $f$ un eje cualquiera de $C$. Entonces $T + e - f$ es un árbol.*

**Corolario 6 (Teórica)**

*Si en la Propiedad 5, $T$ es un AG de un grafo $G$ y $e$ es un eje de $G$, entonces $T + e - f$ es un AG de $G$.*

# Sacar un eje y agregar un eje ($T - f + e$)

## Propiedad 1 (Teórica)

*Sea $T$ un grafo de $n$ vértices y $m$ ejes. Son equivalentes:*

- i) *$T$ es un árbol.*
- vi) *$T$ es conexo pero si se le saca cualquier eje $f$ resulta un grafo no conexo (dos componentes conexas).*

## Propiedad 7

*Sea $T$ un árbol, $f$ un eje de $T$, $e$ un eje que tiene un extremo en una componente conexa de $T - f$ y el otro en la otra. Entonces $T - f + e$ es un árbol.*

# Sacar un eje y agregar un eje ($T - f + e$)

## Propiedad 1 (Teórica)

*Sea $T$ un grafo de $n$ vértices y $m$ ejes. Son equivalentes:*

- i. *$T$ es un árbol.*
- vi. *$T$ es conexo pero si se le saca cualquier eje $f$ resulta un grafo no conexo (dos componentes conexas).*

## Propiedad 7

*Sea $T$ un árbol, $f$ un eje de $T$, $e$ un eje que tiene un extremo en una componente conexa de $T - f$ y el otro en la otra. Entonces $T - f + e$ es un árbol.*

## Corolario 8

*Si en la Propiedad 7, $T$ es un AG de un grafo $G$ y $e$ es un eje de $G$, entonces $T - f + e$ es un AG de $G$.*