

Exercício Programa 3

Matrizes Ortogonais e o Problema de Quadrados Mínimos

Lucas Magno
7994983

Introdução

Este EP consiste em se resolver um sistema linear sobredeterminado na forma

$$Ax = b$$

onde

$$\begin{aligned} A &\in \mathbb{R}^{n \times m} \\ x &\in \mathbb{R}^m \\ b &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

a fim de minimizar a norma do resíduo, ou, equivalentemente, sua norma ao quadrado, dada por

$$\begin{aligned} \|r\|_2^2 &= \|b - Ax\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (b_i - (Ax)_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n r_i^2 \end{aligned}$$

Ou seja, o problema se resume em encontrar x que minimize os r_i^2 , o que dá o nome ao Método dos Mínimos Quadrados.

Matrizes Ortogonais

Para tal, vale a pena o estudo de matrizes ortogonais, que são definidas como qualquer matriz Q tal que

$$Q^T Q = I$$

(Q^T também é ortogonal).

E portanto, como se verifica facilmente para qualquer vetor ou matriz x

$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2$$

Ou seja, podemos utilizar matrizes ortogonais para transformar o sistema na forma

$$Q^T Ax = Q^T b$$

cujo resíduo

$$r = Q^T b - Q^T Ax$$

tem a mesma norma que o sistema original

$$\|r\|_2 = \|Q^T(b - Ax)\|_2 = \|b - Ax\|_2$$

Refletores de Hausdorff