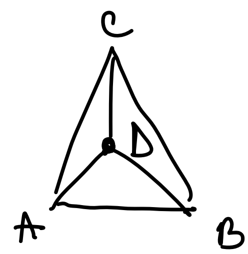
Verif. apartenenței unui pct. la un Δ fol. arii

Fie un ΔABC $A=(x_1,y_1)$
$B=(x_2,y_2)$
$C=(x_3,y_3)$



$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

Un pct. D se află în interiorul Δ ABC $\Leftrightarrow$

$$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta DBC} + A_{\Delta DAB} + A_{\Delta DAC}$$

Pct. reale / pct. la infinit

fie pct. de forma $[x_1, x_2, x_3, x_0]$

- dacă $x_0 = 0 \Rightarrow$ pct. la inf.
- dacă $x_0 \neq 0 \Rightarrow$ pct. real

! $[1,2,3,6] = [2,4,6,12]$

Ex: pct. $[1,2,3,6] = [2,4,6,a-3]$ $a = ?$

$a - 3 = 12 \Rightarrow a = 15$

Det. pct. la inf. al unei drepte

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2 = 0 \end{cases}$$

Tr. să găsim pct. la inf. care satisfac. ec. $[x_1, x_2, x_3, x_0]$

1. Omogenizare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 4x_0 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

2. Trecem la ec. parametrice

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + t \cdot l \\ x_2 = y_0 + t \cdot m \\ x_3 = z_0 + t \cdot n \end{cases}$$

3. Înloc. în sistem

$$\begin{cases} x_0 + t \cdot l - y_0 - t \cdot m - z_0 - t \cdot n = 0 \\ 3x_0 + 3 \cdot t \cdot l - y_0 - t \cdot m + z_0 + tn = 0 \end{cases}$$

4. Dăm t factor comun

$$\begin{cases} x_0 - y_0 - z_0 - t(l - m - n) \\ 3x_0 - y_0 + z_0 + t(3l - m + n) \end{cases}$$

5. Egalăm cu 0 parantezele de la t.

$$\begin{cases} l - m - n = 0 \\ 3l - m + n = 0 \end{cases}$$

6. Se scriu m, l, n în fct. de k

$$\begin{cases} l - m - n = 0 \quad (1) \\ 3l - m + n = 0 \end{cases}$$

$$4l - 2m = 0 \Rightarrow 4l = 2m$$

$$2l = m = k$$

$$\begin{cases} l = \frac{k}{2} \\ m = k \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{k}{2} - k - n = 0 \rightarrow n = -\frac{k}{2}$$

7. Înlocuim pct (l, m, n) în fct. de k

$$\left(\frac{k}{2}, k, -\frac{k}{2} \right)$$

8. Înloc. $k \neq 0$ pt. pct.

$k = 2 \quad (1, 2, -1, 0)$

Ex: 1. Se dă poligonul (P_1, P_2, P_3, P_4) det. de pct.

$P_1(2,2,2)$

$P_2(-2,2,2)$

$P_3(-2,-2,2)$

$P_4(2,-2,2)$

a) ec. planului

b) det. cum se situează pct. $A_1(0,0,0)$
$A_2(0,0,2)$
$A_3(0,0,4)$
$A_4(5,7,9)$ față de poligon.

2. Fie ΔABC $A(0,0)$, $B(20,0)$, $C(10,10)$, $D(7,3)$.
Verif. fol. ariei dacă D e în int ΔABC

3. Aflați λ a.î. în planul proiectiv să aibă loc egalitatea $[1,2,3] = [2,4,\lambda^2-\lambda]$

4. Det. o param. pt. pct. la inf

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 6 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2 = 0 \end{cases}$$

1. a) $A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$B = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 16$

$D = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -32$

$16z - 32 = 0 \Rightarrow z - 2 = 0$

b) Pt A_1 : $2-2=-2 \Rightarrow$ în spatele planului

Pt A_2 : $2-2=0 \Rightarrow$ în plan

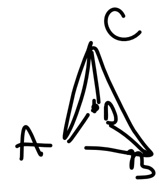
Pt A_3 : $4-2=2 \Rightarrow$ în fața planului

Pt A_4 : $9-2=7 \Rightarrow$ în fața planului

2. $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right| =$

$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \end{vmatrix} \right| =$

$= \frac{1}{2} \cdot 200 = 100$



$A(0,0)$, $B(20,0)$, $C(10,10)$, $D(7,3)$.

$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \mathcal{A}_{\Delta ADC} + \mathcal{A}_{\Delta ADB} + \mathcal{A}_{\Delta DCB}$

$\mathcal{A}_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| 30 - 70 \right| =$

$= 20$

$\mathcal{A}_{\Delta ADB} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| 60 \right| = 30$

$\mathcal{A}_{\Delta DCB} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \\ 20 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| 70 + 60 - 200 - 30 \right|$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{50}{\cancel{100}} = 50$

$\Rightarrow$ D este în Δ.

4. $[1,2,3] = \{2,4,\lambda^2-\lambda\}$.

$\lambda^2-\lambda-6=0$ $\qquad \Delta = 1+24 = 25$

$\lambda_1 = \frac{1+5}{2} = 3$

$\lambda_2 = \frac{1-5}{2} = -2$

4. $\begin{cases} 2l + m + 2n = 0 \\ -l + m - 3n = 0 \;|\cdot 2 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 2l + m + 2n = 0 \\ -2l + 2m - 6n = 0 \end{cases}$ $+$

$3m - 4n = 0$

$3m = 4n = k \qquad m = \frac{k}{3} \qquad n = \frac{k}{4}$

$2l + \frac{k}{3} + \frac{\cancel{2}\cdot k}{\cancel{4}_{2}} = 0 \Rightarrow {}^{6)}2l + {}^{2)}\frac{k}{3} + {}^{3)}\frac{k}{2} = 0$

$12l + 2k + 3k = 0 \qquad l = \frac{-5k}{12}$

$\left(\frac{-5k}{12}, \frac{k}{3}, \frac{k}{4}\right)$

$(-5, 4, 3, 0)$