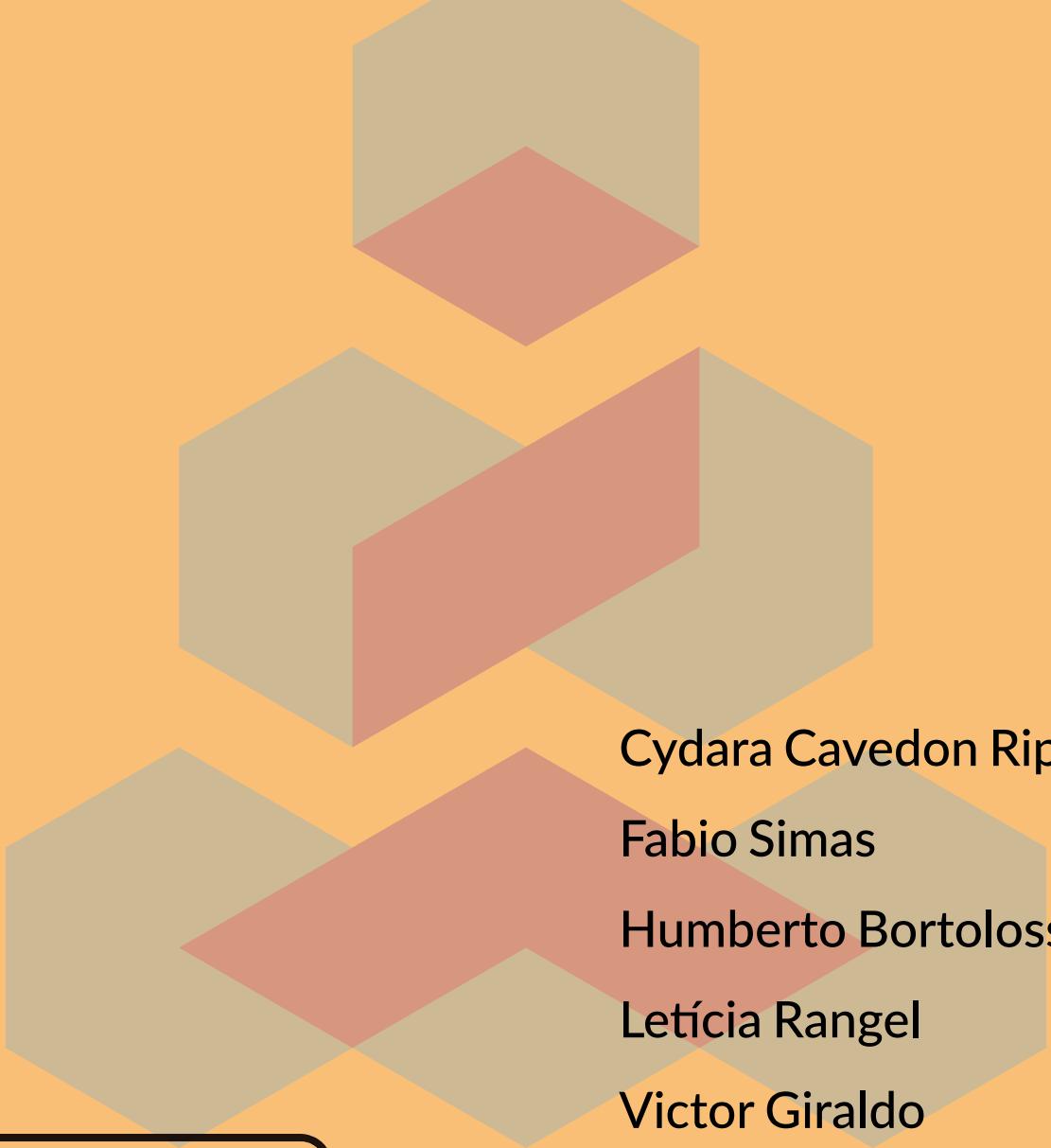


INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

# FRAÇÕES

no Ensino Fundamental - Volume 1



Cydara Cavedon Ripoll

Fabio Simas

Humberto Bortolossi

Letícia Rangel

Victor Giraldo

Wanderley Rezende

Wellerson Quintaneiro





Projeto: LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA



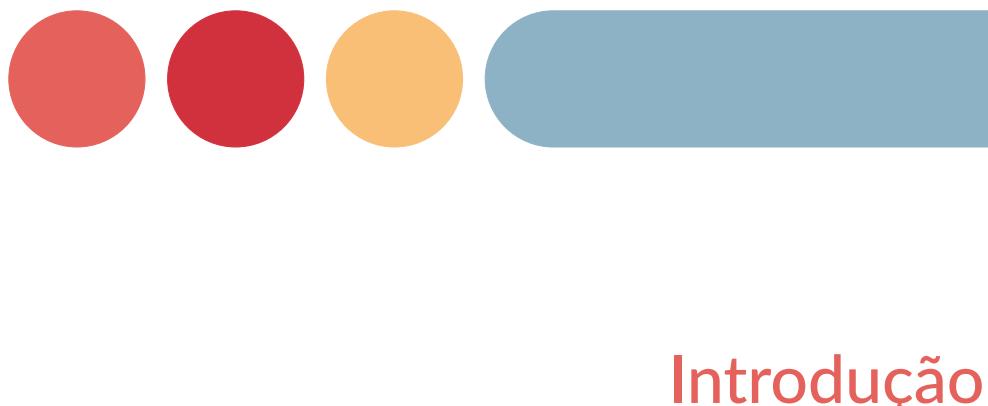
[umlivroaberto.org](http://umlivroaberto.org)

- Título: Frações no Ensino Fundamental - Volume 1
- Ano/ Versão: 2016 / versão 2.0 de Fevereiro de 2017
- Editora Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)
- Realização: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)
- Produção: Livro Aberto
- Coordenação: Fabio Simas e Augusto Teixeira
- Autores: Cydara Cavedon Ripoll, Fabio Luiz Borges Simas, Humberto José Bortolossi, Letícia Guimarães Rangel, Victor Augusto Giraldo, Wanderley Moura Rezende, Wellerson da Silva Quintaneiro
- Colaboradores: Ana Paula Pereira (CAp UFF), Andreza Gonçalves (estudante da UFF), Bruna Luiza Oliveira (estudante da UFF), Francisco Mattos (Colégio Pedro II), Helano Andrade (estudante da UNIRIO), João Carlos Cataldo (CAp UERJ e Colégio Santo Ignácio), Luiz Felipe Lins (Secretaria de Educação da Cidade do Rio de Janeiro), Michel Cambrainha (UNIRIO), Rodrigo Ferreira (estudante da UNIRIO), Tahyz Pinto (estudante da UFF)
- Arte: Aline Santiago
- Ilustradores (figuras geométricas): Luiz Fernando Alves Macedo, Vitoria da Mota Souza, Eduardo Filipe de Miranda Souto, Caio Felipe da Silva Evangelista, Gisela Alves de Souza, Mauricio de Azevedo Neto, Briza Aiki Matsumura, Vinícius Marcondes de Paula Silva, Wanessa Souza de Oliveira, Maurício Menegatti Andrade, Eduardo Filipe de Miranda Souto, Livia Machado da Silveira Verly, Caio Felipe da Silva Evangelista, Lucas Hideo Maekawa, Lucas Oliveira Machado de Sousa, Kayky Zigart Carlos e Israel Fialho Magalhães
- Capa: Fabio Simas



Após o dia 1º de setembro de 2026 esta obra passa a estar licenciada por CC-by-sa.





## Introdução

Frações é certamente um dos tópicos que mais desafia o ensino e a aprendizagem de matemática na Educação Básica. Justamente por isso, tanto se publicou sobre o assunto nas últimas décadas (para citar apenas algumas das mais utilizadas: *Rational Number Project*, *Institute of Education Science* ([7], 2010), Van de Walle ([29], 2009) e Wu ([31], 2011)). Este texto, organizado como uma proposta didática, reúne as reflexões e as discussões dos autores sobre o tema, amparadas por essas publicações e pela análise de livros didáticos de diversos países. A proposta aqui apresentada foi planejada para:

- (i) ser aplicada diretamente em sala de aula, como material didático destinado aos anos intermediários do ensino fundamental (do 4º ao 7º ano) e
- (ii) amparar a formação e o desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática na educação básica.

O texto concentra-se na abordagem inicial de frações como objeto matemático, ou seja, como novas quantidades. Busca-se, assim, aumentar o universo numérico do estudante, explorando o assunto a partir de atividades que visam à construção conceitual do tema e a conduzir os alunos a desenvolverem o raciocínio matemático amparados por reflexão e por discussão. Assim, as atividades visam a desafiar os alunos e a levá-los a estabelecer suas próprias conclusões sobre os assuntos tratados. Busca-se valorizar a capacidade cognitiva dos alunos, respeitando uma organização crescente e articulada de dificuldade na organização das atividades. Espera-se com isso mudar a perspectiva do binômio quantidade/qualidade. No lugar de uma quantidade enorme de exercícios, são propostas poucas atividades que exigem maior reflexão e aprofundamento dos conceitos. Assim, são evitadas atividades de simples observação e repetição de modelos e os tradicionais "exercícios de fixação", que, pontuais, são apenas com o objetivo de

desenvolver a fluência em procedimentos específicos (por exemplo, os que envolvem a equivalência entre frações).

Uma outra característica particular deste material é o diálogo com o professor. No início de cada lição, há uma introdução dirigida especificamente ao professor que apresenta os objetivos da lição, uma discussão dos aspectos matemáticos que serão tratados, as dificuldades esperadas e algumas observações sobre os passos cognitivos envolvidos. Diferente dos livros didáticos tradicionais, em que, para o professor, há pequenas observações pontuais junto ao texto do aluno e um longo texto teórico anexo ao final do livro, nesta proposta a "conversa" com o professor é permanente. Em cada atividade são realizadas discussões sobre os objetivos a serem alcançados, recomendações e sugestões metodológicas para sua execução e, quando pertinente, uma discussão sobre algum desdobramento do assunto tratado.

Entende-se que, nesta etapa da escolaridade, considerando o cotidiano próprio do aluno, o conceito de fração aparece ligado a noções informais traduzidas por expressões como metade, terço, quartos, décimos e centésimos, por exemplo. Assim, nas primeiras duas lições, buscou-se utilizar a linguagem verbal e os conhecimentos anteriores dos estudantes sobre situações em que aquelas expressões são utilizadas para conduzir as primeiras abordagens, visando à introdução de um conhecimento mais organizado e formal sobre o assunto. Apenas posteriormente, são introduzidas a linguagem e a simbologia próprias da matemática.

A introdução das frações na Educação Básica amplia o universo numérico do aluno e envolve um salto cognitivo, ir além da contagem. São duas as principais questões nesse processo: "a identificação de uma unidade não explícita *a priori*" e a compreensão de uma "unidade contínua", isto é, que pode ser subdividida em qualquer número de partes.

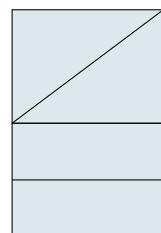
A construção de ideias abstratas, especialmente nesta etapa da escolaridade, deve ser amparada por contextos e modelos representativos. Na abordagem aqui proposta decidimos por iniciar apenas a partir de situações que envolvem modelos contínuos (linhas e regiões do plano ou do espaço). Assim, por exemplo, não trataremos de "um terço de uma caixa de lápis", mas de "um terço de uma barra de chocolate".

A decisão por evitar modelos discretos em um momento inicial deve-se aos seguintes fatos: (i) modelos discretos já evidenciam uma unidade *a priori*; por exemplo, na determinação de um terço de 24 lápis, a unidade "lápis" não é nem a unidade nem a subunidade que precisam ser levadas em conta para a determinação da fração "um terço de 24 lápis" e (ii) como o conceito de fração subentende o de equipartição, contextos discretos podem desencadear discussões mais complexas, por exemplo, o que seria determinar  $1/10$  de uma caixa de 24 lápis?

A opção por modelos contínuos traz limitações inerentes. É natural que os estudantes associem a fração à forma que a identifica no modelo. É necessário que identifique-se a fração não à forma, mas à quantidade evidenciada na representação. Assim, por exemplo, se o modelo for um retângulo, o que está em questão é a área e a fração  $1/4$ .

pode ser representada igualmente por um retângulo ou um triângulo, como na figura a seguir (ver Atividade 4 da Lição 1).

Iniciar o estudo de frações a partir de modelos contínuos é uma decisão compartilhada por propostas que caracterizam livros japoneses e franceses.



As lições 1 e 2 introduzem os conceitos elementares e a linguagem de frações a partir de situações concretas e de modelos contínuos. Na lição 1, as frações emergem de situações concretas amparadas pela linguagem verbal. Uma vez estabelecida a unidade, a expressão “fração unitária” nomeia cada uma das partes da divisão da unidade em partes iguais. Nas atividades dessas lições a unidade está fortemente vinculada a um objeto concreto. Assim, por exemplo, a fração de uma torta, não é ainda tratada com a abstração própria do conceito de número, mas como uma fatia da torta em uma equipartição. Toma-se bastante cuidado com o papel da determinação da unidade e com a necessidade de uma “equipartição” para a identificação de uma fração. A notação simbólica de frações e as frações não unitárias, inclusive as maiores do que a unidade, surgem apenas na Lição 2. As frações com numerador diferente de 1 são apresentadas a partir da justaposição de frações unitárias com mesmo denominador ou simplesmente contando-se essas frações. Para isso, tem-se a representação pictórica como um apoio importante. Nessas lições, as atividades são quase majoritariamente para identificar, reconhecer, analisar e justificar.

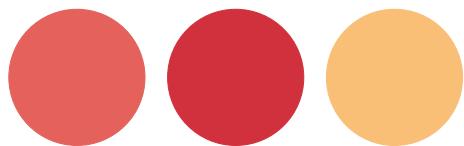
Na Lição 3, é exigida maior abstração dos alunos. Retoma-se a representação de números na reta numérica, enfatizando-se, no contexto das frações, a associação do segmento unitário à unidade. Os modelos contínuos e a justaposição de partes correspondentes às frações unitárias são a base da proposta desenvolvida. A representação das frações na reta numérica é usada para amparar a abordagem da comparação de frações com um mesmo numerador e com um mesmo denominador. Além disso, são propostas atividades que tratam a comparação de frações a partir de uma referência.

A Lição 4 trata da equivalência de frações tendo como objetivo a sua função na comparação de duas frações quaisquer. O assunto é abordado utilizando-se representações equivalentes em modelos de área retangulares, em modelos de área circulares e na reta numérica. A inclusão de modelos diferentes é proposital pois, com isso, o aluno tem a oportunidade de perceber as mesmas propriedades em contextos diferentes. Finalizando a lição, são propostas atividades que conduzem à exploração da propriedade das frações que garante que, dadas duas frações diferentes, é sempre possível determinar uma terceira fração que está entre elas (propriedade de densidade).

Adição e subtração de frações são o tema da Lição 5. A abordagem dessas operações será a partir de problemas e fundamentada na equivalência de frações, que permite determinar subdivisões comuns da unidade para expressar as frações envolvidas nos cálculos. Os significados e os contextos que caracterizam as operações de adição e de subtração envolvendo frações são semelhantes àqueles que compõem a abordagem dessas operações com números naturais, o que promove uma continuidade conceitual no desenvolvimento desse assunto.

Este volume marca o início de um trabalho em desenvolvimento, que será ampliado e complementado por novos volumes e novas edições. Para o volume 2, de mesmo tema, está prevista a complementação da abordagem das operações com frações, trazendo a multiplicação e a divisão envolvendo frações, a abordagem de frações em situações e modelos discretos e o uso de frações em contextos de razão e de proporção, além das porcentagens.

Teremos prazer em considerar suas sugestões para este livro por meio do endereço eletrônico [livroaberto@impa.br](mailto:livroaberto@impa.br). A edição mais recente deste livro está disponível em [umlivroaberto.org](http://umlivroaberto.org).



## Sumário

0 Introdução	iii
1 Começando a falar sobre frações	1
2 Juntando frações da unidade	15
3 Frações na reta numérica	30
6 Folhas para reprodução	46





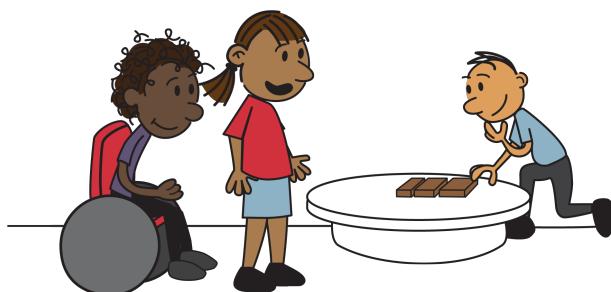
## Lição 1

# Começando a falar sobre frações

### EXPLORANDO O ASSUNTO

#### Atividade 1

Três amigos repartiram uma barra de chocolate. Veja como eles fizeram.



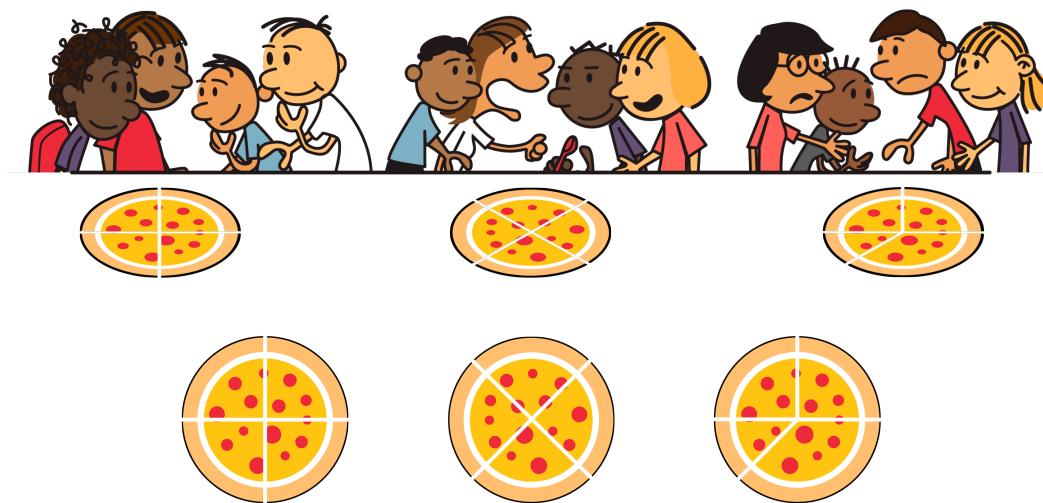
- Você concorda com essa divisão? Explique.
- Com essa divisão, os três amigos receberam a mesma quantidade de chocolate?
- Desenhe uma divisão da barra de chocolate que permita que os 3 amigos recebam quantidades iguais de chocolate.



- d) Considerando a divisão da barra de chocolate em 3 partes iguais, como você nomearia a quantidade de chocolate que cada amigo receberia?

### Atividade 2

Três pizzas inteiras, de mesmo tamanho, foram repartidas entre as crianças de uma turma. Para isso, a turma foi dividida em três grupos com quatro crianças cada. Veja como cada grupo repartiu a sua pizza.



- a) Cada um dos três grupos repartiu a sua pizza na mesma **quantidade de fatias** que os outros grupos?
- b) Dessa maneira, todas as crianças da turma receberam a mesma **quantidade de pizza**?
- c) É verdade que em algum dos grupos, as 4 crianças receberam a mesma quantidade de pizza? Se sim, em qual? Considerando a pizza inteira, como você nomearia cada uma das fatias de pizza desse grupo?

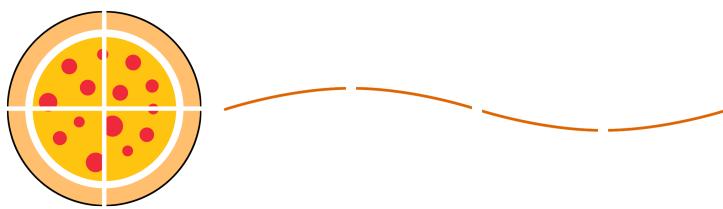
### Atividade 3

Alice quer enfeitar a sala de aula e pretende pendurar os enfeites utilizando pedaços de barbante. Para que os enfeites fiquem todos na mesma altura, quer cortar o barbante em pedaços iguais. Ajude Alice a cortar o barbante (você receberá o barbante do seu professor).



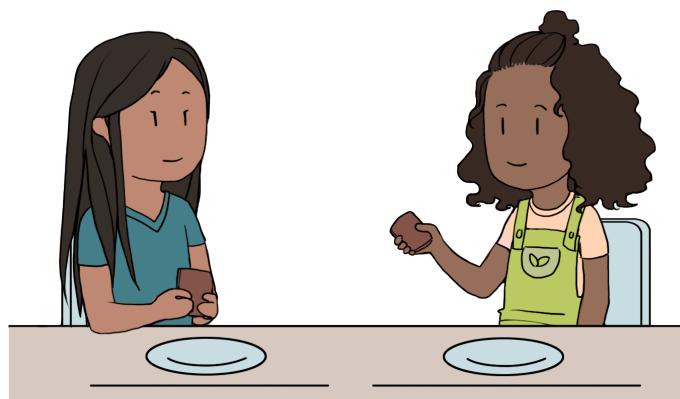
## ORGANIZANDO AS IDEIAS

Nas atividades anteriores, a barra de chocolate, a pizza e o pedaço de barbante foram partidos **em partes com quantidades iguais**. Em cada um dos casos, o que foi repartido é chamado **unidade**. Cada uma das partes em que essas unidades foram repartidas igualmente é uma **fração da unidade**. Assim, por exemplo, um quarto de uma pizza é uma fração da pizza e a pizza é unidade. Se a unidade for um barbante, um quarto do barbante será uma fração do barbante.



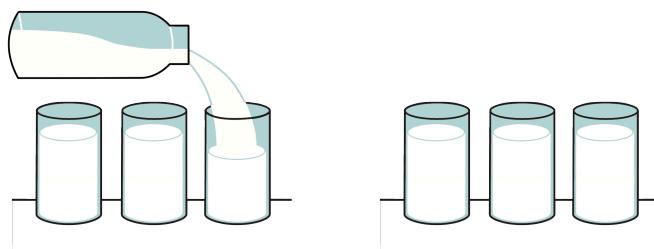
O nome dado à fração da unidade depende da quantidade de partes em que a unidade é dividida. Ao dividir uma unidade qualquer em duas partes iguais, ou ao meio, cada uma das partes é chamada de *um meio* ou *a metade* da unidade.

Por exemplo, se uma barra de chocolate é repartida igualmente entre dois amigos, a quantidade que caberá a cada um dos amigos é *um meio* da barra de chocolate (ou *metade* da barra). Nesse exemplo, a unidade é a barra de chocolate.



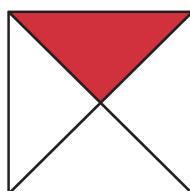
Ao dividir uma unidade em três partes iguais, cada uma das partes é chamada de *um terço* ou *a terça parte* da unidade.

Por exemplo, se, para preparar uma receita, é necessário acrescentar *um terço* de um litro de leite, então para colocar a quantidade correta de leite na receita, é preciso repartir o litro de leite em três partes iguais e usar apenas uma dessas partes. Nesse caso, cada uma das partes é *um terço* do litro de leite. A unidade é um litro de leite.



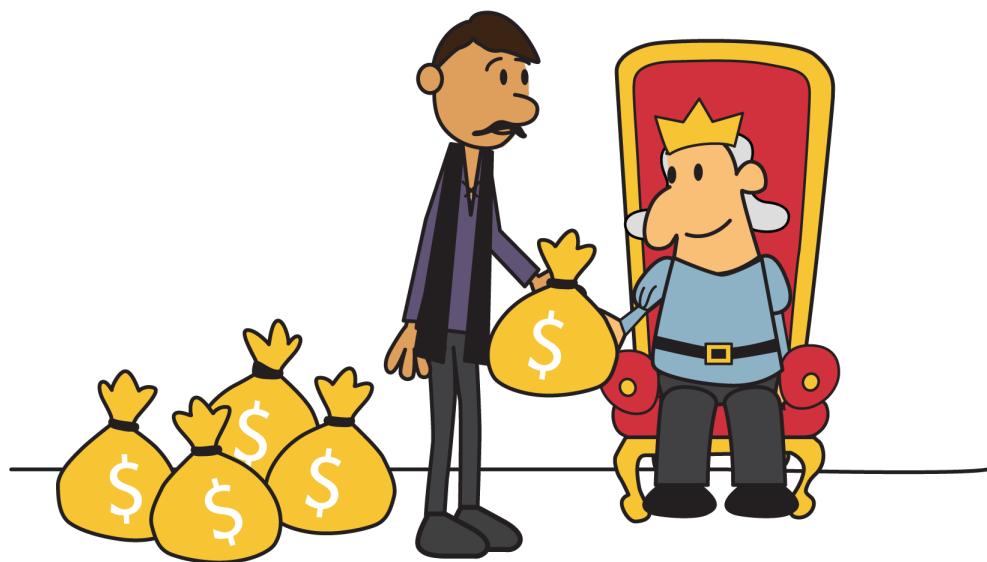
Ao dividir uma unidade em quatro partes iguais, cada uma das partes é chamada de *um quarto* ou *quarta parte* da unidade.

Por exemplo, a parte colorida da figura é um quarto da figura. Neste caso, a figura é a unidade.



Da mesma forma, ao dividir uma unidade em cinco partes iguais, cada uma das partes é chamada de *um quinto* ou *quinta parte* da unidade.

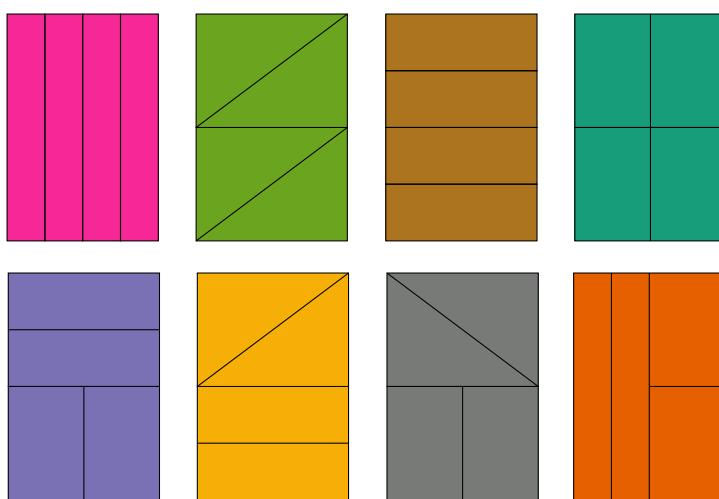
Por exemplo, na época do império *um quinto* de todo ouro pesado nas Casas de Fundição no Brasil era pago em impostos à Coroa Portuguesa. Desta forma, a quantidade de ouro pago em impostos à Coroa Portuguesa era igual a *um quinto* ou a *quinta parte* do ouro pesado nas Casas de Fundição no Brasil.



## MÃO NA MASSA

### Atividade 4

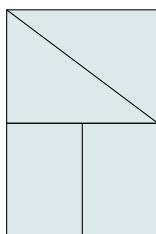
- a) Quais dos oito retângulos a seguir foram partidos em quartos?



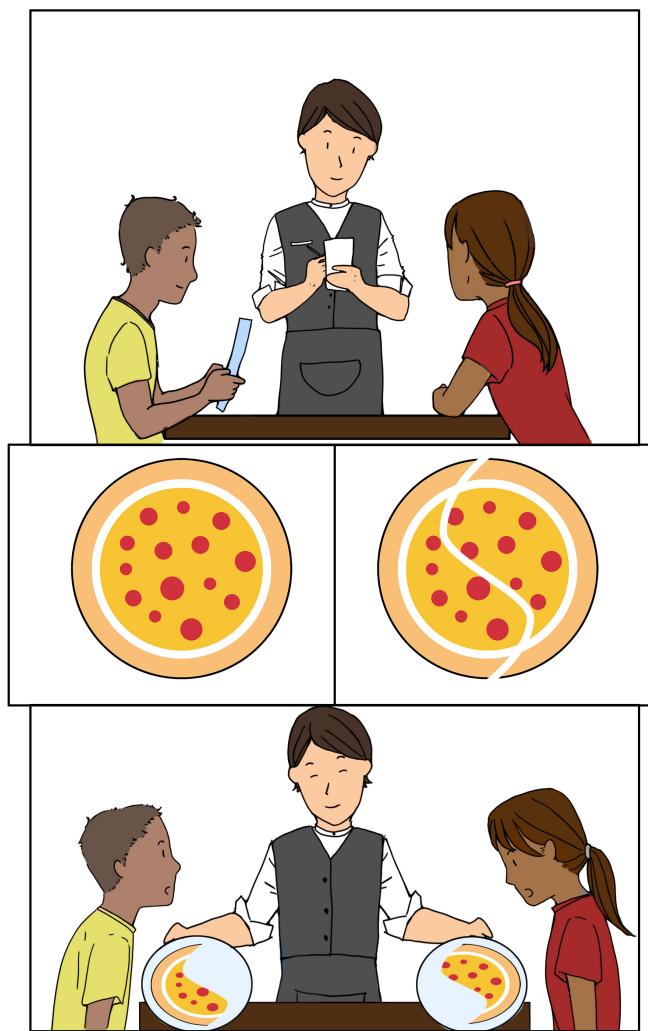
- b) Desenhe um retângulo e faça uma partição desse retângulo em quatro partes que não sejam todas quartos.

## REFLETINDO

Na atividade anterior, as partes em que os retângulos foram divididos são quartos dos retângulos, mesmo tendo formas diferentes.



Se uma unidade é repartida em partes com quantidades iguais, essas partes são frações dessa unidade mesmo que tenham formas diferentes. Observe, nos quadrinhos a seguir, como a pizza foi dividida entre os dois amigos:



### Atividade 5

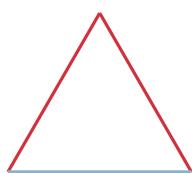
- a) O triângulo cinza é um terço de uma das figuras coloridas. Qual é essa figura? Explique.
- b) O triângulo cinza é um quarto de alguma dessas figuras? Qual ou quais?
- c) Agora é a sua vez: desenhe uma unidade da qual o triângulo cinza seja um quinto.
- d) Que fração o triângulo cinza é da figura amarela?
- e) Desafio: Que fração o triângulo cinza é do retângulo laranja?



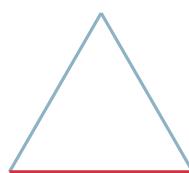
### Atividade 6

Em cinco das figuras a seguir, a parte em vermelho é um terço da figura. Identifique essas figuras.

a)



b)



c)



d)



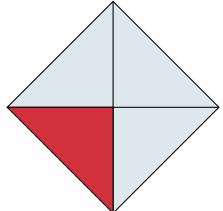
e)



f)



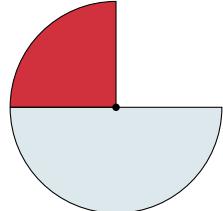
g)



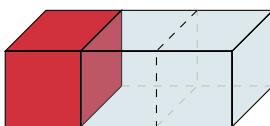
i)



h)



j)



### Atividade 7

- a) Na tabela a seguir, a primeira coluna mostra uma figura que é uma fração de uma unidade. Na segunda, o nome que usamos para essa fração. Desenhe uma unidade na terceira coluna, unindo frações como essa.

Fração da unidade	Nome da fração da unidade	Unidade
	metade	

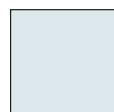
- b) A seguir, complete cada linha da tabela como no item anterior.

Fração da unidade	Nome da fração da unidade	Unidade
	metade	
	um terço	

	um quarto	
	metade	
	um terço	
	um quarto	
	metade	
	um terço	
	um quarto	
	metade	
	um terço	
	um quarto	

### Atividade 8

- a) Pinte metade do quadrado a seguir.



- b) Pinte um quarto do quadrado a seguir.



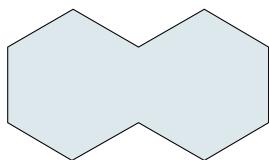
c) Pinte um oitavo do quadrado a seguir.



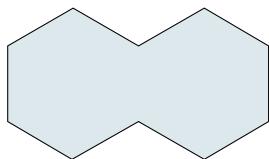
d) Qual é a maior das frações do quadrado: metade, quarto ou oitavo?

### Atividade 9

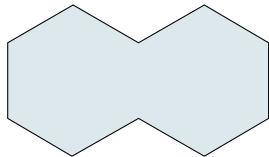
a) Pinte metade da figura.



b) Pinte metade da figura de forma diferente da do item anterior.



c) Pinte a metade da figura de forma diferente das dos dois itens anteriores.



### Atividade 10

Identifique as figuras em que a parte pintada de vermelho é a metade da figura.



Figura 1

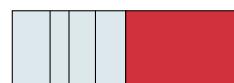


Figura 2

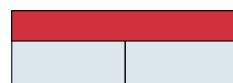


Figura 3

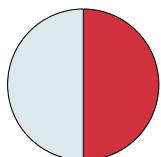


Figura 4

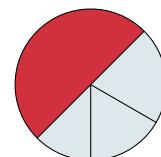


Figura 5

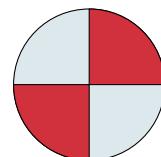


Figura 6

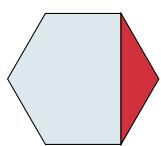


Figura 7

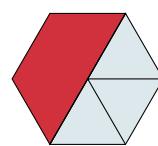


Figura 8

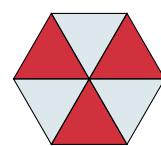


Figura 9

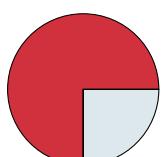


Figura 10

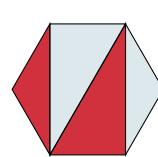


Figura 11

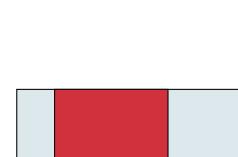
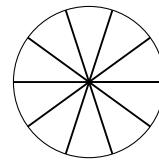
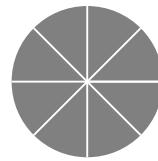
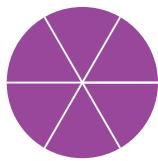
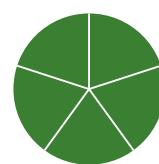
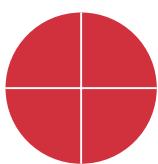
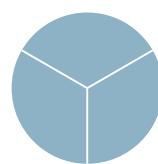
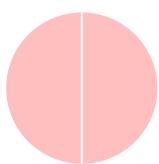
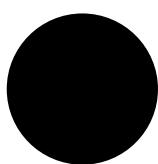


Figura 12

### Atividade 11

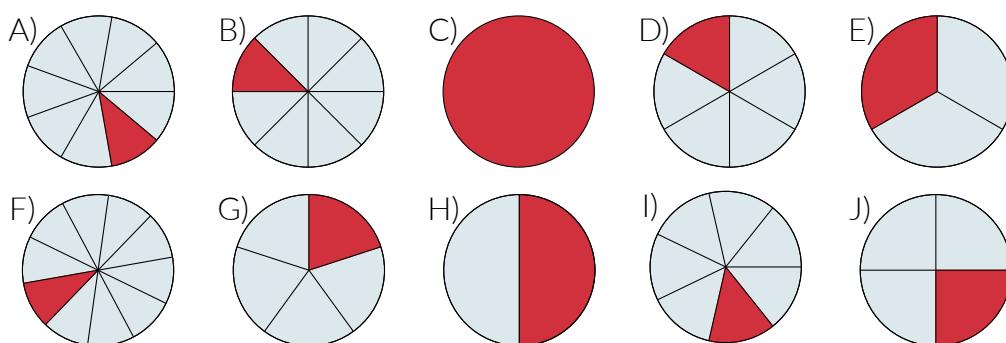
Você receberá do seu professor círculos como os que seguem, todos de mesmo tamanho.



- a) Qual é a cor de uma peça que é um terço do círculo preto?
- b) Qual é a cor de uma peça que é um quarto do círculo preto?
- c) Qual é a cor de uma peça que é um sétimo do círculo preto?
- d) Qual é a cor de uma peça que é um nono do círculo preto?
- e) Que fração do círculo preto é uma peça de cor roxa?
- f) Que fração do círculo preto é uma peça de cor cinza?
- g) Que fração do círculo preto é uma peça de cor branca?
- h) Que fração do círculo preto é uma peça de cor rosa?
- i) Qual fração do círculo preto é maior, um terço ou um sétimo?
- j) Qual fração do círculo preto é menor, um nono ou um quarto?
- k) Qual fração do círculo preto é menor, um quinto ou um sétimo?
- l) Qual fração do círculo preto é maior, um oitavo ou um quarto?
- m) Qual fração do círculo preto é maior, um sexto ou um sétimo?

### Atividade 12

Nas figuras a seguir, um mesmo círculo azul aparece diferentemente dividido em regiões iguais, sendo algumas delas coloridas em vermelho.



- a) Complete as sentenças a seguir identificando os círculos que as tornam verdadeiras.
  - I) A parte do círculo colorida em vermelho na figura \_\_\_\_ é um quinto do círculo.
  - II) A parte do círculo colorida em vermelho na figura \_\_\_\_ é a sexta parte do círculo.
  - III) A parte do círculo colorida em vermelho na figura \_\_\_\_ é um sétimo do círculo.

- IV) A parte do círculo colorida em vermelho na figura \_\_\_\_ é um oitavo do círculo.
- V) A parte do círculo colorida em vermelho na figura \_\_\_\_ é a nona parte do círculo.
- VI) A parte do círculo colorida em vermelho na figura \_\_\_\_ é um décimo do círculo.
- b) Dentre as frações do círculo destacadas em vermelho, identifique uma que seja menor do que um sexto do círculo.
- c) Dentre as frações do círculo destacadas em vermelho, identifique uma que seja maior do que um nono do círculo.
- d) Identifique uma fração do círculo que seja menor do que um sexto e maior do que um nono do círculo.

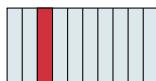
### Atividade 13

Em cada uma das imagens, a parte em vermelho é uma fração da figura. Essas frações podem ser “um meio”, “um quarto” ou “um décimo” da figura. Associe cada imagem à fração correspondente.

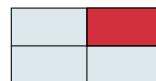
a)



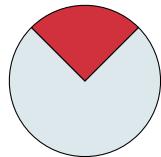
b)



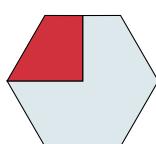
c)



d)



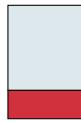
e)



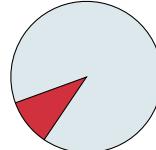
f)



g)



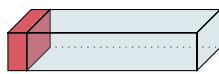
h)



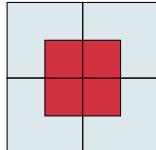
i)



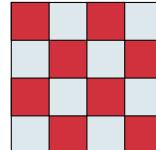
j)

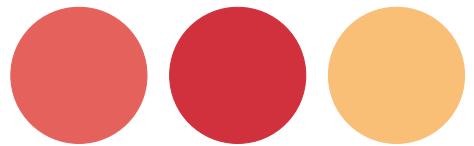


k)



l)





## Lição 2

# Juntando frações da unidade

Oi Miguel, por que você faltou a aula passada? A professora falou de frações. Recortamos papeis em partes iguais.

Eu tive febre. Mas minha mãe me ensinou frações em casa.



Não foi bem isso que vimos. Depois de repartir as figuras em partes iguais ou de mesma forma, cada uma delas recebeu um desses nomes.

meio	$\frac{1}{2}$	quinto	$\frac{1}{5}$	oitavo
terço	$\frac{1}{3}$	sexto	$\frac{1}{6}$	nono
quarto	$\frac{1}{4}$	sétimo	$\frac{1}{7}$	décimo



Esse negócio não parece estar certo. Os números ficam um ao lado do outro: treze, quatorze, quinze.... E não um embaixo do outro como você mostrou aí!

Crianças, não briguem. Vamos ver frações em símbolos matemáticos na aula de hoje.

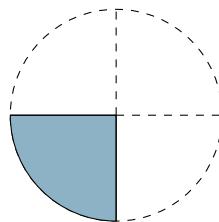
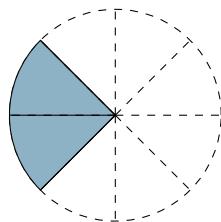
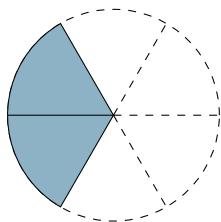
meio	$\frac{1}{2}$	quinto	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$
terço	$\frac{1}{3}$	sexto	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
quarto	$\frac{1}{4}$	sétimo	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{10}$



## EXPLORANDO O ASSUNTO

### Atividade 1

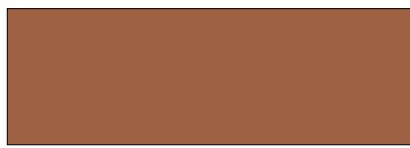
Luiza, João e Mariele foram a uma pizzaria. Cada um pediu uma pizza do seu sabor preferido. Luiza cortou sua pizza em 4 fatias; João cortou sua pizza em 6 fatias e Mariele cortou sua pizza em 8 fatias. O esquema a seguir indica o quanto restou de pizza após os amigos estarem satisfeitos:



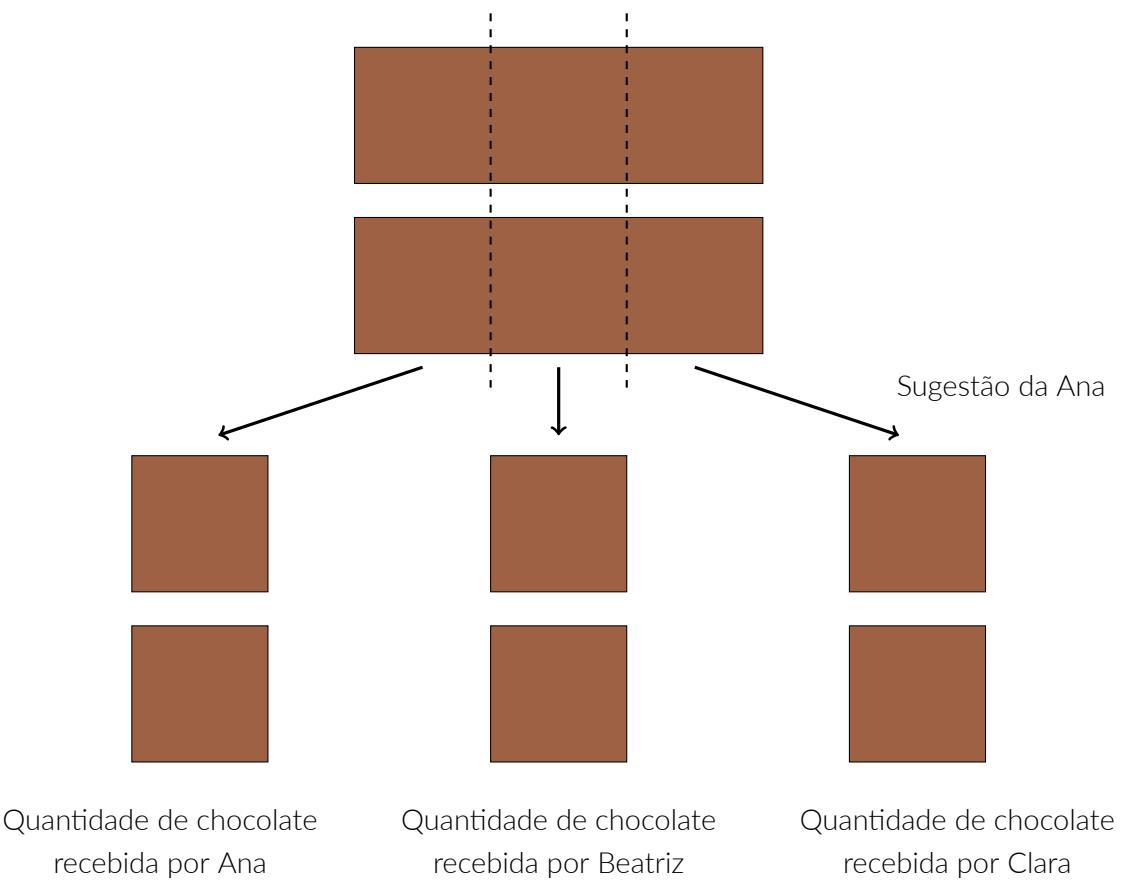
- Identifique a pizza de cada um dos amigos.
- Em cada caso, que fração da pizza representa uma fatia?
- Escreva a quantidade de pizza que cada amigo comeu utilizando fração?

### Atividade 2

O pai de Ana, Beatriz e Clara trouxe duas barras de chocolate para serem repartidas entre elas.



Ana propôs que cada barra fosse dividida em três partes iguais e que cada irmã ficasse com duas dessas partes.



- Na divisão de cada uma das barras de chocolate em três partes iguais, cada parte é que fração de uma barra de chocolate?
- Você concorda com a divisão que Ana sugeriu? Explique.
- Com essa divisão, as três irmãs receberam a mesma quantidade de chocolate?
- Na divisão proposta por Ana, como você nomearia, usando fração de uma barra de chocolate, a quantidade de chocolate que cada irmã recebeu?

Ana não quer o chocolate e decidiu dar a quantidade de chocolate que recebeu na divisão das barras para as suas irmãs.

- Se Ana desse metade da quantidade de chocolate que recebeu para cada uma de suas irmãs, que quantidade de chocolate Beatriz e Clara passariam a ter? Como você nomearia, usando frações, essas quantidades?
- E se Ana desse toda a quantidade de chocolate que recebeu para Beatriz, que quantidade de chocolate Beatriz passaria a ter? Como você nomearia, usando frações, essa quantidade?

### Atividade 3

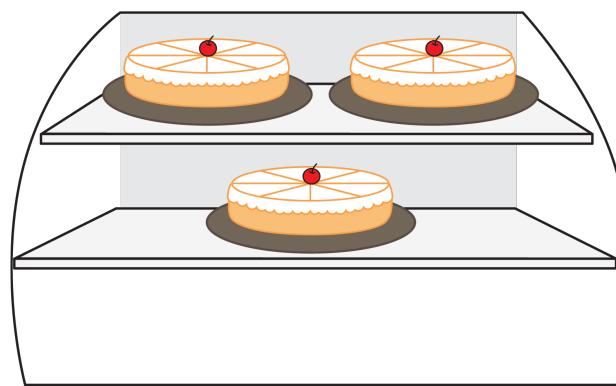
Um grupo de cinco amigos (Amarildo, Beto, Carlos, Davi e Edilson) encomendou três tortas salgadas, de mesmo tamanho retangular, como na ilustração para uma comemoração.



- a) Como dividir as três tortas de modo que cada amigo receba a mesma quantidade de torta? Faça um desenho no seu caderno mostrando sua proposta de divisão. Indique qual parte é de qual amigo!
- b) Considerando-se uma torta como unidade, como você nomearia, usando frações, a quantidade de torta que:
  - I) Amarildo recebeu?
  - II) Amarildo e Beto receberam juntos?
  - III) Amarildo, Beto e Carlos receberam juntos?
  - IV) Amarildo, Beto, Carlos e Davi receberam juntos?
  - V) Amarildo, Beto, Carlos, Davi e Edilson receberam juntos?
- c) A quantidade de torta que cada amigo recebeu é menor do que um quinto de torta? E do que dois quintos de torta? Explique sua resposta.
- d) A quantidade de torta que cada amigo recebeu é maior do que três quintos de torta? E do que quatro quintos de torta? Explique sua resposta.

### Atividade 4

Para a sobremesa do almoço de domingo, papai passou em uma confeitaria que vende tortas. Cada torta está dividida em igualmente em 8 fatias, como na figura abaixo.

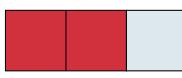


- a) Que fração de uma torta é uma fatia? Explique.

- b) Domingo papai comprou 4 fatias, quantos oitavos de uma torta havia para a sobremesa?
- c) Na pergunta anterior, apresente outra fração que represente a quantidade de torta que papai comprou. Explique sua resposta.
- d) Hoje papai comprou 10 fatias de torta. Como podemos representar essa quantidade de torta em termos de frações de uma torta?

### Atividade 5

Complete as afirmações com uma das frações: “dois meios”, “dois terços”, “dois quintos”, “dois nonos”, “três quartos”, “seis oitavos”, “oito sextos” e “nove meios”, para que sejam verdadeiras.

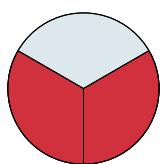
- a) A parte pintada de vermelho em  é \_\_\_\_\_ de .
- b) A parte pintada de vermelho em  é \_\_\_\_\_ de .
- c) A parte pintada de vermelho em  é \_\_\_\_\_ de .
- d) A parte pintada de vermelho em  é \_\_\_\_\_ de .
- e) A parte pintada de vermelho em  é \_\_\_\_\_ de .

### ORGANIZANDO AS IDEIAS

Se uma torta está dividida em três partes iguais, a torta fica separada em três terços. Assim, como visto na historinha do início da lição, tanto faz escrever “um terço da torta” ou, usando símbolos matemáticos, “ $\frac{1}{3}$  da torta” para se referir à fatia destacada na figura.

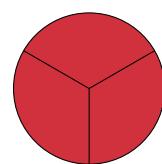


Duas fatias são “dois terços da torta”, o que pode ser expresso usando símbolos matemáticos por “ $\frac{2}{3}$  da torta”. Deste modo, “três terços da torta” é uma torta inteira.



$\frac{2}{3}$  da torta

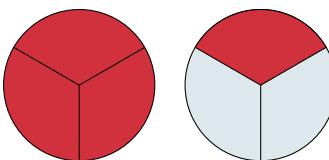
(lê-se: "dois terços da torta")



$\frac{3}{3}$  da torta = 1 torta

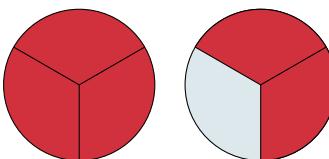
(lê-se: "três terços da torta" ou "uma torta")

Também pode-se considerar quatro terços, cinco terços ou seis terços da torta, basta juntar novos terços à torta inteira.



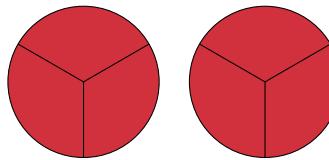
$\frac{4}{3}$  da torta = 1 torta e  $\frac{1}{3}$  da torta

(lê-se: "quatro terços da torta" ou "uma torta e um terço de torta")



$\frac{5}{3}$  da torta = 1 torta e  $\frac{2}{3}$  da torta

(lê-se: "cinco terços da torta" ou "uma torta e dois terços da torta")



$\frac{6}{3}$  da torta = 2 tortas

(lê-se: "seis terços da torta" ou "duas tortas")

Nos exemplos anteriores, todas as frações são lidas com "terços" pois as tortas foram repartidas em três partes iguais. **Usando símbolos matemáticos, as frações são escritas com dois números e um traço.** Por exemplo, em " $\frac{2}{3}$  da torta", o "3" nomeia a fração "terço" e, por isso, é chamado *denominador da fração*  $\frac{2}{3}$ . O número "2" indica a quantidade de terços que estão sendo considerados e é chamado *numerador da fração*  $\frac{2}{3}$ . Isso acontece em todas as frações:

### Denominador da fração

Diz como a unidade é repartida em partes iguais e nomeia essas partes: meio, terço, quarto, ..., décimo etc.

### Numerador da fração

Diz o número de meios, terços, quartos etc. que estão sendo considerados.

$$\frac{n}{d}$$

- Em  $\frac{2}{5}$ , por exemplo, o numerador é 2 e o denominador é 5. Lê-se *dois quintos*.
- Em  $\frac{10}{8}$ , por exemplo, o numerador é 10 e o denominador é 8. Lê-se *dez oitavos*.

Para ler a fração deve-se ler o **número** do numerador seguido do **nome que identifica as partes em que foi repartida a unidade, que é indicado pelo denominador**, nessa ordem. Veja:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{3} \rightarrow \text{um terço}; & \frac{2}{3} \rightarrow \text{dois terços}; & \frac{5}{3} \rightarrow \text{cinco terços}; \\ \frac{1}{8} \rightarrow \text{um oitavo}; & \frac{3}{8} \rightarrow \text{três oitavos}; & \frac{7}{8} \rightarrow \text{sete oitavos}. \end{array}$$

Anote agora os nomes de algumas outras frações:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2} \rightarrow \text{um meio}; & \frac{1}{3} \rightarrow \text{um terço}; & \frac{1}{4} \rightarrow \text{um quarto}; \\ \frac{1}{5} \rightarrow \text{um quinto}; & \frac{1}{6} \rightarrow \text{um sexto}; & \frac{1}{7} \rightarrow \text{um sétimo}; \\ \frac{1}{8} \rightarrow \text{um oitavo}; & \frac{1}{9} \rightarrow \text{um nono}; & \frac{1}{10} \rightarrow \text{um décimo}. \end{array}$$

Já a fração  $\frac{1}{11}$  não é chamada "um décimo primeiro". Na leitura de frações com denominadores maiores do que 10, utiliza-se a palavra avos. Assim, a fração  $\frac{1}{11}$  é lida "um onze avos". Veja outros exemplos:

$$\frac{1}{12} \rightarrow \text{um doze avos}; \quad \frac{1}{13} \rightarrow \text{um treze avos}; \quad \frac{5}{13} \rightarrow \text{cinco treze avos}.$$

Na leitura das frações cujos denominadores são 100, 1000, 1000, etc. não se usa "avos". Observe:

$$\frac{1}{100} \rightarrow \text{um centésimo}; \quad \frac{13}{100} \rightarrow \text{treze centésimos}; \quad \frac{33}{1000} \rightarrow \text{trinta e três milésimos}.$$

**Pronto! Agora você já é capaz de ler diversos tipos de frações.**

## MÃO NA MASSA

### Atividade 6

Uma pizza gigante foi dividida em doze fatias iguais. Pedro comeu quatro fatias, Isabella cinco fatias, Bernardo duas fatias e Manuela apenas uma fatia.

	Pedro	Isabella	Bernardo	Manuela
Pinte a fração de pizza consumida por cada pessoa				
Escreva, por extenso, a fração de pizza consumida por cada pessoa				
Escreva, usando símbolos matemáticos, a fração de pizza consumida por cada pessoa				

- a) Na sua opinião, qual maneira de representar fração "gasta menos lápis": pintando, escrevendo por extenso ou usando símbolos matemáticos?
- b) Na sua opinião, qual a representação que mais rapidamente ajuda a decidir quem comeu mais e quem comeu menos pizza?

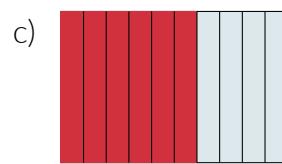
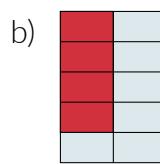
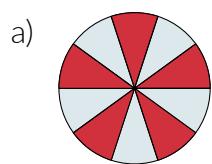
### Atividade 7

Um grupo de amigos está dividindo duas pizzas circulares iguais, isto é, de mesmo tamanho. A primeira pizza foi cortada em 4 fatias de mesmo tamanho. A segunda pizza foi repartida em 8 pedaços iguais.

- a) Uma fatia da primeira pizza é que fração dessa pizza? Responda usando símbolos matemáticos.
- b) Uma fatia da segunda pizza é que fração dessa pizza? Responda usando símbolos matemáticos.
- c) Qual fatia tem mais quantidade de pizza: uma fatia da primeira ou uma fatia da segunda? Explique usando uma figura.

### Atividade 8

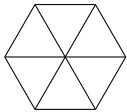
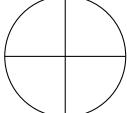
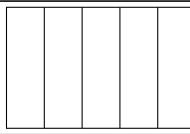
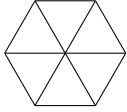
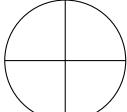
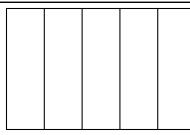
Para cada figura a seguir, indique a fração da figura que está pintada de vermelho. Esta fração é maior, menor ou exatamente igual a  $\frac{1}{2}$  da figura?



### Atividade 9

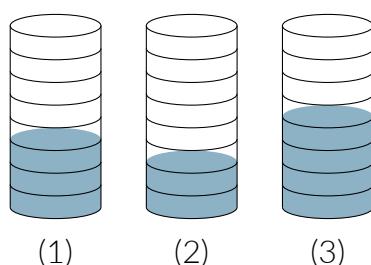
Na tabela a seguir, pinte cada figura de modo que a parte pintada seja a fração da figura indicada na coluna à esquerda e na mesma linha. Indique também, usando símbolos

matemáticos, qual fração da figura ficou sem ser pintada.

Fração da figura que deve ser pintada	Figura	Fração da figura que ficou sem ser pintada
$\frac{5}{6}$		
$\frac{3}{4}$		
$\frac{2}{5}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{3}{8}$		
$\frac{9}{10}$		

### Atividade 10

A figura mostra três copos idênticos. É possível armazenar a água dos três copos em um único copo sem que transborde? Explique usando frações.



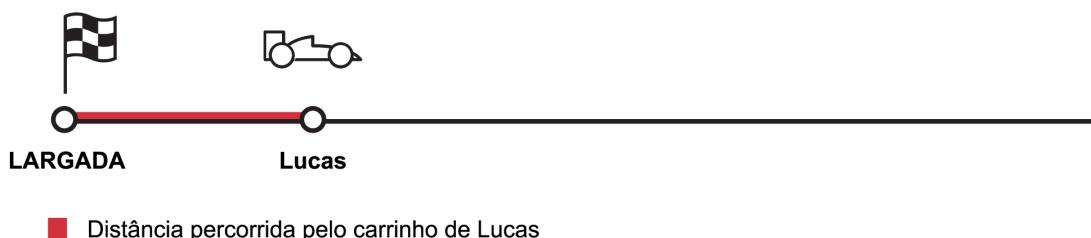
## Atividade 11

Fração da unidade	Figura correspondente à fração da unidade	Desenhe aqui a unidade
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		

## Atividade 12

Lucas, Matheus, Heitor, Rafael, Enzo, Nicolas, Lorenzo, Guilherme e Samuel estavam brincando de empurrar seus carrinhos de brinquedo para ver qual carrinho ia mais longe em uma pista reta.

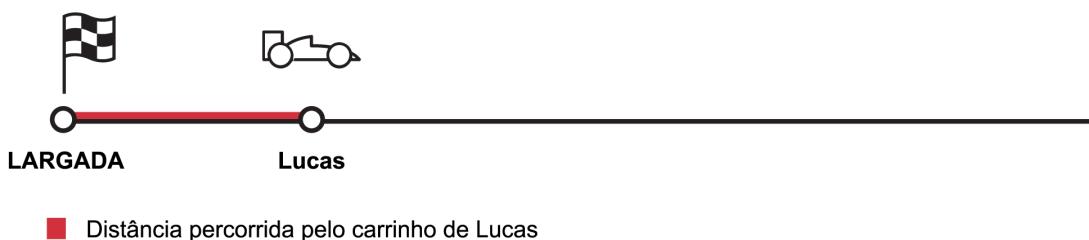
A figura a seguir mostra o quanto longe foi o carrinho de Lucas e onde ele parou na pista com relação ao ponto de largada.



Sabe-se que:

- O carrinho de Matheus só conseguiu ir até a metade da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Heitor conseguiu ir até  $\frac{3}{2}$  da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Rafael conseguiu ir até  $\frac{4}{2}$  da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Enzo conseguiu ir até  $\frac{5}{2}$  da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Nicolas conseguiu ir até  $\frac{6}{2}$  da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Lorenzo conseguiu ir até  $\frac{6}{4}$  da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Guilherme conseguiu ir até o dobro da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.
- O carrinho de Samuel conseguiu ir até  $\frac{6}{3}$  da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

Com essas informações, marque as posições de parada dos carrinhos de todos os amigos de Lucas no encarte que você irá receber.



Os carrinhos de Rafael e Samuel pararam no mesmo lugar? Explique.

### Atividade 13

Anita, Gustavo e Henrique descobriram que todos tinham levado bolo para o lanche.

Anita falou: "Mamãe colocou metade do bolo no meu lanche."

Gustavo falou: "Eu trouxe um terço do bolo que minha tia fez."

Henrique falou: "Eu trouxe apenas um quinto do bolo que minha mãe preparou!"

Para surpresa de todos, ao retirarem seus lanches da mochila, descobriram que todos traziam-no em embalagens iguais, portanto traziam a mesma quantidade de bolo.

Como você explica tal situação?

## QUEBRANDO A CUCA

### Atividade 14

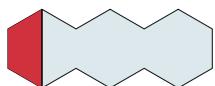
(NAEP, 1992) Pense cuidadosamente nesta questão. Escreva uma resposta completa.

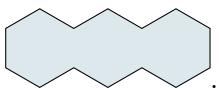
Você pode usar desenhos, palavras e números para explicar sua resposta. Certifique-se de mostrar todo o seu raciocínio.

José comeu  $\frac{1}{2}$  de uma pizza. Ella comeu  $\frac{1}{2}$  de uma outra pizza. José disse que ele comeu mais pizza do que Ella, mas Ella diz que eles comeram a mesma quantidade. Use palavras, figuras ou números para mostrar que José pode estar certo.

### Atividade 15

Complete as sentenças a seguir com uma fração adequada (usando símbolos matemáticos). Perceba que uma mesma região pintada pode ser descrita por frações diferentes, dependendo da unidade considerada.

- a) A região pintada em vermelho em  é \_\_\_\_\_ de .
- b) A região pintada em vermelho em  é \_\_\_\_\_ de .
- c) A região pintada em vermelho em  é \_\_\_\_\_ de

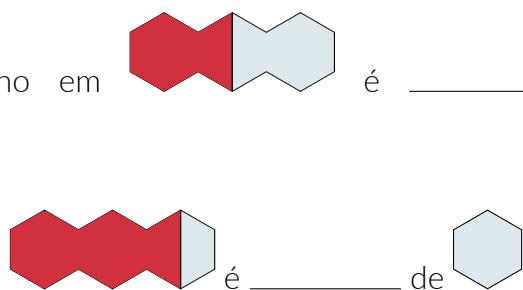


d) A região pintada em vermelho em \_\_\_\_\_ é \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.



e) A região pintada em vermelho em \_\_\_\_\_ é \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

f) A região pintada em vermelho em \_\_\_\_\_ é \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

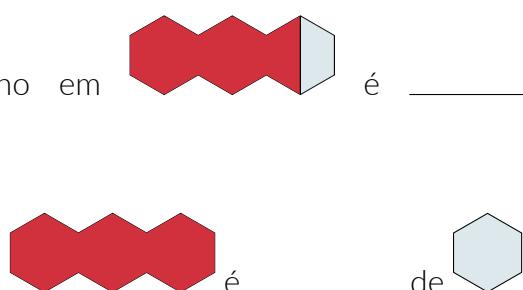


g) A região pintada em vermelho em \_\_\_\_\_ é \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.



h) A região pintada em vermelho em \_\_\_\_\_ é \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

i) A região pintada em vermelho em \_\_\_\_\_ é \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.



j) A região pintada em vermelho em \_\_\_\_\_ é \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.



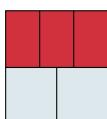
k) A região pintada em vermelho em \_\_\_\_\_ é \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

l) A região pintada em vermelho em \_\_\_\_\_ é \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.



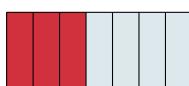
### Atividade 16

Miguel disse para Alice que a parte pintada de vermelho na figura a seguir corresponde a  $\frac{3}{5}$  da figura, pois ela está dividida em 5 partes e 3 partes estão pintadas. Você concorda com a afirmação e com a justificativa de Miguel? Explique!



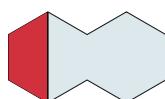
### Atividade 17

A figura a seguir tem 3 partes pintadas de vermelho e 4 partes pintadas de azul. É correto afirmar que a parte pintada de vermelho corresponde a  $\frac{3}{4}$  da figura? Explique.

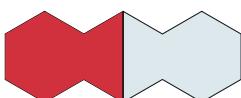


### Atividade 18

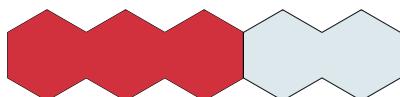
- a) A região em vermelho na figura a seguir representa  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{1}{4}$ ?



- b) A região em vermelho na figura a seguir representa  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{3}{2}$ ?

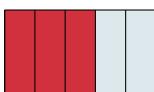


- c) A região em vermelho na figura a seguir representa  $\frac{3}{5}$  ou 3?



### Atividade 19

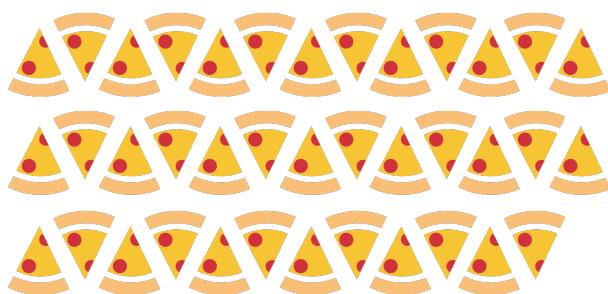
Júlia, Davi e Laura estavam estudando a figura a seguir.



Júlia disse: "A parte em vermelho representa  $\frac{3}{5}$ .". Davi retrucou: "Não, não! A parte em vermelho representa  $\frac{3}{2}$ !". Laura, então acrescentou: "Eu acho que a parte em vermelho representa 3!". Quem está certo? Júlia, Davi ou Laura? Explique!

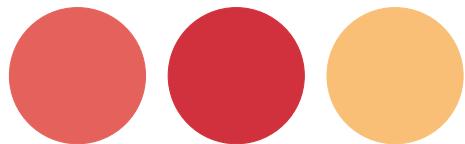
### Atividade 20

Em uma pizzaria rodízio, 7 amigos comem, ao todo, 38 fatias.



Sabendo que nessa pizzaria cada pizza é repartida em 8 fatias de mesmo tamanho, pergunta-se:

- a) Quantas pizzas inteiras comeram os 7 amigos?
- b) Que fração de uma pizza comeram ao todo os amigos?
- c) É possível que todos os amigos tenham comido o mesmo número de fatias de pizza? Explique.



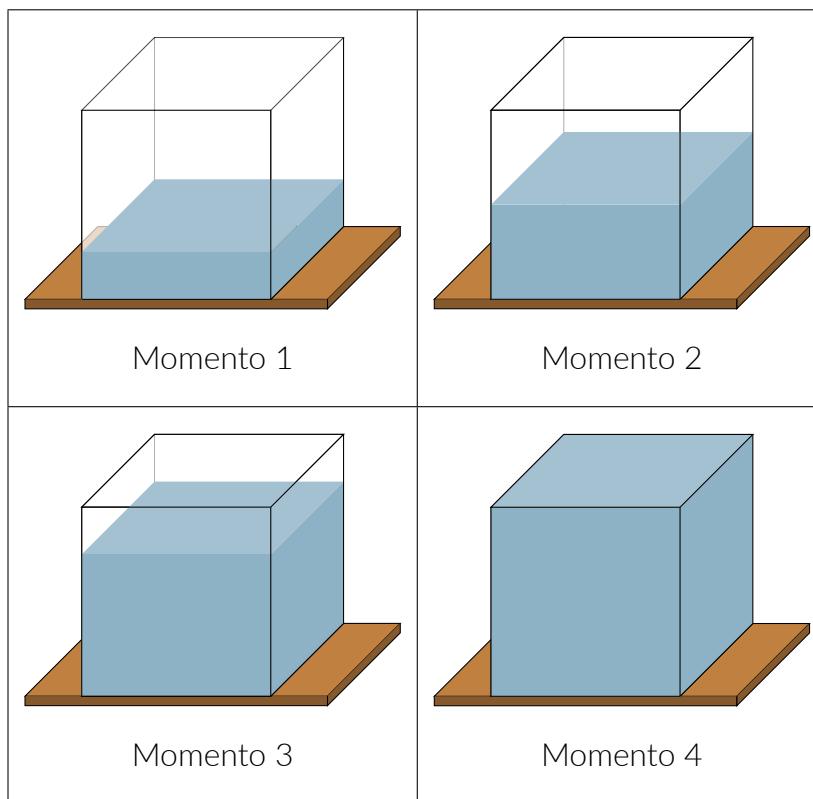
## Lição 3

# Frações na reta numérica

### EXPLORANDO O ASSUNTO

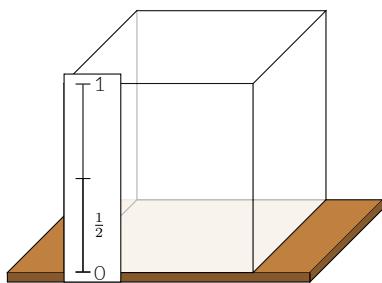
#### Atividade 1

Os quadrinhos a seguir mostram uma caixa-d'água sendo enchida. Para saber que fração da capacidade da caixa-d'água já está com água, será usada uma faixa graduada para indicar o nível de água na caixa.

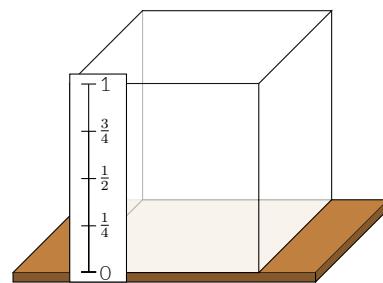


Escolha, para cada um dos momentos, a graduação que lhe parece mais adequada para registrar a quantidade de água representada em cada uma das imagens. Explique sua escolha.

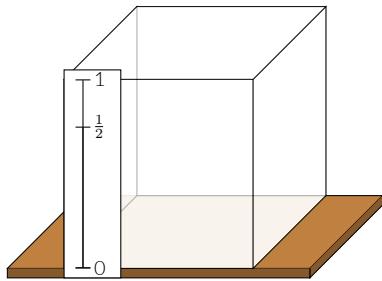
a)



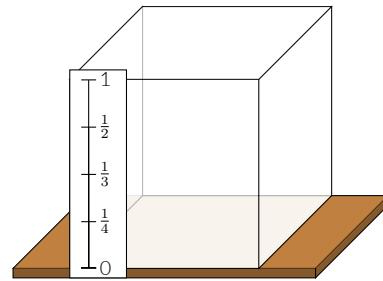
b)



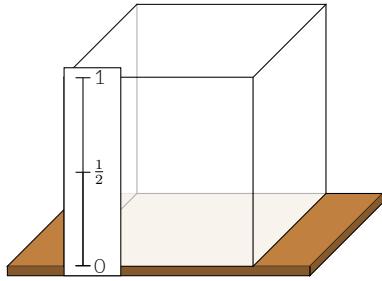
c)



d)

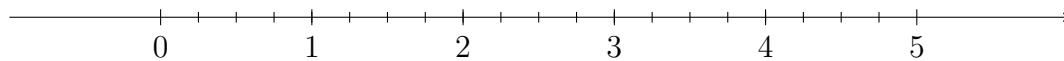


e)



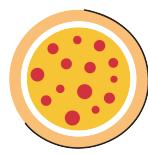
### Atividade 2

Use a reta numérica para fazer o que é pedido nos itens a seguir.

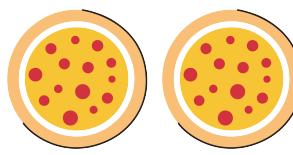


- a) Marque os pontos que representam as quantidades de pizza nos casos (A), (B) e (C) a seguir.

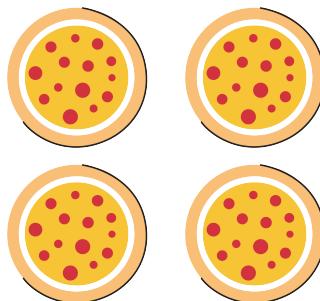
(A)



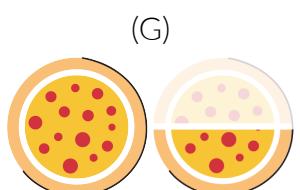
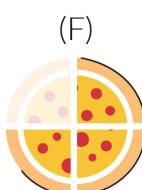
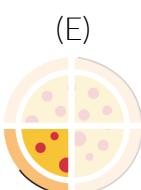
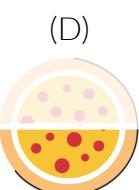
(B)



(C)



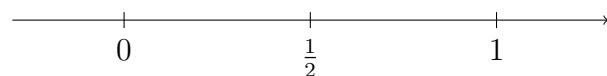
- b) E agora, que pontos na reta numérica representam as quantidades de pizza dos casos (D), (E), (F) e (G)?



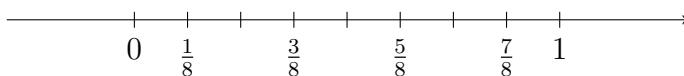
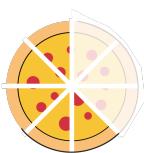
### Atividade 3

Para cada uma das figuras a seguir, marque na reta numérica o ponto correspondente à fração da unidade destacada na imagem:

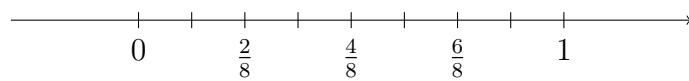
- a) A unidade é o lápis maior.



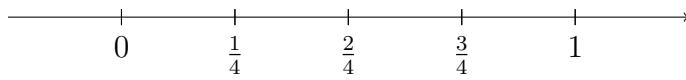
- b) A unidade é uma pizza.



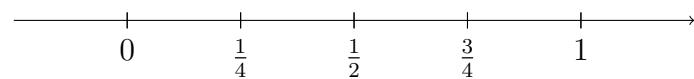
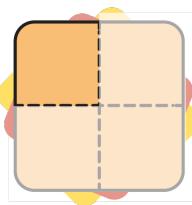
- c) A unidade é uma barra de chocolate.



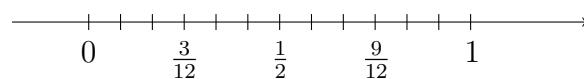
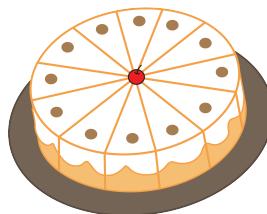
- d) A unidade é uma maçã.



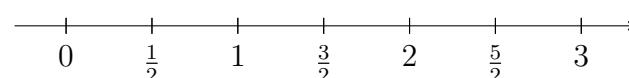
- e) A unidade é um sanduíche de queijo com presunto.



f) A unidade é uma torta.



g) A unidade é um biscoito.



h) A unidade é um copo cheio.



#### Atividade 4

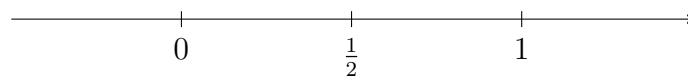
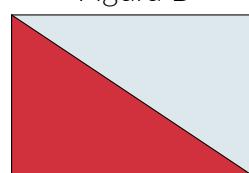
Que fração da figura está pintada de vermelho? Ligue cada figura ao número correspondente destacado na reta numérica.

a)

Figura A



Figura B



b)

Figura A

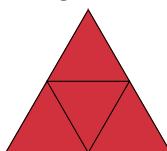
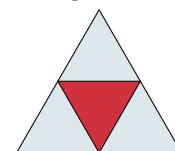
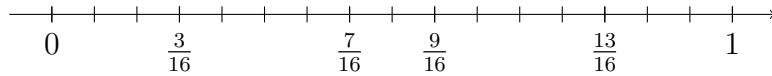
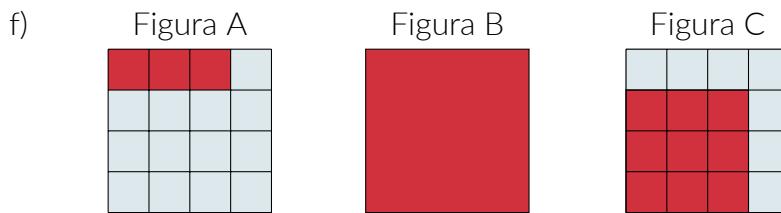
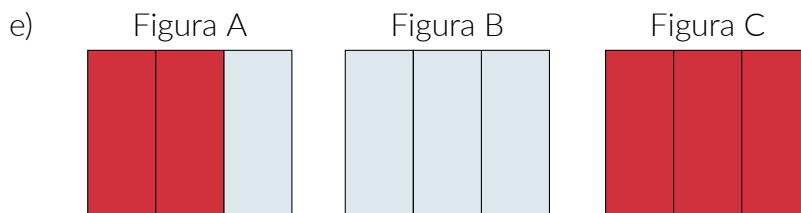
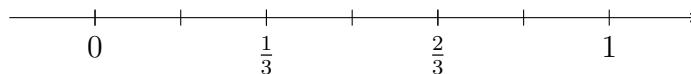
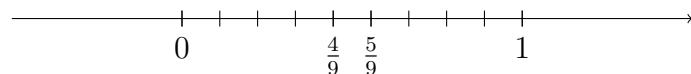
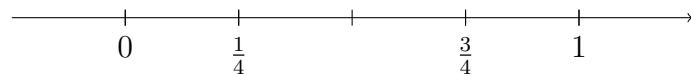


Figura B



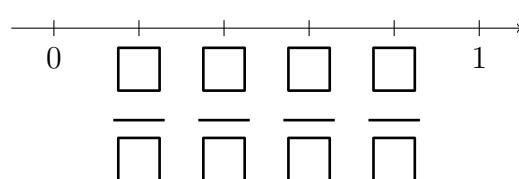


### Atividade 5

A faixa a seguir está dividida em 5 partes iguais.



- a) Considerando a faixa como unidade, complete a reta numérica escrevendo frações correspondentes às regiões coloridas em vermelho.



- b) E as faixas sem pintura vermelha e toda pintada de vermelho? Escreva as frações correspondentes a elas.

### Atividade 6

A professora Julia pediu que os seus alunos, Pedro e Miguel, marcassem  $\frac{1}{2}$  na reta numérica traçada em uma fita, como esta que vocês também receberam:



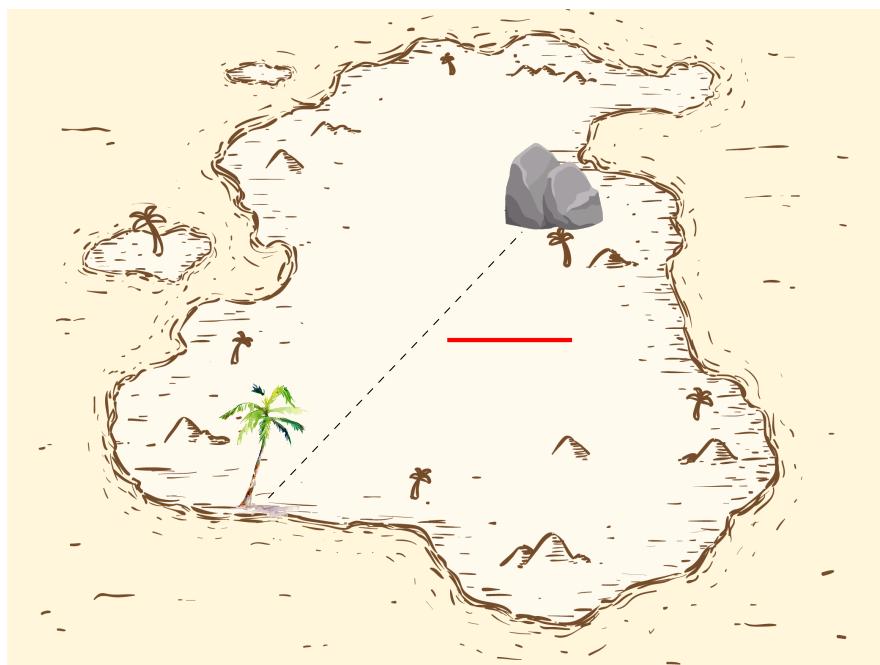
Veja as marcações de Pedro e Miguel.



- a) É possível ambos estarem corretos? Justifique sua resposta.
- b) Faça marcações correspondentes a  $\frac{1}{4}$  e a  $\frac{3}{4}$  na reta numérica desenhada na fita que você recebeu. Explique como você fez essas marcações.
- c) Onde deve ser feita a marcação correspondente a  $\frac{4}{4}$ ?
- d) E a marcação correspondente a  $\frac{5}{4}$ ?

## Atividade 7

Um caçador de tesouros encontrou o mapa e o papiro a seguir. Leia as instruções para a localização do tesouro e decida em que local ele deve cavar.



Há dois baús escondidos, um deles carregado com um tesouro. Para localizá-los, você deve seguir o mapa e estas instruções.

1. Use a faixa vermelha como unidade para descobrir a localização dos baús.
2. Os baús estão enterrados no caminho em destaque, alinhados com a palmeira imperial e com a pedra.
3. No mapa, os pontos que marcam os locais em que os baús estão enterrados ficam a  $\frac{5}{6}$  e a  $\frac{5}{8}$  da unidade, a partir da palmeira. A chave do baú com o tesouro está enterrada a  $\frac{13}{8}$  da unidade a partir da palmeira.
4. O baú com o tesouro está mais distante da palmeira.

- a) Marque, no mapa, as localizações dos baús e da chave.

- b) Qual o baú com o tesouro? Explique como chegou à sua conclusão.

### Atividade 8

Três amigos foram a uma pizzaria e cada um pediu uma pizza média, de três sabores diferentes: João comeu  $\frac{3}{4}$  da pizza de calabresa, Maria comeu  $\frac{2}{4}$  da pizza de presunto e Miguel comeu  $\frac{2}{5}$  da pizza de milho. Sabendo-se que todas as pizzas eram do mesmo tamanho, pergunta-se:

- Quem comeu mais pizza, João ou Maria? Explique.
- E no caso de Maria e Miguel, quem comeu mais pizza? Explique.
- Dos três amigos, quem comeu mais pizza? Explique.
- Marque na reta numérica a seguir as frações correspondentes às porções de pizza que cada amigo comeu, e confira a sua resposta do item c).



### Atividade 9

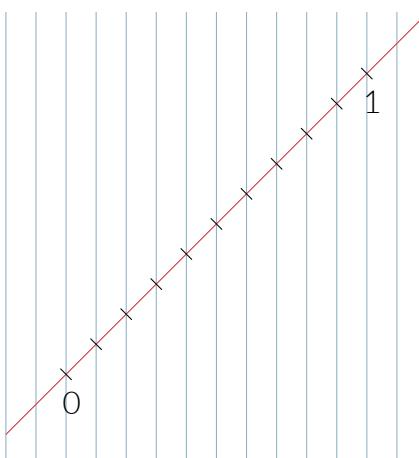
A imagem a seguir ilustra uma tartaruga percorrendo um caminho em linha reta, do ponto de partida ao de chegada. Observe a posição da tartaruga na imagem e avalie se as afirmações a seguir estão corretas ou não. Em cada item, explique a sua avaliação por escrito.



- A tartaruga percorreu mais do que a metade do percurso total.
- A tartaruga percorreu mais do que  $\frac{3}{4}$  do percurso total.
- A tartaruga percorreu mais do que  $\frac{3}{8}$  do percurso total.
- A tartaruga percorreu menos do que  $\frac{3}{4}$  do percurso total.
- A tartaruga percorreu menos do que  $\frac{2}{8}$  do percurso total.
- A tartaruga percorreu menos do que  $\frac{2}{3}$  do percurso total.
- A tartaruga percorreu  $\frac{3}{4}$  do percurso total.
- A tartaruga percorreu pelo menos  $\frac{5}{8}$  do percurso total.
- Para alcançar a chegada, a tartaruga precisa percorrer mais do que a metade do percurso total.
- Para alcançar a chegada, a tartaruga precisa percorrer menos do que  $\frac{2}{3}$  do percurso total.

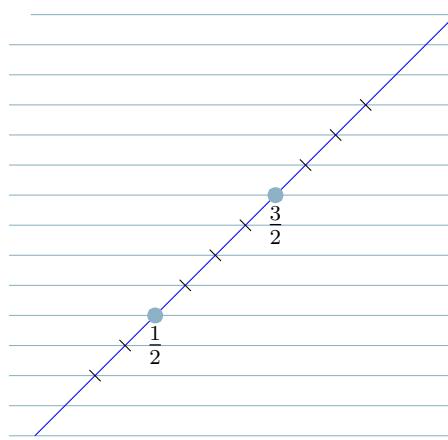
### Atividade 10

Na figura, há várias retas paralelas igualmente espaçadas e outra reta, destacada em vermelho, não paralela às demais. As retas paralelas marcam na reta destacada em vermelho pontos também igualmente espaçados. Um desses pontos corresponde ao zero e outro ao 1. Assim a reta vermelha pode ser considerada uma reta numérica.



- Marque o ponto correspondente à fração  $\frac{1}{2}$  na reta vermelha.
- Escreva a fração correspondente a cada marcação na reta vermelha. Explique sua resposta.

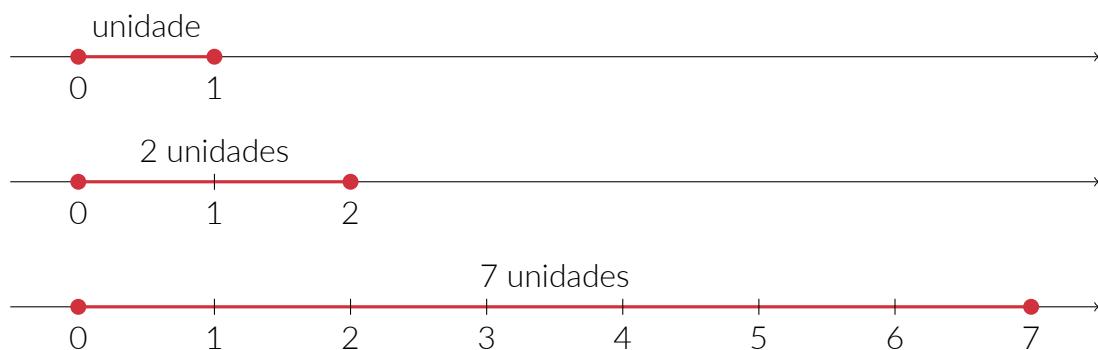
Na figura a seguir, há várias retas paralelas igualmente espaçadas e outra reta, destacada em azul, não paralela às anteriores. Observe que as retas paralelas marcam na reta destacada em azul pontos também igualmente espaçados. Dois desses pontos correspondem às frações  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{3}{2}$ , como ilustra a figura.



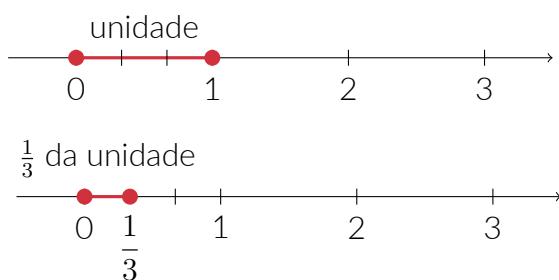
- Indique as marcações correspondentes ao zero e ao um na reta numérica.
- Marque, nesta mesma reta numérica, as frações  $\frac{3}{4}$  e  $\frac{5}{4}$ .
- Qual das marcações na reta azul representa a maior fração? Que fração é essa?

## ORGANIZANDO AS IDEIAS

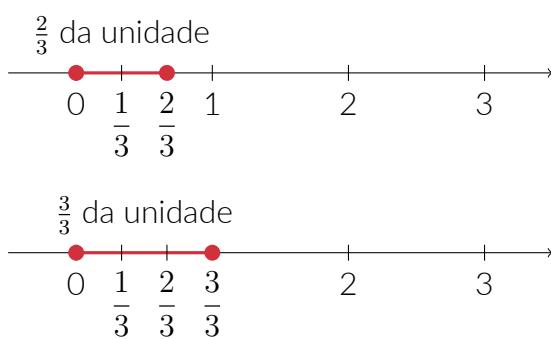
Como se sabe, os números naturais podem ser representados por pontos em uma reta. Para isso, é preciso escolher um ponto para corresponder ao zero e outro para corresponder ao um. O segmento de extremos 0 e 1 é associado à unidade. Os pontos que corresponderão aos demais números naturais são obtidos a partir da unidade.

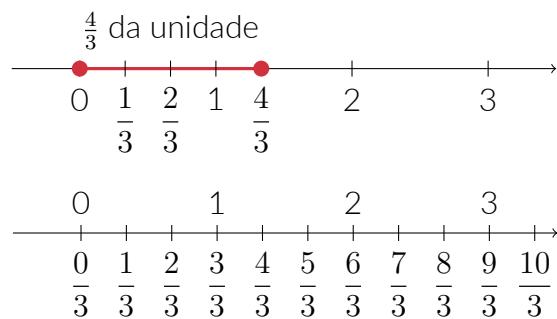


As frações também podem ser associadas a pontos na reta numérica. Para isso, é preciso dividir a unidade em partes iguais. Por exemplo, a divisão da unidade em 3 partes iguais determina três terços. O ponto correspondente ao número  $\frac{1}{3}$  é a extremidade do segmento que, a partir do 0, identifica o primeiro terço da unidade.

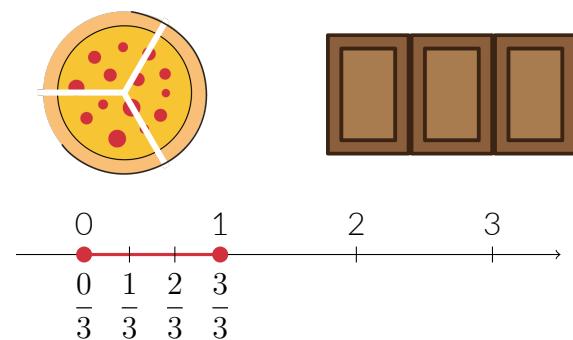


A partir do ponto correspondente ao  $\frac{1}{3}$ , são marcados na reta numérica os pontos correspondentes a  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{3}$ ,  $\frac{4}{3}$ , e assim por diante.

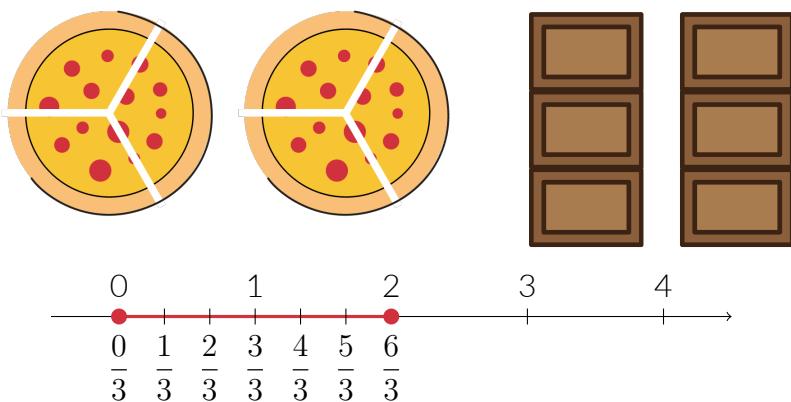




A representação dos números na reta numérica evidencia que algumas frações são números naturais. Por exemplo,  $\frac{3}{3}$  é igual a 1. Portanto,  $\frac{3}{3}$  de uma pizza é igual a 1 pizza e  $\frac{3}{3}$  de uma barra de chocolate é igual a 1 barra de chocolate.

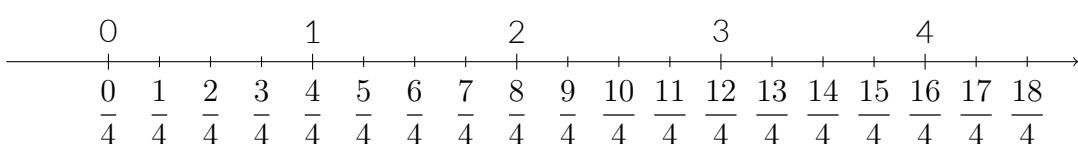


Já  $\frac{6}{3}$  é igual a 2. Assim,  $\frac{6}{3}$  de uma pizza é igual a 2 pizzas e  $\frac{6}{3}$  de uma barra de chocolate é igual a 2 barras de chocolate.

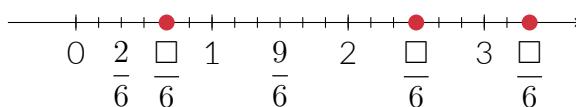


E  $\frac{12}{3}$ , é igual a que número natural?  $\frac{12}{3} = \square$

Para identificar na reta numérica os pontos correspondentes às frações  $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}$ , e assim por diante, o processo é o mesmo:



Na reta numérica a seguir estão destacados alguns pontos e as frações correspondentes a eles. Observe e complete as frações em destaque escrevendo seus numeradores.

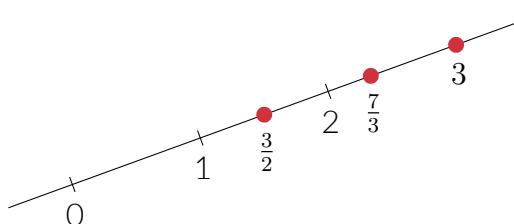


### A ordem na reta numérica

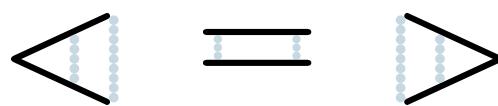
Como você pode perceber, os números são organizados na reta numérica em ordem crescente no sentido que vai do zero para o um. As marcações do 0 e do 1 informam a ordem crescente.



A organização dos números na reta numérica permite comparar dois números apenas observando a sua posição na reta. Por exemplo, observando a ordem crescente, como 5 está adiante do 3, o número 5 é maior do que o número 3, ou, em símbolos matemáticos,  $5 > 3$ . O mesmo vale para as frações. Como  $\frac{3}{2}$  está antes de  $\frac{7}{3}$ , sabe-se que  $\frac{3}{2}$  é menor do que  $\frac{7}{3}$ , ou, em símbolos matemáticos  $\frac{3}{2} < \frac{7}{3}$ . É possível perceber que  $\frac{7}{3} < 3$ .



O símbolo " $<$ " é usado para dizer "é menor do que" e o símbolo " $>$ " significa "é maior do que". Assim, por exemplo, a frase "oito é menor do que quinze" pode ser expressa de modo mais resumido como  $8 < 15$ . Já a expressão  $\frac{3}{2} > \frac{1}{2}$  quer dizer que "três meios é maior do que um meio".



"é menor  
do que"  
 $5 < 9$

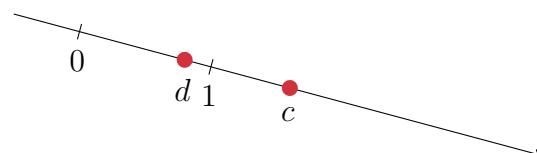
"é igual a"  
 $3 = 3$

"é maior  
do que"  
 $9 > 5$

Mesmo sem saber que números são  $a$  e  $b$ , observando as suas representações na reta numérica, podemos concluir que  $a < b$ .



E neste caso, qual é o menor número,  $c$  ou  $d$ ?



O número  $d$  é menor que  $c$  porque, observando a ordem crescente,  $d$  está antes de  $c$ . É possível concluir ainda que  $d$  é um número menor do que 1 e  $c$  um número maior do que 1.

## MÃO NA MASSA

### Atividade 11

#### Jogo: varal dos números

O varal de números está disposto na sala de aula, nele já estão posicionados os números 0 (zero) e 1 (um), como na figura. Nos cartões preparados para a atividade estão os números:

$0, 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{8}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, \frac{12}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{10}{5}, \frac{1}{10}.$

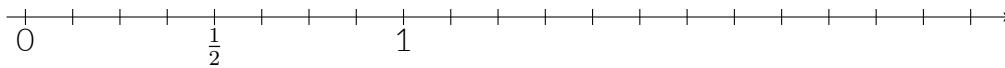


O jogo consiste em fixar cartões numerados em varal, reproduzindo uma reta numérica. As regras serão apresentadas pelo seu professor ou professora. Discuta com seus colegas a posição correta de fixação de cada um dos cartões numerados no varal. Ao final do jogo, reproduza a forma como os cartões foram posicionados no varal na reta numérica a seguir. Aproveite as marcações já existentes.



### Atividade 12

Na reta numérica já estão marcados os números 0, 1 e  $\frac{1}{2}$ . Marque  $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{8}{4}, \frac{10}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{10}{8}$  e 2.



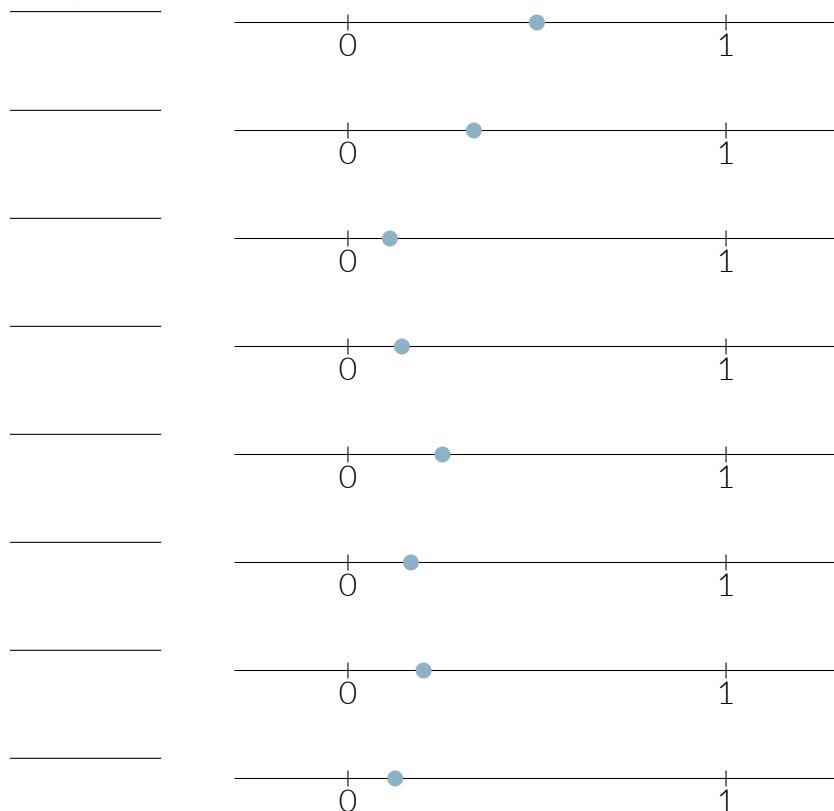
### Atividade 13

Associe, como no exemplo, cada fração à sua representação na reta numérica.

- (A)  $\frac{1}{2}$       (B)  $\frac{1}{3}$       (C)  $\frac{1}{4}$       (D)  $\frac{1}{5}$       (E)  $\frac{1}{6}$       (F)  $\frac{1}{7}$       (G)  $\frac{1}{8}$       (H)  $\frac{1}{9}$       (I)  $\frac{1}{10}$



(A)

**Atividade 14**

Complete as sentenças a seguir com os sinais  $>$  (maior) ou  $<$  (menor) de modo a torná-las verdadeiras.

a)  $\frac{1}{2}$    $\frac{1}{5}$

b)  $\frac{1}{4}$    $\frac{1}{3}$

c)  $\frac{1}{10}$    $\frac{1}{20}$

d)  $\frac{1}{12}$    $\frac{1}{2}$

e)  $\frac{1}{35}$    $\frac{1}{43}$

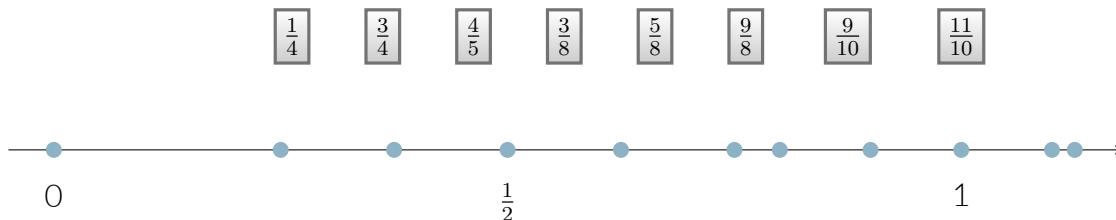
f)  $\frac{1}{99}$    $\frac{1}{100}$

g)  $\frac{1}{5}$    $\frac{1}{50}$

h)  $\frac{1}{100}$    $\frac{1}{10}$

**Atividade 15**

Na reta numérica a seguir estão identificados os pontos correspondentes aos números 0, 1 e  $\frac{1}{2}$ . Os demais pontos correspondem aos números apresentados a seguir. Associe cada fração ao ponto correspondente na reta numérica.



### Atividade 16

Complete as sentenças a seguir com os sinais  $>$  (maior),  $<$  (menor) ou  $=$  (igual) de modo a torná-las verdadeiras.

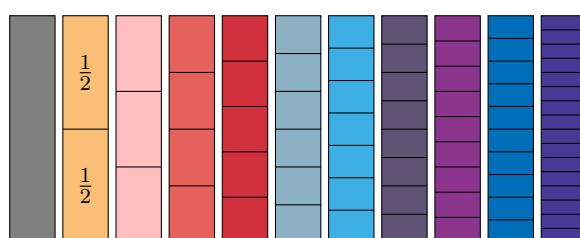
- |                      |                      |                   |                    |                      |                 |                     |                      |                 |
|----------------------|----------------------|-------------------|--------------------|----------------------|-----------------|---------------------|----------------------|-----------------|
| a) $\frac{3}{6}$     | <input type="text"/> | $\frac{5}{6}$     | f) $\frac{1}{2}$   | <input type="text"/> | $\frac{1}{3}$   | m) $\frac{3}{2}$    | <input type="text"/> | $\frac{2}{5}$   |
| b) $\frac{5}{9}$     | <input type="text"/> | $\frac{4}{9}$     | g) $\frac{1}{7}$   | <input type="text"/> | $\frac{1}{6}$   | n) $\frac{3}{4}$    | <input type="text"/> | $\frac{6}{5}$   |
| c) $\frac{27}{10}$   | <input type="text"/> | $\frac{29}{10}$   | h) $\frac{2}{5}$   | <input type="text"/> | $\frac{2}{7}$   | o) $\frac{7}{8}$    | <input type="text"/> | $\frac{10}{9}$  |
| d) $\frac{3}{12}$    | <input type="text"/> | $\frac{9}{12}$    | i) $\frac{4}{5}$   | <input type="text"/> | $\frac{4}{3}$   | p) $\frac{6}{5}$    | <input type="text"/> | $\frac{12}{9}$  |
| e) $\frac{139}{100}$ | <input type="text"/> | $\frac{125}{100}$ | j) $\frac{12}{15}$ | <input type="text"/> | $\frac{12}{7}$  | q) $\frac{4}{5}$    | <input type="text"/> | $\frac{5}{4}$   |
|                      |                      |                   | l) $\frac{22}{80}$ | <input type="text"/> | $\frac{22}{90}$ | r) $\frac{35}{40}$  | <input type="text"/> | $\frac{30}{25}$ |
|                      |                      |                   |                    |                      |                 | s) $\frac{99}{100}$ | <input type="text"/> | $\frac{3}{2}$   |

### QUEBRANDO A CUCA

#### Atividade 17

Você recebeu uma folha com 11 retângulos coloridos de mesmo tamanho. Cada retângulo está dividido em uma determinada quantidade de partes iguais.

- a) Complete os retângulos escrevendo em cada uma das partes a fração correspondente, como no exemplo: o retângulo laranja está dividido em duas partes iguais, então cada parte é  $\frac{1}{2}$ .

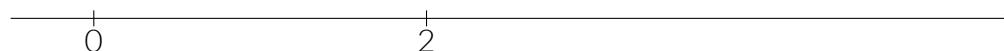


- b) Recorte os retângulos da folha que você recebeu e use-os para representar os números a seguir em uma reta numérica construída por você.

$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \frac{10}{7}, \frac{12}{7}, \frac{10}{8}, \frac{12}{8}, \frac{10}{9}, \frac{12}{9}, \frac{10}{10}, \frac{20}{16}$

### Atividade 18

Na reta numérica a seguir:



- a) Marque  $\frac{1}{2}$ . Justifique sua resposta.
- b) Marque  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$  e  $\frac{5}{4}$ . Explique como raciocinou para fazer essas marcações.
- c)  $\frac{1}{4}$  é maior ou menor do que  $\frac{1}{2}$ ?
- d)  $\frac{3}{4}$  é maior ou menor do que  $\frac{1}{2}$ ?
- e)  $\frac{5}{4}$  é maior ou menor do que 1?
- f) Escreva as frações marcadas na reta em ordem crescente, completando os espaços a seguir:

$$0 < \frac{\square}{\square} < \frac{\square}{\square} < \frac{\square}{\square} < 1 < \frac{\square}{\square} < 2.$$

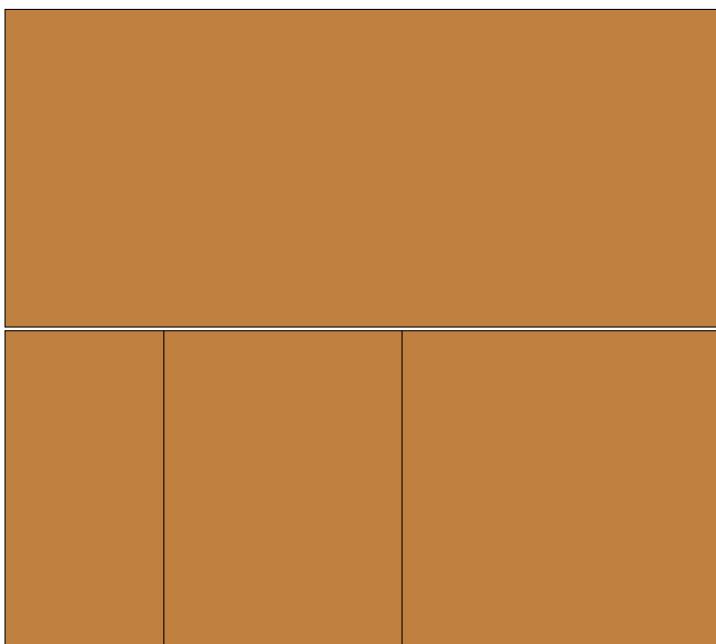
- g) Volte à reta e registre outras três frações que atendam às seguintes condições:
- A) A primeira deve ser maior do que 3 e menor do que 4.
- B) A segunda deve ser maior do que  $\frac{7}{2}$ .
- C) A terceira deve ser maior do que  $\frac{17}{4}$  e menor do que 5.



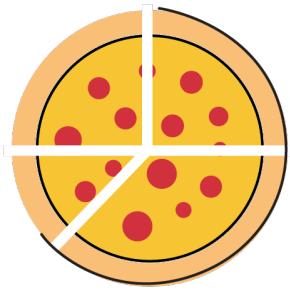
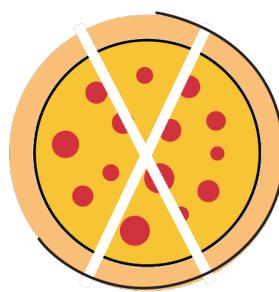
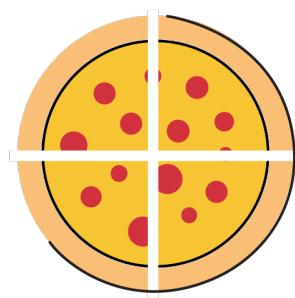
## Folhas para reprodução

### LIÇÃO 1

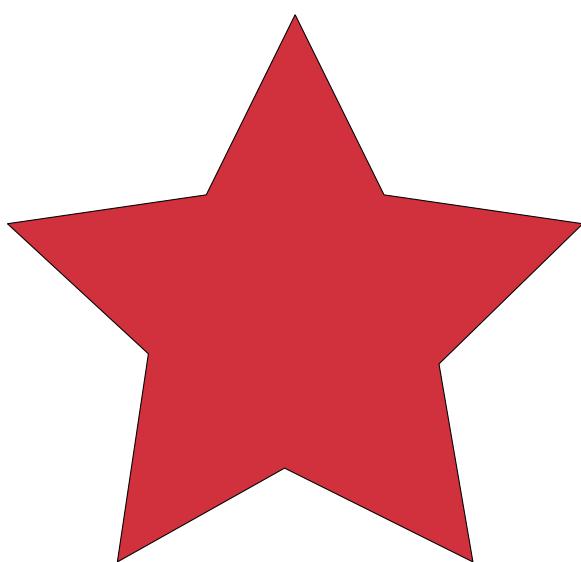
#### Atividade 1



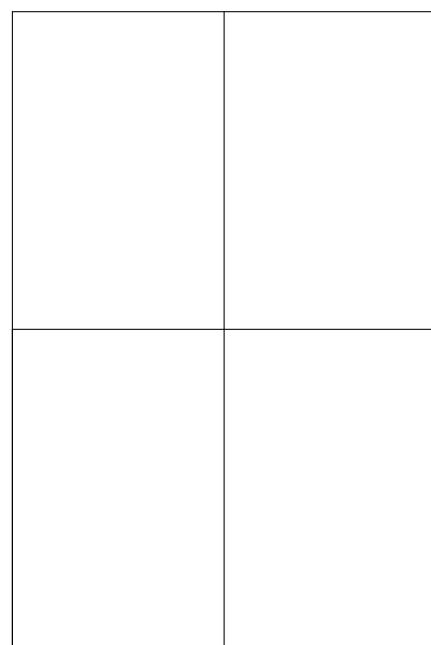
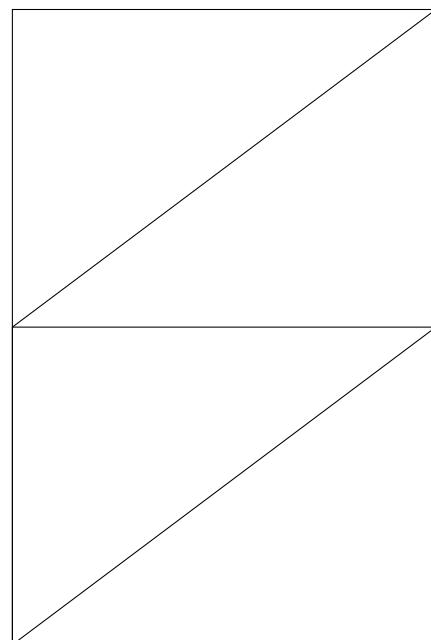
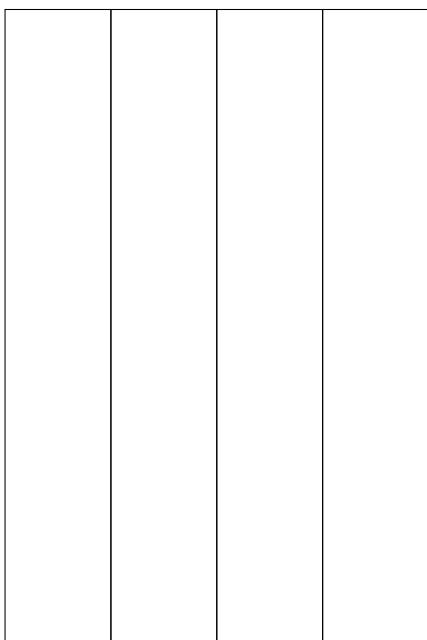
## Atividade 2

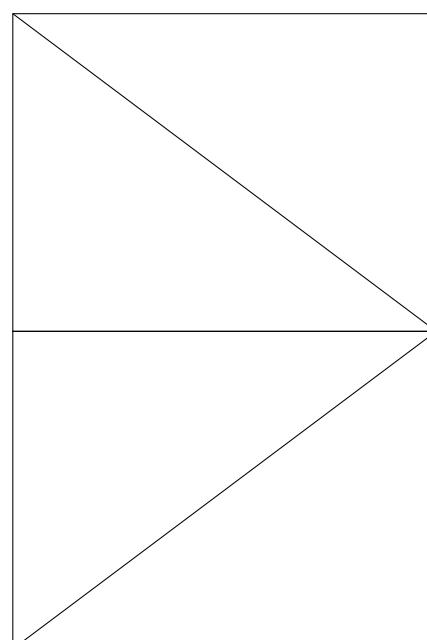
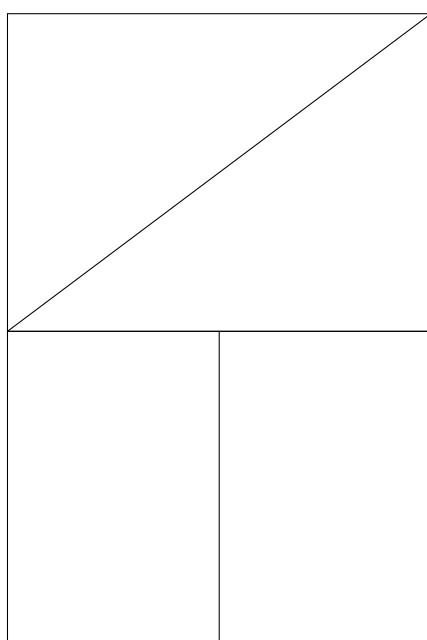
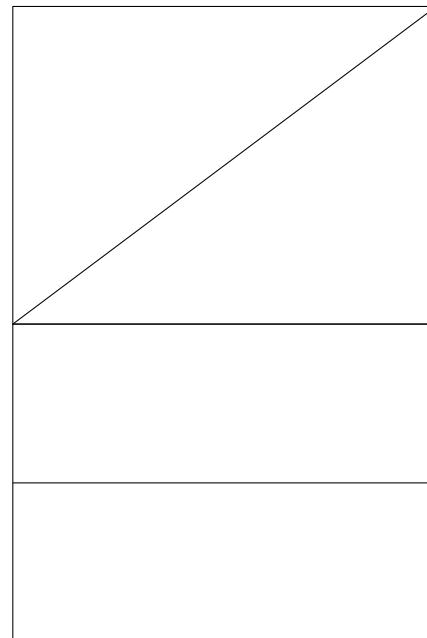
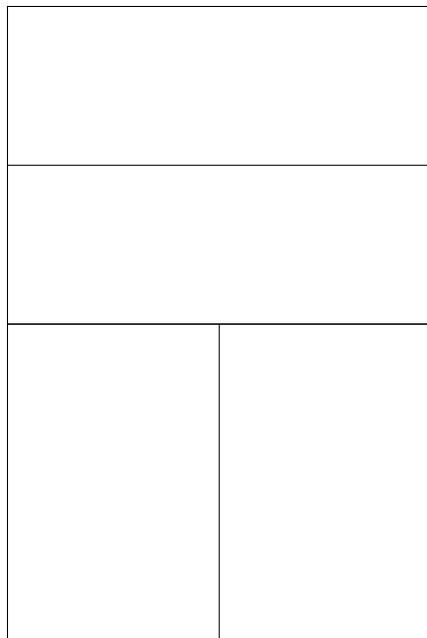


## Atividade 3



## Atividade 4





## Atividade 9



Figura 1

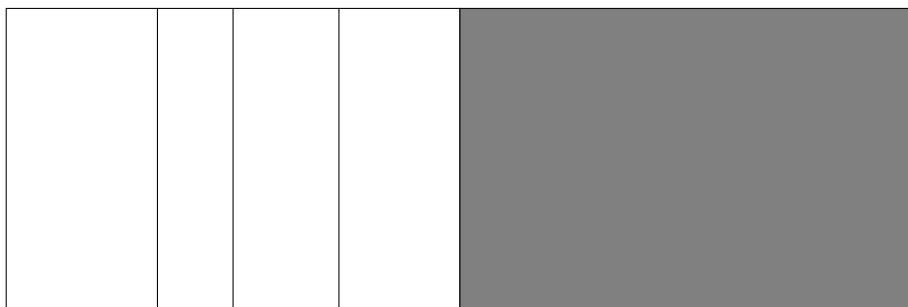


Figura 2

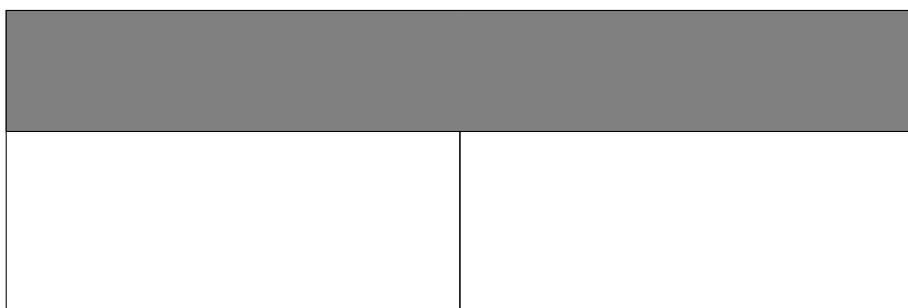


Figura 3

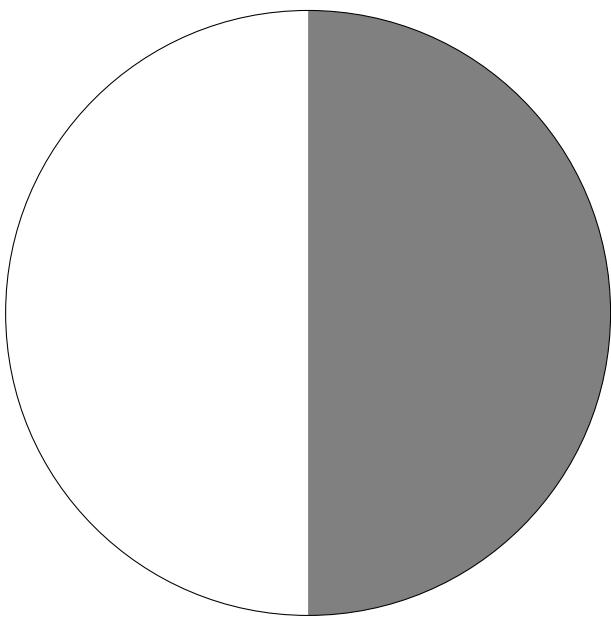


Figura 4

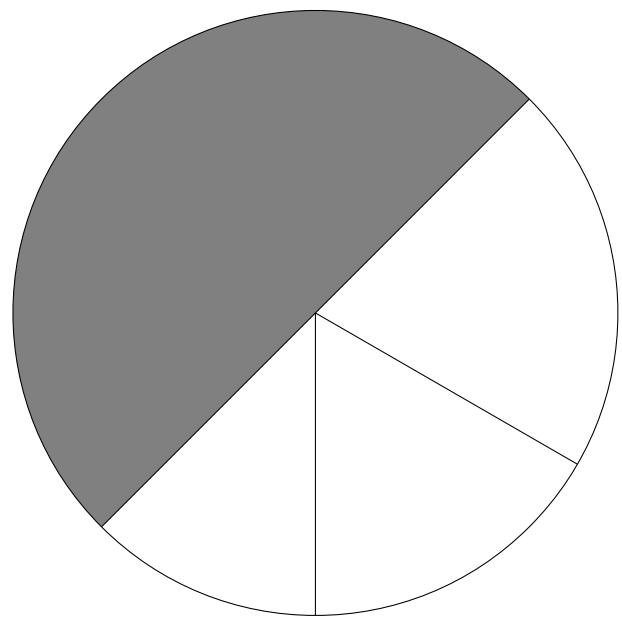


Figura 5

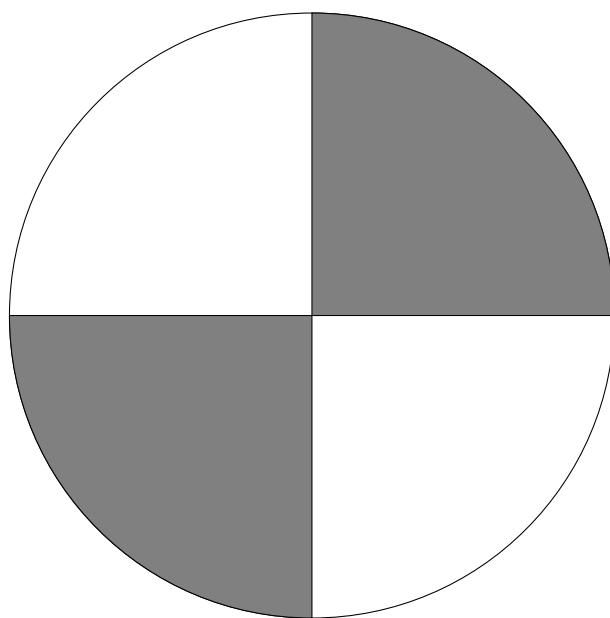


Figura 6

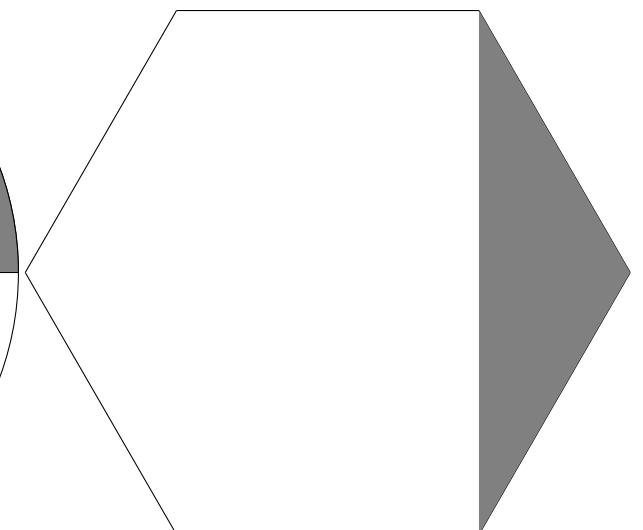


Figura 7

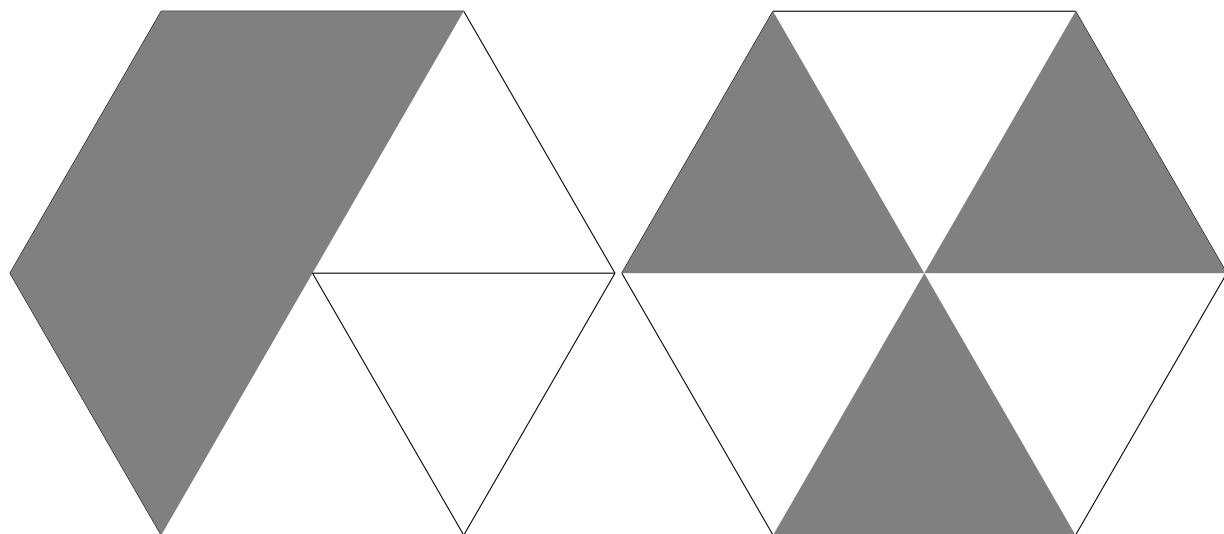


Figura 8

Figura 9

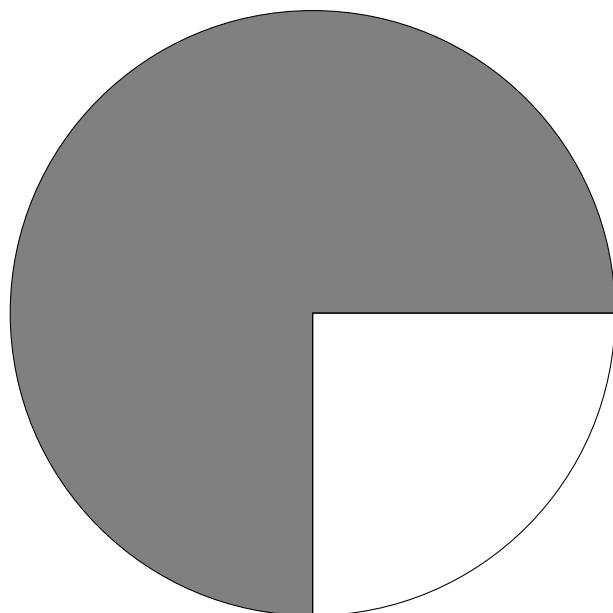


Figura 10

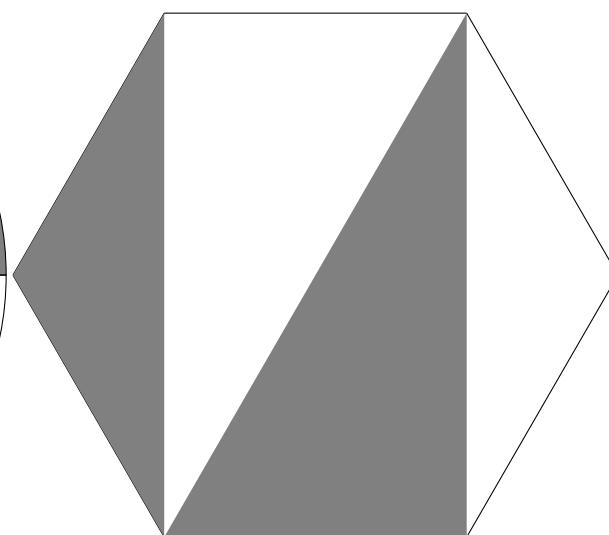


Figura 11

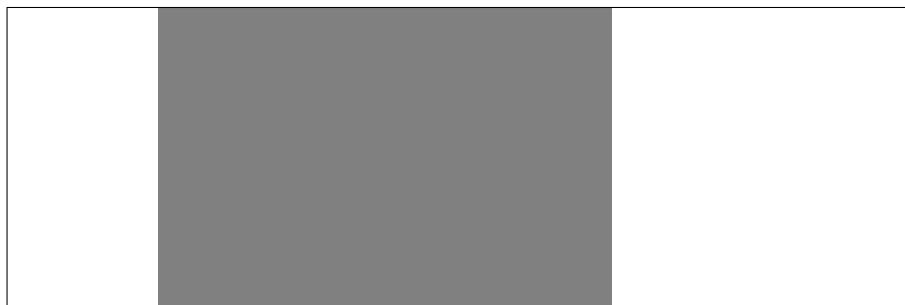
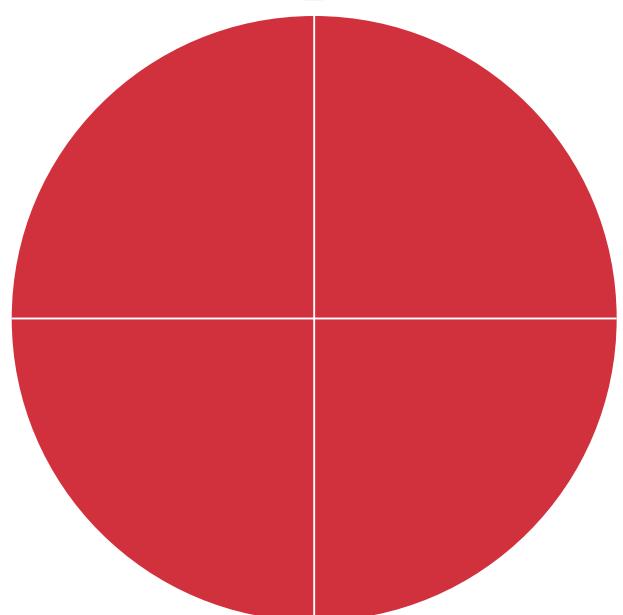
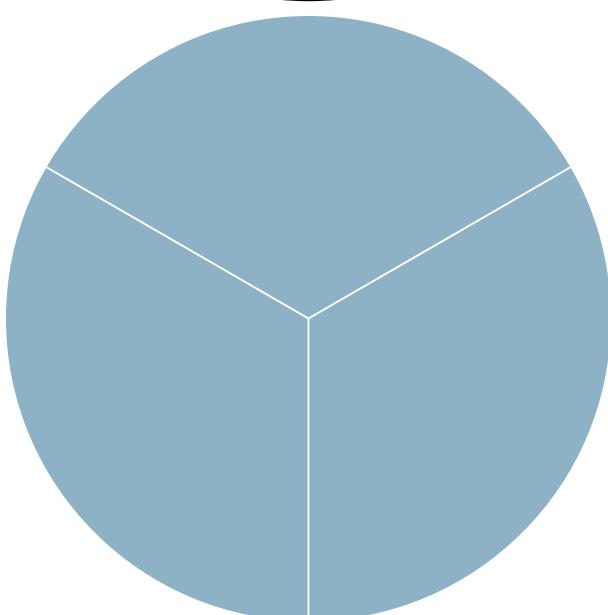
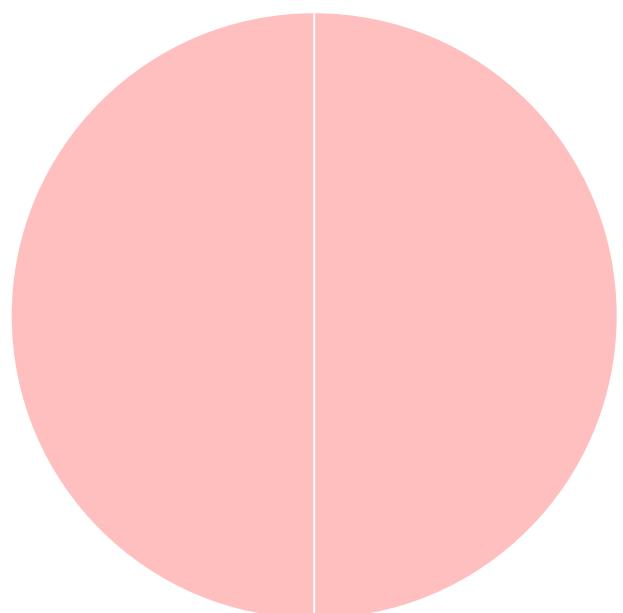
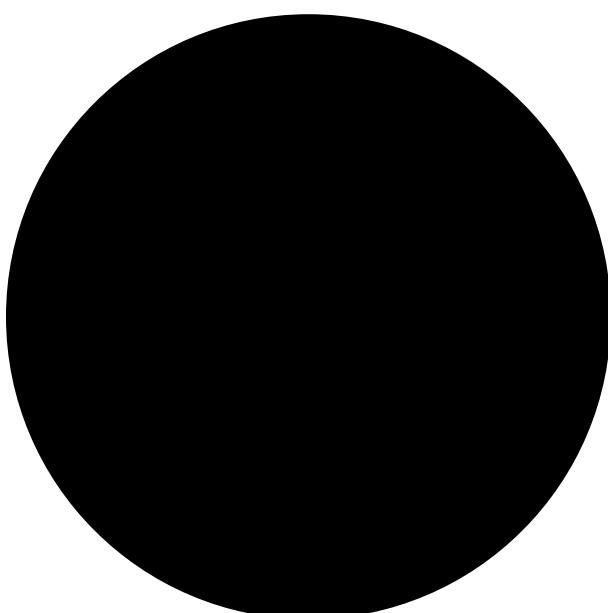
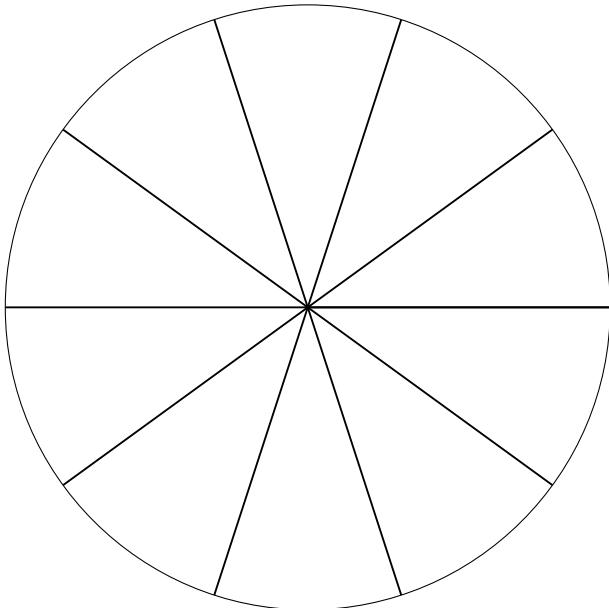
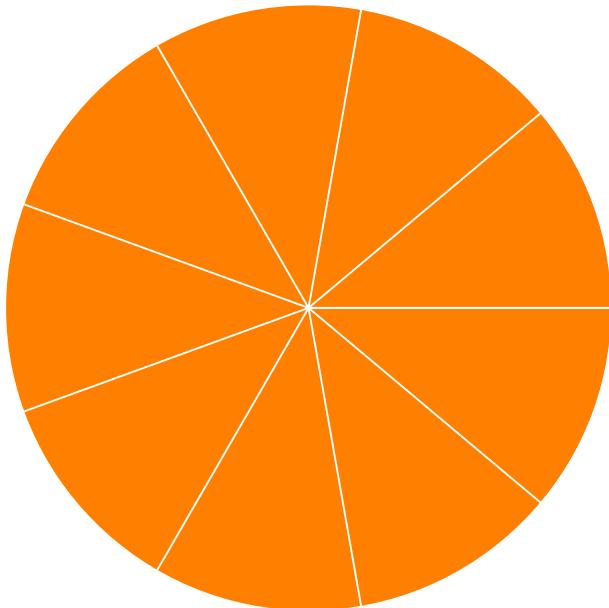
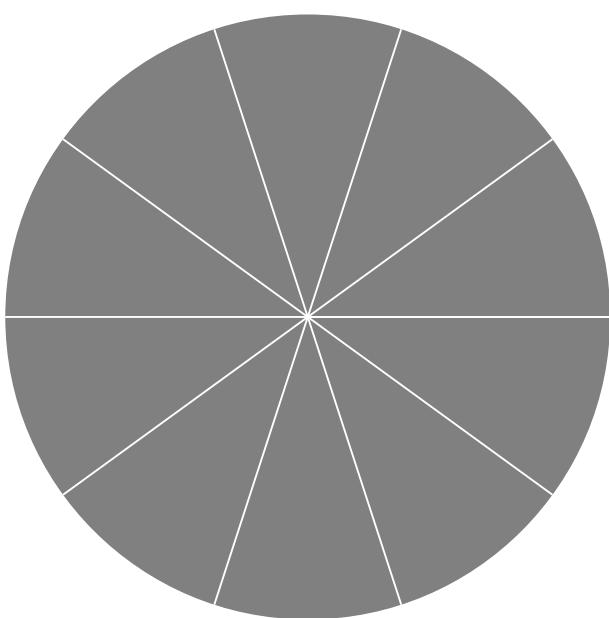
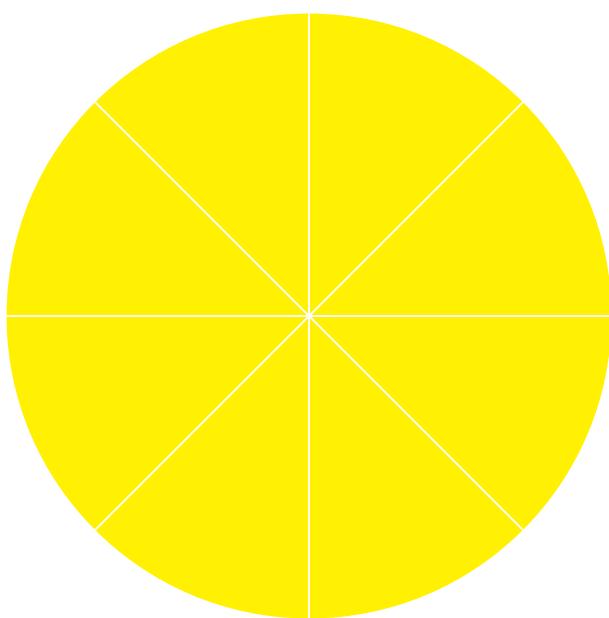
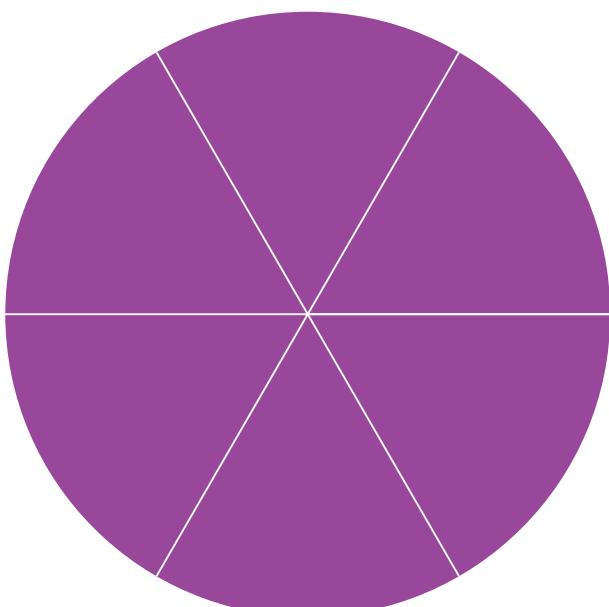
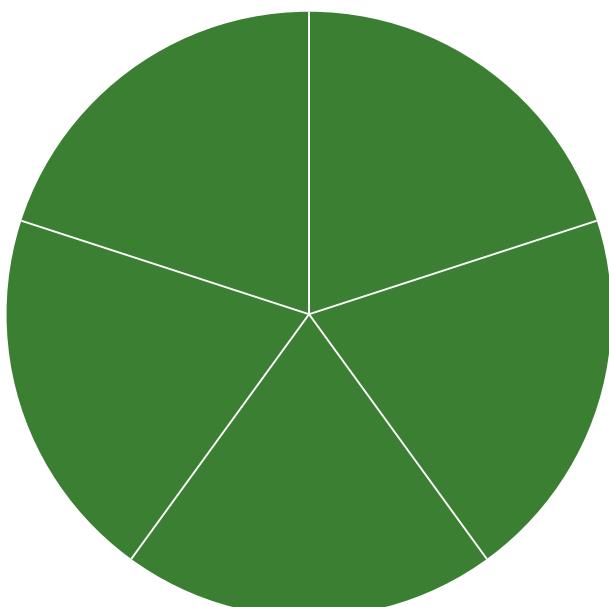


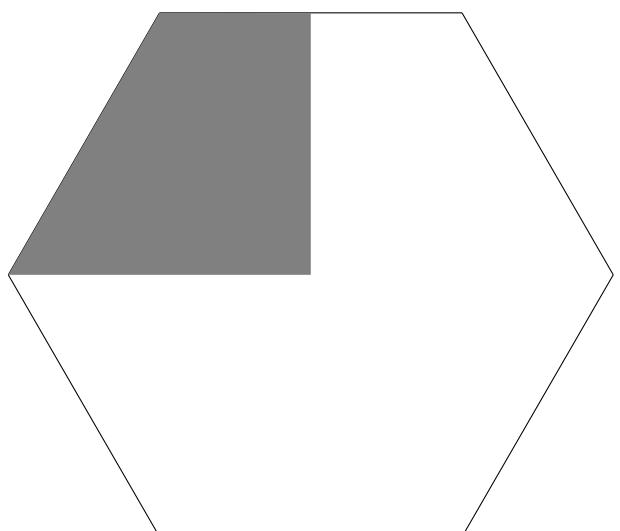
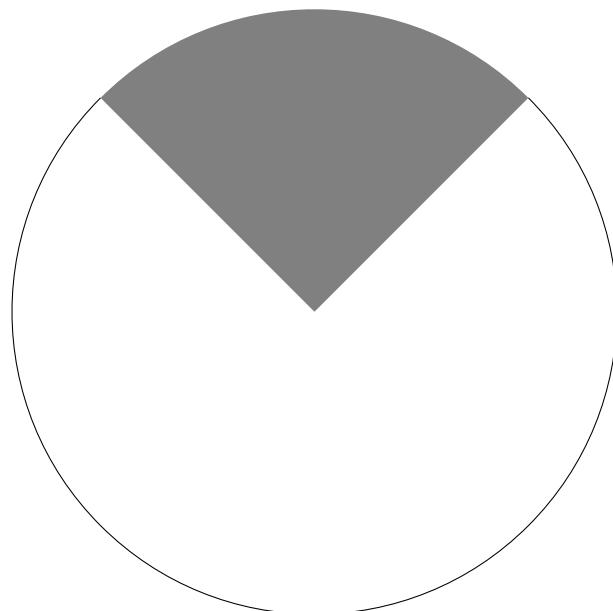
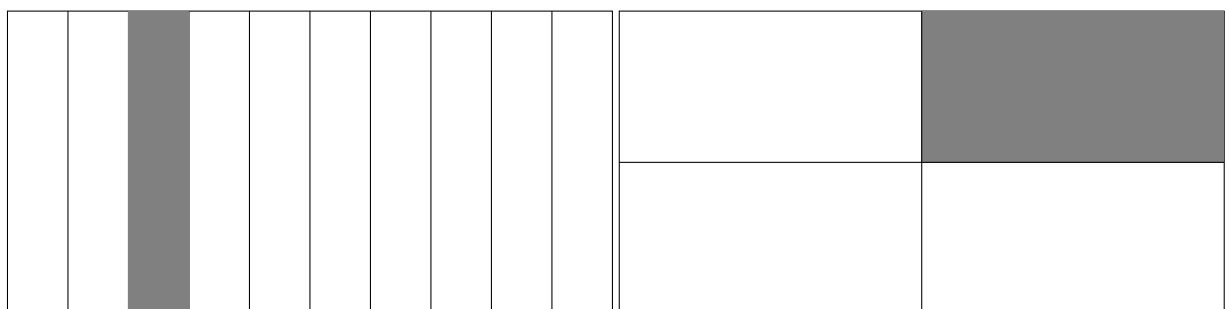
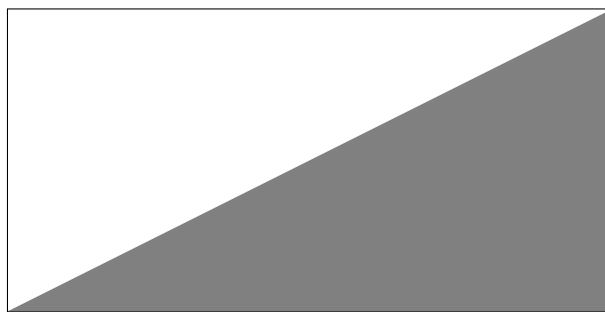
Figura 12

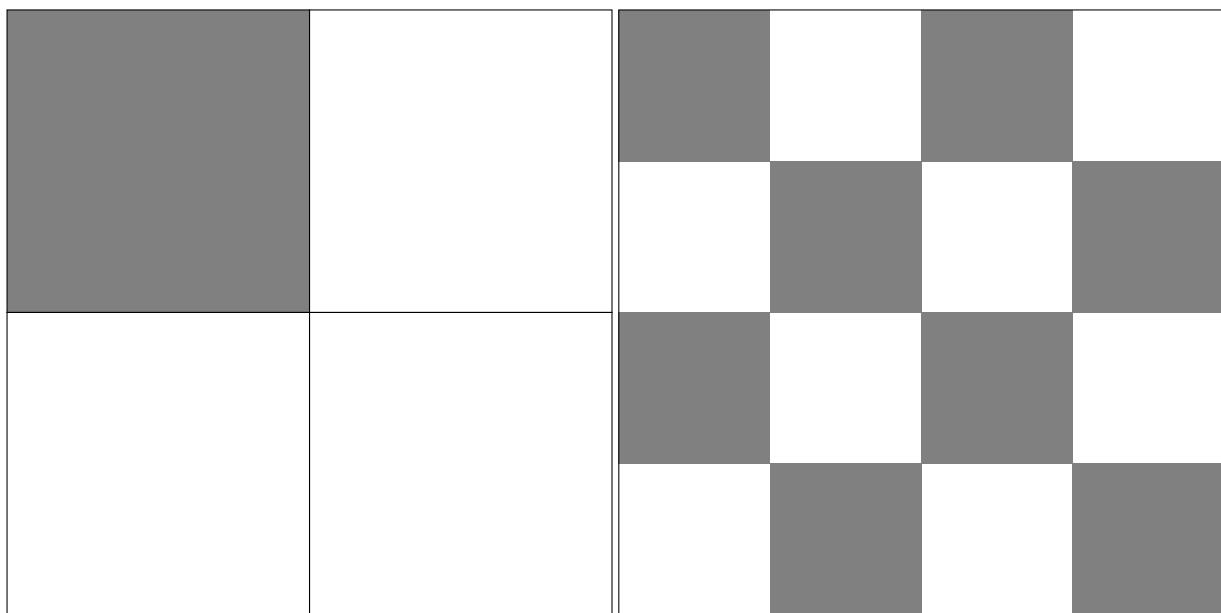
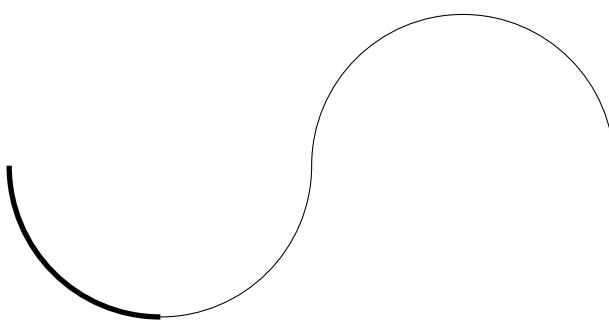
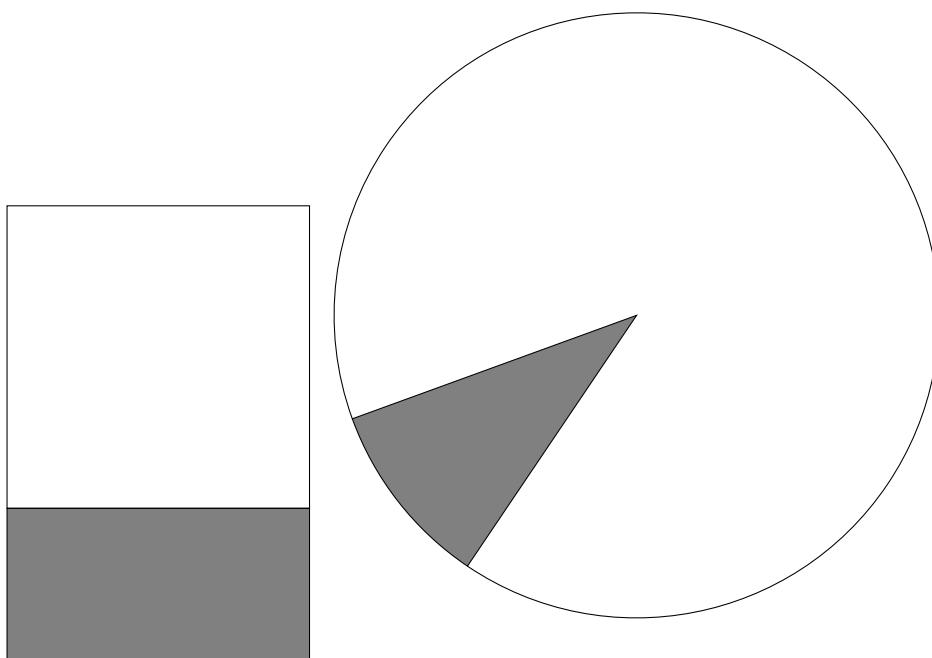
## Atividade 10





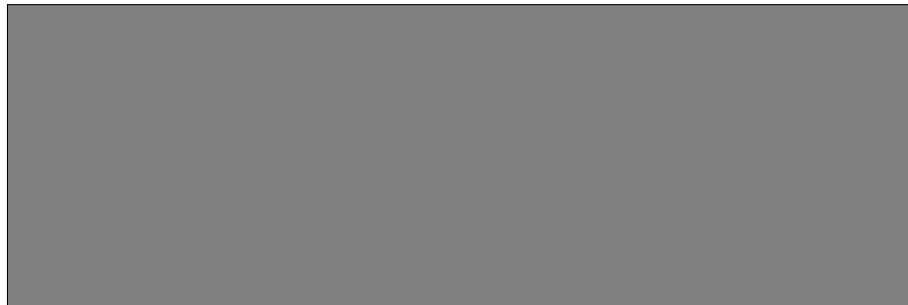
### Atividade 12



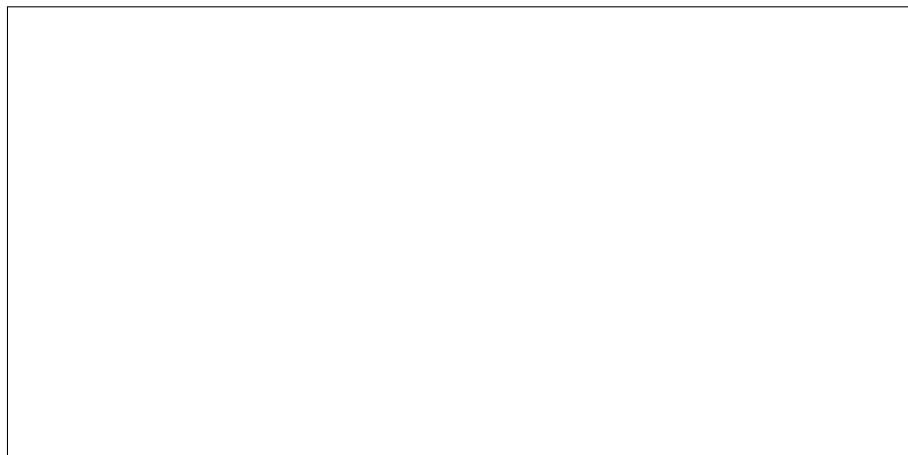


## LICAO 2

### Atividade 1

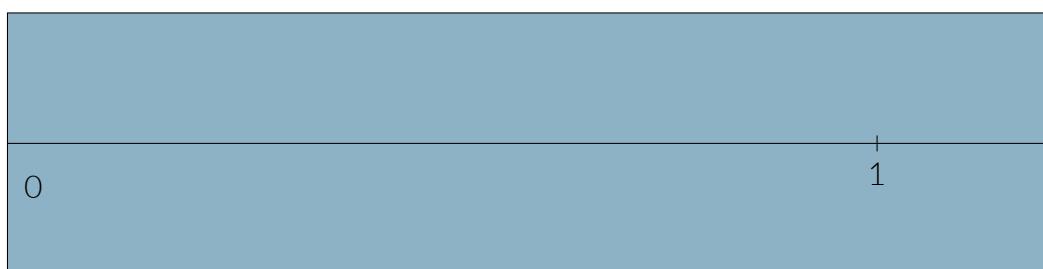


### Atividade 2



## LICAO 3

### Atividade 6



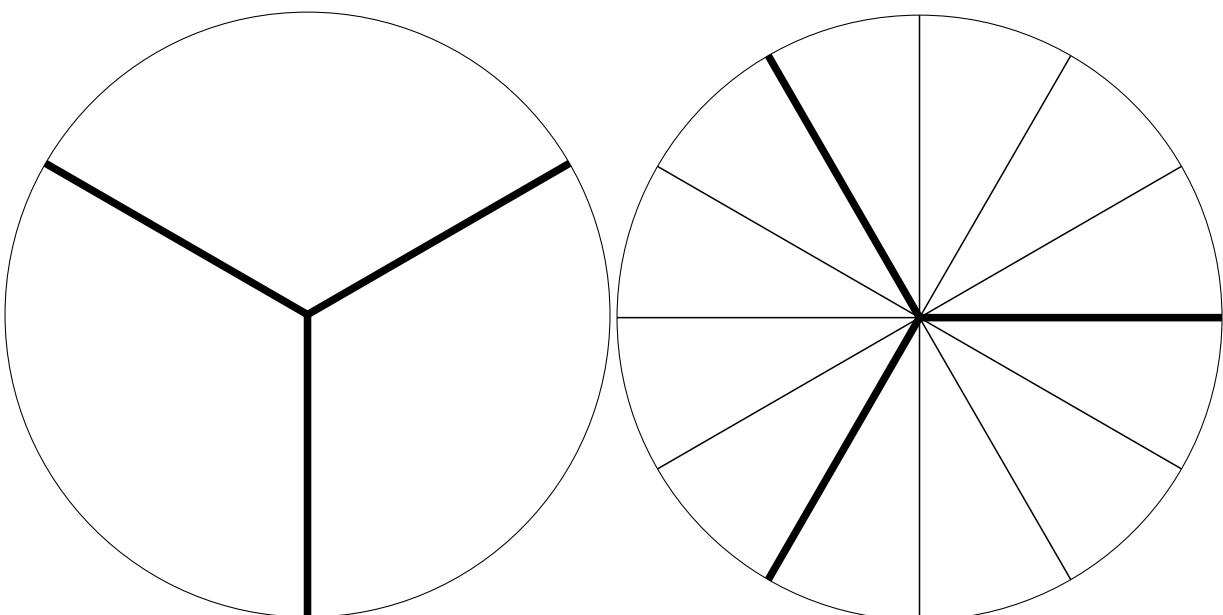
### Atividade 7



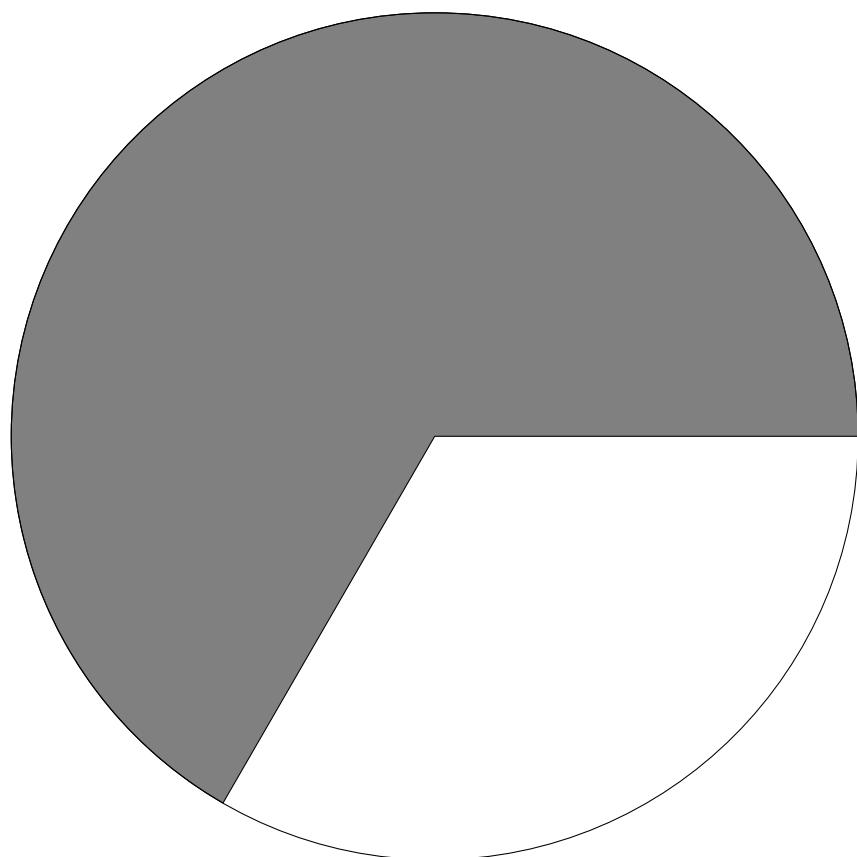
LICAO 4

## Atividade 2

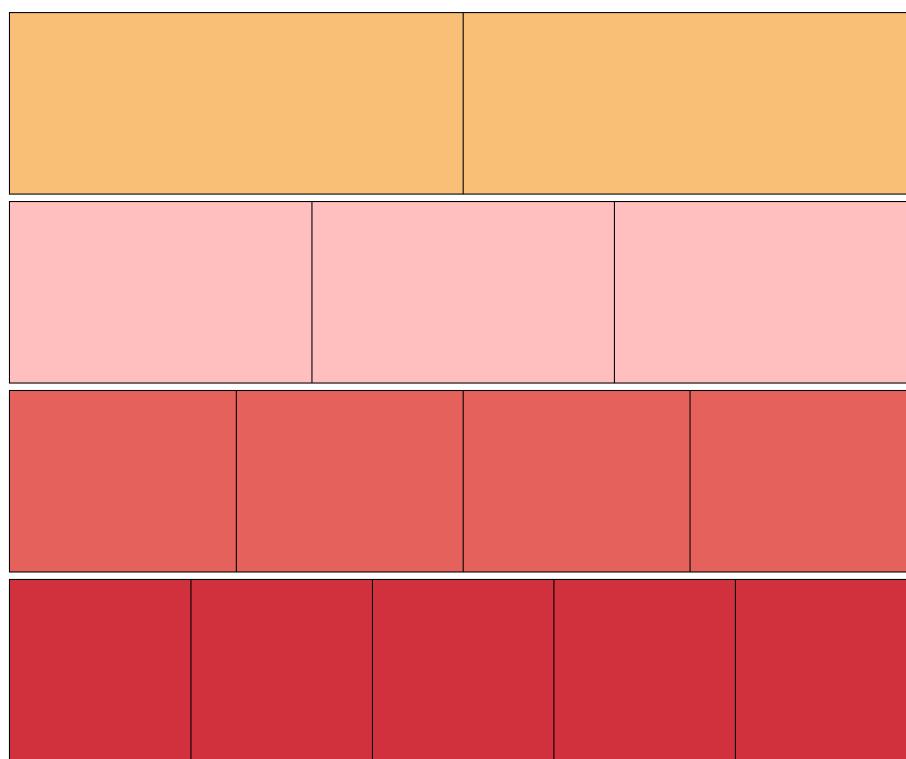
## Atividade 4

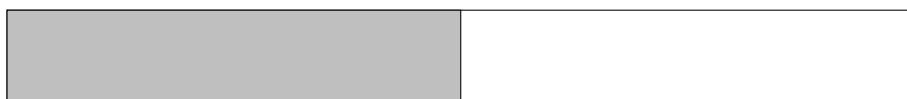
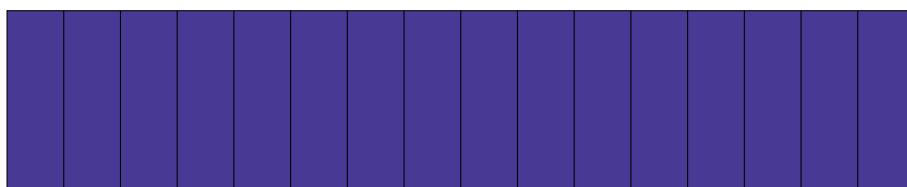
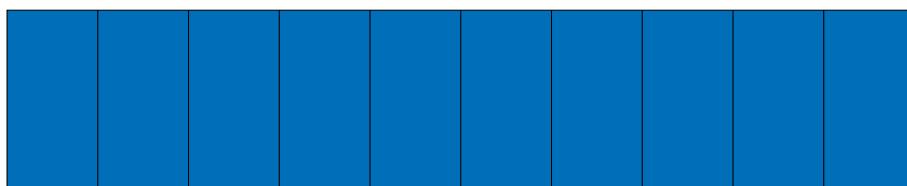
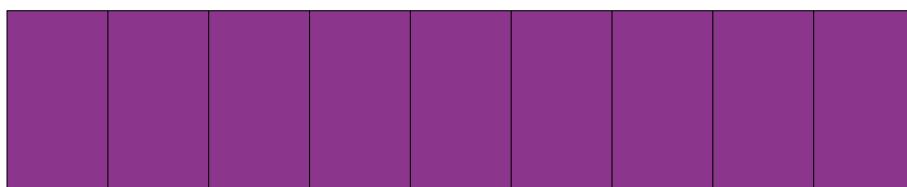
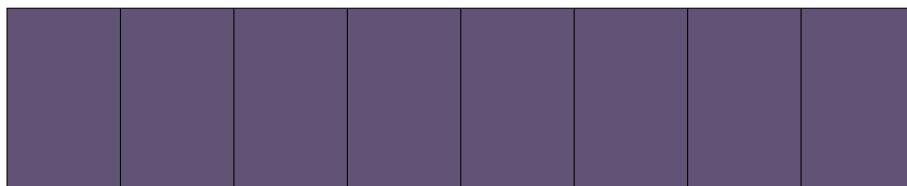
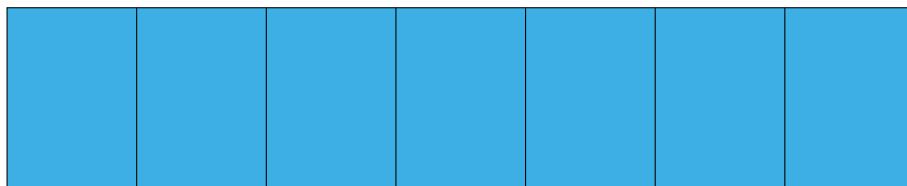
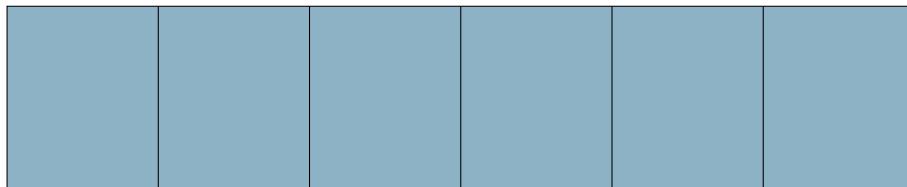


### Atividade 5

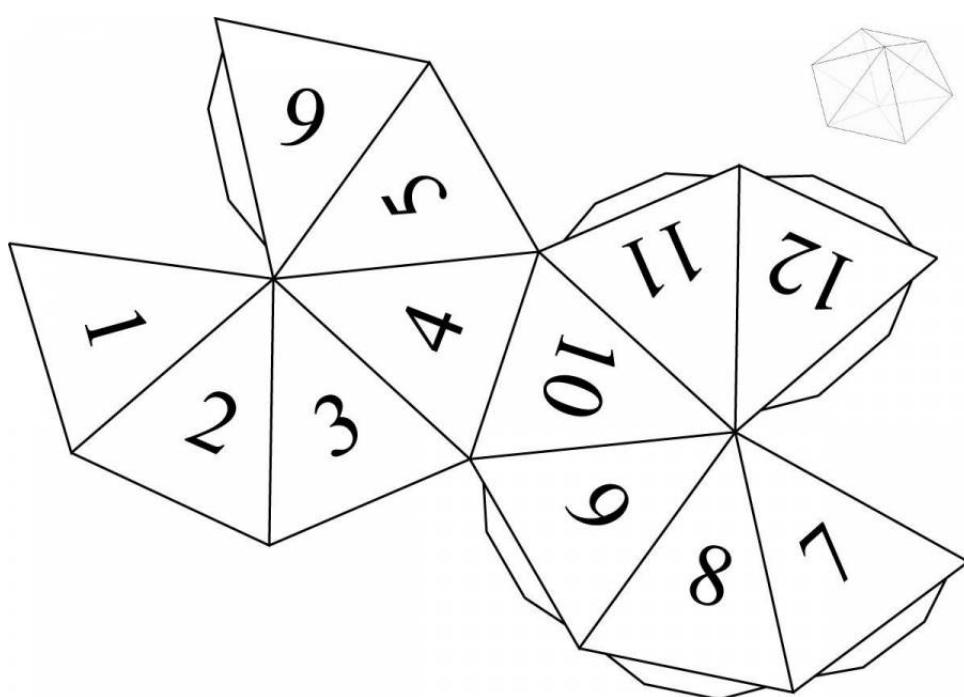
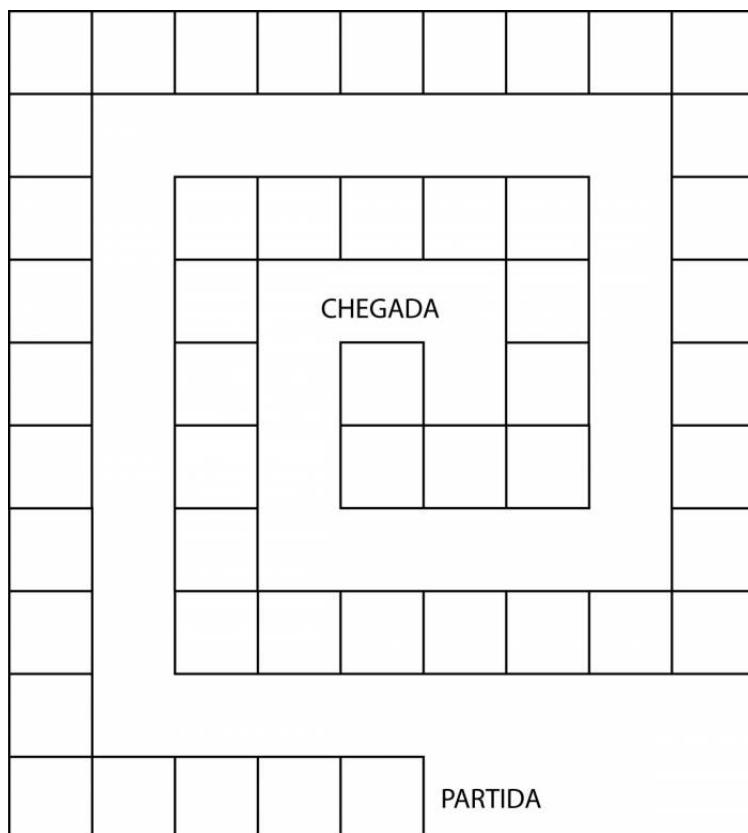


### Atividade 6



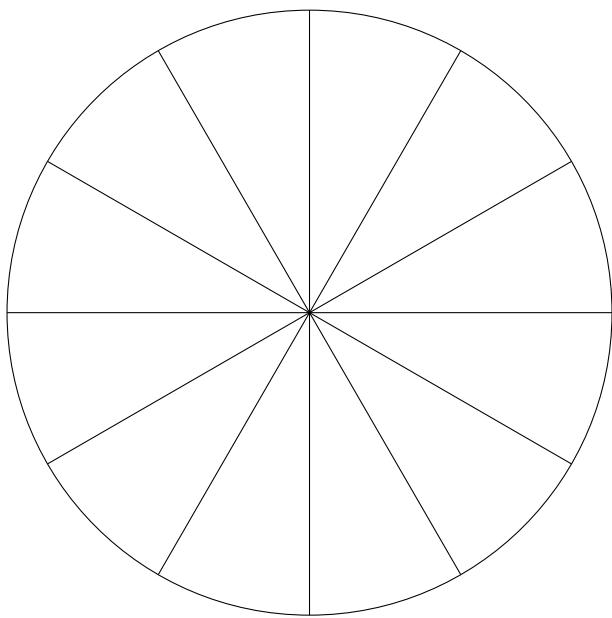


## Atividade 20



## LIÇÃO 5

### Atividade 4





## Referências Bibliográficas

- [1] Behr, Merlyn J.; Wachsmuth, Ipke; Post, Thomas R.; Lesh, Richard. Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 15, n. 15, p. 323-341, 1984.
- [2] Confrey, J.; Malone, A.; Nguyen, K.; Mojica, G.; Myers, M. Equipartitioning/Splitting as A Foundation of Rational Number Reasoning using Learning Trajectories. *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 345–353). Thessaloniki, Greece, 2009.
- [3] Cramer, Kathleen; Behr, Merlyn; Post, Thomas; Lesh, Richard. Rational Number Project: Initial Fraction Ideas. University of Minnesota, 2009.
- [4] Empson, Susan B. Equal Sharing and Shared Meaning: The Development of Fraction Concepts in A First-Grade Classroom. *Cognition and Instruction*, v. 17, n. 3, p. 283-342, 1999.
- [5] Freitag, Mark A. *Mathematics for Elementary School Teachers: A Process Approach*. Cengage Learning, 2014.
- [6] Garcez, Wagner Rohr. Tópicos sobre O Ensino de Frações: Equivalência. Trabalho de Conclusão de Curso do PROFMAT, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2013.
- [7] IES PRACTICE GUIDE WHAT WORKS CLEARINGHOUSE. Developing Effective Fractions Instruction for Kindergarten Through 8th Grade. Institute of Education Sciences, 2010. - Este relatório oferece um conjunto de diretrizes, procedimentos e

cuidados no ensino de frações nas séries iniciais que foram compilados a partir de relatos de experiência e estudos científicos.

- [8] Lewin, Renaio; López, Alejandro; Martínez, Salomé; Rojas, Daniela; Zanocco, Pierina. Números para Futuros Profesores de Educación Básica. ReFIP Matemática: Recursos para La Formación Inicial de Profesores Educación Básica. Ediciones SM Chile S.A., 2013.
- [9] Litwiller, Bonnie H. Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: 2002 Year-book. National Council of Teachers of Mathematics. 2002.
- [10] Mathematics Navigator. Misconceptions and Errors. America's Choice. Pearson, 2016.
- [11] McNamara, Julie; Shaughnessy, Meghan M. Beyond Pizzas and Pies, Grades 3-5, Second Edition: 10 Essential Strategies for Supporting Fraction Sense. Math Solutions Publications, 2015.
- [12] MEC, Brasil. Números Racionais: Conceito e Representação (TP6). Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR I. 2007.
- [13] Monteiro, Cecília; Pinto, Hélio. Desenvolvendo O Sentido de Número Racional. Associação de Professores de Matemática, 2009.
- [14] Musser, Gary L.; Peterson, Blache E.; Burger, William F. Mathematics for Elementary Teachers: A Contemporary Approach. John Wiley & Sons, Inc., 2014.
- [15] Ni, Yujing. How Valid is It To Use Number Lines to Measure Children's Conceptual Knowledge about Rational Number? Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology, v. 20, n. 2, p. 139-152, 2000.
- [16] Pearn, Catherine; Stephens, Max. Why You Have To Probe To Discover What Year 8 Students Really Think about Fractions. MERGA 27, v. 2, p. 430-437, 2004.
- [17] Pereira, Ana Paula Cabral Couto. O Ensino de Frações na Escola Básica: O Curriculo Common Core nos EUA, Hung-Hsi Wu e Uma Análise Comparativa em Dois Livros Didáticos do PNLD. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional PROFMAT), Universidade Federal Fluminense, 2015.
- [18] Petit, Marjorie M.; Laird, Robert E.; Marsden, Edwin L. A focus On Fractions: Bringing Research To The Classroom. Studies in Mathematical Thinking and Learning. Taylor & Francis, 2010.
- [19] Post, Thomas R.; Wachsmuth, Ipke; Lesh, Richard; Behr, Merlyn J. Order and Equivalence of Rational Number: A Cognitive Analysis. Journal for Research in Mathematics Education v. 16, v. 1, p. 18-36, 1985.

- [20] Pothier, Yvone; Sawada, Daiyo. Partitioning: The Emergence of Rational Number Ideas in Young Children. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 14, n. 4, p. 307-317, 1983.
- [21] Schliemann, Analúcia; Carraher, David W.; Caddle, Mary C. From Seeing Points To Seeing Intervals in Number Lines in Graphs. Em: Brizuela, Bárbara M.; Gravel, Brian E. (Ed.). *Show Me What You Know*, Teachers College, Columbia University, 2013.
- [22] Small, Marian. *Uncomplicating FRACTIONS To Meet Common Core Standards in Math, K-7*. Teachers College Press, 2013.
- [23] Spangler, David B. *Strategies for Teaching Fractions: Using Error Analysis for Intervention and Assessment*. Corwin, 2011.
- [24] Tierney, Cornelia; Berle-Carman, Mary. *Fractions: Fair Shares*. Investigations in Number, Data, and Space. Dale Seymour Publications, 1998.
- [25] Tierney, Cornelia. *Different Shapes, Equal Pieces: Fractions and Area*. Investigations in Number, Data, and Space. Scott Foresman, 2004.
- [26] Thomaidis, Yannis; Tzanakis, Constantinos. The Notion of Historical "parallelism" Revisited: Historical Evolution and Students' Conception of The Order Relation On The Number Line. *Educational Studies in Mathematics*, v. 66, p. 165-183, 2007.
- [27] Vamvakoussi, Xenia; Vosniadou, Stella. Bridging the Gap Between the Dense and the Discrete: The Number Line and the "Rubber Line" Bridging Analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 14, n. 4, p. 265-284, 2012. DOI: 10.1080/10986065.2012.717378. - Este artigo faz um resumo histórico de como a noção de densidade surgiu.
- [28] Vance, James H. Understanding Equivalence: A Number by Any Other Name. *School Science and Mathematics*, v. 92, n. 5, p. 263-266, 1992.
- [29] Van de Walle, John A. *Matemática no Ensino Fundamental. Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula*. Sexta edição. Artmed, 2009.
- [30] Ventura, Hélia Margarida Gaspar Lopes. A Aprendizagem de Números Racionais através das Conexões entre As Suas Representações: Uma Experiência de Ensino no 2.o Ciclo do Ensino Básico. Tese de doutorado, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, 2013.
- [31] Wu, Hung-Hsi. *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics*. American Mathematical Society, 2011.

