CORREZIONE degli ESERCIZI

1) Si dica se esiste una funzione f calcolabile totale tale che $\forall x.\ dom(\varphi_{f(x)}) = \mathbb{N}$

(i) $\varphi(y) = 1 \stackrel{CT}{\Rightarrow} \exists M_i$ che la calcola

$$\varphi_i(y) = \varphi(y)$$

$$dom(\varphi) = \mathbb{N}$$

$$f(x) := i$$

è calcolabile

$dom(f) = \mathbb{N} \Rightarrow f$ è totale

$\Rightarrow$ Th. Q.E.D.

(ii) $g(x,y) = y$ $\quad$ g è totale su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

è calcolabile

$\stackrel{CT}{\Rightarrow} \exists M_i$ che la calcola

$$g(x,y) = \varphi_i(x,y)$$

$$\stackrel{s\text{-}m\text{-}n}{=} \varphi_{s(x)}(y) = \varphi_{f(x)}(y)$$

$$dom(\varphi_{f(x)}) = ?$$

L'unica variabile è y

$= \mathbb{N} \Rightarrow$ Th Q.E.D.

2) (i) $K \leq_{REC} \{x \mid dom(\varphi_x) \text{ e' ricorsivo}\} := REC$

Almeno una parte del test deve coinvolgere l'appartenenta a K per la definitione di riduzione

$$\psi(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{se } \overset{x \notin K}{\varphi_x(x)\downarrow} \vee \overset{y \notin K}{\varphi_y(y)\downarrow} \\ \text{indefinito} & \text{alt} \end{cases}$$

deve esserci perché si lavora con K

Deve essere calcolabile,

si costruisce una MdT:

| $\langle M_x \rangle$ |
| $\langle x \rangle$ |
| $\langle M_y \rangle$ |
| $\langle y \rangle$ |

Con MdT universale simulo M_x su x e M_y su y: se una delle due termina, scrivo 1 in output e termino; se nessuna delle due termina non e' un problema, e' indefinita.

$$\psi(x,y) \overset{CT}{=} \varphi_i(x,y) \overset{s\text{-}m\text{-}n}{=} \varphi_{f(x)}(y)$$

Ⓘ $x \in K$:

$\varphi_{f(x)} = 1$

$dom(\varphi_{f(x)}) = \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ e' ricorsivo

$\Rightarrow f(x) \in REC$

Ⓘⓘ $x \notin K$:

$$\varphi_{f(x)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi_y(y)\downarrow \\ \text{indefinita} & \text{alt} \end{cases}$$

$dom(\varphi_{f(x)}) = K$

$\Rightarrow f(x) \notin REC$

QED

(ii) $\overline{K} \leq_{REC} REC$.

K è semidecidibile $\varphi(x) = \begin{cases} ok \dots \\ indef \end{cases}$

$\overline{K}$ no

Si dimostra $K \leq_{rec} \overline{REC} \iff \overline{K} \leq_{rec} REC$.

oss. $\emptyset$ è ricorsivo

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi_x(x)\downarrow \wedge \varphi_y(y)\downarrow \\ \text{indefinita} & \text{alt} \end{cases} = \varphi_{f(x)}(y)$$

(I) $x \in K$:

$$\varphi_{f(x)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi_y(y)\downarrow \\ \text{indefinito} & \text{alt} \end{cases}$$

$dom(\varphi_{f(x)}) = K$

K non è ricorsivo

$f \notin REC \iff f \in \overline{REC}$

(II) $x \notin K$:

$\varphi_{f(x)}(y) = \text{indefinita}$

$dom(\varphi_{f(x)}) = \emptyset$

$\emptyset$ è ricorsivo

$f \in REC \iff f \notin \overline{REC}$

QED

Dimostrare che REC non è ricorsivo.

Si usa il teorema "pre Rice":

Si deve dimostrare che $REC \neq \emptyset$,

$REC \neq \mathbb{N}$, REC è iirf

1) $REC \neq \emptyset$:

Cerco una funzione che appartiene a REC

φ_i = indefinito

$dom(\varphi_i) = \emptyset$, $\emptyset$ e' ricorsivo

$\Rightarrow \varphi_i \in REC$

oppure

$\varphi_x(x) = x$ funzione identita

$\overset{CT}{=} \varphi_i$ $dom(\varphi_i) = \mathbb{N} \Rightarrow \varphi_i \in REC$

2) $REC \neq \mathbb{N}$

φ_i dipende dalla semidecidibilita' di K

$dom(\varphi_i) = K$

K non e' ricorsivo

$i \notin REC$

3) REC e' iirf

x, y tc $x \in REC$, $\varphi_y = \varphi_x$

$\varphi_y = \varphi_x \Rightarrow dom(\varphi_y) = dom(\varphi_x)$

$\overset{\{x \in REC\}}{\Rightarrow} dom(\varphi_y)$ e' ricorsivo

$\Rightarrow y \in REC$

Q.E.D.

oss. $\{x \mid \varphi_x = \varphi_{x+1}\}$ non e' iirf

Sia A iirf:

$\exists f$ calcolabile totale tc $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in \bar{A}$?

Dim:

Assumo per assurdo che esista f

f ct $\Rightarrow \exists n .\ \varphi_n = \varphi_{f(n)}$ per teorema di ricorsione

$n \in A \Rightarrow f(n) \in \bar{A}$

$\varphi_n = \varphi_{f(n)} \xRightarrow{A \text{ è iirf}} f(n) \in A$ assurdo

$n \notin A$ idem

oss. (*) Se A è ricorsivo allora $\exists f$ ct tale che $A \leq_f \bar{A}$

(inverto 0 e 1 nella funzione caratteristica)

Esistono insiemi ricorsivi che sono iirf ?

$\emptyset$ è iirf:

$\emptyset = A$

$x \in A \Rightarrow f(x) \in \bar{A}$

Nessun elemento sta in A

$x \notin A \Rightarrow f(x) \in \mathbb{N}$ è sempre falso

$\mathbb{N}$ è iirf:

$\mathbb{N} = A$

$x \in A \Rightarrow f(x) \in \bar{A}$ Nessun elemento sta in $\bar{A}$

(*) È vera se e solo se $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{N}$.