ESERCIZIO 1

$$f(x) = x^n = e^{n \log x} \quad \text{con } n \in \mathbb{N},\ x > 0$$

a) Studiare il condizionamento del problema.

$$\varepsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \doteq c_x \varepsilon_x \quad \text{con } c_x = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Calcolo c_x:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{n \log x} = e^{n \log x} \cdot \frac{n}{x}$$

$$\Rightarrow c_x = \frac{x}{e^{n \log x}} \cdot e^{n \log x} \cdot \frac{n}{x} = \underline{n}.$$

Si passa alla stima dell'errore inerente:

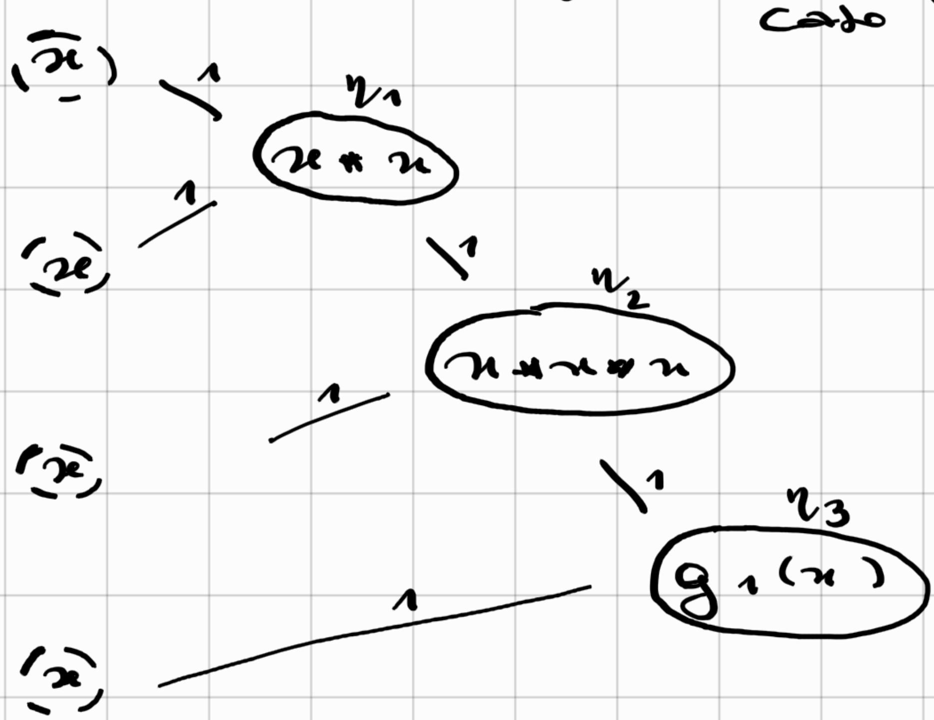
$$\varepsilon_{in} \leq |\varepsilon_{in}| = |n \cdot \varepsilon_x| = n|\varepsilon_x| \leq nu.$$

b) Si studi la stabilità dei due algoritmi.

$$g_1(x) := x^n \quad , \quad g_2(x) = e^{n \log x}$$

Suppongo $n=4$ per $g_1(x)$, poi generalizzo:

$\eta :=$ errore algoritmico nel caso $n=4$.



$$\eta = \eta_3 + 1(\eta_2 + 1(\eta_1)) = \eta_3 + \eta_2 + \eta_1$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{alg} = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i$$

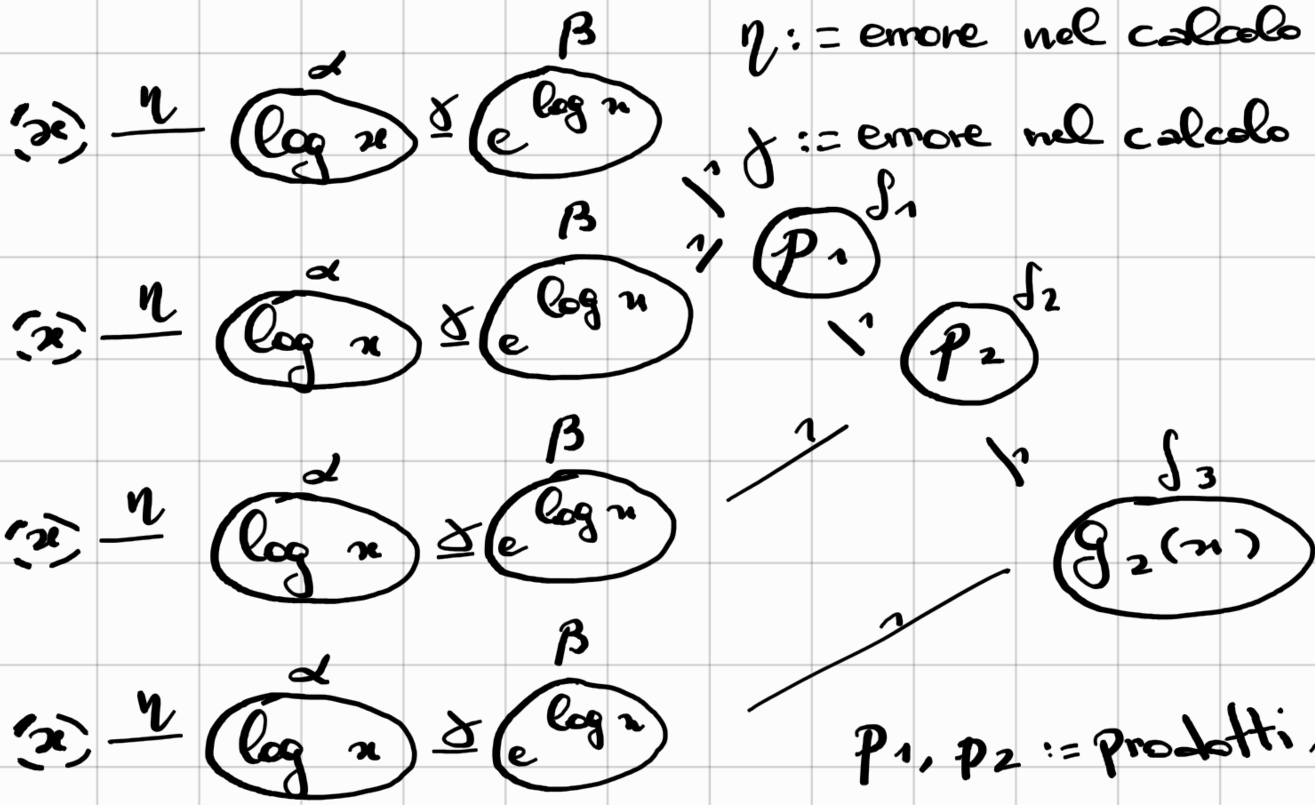
Stimo l'errore di $g_1(x)$:

$$\varepsilon_{alg} \leq |\varepsilon_{alg}| = \left| \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |\eta_i| \leq \underline{(n-1)u.}$$

È stabile.

Faccio lo stesso ragionamento anche per $g_2(x)$:

$\{$ Suppongo di avere una funzione di libreria che calcoli e^x e una per $\log x$ $\}$



$\eta :=$ errore nel calcolo di $\log x$

$\gamma :=$ errore nel calcolo di e^x

$p_1, p_2 :=$ prodotti parziali

$K :=$ errore algoritmico nel caso $n=4$

$$K = \delta_3 + \beta + \gamma\alpha + \eta + \\ + \delta_2 + (\beta + \gamma\alpha + \eta) + \\ + \delta_1 + (\beta + \gamma\alpha + \eta) + \\ + \beta + \gamma\alpha + \eta =$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + 4(\beta + \gamma\alpha + \eta)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{alg} = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i + n(\beta + \gamma\alpha + \eta)$$

Stimo l'errore algoritmico:

$$\varepsilon_{alg} \leq |\varepsilon_{alg}| = \left|\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i + n(\beta + \gamma\alpha + \eta)\right|$$

$$\le \left|\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i\right| + |n(\beta+\gamma\alpha+\eta)|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n-1} |\delta_i| + |n(\beta+\gamma\alpha+\eta)|$$

$$\le (n-1)u + |n(\beta+\gamma\alpha+\eta)|$$

$$= (n-1)u + n|(\beta+\gamma\alpha+\eta)|$$

$$\le (n-1)u + n(|\beta| + |\gamma\alpha| + |\eta|)$$

$$= (n-1)u + n(|\beta| + |\gamma|\cdot|\alpha| + |\eta|)$$

$$\{Hp: \exists \sup(\gamma) = K \wedge \exists \sup(\eta) = Z\}$$

$$\le (n-1)u + n(u + Ku + Z)$$

$$= nu - u + nu + nKu + nZ$$

$$= 2nu + nKu + nZ - u.$$

<u>È stabile</u>.

c) Stimare il costo computazionale.

$g_1(x)$ e' del tipo:

```
p = 1;
for i = 1 : n
    p = p * x;
end
```

$g_2(x)$ e' del tipo:

```
q = log x;
q = e^q;
p = 1;
for i = 1 : n
    p = p * q;
end
```

$T(n) = O(n)$.

$T(n) = O(n)$.

ESERCIZIO 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \alpha \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i-j=1 \\ \alpha & \text{se } i=1, j=n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Dimostrare che $(\forall n.\ \|A\|_1 = \|A\|_2 = \|A\|_\infty)$.

$$\|A\|_1 = \max_{j=1\ldots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \begin{cases} 0+1+0+\ldots+0 \\ \alpha+0+\ldots+0 \end{cases}$$

$$= \max\{1, |\alpha|\}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1\ldots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \begin{cases} 0+\ldots+0+\alpha \\ 1+0+\ldots+0 \end{cases}$$

$$= \max\{1, |\alpha|\}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \alpha & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & \alpha \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\max(1, \alpha^2)} = \|A_1\| = \|A\|_2 \quad \text{Q.E.D.}$$

b) Per quali α la matrice e' non singolare?

A non singolare $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$

$\Leftrightarrow$ le colonne sono lin. ind.

$\Rightarrow \alpha \neq 0$.

c) Si calcoli l'inverso di A.

$A \cdot \text{inv}(A) = Id$

$$\begin{bmatrix} & & & \alpha \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \cdot ? = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{inv}(A) = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1/\alpha & & & \end{bmatrix}.$$

d) Si studi il condizionamento di A in norma 2.

$$\mu_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$$

$$\downarrow \max(1, |\alpha|)$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho((A^{-1})^T A^{-1})}$$

$$\begin{bmatrix} & & & 1/\alpha \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1/\alpha & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\alpha^2 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\rho((A^{-1})^T A)} = \max(1, |1/\alpha|)$$

Distinguo due casi:

$|\alpha| \geq 1$:

$\mu_2(A) = |\alpha| \cdot 1 = |\alpha|$.

$0 < |\alpha| < 1$:

$\mu_2(A) = 1 \cdot \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|}$.