수능특강

수학영역 확률과 통계

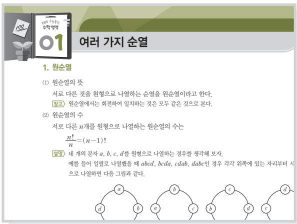
이 책의 **차례**

Contents

- EBS*i*(http://www.ebs*i*.co.kr)로 들어오셔서 회원으로 등록하세요.
- 본 교재는 EBS 인터넷 방송을 통해 학습할 수 있습니다. (VOD 무료 서비스 실시)
- 교재 및 강의 내용에 관한 문의는 EBS*i*(http://www.ebs*i*.co.kr)의 학습 Q&A 서비스를 활용하시기 바랍니다.

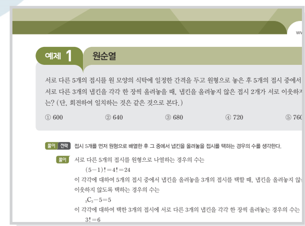
이 책의 구성과 특징

Structure



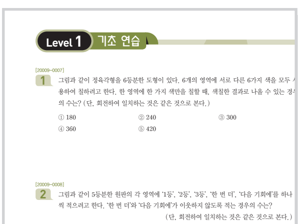
개념 정리

교과서의 핵심 내용을 체계적으로 정리하였다.



예제 & 유제

예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념을 풀이 전략으로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.



Level 1 - Level 2 - Level 3

Level 1 기초 연습은 기초 개념의 인지 정도를 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문항을, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있는 문항을 제시하여 대학수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.

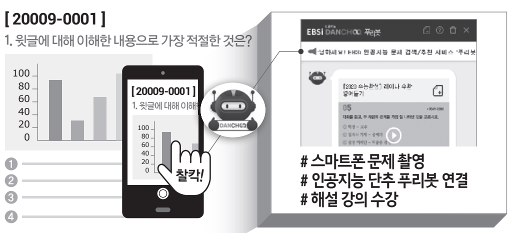
대표 기출 문제

대학수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.

EBS 스마트북 활용 안내

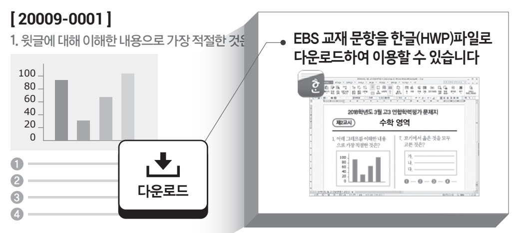
EBS 스마트북은 스마트폰으로 바로 찍어 해설 영상을 수강할 수 있고, 교재 문제를 파일(한글, 이미지)로 다운로드하여 쉽게 활용할 수 있습니다.

학생 모르는 문제, 찍어서 해설 강의 수강



※ **EBSi 고교강의 앱** 설치 후 이용하실 수 있습니다.
※ **EBSi 홈페이지 및 앱** 검색창에서 문항코드 입력으로도 확인이 가능합니다.

교사 교재 문항을 한글(HWP)문서로 저장



※ **교사지원센터(http://teacher.ebsi.co.kr)** 접속 후 '교사 인증'을 통해 이용 가능

여러 가지 순열

1. 원순열

(1) 원순열의 뜻

서로 다른 것을 원형으로 나열하는 순열을 원순열이라고 한다.

참고 원순열에서는 회전하여 일치하는 것은 모두 같은 것으로 본다.

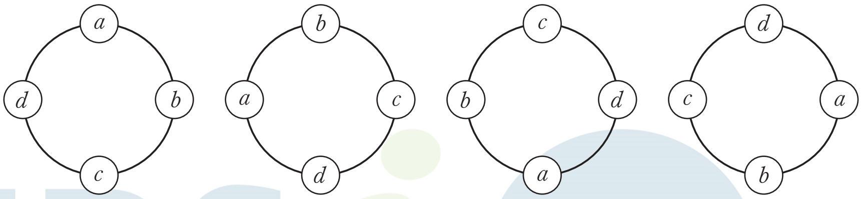
(2) 원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 나열하는 원순열의 수는

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

설명 네 개의 문자 a, b, c, d를 원형으로 나열하는 경우를 생각해 보자.

예를 들어 일렬로 나열했을 때 $abcd$, $bcda$, $cdab$, $dabc$인 경우 각각 위쪽에 있는 자리부터 시계 방향으로 원형으로 나열하면 다음 그림과 같다.



이때 위의 네 가지는 가장 위쪽에 있는 문자부터 시계 방향으로 일렬로 나열하면 서로 다른 경우이지만 원형으로 나열하면 회전하여 일치하는 것은 모두 같은 것으로 보기 때문에 한 가지 경우가 된다. 이와 같이 서로 다른 네 개의 문자를 일렬로 나열하여 얻은 순열에는 원형으로 나열하면 같은 것이 4가지씩 있게 된다. 따라서 서로 다른 네 개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_4=4!$이지만, 원형으로 나열하면 이 중에서 같은 것이 4가지씩 있으므로 서로 다른 네 개의 문자를 원형으로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{4}=(4-1)!=3!=3\times2\times1=6$$

이다. 일반적으로 서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{P}_n=n!$이지만, 원형으로 나열하면 이 중에서 같은 것이 n가지씩 있으므로 원순열의 수는

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

이다.

예 다섯 명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 서로 다른 5개를 원형으로 나열하는 원순열의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{5}=(5-1)!=4!=4\times3\times2\times1=24$$

(3) 서로 다른 n개에서 r $(0<r\le n)$개를 택하여 원형으로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r}$$

예 서로 다른 5개의 문자에서 3개를 택하여 원형으로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{{}_5\mathrm{P}_3}{3}=\frac{5\times4\times3}{3}=20$$

예제 1 원순열

서로 다른 5개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓은 후 5개의 접시 중에서 3개의 접시 위에 서로 다른 3개의 냅킨을 각각 한 장씩 올려놓을 때, 냅킨을 올려놓지 않은 접시 2개가 서로 이웃하지 않는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 600 ② 640 ③ 680 ④ 720 ⑤ 760

풀이 전략 접시 5개를 먼저 원형으로 배열한 후 그 중에서 냅킨을 올려놓을 접시를 택하는 경우의 수를 생각한다.

풀이 서로 다른 5개의 접시를 원형으로 나열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이 각각에 대하여 5개의 접시 중에서 냅킨을 올려놓을 3개의 접시를 택할 때, 냅킨을 올려놓지 않을 접시 2개가 서로 이웃하지 않도록 택하는 경우의 수는

${}_5C_3-5=5$

이 각각에 대하여 택한 3개의 접시에 서로 다른 3개의 냅킨을 각각 한 장씩 올려놓는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times5\times6=720$

답 ④

다른 풀이 5개의 접시 중에서 3개의 접시를 택하여 서로 다른 3개의 냅킨을 각각 한 장씩 올려놓는 경우의 수는

${}_5P_3=60$

이 각각에 대하여 냅킨을 올려놓은 3개의 접시와 냅킨을 올려놓지 않은 2개의 접시를 냅킨을 올려놓지 않은 2개의 접시가 서로 이웃하지 않도록 원형으로 나열하는 경우의 수는

$4!-3!\times2!=24-12=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\times12=720$

정답과 풀이 4쪽

[20009-0001]

유제 1 남학생 3명과 여학생 2명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 둘러앉을 때, 여학생 2명이 서로 이웃하게 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

[20009-0002]

유제 2 서로 다른 빨간 공 4개와 서로 다른 파란 공 4개를 일정한 간격을 두고 원형으로 나열할 때, 빨간 공과 파란 공을 교대로 나열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

2. 중복순열

(1) 중복순열의 뜻

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택해 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 중복순열이라 하고, 이러한 중복순열의 수를 기호로

$${}_{n}\Pi_{r}$$

와 같이 나타낸다.

참고 ${}_{n}\Pi_{r}$에서 Π는 곱을 뜻하는 영어 product의 첫 글자 P에 해당하는 그리스 문자로 '파이'라고 읽는다.

(2) 중복순열의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_{n}\Pi_{r}=n^{r}$$

설명 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택해 일렬로 나열할 때, 첫 번째, 두 번째, 세 번째, $\cdots$, r번째 자리에 올 수 있는 것은 각각 n가지씩이다.

나열 순서	첫 번째	두 번째	세 번째	$\cdots$	r번째
경우의 수	n	n	n	$\cdots$	n

따라서 곱의 법칙에 의하여

$${}_{n}\Pi_{r}=\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}}=n^{r}$$

이다.

참고 순열의 수 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$에서는 $r\le n$이어야 하지만 중복순열의 수 ${}_{n}\Pi_{r}$에서는 중복을 허락하므로 $r>n$이어도 된다.

예 1 ${}_{2}\Pi_{5}=2^{5}=32$, ${}_{5}\Pi_{2}=5^{2}=25$

예 2 세 개의 숫자 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 네 개의 숫자를 택해 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_{3}\Pi_{4}=3^{4}=81$$

예 3 두 집합 $A=\{a, b, c\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 집합 A에서 집합 B로의 함수의 개수를 구해 보자.

집합 A에서 집합 B로의 함수는 집합 A의 각 원소에 집합 B의 원소가 하나씩만 대응하면 되고, 이때 집합 A의 각 원소의 함숫값은 집합 B의 원소 중에서 중복하여 택할 수 있다. 즉, 집합 B의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 일렬로 나열한 후 집합 A의 원소 a, b, c에 순서대로 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_{5}\Pi_{3}=5^{3}=125$$

예제 2 중복순열

5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수 중 숫자 3을 2개 포함하는 자연수의 개수는?

① 514 ② 524 ③ 534 ④ 544 ⑤ 554

풀이 전략 만의 자리의 숫자가 3인 경우와 3이 아닌 경우로 나눈 후 중복순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구한다.

풀이 (i) 만의 자리의 숫자가 3인 경우

나머지 한 개의 숫자 3이 들어갈 자리를 택하는 경우의 수는

$_4C_1=4$

이 각각에 대하여 남은 세 자리에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는 네 개의 숫자 0, 1, 2, 4에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

$_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 이 경우의 수는 $4\times64=256$

(ii) 만의 자리의 숫자가 3이 아닌 경우

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 4의 3가지

이 각각에 대하여 남은 네 자리 중 숫자 3이 들어갈 두 자리를 택하는 경우의 수는

$_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

이 각각에 대하여 남은 두 자리에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는 네 개의 숫자 0, 1, 2, 4에서 중복을 허락하여 2개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

$_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 이 경우의 수는 $3\times6\times16=288$

(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는 $256+288=544$

답 ④

정답과 풀이 4쪽

[20009-0003]

유제 3 서로 다른 7개의 공을 서로 다른 2개의 주머니에 남김없이 나누어 넣을 때, 빈 주머니가 없도록 넣는 경우의 수를 구하시오.

[20009-0004]

유제 4 6명의 학생이 떡볶이, 김밥, 라면 중에서 각자 한 가지씩 주문할 때, 적어도 한 명은 김밥을 주문하는 경우의 수는?

① 661 ② 663 ③ 665 ④ 667 ⑤ 669

3. 같은 것이 있는 순열

(1) 같은 것이 있는 순열의 뜻

같은 것이 포함되어 있는 n개를 일렬로 나열하는 것을 같은 것이 있는 순열이라고 한다.

(2) 같은 것이 있는 순열의 수

n개 중에 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, 이들을 모두 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!}\ (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

설명 예를 들어 5개의 문자 a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구해 보자.
먼저 구하는 순열의 수를 k라 하고, 그 중에서 하나의 순열 $aaabb$를 생각해 보자. 이때 3개의 a를 구별하여 각각 a_1, a_2, a_3이라 하고, 2개의 b를 구별하여 각각 b_1, b_2라 하면 다음과 같은 $3!\times2!$가지의 서로 다른 순열을 생각할 수 있다.

$aaabb$ ➡

$a_1a_2a_3b_1b_2$	$a_1a_2a_3b_2b_1$
$a_1a_3a_2b_1b_2$	$a_1a_3a_2b_2b_1$
$a_2a_1a_3b_1b_2$	$a_2a_1a_3b_2b_1$
$a_2a_3a_1b_1b_2$	$a_2a_3a_1b_2b_1$
$a_3a_1a_2b_1b_2$	$a_3a_1a_2b_2b_1$
$a_3a_2a_1b_1b_2$	$a_3a_2a_1b_2b_1$

마찬가지로 k가지의 순열 각각에 대하여 3개의 a를 a_1, a_2, a_3으로, 2개의 b를 b_1, b_2로 구별하여 나열하면 $3!\times2!$가지의 서로 다른 순열이 생기고, 5개의 서로 다른 문자를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $5!$이므로

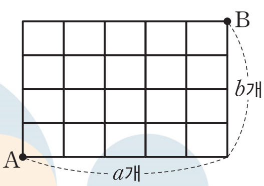
$$k\times(3!\times2!)=5!$$

따라서 구하는 순열의 수는 $k=\dfrac{5!}{3!2!}=10$

예 같은 종류의 빨간 공 3개와 같은 종류의 파란 공 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{7!}{3!4!}=35$

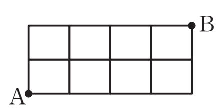
(3) 최단 거리로 가는 경우의 수

직사각형 모양으로 연결된 도로망에서 도로망을 따라 두 지점 사이를 최단 거리로 가는 경우의 수는 가로 방향으로 한 칸 움직이는 이동과 세로 방향으로 한 칸 움직이는 이동을 필요한 횟수만큼 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 같은 것이 있는 순열의 수를 구하는 방법을 이용할 수 있다. 즉, 그림과 같이 가로 방향의 칸의 수가 a, 세로 방향의 칸의 수가 b일 때, 이 도로망을 따라 A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는



$$\frac{(a+b)!}{a!b!}$$

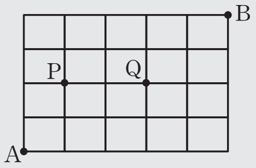
예 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망에서 도로망을 따라 A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는



$$\frac{6!}{4!2!}=15$$

예제 3 같은 것이 있는 순열

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 갈 때, P지점과 Q지점 중 한 지점만 지나고 최단 거리로 가는 경우의 수는?



① 61 ② 63 ③ 65
④ 67 ⑤ 69

풀이 전략 P지점만 지나가는 경우의 수와 Q지점만 지나가는 경우의 수를 각각 구한다. 이때 가로 방향으로 한 칸 움직이는 이동과 세로 방향으로 한 칸 움직이는 이동을 필요한 횟수만큼 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하면 되므로 같은 것이 있는 순열의 수를 이용한다.

풀이 (i) P지점만 지나가는 경우

A → P → B로 이동하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\times\frac{6!}{4!2!}=3\times15=45$$

이고, 이 중에서 A → P → Q → B로 이동하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\times1\times\frac{4!}{2!2!}=3\times1\times6=18$$

이므로 이 경우의 수는

$45-18=27$

(ii) Q지점만 지나가는 경우

A → Q → B로 이동하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!2!}\times\frac{4!}{2!2!}=10\times6=60$$

이고, 이 중에서 A → P → Q → B로 이동하는 경우의 수는 (i)에서와 마찬가지로 18이므로 이 경우의 수는

$60-18=42$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$27+42=69$

답 ⑤

정답과 풀이 4쪽

[20009-0005]

유제 5 A, B, C를 포함한 7명의 학생을 일렬로 세울 때, A가 B보다 앞에 있고 B가 C보다 앞에 있도록 세우는 경우의 수를 구하시오.

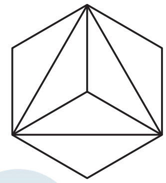
[20009-0006]

유제 6 6개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3을 일렬로 나열하여 여섯 자리의 자연수를 만들 때, 숫자 2가 서로 이웃하지 않는 자연수의 개수는?

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

[20009-0007]

1 그림과 같이 정육각형을 6등분한 도형이 있다. 6개의 영역에 서로 다른 6가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

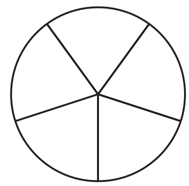


① 180　② 240　③ 300　④ 360　⑤ 420

[20009-0008]

2 그림과 같이 5등분한 원판의 각 영역에 '1등', '2등', '3등', '한 번 더', '다음 기회에'를 하나씩 적으려고 한다. '한 번 더'와 '다음 기회에'가 이웃하지 않도록 적는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 12　② 15　③ 18　④ 21　⑤ 24

[20009-0009]

3 1학년 학생 3명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 1명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 둘러앉을 때, 3학년 학생의 옆에 적어도 한 명의 2학년 학생이 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 68　② 72　③ 76　④ 80　⑤ 84

[20009-0010]

4 서로 다른 5개의 스티커를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.

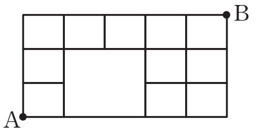
(단, 스티커를 한 개도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

[20009-0011]

5 4개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수 중 짝수의 개수를 구하시오.

[20009-0012]

6 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는?



① 22　② 24　③ 26　④ 28　⑤ 30

[20009-0013]

7 5개의 숫자 0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수 중에서 홀수의 개수는?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

[20009-0014]

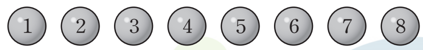
8 6개의 문자 a, b, c, d, e, f를 일렬로 나열할 때, a가 b보다 왼쪽에 있고, c가 d보다 왼쪽에 있도록 나열하는 경우의 수는?

① 120　② 140　③ 160　④ 180　⑤ 200

Level 2 기본 연습

[20009-0015]

1 그림과 같이 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8개의 공이 있다.

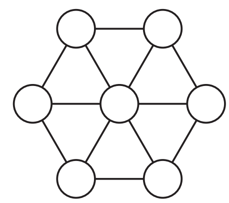


이 8개의 공을 일정한 간격을 두고 원형으로 나열할 때, 서로 마주 보는 두 공에 적힌 수가 모두 서로소인 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 860　② 864　③ 868　④ 872　⑤ 876

[20009-0016]

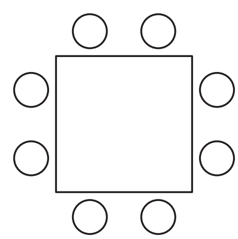
2 그림과 같이 정육각형에서 가장 긴 대각선 3개를 그리고, 정육각형의 각 꼭짓점과 가장 긴 대각선의 중점에 각각 중심이 있고 반지름의 길이가 모두 같은 7개의 원을 그린다. 1부터 7까지의 자연수를 7개의 원에 각각 하나씩 적을 때, 이웃한 두 원에 적은 수의 합이 모두 10 이하인 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 9　② 12　③ 15
④ 18　⑤ 21

[20009-0017]

3 그림과 같이 정사각형 모양의 탁자에 배열된 8개의 의자에 A, B, C, D를 포함한 8명의 학생이 앉으려고 한다. A와 B는 탁자의 서로 반대쪽 면에 배열된 의자에 각각 한 명씩 앉고, C와 D는 탁자의 서로 이웃한 면에 배열된 의자에 각각 한 명씩 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 1464　② 1488　③ 1512
④ 1536　⑤ 1560

[20009-0018]

4 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$A\cup B=U,\ n(A\cap B)=2$$

를 만족시키는 두 집합 A, B의 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는?

① 1792　② 1820　③ 1848　④ 1876　⑤ 1904

[20009-0019]

5 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 3의 배수가 아닌 자연수의 개수는?

① 80 ② 82 ③ 84 ④ 86 ⑤ 88

[20009-0020]

6 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 중에서 치역의 모든 원소의 합이 6인 함수의 개수는?

① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

[20009-0021]

7 좌표평면 위의 점 P는 한 번 이동할 때마다 다음 네 가지 중 한 가지 방법으로 이동한다.

(가) x축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.
(나) x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.
(다) y축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.
(라) y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.

원점 O에서 출발한 점 P가 5번 이동한 후에 처음으로 점 $(2, 1)$에 도착하는 경우의 수는?

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

[20009-0022]

8 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 이웃하는 a와 b가 존재하도록 나열하는 경우의 수는?

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

Level 3 실력 완성

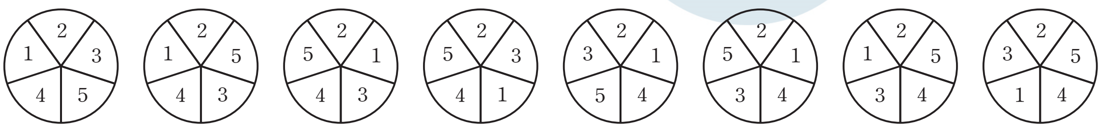
정답과 풀이 9쪽

[20009-0023]

1 5 이상의 자연수 n에 대하여 중심각의 크기가 같은 n개의 부채꼴로 원판을 나눈 후, 다음 조건을 만족시키도록 1부터 n까지의 자연수를 각 부채꼴에 하나씩 모두 적는 경우의 수를 $f(n)$이라 하자.

> (가) 짝수를 적은 부채꼴끼리는 서로 이웃하지 않는다.
> (나) 1을 적은 부채꼴과 n을 적은 부채꼴은 서로 이웃하지 않는다.

예를 들어 $n=5$일 때 조건을 만족시키도록 1부터 5까지의 자연수를 적는 경우는 다음과 같이 8가지가 있으므로 $f(5)=8$이다.



$\dfrac{f(n)}{f(n+1)}=\dfrac{1}{60}$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

[20009-0024]

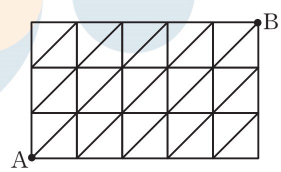
2 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 A에서 B로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는?

> (가) $f(1)+f(3)=4$
> (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 2316 ② 2326 ③ 2336 ④ 2346 ⑤ 2356

[20009-0025]

3 그림과 같이 직각이등변삼각형 모양으로 연결된 도로망에서 각 도로가 만나는 지점을 교차점이라 하자. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 A지점과 B지점 사이에 6개의 교차점을 지나면서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하시오.



대표 기출 문제

출제 경향 원순열의 수, 중복순열의 수, 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 다양한 상황에서의 경우의 수를 구하는 문제가 출제된다.

서로 다른 공 4개를 남김없이 서로 다른 상자 4개에 나누어 넣으려고 할 때, 넣은 공의 개수가 1인 상자가 있도록 넣는 경우의 수는? (단, 공을 하나도 넣지 않은 상자가 있을 수 있다.) [4점]

① 220　② 216　③ 212　④ 208　⑤ 204

2018학년도 대수능

출제 의도 ▸ 중복순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 서로 다른 공 4개를 서로 다른 상자 4개에 나누어 넣는 경우의 수는 공을 하나도 넣지 않는 상자가 있을 수 있으므로 ${}_4\Pi_4=4^4=256$

이 중에서 넣은 공의 개수가 1인 상자가 없는 경우는 다음과 같다.

(i) 상자 1개에 공 4개를 모두 넣는 경우

공 4개를 모두 넣을 상자 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

(ii) 상자 2개에 공을 2개씩 넣는 경우

공을 넣을 상자 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2$이고, 택한 상자에 공을 2개씩 넣는 경우의 수는 ${}_4C_2\times{}_2C_2$이므로 이 경우의 수는

$${}_4C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2=\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1=36$$

따라서 구하는 경우의 수는

$256-4-36=216$

답 ②

다른 풀이 다음과 같이 구할 수도 있다.

(i) 서로 다른 4개의 상자에 넣는 공의 개수가 각각 3, 1, 0, 0인 경우

4개의 공을 3개, 1개로 나누는 경우의 수는 ${}_4C_3\times{}_1C_1=4$이고,

상자 4개 중 2개를 택하여 공 3개, 1개를 넣는 경우의 수는 ${}_4P_2=4\times3=12$이므로

이 경우의 수는 $4\times12=48$

(ii) 서로 다른 4개의 상자에 넣는 공의 개수가 각각 2, 1, 1, 0인 경우

4개의 공을 2개, 1개, 1개로 나누는 경우의 수는 ${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=6$이고,

상자 4개 중 3개를 택하여 공 2개, 1개, 1개를 넣는 경우의 수는 ${}_4P_3=4\times3\times2=24$이므로

이 경우의 수는 $6\times24=144$

(iii) 서로 다른 4개의 상자에 넣는 공의 개수가 각각 1, 1, 1, 1인 경우

4개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 이 경우의 수는 $4!=24$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$48+144+24=216$

EBS 수능특강 수학영역

02 중복조합과 이항정리

1. 중복조합

(1) 중복조합의 뜻

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합이라 하고, 이러한 중복조합의 수를 기호로

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}$$

와 같이 나타낸다.

참고 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$에서 H는 같음을 뜻하는 Homogeneous의 첫 글자이다.

(2) 중복조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

설명 2개의 문자 a, b에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 조합은

aaa, aab, abb, bbb

의 4가지이므로 ${}_{2}\mathrm{H}_{3}=4$이다.

이때 위의 4가지 조합을 문자를 놓을 자리인 3개의 ○와 2가지 문자의 경계에 놓을 ▮를 이용하여 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.

aaa ➡ ○○○▮
aab ➡ ○○▮○
abb ➡ ○▮○○
bbb ➡ ▮○○○

따라서 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수 ${}_{2}\mathrm{H}_{3}$은 3개의 ○와 $(2-1)$개의 ▮를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다. 즉, $(3+2-1)$개의 자리에서 ○를 놓을 3개의 자리를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_{2}\mathrm{H}_{3}={}_{3+2-1}\mathrm{C}_{3}={}_{4}\mathrm{C}_{3}$$

이다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$는 r개의 ○와 $(n-1)$개의 ▮를 일렬로 나열하는 경우의 수, 즉 $(r+n-1)$개의 자리에서 ○를 놓을 r개의 자리를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{r+(n-1)}\mathrm{C}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

이다.

참고 조합의 수 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$에서는 $r\le n$이어야 하지만 중복조합의 수 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$에서는 중복을 허락하므로 $r>n$이어도 된다.

예1 ① ${}_{5}\mathrm{H}_{3}={}_{5+3-1}\mathrm{C}_{3}={}_{7}\mathrm{C}_{3}=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

② ${}_{3}\mathrm{H}_{5}={}_{3+5-1}\mathrm{C}_{5}={}_{7}\mathrm{C}_{5}={}_{7}\mathrm{C}_{2}=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

③ ${}_{5}\mathrm{H}_{0}={}_{5+0-1}\mathrm{C}_{0}={}_{4}\mathrm{C}_{0}=1$

예2 ① 4개의 문자 a, b, c, d에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}\mathrm{H}_{5}={}_{4+5-1}\mathrm{C}_{5}={}_{8}\mathrm{C}_{5}={}_{8}\mathrm{C}_{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

② 같은 종류의 사탕, 과자, 초콜릿이 각각 6개씩 있을 때, 이 중에서 6개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}\mathrm{H}_{6}={}_{3+6-1}\mathrm{C}_{6}={}_{8}\mathrm{C}_{6}={}_{8}\mathrm{C}_{2}=\frac{8\times7}{2\times1}=28$$

예제 1 중복조합

같은 종류의 탁구공 4개와 같은 종류의 야구공 5개를 윤비, 성우, 선재에게 남김없이 나누어 줄 때, 윤비는 탁구공을 적어도 1개 받고 성우는 야구공을 적어도 1개 받도록 나누어 주는 경우의 수는?

(단, 아무것도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)

① 130　② 135　③ 140　④ 145　⑤ 150

풀이 전략 윤비에게 먼저 탁구공 1개를 나누어 주고, 성우에게 먼저 야구공 1개를 나누어 준 후, 나머지 공을 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수를 중복조합의 수를 이용하여 구한다.

풀이 먼저 윤비에게 탁구공 1개, 성우에게 야구공 1개를 나누어 준 후 나머지 탁구공 3개와 야구공 4개를 세 사람에게 남김없이 나누어 주는 경우를 생각하면 된다. 탁구공 3개를 세 사람에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$$

이 각각에 대하여 야구공 4개를 세 사람에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$10\times15=150$$

답 ⑤

정답과 풀이 11쪽

[20009-0026]

유제 1 12명으로 구성된 어느 동아리에서 정기 모임 요일을 정하기 위해 월요일, 수요일, 금요일, 토요일 중 한 요일에 무기명으로 투표하기로 하였다. 오른쪽 표의 예와 같이 각 요일별 득표수를 기록한 것을 개표 결과라 할 때, 개표 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 기권이나 무효는 없다.)

요일	월	수	금	토	계
득표수	2	4	5	1	12

① 415　② 425　③ 435　④ 445　⑤ 455

[20009-0027]

유제 2 빨간 공 2개, 노란 공 4개, 파란 공 4개, 검은 공 4개 중에서 5개의 공을 택하는 경우의 수는?

(단, 같은 색의 공은 구분하지 않는다.)

① 41　② 43　③ 45　④ 47　⑤ 49

2. 중복조합의 활용

(1) 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수

방정식 $x+y+z=n$ (n은 음이 아닌 정수)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_{3}\mathrm{H}_{n}$$

이다.

설명 방정식 $x+y+z=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구해 보자.
예를 들어, 방정식 $x+y+z=5$의 하나의 해 $x=1$, $y=2$, $z=2$는 3개의 문자 x, y, z에서 x를 1개, y를 2개, z를 2개 택한 것으로 생각할 수 있다. 같은 방법으로 생각하면 주어진 방정식의 각 해는 서로 다른 3개의 문자 x, y, z에서 5개를 택하는 중복조합으로 볼 수 있으므로 구하는 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_{3}\mathrm{H}_{5}={}_{3+5-1}\mathrm{C}_{5}={}_{7}\mathrm{C}_{5}={}_{7}\mathrm{C}_{2}=21$$

일반적으로 방정식 $x+y+z=n$ (n은 음이 아닌 정수)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개의 문자 x, y, z에서 n개를 택하는 중복조합의 수 ${}_{3}\mathrm{H}_{n}$과 같다.

참고 방정식 $x+y+z=n$ (n은 3 이상의 자연수)를 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$$x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1\ (x',\ y',\ z'\text{은 음이 아닌 정수})$$

로 놓으면 방정식 $x'+y'+z'=n-3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 모든 순서쌍 (x', y', z')의 개수와 같으므로

$${}_{3}\mathrm{H}_{n-3}$$

(2) 다항식의 전개식에서 서로 다른 항의 개수

다항식 $(a+b+c)^n$ (n은 자연수)의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$${}_{3}\mathrm{H}_{n}$$

이다.

설명 다항식 $(a+b+c)^n$의 전개식에서 각 항은

$$a^x b^y c^z\ (x+y+z=n\text{이고, } x,\ y,\ z\text{는 음이 아닌 정수})$$

의 꼴이므로 서로 다른 항의 개수는 방정식 $x+y+z=n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수인 ${}_{3}\mathrm{H}_{n}$과 같다.

(3) 조건을 만족시키는 함수의 개수

실수 전체의 집합의 공집합이 아닌 두 부분집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때, 집합 X에서 집합 Y로의 함수 중에서

'집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$'

를 만족시키는 함수 f의 개수는

$${}_{n}\mathrm{H}_{m}$$

이다.

설명 조건을 만족시키는 함수는 집합 Y의 원소 n개에서 중복을 허락하여 m개를 택하여 집합 X의 원소에 크기순으로 대응시키면 되므로 함수의 개수는 서로 다른 n개에서 m개를 택하는 중복조합의 수인 ${}_{n}\mathrm{H}_{m}$과 같다.

예제 2 중복조합의 활용

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는?

(가) $a+b+c+d+e=8$
(나) $a-2b\neq 0$

① 413 ② 423 ③ 433 ④ 443 ⑤ 453

풀이 전략 중복조합의 수를 이용하여 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍의 개수를 구한 후 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수를 뺀다.

풀이 방정식 $a+b+c+d+e=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 서로 다른 5개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5\mathrm{H}_8={}_{5+8-1}\mathrm{C}_8={}_{12}\mathrm{C}_8={}_{12}\mathrm{C}_4=495$$

이 중에서 $a=2b$인 경우, 즉 $3b+c+d+e=8$인 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $b=0$일 때

$c+d+e=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d, e의 모든 순서쌍 (c, d, e)의 개수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_8={}_{3+8-1}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=45$$

(ii) $b=1$일 때

$c+d+e=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d, e의 모든 순서쌍 (c, d, e)의 개수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$$

(iii) $b=2$일 때

$c+d+e=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d, e의 모든 순서쌍 (c, d, e)의 개수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $495-(45+21+6)=423$

답 ②

정답과 풀이 11쪽

[20009-0028]

유제 3 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는?

(가) $f(3)$은 3의 배수이다.
(나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\leq f(x_2)$이다.

① 141 ② 146 ③ 151 ④ 156 ⑤ 161

3. 이항정리

(1) 이항정리

자연수 n에 대하여 다항식 $(a+b)^n$을 전개하면 다음과 같다.

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

이와 같이 다항식 $(a+b)^n$을 전개하는 것을 이항정리라고 한다.

설명 다항식 $(a+b)^3$을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)(a+b)(a+b)\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$		
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$		
a	a	b	$\Rightarrow$	a^2b
a	b	a	$\Rightarrow$	a^2b
b	a	a	$\Rightarrow$	a^2b

이때 a^2b항은 세 인수 $a+b$, $a+b$, $a+b$ 중 한 인수에서 b를 택하고 나머지 두 인수에서 각각 a를 택하여 곱한 것이므로 a^2b의 계수는 3개의 인수에서 b를 택할 1개의 인수를 고르는 경우의 수인 ${}_3\mathrm{C}_1$과 같다.

마찬가지 방법으로 생각하면 a^3, ab^2, b^3의 계수는 각각

$${}_3\mathrm{C}_0,\ {}_3\mathrm{C}_2,\ {}_3\mathrm{C}_3$$

임을 알 수 있다. 따라서 다항식 $(a+b)^3$의 전개식을 조합의 수를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(a+b)^3={}_3\mathrm{C}_0a^3+{}_3\mathrm{C}_1a^2b+{}_3\mathrm{C}_2ab^2+{}_3\mathrm{C}_3b^3$$

일반적으로 다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$항은 n개의 인수 중 r개의 인수에서 b를 택하고 나머지 $(n-r)$개의 인수에서 a를 택하여 곱한 것이므로 $a^{n-r}b^r$의 계수는 n개의 인수에서 b를 택할 r개의 인수를 고르는 경우의 수인 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같고

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

이다.

참고 ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$이므로 다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$의 계수와 a^rb^{n-r}의 계수는 같다.

예 $$\begin{aligned}(2x+y)^4&={}_4\mathrm{C}_0(2x)^4+{}_4\mathrm{C}_1(2x)^3y+{}_4\mathrm{C}_2(2x)^2y^2+{}_4\mathrm{C}_3(2x)y^3+{}_4\mathrm{C}_4y^4\\&=16x^4+32x^3y+24x^2y^2+8xy^3+y^4\end{aligned}$$

(2) 이항계수

다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수

$${}_n\mathrm{C}_0,\ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_r,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_n$$

을 이항계수라 하고, ${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$을 다항식 $(a+b)^n$의 전개식의 일반항이라고 한다.

예 $(x+3y)^5$의 전개식에서 x^3y^2의 계수를 구해 보자.

$(x+3y)^5$의 전개식에서 일반항은

$${}_5\mathrm{C}_rx^{5-r}(3y)^r={}_5\mathrm{C}_r3^rx^{5-r}y^r$$

이므로 x^3y^2항은 $r=2$일 때이다.

따라서 x^3y^2의 계수는

$${}_5\mathrm{C}_2\times3^2=\frac{5\times4}{2\times1}\times9=90$$

이다.

예제 3 이항정리

다항식 $(x+2)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수를 a라 하고, 다항식 $(x-1)^2(x+2)^{n-2}$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수를 b라 하자. $4a=7b$일 때, 자연수 n의 값은? (단, $n\geq 4$)

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

풀이 전략 $(a+b)^n$의 전개식에서 일반항이 ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$임을 이용하여 x의 차수에 따른 r의 값을 찾아 계수를 구한다.

풀이 (i) $(x+2)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_n\mathrm{C}_r x^{n-r}2^r$$

이고, x^{n-1}항은 $r=1$일 때이므로 x^{n-1}의 계수 a는

$$a={}_n\mathrm{C}_1\times 2=2n$$

(ii) $(x-1)^2=x^2-2x+1$이므로 $(x-1)^2(x+2)^{n-2}$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는 $(x+2)^{n-2}$의 전개식에서 x^{n-2}의 계수, x^{n-3}의 계수에 각각 -2, 1을 곱하여 더하면 된다.

이때 $(x+2)^{n-2}$의 전개식의 일반항은 ${}_{n-2}\mathrm{C}_s x^{n-2-s}2^s$이고,

x^{n-2}항은 $s=0$일 때이므로 x^{n-2}의 계수는 ${}_{n-2}\mathrm{C}_0=1$,

x^{n-3}항은 $s=1$일 때이므로 x^{n-3}의 계수는 ${}_{n-2}\mathrm{C}_1\times 2=2(n-2)$

그러므로 $b=-2\times 1+1\times 2(n-2)=2n-6$

주어진 조건에 의하여 $4a=7b$이므로

$$4\times 2n=7(2n-6)$$
$$8n=14n-42$$
$$6n=42$$

따라서 $n=7$

답 ③

정답과 풀이 11쪽

[20009-0029]

유제 4 $\left(x^2-\dfrac{3}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^6의 계수는?

① 126　② 135　③ 144　④ 153　⑤ 162

[20009-0030]

유제 5 다항식 $(x+k)^8$의 전개식에서 x^7의 계수가 24일 때, x^6의 계수는? (단, k는 상수이다.)

① 216　② 225　③ 234　④ 243　⑤ 252

4. 이항정리의 활용

(1) 이항계수의 성질

모든 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

① ${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{3}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^{n}$

② ${}_{n}C_{0}-{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}-{}_{n}C_{3}+\cdots+(-1)^{n}{}_{n}C_{n}=0$

③ n이 홀수일 때, ${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{4}+\cdots+{}_{n}C_{n-1}={}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{3}+{}_{n}C_{5}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^{n-1}$

n이 짝수일 때, ${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{4}+\cdots+{}_{n}C_{n}={}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{3}+{}_{n}C_{5}+\cdots+{}_{n}C_{n-1}=2^{n-1}$

설명 $(1+x)^{n}={}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}x+{}_{n}C_{2}x^{2}+{}_{n}C_{3}x^{3}+\cdots+{}_{n}C_{n}x^{n}$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{n}={}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{3}+\cdots+{}_{n}C_{n}$ ······ ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0={}_{n}C_{0}-{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}-{}_{n}C_{3}+\cdots+(-1)^{n}{}_{n}C_{n}$ ······ ㉢

n이 홀수일 때, $\frac{1}{2}$(㉡+㉢)을 하면

$2^{n-1}={}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{4}+\cdots+{}_{n}C_{n-1}$

n이 홀수일 때, $\frac{1}{2}$(㉡−㉢)을 하면

$2^{n-1}={}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{3}+{}_{n}C_{5}+\cdots+{}_{n}C_{n}$

마찬가지 방법으로 n이 짝수일 때,

${}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{2}+{}_{n}C_{4}+\cdots+{}_{n}C_{n}={}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{3}+{}_{n}C_{5}+\cdots+{}_{n}C_{n-1}=2^{n-1}$

(2) 파스칼의 삼각형

자연수 n에 대하여 다항식 $(a+b)^{n}$의 전개식에서 이항계수를 차례로 삼각형 모양으로 나열한 것을 파스칼의 삼각형이라고 한다.

$$
\begin{array}{lccc}
 & 1 & & 1 \\
(a+b)^{1} & {}_{1}C_{0}\ \ {}_{1}C_{1} & & 1\ \ 1 \\
(a+b)^{2} & {}_{2}C_{0}\ \ {}_{2}C_{1}\ \ {}_{2}C_{2} & & 1\ \ 2\ \ 1 \\
(a+b)^{3} & {}_{3}C_{0}\ \ {}_{3}C_{1}\ \ {}_{3}C_{2}\ \ {}_{3}C_{3} & \Rightarrow & 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\
(a+b)^{4} & {}_{4}C_{0}\ \ {}_{4}C_{1}\ \ {}_{4}C_{2}\ \ {}_{4}C_{3}\ \ {}_{4}C_{4} & & 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 \\
(a+b)^{5} & {}_{5}C_{0}\ \ {}_{5}C_{1}\ \ {}_{5}C_{2}\ \ {}_{5}C_{3}\ \ {}_{5}C_{4}\ \ {}_{5}C_{5} & & 1\ \ 5\ \ 10\ \ 10\ \ 5\ \ 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

참고 파스칼의 삼각형에서 다음 성질이 성립함을 확인할 수 있다.

① ${}_{n}C_{r}={}_{n}C_{n-r}\ (0\le r\le n)$이므로 각 단계의 수의 배열은 좌우 대칭이다.

② ${}_{n}C_{r}+{}_{n}C_{r+1}={}_{n+1}C_{r+1}\ (0\le r\le n-1)$이므로 이웃하는 두 수의 합은 그 두 수의 가운데의 아래쪽에 있는 수와 같다.

예제 4 이항정리의 활용

${}_{2n-1}\mathrm{C}_1+{}_{2n-1}\mathrm{C}_2+{}_{2n-1}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}=1023$을 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

풀이 전략 자연수 n과 $0\le r\le n$인 정수 r에 대하여 ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$임을 이용하여 식을 변형하고,

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$$

임을 이용하여 문제를 해결한다.

풀이 ${}_{2n-1}\mathrm{C}_1={}_{2n-1}\mathrm{C}_{2n-2},\ {}_{2n-1}\mathrm{C}_2={}_{2n-1}\mathrm{C}_{2n-3},\ \cdots,\ {}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}={}_{2n-1}\mathrm{C}_n$

이고,

$${}_{2n-1}\mathrm{C}_0={}_{2n-1}\mathrm{C}_{2n-1}=1$$

이므로

$$\begin{aligned}{}_{2n-1}\mathrm{C}_0+{}_{2n-1}\mathrm{C}_1+{}_{2n-1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{2n-1}&=2+2({}_{2n-1}\mathrm{C}_1+{}_{2n-1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1})\\&=2+2\times1023\\&=2048=2^{11}\end{aligned}$$

이때

$${}_{2n-1}\mathrm{C}_0+{}_{2n-1}\mathrm{C}_1+{}_{2n-1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{2n-1}=2^{2n-1}$$

이므로

$$2^{2n-1}=2^{11}$$

$$2n-1=11$$

따라서 $n=6$

답 ③

정답과 풀이 12쪽

[20009-0031]

유제 6 $N={}_9\mathrm{C}_2+{}_9\mathrm{C}_4+{}_9\mathrm{C}_6+{}_9\mathrm{C}_8$일 때, 자연수 N의 양의 약수의 개수는?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

[20009-0032]

유제 7 자연수 n에 대하여 서로 다른 6종류의 아이스크림 중에서 중복을 허락하여 n개의 아이스크림을 택하는 경우의 수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값은?

(단, 모든 종류의 아이스크림은 충분히 많이 있다.)

① 913 ② 923 ③ 933 ④ 943 ⑤ 953

Level 1 기초 연습

[20009-0033]

1 ${}_5\mathrm{H}_3+{}_5\mathrm{C}_3$의 값은?

① 41 ② 43 ③ 45 ④ 47 ⑤ 49

[20009-0034]

2 서로 다른 4개의 문자 a, b, c, d에서 중복을 허락하여 n개를 택하는 경우의 수가 120일 때, 자연수 n의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[20009-0035]

3 같은 종류의 사탕 3개와 같은 종류의 초콜릿 5개를 네 사람에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?

(단, 아무것도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)

① 1120 ② 1140 ③ 1160 ④ 1180 ⑤ 1200

[20009-0036]

4 $4\le a\le b\le 6\le c\le d\le e\le 10$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는?

① 210 ② 216 ③ 222 ④ 228 ⑤ 234

[20009-0037]

5 방정식 $x+y+z=13$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 62 ② 64 ③ 66 ④ 68 ⑤ 70

[20009-0038]

6 $\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right)^8$의 전개식에서 상수항과 x^2의 계수의 곱은?

① 224 ② 231 ③ 238 ④ 245 ⑤ 252

[20009-0039]

7 다항식 $(x+a)^6$의 전개식에서 상수항과 x^3의 계수의 합이 0일 때, 상수항은? (단, a는 0이 아닌 상수이다.)

① 144 ② 196 ③ 256 ④ 324 ⑤ 400

[20009-0040]

8 다항식 $(2x^3+1)+(2x^3+1)^2+(2x^3+1)^3+\cdots+(2x^3+1)^9$의 전개식에서 x^3의 계수는?

① 88 ② 90 ③ 92 ④ 94 ⑤ 96

[20009-0041]

9 집합 $A=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수를 구하시오.

[20009-0042]

10 서로 다른 젤리 10개 중에서 3개 이상의 젤리를 택하는 경우의 수는?

① 928 ② 948 ③ 968 ④ 988 ⑤ 1008

Level 2 기본 연습

[20009-0043]

1 흰 공 9개, 검은 공 9개, 파란 공 9개 중에서 9개의 공을 택하여 세 상자 A, B, C에 각각 3개씩 넣을 때, 상자 A와 상자 B에 넣은 파란 공의 총 개수가 4이고, 상자 C에 넣은 흰 공의 개수가 상자 A에 넣은 파란 공의 개수와 같은 경우의 수는? (단, 같은 색의 공은 구분하지 않는다.)

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

[20009-0044]

2 같은 종류의 빵 7개와 같은 종류의 음료수 3개를 세 사람에게 남김없이 나누어 줄 때, 아무 것도 받지 못하는 사람이 생기지 않도록 나누어 주는 경우의 수는?

① 227 ② 247 ③ 267 ④ 287 ⑤ 307

[20009-0045]

3 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는?

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\geq f(x_2)$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 4 이하이다.

① 121 ② 122 ③ 123 ④ 124 ⑤ 125

[20009-0046]

4 네 자리의 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 9인 홀수의 개수는?

① 62 ② 64 ③ 66 ④ 68 ⑤ 70

[20009-0047]

5 다항식 $(2x+k)^6$의 전개식에서 x^2의 계수가 x^4의 계수의 36배일 때, 자연수 k의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

[20009-0048]

6 10 이하의 자연수 n에 대하여 $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^n$의 전개식에서 상수항을 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} f(n)$의 값은?

① 5598 ② 5608 ③ 5618 ④ 5628 ⑤ 5638

[20009-0049]

7 같은 종류의 사탕 10개와 서로 다른 종류의 초콜릿 10개 중에서 12개를 택할 때, 택한 초콜릿의 개수가 짝수인 경우의 수를 구하시오.

[20009-0050]

8 $A={}_{10}\mathrm{C}_{10}+{}_{11}\mathrm{C}_{10}+{}_{12}\mathrm{C}_{10}+\cdots+{}_{17}\mathrm{C}_{10}$일 때, 자연수 A의 모든 소인수의 합은?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

[20009-0051]

1 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

(가) $a+b+c+d=8$
(나) a는 홀수이다.
(다) $c \ge d$

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

[20009-0052]

2 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e, f의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e, f)의 개수를 구하시오.

(가) $ab(c+d+e+f)=24$
(나) a, b, c, d, e, f 중에서 적어도 3개는 짝수이다.

[20009-0053]

3 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허락하여 10개를 택해 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수는?

(가) x와 y는 한 번만 서로 이웃한다.
(나) y와 z는 한 번만 서로 이웃한다.
(다) z와 x는 한 번만 서로 이웃한다.

① 500 ② 504 ③ 508 ④ 512 ⑤ 516

대표 기출 문제

출제 경향 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제, 이항정리를 이용하여 특정한 항의 계수를 구하는 문제, 이항계수의 성질을 묻는 문제 등이 출제된다. 특히, 중복조합의 수를 이용하여 방정식을 만족시키는 해의 개수를 구하는 문제가 자주 출제된다.

네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 초콜릿 8개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? [3점]

(가) 각 학생은 적어도 1개의 초콜릿을 받는다.
(나) 학생 A는 학생 B보다 더 많은 초콜릿을 받는다.

① 11　② 13　③ 15　④ 17　⑤ 19

2019학년도 대수능

출제 의도 ▸ 주어진 조건을 방정식으로 나타내고, 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 방정식의 해의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 초콜릿의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면 $a+b+c+d=8$

조건 (가)에 의하여 a, b, c, d는 자연수이므로

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$ (a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)

라 하면

$a'+b'+c'+d'=4$

조건 (나)에 의하여 $a'>b'$이므로

$a'=a''+b'+1$ (a''은 음이 아닌 정수)

라 하면

$a''+2b'+c'+d'=3$

즉, 구하는 경우의 수는 방정식 $a''+2b'+c'+d'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a'', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a'', b', c', d')의 개수와 같다.

(i) $b'=0$인 경우

$a''+c'+d'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a'', c', d'의 모든 순서쌍 (a'', c', d')의 개수는

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

(ii) $b'=1$인 경우

$a''+c'+d'=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a'', c', d'의 모든 순서쌍 (a'', c', d')의 개수는

${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$10+3=13$

답 ②

03 확률

1. 시행과 사건

(1) 시행

주사위나 동전을 던지는 경우와 같이 같은 조건에서 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의하여 정해지는 실험이나 관찰을 시행이라고 한다.

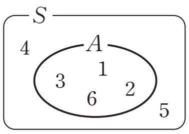
(2) 사건

① 표본공간 : 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 그 시행에 대한 표본공간이라고 한다.

② 사건 : 표본공간의 부분집합을 사건이라고 한다.

③ 근원사건 : 한 개의 원소로 이루어진 사건을 근원사건이라고 한다.

예 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에 대한 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이다. 이 시행의 근원사건은 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$이고 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A라 하면 $A=\{1, 2, 3, 6\}$이다.



참고 ① 표본공간은 공집합이 아닌 유한집합인 경우만 생각한다.

② 위의 예에서 6의 약수의 눈이 나오는 사건은 6의 약수로 이루어진 집합(사건)을 이해하기 쉽게 표현한 것이다.

2. 배반사건과 여사건

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

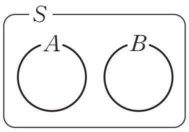
(1) 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 사건을 $A\cup B$와 같이 나타낸다.

(2) 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나는 사건을 $A\cap B$와 같이 나타낸다.

(3) 배반사건 : 두 사건 A와 B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉

$$A\cap B=\varnothing$$

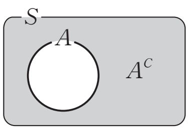
일 때, 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이라고 한다. 또는 두 사건 A와 B는 서로 배반이라고 한다.



(4) 여사건 : 사건 A에 대하여 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로

$$A^C$$

과 같이 나타낸다.



이때 $A\cap A^C=\varnothing$이므로 사건 A와 그 여사건 A^C은 서로 배반사건이다.

참고 $B=A^C$이면 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다. 하지만 그 역은 성립하지 않는다.

예 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 5의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B, 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 C라 하면

$$A=\{1, 5\},\ B=\{2, 3, 5\},\ C=\{3, 6\}$$

① 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 사건은 $A\cup B=\{1, 2, 3, 5\}$이다.

② 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나는 사건은 $A\cap B=\{5\}$이다.

③ $A\cap C=\varnothing$이므로 두 사건 A와 C는 서로 배반사건이다.

④ 사건 A의 여사건은 $A^C=\{2, 3, 4, 6\}$이다.

예제 1 배반사건과 여사건

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10개의 구슬이 들어 있는 주머니에서 한 개의 구슬을 임의로 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 5 이하의 자연수 n에 대하여 양의 약수의 개수가 n인 수가 적힌 구슬이 나오는 사건을 A_n, 2의 배수 또는 5의 배수가 적힌 구슬이 나오는 사건을 B라 할 때, 두 사건 A_n과 B^C이 서로 배반이 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. (단, B^C은 B의 여사건이다.)

풀이 전략 표본공간 S의 사건 A와 그 여사건 A^C에 대하여 $A \cup A^C = S$임을 이용한다. 또, 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A \cap B = \varnothing$임을 이용한다.

풀이 주머니에서 한 개의 구슬을 꺼내는 시행에 대한 표본공간 S는

$$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

5 이하의 자연수 n에 대하여 사건 A_n은 양의 약수의 개수가 n인 수가 적힌 구슬이 나오는 사건이므로

$$A_1=\{1\},\ A_2=\{2, 3, 5, 7\},\ A_3=\{4, 9\},\ A_4=\{6, 8, 10\},\ A_5=\varnothing$$

$B=\{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$이므로

$$B^C=\{1, 3, 7, 9\}$$

5 이하의 자연수 n에 대하여 두 사건 A_n과 B^C이 서로 배반이 되려면 $A_n \cap B^C=\varnothing$이어야 하므로

n의 값은 4 또는 5이다.

따라서 구하는 모든 n의 값의 합은 $4+5=9$

답 9

정답과 풀이 19쪽

[20009-0054]

유제 1 표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 세 사건 A, B, C에 대하여

$$A=\{x \mid x\text{는 8의 약수}\},\ B=\{2, 4, 7\}$$

이다. 사건 C가 두 사건 A, B와 모두 배반일 때, 사건 C의 모든 원소의 합의 최댓값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

[20009-0055]

유제 2 서로 다른 두 개의 주사위 P, Q를 동시에 한 번 던져 나온 눈의 수를 각각 a, b라 할 때, $a+b=8$인 사건을 A, $|a-b|>3$인 사건을 B라 하자. 이 시행에서 나오는 사건 C가 두 사건 A^C, B와 모두 배반사건이 되도록 하는 사건 C의 개수는? (단, A^C은 A의 여사건이고 $C\neq\varnothing$이다.)

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

3. 확률의 뜻

(1) 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A가 일어날 확률이라 하고, 이것을 기호로 $\mathrm{P}(A)$와 같이 나타낸다.

(2) 수학적 확률

표본공간이 S인 어떤 시행에서 S의 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S의 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$

로 정의하고, 이것을 표본공간 S에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이라고 한다.

예 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 한 번 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 6일 확률과 곱이 6일 확률을 각각 구해 보자.

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 한 번 던지는 시행에 대한 표본공간 S는

$S=\{(1, 1), (1, 2), \cdots, (6, 5), (6, 6)\}$이므로 $n(S)=6\times6=36$

이때 나오는 두 눈의 수의 합이 6인 사건을 A라 하면

$A=\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$이므로 $n(A)=5$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{36}$

한편, 나오는 두 눈의 수의 곱이 6인 사건을 B라 하면

$B=\{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$이므로 $n(B)=4$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

(3) 통계적 확률

같은 시행을 n번 반복할 때 사건 A가 일어난 횟수를 r_n이라고 하자. 이때 시행 횟수 n이 한없이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워질 때, 이 값 p를 사건 A가 일어날 통계적 확률이라고 한다.

그런데 실제로 n의 값을 한없이 크게 할 수 없으므로 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 통계적 확률로 생각한다.

참고 일반적으로 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수 n을 충분히 크게 하면 사건 A가 일어나는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 수학적 확률 p에 가까워진다.

예제 2 수학적 확률

모든 세 자리의 자연수 중에서 임의로 한 개를 택할 때, 각 자리에 있는 세 수의 합이 10일 확률은?

① $\frac{1}{50}$ ② $\frac{1}{25}$ ③ $\frac{3}{50}$ ④ $\frac{2}{25}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

풀이 전략 사건 A가 일어날 수학적 확률 $\mathrm{P}(A)$는

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$

임을 이용한다.

풀이 세 자리의 자연수의 개수는 900

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 수를 각각 a, b, c라 하면 각 자리에 있는 세 수의 합이 10인 사건은

$a+b+c=10$인 사건이다.

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 a는 $1\le a\le 9$인 자연수이고 b, c는 9 이하의 음이 아닌 정수이다.

$a=a'+1$이라 하면 $a+b+c=10$에서

$a'+b+c=9$ (단, a'은 음이 아닌 8 이하의 정수이고, b, c는 음이 아닌 9 이하의 정수) …… ㉠

구하는 자연수의 개수는 방정식 ㉠을 만족시키는 모든 순서쌍 (a', b, c)의 개수와 같으므로 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 9개를 택하는 조합의 수에서 순서쌍 (a', b, c)가 $(9, 0, 0)$인 경우의 수 1을 빼면 된다.

$${}_{3}\mathrm{H}_{9}-1={}_{3+9-1}\mathrm{C}_{9}-1={}_{11}\mathrm{C}_{9}-1={}_{11}\mathrm{C}_{2}-1=\frac{11\times 10}{2\times 1}-1=54$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{54}{900}=\frac{3}{50}$$

답 ③

정답과 풀이 19쪽

[20009-0056]

유제 3 4쌍의 부부로 이루어진 8명 중에서 임의로 5명을 뽑을 때, 부부 두 쌍이 포함될 확률은?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

[20009-0057]

유제 4 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 5장의 카드를 임의로 일렬로 나열할 때, 짝수가 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않게 나열될 확률은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

4. 확률의 기본 성질

표본공간이 S인 어떤 시행에서

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

(2) 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=1$

(3) 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

설명 어떤 시행에서 표본공간 S의 임의의 사건 A에 대하여

$\varnothing \subset A \subset S$이므로 $0 \le n(A) \le n(S)$

이 부등식의 각 변을 $n(S)$로 나누면

$0 \le \dfrac{n(A)}{n(S)} \le 1$, 즉 $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

특히, $A=S$이면 사건 A는 반드시 일어나고 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(S)=\dfrac{n(S)}{n(S)}=1$

또 $A=\varnothing$이면 사건 A는 절대로 일어나지 않고 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(\varnothing)=\dfrac{n(\varnothing)}{n(S)}=\dfrac{0}{n(S)}=0$

참고 절대로 일어나지 않는 사건을 공사건이라 하고, 기호로 $\varnothing$와 같이 나타낸다.

5. 확률의 덧셈정리

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)$$

특히, 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

설명 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$$

이 식의 양변을 $n(S)$로 나누면

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)$$

특히, 두 사건 A와 B가 서로 배반사건, 즉 $A \cap B=\varnothing$이면 $\mathrm{P}(A \cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

예 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 뽑을 때, 뽑힌 카드에 적힌 수가 2의 배수 또는 5의 배수일 확률을 구해 보자.

임의로 카드 한 장을 뽑을 때, 카드에 적힌 수가 2의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하면 사건 $A \cap B$는 10의 배수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}(A \cap B)=\frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$$

예제 3 확률의 덧셈정리

집합 $X=\{x|x$는 9 이하의 자연수$\}$의 원소 중에서 임의로 택한 서로 다른 세 원소를 각각 a, b, c라 할 때, 세 수 a, b, c가 등식 $(b-2a)(b-4c)=0$을 만족시킬 확률은?

① $\frac{1}{21}$ ② $\frac{4}{63}$ ③ $\frac{5}{63}$ ④ $\frac{2}{21}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

풀이 전략 두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 B가 일어날 확률을 구할 때는 확률의 덧셈정리

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

를 이용한다. 특히, 두 사건 A와 B가 서로 배반사건인 경우에는 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$를 이용한다.

풀이 집합 X의 원소 중에서 임의로 서로 다른 세 원소를 택하여 a, b, c를 정하는 경우의 수는 ${}_9\mathrm{P}_3$

$(b-2a)(b-4c)=0$에서 $b=2a$ 또는 $b=4c$

(ⅰ) $b=2a$를 만족시키는 사건을 A라 하면

$b=2a$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 8)$이고,

이 4가지의 각 경우에 대하여 c의 경우의 수는 7

따라서 $b=2a$를 만족시키는 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $4\times7=28$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{28}{{}_9\mathrm{P}_3}=\frac{1}{18}$$

(ⅱ) $b=4c$를 만족시키는 사건을 B라 하면

$b=4c$를 만족시키는 순서쌍 (b, c)는 $(4, 1)$, $(8, 2)$이고,

이 2가지의 각 경우에 대하여 a의 경우의 수는 7

따라서 $b=4c$를 만족시키는 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $2\times7=14$이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{14}{{}_9\mathrm{P}_3}=\frac{1}{36}$$

(ⅲ) $2a=b=4c$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)는 $(2, 4, 1)$, $(4, 8, 2)$로 그 개수는 2이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{{}_9\mathrm{P}_3}=\frac{1}{252}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{18}+\frac{1}{36}-\frac{1}{252}=\frac{14+7-1}{252}=\frac{5}{63}$$

답 ③

정답과 풀이 19쪽

[20009-0058]

유제 5 6개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3을 모두 임의로 일렬로 나열하여 여섯 자리의 자연수를 만들 때, 이 수가 4의 배수인 자연수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[20009-0059]

유제 6 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$으로의 모든 함수 중에서 임의로 택한 한 함수를 f라 할 때, $f(1)=2$ 또는 $f(2)=3$일 확률은 p이다. $36p$의 값을 구하시오.

6. 여사건의 확률

(1) 사건 A와 그 여사건 A^C에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

(2) 두 사건 A, B와 그 각각의 여사건 A^C, B^C에 대하여

① $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

② $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

설명 (1) 사건 A의 확률을 알고 있을 때, 그 여사건 A^C의 확률을 구해 보자.

표본공간 S의 사건 A에 대하여 사건 A와 그 여사건 A^C은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)$$

이다. 이때 $A\cup A^C$은 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합이므로

$$\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(S)=1$$

이다. 따라서 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$가 성립한다.

(2) 드모르간의 법칙에 의하여

$$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C,\ A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$$

이므로 $A^C\cap B^C$은 사건 $A\cup B$의 여사건이고 $A^C\cup B^C$은 사건 $A\cap B$의 여사건이다.

따라서 여사건의 확률에 의하여

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$$

예 (1) 빨간 공 3개와 파란 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 빨간 공이 적어도 1개 포함될 확률을 구해 보자.

임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때 빨간 공이 적어도 1개 포함되는 사건을 A라 하면 그 여사건 A^C은 꺼낸 3개의 공이 모두 파란 공인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$$

(2) 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2의 배수가 아니거나 3의 배수가 아닐 확률을 구해 보자.

2의 배수의 눈이 나오는 사건을 A, 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면 사건 $A^C\cup B^C$은 2의 배수가 아니거나 3의 배수가 아닌 눈이 나오는 사건이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cup B^C)&=1-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

참고 일반적으로 '적어도 ~일 확률', '~ 이상일 확률', '~ 이하일 확률', '~가 아닐 확률' 등을 구할 때 여사건의 확률을 이용하면 편리한 경우가 많다.

예제 4 여사건의 확률

1부터 7까지의 좌석 번호가 하나씩 적힌 7개의 의자가 있다. 여학생 3명과 남학생 4명이 임의로 이 의자에 각각 한 명씩 앉을 때, 적어도 한 여학생이 좌석 번호가 짝수인 의자에 앉을 확률은?

① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{29}{35}$ ③ $\frac{6}{7}$ ④ $\frac{31}{35}$ ⑤ $\frac{32}{35}$

풀이 전략 사건 A의 여사건 A^C의 확률은 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$임을 이용한다.

풀이 7명의 학생이 7개의 의자에 앉는 경우의 수는 $7!$

적어도 한 여학생이 좌석 번호가 짝수인 의자에 앉는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 세 명의 여학생 모두 좌석 번호가 홀수인 의자에 앉는 사건이다.

홀수 1, 3, 5, 7의 좌석 번호가 적힌 의자에 여학생 3명이 앉는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_3$

이 각각에 대하여 남은 4개의 의자에 남학생 4명이 앉는 경우의 수는 $4!$이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{P}_3\times 4!}{7!}=\frac{4}{35}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$$

답 ④

정답과 풀이 20쪽

[20009-0060]

유제 7 상자 속에 1이 적혀 있는 카드가 4장, 2가 적혀 있는 카드가 2장, 3이 적혀 있는 카드가 3장 들어 있다. 이 상자에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적힌 두 수의 합이 4 이하일 확률은? (단, 각 카드에는 한 개의 숫자만 적혀 있다.)

① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

[20009-0061]

유제 8 서로 다른 종류의 연필 4개와 서로 다른 종류의 볼펜 2개가 있다. 이 6개의 필기구를 임의로 2개씩 같은 종류의 필통 3개에 나누어 넣을 때, 2개의 볼펜을 동일한 필통에 넣지 않을 확률은?

① $\frac{4}{15}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

[20009-0062]

1 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{6}$일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은?

(단, B^C은 B의 여사건이다.)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[20009-0063]

2 세 학생 A, B, C를 포함한 5명의 학생을 각각 1반부터 4반까지 4개의 반 중에서 1개의 반에 임의로 배정할 때, 세 학생 A, B, C를 모두 서로 다른 반에 배정할 확률은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[20009-0064]

3 서로 다른 두 주사위 A, B를 동시에 한 번 던져 나온 눈의 수를 각각 a, b라 할 때, 부등식 $a^2>5(b+1)$이 성립할 확률은?

① $\frac{7}{36}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{18}$ ⑤ $\frac{11}{36}$

[20009-0065]

4 주머니 속에 흰 공 4개, 검은 공 4개, 빨간 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공의 색의 종류의 수가 2일 확률은?

① $\frac{13}{33}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{67}{165}$ ④ $\frac{68}{165}$ ⑤ $\frac{23}{55}$

[20009-0066]

5 노란 공과 파란 공을 합하여 모두 10개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 노란 공을 적어도 1개 꺼낼 확률이 $\frac{5}{6}$이다. 이 주머니 속에 들어 있는 파란 공의 개수를 구하시오.

정답과 풀이 21쪽

[20009-0067]

1 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 한 번 던질 때, 나온 눈의 수의 최댓값과 최솟값의 합이 5일 확률은?

① $\frac{1}{36}$　② $\frac{1}{18}$　③ $\frac{1}{12}$　④ $\frac{1}{9}$　⑤ $\frac{5}{36}$

[20009-0068]

2 어느 학급에서 번호가 1번부터 8번까지인 8명의 학생을 임의로 4명씩 두 모둠으로 나눌 때, 각 모둠에 속한 네 학생의 번호의 합이 모두 짝수일 확률은?

① $\frac{17}{35}$　② $\frac{18}{35}$　③ $\frac{19}{35}$　④ $\frac{4}{7}$　⑤ $\frac{3}{5}$

[20009-0069]

3 표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 중에서 중복을 허락하여 임의로 택한 두 집합을 차례로 A, B라 할 때, 두 사건 A와 B가 서로 배반사건일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[20009-0070]

4 주머니에 1부터 4까지의 자연수가 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 숫자를 확인하고 주머니에 다시 넣는 시행을 3번 반복할 때, 꺼낸 공에 적힌 수를 차례로 a, b, c라 하자. 두 직선 $ax+by+1=0$, $cx+ay+1=0$이 오직 한 점에서 만날 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[20009-0071]

5 5개의 숫자 0, 1, 1, 2, 2를 모두 임의로 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때, 이 수가 짝수인 자연수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[20009-0072]

6 집합 $U=\{1, 2, 3\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 중에서 임의로 서로 다른 두 부분집합 A, B를 택할 때, $A\subset B$일 확률은?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

[20009-0073]

7 어느 동아리 발표회에서 노래 동아리 4팀과 춤 동아리 2팀이 참여하여 각 팀이 한 번씩 차례대로 공연하려고 한다. 이 6팀의 공연 순서를 임의로 정할 때, 춤 동아리 2팀의 공연 사이에 적어도 2팀의 노래 동아리가 공연하는 순서로 정해질 확률은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

[20009-0074]

8 1학년 학생 4명과 2학년 학생 2명이 있다. 이 6명의 학생을 임의로 일렬로 세울 때, 2학년 학생 사이에 1학년 학생을 1명만 세우거나 6명의 양쪽 끝에 모두 1학년 학생을 세울 확률은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

Level 3 실력 완성

정답과 풀이 24쪽

[20009-0075]

1 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$를 정의역과 공역으로 하고 다음 조건을 만족시키는 함수 f 중에서 임의로 하나를 택할 때, 택한 함수 f의 치역의 원소의 개수가 2일 확률은?

$f(1)+f(2)+f(3)=7$

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[20009-0076]

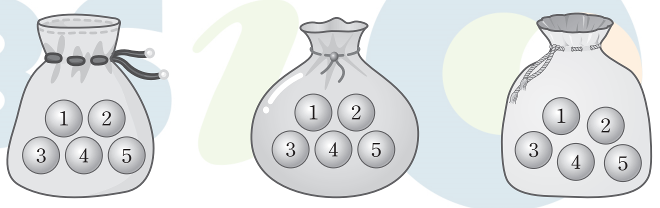
2 A, B, C, D의 4개의 문자와 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자가 있다. 이 8개의 문자와 숫자를 한 번씩 모두 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은?

(가) 문자 A의 양쪽 옆에 숫자를 나열한다.
(나) 숫자 1의 양쪽 옆에 문자를 나열한다.

① $\frac{3}{40}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{3}{20}$ ⑤ $\frac{7}{40}$

[20009-0077]

3 서로 다른 세 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 5개의 공이 각각 들어 있다. 갑이 서로 다른 세 주머니에서 각각 공을 한 개씩 임의로 꺼낸 후, 을도 서로 다른 세 주머니에서 각각 공을 한 개씩 임의로 꺼낸다. 갑이 꺼낸 3개의 공에 적힌 숫자를 크기순으로 a_1, a_2, a_3 $(a_1 \le a_2 \le a_3)$이라 하고 을이 꺼낸 3개의 공에 적힌 숫자를 크기순으로 b_1, b_2, b_3 $(b_1 \le b_2 \le b_3)$이라 할 때, $a_i \neq b_i$인 i $(i=1, 2, 3)$이 존재할 확률은? (단, 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않는다.)



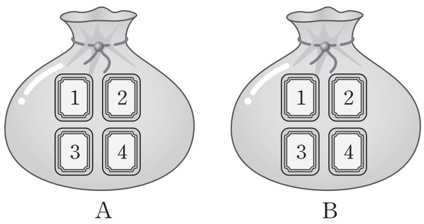
① $\frac{193}{200}$ ② $\frac{97}{100}$ ③ $\frac{39}{40}$ ④ $\frac{49}{50}$ ⑤ $\frac{197}{200}$

대표 기출 문제

출제 경향 어떤 시행에서 사건이 일어나는 경우의 수를 구한 후 확률의 정의를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다. 또한 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구하는 문제도 출제된다.

두 주머니 A와 B에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 각각 들어 있다. 갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서 각자 임의로 두 장의 카드를 꺼내어 가진다. 갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



2017학년도 대수능

출제 의도 ▸ 경우의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 갑이 주머니 A에서 두 장의 카드를 꺼내고, 을이 주머니 B에서 두 장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_4C_2 = \frac{4\times3}{2\times1} \times \frac{4\times3}{2\times1} = 36$$

갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같은 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 갑과 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 숫자가 모두 같을 때

4장의 카드 중에서 두 장의 카드를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_2 = 6$$

(ii) 갑과 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 숫자가 모두 다를 때

이 경우는 갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 모두 5가 될 때이다.

갑이 1과 4가 적힌 카드를 꺼내고 을은 2와 3이 적힌 카드를 꺼내거나 갑이 2와 3이 적힌 카드를 꺼내고 을은 1과 4가 적힌 카드를 꺼낼 때이므로 이 경우의 수는

2

(i), (ii)에서 갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같은 경우의 수는

$6+2=8$

이므로 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

따라서 $p=9$, $q=2$이므로 $p+q=9+2=11$

답 11

대표 기출 문제

출제 경향 어떤 사건이 일어나는 경우가 여러 갈래로 나누어져 있는 문제에서 여사건을 이용하여 확률을 구하는 문제가 자주 출제된다.

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z) 중에서 임의로 한 개를 선택한다. 선택한 순서쌍 (x, y, z)가 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2018학년도 대수능

출제 의도 ▸ 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하고 여사건의 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=\frac{12\times 11}{2\times 1}=66$$

이 중에서 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이 성립하려면 x, y, z 중에서 적어도 두 개가 서로 같아야 한다.

그런데 $x=y=z$인 경우는 없으므로 x, y, z 중 두 개가 서로 같아야 한다.

$x=y$를 만족시키는 순서쌍은

$$(0, 0, 10), (1, 1, 8), \cdots, (5, 5, 0)$$

의 6개이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3\mathrm{C}_2\times 6=3\times 6=18$$

이다.

따라서 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이 성립할 확률은

$$\frac{18}{66}=\frac{3}{11}$$

이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$이 성립할 확률은

$$1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$$

이다.

따라서 $p=11$, $q=8$이므로 $p+q=11+8=19$

답 19

조건부확률

1. 조건부확률

(1) 조건부확률의 뜻

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 확률이 0이 아닌 사건 A가 일어났다고 가정할 때 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(B|A)$$

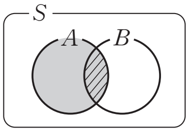
와 같이 나타낸다.

(2) 조건부확률의 계산

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \text{ (단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

설명 표본공간이 S인 어떤 시행에서 각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A를 새로운 표본공간으로 하여 사건 B, 즉 사건 $A\cap B$가 일어날 확률이므로



$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

㉠의 우변의 분모와 분자를 각각 표본공간 S의 원소의 개수인 $n(S)$로 나누면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

예 한 개의 주사위를 한 번 던져서 소수의 눈이 나왔을 때, 그 눈의 수가 3 이하일 확률을 구해 보자.

한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 표본공간을 S, 소수의 눈이 나오는 사건을 A, 3 이하의 수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, $A\cap B=\{2, 3\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

이다.

따라서 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

[다른 풀이] $A=\{2, 3, 5\}$, $A\cap B=\{2, 3\}$이므로

$$n(A)=3,\ n(A\cap B)=2$$

이다.

따라서 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{2}{3}$$

예제 1 조건부확률

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낸다. 꺼낸 4개의 공에 적혀 있는 자연수 중 두 번째로 큰 수가 7일 때, 세 번째로 큰 수가 5일 확률은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{4}{15}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{7}{15}$

풀이 전략 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ (단, $\mathrm{P}(A)>0$)임을 이용한다.

풀이 꺼낸 4개의 공에 적혀 있는 자연수 중에서 두 번째로 큰 수가 7인 사건을 A, 세 번째로 큰 수가 5인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

10개의 공 중에서 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

꺼낸 4개의 공에 적혀 있는 자연수 중에서 두 번째로 큰 수가 7이려면 7이 적혀 있는 공, 1, 2, 3, 4, 5, 6이 적혀 있는 공 중에서 2개의 공, 8, 9, 10이 적혀 있는 공 중에서 1개의 공을 꺼내면 되므로 이 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1=\frac{6\times5}{2\times1}\times3=45$이고 $\mathrm{P}(A)=\frac{45}{210}=\frac{3}{14}$

꺼낸 4개의 공에 적혀 있는 자연수 중에서 두 번째로 큰 수가 7이고 세 번째로 큰 수가 5이려면 5, 7이 적혀 있는 2개의 공, 1, 2, 3, 4가 적혀 있는 공 중에서 1개의 공, 8, 9, 10이 적혀 있는 공 중에서 1개의 공을 꺼내면 되므로 이 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=4\times3=12$이고 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{12}{210}=\frac{2}{35}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{35}}{\frac{3}{14}}=\frac{4}{15}$

답 ②

정답과 풀이 26쪽

[20009-0078]

유제 1 한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 주사위의 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. $a+b$가 4의 배수일 때, ab도 4의 배수일 확률은?

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{11}{18}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[20009-0079]

유제 2 남학생 12명과 여학생 8명으로 이루어진 어느 연극 동아리의 모든 학생들은 각자 배우팀, 스태프팀 중 어느 한 팀에만 반드시 속하여 연극 공연 준비를 한다. 이 연극 동아리의 학생들 중 배우팀에 속한 남학생은 8명이고, 스태프팀에 속한 여학생은 5명이다. 이 동아리 학생 20명 중에서 임의로 뽑은 한 학생이 스태프팀에 속한 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

2. 확률의 곱셈정리

(1) 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

설명 두 사건 A, B에 대하여

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\mathrm{P}(A)$를 곱하면 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$

또 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(B)>0) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $\mathrm{P}(B)$를 곱하면 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$가 성립한다.

예 흰 공 3개와 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 두 번 꺼낸다. 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣지 않을 때, 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률과 꺼낸 공이 모두 검은 공일 확률을 각각 구해 보자.

주머니에서 처음 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 두 번째에 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$$

처음 흰 공을 꺼냈을 때 주머니에는 흰 공 2개, 검은 공 5개가 들어 있으므로 두 번째에 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{7}$$

따라서 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$$

마찬가지로 꺼낸 공이 모두 검은 공일 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C|A^C)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$$

(2) 확률의 곱셈정리의 활용

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)\ (\text{단, } 0<\mathrm{P}(B)<1)$$

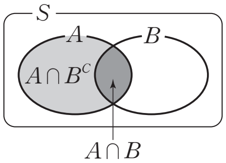
설명 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$ (단, $\mathrm{P}(B)>0$)

두 사건 A, B^C에 대하여 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)$ (단, $\mathrm{P}(B^C)>0$)

이때 $(A\cap B)\cap(A\cap B^C)=\varnothing$, $(A\cap B)\cup(A\cap B^C)=A$이므로

확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}((A\cap B)\cup(A\cap B^C))\\&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)\end{aligned}$$



예제 2 확률의 곱셈정리

흰 공 4개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니와 각 면에 2, 3, 3, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체가 있다. 이 정사면체를 한 번 던져서 바닥에 닿는 면에 적혀 있는 수만큼의 공을 주머니에서 임의로 동시에 꺼낼 때, 검은 공 1개를 꺼낼 확률은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

풀이 전략 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$임을 이용한다.

풀이 정사면체를 던져서 바닥에 닿는 면에 적혀 있는 수가 2인 사건을 A, 주머니에서 검은 공 1개를 꺼내는 사건을 B라 하자.

(i) 정사면체를 던져서 바닥에 닿는 면에 적혀 있는 수가 2일 확률은 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4\times2}{15}=\frac{8}{15}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{8}{15}=\frac{2}{15}$

(ii) 정사면체를 던져서 바닥에 닿는 면에 적혀 있는 수가 3일 확률은 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4}$

주머니에서 3개의 공을 꺼낼 때 흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률은 $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{6\times2}{20}=\frac{3}{5}$

따라서 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{2}{15}+\frac{9}{20}=\frac{7}{12}$$

답 ④

정답과 풀이 26쪽

[20009-0080]

유제 3 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 4 이하이면 나온 눈의 수의 2배를 점수로 얻고, 5 이상이면 한 개의 주사위를 한 번 더 던져서 나온 눈의 수를 점수로 얻는 게임이 있다. 이 게임을 한 번하여 얻은 점수가 5 이상일 확률은?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[20009-0081]

유제 4 주머니에 숫자 1, 2, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 2번 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 a, b라 하자. $10a+b$가 짝수이거나 $10b+a$가 짝수일 확률은? (단, 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

3. 사건의 독립과 종속

(1) 사건의 독립

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이고, 어느 한 사건이 일어나는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 영향을 주지 않을 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B) \text{ 또는 } \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 독립이라고 한다.

(2) 사건의 종속

두 사건 A와 B가 서로 독립이 아닐 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B) \text{ 또는 } \mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(A)$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 종속이라고 한다.

예 흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 꺼내는 시행을 두 번 할 때, 첫 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 B라 하자.

(i) 첫 번째 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣고 두 번째 공을 꺼낼 때 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}$이고,

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25},\ \mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$$

이므로 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{9}{25}+\frac{6}{25}=\frac{3}{5}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(ii) 첫 번째 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣지 않고 두 번째 공을 꺼낼 때 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}$이고

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$$

이므로 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

(3) 두 사건이 서로 독립일 조건

두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \text{ (단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

설명 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이므로 확률의 곱셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

가 성립한다.

역으로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathrm{P}(B)$$

이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

참고 $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$인 두 사건 A와 B가 서로 독립이면

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$$

이므로 두 사건 A와 B^C은 서로 독립이다.

마찬가지로 두 사건 A^C과 B는 서로 독립이고, 두 사건 A^C과 B^C도 서로 독립이다.

예제 3 사건의 독립과 종속

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9장의 카드에서 임의로 한 장의 카드를 뽑는 시행을 한다. 이 시행에서 3의 배수가 적혀 있는 카드를 뽑는 사건을 A라 하고, 5 이하의 자연수 n에 대하여 n, $n+3$, $n+4$가 적혀 있는 카드를 뽑는 사건을 B_n이라 하자. 두 사건 A^C과 B_n이 서로 독립이 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

(단, A^C은 A의 여사건이다.)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

풀이 전략 두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$(단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)이다.

풀이 사건 A는 9장의 카드 중에서 3의 배수가 적혀 있는 카드를 뽑는 사건이므로

$$A=\{3, 6, 9\},\ A^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8\},\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

5 이하의 자연수 n에 대하여 사건 B_n은 n, $n+3$, $n+4$가 적혀 있는 카드를 뽑는 사건이므로

$$B_n=\{n, n+3, n+4\},\ \mathrm{P}(B_n)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\ (\text{단, } n=1, 2, 3, 4, 5)$$

사건 A^C과 사건 B_n이 서로 독립이려면

$$\mathrm{P}(A^C\cap B_n)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B_n)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

이어야 하므로 집합 $A^C\cap B_n$의 원소의 개수가 2이어야 한다.

$B_1=\{1, 4, 5\}$에서 $A^C\cap B_1=\{1, 4, 5\}$이므로 $n(A^C\cap B_1)=3$

$B_2=\{2, 5, 6\}$에서 $A^C\cap B_2=\{2, 5\}$이므로 $n(A^C\cap B_2)=2$

$B_3=\{3, 6, 7\}$에서 $A^C\cap B_3=\{7\}$이므로 $n(A^C\cap B_3)=1$

$B_4=\{4, 7, 8\}$에서 $A^C\cap B_4=\{4, 7, 8\}$이므로 $n(A^C\cap B_4)=3$

$B_5=\{5, 8, 9\}$에서 $A^C\cap B_5=\{5, 8\}$이므로 $n(A^C\cap B_5)=2$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 2, 5이므로 그 합은 $2+5=7$이다.

답 ③

정답과 풀이 27쪽

[20009-0082]

유제 5 한 개의 주사위와 한 개의 동전을 동시에 한 번 던질 때 주사위는 소수의 눈이 나오고, 동전은 앞면이 나올 확률은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

[20009-0083]

유제 6 두 사건 A와 B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A^C|B)-\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{5}{12}$일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

4. 독립시행의 확률

(1) 독립시행의 뜻

동전이나 주사위를 여러 번 반복하여 던지는 경우와 같이 매번 같은 조건에서 어떤 시행을 반복할 때, 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립인 경우 이러한 시행을 독립시행이라고 한다.

(2) 독립시행의 확률

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}p^{r}q^{n-r}\ (\text{단, } q=1-p,\ r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이다.

예1 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 3의 배수의 눈이 2번 나올 확률을 구해 보자.

한 개의 주사위를 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 경우를 ○, 3의 배수의 눈이 나오지 않는 경우를 ×로 나타내면 한 개의 주사위를 4번 던지는 시행에서 3의 배수의 눈이 2번 나오는 경우의 수는

$${}_{4}\mathrm{C}_{2}=6$$

이다.

1회	2회	3회	4회	확률
○	○	×	×	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$
○	×	○	×	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$
○	×	×	○	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$
×	○	○	×	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$
×	○	×	○	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$
×	×	○	○	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

이때 각 시행마다 일어나는 사건은 서로 독립이고 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 3의 배수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 3의 배수의 눈이 2번 나오고 3의 배수가 아닌 눈이 2번 나오는 사건의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$$

이다.

또한 위의 표의 6가지 사건은 모두 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$${}_{4}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=6\times\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{27}$$

예2 ① 한 개의 주사위를 3번 던질 때, 5의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_{3}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{2}=3\times\frac{1}{6}\times\frac{25}{36}=\frac{25}{72}$$

② 한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 3번 이상 나올 확률은

$${}_{4}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}+{}_{4}\mathrm{C}_{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=4\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$$

예제 4 독립시행의 확률

좌표평면 위의 두 점 P, Q에 대하여 다음 시행을 한다.

> 흰 공 3개, 검은 공 1개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내 흰 공이 나오면 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 이동시키고, 검은 공이 나오면 점 Q를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 이동시킨다. 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, 점 (1, 4)에서 출발한 점 P와 점 (6, 0)에서 출발한 점 Q가 같은 점에 있을 확률은?

① $\frac{21}{256}$ ② $\frac{43}{512}$ ③ $\frac{11}{128}$ ④ $\frac{45}{512}$ ⑤ $\frac{23}{256}$

풀이 전략 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은
${}_{n}\mathrm{C}_{r}p^{r}q^{n-r}$ (단, $q=1-p$, $r=0, 1, 2, \cdots, n$)

풀이 주머니에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{4}$, 검은 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{4}$이고

5번의 시행에서 흰 공을 꺼낸 횟수를 a라 하면 검은 공을 꺼낸 횟수는 $5-a$이다.

5번의 시행에서 흰 공이 a번, 검은 공이 $(5-a)$번 나오면 점 (1, 4)에서 출발한 점 P는 점 $(1+a,\ 4+a)$로 이동되고, 점 (6, 0)에서 출발한 점 Q는 점 $(6-(5-a),\ 0+2(5-a))$, 즉 점 $(1+a,\ 10-2a)$로 이동된다.

이때 두 점 P, Q가 같은 점에 있으려면

$4+a=10-2a$, $3a=6$

이어야 하므로 $a=2$

따라서 흰 공을 2번, 검은 공을 3번 꺼내야 하고 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$${}_{5}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}=\frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{9}{16}\times\frac{1}{64}=\frac{45}{512}$$

답 ④

정답과 풀이 27쪽

[20009-0084]

유제 7 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져서 3의 약수의 눈이 나오면 점 P를 3만큼, 3의 약수가 아닌 눈이 나오면 점 P를 -2만큼 이동시킨다. 한 개의 주사위를 5번 던져 이동한 후의 점 P의 좌표가 5보다 클 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[20009-0085]

유제 8 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내 숫자를 확인하고 주머니에 다시 넣는 시행을 4번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 네 수의 합이 홀수일 확률은?

① $\frac{312}{625}$ ② $\frac{314}{625}$ ③ $\frac{316}{625}$ ④ $\frac{318}{625}$ ⑤ $\frac{64}{125}$

[20009-0086]

1 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

[20009-0087]

2 어느 고등학교 2학년 전체 학생 250명을 대상으로 선호하는 수학여행의 시기로 5월과 10월 중 하나만을 반드시 선택하도록 하였을 때 5월과 10월을 각각 선택한 학생 수는 오른쪽 표와 같다. 이 고등학교 2학년 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 10월을 선택한 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률은?

(단위 : 명)

	남학생	여학생
5월	85	45
10월	70	50

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[20009-0088]

3 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 공을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낸다. 첫 번째는 짝수가 적혀 있는 공을 꺼내고, 두 번째는 3의 배수가 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은?

(단, 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{7}{72}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{5}{36}$ ⑤ $\frac{11}{72}$

[20009-0089]

4 흰 공 5개, 검은 공 3개가 들어 있는 상자에서 공을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 흰 공이 적어도 한 번 나올 확률을 p_1, 흰 공이 한 번만 나올 확률을 p_2라 하자. $\frac{p_2}{p_1}$의 값은? (단, 꺼낸 공은 상자에 다시 넣는다.)

① $\frac{4}{11}$ ② $\frac{5}{11}$ ③ $\frac{6}{11}$ ④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{8}{11}$

[20009-0090]

5 네 개의 동전을 동시에 한 번 던질 때 앞면이 나온 동전의 개수가 뒷면이 나온 동전의 개수보다 많을 확률은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

정답과 풀이 29쪽

[20009-0091]

1 남학생이 전체 학생의 60 %인 어느 고등학교의 전체 학생들에게 생활복 A, B 디자인 중에서 하나만 반드시 선택하도록 하였더니 남학생 중 60 %가 생활복 A디자인을 선택하였고, 여학생 중 70%가 생활복 A디자인을 선택하였다고 한다. 이 학교 전체 학생 중에서 임의로 뽑은 한 학생이 생활복 A디자인을 선택한 학생일 때, 이 학생이 여학생일 확률은?

① $\frac{5}{16}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{7}{16}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

[20009-0092]

2 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드에서 임의로 한 장의 카드를 뽑는 시행을 할 때, 짝수가 적혀 있는 카드를 뽑는 사건을 A라 하자. 이 시행에서 나오는 사건 B가 다음 조건을 만족시킬 때, 사건 B의 개수는?

(가) 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.
(나) $n(A\cup B)=7$

① 80 ② 100 ③ 120 ④ 140 ⑤ 160

[20009-0093]

3 주머니에 1이 하나씩 적혀 있는 4개의 공과 2가 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낸 후 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자와 같은 숫자가 적혀 있는 공을 공에 적혀 있는 수만큼의 개수를 추가하여 꺼낸 공과 함께 주머니에 넣는다. 이 주머니에서 다시 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수의 곱이 홀수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이고 1과 2가 적혀 있는 공은 충분히 많이 있다.)

[20009-0094]

4 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있다. 두 주머니 A, B에서 임의로 각각 2개씩 공을 동시에 꺼냈더니 흰 공이 3개 나왔을 때, 주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼냈을 확률은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

[20009-0095]

5 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 2 이하이면 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, 나온 눈의 수가 3 이상이면 점 P를 y축의 방향으로 1만큼 이동시키기로 한다. 한 개의 주사위를 6번 던져서 차례대로 점 P를 이동시킬 때, 점 P가 점 $(1, 2)$를 지나서 점 $(3, 3)$으로 이동될 확률은?

① $\frac{4}{81}$ ② $\frac{2}{27}$ ③ $\frac{8}{81}$ ④ $\frac{10}{81}$ ⑤ $\frac{4}{27}$

[20009-0096]

6 세 학생 A, B, C가 포함된 8명의 학생이 그림과 같이 두 줄로 배열된 8개의 의자에 임의로 앉으려고 한다. A와 B가 같은 줄에 앉을 때, A와 C가 같은 줄에서 서로 이웃하여 앉을 확률은?

(단, 의자는 같은 간격으로 배열되어 있다.)

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

[20009-0097]

7 상자 A에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있고, 상자 B에는 숫자 5, 6, 7, 8, 9가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 갑이 두 상자 A, B에서 각각 임의로 공을 한 개씩 꺼낸 후, 을이 두 상자 A, B에서 각각 임의로 공을 한 개씩 꺼낸다. 갑이 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수의 합과 을이 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수의 합이 모두 짝수일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{4}{15}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{7}{15}$

[20009-0098]

8 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나오면 점 P를 1만큼, 뒷면이 나오면 점 P를 -1만큼 이동시키는 시행을 한다. 이 시행을 8번 반복할 때, n번의 시행 후 점 P의 좌표를 x_n이라 하자. $x_4=0$이고 $x_8>0$일 확률은? (단, $n=1, 2, 3, \cdots, 8$)

① $\frac{3}{32}$ ② $\frac{13}{128}$ ③ $\frac{7}{64}$ ④ $\frac{15}{128}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

[20009-0099]

1 6개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3을 모두 일렬로 나열하여 만든 여섯 자리의 자연수 전체의 집합에서 임의로 택한 한 자연수를 N이라 하자. 자연수 N의 백의 자리의 수가 3일 때, 천의 자리의 수와 십의 자리의 수 중 적어도 하나는 2일 확률은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{5}$　③ $\frac{7}{10}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{9}{10}$

[20009-0100]

2 세 개의 주사위를 동시에 한 번 던질 때, 나온 모든 눈의 수의 합을 4로 나눈 나머지가 2일 확률은?

① $\frac{13}{54}$　② $\frac{53}{216}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{55}{216}$　⑤ $\frac{7}{27}$

[20009-0101]

3 20개의 자연수 1, 2, 3, ⋯, 20 중에서 임의로 1개를 택하는 시행에서 소수가 나오는 사건을 A라 하고, 20보다 작은 자연수 n에 대하여 n 이하의 수가 나오는 사건을 B_n이라 하자. 두 사건 A와 B_n이 서로 독립이 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 10　② 15　③ 20　④ 25　⑤ 30

[20009-0102]

4 네 쌍의 부부를 대상으로 남편들에게 1, 2, 3, 4 중 서로 다른 숫자를 임의로 하나씩 부여하고 아내들에게도 1, 2, 3, 4 중 서로 다른 숫자를 임의로 하나씩 부여한 후, 모든 사람에게 각각 1, 2, 3, 4 중 임의로 숫자를 하나씩 적도록 한다. 남편이 적은 숫자와 아내가 부여받은 숫자가 일치하고 아내가 적은 숫자와 남편이 부여받은 숫자가 일치할 때에만 부부에게 상품을 주는 게임을 한다. 이 게임에서 네 쌍의 부부 중에서 두 쌍의 부부가 상품을 받을 확률이 $\frac{a}{2^{15}}$일 때, a의 값을 구하시오. (단, 부부가 부여받은 숫자는 서로 다를 수 있고, 부여받은 숫자는 서로 알지 못한다.)

대표 기출 문제

출제 경향 조건부확률을 구하는 문제, 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구하는 문제와 독립시행의 확률을 구하는 문제가 출제된다.

좌표평면의 원점에 점 A가 있다. 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 한 번 던져
> 앞면이 나오면 점 A를 x축의 양의 방향으로 1만큼,
> 뒷면이 나오면 점 A를 y축의 양의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

위의 시행을 반복하여 점 A의 x좌표 또는 y좌표가 처음으로 3이 되면 이 시행을 멈춘다. 점 A의 y좌표가 처음으로 3이 되었을 때, 점 A의 x좌표가 1일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2019학년도 대수능

출제 의도 ▸ 독립시행의 확률, 확률의 곱셈정리를 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 y좌표가 처음으로 3이 되는 경우는
① 점 A가 $(0, 2)$에 있을 때 동전의 뒷면이 나오는 경우
② 점 A가 $(1, 2)$에 있을 때 동전의 뒷면이 나오는 경우
③ 점 A가 $(2, 2)$에 있을 때 동전의 뒷면이 나오는 경우
이다.
이때 점 A의 x좌표가 1인 경우는 ②의 경우이다.
①의 경우의 확률은

$${}_{2}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

②의 경우의 확률은

$${}_{3}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

③의 경우의 확률은

$${}_{4}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{32}=\frac{3}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{8}$$

답 ③

대표 기출 문제

출제 경향 사건의 독립과 종속을 이해하고 확률 계산을 통하여 두 사건이 독립 또는 종속인지를 판단할 수 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

한 개의 주사위를 한 번 던진다. 홀수의 눈이 나오는 사건을 A, 6 이하의 자연수 m에 대하여 m의 약수의 눈이 나오는 사건을 B라 하자. 두 사건 A와 B가 서로 독립이 되도록 하는 모든 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

2019학년도 대수능

출제 의도 ▸ 두 사건이 서로 독립인지를 판단할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

(i) $m=1$일 때, $B=\{1\}$이므로

$$A\cap B=\{1\},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(ii) $m=2$일 때, $B=\{1,\ 2\}$이므로

$$A\cap B=\{1\},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(iii) $m=3$일 때, $B=\{1,\ 3\}$이므로

$$A\cap B=\{1,\ 3\},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(iv) $m=4$일 때, $B=\{1,\ 2,\ 4\}$이므로

$$A\cap B=\{1\},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(v) $m=5$일 때, $B=\{1,\ 5\}$이므로

$$A\cap B=\{1,\ 5\},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(vi) $m=6$일 때, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로

$$A\cap B=\{1,\ 3\},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(i)~(vi)에 의하여 모든 m의 값의 합은 $2+6=8$

답 8

이산확률변수의 확률분포

1. 확률변수

(1) 확률변수 : 어떤 시행에서 표본공간의 각 원소에 하나의 실수 값을 대응시키는 함수를 확률변수라고 한다. 확률변수 X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로 $\mathrm{P}(X=x)$와 같이 나타낸다.

예 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 0, 1, 2이다.

참고 확률변수는 표본공간을 정의역으로 하고 실수 전체의 집합을 공역으로 하는 함수이지만 변수의 역할도 하기 때문에 확률변수라고 한다.

(2) 이산확률변수 : 확률변수 X가 갖는 값이 유한개이거나 무한히 많더라도 자연수와 같이 셀 수 있을 때, 그 확률변수 X를 이산확률변수라고 한다.

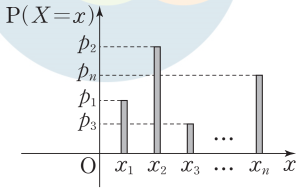
예 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던져 나온 눈의 수의 합을 X라 할 때, X가 갖는 값은 2부터 12까지의 유한개의 자연수이므로 X는 이산확률변수이다.

2. 이산확률변수의 확률분포

(1) 이산확률변수의 확률분포 : 이산확률변수 X가 갖는 값이 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$이고 X가 이들 값을 가질 확률이 각각 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$일 때, $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$과 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ 사이의 대응 관계를 이산확률변수 X의 확률분포라고 한다.

이때 이산확률변수 X의 확률분포는 다음과 같이 표 또는 그래프로 나타낼 수 있다.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1



(2) 확률질량함수 : 이산확률변수 X가 갖는 값 x_i $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$과 X가 이들 값을 가질 확률 p_i $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$ 사이의 대응 관계를 나타내는 함수

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i \ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$$

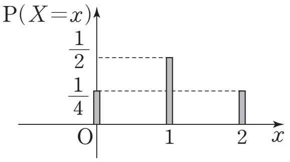
을 이산확률변수 X의 확률질량함수라고 한다.

예 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 0, 1, 2이므로 X는 이산확률변수이고, X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_2\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} \ (x=0, 1, 2)$$

이다. 이때 확률변수 X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1



예제 1 이산확률변수의 확률분포와 확률질량함수

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수 중 큰 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(|X-5|\ge 3)$의 값은?

① $\frac{13}{36}$ ② $\frac{7}{18}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{17}{36}$

풀이 전략 확률변수 X가 갖는 값을 조사하고 X의 각각의 값에 대한 확률을 구한다.

풀이 확률변수 X가 갖는 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이다.

이때 $|X-5|\ge 3$에서 $X-5\le -3$ 또는 $X-5\ge 3$

즉, $X\le 2$ 또는 $X\ge 8$이므로

$\mathrm{P}(|X-5|\ge 3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=8)+\mathrm{P}(X=9)$이다.

9개의 공 중에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_9\mathrm{C}_2=36$

$X=2$일 때, 1, 2가 적혀 있는 공을 꺼내는 1가지 경우이므로 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{36}$

$X=8$일 때, 하나의 공은 8이 적혀 있는 공을 꺼내고 나머지 공은 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7개의 공 중에서 하나를 꺼내는 7가지 경우이므로 $\mathrm{P}(X=8)=\frac{7}{36}$

$X=9$일 때, 하나의 공은 9가 적혀 있는 공을 꺼내고 나머지 공은 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8개의 공 중에서 하나를 꺼내는 8가지 경우이므로 $\mathrm{P}(X=9)=\frac{8}{36}$

따라서 $\mathrm{P}(|X-5|\ge 3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=8)+\mathrm{P}(X=9)=\frac{1}{36}+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}=\frac{4}{9}$

답 ④

정답과 풀이 34쪽

[20009-0103]

유제 1 이산확률변수 X가 갖는 값이 1, 2, 3, 4이고, X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{x}{10}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

일 때, $\mathrm{P}(X=a)+\mathrm{P}(X=b)=\frac{1}{2}$을 만족시키는 두 수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 최댓값을 구하시오.

[20009-0104]

유제 2 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던져서 나온 두 눈의 수의 곱이 홀수이면 2점, 짝수이면 1점을 얻는 게임이 있다. 이 게임을 3번하여 얻은 점수의 합을 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{P}(X=5)$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{9}{64}$ ③ $\frac{5}{32}$ ④ $\frac{11}{64}$ ⑤ $\frac{3}{16}$

3. 확률질량함수의 성질

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때, 확률의 기본 성질에 의하여 다음이 성립한다.

(1) $0\le p_i\le 1$

(2) $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

예 한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 0, 1, 2이고 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_2\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}\ (x=0,\ 1,\ 2)$$

이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{4}{9},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{9},\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{9}$$

따라서

$$0\le \mathrm{P}(X=x)\le 1$$
$$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$$

이므로 확률질량함수가 위의 성질 (1), (2)를 만족시킴을 확인할 수 있다.

4. 이산확률변수 X의 기댓값(평균)

이산확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때,

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

$$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

를 확률변수 X의 기댓값 또는 평균이라 하고 기호로

$$\mathrm{E}(X)$$

와 같이 나타낸다.

예 한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 동전의 앞면이 나오는 횟수를 X라 할 때, X의 기댓값을 구해 보자.
확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이고, X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

참고 $\mathrm{E}(X)$의 E는 기댓값을 뜻하는 Expectation의 첫 글자이다.

예제 2 확률질량함수의 성질과 이산확률변수의 평균

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

X	a	$2a$	$4a$	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	k	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=6$일 때, 두 상수 a, k에 대하여 ak의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

풀이 전략 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$에 대하여

① $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$ ② $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$

임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로 $\frac{1}{3}+k+\frac{1}{6}=1$에서 $k=\frac{1}{2}$

$\mathrm{E}(X)=a\times\frac{1}{3}+2a\times\frac{1}{2}+4a\times\frac{1}{6}=6$에서 $\frac{1}{3}a+a+\frac{2}{3}a=6$, $2a=6$이므로 $a=3$

따라서 $ak=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

답 ③

정답과 풀이 34쪽

[20009-0105]

유제 3 이산확률변수 X가 갖는 값이 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{2^5}$이고, X의 확률질량함수가

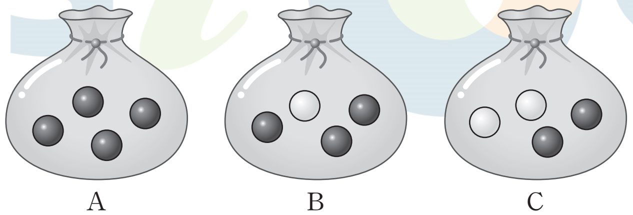
$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{a}{x}\left(x=\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^5}\right)$$

일 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{5}{62}$ ② $\frac{7}{62}$ ③ $\frac{9}{62}$ ④ $\frac{11}{62}$ ⑤ $\frac{13}{62}$

[20009-0106]

유제 4 그림과 같이 A 주머니에는 검은 공 4개, B 주머니에는 검은 공 3개, 흰 공 1개, C 주머니에는 검은 공 2개, 흰 공 2개가 들어 있다. 세 주머니 A, B, C에서 각각 공을 임의로 한 개씩 꺼낼 때, 꺼낸 공 중 흰 공의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은?



① $\frac{9}{16}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{11}{16}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{13}{16}$

5. 이산확률변수 X의 분산, 표준편차

이산확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, 이산확률변수 X의 분산과 표준편차는 다음과 같다.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

(1) 분산

$\mathrm{E}(X)=m$일 때, 확률변수 $(X-m)^2$의 평균

$$\mathrm{E}((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+(x_3-m)^2p_3+\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

을 이산확률변수 X의 분산이라고 하며, 이것을 기호로

$$\mathrm{V}(X)$$

와 같이 나타낸다. 이때

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2p_i-2mx_ip_i+m^2p_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+m^2\sum_{i=1}^{n}p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m^2+m^2\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m,\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m^2=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\end{aligned}$$

이므로 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

(2) 표준편차

분산 $\mathrm{V}(X)$의 양의 제곱근을 확률변수 X의 표준편차라 하고, 기호로 $\sigma(X)$와 같이 나타낸다.

즉, $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

예 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 구해 보자.

X	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$m=\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}=3$이므로

(1) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$를 이용하면

$$\mathrm{V}(X)=(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$을 이용하면

$$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{4}=\frac{19}{2}$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{19}{2}-3^2=\frac{1}{2}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

예제 3 이산확률변수의 분산, 표준편차

한 개의 주사위를 한 번 던져 4의 약수의 눈이 나오면 1점, 3의 배수의 눈이 나오면 3점, 5의 눈이 나오면 0점을 얻는 게임이 있다. 이 게임을 2번 한 후 얻은 총 점수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ 3 ④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

풀이 전략 확률변수 X의 확률분포를 구하고, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$의 값을 차례로 구한다.

풀이 한 개의 주사위를 한 번 던져 4의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, 5의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이고, 확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 6이다.

$X=0$일 때, 두 번 모두 5의 눈이 나오는 경우이므로 $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

$X=1$일 때, 한 번은 5의 눈, 한 번은 4의 약수의 눈이 나오는 경우이므로 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

$X=2$일 때, 두 번 모두 4의 약수의 눈이 나오는 경우이므로 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$X=3$일 때, 한 번은 5의 눈, 한 번은 3의 배수의 눈이 나오는 경우이므로 $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$

$X=4$일 때, 한 번은 4의 약수의 눈, 한 번은 3의 배수의 눈이 나오는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$X=6$일 때, 두 번 모두 3의 배수의 눈이 나오는 경우이므로 $\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	1

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{36}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{9}+4\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{9}=3$$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-3)^2)=(-3)^2\times\frac{1}{36}+(-2)^2\times\frac{1}{6}+(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{9}+1^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{9}=\frac{5}{2}$

답 ①

정답과 풀이 35쪽

[20009-0107]

유제 5 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 두 상수 a, b에 대하여 $4a^2+5b^2=41$이고, $\mathrm{E}(X)=\frac{3}{2}$일 때, $12\mathrm{V}(X)$의 값을 구하시오.

(단, $a>0$, $b>0$)

X	a	b	$2b$	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

6. 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

이산확률변수 X와 두 상수 a, b $(a\neq0)$에 대하여 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

(1) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

(2) $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

(3) $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

설명 이산확률변수 X의 확률분포가 다음과 같을 때, 이산확률변수

$Y=aX+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

의 평균, 분산, 표준편차를 구해 보자.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

$y_i=ax_i+b$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$이라 할 때, 확률

$\mathrm{P}(Y=y_i)=\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$

이므로 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n	계
$\mathrm{P}(Y=y)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

따라서 확률변수 Y의 평균은

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\sum_{i=1}^{n}y_ip_i=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i\\&=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i=a\mathrm{E}(X)+b\end{aligned}$$

확률변수 X의 평균을 m이라 하면 확률변수 Y의 평균은 $am+b$이므로 Y의 분산과 표준편차는

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y)&=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-(am+b)\}^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\{(ax_i+b)-(am+b)\}^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}a^2(x_i-m)^2p_i\\&=a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=a^2\mathrm{V}(X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(Y)&=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}=\sqrt{a^2\mathrm{V}(X)}\\&=|a|\sqrt{\mathrm{V}(X)}\\&=|a|\sigma(X)\end{aligned}$$

예 이산확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=5$, $\mathrm{V}(X)=4$일 때, 확률변수 $2X+3$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$\mathrm{E}(2X+3)=2\mathrm{E}(X)+3=2\times5+3=13$

$\mathrm{V}(2X+3)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times4=16$

$\sigma(2X+3)=|2|\sigma(X)=2\times\sqrt{4}=4$

예제 4 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

한 쪽 면에만 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 숫자가 보이지 않도록 놓여 있다. 이 5장의 카드에서 임의로 한 장씩 카드를 뒤집어 카드에 적힌 수를 확인할 때, 처음으로 짝수가 적혀 있는 카드를 뒤집을 때까지 뒤집은 카드의 총 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(9X+5)$의 값은? (단, 뒤집은 카드는 다시 뒤집지 않는다.)

① 72 ② 81 ③ 90 ④ 99 ⑤ 108

풀이 전략 $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$의 값을 구하고 $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$ (a, b는 상수, $a\neq0$)임을 이용한다.

풀이 홀수, 짝수가 적혀 있는 카드가 각각 3장, 2장이므로 확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3, 4이다.

$X=1$일 때, 첫 번째에 짝수가 적혀 있는 카드를 뒤집는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{5}$$

$X=2$일 때, 첫 번째는 홀수, 두 번째는 짝수가 적혀 있는 카드를 뒤집는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

$X=3$일 때, 첫 번째와 두 번째는 홀수, 세 번째는 짝수가 적혀 있는 카드를 뒤집는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$$

$X=4$일 때, 첫 번째와 두 번째, 세 번째는 홀수, 네 번째는 짝수가 적혀 있는 카드를 뒤집는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{10}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

X	1	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{10}$$
$$=2$$

$$\mathrm{V}(X)=(1-2)^2\times\frac{2}{5}+(2-2)^2\times\frac{3}{10}+(3-2)^2\times\frac{1}{5}+(4-2)^2\times\frac{1}{10}=1$$

따라서 $\mathrm{V}(9X+5)=81\mathrm{V}(X)=81\times1=81$

답 ②

정답과 풀이 35쪽

[20009-0108]

유제 6 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같고

$$\mathrm{E}(aX+2b)=10,\ \mathrm{V}(aX+b)=76$$

일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a>0$)

X	-5	0	5	10	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

7. 이항분포

1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 0, 1, 2, $\cdots$, n이고 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{n}\mathrm{C}_{x}p^{x}q^{n-x}\ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\text{이고, } q=1-p)$$

이다. 이와 같은 이산확률변수 X의 확률분포를 이항분포라 하고, 기호로 $\mathrm{B}(n, p)$와 같이 나타낸다.
이때 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따른다고 하며, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	$\cdots$	r	$\cdots$	n	계
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_{n}\mathrm{C}_{0}p^{0}q^{n}$	${}_{n}\mathrm{C}_{1}p^{1}q^{n-1}$	${}_{n}\mathrm{C}_{2}p^{2}q^{n-2}$	$\cdots$	${}_{n}\mathrm{C}_{r}p^{r}q^{n-r}$	$\cdots$	${}_{n}\mathrm{C}_{n}p^{n}q^{0}$	1

예 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 A라 하고, 이 주사위를 120번 던질 때 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하자. 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{1}{3}$이고 독립시행의 횟수가 120이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(120, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

참고 (1) 위의 표에서 각 확률은 이항정리에 의하여 $(p+q)^{n}$을 전개한 식

$$(p+q)^{n}={}_{n}\mathrm{C}_{0}p^{0}q^{n}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}p^{1}q^{n-1}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{r}p^{r}q^{n-r}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}p^{n}q^{0}$$

의 우변의 각 항과 같다. 이때 $p+q=1$이므로 $\sum_{r=0}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{r}p^{r}q^{n-r}=1$임을 알 수 있다.

(2) 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$의 B는 이항분포를 뜻하는 Binomial distribution의 첫 글자이다.

8. 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때

(1) 평균 : $\mathrm{E}(X)=np$

(2) 분산 : $\mathrm{V}(X)=npq$ (단, $q=1-p$)

(3) 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{npq}$ (단, $q=1-p$)

예 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(90, \frac{1}{3}\right)$을 따를 때

$$\mathrm{E}(X)=90\times\frac{1}{3}=30,\ \mathrm{V}(X)=90\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=20,\ \sigma(X)=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

9. 큰 수의 법칙

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 임의의 양수 h에 대하여 n이 한없이 커질 때, 확률 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<h\right)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.

참고 큰 수의 법칙에 의하여 시행 횟수 n이 충분히 클 때, 사건 A의 상대도수는 수학적 확률에 가까워지므로 사건 A의 상대도수 $\frac{X}{n}$를 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$로 간주할 수 있다. 따라서 자연현상이나 사회현상에서 수학적 확률을 구하기 곤란한 경우에는 시행 횟수를 충분히 크게 한 후 사건의 상대도수를 구하여 수학적 확률로 이용할 수 있다.

예제 5 이항분포의 평균과 분산

빨간 공 2개, 파란 공 3개, 노란 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 색을 확인하고 다시 주머니에 넣는 시행을 48회 반복할 때, 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다르게 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 X의 표준편차는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

풀이 전략 (1) 1회의 시행에서 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다를 확률을 구한다.
(2) 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=np$, $\mathrm{V}(X)=npq$, $\sigma(X)=\sqrt{npq}$임을 이용한다. (단, $q=1-p$)

풀이 1회의 시행에서 색이 같은 공 2개를 꺼내는 경우는 빨간 공 2개 또는 파란 공 2개 또는 노란 공 2개를 꺼내는 경우이다.
1회의 시행에서 색이 같은 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{1+3+3}{28}=\frac{1}{4}$$

이므로 1회의 시행에서 색이 다른 공 2개를 꺼낼 확률은 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48, \frac{3}{4}\right)$을 따르므로 확률변수 X의 표준편차는

$$\sqrt{48\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}=3$$

답 ①

정답과 풀이 35쪽

[20009-0109]

유제 7 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{V}(5X+1)=100$일 때, n의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

[20009-0110]

유제 8 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던지는 시행을 160회 반복할 때, 두 주사위를 던져서 나온 눈의 수의 합이 4의 배수가 되는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)$의 값은?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

Level 1 기초 연습

[20009-0111]

1 흰 공 3개, 검은 공 6개가 들어 있는 주머니에서 임의로 7개의 공을 동시에 꺼낼 때 나오는 검은 공의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X\le5)$의 값은?

① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

[20009-0112]

2 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{E}(X)=4$일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

X	2	4	8	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{4}$	b	1

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[20009-0113]

3 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{E}(X)=0$, $\mathrm{V}(X)=3$일 때, $a+2b+3c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

X	-2	0	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	1

① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

[20009-0114]

4 검은 공 2개, 흰 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 나오는 흰 공의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① $\frac{11}{10}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{13}{10}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[20009-0115]

5 이산확률변수 X가 갖는 값이 1, 2, 3, 4이고, X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=i)=ki\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

일 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[20009-0116]

6 1, 1, 2가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드에서 임의로 2장의 카드를 동시에 뽑을 때, 뽑힌 카드에 적혀 있는 두 수의 합을 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)$의 값은?

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

[20009-0117]

7 두 이산확률변수 X_1, X_2에 대하여 $X_2=\frac{2X_1+1}{3}$이고 $\mathrm{V}(X_2)=28$일 때, $\mathrm{V}(X_1)$의 값은?

① 42 ② 49 ③ 56 ④ 63 ⑤ 70

[20009-0118]

8 이산확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(2X+3)=15,\ \mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+1\right)=5$$

일 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구하시오.

[20009-0119]

9 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 이산확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(X=n),\ \mathrm{V}(X)=30$$

일 때, n의 값은?

① 90 ② 120 ③ 150 ④ 180 ⑤ 210

[20009-0120]

10 1, 3, 5, 7, 9가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 택하는 시행을 25회 반복할 때, 소수가 적혀 있는 카드를 택하는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)$의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

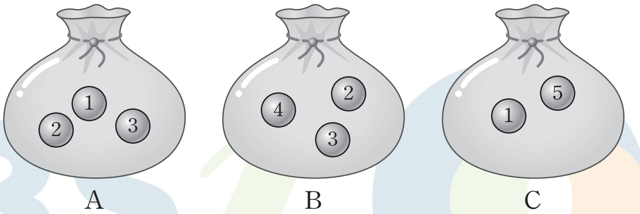
[20009-0121]

1 1, 1, 1, 2, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 임의로 일렬로 나열할 때, 양 끝에 나열된 두 카드에 적혀 있는 수의 합을 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① 3　② $\frac{19}{6}$　③ $\frac{10}{3}$　④ $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{11}{3}$

[20009-0122]

2 그림과 같이 주머니 A에는 1, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 3개의 공이, 주머니 B에는 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 3개의 공이, 주머니 C에는 1, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 2개의 공이 들어 있다. 세 주머니 A, B, C 중에서 임의로 1개의 주머니를 택하여 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적혀 있는 숫자를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)$의 값은?



① 2　② $\frac{20}{9}$　③ $\frac{22}{9}$　④ $\frac{8}{3}$　⑤ $\frac{26}{9}$

[20009-0123]

3 주머니 속에 자연수 1, 2, 3, ⋯, $k-1$, k가 하나씩 적혀 있는 공이 각각 k, $k-1$, $k-2$, ⋯, 2, 1개씩 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하자.
$\mathrm{E}(3X+5)=100$일 때, k의 값을 구하시오.

[20009-0124]

4 한 개의 주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나오면 3점을 얻고 3의 배수가 아닌 눈이 나오면 1점을 얻는 게임이 있다. 이 게임을 270번 반복할 때, 얻을 수 있는 총 점수의 기댓값은?

① 420　② 430　③ 440　④ 450　⑤ 460

[20009-0125]

1 이산확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3, 4, 5이고 이산확률변수 Y가 갖는 값은 1, 3, 5, 7, 9이다. 상수 a에 대하여

$$\mathrm{P}(Y=2i-1)=a\times\mathrm{P}(X=i)+a\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

이고 $\mathrm{E}(X)=\frac{10}{3}$일 때, $\mathrm{E}(9Y+5)$의 값은?

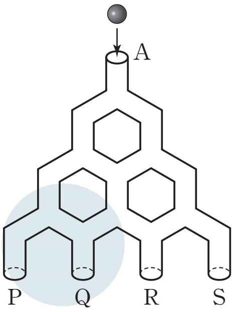
① 45 ② 47 ③ 49 ④ 51 ⑤ 53

[20009-0126]

2 임의의 네 자리의 자연수에 대하여 천의 자리의 수, 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수를 각각 a_1, a_2, a_3, a_4라 하자. 자연수 1, 2, 3, 4를 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 자연수를 택할 때, 택해진 수에 대하여 $a_i>a_{i+1}\ (i=1,\ 2,\ 3)$을 만족시키는 a_i의 개수를 확률변수 X라 하자. 예를 들어 택해진 수가 2314이면 $X=1$이고 3241이면 $X=2$이다. $\mathrm{V}(X)=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[20009-0127]

3 그림과 같이 입구 A에 공을 넣으면 관을 따라 내려가 P, Q, R, S의 출구 중 어느 한 곳으로 나오는 장치가 수직으로 세워져 있다. 이 장치의 입구에 한 개의 공을 넣는 시행을 3회 반복할 때, 공이 나온 서로 다른 출구의 개수를 확률변수 X라 하자. 예를 들어 공이 세 번 모두 P로 나온 경우는 $X=1$이고, 두 번은 P로, 한 번은 Q로 나온 경우는 $X=2$이다. $\mathrm{E}(X)$의 값은? $\left(\text{단, 관이 두 개로 갈라져 내려가는 지점에서 각각의 관을 따라 공이 내려갈 확률은 } \frac{1}{2}\text{로 서로 같다.}\right)$



① $\frac{137}{64}$ ② $\frac{139}{64}$ ③ $\frac{141}{64}$ ④ $\frac{143}{64}$ ⑤ $\frac{145}{64}$

대표 기출 문제

출제 경향 확률질량함수의 성질을 이해하고 확률질량함수가 주어진 이산확률변수의 평균과 분산을 구하는 문제가 출제된다.

두 이산확률변수 X와 Y가 가지는 값이 각각 1부터 5까지의 자연수이고

$$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=4$일 때, $\mathrm{E}(Y)=a$이다. $8a$의 값을 구하시오. [4점]

2018학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 ▸ 확률질량함수를 이해하고 이산확률변수의 평균을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 두 이산확률변수 X, Y가 가지는 값이 각각 1부터 5까지의 자연수이므로

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=4$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\sum_{k=1}^{5}\{k\times\mathrm{P}(Y=k)\}\\&=\sum_{k=1}^{5}\left[k\times\left\{\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\right\}\right]\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}+\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{5}k\\&=\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{10}\times\frac{5\times6}{2}\\&=2+\frac{3}{2}\\&=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{7}{2}$이므로

$$8a=8\times\frac{7}{2}=28$$

답 28

대표 기출 문제

출제 경향 확률분포가 주어진 이산확률변수 X 또는 $aX+b$의 평균과 분산을 구하는 문제가 출제된다. 또한 이항분포를 따르는 확률변수의 평균과 분산을 구하는 문제도 출제된다.

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0.121	0.221	0.321	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{2}{3}$	1

다음은 $\mathrm{E}(X)=0.271$일 때, $\mathrm{V}(X)$를 구하는 과정이다.

> $Y=10X-2.21$이라 하자. 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.
>
> | Y | -1 | 0 | 1 | 합계 |
> |---|---|---|---|---|
> | $\mathrm{P}(Y=y)$ | a | b | $\frac{2}{3}$ | 1 |
>
> $\mathrm{E}(Y)=10\mathrm{E}(X)-2.21=0.5$이므로
>
> $a=\boxed{\text{(가)}}$, $b=\boxed{\text{(나)}}$이고 $\mathrm{V}(Y)=\frac{7}{12}$이다.
>
> 한편, $Y=10X-2.21$이므로 $\mathrm{V}(Y)=\boxed{\text{(다)}}\times\mathrm{V}(X)$이다.
>
> 따라서 $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\boxed{\text{(다)}}}\times\frac{7}{12}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, pqr의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{13}{9}$ ② $\frac{16}{9}$ ③ $\frac{19}{9}$ ④ $\frac{22}{9}$ ⑤ $\frac{25}{9}$

2018학년도 대수능

출제 의도 ▸ 확률변수 X의 확률분포를 이해하고 이산확률변수 $aX+b$의 평균과 분산을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 확률의 합이 1이므로 $a+b+\frac{2}{3}=1$, 즉 $a+b=\frac{1}{3}$ ...... ㉠

또, $\mathrm{E}(Y)=10\mathrm{E}(X)-2.21=0.5$이므로

$$\mathrm{E}(Y)=(-1)\times a+0\times b+1\times\frac{2}{3}=-a+\frac{2}{3}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $a=\boxed{\frac{1}{6}}$, $b=\boxed{\frac{1}{6}}$이고, $\mathrm{V}(Y)=\left\{(-1)^2\times\frac{1}{6}+0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{2}{3}\right\}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{12}$이다.

한편, $Y=10X-2.21$이므로 $\mathrm{V}(Y)=\boxed{100}\times\mathrm{V}(X)$이다. 따라서 $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\boxed{100}}\times\frac{7}{12}$이다.

그러므로 $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{1}{6}$, $r=100$이므로 $pqr=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times100=\frac{25}{9}$

답 ⑤

06 연속확률변수의 확률분포

1. 연속확률변수

확률변수 X가 어떤 구간에 속하는 모든 실수 값을 가질 때, X를 연속확률변수라고 한다.

참고 확률변수 X가 키, 무게, 온도, 시간 등의 값을 취하면 X는 어떤 범위에 속하는 모든 실수 값을 가진다.

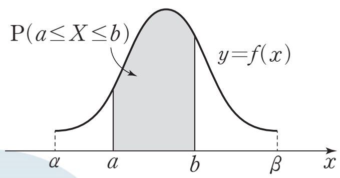
2. 확률밀도함수

일반적으로 $\alpha \le X \le \beta$의 모든 실수의 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여 $\alpha \le x \le \beta$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 세 가지 성질을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 확률변수 X의 확률밀도함수라고 한다. 이때 X는 확률밀도함수가 $f(x)$인 확률분포를 따른다고 한다.

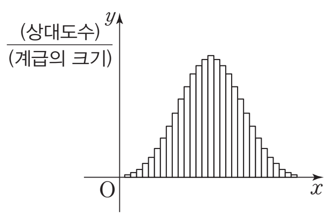
① $f(x) \ge 0$ (단, $\alpha \le x \le \beta$)

② 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

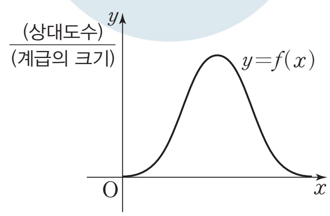
③ $\mathrm{P}(a \le X \le b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. (단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)



설명 [그림 1]과 같이 연속확률변수 X의 $\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$를 히스토그램으로 나타내면 히스토그램의 각 직사각형의 넓이는 각 구간의 상대도수를 나타내고, 상대도수의 합이 1이므로 직사각형들의 넓이의 합은 1이다. 이때 조사 대상의 수를 한없이 늘리고, 계급의 크기를 0에 가깝게 하면 도수분포다각형은 [그림 2]와 같이 매끄러운 곡선이 된다.



[그림 1]



[그림 2]

참고 연속확률변수 X가 하나의 값을 가질 확률은 0이다. 즉,

$\alpha \le X \le \beta$이고 $\alpha \le c \le \beta$일 때, $\mathrm{P}(X=c)=\mathrm{P}(c \le X \le c)=0$

따라서

$\mathrm{P}(a \le X \le b)=\mathrm{P}(a \le X < b)=\mathrm{P}(a < X \le b)=\mathrm{P}(a < X < b)$

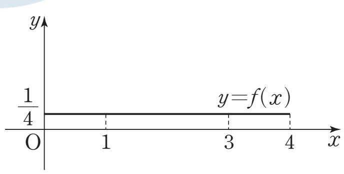
예 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \le X \le 4$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$f(x)=\dfrac{1}{4}$ $(0 \le x \le 4)$

일 때,

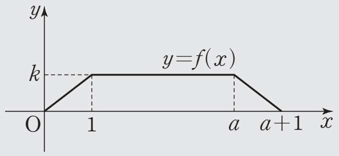
$\mathrm{P}(0 \le X \le 4)=4 \times \dfrac{1}{4}=1$

$\mathrm{P}(1 \le X \le 3)=(3-1) \times \dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$



예제 1 연속확률변수와 확률밀도함수

1보다 큰 실수 a에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0\le X\le a+1$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$$\mathrm{P}(1\le X\le a)=\frac{3}{4}$$

일 때, 두 상수 a, k에 대하여 $a+k$의 값은?

① $\frac{13}{4}$　② $\frac{15}{4}$　③ $\frac{17}{4}$　④ $\frac{19}{4}$　⑤ $\frac{21}{4}$

풀이 전략 $0\le x\le a+1$에서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이다.

풀이 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 $0\le x\le a+1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times\{(a+1)+(a-1)\}\times k=1$, $ak=1$　…… ㉠

$\mathrm{P}(1\le X\le a)=(a-1)k=\frac{3}{4}$이므로 $ak-k=\frac{3}{4}$

㉠을 대입하면 $1-k=\frac{3}{4}$, $k=\frac{1}{4}$

㉠에서 $a\times\frac{1}{4}=1$, $a=4$

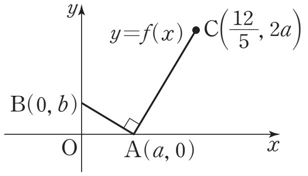
따라서 $a+k=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

답 ③

정답과 풀이 42쪽

[20009-0128]

유제 1 그림과 같이 좌표평면에 세 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$, $\mathrm{C}\left(\frac{12}{5},\ 2a\right)$가 있다. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0\le X\le\frac{12}{5}$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 선분 AB, AC로 이루어진다. $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $10(a+b)$의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0<b<a<\frac{12}{5}\right)$



[20009-0129]

유제 2 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0\le X\le 1$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} k & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right) \\ 2\left(x-\frac{1}{2}\right)+k & \left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right)\end{cases}$$

일 때, $\mathrm{P}(k\le X\le 1)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① $\frac{3}{16}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{5}{16}$　④ $\frac{3}{8}$　⑤ $\frac{7}{16}$

3. 정규분포

실수 전체의 집합에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 두 상수 m, $\sigma(\sigma>0)$에 대하여

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \text{ (단, } e\text{는 } 2.718281\cdots\text{인 무리수)}$$

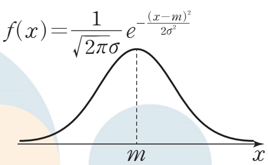
일 때, X의 확률분포를 정규분포라고 한다.

이때 확률변수 X의 평균은 m, 표준편차는 σ임이 알려져 있다.

또한, 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 기호로 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$과 같이 나타내고, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 한다.

4. 정규분포를 따르는 확률변수의 확률밀도함수의 그래프

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$와 그 그래프는 다음과 같은 성질을 가지고 있음이 알려져 있다.



① 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이다.

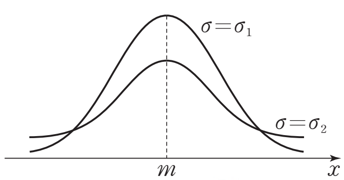
② $x=m$에서 최댓값을 갖고, x축을 점근선으로 한다.

③ 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

④ 평균 m의 값이 일정할 때, [그림 1]과 같이 표준편차 σ의 값이 커지면 곡선의 중앙 부분이 낮아지면서 양쪽으로 퍼지고, 표준편차 σ의 값이 작아지면 곡선의 중앙 부분이 높아지면서 좁아진다.

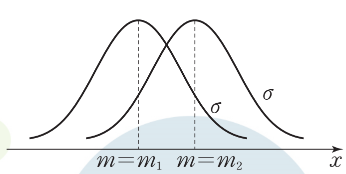
⑤ 표준편차 σ의 값이 일정할 때, [그림 2]와 같이 평균 m의 값이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 변하지 않는다.

m의 값이 일정하고, σ의 값이 변할 때 $(\sigma_1<\sigma_2)$



[그림 1]

σ의 값이 일정하고, m의 값이 변할 때 $(m_1<m_2)$



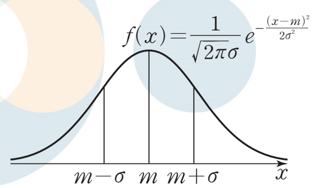
[그림 2]

참고 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 다음을 만족시킨다.

① $\mathrm{P}(X\le m)=\mathrm{P}(X\ge m)=0.5$

② $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)=\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

③ $\mathrm{P}(m-k\sigma\le X\le m)=\mathrm{P}(m\le X\le m+k\sigma)$ (단, k는 상수)



예 확률변수 X가 평균이 50, 표준편차가 6인 정규분포를 따를 때, X는 정규분포 $\mathrm{N}(50, 6^2)$을 따른다고 한다.

이때 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=50$에 대하여 대칭이고,

$$\mathrm{P}(X\le 50)=\mathrm{P}(X\ge 50)=0.5,\ \mathrm{P}(44\le X\le 50)=\mathrm{P}(50\le X\le 56)$$

이다.

예제 2 정규분포

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(40 \le X \le 48) = \mathrm{P}(72 \le X \le 80)$
(나) $\mathrm{P}(m-4 \le X \le m+4) = 0.68$

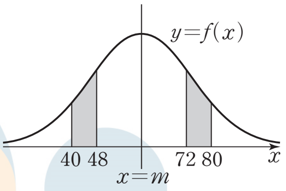
$\mathrm{P}(X \ge 56)$의 값은?

① 0.68　② 0.72　③ 0.76　④ 0.80　⑤ 0.84

풀이 전략 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

풀이 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

조건 (가)에서 $\mathrm{P}(40 \le X \le 48) = \mathrm{P}(72 \le X \le 80)$이고,
$48-40=80-72$이므로
$\dfrac{40+80}{2} = \dfrac{48+72}{2} = m$, 즉 $m=60$
조건 (나)에 의하여 $\mathrm{P}(56 \le X \le 64) = 0.68$이고,
$\mathrm{P}(56 \le X \le 64) = 2\mathrm{P}(56 \le X \le 60)$이므로 $\mathrm{P}(56 \le X \le 60) = 0.34$
따라서 $\mathrm{P}(X \ge 56) = \mathrm{P}(56 \le X \le 60) + \mathrm{P}(X \ge 60) = 0.34 + 0.5 = 0.84$



답 ⑤

정답과 풀이 42쪽

[20009-0130]

유제 3 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \le m-6) = \mathrm{P}(X \ge 2m-3)$
(나) $\mathrm{P}(X \ge 3) = \mathrm{P}(X \le m+2\sigma)$

$m+\sigma$의 값을 구하시오.

[20009-0131]

유제 4 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ \sigma^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다. 두 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이고, $f(a)=f(28)=g(28)$이다.
$\mathrm{P}(a \le X \le 28) = 0.84$, $\mathrm{P}(Y \ge b) = 0.08$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $m \ne 20$)

① 52　② 54　③ 56　④ 58　⑤ 60

5. 표준정규분포

평균이 0이고, 표준편차가 1인 정규분포를 표준정규분포라고 하며, 이것을 기호로

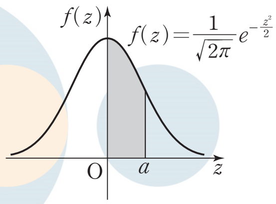
$$\mathrm{N}(0,\ 1)$$

과 같이 나타낸다.

확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, Z의 확률밀도함수 $f(z)$는

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\ \text{(단, }e\text{는 }2.718281\cdots\text{인 무리수)}$$

이다. 이때 임의의 양수 a에 대하여 확률 $\mathrm{P}(0\le Z\le a)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같고, 그 값은 표준정규분포표에 주어져 있다.



참고 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(0\le Z\le a)$는 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있다.
예를 들어, 확률 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)$은 표준정규분포표의 왼쪽에 있는 수 중에서 1.9를 찾고, 표의 위쪽에 있는 수 중에서 0.06을 찾아 1.9의 가로줄과 0.06의 세로줄이 만나는 곳의 수를 찾으면 된다.
즉, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.4750$이다.

z	0.00	0.01	$\cdots$	0.06	$\cdots$
0.0	.0000	.0040	$\cdots$	.0239	$\cdots$
0.1	.0398	.0438	$\cdots$	.0636	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.9	.4713	.4719	$\cdots$	.4750	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

6. 정규분포와 표준정규분포의 관계

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$ $(\sigma>0)$을 따를 때, 확률변수

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

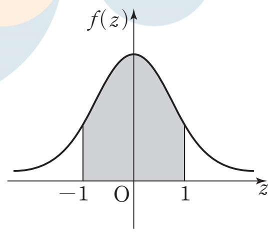
은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다는 사실이 알려져 있다.

이때 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$을 이용하여 다음과 같이 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꾸어 구한다.

$$\mathrm{P}(a\le X\le b)=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma}\le\frac{X-m}{\sigma}\le\frac{b-m}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma}\le Z\le\frac{b-m}{\sigma}\right)$$

예 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 2^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(6\le X\le 10)$의 값을 구해 보자.
$Z=\frac{X-8}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고,

$$\mathrm{P}(6\le X\le 10)=\mathrm{P}\left(\frac{6-8}{2}\le Z\le\frac{10-8}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$$
$$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$



표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$\mathrm{P}(6\le X\le 10)=2\times 0.3413=0.6826$$

예제 3 표준정규분포

어느 딸기 농장에서 재배되는 딸기 한 개의 무게는 평균이 19 g, 표준편차가 2 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서 재배되는 딸기 중에서 무게가 18 g 이상이고 23 g 이하인 딸기를 '상' 등급으로 분류하여 판매한다. 이 농장에서 재배되는 딸기 중에서 임의로 선택한 한 개의 딸기가 '상' 등급일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328　② 0.6247　③ 0.6687
④ 0.7745　⑤ 0.8185

풀이 전략 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

풀이 이 농장에서 재배되는 딸기 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면
확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(19, 2^2)$을 따르고,
$Z=\frac{X-19}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
선택한 딸기의 무게가 18 g 이상이고 23 g 이하일 때 '상' 등급으로 분류되므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(18 \le X \le 23) &= \mathrm{P}\left(\frac{18-19}{2} \le Z \le \frac{23-19}{2}\right)\\ &= \mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 2)\\ &= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)\\ &= 0.1915+0.4772\\ &= 0.6687\end{aligned}$$

답 ③

정답과 풀이 43쪽

[20009-0132]

유제 5 확률변수 X가 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고,

$$\mathrm{P}(X \ge 48)=0.0228,\ \mathrm{P}(42 \le X \le 48)=0.2857$$

일 때, $m+\sigma$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

[20009-0133]

유제 6 어느 공장에서 생산하는 전구 한 개의 수명은 평균이 1000시간, 표준편차가 50시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 전구 중에서 임의로 선택한 전구 한 개의 수명이 a시간 이상일 확률이 0.9861일 때, 실수 a의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.4	0.4192
1.8	0.4641
2.2	0.4861
2.6	0.4953

① 870　② 890　③ 910
④ 930　⑤ 950

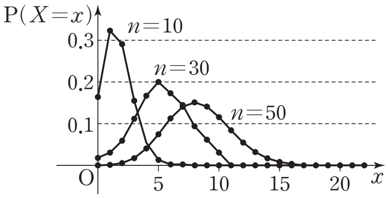
7. 이항분포와 정규분포의 관계

(1) 이항분포와 정규분포를 나타내는 그래프

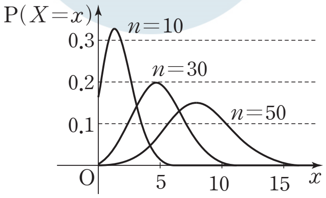
한 개의 주사위를 n회 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

[그림 1]은 주사위를 던지는 횟수가 $n=10$, $n=30$, $n=50$일 때의 이항분포를 그래프로 나타낸 것이고, 점들을 부드럽게 연결하면 [그림 2]를 얻을 수 있다.

일반적으로 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 나타내는 그래프는 n의 값이 커지면 정규분포의 확률밀도함수의 그래프에 가까워짐을 알 수 있다.



[그림 1]



[그림 2]

(2) 이항분포와 정규분포의 관계

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

이때 $Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

참고 일반적으로 $np\ge5$, $nq\ge5$이면 n이 충분히 큰 것으로 생각한다.

예 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \frac{1}{3}\right)$을 따를 때, $\mathrm{P}(20\le X\le32)$의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구해 보자.

$$\mathrm{E}(X)=72\times\frac{1}{3}=24$$

$$\mathrm{V}(X)=72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=16$$

이때 72는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(24,\ 4^2)$을 따르고,

$Z=\frac{X-24}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(20\le X\le32)&=\mathrm{P}\left(\frac{20-24}{4}\le Z\le\frac{32-24}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\end{aligned}$$

표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$, $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(20\le X\le32)&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

예제 4 이항분포와 정규분포의 관계

흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 공의 색깔을 확인하고 다시 주머니에 넣는 시행을 150회 반복할 때, 같은 색깔의 공을 꺼내는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(72\le X\le 75)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0166　② 0.0440　③ 0.0606　④ 0.0919　⑤ 0.1359

풀이 전략 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

풀이 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 같은 색의 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150, \frac{2}{5}\right)$를 따르고,

$$\mathrm{E}(X)=150\times\frac{2}{5}=60,\ \mathrm{V}(X)=150\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=36$$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(60, 6^2)$을 따르고,

$Z=\frac{X-60}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(72\le X\le 75)&=\mathrm{P}\left(\frac{72-60}{6}\le Z\le\frac{75-60}{6}\right)=\mathrm{P}(2\le Z\le 2.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4938-0.4772=0.0166\end{aligned}$$

답 ①

정답과 풀이 44쪽

[20009-0134]

유제 7 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행을 192회 반복할 때, 짝수의 눈이 적어도 한 개 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X\le 156)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8413　② 0.8964　③ 0.9332　④ 0.9772　⑤ 0.9938

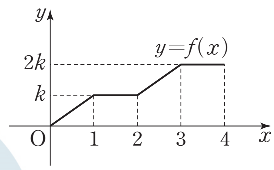
[20009-0135]

유제 8 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따를 때, $\mathrm{P}(X\ge 105)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 0.1587이다. n의 값을 구하시오. (단, $n\ge 100$)

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

[20009-0136]

1 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \le X \le 4$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 상수 k의 값은?



① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[20009-0137]

2 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다. $\mathrm{P}(X \ge 4)=0.68$, $\mathrm{P}(X \ge 10)=0.32$일 때, $\mathrm{P}(|X-m| \le 3)$의 값은?

① 0.32 ② 0.34 ③ 0.36 ④ 0.38 ⑤ 0.40

[20009-0138]

3 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(2m, m^2)$을 따르고, 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. $\mathrm{P}(m \le X \le 16)=\mathrm{P}(-2 \le Z \le 1)$일 때, 양수 m의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[20009-0139]

4 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(60, 2^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(57 \le X \le 58)+\mathrm{P}(63 \le X \le 64)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0440 ② 0.0606 ③ 0.0919

④ 0.1359 ⑤ 0.1525

[20009-0140]

5 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(400, \frac{1}{2}\right)$을 따를 때, $\mathrm{P}(200 \le X \le 215)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

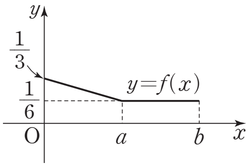
① 0.1915 ② 0.2816 ③ 0.3413

④ 0.4332 ⑤ 0.4772

[20009-0141]

1 $0<a<b$인 두 상수 a, b에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0\le X\le b$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$\mathrm{P}(0\le X\le a)=\dfrac{5}{8}$일 때, $a+b$의 값은?

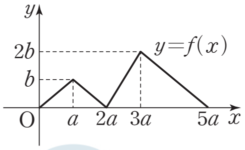


① $\dfrac{21}{4}$ ② $\dfrac{23}{4}$ ③ $\dfrac{25}{4}$ ④ $\dfrac{27}{4}$ ⑤ $\dfrac{29}{4}$

[20009-0142]

2 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0\le X\le 5a$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$a+3b=2$일 때, $f(ab)$의 값은?



① $\dfrac{1}{24}$ ② $\dfrac{1}{28}$ ③ $\dfrac{1}{32}$ ④ $\dfrac{1}{36}$ ⑤ $\dfrac{1}{40}$

[20009-0143]

3 $0<\sigma_1<\sigma_2$일 때, 두 확률변수 X와 Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ {\sigma_1}^2)$, $\mathrm{N}(10,\ {\sigma_2}^2)$을 따르고, 두 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. $10<a<b$인 두 상수 a, b에 대하여 $\mathrm{P}(10\le X\le a)=\mathrm{P}(a\le X\le b)$이고, $f(a)=g(a)$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(b)<g(b)$

ㄴ. $2a<b+10$

ㄷ. $\mathrm{P}(10\le Y\le c)=0.25$이면 $a<c$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[20009-0144]

4 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포 $\mathrm{N}(11,\ 2^2)$을 따르는 확률변수 Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \geq 15) = \mathrm{P}(Y \leq 15)$
(나) $\mathrm{P}(12 \leq X \leq 2m-12) = 2\mathrm{P}(11 \leq Y \leq 17)$

두 상수 m, σ에 대하여 $m+\sigma$의 값은? (단, $\sigma>0$)

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

[20009-0145]

5 A과수원에서 재배한 사과 한 개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, B과수원에서 재배한 사과 한 개의 무게는 평균이 $m+4$, 표준편차가 4인 정규분포를 따른다. A, B과수원에서 재배한 사과는 그 무게가 각각 320 이상일 때 특상품으로 분류되며, A과수원에서 재배한 사과 중 임의로 선택한 한 개의 사과가 특상품으로 분류될 확률은 0.0548이다. B과수원에서 재배한 사과 중 임의로 선택한 한 개의 사과가 특상품으로 분류될 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.)

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.2	0.3849
1.4	0.4192
1.6	0.4452

① 0.0359 ② 0.0548 ③ 0.0808 ④ 0.1151 ⑤ 0.1587

[20009-0146]

6 어느 회사의 채용 시험에서 각 응시자의 점수를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고, 이 회사에서는 채용 시험의 난이도 H를

$$H = 10 - \frac{m-70}{\sigma}$$

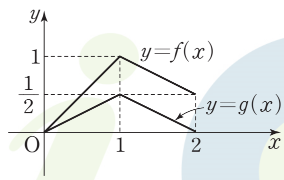
으로 산출한다. $H=9.5$일 때, $\mathrm{P}(|X-70| \geq 2\sigma)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0685 ② 0.0730 ③ 0.0775 ④ 0.0820 ⑤ 0.0865

[20009-0147]

1 $0\le x\le 2$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0\le X\le 2$이고, $0<k<1$인 상수 k에 대하여 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)-kg(x)$일 때, $\mathrm{P}(0\le X\le k)$의 값은?

① $\frac{1}{32}$　② $\frac{3}{32}$　③ $\frac{5}{32}$　④ $\frac{7}{32}$　⑤ $\frac{9}{32}$

[20009-0148]

2 m, σ가 자연수일 때, 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X와 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르는 확률변수 Z가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(32\le X\le 35)>\mathrm{P}(35\le X\le 38)$
(나) $\mathrm{P}(32\le X\le 35)>\mathrm{P}(29\le X\le 32)$
(다) $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)<\mathrm{P}(33\le X\le 35)<\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$\mathrm{P}(30\le X\le 34)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.4	0.1554
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.1554　② 0.1915　③ 0.3413
④ 0.4332　⑤ 0.4772

[20009-0149]

3 A대학의 수학과는 대학수학능력시험의 수학 점수가 높은 순으로 n명의 신입생을 선발하였고, A대학의 수학과에 입학 원서를 낸 1000명의 학생의 대학수학능력시험 수학 점수는 평균이 76점, 표준편차가 8점인 정규분포를 따른다. 이 1000명의 학생 중 대학수학능력시험 수학 점수가 88점인 학생이 합격하였을 때, n의 최솟값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

대표 기출 문제

출제 경향 확률밀도함수의 성질을 이용하여 확률변수의 확률을 구하거나 정규분포의 확률밀도함수의 그래프의 성질을 이용하는 문제, 표준정규분포를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.

$$f(12) \le g(20)$$

을 만족시키는 m에 대하여 $\mathrm{P}(21 \le Y \le 24)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745 ④ 0.8185 ⑤ 0.9104

2020학년도 대수능

출제 의도 ▶ 정규분포의 확률밀도함수의 그래프의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구하고, 표준정규분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 두 확률변수 X와 Y는 모두 정규분포를 따르고, $\sigma(X)=\sigma(Y)=2$이므로

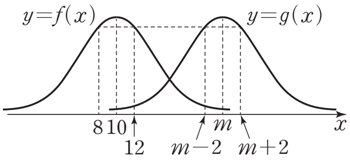
두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 있다.

$y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=10$에 대하여 대칭이고,

$y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

오른쪽 그림과 같이

$f(8)=f(12)=g(m-2)=g(m+2)$이다.

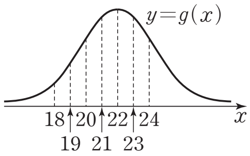


이때 $f(12) \le g(20)$에서

$m-2 \le 20 \le m+2$

즉, $18 \le m \le 22$이므로 $\mathrm{P}(21 \le Y \le 24)$의 값은

오른쪽 그림과 같이 $m=22$일 때 최대이다.



확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(22,\ 2^2)$을 따를 때,

확률변수 $Z=\dfrac{Y-22}{2}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(21 \le Y \le 24) &= \mathrm{P}\left(\frac{21-22}{2} \le Z \le \frac{24-22}{2}\right) \\ &= \mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 1) \\ &= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) \\ &= 0.1915+0.3413 \\ &= 0.5328\end{aligned}$$

답 ①

대표 기출 문제

출제 경향 실생활에서 정규분포를 따르는 확률변수가 어떤 범위의 값을 가질 확률을 표준정규분포를 이용하여 구하는 문제가 출제된다.

어느 회사 직원들의 어느 날의 출근 시간은 평균이 66.4분, 표준편차가 15분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 날 출근 시간이 73분 이상인 직원들 중에서 40 %, 73분 미만인 직원들 중에서 20 %가 지하철을 이용하였고, 나머지 직원들은 다른 교통수단을 이용하였다. 이 날 출근한 이 회사 직원들 중 임의로 선택한 1명이 지하철을 이용하였을 확률은?

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.44)=0.17$로 계산한다.) [4점]

① 0.306 ② 0.296 ③ 0.286 ④ 0.276 ⑤ 0.266

2019학년도 대수능

출제 의도 ▸ 정규분포를 따르는 확률변수가 어떤 범위의 값을 가질 확률을 구하고, 확률의 곱셈정리를 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 이 날 이 회사 직원들의 출근 시간을 확률변수 X라 하면

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(66.4,\ 15^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-66.4}{15}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 73)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{73-66.4}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0.44)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.44)\\&=0.5-0.17\\&=0.33\end{aligned}$$

이고,

$$\mathrm{P}(X<73)=1-0.33=0.67$$

이므로 구하는 확률은

$$0.33\times 0.4+0.67\times 0.2=0.266$$

답 ⑤

통계적 추정

1. 모집단과 표본

(1) 통계 조사에서 조사하고자 하는 대상 전체를 모집단이라고 하며, 조사하기 위하여 모집단에서 뽑은 일부분을 표본이라고 한다.

(2) 통계 조사에서 모집단 전체를 조사하는 것을 전수조사라고 하며, 모집단의 일부분, 즉 표본을 조사하는 것을 표본조사라고 한다. 또한 표본에 포함된 대상의 개수를 표본의 크기라고 한다.

(3) 모집단에서 표본을 뽑는 것을 추출이라고 하며, 모집단에서 표본을 추출하는 방법 중 모집단에 속하는 각 대상이 같은 확률로 추출되도록 하는 방법을 임의추출이라고 한다.

2. 모평균과 표본평균

(1) 어떤 모집단에서 조사하고자 하는 특성을 나타내는 확률변수를 X라 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 모평균, 모분산, 모표준편차라 하고, 이것을 기호로 각각 m, σ^2, σ와 같이 나타낸다.

(2) 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본을 X_1, X_2, X_3, $\cdots$, X_n이라 할 때, 이들의 평균, 분산, 표준편차를 각각 표본평균, 표본분산, 표본표준편차라 하고, 이것을 기호로 각각 $\overline{X}$, S^2, S와 같이 나타낸다. 즉,

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n)$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}$$

$$S=\sqrt{S^2}$$

참고 표본분산의 정의에서 표본평균을 정의할 때와 달리 $n-1$로 나누는 것은 표본분산과 모분산의 차이를 줄이기 위함이다.

3. 표본평균의 확률분포

(1) 모평균 m은 고정된 상수이지만 표본평균 $\overline{X}$는 추출된 표본에 따라 여러 가지 값을 가질 수 있으므로 확률변수이다.

(2) 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본 $(X_1,\ X_2)$와 그 표본평균 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$는 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$(X_1,\ X_2)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 2)$	$(1,\ 3)$	$(2,\ 1)$	$(2,\ 2)$	$(2,\ 3)$	$(3,\ 1)$	$(3,\ 2)$	$(3,\ 3)$
$\overline{X}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

따라서 확률변수 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이때

$$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\mathrm{P}(X=1)\times\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$\overline{X}$	1	1.5	2	2.5	3	계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

예제 1 모평균과 표본평균

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같고, 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=3)=\frac{3}{16}$이다. $\mathrm{P}(\overline{X}=2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

X	1	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	a	b	$\frac{1}{2}$	1

① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{5}{64}$ ③ $\frac{7}{64}$ ④ $\frac{9}{64}$ ⑤ $\frac{11}{64}$

풀이 전략 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 하면 $\overline{X}=3$인 경우는 $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$일 때임을 이용한다.

풀이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 하면
$\overline{X}=3$인 경우는 $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$일 때이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=3)=a\times\frac{1}{2}+b\times b+\frac{1}{2}\times a=a+b^2$$

즉, $a+b^2=\frac{3}{16}$ …… ㉠

확률변수 X의 확률분포를 나타낸 표에서 모든 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{8}+a+b+\frac{1}{2}=1$, $a=\frac{3}{8}-b$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\frac{3}{8}-b+b^2=\frac{3}{16}$, $16b^2-16b+3=0$, $(4b-1)(4b-3)=0$

$b=\frac{1}{4}$ 또는 $b=\frac{3}{4}$

㉡에서 $b\le\frac{3}{8}$이므로 $b=\frac{1}{4}$, $a=\frac{1}{8}$

$\overline{X}=2$인 경우는 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$일 때이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}=\frac{5}{64}$$

답 ②

정답과 풀이 50쪽

[20009-0150]

유제 1 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같고, 이 모집단에서 크기가 3인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=3)=\frac{5}{48}$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $120ab$의 값을 구하시오.

X	0	2	5	7	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	a	b	1

4. 표본평균의 평균, 분산, 표준편차

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음이 성립한다.

① $\mathrm{E}(\overline{X})=m$ ② $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$ ③ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

설명 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, 모평균 m, 모분산 σ^2, 모표준편차 σ는 각각 다음과 같다.

X	2	4	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$m=2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{3}=4$$

$$\sigma^2=2^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{3}+6^2\times\frac{1}{3}-4^2=\frac{8}{3}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 $(X_1,\ X_2)$라 할 때, 그 표본평균 $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$가 갖는 값은 2, 3, 4, 5, 6이고, 확률변수 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

$$\mathrm{E}(\overline{X})=2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{3}+5\times\frac{2}{9}+6\times\frac{1}{9}=4$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=2^2\times\frac{1}{9}+3^2\times\frac{2}{9}+4^2\times\frac{1}{3}+5^2\times\frac{2}{9}+6^2\times\frac{1}{9}-4^2=\frac{4}{3}$$

$$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이때 표본의 크기 $n=2$이므로

$$\frac{\sigma^2}{n}=\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3},\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서 다음이 성립한다.

① $\mathrm{E}(\overline{X})=4=m$ ② $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{4}{3}=\dfrac{\sigma^2}{n}$ ③ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

예 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, 이 모집단에서 크기가 6인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\mathrm{E}(\overline{X})$, $\mathrm{V}(\overline{X})$, $\sigma(\overline{X})$의 값을 구해 보자.

X	2	4	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

위의 설명에서 $m=4$, $\sigma^2=\dfrac{8}{3}$, $\sigma=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$이고, 표본의 크기 $n=6$이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m=4$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{8}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{4}{9}$$

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{2}{3}$$

예제 2 표본평균의 평균, 분산, 표준편차

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 10인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})=5$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b+\mathrm{V}(\overline{X})$의 값은?

X	2	a	8	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	b	$\frac{1}{6}$	1

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

풀이 전략 모평균이 m, 모분산이 σ^2인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$임을 이용한다.

풀이 모든 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{3}+b+\frac{1}{6}=1$에서 $b=\frac{1}{2}$

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=5$이므로

$2\times\frac{1}{3}+a\times\frac{1}{2}+8\times\frac{1}{6}=5$에서 $a=6$

$$\mathrm{V}(X)=2^2\times\frac{1}{3}+6^2\times\frac{1}{2}+8^2\times\frac{1}{6}-5^2=5$$

이고, 표본의 크기가 10이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

따라서 $a+b+\mathrm{V}(\overline{X})=6+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=7$

답 ②

정답과 풀이 50쪽

[20009-0151]

유제 2 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 3인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{1}{2}$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{7}{20}$이다. 세 상수 a, b, c에 대하여 $1000abc$의 값을 구하시오.

X	-1	0	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	1

[20009-0152]

유제 3 2 이상의 자연수 n에 대하여 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 이 모집단의 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=3$, $\mathrm{E}(X^2)=25$일 때, $\mathrm{E}(\overline{X}^2)\geq 11$을 만족시키는 n의 개수는?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

5. 표본평균의 분포

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

(2) 모집단이 정규분포를 따르지 않을 때에도 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

예 정규분포 $\mathrm{N}(40, 6^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 X라 하고, 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출할 때, 표본평균을 $\overline{X}$라 하자.

(1) 확률변수 $\overline{X}$의 분포를 구해 보자.

모집단의 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=40,\ \mathrm{V}(X)=6^2$$

이고, 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$$\mathrm{E}(\overline{X})=40,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{6^2}{4}=9$$

이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(40, 3^2)$을 따른다.

(2) 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $\mathrm{P}(X\geq 46)$, $\mathrm{P}(\overline{X}\geq 46)$의 값을 각각 구해 보자.

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40, 6^2)$을 따르고,
확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(40, 3^2)$을 따르므로

$$Z_1=\frac{X-40}{6},\ Z_2=\frac{\overline{X}-40}{3}$$

으로 놓으면 두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 46)&=\mathrm{P}\left(Z_1\geq \frac{46-40}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_1\geq 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z_1\leq 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\geq 46)&=\mathrm{P}\left(Z_2\geq \frac{46-40}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_2\geq 2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z_2\leq 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

예제 3 표본평균의 분포

어느 회사에서 생산하는 커피음료 한 캔의 용량은 평균이 250이고, 표준편차가 10인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 커피음료 중에서 임의로 추출한 25캔의 용량의 표본평균이 251 이상이고 253 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 용량의 단위는 mL이다.)

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0919 ② 0.1359 ③ 0.1498 ④ 0.2417 ⑤ 0.2857

풀이 전략 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

풀이 이 회사에서 생산하는 커피음료 한 캔의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(250, 10^2)$을 따른다.
이 회사에서 생산하는 커피음료 중에서 임의로 추출한 25캔의 용량의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=250,\ \sigma(\overline{X})=\frac{10}{\sqrt{25}}=2$$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(250, 2^2)$을 따른다.
$Z=\frac{\overline{X}-250}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(251\le\overline{X}\le253)&=\mathrm{P}\left(\frac{251-250}{2}\le Z\le\frac{253-250}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(0.5\le Z\le1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)\\&=0.4332-0.1915=0.2417\end{aligned}$$

답 ④

정답과 풀이 51쪽

[20009-0153]

유제 4 어느 떡집에서 판매하는 백설기 한 개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 2인 정규분포를 따른다고 한다. 이 떡집에서 판매하는 백설기 중에서 임의로 추출한 16개의 무게의 표본평균이 101 이하일 확률이 0.0228일 때, m의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, 무게의 단위는 g이다.)

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

[20009-0154]

유제 5 모평균이 40, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단의 확률변수 X와 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$는 임의의 양수 k에 대하여 $\mathrm{P}(X\ge40+k)=\mathrm{P}(\overline{X}\le40-k\sigma)$를 만족시킨다. $\mathrm{P}(X\le a)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge42)$일 때, 두 상수 a, σ에 대하여 $a\sigma$의 값을 구하시오.

6. 모평균의 추정

(1) 추정

모집단에서 추출한 표본에서 얻은 자료를 이용하여 모집단의 어떤 성질을 확률적으로 추측하는 것을 추정이라고 한다.

(2) 모평균의 신뢰구간

모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰구간은 다음과 같다.

① 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

② 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간

$$\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

설명 모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

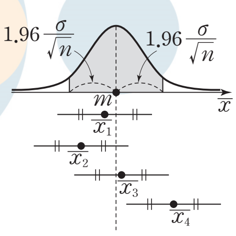
이때 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르고,

표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(-1.96\le Z\le1.96)=0.95$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(-1.96\le Z\le1.96)&=\mathrm{P}\left(-1.96\le\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le1.96\right)\\&=\mathrm{P}\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\overline{X}-m\le1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\&=0.95\end{aligned}$$

이다.

표본평균 $\overline{X}$는 확률변수이므로 추출하는 표본에 따라 $\overline{x}$의 값이 달라지고 신뢰구간도 달라진다. 이렇게 하여 구한 신뢰구간 중 오른쪽 그림과 같이 모평균 m을 포함하는 것과 포함하지 않는 것이 있을 수 있다.



모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %의 신뢰구간이라는 말은 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰구간을 구하는 일을 반복할 때, 구한 신뢰구간 중 약 95 %가 모평균 m을 포함할 것으로 기대된다는 뜻이다.

예제 4 모평균의 추정

어느 나라의 18세 남자의 키는 모평균이 m cm, 모표준편차가 σ cm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 나라의 18세 남자 중 64명을 임의추출하여 구한 18세 남자의 키의 표본평균이 172.5 cm일 때, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $a\le m\le b$이다. $a=171.03$일 때, $b+\sigma$의 값은?

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

① 178.97 ② 179.97 ③ 180.97 ④ 181.97 ⑤ 182.97

풀이 전략 모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

풀이 표본평균이 $\overline{x}=172.5$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 $n=64$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$172.5-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}\le m\le 172.5+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}$$

$$172.5-1.96\times\frac{\sigma}{8}\le m\le 172.5+1.96\times\frac{\sigma}{8}$$

$$172.5-0.245\sigma\le m\le 172.5+0.245\sigma$$

따라서 $a=172.5-0.245\sigma=171.03$이므로

$$0.245\sigma=1.47,\ \sigma=6$$

$$b=172.5+0.245\times 6=173.97$$

따라서 $b+\sigma=173.97+6=179.97$

답 ②

정답과 풀이 51쪽

[20009-0155]

유제 6 어느 공장에서 생산하는 제품 한 개의 무게는 모평균이 m g, 모표준편차가 3 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 제품 중 n개를 임의추출하여 구한 제품의 무게의 표본평균의 값이 $\overline{x}$ g이고, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이다. $b-a=1.72$일 때, n의 값을 구하시오.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

[20009-0156]

유제 7 모평균이 m, 모표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 80이고, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $79+\alpha\le m\le 79+\beta$일 때, $2\alpha+\beta$의 값은?

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

① 1.96 ② 2.02 ③ 2.08 ④ 2.14 ⑤ 2.2

[20009-0157]

1 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}<2)$의 값은?

X	0	2	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{7}{18}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[20009-0158]

2 모평균이 m이고, 모표준편차가 2인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})=2n$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{2}$이다. m의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

[20009-0159]

3 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 3^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $Z=2\overline{X}-40$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. n의 값은?

① 16 ② 25 ③ 36 ④ 49 ⑤ 64

[20009-0160]

4 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}\le a)=0.9987$이다. 상수 a의 값은?

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 3)=0.4987$로 계산한다.)

① 51 ② 51.5 ③ 52 ④ 52.5 ⑤ 53

[20009-0161]

5 모평균이 m, 모표준편차가 4인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 256인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 $\overline{x}$이고, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이다. $b-a$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

① 1.29 ② 1.32 ③ 1.35 ④ 1.38 ⑤ 1.41

[20009-0162]

1 모집단의 확률변수 X가 갖는 값은 2, 4, a이고, 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$가 갖는 값은 2, 3, 4, 5, b, a이다. $\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{1}{64}$, $\mathrm{P}(\overline{X}=3)=\frac{5}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $ab\times\mathrm{P}(X=4)$의 값은? (단, $a>b>5$)

① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

[20009-0163]

2 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때,

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	b	1

$$\mathrm{P}(\overline{X}=1)+\mathrm{P}(\overline{X}=2)+\mathrm{P}(\overline{X}=3)=\frac{17}{25}$$

이다. a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{4}{25}$ ② $\frac{6}{25}$ ③ $\frac{8}{25}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{12}{25}$

[20009-0164]

3 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(2\overline{X}+3)=13$이다. $\mathrm{V}(2\overline{X}+3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

X	3	4	5	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	a	b	1

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[20009-0165]

4 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(3\overline{X}-9)=\mathrm{E}(9-3X)$이다. $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{3}$일 때, n의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

X	0	2	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	a	b	1

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

[20009-0166]

5 어느 고속버스 회사에서는 도시 A에서 출발하여 도시 B에 도착하는 노선을 운행하며, 이 노선의 소요시간을 항상 기록한다. 기록된 이 노선의 소요시간은 평균이 240, 표준편차가 15인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 기록한 이 노선의 소요시간 중에서 임의로 추출한 n개의 소요시간의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \le 245) \ge 0.9772$이기 위한 n의 최솟값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, 소요시간의 단위는 분이다.)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

[20009-0167]

6 모평균이 58이고, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하고, 모평균이 m이고, 모표준편차가 $\sigma+2$인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. 두 확률변수 $\overline{X}$, $\overline{Y}$의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=60$에 대하여 서로 대칭이다. $\mathrm{P}(\overline{X} \ge 60)+\mathrm{P}(\overline{Y} \le 60)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0124 ② 0.0456 ③ 0.1336 ④ 0.3174 ⑤ 0.6170

[20009-0168]

7 모평균이 m이고, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \le m+3)=0.9332$이다. 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 36일 때, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)=0.4332$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)=0.4750$으로 계산한다.)

① $32.28 \le m \le 39.72$ ② $32.18 \le m \le 39.82$ ③ $32.08 \le m \le 39.92$
④ $31.98 \le m \le 40.02$ ⑤ $31.88 \le m \le 40.12$

[20009-0169]

8 모평균이 m이고, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 64인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 $\overline{x}$이고, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $6.71 \le m \le 9.29$이다. 이 모집단에서 크기가 196인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 $\overline{x}+1$이고, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $100a$의 값을 구하시오.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

[20009-0170]

1 모집단의 확률변수 X가 갖는 값은 1, 3, 5이고, 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{1}{16}$, $\mathrm{E}(\overline{X})=4$이다. $\mathrm{P}(X=3)-\mathrm{P}(\overline{X}=3)$의 값은?

① $\frac{1}{64}$ ② $\frac{1}{32}$ ③ $\frac{3}{64}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{5}{64}$

[20009-0171]

2 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.)

X	2	4	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	b	1

보기

ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X})\le 4$

ㄴ. $n=3$이면 $\mathrm{V}(\overline{X})\le 1$

ㄷ. $n=2$이고 $a\le\frac{1}{4}$이면 $\mathrm{P}(\overline{X}\le 4)\le\frac{1}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[20009-0172]

3 모집단의 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1)$을 따르고, 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 양의 실수 k에 대하여

$$f(k)=\mathrm{P}(0\le X\le m+k+1),\ g(k)=\mathrm{P}(0\le\overline{X}\le m+k)$$

라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $m\ge 0$)

보기

ㄱ. $m=1$이면 $f(1)<g(1)$이다.

ㄴ. $m>0$이면 $2f(m)>g(m)$이다.

ㄷ. $f(k)=g(k)$이면 $k\le 1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

대표 기출 문제

출제 경향 모집단에서 임의추출한 표본의 표본평균의 분포를 이해하고, 표본평균이 어떤 구간의 값을 가질 확률을 표준정규분포를 이용하여 구하는 문제가 출제된다.

어느 공장에서 생산하는 화장품 1개의 내용량은 평균이 201.5 g이고 표준편차가 1.8 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 화장품 중 임의추출한 9개의 화장품 내용량의 표본평균이 200 g 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.7745 ② 0.8413 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

2018학년도 대수능

출제 의도 ▸ 표본평균의 분포를 이용하여 확률을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 이 공장에서 생산한 화장품 중 임의추출한 9개의 화장품 내용량(g)의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=201.5$$

$$\sigma(\overline{X})=\frac{1.8}{\sqrt{9}}=0.6$$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(201.5,\ 0.6^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-201.5}{0.6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 200)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{200-201.5}{0.6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le 2.5)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5+0.4938\\&=0.9938\end{aligned}$$

답 ⑤

대표 기출 문제

출제 경향 모집단에서 임의추출한 표본에서 구한 표본평균의 값을 이용하여 모평균의 신뢰구간을 구하는 문제가 출제된다.

어느 지역 주민들의 하루 여가 활동 시간은 평균이 m분, 표준편차가 σ분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역 주민 중 16명을 임의추출하여 구한 하루 여가 활동 시간의 표본평균이 75분일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. 이 지역 주민 중 16명을 다시 임의추출하여 구한 하루 여가 활동 시간의 표본평균이 77분일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다.
$d-b=3.86$을 만족시키는 σ의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.) [4점]

2019학년도 대수능

출제 의도 ▸ 표본평균을 이용하여 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 표본평균이 75, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 16일 때,
모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$75-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}} \le m \le 75+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$$75-0.49\sigma \le m \le 75+0.49\sigma \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

표본평균이 77, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 16일 때,
모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$77-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}} \le m \le 77+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$$77-0.645\sigma \le m \le 77+0.645\sigma \quad \cdots\cdots \ ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$d-b=(77+0.645\sigma)-(75+0.49\sigma)$$
$$=2+0.155\sigma$$

따라서 $2+0.155\sigma=3.86$이므로

$$\sigma=12$$

답 12

주요 개념 정리

순열과 조합

1. 순열

서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수는

$${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$
(단, $0\le r\le n$)

2. 원순열

서로 다른 n개를 원형으로 나열하는 원순열의 수는

$(n-1)!$

3. 중복순열

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수는

${}_n\Pi_r=n^r$

4. 같은 것이 있는 순열

n개 중에 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, 이들을 모두 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \text{ (단, } p+q+\cdots+r=n)$$

5. 조합

(1) 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 조합의 수는

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!} \text{ (단, } 0\le r\le n)$$

(2) ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

(3) ${}_n\mathrm{C}_r+{}_n\mathrm{C}_{r+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$ (단, $0\le r\le n-1$)

6. 중복조합

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수는

${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$

7. 이항정리

(1) n이 자연수일 때, $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\, a^{n-r}b^r$

(2) 이항계수의 성질 : 모든 자연수 n에 대하여

① ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$

② ${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$

③ n이 홀수일 때,

${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_5+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^{n-1}$

n이 짝수일 때,

${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_5+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}=2^{n-1}$

확률

1. 확률의 뜻과 기본 성질

표본공간이 S인 어떤 시행에서 S의 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S의 사건 A가 일어날 수학적 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$

이다. 이때

(1) $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$　　(2) $\mathrm{P}(S)=1$

(3) 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

2. 확률의 덧셈정리

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

특히, 두 사건 A, B가 서로 배반사건, 즉 $A\cap B=\varnothing$이면

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

3. 여사건의 확률

사건 A와 그 여사건 A^C에 대하여

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

4. 조건부확률

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \text{ (단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

5. 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$

6. 사건의 독립과 종속

(1) 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이고, 어느 한 사건이 일어나는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 영향을 주지 않을 때, 즉

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$ 또는 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 독립이라고 한다. 또 두 사건 A와 B가 서로 독립이 아닐 때, 두 사건 A와 B는 서로 종속이라고 한다.

(2) 두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ (단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)

7. 독립시행의 확률

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}p^{r}(1-p)^{n-r} \text{ (단, } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\text{)}$$

통계

1. 확률질량함수의 성질

이산확률변수 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$일 때

(1) $0\le p_i\le 1$

(2) $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

2. 이산확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차

이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

(1) X의 기댓값(평균) : $\mathrm{E}(X)=m=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$

(2) X의 분산 : $\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$

(3) X의 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

3. 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X와 두 상수 a, $b\,(a\ne 0)$에 대하여

(1) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

(2) $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

(3) $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

4. 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{n}\mathrm{C}_{x}p^{x}q^{n-x} \text{ (} x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\text{이고, } q=1-p\text{)}$$

일 때, 즉 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때

(1) $\mathrm{E}(X)=np$

(2) $\mathrm{V}(X)=npq$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

5. 확률밀도함수의 성질

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $\alpha\le X\le\beta$이고, 그 확률밀도함수가 $f(x)$일 때

(1) $f(x)\ge 0$ (단, $\alpha\le x\le\beta$)

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

(3) $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. (단, $\alpha\le a\le b\le\beta$)

6. 정규분포를 따르는 확률변수의 확률밀도함수의 그래프

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 연속확률변수 X의 확률밀도함수

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$의 그래프는

(1) 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이다.

(2) 곡선과 x축 사이의 넓이가 1이다.

(3) 평균 m의 값이 일정할 때 표준편차 σ의 값이 변하면 곡선의 모양은 바뀌지만 대칭축의 위치는 같고, 표준편차 σ의 값이 일정할 때 평균 m의 값이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 변하지 않는다.

7. 정규분포와 표준정규분포의 관계

연속확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)(\sigma>0)$을 따를 때, 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다는 사실이 알려져 있다.

8. 이항분포와 정규분포의 관계

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

9. 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=m$　(2) $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$　(3) $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

10. 모평균의 추정

모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면

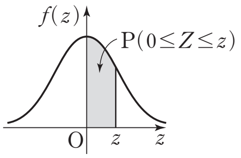
(1) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(2) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

표준정규분포표



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998