IV METODA FALSEI POZIȚII

Fie $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ cu $f(a)\cdot f(b)<0$, f', f'' nu se anulează pe $[a,b]$.

Atunci $\exists!\, x^*$ soluție a ecuației $f(x)=0$ și șirul $(x_k)_k$ construit după cum urmează, este convergent la x^*:

$$a_0=a,\quad b_0=b,\quad x_0=\frac{a_0\cdot f(b_0)-b_0\cdot f(a_0)}{f(b_0)-f(a_0)}$$

dacă $f(x_{k-1})=0 \Rightarrow \begin{cases} a_k=a_{k-1}\\ b_k=b_{k-1}\\ x_k=x_{k-1}\end{cases}$

dacă $f(a_{k-1})\cdot f(x_{k-1})<0 \Rightarrow \begin{cases} a_k=a_{k-1}\\ b_k=x_{k-1}\\ x_k=\dfrac{a_k\cdot f(b_k)-b_k\cdot f(a_k)}{f(b_k)-f(a_k)}\end{cases}$

dacă $f(a_{k-1})\cdot f(x_{k-1})>0 \Rightarrow \begin{cases} a_k=x_{k-1}\\ b_k=b_{k-1}\\ x_k=\dfrac{a_k\cdot f(b_k)-b_k\cdot f(a_k)}{f(b_k)-f(a_k)}\end{cases}$

4) Aplicați metoda falsei poziții ecuației $x^3+4x^2-10=0$ pentru soluția din intervalul $[1,2]$.

Fie $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+4x^2-10 \in \mathcal{C}^2([1,2])$

$f(1)=1^3+4\cdot 1^2-10=-5<0$

$f(2)=2^3+4\cdot 2^2-10=8+16-10=24-10=14>0 \quad \Rightarrow f(1)\cdot f(2)<0$

$f'(x)=3x^2+8x=x(3x+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0\\ x_2=-\dfrac{8}{3}\end{cases}$

$$-\tfrac{8}{3}\quad 0\quad 1\quad 2$$

$f''(x)=6x+8=0 \Rightarrow x=-\dfrac{8}{6}=-\dfrac{4}{3}<0 \Rightarrow -\dfrac{4}{3}\notin[1,2]$.

Deci f', f'' nu se anulează pe $[1,2]$.

$a_0 = a = 1$

$b_0 = b = 2$

$f(a) = -5 < 0$

$f(b) = 14$

$$x_0 = \frac{a_0 \cdot f(b_0) - b_0 \cdot f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{1 \cdot 14 - 2 \cdot (-5)}{14 - (-5)} = \frac{24}{19}$$

$$f(x_0) = f\left(\frac{24}{19}\right) = \left(\frac{24}{19}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{24}{19}\right)^2 - 10 = \frac{13824 + 4 \cdot 576 \cdot 19 - 10 \cdot 19^3}{19^3} =$$

$$= \frac{13824 + 43776 - 68590}{6859} = \frac{-11350}{6859} = -1.65 < 0.$$

$f(a_0) = f(1) = -5 < 0$

$$\Rightarrow f(x_0) \cdot f(a_0) > 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = x_0 = \frac{24}{19} \\ b_1 = b_0 = 2 \\ x_1 = \frac{a_1 \cdot f(b_1) - b_1 \cdot f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} \end{cases} =$$

$$= \frac{\frac{24}{19} \cdot 14 - 2 \cdot \frac{-11350}{6859}}{{}^{6859/}14 + \frac{11350}{6859}} = \frac{{}^{361/}\frac{336}{19} + \frac{22700}{6859}}{\frac{96026 + 11350}{6859}} = \frac{\frac{121296 + 22700}{6859}}{\frac{107376}{6859}} =$$

$$= \frac{143996}{107376}$$

Metode numerice de rezolvare a sistemelor liniare

1) Rezolvați sistemul prin metoda Gauss fără pivotare:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\underset{\text{matricea extinsă}}{\bar{A}} = [A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xleftrightarrow[\text{(vrem } a_{11} \neq 0)]{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xleftrightarrow[\text{(vrem zerouri sub } a_{11})]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{array}\right) \xleftrightarrow[\substack{(a_{22} \neq 0 \checkmark \\ \text{vrem zerouri sub } a_{22})}]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right)$$

Prin operații între linii, am ajuns la o matrice superior triunghiulară, i.e., elementele de sub diagonala principală sunt zerouri.

Încep cu ultima linie: $-6x_3 = -6 \Rightarrow x_3 = 1$

linia 2: $x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 - x_3 = 2 - 1 = 1$

linia 1: $x_1 + 2x_3 = 3 \Rightarrow x_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1.$

2) Rezolvați sistemul prin metoda Gauss cu pivotare parțială:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

$$\bar{A} = [A \mid b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

Aleg ca pivot elementul de pe coloana k cu valoarea absolută cea mai mare de pe coloana respectivă, aflat sub sau pe diagonala principală a matricei curente.

coloana $k=1$. $|a_{p_1}| = \max_{j=\overline{1,3}} |a_{j1}| = \max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = |a_{31}| = 3$.

$$\bar{A} \xleftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 1 & 4 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1;\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 1 & 4 & 11 \\ 0 & \boxed{5/3} & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 2/3 & -7/3 & -5/3 \end{array}\right)$$

(zerouri sub pivot)

coloana $k=2$. $|a_{p_2}| = \max_{j=\overline{2,3}} |a_{j2}| = \max\{|a_{22}|, |a_{32}|\} = \frac{5}{3}$ ✓

→ e deja pe diag. principală

$$\xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{5}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & \frac{5}{3} & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -11/5 & -11/5 \end{array}\right)$$

(zerouri sub pivot)

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{11}{5}x_3 = -\frac{11}{5} \Rightarrow x_3 = 1 \\ \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{5}{3}x_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{5}{3} \Rightarrow x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 11 \Rightarrow 3x_1 = 11 - x_3\cdot 4 - x_2 = 11 - 4 - 1 = 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = 2$.

3) Rezolvați sistemul cu metoda Gauss cu pivotare totală:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 10 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ x + 2y + 4z = 31 \end{cases}$$

$$\bar{A} = [A / b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 10 \\ 5 & 1 & 2 & 29 \\ 1 & 2 & 4 & 31 \end{array}\right)$$

alegem cel mai mare element din matrice în modul, $\max\limits_{i,j=\overline{1,3}} |a_{ij}| = |a_{21}| = 5$

$$\bar{A} \xleftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 1 & 2 & 29 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 31 \end{array}\right) \xleftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 : 5}$$

pivot

(împărțim linia pivotului la pivot)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{29}{5} \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 31 \end{array}\right) \xleftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{29}{5} \\ 0 & -\frac{8}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{37}{5} \\ 0 & \frac{9}{5} & \frac{18}{5} & \frac{126}{5} \end{array}\right)$$

(zerouri sub pivot)

alegem cel mai mare element în modul,

$\max\limits_{i,j=\overline{2,3}} |a_{ij}| = \frac{18}{5} = |a_{33}|$ și îl aducem pe poziția (2,2).

$$\xleftrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{29}{5} \\ 0 & \frac{9}{5} & \frac{18}{5} & \frac{126}{5} \\ 0 & -\frac{8}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{37}{5} \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \end{array} \xleftrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{29}{5} \\ 0 & \boxed{\frac{18}{5}} & \frac{9}{5} & \frac{126}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{37}{5} \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \end{array}$$

$$\xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 : \frac{18}{5}} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{29}{5} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & 7 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{37}{5} \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \end{array} \xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{5} L_2} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{29}{5} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -6 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \end{array}$$

(împărțim linia pivotului la pivot)

(facem zerouri sub pivot)

$$\xleftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 : -\frac{3}{2}]{} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{29}{5} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \end{array} \Rightarrow y = 4$$

$$z + \frac{y}{2} = 7 \Rightarrow z = 5$$

$$x + \frac{2}{5} \cdot z + \frac{y}{5} = \frac{29}{5} \Rightarrow x = \frac{29}{5} - \frac{4}{5} - \frac{10}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

4) Rezolvați sistemul prin metoda Gauss fără pivotare:

$$\begin{cases} -x_1+2x_2-3x_3=-2 \\ 2x_1-6x_2+9x_3=3 \\ -3x_1+2x_2+2x_3=-3 \end{cases}$$

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 2 & -3 & -2 \\ 2 & -6 & 9 & 3 \\ -3 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right) \xleftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3-3L_1]{L_2 \leftarrow L_2+2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 2 & -3 & -2 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 11 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3-2L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1+2x_2-3x_3=-2 \\ -2x_2+3x_3=-1 \\ 5x_3=5 \Rightarrow x_3=1 \end{cases} \Rightarrow -2x_2+3=-1 \Rightarrow x_2=2$$

$$-x_1=-2+3x_3-2x_2=-2+3-4=-3 \Rightarrow x_1=3.$$