TEOREMA di RAPPRESENTAZIONE in BASE

Hp: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, base $\beta \geq 2$

Th: $\exists!\ p \in \mathbb{Z}$, $\{d_i\}_{i \geq 1}$ interi non negativi

t.c.

- $d_1 \neq 0$,
- $(\forall i.\ d_i \in [0; \beta - 1])$,
- $(\forall k > 0.\ (\exists j \geq k \mid d_j \neq \beta - 1))$
- $x = \text{segno}(x) \cdot \underbrace{\beta^p}_{\text{esponente}} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} d_i \beta^{-i}}_{\text{mantissa}} \Big)$

INSIEME dei NUMERI di MACCHINA

$$\mathbb{F}(\beta, t, m, M) := \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = \text{segno}(x) \cdot \beta^p \left(\sum_{i=1}^{t} d_i \beta^{-i} \right) \text{ con } d_1 \neq 0, (\forall i \in [0; t].\ d_i \in [0; \beta[\,), p \in [-m; M] \}$$

$\Omega :=$ massimo numero di macchina

$$\Omega = \beta^M (1 - \beta^{-t})$$

$$\# \mathbb{F} = 1 + 2\underbrace{(m + M + 1)}_{\text{esponenti}} \underbrace{(\beta^t - \beta^{t-1})}_{\text{mantisse}}$$

$\omega :=$ minimo numero >0 rappresentabile

$$\omega = \beta^{-m-1}$$

TRONCAMENTO e ARROTONDAMENTO

Hp: $x = \text{segno}(x)\, \beta^{p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \beta^{-i} \right)$

1) troncamento:

$$\tilde{x} = \text{trunc}(x) = \text{segno}(x)\, \beta^{p} \left(\sum_{i=1}^{t} d_i \beta^{-i} \right)$$

2) arrotondamento:

$$\tilde{x} = \text{arr}(x) \begin{cases} = \text{trunc}(x) & \text{se } d_{t+1} < 1/2\, \beta \\ = \text{trunc}(x) + \beta^{p-t} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ERRORE ASSOLUTO

$$\varepsilon = \tilde{x} - x$$

ERRORE RELATIVO

$$\varepsilon_x = (\tilde{x} - x) / x$$

PRECISIONE di MACCHINA

$$|\varepsilon_x| = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|} < u \qquad \begin{cases} u = \beta^{1-t} & \text{se } \tilde{x} = \text{trunc}(x) \\ u = 1/2\, \beta^{1-t} & \text{se } \tilde{x} = \text{arr}(x) \end{cases}$$

OPERAZIONI di MACCHINA

$x \circledcirc{op}\, y = (x \text{ op } y)(1+\varepsilon)$

con $\varepsilon :=$ errore locale dell'operazione

ERRORE INERENTE

$$\varepsilon_{in} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \quad \text{con } f(x) \neq 0$$

Dico che un problema è MALCONDIZIONATO per un intorno di x se e solo se $\nexists \sup(f(x))$.

Hp: $f : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, f differenziabile due volte, $\tilde{x} = (\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n)$

$$\varepsilon_{in} \doteq \sum_{i=1}^{n} c_{x_i} \varepsilon_{x_i}, \quad \text{con } c_{x_i} = \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_i)$$

coefficiente di amplificazione

Somma: $c_x = \frac{x}{x+y}$, $c_y = \frac{y}{x+y}$

sottrazione: $c_x = \frac{x}{x-y}$, $c_y = \frac{-y}{x-y}$

moltiplicazione: $c_x = 1$, $c_y = 1$

divisione: $c_x = 1$, $c_y = -1$

ERRORE ALGORITMICO

Hp: $g(x) :=$ sequenza dei passaggi algoritmici utilizzati nel calcolo di $f(x)$

e.g. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $g(x) = ((x \otimes x) \oplus 1) \oslash x$

$$\varepsilon_{alg} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

ERRORE TOTALE

$$\varepsilon_{TOT} = \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg}$$

ERRORE ANALITICO

$f(x)$ NON razionale $\rightarrow h(x)$ razionale

$$\varepsilon_{AN} = \frac{h(x) - f(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{TOT} \doteq \varepsilon_{in} + \varepsilon_{alg} + \varepsilon_{an}.$$

NORMA VETTORIALE

E' una funzione $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ t.c.

1) $(\forall v \in \mathbb{F}^n.\ f(v) \geq 0 \wedge f(v) = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0})$
2) $(\forall v \in \mathbb{F}^n.(\forall \alpha \in \mathbb{F}.\ f(\alpha v) = |\alpha| f(v)))$
3) $(\forall v, w \in \mathbb{F}^n.\ f(v+w) \leq f(v) + f(w))$

NORMA MATRICIALE

funzione $f: \mathbb{F}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.
1) $(\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}.\ f(A) \geq 0 \wedge f(A) = 0 \Leftrightarrow A = \vec{0})$
2) $(\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}.(\forall \alpha \in \mathbb{F}.\ f(\alpha A) = |\alpha| \cdot f(A)))$
3) $(\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}.\ f(A+B) \leq f(A) + f(B))$
4) $(\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}.\ f(A \cdot B) \leq f(A) \cdot f(B))$

oss. Per ogni norma matriciale $\|Id\| \geq 1$.

NORMA INDOTTA

funzione $f: \mathbb{F}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.
$(\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}.\ f(A) = \|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|$ con $|\cdot|$ norma vettoriale su $\mathbb{F}^n$).
Vale inoltre:
$(\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}.(\forall x \in \mathbb{F}^n.\ |Ax| \leq \|A\| \cdot |x|))$.

NORMA EUCLIDEA

VETTORI

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

MATRICI

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}.$$

NORMA 1

VETTORI

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

MATRICI

$$\|A\|_1 = \max_{j=1\dots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

NORMA INFINITO

VETTORI

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1\dots n} |x_i|$$

MATRICI

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1\dots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

CONDIZIONAMENTO di un PROBLEMA

$Ax = b$, $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{F}^n$

$\dfrac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}$ misura il condizionamento del problema. Risulta:

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \le \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{=\kappa(A)} \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|}$$

$\kappa(A) :=$ numero di condizionamento.

TEOREMA di HIRSCH

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\|\cdot\|$ norma matriciale indotta

$(\forall \lambda$ autovalore di A. $|\lambda| \le \|A\|)$.

CERCHIO di GERSHGORIN

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$,

$K_i := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$

TEOREMI di GERSHGORIN

1) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$,

λ autovalore di $A \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$

2) Se l'unione M_1 di k cerchi di Gershgorin e' disgiunta dall'unione M_2 dei rimanenti n cerchi allora $\#\{\text{autovalori}\} \subset M_1 = k$,

$\#\{\text{autovalori}\} \subset M_2 = n-k$.

PREDOMINANZA DIAGONALE

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, A si dice a pred. diag. per righe se vale $\left(\forall i \in \{1, \dots, n\}.\ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|\right)$; analogamente si definisce anche per colonne.

oss. A a predominanza diagonale

$\Rightarrow A$ non singolare.

FATTORIZZAZIONE LU

$(\exists\, L, U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, L triangolare inf con 1 sulla diagonale, U triangolare sup $\mid A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = LU)$

$\Rightarrow A$ e' fattorizzabile LU.

oss. si risolve il sistema $\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

oss. A invertibile $\Rightarrow (\exists P$ matrice di permutazione $\mid P^T A = LU)$.

TEOREMA di ESISTENZA e UNICITA'

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$(\forall k \in \mathbb{Z} \cap [1; n[$. le sottomatrici principali di testa sono non singolari $)$

$\Rightarrow (\exists!\, L, U \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = LU)$.

e.g.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \det(A) &= 1 \neq 0. \\ \det(A) &= -3 \neq 0. \end{aligned}$$

oss.

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & z \\ \hline x^T & a_{nn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{L} & 0 \\ \hline w^T & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \hat{U} & y \\ \hline 0^T & \beta \end{array}\right].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_{n-1} = \hat{L}\hat{U} \\ z = \hat{L}y \\ x^T = w^T\hat{U} \\ a_{nn} = w^T y + \beta \end{cases} \qquad \Rightarrow \beta = a_{nn} - w^T y.$$

MATRICI ELEMENTARI di GAUSS

k-esimo vettore della base canonica

$E \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
$(\exists\ k \in \mathbb{N},\ v \in \mathbb{R}^n \mid E = I - v e_k^T)$
$\Rightarrow E$ matrice elementare di Gauss.

$$\text{e.g. } E_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ -v_3 & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ -v_n & & & 1 \end{bmatrix}$$

oss. • E e' triangolare inf.
• E e' invertibile: $E^{-1} = I + v e_k^T$,
E^{-1} e' matrice elementare di Gauss.

$(x \in \mathbb{R}^n,\ x_k \neq 0) \Rightarrow \left(\exists E \mid Ex = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)$,

$v_{k+1} = \dfrac{x_{k+1}}{x_k}$, $v_n = \dfrac{x_n}{x_k}$.

- $E_k = I - v e_k^T \quad , \quad E_h = I - w e_h^T$:

  $h > k \Rightarrow E_k \cdot E_h = I - v e_k^T - w e_h^T$.

- Ey costa $O(n-k)$ flops.

COSTO COMPUTAZIONALE

$$A^{(k-1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k-1)} & & a_{1,k-1}^{(k-1)} & & \cdots & & a_{1,n}^{(k-1)} \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & & \cdots & & \\ & & 0 & a_{k,k}^{(k-1)} & \cdots & & a_{k,n}^{(k-1)} \\ & & & \vdots & a_{k+1,k+1}^{(k-1)} & \cdots & \\ & & & \vdots & \vdots & \cdots & \\ & & & \vdots & \vdots & \cdots & \\ 0 & & 0 & a_{n,k}^{(k-1)} & a_{n,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{n,n}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)}, \quad \text{con} \quad j = 1 \dots n, \; i \leq k \\ a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} = 0, \quad j = 1 \dots k-1, \; i = k+1 \dots n \\ a_{ik}^{(k)} = 0, \quad i = k+1 \dots n \\ a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}, \quad j = k+1 \dots n, \; i = k+1 \dots n \\ \qquad m_{ik}^{(k-1)} = \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}. \end{cases}$$

Le formule e sono identiche anche per $\vec{b}$.

$$\Rightarrow T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \left[(n-k) + 2(n-k)^2\right] = \frac{1}{3} n^3 + O(n^2)$$

METODI ITERATIVI

$A = M + N$, $A, M, N \in \mathbb{R}^n$, A non singolare

$$Ax = b \iff Mx = Nx + b$$

$$\iff x = Px + q \quad \text{con } P = M^{-1}N, \; q = M^{-1}b$$

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice di iterazione

$q \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q \quad \text{con } k \geq 0 \end{cases}$$

TEOREMA FA' LA COSA GIUSTA

$\{x^k\}$ convergente $\Rightarrow \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x$ soluzione di $Ax = b$ (equivalentemente risolve $x = Px + b$).

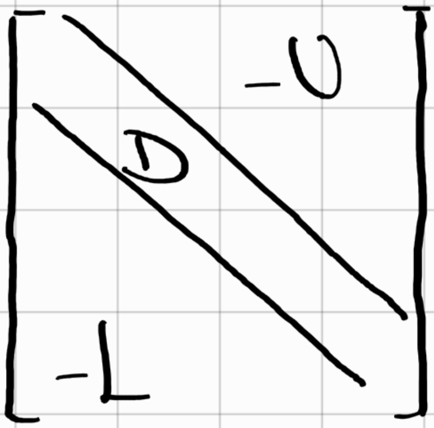
Th. ($\forall x^{(0)}$ vettore iniziale. $\exists \lim_{k \to \infty} x^{(k)}$) or
($\exists \|\cdot\|$ norma matriciale indotta $|$ $\|P\| < 1$)
$\Rightarrow$ Il metodo iterativo converge.

Th. Il metodo iterativo è convergente
$\Rightarrow \rho(P) < 1$.

Lemma: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\rho(A) < 1$
$\Rightarrow \exists$ norma matriciale indotta t.c. $\|A\| < 1$.

Pongo

$$A = D - L - U =$$



METODO di JACOBI

Hp: $(\forall i = 1 \ldots n.\ a_{ii} \neq 0)$.

$M = D$, $\quad N = L + U$, $\quad A = M - N$.

Matrice di iterazione $J = D^{-1}(L+U)$.

Risulta:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

METODO di GAUSS-SEIDEL

Hp: $(\forall i = 1 \ldots n.\ a_{ii} \neq 0)$

$M = D - L$, $\quad N = U$, $\quad A = M - N$.

Matrice di iterazione $G = (D-L)^{-1} U$

Risulta:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

CRITERI DI ARRESTO

- $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \leq tol$
- $\dfrac{\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|}{x^{(k)}} \leq tol$
- $\| A x^{(k+1)} - b \| \leq tol$
- $\dfrac{\| A x^{(k+1)} - b \|}{\| x^{(k+1)} \|} \leq tol$

TEOREMA

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A è a pred. diagonale

$\Rightarrow$ • A è invertibile

• Jacobi e Gauss-Seidel sono applicabili

• Jacobi e Gauss-Seidel convergono