数学实验：第七次作业

计算机系　计 73　2017011620　李家昊

2020 年 4 月 27 日

1　实验目的

- 练习建立实际问题的整数规划模型。
- 掌握用 LINGO 软件求解整数规划问题。

2　问题求解

2.1　Chap10-Ex8 服务员聘用（应用题）

2.1.1　问题分析

题目给定储蓄所各时段的服务员数量要求，全时服务员和半时服务员的每日报酬和工作时间，需要确定聘用方案，这是一个整数规划问题。

2.1.2　模型假设

为了简化实际情况，模型基于以下假设，

1. 总收益与服务员数量无关。
2. 各时段的人流分布稳定，未来的人流分布与经验数据相差不大。

2.1.3　模型建立

半时服务员不超过 3 名时　在全时服务员中，设 12 时到 1 时午餐的人数为 x_1，1 时到 2 时午餐的人数为 x_2，在半时服务员中，设 9 时到 1 时工作的人数为 y_1，10 时到 2 时工作的人数为 y_2，11 时到 3 时工作的人数为 y_3，12 时到 4 时工作的人数为 y_4，1 时到 5 时工作的人数为 y_5，则各种服务员在各时段的工作时间表如表 1所示。

表 1: 各种服务员在各时段的工作时间表

	$9\sim10$	$10\sim11$	$11\sim12$	$12\sim1$	$1\sim2$	$2\sim3$	$3\sim4$	$4\sim5$
x_1	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
x_2	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓
y_1	✓	✓	✓	✓				
y_2		✓	✓	✓	✓			
y_3			✓	✓	✓	✓		
y_4				✓	✓	✓	✓	
y_5					✓	✓	✓	✓

将工作时间表记为矩阵 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{7\times8}$，其中符号✓对应数值 1，空白位置对应数值 0。记各种服务员的聘用人数为 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)^T$，各时段服务员需求量为 $\mathbf{b}=(4,3,4,6,5,6,8,8)^T$，则需求量约束可表示如下，注意这里的 $\geq$ 符号表示按分量比较，

$$\mathbf{A}^T\mathbf{x}\geq\mathbf{b} \tag{1}$$

半时服务员的最大数量约束为，

$$\sum_{i=1}^{5}y_i\leq 3 \tag{2}$$

还需要加上非负整数约束，

$$\mathbf{x}\in\mathbb{N}^7 \tag{3}$$

在此基础上，需要最小化每日人力成本 f，

$$\min f=100(x_1+x_2)+40(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5) \tag{4}$$

这就构成了一个整数规划模型，目标函数为方程 (4)，决策变量为 $\mathbf{x}$，约束条件为方程 (1)，方程 (2) 和方程 (3)。

不能雇佣半时服务员时 只需把半时服务员的约束条件方程 (2) 修改为，

$$y_i=0,\quad i=1,2,3,4,5 \tag{5}$$

此时，目标函数为方程 (4)，决策变量为 $\mathbf{x}$，约束条件为方程 (1)，方程 (5) 和方程 (3)。

半时服务员数量没有限制时 只需把半时服务员的约束条件方程 (2) 去掉即可。此时，目标函数为方程 (4)，决策变量为 $\mathbf{x}$，约束条件为方程 (1) 和方程 (3)。

2.1.4 算法设计

对于该整数规划模型，可采用 LINGO 求解，对应的 LINGO 模型类别为 PILP (Pure Integer Linear Program)，求解方法为分支定界法 (B-and-B)。

2.1.5 程序

请参见附录4.1。

2.1.6 计算结果

半时服务员不超过 3 名时　LINGO 经过 19 次迭代，求得全局最优解，得到总人力成本 f 的最小值为 820 元，各决策变量的最优值为，

$$x_1 = 3,\quad x_2 = 4,\quad y_1 = 0,\quad y_2 = 2,\quad y_3 = 0,\quad y_4 = 0,\quad y_5 = 1 \tag{6}$$

不能雇佣半时服务员时　LINGO 经过 0 次迭代，求得全局最优解，得到总人力成本 f 的最小值为 1100 元，各决策变量的最优值为，

$$x_1 = 5,\quad x_2 = 6,\quad y_1 = 0,\quad y_2 = 0,\quad y_3 = 0,\quad y_4 = 0,\quad y_5 = 0 \tag{7}$$

此时，相比于默认情况，每天需要增加的费用为 280 元。

半时服务员数量没有限制时　LINGO 经过 2 次迭代，求得全局最优解，得到总人力成本 f 的最小值为 560 元，各决策变量的最优值为，

$$x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad y_1 = 6,\quad y_2 = 0,\quad y_3 = 0,\quad y_4 = 0,\quad y_5 = 8 \tag{8}$$

此时，相比于默认情况，每天可以减少的费用为 260 元。

2.1.7 结果的数学分析

从计算结果可以看出，可招聘的半时服务员的数量越多，总费用就越低，这是因为半时服务员的时薪比全时服务员更低，在合理的安排下，招聘越多半时服务员，越有利于降低总成本。

此外，在本题条件下，全局最优解不唯一，例如当半时服务员不超过 3 名时，以下也是一个全局最优解，每日最小费用同样为 820 元。

$$x_1 = 3,\quad x_2 = 4,\quad y_1 = 0,\quad y_2 = 0,\quad y_3 = 2,\quad y_4 = 0,\quad y_5 = 1 \tag{9}$$

2.1.8 结果的实际意义

该计算结果具有一定的实际意义，可作为制定招聘方案的重要参考。在实际情况下，还需考虑节假日与工作日的服务员数量差异，服务人数及总收益与服务员数量的关系，以及人流分布的波动情况，根据实际情况对模型进行微调。

2.1.9 结论

半时服务员不超过 3 名时，储蓄所应当聘请 7 名全时服务员，其中 3 名在 12 时到 1 时午餐，另外 4 名在 1 时到 2 时午餐，还应当聘请 3 名半时服务员，其中 2 名在 10 时到 2 时工作，另外 1 名在 1 时到 5 时工作，此时每日总费用最低，为 820 元。

不能雇佣半时服务员时，储蓄所应当聘请 11 名全时服务员，其中 5 名在 12 时到 1 时午餐，另外 6 名在 1 时到 2 时午餐，此时每日总费用最低，为 1100 元。相比于默认情况，每天需要增加的费用为 280 元。

半时服务员数量没有限制时，储蓄所应当聘请 14 名半时服务员，其中 6 名在 9 时到 1 时工作，另外 8 名在 1 时到 5 时工作，此时每日总费用最低，为 560 元。相比于默认情况，每天可以减少的费用为 260 元。

2.2 Chap10-Ex9 原油采购与加工（应用题）

2.2.1 问题分析

该模型设计了一个生产场景，给出了两种原料的库存，原料采购的价格曲线，以及两种产品的成分约束以及市场价格，需要建立连续规划模型和整数规划模型。

2.2.2 模型假设

为了简化实际情况，模型基于以下假设，

1. 混合过程中无物料损失，混合物能稳定共存。
2. 原油采购是公司唯一的成本来源，汽油产品是唯一的收益来源。
3. 汽油产品能在短时间内销售完毕。

2.2.3 模型建立

连续规划 设原油 A 中有 p 吨用于生产汽油甲，有 q 吨用于生产汽油乙，原油 B 中有 r 吨用于生产汽油甲，有 s 吨用于生产汽油乙，公司额外购买的原油 A 共 u 吨，购买总成本为 c 万元。则公司生产的汽油甲共 $p+r$ 吨，乙共 $q+s$ 吨。

汽油 A,B 需要满足的比例约束为，

$$\frac{p}{p+r} \geq 50\%, \quad \frac{q}{q+s} \geq 60\% \tag{10}$$

原油的总量约束为，

$$p+q \leq 500+u, \quad r+s \leq 1000 \tag{11}$$

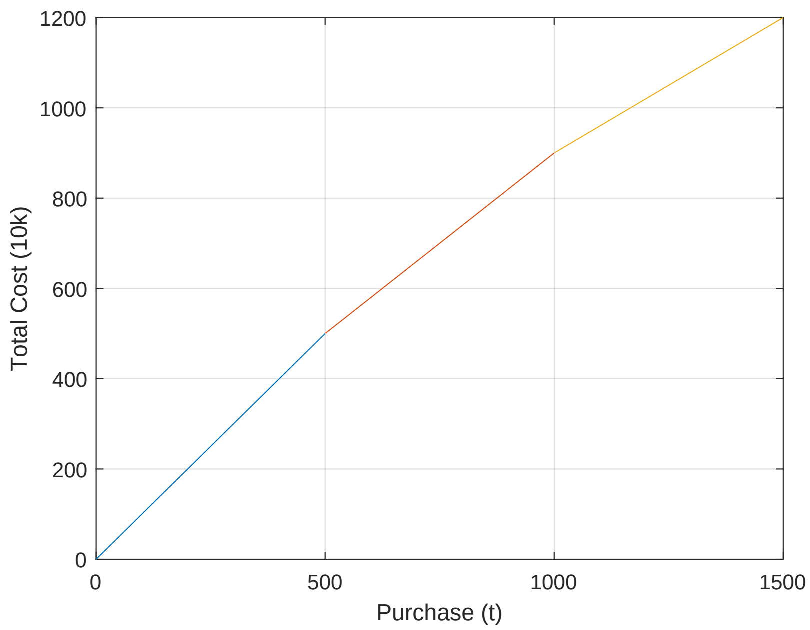

图 1: 总购买费用（万元）随购买量（吨）的变化图像

购买原油的总成本是关于购买量的分段函数，其图像如图 1，数学表达式为，

$$c = \begin{cases} u, & 0 \le u \le 500 \\ 0.8u + 100, & 500 < u \le 1000 \\ 0.6u + 300, & 1000 < u \le 1500 \end{cases} \tag{12}$$

还需要加上非负约束和取值范围约束，

$$p, q, r, s, u, c \ge 0, \quad u \le 1500 \tag{13}$$

需要最大化收益 f，单位为万元，

$$\max f = 0.48(p + r) + 0.56(q + s) - c \tag{14}$$

由于成本约束方程 (12) 为非线性约束，因此这是一个非线性规划模型，决策变量为 p, q, r, s, u, c，目标函数为方程 (14)，约束条件为方程 (10)，方程 (11)，方程 (12) 和方程 (13)。

整数规划 在连续规划的基础上，假设原油和汽油均为按吨买卖的，则需要增加整数约束，

$$p, q, r, s, u, c \in \mathbb{N} \tag{15}$$

这就构成了一个整数规划模型，其决策变量为 p, q, r, s, u, c，目标函数为方程 (14)，约束条件为方程 (10)，方程 (11)，方程 (12)，方程 (13) 和方程 (15)。

2.2.4 算法设计

对于连续规划和整数规划，可使用 LINGO 软件求解，对于非线性约束方程 (12)，可采用 `@if` 语句处理分段函数。

2.2.5 程序

请参见附录4.2。

2.2.6 计算结果

连续规划 LINGO 将该问题识别为 NLP (Nonlinear Program)，经过 19 次迭代，求得全局最优解，得到总收益 f 的最大值为 500 万元，各决策变量的最优值为，

$$p = 0, \quad q = 1500, \quad r = 0, \quad s = 1000, \quad u = 1000, \quad c = 900 \tag{16}$$

整数规划 LINGO 将该问题识别为 PINLP (Pure Integer Nonlinear Program)，经过 315 次迭代，求得全局最优解，得到总收益 f 的最大值为 500 万元，各决策变量的最优值为，

$$p = 0, \quad q = 1500, \quad r = 0, \quad s = 1000, \quad u = 1000, \quad c = 900 \tag{17}$$

2.2.7 结果的数学分析

连续规划模型与整数规划模型求出了相同的全局最优解，但在迭代次数上，整数规划是连续规划的 17 倍。

这启示我们，对于整数规划模型，可以先去掉整数约束，化为连续规划模型，如果求得的最优解恰好是整数解，那么这同样也是整数规划模型的最优解，但求解的时间复杂度从非多项式降低到了多项式；如果不是整数解，才需要进一步求解整数规划问题。

2.2.8 结果的实际意义

该计算结果具有一定的实际意义，可作为制定生产方案的重要参考。在实际应用中，还需要考虑原料供应量和产品需求量，原料和产品的价格波动等现实因素，根据实际情况对模型进行调整，才能做出切实可用的模型。

例如最近国际原油出现了破天荒的负油价，对应到模型中，就需要去掉原油价格的非负约束，受新冠疫情影响，未来的汽油消费预期并不乐观，对应到模型中，就需要考虑汽油产品的市场需求量，多余的产能是不能带来收益的。

2.2.9 结论

该公司应当花费 900 万元采购 1000 吨原油 A，将所有 1500 吨原油 A 和 1000 吨原油 B 全部用来生产汽油乙，此时收益最高，为 500 万元。

2.3 Chap10-Ex11 钢管下料（应用题）

2.3.1 问题分析

题目设置了一个钢管生产场景，给出了原料钢管的长度，不同长度钢管的需求量，切割模式的成本，切割钢管的数量限制，需要确定最优生产方案，使得总费用最小。题目构成了一个钢管下料问题，这是一个经典的整数规划问题。

2.3.2 模型假设

为了简化实际情况，模型基于以下假设，

1. 切割过程中没有物料损失，能够精准控制钢管长度，不产生次品。
2. 生产余料的价值为零。
3. 没有仓储和运输费用。

2.3.3 模型建立

设用户需要 m 种规格的钢管，第 i 种规格的钢管长度为 d_i，需求量为 c_i，设一共采用 n 种切割模式，在第 j 种切割模式下，每根原料钢管的处理成本为 p_j，共切割 x_j 根原料钢管，生产长度为 d_i 的钢管数量为 r_{ij}，其中 $i = 1, 2, \cdots, m$，$j = 1, 2, \cdots, n$。记原料钢管长度为 Q，每种切割模式下余料的最大长度为 q，每根原料钢管最多生产 k 根产品。

为方便叙述，记钢管长度向量 $\mathbf{d} = (d_1, \cdots, d_m)$，需求向量 $\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_m)$，生产矩阵 $\mathbf{R} = (r_{ij})_{m \times n}$，原料消耗向量 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$，成本系数向量 $\mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_n)$。

为了使切割模式与价格对应，这里指定大小顺序为，

$$x_{j+1} \le x_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{18}$$

生产需要满足客户需求，注意这里的 $\ge$ 符号表示按分量比较，

$$\mathbf{Rx} \ge \mathbf{c} \tag{19}$$

一根原料钢管最多生产 k 根产品，

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij} \le k, \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{20}$$

不同切割模式下需要满足余料限制，

$$Q - q \leq \mathbf{R}^T \mathbf{d} \leq Q \tag{21}$$

再加上非负整数约束，

$$\mathbf{x} \in \mathbb{N}^m, \quad \mathbf{R} \in \mathbb{N}^{m \times n} \tag{22}$$

在此基础上，设每根原料钢管的采购成本为单位成本，需要最小化生产总费用 f，

$$\min f = \mathbf{p}\mathbf{x} \tag{23}$$

这是一个整数规划模型，目标函数为方程 (23)，决策变量为 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{x}$，在约束条件方程 (18)，方程 (19)，方程 (21) 和方程 (22)。

2.3.4 算法设计

对于整数规划，可以采用 LINGO 软件求解，需要使用 `@gin` 命令将决策变量限制在整数域内。

2.3.5 程序

请参见附录4.3。

2.3.6 计算结果

LINGO 将该问题识别为 PIQP (Pure Integer Quadratic Program)，经过 3,500,150 次迭代，求得全局最优解，总费用 f 的最小值为 21.5 倍单位成本，决策变量 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{x}$ 的最优值为，

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

将上述结果进行整理，得到具体切割模式及原料钢管消耗数量，如表 2所示。注意到第四种切割模式的生产量为零，因此该切割模式无意义，应当将其省略。

表 2: 具体切割模式及原料钢管消耗数量

	290 mm	315 mm	350 mm	455 mm	余料 (mm)	原料钢管
切割模式 1	1	2	0	2	20	14
切割模式 2	0	0	5	0	100	4
切割模式 3	2	0	1	2	10	1

2.3.7 结果的数学分析

整数规划是一个 NPC 问题，在求解过程中，往往需要通过增加约束条件，使得分支定界法能够及时剪枝，从而加快求解速度。额外的约束可以根据常理人为添加，也可以通过割平面算法求得。

在本题中，原料消耗量大小顺序约束方程 (18) 其实是不必要的，只要指定了成本系数向量 $\mathbf{p}$，那么在最优解中，产量最大的切割模式必定对应最低的成本系数，否则，通过交换两种切割模式的顺序，就可以得到更低的成本。然而，如果将该约束去掉，则 LINGO 需要 11,089,340 次迭代才能求解出相同的结果，求解速度大约下降到了原来的 1/4。

反过来，如果增加一个约束会怎么样呢？考虑到一根 1850 毫米长原料钢管的余料最多为 100 毫米，即使全部生产最长的 455 毫米长钢管，也至少生产 4 根才能满足余料约束，因此有，

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij} \geq 4, \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{25}$$

加上这个约束后，LINGO 只需要 828,566 次迭代就能求出同样的结果，求解速度加快到了原来的 4 倍，因此附录的源码也增加了这个约束。

可见，在不改变最优解的情况下，约束越强，求解速度越快。

2.3.8 结果的实际意义

该计算结果具有一定的实用价值，可作为制定生产方案的重要参考。然而，该模型仍相对简单，在实际应用中，还应当综合考虑工厂的实际情况，例如原料钢管的运输费用，剩余成品的仓储成本，切割过程的物料损失，产品的次品率，余料的利用价值等因素，才能制定出合适的生产方案。

2.3.9 结论

应当使用三种切割模式。

第一种切割模式处理原料钢管 14 根，每根原料钢管切割成 1 根 290 毫米长，2 根 315 毫米长和 2 根 455 毫米长钢管，余料为 20 毫米长。

第二种切割模式处理原料钢管 4 根，每根原料钢管切割成 5 根 350 毫米长钢管，余料为 100 毫米长。

第三种切割模式处理原料钢管 1 根，每根原料钢管切割成 2 根 290 毫米长，1 根 350 毫米长和 2 根 455 毫米长钢管，余料为 10 毫米长。

此时总费用最小，为单根原料钢管采购成本的 21.5 倍。

3 收获与建议

在本次实验中，我掌握了 LINGO 软件求解整数规划的基本方法，用整数规划方法建立了实际问题的模型，并进行求解，在解决实际问题的过程中，我对数学方法的原理和应用有了更深刻的理解。

希望助教能对每次的实验进行详细的解答，希望老师在未来的课堂上介绍更多数学应用的前沿知识。

4 附录：程序代码

4.1 Chap10-Ex8

```
model:

sets:
n7/1..7/: x, w, pt_mask;
n8/1..8/: b;
link(n7,n8): A;
endsets

data:
b = 4 3 4 6 5 6 8 8;
A = 1 1 1 0 1 1 1 1
    1 1 1 1 0 1 1 1
    1 1 1 1 0 0 0 0
    0 1 1 1 1 0 0 0
    0 0 1 1 1 1 0 0
    0 0 0 1 1 1 1 0
    0 0 0 0 1 1 1 1;
w = 100 100 40 40 40 40 40;
pt_mask = 0 0 1 1 1 1 1;
enddata

[obj] min = @sum(n7: w * x);

@for(n8(i):
[demand] @sum(n7(j): A(j,i) * x(j)) >= b(i);
);

@for(n7: [int] @gin(x));

[parttime] @sum(n7: pt_mask * x) <= 3;

```

```
end
```

4.2 Chap10-Ex9

连续规划模型的代码如下，

```
model:

[obj] max = 0.48*(p+r) + 0.56*(q+s) - cost;

[prop1] p >= 0.5 * (p + r);
[prop2] q >= 0.6 * (q + s);
[tot1] p + q <= 500 + u;
[tot2] r + s <= 1000;
[buy] cost = @if(u#le#500, u, @if(u#le#1000, 100+0.8*u, 300+0.6*u));
[range] u <= 1500;

end
```

整数规划模型的代码如下，

```
model:

[obj] max = 0.48*(p+r) + 0.56*(q+s) - cost;

[prop1] p >= 0.5 * (p + r);
[prop2] q >= 0.6 * (q + s);
[tot1] p + q <= 500 + u;
[tot2] r + s <= 1000;
[buy] cost = @if(u#le#500, u, @if(u#le#1000, 100+0.8*u, 300+0.6*u));
[range] u <= 1500;

@gin(p);
@gin(q);
@gin(r);
@gin(s);
@gin(u);
@gin(cost);

end
```

4.3 Chap10-Ex11

```
model:
```

```

sets:
n4/1..4/: demand, price, len, x;
n3/1..3/: ;
link(n4,n4): r;
endsets

data:
price = 1.1 1.2 1.3 1.4;
demand = 15 28 21 30;
len = 290 315 350 455;
enddata

[obj] min = @sum(n4: price * x);

@for(n3(j):
  [order] x(j+1) <= x(j);
);

@for(n4(i):
  [need] @sum(n4(j): r(i,j) * x(j)) >= demand(i);
  [max_cut] @sum(n4(j): r(j,i)) <= 5;
  [min_cut] @sum(n4(j): r(j,i)) >= 4;
  [min_use] @sum(n4(j): r(j,i) * len(j)) >= 1750;
  [max_use] @sum(n4(j): r(j,i) * len(j)) <= 1850;
  [int_x] @gin(x(i));
  @for(n4(j):
    [int_r] @gin(r(i, j));
  );
);

end
```