

Exercício Programa 3

Matrizes Ortogonais e o Problema de Quadrados Mínimos

Lucas Magno
7994983

Introdução

Este EP consiste em se resolver um sistema linear sobredeterminado na forma

$$Ax = b$$

onde

$$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$x \in \mathbb{R}^m$$

$$b \in \mathbb{R}^n$$

a fim de minimizar a norma do resíduo, ou, equivalentemente, sua norma ao quadrado, dada por

$$\begin{aligned}\|r\|_2^2 &= \|b - Ax\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (b_i - (Ax)_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n r_i^2\end{aligned}$$

Ou seja, o problema se resume em encontrar x que minimize os r_i^2 , o que dá o nome ao Método dos Mínimos Quadrados.

Matrizes Ortogonais

Para tal, vale a pena o estudo de matrizes ortogonais, que são definidas como qualquer matriz Q tal que

$$Q^T Q = I$$

(Q^T também é ortogonal).

E portanto, como se verifica facilmente para qualquer vetor ou matriz x

$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2$$

Ou seja, podemos utilizar matrizes ortogonais para transformar o sistema na forma

$$Q^T Ax = Q^T b$$

cujo resíduo

$$r = Q^T b - Q^T Ax$$

tem a mesma norma que o sistema original

$$\|r\|_2 = \|Q^T(b - Ax)\|_2 = \|b - Ax\|_2$$

Ou seja, podemos transformar o sistema em um mais simples de se resolver, com a garantia de que as soluções são a mesma.

Refletores de Householder

Uma transformação ortogonal interessante para o nosso caso é uma reflexão de Householder, que permite a seguinte transformação de um determinado vetor $x \in \mathbb{R}^n$

$$Q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\tau \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde Q é o refletor e $\tau = \pm \|x\|_2$. Melhor ainda, sua construção é bem simples, dada por

$$Q = I - \gamma uu^T$$

com

$$\gamma = \frac{x_1 + \tau}{\tau}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ x_2/(x_1 + \tau) \\ \vdots \\ x_n/(x_1 + \tau) \end{bmatrix}$$

então só γ e u precisam ser armazenados, e não a Q inteira.¹

Decomposição QR

Portanto, escolhendo a transformação de forma a realizar isso na primeira coluna da matriz A , com norma τ_1 e a chamando de Q_1 , temos

$$Q_1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{c|ccc} -\tau_1 & a_{12}^* & \dots & a_{1m}^* \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

Podemos ainda escolher uma nova transformação \hat{Q}_2 para realizar o mesmo na primeira coluna de A_2 , mas precisamos compô-la com a identidade para que ela aja somente em A_2 , não alterando o restante de A . Então

$$Q_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} I_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \hat{Q}_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

aí teremos

$$Q_2 Q_1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} -\tau_1 & a_{12}^* & a_{13}^* & \dots & a_{1m}^* \\ 0 & -\tau_2 & a_{23}^* & \dots & a_{2m}^* \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_3 & \\ 0 & 0 & & & \end{array} \right]$$

Escolhendo uma reflexão para cada coluna de A , poderíamos fazer

$$Q_m \dots Q_1 A = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ triangular superior. Na prática, no entanto, as colunas de A nem sempre são linearmente independentes, e eventualmente alguma subcoluna terá norma nula (portanto $\tau = 0$), tornando a R singular, o que não permitiria seu uso para resolver o sistema.

¹Também não é difícil verificar que Q é simétrica e $Q = Q^T$.

Para evitar isso, organizar as colunas de A de forma a manter as subcolunas de maiores normas à esquerda, isto é, antes de escolher cada Q_k ($k = 1 \dots m$), escolher a subcoluna de maior norma de A_k e trocá-la com a primeira, de forma que os τ_k fiquem organizados em ordem decrescente.

Assim, se no passo $r + 1$ a maior norma das subcolunas de A_{r+1} é zero, então todos os elementos dessa submatriz são nulos e temos

$$Q_r \dots Q_1 A P = R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $R_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ é triangular superior e não-singular.²
Definindo

$$Q^T = Q_r \dots Q_1$$

temos

$$A P = Q R$$

que é a decomposição QR da matriz A com pivotamento.

Solução do Problema de Mínimos Quadrados

Voltando ao sistema original,

$$A P P^{-1} x = b$$

$$Q R P^{-1} x = b$$

$$R P^{-1} x = Q^T b$$

E a resolução do sistema se resume a

$$c = Q^T b$$

$$R \hat{x} = c$$

$$x = P \hat{x}$$

Sabendo a forma de R , no entanto, podemos calcular o resíduo³

$$\begin{aligned} r &= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{c} \\ d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{11}\hat{x}_1 + R_{22}\hat{x}_2 - \hat{c} \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

cujá norma ao quadrado é

$$\|r\|_2^2 = \|R_{11}\hat{x}_1 + R_{22}\hat{x}_2 - \hat{c}\|_2^2 + \|d\|_2^2$$

que é quem queremos minimizar. Fica claro que não podemos alterar o termo $\|d\|_2^2$, mas podemos escolher \hat{x}_1 e \hat{x}_2 de forma a zerar o primeiro termo. Ou seja

$$R_{11}\hat{x}_1 = \hat{c} - R_{22}\hat{x}_2$$

o que tem infinitas soluções, dependendo da escolha dos termos. Como é arbitrário, podemos pegar simplesmente $\hat{x}_2 = 0$ e o segundo passo da solução ($R\hat{x} = c$) se reduz resolver o sistema triangular superior não-singular

$$R_{11}\hat{x}_1 = \hat{c}$$

e o resíduo se torna

$$\|r\|_2 = \|d\|_2$$

²Alterar as colunas de A durante os passos é equivalente a ter multiplicado ela inicialmente por uma matriz de permutação P .

³ $\hat{x}_1, \hat{c} \in \mathbb{R}^r$

O programa

Esses métodos foram então implementados em um programa em C, que permite resolver um dado sistema sobredeterminado ou então ajustar um polinômio de certo grau a um dado conjunto de pontos.

Ou seja, há duas formas de invocar o programa, cada uma com um tipo de arquivo de entrada diferente.

Sistema sobredeterminado qualquer

Resolve o sistema

$$Ax = b$$

com $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^n$, bem como essas dimensões, fornecidas num arquivo de entrada no seguinte formato⁴

Listing 1: Formato do arquivo de entrada com um sistema sobredeterminado

n	m
a_{11}	
a_{12}	
\vdots	
$a_{n,m-1}$	
a_{nm}	
b_1	
\vdots	
b_n	

E o programa em si é invocado na forma

```
$ EP3 sys filename
```

Ajuste polinomial a um conjunto de pontos

Dado um conjunto de pontos

$$(t_i, b_i), \quad i = 1 \dots n$$

ajusta um polinômio de grau $m - 1$ a esses pontos por mínimos quadrados.

Ou seja, monta a matriz de Vandermonde⁵ do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{m-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{m-1} \end{bmatrix}$$

e a utiliza para resolver o sistema

$$Ax = b$$

em que x é o vetor de coeficientes do polinômio que melhor ajusta os pontos, isto é

$$p(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \dots + x_m t^{m-1}$$

⁴Vale notar que as matrizes devem ser escritas ordenadas por linhas.

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Vandermonde_matrix

Os dados e as dimensões devem ser fornecidos no arquivo de entrada no formato

Listing 2: Formato do arquivo de entrada com um conjunto de pontos

n	m
t_1	b_1
t_2	b_2
\vdots	
t_n	b_n

e o programa é invocado na forma

```
$ EP3 data filename
```

Em ambos casos, o vetor solução x é escrito para um arquivo de saída com o mesmo nome do de entrada, **filename**, mas com extensão **.out**. Além disso, no caso de ser um conjunto de dados com um polinômio ajustado, é salvo em um arquivo **pdf** o plot dos dados sobrepostos ao polinômio encontrado.

Detalhes de implementação

Vale a pena mencionar alguns detalhes que influenciam na eficiência do programa que foram implementados.

Normalização

Sempre ao se realizar a soma de pontos flutuantes arbitrários há o perigo de overflow, contaminando o restante da computação. Esse risco é ainda maior no cálculo de normas, que é parte central do algoritmo aqui implementado.

Portanto, para evitar isso, pode-se reescalar os elementos de um vetor de forma que o máximo deles tenha valor 1, calcular a norma, e reescalar de volta, o que elimina a chance de overflow, já que todos os elementos têm valor baixo.

No entanto, isso teria que ser feito a cada norma calculada e seria necessário um vetor auxiliar para guardar cada fator de escala. Então se escolheu reescalar a matriz A inteira por seu maior elemento, evitando-se o overflow em todas as operações seguintes e no final simplesmente se reescala o vetor b também para se obter um sistema equivalente e então resolvê-lo, sendo necessário o armazenamento de um único escalar.

Normas

Novamente, o cálculo de normas é parte central do algoritmo aqui, então uma preocupação com sua eficiência é necessária.

A cada passo, deve ser escolhida a subcoluna de maior norma, o que implicaria no cálculo das normas de todas subcolunas, que claramente é muito custoso.

Entretanto, calculando-se as normas das colunas completas e guardando seus quadrados num vetor auxiliar, podemos obter a norma de qualquer subcoluna simplesmente removendo a contribuição dos elementos superiores.

Ou seja, como a norma de uma dada coluna y é

$$\tau_1^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$$

a norma da primeira subcoluna (sem o elemento y_1) é dada por

$$\begin{aligned}\tau_2^2 &= y_2^2 + \cdots + y_n^2 \\ &= \tau_1^2 - y_1^2\end{aligned}$$

poupando grande parte das operações.

Exemplo

Para ilustrar o funcionamento do programa, foi escolhido um conjunto de dados colhidos durante um experimento de física experimental, que buscava encontrar a razão carga-massa, ou carga reduzida, do elétron, através do Método da Hélice de Busch.[2]

Esse método consiste inserir um feixe de elétrons gerado num tubo de raios catódicos com uma dada tensão aceleradora num campo magnético por sua vez gerado por um solenoide com uma dada corrente.

Variando-se ambas tensão e corrente, pode-se alterar a posição em que os diversos elétrons atingem um certo anteparo a uma dada distância da origem do feixe.

No entanto, para certos valores de tensão e corrente, todas as trajetórias convergem num único ponto no anteparo e nesse caso vale a expressão

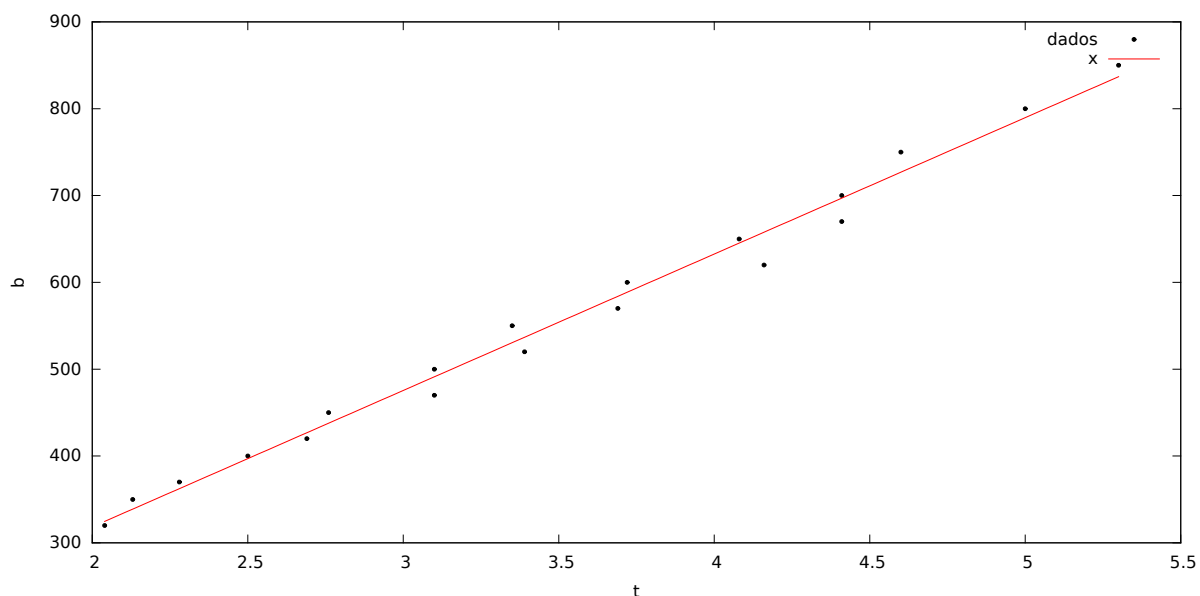
$$V = \alpha \frac{e}{m} I^2$$

em que V é a tensão do tubo de raios catódicos, I é a corrente no solenoide, α é uma constante composta por vários dados do experimento (a distância até o anteparo, por exemplo), e é o valor absoluto carga do elétron e m é sua massa.

Assim, foram registrados diversos valores de V em e I^2 para os quais a expressão era válida e a eles ajustado um polinômio de primeiro grau, a fim de se encontrar a todo o coeficiente que contém a carga reduzida.

Utilizando esses dados, obtemos com o programa atual o ajuste

Figura 1: Tensão em função do quadrado da corrente para os quais as trajetórias dos feixes de elétron convergem



em que b neste caso é a tensão, em volts (V), t é o quadrado da corrente, em ampères quadrados (A^2) e o polinômio ajustado foi

$$p(t) = x_1 + x_2 t$$

Para o coeficiente angular (termo que multiplica $t = I^2$) foi encontrado

$$x_2 = \alpha \frac{e}{m} \approx 1.57 \times 10^2 \frac{V}{A^2}$$

Levando em conta a constante α (que não é de interesse aqui), podemos obter

$$\frac{e}{m} \approx 1.46 \times 10^{11} \frac{C}{Kg}$$

que é próximo do valor correto medido[1]

$$\frac{e}{m} = 1.76 \times 10^{11} \frac{C}{Kg}$$

e está dentro do intervalo de confiança quando se utilizam as incertezas.⁶

Conclusão

A decomposição QR, embora mais custosa que Cholesky ou LU, permite o tratamento de uma classe muito maior de matrizes, eliminando até a exigência da não-singularidade. Mesmo assim é bastante eficaz ainda, devido ao seu uso inteligente de diversos resultados da matemática.

Sua aplicação mais clara é o Problema de Mínimos Quadrados, onde sistemas sobredeterminados ocorrem com grande frequência, como ilustrado no exemplo.

Assim, esse método nos permite resolver esse tipo de sistema evitando problemas comuns, como o mal condicionamento do sistema quando se utilizam as equações normais, por exemplo.

Referências

- [1] CODATA Value: electron charge to mass quotient http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172006000400005 The NIST reference on Constants, Units and Uncertainty
- [2] CAVALCANTE, Marisa Almeida and DIAS, Eliane Fernanda. Método da hélice de Busch e a determinação da componente horizontal do campo magnético terrestre. Rev. Bras. Ensino Fís. [online]. 2006, vol.28, n.4 [cited 2015-11-22], pp. 435-440 . Available from: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172006000400005&lng=en&nrm=iso. ISSN 1806-9126. <http://dx.doi.org/10.1590/S0102-47442006000400005>.

⁶Que não foram consideradas aqui por limitação do algoritmo, mas foi mantido o número de algarismos significativos do experimento original.