

Métodos Numéricos
 Primer Cuatrimestre 2016
Práctica 3
 Matrices simétricas definidas positivas.
 Factorización de Cholesky.



Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

- Sea A una matriz de $\mathbb{R}^{m \times n}$. Probar que las matrices AA^t y A^tA son simétricas. Mostrar mediante un ejemplo que pueden no ser iguales. Probar que si A es cuadrada entonces $A + A^t$ es simétrica. ¿Qué sucede con $A - A^t$?
- Probar que toda matriz cuadrada A de $\mathbb{R}^{n \times n}$ es expresable en forma única como $A = S + T$, donde S es simétrica y T es antisimétrica (es decir, $T^t = -T$).
- Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta con una demostración o un contraejemplo.
 - Existe una matriz definida positiva no simétrica.
 - Si A es simétrica y B es simétrica entonces AB es simétrica.
 - Existen matrices A y B simétricas tales que $A \neq B$ y AB es simétrica.
- Sea A una matriz simétrica y definida positiva. Probar que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple:
 - Si x e y son linealmente independientes, $|x^tAy| < \sqrt{x^tAx}\sqrt{y^tAy}$.¹
 - Si x e y son linealmente dependientes, $|x^tAy| = \sqrt{x^tAx}\sqrt{y^tAy}$.
- Sea A una matriz simétrica. Probar que la función $f(x) = \frac{(x^tAx)^{\frac{1}{2}}}{2}$ es una norma vectorial en \mathbb{R}^n si y sólo si A es definida positiva.
- Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ una matriz definida positiva. Demostrar que:
 - $a > 0$
 - $c > 0$
 - $\det(A) > 0$ ²
 - $|b| < \frac{a+c}{2}$
- Sea A una matriz simétrica definida positiva de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que:
 - $a_{ii} > 0$ para $1 \leq i \leq n$.
 - A es no singular.
 - Todas las submatrices principales de A son definidas positivas.
 - $|a_{ij}|^2 \leq a_{ii}a_{jj}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Deducir que el elemento de módulo máximo de A está en la diagonal.
- Si $A = LL^t$ es una factorización de A con L una matriz triangular inferior con elementos de la diagonal positivos, demostrar que A es simétrica y definida positiva.

¹Sugerencia: considerar la función $\phi(\lambda) = (x + \lambda y)^t A (x + \lambda y)$

²Sugerencia: evaluar qué sucede con el vector $x = (-b, a)$ al calcular x^tAx ; o analizar la función $\phi(\lambda) = (1, \lambda)^t A (1, \lambda)$

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica tal que

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} > 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

Demostrar que A es definida positiva.

10. Probar que la siguiente matriz simétrica es definida positiva.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

11. Sea A una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$. Supongamos que se aplica a A el método de eliminación de Gauss sin elección de pivote. Después de k pasos de eliminación A se habrá reducido a la forma

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ 0 & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$

donde $A_{22}^{(k)}$ es una matriz de $(n - k) \times (n - k)$.

- a) Probar por inducción que $A_{22}^{(k)}$ es definida positiva
- b) Probar que $a_{ii}^{(k)} \leq a_{ii}^{(k-1)}$ para $1 \leq i \leq n$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

12. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz no necesariamente simétrica.

- a) Probar que A es definida positiva si y sólo si A^t lo es.
- b) Probar que A es definida positiva si y sólo si $\frac{A + A^t}{2}$ es simétrica definida positiva.
- c) Sea $b \in \mathbb{R}^n$ no nulo y $M \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ una matriz definida como:

$$M = \begin{pmatrix} AA^t & 2b \\ 0^t & 1 \end{pmatrix}$$

Probar que si A es inversible y $\|A^{-1}b\|_2^2 < 1$, entonces M es definida positiva.

13. Demostrar la unicidad de la factorización de Cholesky de una matriz A simétrica definida positiva.
14. Sea A una matriz tridiagonal simétrica definida positiva. Si $A = LL^t$ es la factorización de Cholesky de A , demostrar que L es tridiagonal (de hecho es bidiagonal).
15. Si A es una matriz de $\mathbb{R}^{n \times n}$, se definen los *índices de perfil* de A por

$$m(A, i) = \min\{j : a_{ij} \neq 0\} \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

Por ejemplo, los índices de perfil de la siguiente matriz son $m(A, 1) = 1$, $m(A, 2) = 2$, $m(A, 3) = 1$, y $m(A, 4) = 4$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Probar que si $A = LL^t$ es la factorización de Cholesky de A , entonces L tiene el mismo perfil que A , es decir:

$$m(A, i) = m(L, i) \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

16. Sean las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Demostrar que A es definida positiva y B es no singular si y sólo si BAB^t es definida positiva.
17. Sea una matriz A simétrica definida positiva. Demostrar o dar un contraejemplo para que la matriz A^{-1} sea simétrica definida positiva.

Resolver en computadora

- I Exhibir la factorización de Cholesky de la matriz del ejercicio 10.
- II La matriz de Hilbert de $n \times n$ se define como una matriz H tal que $(H)_{i,j} = (i+j-1)^{-1}$. Es posible demostrar que dicha matriz es simétrica definida positiva para cualquier n . Experimentando con distintos valores de n , se pide:
- Dar el número de condición de la matriz de Hilbert, usando la función `cond`.
 - Calcular la factorización de Cholesky de la matriz.
 - Para los valores de n en los que sea posible, resolver el sistema $Hx = b$, con $b_i = 1 \forall i$, utilizando primero eliminación Gaussiana y luego resolviendo los sistemas $Ly = b$, $L^t x = y$, siendo $H = LL^t$ la factorización de Cholesky de H . Comparar ambos resultados.
- III Se conocen las matrices L y U de la factorización LU de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva. A partir de L y U (sin calcular A):
- Describir un algoritmo para hallar la matriz L de la factorización de Cholesky $A = LL^t$ de A .
 - Hallar en una única sentencia de Matlab la matriz L del ítem anterior.
Sugerencia: utilizar la función `diag`.
- IV Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica definida positiva y pentadiagonal. Describir un algoritmo para hallar la factorización de Cholesky de A que aproveche esta característica y realice la mínima cantidad de cálculos.

Funciones útiles

En general, el software para sistemas $Ax = b$ suele proveer una forma de resolverlos como una única rutina, si bien también es posible dividirlo en dos rutinas: una para computar una factorización para A , y otra para resolver el nuevo sistema.

- En el caso de MATLAB, la solución al sistema lineal $Ax = b$ está dada por el operador de “*división a izquierda*” denotado con “`\`” tal que $x = A \backslash b$. Internamente, la solución está computada usando la factorización LU y sustitución hacia adelante y hacia atrás³. Si se lo desea, la factorización LU puede computarse explícitamente con:

$$[L, U] = \text{lu}(A)$$

Tener en cuenta que la L puede tener filas permutadas. Además si la matriz es simétrica y definida positiva, la factorización de Cholesky se puede obtener como:

$$L = \text{chol}(A)$$

Para estimar el número de condición según $\|\cdot\|_p$:

$$c = \text{cond}(X, p)$$

³<http://www.mathworks.com/help/matlab/math/systems-of-linear-equations.html>

También es posible utilizar:

```
c = rcond(A)
```

Este último permite estimar el recíproco del número de condición (es más efectivo que `cond`, pero menos confiable).

- En Python, usando numpy, se puede calcular la factorización de Cholesky mediante:

```
from numpy import *
```

```
from numpy.linalg import *
```

```
A = matrix([[8,2],[2,4]], float) # Matriz 2x2 SDP
```

```
L = cholesky(A)
```

El número de condición puede calcularse mediante la operación `cond`, usando como segundo parámetro la norma que se quiere usar para calcularlo (por defecto, 2); por ejemplo:

```
cond(A,2)
```

```
cond(A,1)
```

```
cond(A,inf)
```

```
cond(A,-inf)
```

```
cond(A,'fro')
```

Referencias

- [1] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, 2012.
- [2] D.R. Kincaid and E.W. Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. Pure and applied undergraduate texts. American Mathematical Society, 2002.
- [3] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.