ESERCIZIO 1

$$f(x) = \frac{1}{e^x} - 2x^2$$

a) Dimostrare che ha 3 zeri e dare gli intervalli di separazione.

Derivo:

$f'(x) = -(e^{-x} + 4x)$

$f''(x) = +e^{-x} - 4$

Studio la derivata prima:

$f'(x) \geq 0$

$-(e^{-x} + 4x) \geq 0$

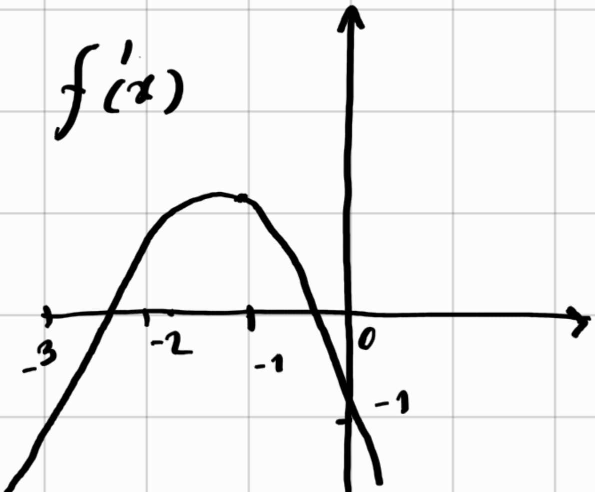
$e^{-x} + 4x \leq 0$

Trovare esplicitamente gli zeri e' complicato, si cerca l'andamento di $f'(x)$:

$\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = -\infty$, $\quad f'(0) = -1$

$f'(-1) = 4 - e > 0$

$f'(-3) = 12 - e^3 < 0$




$f$ cresce tra $(-2; -1)$

decresce altrove

Studio la derivata seconda:

$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\log(4)$ punto di flesso

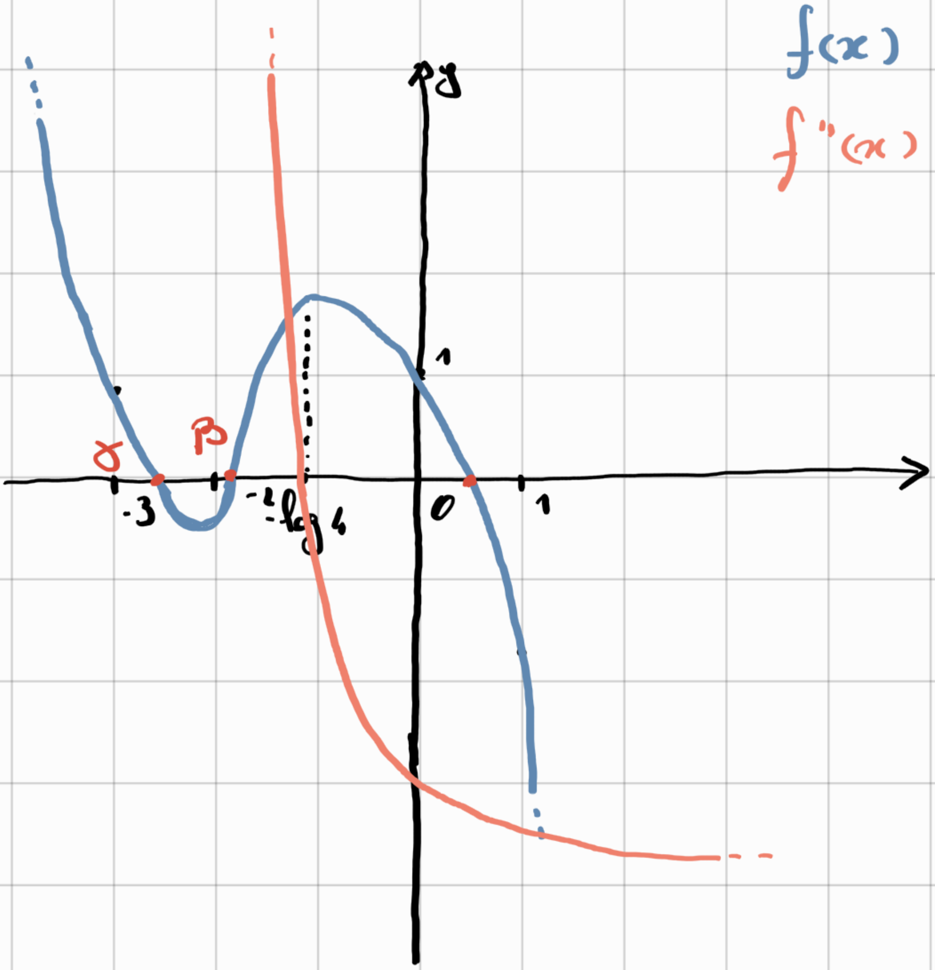
Studio la funzione:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

$f(0) = 1 \quad , \quad f(\log 4) > 0$

$f(1) < 0 \quad , \quad f(-3) > 0$

$f(-2) < 0$




b) Si studi la convergenza del metodo delle tangenti alle soluzioni.

Non e' radice semplice?

$S_1 := (0;1) \qquad S_2 := (-2;-\log 4) \qquad S_3 := (-3;-2)$

Si verificano le ipotesi del teorema caso per caso:

$S_1$:

$f \in C^2(S_1)$ sì

$f'(x) \neq 0 \ \forall x \in S_1$ sì

$f(x) \cdot f''(x) > 0 \ \forall x \in S_1$ no

$S_2$:

$f \in C^2(S_2)$ sì

$f'(x) \neq 0 \ \forall x \in S_2$ sì

$f(x) \cdot f''(x) \ \forall x \in S_2$ no

$S_3$:

$f \in C^2(S_3)$ sì

$f'(x) \neq 0 \ \forall x \in S_3$ sì

$f(x) \cdot f''(x) > 0 \ \forall x \in S_3$ no

c) $g(x) = \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{2x}$


Se ne studi la convergenza locale.

La funzione non ha zeri.

ESERCIZIO 2

$$f(x) = 4\log(x) + x - \frac{2}{x}$$

a) Si dimostri che $\exists!\, \alpha \mid f(\alpha) = 0$

$f(x)$ e' definita solo per $x>0$ ed e' monotona crescente in quanto somma di funzioni monotone crescenti

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\Rightarrow$ Per il teorema di Weierstrass vale la tesi

Q.E.D.

b) Si studi la convergenza ad $\alpha$ con m.d.t.

Prendo un intervallo $I$ della forma $I = (0;\alpha)$:

verifico le ipotesi del teorema

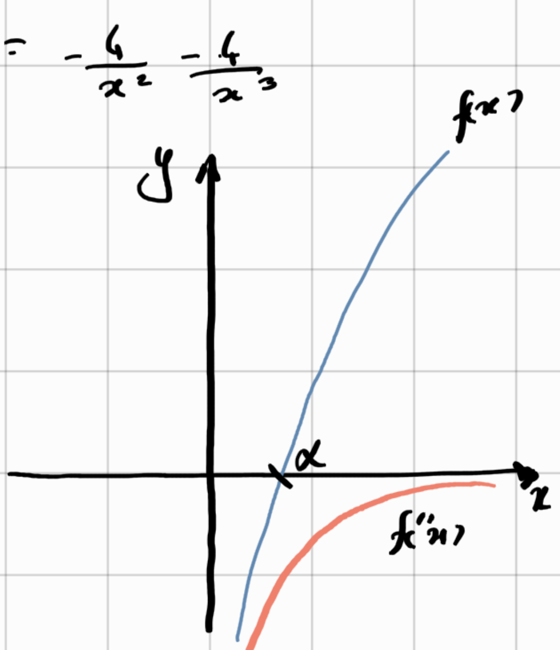
$f'(x) = \frac{4}{x} + 1 + \frac{2}{x^2}$ , $f''(x) = -\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3}$

$f \in C^2(I)$ sí

$f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$ sí

$f(x) \cdot f''(x) > 0 \ \forall x \in I$ sí

↳ negativo $\forall x \in D(x)$



c) $g(x) := f\left(\frac{1}{x}\right)$

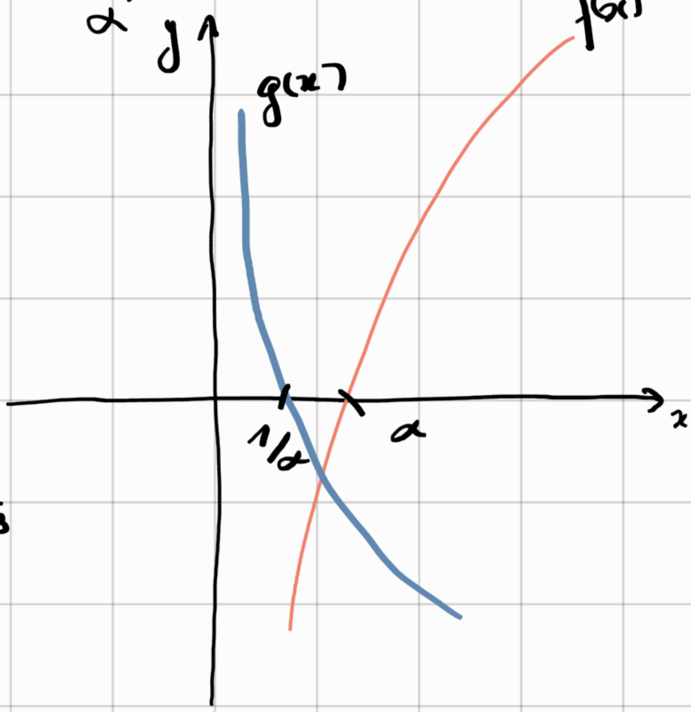
Si dimostri che $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ e che mdt converge su $x_0 \in \left(0; \frac{1}{\alpha}\right]$

$$g(x) = 4\log\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} - \frac{2}{\frac{1}{x}} =$$

$$-4\log(x) + \frac{1}{x} - 2x$$

$$g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 4\log\left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}\right) + \frac{1}{\frac{1}{\alpha}} - \frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}} =$$

$$= 4\log(\alpha) + \alpha - \frac{2}{\alpha} = 0$$




Considero l'intervallo $\delta$ e verifico le ipotesi del teorema:

$f'(x) = -\frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} - 2,$

$f''(x) = +\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

$f \in C^2(\delta)$ sì

$f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \delta$ sì

$f''(x) \cdot f(x) > 0 \ \forall x \in \delta$ sì

ESERCIZIO 3

$g(x) \in C^1[a;b] \mid g(\alpha) = \alpha$ con $\alpha \in [a;b]$

$\forall x \in [a;b].\ g'(x) \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

a) Dimostrare che $\forall x_0 \in [a;b].\ \{x_{i+1}\} = g(x_i)$ è monotona convergente ad $\alpha$ (crescente se $x_0 < \alpha$, decrescente se $x_0 > \alpha$).

Verifico le ipotesi del teorema del punto fisso:

$g : [a;b] \to \mathbb{R}$ sì,

$g \in C^1[a;b]$ sì,

$g(\alpha) = \alpha$ sì, $\alpha \in (a;b)$ sì,

$\exists \rho > 0 : \ g'(x) < 1 \ \forall x \in [\alpha - \rho; \alpha + \rho] \subseteq [a;b]$

Considero $\rho = \min(a - \alpha, b - \alpha)$

$\Rightarrow$ la successione è convergente ad $\alpha$