1) P(A) cu def. Fermat - Pascal.

2) Estimarea P(A) cu ajutorul L.N.M. Frecvențele absolute cumulate, frecvențele relative.

3) Estimare P(A) cu probabilități geometrice.

4) Bernoulli fără revenire.

5) Bernoulli cu revenire.

6) Poisson.

7) V.a, $f(\omega)$ care monitorizează rezultatele unei experiențe.

8) $f(\omega)$ o v.a. F_f, X_f, M_f, D_f^2, σ_f.

9) Th. lui Cebîșev.

10) Th 3σ.

11) $\phi(x)$ - funcție eroării, funcție lui Laplace.
Proprietăți. Cât este $\phi(x)$; Rez. ec. $\phi(x) = a$.

12) Evenimente independente, $P(A/B)$, V.a. independente.

13) T.L.C.

(Ω, K, P) ; $f_1, \dots, f_n, \dots$ v.a.

1) independente.

2) Din lumea lui f, identic repartizate, m, σ)

$$P(\alpha \leq f_1 + \dots + f_n \leq \beta) \simeq \phi\left(\frac{\beta - n \cdot m}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{\alpha - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

pt. $n \gg 30$.

2

14) Exit - Poll.

Un proiect electoral. Vrem să determinăm volumul sondajului, $n=?$, a.î. $\hat{\nu}_n \simeq m \pm \varepsilon \Leftrightarrow m = \nu_n \pm \varepsilon$ cu o eroare de cel mult $\underline{\varepsilon = 0{,}03}$ și acest lucru cu o prob de cel puțin $p = 0{,}9$.

$$P(|\nu_n - m| \le \varepsilon) \geq p.$$

$$\boxed{P(|\nu - m| \le \varepsilon = 0{,}03) \geq 0{,}9 = p}$$

<u>Rezultatul</u> Candidatul la primărie a obținut un <u>scor de</u> $43\% \pm 0{,}03 \Leftrightarrow m \in (\underline{0{,}40 ; 0{,}46})$ și acest rezultat este valabil cu o prob. de cel puțin $\underline{p = 0{,}90} = 90\%$.

Th. funcției e. v.a. cu dens. $p(x)$.

$$P(\alpha \le f(x) \le \beta) = \int_\alpha^\beta p(x)dx.$$

Dacă $f(x)$ este normal distr.

$$P(\alpha \le f(x) \le \beta) = \phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right)$$

15) V.a. continue.

$F(x)$, $p(x)$, m_f, $\hat{\delta}_f$, σ_f.

$p(x)$ = dens. de prob, lege de prob.

16) • $p(x)$ = lege de prob. uniformă

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin (a, b) \end{cases} \qquad m = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Scanned with CamScanner

- $p(x) =$ lege normală

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad m = m \,,\ \sigma = \sigma.$$

- $p(x) =$ lege exponențială

$$p(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \qquad m = \lambda \,, \sigma = \lambda.$$

17. T.L.C. Același enunț ca la T.L.C. pentru v.a. simple.

18. Miracolul Gauss-Laplace

Se privește T.L.C.

Pentru n mare, $n \geqslant 30$, v.a.

$f_1 + \dots + f_n$ se comportă ca o v.a. normal distribuită cu medie $M = n \cdot m$ și abatere medie pătratică $\Sigma = \sigma\sqrt{n}$.

Legea Cauchy

$p_n(x) = \dfrac{a}{x^2+n^2}$.

1. Determ. a a.î. $p(x)$ să fie lege de prob.

$a = \dfrac{n}{\pi}$.

2. Fie f_n v.a. cu legea p_n.

Determ. F, m, D^2, σ.

3. Determ. $P(1 \leq f_n(\omega) \leq 2)$.

4. $f_n \xrightarrow{P} 0$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} P(|f_n(\omega)| \geq \varepsilon) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} P(-\varepsilon \leq f_n(\omega) \leq \varepsilon) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} p_n(x)\,dx = 0.$

(1)

3a, 2b, 4c | 2a, 3b | 4b, 5c

Se extrage câte o bilă din fiecare urnă.

a) Fie $f(\omega)$ v.a. care modelează nr. de bile b extrase.

Să se determine F, X_f, M_f, D^2_f, σ.

b) Se face un exp. de 500 ori.

Care este prob. ca să apară ev. „2 bile b extrase" de cel puțin 200 ori.

---

a) $P(x,y,z) = \left(\frac{3}{9}x + \frac{2}{9}y + \frac{4}{9}z\right)\cdot\left(\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y\right)\cdot\left(\frac{4}{9}y + \frac{5}{9}z\right) =$

$= \frac{1}{405}(3x+2y+4z)\cdot(2x+3y)\cdot(4y+5z).$

$X_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ & & & \end{pmatrix}$

b) g v.a. care model. ap. ev. „2 bile b extrase"

$X_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{275}{405} & \frac{130}{405} \end{pmatrix}$

$f_1, \dots, f_{500}$ din leg. lui g. $m = \frac{130}{405}$ $\sigma =$

$\frac{5}{9}$

$\frac{3}{15}$

30
16
36
48

130

(6)

(2) Se aruncă 3 zaruri.

Fie $f(\omega)$ v.a. care monitorizează nr. de zaruri care indică cifre diferite.

$$f(\omega) = \begin{cases} 1 & (1,1,1) \\ 2 & (2,3,2) \\ 3 & (2,3,5) \end{cases}$$

$$X_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{6}{6^3} & \frac{90}{6^3} & \frac{120}{6^3} \end{pmatrix}.$$

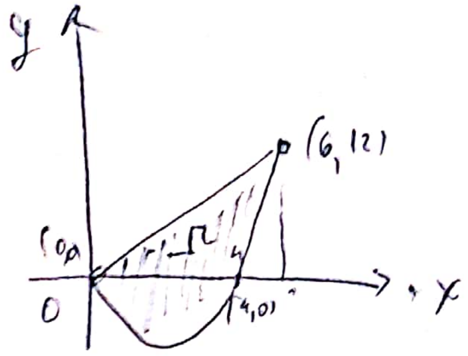
a) F_f, X_f, M_f, D^2_f.

b) Se face aceeași experiență de 500 ori.

Care este prob. ca să apară evenimentul „3 fețe diferite" de cel puțin 300 ori.

~~$f(x) = x^2 - 4x$~~ 36-24

3



Fie $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 6,\ x^2-4x \le y \le 2x\}$

$f(\omega) = \omega_1$, $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$.

a) Să se det. F, $p(x)$, M_f, D^2_f, σ_f.

b) Să se det $P(\omega \in \Omega \mid 2 \le f(\omega) \le 6)$.

Probleme

1) Se aruncă 4 zaruri.

Fie A suma celor 4 zaruri ≥ 14.

a) Să se estimeze cu ... P(A) făcând experimentul de 10 000 ori.

b) Să se calculeze P(A) cu formula clasică.

c) Se face experimentul de 5000 ori. Care este probabilitatea ca ev. A să se producă de un nr. de ori cuprins între 2000 – 3000 ori.

2) Se aruncă 3 zaruri.

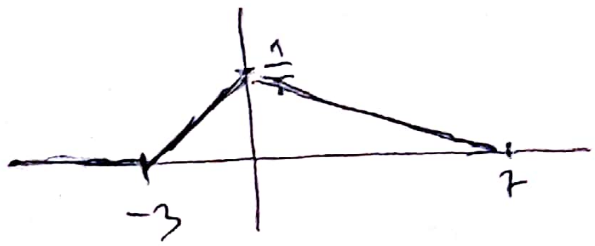
Fie A ev. ca cele trei numere de pe zaruri să se poată aranja ca trei numere în progresie aritmetică sau ...

a) Să se estimeze P(A).

b) Calculați P(A).

c) Se fac exp. de 3000 ori. Care este prob. ca ev. A să se producă de un nr. de ori cuprins între 1000 și 2000 ori?

3) Fie $f_1, f_2, \dots f_{1000}$ v. a. independente cu dens. de prob:

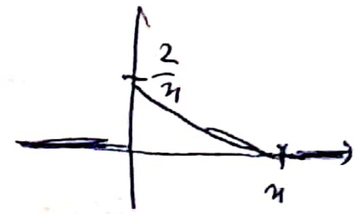


a) Să se determ. F, m, D^2, σ.

b) Notăm $S = f_1 + \dots + f_n$.

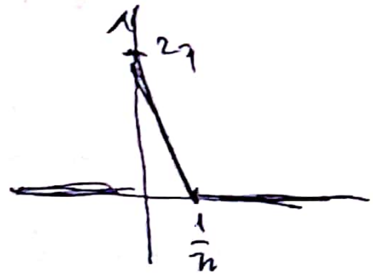
Să se det. $P(S \leq 1350)$.

4) Fie f_n un șir de v.a. cu dens. de prob. p_n:



Decideți dacă $f_n \xrightarrow{P} 0$

5) Fie f_n un șir de v.a —



Decideți dacă $f_n \xrightarrow{P} 0$.

6) Fie f_n cu $X_{f_n} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{n} & 1-\frac{2}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

a) Determ. $F_n, m_n, D^2_n, \sigma_n$.

b) Decideți dacă $f_n \xrightarrow{P} 0$.

Fie g v.a. care monitorizează notele date unui student. g are media m necunoscută, σ abaterea medie pătratică. $0 < \sigma \leq 2$.

Fie $f_1, f_2, \dots, f_n$ v.a. — independente, din legea lui g

$f_1, f_2, \dots, f_n$ sunt frecvențele absolute.

$f_1, f_1+f_2, f_1+f_2+f_3, \dots$ sunt frec. absolute cumulate.

$\nu_n = \frac{f_1 + \dots + f_n}{n}$ frecvențele relative.

Fie $\varepsilon > 0$, p = o prob. spre 1

Ne interesează $n = ?$ a.î. $P(|\nu_n - m| < \varepsilon) \geq p$.

Atunci aflăm volumul sondajului n

și $m \approx \nu_n$ cu eroare cel mult ε și este adev. cu o prob de cel puțin p.

Calculele se fac cu Cebâșev și cu TLC

Cât este n de fiecare dată?

11

g o v.a. cu m, σ.

$f_1 \dots f_n$ — din lue lui g; indep.

$\sigma = 2$
$\varepsilon = 1$
$p = 0{,}9$

C: $n \geq \frac{4}{0{,}1 \cdot 1} = 40$

TLC: $n \geq \frac{4}{1} \cdot 0{,}9 = 3{,}6$

$$f = \frac{f_1 + \dots + f_n}{n} \qquad \begin{cases} m(f) = m \\ D^2(f) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{cases}$$

$$\boxed{P(|f - m| < \varepsilon) \geq p. \qquad n = ?}$$

Sol 1 cu Cebîşev

$$P(|f-m| < \varepsilon) = 1 - P(|f-m| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D^2 f}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \geq p$$

$$1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \geq p \qquad 1 - p \geq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \qquad \boxed{n \geq \frac{\sigma^2}{(1-p)\cdot\varepsilon^2}}$$

Sol 2 cu TLC.

$$P(|f-m| < \varepsilon) \geq p \iff P\left(\left|\frac{f_1 + \dots + f_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right) \geq p \iff$$

$$P(nm - n\varepsilon \leq f_1 + \dots + f_n < nm + n\varepsilon) \geq p.$$

$$\Phi\left(\frac{nm + n\varepsilon - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{nm - n\varepsilon - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq p \qquad \Phi(q) = \frac{1+p}{2}$$

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \geq 1 + p \qquad \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \geq \frac{1+p}{2} = \Phi(q)$$

$$\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} \geq q \qquad \boxed{n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} q^2}$$

$p = 0{,}9 \qquad \frac{1}{1-p} = \frac{1}{1-0{,}9} = 10$

$\Phi(q) = \frac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95$

$q^2 = 0{,}9$

$$P\left(\left| \frac{f_1 + \dots + f_n}{n} - m \right| \leq 1 \right) \geqslant 0,9$$

$$P\left(m - 1 \leq \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{n} \leq m + 1 \right) \geqslant 0,9$$

$$P\left(mn - n \leq f_1 + \dots + f_n \leq mn + n \right) \geqslant 0,9$$

$$\phi\left(\frac{mn + n - mn}{\sigma \sqrt{n}} \right) - \phi\left(\frac{mn - n - mn}{\sigma \sqrt{n}} \right) \geqslant 0,9$$

$$2\phi\left(\frac{n}{\sigma \sqrt{n}} \right) \geqslant 1,9$$

$$\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{1,5} \right) \geqslant 0,95 = \phi(1,65)$$

$\sqrt{n} \geqslant 1,5 \cdot 1,65$ $\quad \sqrt{n} \geqslant 2.5$ $\quad \boxed{n \geqslant 7}$