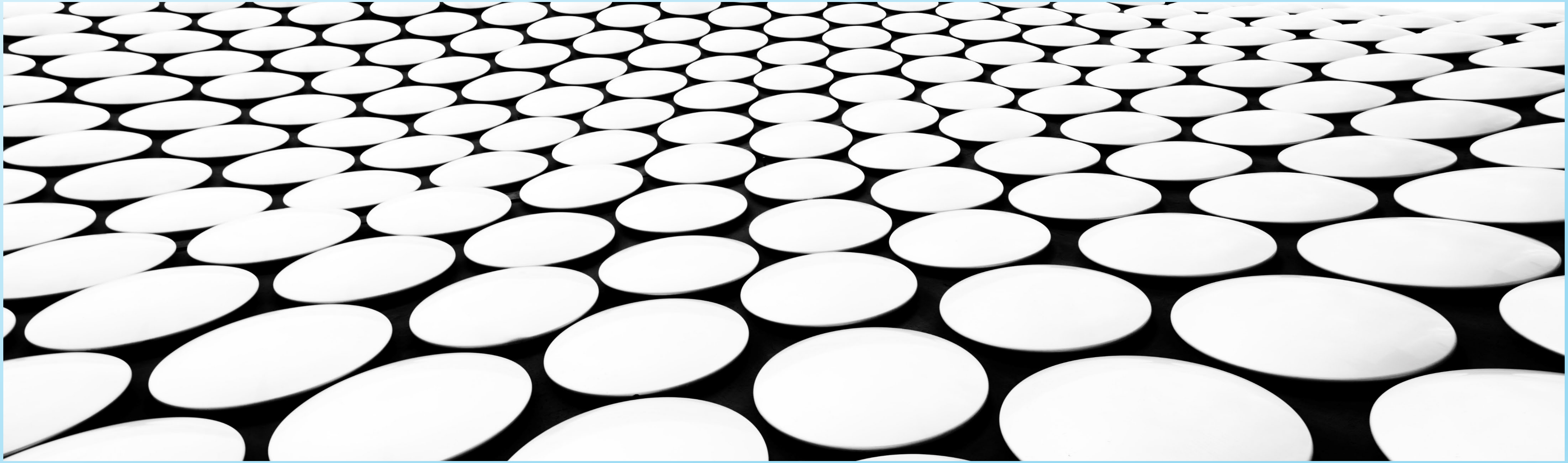
# ARHITECTURA SISTEMELOR DE CALCUL

UB, FMI, CTI, ANUL III, 2022-2023

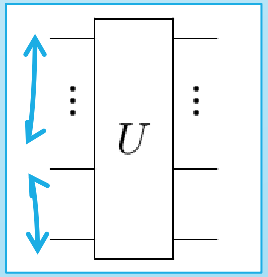


# PORTI CUANTICE

- Actioneaza in mod similar
  portile clasice manipuleaza cativa biti in acelasi timp,
  portile cuantice manipuleaza cativa qubiti in acelasi timp
  - Uzual sunt reprezentate prin **matrici unitare**
- Reprezentarea **circuitistica**

*casetele și simbolurile diferite descriu operații asupra qubiților*

*Firele descriu qubiți*




*... moștenirea calculului clasic – este mai bine să ne gândim la qubiți ca la particule și la porți ca la procese fizice aplicate acelor particule*

# Porti cuantice

$|\Psi(t)\rangle = U|\Psi(0)\rangle \qquad U\,U^* = 1$

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad X|0\rangle = |1\rangle$, $\quad X|1\rangle = |0\rangle$

$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad Z|0\rangle = |0\rangle$, $\quad Z|1\rangle = -|1\rangle$

Hadamard $= \mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$H|0\rangle = \quad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

$H|1\rangle = \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$

# POARTA PAULI-X

Actioneaza asupra unui singur qubit

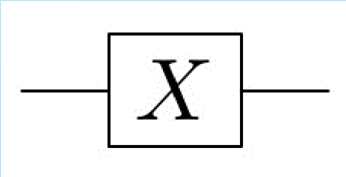
*Notation Dirac*

$$|0\rangle \rightarrow |1\rangle, \quad |1\rangle \rightarrow |0\rangle$$

*Reprezentarea Matriceala*

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*Reprezentarea Circuitistica*




Actionand asupra **starilor pure** devine o poarta ***NOT* clasica**

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle$$

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

*Notatia Dirac ...*

$$X|0\rangle = |1\rangle$$
$$X|1\rangle = |0\rangle$$

*...este evident mai convenabila pentru calcul*

Stare pura: stare care nu este formata prin superpozitie

# POARTA PAULI-X

- Actionand asupra unei stari generale a qubitului

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$X|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$$

- Este propriul său invers

$$XX = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

# POARTA HADAMARD

- Actioneaza asupra unui singur qubit

*Notatia Dirac*

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

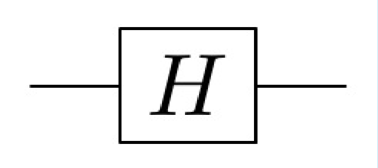
Stare mixta

Stare pura

*Matricea Unitara*

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

*Reprezentarea Circuitistica*




*... evident, **nici un echivalent clasic***

– Una dintre cele mai importante porți pentru calculul cuantic

# POARTA HADAMARD

## Un exemplu interesant

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|\alpha_0|^2 = \frac{1}{2} \quad |\alpha_1|^2 = \frac{1}{2}$$

*Acționând asupra stărilor pure…*

*…oferă o suprapunere echilibrată…*

*… ambele stări, dacă sunt măsurate, dau fie 0, fie 1 cu probabilitate egală*

# POARTA HADAMARD

Aplicând o altă poartă Hadamard

la primul rezultat

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$\boxed{H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = |0\rangle}$$

iar la al doilea rezultat

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$\boxed{H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = |1\rangle}$$

In acest caz se geneteaza stari pure

# POARTA HADAMARD

*Ambele stări dau probabilități egale atunci când sunt măsurate…*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

*…dar când se aplică transformarea Hadamard, aceasta produce două stări diferite*

Exemplul oferă un răspuns la întrebarea:
***de ce starea sistemului trebuie specificată cu amplitudini complexe și nu poate fi specificată doar cu probabilități***

# POARTA PAULI-Y

- Actioneaza asupra unui singur qubit

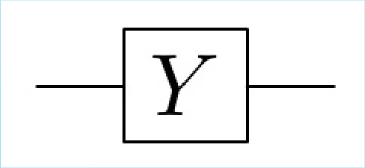
*Notatia Dirac*

$$|0\rangle \rightarrow i|1\rangle, \quad |1\rangle \rightarrow -i|0\rangle$$

*Reprezentarea Matriceala*

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

*Reprezentarea Circuitistica*




*...o altă poartă fără echivalent clasic*

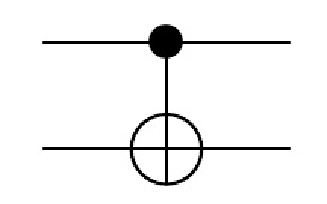
# POARTA CNOT

- *Poarta NU Controlata*
- Acționează asupra **doi qubiți**

*Reprezentarea Matriceala*

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*Reprezentarea Circuitistica*



  – Funcționarea clasică a porții

# POARTA CNOT

- Exemplu de acționare la o suprapunere de stari

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, \quad |01\rangle \rightarrow |01\rangle, \quad |10\rangle \rightarrow |11\rangle, \quad |11\rangle \rightarrow |10\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$CNOT|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$

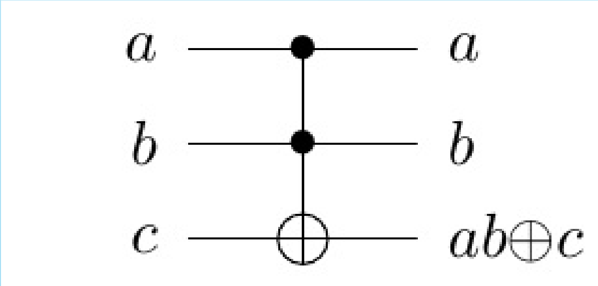
# POARTA TOFFOLI

- Numit și **NU controlat controlat**
- Acționează pe **trei qubiți**

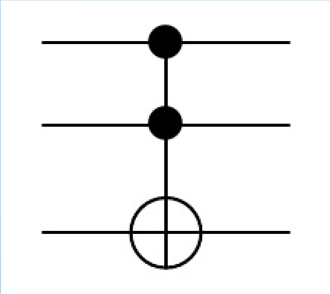
*Reprezentarea Matriceala*

$$TOFFOLI = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Funcționarea clasică a porții

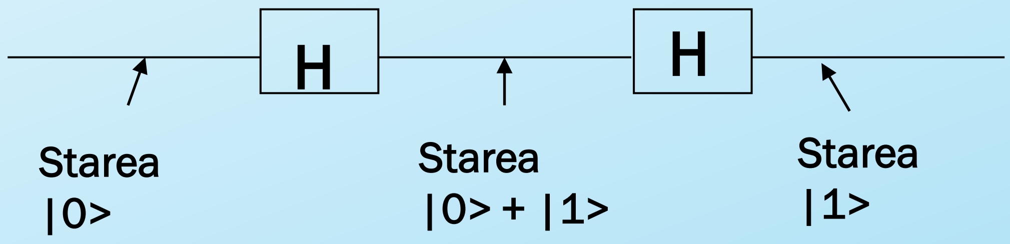



*Reprezentarea Circuitistica*



# POARTA HADAMARD

Folosit pentru a pune qubiți în superpozitie.

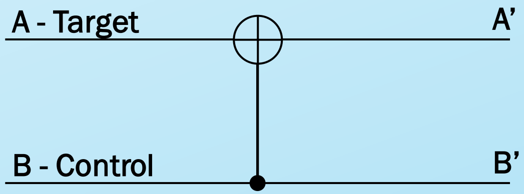



**Nota:** Două porți Hadamard utilizate succesiv pot fi folosite ca poartă NOT

cunoscută și ca rădăcină pătrată a porții NOT.

# NOT CONTROLAT CN

- Dacă bitul de pe linia de control este 1, inverseaza bitul de pe linia țintă.



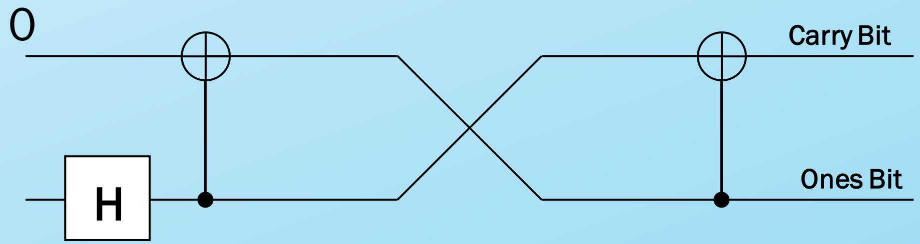

| Input | | Output | |
|---|---|---|---|
| A | B | A’ | B’ |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

**Note:** Poarta CN are un comportament similar cu poarta XOR cu unele informații suplimentare pentru a o face reversibilă.

# EXAMPLE OPERATION - MULTIPLICATION BY 2

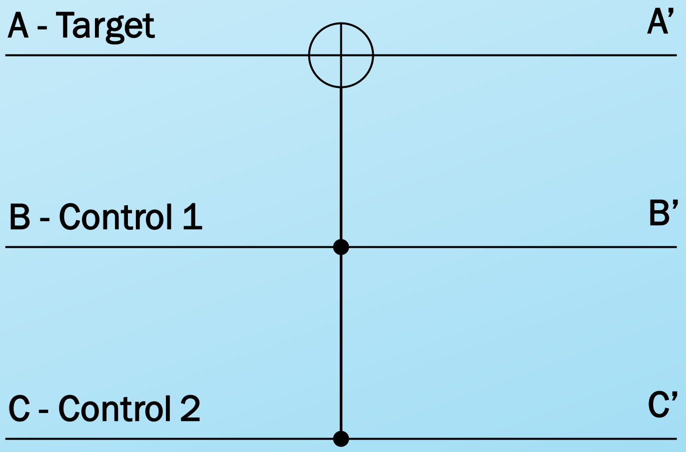
- Putem construi un circuit logic reversibil pentru a calcula înmulțirea cu 2 folosind porți CN aranjate în felul următor:

| Input | | Output | |
|---|---|---|---|
| Carry Bit | Ones Bit | Carry Bit | Ones Bit |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |



# CONTROLLED CONTROLLED NOT (CCN)

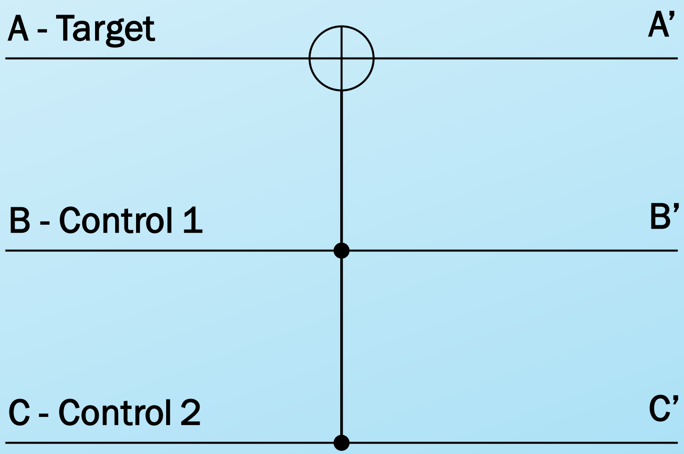
Dacă biții de pe ambele linii de control sunt 1, atunci bitul țintă este inversat.




| Input | | | Output | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | A’ | B’ | C’ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

# A UNIVERSAL QUANTUM COMPUTER

- Poarta CCN s-a dovedit a fi o poartă logică reversibilă universală, deoarece poate fi folosită ca poartă NAND.




| Input | | | Output | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | A' | B' | C' |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

**Când intrarea noastră țintă este 1, ieșirea noastră țintă este rezultatul unui NAND aupra B și C.**