Punctaj: 2 puncte din seminar $\begin{cases} - 1 \times \text{temă} = 1 \text{ pct. (din care 0.2p. - oficiu)} \\ - 7 \text{ prezențe} \times 0.1 = 0.7 \text{ pct.} \\ - 0.3 \text{ activitate (răspuns oral/rezolvat probleme în timpul seminarului)} \end{cases}$

0.5 pct. bonus (o problemă bonus)

Erori. Metode de aproximare

- Erori de rotunjire

Un nr. $x \in \mathbb{R}$ se poate reprezenta: $x = \pm 0, d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots \times 10^n$

$d_1, d_2, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$

$d_1, d_2, d_3, \dots \to$ cifre semnificative

Un nr. mașină este un nr. în baza 10 cu virgulă mobilă normalizată și un nr. finit de cifre semnificative: $x^* = \pm 0, d_1 d_2 \dots d_k \times 10^n$

Un nr. $x \in \mathbb{R}$ va fi aproximat cu un nr. mașină cu k cifre semnificative, astfel:

$$\underset{\pm 0, d_1 d_2 d_3 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^n}{x} \simeq x^* = \begin{cases} \pm 0, d_1 d_2 \dots d_k \times 10^n, & \text{dacă } d_{k+1} < 5 \\ \pm 0, d_1 d_2 \dots (d_k + 1) \times 10^n, & \text{dacă } d_{k+1} \geq 5 \end{cases}$$

Exemplu: Aproximați $x = \sqrt{2} = 1,4142135\dots$ cu un nr. mașină cu 4 cifre semnificative

$$x = \sqrt{2} = 0,1414\underset{<5}{2}135\dots \times 10^1 \simeq \underbrace{0,1414 \times 10^1}_{= x^*}$$

Aproximați $y = -\ln 6 = -1,7917594\dots$ cu un nr. mașină cu 6 cifre semnificative

$$y = -\ln 6 = -0,179175\underset{\geq 5}{9}46\dots \times 10^1 \simeq \underbrace{-0,179176 \times 10^1}_{= y^*}$$

Aproximați $z = \sqrt{0,002}$ cu un nr. mașină cu 5 cifre semnificative

$$z = \sqrt{0,002} = 0,04472135\dots = 0,44721\underset{<5}{3}5\dots \times 10^{-1} \simeq \underbrace{0,44721 \times 10^{-1}}_{z^*}$$

Fie x^* - o aproximare a lui x

Definim $e_a = |x - x^*|$ - eroarea absolută a aproximării

$e_r = \frac{|x-x^*|}{|x|}$ - eroarea relativă a aproximării, $e_r = \frac{e_a}{|x|}$

Definim funcția $rd : \mathbb{R} \longrightarrow$ mulțimea nr. mașină cu k cifre semnificative

i.e. $\underset{\in \mathbb{R}}{x} \xmapsto{rd} x^*$ ↳ nr. mașină

<u>Exemplu</u>. Fie $x = \frac{5}{7}$, $y = \frac{1}{3}$. Să se calculeze e_a, e_r a sumei celor 2 numere, dacă se consideră reprezentarea în virgula mobilă cu 5 cifre semnificative.

$$x + y = \frac{5}{7} + \frac{1}{3} = \frac{22}{21} = 1{,}0476190476\ldots$$

$$x^* = rd\left(\frac{5}{7}\right) = rd(0{,}71428\underset{\geq 5}{5}71\ldots) = 0{,}71429$$

$$y^* = rd\left(\frac{1}{3}\right) = rd(0{,}33333\underset{<5}{3}3\ldots) = 0{,}33333$$

$$rd(x^* + y^*) = rd(0{,}71429 + 0{,}33333) = rd(1{,}04762) =$$

$$= rd(0{,}10476\underset{<5}{2} \times 10^1) = 0{,}10476 \times 10^1.$$

$$e_a(x+y) = |(x+y) - rd(x^*+y^*)| = \left|\frac{22}{21} - 0{,}10476 \times 10^1\right| =$$

$$= |1{,}0476190476\ldots - 1{,}0476| = |0{,}0000190476\ldots| =$$

$$= 0{,}190476\ldots \times 10^{-4} \simeq \underbrace{1{,}9\ldots}_{\leq 5} \times 10^{-5} \leq 5 \times 10^{-5} \Rightarrow O(10^{-5})$$

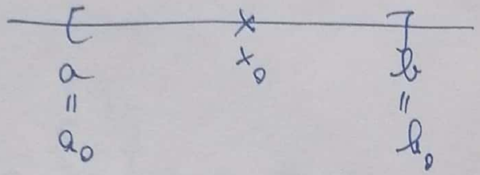
$$e_r(x+y) = \frac{e_a(x+y)}{|x+y|} = \frac{0{,}190476\ldots \times 10^{-4}}{1{,}047619047\ldots} = 0{,}181818\ldots \times 10^{-4} \simeq$$

$$\simeq \underbrace{1{,}8\ldots}_{\leq 5} \times 10^{-5} \Rightarrow O(10^{-5}).$$

Metode de aproximare a soluțiilor ecuațiilor neliniare

I. METODA BISECȚIEI

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continuă, a.î. $f(a)\cdot f(b)<0$. Atunci $\exists\, x^* \in (a,b)$ a.î. $f(x^*)=0$.
Metoda bisecției generează un șir $(x_k)_k$ convergent la soluția x^*.



$$x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Dacă $f(x_{k-1})=0 \Rightarrow \begin{cases} a_k = a_{k-1} \\ b_k = b_{k-1} \\ x_k = x_{k-1} \end{cases}$

Dacă $f(a_{k-1})\cdot f(x_{k-1})<0 \Rightarrow \begin{cases} a_k = a_{k-1} \\ b_k = x_{k-1} \\ x_k = \frac{a_k+b_k}{2} \end{cases}$

Dacă $f(a_{k-1})\cdot f(x_{k-1})>0 \Rightarrow \begin{cases} a_k = x_{k-1} \\ b_k = b_{k-1} \\ x_k = \frac{a_k+b_k}{2} \end{cases}$

Evaluarea erorii: $|x_k - x^*| \le \frac{b-a}{2^{k+1}}, \ \forall k \ge 0$.

1) Să se aproximeze $\sqrt{2}$ folosind metoda bisecției cu 5 pași pentru $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2$. Evaluați eroarea.

$a_0=1,\ b_0=2,\ x_0=\frac{a_0+b_0}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$; f - continuă pe $[1,2]$

$f(1)\cdot f(2)<0$

$f(1) = 1^2-2=-1$

$f(2)=2^2-2=2$

$f(x_0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} > 0$

$f(1) \cdot f(x_0) < 0$ adică $f(a_0) \cdot f(x_0) < 0 \Rightarrow a_1 = a_0 = 1$

$b_1 = x_0 = \frac{3}{2}$

$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$.

$f(x_1) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 2 = \frac{25}{16} - 2 = \frac{25-32}{16} = \frac{-7}{16} < 0$

$\Rightarrow f(a_1) \cdot f(x_1) = f(1) \cdot f\left(\frac{5}{4}\right) = (-1) \cdot \frac{-7}{16} = \frac{7}{16} > 0 \Rightarrow a_2 = x_1 = \frac{5}{4}$

$b_2 = b_1 = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} =$

$= \frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{8}$

$f(x_2) = f\left(\frac{11}{8}\right) = \left(\frac{11}{8}\right)^2 - 2 = \frac{121}{64} - 2 = \frac{121-128}{64} = \frac{-7}{64} < 0$

$f(a_2) \cdot f(x_2) = f\left(\frac{5}{4}\right) \cdot f\left(\frac{11}{8}\right) = \frac{-7}{16} \cdot \frac{-7}{64} > 0 \Rightarrow a_3 = x_2 = \frac{11}{8}$

$b_3 = b_2 = \frac{3}{2}$

$x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{\frac{11}{8} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{23}{16}$

$f(x_3) = f\left(\frac{23}{16}\right) = \left(\frac{23}{16}\right)^2 - 2 = \frac{529}{256} - 2 = \frac{529 - 512}{256} = \frac{17}{256} > 0$

$\Rightarrow f(a_3) \cdot f(x_3) = f\left(\frac{11}{8}\right) \cdot f\left(\frac{23}{16}\right) = \frac{-7}{64} \cdot \frac{17}{256} < 0 \Rightarrow a_4 = a_3 = \frac{11}{8}$

$b_4 = x_3 = \frac{23}{16}$

$x_4 = \frac{\frac{11}{8} + \frac{23}{16}}{2} = \frac{45}{32}$

$\Rightarrow \sqrt{2} \simeq \frac{45}{32}$

Eroarea este: $|x_4 - \sqrt{2}| \leq \frac{b-a}{2^5} = \frac{1}{32}$.

Scanned with CamScanner

II METODA NEWTON-RAPHSON

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\in C^2([a,b])$, f', f'' nu se anulează pe $[a,b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$ și $\exists\ x_0\in[a,b]$ cu $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$.

Atunci $\exists!\ x^*$ soluție a ecuației $f(x)=0$ și $(x_k)_k$ converge la x^*, unde:

$$x_k := x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})},\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

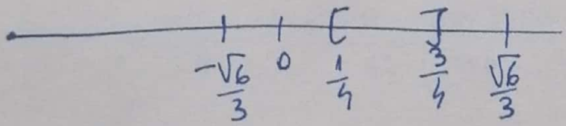
1) Aplicați metoda Newton-Raphson pe intervalul $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ pentru rezolvarea ecuației $2x^3-4x+1=0$. Luând $x_0=\frac{1}{4}$, determinați primele 2 iterații din metodă.

Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-4x+1$

evident, $f\in C^2([0,1])$, deci $f\in C^2([\frac{1}{4},\frac{3}{4}])$

$f'(x)=6x^2-4=0 \Rightarrow x^2=\frac{4}{6} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4}{6}}=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}=\pm\frac{2\sqrt{6}}{6}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

$f''(x)=12x=0 \Rightarrow x=0$



$-\frac{\sqrt{6}}{3}<\frac{1}{4}$ (A)

$\frac{3}{4}<\frac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{9}{16}}<\sqrt{\frac{6}{9}} \Leftrightarrow \sqrt{81}<\sqrt{96}$ (A)

$\Rightarrow f'$ și f'' nu se anulează pe $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$

$f(\frac{1}{4})\cdot f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{32}\cdot\frac{-37}{32}=\frac{-37}{1024}<0$, f continuă $\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{l} f(\frac{1}{4}) = 2\cdot(\frac{1}{4})^3-4\cdot\frac{1}{4}+1 = 2\cdot\frac{1}{64}-\cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}+1 = \frac{2}{64}\cancel{-1}\cancel{+1}=\frac{1}{32} \\ f(\frac{3}{4}) = 2\cdot(\frac{3}{4})^3-4\cdot\frac{3}{4}+1 = 2\cdot\frac{27}{64}-3+1=\frac{54}{64}-3+1=\frac{27}{32}-2=\frac{27-64}{32}=\frac{-37}{32} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \exists$ soluție în intervalul $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$

[illegible]

$x_0 = \frac{1}{4}$.

$f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{32} \cdot \left(12 \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{32} \cdot 3 = \frac{3}{32} > 0 \Rightarrow$ metoda Newton-Raphson poate fi aplicată.

$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{1}{4} - \frac{f\left(\frac{1}{4}\right)}{f'\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{32}}{\frac{-29}{8}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\cancel{32}_{4}} \cdot \frac{\cancel{8}}{29} = {}^{29/}\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 29} =$

$f'\left(\frac{1}{4}\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4 = 6 \cdot \frac{1}{16} - 4 = \frac{3}{8} - 4 = \frac{-29}{8}$

$= \frac{30}{4 \cdot 29} = \frac{15}{2 \cdot 29} = \frac{15}{58}$

$x_2 := x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$f(x_1) = f\left(\frac{15}{58}\right) = \left(\frac{15}{58}\right)^3 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{15}{58} + 1 = \frac{3375 \cdot 2 - 60 \cdot 58^2 + 58^3}{58^3}$

$f'\left(\frac{15}{58}\right) = 6 \cdot \left(\frac{15}{58}\right)^2 - 4 = \frac{6 \cdot 225 - 4 \cdot 58^2}{58^2}$

$x_2 = \frac{15}{58} - \frac{3375 \cdot 2 - 60 \cdot 58^2 + 58^3}{\cancel{58^3}\,58} \cdot \frac{\cancel{58^2}}{6 \cdot 225 - 4 \cdot 58^2} =$

$= \frac{15}{58} - \frac{6750 - 201840 + 195112}{58 \cdot (1350 - 13456)} = {}^{12106/}\frac{15}{58} + \frac{22}{702148} = \frac{181590 + 22}{702148} =$

$= \frac{181612}{702148}{}^{\,4} = \frac{45403}{175537}$.

Scanned with CamScanner

III METODA SECANTEI

Fie $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ cu $f(a)\cdot f(b) < 0$, $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Atunci $\exists!\ x^*$ a.î. $f(x^*) = 0$.

La pasul k, aproximarea soluției x^* se va face prin termenul x_k al șirului $(x_k)_k$ obținut prin intersecția secantei AB cu axa Ox,

$$A(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$$
$$B(x_{k-2}, f(x_{k-2}))$$

$$x_k := \frac{x_{k-2}\cdot f(x_{k-1}) - x_{k-1}\cdot f(x_{k-2})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}, \quad \forall k \geq 2 \text{ și } x_0, x_1 \in [a,b].$$

3) Aplicați metoda secantei pe intervalul $[0, \frac{1}{2}]$ pentru rezolvarea ecuației $4x^3 - 6x + 1 = 0$, cu $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{1}{4}$. Determinați primele 2 iterații din metodă.

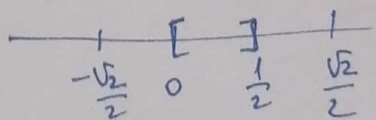
Fie $f : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 - 6x + 1 \in \mathcal{C}^1([0, \frac{1}{2}])$

$f(0) = 1$

$f(\frac{1}{2}) = 4\cdot(\frac{1}{2})^3 - 6\cdot\frac{1}{2} + 1 = 4\cdot\frac{1}{8} - 3 + 1 = \frac{1}{2} - 2 = \frac{-3}{2}$ $\Rightarrow f(0)\cdot f(\frac{1}{2}) < 0$

$f'(x) = 12x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \notin [0, \frac{1}{2}]$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ și $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓



$\Rightarrow \exists!$ sol. x^* pe $[0, \frac{1}{2}]$.

$$x_2 = \frac{x_0\cdot f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot f(\frac{1}{4}) - \frac{1}{4}\cdot f(\frac{1}{2})}{f(\frac{1}{4}) - f(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-7}{16} - \frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{2}}{\frac{-7}{16} - \frac{-3}{2}} =$$

$$f(\tfrac{1}{4}) = 4\cdot(\tfrac{1}{4})^3 - 6\cdot\tfrac{1}{4} + 1 = \frac{1}{4^2} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{16} - \frac{1}{2} = \frac{-7}{16}$$

$$= \frac{\frac{-7}{32} + \frac{3}{8}}{\frac{-7}{16} + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{-7}{32} + \frac{12}{32}}{\frac{-7}{16} + \frac{24}{16}} = \frac{\frac{5}{32}}{\frac{17}{16}} = \frac{5}{\cancel{32}_{2}}\cdot\frac{\cancel{16}}{17} = \frac{5}{34}.$$

$$x_3 = \frac{x_1\cdot f(x_2) - x_2\cdot f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot f(\frac{5}{34}) - \frac{5}{34}\cdot f(\frac{1}{4})}{f(\frac{5}{34}) - f(\frac{1}{4})}$$

$$f\left(\frac{5}{34}\right) = 4\cdot\left(\frac{5}{34}\right)^3 - 6\cdot\frac{5}{34} + 1 = \frac{4\cdot 125 - 30\cdot 34^2 + 34^3}{34^3} = \frac{500 - 34680 + 39304}{39304} =$$

$$= \frac{5124}{39304} = \frac{1281}{9826}$$

$$x_3 = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1281}{9826} - \frac{5}{34}\cdot\frac{-7}{16}}{\frac{1281}{9826} - \frac{-7}{16}} = \frac{\frac{1281}{4\cdot 34\cdot 17^2} + \frac{35}{34\cdot 4^2}}{\frac{1281}{34\cdot 17^2} + \frac{7}{4^2}} = \frac{\frac{5124 + 10115}{4^2\cdot 34\cdot 17^2}}{\frac{10248 + 34391}{34\cdot 17^2\cdot 8}} =$$

$$= \frac{15239}{\cancel{4^2}\cdot\cancel{34\cdot 17}}\cdot\frac{\cancel{34\cdot 17^2\cdot 8}}{44639} = \frac{15239}{2\cdot 44639} = \frac{15239}{89278}.$$

IV METODA FALSEI POZIȚII

Fie $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ cu $f(a)\cdot f(b)<0$, f', f'' nu se anulează pe $[a,b]$. Atunci $\exists!\ x^*$ soluție a ecuației $f(x)=0$ și șirul $(x_k)_k$ construit după cum urmează, este convergent la x^*:

$$a_0=a,\ b_0=b,\quad x_0=\frac{a_0\cdot f(b_0)-b_0\cdot f(a_0)}{f(b_0)-f(a_0)}$$

dacă $f(x_{k-1})=0 \Rightarrow \begin{cases} a_k=a_{k-1}\\ b_k=b_{k-1}\\ x_k=x_{k-1}\end{cases}$

dacă $f(a_{k-1})\cdot f(x_{k-1})<0 \Rightarrow \begin{cases} a_k=a_{k-1}\\ b_k=x_{k-1}\\ x_k=\dfrac{a_k\cdot f(b_k)-b_k\cdot f(a_k)}{f(b_k)-f(a_k)}\end{cases}$

dacă $f(a_{k-1})\cdot f(x_{k-1})>0 \Rightarrow \begin{cases} a_k=x_{k-1}\\ b_k=b_{k-1}\\ x_k=\dfrac{a_k\cdot f(b_k)-b_k\cdot f(a_k)}{f(b_k)-f(a_k)}\end{cases}$

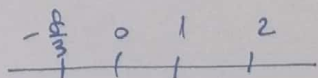
4) Aplicați metoda falsei poziții ecuației $x^3+4x^2-10=0$ pentru soluția din intervalul $[1,2]$.

Fie $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+4x^2-10 \in \mathcal{C}^2([1,2])$

$f(1)=1+4-10=-5<0$

$f(2)=2^3+4\cdot 2^2-10=8+16-10=14>0$ $\Rightarrow f(1)\cdot f(2)<0$.

$f'(x)=3x^2+8x=x(3x+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0\\ x_2=-\frac{8}{3}\end{cases}$



$x_1, x_2 \notin [1,2]$

$f''(x)=6x+8=0 \Rightarrow x=\frac{-8}{6}=\frac{-4}{3}<0 \Rightarrow -\frac{4}{3}\notin[1,2]$

deci f', f'' nu se anulează pe $[1,2]$.

$\Rightarrow \exists!$ soluția $x^*\in(1,2)$ a.î. $f(x^*)=0$.

$a_0 = a = 1$

$b_0 = b = 2$

$f(a) = -5 < 0$

$f(b) = 14.$

$$x_0 = \frac{a_0 \cdot f(b_0) - b_0 \cdot f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{1 \cdot 14 - 2 \cdot (-5)}{14 - (-5)} = \frac{24}{19}$$

$$f(x_0) = f\left(\frac{24}{19}\right) = \left(\frac{24}{19}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{24}{19}\right)^2 - 10 = \frac{13824 + 4 \cdot 576 \cdot 19 - 10 \cdot 19^3}{19^3} =$$

$$= \frac{13824 + 43776 - 68590}{6859} = \frac{-10990}{6859} = -1.60 < 0$$

$f(a_0) = f(1) = -5 < 0 \Rightarrow a_1 = x_0 = \frac{24}{19}$

$b_1 = b_0 = 2$

$$x_1 = \frac{a_1 \cdot f(b_1) - b_1 \cdot f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = \dots$$