复变函数开卷试题

2017011620 计73 李家昊

Email: lijiahao17@mails.tsinghua.edu.cn

1.(25')

设

$$f_n(z) = z^n + t_1 z^{n-1} + \cdots + t_{n-1} z + t_n = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

证明：$f_n(z) = 0$ 的 n 个根是以原点为圆心，以 $r(r > 0)$ 为半径的圆内接正 n 边形的 n 个顶点的充要条件是：

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_{n-1} = 0, \quad t_n \neq 0$$

解：

引理（对称多项式的牛顿公式）：设多项式 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n (a_0 \neq 0)$ 的 n 个零点为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，记

$$S_j = \sum_{k=1}^{n} x_k^j \quad (j \in \mathbb{N}^*)$$

则有：

$$a_0 S_j + a_1 S_{j-1} + \cdots + a_{j-1} S_1 + j a_j = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

引理的证明可以在《高等代数》中找到，在此不再赘述。

下证必要性：

由条件：$f_n(z) = 0$ 的 n 个根是以原点为圆心，以 $r(r > 0)$ 为半径的圆内接正 n 边形的 n 个顶点，故可设

$$z = z_k = r e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k = 1, 2, \cdots, n, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad r > 0)$$

记

$$S_j = \sum_{k=1}^{n} z_k^j = r^j e^{i \frac{j\theta}{n}} \sum_{k=1}^{n} e^{i \frac{2kj\pi}{n}} \quad (j \in \mathbb{N}^*)$$

(i) 当 $1 \leq j < n$ 时，等比数列 $\left\{ e^{i \frac{2kj\pi}{n}} \right\}_{k=1}^{n}$ 的公比为 $q = e^{i \frac{2j\pi}{n}} \neq 1$ ，故

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i \frac{2kj\pi}{n}} = e^{i \frac{2j\pi}{n}} \frac{1 - (e^{i \frac{2j\pi}{n}})^n}{1 - e^{i \frac{2j\pi}{n}}} = 0$$

所以，当 $1 \leq j < n$ 时，必然有

$$S_j = 0 \quad (1 \leq j < n) \tag{1.1}$$

由引理，有

$$S_j + t_1 S_{j-1} + \cdots + t_{j-1} S_1 + j t_j = 0 \quad (1 \le j < n)$$

由 (1.1) 得

$$S_j = S_{j-1} = \cdots = S_1 = 0 \quad (1 \le j < n)$$

$$\therefore j t_j = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$\therefore t_j = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n-1)$$

(ii) 当 $j = n$ 时，

由引理:

$$S_n + t_1 S_{n-1} + \cdots + t_{n-1} S_1 + n t_n = 0$$

由式 (1.1) 得

$$S_{n-1} = S_{n-2} = \cdots = S_1 = 0$$

$$\therefore S_n + n t_n = 0$$

此时

$$S_n = r^n e^{i\theta} \sum_{k=1}^{n} e^{i(2k\pi)} = n r^n e^{i\theta} \neq 0$$

$$\therefore t_n = -\frac{S_n}{n} \neq 0$$

综上，有:

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_{n-1} = 0, \quad t_n \neq 0$$

必要性证毕。

下证充分性:

由条件:

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_{n-1} = 0, \quad t_n \neq 0$$

$$\therefore f_n(z) = z^n + t_n$$

下证：若 $z_1 = r e^{i\theta}$ 是 $f_n(z) = 0$ 的一个根，则 $z_2 = r e^{i(\theta + \frac{2\pi}{n})}$ 也是 $f_n(z) = 0$ 的一个根。

因为 $z_1 = r e^{i\theta}$ 是 $f_n(z) = 0$ 的一个根

所以

$$f_n(z_1) = z_1^n + t_n = r^n e^{in\theta} + t_n = 0$$

$$\therefore f_n(z_2) = z_2^n + t_n = r^n e^{i(n\theta + 2\pi)} + t_n = r^n e^{in\theta} + t_n = 0$$

所以 $z_2 = r e^{i(\theta + \frac{2\pi}{n})}$ 也是 $f_n(z) = 0$ 的一个根。

因为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 两两互异，所以 $\{1,2,\cdots,n\}$ 构成模 n 的完全剩余系

对 $\forall k,l\in\mathbb{N}^*$ ，若 $k\equiv l\pmod n$ ，则 $z_k=z_l$

所以 $f(z)=0$ 无重复的所有根为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 。并且

$$\arg z_{k+1}-\arg z_k=\arg\frac{z_{k+1}}{z_k}=\arg e^{i\frac{2\pi}{n}}=\frac{2\pi}{n}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

因此， $f_n(z)=0$ 的 n 个根构成以原点为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆内接正 n 边形的 n 个顶点。

充分性证毕。

2.(45')

设

$$f_n(z)=z^n+t_1z^{n-1}+\cdots+t_{n-1}z+t_n=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$$

证明：(1) 若 $f_n(z)=0$ 的 n 个根 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是以原点为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆周上的点，则 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 构成圆内接正 n 边形的 n 个顶点的充要条件是：

$$t_k=0\quad\left(k=1,2,\cdots,m\quad m=\begin{cases}\dfrac{n-1}{2}, & 2\nmid n\\ \dfrac{n}{2}, & 2\mid n\end{cases}=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$$

(2) 证明 $t_k=0\quad(k=1,2,\cdots,m)$ 这 m 个条件互相独立，其中 $m=\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$

解：

(1)

由条件： $|z_1|=|z_2|=\cdots=|z_n|=r>0$

由 Vieta 定理：

$$\begin{aligned}t_{n-k}&=\sum_{1\le i_i<\cdots<i_{n-k}\le n}(-1)^{n-k}z_{i_1}z_{i_2}\cdots z_{i_{n-k}}\\&=\frac{z_1z_2\cdots z_n}{r^{2k}}\sum_{1\le i_i<\cdots<i_k\le n}(-1)^{n-k}\frac{r^{2k}}{z_{i_1}z_{i_2}\cdots z_{i_k}}\\&=(-1)^{n-2k}\frac{z_1z_2\cdots z_n}{r^{2k}}\sum_{1\le i_i<\cdots<i_k\le n}(-1)^{k}\overline{z_{i_1}z_{i_2}\cdots z_{i_k}}\\&=(-1)^n\frac{z_1z_2\cdots z_n}{r^{2k}}\overline{t_k}\end{aligned}$$

即

$$t_{n-k}=(-1)^n\frac{z_1z_2\cdots z_n}{r^{2k}}\overline{t_k}\tag{2.1}$$

下证必要性：

由条件： $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 构成以原点为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

由第一题结论，知：

$$t_1=t_2=\cdots=t_{n-1}=0,\quad t_n\neq 0$$

则显然有

$$t_k=0\quad(k=1,2,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor)$$

必要性证毕。

下证充分性：

由条件：$t_k=0\quad(k=1,2,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor)$

由式 (2.1) ，得

$$t_{n-k}=(-1)^n\frac{z_1z_2\cdots z_n}{r^{2k}}\overline{t_k}=0\quad(k=1,2,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor)$$

并且

$$\begin{aligned}&\because\quad \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\leq n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\\&\therefore\quad t_1=t_2=\cdots=t_{n-1}=0\end{aligned}$$

并且

$$t_n=(-1)^nz_1z_2\cdots z_n\neq 0$$

由第一题结论知： $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 构成以原点为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

充分性证毕。

(2)

即证：当只缺少一个条件时，即当

$$|z_1|=|z_2|=\cdots=|z_n|=r>0,\quad t_k=0\quad(k=1,2,\cdots,j-1,j+1,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor)\quad(1\leq j\leq n)$$

时，$\exists\, t_j,t_n\quad s.t.\ z_1,z_2,\cdots,z_n$ 不构成以原点为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

那么当缺少 $s\ (s\geq 2)$ 个条件时，不妨设缺少的条件为 $t_{i_k}=0\quad(k=1,2,\cdots,s)$ ，则可取 $t_{i_1}=t_{i_2}=\cdots=t_{i_{s-1}}=0$ ，这时就化成只缺少一个条件的情况，此时只需证 $\exists\, t_{i_s},t_n\quad s.t.\ z_1,z_2,\cdots,z_n$ 不构成以原点为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

证明：

令 $t_j\neq 0$ ，取 $t_n=t_jt_{n-j}$ ，则由式 (2.1) ，有

$$\begin{gathered}t_{n-j}=(-1)^n\frac{z_1z_2\cdots z_n}{r^{2j}}\overline{t_j}\neq 0\\\therefore t_n=t_jt_{n-j}\neq 0\end{gathered}$$

由 Vieta 定理：

$$(-1)^nz_1z_2\cdots z_n=t_n=t_{n-j}t_j$$

故有

$$t_{n-j}=(-1)^n\frac{z_1z_2\cdots z_n}{r^{2j}}\overline{t_j}=\frac{t_{n-j}t_j}{r^{2j}}\overline{t_j}$$

两边约去 t_{n-j} ，得

$$\begin{gathered}|t_j|^2=r^{2j}\\ \therefore|t_j|=r^j\end{gathered}$$

对 (2.1) 两边取模

$$\begin{aligned}|t_{n-j}|&=\left|(-1)^n\frac{z_1z_2\cdots z_n}{r^{2j}}\overline{t_j}\right|\\&=\frac{r^n}{r^{2j}}|\overline{t_j}|\\&=r^{n-j}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}f_n(z)&=z^n+t_jz^{n-j}+t_{n-j}z^j+t_n\\&=z^n+t_jz^{n-j}+t_{n-j}z^j+t_jt_{n-j}\\&=(z^{n-j}+t_{n-j})(z^j+t_j)\end{aligned}$$

令 $f_n(z)=0$ 则有

$$z^{n-j}=-t_{n-j}\quad or\quad z^j=-t_j$$

方程 $z^{n-j}=-t_{n-j}$ 的所有根的模为：

$$|z_1|=|z_{k1}|=|t_{n-j}|^{\frac{1}{n-j}}=r$$

方程 $z^j=-t_j$ 的所有根的模为：

$$|z_2|=|z_{k2}|=|t_j|^{\frac{1}{j}}=r$$

所以 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 均在以原点为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆周上

而因为 $t_j\neq0$ ，由第一题结论知： $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 不构成以原点为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

综上：若 $\exists\, j\in\mathbb{N}^*:1\leq j\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\quad s.t.\ t_j\neq0$ ，则 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 不构成以原点为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

即 $t_k=0\quad(k=1,2,\cdots,m)$ 这 m 个条件是互相独立的，其中 $m=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 。

证毕。

3(90')

(1) (30') 给出 $2n$ 次多项式的零点构成以原点为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆的内接半正 $2n$ 边形的 $2n$ 个顶点的充要条件并证明。

(2) (30') 通过多项式系数确定 n 个零点是否构成以任意点为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点，求其充要条件，并指出圆心 a ，半径 r。

(3) (30') 对于以 a 为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆周上的 n 个点，给出 $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 个条件，使得这 n 个根构成正 n 边形的 n 个顶点，证明其是充要的，且这 $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 个条件是相互独立的。并指出圆心 a ，半径 r。

解:

(1)

设

$$f_{2n}(z)=z^{2n}+t_1z^{2n-1}+\cdots+t_{2n-1}z+t_{2n}=\prod_{k=1}^{2n}(z-z_k)$$

则 $2n$ 次多项式 $f_{2n}(z)$ 的零点构成以原点为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆的内接半正 $2n$ 边形的 $2n$ 个顶点的充要条件是:

$$\begin{gathered}t_1=t_2=\cdots=t_{n-1}=t_{n+1}=\cdots=t_{2n-1}=0,\quad t_n\neq 0,\quad t_{2n}\neq 0,\\ b:=\sqrt{t_n^2-4t_{2n}}\neq 0,\quad \overline{t_n}b+t_n\overline{b}=0.\end{gathered}$$

下证必要性:

由条件: $z_1,z_2,\cdots,z_{2n}$ 构成以原点为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆的内接半正 $2n$ 边形的 $2n$ 个顶点，故不妨设

$$\begin{cases}z_k=re^{i\frac{\theta_1+2k\pi}{n}}\\ z_{k+n}=re^{i\frac{\theta_2+2k\pi}{n}}\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots,n\quad \theta_1,\theta_2\in[0,2\pi)\quad \theta_1\neq\theta_2)$$

下证 $z_1,z_2,\cdots,z_{2n}$ 两两互异:

假设 $\exists\, k_1,k_2:1\leq k_1,k_2\leq n$ ，使得 $z_{k_1}=z_{k_2+n}$ ，即:

$$\begin{aligned}re^{i\frac{\theta_1+2k_1\pi}{n}}&=re^{i\frac{\theta_2+2k_2\pi}{n}}\\ \frac{\theta_1+2k_1\pi}{n}&=\frac{\theta_2+2k_2\pi}{n}+2k_3\pi\quad (k_3\in\mathbb{Z})\\ \theta_1-\theta_2&=2(k_2-k_1+k_3n)\pi\end{aligned}$$

于是

$$\begin{gathered}\because (k_2-k_1+k_3n)\in\mathbb{Z},\quad \theta_1,\theta_2\in[0,2\pi)\\ \therefore \theta_1=\theta_2\end{gathered}$$

与条件矛盾，故 $z_1,z_2,\cdots,z_{2n}$ 两两互异。

此时

$$\begin{aligned}f_{2n}(z)&=(z-z_1)\cdots(z-z_n)(z-z_{n+1})\cdots(z-z_{2n})\\ &=(z^n-r^ne^{i\theta_1})(z^n-r^ne^{i\theta_2})\\ &=z^{2n}-r^n(e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2})z^n+r^{2n}e^{i(\theta_1+\theta_2)}\end{aligned}$$

故有

$$\begin{gathered}t_1=t_2=\cdots=t_{n-1}=t_{n+1}=\cdots=t_{2n-1}=0,\\ t_n=-r^n(e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2})\neq 0,\quad t_{2n}=r^{2n}e^{i(\theta_1+\theta_2)}\neq 0,\\ b=\sqrt{t_n^2-4t_{2n}}=\sqrt{r^{2n}(e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2})^2-4r^{2n}e^{i(\theta_1+\theta_2)}}=r^n(e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2})\neq 0\\ \overline{t_n}b+t_n\overline{b}=-r^{2n}\left[(e^{-i\theta_1}+e^{-i\theta_2})(e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2})+(e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2})(e^{-i\theta_1}-e^{-i\theta_2})\right]=0\end{gathered}$$

必要性证毕。

下证充分性：

由条件：有

$$f_{2n}(z)=z^{2n}+t_n z^n+t_{2n}$$
$$t_n\neq 0,\quad t_{2n}\neq 0,\quad b:=\sqrt{t_n^2-4t_{2n}}\neq 0,\quad \overline{t_n}b+t_n\bar{b}=0.$$

令 $f_{2n}=0$，则 z^n 满足方程：

$$\lambda^2+t_n\lambda+t_{2n}=0$$

解之得：

$$z_{1,2}=\frac{-t_n\pm\sqrt{t_n^2-4t_{2n}}}{2}=\frac{-t_n\pm b}{2}$$

由于 $b\neq 0$，故 $z_1\neq z_2$，不妨设：

$$z_1=\frac{-t_n+b}{2},\quad z_2=\frac{-t_n-b}{2}$$

则

$$|z_1|=\frac{1}{2}|t_n-b|=\frac{1}{2}\sqrt{(t_n-b)(\overline{t_n}-\bar{b})}=\frac{1}{2}\sqrt{t_n\overline{t_n}-t_n\bar{b}-\overline{t_n}b+b\bar{b}}$$
$$|z_2|=\frac{1}{2}|t_n+b|=\frac{1}{2}\sqrt{(t_n+b)(\overline{t_n}+\bar{b})}=\frac{1}{2}\sqrt{t_n\overline{t_n}+t_n\bar{b}+\overline{t_n}b+b\bar{b}}$$

由条件：

$$\overline{t_n}b+t_n\bar{b}=0$$

故

$$|z_1|=\frac{1}{2}\sqrt{t_n\overline{t_n}+b\bar{b}}=|z_2|$$

设 $|z_1|=|z_2|=r^n$，故可设：

$$\begin{cases}z_1=r^n e^{i\theta_1}\\ z_2=r^n e^{i\theta_2}\end{cases}\quad(\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi),\quad \theta_1\neq\theta_2)$$

故

$$f_{2n}(z)=(z^n-z_1)(z^n-z_2)$$

令 $f_{2n}(z)=0$，则：

$$z^n=z_1\quad or\quad z^n=z_2$$

解得

$$\begin{cases}z_k=z_{k1}=re^{i\frac{\theta_1+2k\pi}{n}}\\ z_{k+n}=z_{k2}=re^{i\frac{\theta_2+2k\pi}{n}}\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

下证 $z_1,z_2,\cdots,z_{2n}$ 两两互异：

假设 $\exists\, k_1, k_2 : 1 \le k_1, k_2 \le n$ ，使得 $z_{k_1} = z_{k_2+n}$ ，即:

$$\begin{aligned} re^{i\frac{\theta_1+2k_1\pi}{n}} &= re^{i\frac{\theta_2+2k_2\pi}{n}} \\ \frac{\theta_1+2k_1\pi}{n} &= \frac{\theta_2+2k_2\pi}{n} + 2k_3\pi \quad (k_3 \in \mathbb{Z}) \\ \theta_1 - \theta_2 &= 2(k_2 - k_1 + k_3 n)\pi \end{aligned}$$

于是

$$\because (k_2 - k_1 + k_3 n) \in \mathbb{Z}, \quad \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$$
$$\therefore \theta_1 = \theta_2$$

与条件矛盾，故 $z_1, z_2, \cdots, z_{2n}$ 两两互异。

由第一题结论，知:

$z_1, z_2, \cdots, z_n$ 和 $z_{n+1}, z_{n+2}, \cdots, z_{2n}$ 分别构成一个以原点为圆心，以 $r(r > 0)$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

但由于 $t_n \neq 0$ ，故 $z_1, z_2, \cdots, z_{2n}$ 不构成以原点为圆心，以 $r(r > 0)$ 为半径的圆的内接正 $2n$ 边形的 $2n$ 个顶点。

故 $z_1, z_2, \cdots, z_{2n}$ 构成以原点为圆心，以 $r(r > 0)$ 为半径的圆的内接半正 $2n$ 边形的 $2n$ 个顶点。

充分性证毕。

(2)

设

$$f_n(z) = z^n + t_1 z^{n-1} + \cdots + t_{n-1} z + t_n = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

的 n 个零点为 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ ，则:

$z_1, z_2, \cdots, z_n$ 构成以 a 为圆心，以 $r(r > 0)$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点的充要条件是:

$$t_k = \mathrm{C}_n^k \frac{t_1^k}{n^k} \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$
$$t_n \neq \frac{t_1^n}{n^n}$$

此时圆心为 $a = -\dfrac{t_1}{n}$ ，半径为 $r = \left| \dfrac{t_1^n}{n^n} - t_n \right|^{\frac{1}{n}} > 0$

证明:

下证必要性:

由条件: $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 构成以 a 为圆心，以 $r(r > 0)$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

故可设:

$$z_k = re^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} + a \quad \Big(\theta \in [0, 2\pi) \quad k = 1, 2, \cdots, n \quad r > 0\Big)$$

所以 z_k 满足方程：

$$(z-a)^n = r^n e^{i\theta} \tag{3.1}$$

即

$$\begin{aligned} f_n(z) &= (z-a)^n - r^n e^{i\theta} \\ &= z^n + (-1)\mathrm{C}_n^1 a z^{n-1} + (-1)^2 \mathrm{C}_n^2 a^2 z^{n-2} + \cdots + (-1)^n a^n - r^n e^{i\theta} \end{aligned}$$

故

$$t_1 = (-1)\mathrm{C}_n^1 a = -na$$

圆心：

$$a = -\frac{t_1}{n}$$

并且：

$$t_k = (-1)^k \mathrm{C}_n^k a^k = (-1)^k \mathrm{C}_n^k \left(-\frac{t_1}{n}\right)^k = \mathrm{C}_n^k \frac{t_1^k}{n^k} \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$t_n = (-1)^n a^n - r^n e^{i\theta} = (-1)^n \left(-\frac{t_1}{n}\right)^n - r^n e^{i\theta} = \frac{t_1^n}{n^n} - r^n e^{i\theta} \neq \frac{t_1^n}{n^n}$$

由上式得：

$$r^n e^{i\theta} = \frac{t_1^n}{n^n} - t_n$$

故 (3.1) 化为：

$$(z-a)^n = \frac{t_1^n}{n^n} - t_n$$

对上式两端取模，并带入 $z = z_k$ ，使等号成立：

$$|z-a|^n = \left|\frac{t_1^n}{n^n} - t_n\right|$$

可得：

$$r = |z_k - a| = \left|\frac{t_1^n}{n^n} - t_n\right|^{\frac{1}{n}}$$

故半径：

$$r = \left|\frac{t_1^n}{n^n} - t_n\right|^{\frac{1}{n}}$$

必要性证毕。

下证充分性：

由条件：

$$
\begin{aligned}
f_n(z) &= z^n + t_1 z^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 \frac{t_1^2}{n^2} z^{n-2} + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} \frac{t_1^{n-1}}{n^{n-1}} z + \frac{t_1^n}{n^n} + t_n - \frac{t_1^n}{n^n} \\
&= \left(z + \frac{t_1}{n}\right)^n + \left(t_n - \frac{t_1^n}{n^n}\right)
\end{aligned}
$$

令 $f_n(z) = 0$，则有

$$
\left(z + \frac{t_1}{n}\right)^n = \frac{t_1^n}{n^n} - t_n
$$

由条件 $\frac{t_1^n}{n^n} - t_n \neq 0$，故可设

$$
re^{i\theta} = \frac{t_1^n}{n^n} - t_n \quad \Big(r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi)\Big)
$$

知

$$
r = \left|\frac{t_1^n}{n^n} - t_n\right|^{\frac{1}{n}}
$$

故令 $f_n(z) = 0$，解得：

$$
z = z_k = re^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} - \frac{t_1}{n} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)
$$

所以，$z_1, z_2, \cdots, z_n$ 构成以 a 为圆心，以 $r(r > 0)$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。其中

$$
a = -\frac{t_1}{n}, \quad r = \left|\frac{t_1^n}{n^n} - t_n\right|^{\frac{1}{n}} > 0
$$

充分性证毕。

(3)

断言：对于以 a 为圆心，以 $r(r > 0)$ 为半径的圆周上的 n 个点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$，这 n 个根构成正 n 边形的 n 个顶点的充要条件是：

$$
\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} (z_{i_1} - a)(z_{i_2} - a) \cdots (z_{i_k} - a) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor)
$$

且这 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 个条件相互独立。

证明：设

$$
\begin{aligned}
f(z) &= z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n \\
&= (z - a)^n + t_1 (z - a)^{n-1} + \cdots + t_{n-1}(z - a) + t_n \\
&= \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)
\end{aligned}
$$

记

$$
\begin{aligned}
p_k &= z_k - a \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \\
g(p) &= f(z) = p^n + t_1 p^{n-1} + \cdots + t_{n-1} p + t_n
\end{aligned}
$$

则 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 $g(p)=0$ 的 n 个根。

在给定条件下，$z_1,z_2,\cdots,z_n$ 构成以 a 为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点的充要条件是：$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 构成以原点为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

由第二题结论：$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 构成以原点为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点的充要条件是：

$$t_k=0 \quad \left(k=1,2,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$$

且这 $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 个条件相互独立。

在这里，由 Vieta 定理得：

$$\begin{aligned}t_k&=\sum_{1\le i_i<\cdots<i_k\le n}(-1)^k p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}\\&=\sum_{1\le i_i<\cdots<i_k\le n}(-1)^k(z_{i_1}-a)(z_{i_2}-a)\cdots(z_{i_k}-a)\\&=0\end{aligned}$$

即：

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}(z_{i_1}-a)(z_{i_2}-a)\cdots(z_{i_k}-a)=0 \quad (k=1,2,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor)$$

综上：$z_1,z_2,\cdots,z_n$ 构成以 a 为圆心，以 $r(r>0)$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点的充要条件是：

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}(z_{i_1}-a)(z_{i_2}-a)\cdots(z_{i_k}-a)=0 \quad (k=1,2,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor)$$

且这 $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 个条件相互独立。

由第(2)问结论及 Vieta 定理：

圆心：

$$a=-\frac{c_1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k$$

半径：

$$\begin{aligned}r&=\left|\frac{c_1^n}{n^n}-c_n\right|^{\frac{1}{n}}\\&=\left|\left(-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k\right)^n-(-1)^n\prod_{k=1}^{n}z_k\right|^{\frac{1}{n}}\\&=\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k\right)^n-\prod_{k=1}^{n}z_k\right|^{\frac{1}{n}}>0\end{aligned}$$

证毕。

4 (50')

(1) (25')

由公式

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{\pi^{2n}}\zeta(2n) \quad \zeta(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^z}$$

证明:

$$\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}-\frac{\zeta(2n-2)}{3!\pi^{2n-2}}+\frac{\zeta(2n-4)}{5!\pi^{2n-4}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\zeta(2)}{(2n-1)!\pi^2}+\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=0 \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

解:

记

$$a_k=\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$
$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x} \quad (x\neq k\pi, \quad \forall k\in\mathbb{Z})$$

即已知:

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=-2\sum_{n=1}^{+\infty}a_n x^{2n-1} \tag{4.1}$$

只需证:

$$a_n-\frac{a_{n-1}}{3!}+\frac{a_{n-2}}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}a_1}{(2n-1)!}+\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=0 \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

证明：由所设:

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x} \quad (x\neq k\pi, \quad \forall k\in\mathbb{Z})$$

移项得:

$$(\sin x)f(x)=\cos x-\frac{\sin x}{x}$$

两端同时在 $x=0$ 处泰勒展开，并根据公式 (4.1) 代入 $f(x)$，得:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)\left(-2\sum_{n=1}^{+\infty}a_n x^{2n-1}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

将括号乘开，化简得:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-2)(-1)^{n-k}}{(2(n-k)+1)!}a_k\right)x^{2n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n}{(2n+1)!}x^{2n}$$

上式对 $\forall x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$ 恒成立，因此同次项系数必定相等，故有:

$$\sum_{k=1}^{n}(-2)\frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k)+1)!}a_k=(-1)^n\frac{2n}{(2n+1)!}$$

化简得：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k+1)!}a_k=(-1)^{n+1}\frac{n}{(2n+1)!}$$

即：

$$a_n-\frac{a_{n-1}}{3!}+\frac{a_{n-2}}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}a_1}{(2n-1)!}+\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=0\quad(\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

证毕。

(2) (25')

证明：

$$(n+\frac{1}{2})\zeta(2n)=\sum_{k=1}^{n-1}\zeta(2k)\zeta(2n-2k)\quad(n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}^*)$$

解：

同样记：

$$a_k=\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$
$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\quad(x\neq k\pi,\quad\forall k\in\mathbb{Z})$$

只需证明：

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_k a_{n-k}\quad(n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}^*)$$

证明：

先证明以下引理：

$$\int_0^x t^2 f^2(t)\mathrm{d}t=-x^2 f(x)-\frac{1}{3}x^3\tag{4.2}$$

引理证明：

等式左端：

$$\begin{aligned}
Left &= \int_0^x t^2 f^2(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x t^2 \frac{(t\cos t - \sin t)^2}{t^2 \sin^2 t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \left(t^2 \cot^2 t - 2t\cot t + 1\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x t^2(\csc^2 t - 1)\mathrm{d}t - \int_0^x 2t\cot t\mathrm{d}t + \int_0^x 1\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x t^2\csc^2 t\mathrm{d}t - \int_0^x 2t\cot t\mathrm{d}t + x - \frac{1}{3}x^3
\end{aligned}$$

分部积分得:

$$\begin{aligned}
Left &= -\int_0^x t^2\mathrm{d}(\cot t) - \int_0^x 2t\cot t\mathrm{d}t + x - \frac{1}{3}x^3 \\
&= -\left(t^2\cot t\Big|_0^x - \int_0^x 2t\cot t\mathrm{d}t\right) - \int_0^x 2t\cot t\mathrm{d}t + x - \frac{1}{3}x^3 \\
&= -x^2\cot x + \lim_{t\to 0}\left(t^2\cot t\right) + x - \frac{1}{3}x^3 \\
&= -x^2\cot x + x - \frac{1}{3}x^3
\end{aligned}$$

等式右端:

$$\begin{aligned}
Right &= -x^2 f(x) - \frac{1}{3}x^3 \\
&= -x^2\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3}x^3 \\
&= -x^2\cot x + x - \frac{1}{3}x^3
\end{aligned}$$

因此等式左端等于右端 ($Left = Right$) 。引理证毕。

再由式 (4.1) 得:

$$f(x) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n-1} \tag{4.3}$$

两边平方得:

$$f^2(x) = 4\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\right)x^{2n-2} \tag{4.4}$$

将式 (4.3), (4.4) 代入式 (4.2) ，得:

$$\int_0^x 4\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\right)t^{2n}\mathrm{d}t = -x^2\left(-2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n-1}\right) - \frac{1}{3}x^3$$

积分得:

$$4\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\right)\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \left(2\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^{2n+1}\right) + 2a_1x^3 - \frac{1}{3}x^3$$

又因为:

$$a_1 = \frac{\zeta(2)}{\pi^2} = \frac{1}{6}$$

故有：

$$2a_1 x^3 - \frac{1}{3}x^3 = 0$$

因此：

$$4\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\right)\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

上式对 $\forall x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 恒成立，因此同次项系数必定相等，故有：

$$4\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\right)\frac{1}{2n+1} = 2a_n \quad (n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}^*)$$

即：

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \quad (n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}^*)$$

证毕。

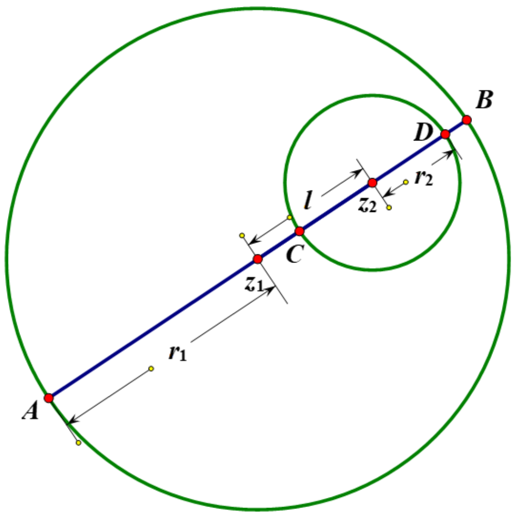
5 (40')

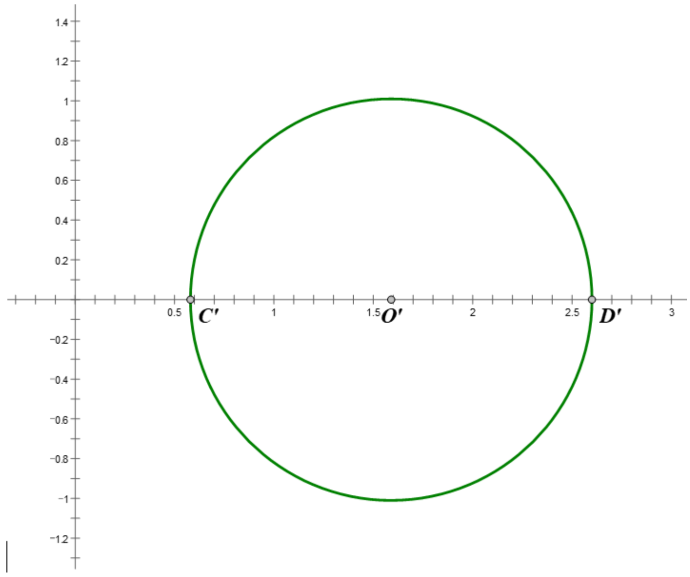
求分式线性变换

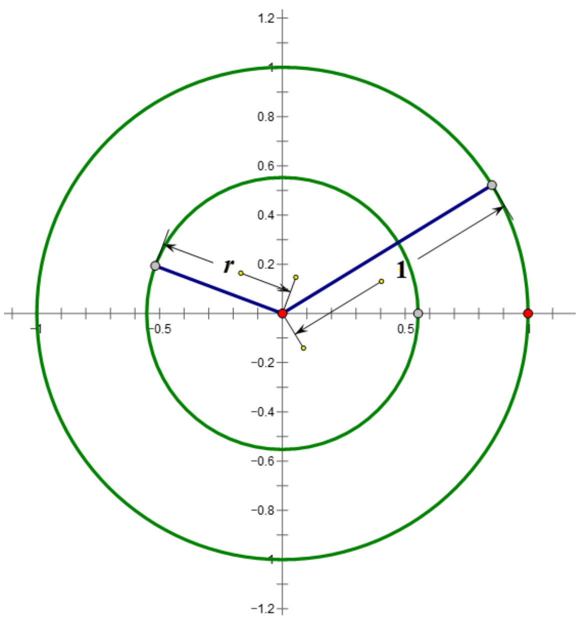
$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad(a,b,c,d\in\mathbb{C}\quad ad-bc\neq 0)$$

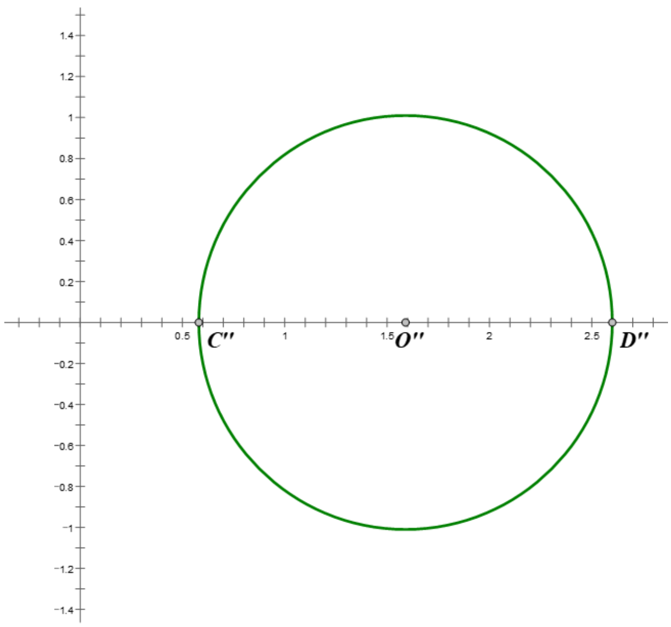
将 $D_1=\left\{z\middle||z-z_1|<r_1,|z-z_2|>r_2\right\}$ 映成 $D_2=\left\{w\middle|r<|w|<1\right\}\quad(0<r<1)$，并求出 r 。

解:









设分式线性变换:

$$\omega_1=\frac{z-A}{B-z}$$
$$\omega_2=\frac{w+1}{1-w}$$

如图，设 A, B 是过 z_1, z_2 的直线与圆 z_1 的两个交点，C, D 是过 z_1, z_2 的直线与圆 z_2 的两个交点。l 为 z_1, z_2 之间的距离，即 $l = |z_2 - z_1|$ 。设 ω_1 将 C, D 分别映射到 C', D' ，设 ω_2 将 $-r, r$ 分别映射到 C'', D'' 。

设

$$
\Omega_1 = \left\{ w_1 \middle| \mathrm{Re}(\omega_1) > 0, |\omega_1 - O'| > |O'C'| \right\}
$$
$$
\Omega_2 = \left\{ w_2 \middle| \mathrm{Re}(\omega_2) > 0, |\omega_2 - O''| > |O''C''| \right\}
$$

下面证明：ω_1 将 D_1 映射成 Ω_1 ， ω_2 将 D_2 映射成 Ω_2

由于

$$
\omega_1\Big|_{z=A} = \frac{A-A}{B-A} = 0
$$
$$
\omega_1\Big|_{z=B} = \lim_{z\to B} \frac{z-A}{B-z} \to \infty
$$

因此，ω_1 将 A 映到坐标原点，将 B 映射到无穷远点。

不妨设：

$$
z_2 - z_1 = le^{i\varphi} \quad \Big(\varphi \in [0, 2\pi)\Big)
$$

选取 D_1 边界上一点，设为：

$$
z = z_1 + r_1 e^{i\theta} \quad \Big(\theta \in [0, 2\pi), \quad \theta \neq \varphi\Big)
$$

则此时：

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{z_1 + r_1 e^{i\theta} - A}{B - z_1 - r_1 e^{i\theta}} \\
&= \frac{r_1 e^{i\varphi} + r_1 e^{i\theta}}{r_1 e^{i\varphi} - r_1 e^{i\theta}} \\
&= \frac{(e^{i\varphi} + e^{i\theta})(e^{-i\varphi} - e^{-i\theta})}{|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^2} \\
&= \frac{e^{i(\theta-\varphi)} - e^{-i(\theta-\varphi)}}{|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^2} \\
&= \frac{2i\sin(\theta-\varphi)}{|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^2}
\end{aligned}
$$

故 w_1 将圆 z_1 边界的任意一点映射在虚轴上。又因为：

$$
\mathrm{Re}\,\omega_1\Big|_{z=z_1} = \mathrm{Re}\,\frac{z_1 - A}{B - z_1} = 1 > 0
$$

由分式线性变换的保圆性，知 ω_1 将 $S_1 = \left\{ z \middle| |z - z_1| < r_1 \right\}$ 映射成 $S_1' = \left\{ w_1 \middle| \mathrm{Re}\,\omega_1 > 0 \right\}$ ，将 $S_2 = \left\{ z \middle| |z - z_2| < r_2 \right\}$ 映射成 $S_2' = \left\{ w_1 \middle| |\omega_1 - O'| < |O'C'| \right\}$ 。由分式线性变换的一一对应性，知 ω_1 将 $D_1 = S_1 \setminus S_2$ 映射成 $\Omega_1 = S_1' \setminus S_2'$ 。

同理可得 ω_2 将 D_2 映射成 Ω_2 。

此时:

$$
\begin{aligned}
C' &= \omega_1\Big|_{z=C} = \frac{C-A}{B-C} = \frac{r_1+l-r_2}{r_1-l+r_2} > 0 \\
D' &= \omega_1\Big|_{z=D} = \frac{D-A}{B-D} = \frac{r_1+l+r_2}{r_1-l-r_2} > 0
\end{aligned}
$$

并且:

$$
\begin{aligned}
C'' &= \omega_2\Big|_{z=-r} = \frac{1-r}{1+r} > 0 \\
D'' &= \omega_2\Big|_{z=r} = \frac{1+r}{1-r} > 0
\end{aligned}
$$

令 $\Omega_1 = \Omega_2$ ，即:

$$
\begin{cases}
C'' &= kC' \\
D'' &= kD'
\end{cases}
\quad (k \in \mathbb{R}^*)
$$

即:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1-r}{1+r} = k \cdot \dfrac{r_1+l-r_2}{r_1-l+r_2} \\
\dfrac{1+r}{1-r} = k \cdot \dfrac{r_1+l+r_2}{r_1-l-r_2}
\end{cases}
\quad (k \in \mathbb{R}^*)
$$

两式相乘得:

$$
1 = k^2 \cdot \frac{r_1+l-r_2}{r_1-l+r_2} \cdot \frac{r_1+l+r_2}{r_1-l-r_2}
$$

解得:

$$
k = \sqrt{\frac{r_1-l+r_2}{r_1+l-r_2} \cdot \frac{r_1-l-r_2}{r_1+l+r_2}}
$$

代入 k ，求得 r 为:

$$
r = \frac{\sqrt{(r_1-l+r_2)\cdot(r_1+l+r_2)} - \sqrt{(r_1+l-r_2)\cdot(r_1-l-r_2)}}{\sqrt{(r_1-l+r_2)\cdot(r_1+l+r_2)} + \sqrt{(r_1+l-r_2)\cdot(r_1-l-r_2)}}
$$

此时 $\Omega_1 = \Omega_2$ ，故 $\omega_2 = k \cdot \omega_1$

又因为:

$$
\omega_2 = \frac{w+1}{1-w}
$$

求得逆变换为:

$$
\omega = \frac{\omega_2 - 1}{\omega_2 + 1}
$$

因此有:

$$
\begin{cases}
\omega & = & \dfrac{\omega_2 - 1}{\omega_2 + 1} \\
\omega_2 & = & k \cdot \omega_1 \\
\omega_1 & = & \dfrac{z - A}{B - z}
\end{cases}
$$

三式联立：

$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{\omega_2 - 1}{\omega_2 + 1} \\
&= \frac{k\omega_1 - 1}{k\omega_1 + 1} \\
&= \frac{k \cdot \dfrac{z - A}{B - z} - 1}{k \cdot \dfrac{z - A}{B - z} + 1} \\
&= \frac{(k+1)z - B - Ak}{(k-1)z + B - Ak}
\end{aligned}
$$

故求得分式线性变换：

$$
\omega = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C})
$$

将 $D_1 = \left\{ z \middle| |z - z_1| < r_1, |z - z_2| > r_2 \right\}$ 映成 $D_2 = \left\{ w \middle| r < |w| < 1 \right\} \quad (0 < r < 1)$ 。

其中：

$$
\begin{aligned}
& a = k + 1, \quad b = -B - Ak, \quad c = k - 1, \quad d = B - Ak, \\
& A = z_1 - r_1 \frac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|}, \quad B = z_1 + r_1 \frac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|}, \\
& k = \sqrt{\frac{r_1 - l + r_2}{r_1 + l - r_2} \cdot \frac{r_1 - l - r_2}{r_1 + l + r_2}}, \quad l = |z_2 - z_1| \\
& r = \frac{\sqrt{(r_1 - l + r_2) \cdot (r_1 + l + r_2)} - \sqrt{(r_1 + l - r_2) \cdot (r_1 - l - r_2)}}{\sqrt{(r_1 - l + r_2) \cdot (r_1 + l + r_2)} + \sqrt{(r_1 + l - r_2) \cdot (r_1 - l - r_2)}}
\end{aligned}
$$

并且：

$$
\begin{aligned}
ad - bc &= (k+1)(B - Ak) + (k-1)(B + Ak) \\
&= 2k(B - A) \\
&= (2k) \cdot (2r_1) \cdot \frac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|} \\
&\neq 0 \quad (z_2 \neq z_1)
\end{aligned}
$$