Seminar 11 – Functii de repartitie. Densitati de repartitie

Definiţia 2.3. Dacă X este o v. a. reală , atunci funcţia $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită de $F_X(x) = P(X < x), x \in \mathbb{R}$ se numeşte **funcţia de repartiţie** a lui X.

Proprietăţi ale funcţiei de repartiţie

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
2. F_X este crescătoare şi continuă la dreapta în orice punct $x \in \mathbb{R}$
3. $P(X = x) = F(x) - F(x - 0)$
4. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

Definiţia 2.4. Variabila aleatoare X se numeşte **discretă** dacă mulţimea valorilor ei este o mulţime cel mult numărabilă de numere reale sau complexe (a_n).

Notând $P(X = a_n) = p_n$, avem $\sum p_n = 1$, funcţia de repartiţie F_X este o funcţie în scară cu $F_X(x) = \sum\limits_{a_n < x} p_n$, iar matricea $X \sim \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots a_n & \dots \\ p_0 & p_1 & \dots p_n & \dots \end{pmatrix}$ se numeşte **matricea de repartiţie** a lui X sau **distribuţia** lui X.

Dacă $P(X = x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci v. a. X se numeşte **continuă** . Aceasta este echivalent cu faptul că funcţia ei de repartiţie este o funcţie continuă (pe $\mathbb{R}$).

Definiţia 2.5. Fie X o v. a. discretă.

a) Dacă seria $\sum\limits_{n \geq 0} a_n p_n$ este absolut convergentă , se spune că X admite medie, iar suma $E(X) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n p_n$ se numeşte **media** lui X.

b) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, media $E(X^n)$ a variabilei X^n se numeşte **momentul de ordinul** n al lui X.

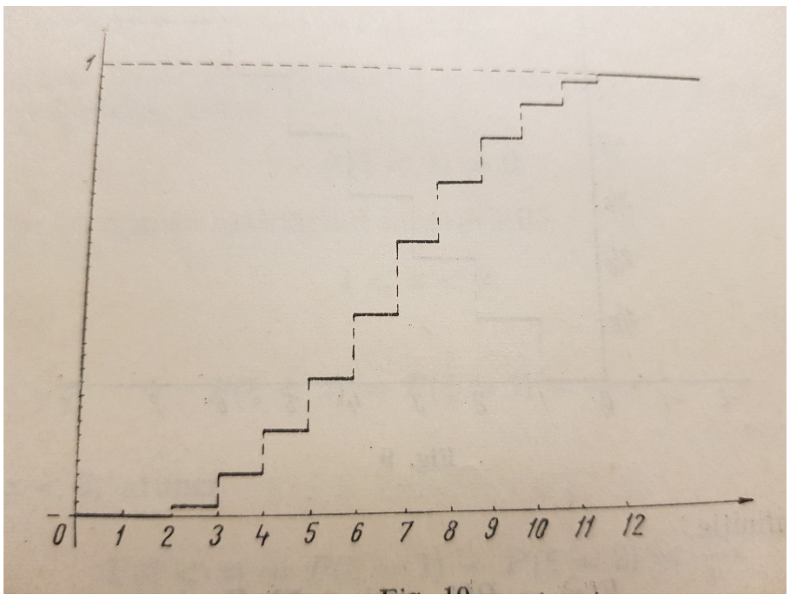
c) Media variabilei $(X - E(X))^2$ se numeşte **varianţa** (sau **dispersia**) lui X şi se notează $\operatorname{Var}(X)$ (sau $D^2(X)$).

Ex: Se arunca doua zaruri. Fie X v.a. reprezentand suma cifrelor inscrise pe fetele zarurilor. Sa se calculeze functia de repartitie $P(X < x)$ si sa se reprezinta grafic aceasta functie.

Repartitia v.a. X se calculeaza observand numarul de cazuri favorabile si numarul de cazuri posibile

$$X\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, daca\ x < 2 \\ \frac{1}{36}, daca\ 2 \le x < 3 \\ \frac{3}{36}, daca\ 3 \le x < 4 \\ \dots . \\ \frac{35}{36}, daca\ 11 \le x < 12 \\ 1, daca\ 12 \le x \end{cases}$$



Ex: Consideram ca durata in minute a unei convorbiri telefonice este data de urmatoarea functie de repartitie:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & , pentru\ x < 0 \\ 1 - \frac{e^{-\frac{x}{3}}}{2} - \frac{e^{\left[-\frac{x}{3}\right]}}{2} & , pentru\ x \ge 0 \end{cases}$$

unde $[y]$ este cel mai mare numar intreg, mai mic sau egal cu y. Sa se determine probabilitatea ca o convorbire:

a) sa dureze 6 sau mai mult de 6 minute;

b) sa fie mai mica decat 4 minute

c) sa fie egala cu 3 minute, precum si probabilitatea ca o discutie sa fie egala cu 5 minute

d) sa fie mai mica de 9 minute, in conditiile in care a fost mai mare decat 5 minute

e) sa fie mai mare de 5 minute, in conditiile in care a fost mai mica decat 9 minute

a) Fie X v.a. reprezentand durata unei convorbiri telefonice, exprimata in minute.

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - F(6) = 1 - \left(1 - \frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{2}\right) = e^{-2} = 0{,}135$$

b)

$$P(X < 4) = F(4) = 1 - \frac{e^{-\frac{4}{3}}}{2} - \frac{e^{\left[-\frac{4}{3}\right]}}{2} = 1 - \frac{e^{-\frac{4}{3}}}{2} - \frac{e^{-2}}{2} = 0{,}801$$

c)

$$P(X = 3) = F(3+0) - F(3-0) = \lim_{\substack{x\to 3\\ X>3}} F(x) - \lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} F(x) = 1 - \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e^{-2}}{2} - \left(1 - \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1}}{2}\right)$$
$$= \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e^{-2}}{2} = 0{,}116$$

$$P(X = 5) = F(5+0) - F(5-0) = \lim_{\substack{x\to 5\\ X>5}} F(x) - \lim_{\substack{x\to 5\\ x<5}} F(x) = 1 - \frac{e^{-\frac{5}{3}}}{2} - \frac{e^{-2}}{2} - \left(1 - \frac{e^{-\frac{5}{3}}}{2} - \frac{e^{-2}}{2}\right) = 0$$

d)

$$P(X < 9 | X > 5) = \frac{P(X < 9 \cap X > 5)}{P(X > 5)} = \frac{P(5 < X < 9)}{1 - P(X < 5) - P(X = 5)}$$
$$= \frac{P(X < 9) - P(X < 5) - P(X = 5)}{1 - P(X < 5) - P(X = 5)} = \frac{F(9) - F(5)}{1 - F(5)} = 0{,}693$$

$$P(X > 5 | X < 9) = \frac{P(X > 5 \cap X < 9)}{P(X < 9)} = \frac{P(5 < X < 9)}{P(X < 9)} = \frac{P(X < 9) - P(X < 5) - P(X = 5)}{P(X < 9)}$$
$$= \frac{F(9) - F(5)}{F(9)} = 0{,}118$$

Ex: Sa presupunem ca timpul de asteptare in statia de autobuz, exprimat in minute, are functia de repartitie data de

$$F(x) = \begin{cases} 0, pentru\ x \leq 0 \\ \frac{x}{2}, pentru\ 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, pentru\ 1 < x \leq 2 \\ \frac{x}{4}, pentru\ 2 < x \leq 4 \\ 1, pentru\ 4 < x \end{cases}$$

Se cere:

a) densitatea de repartiei corespunzatoare;

b) care este probabilitatea ca un calator sa astepte:

- mai mult de 3 minute

- mai putin decat 3 minute

- intre 1 minut si 3 minute

c) care este probabilitatea conditionata ca un calator sa astepte:

- mai mult de 3 minute, dat fiind ca a asteptat mai mult de un minut

- mai putin de 3 minute, dat fiind ca a asteptat mai mult de un minut

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0, pentru\ x \leq 0 \\ \frac{1}{2}, pentru\ 0 < x \leq 1 \\ 0, pentru\ 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{4}, pentru\ 2 < x \leq 4 \\ 0, pentru\ 4 < x \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, pentru\ 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{4}, pentru\ 2 < x \leq 4 \\ 0, in\ rest \end{cases}$$

b)

$$P(X > 3) = 1 - F(3) - P(X = 3) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(X < 3) = F(3) - P(X = 3) = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$$

$$P(1 < X < 3) = F(3) - F(1) - P(X = 1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{4}$$

c)

$$P(X > 3 | X > 1) = \frac{P(X > 3 \cap X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(X > 3)}{P(X > 1)} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - P(X < 1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(X < 3 | X > 1) = \frac{P(1 < X < 3)}{P(X > 1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Ex: Sa presupunem ca un fenomen aleator X urmeaza o lege normala de parametri $m = 2, \sigma = 2$. Sa se calculeze

a) $P(0 \leq X \leq 3)$

b) $P(|X| \leq 1)$

c) $P(-1 \leq X < 1 |\ 0 \leq X \leq 3)$

Observatii:

1. X este v.a. continua

2. Daca $X \sim N(m, \sigma)$ atunci

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

unde

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$$

Functia Φ este functia de repartitie a unei v.a. normale de medie 0 si dispersie 1.

3. Avem

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), x \in \mathbb{R}$$

a)

$$P(0 \leq X \leq 3) = \Phi\left(\frac{3-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2}{2}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(-1) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) + \Phi(1) - 1$$
$$= 0{,}6915 + 0{,}8413 - 1 = 0{,}533$$

b)

$$P(|X| \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1) = \Phi\left(\frac{1-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-2}{2}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{2}\right) = \Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= 0{,}9332 - 0{,}6915 = 0{,}242$$

c)

$$P(-1 \leq X < 1 \mid 0 \leq X \leq 3) = \frac{P(-1 \leq X < 1 \cap \ 0 \leq X \leq 3)}{P(0 \leq X \leq 3)} = \frac{P(0 \leq X < 1)}{P(0 \leq X \leq 3)}$$
$$= \frac{\Phi\left(\frac{1-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2}{2}\right)}{0{,}533} = \frac{\Phi(1) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)}{0{,}533} = \frac{0{,}8413 - 0{,}6915}{0{,}533} = 0{,}281$$

Ex: Se da functia

$$f(x) = \frac{k}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$$

Se cere sa determine

a) constanta k a.i. $f(x)$ sa fie o densitate de probabilitate

b) probabilitatea ca in doua observatii independente variabila X sa ia o valoare mai mica decat 1 si alta mai mare sau cel mult egala cu 1.

a) Pentru ca functia sa fie densitate de probabilitate trebuie sa avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$k\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = k\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = k\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} = k(\arctan t)|_0^{\infty} = k\frac{\pi}{2} = 1$$

Schimbare de variabila $e^x = t, e^x dx = dt$

$$k = \frac{2}{\pi}$$

b)

$$P(X_1 < 1, X_2 \geq 1) = P(X_1 < 1)P(X_2 \geq 1) = F(1)\big(1 - F(1)\big) = \frac{2}{\pi}\arctan e\left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan e\right)$$

$$F(1) = P(X < 1) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{e} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\pi}(\arctan t)\Big|_0^{e} = \frac{2}{\pi}\arctan e$$

Fiind dată densitatea de repartiţie a vectorului aleator (X, Y)

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

să se determine $E(X), E(Y), D^2(X), D^2(Y)$.

Vom determina densitatea de repartitie a lui X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = 2xe^{-x^2}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-y^2}\,dy = -xe^{-x^2}\left(e^{-y^2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = xe^{-x^2}, x > 0$$

$$f_Y(y) = ye^{-y^2}, y > 0$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} = E(Y)$$

Notam $x^2 = t, 2xdx = dt$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^3\, e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} te^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma(2) = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \Gamma(1) = \frac{1}{2} = E(Y^2)$$

$$D^2(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{16} = D^2(Y)$$