TEOREMA di RAPPRESENTAZIONE in BASE

Hp: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, base $\beta \geq 2$

Th: $\exists!\ p \in \mathbb{Z}$, $\{d_i\}_{i \geq 1}$ interi non negativi t.c.

- $d_1 \neq 0$,
- $(\forall i.\ d_i \in [0; \beta - 1])$,
- $(\forall k > 0. (\exists j \geq k \mid d_j \neq \beta - 1))$
- $x = \text{segno}(x) \cdot \underbrace{\beta^p}_{\text{esponente}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \beta^{-i} \right)}_{\text{mantissa}}$

INSIEME dei NUMERI di MACCHINA

$$\mathbb{F}(\beta, t, m, M) := \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = \text{segno}(x) \cdot \beta^p \left(\sum_{i=1}^{t} d_i \beta^{-i} \right)$$

con $d_1 \neq 0, (\forall i \in [0; t].\ d_i \in [0; \beta[\ ),$
$p \in [-m; M] \}$

$\Omega :=$ massimo numero di macchina

$$\Omega = \beta^M (1 - \beta^{-t})$$

$$\# \mathbb{F} = 1 + 2 \underbrace{(m + M + 1)}_{\text{esponenti}} \underbrace{(\beta^t - \beta^{t-1})}_{\text{mantisse}}$$

$\omega :=$ minimo numero >0 rappresentabile

$$\omega = \beta^{-m-1}$$

TRONCAMENTO e ARROTONDAMENTO

Hp: $x = \text{segno}(x)\, \beta^{p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \beta^{-i} \right)$

1) troncamento:

$$\tilde{x} = \text{trunc}(x) = \text{segno}(x)\, \beta^{p} \left(\sum_{i=1}^{t} d_i \beta^{-i} \right)$$

2) arrotondamento:

$$\tilde{x} = \text{arr}(x) \begin{cases} = \text{trunc}(x) & \text{se } d_{t+1} < 1/2\, \beta \\ = \text{trunc}(x) + \beta^{p-t} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ERRORE ASSOLUTO

$$\varepsilon = \tilde{x} - x$$

ERRORE RELATIVO

$$\varepsilon_x = (\tilde{x} - x) / x$$

PRECISIONE di MACCHINA

$$|\varepsilon_x| = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|} < u$$

$u = \beta^{1-t}$ se $\tilde{x} = \text{trunc}(x)$

$u = 1/2\, \beta^{1-t}$ se $\tilde{x} = \text{arr}(x)$

OPERAZIONI di MACCHINA

$$x \circledcirc\!\!\!\!\text{op}\; y = (x \text{ op } y)(1+\varepsilon)$$

con $\varepsilon :=$ errore locale dell'operazione

ERRORE INERENTE

$$\varepsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \quad \text{con } f(x) \neq 0$$

Dico che un problema è MALCONDIZIONATO per un intorno di x se e solo se $\nexists \sup(f(x))$.

Hp: $f : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, f differenziabile due volte, $\tilde{x} = (\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n)$

$$\varepsilon_{in} \doteq \sum_{i=1}^{n} c_{x_i} \varepsilon_{x_i}, \quad \text{con } c_{x_i} = \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_i)$$

coefficiente di amplificazione

Somma: $c_x = \dfrac{x}{x+y}$, $c_y = \dfrac{y}{x+y}$

sottrazione: $c_x = \dfrac{x}{x-y}$, $c_y = \dfrac{y}{x-y}$

moltiplicazione: $c_x = 1$, $c_y = 1$

divisione: $c_x = 1$, $c_y = -1$

ERRORE ALGORITMICO

Hp: $g(x) :=$ sequenza dei passaggi algoritmici utilizzati nel calcolo di $f(x)$

e.g. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, $g(x) = ((x \otimes x) \oplus 1) \oslash x$

$$\varepsilon_{alg} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

ERRORE TOTALE

$$\varepsilon_{TOT} = \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg}$$

ERRORE ANALITICO

$f(x)$ NON razionale $\rightarrow h(x)$ razionale

$$\varepsilon_{AN} = \frac{h(x) - f(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{TOT} \doteq \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg} + \varepsilon_{an}.$$

NORMA VETTORIALE

È una funzione $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ t.c.

1) $\left(\forall v \in \mathbb{F}^n .\ f(v) \geq 0 \wedge f(v) = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}\right)$

2) $\left(\forall v \in \mathbb{F}^n . \left(\forall \alpha \in \mathbb{F} .\ f(\alpha v) = |\alpha| f(v)\right)\right)$

3) $\left(\forall v, w \in \mathbb{F}^n .\ f(v + w) \leq f(v) + f(w)\right)$

NORMA EUCLIDEA

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \quad }\ .$$

NORMA 1

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

NORMA INFINITO

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1 \ldots n} |x_i|$$

NORMA MATRICIALE

funzione $f : \mathbb{F}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

1) $\left(\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n} .\ f(A) \geq 0 \wedge f(A) = 0 \Leftrightarrow A = \vec{0}\right)$

2) $\left(\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n} . \left(\forall \alpha \in \mathbb{F} .\ f(\alpha A) = |\alpha| \cdot f(A)\right)\right)$

3) $\left(\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times n} .\ f(A+B) \leq f(A) + f(B)\right)$

4) $\left(\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times n} .\ f(A \cdot B) \leq f(A) \cdot f(B)\right)$

oss. Per ogni norma matriciale $\|I_d\| \geq 1$.