ESERCIZIO 1

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad A = M - N$ con

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } i = j \\ a_{ij} & \text{se } i = j+1 \\ 0 & \text{alt} \end{cases}$$

Metodo iterativo $x^{(k)} = Px^{(k-1)} + q$,

$P = M^{-1}N$, $q = M^{-1}b$

a) Descrivere il metodo iterativo in termini di componenti

ESERCIZIO 2

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ k & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Determinare una condizione necessaria e sufficiente su k per avere convergenza del metodo di Jacobi.

Pongo A a predominanza diagonale:

$$1 > \sum_{j=1}^{n-1} k$$

$$1 > (n-1)(k)$$

$$k < \frac{1}{n-1}$$

ESERCIZIO 3

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ \alpha & \text{se } i=j+1 \text{ o } i=1, j=n \\ 0 & \text{alt} \end{cases}$$

1) Dare condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza del metodo di Gauss-Seidel e di Jacobi.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \alpha \\ \alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Pongo A a pred. diagonale

$1 > \alpha$ $\quad\quad$ $\alpha < 1$

2) Dimostrare che $\rho(G) = \rho(J)^n$

Gauss-Seidel:

$M = D - L$ (parte triangolare inf. di A)

$$N = U \qquad G = (D-L)^{-1}\, U$$

$$(D-L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \alpha & \ddots & \\ & \ddots\ \alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$Id = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \alpha & \ddots & \\ & \ddots\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & ? \\ & \ddots & \vdots \\ ? & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$B := (D-L)^{-1}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i > j \\ (-1)^{i+j} \cdot \alpha^{i-j} & \end{cases}$$

$$U = \begin{bmatrix} & -\alpha \\ & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad g_{ij} = \begin{cases} (-1)^i \cdot \alpha^i & \text{se } j = n \\ 0 & \text{alt.} \end{cases}$$

Jacobi: $M = D$

$N = L + U$ $\qquad J = (D^{-1})(L+U)$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & -U \\ & D & \\ -L & & \ddots \end{bmatrix}$$

$M = Id \Rightarrow M^{-1} = M$

$$N = L + U = \begin{bmatrix} & & & -\alpha \\ -\alpha & & & \\ & \ddots & & \\ & & -\alpha & \end{bmatrix}$$

$$J = M^{-1}(L+U) = L+U = \begin{bmatrix} & & & -\alpha \\ -\alpha & & & \\ & \ddots & & \\ & & -\alpha & \end{bmatrix}$$

$\rho(G) = (-\alpha)^n$

$\rho(J) = (-\alpha)$

$\Rightarrow$ Th

3) Dimostrare che per A^T vale $\rho(G)^{n-1} = \rho(J)^n$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss-Seidel:

$$D-L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \alpha & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (D-L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ -\alpha & & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ -\alpha & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & -\alpha & \\ & & \ddots \\ & & -\alpha \\ & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & -\alpha & \\ & & \ddots \\ & & -\alpha \\ & +\alpha^2 & \end{bmatrix}$$

Jacobi:

$$M = D = Id$$

$$N = L+U = \begin{bmatrix} & -\alpha & \\ & & \ddots \\ & & -\alpha \\ -\alpha & & \end{bmatrix}$$

$$J = M^{-1}(L+U) = L+U = \begin{bmatrix} & -\alpha & \\ & & \ddots \\ & & -\alpha \\ -\alpha & & \end{bmatrix}$$

$$\rho(G)^{n-1} = \alpha^n$$
$$\rho(J)^n = \alpha^n$$

4) Dare condizioni su α affinché Jacobi, Gauss-Seidel convergano.

Pongo la predominanza diagonale:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \alpha \\ \alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha & 1 \end{bmatrix} \qquad 1 > \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha < 1$$

ESERCIZIO 4

Si dimostri che

$\det(A)=0$

$\Rightarrow$ Scegliendo un metodo iterativo $A=M-N$ con M invertibile vale che
$\exists \lambda=1 \mid Px=\lambda x$ (i.e. $\lambda=1$ autovalore di P).

Essendo $\det(A)=0$ vale che
$\lambda=0$ autovalore di A

Uso la definizione di autovalore

$Av=0\cdot v=0$

$A=M-N$ per Hp

$(M-N)v=0$

$Mv=Nv$

$v=M^{-1}Nv$

Essendo $P:=M^{-1}N$ risulta che

$v=Pv$

e questo e' vero sse $\lambda=1$ e' autovalore di P $\Rightarrow \rho(P)\geq 1 \Rightarrow$ Il metodo non converge

$\Rightarrow$ Th.