

---

# **DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL**

## **Exemplos resolvidos**

---

**Livia Flavia Carletti Jatobá**



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico**

**Licença:**

Este trabalho está licenciado sob a licença Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International Public License (CC BY-NC-SA 4.0 - Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual)

**Aviso Legal:**

OpenFOAM<sup>®</sup> and OpenCFD<sup>®</sup> são marcas registradas por OpenCFD Limited, que produz o software OpenFOAM<sup>®</sup>. Todas as marcas registradas são de seus proprietários. Este documento não foi aprovado ou endossado por OpenCFD Limited, o produtor do software OpenFOAM<sup>®</sup> e detentor das marcas registradas OPENFOAM<sup>®</sup> and OpenCFD<sup>®</sup>.

## CAPÍTULO 1

---

# MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS: ESCOAMENTO COUETTE ENTRE PLACAS PLANAS

---

LIVIA FLAVIA CARLETTI JATOBÁ

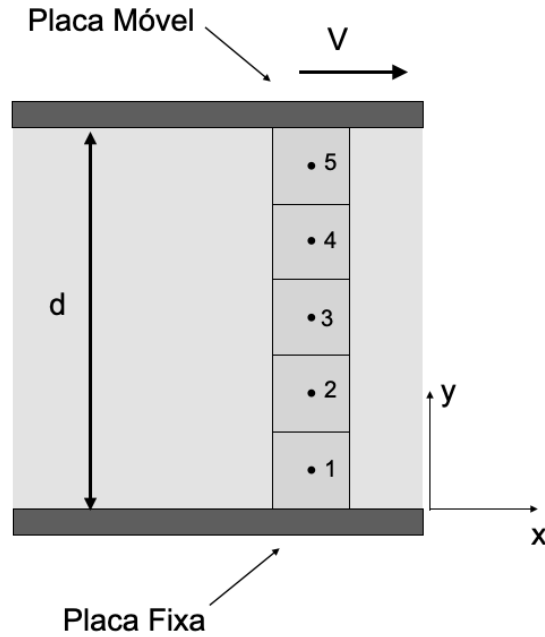
Controle de versão: T01-1.1

**Objetivo:** demonstrar a solução numérica do escoamento entre placas planas usando o Método dos Volumes Finitos com aproximação linear para o fluxo difusivo.

### 1.1 Definição do problema

Considere o escoamento de um fluido Newtoniano, laminar, incompressível e plenamente desenvolvido entre duas placas planas paralelas. A placa superior desloca-se com velocidade conhecida  $V$ , a inferior está parada e a pressão do escoamento é uniforme. Este é um problema clássico da literatura conhecido como escoamento Couette, onde a força motriz é dada pelo gradiente de velocidade entre a placa superior e inferior. As equações que descrevem este escoamento, ou seja, a modelagem matemática do problema, são: a equação de Continuidade e a equação de Navier-Stokes.

Assim, como o escoamento é estacionário puramente difusivo, a equação de Navier-Stokes tem apenas a contribuição do termo devido o transporte difusivo de quantidade de movimento linear para o fluido newtoniano. Vamos aplicar o Método dos Volumes Finitos com aproximação linear para o termo difusivo para a equação que governa este escoamento e comparar a solução numérica com a solução analítica. A Figura 1.1 mostra a geometria e malha para o escoamento entre as placas planas onde  $d$  é a distância entre as placas, a malha é uniforme e dividida em 5 volumes de controle.



**Figura 1.1** Geometria do escoamento entre placas planas com malha 1D em y.

## 1.2 Solução analítica

A primeira etapa será demonstrar a solução analítica. Recorde as equações da Continuidade e de Navier-Stokes abaixo.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{U} + \rho \mathbf{g} \quad (1.2)$$

Simplificadas para o escoamento estacionário, incompressível, plenamente desenvolvido e sem contribuição da gravidade.

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla^2 \mathbf{U} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{U}) = 0 \quad (1.4)$$

Vamos adotar o sistema de coordenadas cartesianas. Sabemos ainda que o problema em questão tem apenas velocidade na direção x, ou seja,  $\mathbf{U} = (U_x, 0, 0)$ . Assim, a modelagem simplifica para:

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot (\nabla U_x) = \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} = 0 \quad (1.6)$$

Sabendo que o plano z é um plano de simetria a equação simplifica para a solução apenas para  $U_x(y)$ :

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{dU_x}{dy} \right) = 0 \quad (1.7)$$

As etapas para chegar a solução analítica são:

$$\frac{dU_x}{dy} = C_1 \quad (1.8)$$

$$\int dU_x = \int C_1 dy \quad (1.9)$$

$$U_x = C_1 y + C_2 \quad (1.10)$$

Sabendo que as condições de contorno são dadas por  $U_x = 0$  para  $y = 0$  e  $U_x = V$  para  $y = d$ , temos:

$$C_2 = 0 \quad (1.11)$$

$$C_1 = \frac{V}{d} \quad (1.12)$$

A solução analítica para o perfil de velocidade é dada por:

$$U_x = \frac{V}{d} y \quad (1.13)$$

### 1.3 Equação discreta para volumes internos

Vamos agora aplicar o Método dos Volumes Finitos para os volumes internos da malha. Recorde que precisamos apenas da solução para componente x da velocidade. A primeira etapa consiste na integração da equação de conservação no volume de controle e a transformada da integral em volume para integral em área, usando o Teorema de Gauss.

$$\int_{V_c} \nabla \cdot (\nabla U_x) dV = \sum_{A_f} \int_{A_f} (\nabla U_x \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \quad (1.14)$$

A Figura 1.2 mostra a malha uniforme com  $\Delta y = d/N$ , onde  $N = 5$  é o número de volumes de controle da malha. Considere a seguinte notação: P é o centro do volume de controle, N é o centro do volume de controle à norte de P e S é o centro do volume de controle à sul de P. As faces do volume de controle P são, n e s, para as faces à norte e sul, respectivamente. O escoamento entre placas planas é um problema 1D em y, ou seja, temos apenas as faces norte e sul em cada volume de controle, e a equação fica,

$$\int_{A_n} (\nabla U_x \cdot \mathbf{n}) dA + \int_{A_s} (\nabla U_x \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \quad (1.15)$$

que é aproximada por:

$$(\nabla U_x \cdot \mathbf{n})_n A_n + (\nabla U_x \cdot \mathbf{n})_s A_s = 0 \quad (1.16)$$

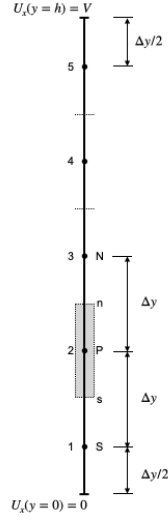
Note que a operação tensorial que temos em  $U_x$  é,

$$\nabla U_x \cdot \mathbf{n} = \frac{dU_x}{dx} n_x + \frac{dU_x}{dy} n_y + \frac{dU_x}{dz} n_z \quad (1.17)$$

onde a normal para cada face é dada por:

$$\mathbf{n}_n = (0, 1, 0) \quad (1.18)$$

$$\mathbf{n}_s = (0, -1, 0). \quad (1.19)$$



**Figura 1.2** Malha 1D em  $y$  com 5 volumes de controle.

Assim, sabendo que a malha para o problema é uniforme e  $A_n = A_s = A$ , a equação aproximada para as faces norte e sul fica:

$$\left( \frac{dU_x}{dy} \right)_n A - \left( \frac{dU_x}{dy} \right)_s A = 0 \quad (1.20)$$

Precisamos agora escolher funções de interpolação para aproximar as derivadas de  $U_x$  nas faces norte e sul, usando os valores dos volumes vizinhos. Vamos considerar a aproximação das derivadas por uma função linear usando dois pontos vizinhos. A aproximação por uma função linear entre dois pontos vizinhos equivale a uma aproximação por diferenças centrais da derivada.

Recorde a definição de derivada de  $U_x$  em relação a  $y$  avaliada no ponto  $y_i$  qualquer:

$$\left( \frac{dU_x}{dy} \right)_{y_i} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{U_x(y_i + \Delta y) - U_x(y_i)}{\Delta y} \quad (1.21)$$

Se quisermos aproximar a derivada por uma função linear, podemos escrever:

$$\left( \frac{dU_x}{dy} \right)_{y_i} \cong \frac{U_x(y_i + \Delta y) - U_x(y_i)}{\Delta y} \quad (1.22)$$

Sabendo que P é o centro do volume de controle em análise, N o centro do volume de controle acima e S o centro do volume de controle abaixo. Sabendo que  $\Delta y$  é a distância entre os pontos N-P e P-S, respectivamente, uma aproximação linear para a derivada na face norte é,

$$\left( \frac{dU_x}{dy} \right)_n \cong \frac{(U_x)_N - (U_x)_P}{\Delta y} \quad (1.23)$$

e na face sul é

$$\left( \frac{dU_x}{dy} \right)_s \cong \frac{(U_x)_P - (U_x)_S}{\Delta y}. \quad (1.24)$$

Agora observe o seguinte, recorde que uma aproximação por diferenças centrais para uma função  $\phi$  qualquer é dada por,

$$\left( \frac{d\phi}{dy} \right)_i \cong \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad (1.25)$$

onde  $h$  é a distância entre o ponto  $i$  e  $i+1$  e  $i-1$ , respectivamente.

Considere a posição da face norte o índice  $i$ , a posição do centro de volume P é  $i-1$  e a posição do volume norte N é  $i+1$ . Neste caso a distância entre a face norte e os pontos P e N, respectivamente é  $\Delta y/2$  e a aproximação para a componente x da velocidade fica:

$$\left( \frac{dU_x}{dy} \right)_n \cong \frac{(U_x)_N - (U_x)_P}{2(\Delta y/2)} = \frac{(U_x)_P - (U_x)_S}{\Delta y}. \quad (1.26)$$

Por este motivo, é possível afirmar que neste caso, a aproximação linear equivale a uma aproximação por diferenças centrais com erro da ordem de  $(\Delta y)^2$ , ou seja, com erro de segunda ordem. A mesma análise pode ser repetida para a face sul.

A próxima etapa agora consiste em substituir as aproximações das derivadas na equação de conservação,

$$\left( \frac{(U_x)_N - (U_x)_P}{\Delta y} \right) A - \left( \frac{(U_x)_P - (U_x)_S}{\Delta y} \right) A = 0 \quad (1.27)$$

e re-arranjar os termos da seguinte forma,

$$\left( \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_N - \left( \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_P - \left( \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_P + \left( \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_S = 0. \quad (1.28)$$

A solução de sistemas algébricos é mais adequada para diagonais positiva. Os termos da diagonal serão aqueles dados pelo ponto P. Assim, as equações são descritas como:

$$-\underbrace{\left( \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_S}_{a_S} + \underbrace{\left( \frac{A}{\Delta y} + \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_P}_{a_P = a_S + a_N} - \underbrace{\left( \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_N}_{a_N} = \underbrace{0}_{S_P} \quad (1.29)$$

Assim, as equações para  $P = 2, 3$  e  $4$  podem ser descritas por:

$$-a_S(U_x)_S + a_P(U_x)_P - a_N(U_x)_N = 0 \quad (1.30)$$

onde,

$$a_S = \frac{A}{\Delta y} ; a_N = \frac{A}{\Delta y} ; S_P = 0 \quad (1.31)$$

e

$$a_P = a_S + a_N + S_P \quad (1.32)$$

Precisamos ainda, escrever estas equações de forma conveniente para montar o sistema algébrico. Assim, para  $P=2$  temos  $S=1$  e  $N=3$ ,

$$-\frac{A}{\Delta y}(U_x)_1 + \frac{2A}{\Delta y}(U_x)_2 - \frac{A}{\Delta y}(U_x)_3 + 0(U_x)_4 + 0(U_x)_5 = 0 \quad (1.33)$$

para  $P = 3$ , temos  $S=2$  e  $N=4$ ,

$$0(U_x)_1 - \frac{A}{\Delta y}(U_x)_2 + \frac{2A}{\Delta y}(U_x)_3 - \frac{A}{\Delta y}(U_x)_4 + 0(U_x)_5 = 0 \quad (1.34)$$

e para  $P = 4$ , temos  $S = 3$  e  $N = 5$ ,

$$0(U_x)_1 + 0(U_x)_2 - \frac{A}{\Delta y}(U_x)_3 + \frac{2A}{\Delta y}(U_x)_4 - \frac{A}{\Delta y}(U_x)_5 = 0 \quad (1.35)$$

Estas equações serão utilizadas na seção 1.6, para montar o sistema algébrico.

#### 1.4 Equação discreta para volumes no contorno

Vejam agora como descrever as equação para os volumes vizinhos às fronteiras, ou no contorno. Vamos começar pelo volume  $P=1$ . Neste caso, não temos face sul, e sim a face do contorno, onde a condição de contorno determina que  $U_x = 0$  em  $y = 0$ . A integração da equação neste volume é

$$\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_{n=1-2} A - \left(\frac{dU_x}{dy}\right)_{y=0} A = 0 \quad (1.36)$$

onde a face norte é a face entre os volumes 1-2 e a face  $y = 0$  é a do contorno.

Precisamos novamente adotar funções de interpolação para as derivadas e vamos começar pela derivada na face norte. Vamos utilizar a aproximação linear, ou por diferenças centrais, para descrever a aproximação para a derivada da velocidade na face norte.

$$\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_{n=1-2} \cong \frac{(U_x)_2 - (U_x)_1}{\Delta y} \quad (1.37)$$

Uma aproximação linear também é adotada para a derivada na face do contorno. Entretanto, como temos acesso apenas aos valores das variáveis nas face do contorno e no centro do volume de controle  $P = 1$ , a aproximação da derivada na face do contorno, pode ser melhor explicada a partir da aproximação por diferença avançada.

Recorde a aproximação para a derivada no ponto  $i$  por diferença avançada entre o ponto  $i$  e  $i + 1$  é dada por,

$$\left(\frac{d\phi}{dy}\right)_i \cong \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} + O(h) \quad (1.38)$$

onde  $h$  é a distância entre os pontos  $i$  e  $i + 1$ .

Voltemos agora para a face do contorno  $y = 0$ , considere esta face o ponto  $i$  e o ponto no centro do volume  $P=1$ ,  $i + 1$ . A distância entre estes pontos é  $\Delta y/2$  e a aproximação para a derivada na face do contorno é:

$$\left(\frac{dU_x}{dy}\right)_{y=0} \cong \frac{(U_x)_1 - (U_x)_{y=0}}{\Delta y/2} \quad (1.39)$$

Substituindo na equação discreta para  $P = 1$ , temos,

$$\left(\frac{(U_x)_2 - (U_x)_1}{\Delta y}\right) A - \left(\frac{(U_x)_1 - (U_x)_{y=0}}{\Delta y/2}\right) A = 0 \quad (1.40)$$

$$\left(\frac{A}{\Delta y}\right) (U_x)_2 - \left(\frac{A}{\Delta y}\right) (U_x)_1 - \left(2\frac{A}{\Delta y}\right) (U_x)_1 + \left(2\frac{A}{\Delta y}\right) (U_x)_{y=0} = 0 \quad (1.41)$$

que para uma equação com diagonal positiva fica,

$$\underbrace{\left(\frac{A}{\Delta y} + 2\frac{A}{\Delta y}\right)}_{a_N + S_P} (U_x)_1 - \underbrace{\left(\frac{A}{\Delta y}\right)}_{a_N} (U_x)_2 = \underbrace{\left(2\frac{A}{\Delta y}\right)}_{S_P} (U_x)_{y=0} \quad (1.42)$$

Assim, a equação para  $P = 1$  podem ser escrita por:

$$-a_S (U_x)_S + a_P (U_x)_P - a_N (U_x)_N = S_P (U_x)_{y=0} \quad (1.43)$$

onde,

$$a_S = 0 ; a_N = \frac{A}{\Delta y} ; S_P = 2\frac{A}{\Delta y} \quad (1.44)$$



e

$$a_P = a_S + a_N + S_P. \quad (1.45)$$

Sabendo que  $U_x(y = 0) = 0$ , a equação fica:

$$\left( \frac{A}{\Delta y} + 2 \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_1 - \left( \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_2 + 0(U_x)_3 + 0(U_x)_4 + 0(U_x)_5 = 0 \quad (1.46)$$

Vamos agora repetir o procedimento para o volume de controle  $P = 5$ , vizinho a face da fronteira  $y = h$ . Neste caso, não temos face norte, e sim a face do contorno, onde a condição de contorno determina que  $U_x = V$  em  $y = h$ . A integração da equação neste volume é

$$\left( \frac{dU_x}{dy} \right)_{y=h} A - \left( \frac{dU_x}{dy} \right)_{s=4-5} A = 0 \quad (1.47)$$

onde a face sul é a face entre os volumes 4-5 e a face  $y = h$  é a do contorno.

Vamos substituir as aproximações lineares das derivadas, onde a derivada na face sul, ou seja, entre os volumes 4-5 é,

$$\left( \frac{dU_x}{dy} \right)_{s=4-5} \cong \frac{(U_x)_5 - (U_x)_4}{\Delta y} \quad (1.48)$$

e a derivada para a face do contorno é dada por um esquema de diferença recuada, onde  $i$  é a face do contorno e  $i-1$  é o ponto 5.

$$\left( \frac{dU_x}{dy} \right)_{y=h} \cong \frac{(U_x)_{y=h} - (U_x)_5}{\Delta y/2} \quad (1.49)$$

Substituindo temos,

$$\left( \frac{(U_x)_{y=h} - (U_x)_5}{\Delta y/2} \right) A - \left( \frac{(U_x)_5 - (U_x)_4}{\Delta y} \right) A = 0 \quad (1.50)$$

$$\left( 2 \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_{y=h} - \left( 2 \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_5 - \left( \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_5 + \left( \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_4 = 0 \quad (1.51)$$

re-arranjando para a diagonal positiva,

$$-\underbrace{\left( \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_4}_{a_S} + \underbrace{\left( \frac{A}{\Delta y} + 2 \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_5}_{a_S + S_P} = \underbrace{\left( 2 \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_{y=h}}_{S_P} \quad (1.52)$$

Assim, a equação para  $P = 5$  podem ser escrita por:

$$-a_S(U_x)_S + a_P(U_x)_P - a_N(U_x)_N = S_P(U_x)_{y=h} \quad (1.53)$$

onde,

$$a_S = \frac{A}{\Delta y} ; a_N = 0 ; S_P = 2 \frac{A}{\Delta y} \quad (1.54)$$

e

$$a_P = a_S + a_N + S_P. \quad (1.55)$$

Sabendo que  $U_x(y = h) = V$ , a equação fica:

$$0(U_x)_1 + 0(U_x)_2 + 0(U_x)_3 - \left( \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_4 + \left( \frac{A}{\Delta y} + 2 \frac{A}{\Delta y} \right) (U_x)_5 = \left( 2 \frac{A}{\Delta y} \right) V \quad (1.56)$$

### 1.5 Solução do sistema algébrico

Podemos agora montar um sistema algébrico com as equações para  $P = 1$  a  $5$ . Sabendo que  $A = 1 \text{ m}^2$ ,  $d = 0.01 \text{ m}$  e  $\Delta y = d/5$ , temos:

$$\begin{array}{cccccc}
 1500(U_x)_1 & -500(U_x)_2 & +0(U_x)_3 & +0(U_x)_4 & +0(U_x)_5 & = & 0 \\
 -500(U_x)_1 & +1000(U_x)_2 & -500(U_x)_3 & +0(U_x)_4 & +0(U_x)_5 & = & 0 \\
 0(U_x)_1 & -500(U_x)_2 & +1000(U_x)_3 & -500(U_x)_4 & +0(U_x)_5 & = & 0 \\
 0(U_x)_1 & +0(U_x)_2 & -500(U_x)_3 & +1000(U_x)_4 & -500(U_x)_5 & = & 0 \\
 0(U_x)_1 & +0(U_x)_2 & +0(U_x)_3 & -500(U_x)_4 & +1500(U_x)_5 & = & 1000
 \end{array}$$

Este conjunto de equações pode ser escrito na forma do seguinte sistema algébrico.

$$\begin{pmatrix} 1500 & -500 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 1000 & -500 & +0 & 0 \\ 0 & -500 & 1000 & -500 & 0 \\ 0 & 0 & -500 & 1000 & -500 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 1500 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (U_x)_1 \\ (U_x)_2 \\ (U_x)_3 \\ (U_x)_4 \\ (U_x)_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

O sistema algébrico é formado por uma matriz de coeficiente tridiagonal  $\mathbf{A}$ , pela matriz coluna de incógnitas  $\mathbf{U}_x$  e termo fonte  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_x = \mathbf{S} \quad (1.58)$$

e pode ser resolvido por

$$\mathbf{U}_x = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{S} \quad (1.59)$$

onde a solução para os valores da componente  $x$  das velocidades é

$$\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 0.9 \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

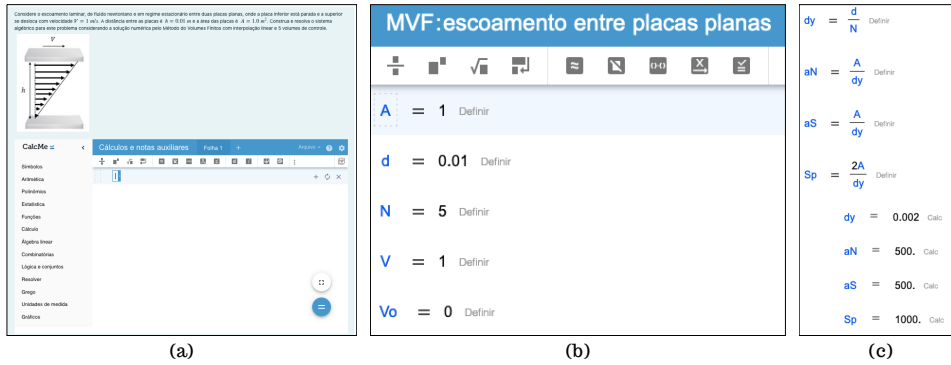
A solução do sistema algébrico será feita usando o CalcMe, uma interface para cálculos algébricos. A Figura 1.3(b) mostra a interface do CalcMe para a definição das variáveis, que deve ser feita na coluna à esquerda da folha de cálculo. A expressão para cálculo dos coeficientes do sistema algébrico é feita em seguida, na Figura 1.3(c).

A matriz dos coeficientes e do termo fonte são definidos, conforme a Figura 1.4(a). A solução do sistema algébrico é feita usando a função `resolver()` do CalcMe, conforme mostra a Figura 1.4(b). Por fim, os estudantes constroem um gráfico de comparação entre a solução analítica e a solução numérica obtida, conforme a Figura 1.4(c). Note que, como o perfil de velocidade é linear, uma malha de apenas cinco volumes reproduz a solução analítica.

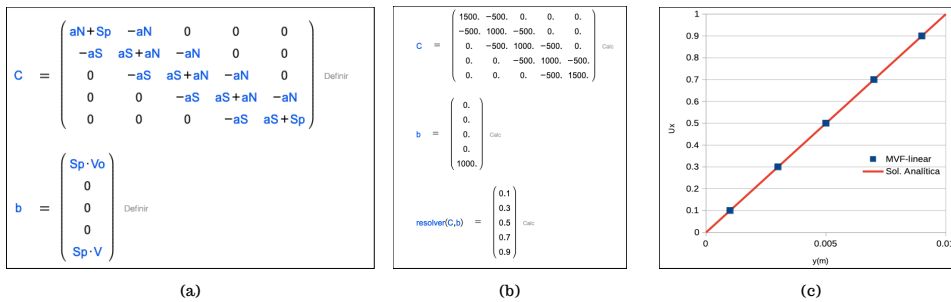
### Referências Bibliográficas

- [1] Patankar, Suhas V., Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

**Figura 1.3** Interface do CalcMe: (a) no Moodle; (b) definição das variáveis; (c) cálculo dos coeficientes.



**Figura 1.4** Etapa de solução numérica do sistema algébrico: (a) definição; (b) solução; (c) comparação.



- [2] Versteeg, H. K., Malalasekera, W., An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method, Pearson Education Limited, 2007.
- [3] Donald F. Young, Bruce R. Munson, Theodore H. Okiishi, A Brief Introduction to Fluid Mechanics, Fifth Edition, John Wiley Sons, Inc., pg 225, 2011.