

TEOREMA 4: RAPPRESENTAZIONE in BASE

Hp: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, base $B \geq 2$

Th: $\exists! p \in \mathbb{Z}_+, \{d_i\}_{i \geq 1}$ interi non negativi.

- $d_1 \neq 0$,
 - $(\forall i. d_i \in [0; \beta^{-1}])$,
 - $(\forall k > 0. (\exists j \geq k \mid d_j \neq \beta^{-1}))$
 - $x = \text{segno}(x) \cdot \beta^P \left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \beta^{-i} \right)$
esponente mantissa

INSIEME dei NUMERI di MACCHINA

$$J(\beta, t, m, M) := \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \dots$$

$$x = \text{segno}(x) \cdot \beta^P \left(\sum_{i=1}^{+} d_i \beta^{-i} \right)$$

con $d_1 \neq 0$, $(\forall i \in [0; +\infty] \cdot d_i \in [0; \beta])$,
 $p \in [-m; M]$

$\Omega :=$ massimo numero di macchine

$$\Omega = \beta^m (1 - \beta^{-n})$$

$$\# f = 1 + 2(m+M+1) (\beta^t - \beta^{t-1})$$

esponenti mantisse

$\omega :=$ minimo numero > 0 rappresentabile
 $\omega = \beta^{-m-1}$

TRONCAMENTO e ARROTONDAMENTO

Hp: $x = \text{segno}(x) \beta^p \left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \beta^{-i} \right)$

1) troncamento:

$$\tilde{x} = \text{trunc}(x) = \text{segno}(x) \beta^p \left(\sum_{i=1}^{t-1} d_i \beta^{-i} \right)$$

2) arrotondamento:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \text{arr}(x) \\ &= \text{trunc}(x) \quad \text{se } d_{t+1} < 1/2 \beta \\ &= \text{trunc}(x) + \beta^{p-t} \quad \text{altrimenti} \end{aligned}$$

ERRORE ASSOLUTO

$$\epsilon = \tilde{x} - x$$

ERRORE RELATIVO

$$\epsilon_x = (\tilde{x} - x) / x$$

PRECISIONE di MACCHINA

$$u = \beta^{1-t} \quad \text{se } \tilde{x} = \text{trunc}(x)$$

$$|\epsilon_x| = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|} < u$$

$$u = 1/2 \beta^{1-t} \quad \text{se } \tilde{x} = \text{arr}(x)$$

OPERAZIONI di MACCHINA

$$x \oplus y = (x + y)(1 + \epsilon)$$

con $\epsilon :=$ errore locale

dell'operazione

ERRORE INERENTE

$$\epsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \quad \text{con } f(x) \neq 0$$

Dico che un problema è'

MALCONDITIONATO per un intorno di x

se e solo se $\exists \sup(f(x))$.

Hp: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Ω aperto $\subset \mathbb{R}^n$, f differentiabile

due volte, $\tilde{x} = (\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n)$

$$\epsilon_{in} = \sum_{i=1}^n c_{x_i} \epsilon_{x_i}, \quad \text{con } c_{x_i} = \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$$

coefficiente di

amplificazione

Somma: $c_x = \frac{x}{x+y}$, $c_y = \frac{y}{x+y}$

sottrazione: $c_x = \frac{x}{x-y}$, $c_y = \frac{-y}{x-y}$

moltiplicazione: $c_x = 1$, $c_y = 1$

divisione : $c_x = 1$, $c_y = -1$

ERRORE ALGORITMICO

Hp: $g(x) :=$ sequenza dei passaggi algoritmici utilizzati nel calcolo di $f(x)$

e.g. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $g(x) = ((x \otimes x) \oplus 1) \odot x$

$$\epsilon_{alg} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(x)}$$

ERRORE TOTALE

$$\epsilon_{tot} = \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \epsilon_{in} + \epsilon_{alg}$$

ERRORE ANALITICO

$f(x)$ non razionale $\rightarrow h(x)$ razionale

$$\epsilon_{an} = \frac{h(x) - f(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{tot} = \epsilon_{in} + \epsilon_{alg} + \epsilon_{an}.$$

NORMA VETTORIALE

È una funzione $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ t.c.

- 1) $(\forall v \in \mathbb{F}^n : f(v) > 0 \wedge f(v) = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0})$
- 2) $(\forall v \in \mathbb{F}^n : (\forall \alpha \in \mathbb{F}, f(\alpha v) = |\alpha| f(v)))$
- 3) $(\forall v, w \in \mathbb{F}^n : f(v+w) \leq f(v) + f(w))$

NORMA MATRICIALE

funzione $f : \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

- 1) $(\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n} : f(A) > 0 \wedge f(A) = 0 \Leftrightarrow A = \vec{0})$
- 2) $(\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n} : (\forall \alpha \in \mathbb{F}, f(\alpha A) = |\alpha| \cdot f(A)))$
- 3) $(\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times n} : f(A+B) \leq f(A) + f(B))$
- 4) $(\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times n} : f(A \cdot B) \leq f(A) \cdot f(B))$

Oss. Per ogni norma matriciale $\|Id\| \geq 1$.

NORMA INDOTTA

funzione $f : \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$(\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}, f(A) = \|A\| = \max_{\|x\|=1} |Ax|$ con $\|\cdot\|$ norma vettoriale su \mathbb{F}^n).

Vale inoltre:

$(\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}, (\forall x \in \mathbb{F}^n, |Ax| \leq \|A\| \cdot |x|))$.

NORMA EUCLIDEA

VETTORI

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

MATRICI

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}.$$

NORMA 1

VETTORI

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

MATRICI

$$\|A\|_1 = \max_{j=1 \dots n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}|.$$

NORMA INFINTO

VETTORI

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} |x_i|$$

MATRICI

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|.$$

CONDIZIONAMENTO di un PROBLEMA

$$Ax = b, A \in \mathbb{F}^{n \times n}, b \in \mathbb{F}^n$$

$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}$ misura il condizionamento del problema.
 Risulta:

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq [\|A\| \cdot \|A^{-1}\|] \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|}$$

\Downarrow
 $\hat{\gamma}_N(A) :=$ numero di condizionamento.

TEOREMA di HIRSCH

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\|\cdot\|$ norma matriciale indotta
 $(\forall \lambda)$ autovalore di A . $|\lambda| \leq \|A\|$.

CERCHIO di GERSTGORIN

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$,

$$K_i := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\}$$

TEOREMI di GERSTGORIN

1) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$,

λ autovettore di $A \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^n K_i$

2) Se l'unione M_1 di k cerchi di Geršgorin è disgiunta dall'unione M_2 dei rimanenti n cerchi allora $\#\{\text{autovoltori}\} \subset M_1 = k$,
 $\#\{\text{autovoltori}\} \subset M_2 = n-k$.

PREDOMINANTIA DIAGONALE

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, A si dice a pred. diag. per righe se vale ($\forall i \in \{1, \dots, n\}$). $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$); analogamente si definisce anche per colonne.

Oss. A a predominanza diagonale

$\Rightarrow A$ non singolare.

FATTORIZZAZIONE LU

$(\exists L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}, L$ triangolare inf con 1 sulla diagonale, U triangolare sup | $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A = LU$)
 $\Rightarrow A$ e' fattorizzabile LU.

oss. si risolve il sistema $\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

oss. A invertibile $\Rightarrow (\exists P$ matrice di permutazione | $PA = LU$).

TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITA'

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$(\forall k \in \mathbb{Z} \cap [1; n].$ le sottomatrici principali di testa sono non singolari)

$\Rightarrow (\exists ! L, U \in \mathbb{R}^{n \times n} | A = LU)$.

e.g.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 1 \neq 0.$$

$$\det(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}) = -3 \neq 0.$$

oss.

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & z \\ \hline x^T & a_{nn} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{L} & 0 \\ \hline w^T & 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \hat{U} & g \\ \hline 0^T & \beta \end{array} \right].$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_{n-1} = \hat{L} \hat{U} \\ z = \hat{L} y \\ x^T = w^T \hat{U} \\ a_{nn} = w^T y + \beta \end{array} \right. \Rightarrow \beta = a_{nn} - w^T y.$$

MATRICI ELEMENTARI di GAUSS

$E \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

k -esimo vettore
della base canonica

$$(\exists k \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{R}^n) E = I - ve_k^T$$

$\Rightarrow E$ matrice elementare di Gauss.

e.g. $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & -v_3 & & \\ & & \vdots & & \\ & & -v_n & & 1 \end{bmatrix}$

oss... E e' triangolare inf.

• E e' invertibile: $E^{-1} = I + ve_k^T$,

E^{-1} e' matrice elementare di Gauss.

$$(x \in \mathbb{R}^n, x_k \neq 0) \Rightarrow (\exists E \mid E x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix})$$

$$v_{k+n} = \frac{x_{k+1}}{x_k}, v_n = \frac{x_n}{x_k}.$$

- $E_k = I - v e_k^T$, $E_h = I - w e_h^T$:
 $h > k \Rightarrow E_k \cdot E_h = I - v e_k^T - w e_h^T$.

- Ey costa $O(n-k)$ flops.

COSTO COMPUTAZIONALE

$$A^{(k-1)} = \begin{bmatrix} (k-1) & (k-1) & (k-1) \\ Q_{11} & a_{1,k-1} & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & (k-1) \\ & & Q_{k-2,k-1} & a_{k-2,n} \\ & & 0 & a_{k,n} \\ & & & \ddots & (k-1) \\ & & & & Q_{k+2,k+1} \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & Q_{n,k} \\ & & & & 0 \\ & & & & Q_{n,k+1} \\ & & & & Q_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)}, & \text{con } j = 1 \dots n, i \leq k \\ a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} = 0, & \text{con } j = 1 \dots k-1, i = k+1 \dots n \\ a_{i,k}^{(k)} = 0, & \text{con } i = k+1 \dots n \\ a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} - m_{ik} a_{k,j}^{(k-1)}, & \text{con } j = k+1 \dots n, i = k+1 \dots n \\ m_{ik}^{(k-1)} = \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}. & \end{cases}$$

Le formule e e sono identiche anche per \vec{b} .

$$\Rightarrow T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} [(n-k) + 2(n-k)^2] = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$$