Th Un formalismo è Turing equivalente sse

- vale il teorema di enumerazione
- vale il teorema del parametro

TEOREMA di RICORSIONE (o del PUNTO FISSO)

$\forall f$ calcolabile totale. $\exists n$: indice t.c. $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$

ie La funzione calcolata dall'ennesima macchina è uguale alla funzione calcolata dalla macchina f applicata a n

Dim.:

Pongo $\psi(u, z) = \varphi_{d(u)}(z) = \begin{cases} \varphi_{\varphi_u(u)}(z) & \text{se } \varphi_u(u)\downarrow \quad ① \\ \text{indefinita alt} \end{cases}$

È intuitivamente calcolabile $\Rightarrow$ esiste un indice per CT

$\Rightarrow \varphi_{s(i,u)}(z) = \varphi_{d(u)}(z)$ per Th s-m-n con $d(u) = \lambda u.\ s(u,z)$

f è calcolabile totale. la compongo con d e vale che

② $f(d(u)) = \varphi_v(u)$ (ie esiste una macchina di indice v che la calcola), φ_v è calcolabile totale per costruzione

③ Pongo $d(v) = n$

$$\varphi_n \overset{③}{=} \varphi_{d(v)} \overset{①}{=} \varphi_{\varphi_v(v)} \overset{②}{=} \varphi_{f(d(v))} \overset{③}{=} \varphi_{f(n)} \qquad \text{Q.E.D.}$$

A parole: si definisce una funzione a due posti: u per recuperare l'indice. z è l'argomento;
La funzione è intuitivamente calcolabile;

Applico CT e poi il parametro

La funzione e' totale e iniettiva. La compongo con f

E' ancora calcolabile totale, ho un indice

Applico d all'indice, vale n

n e' l'indice della macchina

decidibile

Def: I: insieme e' ricorsivo se e soltanto se χ: funzione caratteristica

$$\left(\text{ie } \chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I \\ 0 & \text{alt} \end{cases} \right) \text{ e' calcolabile totale}$$

semidecidibile

Def: I: insieme e' ricorsivamente enumerabile se e soltanto se

$\exists \varphi_i$: funzione calcolabile totale tc $I = dom(\varphi_i)$

Proprieta': • I ricorsivo $\Rightarrow$ I ricorsivamente enumerabile

Dim: pongo $\varphi_i = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I \\ \text{indefinito} & \text{alt} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Th Q.E.D.

• $I, \overline{I}$ ricorsivamente enumerabile $\Leftrightarrow$ $I, \overline{I}$ ricorsivi

Dim: se: gia' dimostrato

solo se: Pongo φ_i: funzione cf tc $dom(\varphi_i) = I$

$\varphi_{\bar{i}}$ $dom(\varphi_{\bar{i}}) = \overline{I}$

Si ripete il seguente ciclo:

• esegui un passo nel calcolo di $\varphi_i(x)$

• se $\varphi_i(x) \downarrow$ allora:

$x \in I$,

poni $\chi_I(x) = 1$

altrimenti:

esegui un passo nel calcolo di $\varphi_{\bar{i}}(x)$

se $\varphi_{\bar{i}}(x)\downarrow$ allora:

$x \notin I$,

poni $\chi_{\bar{I}}(x) = 1$.

Q.E.D.

Th: I è ricorsivamente enumerabile se e solo se I è vuoto oppure

I è immagine di una funzione calcolabile totale

Dim: solo se: banale

se: Pongo $I = dom(\varphi_i)$ non vuoto

Si usa la diagonalizzazione:

riga: m numero dei passi per il calcolo di φ_i

colonna: n argomento di φ_i

Si eseguono m passi nel calcolo di $\varphi_i(n)$ finché per qualche valore di m e dell'argomento $\bar{n}$ il calcolo si arresta

ossia $\varphi_i(\bar{n})\downarrow$ in m passi $\Rightarrow \bar{n} \in I$

Pongo $\langle n, m \rangle$ il valore della codifica della coppia (n, m):

Si inizia un secondo procedimento a coda di colomba

eseguendo $\varphi_i(n)$ per m passi:

- si arresta:

  pongo $f(\langle n, m \rangle) = n$

  $n \in dom(\varphi_i) = I$

- altrimenti:

  pongo $f(\langle n, m \rangle) = \bar{n}$

  $\bar{n} \in I$

Si itera il procedimento e si generano tutti gli elementi di I

Def: $K = \{ x \mid \varphi_x(x) \downarrow \}$

K è ricorsivamente enumerabile

K non è ricorsivo

oss. la funzione caratteristica di K è calcolabile ma non è totale

Dim: Per assurdo:

χ_K funzione caratteristica di K

Pongo $f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{se } x \in K \\ 0 & \text{alt} \end{cases}$

calcolabile totale per costruzione

Per CT f ha un indice

$\forall x$: indice $\varphi_x(x) \neq f(x)$