Def: I: insieme è insieme di indici che rappresenta la funzione se

$$x \in I \wedge \varphi_y = \varphi_x \Rightarrow y \in I$$

L'algoritmo y calcola la stessa funzione dell'algoritmo x

Th I insieme di indici che rappresenta la funzione e $I \neq \emptyset$, $I \neq \mathbb{N}$

allora $K \leq_{REC} I$ oppure (vel) $K \leq_{REC} \overline{I}$.

Dim: · $K \leq_{REC} I$

Sia i_0 t.c. $\varphi_{i_0} = \lambda x.$ indefinita, $i_0 \in \overline{I}$.

funzione ovunque indefinita

Sia $i_1 \in I$ (possibile perché $I \neq \emptyset$)

Vale che $\varphi_{i_0} \neq \varphi_{i_1}$ perché I è un insieme di indici

Definisco $\psi(x,y) = \begin{cases} \varphi_{i_1}(y) & \text{se } x \in K \\ \varphi_{i_0}(y) & \text{altr} \end{cases}$

Per CT ha un indice, per il teorema s-m-n

vale che $\psi(x,y) = \varphi_{f(x)}(y)$

Distinguo due casi:

- $x \in K$

$$\varphi_{f(x)} = \varphi_{i_1} \Rightarrow f(x) \in I$$

- $x \notin K$

$$\varphi_{f(x)} = \varphi_{i_0} \Rightarrow f(x) \in \overline{I} \Rightarrow f(x) \notin I$$

TEOREMA di RICE

"Non e' possibile dimostrare proprieta' di funzioni guardando solo la loro definizione."

Th: $\mathcal{A}$: insieme di funzioni calcolabili

1) A: insieme di indici $:= \{ n \mid \varphi_n \in \mathcal{A} \}$

2) A ricorsivo $\iff \mathcal{A} = \emptyset \ \vee \ \mathcal{A}$ contiene tutte le funzioni calcolabili

Dim: Se 1,2 e' banale perche' se $\mathcal{A}$ e' vuoto allora A e' vuoto

se $2 \Rightarrow A = \mathbb{N}$

Negli altri casi si applica il teorema dimostrato sopra

$K_1 = \{ x \mid dom(\varphi_x) \neq \emptyset \}$ cioe' l'insieme delle funzioni definite in almeno un punto non e' ricorsivo ma e' re.

Insiemi importanti non ricorsivi:

$\bar{K} \leq_{REC}$

- FIN $= \{ x \mid dom(\varphi_x)$ e' finito $\}$
- INF $= \{$ infinito $\} = \mathbb{N} \setminus$ FIN
- TOT $= \{ x \mid \varphi_x$ totale $\} = \{ x \mid dom(\varphi_x) = \mathbb{N} \}$
- REC $= \{ x \mid dom(\varphi_x)$ e' ricorsivo $\}$
- CONST $= \{ x \mid \varphi_x$ totale e costante $\}$
- EXT $= \{ x \mid \varphi_x$ estendibile a calcolabile totale $\}$

Non sono ricorsivamente enumerabili e neanche Co-RE.

$W_i := dom(\varphi_i) = Imm(h_i)$ ESERCIZIO 5

Esiste f calcolabile totale t.c.

$$W_{f(i)} = \begin{cases} W_i & \text{se } i \notin K \ (\text{ie } \varphi_i(i) \uparrow) \\ W_j & \text{alt} \end{cases}$$

?

Con $\emptyset \subseteq W_i \subset W_j$

$W_j = dom(\varphi_j) = Imm(h_j)$

$f(i,j)$:

```
n=0;
W_f(x) = ∅;
while (φ_x(x) non converge in n passi) do
    W_f(x) = W_f(x) ∪ h_i(n);
    n = n+1;
n=0;
while (true) do
    W_f(x) = W_f(x) ∪ h_j(n);
    n = n+1;
```

ESERCIZIO Th: FIN non e' RE

Dim: $\overline{K} \leq_{REC} FIN$

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi_x(x) \downarrow \\ \text{indefinito} & \text{alt} \end{cases} \overset{CT,\,Smn}{=} \varphi_{f(x)}$$

$x \in K$

$\varphi_{f(x)} = 1 \Rightarrow dom(\varphi_{f(x)}) = \mathbb{N}$
$\Rightarrow f(x) \notin FIN$

$x \in \overline{K}$

$\varphi_{f(x)}$ indefinito $\Rightarrow dom(\varphi_{f(x)}) = \emptyset$
$\Rightarrow f(x) \in FIN$

Th: $\overline{K} \leq_{REC} INF$

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi_x(x) \text{ non converge entro } y \text{ passi} \\ \text{indefinito} & \text{alt} \end{cases}$$

$$\psi(x,y) \overset{CT,SMN}{=} \varphi_{f(x)}$$

$x \in \overline{K}$:

$$\not\exists y.\ \varphi_x(x)\downarrow$$

$$\Rightarrow \forall x.\ \varphi_{f(x)} = 1 \quad (\Leftrightarrow \varphi_{f(x)} = \lambda x.\ 1)$$

$$\Rightarrow dom(\varphi_{f(x)}) = \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(x) \in INF$$

$x \notin \overline{K}$:

$$\exists y.\ \varphi_x(x)\downarrow$$

$$\Rightarrow \# dom(\varphi_{f(x)}) = y$$

$$\Rightarrow f(x) \notin INF$$