Boghiu
Alexandra-Adriana
gr. 234

Tema 2

1. Domnul Ionescu pescuiește în iazul din spatele casei în care trăiesc 3 crapi și 7 carași. El decide să pescuiască până când prinde 4 pești. Presupunând că fiecare din cei 10 pești are aceeași șansă să fie prins și că toți peștii sunt de greutăți diferite, determinați probabilitatea evenimentelor următoare:

A = *unul din cei patru pești prinși este un crap*

B = *cel puțin unul din cei patru pești prinși este un crap*

C = *primul pește prins este un crap*

D = *al doilea pește prins este un crap*

E = *primii doi pești prinși sunt crapi*

F = *cel puțin unul din primii doi pești prinși este crap*

G = *fiecare din ultimii trei pești prinși cântărește mai mult decât cel precedent*

a)

10 pești → 7 carași, 3 crapi $\xrightarrow{\text{se pescuiesc}}$ 4 → 3 carași, 1 crap

$$P(A) = \frac{C_7^3 \cdot C_3^1}{C_{10}^4} = \frac{\frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2!}}{\frac{10!}{6! \cdot 4!}} = \frac{\frac{5 \cdot \cancel{6} \cdot 7}{\cancel{6}} \cdot 3}{\frac{7 \cdot \cancel{8} \cdot 9 \cdot 10}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 4}} =$$

$$= \frac{5 \cdot 7 \cdot 3}{7 \cdot 3 \cdot 10} = \frac{1}{2}$$

b) B <=> 1 crap, 3 carași sau 2 crapi, 2 carași sau 3 crapi, 1 caraș <=> 1 − („4 carași")

$$P(B) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

c) $P(C) = \frac{3}{10}$

d) $P(D) = \frac{3}{9}$

e) $P(E) = \frac{3}{\cancel{10}_5} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{9}_3} = \frac{1}{15}$

f) $P(F) = 1 - P(\text{"primii 2 pești sunt carași"}) =$

$$= 1 - \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = 1 - \frac{7 \cdot 2}{10 \cdot 3} = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

e) $P(G) \Leftrightarrow P($cei 4 pesti sunt în ordine crescătoare$)$

$$P(G) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{24}$$

2. Tabloul următor reprezintă legea cuplului (X, Y): unde putem considera că X este numărul de copii dintr-o familie şi Y este numărul de televizoare din acea familie (am considerat numai familii cu $1-3$ copii şi cu $1-3$ televizoare).

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0.22	0.11	0.02
2	0.2	0.15	0.1
3	0.06	0.07	0.07

Determinaţi:

a) Legile marginale ale lui X şi respectiv Y.

b) Media şi varianţa lui X şi respectiv Y.

c) Coeficientul de corelaţie dintre X şi Y.

d) Legea condiţionată a lui X la $Y = 2$ şi respectiv legea condiţionată a lui Y la $X = 2$.

e) Media şi varianţa acestor legi condiţionate

a) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.35 & 0.45 & 0.2 \end{pmatrix}$

$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.48 & 0.33 & 0.19 \end{pmatrix}$

b)

$Ex = 1 \cdot 0.35 + 2 \cdot 0.45 + 3 \cdot 0.2 = 0.35 + 0.9 + 0.6 =$
$= 1.85$

$Ey = 1 \cdot 0.48 + 2 \cdot 0.33 + 3 \cdot 0.19 = 0.48 + 0.66 + 0.57 =$
$= 1.71$

$Var(x) = Ex^2 - (EX)^2 = (1^2 \cdot 0.35 + 2^2 \cdot 0.45 + 3^2 \cdot 0.2) -$
$- 1.85^2 = 0.35 + 4 \cdot 0.45 + 9 \cdot 0.2 - 1.85^2 = 0.35 + 1.8 +$
$1.8 - 1.85^2 = 3.95 - 3.4225 = 0.5275$

$Var(y) = Ey^2 - (Ey)^2 = (1^2 \cdot 0.48 + 2^2 \cdot 0.33 + 3^2 \cdot 0.19) -$
$- 1.71^2 = (0.48 + 4 \cdot 0.33 + 9 \cdot 0.19) - 1.71^2 = (0.48 +$
$1.32 + 1.71) - 2.9241 = 0.5859$

c) $\rho(x,y) = ?$

$cov(x,y) = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y)$

$E(xy) = 1(1 \cdot 0.22 + 2 \cdot 0.11 + 3 \cdot 0.02) + 2 \cdot (0.2 + 2 \cdot 0.15 +$
$+ 3 \cdot 0.1) + 3 \cdot (0.06 + 2 \cdot 0.07 + 3 \cdot 0.07) = 0.22 + 0.22 +$
$+ 0.06 + 2(0.2 + 0.3 + 0.3) + 3(0.06 + 0.35) = 0.5 +$
$+ 2 \cdot 0.8 + 3 \cdot 0.41 = 0.5 + 1.6 + 1.23 = 3.33$

$cov(x,y) = 3.33 - 1.85 \cdot 1.71 = 3.33 - 3.1635 = 0.1665$

$$\rho(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{Var(x) \cdot Var(y)}} = \frac{0.1665}{\sqrt{0.5275 \cdot 0.5859}}$$

$$\simeq \frac{0.1665}{0.559} \simeq 0.29$$

d)

x/y	2
1	0.11
2	0.15
3	0.07

x/y	1	2	3
2	0.2	0.15	0.1

e) $E(x|y=2) = 1\cdot 0.11 + 2\cdot 0.15 + 3\cdot 0.07 = 0.11 + 0.3 + 0.21 = 0.52$

$E(y|x=2) = 1\cdot 0.2 + 2\cdot 0.15 + 3\cdot 0.1 = 0.2 + 0.3 + 0.3 = 0.8$

$Var(x/y=2) = E(x^2|y=2) - (E(x|y=2))^2 = 0.11 + 4\cdot 0.15 + 9\cdot 0.07 - 0.52^2 = 0.11 + 0.6 + 0.63 - 0.2704 = 1.34 - 0.2704 = 1.0696$

$Var(y|x=2) = E(y^2|x=2) - (E(y|x=2))^2 = 0.2 + 4\cdot 0.15 + 0.9 - 0.8^2 = 0.2 + 0.6 + 0.9 - 0.64 = 1.7 - 0.64 = 1.06$

3. Fie $X \sim N(m, \sigma^2)$ astfel încât $P(X < 22) = \frac{91}{100}$, $P(X > 28) = \frac{6}{100}$. Se cer m şi σ ştiind că $\Phi(1,35) = 0,91$, $\Phi(1,56) = 0,94$.

$X \sim N(m, \sigma^2)$

$P(x<22) = \frac{91}{100}$ $\quad$ $P(x>28) = \frac{6}{100}$

$\Phi(1,35) = 0.91$ $\quad$ $\Phi(1,56) = 0.94$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ Laplace

$P(x<22) = \Phi\left(\frac{22-m}{\sigma^2}\right) = \frac{91}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{22-m}{\sigma^2} = 1.35$

$P(x>28) = \frac{6}{100} = 1 - P(x \le 28) = 0.94 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0.94 = \Phi\left(\frac{28-m}{\sigma^2}\right) \Rightarrow \frac{28-m}{\sigma^2} = 1.56$

$$\begin{cases} \frac{22-m}{\sigma^2} = 1.35 \iff 22-m = 1.35\cdot\sigma^2 \iff m = 22-1.35\cdot\sigma^2 \\ \frac{28-m}{\sigma^2} = 1.56 \end{cases}$$

$$\frac{28-(22-1.35\,\sigma^2)}{\sigma^2} = 1.56 \iff \frac{6+1.35\cdot\sigma^2}{\sigma^2} = 1.56$$

$$6+1.35\cdot\sigma^2 = 1.56\cdot\sigma^2$$

$$6 = \sigma^2\cdot 0.21$$

$$\sigma^2 = \frac{6}{0.21} \simeq 28.5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{28.5}$$

$$m = 22-1.35\cdot 28.5 = 22-38.475 \simeq -16.47$$

4. Se consideră v.a. X cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-kx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, k > 0.$$

a) Să se determine constanta α.

b) Să se afle funcția de repartiție.

c) Să se calculeze $\mathbb{P}(0 < X < k^{-1})$.

a) $\int_0^\infty f(x) = 1 \iff \int_0^\infty \alpha x^2 e^{-kx} = 1$

Fie $t = kx$

$$\int_0^\infty \frac{\alpha}{k^3} t^2 e^{-t}\,dt = \frac{\alpha}{k^3}\int_0^\infty t^2 e^{-t}\,dt = \frac{2\alpha}{k^3} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{k^3}{2}$$

$f(x) \geq 0$ adv

b) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{k^2x^2 + 2kx + 2}{2} \cdot e^{-kx}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

c)

$P(0 < x < k^{-1}) = P(0 < x < \frac{1}{k}) = F(\frac{1}{k}) - F(0) = F(\frac{1}{k})$

$= 1 - \frac{\cancel{k^2} \cdot \frac{1}{\cancel{k^2}} + 2 \cdot \cancel{k} \cdot \frac{1}{\cancel{k}} + 2}{2} \cdot e^{-\cancel{k} \frac{1}{\cancel{k}}} = 1 - \frac{5}{2} \cdot e$

5. Fie cuplul de v.a. (X, Y) cu densitatea de repartiție $f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} k(x + y + 1), & x \in [0, 1],\ y \in [0, 2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} .$$

a) Să se determine constanta k.

b) Să se determine densitățile marginale.

c) Să se verifice dacă X și Y sunt independente.

d) Să se afle funcțiile de repartiție marginale și funcția de repartiție a vectorului (X, Y).

e) Să se determine densitățile v.a. $X|Y = y$ și $Y|X = x$.

a) $f_{(X,Y)}(x,y) \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$

$\int_0^1 \int_0^2 k(x+y+1)\,dx\,dy = 1$

$\int_0^1 \int_0^2 k(x+y+1)\,dx\,dy = 1$

$k \int_0^1 \int_0^2 (x+y+1)\,dx\,dy = k \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + xy + x\right)\Big|_0^2 dy =$

$= k \int_0^1 (2 + 2y + 2)\,dy = 2k \int_0^1 (2+y)\,dy =$

$$2k\left(2y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 2k\left(2+\frac{1}{2}\right) = 2k\cdot\frac{5}{2} = 5k =$$

$$= 1 \Rightarrow k = \frac{1}{5}$$

b)

Pt. x

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(x,y)}(x,y)\,dy = \int_0^2 \frac{x+y+1}{5}\,dy =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^2 (x+y+1)\,dy = \frac{1}{5}\left(xy+\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{5}(2x+2+2) = \frac{2x+4}{5}$$

Pt. y

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(x,y)}(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{x+y+1}{5}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 (x+y+1)\,dx = \frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}+xy+x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}+y+1\right)$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1+2y+2}{2} = \frac{2y+3}{10}$$

c)

$$f_x(x)\cdot f_y(y) = \frac{2x+4}{5}\cdot\frac{2y+3}{10} = \frac{4xy+6x+8y+12}{50}$$

$$= \frac{2xy+3x+4y+6}{25} \neq f_{(x,y)}(x,y) \Rightarrow X \text{ și } Y$$

nu sunt independente

d)

Pt. $x \in (0,1]$ și $y \in (0,2]$

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^y \frac{t+s+1}{5} \, dt \, ds = \frac{1}{5} \int_0^x \int_0^y (t+s+1) \, dt \, ds$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + st + t\right) \Big|_0^y ds = \frac{1}{5} \int_0^x \left(\frac{y^2}{2} + sy + y\right) ds$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{y^2 \cdot s}{2} + \frac{s^2}{2} \cdot y + ys\right) \Big|_0^x = \frac{1}{5} \left(\frac{y^2 \cdot x}{2} + \frac{x^2 \cdot y}{2} + xy\right)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{xy^2 + x^2 y + 2xy}{2} = \frac{1}{10} \cdot xy\,(y + x + 2)$$

Pt. $x \in (1, \infty)$ și $y \in (0,2]$

$$F(x,y) = \int_0^1 \int_0^y \frac{t+s+1}{5} \, dt\,ds = \frac{1}{5} \int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} + st + t\right) \Big|_0^y ds$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + sy + y\right) ds = \frac{1}{5} \left(\frac{y^2 s}{2} + \frac{s^2}{2} y + ys\right) \Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{5}\left(\frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} + y\right) = \frac{y^2 + 3y}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{y(y+3)}{10}$$

Pt. $x \in (0,1]$ și $y \in (2, \infty)$

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^2 \frac{t+s+1}{5} \, dt\,ds = \frac{1}{5} \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + st + t\right) \Big|_0^2 ds$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^x (2 + 2s + 2)\, ds = \frac{2}{5}\int_0^x (2+s)\, ds =$$

$$= \frac{2}{5}\left(2s + \frac{s^2}{2}\right)\Big|_0^x = \frac{2}{5}\left(2x + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{4x+x^2}{5}$$

$$= \frac{x}{5}(4+x)$$

Pt. $x \in (1,\infty)$ și $y \in (2,\infty)$

$$F(x) = \int_0^1\int_0^2 \frac{t+s+1}{5}\, dt\, ds = \frac{1}{5}\int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} + st + t\right)\Big|_0^2 ds$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 (2 + 2s + 2)\, ds = \frac{1}{5}\left(2s + \frac{2s^2}{2} + 2s\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot 5 = 1$$

$$F_x(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y)$$

$$F_y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y)$$

$$\Rightarrow F_x(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 1 \\ (x+4)\frac{x}{5}, & x \in (0,1] \end{cases}$$

$$F_y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ (y+3)\frac{y}{10}, & y \in (0,2] \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

e)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{5}(x+y+1)}{\frac{2y+3}{10}} =$$

$$= \frac{2(x+y+1)}{2y+3}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(y)} = \frac{\frac{1}{5}(x+y+1)}{\frac{2x+4}{5}} =$$

$$= \frac{x+y+1}{2x+4}$$

6. Generați 250 de observații din repartiția $\mathcal{N}(0,2)$, trasați histograma acestora și suprapuneți densitatea repartiției date (vezi figura de mai jos).

```
data=rnorm(250,0,sqrt(2))
binwidth=0.4
bins=seq(min(data),max(data)+binwidth,binwidth)
hist(data,breaks=bins,col='grey',freq=FALSE,main="Repartitia normala N(0,2)")
x=seq(-4,4,0.01)
lines(x,dnorm(x,0,sqrt(2)),col='red',lwd=3,lty=2)
```

7. Generați 250 de observații din repartiția $\mathcal{E}(3)$, trasați histograma acestora și suprapuneți densitatea repartiției date (vezi figura de mai jos).

```
data=rexp(250,3)
binwidth=0.3
bins=seq(min(data),max(data)+binwidth,binwidth)
hist(data,breaks=bins,col='grey',freq=FALSE, main="Repartitia exponentiala E(3)")
x=seq(0,max(data),0.01)
lines(x,dexp(x,5),col='red',lwd=3,lty=2)
```

8. Generați 250 de observații din repartiția $B(3,3)$, trasați histograma acestora și suprapuneți densitatea repartiției date (vezi figura de mai jos).

```
data=rbeta(250,3,3)
binwidth=0.1
bins=seq(min(data),max(data)+binwidth,binwidth)
hist(data,breaks=bins,col='grey',freq=FALSE)
x=seq(0,2,0.01)
lines(x,dbeta(x,3, 3),col='red',lwd=3,lty=2)
```