Seminar 12 – Repartitii binomiale si Poisson.

Variabila aleatoare X are repartiţia $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$. Să se calculeze valorile medii $E(X), E(2X), E(X+1), E(2X+1), E(X^2)$, $E((X-0,3)^2)$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} a_i\, p_i = (-1)0,2 + 0 + 1 * 0,5 = 0,3$$

$$E(2X) = 2E(X) = 0,6$$

$$E(X+1) = E(X) + 1 = 1,3$$

$$E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 1,6$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} a_i^2 p_i = 0,2 + 0 + 0,5 = 0,7$$

$$E((X-0,3)^2) = E(X^2 - 0,6X + 0,09) = 0,7 - 0,18 + 0,09 = 0,61$$

Un producator de circuite integrate se asteapta ca 0,2% dintre dispozitive sa se defecteze in perioada de garantie. Se iau, aleator, 500 de circuite integrate. Sa se calculeze:

a) probabilitatea ca sa nu existe nici un defect?

b) valoarea medie a defectelor din perioada de garantie?

c) probabilitatea ca mai mult de 2 dispozitive sa se defecteze in perioada de garantie?

a) Fie X v.a. egala cu numarul de circuite care se defecteaza in perioad de garantie, care are repartitie binomiala $n = 500, p = 0,002$

$$P(X=0) = C_{500}^{0} p^0 (1-p)^{500-0} = 0,368$$

b)

$$E(X) = np = 500 * 0,002 = 1$$

c)

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) = 0,08$$

Doi parteneri cu forță egală boxează 10 runde (probabilitatea ca oricare din ei să câștige o rundă este ½). Să se calculeze valoarea medie, dispersia și abaterea medie pătratică a v.a. care reprezintă numărul de runde câștigate de unul dintre parteneri. Să se calculeze probabilitatea ca unul dintre boxeri să câștige cel puțin 3 runde.

Fie X v.a. egala cu numarul de runde castigate de primul dintre boxeri, care are repartiei binomiala $n = 10, p = \frac{1}{2}$

$$E(X) = 10 * \frac{1}{2} = 5\, runde$$

$$D^2(X) = npq = 10 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 2{,}5$$

$$D(X) = \sqrt{D^2(X)} = 1{,}58$$

$$P(X = k) = C_{10}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = C_{10}^{k}2^{-10}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 0{,}945$$

Observatie: Daca $X \sim Poisson(\lambda)$ atunci

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, x = 0,1,2, \dots$$

$$E(X) = D^2(X) = \lambda$$

Ex: Presupunem ca defectele sarmelor de cupru au o distributie Poisson cu medie de 2,3 defecte pe metru. Sa se calculeze:

a) Probabilitatea ca sa existe exact doua defecte intr-un metru de sarma.

b) Probabilitatea ca sa existe 10 defecte in 5 metri de sarma

c) Probabilitatea ca sa existe cel putin 1 defect in 2 metri de sarma.

a) Fie X v.a. egala cu numarul de defecte dintr-un metru de sarma, care are repartitie Poisson $\lambda = 2{,}3$.

$$P(X = 2) = \frac{e^{-2,3}2,3^2}{2!} = 0{,}2652$$

b) Fie Y v.a. egala cu numarul de defecte din 5 metri de sarma, care are repartitie Poisson $\lambda = 5 * 2{,}3 = 11{,}5$

$$P(Y = 10) = \frac{e^{-11,5}11,5^{10}}{10!} = 0{,}1129$$

c) Fie Z v.a. egala cu numarul de defecte din 2 metri de sarma, care are repartitie Poisson $\lambda = 4{,}6$

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - e^{-4,6} = 0{,}9899$$

Ex: Presupunem ca numarul de clienti care intra intr-o banca in timp de o ora este modelata sub forma unei v.a. X cu repartitie Poisson si presupunem ca $P(X = 0) = 0{,}05$. Gasiti media si dispersia v.a. X.

$$P(X=0)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}=e^{-\lambda}=0{,}05 => \lambda=-\ln 0{,}05=2{,}996$$

$$E(X)=D^2(X)=\lambda=2{,}996$$

Ex: Presupunem ca numarul de fisuri care necesita reparatie intr-o portiune de autostrada urmeaza o repartitie Poisson cu medie de 2 fisuri per km. Sa se calculeze:

a) Care este probabilitatea ca sa nu existe nici o fisura in 5 km de autostrada?

b) Care este probabilitatea ca sa existe cel putin o fisura intr-o jumatate de km de autostrada?

c) Care este probabilitatea ca sa existe cel mult o fisura in 10 km?

a) Fie X v.a. egala cu numarul de fisuri din 5 km, care are repartitie Poisson $\lambda=5*2=10$

$$P(X=0)=e^{-10}=4{,}53*10^{-5}$$

b) Fie Y v.a. egala cu numarul de fisuri din 1/2 km, care are repartitie Poisson $\lambda=1/2*2=1$

$$P(Y\geq 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)=1-e^{-1}=0{,}63$$

c) Fie Z v.a. egala cu numarul de fisuri din 10 km, care are repartitie Poisson $\lambda=10*2=20$

$$P(Z\leq 1)=P(Z=0)+P(Z=1)=e^{-20}+e^{-20}20=4{,}32*10^{-8}$$

Ex: Numarul notificarilor trimise de o platforma este modelata ca o v.a. Poisson cu medie de 5 mesaje per ora. Care este probabilitatea ca:

a) sa fie trimise 5 mesaje intr-o ora?

b) sa fie trimise 10 mesaje in 1,5 ore?

c) sa fie trimise mai putin de 2 mesaje intr-o jumatate de ora?

a) Fie X v.a. egala cu numarul de mesaje dintr-o ora, care are repartitie Poisson $\lambda=5$

$$P(X=5)=\frac{e^{-5}5^5}{5!}=0{,}17$$

b) Fie Y v.a. egala cu numarul de mesaje din 1,5 ore, care are repartitie Poisson $\lambda=1{,}5*5=7{,}5$

$$P(Y=10)=\frac{e^{-7{,}5}7{,}5^{10}}{10!}=0{,}085$$

c) Fie Z v.a. egala cu numarul de mesaje intr-o jumatate de ora, care are repartitie Poisson $\lambda=5*\frac{1}{2}=2{,}5$

$$P(Z<2)=P(Z=0)+P(Z=1)=\frac{e^{-2{,}5}2{,}5^0}{0!}+\frac{e^{-2{,}5}2{,}5^1}{1!}=0{,}288$$

Ex: Defectele care apar in materialele plastice folosite in interiorul unui automobil, ambalate intr-un pachet, au o repartitie Poisson cu medie de 0,02 defecte per pachet.

a) Daca au fost inspectate 50 de pachete, care este probabilitatea ca sa nu existe nici un defect?

b) Care este valoarea medie a numarului de pachete care trebuie inspectate pentru ca sa gasim o piesa defecta?

c) Stiind ca au fost inspectate 50 de pachete, care este probabilitatea ca sa fie cel mult doua pachete care sa contina, fiecare, cel putin o piesa defecta?

a) Fie X v.a. numarul de defecte dintr-un pachet, care are repartitie Poisson $\lambda = 0{,}02$. Fie Y v.a. egala cu numarul de defecte din 50 de pachete, care are repartiei Poisson $\lambda = 50 * 0{,}02 = 1$

$$P(Y = 0) = e^{-1} = 0{,}368$$

b) Fie Z v.a. egala cu numarul de pachete care trebuie deschis pana cand gasim o piesa cu defect. Avem o piesa cu defect cu probabilitatea

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{e^{-0{,}02} 0{,}002^0}{0!} = 0{,}0198$$

Deci Z are $p = 0{,}0198$. Caut pe n a.i. $E(Z) = 1 = np = n * 0{,}0198 =>$

$$n = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}0198} = 50{,}502\, pachete$$

c) Fie W v.a. egala cu numarul de pachete cu defecte, din 50 de pachete considerate, care are repartitie binomiala $n = 50, p = 0{,}0198$

$$P(W \leq 2) = P(W = 0) + P(W = 1) + P(W = 2) = \sum_{i=0}^{2} C_{50}^{i} p^i (1 - p)^{500-i} = 0{,}923$$

Fie vectorul (X, Y) cu densitatea de repartiţie $f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Să se afle $F_{(X,Y)}(x, y)$, $F_X(x)$, $F_Y(y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, dudv = \frac{1}{\pi^2} \left(\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1 + u^2} du \right) \left(\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{1 + v^2} dv \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} ((\arctan u)|_{-\infty}^{x}) ((\arctan v)|_{-\infty}^{y}) = \frac{1}{\pi^2} \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right) \left(\arctan y + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right) \pi = \frac{1}{\pi} \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan y + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

Fie vectorul (X, Y) cu densitatea de repartiţie

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se calculeze a) $P(X \leq 1, Y \leq 1)$; b) $P(X+Y \leq 1)$; c) $P(X+Y > 2)$; d) $P(Y > 1/X \leq 1)$;e) $P(X > 1/Y > 1)$; f) $P(X < 2Y)$.

a)

$$P(X \leq 1, Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-(x+y)}\, dxdy = \left(\int_0^1 e^{-x}\, dx\right)\left(\int_0^1 e^{-y}\, dy\right) = ((e^{-x})|_0^1)((e^{-y})|_0^1)$$
$$= (1 - e^{-1})^2$$

b) $Y \leq 1 - X$

$$P(X + Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{-(x+y)}\, dy\, dx = \int_0^1 e^{-x} \int_0^{1-x} e^{-y}\, dydx = -\int_0^1 e^{-x}\, ((e^{-y})|_0^{1-x})dx$$
$$= -\int_0^1 e^{-x}\, (e^{x-1} - 1)dx = -e^{-1} + \int_0^1 e^{-x}\, dx = -e^{-1} - (e^{-x})|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1$$
$$= 1 - 2e^{-1}$$

c) $Y \leq 2 - X$

$$P(X + Y > 2) = 1 - P(X + Y \leq 2) = 1 - \int_0^2 \int_0^{2-x} e^{-(x+y)}\, dydx = 1 - \int_0^2 e^{-x} \left(\int_0^{2-x} e^{-y}\, dy\right) dx$$
$$= 1 + \int_0^2 e^{-x}\, ((e^{-y})|_0^{2-x})dx = 1 + \int_0^2 e^{-x}\, (e^{x-2} - 1)dx$$
$$= 1 + \int_0^2 e^{-2}\, dx - \int_0^2 e^{-x}\, dx = 1 + 2e^{-2} + (e^{-x})|_0^2 = 1 + 2e^{-2} + e^{-2} - 1 = 3e^{-2}$$

d)

$$P(Y > 1|X \leq 1) = 1 - P(Y \leq 1|X \leq 1) = 1 - \frac{P(Y \leq 1 \cap X \leq 1)}{P(X \leq 1)} = 1 - \frac{P(Y \leq 1, X \leq 1)}{P(X \leq 1)}$$

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 e^{-x}\, dx = 1 - e^{-1}$$

$$P(Y > 1|X \leq 1) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}$$

e)

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = 1 - P(A|\bar{B}) = 1 - \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = 1 - \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

$$P(X > 1|Y > 1) = 1 - \frac{P(X \leq 1) - P(X \leq 1, Y \leq 1)}{1 - P(Y \leq 1)} = 1 - \frac{1 - e^{-1} - (1 - e^{-1})^2}{e^{-1}}$$
$$= 1 - \frac{1 - e^{-1} - 1 + 2e^{-1} - e^{-2}}{e^{-1}} = 1 - \frac{e^{-1} - e^{-2}}{e^{-1}} = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}$$

f) $X < 2Y$

$$P(X < 2Y) = \int_0^\infty e^{-y} \left(\int_0^{2y} e^{-x}\, dx \right) dy = -\int_0^\infty e^{-y} \left((e^{-x})|_0^{2y} \right) dx = -\int_0^\infty e^{-y}\, (e^{-2y} - 1) dy$$
$$= -\int_0^\infty e^{-3y}\, dy + \int_0^\infty e^{-y}\, dy = \frac{1}{3} (e^{-3y}) \Big|_0^\infty - (e^{-y})|_0^\infty = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$