

# 学霸助手

[www.xuebazhushou.com](http://www.xuebazhushou.com)

课后答案 | 课件 | 期末试卷

最专业的学习资料分享APP

## 第一章参考答案

### 1.1 请用列举法给出下列集合。

(吴贤珺 02282047)

(1) 你知道的各种颜色。

解: {红, 橙, 黄, 绿, 青, 蓝, 紫}

(2) 大学教师中的各种职称。

解: {助教, 讲师, 副教授, 教授}

(3) 你所学过的课程。

解: {语文, 数学, 英语, 物理, 化学, 生物, 历史, 地理, 政治}

(4) 你的家庭成员。

解: {父亲, 母亲, 妹妹, 我}

(5) 你知道的所有交通工具。

解: {汽车, 火车, 飞机, 轮船, 马车}

(6) 字母表{a, b}上长度小于4的串的集合。

解: {a, b, aa, bb, ab, ba, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb}

(7) 集合{1, 2, 3, 4}的幂集。

解:  $\{\Phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

(8) 所有的非负奇数。

解:  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$

(9) 0~100的所有正整数。

解:  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$

(10) 1~10之间的和为10的整数集合的集合。

解: 设所求的集合为A, 集合A中的元素为 $A_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ),  $A_i$ 也是集合,  $A_i$ 中的元素在1~10之间, 并且和为10。根据集合元素的彼此可区分性, 可以计算出 $A_i$ 中元素的最多个数, 方法是: 把1开始的正整数逐个相加, 直到等于10 (即 $10=1+2+3+4$ ), 这样,  $A_i$ 中最多有4个元素。原因是: 从最小的1开始, 每次加入新的元素都只依次增加1, 这样相加的和最小, 要加到10, 元素个数就最多。

求出最大的 $|A_i|=4$ 后, 再求出元素个数为3, 2, 1的集合就可以了。

故 $A=\{\{10\}, \{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

### 1.2 请用命题法给出下列集合

- 2.(1)  $\{x | 0 \leq x \leq 100 \text{ 且 } x \in \mathbb{Z}\}$   
 (2)  $\{x | x \in \{a, b\}^* \text{ 且 } |x| < 4\}$   
 (3)  $\{B | B \subseteq \{1, 2, 3, 4\}\}$   
 (4)  $\{L | L \subseteq \{a, b\}^*\}$   
 (5)  $\{x | x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$   
 (6)  $\{(a, b) | a + b = 10 \text{ 且 } a, b \in [4, 9]\}$   
 (7)  $\{x | x \in \{0, 1\}^*, \text{ 且 } x \text{ 中 } 0 \text{ 的个数是 } 1 \text{ 的个数的两倍}\}$   
 (8)  $\{x | x \in \{0, 1\}^*, \text{ 且 } x \text{ 中 } 1 \text{ 的个数是 } 10\}$   
 (9)  $\{x | x \in \{0, 1\}^*, \text{ 且 } x \text{ 中倒数第十个字符为 } 1\}$   
 (10)  $\{A | \forall x_i \in A, x_i \in [1, 10], i \in [1, |A|], \sum_{i=1}^{|A|} x_i = 10\}$

### 1.3 给出下列集合的幂集。(02282075 冯蕊)

- (1)  $\Phi$   
 (2)  $\{\Phi\}$   
 (3)  $\{\Phi, \{\Phi\}\}$   
 (4)  $\{\epsilon, 0, 00\}$   
 (5)  $\{0, 1\}$

解答:

- (1)  $\{\Phi\}$   
 (2)  $\{\Phi, \{\Phi\}\}$   
 (3)  $\{\Phi, \{\Phi\}, \{\{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$   
 (4)  $\{\Phi, \{\epsilon\}, \{0\}, \{00\}, \{\epsilon, 0\}, \{\epsilon, 00\}, \{0, 00\}, \{\epsilon, 0, 00\}\}$   
 (5)  $\{\Phi, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

### 1.4. 列出集合 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 中

(褚颖娜 02282072)

- (1) 所有基数为 3 的子集  
 $\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{0, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$   
 (2) 所有基数不大于 3 的子集  
 $\Phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}, \{0, 4\}, \{0, 3\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{0, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$

### 1.5 解答:

1、3、8、10、11、12、16 正确

## 1.6 证明下列各题目

(02282081 刘秋雯)

1)  $A=B$ , iff  $A$  是  $B$  的子集且  $B$  是  $A$  的子集

证明:

充分条件:

$\because A=B$

则由集合相等的定义知

对于任何  $x \in A$ , 有  $x \in B$

$\therefore A$  为  $B$  的子集

同理,  $B$  为  $A$  的子集

必要条件:

$\because A$  为  $B$  的子集

$\therefore$  对于任何  $x \in A$ , 都有  $x \in B$

又  $\because B$  为  $A$  的子集,

$\therefore$  对于任何  $x \in B$  有,  $x \in A$

由集合相等的定义知,  $A=B$

2) 如果  $A$  为  $B$  的子集, 则  $|A| \leq |B|$

证明:

$A$  为  $B$  的子集, 则对于任何  $x \in A$

有  $x \in B$ ,

$\therefore$  存在一个集合  $C$  使  $B=A \cup C$  且  $A \cap C$  为空集

则  $|B|=|A|+|C|$

$|C| \geq 0$

$\therefore |A| \leq |B|$

3) 如果  $A$  为  $B$  的真子集, 则  $|A| < |B|$

证明:

(1) 当  $A$  为有穷集合时, 因为  $A$  为  $B$  的真子集, 且则对于任何  $x \in A$

有  $x \in B$ ,

且存在  $x \in B$  的  $x$ , 此  $x$  不  $\in A$

$\therefore$  存在一个非空集合  $C$ , 使  $B=A \cup C$  且  $A \cap C$  为空集

则  $|B|=|A|+|C|$  且  $|C| \geq 1$

$\therefore |A| < |B|$

(2) 当  $A$  为无穷集合, 因为  $A$  为  $B$  的真子集, 则  $B$  一定也为无穷集合,  $|A|=\infty$ ,  $|B|=\infty$

$\therefore |A|=|B|$

综合 (1), (2) 所述,  $|A| \leq |B|$

4) 如果  $A$  是有穷集且  $A$  为  $B$  的真子集则  $|A| < |B|$

证明:

见上题证明 (1)

5) 如果  $A$  为  $B$  的子集, 则对于任何  $x \in A$ , 有  $x \in B$

证明:

若  $A$  为  $B$  的子集, 则由子集定义可知, 对于任何  $x \in A$ , 有  $x \in B$

6) 如果  $A$  是  $B$  的真子集, 则对于任何  $x \in A$ , 有  $x \in B$ , 并且存在  $x \in B$ , 但  $x$  不

$\in A$

证明:

由真子集的定义可证

7) 如果  $A$  为  $B$  的子集,  $B$  为  $C$  的子集, 则  $A$  为  $C$  的子集

证明:

$A$  为  $B$  的子集,  $B$  为  $C$  的子集

则对于任何  $x \in A$ , 则  $x$  都  $\in B$ ,

且, 又对于任何  $y \in B$ , 则  $y \in C$ ,  $\therefore$  对于任何  $x \in A$ ,  $x \in C$

$\therefore A$  为  $C$  的子集

8) 如果  $A$  为  $B$  的真子集,  $B$  为  $C$  的真子集, 则  $A$  为  $C$  的真子集

证明:

$A$  为  $B$  的真子集,  $B$  为  $C$  的真子集

则对于任何  $x \in A$ , 则  $x$  都  $\in B$ ,

且, 存在  $x \in B$  但  $x \notin A$ ,

又对于任何  $y \in B$ , 则  $y \in C$ , 存在  $y \in C$  但  $y \notin B$ ,

$\therefore$  对于任何  $x \in A$ ,  $x \in C$ , 存在  $x \in C$  但  $x \notin A$

$\therefore A$  为  $C$  的真子集

9) 如果  $A$  为  $B$  的子集,  $B$  为  $C$  的真子集, 则  $A$  为  $C$  的真子集

证明:

因为  $A$  为  $B$  的子集,  $B$  为  $C$  的真子集

则对于任何  $x \in A$ ,  $x$  都  $\in B$ , 且  $x$  都  $\in C$

又对于任何  $y \in B$ , 则  $y \in C$ , 存在  $y \in C$  但  $y \notin B$ , 则  $y \notin A$

$\therefore$  对于任何  $x \in A$ ,  $x \in C$ , 存在  $x \in C$  但  $x \notin A$

$\therefore A$  为  $C$  的真子集

10) 如果  $A$  为  $B$  的真子集,  $B$  为  $C$  的子集, 则  $A$  为  $C$  的真子集

证明:

$A$  为  $B$  的真子集,  $B$  为  $C$  的子集

则对于任何  $x \in A$ , 则  $x$  都  $\in B$ ,

且存在  $x \in B$  但  $x \notin A$ ,

又对于任何  $y \in B$ , 则  $y \in C$

$\therefore$  对于任何  $x \in A$ ,  $x \in C$ , 存在  $x \in C$  但  $x \notin A$

$\therefore A$  为  $C$  的真子集

11) 如果  $A=B$ , 则  $|A|=|B|$

证明:

$A=B$ , 则  $A$  与  $B$  所含元素相同

$\therefore |A|=|B|$

12) 如果  $A$  为  $B$  的子集,  $B$  为  $C$  的真子集, 或如果  $A$  为  $B$  的真子集,  $B$  为  $C$  的子集, 则  $A$  为  $C$  的真子集

证明: 证明见 9, 10

**1.7  $A = \{1,2,3,4,5,6\}$   $B = \{1,3,5\}$   $C = \{2,4,6\}$   $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$**

(1).  $A \cap B$

$$= \{1, 3, 5\} = B$$

$$(2). (A \cap B) \cup C$$

$$= \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = A$$

$$(3). (A \cap B) \cup (U - C)$$

$$= \{1, 3, 5\} \cup \{0, 1, 3, 5, 7, 8, 9\}$$

$$= \{0, 1, 3, 5, 7, 8, 9\} = \bar{C}$$

$$(4). A - B - C$$

$$= \{2, 4, 6\} - \{2, 4, 6\}$$

$$= \Phi$$

$$(5). A \times B \times C \times \Phi$$

$$= \Phi$$

$$\because A \times \Phi = \Phi$$

$$(6). (A \cap B) \cup \overline{A \cup C} \cup \bar{A}$$

$$= \{1, 3, 5\} \cup \{0, 7, 8, 9\} \cup \{0, 7, 8, 9\}$$

$$= \{0, 1, 3, 5, 7, 8, 9\} = \bar{C}$$

$$(7). \overline{A \times B \times A \cap C}$$

$$= \overline{A \times B \times C}$$

$$= A \times \{(a, b) \mid (a \in B, b \in C) \text{ 或 } (a \in \bar{B}, b \in C) \text{ 或 } (a \in \bar{B}, b \in \bar{C})\}$$

$$= \{(a, b, c) \mid (a \in A, b \in B, c \in C) \text{ 或 } (a \in A, b \in \bar{B}, c \in C) \text{ 或 } (a \in A, b \in \bar{B}, c \in \bar{C})\}$$

$$(8). \overline{A \cup B} \cap (A \cup B) \cup C$$

$$= \overline{A \cup B} \cap C$$

$$= A \cup C$$

$$= A$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

1. 8 对论域  $U$  上的集合  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，证明以下结论成立。 (02282047 吴贤珺)

(1)  $A \cup B = B \cup A$

证：对任意的  $x$ ，

$$\begin{aligned}x &\in A \cup B \\&\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \\&\Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \\&\Leftrightarrow x \in B \cup A\end{aligned}$$

故  $A \cup B \subseteq B \cup A$  且  $B \cup A \subseteq A \cup B$

则  $A \cup B = B \cup A$ 。

(2)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

证：对任意的  $x$ ，

$$\begin{aligned}x &\in (A \cup B) \cup C \\&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \\&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \\&\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \vee x \in C \\&\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \\&\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C) \\&\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)\end{aligned}$$

故  $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$  且  $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

则  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 。

(3)  $A \cup B = A$  iff  $B \subseteq A$

证：① 由  $B \subseteq A \cup B$  及  $A \cup B = A$  知  $B \subseteq A$ 。

② 由  $B \subseteq A$  知  $\forall x \in B, x \in A$

则对任意的  $x$ ，

$$\begin{aligned}x &\in A \cup B \\&\Rightarrow x \in A \vee x \in B \\&\Rightarrow x \in A\end{aligned}$$

故  $A \cup B \subseteq A$ ，又  $A \subseteq A \cup B$ ，所以  $A \cup B = A$ 。

综合①②得到  $A \cup B = A$  iff  $B \subseteq A$ 。

(4)  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

证：对任意的有序对  $(a, b)$ ，

$$\begin{aligned}(a, b) &\in A \times (B \cup C) \\&\Leftrightarrow a \in A \wedge b \in (B \cup C) \\&\Leftrightarrow a \in A \wedge (b \in B \vee b \in C) \\&\Leftrightarrow (a \in A \wedge b \in B) \vee (a \in A \wedge b \in C) \\&\Leftrightarrow (a, b) \in A \times B \vee (a, b) \in A \times C \\&\Leftrightarrow (a, b) \in (A \times B) \cup (A \times C)\end{aligned}$$

故  $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$  且  $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$

则  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ 。

(5)  $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

证：对任意的有序对 $(b, a)$ ,

$$\begin{aligned}(b, a) &\in (B \cap C) \times A \\ \Leftrightarrow b &\in (B \cap C) \wedge a \in A \\ \Leftrightarrow (b \in B \wedge b \in C) &\wedge a \in A \\ \Leftrightarrow (b \in B \wedge a \in A) &\wedge (b \in C \wedge a \in A) \\ \Leftrightarrow (b, a) &\in B \times A \wedge (b, a) \in C \times A \\ \Leftrightarrow (b, a) &\in (B \times A) \cap (C \times A)\end{aligned}$$

故  $(B \cap C) \times A \subseteq (B \times A) \cap (C \times A)$  且  $(B \times A) \cap (C \times A) \subseteq (B \cap C) \times A$   
则  $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$ 。

(6)  $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

证：对任意的有序对 $(a, b)$ ,

$$\begin{aligned}(a, b) &\in A \times (B - C) \\ \Leftrightarrow a &\in A \wedge b \in (B - C) \\ \Leftrightarrow a &\in A \wedge (b \in B \wedge b \notin C) \\ \Leftrightarrow (a \in A \wedge b \in B) &\wedge (a \in A \wedge b \notin C) \\ \Leftrightarrow (a, b) &\in A \times B \wedge (a, b) \notin A \times C \\ \Leftrightarrow (a, b) &\in (A \times B) - (A \times C)\end{aligned}$$

故  $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$  且  $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$   
则  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ 。

需要说明的是：对于  $(a, b) \in A \times B \wedge (a, b) \notin A \times C$

$$\Rightarrow (a \in A \wedge b \in B) \wedge (a \in A \wedge b \notin C)$$

本来，由  $(a, b) \notin A \times C$  只能得到  $(a \notin A \vee b \notin C)$ 。但是  $(a, b) \in A \times B$ ，故  $a \in A$ ，  
这样，必须  $b \notin C$ 。

(7) 如果  $A \subseteq B$ ，则  $2^A \subseteq 2^B$

证：对任意的  $C$ ， $C \in 2^A \Rightarrow C \subseteq A$

由于  $A \subseteq B$ ，故  $C \subseteq B$ ，则  $C \in 2^B$ ，从而  $2^A \subseteq 2^B$ 。

(8)  $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$

证：对任意的  $C$ ，

$$\begin{aligned}C &\in 2^{A \cap B} \\ \Leftrightarrow C &\subseteq A \cap B \\ \Leftrightarrow C &\subseteq A \wedge C \subseteq B \\ \Leftrightarrow C &\in 2^A \wedge C \in 2^B \\ \Leftrightarrow C &\in 2^A \cap 2^B\end{aligned}$$

则  $2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$  且  $2^A \cap 2^B \subseteq 2^{A \cap B}$ ，故  $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$ 。

(9)  $|A \cup B| \leq |A| + |B|$

证：由容斥原理， $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



① 当  $A \cap B \neq \Phi$  时,  $|A \cup B| < |A| + |B|$

② 当  $A \cap B = \Phi$  时,  $|A \cup B| = |A| + |B|$

由①②知  $|A \cup B| \leq |A| + |B|$ 。

(10)  $(B-C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$

证: 对任意的有序对  $(b, a)$ ,

$$(b, a) \in (B-C) \times A$$

$$\Leftrightarrow b \in (B-C) \wedge a \in A$$

$$\Leftrightarrow (b \in B \wedge b \notin C) \wedge a \in A$$

$$\Leftrightarrow (b \in B \wedge a \in A) \wedge (b \notin C \wedge a \in A)$$

$$\Leftrightarrow (b, a) \in B \times A \wedge (b, a) \notin C \times A$$

$$\Leftrightarrow (b, a) \in (B \times A) - (C \times A)$$

故  $(B-C) \times A \subseteq (B \times A) - (C \times A)$  且  $(B \times A) - (C \times A) \subseteq (B-C) \times A$

则  $(B-C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$ 。

需要说明的是: 对于  $(b, a) \in B \times A \wedge (b, a) \notin C \times A$

$$\Rightarrow (b \in B \wedge a \in A) \wedge (b \notin C \wedge a \in A)$$

本来, 由  $(b, a) \notin C \times A$  只能得到  $(a \notin A \vee b \notin C)$ 。但是  $(b, a) \in B \times A$ , 故  $a \in A$ , 这样, 必须  $b \notin C$ 。

(11) 如果  $A \subseteq B$ , 则  $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

证: 对任意的  $x$ ,  $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin B$

由于  $A \subseteq B$ , 故  $x \notin A$ , 即  $x \in \overline{A}$ 。因此,  $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ 。

(12)  $B = \overline{A} \Leftrightarrow A \cup B = U$  且  $A \cap B = \Phi$

证: ① 由  $B = \overline{A}$  以及  $\overline{A}$  的定义知,  $A \cup B = A \cup \overline{A} = U$ ,  $A \cap B = A \cap \overline{A} = \Phi$ 。

② 由  $A \cap B = \Phi$  知, 对任意的  $x \in B$ ,  $x \notin A$ , 即  $\forall x \in B$ ,  $x \in \overline{A}$ , 故  $B \subseteq \overline{A}$ 。

又由  $A \cup B = U$  知, 对任意的  $x \in \overline{A}$ ,  $x \notin A$ , 则  $x \in B$ , 故  $\overline{A} \subseteq B$ 。

这样,  $B = \overline{A}$ 。

综合①②得,  $B = \overline{A} \Leftrightarrow A \cup B = U$  且  $A \cap B = \Phi$ 。

(13)  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

证: 对任意的  $x$ ,

$$x \in \overline{A \cap B}$$

$$\Leftrightarrow x \notin (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B}$$

$$\Leftrightarrow x \in (\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$\text{则 } \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B} \text{ 且 } \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$$

$$\text{故 } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

$$(14) \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

证：对任意的  $x$ ,

$$x \in \overline{A \cup B}$$

$$\Leftrightarrow x \notin (A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}$$

$$\Leftrightarrow x \in (\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$\text{则 } \overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B} \text{ 且 } \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

$$\text{故 } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

## 1.9 解答

$$(6) \quad R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,b), (b,c), (a,c)\}$$

$$(9) \quad R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,b), (b,c), (a,c), (b,a), (c,b), (c,a)\}$$

**1.10** 设  $R_1$  和  $R_2$  是集合  $\{a,b,c,d,e\}$  上的二元关系, 其中,

$$R_1 = \{(a,b), (c,d), (b,d), (b,b), (d,e)\}, R_2 = \{(a,a), (b,c), (d,c), (e,d), (c,a)\}$$

求:  $R_1 R_2, R_2 R_1, R_1^+, R_2^+, R_1^*, R_2^*$ .

解答:

$$R_1 R_2 = \{(a,c), (c,c), (b,c), (d,d)\}$$

$$R_2 R_1 = \{(a,b), (b,d), (d,d), (e,e), (c,b)\}$$

$$R_1^+ = \{(a,b), (c,d), (b,d), (b,b), (d,e), (a,d), (a,e), (b,e), (c,e)\}$$

$$R_2^+ = \{(a,a), (b,c), (d,c), (e,d), (c,a), (b,a), (d,a), (e,c), (e,a)\}$$

$$R_1^* = R_1^+ \cup \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e)\}$$

$$R_2^* = R_2^+ \cup \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e)\}$$

1.11. 设  $R=\{(a,b),(c,d),(b,d)\}$  是集合  $\{a,b,c,d,e\}$  上的二元关系,求: (敖雪峰)

(1)  $R$  的传递闭包. (2)  $R$  的自反传递闭包.

解:

(1)  $R$  的传递闭包是  $\{(a,b),(c,d),(b,d),(a,d)\}$ .

(2)  $R$  的自反传递闭包是  $\{(e,e),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(c,d),(b,d),(a,d)\}$ .

1. 12 设  $R_1$  和  $R_2$  是集合  $\{a,b,c,d,e\}$  上的二元关系, 请证明下列关系。

(唐明珠 02282084)

(1)  $R_1R_2 \neq R_2R_1$ 。

证明: 用反证法, 假设  $R_1R_2 = R_2R_1$ 。

设  $R_1 = \{(a,b),(c,d)\}, R_2 = \{(b,c),(d,e)\}$ 。

则  $R_1R_2 = \{(a,c)\}, R_2R_1 = \{(b,d)\}$ ,

这与  $R_1R_2 = R_2R_1$  相矛盾,

所以  $R_1R_2 \neq R_2R_1$ 。

(2)  $(R_1R_2)R_3 = R_1(R_2R_3)$ 。

证明: 任取  $(x,y)$ , 其中  $x,y \in \{a,b,c,d,e\}$ , 使得  $(x,y) \in (R_1R_2)R_3$

$\Leftrightarrow \exists z((x,z) \in R_1R_2 \wedge (z,y) \in R_3) \quad z \in \{a,b,c,d,e\}$

$\Leftrightarrow \exists z((x,t) \in R_1 \wedge (t,z) \in R_2 \wedge (z,y) \in R_3) \quad t \in \{a,b,c,d,e\}$

$\Leftrightarrow \exists z((x,t) \in R_1) \wedge \exists z((t,z) \in R_2 \wedge (z,y) \in R_3)$

$\Leftrightarrow (x,t) \in R_1 \wedge (t,y) \in R_2R_3$

$\Leftrightarrow (x,y) \in R_1(R_2R_3)$

所以得证  $(R_1R_2)R_3 = R_1(R_2R_3)$ 。

(3)  $(R_1 \cup R_2)R_3 = R_1R_3 \cup R_2R_3$ 。

证明: 任取  $(x,y)$ , 其中  $x,y \in \{a,b,c,d,e\}$ , 使得  $(x,y) \in (R_1 \cup R_2)R_3$ 。

$\Leftrightarrow \exists z((x,z) \in R_1 \cup R_2 \wedge (z,y) \in R_3) \quad z \in \{a,b,c,d,e\}$

$$\Leftrightarrow \exists z((x, z) \in R_1 \vee (x, z) \in R_2 \wedge (z, y) \in R_3)$$

$$\Leftrightarrow \exists z((x, z) \in R_1 \wedge (z, y) \in R_3) \vee \exists z((x, z) \in R_2 \wedge (z, y) \in R_3)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in R_1 R_3 \vee (x, y) \in R_2 R_3$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in R_1 R_3 \cup R_2 R_3$$

所以得证  $(R_1 \cup R_2)R_3 = R_1 R_3 \cup R_2 R_3$

$$(4) R_3(R_1 \cup R_2) = R_3 R_1 \cup R_3 R_2。$$

证明：任取  $(x, y)$ , 其中  $x, y \in \{a, b, c, d, e\}$ , 使得  $(x, y) \in R_3(R_1 \cup R_2)$ 。

$$\Leftrightarrow \exists z((x, z) \in R_3 \wedge (z, y) \in R_1 \cup R_2) \quad z \in \{a, b, c, d, e\}$$

$$\Leftrightarrow \exists z((x, z) \in R_3 \wedge (z, y) \in R_1 \vee (z, y) \in R_2)$$

$$\Leftrightarrow \exists z((x, z) \in R_3 \wedge (z, y) \in R_1) \vee \exists z((x, z) \in R_3 \wedge (z, y) \in R_2)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in R_3 R_1 \vee (x, y) \in R_3 R_2$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in R_3 R_1 \cup R_3 R_2$$

所以得证  $R_3(R_1 \cup R_2) = R_3 R_1 \cup R_3 R_2$ 。

$$(5) (R_1 \cap R_2)R_3 \subseteq R_1 R_3 \cap R_2 R_3。$$

证明：任取  $(x, y)$ , 其中  $x, y \in \{a, b, c, d, e\}$ , 使得  $(x, y) \in (R_1 \cap R_2)R_3$ 。

$$\Rightarrow \exists z((x, z) \in R_1 \cap R_2 \wedge (z, y) \in R_3) \quad z \in \{a, b, c, d, e\}$$

$$\Rightarrow \exists z((x, z) \in R_1 \wedge (x, z) \in R_2 \wedge (z, y) \in R_3)$$

$$\Rightarrow \exists z((x, z) \in R_1 \wedge (z, y) \in R_3) \wedge \exists z((x, z) \in R_2 \wedge (z, y) \in R_3)$$

$$\Rightarrow (x, y) \in R_1 R_3 \wedge (x, y) \in R_2 R_3$$

$$\Rightarrow (x, y) \in R_1 R_3 \cap R_2 R_3$$

所以得证  $(R_1 \cap R_2)R_3 \subseteq R_1 R_3 \cap R_2 R_3$ 。

$$(6) R_3(R_1 \cap R_2) \subseteq R_3 R_1 \cap R_3 R_2。$$

证明：任取 $(x,y)$ ,其中 $x,y \in \{a,b,c,d,e\}$ ，使得 $(x,y) \in R_3(R_1 \cap R_2)$ 。

$$\Rightarrow \exists z((x,z) \in R_3 \wedge (z,y) \in R_1 \cap R_2) \quad z \in \{a,b,c,d,e\}$$

$$\Rightarrow \exists z((x,z) \in R_3 \wedge (z,y) \in R_1 \wedge (z,y) \in R_2)$$

$$\Rightarrow \exists z((x,z) \in R_3 \wedge (z,y) \in R_1) \wedge \exists z((x,z) \in R_3 \wedge (z,y) \in R_2)$$

$$\Rightarrow (x,y) \in R_3 R_1 \wedge (x,y) \in R_3 R_2$$

$$\Rightarrow (x,y) \in R_3 R_1 \cap R_3 R_2$$

所以得证  $R_3(R_1 \cup R_2) = R_3 R_1 \cap R_3 R_2$ 。

**1.13** 通常意义下的 $=$ 是自然数集上的一个等价关系，请按照该等价关系给出自然数集的等价类

(02282075 冯蕊)

“ $=$ ”关系将自然数集  $N$  分成无穷多个等价类： $\{0\}$ ， $\{1\}$ ， $\{2\}$ ， $\{3\}$ ， $\{4\}$ ， $\{5\}$ ， $\{6\}$ ，……

**1.14.**在什么样的假设下，人与人之间的“同乡关系”是等价关系。当“同乡关系”在给定的限定下成为等价关系时，它将所有的中国人分成什么样的等价类？

(吴玉涵 02282091)

答：假设出生在同一个省的关系为同乡关系。按照这样的同乡关系将中国人按照出生省份的不同划分出等价类。

**1.16**  $\sum^*$  上的二元关系  $R_L$  定义为：对任给的  $x,y \in \sum^*$ ，如果对于  $\forall z \in \sum^*$ ，均有  $xz \in L$  与  $yz \in L$ ，同时成立或者同时不成立，则  $xR_L y$ 。(周期律 02282067)

证明：

(1) 对于  $\forall x \in \sum^*$

$xz \in L$  与  $xz \in L$  显然是同时成立或同时不成立，对于  $\forall z \in \sum^*$ ，故  $xR_L x$ ， $R_L$

具有自反性。

对于  $\forall x,y \in \sum^*$ ，如果  $xR_L y$ ，故  $xz \in L$  与  $yz \in L$  同时成立或同时不成立，显

然故  $yz \in L$  与  $xz \in L$  同时成立或同时不成立，故  $yR_L x$ ， $R_L$  具有对称性。

对于  $\forall x,y,p \in \sum^*$ ，如果  $xR_L y$ ， $yR_L p$ ，故  $xz \in L$  与  $yz \in L$  同时成立或同时不成

立，并且故  $yz \in L$  与  $pz \in L$  同时成立或同时不成立，故  $xz \in L$  与  $pz \in L$  同时成立或同时不

成立, 故  $xR_L p$ , 故  $R_L$  具有传递性。

综上, 关系  $R_L$  是在  $\Sigma^*$  上的等价关系。

(2) 如果对于任给的  $x, y \in \Sigma^*$ , 如果  $xR_L y$ ,

故对于  $\forall z \in \Sigma^*$ ,  $xz \in L$  与  $yz \in L$  同时成立或同时不成立,

对于  $\forall p \in \Sigma^*$ , 如果  $xzp \in L$ , 因为  $zp \in \Sigma^*$ , 又因为  $xR_L y$ , 故  $yzp \in L$ ,

同理, 可以证明如果  $xzp \notin L$ , 因为  $zp \in \Sigma^*$ , 又因为  $xR_L y$ , 故  $yzp \notin L$ , 因此, 对于  $\forall p \in \Sigma^*$ ,  $xzp \in L$  与  $yzp \in L$  同时成立或同时不成立,

故如果对于任给的  $x, y \in \Sigma^*$ , 如果  $xR_L y$ , 则必有  $xzR_L yz$ 。

综上, 该关系的等价性和右不变性均得以证明。

### 1.17 设 $\{0,1\}^*$ 上的语言 $L = \{0^n 1^m | n, m \geq 0\}$ , 请给出 $\{0,1\}^*$ 关于 $L$ 所确定的等价关系 $R_L$ 的等价类。

设  $L$  是  $\Sigma$  上的一个语言,  $\Sigma^*$  上的二元关系  $R_L$  定义为: 对任给的  $x, y \in \Sigma^*$ , 如果对于  $\forall z \in \Sigma^*$ , 均有  $xz \in L$  与  $yz \in L$  同时成立或者同时不成立, 则  $xR_L y$ 。

根据上述定义可知,  $\{0,1\}^*$  关于  $L$  所确定的等价关系  $R_L$  的等价类有三个。

(1)  $\forall x, y \in \{0^n 1^m | n \geq 0, m > 0\}$ , 都有  $\forall z \in \Sigma^*$  均有  $xz \in L$  与  $yz \in L$  同时成立或者同时不成立

(只有当  $z \in \{1^n | n \geq 0\}$  的时候, 才同时成立, 否则不成立)

(2)  $\forall x, y \in \{0^n 1^m | n \geq 0, m = 0\}$ , 都有  $\forall z \in \Sigma^*$  均有  $xz \in L$  与  $yz \in L$  同时成立或者同时不成立

(只有当  $z \in \{0^n 1^m | n, m \geq 0\}$  的时候, 才同时成立, 否则不成立)

(3)  $\forall x, y \notin \{0^n 1^m | n, m \geq 0\}$ , 都有  $\forall z \in \Sigma^*$  均有  $xz \in L$  与  $yz \in L$  同时成立或者同时不成立

(无论  $z$  取何值, 都不同时成立)

三个等价类为  $\{0^n 1^m | n \geq 0, m > 0\}$ ,  $\{0^n 1^m | n \geq 0, m = 0\}$  和除此之外的  $\{0,1\}^*$  上的字符

### 1.18 $R_L$ 确定的 $\{0, 1\}^*$ 的等价分类为:

$$[10] = \{x10y \mid x, y \in \{0, 1\}^*\} \cup \{1^n \mid n \geq 1\}$$

$$[0] = \{0^m 1^n \mid m - n = 0\} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

$$[1] = \{0^m 1^n \mid m - n = 1\}$$

$$[2] = \{0^m 1^n \mid m-n=2\}$$

⋮

$$[h] = \{0^m 1^n \mid m-n=h\}$$

⋮

其中,  $n, m$  均为非负整数。

### 1.19. 给出下列对象的递归定义

(02282072 褚颖娜)

#### 1. $n$ 个二元关系的合成

$$(1) R_1 R_2 = \{(a, c) \mid \exists (a, b) \in R_1 \text{ 且 } \exists (b, c) \in R_2\}$$

$$(2) R_1 R_2 \dots R_n = \{(d, g) \mid \exists (d, e) \in R_1 R_2 \dots R_{n-1} \text{ 且 } \exists (e, g) \in R_n\}$$

#### 2. 无向图中路的长度

在无向图  $G$  中, 若两顶点  $v_1, v_2$  之间存在一条无向边, 则  $v_1, v_2$  是  $G$  的一条长为 1 的路  
若  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  为一条长度为  $k-1$  的路, 且  $v_{n-1}, v_n$  存在一条无向边, 则  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$  为  $G$  的一条长度为  $k$  的路

#### 3. 有向图中路的长度

在有向图  $G$  中, 若两顶点  $v_1, v_2$  之间存在一条有向边, 则  $v_1, v_2$  是  $G$  的一条长为 1 的路  
若  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  为一条长度为  $k-1$  的路, 且  $v_{n-1}, v_n$  存在一条有向边, 则  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$  为  $G$  的一条长度为  $k$  的路

#### 4. $n$ 个集合的乘积

$$S_1 \times S_2 = \{(a, b) \mid a \in S_1 \text{ 且 } b \in S_2\}$$

$$S_1 \times S_2 \dots S_n = \{(d, e) \mid d \in S_1 \times S_2 \dots S_{n-1} \text{ 且 } e \in S_n\}$$

#### 5. 字母 $a$ 的 $n$ 次幂

$$(1) a^0 = 1;$$

$$(2) a^n = a^{n-1} a;$$

#### 6. 字符串 $x$ 的倒序

若  $x$  为单字符, 则  $x$  的倒序是它本身

若  $x$  的倒序为  $y$ , 若  $x$  后跟一字符  $a$ , 则  $xa$  的倒序为  $ay$ ;

#### 7. 字符串 $x$ 的长度

若  $x$  为空串  $\epsilon$ , 则  $|x|=0$ ;

若字符串  $x$  的长度为  $k$ , 其  $xa$  或  $ax$  的长度为  $k+1$

#### 8. 自然数

0 为自然数,

如果  $x$  为自然数, 则  $x+1$  为自然数

### 1.20. 使用归纳法证明下列各题。

(吴玉涵 02282091)

$$(1) \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

证明:

$$(1) n=1 \text{ 时, } \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1+1} \text{ 成立}$$

$$(2) \text{ 假设 } n=k \text{ 时成立, 即 } \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } n=k+1 \text{ 时, } & \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} \\ &= \frac{n(n+1+1)+1}{(n+1)(n+1+1)} \\ &= \frac{n+1}{(n+1)+1} \end{aligned}$$

所以  $n=k+1$  时成立

(3) 由归纳原理, 对任一  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  都成立

(2) 当  $n \geq 4$  时,  $2^n \geq n^2$ 。

证明:

(1) 当  $n=4$  时,  $2^n = 16 = 4^2$  成立

(2) 假设  $n=k$  时成立, 即  $2^k = k^2$

当  $n=k+1$  时,  $2^{k+1} = 2 \times 2^k \geq 2k^2$

$$2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1 = \left[ k - (1 - \sqrt{2}) \right] \left[ k - (1 + \sqrt{2}) \right]$$

由  $k \geq 4$  知,  $2k^2 \geq (k+1)^2$

所以,  $2^{k+1} \geq (k+1)^2$ ,  $n=k+1$  时成立。

(3) 由归纳原理,  $\forall n \geq 4 \Rightarrow 2^n \geq n^2$



(3)当 $A, B$ 为有穷集合时,  $|A \times B| = |A||B|$ 。

证明: 设 $|A| = n, |B| = m$

(1) 当 $n=0, m=0$ 时,  $|A \times B| = |\emptyset \times \emptyset| = 0 = |A||B|$

当 $n=0, m \neq 0$ 时,  $|A \times B| = |\emptyset \times B| = 0 = |A||B|$

当 $n \neq 0, m=0$ 时,  $|A \times B| = |A \times \emptyset| = 0 = |A||B|$

(2) 假设 $m \neq 0, n=k$ 时成立, 即 $|A \times B| = |A||B| = mn = mk$

当 $n=k+1$ 时, 令 $A = A' \cup \{a\}, A' \cap \{a\} = \emptyset$

$$|A \times B| = |(A' \cup \{a\}) \times B| = |A' \times B \cup \{a\} \times B| = |A' \times B| + |\{a\} \times B| = mk + m = m(k+1)$$

所以,  $n=k+1$ 时,  $|A \times B| = |A||B|$

同理, 当 $n \neq 0, m=k$ 成立时,  $m=k+1$ 也成立

(3) 由归纳原理, 当 $A, B$ 为有穷集合时,  $|A \times B| = |A||B|$ 成立。

(4) 设 $A, B$ 是有穷集合, 则从 $A$ 到 $B$ 的映射有 $|B|^{|A|}$ 个。

证明: 设 $|A| = n \geq 1, |B| = m \geq 1$

(1) 当 $n=1, m=1$ 时, 从 $A$ 到 $B$ 的映射有 $|B|^{|A|} = 1$ 个, 成立

(2) 假设 $n=k$ 时成立, 即从 $A$ 到 $B$ 的映射有 $|B|^{|A|} = m^k$ 个

当 $n=k+1$ 时, 设 $A = A' \cup \{a\}, A' \cap \{a\} = \emptyset, |A'| = k$

从 $A$ 到 $B$ 的映射就是从 $A' \cup \{a\}$ 到 $B$ 的映射, 从 $A'$ 到 $B$ 的映射个数为 $|B|^{|A'|} = m^k$ 个,

从 $\{a\}$ 到 $B$ 的映射个数为 $m$ 个, 所以从 $A' \cup \{a\}$ 到 $B$ 的映射的个数为 $m \times m^k = m^{k+1}$

(3) 由归纳原理,  $A, B$ 是有穷集合, 则从 $A$ 到 $B$ 的映射有 $|B|^{|A|}$ 个。

(5)  $G = (V, E)$ 为一个无向图, 则 $\bigcup_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ 。

证明:

(1)  $|V|=1$ 时,  $|E|=0, \bigcup_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 0$ 成立。

(2) 设 $|E|=m$ , 假设 $|V|=n > 1$ 时成立, 即 $\bigcup_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 2m$

当 $|V|=n+1$ 时, 设 $V = V' \cup \{v_0\}, V' \cap \{v_0\} = \emptyset, \bigcup_{v \in V'} \deg(v) = 2|E'| = 2m$

若 $v_0$ 与 $0 \leq k \leq n$ 个结点相连, 则增加边数 $k, \deg(v_0) = k$ , 对于 $n$ 个结点增加

度数也为 $k$ , 所以,  $\bigcup_{v \in V} \deg(v) = 2|E'| + 2k = 2(m+k) = 2|E|$

(3) 由归纳原理,  $G = (V, E)$ 为一个无向图, 则 $\bigcup_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ 。

(6)  $G=(V,E)$  为一个有向图, 则  $\bigcup_{v \in V} i\deg(v) = \bigcup_{v \in V} o\deg(v) = |E|$ 。

证明:

(1)  $|V|=1$  时,  $|E|=0$ ,  $\bigcup_{v \in V} i\deg(v) = \bigcup_{v \in V} o\deg(v) = 0 = |E|$  成立

(2) 设  $|E|=m$ , 假设  $|V|=n>0$  时成立, 即  $\bigcup_{v \in V} i\deg(v) = \bigcup_{v \in V} o\deg(v) = |E|$  成立

当  $|V|=n+1$  时, 设  $V=V' \cup \{v_0\}$ ,  $V' \cap \{v_0\} = \emptyset$ ,  $\bigcup_{v \in V'} i\deg(v) = \bigcup_{v \in V'} o\deg(v) = |E'| = m$

设  $i\deg(v_0) = p$ ,  $o\deg(v_0) = q$

则  $\bigcup_{v \in V} i\deg(v) = \bigcup_{v \in V'} i\deg(v) + i\deg(v_0) = (|E'| + q) + p = |E|$

$\bigcup_{v \in V} o\deg(v) = \bigcup_{v \in V'} o\deg(v) + o\deg(v_0) = (|E'| + p) + q = |E|$

(3) 由归纳原理, 当  $G=(V,E)$  为一个有向图时,  $\bigcup_{v \in V} i\deg(v) = \bigcup_{v \in V} o\deg(v) = |E|$

(7) 一个高度为  $n+1$  的二元树的根结点到叶子的最大路长是  $n$ , 该树最多含有  $2^n$  个叶子

证明:

(1) 高度为 2 时, 最多有  $2^1 = 2$  个叶子, 成立

(2) 假设高度为  $n+1$  时成立, 即最多有叶子  $2^n$  个

当高度为  $n+2$  时, 第  $n+1$  层上最多有结点  $2^n$  个, 则第  $n+2$  层上最多有叶子为

$2 \times 2^n = 2^{n+1}$  个

(3) 由归纳原理, 高度为  $n+1$  的二元树最多含有  $2^n$  个叶子

(8) 根据 1.4.3 节中的相关定义, 对字母表  $\Sigma$  中的任意字符串  $a$ ,  $a^n a^m = a^{n+m}$

证明:

(1)  $n=0, m=0$  时,  $a^0 a^0 = \varepsilon \varepsilon = \varepsilon = a^0$  成立

(2) 假设  $n=p, m=q$  时成立, 即  $a^p a^q = a^{p+q}$

当  $n=p+1, m=q$  时,  $a^{p+1} a^q = \underbrace{a \cdots a}_{p+1 \text{ 个}} \underbrace{a \cdots a}_{q \text{ 个}} = \underbrace{a \cdots a}_p a \underbrace{a \cdots a}_{q \text{ 个}} = \underbrace{a \cdots a}_p \underbrace{a a \cdots a}_{q \text{ 个}} = \underbrace{a \cdots a}_p \underbrace{a a \cdots a}_{q \text{ 个}} a$   
 $= a^{p+q} a = a^{p+q+1}$

同理有,  $n=p, m=q+1$  成立

(3) 由归纳原理,  $a^n a^m = a^{n+m}$  成立。

(9)对字母表 $\Sigma$ 中的任意字符串 $x$ ,  $x$ 的前缀有 $|x|+1$ 个。

证明:

(1)  $|x|=0$ , 即 $x=\varepsilon$ 时,  $x$ 的前缀只有它本身, 有 $|x|+1=1$ 个, 成立

(2) 假设 $|x|=n$ 时成立, 即 $x$ 的前缀有 $|x|+1=n+1$ 个。

当 $|x|=n+1$ 时, 设 $x=x'b, x'$ 的前缀有 $n+1$ 个。 $x$ 中含有 $b$ 的前缀只有一个, 所以 $x$ 的前缀有 $n+1+1$ 个

(3) 由归纳原理, 对字母表 $\Sigma$ 中的任意字符串 $x$ ,  $x$ 的前缀有 $|x|+1$ 个。

## 1. 21 下列集合中哪些是字母表。

(1)  $\{1,2\}$ 。

(2)  $\{a,b,c,\dots,z\}$ 。

(3)  $\phi$ 。

(4)  $\{a,b,a,c\}$ 。

(5)  $\{0, 1, 2, 3, \dots,n,\dots\}$ 。

(6)  $\{a,d,f\} \cap \{a,b,c,\dots,z\}$ 。

解答: 字母表为 (1) (2) (6)

(3)不满足字母表的非空性, (4)不满足字母表的可区分性, (5)是无穷集合不满足字母表的有穷性。

## 22. 设 $\Sigma = \{a, b\}$ , 求字符串 $aaaaabbbba$ 的所有前缀的集合, 后缀的集合, 真前缀的集合, 真后缀的集合。 (吴贤珺 02282047)

解: (1) 前缀:  $\{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaab, aaaaabb, aaaaabbb, aaaaabbbb, aaaaabbbba\}$

(2) 后缀:  $\{\varepsilon, a, ba, bba, bbba, bbbba, abbbba, aabbbba, aaabbbba, aaaabbbba, aaaaabbbba\}$

(3) 真前缀:  $\{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaab, aaaaabb, aaaaabbb, aaaaabbbb\}$

(4) 真后缀:  $\{\varepsilon, a, ba, bba, bbba, bbbba, abbbba, aabbbba, aaabbbba, aaaabbbba\}$

## 23. $\Sigma=\{aa,ab,bb,ba\}$ , 求字符串 $aaaaabbbba$ 的所有前缀的集合、后缀的集合、真前缀的集合、真后缀的集合。 (02282015 郭会)

解:

由前缀、后缀、真前缀、真后缀的集合可以有:

其前缀集合为:  $\{\varepsilon, aa, aaaa, aaaaab, aaaaabbb, aaaaabbbba\}$

其真前缀集合为:  $\{\varepsilon, aa, aaaa, aaaaab, aaaaabbb\}$

其后缀集合为:  $\{\varepsilon, ba, bbba, abbbba, aaabbbba, aaaaabbbba\}$

其真后缀集合为:  $\{\varepsilon, ba, bbba, abbbba, aaabbbba\}$

## 1.25 抽象技术为什么对计算机技术特别重要？

(段季芬)

对于计算机技术方面的人来说, 计算思维能力是必需的, 这是学科本身决定的。计算机科学与技术学科所要解决的根本问题是什么能被有效的自动化。现代计算机技术认为, 要想有效的实现自动化, 必须经过抽象进行形式化。

### 1. 26 为什么要求字母表示非空有穷集？

(唐明珠 02282084)

解答: 字母表是非空有穷集合, 由字母表中的元素连接而成的字符串叫做字母表上的句子。假设字母表为空集, 则字母表中唯一的元素就是  $\varepsilon$ , 而  $\varepsilon$  不论如何组合, 其组成的句子都为空, 其研究就失去了意义, 所以字母表要具有非空性。

### 1.27. 考虑一下,为什么要研究句子的前缀,后缀？

解: 形式语言是研究自然语言和人工语言的数学工具, 只研究组成规则, 不研究语义。而我们将语言看做句子的集合, 句子看做字母按照一定规则组成的字符串, 故主要根据规则的形式区分语言类, 大部分问题都可转化为判定某个句子是否属于某个语言的问题。而这这就要求从一个句子的结构出发, 而一个整体的句子在结构上将其划成几个部分, 对于我们的研究会有很大的帮助。事实上研究句子的前缀, 后缀, 也就是为了将句子结构进行有意识的划分而更加方便的研究句子, 看其是否符合某个形式语言的组成规则。

### 28. 令 $\Sigma = \{1, 0\}$ , 下列语言在结构上有什么样的特点？ (吴贤珺 02282047)

(1)  $L_1 = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ 。

解: 该语言的每一个句子由二部分构成, 这二部分的组成依次为: 0、1。其中, 每部分的 0 或 1 的个数相等, 且都不小于 1 个。

(2)  $L_2 = \{0^n 1^m \mid n, m \geq 1\}$ 。

解: 该语言的每一个句子由二部分构成, 这二部分的组成依次为: 0、1。其中, 每部分的 0 或 1 的个数不一定相等, 但都不小于 1 个。

(3)  $L_3 = \{0^n 1^n 0^n \mid n \geq 1\}$ 。

解: 该语言的每一个句子由三部分构成, 这三部分的组成依次为: 0、1、0。其中, 每部分的 0 或 1 的个数相等, 且都不小于 1 个。

(4)  $L_4 = \{0^n 1^m 0^k \mid n, m, k \geq 1\}$ 。

解: 该语言的每一个句子由三部分构成, 这三部分的组成依次为: 0、1、0。其中, 每部分的 0 或 1 的个数不一定相等, 但都不小于 1 个。

(5)  $L_5 = \{0^n 1^n 0^n \mid n \geq 0\}$ 。

解：该语言的每一个句子由三部分构成，这三部分的组成依次为：0、1、0。其中，每部分的0或1的个数相等，并且可以都为0。

$$(6) L_6 = \{x \omega x^T \mid x, \omega \in \Sigma^+\}。$$

解：该语言的每一个句子从前向后看和从后向前看时，有一部分是对称相等的。而且，这对称相等的两个串中间一定有另外一个串。

$$(7) L_7 = \{x x^T \omega \mid x, \omega \in \Sigma^+\}。$$

解：该语言的特点是在其句子中一定可以找到这样的一个串：该串是从句子的第一个字符开始的连续的串，且紧跟该串之后的连续一段字符串恰好是该串从后往前看是的那个串，而且这样的两个串之后一定还有另外一个字符串。

$$(8) L_8 = \{a \omega a \mid a \in \Sigma, \omega \in \Sigma^+\}。$$

解：该语言的每一个句子有这样的特点：该句子的第一个字符和最后一个字符都是0或都是1，且该句子的长度不小于3。

$$(9) L_9 = \{\varepsilon, 0, 1, 11, 01, 10, 11, 000, \dots\}。$$

解：该语言的句子是所有由0和1构成的串，包括空串 $\varepsilon$ 。

$$(10) L_{10} = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}。$$

解：该语言的句子是所有由0和1构成的串，不包括空串 $\varepsilon$ 。

1.29 设  $L_1, L_2, L_3, L_4$  分别是  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$  上的语言，能否说  $L_1, L_2, L_3, L_4$  都是某个字母表  $\Sigma$  上的语言？如果能，请问这个字母表  $\Sigma$  是怎么样的？

（刘钰 02282083）

答：能  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$

1.30 设  $L_1, L_2, L_3, L_4$  分别是  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$  上的语言，证明下面的等式成立。

$$(1) L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1$$

设  $\forall a \in L_1 \cup L_2, \Rightarrow a \in L_1 \text{ 或 } a \in L_2 \Rightarrow a \in L_2 \text{ 或 } a \in L_1 \Rightarrow \forall a \in L_2 \cup L_1$ , 故原式得证

$$(2) L_1 \cup (L_2 \cup L_3) = (L_1 \cup L_2) \cup L_3$$

设  $\forall a \in L_1 \cup (L_2 \cup L_3) \Rightarrow a \in L_1 \text{ 或 } a \in L_2 \text{ 或 } a \in L_3 \Rightarrow \forall a \in L_1 \cup (L_2 \cup L_3)$

故，原式得证

$$(3) (L_1^*)^* = L_1^*$$

如果  $L_1 = \Phi, (L_1^*)^* = \Phi = L_1^*$

如果  $L_1 \neq \Phi$ ，假设  $L_1 = \{a_1, a_2 \dots a_n\}, n \geq 1$ ,

则  $L_1^* = \{\varepsilon, a_1, a_2 \dots a_n, a_1 a_1, a_1 a_2 \dots a_1 a_n \dots\}$ ，而  $(L_1^*)^* = \{\varepsilon, a_1, a_2 \dots a_n, a_1 a_1, a_1 a_2 \dots a_1 a_n \dots\}$

故  $(L_1^*)^* = L_1^*$ ，原式得证

$$(4) (L_1^+)^+ = L_1^+$$

如果  $L_1 = \Phi, (L_1^+)^+ = \Phi = L_1^+$

如果  $L_1 \neq \Phi$ ，假设  $L_1 = \{a_1, a_2 \dots a_n\}, n \geq 1$ ,

则  $L_1^+ = \{a_1, a_2 \dots a_n, a_1 a_1, a_1 a_2 \dots a_1 a_n \dots\}$ ，而  $(L_1^+)^+ = \{a_1, a_2 \dots a_n, a_1 a_1, a_1 a_2 \dots a_1 a_n \dots\}$

故  $(L_1^+)^+ = L_1^+$ ，原式得证

$$(5) (L_1 L_2) L_3 = L_1 (L_2 L_3)$$

$(L_1 L_2) L_3 = \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2\} L_3 = \{xyz \mid x \in L_1, y \in L_2, z \in L_3\} =$

$\{x \mid x \in L_1\} \{yz \mid y \in L_2, z \in L_3\} = L_1 (L_2 L_3)$

故，原式得证

$$(6) L_1 (L_2 \cup L_3) = L_1 L_2 \cup L_1 L_3$$

$L_1 (L_2 \cup L_3) = \{x \mid x \in L_1\} \{y \mid y \in L_2 \text{ 或 } y \in L_3\} = \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2 \text{ 或 } x \in L_1, y \in L_3\}$   
 $= \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2\} \cup \{xy \mid x \in L_1, y \in L_3\} = L_1 L_2 \cup L_1 L_3$

故，原式得证

$$(7) (L_2 \cup L_3)L_1 = L_2L_1 \cup L_3L_1$$

$$(L_2 \cup L_3)L_1 = \{x \mid x \in L_2 \text{ 或 } x \in L_3\} \{y \mid y \in L_1\} = \{xy \mid x \in L_2, y \in L_1 \text{ 或 } x \in L_3, y \in L_1\}$$

$$\{xy \mid x \in L_2, y \in L_1\} \cup \{xy \mid x \in L_3, y \in L_1\} = L_2L_1 \cup L_3L_1$$

故，原式得证

$$(8) (L_2 \cup L_1)^* = (L_2^* L_1^*)^*$$

设  $\forall a \in (L_2 \cup L_1)^*$ , 假设  $a = x_1 x_2 \dots x_n$ , 则  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq L_2 \cup L_1$

则  $x_k \in L_2$  或  $x_k \in L_1$ , 因此  $x_k \in L_2^*$  或  $x_k \in L_1^*$ , 当  $k=1, 2, \dots, n$

又因为  $\varepsilon \in L_2^*$ ,  $\varepsilon \in L_1^* \Rightarrow L_1^* \subseteq L_1^* L_2^*, L_2^* \subseteq L_1^* L_2^*$

故  $x_k \in L_1^* L_2^*$ , 因此  $a = x_1 x_2 \dots x_n \in L_1^* L_2^* \Rightarrow (L_2 \cup L_1)^* \subseteq (L_2^* L_1^*)^*$

同理可证  $(L_2 \cup L_1)^* \supseteq (L_2^* L_1^*)^*$

综上  $(L_2 \cup L_1)^* = (L_2^* L_1^*)^*$

故，原式得证

$$(9) (L_1 \cup \{\varepsilon\})^* = L_1^*$$

当  $\{\varepsilon\} \subseteq L_1$  时，原式显然成立

当  $\{\varepsilon\} \not\subseteq L_1$  时，设  $L_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,

因为  $\varepsilon x = x \varepsilon = x \Rightarrow (L_1 \cup \{\varepsilon\})^* = \{\varepsilon, x_1, x_2, \dots, x_n\}^* = \{\varepsilon, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1 x_1, x_1 x_2 \dots x_1 x_n \dots\}$

$L_1^* = \{\varepsilon, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1 x_1, x_1 x_2 \dots x_1 x_n \dots\}$

所以  $(L_1 \cup \{\varepsilon\})^* = L_1^*$

故，原式得证

$$(10) \Phi^* = \{\varepsilon\}$$

因为,  $\Phi^0 = \{\varepsilon\}$

所以,  $\Phi^* = \Phi^0 \cup \Phi^1 \cup \Phi^2 \dots = \{\varepsilon\}$

故, 原式得证

$$(11) (L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4)^* = (L_1^* L_2^* L_3^* L_4^*)^*$$

设  $\forall a \in (L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4)^*$ , 假设  $a = x_1 x_2 \dots x_n$ , 则  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$

则  $x_k \in L_2$  或  $x_k \in L_1$ , 或  $x_k \in L_3$ , 或  $x_k \in L_4$ , 因此

$x_k \in L_2^*$  或  $x_k \in L_1^*$ ,  $x_k \in L_3^*$  或  $x_k \in L_4^*$ , 当  $k=1, 2, \dots, n$

又因为  $\varepsilon \in L_2^*, \varepsilon \in L_1^*, \varepsilon \in L_3^*, \varepsilon \in L_4^* \Rightarrow L_1^* \subseteq L_1^* L_2^* L_3^* L_4^*, L_2^* \subseteq L_1^* L_2^* L_3^* L_4^*$   
 $L_3^* \subseteq L_1^* L_2^* L_3^* L_4^*, L_4^* \subseteq L_1^* L_2^* L_3^* L_4^*$

故  $x_k \in L_1^* L_2^* L_3^* L_4^*$ , 因此

$$a = x_1 x_2 \dots x_n \in L_1^* L_2^* L_3^* L_4^* \Rightarrow (L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4)^* \subseteq (L_1^* L_2^* L_3^* L_4^*)^*$$

同理可证  $(L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4)^* \supseteq (L_1^* L_2^* L_3^* L_4^*)^*$

$$\text{综上 } (L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4)^* = (L_1^* L_2^* L_3^* L_4^*)^*$$

故, 原式得证

$$(12) (L_1^* L_2^*)^* = (L_2^* L_1^*)^*$$

由 8 小题结论可以推得

$$(L_1^* L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^* = (L_2 \cup L_1)^* = (L_2^* L_1^*)^*$$

故, 原式得证



### 1.31 设 $L_1, L_2, L_3, L_4$ 分别是 $\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3, \Sigma^4$

上的语言, 证明下列等式成立否

(段季芬)

$$(1) (L_1 L_2)^* = (L_2 L_1)^*$$

不成立

例如:  $L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}$ , 则  $(L_1 L_2)^* = (ab)^*$

$$= \{\epsilon, ab, abab, ababab, \dots\}$$

$$\text{而 } (L_2 L_1)^* = (ba)^*$$

$$= \{\epsilon, ba, babab, bababab, \dots\}$$

显然不等。

$$(2) L_1^+ = L_1^* L_1^+$$

不成立

例如:  $L_1 = \{0\}$ , 那么  $L_1^+ = L_1^* L_1^+ = L_1^* L_1^2 L_1^3 L_1^4 \dots$

$$= \{0, 00, 000, \dots\}$$

$$\text{而 } L_1 + L_1^+ = \{00, 000, 0000, \dots\}, \text{ 比 } L_1^+ \text{ 少基本项 } L_1$$

比  $L_1^+$  少基本项  $L_1$

可得知  $L_1 + L_1^+$  是  $L_1^+$  的子集

$$(3) L_1^* = L_1^* L_1^*$$

正确

因为  $L_1^* L_1^* = (L_1^0 \cup L_1^1 \cup L_1^2 \cup L_1^3 \cup \dots) (L_1^0 \cup L_1^1 \cup L_1^2 \cup L_1^3 \cup \dots)$

$$(L_1^0 \cup L_1^1 \cup L_1^2 \cup L_1^3 \cup \dots)$$

$$= (L_1^0 \cup L_1^1 \cup L_1^2 \cup L_1^3 \cup \dots) L_1^0 \cup$$

$$(L_1^0 \cup L_1^1 \cup L_1^2 \cup L_1^3 \cup \dots) L_1^1 \cup \dots$$

$$= (L_1^0 \cup L_1^1 \cup L_1^2 \cup L_1^3 \cup \dots) \cup$$

$$L_1^1 \cup L_1^2 \cup L_1^3 \cup \dots$$

从观察可知  $A$  是

$(L_1^0 \cup L_1^1 \cup L_1^2 \cup L_1^3 \cup \dots)$  的真子集,  $B$  是  $A$  的真子集,

推知后面一项是前面的一项的真

子集, 根据吸收规则

$$\text{所以原式} = L_1^0 \cup L_1^1 \cup L_1^2 \cup L_1^3 \cup \dots$$

$$= L_1^*$$

$$(1) (L_1 L_2)^* = L_2^* L_1^*$$

不正确

例如:  $L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}$ , 左边

$$= \{a, b\}^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, bb, \dots\}$$

$$\text{右边} = \{\epsilon, b, bb, bbb, \dots\} \cup \{\epsilon, a, aa, aaa, \dots\} = \{\epsilon, a, b, aa, bb, a$$

$$aa, bbb, \dots\}$$

没有  $a^* b^*$  项

肯定不等

$$(2) (L_1 L_2 L_1)^* L_1 = L_1 (L_2 L_1 L_1)^*$$

正确

$$(3) L2(L1L2UL2)^*L1=L1L1^*L2(L1L1^*L2)^*$$

不正确

假设  $L1=\{a\}$ ,  $L2=\{b\}$ ,  $L2(L1L2UL2)^*L1$  表示的语言肯定以  $b$  打头, 而  $L1L1^*L2(L1L1^*L2)^*$

表示的语言肯定以  $a$  开头

$$(4) (L1^+)^*=(L1^*)^+=L1^*$$

正确

$$(L1^+)^*=(L1UL1^2UL1^3U\ldots)^*=\{C, (L1UL1^2UL1^3U\ldots), (L1UL1^2UL1^3U\ldots)^2, (L1UL1^2UL1^3U\ldots)^3, \ldots\}$$

由于  $(L1UL1^2UL1^3U\ldots)^n$  是  $(L1UL1^2UL1^3U\ldots)^{n-1}$  的子集  $(L1^+)^*$  表示的语言就是  $\{C, (L1UL1^2UL1^3U\ldots)\}$

表示的语言即  $L1^*$ , 所以  $(L1^+)^*=L1^*$

$$(L1^*)^+= (L1^0L1UL1^2UL1^3U\ldots)^+ = \{ (L1^0L1UL1^2UL1^3U\ldots), (L1^0L1UL1^2UL1^3U\ldots)^2, (L1^0L1UL1^2UL1^3U\ldots)^3, \ldots \}$$

由于  $(L1^0L1UL1^2UL1^3U\ldots)^n$  是  $(L1^0L1UL1^2UL1^3U\ldots)^{n-1}$  的子集

$(L1^*)^+$  表示的语言就是

$(L1^0L1UL1^2UL1^3U\ldots)$  表示的语言即  $L1^*$ , 所以  $(L1^*)^+=L1^*$

$$\text{所以 } (L1^+)^*=(L1^*)^+=L1^*$$

$$(5) L1^*L1^+=L1^+L1^*=L1^+$$

正确

$$\begin{aligned} L1^*L1^+ &= (L1^0UL1UL1^2UL1^3U\ldots) \cup (L1UL1^2UL1^3U\ldots) \\ &= (L1^0UL1UL1^2UL1^3U\ldots) L1U \\ &\quad (L1^0UL1UL1^2UL1^3U\ldots) L1^2U\ldots \\ &= (L1UL1^2UL1^3U\ldots) \cup (L1^2UL1^3UL1^4\ldots) U\ldots \quad (\text{后面的项都被第一项吸收}) \\ &= (L1UL1^2UL1^3U\ldots) = L1^+ \end{aligned}$$

同理可证得  $L1^+L1^*=L1^+$

**1.32** 设  $\Sigma = \{0,1\}$ , 请给出上  $\Sigma$  的下列语言的形式表示。

(1) 所有以 0 开头的串。

解答:  $\{0\}\{0,1\}^*$ 。

(2) 所有以 0 开头, 以 1 结尾的串。

解答:  $\{0\}\{0,1\}^*\{1\}$ 。

(3) 所有以 11 开头, 以 11 结尾的串。

解答:  $\{11\}\{0,1\}^*\{11\}$ 。

(4) 所有最多有一对连续的 0 或者最多有一对连续的 1 的串。

解答:  $\{01,1\}^*\{\varepsilon,00\}\{10,1\}^* \cup \{10,0\}^*\{\varepsilon,11\}\{01,0\}^*$ 。

(5) 所有最多有一对连续的 0 并且最多有一对连续的 1 的串。

解答: 按照实际情况分成 4 类:

1) 只有一对连续的 0:  $\{01,1\}^*\{00\}\{10,1\}^*$ 。

2) 只有一对连续的 1:  $\{10,0\}^*\{11\}\{01,0\}^*$ 。

3) 没有连续的 0 并且没有连续的 1:  $\{10\}^* \cup \{01\}^*$ 。

4) 有一对连续的 0 和一对连续的 1:

$\{01\}^*\{00\}\{10\}^*\{11\}\{01\}^* \cup \{10\}^*\{11\}\{01\}^*\{00\}\{10\}^*$ 。

(6) 所有长度为偶数的串。

解答:  $\{0,1\}^{2n}, n=1,2,\dots$

(7) 所有长度为奇数的串

解答:  $\{0,1\}^{2n-1}, n=1,2,\dots$

(8) 所有包含子串 01011 的串。

解答:  $\{1,0\}^*\{01011\}\{1,0\}^*$ 。

(9) 所有包含 3 个连续 0 的子串。

解答:  $\{0,1\}^*000\{0,1\}^*$

(10) 所有不包含 3 个连续 0 的串。

解答:  $\{001, 01, 1\}^*$ 。

(11) 所有正数第 10 个字符是 0 的串。

解答:  $\{0,1\}^9\{0\}\{0,1\}^*$ 。

(12) 所有倒数第 10 个字符是 0 的串。

解答:  $\{0,1\}^*0\{0,1\}^9$ 。

## 2. 1 回答下面的问题:

(周期律 02282067)

(1) 在文法中, 终极符号和非终极符号各起什么作用?

- ✓ 终结符号是一个文法所产生的语言中句子的中出现的字符, 他决定了一个文法的产生语言中字符的范围。
- ✓ 非终结符号又叫做一个语法变量, 它表示一个语法范畴, 文法中每一个产生式的左部至少要还有一个非终结符号, (二, 三型文法要求更严, 只允许左部为一个非终结符号) 他是推导或归约的核心。

(2) 文法的语法范畴有什么意义? 开始符号所对应的语法范畴有什么特殊意义?

- ✓ 文法的非终结符号  $A$  所对应的语法范畴代表着一个集合  $L(A)$ , 此集合由文法产生式中关于  $A$  的产生式推导实现的
- ✓ 开始符号所对应的语法范畴则为文法  $G = \{V, T, P, S\}$  所产生的语言  $L(G)$

$$= \{w \mid w \in T^* \text{ 且 } S \Rightarrow^* w\}$$

(3) 在文法中, 除了的变量可以对应一个终极符号行的集合外, 按照类似的对应方法, 一个字符串也可以对应一个终极符号行集合, 这个集合表达什么意义?

- ✓ 字符串对应的终极符号行集合表示这个字符串所能推导到的终极字符串集合, 为某个句型的语言。

(4) 文法中的归约和推导有什么不同?

- ✓ 推导: 文法  $G = \{V, T, P, S\}$ , 如果  $\alpha \rightarrow \beta \in P, \gamma, \delta \in (V \cup T)^*$ , 则称  $\gamma\alpha\delta$  在  $G$  中推导出了  $\gamma\beta\delta$ 。
- ✓ 归约: 文法  $G = \{V, T, P, S\}$ , 如果  $\alpha \rightarrow \beta \in P, \gamma, \delta \in (V \cup T)^*$ , 则称  $\gamma\beta\delta$  在  $G$  中归约到  $\gamma\alpha\delta$ 。
- ✓ 这他们的定义, 我个人理解两个概念从不同角度看待文法中的产生式, 推导是自上而下 (从产生式的左边到右边), 而归约是自下而上 (从产生式的右边到左边), 体现到具体实际中, 如编译中语法分析时语法树的建立, 递归下降, LL(1) 等分析法采用自开始符号向下推导识别输入代码生成语法树, 对应的 LR(1), LALR 等分析法则采用自输入代码 (相当于文法中语言的句子) 自底向上归约到开始符号建立语法树, 各有优劣。

(5) 为什么要求定义语言的字母表上的语言为一个非空有穷集合?

- ✓ 非空: 根据字母表幂的定义:  $\sum^0 = \{\epsilon\}$ ,  $\epsilon$  为字母表中 0 个字符组成的。这样, 当字母表中没有字符的情况, 字母表也有一个元素, 字母表为空就没有意义, 而且, 如果字母表为空, 将无法定义其上的语言, 使得理论体系不严密。
- ✓ 有穷: 我们将语言抽象成形式语言的目的就是为了有穷的表示无限的语言, 在此基础上我们才定义了字母表和语言, 如果字母表为无穷的, 他就违背了我们研究问题的初衷, 这也使得研究失去意义

(6) 任意给定一个字母表  $\Sigma$ ，该字母表上的语言都具有有穷描述吗？为什么？

- ✓ 错误，因为一个字母表上有不可数无穷多个语言，而有穷表示只可能是可数无穷多个，又因为不可数无穷集和可数无穷集不是一一对应的，所以存在这样的语言，他不存在有穷表示。

(7) 请总结一下，在构造文法时，可以从哪几个方面入手？

- ✓ 我们可以将其类比为软件工程中的概念:-)
- ✓ 首先，也是最重要的一点，需求分析，我们需要知道需要构造的语言的特点，具体表现形式，以及一些需要注意的细节，通过一些特例提炼特点。
- ✓ 其次，概要设计，将语言从具体中抽象到符号上，按照其特性将其划分类别。
- ✓ 再次，详细设计，将每一部分抽象的成果具体化，将所有细节符号化
- ✓ 再次，编码，将详细设计的结果用文法符号的语言表示出来
- ✓ 最后，测试，找出边缘数据，特殊数据进行测试。

(8) 按照文法的乔姆斯基体系，文法被分为几类？各有什么样的特点？

分为四类：

- ✓ 文法  $G = \{V, T, P, S\}$ ，对应的  $L(G)$  则为 0 型文法或短语结构文法。
- ✓ 如果对于  $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P$ ，均有  $|\beta| \geq |\alpha|$  成立，则称  $G$  为 1 型文法或上下文有关文法，对应的  $L(G)$  称为 1 型语言。
- ✓ 如果对于  $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P$ ，均有  $|\beta| \geq |\alpha|$  成立，且  $\alpha \in V^+$  成立，则称  $G$  为 2 型文法，或上下文无关文法，对应的  $L(G)$  为 2 型语言。
- ✓ 如果对于  $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P$ ，所有  $\alpha \rightarrow \beta$  均有： $A \rightarrow w$  或  $A \rightarrow wB$  成立，其中  $A, B \in V, w \in T^+$ ，则称  $G$  为 3 型文法，或正则文法，对应的  $L(G)$  称 3 型语言。

(9) 什么叫左线性文法？什么叫右线性文法？什么叫线性文法

- ✓ 文法  $G = \{V, T, P, S\}$ ，如果对于  $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P$ ，所有  $\alpha \rightarrow \beta$  均有： $A \rightarrow w$  或  $A \rightarrow wBx$  成立， $A, B \in V, x, w \in T^*$ ，则称  $G$  为线性文法。
- ✓ 文法  $G = \{V, T, P, S\}$ ，如果对于  $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P$ ，所有  $\alpha \rightarrow \beta$  均有： $A \rightarrow w$  或  $A \rightarrow wB$  成立，其中  $A, B \in V, w \in T^+$ ，则称  $G$  为右线性文法。
- ✓ 文法  $G = \{V, T, P, S\}$ ，如果对于  $\forall \alpha \rightarrow \beta \in P$ ，所有  $\alpha \rightarrow \beta$  均有： $A \rightarrow w$  或  $A \rightarrow Bw$  成立，其中  $A, B \in V, w \in T^+$ ，则称  $G$  为左线性文法。

(10) 既然已经定义 2-10 中允许 RL 包含空语句  $\varepsilon$ ，那么定理 2-6 和定理 2-7 还有什么意义？

- ✓ 此为定义与定理的区别，定义 2-10 是针对文法  $G$  是  $R G$  的情况下，定义其产生式加上  $S' \rightarrow \varepsilon$  后仍为  $R G$ ， $G$  的语言仍为  $R L$ ，而定理 2-6 和定理 2-7 针对的前提条件是如果  $L$  为  $R L$ ，他们都是通过定义 2-10 证明得到的，可以在以后的推论中直接应用的。

\*\*\*\*\*

2. 设  $L = \{ 0^n \mid n \geq 1 \}$ ，试构造满足要求的文法  $G$ 。

- (1)  $G$  是  $R G$ 。
- (2)  $G$  是  $CFG$ ，但不是  $R G$ 。
- (3)  $G$  是  $CSG$ ，但不是  $CFG$ 。
- (4)  $G$  是短语结构文法，但不是  $CSG$ 。

解答：

1:  $S \rightarrow 0|0S$

2:  $S \rightarrow 0|0S|SS$

3:  $S \rightarrow 0|0S|AS$

$AS \rightarrow SA$

$AS \rightarrow 0A$

$0A \rightarrow S0$

$0AS \rightarrow 00$

4:  $S \rightarrow 0|0S|AS$

$AS \rightarrow SA|ABB$

$ABB \rightarrow AS$

$AB \rightarrow A|\varepsilon$

\*\*\*\*\*

3. 设文法  $G$  的产生式集如下，试给出句子  $id+id*id$  的两个不同的推导和两个不同的归约

$E \rightarrow id|c|+E|-E|E+E|E-E|E*E|E/E|E**E|Fun(E)$  (褚颖娜 02282072)

推导：

(1)  $E \Rightarrow E+E \Rightarrow E+E*E \Rightarrow E+E*id \Rightarrow E+id*id \Rightarrow id+id*id$

(2)  $E \Rightarrow E*E \Rightarrow E*id \Rightarrow E+E*id \Rightarrow E+id*id \Rightarrow id+id*id$

归约：

(1)  $id+id*id \Leftarrow E+id*id \Leftarrow E+E*id \Leftarrow E+E*E \Leftarrow E+E \Leftarrow E$

(2)  $id+id*id \Leftarrow E+id*id \Leftarrow E+E*id \Leftarrow E*id \Leftarrow E*E \Leftarrow E$

\*\*\*\*\*

2.4 设文法  $G$  的产生式集如下，试给出句子  $aaabbbccc$  的至少两个不同的推导和至少两个不同的归约 (02282081 刘秋雯)

$bB \rightarrow bb$

$CB \rightarrow BC$

$bC \rightarrow bc$

$cC \rightarrow cc$

解：推导一：

$S \rightarrow aBC|aSBC$

$aB \rightarrow ab$

$S \Rightarrow aSBC$

$\Rightarrow aaSBCBC$

$\Rightarrow aaaBCBCBC$

$\Rightarrow aaabCBCBC$

$\Rightarrow aaabBCCBC$   
 $\Rightarrow aaabbCCBC$   
 $\Rightarrow aaabbCBCC$   
 $\Rightarrow aaabbBCCC$   
 $\Rightarrow aaabbbCCC$   
 $\Rightarrow aaabbbccCC$   
 $\Rightarrow aaabbbcccc$

推导二:

$S \Rightarrow aSBC$   
 $\Rightarrow aaSBCBC$   
 $\Rightarrow aaaBCBCBC$   
 $\Rightarrow aaaBCCBC$   
 $\Rightarrow aaaBBCBCC$   
 $\Rightarrow aaabbCBCC$   
 $\Rightarrow aaabbBCCC$   
 $\Rightarrow aaabbbCCC$   
 $\Rightarrow aaabbbccCC$   
 $\Rightarrow aaabbbcccc$

归约一、归约二分别为推导一和推导二的逆过程

\*\*\*\*\*

5 句子 abeebbeebea 的一个推导如下:

(陈伟芳 学号??)

$S \Rightarrow aAa$       使用产生式  $S \rightarrow aAa$   
 $\Rightarrow aSSa$       使用产生式  $A \rightarrow SS$   
 $\Rightarrow abAbSa$       使用产生式  $S \rightarrow bAb$   
 $\Rightarrow abSSbSa$       使用产生式  $A \rightarrow SS$   
 $\Rightarrow abeSbSa$       使用产生式  $S \rightarrow e$   
 $\Rightarrow abeebSa$       使用产生式  $S \rightarrow e$   
 $\Rightarrow abeebbAba$       使用产生式  $S \rightarrow bAb$   
 $\Rightarrow abeebbSSba$       使用产生式  $A \rightarrow SS$   
 $\Rightarrow abeebbeSba$       使用产生式  $S \rightarrow e$   
 $\Rightarrow abeebbeebea$       使用产生式  $S \rightarrow e$

不能给出 abeebbeebe 的归约, 因为由文法 G 中产生式推出的句子只有三种情况: 头尾都是 a, 头尾都是 b, 或者只有一个 e, 而 abeebbeebe 上面三个条件都不符合, 所以它不是文法 G 的一个句子, 当然也就不能给出它的一个归约了。

\*\*\*\*\*

2.6 设文法 G 的产生式集如下, 请给出 G 的每个语法范畴代表的集合.

$S \rightarrow aSa|aaSaa|aAa$   
 $A \rightarrow bA|bbbA|bB$   
 $B \rightarrow cB|cC$   
 $C \rightarrow ccC|DD$   
 $D \rightarrow dD|d$

解:

$\text{set}(D) = \{d\}^+$   
 $\text{set}(C) = \{c^{2n}d^m \mid m \geq 2, n \geq 0\}$   
 $\text{set}(B) = \{c^n d^m \mid m \geq 2, n \geq 1\}$   
 $\text{set}(A) = \{b^p c^n d^m \mid p \geq 1, m \geq 2, n \geq 1\}$   
 $\text{set}(S) = \{a^q b^p c^n d^m a^q \mid p \geq 1, m \geq 2, n \geq 1, q \geq 1\}$

\*\*\*\*\*

7. 给定如下文法，请用自然语言描述它们定义的语言。 (吴贤珺 02282047)

(1)  $A \rightarrow aaA \mid aaB$

$B \rightarrow Bcc \mid D\#cc$

$D \rightarrow bbbD \mid \#$

解：该语言由四部分组成：第一部分是偶数个  $a$ （至少有两个），第二部分是 3 的倍数个  $b$ （可以是 0 个），第三部分是两个 “#” 号，第四部分是偶数个  $c$ （至少有两个）。

(2)  $A \rightarrow 0B \mid 1B \mid 2B$

$B \rightarrow 0C \mid 1C \mid 2C$

$C \rightarrow 0D \mid 1D \mid 2D \mid 0 \mid 1 \mid 2$

$D \rightarrow 0B \mid 1B \mid 2B$

解：该语言的句子是字母表  $\Sigma = \{0,1,2\}$  上所有长度为 3 的倍数的字符串，且非空。

(3)  $A \rightarrow 0B \mid 1B \mid 2B$

$B \rightarrow 0C \mid 1B \mid 2B$

$C \rightarrow 0E \mid 1D \mid 2D \mid 0 \mid 1 \mid 2$

$D \rightarrow 0C \mid 1B \mid 2B$

$E \rightarrow 0E \mid 1D \mid 2D \mid 0 \mid 1 \mid 2$

解：观察发现  $C$  和  $E$  所对应产生式右部是相同的。所以将文法化简成如下的形式：

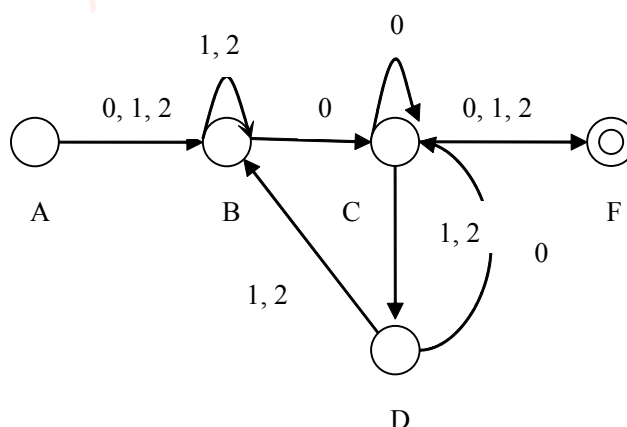
$A \rightarrow 0B \mid 1B \mid 2B$

$B \rightarrow 0C \mid 1B \mid 2B$

$C \rightarrow 0C \mid 1D \mid 2D \mid 0 \mid 1 \mid 2$

$D \rightarrow 0C \mid 1B \mid 2B$

作出状态图如下：



可以看出从初始状态  $A$  到终态  $F$ ，至少要经过  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F$  的过程，所以字符串的长度至少为 3。而且，到  $F$  只能经过  $C$ ，如果到达  $C$  后走其它的路径，那么所经过的弧上的字符串都是以 0 为结尾，也就是要回到  $C$ ，最后一个字符一定是 0。这样，该文法所



确定的语言就是所有倒数第 2 个字符是 0 的串。

- (4)  $S \rightarrow aB \mid bA$   
 $A \rightarrow a \mid aS \mid BAA$   
 $B \rightarrow b \mid bS \mid ABB$

解：由于该文法所确定的语言一时不易看出，可以先考虑简单的形式：

- $S \rightarrow aB \mid bA$   
 $A \rightarrow a \mid aS$   
 $B \rightarrow b \mid bS$

不难看出，该文法所确定的语言为所有由 ab 和 ba 组成的串，且非空。这些串有一个特点，就是 a 和 b 的个数相等。然后，把产生式  $A \rightarrow BAA$  和  $B \rightarrow ABB$  加回到原来的文法中，并且可以把这两个产生式看成是在左部的符号前分别加上串 BA 和 AB。不妨把它们看成一个符号 C 和 D。这样原文法可以改造成如下形式：

- $S \rightarrow aB \mid bA$   
 $A \rightarrow a \mid aS \mid CA$   
 $B \rightarrow b \mid bS \mid DB$   
 $C \rightarrow BA$   
 $D \rightarrow AB$

发现插入的 C 和 D 所导入的 A 和 B 是成对的，原文法所确定的语言可能就是字母表  $\Sigma = \{a, b\}$  上所有含有相同个 a 和 b 的字符串，且非空。从上面简单形式的文法中已经看到，它所确定的字符串比 a 和 b 个数相同的所有串少的只是多个 a 或 b 连续的情况。而加上产生式  $A \rightarrow BAA$  和  $B \rightarrow ABB$  后则刚好满足。

例如：由 S 推出 aB 后，在 B 前“插入”D（即 AB），可由 AB 中的 A 推出 a，就得到 aaBB，如此类推，最终可得该文法所接受的语言为：字母表  $\Sigma = \{a, b\}$  上所有 a 和 b 个数相等的非空字符串。

\*\*\*\*\*

8. 设  $\Sigma = \{0, 1\}$ , 请给出  $\Sigma$  上的下列语言的文法

(1) 所有以 0 开头的串

- $S \rightarrow 0A \mid 0$   
 $A \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0A \mid 1A$

(2) 所有以 0 开头以 1 结尾的串

- $S \rightarrow 0A$   
 $A \rightarrow 1 \mid 0A \mid 1A$

(3) 所有以 11 开头以 11 结尾的串

- $S \rightarrow 11A \mid 11$   
 $A \rightarrow 11 \mid 0A \mid 1A$

(4) 所有最多有一对连续的 0 或者最多有一对连续的 1

- 1: x 中既没有成对的 0，也没有成对的 1  
2: x 有一对连续的 0  
3: x 有一对连续的 1  
4: x 中既有一对连续的 0，也有一对连续的 1

- $S \rightarrow A \mid B \mid C \mid D$   
 $A \rightarrow \varepsilon \mid A' \mid A''$   
 $A' \rightarrow 0 \mid 01 \mid 01A'$   
 $A'' \rightarrow 1 \mid 10 \mid 10A''$

$B \rightarrow B'00B''$   
 $B' \rightarrow 1|01|1B'|01B'$   
 $B'' \rightarrow 1|10|1B''10B''$

$C \rightarrow C'11C''$   
 $C' \rightarrow 0|10|0C'|10C'$   
 $C'' \rightarrow 0|01|0C''|01C''$

$D \rightarrow E00F11H|P11G00K$

$E \rightarrow 1|1E'|E'$

$E' \rightarrow 01E'|E'$

$F \rightarrow \varepsilon | 10|10F$  // F 以 1 开头, 以 0 结尾; 不含连续 0 和连续 1

$H \rightarrow 0|H'0|H'$

$H' \rightarrow 01|01H'$

$P \rightarrow 0|0P'|P'$

$P' \rightarrow 10P'|10$

$G \rightarrow \varepsilon | 01|01G$  // G 以 0 开头, 以 1 结尾; 不含连续 0 和连续 1

$K \rightarrow 1|K'1|K'$

$K' \rightarrow 10|10K'$

(5) 所有最多有一对连续的 0 而且最多有一对连续的 1

1: x 中既没有成对的 0, 也没有成对的 1

2: x 只有一对连续的 0, 没有连续的 1

3: y 只有一对连续的 1, 没有连续的 0

4: x 中既有一对连续的 0, 也有一对连续的 1

$S \rightarrow A|B|C|D$

$A \rightarrow \varepsilon | A'|A''$

$A' \rightarrow 0|01|01A'$

$A'' \rightarrow 1|10|10A''$

$B \rightarrow B'00B''$

$B' \rightarrow \varepsilon | 1|01|01B''|1 B''$  // B' 是不含连续 0, 也不含连续 1 的串

$B'' \rightarrow 01|01 B''$

$B''' \rightarrow \varepsilon | 1|10|10B'''$  // B''' 是不含连续 0, 也不含连续 1 的串

$B'''' \rightarrow 10|10 B''''$

$C \rightarrow C'11C''$

// C' 是不含连续 1, 也不含连续 0 的串

$C' \rightarrow \varepsilon | 0|10|0C''|10C''$

$C'' \rightarrow 10|10 C''$

$C''' \rightarrow \varepsilon | 0|01|01C'''$

// C''' 是不含连续 1, 也不含连续 0 的串

$C'''' \rightarrow 01|01 C''''$

$D \rightarrow E00F11H|P11G00K$

$E \rightarrow 1|1E'|E'$   
 $E' \rightarrow 01E'|E'$   
 $F \rightarrow \varepsilon|10|10F$  // F 以 1 开头, 以 0 结尾; 不含连续 0 和连续 1  
 $H \rightarrow 0|H'0|H'$   
 $H' \rightarrow 01|01H'$   
 $P \rightarrow 0|0P'|P'$   
 $P' \rightarrow 10P'|10$   
 $G \rightarrow \varepsilon|01|01G$  // G 以 0 开头, 以 1 结尾; 不含连续 0 和连续 1  
 $K \rightarrow 1|K'1|K'$   
 $K' \rightarrow 10|10K'$

(6) 所有长度为偶数的串

$S \rightarrow 01|10|00|11|01S|10S|00S|11S$

(7) 所有包含子串 01011 的串

$S \rightarrow X01011Y$

$X \rightarrow \varepsilon|0X|1X$

$Y \rightarrow \varepsilon|0Y|1Y$

(8) 所有含有 3 个连续 0 的串

$S \rightarrow X000Y$

$X \rightarrow \varepsilon|0X|1X$

$Y \rightarrow \varepsilon|0Y|1Y$

\*\*\*\*\*

2.9 设  $\Sigma = \{a, b, c\}$ , , 构造下列语言的文法。

(1)  $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ 。

解答:  $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSb \mid \varepsilon\}, S)$ 。

(2)  $L_2 = \{a^n b^m \mid n, m \geq 1\}$ 。

解答:  $G_2 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow A \mid B, A \rightarrow aA \mid a, B \rightarrow bB \mid b\}, S)$ 。

(3)  $L_3 = \{a^n b^n a^n \mid n \geq 1\}$ 。

解答:  $G_3 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P_3, S)$

$P_3: S \rightarrow aAB \mid aSAB$

$BA \rightarrow AB$

$aB \rightarrow ab$

$bB \rightarrow bb$

$bA \rightarrow ba$

$aA \rightarrow aa$

(4)  $L_4 = \{a^n b^m a^k \mid n, m, k \geq 1\}$ 。

解答:  $G_4 = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow ABA, A \rightarrow aA \mid a, B \rightarrow bB \mid b\}, S)$ 。

(5)  $L_5 = \{awa \mid a \in \Sigma, w \in \Sigma^+\}$ 。

解答:  $G_5 = (\{S, W\}, \{a, b, c\}, \{S \rightarrow aWa, W \rightarrow aW \mid bW \mid cW \mid a \mid b \mid c\}, S)$ 。

(6)  $L_6 = \{wxw^T \mid x, w \in \Sigma^+\}$ 。

解答:  $G_6 = (\{S, W\}, \{a, b, c\}, P_6, S)$

$$P_6: S \rightarrow aWa \mid bWb \mid cWc$$

$$W \rightarrow aW \mid bW \mid cW \mid a \mid b \mid c。$$

(7)  $L_7 = \{w \mid w = w^T, w \in \Sigma^+\}$ 。

解答:  $G_7 = (\{S, W\}, \{a, b, c\}, \{S \rightarrow aWa \mid bWb \mid cWc \mid a \mid b \mid c\}, S)$ 。

(8)  $L_8 = \{xx^T w \mid x, w \in \Sigma^+\}$ 。

解答:  $G_8 = (\{S, W, X\}, \{a, b, c\}, P_8, S)$

$$P_8: S \rightarrow XW$$

$$X \rightarrow aXa \mid bXb \mid cXc \mid a \mid b \mid c$$

$$W \rightarrow aW \mid bW \mid cW \mid a \mid b \mid c。$$

\*\*\*\*\*

第 10 题参见下题:

11、给定 RG

$$G_1 = (V_1, T_1, P_1, S_1)$$

$$G_2 = (V_2, T_2, P_2, S_2)$$

试分别构造满足下列要求的 RG G, 并证明你的结论。

$$(1) L(G) = L(G_1)L(G_2)$$

解:

不妨假设  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , 并且  $S \notin V_1 \cup V_2$ , 令

$$G = (\{S\} \cup V_1 \cup V_2, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup P_3, S)$$

其中,

$$P_3 = \{S \rightarrow \omega S_2 \mid \omega \in T_1^+ \text{ 且 } S_1 \Rightarrow^+ \omega\} \cup \{S \rightarrow \alpha \mid S_1 \rightarrow \alpha\} \cup \{S \rightarrow \varepsilon\}$$

证明:

(1) 设  $x \in L(G)$ , 则  $S \Rightarrow^* x$

若  $x = \varepsilon$ , 因为  $\varepsilon \in L(G_1)$ ,  $\varepsilon \in L(G_2)$ , 所以  $\varepsilon \in L(G_1)L(G_2)$  成立

若  $x \neq \varepsilon$ , 由产生式  $S \rightarrow \omega S_2$ , 不妨设  $x = x_1 x_2$ , 其中  $x_1 \in T_1^+$ ,  $x_1 \in L(G_1)$

则  $S_2 \Rightarrow^* x_2$ , 因为  $G$  的产生式包括  $P_2$ , 所以  $x_2 \in L(G_2)$ , 可知  $x = x_1 x_2 \in L(G_1)L(G_2)$

所以  $L(G) \subseteq L(G_1)L(G_2)$

(1) 设  $x \in L(G_1)L(G_2)$ , 不妨设  $x = x_1 x_2$ , 其中  $x_1 \in T_1^*$ ,  $S_1 \Rightarrow^* x_1$ ,  $x_2 \in T_2^*$ ,  $S_2 \Rightarrow^* x_2$

$x_1 \neq \varepsilon$  时, 由  $P_3$  中  $\{S \rightarrow \omega S_2 \mid \omega \in T_1^+ \text{ 且 } S_1 \Rightarrow^+ \omega\}$ , 则  $S \Rightarrow^+ x_1 S_2 \Rightarrow^+ x_1 x_2$

所以  $x_1 x_2 \in L(G)$ ,  $L(G_1)L(G_2) \subseteq L(G)$

$x_1 = \varepsilon$  时, 由  $P_3$  中  $\{S \rightarrow \alpha \mid S_1 \rightarrow \alpha\}$   $S \Rightarrow^* x_2$

$x_2 = \varepsilon$  时, 由  $S \rightarrow \varepsilon$ , 得  $S \Rightarrow^* x_2$  所以  $x_2 \in L(G)$

$L(G_1)L(G_2) \subseteq L(G)$

综上,  $L(G) = L(G_1)L(G_2)$

(2)  $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$

解:

不妨假设  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , 并且  $S \notin V_1 \cup V_2$ , 令

$$G = (\{S\} \cup V_1 \cup V_2, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup P_3, S)$$

其中,

$$P_3 = \{S \rightarrow \alpha \mid S_1 \rightarrow \alpha \text{ 或 } S_2 \rightarrow \alpha\}$$

证明:

(1) 设  $x \in L(G_1) \cup L(G_2)$  不妨设  $x \in L(G_1)$  那么可知  $S_1 \Rightarrow^* x$

由  $G$  构造方法可知,  $S \Rightarrow^* x$  且  $x \in L(G)$  即  $L(G_1) \cup L(G_2) \subseteq L(G)$

(2) 设  $x \in L(G)$  则  $S \Rightarrow^* x$ , 由  $P_3$  知,  $S_1 \Rightarrow^* x$  或  $S_2 \Rightarrow^* x$

不妨设  $S_1 \Rightarrow^* x$  则  $x \in L(G_1)$ ,  $L(G_1) \subseteq L(G)$

同理  $L(G_2) \subseteq L(G)$  则  $L(G_1) \cup L(G_2) \subseteq L(G)$

所以  $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$

(3)  $L(G) = L(G_1)\{a, b\}L(G_2)$ , 其中  $a, b$  是两个不同的终极符号

解:

不妨假设  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , 并且  $S \notin V_1 \cup V_2$ , 令

$$G = (\{S\} \cup V_1 \cup V_2, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup P_3, S)$$

其中,

$$P_3 = \{S \rightarrow \omega a S_2 \mid \omega b S_2 \text{ 其中 } \omega \in T_1^* \text{ 且 } S_1 \Rightarrow^* \omega\} \cup \{S \rightarrow \alpha \mid S_1 \rightarrow \alpha\}$$

证明:

(1) 设  $x \in L(G)$  则  $S \Rightarrow^* x$  由产生式  $S \rightarrow \omega a S_2$ , 不妨设  $x = \omega_1 a \omega_2$

则  $\omega_1 \in T_1^*$ ,  $S_2 \Rightarrow^* \omega_2$  则  $\omega_1 \in L(G_1)$ ,  $\omega_2 \in L(G_2)$

所以  $x = \omega_1 a \omega_2 \in L(G_1)\{a, b\}L(G_2)$  同理  $\omega_1 b \omega_2 \in L(G_1)\{a, b\}L(G_2)$

可得  $L(G) \subseteq L(G_1)\{a, b\}L(G_2)$

(2) 设  $x \in L(G_1)\{a, b\}L(G_2)$

不妨设  $x = \omega_1 a \omega_2$  其中  $\omega_1 \in L(G_1)$ ,  $\omega_2 \in L(G_2)$  即  $S_1 \Rightarrow^* \omega_1$ ,  $S_2 \Rightarrow^* \omega_2$

由  $P_3$  中产生式  $S \Rightarrow^* \omega_1 a S_2 \Rightarrow \omega_1 a \omega_2$

所以  $L(G_1)\{a, b\}L(G_2) \subseteq L(G)$

综上可得,  $L(G) = L(G_1)\{a, b\}L(G_2)$

$$(4) L(G) = L(G_1)^*$$

解:

不妨假设  $S \notin V_1$ , 取  $G = (\{S\} \cup V_1, T_1, P, S)$

其中,

$$P = \{S \rightarrow \alpha \mid S_1 \rightarrow \alpha \in P_1\} \cup \{S \rightarrow \varepsilon\} \cup \{S \rightarrow \alpha S \mid S_1 \rightarrow \alpha \in P_1\}$$

证明略。

$$(5) L(G) = L(G_1)^+$$

解:

不妨假设  $S \notin V_1$ , 取  $G = (\{S\} \cup V_1, T_1, P, S)$

其中,

$$P = \{S \rightarrow \alpha \mid S_1 \rightarrow \alpha \in P_1\} \cup \{S \rightarrow \alpha S \mid S_1 \rightarrow \alpha \in P_1\}$$

证明略。

\*\*\*\*\*

12. 设文法  $G$  有如下产生式:

(吴贤珺 02282047)

$$S \rightarrow aB \mid bA$$

$$A \rightarrow a \mid aS \mid bAA$$

$$B \rightarrow b \mid bS \mid aBB$$

证明  $L(G) = \{\omega \mid \omega \text{ 中含有相同个数的 } a \text{ 和 } b, \text{ 且 } \omega \text{ 非空}\}$ 。

证：观察发现 A 的产生式  $A \rightarrow bAA$  中的  $bA$  可以用 S 来代替，同样 B 的产生式  $B \rightarrow aBB$  中的  $aB$  也可以用 S 代替。这样原来的文法可以化为如下的形式：

$S \rightarrow aB \mid bA$

$A \rightarrow a \mid aS \mid SA$

$B \rightarrow b \mid bS \mid SB$

进一步地，可以把产生式  $A \rightarrow aS$  中的 S 代换，把文法化为如下的形式：

$S \rightarrow aB \mid bA$

$A \rightarrow a \mid aaB \mid abA \mid SA$

$B \rightarrow b \mid baB \mid bbA \mid SB$

下面，我们就对字符串  $\omega$  的长度施归纳，同时证明以下三个命题成立。

(1)  $S \Rightarrow^* \omega$  iff  $\omega$  中含有相同个数的 a 和 b，且  $\omega$  非空。

(2)  $A \Rightarrow^* \omega$  iff  $\omega$  中含有 a 的个数比 b 的个数恰好多一个。

(3)  $B \Rightarrow^* \omega$  iff  $\omega$  中含有 a 的个数比 b 的个数恰好少一个。

第一步，由于只有 A 和 B 可以直接推出终结符，当  $\omega$  的长度为 1 时，直接用 A 推出 a 或直接用 B 推出 b。

直接用 A 推出 a 时， $\omega$  中 a 的长度为 1，b 的长度为 0，含有 a 的个数比 b 的个数恰好多一个。

直接用 B 推出 b 时，b 的长度为 1，a 的长度为 0， $\omega$  中含有 a 的个数比 b 的个数恰好少一个。

这样，由  $S \rightarrow aB \mid bA$ ，知 S 推出的最短串，分别是 ab 和 ba，其长度是 2，并且 a 和 b 的个数相等。

第二步，假设上面的三个命题对长度为 x 的串成立。对 S， $x=2n(n \geq 1)$ ；对 A 和 B， $x=2n+1(n \geq 0)$ 。我们可以看到，由 A 或 B 推出的串长度如果要变长的话，必须把 A 或 B 用其除  $A \rightarrow a$  或  $B \rightarrow b$  之外的产生式代替。

i) 考虑代替 A 的情形。

若 A 用  $aaB$  代替，由假设 B 中 a 的个数比 b 的个数恰好少一个，则  $aaB$  中 a 的个数比 b 的个数恰好多一个。

若 A 用  $abA$  代替，由假设 A 中 a 的个数比 b 的个数恰好多一个，则  $abA$  中 a 的个数比 b 的个数恰好多一个。

若 A 用  $SA$  代替，由假设 A 中 a 的个数比 b 的个数恰好多一个，而 S 中 a 和 b 的个数相等，则  $SA$  中 a 的个数仍然比 b 的个数恰好多一个。

ii) 考虑代替 B 情形。

若 B 用  $baB$  代替，由假设 B 中 a 的个数比 b 的个数恰好少一个，则  $baB$  中 a 的个数比 b 的个数也恰好少一个。

若 B 用  $bbA$  代替，由假设 A 中 a 的个数比 b 的个数恰好多一个，则  $bbA$  中 a 的个数比 b 的个数恰好少一个。

若 B 用  $SB$  代替，由假设 B 中含有 a 的个数比 b 的个数恰好少一个，而 S 中 a 和 b 的个数相等，则  $SB$  中 a 的个数仍然比 b 的个数恰好少一个。

这样，命题

$A \Rightarrow^* \omega$  iff  $\omega$  中含有 a 的个数比 b 的个数恰好多一个。

$B \Rightarrow^* \omega$  iff  $\omega$  中含有 a 的个数比 b 的个数恰好少一个。

就得到了证明。又由于 S 的产生式只有  $S \rightarrow aB \mid bA$ ，由以上两个命题，显然有命题

$S \Rightarrow^* \omega$  iff  $\omega$  中含有相同个数的 a 和 b，且  $\omega$  非空。

成立。



## 第三章作业答案

1. 已知 DFA M1 与 M2 如图 3-18 所示。

(敖雪峰 02282068)

(1) 请分别给出它们在处理字符串 1011001 的过程中经过的状态序列。

(2) 请给出它们的形式描述。

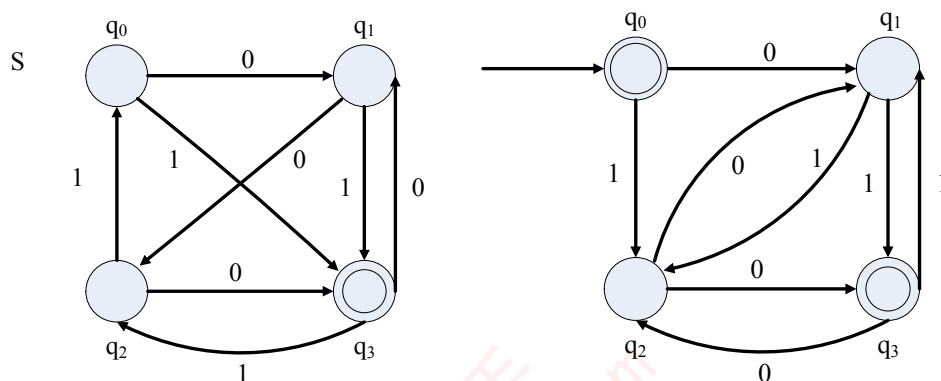


图3-18 两个不同的DFA

解答: (1)M1在处理1011001的过程中经过的状态序列为 $q_0q_3q_1q_3q_2q_3q_1q_3$ ;

M2在处理1011001的过程中经过的状态序列为 $q_0q_2q_3q_1q_3q_2q_3q_1$ ;

(2)考虑到用形式语言表示,用自然语言似乎不是那么容易,所以用图上作业法把它们用正则表达式来描述:

M1:  $[01+(00+1)(11+0)][11+(10+0)(11+0)]^*$

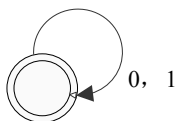
M2:  $(01+1+000)\{(01)^*+[(001+11)(01+1+000)]^*\}$

\*\*\*\*\*

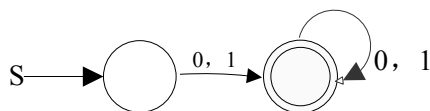
2. 构造下列语言的 DFA

(陶文婧 02282085)

(1)  $\{0, 1\}^*$

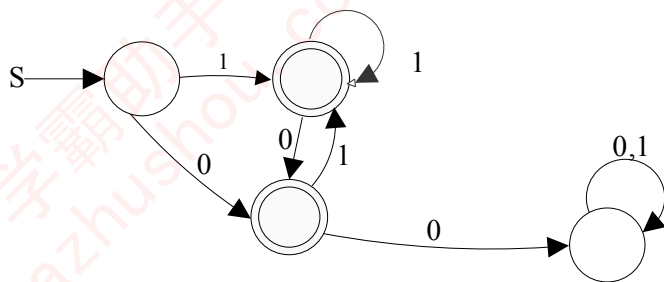


(2)  $\{0, 1\}^+$

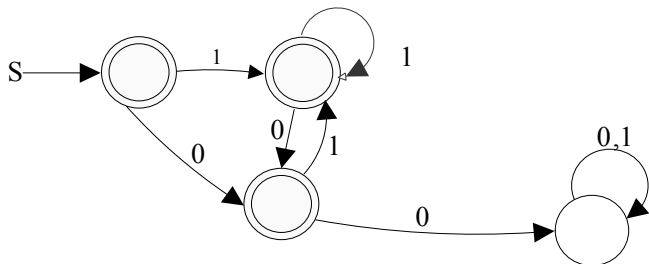


(3)  $\{x|x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中不含 } 00 \text{ 的串}\}$

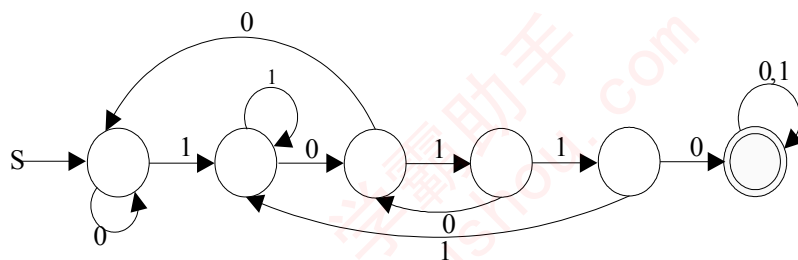
(设置一个陷阱状态,一旦发现有 00 的子串,就进入陷阱状态)



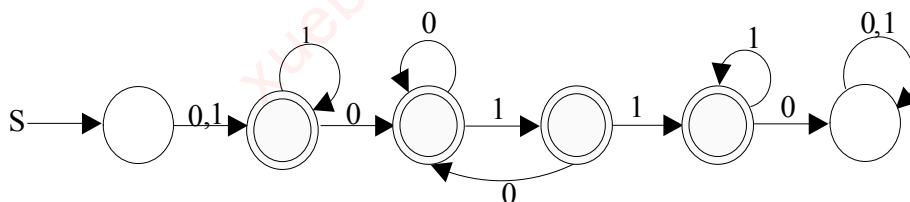
- (4)  $\{x|x \in \{0, 1\}^* \text{ 且 } x \text{ 中不含 } 00 \text{ 的串}\}$   
 (可接受空字符串, 所以初始状态也是接受状态)



- (5)  $\{x|x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中含形如 } 10110 \text{ 的子串}\}$



- (6)  $\{x|x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中不含形如 } 10110 \text{ 的子串}\}$   
 (设置一个陷阱状态, 一旦发现有 00 的子串, 就进入陷阱状态)

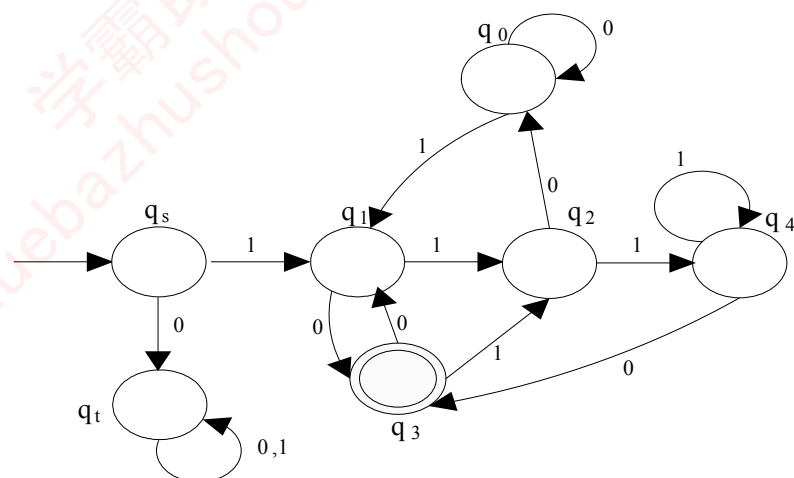


- (7)  $\{x|x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且当把 } x \text{ 看成二进制时, } x \text{ 模 } 5 \text{ 和 } 3 \text{ 同余, 要求当 } x \text{ 为 } 0 \text{ 时, } |x|=1, \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 时, } x \text{ 的首字符为 } 1\}$

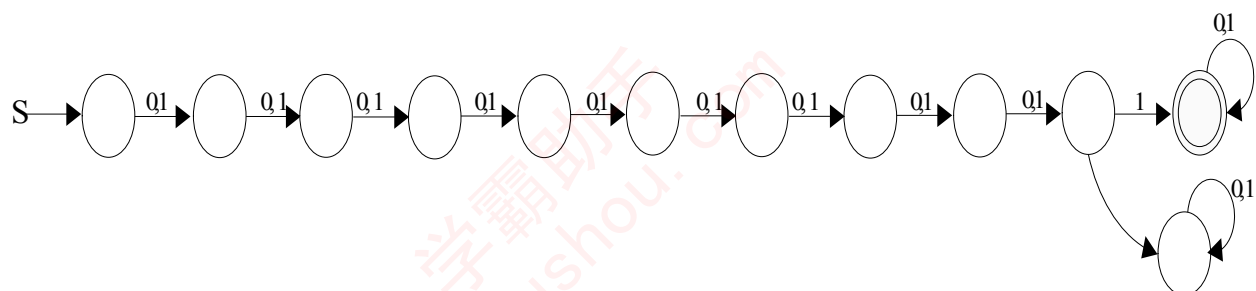
- 以 0 开头的串不被接受, 故设置陷阱状态, 当 DFA 在启动状态读入的符号为 0, 则进入陷阱状态
- 设置 7 个状态: 开始状态  $q_s, q_0$ : 除以 5 余 0 的等价类,  $q_1$ : 除以 5 余 1 的等价类,  $q_2$ : 除以 5 余 2 的等价类,  $q_3$ : 除以 5 余 3 的等价类,  $q_4$ : 除以 5 余 4 的等价类, 接受状态  $q_t$
- 状态转移表为

状态	0	1
$q_0$	$q_1$	$q_2$
$q_1$	$q_3$	$q_2$
$q_2$	$q_0$	$q_4$
$q_3$	$q_1$	$q_2$

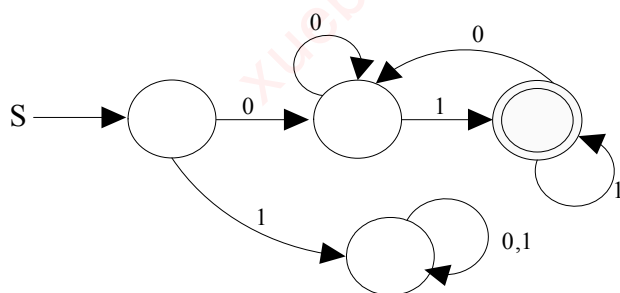
q4	q3	q4
----	----	----



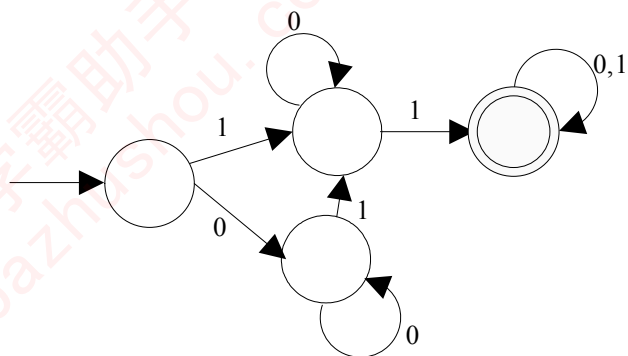
- (8)  $\{x|x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 的第十个字符为 } 1\}$   
 (设置一个陷阱状态，一旦发现  $x$  的第十个字符为 0，进入陷阱状态)



- (9)  $\{x|x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 以 } 0 \text{ 开头以 } 1 \text{ 结尾}\}$   
 (设置陷阱状态，当第一个字符为 1 时，进入陷阱状态)



- (10)  $\{x|x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中至少含有两个 } 1\}$



(11)  $\{x|x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且如果 } x \text{ 以 } 1 \text{ 结尾, 则它的长度为偶数; 如果 } x \text{ 以 } 0 \text{ 结尾, 则它的长度为奇数}\}$

可将  $\{0, 1\}^+$  的字符串分为 4 个等价类。

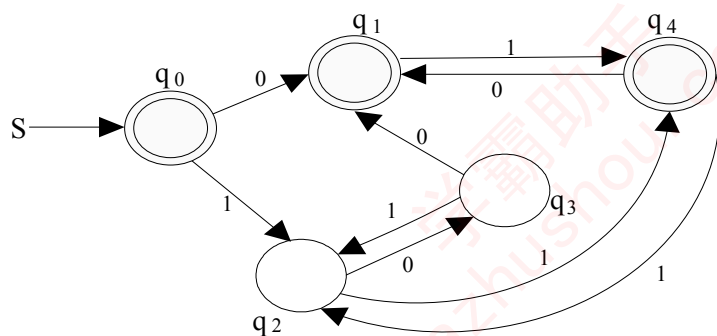
$q_0$ :  $[\epsilon]$  的等价类, 对应的状态为终止状态

$q_1$ :  $x$  的长度为奇且以 0 结尾的等价类

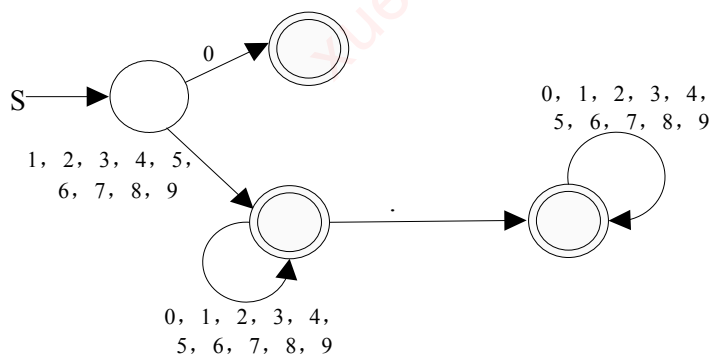
$q_2$ :  $x$  的长度为奇且以 1 结尾的等价类

$q_3$ :  $x$  的长度为偶且以 0 结尾的等价类

$q_4$ :  $x$  的长度为偶且以 1 结尾的等价类



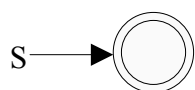
(12)  $\{x|x \text{ 是十进制非负数}\}$



(13)  $\Phi$



(14)  $\epsilon$



\*\*\*\*\*

3 (1)

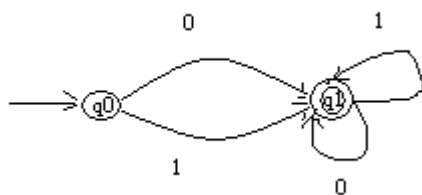
(张友坤 02282061)



$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\text{Set}(q_0) = \{x \mid x \in \Sigma^*\}$$

(2)

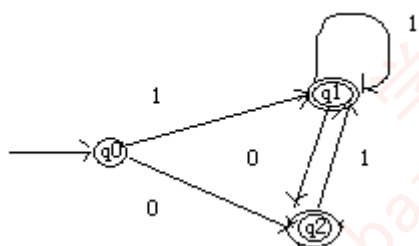


$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\text{Set}(q_0) = \varepsilon$$

$$\text{Set}(q_1) = \{x \mid x \in \Sigma^+\}$$

(3)



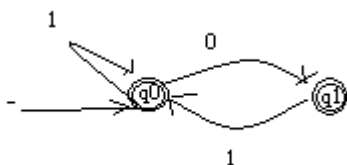
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\text{Set}(q_0) = \varepsilon$$

$$\text{Set}(q_1) = \{x \mid x \in \Sigma^+ \text{ 并且 } x \text{ 中不含形如 } 00 \text{ 的子串} \}$$

$$\text{Set}(q_2) = \{x \mid x \in \Sigma^+ \text{ 并且 } x \text{ 中不含形如 } 00 \text{ 的子串} \}$$

(4)

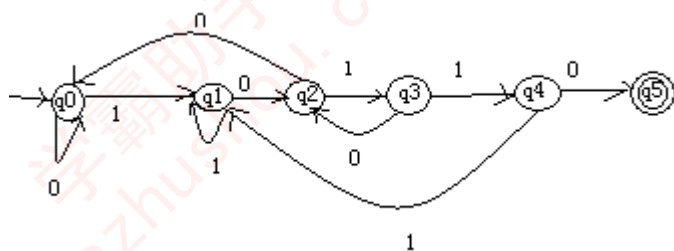


$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\text{Set}(q_0) = \{x \mid x \in \Sigma^* \text{ 并且 } x \text{ 中不含形如 } 00 \text{ 的子串} \}$$

$$\text{Set}(q_1) = \{x \mid x \in \Sigma^* \text{ 并且 } x \text{ 中不含形如 } 00 \text{ 的子串} \}$$

(5)



$\Sigma = \{0,1\}$

$\text{Set}(q_0) = \{x \mid x \in \Sigma^*, \text{并且 } x \in \{0\}^* \text{ 或者 } x \text{ 中含形如 } 100 \text{ 的子串} \}$

$\text{Set}(q_1) = \{x \mid x \in \Sigma^*, \text{并且 } x \text{ 中含形如 } 1 \text{ 的子串} \}$

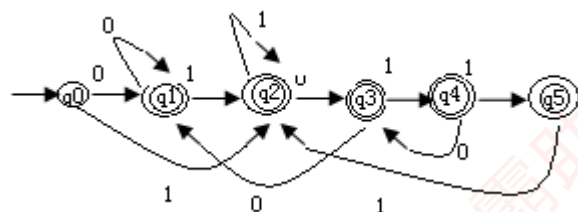
$\text{Set}(q_2) = \{x \mid x \in \Sigma^*, \text{并且 } x \text{ 中含形如 } 10 \text{ 的子串} \}$

$\text{Set}(q_3) = \{x \mid x \in \Sigma^*, \text{并且 } x \text{ 中含形如 } 101 \text{ 的子串} \}$

$\text{Set}(q_4) = \{x \mid x \in \Sigma^*, \text{并且 } x \text{ 中含形如 } 1011 \text{ 的子串} \}$

$\text{Set}(q_5) = \{x \mid x \in \Sigma^*, \text{并且 } x \text{ 中含形如 } 10110 \text{ 的子串} \}$

(6)



$\Sigma = \{0,1\}$

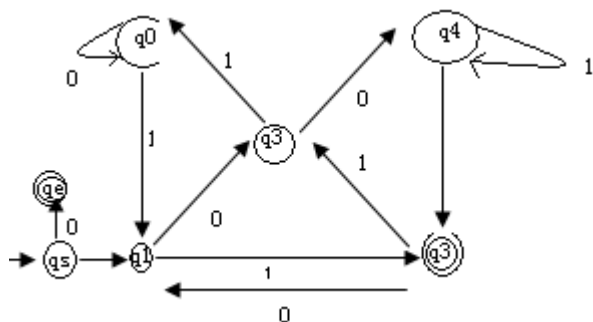
$\text{Set}(q_0) = \{\varepsilon\}$

$\text{Set}(q_1) = \{x \mid x \in \{0^+\}\}$

$\text{Set}(q_2) = \{x \mid x \in \Sigma^*, \text{并且 } x \text{ 中不含形如 } 10110 \text{ 的子串而且 } x \text{ 中含有 } 1\}$

$\text{Set}(q_3) = \{x \mid x \in \Sigma^*, \text{并且 } x \text{ 中不含形如 } 10110 \text{ 的子串而且 } x \text{ 中含有 } 1\}$

(7)▲



$\Sigma = \{0,1\}$

$\text{Set}(q_s) = \{\varepsilon\}$

$\text{Set}(q_e) = \{0\}$

$\text{Set}(q_1) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且把 } x \text{ 看成二进制数时, } x \% 5 = 1\}$

$\text{Set}(q_2) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且把 } x \text{ 看成二进制数时, } x \% 5 = 2\}$

$\text{Set}(q_3) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且把 } x \text{ 看成二进制数时, } x \% 5 = 3\}$   
 $\text{Set}(q_4) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且把 } x \text{ 看成二进制数时, } x \% 5 = 4\}$   
 $\text{Set}(q_0) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且把 } x \text{ 看成二进制数时, } x \% 5 = 0 \text{ 并且 } x \text{ 不为 } 0\}$

(8)

$M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_{10}\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

当  $0 \leq i \leq 8$  时候,

$\delta(q_i, 0) = \delta(q_i, 1) = q_{i+1}$

$\delta(q_9, 1) = q_{10}$

$\delta(q_{10}, 0) = \delta(q_{10}, 1) = q_{10}$

$F = \{q_{10}\}$

$\text{Set}(q_0) = \{\varepsilon\}$

$\text{Set}(q_1) = \{0, 1\}$

$\text{Set}(q_2) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且 } |x| = 2\}$

$\text{Set}(q_3) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且 } |x| = 3\}$

$\text{Set}(q_4) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且 } |x| = 4\}$

$\text{Set}(q_5) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且 } |x| = 5\}$

$\text{Set}(q_6) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且 } |x| = 6\}$

$\text{Set}(q_7) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且 } |x| = 7\}$

$\text{Set}(q_8) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且 } |x| = 8\}$

$\text{Set}(q_9) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且 } |x| = 9\}$

$\text{Set}(q_{10}) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且 } x \text{ 的第十个字符是 } 1\}$

(9)  $M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$\delta(q_0, 0) = q_1$

$\delta(q_1, 0) = q_1$

$\delta(q_1, 1) = q_2$

$\delta(q_2, 1) = q_2$

$\delta(q_2, 0) = q_1$

$F = \{q_2\}$

$\text{Set}(q_0) = \{\varepsilon\}$

$\text{Set}(q_1) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且 } x \text{ 以 } 0 \text{ 开头以 } 0 \text{ 结尾}\}$

$\text{Set}(q_2) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且 } x \text{ 以 } 0 \text{ 开头以 } 1 \text{ 结尾}\}$

(10)  $M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$\delta(q_0, 0) = q_0$

$\delta(q_0, 1) = q_1$

$\delta(q_1, 0) = q_1$

$$\delta(q_1, 1) = q_2$$

$$\delta(q_2, 1) = q_2$$

$$\delta(q_2, 0) = q_2$$

$$F = \{q_2\}$$

$$\text{Set}(q_0) = \{0\}^*$$

$$\text{Set}(q_1) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且 } x \text{ 中只有一个 } 1\}$$

$$\text{Set}(q_2) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{并且 } x \text{ 至少有俩个 } 1\}$$

$$(11) M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\delta(q_0, 0) = q_1$$

$$\delta(q_0, 1) = q_4$$

$$\delta(q_1, 0) = q_3$$

$$\delta(q_1, 1) = q_2$$

$$\delta(q_2, 1) = q_4$$

$$\delta(q_2, 0) = q_1$$

$$\delta(q_3, 0) = q_1$$

$$\delta(q_3, 1) = q_4$$

$$\delta(q_4, 1) = q_2$$

$$\delta(q_4, 0) = q_3$$

$$F = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$\text{Set}(q_0) = \{\varepsilon\}$$

$$\text{Set}(q_1) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{以 } 0 \text{ 结尾, 长度为奇数}\}$$

$$\text{Set}(q_2) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{以 } 1 \text{ 结尾, 长度为偶数}\}$$

$$\text{Set}(q_3) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{以 } 0 \text{ 结尾, 长度为偶数}\}$$

$$\text{Set}(q_4) = \{x \mid x \in \Sigma^+, \text{以 } 1 \text{ 结尾, 长度为奇数}\}$$

(12)

$$M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

$$\Sigma = \{., 0, 1, 2, \dots, 9\}$$

$$F = \{q_1, q_2, q_4\}$$

$$\delta(q_0, 0) = q_1$$

$$\delta(q_0, 1|2|3|4|5|6|7|8|9) = q_2$$

$$\delta(q_1, .) = q_2$$

$$\delta(q_2, 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9) = q_2$$

$$\delta(q_2, .) = q_3$$

$$\delta(q_3, 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9) = q_4$$

$$\delta(q_4, 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9) = q_4$$

$$\text{Set}(q_0) = \{\varepsilon\}$$

$$\text{Set}(q_1) = \{0\}$$

$$\text{Set}(q_2) = \{\text{十进制正整数}\}$$

$$\text{Set}(q_3) = \{\text{十进制非负整数后面接个小数点 } .\}$$

$$\text{Set}(q_4) = \{\text{十进制正小数}\}$$



(13)



$\text{Set}(q0) = \{\varepsilon\}$

$\text{Set}(q1) = \emptyset$

(14)



$\text{Set}(q0) = \{\varepsilon\}$

\*\*\*\*\*

4 在例 3-6 中, 状态采用  $q[a_1a_2...a_n]$  的形式, 它比较清楚地表达出该状态所对应的记忆内

容, 给我们解决此问题带来了很大的方便, 我们是否可以直接用  $[a_1a_2...a_n]$  代替

$q[a_1a_2...a_n]$  呢? 如果能, 为什么? 如果不能, 又是为什么? 从此问题的讨论, 你能总

结出什么来?

(唐明珠 02282084)

答: 我认为能够直接用  $[a_1a_2...a_n]$  代替  $q[a_1a_2...a_n]$ , 因为在例 3-6 中,  $q[a_1a_2...a_n]$  只是一

种新的表示方法, 用来表示状态存储的字符, 这样就省去了在  $\delta$  中逐一给出每一个具体的输入字符和状态的定义。它的作用在于使 FA 中状态定义更加简洁。

得到结论: 在今后描述 FA 时, 应该根据具体的情况, 使用适当的方法。

\*\*\*\*\*

5. 试区别 FA 中的陷阱状态和不可达状态。

(吴贤珺 02282047)

解: (1) 陷阱状态 (课本 97 页): 指在其它状态下发现输入串不可能是该 FA 所识别的句子时所进入的状态。FA 一旦进入该状态, 就无法离开, 并在此状态下, 读完输入串中剩余的字符。

(2) 不可达状态 (课本 108 页): 指从 FA 的开始状态出发, 不可能到达的状态。就 FA 的状态转移图来说, 就是不存在从开始状态对应的顶点出发, 到达该状态对应顶点的途径。

(3) 从两者的定义可见: 相对于不可达状态来说, 陷阱状态是可达的。但是, 它们都是状态转移图中的非正常状态。如果从状态转移图中的状态引一条弧到不可达状态, 同时不可达状态所有的移动都是到自身。这样, 不可达状态就变成了陷阱状态。

\*\*\*\*\*

注: 此题目有问题, 可以将题设改为:  $x$  中 0 和 1 个数相等且交替出现

6. 证明: 题目有不严密之处, 图中给出 DFA 与题目中的语言  $L(M) = \{x | x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中 } 0 \text{ 的个数和 } 1 \text{ 的个数相等}\}$  不完全对应, 首先图中的 DFA 可接受空字符串, 而  $L(M)$  不接受, 其次, 对于有些句子, 例如 1100,  $L(M)$  可以接受, 但 DFA 不接受

(1) 根据图中的 DFA 可看出, 右下角的状态为陷阱状态, 所以去除陷阱状态

(2) 由 DFA 可构造出与其对应的右线性文法: (刘钰 02282083)

$$S \rightarrow 0A$$

$$A \rightarrow 1S|1$$

$$S \rightarrow 1B$$

$$B \rightarrow 0S|0$$

将1S, 1代入 $S \rightarrow 0A$ , 0S, 0代入 $S \rightarrow 1B$ 得

$$S \rightarrow 01S|01$$

$$S \rightarrow 10S|10$$

由此可以看出该文法接受的语言为 $L=\{(10|01)^*\}$ ,显然01或10分别是作为整体出现的,所以 $L(M)$ 中0和1的个数相等。

\*\*\*\*\*

7. 设 DFA  $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , 证明: 对于  $\forall x, y \in \Sigma^*, q \in Q, \delta(q, xy) = \delta(\delta(q, x), y)$

注: 采用归纳证明的思路

证明:

(周期律 02282067)

首先对  $y$  归纳, 对任意  $x$  来说,  $|y|=0$  时, 即  $y=\varepsilon$

根据 DFA 定义  $\delta(q, \varepsilon) = q, \delta(q, xy) = \delta(q, x) = \delta(\delta(q, x), \varepsilon) = \delta(\delta(q, x), y)$ , 故原式

成立。

当  $|y|=n$  时, 假设原式成立, 故当  $|y|=n+1$  时,

不妨设  $y=wa, |w|=n, |a|=1$

根据 DFA 定义  $\delta(q, xa) = \delta(\delta(q, x), a), a \in \Sigma$ , 故

$$\delta(q, xy) = \delta(q, xwa) = \delta(\delta(q, xw), a) = \delta(\delta(\delta(q, x), w), a) = \delta(\delta(q, x), wa) = \delta(\delta(q, x), y)$$

原式成立,

同理可证, 对任意的  $y$  来说, 结论也是成立的。

综上所述, 原式得证

\*\*\*\*\*

8. 证明: 对于任意的 DFA  $M_1=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F_1)$  存在 DFA  $M_2=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F_2)$ , (冯蕊 02282075)  
使得  $L(M_2)=\Sigma^*-L(M_1)$ 。

证明: (1) 构造  $M_2$ 。

设 DFA  $M_1=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F_1)$  取 DFA  $M_2=(Q, \Sigma, \delta, q_0, Q-F_1)$

(2) 证明  $L(M_2)=\Sigma^*-L(M_1)$

对任意  $x \in \Sigma^*$

$$x \in L(M_2)=\Sigma^*-L(M_1) \Leftrightarrow \delta(q_0, x) \in Q-F_1 \Leftrightarrow \delta(q_0, x) \in Q \text{ 并且 } \delta(q_0, x) \notin F_1 \Leftrightarrow x \in \Sigma^* \text{ 并且 } x \notin L(M_1) \Leftrightarrow x \in \Sigma^*-L(M_1)$$

\*\*\*\*\*

9. 对于任意的 DFA  $M_1=(Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$ , 请构造 DFA  $M_2=(Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$ , 使得  $L(M_1)=L(M_2)^T$ 。其中  $L(M)^T=\{x|x^T \in L(M)\}$  (褚颖娜 02282072)

(1) 构造  $\varepsilon$ -NFA  $M$  使得  $L(M)=L(M_1)$  取  $\varepsilon$ -NFA  $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_{01}\})$  其中:

1)  $Q=Q_1 \cup \{q_0\}, q_0 \notin Q_1$

2) 对于  $\forall q, p \in Q, a \in \Sigma$ , 如果  $\delta_1(q, a) = p, q \in \delta(p, a)$

3)  $\delta(q_0, \varepsilon) = F_1$

(2) 证明:  $L(M) = L(M_1)^T$

对  $\forall x = a_1 a_2 \dots a_m \in L(M)$

$q_0 a_1 a_2 \dots a_m \vdash_{q_f} a_1 a_2 \dots a_m \vdash_{a_1} q_1 a_2 \dots a_m \vdash_{a_2} q_2 \dots a_m \vdash \dots \vdash_{a_1} a_2 \dots q_{m-1} a_m$

$\vdash_{a_1} a_2 \dots a_m q_{01}$

其中  $q_f \in \delta(q_0, \varepsilon)$ ,  $q_1 \in \delta(q_f, a_1)$ ,  $q_2 \in \delta(q_1, a_2), \dots, q_{01} \in \delta(q_{m-1}, a_m)$  并且  $q_f \in F_1$

则  $\delta_1(q_{01}, a_m) = q_{m-1}$ ,  $\delta_1(q_{m-1}, a_{m-1}) = q_{m-2}, \dots, \delta_1(q_2, a_2) = q_1, \delta_1(q_1, a_1) = q_f$

因此  $q_{01} a_m a_{m-1} \dots a_1 \vdash_{a_m} q_{m-1} a_{m-1} \dots a_1 \vdash_{a_m} a_{m-1} \dots q_2 a_2 a_1 \vdash_{a_m} a_{m-1} \dots a_2 q_1 a_1$

$\vdash_{a_m} a_{m-1} \dots a_2 a_1 q_f$

因此  $a_m a_{m-1} \dots a_1 \in L(M_1)$  即  $x^T \in L(M_1)$

同理可证对于  $\forall x = a_1 a_2 \dots a_m \in L(M_1)$   $x^T = a_m a_{m-1} \dots a_1 \in L(M)$

$L(M) = L(M_1)^T$  得证

(3) 将  $\varepsilon$ -NFA  $M$  确定化

首先构造与  $\varepsilon$ -NFA  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_{01}\})$  等价的 NFA  $M_3 = (Q, \Sigma, \delta_2, q_0, \{q_{01}\})$

其中对于  $\forall (q, a) \in Q \times \Sigma$   $\delta_2(q, a) = \delta^+(q, a)$

然后按照以前学过的方法构造与 NFA  $M_3 = (Q, \Sigma, \delta_2, q_0, \{q_{01}\})$  等价的 DFA

$M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, [q_0], F_1)$  其中:  $Q_1 = 2^Q$   $F_1 = \{q_{01}\}$

$\delta_1([q_1, q_2, \dots, q_n], a) = [p_1, p_2, \dots, p_n]$  当且仅当  $\delta_2(\{q_1, q_2, \dots, q_n\}, a) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

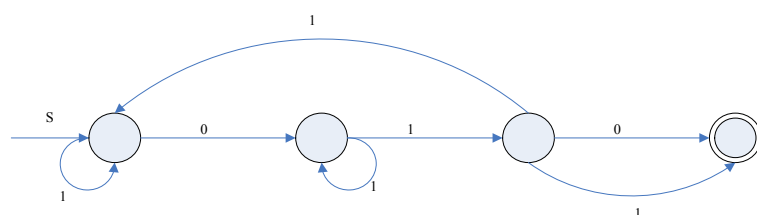
\*\*\*\*\*

注: 此题 (10 题) 张友坤、吴玉涵所做完全一样!!

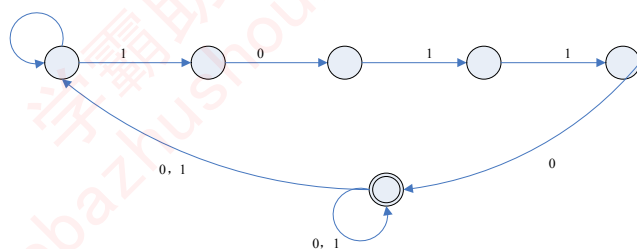
10、构造识别下列语言的 NFA

(吴玉涵 02282091)

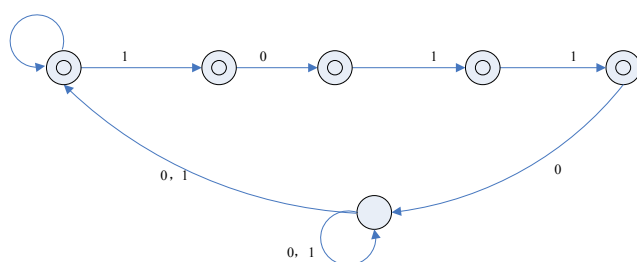
(1)  $\{x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中不含形如 } 00 \text{ 的子串}\}$



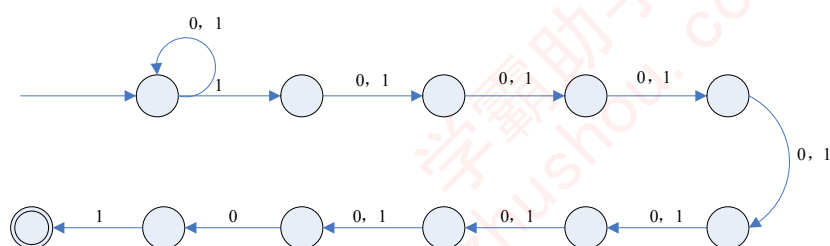
(2)  $\{x \mid x \in \{0,1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中含形如 } 10110 \text{ 的子串}\}$



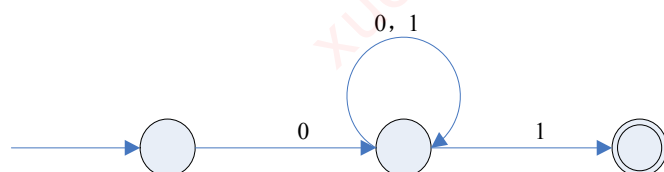
(3)  $\{x \mid x \in \{0,1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中不含形如 } 10110 \text{ 的子串}\}$



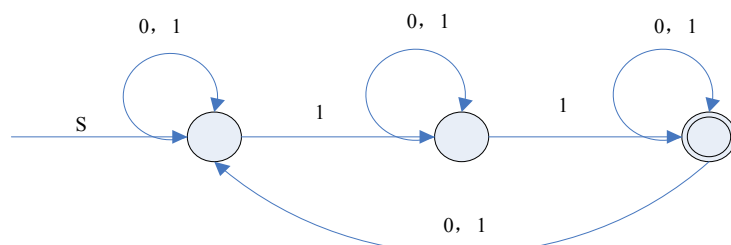
(4)  $\{x \mid x \in \{0,1\}^+ \text{ 和 } x \text{ 的倒数第 } 10 \text{ 个字符是 } 1, \text{ 且以 } 01 \text{ 结尾}\}$



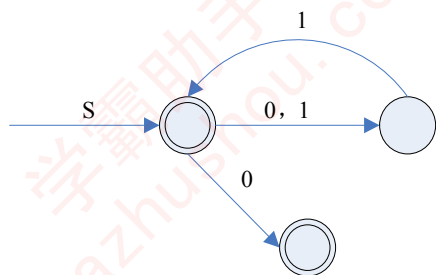
(5)  $\{x \mid x \in \{0,1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 以 } 0 \text{ 开头以 } 1 \text{ 结尾}\}$



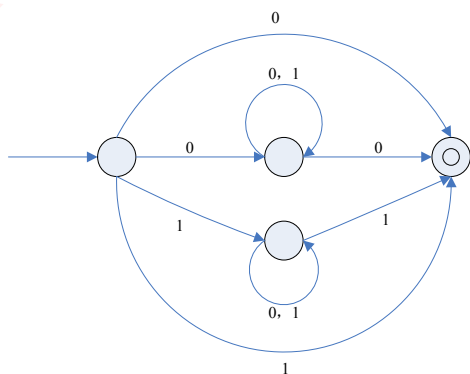
(6)  $\{x \mid x \in \{0,1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中至少含有两个 } 1\}$



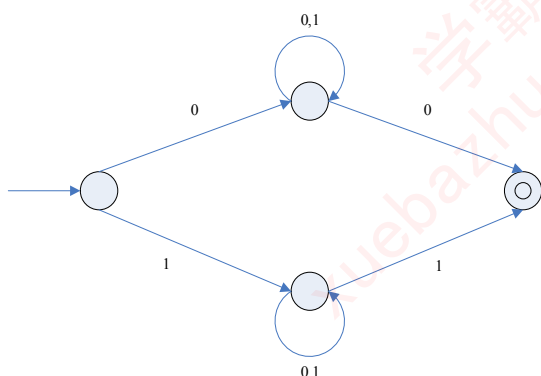
(7)  $\{x \mid x \in \{0,1\}^* \text{ 且如果 } x \text{ 以 } 1 \text{ 结尾, 则它的长度为偶数; 如果以 } 0 \text{ 结尾, 则它的长度为奇数}\}$



(8)  $\{x \mid x \in \{0,1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 的首字符和尾字符相等}\}$



(9)  $\{xwx^T \mid x, w \in \{0,1\}^+\}$



这是最基本的单元，其他的可以通过这个逐级构造出来，以满足题目要求。

\*\*\*\*\*

11. 根据给定的 NFA，构造与之等价的 DFA.

(吴丹 02282090)

(1) NFA  $M_1$  的状态转移函数如表 3-9

状态说明	状态	输入字符		
		0	1	2
开始状态	q0	{q0,q1}	{q0,q2}	{q0,q2}
	q1	{q3,q0}	$\emptyset$	{q2}
	q2	$\emptyset$	{q3,q1}	{q2,q1}
终止状态	q3	{q3,q2}	{q3 }	{ q0}

解答:

状态说明	状态	输入字符		
		0	1	2
开始状态	q0	[q0,q1]	[q0,q2]	[q0,q2]
	[q0,q1]	[q0,q1,q3]	[q0,q2]	[q0,q2]
	[q0,q2]	[q0,q1]	[q0,q1,q2,q3]	[q0,q1,q2]
	[q0,q1,q2]	[q0,q1,q3]	[q0,q1,q2,q3]	[q0,q1,q2]
终止状态	[q0,q1,q3]	[q0,q1,q2,q3]	[q0,q2,q3]	[q0,q1,q2]
终止状态	[q0,q2,q3]	[q0,q1,q2,q3]	[q0,q1,q2,q3]	[q0,q2]
终止状态	[q0,q1,q2,q3]	[q0,q1,q2,q3]	[q0,q1,q2,q3]	[q0,q1,q2]

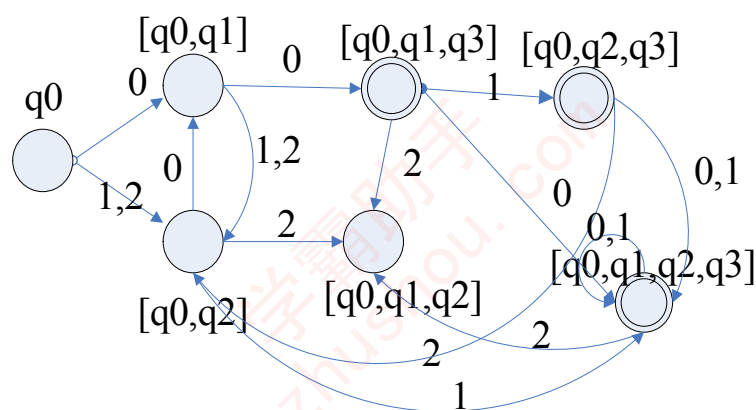


图 3-9 所示 NFA 等价的 DFA

(2) NFA  $M_2$  的状态转移函数如表 3-10

状态说明	状态	输入字符		
		0	1	2
开始状态	q0	{q1,q3}	{q1}	{q0}
	q1	{q2}	{q1,q2}	{q1}
	q2	{q3,q2}	{q0}	{q2}
终止状态	q3	$\emptyset$	{q0}	{q3}

解答:

状态说明	状态	输入字符		
		0	1	2
开始状态	q0	[q1,q3]	[q1]	[q0]
	[q1,q3]	[q2]	[q0,q1,q2]	[q1,q3]

	[q1]	[q2]	[q1,q2]	[q1]
	[q2]	[q2,q3]	[q0]	[q2]
	[q0,q1,q2]	[q1,q2,q3]	[q0, q1,q2]	[q0,q1,q2]
	[q1,q2]	[q2,q3]	[q0,q1,q2]	[q1, q2]
终止状态	[q2,q3]	[q2,q3]	[q0]	[q2,q3]
终止状态	[q1,q2,q3]	[q2,q3]	[q0,q1,q2]	[q1, q2,q3]

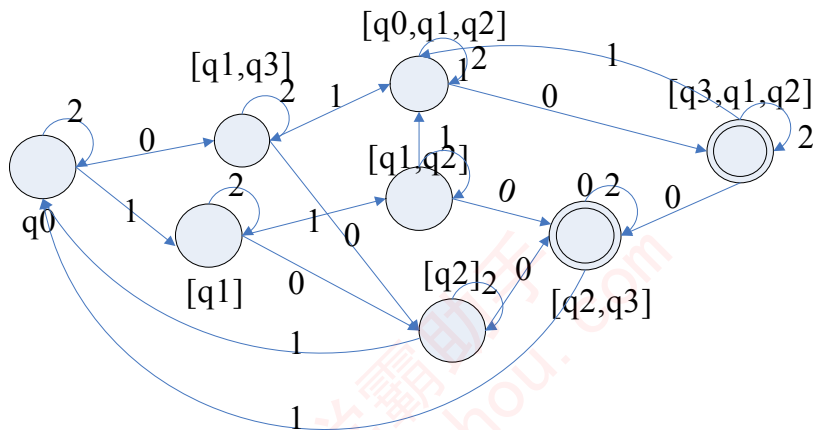


图 3-10 所示 NFA 等价的 DFA

\*\*\*\*\*

12. 证明对于任意的 NFA, 存在与之等价的 DFA, 该 DFA 最多只有一个终止状态

(刘钰 02282083)

证明: 对于任意的 NFA  $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , 我们如果能构造出一个只有一个终止状态的 NFA, 并且与之等价, 即可证明上面的定理

而对于任意的 NFA 存在下面两种情况:

(1)终止状态只有一个

(2)终止状态有多个

要构造这个等价的 DFA, 可以采用如下方法:

对(1)无需变化, 该 DFA 即为满足条件的 DFA

对(2)可以在该 DFA 的状态图上添加一个新的终止状态, 并将原来的多个终止状态所连接的弧复制到该状态上, 此时这个终止状态为新状态图中唯一的终止状态, 且这个新的 DFA 与原 DFA 等价, 满足条件

我们总能构造出这样的 DFA

因此对于任意的 DFA, 存在与之等价的 DFA, 该 DFA 最多只有一个终止状态

\*\*\*\*\*

13. 试给出一个构造方法, 对于任意的 NFA  $M_1=(Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$ , 构造 DFA

$M_2=(Q_2, \Sigma, \delta_2, q_0, F_2)$ , 使得  $L(M_2)=\Sigma^*-L(M_1)$

注: 转化成相应的 DFA 进行处理, 然后可参考第 8 题的思路

证明:

(周期律 02282067)

首先构造一个与 NFA  $M_1$  等价的 DFA,  $M_3$  根据定理 3.1 (P106),  $L(M_3) = L(M_1)$

构造  $M_3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, [q_0], F_3)$ , 其中

$$Q_3 = 2^Q, F_3 = \{[p_1, p_2 \dots p_m] \mid \{p_1, p_2 \dots p_m\} \subseteq Q, \{p_1, p_2 \dots p_m\} \cap F_1 \neq \emptyset, \{p_1, p_2 \dots p_m\} \subseteq Q, a \in \Sigma\}$$

$$\delta_3([q_1 \dots q_n], a) = [p_1 \dots p_m] \Leftrightarrow \delta_1(\{q_1 \dots q_n\}, a) = \{p_1 \dots p_m\}$$

$$\text{在此基础上 } M_2, Q_2 = Q_3, \delta_2 = \delta_3, F_2 = \{[p_1 \dots p_m] \mid [p_1 \dots p_m] \cap F_3 = \emptyset\}$$

即取所有  $M_1$  确定化后不是终结状态的状态为  $M_2$  的终结状态。

为了证明  $L(M_2) = \Sigma^* - L(M_3)$ , 我们在  $M_3$  的基础上  $M_4 = (Q_4, \Sigma, \delta_4, q_0, F_4)$ , 其

中  $Q_4 = Q_3, \delta_4 = \delta_3, F_4 = Q_4$ , 即所有  $M_1$  确定化后的状态都为终结状态。显然

$$L(M_4) = \Sigma^*,$$

$\forall x \in L(M_2)$ , 则  $\delta(q_0, x) \cap F_2 \neq \emptyset \Rightarrow \delta(q_0, x) \cap F_3 \neq \emptyset \Rightarrow x \notin L(M_3)$ , 又因为

$$\delta(q_0, x) \in Q_3 \Rightarrow \delta(q_0, x) \in F_4 \Rightarrow \delta(q_0, x) \in L(M_4) = \Sigma^*, \text{ 故 } x \in \Sigma^* - L(M_3),$$

$$\text{故 } L(M_2) \subseteq \Sigma^* - L(M_3)$$

$$\text{同理容易证明 } L(M_2) \supseteq \Sigma^* - L(M_3)$$

$$\text{故 } L(M_2) = \Sigma^* - L(M_3), \text{ 又因为 } L(M_3) = L(M_1), \text{ 故 } L(M_2) = \Sigma^* - L(M_1)$$

可知, 构造的  $M_2$  是符合要求的。

\*\*\*\*\*

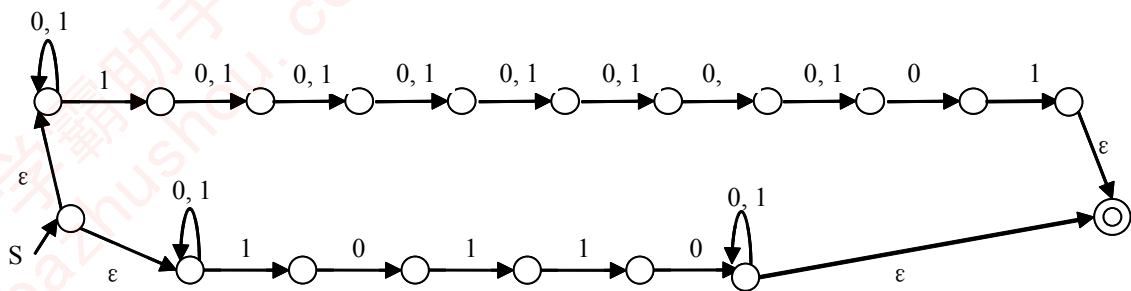
14. 构造识别下列语言的  $\epsilon$ -NFA。

(吴贤珺 02282047)

(1)  $\{x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中含形如 } 10110 \text{ 的子串}\} \cup \{x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 和 } x \text{ 的倒数第 } 10 \text{ 个字符是 } 1, \text{ 且以 } 01 \text{ 结尾}\}。$

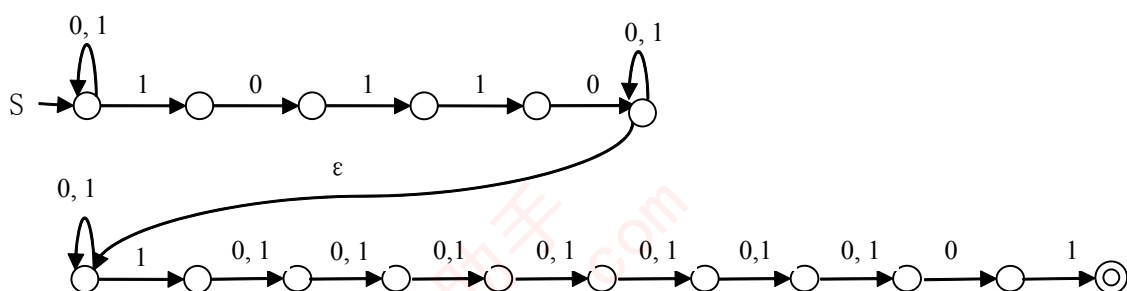
解: 得到的  $\epsilon$ -NFA 如下所示:





- (2)  $\{x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中含形如 } 10110 \text{ 的子串}\} \cup \{x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 和 } x \text{ 的倒数第 } 10 \text{ 个字符是 } 1, \text{ 且以 } 01 \text{ 结尾}\}$

解：得到的  $\epsilon$ -NFA 如下所示：



- (3)  $\{x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中不含形如 } 10110 \text{ 的子串}\} \cup \{x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 以 } 0 \text{ 开头以 } 1 \text{ 结尾}\}$ 。

解：关键是构造第一个 FA，方法是设置 5 个状态：

$q_0$ ：表示开始状态，以及连续出现了两个以上的 0 时所进入的状态。

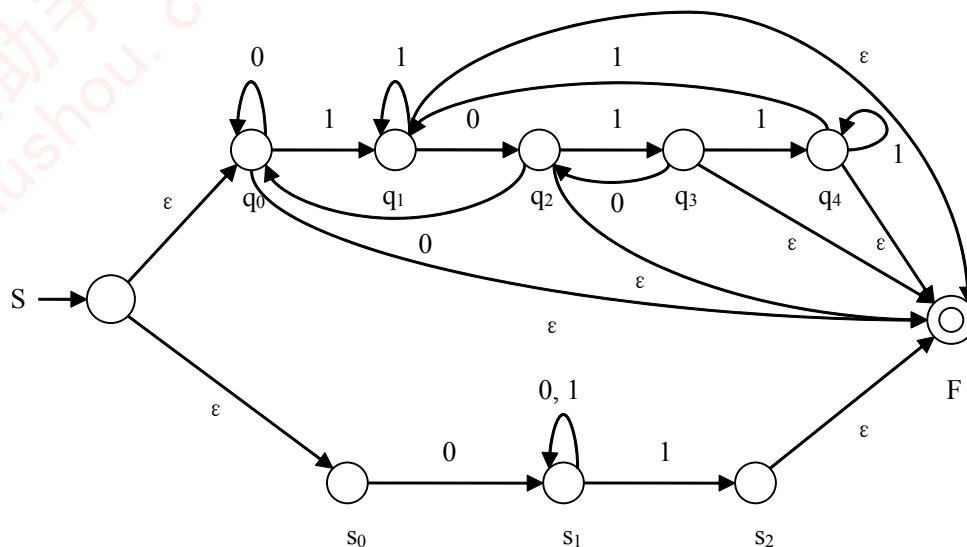
$q_1$ ：表示  $q_0$  状态下接受到 1 时（即开始状态或 2 个以上的 0 后输入 1 时）所进入的状态。

$q_2$ ：表示  $q_1$  状态下接受到 0 时（即开始状态或 2 个以上的 0 后输入 10 时）所进入的状态。

$q_3$ ：表示  $q_2$  状态下接受到 1 时（即开始状态或 2 个以上的 0 后输入 101 时）所进入的状态。

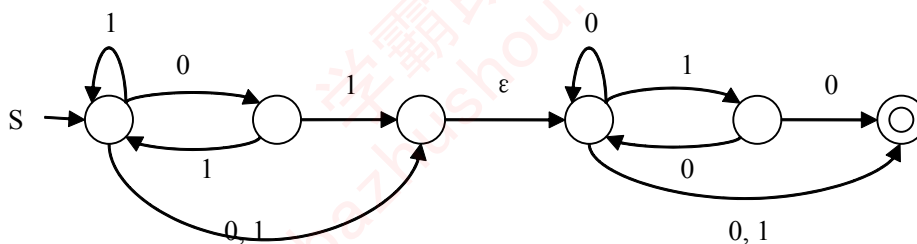
$q_4$ ：表示  $q_3$  状态下接受到 1 时（即开始状态或 2 个以上的 0 后输入 1011 时）所进入的状态。

故得到的  $\epsilon$ -NFA 如下所示：

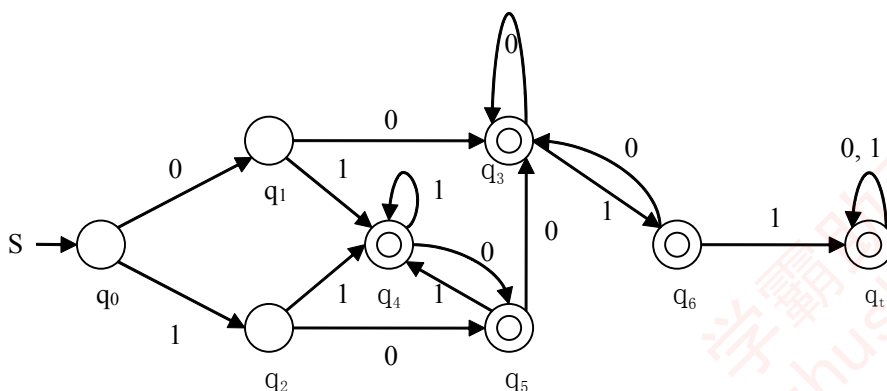


(4)  $\{ x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中不含形如 } 00 \text{ 的子串} \} \{ x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中不含形如 } 11 \text{ 的子串} \}$ 。

解：得到的  $\epsilon$ -NFA 如下所示：

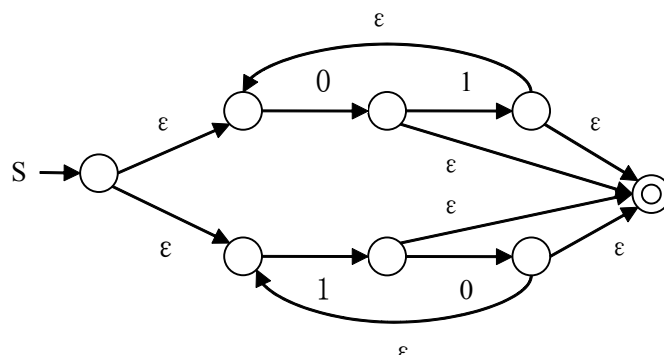


另外，本题可以构造 DFA 如下（其中  $q_t$  为陷阱状态）：

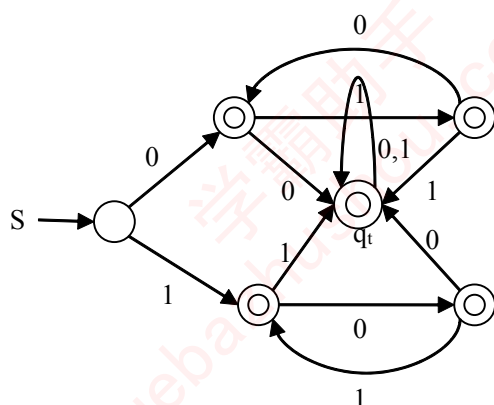


(5)  $\{ x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中不含形如 } 00 \text{ 的子串} \} \cap \{ x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中不含形如 } 11 \text{ 的子串} \}$ 。

解：由于  $x$  中既不含形如  $00$  的子串，又不含形如  $11$  的子串，故  $x$  中只能是  $01$  相间的串。所以，得到的  $\varepsilon$ -NFA 如下所示：



另外，本题可以构造 DFA 如下（其中  $q_t$  为陷阱状态）：

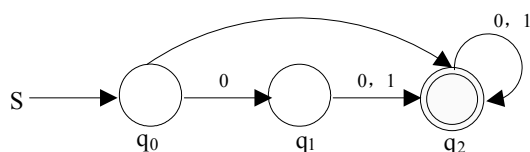


\*\*\*\*\*

15. (1) 根据 NFAM<sub>3</sub> 的状态转移函数，起始状态  $q_0$  的  $\varepsilon$ -闭包为  $\varepsilon\text{-CLOSURE}(q_0) = \{ q_0, q_2 \}$ 。由此对以后每输入一个字符后得到的新状态再做  $\varepsilon$ -闭包，得到下表：（陶文婧 02282085）

状态	0	1
$\{ q_0, q_2 \}$	$\{ q_0, q_1, q_2 \}$	$\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$
$\{ q_0, q_1, q_2 \}$	$\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$	$\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$
$\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$	$\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$	$\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$

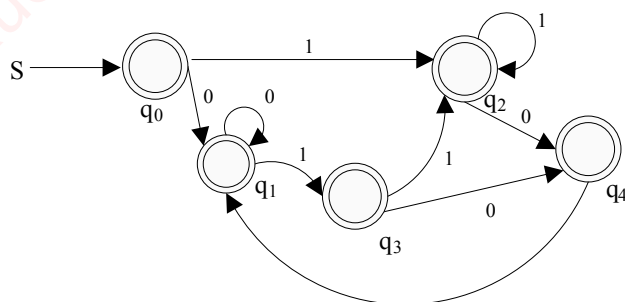
$q_0 = \{ q_0, q_2 \}$ ,  $q_1 = \{ q_0, q_1, q_2 \}$ ,  $q_2 = \{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$ ，因为  $q_3$  为终止状态，所以  $q_2 = \{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$  为终止状态



(2) 又上述方法得

状态	0	1
$\{q_1, q_3\}$	$\{q_3, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\{q_3, q_2\}$	$\{q_3, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_3, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

$q_0=\{q_1, q_3\}$ ,  $q_1=\{q_3, q_2\}$ ,  $q_2=\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ ,  $q_3=\{q_0, q_1, q_3\}$ ,  $q_4=\{q_1, q_2, q_3\}$  因为各状态均含有终止状态, 所以  $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4$  均为终止状态



注: 本题没有必要按照 NFA 到 DFA 转化的方法来做, 而且从  $\epsilon$ -NFA 到 NFA 转化时状态没有必要改变, 可以完全采用  $\epsilon$ -NFA 中的状态

如 (1)

状态	0	1
$q_0$ (开始状态)	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$q_1$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
$q_2$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
$q_3$ (终止状态)	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

(2)

状态	0	1
$q_0$ (开始状态)	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$q_1$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$
$q_2$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$
$q_3$ (终止状态)	空	$\{q_0\}$

\*\*\*\*\*

16. 证明对于  $\forall$  的 FA  $M_1=(Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$ , FA  $M_2=(Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2)$ , 存在 FA  $M$ ,

使得  $L(M)=L(M_1) \cup L(M_2)$

(褚颖娜 02282072)

证明: 不妨设  $Q_1$  与  $Q_2$  的交集为空

(1) 构造  $M=(Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}, \Sigma, \delta, q_0, F)$  其中:

1)  $\Sigma=\Sigma_1 \cup \Sigma_2$   $F=F_1 \cup F_2$

2)  $\delta(q_0, \epsilon)=\{q_{01}, q_{02}\}$  对于  $\forall q \in Q_1, a \in \Sigma_1$   $\delta(q, a)=\delta_1(q, a)$

对于  $\forall q \in Q_2, a \in \Sigma_2, \delta(q, a) = \delta_2(q, a)$

(3) 证明:

1) 首先证  $L(M_1) \cup L(M_2) \in L(M)$

设  $x \in L(M_1) \cup L(M_2)$ , 从而有  $x \in L(M_1)$  或者  $x \in L(M_2)$ , 当  $x \in L(M_1)$  时

$$\delta_1(q_0, x) \in F_1$$

由 M 的定义可得:

$$\begin{aligned} \delta(q_0, x) &= \delta(q_0, \varepsilon x) = \delta(\delta(q_0, \varepsilon), x) = \delta(\{q_{01}, q_{02}\}, x) = \delta(q_{01}, x) \cup \delta(q_{02}, x) \\ &= \delta_1(q_{01}, x) \cup \delta(q_{01}, x) \in F_1 \cup \delta(q_{01}, x) \text{ 即 } x \in L(M) \end{aligned}$$

同理可证当  $x \in L(M_2)$  时  $x \in L(M)$

故  $L(M_1) \cup L(M_2) \in L(M)$

2) 再证明  $L(M) \in L(M_1) \cup L(M_2)$

设  $x \in L(M)$  则  $\delta(q_0, x) \in F$

由 M 的定义:

$$\delta(q_0, x) = \delta(q_0, \varepsilon x) = \delta(\delta(q_0, \varepsilon), x) = \delta(\{q_{01}, q_{02}\}, x) = \delta(q_{01}, x) \cup \delta(q_{02}, x)$$

如果是  $\delta(q_{01}, x)$  因为  $Q_1$  与  $Q_2$  的交集为空 而且  $\delta(q_0, x) \in F \quad F = F_1 \cup F_2$  则

$$\delta(q_{01}, x) = \delta_1(q_{01}, x) \in F_1 \text{ 因此 } x \in L(M_1)$$

如果是  $\delta(q_{02}, x)$  因为  $Q_1$  与  $Q_2$  的交集为空 而且  $\delta(q_0, x) \in F \quad F = F_1 \cup F_2$  则

$$\delta(q_{02}, x) = \delta_2(q_{02}, x) \in F_2 \text{ 因此 } x \in L(M_2)$$

因此  $x \in L(M_1) \cup L(M_2) \quad L(M) \in L(M_1) \cup L(M_2)$  得证

因此  $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$

\*\*\*\*\*

(唐明珠 02282084)

**17** 证明: 对于任意的 FA  $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1), FAM_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2)$ ,

存在 FA M, 使得  $L(M) = L(M_1)L(M_2)$ .

证明: 令  $M = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, q_{01}, \{f_2\})$ , 其中  $\delta$  的定义为:

1) 对  $\forall q \in Q_1 - \{f_1\}, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

$$\delta(q, a) = \delta_1(q, a);$$

2) 对  $\forall q \in Q_2 - \{f_2\}, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

$$\delta(q, a) = \delta_2(q, a);$$

$$3) \delta(f_1, \varepsilon) = \{q_{02}\}$$

要证  $L(M) = L(M_1)L(M_2)$  ,

只需证明  $L(M_1)L(M_2) \subseteq L(M)$  ,  $L(M_1)L(M_2) \supseteq L(M)$

1. 证明  $L(M_1)L(M_2) \subseteq L(M)$

设  $x \in L(M_1)L(M_2)$ , 从而有  $x_1 \in L(M_1)$  并且  $x_2 \in L(M_2)$ ,

使得  $x = x_1x_2$

$M_1$  在处理  $x_1$  的过程中, 经过的状态全部都是  $Q_1$  中的状态, 所以在定义

$M$  时, 对  $\forall q \in Q_1, a \in \Sigma, \delta(q, x) = \delta_1(q, a)$

故  $\delta(q_{01}, x_1) = \delta_1(q_{01}, x_1) = \{f_1\}$

$M_2$  在处理  $x_2$  的过程中, 经过的状态全部都是  $Q_2$  中的状态, 所以在定义

$M$  时, 对  $\forall q \in Q_1, a \in \Sigma, \delta(q, x) = \delta_2(q, a)$

$\delta(q_{02}, x) = \delta_2(q_{01}, x) = \{f_2\}$

下面证明  $x \in L(M)$

$$\begin{aligned} \delta(q_{01}, x) &= \delta(q_{01}, x_1x_2) \\ &= \delta(\delta(q_{01}, x_1), x_2) \\ &= \delta(\delta_1(q_{01}, x_1), x_2) \\ &= \delta(f_1, x_2) \\ &= \delta(f_1, \varepsilon x_2) \\ &= \delta(\delta(f_1, \varepsilon), x_2) \\ &= \delta(q_{02}, x_2) \\ &= \delta_2(q_{02}, x_2) \\ &= \{f_2\} \end{aligned}$$

即得证  $x \in L(M)$

2) 再证明

$$L(M) \subseteq L(M_1)L(M_2)$$

设  $x \in L(M)$ , 即

$$\delta(q_{01}, x) = \{f_2\}$$

由于  $M$  是从  $q_{01}$  启动的, 由  $M$  的定义可知,  $M$  要达到状态  $f_2$ , 必须先到达  $f_1$ . 由于除了对应状态转移函数式  $\delta(f_1, \varepsilon) = \{q_{02}\}$  的移动外, 不存在从  $f_1$  出发的任何其他移动, 而且该移动是  $f_2$  的必经移动, 所以, 必存在  $x$  的前缀  $x_1$  和后缀  $x_2$ , 使得  $x = x_1x_2$ , 并且  $x_1$  将  $M$  从状态  $q_{01}$  引导到状态  $f_1$ ,  $x_2$  将  $M$  从状态  $q_{02}$  引导到状态  $f_2$ . 即

$$\begin{aligned} \delta(q_{01}, x) &= \delta(q_{01}, x_1x_2) \\ &= \delta(f_1, x_2) \\ &= \delta(f_1, \varepsilon x_2) \\ &= \delta(q_{02}, x_2) \\ &= \{f_2\} \end{aligned}$$

这表明

$$x_1 \in L(M_1)$$

$$x_2 \in L(M_2)$$

从而  $x = x_1 x_2 \in L(M_1)L(M_2)$

故  $L(M) \subseteq L(M_1)L(M_2)$

综上所述,

$$L(M) = L(M_1)L(M_2)$$

\*\*\*\*\*

(吴丹 02282090)

18.证明: 对于任意的FA  $M_1=(Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$ , FA  $M_2=(Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2)$

存在FA  $M$ , 使得  $L(M)=L(M_1) \cap L(M_2)$ 。

证明: 不妨将这些FA看成DFA

$$\text{取 } M=(Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \cap \Sigma_2, \delta, \{q_{01}, q_{02}\}, F)$$

对于  $\forall a \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2, (q, p) \in Q, \delta([q, p], a) = [\delta_1(q, a), \delta_2(p, a)]$ .

(1) 设:  $x \in L(M)$  则  $\exists x = x_1 x_2 \dots x_k$  其中  $x_i (i \in [1, k]) \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

使得  $\delta([q, p], x_i) = [\delta_1(q, x_i), \delta_2(p, x_i)]$

$\therefore x_i \in L(M_1) \cap L(M_2) \Rightarrow x \in L(M_1) \cap L(M_2)$

从而可得  $L(M) \subseteq L(M_1) \cap L(M_2)$

(2) 设:  $x \in L(M_1) \cap L(M_2)$  则  $\exists x = x_1 x_2 \dots x_k$  其中  $x_i (i \in [1, k]) \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

有  $\delta_1(q, x_i)$  且  $\delta_2(p, x_i)$  从而使得

$\delta_1(q, x_i) = \delta([q, p], x_i); \delta_2(p, x_i) = \delta([q, p], x_i)$

$\therefore x_i \in L(M) \Rightarrow x \in L(M)$

从而可得  $L(M_1) \cap L(M_2) \subseteq L(M)$

综合 (1) (2) 可得  $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$ 。

又因为FA和DFA具有等价性, 所以原命题得证。

\*\*\*\*\*

19、总结本章定义的所有 FA, 归纳出它们的特点, 指出它们之间的差别。(吴玉涵 02282091)

本章学习了 DFA, NFA,  $\epsilon$ -NFA, 2DFA 和 2NFA

所有的 FA 都是一个五元组  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

最大的区别就是状态转移函数  $\delta$

对于 DFA, 字母表中的每个字母都有唯一确定的状态转移函数。也就是说  $\forall \delta(q, a) \in Q \times \Sigma, q \in Q, a \in \Sigma$  只有唯一确定的状态。

对于 NFA, 对于字母表中的每个输入字符可以有不同的状态转移, 对于  $\epsilon$  串, 是一个到自身的移动。

对于  $\epsilon$ -NFA, 是指在不接受任何字符的情况下, 自动机的状态可以发生转移。

对于 2DFA, 对于字母表中的每个字符, 对于每个状态都有唯一的转移, 即  $\forall \delta(q, a) \in Q \times \Sigma, q \in Q, a \in \Sigma$  只有唯一确定的状态。与 DFA 不同的是, 2DFA 的读头可以在一次状态转移中不移动, 或者回退一个, 或者向下读一个。

对于 2NFA, 与 2DFA 相似, 但是并不是对于字母表中的每个输入字符都有转移函数, 2NFA 与 2DFA 的区别类似于 DFA 与 NFA 的区别。

\*\*\*\*\*

20 构造如图 3-20 所示的 DFA 对应的右线性文法。

(周期律 02282067)

对图 1: 构造文法  $G = (V, T, P, S)$ , 其中

$V = \{S, A, B, C\}, T = \{1, 0\}$

$S \rightarrow 0A \mid 1C$

$A \rightarrow 0S \mid 1C$

P:

$B \rightarrow 0 \mid 0C \mid 1S$

$C \rightarrow 0A \mid 1A$

对图 2: 构造文法  $G = (V, T, P, S)$ , 其中

$V = \{S, A, B, C\}, T = \{1, 0\}$

$S \rightarrow 0A \mid 1B$

$A \rightarrow 1S \mid 0B$

P:

$B \rightarrow 0C \mid 0 \mid 1A$

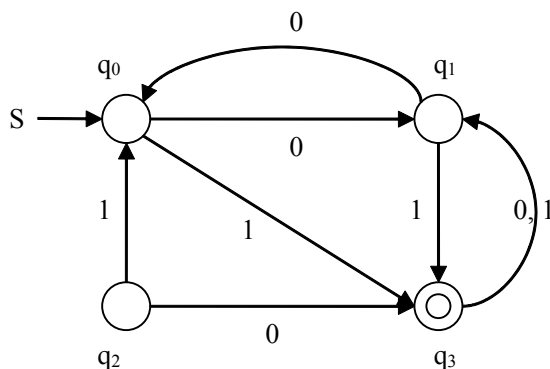
$C \rightarrow 0A \mid 1A$

\*\*\*\*\*

21. 构造下图所示 DFA 对应的左线性文法。

(吴贤璐 02282047)

(1) 图形如下所示



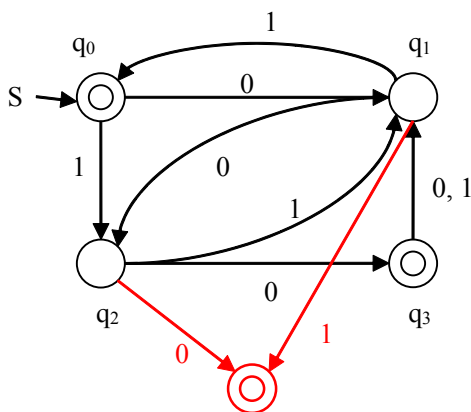
解: 设  $q_0, q_1, q_2, q_3$  所对应的字符分别为 A、B、C、G。



由于  $q_2$  为不可达状态，故先去掉该状态。得到该图所对应的左线性文法为：

$G \rightarrow A1 \mid B1 \mid 1$   
 $B \rightarrow G0 \mid G1 \mid A0 \mid 0$   
 $A \rightarrow B0$

(2) 图形如下所示：



解：图中有多个终结状态，为方便起见，增加一个终结状态（红色表示），设该状态所对应的字符为  $G$ 。又设  $q_0$ 、 $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_3$  所对应的字符分别为  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 。则该图所对应的左线性文法为：

$G \rightarrow C0 \mid B0 \mid \varepsilon$   
 $D \rightarrow C0$   
 $C \rightarrow B0 \mid A1 \mid 1$   
 $B \rightarrow C1 \mid D0 \mid D1 \mid A0 \mid 0$   
 $A \rightarrow B1$

\*\*\*\*\*

22. 根据下列给定文法，构造相应的FA。

（敖雪峰 02282068）

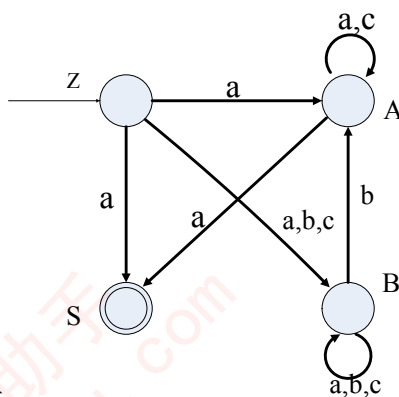
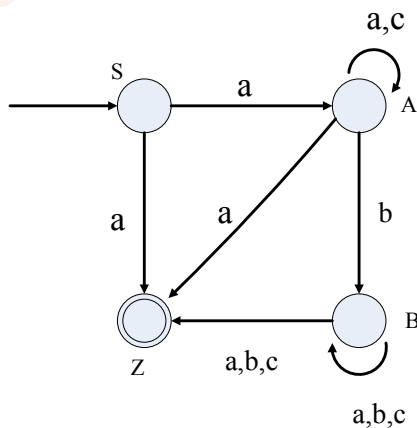
(1) 文法  $G_1$  的产生式集合如下：

$G_1: S \rightarrow a|Aa$   
 $A \rightarrow a|Aa|cA|Bb$   
 $B \rightarrow a|b|c|aB|Bb|Cb$

(2) 文法  $G_2$  的产生式集合如下：

$G_2: S \rightarrow a|Aa$   
 $A \rightarrow a|Aa|Ac|Bb$   
 $B \rightarrow a|b|c|Ba|Bb|Bc$

解答：文法  $G_1$  对应的FA如下所示



文法G2对应的FA如下所示

\*\*\*\*\*

23.FA  $M$  的移动函数定义如下:

(冯蕊 02282075)

$$\delta(q_0, 3) = \{q_0\}$$

$$\delta(q_0, 1) = \{q_1\}$$

$$\delta(q_1, 0) = \{q_2\}$$

$$\delta(q_1, 1) = \{q_3\}$$

$$\delta(q_2, 0) = \{q_2\}$$

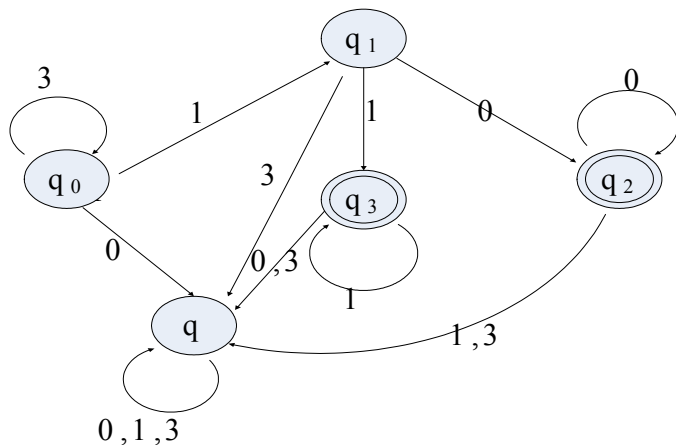
$$\delta(q_3, 1) = \{q_3\}$$

其中,  $q_2, q_3$  为终态.

(1)  $M$  是 DFA 吗?为什么?

不是,因为并不是所有的状态,在接收一个字母表中的字符时会有一个状态与之对应.

(2) 画出相应的 DFA 的状态转移图



(3) 给出你所画出的 DFA 的每个状态  $q$  的  $\text{set}(q): \text{set}(q) = \{x | x \in \Sigma^* \text{ 且 } \delta(q_0, x) = q\}$

$\text{set}(q_0) = \{3^*\}$

$\text{set}(q_1) = \{3^*1\}$

$\text{set}(q_2) = \{3^*100^*\}$

$\text{set}(q_3) = \{3^*111^*\}$

$\text{set}(q) = \{(3^*0|3^*13|3^*100^*(1|3)|3^*111^*(0|3))0^*1^*3^*\}$

(4) 求正则方法  $G$ , 使  $L(G) = L(M)$

$q_0 \rightarrow 3 \mid q_1$

$q_1 \rightarrow 0 \mid q_2 \mid q_3$

$q_2 \rightarrow 0 \mid q_2$

$q_3 \rightarrow 1 \mid q_3$

\*\*\*\*\*

24. 总结规约与派生的对应关系, 以及与 FA 的识别过程的对应关系。(段季芳 02282073)

答: 对于左线性文法来说, 句子  $a_1a_2\dots a_{n-1}a_n$

按派生来看, 字符在句子中出现的顺序是相反的, 即  $a_na_{n-1}\dots a_2a_1$

按规约来看, 被规约成语法变量的顺序和他们在句子中出现的顺序是一致的, 即

$a_1a_2\dots a_{n-1}a_n$

FA 识别时, 如果存在状态转移  $\delta(A, a) = B$ , 表示  $A$  后紧跟一个  $a$  时, 要规约到  $B$ ; 如果  $B$  是终结符号, 则  $A$  后紧跟一个  $a$  时, 要规约到该文法的开始符号; 如果  $A$  是开始状态, 则  $a$  要规约到  $B$ 。

对于右线性文法来说, 句子  $a_1a_2\dots a_{n-1}a_n$

按派生来看, 字符在句子中出现的顺序也就是  $a_1a_2\dots a_{n-1}a_n$

按规约来看, 被规约成语法变量的顺序和他们在句子中出现的顺序是相反的, 即

$a_na_{n-1}\dots a_2a_1$

FA 识别时, 如果存在状态转移  $\delta(A, a) = B$ , 则表示遇到  $A$  则派生成  $aB$ ; 但如果  $B$  是终结符号, 则将  $A$  推导为  $a$ 。

\*\*\*\*\*

25 证明左线性文法与 FA 等价。

(唐明珠 02282084)

证明: 1) 根据左线性  $G(E)$  文法构造对应的 FA  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

为了形如  $A \rightarrow a$  的产生式, 增加一个开始状态  $Z$ , 使得  $q_0 = Z$

所以  $E = F$ , 对于产生式  $B \rightarrow Aa$ , 则有  $\delta(A, a) = B$ ,

对于产生式  $\delta(B \rightarrow a)$ , 且  $E$  是开始状态, 则有  $\delta(E, a) = B$ 。

下面证明  $G(E)$  与 FA 等价, 即证明  $L(G(E)) = L(M)$  不会:)

2) 根据 FA  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , 构造相应的  $G(E)$

为了方便起见, 在根据给定的 FA 构造等价的左线性文法之前, 先对 FA 做如下的处理:

1. 删除 FA 的陷阱状态。

2. 在 FA 中增加一个识别状态
3. “复制”一条原来到达终止状态的弧，使它从原来的起点出发，到达新添加的识别状态。

相应的文法的构造依照如下两条进行：

1. 如果  $\delta(A, a) = B$ ，则有产生式  $B \rightarrow a$
2. 如果  $\delta(A, a) = B$ ，且 A 是开始状态  $q_0$ ，则有产生式  $B \rightarrow a$ 。

\*\*\*\*\*

(吴丹 02282090)

26. 证明定理3-6。(2DFA与FA等价)

证明：对于 2DFA M 是一个五元组  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  其中，

$Q, \Sigma, q_0, F$  的意义同与 DFA。

$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \{L, R, S\}$ ，对于  $\forall (q, a) \in Q \times \Sigma$ ，

(1) 如果  $\delta(q, a) = \{p, L\}$  表示在读入 a 从状态 q 转移到状态 p，并将读头向左移动，指向输入字符的前一个字符。

(2) 如果  $\delta(q, a) = \{p, R\}$  表示在读入 a 从状态 q 转移到状态 p，并将读头向右移动，指向输入字符的下一个字符。

(3) 如果  $\delta(q, a) = \{p, S\}$  表示在读入 a 从状态 q 转移到状态 p，读头保持在原位置不动。

我们构造与之等价的 FA

\*\*\*\*\*

27. 证明定理 3-7

(周期律 02282067)

证明：

因为 FA 是一种特殊的 2NFA，他是当  $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$  时，都有

$\delta(q, a) = \{(p_1, D) \dots (p_m, D)\}$ ，此时的 D 只为往右移动，即一个每一个状态读入一个字符后读头都往右移动指向下一字符的 2NFA，故对任意的 FA，定会找到一个与之等价的 2NFA 与之对应。

因此我们只需要证明对任何的 2NFA  $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, F_1, q_0)$ ，都存在 FA

$M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, F_2, q_0)$  与之等价。

对于任何的 2NFA  $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, F_1, q_0)$ ，构造 FA  $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, F_2, q_0)$ ，

按三个方式构造  $\delta_2$ ：

1. 如果  $q \in Q_1, a \in \Sigma, \delta_1(q, a) = \{p, R\}$ ，则  $\delta_2(q, a) = p$ ；

2. 如果  $q \in Q_1, a \in \Sigma, \delta_1(q, a) = \{p, S\}$ , 则如果  $\exists \delta_1(p, a) = \{o, R\}$ , 则  $\delta_2(q, a) = o$ ;

如果  $\exists \delta_1(p, a) = \{o, S\}$ , 则重复第二步; 如果  $\exists \delta_1(p, a) = \{o, L\}$ , 则对于

集合  $A = \{r \mid b \in Q_1, \delta_1(r, b) = (o, R)\}$ ,  $\delta_2(q, a) = r, r \in A$ 。

3. 如果  $q \in Q_1, a \in \Sigma, \delta_1(q, a) = \{p, L\}$ , 则设集合  $A = \{r \mid b \in Q_1, \delta_1(r, b) = (p, R)\}$ ,

$\delta_2(q, a) = r, r \in A$

\*\*\*\*\*

28. 证明定理 3-8: Moore 机与 Mealy 机等价

(郭会 02282015)

证明:

不妨设 Moore 机  $M_1 = (Q_1, \Sigma, \Delta, \delta_1, \lambda_1, q_{01})$ , Mealy 机  $M_2 = (Q_2, \Sigma, \Delta, \delta_2, \lambda_2, q_{02})$ , 则

根据 Moore 机和 Mealy 机等价的定义知, 必须证明:  $T_1(x) = \lambda_1(q_0)T_2(x)$ , 其中  $T_1(x)$

和  $T_2(x)$  分别表示  $M_1$  和  $M_2$  关于  $x$  的输出。

$\Rightarrow \forall$  Moore 机  $M_1, \exists$  Mealy 机  $M_2$ , 使  $M_2$  与  $M_1$  等价

(1) 构造  $M_2$ ,

$$\delta_2 = \delta_1, q_{02} = q_{01}, Q_2 = Q_1$$

$$\forall q \in Q_1 - \{q_{01}\}, \lambda_1(q) = a, \forall q' \in Q_1 \text{ 且 } \exists b \in \Sigma, \delta_1(q', b) = q, \text{ 就构造 } \lambda_2(q', b) = a$$

(2) 证明  $\forall x \in \Sigma^*, \lambda_1(q_0)T_2(x) = T_1(x)$

不妨设  $x = x_1 x_2 \cdots x_n$ , 则  $\forall i \in N, (i = 1, 2, \cdots, n)$

则  $M_1$  的输出为:

$$T_1(x) = \lambda_1(q_0) \lambda_1(\delta_1(q_0, x_1)) \cdots \lambda_1(\delta_1(\cdots \delta_1(q_0, x_1), x_2) \cdots), x_n)$$

由题意可知

$$\delta_1(q_0, x_1), \delta_1(\delta_1(q_0, x_1), x_2), \cdots, \delta_1(\cdots \delta_1(\delta_1(q_0, x_1), x_2) \cdots), x_n)$$

均为 Moore 机中的状态, 由 (1) 中的构造假设知,  $M_2$  的输出为:

$$T_2(x) = \lambda_2(q_0, x_1) \lambda_2(\delta_2(q_0, x_1), x_2) \cdots \lambda_2(\cdots \delta_2(\delta_2(q_0, x_1), x_2) \cdots), x_n)$$

$$= \lambda_1(q_0, x_1) \lambda_1(\delta_1(q_0, x_1), x_2) \cdots \lambda_1(\cdots \delta_1(\delta_1(q_0, x_1), x_2) \cdots), x_n)$$

$$\therefore T_1(x) = \lambda_1(q_0)T_2(x)$$

$\Leftarrow \forall \text{Mealy机} M_2, \exists \text{Moore机} M_1, \text{使} M_1 \text{与} M_2 \text{等价}$

(1) 构造  $M_1$ ,

$$q_{01} = q_{02}$$

$$Q_1 = Q_2 \cup \{q_{ij} \mid \forall \delta_2(q_i, a) = q_j, \text{其中 } q_i, q_j \in Q_2, a \in \Sigma\}$$

$$\delta_1 = \{\delta \mid \delta(q_i, a) = q_{ij}, \delta(q_{ij}, \varepsilon) = q_j \text{ 其中 } \delta_2(q_i, a) = q_j\}$$

$$\lambda_1 = \{\lambda \mid \delta_1(q_i, a) = q_{ij}, \delta_1(q_{ij}, \varepsilon) = q_j, \lambda(q_{ij}) = \lambda_2(q_i, a)\}$$

(2) 证明  $\forall x \in \Sigma^*, T_1(x) = \lambda_1(q_0)T_2(x)$

不妨设  $x = x_1x_2\cdots x_n$ , 则  $\forall i \in N, (i=1, 2, \cdots, n)$

则  $M_1$  的输出为:

$$T_2(x) = \lambda_2(\delta_2(q_0, x_1)) \cdots \lambda_2(\delta_2(\cdots \delta_2(q_0, x_1), x_2) \cdots), x_n)$$

由题意可知

$$\delta_2(q_0, x_1), \delta_2(\delta_2(q_0, x_1), x_2), \cdots, \delta_2(\cdots \delta_2(\delta_2(q_0, x_1), x_2) \cdots), x_n)$$

均为 Mealy 机中的状态, 由 (1) 中的构造假设知,  $M_1$  的输出为:

$$T_1(x) = \lambda_1(q_0)\lambda_1(\delta_2(q_0, x_1))\lambda_1(\delta_1(\delta_2(q_0, x_1), x_2))\cdots\lambda_1(\cdots\delta_1(\delta_1(q_0, x_1), x_2) \cdots), x_n)$$

$$= \lambda_1(q_0)\lambda_2(\delta_2(q_0, x_1)) \cdots \lambda_2(\delta_2(\cdots \delta_2(q_0, x_1), x_2) \cdots), x_n)$$

$$\therefore T_1(x) = \lambda_1(q_0)T_2(x)$$

综上所述, Moore 机与 Mealy 机等价

1. 写出表示下列语言的正则表达式。

(吴贤珺 02282047)

(1)  $\{0, 1\}^*$ 。

解：所求正则表达式为： $(0+1)^*$ 。

(2)  $\{0, 1\}^+$ 。

解：所求正则表达式为： $(0+1)^+$ 。

(3)  $\{x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中不含形如 } 00 \text{ 的子串}\}$ 。

解：根据第三章构造的 FA，可得所求正则表达式为： $1^*(01^+)^*(01+0+1)$ 。

(4)  $\{x \mid x \in \{0, 1\}^* \text{ 且 } x \text{ 中不含形如 } 00 \text{ 的子串}\}$ 。

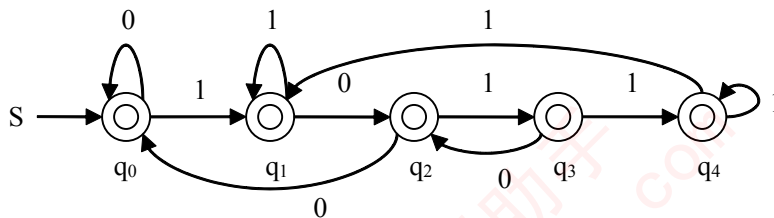
解：根据上题的结果，可得所求正则表达式为： $\varepsilon + 1^*(01^+)^*(01+0+1)$ 。

(5)  $\{x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中含形如 } 10110 \text{ 的子串}\}$ 。

解：所求正则表达式为： $(0+1)^*10110(0+1)^*$ 。

(6)  $\{x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中不含形如 } 10110 \text{ 的子串}\}$ 。

解：根据第三章的习题，接受  $x$  的 FA 为：



要求该 FA 对应的正则表达式，分别以  $q_0$ 、 $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_3$ 、 $q_4$  为终结状态考虑：

$q_0$  为终态时的正则表达式： $(0^*(11^*0(10)^*(\varepsilon + 111^*11^*0(10)^*0)^*))^*$

$q_1$  为终态时的正则表达式： $0^*1(1^*(0(10)^*111^*1)^*(0(10)^*00^*1)^*)^*$

$q_2$  为终态时的正则表达式： $0^*11^*0((10)^*(111^*11^*0)^*(00^*11^*0)^*)^*$

$q_3$  为终态时的正则表达式： $0^*11^*0(10)^*1(11^*11^*0((10)^*(00^*11^*0)^*)^*1)^*$

$q_4$  为终态时的正则表达式： $0^*11^*0(10)^*11(1^*(11^*0((00^*11^*0)^*(10)^*)^*11)^*)^*$

将以上 5 个正则表达式用 “+” 号相连，就得到所要求的正则表达式。

(7)  $\{x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且当把 } x \text{ 看成二进制数时，} x \text{ 模 } 5 \text{ 与 } 3 \text{ 同余和 } x \text{ 为 } 0 \text{ 时，} |x| = 1 \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 时，} x \text{ 的首字符为 } 1\}$ 。

解：先画出状态转移图，设置 5 个状态  $q_0$ 、 $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_3$ 、 $q_4$ ，分别表示除 5 的余数是 0、1、2、3、4 的情形。另外，设置一个开始状态  $q$ 。由于要求  $x$  模 5 和 3 同余，而 3 模 5 余 3，故只有  $q_3$  可以作为终态。由题设， $x=0$  时， $|x|=1$ ，模 5 是 1，不符合条件，所以不必增加关于它的状态。下面对每一个状态考虑输入 0 和 1 时的状态转移。

$q$ ：输入 1，模 5 是 1，进入  $q_1$ 。

$q_0$ ：设  $x=5n$ 。输入 0， $x=5n*2=10n$ ，模 5 是 0，故进入  $q_0$

输入 1， $x=5n*2+1=10n+1$ ，模 5 是 1，故进入  $q_1$

$q_1$ ：设  $x=5n+1$ 。输入 0， $x=(5n+1)*2=10n+2$ ，模 5 是 2，故进入  $q_2$

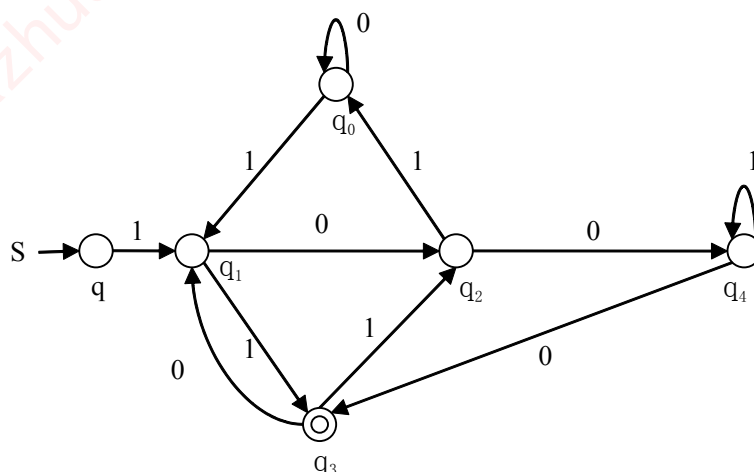
输入 1， $x=(5n+1)*2+1=10n+3$ ，模 5 是 3，故进入  $q_3$

$q_2$ ：设  $x=5n+2$ 。输入 0， $x=(5n+2)*2=10n+4$ ，模 5 是 4，故进入  $q_4$

输入 1， $x=(5n+2)*2+1=10n+5$ ，模 5 是 0，故进入  $q_0$

$q_3$ ：设  $x=5n+3$ 。输入 0， $x=(5n+3)*2=10n+6$ ，模 5 是 1，故进入  $q_1$

输入 1,  $x=(5n+3)*2+1=10n+7$ , 模 5 是 2, 故进入  $q_2$   
 $q_4$ : 设  $x=5n+4$ 。输入 0,  $x=(5n+4)*2=10n+8$ , 模 5 是 3, 故进入  $q_3$   
 输入 1,  $x=(5n+4)*2+1=10n+9$ , 模 5 是 4, 故进入  $q_4$   
 则状态转移图如下:



则所求的正则表达式为:  $1(010^*1+(1+001^*0)(101^*0)^*(0+110^*1))^*(1+001^*0)(101^*0)^*$

(8)  $\{x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 的第 } 10 \text{ 个字符是 } 1\}$ 。

解: 所求正则表达式为:  $(0+1)^9 1 (0+1)^*$ 。

(9)  $\{x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 以 } 0 \text{ 开头以 } 1 \text{ 结尾}\}$ 。

解: 所求正则表达式为:  $0(0+1)^* 1$ 。

(10)  $\{x \mid x \in \{0, 1\}^+ \text{ 且 } x \text{ 中至少含两个 } 1\}$ 。

解: 所求正则表达式为:  $(0+1)^* 1 (0+1)^* 1 (0+1)^*$ 。

(11)  $\{x \mid x \in \{0, 1\}^* \text{ 和如果 } x \text{ 以 } 1 \text{ 结尾, 则它的长度为偶数; 如果 } x \text{ 以 } 0 \text{ 结尾, 则它的长度为奇数}\}$ 。

解: 所求正则表达式为:  $(0+1)^{2n+1} 1 + (0+1)^{2n} 0 \ (n \in \mathbb{N})$

或  $0 + (0+1)((0+1)(0+1))^* 1 + (0+1)(0+1)((0+1)(0+1))^* 0$ 。

(12)  $\{x \mid x \text{ 是十进制非负实数}\}$ 。

解: 首先定义  $\Sigma = \{., 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

则所求正则表达式为:  $(0+1+\dots+9)^*. (0+1+\dots+9)^*$ 。

(13)  $\Phi$ 。

解: 所求正则表达式为:  $\Phi$ 。

(14)  $\{\varepsilon\}$ 。

解: 所求正则表达式为:  $\varepsilon$ 。

\*\*\*\*\*

2. 理解如下正则表达式, 说明它们表示的语言

(1)  $(00+11)^+$  表示的语言特征是 0 和 1 都各自成对出现

(2)  $(1+0)^* 0100^+$  表示的语言特征是以 010 后接连续的 0 结尾

(3)  $(1+01+001)^*(\varepsilon+0+00)$  表示的语言特征是不含连续的 3 个 0

(4)  $((0+1)(0+1))^* + ((0+1)(0+1)(0+1))^*$  表示所有长度为  $3n$  或  $2m$  的 0, 1 串 ( $n \geq 0, m \geq 0$ )

(5)  $((0+1)(0+1))^* ((0+1)(0+1)(0+1))^*$  表示所有长度为  $3n+2m$  的 0, 1 串 ( $n \geq 0, m \geq 0$ )

(6)  $00+11+(01+10)(00+11)^*(10+01)$  表示的语言特征为长度为偶数  $n$  的串. 当  $n=2$  时, 是 00 或 11 的串。



$n \geq 4$  时, 是以 01 或 10 开头, 中间子串 00 或 11 成对出现, 最后以 10 或 01 结尾的串

\*\*\*\*\*

#### 4.3. 证明下列各式

褚颖娜 02282072

(1) 结合律  $(rs)t = r(st)$   $(r+s)+t = r+(s+t)$

1) 证明 对  $\forall x \in (rs)t$  总可以找到一组  $x_1 x_2 x_3$  使得  $x = x_1 x_2 x_3$  其中  $x_3 \in t$   $x_1 x_2 \in rs$  且  $x_1 \in r, x_2 \in s$ , 则  $x_2 x_3 \in st$  因此  $x_1(x_2 x_3) \in r(st)$  即  $x_1 x_2 x_3 \in r(st)$   $x \in r(st)$  得证

因此  $(rs)t \subseteq r(st)$

同理可证  $r(st) \subseteq (rs)t$

则  $(rs)t = r(st)$  成立

2) 证明 对  $\forall x \in (r+s)+t$   $x \in (r+s)$  或  $x \in t$  对于  $x \in r+s \Rightarrow x \in r$  或  $x \in s$ ,

因此  $x \in r$  或  $x \in s$  或  $x \in t \Rightarrow x \in r$  或  $x \in (s+t) \Rightarrow x \in r+(s+t)$

所以  $(r+s)+t \subseteq r+(s+t)$

同理可证  $r+(s+t) \subseteq (r+s)+t$

则  $(r+s)+t = r+(s+t)$  成立

(2) 分配律  $r(s+t) = rs+rt$   $(s+t)r = sr+tr$

1) 证明 对于  $\forall x \in r(s+t)$  总可以找到  $x_1 x_2$  使得  $x = x_1 x_2$  其中  $x_1 \in r, x_2 \in (s+t)$

由  $x_2 \in (s+t) \Rightarrow x_2 \in s$  或  $x_2 \in t$

则  $x_1 x_2 \in rs$  或  $x_1 x_2 \in rt$

所以  $r(s+t) \subseteq rs+rt$

对于  $\forall x \in rs+rt \Rightarrow x \in rs$  或  $x \in rt$  且总可以找到一组  $x_1 x_2$  使得  $x = x_1 x_2$  其中  $x_1 \in r, x_2 \in s$  或  $x_1 \in r, x_2 \in t \Rightarrow x_1 \in r, x_2 \in s$  或  $x_2 \in t \Rightarrow x_1 \in r, x_2 \in (s+t) \Rightarrow x_1 x_2 \in r(s+t)$

所以  $rs+rt \subseteq r(s+t)$

则  $r(s+t) = rs+rt$

2) 证明 对于  $\forall x \in (s+t)r$  总可以找到  $x_1 x_2$  使得  $x = x_1 x_2$  其中  $x_1 \in (s+t), x_2 \in r$

由  $x_1 \in (s+t) \Rightarrow x_1 \in s$  或  $x_1 \in t$

则  $x_1 x_2 \in sr$  或  $x_1 x_2 \in tr$

所以  $(s+t)r \subseteq sr+tr$

对于  $\forall x \in sr+tr \Rightarrow x \in sr$  或  $x \in tr$  且总可以找到一组  $x_1 x_2$  使得  $x = x_1 x_2$  其中  $x_1 \in s, x_2 \in r$  或  $x_1 \in t, x_2 \in r \Rightarrow x_1 \in s$  或  $x_1 \in t, x_2 \in r \Rightarrow x_1 \in (s+t), x_2 \in r \Rightarrow x_1 x_2 \in (s+t)r$

所以  $sr+tr \subseteq (s+t)r$

则  $(s+t)r = sr+tr$

(3) 交换律  $r+s = s+r$

证明 对于  $\forall x \in r+s \Rightarrow x \in r$  或  $x \in s \Rightarrow x \in s$  或  $x \in r \Rightarrow x \in s+r$  所以  $r+s \subseteq s+r$  同理可证  $s+r \subseteq r+s$

则  $r+s = s+r$

(4) 幂等律  $r+r = r$

证明 对于  $\forall x \in r+r \Rightarrow x \in r$  或  $x \in r \Rightarrow x \in r$  所以  $r+r \subseteq r$

对于  $\forall x \in r \Rightarrow x \in r$  或  $x \in r \Rightarrow x \in r+r$  所以  $r \subseteq r+r$

因此  $r+r = r$

(5) 加法运算零元素:  $r+\Phi = r$

证明 对于  $\forall x \in r+\Phi \Rightarrow x \in r$  或  $x \in \Phi \Rightarrow x \in r$  所以  $r+\Phi \subseteq r$

对于  $\forall x \in r \Rightarrow x \in r$  或  $x \in \Phi \Rightarrow x \in r+\Phi$  所以  $r \subseteq r+\Phi$

因此  $r+\Phi = r$

(6) 乘法运算单位元:  $r\epsilon = \epsilon r = r$

证明:  $\because$  对  $\forall x \in R \quad x\epsilon = \epsilon x = x$

$$\therefore R\{\epsilon\} = \{\epsilon\}R = R$$

$$\therefore r\epsilon = \epsilon r = r$$

(7) 乘法运算零元素:  $r\emptyset = \emptyset r = \emptyset$

证明:  $\because$  对  $\forall x \in R \quad x\emptyset = \emptyset x = \emptyset$

$$\therefore R\{\emptyset\} = \{\emptyset\}R = R$$

$$\therefore r\emptyset = \emptyset r = \emptyset$$

(8)  $\Phi^* = \epsilon$

$$\text{证明 } \Phi^* = \Phi^0 \cup \Phi^1 \cup \Phi^2 \cup \Phi^3 \dots = \epsilon \cup \Phi^1 \cup \Phi^2 \cup \Phi^3 \dots = \epsilon$$

(9)  $(r + \epsilon)^* = r^*$

由第一章的作业 1.30 中的第九题  $(L_1 \cup \{\epsilon\})^* = L_1^*$  其中  $L_1$  为正则语言

又  $r$  为正则表达式 正则语言可以用正则表达式表示, 因此显然有  $(r + \epsilon)^* = r^*$  成立

(10)  $(rs)^* = (r+s)^*$

由第一章的作业 1.30 中的第八题  $(L_2 \cup L_1)^* = (L_2^* L_1^*)^*$  其中  $L_1, L_2$  为正则语言

又  $r, s$  为正则表达式 正则语言可以用正则表达式表示, 因此显然有  $(r+s)^* = (r^*s^*)^*$  成立 即  $(r^*s^*)^* = (r+s)^*$  成立

(11)  $(r^*)^* = r^*$

由第一章的作业 1.30 中的第三题  $(L_1^*)^* = L_1^*$  其中  $L_1$  为正则语言

又  $r$  为正则表达式 正则语言可以用正则表达式表示, 因此显然有  $(r^*)^* = r^*$  成立

\*\*\*\*\*

4 下面各式成立吗? 请证明你的结论

(1)  $(r+rs)^*r = r(sr+r)^*$

证明: 成立。

如果对所有的  $k \geq 0$ ,  $(r+rs)^k r = r(sr+r)^k$  成立, 则  $(r+rs)^*r = r(sr+r)^*$  肯定成立

可以用归纳法证明  $(r+rs)^k r = r(sr+r)^k$  对所有的  $k \geq 0$  成立

I.  $k=0$  时候,  $(r+rs)^0 r = r = r(sr+r)^0$

II. 假设  $k=n$  时候  $(r+rs)^n r = r(sr+r)^n$  成立, 往证  $k=n+1$  时候结论成立

$$(r+rs)^{n+1} r = (r+rs)^n (r+rs) r = (r+rs)^n (r + r sr) = (r+rs)^n r (r + sr) = r(sr+r)^n (r+sr)$$

$$= r(sr+r)^n (sr+r) = r(sr+r)^{n+1}$$

这就是说, 结论对  $k=n+1$  成立, 即证明了  $(r+rs)^k r = r(sr+r)^k$  对所有的  $k \geq 0$  成立, 所以  $(r+rs)^*r = r(sr+r)^*$

(2)  $t(s+t)r = tr+tsr$

证明: 不成立。不妨取  $r=0, s=1, t=2$ , 则  $t(s+t)r = 2(1+2)0 = 210 + 230$ , 但  $tr+tsr = 20+210$ 。

(3)  $rs=sr$

证明: 不成立。不妨取  $r=0, s=1$ , 显然  $rs=01$ , 而  $sr=10$ 。

(4)  $s(rs+s)^*r = rr^*s(rr^*s)^*$

不成立, 假设  $r, s$  分别是表示语言  $R, S$  的正则表达式, 例如当  $R=\{0\}, S=\{1\}$ ,  $L(s(rs+s)^*r)$  是以 1 开头的字符串, 而  $L(rr^*s(rr^*s)^*)$  是以 0 开头的字符串.  $L(s(rs+s)^*r) \neq L(rr^*s(rr^*s)^*)$

所以  $s(rs+s)^*r \neq rr^*s(rr^*s)^*$ , 结论不成立

(5)  $(r+s)^* = (r^*s^*)^*$

证明: 结论成立。

$$I. \quad L(r+s) = L(r) \cup L(s), \quad L(r) = L(rs^0) \subset L(r^*s^*), \quad L(s) = L(r^0s) \subset L(r^*s^*)$$

$$\text{那么 } L(r+s) = L(r) \cup L(s) \subset L(r^*s^*), \quad (L(r+s))^* \subset (L(r^*s^*))^*,$$

$L((r+s)^*) \subset L((r^*s^*)^*)$ , 所以  $(r+s)^* \subset (r^*s^*)^*$

II.  $(r+s)^* = ((r+s)^*)^*$ ,

对任意  $m, n \geq 0, r^m s^n \in (r+s)^{m+n}$ , 所以  $r^* s^* \subset (r+s)^*$

$(r^* s^*)^* \subset ((r+s)^*)^* = (r+s)^*$

由 I, II 可以知道  $(r^* s^*)^* \subset (r+s)^*$ ,  $(r+s)^* \subset (r^* s^*)^*$

得到  $(r+s)^* = (r^* s^*)^*$

(6)  $(r+s)^* = r^* + s^*$

不成立, 假设  $r, s$  分别是表示语言  $R, S$  的正则表达式, 例如当  $R=\{0\}, S=\{1\}, L((r+s)^*) = \{x \mid x = \varepsilon \text{ 或者 } x \text{ 是由 } 0, 1 \text{ 组成的字符串}\}$

$L(r^* + s^*) = L(r^*) \cup L(s^*) = \{\varepsilon, 0, 00, 000, \dots\} \cup \{\varepsilon, 1, 11, 111, \dots\}$

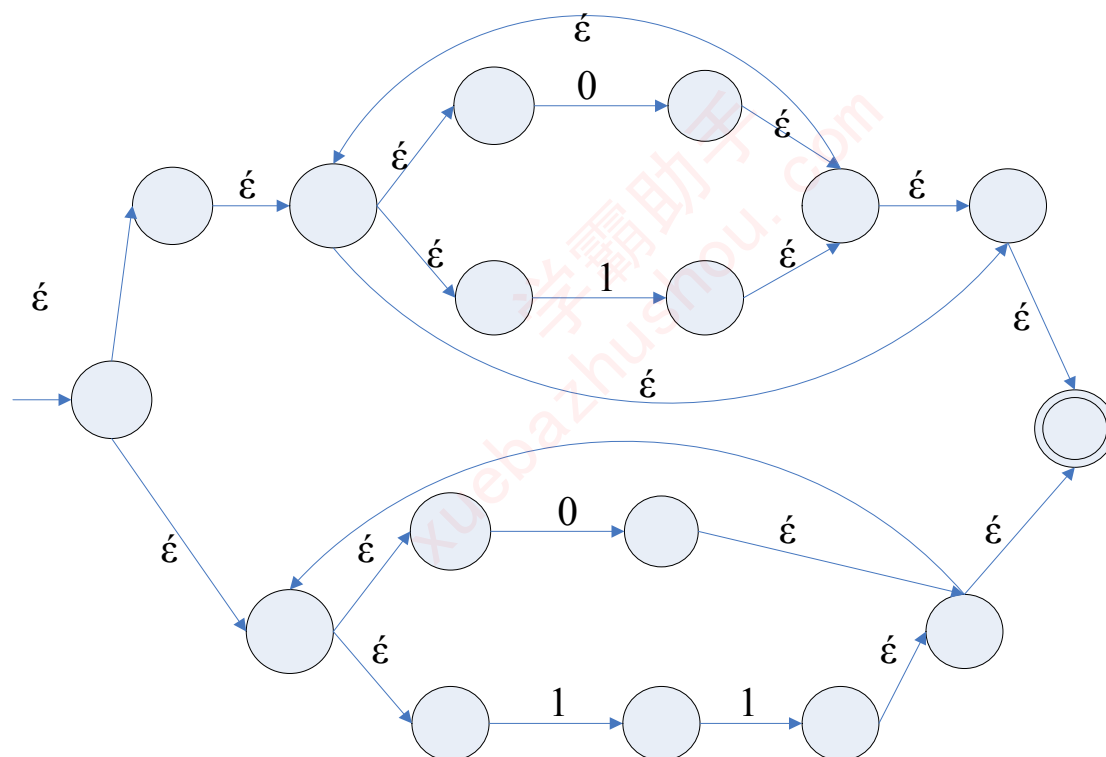
$L((r+s)^*) \neq L(r^* + s^*)$ , 例如  $10 \in L((r+s)^*), 10 \notin L(r^* + s^*)$

\*\*\*\*\*

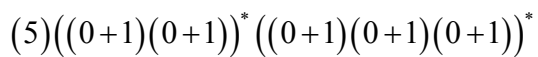
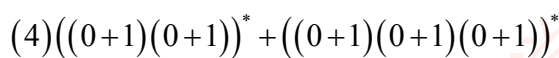
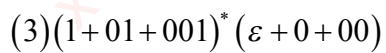
5. 构造下列正则表达式的等价 FA

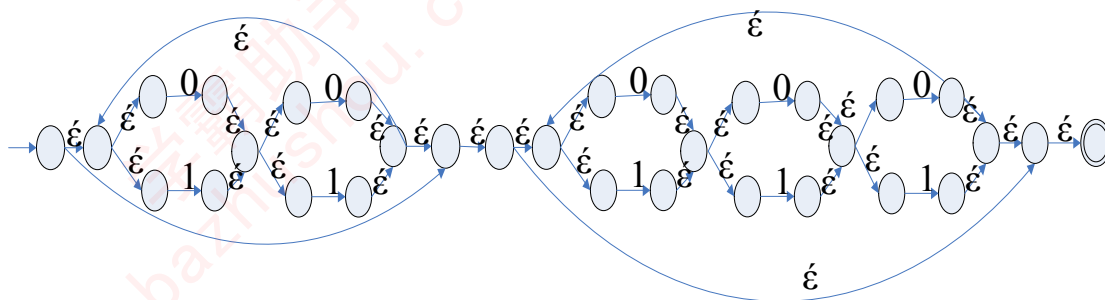
吴丹 02282090

(1)  $(0+1)^* + (0+11)^*$

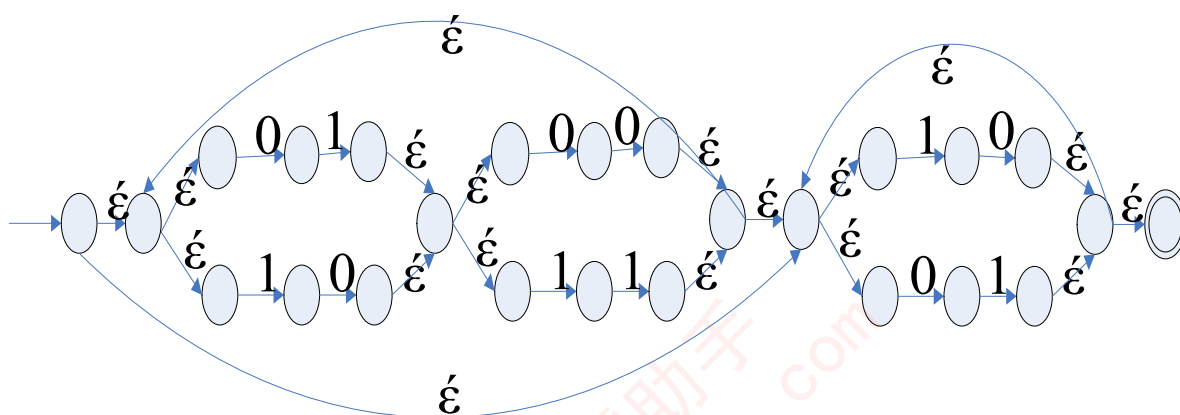


(2)  $00(0+1)^* ((01)^* + 010)00$





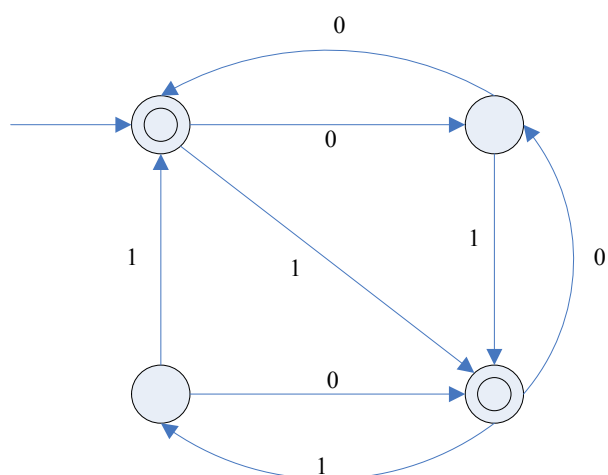
$(6)((01+10)(00+11))^*(10+01)^+$



\*\*\*\*\*

6、构造等价于下图所示 DFA 的正则表达式。  
仅给出 (2) 的构造过程

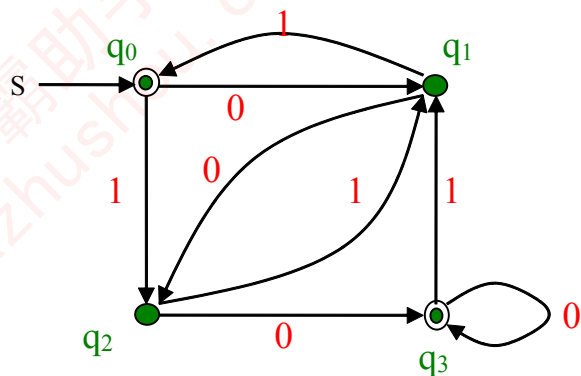
(1)



与他等价的正则表达式为：

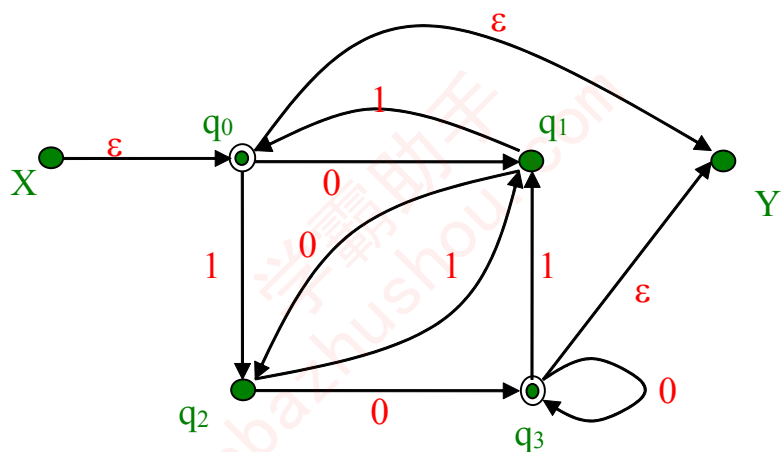
$\epsilon + (01+1) (01+10+11 (01+1))^*$

(2)

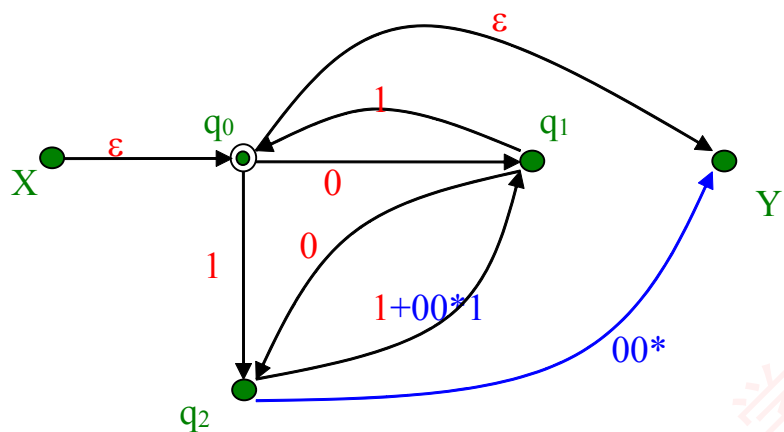


答案(之一):  $(01+(1+00)((1+00^*1)0)^*((1+00^*1)1))^*(\epsilon+(1+00)((1+00^*1)0)^*00^*)$

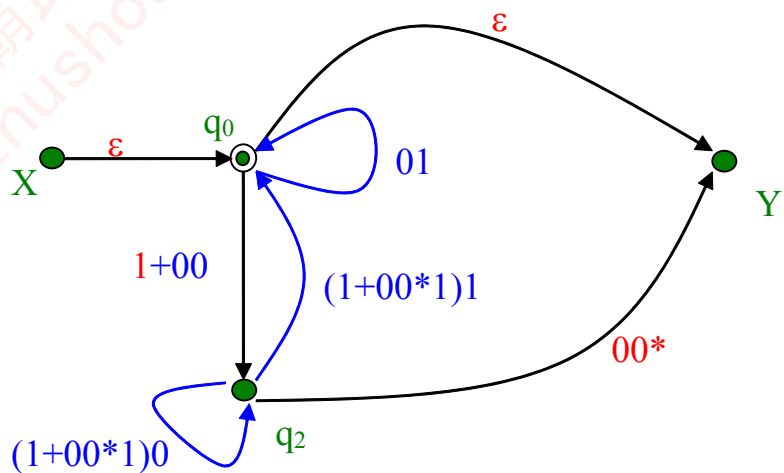
预处理:



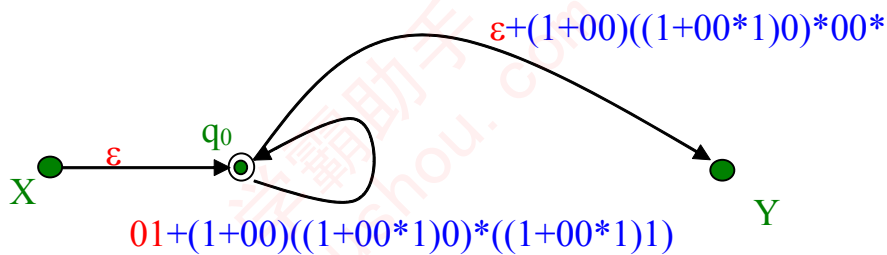
去掉  $q_3$ :



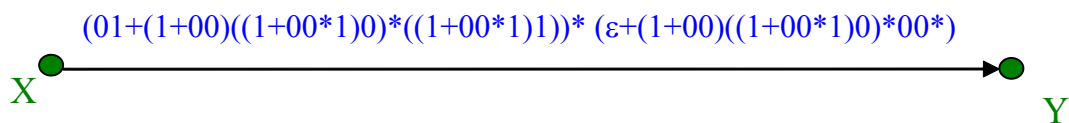
去掉  $q_1$ :



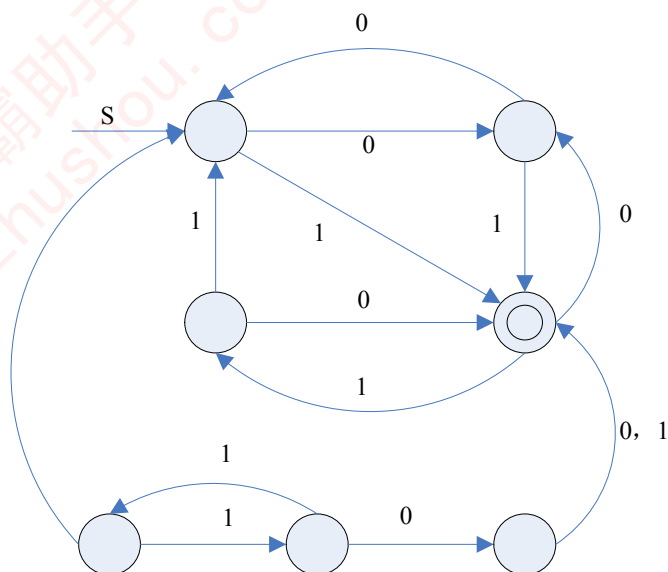
去掉  $q_2$ :



去掉  $q_0$ :

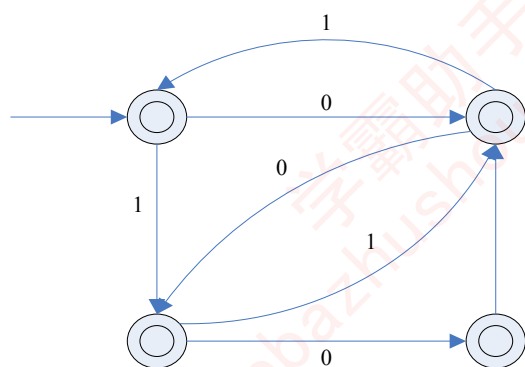


(3)



$$((0+10)^* 11) (01+(1+00) (0+10)^* 11)^* (0+ (1+00) (0+10)^* 1) + (0+10)^* 1$$

(4)

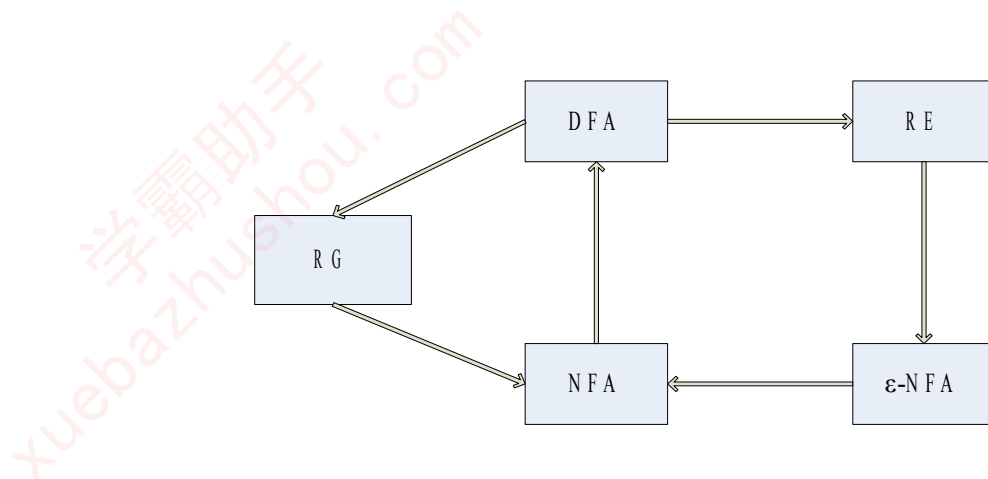


$$((0+11+10 (0+1)) ((01)^* + (00 (0+1))^*)^* 1)^* (1+10+ \varepsilon + (0+11+10 (0+1)) ((01)^* + (00 (0+1))^*)^* (00+0+ \varepsilon ))$$

## 7.整理不同模型等价证明的思路

解：正则语言有 5 种等价的描述模型：正则文法 (RG)、确定的有穷状态自动机 (DFA)、不确定的有穷状态自动机 (NFA)、带空移动的有穷状态自动机 ( $\varepsilon$ -NFA)、正则表达式 (RE)。这 5 种等价模型的转换关系可以用下图表示：





### (1) $DFA \Rightarrow RG$

RG 分为右线性文法和左线性文法。

对于右线性文法，只需要采用模拟 M 的移动即可

$$P = \{q \rightarrow ap \mid \delta(q, a) = p\} \cup \{q \rightarrow a \mid \delta(q, a) = p, p \in F\},$$

M 的开始符号就是 G 的开始符号。

而对于左线性文法，G 用规约模拟 M 的移动：

$$P = \{p \rightarrow qa \mid \delta(q, a) = p\} \cup \{Z \rightarrow qa \mid \delta(q, a) = p, p \in F\} \cup \{p \rightarrow a \mid \delta(q_0, a) = p\}$$

新增加的符号 Z 为 G 的识别符号，也就是开始符号。

### (2) $RG \Rightarrow NFA$

同上，分为右线性和左线性文法。

对于右线性文法：

$$\delta(A, a) = \begin{cases} \{B \mid A \rightarrow aB \in P\} \cup \{Z\} & \text{如果 } A \rightarrow a \in P \\ \{B \mid A \rightarrow aB \in P\} & \text{如果 } A \rightarrow a \notin P \end{cases}$$

其中，G 的开始符号为 M 的开始符号，新增的状态 Z 为 M 的终止状态。

对于左线性文法：

增加 Z 为 M 的开始状态；对应形如  $A \rightarrow a$  的产生式，定义  $A \in \delta(Z, a)$ ；对应形如  $A \rightarrow Ba$  的

产生式，定义  $A \in \delta(B, a)$ ；G 的开始符号为 M 的终止状态。

### (3) $DFA \Rightarrow RE$

采用图上作业法：

**预处理：**标记 X、Y 的状态为标记状态，删除不可达状态；

**并弧：**用从 q 到 p 的、标记为  $r_1 r_2 \dots r_g$  的弧取代 q 到 p 的标记为  $r_1, r_2, \dots$  的并行弧。

**去状态：**如果从 q 到 p 有一条标记为  $r_1$  的弧，从 p 到 t 有一条标记为  $r_2$  的弧，不存在从状态 p 到状态 p 的弧，将状态 p 和与之关联的这两条弧去掉，用一条从 q 到 t 的标记为  $r_1 r_2$  的弧代替；如果从 q 到 p 有一条标记为  $r_1$  的弧，从 p 到 t 有一条标记为  $r_2$  的弧，从状态 p 到状态 p 标记为  $r_3$  的弧，将状态 p 和与之关联的这三条弧去掉，用一条从 q 到 t 的标记为  $r_1 r_3^* r_2$  的弧代替；如果图中只有三个状态，而且不存在从标记为 X 的状态到达标记为 Y 的状态的路，则将除标记为 X 的状态和标记为 Y 的状态之外的第 3 个状态及其相关的弧全部删除。

**处 理：**从标记为 X 的状态到标记为 Y 的状态的弧的标记为所求的正则表达式。如果此弧不存在，

则所求的正则表达式为  $\Phi$ 。

(4)  $RE \Rightarrow \varepsilon - NFA$

由于 NFA 也是一个特殊的  $\varepsilon - NFA$ ，则其转化可以参考  $RG \Rightarrow NFA$

(5)  $\varepsilon - NFA \Rightarrow NFA$

$$F_{NFA} \begin{cases} F_{\varepsilon - NFA} \cup \{q_0\} & \text{如果 } F \cap \varepsilon - CLOSURE() \neq \emptyset \\ F_{\varepsilon - NFA} & \text{如果 } F \cap \varepsilon - CLOSURE() = \emptyset \end{cases}$$

(6)  $NFA \Rightarrow DFA$ ：确定化