I: insieme ricorsivo $\Leftrightarrow \chi_I(x)$ è c.t.

ricorsivamente enumerabile $\Leftrightarrow \exists i : I = dom(\varphi_i)$

$$I = \begin{cases} \emptyset \\ Imm(f) \end{cases}$$

$K = \{ i \mid \varphi_i(i)\downarrow \} \in \mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \subset \mathcal{RE} \subset \ldots$?

Esempi

1) $C_L^{L \to A}$: compilatore scritto in linguaggio L,

compila da L in A

. Si cerca $C_A^{L \to A}$

si fa bootstrapping di $C_L^{L \to A}$:

si applica a se stesso $C_L^{L \to A}(C_L^{L \to A}) =$

$= C_A^{L \to A}$

Quindi il problema della autoapplicazione non è artificiale

2) "Questo programma termina sempre"

$K_0 = \{ (x, y) : \varphi_x(y)\downarrow \}$

(ossia $\exists z \mid T(y, x, z)$)

Il problema di sapere se $(x, y) \in K_0$

è detto problema della fermata:

decidere se $(x,x) \in K_0$ è come decidere $x \in K$

ie $(x,x) \in K_0 \Leftrightarrow x \in K$

RIDUCIBILITA'

A: insieme si riduce a B: insieme secondo f se e solo se

$x \in A \iff f(x) \in B$. Si scrive $A \leq_f B$. Vale anche che $\bar{A} \leq_f \bar{B}$.

$A \leq_F B \iff \exists f \in F.\ A \leq_f B$

TEOREMA

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$: classi di problemi

La relazione $\leq_F$ classifica $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ se e soltanto se valgono

1) $A \leq_F A$ (ossia Identita' $\in F$)

2) $A \leq_F B,\ B \leq_F C \iff A \leq_F C$ (ossia $f, g \in F \iff f \circ g \in F$)

3) $A \leq_F B,\ B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \in \mathcal{D}$ $\quad$ ($f \in F, B \in \mathcal{D} \Rightarrow \{x : f(x) \in B\} \in \mathcal{D}$)

4) $A \leq_F B,\ B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \in \mathcal{E}$ $\quad$ ($\mathcal{E}$ $\mathcal{E}$)

Definisco $\text{grado}(A) = \{B \mid A \leq_F B,\ B \leq_F A\}$

(e' l'insieme di problemi che hanno più o meno la stessa difficolta')

Definisco H $\leq_F$ arduo per $\mathcal{E}$ se $\forall A \in \mathcal{E}.\ A \leq_F H$

completo $\quad$ H e' $\leq_F$ arduo per $\mathcal{E}$, $H \in \mathcal{E}$

Proprieta':
- C completo per $\mathcal{E}$, $C \in \mathcal{D} \iff \mathcal{D} = \mathcal{E}$
- A completo per $\mathcal{E}$, $A \leq_F B$, $B \in \mathcal{E} \Rightarrow B$ completo per $\mathcal{E}$

Scrivo che $A \leq_{REC} B$ se e solo se $\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ c.t. tale che
$f(x) \in B$.

$\leq_{REC}$ classifica $\mathcal{R}, \mathcal{RE}$:

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{RE}$ sí

1) Id e' ct? sí

2) la composizione conserva la totalità

3) $\{x \mid f(x) \in B\}$ e' $\chi_B \circ f$, ct perché composizione di funzioni ct

4) come 3) ma con la funzione semicaratteristica

oss. $K \not\leq_{REC} \overline{K}$, $\overline{K} \not\leq_{REC} K$ poiché se valesse anche una sola delle due disuguaglianze allora $K \in \mathcal{RE}$

Th. K e' $\mathcal{RE}$ completo

Dim: . $K \in \mathcal{RE}$

. Prendiamo $A \in \mathcal{RE}$:

$$\{\text{def}\}\ \exists i : A = dom(\varphi_i)$$
$$\Updownarrow$$
$$A = \{x \mid \varphi_i(x)\downarrow\}$$

Definisco $\psi(x,y) = \varphi_i(x)$ e' calcolabile, ha indice j

$$= \{x \mid \varphi_j(x,y)\downarrow\}$$

Si applica il teorema del parametro.

$$f(x) = \lambda x.\, s(j,x)$$

$$\{x \mid \varphi_j(x,y)\downarrow\} =$$

$= \{x \mid \varphi_{f(x)}(y)\downarrow\}.$

Ma y viene ignorato, quindi posso scrivere

$= \{x \mid \varphi_{f(x)}(f(x))\downarrow\}. \quad \{x \mid f(x) \in K\}$

Q.E.D.

ESERCIZIO

L'insieme degli indici delle funzioni c.t. (cioe' rec) e' indecidibile

$$K = \{x \mid \varphi_x(x)\downarrow\} \leq_{REC} \{x \mid \varphi_x \in rec\} = TOT$$

rec: insieme di funzioni

TOT: insieme di indici

Dim: $\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \text{indef} & \text{alt} \end{cases}$

e' intuitivamente calcolabile

{Church-Turing} $\Rightarrow$ ha un indice

Applico il teorema del parametro:

$\varphi_i(x,y) = \varphi_{s(i,x)}(y) = \varphi_{f(x)}(y)$

- Caso 1: $x \in K$

si cerca l'indice di una funzion totale

$\forall y.\ \varphi_{f(x)}(y) = 1$ e' totale $\Rightarrow f(x) \in TOT$

- Caso 2: $x \notin K$

$\forall y.\ \varphi_{f(x)}(y) = \text{indef}$ non e' totale $\Rightarrow f(x) \notin TOT$

$\Rightarrow K \leq_{REC} TOT$ per definizione di riduzione.