1 Teorema de Tales

O QUÊ?

São estudados o significado de um teorema com sua hipótese e tese, o Teorema de Tales, sua recíproca, as projeções paralelas e aplicações.

POR QUÊ?

O capítulo contém uma ferramenta útil para resolver situações que envolvem retas paralelas. Além disso, o teorema de Tales será usado para para desenvolver o conceito de semelhança de triângulos, que é um dos instrumentos necessários para compreender o mundo real. A semelhança, por sua vez, permite a obtenção de diversas propriedades métricas das figuras geométricas, tanto planas como espaciais.

Projeto: LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA

Cadastre-se como colaborador no site do projeto: umlivroaberto.com

Versão digital do capítulo:

https://www.umlivroaberto.org/BookCloud/Volume_1/master/view/GE201.html

Título:	Teorema de Tales
Ano/ Versão:	2021 / versão 1.0 de 26 de julho de 2021
Editora	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)
Realização:	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)
Produção:	Associação Livro Aberto
Coordenação:	Fabio Simas e Augusto Teixeira (livroaberto@impa.br)
Autores:	Eduardo Wagner Marcos Paulo
Revisão:	Cydara Cavedon Ripoll Letícia Rangel
Design:	Andreza Moreira (Tangentes Design)
Diagramação:	Tarso Caldas
Capa:	Foto de Sigmund no Unsplash https://unsplash.com/photos/r9PeXDCJyEw

Desenvolvido por

Patrocínio:

EXPLORANDO

O teorema de Tales é um resultado básico da geometria plana e vai permitir a exploração e dedução de outros resultados, também centrais, dessa matéria. O teorema de Tales (das retas paralelas) é conhecido desde a antiguidade. Tales de Mileto viveu no século 6 a.C., mas nenhum dos seus escritos sobreviveu. Tudo o que sabemos dele veio através de escritos de outros.

Nas ruas de uma cidade

Atividade 1

A figura a seguir mostra uma parte da cidade de Nova York. Nessa região, as ruas são designadas por números. Observe as ruas numeradas de 67 a 71, as Avenidas Columbus e Broadway.

A distância A entre duas esquinas consecutivas da Avenida Columbus é igual a 70 m e a distância B entre as respectivas esquinas correspondentes na Broadway é 80 m. A distância C entre as esquinas da Columbus com as ruas 69 e 71 é 161 m, e a distância entre as esquinas correspondentes na Broadway é D.

a) Você lembra quais são as possíveis posições relativas entre duas retas no plano? Que relação você vê entre as ruas de 67 a 71?

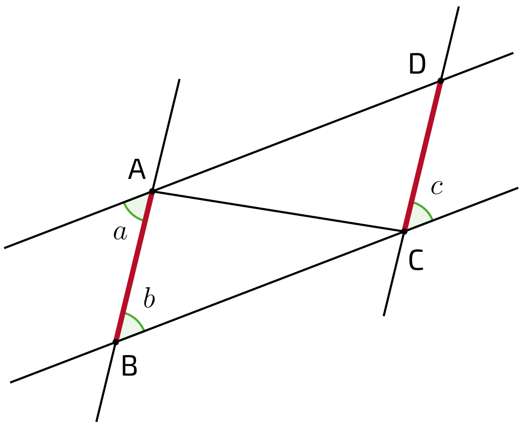
b) Visualmente, estime um valor para a distância D.

c) Você consegue calcular a distância D?

Recordando paralelas

Atividade 2

Na figura a seguir estão representados dois pares de retas paralelas: o par de retas AD e BC e o par de retas AB e CD.



a) Você conhece o nome que se dá ao par de ângulos a e b?

b) Que relação há entre os ângulos a e b?

c) Você conhece o nome que se dá ao par de ângulos b e c?

d) Que relação há entre os ângulos b e c?

e) Pode-se afirmar que os triângulos ABC e CDA são congruentes. Por quê?

f) Que relação existe entre os segmentos AB e CD? E com os segmentos AD e BC?

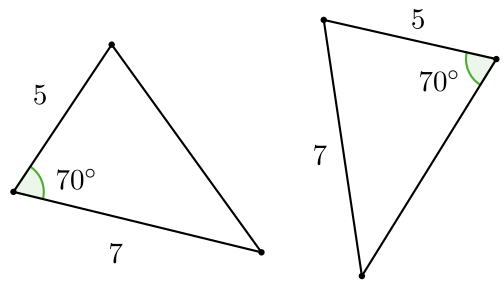
ORGANIZANDO

Vamos lembrar que duas figuras são congruentes, quando podem ser levadas a coincidir por superposição mediante o deslocamento rígido de uma delas.

Na atividade anterior os triângulos ABC e CDA são congruentes.

Mas afinal, quais as condições mínimas para garantir que dois triângulos são congruentes? Não podemos nos deixar levar somente pelo que as imagens sugerem.

Por exemplo, os dois triângulos da figura a seguir são congruentes?



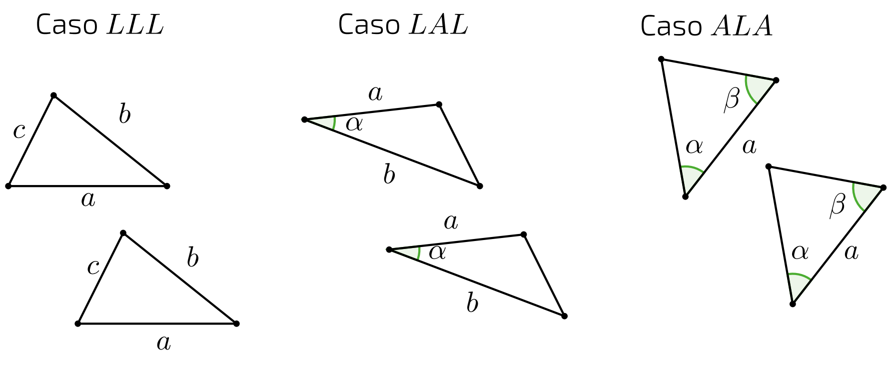
A resposta é não e a justificativa necessita de material que será desenvolvido no capítulo de trigonometria. Os dois triângulos da figura acima parecem, mas não são congruentes.

Os casos básicos que garantem a congruência de dois triângulos são:

a) Caso lado-lado-lado

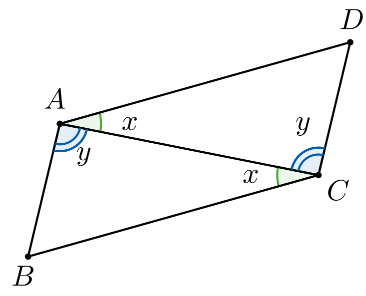
b) Caso lado-ângulo-lado

c) Caso ângulo-lado-ângulo



Com os critérios de congruência em mãos, podemos agora justificar por que os triângulos ABC e CDA da atividade anterior são congruentes e, com isso, concluir as igualdades dos pares de segmentos do item f).

Veja novamente a figura, agora simplificada e com os outros elementos que vamos necessitar.



Os ângulos marcados com x são alternos internos nas paralelas AD e BC, cortadas pela transversal AC.

Os ângulos marcados com y são alternos internos nas paralelas AB e DC, cortadas pela transversal AC.

Assim, os triângulos ABC e CDA são congruentes pelo caso $\boldsymbol{ALA}$.

Dessa forma, temos $AB = CD$ e $BC = DA$.

Importante

Com os argumentos que acabamos de mostrar, concluímos uma importante propriedade:

"Em um paralelogramo, os lados opostos são iguais."

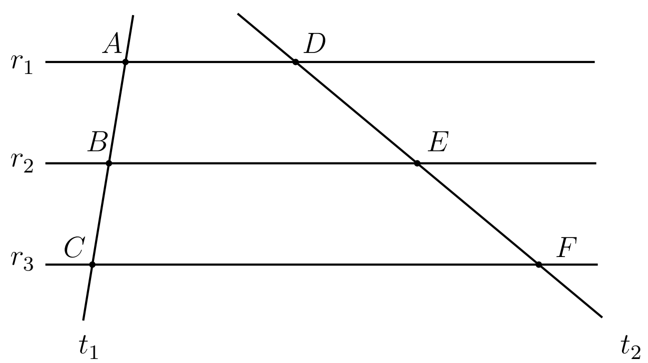
Demonstrando uma afirmação

Atividade 3

As paralelas r_1, r_2 e r_3 estão intersectadas pelas transversais t_1 e t_2 . Demonstre que:

"Se as paralelas determinam sobre uma transversal segmentos iguais então determinarão, na outra transversal, segmentos também iguais."

Veja a figura:



O enunciado pede que você demonstre uma afirmação. Em Matemática, demonstrar significa justificar a afirmação utilizando argumentos lógicos baseados em fatos conhecidos anteriormente.

Faremos, a seguir, perguntas que são dicas para ajudá-lo a demonstrar essa proposição.

Vamos considerar, na figura dada, $AB = BC$. Não haveria diferença, caso escolhêssemos considerar $DE = EF$ na outra trasnversal. Com os elementos da figura acima, responda:

a) O que se deseja demonstrar?

Para conseguir os argumentos necessários você vai ter que interferir na figura. Faça o seguinte:

- Trace por D uma paralela a t_1 que intersecta r_2 no ponto G.
- Trace por E uma paralela a t_1 que intersecta r_3 no ponto H.

b) Os triângulos DGE e EHF são congruentes? Por quê?

c) O que se conclui da congruência dos triângulos DGE e EHF?

PRATICANDO

Dividindo um segmento em partes iguais

Atividade 4

Um segmento desenhado no papel precisa ser dividido em três partes iguais. Um aluno fez assim:

Com uma régua mediu seu comprimento encontrando $7{,}1$ cm.

Com a calculadora dividiu essa medida por 3.

Ele pretende usar a régua para aplicar sobre o segmento a medida que aparece na calculadora.

a) Que número o visor da calculadora mostrou quando o segmento dado foi dividido por 3?

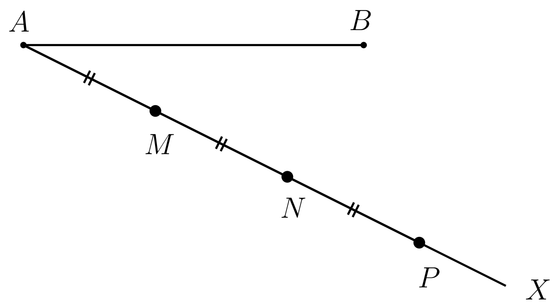
b) Você consegue, com a régua escolar, marcar sobre o segmento a medida que a calculadora mostrou?

Você percebe aí uma dificuldade, não é mesmo? Nossos sentidos são limitados e a régua não marca com precisão medidas menores que 1 milímetro. Como fazer então?

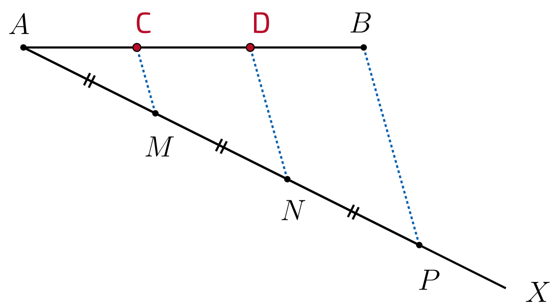
Buscamos inspiração na atividade anterior. Considere a seguinte construção:

Nosso segmento chama-se AB.

- A partir de A trace uma semirreta AX (que não contenha o segmento AB).
- Com o compasso em uma abertura qualquer fixada, assinale, a partir de A, três segmentos iguais. Chamaremos esses pontos sobre a semirreta AX de M, N e P. Veja a figura.



Em seguida, trace a reta PB e trace paralelas a ela pelos pontos M e N. Essas paralelas intersectarão o segmento AB nos pontos C e D, como mostra a figura.



c) Com esse procedimento, explique por que os pontos C e D dividem o segmento AB em três partes iguais.

d) Para dividir um segmento em partes iguais há necessidade de fazer medidas?

ORGANIZANDO O QUE É UM TEOREMA?

Na atividade anterior você fez uma demonstração. Havia três retas paralelas intersectadas por duas transversais e você considerou, naquela situação que $AB = BC$. Assim, o fato a ser demonstrado era que $DE = EF$.

Um **TEOREMA** é uma afirmação matemática que precisa de uma justificativa para ser aceita.

Em um teorema, a situação e os fatos que são dados constituem a **HIPÓTESE**. O fato que que se quer demonstrar é a **TESE**.

A partir da hipótese e para concluir a tese há um caminho composto por argumentos sucessivos, onde cada um é consequência dos anteriores. Esse caminho é a **DEMONSTRAÇÃO**.

Uma forma comum de enunciar um teorema é:

Se **Hipótese**, então **Tese**.

EXEMPLO 1 Teorema de Pitágoras

Como exemplo, o famoso teorema de Pitágoras diz que:

"Se **um triângulo é retângulo** então **o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos**".

Podemos separar:

Hipótese: um triângulo é retângulo

Tese: o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos

O objetivo deste capítulo é compreender o "teorema de Tales". Esse é um teorema muito antigo e importante, pois com ele, diversas outras propriedades de figuras da geometria foram demonstradas. O enunciado do teorema que vamos apresentar a seguir inclui a palavra "feixe". Entenda essa palavra como "conjunto".

Razão entre segmentos

É preciso explicar certos termos que usamos em geometria. Eles são muito antigos, mas são usados hoje e serão sempre.

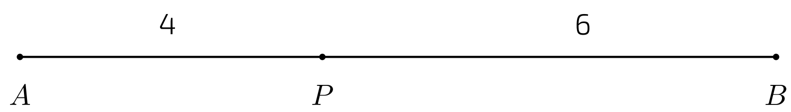
A razão entre dois segmentos é a razão entre suas medidas.

Por exemplo, se um segmento x mede 15 cm e um segmento y mede 20 cm, a razão entre eles é escrita como $\frac{x}{y}$ e é igual a $\frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0,75$.

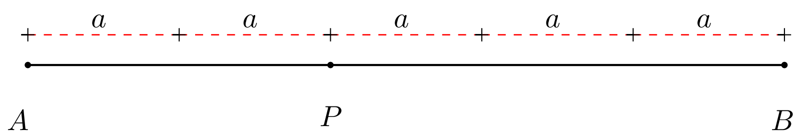
Quando um ponto P está no interior do segmento AB, para definir sua posição em relação aos extremos do segmento é costume definir um número chamado de "razão em que P divide o segmento AB".

Essa razão é o número real $\frac{PA}{PB}$.

Assim, se um segmento AB mede 10cm e um ponto P sobre ele está a 4 cm de A então a razão em que P divide esse segmento é $\frac{PA}{PB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.



Isso pode ser visualizado na figura a seguir onde o segmento PA contém 2 partes e o segmento PB, 3 partes.



Segmentos comensuráveis

Atividade 5

Dois segmentos são chamados de comensuráveis quando é possível determinar um terceiro segmento que cabe exatamente um número inteiro de vezes em um deles e também um número inteiro de vezes no outro.

Assim, dados dois segmentos a e b, um segmento que cabe um número inteiro de vezes em um deles e também um número inteiro de vezes no outro é chamado de uma *unidade*, e vamos representá-lo por u.

Por exemplo, se $a = 8$ cm e $b = 10$ cm a unidade $u = 1$ cm cabe 8 vezes em a e 10 vezes em b, mas podemos tomar $u = 2$ cm pois essa unidade cabe 4 vezes em a e 5 vezes em b. . Porém, há outras opções para u, que dependem da escolha de cada pessoa. Com esses mesmos segmentos, podemos escolher, por exemplo, $u = 0{,}5$ cm e assim, essa unidade cabe 16 vezes em a e 20 vezes em b. Esses são os segmentos comensuráveis: os segmentos que permitem encontrar uma unidade de medida comum.

Responda

Na tabela abaixo, para cada par de segmentos a e b, com suas medidas dadas em centímetros, encontre uma unidade u de medida comum de forma que ela caiba um número inteiro de vezes em cada um deles..

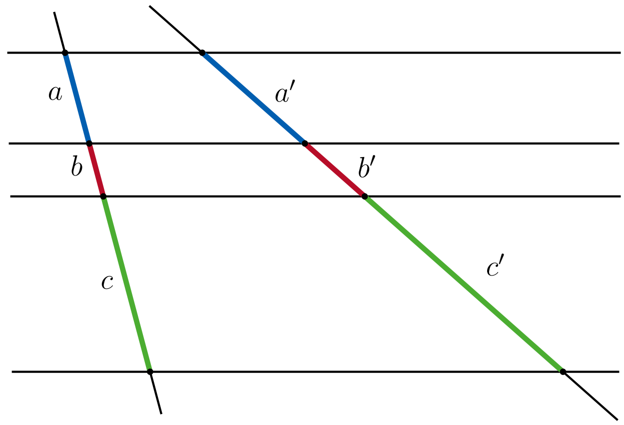
Compreendendo o teorema de Tales

Atividade 6

Enunciado do teorema de Tales:

"Se um feixe de paralelas está cortado por duas transversais então os segmentos determinados sobre uma transversal são respectivamente proporcionais aos segmentos determinados na outra".

Vejamos uma figura



Responda considerando a figura acima

a) Qual é a hipótese do teorema?

b) Qual é a tese do teorema?

Demonstrando o teorema de Tales

Atividade 7

A figura a seguir mostra três retas paralelas cortadas por duas transversais. Na reta da esquerda, os segmentos $AB = a$ e $BC = b$, são comensuráveis e, na reta da direita, os segmentos correspondentes são $A'B' = a'$ e $B'C' = b'$. Nosso objetivo é demonstrar que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

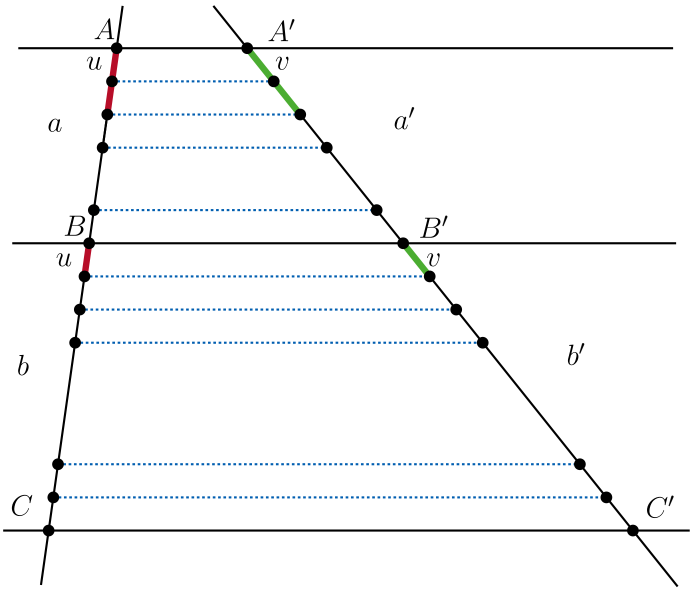
Como a e b são comensuráveis, a figura mostra uma unidade u comum a esses segmentos.

Por cada extremidade da unidade u assinalada na reta da esquerda traçamos retas paralelas às retas dadas determinando segmentos correspondentes na reta da direita.

Digamos que a unidade u cabe m vezes em a. Então $a = mu$.

Digamos que a unidade u cabe n vezes em b. Então $b = nu$.

Sabemos (da atividade "Demonstrando um Fato") que, em retas paralelas cortadas por transversais, segmentos iguais de um lado correspondem a segmentos iguais do outro. A cada segmento u do lado esquerdo existe um correspondente v do lado direito.



Complete a demonstração

a) Quantas vezes o segmento v cabe em a'?

b) Quantas vezes o segmento v cabe em b'?

c) Escreva as medidas de a' e b' na unidade v, reuna essas medidas com as anteriores e conclua o resultado do teorema

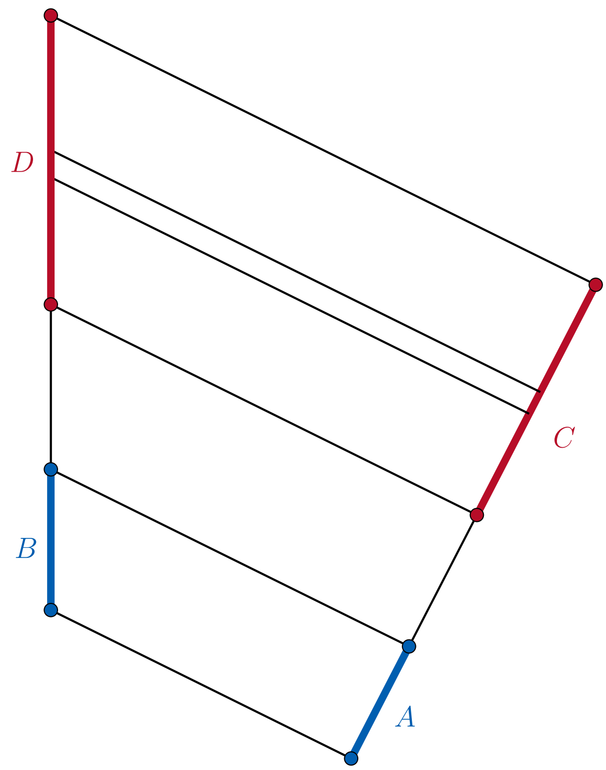
O teorema de Tales foi demonstrado no caso dos dois segmentos de uma das retas serem comensuráveis. Entretanto, o teorema vale quando as medidas desses dois segmentos são números reais quaisquer. A demonstração geral do teorema está no final do capítulo, na seção Para Saber Mais.

PRATICANDO

Resolvendo a situação inicial

Atividade 8

Vamos voltar ao mapa que mostramos na primeira atividade, agora desenhado de forma esquemática.



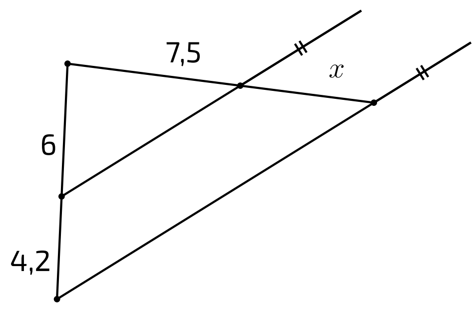
a) Por que o teorema de Tales pode ser utilizado nessa situação?

b) Utilizando os dados da atividade inicial ("Nas ruas de uma cidade") calcule a medida D.

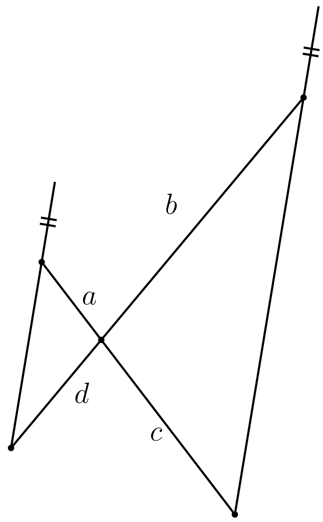
Resolvendo novas situações

Atividade 9

Sempre que houver retas paralelas e trasnversais, o teorema de Tales estará presente. Nas figuras a seguir, as retas paralelas estão assinaladas com seu símbolo tradicional.



a) Qual é o valor da medida que está faltando na figura acima?



a) Encontre uma relação entre os quatro segmentos assinalados na figura acima.

ORGANIZANDO

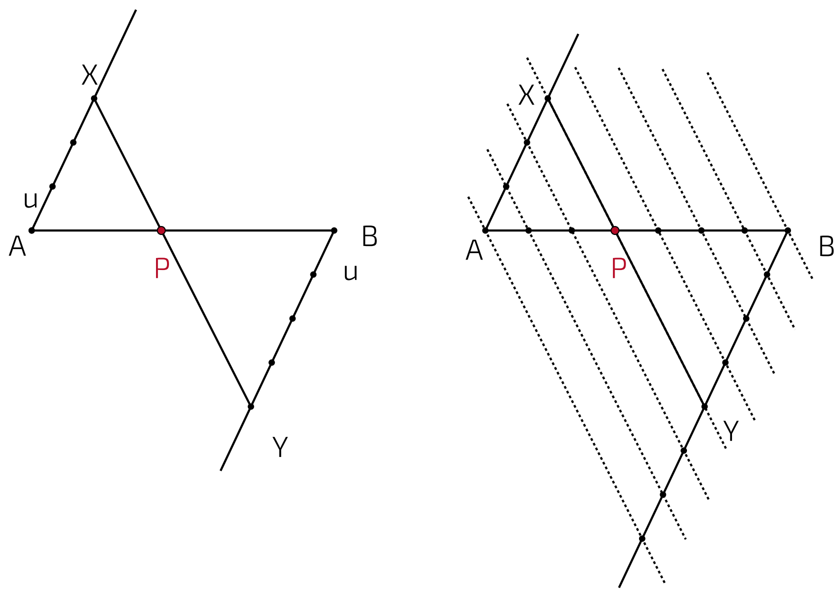
Como se divide um segmento em uma razão dada?

Imagine que tenhamos um segmento AB e desejamos determinar, no seu interior o ponto P que o divide na razão $\frac{PA}{PB} = \frac{3}{4}$. Isso significa encontrar um ponto P no interior do segmento AB de forma que o segmento PA seja proporcional a 3 e o segmento PB, proporcional a 4. Um procedimento bastante usado é o descrito a seguir e mostrado na figura a seguir à esquerda.

A partir dos pontos A e B trace semirretas paralelas quaisquer,‘AX‘ e BY, mas com sentidos opostos como ilustrado na figura. Usando o compasso com uma abertura qualquer,mas fixada, assinale três segmentos iguais e consecutivos na semirreta de origem A e, com a mesma abertura do compasso, quatro segmentos na semirreta de origem B.

Temos então $AX = 3u$ e $BY = 3u$.

A interseção da reta XY com o segmento AB é o ponto P procurado.



A figura acima, à direita, justifica visualmente a construção. Se um feixe de paralelas determina sobre uma transversal segmentos iguais determinará, sobre qualquer outra, segmentos também iguais.

Assim, o segmento AB está dividido em 7 partes iguais e o ponto P é o terceiro ponto de divisão. Logo, $\frac{PA}{PB} = \frac{3}{4}$.

Observe ainda que, dado um segmento e um número positivo k, **só existe um ponto interior ao segmento que o divide na razão** k. . De fato, considerando k em uma das semirretas e a unidade de medida na outra, teremos $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{k}{1} = k$.

O que é a recíproca de um teorema?

Sabemos que um teorema é uma afirmação do tipo "Se A então B". A recíproca de um teorema é uma afirmação onde as expressões A e B trocam de lugar. Assim a recíproca de "Se A então B" é "Se B então A".

Um teorema é uma afirmação matemática verdadeira (pois conseguimos demonstrá-lo), mas sua recíproca nem sempre é verdadeira. Quando estamos trabalhando com números frequentemente as recíprocas das afirmações não são verdadeira, como no exemplo a seguir.

Teorema: Todo número múltiplo de 4 é par. (*verdadeiro*)

Recíproca: Todo número par é múltiplo de 4.(*falso*)

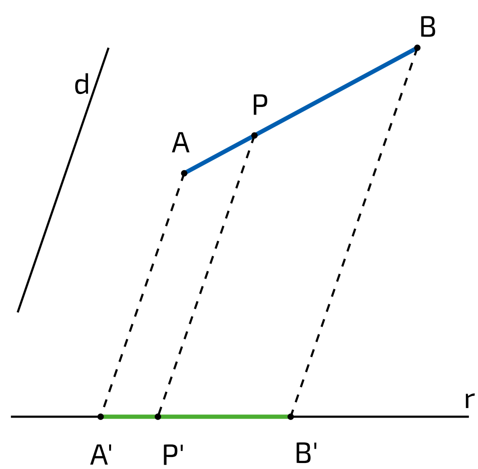
Em geometria, a maioria dos teoremas possui sua recíproca também verdadeira, mas isso é preciso verificar em cada caso. No caso do teorema de Tales a sua recíproca está na atividade Recíproca do Teorema de Tales

PARA SABER +

A projeção paralela

Atividade 10

Na figura a seguir você vê um segmento AB, um ponto P no seu interior e as retas r e d.



A "projeção paralela sobre r na direção d" é uma função que, a cada ponto X do plano associa um ponto X' da seguinte forma: Trace por X uma reta paralela a d. Onde essa reta intersectar r está o ponto X'.

Observandoa figura acima, essa função parece uma chuva com vento da direita para a esquerda, fazendo as gotas caírem no chão, a reta r.

A razão em que o ponto P divide o segmento AB é $\frac{PA}{PB}$. Entretanto, pelo teorema de Tales, temos que $\frac{PA}{P'A'} = \frac{PB}{P'B'}$.

Isso quer dizer que $\frac{PA}{PB} = \frac{P'A'}{P'B'}$, ou seja, a razão em que o ponto P divide o segmento AB é a mesma razão em que o ponto P' divide o segmento $A'B'$.

Dizemos então que **A projeção paralela conserva as razões.**

Suponha agora que, na figura acima tenha-se $\frac{PA}{PB} = \frac{2}{3}$ e que $A'B'$ tenha 8 centímetros.

a) Quanto mede o segmento $A'P'$?

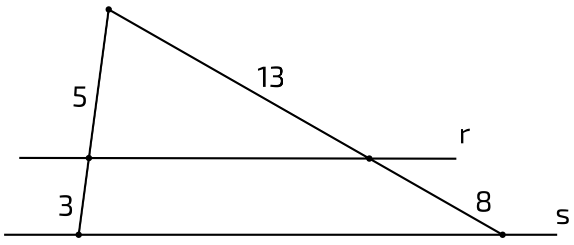
b) Qual é a razão $\frac{A'P'}{A'B'}$?

Recíproca do Teorema de Tales

Atividade 11

Parte 1

Observe a figura a seguir

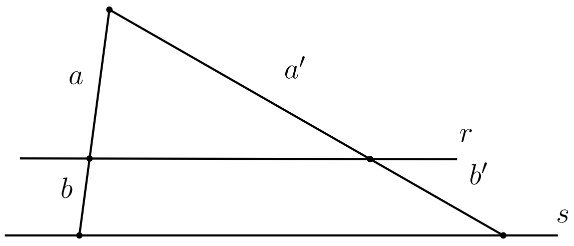


a) As retas r e s são paralelas?

b) Justifique sua resposta.

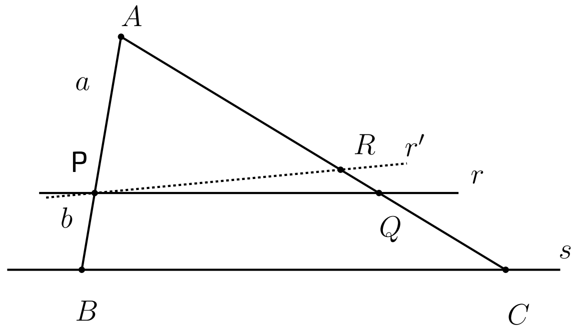
Parte 2

Observe a figura a seguir:



Na figura acima, se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ as retas r e s são paralelas? A resposta é sim e essa ideia é a recíproca do teorema de Tales. Você vai agora acompanhar a justificativa desse fato.

Demonstração: Consideremos a mesma figura anterior com algumas letras novas



Por hipótese temos que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, o que é o mesmo que $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. A primeira fração é a razão em que P divide o segmento AB e a segunda é a razão em que Q divide o segmento AC. Elas são iguais, ou seja, $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QC}$.

Vamos usar agora uma técnica nova de demonstração conhecida como “redução ao absurdo”. Ela consiste em negar a tese, reunir com a hipótese e depois mostrar, com argumentos sólidos, que o que afirmamos não é possível.

Queremos mostrar que as retas r e s são paralelas. Continuando com nossa hipótese, vamos então imaginar o seguinte:

"Suponha que as retas r e s não são paralelas"

Bem, dessa forma, vamos traçar agora pelo ponto P uma reta r' paralela à reta s. Essa nova reta vai cortar o segmento AC no ponto R.

Pelo teorema de Tales, ou melhor, pelo fato de que a projeção paralela conserva as razões, temos que $\frac{PA}{PB} = \frac{RA}{RC}$.

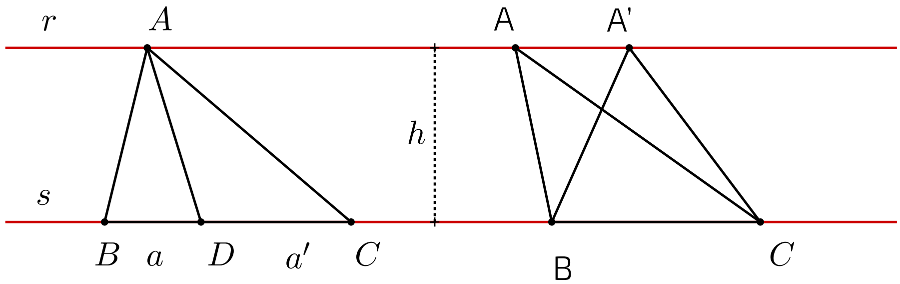
Assim, $\frac{QA}{QC} = \frac{RA}{RC}$ e, portanto, os pontos Q e R devem coincidir.

Como $\dfrac{QA}{QC} = \dfrac{RA}{RC}$, os pontos Q e R coincidem, assim como as retas r e r.

Demonstração do teorema de Tales usando Áreas

Duas propriedades dos triângulos:

A figura a seguir mostra as situações que nos permitirão concluir duas propriedades sobre os triângulos relacionadas às suas áreas.



Nesta seção, usaremos a notação (XYZ) para denotar a área do triângulo cujos vértices são X, Y e Z.

A figura mostra as paralelas r e s que estão a uma distância h entre si. Do lado esquerdo aparece o triângulo ABC dividido em duas partes pelo segmento AD. A primeira propriedade diz respeito aos dois triângulos colados ABD e ADC.

Propriedade 1

Se dois triângulos possuem mesma altura então a razão entre suas áreas é a razão entre suas bases.

De fato, a propriedade pode ser verificada calculando diretamente as áreas dos triângulos ABD e ADC:

$$\frac{(ABD)}{(ADC)} = \frac{\frac{a \cdot h}{2}}{\frac{a' \cdot h}{2}} = \frac{a}{a'}$$

Do lado direito da figura acima aparecem os triângulos ABC e $A'BC$ que mostram a segunda propriedade.

Propriedade 2

Dois triângulos de mesma base e mesma altura possuem mesma área.

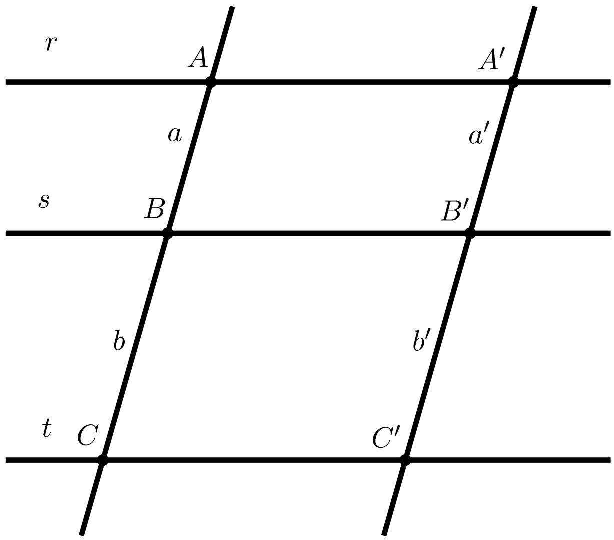
Uma vez que a área do triângulo depende apenas da base e da altura, a propriedade fica bastante evidente. Por outro lado, a interpretação que se dá à propriedade é que, se escolhemos um lado de um triângulo qualquer como base e movemos o terceiro vértice sobre uma paralela à base, o novo triângulo formado tem a mesma área do triângulo original.

Demonstrando o teorema

Na primeira demonstração do Teorema de Tales, nossa estratégia envolvia o fato de que os segmentos determinados pelas paralelas sobre uma das transversais eram comensuráveis. Nossa nova estratégia não depende dessa condição e, por isso é válida também nos casos em que os segmentos citados não são comensuráveis.

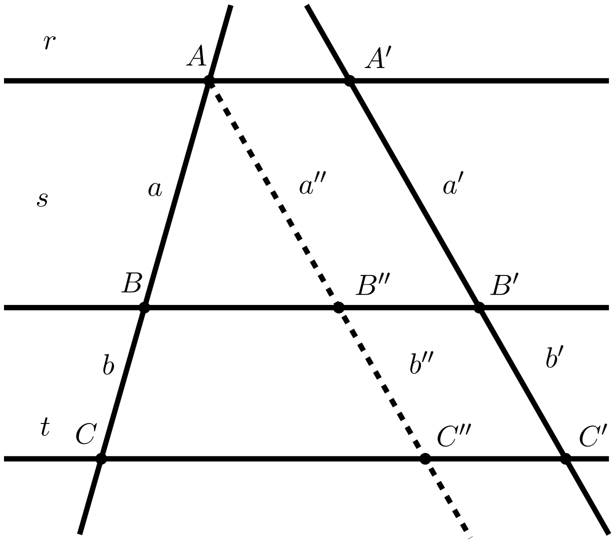
A Hipótese do teorema diz que há um feixe de retas paralelas cortadas por duas trasnversais. Nada é dito sobre as posições das retas transversais e isso significa, em Matemática, que o teorema deve ser válido independentemente dessas posições. Além disso, como visto na demonstração do caso de segmentos comensuráveis, podemos fazer nossa demonstração, sem perder a generalidade do teorema, com um feixe de três retas paralelas, pois essa demonstração pode ser repetida para cada escolha de três retas paralelas do feixe.

O caso trivial do teorema ocorre quando as retas trasnversais são também paralelas, como na figura a seguir:



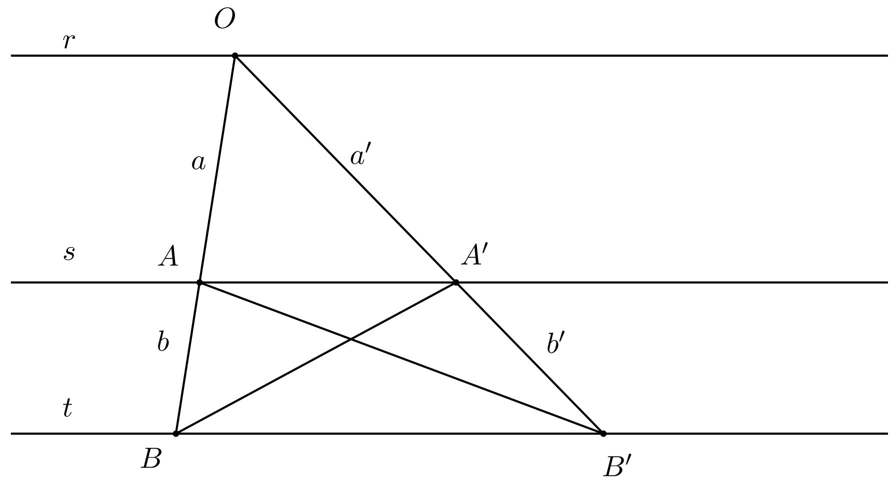
Nesse caso, $ABB'A'$ e $BCC'B'$ são paralelogramos e, por isso, $a = a'$ e $b = b'$. Portanto a tese $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ é verdadeira.

No caso em que as retas transversais não são paralelas, podemos reduzir a figura a uma mais simples, usando o caso trivial, conforme a figura a seguir:



Como $a' = a''$ e $b' = b''$, mostrar que $\frac{a}{b} = \frac{a''}{b''}$ mostra também que $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, que é a tese de nosso teorema.

Portanto, para mostrar o caso geral, tomemos a figura a seguir, já simplificada, onde as retas r, s e t são paralelas e as retas OA e OA' são as trasnversais.



Com os elementos da figura acima observe inicialmente que os triângulos $A'AB$ e $AA'B'$ possuem mesma área pois têm a mesma base AA' e mesma altura, pois as retas s e t são paralelas (**Propriedade 2**).

Agora, utilizando a **Propriedade 1**, temos que

$$\frac{a}{b} = \frac{(A'OA)}{(A'AB)} = \frac{(AOA')}{(AA'B')} = \frac{a'}{b'}$$

A igualdade $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ é nossa tese, o que encerra a demonstração.

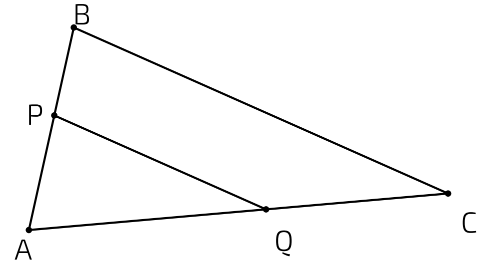
EXERCÍCIOS

1 O ponto P divide o segmento AB na razão $\frac{PA}{PB} = \frac{3}{7}$.

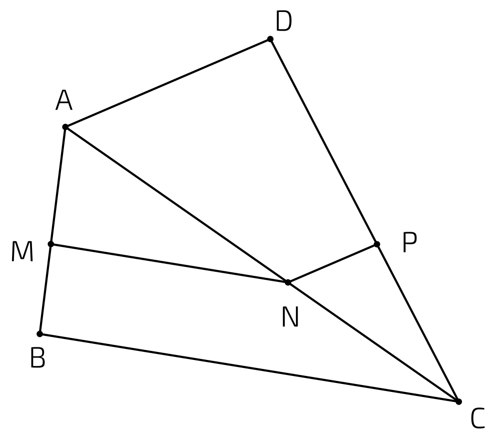
a) Qual a raz00ão $\frac{AP}{AB}$?

b) Se M é o ponto médio do segmento AB qual é a razão $\frac{MP}{MB}$?

2 Na figura a seguir, PQ é paralelo a BC. Se $AP = 5$, $PB = 4$ e $QC = 6$, determine a medida do segmento AQ.



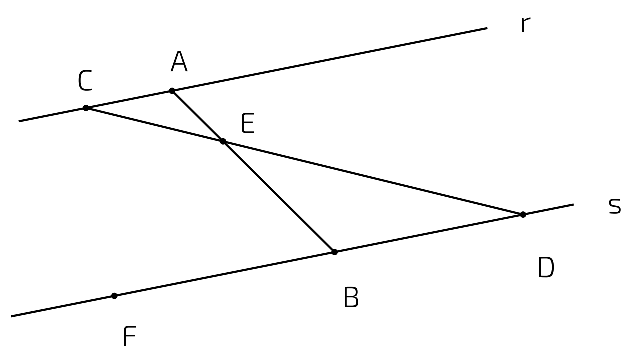
3 Na figura a seguir, MN é paralelo a BC e NP é paralelo a AD. Sabe-se que $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$ e que $CD = 12$ cm. Quanto mede o segmento DP?



4 Na figura a seguir as retas r e s são paralelas e os segmentos CE e EG são paralelos. Sabe-se que $AE = 2$, $EB = 6$ e que o segmento ED tem 7 unidades a mais que CE.

a) Quanto mede o segmento CD?

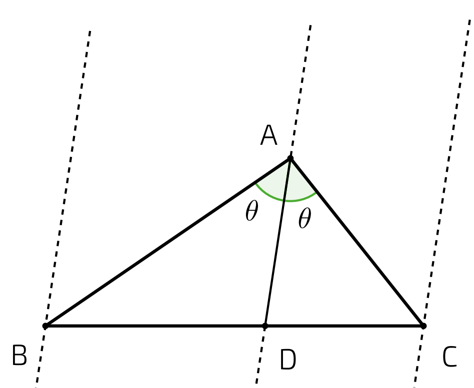
b) Sabe-se que $FD = 16$. Trace o segmento CF e trace por E uma paralela a CF que encontra a reta s em G. Quanto mede GD?



5 No triângulo ABC seja AD a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ como na figura a seguir. O teorema da bissetriz afirma que $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Prove esse teorema usando a sugestão a seguir.

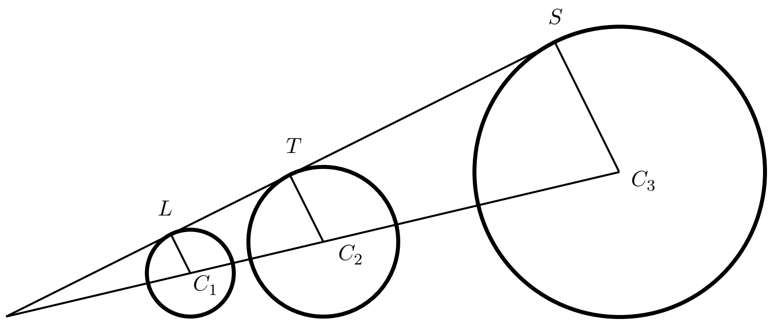
- Trace por B e C paralelas à bissetriz.
- A reta BA encontra a paralela traçada por C em E.
- Mostre que o triângulo ACE é isósceles.
- Use o teorema de Tales para concluir o resultado.



6 Invente um triângulo ABC dando medidas para os seus três lados. A bissetriz do ângulo $\hat{A}$ encontra o lado BC no ponto D. Calcule os comprimentos dos segmentos BD e DC.

7 No triângulo ABC, $AB = 9$, $BC = 10$ e $AC = 6$. A bissetriz do ângulo $\hat{A}$ encontra o lado BC no ponto D e o ponto J é o incentro do triângulo. Calcule a razão $\frac{JA}{JD}$.

8 (CEFE-MG - 2017) A figura a seguir é um esquema representativo de um eclipse lunar em que a Lua, a Terra e o Sol estão representados pelas circunferências de centros C_1, C_2 e C_3 respectivamente, que se encontram alinhados. Considera-se que a distância entre os centros da Terra e do Sol é 400 vezes a distância entre os centros da Terra e da Lua e que a distância do ponto T na superfície da Terra ao ponto S na superfície do Sol, como representados na figura, é de 150 milhões de quilômetros.



Sabendo-se que os segmentos de reta C_1L, C_2T e C_3S são paralelos, quanto mede a distância do ponto L representado na superfície da Lua, ao ponto T na superfície da Terra?

Referências Bibliográficas

Albert, J. H. (2003). College students' conceptions of probability. *The American Statistician*, 57(1):37–45.

Batanero, C. e Borovcnik, M. (2016). *Statistics and Probability in High School*. Springer, Nova Iorque, Estados Unidos.

Howie, D. (2002). *Interpreting Probability: Controversies and Developments in the Early Twentieth Century*. Cambridge Studies in Probability, Induction and Decision Theory. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1ª edição.

Khrennikov, A. (2009). *Interpretations of Probability*. De Gruyter, Berlin, Alemanha.

Morgan, J. P., Chaganty, N. R., Dahiya, R. C. e Doviak, M. J. (1991). Let's make a deal: The player's dilemma. *The American Statistician*, 45(4):284–187.

Pfannkuch, M., Budgett, S., Fewster, R., Fitch, M., Pattenwise, S., Wild, C. e Ziedins, I. (2016). Probability and thinking: what can we learn from practice? *Statistics Education Research Journal*, 15(2):11–37.

Rodrigues, F. W. (1984). Eventos independentes. *Revista do Professor de Matemática*, 4:21–24.