TIME(f) : classe di complessita'

$= \{ I$: problemi $\mid \exists M$ che decide I in tempo deterministico $f \}$

$= \{ I \mid \exists M$ t.c. $\forall x$: caso $\in I$. $M(x) \xrightarrow{t} (h, w) \wedge t \leq f(|x|) \}$

TEOREMA di RIDUZIONE dei NASTRI

$\forall M$: MdT a k nastri che decide I in tempo deterministico f

$\exists M'$: MdT a 1 nastro che decide I in tempo deterministico $O(f^2)$.

Dim (sketch):

Ho una configurazione $(q, \triangleright w_1 \dots \triangleright w_k)$ di M

La codifico:

$(q', \triangleright \triangleright' w_1 \triangleleft' \dots \triangleright' w_k \triangleleft')$

cioe' mi invento delle "parentesi" per tenere divisi i nastri

i-esimo elemento: $\triangleright u_i \sigma_i v_i$

$\rightsquigarrow \triangleright' u_i \bar{\sigma}_i v_i \triangleleft'$

Mi invento un simbolo per indicare il carattere corrente

$(q_0, \triangleright x, \underbrace{\triangleright \dots \triangleright}_{k-1}) \rightsquigarrow (q_0', \triangleright \triangleright' x \triangleleft' \underbrace{\triangleright' \triangleleft' \dots \triangleright' \triangleleft'}_{k-1})$

Quanti passaggi servono? $|x| + 2 + 2k$

$(q_0, \triangleright x) \xrightarrow{|x|} (\tilde{q}, \triangleright \# x) \rightarrow (\hat{q}\, \triangleright \triangleright' x)$

con $2 \in \mathbb{N}$

Per eseguirla

$\underline{(q_0' DD' u_1 \bar{\sigma}_1 v_1 \triangleleft' \dots D' u_k \bar{\sigma}_k v_k \triangleleft')}$ definisco K la sua lunghezza

4 passaggi: leggo,

torno in ci .

eseguo,

torno in cima

$\underline{u_i \bar{\sigma}_i v}$ è lungo al più $f(|x|)$:

non si può consumare più spazio che tempo

$K = 1 + k \cdot (f(|x|) + 2)$;

ogni passo di M richiede $4K + 3K$ di M' *

cioè $O(f|x|)$ passi di M'. Poiché devo fare

$O(f(|x|))$ passi di M, servono $O(f(|x|) \cdot f(|x|)) = O(f^2)$.

* 4 lo ho motivato sopra

3 per scrivere nuovi caratteri

e.g. $(q_0' DD' u_1 \bar{\sigma}_1 v_1 \triangleleft' \dots D' u_k \bar{\sigma}_k v_k \triangleleft')$

servono 3 passaggi:

leggo.

vado alla posizione $j<k$ spostando a dx

i caratteri in $\{j+1 \dots k\}$

torno indietro

TEOREMA di ACCELERAZIONE LINEARE

Se I : problema $\in TIME(f)$

allora $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $I \in TIME(\varepsilon \cdot f(n) + n + 2)$

es. ricerca binaria trova in $O(\log n)$

ricerca lineare in $O(n)$

non accelera di un fattore lineare, quindi?

ricerca binaria dipende dal fatto che i dati siano ordinati

=> non vale l'invarianza sulla rappresentazione dei dati

Dim (sketch):

Si condensa il dato in ingresso

$\sigma_{i1} \dots \sigma_{im}$ viene condensato in $\rho = [\sigma_{i1} \dots \sigma_{im}]$

che e' un simbolo di M' : MdT

Per dire che il simbolo corrente e' σ_{ik} :

$[q, \sigma_{i1} \dots \sigma_{im}, k]$

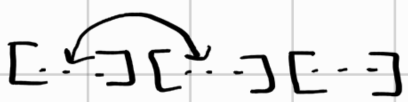
Il nastro e' dunque:

$|\rhd| [\sigma_{11} \dots \sigma_{1m}] [\sigma_{21} \dots \sigma_{2m}] [\sigma_{e1} \dots \sigma_{em}]|$

Lo stato e' $(q, \sigma_{i1} \dots \sigma_{im}, k)$

La macchina originale con m passi puo' cambiare

M: MdT originale

 oppure

[. . .] [. . .] [. . .]

⋮ ma non

[. . .] [. . .] [. . .]

In 6 passi M' simula m passi di M

M' compie $|x| + 2 + 6 \cdot$ #passi di M

(con #passi di M $= 6 \cdot \left\lceil \frac{f(|x|)}{m} \right\rceil$)

per decidere x — Ponendo $m = \left\lceil \frac{6}{\varepsilon} \right\rceil$ si ottiene la tesi.

Q.E.D.

LA CLASSE P

$$\mathcal{P} := \bigcup_{k \geq 1} \mathrm{TIME}(n^k).$$

E' resistente al cambio di modello?

Modello RAM:

Grammatica: $P \to I_1 \dots I_n$. — un programma e' una sequenza di istruzioni

$I \to$ ① $x_i := x_j$ | — assegna il contenuto del registro j al registro i

② $x_i := x_i \pm 1$ | — incremento / decremento

③ $x_i := 0$ | — inizializzazione

④ if $x = 0$ then l' else l'' | — l', l'' etichette

⑤ STOP.

Semantica: $[\![P]\!]_\sigma = \sigma'$ sse $(1,\sigma) \xrightarrow{*} \sigma'$

$$(\ell,\sigma) \to (\ell+1, \sigma[\sigma(j) \mapsto i]) \quad \text{se } I_\ell = 1$$

$$\to (\ell+1, \sigma[succ(\sigma(i)), i]) \quad I_\ell = 2$$

$$\to (\ell+1, \sigma[0 \mapsto i]) \quad I_\ell = 3$$

$$\to (\ell', \sigma) \text{ se } I_\ell = 4 \land \sigma(i) = 0$$

$$\to (\ell'', \sigma)$$

$$\to (\ell, \sigma) \text{ se } I_\ell = 5$$

Si può dimostrare che $\mathcal{P}_{MdT} = \mathcal{P}_{RAM} = \dots$

è invariante rispetto al cambio di modello