Taller de Interpolación e Integración
Lautaro Leonel Alvarez
Libreta Nro 268/14
Primer Cuatrimestre del 2016

1. Ejercicio 1

Veamos

$$E_L^1(x) = \frac{f^2(\xi(x))(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2!} \tag{1}$$

Pero por el enunciado sabíamos que

$$f^2(x) \leq (1000\frac{km}{h^2}, 1000\frac{km}{h^2}) \forall x \in R \tag{2}$$

Entonces

$$E_L^1(x) \leq \frac{(1000\frac{km}{h^2}, 1000\frac{km}{h^2})(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2} \tag{3}$$

x es un punto entre x_j y x_{j+1}, entonces $(x - x_j) \leq \Delta t$ y $(x - x_{j+1}) \leq \Delta t$.
Entonces nos queda

$$(x-x_j)(x-x_{j+1}) \leq (\Delta t_i)^2 \tag{4}$$

Volviendo nos queda que

$$E_L^1(x) \leq \frac{(1000\frac{km}{h^2}, 1000\frac{km}{h^2})(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2} \leq \frac{(1000\frac{km}{h^2}, 1000\frac{km}{h^2})(\Delta t_i)^2}{2} \tag{5}$$

$$E_L^1(x) \leq \frac{(1000\frac{km}{h^2}, 1000\frac{km}{h^2})(\Delta t_i)^2}{2} = (\frac{1000\frac{km}{h^2} * (\Delta t_i)^2}{2}, \frac{1000\frac{km}{h^2} * (\Delta t_i)^2}{2}) \tag{6}$$

Queremos que el error sea menor que $10^{-3}km$. Para esto vamos a plantear la ecuación de la circunferencia con $radio = 10^{-3}km$ y veremos que valores de x e y nos sirven para manternernos dentro de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 \leq (10^{-3}km)^2 \tag{7}$$

Vamos a tomar como x e y los valores obtenidos de $E_L^1(t)$) y buscaremos que cumplan la ecuación planteada.

$$(\frac{1000\frac{km}{h^2} * (\Delta t_i)^2}{2})^2 + (\frac{1000\frac{km}{h^2} * (\Delta t_i)^2}{2})^2 \leq (10^{-3}km)^2 \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1000000\frac{km^2}{h^4} * (\Delta t_i)^4}{4} + \frac{1000000\frac{km^2}{h^4} * (\Delta t_i)^4}{4} \leq 10^{-6}km^2 \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1000000\frac{km^2}{h^4} * (\Delta t_i)^4}{2} \leq 10^{-6}km^2 \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow (\Delta t_i)^4 \leq \frac{10^{-6}km^2 * 2}{1000000\frac{km^2}{h^4}} \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow (\Delta t_i)^4 \leq 20^{-12}h^4 \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow |\Delta t_i| \leq 0{,}001h \tag{13}$$

Sabemos entonces que si tomamos intervalos Δt menores o iguale que 0.001 h estaremos respetando la cota de error impuesta. Tomaremos entonces $\Delta t = 0.001$ h para tener el valor mas grande.

2. Ejercicio 3

No se bien como es la onda. La cota no es muy ajustada, da 3.1722e-5 para x y 1.3878e-20 para y. Pero aplicando en sqrt(x2 + y2) ¡= 10-3km me queda 3.1722e-5.

3. Ejercicio 4

Mareado:
Lineal: x -¿0.0073496 ; y -¿0 Spline: x -¿6.4157e-04 ; y -¿0
Kane:
Lineal: x -¿5.6843e-17 ; y -¿1.1369e-16 Spline: x -¿0.017262 ; y -¿0.017262

4. Ejercicio 9

4.1. Lagrange

Planteamos la ecuacion de Lagrange:

$$P_L(x) = y_k \Sigma_{k=0}^{n} \frac{(x - x_o)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)} \tag{14}$$

Reemplazando por los valores dados nos queda:

$$P_L(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-4)(1-5)} * 0 + \frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)} * 2 + \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-5)} * 12 + \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-4)} * 20 \tag{15}$$

$$P_L(x) = (x-1)\left(\frac{(x^2 - 5x - 4x + 20)2}{6} + \frac{(x^2 - 5x - 2x + 10)12}{-6} + \frac{(x^2 - 4x - 2x + 2)20}{12}\right) \tag{16}$$

$$P_L(x) = (x-1)(0x^2 + 1x + 0) \tag{17}$$

Nos queda entonces:

$$P_L(x) = x^2 - x \tag{18}$$

4.2. Diferencias Divididas

$$\begin{aligned} f[x_o] &= f(x_0) = f(1) = 0 \\ f[x_1] &= f(x_1) = f(2) = 2 \\ f[x_2] &= f(x_2) = f(4) = 12 \\ f[x_3] &= f(x_3) = f(5) = 20 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} f[x_o, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{2-0}{2-1} = 2 \\ f[x_1, x_2] &= \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{12-2}{4-2} = 3 \\ f[x_2, x_3] &= \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{20-12}{5-4} = 8 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} f[x_o, x_1, x_2] &= \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3} \\ f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{8-3}{5-2} = \frac{5}{3} \end{aligned} \tag{21}$$

$$f[x_o, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0} = \frac{\frac{5}{3} - \frac{1}{3}}{5-0} = \frac{4}{15} \tag{22}$$

Por lo que me queda:

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \tag{23}$$

$$P_3(x) = 0 + 2(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)(x-2) + \frac{4}{15}(x-1)(x-2)(x-4) \tag{24}$$