

1) Considerăm un test de rutină pentru o boală. Presupunem că frecvența bolii în populație (rata de bază) este $\frac{i}{1000}$. Testul are o rată "fals pozitiv" de 3% și o rată "fals negativ" de 3%. Faceți testul și ieșe pozitiv. Care este probabilitatea să aveți boala?

$$i=100$$

D^+ = aveți boala

T^+ = testat poz.

D^- = nu aveți boala

T^- = testat neg.

$$P(D^+) = \frac{i}{1000} = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$P(D^-) = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$P(T^+ | D^-) = \text{fals poz} = 0.03$$

$$P(T^- | D^+) = 0.03 = \text{fals neg.}$$

$$P(T_+ | D_+) = 0.97$$

$$P(D_+ | T_+) = \frac{P(T_+ | D_+) \cdot P(D_+)}{P(T_+)} = \frac{0.97 \cdot 0.1}{P(T_+)} \\ ? ? .$$

$$2) \text{ Fie } X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{i}{1000} & \frac{i}{500} & \frac{1000-3i}{1000} \end{pmatrix}. \text{ Aflați } E(X^2).$$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

$$E(x^2) = ?$$

$$E(x^2) = 1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 9 \cdot \frac{7}{10} = \dots$$

$$3) \text{ Fie } X \sim U(0, i). \text{ Aflați domeniul de valori, cdf și pdf pentru } Y = \sqrt{X}.$$

\downarrow y. densitate de prob.
f. de repartizie

$$X \sim U(0, 100)$$

$$F_X(x) = \frac{x-0}{100-0} = \frac{x}{100}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) =$$

• 1. Patru trăgători trag asupra unei tinte. Prinul atinge tinta cu probabilitatea $\frac{2}{3}$, al doilea cu probabilitatea $\frac{3}{4}$, al treilea cu probabilitatea $\frac{4}{5}$, iar al patrulea cu probabilitatea $\frac{5}{6}$.

Care este probabilitatea ca tinta să fie atinsă exact de 3 ori?

$$P(a) = \frac{2}{3}$$

$$P(b) = \frac{3}{4}$$

$$P(c) = \frac{4}{5}$$

$$P(d) = \frac{5}{6}$$

$$P(a) \cdot P(b) \cdot P(c) \cdot P(d) + P(a) \cdot P(b) \cdot P(\bar{c}) \cdot P(d) + \dots \quad \checkmark$$

2. Avem trei loturi ale către 100 de piese. În primul lot trei piese sunt defecte, în al doilea lot patru piese sunt defecte, iar în al treilea lot cinci piese sunt defecte. Din fiecare lot se ia căte o piesă.

Care este probabilitatea obținerii a două piese bune și a uneia defectă?

$$L_1 = L_2 = L_3 = 100$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 5 \end{matrix}$$

$$P(D_1) = \frac{3}{100}$$

$$P(O_1) = \frac{97}{100}$$

$$P(D_2) = \frac{4}{100}$$

$$P(\bar{D}_2) = \frac{96}{100}$$

$$P(D_3) = \frac{5}{100}$$

$$P(\bar{D}_3) = \frac{95}{100}$$

$$P(D_1) \cdot P(\bar{D}_2) \cdot P(D_3) + \dots$$

3. Dintre un lot ce conține patru piese corespunzătoare și trei piese defecte se extrag simultan trei piese, în vederea controlului de calitate.

• N.B. X variabila atâtăcare care indică numărul de piese corespunzătoare obținute în cele 3 extrageri.

Să se determine:

a) repartitia v.a. X

b) probabilitatea ca cel puțin 2 din cele 3 piese extrase să fie corespunzătoare.

$$X: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4 obz
3 defecte

Se extrag 3 piese simultan

$$a) X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ C_4^0 \cdot C_3^3 & \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} & \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} & \frac{C_4^3 C_3^0}{C_7^3} \end{pmatrix}$$

$$c) P_2 + P_3$$

4. Dintr-o urnă ce conține 50 bile albe și 100 bile negre se extrag, cu revenire, trei bile.

Să se determine:

a) repartitia v.a. $X \sim \text{Bin}(n=3, p=0.2)$

$$b) P(X=2); P(X \geq \frac{1}{2}); P(X \leq 2 | X > 0.2)$$

$$c) \text{media v.a. } X = E(X)$$

$$d) \text{dispersia v.a. } X = D^2 = npq$$

$$e) \text{atâtarea medie probabilistică a v.a. } X$$

revenire \rightarrow succes (alb) \rightarrow eșec (negru)

50 alb, 100 negre
cu revenire 3 bile

a)

$$P(a) = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$$

Repartitie binomială (cu

$$\text{Formulă : } P_X(k) = C_3^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-k}$$

$$\text{Inloc. în } X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$a) P(X=2) \text{ dim } X \nearrow$$

$$P(X \geq \frac{1}{2}) = 1 - P(0)$$

$$P(X \leq 2) \text{ dim } X > 0.2 = \frac{P(0.2 < X \leq 2)}{P(X > 0.2)} =$$

$$c) E(X) = m \cdot p = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$d) D^2 = m \cdot p \cdot q = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$e) D = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

5. Fie variabila aleatoare discrete X : $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2p & 4p & p & 2p & p \end{pmatrix}$
P.E.R.

Să se determine:

a) repartitia variabili aleatoare X

b) media, dispersia și abaterea medie patratice a variabili aleatoare X .

c) $E(2X-3)$; $\text{Var}(3X-2)$

$$(2+4+1+2+1)p = 1$$

$$p = \frac{1}{10}$$

a) $X: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{10} & \frac{4}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

b) $E(X) = -2 \cdot \frac{2}{10} + \dots$ media

$$\text{disp.} = \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = (-2)^2 \cdot \frac{2}{10} + (-1)^2 \cdot \frac{4}{10} + \dots - (\dots)^2$$

abaterea $= \sqrt{\sigma^2}$

c) $E(2X-3) = 2E(X) - 3$

$$\text{Var}(3X-2) = E((3X-2)^2) - (E(3X-2))^2 = E(9X^2 - 12X + 4) -$$

$$- \dots - 9E(X^2) + 12E(X) + 4 - \dots$$

2) Dintr-o urnă cu i bile albe și $100-i$ bile negre se extrag 3 bile cu revenire.

Fie X , numărul de bile albe extrase. Aflați repartitia și media lui X și $P(X \leq 2)$.

i bile albe $100-i$ bile negre

3 bile

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{C_i^0 \cdot C_{100-i}^3}{C_{100}^3} & \dots \end{pmatrix} \rightarrow \text{calcul}$$

3) Fie $X \sim N(m, 1)$. Știind că $P(X < 3) = \frac{i}{100}$, aflați m .

$$P(X < 3) = \frac{i}{100} \quad m = ?$$

$$\frac{i}{100} = \Phi(3-m) - \Phi(0-m) ?$$

?

I)1) Dintr-o urnă cu 2 bile albe și i bile negre se extrag fără revenire 2 bile dintre care cel puțin una e albă. Care e probabilitatea ca și cealaltă bilă să fie albă?

$$\begin{array}{l} \text{2 a în} \\ \text{2 fără rev.} \\ P(a|a) \end{array}$$

