TEOREMA di RAPPRESENTAZIONE in BASE

Hp: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, base $\beta \geq 2$

Th: $\exists!\ p \in \mathbb{Z}$, $\{d_i\}_{i \geq 1}$ interi non negativi

t.c.

- $d_1 \neq 0$,
- $(\forall i.\ d_i \in [0; \beta - 1])$,
- $(\forall k > 0.\ (\exists j \geq k \mid d_j \neq \beta - 1))$
- $x = \text{segno}(x) \cdot \underbrace{\beta^p}_{\text{esponente}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \beta^{-i} \right)}_{\text{mantissa}}$

INSIEME dei NUMERI di MACCHINA

$$\mathbb{F}(\beta, t, m, M) := \{0\} \cup \{ x \in \mathbb{R} : x = \text{segno}(x) \cdot \beta^p \left(\sum_{i=1}^{t} d_i \beta^{-i} \right)$$

$$\text{con } d_1 \neq 0, (\forall i \in [0; t].\ d_i \in [0; \beta[\ ),\ p \in [-m; M] \}$$

$\Omega :=$ massimo numero di macchina

$$\Omega = \beta^M (1 - \beta^{-t})$$

$$\#\mathbb{F} = 1 + 2 \underbrace{(m + M + 1)}_{\text{esponenti}} \underbrace{(\beta^t - \beta^{t-1})}_{\text{mantisse}}$$

$\omega :=$ minimo numero >0 rappresentabile

$$\omega = \beta^{-m-1}$$

TRONCAMENTO e ARROTONDAMENTO

Hp: $x = \text{segno}(x)\, \beta^{p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \beta^{-i} \right)$

1) troncamento:

$$\tilde{x} = \text{trunc}(x) = \text{segno}(x)\, \beta^{p} \left(\sum_{i=1}^{t} d_i \beta^{-i} \right)$$

2) arrotondamento:

$$\tilde{x} = \text{arr}(x) \begin{cases} = \text{trunc}(x) & \text{se } d_{t+1} < 1/2\, \beta \\ = \text{trunc}(x) + \beta^{p-t} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ERRORE ASSOLUTO

$$\varepsilon = \tilde{x} - x$$

ERRORE RELATIVO

$$\varepsilon_x = (\tilde{x} - x) / x$$

PRECISIONE di MACCHINA

$$|\varepsilon_x| = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|} < u \qquad \begin{cases} u = \beta^{1-t} & \text{se } \tilde{x} = \text{trunc}(x) \\ u = 1/2\, \beta^{1-t} & \text{se } \tilde{x} = \text{arr}(x) \end{cases}$$

OPERAZIONI di MACCHINA

$$x \circledcirc{op}\ y = (x \text{ op } y)(1+\varepsilon)$$

con $\varepsilon :=$ errore locale dell'operazione

ERRORE INERENTE

$$\varepsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \quad \text{con } f(x) \neq 0$$

Dico che un problema è MALCONDIZIONATO per un intorno di x se e solo se $\nexists \sup(f(x))$.

Hp: $f : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, f differenziabile due volte, $\tilde{x} = (\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n)$

$$\varepsilon_{in} \doteq \sum_{i=1}^{n} c_{x_i} \varepsilon_{x_i}, \quad \text{con } c_{x_i} = \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_i)$$

coefficiente di amplificazione

Somma: $c_x = \frac{x}{x+y}$, $c_y = \frac{y}{x+y}$

sottrazione: $c_x = \frac{x}{x-y}$, $c_y = \frac{y}{x-y}$

moltiplicazione: $c_x = 1$, $c_y = 1$

divisione: $c_x = 1$, $c_y = -1$

ERRORE ALGORITMICO

Hp: $g(x) :=$ sequenza dei passaggi algoritmici utilizzati nel calcolo di $f(x)$

e.g. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $g(x) = ((x \otimes x) \oplus 1) \oslash x$

$$\varepsilon_{alg} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

ERRORE TOTALE

$$\varepsilon_{TOT} = \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg}$$