ESERCIZIO 1

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

a) Si studi il condizionamento del calcolo di $f(x)$.

$$\varepsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \doteq c_x \varepsilon_x \quad \text{con} \quad c_x := \frac{d}{dx} f(x) \cdot \frac{x}{f(x)}.$$

Derivo $f(x)$:

$$f'(x) = 1 + (-1)(x+1)^{-2} = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 1 + 2x - 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}.$$

Calcolo c_x:

$$\frac{x}{x^2} \cdot (x+1) \cdot \frac{(x^2+2x)}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}.$$

Stimo l'errore inerente:

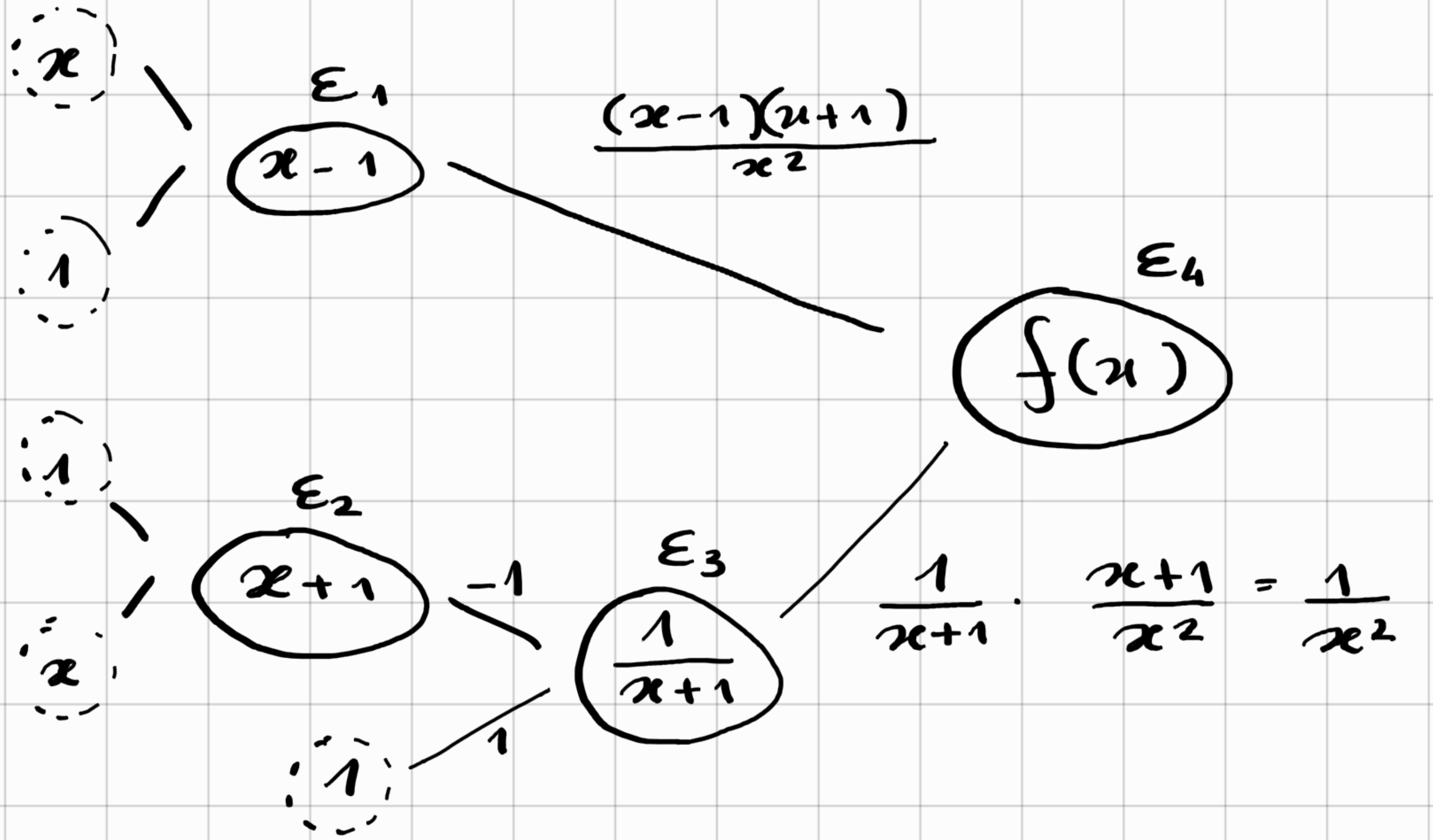
$$\varepsilon_{in} \leq |\varepsilon_{in}| = \left| \frac{x+2}{x+1} \varepsilon_x \right| = \left| \frac{x+2}{x+1} \right| \cdot |\varepsilon_x|$$

$$\leq \left| \frac{x+2}{x+1} \right| u.$$

Risulta instabile per $x \to -1$, è invece stabile per $x \to \pm\infty$.

b) Si studi la stabilità del calcolo di $f(x)$ e la si confronti con la stabilità dell'algoritmo che calcola la funzione come $g(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

Parto dal caso $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$:



Stimo l'errore algoritmico:

$$\varepsilon_{alg} \le |\varepsilon_{alg}| = \left| \varepsilon_4 + \frac{1}{x^2}\left(\varepsilon_3 - \varepsilon_2\right) + \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\varepsilon_1 \right|$$

$$\leq |\varepsilon_4| + \left|\frac{1}{x^2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)\right| + \left|\frac{x^2-1}{x^2}\,\varepsilon_1\right|$$

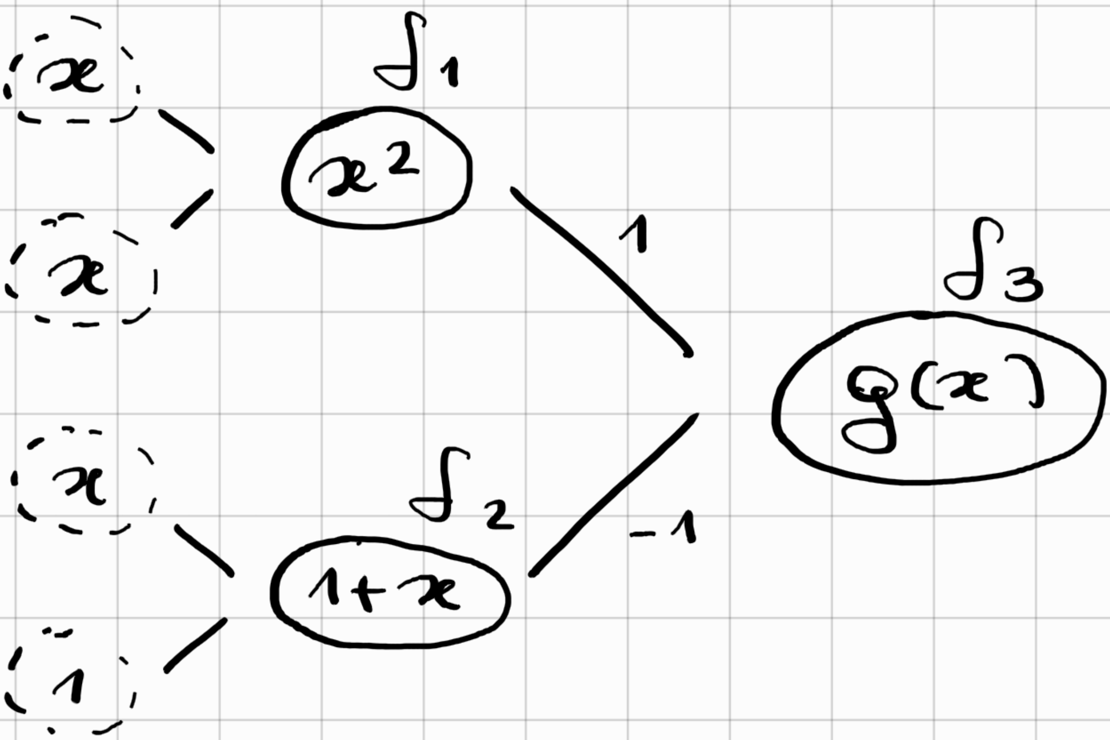
$$= |\varepsilon_4| + \frac{1}{x^2}|(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)| + \left|\frac{x^2-1}{x^2}\right| |\varepsilon_1|$$

$$\leq |\varepsilon_4| + \frac{1}{x^2}(|\varepsilon_3| + |\varepsilon_2|) + \left|\frac{x^2-1}{x^2}\right| |\varepsilon_1|$$

$$\leq u\left(1 + \frac{2}{x^2} + \left|\frac{x^2-1}{x^2}\right|\right)$$

Risulta instabile per $x \to 0$,
è stabile per $x \to -1$, $x \to \pm\infty$.

Passo al caso $g(x)$:



Stimo l'errore algoritmico:

$$\varepsilon_{alg} \leq |\varepsilon_{alg}| = |\delta_3 + \delta_1 - \delta_2|$$

$$\leq |\delta_3| + |\delta_2| + |\delta_1| \leq 3u.$$

L'algoritmo e' sempre stabile.

ESERCIZIO 2

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$, $A = Id + \alpha e_n e_1^T + \alpha e_1 u^T$ con $\alpha \in \mathbb{R}$,

$u = [0, 1, \dots, 1]^T$, e_i i-esimo vettore della base canonica.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix}$$

a) Si dimostri che A e' non singolare per $|\alpha| < 1$, mentre e' singolare per $|\alpha| = 1$.

Nel caso $|\alpha| < 1$ risulta:

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \text{, infatti } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| = |\alpha| \text{ e } a_{ii} = 1$$

$\Rightarrow$ A e' a predominanza diagonale per colonne

$\Rightarrow$ Th.

Nel caso $|\alpha| = 1$ risulta:

(A_1, A_n) in dipendenza lineare

$\Rightarrow$ Th. Q.E.D.

b) Si dimostri che $\det(A) = 1-\alpha^2$ e che quindi A risulta non singolare se e solo se $|\alpha| \neq 1$.

Calcolo il determinante col metodo di Laplace:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ & \ddots & & \\ & & & \\ \alpha & \cdots & & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

Matrice $(n-1)\times(n-1)$

$$= (-1)^{n+1}\alpha \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \alpha & \cdots & \alpha \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}\right) + (-1)^{1+1} \cdot 1 =$$

$$= (-1)^{n+1}\alpha \cdot (-1)^{n-1+1}\alpha \cdot \det(Id) + 1 =$$

$$= 1-\alpha^2.$$

$1-\alpha^2$ si annulla solo in $|\alpha| = 1$.

$\Longrightarrow$ Th.

Q.E.D.

c) Si dimostri che $\|A\|_1 \leq \|A\|_\infty$.

$$\|A\|_1 = 1 + |\alpha|$$

$$\|A\|_\infty = \max\left(1+(n-1)|\alpha|,\ 1,\ 1+|\alpha|\right) = 1+(n-1)|\alpha|.$$

$$\|A\|_1 \leq \|A\|_\infty$$

$$\cancel{1}+|\alpha| \leq \cancel{1}+(n-1)|\alpha|$$

$$|\alpha| \leq (n-1)|\alpha|$$

$\{Hp: n \geq 2\} \Rightarrow Th.$ Q.E.D.

d) Per $\alpha = 1$ si verifichi che

$A^TA = I + ee^T + e_1e_n^T + e_ne_1^T$ con $e = u + e_1$

e si dimostri che $\|A\|_2 \leq \sqrt{n+2}$.

$$ee^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_1e_n^T = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$e_n e_1^T = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & 2 \\ 1 & \ddots & & 1 \\ & & \ddots & \\ 2 & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si ricorda che:

$A = Id + e_n e_1^T + e_1 u^T$

Ricavo dunque A^T:

$A^T = (Id + e_n e_1^T + e_1 u^T)^T = Id + (e_n e_1^T)^T + (e_1 u^T)^T =$

$= Id + e_1 e_n^T + u e_1^T$

Calcolo il prodotto:

$A^T A = (Id + e_1 e_n^T + u e_1^T)(Id + e_n e_1^T + e_1 u^T) =$

$= Id + e_n e_1^T + e_1 u^T + e_1 e_n^T + e_1 e_n^T e_n e_1^T + e_1 e_n^T e_1 u^T +$

$+ u e_1^T + u e_1^T e_n e_1^T + u e_1^T e_1 u^T$

$e_1 e_n^T e_n e_1^T = e_1 e_1^T$

$e_1 e_n^T e_1 u^T = 0$

$u e_1^T e_n e_1^T = 0$

$u e_1^T e_1 u^T = u u^T$

$$\Rightarrow A^TA = Id + e_n e_1^T + e_1 u^T + e_1 e_n^T + e_1 e_1^T + u e_1^T + u u^T =$$

$$= Id + e_1 e_n^T + e_n e_1^T + e_1 u^T + e_1 e_1^T + u e_1^T + u u^T =$$

$$= \quad '' \quad e_1^T(e_1 + u) + u^T(e_1 + u) =$$

$$= \quad '' \quad e_1^T e + u^T e =$$

$$= \quad '' \quad e(e_1^T + u^T) =$$

$$= \quad '' \quad e e^T.$$

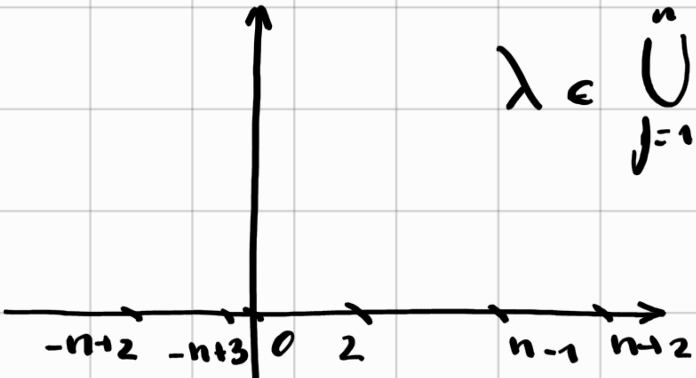
Si ricorre ai cerchi di Gershgorin per stimare la norma$_2$ di A:

$K_1 = |z - 2| \leq (n-2) + 2 = n$

$K_i = |z - 2| \leq n - 1 \qquad \forall i \in \mathbb{N} \mid i \in]1; n[$

$K_n = K_i$

$$\lambda \in \bigcup_{j=1}^{n} K_j \Rightarrow \lambda < n + 2$$



$$\|A\|_2 := \sqrt{\rho(A^TA)} \leq \sqrt{n+2}.$$

Q.E.D.