Controlabilidade

1) Def:

Um sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ variáveis de estados

$u \in \mathbb{R}^r \longrightarrow$ variáveis de controle

é dito <u>controlável</u> se

para quaisquer $a \in \mathbb{R}^n$ (condição inicial)

$b \in \mathbb{R}^n$ (condição final)

$T > 0$ é possível

encontrar uma função

$u : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^r$

tal que $\quad x(0) = a \quad$ e $\quad \dot{x} = Ax + Bu$

$x(T) = b$

a e b são características do sistema (da planta)

2) Exemplos:

a) Se $B = 0$

$\dot{x} = Ax$ é não controlável

Basta tomar

$a = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ e $b \neq 0$

b) Se $B = I$ $(r = n)$

$\dot{x} = Ax + u$

A solução geral da equação é a seguinte

$$x(t) = \underbrace{e^{AT}}_{M(T)} x(0) + \underbrace{e^{AT}}_{M(T)} \int_0^T \underbrace{e^{-A\eta}}_{M(-\eta)} u(\eta)\, d\eta$$

$$M(T) \overset{def}{=} e^{AT}$$

$$\underbrace{x(T) - M(T)x(0)}_{W \in \mathbb{R}^n} = M(T) \int_0^T M(-\eta) u(\eta)\, d\eta$$

$x(T) = b$, $x(0) = a$: conhecidos e quaisquer

Para provar a controlabilidade, precisamos escolher $u(\eta)$ de modo a obter $M(-\eta)$

$$M^{-1}(T)\, W = \int_0^T \underbrace{M(-\eta) u(\eta)}_{\text{isso precisa ser igual } \frac{M^{-1}(T)\, W}{T}} d\eta$$

$$M(-\eta)\,u(\eta) = \frac{M^{-1}(T)\,w}{T}$$

$$u(\eta) = \frac{M^{-1}(-\eta)\,M^{-1}(T)\,w}{T} \qquad (*)$$

Note $M(T) = e^{AT}$

$$M^{-1}(-\eta) = e^{-A(-\eta)} = e^{A\eta}$$

$$M^{-1}(T) = e^{-AT}$$

$$M^{-1}(-\eta)\,M^{-1}(T) = e^{A\eta}e^{-AT} =$$

$$= e^{A(\eta-T)} = M(\eta-T)$$

$$(*) = \frac{M(\eta-T)\,w}{T} = u(\eta)$$

3) Observações:

a) O problema de sair de $x(0)=a$ e chegar em $x(T)=b$ é similar ~~ao~~ de sair de $x(0)=0$ e chegar em $x(T)=w$, pois nesse caso $w=b$

Isso vale mesmo quando B é diferente da identidade

b) Se é possível controlar para um certo $T>0$ é possível para qualquer T

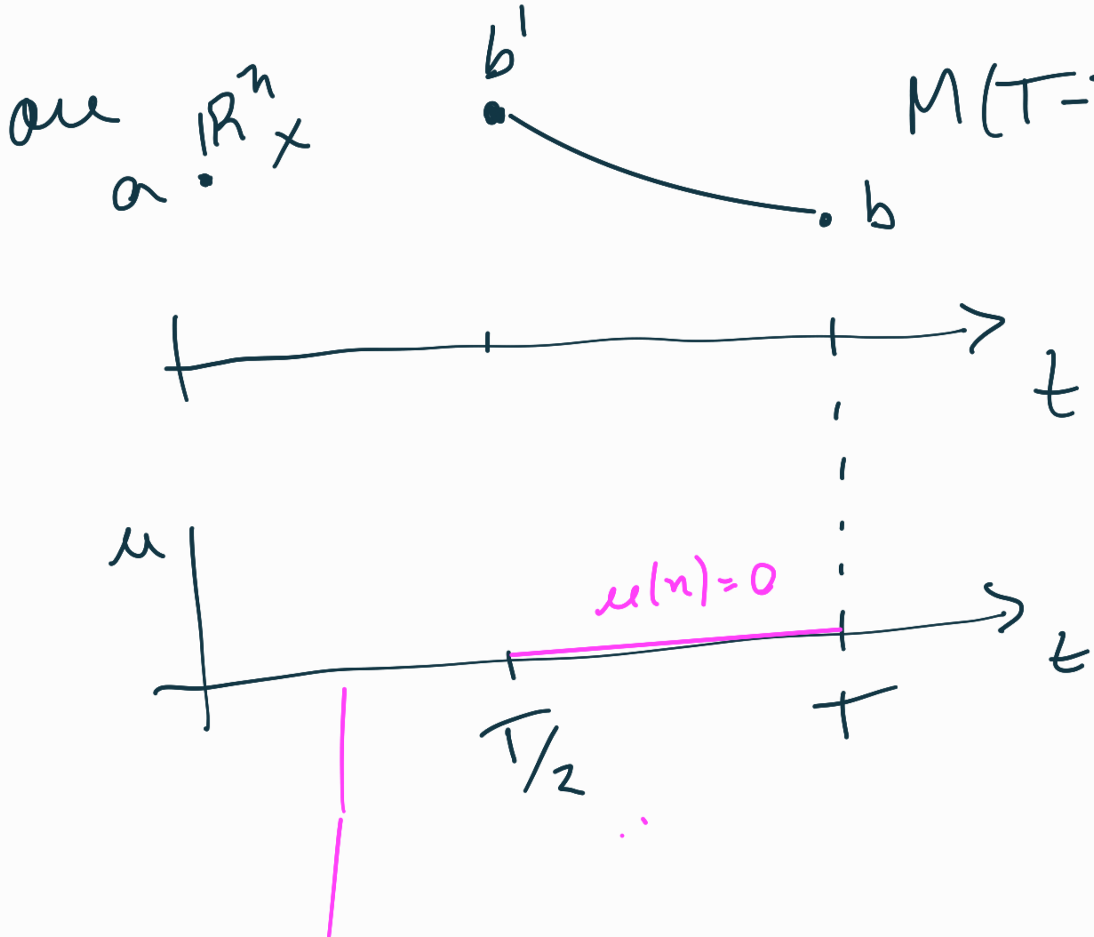
A fórmula em (2) val para qualquer T.

c) Quando o sistema é controlável, existem infinitos possíveis u's que transportam $x(0)=a$ para $x(T)=b$.

Para u's não-contínuas, temos por exemplo

ou $$u(\eta) = \frac{M(\eta - T)w}{T}$$

ou



$$M\left(T-\frac{T}{2}\right)b' = b$$

$$e^{\left(T-\frac{T}{2}\right)A}b' = b$$

$$b' = M\left(-\frac{T}{2}\right)b$$

$$u(\eta) = \frac{M(\eta - T/2)}{T/2} \left(b' - M\left(\frac{T}{2}\right) a\right)$$

$$0 \leq \eta \leq \frac{T}{2}$$

---

4) Uma ideia para encontrar um controle "ótimo" é procurar a $u \in \mathcal{C} = \{u : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ contínua por partes $\}$

Classe de Funções

que minimize

$$\int_0^T |u(\eta)|^2 d\eta \quad \text{(Função custo)}$$

com o vínculo
$x(T) = b$ e $x(0) = a$

ou equivalentemente

$$W = M(T) \int_0^T M(-\eta)\, u(\eta)\, d\eta$$

$$W = x(T) - M(T)\, x(0) = b - M(T)\, a$$

↳ conhecido (dado)

T é dado

O vínculo é $W - M \int_0^T M(-\eta) u(\eta)\, d\eta = \underset{\mathbb{R}^n}{0}$

5) Matematicamente queremos minimizar

$$\Phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$$

$$\Phi(u) = \int_0^T |u(\eta)|\, d\eta$$

com o vínculo

$$\underset{\in \mathbb{R}^n}{\Psi(\eta)} = W - M(T) \int_0^T M(-\eta)\, u(\eta)\, d\eta = 0$$

6) Usaremos multiplicadores de Lagrange

Seja

$$F = \underbrace{\Phi}_{\in \mathbb{R}} - \lambda^T \underbrace{\Psi}_{\in \mathbb{R}}, \quad \underset{\in R^n}{\lambda} \text{ é o multiplicador de Lagrange}$$

7) Dizemos que $\overline{u}$ é ponto crítico de $F(u)$ se $\forall$ função $\delta \in \mathcal{G}$ vale

$$\frac{\partial}{\partial s} F(\bar{u} + s\delta) \Big|_{s=0} = 0$$

$$\underset{\in \mathbb{R}}{s} \longrightarrow \underset{\in R}{F(\bar{u} + s\delta)}$$

8) Portanto

$$\frac{d}{ds} F(\bar{u} + s\delta) = \frac{d}{ds}\left\{ \int_0^T |\bar{u}(\eta) + s\delta(\eta)|^2 \, d\eta - \lambda^T\left(w - \int_0^T M(T-\eta) \overset{B}{\downarrow} (\bar{u}(\eta) + \delta(\eta) s)\, d\eta \right) \right\}$$

$$= 2\int_0^T (\bar{u}(\eta) + s\delta(\eta)) \cdot \delta(\eta)\, d\eta \; +$$

$$+ \lambda^T \int_0^T M(T-\eta) \overset{B}{\downarrow} \delta(\eta)\, d\eta \Bigg|_{s=0}$$

$$= 2\int_0^T \bar{u}(\eta)\delta(\eta)\, d\eta + \int_0^T \lambda^T M(T-\eta) \overset{B}{\downarrow} \delta(\eta)\, d\eta$$

condição de ponto crítico

$$= \int_0^T \left(2\bar{u}(\eta) + \lambda^T M(T-\eta) \overset{B}{\downarrow} \right) \delta(\eta)\, d\eta = 0$$

deve valer $\forall \delta$

$$\Longleftrightarrow \; 2\bar{u}^T(\eta) + \lambda^T M(T-\eta) B = 0$$

$$\bar{u}(\eta)^T = -\frac{\lambda^T}{2} M(T-\eta) B$$

9) Para encontrar λ usamos

$$W - M(T)\int_0^T M(-\eta) B \bar{u}(\eta)\, d\eta = 0$$

$$\bar{u} = -\frac{1}{2} B^T M^T (T-\eta) \lambda \quad (*)$$

Substituindo

$$0 = W + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^T M(T-\eta) B B^T M^T (T-\eta)\, d\eta}_{Q_T} \lambda$$

Q_T = matriz de controlabilidade

$$-2W = Q_T \lambda$$

10)

Se Q_T é invertível ($\det Q_T \neq 0$)

então

$$\lambda = Q_T^{-1}(-2W)$$

e o controle ótimo, pois minimiza $\int_0^T |u(\eta)|^2 d\eta$ com o vínculo $x(0) = a$ e $x(T) = b$ é dado por

$$\boxed{\bar{u}(\eta) \overset{*}{=} B^T M^T(T-\eta) Q_T^{-1} W}$$

onde $W = \underset{x(T)}{b} - M(T)\underset{x(a)}{a}$

η é o tempo que varia