LIÇÃO 1 - Para o professor

Esta lição tem por objetivo introduzir frações unitárias a partir de modelos visuais contínuos, tais como "discos", "retângulos", "hexágonos" e "segmentos", fazendo uso de expressões verbais como, por exemplo, "metade de...", "um terço de...", "a terça parte de...", "um quarto de...", para indicar essas frações. A expressão "fração unitária" nomeia cada uma das partes da divisão de uma unidade em partes iguais.

As atividades visam à equipartição de uma unidade. Equipartição entendida como partição em partes iguais, sem que as partes tenham necessariamente a mesma forma. Assim, por exemplo, na equipartição de um retângulo está implícito que as partes têm a mesma área, e não necessariamente a mesma forma nem o mesmo perímetro. O objetivo é levar o aluno a reconhecer diferentes modos de dividir e recompor a unidade. No senso comum, as expressões repartir, partir e dividir são sinônimas e não pressupõem a equipartição. No entanto, é importante lembrar que, no caso da operação de divisão, espera-se que o resultado registre uma equipartição. No futuro, o estudante deverá entender um terço como o resultado da divisão de um por três. Este é o caso da operação, em que a palavra "divisão" abrevia "divisão em partes iguais".

Espera-se que, ao final da lição, os alunos saibam identificar e representar frações unitárias a partir de modelos visuais diversos, fazendo o uso adequado de expressões verbais para nomeá-las. No entanto, o professor não deve apresentar o termo "fração unitária" ao estudante, uma vez que é desnecessário para a aprendizagem pretendida. Fazê-lo pode, inclusive, comprometer o que se pretende com a lição. Não se pretende apresentar aos alunos a linguagem simbólica de frações, que será tratada nos capítulos seguintes.

De maneira geral, as atividades envolvem a abordagem das frações unitárias com objetivos diversos. Por exemplo, diferenciar a divisão da unidade em partes "quaisquer" da divisão da unidade em partes "iguais" (equipartição); reconhecer a necessidade de uma expressão verbal que identifique uma das partes iguais em uma equipartição da unidade; perceber que a unidade pode ser subdividida em uma quantidade igual de partes sem que essa divisão represente uma equipartição; reconhecer que, em uma equipartição, as partes podem não ter a mesma forma; distinguir uma equipartição específica dentre partições diversas ou reconhecer a quarta parte como a metade da metade.

A participação do aluno, criando representações próprias e fazendo uso da linguagem verbal para explicar o seu raciocínio diante da realização das atividades, será fundamental na condução desta seção.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA LIÇÃO 1:

O aluno deve ser capaz de:

⋆ Diferenciar uma partição qualquer de uma equipartição (partição em partes iguais) de uma mesma unidade.

⋆ Identificar, a partir de representações visuais diversas, frações unitárias de denominador variando de 2 a 10.

⋆ Utilizar a linguagem verbal que caracteriza as frações unitárias de denominador variando de 2 a 10. (Isto é, "metade de", "um meio", "um terço", "terça parte de", ..., "um décimo", "décima parte de").

⋆ Comparar frações unitárias em exemplos concretos simples (por exemplo, reconhecer que um terço de uma pizza é maior do que um quarto da mesma pizza).

⋆ Recompor a unidade a partir de uma fração unitária dada em modelos contínuos.

⋆ Relacionar uma fração da unidade à quantidade necessária dessas partes para compor a unidade. Assim, por exemplo, é necessário reunir cinco *quintas partes* para recompor a unidade.

Atividade 1

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Diferenciar a partição da unidade em partes "quaisquer" da partição da unidade em partes "iguais". A partição em partes iguais será chamada equipartição.

⋆ Reconhecer a necessidade de uma expressão verbal que identifique uma das partes iguais em uma equipartição da unidade.

⋆ Diferenciar "a partição da unidade em três partes quaisquer" da "partição da unidade em três partes iguais".

⋆ Compreender as expressões "um terço de" e "terça parte de" como formas de identificar uma das partes da equipartição da unidade em três partes.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.

⋆ Busque conduzir a discussão nos grupos de modo que os estudantes percebam que, para que os amigos recebam a mesma quantidade de chocolate, a partição proposta para a barra de chocolate deve ser em "partes iguais", no sentido de ganharem todos a mesma quantidade de chocolate, não necessariamente pedaços de mesma forma.

⋆ Na discussão, procure destacar que a referência à "partição em três partes iguais" se dá (igualmente) a partir das expressões "um terço" da barra de chocolate ou "a terça parte" da barra de chocolate.

⋆ O item c) admite diversas soluções, algumas estão apresentadas como resposta. No entanto, algumas dessas respostas podem não aparecer naturalmente em sala de aula. Avalie a possibilidade de apresentar e explorar algumas dessas soluções (ou outras que queira) em sala

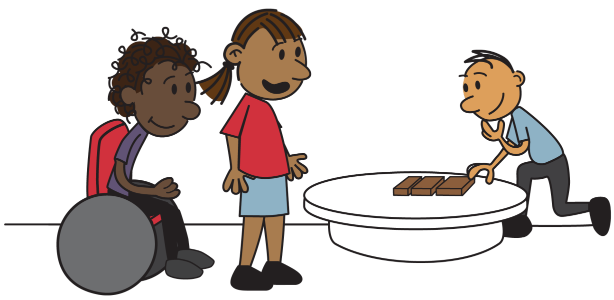
Lição 1

Começando a falar sobre frações

EXPLORANDO O ASSUNTO

Atividade 1

Três amigos vão repartir uma barra de chocolate. Um deles sugere a seguinte divisão:



a) Você concorda com essa divisão? Explique.

b) Com essa divisão, os três amigos receberão a mesma quantidade de chocolate?

c) Use a imagem a seguir para mostrar uma divisão da barra de chocolate que permita que os 3 amigos recebam quantidades iguais de chocolate.

de aula. Por exemplo, apresente uma dessas divisões aos alunos e peça-os que avaliem a equipartição, explicando sua decisão.

- ⋆ O item d), provavelmente, pode não ser respondido corretamente pelos alunos. Se for o caso, as expressões "um terço de" e "a terça parte de" devem ser apresentadas.

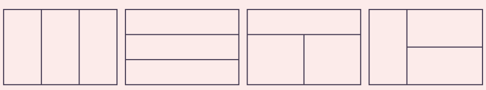
- ⋆ Fique atento às falas dos alunos. Observe que os alunos podem representar e verbalizar as respostas de diferentes modos e que não há uma resposta única para a atividade. Por exemplo, alguns alunos podem precisar de mais tempo do que outros para usar a expressão "um terço" no lugar de "partição em três partes iguais" ou "divisão em três partes iguais". Ou ainda, observarem que há diferentes representações para a equipartição.
- ⋆ Esta atividade pode ser adaptada para alunos com deficiência de visão. Para isso, sugere-se confeccionar os modelos da barra de chocolate inteira e repartida, que estão disponíveis para reprodução no final do livro, em três materiais diferentes. Por exemplo, papel comum e papéis com texturas diferentes, tecido ou material emborrachado.

Resposta da Atividade 1

a) Este item não possui resposta correta, apenas respostas coerentes com a explicação do aluno. Por exemplo, um estudante pode dizer que sim e explicar que o amigo mais velho deve ficar com uma parte maior porque precisa de mais energia. Mas a resposta esperada é que a divisão não parece justa porque as quantidades de chocolate são diferentes. Discuta com os alunos para que entendam a divisão correspondente à resposta esperada.

b) Não, eles receberão quantidades diferentes de chocolate, embora cada um receba um único pedaço do chocolate.

c) Respostas possíveis:



d) Cada parte é *um terço* da barra ou a *terça parte* da barra.

Atividade 2

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ Perceber que cada unidade (no caso, uma pizza) pode ser subdividida em um mesmo número de partes sem que cada divisão represente uma equipartição.

- ⋆ Distinguir uma equipartição dentre partições diversas.

- ⋆ Diferenciar "a divisão da unidade em quatro partes quaisquer" da "divisão da unidade em quatro partes iguais".

- ⋆ Compreender as expressões "um quarto de" e "quarta parte de" como forma de identificar uma das partes da equipartição em 4 partes.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.

- ⋆ As diversas soluções apresentadas pelos diferentes grupos devem ser discutidas com a turma inteira.

- ⋆ É possível que os alunos utilizem expressões variadas para nomear as partes de pizzas em cada divisão. Por exemplo, "a maior quarta parte", "a menor quarta parte", "as quartas partes iguais entre si", "a menor parte", "a maior parte", dentre outras. É importante que a discussão conduza os alunos ao entendimento de que apenas as partes da equipartição podem ser chamadas de "quartos" da pizza, as demais são simplesmente fatias ou pedaços, por exemplo.

- ⋆ Os alunos devem reconhecer que apenas uma das repartições propostas sugere a equipartição, respondendo assim a última questão proposta nesta atividade.

- ⋆ Essa atividade pode ser adaptada para alunos com deficiência visual. Para isso, sugere-se confeccionar os modelos das três pizzas repartidas, que estão disponíveis para reprodução no final do livro, em três materiais diferentes. Por exemplo, papel comum e papéis com texturas diferentes, tecido ou material emborrachado.

Resposta da Atividade 2

a) Sim. Cada grupo repartiu sua pizza em quatro fatias.

b) Não, pois algumas fatias têm quantidades de pizza diferentes das outras.

c) Apenas no grupo 1 as 4 crianças receberam a mesma quantidade de pizza. Cada fatia da pizza do grupo 1 é *um quarto* da pizza ou *a quarta parte* da pizza. Diferentemente das demais pizzas.

Atividade 3

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ Abordar a equipartição em um modelo linear.

- ⋆ Reconhecer a quarta parte como a metade da metade.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de quatro alunos.

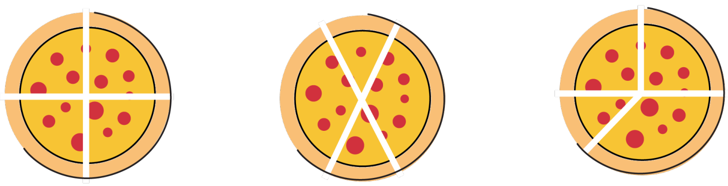
- ⋆ Cada grupo deve receber um pedaço de barbante de, aproximadamente, 1m e quatro enfeites (todos iguais).

- ⋆ Os quatro enfeites precisam ser confeccionados antes da realização da tarefa. Sugerem-se estrelas, cujos modelos estão disponíveis para reprodução no final do livro. No entanto, segundo a avaliação do professor, os enfeites podem ser outros, desde que sejam os 4 congruentes.

d) Considerando a divisão da barra de chocolate em 3 partes iguais, como você nomearia a quantidade de chocolate que cada amigo receberia?

Atividade 2

Três pizzas inteiras, de mesmo tamanho, foram repartidas entre as crianças de uma turma. Para isso, a turma foi dividida em três grupos com quatro crianças cada. Veja como cada grupo repartiu a sua pizza.



a) Cada um dos três grupos repartiu a sua pizza na mesma quantidade de fatias que os outros grupos?

b) Dessa maneira, todas as crianças da turma receberam a mesma quantidade de pizza?

c) Em algum dos grupos, as 4 crianças receberam a mesma quantidade de pizza? Se sim, em qual? Considerando a pizza inteira, como você nomearia cada uma das fatias de pizza desse grupo?

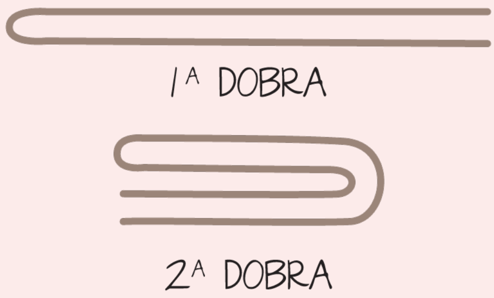
Atividade 3

Alice quer enfeitar a sala de aula e pretende prender os enfeites utilizando pedaços de barbante. Para isso, quer cortar o barbante em pedaços iguais, para que os enfeites fiquem todos na mesma altura. Ajude Alice a cortar o barbante (você receberá um barbante do seu professor).

- Como sugestão, se possível, solicitar aos alunos que confeccionem os enfeites, por exemplo, associando esta atividade com geometria, com a abordagem de grandezas e medidas, com a disciplina de artes ou envolvendo culturas artesanais populares.
- A equipartição do barbante não deve ser obtida a partir da medida do barbante, mas por sucessivas dobras do barbante sobre ele mesmo, como ilustrado na resposta da atividade. Tal discussão também será útil na abordagem de frações equivalentes na Lição 4.
- A manipulação e a dobra do barbante devem sustentar a discussão para a identificação da "metade da metade" com a "quarta parte" do barbante. Nesse caso, a identificação se dará pela sobreposição das partes.

Resposta da Atividade 3

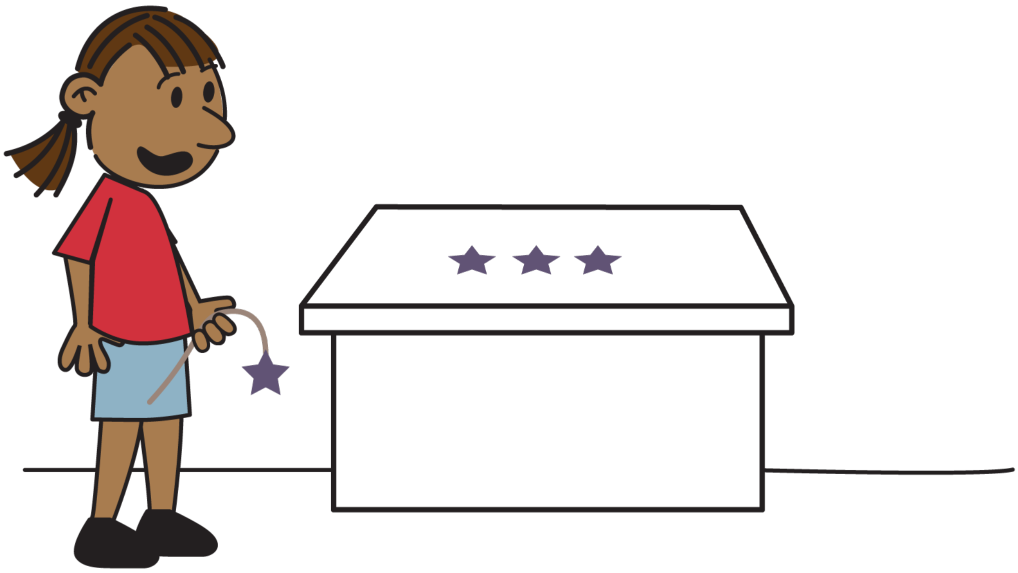
Uma maneira de se cortar o barbante é dobrar ao meio e depois dobrar novamente ao meio, obtendo quatro partes iguais, como ilustrado na figura a seguir.



Sobre o Organizando as Ideias

Nesta etapa, espera-se que os alunos compreendam as frações como forma de expressar quantidades. O objetivo é que percebam seu papel para expressar quantidades em situações de equipartição da unidade. Assim, as frações podem ser utilizadas no dia a dia para identificar quantidades do mesmo modo que os números naturais, já conhecidos dos alunos. Por exemplo, como nas expressões: "dois ovos", "duas xícaras de farinha", "um terço de xícara de cacau" e "meio litro de leite".

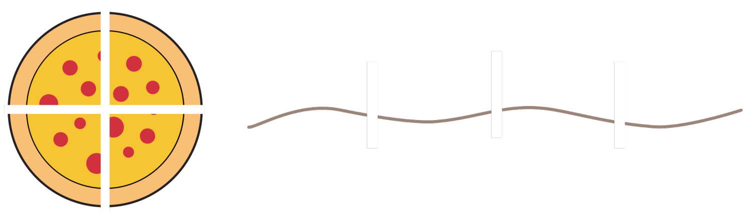
Objetiva-se a expressão verbal e não a representação simbólica. Espera-se, assim, que os alunos apropriem-se das expressões verbais que identificam as frações unitárias (um meio, um terço, um quarto, ... , um nono e um décimo) antes de serem apresentados formalmente à simbologia matemática (que será objetivo da próxima lição). A referência às frações unitárias com a expressão "um" antes da identificação da parte, como, por exemplo, em "um terço" e em "um sétimo" é uma decisão pedagógica. Claro que é possível se referir a essas frações simplesmente por "terço" e "sétimo", respectivamente. No entanto, nas próximas seções, pretende-se que as frações não unitárias, como "dois terços" e "nove sétimos", por exemplo, sejam entendidas a partir da justaposição das frações unitárias correspondentes, o que é naturalmente amparado pela contagem. Nas expressões verbais relativas às frações unitárias, o "um" antes da identificação da parte está associado à contagem. Dessa forma, a compreensão das frações "um terço" e "dois terços" ou das frações "um sétimo" e "nove sétimos", por exemplo, seguem a mesma construção lógica.



ORGANIZANDO AS IDEIAS

Nas atividades anteriores, as quantidades registradas exigiram a partição de uma unidade. Por exemplo, para obter um terço de uma barra de chocolate foi necessário partir a barra de chocolate. Já para obter um quarto de pizza, foi necessário partir a pizza. Outros exemplos aparecem no dia a dia: "comprei meio metro de tecido" ou "gastei um terço da minha borracha".

A barra de chocolate, a pizza e o pedaço de barbante foram partidos **em partes com quantidades iguais**. Em cada um dos casos, o que foi repartido é chamado **unidade**. Cada uma das partes em que essas unidades foram repartidas igualmente é uma **fração da unidade**. Assim, por exemplo, um quarto de uma pizza é uma fração da pizza e a pizza é unidade. Se a unidade for o pedaço de barbante, um quarto do pedaço de barbante será uma fração do pedaço de barbante.

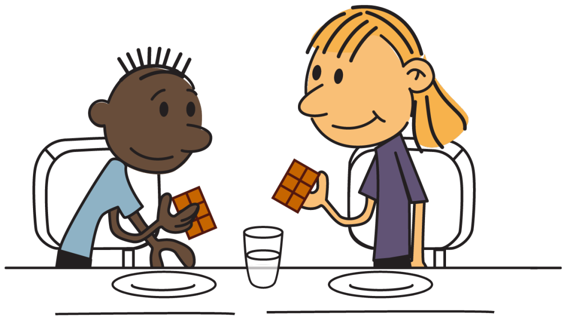


O nome dado à fração da unidade depende da quantidade de partes em que a unidade é dividida.

Ao dividir uma unidade qualquer em duas partes iguais, ou ao meio, cada uma das partes é chamada de *um meio* ou *a metade* da unidade.

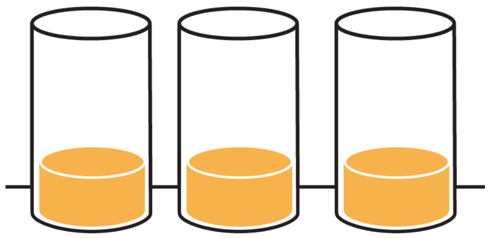
Notas de Aula

Por exemplo, se uma barra de chocolate é repartida igualmente entre dois amigos, a quantidade que caberá a cada um dos amigos é *um meio* da barra de chocolate (ou *metade* da barra). Nesse exemplo, a unidade é a barra de chocolate.



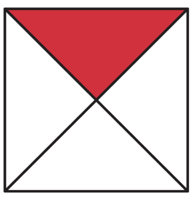
Ao dividir uma unidade em três partes iguais, cada uma das partes é chamada de *um terço* ou *a terça parte* da unidade.

Por exemplo, se, em uma receita, é necessário acrescentar *um terço* de um litro de suco de laranja, isso significa que, para colocar a quantidade correta de suco na receita, é preciso repartir o litro de suco em três partes iguais e usar apenas uma dessas partes, que é *um terço* do litro de suco. Nesse caso, a unidade é um litro de suco de laranja. Imagine que no copo caiba 1 litro.



Ao dividir uma unidade em quatro partes iguais, cada uma das partes é chamada de *um quarto* ou *quarta parte* da unidade.

Por exemplo, a parte colorida da figura é um quarto da figura. Neste caso, a figura é a unidade.



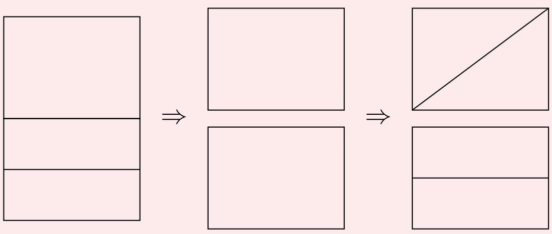
Atividade 4

Objetivos específicos: Levar o aluno a:

- ⋆ Reconhecer que, em uma equipartição, as partes podem não ter a mesma forma.
- ⋆ Identificar a equivalência entre as partes de uma equipartição a partir de sobreposição ou da comparação pelo reconhecimento da associação a uma mesma fração unitária (no caso, $\frac{1}{4}$).
- ⋆ Reconhecer a quarta parte como a metade da metade.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos. Cada grupo deve receber as imagens dos oito retângulos, disponíveis para reprodução no final do livro, e colori-las, cada um com uma cor diferente das demais.
- ⋆ Em cada grupo, os alunos devem decidir qual (ou quais) das divisões propostas para os retângulos correspondem a uma partição em quartos. É importante observar que todos os retângulos estão divididos em quartos.
- ⋆ Conduza a discussão de modo a levar os alunos a reconhecer que, em uma equipartição, as partes não precisam ter a mesma forma.
- ⋆ Se necessário, o professor pode associar cada retângulo a um objeto concreto (por exemplo, uma barra de chocolate ou a um pedaço de bolo). No entanto, nesta atividade, espera-se que os alunos consigam lidar com a figura de um retângulo como representativa de uma unidade genérica.
- ⋆ Recomenda-se que os alunos recortem as partes de cada um dos retângulos para realizar a comparação por sobreposição. No entanto, essa estratégia não será suficiente para todos os 8 casos. Em alguns casos, a comparação se dará pela identificação da fração unitária correspondente a cada parte. Nesses casos, o aluno deve reconhecer que a quarta parte é equivalente à metade da metade. Por exemplo, como no caso seguir.



Metade do retângulo maior

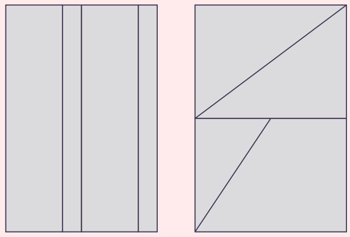
Cada uma das 4 partes é metade da metade ($\frac{1}{4}$)

- ⋆ Segundo a avaliação do professor, a atividade pode ser realizada em duas etapas. Em um primeiro momento, os alunos recebem as primeiras quatro das oito imagens e realizam a atividade com essas imagens - cuja comparação se dá apenas pela sobreposição. Em seguida, recebem as outras quatro, para concluir a atividade. Para as últimas 4 figuras, será necessário reconhecer a quarta parte como a metade da metade. É importante que o professor, ao final das duas etapas, avalie as escolhas como um todo.

Resposta da Atividade 4

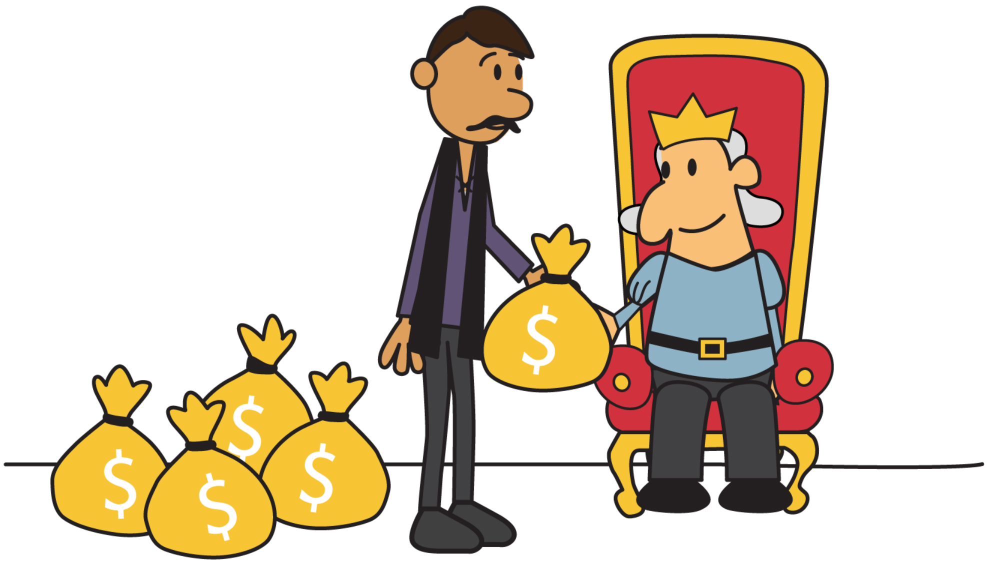
a) Todos os retângulos estão divididos em quartos.

b) Dois desenhos possíveis são:



Da mesma forma, ao dividir uma unidade em cinco partes iguais, cada uma das partes é chamada de *um quinto* ou *quinta parte* da unidade.

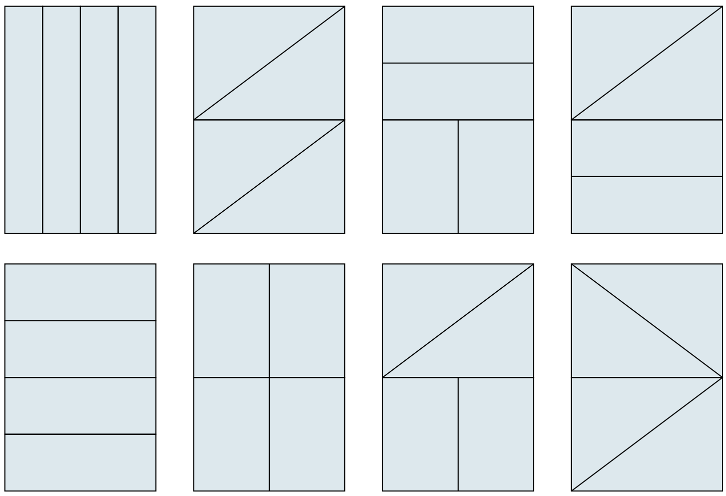
Por exemplo, na época do império *um quinto* de todo ouro pesado nas Casas de Fundição no Brasil era pago em impostos à Coroa Portuguesa. Desta forma, a quantidade de ouro pago em impostos à Coroa Portuguesa era igual a *um quinto* ou a *quinta parte* do ouro pesado nas Casas de Fundição no Brasil.



MÃO NA MASSA

Atividade 4

a) Quais dos oito retângulos a seguir foram repartidos em *quartos*?

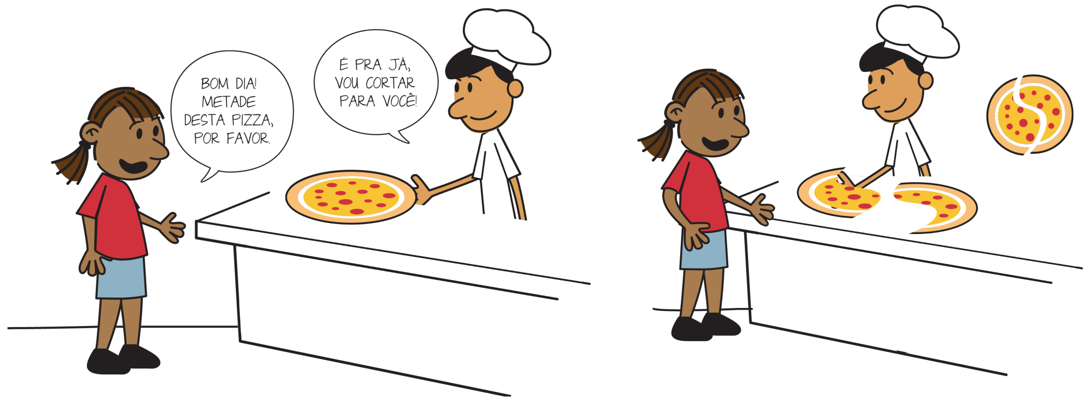


Notas de Aula

b) Desenhe um retângulo e faça uma partição desse retângulo em quatro partes que não sejam todas quartos.

REFLETINDO

Quando se diz que uma unidade é repartida em meios, terços, quartos, quintos, etc., a unidade foi repartida em 2, 3, 4, 5, etc., partes iguais. Assim como no dia a dia, neste livro o termo *partes iguais* quer dizer *partes com a mesma quantidade*, mesmo que a unidade não esteja dividida em partes de mesma forma. Na atividade anterior, se os retângulos representassem, por exemplo, bolos, as quatro partes em que foram divididos os retângulos representariam quantidades iguais de bolo. Em alguns retângulos as partes não têm a mesma forma. Os dois quadrinhos a seguir mostram exemplos curiosos em que as partes iguais podem ser surpreendentes.



Atividade 5

Objetivos específicos: Levar o aluno a:

⋆ Identificar uma mesma fração unitária (no caso, a terça parte) em representações diversas, ou seja, em representações de unidades não necessariamente congruentes.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.

⋆ Durante a discussão, os alunos devem ser estimulados a explicar as suas escolhas. A discussão sobre os motivos da identificação, ou não, de cada uma das representações à terça parte da unidade correspondente será fundamental para atingir o objetivo da atividade.

⋆ Os alunos devem reconhecer que, independente da unidade considerada, em uma equipartição em 3 partes, cada uma das partes é um terço (ou a terça parte) da unidade.

⋆ Aproveite as próprias palavras e os argumentos dos alunos para conduzi-los às conclusões esperadas.

⋆ Fique atento aos alunos que selecionarem as figuras que simplesmente possuem alguma associação com o número 3, não correspondendo a terços. Por exemplo, um aluno que associe a **Figura i)** a terços pode ainda não ter compreendido a necessidade da equipartição para a identificação de um terço. Já o aluno que associa **Figura j)** a terços pode estar simplesmente contando as partes em vermelho, sem que tenha reconhecido que a figura deveria estar dividida em 3 partes iguais e não em 5.

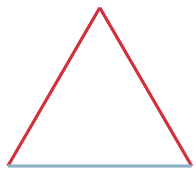
Resposta da Atividade 5

A parte em vermelho representa um terço da figura nos itens c), d), e), f) e h).

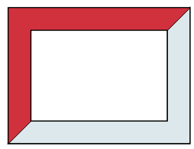
Atividade 5

Em cinco das figuras a seguir, a parte em vermelho é um terço da figura. Identifique essas figuras.

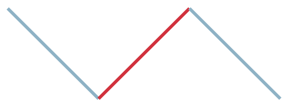
a)



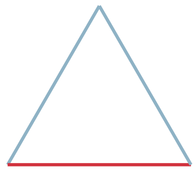
b)



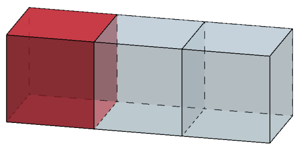
c)



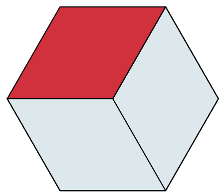
d)



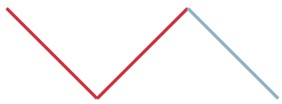
e)



f)



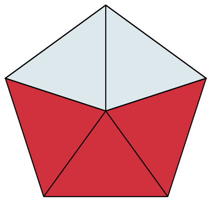
g)



h)

i)

j)



Atividade 6

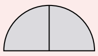
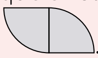
Objetivos específicos: Levar o aluno a:

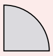
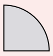
⋆ Recompor a unidade a partir de uma fração unitária dada em modelos contínuos.

⋆ Relacionar uma fração da unidade à quantidade necessária dessas partes para compor a unidade. Assim, por exemplo, é necessário reunir cinco *quintas partes* para recompor o todo.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.

⋆ É importante ter em mente que existem várias soluções para cada item. Por exemplo, o primeiro item pode ser corretamente respondido por:  e .

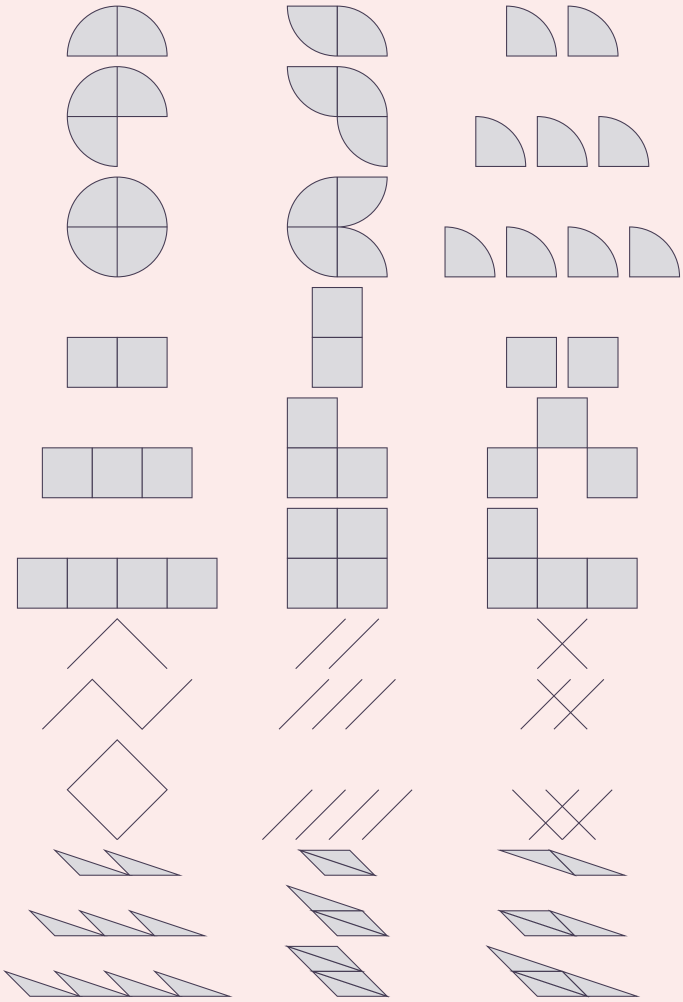
⋆ Avalie a possibilidade de discutir com os estudantes respostas que sejam reuniões de partes não justapostas, por exemplo, no primeiro item pode-se ter também   como resposta.

⋆ Estimule os alunos a reconhecer (e a fazer) mais do que uma representação para a unidade em cada item.

⋆ Estimule os alunos a, a partir da identificação da fração unitária, determinar a quantidade de partes necessárias para recompor a unidade.

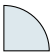
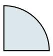
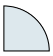
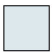
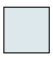
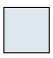
Resposta da Atividade 6

Algumas possibilidades de respostas para cada linha da tabela do enunciado estão nas respectivas linhas abaixo.



Atividade 6

Observe a tabela a seguir. Em cada linha, a primeira coluna, mais à esquerda, exibe figuras que são frações de uma unidade. A coluna do meio indica essas frações. Complete a tabela, fazendo na terceira coluna de cada linha, um desenho da unidade correspondente.

Parte da unidade	Fração da unidade	Unidade
	metade	
	um terço	
	um quarto	
	metade	
	um terço	
	um quarto	
	metade	
	um terço	
	um quarto	
	metade	
	um terço	
	um quarto	

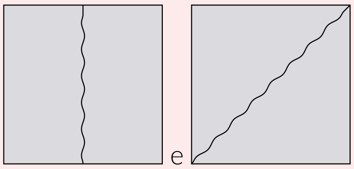
Atividade 7

Objetivos específicos: Levar o aluno a:

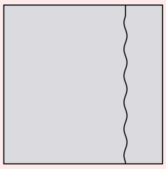
- ⋆ Representar uma fração unitária a partir de uma unidade dada.
- ⋆ Reconhecer (e obter) um quarto como a metade da metade e um oitavo como a metade de um quarto.
- ⋆ Comparar as frações unitárias metade, um quarto e um oitavo de um mesmo quadrado.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.
- ⋆ Não se espera que, nesta atividade, os alunos usem a medida para fazer a equipartição de maneira mais precisa. O objetivo é fazer a equipartição livremente e de forma coerente. Assim, por exemplo, podem ser aceitas como respostas:



Já as representações a seguir sugerem que os alunos precisam revisar os conceitos exigidos para a solução da atividade:

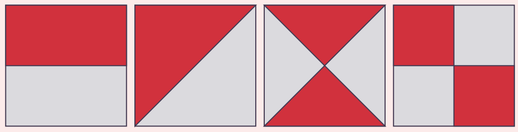


- ⋆ A representação da unidade se dá de forma genérica por um quadrado.
- ⋆ Espera-se que os alunos reconheçam que para obter um quarto da unidade basta tomar a metade da metade. E que, para determinar um oitavo pode dividir um quarto ao meio.
- ⋆ Recomende que os alunos usem dobradura para identificar as frações pedidas. Assim, por exemplo, a fração $\frac{1}{4}$ pode ser obtida por duas dobras do papel.
- ⋆ Discuta com os estudantes que quanto maior o número de partes iguais em que se particiona o quadrado, menor fica cada uma das partes.
- ⋆ Procure apresentar e discutir com a turma mais do que uma solução para cada item.
- ⋆ **As diferentes soluções apresentadas pelos alunos podem enriquecer a discussão**. A comparação entre, por exemplo, a metade do quadrado proveniente da dobradura pela diagonal e o quarto do quadrado proveniente da dobradura a partir de linhas paralelas aos lados (como um sinal de "+") pode não ser tão natural. Dificuldade semelhante pode ser observada na comparação entre esse mesmo quarto do quadrado e o oitavo do quadrado proveniente de uma sequência de dobraduras paralelas a um dos lados, determinando "faixas paralelas". Nesses casos, para executar a comparação, é necessário que os alunos reconheçam partes de formatos diferentes que correspondem a uma mesma fração do quadrado como iguais em quantidade. Assim, a comparação entre a metade do quadrado, obtida pela dobradura na diagonal, e o quarto do quadrado, obtido pela dobraduta "em sinal de +", pode ser amparada pelo reconhecimento de que a metade em questão é igual em quantidade à metade do quadrado obtida por uma única dobra paralela a um dos lados, que é o dobro do quarto do quadrado.

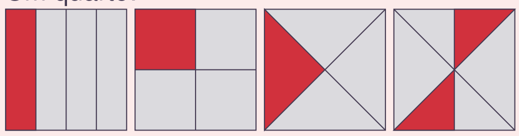
Resposta da Atividade 7

Algumas soluções possíveis, convencionais e outras menos convencionais são:

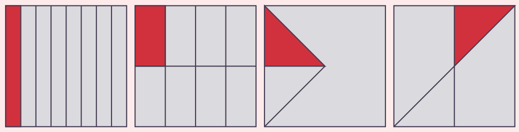
a) Metade:



b) Um quarto:



c) Um oitavo:



d) Dentre as opções apresentadas, a maior fração do quadrado é metade.

Atividade 8

Objetivos específicos: Levar o aluno a:

- ⋆ Representar uma fração unitária (no caso, um meio ou metade) a partir de uma unidade dada.
- ⋆ Estabelecer representações diferentes para a mesma fração unitária e para uma mesma unidade.

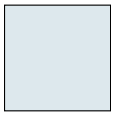
Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Essa é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.
- ⋆ Como na atividade anterior, não se espera que, nesta atividade, o aluno use a medida para fazer a equipartição de maneira mais precisa. O objetivo é que o aluno faça a equipartição livremente e de forma coerente.
- ⋆ Incentive os alunos a usar dobradura para decidir sobre as diferentes formas de identificar metades na unidade apresentada.

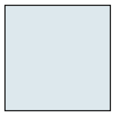
Observe que a representação da unidade se dá de forma genérica, ainda em modelo contínuo, por uma figura não tradicional como retângulos e círculos, que é determinada pela justaposição de dois hexágonos regulares.

Atividade 7

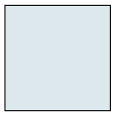
a) Pinte metade do quadrado a seguir.



b) Pinte um quarto do quadrado a seguir.



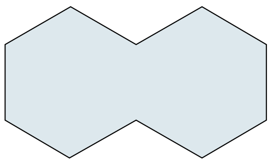
c) Pinte um oitavo do quadrado a seguir.



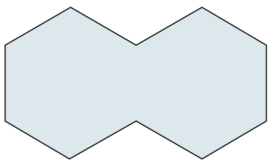
d) Observando os quadrados pintados nos itens anteriores, qual é a maior das frações do quadrado: metade, quarto ou oitavo?

Atividade 8

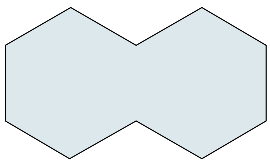
a) Pinte metade da figura.



b) Pinte metade da figura de forma diferente da do item anterior.



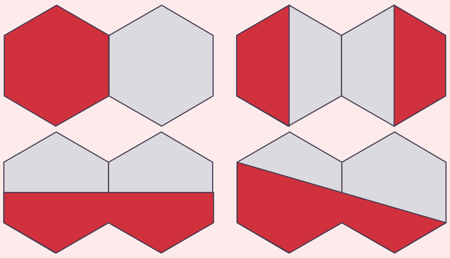
c) Pinte a metade da figura de forma diferente das dos dois itens anteriores.



⋆ Procure apresentar e discutir com a turma mais do que uma solução para cada item.

Resposta da Atividade 8

Algumas das respostas possíveis para este problema são:



Atividade 9

Objetivos específicos: Levar o aluno a:

⋆ Reconhecer a metade de uma unidade pela reunião de partes menores e em partições diversas.

⋆ Estabelecer representações diferentes para a mesma fração unitária para uma mesma unidade.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.

⋆ Esta atividade pretende levar o aluno a perceber que a metade de uma unidade pode ser considerada e identificada mesmo sem que se tenha uma divisão em duas partes iguais.

⋆ Como nas atividades anteriores, não se espera que o aluno use a medida para confirmar a metade da unidade. O objetivo é que o aluno identifique a representação da metade (ou não) por sobreposição e justaposição das partes, decompondo e recompondo a figura.

⋆ Cada aluno deve receber as imagens das figuras, disponíveis para reprodução no final do livro para que possa manipular como achar melhor e conduzir a sua decisão.

⋆ Incentive os alunos a argumentar, justificando a sua decisão. Para isso, podem, por exemplo, se apoiar em dobraduras ou em recortes das partes da figura.

⋆ Procure apresentar e discutir com a turma mais do que uma solução para cada item.

Resposta da Atividade 9

As figuras que correspondem à metade da unidade são as de números 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 11 e 12.

Atividade 10

Objetivos específicos: Levar o aluno a:

⋆ Distinguir frações unitárias a partir de representações em modelos de área circular.

⋆ Comparar frações unitárias a partir de representações em modelos de área circular.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos. No entanto, cada aluno deve ter o seu próprio material (Círculos de Frações) para realizar a atividade.

⋆ Durante a discussão, os alunos devem ser estimulados a explicar as suas escolhas. A discussão sobre os motivos da identificação, ou não, de cada uma das representações às frações da unidade correspondentes será fundamental para atingir o objetivo da atividade.

⋆ Esta atividade é planejada para ser desenvolvida a partir de material concreto baseado em modelos de área circular. Mais especificamente com um material conhecido como “Círculos de Frações”. Para aplicá-la, é necessário reproduzir esse material, que está disponível nas páginas para reprodução.

⋆ Sendo um material concreto, os círculos de frações têm o papel de auxiliar na visualização da representação das frações, mais especificamente, das frações unitárias.

⋆ Na versão utilizada nesta atividade, o círculo corresponde à unidade, ou seja, ao 1 e os setores circulares, diferenciados por cores, correspondem às frações unitárias um meio, um terço, um quarto, um sexto, um sétimo, um oitavo, um nono e um décimo.

⋆ Os Círculos de Frações também podem ser utilizados para trabalhar com as frações unitárias, bem como para abordar outros conceitos e assuntos como, por exemplo, frações em geral, comparação de frações ou as operações com frações (adição e subtração).

⋆ Refira-se ao círculo inteiro (na cor preta) como círculo ou unidade, e não como todo. Refira-se a cada setor circular como fração do círculo, parte do círculo ou, simplesmente, peça da cor x.

⋆ Antes de solicitar aos alunos que realizem a atividade, explore o material ressaltando especialmente o fato de que, reunidas, as peças de uma mesma cor determinam um círculo congruente ao preto.

⋆ Ainda antes de solicitar aos alunos que realizem a atividade, explore também o material com perguntas dirigidas a toda a turma como as seguintes: “Quantas peças azuis cobrem o círculo preto?” ou “Quantas peças verdes cobrem o círculo preto?”.

⋆ Faça uso do material concreto para ilustrar e explicar a resposta de cada item e incentive os seus alunos a fazerem o mesmo.

Atividade 9

Identifique as figuras em que a parte pintada de vermelho é a metade da figura.


Figura 1


Figura 2

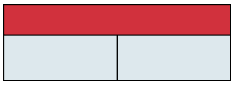


Figura 3

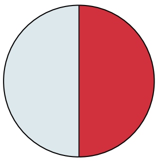


Figura 4

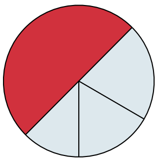


Figura 5

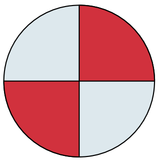


Figura 6

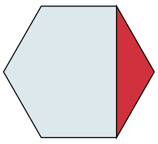


Figura 7

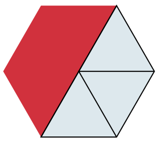


Figura 8

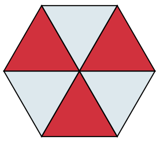


Figura 9

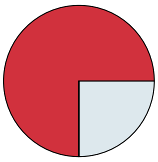


Figura 10

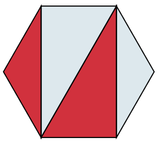
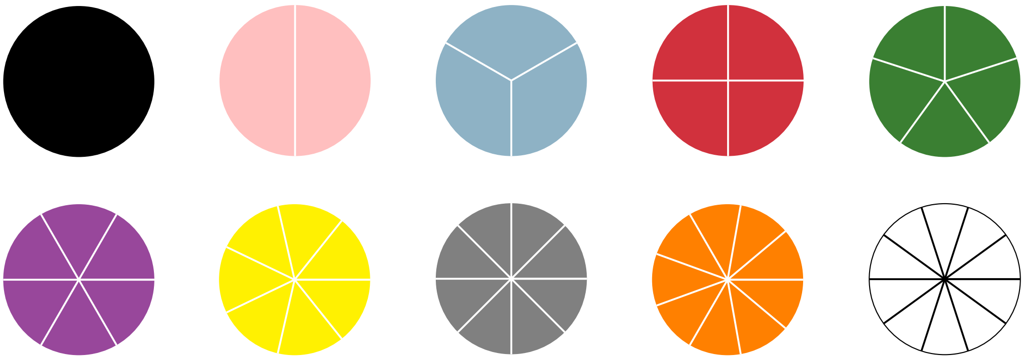


Figura 11


Figura 12

Atividade 10

Usando os Círculos de Frações que você receberá do seu professor (há encarte para reprodução no final do livro), responda:



- Espera-se que a explicação para as respostas, nos oito primeiros itens desta questão, seja a partir da contagem dos setores circulares correspondentes às frações envolvidas. Assim, por exemplo, a resposta do item b) pode ser justificada pelo fato de que são necessários 4 partes de círculo na cor vermelha para compor um círculo preto.
- Já para os cinco itens que tratam da comparação, espera-se que os alunos identifiquem os setores que representam as frações envolvidas e procedam a comparação pela sobreposição das peças correspondentes. Assim, por exemplo, a resposta do item l) pode ser justificada pela sobreposição das peças das cores verde e amarelo.
- Aproveite a correção desses últimos itens para explorar, a partir dos Círculos de Frações, a relação entre a quantidade de peças de cada cor e o tamanho das peças, ou seja, a relação inversa entre a quantidade de partes em que círculo (unidade) está dividido e o tamanho de cada parte.

Resposta da Atividade 10

a) Uma peça da cor AZUL é igual a um terço do círculo preto.

b) Uma peça da cor VERMELHA é igual a um quarto do círculo preto.

c) Uma peça da cor AMARELA é igual a um sétimo do círculo preto.

d) Uma peça da cor LARANJA é igual a um nono do círculo preto.

e) Uma peça da cor roxa é igual a UM SEXTO do círculo preto.

f) Uma peça da cor cinza é igual a UM OITAVO do círculo preto.

g) Uma peça da cor branca é igual a UM DÉCIMO do círculo preto.

h) Uma peça da cor rosa é igual à METADE do círculo preto.

i) Um terço do círculo preto é maior do que um sétimo do círculo preto.

j) Um nono do círculo preto é menor do que um quarto do círculo preto.

k) Um sétimo do círculo preto é menor quinto do círculo preto.

l) Um quarto do círculo preto é maior do que um oitavo do círculo preto.

m) Um sexto do círculo preto é maior do que um sétimo do círculo preto

Atividade 11

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- Conhecer e compreender as expressões correspondentes as frações unitárias com denominadores de 5 a 10.
- Comparar frações da unidade através da representação visual de frações do círculo.
- Reconhecer a relação inversa entre o número de partes e o tamanho de cada parte.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- Esta atividade pode ser resolvida individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.
- É provável que nem todos os alunos conheçam ou intuam as expressões correspondentes às frações propostas. Nesse caso, cabe ao professor apresentá-las e diferenciá-las.
- Aproveite esta atividade para revisar e discutir o vocabulário que é objetivo nesta seção: *unidade*, *metade*, *um meio*, *um terço*, *terça parte*, *um quarto*, *quarta parte*, *um quinto*, *quinta parte*, *um sexto*, *sexta parte*, *um sétimo*, *sétima parte*, *um oitavo*, *oitava parte*, *um nono*, *nona parte*, *um décimo* e *décima parte* .

Resposta da Atividade 11

a) A correspondência adequada é:

   I) A esta afirmação corresponde a figura G).

   II) A esta afirmação corresponde a figura D).

a) Qual é a cor da peça que é igual a um terço do círculo preto?

b) Qual é a cor da peça que é igual a um quarto do círculo preto?

c) Qual é a cor da peça que é igual a um sétimo do círculo preto?

d) Qual é a cor da peça que é igual a um nono do círculo preto?

e) Que fração do círculo preto é igual a uma peça de cor roxa?

f) Que fração do círculo preto é igual a uma peça de cor cinza?

g) Que fração do círculo preto é igual a uma peça de cor branca?

h) Que fração do círculo preto é igual a uma peça de cor rosa?

i) Qual fração do círculo preto é maior, um terço ou um sétimo? Explique a sua resposta.

j) Qual fração do círculo preto é menor, um nono ou um quarto? Explique a sua resposta.

k) Qual fração do círculo preto é menor, um quinto ou um sétimo? Explique a sua resposta.

l) Qual fração do círculo preto é maior, um oitavo ou um quarto? Explique a sua resposta.

m) Qual fração do círculo preto é maior, um sexto ou um sétimo? Explique a sua resposta.

Atividade 11

Nas figuras a seguir, um mesmo círculo azul aparece diferentemente dividido em regiões iguais e colorido em vermelho.

a) Complete as sentenças a seguir identificando os círculos que as tornam verdadeiras.

   I) A parte do círculo colorida em vermelho na figura ____ é um quinto do círculo.

   II) A parte do círculo colorida em vermelho na figura ____ é a sexta parte do círculo.

   III) A parte do círculo colorida em vermelho na figura ____ é um sétimo do círculo.

III) A esta afirmação corresponde a figura I).

IV) A esta afirmação corresponde a figura B).

V) A esta afirmação corresponde a figura A).

VI) A esta afirmação corresponde a figura F).

b) As frações um sétimo, um oitavo, um nono e um décimo do círculo são menores que um sexto do círculo. Qualquer uma delas está correta.

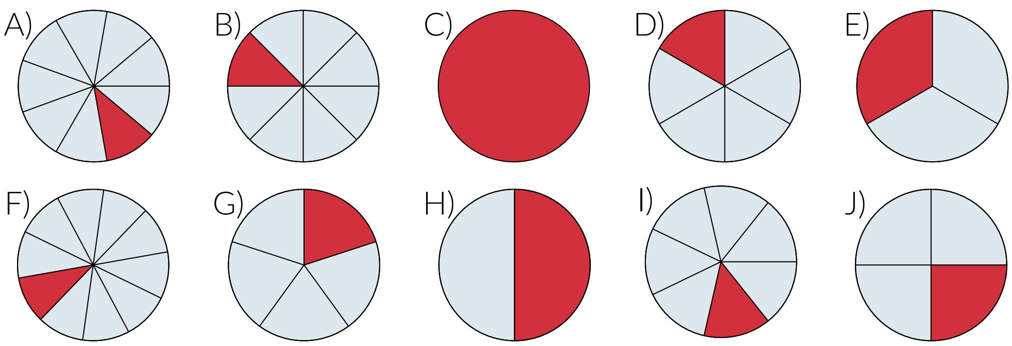
c) As frações um meio, um terço, um quarto, um quinto, um sexto, um sétimo e um oitavo do círculo são maiores que um nono do círculo. Qualquer uma delas está correta.

d) As frações um sétimo e um oitavo do círculo são menores que um sexto e maiores que um nono do círculo.

IV) A parte do círculo colorida em vermelho na figura _____ é um oitavo do círculo.

V) A parte do círculo colorida em vermelho na figura _____ é a nona parte do círculo.

VI) A parte do círculo colorida em vermelho na figura _____ é um décimo do círculo.



b) Dentre as frações do círculo destacadas em vermelho, identifique uma que seja menor do que um sexto do círculo.

c) Dentre as frações do círculo destacadas em vermelho, identifique uma que seja maior do que um nono do círculo.

d) Identifique uma fração do círculo que seja menor do que um sexto e maior do que um nono do círculo.

Atividade 12

Objetivos específicos: Levar o aluno a:

- ⋆ Distinguir frações unitárias a partir de representações em modelos diversos, baseados em equipartição ou não.
- ⋆ Comparar frações unitárias a partir de representações em modelos diversos, baseados em equipartição ou não.
- ⋆ Estabelecer a comparação entre as frações "um meio", "um quarto" e "um décimo".
- ⋆ Reconhecer e diferenciar a representação das frações "um meio", "um quarto" e "um décimo" em modelos diversos, baseados em equipartição ou não.
- ⋆ Estabelecer a comparação entre as frações "um meio", "um quarto" e "um décimo".

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.
- ⋆ Esta atividade pretende levar o aluno a perceber que a metade de uma unidade pode ser considerada e identificada mesmo sem que se tenha uma divisão em duas partes iguais.
- ⋆ Como nas atividades anteriores, não se espera que os alunos usem a medida para confirmar a metade. O objetivo é que identifiquem a representação da metade (ou não) por sobreposição e justaposição dessas partes, decompondo e recompondo a figura.
- ⋆ Cada aluno deve receber as imagens das figuras, disponíveis para reprodução no final do livro para que possa manipular como achar melhor e conduzir a sua decisão.
- ⋆ Incentive os alunos a argumentar, justificando a sua decisão. Para isso, podem, por exemplo, se apoiar em dobraduras ou no recorte das partes da figura.
- ⋆ Procure apresentar e discutir com a turma mais do que uma solução para cada item

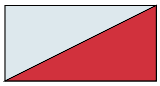
Resposta da Atividade 12

a) um meio,	b) um décimo,	c) um quarto,
d) um quarto,	e) um quarto,	f) um meio,
g) um quarto,	h) um décimo,	i) um quarto,
j) um décimo,	l) um quarto,	m) um meio

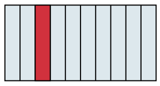
Atividade 12

Em cada uma das imagens, a parte em vermelho é uma fração da figura. Essas frações podem ser “um meio”, “um quarto” ou “um décimo” da figura. Associe cada imagem à fração correspondente.

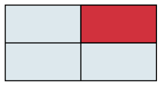
a)



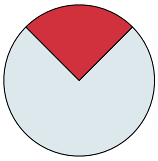
b)



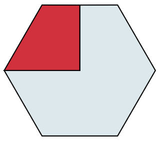
c)



d)

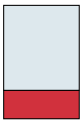


e)

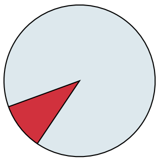


f)

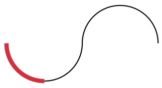
g)



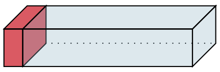
h)



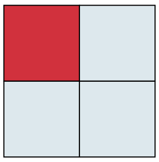
i)



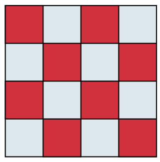
j)



l)



m)



LIÇÃO 2 - Para o professor

Nesta seção, serão estudadas as frações com numeradores diferentes de 1, tanto as próprias (caso em que o numerador é menor do que ou igual ao denominador) como as impróprias (caso em que o numerador é maior do que o denominador). Também serão abordadas a notação simbólica de frações e a comparação entre frações de mesmo denominador.

As frações com numerador diferente de 1 são apresentadas a partir da **justaposição de frações unitárias com mesmo denominador ou simplesmente contando-se essas frações**. Para isso, tem-se a representação pictórica como um apoio importante.

Por exemplo, na atividade 1, as imagens da barra de chocolate amparam a compreensão da fração $\frac{2}{3}$ como a adição por justaposição de duas partes correspondentes à terça parte (ou à fração $\frac{1}{3}$) de uma barra de chocolate.

Nesse sentido, nas primeiras atividades, há um esforço deliberado para que o estudante faça uso da linguagem de frações apresentada na Lição 1 para expressar frações não unitárias. Por exemplo, na atividade 2, sabendo que uma das três fatias iguais em que foi repartida uma torta é um terço da torta, espera-se que o aluno use a linguagem "dois terços" ou "dois um terços" da torta para se referir às outras duas fatias. Dessa forma, "dois terços" são obtidos pela justaposição de duas partes correspondentes a "um terço". O objetivo é que esse processo se estenda para a compreensão das demais frações não unitárias. Assim, por exemplo, as frações "quatro quintos" e "seis quintos" são entendidas como "quatro um quintos" e "seis um quintos", respectivamente.

Um cuidado especial recomendado ao professor é com as frações impróprias, introduzidas logo nas primeiras atividades ainda sem notação simbólica. Não é indicado atrasar muito a introdução deste tipo de fração porque o estudante pode fixar-se na ideia de que não há fração maior do que a unidade (por exemplo, a fração $\frac{4}{3}$ pode não fazer sentido para o estudante porque, para ele, não faz sentido dividir uma torta em 3 pedaços e tomar 4). No entanto, decidiu-se omitir do estudante as terminologias "fração própria" e "fração imprópria" por se acreditar que esta linguagem não só é desnecessária para ele como também pode desviar a atenção dos temas que realmente importam.

Apesar de esta lição introduzir a linguagem simbólica de frações,o estudante talvez ainda precise de um unidade concreta explícita para ter um significado para a fração $\frac{a}{b}$: por exemplo, "$\frac{a}{b}$ de uma pizza" ou "$\frac{a}{b}$ de uma barra de chocolate". Apenas na próxima lição, $\frac{a}{b}$ será tratado como número, requerendo do aluno a abstração que o conceito de número exige.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA LIÇÃO 2:

O aluno deve ser capaz de:

⋆ Reconhecer frações não unitárias (próprias e impróprias) como a justaposição de partes correspondentes às frações unitárias.

⋆ Utilizar as linguagens verbal e simbólica de frações para se referir a uma fração $\frac{a}{b}$.

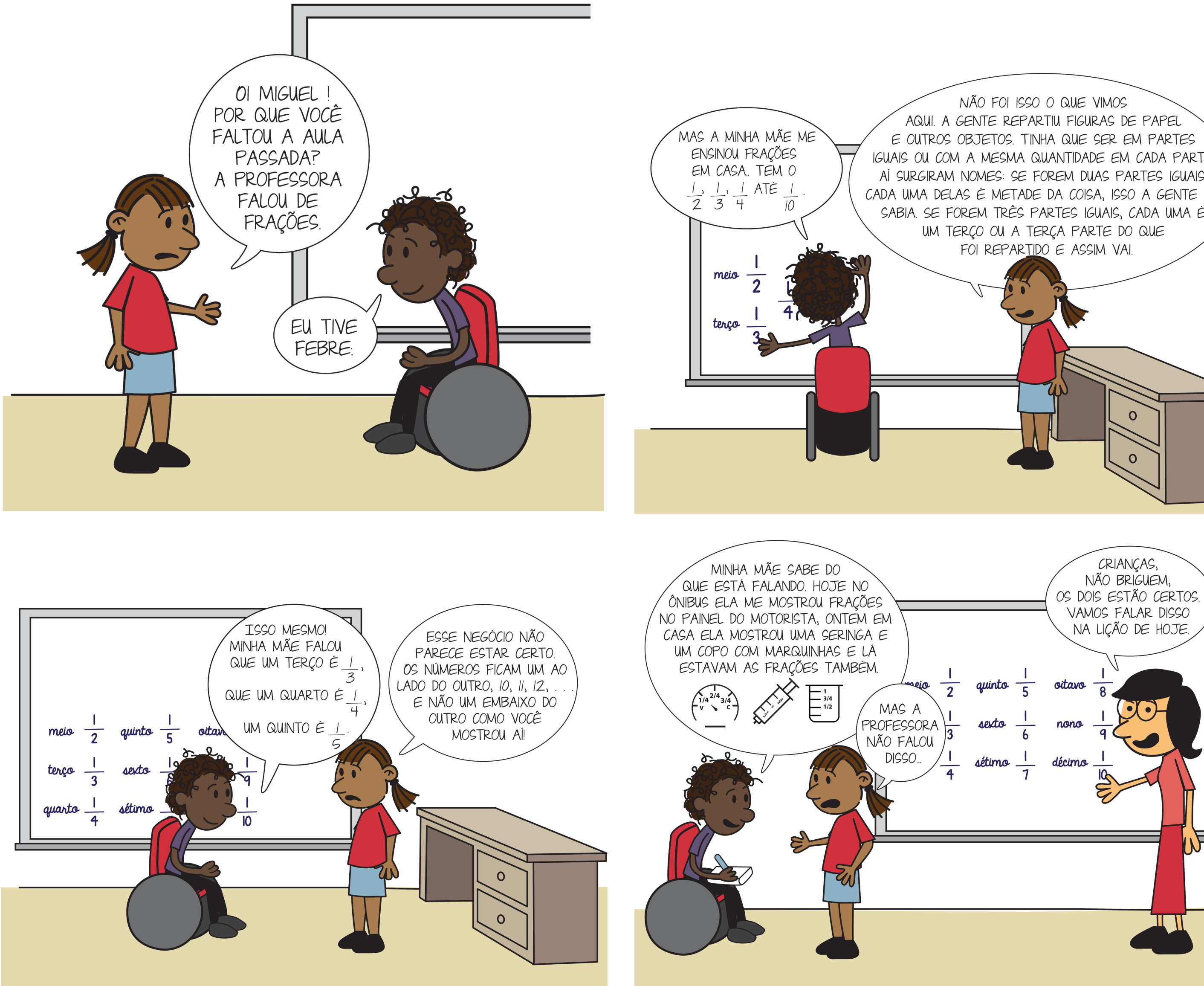
⋆ Reconhecer e nomear os termos de uma fração.

⋆ Comparar frações de mesmo denominador.

⋆ Reconhecer que uma mesma quantidade pode ser expressa por frações diferentes, dependendo da unidade escolhida.

Lição 2

Multiplicando a fração da unidade



Atividade 1

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ Estender o uso de frações para expressar quantidades que correspondam a mais do que uma fração unitária, a partir da justaposição de duas ou mais partes correspondentes às frações unitárias de mesmo denominador.
- ⋆ Reconhecer e usar frações para expressar quantidades que correspondam a mais do que uma fração unitária, em situação de equipartição de mais do que uma unidade (no caso, duas).
- ⋆ Reconhecer a necessidade de apresentar uma expressão verbal que identifique a quantidade correspondente à justaposição de duas ou mais partes correspondentes às frações unitárias de mesmo denominador.
- ⋆ Compreender e usar a expressão "n terços de"como forma de registrar as n partes da equipartição da unidade em três partes (no caso, dois terços).
- ⋆ Identificar a fração "n terços de" em uma situação de equipartição de mais do que uma unidade.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.
- ⋆ A escolha de iniciar o assunto com um problema de divisão partitiva, no lugar do contexto parte-todo, se deve a dois motivos: (1) mantém-se a questão motivadora de equipartição iniciada na lição anterior (agora com múltiplas cópias da unidade) e (2) na divisão partitiva, frações cujo numerador é maior do que o denominador (frações impróprias) fazem sentido e aparecem naturalmente, algo que pode não ocorrer no contexto parte-todo (não parece natural nomear uma parte "maior" do que o todo, mas é possível uma quantidade proveniente de frações ser maior do que a unidade).
- ⋆ As diversas soluções apresentadas pelos diferentes grupos devem ser discutidas com a turma inteira.
- ⋆ É possível que os alunos utilizem expressões variadas para nomear as partes dos chocolates em cada divisão e para a quantidade de chocolate que cada irmão recebeu. Por exemplo, "dois dos seis pedaços", "dois pedaços de um terço de chocolate", dentre outras. É importante que a discussão conduza os alunos ao uso de terços: "dois terços", "quatro terços", "seis terços", etc. Observa-se que o uso de "sextos" para nomear as partes não é esperada para as perguntas que envolvem fração "de uma barra" e muito provavelmente indicam uma confusão do aluno em relação ao reconhecimento da unidade. Verifique.
- ⋆ Nesta atividade, é importante que os alunos possam ter cópias de figuras ilustrativas das barras de chocolate para dividir e poder avaliar e decidir as suas respostas. Faça cópias das páginas para reprodução.

Classificações:

- ⋆ Heid et al.: Conceito: identificar e descrever
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer
- ⋆ UERJ: Observar: identificar e reconhecer

Resposta da Atividade 1

a) Um terço.

b) Sim, pois a divisão foi justa no sentido de cada irmã ter recebido a mesma quantidade de chocolate.

c) Sim, pois cada irmã recebeu dois pedaços que equivalem, cada um, a um terço de uma barra de chocolate.

d) Dois terços de uma barra.

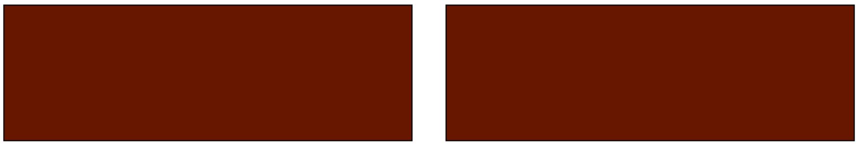
e) Três terços de uma barra, ou seja, uma barra inteira de chocolate.

f) Quatro terços de uma barra, ou seja, uma barra inteira e um terço de chocolate.

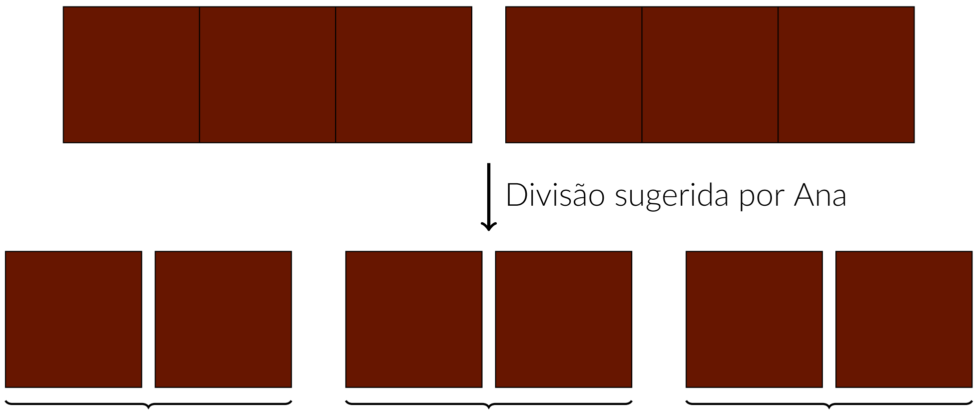
EXPLORANDO O ASSUNTO

Atividade 1

O pai de Ana, Beatriz e Clara trouxe duas barras de chocolate para serem repartidas entre elas.



Ana propôs que cada barra fosse dividida em três partes iguais e que cada irmã ficasse com duas dessas partes.



Quantidade de chocolate recebida por Ana	Quantidade de chocolate recebida por Beatriz	Quantidade de chocolate recebida por Clara

a) Na divisão de cada uma das barras de chocolate em três partes iguais, cada parte é que fração de uma barra de chocolate?

b) Você concorda com a divisão que Ana sugeriu? Explique.

c) Com essa divisão, as três irmãs receberiam a mesma quantidade de chocolate?

d) Na divisão proposta por Ana, como você nomearia, usando fração de uma barra de chocolate, a quantidade de chocolate que cada irmã receberia?

Ana não quer o chocolate e decidiu dar a quantidade de chocolate que recebeu na divisão das barras para as suas irmãs.

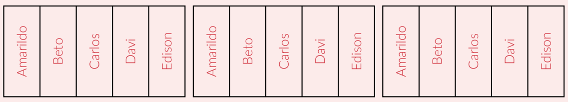
Atividade 2

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ Estender o uso de frações para expressar quantidades que correspondam a mais do que uma fração unitária a partir da justaposição de duas ou mais frações unitárias de mesmo denominador.
- ⋆ Reconhecer a necessidade de apresentar uma expressão verbal que identifique a quantidade correspondente à justaposição de duas ou mais partes correspondentes às frações unitárias de mesmo denominador.
- ⋆ Reconhecer e usar frações para expressar quantidades que correspondam a mais do que uma fração unitária em situação de equipartição de mais do que uma unidade (no caso, três).
- ⋆ Compreender e usar a expressão “n quintos de” como uma forma de identificar a quantidade equivalente a n partes da equipartição da unidade em quintos, incluindo os casos em que n é maior do que cinco (frações impróprias).
- ⋆ Analisar uma situação de comparação de frações de mesmo denominador.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.
- ⋆ As diversas soluções apresentadas pelos diferentes grupos devem ser discutidas com a turma inteira.
- ⋆ Em particular, no Item a), não se espera, nem se recomenda, que a representação feita pelos alunos seja amparada por medida. O objetivo é que façam a equipartição livremente e de forma coerente. Assim, por exemplo, pode ser aceita como resposta a solução indicada na figura a seguir.



- ⋆ Em suas respostas, é possível que os alunos utilizem expressões variadas para nomear as partes das tortas em cada divisão e para as quantidades de torta que cada irmão recebe. Por exemplo, “três dos quinze pedaços”, “três pedaços de um quinto de torta”, dentre outras. É importante que a discussão conduza os alunos ao uso de quintos: “três quintos”, “seis quintos”, “quinze quintos”, etc.
- ⋆ Espera-se que, no final da atividade, o aluno tome conhecimento e reconheça o significado das expressões dois quintos e três quintos, mesmo que não o faça espontaneamente (usando, por exemplo, especificações como “dois pedaços” ou “duas fatias”) e seja necessária a intervenção do professor. **O professor deve fazer e incentivar o uso da terminologia de frações que se quer estabelecer nesta lição.**
- ⋆ Nesta atividade, é importante que os alunos possam ter cópias de figuras ilustrativas da torta para dividir e poder avaliar e decidir suas respostas. Faça cópias das páginas para reprodução.
- ⋆ Nos Itens c) e d), não basta uma resposta “Sim” ou “Não”. É importante estimular os seus alunos a darem uma justificativa.

Classificações:

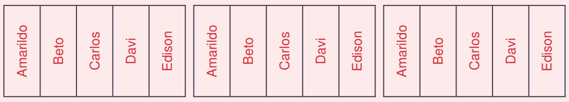
- ⋆ Heid et al.: Conceito: identificar, descrever
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer
- ⋆ UERJ: Observar: identificar, reconhecer

Itens c) e d)

- ⋆ Heid et al.: Raciocínio: justificar
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: justificar
- ⋆ UERJ: Avaliar: julgar

Resposta da Atividade 2

a) Uma resposta possível (entre várias): dividir cada uma das três tortas em 5 partes iguais e, então, com as 15 partes disponíveis, distribuir 3 partes para cada amigo, como mostra a figura a seguir



b)
I) Três quintos.
II) Seis quintos (ou uma torta inteira e um quinto de torta).
III) Nove quintos.
IV) Doze quintos (ou duas tortas inteiras e dois quintos de torta).
V) Quinze quintos (ou três tortas inteiras).

c) A quantidade de torta que cada amigo recebeu não pode ser menor do que um quinto de torta pois, se isto acontecesse, a quantidade total de torta recebida pelos cinco amigos seria menor do que cinco quintos de torta, isto é, seria menor do que uma torta inteira, o que não é o caso. Um argumento análogo mostra que a quantidade de torta que cada amigo recebeu não pode ser menor do que dois quintos de torta.

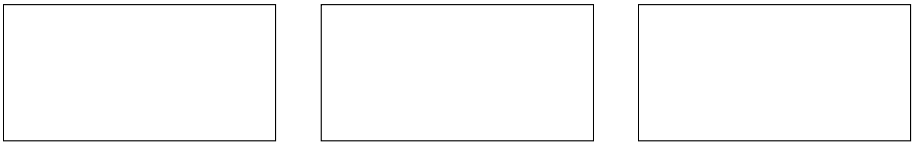
d) A quantidade de torta que cada amigo recebeu não pode ser maior do que três quintos de torta pois, se isto acontecesse, a quantidade total de torta recebida pelos cinco amigos seria maior do que quinze quintos de torta, isto é, seria maior do que três tortas inteiras, o que não é o caso. Um argumento análogo mostra que a quantidade de torta que cada amigo recebeu não pode ser maior do que quatro quintos de torta.

e) Se Ana desse metade da quantidade de chocolate que recebeu para cada uma de suas irmãs, que quantidade de chocolate Beatriz e Clara passariam a ter? Como você nomearia, usando frações, essas quantidades?

f) E se Ana desse toda a quantidade de chocolate que recebeu para Beatriz, que quantidade de chocolate Beatriz passaria a ter? Como você nomearia, usando frações, essa quantidade?

Atividade 2

Um grupo de cinco amigos (Amarildo, Beto, Carlos, Davi e Edilson) encomendou três tortas salgadas para uma comemoração.



a) Como dividir as três tortas de modo que cada amigo receba a mesma quantidade de torta? Faça um desenho no seu caderno mostrando sua proposta de divisão. Indique qual parte é de qual amigo!

b) Considerando-se uma torta como unidade, como você nomearia, usando frações, a quantidade de torta que:

   I) Amarildo recebeu?

   II) Amarildo e Beto receberam juntos?

   III) Amarildo, Beto e Carlos receberam juntos?

   IV) Amarildo, Beto, Carlos e Davi receberam juntos?

   V) Amarildo, Beto, Carlos, Davi e Edilson receberam juntos?

c) A quantidade de torta que cada amigo recebeu é menor do que um quinto de torta? E do que dois quintos de torta? Explique sua resposta.

d) A quantidade de torta que cada amigo recebeu é maior do que três quintos de torta? E do que quatro quintos de torta? Explique sua resposta.

Atividade 3

Para a sobremesa do almoço de domingo, papai passou em uma confeitaria que vende tortas divididas igualmente em 8 fatias, como na figura abaixo.

Atividade 3

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ Estender o uso de frações para expressar quantidades que correspondam a mais do que uma fração unitária, a partir da justaposição de duas ou mais partes correspondentes às frações unitárias de mesmo denominador.
- ⋆ Reconhecer e usar frações para expressar quantidades que correspondam a mais do que uma fração unitária em situações que exijam a partição de mais do que uma unidade (no caso, oito).
- ⋆ Compreender e usar a expressão "n oitavos de" como forma de identificar a quantidade equivalente a n partes da equipartição da unidade em oito partes, incluindo os casos em que n é maior do que oito (frações impróprias).
- ⋆ Reconhecer que uma mesma quantidade pode ser expressa por frações equivalentes de uma mesma unidade (por exemplo, "meia torta" e "quatro oitavos de torta" representam a mesma quantidade de torta).

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.
- ⋆ As diversas soluções apresentadas pelos diferentes grupos devem ser discutidas com a turma inteira.
- ⋆ É importante que a discussão conduza os alunos ao uso de oitavos: "quatro oitavos", "dez oitavos" e "uma torta e dois oitavos".
- ⋆ No entanto, cabe ressaltar que não se objetiva o uso da notação de fração mista para representar, por exemplo, "uma torta e dois oitavos".
- ⋆ As respostas esperadas para o Item c) podem surgir na resolução do Item b). Caso isso aconteça, recomenda-se que as frações corretas correspondentes a 4 fatias de torta ($\frac{1}{2}$ de torta, $\frac{2}{4}$ de torta, $\frac{3}{6}$ de torta, etc.) sejam reconhecidas como tal, mas que, conforme solicitado pelo enunciado, a resposta deve ser dada em termos de oitavos.
- ⋆ No Item c), é importante estimular o aluno a dar uma explicação para sua resposta: "por que você pensou em $\frac{1}{2}$ de torta?", "Por que você pensou em $\frac{3}{6}$ de torta?" Etc.

Classificações:

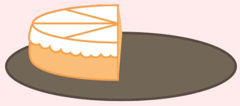
- ⋆ Heid et al.: Conceito: identificar, descrever
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer
- ⋆ UERJ: Observar: identificar, reconhecer

Resposta da Atividade 3

a) Cada fatia é um oitavo de torta, pois cada torta está dividida em oito partes iguais.

b) Havia para a sobremesa quatro oitavos de torta.

c) Meia torta, pois quatro fatias de torta têm a mesma quantidade de torta que meia torta.



a) Algumas respostas possíveis: dez oitavos de torta; uma torta inteira e dois oitavos de torta; uma torta inteira e um quarto de torta.

Atividade 4

Objetivos específicos: Levar o aluno a

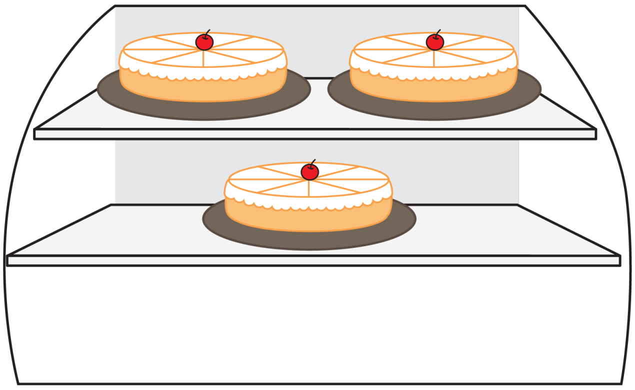
- ⋆ Identificar frações do tipo "n meios", "n terços", ..., "n décimos" em diferentes modelos visuais de frações em situações onde há uma indicação explícita da unidade.
- ⋆ Compreender frações do tipo "n meios", "n terços", ..., "n décimos" como forma de identificar a quantidade equivalente a "n" cópias da fração unitária "$\frac{1}{m}$" (incluindo os casos em que $n \geq m$) em situações onde há uma indicação explícita da unidade.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Esta atividade pode ser resolvida individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.
- ⋆ Observe que, enquanto que nas atividades anteriores cópias múltiplas da unidade já estavam naturalmente disponíveis (as duas barras de chocolate na Atividade 1, as três tortas salgadas na Atividade 2, as várias tortas divididas em oito partes na confeitaria da Atividade 3), nesta atividade, o aluno deve identificar frações a partir de uma única cópia da unidade, sem qualquer subdivisão registrada. Por exemplo, no item d), o aluno deve registrar nove meios de uma estrelinha, sem a subdivisão explicitada. Assim, a atividade oferece uma oportunidade para reforçar a compreensão de frações em um contexto diferente daquele em que a parte correspondente à fração é identificada e totalmente inserida em uma unidade, frequentemente já subdividida. Esse tipo de representação, muito associada ao significado parte/-todo, pode limitar a compreensão de frações impróprias.
- ⋆ Nesta atividade, espera-se que o aluno identifique uma equipartição adequada da unidade que defina a fração unitária $\frac{1}{m}$ da unidade para compor a parte colorida e que, então, tome a quantidade n correta desta fração unitária, mesmo no caso em que $n > m$.

Classificações:

- ⋆ Heid et al.: Conceito: identificar
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer
- ⋆ UERJ: Observar: identificar, nomear



a) Que fração de uma torta é uma fatia? Explique.

b) Domingo papai comprou 4 fatias, quantos oitavos de uma torta havia para a sobremesa?

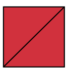
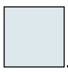
c) Na pergunta anterior, apresente outra fração que represente a quantidade de torta que papai comprou. Explique sua resposta.

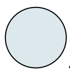
d) Hoje papai comprou 10 fatias de torta. Como podemos representar essa quantidade de torta em termos de frações **de uma torta**? Lembre-se que oito fatias formam uma torta inteira.

Atividade 4

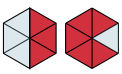
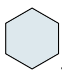
Complete as afirmações com uma das frações: "dois meios", "dois terços", "dois quintos", "três quartos", "oito sextos" e "nove meios", para que sejam verdadeiras.

a) A parte pintada de vermelho em  é ________ de .

b) A parte pintada de vermelho em  é ________ de .

c) A parte pintada de vermelho em  é ________ de .

d) A parte pintada de vermelho em  é ________ de .

e) A parte pintada de vermelho em  é ________ de .

Resposta da Atividade 4

a) dois terços.

b) dois meios.

c) dois quintos.

d) nove meios.

e) oito sextos.

Sobre o Organizando as ideias

Nesta etapa, espera-se que os alunos compreendam as frações $\frac{a}{b}$ como adição por justaposição de a frações $\frac{1}{b}$ da unidade. Observe que esse entendimento é construído a partir de modelos contínuos e amparado por situações concretas. Assim, como explicado na introdução desta seção, por exemplo, "dois terços" de uma unidade dada são obtidos pela justaposição de duas partes correspondentes a "um terço" da mesma unidade.

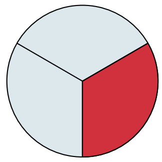
Esse entendimento terá reflexos na forma como são lidas as frações $\frac{a}{b}$. Não se espera, nem se recomenda, que seja sugerida aos alunos a leitura de $\frac{a}{b}$ como "*a sobre b*" nem como "*a dividido por b*". Nesta etapa, espera-se que os alunos leiam essas frações, por exemplo, como "dois terços" ou "dois um terços" da unidade. As outras formas de leitura serão tratadas em seções posteriores.

Nesse contexto, é importante também discutir com os alunos as frações que representam números naturais. Por exemplo, na atividade 2, a fração $\frac{3}{3}$ da torta é uma torta inteira e a fração $\frac{6}{3}$ da torta são duas tortas.

Por fim, observa-se que a notação de fração pode não parecer natural para os alunos, porque é um símbolo composto por dois números de significados diferentes, um sobre o outro. Isso contraria a escrita usual dos números naturais. Alguns povos antigos tiveram representações diferentes para estes números. Contudo, é importante lembrar que hoje essa é a notação mundialmente aceita, devendo, portanto, ser bem compreendida.

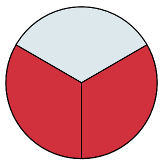
ORGANIZANDO AS IDEIAS

Se uma torta está dividida em três partes iguais, a torta fica separada em três terços. Assim, como visto na historinha do início da lição, tanto faz escrever: "$\frac{1}{3}$ da torta" ou "um terço da torta" para se referir à fatia destacada na figura.

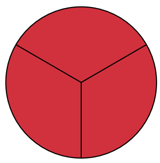


$\frac{1}{3}$ da torta

Duas fatias são "dois terços da torta", o que pode ser expresso simplesmente por "$\frac{2}{3}$ da torta". Deste modo, "três terços da torta" é uma torta inteira.

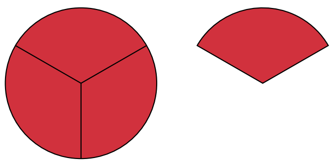


$\frac{2}{3}$ da torta

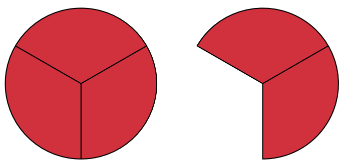


$\frac{3}{3}$ da torta

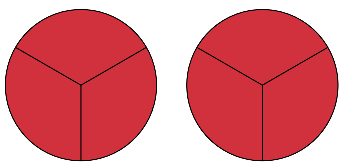
Também pode-se considerar quatro terços, cinco terços ou seis terços da torta, basta juntar novos terços à torta inteira.



$\frac{4}{3}$ da torta = 1 torta e $\frac{1}{3}$ da torta



$\frac{5}{3}$ da torta = 1 torta e $\frac{2}{3}$ da torta



$\frac{6}{3}$ da torta = 2 tortas

Notas de Aula

Se uma torta é repartida em três partes iguais, cada fatia é um terço da torta - ou, simplesmente, $\frac{1}{3}$ da torta. Juntando essas fatias, é possível se ter dois terços ($\frac{2}{3}$) e três terços ($\frac{3}{3}$) da torta. Com mais do que uma torta repartida em três partes iguais, pode-se obter quatro terços ($\frac{4}{3}$), cinco terços ($\frac{5}{3}$), seis terços ($\frac{6}{3}$) etc de torta. Na representação simbólica, as frações que registram essas quantidades têm o número 3 “abaixo” do traço de fração, e, por isso, são denominadas terços. O número que informa a parte da unidade que “dá nome” à fração é chamado de *denominador* da fração. Assim, nas frações $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{3}$, o 3 é o denominador, identificando “terços”.

Já o número que aparece “acima” do traço de fração informa quantos terços estão sendo considerados. Esse número é chamado de *numerador* da fração. Por exemplo, na fração $\frac{1}{3}$ o numerador é 1 e na fração $\frac{4}{3}$ o numerador é 4.

Essa mesma forma de nomear vale para outras frações, mesmo que o denominador seja diferente de 3:
Em $\frac{2}{5}$, por exemplo, o numerador é 2 e o denominador é 5. Lê-se *dois quintos*.
Em $\frac{10}{8}$, por exemplo, o numerador é 10 e o denominador é 8. Lê-se *dez oitavos*.
Como você pôde observar, a nomeação de uma fração depende fortemente do denominador da fração. Para ler a fração deve-se ler o **número** do numerador seguido do **nome que identifica a equipartição da unidade, e que está indicado no denominador**, nessa ordem. Veja:

$$\frac{1}{3} \rightarrow \text{um terço;} \quad \frac{2}{3} \rightarrow \text{dois terços;} \quad \frac{5}{3} \rightarrow \text{cinco terços;}$$

$$\frac{1}{8} \rightarrow \text{um oitavo;} \quad \frac{3}{8} \rightarrow \text{três oitavos;} \quad \frac{7}{8} \rightarrow \text{sete oitavos.}$$

Anote agora os nomes de algumas outras frações:

$$\frac{1}{2} \rightarrow \text{um meio;} \quad \frac{1}{3} \rightarrow \text{um terço;} \quad \frac{1}{4} \rightarrow \text{um quarto;}$$

$$\frac{1}{5} \rightarrow \text{um quinto;} \quad \frac{1}{6} \rightarrow \text{um sexto;} \quad \frac{1}{7} \rightarrow \text{um sétimo;}$$

$$\frac{1}{8} \rightarrow \text{um oitavo;} \quad \frac{1}{9} \rightarrow \text{um nono;} \quad \frac{1}{10} \rightarrow \text{um décimo.}$$

Para a fração $\frac{1}{11}$, fala-se um onze avos. Da mesma forma, são nomeadas frações cujo denominador é maior do que 11. Por exemplo:

$$\frac{1}{12} \rightarrow \text{um doze avos;} \quad \frac{1}{13} \rightarrow \text{um treze avos;} \quad \frac{5}{13} \rightarrow \text{cinco treze avos.}$$

Curioso para saber sobre o significado da palavra **avos**? Pergunte ao seu professor. O importante é lembrar que, para denominadores maiores 11, acrescenta-se a expressão “avos” ao final da leitura da fração.

Atividade 5

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ Comparar diversas maneiras de se representar uma fração (por extenso, simbolicamente e graficamente).
- ⋆ Discutir aspectos dessas representações.

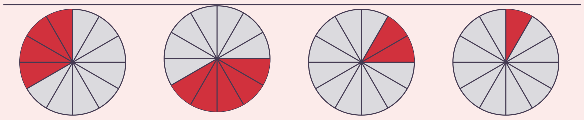
Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Essa é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.
- ⋆ É possível que os alunos utilizem frações equivalentes como resposta para um mesmo item. Por exemplo, as frações $\frac{4}{12}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{3}$descrevem corretamente a quantidade de pizza consumida por Pedro. Nestes casos, dê oportunidade para que cada aluno explique como chegou à sua resposta pois, procedendo desta maneira, mesmo de forma pontual, os alunos perceberão que uma mesma quantidade pode ser descrita por frações com nomes diferentes, o que vai motivar o assunto "frações equivalentes" que será tratado na Lição 4.
- ⋆ Esta atividade procura mostrar uma das qualidades da notação simbólica matemática: expressar um conceito com economia de escrita. Ela permite encapsular detalhes, simplificar procedimentos, abstrair e generalizar conceitos. Assim, é muito importante fazer com que seus alunos se familiarizem com a notação simbólica matemática para frações: ela será fundamental nas lições sobre operações com frações, por exemplo.

Classificações:

- ⋆ Heid et al.: Produto: gerar
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 5: converter (simbolizar)
- ⋆ UERJ: Interpretar: discriminar

Resposta da Atividade 5



Pedro	Isabella	Bernardo	Manuela
quatro doze avos	cinco doze avos	dois doze avos	um doze avos
$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

a) A que usa a notação simbólica matemática.

b) As respostas podem variar de pessoa para pessoa. No entanto, a justificativa deve ser coerente com a resposta. Discuta com a turma as diferentes respostas.

Contudo, para frações cujo denominador é uma potência de 10, usa-se outra formar de ler:

$\frac{1}{100} \rightarrow$ um centésimo; $\frac{13}{100} \rightarrow$ treze centésimos; $\frac{33}{1000} \rightarrow$ trinta e três milésimos.

Pronto! Agora você já é capaz de ler diversos tipos de frações.

denominador da fração:
nomeia a fração
Ex: meio, terço, quarto,
quinto, ... décimo etc.

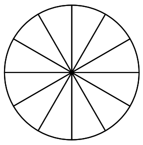
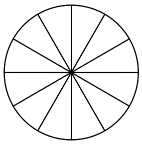
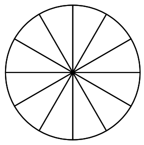
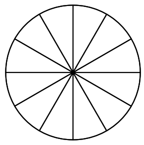
$$\frac{n}{d}$$

numerador da fração:
diz qual o número de
meios, terços, quartos etc.
deseja-se representar.

MÃO NA MASSA

Atividade 5

Uma pizza gigante foi dividida em doze fatias iguais. Pedro comeu quatro fatias, Isabella cinco fatias, Bernardo duas fatias e Manuela apenas uma fatia.

	Pedro	Isabella	Bernardo	Manuela
Pinte a fração de pizza consumida por cada pessoa				
Escreva, por extenso, a fração de pizza consumida por cada pessoa				
Escreva, usando notação simbólica matemática, a fração de pizza consumida por cada pessoa				

a) Na sua opinião, qual representação de fração “gasta menos lápis” para ser escrita: usando notação simbólica matemática, escrevendo por extenso ou pintando?

b) Na sua opinião, qual a representação que mais rapidamente ajuda a decidir quem comeu mais e quem comeu menos pizza?

Atividade 6

Objetivo específico: Levar o aluno a

- ⋆ Comparar frações com relação a uma fração de referência (no caso, a fração $\frac{1}{2}$) usando modelos contínuos (de área).

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Essa é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.
- ⋆ Incentive seus alunos a darem justificativas para suas respostas, mesmo que informais.

Classificações:

- ⋆ Heid et al.: Conceito: identificar
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 3: comparar
- ⋆ UERJ: Observar: identificar e reconhecer; Ordenar

Resposta da Atividade 6

a) A parte pintada é igual a $\frac{1}{2}$ da figura.

b) A parte pintada é igual a $\frac{4}{10}$ e é menor do que $\frac{1}{2}$ da figura.

c) A parte pintada é igual a $\frac{6}{10}$ e é maior do que $\frac{1}{2}$ da figura.

Atividade 7

Objetivo específico: Levar o aluno a

- ⋆ Comparar frações unitárias a partir de representações usando modelos circulares.
- ⋆ Mais especificamente, comparar um quarto e um oitavo.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Esta atividade pode ser resolvida individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.
- ⋆ Em particular, incentive os alunos a argumentar, justificando a sua resposta.
- ⋆ Conduza a discussão de modo a conseguirem reconhecer a relação inversa entre denominador (número de partes) e o tamanho de cada parte: quanto maior o denominador, menor a fração.

Classificações::

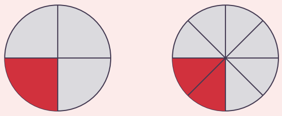
- ⋆ Heid et al.: Conceito: gerar
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 3: comparar
- ⋆ UERJ: Observar: Observar: identificar e reconhecer; Ordenar

Resposta da Atividade 7

a) $\frac{1}{4}$.

b) $\frac{1}{8}$.

c) Uma fatia da primeira pizza é maior do que uma fatia da segunda pizza: precisamente, o dobro da quantidade. Isto acontece porque são necessárias duas fatias da segunda pizza para ter-se a mesma quantidade de pizza que uma fatia da primeira pizza, como mostra o desenho a seguir.



Atividade 8

Objetivos específicos: Levar o aluno a :

- ⋆ Reconhecer que uma mesma quantidade pode ser expressa por frações diferentes dependendo da unidade escolhida.
- ⋆ Utilizar linguagem simbólica para se referir a uma fração $\frac{a}{b}$.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.
- ⋆ As diversas soluções apresentadas pelos diferentes grupos devem ser discutidas com a turma inteira. É possível que os alunos utilizem frações equivalentes como resposta para um mesmo item. Por exemplo, no item f), as frações $\frac{3}{6}$ e $\frac{1}{2}$ são respostas corretas. Nesses casos, dê a oportunidade para que cada aluno explique como chegou a sua resposta. Dessa maneira, mesmo que de forma pontual, os alunos perceberão que uma mesma quantidade pode ser descrita por frações com nomes diferentes, o que pode prepará-los para o assunto de frações equivalentes que será tratado na Lição 4.
- ⋆ No final da atividade, é importante enfatizar para os alunos a propriedade matemática que esta atividade quer destacar, ou seja, que uma mesma quantidade pode ser descrita por frações diferentes com unidades diferentes. Observe para eles que, no contexto "frações de", é fundamental saber a que o "de" se refere, isto é, qual é a unidade que está sendo considerada.

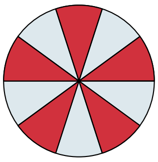
Classificações:

- ⋆ Heid et al.: Conceito: identificar; Produto: gerar
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer; Nível 5: converter (simbolizar)
- ⋆ UERJ: Interpretar: discriminar

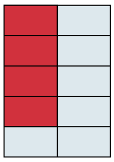
Atividade 6

Para cada figura a seguir, indique a fração da figura que está pintada de vermelho. Esta fração é maior, menor ou exatamente igual a $\frac{1}{2}$ da figura?

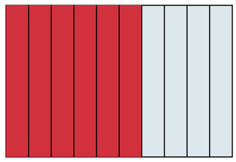
a)



b)



c)



Atividade 7

Um grupo de amigos está dividindo duas pizzas circulares do mesmo tamanho. A primeira pizza foi cortada em 4 fatias de mesmo tamanho. A segunda pizza foi dividida em 8 fatias iguais.

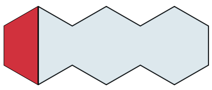
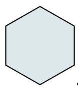
a) Uma fatia da primeira pizza é que fração dessa pizza? Responda usando notação simbólica matemática.

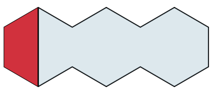
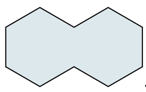
b) Uma fatia da segunda pizza é que fração dessa pizza? Responda usando notação simbólica matemática.

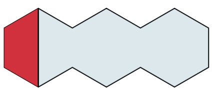
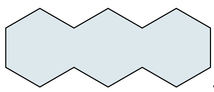
c) Qual fatia tem mais quantidade de pizza: uma fatia da primeira pizza ou uma fatia da segunda? Explique usando um desenho.

Atividade 8

Preencha cada lacuna a seguir com uma fração adequada (use notação simbólica matemática). Perceba que uma mesma região pintada pode ser descrita por frações diferentes, dependendo da unidade considerada.

a) A região pintada em vermelho em  é __________ de .

b) A região pintada em vermelho em  é __________ de .

c) A região pintada em vermelho em  é __________ de .

Resposta da Atividade 8

a) $\frac{1}{2}$.
b) $\frac{1}{4}$.
c) $\frac{1}{6}$.
d) $\frac{3}{2}$.
e) $\frac{3}{4}$.
f) $\frac{1}{2}$.
g) $\frac{5}{2}$.
h) $\frac{5}{4}$.
i) $\frac{5}{6}$.
j) 3.
l) $\frac{3}{2}$.
m) 1.

Atividade 9

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Representar frações não unitárias descritas com notação simbólica matemática em diversos modelos de área, incluindo casos em que as subdivisões apresentadas não coincidem com o denominador da fração dada.

⋆ Identificar a fração complementar de uma fração própria da unidade usando notação simbólica.

⋆ Reconhecer (e gerar) oitavos como metades de quartos, sextos como metades de terços e décimos como metades de quintos. Preparando-se assim para a discussão sobre equivalência de frações que será feita na Lição 4.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Essa é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.

⋆ Observe que os três últimos itens constituem uma extensão natural da Atividade 7 da Lição 1.

⋆ Não se espera, nem se recomenda, que, para os três últimos itens desta atividade, os alunos usem alguma medida para fazer, de forma precisa, a partição de quartos e quintos em oitavos e décimos, respectivamente. O objetivo é que façam a partição livremente e de forma coerente.

⋆ Alunos diferentes podem pintar as partes de formas diferentes: estas, por exemplo, não precisam ser contíguas.

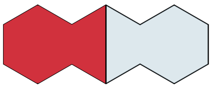
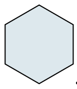
⋆ Procure apresentar e discutir com a turma mais do que uma solução para cada item, reforçando assim as ideias propostas nas Atividades 7 e 8 da Lição 1.

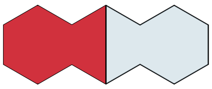
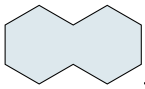
Classificações:

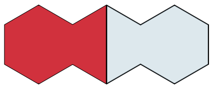
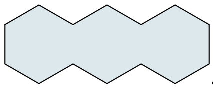
⋆ Heid et al.: Conceito: elaborar/identificar; Produto: gerar

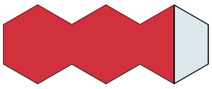
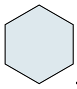
⋆ Nicely, Jr.: Nível 5: converter (simbolizar), gerar

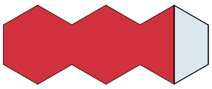
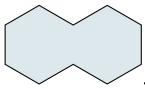
⋆ UERJ: Interpretar: discriminar, compor e decompor

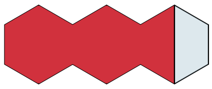
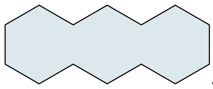
d) A região pintada em vermelho em  é ________ de .

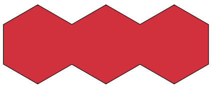
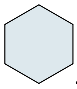
e) A região pintada em vermelho em  é ________ de .

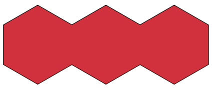
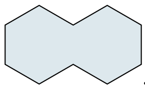
f) A região pintada em vermelho em  é ________ de .

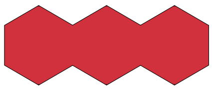
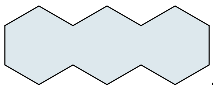
g) A região pintada em vermelho em  é ________ de .

h) A região pintada em vermelho em  é ________ de .

i) A região pintada em vermelho em  é ________ de .

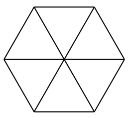
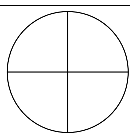
j) A região pintada em vermelho em  é ________ de .

k) A região pintada em vermelho em  é ________ de .

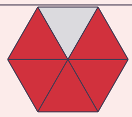
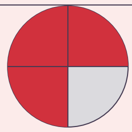
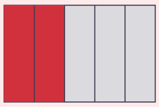
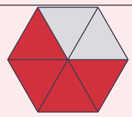
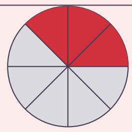
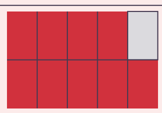
l) A região pintada em vermelho em  é ________ de .

Atividade 9

Na tabela a seguir, pinte cada figura de modo que a parte pintada seja a fração da figura indicada na coluna à esquerda e na mesma linha. Indique também, usando notação simbólica matemática, qual fração da figura ficou sem pintar.

Fração da figura que deve ser pintada	Figura	Fração da figura que ficou sem pintar
$\frac{5}{6}$		
$\frac{3}{4}$		

Resposta da Atividade 9

pintada	figura	sem pintar
$\frac{5}{6}$		$\frac{1}{6}$
$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{5}$		$\frac{3}{5}$
$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$
$\frac{3}{8}$		$\frac{5}{8}$
$\frac{9}{10}$		$\frac{1}{10}$

Atividade 10

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ Representar com notação simbólica matemática frações não unitárias em modelos tridimensionais no contexto de volume.
- ⋆ Analisar e resolver um problema no contexto da justaposição e contagem de partes correspondentes a frações unitárias com mesmo denominador.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Essa é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente.
- ⋆ As diversas soluções apresentadas pelos diferentes grupos devem ser discutidas com a turma inteira. É possível que os alunos utilizem frações equivalentes como resposta para um mesmo item. Por exemplo, para o copo (3), as frações $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$ são respostas corretas. Nesses casos, dê a oportunidade para que cada aluno explique como chegou à sua resposta. Procedendo desta maneira, mesmo que de forma pontual, os alunos perceberão que uma mesma quantidade pode ser descrita por frações com nomes diferentes, um preparo para o assunto "frações equivalentes" que será tratado na Lição 4.

Classificações:

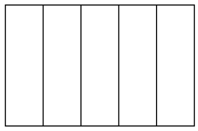
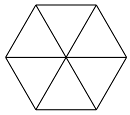
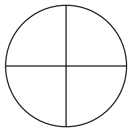
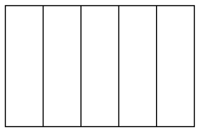
- ⋆ Heid et al.: Conceito: elaborar/identificar; Produto: gerar; Raciocínio: justificar
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: analisar/justificar
- ⋆ UERJ: Interpretar: discriminar, compor e decompor; Analisar: transferir conhecimentos

Resposta da Atividade 10

a) (1): $\frac{3}{8}$. (2): $\frac{2}{8}$. (3): $\frac{4}{8}$.

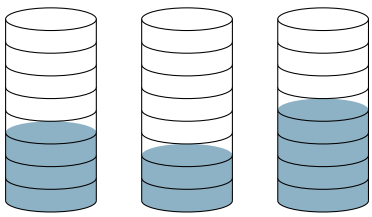
b) $\frac{9}{8}$.

c) Não é possível armazenar a água dos três copos em um único copo sem que o mesmo transborde, pois se a água do primeiro copo ocupa 3 oitavos de sua capacidade, a água do segundo copo ocupa 2 oitavos de sua capacidade e a água do terceiro copo ocupa 4 oitavos de sua capacidade, a água dos três copos, juntos, ocupa $3 + 2 + 4 = 9$ oitavos da capacidade do copo e qualquer copo só consegue armazenar no máximo 8 oitavos de sua capacidade.

Fração da figura que deve ser pintada	Figura	Fração da figura que ficou sem pintar
$\frac{2}{5}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{3}{8}$		
$\frac{9}{10}$		

Atividade 10

a) Em cada um dos três copos idênticos a seguir, indique a fração da capacidade do copo que está com água.



(1) (2) (3)

b) Qual é a fração da capacidade do copo correspondente à toda a água que está nos três copos?

c) É possível armazenar a água dos três copos em um único copo sem que transborde? Explique.

Atividade 11

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ Recompor a unidade a partir de uma fração dada em modelo contínuo e em linguagem simbólica, incluindo o caso de frações impróprias.
- ⋆ Relacionar a fração correspondente à parte apresentada à quantidade necessária dessas partes para compor a unidade. Assim, por exemplo, para compor a unidade a partir de $\frac{2}{3}$ da unidade, basta repartir esta fração em 2 partes iguais (para recuperar a fração unitária $\frac{1}{3}$) e, então, justapor 3 cópias de uma destas partes.

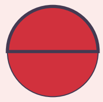
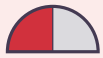
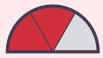
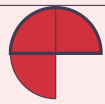
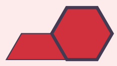
Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos.
- ⋆ A exemplo da Atividade 6 da Lição 1, é importante ter em mente que existem várias soluções para cada item.
- ⋆ Estimule os alunos a reconhecer (e a fazer) mais do que uma representação para a unidade em cada item.
- ⋆ Caso seja necessário fazer alguma partição, não se espera nem se recomenda que os alunos usem alguma medida. Uma partição feita de forma livre e coerente será suficiente.

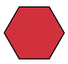
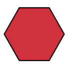
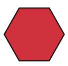
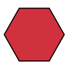
Classificações:

- ⋆ Heid et al.: Produto: gerar
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 5: relacionar
- ⋆ UERJ: Interpretar: compor e decompor

Resposta da Atividade 11

Fração	Figura da fração	Uma unidade possível
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		

Atividade 11

Fração da unidade	Figura correspondente à fração da unidade	Desenhe aqui uma unidade
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{2}$		
$\frac{2}{3}$		

Atividade 12

Objetivo específico: Levar o aluno a

* Marcar em uma semirreta pontos cujas distâncias até um ponto de referência são frações do comprimento de um segmento dado.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

* Esta é uma atividade que pode ser realizada individualmente.

* Esta é uma atividade preparatória para a representação de frações na reta numérica, assunto da próxima lição.

* Observe que, nesta atividade, as distâncias estão associadas aos segmentos determinados pelos percursos dos carrinhos na pista, e correspondem a frações da distância percorrida pelo carrinho de Lucas, que assume papel de unidade.

* Não se espera, nem se recomenda, que as marcações feitas pelos alunos na pista sejam amparadas pela medida mas, sim, que sejam feitas de forma livre e coerente. Contudo, é preciso ficar atento para que as marcações dos carrinhos de Heitor e de Lorenzo coincidam (pois $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$). A mesma observação se aplica aos carrinhos de Rafael e de Samuel (pois $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$).

* Aqui, a definição de frações não unitárias como justaposições de frações unitárias pode ser usada para justificar o porquê, por exemplo, de os carrinhos de Rafael e de Samuel terem parado na mesma posição.

* Assim, espera-se que a distância percorrida pelo carrinho de Matheus (item a) seja associada à metade do segmento que identifica a distância percorrida pelo carrinho de Lucas, que corresponde à unidade e está destacado em vermelho na imagem. Já a distância percorrida pelo carrinho de Heitor (item b) deve ser associada à justaposição de 3 segmentos correspondentes à distância percorrida pelo carrinho de Matheus. Espera-se que as demais distâncias sejam obtidas de forma semelhante. Cabe destacar, no entanto, que para determinar as distâncias percorridas pelos carrinhos de Lorenzo e de Samuel, será necessário determinar $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ da unidade, respectivamente.

* De forma geral, se d é a distância percorrida pelo carrinho de Lucas, então a partição em 2 partes iguais de um segmento u cujo comprimento é d determina dois segmentos congruentes s e s' que correspondem à $\frac{1}{2}$ de u e cujos comprimentos são, portanto, iguais a $\frac{1}{2}$ de d. A justaposição de 2 cópias de s ($\frac{2}{2}$ de u) tem comprimento d e, sendo assim, a justaposição de 4 cópias de s ($\frac{4}{2}$ de u) tem comprimento $2d$. Do mesmo modo, se t é um segmento que corresponde à $\frac{1}{3}$ de u, então a justaposição de 3 cópias de t ($\frac{3}{3}$ de u) tem comprimento d e, em consequência, a justaposição de 6 cópias de 6 ($\frac{6}{2}$ de u) tem comprimento $2d$. Assim, os carrinhos de Rafael e de Samuel percorreram a mesma distância ($2d$) e, como eles saíram do mesmo ponto de largada, suas posições finais são iguais.

Classificações:

* Heid et al.: Produto: gerar

* Nicely, Jr.: Nível 5: relacionar

* UERJ: Interpretar: compor e decompor

Para a pergunta sobre as posições dos carrinhos de Rafael e Samuel:

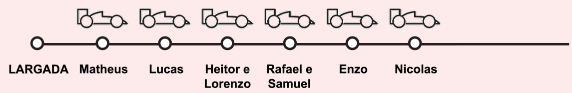
* Heid et al.: Racioncínio: justificar

* Nicely, Jr.: Nível 6: explicar

* UERJ: Interpretar: explicar, compor e decompor

Resposta da Atividade 12

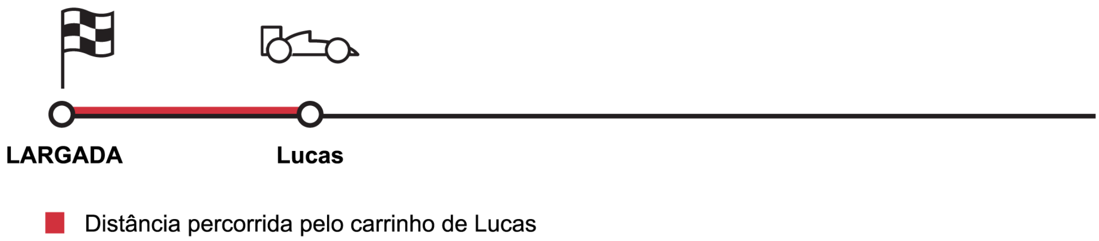
Observe que os carrinhos de Rafael e Samuel pararam no mesmo lugar!



Atividade 12

Lucas, Matheus, Heitor, Rafael, Enzo, Nicolas, Lorenzo, Guilherme e Samuel estavam brincando de empurrar seus carrinhos de brinquedo para ver qual carrinho ia mais longe em uma pista reta.

A figura a seguir mostra o quão longe foi o carrinho de Lucas e onde ele parou na pista com relação ao ponto de largada.



Sabe-se que:

a) O carrinho de Matheus só conseguiu ir até a metade da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

b) O carrinho de Heitor conseguiu ir até $\frac{3}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

c) O carrinho de Rafael conseguiu ir até $\frac{4}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

d) O carrinho de Enzo conseguiu ir até $\frac{5}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

e) O carrinho de Nicolas conseguiu ir até $\frac{6}{2}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

f) O carrinho de Lorenzo conseguiu ir até $\frac{6}{4}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

g) O carrinho de Guilherme conseguiu ir até o dobro da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

h) O carrinho de Samuel conseguiu ir até $\frac{6}{3}$ da distância percorrida pelo carrinho de Lucas.

Atividade 13

Objetivo específico: Levar o aluno a:

⋆ Perceber que uma mesma fração (no caso, $\frac{1}{2}$) de unidades diferentes pode resultar em quantidades diferentes.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.

⋆ No final da atividade, é importante enfatizar para seus alunos a propriedade matemática que esta atividade quer destacar, ou seja, que uma mesma fração de unidades diferentes pode resultar em quantidades diferentes. Observe para eles que, no contexto "frações de", é fundamental saber a que o "de" se refere, isto é, qual é a unidade que está sendo considerada. Neste sentido, esta atividade está fortemente relacionada com a Atividade 8.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Raciocínio: corroborar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: justificar

⋆ UERJ: Analisar: levantar hipóteses

Resposta da Atividade 13

José está certo se a pizza da qual comeu metade for maior do que a pizza da qual Ella comeu metade, como ilustra a figura a seguir.

Atividade 14

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Analisar uma situação envolvendo frações em representação por meio de figuras cujas repartição não identifica explicitamente o denominador da fração.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.

⋆ No final da atividade, é importante enfatizar para seus alunos a questão matemática que esta atividade quer destacar, ou seja, que o fato de uma figura estar divida em 5 partes e 3 delas estarem pintadas de vermelho, **não necessariamente implica** que a região pintada é $\frac{3}{5}$ da figura.

⋆ O tipo de situação descrita na atividade é um equívoco comum entre os alunos, isto é, eles equivocadamente contam partes sem o cuidado de verificar se as partes nas quais a unidade está dividida correspondem a uma mesma quantidade.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Raciocínio: corroborar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 9: avaliar

⋆ UERJ: Avaliar: julgar

Resposta da Atividade 14

Miguel está equivocado: a região pintada da figura **não** corresponde a $\frac{3}{5}$ da figura porque a figura não está dividida em 5 partes iguais, ou seja, a figura não está equiparticionada em 5 partes para que as 3 partes pintadas correspondam a $\frac{3}{5}$ da mesma. Outra justificativa possível é: partindo-se a parte pintada em 3 partes iguais e justapondo-se 5 cópias de uma destas partes, pode-se recompor a figura apenas parcialmente.

Atividade 15

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Perceber que, se uma unidade foi equiparticionada em $n+m$ partes iguais, das quais n foram pintadas, então $\frac{n}{m}$ **não especifica** a fração da unidade que foi pintada.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.

⋆ O tipo de situação descrita na atividade destaca um equívoco comum entre os alunos. Assim, esta atividade é uma oportunidade para reforçar os papéis do denominador e do numerador na notação simbólica matemática para frações: o denominador especifica o número de partes iguais em que a unidade foi dividida e o numerador especifica o número de cópias que foram tomadas de uma destas partes.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Raciocínio: corroborar

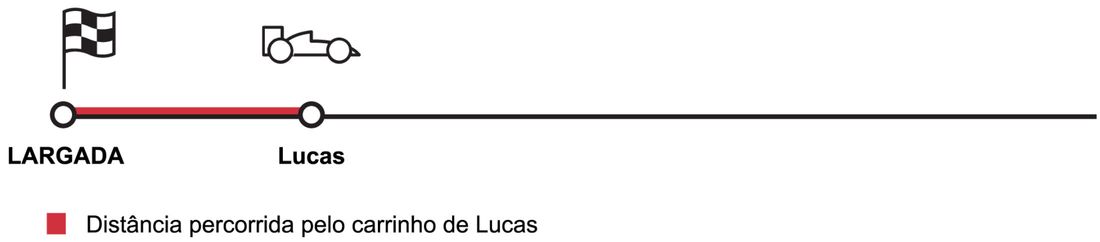
⋆ Nicely, Jr.: Nível 9: avaliar

⋆ UERJ: Avaliar: julgar

Resposta da Atividade 15

A parte pintada de vermelho **não** corresponde a $\frac{3}{4}$ da figura. Ela corresponde a $\frac{3}{7}$ da figura. De fato: a figura foi dividida em 7 partes iguais das quais 3 foram pintadas.

Com estas informações, marque as posições de parada dos carrinhos de todos os amigos de Lucas no encarte que você irá receber.



Os carrinhos de Rafael e Samuel pararam no mesmo lugar? Explique.

QUEBRANDO A CUCA

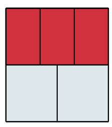
Atividade 13

(NAEP, 1992) Pense cuidadosamente nesta questão. Escreva uma resposta completa. Você pode usar desenhos, palavras e números para explicar sua resposta. Certifique-se de mostrar todo o seu raciocínio.

José comeu $\frac{1}{2}$ de uma pizza. Ella comeu $\frac{1}{2}$ de uma outra pizza. José disse que ele comeu mais pizza do que Ella, mas Ella diz que eles comeram a mesma quantidade. Use palavras, figuras ou números para mostrar que José pode estar certo.

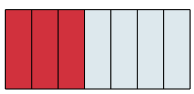
Atividade 14

Miguel disse para Alice que a parte pintada de vermelho na figura a seguir corresponde a $\frac{3}{5}$ da figura, pois ela está dividida em 5 partes e 3 partes estão pintadas. Você concorda com a afirmação e com a justificativa de Miguel? Explique!



Atividade 15

A figura a seguir tem 3 partes pintadas de vermelho e 4 partes pintadas de branco. É correto afirmar que a parte pintada de vermelho corresponde a $\frac{3}{4}$ da figura? Explique.



Atividade 16

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Perceber a importância da explicitação unidade na representação de quantidades.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.

⋆ Recomenda-se que os itens da atividade sejam feitos e corrigidos um a um, de forma a permitir que um aluno que tenha errado um item possa acertar o seguinte.

⋆ O fato de a unidade não estar explicitada, torna ambígua a questão. É importante que os alunos percebam que, por exemplo, no item a), se a unidade considerada for um dos hexágonos, a fração correspondente à região em vermelho é $\frac{1}{2}$. No entanto, se forem os dois hexágonos, é $\frac{1}{4}$.

⋆ No final de cada item da atividade, é importante enfatizar para seus alunos a propriedade matemática que esta atividade quer destacar, ou seja, que uma mesma quantidade pode ser expressa por frações diferentes dependendo da unidade escolhida. Observe para eles que, no contexto “frações de”, é fundamental saber a que o “de” se refere, isto é, qual é a unidade que está sendo considerada. Neste sentido, esta atividade está fortemente relacionada com as Atividades 8 e 13. Ela também é uma preparação para a Atividade 17, em que a mesma questão é posta, mas agora com um modelo mais comumente usado e, portanto, mais resistente à reflexão que se deseja estabelecer.

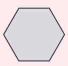
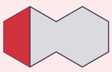
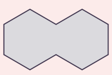
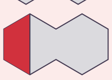
Classificações:

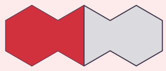
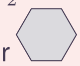
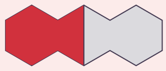
⋆ Heid et al.: Raciocínio: corroborar

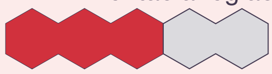
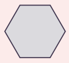
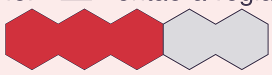
⋆ Nicely, Jr.: Nível 9: avaliar

⋆ UERJ: Avaliar: julgar

Resposta da Atividade 16

a) A região em vermelho pode representar $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ dependendo da unidade, que não foi explicitada no enunciado. Se, por exemplo, a unidade for  então a região pintada de vermelho em  é $\frac{1}{2}$ desta unidade. Por outro lado, se a unidade for  então a região pintada de vermelho em  é $\frac{1}{4}$ desta unidade.

b) A região em vermelho pode representar $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$ dependendo da unidade, que não foi explicitada no enunciado. Se, por exemplo, a unidade for  então a região pintada de vermelho em  é $\frac{1}{2}$ desta unidade. Por outro lado, se a unidade for  então a região pintada de vermelho em  é $\frac{3}{2}$ desta unidade.

c) A região em vermelho pode representar $\frac{3}{5}$ ou 3 dependendo da unidade, que não foi explicitada no enunciado. Se, por exemplo, a unidade for  então a região pintada de vermelho em  é $\frac{3}{5}$ desta unidade. Por outro lado, se a unidade for  então a região pintada de vermelho em  é 3 desta unidade.

Atividade 17

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Perceber a importância da unidade na representação de quantidades.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Esta é uma atividade que o aluno pode fazer individualmente, mas é essencial que seja discutida com toda a turma.

⋆ No final da atividade, é importante enfatizar para seus alunos a propriedade matemática que esta atividade quer destacar, ou seja, que uma mesma quantidade pode ser expressa por frações diferentes dependendo da unidade escolhida. Observe para eles que, no contexto “frações de”, é fundamental saber a que o “de” se refere, isto é, qual é a unidade que está sendo considerada. Neste sentido, esta atividade está fortemente relacionada com as Atividades 8 e 13.

Classificações:

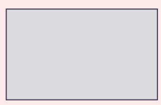
⋆ Heid et al.: Raciocínio: corroborar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 9: avaliar

⋆ UERJ: Avaliar: julgar

Resposta da Atividade 17

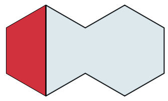
As afirmações de Júlia, David e Laura estão incompletas, pois ao especificarem as frações $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{1}$, eles não informaram a **unidade** à qual estas frações se referem. Desta maneira, não é possível decidir quem está certo. De fato, dependendo da escolha da unidade, cada um deles pode estar certo e os demais errados. Por exemplo, se a unidade for



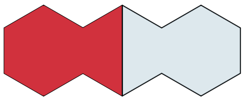
então a parte pintada de vermelho em

Atividade 16

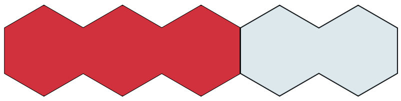
a) A região em vermelho na figura a seguir representa $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$?



b) A região em vermelho na figura a seguir representa $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$?

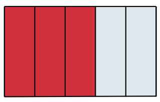


c) A região em vermelho na figura a seguir representa $\frac{3}{5}$ ou 3?



Atividade 17

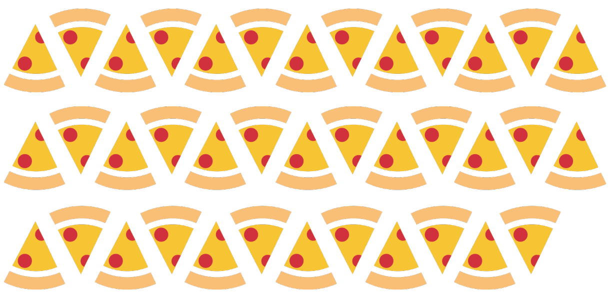
Júlia, Davi e Laura estavam estudando a figura a seguir.

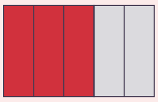


Júlia disse: "A parte em vermelho representa $\frac{3}{5}$". Davi retrucou: "Não, não! A parte em vermelho representa $\frac{3}{2}$!". Laura, então acrescentou: "Eu acho que a parte em vermelho representa 3!". Quem está certo? Júlia, Davi ou Laura? Explique!

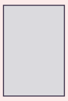
Atividade 18

Em uma pizzaria rodízio, 7 amigos comem, ao todo, 38 fatias.

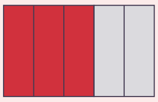




de fato corresponde a $\frac{3}{5}$ desta unidade, de modo que, nesta situação, Júlia está certa e David e Laura estão errados. Contudo, se a unidade for

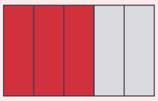


então a parte pintada de vermelho em



corresponde a $\frac{3}{2}$ desta unidade, de modo que, nesta situação, David está certo e Júlia e Laura estão errados. Finalmente, se a unidade for

então a parte pintada de vermelho em



corresponde a 3 desta unidade e, neste caso, Laura está certa e David e Júlia estão errados.

Atividade 18

Objetivo específico: Levar o aluno a

- ⋆ Relembrar divisão com resto (ou divisão euclidiana).
- ⋆ Selecionar, dentro de uma situação plausível do dia a dia, dados relevantes para resolver um problema.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ A atividade deve ser conduzida de forma a chegar-se na divisão euclidiana. Ou seja, o aluno pode começar montando as pizzas. Recomenda-se que os alunos tenham à mão o material concreto: fatias de pizza cortadas em papel ou em E.V.A..
- ⋆ É possível que os alunos resolvam o item a) a partir da divisão euclidiana, efetuando a divisão de 38 por 8: $38 = 4 \times 8 + 6$. Se esse for o caso, recomenda-se que o professor, destaque a informação associada a cada um dos números na expressão. Em particular, o "resto", que identifica uma quantidade menor do que uma pizza (resto 6 indica 6 fatias, que é menor do que uma pizza, uma vez que cada pizza tem 8 fatias).
- ⋆ Para responder ao item b), o aluno deve reconhecer que cada fatia é igual a $\frac{1}{8}$ da pizza. Portanto, a quantidade total de pizza consumida pelos amigos pode ser expressa como $\frac{38}{8}$ de uma pizza. Cabe destacar que essa fração corresponde a 4 pizzas mais $\frac{6}{8}$ de uma pizza.
- ⋆ Observe que, neste contexto, o resto, que é um número inteiro e indica o número de fatias, também pode ser expresso por meio de uma fração da unidade pizza: $\frac{6}{8}$ de uma pizza.
- ⋆ Faz parte da atividade a tarefa de selecionar dados relevantes para o problema, o que a torna um tanto complexa, por isso é a última Atividade da Lição 2. Para os itens a) e b), a quantidade de amigos, 7, é irrelevante. No entanto, é relevante para o item c).
- ⋆ A atividade tem também o objetivo de evidenciar que, no cotidiano, nem toda partição é uma equipartição: 38 fatias de pizza para 7 amigos é um exemplo.

Resposta da Atividade 18

a) A solução corresponde ao quociente da divisão euclidiana de 38 por 8, ou seja, 4

b) Compreendendo que cada fatia é $\frac{1}{8}$ de uma pizza: 4 pizzas e $\frac{6}{8}$ ou $\frac{38}{8}$.

c) A divisão euclidiana de 38 por 7 fornece um resto diferente de zero, o que indica que não é possível que todos os amigos tenham comido o mesmo número de fatias de pizza.

Sabendo que nessa pizzaria cada pizza é repartida em 8 fatias de mesmo tamanho, pergunta-se:

a) Quantas pizzas inteiras comeraram os 7 amigos?

b) Que fração de uma pizza comeram ao todo os amigos?

c) É possível que todos os amigos tenham comido o mesmo número de fatias de pizza? Explique.

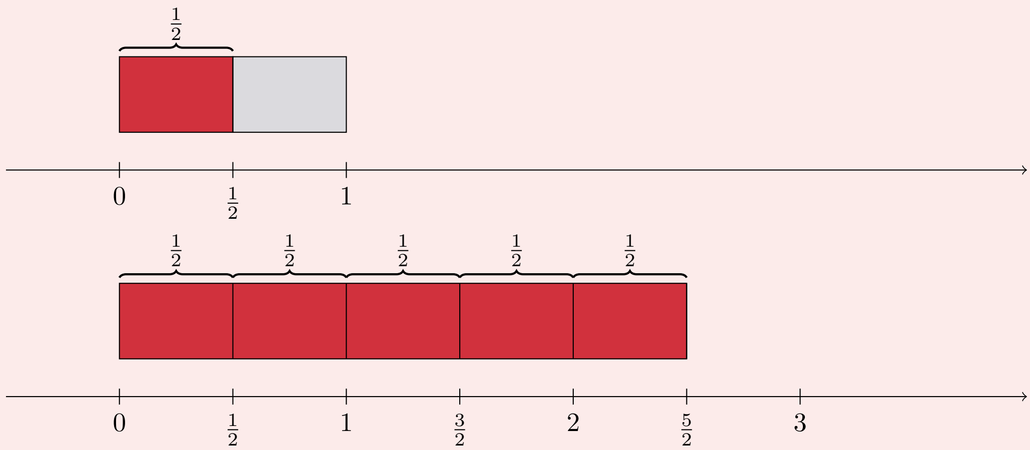
LIÇÃO 3 - Para o professor

Esta lição tem por objetivos:

- ⋆ Retomar a representação de números na reta numérica, enfatizando a associação do número 1 à unidade;
- ⋆ Introduzir a representação de frações na reta numérica, admitindo assim a representação também de quantidades não inteiras na reta numérica.
- ⋆ Comparar frações de mesmo denominador.
- ⋆ Comparar frações a partir de uma fração de referência.

Visando aos objetivos apresentados, as atividades aqui propostas exploram as frações em modelos visuais contínuos, a partir da justaposição de partes correspondentes às frações unitárias. Essa abordagem será a base para a representação das frações na reta numérica e para a associação da unidade ao número 1. A expressão reta numérica refere-se ao modelo de organização dos números na reta Alguns textos, na abordagem inicial dos números naturais, usam a expressão *reta numerada* para se referir à representação dos números naturais na reta; neste texto, será usado o termo *reta numérica*.

A construção da reta numérica será amparada pelo conhecimento anterior dos alunos da representação dos números naturais (0, 1, 2, 3, 4, ...) nessa reta e pela exploração de modelos contínuos. O segmento unitário, de extremos 0 e 1, será a unidade e as frações unitárias $\frac{1}{d}$, d natural não nulo, representadas por uma das partes da equipartição desse segmento em d partes ($d \neq 0$). As demais frações serão associadas a pontos na reta pela justaposição, a partir do zero, de segmentos correspondentes às frações unitárias. Assim, por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$ será associada à metade do segmento unitário, portanto, ao ponto médio do segmento de extremos 0 e 1. Já a fração $\frac{5}{2}$ será associada ao ponto correspondente à justaposição, a partir do zero, de 5 segmentos equivalentes ao segmento cujos extremos correspondem ao zero e ao $\frac{1}{2}$, como ilustra a figura a seguir:



Nesta etapa, espera-se que os alunos compreendam a reta numérica como uma representação organizada para as quantidades registradas por frações e que compreendam também o papel e a evidência da ordem nessa representação.

De maneira geral, as atividades visam a: (i) a associação entre frações e a reta numérica, na qual já estão identificados os pontos correspondentes aos números naturais e (ii) a comparação entre frações, amparada pela representação das frações na reta numérica.

A comparação de frações, já discutida informalmente em atividades nas lições anteriores, pode agora ser também observada a partir da reta numérica, embora seja sistematizada na Lição 4. Inicialmente comparam-se frações com mesmo denominador. Assim, espera-se que o aluno reconheça que, por exemplo, a fração $\frac{3}{4}$ é menor do que a fração $\frac{7}{4}$ uma vez que a primera fração corresponde à justaposição de 3 segmentos equivalentes a $\frac{1}{4}$ da unidade e a segunda à justaposição de 7 desses segmentos. Dessa forma, na reta numérica, a fração $\frac{3}{4}$ está associada a um ponto entre 0 e 1 e $\frac{7}{4}$ a um ponto entre 1 e 2. Espera-se também que a comparação entre frações que têm o mesmo numerador seja observada na reta numérica. Assim, por exemplo, $\frac{5}{7}$ é menor do que $\frac{5}{3}$ porque nos dois casos considera-se a justaposição de 5 segmentos, no entanto, no primero caso, são 5 segmentos equivalente a $\frac{1}{7}$ da unidade e, no segundo, equivalentes a $\frac{1}{3}$ da unidade. Como $\frac{1}{7}$ da unidade é menor do que $\frac{1}{5}$ da unidade, tem-se que $\frac{5}{7}$ é menor do que $\frac{5}{3}$. É importante observar que essas comparações não devem ser tratadas exclusivamente na reta numérica.

Observando a reta numérica, espera-se também que os alunos sejam capazes de comparar frações a partir de um referencial. Por exemplo, espera-se que os alunos reconheçam que a fração $\frac{7}{8}$ é menor do que a fração $\frac{8}{9}$ porque, apesar de ambos estarem associados a pontos à esquerda do 1, o ponto correspondente à fração $\frac{7}{8}$ está mais distante do 1 do que o corresponente à fração $\frac{8}{9}$ (já que a fração $\frac{1}{8}$ é maior do que a fração $\frac{1}{9}$ - conteúdo tratado na Lição 2).

A participação do aluno, criando representações próprias e fazendo o uso da linguagem verbal para explicar o seu raciocínio diante da realização das atividades, é fundamental também na condução desta seção.

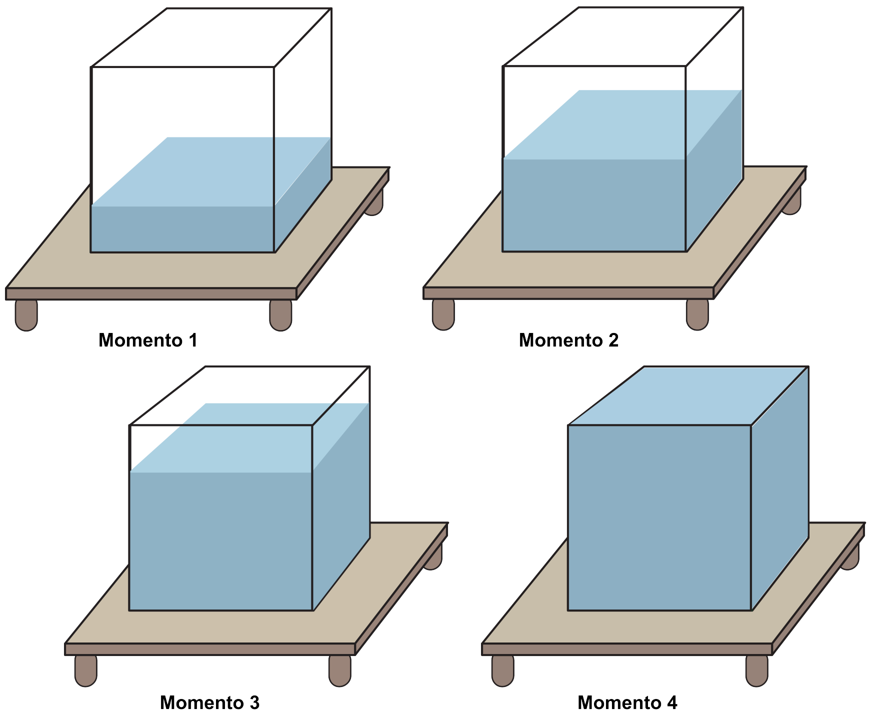
Lição 3

Frações na reta numérica

EXPLORANDO O ASSUNTO

Atividade 1

Os quadrinhos a seguir mostram uma caixa-d'água sendo enchida. Para saber que fração da capacidade da caixa-d'água já está com água, será usada uma faixa graduada para indicar o nível de água na caixa.



Escolha, para cada um dos momentos, a graduação que lhe parece mais adequada

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA LIÇÃO 3:

O aluno deve ser capaz de:

- ⋆ Representar e identificar a representação de uma fração na reta numérica.
- ⋆ Reconhecer a organização, segundo a ordem, das frações na reta numérica.
- ⋆ Comparar frações com mesmo numerador.
- ⋆ Amparado pela representação na reta numérica, comparar frações a partir de um referencial adequado.

Atividade 1

Objetivos específicos: Levar o aluno a:

- ⋆ Representar frações na reta numérica a partir da graduação em uma escala linear.
- ⋆ Associar, na reta numérica, a unidade ao segmento unitário, admitindo a representacão de quantidades entre 0 e 1.
- ⋆ Associar frações a pontos na reta numérica. Em particular, as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$.
- ⋆ Observar a necessidade de equipartição do segmento unitário para a identificação destas frações na reta numérica.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
- ⋆ Como esta atividade envolve a ideia de capacidade, recomenda-se que, antes de realizá-la, o professor leve para a sala de aula um recipiente transparente, na forma de um paralelepípedo (como um pequeno áquario, por exemplo) ou cilíndrico (como um copo, por exemplo), e que, a partir do recipiente inicialmente cheio, discuta com a turma o que seria necessário observar para se verificar que metade da quantidade inicial de líquido foi derramada. Espera-se que os alunos identifiquem que essa verificação está associada à altura da quantidade de líquido no recipiente, que deve ser metade da original.
- ⋆ O formato da caixa, um paralelepípedo, determina uma escala linear de medida (o mesmo valeria para um cilindro). No entanto, se a caixa tivesse outro formato, poderia não admitir uma escala linear. Por exemplo, é o caso dos tradicionais copos de medida usados na cozinha. Com esta observação, não se está recomendando que essa discussão seja trazida para a sala de aula neste momento.
- ⋆ Chame a atenção dos alunos para o fato de que o zero está associado à situação em que a caixa-d’água está vazia e o 1 à caixa completamente cheia. Além disso, à medida em que a caixa vai sendo enchida, a altura do nível da água vai aumentando.
- ⋆ Espera-se que os alunos descartem as faixas c) e d). No entanto, as faixas a) e b) e e) encerram marcações possíveis. Discuta com os alunos as vantagens e as desvantagens das marcações apresentadas nessas faixas. A faixa a) traz a marcação da fração $\frac{1}{2}$ associada ao segmento e não ao ponto. Embora não esteja errada, ela apresenta dois inconvenientes:
  (i) esta forma de marcar não deixa claro que a linha-d’água deve estar na marcação para que o tanque esteja meio cheio,
  (ii) ela dificulta marcações intermediárias (maiores que zero e menores que $\frac{1}{2}$).
  A escala e), ainda que não tenha o mesmo problema que a faixa a), oferece menos informação do que a possível na graduação apresentada em b).

Resposta da Atividade 1

Qualquer das escalas apresentadas serve para registrar a caixa totalmente cheia (momento 4), embora não seja necessário uma graduação para esta observação. Para registrar as quantidades de todos os momentos a graduação b) é a mais indicada porque possui marcações detalhadas, com mesmo espaçamento e na ordem adequada. A escala c) não é apropriada porque possui a marca $\frac{1}{2}$ em um ponto onde o nível de água estará acima da metade da caixa. A escala d) apresenta as marcas $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ em posições que não correspondem a estes níveis de água. A escala e) representa bem os momentos 2 e 4, mas é menos precisa para os demais momentos.

Atividade 2

Objetivos específicos: Levar o aluno a:

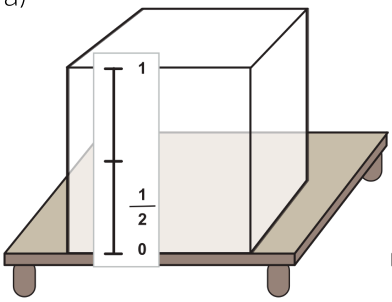
- ⋆ Revisar a construção da reta numérica, associando quantidades inteiras aos números naturais. Em particular, objetiva-se que a unidade seja associada ao número 1.
- ⋆ Estender a representação de frações para a reta numérica.
- ⋆ Identificar, a partir de comparação entre modelos contínuos e a reta numérica, o segmento unitário à unidade identificada no modelo (no caso, uma pizza).
- ⋆ Representar, na reta numérica, quantidades não inteiras registradas por frações da unidade.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

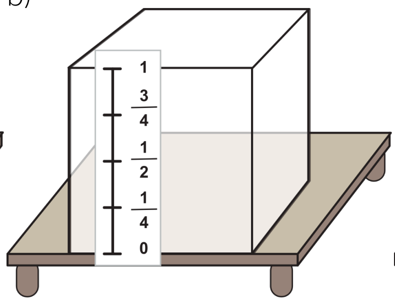
- ⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
- ⋆ Recomenda-se que o professor inicie a atividade relembrando com os alunos como é construída a reta numérica e como se posicionam os números naturais nela, enfatizando que o número 1 representa uma unidade e

para registrar a quantidade de agua representada em cada uma das imagens. Explique sua escolha.

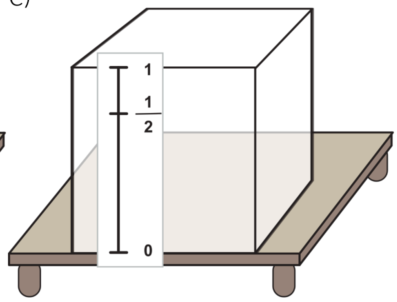
a)



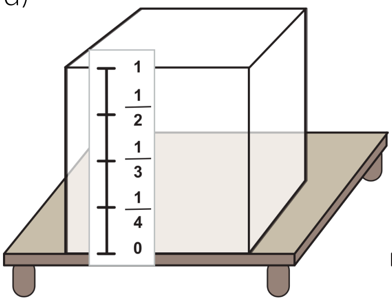
b)



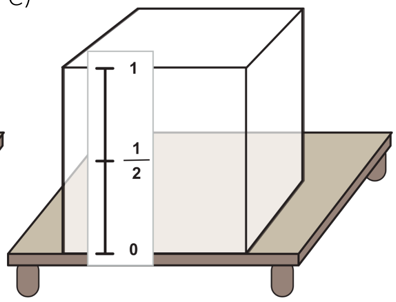
c)



d)



e)

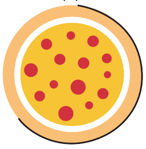


Atividade 2

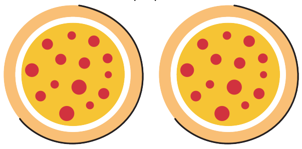
Relembrando a representação na reta numérica: você já conhece a reta numérica com os números naturais destacados.

a) Marque na reta numérica pontos que representem as 3 quantidades de pizza nas imagens a seguir.

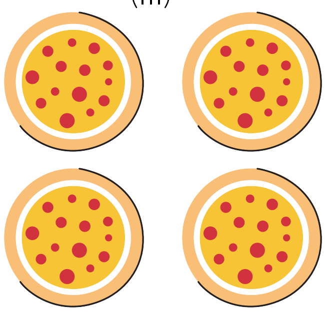
(I)

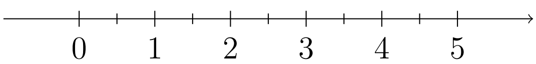


(II)



(III)





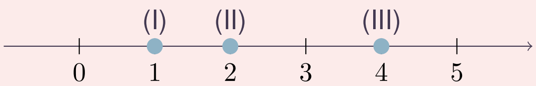
b) E no caso destas imagens, que pontos na reta numérica representam as 4 quantidades de pizza ilustradas? As partes claras das imagens representam frações retiradas.

que, a partir daí, o 2 será o extremo do segmento que é o dobro do segmento de extremos 0 e 1. De foma análoga, são marcados o 3, o 4 e assim por diante.

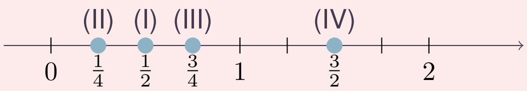
- ⋆ Espera-se que os alunos, a partir de tal revisão, não tenham dificuldade para resolver o item a). A novidade está no item b), no qual os alunos são solicitados a representar frações na reta numérica. Nesse item, o objetivo é que os alunos concluam que, na reta numérica, assim como o ponto correspondente ao 2 fica determinado pelo dobro do segmento unitário e que ponto correspondente ao 3 fica determinado pelo triplo do segmento unitário, o ponto correspondente a $\frac{1}{2}$ fica deteminado pela metade do segmento unitário. De forma análoga, considerando equipartições do segmento unitário e a justaposição dessas partes, são determinados, por exemplo, os pontos correpondentes às fraçoes $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$.

Resposta da Atividade 2

a)



b)



Atividade 3

Objetivos específicos: Levar o aluno a

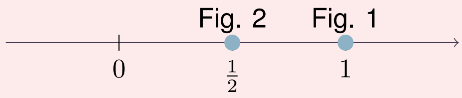
- ⋆ Estender a representação de frações para a reta numérica a partir de modelos contínuos.
- ⋆ Associar, na reta numérica e a partir de modelos contínuos, a unidade ao número 1.
- ⋆ Associar, a partir de comparação entre os modelos contínuos e a reta numérica, o segmento unitário à unidade e admitir a representacão de quantidades não inteiras apresentadas em modelos contínuos.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

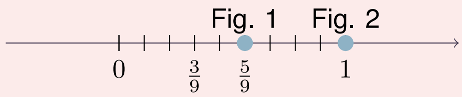
- ⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
- ⋆ Observe que as retas numéricas apresentadas em todos os itens trazem os números 0 e 1 em destaque, além das frações representadas nos modelos apresentados em cada item. Subdivisões da unidade também são destacadas. Espera-se que, a partir da discussão, os alunos estabeleçam uma relação entre as representações apresentadas: modelos contínuos e a reta numérica. . Assim, por exemplo, se o retângulo está dividido em terços, o segmento unitário traz uma marcação que destaca a subdivisão em três partes iguais e marcações correspondentes a $\frac{1}{3}$ e a $\frac{2}{3}$.
- ⋆ Para registrar a identificação das representações em modelos contínuos à marcação da fração da unidade correspondente na reta numérica, o aluno pode simplesmente ligar, fazendo uma linha, a representação em imagem à marcação na reta.

Resposta da Atividade 3

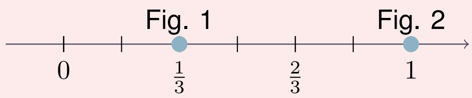
a)

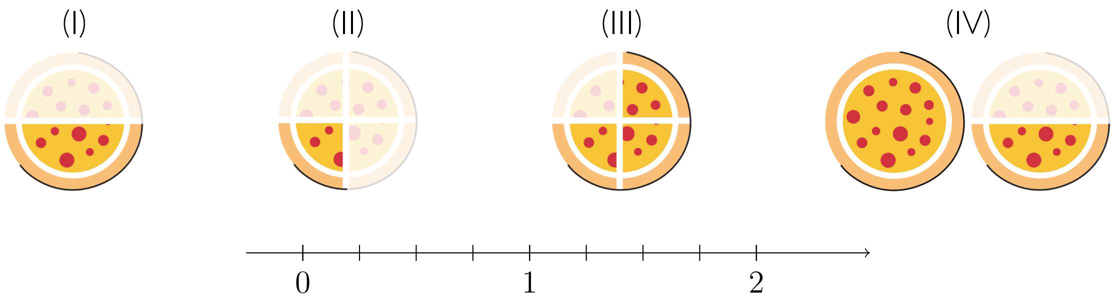


b)



c)

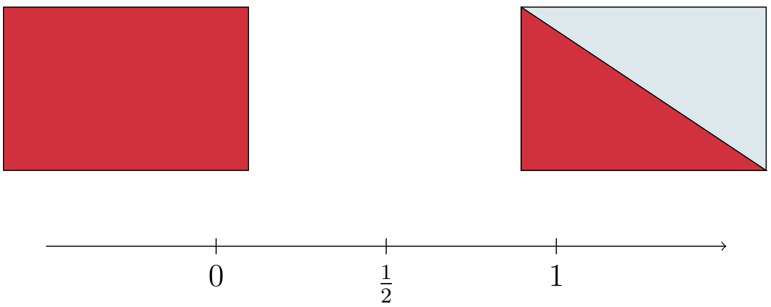




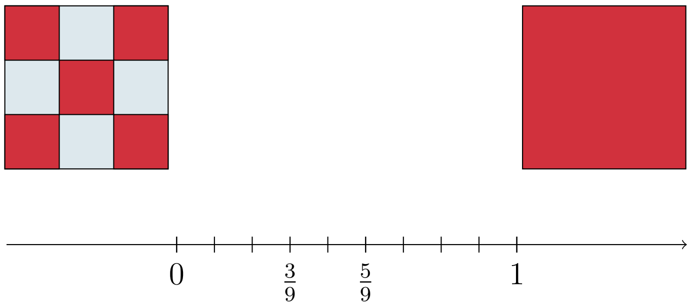
Atividade 3

Para cada par ou trio de figuras a seguir, há uma reta numérica. Considerando a região colorida de vermelho como uma fração da figura, ligue cada uma das figuras ao número, sobre a reta numérica, correspondente à região colorida da mesma.

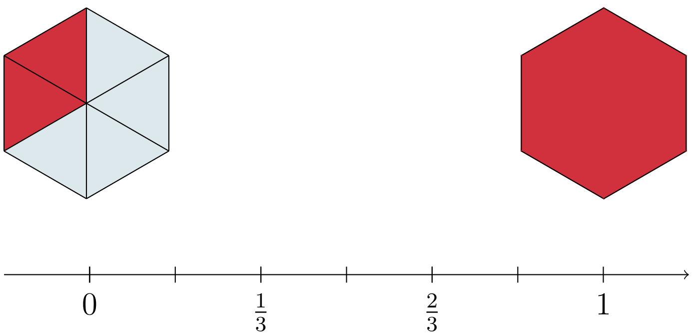
a) Figura 1 Figura 2



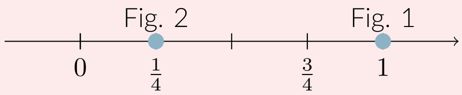
b)



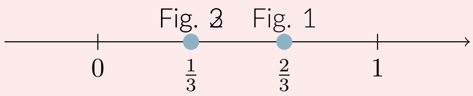
c)



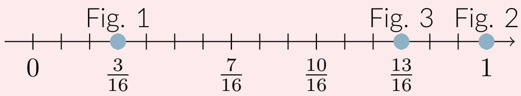
d)



e)



f)



Atividade 4

Objetivo específico:

⋆ Associar frações representadas em modelos contínuos, com unidades variadas, à representação dessas frações na reta numérica.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

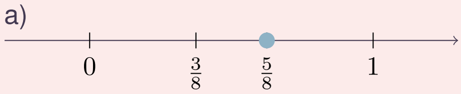
⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, a discussão das respostas deve ser feita com toda a turma. Estimule seus alunos a explicarem suas respostas.

⋆ Nas imagens, as unidades são uma pizza, uma barra de chocolate, uma maçã, um sanduíche, uma fatia da torta, um biscoito, e a capacidade de um copo. Discuta isso com os alunos.

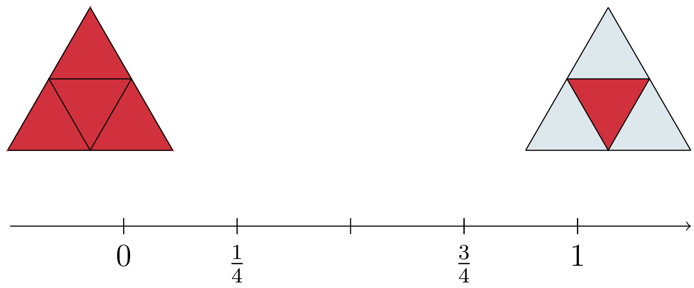
⋆ Aproveite as imagens e faça perguntas à turma que explorem conteúdos já tratados em lições anteriores, tais como: a) Que fração da pizza foi comida? b) Essa quantidade de chocolate é maior, menor ou igual a meia barra de chocolate? c) Se a maçã estivesse inteira, que ponto da reta representaria tal quantidade?

Resposta da Atividade 4

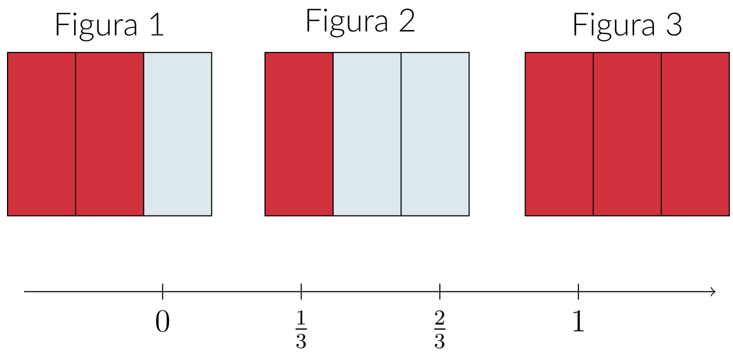
a)



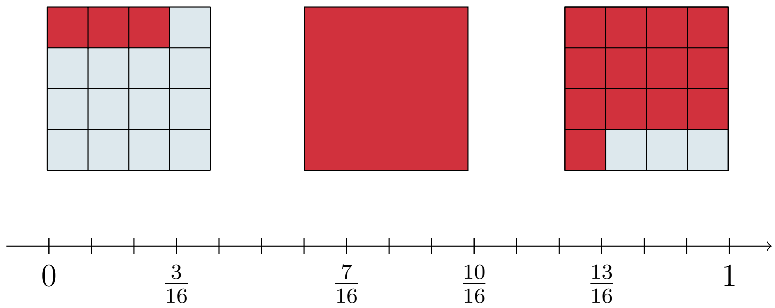
d)



e)



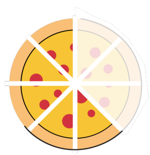
f)



Atividade 4

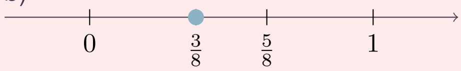
Para cada uma das figuras a seguir, marque na reta numérica o ponto correspondente à fração da unidade destacada na imagem:

a) A unidade é uma pizza.

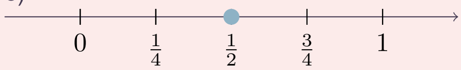


b) A unidade é uma barra de chocolate. A parte clara foi retirada.

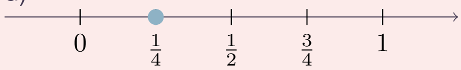
b)



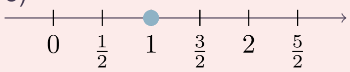
c)



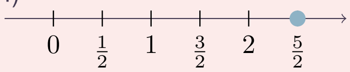
d)



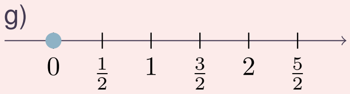
e)

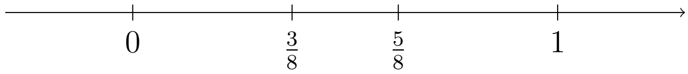


f)

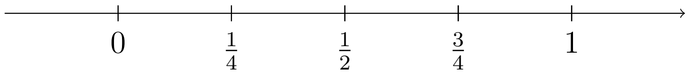


g)

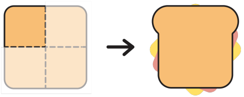


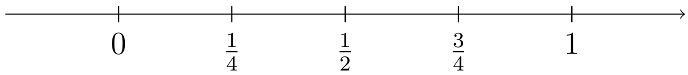


c) A unidade é uma maçã.

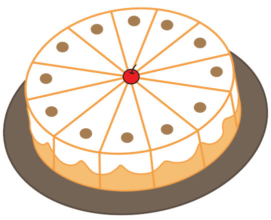


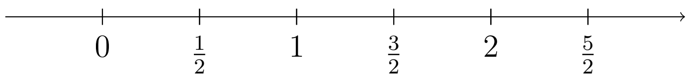
d) A unidade é um sanduíche de queijo com presunto.



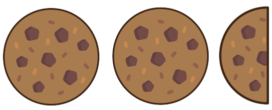


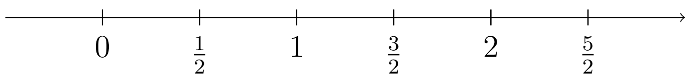
e) A unidade é uma torta.



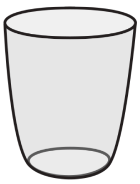


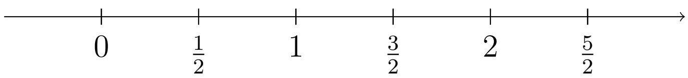
f) A unidade é um biscoito.





g) A unidade é um copo cheio.





Atividade 5

Objetivos específicos: Levar o aluno a:

- ⋆ Identificar na reta numérica, a partir de modelos contínuos, os pontos correspondentes às frações da unidade do tipo $\frac{1}{b}$ e $\frac{a}{b}$, para $a > 0$.

- ⋆ Mais especificamente, identificar na reta numérica, a partir de um modelo contínuo, os pontos correspondentes às frações da unidade $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Atividade individual, mas a discussão das respostas deve ser feita com toda a turma.

- ⋆ Estimule seus alunos a explicarem a resposta dada.

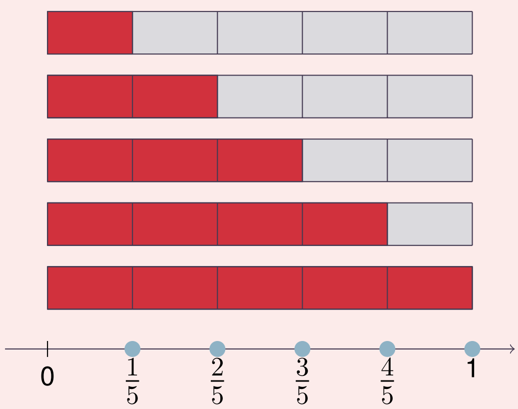
- ⋆ Espera-se que o aluno compreenda a diferença entre representar uma fração da unidade a partir de um modelo contínuo (no caso, uma faixa retangular) e na reta numérica. No primeiro caso, a região colorida identifica a fração da unidade. No entanto, na reta, a fração da unidade é associada a um único ponto (no caso, observando a justaposição de segmentos congruentes correspondentes a $\frac{1}{5}$ do segmento unitário).

- ⋆ Observe que as faixas organizadas uma acima da outra estão alinhadas à esquerda, garantido a correspondência entre as frações da unidade destacadas.

- ⋆ No item b) espera-se que os alunos identifiquem a faixa inteira como $\frac{5}{5}$ da unidade ou como a unidade inteira, portanto, igual a 1. Cabe aqui registrar a igualdade $\frac{5}{5} = 1$.

Resposta da Atividade 5

a)



b) A faixa inteira é igual a cinco quintos. Esta fração pode ser representada simbolicamente como $\frac{5}{5}$. A fração $\frac{5}{5}$ da barra é igual a uma barra inteira, isto é, $\frac{5}{5} = 1$.

Atividade 6

Objetivos específicos: Levar o aluno a:

- ⋆ Associar na reta numérica, a partir de modelos contínuos, a unidade ao número 1.

- ⋆ Associar as frações $\frac{n}{d}$ da unidade a pontos da reta numérica a partir da equipartição da unidade em d partes e da justaposição, a partir do 0 de n segmentos correspondentes à fração $\frac{1}{d}$ da unidade.

- ⋆ Mais especificamente, identificar as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$ e $\frac{5}{4}$ da unidade a pontos da reta numérica, reconhecendo que $\frac{4}{4} = 1$ e que $\frac{5}{4} > 1$.

- ⋆ Defender verbalmente um ponto de vista.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 2 ou 3 alunos. No entanto, a discussão das respostas deve ser feita com toda a turma. Estimule seus alunos a explicarem suas respostas.

- ⋆ Faça cópias da fita necessária para o desenvolvimento da atividade, que está disponível nas folhas para reprodução.

- ⋆ Ao ler o enunciado, como a faixa lembra modelos contínuos tratados na abordagem inicial de frações (por exemplo, barra de chocolate ou retângulos), é possível que alguns estudantes considerem a faixa inteira como unidade. Já outros, observando a indicação da reta numérica na faixa, identificarão o segmento unitário como unidade. O objetivo é que eles discutam essa questão e reconheçam, ao final, que o entendimento da unidade como a fita inteira é incompatível com as marcações pré-existentes na fita. Objetiva-se a representação das frações na reta numérica e não a identificação de partes de um modelo contínuo.

- ⋆ Espera-se que, a partir da discussão feita no item a), do item b) em diante, a unidade seja identificada ao segmento zero-um.

- ⋆ Recomenda-se que os alunos usem dobradura para realizar essa atividade. Instrua-os nesse sentido. Não se espera, nem se recomenda, que a atividade seja realizada a partir da medida do comprimento da faixa.

- ⋆ Pode ser muito enriquecedor para o estudante descrever cuidadosamente o processo de obtenção das frações, nos itens b) em diante. Incetive-os nesse sentido.

- ⋆ Espera-se que os alunos, a partir da observação do modelo, façam traços para representar os pontos correspondentes as frações. Este é um processo importante, em que a fração é representada por um ponto na reta e não por uma região, por exemplo.

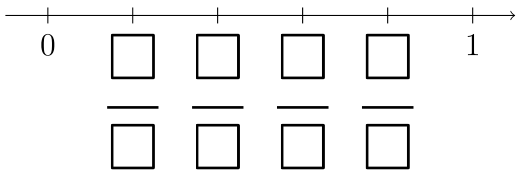
- ⋆ Observe que a marcação de $\frac{3}{4}$ pode se dar pela justaposição, a partir do 0, de "pedaços" da fita correspondentes a $\frac{1}{4}$ da unidade ou, reconhecendo que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, pela identificação do ponto médio do "pedaço" de fita de extremos $\frac{1}{2}$ e 1.

- ⋆ A discussão sobre esta atividade deve levar os alunos a refletirem sobre a marcação do $\frac{4}{4}$ e a sua coincidência com a marcação da unidade, ou seja, do 1, reconhecendo que $\frac{4}{4} = 1$.

Atividade 5

A faixa a seguir está dividida em 5 partes iguais.

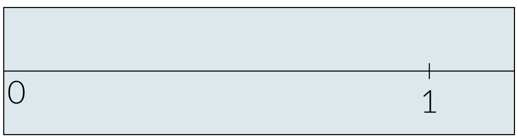
a) Considerando a faixa como unidade, escreva na reta numérica a fração correspondente a cada uma das regiões coloridas de vermelho.



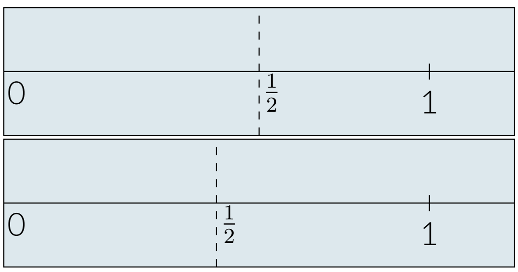
b) Escreva, em linguagem simbólica, a fração correspondente à faixa inteira. De que outra maneira é possível indicar essa quantidade?

Atividade 6

A professora Julia pediu que os seus alunos, Pedro e Miguel, marcassem $\frac{1}{2}$ na reta numérica traçada em uma fita, como esta que vocês também receberam:



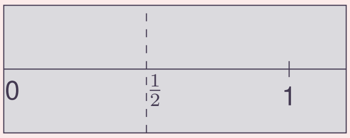
Pedro trouxe a primeira marcação e Miguel a segunda:



⋆ Na discussão sobre o item b), observe se os alunos compreenderam que $\frac{5}{4} > 1$. Espera-se que os alunos saibam ler e escrever essa desigualdade fazendo uso da linguagem simbólica.

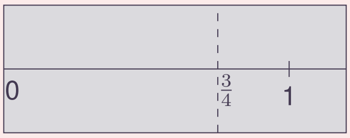
Resposta da Atividade 6

a) Miguel marcou $\frac{1}{2}$ considerando como unidade o segmento zero-um, enquanto Pedro marcou $\frac{1}{2}$ considerando a fita inteira como unidade. Assim, não podem estar os dois corretos. Como a resposta de Pedro não leva em consideração as marcações do 0 e do 1 na fita, esta solução não está correta.



b) A marcação de $\frac{1}{4}$ pode ser feita dobrando-se a fita de modo a fazer coincidir as marcações do 0 e do $\frac{1}{2}$. Já a marcação de $\frac{3}{4}$ pode ser obtida dobrando-se a fita de modo a fazer coincidir as marcações do $\frac{1}{2}$ e do 1.

c) As marcações de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ dividem o segmento unitário em quatro partes iguais, portanto, em quartos. A justaposição de quatro quartos a partir do 0, que corresponde a $\frac{4}{4}$, é igual a 1. Portanto, as marcas de $\frac{4}{4}$ e de 1 são a mesma.



d) A marcação de $\frac{5}{4}$ é obtida justapondo $\frac{1}{4}$ à marcação de $\frac{4}{4}$, ou seja, à marcação do 1.

Atividade 7

Objetivo específico:

⋆ Comparar frações com o mesmo numerador.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Atividade individual, mas a discussão das respostas deve ser feita com toda a turma.

⋆ Estimule seus alunos a explicarem suas respostas.

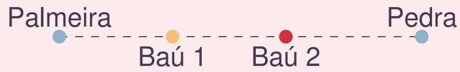
⋆ Observe que, nesta atividade, a unidade não está destacada na reta a partir dos pontos 0 e 1, como nas atividades anteriores. Oriente seu aluno a identificar o zero como o ponto correspondente à palmeira imperial.

⋆ Esclareça aos seus alunos que o caminho todo, da palmeira à pedra, não é a unidade. Peça-os que estimem quantas unidades tem esse caminho.

⋆ Para que os alunos possam responder o item a), marcando no mapa os pontos correpondentes aos locais em que estão enterrados os baús 1 e 2, peça-os que recortem as duas faixas que determinam a unidade, disponíveis em página para reprodução.

⋆ Para responder o item b), e decidir qual o baú que contém o tesouro, de fato, não é necessário fazer a marcação dos pontos correspondentes aos locais dos dois baús no mapa. Basta comparar as frações $\frac{5}{6}$ e $\frac{5}{8}$. Como $\frac{5}{6} > \frac{5}{8}$, o tesouro está no baú 2. Espera-se que a discussão com a turma leve a essa constatação.

Resposta da Atividade 7

a) 

b) O baú 2. A justificativa se dá pelo fato de que $\frac{5}{6} > \frac{5}{8}$. O que pode ser observado pela marcação dos pontos correspondentes aos locais dos dois baús no mapa, representando uma reta numérica.

a) É possível ambos estarem corretos? Justifique sua resposta.

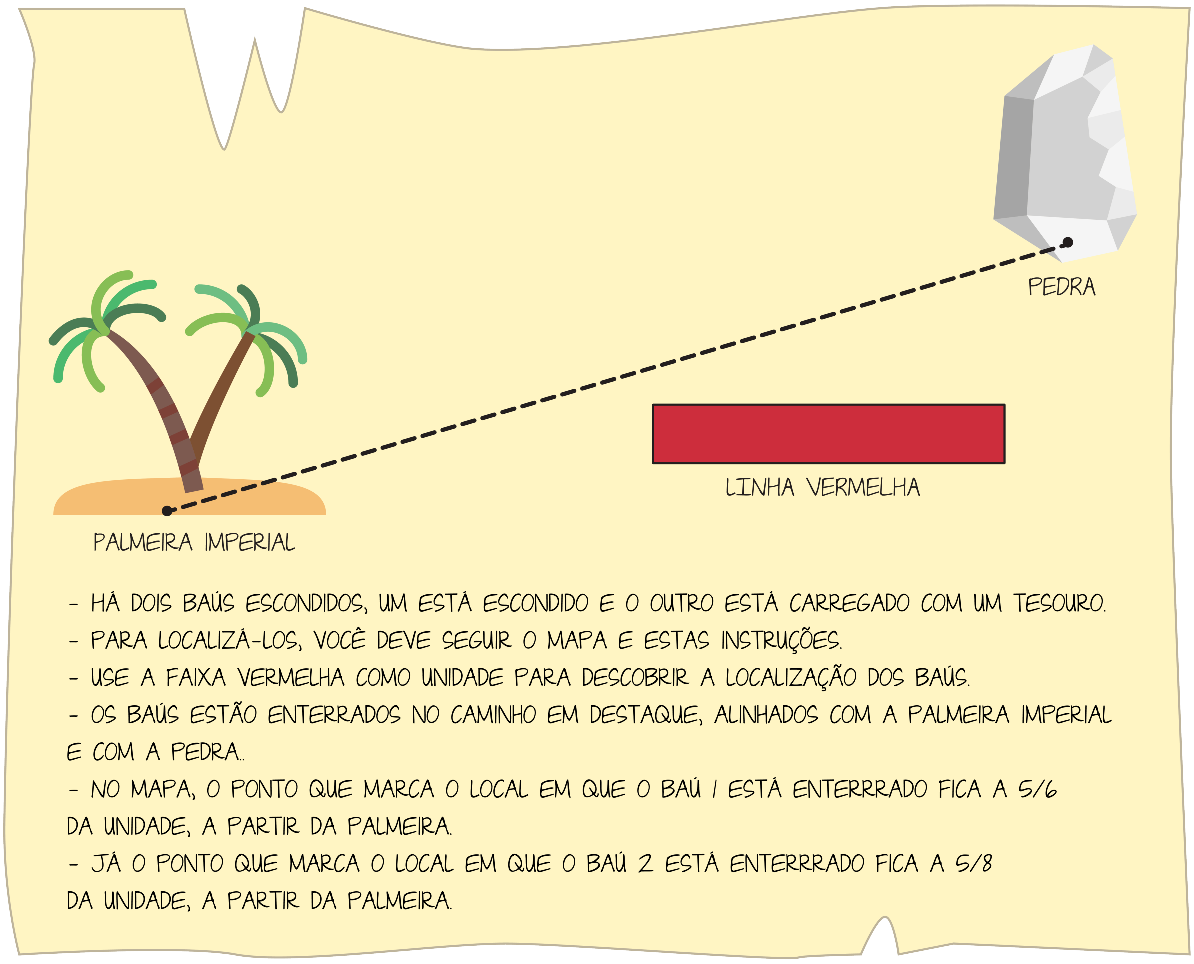
b) Faça marcações correspondentes a $\frac{1}{4}$ e a $\frac{3}{4}$ na reta numérica desenhada na fita. Explique como você fez essas marcações.

c) Onde deve ser feita a marcação correspondente a $\frac{4}{4}$?

d) E a marcação correspondente a $\frac{5}{4}$?

Atividade 7

Um caçador de tesouros encontrou o mapa a seguir. Leia as instruções para a localização do tesouro e decida em que local ele deve cavar.



a) Marque, no mapa, as localizações dos baús 1 e 2.

b) Qual o baú com o tesouro? Explique como chegou à sua conclusão.

Atividade 8

Objetivos específicos: levar o aluno a:

- ⋆ Comparar frações, tanto com o mesmo numerador como com o mesmo denominador.
- ⋆ Comparar frações da unidade a partir da sua representação na reta numérica.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
- ⋆ No item a), espera-se que os alunos façam a comparação baseados no fato de que as frações envolvidas têm o mesmo denominador; no item b), espera-se que os alunos façam a comparação baseados no fato de que as frações envolvidas têm o mesmo numerador. Já no item c), espera-se que os alunos façam uso intuitivamente da propriedade transitiva da relação de ordem, a partir de suas respostas aos ítens a) e b). Recomenda-se ressaltar que, na segunda parte do ítem d), a resposta ao item c) seja conferida pela representação das frações na reta numérica, uma vez que a reta numérica explicita a ordem entre as frações.

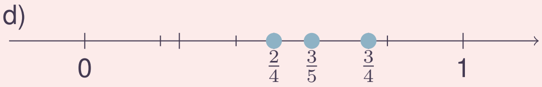
Resposta da Atividade 8

a) João comeu mais que Maria porque se as duas pizzas estão divididas em 4 fatias iguais, ele comeu 3 dessas fatias enquanto Maria comeu apenas 2.

b) Supondo que a pizza do Miguel está dividida em 5 fatias iguais, então cada fatia da pizza do Miguel é menor do que qualquer fatia da pizza do João, uma vez que a pizza do João foi repartida em 4 pedaços iguais. Como cada um comeu três fatias de sua própria pizza e as fatias de João eram maiores que as de Miguel, João comeu mais pizza que Miguel.

c) João comeu mais do que Maria e também comeu mais do que Miguel conforme os itens anteriores.

d)



Atividade 9

Objetivos específicos: Levar o aluno a:

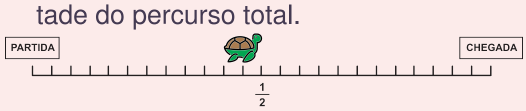
- ⋆ Estabelecer a comparação entre frações a partir da representação na reta numérica.
- ⋆ Comparar frações, tanto de mesmo numerador como de mesmo denominador.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
- ⋆ É solicitado que os alunos escrevam a justificativa para a avaliação de cada item. Essa decisão tem como objetivo fazer com que o aluno vá além da argumentação oral, mas que consiga organizar as ideias para se expressar por escrito.
- ⋆ Observe que o caminho está repartido em 24 partes congruentes, ainda que não haja frações sugeridas. A ideia é que cada aluno possa, sozinho, decidir sobre os pontos correspondentes à metade, a quartos, a oitavos e a terços. Se necessário, discuta essas marcações com os alunos.
- ⋆ Cabe observar que cada item pode ser resolvido de forma independente. Por exemplo, para decidir se a posição da tartaruga corresponde a mais do que $\frac{3}{8}$ do percurso total, o aluno deve identificar oitavos na reta numérica. Já para decidir se a tartaruga já percorreu menos do que $\frac{2}{3}$ do percurso total, deve identificar terços. Assim, não há necessidade de comparar oitavos com terços.
- ⋆ Para responder à questão, não há necessidade de uma informação precisa da posição da tartaruga. A representação das frações indicadas para serem comparadas com a localização da tartaruga não geram dúvida sobre estarem antes ou após a posição da tartaruga, apesar de essa posição não corresponder claramente a um único ponto na reta numérica.
- ⋆ Os itens g) e h) envolvem termos comparativos menos precisos do que "maior do que"e "menor do que". A expressão "pelo menos"oferece outra forma de avaliar a comparação. Explore essa diferença, certificando-se de que os alunos compreenderam.
- ⋆ Os itens i) e j) exigem que os estudantes façam uma "leitura" da reta numérica ainda não experimentada. Precisam observar, em relação ao percurso total, ou seja, à unidade, a fração correspondente ao que falta ser percorrido.
- ⋆ Há vários raciocínios possíveis para responder aos diversos itens desta atividade. Incentive seus alunos a explicarem como raciocinaram, ressaltando, sempre que possível, as diferentes soluções.

Resposta da Atividade 9

a) Não está correta. Marcando-se o ponto correspondente à metade do percurso, é fácil verificar que a tartaruga ainda não alcançou esse ponto. Portanto, a tartaruga não percorreu mais do que a metade do percurso total.



b) Não está correta. Dividindo-se o percurso em quartos, como ilustra a figura a seguir, fica claro que o ponto correspondente a $\frac{3}{4}$ do percurso está adiante da localização da tartaruga. Portanto, a tartaruga não percorreu mais do que $\frac{3}{4}$ do percurso total.

Atividade 8

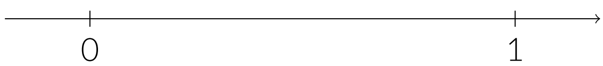
Três amigos foram a uma pizzaria e cada um pediu uma pizza média, de três sabores diferentes: João comeu $\frac{3}{4}$ da pizza de calabresa, Maria comeu $\frac{2}{4}$ da pizza de presunto e Miguel comeu $\frac{3}{5}$ da pizza de milho. Sabendo que todas as pizzas eram do mesmo tamanho, pergunta-se:

a) Quem comeu mais pizza, João ou Maria? Explique.

b) E no caso de João e Miguel, quem comeu mais pizza? Explique.

c) Dos três amigos, quem comeu mais pizza? Explique.

d) Marque na reta numérica a seguir as frações correspondentes às porções de pizza que cada amigo comeu, e confirme na reta numérica sua resposta em c.



Atividade 9

A imagem a seguir ilustra uma tartaruga percorrendo um caminho em linha reta, do ponto de partida ao de chegada. Observe a posição da tartaruga na imagem e avalie se as afirmações a seguir estão corretas ou não. Em cada item, explique a sua avaliação por escrito.

a) A tartaruga percorreu mais do que a metade do percurso total.

b) A tartaruga percorreu mais do que $\frac{3}{4}$ do percurso total.

c) A tartaruga percorreu mais do que $\frac{3}{8}$ do percurso total.

d) A tartaruga percorreu menos do que $\frac{3}{4}$ do percurso total.

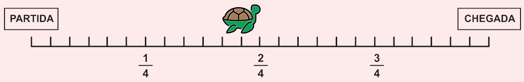
e) A tartaruga percorreu menos do que $\frac{2}{8}$ do percurso total.

f) A tartaruga percorreu menos do que $\frac{2}{3}$ do percurso total.

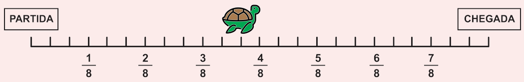
g) A tartaruga percorreu $\frac{3}{4}$ do percurso total.

h) A tartaruga percorreu pelo menos $\frac{5}{8}$ do percurso total.

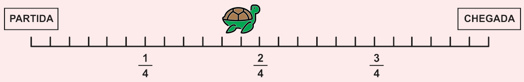
i) Para alcançar a chegada, a tartaruga precisa percorrer mais do que a metade do caminho.



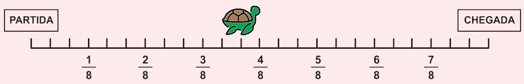
c) Está correta. Dividindo-se o percurso em oitavos, como ilustra a figura a seguir, fica claro que o ponto correspondente a $\frac{3}{8}$ do percurso está antes da localização da tartaruga. Portanto, verifica-se que a tartaruga percorreu mais do que $\frac{3}{8}$ do percurso total.



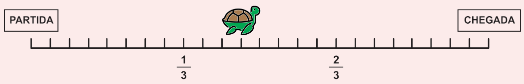
d) Está correta. Dividindo-se o percurso em quartos, como ilustra a figura a seguir, verifica-se que a localização da tartaruga é anterior ao ponto correspondente a $\frac{3}{4}$ do percurso. Portanto, a tartaruga percorreu menos do que $\frac{3}{4}$ do percurso total.



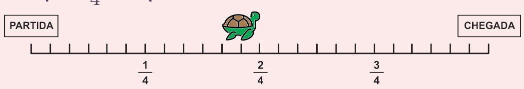
e) Não está correta. Dividindo-se o percurso em oitavos, como ilustra a figura a seguir, fica claro que o ponto correspondente a $\frac{2}{8}$ do percurso está antes (ou à esquerda) da localização da tartaruga. Portanto,verifica-se que a tartaruga percorreu mais do que $\frac{2}{8}$ do percurso.



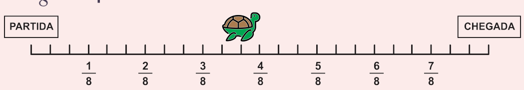
f) Está correta. Dividindo-se o percurso em terços, fica claro que o ponto correspondente a $\frac{2}{3}$ do percurso está adiante da localização da tartaruga. Portanto, verifica-se que a tartaruga percorreu menos do que $\frac{2}{3}$ do percurso.



g) Não está correta. Dividindo-se o percurso em quartos, como ilustra a figura a seguir, fica claro que o ponto correspondente a $\frac{3}{4}$ do percurso está adiante da localização da tartaruga. Portanto, verifica-se que a tartaruga percorreu menos do que $\frac{3}{4}$ do percurso.



h) Não está correta. Dividindo-se o percurso em oitavos, fica claro que o ponto correspondente a $\frac{5}{8}$ do percurso está adiante da localização da tartaruga. Portanto,verifica-se que a tartaruga não alcançou $\frac{5}{8}$ do percurso total.



i) Está correta. De acordo com a resposta do item a), a tartaruga não alcançou a metade do percurso. Poranto, para alcançar a chegada, a tartaruga ainda precisa percorrer mais do que a metade do caminho.

j) Não está correta. A tartaruga já percorreu mais do que $\frac{1}{3}$ do percurso e todo o percurso corresponde a $\frac{3}{3}$. Portanto, para alcançar a chegada, a tartaruga precisa percorrer menos do que $\frac{2}{3}$ do caminho.

Atividade 10

Objetivos específicos: Levar o aluno a:

⋆ Representar frações na reta numérica, a partir da identificação da unidade.

⋆ Identificar, na reta numérica, os pontos correspondentes ao 0 e ao 1, a partir da representação de duas frações (no caso, as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$).

⋆ Reconhecer a reta numérica em uma representação não comum.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Observe que a reta numérica não é apresentada da forma mais tradicional, paralela a uma das margens da página e na direção comumente chamada de horizontal. O objetivo é ampliar e variar o contato com esse modelo de representação.

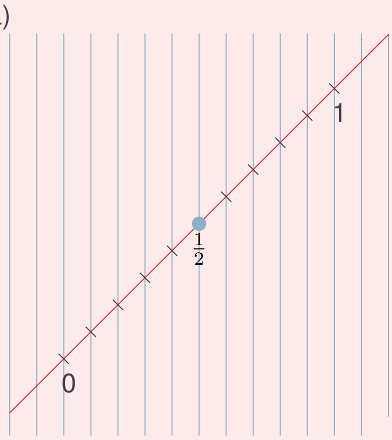
⋆ Além disso, os pontos que identificam frações da unidade (no caso, décimos) também são determinados de uma forma não tradicional. A divisão é estabelecida a partir de um feixe de retas paralelas igualmente espaçadas e transversal à reta numérica em destaque.

⋆ Os dois primeiros itens desta atividade são bastante simples, apesar da representação não tradicional.

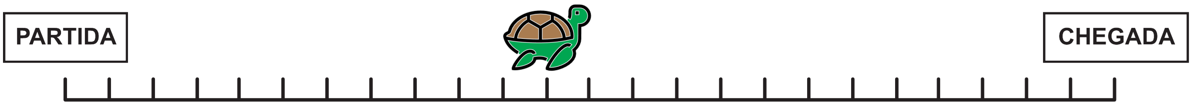
⋆ O terceiro item desta atividade objetiva que o aluno identifique os pontos correspondentes ao 0 e ao 1, que determinam o segmento unitário na reta numérica, a partir dos pontos correspondentes às frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$.

Resposta da Atividade 10

a)



j) Para alcançar a chegada, a tartaruga precisa percorrer menos do que $\frac{2}{3}$ do caminho.

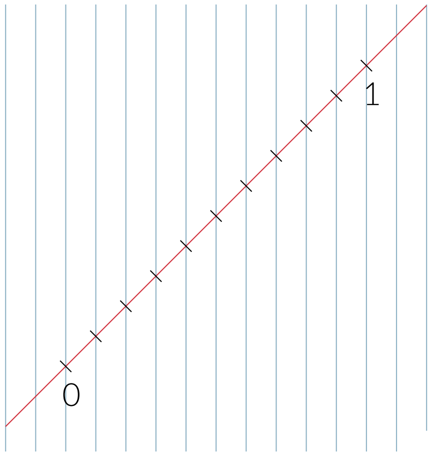


Atividade 10

Na figura, há várias retas paralelas igualmente espaçadas e outra reta, destacada em vermelho, não paralela às anteriores. Observe que as retas paralelas marcam na reta destacada em vermelho pontos também igualmente espaçados. Dois desses pontos correspondem ao 0 e ao 1. A reta vermelha torna-se uma reta numérica, como ilustra a figura.

a) Marque, usando os pontos destacados na reta numérica, a fração $\frac{1}{2}$.

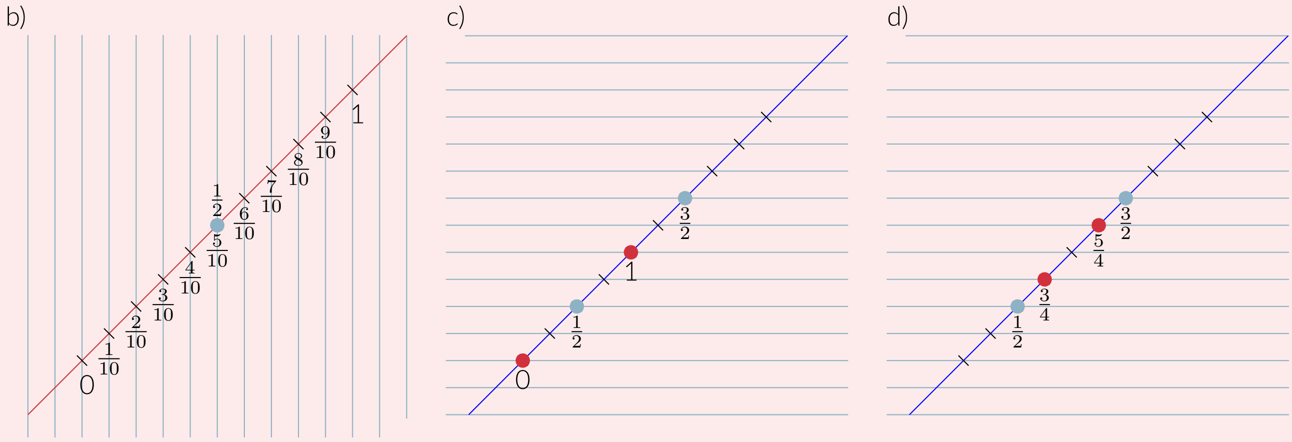
b) Associe frações a cada um dos pontos destacados na reta numérica. Explique a sua resposta.



Como na figura anterior, há várias retas paralelas igualmente espaçadas e outra reta, destacada em azul, não paralela às anteriores. Observe que as retas paralelas marcam na reta destacada em azul pontos também igualmente espaçados. Dois desses pontos correspondem às frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$, como ilustra a figura.

c) Marque, usando os pontos destacados na reta numérica, os pontos correspondentes ao 0 e ao 1.

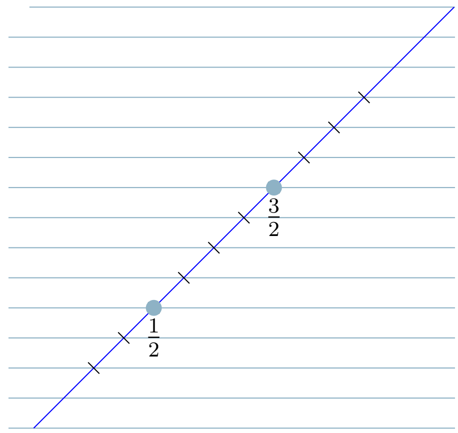
d) Marque, nesta mesma reta numérica, as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{4}$.



Sobre o Organizando as Ideias

Após o Organizando as Ideias, passar-se-á a falar apenas em "fração" ao referir-se a frações na reta numérica, subentendendo-se que já esteja claro para os alunos que trata-se de uma "fração da unidade". A unidade é identificada na reta pelo segmento de extremos 0 e 1, mesmo que a indicação desses pontos não esteja explicita, mas que possam ser determinados a partir de outras informações (por exemplo, as marcações das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$.

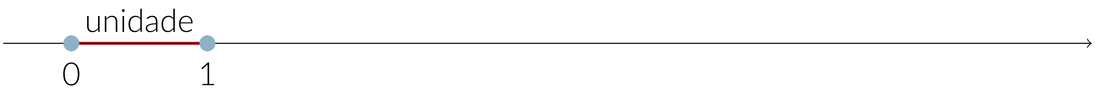
Espera-se que, ao longo desta lição, o aluno tenha associado fração a uma quantidade. Assim, no parágrafo que trata sobre a ordem na reta numérica, fala-se nos "números representados na reta numérica", incluindo-se, entre eles, as frações. Lembre que a justaposição de segmentos pode sempre ser feita com a ajuda do compasso, evitando-se, assim, o uso de medidas (por exemplo, com a régua graduada).

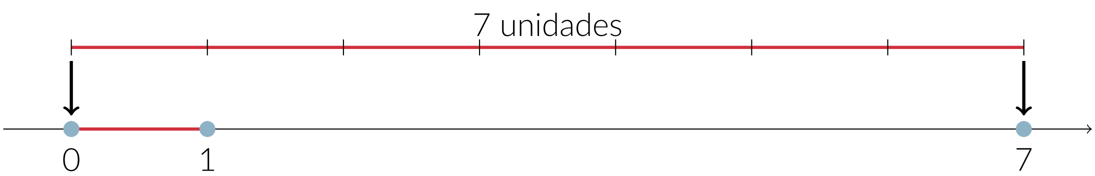


ORGANIZANDO AS IDEIAS

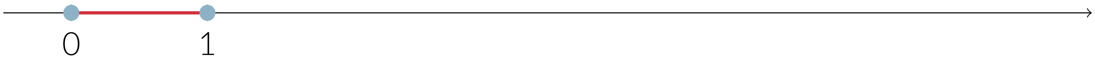
Frações na reta numérica

Já é conhecido que os números naturais podem ser representados por pontos em uma reta. Para isso, é preciso começar escolhendo dois pontos que vão corresponder ao 0 e ao 1 e, a partir deles, são marcados os pontos que corresponderão aos demais números naturais.



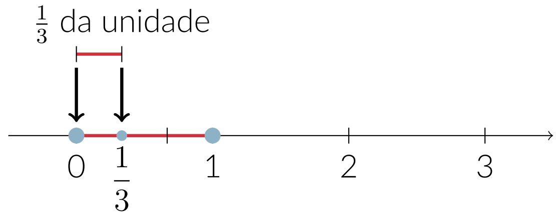


As frações também podem ser associadas a pontos na reta numérica. Para isso, é preciso identificar o segmento unitário, aquele cujos extremos são os pontos correspondentes ao 0 e ao 1. Esse segmento representa a unidade.

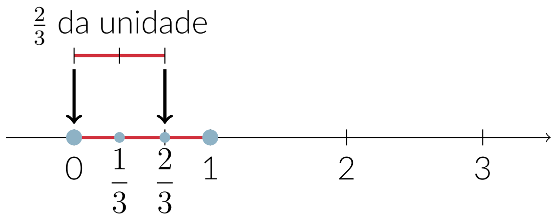


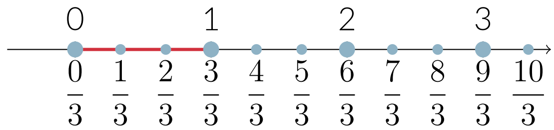
Notas de Aula

Dividindo-se a unidade em partes iguais, cada uma das partes identifica uma fração da unidade na reta numérica. Por exemplo, a divisão da unidade em 3 partes iguais identifica terços. O ponto correspondente a $\frac{1}{3}$ é a extremidade do segmento que, a partir do 0, identifica o primeiro terço da unidade.

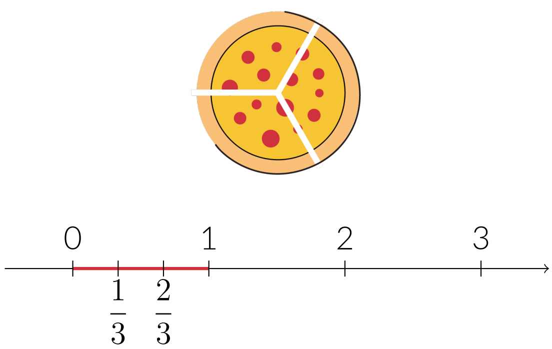


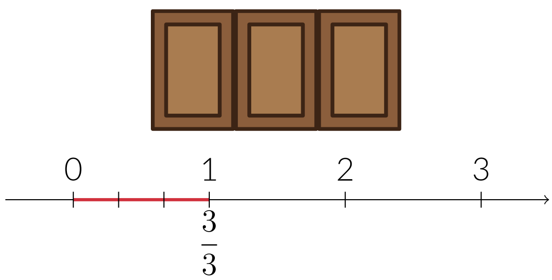
A partir dele, por justaposições desse segmento, são identificados na reta numérica os pontos correspondentes a $\frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}$, e assim por diante.





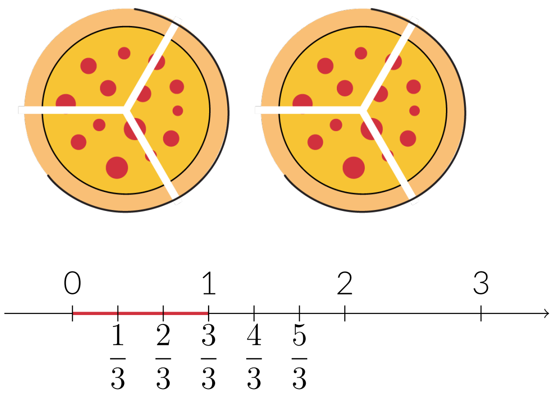
A representação dos números na reta numérica ajuda a perceber que os pontos correspondentes a algumas frações são os mesmos que os correspondentes a alguns números naturais. Por exemplo, $\frac{3}{3}$ é igual a 1. Portanto, $\frac{3}{3}$ de uma pizza é igual a 1 pizza e $\frac{3}{3}$ de uma barra de chocolate é igual a 1 barra de chocolate.

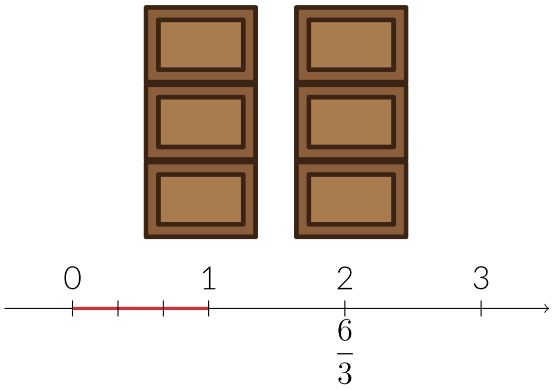




Já $\frac{6}{3}$ é igual a 2. Assim, $\frac{6}{3}$ de uma pizza é igual a 2 pizzas e $\frac{6}{3}$ de uma barra de chocolate é igual a 2 barras de chocolate.

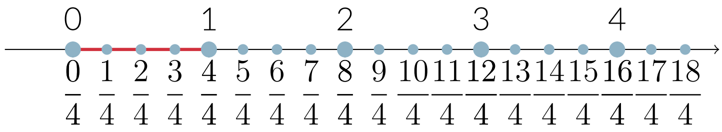
Notas de Aula



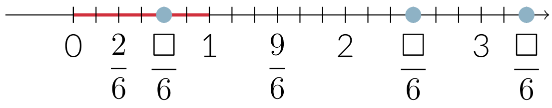


E $\frac{12}{3}$, é igual a que número natural? $\frac{12}{3} = \square$

Para identificar na reta numérica os pontos correspondentes às frações $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$,$\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, e assim por diante, o processo é o mesmo:

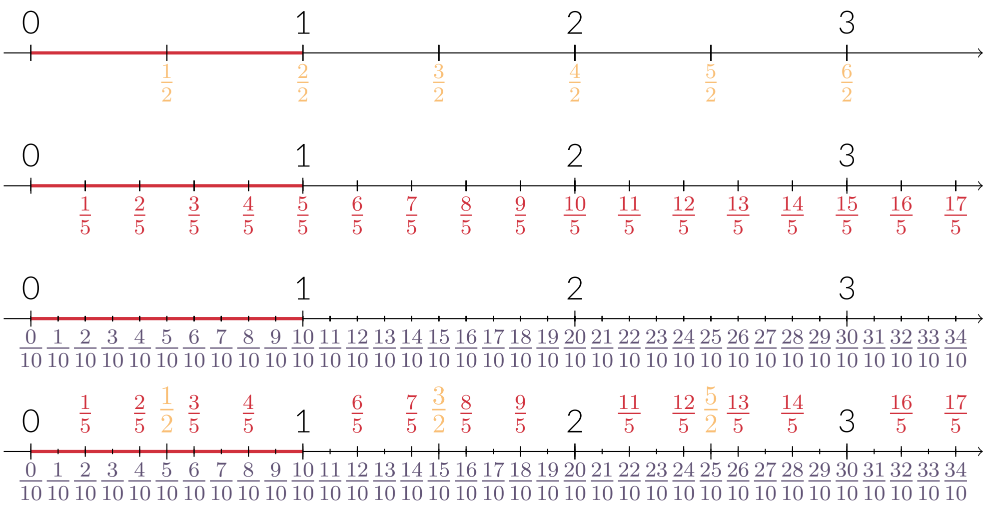


Na reta numérica a seguir estão destacados alguns pontos e as frações correspondentes a eles. Observe e complete as frações em destaque indicando seus numeradores.



A ordem na reta numérica

Na reta numérica, os números são organizados em ordem crescente, a partir do zero no sentido do 1. Assim, o que vale para o 0, o 1, o 2, o 3, etc. também valerá para as frações:



Atividade 11

Objetivos específicos: Levar o aluno a:

- ⋆ Reconhecer a representação das frações na reta numérica.
- ⋆ Ordenar frações.

Material necessário:

- ⋆ Pelo menos 3 metros de barbante, de maneira que cubra toda uma lateral da sala de aula (por exemplo, aquela em que está posicionado o quadro).
- ⋆ 4 folhas de papel sufite.
- ⋆ 32 pregadores de roupa (podem ser substituídos por clipes de papel).
- ⋆ Fita adesiva ou pregadores.

Preparação para a atividade:

- ⋆ Esta atividade deve ser desenvolvida como um jogo, envolvendo todos os alunos da turma, organizados em grupos com 5 ou 6 alunos. A quantidade de participantes em cada grupo e, consequentemente, a quantidade de grupos, deve ser decidida tendo em conta a quantidade de alunos na turma. Tudo deve ser combinado e esclarecido antes de a atividade começar.
- ⋆ O professor deve fazer um "varal" com o barbante em um local que seja visível para todos os alunos e não muito alto para que os estudantes possam alcançar com as mãos. Pode ser, por exemplo, em frente ao quadro, e indo de um extremo a outro da sala. Esse barbante representará a reta numérica.
- ⋆ O objetivo da atividade é "pendurar os números" no barbante usando pregadores ou fitas adesivas, visando experimentar, em uma atividade concreta, a associação entre os pontos da reta e os números. Para isso, serão feitos cartões numerados.
- ⋆ É Importante reforçar a fixação das extremidades do barbante para que não solte com o peso dos cartões que serão pendurados.
- ⋆ Dobre cada uma das folhas de papel 2 vezes ao meio, em direções paralelas aos lados, marcando assim 4 retângulos congruentes em cada folha. Recorte esses retângulos. Cada um deles será numerado e, durante a atividade, fixado no barbante. Serão chamados de **cartões numerados** (como os da figura).
- ⋆ Escreva as os números $0, 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{8}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, \frac{12}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{10}{5}, \frac{1}{10}$ nesses cartões.
- ⋆ Observe que são contemplados números naturais e frações que não representam números inteiros.
- ⋆ Além dos cartões numerados com o 0 (zero) e o 1 (um), recomenda-se que haja pelo menos um cartão numerado para cada aluno. A sequência com 32 números é uma sugestão básica. Essa sequência pode ser ampliada (ou reduzida) a partir da avaliação do professor.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ O desenvolvimento da atividade precisa ser mediado pelo professor. O processo e a discussão são importantes.
- ⋆ Os cartões com o 0 (zero) e com o 1 (um) devem ser presas no barbante pelo professor com fita adesiva antes do início da atividade, porque a distância entre o 0 (zero) e o 1 (um) terá o papel de unidade para o estudante determinar a posição dos demais cartões. **Isso deve ser feito à vista dos alunos para ressaltar que a unidade é escolhida**.
- ⋆ Caso seja utilizado um barbante de 3 metros, o zero pode ser posicionado bem próximo à extremidade e o número um a 90 cm à direita do zero.
- ⋆ Combine todas as regras do jogo com os alunos.
- ⋆ Recomenda-se que, para facilitar a comunicação, os grupos sejam identificados, por exemplo, por cores. Cada grupo, na sua vez de jogar, deve fixar um cartão numerado no varal e outro grupo deve avaliar se o cartão foi fixado em uma posição correta ou não.
- ⋆ Distribua os cartões igualmente entre os grupos formados.
- ⋆ A correção da fixação realizada por um grupo deve ser decidida por outro grupo, podendo ser discutida com toda a turma.
- ⋆ Pontuação: cada cartão numérico posicionado corretamente vale um ponto para o grupo que fixou o cartão. Cada avaliação correta vale meio ponto para o grupo que ficou responsável por ela.
- ⋆ Vence o jogo o grupo que, após a fixação de todos os cartões numerados no varal, tiver acumulado maior quantidade de pontos.
- ⋆ Em cada rodada, todos os grupos devem prender um cartão numérico no varal e avaliar a colocação feita por outro grupo. Varie as duplas de grupos que farão as ações de fixação/avaliação de cada cartão preso no varal. Assim, por exemplo, se a turma estiver organizada em 5 grupos (azul, verde, vermelho, amarelo e preto), com 6 alunos cada um, na primeira rodada as duplas que farão a fixação/avaliação podem ser, por exemplo, azul/preto, verde/vermelho, vermelho/azul, amarelo/verde e preto/amarelo. Já na segunda rodada as duplas podem ser azul/amarelo, verde/preto, vermelho/verde, amarelo/azul e preto/vermelho. Planeje previamente essas associações e comunique aos alunos para não gerar discussão durante a realização.
- ⋆ Incentive e procure fazer, respeitando as questões pessoais, com que todos os alunos façam a fixação de pelo menos um cartão numerado no varal.
- ⋆ Escolha o grupo com o número 2 para dar início ao jogo. Em seguida aquele que tiver o número 3. Claro que esses números serão mais facilmente posicionados no varal. Essa decisão pode ser uma estratégia deles no jogo. Além disso, quando já presos no varal, facilitarão a fixação dos demais. Pode acontecer de esses grupos não escolherem inicialmente esses cartões. No entanto,

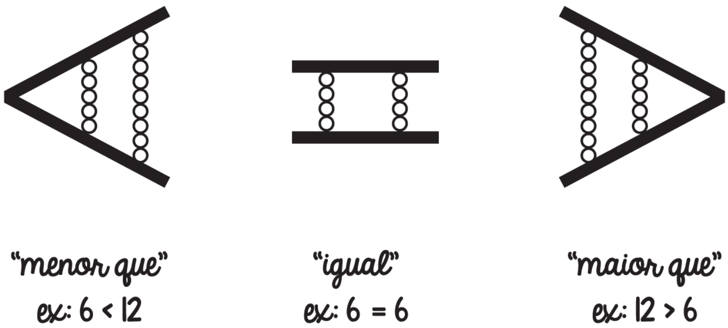
Na reta numérica, quanto mais distante do 0 estiver o ponto correspondente ao número, maior será o número.

$\frac{4}{3}$ é maior do que $\frac{4}{5}$. Ou ainda, $\frac{4}{5}$ é menor do que $\frac{4}{3}$.

O símbolo $<$ é usado para dizer "menor do que".

Por exemplo, a frase "oito é menor do que quinze" pode ser expressa de modo mais resumido com "$8 < 15$". Já a expressão $\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$ indica que "um meio é menor do que três meios".

Do mesmo modo, o símbolo $>$ é usado para significar "maior do que", portanto, também pode-se escrever $15 > 8$ para expressar "quinze é maior do que oito" ou $\frac{3}{2} > \frac{1}{2}$ para expressar "três meios é maior do que um meio".



MÃO NA MASSA

Atividade 11

Jogo: varal dos números

O varal de números está disposto na sala de aula, nele já estão posicionados os números 0 (zero) e 1 (um), como na figura. Nos cartões preparados para a atividade estão os números:

$0, 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{8}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, \frac{12}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{10}{5}, \frac{1}{10}.$

quando esses cartões forem os escolhidos pelos respectivos grupos para serem fixados no barbante, discuta a relevância dessas referências para facilitar a fixação dos demais números, não inteiros.

⋆ Observe que alguns cartões numerados ocuparão a mesma posição na reta. Por exemplo, os numerados com 2 e $\frac{4}{2}$. Nesses casos, recomenda-se que o segundo cartão a ser fixado seja preso no que já está no varal, sem que um esconda o outro. Sugere-se um abaixo do outro. Aproveite esses casos para discutir com os alunos que um mesmo número pode ter mais do que uma representação.

⋆ Muito provavelmente as frações de denominador 2 serão as mais fáceis de serem fixadas no varal. Em seguida, as de denominador 4. As fixações das frações de denominadores 3, 5 e 10 devem impor um pouco mais de desafio. Garanta que haja equilíbrio de dificuldade na distribuição dos cartões numerados entre os grupos.

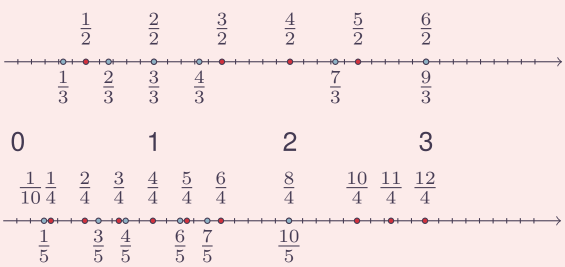
⋆ Estimule a discussão interna nos grupos para a decisão da posição de fixação de cada cartão numerado. O aluno eleito pelo grupo para prender o cartão no barbante deve explicar como decidiram por aquela posição.

⋆ A atividade pode ser refeita recolhendo-se os cartões das frações do varal, colocando-os embaralhados sobre a mesa do professor com as faces voltadas para baixo e cada estudante deve ir à mesa do professor pegar um cartão e prendê-lo no varal.

⋆ Uma variação desse jogo pode admitir que um grupo sugira frações para que outro grupo faça a fixação. Nesse caso, as frações podem ser escolhidas a partir de uma lista previamente estabelecida pelo professor. Recomenda-se que o grupo que escolher a fração faça a leitura e que o grupo que fizer a fixação registre simbolicamente essa fração. Dessa forma, a leitura e a escrita em representação simbólica também podem ser tratadas na atividade.

Resposta da Atividade 11

Para facilitar a visualização apresentamos a solução em duas retas.



Atividade 12

Objetivo específico: Levar o aluno a:

⋆ Representar frações na reta numérica.

⋆ Comparar frações.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja realizada individualmente. No entanto, a discussão das resposta deve ser feita com toda a turma. Estimule seus alunos a explicarem suas respostas.

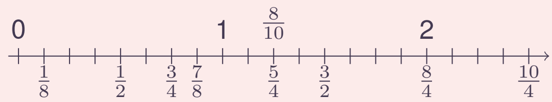
⋆ A associação das frações aos pontos correspondentes exigirá estratégias e comparações variadas. Procure identificar e discutir as argumentações apresentadas pelos alunos.

⋆ Todos os pontos necessários para estabelecer as associações solicitadas estão evidenciados na figura, no entanto, nem todos são imediatos.

⋆ Inicialmente os alunos precisam identificar que as marcações em destaque identificam oitavos. Assim, por exemplo, para identificar quartos, será necessário reunir dois oitavos e para marcar $\frac{3}{2}$ será necessário contar 12 oitavos.

⋆ Esta atividade oferece também, de forma indireta, a oportunidade de os alunos estabelecerem comparações. Por exemplo, reconhecer que $\frac{3}{4}$ é menor do que 1, que $\frac{5}{4}$ é maior do que $\frac{8}{4} = 2$ e que $\frac{10}{4}$ é menor do que $\frac{10}{8}$. Destaque e discuta essas e outras comparações com os seus alunos.

Resposta da Atividade 12



Atividade 13

Objetivo específico: Levar o aluno a:

⋆ Representar frações na forma $\frac{1}{d}$ (frações unitárias) na reta numérica.

⋆ Comparar frações na forma $\frac{1}{d}$ (frações unitárias) na reta numérica.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja realizada individualmente. No entanto, a discussão das respostas deve ser feita com toda a turma. Estimule seus alunos a explicarem suas respostas.

⋆ Observe e discuta com seus alunos que, no caso das frações de numerador igual a 1 (frações $\frac{1}{d}$), quanto maior o denominador, menor a fração. Portanto, sua representação na reta numérica está mais perto do zero.

⋆ Aproveite para propor e discutir com seus alunos algumas reflexões tais como:

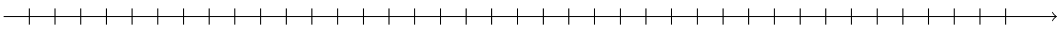
(i) Alguma fração com numerador igual a 1 pode ter sua representação na reta numérica entre $\frac{1}{2}$ e 1?

(ii) Qual fração é maior, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{10}$?

(iii) Que fração tem sua representação na reta numérica mais próxima de 0, $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{6}$?

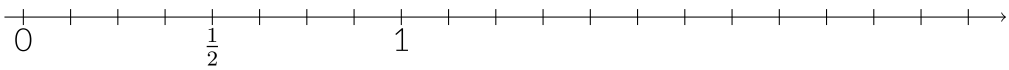
O jogo consiste em fixar cartões numerados em varal, reproduzindo uma reta numérica. As regras serão apresentadas pelo seu professor ou professora. Discuta com seus colegas a posição correta de fixação de cada um dos cartões numerados no varal.

Ao final do jogo, reproduza a forma como os cartões foram posicionados no varal na reta numérica a seguir. Aproveite as marcações já existentes.



Atividade 12

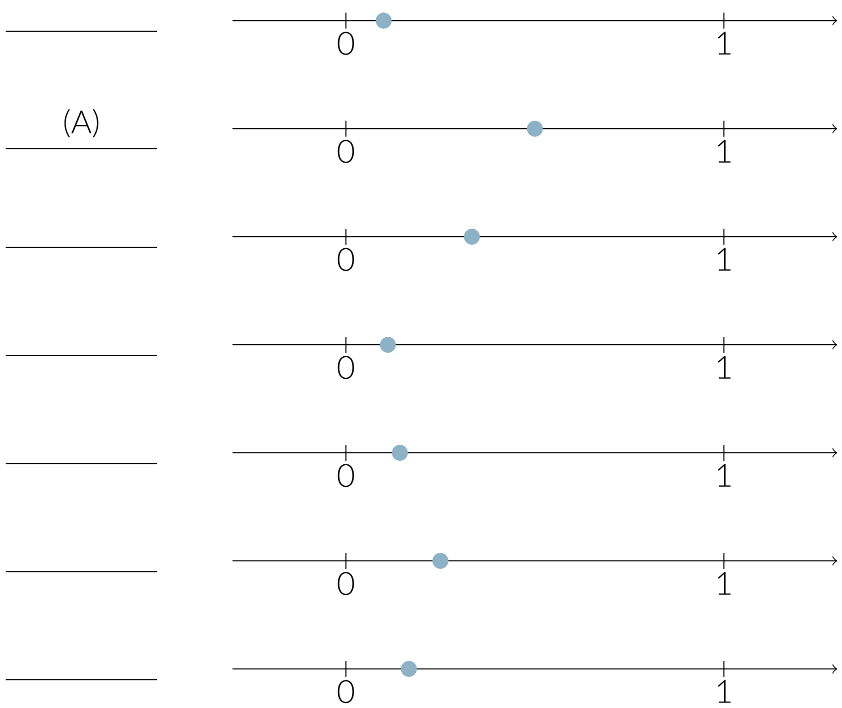
Na reta numérica já estão marcados o 0, o 1 e a fração $\frac{1}{2}$. Marque $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{10}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{10}{8}$ e 2.



Atividade 13

Associe, como no exemplo, cada uma das frações à sua representação na reta numérica.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{6}$ (F) $\frac{1}{7}$ (G) $\frac{1}{8}$ (H) $\frac{1}{9}$ (I) $\frac{1}{10}$



Resposta da Atividade 13

As respostas são na ordem I, A, B, H, F, C, E, D e G.

Atividade 14

Objetivo específico: Levar o aluno a: Comparar frações unitárias (na forma $\frac{1}{d}$) em sua representação simbólica.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja realizada individualmente. No entanto, a discussão das resposta deve ser feita com toda a turma. Estimule seus alunos a explicarem suas respostas.

⋆ Esta atividade é complementar da anterior. Na atividade anterior, as frações estão representadas na reta numérica. Nesta, as frações unitárias são apresentadas em sua representação simbólica, na forma $\frac{a}{b}$. Espera-se que os alunos consigam compará-las fazendo relação com a representação na reta numérica, tratada na atividade anterior. Assim, por exemplo, a desigualdade $\frac{1}{10} < \frac{1}{4}$ pode ser justificada pelo fato de que, na representação na reta numérica, a fração $\frac{1}{10}$ está mais próxima do ponto correspondente ao zero do que a fração $\frac{1}{4}$.

Resposta da Atividade 14

a) $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$.

b) $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$.

c) $\frac{1}{10} > \frac{1}{20}$.

d) $\frac{1}{12} < \frac{1}{2}$.

e) $\frac{1}{35} > \frac{1}{43}$.

f) $\frac{1}{99} > \frac{1}{100}$.

g) $\frac{1}{5} > \frac{1}{50}$.

h) $\frac{1}{100} < \frac{1}{10}$.

Atividade 15

Objetivo específico:

⋆ Comparação de frações com o mesmo numerador ou com o mesmo denominador, a partir de um referencial.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja realizada em duplas. No entanto, a discussão das resposta deve ser feita com toda a turma.

⋆ Estimule seus alunos a explicarem suas respostas.

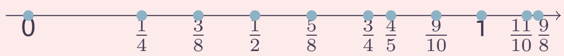
⋆ A associação das frações aos pontos correspondentes exigirá que os alunos saibam associar pontos na reta numérica às frações correspondentes e que façam comparações de diferentes tipos. Valorize e discuta as diversas estratégias apresentadas pelos alunos.

⋆ Por exemplo, uma vez que os pontos correspondentes ao 0, ao 1 e a $\frac{1}{2}$ já estão destacados, é natural que as primeiras frações a serem associadas a pontos na reta numérica sejam $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$. Em seguida, reconhecendo que $\frac{1}{8}$ corresponde à metade de $\frac{1}{4}$, as frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{8}$ podem ser as próximas. Na sequência, o aluno pode reconhecer que $\frac{4}{5}$ e $\frac{9}{10}$ são menores do que a unidade e que $\frac{9}{8}$ e $\frac{11}{10}$ são maiores. Entre $\frac{4}{5}$ e $\frac{9}{10}$, $\frac{9}{10}$ pode ser identificada como maior por faltar apenas $\frac{1}{10}$ para compor a unidade , enquanto que para $\frac{4}{5}$ falta $\frac{1}{5}$ da unidade. Por fim, por raciocínio análogo, a fração $\frac{9}{8}$ pode ser identificada como maior do que $\frac{11}{10}$: Sabe-se que $\frac{1}{8}$ é maior do que $\frac{1}{10}$ e que $\frac{9}{8}$ é $\frac{1}{8}$ maior do que a unidade, enquanto que $\frac{11}{10}$ é $\frac{1}{10}$ maior. Portanto, $\frac{9}{8}$ é maior do que $\frac{11}{10}$.

⋆ Se achar necessário, discuta a comparação entre alguns pares das frações apresentadas antes de os alunos resolverem a atividade. Por exemplo, peça-lhes que comparem $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{8}$, que são frações com o mesmo denominador. Ou que comparem $\frac{9}{8}$ e $\frac{9}{10}$, frações com o mesmo numerador.

⋆ O aluno pode responder simplesmente "ligando" os cartões com as frações aos pontos correspondentes na reta numérica. No entanto, recomenda-se que o professor oriente-os a escrever as frações abaixo dos pontos corrrespentes na reta numérica, a exemplo do 0, do 1, e de $\frac{1}{2}$.

Resposta da Atividade 15



Atividade 16

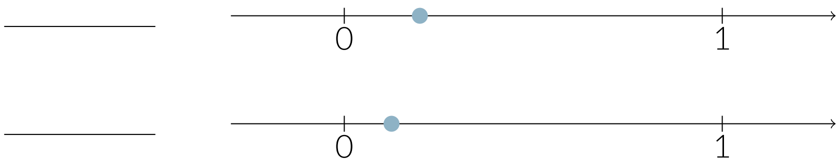
Objetivo específico: Levar o aluno a: Comparar frações.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja realizada individualmente. No entanto, a discussão das respostas deve ser feita com toda a turma. Estimule seus alunos a explicarem suas respostas.

⋆ Nesta atividade, as frações são apresentadas apenas em sua representação simbólica na forma $\frac{a}{b}$. Espera-se que os alunos consigam compará-las a partir da ideia de quantidade, sem necessariamente recorrer às representações em modelos contínuos ou na reta numérica. Assim, por exemplo, a comparação entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ fica estabelecida pelo fato de que a primeira identifica uma das partes da equipartição da unidade por dois, enquanto que $\frac{1}{3}$ identifica uma das partes da equipartição da mesma unidade por três. Logo, $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.

⋆ No entanto, é importante observar que alguns alunos podem precisar do apoio das demais representações citadas. A discussão de cada item deve ser amparada por, pelo menos, uma das três estratégias destacadas: (i) argumentação verbal amparada pela ideia de quantidade; (ii) representação em modelos contínuos e (iii) representação na reta numérica. Por exemplo, na correção do item a), entre $\frac{3}{6}$ e $\frac{5}{6}$, espera-se que a discussão contemple:



Atividade 14

Observando a atividade anterior (Atividade 13), complete as sentenças a seguir com os sinais > (maior) ou < (menor) de modo a torná-las verdadeiras.

a) $\frac{1}{2} \square \frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{4} \square \frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{10} \square \frac{1}{20}$

d) $\frac{1}{12} \square \frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{35} \square \frac{1}{43}$

f) $\frac{1}{99} \square \frac{1}{100}$

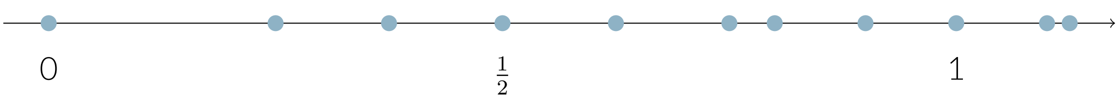
g) $\frac{1}{5} \square \frac{1}{50}$

h) $\frac{1}{100} \square \frac{1}{10}$

Atividade 15

Na reta numérica a seguir estão destacados os pontos correspondentes ao 0, ao 1 e a $\frac{1}{2}$. Os demais pontos correspondem às frações apresentadas a seguir. Associe cada fração ao ponto correspondente.

$\boxed{\frac{1}{4}}$ $\boxed{\frac{3}{4}}$ $\boxed{\frac{4}{5}}$ $\boxed{\frac{3}{8}}$ $\boxed{\frac{5}{8}}$ $\boxed{\frac{9}{8}}$ $\boxed{\frac{9}{10}}$ $\boxed{\frac{11}{10}}$



Atividade 16

Complete as sentenças a seguir com os sinais > (maior), < (menor) ou = (igual) de modo a torná-las verdadeiras.

(i) O fato de que, como essas frações indicam quantidades de “sextos”, a menor (maior) é aquela que têm menor (maior) numerador. Portanto, $\frac{3}{6} < \frac{5}{6}$.

(ii) A representação em modelos contínuos.

(iii) A representação na reta numérica.

⋆ Recomenda-se fortemente que os alunos sejam convidados a compartilharem com a turma as suas estratégias e que se possível, na discussão de cada item, o professor ampare a reflexão com as representações em modelos contínuos e na reta numérica que emergirem dessa participação. No entanto, se isso não acontecer, o professor deve apresentá-las.

⋆ Observe que os primeiros itens envolvem a comparação entre frações que têm o mesmo denominador. Portanto, a comparação se estabelece a partir da comparacão entre os numeradores, amparada pelo entendimento de que quanto menor (maior) a quantidade de partes iguais, menor (maior) a fração.

⋆ Os itens seguintes envolvem a comparação de frações com o mesmo numerador. Portanto, a comparação se estabelece a partir da comparação entre os numeradores, amparada pelo entendimento de que quanto maior (menor) o denominador, menor (maior) a parte da unidade.

⋆ Os itens do último bloco envolvem a comparação de frações tendo a comparação dessas frações com a unidade (1) como referência. Por exemplo, tem-se que $\frac{9}{8} > 1$. Já $\frac{9}{10} < 1$. Portanto, $\frac{9}{10} < \frac{9}{8}$.

Resposta da Atividade 16

a) $\frac{5}{9} > \frac{4}{9}$

b) $\frac{3}{6} < \frac{5}{6}$

c) $\frac{7}{10} < \frac{9}{10}$

d) $\frac{3}{12} < \frac{9}{12}$

e) $\frac{39}{100} > \frac{25}{100}$

f) $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

g) $\frac{1}{7} < \frac{1}{6}$

h) $\frac{2}{5} > \frac{2}{7}$

i) $\frac{4}{5} < \frac{4}{3}$

j) $\frac{12}{15} < \frac{12}{7}$

k) $\frac{22}{80} > \frac{22}{90}$

l) $\frac{3}{2} > \frac{2}{5}$

m) $\frac{3}{4} < \frac{6}{5}$

n) $\frac{7}{8} < \frac{10}{9}$

o) $\frac{6}{5} > \frac{12}{9}$

p) $\frac{4}{5} < \frac{5}{4}$

q) $\frac{35}{40} < \frac{30}{25}$

r) $\frac{99}{100} < \frac{3}{2}$

Atividade 17

Objetivos específicos: Levar o aluno a:

⋆ Relacionar a representação de frações unitárias em modelo de área retangular com a representação dessas frações na reta numerada.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja realizada em duplas ou em trios. No entanto, a discussão das respostas deve ser feita com toda a turma.

⋆ Cada aluno deve receber o material para o desenvolvimento da atividade, que consiste em uma folha, disponível para reprodução, em que há 10 retângulos congruentes, cada um com uma cor e indicando uma equipartição diferente da unidade, como ilustrado a seguir. As faixas estão subdivididas em: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 16 partes iguais.

⋆ Para o desenvolvimento da atividade, recomenda-se que os alunos cortem e manuseiem o material a ser reproduzido (veja as folhas para reprodução no final do livro). É importante que reconheçam que todas as faixas coloridas são iguais (congruentes), o que pode ser constatado pela sobreposição. O retângulo representa a unidade. Além disso, é importante que percebam que cada uma das faixas (ou a unidade) tem uma equipartição indicada, representando frações unitárias diferentes. Por exemplo, cada parte da faixa amarela representa $\frac{1}{5}$ da unidade.

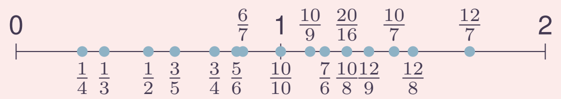
⋆ No item b), observe que na imagem da reta numerada, apesar das marcações, não estão escritos os números 0 e 1. Oriente seus alunos a fazer essa identificação e a relacioná-la com a unidade considerada, o retângulo.

⋆ Algumas das frações indicadas para serem representadas na reta numérica são maiores que uma unidade. Nesses casos, oriente seus alunos a fazer a justaposição das partes dos retângulos correspondentes. Por exemplo, para representar $\frac{12}{7}$ será necessário justapor um retângulo a cinco partes do retângulo laranja.

Resposta da Atividade 17

a) De cima para baixo as frações são 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{16}$

b) Para facilitar a visualização apresentamos apenas o segmento de 0 a 2 ampliado.



a) $\frac{3}{6}$ $\square$ $\frac{5}{6}$

b) $\frac{5}{9}$ $\square$ $\frac{4}{9}$

c) $\frac{7}{10}$ $\square$ $\frac{9}{10}$

d) $\frac{3}{12}$ $\square$ $\frac{9}{12}$

e) $\frac{39}{100}$ $\square$ $\frac{25}{100}$

f) $\frac{1}{2}$ $\square$ $\frac{1}{3}$

g) $\frac{1}{7}$ $\square$ $\frac{1}{6}$

h) $\frac{2}{5}$ $\square$ $\frac{2}{7}$

i) $\frac{4}{5}$ $\square$ $\frac{4}{3}$

j) $\frac{12}{15}$ $\square$ $\frac{12}{7}$

l) $\frac{22}{80}$ $\square$ $\frac{22}{90}$

m) $\frac{3}{2}$ $\square$ $\frac{2}{5}$

n) $\frac{3}{4}$ $\square$ $\frac{6}{5}$

o) $\frac{7}{8}$ $\square$ $\frac{10}{9}$

p) $\frac{6}{5}$ $\square$ $\frac{12}{9}$

q) $\frac{4}{5}$ $\square$ $\frac{5}{4}$

r) $\frac{35}{40}$ $\square$ $\frac{30}{25}$

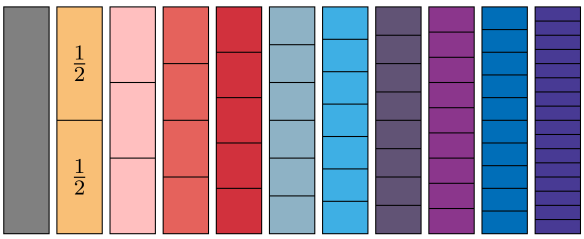
s) $\frac{99}{100}$ $\square$ $\frac{3}{2}$

QUEBRANDO A CUCA

Atividade 17

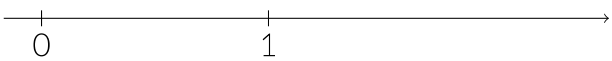
Você recebeu uma folha com retângulos que têm o mesmo tamanho mas que são coloridos de maneira diferente. Em cada um deles há marcações que representam uma equipartição.

a) Complete os retângulos, ecrevendo em cada um deles a fração representada por cada parte da equipartição, como no exemplo



b) Recorte os retângulos coloridos da folha que você recebeu e use-os para ajudá-lo a representar na reta numérica os seguintes números:

$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \frac{10}{7}, \frac{12}{7}, \frac{10}{8}, \frac{12}{8}, \frac{10}{9}, \frac{12}{9}, \frac{10}{10}, \frac{20}{16}$



Atividade 18

Objetivo específico: Levar o aluno a:

⋆ Representar frações na reta numérica.

⋆ Comparar frações a partir de sua representação na reta numérica.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja realizada em duplas. No entanto, a discussão das respostas deve ser feita com toda a turma.

⋆ Estimule seus alunos a explicarem suas respostas.

⋆ A associação das frações aos pontos correspondentes exigirá que os alunos saibam associar pontos na reta numérica às frações correspondentes e que façam comparações de diferentes tipos. Valorize e discuta as diversas estratégias apresentadas pelos alunos.

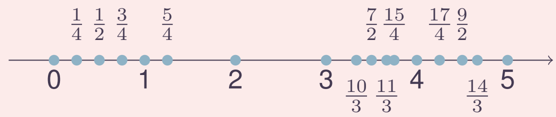
⋆ Observe que apenas os pontos correspondentes a 0 e a 2 estão destacados na reta. Ainda que não seja de fato necessário, recomenda-se que, no desenvolvimento da atividade, sejam marcados os pontos correspondentes a 1, 3, 4 e 5. Especialmente a marcação do 1, facilita a identificação da unidade.

⋆ Para as marcações de $\frac{1}{4}$, de $\frac{1}{2}$, de $\frac{3}{4}$ e de $\frac{5}{4}$, espera-se que os alunos utilizem os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores. É uma oportunidade de revisão e de avaliação do aprendizado. Não se acredita que os alunos terão dificuldade para isso. Mas é importante que o professor fique atento e, se for o caso, faça a necessária revisão.

⋆ Observe que, nesta atividade, a partir da representação na reta, o aluno é convidado a exprimir a ordem das frações em simbologia matemática. Aproveite para destacar o fato de que quanto menor a fração, mais próxima do zero será sua representação na reta.

⋆ Os últimos itens desta atividade admitem várias respostas. Explore as soluções dadas pelos seus alunos. Aproveite para discutir estratégias variadas de comparação. Por exemplo, decidir que $\frac{7}{2} < \frac{11}{3} < 4$ pode ser justificado pelo fato de que para marcar o ponto correspondente a $\frac{7}{2}$ a unidade entre 3 e 4 deve ser dividida ao meio, enquanto que, para marcar o ponto correspondente a $\frac{11}{3}$, é necessário dividir a unidade em três partes iguais e tomar o mais próximo de 4. Assim, como $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, pode-se concluir que $\frac{7}{2} < \frac{11}{3} < 4$.

Resposta da Atividade 18



a) Uma forma de marcar $\frac{1}{2}$ na reta numérica dada pode ser a partir da marcação, primeiro, do 1. A marcação do 1 fica entre 0 e 2, bem no meio. Com a unidade identificada, a $\frac{1}{2}$ fica entre as marcações do 0 e do 1, bem no meio.

b) As marcações de $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{4}$ podem ser feitas de maneira semelhante, lembrando que: (i) $\frac{1}{4}$ fica entre 0 e $\frac{1}{2}$, bem no meio; (ii) $\frac{3}{4}$ fica entre 0 e 1, bem no meio e (iii) $\frac{5}{4}$ fica entre 1 e $\frac{3}{2}$, bem no meio.

c) $\frac{1}{4}$ é menor do que $\frac{1}{2}$ porque $\frac{1}{4}$ está mais próximo de zero.

d) $\frac{3}{4}$ é maior do que $\frac{1}{2}$ porque $\frac{3}{4}$ está mais distante de zero.

e) $\frac{5}{4}$ é menor do que 1 porque $\frac{5}{4}$ está mais distante de zero.

f)
$$0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1 < \frac{5}{4} < 2$$
.

g) Há várias respostas possíveis. Por exemplo, $3 < \frac{7}{2} < 4$, $3 < \frac{15}{4} < 4$ ou $3 < \frac{10}{3} < 4$.

h) Há várias respostas possíveis. Por exemplo, $\frac{7}{2} < \frac{15}{4} < 4$ ou $\frac{7}{2} < \frac{11}{3} < 4$.

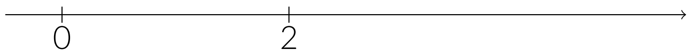
i) Há várias respostas possíveis. Por exemplo, $\frac{17}{4} < \frac{9}{2} < 5$, $\frac{17}{4} < \frac{19}{4} < 5$ ou $\frac{17}{4} < \frac{14}{3} < 5$.

Atividade 18

Na reta numérica a seguir:

a) Marque $\frac{1}{2}$. Justifique sua resposta.

b) Marque $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{4}$. Explique como raciocinou para fazer essas marcações.



Observando a reta numérica com as marcações feitas, compare:

c) $\frac{1}{4}$ é maior ou menor do que $\frac{1}{2}$?

d) $\frac{3}{4}$ é maior ou menor do que $\frac{1}{2}$?

e) $\frac{5}{4}$ é menor do que 1?

f) Escreva as frações marcadas na reta em ordem crescente, completando os espaços a seguir:

$$0 < \frac{\square}{\square} < \frac{\square}{\square} < \frac{\square}{\square} < 1 < \frac{\square}{\square}.$$

Volte à reta e marque outras três frações que atendam às seguintes condições:

g) A primeira deve ser maior do que 3 e menor do que 4.

h) A segunda deve ser maior do que $\frac{7}{2}$.

i) A terceira deve ser maior do que $\frac{17}{4}$ e menor do que 5.

LIÇÃO 4 - Para o professor

Reconhecer quando duas frações são iguais, saber gerar frações iguais a uma dada fração e obter duas frações de mesmo denominador que são iguais a duas frações quaisquer dadas são habilidades fundamentais que permitem resolver vários problemas no estudo de frações. Por exemplo, com essas habilidades, é possível criar procedimentos que permitem comparar duas frações com denominadores diferentes e obter uma fração que está entre duas frações diferentes (propriedade de densidade das frações). São esses tópicos que compõem a presente lição.

O processo de comparação de frações com denominadores distintos é apresentado como motivação, em uma situação problema, em formato de história em quadrinho, logo no início da lição. Contudo sua solução é retomada na seção *Organizando as ideias* , após a apresentação das oito primeiras atividades que compõem a seção *Explorando o Assunto* . Estas atividades iniciais abordam basicamente a igualdade de frações. Todas elas encontram-se organizadas em ordem crescente de dificuldade. O conceito de igualdade é abordado utilizando-se representações equivalentes em modelos de área retangulares (atividades 2 , 3 e 6), ou em modelos de área circulares (atividade 5) ou na reta numérica (atividade 8). A inclusão de modelos diferentes é proposital pois, com isso, o aluno tem a oportunidade de perceber as mesmas propriedades em contextos diferentes aumentando assim o seu arsenal de modelos que ele pode lançar mão ao justificar uma resposta ou estudar uma situação.

Cabe destacar aqui um detalhe sutil, mas que permeia toda a lição: trata-se do uso das expressões "frações equivalentes" e "frações iguais" . Nesta lição, a expressão "frações equivalentes" é usada se as frações em questão estiverem associadas a divisões de algum objeto físico (bolo, torta, pizza, chocolate, etc.), de forma a poder exprimir o fato de que processos de partições diferentes podem gerar quantidades iguais. Por exemplo, o processo de dividir um bolo ao meio e pegar uma das partes é diferente daquele em que o bolo é dividido quatro partes iguais e se toma duas dessas partes. No entanto, em termos de quantidades, tem-se, em ambos os casos a metade do bolo. Já a expressão "frações iguais" será usada se as frações se referem a números, sem um contexto específico. Por exemplo, $\frac{2}{4}$ é a única fração de denominador 4 que é igual a $\frac{1}{2}$. No entanto, cabe ressaltar que não se espera que os alunos sejam capazes de registrar este tipo de diferença. Assim, recomenda-se que os usos, por parte dos alunos, das expressões frações equivalentes e frações iguais nos contextos destacados sejam considerados igualmente válidos e indistinguíveis.

As sistematizações dos procedimentos de **comparação** (atividades 12 , 13 , 14 , 15 e 18) e do conceito de **igualdade** de frações (atividades 9 , 10 , 11 , 16 , 17 , 19 e 20) são então realizadas na seção *Mão na Massa* . O processo de determinação da fração irredutível igual à fração dada é, por exemplo, trabalhado nas atividades 16 e 17 . Uma condição suficiente para verificação da igualdade de frações é apresentada na atividade 19 . O jogo **Trilha dos doze avos** (*atividade 20*) é uma boa estratégia para que se possa consolidar de forma prazerosa a igualdade de frações.

Na parte final da lição, na seção *Quebrando a Cuca* , apresentam-se atividades que sugerem uma avaliação crítica pelos alunos de afirmações que generalizam situações de igualdade e de comparação entre frações. Cabe destacar que todas as atividades desta última seção, em especial, deverão ser conduzidas sem pressa, por meio de debates intensos entre os alunos para que os argumentos equivocados apareçam e possam ser descontruídos por eles próprios.

Tanto a comparação de frações arbitrárias como o estudo da propriedade de densidade apresenta como procedimento base a procura por representações equivalentes de frações dadas. Nesse sentido, destaca-se a técnica utilizada nas atividades 23 e 24 para determinar uma fração intermediária entre duas frações arbitrárias dadas. A técnica, que consiste simplesmente em procurar frações intermediárias por meio de representações equivalentes das frações dadas com denominadores iguais e suficientemente grandes, além de original, supera o procedimento usual (que utiliza a adição de frações e a divisão de uma fração por um número natural), por sua simplicidade e naturalidade. Este resultado, conhecido no âmbito pedagógico como "propriedade de densidade dos números racionais" , não se verifica para os conjuntos de números naturais e de números inteiros, e é, sem dúvida, um dos fatos mais notáveis na extensão que se faz do conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números racionais. É a responsável, por exemplo, pelo fato de um número racional não ter elemento sucessor.

Cabe lembrar que as habilidades desenvolvidas nessa lição são fundamentais para as lições seguintes que tratam das operações com frações.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA LIÇÃO 4:

O aluno deve ser capaz de:

⋆ Reconhecer a igualdade de frações, seja por representações geométricas ou por representações numéricas equivalentes;

⋆ Determinar frações equivalentes por subdivisões de uma fração dada;

⋆ Identificar a representação de frações iguais (equivalentes) na reta numérica;

⋆ Reconhecer a igualdade de duas frações por processo matemático suficiente (se $a \times d = b \times c$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$);

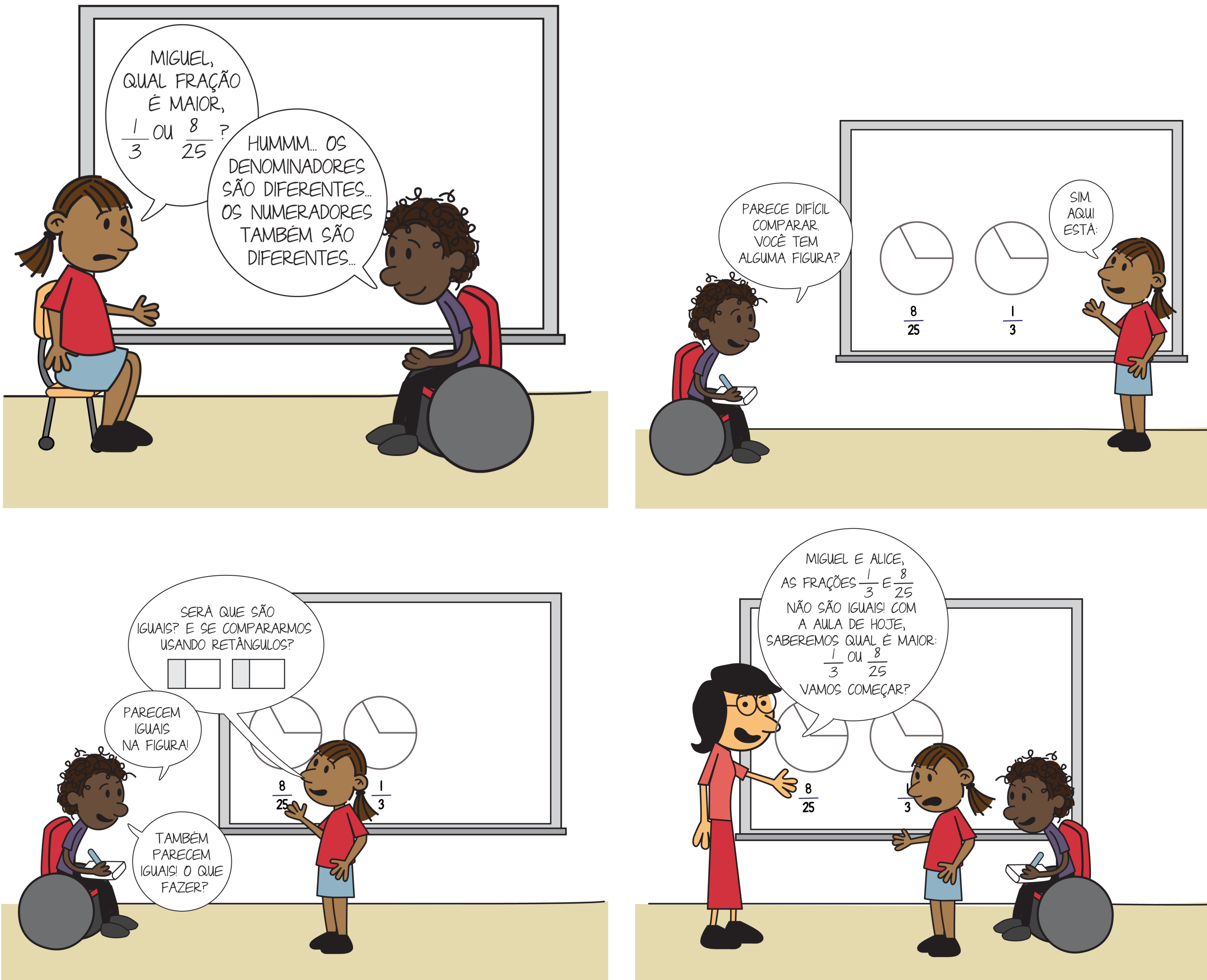
⋆ Simplificar frações;

⋆ Comparar duas ou mais frações com denominadores diferentes;

⋆ Reconhecer a fração (o número racional não negativo) como uma classe de equivalência;

⋆ Determinar, dada uma fração arbitrária, sua fração irredutível;

Frações Equivalentes e Comparação de Frações



- Reconhecer a propriedade de densidade do conjunto de frações (números racionais não negativos);
- Determinar uma fração, entre duas frações dadas, com base em representações equivalentes dessas frações com denominadores suficientemente grandes.

Atividade 1

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- Reconhecer que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações em modelos de área retangulares.
- Reconhecer que, em uma equipartição de uma região retangular, só é possível escolher uma quantidade de partes que corresponda à metade desta região se a quantidade total de partes for um número par.
- É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte do retângulo (metade do retângulo) está sendo descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes) mas que, não obstante, por expressarem uma mesma quantidade, estas frações são iguais. Assim, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, etc. são respostas válidas para o item b) desta atividade.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
- Reforce para seus alunos que o item b) deve ser respondido com a partição apresentada, isto é, sem gerar novas partições.
- Observe que o item c) pode ser respondido apenas pela fração $\frac{1}{2}$. No entanto, é importante estimular os alunos a pereceberem que a metade do sanduíche pode ser obtida por $\frac{2}{4}$ do sanduíche.

Classificações:

- Heid et al.: Conceito: identificar e descrever
- Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer
- UERJ: Observar: identificar e reconhecer

Resposta da Atividade 1

a) Em a): $\frac{1}{2}$. Em b): $\frac{1}{3}$. Em c): $\frac{1}{4}$. Em d): $\frac{1}{4}$.

b) É possível comer metade do sanduíche apenas nas repartições a), c) e d) pois, para elas, a quantidade de partes iguais em que o sanduíche foi dividido é um número par.

c) Em a): $\frac{1}{2}$. Em c): $\frac{2}{4}$. Em d): $\frac{2}{4}$.

Atividade 2

Objetivo específico: Levar o aluno a

- Reconhecer que as frações $\frac{3}{10}, \frac{6}{20}, \ldots, \frac{3\times m}{10\times m}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações em modelos de área retangulares e dobraduras.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos e que, neste caso, cada grupo receba uma quantidade suficiente de cópias das folhas para reprodução. Podem ser necessárias mais do que uma dessas folhas por aluno. Uma vez que a folha já tenha sido dobrada para a realização de um dos itens, a marca deixada pode atrapalhar a realização do item seguinte.
- É importante deixar claro para os alunos que, para decidir sobre a quantidade de retângulos pintados e a quantidade total de retângulos, se devem considerar as divisões feitas pelos vincos das dobras. Neste sentido, você pode, junto com a turma, a título de exemplo e de orientação, preencher a segunda linha da tabela, deixando as demais para sejam preenchidas pelos grupos.
- É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte do retângulo (a área da região pintada de amarelo) está sendo descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes), mas que, não obstante, por expressarem uma mesma quantidade, estas frações são iguais.

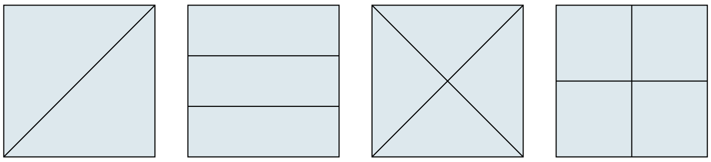
Classificações:

- Heid et al.: Conceito: identificar e descrever
- Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer
- UERJ: Observar: identificar e reconhecer

EXPLORANDO O ASSUNTO

Atividade 1

A turma de Rita vai fazer um piquenique. A professora comprou pães para a turma preparar sanduíches. Cada colega de Rita preparou um sanduíche e partiu-o em partes iguais. Veja como alguns dos colegas repartiram o seu sanduiche:


(A) (B) (C) (D)

a) Nessas repartições, que fração do sanduíche pode representar cada uma das partes em que o sanduíche foi repartido?

b) Em quais dessas repartições é possível comer metade do sanduíche apenas com as partes em que cada sanduíche foi repartido? Justifique sua resposta!

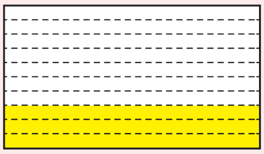
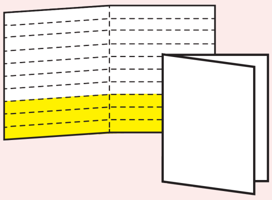
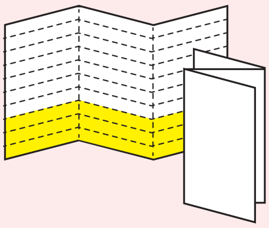
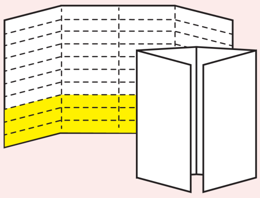
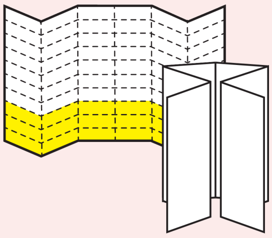
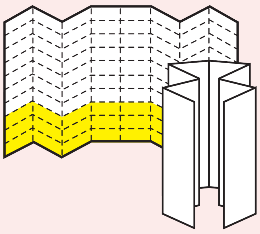
c) Para cada uma das repartições que você deu como resposta no item b), expresse, por meio de frações, a metade do sanduíche.

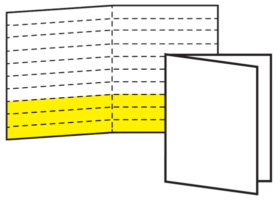
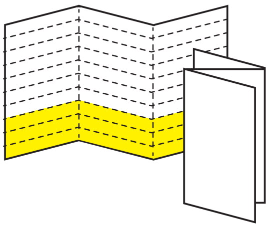
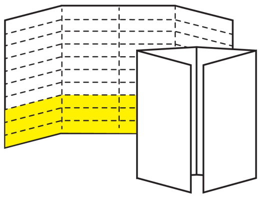
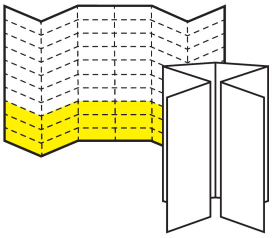
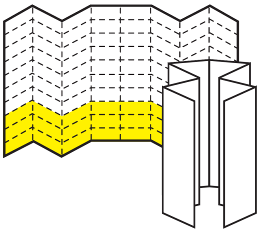
Atividade 2

Junte-se a seus colegas e dobrem o retângulo da página de reprodução como indicado na coluna mais à esquerda da tabela. Observando as dobras feitas, responda às questões propostas, preenchendo a tabela. Divida o trabalho em sua equipe: cada membro pode ficar encarregado de uma ou mais linhas da tabela. Lembre-se: as dobraduras devem ser feitas perpendicularmente às várias linhas desenhadas no retângulo da página de reprodução.

Como dobrar	Quantidade de retângulos pintados	Quantidade total de retângulos	Fração do retângulo do encarte que está pintada
	3	10	$\frac{3}{10}$

Resposta da Atividade 2

Como dobrar	quantidade de retângulos pintados	Quantidade total de retângulos	Fração do retângulo do encarte que está pintada
	3	10	$\frac{3}{10}$
	6	20	$\frac{6}{20}$
	9	30	$\frac{9}{30}$
	12	40	$\frac{12}{40}$
	18	60	$\frac{18}{60}$
	24	80	$\frac{24}{80}$

Como dobrar	Quantidade de retângulos pintados	Quantidade total de retângulos	Fração do retângulo do encarte que está pintada
			
			
			
			
			

REFLETINDO

Na atividade 2, a folha foi divida inicialmente em dez retângulos iguais, dos quais três deles foram pintados de amarelo.

Ao realizar a primeira dobra, cada retângulo inicial ficou dividido ao meio, inclusive os pintados de amarelo. Assim, tanto para cobrir a área da região pintada de amarelo como para cobrir a área da folha será necessário o dobro da quantidade inicial:

Notas de Aula

Área da folha $=$ área de 10 retângulos $=$ área de 20 "retângulos divididos ao meio";
Área da região pintada $=$ área de 3 retângulos $=$ área de 6 "retângulos divididos ao meio".
Assim pode-se dizer que a área da região pintada de amarelo é $\frac{3}{10}$ ou $\frac{6}{20}$ da área da folha. De onde se conclui que estas frações representam a mesma quantidade: a área da região pintada de amarelo tendo a área da folha como unidade. Por isso escrevemos

$$\frac{3}{10} = \frac{6}{20} = \frac{2 \times 3}{2 \times 10},$$

onde 2 é o número de partes em que você dobrou a folha.
Ora, quando você dobrou a folha em três partes iguais, cada retângulo inicial ficou dividido em três partes, inclusive os pintados de amarelo. Assim, tanto para cobrir a área da região pintada de amarelo como para cobrir a área da folha será necessário o triplo da quantidade inicial:
Área da folha $=$ área de 10 retângulos $=$ área de 30 "retângulos divididos em três partes";
Área da região pintada $=$ área de 3 retângulos $=$ área de 9 "retângulos divididos em três partes".
De onde se conclui que as frações $\frac{3}{10}$ e $\frac{9}{30}$ representam a mesma quantidade: a área da região pintada de amarelo tendo a área da folha como unidade. Por isso escrevemos

$$\frac{3}{10} = \frac{9}{30} = \frac{3 \times 3}{3 \times 10},$$

onde 3 é o número de partes em que você dobrou a folha.
Do mesmo modo, ao dobrar a folha em quatro, seis ou oito partes iguais, você obteve outras representações equivalentes para a fração $\frac{3}{10}$:

- ao dobrar em **quatro** partes iguais: $\frac{3}{10} = \frac{12}{40} = \frac{4 \times 3}{4 \times 10}$; em que 4 é o número de partes em que você dobrou a folha;
- ao dobrar em **seis** partes iguais: $\frac{3}{10} = \frac{18}{60} = \frac{6 \times 3}{6 \times 10}$; em que 6 é o número de partes em que você dobrou a folha;
- ao dobrar em **oito** partes iguais: $\frac{3}{10} = \frac{24}{80} = \frac{8 \times 3}{8 \times 10}$; em que 8 é o número de partes em que você dobrou a folha.

Assim, generalizando o processo de "dobrar" a folha, tem-se que, ao "dobrar" a folha em n partes iguais:

$\frac{3}{10} = \frac{n \times 3}{n \times 10}$, onde n é o número de partes em que você dobrou a folha.

Atividade 3

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer que as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{12\times3}{12\times4}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações em modelos de área sem a contagem um a um das partes que compõem as subdivisões destas representações.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ O propósito de encobrir as divisões do retângulo é para evitar que os alunos façam a contagem das partes uma a uma e que, assim, sejam estimulados a perceber a estrutura multiplicativa 12×3 e 12×4 na divisão do retângulo.

⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte do retângulo (a área da região pintada de azul) está sendo descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes), mas que, não obstante, por expressarem uma mesma quantidade, estas frações são iguais.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Produto: prever

⋆ Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer

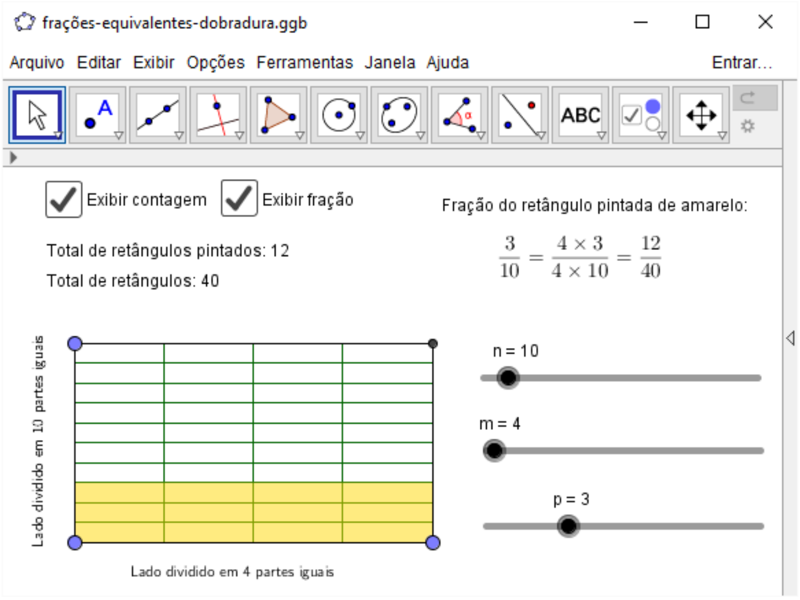
⋆ UERJ: Interpretar: compor e decompor

Resposta da Atividade 3

a) $\frac{3}{4}$.

b) Com a nova divisão, o retângulo fica dividido em $12 \times 4 = 48$ partes, das quais $12 \times 3 = 36$ está pintada de azul. Assim, a fração do retângulo que está pintada de azul é igual a $\frac{12\times3}{12\times4} = \frac{36}{48}$.

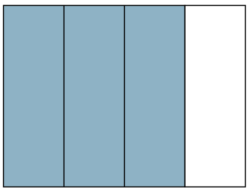
Agora, recomenda-se que você utilize o aplicativo disponível no link a seguir `http://tube.geogebra.org/m/X52U83TR` para dobrar a folha em partes cada vez menores (basta aumentar o valor de m no aplicativo). Mexa à vontade! Qualquer dúvida pergunte ao seu professor.



Atividade 3

(Garcez, 2013)

a) O retângulo desenhado a seguir está dividido em 4 partes iguais, dais quais 3 estão pintadas de azul. Que fração do retângulo está pintada de azul?



b) O retângulo do item anterior foi dividido com o acréscimo de onze linhas horizontais igualmente espaçadas e ele está parcialmente coberto com um retângulo vermelho que impede a visualização dos retângulos menores que compõem a nova equipartição. Com essa nova divisão, em quantas partes fica dividido o retângulo? Quantas destas partes estão pintadas de azul? Que fração do retângulo está pintada de azul?

Atividade 4

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ Comparar frações, em que os denominadores são múltiplos, a partir de modelos contínuos.

⋆ Introduzir a discusão sobre frações equivalentes.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Para amparar a reflexão dos alunos, recomenda-se que sejam feitas cópias das folhas para reprodução disponíveis no final do livro.

⋆ Não se recomenda que a nomenclatura “frações equivalentes” seja introduzida em sala de aula. Por exemplo, pode-se falar apenas que as frações 1/2 e 2/4 representam a mesma quantidade, e por isso têm a mesma representação na reta numérica.

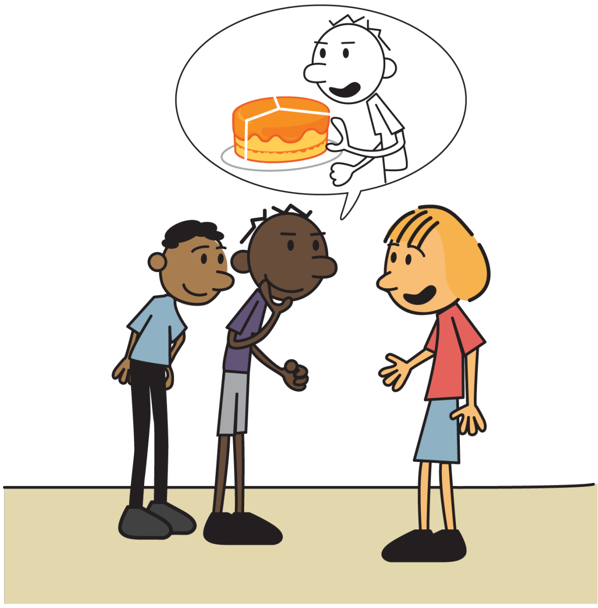
⋆ Esta atividade pode desencadear uma discussão com os alunos que os leve a perceberem que se multiplicamos (dividimos) numerador e denominador de uma fração pelo mesmo número então é gerada uma fração equivalente à fração original.

Resposta da Atividade 4

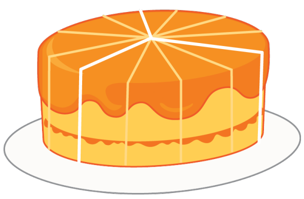
Na hora do lanche, João comeu $\frac{2}{12}$ e Mário $\frac{4}{12}$ do bolo. Se os amigos atrasados não tivessem aparecido antes do lanche, João e Mário teriam comido, cada um, $\frac{1}{3}$ do bolo. Como $\frac{1}{3}$ do bolo corresponde a 4 fatias do bolo cortado em 12 partes iguais, vê-se que João teria comido mais bolo e Mário teria comido a mesma quantidade de bolo se seus amigos não tivessem aparecido antes do lanche.

Atividade 4

Rita convidou seus colegas de escola para virem à sua casa conhecer seu novo cãozinho. Sua mãe preparou um bolo para o lanche da tarde das crianças. Às 16h chegaram dois de seus colegas, João e Mário. Mário logo imaginou o bolo repartido em 3 pedaços e pensou que ele poderia então comer um terço do mesmo



A mãe de Rita começou a cortar o bolo, partindo-o, como Mário havia imaginado, em 3 partes. No entanto, antes que começassem a comer, chegaram mais 4 colegas da escola. Então a mãe de Rita dividiu cada um dos 3 pedaços iniciais em 4 partes de igual tamanho.



Na hora do lanche, João comeu 2 pedaços do bolo e Mário comeu 4.

- Que fração do bolo Mário comeu?

Atividade 5

Objetivo específico: Levar o aluno a

- ⋆ Reconhecer que as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{8}{12}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações em modelos de área circulares.

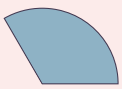
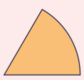
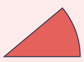
Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 2 ou 3 alunos para que eles possam discutir as soluções apresentadas, dentro do grupo, durante a condução da atividade.
- ⋆ Os setores circulares empregados na condução da atividade podem ser aproveitados da *Atividade 10* da Lição 1.
- ⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte do círculo (a área da região pintada de cinza) está sendo descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes), mas que, não obstante, por expressarem uma mesma quantidade, estas frações são iguais, não apenas porque por sobreposição parecem ser a mesma quantidade, mas porque, como na atividade anterior, se cada terço do círculo for subdividido em 2 e 4 partes iguais, respectivamente, então, de fato, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.
- ⋆ Além disso, observaçào análoga cabe para as frações que completam a terceira coluna da tabela: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ e $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$.

Classificações:

- ⋆ Heid et al.: Conceito: identificar e descrever
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer
- ⋆ UERJ: Observar: identificar e reconhecer

Resposta da Atividade 5

Tipo da peça	Quantas cabem na região cinza?	Juntas, são que fração do círculo?	Fração do círculo não colorida de cinza?
$\frac{1}{3}$ 	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}$ 	4	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$
$\frac{1}{9}$ 	6	$\frac{6}{9}$	$\frac{3}{9}$

- Que fração do bolo João comeu?

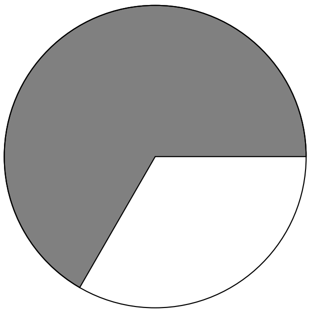
Se os amigos atrasados não tivessem aparecido antes do lanche, a mãe de Rita não teria subdividido as 3 fatias iniciais. Assim, se fossem apenas Rita, Mário e João, cada um teria comido $\frac{1}{3}$ do bolo.

- Nesse caso, Mário teria comido menos bolo, mais bolo ou a mesma quantidade de bolo que comeu?

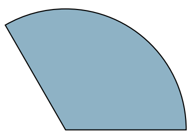
- E João, teria comido menos bolo, mais bolo ou a mesma quantidade de bolo que comeu?

Atividade 5

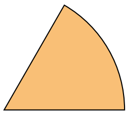
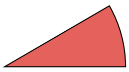
O objetivo desta atividade é estudar a fração do círculo que está pintada de cinza no encarte que você recebeu.



Para isto, responda às perguntas na tabela a seguir com frações adequadas. Se necessário, use as peças coloridas que você recortou e usou na Atividade 10 da Lição 1 para avaliar as suas respostas.

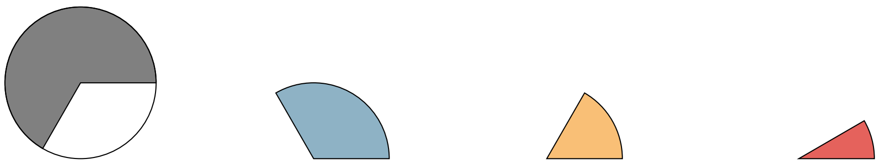
Tipo da peça	Quantas peças como essa cabem na região cinza?	As peças que você usou, juntas, são que fração do círculo?	Que fração do círculo não está colorida de cinza?
$\frac{1}{3}$ 			

Notas de Aula

Tipo da peça	Quantas peças como essa cabem na região cinza?	As peças que você usou, juntas, são que fração do círculo?	Que fração do círculo não está colorida de cinza?
$\frac{1}{6}$ 			
$\frac{1}{12}$ 			

REFLETINDO

Ao resolver esta última atividade você deve ter percebido que a região do círculo destacada em cinza pode ser preenchida de diferentes maneiras por justaposições de cada uma das peças coloridas que você recortou.



Além disso, deve ter observado que, quanto menor a peça colorida, mais dessas peças você precisou para cobrir a região do círculo destacada em cinza.
Ao preencher a **primeira linha da tabela**, você deve ter percebido que três peças azuis cobrem o círculo inteiro e que duas peças azuis cobrem a região do círculo destacada em cinza.

Portanto, a região do círculo destacada em cinza é igual a $\frac{2}{3}$ do círculo.
Para preencher a **segunda linha da tabela** você deve ter percebido que

- que seis peças laranjas cobrem o círculo inteiro;

Notas de Aula

- que duas peças laranjas cobrem uma peça azul;

- e que quatro peças laranjas cobrem a região do círculo destacada em cinza.

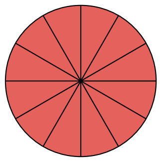
$\left(\frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{3}\right)$. Portanto, a região do círculo destacada em cinza é igual a $\frac{4}{6}$ do círculo.
Este raciocínio pode ser escrito da seguinte maneira: $\frac{1}{3}$ é igual a dois $\frac{1}{6}$, ou, simplesmente, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

Logo, $\frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$.

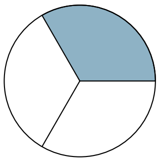
Do mesmo modo, para preencher a **terceira linha da tabela** você deve ter percebido:

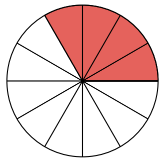
- que doze peças vermelhas cobrem o círculo inteiro;

Notas de Aula

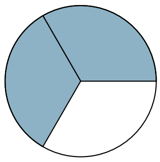


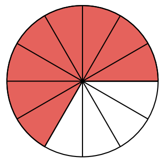
- que quatro peças vermelhas cobrem uma peça azul;





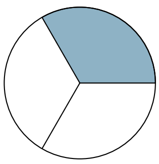
- e que oito peças vermelhas cobrem a região do círculo destacada em cinza

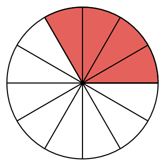




$$\left(\frac{8}{12} = \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{3}\right).$$

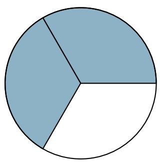
Logo, a região do círculo destacada em cinza é igual a $\frac{8}{12}$ do círculo.
Este raciocínio pode ser representado do seguinte modo: $\frac{1}{3}$ é igual a quatro $\frac{1}{12}$, ou, simplesmente, $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$.

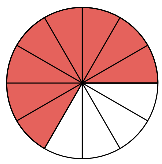




Logo,

$$\frac{8}{12} = \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{3}.$$





Portanto, a região do círculo destacada em cinza, que é $\frac{2}{3}$ do círculo, também

Atividade 6

Objetivo específico: Levar o aluno a

- Reconhecer que as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$ e $\frac{8}{16}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações em modelos de área retangulares.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 2 ou 3 alunos para que eles possam discutir as soluções apresentadas, dentro do grupo, durante a condução da atividade.

- É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte do retângulo (a região colorida de cinza) está sendo descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes) mas que, não obstante, por expressarem uma mesma quantidade, são frações iguais.

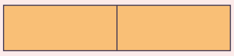
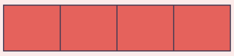
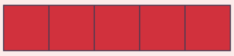
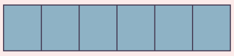
Esta atividade possui folhas para reprodução disponíveis no final do livro.

Classificações:

- Heid et al.: Conceito: identificar e descrever
- Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer
- UERJ: Observar: identificar e reconhecer

Resposta da Atividade 6

PARTE 1

Retângulo	Número de partes em se encontra dividido	Cada parte é que fração do retângulo?
	2	$\frac{1}{2}$
	3	$\frac{1}{3}$
	4	$\frac{1}{4}$
	5	$\frac{1}{5}$
	6	$\frac{1}{6}$
	7	$\frac{1}{7}$
	8	$\frac{1}{8}$
	9	$\frac{1}{9}$
	10	$\frac{1}{10}$
	16	$\frac{1}{16}$

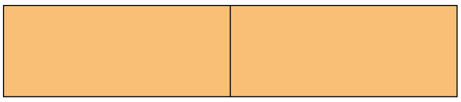
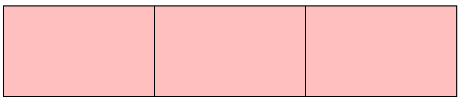
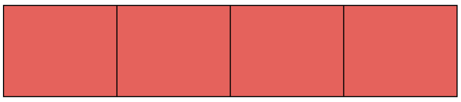
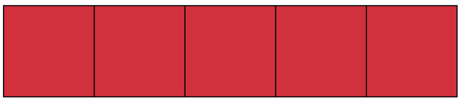
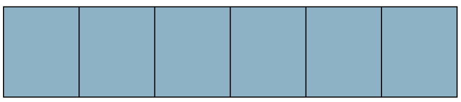
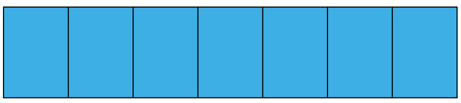
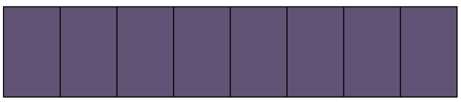
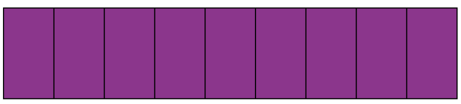
é igual a $\frac{4}{6}$ do círculo e igual a $\frac{8}{12}$ do círculo, ou seja, as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$e $\frac{8}{12}$ representam a mesma quantidade e, portanto, são iguais:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}.$$

Atividade 6

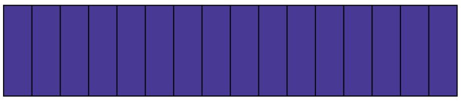
PARTE 1

Você recebeu um encarte com 10 retângulos coloridos de mesmo tamanho, cada um deles dividido em um determinado número de partes iguais. Seguindo o modelo feito para o primeiro retângulo, preencha a tabela a seguir.

Retângulo	Número de partes em que se encontra dividido	Cada parte é que fração do retângulo?
	2	$\frac{1}{2}$
		
		
		
		
		
		
		

PARTE 2

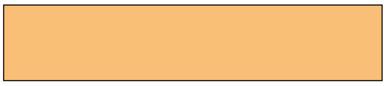
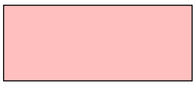
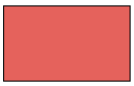
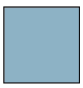
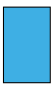
Tipo da peça	Quantas cabem na região cinza?	Juntas, são que fração do retângulo do encarte?	Fração do encarte não colorida de cinza?
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	2	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$
	3	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$
	4	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$
	5	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{10}$
	8	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{16}$

Retângulo	Número de partes em que se encontra dividido	Cada parte é que fração do retângulo?
		
		

PARTE 2

O objetivo desta parte é estudar a fração do retângulo que está colorida de cinza no segundo encarte que você recebeu.

Para isto, responda às perguntas na tabela a seguir com frações adequadas. Se necessário, recorte e use as peças coloridas do primeiro encarte para avaliar as suas respostas.

Tipo da peça	Quantas peças como essa cabem na região cinza?	As peças que você usou, juntas, são que fração do retângulo do encarte?	Que fração do retângulo do encarte não está colorida de cinza?
			
			
			
			
			
			

Notas de Aula

REFLETINDO

Você deve ter observado que as atividades 5 e 6 são muito parecidas. A diferença é que, nesta última foram utilizadas figuras retangulares (na atividade 5 foram usadas figuras circulares). Ao resolver esta atividade você deve ter percebido que

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{8}{16},$$

pois todas as frações representam a mesma quantidade: a medida da área da região retangular cinza em relação à área do retângulo do encarte, isto é, quando a unidade considerada é a área do retângulo do encarte. Observe ainda que as igualdades acima podem ser reescritas do seguinte modo:

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times 1}{1\times 2}=\frac{2\times 1}{2\times 2}=\frac{3\times 1}{3\times 2}=\frac{4\times 1}{4\times 2}=\frac{5\times 1}{5\times 2}=\frac{8\times 1}{8\times 2}.$$

Na verdade, para qualquer subdivisão da fração $\frac{1}{2}$ em p partes iguais, deve-se considerar p dessas novas partes para obter uma fração igual à anterior. Matematicamente falando, isto significa que:

$$\frac{1}{2}=\frac{p\times 1}{p\times 2}$$

qualquer que seja p um número natural maior que zero. De modo geral, para qualquer fração de numerador n e denominador d, temos que

$$\frac{n}{d}=\frac{1\times n}{1\times d}=\frac{2\times n}{2\times d}=\frac{3\times n}{3\times d}=\frac{4\times n}{4\times d}=\frac{5\times n}{5\times d}=\cdots=\frac{p\times n}{p\times d}=\cdots$$

qualquer que seja o número natural $p>0$. Com isso, você aprendeu uma técnica para obter frações que representam a mesma quantidade que uma fração dada: basta multiplicar o numerador e o denominador da fração dada por um mesmo número natural $p>0$.

Isto será muito útil para a realização de outras atividades com frações.

Atividade 7

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer que, para cada $0 \leq i \leq 3$, as frações $\frac{i}{3}$, $\frac{2\times i}{2\times 3}$, $\frac{3\times i}{3\times 3}$ e $\frac{4\times i}{4\times 3}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações na reta numérica.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Nas retas numéricas apresentadas, as origens estão alinhadas e as unidades correspondem a segmentos unitários congruentes, o que garante que uma fração associada a um determinado ponto em uma reta seja a mesma fração nos pontos correspondentes nas demais retas.

⋆ Caso seus alunos não percebam, aponte para o fato de que as segunda, terceira e quarta retas numéricas são obtidas por meio de subdivisões dos terços da primeira reta numérica em duas, três e quatro partes iguais, respectivamente. Para resolver o item c) desta atividade, se faz necessário dividir cada terço em cinco partes iguais.

⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que, nesta atividade, cada ponto marcado na reta numérica está sendo descrito por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes) mas que, não obstante, por corresponderem ao mesmo ponto da reta numérica, estas frações são iguais.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Conceito: identificar e descrever

⋆ Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer

⋆ UERJ: Observar: identificar e reconhecer

Para o item c):

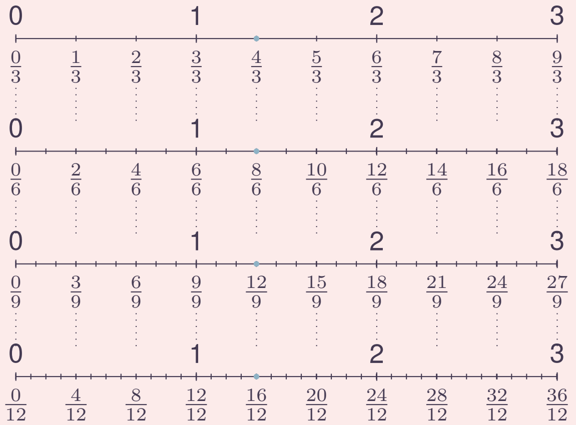
⋆ Heid et al.: Produto: gerar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 3: comparar

⋆ UERJ: Interpretar: discriminar

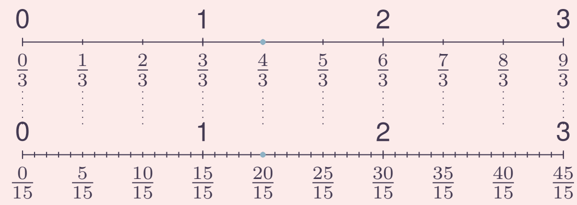
Resposta da Atividade 7

a)



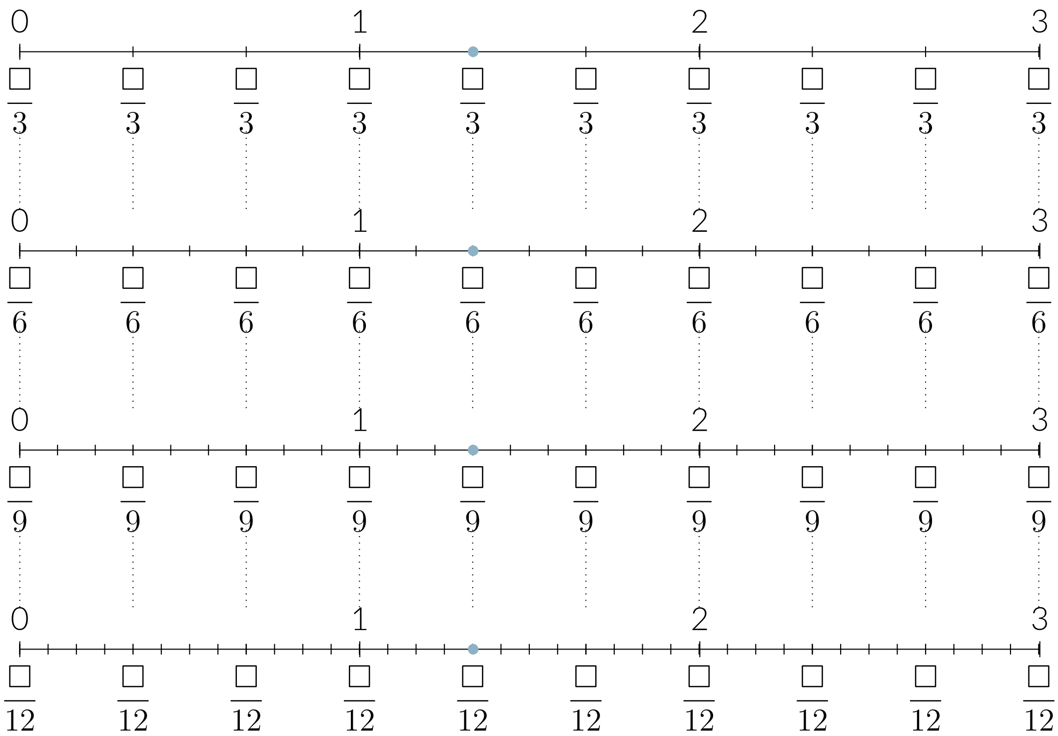
b) $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{16}{12}$.

c) No item b) foi estabelecido que o ponto azul corresponde a fração $\frac{4}{3}$ pois, ao se justapor 4 segmentos que são $\frac{1}{3}$ do segmento unitário (que está, aqui, servindo como unidade) a partir da origem 0, este ponto é a outra extremidade desta justaposição. Agora, ao se subdividir estes 4 segmentos que são $\frac{1}{3}$ do segmento unitário em 5 partes iguais, obtêm-se 20 segmentos justapostos que são $\frac{1}{15}$ do segmento unitário. Sendo o ponto azul extremo desta justaposição, segue-se que ele corresponde a fração $\frac{20}{15}$.



Atividade 7

a) Preencha os quadradinhos □ com numeradores adequados de modo que cada fração corresponda a sua respectiva marca em cada reta numérica.



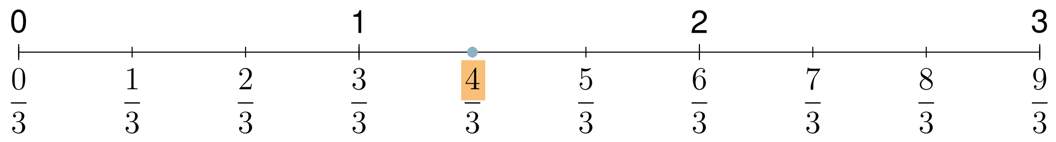
b) Escreva quatro frações com numeradores diferentes (consequentemente com denominadores também diferentes) que correspondam ao ponto azul em destaque na figura.

c) Determine uma fração de denominador 15 que corresponda ao ponto azul em destaque. Justifique sua resposta usando uma reta numérica!

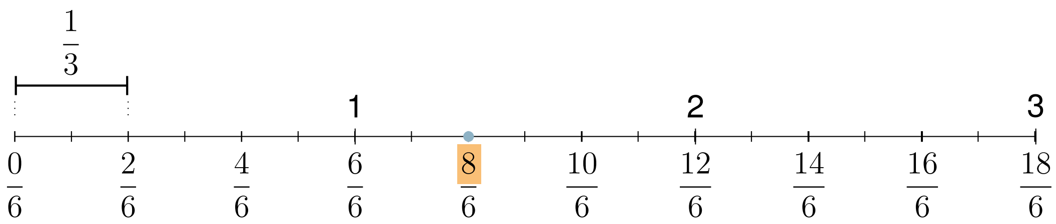
REFLETINDO

Na Atividade 7, foram apresentadas quatro figuras que mostravam a reta numérica com subdivisões em partes iguais, mas de formas diferentes.
Na primeira figura, as subdivisões do segmento unitário (que está, aqui, servindo como unidade) eram em três partes iguais, ou seja, em terços. Para representar o ponto azul na reta numérica da primeira figura, foram consideradas quatro cópias de $\frac{1}{3}$, justapostas a partir da origem. Portanto, o ponto azul indica na reta numérica a fração $\frac{4}{3}$.

Notas de Aula



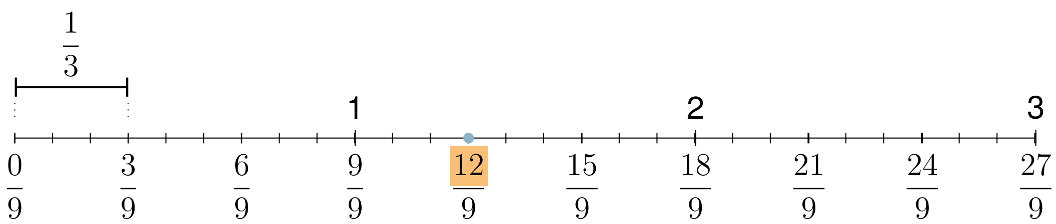
Na segunda figura, cada uma das subdivisões do segmento unitário foram divididas em duas partes iguais. Assim, as justaposições dos segmentos unitários ficam subdivididos em seis partes iguais, ou seja, em sextos. Para representar o ponto azul na reta numérica da segunda figura, foram necessárias então oito (o dobro da quantidade anterior) cópias de $\frac{1}{6}$. Logo, o ponto azul representa também a fração $\frac{8}{6}$.



Isto é,

$$\frac{4}{3} = \frac{2 \times 4}{2 \times 3} = \frac{8}{6}.$$

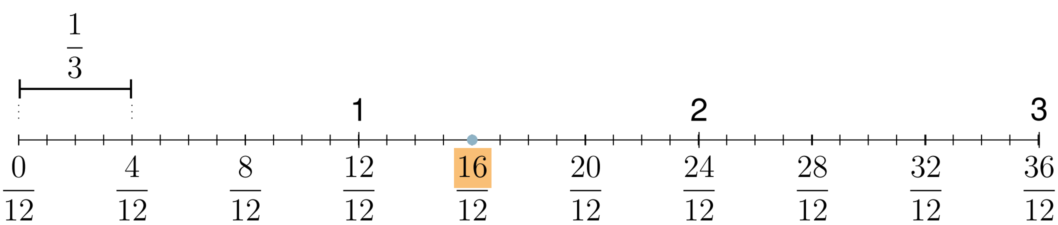
Na terceira figura, cada uma das três subdivisões do segmento unitário apresentadas na primeira figura foi dividida em três partes iguais. Assim, as justaposições dos segmentos unitários ficam subdivididos em nove partes iguais, ou seja, em nonos. Para representar o ponto azul na reta numérica da terceira figura, foram necessárias doze (o triplo da quantidade inicial) cópias de $\frac{1}{96}$. Portanto, o ponto azul representa também a fração $\frac{12}{9}$.



Isto é,

$$\frac{4}{3} = \frac{3 \times 4}{3 \times 3} = \frac{12}{9}.$$

Na quarta figura, cada uma das três subdivisões do segmento unitário apresentadas na primeira figura foi dividida em quatro partes iguais.



Notas de Aula

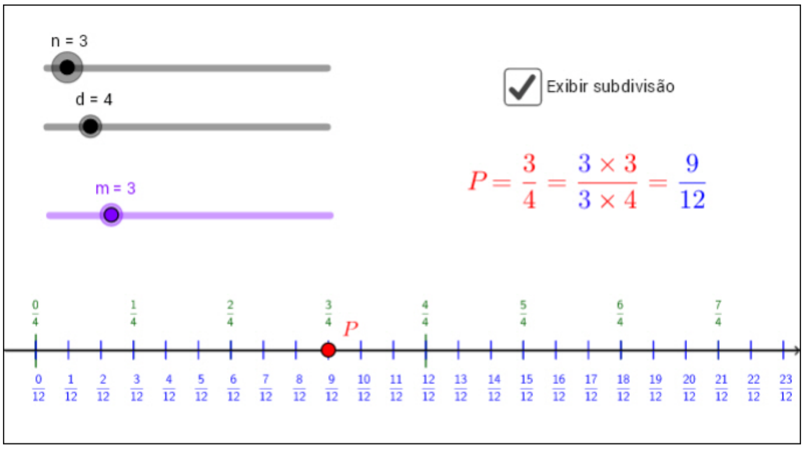
Assim, como nos casos anteriores, conclui-se que o ponto azul representa a fração $\frac{16}{12}$:

$$\frac{4}{3} = \frac{4 \times 4}{4 \times 3} = \frac{16}{12}.$$

Portanto, o ponto azul indica qualquer uma das frações iguais

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{16}{12}.$$

Agora, recomenda-se que você utilize o aplicativo disponível no link a seguir (`https://www.geogebra.org/m/Pr3s9vak`) para perceber como frações com numeradores e denominadores diferentes podem representar um mesmo ponto na reta numérica. Mexa à vontade! Qualquer dúvida pergunte ao seu professor.



Mais geralmente, ao subdividir cada subintervalo de comprimento igual a $\frac{1}{3}$ em m partes iguais, obtém-se que

$$\frac{4}{3} = \frac{m \times 4}{m \times 3}.$$

Esse raciocínio vale para qualquer fração. Ou seja, dada uma fração $\frac{n}{d}$, pode-se representá-la de forma equivalente, subdividindo cada subintervalo de comprimento $\frac{1}{d}$ em m partes iguais.
Neste caso serão necessárias $(m \times n)$ cópias de subintervalos de comprimento $\frac{1}{m \times d}$, isto é:

$$\frac{n}{d} = \frac{m \times n}{m \times d},$$

qualquer que seja o número natural $m > 0$.

Atividade 8

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Determinar uma fração igual a uma dada fração com denominador especificado a partir da observação das representações destas frações em diversos modelos de frações, incluindo a reta numérica.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 3 alunos (cada aluno do grupo poderá usar um modelo diferente para obter a fração solicitada).

⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte em cada modelo de área e um mesmo ponto na reta numérica estão sendo descritos por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes) mas que, não obstante, estas frações são iguais por expressarem uma mesma quantidade ou por serem representadas por um mesmo ponto na reta numérica.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Produto: gerar

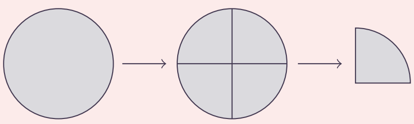
⋆ Nicely, Jr.: Nível 5: aplicar

⋆ UERJ: Interpretar: discriminar

Resposta da Atividade 8

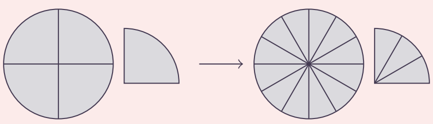
a) Tomando um círculo como unidade, o dividimos em 4 partes iguais e tomamos 5 cópias de uma parte para obter $\frac{5}{4}$ da unidade. Dividindo cada uma das 5 cópias em 3 partes iguais, obtemos então 15 cópias de $\frac{1}{12}$ da unidade. Portanto, $\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$.

Unidade



Divide-se a unidade em 4 partes iguais.

Uma parte corresponde a um quarto.

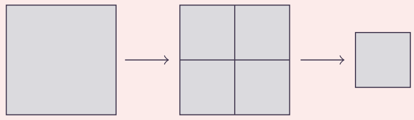


Junta-se 5 cópias de uma parte para obter cinco quartos.

Divide-se cada cópia em 3 partes iguais obtendo 15 cópias de um doze avos.

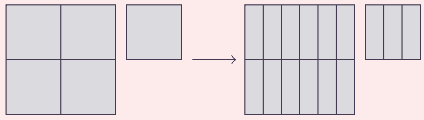
b) Tomando um quadrado como unidade, o dividimos em 4 partes iguais e tomamos 5 cópias de uma parte para obter $\frac{5}{4}$ da unidade. Dividindo cada uma das 5 cópias em 3 partes iguais, obtemos então 15 cópias de $\frac{1}{12}$ da unidade. Portanto, $\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$.

Unidade



Divide-se a unidade em 4 partes iguais.

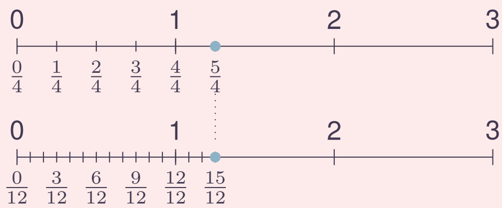
Uma parte corresponde a um quarto.



Junta-se 5 cópias de uma parte para obter cinco quartos.

Divide-se cada cópia em 3 partes iguais obtendo 15 cópias de um doze avos.

c) Após marcar os números 0 e 1 na reta numérica, dividimos o segmento unitário (aquele de extremidades em 0 e 1) em 4 partes iguais. Cada parte é um segmento que corresponde a $\frac{1}{4}$ da unidade. Ao se justapor 5 segmentos que são $\frac{1}{4}$ da unidade a partir da origem 0, a fração $\frac{5}{4}$ corresponde ao ponto que é a outra extremidade desta justaposição. Agora, ao se subdividir estes 5 segmentos que são $\frac{1}{4}$ da unidade em 5 partes iguais, obtêm-se 15 segmentos justapostos que são $\frac{1}{12}$ da unidade. O ponto que corresponde a $\frac{5}{4}$ é ainda extremo desta justaposição e, portanto, que ele corresponde também a fração $\frac{15}{12}$.



Atividade 8

O objetivo desta atividade é determinar uma fração de denominador 12 que seja igual à fração $\frac{5}{4}$.

a) Tomando um círculo como unidade:

   (i) Faça um desenho que represente $\frac{5}{4}$ da unidade.

   (ii) Usando o desenho feito, represente uma fração de denominador 12 que seja igual a $\frac{5}{4}$.

b) Tomando um quadrado como unidade:

   (i) Faça um desenho que represente $\frac{5}{4}$ da unidade.

   (ii) Usando o desenho feito, represente uma fração de denominador 12 que seja igual a $\frac{5}{4}$.

c) Desenhe uma reta numérica e, em seguida, marque os números 0, 1 e $\frac{5}{4}$. A partir deste desenho, represente uma fração de denominador 12 que seja igual a $\frac{5}{4}$.

ORGANIZANDO AS IDEIAS

Olá! É chegada a hora de ajudar Miguel e Alice, nossos amigos da história em quadrinhos do início da lição, a compararem as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{25}$.

Ora, na lição anterior você aprendeu a comparar frações com o mesmo denominador. Neste caso, como os denominadores eram iguais, você precisou comparar apenas os numeradores da fração. Você também aprendeu a comparar frações com o com mesmo numerador. Neste caso, como os numeradores eram iguais, você precisou comparar apenas os denominadores da fração. Mas, Miguel e Alice querem comparar duas frações com denominadores bem como numeradores diferentes.

Aí vai uma pista. A ideia é utilizar o que você aprendeu até aqui nesta lição para determinar frações iguais às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{25}$ que possuem o mesmo denominador.

Deste modo, transforma-se um “novo problema” em um “velho problema”: o de comparar frações com o mesmo denominador.

Usando o que você aprendeu com as atividades anteriores, pode-se, por exemplo, construir as seguintes igualdades:

$$\frac{1}{3}=\frac{2\times 1}{2\times 3}=\frac{3\times 1}{3\times 3}=\frac{4\times 1}{4\times 3}=\frac{5\times 1}{5\times 3}=\cdots=\frac{n\times 1}{n\times 3}=\cdots$$

e

$$\frac{8}{25}=\frac{2\times 8}{2\times 25}=\frac{3\times 8}{3\times 25}=\frac{4\times 8}{4\times 25}=\frac{5\times 8}{5\times 25}=\cdots=\frac{m\times 8}{m\times 25}=\cdots$$

Notas de Aula

quaisquer que sejam m e n números naturais, $m > 0$, $n > 0$.

Ao observar a lista de frações iguais à fração $\frac{1}{3}$, enunciada acima, você deve ter percebido que os denominadores dessas frações são múltiplos de 3. Do mesmo modo, com relação à lista de frações iguais à fração $\frac{8}{25}$, você deve ter percebido que os denominadores dessas frações são múltiplos de 25. Assim, para efeito de comparação, será necessário encontrar frações iguais às frações dadas que possuem denominadores que sejam, simultaneamente, múltiplos de 3 e de 25. Um número que satisfaz essa condição é o número $75 = 3 \times 25$.

Desta maneira, obtém-se que

$$\frac{1}{3} = \frac{25 \times 1}{25 \times 3} = \frac{25}{75}$$

e que

$$\frac{8}{25} = \frac{3 \times 8}{3 \times 25} = \frac{24}{75}.$$

Agora é só comparar as frações $\frac{25}{75}$ e $\frac{24}{75}$. Mas, isto, já é conhecido. Como $25 > 24$, tem-se que

$$\frac{1}{3} = \frac{25}{75} > \frac{24}{75} = \frac{8}{25};$$

isto é,

$$\frac{1}{3} > \frac{8}{25}.$$

Generalização do procedimento

Para generalizar o procedimento apresentado aqui, considere duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ diferentes.

Com base na solução dada para o problema do Miguel e da Alice, você deve ter percebido que para comparar duas frações, basta comparar as frações iguais a elas, mas que possuem o mesmo denominador. Uma forma simples para realizar tal tarefa é procurar frações iguais às frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ cujos denominadores são iguais ao número $d \times b$ que é um múltiplo comum de b e d.

Ora, para obter uma fração igual à fração $\frac{a}{b}$ cujo denominador seja igual a $d \times b$ basta multiplicar tanto o numerador como o denominador da fração por d (denominador da segunda fração):

$$\frac{d \times a}{d \times b} = \frac{a}{b}.$$

Do mesmo modo, para obter uma fração igual à fração $\frac{c}{d}$ cujo denominador seja igual $d \times b$ basta multiplicar tanto o numerador e como o denominador da fração por b (denominador da primeira fração):

$$\frac{b \times c}{b \times d} = \frac{c}{d}.$$

Assim, para comparar as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ é suficiente comparar os numeradores das frações $\frac{d \times a}{d \times b}$ e $\frac{b \times c}{b \times d}$. Isto é,

Atividade 9

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Determinar uma fração igual a uma dada fração irredutível com denominador especificado.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Espera-se, principalmente nos Itens c e d, que os alunos consigam obter a fração solicitada usando a propriedade que $\frac{m \times a}{m \times b}$ é equivalente a $\frac{a}{b}$ e sem recorrer a desenhos de modelos de área de frações.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Produto: gerar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 3: comparar

⋆ UERJ: Interpretar: discriminar

Resposta da Atividade 9

a) Como $6 = 2 \times 3$, segue-se que $\frac{7}{3} = \frac{2 \times 7}{2 \times 3} = \frac{14}{6}$.

b) Como $21 = 7 \times 3$, segue-se que $\frac{7}{3} = \frac{7 \times 7}{7 \times 3} = \frac{49}{21}$.

c) Como $123 = 41 \times 3$, segue-se que $\frac{7}{3} = \frac{41 \times 7}{41 \times 3} = \frac{287}{123}$.

d) Como $210 = 70 \times 3$, segue-se que $\frac{7}{3} = \frac{70 \times 7}{70 \times 3} = \frac{490}{210}$.

Atividade 10

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Determinar uma fração igual a uma dada fração com numerador ou denominador especificados.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Espera-se que, neste estágio, os alunos consigam obter as respostas usando a propriedade que $\frac{m \times a}{m \times b}$ é equivalente a $\frac{a}{b}$ e sem recorrer a desenhos de modelos de área de frações.

⋆ Observe que, no item (e), não existe um número natural n tal que $6 \times n = 9$. Para resolver o item, o aluno pode usar o resultado do item (d) e substituir $\frac{9}{12}$ por $\frac{3}{4}$ e proceder com o exercício. A mesma observação aplica-se ao item (f).

⋆ Observe para seus alunos que os Itens (e) e (f) são exemplos de frações iguais para os quais não é possível obter uma fração multiplicando-se o numerador e o denominador da outra por um mesmo número natural.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Produto: gerar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 3: comparar

⋆ UERJ: Interpretar: discriminar

Resposta da Atividade 10

a) Uma vez que $6 = 2 \times 3$, então $\frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{2 \times 3} = \frac{10}{6}$. Logo, $\square$ deve ser preenchido com 10.

b) Uma vez que $6 = 3 \times 2$, então $\frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{3 \times 3} = \frac{6}{9}$. Logo, $\square$ deve ser preenchido com 9.

c) Uma vez que $12 = 4 \times 3$ e $8 = 4 \times 2$, então $\frac{8}{12} = \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{3}$. Logo, $\square$ deve ser preenchido com 2.

d) Uma vez que $9 = 3 \times 3$ e $12 = 3 \times 4$, então $\frac{9}{12} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4} = \frac{3}{4}$. Logo, $\square$ deve ser preenchido com 4.

e) Pelo item d, $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Uma vez que $6 = 2 \times 3$, então $\frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{2 \times 4} = \frac{6}{8}$. Logo, $\square$ deve ser preenchido com 8.

f) Pela solução do item e, $\square$ deve ser preenchido com 9.

Atividade 11

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Usar igualdade de frações para calcular o numerador de uma das frações em uma situação contextualizada.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Produto: prever

⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: analisar

⋆ UERJ: Interpretar: explicar

Resposta da Atividade 11

As 17 marcações no copo do seu colega divide a capacidade do copo em 16 partes iguais. Quantas destas partes correspondem a $\frac{3}{4}$ da capacidade do copo (que é fração da capacidade do copo que está preenchida com suco)? Para responder a esta pergunta, devemos calcular o numerador de uma fração de denominador 16 que seja igual a $\frac{3}{4}$, isto é, devemos preencher $\square$ com um número tal que

$\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$.

Como $16 = 4 \times 4$, segue-se que

$\frac{3}{4} = \frac{4 \times 3}{4 \times 4} = \frac{12}{16}$.

Assim, não necessárias 12 partes de $\frac{1}{16}$ da capacidade do copo. Consequentemente, 13 níveis do copo do seu colega devem ser preenchidos com suco de laranja para que ele fique com a mesma quantidade suco de laranja que você.

$$\text{se } d \times a > b \times c \text{ então } \frac{a}{b} = \frac{d \times a}{d \times b} > \frac{b \times c}{b \times d} = \frac{c}{d}$$

e

$$\text{se } d \times a < b \times c \text{ então } \frac{a}{b} = \frac{d \times a}{d \times b} < \frac{b \times c}{b \times d} = \frac{c}{d}.$$

MÃO NA MASSA

Atividade 9

Determine uma fração que seja igual a $\frac{7}{3}$ e que tenha denominador

a) 6 b) 21 c) 123 d) 210

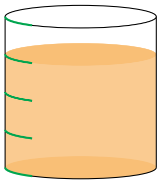
Atividade 10

(Van de Walle, 2009) Preencha os $\square$ com números de forma a tornar as igualdades verdadeiras.

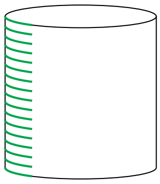
a) $\frac{5}{3} = \frac{\square}{6}$ b) $\frac{2}{3} = \frac{6}{\square}$ c) $\frac{8}{12} = \frac{\square}{3}$ d) $\frac{9}{12} = \frac{3}{\square}$ e) $\frac{9}{12} = \frac{6}{\square}$ f) $\frac{6}{8} = \frac{\square}{12}$

Atividade 11

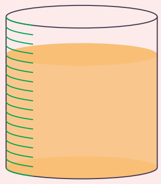
Você tem um copo cilíndrico graduado com cinco marcas horizontais igualmente espaçadas. O copo tem suco de laranja até $\frac{3}{4}$ de sua capacidade, como ilustra a imagem:



Seu colega tem um copo cilindrico idêntico, mas graduado com 17 níveis horizontais igualmente espaçados:



Verifique se é possível completar um número inteiro de níveis do copo de seu colega de modo a ficar com a mesma quantidade de suco. Em caso afirmativo, explique sua resposta.



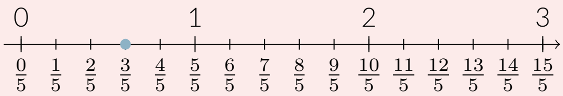
Atividade 12

Objetivo específico: Levar o aluno a

- Reconhecer que, dada uma fração $p = \frac{n}{d}$, existe um quantidade finita de frações da forma $\frac{k}{d}$ que são menores do que p e uma quantidade infinita de frações da forma $\frac{k}{d}$ que são maiores do que p.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
- Alguns alunos podem ainda necessitar de apoio de material concreto para responder à questão.
- Recomenda-se que, na discussão da atividade, uma reta numérica com quintos marcados seja usada como uma contrapartida visual para as respostas das perguntas.



Classificações:

- Heid et al.: Conceito: elaborar
- Nicely, Jr.: Nível 4: categorizar
- UERJ: Interpretar: classificar

Resposta da Atividade 12

a) Três frações: $\frac{0}{5}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{5}$. Justificativa: $\frac{3}{5}$ são três ``cópias" de $\frac{1}{5}$. Qualquer outra fração de denominador $5$ também é composta por uma quantidade inteira de ``cópias" de $\frac{1}{5}$, quantidade esta determinada pelo numerador de fração. Para se ter então uma fração de denominador 5 menor do que $\frac{3}{5}$, devemos ter menos do que 3 ``cópias" de $\frac{1}{5}$ : $2$ ``cópias" , 1 ``cópia" ou $0$ ``cópia". Assim, as frações de denominador 5 menor do que $\frac{3}{5}$ são $\frac{0}{5}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{5}$.

b) Infinitas frações $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, etc. Justificativa: $\frac{3}{5}$ são três ``cópias" de $\frac{1}{5}$. Qualquer outra fração de denominador $5$ também é composta por uma quantidade inteira de ``cópias" de $\frac{1}{5}$, quantidade esta determinada pelo numerador de fração. Para se ter então uma fração de denominador 5 maior do que $\frac{3}{5}$, devemos ter mais do que 3 ``cópias" de $\frac{1}{5}$ : $4$ ``cópias" , 5 ``cópias" , $6$ ``cópias" , 7 ``cópias" , etc. Assim, as frações de denominador 5 maiores do que $\frac{3}{5}$ são $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, etc.

Atividade 13

Objetivo específico: Levar o aluno a

- Comparar frações por meio de igualdade de frações.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida individualmente. Contudo, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
- A discussão da atividade pode incluir o uso de outras estratégias, que não a igualdade de frações, para se estabelecer a comparação das frações apresentadas.

Classificações:

- Heid et al.: Conceito: elaborar
- Nicely, Jr.: Nível 3: comparar
- UERJ: Interpretar: comparar

Resposta da Atividade 13

item	Fração	``$>$", ``$<$" ou ``$=$"	Fração
a)	$\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$	$>$	$\frac{24}{30} = \frac{4}{5}$
b)	$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$	$>$	$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
c)	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	$=$	$\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$
d)	$\frac{6}{25} = \frac{24}{100}$	$<$	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
e)	$\frac{22}{7} = \frac{220}{70}$	$>$	$\frac{217}{70} = \frac{31}{10}$
f)	$\frac{22}{33} = \frac{2}{3}$	$=$	$\frac{2}{3} = \frac{24}{36}$
g)	$\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$	$=$	$\frac{50}{100} = \frac{50}{100}$
h)	$\frac{7}{5} = \frac{84}{60}$	$<$	$\frac{85}{60} = \frac{17}{12}$
i)	$\frac{12}{6} = \frac{2}{1}$	$<$	$\frac{3}{1} = \frac{9}{3}$

Atividade 12

a) Quantas são as frações com denominador igual a 5 que são menores do que $\frac{3}{5}$? Explique como você chegou à sua resposta.

b) Quantas são as frações com denominador igual a 5 que são maiores do que $\frac{3}{5}$? Explique como você chegou à sua resposta.

Atividade 13

Para cada par de frações na mesma linha da tabela a seguir, determine frações de mesmo denominador que sejam iguais a cada uma das frações dadas. Em seguida, compare essas frações, preenchendo a coluna em branco, com um dos símbolos "$>$", "$<$" ou "$=$", de forma que, em cada linha da tabela, a comparação estabelecida seja verdadeira. Vamos fazer o Item a) juntos: observe que

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{5 \times 6} = \frac{25}{30} \text{ e } \frac{4}{5} = \frac{6 \times 4}{6 \times 5} = \frac{24}{30}.$$

Como $25 > 24$, segue-se que $\frac{25}{30} > \frac{24}{30}$. Portanto, preenchemos a coluna em branco da primeira linha com $>$.

Item	Fração	$>$, $<$ ou $=$	Fração
a)	$\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$	$>$	$\frac{24}{30} = \frac{4}{5}$
b)	$\frac{3}{4} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{2}{3}$
c)	$\frac{2}{10} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{3}{15}$
d)	$\frac{1}{4} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{6}{25}$
e)	$\frac{22}{7} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{31}{10}$
f)	$\frac{22}{33} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{24}{36}$
g)	$\frac{5}{10} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{50}{100}$

Atividade 14

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Comparar frações.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Existem outros tipos de ferramentas cujas peças componentes também são identificadas por frações: brocas de furadeiras, chaves de boca e aperto, chaves biela, ...

⋆ Recomenda-se que, caso seja viável, algumas destas ferramentas sejam levadas para sala de aula para conhecimento dos alunos.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Conceito: elaborar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 3: comparar

⋆ UERJ: Interpretar: comparar

Resposta da Atividade 14

Uma vez que $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$, $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$, $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$, $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$ e $\frac{7}{8} = \frac{14}{16}$, os tamanhos dos soquetes são os seguintes:

(A): $\frac{7}{8}$, (B): $\frac{13}{16}$, (C): $\frac{3}{4}$, (D): $\frac{11}{16}$, (E): $\frac{5}{8}$, (F): $\frac{9}{16}$, (G): $\frac{1}{2}$, (H): $\frac{7}{16}$, (I): $\frac{3}{8}$.

Atividade 15

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Comparar uma fração com uma outra fração determinada a partir da alteração dos termos (numerador ou denominador) da primeira fração a partir de somas e multiplicações por números naturais.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Enquanto que esta atividade usa a fração $\frac{4}{7}$ como referência, a discussão da atividade com os alunos pode incluir a questão se as conclusões obtidas para $\frac{4}{7}$ mudam se a fração de referência mudar. Neste contexto, o item (D) é especialmente interessante pois, neste caso, a conclusão (se a fração ficará menor, maior ou igual a fração original) de fato dependerá se a fração original é maior, menor ou igual a 1.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Produto: prever

⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: analisar

⋆ UERJ: Analisar: levantar hipóteses

Resposta da Atividade 15

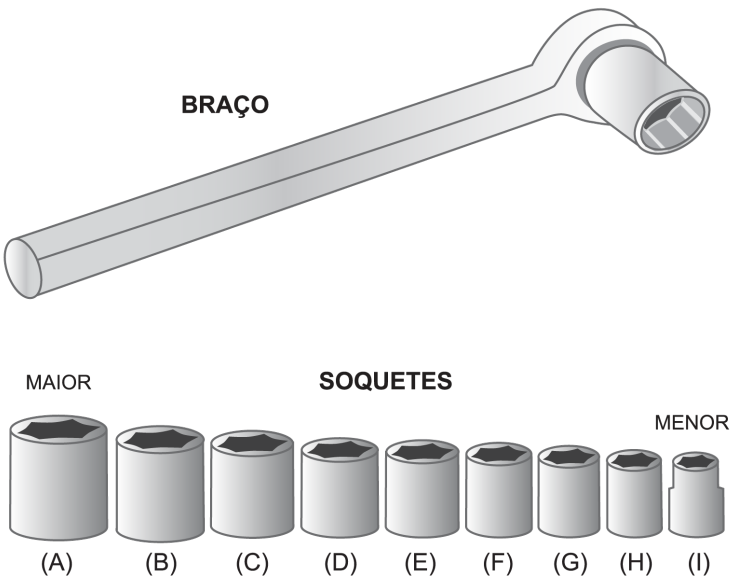
a) A fração determinada pela adição de 1 ao numerador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{5}{7}$ que é maior do que $\frac{4}{7}$, pois em cinco sétimos temos um sétimo a mais do que em quatro sétimos.

h)	$\frac{7}{5} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{17}{12}$
i)	$\frac{7}{12} = \frac{\square}{\square}$		$\frac{\square}{\square} = \frac{9}{20}$

Atividade 14

A chave de caixa é uma ferramenta usada para apertar (ou afrouxar) porcas e parafusos. Ela consiste de um braço no qual, em uma de suas extremidades, é possível acoplar soquetes de tamanhos variados. Estes soquetes são identificados por frações que especificam seus tamanhos em polegadas (a polegada é uma medida de comprimento usada nos Estados Unidos e no Reino Unido).

Na figura a seguir, observe o tamanho dos soquetes e identifique cada um deles com uma das seguintes frações $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{16}$ e $\frac{13}{16}$.



Atividade 15

Responda às seguintes questões:

a) A fração determinada pela adição de 1 ao numerador da fração $\frac{4}{7}$ é maior, menor ou igual a $\frac{4}{7}$? Explique como chegou a essa conclusão.

b) A fração determinada pela adição de 1 ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{4}{8}$ que é menor do que $\frac{4}{7}$, pois como um oitavo é menor do um sétimo, quatro oitavos também será menor do que quatro sétimos.

c) A fração determinada pela subtração de 1 ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{3}{7}$ que é menor do que $\frac{4}{7}$, pois em três sétimos temos um sétimo a menos do que em quatro sétimos.

d) A fração determinada pela adição de 2 ao numerador e ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{6}{9}$ que é maior do que $\frac{4}{7}$, pois $\frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{7\times 2}{7\times 3} = \frac{14}{21}$, $\frac{4}{7} = \frac{3\times 4}{3\times 7} = \frac{12}{21}$ e $14 > 12$.

e) A fração determinada pela multiplicação por 2 do numerador e do denominador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{8}{14}$ que é igual a $\frac{4}{7}$.

f) A fração determinada pela adição de 1 ao numerador e subtração de 1 ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{5}{6}$ que é maior do que $\frac{4}{7}$, pois $\frac{5}{6} > \frac{4}{6} > \frac{4}{7}$.

Atividade 16

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Obter uma fração irredutível equivalente a uma fração dada e relacionar esta equivalência no contexto de minimização de cortes em uma equipartição.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ A discussão da atividade, além da equipartição dada e aquela associada ao número mínimo de cortes, pode incluir as equipartições associadas a outras frações equivalentes a $\frac{8}{24}$: $\frac{4}{12}$ (divisão de cada panqueca em 12 partes iguais) e $\frac{2}{6}$ (divisão da panqueca em 6 partes iguais).

Classificações:

⋆ Heid et al.: Produto: prever

⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: analisar

⋆ UERJ: Analisar: levantar hipóteses

Resposta da Atividade 16

a) Cada amigo vai receber $\frac{8}{24}$ de panqueca.

b) $8 \times 24 = 192$ cortes.

c) Sim! Por exemplo, como $\frac{8}{24} = \frac{8\times 1}{8\times 3} = \frac{1}{3}$, basta dividir cada panqueca 3 partes iguais e dar uma parte ($\frac{1}{3}$ de panqueca para cada amigo. Para esta equipartição, são necessários $8 \times 3 = 24$ cortes apenas.

b) A fração determinada pela adição de 1 ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é maior, menor ou igual a $\frac{4}{7}$? Explique como chegou a essa conclusão.

c) A fração determinada pela subtração de 1 ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é maior, menor ou igual a $\frac{4}{7}$? Explique como chegou a essa conclusão.

d) A fração determinada pela adição de 2 ao numerador e ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é maior, menor ou igual a $\frac{4}{7}$? Explique como chegou a essa conclusão.

e) A fração determinada pela multiplicação por 2 do numerador e do denominador da fração $\frac{4}{7}$ é maior, menor ou igual a $\frac{4}{7}$? Explique como chegou a essa conclusão.

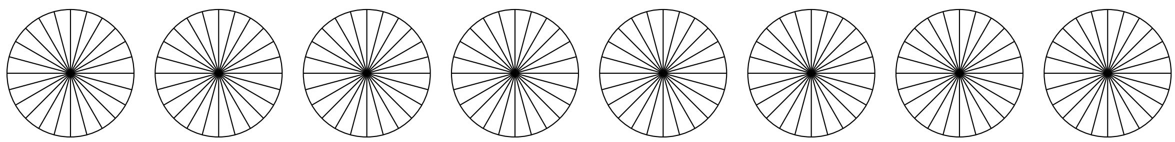
f) A fração determinada pela adição de 1 ao numerador e subtração de 1 ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é maior, menor ou igual a $\frac{4}{7}$? Explique como chegou a essa conclusão.

Atividade 16

(Adaptado de Empson (2001))

24 amigos estão querendo dividir igualmente 8 panquecas circulares.

Luciano, um dos amigos sugeriu que cada panqueca fosse dividida em 24 partes iguais e que, então, cada um dos 24 amigos recebesse 8 dessas partes.



a) Com a divisão sugerida por Luciano, qual a fração de uma panqueca que cada amigo vai receber?

b) Quantos cortes da panqueca (do centro para a borda, como no desenho) são necessários para a divisão proposta?

c) É possível dividir igualmente as 8 panquecas entre os 24 amigos fazendo menos cortes do que como Luciano sugeriu? Se você acha que sim, quantos cortes serão necessários e qual é a fração de uma panqueca que cada amigo poderia receber neste caso?

Atividade 17

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Simplificar frações de modo a obter uma fração igual irredutível.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Um pré-requisito desta atividade é o conceito de máximo divisor comum. Assim, avalie a necessidade de uma revisão deste conceito com seus alunos. Os alunos devem perceber que se dois números são divididos pelo maior divior comum entre eles, os dois novos números obtidos são agora primos entre si, isto é, o máximo divisor comum entre eles é 1. Este fato vai apoiar o "assim" das respostas.

⋆ A discussão desta atividade pode incluir o uso de materiais concretos na linha da proposta da *Atividade 16*, isto é, relacionar frações equivalentes com a minimização de cortes em uma equipartição.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Produto: gerar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 3: comparar

⋆ UERJ: Interpretar: discriminar

Resposta da Atividade 17

1. Note que o máximo divisor comum de 2 e 4 é 2. Assim, $\frac{2}{4} = \frac{2\times 1}{2\times 2} = \frac{1}{2}$. Resposta: $\frac{1}{2}$.
2. Note que o máximo divisor comum de 6 e 3 é 3. Assim, $\frac{6}{9} = \frac{3\times 2}{3\times 3} = \frac{2}{3}$. Resposta: $\frac{2}{3}$.
3. Note que o máximo divisor comum de 2 e 4 é 2. Assim, $\frac{4}{2} = \frac{2\times 2}{2\times 1} = \frac{2}{1}$. Resposta: $\frac{2}{1}$.
4. Note que o máximo divisor comum de 5 e 35 é 5. Assim, $\frac{5}{35} = \frac{5\times 1}{5\times 7} = \frac{1}{7}$. Resposta: $\frac{1}{7}$.
5. Note que o máximo divisor comum de 50 e 100 é 50. Assim, $\frac{50}{100} = \frac{50\times 1}{50\times 2} = \frac{1}{2}$. Resposta: $\frac{1}{2}$.

Atividade 18

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Comparar mais do que duas frações (no caso, três) usando frações equivalentes.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida individualmente. Contudo, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Sugere-se que seja observado para os alunos que o procedimento descrito nesta atividade para ordenar três frações pode ser aplicado para um número arbitrário de frações.

⋆ Esta atividade foi concebida para ser resolvida usando a notação de fração, sem o uso do recurso de modelos de frações uma vez que, neste estágio, espera-se que o aluno já tenha o domínio desta técnica de manipulação aritmética.

⋆ Observe que a ordenação poderia ser feita comparando-se duas frações por vez. A solução indicada reduz a ordenação à ordenação de números naturais (os numeradores das frações iguais às frações dadas e todas de mesmo denominador).

Classificações:

⋆ Heid et al.: Produto: gerar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 3: comparar

⋆ UERJ: Interpretar: ordenar

Resposta da Atividade 18

a) 60 é um múltiplo comum de 6, 20 e 15 : $60 = 10\times 6$, $60 = 4\times 15$ e $60 = 3\times 20$. Portanto,

$$\frac{11}{6} = \frac{10\times 11}{10\times 6} = \frac{110}{60},$$

$$\frac{28}{15} = \frac{4\times 28}{4\times 15} = \frac{112}{60} \quad \text{e}$$

$$\frac{37}{20} = \frac{3\times 37}{3\times 20} = \frac{111}{60}.$$

b) Tem-se que $\frac{110}{60} < \frac{111}{60} < \frac{112}{60}$. Logo,

$$\frac{11}{6} < \frac{37}{20} < \frac{28}{15}.$$

Atividade 19

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Verificar que se $a\cdot d = b\cdot c$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são iguais (equivalentes).

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida individualmente. Contudo, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Note que para as frações usadas no exemplo e no item a), os numeradores e denominadores de uma fração não são múltiplos inteiros dos numeradores e denominadores da outra fração.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Produto: descrever procedimento

⋆ Nicely, Jr.: Nível 5: aplicar

⋆ UERJ: Interpretar: compor e decompor

Atividade 17

Dizemos que uma fração é **irredutível** se o máximo divisor comum entre o seu numerador e o seu denominador é igual a 1. Para cada fração indicada a seguir, determine uma fração igual, mas que seja irredutível.

a) $\dfrac{2}{4}$, b) $\dfrac{6}{9}$, c) $\dfrac{4}{2}$, d) $\dfrac{5}{35}$, e) $\dfrac{50}{100}$.

Atividade 18

O objetivo desta atividade é determinar qual é a maior e qual é a menor fração entre as frações $\frac{11}{6}$, $\frac{28}{15}$ e $\frac{37}{20}$.

a) Determine três frações de mesmo denominador que sejam iguais às frações $\frac{11}{6}$, $\frac{28}{15}$ e $\frac{37}{20}$.

b) Usando as frações do item a), determine qual é a maior e qual é a menor fração entre as frações $\frac{11}{6}$, $\frac{28}{15}$ e $\frac{37}{20}$.

Atividade 19

Dadas duas frações, se o produto do numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração for igual ao produto do denominador da primeira fração pelo numerador da segunda fração, então as frações são iguais.

Vamos ver um exemplo: para as frações $\frac{14}{6}$ e $\frac{21}{9}$, note que $14 \times 9 = 126 = 6 \times 21$. Vamos agora usar este fato de que $14 \times 9 = 6 \times 21$ para concluir que $\frac{14}{6} = \frac{21}{9}$:

$$\frac{14}{6} = \frac{9 \times 14}{9 \times 6} = \frac{14 \times 9}{9 \times 6} = \frac{6 \times 21}{9 \times 6} = \frac{6 \times 21}{6 \times 9} = \frac{21}{9}.$$

a) Use o procedimento do exemplo para mostrar que $\frac{2}{8} = \frac{5}{20}$.

b) Verdadeirou ou falso? Se duas frações são iguais, então o produto do numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração é igual ao produto do denominador da primeira fração pelo numerador da segunda fração. Justifique sua resposta.

Resposta da Atividade 19

a) Para as frações $\frac{2}{8}$ e $\frac{5}{20}$, tem-se que $2 \times 20 = 40 = 8 \times 5$. Agora,

$$\frac{2}{8} = \frac{20 \times 2}{20 \times 8} = \frac{2 \times 20}{20 \times 8} = \frac{8 \times 5}{20 \times 8} = \frac{8 \times 5}{8 \times 20} = \frac{5}{20}.$$

b) A afirmação é verdadeira.

Ao se multiplicar o numerador e o denominador da primeira fração pelo denominador da segunda fração obtém-se uma fração de igual valor cujo numerador é o produto do numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração e cujo denominador é o produto do numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração.

Do mesmo modo, ao se multiplicar o numerador e o denominador da segunda fração pelo denominador da primeira fração obtém-se uma fração de igual valor cujo numerador é igual ao denominador da primeira fração multiplicado pelo numerador da segunda fração e cujo denominador é o produto do denominadora da primeira fração pelo denominador da segunda fração.

Como as frações iniciais são iguais, estas novas frações também são iguais e têm o mesmo denominador. Portanto, seus numeradores devem ser iguais, isto é, o produto do numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração é igual ao produto do denominador da primeira fração pelo numerador da segunda fração.

Atividade 20

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer frações iguais por meio de um jogo de trilha.

Esta atividade possui folhas para reprodução disponíveis no final do livro.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Produto: gerar; prever

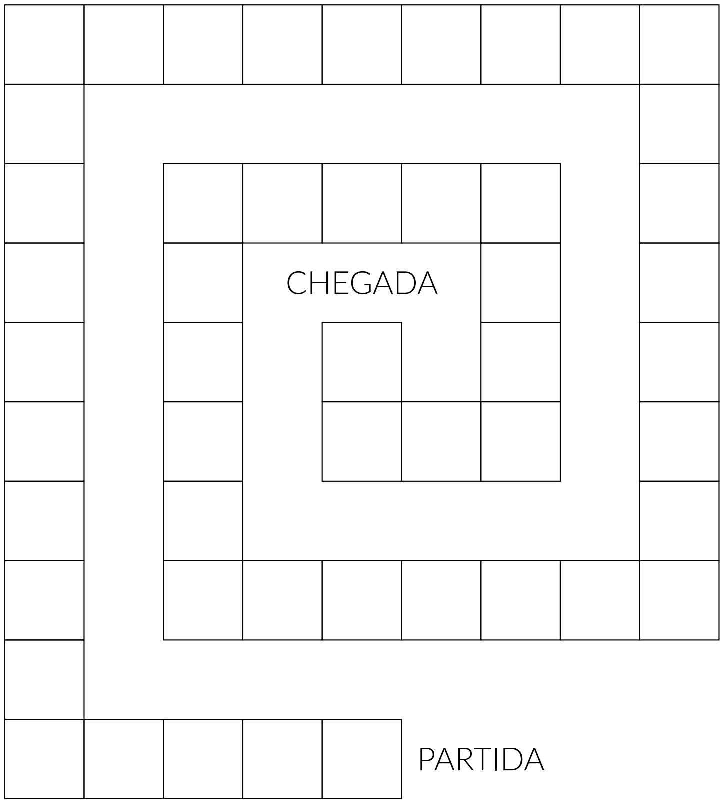
⋆ Nicely, Jr.: Nível 5: relacionar

⋆ UERJ: Interpretar: ordenar

Atividade 20

Trilha dos doze avos

Junte seus amigos para jogar! Seu grupo vai receber uma cópia de um tabuleiro onde há uma trilha com as posições de partida e chegada indicadas e um dado com 12 faces marcadas com os números de 1 a 12.



Seu grupo também receberá peões que identificarão as posições dos jogadores na trilha. Cada jogador deve escrever o seu nome no peão (na imagem a seguir, o peão está com o nome "Antônio").

O dado pode ser usado para decidir a ordem de jogada. As regras do jogo são as seguintes:

1º No desenvolvimento do jogo, cada jogador lança o dado duas vezes. Esses lançamentos determinam a fração que correspondente ao movimento que o jogador fará: o primeiro lançamento registra o denominador da fração e o segundo o numerador. Assim, por exemplo, se o primeiro lançamento do dado resulta no número 12 e o segundo

Resposta da Atividade 20

a) 1º) 7 casas. 2º) 10 casas. 3º) 9 casas. 4º) Fica parado e passa a vez. 5º) 16 casas. 6º) Fica parado e passa a vez. 7º) Fica parado e passa a vez. 8º) 12 casas. 9º) 6 casas. 10º) 24 casas.

b) O primeiro jogador andou $7+0+4+18+24=53$ casas. Portanto, o primeiro jogador está na frente e venceu o jogo.

Atividade 21

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Perceber que mesmo se $n<p$ e $m<q$, pode ocorrer que $\frac{n}{m} \geq \frac{p}{q}$.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida individualmente. Contudo, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ O tipo de situação descrita na atividade é um equívoco comum entre os alunos, isto é, eles equivocamente acham que se $n<p$ e $m<q$, então necessariamente $\frac{n}{m} < \frac{p}{q}$.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Raciocínio: corroborar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: justificar

⋆ UERJ: Avaliar: julgar

Resposta da Atividade 21

Tem-se que $\frac{2}{3} = \frac{10\times 2}{10\times 3} = \frac{20}{30}$ e $\frac{6}{10} = \frac{3\times 6}{3\times 10} = \frac{18}{30}$. Como $\frac{20}{30} > \frac{18}{30}$, segue-se que $\frac{2}{3} > \frac{6}{10}$.

Atividade 22

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Analisar quando uma fração é igual a uma fração unitária.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida individualmente. Contudo, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ O item c) relaciona-se com a Atividade 1: como não é possível, em uma equipartição de uma região retangular, escolher uma quantidade de partes que corresponda à metade desta região se a quantidade total de partes for um número ímpar, não existe uma fração de denominador ímpar que seja igual à fração $\frac{1}{2}$.

⋆ Observe para seus alunos que as frações estudadas na Lição 1 são justamente as frações unitárias e que, pela Lição 2, toda fração é a justaposição de frações unitárias. Em outras palavras, as frações unitárias constituem a estrutura básica a partir da qual as demais frações são obtidas.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Raciocínio: corroborar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: justificar

⋆ UERJ: Avaliar: julgar

Resposta da Atividade 22

a) Pelo item b) da Atividade 19 , se uma dada fração é igual a alguma fração unitária, então o produto do numerador da fração dada pelo denominador da fração unitária tem que ser igual ao denominador da fração dada, isto é, o denominador da fração dada tem que ser um múltiplo inteiro do seu numerador. Isto só acontece para as frações $\frac{4}{20}$ e $\frac{6}{18}$.

b) Não, pois frações unitárias são sempre menores ou iguais a 1, enquanto que uma fração com numerador maior do que o denominador é sempre maior do que 1.

c) Não, pois pelo item b) da Atividade 19 , se existisse uma fração com denominador ímpar que fosse igual à fração $\frac{1}{2}$, então o numerador da fração dada multiplicado por 2, um número par, teria que ser igual ao denominador da fração dada multiplicado por 1, o que dá um número ímpar. Portanto, um número par teria que ser igual a um número ímpar, o que não é possível.

lançamento resulta no número 10, a fração correspondente é $\frac{10}{12}$. Outro exemplo: se o número do primeiro lançamento do dado é 6 e o número do segundo lançamento é 3, a fração correspondente é $\frac{3}{6}$. Mais um exemplo: se o número do primeiro lançamento do dado é 5 e o número do segundo lançamento é 7, a fração correspondente é $\frac{7}{5}$.

$2^{\underline{o}}$ Se a fração obtida com o lançamento dos dados for equivalente a uma fração de denominador 12, ou seja, a certa quantidade de doze avos, o peão "caminha" essa quantidade de passos. Caso contrário, ele não sai do lugar que está e passa a vez para o próximo jogador. Assim, por exemplo: se a fração obtida for $\frac{10}{12}$, seu peão andará 10 casas. Se a fração obtida for $\frac{3}{6}$, seu peão andará 6 casas, pois $\frac{3}{6} = \frac{6}{12}$. Se a fração obtida for $\frac{7}{5}$, seu peão permanecerá na casa em que está e você passará a vez.

$3^{\underline{o}}$ Vence o jogo aquele jogador que, em primeiro lugar, atingir o ponto de chegada.

Depois de jogar algumas vezes responda às questões a seguir.

a) Quantos passos um jogador deu se ele obteve nos dois lançamentos respectivamente os seguintes números:

1º) 12 e 7?	2º) 6 e 5?	3º) 8 e 6?	4º) 8 e 7?	5º) 9 e 12?
6º) 7 e 8?	7º) 11 e 4?	8º) 1 e 1?	9º) 6 e 3?	10º) 3 e 6?

b) Em 5 rodadas consecutivas, o primeiro jogador sorteou as frações $\frac{7}{12}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$e $\frac{12}{6}$. Já o segundo jogador, nessas 5 rodadas, deu ao todo 47 passos. Ao final dessas rodadas, qual deles está a frente?

QUEBRANDO A CUCA

Atividade 21

Jorge e Ana estão comparando as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{6}{10}$. Jorge afirma que $\frac{2}{3} < \frac{6}{10}$ porque $2 < 6$ e $3 < 10$. Ana diz que $\frac{2}{3} > \frac{6}{10}$. Use desenhos, palavras ou apenas números para ajudar Ana a explicar a Jorge porque ele está errado.

Atividade 22

Uma fração é dita **unitária** se o seu numerador é igual a 1.

a) Quais das frações a seguir são iguais a alguma fração unitária? Justifique sua resposta.

$$\frac{4}{20}, \qquad \frac{21}{7}, \qquad \frac{4}{30}, \qquad \frac{6}{18}.$$

b) Uma fração com numerador maior do que o denominador pode ser igual a uma fração unitária? Justifique sua resposta!

c) Existe uma fração de denominador ímpar que seja igual à fração unitária $\frac{1}{2}$? Justifique sua resposta!

Atividade 23

Objetivo específico: Levar o aluno a

- ⋆ Estabelecer criticamente uma avaliação sobre a comparação entre frações a partir da observação dos termos dessas fraçoes, incluindo a questão da recíproca da seguinte propriedade: "se existe número natural n tal que $\frac{a}{b} = \frac{n\times c}{n\times d}$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$" .

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
- ⋆ Note que o item d) é falso porque estamos dando a liberdade de a escolha envolver frações que não são irredutíveis nem unitárias, por isso existem contraexemplos. Avalie a discussão sobre a veracidade da afirmação do item d) quando acrescentamos a informação "uma das frações é irredutível" ou "uma das frações é unitária". Neste caso, as novas afirmações são verdadeiras, e as justificativas para elas são generalizações de questões já propostas.

Classificações:

- ⋆ Heid et al.: Raciocínio: corroborar
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: justificar
- ⋆ UERJ: Avaliar: julgar

Resposta da Atividade 23

a) A sentença é falsa. Por exemplo, as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$ têm numeradores e denominadores diferentes, mas elas são iguais, uma vez que $\frac{1}{2} = \frac{3\times 1}{3\times 2} = \frac{3}{6}$.

b) A sentença é verdadeira: se duas frações têm denominadores iguais, é maior a fração que tem o maior numerador e, em particular, elas são diferentes. De fato: lembrando que o denominador de fração especifica o número de partes em que a unidade foi dividida e o numerador especifica quantas cópias desta parte foram tomadas, para um mesmo denominador, quanto maior o numerador, mais cópias são tomadas e, portanto, maior é a quantidade representada pela fração.

c) A sentença é verdadeira: se duas frações têm numeradores iguais, é maior a fração que tem o menor denominador e, em particular, elas são diferentes. De fato: considerando que o numerador especifica o número de cópias da unidade que está sendo dividida por um número de pessoas, número este especificado pelo denominador da fração, para um mesmo numerador, quanto menor o denominador, maior a porção que cada pessoa vai receber, quantidade esta representada pela fração, pois o mesmo número de cópias da unidade está sendo divivido por um número menor de pessoas.

d) A sentença é falsa. Por exemplo, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$ são frações iguais, pois $\frac{2}{4}$ é igual a $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$ também é igual a $\frac{1}{2}$, mas não existe um número natural que multiplicado por 2 dê igual a 3, bem como não existe número natural que multiplicado por 3 dê 2.

Atividade 24

Objetivo específico: Levar o aluno a

- ⋆ Perceber a propriedade de densidade das frações ao obter frações arbitrariamente próximas de 0 e arbitrariamente próximas de 1.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que, para facilitar a logística de condução desta atividade, que ela seja feita com as perguntas sendo propostas uma a uma por você para a turma, de modo que a resposta de uma pergunta dada por um aluno seja então usada como referência para a pergunta subsequente. Outra possibilidade é dividir a turma em grupos de 3 a 5 alunos. Cada grupo responde a primeira pergunta e então passa sua resposta para um outro grupo que deve então responder a próxima questão tendo como referência a resposta recebida e assim sucessivamente.
- ⋆ Caso seja viável, recomenda-se, na discussão da atividade, o uso de um software (o GeoGebra, por exemplo) para marcar na reta numérica as sucessivas frações dadas pelos alunos. O recurso de ampliação e redução pode ser usado visualizar as frações quando estas se acumulam em 0 e em 1.

Classificações:

- ⋆ Heid et al.: Produto: prever
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 7: levantar hipóteses
- ⋆ UERJ: Avaliar: julgar

Resposta da Atividade 24

a) $\frac{1}{2}$, por exemplo.

b) Sim, $\frac{1}{3}$.

c) Sim, $\frac{1}{4}$.

d) Sim: $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$, $\frac{1}{7} < \frac{1}{6}$, etc. Mais geralmente, dada uma fração, basta considerar a fração de mesmo numerador e denominador maior do que o denominador da fração dada. Esta segunda fração será sempre menor do que a fração dada.

e) Sim, $\frac{2}{3}$. Enquanto que para $\frac{1}{2}$, é necessário $\frac{1}{2}$ para completar a unidade, para $\frac{2}{3}$ é necessário $\frac{1}{3}$ que é menor que $\frac{1}{2}$, logo $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$.

f) Sim, $\frac{3}{4}$. Enquanto que para $\frac{2}{3}$, é necessário $\frac{1}{3}$ para completar a unidade, para $\frac{3}{4}$ é necessário $\frac{1}{4}$ que é menor que $\frac{1}{3}$, logo $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$.

g) Sim, $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$, $\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$, $\frac{6}{7} > \frac{5}{6}$, etc.

Mais geralmente, as frações cujo numerador é um número natural e o denominador é o sucessor do numerador formam uma sucessão crescente de frações menores do que 1.

Atividade 23

Diga se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa. Explique a sua resposta com exemplos, desenhos ou palavras.

a) Se duas frações têm numeradores e denominadores diferentes, então elas representam quantidades diferentes.

b) Se duas frações têm denominadores iguais, mas numeradores diferentes, então elas representam quantidades diferentes.

c) Se duas frações têm numeradores iguais e maiores do que zero, mas denominadores diferentes, então elas representam quantidades diferentes.

d) Se duas frações representam quantidades iguais, então o numerador e o denominador de uma são obtidos multiplicando-se o numerador e o denominador da outra por um mesmo número natural.

Atividade 24

a) Escreva uma fração que seja menor do que 1 e maior do que 0.

b) Existe uma fração maior do que 0 e menor do que a fração que você escreveu no item a)? Em caso afirmativo, escreva uma tal fração.

c) Existe uma fração menor do que a fração que você escreveu no item b)? Em caso afirmativo, escreva uma tal fração.

d) Dada uma fração menor do que 1 e maior do que 0, é sempre possível determinar uma outra fração menor ainda? Em caso afirmativo, explique como tal fração pode ser obtida.

e) Existe uma fração menor do que 1 e que seja maior do que a fração que você escreveu no item a)? Em caso afirmativo, escreva uma tal fração.

f) Existe uma fração menor do que 1 e que seja maior do que a fração que você escreveu no item e)? Em caso afirmativo, escreva uma tal fração.

g) Dada uma fração menor do que 1, é sempre possível determinar uma outra fração menor do que 1 e que seja maior do que a fração dada? Em caso afirmativo, explique como tal fração pode ser obtida.

Atividade 25

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Perceber a propriedade de densidade das frações ao obter frações que estão entre duas frações diferentes quaisquer, mesmo no caso de numeradores consecutivos e denominadores iguais. Isto é, que dadas duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ diferentes (suponha $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$), sempre é possível determinar uma terceira fração $\frac{p}{q}$ tal que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{c}{d}$.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Caso seja viável, recomenda-se, na discussão da atividade, o uso de um software (o GeoGebra, por exemplo) para marcar na reta numérica as sucessivas frações dadas pelos alunos.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Raciocínio: corroborar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: justificar

⋆ UERJ: Avaliar: julgar

Resposta da Atividade 25

a) Note que $\frac{3}{5} = \frac{2\times3}{2\times5} = \frac{6}{10}$ e $\frac{4}{5} = \frac{2\times4}{2\times5} = \frac{8}{10}$. Portanto, $\frac{7}{10}$ é tal que $\frac{3}{5} < \frac{7}{10} < \frac{4}{5}$.

b) Note que $\frac{11}{10} = \frac{3\times11}{3\times10} = \frac{33}{30}$ e $\frac{12}{10} = \frac{3\times12}{3\times10} = \frac{36}{30}$. Portanto, $\frac{34}{30}$ e $\frac{35}{30}$ são tais que $\frac{11}{10} < \frac{34}{30} < \frac{35}{30} < \frac{36}{30}$.

c) Note que $\frac{19}{20} = \frac{4\times19}{4\times20} = \frac{76}{80}$ e $\frac{20}{20} = \frac{4\times20}{4\times20} = \frac{80}{80}$. Portanto, $\frac{77}{80}$, $\frac{78}{80}$ e $\frac{79}{80}$ são tais que $\frac{19}{20} < \frac{77}{80} < \frac{78}{80} < \frac{79}{80} < \frac{80}{80}$.

Atividade 25

Fabrício acredita que não existem frações entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$ (isto é, maiores de que $\frac{3}{5}$ e menores do que $\frac{4}{5}$) porque $3 < 4$ e não existe número natural entre 3 e 4. Fabrício continua: "Pelo mesmo motivo, não existem frações entre $\frac{11}{10}$ e $\frac{12}{10}$ e entre $\frac{19}{20}$ e $\frac{20}{20}$!". Você concorda com as afirmações e argumentos de Fabrício? Se você acha que Fabrício está errado, determine:

a) uma fração entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$;

b) duas frações entre $\frac{11}{10}$ e $\frac{12}{10}$;

c) uma fração entre $\frac{19}{20}$ e $\frac{20}{20}$.

REFLETINDO

Nas atividades 24 e 25 você estudou uma propriedade importante do conjunto das frações:

dadas quaisquer duas frações que representam diferentes quantidades, sempre é possível encontrar uma fração entre elas.

Ora, se sempre é possível, como se pode então determinar uma terceira fração entre as frações dadas? Para explicar melhor o procedimento, veja primeiro um exemplo.

Suponha que se quer determinar uma fração entre as frações $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{4}$.

O primeiro passo é reescrevê-las usando um mesmo denominador:

$$\frac{5}{7} = \frac{4 \times 5}{4 \times 7} = \frac{20}{28}$$

e

$$\frac{3}{4} = \frac{7 \times 3}{7 \times 4} = \frac{21}{28}.$$

Ao comparar as frações obtidas, percebe-se que $\frac{20}{28} < \frac{21}{28}$. No entanto, não se vê de imediato um exemplo de fração que seja maior que $\frac{20}{28}$ e menor que $\frac{21}{28}$. Isto ocorre porque os números 20 e 21 são consecutivos.

Humm... que tal aumentar ainda mais os denominadores? Pois é isso que será feito. Multiplique por dois os numeradores e denominadores de cada uma das frações. Veja:

$$\frac{5}{7} = \frac{4 \times 5}{4 \times 7} = \frac{20}{28} = \frac{2 \times 20}{2 \times 28} = \frac{40}{56}$$

e

$$\frac{3}{4} = \frac{7 \times 3}{7 \times 4} = \frac{21}{28} = \frac{2 \times 21}{2 \times 28} = \frac{42}{56}.$$

Notas de Aula

Agora sim. Pode-se escolher a fração $\frac{41}{56}$ como solução do problema:

$$\frac{5}{7}=\frac{4\times 5}{4\times 7}=\frac{20}{28}=\frac{2\times 20}{2\times 28}=\frac{40}{56}<\frac{41}{56}<\frac{42}{56}=\frac{2\times 21}{2\times 28}=\frac{21}{28}=\frac{7\times 3}{7\times 4}=\frac{3}{4}.$$

De modo resumido:

$$\frac{5}{7}=\frac{40}{56}<\frac{41}{56}<\frac{42}{56}=\frac{3}{4}.$$

Fácil, não é mesmo? O método consiste em buscar representações equivalentes com denominadores suficientemente grandes que permitam a nossa escolha do numerador. Por isso a multiplicação simultânea dos numeradores e denominadores das frações acima por dois. Os números 20 e 21 são consecutivos, essa foi a dificuldade inicial. Mas o dobro de 20 e o dobro de 21, que são números pares, não são números consecutivos. E essa foi a jogada de mestre!

Agora sim, pode-se apresentar o procedimento utilizado em uma linguagem mais geral.

Dadas duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ diferentes (suponha $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$), queremos determinar uma terceira fração $\frac{p}{q}$ tal que $\dfrac{a}{b}<\dfrac{p}{q}<\dfrac{c}{d}$.

O primeiro passo é encontrar frações iguais às anteriores, mas que tenham o mesmo denominador.

Para isso, basta multiplicar os numeradores e os denominadores de cada fração pelo denominador da outra fração. Veja:

$$\frac{a}{b}=\frac{d\times a}{d\times b},$$

onde d é o denominador da segunda fração e

$$\frac{c}{d}=\frac{b\times c}{b\times d},$$

onde b é o denominador da primeira fração.

Além disso, como $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, o produto $d\times a$ é diferente do produto $b\times c$.

Ora, se $d\times a$ e $b\times c$ não são números naturais consecutivos, já temos condições de determinar a fração $\frac{p}{q}$ basta fazer $q=b\times d$ e escolher um número natural m entre $d\times a$ e $b\times c$. Neste caso tem-se como solução para o problema a fração

$$\frac{p}{q}=\frac{m}{b\times d},$$

onde m é um número natural entre $d\times a$ e $b\times c$. Agora, se $d\times a$ e $b\times c$ são números naturais consecutivos, usa-se a jogada de mestre. Isto é, multiplica-se por dois os numeradores e denominadores das frações acima:

$$\frac{a}{b}=\frac{2d\times a}{2d\times b}$$

Notas de Aula

e

$$\frac{c}{d} = \frac{2b \times c}{2b \times d}.$$

Ora, $(2d \times a)$ e $(2b \times c)$ são dois números pares diferentes e, portanto, não consecutivos.

Portanto, basta escolher $p = (2d \times a) + 1$, o primeiro número ímpar depois do número $(2d \times a)$, e $q = (2b \times d)$, para encontrar uma solução do nosso problema:

$$\frac{a}{b} = \frac{2d \times a}{2d \times b} < \frac{(2d \times a) + 1}{2b \times d} < \frac{2b \times c}{2b \times d} = \frac{c}{d}.$$

Isto é,

$$\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}.$$

LIÇÃO 5 - Para o professor

As operações de adição e de subtração de frações estão associadas a diversos contextos, nos quais podem ser identificadas as mesmas interpretações já associadas à adição e à subtração de números naturais. Dentre essas interpretações, podem-se destacar:

Adição:

- ⋆ Juntar. Exemplo: Alice tem 15 figurinhas e Miguel tem 12. Quantas figurinhas os dois têm juntos?
- ⋆ Acrescentar. Exemplo: Alice tinha 15 figurinhas e ganhou mais 12. Com quantas figurinhas Alice ficou?

Subtração

- ⋆ Retirar. Exemplo: Miguel tinha 15 figurinhas e deu 12 a Alice. Com quantas figurinhas Miguel ficou?
- ⋆ Completar. Exemplo: Alice tem 12 figurinhas. Quantas figurinhas faltam para ela completar um total de 15?
- ⋆ Comparar. Exemplo: Alice tem 15 figurinhas e Miguel tem 12. Quantas figurinha Alice tem a mais que Miguel?

No caso da adição e da subtração de frações, essas mesmas interpretações estão associadas a situações envolvendo grandezas não inteiras, como veremos em diversos exemplos ao longo desta lição.

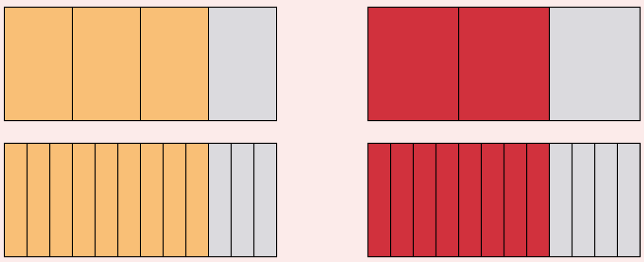
Em muitos casos, a adição e a subtração de frações são abordadas na educação básica simplesmente a partir da apresentação (frequentemente sem justificativa) de um procedimento de cálculo, em que se determina um denominador comum (em geral, obtido pelo mínimo múltiplo comum entre os denominadores originais) e se operam os numeradores. Para que os alunos construam significado para as operações de adição e de subtração de frações, é importante que fique claro que **determinar um denominador comum corresponde a determinar uma subdivisão comum da unidade** entre as quantidades que se deseja operar (no caso, somar ou subtrair).

Neste sentido, para somar, por exemplo $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$, deve-se observar que:

a) A fração $\frac{3}{4}$ expressa a adição por justaposição de 3 frações de $\frac{1}{4}$ da unidade. Da mesma forma, a fração $\frac{2}{3}$ expressa a adição por justaposição de 2 frações de $\frac{1}{3}$ da unidade. Assim, as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$ estão associadas a diferentes **subdivisões da unidade**, no caso, respectivamente, em 4 partes iguais e em 3 partes iguais, o que determina "quartos" e "terços" como frações da unidade.

b) Para expressar o resultado desta soma como uma fração, é preciso expressar as duas parcelas a partir de **uma mesma subdivisão da unidade**, no caso, por exemplo, em 12 partes iguais, isto é, no caso em "doze avos". Assim, a adição por justaposição de 3 frações de $\frac{1}{4}$ da unidade, que resulta na fração $\frac{3}{4}$, é equivalente à adição por justaposição de 9 frações de $\frac{1}{12}$ da unidade, que resulta na fração $\frac{9}{12}$. Da mesma forma, a adição por justaposição de 2 frações de $\frac{1}{3}$ da unidade, que resulta na fração $\frac{2}{3}$, é **equivalente** à adição por justaposição de 8 frações de $\frac{1}{12}$ da unidade, que resulta na fração $\frac{8}{12}$.

c) Portanto, o resultado da soma $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$ pode ser expresso pela justaposição de 9 frações mais 8 frações de $\frac{1}{12}$ da unidade, que resulta em $\frac{17}{12}$, isto é, $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}=\frac{17}{12}$. A reescrita de uma fração a partir de determinada subdivisão da unidade implicará na escrita de uma fração equivalente.



Uma construção análoga pode ser feita para a subtração. É importante que essas construções sejam feitas com os alunos a partir de diversos exemplos, associados às diferentes interpretações para a adição e para a subtração, e ilustrados por representações geométricas.

Desta forma, para a compreensão de processos de cálculo da adição e da subtração de frações, é fundamental o entendimento da fração $\frac{a}{b}$ como uma expressão da justaposição de a frações de $\frac{1}{b}$ da unidade.

Um dos objetivos desta lição é construir esses procedimentos de soma e de subtração de frações, a partir da **determinação de subdivisões da unidade que sejam comuns entre as parcelas, isto é, de denominadores comuns**. Cabe destacar que essa unidade comum não precisa ser a maior possível. No caso do exemplo apresentado acima, a subdivisão comum encontrada foi $\frac{1}{12}$, porém em uma situação real de sala de aula, os alunos também poderiam ter empregado $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{36}$, etc. – e essas estratégias devem ser igualmente valorizadas. Isto é, a ênfase da abordagem deve estar na ideia conceitual de expressar frações equivalentes a partir da determinação de subdivisões comuns da unidade, e não na memorização de procedimentos com base no cálculo do mínimo múltiplo comum. De fato, você observará que o conceito de MMC não é nem mesmo mencionado nesta lição.

Também é objetivo desta lição construir as ideias de soma e de diferença de frações com base em situações contextualizadas nas mesmas interpretações anteriormente associadas às operações com números naturais - *juntar e acrescentar*, no caso

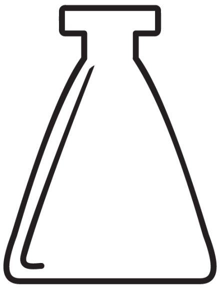
Lição 5

Adição e subtração de frações

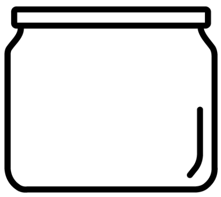
EXPLORANDO O ASSUNTO

Atividade 1

Miguel e Alice estão participando de uma campanha da escola para coleta de óleo de cozinha. O objetivo é disponibilizar recipientes para que as pessoas depositem óleo. Depois esses recipientes serão destinados a empresas que usarão o óleo descartado para fazer sabão. Eles conseguiram diferentes recipientes e agora desejam saber qual tem maior capacidade.



Recipiente 1: trazido pela Alice



Recipiente 2: trazido pelo Miguel

Eles tiveram a seguinte ideia: encheram os dois recipientes com água para depois verificarem onde havia mais água. Para isso, usaram um copo d'água como unidade de medida.

- O recipiente trazido por Alice foi enchido com 26 copos.
- O recipiente trazido por Miguel foi enchido com 40 copos.

Eles então observaram que a partir de **uma unidade de medida comum** (nesse caso da adição; *retirar, comparar e completar* para a subtração. Desta forma, procura-se construir a adição e a subtração de frações como extensões naturais dessas operações com números naturais. Não é objetivo desta lição tratar formalmente as propriedades da adição e da subtração. Porém, serão ressaltados aspectos substanciais que fundamentam essas propriedades, em especial, a mesma natureza das parcelas. Finalmente, é importante destacar que as estratégias pessoais dos alunos não devem ser desconsideradas em detrimento da apresentação de um procedimento “padronizado”. Ao contrário, a construção de estratégias pessoais deve ser encorajada e valorizada. Isso não apenas contribui para o fortalecimento da segurança dos alunos individualmente, como também pode enriquecer a compreensão coletiva da turma, por meio do compartilhamento de diversas estratégias.

Atividade 1

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ perceber o papel de uma unidade comum para comparar, somar ou subtrair duas quantidades;
- ⋆ resgatar as interpretações de juntar para a operação de adição, e de retirar e de comparar para a operação de subtração, anteriormente associadas às operações com números naturais;
- ⋆ entender as operações de adição e de subtração com frações como extensões das respectivas operações com números naturais a partir do resgate dessas interpretações, isto é, como operações que dão conta de situações associadas às mesmas interpretações.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Embora não se trabalhe diretamente com frações, a atividade enfoca processos de contagem a partir de uma unidade de referência, o que será fundamental para as operações de adição e de subtração com frações. Por exemplo, no caso da situação apresentada nesta atividade, a unidade comum empregada.

Resposta da Atividade 1

a) O recipiente trazido por Miguel é maior, uma vez que precisou de mais copos para ser enchido ($40 > 26$).

b) Usando o copo como unidade de medida, podemos indicar que a capacidade dos dois recipientes juntos é 66. Ou seja, 66 copos.

c) Deve-se retirar 14 copos, pois $40 - 26 = 14$.

Atividade 2

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ entender o processo de determinação de um denominador comum entre duas frações com base na ideia de subdivisão da unidade da qual ambas sejam múltiplas inteiras, obtida a partir de um processo geométrico e, a partir desse denominador comum, gerar frações equivalentes às frações dadas e, a partir desse denominador comum, gerar frações equivalentes às frações dadas;
- ⋆ determinar a soma de duas frações a partir dessa subdivisão da unidade e da noção de equivalência de frações.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Uma vez estabelecida uma **unidade** (no caso, o tamanho da fita), a determinação de uma subdivisão dá origem a um processo de medida por meio de uma **dupla contagem**, em que estão envolvidas: **a unidade**, associada ao número 1, com base na qual são contadas quantidades inteiras; **subdivisões da unidade em partes iguais** (no caso, os pedaços coloridos das fitas), cuja contagem permite medir quantidades menores que a unidade.

- ⋆ A atividade envolve a subdivisão de fitas coloridas em pedaços de mesmo tamanho. É recomendável que o professor desenvolva a atividade em sala de aula utilizando materiais concretos. As fitas coloridas podem ser feitas com papel e cartolina, e os alunos podem recortá-las e juntar os pedaços de acordo com o que é pedido nos itens da atividade. Nesta etapa de familiarização inicial com as operações com frações, a manipulação concreta é importante para a construção de significado.

- ⋆ O item a) visa ao reconhecimento pelo aluno das frações envolvidas na situação apresentada. Assim, espera-se que o aluno responda, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

- ⋆ Em seguida, é apresentada uma situação simples em que uma subdivisão comum, no caso o pedaço de fita amarelo, permite a determinação da soma:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

- ⋆ O item b), embora seja bem parecido com o exemplo dado, demanda que o estudante determine uma subdivisão diferente da usada no item anterior. Nesse caso o estudante deve observar que é necessário utilizar a subdivisão $\frac{1}{4}$ para medir essas partes que foram juntadas.

Resposta da Atividade 2

a) Um pedaço vermelho recortado, corresponde a $\frac{1}{3}$ da fita.
Um pedaço azul recortado, corresponde a $\frac{1}{2}$ da fita.
Um pedaço amarelo recortado, corresponde a $\frac{1}{4}$ da fita.

o copo), poderiam não só dizer qual recipiente tinha maior capacidade, mas também o quanto era maior e qual seria a capacidade dos dois recipientes juntos. Usando a ideia de medida de Miguel e Alice, isto é, tomando o copo como unidade de medida, responda:

a) Qual recipiente tem maior capacidade?

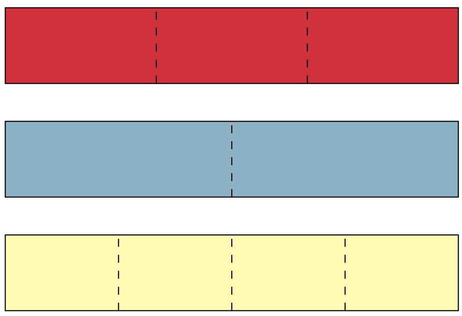
b) Qual é a capacidade dos dois recipientes juntos?

c) Quanto de água se deve retirar do recipiente maior, para ter o mesmo volume de líquido que é possível colocar no recipiente menor?

Atividade 2

A professora Estela quer enfeitar sua sala de aula para uma festa da escola. Para isso ela comprou várias fitas, todas de mesmo tamanho, nas cores vermelho, azul e amarelo.

A professora cortou cada fita vermelha em 3 partes iguais, cada fita azul em 2 partes iguais e cada fita amarela em 4 partes iguais.



a) A que fração da fita original corresponde cada pedaço recortado pela professora Estela?

Em seguida, a professora Estela começou a juntar pedaços recortados das fitas, formando novas fitas coloridas. Ela começou juntando (de forma intercalada) um pedaço azul e dois pedaços amarelos.

b) Um pedaço amarelo mais um pedaço azul corresponde a $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ da fita. Como $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, temos que a junção dos dois pedaços de fita será $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ da tamanho da fita original.

Ela verificou que a nova fita formada tinha o mesmo tamanho da fita original. Isso aconteceu porque cada pedaço azul tem o mesmo tamanho de dois pedaços amarelos. Podemos representar o tamanho da nova fita formada pela professora por meio de uma **soma de frações**. Cada pedaço azul corresponde a $\frac{1}{2}$ da fita original. Cada pedaço amarelo corresponde a $\frac{1}{4}$ da fita original, então 2 pedaços amarelos correspondem a $\frac{2}{4}$ da fita original. Portanto, o tamanho da nova fita é igual a:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4}.$$

Mas, como $\frac{2}{4}$ é igual a $\frac{1}{2}$ (cada pedaço azul tem o mesmo tamanho de dois pedaços amarelos), então:

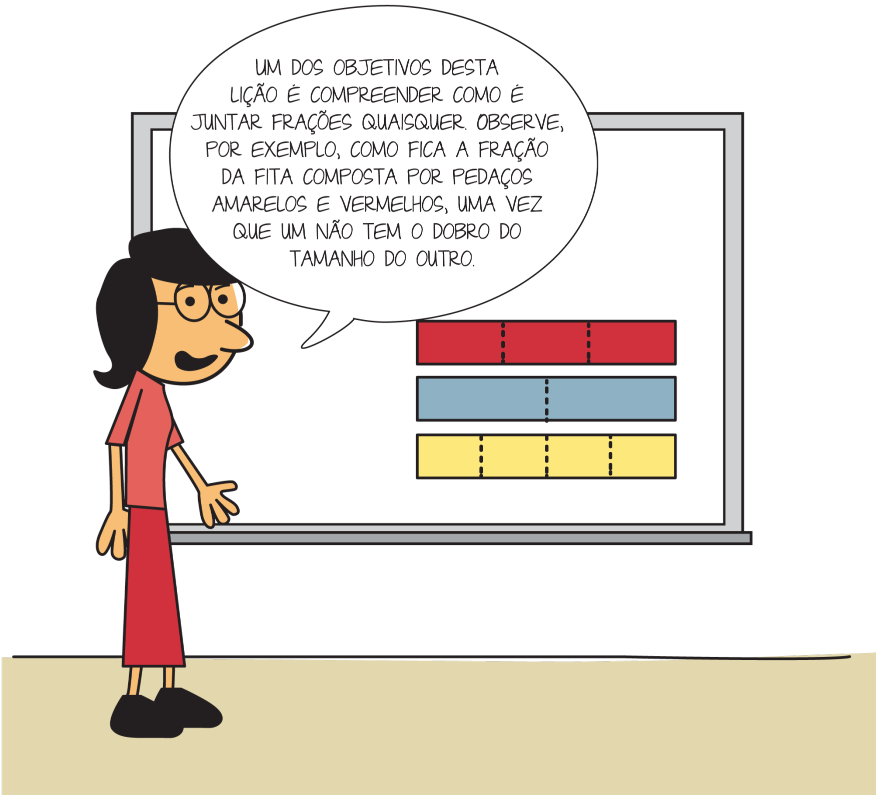
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

O resultado dessa soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ é igual 2 pedaços de $\frac{1}{2}$, isto é, $\frac{2}{2}$ (que é igual 1). Assim:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Neste caso, o resultado 1 corresponde ao tamanho da fita original.

b) A professora também agrupou pedaços de fita, juntando 1 pedaço amarelo e 1 pedaço azul, como na figura abaixo. A qual fração da fita inicial correspondem esses dois pedaços juntos?



Atividade 3

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ entender o processo de determinação de um denominador comum entre duas frações com base na ideia de subdivisão da unidade da qual ambas sejam múltiplas inteiras, obtida a partir de um processo geométrico;
- ⋆ determinar a soma e a diferença de duas frações a partir dessa subdivisão da unidade.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Diferentemente da atividade anterior, nesta atividade a subdivisão da unidade já é dada, e sua determinação não é pedida ao aluno, o que voltará a ser objetivo das próximas atividades.
- ⋆ O item a) visa especificamente à identificação geométrica de subdivisão da unidade que será empregada para efetuar as operações. Espera-se $\frac{1}{16}$ como resposta.
- ⋆ No item b), procura-se resgatar as atividades sobre frações equivalentes realizadas na lição 4. Observe que aqui há um processo de recontagem a partir da subdivisão "pedaço de chocolate". Aqui a fração equivalente indica a recontagem da fração $\frac{1}{2}$ a partir da subdivisão $\frac{1}{16}$.
- ⋆ No item c), procure destacar a interpretação de adição como "juntar". Pretende-se que o professor tenha a possibilidade de sistematizar a adição, tendo como apoio a resposta dos alunos dadas a partir de observações visuais. Isto é, o estudante pode dizer que, juntos, Alice e Miguel comeram 11 pedaços e depois identificá-los como $\frac{11}{16}$ da barra de chocolate. A discussão deve ser encaminhada a partir da determinação de frações equivalentes desenvolvida no item anterior (e **sem** o uso do conceito de MMC). O objetivo é que o professor aproveite as soluções intuitivas dos alunos para apresentar, de forma mais sistematizada, a adição por uso de fração equivalentes, obtidas na busca de uma subdivisão comum:
$$\frac{1}{2}+\frac{3}{16}=\frac{8}{16}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}.$$
- ⋆ O item d) deve ser encaminhado de forma análoga ao anterior. Especificamente, deve-se retomar a ideia de que $1=\frac{n}{n}$, discutida na lição anterior, daí apresentar
$$1-\frac{11}{16}=\frac{16}{16}-\frac{11}{16}=\frac{5}{16}.$$

Resposta da Atividade 3

a) $\frac{1}{16}$.

b) $\frac{1}{2}=\frac{8}{16}$, pois a fração equivalente a $\frac{1}{2}$ com denominador 16 é $\frac{8}{16}$.

c) Observando as quantidades comidas por Alice e Miguel, a partir de um mesmo denominador, temos $\frac{1}{2}+\frac{3}{16}=\frac{8}{16}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}$.

d) Recordemos que a barra de chocolate é a unidade de medida, então essa quantidade será entendida como 1 inteiro. Assim a quantidade restante será dada por $\frac{5}{16}$, pois $1-\frac{11}{16}=\frac{16}{16}-\frac{11}{16}=\frac{5}{16}$.

Atividade 4

Objetivos específicos: Levar o aluno a

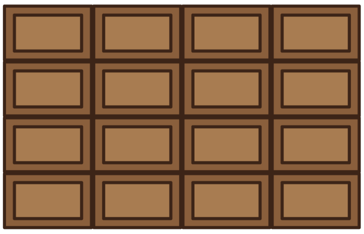
- ⋆ entender o processo de determinação de um denominador comum entre duas frações com base na ideia de subdivisão da unidade da qual ambas sejam múltiplas inteiras, obtido a partir de um processo geométrico;
- ⋆ determinar a soma e a diferença de duas frações a partir dessa subdivisão da unidade.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

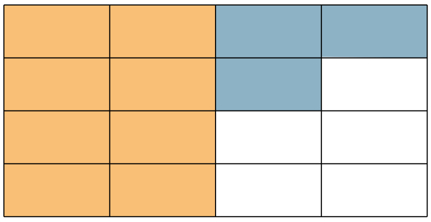
- ⋆ Esta atividade pode ser mais aproveitada pelos alunos se for realizada com apoio de materiais concretos. Sugerimos, caso seja possível, que os estudantes desenvolvam o material. Caso não seja possível, disponibilizamos uma página para reprodução no final dessa lição. Neste caso, o professor poderá disponibilizar aos alunos discos divididos em 12 partes, e pedir que eles marquem as frações $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$, colorindo esses discos.
- ⋆ A atividade tem início com a comparação de frações, o que já foi abordado na lição anterior. Procure retomar a discussão conduzida naquela lição.
- ⋆ É importante chamar atenção para o fato de que escrever as frações a partir de um mesmo denominador corresponde a expressar as quantidades que elas representam como múltiplos inteiros de uma subdivisão comum da unidade, porque somar e subtrair frações de mesmo denominador os alunos já sabem fazer. Assim, toma-se como estratégia, para a adição e a subtração de frações, reescrevê-las em relação a um mesmo denominador, determinado a partir de uma subdivisão comum da unidade. O item a) visa especificamente ao reconhecimento concreto da fração unitária associada a esse denominador comum.
- ⋆ No item b), o professor deverá explorar e evidenciar as articulações entre as diferentes estratégias dos alunos, sendo as principais:
  a) Multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número (algoritmo discutido na lição anterior).
  b) Observar a quantidade de fatias nas imagens acima que apresentam as frações consumidas.
- ⋆ Os itens d) a g) exploraram diferentes interpretações da adição da subtração, a saber:
  a) subtração – completar;
  b) adição – juntar;
  c) subtração – retirar;
  d) subtração – comparar.

Atividade 3

Uma barra de chocolate é vendida com as marcações mostradas na figura abaixo.



Alice comeu a metade dessa barra de chocolate (em bege), quebrou o restante da barra em pedaços, seguindo as marcações e comeu 3 desses pedaços (em azul).



Se considerarmos a barra de chocolate como a unidade, indicamos que as quantidades comidas são: $\frac{1}{2}$ por Alice e $\frac{3}{16}$ por Miguel. Os pedaços da barra (quebrados por Miguel de acordo com as marcações na barra) correspondem a uma subdivisão dessa unidade. Observe que ambas as frações da barra de chocolate comidas por Alice e Miguel podem ser obtidas a partir dessa subdivisão: Miguel comeu 3 pedaços e a quantidade comida por Alice corresponde a 8 pedaços.

a) Um pedaço corresponde a que fração da barra de chocolate?

b) Complete a parte em branco (numerador) para indicar a fração da barra de chocolate que Alice comeu.

$$\frac{1}{2} = \frac{\square}{16}$$

c) Que fração da barra de chocolate foi comida por Alice e por Miguel, juntos?

d) Que fração da barra de chocolate não foi comida?

Atividade 4

Amanda, Bruno e Caio pediram três pizzas do mesmo tamanho, mas com sabores diferentes. Todas as pizzas nessa pizzaria são servidas em **12 fatias** iguais. Amanda comeu $\frac{1}{6}$ de uma pizza, Bruno comeu $\frac{3}{4}$ de outra, e Caio comeu $\frac{2}{3}$ da pizza que pediu.

Em cada um desses itens, após as resoluções dos estudantes, recomendamos que o professor faça o registro simbólico no quadro e indique o resultado. Por exemplo, no item d), tem-se:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$$

⋆ É interessante que o professor encoraje e traga para a discussão com a turma as diferentes estratégias que tiverem sido propostas pelos alunos, inclusive aquelas que não estiverem inteiramente corretas. O objetivo não é destacar soluções “mais eficientes” ou separar as “certas” das “erradas”, e sim evidenciar como diferentes estratégias permitem obter os resultados a partir da determinação de uma subdivisão comum. Por exemplo, no caso do item d), um aluno pode sobrepor o desenho das fatias comidas por Bruno no desenho das comidas por Caio, e contar quantas fatias faltam para atingir a quantidade consumida por Caio.

⋆ É importante que o professor apresente o registro das operações em notação de fração, com o objetivo de articular esse registro com as estratégias geométricas, baseadas na contagem direta das subdivisões comuns.

Esta atividade possui folhas para reprodução no final do livro.

Resposta da Atividade 4

a) $\frac{1}{12}$ é a fração unitária de pizza comum, pois todas as quantidades consumidas podem ser indicadas as partir de múltiplos dessa fração de pizza.

b) Para cada quantidade é possível simplesmente contar a quantidade de fatias observando as imagens acima, uma vez que cada fatia corresponde a $\frac{1}{12}$ de uma pizza. Assim, obtemos como resposta as frações $\frac{2}{12}$, $\frac{9}{12}$ e $\frac{8}{12}$, que são iguais a $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$, respectivamente.

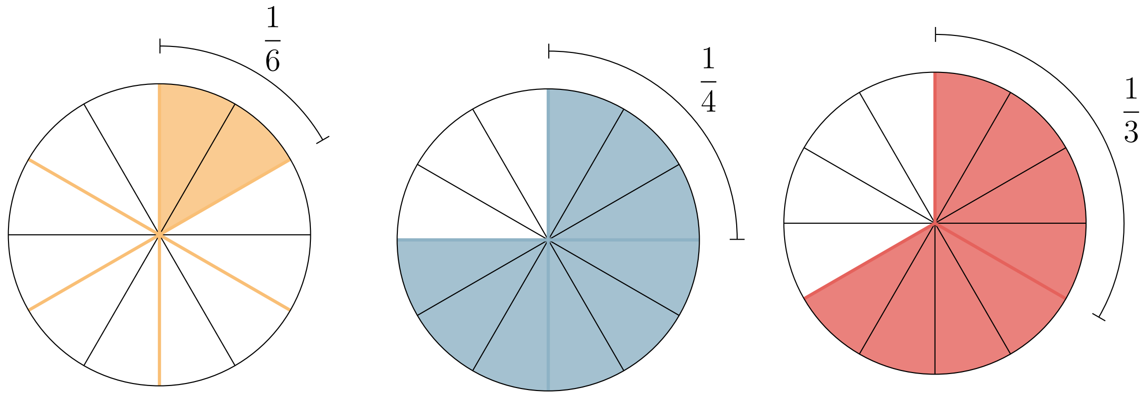
c) Observando as quantidades indicadas no item anterior quem comeu mais foi Bruno, $\frac{9}{12}$ de pizza. Quem comeu menos foi Amanda, $\frac{2}{12}$ da pizza.

d) $\frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$.

e) $\frac{2}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$.

f) $\frac{8}{12} - \frac{2}{12} = \frac{6}{12}$.

g) $\frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$



Fração de pizza consumida por Amanda $\frac{1}{6}$

Fração de pizza consumida por Bruno $\frac{3}{4}$

Fração de pizza consumida por Caio $\frac{2}{3}$

a) Que fração de uma pizza cada fatia representa?

b) Complete os espaços (numeradores) a seguir registrando outra representação para a fração de uma pizza que cada uma das crianças comeu.
Amanda: $\frac{1}{6} = \frac{\quad}{12}$ Bruno: $\frac{3}{4} = \frac{\quad}{12}$ Caio: $\frac{2}{3} = \frac{\quad}{12}$

c) Quem comeu mais pizza? Quem comeu menos pizza?

d) Que quantidade de pizza Bruno comeu a mais do que Caio?

e) Que quantidade de pizza Amanda e Bruno comeram juntas?

f) Que fração de uma pizza Amanda comeu a menos do que Caio?

g) Quanto a mais de pizza Bruno consumiu, em relação a Amanda?

ORGANIZANDO AS IDEIAS

No caso de quantidades expressas por meio de frações de uma unidade dada, para comparar, determinar a soma ou determinar a diferença, é necessário uma **subdivisão da unidade** com a qual seja possível expressar ambas as quantidades por meio de frações equivalentes às frações dadas e de mesmo denominador. Por exemplo:

- Na Atividade 3, a subdivisão da unidade considerada, barra de chocolate, permitiu expressar as quantidades de chocolate comidas por Alice e por Miguel a partir da contagem da mesma subdivisão da unidade. A partir dessa estratégia, foram determinadas a quantidade de chocolate comidas por Alice e Miguel juntos, bem como a quantidade de chocolate restante.

- Na Atividade 4, a unidade é uma pizza e a fatia de pizza é uma subdivisão dessa unidade. Neste caso, pôde-se expressar todas as frações de pizza consumidas por

Atividade 5

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ encontrar uma subdivisão comum entre as quantidades que permita efetuar as operações;
- ⋆ perceber a não unicidade da subdivisão comum.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Como nas atividades anteriores e nas próximas desta lição, o uso obrigatório do MMC não é recomendado. Ao contrário, objetiva-se justamente provocar explicitamente a percepção de que **essa subdivisão não é única**. Assim, devem ser apresentadas diversas frações equivalentes às frações dadas na atividade, como por exemplo, as seguintes:

$$\frac{6}{10} \text{ e } \frac{7}{10}$$

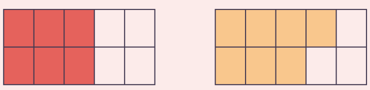
$$\frac{12}{20} \text{ e } \frac{14}{20}$$

$$\frac{24}{40} \text{ e } \frac{28}{40}$$

- ⋆ A partir dessas diferentes frações equivalentes, o professor deve procurar **articular com os estudantes a relação entre diferentes subdivisões com a sistematização de frações equivalentes.** Deve-se retomar a reflexão iniciada na sessão **Organizando as Ideias** de que escrever quantidades em relação a uma subdivisão comum corresponde a determinar frações equivalentes com um denominador comum.

Resposta da Atividade 5

a) Uma possível subdivisão comum é em 10 partes, portanto, igual a fração $\frac{1}{10}$. Com essa subdivisão ambas as quantidades podem ser expressas por frações de denominador 10. Uma forma de observar tal fato é determinar, na primeira imagem, um segmento horizontal, de modo a dividir cada parte da partição já existente em duas partes iguais.



b) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$. A fração $\frac{7}{10}$ já está escrita a partir de décimos.

c) Sim, existem várias. Por exemplo, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$ ou $\frac{1}{70}$.

d) Como $\frac{3}{5}+\frac{7}{10} = \frac{6}{10}+\frac{7}{10} = \frac{13}{10} > 1$, juntas, as regiões destacadas em vermelho e em bege determinam um região maior do que a do retângulo dado.

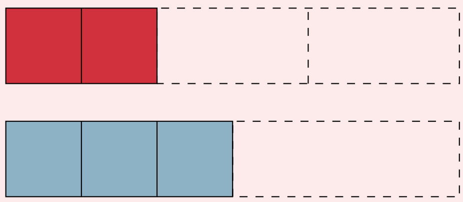
Atividade 6

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ entender o processo de determinação de um denominador comum entre duas frações com base na ideia de equipartição da unidade da qual ambas sejam múltiplas inteiras, obtida a partir de um processo geométrico;
- ⋆ determinar a soma e a diferença de duas frações a partir dessa subdivisão da unidade e de frações equivalentes às frações originais.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Esta atividade é continuação da atividade 2. Busca-se aplicar a sistematização das ideias para retomar reflexões ensejadas naquela atividade. Buscar com o estudante a generalização por situações que não são tão imediatas, em que trabalhamos com pedaços de fita que não são múltiplos inteiros de outros pedaços (dobro, como no caso dos pedaços azul e amarelo, presente na atividade 2).
- ⋆ No item a), em primeiro lugar, os alunos devem perceber que a nova fita vermelha e azul formada é *menor* que a fita original. Para chegar a essa conclusão, diferentes estratégias podem ser empregadas - e a exploração dessas estratégias deve ser estimulada pelo professor. Por exemplo, os alunos podem observar concretamente que como cada pedaço vermelho (correspondente à fração $\frac{1}{3}$) é menor que cada pedaço azul (correspondente à fração $\frac{1}{2}$), então a nova fita vermelha e azul é menor que a fita original.
- ⋆ A partir dessas explorações iniciais, explore com os alunos a discussão sobre diversas formas de saber qual fita tem o maior tamanho, e que, além disso, é possível determinar o tamanho da nova fita vermelha e azul em relação à original, somando-se as medidas dos dois pedaços (vermelho e azul) que a compõe. Para isso, algumas observações são fundamentais:
  a) O tamanho da fita original será uma **unidade**, associada ao número 1, em relação à qual os tamanhos das demais grandezas serão determinadas, e expressas como frações.
  b) Como os pedaços vermelho e azul correspondem a subdivisões de tamanhos diferentes da unidade (tamanho da fita original), para determinar sua soma será preciso expressá-los como múltiplos inteiros de uma **subdivisão comum**, que pode ser obtida dividindo-se o pedaço vermelho em duas partes iguais e o pedaço azul em três partes iguais.



Desta forma, cada pedaço de fita vermelha equivale a 2 pedaços iguais a $\frac{1}{6}$ da unidade, e cada pedaço de fita

Amanda, Bruno e Caio a partir de contagem dessas fatias (subdivisões da unidade). Relembrando:

$$\frac{1}{6}=\frac{2}{12} \qquad \frac{3}{4}=\frac{9}{12} \qquad \frac{2}{3}=\frac{8}{12}.$$

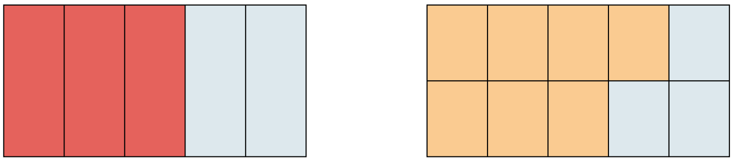
Como os exemplos acima ilustram, a escolha adequada de uma subdivisão da unidade que permita representar as frações dadas com um mesmo denomindador foi a estratégia usada para calcular a adição e a subtração dessas frações. É exatamente essa estratégia que usaremos para calcular adição e subtração de frações em geral.

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{2}{12}+\frac{9}{12}=\frac{11}{12}.$$

MÃO NA MASSA

Atividade 5

Tendo como unidade um mesmo retângulo, as representações das frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ estão ilustradas nas figuras a seguir.



a) Determine uma subdivisão da unidade que permita expressar essas quantidades por frações com um mesmo denominador. Represente tal subdivisão nas figuras acima.

b) Escreva frações iguais a $\frac{3}{5}$ e a $\frac{7}{10}$ a partir dessa subdivisão.

c) Existe alguma outra subdivisão, diferente da que você usou para responder os itens a) e b), com a qual também seja possível responder ao item b)? Se sim, qual?

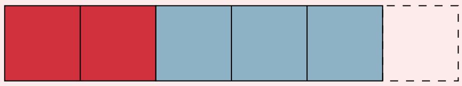
d) Juntas, as regiões destacadas em vermelho e em bege determinam um região maior, menor ou igual a um retângulo? Explique.

Atividade 6

Aqui retomamos a Atividade 2, na qual a professora Estela comprou fitas de mesmo tamanho e as cortou em partes iguais: a vermelha em três pedaços; a azul em dois pedaços e a amarela em quatro pedaços.

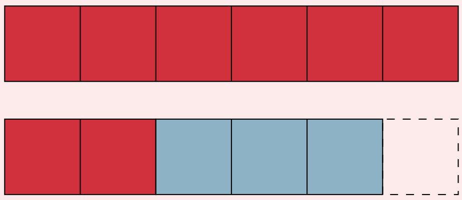
azul equivale a 3 pedaços iguais a $\frac{1}{6}$ da unidade, totalizando $\dfrac{5}{6}$ da unidade:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}.$$



Essa subdivisão comum permite ainda determinar a diferença entre os tamanhos da fita original e da nova fita vermelha e azul, associando-se a unidade a 6 pedaços iguais a $\frac{1}{6}$ de uma fita original:

$$1-\frac{5}{6}=\frac{6}{6}-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}.$$



- ⋆ Como observado anteriormente, essas construções podem ser feitas por meio de corte e colagem de materiais concretos.
- ⋆ O item b) deve ser desenvolvido de forma análoga ao item a).

Resposta da Atividade 6

a) Um pedaço vermelho mais um pedaço azul corresponde a $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$ de uma fita original. Daí, a nova fita formada é menor do que uma fita original, pois $\frac{5}{6}<\frac{6}{6}=1$. A diferença de tamanho será dada por $1-\frac{5}{6}=\frac{6}{6}-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$.

b) A nova fita vermelha e amarela é maior do que uma fita original, uma vez que equivale a $\frac{17}{12}>1$ da fita original. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}+\frac{3}{12}+\frac{3}{12}=\frac{17}{12}$.

Atividade 7

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ aplicar a ideia de obter um denominador comum entre duas frações dadas, com base no processo geométrico de subdivisão da unidade, em exercícios sem uma situação contextualizada e sem uma representação pictórica previamente apresentada, ficando para o aluno construir tal representação.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Embora não sejam dadas situações contextualizadas, procure conduzir esta atividade com base em representações geométricas para as frações dadas e na determinação de uma subdivisão comum a partir dessas representações, como nas atividades 2 a 6. O objeto é justamente aplicar as ideias construídas a partir daquelas atividades em exercícios sem situações contextualizadas.
- ⋆ Nos casos que envolvem o número 1, deve-se relembrar $1=\frac{n}{n}$, qualquer que seja o número natural n.

Resposta da Atividade 7

São respostas possíveis:

a) $\frac{3}{9}$ e $\frac{2}{9}$. Subdivisão escolhida: $\frac{1}{9}$ da unidade.

b) $\frac{3}{10}$ e $\frac{8}{10}$. Subdivisão escolhida: $\frac{1}{10}$ da unidade.

c) $\frac{7}{7}$ e $\frac{3}{7}$. Subdivisão escolhida: $\frac{1}{7}$ da unidade.

d) $\frac{9}{15}$ e $\frac{40}{15}$. Subdivisão escolhida: $\frac{1}{15}$ da unidade.

e) $\frac{21}{24}$ e $\frac{26}{24}$. Subdivisão escolhida: $\frac{1}{24}$ da unidade.

f) $\frac{7}{4}$ e $\frac{20}{4}$. Subdivisão escolhida: $\frac{1}{4}$ da unidade.

Observação: Todos esses itens admitem outras respostas, uma vez que é possível escolher diferentes subdivisões da unidade, ou seja, outras fraçoes unitárias. Por exemplo, no item (e) temos como outra solução possível: $\frac{42}{48}$ e $\frac{52}{48}$. Subdivisão escolhida: $\frac{1}{48}$ da unidade..

Atividade 8

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ aplicar as ideias de obter um denominador comum entre duas frações dadas e de usar esse denominador para determinar adições e subtrações, com base no processo geométrico de subdivisão da unidade, em exercícios sem uma situação contextualizada.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

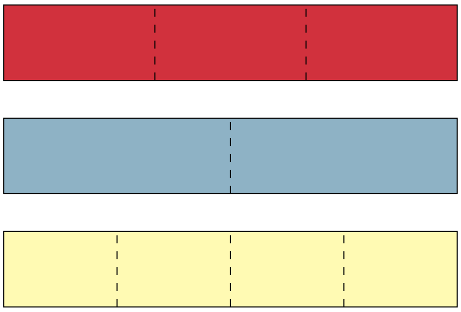
- ⋆ Como na atividade anterior, embora não sejam dadas situações contextualizadas, procure conduzir esta atividade com base em representações geométricas para as frações dadas e na determinação de uma subdivisão comum a partir dessas representações, como nas atividades 2 a 6.
- ⋆ Nos casos que envolvem o número 1, deve-se relembrar $1=\frac{n}{n}$.

Resposta da Atividade 8

a) $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{3}{9}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$.

b) $\frac{3}{10}+\frac{4}{5}=\frac{3}{10}+\frac{8}{10}=\frac{11}{10}$.

c) $1-\frac{3}{7}=\frac{7}{7}-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$.



a) Agora, a professora Estela juntou um pedaço da fita vermelha com um pedaço da fita azul. Essa nova fita formada tem tamanho maior ou menor ou igual ao tamanho original de uma fita? A que fração de uma fita original corresponde a nova fita vermelha e azul? Qual é a diferença entre os tamanhos de uma fita original e da fita vermelha e azul?

b) A professora formou então mais uma fita colorida, agora juntando (de forma intercalada) dois pedaços vermelhos e três pedaços amarelos. Essa nova fita vermelha e amarela é maior ou menor do que uma fita original? A que fração de uma fita original corresponde a nova fita vermelha e azul? Qual é a diferença entre os tamanhos da fita original e da fita vermelha e amarela?

Atividade 7

Em cada um dos itens a seguir, escreva frações iguais às frações dadas que tenham mesmo denominador. Para cada par de frações, destaque a subdivisão escolhida da unidade para determinar o denominador comum e represente essa subdivisão por meio de um desenho.

a) $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{9}$ b) $\frac{3}{10}$ e $\frac{4}{5}$ c) 1 e $\frac{3}{7}$

d) $\frac{3}{5}$ e $\frac{8}{3}$ e) $\frac{7}{8}$ e $\frac{13}{12}$ f) $\frac{7}{4}$ e 5

Atividade 8

Em cada um dos itens a seguir, faça a conta e uma ilustração que explique a maneira como você realizou o cálculo solicitado.

a) $\frac{1}{3} - \frac{2}{9}$ b) $\frac{3}{10} + \frac{4}{5}$ c) $1 - \frac{3}{7}$

Atividade 9

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ relacionar a adição de frações com a sua representação como pontos na reta.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Esta atividade, assim como as duas que se seguem (10 e 11), usam a ideia de que $1 = \frac{n}{n}$, ou de forma mais geral, de que, se a é um número natural, então $a = \frac{an}{n}$, para n diferente de 0.

⋆ Essas atividades envolvem os chamados “números mistos” (números expressos por uma parte inteira e uma parte fracionária). No entanto, **não há necessidade de apresentar essa nomenclatura aos alunos.**

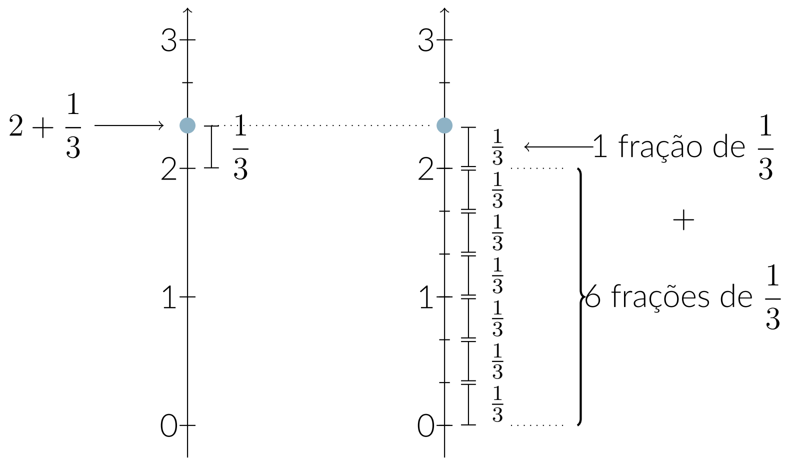
⋆ A representação da reta na posição vertical foi emprega com o objetivo de destacar o fato de que os aspectos determinantes nesta forma de representação são a ordenação e a distância entre os pontos. A apresentação da reta numérica apenas na posição horizontal pode causar uma impressão de que apenas tal posição é aceitável.

Atividade 9

Miguel deseja calcular a soma $2+\frac{1}{3}$. Para isso, marcou na reta numérica um ponto determinado pela justaposição do segmento correspondente a 2 unidades com um segmento igual a $\frac{1}{3}$ da unidade, como na figura abaixo.

Miguel relacionou essa estratégia com o seguinte cálculo:

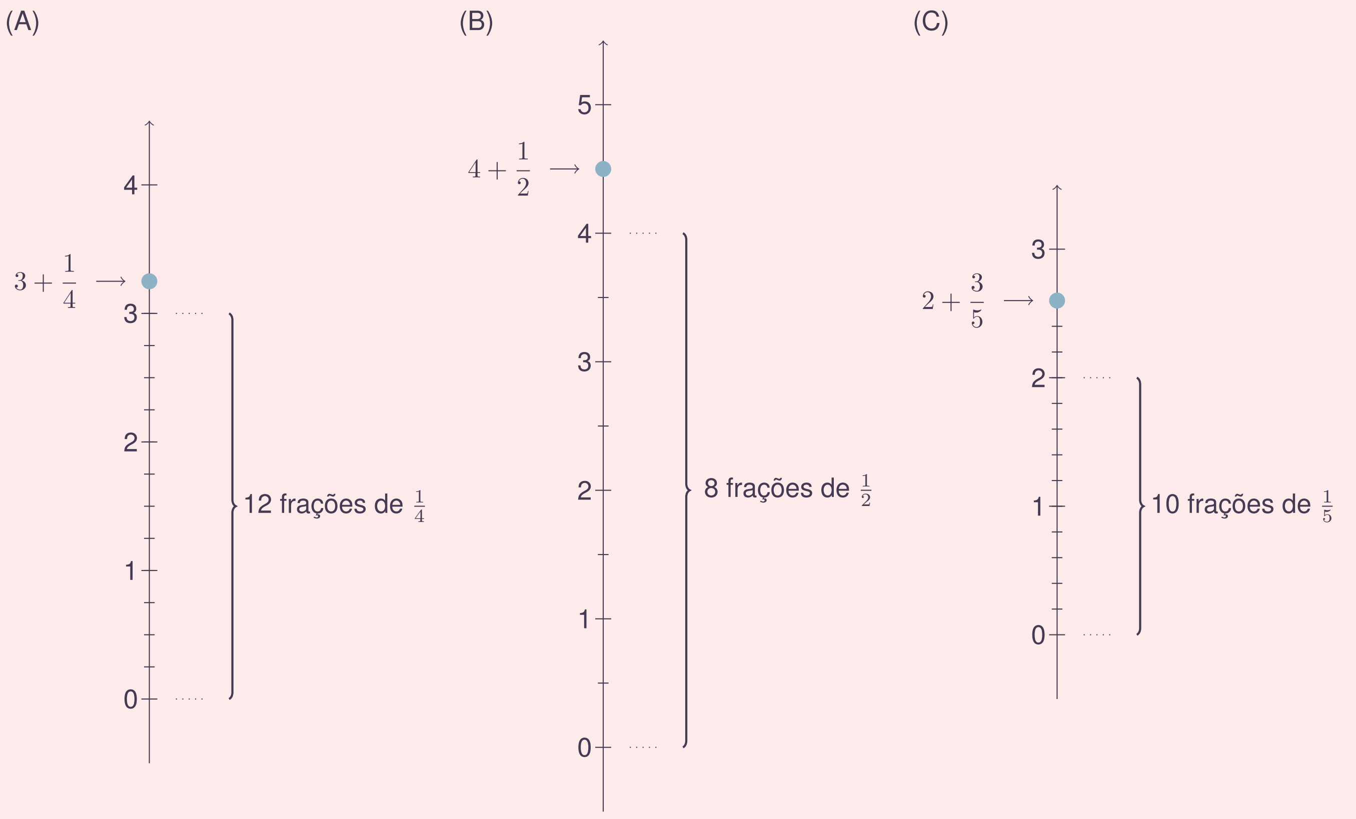
$$2+\frac{1}{3}=\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$



a) Em cada item a seguir, a partir da imagem repita o procedimento feito por Miguel e realize os cálculos.

Resposta da Atividade 9

a)



b) Repetindo o mesmo processo do item a) obtém-se $7+\frac{2}{3}=\frac{21}{3}+\frac{2}{3}=\frac{23}{3}$.

Atividade 10

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ determinar uma subtração de frações com a interpretação de completar.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Explorar o fato de que não é incomum que o uso da palavra

Resposta da Atividade 10

De 3 oitavos para se alcançar 27 oitavos faltam 24 oitavos, o que equivale a 3. De outro modo, $\frac{27}{8}-\frac{3}{8}=\frac{24}{8}=3$. Isto indica que deve-se acrescentar a fração $\frac{3}{8}$ a 3 inteiros para obter-se $\frac{27}{8}$.

Atividade 11

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ determinar uma subtração de frações com a interpretação de completar;

⋆ explorar a articulação entre número misto e subtração de frações.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Como na atividade anterior, observar que a visualização da representação na reta pode ajudar a destacar o fato de que se deve determinar "quanto falta" de $\frac{19}{7}$ para chegar a 2.

Resposta da Atividade 11

$\frac{19}{7}>\frac{14}{7}=2$. Portanto, $\frac{19}{7}$ é maior e deve-se acrescentar 5/7 ao menor número para que o total se iguale ao maior número.

Atividade 12

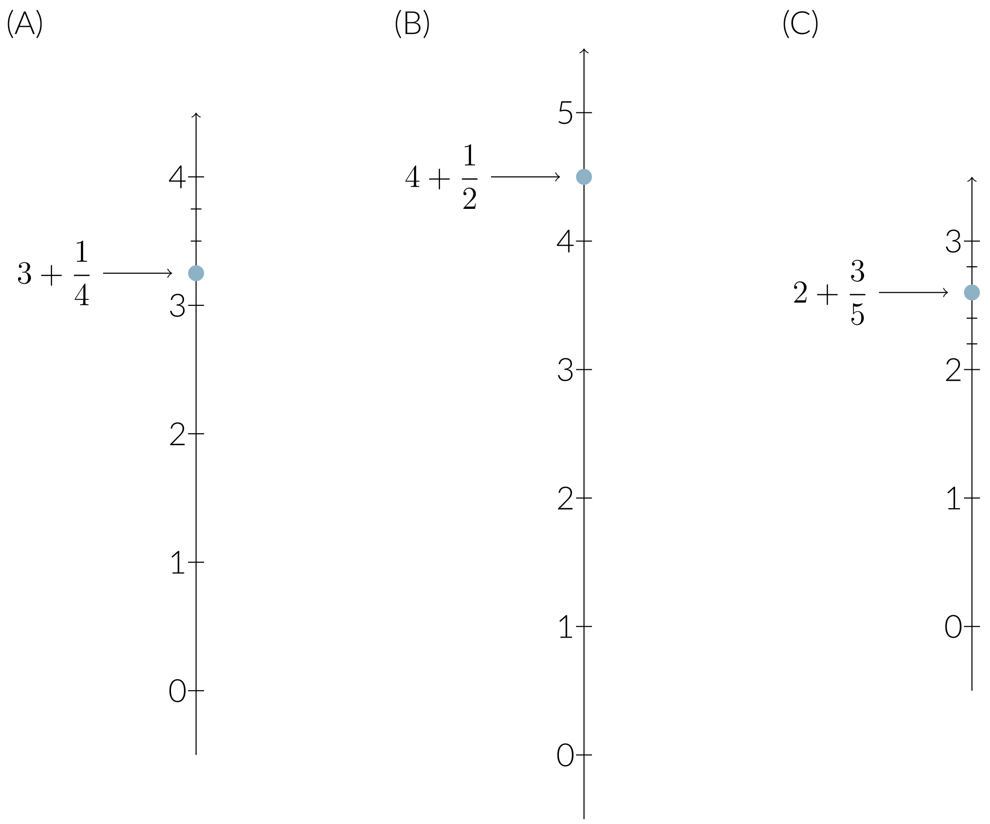
Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ aprofundar a familiaridade dos alunos com a representação na reta;

⋆ explorar a propriedade de densidade dos pontos que representam frações na reta numérica ou, equivalentemente, do conjunto das frações, ou ainda, dos números racionais positivos.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Caso os alunos tenham dificuldades em pensar sobre as soluções das tarefas propostas, o professor pode propor e explorar tarefas análogas com números naturais, empregando, por exemplo, a primeira figura.



b) Que valor é obtido se juntarmos 7 inteiros com dois terços?

Atividade 10

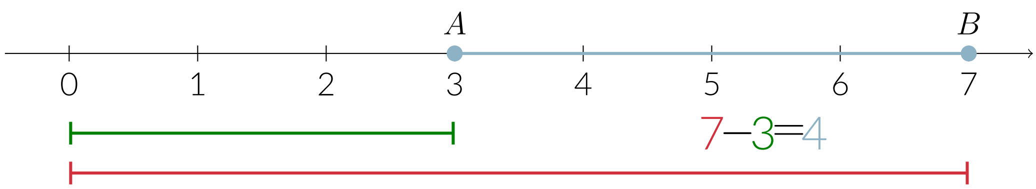
Quanto se deve acrescentar a $\frac{3}{8}$ para que se obtenha $\frac{27}{8}$?

Atividade 11

Qual é o maior número, $\frac{19}{7}$ ou 2? Quanto se deve acrescentar ao menor número para chegar ao maior?

Atividade 12

Observando a reta, Miguel conseguiu determinar o tamanho do segmento azul entre os dois pontos $A = 3$ e $B = 7$ marcados da seguinte forma:



- O item b) visa especificamente dar continuidade à discussão sobre densidade dos números racionais na reta, que foi introduzida na lição 4. A partir da escrita de frações como $\frac{15}{12}$ e $\frac{22}{12}$ pode não ser difícil para os alunos observar os seis números $\frac{16}{12}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{18}{12}$, $\frac{19}{12}$, $\frac{20}{12}$ e $\frac{21}{12}$. Uma estratégia para encontrar mais números é escrever, por exemplo, A e B como $\frac{30}{24}$ e $\frac{44}{24}$ e tomar $\frac{n}{24}$, com n variando entre 30 e 44 está entre A e B. A ideia é discutir com a turma que, como sempre podemos repetir esse processo, sempre podemos encontrar mais números entre A e B. Daí, pode-se retomar a discussão sobre frações equivalentes e sobre densidade, que foi ensejada nos últimos 3 exercícios da lição 4.

Resposta da Atividade 12

a) Por exemplo, $C = \frac{15}{12}$ e $D = \frac{22}{12}$.

b) $\frac{16}{12}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{18}{12}$, $\frac{19}{12}$, $\frac{20}{12}$ e $\frac{21}{12}$.
Se escrevermos as frações C e D com outro denominador comum pode ser mais fácil de observar mais que 6 frações. Por exemplo, $C = \frac{30}{24}$ e $D = \frac{44}{24}$ as frações a seguir estão entre C e D

$$\frac{31}{24}, \frac{32}{24}, \frac{33}{24}, \frac{34}{24}, \frac{35}{24}, \frac{36}{24}, \frac{37}{24},$$

$$\frac{38}{24}, \frac{39}{24}, \frac{40}{24}, \frac{41}{24}, \frac{42}{24} \text{ e } \frac{43}{24}.$$

Note que conseguimos agora 13 frações entre C e D. No entanto, se escrevermos C e D com o denominador 48 ainda podemos determinar mais valores. Note também que sempre podemos escolher um denominador maior de modo que encontremos mais valores.

c) O tamanho do segmento CD é dado por

Atividade 13

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- comparar, somar e subtrair frações a partir da determinação de um denominador comum com base no processo geométrico de subdivisão da unidade;
- explorar as interpretações de juntar para a adição e de comparar para a subtração.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

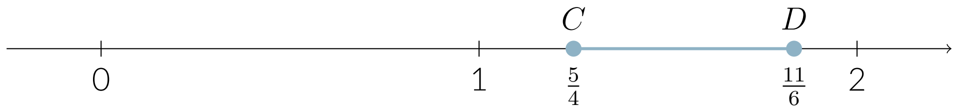
- Esta atividade retoma a noção de fração como parte de uma unidade em situações concretas, como nas atividades 2 a 6. Como naquelas atividades, a representação geométrica das frações deve servir como base para a determinação do denominador comum e para a realização da comparação e das operações de adição e de subtração. O próprio desenho do canteiro pode servir como representação geométrica para a determinação do denominador comum.

Resposta da Atividade 13

a) Utilizando o mesmo denominador para fins de comparação temos, por exemplo, que as quantidades $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$ são iguais a $\frac{4}{6}$ e $\frac{3}{6}$, respectivamente. Portanto a fração do canteiro solicitada pelo pai, $\frac{2}{3}$, é maior do que a fração solicitada pela mãe.

b) Juntando as espaços solicitados temos $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$. Mas $\frac{7}{6} > \frac{6}{6} = 1$. O espaço reservado inicialmente para o canteiro não atende as solicitações do pai e da mãe de Miguel.

Miguel calculou o tamanho do segmento azul fazendo a diferença entre o tamanho do segmento vermelho e o tamanho do segmento verde. Assim, concluiu que o tamanho do segmento AB é igual a 4. Usando um raciocínio parecido, e considerando $C = \frac{5}{4}$ e $D = \frac{11}{6}$, ajude Miguel a realizar as tarefas a seguir.



a) Escreva C e D a partir de uma mesma subdivisão da unidade (isto é, com o mesmo denominador).

b) Determine seis frações que correspondam a pontos na reta numérica entre C e D. Discuta com seus colegas se é possível determinar mais que seis valores e, se for possível, qual seria a estratégia para fazer isso.

c) Calcule o tamanho do segmento CD.

d) Determine uma fração que, somada a $\frac{5}{4}$ dê um resultado menor que $\frac{11}{6}$. Justifique a sua resposta usando a reta.

$$\frac{5}{4} + \frac{\square}{\square} = \frac{11}{6}.$$

e) Encontre outras três possíveis respostas para o item anterior.

f) Determine duas frações possíveis, que quando somadas a $\frac{5}{4}$ tenham como resultado $\frac{11}{6}$. Justifique a sua resposta usando a reta.

$$\frac{5}{4} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{11}{6}.$$

Atividade 13

A família de Miguel reservou um determinado espaço retangular para fazer um canteiro em seu quintal. A família quer que o cateiro tenha rosas e verduras frescas. O pai de Miguel disse que precisa de $\frac{2}{3}$ do espaço inicialmente reservado, para cultivar rosas. A mãe disse que necessita de $\frac{1}{2}$ desse espaço, para plantar as verduras. Quando Miguel ouviu o diálogo dos pais, pensou nas seguintes questões:

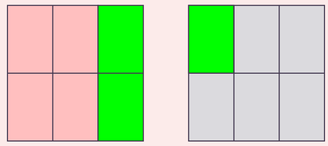
a) Quem precisa de mais espaço, seu pai ou sua mãe?

b) O espaço reservado inicialmente para o canteiro é suficiente para comportar os espaços de que o pai e a mãe de Miguel precisam?

c) O espaço inicialmente reservado não é suficiente.

d) Deve-se observar quanto excede um canteiro $\frac{7}{6}-1 = \frac{7}{6} - \frac{6}{6} = \frac{1}{6}$. É necessário aumentar $\frac{1}{6}$ do espaço inicialmente reservado para o canteiro.

O denominador comum empregado foi 6. Cada retângulo com 6 divisões indica a fração de canteiro que tinha sido reservada inicialmente.



Atividade 14

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ comparar, somar e subtrair frações a partir da determinação de um denominador comum com base no processo geométrica de subdivisão da unidade;

⋆ explorar as interpretações de juntar para a adição e de comparar para a subtração.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Considere que, como na atividade anterior, é explorada aqui a noção de fração como parte de uma unidade em uma situação contextualizada, com as interpretações de juntar para a adição e de comparar para a subtração, agora com três parcelas e com uma situação envolvendo volume.

Resposta da Atividade 14

Somando a quantidade de água presente nas três garrafas temos: $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{16}{24} + \frac{12}{24} + \frac{15}{24} = \frac{43}{24}$. Concluímos que é possível, pois $\frac{43}{24} < \frac{48}{24} = 2$.

Atividade 15

Objetivos específicos: Levar o aluno a

⋆ explorar a formulação de conjecturas envolvendo a estrutura algébrica dos conjuntos numéricos, visamos atingir não só reflexões a respeito de números racionais, mas também estimular a habilidade de argumentação em Matemática.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Neste momento, não se espera ainda que os alunos justifiquem com rigor suas afirmações, mas sim que busquem ilustrar suas conjecturas a partir de exemplos.

⋆ Recomenda-se que o professor discuta cada item a partir das soluções dos alunos, destacando as respostas corretas com base nos exemplos propostos pelos estudantes.

Resposta da Atividade 15

a) Falso. Exemplo: $3 + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$. Há outras possibilidades de respostas.

b) Falso. Exemplo: $7 - \frac{3}{4} = \frac{25}{4}$.

c) Falso. Exemplo: $\frac{11}{6} + \frac{7}{6} = \frac{18}{6} = 3$.

d) Falso. Exemplo: $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

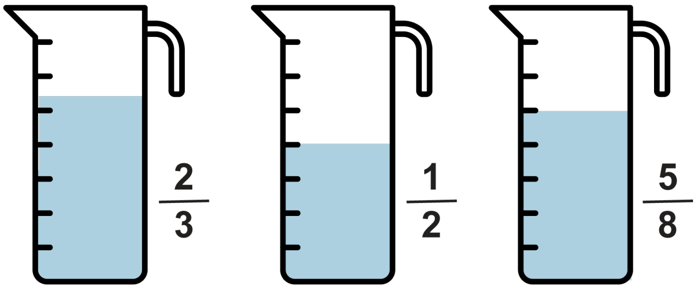
c) Caso o espaço seja suficiente, que fração do mesmo ficaria sem uso?

d) Caso o espaço não seja suficiente, que fração do canteiro reservado inicialmente deverá ser acrescentada para que a família consiga fazer as plantações que deseja?

Faça um desenho que ajude a explicar as suas respostas para as questões de Miguel. Não deixe de indicar a subdivisão da unidade que você empregou.

Atividade 14

Há três recipientes cilíndricos, de mesmo tamanho, contendo água. No primeiro recipiente, a água ocupa dois terços de sua capacidade. No segundo, a água ocupa metade de sua capacidade. No terceiro, a água ocupa cinco oitavos de sua capacidade.



É possível redistribuir a água de todos os recipientes em somente dois deles?

QUEBRANDO A CUCA

Atividade 15

Diga se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Para as verdadeiras, explique com as suas palavras por que acha que são verdadeiras. Para as falsas, dê um exemplo que justifique a sua avaliação.

a) A soma de um número inteiro com uma fração não inteira pode sempre ser expressa por um número inteiro.

b) A diferença entre um número inteiro e uma fração não inteira pode sempre ser expressa por um número inteiro.

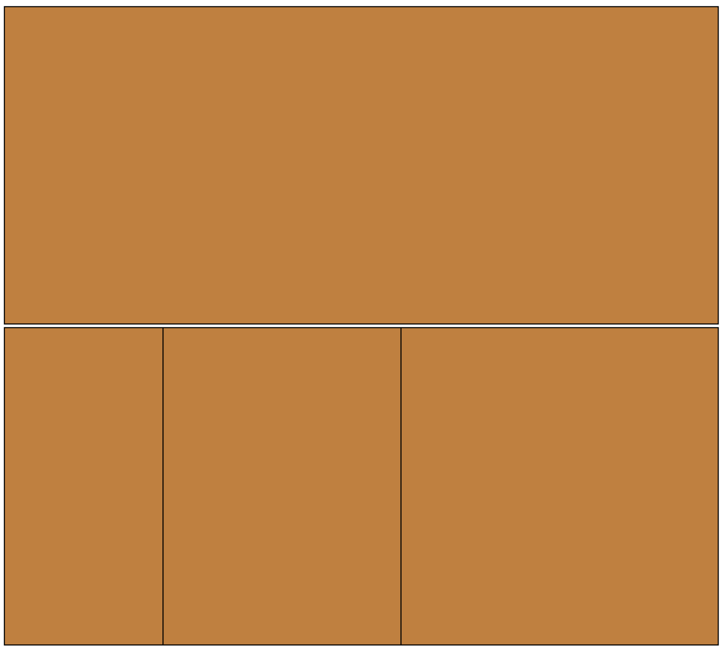
c) A soma de uma fração não inteira com uma fração não inteira é, necessariamente, uma fração não inteira.

d) A diferença entre uma fração não inteira e uma fração não inteira é, necessariamente, uma fração não inteira.

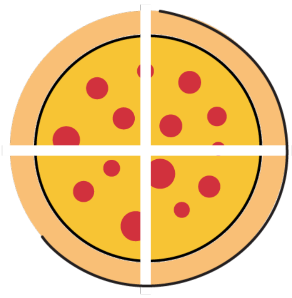
Folhas para reprodução

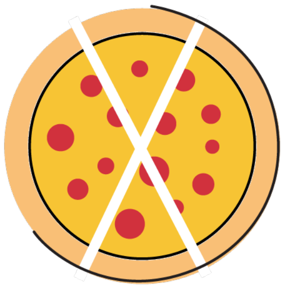
LIÇÃO 1

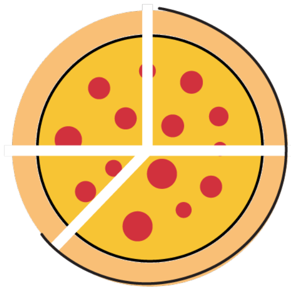
Atividade 1



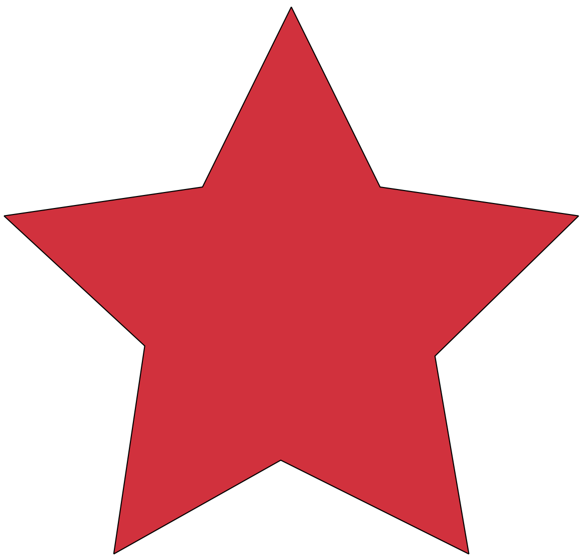
Atividade 2



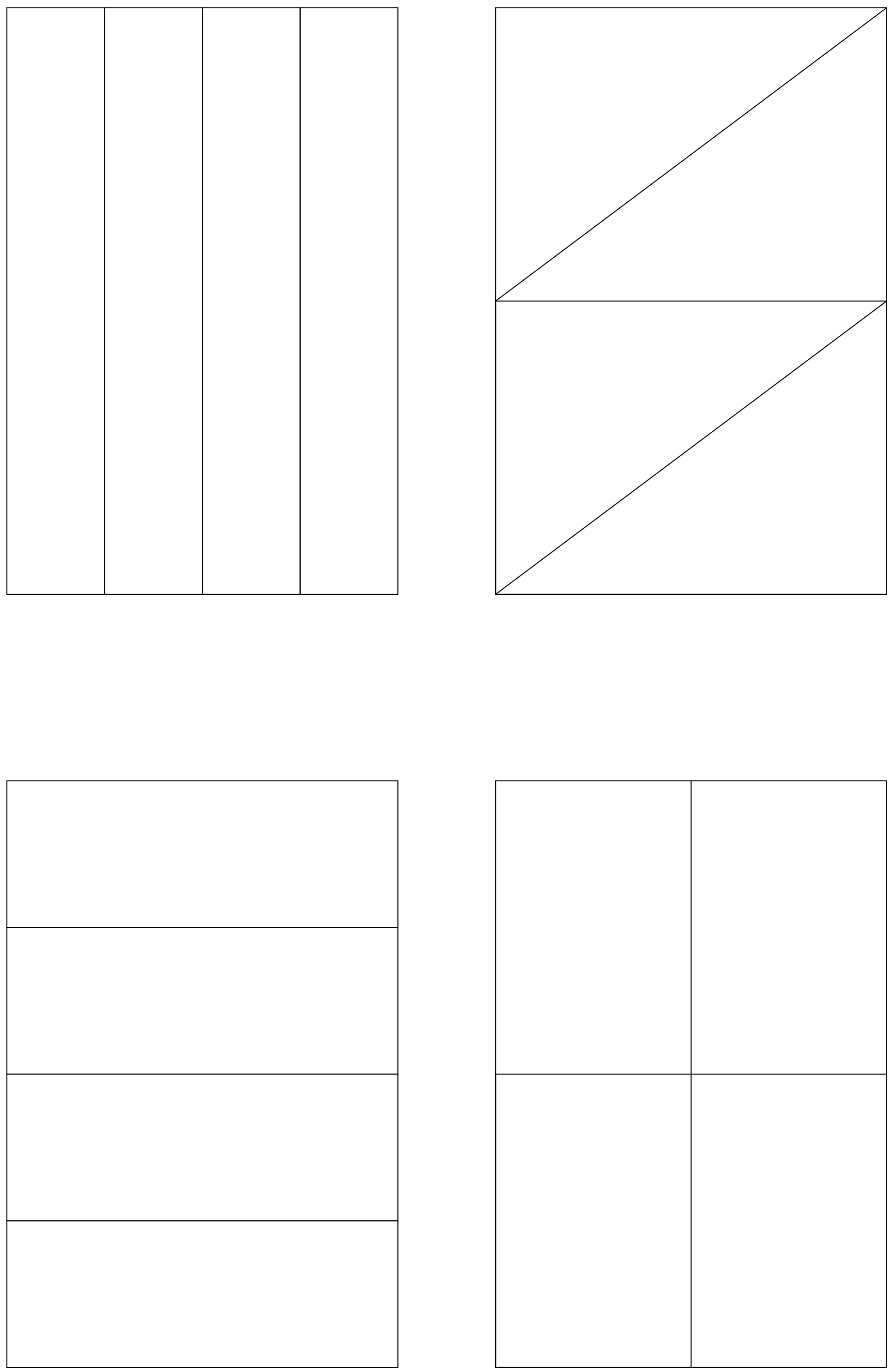


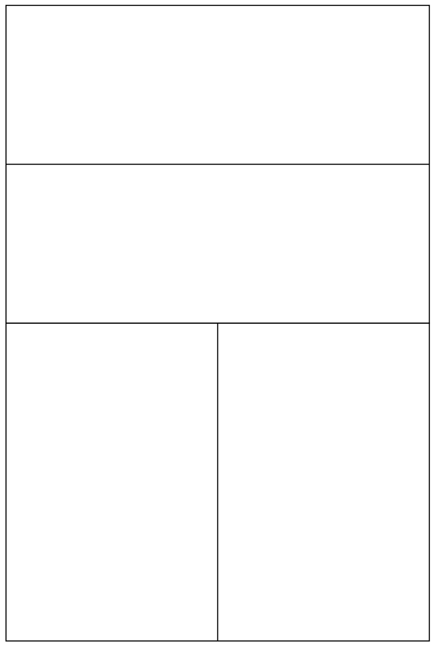


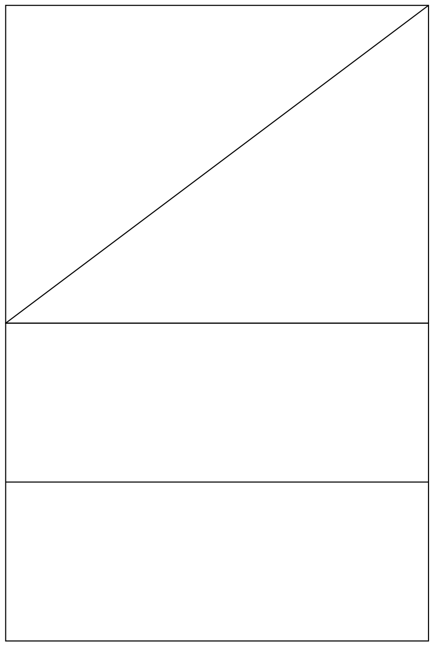
Atividade 3

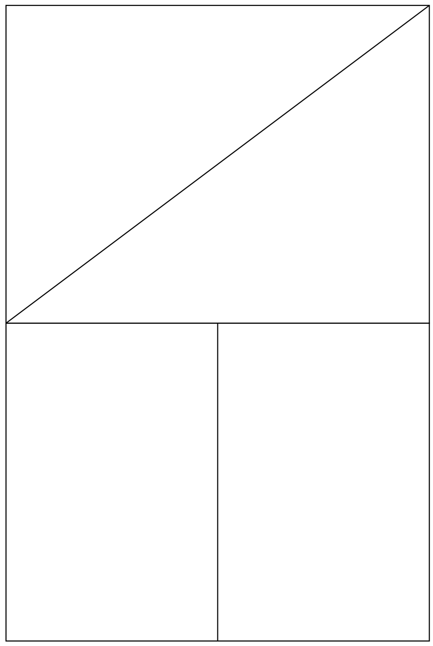


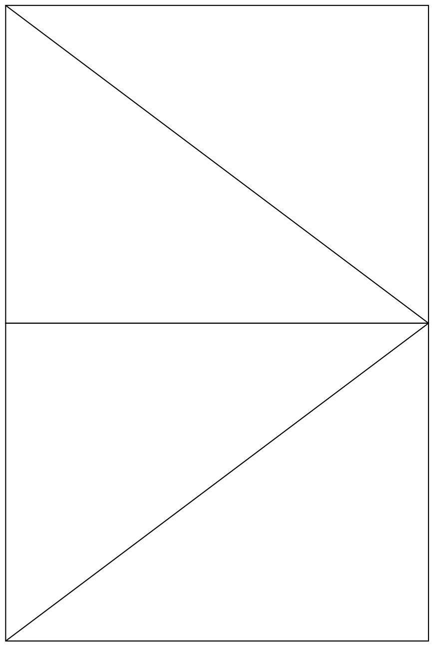
Atividade 4











Atividade 9

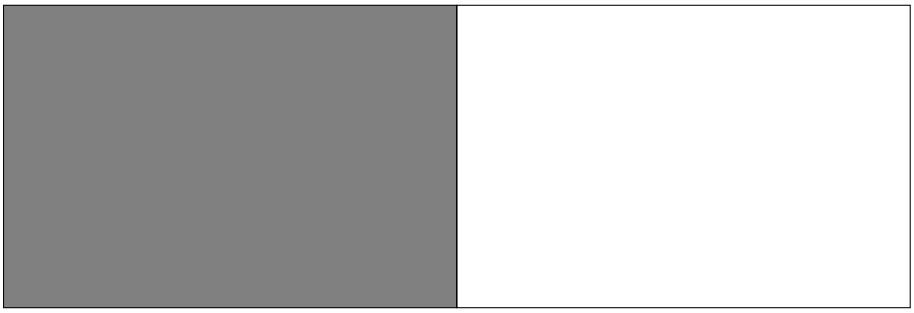


Figura 1

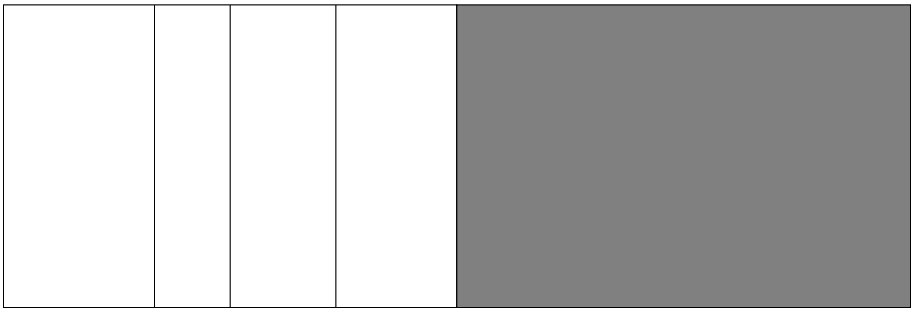


Figura 2

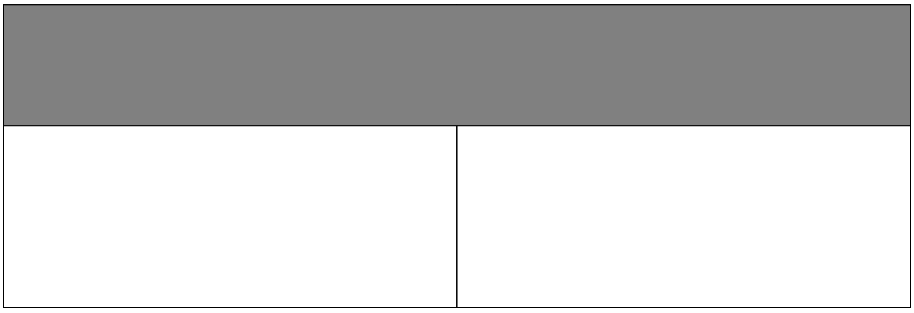


Figura 3

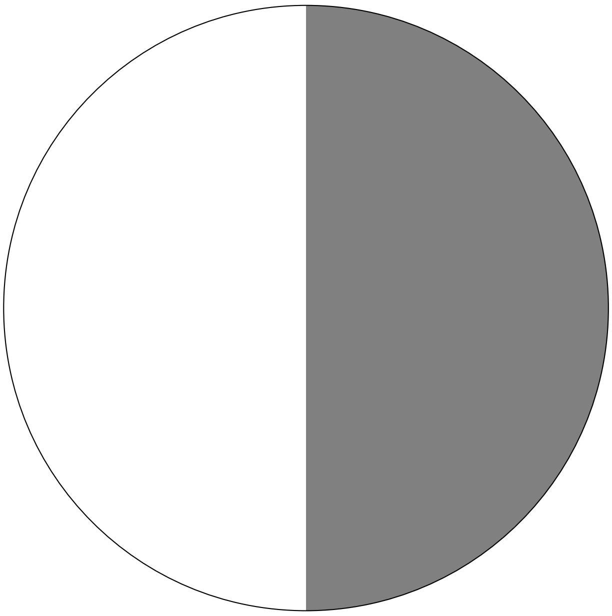


Figura 4

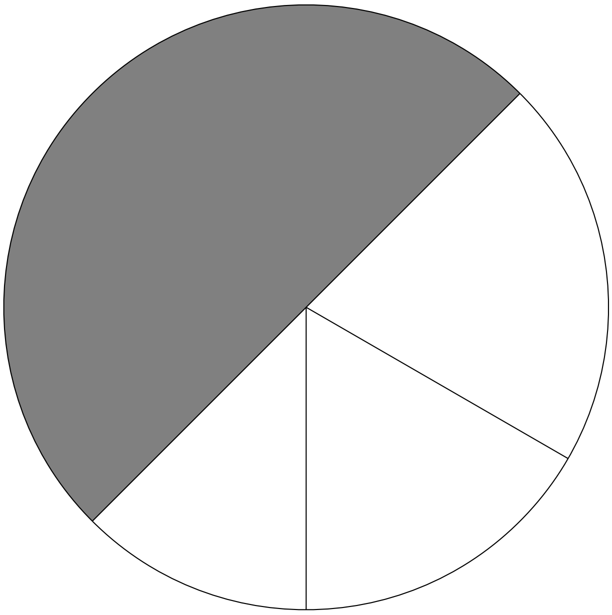


Figura 5

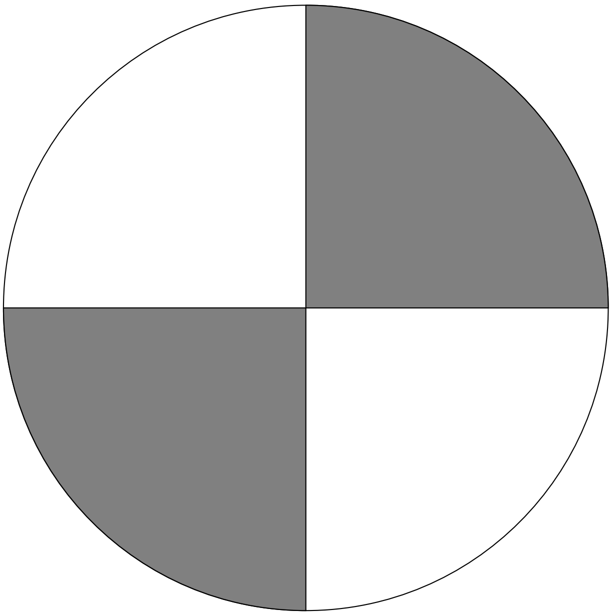


Figura 6

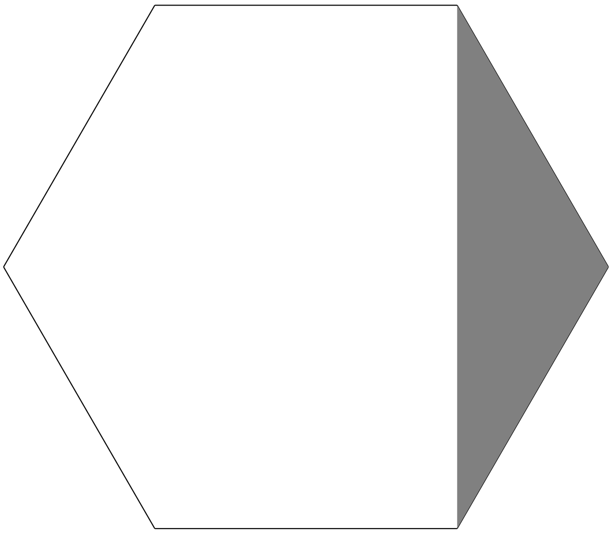


Figura 7

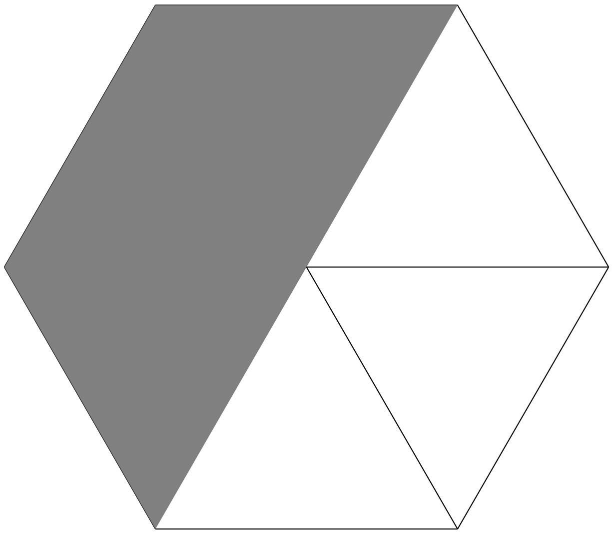


Figura 8

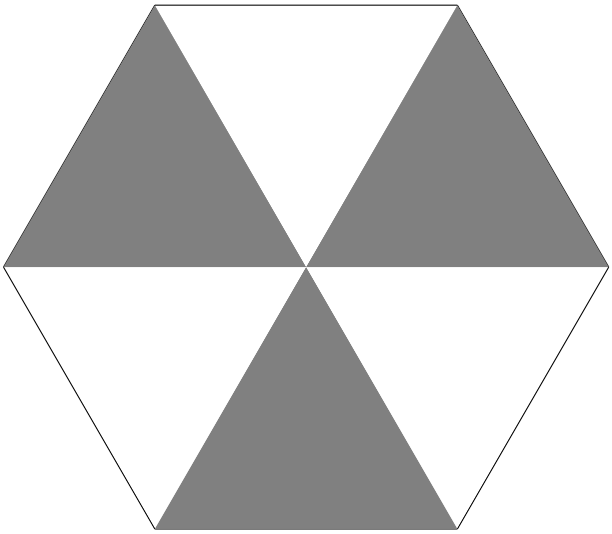


Figura 9

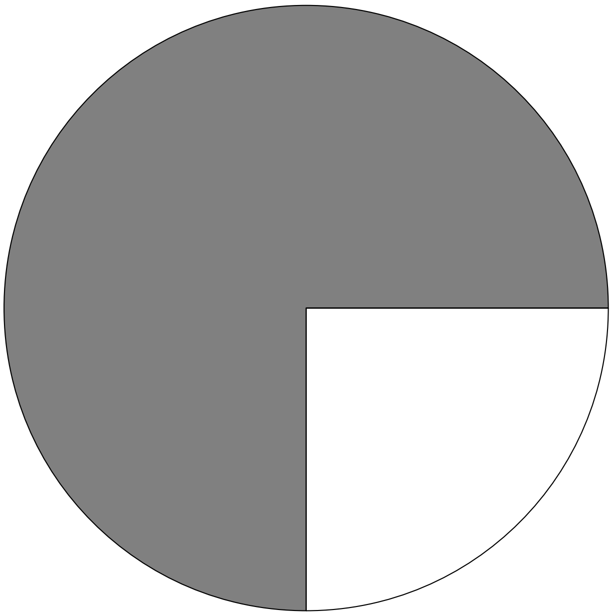


Figura 10

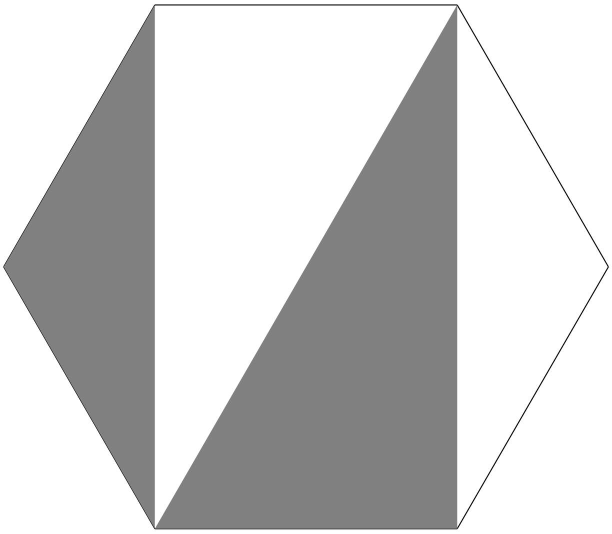
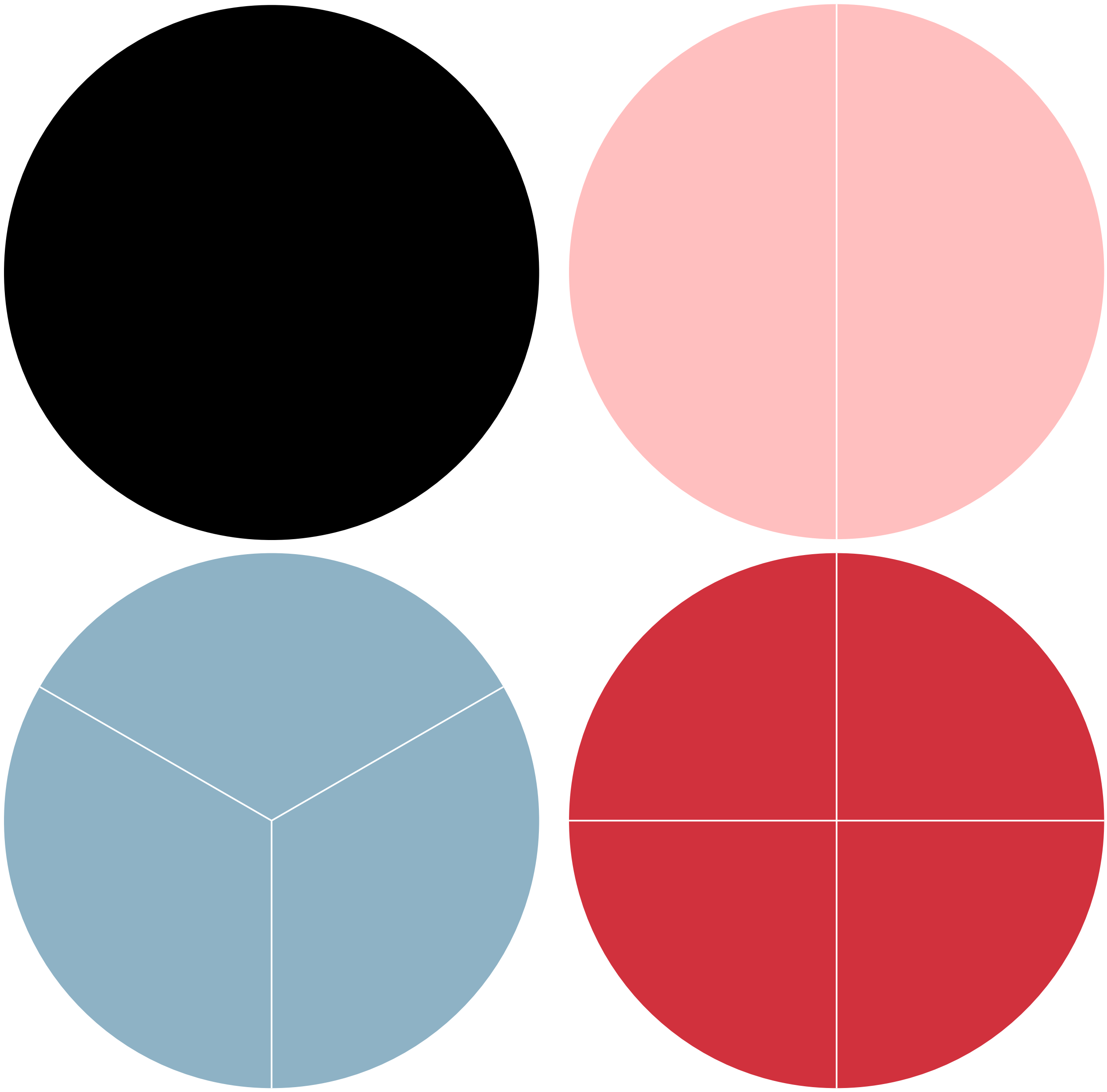
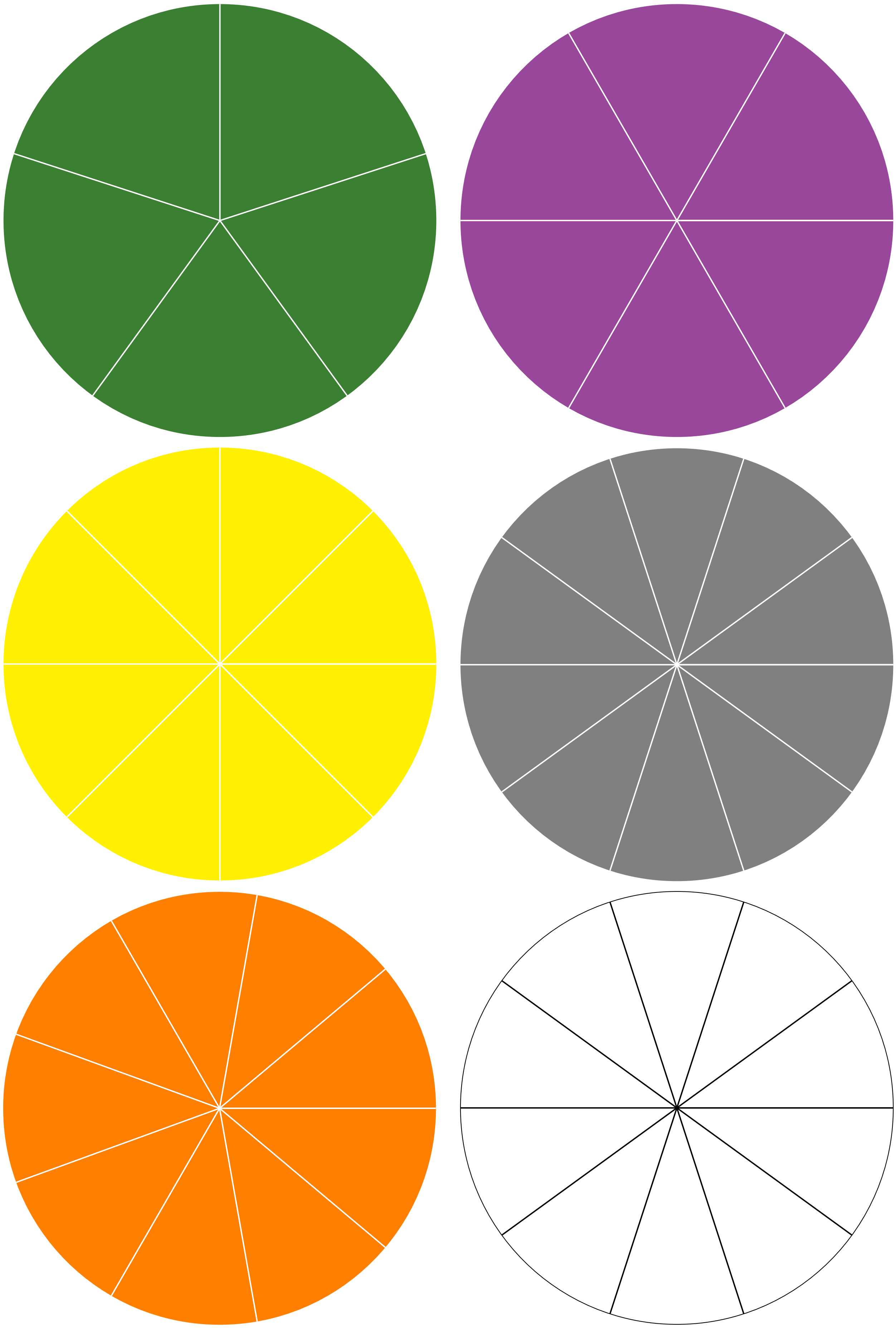


Figura 11

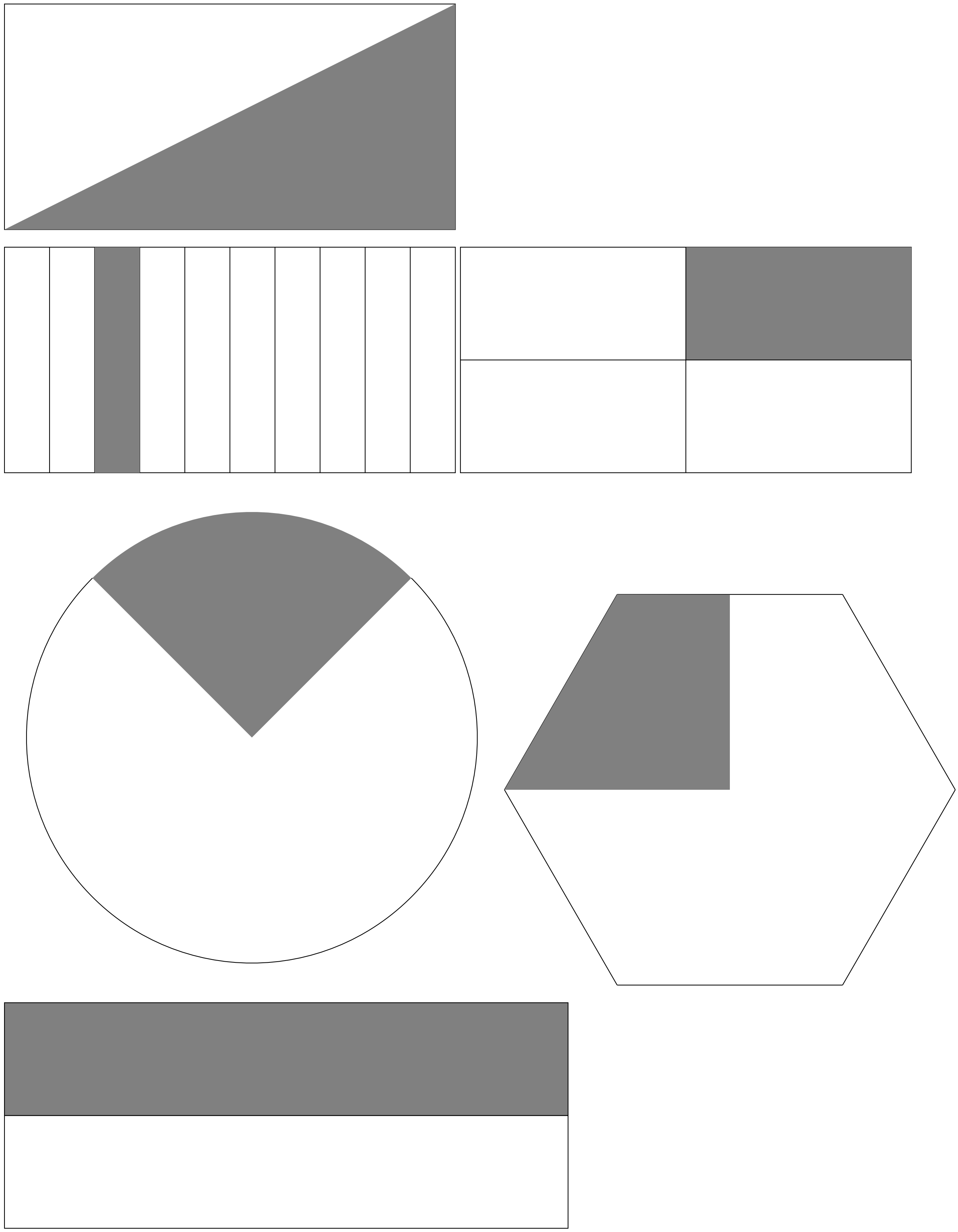
Figura 12

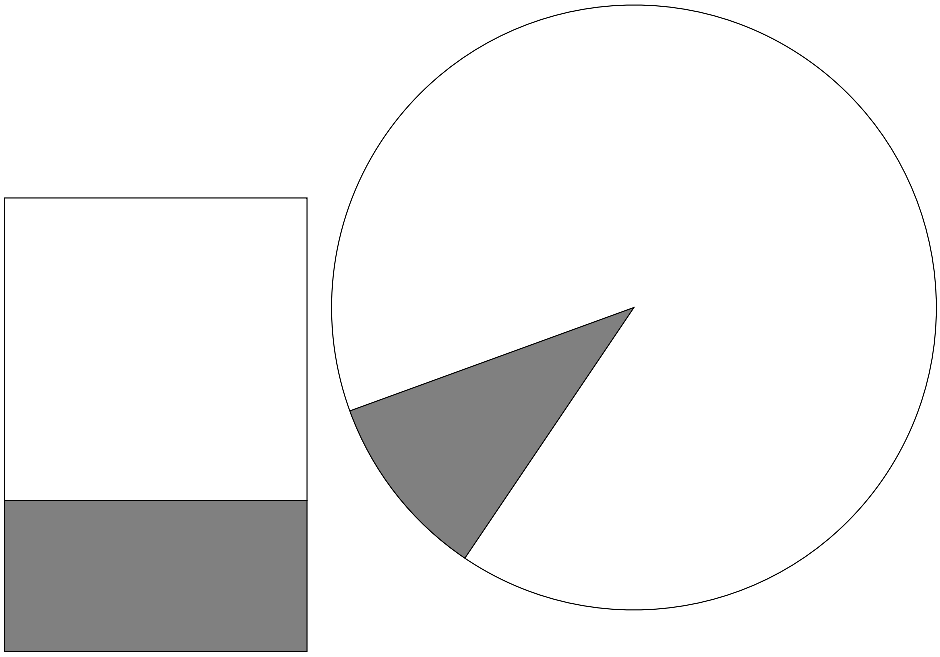
Atividade 10

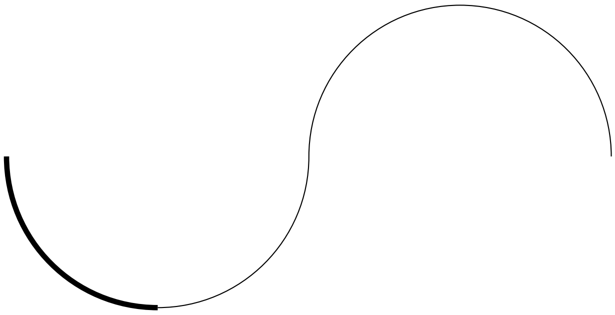


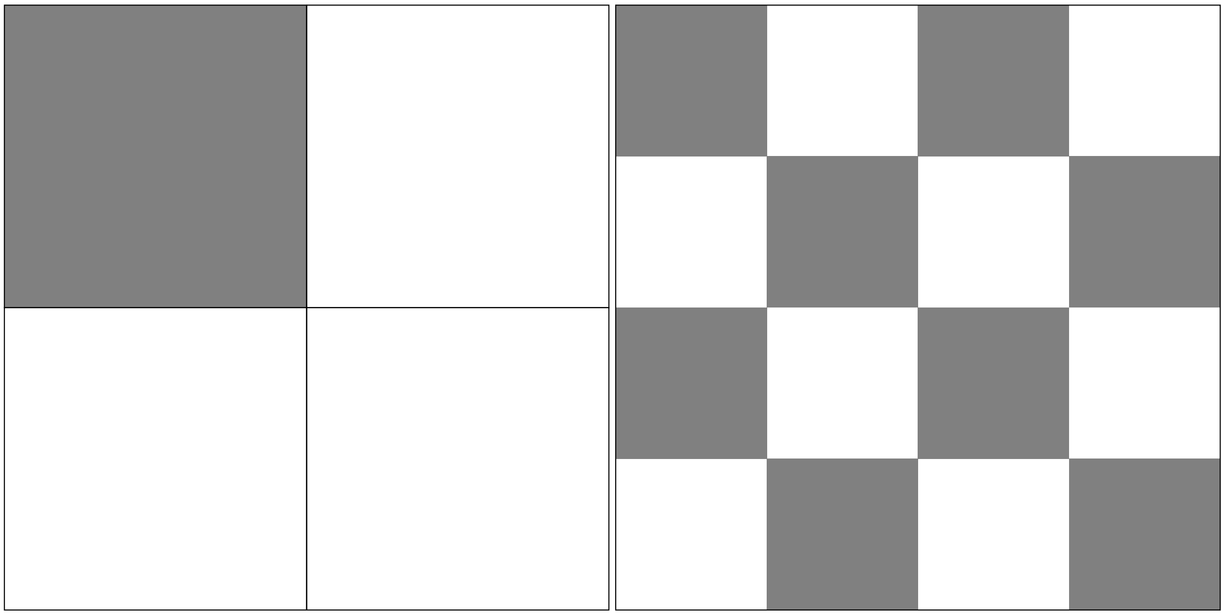


Atividade 12









LICAO 2

Atividade 1

Atividade 2

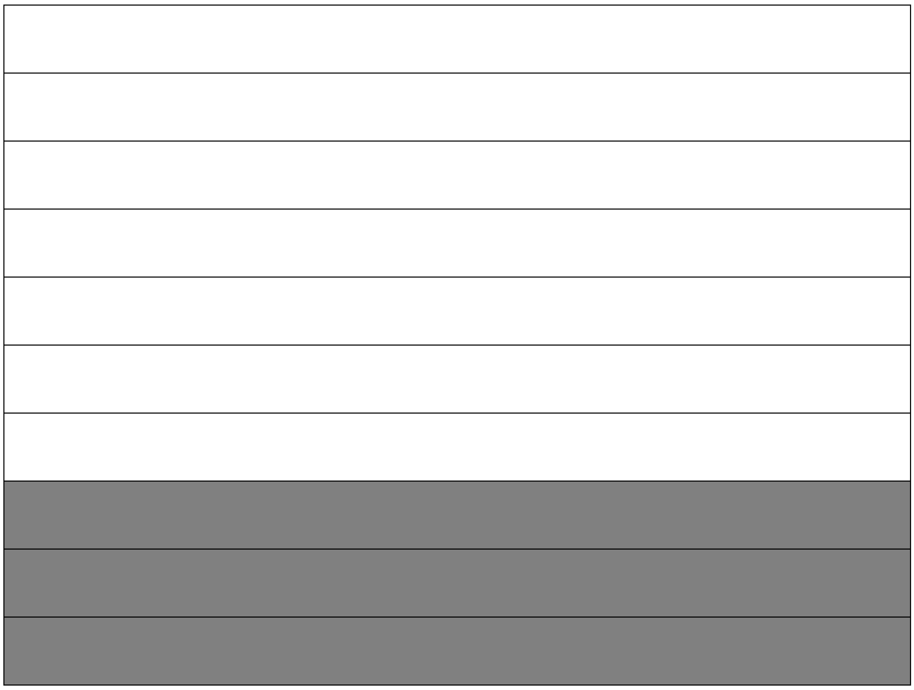
LICAO 3

Atividade 6

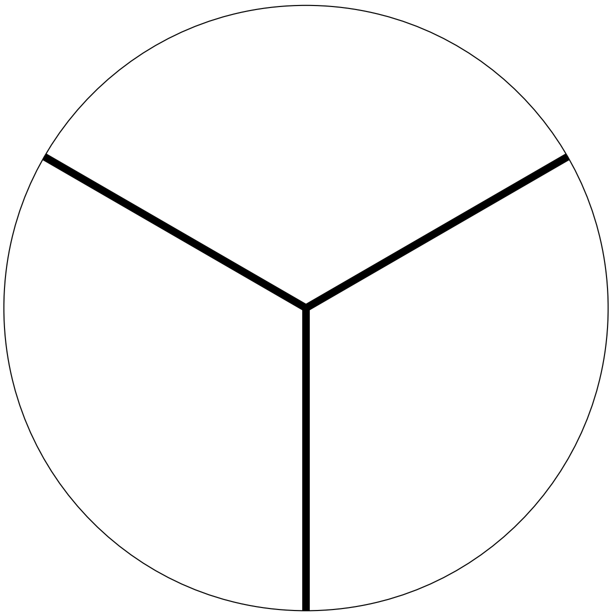
Atividade 7

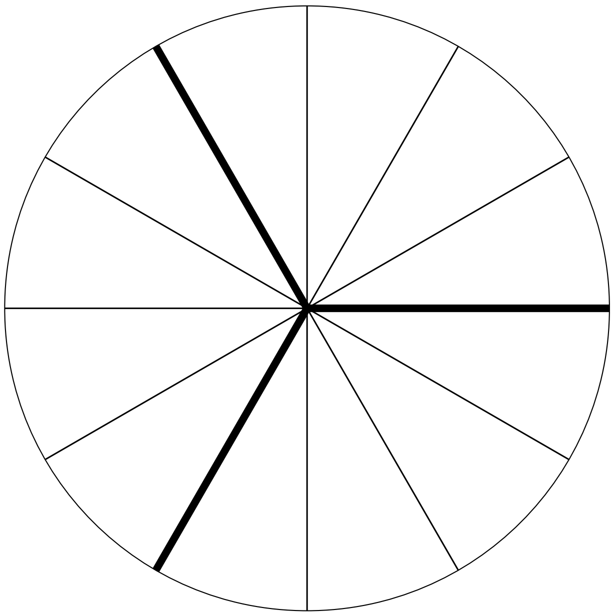
LICAO 4

Atividade 2

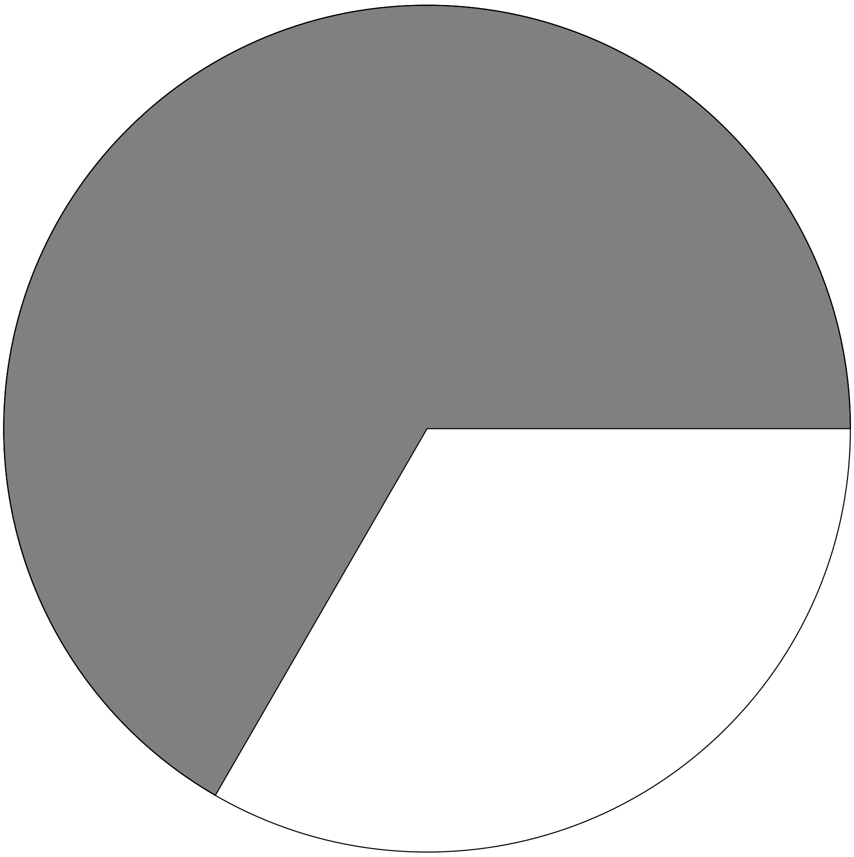


Atividade 4

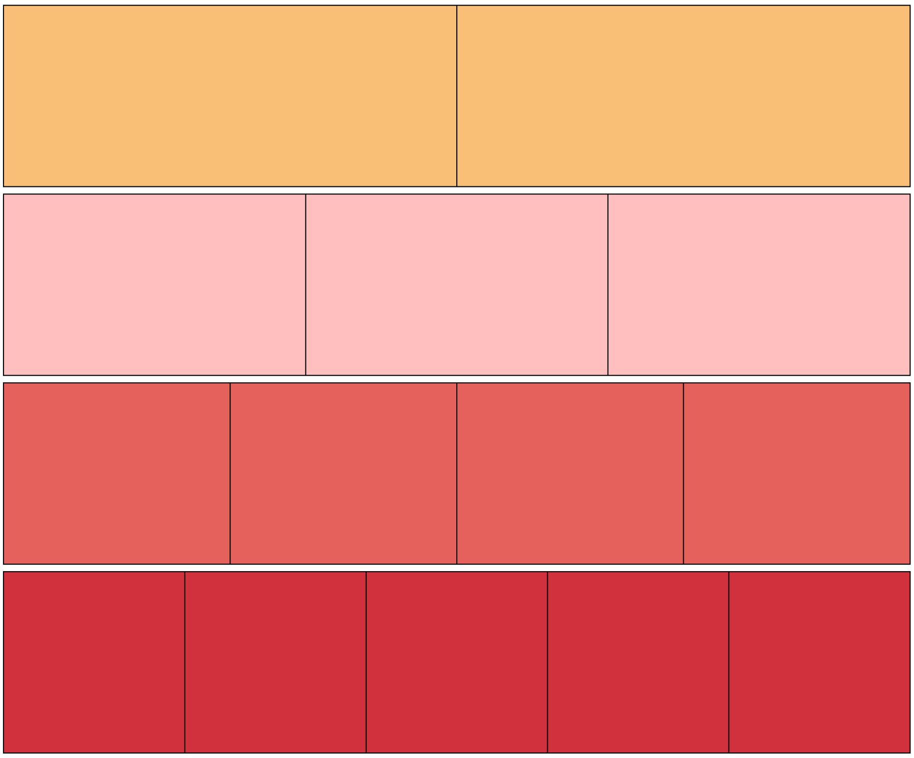


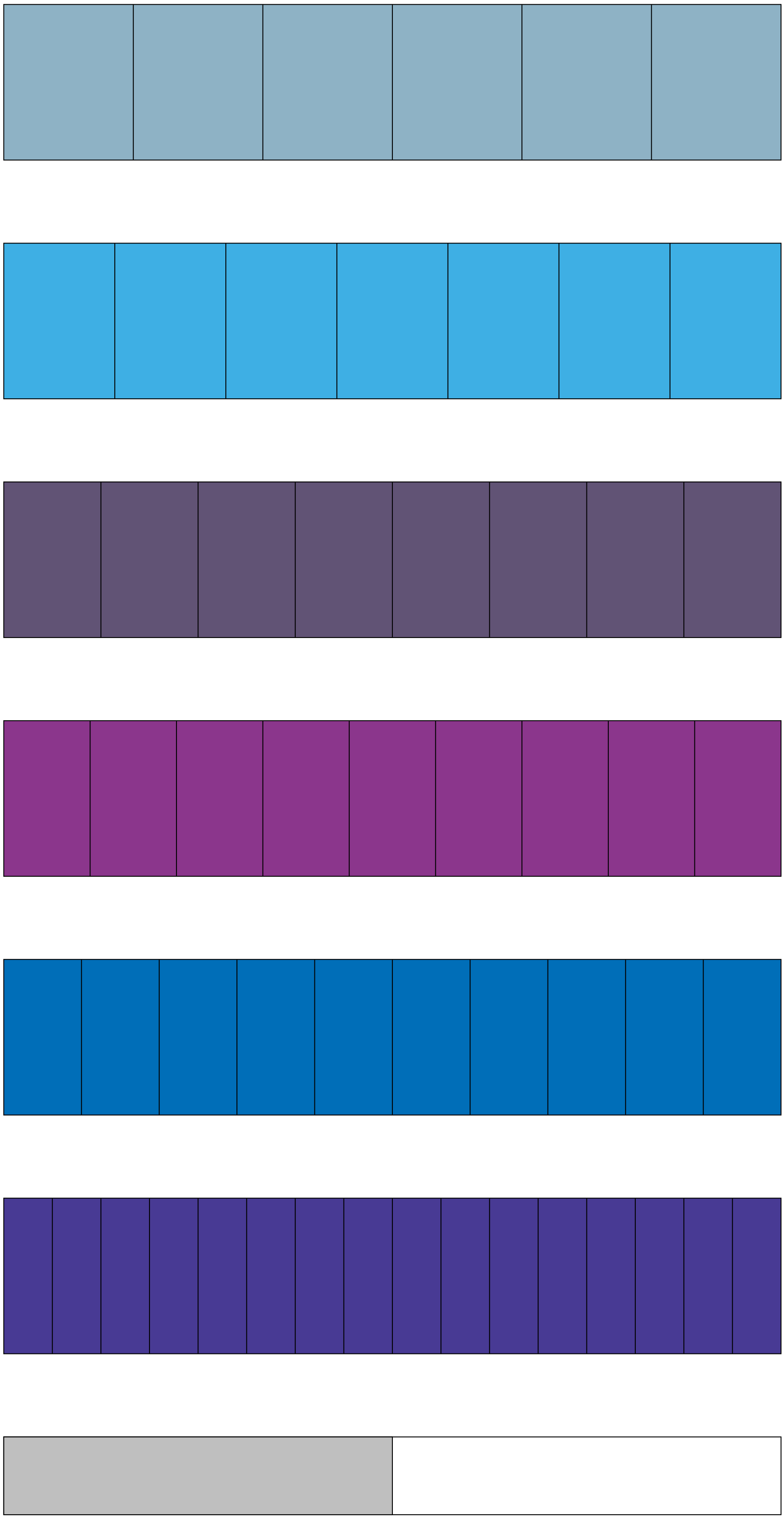


Atividade 5

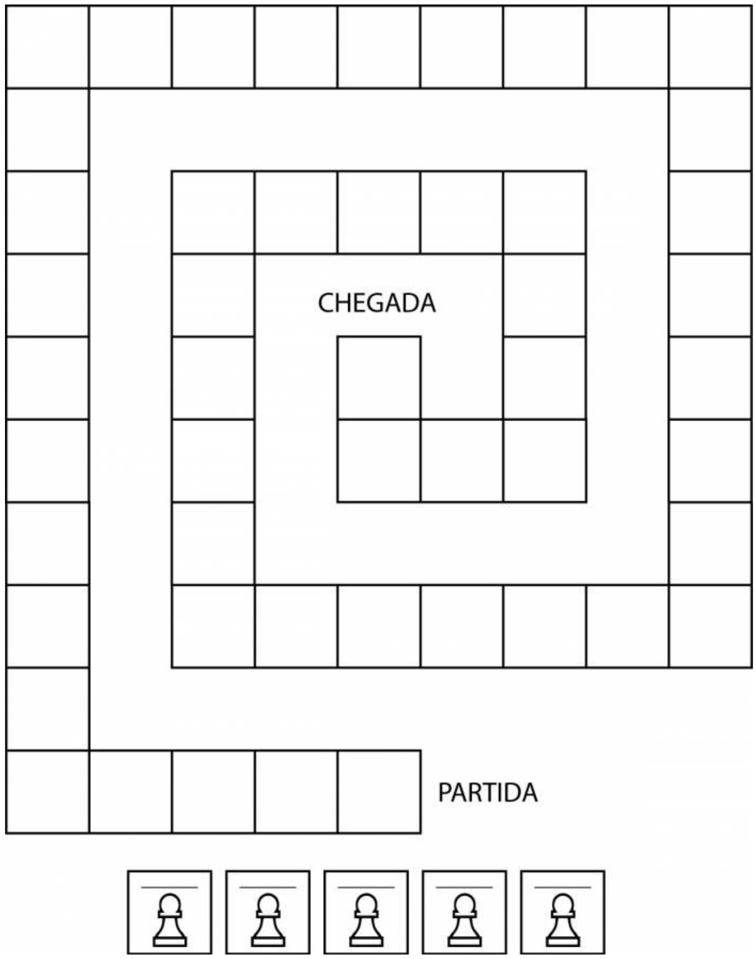


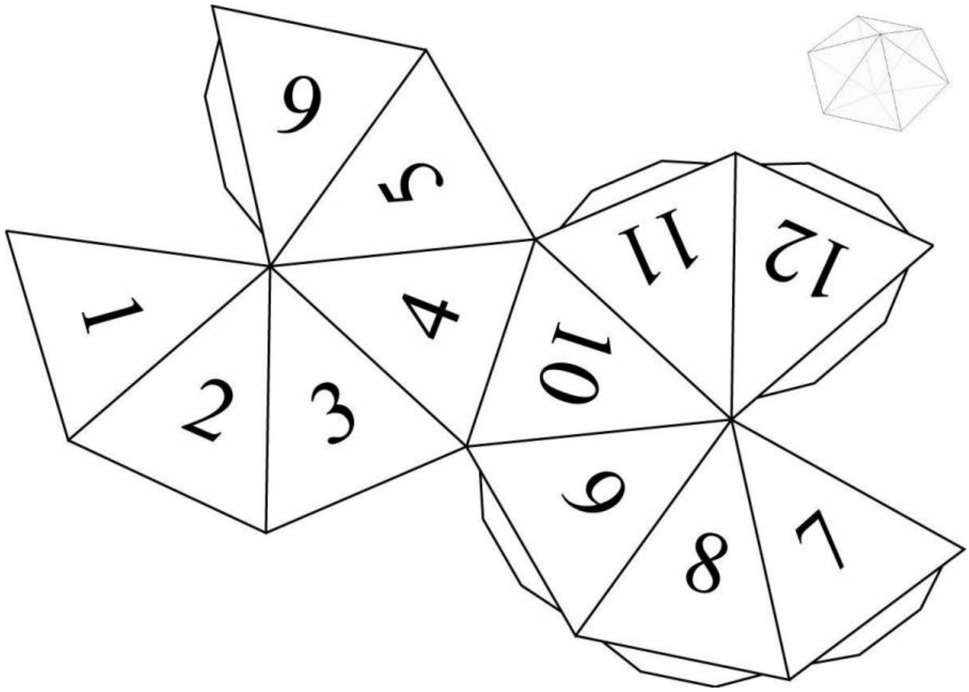
Atividade 6





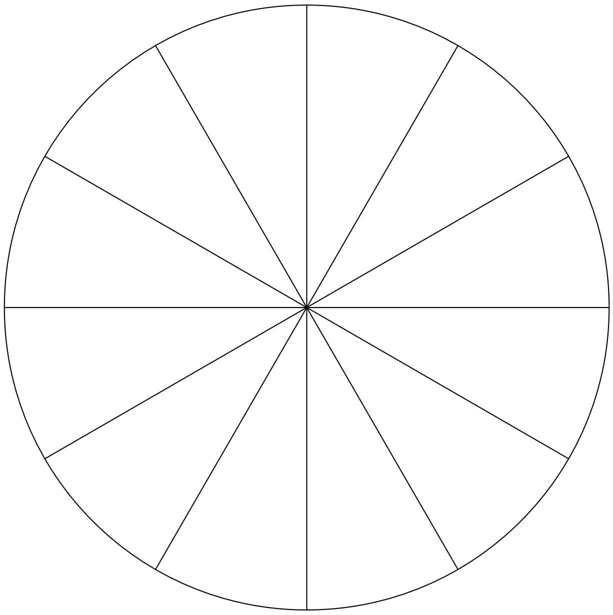
Atividade 20





LIÇÃO 5

Atividade 4



Referências Bibliográficas

[1] Behr, Merlyn J.; Wachsmuth, Ipke; Post, Thomas R.; Lesh, Richard. Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. Journal for Research in Mathematics Education, v. 15, n. 15, p. 323-341, 198 4.

[2] Confrey, J.; Maloney, A.; Nguyen, K.; Mojica, G.; Myers, M. Equipartitioning/Splitting as A Foundation of Rational Number Reasoning using Learning Trajectories. Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (p. 345–353). Thessaloniki, Greece, 2009.

[3] Cramer, Kathleen; Behr, Merlyn; Post, Thomas; Lesh, Richard. Rational Number Project: Initial Fraction Ideas. University of Minnesota, 2009.

[4] Empson, Susan B. Equal Sharing and Shared Meaning: The Development of Fraction Concepts in A First-Grade Classroom. Cognition and Instruction, v. 17, n. 3, p. 283-342, 1999.

[5] Freitag, Mark A. Mathematics for Elementary School Teachers: A Process Approach. Cengale Learning, 2014.

[6] Garcez, Wagner Rohr. Tópicos sobre O Ensino de Frações: Equivalência. Trabalho de Conclusão de Curso do PROFMAT, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

[7] IES PRACTICE GUIDE WHAT WORKS CLEARINGHOUSE. Developing Effective Fractions Instruction for Kindergarten Through 8th Grade. Institute of Education Sciences, 2010. - Este relatório oferece um conjunto de diretivas, procedimentos e

cuidados no ensino de frações nas séries iniciais que foram compilados a partir de relatos de experiência e estudos científicos.

[8] Lewin, Renaio; López, Alejandro; Martínez, Salomé; Rojas, Daniela; Zanocco, Pierina. Números para Futuros Profesores de Educación Básica. ReFIP Matemática: Recursos para La Formación Inicial de Profesores Educación Básica. Ediciones SM Chile S.A., 2013.

[9] Litwiller, Bonnie H. Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: 2002 Yearbook. National Council of Teache rs of Mathematics. 2002.

[10] Mathematics Navigator. Misconceptions and Errors. America’s Choice. Pearson, 2016.

[11] McNamara, Julie; Shaughnessy, Meghan M. Beyond Pizzas and Pies, Grades 3-5, Second Edition: 10 Essential Strategies for Supporting Fraction Sense. Math Solutions Publications, 2015.

[12] MEC, Brasil. Números Racionais: Conceito e Representação (TP6). Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR I. 2007.

[13] Monteiro, Cecília; Pinto, Hélio. Desenvolvendo O Sentido de Número Racional. Associação de Professores de Matemática, 2009.

[14] Musser, Gary L.; Peterson, Blacke E.; Burger, William F. Mathematics for Elementary Teachers: A Contemporary Approach. John Wiley & Sons, Inc., 2014.

[15] Ni, Yujing. How Valid is It To Use Number Lines to Measure Children’s Conceptual Knowledge about Rational Number? Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology, v. 20, n. 2, p. 139-152, 2000.

[16] Pearn, Catherine; Stephens, Max. Why You Have To Probe To Discover What Year 8 Students Really Think about Fractions. MERGA 27, v. 2, p. 430-437, 2004.

[17] Pereira, Ana Paula Cabral Couto. O Ensino de Frações na Escola Básica: O Currículo Common Core nos EUA, Hung-Hsi Wu e Uma Análise Comparativa em Dois Livros Didáticos do PNLD. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional PROFMAT), Universidade Federal Fluminense, 2015.

[18] Petit, Marjorie M.; Laird, Robert E.; Marsden, Edwin L. A focus On Fractions: Bringing Research To The Classroom. Studies in Mathematical Thinking and Learning. Taylor & Francis, 2010.

[19] Post, Thomas R.; Wachsmuth, Ipke; Lesh, Richard; Behr, Merlyn J. Order and Equivalence of Rational Number: A Cognitive Analysis. Journal for Research in Mathematics Education v. 16, v. 1, p. 18-36, 1985.

[20] Pothier, Yvone; Sawada, Daiyo. Partitioning: The Emergence of Rational Number Ideas in Young Children. Journal for Research in Mathematics Education, v. 14, n. 4, p. 307-317, 1983.

[21] Schliemann, Analúcia; Carraher, David W.; Caddle, Mary C. From Seeing Points To Seeing Intervals in Number Lines in Graphs. Em: Brizuela, Bárbara M.; Gravel, Brian E. (Ed.). Show Me What You Know, Teachers College, Columbia University, 2013.

[22] Small, Marian. Uncomplicating FRACTIONS To Meet Common Core Standards in Math, K-7. Teachers College Press, 2013.

[23] Spangler, David B. Strategies for Teaching Fractions: Using Error Analysis for Intervention and Assessment. Corwin, 2011.

[24] Tierney, Cornelia; Berle-Carman, Mary. Fractions: Fair Shares. Investigations in Number, Data, and Space. Dale Seymour Publications, 1998.

[25] Tierney, Cornelia. Different Shapes, Equal Pieces: Fractions and Area. Investigations in Number, Data, and Space. Scott Foresman, 2004.

[26] Thomaidis, Yannis; Tzanakis, Constantinos. The Notion of Historical “parallelism” Revisited: Historical Evolution and Students’ Conception of The Order Relation On The Number Line. Educational Studies in Mathematics, v. 66, p. 165-183, 2007.

[27] Vamvakoussi, Xenia; Vosniadou,Stella. Bridging the Gap Between the Dense and the Discrete: The Number Line and the “Rubber Line” Bridging Analogy. Mathematical Thinking and Learning, v. 14, n. 4, p. 265-284, 2012. DOI: 10.1080/10986065.2012.717378. - Este artigo faz um resumo histórico de como a noção de densidade surgiu.

[28] Vance, James H. Understanding Equivalence: A Number by Any Other Name. School Science and Mathematics, v. 92, n. 5, p. 263-266, 1992.

[29] Van de Walle, John A. Matemática no Ensino Fundamental. Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. Sexta edição. Artmed, 2009.

[30] Ventura, Hélia Margarida Gaspar Lopes. A Aprendizagem de Números Racionais através das Conexões entre As Suas Representações: Uma Experiência de Ensino no 2.o Ciclo do Ensino Básico. Tese de doutorado, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, 2013.

[31] Wu, Hung-Hsi. Understanding Numbers in Elementary School Mathematics. American Mathematical Society, 2011.