数学实验：第一次作业

计算机系　计 73　2017011620　李家昊

2020 年 3 月 16 日

1　实验目的

- 掌握用 MATLAB 计算拉格朗日、分段线性、三次样条三种插值的方法，改变节点的数目，对三种插值结果进行初步分析。
- 掌握用 MATLAB 及梯形公式、辛普森公式计算数值积分。
- 通过实例学习用插值和数值积分解决实际问题。

2　问题求解

2.1　Chap3-Ex5 (Calc)

2.1.1　算法设计

本题要求选用三种数值积分方法计算 π。

首先需要选择合适的定积分公式来计算 π，为了计算的简单起见，选择公式如下，

$$\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \tag{1}$$

被积函数是单位圆在第一象限的函数图象，不含复杂运算，计算速度相对较快。我们只需要用数值积分的方法计算出右端的定积分，就可以确定 π 的近似值。

这里采用上课时介绍的三种数值积分方法来计算定积分，分别为梯形公式，辛普森公式，以及 Gauss-Lobatto 公式。

2.1.2　Matlab 程序

Matlab 程序如下，为了统计出不同误差限下的近似计算次数，这里写了一个简单的二分查找，详见代码，

```
circle_func = @(x) sqrt(1 - x .* x);
error_limit = 1e-8;

lo_cnt = 1;
hi_cnt = 10000000;
while 1
    if (hi_cnt - lo_cnt < 2)
        break
    end
    fcnt = floor((lo_cnt + hi_cnt) / 2);
    x = linspace(0, 1, fcnt);
    y = circle_func(x);
    pi_result = 4 * trapz(x, y);
    err = abs(pi_result - pi);
    if (err < error_limit)
        hi_cnt = fcnt;
    else
        lo_cnt = fcnt;
    end
end
fprintf('ans: %.12f, cost: %d, error: %.2e\n', pi_result, fcnt, err);

int_funcs = {@quad, @quadl};
for i = 1:length(int_funcs)
    int_func = int_funcs{i};
    lo_tol = 1e-11;
    hi_tol = 1e-1;
    while 1
        if (abs(hi_tol - lo_tol) < 1e-11)
            break
        end
        tol = sqrt(hi_tol * lo_tol);
        [area, fcnt] = int_func(circle_func, 0, 1, tol);
        pi_result = 4 * area;
        err = abs(pi_result - pi);
        if (err < error_limit)
            lo_tol = tol;
        else
            hi_tol = tol;
        end
    end
    fprintf('ans: %.12f, cost: %d, error: %.2e\n', pi_result, fcnt,
       err);
end
```

表 1: 三种积分公式在不同误差限下的计算结果及计算次数。

绝对误差限		1e-6	1e-8	1e-10
梯形公式	数值	3.141591653694	3.141592643590	3.141592653490
	次数	11143	240032	5171199
辛普森公式	数值	3.141591970545	3.141592649744	3.141592653419
	次数	73	193	357
Gauss-Lobatto	数值	3.141585181550	3.141592647723	3.141592653429
	次数	78	168	378

2.1.3 计算结果

在不同误差限下的计算结果和计算次数如表 1所示。

2.1.4 结果分析

三种积分算法均可以逼近 π，但在相同计算开销下，梯形公式的精确度最低，辛普森公式和 Gauss-Lobatto 公式的精确度相近。此外，随着分割粒度的细化，三种算法的精度都有了相应的提升。在实际情况中，往往需要根据精度要求来调整分割粒度。

2.1.5 结论

本实验中计算得出的 π 的数值为 3.141592653429。

2.2 Chap3-Ex10 (Calc)

2.2.1 算法设计

本题给出了机翼断面轮廓线上稀疏的采样点，需要求出细粒度的断面轮廓以及断面的面积。

给定断面点 $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$，求插值点 x 处的插值 y，这里选取三种方式进行插值，分别是拉格朗日插值，分段线性插值，以及三次样条插值。

对于拉格朗日插值，插值多项式为，

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \tag{2}$$

其中满足，

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, ..., n \tag{3}$$

对于分段线性插值，插值多项式经过推导，同样可以表示为形如方程 (2) 的形式，其中，

$$l_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

对于三次样条插值，插值多项式可表示为，

$$S(x) = \{s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \mid x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, ..., n\} \tag{5}$$

其中 a_i, b_i, c_i, d_i 为 $4n$ 个待定系数，由下列 $4n$ 个方程唯一确定，

$$\begin{cases} S(x_i) = y_i, & i = 0, 1, ..., n \\ s_i^{(k)}(x_i) = s_{i+1}^{(k)}(x_i), & k = 0, 1, 2, \quad i = 1, 2, ..., n-1 \\ S''(x_0) = S''(x_n) = 0, & \end{cases} \tag{6}$$

得到插值结果后，采用梯形积分公式来计算机翼断面的面积即可。

2.2.2 Matlab 程序

其中，拉格朗日插值算法需要自己实现，我在老师给的样例程序上进行了一定的优化，实现如下，

```matlab
function vq = lagrange(x, y, xq)
    if (length(x) ~= length(y))
        error('Fixed points x and y must be of the same size');
    end

    vq = zeros(1, length(xq));
    for i = 1:length(x)
        p = ones(1, length(xq));
        for j = 1:length(x)
            if (i ~= j)
                p = p .* (xq - x(j)) / (x(i) - x(j));
            end
        end
        vq = vq + p .* y(i);
    end
end
```

分段线性插值用 Matlab 内置的 `interp1(x, y, xq, 'linear')`，三次样条插值采用 Matlab 内置的 `interp1(x, y, xq, 'spline')`，完整程序如下，

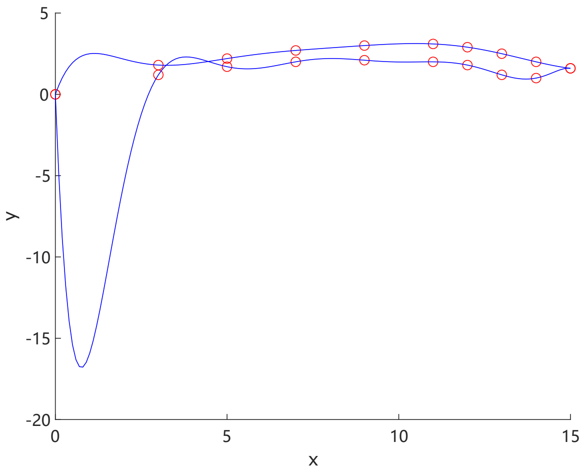
```matlab
x = [0 3 5 7 9 11 12 13 14 15];
y1 = [0 1.8 2.2 2.7 3.0 3.1 2.9 2.5 2.0 1.6];
y2 = [0 1.2 1.7 2.0 2.1 2.0 1.8 1.2 1.0 1.6];

xq = 0:0.1:15;

y1q = lagrange(x, y1, xq);
y2q = lagrange(x, y2, xq);
plot_result(xq, y1q, y2q, x, y1, y2);
fprintf('Lagrange gives: %f\n', trapz(xq, y1q - y2q));

y1q = interp1(x, y1, xq, 'linear');
y2q = interp1(x, y2, xq, 'linear');
plot_result(xq, y1q, y2q, x, y1, y2);
fprintf('Linear gives: %f\n', trapz(xq, y1q - y2q));

y1q = interp1(x, y1, xq, 'spline');
y2q = interp1(x, y2, xq, 'spline');
plot_result(xq, y1q, y2q, x, y1, y2);
fprintf('Spline gives: %f\n', trapz(xq, y1q - y2q));

function plot_result(xq, y1q, y2q, x, y1, y2)
    figure;
    scatter(x, y1, 36, 'r'); hold on;
    scatter(x, y2, 36, 'r'); hold on;
    plot(xq, y1q, 'b', xq, y2q, 'b');
    xlabel('x');
    ylabel('y');
end
```

2.2.3 计算结果

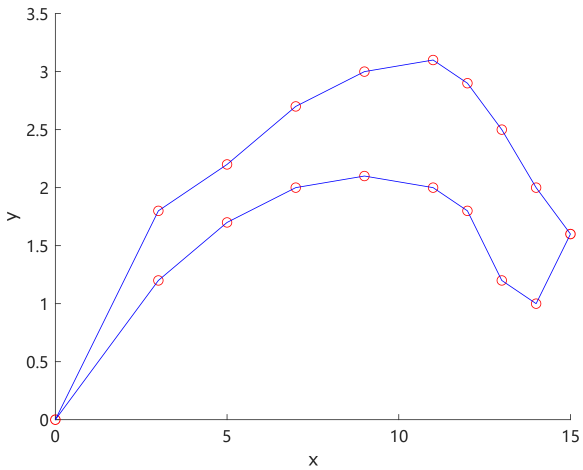
采用三种插值方法所得到的机翼断面曲线如图 1所示。根据断面曲线，采用梯形积分公式计算出断面的面积，如表 2所示。

表 2: 三种插值方式所得机翼断面的面积。

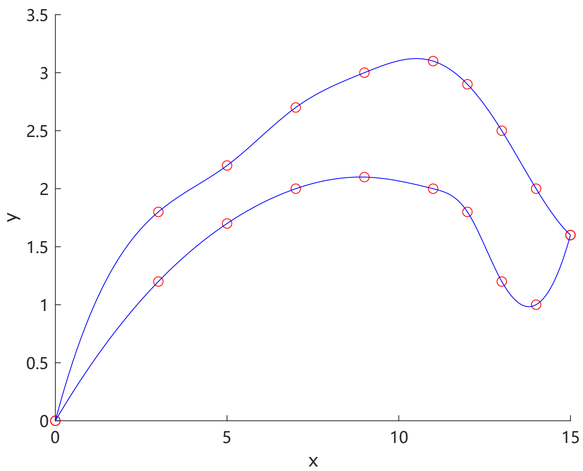
插值算法	拉格朗日插值	分段线性插值	三次样条插值
面积	40.30	10.75	11.34



(a) 拉格朗日插值



(b) 分段线性插值



(c) 三次样条插值

图 1: 采用三种插值方法得到的断面曲线。

2.2.4 结果分析

从图 1可以看出，采用拉格朗日插值时，出现了 Runge 现象，插值曲线振荡强烈，导致的面积计算偏差过大，不能作为实际生产数据使用。采用分段线性插值时，曲线更加平缓，然而在采样点处会出现不光滑的导数不连续点，不利于实际使用。采用三次样条插值时，除了左右端点的结合处，曲线在其他位置均有二阶连续可导的光滑程度，形成的流线有利于降低机翼阻力。

因此，在实际生产中，应当使用三次样条插值所得的曲线和面积结果。

2.2.5 结论

实际生产中，应当采用三次样条插值所得的断面曲线，如图 1(c)所示，断面面积为 11.34。

2.3 Chap3-Ex12 (App)

2.3.1 问题分析

题目给出了在几个时刻统计出的一分钟车流量，要求估计一天的车流量。题目给出的信息是很粗糙的，需要首先通过插值估计出一天内每一时刻的一分钟车流量，再进行数值积分求出全天的总车流量。

2.3.2 模型假设

考虑到实际情况，这里给出以下假设，

A. 每分钟车流量是非负的

B. 每分钟车流量随时间的变化是连续的

C. 每分钟车流量随时间的变化是一阶光滑的

2.3.3 模型建立

从一天的零点开始，设经过 t 分钟后 $(0 \le t \le 1440)$，在接下来一分钟内的车流量为 $f(t)$，由模型假设，$f(t)$ 应当满足以下约束条件，

A. $f(t) \ge 0, \quad \forall t \in [0, 1440]$

B. $f(t) \in C[0, 1440]$

C. $f(t) \in C^1[0, 1440]$

设一天的车流量为 s，则有，

$$s = \int_0^{1440} f(t)dt \tag{7}$$

其中 s 即为题目所求的全天总车流量。

2.3.4 算法设计

为了满足约束条件，这里采用更强的三次样条插值算法估计 $f(t)$，它可以保证 $f(t) \in C^2[0,1440]$，从而满足约束 B 和 C，得到插值结果后，将车流量小于 0 的值置为 0，从而满足约束 A，最后采用梯形公式计算车流量曲线下的面积，即为全天通过的总车流量。

2.3.5 Matlab 程序

Matlab 程序如下，三次样条插值算法和梯形公式积分算法均使用 Matlab 内置算法。

```matlab
x = 60 * [0 2 4 5 6 7 8 9 10.5 11.5 12.5 14 16 17 18 19 20 21 22 23 24];
y = [2 2 0 2 5 8 25 12 5 10 12 7 9 28 22 10 9 11 8 9 3];

xq = 0:24 * 60;
yq = interp1(x, y, xq, 'spline');
yq(yq < 0) = 0;

figure;
plot(xq, yq);
hold on;
scatter(x, y);
xlim([0, 24 * 60]);
ylim([0, 30]);
xlabel('Time (min)');
ylabel('Traffic Flow');
day_flow = trapz(xq, yq);
fprintf('Total traffic flow per day: %.0f\n', day_flow);
```

2.3.6 计算结果

三次样条插值后，车流量曲线如图 2所示，根据插值曲线，由梯形积分公式计算得出全天总车流量 $s = 12668$。

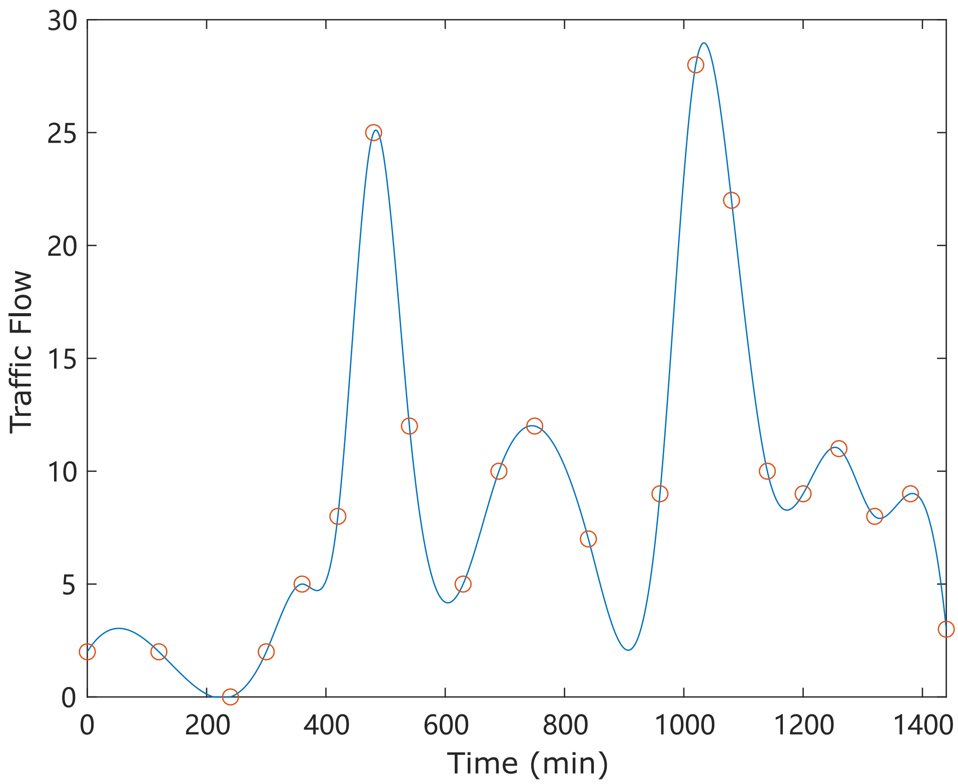


图 2: 车流量曲线的三次样条插值结果

2.3.7 结果的数学分析及实际意义

从图 2可以看出，相比于分段线性插值，三次样条插值处理后的数据更贴近真实情况，在实际生活中，车流量不会突变，车流量的变化量也往往是连续的。经过插值处理后，再通过积分算法，即可较为可靠地求出一天内的总车流量，结果约为 1.27 万辆。

2.3.8 结论

一天通过桥梁的车流量大约为 1.27 万辆。

3 收获与建议

在本次实验中，我通过使用 Matlab，掌握了拉格朗日、分段线性、三次样条三种插值算法，以及梯形公式、辛普森公式、Gauss-Lobatto 公式三种数值积分算法，在解决实际问题的过程中，我对数学方法的原理和应用有了更深刻的理解。

希望助教能对每次的实验进行详细的解答，希望老师在未来的课堂上介绍更多数学应用的前沿知识。