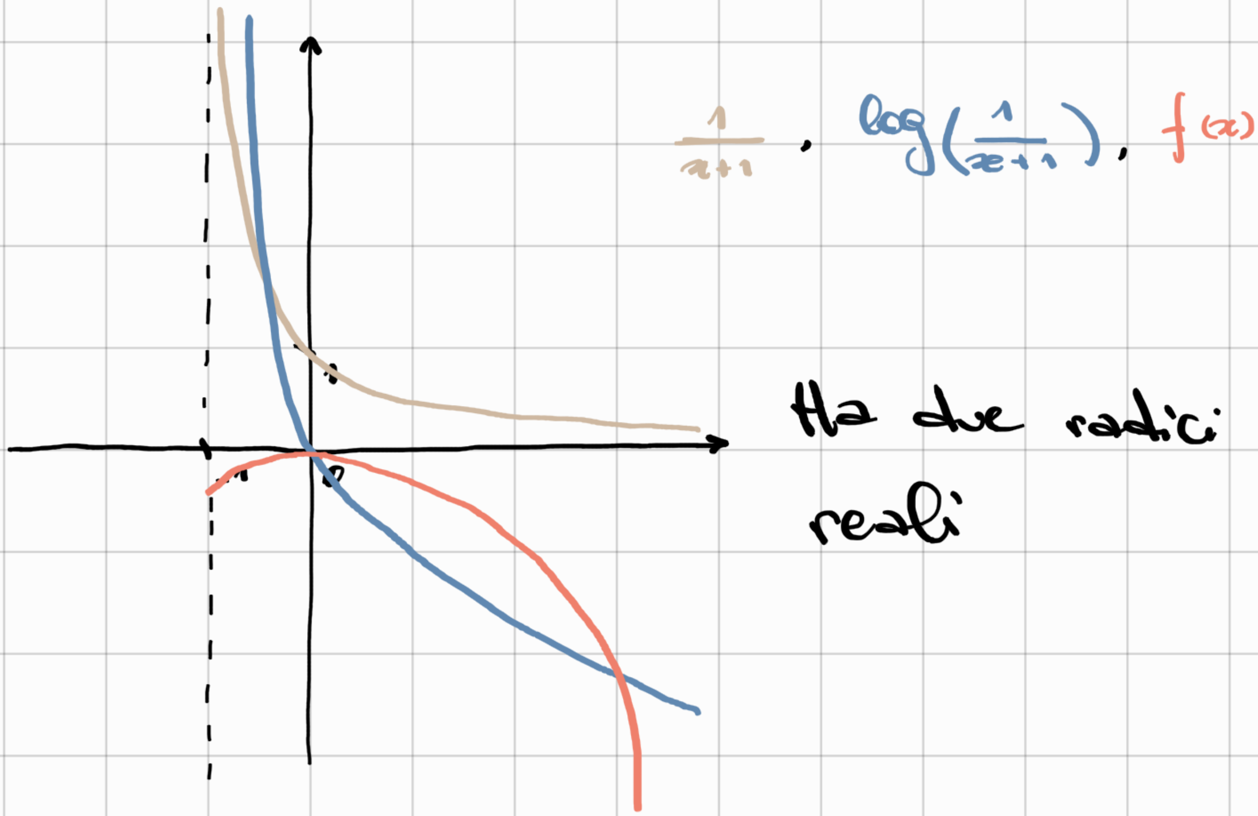
DOMANDA 1

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{x^2}{4} \qquad C.E.\ x > -1$$

1) Si dica quante soluzioni reali ha $f(x) = 0$



Ha due radici reali

2) Si dica quale condizione rappresenta l'insieme più ampio di convergenza per m.d.t.

$$f'(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{4}x = \frac{-2 + x^2 + x}{2(x+1)} = \frac{x^2 + x - 2}{2x + 2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+1)(2x+2) - (x^2+x-2)\cdot 2}{(2x+2)^2} = \frac{4x^2 + 2x + 4x + 2 - 2x^2 - 2x + 4}{(2x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2+4x+6}{(2x+2)^2} \qquad f''(x) > 0 \quad \forall x \in D(f(x))$$

Le ipotesi del teorema sono verificate

$$\forall x \in D(f(x)) \setminus \{1\}$$

$$f'(1) = 0$$

DOMANDA 2

$$f(x) = \left(x+\frac{1}{3}\right)(3x^3-9x^2+9x-3) =$$
$$3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)^3$$

1) Si dica quante soluzioni reali ha l'equazione $f(x)=0$.

$$3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)^3$$

$$x_1 = -\frac{1}{3} \quad , \quad x_2 = 1$$

Ha due soluzioni reali

2) Si dica quale condizione rappresenta l'insieme più ampio di convergenza per m.d.t.

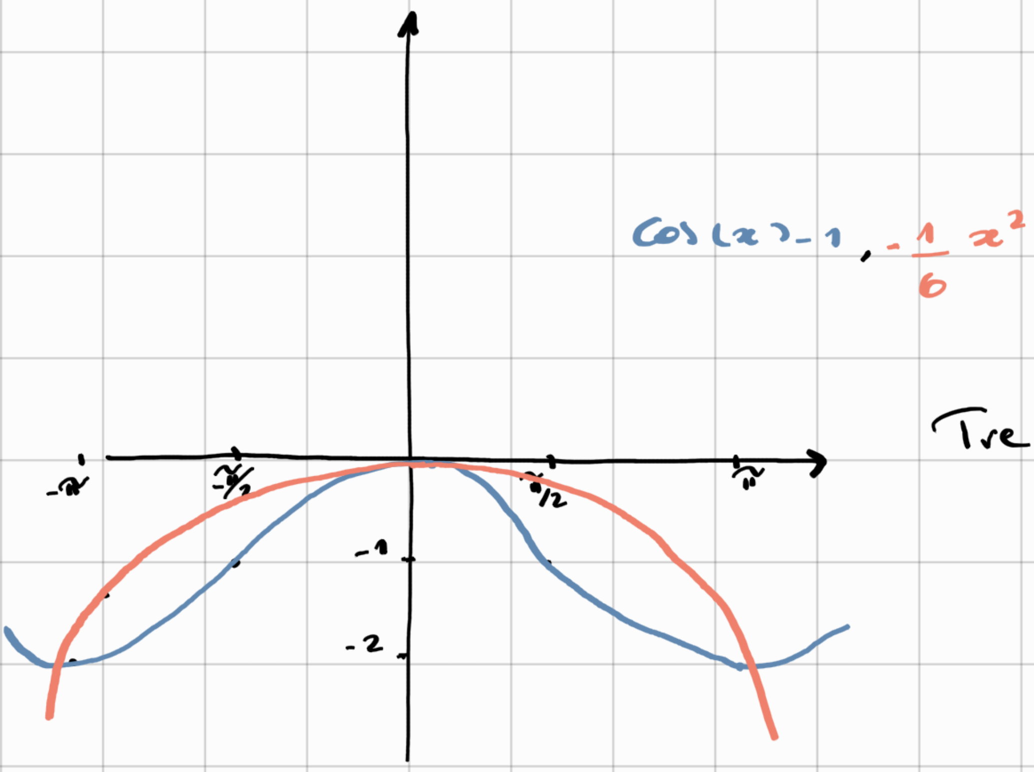
$$f(x) = 3x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + x - 1 =$$
$$= 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 2x - 1$$
$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x - 2 = 2(6x^3 - 12x^2 + 6x - 1)$$
$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1)$$

$$f'(1) = 0 \,, \quad f(x)\, f''(x) > 0 \text{ sse } x < -\frac{1}{3} \vee x > \frac{1}{3}$$

DOMANDA 3

$$f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{6}$$

1) Si dica quante soluzioni reali ha l'equazione $f(x) = 0$.



Tre radici reali

2) Si dica quale condizione rappresenta l'insieme più ampio di convergenza per m.d.t.

$f'(x) = -\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{3}x$, $\quad f''(x) = -\cos(x) + \frac{1}{3}$

$f'(0) = 0$, si sceglie l'intervallo f provando valori e ricordando che non possono essere e.d.

DOMANDA 4

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad a_{ij} = \begin{cases} -k & \text{se } i=j \\ 1 & \text{se } i=j+1 \text{ e } j=1 \dots n-1 \\ -1 & \text{se } i=1 \text{ e } j=n \\ 0 & \text{alt} \end{cases}$$

1) Si dica per quali valori di k A risulta non singolare.

$$A = \begin{bmatrix} -k & & & -1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -k \end{bmatrix}$$

Pongo $0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ con K_i i-esimo cerchio di Gershgorin

$K_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z + k| \leq 1 \}$

$K_{2 \dots n} = \{ z \in \mathbb{C} : |z + k| \leq 1 \}$

$\Rightarrow 0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ se $|k| > 1$

2) Si dica per quali valori di k A e' fattorizzabile LU.

Si pone $\det(A_1) \wedge \dots \wedge \det(A_{n-1}) \neq 0$

$\Rightarrow k \neq 0.$

DOMANDA 5

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i=j \\ -\alpha & \text{se } i \neq j, \; i = 1 \dots n \end{cases}$$

1) Si dica per quali valori di α A e' non singolare.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha & \cdots & -\alpha \\ -\alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\alpha \\ -\alpha & \cdots & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

Pongo $0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ con K_i i-esimo cerchio di Gershgorin

$K_{1 \dots n} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z+1| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |-\alpha| \right\}$

$\Rightarrow 0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ sse $1 > (n-1)|\alpha|$

2) Si dica se per $\alpha = -1$ il metodo di Jacobi risulta convergente.

$1 < (n-1) \cdot |-1|$ $\Rightarrow$ il metodo non risulta convergente

DOMANDA 6

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{se } i=j,\ i=1 \dots n-1 \\ 2n-2 & \text{se } i=j=n \\ k & \text{se } i=1 \dots n-1,\ j=n \\ 1 & \text{se } j=1 \dots n-1,\ i=n \\ 0 & \text{alt} \end{cases}$$

1) Si dica per quali valori di k A è a predominanza diagonale.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & & & k \\ & \ddots & & 1 \\ & & 2 & k \\ 1 & - & 1 & 2n-2 \end{bmatrix}$$

Pongo $0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ con K_i i-esimo cerchio di Gershgorin

$K_{1 \dots n-1} = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq |k| \}$

$K_n = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 2n + 2| \leq n-1 \}$

$\Rightarrow 0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ sse $2 > |k|$

2) Per $k=2$ si dica se il metodo di Gauss-Seidel converge.