INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

FRAÇÕES

no Ensino Fundamental - Volume 1

Cydara Cavedon Ripoll
Fabio Simas
Humberto Bortolossi
Letícia Rangel
Victor Giraldo
Wanderley Rezende
Wellerson Quintaneiro

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

Projeto: LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA

impa
Instituto de Matemática
Pura e Aplicada

umlivroaberto

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

umlivroaberto.org

Título:	Frações no Ensino Fundamental - Volume 1
Ano/ Versão:	2016 / versão 2.0 de Fevereiro de 2017
Editora	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)
Realização:	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)
Produção:	Livro Aberto
Coordenação:	Fabio Simas e Augusto Teixeira
Autores:	Cydara Cavedon Ripoll, Fabio Luiz Borges Simas, Humberto José Bortolossi, Letícia Guimarães Rangel, Victor Augusto Giraldo, Wanderley Moura Rezende, Wellerson da Silva Quintaneiro
Colaboradores:	Ana Paula Pereira (CAp UFF), Andreza Gonçalves (estudante da UFF), Bruna Luiza Oliveira (estudante da UFF), Francisco Mattos (Colégio Pedro II), Helano Andrade (estudante da UNIRIO), João Carlos Cataldo (CAp UERJ e Colégio Santo Ignácio), Luiz Felipe Lins (Secretaria de Educação da Cidade do Rio de Janeiro), Michel Cambrainha (UNIRIO), Rodrigo Ferreira (estudante da UNIRIO), Tahyz Pinto (estudante da UFF)
Arte:	Aline Santiago
Ilustradores (figuras geométricas):	Luiz Fernando Alves Macedo, Vitoria da Mota Souza, Eduardo Filipe de Miranda Souto, Caio Felipe da Silva Evangelista, Gisela Alves de Souza, Mauricio de Azevedo Neto, Briza Aiki Matsumura, Vinícius Marcondes de Paula Silva, Wanessa Souza de Oliveira, Maurício Menegatti Andrade, Eduardo Filipe de Miranda Souto, Livia Machado da Silveira Verly, Caio Felipe da Silva Evangelista, Lucas Hideo Maekawa, Lucas Oliveira Machado de Sousa, Kayky Zigart Carlos e Israel Fialho Magalhães
Capa:	Fabio Simas

Introdução

Frações é certamente um dos tópicos que mais desafia o ensino e a aprendizagem de matemática na Educação Básica. Justamente por isso, tanto se publicou sobre o assunto nas últimas décadas (para citar apenas algumas das mais utilizadas: *Rational Number Project*, *Institute of Education Science* ([7], 2010), Van de Walle ([29], 2009) e Wu ([31], 2011). Este texto, organizado como uma proposta didática, reúne as reflexões e as discussões dos autores sobre o tema, amparadas por essas publicações e pela análise de livros didáticos de diversos países. A proposta aqui apresentada foi planejada para:

(i) ser aplicada diretamente em sala de aula, como material didático destinado aos anos intermediários do ensino fundamental (do 4º ao 7º ano) e

(ii) amparar a formação e o desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática na educação básica.

O texto concentra-se na abordagem inicial de frações como objeto matemático, ou seja, como novas quantidades. Busca-se, assim, aumentar o universo numérico do estudante, explorando o assunto a partir de atividades que visam à construção conceitual do tema e a conduzir os alunos a desenvolverem o raciocínio matemático amparados por reflexão e por discussão. Assim, as atividades visam a desafiar os alunos e a levá-los a estabelecer suas próprias conclusões sobre os assuntos tratados. Busca-se valorizar a capacidade cognitiva dos alunos, respeitando uma organização crescente e articulada de dificuldade na organização das atividades. Espera-se com isso mudar a perspectiva do binômio quantidade/qualidade. No lugar de uma quantidade enorme de exercícios, são propostas poucas atividades que exigem maior reflexão e aprofundamento dos conceitos. Assim, são evitadas atividades de simples observação e repetição de modelos e os tradicionais "exercícios de fixação", que, pontuais, são apenas com o objetivo de desenvolver a fluência em procedimentos específicos (por exemplo, os que envolvem a equivalência entre frações).

Uma outra característica particular deste material é o diálogo com o professor. No início de cada lição, há uma introdução dirigida especificamente ao professor que apresenta os objetivos da lição, uma discussão dos aspectos matemáticos que serão tratados, as dificuldades esperadas e algumas observações sobre os passos cognitivos envolvidos. Diferente dos livros didáticos tradicionais, em que, para o professor, há pequenas observações pontuais junto ao texto do aluno e um longo texto teórico anexo ao final do livro, nesta proposta a "conversa" com o professor é permanente. Em cada atividade são realizadas discussões sobre os objetivos a serem alcançados, recomendações e sugestões metodológicas para sua execução e, quando pertinente, uma discussão sobre algum desdobramento do assunto tratado.

Entende-se que, nesta etapa da escolaridade, considerando o cotidiano próprio do aluno, o conceito de fração aparece ligado a noções informais traduzidas por expressões como metade, terço, quartos, décimos e centésimos, por exemplo. Assim, nas primeiras duas lições, buscou-se utilizar a linguagem verbal e os conhecimentos anteriores dos estudantes sobre situações em que aquelas expressões são utilizadas para conduzir as primeiras abordagens, visando à introdução de um conhecimento mais organizado e formal sobre o assunto. Apenas posteriormente, são introduzidas a linguagem e a simbologia próprias da matemática.

A introdução das frações na Educação Básica amplia o universo numérico do aluno e envolve um salto cognitivo, ir além da contagem. São duas as principais questões nesse processo: "a identificação de uma unidade não explícita *a priori*" e a compreensão de uma "unidade contínua", isto é, que pode ser subdividida em qualquer número de partes.

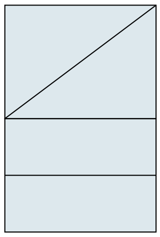
A construção de ideias abstratas, especialmente nesta etapa da escolaridade, deve ser amparada por contextos e modelos representativos. Na abordagem aqui proposta decidimos por iniciar apenas a partir de situações que envolvem modelos contínuos (linhas e regiões do plano ou do espaço). Assim, por exemplo, não trataremos de "um terço de uma caixa de lápis", mas de "um terço de uma barra de chocolate".

A decisão por evitar modelos discretos em um momento inicial deve-se aos seguintes fatos: (i) modelos discretos já evidenciam uma unidade a priori; por exemplo, na determinação de um terço de 24 lápis, a unidade "lápis" não é nem a unidade nem a subunidade que precisam ser levadas em conta para a determinação da fração "um terço de 24 lápis" e (ii) como o conceito de fração subentende o de equipartição, contextos discretos podem desencadear discussões mais complexas, por exemplo, o que seria determinar $1/10$ de uma caixa de 24 lápis?

A opção por modelos contínuos traz limitações inerentes. É natural que os estudantes associem a fração à forma que a identifica no modelo. É necessário que identifique-se a fração não à forma, mas à quantidade evidenciada na representação. Assim, por exemplo, se o modelo for um retângulo, o que está em questão é a área e a fração $1/4$

pode ser representada igualmente por um retângulo ou um triângulo, como na figura a seguir (ver Atividade 4 da Lição 1).

Iniciar o estudo de frações a partir de modelos contínuos é uma decisão compartilhada por propostas que caracterizam livros japoneses e franceses.



As lições 1 e 2 introduzem os conceitos elementares e a linguagem de frações a partir de situações concretas e de modelos contínuos. Na Lição 1, as frações emergem de situações concretas amparadas pela linguagem verbal. Uma vez estabelecida a unidade, a expressão “fração unitária” nomeia cada uma das partes da divisão da unidade em partes iguais. Nas atividades dessas lições a unidade está fortemente vinculada a um objeto concreto. Assim, por exemplo, a fração de uma torta, não é ainda tratada com a abstração própria do conceito de número, mas como uma fatia da torta em uma equipartição. Toma-se bastante cuidado com o papel da determinação da unidade e com a necessidade de uma “equipartição” para a identificação de uma fração. A notação simbólica de frações e as frações não unitárias, incusive as maiores do que a unidade, surgem apenas na Lição 2. As frações com numerador diferente de 1 são apresentadas a partir da justaposição de frações unitárias com mesmo denominador ou simplesmente contando-se essas frações. Para isso, tem-se a representação pictórica como um apoio importante. Nessas lições, as atividades são quase majoritariamente para identificar, reconhecer, analisar e justificar.

Na Lição 3, é exigida maior abstração dos alunos. Retoma-se a representação de números na reta numérica, enfatizando-se, no contexto das frações, a associação do segmento unitário à unidade. Os modelos contínuos e a justaposição de partes correspondentes às frações unitárias são a base da proposta desenvolvida. A representação das frações na reta numérica é usada para amparar a abordagem da comparação de frações com um mesmo numerador e com um mesmo denominador. Além disso, são propostas atividades que tratam a comparação de frações a partir de uma referência.

A Lição 4 trata da equivalência de frações tendo como objetivo a sua função na comparação de duas frações quaisquer. O assunto é abordado utilizando-se representações equivalentes em modelos de área retangulares, em modelos de área circulares e na reta numérica. A inclusão de modelos diferentes é proposital pois, com isso, o aluno tem a oportunidade de perceber as mesmas propriedades em contextos diferentes. Finalizando a lição, são propostas atividades que conduzem à exploração da propriedade das frações que garante que, dadas duas frações diferentes, é sempre possível determinar uma terceira fração que está entre elas (propriedade de densidade).

Adição e subtração de frações são o tema da Lição 5. A abordagem dessas operações será a partir de problemas e fundamentada na equivalência de frações, que permite determinar subdivisões comuns da unidade para expressar as frações envolvidas nos cálculos. Os significados e os contextos que caracterizam as operações de adição e de subtração envolvendo frações são semelhantes àqueles que compõem a abordagem dessas operações com números naturais, o que promove uma continuidade conceitual no desenvolvimento desse assunto.

Este volume marca o início de um trabalho em desenvolvimento, que será ampliado e complementado por novos volumes e novas edições. Para o volume 2, de mesmo tema, está prevista a complementação da abordagem das operações com frações, trazendo a multiplicação e a divisão envolvendo frações, a abordagem de frações em situações e modelos discretos e o uso de frações em contextos de razão e de proporção, além das porcentagens.

Teremos prazer em considerar suas sugestões para este livro por meio do endereço eletrônico livroaberto@impa.br. A edição mais recente deste livro está disponível em umlivroaberto.org.

Sumário

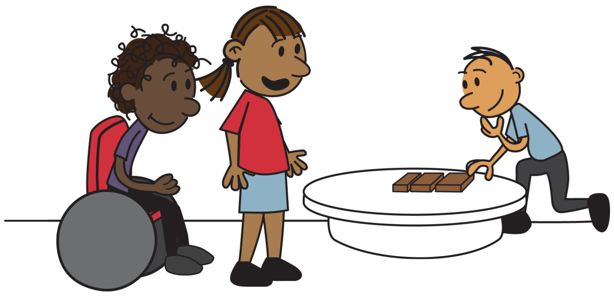
Lição 1

Começando a falar sobre frações

EXPLORANDO O ASSUNTO

Atividade 1

Três amigos repartiram uma barra de chocolate. Veja como eles fizeram.



a) Você concorda com essa divisão? Explique.

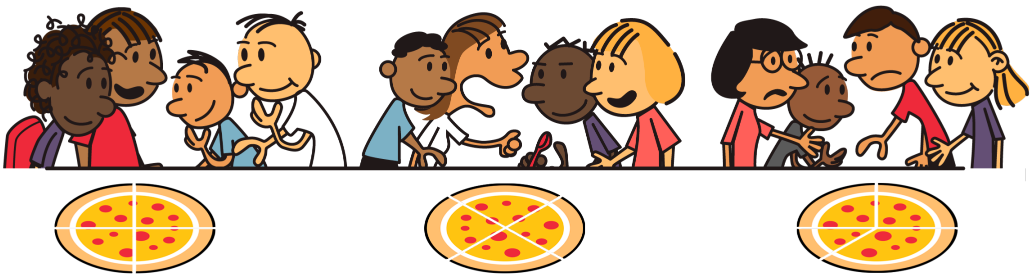
b) Com essa divisão, os três amigos receberam a mesma quantidade de chocolate?

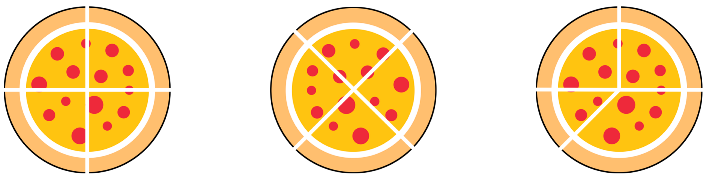
c) Desenhe uma divisão da barra de chocolate que permita que os 3 amigos recebam quantidades iguais de chocolate.

d) Considerando a divisão da barra de chocolate em 3 partes iguais, como você nomearia a quantidade de chocolate que cada amigo receberia?

Atividade 2

Três pizzas inteiras, de mesmo tamanho, foram repartidas entre as crianças de uma turma. Para isso, a turma foi dividida em três grupos com quatro crianças cada. Veja como cada grupo repartiu a sua pizza.





a) Cada um dos três grupos repartiu a sua pizza na mesma **quantidade de fatias** que os outros grupos?

b) Dessa maneira, todas as crianças da turma receberam a mesma **quantidade de pizza**?

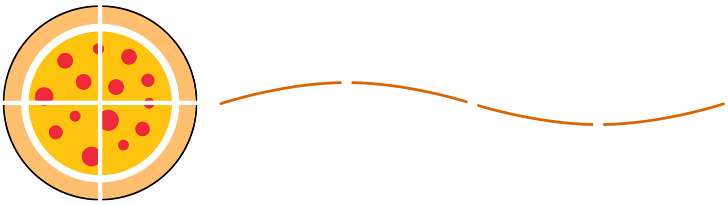
c) É verdade que em algum dos grupos, as 4 crianças receberam a mesma quantidade de pizza? Se sim, em qual? Considerando a pizza inteira, como você nomearia cada uma das fatias de pizza desse grupo?

Atividade 3

Alice quer enfeitar a sala de aula e pretende pendurar os enfeites utilizando pedaços de barbante. Para que os enfeites fiquem todos na mesma altura, quer cortar o barbante em pedaços iguais. Ajude Alice a cortar o barbante (você receberá o barbante do seu professor).

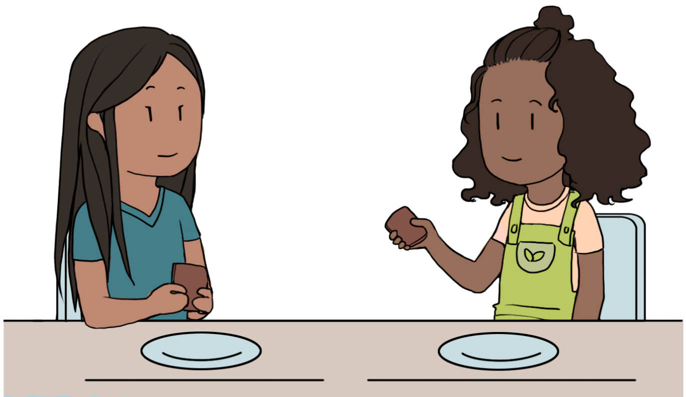
ORGANIZANDO AS IDEIAS

Nas atividades anteriores, a barra de chocolate, a pizza e o pedaço de barbante foram partidos **em partes com quantidades iguais**. Em cada um dos casos, o que foi repartido é chamado **unidade**. Cada uma das partes em que essas unidades foram repartidas igualmente é uma **fração da unidade**. Assim, por exemplo, um quarto de uma pizza é uma fração da pizza e a pizza é unidade. Se a unidade for um barbante, um quarto do barbante será uma fração do barbante.



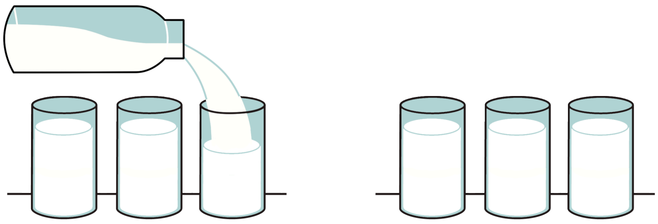
O nome dado à fração da unidade depende da quantidade de partes em que a unidade é dividida. Ao dividir uma unidade qualquer em duas partes iguais, ou ao meio, cada uma das partes é chamada de *um meio* ou *a metade* da unidade.

Por exemplo, se uma barra de chocolate é repartida igualmente entre dois amigos, a quantidade que caberá a cada um dos amigos é *um meio* da barra de chocolate (ou *metade* da barra). Nesse exemplo, a unidade é a barra de chocolate.



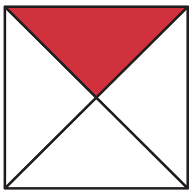
Ao dividir uma unidade em três partes iguais, cada uma das partes é chamada de *um terço* ou *a terça parte* da unidade.

Por exemplo, se, para preparar uma receita, é necessário acrescentar *um terço* de um litro de leite, então para colocar a quantidade correta de leite na receita, é preciso repartir o litro de leite em três partes iguais e usar apenas uma dessas partes. Nesse caso, cada uma das partes é *um terço* do litro de leite. A unidade é um litro de leite.



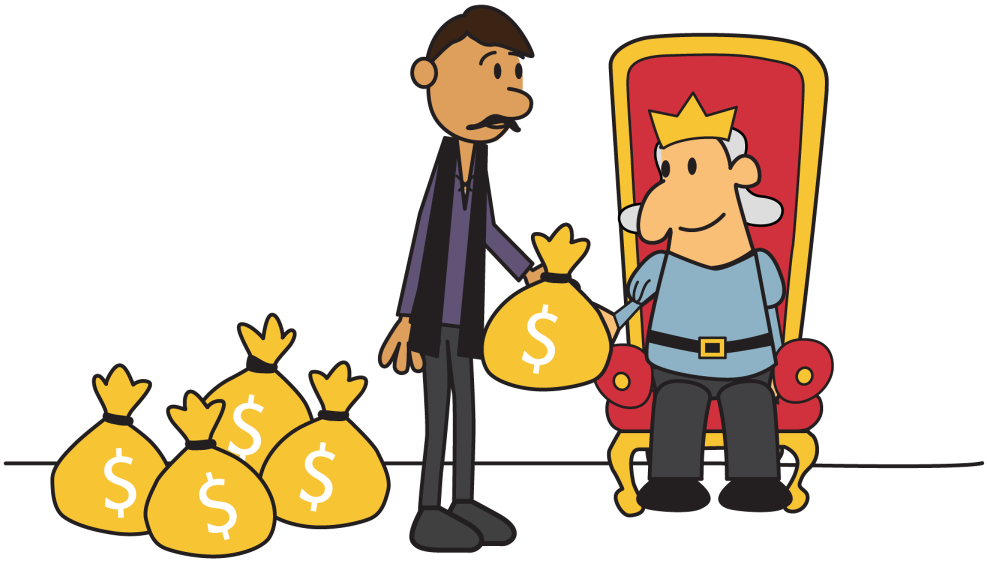
Ao dividir uma unidade em quatro partes iguais, cada uma das partes é chamada de *um quarto* ou *quarta parte* da unidade.

Por exemplo, a parte colorida da figura é um quarto da figura. Neste caso, a figura é a unidade.



Da mesma forma, ao dividir uma unidade em cinco partes iguais, cada uma das partes é chamada de *um quinto* ou *quinta parte* da unidade.

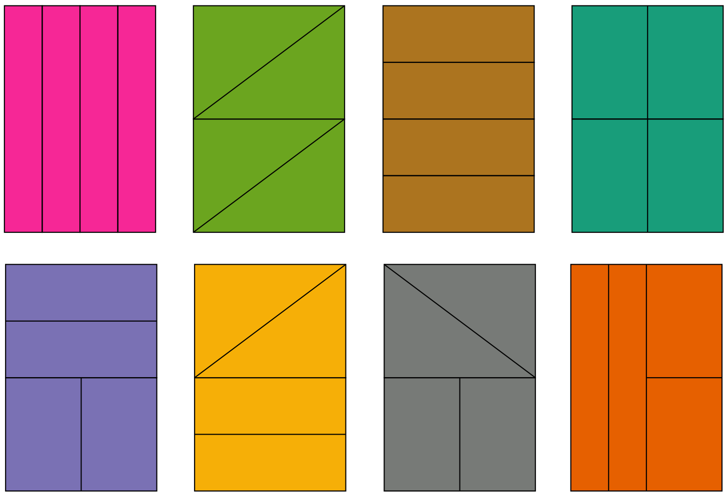
Por exemplo, na época do império *um quinto* de todo ouro pesado nas Casas de Fundição no Brasil era pago em impostos à Coroa Portuguesa. Desta forma, a quantidade de ouro pago em impostos à Coroa Portuguesa era igual a *um quinto* ou a *quinta parte* do ouro pesado nas Casas de Fundição no Brasil.



MÃO NA MASSA

Atividade 4

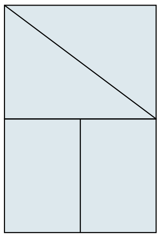
a) Quais dos oito retângulos a seguir foram partidos em *quartos*?



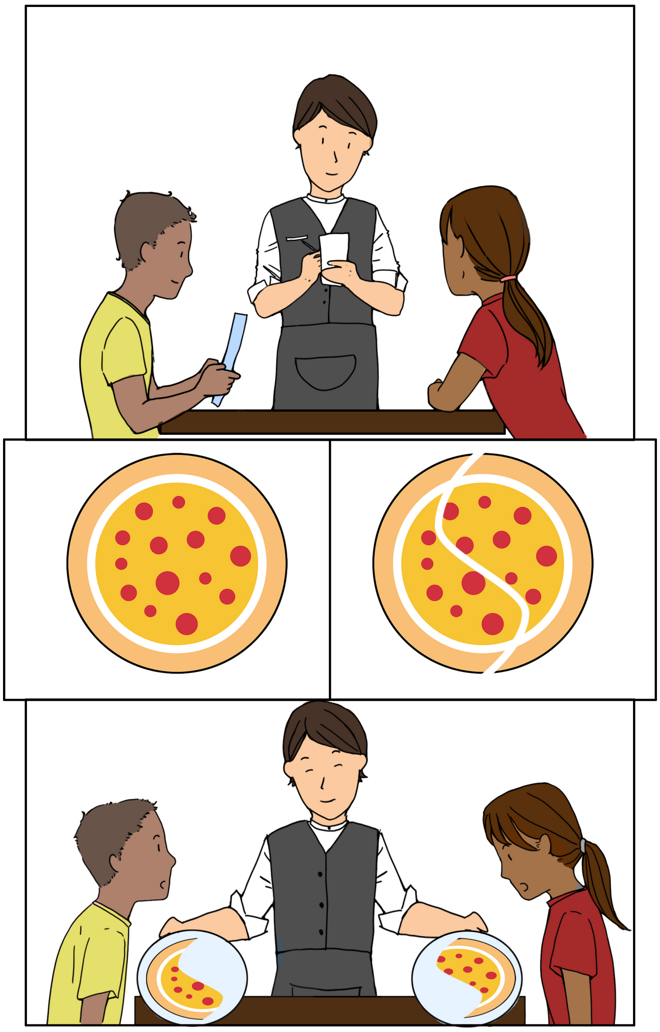
b) Desenhe um retângulo e faça uma partição desse retângulo em quatro partes que não sejam todas quartos.

REFLETINDO

Na atividade anterior, as partes em que os retângulos foram divididos são quartos dos retângulos, mesmo tendo formas diferentes.



Se uma unidade é repartida em partes com quantidades iguais, essas partes são frações dessa unidade mesmo que tenham formas diferentes. Observe, nos quadrinhos a seguir, como a pizza foi dividida entre os dois amigos:



Atividade 5

a) O triângulo cinza é um terço de uma das figuras coloridas. Qual é essa figura? Explique.

b) O triângulo cinza é um quarto de alguma dessas figuras? Qual ou quais?

c) Agora é a sua vez: desenhe uma unidade da qual o triângulo cinza seja um quinto.

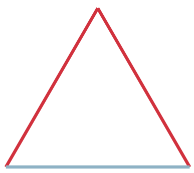
d) Que fração o triângulo cinza é da figura amarela?

e) Desafio: Que fração o triângulo cinza é do retângulo laranja?

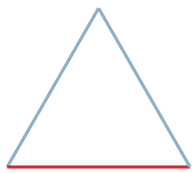
Atividade 6

Em cinco das figuras a seguir, a parte em vermelho é um terço da figura. Identifique essas figuras.

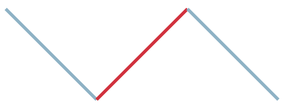
a)



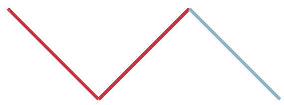
b)



c)



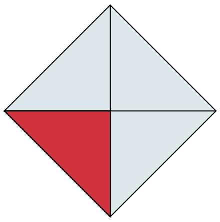
d)



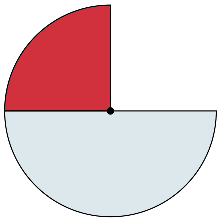
e)

f)

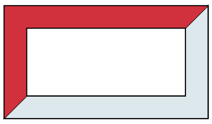
g)



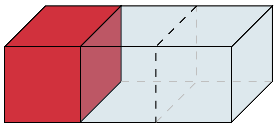
h)



i)

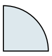


j)

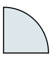
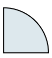


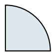
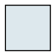
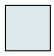
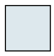
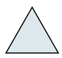
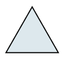
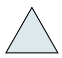
Atividade 7

a) Na tabela a seguir, a primeira coluna mostra uma figura que é uma fração de uma unidade. Na segunda, o nome que usamos para essa fração. Desenhe uma unidade na terceira coluna, unindo frações como essa.

Fração da unidade	Nome da fração da unidade	Unidade
	metade	

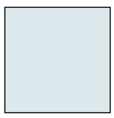
b) A seguir, complete cada linha da tabela como no item anterior.

Fração da unidade	Nome da fração da unidade	Unidade
	metade	
	um terço	

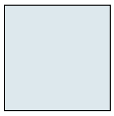
	um quarto	
	metade	
	um terço	
	um quarto	
	metade	
	um terço	
	um quarto	
	metade	
	um terço	
	um quarto	

Atividade 8

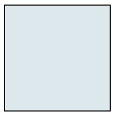
a) Pinte metade do quadrado a seguir.



b) Pinte um quarto do quadrado a seguir.



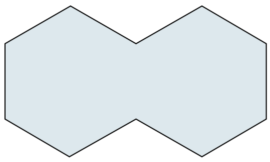
c) Pinte um oitavo do quadrado a seguir.



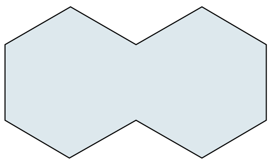
d) Qual é a maior das frações do quadrado: metade, quarto ou oitavo?

Atividade 9

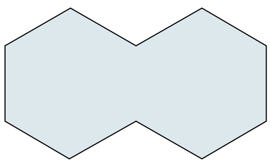
a) Pinte metade da figura.



b) Pinte metade da figura de forma diferente da do item anterior.



c) Pinte a metade da figura de forma diferente das dos dois itens anteriores.



Atividade 10

Identifique as figuras em que a parte pintada de vermelho é a metade da figura.


Figura 1


Figura 2

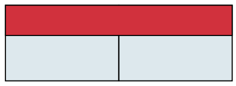


Figura 3

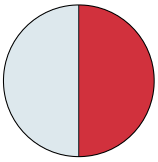


Figura 4

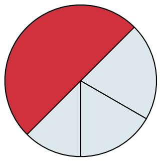


Figura 5

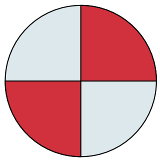


Figura 6

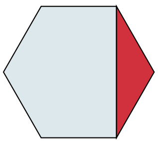


Figura 7

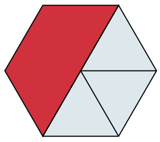


Figura 8

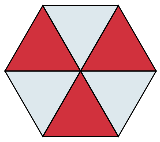


Figura 9

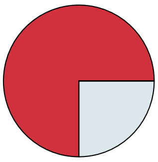


Figura 10

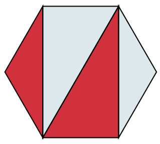
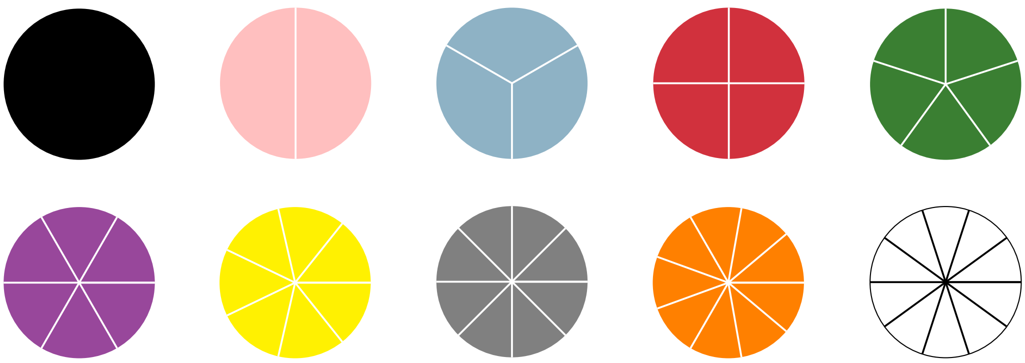


Figura 11


Figura 12

Atividade 11

Você receberá do seu professor círculos como os que seguem, todos de mesmo tamanho.



a) Qual é a cor de uma peça que é um terço do círculo preto?

b) Qual é a cor de uma peça que é um quarto do círculo preto?

c) Qual é a cor de uma peça que é um sétimo do círculo preto?

d) Qual é a cor de uma peça que é um nono do círculo preto?

e) Que fração do círculo preto é uma peça de cor roxa?

f) Que fração do círculo preto é uma peça de cor cinza?

g) Que fração do círculo preto é uma peça de cor branca?

h) Que fração do círculo preto é uma peça de cor rosa?

i) Qual fração do círculo preto é maior, um terço ou um sétimo?

j) Qual fração do círculo preto é menor, um nono ou um quarto?

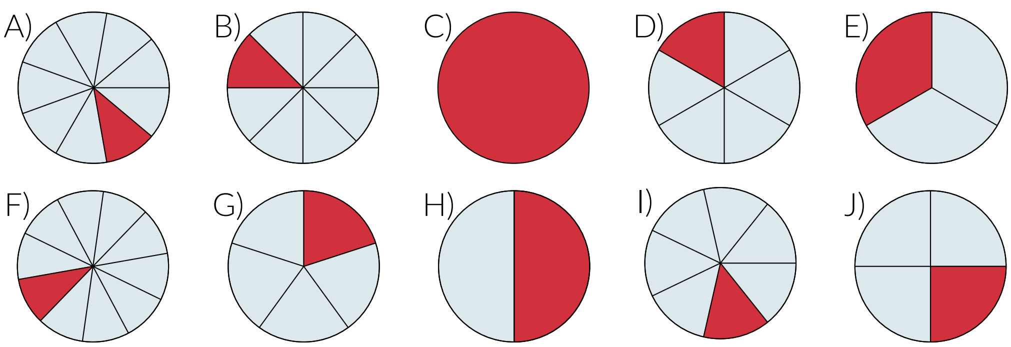
k) Qual fração do círculo preto é menor, um quinto ou um sétimo?

l) Qual fração do círculo preto é maior, um oitavo ou um quarto?

m) Qual fração do círculo preto é maior, um sexto ou um sétimo?

Atividade 12

Nas figuras a seguir, um mesmo círculo azul aparece diferentemente dividido em regiões iguais, sendo algumas delas coloridas em vermelho.



a) Complete as sentenças a seguir identificando os círculos que as tornam verdadeiras.

   I) A parte do círculo colorida em vermelho na figura ____ é um quinto do círculo.

   II) A parte do círculo colorida em vermelho na figura ____ é a sexta parte do círculo.

   III) A parte do círculo colorida em vermelho na figura ____ é um sétimo do círculo.

IV) A parte do círculo colorida em vermelho na figura ____ é um oitavo do círculo.

V) A parte do círculo colorida em vermelho na figura ____ é a nona parte do círculo.

VI) A parte do círculo colorida em vermelho na figura ____ é um décimo do círculo.

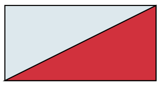
b) Dentre as frações do círculo destacadas em vermelho, identifique uma que seja menor do que um sexto do círculo.

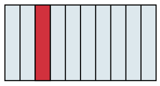
c) Dentre as frações do círculo destacadas em vermelho, identifique uma que seja maior do que um nono do círculo.

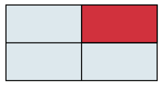
d) Identifique uma fração do círculo que seja menor do que um sexto e maior do que um nono do círculo.

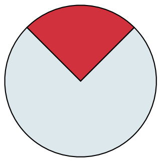
Atividade 13

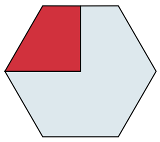
Em cada uma das imagens, a parte em vermelho é uma fração da figura. Essas frações podem ser “um meio”, “um quarto” ou “um décimo” da figura. Associe cada imagem à fração correspondente.

a)


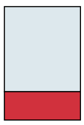
b)


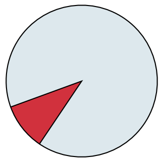
c)


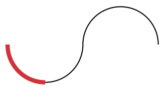
d)


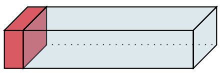
e)


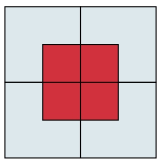
f)

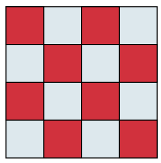

g)


h)


i)


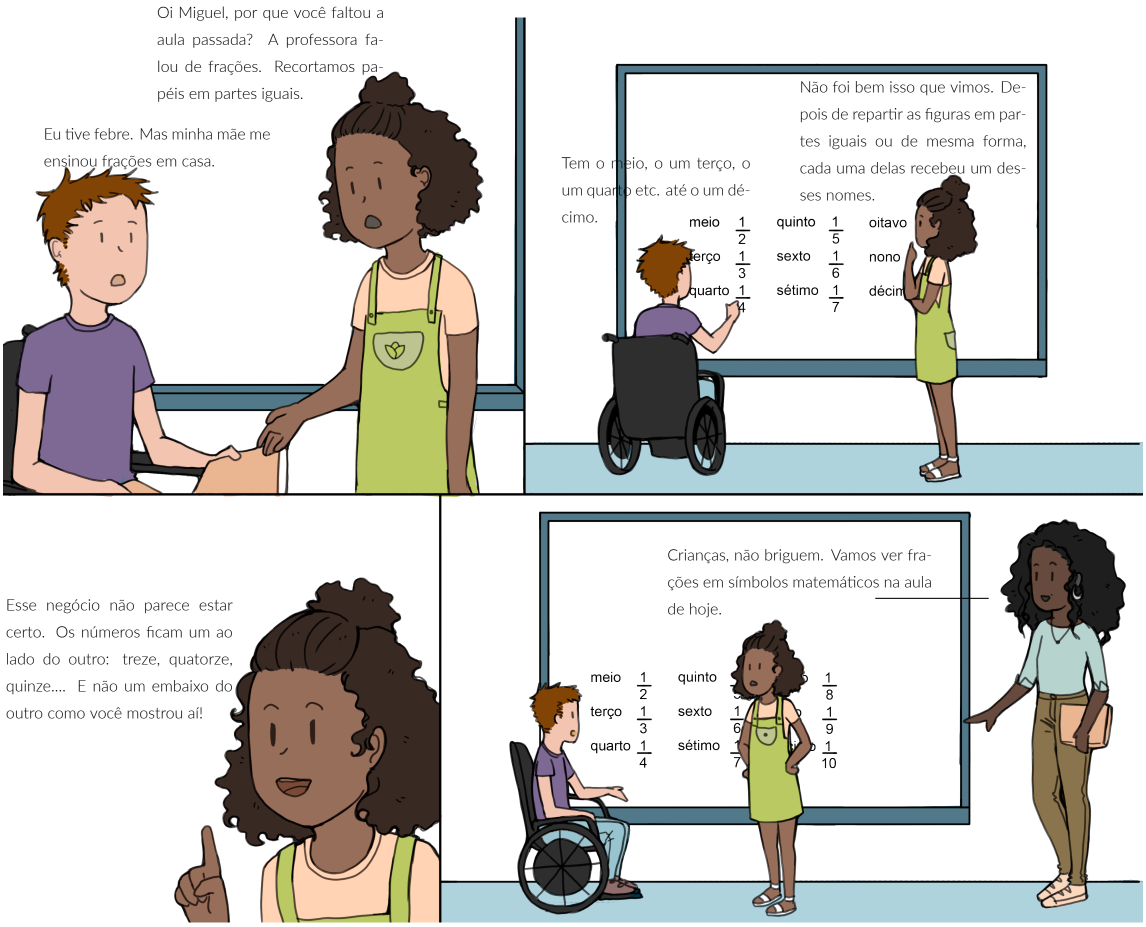
j)


k)


l)


Lição 2

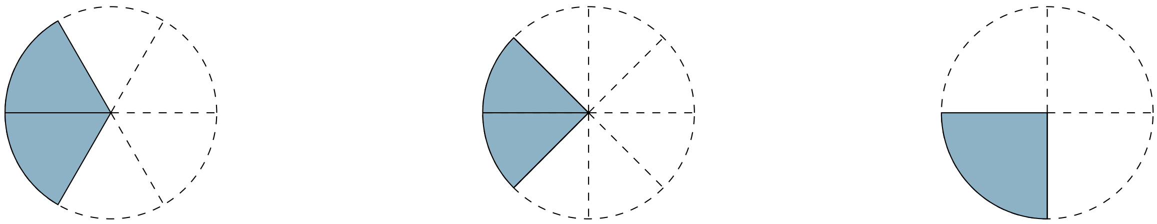
Juntando frações da unidade



EXPLORANDO O ASSUNTO

Atividade 1

Luiza, João e Mariele foram a uma pizzaria. Cada um pediu uma pizza do seu sabor preferido. Luiza cortou sua pizza em 4 fatias; João cortou sua pizza em 6 fatias e Mariele cortou sua pizza em 8 fatias. O esquema a seguir indica o quanto restou de pizza após os amigos estarem satisfeitos:



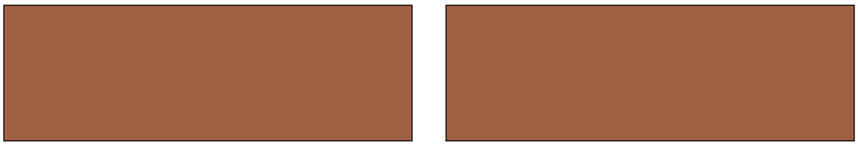
a) Identifique a pizza de cada um dos amigos.

b) Em cada caso, que fração da pizza representa uma fatia?

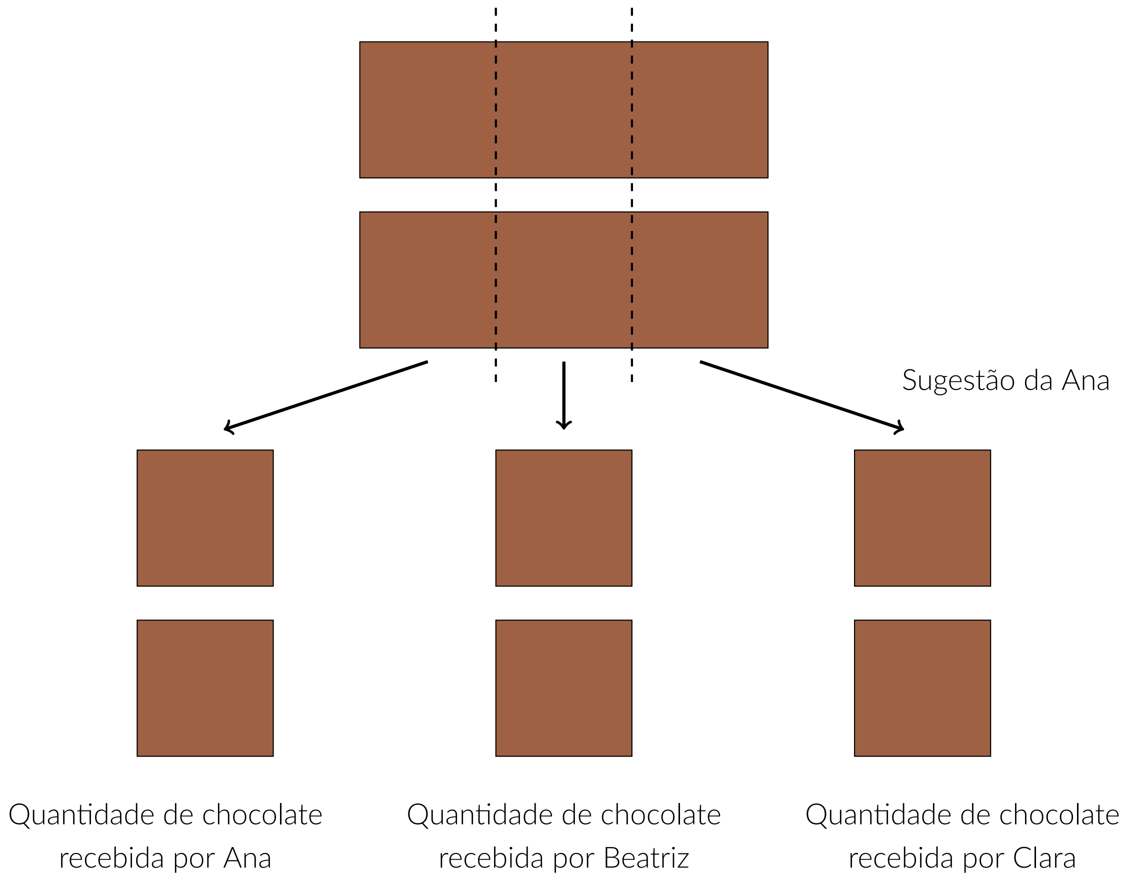
c) Escreva a quantidade de pizza que cada amigo comeu utilizando fração?

Atividade 2

O pai de Ana, Beatriz e Clara trouxe duas barras de chocolate para serem repartidas entre elas.



Ana propôs que cada barra fosse dividida em três partes iguais e que cada irmã ficasse com duas dessas partes.



a) Na divisão de cada uma das barras de chocolate em três partes iguais, cada parte é que fração de uma barra de chocolate?

b) Você concorda com a divisão que Ana sugeriu? Explique.

c) Com essa divisão, as três irmãs receberam a mesma quantidade de chocolate?

d) Na divisão proposta por Ana, como você nomearia, usando fração de uma barra de chocolate, a quantidade de chocolate que cada irmã recebeu?

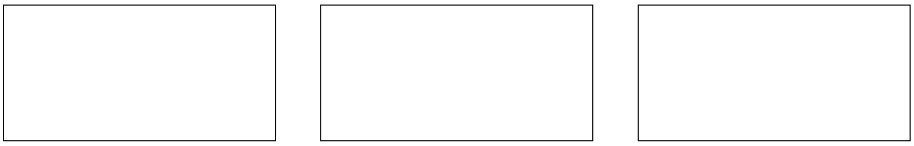
Ana não quer o chocolate e decidiu dar a quantidade de chocolate que recebeu na divisão das barras para as suas irmãs.

e) Se Ana desse metade da quantidade de chocolate que recebeu para cada uma de suas irmãs, que quantidade de chocolate Beatriz e Clara passariam a ter? Como você nomearia, usando frações, essas quantidades?

f) E se Ana desse toda a quantidade de chocolate que recebeu para Beatriz, que quantidade de chocolate Beatriz passaria a ter? Como você nomearia, usando frações, essa quantidade?

Atividade 3

Um grupo de cinco amigos (Amarildo, Beto, Carlos, Davi e Edilson) encomendou três tortas salgadas, de mesmo tamanho retangular, como na ilustração para uma comemoração.



a) Como dividir as três tortas de modo que cada amigo receba a mesma quantidade de torta? Faça um desenho no seu caderno mostrando sua proposta de divisão. Indique qual parte é de qual amigo!

b) Considerando-se uma torta como unidade, como você nomearia, usando frações, a quantidade de torta que:

I) Amarildo recebeu?

II) Amarildo e Beto receberam juntos?

III) Amarildo, Beto e Carlos receberam juntos?

IV) Amarildo, Beto, Carlos e Davi receberam juntos?

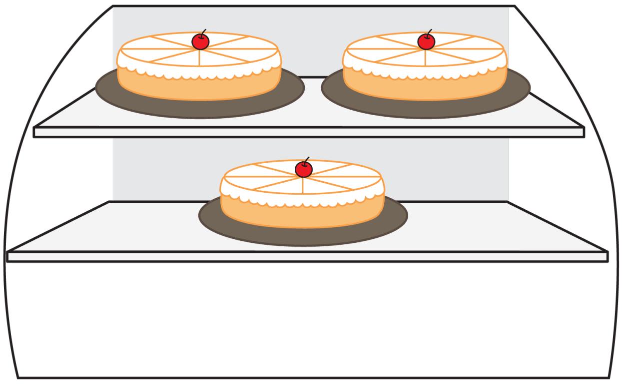
V) Amarildo, Beto, Carlos, Davi e Edilson receberam juntos?

c) A quantidade de torta que cada amigo recebeu é menor do que um quinto de torta? E do que dois quintos de torta? Explique sua resposta.

d) A quantidade de torta que cada amigo recebeu é maior do que três quintos de torta? E do que quatro quintos de torta? Explique sua resposta.

Atividade 4

Para a sobremesa do almoço de domingo, papai passou em uma confeitaria que vende tortas. Cada torta está dividida em igualmente em 8 fatias, como na figura abaixo.



a) Que fração de uma torta é uma fatia? Explique.

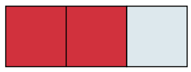
b) Domingo papai comprou 4 fatias, quantos oitavos de uma torta havia para a sobremesa?

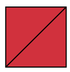
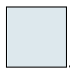
c) Na pergunta anterior, apresente outra fração que represente a quantidade de torta que papai comprou. Explique sua resposta.

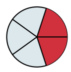
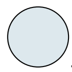
d) Hoje papai comprou 10 fatias de torta. Como podemos representar essa quantidade de torta em termos de frações de uma torta?

Atividade 5

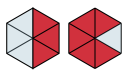
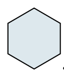
Complete as afirmações com uma das frações: "dois meios", "dois terços", "dois quintos", "dois nonos", "três quartos", "seis oitavos", "oito sextos" e "nove meios", para que sejam verdadeiras.

a) A parte pintada de vermelho em  é __________ de .

b) A parte pintada de vermelho em  é __________ de .

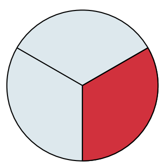
c) A parte pintada de vermelho em  é __________ de .

d) A parte pintada de vermelho em  é __________ de .

e) A parte pintada de vermelho em  é __________ de .

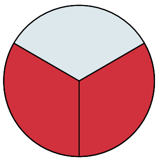
ORGANIZANDO AS IDEIAS

Se uma torta está dividida em três partes iguais, a torta fica separada em três terços. Assim, como visto na historinha do início da lição, tanto faz escrever "um terço da torta" ou, usando símbolos matemáticos, "$\frac{1}{3}$ da torta" para se referir à fatia destacada na figura.

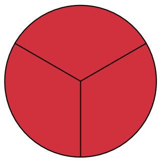


$\frac{1}{3}$ da torta
(lê-se: "um terço da torta")

Duas fatias são "dois terços da torta", o que pode ser expresso usando símbolos matemáticos por "$\frac{2}{3}$ da torta". Deste modo, "três terços da torta" é uma torta inteira.

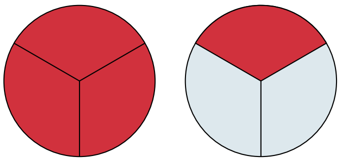


$\frac{2}{3}$ da torta
(lê-se: "dois terços da torta")

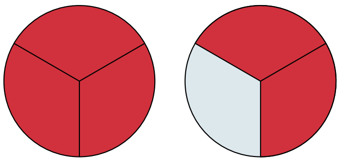


$\frac{3}{3}$ da torta = 1 torta
(lê-se: "três terços da torta" ou "uma torta")

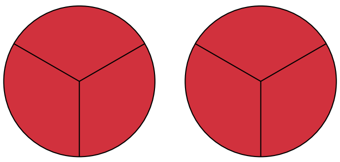
Também pode-se considerar quatro terços, cinco terços ou seis terços da torta, basta juntar novos terços à torta inteira.



$\frac{4}{3}$ da torta = 1 torta e $\frac{1}{3}$ da torta
(lê-se: "quatro terços da torta" ou "uma torta e um terço de torta")



$\frac{5}{3}$ da torta = 1 torta e $\frac{2}{3}$ da torta
(lê-se: "cinco terços da torta" ou "uma torta e dois terços da torta")



$\frac{6}{3}$ da torta = 2 tortas
(lê-se: "seis terços da torta" ou "duas tortas")

Nos exemplos anteriores, todas as frações são lidas com "terços" pois as tortas foram repartidas em três partes iguais. **Usando símbolos matemáticos, as frações são escritas com dois números e um traço.** Por exemplo, em "$\frac{2}{3}$ da torta", o "3" nomeia a fração "terço" e, por isso, é chamado *denominador da fração* $\frac{2}{3}$. O número "2" indica a quantidade de terços que estão sendo considerados e é chamado *numerador da fração* $\frac{2}{3}$. Isso acontece em todas as frações:

Denominador da fração

Diz como a unidade é repartida em partes iguais e nomeia essas partes: meio, terço, quarto, ... , décimo etc.

$$\frac{n}{d}$$

Numerador da fração

Diz o número de meios, terços, quartos etc. que estão sendo considerados.

- Em $\frac{2}{5}$, por exemplo, o numerador é 2 e o denominador é 5. Lê-se *dois quintos*.
- Em $\frac{10}{8}$, por exemplo, o numerador é 10 e o denominador é 8. Lê-se *dez oitavos*.

Para ler a fração deve-se ler o **número** do numerador seguido do **nome que identifica as partes em que foi repartida a unidade, que é indicado pelo denominador**, nessa ordem. Veja:

$$\frac{1}{3} \rightarrow \text{um terço;} \quad \frac{2}{3} \rightarrow \text{dois terços;} \quad \frac{5}{3} \rightarrow \text{cinco terços;}$$

$$\frac{1}{8} \rightarrow \text{um oitavo;} \quad \frac{3}{8} \rightarrow \text{três oitavos;} \quad \frac{7}{8} \rightarrow \text{sete oitavos.}$$

Anote agora os nomes de algumas outras frações:

$$\frac{1}{2} \rightarrow \text{um meio;} \quad \frac{1}{3} \rightarrow \text{um terço;} \quad \frac{1}{4} \rightarrow \text{um quarto;}$$

$$\frac{1}{5} \rightarrow \text{um quinto;} \quad \frac{1}{6} \rightarrow \text{um sexto;} \quad \frac{1}{7} \rightarrow \text{um sétimo;}$$

$$\frac{1}{8} \rightarrow \text{um oitavo;} \quad \frac{1}{9} \rightarrow \text{um nono;} \quad \frac{1}{10} \rightarrow \text{um décimo.}$$

Já a fração $\frac{1}{11}$ não é chamada “um décimo primeiro”. Na leitura de frações com denominadores maiores do que 10, utiliza-se a palavra avos. Assim, a fração $\frac{1}{11}$ é lida “um onze avos”. Veja outros exemplos:

$$\frac{1}{12} \rightarrow \text{ um doze avos;} \quad \frac{1}{13} \rightarrow \text{ um treze avos;} \quad \frac{5}{13} \rightarrow \text{ cinco treze avos.}$$

Na leitura das frações cujos denominadores são 100, 1000, 1000, etc. não se usa “avos”. Observe:

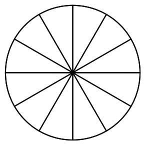
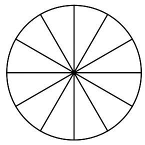
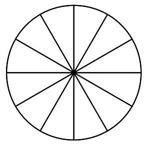
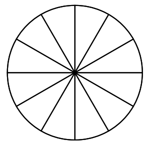
$$\frac{1}{100} \rightarrow \text{ um centésimo;} \quad \frac{13}{100} \rightarrow \text{treze centésimos;} \quad \frac{33}{1000} \rightarrow \text{ trinta e três milésimos.}$$

Pronto! Agora você já é capaz de ler diversos tipos de frações.

MÃO NA MASSA

Atividade 6

Uma pizza gigante foi dividida em doze fatias iguais. Pedro comeu quatro fatias, Isabella cinco fatias, Bernardo duas fatias e Manuela apenas uma fatia.

	Pedro	Isabella	Bernardo	Manuela
Pinte a fração de pizza consumida por cada pessoa				
Escreva, por extenso, a fração de pizza consumida por cada pessoa				
Escreva, usando símbolos matemáticos, a fração de pizza consumida por cada pessoa				

a) Na sua opinião, qual maneira de representar fração “gasta menos lápis”: pintando, escrevendo por extenso ou usando símbolos matemáticos?

b) Na sua opinião, qual a representação que mais rapidamente ajuda a decidir quem comeu mais e quem comeu menos pizza?

Atividade 7

Um grupo de amigos está dividindo duas pizzas circulares iguais, isto é, de mesmo tamanho. A primeira pizza foi cortada em 4 fatias de mesmo tamanho. A segunda pizza foi repartida em 8 pedaços iguais.

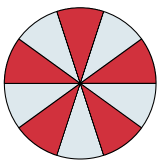
a) Uma fatia da primeira pizza é que fração dessa pizza? Responda usando símbolos matemáticos.

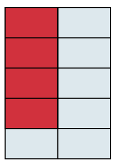
b) Uma fatia da segunda pizza é que fração dessa pizza? Responda usando símbolos matemáticos.

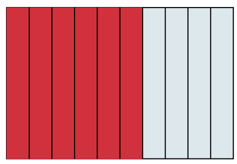
c) Qual fatia tem mais quantidade de pizza: uma fatia da primeira ou uma fatia da segunda? Explique usando uma figura.

Atividade 8

Para cada figura a seguir, indique a fração da figura que está pintada de vermelho. Esta fração é maior, menor ou exatamente igual a $\frac{1}{2}$ da figura?

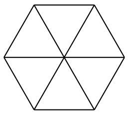
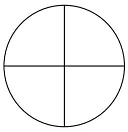
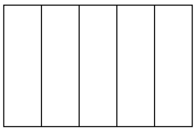
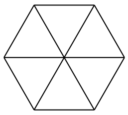
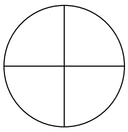
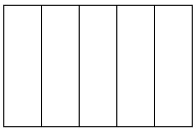
a) 

b) 

c) 

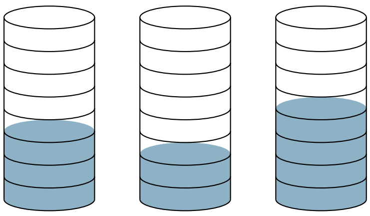
Atividade 9

Na tabela a seguir, pinte cada figura de modo que a parte pintada seja a fração da figura indicada na coluna à esquerda e na mesma linha. Indique também, usando símbolos matemáticos, qual fração da figura ficou sem ser pintada.

Fração da figura que deve ser pintada	Figura	Fração da figura que ficou sem ser pintada
$\frac{5}{6}$		
$\frac{3}{4}$		
$\frac{2}{5}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{3}{8}$		
$\frac{9}{10}$		

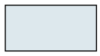
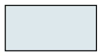
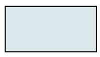
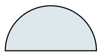
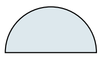
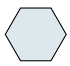
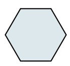
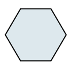
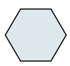
Atividade 10

A figura mostra três copos idênticos. É possível armazenar a água dos três copos em um único copo sem que transborde? Explique usando frações.



(1) (2) (3)

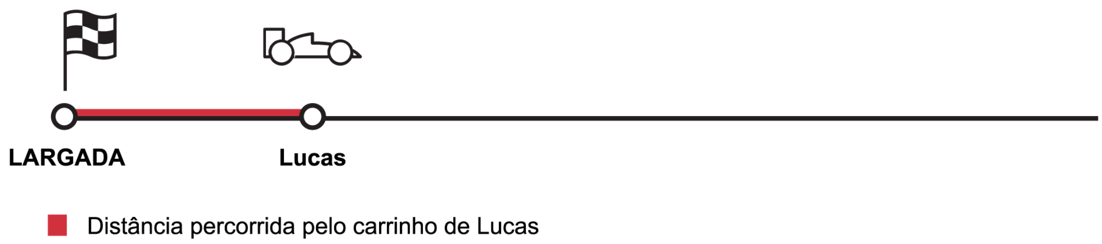
Atividade 11

Fração da unidade	Figura correspondente à fração da unidade	Desenhe aqui a unidade
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		

Atividade 12

Lucas, Matheus, Heitor, Rafael, Enzo, Nicolas, Lorenzo, Guilherme e Samuel estavam brincando de empurrar seus carrinhos de brinquedo para ver qual carrinho ia mais longe em uma pista reta.

A figura a seguir mostra o quão longe foi o carrinho de Lucas e onde ele parou na pista com relação ao ponto de largada.



Sabe-se que:

a) O carrinho de Matheus só conseguiu ir até a metade da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

b) O carrinho de Heitor conseguiu ir até $\frac{3}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

c) O carrinho de Rafael conseguiu ir até $\frac{4}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

d) O carrinho de Enzo conseguiu ir até $\frac{5}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

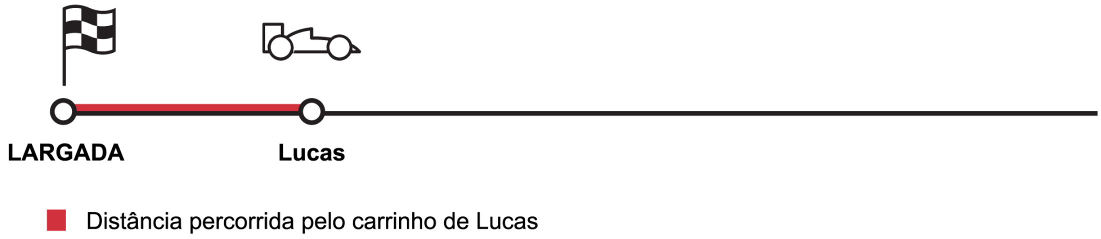
e) O carrinho de Nicolas conseguiu ir até $\frac{6}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

f) O carrinho de Lorenzo conseguiu ir até $\frac{6}{4}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

g) O carrinho de Guilherme conseguiu ir até o dobro da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

h) O carrinho de Samuel conseguiu ir até $\frac{6}{3}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

Com essas informações, marque as posições de parada dos carrinhos de todos os amigos de Lucas no encarte que você irá receber.



Os carrinhos de Rafael e Samuel pararam no mesmo lugar? Explique.

Atividade 13

Anita, Gustavo e Henrique descobriram que todos tinham levado bolo para o lanche.
Anita falou: “Mamãe colocou metade do bolo no meu lanche.”
Gustavo falou: “Eu trouxe um terço do bolo que minha tia fez.”
Henrique falou: “Eu trouxe apenas um quinto do bolo que minha mãe preparou!”
Para surpresa de todos, ao retirarem seus lanches da mochila, descobriram que todos traziam-no em embalagens iguais, portanto traziam a mesma quantidade de bolo.
Como você explica tal situação?

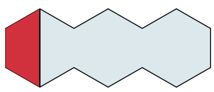
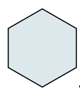
QUEBRANDO A CUCA

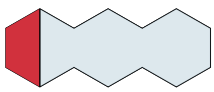
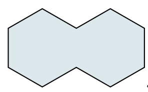
Atividade 14

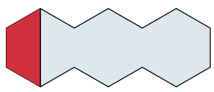
(NAEP, 1992) Pense cuidadosamente nesta questão. Escreva uma resposta completa. Você pode usar desenhos, palavras e números para explicar sua resposta. Certifique-se de mostrar todo o seu raciocínio.
José comeu $\frac{1}{2}$ de uma pizza. Ella comeu $\frac{1}{2}$ de uma outra pizza. José disse que ele comeu mais pizza do que Ella, mas Ella diz que eles comeram a mesma quantidade. Use palavras, figuras ou números para mostrar que José pode estar certo.

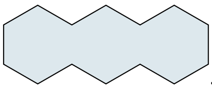
Atividade 15

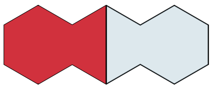
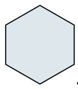
Complete as sentenças a seguir com uma fração adequada (usando símbolos matemáticos). Perceba que uma mesma região pintada pode ser descrita por frações diferentes, dependendo da unidade considerada.

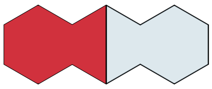
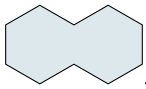
a) A região pintada em vermelho em  é ________ de .

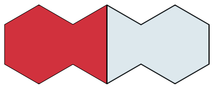
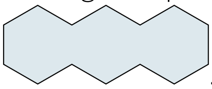
b) A região pintada em vermelho em  é ________ de .

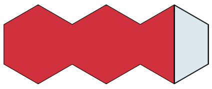
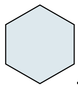
c) A região pintada em vermelho em  é ________ de

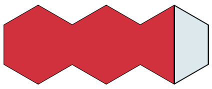
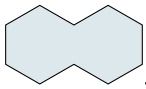
.

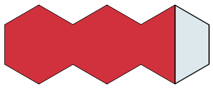
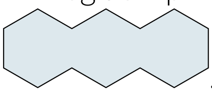
d) A região pintada em vermelho em  é __________ de .

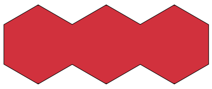
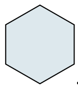
e) A região pintada em vermelho em  é __________ de .

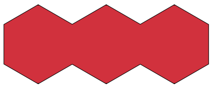
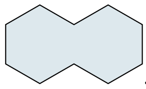
f) A região pintada em vermelho em  é __________ de .

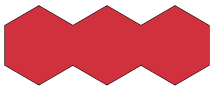
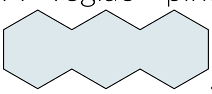
g) A região pintada em vermelho em  é __________ de .

h) A região pintada em vermelho em  é __________ de .

i) A região pintada em vermelho em  é __________ de .

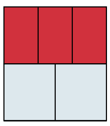
j) A região pintada em vermelho em  é __________ de .

k) A região pintada em vermelho em  é __________ de .

l) A região pintada em vermelho em  é __________ de .

Atividade 16

Miguel disse para Alice que a parte pintada de vermelho na figura a seguir corresponde a $\frac{3}{5}$ da figura, pois ela está dividida em 5 partes e 3 partes estão pintadas. Você concorda com a afirmação e com a justificativa de Miguel? Explique!

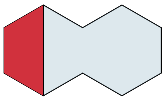


Atividade 17

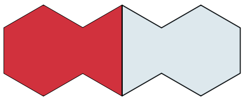
A figura a seguir tem 3 partes pintadas de vermelho e 4 partes pintadas de azul. É correto afirmar que a parte pintada de vermelho corresponde a $\frac{3}{4}$ da figura? Explique.

Atividade 18

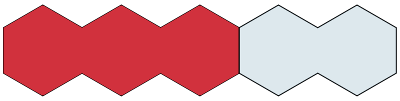
a) A região em vermelho na figura a seguir representa $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$?



b) A região em vermelho na figura a seguir representa $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$?

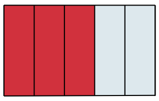


c) A região em vermelho na figura a seguir representa $\frac{3}{5}$ ou 3?



Atividade 19

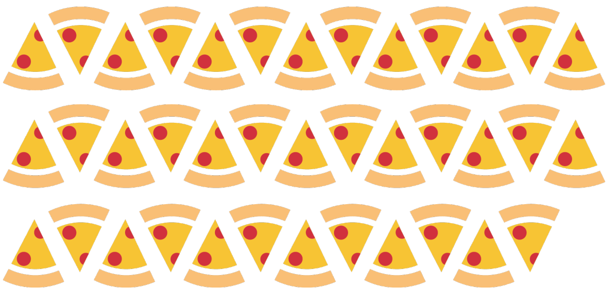
Júlia, Davi e Laura estavam estudando a figura a seguir.



Júlia disse: “A parte em vermelho representa $\frac{3}{5}$.”. Davi retrucou: “Não, não! A parte em vermelho representa $\frac{3}{2}$!”. Laura, então acrescentou: “Eu acho que a parte em vermelho representa 3!”. Quem está certo? Júlia, Davi ou Laura? Explique!

Atividade 20

Em uma pizzaria rodízio, 7 amigos comem, ao todo, 38 fatias.



Sabendo que nessa pizzaria cada pizza é repartida em 8 fatias de mesmo tamanho, pergunta-se:

a) Quantas pizzas inteiras comeram os 7 amigos?

b) Que fração de uma pizza comeram ao todo os amigos?

c) É possível que todos os amigos tenham comido o mesmo número de fatias de pizza? Explique.

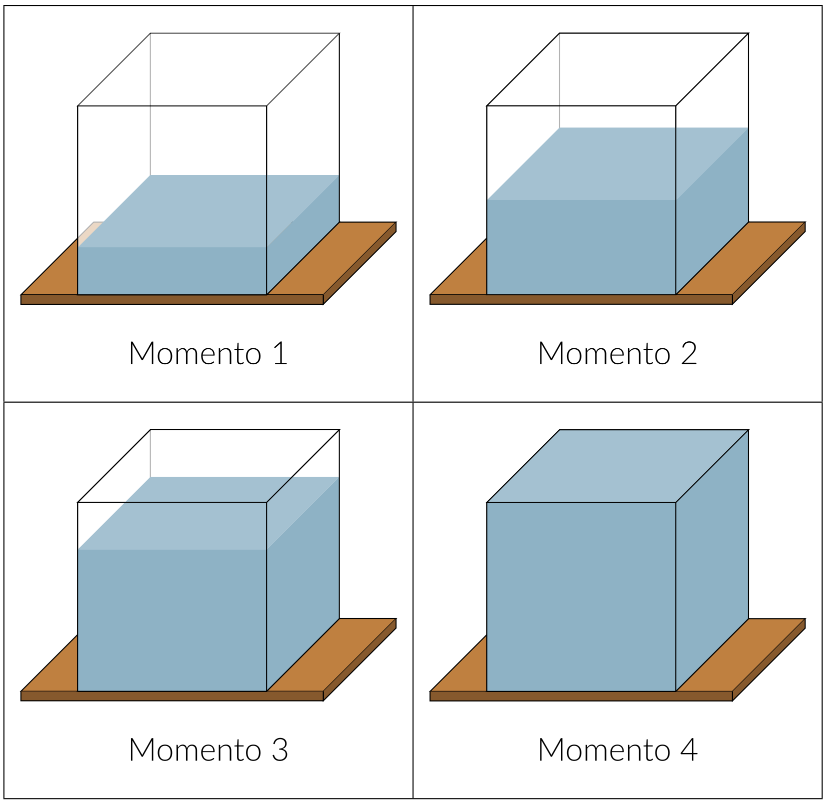
Lição 3

Frações na reta numérica

EXPLORANDO O ASSUNTO

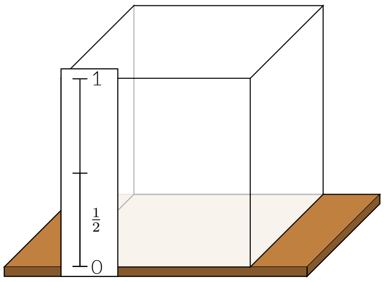
Atividade 1

Os quadrinhos a seguir mostram uma caixa-d'água sendo enchida. Para saber que fração da capacidade da caixa-d'água já está com água, será usada uma faixa graduada para indicar o nível de água na caixa.

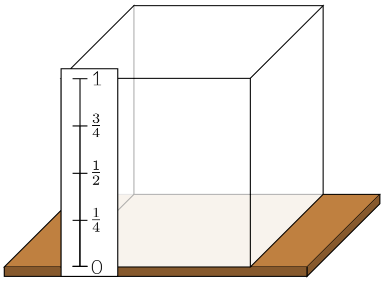


Escolha, para cada um dos momentos, a graduação que lhe parece mais adequada para registrar a quantidade de água representada em cada uma das imagens. Explique sua escolha.

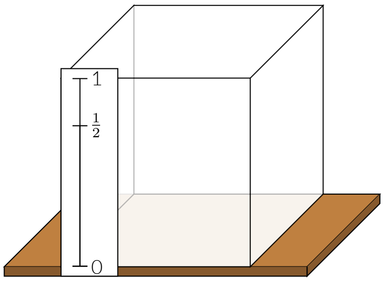
a)



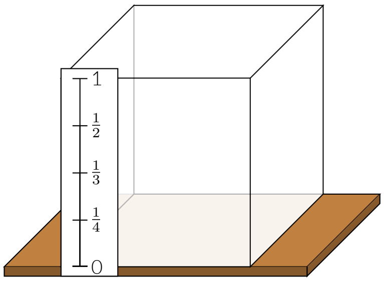
b)



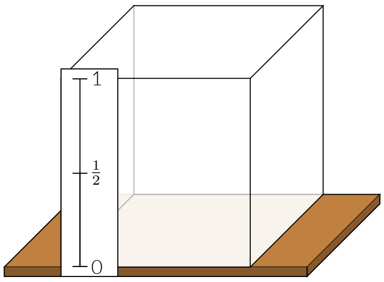
c)



d)

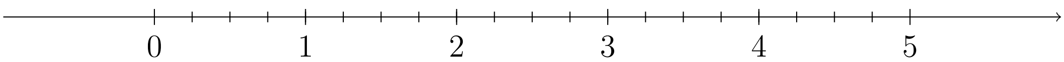


e)



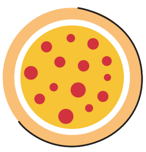
Atividade 2

Use a reta numérica para fazer o que é pedido nos itens a seguir.

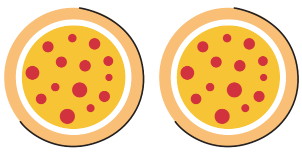


a) Marque os pontos que representam as quantidades de pizza nos casos (A), (B) e (C) a seguir.

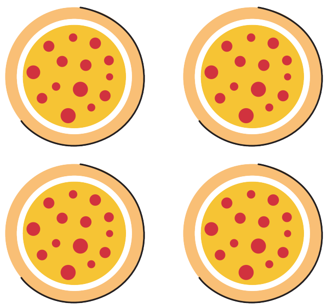
(A)



(B)

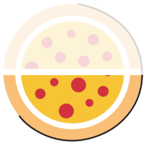


(C)

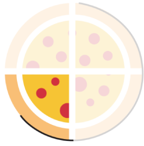


b) E agora, que pontos na reta numérica representam as quantidades de pizza dos casos (D), (E), (F) e (G)?

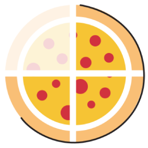
(D)



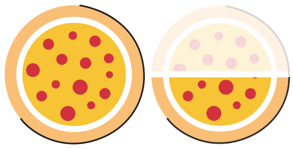
(E)



(F)



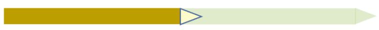
(G)

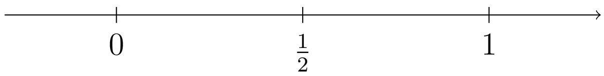


Atividade 3

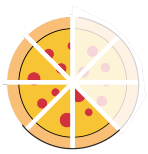
Para cada uma das figuras a seguir, marque na reta numérica o ponto correspondente à fração da unidade destacada na imagem:

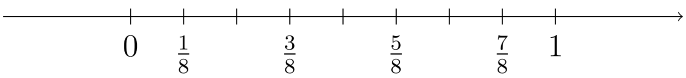
a) A unidade é o lápis maior.



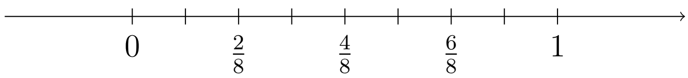


b) A unidade é uma pizza.

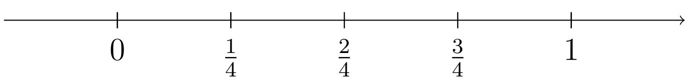




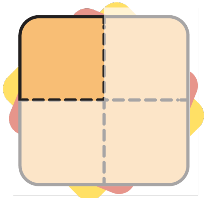
c) A unidade é uma barra de chocolate.

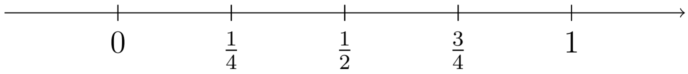


d) A unidade é uma maçã.

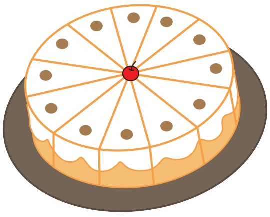


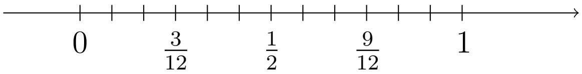
e) A unidade é um sanduíche de queijo com presunto.



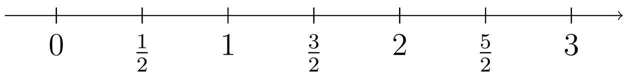


f) A unidade é uma torta.

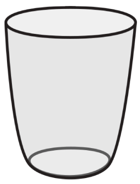


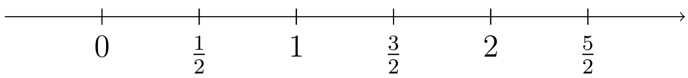


g) A unidade é um biscoito.



h) A unidade é um copo cheio.





Atividade 4

Que fração da figura está pintada de vermelho? Ligue cada figura ao número correspondente destacado na reta numérica.

a) Figura A

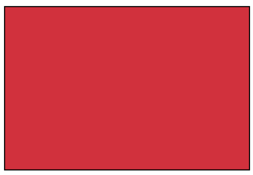
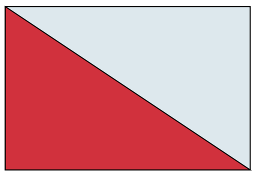
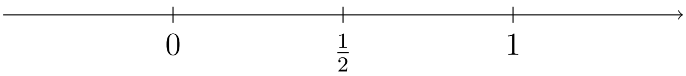


Figura B





b) Figura A

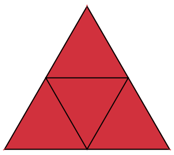
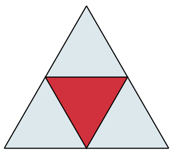
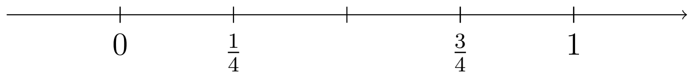


Figura B





c) Figura A

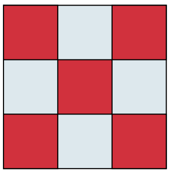
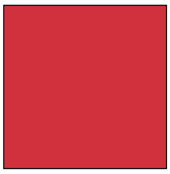
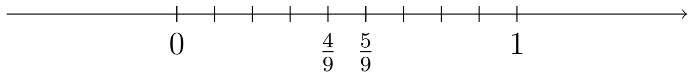


Figura B





d) Figura A

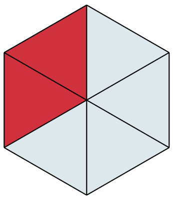
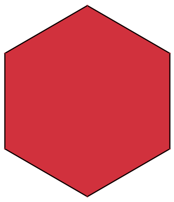
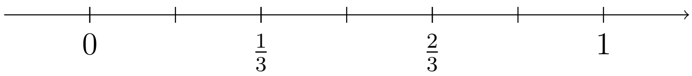


Figura B





e) Figura A

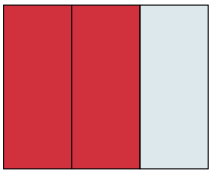


Figura B

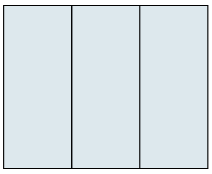
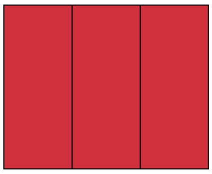
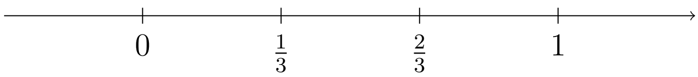


Figura C





f) Figura A

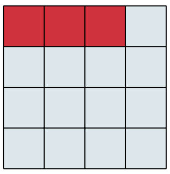


Figura B

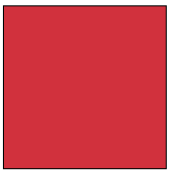
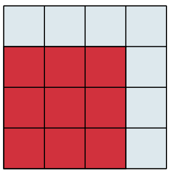
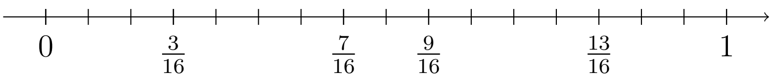


Figura C

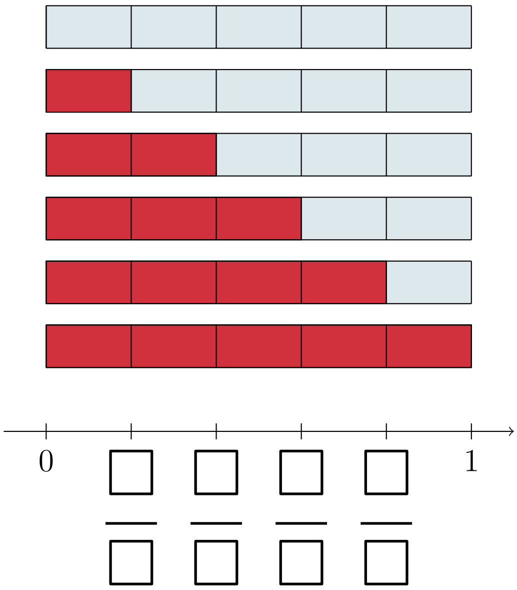




Atividade 5

A faixa a seguir está dividida em 5 partes iguais.

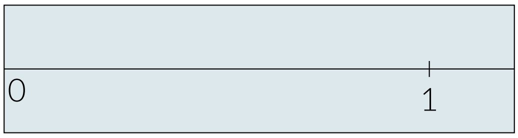
a) Considerando a faixa como unidade, complete a reta numérica escrevendo frações correspondentes às regiões coloridas em vermelho.



b) E as faixas sem pintura vermelha e toda pintada de vermelho? Escreva as frações correspondentes a elas.

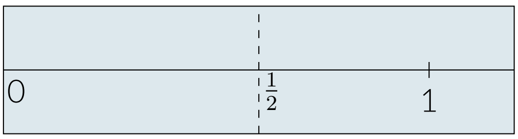
Atividade 6

A professora Julia pediu que os seus alunos, Pedro e Miguel, marcassem $\frac{1}{2}$ na reta numérica traçada em uma fita, como esta que vocês também receberam:

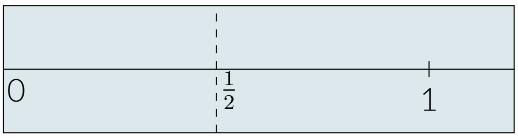


Veja as marcações de Pedro e Miguel.

Marcação de Pedro →



Marcação de Miguel →



a) É possível ambos estarem corretos? Justifique sua resposta.

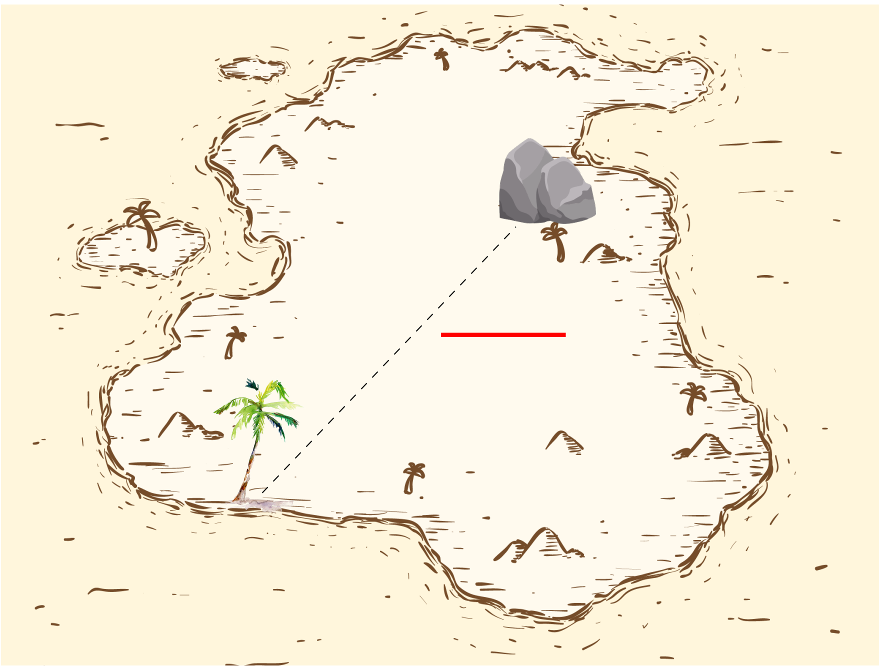
b) Faça marcações correspondentes a $\frac{1}{4}$ e a $\frac{3}{4}$ na reta numérica desenhada na fita que você recebeu. Explique como você fez essas marcações.

c) Onde deve ser feita a marcação correspondente a $\frac{4}{4}$?

d) E a marcação correspondente a $\frac{5}{4}$?

Atividade 7

Um caçador de tesouros encontrou o mapa e o papiro a seguir. Leia as instruções para a localização do tesouro e decida em que local ele deve cavar.



Há dois baús escondidos, um deles carregado com um tesouro. Para localizá-los, você deve seguir o mapa e estas instruções.

1. Use a faixa vermelha como unidade para descobrir a localização dos baús.
2. Os baús estão enterrados no caminho em destaque, alinhados com a palmeira imperial e com a pedra.
3. No mapa, os pontos que marcam os locais em que os baús estão enterrados ficam a $\frac{5}{6}$ e a $\frac{5}{8}$ da unidade, a partir da palmeira. A chave do baú com o tesouro está enterrada a $\frac{13}{8}$ da unidade a partir da palmeira.
4. O baú com o tesouro está mais distante da palmeira.

a) Marque, no mapa, as localizações dos baús e da chave.

b) Qual o baú com o tesouro? Explique como chegou à sua conclusão.

Atividade 8

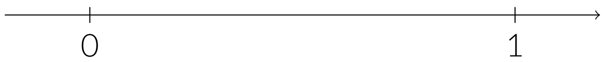
Três amigos foram a uma pizzaria e cada um pediu uma pizza média, de três sabores diferentes: João comeu $\frac{3}{4}$ da pizza de calabresa, Maria comeu $\frac{2}{4}$ da pizza de presunto e Miguel comeu $\frac{2}{5}$ da pizza de milho. Sabendo-se que todas as pizzas eram do mesmo tamanho, pergunta-se:

a) Quem comeu mais pizza, João ou Maria? Explique.

b) E no caso de Maria e Miguel, quem comeu mais pizza? Explique.

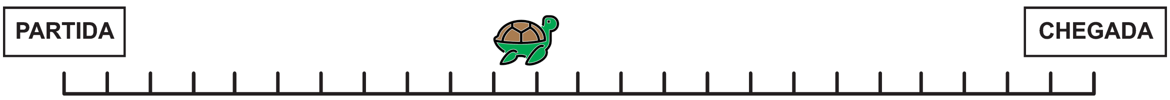
c) Dos três amigos, quem comeu mais pizza? Explique.

d) Marque na reta numérica a seguir as frações correspondentes às porções de pizza que cada amigo comeu, e confira a sua resposta do item c).



Atividade 9

A imagem a seguir ilustra uma tartaruga percorrendo um caminho em linha reta, do ponto de partida ao de chegada. Observe a posição da tartaruga na imagem e avalie se as afirmações a seguir estão corretas ou não. Em cada item, explique a sua avaliação por escrito.



a) A tartaruga percorreu mais do que a metade do percurso total.

b) A tartaruga percorreu mais do que $\frac{3}{4}$ do percurso total.

c) A tartaruga percorreu mais do que $\frac{3}{8}$ do percurso total.

d) A tartaruga percorreu menos do que $\frac{3}{4}$ do percurso total.

e) A tartaruga percorreu menos do que $\frac{2}{8}$ do percurso total.

f) A tartaruga percorreu menos do que $\frac{2}{3}$ do percurso total.

g) A tartaruga percorreu $\frac{3}{4}$ do percurso total.

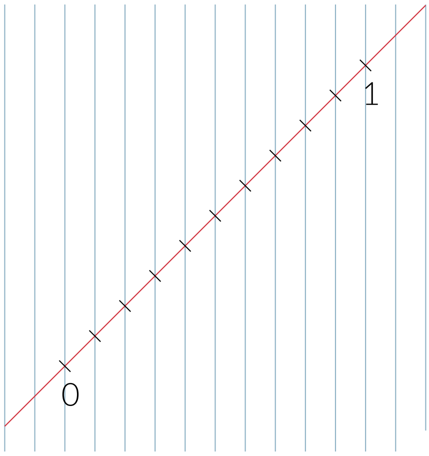
h) A tartaruga percorreu pelo menos $\frac{5}{8}$ do percurso total.

i) Para alcançar a chegada, a tartaruga precisa percorrer mais do que a metade do percurso total.

j) Para alcançar a chegada, a tartaruga precisa percorrer menos do que $\frac{2}{3}$ do percurso total.

Atividade 10

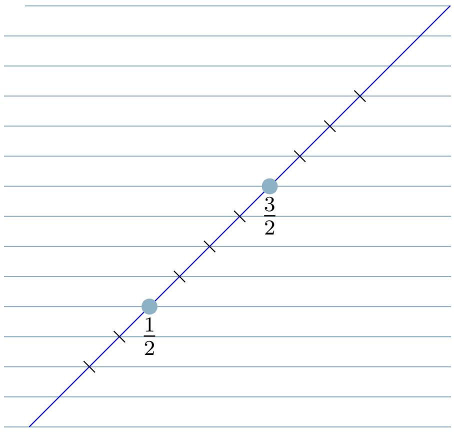
Na figura, há várias retas paralelas igualmente espaçadas e outra reta, destacada em vermelho, não paralela às demais. As retas paralelas marcam na reta destacada em vermelho pontos também igualmente espaçados. Um desses pontos corresponde ao zero e outro ao 1. Assim a reta vermelha pode ser considerada uma reta numérica.



a) Marque o ponto correspondente à fração $\frac{1}{2}$ na reta vermelha.

b) Escreva a fração correspondente a cada marcação na reta vermelha. Explique sua resposta.

Na figura a seguir, há várias retas paralelas igualmente espaçadas e outra reta, destacada em azul, não paralela às anteriores. Observe que as retas paralelas marcam na reta destacada em azul pontos também igualmente espaçados. Dois desses pontos correspondem às frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$, como ilustra a figura.



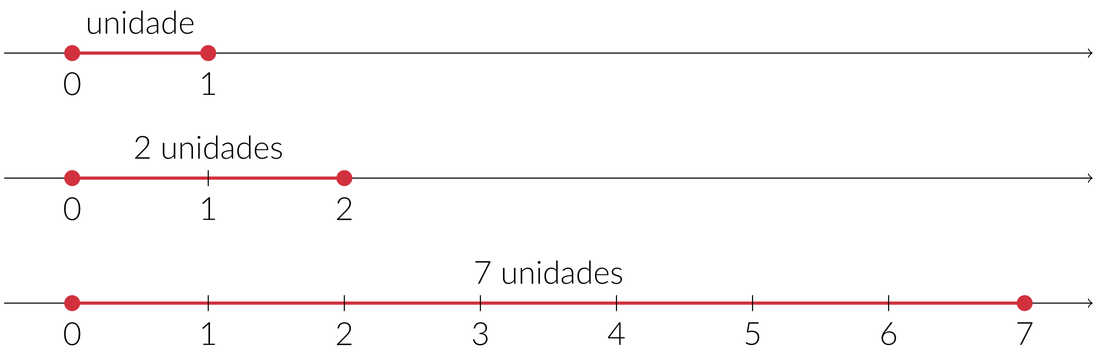
c) Indique as marcações correspondentes ao zero e ao um na reta numérica.

d) Marque, nesta mesma reta numérica, as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{4}$.

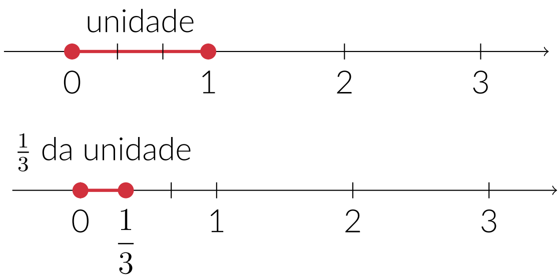
e) Qual das marcações na reta azul representa a maior fração? Que fração é essa?

ORGANIZANDO AS IDEIAS

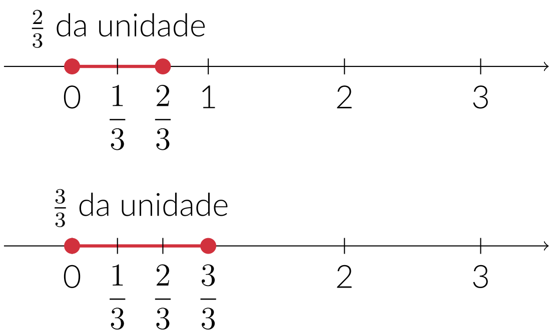
Como se sabe, os números naturais podem ser representados por pontos em uma reta. Para isso, é preciso escolher um ponto para corresponder ao zero e outro para corresponder ao um. O segmento de extremos 0 e 1 é associado à unidade. Os pontos que corresponderão aos demais números naturais são obtidos a partir da unidade.

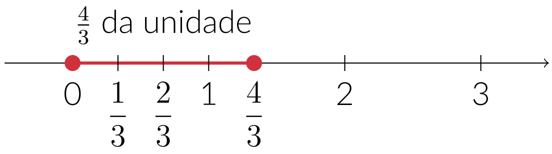


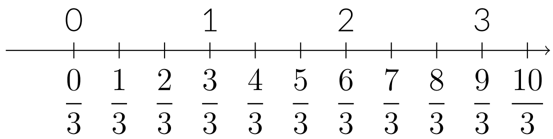
As frações também podem ser associadas a pontos na reta numérica. Para isso, é preciso dividir a unidade em partes iguais. Por exemplo, a divisão da unidade em 3 partes iguais determina três terços. O ponto correspondente ao número $\frac{1}{3}$ é a extremidade do segmento que, a partir do 0, identifica o primeiro terço da unidade.



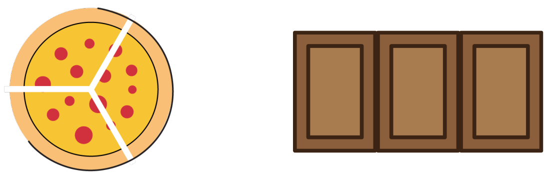
A partir do ponto correspondente ao $\frac{1}{3}$, são marcados na reta numérica os pontos correspondentes a $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, e assim por diante.

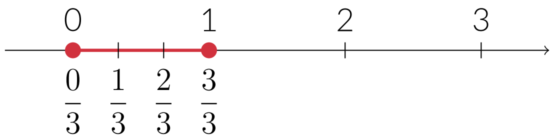




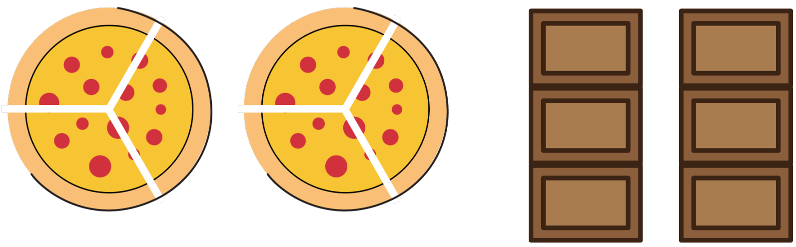


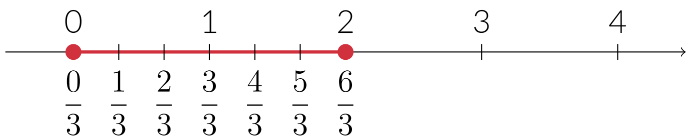
A representação dos números na reta numérica evidencia que algumas frações são números naturais. Por exemplo, $\frac{3}{3}$ é igual a 1. Portanto, $\frac{3}{3}$ de uma pizza é igual a 1 pizza e $\frac{3}{3}$ de uma barra de chocolate é igual a 1 barra de chocolate.





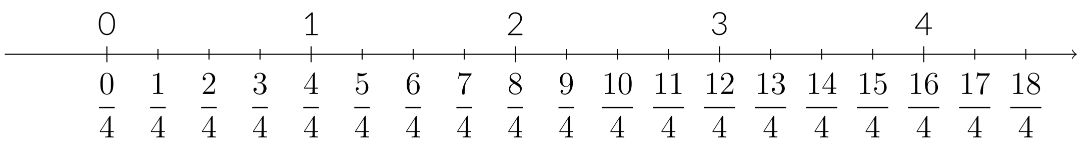
Já $\frac{6}{3}$ é igual a 2. Assim, $\frac{6}{3}$ de uma pizza é igual a 2 pizzas e $\frac{6}{3}$ de uma barra de chocolate é igual a 2 barras de chocolate.



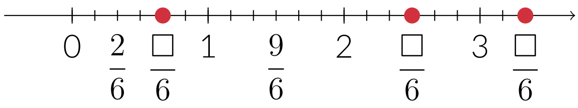


E $\frac{12}{3}$, é igual a que número natural? $\frac{12}{3} = \square$

Para identificar na reta numérica os pontos correspondentes às frações $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, e assim por diante, o processo é o mesmo:

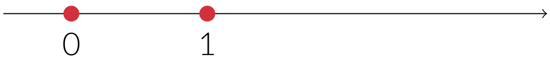


Na reta numérica a seguir estão destacados alguns pontos e as frações correspondentes a eles. Observe e complete as frações em destaque escrevendo seus numeradores.

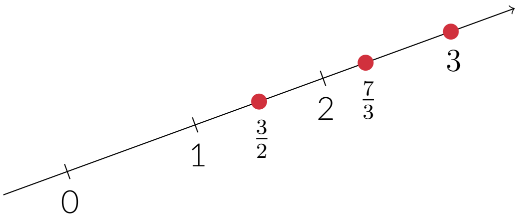


A ordem na reta numérica

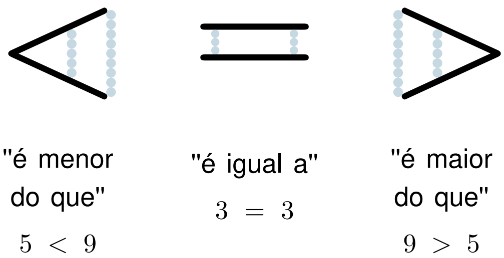
Como você pode perceber, os números são organizados na reta numérica em ordem crescente no sentido que vai do zero para o um. As marcações do 0 e do 1 informam a ordem crescente.



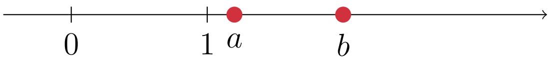
A organização dos números na reta numérica permite comparar dois números apenas observando a sua posição na reta. Por exemplo, observando a ordem crescente, como 5 está adiante do 3, o número 5 é maior do que o número 3, ou, em símbolos matemáticos, $5 > 3$. O mesmo vale para as frações. Como $\frac{3}{2}$ está antes de $\frac{7}{3}$, sabe-se que $\frac{3}{2}$ é menor do que $\frac{7}{3}$, ou, em símbolos matemáticos $\frac{3}{2} < \frac{7}{3}$. É possível perceber que $\frac{7}{3} < 3$.



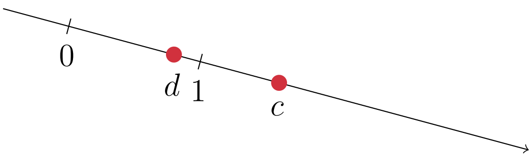
O símbolo "<" é usado para dizer "é menor do que" e o símbolo ">" significa "é maior do que". Assim, por exemplo, a frase "oito é menor do que quinze" pode ser expressa de modo mais resumido como $8 < 15$. Já a expressão $\frac{3}{2} > \frac{1}{2}$ quer dizer que "três meios é maior do que um meio".



Mesmo sem saber que números são a e b, observando as suas representações na reta numérica, podemos concluir que $a < b$.



E neste caso, qual é o menor número, c ou d?



O número d é menor que c porque, observando a ordem crescente, d está antes de c. É possível concluir ainda que d é um número menor do que 1 e c um número maior do que 1.

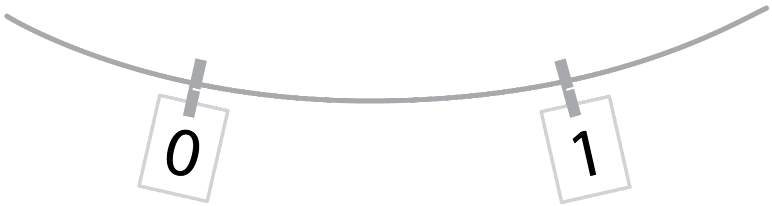
MÃO NA MASSA

Atividade 11

Jogo: varal dos números

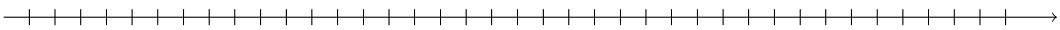
O varal de números está disposto na sala de aula, nele já estão posicionados os números 0 (zero) e 1 (um), como na figura. Nos cartões preparados para a atividade estão os números:

$0, 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{8}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, \frac{12}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{10}{5}, \frac{1}{10}.$



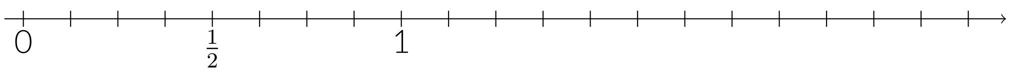
O jogo consiste em fixar cartões numerados em varal, reproduzindo uma reta numérica. As regras serão apresentadas pelo seu professor ou professora. Discuta com seus colegas a posição correta de fixação de cada um dos cartões numerados no varal.

Ao final do jogo, reproduza a forma como os cartões foram posicionados no varal na reta numérica a seguir. Aproveite as marcações já existentes.



Atividade 12

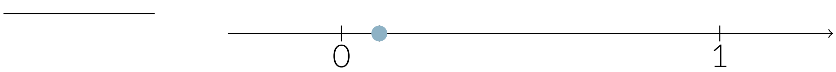
Na reta numérica já estão marcados os números 0, 1 e $\frac{1}{2}$. Marque $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{8}{4}, \frac{10}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{10}{8}$ e 2.

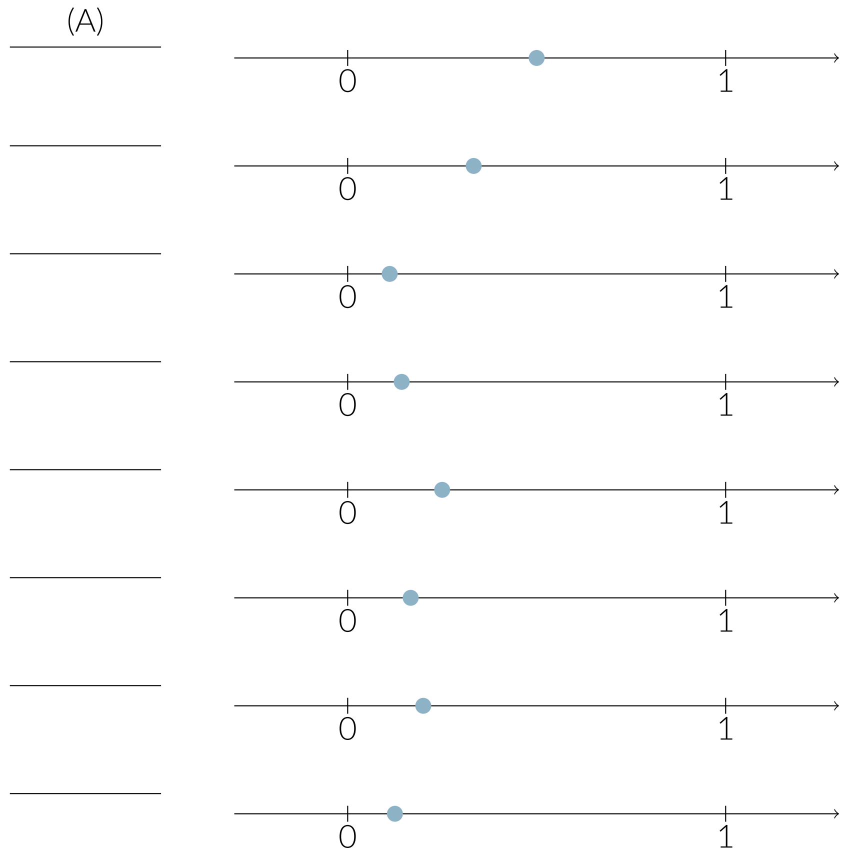


Atividade 13

Associe, como no exemplo, cada fração à sua representação na reta numérica.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{6}$ (F) $\frac{1}{7}$ (G) $\frac{1}{8}$ (H) $\frac{1}{9}$ (I) $\frac{1}{10}$





Atividade 14

Complete as sentenças a seguir com os sinais > (maior) ou < (menor) de modo a torná-las verdadeiras.

a) $\frac{1}{2} \;\square\; \frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{4} \;\square\; \frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{10} \;\square\; \frac{1}{20}$

d) $\frac{1}{12} \;\square\; \frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{35} \;\square\; \frac{1}{43}$

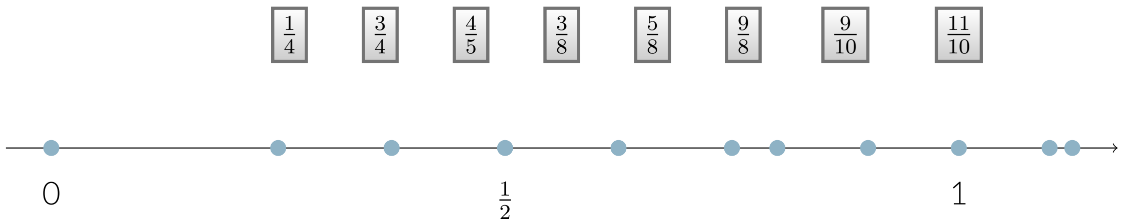
f) $\frac{1}{99} \;\square\; \frac{1}{100}$

g) $\frac{1}{5} \;\square\; \frac{1}{50}$

h) $\frac{1}{100} \;\square\; \frac{1}{10}$

Atividade 15

Na reta numérica a seguir estão identificados os pontos correspondentes aos números 0, 1 e $\frac{1}{2}$. Os demais pontos correspondem aos números apresentados a seguir. Associe cada fração ao ponto correspondente na reta numérica.



Atividade 16

Complete as sentenças a seguir com os sinais > (maior), < (menor) ou = (igual) de modo a torná-las verdadeiras.

a) $\frac{3}{6} \ \square \ \frac{5}{6}$

b) $\frac{5}{9} \ \square \ \frac{4}{9}$

c) $\frac{27}{10} \ \square \ \frac{29}{10}$

d) $\frac{3}{12} \ \square \ \frac{9}{12}$

e) $\frac{139}{100} \ \square \ \frac{125}{100}$

f) $\frac{1}{2} \ \square \ \frac{1}{3}$

g) $\frac{1}{7} \ \square \ \frac{1}{6}$

h) $\frac{2}{5} \ \square \ \frac{2}{7}$

i) $\frac{4}{5} \ \square \ \frac{4}{3}$

j) $\frac{12}{15} \ \square \ \frac{12}{7}$

l) $\frac{22}{80} \ \square \ \frac{22}{90}$

m) $\frac{3}{2} \ \square \ \frac{2}{5}$

n) $\frac{3}{4} \ \square \ \frac{6}{5}$

o) $\frac{7}{8} \ \square \ \frac{10}{9}$

p) $\frac{6}{5} \ \square \ \frac{12}{9}$

q) $\frac{4}{5} \ \square \ \frac{5}{4}$

r) $\frac{35}{40} \ \square \ \frac{30}{25}$

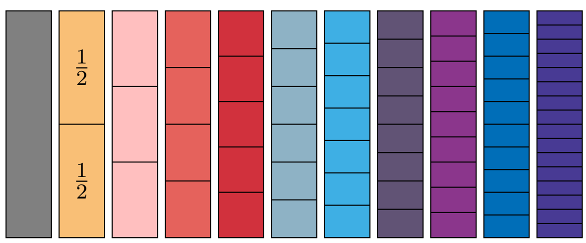
s) $\frac{99}{100} \ \square \ \frac{3}{2}$

QUEBRANDO A CUCA

Atividade 17

Você recebeu uma folha com 11 retângulos coloridos de mesmo tamanho. Cada retângulo está dividido em uma determinada quantidade de partes iguais.

a) Complete os retângulos escrevendo em cada uma das partes a fração correspondente, como no exemplo: o retângulo laranja está dividido em duas partes iguais, então cada parte é $\frac{1}{2}$.



b) Recorte os retângulos da folha que você recebeu e use-os para representar os números a seguir em uma reta numérica construída por você.

$$0,\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{5}{6},\ \tfrac{7}{6},\ \tfrac{6}{7},\ \tfrac{10}{7},\ \tfrac{12}{7},\ \tfrac{10}{8},\ \tfrac{12}{8},\ \tfrac{10}{9},\ \tfrac{12}{9},\ \tfrac{10}{10},\ \tfrac{20}{16}$$

Atividade 18

Na reta numérica a seguir:

a) Marque $\frac{1}{2}$. Justifique sua resposta.

b) Marque $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{4}$. Explique como raciocinou para fazer essas marcações.

c) $\frac{1}{4}$ é maior ou menor do que $\frac{1}{2}$?

d) $\frac{3}{4}$ é maior ou menor do que $\frac{1}{2}$?

e) $\frac{5}{4}$ é maior ou menor do que 1?

f) Escreva as frações marcadas na reta em ordem crescente, completando os espaços a seguir:

$$0 < \frac{\square}{\square} < \frac{\square}{\square} < \frac{\square}{\square} < 1 < \frac{\square}{\square} < 2.$$

g) Volte à reta e registre outras três frações que atendam às seguintes condições:

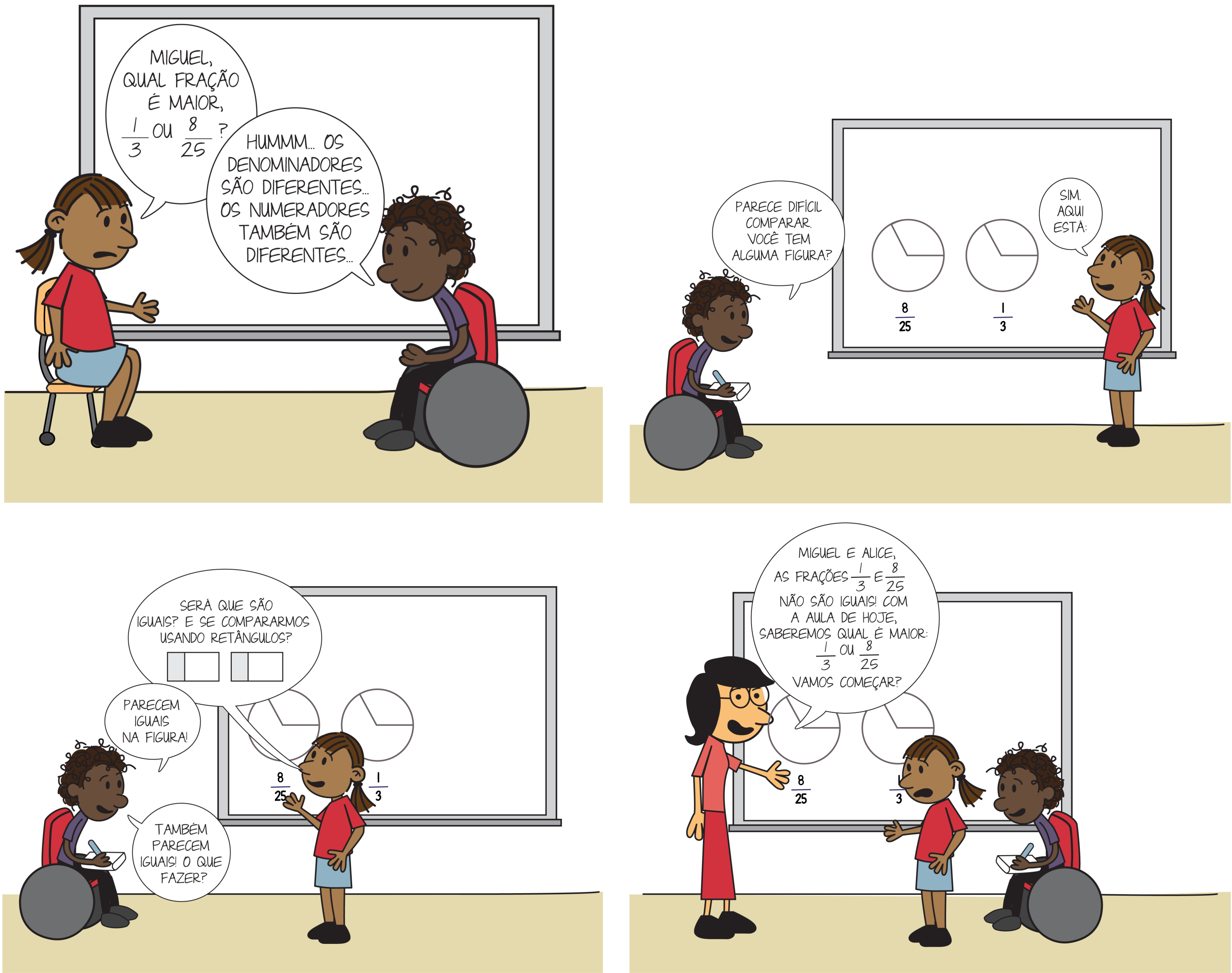
A) A primeira deve ser maior do que 3 e menor do que 4.

B) A segunda deve ser maior do que $\frac{7}{2}$.

C) A terceira deve ser maior do que $\frac{17}{4}$ e menor do que 5.

Lição 4

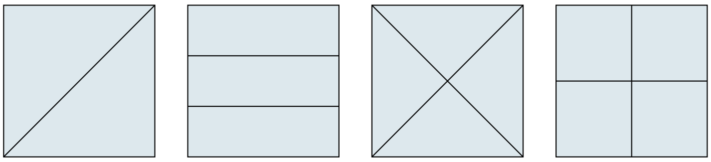
Comparação e Igualdade de Frações



EXPLORANDO O ASSUNTO

Atividade 1

A turma de Rita vai fazer um piquenique. A professora comprou pães para a turma preparar sanduíches. Cada colega de Rita preparou um sanduíche e partiu-o em partes iguais. Veja como alguns dos colegas repartiram o seu sanduiche:



(A) (B) (C) (D)

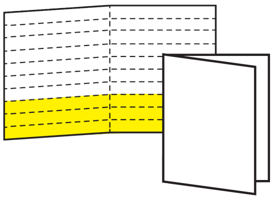
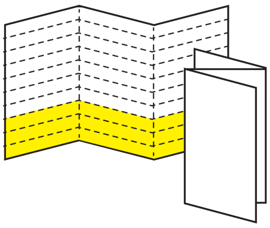
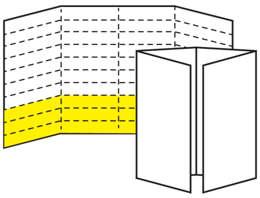
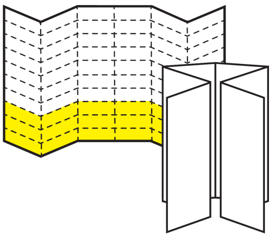
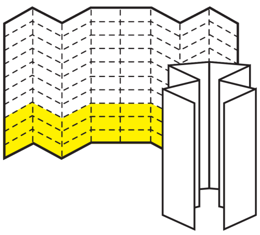
a) Nessas repartições, que fração do sanduíche pode representar cada uma das partes em que o sanduíche foi repartido?

b) Em quais dessas repartições é possível comer metade do sanduíche repartido sem parti-lo ainda mais? Justifique sua resposta!

c) Para cada uma das repartições que você deu como resposta no item b), expresse, por meio de frações, a metade do sanduíche.

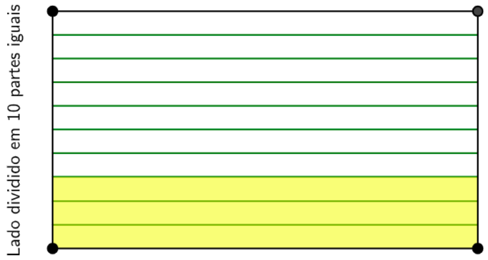
Atividade 2

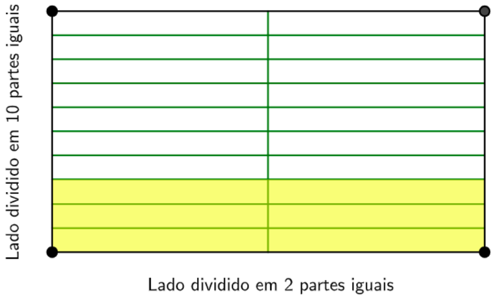
O *retângulo maior* na folha que você recebeu está dividido em 10 retângulos menores, três deles estão coloridos. Dobre a folha como ilustrado na primeira coluna - “Como dobrar”. As dobras formam novos *retângulos menores*. Preencha a tabela a seguir, uma linha de cada vez, considerando as dobras feitas.

Como dobrar	Quantidade total de retângulos menores	Quantidade de retângulos menores pintados	Fração do retângulo maior do encarte que está pintada
	10	3	$\frac{3}{10}$
			
			
			
			
			

REFLETINDO

a atividade 2, o retângulo maior está inicialmente dividido em dez retângulos menores iguais com três deles pintados de amarelo. Então a ``Fração do retângulo maior que está pintada de amarelo é $\frac{3}{10}$."





Depois de dobrar a folha em duas partes iguais, o número total de retângulos menores passa a ser 20, o dobro da quantidade inicial. A quantidade total de retângulos menores pintados passa a ser 6. Dessa forma a ``Fração do retângulo maior que está pintada de amarelo é $\frac{6}{20}$."
Como a parte do retângulo pintada de amarelo não mudou quando a folha foi dobrada, então $\frac{3}{10}$ do retângulo maior é igual a $\frac{6}{20}$ do retângulo maior. Essas frações representam a mesma quantidade:

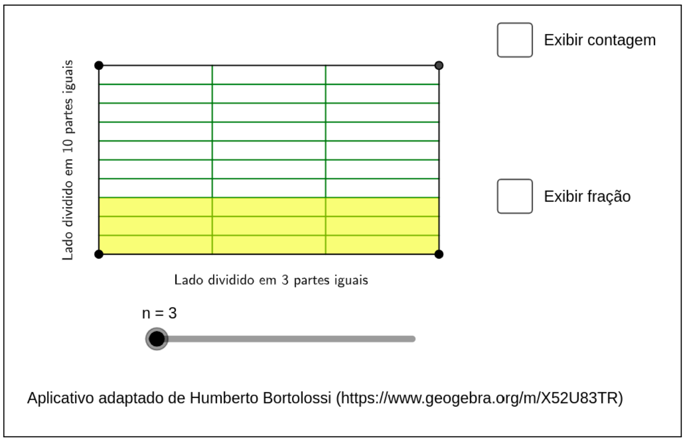
$$\frac{3}{10} = \frac{6}{20} = \frac{2 \times 3}{2 \times 10},$$

sendo 2 é o número de partes em que a folha foi dobrada.
Da mesma forma, depois de dobrar a folha em 4 partes iguais, o número total de retângulos menores passa a ser 40, quatro vezes a quantidade inicial. A quantidade total de retângulos menores pintados também fica multiplicada por 4 e passa a ser 12. Dessa forma, a ``Fração do retângulo maior que está pintada de amarelo é $\frac{12}{40}$."

$$\frac{3}{10} = \frac{12}{40} = \frac{4 \times 3}{4 \times 10},$$

sendo 4 é o número de partes em a folha foi dobrada.

Se quiser, use este aplicativo (https://www.geogebra.org/m/fkb5vpze) no computador, tablet ou no celular para rever as imagens e ajudar na contagem. Agora é a sua vez:



Depois de dobrar a folha em três parte, o número total de retângulos menores passa a ser ____, o ____ da quantidade inicial. A quantidade total de retângulos menores pintados passa a ser ____. Dessa forma a ``Fração do retângulo maior que está pintada de amarelo é $\frac{\square}{\square}$."
Como a parte do retângulo pintada de amarelo não mudou quando a folha foi dobrada, então $\frac{3}{10}$ do retângulo maior é igual a também $\frac{\square}{\square}$ do retângulo maior. Essas frações representam a mesma quantidade:

$$\frac{3}{10} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square \times 3}{\square \times 10},$$

sendo ____ é o número de partes em que a folha foi dobrada.
Do mesmo modo, ao dobrar a folha em seis ou oito partes iguais, você obteve outras representações equivalentes para a fração $\frac{3}{10}$:

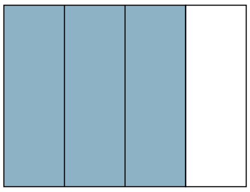
- Ao dobrar em seis partes iguais: $\frac{3}{10} = \frac{18}{60} = \frac{6\times 3}{6\times 10}$; em que 6 é o número de partes em que você dobrou a folha;
- Ao dobrar em oito partes iguais: $\frac{3}{10} = \frac{24}{80} = \frac{8\times 3}{8\times 10}$; em que 8 é o número de partes em que você dobrou a folha.

A conclusão é que os números $\frac{3}{10}$, $\frac{6}{20}$, $\frac{9}{30}$, $\frac{12}{40}$, $\frac{18}{60}$ e $\frac{24}{80}$ são iguais!!

Atividade 3

(Garcez, 2013)

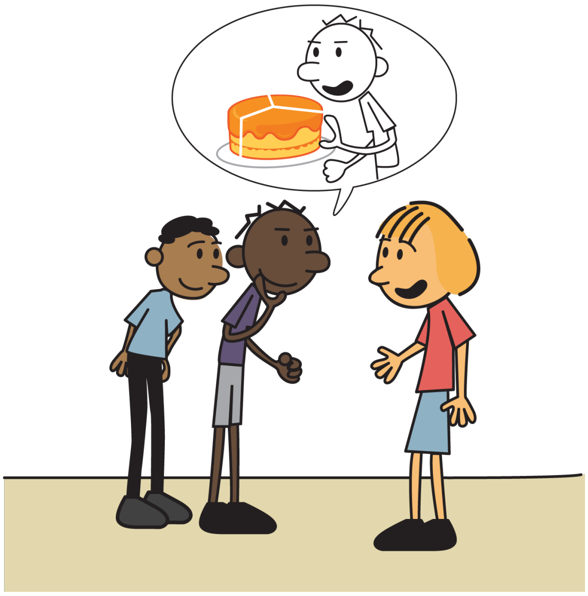
a) O retângulo desenhado a seguir está dividido em 4 partes iguais, das quais 3 estão pintadas de azul. Que fração do retângulo está pintada de azul?



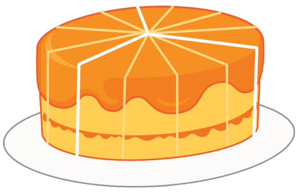
b) O retângulo do item anterior foi dividido com o acréscimo de onze linhas horizontais igualmente espaçadas e ele está parcialmente coberto com um papel vermelho que impede a visualização dos retângulos menores que compõem a nova equipartição. Com essa nova divisão, em quantas partes ficou dividido o retângulo inicial? Quantas dessas partes estão pintadas de azul? Que fração do retângulo está pintada de azul?

Atividade 4

Rita convidou seus colegas de escola para virem à sua casa conhecer seu novo cãozinho. Sua mãe preparou um bolo para o lanche da tarde das crianças. Às 16h, chegaram dois de seus colegas, João e Mário. Mário logo imaginou o bolo repartido em 3 pedaços e pensou que ele poderia então comer um terço do mesmo.



A mãe de Rita dividiu o bolo, partindo-o, como Mário havia imaginado, em 3 partes. No entanto, antes que começassem a comer, chegaram mais colegas da escola. Então a mãe de Rita subdividiu cada um dos 3 pedaços iniciais em 4 partes de igual tamanho.



Na hora do lanche, João comeu 2 pedaços do bolo e Mário comeu 4.

a) Que fração do bolo Mário comeu?

b) Que fração do bolo João comeu?

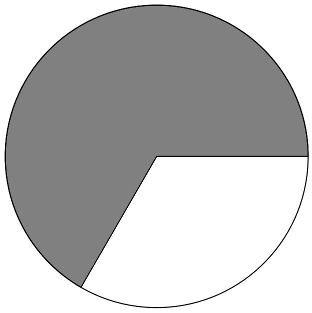
Se os amigos atrasados não tivessem aparecido antes do lanche, a mãe de Rita não teria subdividido as 3 fatias iniciais. Assim, se fossem apenas Rita, Mário e João, cada um teria comido $\frac{1}{3}$ do bolo.

c) Nesse caso, Mário teria comido menos bolo, mais bolo ou a mesma quantidade de bolo que comeu?

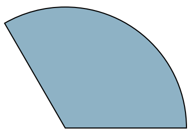
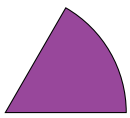
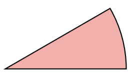
d) E João, teria comido menos bolo, mais bolo ou a mesma quantidade de bolo que comeu?

Atividade 5

O objetivo desta atividade é explorar a fração do círculo que está pintada de cinza no encarte que você recebeu.

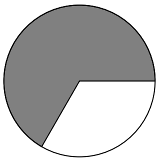
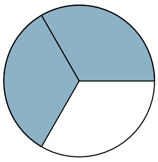
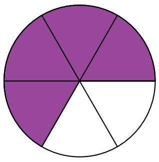


Para isso, responda as perguntas na tabela a seguir. Se necessário, use as peças coloridas que você recortou e usou na Atividade 11 da Lição 1.

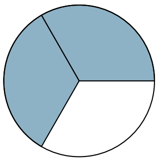
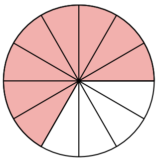
Peça	Quantas peças como essa são necessárias para juntas cobrirem a região cinza?	Juntas, essas peças são que fração do círculo?	Que fração do círculo não está colorida de cinza?
$\frac{1}{3}$ 			
$\frac{1}{6}$ 			
$\frac{1}{12}$ 			

REFLETINDO

Na atividade 5, a região cinza é igual a duas peças azuis juntas. Como cada peça azul é $\frac{1}{3}$ do círculo, a região cinza é $\frac{2}{3}$ do círculo. Cada peça azul é igual a duas peças lilás. Assim, a região cinza é também igual a quatro peças lilás e, por isso, a região cinza é $\frac{4}{6}$ do círculo. Dessa forma, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

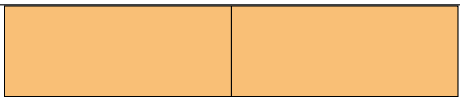
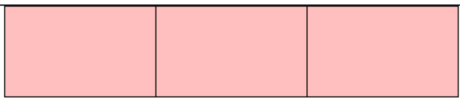
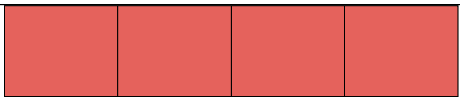
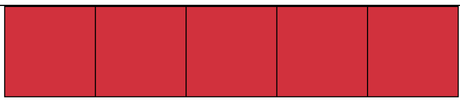
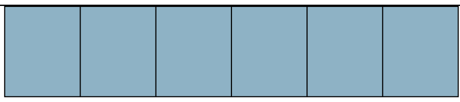
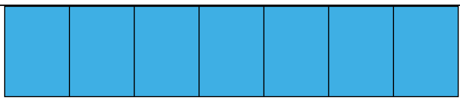
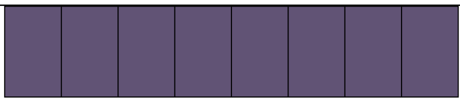
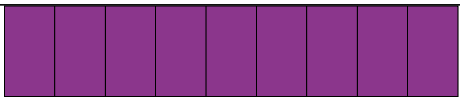
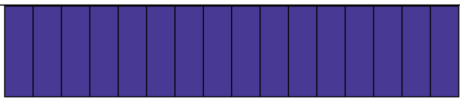
Da mesma maneira, como cada peça azul é igual a quatro peças rosas, a região cinza é igual a 8 peças rosas juntas. Por isso a região cinza é $\frac{8}{12}$ do círculo. Então $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$.

Quantas peças laranjas ($\frac{1}{9}$ do círculo) juntas são iguais a uma peça azul? E quantas peças laranjas juntas são iguais à região cinza?

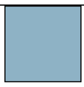
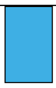
Atividade 6

PARTE 1. Você recebeu um encarte com 10 retângulos coloridos de mesmo tamanho, cada um deles dividido em partes iguais. Seguindo o modelo feito para o primeiro retângulo, preencha a tabela a seguir.

Retângulo	Número de partes em que está dividido	Cada parte é que fração do retângulo?
	2	$\frac{1}{2}$
		
		
		
		
		
		
		
		
		

PARTE 2. O objetivo desta parte é explorar a fração do retângulo que está colorida de cinza no segundo encarte que você recebeu.

Para isso, responda as perguntas a na tabela seguir. Se necessário, use as peças coloridas do primeiro encarte para avaliar as suas respostas.

Peça	Quantas peças como essa são necessárias para juntas cobrirem a região cinza?	Que fração do retângulo é a região cinza? Complete.	Que fração do retângulo do encarte não está colorida de cinza?
		$\frac{\square}{2}$	
		$\frac{\square}{4}$	
		$\frac{\square}{6}$	
		$\frac{\square}{8}$	
		$\frac{\square}{10}$	
		$\frac{\square}{16}$	

REFLETINDO

A atividade 6 mostrou que:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\frac{7}{14}=\frac{8}{16}.$$

Será que $\frac{1}{2}=\frac{24}{48}$ também? O que você acha?

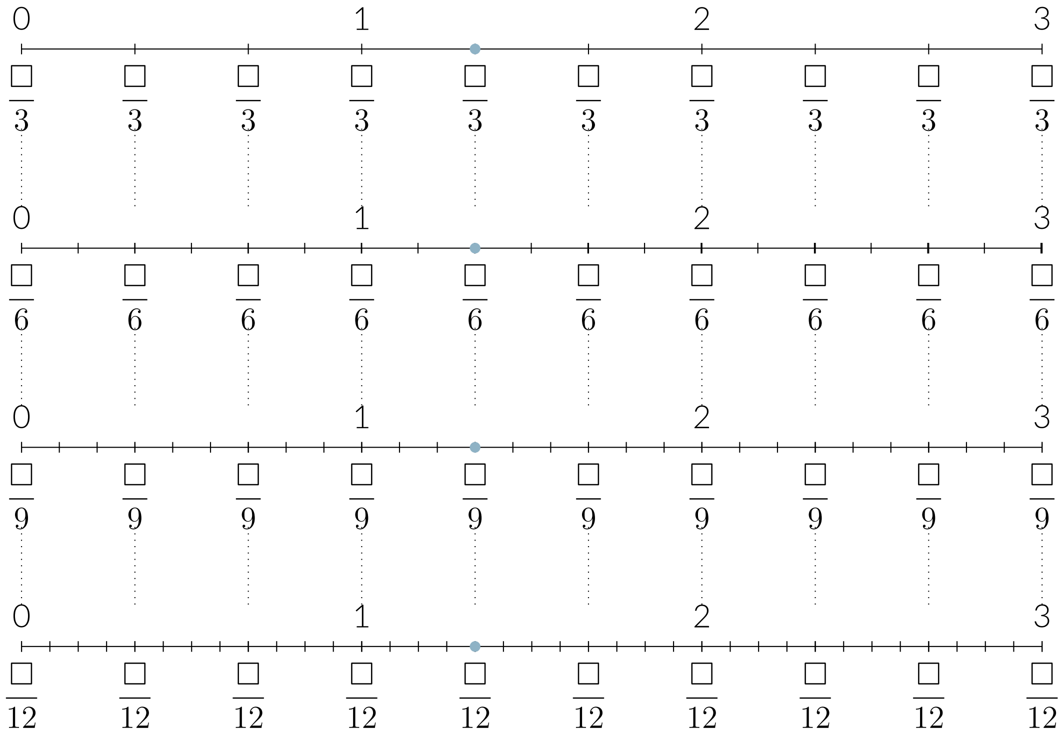
Uma forma de pensar para responder a pergunta é a seguinte: ``se eu repartir uma unidade em 48 partes iguais e pegar 24 dessas partes eu terei pego metade da unidade. Conclusão: $\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$."

Agora é a sua vez! Explique por que $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$.

Quantas frações são iguais a $\frac{1}{2}$?

Atividade 7

a) Preencha os quadradinhos □ com numeradores adequados de modo que cada fração corresponda a sua respectiva marca em cada reta numérica.



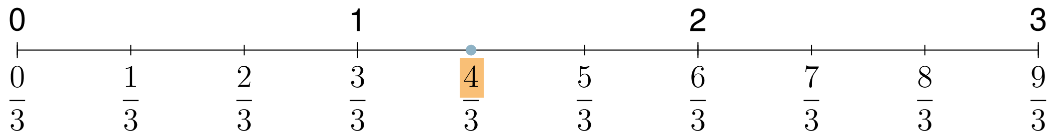
b) Escreva quatro frações com numeradores diferentes (consequentemente com denominadores também diferentes) que correspondam ao ponto azul em destaque na figura.

c) Determine uma fração de denominador 15 que corresponda ao ponto azul em destaque. Justifique sua resposta usando uma reta numérica!

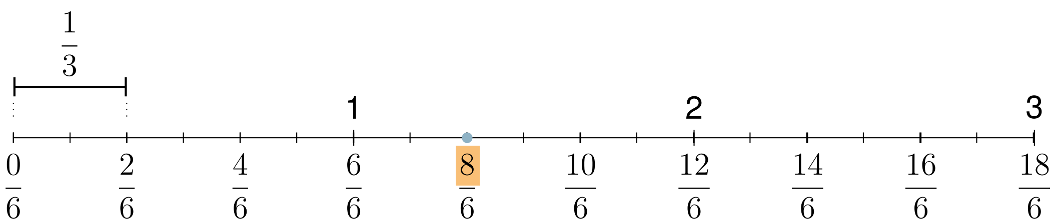
REFLETINDO

Na Atividade 7, foram apresentadas quatro figuras que mostravam a reta numérica com subdivisões em partes iguais, mas de formas diferentes.

Na primeira figura, as subdivisões do segmento unitário (que está, aqui, servindo como unidade) eram em três partes iguais, ou seja, em terços. Para representar o ponto azul na reta numérica da primeira figura, foram consideradas quatro cópias de $\frac{1}{3}$, justapostas a partir da origem. Portanto, o ponto azul indica na reta numérica a fração $\frac{4}{3}$.



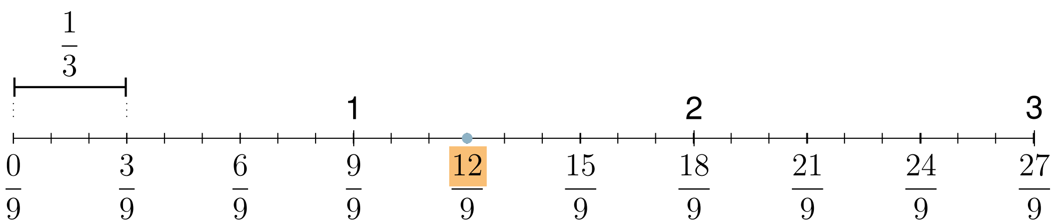
Na segunda figura, cada uma das subdivisões do segmento unitário foram divididas em duas partes iguais. Assim, as justaposições dos segmentos unitários ficam subdivididos em seis partes iguais, ou seja, em sextos. Para representar o ponto azul na reta numérica da segunda figura, foram necessárias então oito (o dobro da quantidade anterior) cópias de $\frac{1}{6}$. Logo, o ponto azul representa também a fração $\frac{8}{6}$.



Isto é,

$$\frac{4}{3} = \frac{2 \times 4}{2 \times 3} = \frac{8}{6}.$$

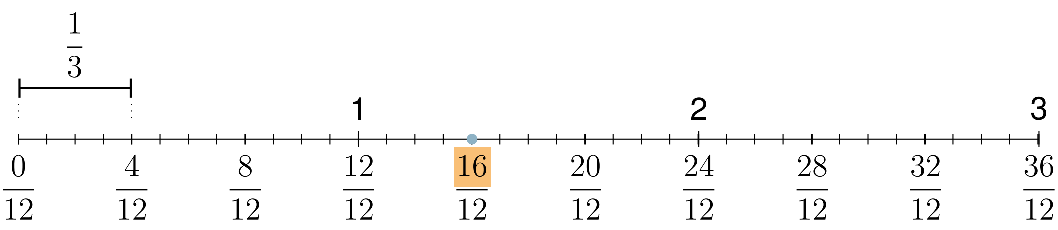
Na terceira figura, cada uma das três subdivisões do segmento unitário apresentadas na primeira figura foi dividida em três partes iguais. Assim, as justaposições dos segmentos unitários ficam subdivididos em nove partes iguais, ou seja, em nonos. Para representar o ponto azul na reta numérica da terceira figura, foram necessárias doze (o triplo da quantidade inicial) cópias de $\frac{1}{96}$. Portanto, o ponto azul representa também a fração $\frac{12}{9}$.



Isto é,

$$\frac{4}{3} = \frac{3 \times 4}{3 \times 3} = \frac{12}{9}.$$

Na quarta figura, cada uma das três subdivisões do segmento unitário apresentadas na primeira figura foi dividida em quatro partes iguais.



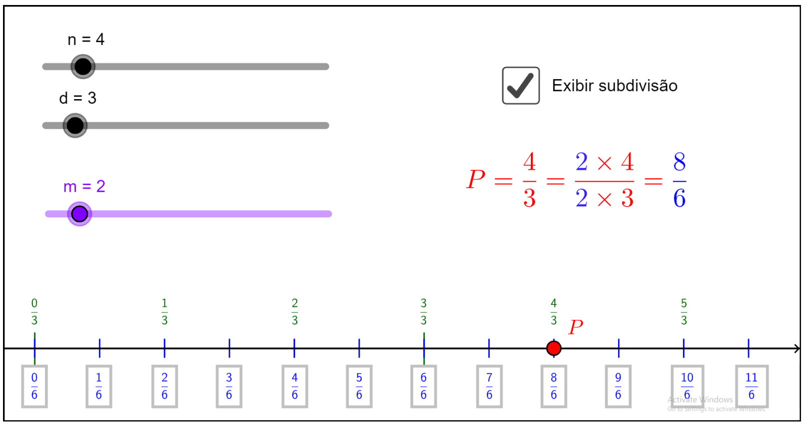
Assim, como nos casos anteriores, conclui-se que o ponto azul representa a fração $\frac{16}{12}$:

$$\frac{4}{3} = \frac{4 \times 4}{4 \times 3} = \frac{16}{12}.$$

Portanto, o ponto azul indica qualquer uma das frações iguais

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{16}{12}.$$

Agora, recomenda-se que você utilize o aplicativo disponível no link a seguir (`https://www.geogebra.org/m/Pr3s9vak`) para perceber como frações com numeradores e denominadores diferentes podem representar um mesmo ponto na reta numérica. Mexa à vontade! Qualquer dúvida pergunte ao seu professor.



Mais geralmente, ao subdividir cada subintervalo de comprimento igual a $\frac{1}{3}$ em m partes iguais, obtém-se que

$$\frac{4}{3} = \frac{m \times 4}{m \times 3}.$$

Esse raciocínio vale para qualquer fração. Ou seja, dada uma fração $\frac{n}{d}$, pode-se representá-la de forma equivalente, subdividindo cada subintervalo de comprimento $\frac{1}{d}$ em m partes iguais.

Neste caso serão necessárias $(m \times n)$ cópias de subintervalos de comprimento $\frac{1}{m \times d}$, isto é:

$$\frac{n}{d} = \frac{m \times n}{m \times d},$$

qualquer que seja o número natural $m > 0$.

Atividade 8

O objetivo desta atividade é determinar uma fração de denominador 12 que seja igual à fração $\frac{5}{4}$.

a) Tomando um círculo como unidade:

   I) Faça um desenho que represente $\frac{5}{4}$ da unidade.

   II) Usando o desenho feito, represente uma fração de denominador 12 que seja igual a $\frac{5}{4}$.

b) Tomando um quadrado como unidade:

   I) Faça um desenho que represente $\frac{5}{4}$ da unidade.

   II) Usando o desenho feito, represente uma fração de denominador 12 que seja igual a $\frac{5}{4}$.

c) Desenhe uma reta numérica e, em seguida, marque os números 0, 1 e $\frac{5}{4}$. A partir deste desenho, represente uma fração de denominador 12 que seja igual a $\frac{5}{4}$.

ORGANIZANDO AS IDEIAS

Olá! É chegada a hora de ajudar Miguel e Alice, nossos amigos da história em quadrinhos do início da lição, a compararem as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{25}$.

Ora, na lição anterior você aprendeu a comparar frações com o mesmo denominador. Neste caso, como os denominadores eram iguais, você precisou comparar apenas os numeradores da fração. Você também aprendeu a comparar frações com o com mesmo numerador. Neste caso, como os numeradores eram iguais, você precisou comparar apenas os denominadores da fração. Mas, Miguel e Alice querem comparar duas frações com denominadores bem como numeradores diferentes.

Aí vai uma pista. A ideia é utilizar o que você aprendeu até aqui nesta lição para determinar frações iguais às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{25}$ que possuem o mesmo denominador.

Deste modo, transforma-se um “novo problema” em um “velho problema”: o de comparar frações com o mesmo denominador.

Usando o que você aprendeu com as atividades anteriores, pode-se, por exemplo, construir as seguintes igualdades:

$$\frac{1}{3}=\frac{2\times 1}{2\times 3}=\frac{3\times 1}{3\times 3}=\frac{4\times 1}{4\times 3}=\frac{5\times 1}{5\times 3}=\cdots=\frac{n\times 1}{n\times 3}=\cdots$$

e

$$\frac{8}{25}=\frac{2\times 8}{2\times 25}=\frac{3\times 8}{3\times 25}=\frac{4\times 8}{4\times 25}=\frac{5\times 8}{5\times 25}=\cdots=\frac{m\times 8}{m\times 25}=\cdots$$

quaisquer que sejam m e n números naturais, $m > 0$, $n > 0$.

Ao observar a lista de frações iguais à fração $\frac{1}{3}$, enunciada acima, você deve ter percebido que os denominadores dessas frações são múltiplos de 3. Do mesmo modo, com relação à lista de frações iguais à fração $\frac{8}{25}$, você deve ter percebido que os denominadores dessas frações são múltiplos de 25. Assim, para efeito de comparação, será necessário encontrar frações iguais às frações dadas que possuem denominadores que sejam, simultaneamente, múltiplos de 3 e de 25. Um número que satisfaz essa condição é o número $75 = 3 \times 25$.

Desta maneira, obtém-se que

$$\frac{1}{3}=\frac{25\times 1}{25\times 3}=\frac{25}{75}$$

e que

$$\frac{8}{25}=\frac{3\times 8}{3\times 25}=\frac{24}{75}.$$

Agora é só comparar as frações $\frac{25}{75}$ e $\frac{24}{75}$. Mas, isto, já é conhecido. Como $25 > 24$, tem-se que

$$\frac{1}{3}=\frac{25}{75}>\frac{24}{75}=\frac{8}{25};$$

isto é,

$$\frac{1}{3}>\frac{8}{25}.$$

Generalização do procedimento

Para generalizar o procedimento apresentado aqui, considere duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ diferentes.

Com base na solução dada para o problema do Miguel e da Alice, você deve ter percebido que para comparar duas frações, basta comparar as frações iguais a elas, mas que possuem o mesmo denominador. Uma forma simples para realizar tal tarefa é procurar frações iguais às frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ cujos denominadores são iguais ao número $d \times b$ que é um múltiplo comum de b e d.

Ora, para obter uma fração igual à fração $\frac{a}{b}$ cujo denominador seja igual a $d \times b$ basta multiplicar tanto o numerador como o denominador da fração por d (denominador da segunda fração):

$$\frac{d\times a}{d\times b}=\frac{a}{b}.$$

Do mesmo modo, para obter uma fração igual à fração $\frac{c}{d}$ cujo denominador seja igual $d \times b$ basta multiplicar tanto o numerador e como o denominador da fração por b

(denominador da primeira fração):

$$\frac{b \times c}{b \times d} = \frac{c}{d}.$$

Assim, para comparar as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ é suficiente comparar os numeradores das frações $\frac{d \times a}{d \times b}$ e $\frac{b \times c}{b \times d}$. Isto é,

$$\text{se } d \times a > b \times c \text{ então } \frac{a}{b} = \frac{d \times a}{d \times b} > \frac{b \times c}{b \times d} = \frac{c}{d}$$

e

$$\text{se } d \times a < b \times c \text{ então } \frac{a}{b} = \frac{d \times a}{d \times b} < \frac{b \times c}{b \times d} = \frac{c}{d}.$$

MÃO NA MASSA

Atividade 9

Determine uma fração que seja igual a $\frac{7}{3}$ e que tenha denominador

a) 6 b) 21 c) 123 d) 210

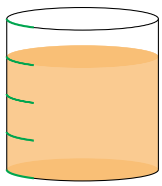
Atividade 10

(Van de Walle, 2009) Preencha os $\square$ com números de forma a tornar as igualdades verdadeiras.

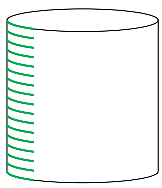
a) $\frac{5}{3} = \frac{\square}{6}$ b) $\frac{2}{3} = \frac{6}{\square}$ c) $\frac{8}{12} = \frac{\square}{3}$ d) $\frac{9}{12} = \frac{3}{\square}$ e) $\frac{9}{12} = \frac{6}{\square}$ f) $\frac{6}{8} = \frac{\square}{12}$

Atividade 11

Você tem um copo cilíndrico graduado com cinco marcas horizontais igualmente espaçadas. O copo tem suco de laranja até $\frac{3}{4}$ de sua capacidade, como ilustra a imagem:



Seu colega tem um copo cilindrico idêntico, mas graduado com 17 níveis horizontais igualmente espaçados:



Verifique se é possível completar um número inteiro de níveis do copo de seu colega de modo a ficar com a mesma quantidade de suco. Em caso afirmativo, explique sua resposta.

Atividade 12

a) Quantas são as frações com denominador igual a 5 que são menores do que $\frac{3}{5}$? Explique como você chegou à sua resposta.

b) Quantas são as frações com denominador igual a 5 que são maiores do que $\frac{3}{5}$? Explique como você chegou à sua resposta.

Atividade 13

Para cada par de frações na mesma linha da tabela a seguir, determine frações de mesmo denominador que sejam iguais a cada uma das frações dadas. Em seguida, compare essas frações, preenchendo a coluna em branco, com um dos símbolos “$>$”, “$<$” ou “$=$”, de forma que, em cada linha da tabela, a comparação estabelecida seja verdadeira. Vamos fazer o Item a) juntos: observe que

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{5 \times 6} = \frac{25}{30} \text{ e } \frac{4}{5} = \frac{6 \times 4}{6 \times 5} = \frac{24}{30}.$$

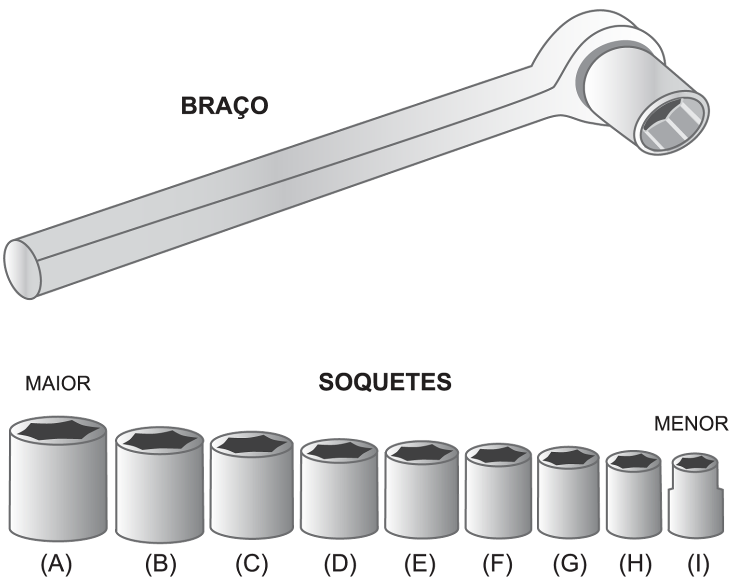
Como $25 > 24$, segue-se que $\frac{25}{30} > \frac{24}{30}$. Portanto, preenchemos a coluna em branco da primeira linha com $>$.

Item	Fração	$>$, $<$ ou $=$	Fração
a)	$\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$	$>$	$\frac{24}{30} = \frac{4}{5}$
b)	$\frac{3}{4} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{2}{3}$
c)	$\frac{2}{10} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{3}{15}$
d)	$\frac{1}{4} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{6}{25}$
e)	$\frac{22}{7} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{31}{10}$
f)	$\frac{22}{33} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{24}{36}$
g)	$\frac{5}{10} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{50}{100}$
h)	$\frac{7}{5} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{17}{12}$
i)	$\frac{7}{12} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{9}{20}$

Atividade 14

A chave de caixa é uma ferramenta usada para apertar (ou afrouxar) porcas e parafusos. Ela consiste de um braço no qual, em uma de suas extremidades, é possível acoplar soquetes de tamanhos variados. Estes soquetes são identificados por frações que especificam seus tamanhos em polegadas (a polegada é uma medida de comprimento usada nos Estados Unidos e no Reino Unido).

Na figura a seguir, observe o tamanho dos soquetes e identifique cada um deles com uma das seguintes frações $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{16}$ e $\frac{13}{16}$.



Atividade 15

Responda às seguintes questões:

a) A fração determinada pela adição de 1 ao numerador da fração $\frac{4}{7}$ é maior, menor ou igual a $\frac{4}{7}$? Explique como chegou a essa conclusão.

b) A fração determinada pela adição de 1 ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é maior, menor ou igual a $\frac{4}{7}$? Explique como chegou a essa conclusão.

c) A fração determinada pela subtração de 1 ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é maior, menor ou igual a $\frac{4}{7}$? Explique como chegou a essa conclusão.

d) A fração determinada pela adição de 2 ao numerador e ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é maior, menor ou igual a $\frac{4}{7}$? Explique como chegou a essa conclusão.

e) A fração determinada pela multiplicação por 2 do numerador e do denominador da fração $\frac{4}{7}$ é maior, menor ou igual a $\frac{4}{7}$? Explique como chegou a essa conclusão.

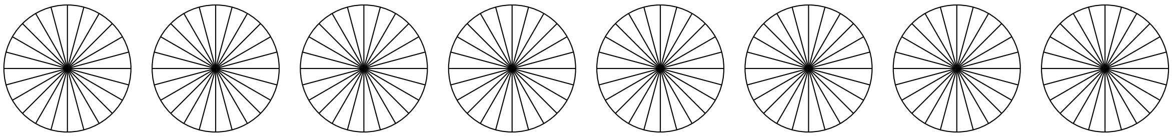
f) A fração determinada pela adição de 1 ao numerador e subtração de 1 ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é maior, menor ou igual a $\frac{4}{7}$? Explique como chegou a essa conclusão.

Atividade 16

(Adaptado de Empson (2001))

24 amigos estão querendo dividir igualmente 8 panquecas circulares.

Luciano, um dos amigos sugeriu que cada panqueca fosse dividida em 24 partes iguais e que, então, cada um dos 24 amigos recebesse 8 dessas partes.



a) Com a divisão sugerida por Luciano, qual a fração de uma panqueca que cada amigo vai receber?

b) Quantos cortes da panqueca (do centro para a borda, como no desenho) são necessários para a divisão proposta?

c) É possível dividir igualmente as 8 panquecas entre os 24 amigos fazendo menos cortes do que como Luciano sugeriu? Se você acha que sim, quantos cortes serão necessários e qual é a fração de uma panqueca que cada amigo poderia receber neste caso?

Atividade 17

Dizemos que uma fração é **irredutível** se o máximo divisor comum entre o seu numerador e o seu denominador é igual a 1. Para cada fração indicada a seguir, determine uma fração igual, mas que seja irredutível.

a) $\dfrac{2}{4}$, b) $\dfrac{6}{9}$, c) $\dfrac{4}{2}$, d) $\dfrac{5}{35}$, e) $\dfrac{50}{100}$.

Atividade 18

O objetivo desta atividade é determinar qual é a maior e qual é a menor fração entre as frações $\frac{11}{6}$, $\frac{28}{15}$ e $\frac{37}{20}$.

a) Determine três frações de mesmo denominador que sejam iguais às frações $\frac{11}{6}$, $\frac{28}{15}$ e $\frac{37}{20}$.

b) Usando as frações do item a), determine qual é a maior e qual é a menor fração entre as frações $\frac{11}{6}$, $\frac{28}{15}$ e $\frac{37}{20}$.

Atividade 19

Dadas duas frações, se o produto do numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração for igual ao produto do denominador da primeira fração pelo numerador da segunda fração, então as frações são iguais.

Vamos ver um exemplo: para as frações $\frac{14}{6}$ e $\frac{21}{9}$, note que $14 \times 9 = 126 = 6 \times 21$. Vamos agora usar este fato de que $14 \times 9 = 6 \times 21$ para concluir que $\frac{14}{6} = \frac{21}{9}$:

$$\frac{14}{6} = \frac{9 \times 14}{9 \times 6} = \frac{14 \times 9}{9 \times 6} = \frac{6 \times 21}{9 \times 6} = \frac{6 \times 21}{6 \times 9} = \frac{21}{9}.$$

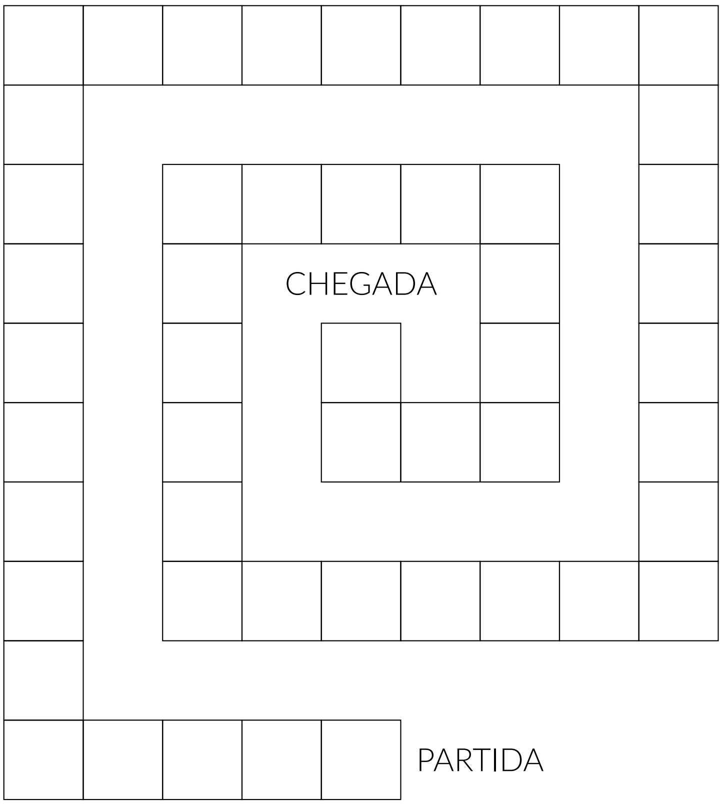
a) Use o procedimento do exemplo para mostrar que $\frac{2}{8} = \frac{5}{20}$.

b) Verdadeirou ou falso? Se duas frações são iguais, então o produto do numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração é igual ao produto do denominador da primeira fração pelo numerador da segunda fração. Justifique sua resposta.

Atividade 20

Trilha dos doze avos

Junte seus amigos para jogar! Seu grupo vai receber uma cópia de um tabuleiro onde há uma trilha com as posições de partida e chegada indicadas e um dado com 12 faces marcadas com os números de 1 a 12.



Seu grupo também receberá peões que identificarão as posições dos jogadores na trilha. Cada jogador deve escrever o seu nome no peão (na imagem a seguir, o peão está com o nome "Antônio").

O dado pode ser usado para decidir a ordem de jogada. As regras do jogo são as seguintes:

$1^{\underline{o}}$ No desenvolvimento do jogo, cada jogador lança o dado duas vezes. Esses lançamentos determinam a fração que correspondente ao movimento que o jogador fará: o primeiro lançamento registra o denominador da fração e o segundo o numerador. Assim, por exemplo, se o primeiro lançamento do dado resulta no número 12 e o segundo lançamento resulta no número 10, a fração correspondente é $\frac{10}{12}$. Outro exemplo: se o número do primeiro lançamento do dado é 6 e o número do segundo lançamento é 3, a fração correspondente é $\frac{3}{6}$. Mais um exemplo: se o número do primeiro lançamento do dado é 5 e o número do segundo lançamento é 7, a fração correspondente é $\frac{7}{5}$.

$2^{\underline{o}}$ Se a fração obtida com o lançamento dos dados for equivalente a uma fração de denominador 12, ou seja, a certa quantidade de doze avos, o peão "caminha" essa quantidade de passos. Caso contrário, ele não sai do lugar que está e passa a vez para o próximo jogador. Assim, por exemplo: se a fração obtida for $\frac{10}{12}$, seu peão andará 10 casas. Se a fração obtida for $\frac{3}{6}$, seu peão andará 6 casas, pois $\frac{3}{6} = \frac{6}{12}$. Se a fração obtida for $\frac{7}{5}$, seu peão permanecerá na casa em que está e você passará a vez.

$3^{\underline{o}}$ Vence o jogo aquele jogador que, em primeiro lugar, atingir o ponto de chegada.

Depois de jogar algumas vezes responda às questões a seguir.

a) Quantos passos um jogador deu se ele obteve nos dois lançamentos respectivamente os seguintes números:

1º) 12 e 7?	2º) 6 e 5?	3º) 8 e 6?	4º) 8 e 7?	5º) 9 e 12?
6º) 7 e 8?	7º) 11 e 4?	8º) 1 e 1?	9º) 6 e 3?	10º) 3 e 6?

b) Em 5 rodadas consecutivas, o primeiro jogador sorteou as frações $\frac{7}{12}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$e $\frac{12}{6}$. Já o segundo jogador, nessas 5 rodadas, deu ao todo 47 passos. Ao final dessas rodadas, qual deles está a frente?

QUEBRANDO A CUCA

Atividade 21

Jorge e Ana estão comparando as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{6}{10}$. Jorge afirma que $\frac{2}{3} < \frac{6}{10}$ porque $2 < 6$ e $3 < 10$. Ana diz que $\frac{2}{3} > \frac{6}{10}$. Use desenhos, palavras ou apenas números para ajudar Ana a explicar a Jorge porque ele está errado.

Atividade 22

Uma fração é dita **unitária** se o seu numerador é igual a 1.

a) Quais das frações a seguir são iguais a alguma fração unitária? Justifique sua resposta.

$$\frac{4}{20}, \qquad \frac{21}{7}, \qquad \frac{4}{30}, \qquad \frac{6}{18}.$$

b) Uma fração com numerador maior do que o denominador pode ser igual a uma fração unitária? Justifique sua resposta!

c) Existe uma fração de denominador ímpar que seja igual à fração unitária $\frac{1}{2}$? Justifique sua resposta!

Atividade 23

Diga se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa. Explique a sua resposta com exemplos, desenhos ou palavras.

a) Se duas frações têm numeradores e denominadores diferentes, então elas representam quantidades diferentes.

b) Se duas frações têm denominadores iguais, mas numeradores diferentes, então elas representam quantidades diferentes.

c) Se duas frações têm numeradores iguais e maiores do que zero, mas denominadores diferentes, então elas representam quantidades diferentes.

d) Se duas frações representam quantidades iguais, então o numerador e o denominador de uma são obtidos multiplicando-se o numerador e o denominador da outra por um mesmo número natural.

Atividade 24

a) Escreva uma fração que seja menor do que 1 e maior do que 0.

b) Existe uma fração maior do que 0 e menor do que a fração que você escreveu no item a)? Em caso afirmativo, escreva uma tal fração.

c) Existe uma fração menor do que a fração que você escreveu no item b)? Em caso afirmativo, escreva uma tal fração.

d) Dada uma fração menor do que 1 e maior do que 0, é sempre possível determinar uma outra fração menor ainda? Em caso afirmativo, explique como tal fração pode ser obtida.

e) Existe uma fração menor do que 1 e que seja maior do que a fração que você escreveu no item a)? Em caso afirmativo, escreva uma tal fração.

f) Existe uma fração menor do que 1 e que seja maior do que a fração que você escreveu no item e)? Em caso afirmativo, escreva uma tal fração.

g) Dada uma fração menor do que 1, é sempre possível determinar uma outra fração menor do que 1 e que seja maior do que a fração dada? Em caso afirmativo, explique como tal fração pode ser obtida.

Atividade 25

Fabrício acredita que não existem frações entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$ (isto é, maiores de que $\frac{3}{5}$ e menores do que $\frac{4}{5}$) porque $3 < 4$ e não existe número natural entre 3 e 4. Fabrício continua: "Pelo mesmo motivo, não existem frações entre $\frac{11}{10}$ e $\frac{12}{10}$ e entre $\frac{19}{20}$ e $\frac{20}{20}$!". Você concorda com as afirmações e argumentos de Fabrício? Se você acha que Fabrício está errado, determine:

a) Uma fração entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$;

b) Duas frações entre $\frac{11}{10}$ e $\frac{12}{10}$;

c) Uma fração entre $\frac{19}{20}$ e $\frac{20}{20}$.

REFLETINDO

Nas atividades 24 e 25 você estudou uma propriedade importante do conjunto das frações:

dadas quaisquer duas frações que representam diferentes quantidades, sempre é possível encontrar uma fração entre elas.

Ora, se sempre é possível, como se pode então determinar uma terceira fração entre as frações dadas? Para explicar melhor o procedimento, veja primeiro um exemplo.

Suponha que se quer determinar uma fração entre as frações $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{4}$.

O primeiro passo é reescrevê-las usando um mesmo denominador:

$$\frac{5}{7} = \frac{4 \times 5}{4 \times 7} = \frac{20}{28}$$

e

$$\frac{3}{4} = \frac{7 \times 3}{7 \times 4} = \frac{21}{28}.$$

Ao comparar as frações obtidas, percebe-se que $\frac{20}{28} < \frac{21}{28}$. No entanto, não se vê de imediato um exemplo de fração que seja maior que $\frac{20}{28}$ e menor que $\frac{21}{28}$. Isto ocorre porque os números 20 e 21 são consecutivos.

Humm... que tal aumentar ainda mais os denominadores? Pois é isso que será feito. Multiplique por dois os numeradores e denominadores de cada uma das frações. Veja:

$$\frac{5}{7} = \frac{4 \times 5}{4 \times 7} = \frac{20}{28} = \frac{2 \times 20}{2 \times 28} = \frac{40}{56}$$

e

$$\frac{3}{4} = \frac{7 \times 3}{7 \times 4} = \frac{21}{28} = \frac{2 \times 21}{2 \times 28} = \frac{42}{56}.$$

Agora sim. Pode-se escolher a fração $\frac{41}{56}$ como solução do problema:

$$\frac{5}{7} = \frac{4 \times 5}{4 \times 7} = \frac{20}{28} = \frac{2 \times 20}{2 \times 28} = \frac{40}{56} < \frac{41}{56} < \frac{42}{56} = \frac{2 \times 21}{2 \times 28} = \frac{21}{28} = \frac{7 \times 3}{7 \times 4} = \frac{3}{4}.$$

De modo resumido:

$$\frac{5}{7} = \frac{40}{56} < \frac{41}{56} < \frac{42}{56} = \frac{3}{4}.$$

Fácil, não é mesmo? O método consiste em buscar representações equivalentes com denominadores suficientemente grandes que permitam a nossa escolha do numerador. Por isso a multiplicação simultânea dos numeradores e denominadores das frações acima por dois. Os números 20 e 21 são consecutivos, essa foi a dificuldade inicial. Mas o dobro de 20 e o dobro de 21, que são números pares, não são números consecutivos. E essa foi a jogada de mestre!

Agora sim, pode-se apresentar o procedimento utilizado em uma linguagem mais geral.

Dadas duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ diferentes (suponha $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$), queremos determinar uma terceira fração $\frac{p}{q}$ tal que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{c}{d}$.

O primeiro passo é encontrar frações iguais às anteriores, mas que tenham o mesmo denominador.

Para isso, basta multiplicar os numeradores e os denominadores de cada fração pelo denominador da outra fração. Veja:

$$\frac{a}{b} = \frac{d \times a}{d \times b},$$

onde d é o denominador da segunda fração e

$$\frac{c}{d} = \frac{b \times c}{b \times d},$$

onde b é o denominador da primeira fração.

Além disso, como $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, o produto $d \times a$ é diferente do produto $b \times c$.

Ora, se $d \times a$ e $b \times c$ não são números naturais consecutivos, já temos condições de determinar a fração $\frac{p}{q}$ basta fazer $q = b \times d$ e escolher um número natural m entre $d \times a$ e $b \times c$. Neste caso tem-se como solução para o problema a fração

$$\frac{p}{q} = \frac{m}{b \times d},$$

onde m é um número natural entre $d \times a$ e $b \times c$. Agora, se $d \times a$ e $b \times c$ são números naturais consecutivos, usa-se a jogada de mestre. Isto é, multiplica-se por dois os numeradores e denominadores das frações acima:

$$\frac{a}{b} = \frac{2d \times a}{2d \times b}$$

e

$$\frac{c}{d} = \frac{2b \times c}{2b \times d}.$$

Ora, $(2d \times a)$ e $(2b \times c)$ são dois números pares diferentes e, portanto, não consecutivos.

Portanto, basta escolher $p = (2d \times a) + 1$, o primeiro número ímpar depois do número $(2d \times a)$, e $q = (2b \times d)$, para encontrar uma solução do nosso problema:

$$\frac{a}{b} = \frac{2d \times a}{2d \times b} < \frac{(2d \times a) + 1}{2b \times d} < \frac{2b \times c}{2b \times d} = \frac{c}{d}.$$

Isto é,

$$\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}.$$

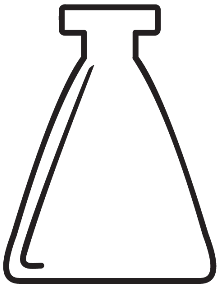
Lição 5

Adição e subtração de frações

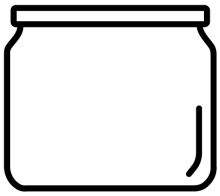
EXPLORANDO O ASSUNTO

Atividade 1

Miguel e Alice estão participando de uma campanha da escola para coleta de óleo de cozinha. O objetivo é disponibilizar recipientes para que as pessoas depositem óleo. Depois esses recipientes serão destinados a empresas que usarão o óleo descartado para fazer sabão. Eles conseguiram diferentes recipientes e agora desejam saber qual tem maior capacidade.



Recipiente 1: trazido pela Alice



Recipiente 2: trazido pelo Miguel

Eles tiveram a seguinte ideia: encheram os dois recipientes com água para, depois, verificar onde havia mais água. Para isso, usaram um copo como unidade de medida.

- O recipiente trazido por Alice foi enchido com 26 copos.
- O recipiente trazido por Miguel foi enchido com 40 copos.

Eles então observaram que a partir de **uma unidade de medida comum** (nesse caso o copo), poderiam não só dizer qual recipiente tinha maior capacidade, mas também o quanto era maior e qual seria a capacidade dos dois recipientes juntos. Usando a ideia de medida de Miguel e Alice, isto é, tomando o copo como unidade de medida, responda:

a) Qual recipiente tem maior capacidade?

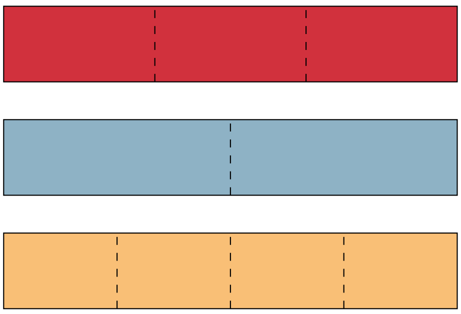
b) Qual é a capacidade dos dois recipientes juntos?

c) Quanta água se deve retirar do recipiente maior para que sobre a mesma quantidade de água que há no recipiente menor?

Atividade 2

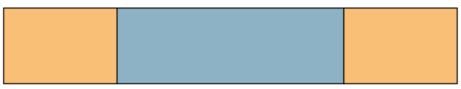
A professora Estela quer enfeitar sua sala de aula para uma festa da escola. Para isso ela comprou várias fitas, todas de mesmo tamanho, nas cores vermelho, azul e amarelo.

A professora cortou cada fita vermelha em 3 partes iguais, cada fita azul em 2 partes iguais e cada fita amarela em 4 partes iguais.



a) A que fração da fita original corresponde cada pedaço recortado pela professora Estela?

Em seguida, a professora Estela começou a juntar pedaços recortados das fitas, formando novas fitas coloridas. Ela começou juntando (de forma intercalada) um pedaço azul e dois pedaços amarelos.



Ela verificou que a nova fita formada tinha o mesmo tamanho da fita original. Isso aconteceu porque cada pedaço azul tem o mesmo tamanho de dois pedaços amarelos. Podemos representar o tamanho da nova fita formada pela professora por meio de uma **soma de frações**. Cada pedaço azul corresponde a $\frac{1}{2}$ da fita original. Cada pedaço amarelo corresponde a $\frac{1}{4}$ da fita original, então 2 pedaços amarelos correspondem a $\frac{2}{4}$ da fita original. Portanto, o tamanho da nova fita é igual a:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}.$$

Mas, como $\frac{2}{4}$ é igual a $\frac{1}{2}$ (cada pedaço azul tem o mesmo tamanho de dois pedaços amarelos), então:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.$$

O resultado dessa soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ é igual 2 pedaços de $\frac{1}{2}$, isto é, $\frac{2}{2}$ (que é igual 1). Assim:

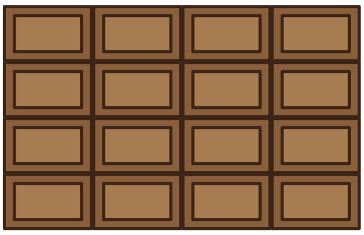
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Neste caso, o resultado 1 corresponde ao tamanho da fita original.

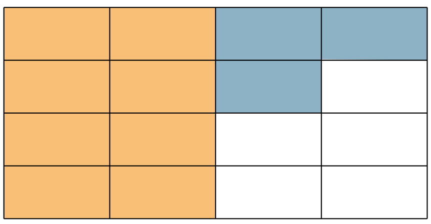
b) A professora também agrupou pedaços de fita, juntando 1 pedaço amarelo e 1 pedaço azul, como na figura a seguir. A qual fração do tamanho original das fitas esses dois pedaços juntos correspondem?

Atividade 3

Uma barra de chocolate é vendida com as marcações mostradas na figura abaixo.



Alice comeu a metade dessa barra de chocolate (em bege), quebrou o restante da barra em pedaços, seguindo as marcações e comeu 3 desses pedaços (em azul).



Se considerarmos a barra de chocolate como a unidade, Alice comeu $\frac{1}{2}$ da barra e Miguel $\frac{3}{16}$. Cada pedaço da barra partida por Miguel corresponde a uma fração da barra. Observe que as quantidades de chocolate comidas por Alice e Miguel podem ser ambas escritas como junção dessas frações: Miguel comeu 3 desses pedaços e Alice 8.

a) Cada um dos pedaços partidos por Miguel corresponde a que fração da barra de chocolate?

b) Complete a parte em branco (numerador) para indicar a fração da barra de chocolate que Alice comeu.

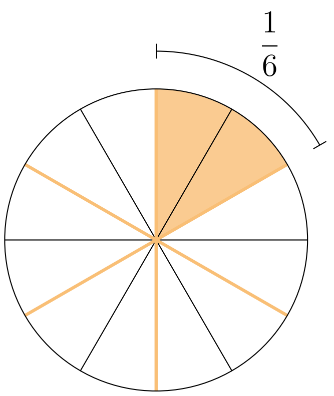
$$\frac{1}{2} = \frac{\square}{16}$$

c) Que fração da barra de chocolate foi comida por Alice e por Miguel, juntos?

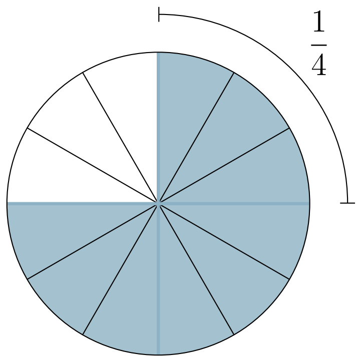
d) Que fração da barra de chocolate restou?

Atividade 4

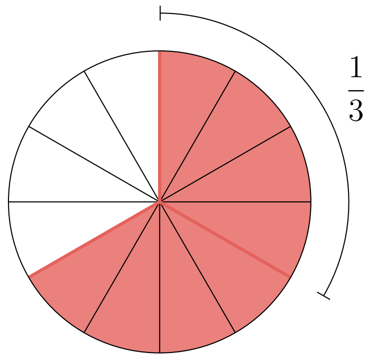
Amanda, Bruno e Caio pediram três pizzas do mesmo tamanho, mas com sabores diferentes. Todas as pizzas nessa pizzaria são servidas em **12 fatias** iguais. Amanda comeu $\frac{1}{6}$ de uma pizza, Bruno comeu $\frac{3}{4}$ de outra, e Caio comeu $\frac{2}{3}$ da pizza que pediu.



Fração de pizza consumida por Amanda $\frac{1}{6}$



Fração de pizza consumida por Bruno $\frac{3}{4}$



Fração de pizza consumida por Caio $\frac{2}{3}$

a) Que fração de uma pizza cada fatia representa?

b) Complete os espaços (numeradores) a seguir registrando outra representação para a fração de uma pizza que cada uma das crianças comeu.
Amanda: $\frac{1}{6} = \frac{}{12}$ Bruno: $\frac{3}{4} = \frac{}{12}$ Caio: $\frac{2}{3} = \frac{}{12}$

c) Quem comeu mais pizza? Quem comeu menos pizza?

d) Que quantidade de pizza Bruno comeu a mais do que Caio?

e) Que quantidade de pizza Amanda e Bruno comeram juntos?

f) Que fração de uma pizza Amanda comeu a menos do que Caio?

g) Quanto a mais de pizza Bruno consumiu, em relação a Amanda?

ORGANIZANDO AS IDEIAS

Na Atividade 2, juntou-se um pedaço de fita amarela com um pedaço azul. Para saber que fração essa nova fita representa do tamanho original das fitas, deve-se somar $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, porque a fita azul é metade e a amarela é um quarto do tamanho original das fitas.

FIGURAS

Como somar metades e quartos? Para resolver esse problema, subdivide-se o pedaço de fita azul em duas partes iguais, como na figura a seguir, obtendo-se assim dois quartos.

FIGURAS

Somar $\frac{2}{4}$ com $\frac{1}{4}$ é mais simples: $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Repare que essa também foi a estratégia usada para somar as quantidades de chocolate comidas por Alice ($\frac{1}{2}$ de uma barra) e por Miguel ($\frac{3}{16}$ de uma barra), uma vez que $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{16}$ têm denominadores diferentes. Observou-se que metade da barra de chocolate corresponde a $\frac{8}{16}$ dessa barra. Somar $\frac{8}{16}$ com $\frac{3}{16}$ é simples: $\frac{8}{16} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$.

FIGURA

Para se calcular quanto chocolate restou foi necessário retirar $\frac{11}{16}$ da unidade, isto é, $1 - \frac{11}{16}$. Novamente deve-se representar as quantidades por frações com o mesmo denominador. Para isso observa-se que a barra de chocolate está subdividida em 16 partes iguais, ou seja, $1 = \frac{16}{16}$. Assim, escreve-se $\frac{16}{16} - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}$. Restando, portanto, $\frac{5}{16}$ da barra de chocolate.

Na Atividade 4, para calcular a fração de uma pizza que Bruno e Caio comeram juntos, foi necessário calcular $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$. Agora surge outra novidade, além dos denominadores serem diferentes, não é possível igualar os denominadores alterando apenas uma das frações.

FIGURA

Subdividindo-se a pizza em 12 fatias iguais, as quantidades $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$ podem ser representadas com frações de mesmo denominador: $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ e $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$. Assim,

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}$$

de uma pizza ou 1 pizza inteira e 5 doze avos de uma pizza pois

$$\frac{17}{12} = \frac{12}{12} + \frac{5}{12} = 1 + \frac{5}{12}.$$

A escolha adequada de uma subdivisão da unidade que permita representar as frações com um mesmo denominador foi a estratégia usada para calcular a adição e a subtração de frações. Essa será a estratégia geral para se efetuar adição e subtração de frações.

Repare que pode haver mais do que uma subdivisão comum da unidade, por exemplo

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{2}{12}+\frac{9}{12}=\frac{11}{12}.$$

FIGURAS

Mas também $\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{4}{24}+\frac{18}{24}=\frac{22}{24}$.

FIGURAS

ou ainda, $\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{6}{36}+\frac{27}{36}=\frac{33}{36}$

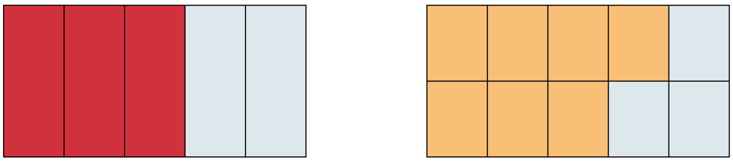
FIGURA

e, como se sabe, $\frac{11}{12}=\frac{22}{24}=\frac{33}{36}$.

MÃO NA MASSA

Atividade 5

Os dois retângulos da figura a seguir são iguais. Em um deles está representada a fração $\frac{3}{5}$ e no outro a fração $\frac{7}{10}$ do retângulo.



a) Determine uma subdivisão da unidade que permita expressar essas quantidades por frações com um mesmo denominador. Represente tal subdivisão nas figuras acima.

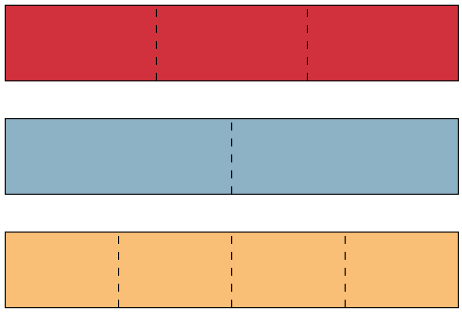
b) Escreva frações iguais a $\frac{3}{5}$ e a $\frac{7}{10}$ a partir dessa subdivisão.

c) Existe alguma outra subdivisão, diferente da que você usou para responder os itens a) e b), com a qual também seja possível responder ao item b)? Se sim, qual?

d) Juntas, as regiões destacadas em vermelho e em laranja determinam um região maior, menor ou igual a um retângulo? Explique.

Atividade 6

Aqui retomamos a Atividade 2, na qual a professora Estela comprou fitas de mesmo tamanho e as cortou em partes iguais: a vermelha em três pedaços; a azul em dois pedaços e a amarela em quatro pedaços.



a) Agora, a professora Estela juntou um pedaço da fita vermelha com um pedaço da fita azul. Essa nova fita formada tem tamanho maior, menor ou igual ao tamanho original de uma fita? A que fração de uma fita original corresponde a nova fita vermelha e azul? Qual é a diferença entre os tamanhos de uma fita original e da fita vermelha e azul?

b) A professora formou então mais uma fita colorida, agora juntando, de forma intercalada, dois pedaços vermelhos e três pedaços amarelos. Essa nova fita vermelha e amarela é maior ou menor do que uma fita original? A que fração de uma fita original corresponde a nova fita vermelha e amarela? Qual é a diferença entre os tamanhos da fita original e da fita vermelha e amarela?

Atividade 7

Nos itens a seguir, escreva frações que tenham mesmo denominador e são iguais a cada uma das frações dadas. Para cada par de frações, destaque a subdivisão escolhida da unidade para determinar o denominador comum e represente essa subdivisão por meio de um desenho.

a) $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{9}$ b) $\frac{3}{10}$ e $\frac{4}{5}$ c) 1 e $\frac{3}{7}$

d) $\frac{3}{5}$ e $\frac{8}{3}$ e) $\frac{7}{8}$ e $\frac{13}{12}$ f) $\frac{7}{4}$ e 5

Atividade 8

Em cada um dos itens a seguir, determine o resultado e explique seu raciocínio por meio de desenhos.

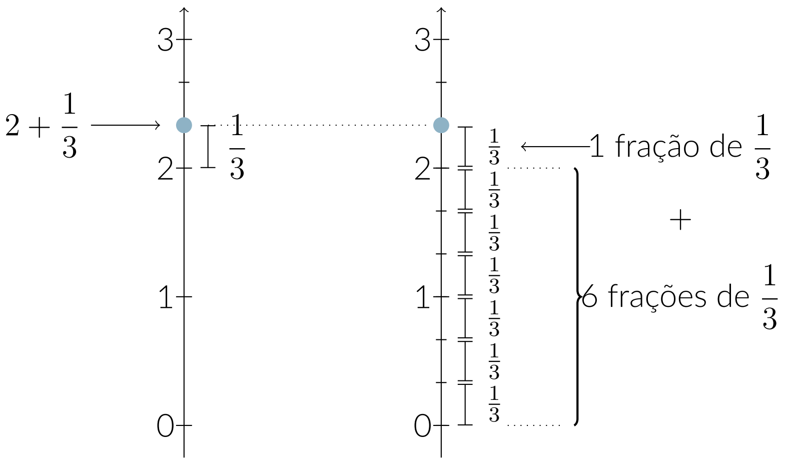
a) $\frac{1}{3} - \frac{2}{9}$ b) $\frac{3}{10} + \frac{4}{5}$ c) $1 - \frac{3}{7}$

Atividade 9

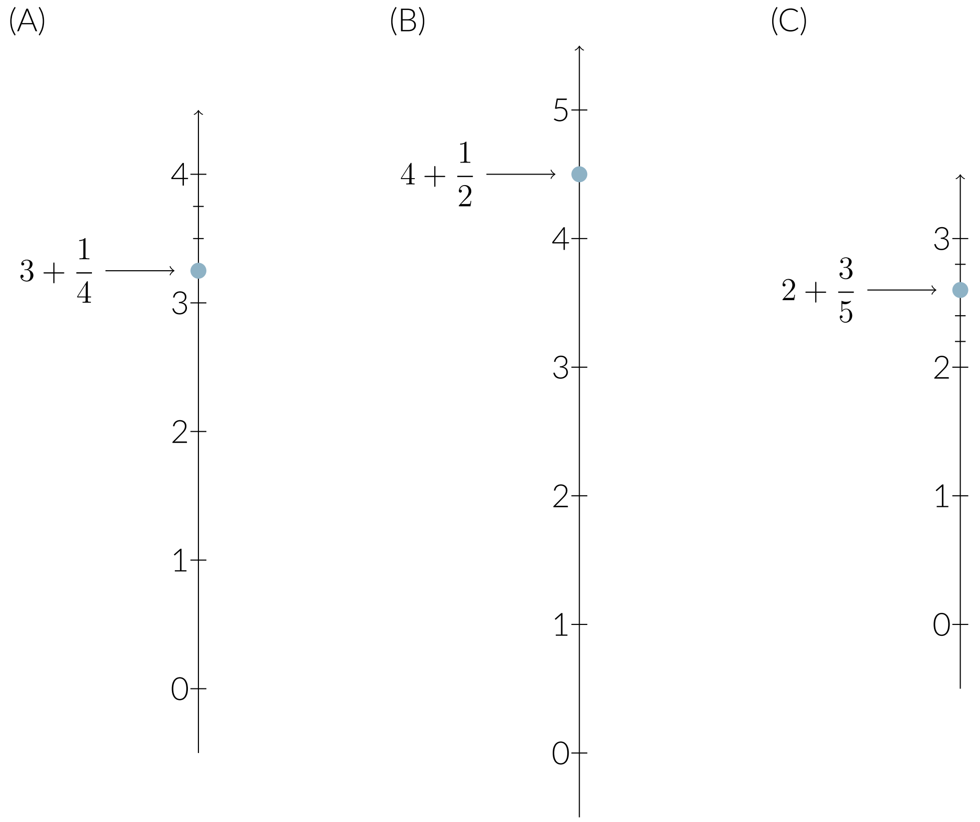
Para determinar a soma $2 + \frac{1}{3}$ Miguel inicialmente marcou na reta numérica o ponto determinado pela justaposição do segmento correspondente a 2 unidades com um segmento igual a $\frac{1}{3}$ da unidade, como na figura a seguir.

Miguel relacionou essa estratégia com o seguinte cálculo:

$$2 + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$



a) Em cada item a seguir, a partir da imagem repita o procedimento feito por Miguel e realize os cálculos.



b) Que valor é obtido se juntarmos 7 inteiros com dois terços?

Atividade 10

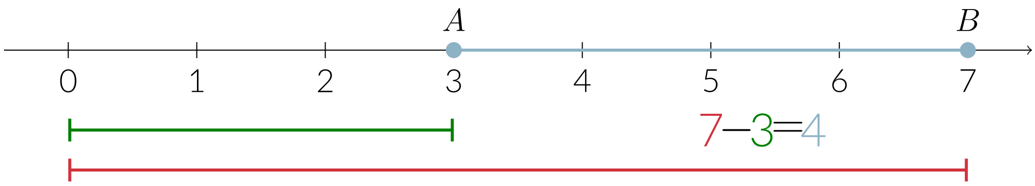
Quanto se deve acrescentar a $\frac{3}{8}$ para que se obtenha $\frac{27}{8}$?

Atividade 11

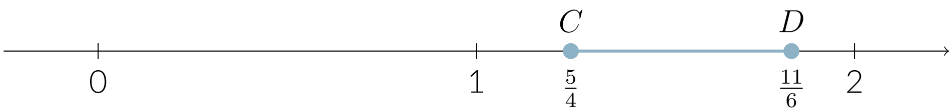
Qual é o maior número, $\frac{19}{7}$ ou 2? Quanto deve acrescentado ao menor número para se chegar ao maior?

Atividade 12

Observando a reta, Miguel conseguiu determinar o tamanho do segmento azul entre os dois pontos $A = 3$ e $B = 7$ marcados da seguinte forma:



Miguel calculou o tamanho do segmento azul fazendo a diferença entre o tamanho do segmento vermelho e o tamanho do segmento verde. Assim, concluiu que o tamanho do segmento AB é igual a 4. Usando um raciocínio parecido, e considerando $C = \frac{5}{4}$ e $D = \frac{11}{6}$, ajude Miguel a realizar as tarefas a seguir.



a) Escreva C e D a partir de uma mesma subdivisão da unidade (isto é, com o mesmo denominador).

b) Determine seis frações que correspondam a pontos na reta numérica entre C e D.
Discuta com seus colegas se é possível determinar mais que seis frações e, se for possível, quais seriam as estratégias para fazer isso.

c) Calcule o tamanho do segmento CD.

d) Determine uma fração que, somada a $\frac{5}{4}$ dê um resultado menor que $\frac{11}{6}$. Justifique a sua resposta usando a reta.

$$\frac{5}{4} + \frac{\square}{\square} < \frac{11}{6}.$$

e) Determine outras três possíveis respostas para o item anterior.

f) Determine duas frações tais que a soma delas adicionada a $\frac{5}{4}$ dê como resultado $\frac{11}{6}$. Justifique a sua resposta usando a reta.

$$\frac{5}{4} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{11}{6}.$$

Atividade 13

A família de Miguel reservou um determinado espaço retangular para fazer um canteiro em seu quintal. A família quer que o canteiro tenha rosas e verduras frescas. O pai de Miguel disse que precisa de $\frac{2}{3}$ do espaço inicialmente reservado, para cultivar rosas. A mãe disse que necessita de $\frac{1}{2}$ desse espaço, para plantar as verduras. Quando Miguel ouviu o diálogo dos pais, pensou nas seguintes questões:

a) Quem precisa de mais espaço, seu pai ou sua mãe?

b) O espaço reservado inicialmente para o canteiro é suficiente para comportar os espaços de que o pai e a mãe de Miguel precisam?

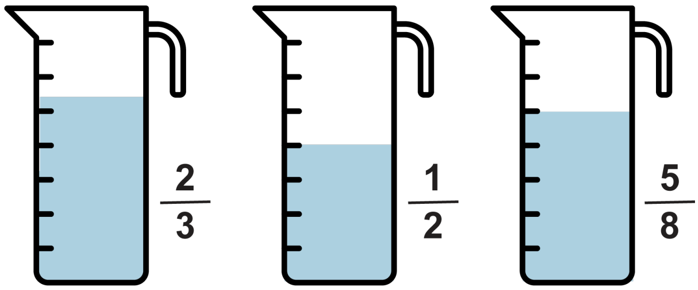
c) Caso o espaço seja suficiente, que fração do canteiro ficaria sem uso?

d) Caso o espaço não seja suficiente, que fração do canteiro reservado inicialmente deverá ser acrescentada ao mesmo para que a família consiga fazer as plantações que deseja?

Faça um desenho que ajude a explicar as suas respostas para as questões de Miguel. Não deixe de indicar a subdivisão da unidade que você empregou.

Atividade 14

Há três jarras de mesmo tamanho contendo água. Na primeira jarra, a água ocupa dois terços de sua capacidade. Na segunda, a água ocupa metade de sua capacidade. Na terceira, cinco oitavos.



É possível redistribuir a água de todos os recipientes em somente dois deles?

QUEBRANDO A CUCA

Atividade 15

Diga se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Para as verdadeiras, explique com as suas palavras por que acha que são verdadeiras. Para as falsas, dê um exemplo que justifique a sua avaliação.

a) Adicionando um número natural com uma fração que não é igual a um número natural obtemos como resposta um número natural.

b) Subtraindo de um número natural uma fração que não é igual a um número natural obtemos como resposta um número natural.

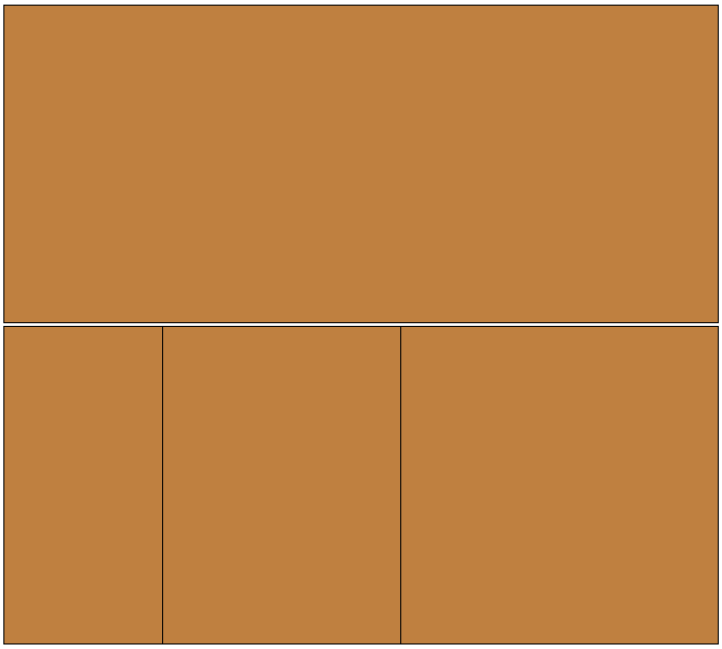
c) Adicionando duas frações que não são iguais a um número natural nunca obtemos como resposta um número natural.

d) Subtraindo de uma fração que não é igual a um número natural outra fração que não é igual a um número natural nunca obtemos como resposta um número natural.

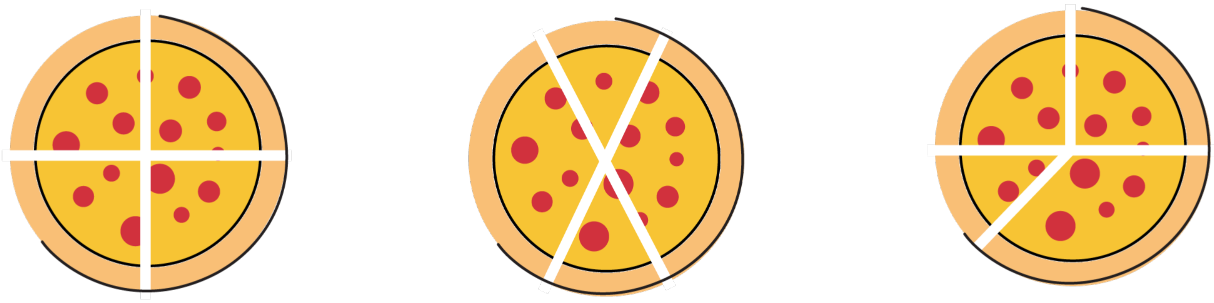
Folhas para reprodução

LIÇÃO 1

Atividade 1

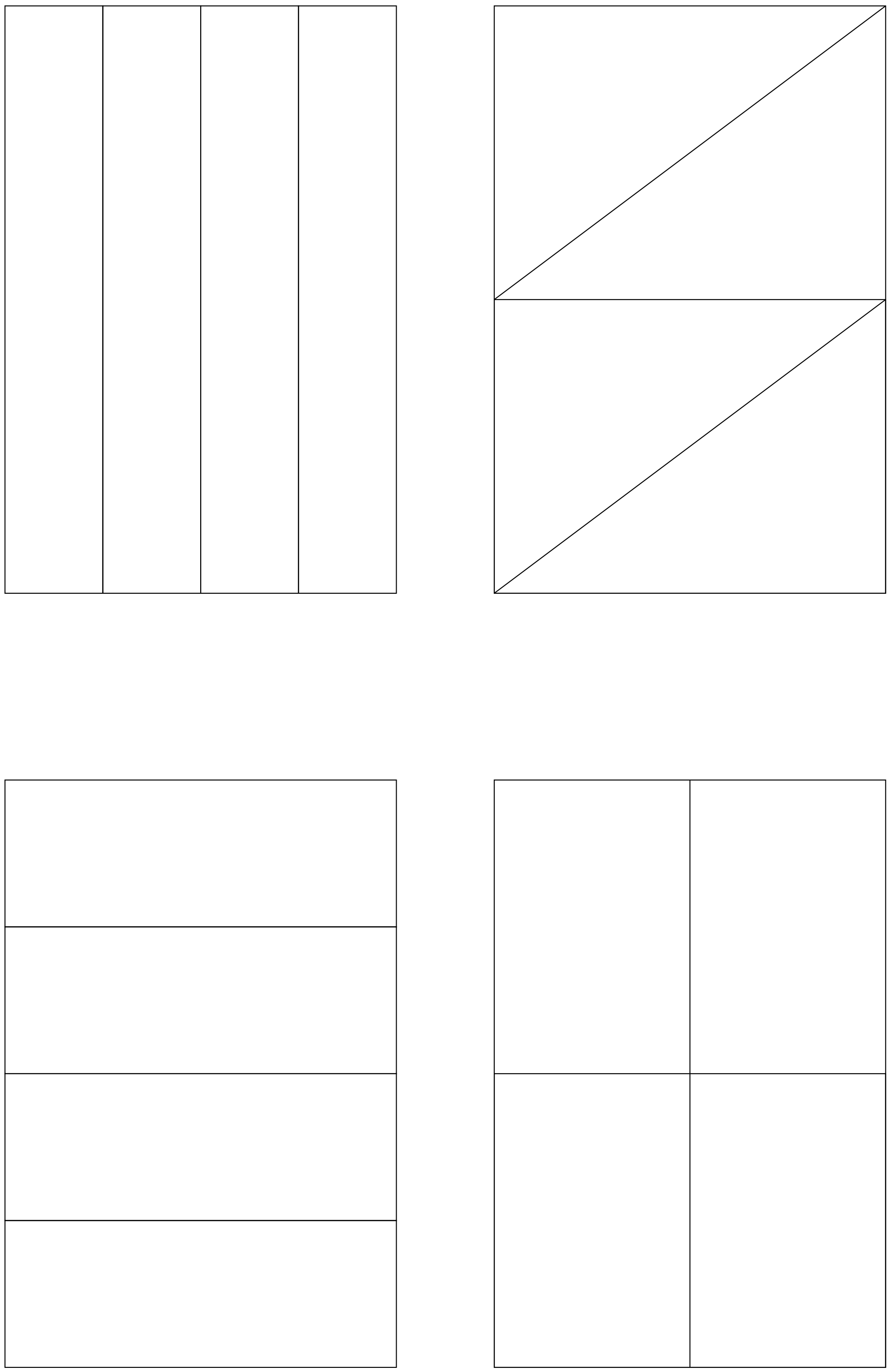


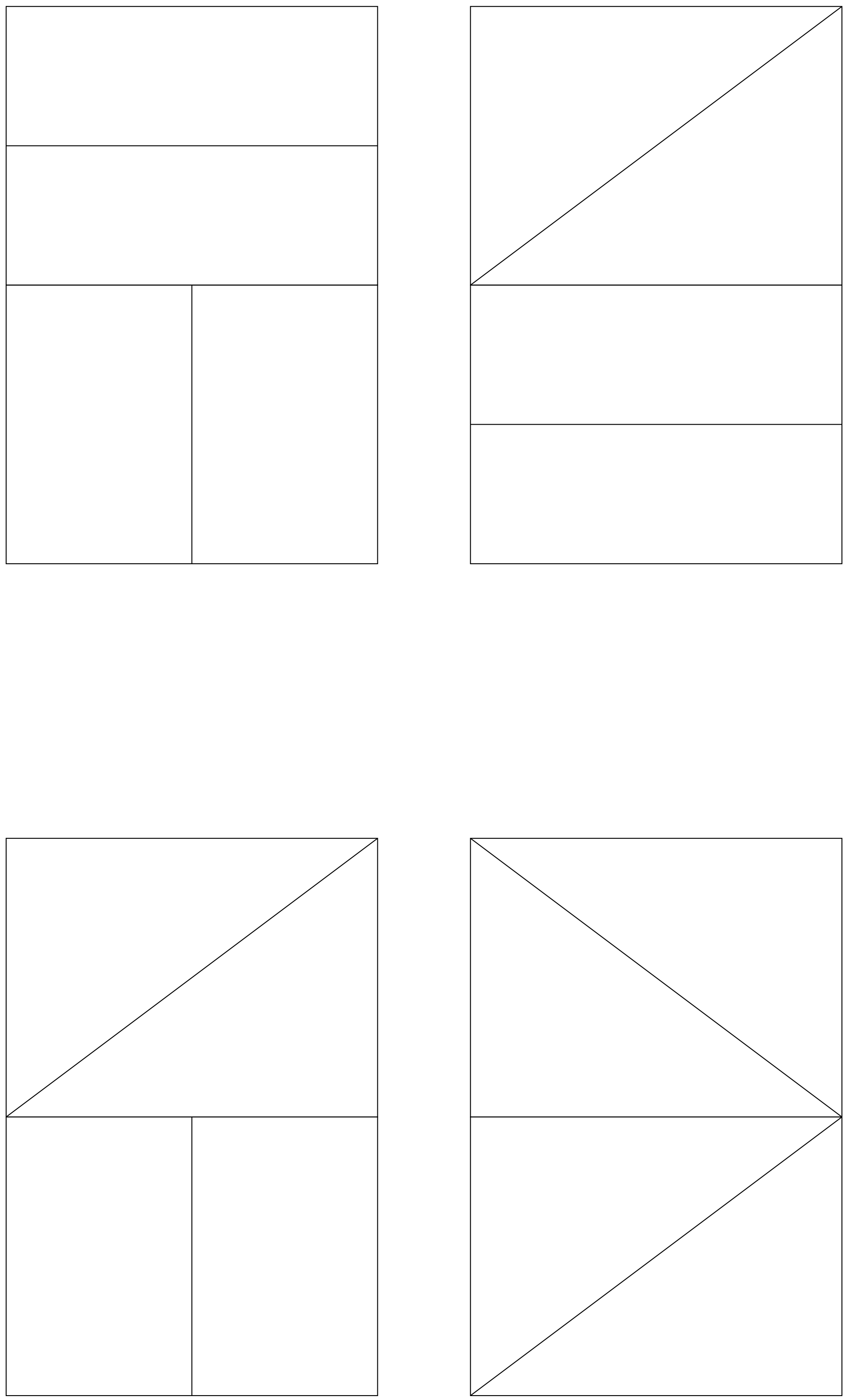
Atividade 2



Atividade 3

Atividade 4





Atividade 9

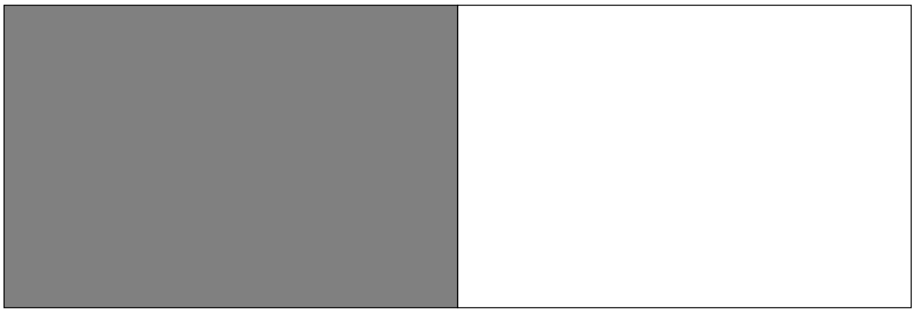


Figura 1

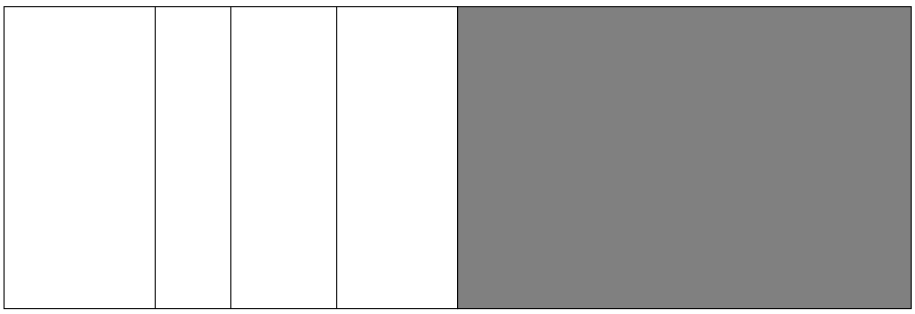


Figura 2

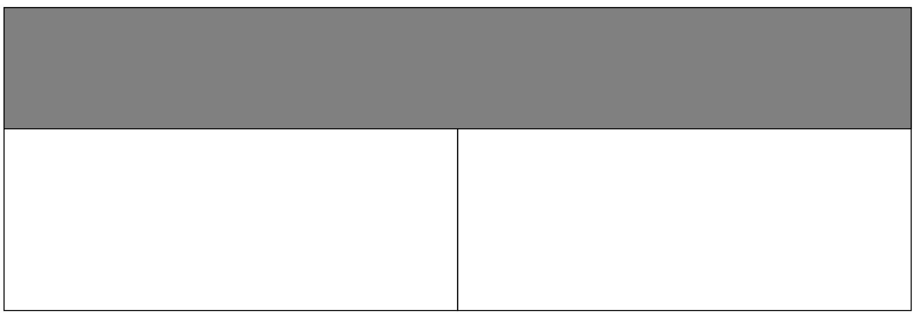


Figura 3

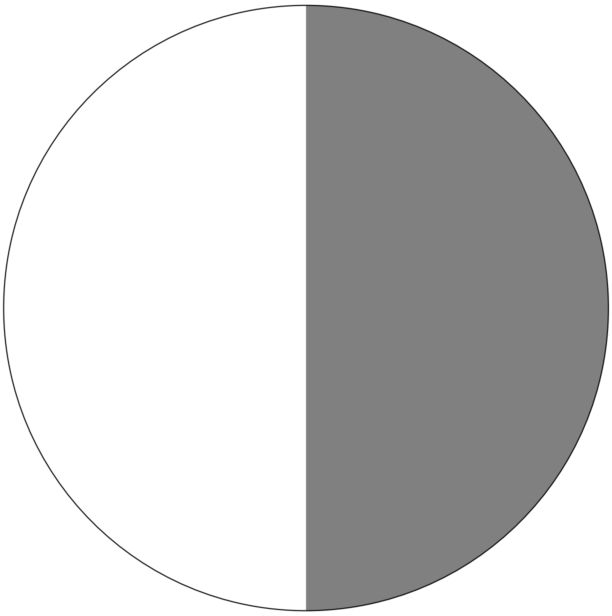


Figura 4

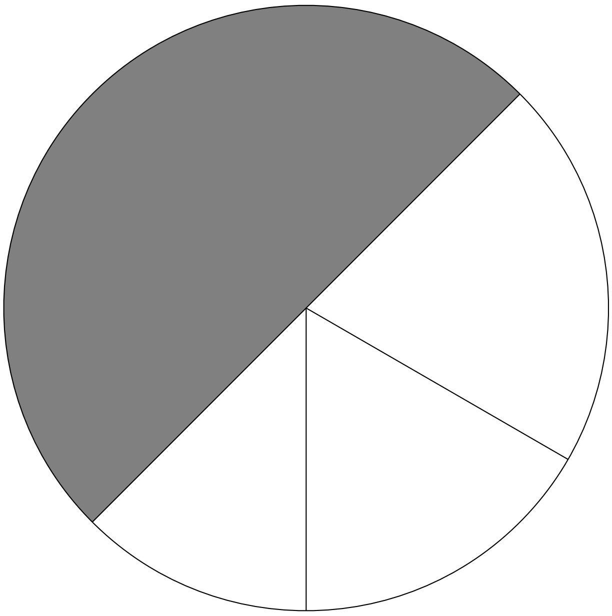


Figura 5

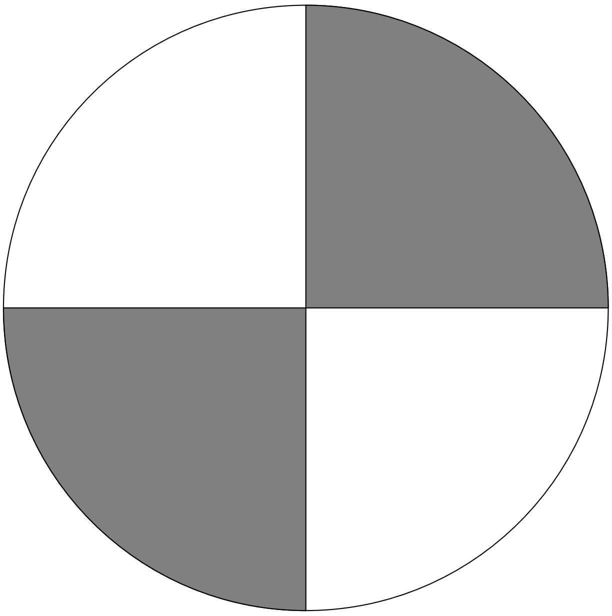


Figura 6

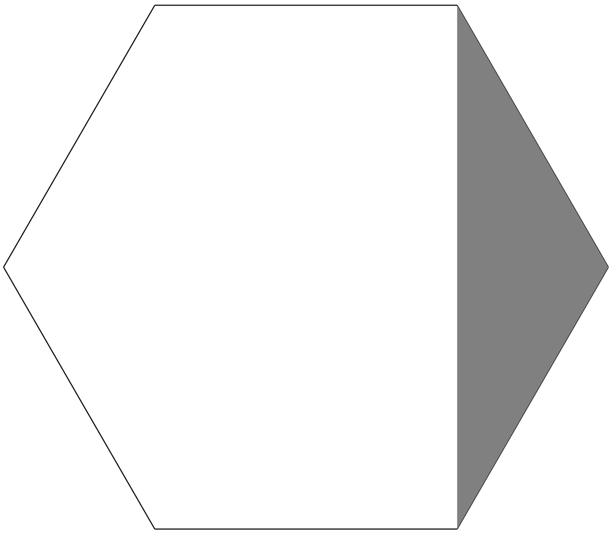


Figura 7

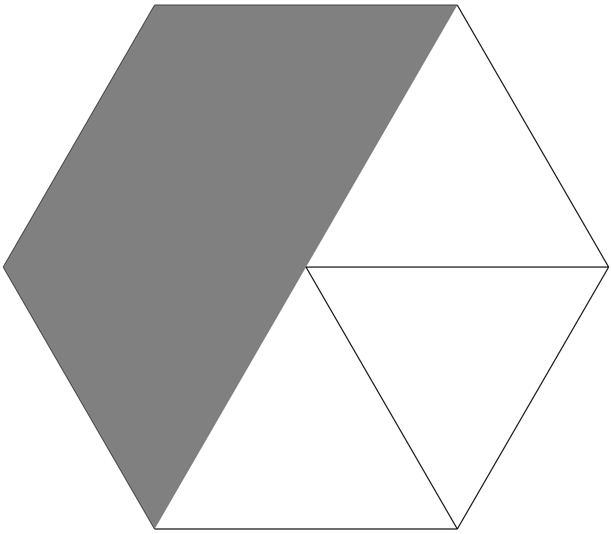


Figura 8

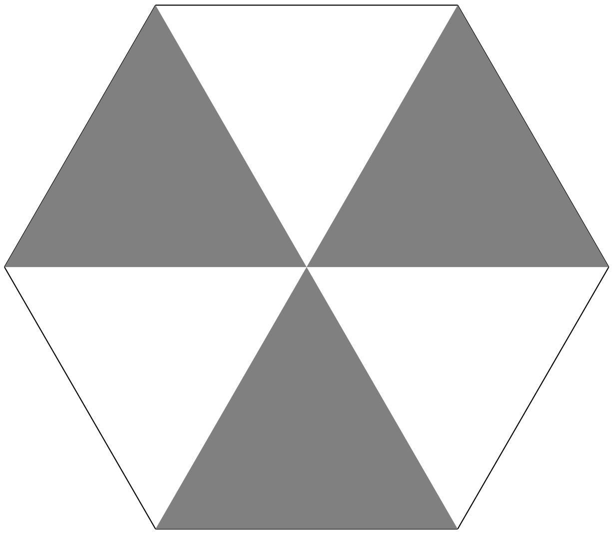


Figura 9

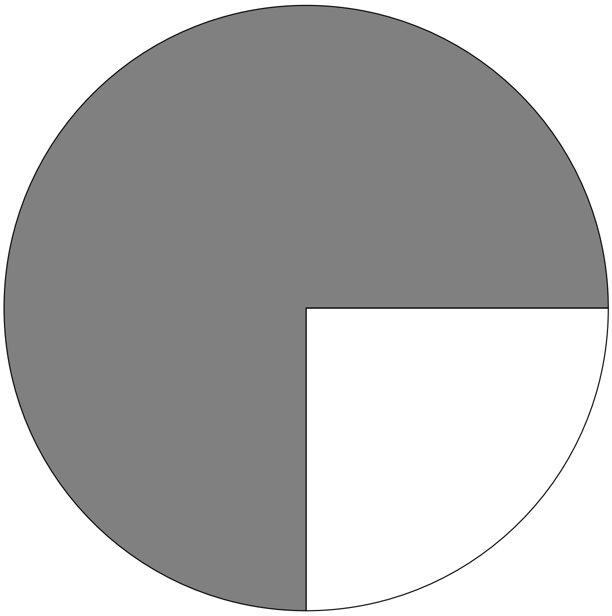


Figura 10

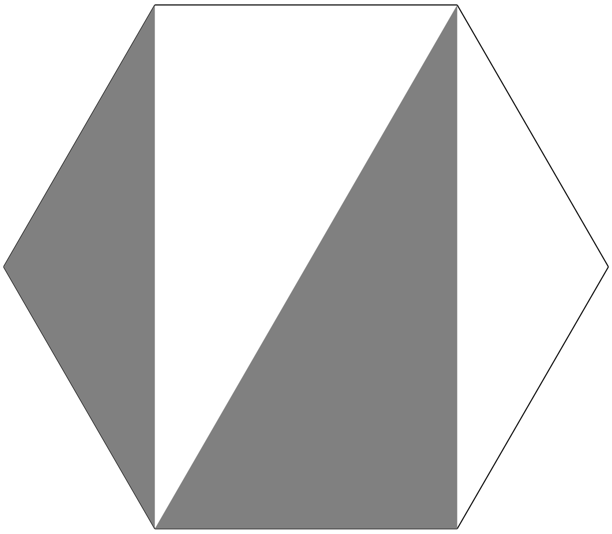
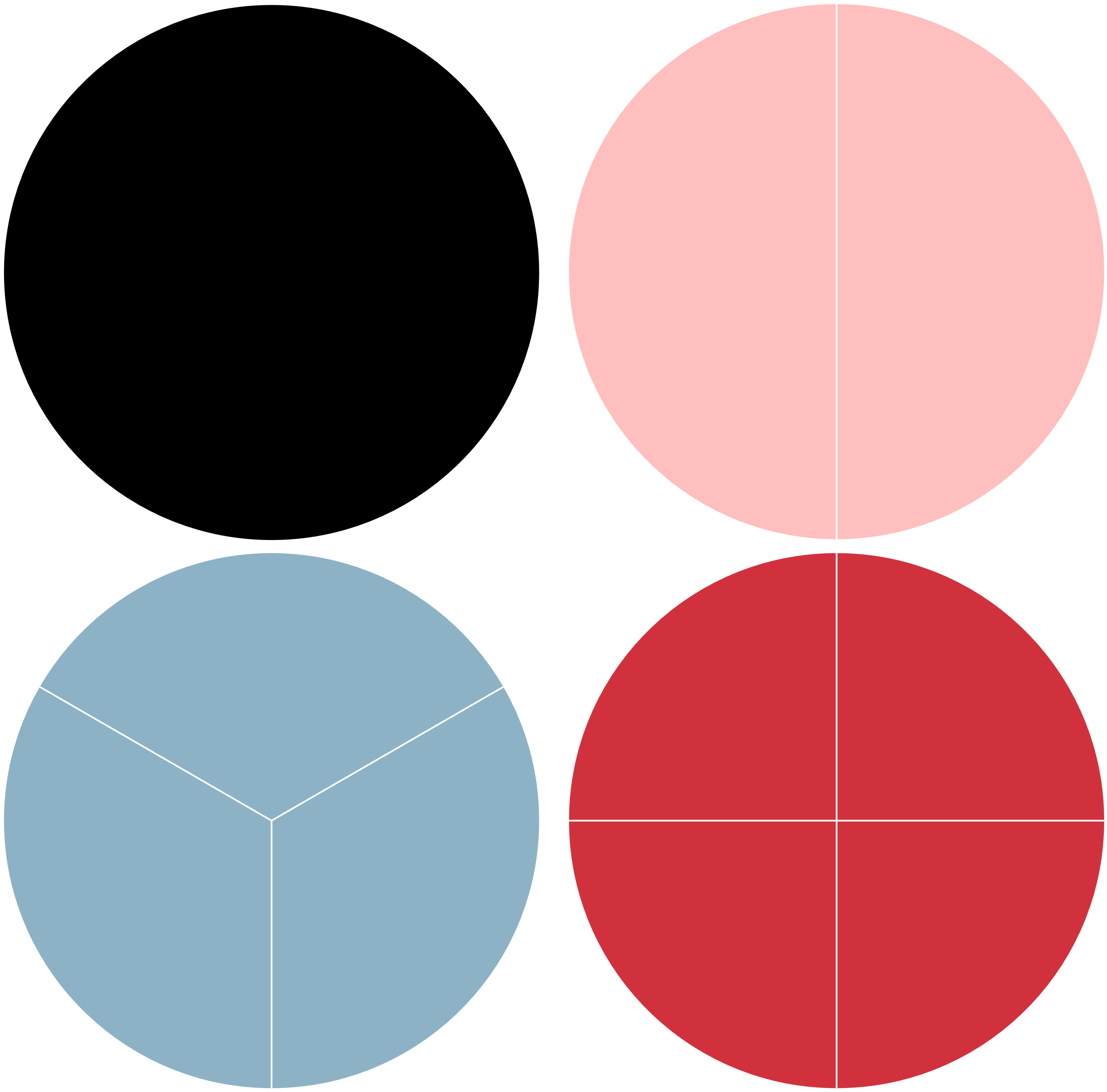
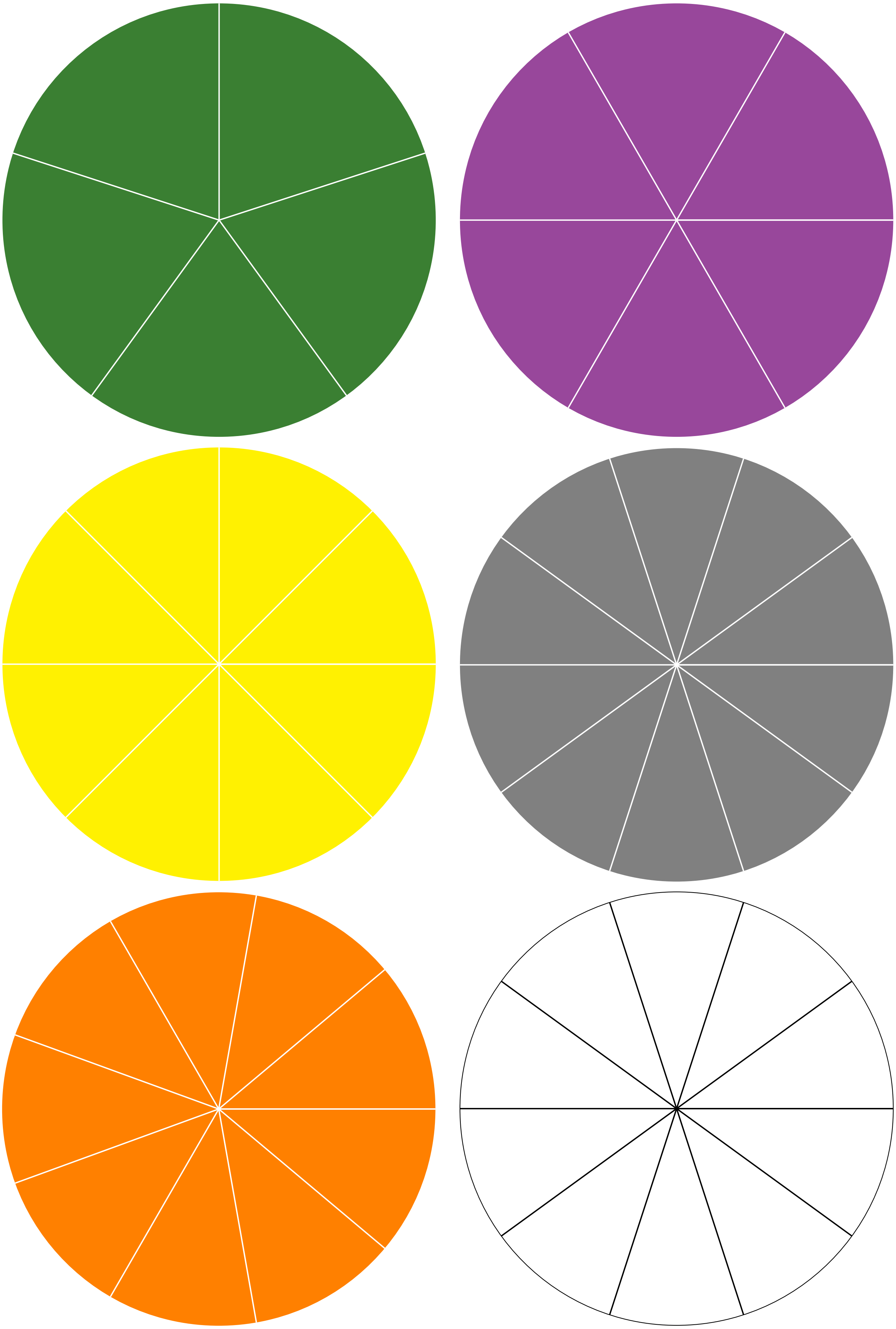


Figura 11

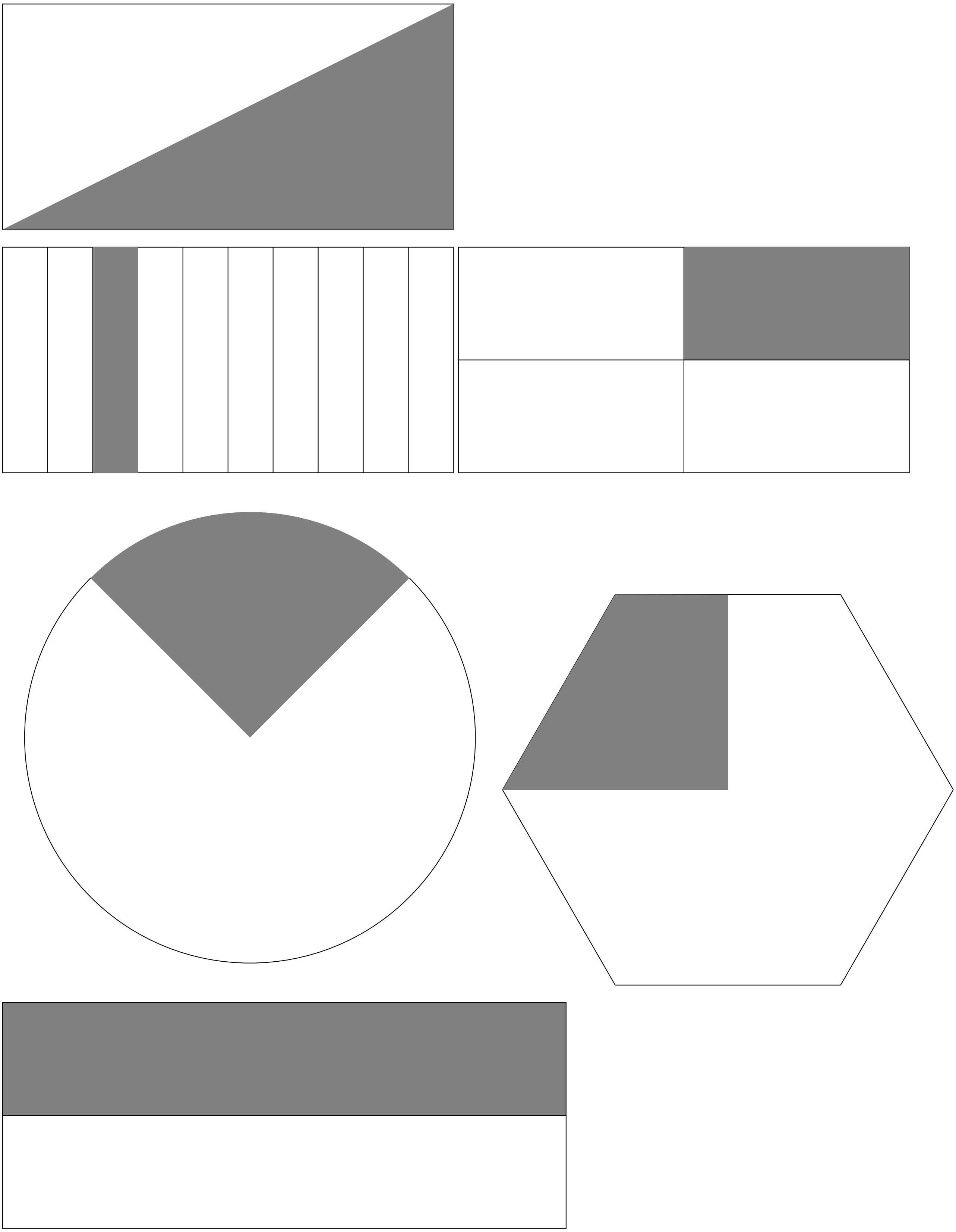
Figura 12

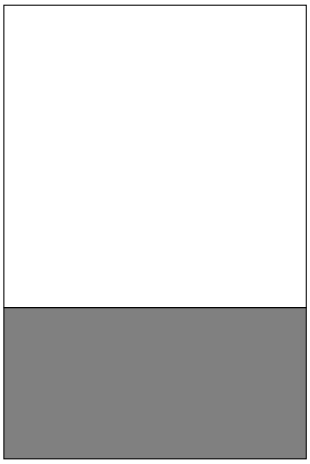
Atividade 10

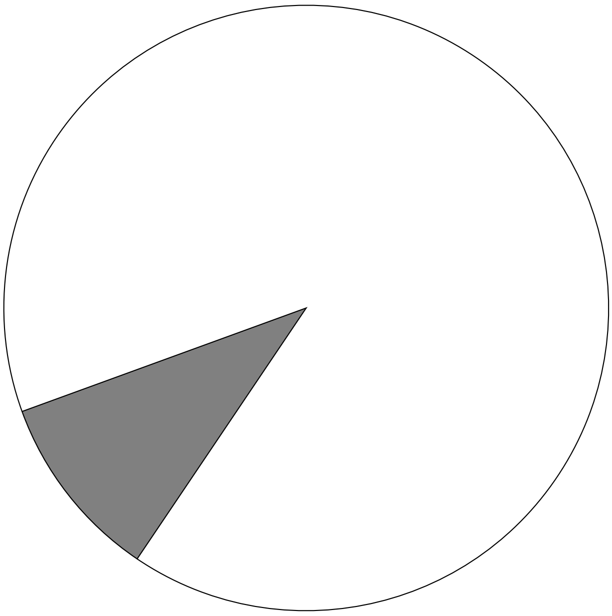


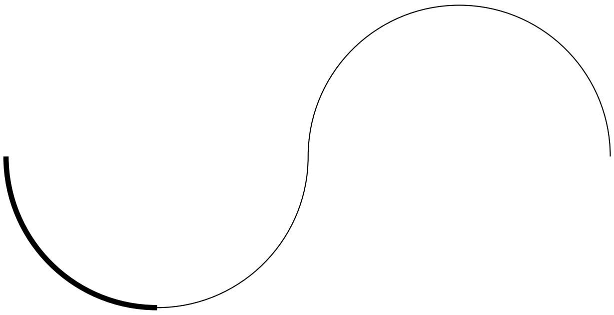


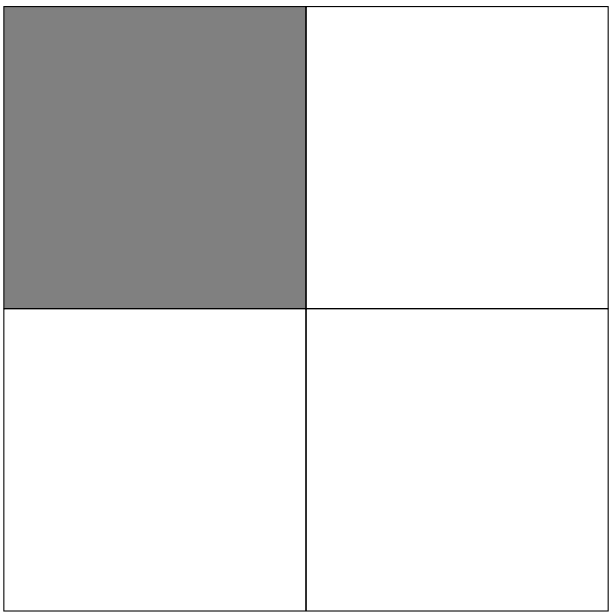
Atividade 12

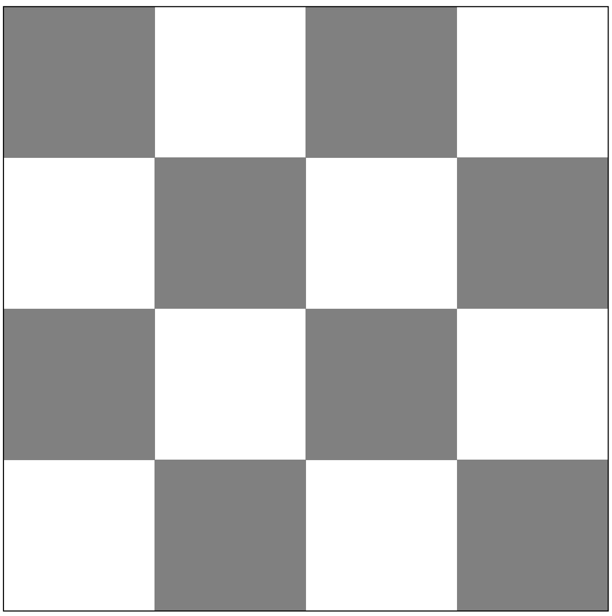












LICAO 2

Atividade 1

Atividade 2

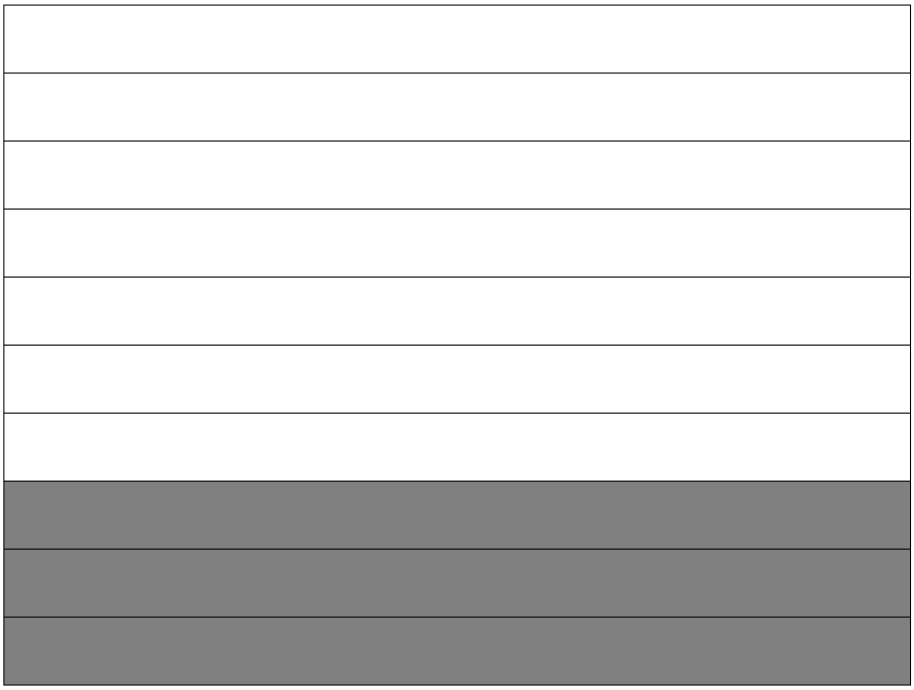
LICAO 3

Atividade 6

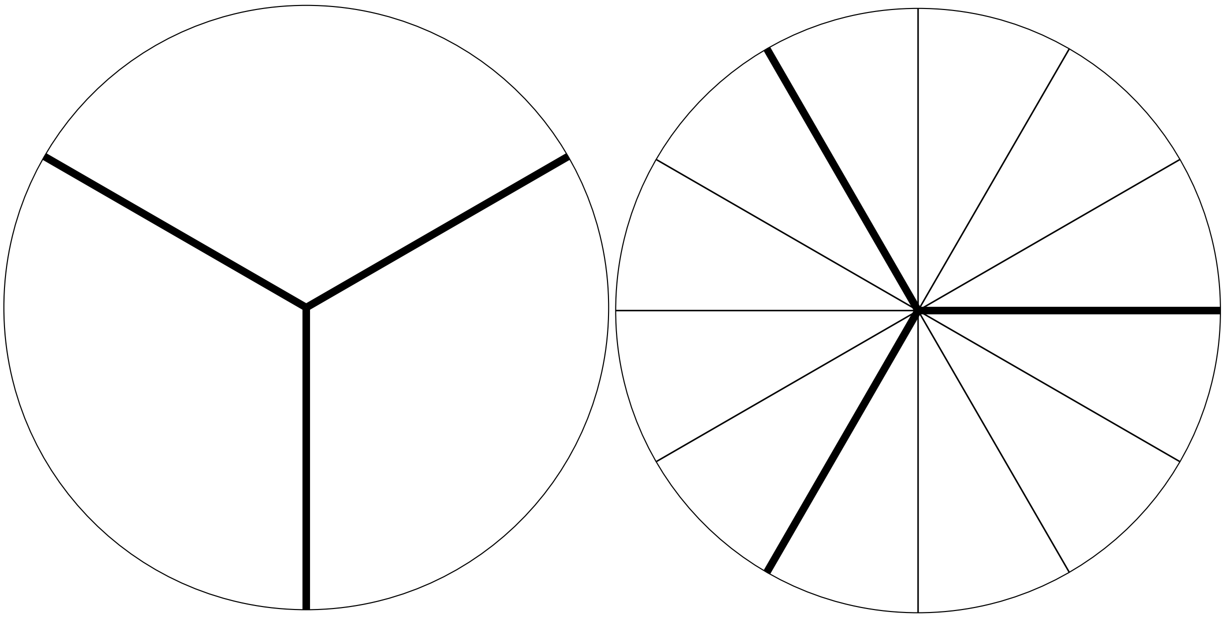
Atividade 7

LICAO 4

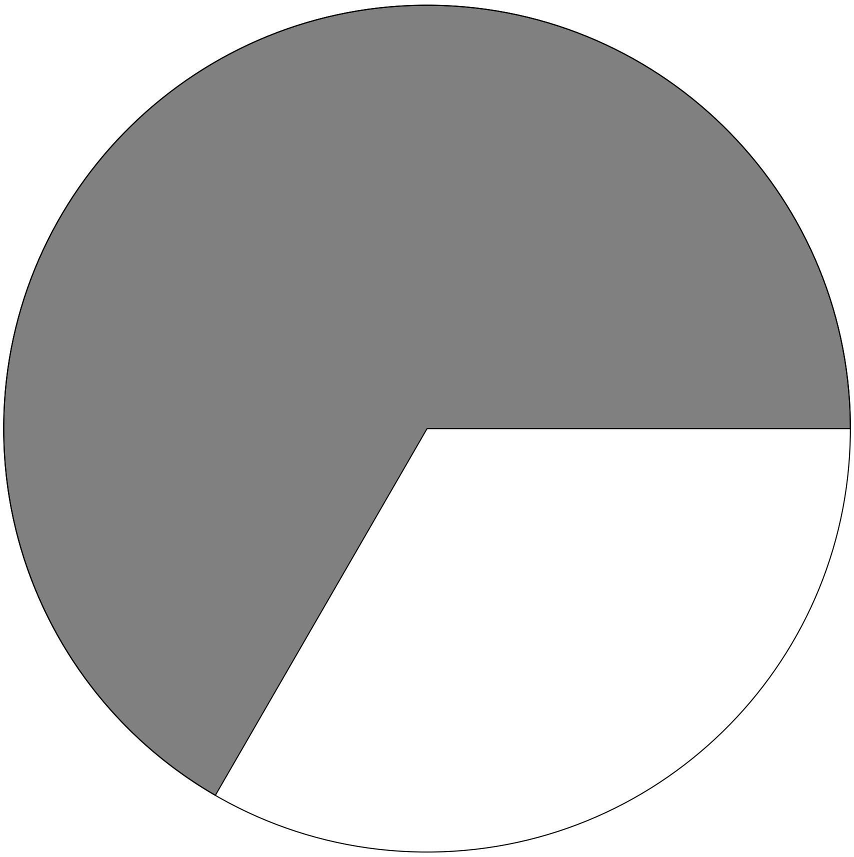
Atividade 2



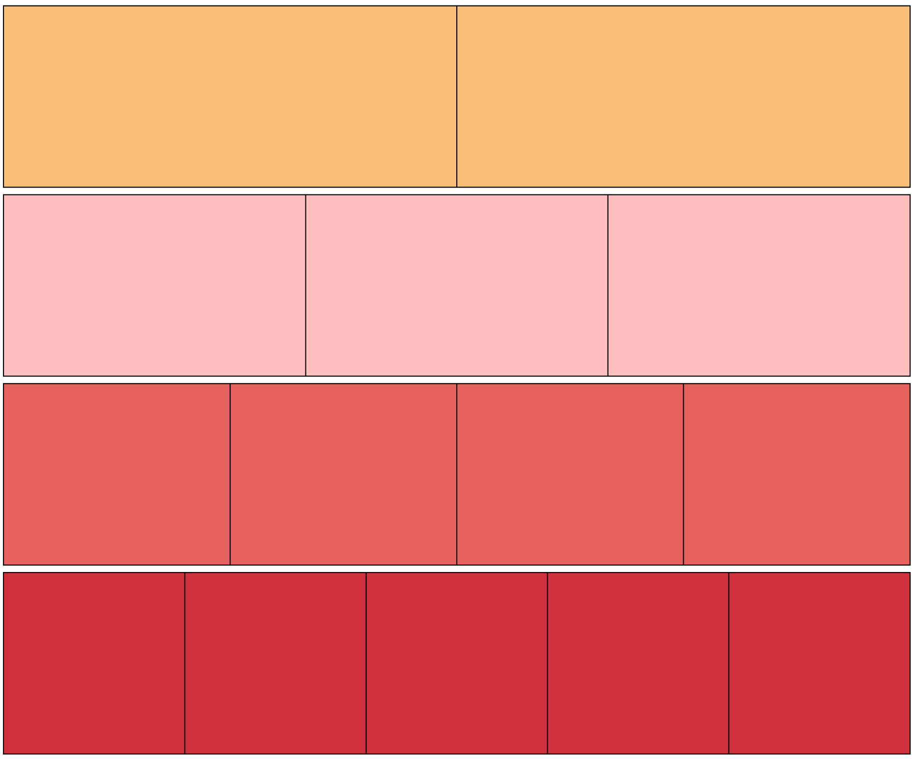
Atividade 4

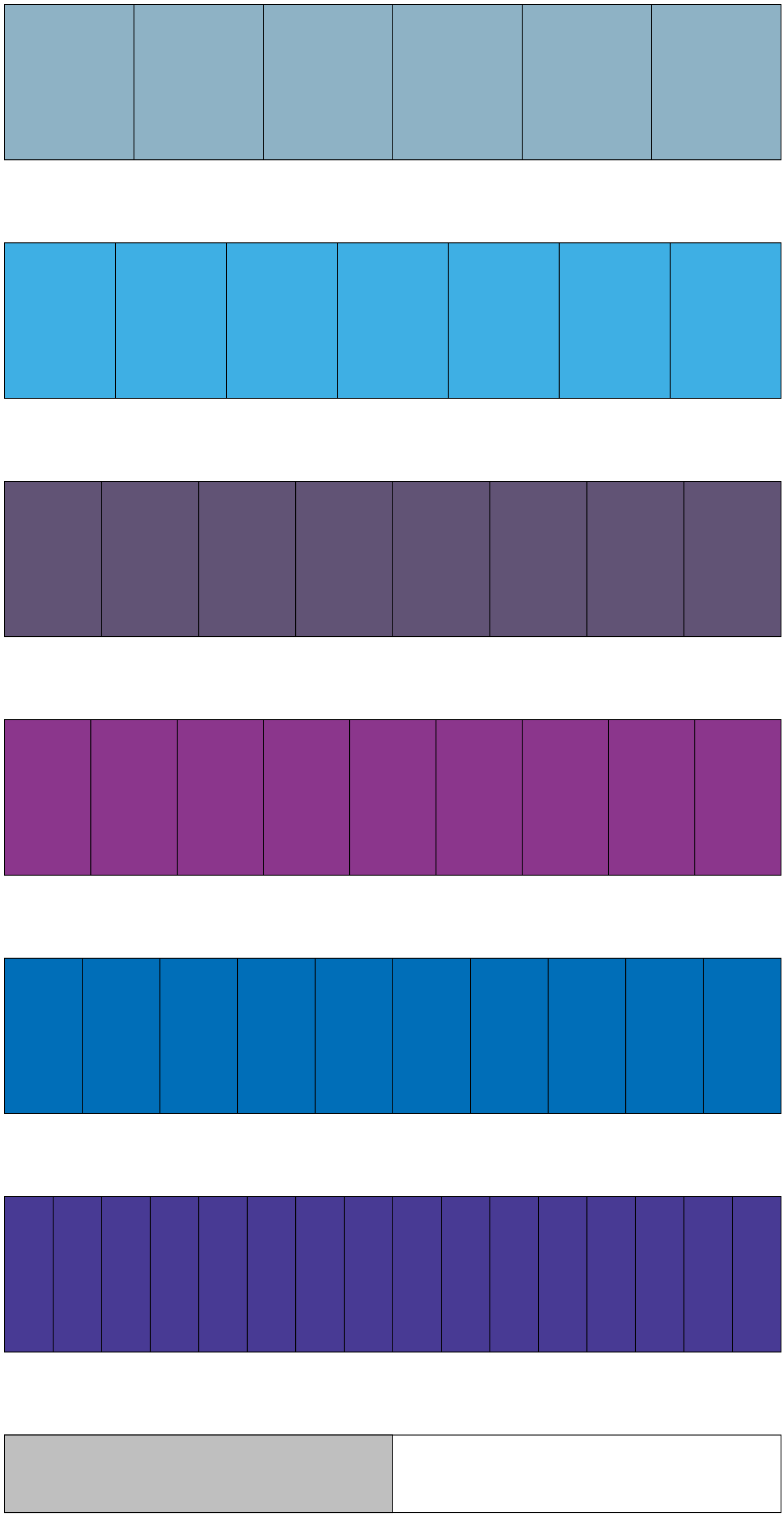


Atividade 5

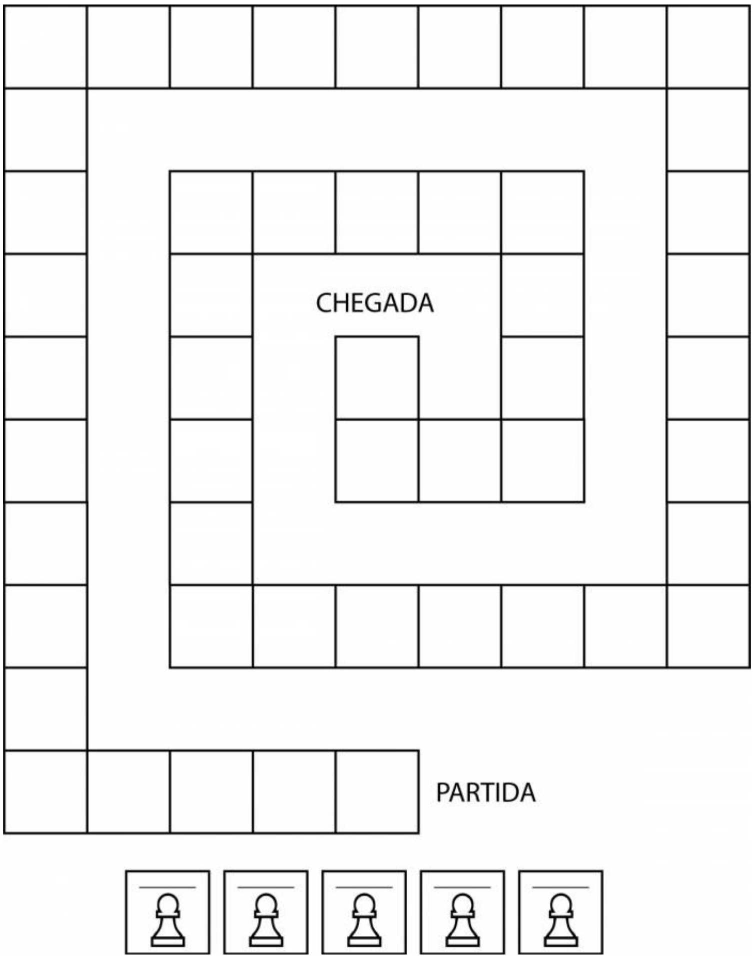


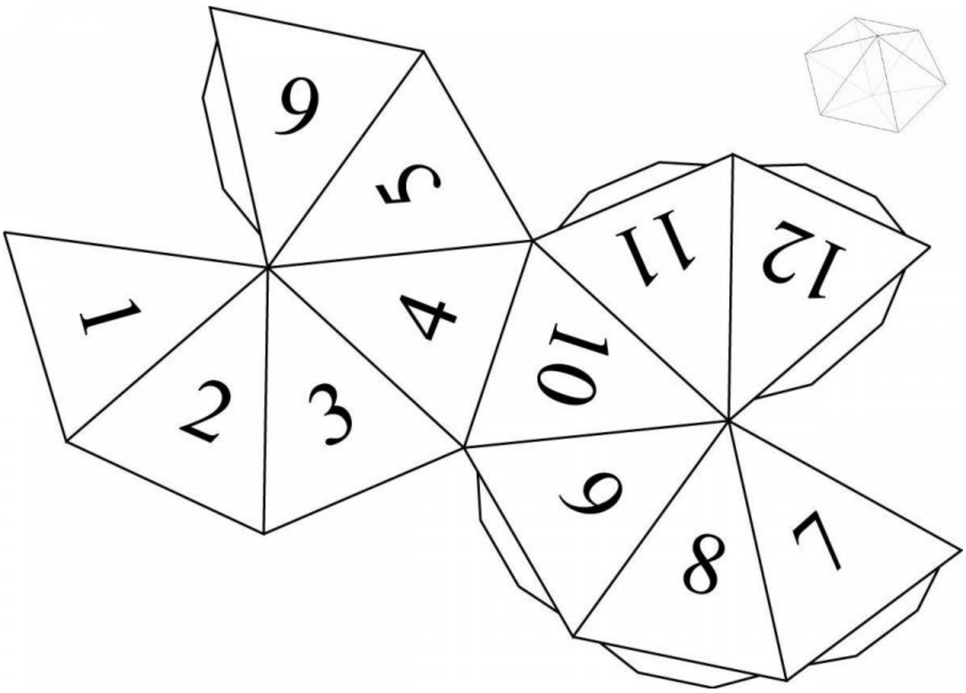
Atividade 6





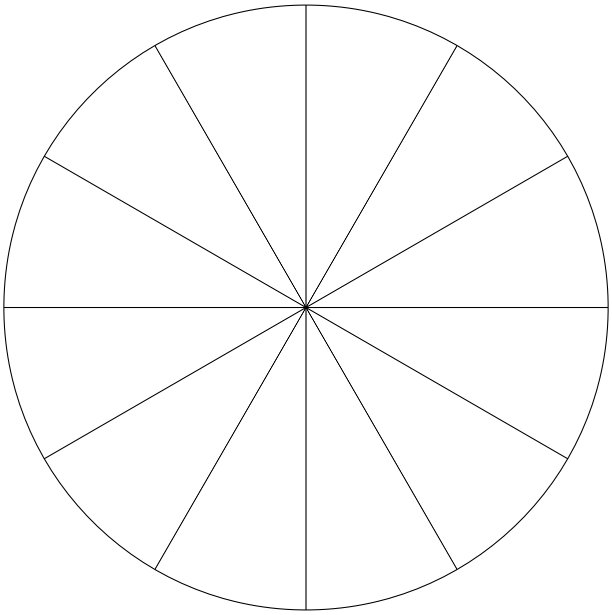
Atividade 20





LIÇÃO 5

Atividade 4



Referências Bibliográficas

[1] Behr, Merlyn J.; Wachsmuth, Ipke; Post, Thomas R.; Lesh, Richard. Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. Journal for Research in Mathematics Education, v. 15, n. 15, p. 323-341, 198 4.

[2] Confrey, J.; Maloney, A.; Nguyen, K.; Mojica, G.; Myers, M. Equipartitioning/Splitting as A Foundation of Rational Number Reasoning using Learning Trajectories. Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (p. 345–353). Thessaloniki, Greece, 2009.

[3] Cramer, Kathleen; Behr, Merlyn; Post, Thomas; Lesh, Richard. Rational Number Project: Initial Fraction Ideas. University of Minnesota, 2009.

[4] Empson, Susan B. Equal Sharing and Shared Meaning: The Development of Fraction Concepts in A First-Grade Classroom. Cognition and Instruction, v. 17, n. 3, p. 283-342, 1999.

[5] Freitag, Mark A. Mathematics for Elementary School Teachers: A Process Approach. Cengale Learning, 2014.

[6] Garcez, Wagner Rohr. Tópicos sobre O Ensino de Frações: Equivalência. Trabalho de Conclusão de Curso do PROFMAT, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

[7] IES PRACTICE GUIDE WHAT WORKS CLEARINGHOUSE. Developing Effective Fractions Instruction for Kindergarten Through 8th Grade. Institute of Education Sciences, 2010. - Este relatório oferece um conjunto de diretivas, procedimentos e

cuidados no ensino de frações nas séries iniciais que foram compilados a partir de relatos de experiência e estudos científicos.

[8] Lewin, Renaio; López, Alejandro; Martínez, Salomé; Rojas, Daniela; Zanocco, Pierina. Números para Futuros Profesores de Educación Básica. ReFIP Matemática: Recursos para La Formación Inicial de Profesores Educación Básica. Ediciones SM Chile S.A., 2013.

[9] Litwiller, Bonnie H. Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: 2002 Yearbook. National Council of Teache rs of Mathematics. 2002.

[10] Mathematics Navigator. Misconceptions and Errors. America's Choice. Pearson, 2016.

[11] McNamara, Julie; Shaughnessy, Meghan M. Beyond Pizzas and Pies, Grades 3-5, Second Edition: 10 Essential Strategies for Supporting Fraction Sense. Math Solutions Publications, 2015.

[12] MEC, Brasil. Números Racionais: Conceito e Representação (TP6). Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR I. 2007.

[13] Monteiro, Cecília; Pinto, Hélio. Desenvolvendo O Sentido de Número Racional. Associação de Professores de Matemática, 2009.

[14] Musser, Gary L.; Peterson, Blacke E.; Burger, William F. Mathematics for Elementary Teachers: A Contemporary Approach. John Wiley & Sons, Inc., 2014.

[15] Ni, Yujing. How Valid is It To Use Number Lines to Measure Children's Conceptual Knowledge about Rational Number? Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology, v. 20, n. 2, p. 139-152, 2000.

[16] Pearn, Catherine; Stephens, Max. Why You Have To Probe To Discover What Year 8 Students Really Think about Fractions. MERGA 27, v. 2, p. 430-437, 2004.

[17] Pereira, Ana Paula Cabral Couto. O Ensino de Frações na Escola Básica: O Currículo Common Core nos EUA, Hung-Hsi Wu e Uma Análise Comparativa em Dois Livros Didáticos do PNLD. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional PROFMAT), Universidade Federal Fluminense, 2015.

[18] Petit, Marjorie M.; Laird, Robert E.; Marsden, Edwin L. A focus On Fractions: Bringing Research To The Classroom. Studies in Mathematical Thinking and Learning. Taylor & Francis, 2010.

[19] Post, Thomas R.; Wachsmuth, Ipke; Lesh, Richard; Behr, Merlyn J. Order and Equivalence of Rational Number: A Cognitive Analysis. Journal for Research in Mathematics Education v. 16, v. 1, p. 18-36, 1985.

[20] Pothier, Yvone; Sawada, Daiyo. Partitioning: The Emergence of Rational Number Ideas in Young Children. Journal for Research in Mathematics Education, v. 14, n. 4, p. 307-317, 1983.

[21] Schliemann, Analúcia; Carraher, David W.; Caddle, Mary C. From Seeing Points To Seeing Intervals in Number Lines in Graphs. Em: Brizuela, Bárbara M.; Gravel, Brian E. (Ed.). Show Me What You Know, Teachers College, Columbia University, 2013.

[22] Small, Marian. Uncomplicating FRACTIONS To Meet Common Core Standards in Math, K-7. Teachers College Press, 2013.

[23] Spangler, David B. Strategies for Teaching Fractions: Using Error Analysis for Intervention and Assessment. Corwin, 2011.

[24] Tierney, Cornelia; Berle-Carman, Mary. Fractions: Fair Shares. Investigations in Number, Data, and Space. Dale Seymour Publications, 1998.

[25] Tierney, Cornelia. Different Shapes, Equal Pieces: Fractions and Area. Investigations in Number, Data, and Space. Scott Foresman, 2004.

[26] Thomaidis, Yannis; Tzanakis, Constantinos. The Notion of Historical "parallelism" Revisited: Historical Evolution and Students' Conception of The Order Relation On The Number Line. Educational Studies in Mathematics, v. 66, p. 165-183, 2007.

[27] Vamvakoussi, Xenia; Vosniadou,Stella. Bridging the Gap Between the Dense and the Discrete: The Number Line and the "Rubber Line" Bridging Analogy. Mathematical Thinking and Learning, v. 14, n. 4, p. 265-284, 2012. DOI: 10.1080/10986065.2012.717378. - Este artigo faz um resumo histórico de como a noção de densidade surgiu.

[28] Vance, James H. Understanding Equivalence: A Number by Any Other Name. School Science and Mathematics, v. 92, n. 5, p. 263-266, 1992.

[29] Van de Walle, John A. Matemática no Ensino Fundamental. Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. Sexta edição. Artmed, 2009.

[30] Ventura, Hélia Margarida Gaspar Lopes. A Aprendizagem de Números Racionais através das Conexões entre As Suas Representações: Uma Experiência de Ensino no 2.o Ciclo do Ensino Básico. Tese de doutorado, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, 2013.

[31] Wu, Hung-Hsi. Understanding Numbers in Elementary School Mathematics. American Mathematical Society, 2011.