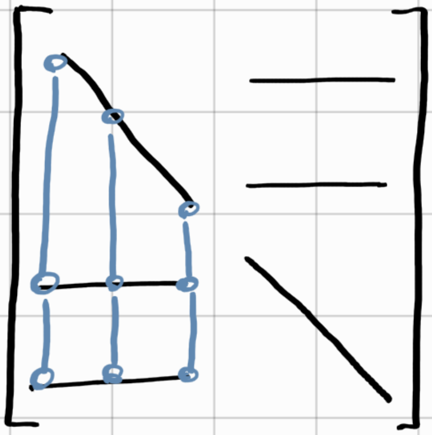
ESERCIZIO 1

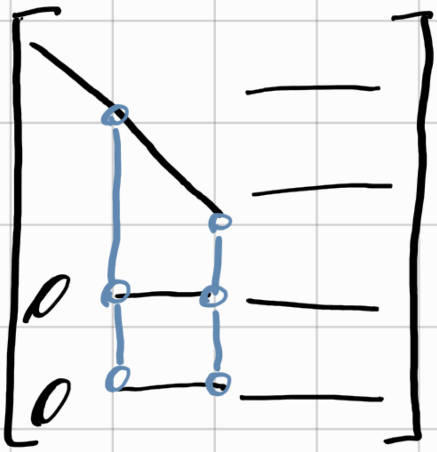
$A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & B \\ C & D_2 \end{pmatrix}; \quad D_1, D_2 \text{ diagonali} \quad D_1, B, C, D_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

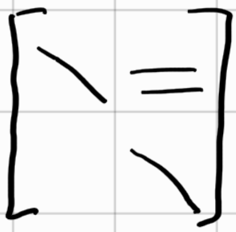
Quante mosse moltiplicative sono necessarie per ridurre A in forma triangolare con mosse di Gauss (non sono necessari scambi di riga)? $\boxed{\frac{5}{3} n^3}$



La matrice ha questa forma; dopo la prima mossa di Gauss diventa:



Servono n mosse moltiplicative per eliminare gli elementi della prima colonna; ne servono dunque n^3.

dopo n^3 mosse $\rightsquigarrow$  Servono dunque $\frac{2}{3} n^3 + n^3$ mosse.

ESERCIZIO 2

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & b_2 & & & \\ a_3 & & \ddots & & \\ \vdots & & & b_{n-1} & \\ a_n & & & & b_n \end{bmatrix}$$

a) Dimostrare che

$$\det(A) = a_1 \prod_{i=2}^{n} b_i - \sum_{i=2}^{n} a_i^2 \prod_{j=2, j \neq i}^{n} b_j$$

Si dimostra per induzione:

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & b_2 & \\ a_3 & & b_3 \end{pmatrix}$$ CASO BASE

$$\det(A_3) = a_1 \cdot b_2 \cdot b_3 - a_3^2 b_2 - a_2^2 b_3$$

$\Rightarrow$ Th

Si assume vero per (A_{n-1}) e si calcola il determinante col metodo di Laplace nel caso A_n

$$\det(A) = (-1)^{n+n} b_n \cdot \det\left(A_{\substack{1:n-1;\\1:n-1}}\right) + (-1)^{n+1} a_n \cdot \det\left(A_{\substack{2:n;\\1:n-1}}\right)$$

$$\det\left(A_{\substack{2:n;\\1:n-1}}\right) = (-1)^{n+1} a_n \cdot \prod_{i=2}^{n-1} b_i$$

$$\Rightarrow \det(A) = b_n \left(a_1 \cdot \prod_{i=2}^{n-1} b_i - \sum_{i=2}^{n-1} a_i^2 \prod_{j=2, j\neq i}^{n-1} b_j \right) + (-1)^{2n+1} a_n^2 \cdot \prod_{i=2}^{n-1} b_i =$$

$$= a_1 \cdot \prod_{i=2}^{n} b_i - \sum_{i=2}^{n-1} a_i^2 \prod_{j=2, j\neq i}^{n-1} b_j \cdot b_n - a_n^2 \prod_{i=2}^{n-1} b_i =$$

$$= a_1 \prod_{i=2}^{n} b_i - \sum_{i=2}^{n} a_n^2 \cdot \prod_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n-1} b_i .$$

b) $\exists! \, L, U \mid A_n = LU$? con $a_1 = 2$,
$a_i = 1 \ \forall i = 2 \dots n$,
$b_i = 2 \ \forall i = 2 \dots n$

No, poiché per $A_{n=5}$ la sottomatrice principale di testa è singolare.

ESERCIZIO 3

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & & & & a_1 \\ & b_2 & & & a_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix}$$

a) $a, b \mid A$ sia non singolare?

A non singolare $\Rightarrow 0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ con K_i i-esimo cerchio di Gershgorin

$(\forall j \in [1;n)).\ K_j = \{ z \in \mathbb{C} : |z - b_j| \leq |a_j| \}$),

$K_n = \{ z \in \mathbb{C} : |z - b_n| \leq \sum_{j=1}^{n-1} |a_j| \}$

$\Rightarrow (\forall i \in [1;n)).\ |b_i| > |a_i|$),

$|b_n| > \sum_{i=1}^{n} |a_i|$

b) Dare condizioni sufficienti su a.b affinché A sia fattorizzabile LU. Calcolare L, U, det(A).

$(\forall i \in [1;n)).\ b_i \neq 0$) $\Rightarrow$ A è fattorizzabile LU.

Si scrivono A, L, U a blocchi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} b_1 & & & \\ & \ddots & & a \\ & & b_{n-1} & \\ \hline & a^T & & b_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{L} & 0 \\ \hline w^T & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \hat{U} & y \\ \hline 0^T & \beta \end{array}\right]$$

con $a^T := [a_1 \dots a_{n-1}]$

Sviluppo i prodotti:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_{n-1} \end{bmatrix} = \hat{L}\hat{U} & \Rightarrow \hat{L} = I_d, \ \hat{U} = A_{n-1} \\ a = \hat{L} \cdot y & \Rightarrow y = a \\ a = w^T \hat{U} & \Rightarrow w^T = \left[\frac{a_1}{b_1} \dots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right] \\ b_n = w^T y + \beta & \Leftrightarrow \beta = b_n - w^T y \\ & = b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i^2}{b_i} \end{cases}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} b_1 & & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & \beta \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U) = 1 \cdot \det(U) =$$
$$\prod_{i=1}^{n-1} b_i \left(b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i^2}{b_i} \right) = \prod_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2.$$

c) Se non valessero le condizioni del punto b), A sarebbe fattorizzabile LU?

($\exists i \in [1; n) . b_i = 0$), scrivo la matrice A e provo a fattorizzarla LU manualmente

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix}
b_1 & & & & a_1 \\
& \ddots & & & \vdots \\
& & 0 & & \\
& & & \ddots & a_{n-1} \\
a_1 & \cdots & & a_{n-1} & b_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & & \\
& \ddots & \\
* & & 1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
* & * & * \\
& \ddots & * \\
0 & & *
\end{bmatrix}
$$

$$A = LU \iff L^{-1}A = U$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & & \\
& \ddots & \\
* & & 1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
b_1 & & & & a_1 \\
& \ddots & & & \vdots \\
& & 0 & & \\
& & & \ddots & a_{n-1} \\
a_1 & \cdots & & a_{n-1} & b_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
* & * & * \\
& \ddots & * \\
0 & & *
\end{bmatrix}
$$

$U_{n1} = a_1$ va in contraddizione con la definizione di U matrice triangolare sup.

$\Rightarrow$ non e' fattorizzabile LU.

ESERCIZIO 4

$A = \underline{I} - \alpha u u^T$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $u^T = [1 \dots 1]$

a) Condizioni sufficienti per avere invertibilità

A è una matrice del tipo
$$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & & -\alpha \\ & \ddots & \\ -\alpha & & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

Dire che una matrice e' invertibile e' come dire che non e' singolare

$\Rightarrow$ Pongo $0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ con K_i i_esimo cerchio di Gershgorin

$\left(\forall i \in [1;n].\ K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 1 + \alpha| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |-\alpha| \right\} \right)$

$\Rightarrow 0 \notin K$ sse $|1-\alpha| > n|\alpha|$

$K := \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ Distinguo 3 casi:

$\alpha > 1$	$0 \leq \alpha \leq 1$	$\alpha < 0$
$-1+\alpha > n\alpha$	$1-\alpha > n\alpha$	$1-\alpha > -n\alpha$
$\alpha(1-n) > 1$	$\alpha(-1-n) > -1$	$\alpha(-1+n) > -1$

$\alpha > \frac{1}{1-n}$ $\qquad$ $\alpha > +\frac{1}{1+n}$ $\qquad$ $\alpha > \frac{-1}{n-1}$

$$\alpha \in \left[\frac{1}{1+n} ; 1\right] \vee \alpha \in \left(-\frac{1}{n-1} ; 0\right)$$

b) Condizioni su α affinché la matrice ammetta fattorizzazione LU; determinare L e U.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & & -\alpha & -\alpha \\ & \ddots & & \\ -\alpha & & 1-\alpha & \\ \hline & -\alpha & & 1-\alpha \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{L} & 0 \\ \hline w^T & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \hat{U} & y \\ \hline 0^T & \beta \end{array}\right]$$

$\boxed{\text{DA FARE}}$

ESERCIZIO 5

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } i < j \\ 0 & \text{alt.} \end{cases}$$

a) A^{-1}?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = Id$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & ? \\ & \ddots & \\ ? & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}: \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i > j \\ 2^{i-1} & \text{alt.} \end{cases}$$

b) $\mu_\infty(A)$?

$$\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1\dots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} |-1| = n$$

$$\|A^{-1}\| = \max_{i=1\dots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 2^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} 1 = n-1+2^{n-1}$$

$$\mu_\infty(A) = n \cdot (n-1+2^{n-1}) = 2^n + n^2 - n.$$

ESERCIZIO 6

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix}$$

a) Si dica per quali α A è fattorizzabile LU.

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1+(-1)^n\alpha \end{bmatrix}, \quad \det(A) = \det(A')$$

$\Rightarrow \det(A) = 1+\alpha$

A fattorizzabile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$1+(-1)^n \alpha \neq 0$

$\alpha \neq 1$ per n dis

-1 n pari

b) Calcolare L, U. Dire se la fattorizzazione e' unica.

$$\left(\exists!\, L, U \mid A = LU\right) \Longleftrightarrow \left(\nexists\, i \in [1;n).\ \det(A_i) \neq 0\right)$$

$$\forall i \in [1;n).\ \det(A_i) = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \left(\exists!\, L, U\right).$$

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix}$$

DA FARE

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ & & & \ddots \\ & -\alpha & & 1 \end{bmatrix}$$