Estado térmico da litosfera subcrustal

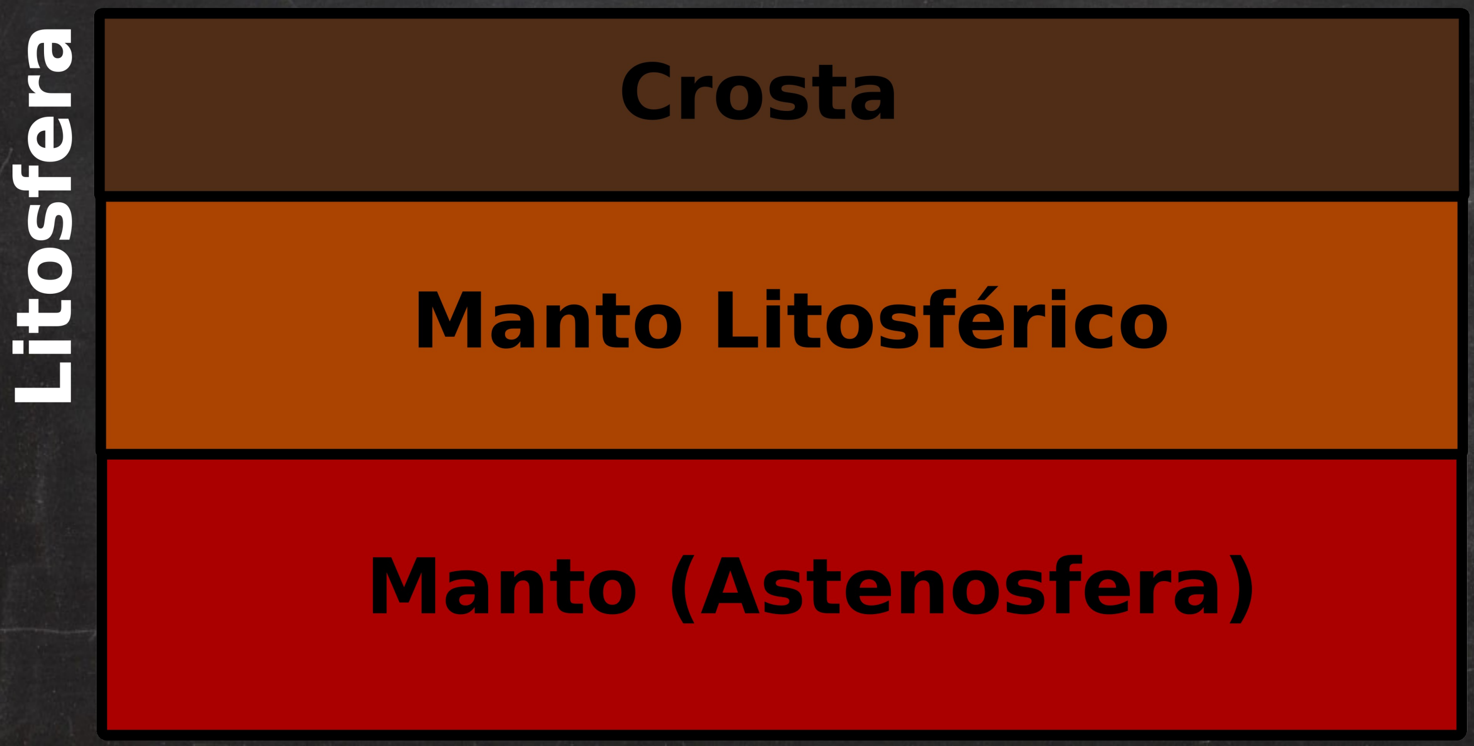
Leonardo Uieda

15 de Outubro de 2010

Observatório Nacional

A litosfera subcrustal

A litosfera subcrustal



A litosfera subcrustal

Como é o regime térmico?

A litosfera subcrustal

✔ Perfil térmico através de xenólitos

A litosfera subcrustal

- ✔ Perfil térmico através de xenólitos
- ✔ Termo-barometria mineral

A litosfera subcrustal

- ✔ Perfil térmico através de xenólitos
- ✔ Termo-barometria mineral
  - ✔ Pressão e temperatura no equilíbrio químico

A litosfera subcrustal

- ✔ Perfil térmico através de xenólitos
- ✔ Termo-barometria mineral
  - ✔ Pressão e temperatura no equilíbrio químico
  - ✔ Clássico = Brey e Kohler (1990)

A litosfera subcrustal

- ✔ Perfil térmico através de xenólitos
- ✔ Termo-barometria mineral
  - ✔ Pressão e temperatura no equilíbrio químico
  - ✔ Clássico = Brey e Kohler (1990)
- ✔ Geotermas não-lineares

A litosfera subcrustal

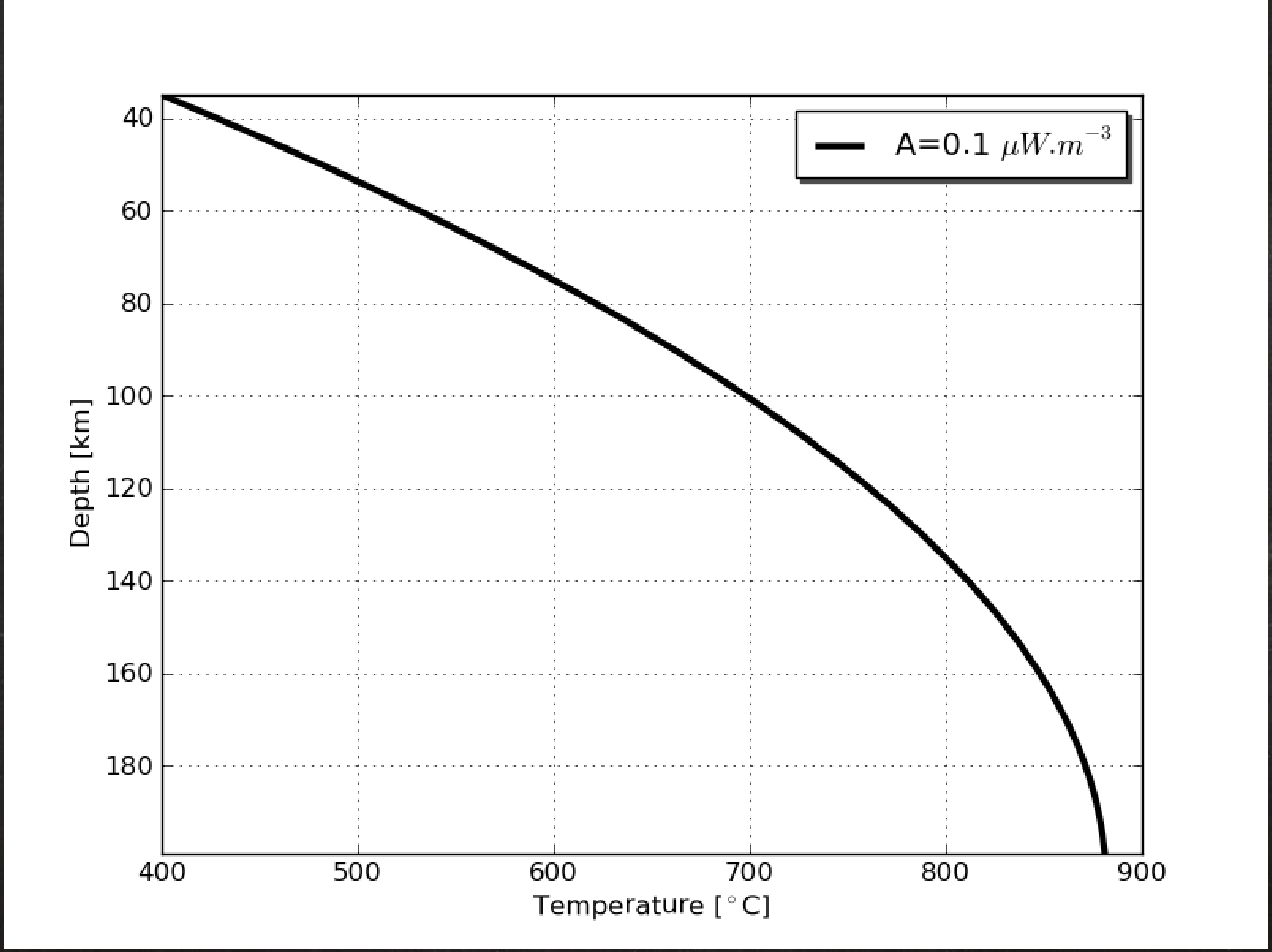
- ✔ Perfil térmico através de xenólitos
- ✔ Termo-barometria mineral
  - ✔ Pressão e temperatura no equilíbrio químico
  - ✔ Clássico = Brey e Kohler (1990)
- ✔ Geotermas não-lineares
  - ✔ Calor radiogênico

A litosfera subcrustal

- ✔ Perfil térmico através de xenólitos
- ✔ Termo-barometria mineral
  - ✔ Pressão e temperatura no equilíbrio químico
  - ✔ Clássico = Brey e Kohler (1990)
- ✔ Geotermas não-lineares
  - ✔ Calor radiogênico
  - ✔ Variação da condutividade com a temperatura

A litosfera subcrustal

Não-linearidade (calor radiogênico)



Ponto de partida

Ponto de partida

- ✔ Equação de difusão (c/ calor radiogênico)

$$\rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} = A + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}\, \bar{\nabla}\, T)$$

Ponto de partida

- Equação de difusão (c/ calor radiogênico)

$$\rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} = A + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}} \bar{\nabla} T)$$

- ρ = densidade

Ponto de partida

- Equação de difusão (c/ calor radiogênico)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = A + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}} \bar{\nabla} T)$$

- ρ = densidade
- $\bar{\bar{\lambda}}$ = condutividade térmica (tensor)

Ponto de partida

- Equação de difusão (c/ calor radiogênico)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = A + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}} \bar{\nabla} T)$$

- ρ = densidade
- $\bar{\bar{\lambda}}$ = condutividade térmica (tensor)
- c = calor específico

Ponto de partida

- Equação de difusão (c/ calor radiogênico)

$$\rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} = A + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}}\, \bar{\nabla}\, T)$$

- ρ = densidade
- $\bar{\bar{\lambda}}$ = condutividade térmica (tensor)
- c = calor específico
- A = geração de calor radiogênico

Assumindo

Assumindo

- ✔ Regime estacionário: $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$

Assumindo

- ✔ Regime estacionário: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

- ✔ Meio isotrópico: $\bar{\bar{\lambda}} = \lambda \bar{\bar{I}}$

Assumindo

- ✔ Regime estacionário: $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$

- ✔ Meio isotrópico: $\bar{\bar{\lambda}} = \lambda \bar{\bar{I}}$

- ✔ Condutividade é função de T: $\lambda = \lambda(T)$

EDP não-linear

EDP não-linear

$$\bar{\nabla}\cdot\left[\lambda\left(T\left(z\right)\right)\bar{\nabla}T\right]=-A$$

EDP não-linear

$$\bar{\nabla} \cdot \left[\lambda\left(T\left(z \right) \right) \bar{\nabla} T \right] = -A$$

Como resolver?

Mudança de variáveis

Mudança de variáveis

$$U(T)=\int_{T_0}^{T}\frac{\lambda(\tau)}{\lambda_0}\,d\tau$$

Mudança de variáveis

- ✔ λ_0 e T_0 em nível de referência z_0

$$U(T)=\int_{T_0}^{T}\frac{\lambda(\tau)}{\lambda_0}\,d\tau$$

Mudança de variáveis

- ✔ λ_0 e T_0 em nível de referência z_0

$$U(T) = \int_{T_0}^{T} \frac{\lambda(\tau)}{\lambda_0} d\tau$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\lambda(T)}{\lambda_0}\frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Mudança de variáveis

- λ_0 e T_0 em nível de referência z_0

$$U(T)=\int_{T_0}^{T}\frac{\lambda(\tau)}{\lambda_0}\,d\tau$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}=\frac{\partial U}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x_i}=\frac{\lambda(T)}{\lambda_0}\frac{\partial T}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}=\frac{\lambda_0}{\lambda(T)}\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

Mudança de variáveis

- ✔ λ_0 e T_0 em nível de referência z_0

$$U(T) = \int_{T_0}^{T} \frac{\lambda(\tau)}{\lambda_0} d\tau$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\lambda(T)}{\lambda_0} \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\lambda_0}{\lambda(T)} \frac{\partial U}{\partial x_i} \Longrightarrow \bar{\nabla} T = \frac{\lambda_0}{\lambda(T)} \bar{\nabla} U$$

Substituindo na EDP...

Substituindo na EDP...

$$\bar{\nabla} \cdot [\lambda(T) \bar{\nabla} T]$$

Substituindo na EDP...

$$\bar{\nabla}\cdot[\lambda(T)\bar{\nabla}T]=\bar{\nabla}\cdot[\lambda(T)\frac{\lambda_0}{\lambda(T)}\bar{\nabla}U]=-A$$

Substituindo na EDP...

$$\bar{\nabla}\cdot[\lambda(T)\bar{\nabla}T]=\bar{\nabla}\cdot[\cancel{\lambda(T)}\frac{\lambda_0}{\cancel{\lambda(T)}}\bar{\nabla}U]=-A$$

Substituindo na EDP...

$$\bar{\nabla} \cdot [\lambda(T)\,\bar{\nabla}\,T] = \bar{\nabla} \cdot [\cancel{\lambda(T)}\,\frac{\lambda_0}{\cancel{\lambda(T)}}\,\bar{\nabla}\,U] = -A$$

$$\lambda_0\,\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}\,U = \lambda_0\,\bar{\nabla}^2\,U = -A$$

Substituindo na EDP...

$$\bar{\nabla}\cdot[\lambda(T)\bar{\nabla}T]=\bar{\nabla}\cdot[\cancel{\lambda(T)}\frac{\lambda_0}{\cancel{\lambda(T)}}\bar{\nabla}U]=-A$$

$$\lambda_0\bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}U=\lambda_0\bar{\nabla}^2U=-A$$

$$\bar{\nabla}^2U=-\frac{A}{\lambda_0}$$

Substituindo na EDP...

$$\bar{\nabla}\cdot[\lambda(T)\bar{\nabla}T]=\bar{\nabla}\cdot[\cancel{\lambda(T)}\frac{\lambda_0}{\cancel{\lambda(T)}}\bar{\nabla}U]=-A$$

$$\lambda_0\bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}U=\lambda_0\bar{\nabla}^2U=-A$$

$$\bar{\nabla}^2U=-\frac{A}{\lambda_0}$$

✔ 2ª ordem

Substituindo na EDP...

$$\bar{\nabla}\cdot[\lambda(T)\bar{\nabla}T]=\bar{\nabla}\cdot[\cancel{\lambda(T)}\frac{\lambda_0}{\cancel{\lambda(T)}}\bar{\nabla}U]=-A$$

$$\lambda_0\bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}U=\lambda_0\bar{\nabla}^2U=-A$$

$$\bar{\nabla}^2U=-\frac{A}{\lambda_0}$$

- ✔ 2ª ordem
- ✔ Linear

Caso 1D

Caso 1D

$$\bar{\nabla}^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{A}{\lambda_0}$$

Caso 1D

$$\bar{\nabla}^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{A}{\lambda_0}$$

Solução:

Caso 1D

$$\bar{\nabla}^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{A}{\lambda_0}$$

Solução:

$$U(z) = a + b\,z - \frac{A}{2\lambda_0} z^2$$

Condições de contorno

Condições de contorno

- ✔ Conhecida temperatura na base da crosta

Condições de contorno

✔ Conhecida temperatura na base da crosta

$$T(z_c) = T_c$$

Condições de contorno

- ✔ Conhecida temperatura na base da crosta

$$T(z_c) = T_c$$

- ✔ Conhecido fluxo na base da crosta

Condições de contorno

- ✔ Conhecida temperatura na base da crosta

$$T(z_c)=T_c$$

- ✔ Conhecido fluxo na base da crosta

$$q(z_c)=\lambda(T_c)\frac{\partial T}{\partial z}(z_c)=q_c$$

Condições de contorno

Considerações adicionais:

Condições de contorno

Considerações adicionais:

- ✔ Variação linear de condutividade

Condições de contorno

Considerações adicionais:

- ✔ Variação linear de condutividade

$$\lambda(T)=\lambda_0(1+B(T-T_0))$$

Condições de contorno

Considerações adicionais:

- ✔ Variação linear de condutividade

$$\lambda(T) = \lambda_0 (1 + B(T - T_0))$$

- ✔ Nível de referência na base da crosta

Condições de contorno

Considerações adicionais:

✔ Variação linear de condutividade

$$\lambda(T) = \lambda_0 (1 + B(T - T_0))$$

✔ Nível de referência na base da crosta

$$z_0 = z_c \qquad \lambda_0 = \lambda_c \qquad T_0 = T_c$$

Condições de contorno

Aplicando a mudança de variáveis:

Condições de contorno

Aplicando a mudança de variáveis:

✔ Temperatura na base da crosta

Condições de contorno

Aplicando a mudança de variáveis:

✔ Temperatura na base da crosta

$$U(z_c) = \int_{T_0=T_c}^{T_c} [1 + B(\tau - T_c)]\, d\tau = 0$$

Condições de contorno

Aplicando a mudança de variáveis:

✔ Temperatura na base da crosta

$$U(z_c) = \int_{T_0 = T_c}^{T_c} [1 + B(\tau - T_c)] d\tau = 0$$

$$U(z_c) = 0$$

Condições de contorno

Aplicando a mudança de variáveis:

- ✔ Fluxo na base da crosta

Condições de contorno

Aplicando a mudança de variáveis:

✔ Fluxo na base da crosta

$$q_c = \lambda(T_c)\frac{\partial T}{\partial z}(z_c) = \lambda(T_c)\frac{\lambda_c}{\lambda(T_c)}\frac{\partial U}{\partial z}(z_c)$$

Condições de contorno

Aplicando a mudança de variáveis:

✔ Fluxo na base da crosta

$$q_c = \lambda(T_c)\frac{\partial T}{\partial z}(z_c) = \cancel{\lambda(T_c)}\frac{\lambda_c}{\cancel{\lambda(T_c)}}\frac{\partial U}{\partial z}(z_c)$$

Condições de contorno

Aplicando a mudança de variáveis:

✔ Fluxo na base da crosta

$$q_c = \lambda(T_c)\frac{\partial T}{\partial z}(z_c) = \cancel{\lambda(T_c)}\frac{\lambda_c}{\cancel{\lambda(T_c)}}\frac{\partial U}{\partial z}(z_c)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(z_c) = \frac{q_c}{\lambda_c}$$

Condições de contorno

Voltando na solução:

$$U(z) = a + bz - \frac{A}{2\lambda_c} z^2$$

Condições de contorno

Voltando na solução:

$$U(z) = a + b\,z - \frac{A}{2\lambda_c} z^2$$

$$U(z_c) = 0$$

Condições de contorno

Voltando na solução:

$$U(z) = a + b\,z - \frac{A}{2\lambda_c} z^2$$

$$U(z_c) = 0$$

$$U(z) = 0 + b(z - z_c) - \frac{A}{2\lambda_c}(z - z_c)^2$$

Condições de contorno

Voltando na solução:

$$U(z)=b(z-z_c)-\frac{A}{2\lambda_c}(z-z_c)^2$$

Condições de contorno

Voltando na solução:

$$U(z)=b(z-z_c)-\frac{A}{2\lambda_c}(z-z_c)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(z_c)=b-\frac{A}{\lambda_c}(z_c-z_c)=\frac{q_c}{\lambda_c}$$

Condições de contorno

Voltando na solução:

$$U(z)=b(z-z_c)-\frac{A}{2\lambda_c}(z-z_c)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(z_c)=b-\frac{A}{\lambda_c}\cancel{(z_c-z_c)}=\frac{q_c}{\lambda_c}$$

Condições de contorno

Voltando na solução:

$$U(z) = b(z - z_c) - \frac{A}{2\lambda_c}(z - z_c)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(z_c) = b - \cancel{\frac{A}{\lambda_c}(z_c - z_c)} = \frac{q_c}{\lambda_c}$$

$$b = \frac{q_c}{\lambda_c}$$

Solução da EDP linear

Solução da EDP linear

$$U(z)=\frac{q_c}{\lambda_c}(z-z_c)-\frac{A}{2\lambda_0}(z-z_c)^2$$

Solução da EDP linear

$$U(z) = \frac{q_c}{\lambda_c}(z - z_c) - \frac{A}{2\lambda_0}(z - z_c)^2$$

Desfazer a mudança de variáveis

Solução da EDP não-linear

Solução da EDP não-linear

$$U(z) = \int_{T_c}^{T(z)} \left[1 + B(\tau - T_c)\right] d\tau$$

Solução da EDP não-linear

$$U(z) = \int_{T_c}^{T(z)} [1 + B(\tau - T_c)] d\tau$$

$$U(z) = \int_{T_c}^{T(z)} 1 d\tau + \int_{T_c}^{T(z)} B(\tau - T_c) d\tau$$

Solução da EDP não-linear

$$U(z) = \int_{T_c}^{T(z)} [1 + B(\tau - T_c)]\, d\tau$$

$$U(z) = \int_{T_c}^{T(z)} 1\, d\tau + \int_{T_c}^{T(z)} B(\tau - T_c)\, d\tau$$

$$U(z) = [T(z) - T_c] + \frac{B}{2}[T(z) - T_c]^2$$

Solução da EDP não-linear

$$U(z) = [T(z) - T_c] + \frac{B}{2}[T(z) - T_c]^2$$

Solução da EDP não-linear

$$U(z)=[T(z)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z)-T_c]^2$$

$$U(z)=\frac{q_c}{\lambda_c}(z-z_c)-\frac{A}{2\lambda_c}(z-z_c)^2$$

Solução da EDP não-linear

$$U(z)=[T(z)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z)-T_c]^2$$

$$U(z)=\frac{q_c}{\lambda_c}(z-z_c)-\frac{A}{2\lambda_c}(z-z_c)^2$$

$$\frac{q_c}{\lambda_c}(z-z_c)-\frac{A}{2\lambda_c}(z-z_c)^2=[T(z)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z)-T_c]^2$$

Solução da EDP não-linear

$$[T(z)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z-z_c)^2=0$$

Solução da EDP não-linear

$$[T(z)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z-z_c)^2=0$$

- ✔ Dados medidos (termobarometria mineral)

Solução da EDP não-linear

$$[T(z)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z-z_c)^2=0$$

- ✔ Dados medidos (termobarometria mineral)
- ✔ Parâmetros físicos

Solução da EDP não-linear

$$[T(z)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z-z_c)^2=0$$

- ✔ Dados medidos (termobarometria mineral)
- ✔ Parâmetros físicos
- ✔ A equação acima é o modelo direto

Solução da EDP não-linear

$$[T(z)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z-z_c)^2=0$$

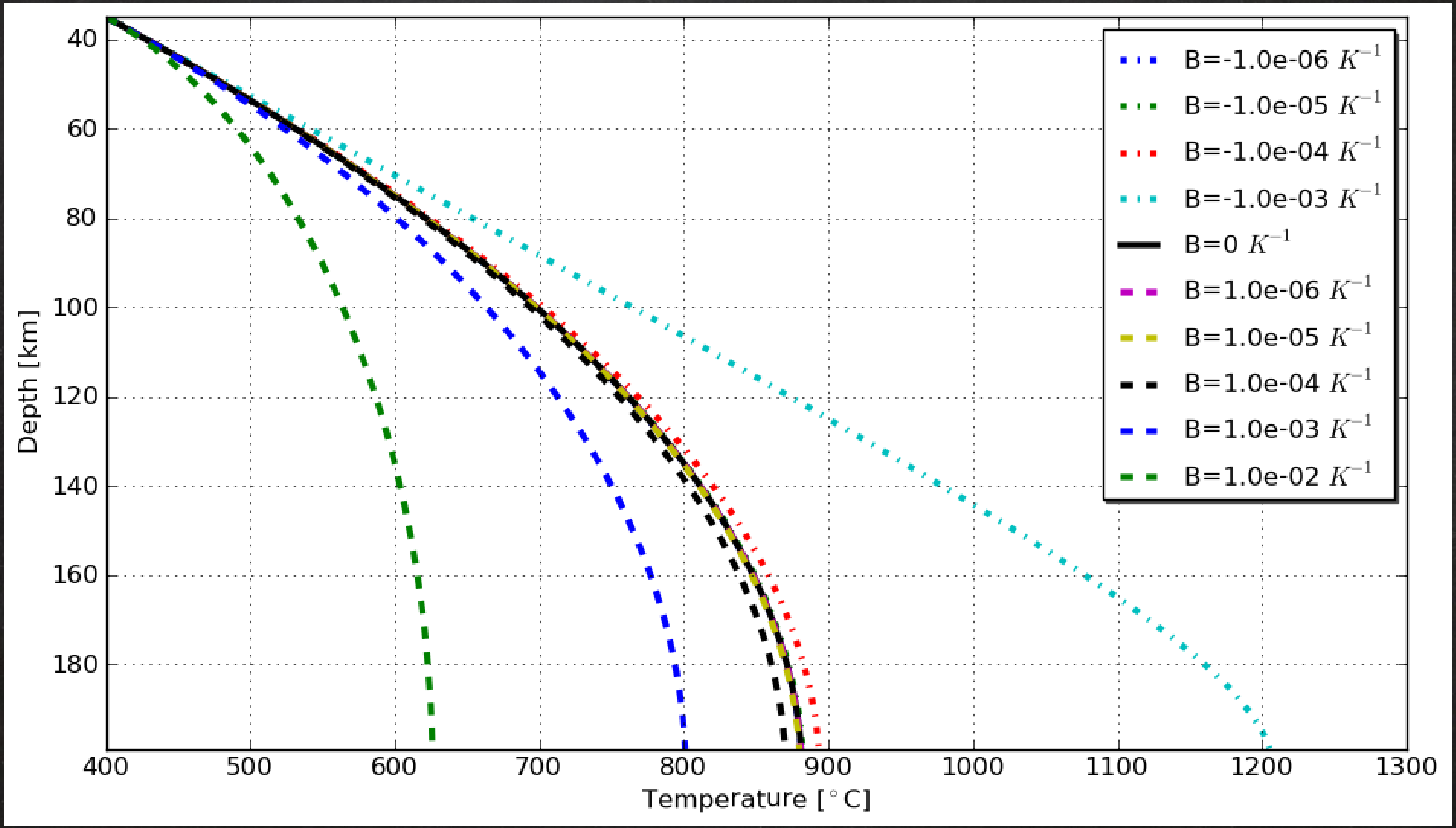
- ✔ Dados medidos (termobarometria mineral)
- ✔ Parâmetros físicos
- ✔ A equação acima é o modelo direto

Fazer inversão dos dados

para estimar os parâmetros

Solução da EDP não-linear

Exemplo: efeito da variação da condutividade



Modelagem inversa

Modelagem inversa

- ✔ Dados em vários zs

Modelagem inversa

- ✔ Dados em vários zs

$$[T(z_1)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z_1)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z_1-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z_1-z_c)^2=0$$

Modelagem inversa

- ✔ Dados em vários zs

$$[T(z_1)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z_1)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z_1-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z_1-z_c)^2=0$$

$$[T(z_2)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z_2)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z_2-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z_2-z_c)^2=0$$

Modelagem inversa

- ✔ Dados em vários zs

$$[T(z_1)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z_1)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z_1-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z_1-z_c)^2=0$$

$$[T(z_2)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z_2)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z_2-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z_2-z_c)^2=0$$

$$[T(z_3)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z_3)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z_3-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z_3-z_c)^2=0$$

Modelagem inversa

- ✔ Dados em vários zs

$$[T(z_1)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z_1)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z_1-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z_1-z_c)^2=0$$

$$[T(z_2)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z_2)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z_2-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z_2-z_c)^2=0$$

$$[T(z_3)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z_3)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z_3-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z_3-z_c)^2=0$$

$$\vdots$$

$$[T(z_N)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z_N)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z_N-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z_N-z_c)^2=0$$

Modelagem inversa

- ✔ Agrupar dados em um vetor

Modelagem inversa

- ✔ Agrupar dados em um vetor

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} T(z_1) \\ T(z_2) \\ T(z_3) \\ \vdots \\ T(z_N) \end{bmatrix}_{N \times 1}$$

Modelagem inversa

- ✔ Agrupar dados em um vetor
- ✔ ... e os parâmetros também

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} T(z_1) \\ T(z_2) \\ T(z_3) \\ \vdots \\ T(z_N) \end{bmatrix}_{N \times 1}$$

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} q_c \\ A \\ B \end{bmatrix}_{(M=3) \times 1}$$

Modelagem inversa

$$\left[T(z_i)-T_c\right]+\frac{B}{2}\left[T(z_i)-T_c\right]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z_i-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z_i-z_c)^2=0$$

Modelagem inversa

$$\boxed{[T(z_i)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z_i)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z_i-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z_i-z_c)^2}=0$$

$$\Downarrow$$

$$f_i(d_i,\bar{p})$$

- ✔ Função dos dados dados e parâmetros

Modelagem inversa

$$\boxed{\left[T(z_i)-T_c\right]+\frac{B}{2}\left[T(z_i)-T_c\right]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z_i-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z_i-z_c)^2}=0$$

$$\Downarrow$$

$$f_i(d_i,\bar{p})$$

- ✔ Função dos dados dados e parâmetros
- ✔ Modelo implícito

Modelagem inversa

$$\boxed{[T(z_i)-T_c]+\frac{B}{2}[T(z_i)-T_c]^2-\frac{q_c}{\lambda_c}(z_i-z_c)+\frac{A}{2\lambda_c}(z_i-z_c)^2}=0$$

$$\Downarrow$$

$$f_i(d_i,\bar{p})$$

- ✔ Função dos dados dados e parâmetros
- ✔ Modelo implícito
- ✔ Não pode ser escrito como: $d_i = f_i(\bar{p})$

Modelagem inversa

Agrupar as funções em um vetor:

$$\bar{f}(\bar{d}, \bar{p}) = \begin{bmatrix} f_1(d_1, \bar{p}) \\ f_2(d_2, \bar{p}) \\ f_3(d_3, \bar{p}) \\ \vdots \\ f_N(d_N, \bar{p}) \end{bmatrix}_{N \times 1}$$

Modelagem inversa

Resolver inversão com Mínimos Quadrados

Modelagem inversa

Resolver inversão com Mínimos Quadrados

- ✔ Necessário linearizar o modelo

Modelagem inversa

Resolver inversão com Mínimos Quadrados

- ✔ Necessário linearizar o modelo
- ✔ Série de Taylor em torno:

Modelagem inversa

Resolver inversão com Mínimos Quadrados

- ✔ Necessário linearizar o modelo
- ✔ Série de Taylor em torno:
  - ✔ Dados medidos: $\bar{d}_0$
  - ✔ Estimativa inicial: $\bar{p}_0$

Modelagem inversa

Resolver inversão com Mínimos Quadrados

- ✔ Necessário linearizar o modelo
- ✔ Série de Taylor em torno:
  - ✔ Dados medidos: $\bar{d}_0$
  - ✔ Estimativa inicial: $\bar{p}_0$
- ✔ Resolver iterativamente

Modelagem inversa

Resolver inversão com Mínimos Quadrados

- ✔ Necessário linearizar o modelo
- ✔ Série de Taylor em torno:
  - ✔ Dados medidos: $\bar{d}_0$
  - ✔ Estimativa inicial: $\bar{p}_0$
- ✔ Resolver iterativamente
- ✔ Ajuste combinado (Vaniček & Krakiwsky, 1986)

Modelagem inversa

- ✔ Linearizar o modelo

Modelagem inversa

✔ Linearizar o modelo

$$\bar{f}(\bar{d},\bar{p}) \approx \bar{f}(\bar{d}_0,\bar{p}_0) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)[\bar{p}-\bar{p}_0] + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{d}}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)[\bar{d}-\bar{d}_0]$$

Modelagem inversa

✔ Linearizar o modelo

$$\bar{f}(\bar{d},\bar{p}) \approx \boxed{\bar{f}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)[\bar{p}-\bar{p}_0] + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{d}}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)[\bar{d}-\bar{d}_0]$$

$$\bar{f}_0$$

Modelagem inversa

✔ Linearizar o modelo

$$\bar{f}(\bar{d},\bar{p}) \approx \underbrace{\boxed{\bar{f}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)}}_{\bar{f}_0} + \underbrace{\boxed{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)}}_{\bar{\bar{A}}}[\bar{p}-\bar{p}_0] + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{d}}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)[\bar{d}-\bar{d}_0]$$

Modelagem inversa

- ✔ Linearizar o modelo

$$\bar{f}(\bar{d},\bar{p}) \approx \underbrace{\boxed{\bar{f}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)}}_{\bar{f}_0} + \underbrace{\boxed{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)}}_{\bar{\bar{A}}}\,\underbrace{\boxed{[\bar{p}-\bar{p}_0]}}_{\bar{\delta}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{d}}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)[\bar{d}-\bar{d}_0]$$

Modelagem inversa

- ✔ Linearizar o modelo

$$\bar{f}(\bar{d},\bar{p}) \approx \underbrace{\boxed{\bar{f}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)}}_{\bar{f}_0} + \underbrace{\boxed{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)}}_{\bar{\bar{A}}} \underbrace{\boxed{\left[\bar{p}-\bar{p}_0\right]}}_{\bar{\delta}} + \underbrace{\boxed{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{d}}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)}}_{\bar{\bar{B}}} \left[\bar{d}-\bar{d}_0\right]$$

Modelagem inversa

✔ Linearizar o modelo

$$\bar{f}(\bar{d},\bar{p}) \approx \underbrace{\bar{f}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)}_{\bar{f}_0} + \underbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)}_{\bar{\bar{A}}} \underbrace{\left[\bar{p}-\bar{p}_0\right]}_{\bar{\delta}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{d}}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)}_{\bar{\bar{B}}} \underbrace{\left[\bar{d}-\bar{d}_0\right]}_{\bar{v}}$$

Modelagem inversa

✔ Linearizar o modelo

$$\bar{f}(\bar{d},\bar{p}) \approx \underbrace{\bar{f}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)}_{\bar{f}_0} + \underbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)}_{\bar{\bar{A}}} \underbrace{\left[\bar{p}-\bar{p}_0\right]}_{\bar{\delta}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{d}}(\bar{d}_0,\bar{p}_0)}_{\bar{\bar{B}}} \underbrace{\left[\bar{d}-\bar{d}_0\right]}_{\bar{v}}$$

$$\bar{f}_0 + \bar{\bar{A}}\,\bar{\delta} + \bar{\bar{B}}\,\bar{v} = \bar{0}$$

Modelagem inversa

Nomenclatura:

Modelagem inversa

Nomenclatura:

- ✔ $\bar{\bar{A}}$ = Jacobiana de f em relação ao parâmetros

Modelagem inversa

Nomenclatura:

- ✔ $\bar{\bar{A}}$ = Jacobiana de f em relação ao parâmetros
- ✔ $\bar{\delta}$ = correção a estimativa inicial $\bar{p}_0$

Modelagem inversa

Nomenclatura:

- ✔ $\bar{\bar{A}}$ = Jacobiana de f em relação ao parâmetros
- ✔ $\bar{\delta}$ = correção a estimativa inicial $\bar{p}_0$
- ✔ $\bar{\bar{B}}$ = Jacobiana de f em relação aos dados

Modelagem inversa

Nomenclatura:

- ✔ $\bar{\bar{A}}$ = Jacobiana de f em relação ao parâmetros
- ✔ $\bar{\delta}$ = correção a estimativa inicial $\bar{p}_0$
- ✔ $\bar{\bar{B}}$ = Jacobiana de f em relação aos dados
- ✔ $\bar{v}$ = vetor de resíduos

  Diferença entre dados medidos ($\bar{d}_0$)

  e dados ajustados ($\bar{d}$)

Modelagem inversa

Jacobiana de f em relação ao parâmetros:

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial p_2}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial p_M}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial p_2}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial p_M}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial p_1}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) & \frac{\partial f_N}{\partial p_2}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial p_M}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) \end{bmatrix}_{N \times M}$$

Modelagem inversa

Jacobiana de f em relação ao dados:

$$\bar{\bar{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial d_1}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial d_2}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial d_N}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial d_1}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial d_2}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial d_N}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial d_1}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) & \frac{\partial f_N}{\partial d_2}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial d_N}(\bar{d}_0, \bar{p}_0) \end{bmatrix}_{N \times N}$$

Modelagem inversa

Solução de Mínimos Quadrados:

Modelagem inversa

Solução de Mínimos Quadrados:

Achar $\hat{\bar{p}}$ que minimiza $\phi = \bar{v}^T \bar{v}$

Modelagem inversa

Solução de Mínimos Quadrados:

Achar $\hat{p}$ que minimiza $\boxed{\phi = \bar{v}^T \bar{v}}$

Função Objetivo

Modelagem inversa

Solução de Mínimos Quadrados:

Achar $\hat{\bar{p}}$ que minimiza $\boxed{\phi = \bar{v}^T \, \bar{v}}$

Função Objetivo

- ✔ Norma quadrática dos resíduos
- ✔ Solução que melhor se "encaixa" aos dados

Modelagem inversa

Solução de Mínimos Quadrados:

$$min \quad \phi = \bar{v}^T \bar{v}$$

$$sujeito \ a \quad \bar{f}_0 + \bar{\bar{A}}\,\bar{\delta} + \bar{\bar{B}}\,\bar{v} = \bar{0}$$

Modelagem inversa

Solução de Mínimos Quadrados:

$$min \quad \phi = \bar{v}^T \bar{v}$$

$$sujeito \ a \quad \boxed{\bar{f}_0 + \bar{\bar{A}}\,\bar{\delta} + \bar{\bar{B}}\,\bar{v} = \bar{0}} \rightarrow$$

Modelo matemático linearizado

Modelagem inversa

Solução de Mínimos Quadrados:

$$min \quad \phi = \bar{v}^T \bar{v}$$

$$sujeito \ a \ \boxed{\bar{f}_0 + \bar{\bar{A}}\,\bar{\delta} + \bar{\bar{B}}\,\bar{v} = \bar{0}} \rightarrow$$

Modelo matemático linearizado

Resulta em

$$\bar{\delta} = -[\bar{\bar{A}}^T (\bar{\bar{B}}\,\bar{\bar{B}}^T)^{-1} \bar{\bar{A}}]^{-1} \bar{\bar{A}}^T (\bar{\bar{B}}\,\bar{\bar{B}}^T)^{-1} \bar{f}_0$$

Modelagem inversa

Solução de Mínimos Quadrados:

Processo iterativo:

Modelagem inversa

Solução de Mínimos Quadrados:

Processo iterativo:

- ✔ Estimativa inicial $\bar{p}_0$

Modelagem inversa

Solução de Mínimos Quadrados:

Processo iterativo:

- ✔ Estimativa inicial $\bar{p}_0$
- ✔ Calcular $\bar{\delta}$

Modelagem inversa

Solução de Mínimos Quadrados:

Processo iterativo:

- ✔ Estimativa inicial $\bar{p}_0$
- ✔ Calcular $\bar{\delta}$
- ✔ Atualizar $\bar{p}_{k+1} = \bar{p}_k + \bar{\delta}$

Modelagem inversa

Solução de Mínimos Quadrados:

Processo iterativo:

- ✔ Estimativa inicial $\bar{p}_0$
- ✔ Calcular $\bar{\delta}$
- ✔ Atualizar $\bar{p}_{k+1} = \bar{p}_k + \bar{\delta}$
- ✔ Repete até ϕ não diminuir mais

Modelagem inversa

Quem são $\bar{\bar{A}}$ e $\bar{\bar{B}}$?

Modelagem inversa

Quem são $\bar{\bar{A}}$ e $\bar{\bar{B}}$?

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_c} & \frac{\partial f_1}{\partial A} & \frac{\partial f_1}{\partial B} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_c} & \frac{\partial f_2}{\partial A} & \frac{\partial f_2}{\partial B} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial q_c} & \frac{\partial f_N}{\partial A} & \frac{\partial f_N}{\partial B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_c - z_1}{\lambda_c} & \frac{z_1 - z_c}{2\lambda_c} & \frac{(T_1 - T_c)^2}{2} \\ \frac{z_c - z_2}{\lambda_c} & \frac{z_2 - z_c}{2\lambda_c} & \frac{(T_2 - T_c)^2}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{z_c - z_N}{\lambda_c} & \frac{z_N - z_c}{2\lambda_c} & \frac{(T_N - T_c)^2}{2} \end{bmatrix}$$

Modelagem inversa

Quem são $\bar{\bar{A}}$ e $\bar{\bar{B}}$?

$$\bar{\bar{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial d_1} & \frac{\partial f_1}{\partial d_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial d_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial d_1} & \frac{\partial f_2}{\partial d_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial d_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial d_1} & \frac{\partial f_1}{\partial d_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial d_N} \end{bmatrix}$$

Modelagem inversa

Quem são $\bar{\bar{A}}$ e $\bar{\bar{B}}$?

$$\bar{\bar{B}} = \begin{bmatrix} 1+B(T_1-T_c) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+B(T_2-T_c) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+B(T_N-T_c) \end{bmatrix}$$

Modelos sintéticos

Modelos sintéticos

- ✔ Testar eficácia do método

Modelos sintéticos

- ✔ Testar eficácia do método
- ✔ Ambiente controlado

Modelos sintéticos

- ✔ Testar eficácia do método
- ✔ Ambiente controlado
- ✔ Conheço o resultado

Modelos sintéticos

- ✔ Testar eficácia do método
- ✔ Ambiente controlado
- ✔ Conheço o resultado
- ✔ Verificar limitações

Modelos sintéticos

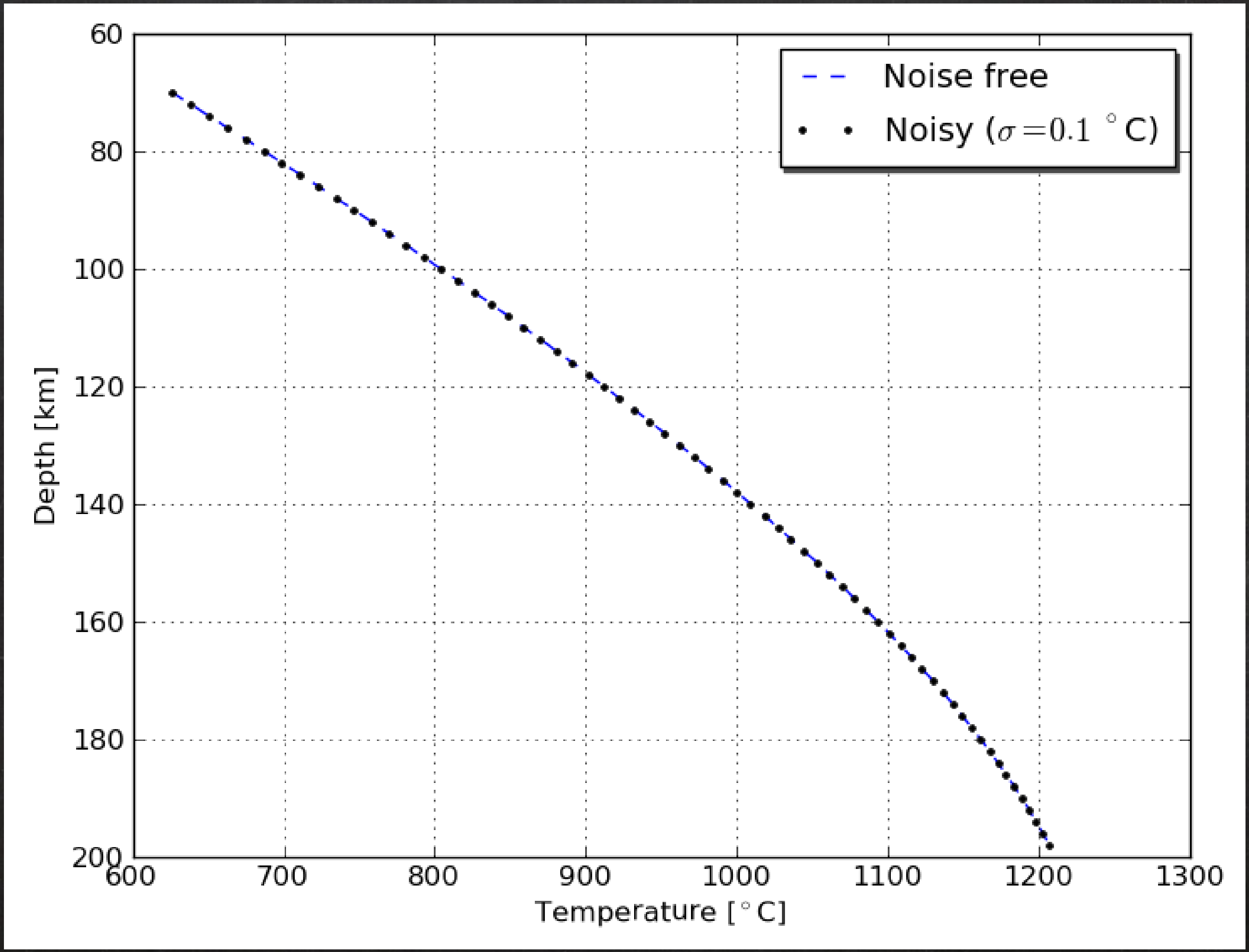
Parâmetros do modelo:

- ✔ $A = 0.1\ \mu W.m^{-3}$
- ✔ $B = -0.0005\ K^{-1}$
- ✔ $q_c = 20\ mW.m^{-2}$
- ✔ $z_c = 35\ km$
- ✔ $T_c = 400\ ^\circ C$
- ✔ $\lambda_c = 3.0\ W.m^{-1}.K^{-1}$

Compatíveis com Russell *et al.* (2001)

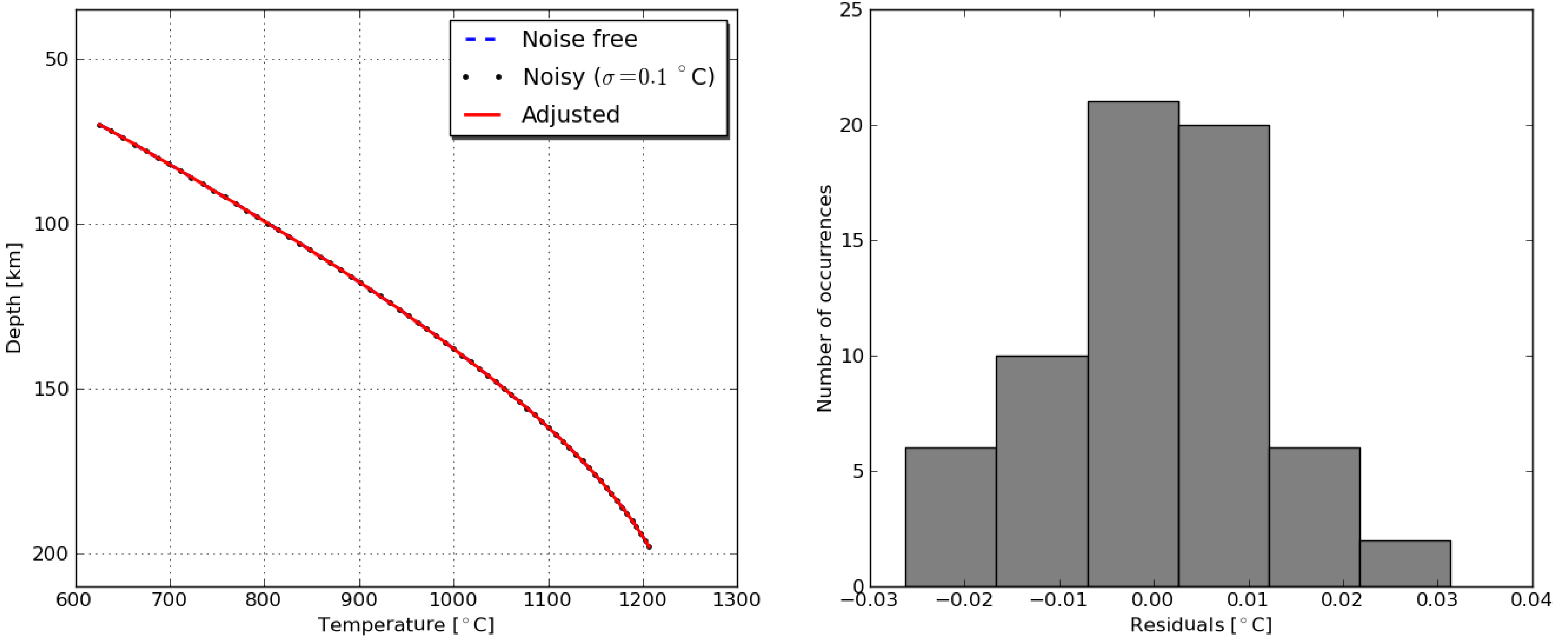
Modelos sintéticos

Com erro pequeno ($\sigma = 0.1\ ^\circ C$)



Modelos sintéticos

Com erro pequeno ($\sigma = 0.1\ ^\circ C$)



Modelos sintéticos

Verdadeiro:

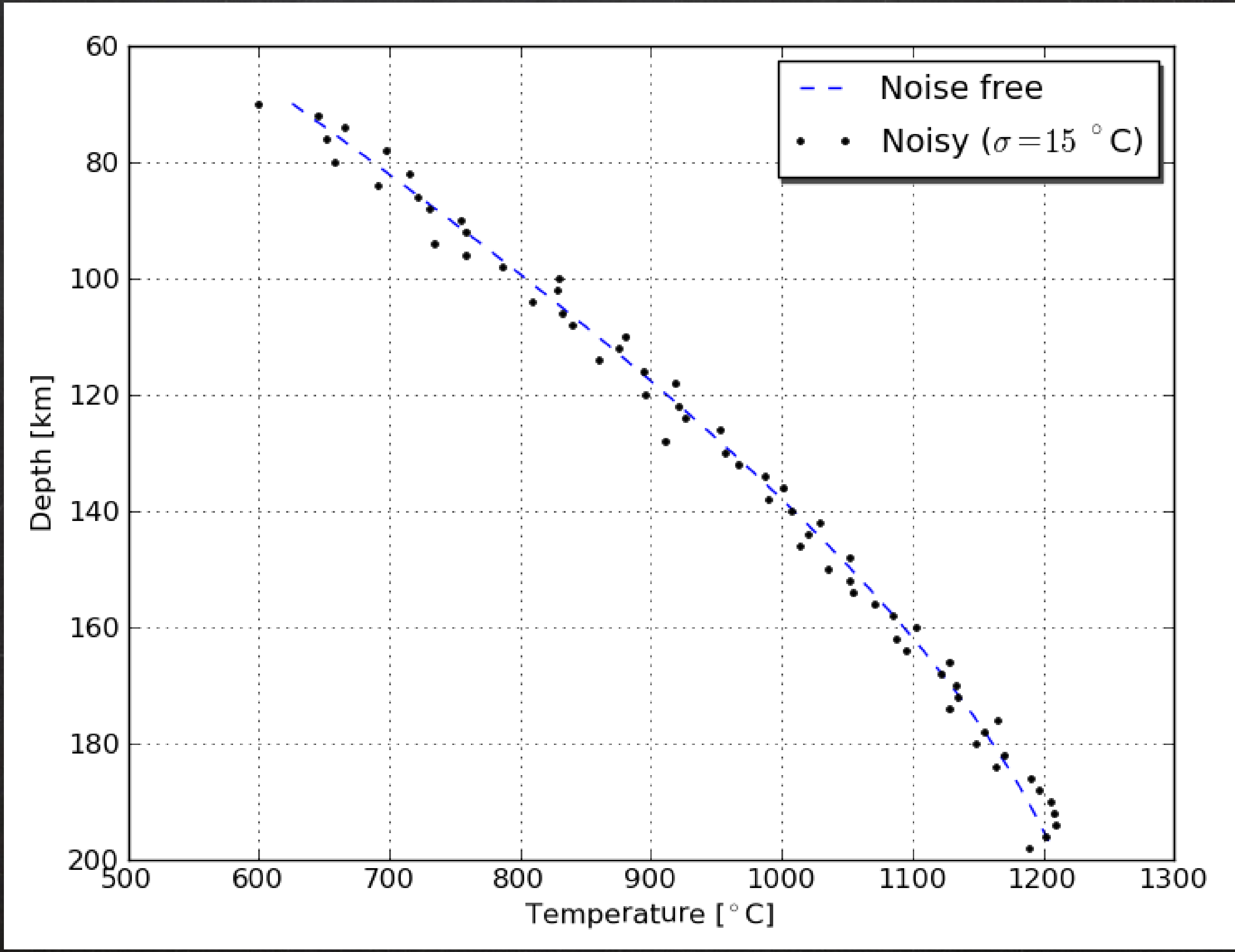
- ✔ $A = 0.1\ \mu W.m^{-3}$
- ✔ $B = -50\ 10^{-5}\, K^{-1}$
- ✔ $q_c = 20\ mW.m^{-2}$

Inversão:

- ✔ $A = 0.1000 \pm 0.0010\ \mu W.m^{-3}$
- ✔ $B = -50.0 \pm 4.0\ 10^{-5}\, K^{-1}$
- ✔ $q_c = 20.00 \pm 0.11\ mW.m^{-2}$

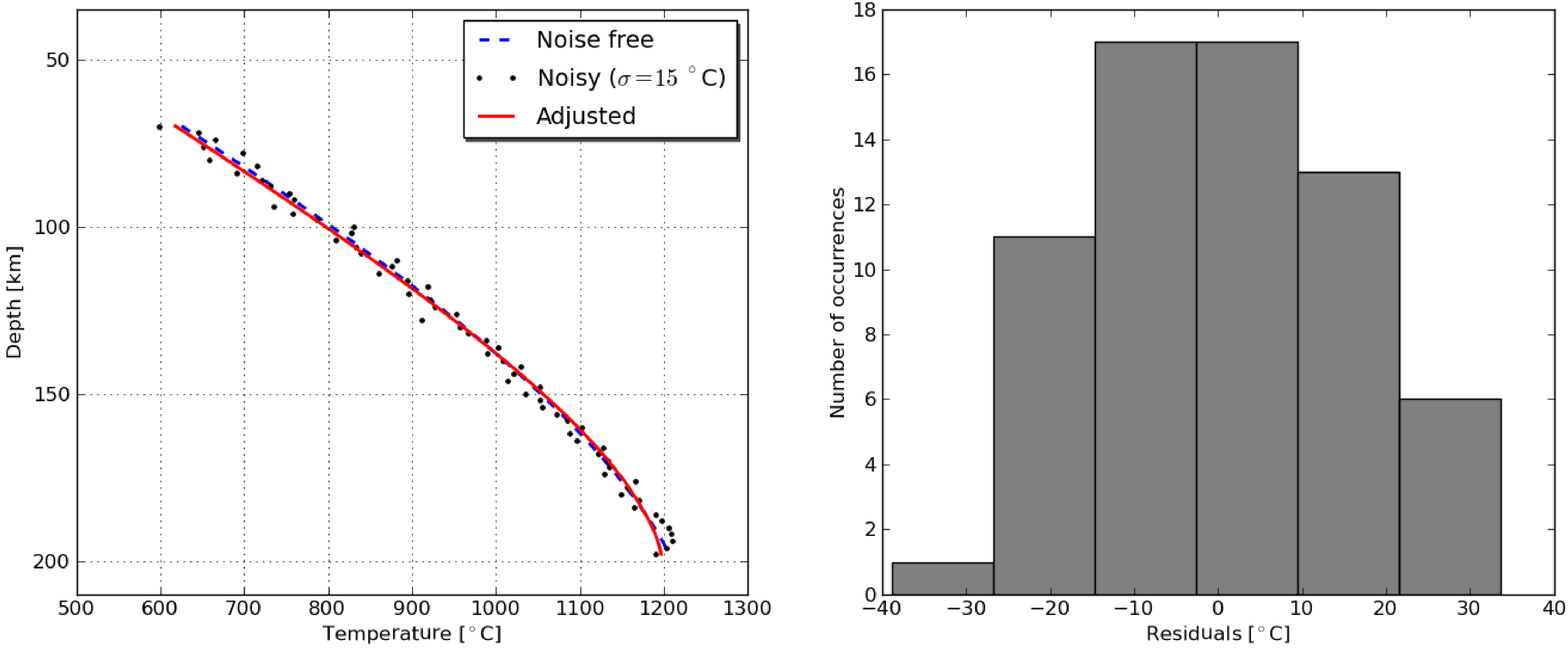
Modelos sintéticos

Com erro grande ($\sigma = 15\ ^\circ C$)



Modelos sintéticos

Com erro grande ($\sigma = 15\ ^\circ C$)



Modelos sintéticos

Verdadeiro:

- ✔ $A = 0.1\ \mu W.m^{-3}$
- ✔ $B = -50\ 10^{-5}\ K^{-1}$
- ✔ $q_c = 20\ mW.m^{-2}$

Inversão:

- ✔ $A = 0.11 \pm 4.1\ \mu W.m^{-3}$
- ✔ $B = -78 \pm 7700\ 10^{-5}\ K^{-1}$
- ✔ $q_c = 19 \pm 220\ mW.m^{-2}$

Modelos sintéticos

Verdadeiro:

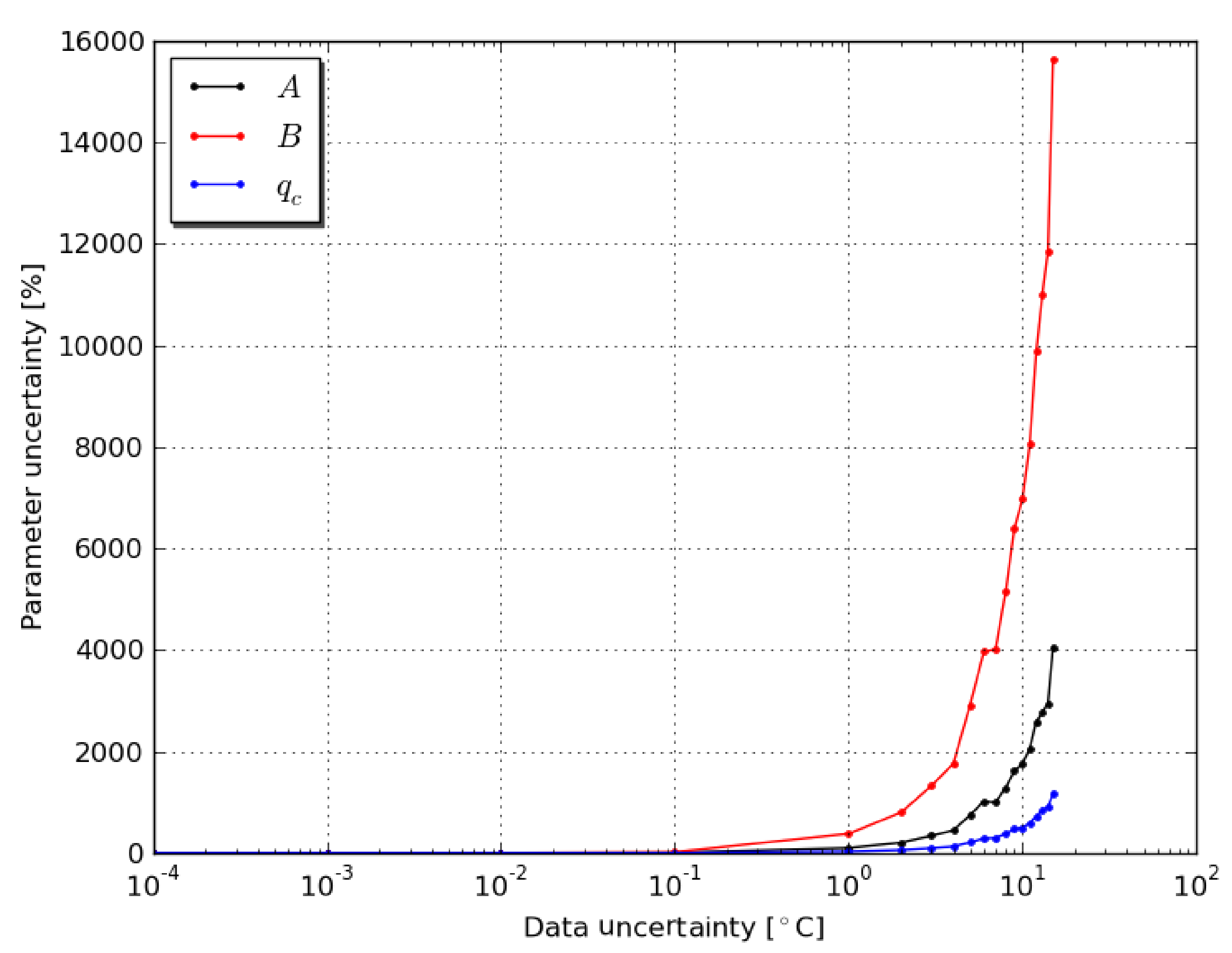
- ✔ $A = 0.1\ \mu W.m^{-3}$
- ✔ $B = -50\ 10^{-5}\ K^{-1}$
- ✔ $q_c = 20\ mW.m^{-2}$

Inversão:

- ✔ $A = 0.11 \pm 4.1\ \mu W.m^{-3}$
- ✔ $B = -78 \pm 7700\ 10^{-5}\ K^{-1}$
- ✔ $q_c = 19 \pm 220\ mW.m^{-2}$

Muito sensível a incerteza dos dados

Modelos sintéticos



Resultado de diversas inversões

Conclusões

Conclusões

- ✔ Grande incerteza nos dados...

Conclusões

- ✔ Grande incerteza nos dados...
- ✔ ...maior ainda nos parâmetros

Conclusões

- ✔ Grande incerteza nos dados...
- ✔ ...maior ainda nos parâmetros
- ✔ Problema mal posto

Conclusões

- ✔ Grande incerteza nos dados...
- ✔ ...maior ainda nos parâmetros
- ✔ Problema mal posto
  - ✔ Necessita de vínculos

Conclusões

- ✔ Grande incerteza nos dados...
- ✔ ...maior ainda nos parâmetros
- ✔ Problema mal posto
  - ✔ Necessita de vínculos
  - ✔ Informação *a priori* sobre os parâmetros

Conclusões

- ✔ Grande incerteza nos dados...
- ✔ ...maior ainda nos parâmetros
- ✔ Problema mal posto
  - ✔ Necessita de vínculos
  - ✔ Informação a priori sobre os parâmetros
    - ✔ Regularização
    - ✔ Vínculos de igualdade
    - ✔ etc