ESERCIZIO 1

$f(x) = x^n = e^{n\log x}$ con $n \in \mathbb{N}, x > 0$

a) Studiare il condizionamento del problema.

$$\varepsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \doteq c_x \varepsilon_x \quad \text{con } c_x = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Calcolo c_x:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{n\log x} = e^{n\log x} \cdot \frac{n}{x}$$

$$\Rightarrow c_x = \frac{x}{e^{n\log x}} \cdot e^{n\log x} \cdot \frac{n}{x} = \underline{n}.$$

Si passa alla stima dell'errore inerente:

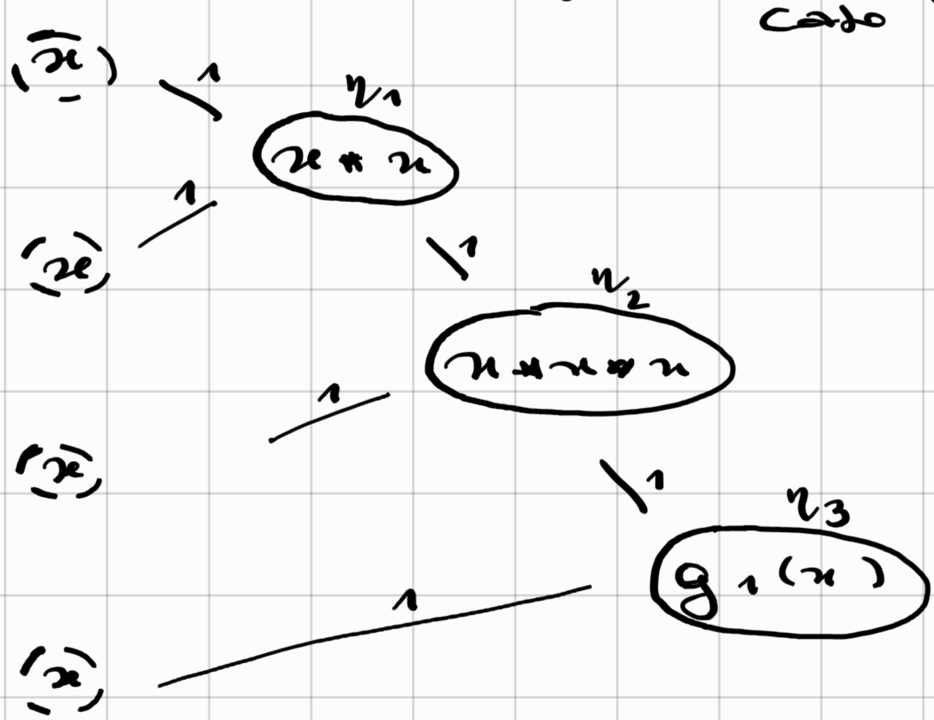
$$\varepsilon_{in} \leq |\varepsilon_{in}| = |n \cdot \varepsilon_x| = n|\varepsilon_x| \leq nu.$$

b) Si studi la stabilità dei due algoritmi.

$$g_1(x) := x^n \quad , \quad g_2(x) = e^{n \log x}$$

Suppongo $n=4$ per $g_1(x)$, poi generalizzo:

$\eta :=$ errore algoritmico nel caso $n=4$.



$$\eta = \eta_3 + 1\left(\eta_2 + 1\left(\eta_1\right)\right) = \eta_3 + \eta_2 + \eta_1$$

$\Rightarrow \varepsilon_{alg} = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i$

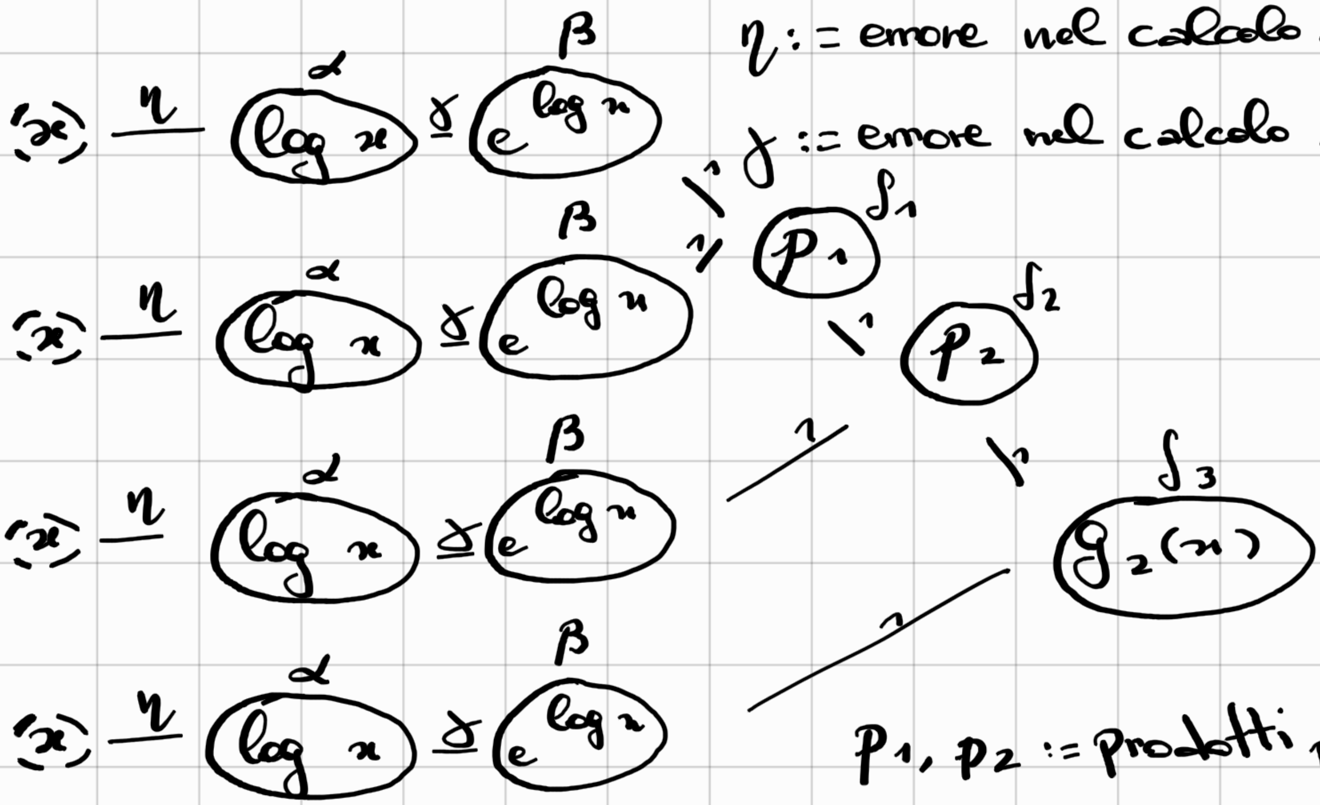
Stimo l'errore di $g_1(x)$:

$$\varepsilon_{alg} \leq |\varepsilon_{alg}| = \left| \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |\eta_i| \leq \underline{(n-1)u}.$$

È stabile.

Faccio lo stesso ragionamento anche per $g_2(x)$:

{ Suppongo di avere una funzione di libreria che calcoli e^x e una per $\log x$ }



$\eta :=$ errore nel calcolo di $\log x$

$\gamma :=$ errore nel calcolo di e^x

$p_1, p_2 :=$ prodotti parziali

$K :=$ errore algoritmico nel caso $n=4$

$$K = \delta_3 + \beta + \gamma\alpha + \eta + \delta_2 + (\beta + \gamma\alpha + \eta) + \delta_1 + (\beta + \gamma\alpha + \eta) + \beta + \gamma\alpha + \eta =$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + 4(\beta + \gamma\alpha + \eta)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{alg} = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i + n(\beta + \gamma\alpha + \eta)$$

Stimo l'errore algoritmico:

$$\varepsilon_{alg} \leq |\varepsilon_{alg}| = \left|\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i + n(\beta + \gamma\alpha + \eta)\right|$$

$$\leq \left|\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i\right| + |n(\beta+\gamma\alpha+\eta)|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n-1} |\delta_i| + |n(\beta+\gamma\alpha+\eta)|$$

$$\leq (n-1)u + |n(\beta+\gamma\alpha+\eta)|$$

$$= (n-1)u + n|(\beta+\gamma\alpha+\eta)|$$

$$\leq (n-1)u + n(|\beta|+|\gamma\alpha|+|\eta|)$$

$$= (n-1)u + n(|\beta|+|\gamma|\cdot|\alpha|+|\eta|)$$

$$\leq (n-1)u + n(u+u^2+u)$$

$$= nu+nu+nu+nu^2-u =$$

$$= nu^2+3nu-u = \underline{u(n(u+3)-1)}.$$

E' stabile.

c) Stimare il costo computazionale.

$g_1(x)$ e' del tipo:

```
p=1;
for i=1:n
    p = p * x;
end
```

$g_2(x)$ e' del tipo:

```
q = log x;
q = e^q;
p = 1;
for i=1:n
    p = p * q;
end
```

$T(n) = O(n)$.

$T(n) = O(n)$