Ineg. lui Cebâșev — Cursul 15

$(\Omega, \mathcal{K}, P)$ f o v.a. cu $F_f, \chi_f, m_f, D_f^2, \sigma_f$.

Atunci $P(\omega \in \Omega \mid |f(\omega) - m_f| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{D_f^2}{\varepsilon^2}$.

„Abateri" mari de la medie sunt puțin probabile.

Teorema celor 3σ

$$P(\omega \in \Omega \mid |f(\omega) - m_f| < 3\sigma) = 1 - P(\omega \in \Omega \mid |f(\omega) - m_f| \geq 3\sigma)$$

$$\geq 1 - \frac{D_f^2}{9\sigma^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{8}{9} \approx 0{,}9.$$

$$\boxed{P(-3\sigma + m_f \leq f(\omega) \leq 3\sigma + m_f) \geq 0{,}9}$$

Convergența v.a. în probabilitate

f_n, f v.a.

$$f_n \xrightarrow{P} f \iff \forall\, \varepsilon > 0,\ \lim_{n \to \infty} P(|f_n(\omega) - f| \geq \varepsilon) = 0$$

L.N.M

1) $\nu_n \longrightarrow p$ — frecv. relative în limita mg. a oșf.

2) $\nu_n \xrightarrow{P} p$ — ν_n frecv. rel. privită ca v.a., p v.a. $p = \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$

ξ o v.a. cu m, σ.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ v.a. 1) independente. 2) din lumea lui ξ.

$f_1 = \xi_1 \qquad v_1 = \frac{f_1}{1}$

$f_2 = \xi_1 + \xi_2 \qquad v_2 = \frac{f_2}{2}$

$\dots$

$f_n = \xi_1 + \dots + \xi_n \qquad v_n = \frac{f_n}{n}$

$\dots$

v.a. ale frecvenței absolute $\qquad$ v.a. ale frecv. relative.

Să se determine $n \in \mathbb{N}$ a.î. $P\left(\left|\frac{v_n}{\cancel{n}} - m\right| < \varepsilon\right) \geq p_0$, unde $\varepsilon > 0$ și $p_0 \in (0,1)$.

$$P\left(\left|\frac{v_n}{\cancel{n}} - m\right| < \varepsilon\right) = 1 - P\left(\left|\frac{v_n}{\cancel{n}} - m\right| \geq \varepsilon\right) \underset{\text{Cebîșev}}{\geq} 1 - \frac{D^2(v_n)}{\varepsilon^2} =$$

Dar $D^2(v_n) = D^2\left(\frac{f_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D^2(f_n) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot D^2(\xi) = \frac{\sigma^2}{n}$.

$$= 1 - \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} \geq p_0 \iff -\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \geq p_0 - 1 \iff \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \leq 1 - p_0 \iff$$

De aici aflăm pe n.

$$\frac{n\varepsilon^2}{\sigma^2} \geq \frac{1}{1-p_0} \iff \boxed{n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2(1-p_0)}}$$

Cazuri particulare

1) Fie g v. a. care monitorizează răspunsul la o problemă, întrebare adresată unui student.

$g_1, g_2, \dots, g_n \dots$ răspunsurile la un șir de întrebări.

$f_1, f_2 \dots f_n \dots$ frecvențele absolute la întrebare.

$\nu_1, \nu_2 \dots \nu_n \dots$ frecvențele relative la întrebări.

$f_1 = g_2$

$f_2 = g_1 + g_2$

$\vdots$

Câte întrebări trebuie puse a.î. $\nu_n \simeq m$ cu eroare cel mult $\varepsilon > 0$ și această afirmație cu o prob. de cel puțin p_0?

g are medie m = necunoscută și $\sigma = 0{,}75$.

$\varepsilon = 0{,}5$, $p_0 = 0{,}9$.

Deci $$n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2(1-p_0)} = \frac{0{,}75^2}{0{,}5^2(1-0{,}9)} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0{,}1} = \frac{9}{4} \cdot 10 = \frac{90}{4} = 22{,}5.$$

Deci $\boxed{n \geq 23}$ $\quad \nu_n \approx m \pm 0{,}5$ cu prob. $0{,}9$

2) Exit-Poll la ieșirea alegerilor ptr. primar

Fie g v.a. care monitorizează alegerile pentru primar.

$$X_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$, v.a. bernoulliană care monitorizează buletinul de vot.

$g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ v.a. care monitorizează buletinele de vot.

Ele sunt din lumea lui g și sunt independente.

f_n frecvența absolută cumulată:

$f_1 = g_1$

$f_2 = g_1 + g_2$

$\ldots$

$f_n = g_1 + g_2 + \ldots + g_n$

$\ldots$

$\nu_n = \frac{f_n}{n}$ v.a. al frecvenței relative.

$$\frac{100.000}{36} = \frac{50.000}{18} = \frac{25.000}{9}$$

$25000 : 9 = 2777$
18
70
63
70
63

Care este volumul sondajului $n \in \mathbb{N}$? a.î.

$\nu_n \approx p$ cu o eroare de cel mult $\varepsilon > 0$ și

această afirmație să fie adev. cu o prob de cel puțin p_0?

Aici $\sigma^2 = p \cdot q \leq \frac{1}{4}$, ptr. că $p + q = 1 \Rightarrow \frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq} \Rightarrow pq \leq \frac{1}{4}$.

$\varepsilon = 0{,}03$, $p_0 = 0{,}9$.

$$n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2(1-p_0)} \quad n \geq \frac{\frac{1}{4}}{\varepsilon^2(1-p_0)} \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2(1-p_0)}$$

$100000 : 36 = 2777$
72
280
252
28

$$\frac{\frac{1}{4}}{0{,}03^2 \cdot 0{,}1} = \frac{1}{4 \cdot 0{,}0009 \cdot 0{,}1} = \frac{100000}{4 \cdot 9}$$

$n \geq 2800$

După ce se determină volumul sondajului n, se aleg independent n „subiecți" și se calculează ν_n.

$0,34 \pm 0,03 \iff 34\% \pm 3\%$

$\nu_n \approx 34\% \pm 0,03 \iff \underline{(-31;37)}$ cu

prob. de cel puțin 90%.

T.L.C = teorema limită centrală

teorema fund. a statisticii matematice.

Funcție erorilor, Funcție Gauss-Laplace.

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt .$$

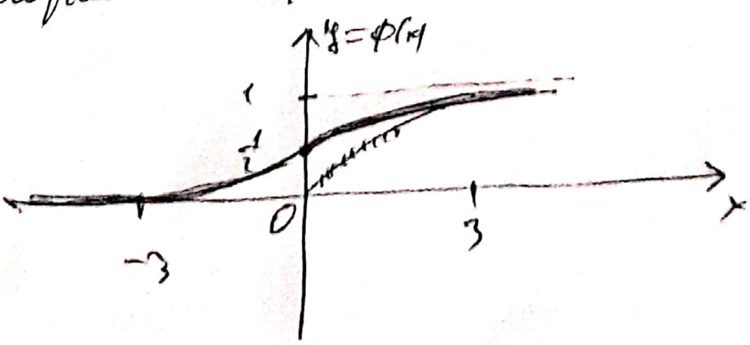
$\boxed{\int e^{-x^2} dx}$

$\int \sqrt[3]{x^2+1} \, dx$

Proprietăți ale lui $\Phi(x)$:

1. $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.
2. $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$
3. $\Phi(x) \approx 1$, $x \geq 3$.
4. $\Phi(x) = 0$, $x \leq -3$.

Graficul lui $\Phi(x)$:



Teoremă (T.L.C)

(Ω, K, P) ; $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ un şir de v.a. a.î.

$\begin{cases} 1)\ f_1, \dots, f_n \dots \text{ independente.} \\ 2)\ f_1, \dots, f_n \dots \text{ sunt din aceeaşi lume, adică} \end{cases}$

au aceeaşi matrice de repartiţie, deci au aceeaşi medie şi aceeaşi σ^2.

Atunci pentru n „mare" are loc egalitatea:

$$P(\alpha \le f_1 + \dots + f_n \le \beta) \simeq \phi\left(\frac{\beta - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{\alpha - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Variabile aleatoare pe (Ω, K, P)

1) v.a. simple. Au un nr finit de valori.

$F, X_f, m_f, D_f^2, \sigma_f$.

2) v.a. continue, au o infinitate de valori.

$f(\omega)$.

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $F(x) = P(\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq x)$ = funcție de repartiție.

$p(x)$ s.n. densitate de prob, lege de prob dacă:

1) $p(x) \geq 0$, $p(x)$ continuă e.p.t.

2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$

Fie $f(\omega)$ o.v.a. cu lege $p(x)$.

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$ funcție de repartiție

$$m_f = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,dx$$

$$D_f^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx - (m_f)^2$$

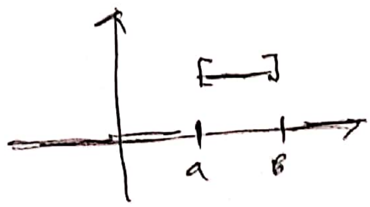
$$\sigma_f = \sqrt{D_f^2}.$$

1) Legea uniformă

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$ lege de probabilitate.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$$ funcția de repartiție.

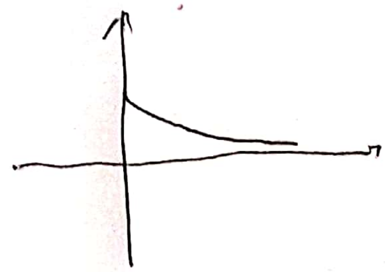
$$m_f = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,dx = \frac{a+b}{2}$$



$$D^2 f = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2) Legea exponențială

$$p(x) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0. \end{cases}$$



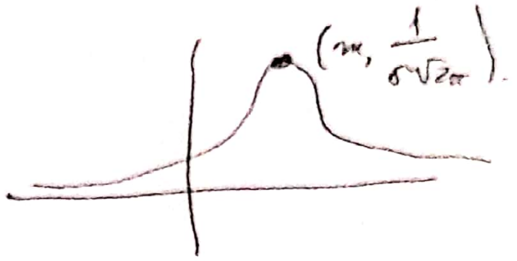
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$$

$$m_f = \frac{1}{\lambda}$$

$$D^2 f = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Legea normală

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad , \sigma > 0 , m \in \mathbb{R}$$



$F(x)$

$M_f = m$

$D^2_f = \sigma^2$

Teorema lui Cebâșev și Teorema limită centrală

au aceleași enunț atât pt. v.a. simple, discrete cât și pentru v.a. continue.

Probleme importante pt. ex.

Fie A un eveniment.

Fie f v.a. care monitorizează apariția lui A.

$$X_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

$$m = p$$

$$\delta^2 = pq$$

$$\sigma = \sqrt{pq}.$$

Să se determine n = numărul de experimente care trebuie făcute a.î. $\nu_n = \dfrac{f_1 + \dots + f_n}{n} \approx p$ cu eroare de cel mult $\varepsilon > 0$ și această afirmație să fie valabilă cu o prob. de cel puțin p_0.

$n = ?$ a.î. $P(|\nu_n - p| < \varepsilon) \geq p_0$

Rezolvare

$$\Leftrightarrow P\left(\left|\frac{f_1 + \dots + f_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq p_0 \Leftrightarrow$$

$$P\left(np - n\varepsilon < f_1 + \dots + f_n < np + n\varepsilon\right) \geq p_0 \Leftrightarrow$$

$$\phi\left(\frac{np + n\varepsilon - np}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{np - n\varepsilon - np}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq p_0 \Leftrightarrow$$

$$\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}\right) - \phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}\right) \geq p_0 \Leftrightarrow 2\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}\right) \geq 1 + p_0 \Leftrightarrow$$

$$\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}\right) \geq \frac{1 + p_0}{2} \Longrightarrow n.$$

C.15 II.

- $f(\omega)$ o v.a. cu dens. de prob. $p(x)$.

$$P(\alpha \le f(\omega) \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)\,dx .$$

- $f(\omega)$ v.a. normal distr. cu m și σ.

$$P(\alpha \le f(\omega) \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right).$$

- $f_1, f_2, \dots, f_n$ v.a. $\Big\langle$ indep.; din aceeași lege.

$$P(\alpha \le f_1 + \dots + f_n \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Miracolul Gauss-Laplace

Cu timpul, totul devine normal!

Scanned with CamScanner

Problemă

Se aruncă două zaruri.

A ev. ca suma zarurilor să fie 7.

a) $P(A) = p$

b) f v.a. care monit. ev. A, $m, \sigma = ?$

c) $\underline{n = ?}$ a.î. $P(|\nu_n - p| \le 0{,}01) \geq 0{,}8$.

a) $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(1,6) (6,1)
(2,5) (5,2)
(3,4) (4,3)

b) $f(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{nu apare ev.} \\ 1 & \text{apare ev.} \end{cases}$

$X_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$m = \frac{1}{6} = 0{,}17$

$\sigma_f^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$

$= \frac{5}{36} = 0{,}14$

$\sigma = \sqrt{0{,}14} = 0{,}37$

$P(|\nu_n - p| \le 0{,}01) \geq 0{,}8 \iff$

$P\left(\left|\frac{f_1 + \dots + f_n}{n} - p\right| \le 0{,}01\right) \geq 0{,}8$

$P\left(|f_1 + f_2 + \dots + f_n - np| \le 0{,}01 \cdot n\right) \geq 0{,}8$

$P\left(\underbrace{np - 0{,}01n}_{\alpha} \le f_1 + \dots + f_n \le \underbrace{np + 0{,}01n}_{\beta}\right) \geq 0{,}8$

$\underline{\text{„n mare”}}$

$\Phi\left(\frac{\cancel{np} + 0{,}01n - \cancel{np}}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\cancel{np} - 0{,}01n - \cancel{np}}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}8$

$$\phi\left(\frac{0{,}01\,n}{0{,}37\sqrt{n}}\right)-\phi\left(-\frac{0{,}01\,n}{0{,}37\,n}\right)\geq 0{,}8 \iff$$

$$\phi(x)+\phi(-x)=1$$

$$\phi(-x)=1-\phi(x)$$

$$2\phi\left(\frac{0{,}01\,n}{0{,}37\sqrt{n}}\right)-1\geq 0{,}8 \iff$$

$$2\phi\left(0{,}027\cdot\sqrt{n}\right)\geq 1{,}8$$

$$\underline{\phi\left(0{,}027\cdot\sqrt{n}\right)\geq 0{,}9}=\phi(1{,}29) \iff$$

$$0{,}027\cdot\sqrt{n}\geq 1{,}29$$

$$\underline{\sqrt{n}}\geq\frac{1{,}29}{0{,}027}=\underline{48}$$

$$\boxed{n\geq 2304}$$

$\nu_n \tilde{=}\, p$ cu en de $\underline{\underline{0{,}01}}$

adv cu pro de 0,8

Între n și $2n$ se află totdeauna un număr prim

Numerele prime și probabilitate

Seminar

1) f, g v.a. independente.

$$X_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} ; \quad X_g = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

a) $F_f, m_f, D^2_f, \sigma_f$. $F_g, m_g, D^2_g, \sigma_f$.

b) Determinați X_{f+g}. Verificați că:

$$m_{f+g} = m_f + m_g.$$

$$D^2_{f+g} = D^2_f + D^2_g.$$

2) 3a, 4b, 2c

Se face exp. B fără revenire de 3 ori.

a) Să se determine v.a. care monitorizează numărul de bile b extrase, f.

b) Să se determine $F_f, m_f, D^2_f, \sigma_f$. ~~pt.~~ v.a.

3) Se face exp. B cu revenire de 3 ori.

a) La fel.

b)

4) Poisson (2a, 3b, 2c) (a, 2b, 3c) (3a, 3b)

Se alege o bilă din fiecare urnă.

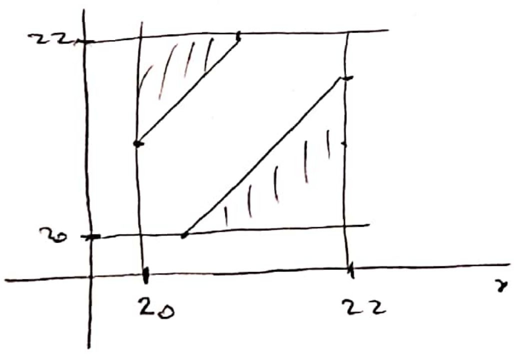
f v.a. care monitorizează numărul de bile b extrase.

Să se det $F_f, m_f, D^2_f, \sigma_f$.

5) Problema întâlnirii S12.(21

Într-o încăpere sunt două calorifere.
Primul calorifer se declanșează aleator la o oră între ora 20 și 22 și funcționează o oră în acest interval.
Al doilea calorifer se declanșează tot întâmplător la o oră între 20 și 22 și funcționează o jumătate de oră în acest interval.

Se alege întâmplător un moment între ora 20 și ora 22.
Care este probabilitatea ca în acel moment să nu funcționeze nici un calorifer?



$$P = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\frac{9}{4}}{2}}{4} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{9}{8}}{4} = \frac{13}{32}$$

$[x, x+1]$; $[y, y+0{,}5]$

$x+1 \le y \qquad y = x+1$

$y+0{,}5 \le x \qquad y = x-0{,}5$

f_1, f_2, f_3, f_4 — sind gleich verteilt wie f

— independent

$$X_{f_1+f_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{10}{36} & \frac{11}{36} & \frac{15}{36} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{10}{36} & \frac{11}{36} & \frac{15}{36} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{10^2}{36^2} & \frac{110}{36^2} & \frac{150}{36^2} & \frac{110}{36^2} & \frac{121}{36^2} & \frac{165}{36^2} & \frac{150}{36^2} & \frac{165}{36^2} & \frac{225}{36^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{100}{36^2} & \frac{220}{36^2} & \frac{421}{36^2} & \frac{330}{36^2} & \frac{225}{36^2} \end{pmatrix}$$

$$X_{f_1+f_2+f_3+f_4} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ & & & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 2 \\ \frac{10.000}{36^4} & & & \frac{225^2}{36^4} \end{pmatrix} \quad 4$$

$220 \cdot 330 + 421 \cdot 421 + 220 \cdot 330$

$$X_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{10}{84} & \frac{40}{84} & \cdot & \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{C_3^3 + C_3^2 \cdot C_2^1 + C_3^1 \cdot C_2^2}{C_9^3} = \frac{1+6+3}{C_9^3} = \frac{10}{C_9^3} = \frac{10}{84}$$

$$C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$P = \frac{C_3^2 \cdot C_4^1 + C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 + C_4^1 \cdot C_2^2}{C_9^3} = \frac{12+24+4}{84} =$$

$$B(x,y,z) = \left(\frac{3}{9}x + \frac{4}{9}y + \frac{2}{9}z\right)^3 = \frac{1}{9^3}(3x+4y+2z)^3$$

$$X_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ & & & \frac{2^3}{9^3} \end{pmatrix}$$

Sume. coef monoel de tip $x^0y^0z^3$

Sum coef. mo de ti) $x^1y^2z^3$

Sum coef mo de ti $x^1y^3z^3$

P

Ex

$\boxed{\begin{array}{l}\text{10 Iunie} \\ \text{ora } 9^{\underline{00}} - 11^{\underline{00}}\end{array}}$

$$D_f^2 = (\alpha_1^2 p_2 + \dots) - m_f^2$$

$$X_{f+g} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A_1\cap B_1 & A_1\cap B_2 & A_2\cap B_1 & A_2\cap B_2 & A_3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,12 & 0,08 & 0,18 & 0,12 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,3 & 0,12 & 0,38 & 0,08 & 0,12 \end{pmatrix}$$

$$X_{f \cdot g} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A_1\cap B_1 & & & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,12 & 0,08 & 0,18 & 0,12 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,38 & 0,2 & 0,42 \end{pmatrix}}}$$

$$F_{f \cdot g}(x) = P(f \cdot g \le x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0,38 & -1 \le x < 0 \\ 0,58 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x \end{cases}$$

Exit Poll

21:00 — Candidatul B

a obținut 34% voturi.

± 3%

31 – 37

Această afirmație este validă cu o probabilitate

de cel puțin 90%, 0,9

---

7 ± 0,5

6,5 → 7,5

20%

Câte întrebări trebuie puse unui student

a.î. $\bar{x}_n = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{n} = ?$ $\quad x_n \approx m$ cu

eroare de cel mult 0,5

cu o prob. de 98%

§ 12.3

Se aruncă două zaruri.

Dacă suma zarurilor ≤ 5 se pierde un leu.

Dacă suma zarurilor 6, 7 nu se pierde, nu se câștigă.

Dacă suma zarurilor ≥ 8 se câștigă un leu.

a) Să se det. v.a. care monitorizează ~~...~~ câștigul acest joc.

b) Să se det. v.a. care numără câștigul după 4 jocuri.

c) Câte jocuri trebuie jucate a.î. câștigul să fie mai mare ca 100 lei cu o prob. de 0,8.

$f(\omega)$ v.a. care numără câștigul a acest joc:

$$X_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{10}{36} & \frac{11}{36} & \frac{15}{36} \end{pmatrix}$$

[illegible] (1,1)
(2,1) (1,2)
(2,2)
(3,1) (1,3)
(1,4), (4,1), (3,2), (2,3)

(1,5) (5,1) (1,6) (6,1)
(2,4), (4,2) (2,5) (5,2)
(3,3) (4,3) (3,4)

(2,6) (6,2)
(3,5) (5,3)
(4,4) 8

(3,6) (6,3)
(4,5) (5,4) 9

(4,6) (6,4)
(5,5) 10

$\frac{5}{36}$

(6,5) (5,6)

(6,6)

f v.a. care modelează câștigul la acest joc:

$$X_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{10}{36} & \frac{11}{36} & \frac{15}{36} \end{pmatrix}$$

$$F_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_f(x) = P(f \le x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{10}{36} & -1 \le x < 0 \\ \frac{21}{36} & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x \end{cases}$$

f_1, f_2, f_3, f_4 — independ. / din lume

$f_1 + f_2 + f_3 + f_4$

$$X_{f_1+f_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{10}{36} & \frac{11}{36} & \frac{15}{36} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{10}{36} & \frac{11}{36} & \frac{15}{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{100}{36^2} & \frac{220}{36^2} & \frac{421}{36^2} & \frac{330}{36^2} & \frac{225}{36^2} \end{pmatrix}$$

$$X_{f_1+f_2+f_3+f_4} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ & & & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ & & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & & & & & & & & \downarrow \end{pmatrix}$$

$0{,}005$

$\frac{225^2}{36^4} = 0{,}03$

$$P = \left(\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z\right) \cdot \left(\frac{1}{6}x + \frac{2}{6}y + \frac{3}{6}z\right) \cdot \left(\frac{3}{6}x + \frac{3}{6}y\right)$$

$$= \frac{1}{7 \cdot 36}(2x + 3y + 2z) \cdot (x + 2y + 3z) \cdot (3x + 3y) =$$

$$= \frac{1}{84}(2x + 3y + 2z) \cdot (x + 2y + 3z) \cdot (x + y)$$

$$X_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{16}{84} & \frac{40}{84} & \frac{28}{84} & \frac{6}{84} \end{pmatrix} \ldots$$

Suma coef monoamelor cu grad ... y^3

— — $x^1 \cdot y^2 \cdot z^2$

$6 \cdot 1 + 4 + 4$

— $x^1 y z^2$