Cursul 14

$(\Omega, \mathcal{K}, P)$ tripletul lui Kolmogorov.

$A, B \in \mathcal{K}$ evenimente.

A, B se numesc independente $\Longleftrightarrow$

1) $P(A) = P(A)$ dacă s-a întâmplat deja B. (Empiric).

2) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. (Matematic).

$f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. simple, care au un nr. finit de val.

$$X_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \end{array} ; \quad X_g = \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & \cdots & B_m \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_m \\ q_1 & \cdots & q_m \end{pmatrix} \end{array}, \text{ se numesc}$$

independente $\Longleftrightarrow$ A_i, B_j sunt independente, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Exemple

Fie f, g v.a pe același $(\Omega, \mathcal{K}, P)$.

$$X_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} A_1 & A_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \end{array} ; \quad X_g = \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Să se determine X_{f+g}, $X_{f \cdot g}$.

b) Presupunând că f și g sunt independente, calculați

X_{f+g}, X_{fg}

C (14,2)

L.N.M.

Forma empirică

Fie $A \in K$, $p = P(A)$. $\mathcal{E}$ experiența.

Fie un lung șir de experiențe.

1. $f_1, f_2, f_3, \ldots$ șirul frecvenței absolute, frecvențele cumulate.

2. $\nu_n = \frac{f_n}{n}$ șirul frecv. relative.

În „imensa majoritate" a cazurilor. $\nu_n \longrightarrow p$.

Consecințe: Dacă vrem să calculăm $P(A)$, facem un șir aleator de experiențe. f_n, ν_n. În „imensa maj." a cazurilor ν_n se stabilizează pt $n \geq 30$. Tragem concluzia că $p \simeq \nu_n$, $n \geq 30$.

Forma matematică:

Fie g v.a. care monitorizează producerea evenimentului A.

$X_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, $p = P(A)$. S_n v.a care monitorizează ev. A, este o v.a. bernoulliană.

$m_g = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$.

$D_g^2 = 0^2 q + 1^2 p - m_g^2 = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$.

$\sigma = \sqrt{pq}$

Fie g_1 v.a. care monitorizează ev. A la momentul 1. C.(14.3)

g_2 ——— " ——— 2

g_3 ——— " ——— 3

....

g_n v.a. care monitorizează ev. A la momentul n.

....

Fie $f_1, f_2, \dots$ variabile aleatoare cumulate, frecv. absolută cumulate.

$$f_1 = g_1$$
$$f_2 = g_1 + g_2$$
$$f_3 = g_1 + g_2 + g_3$$
$$\dots$$
$$f_n = g_1 + g_2 + \dots + g_n.$$

$g_1, g_2, \dots g_n, \dots$ v.a. din „lumea lui g" și sunt independente.

$$\nu_n = \frac{f_n}{n} \text{ v.a. al frecvenței relative.}$$

Atunci $\nu_n \xrightarrow{P} (p)$

Ce înseamnă $\nu_n \xrightarrow{P} (p)$

Ce înseamnă $h_n \longrightarrow h$, h_n, h v.a. pe $(\Omega, \mathcal{K}, P)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} P(|h_n - h| \geq \varepsilon) = 0.$$

C (14.4)

Ex.

Se aruncă 3 zaruri.

A evenimentul ca suma numerelor de pe cele 3 zaruri să fie ≥ 10.

Determ. $P(A)$.

Sol 1. Cu ajutorul L.N.M. $P(A) = 0,63$.

Sol 2 Fie f v.a. care monitorizează aruncarea cu un zar.

$$X_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Fie f_1, f_2, f_3 v.a. care monitorizează cele trei zaruri.

Sunt independente.

$$X_{f_1+f_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{7}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

8
12
45
49
35
7
153

36.
6
216

$$X_{f_1+f_2+f_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{7}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$= \Big($

$4+6 \longrightarrow \frac{5}{6^3}$

$5+6, 5+5 \longrightarrow 2\frac{6}{6^3}$

$6+6, 6+5, 6+4 \longrightarrow 3 \cdot \frac{7}{6^3}$

$7+6, 7+5, 7+4, 7+3 \longrightarrow 4 \cdot \frac{6}{6^3}$

$8+6, 8+5, 8+4, 8+3, 8+2 \longrightarrow 5 \cdot \frac{5}{6^3}$

$9+6, 9+5, 9+4, 9+3, 9+2, 9+1 \longrightarrow 6 \cdot \frac{4}{6^3}$

$10+6, 10+5, 10+4, 10+3, 10+2, 10+1, 10+0 \quad 7 \cdot \frac{3}{6^3}$

$11+6, 11+5, 11+4, 11+3, 11+2, 11+1, 11+0 \quad 7 \cdot \frac{2}{6^3}$

$12+6 \quad 12+0 \quad 7 \cdot \frac{1}{6^3}$

$$\frac{5}{6^3} + \frac{12}{6^3} + \frac{21}{6^3} + \frac{24}{6^3} + \frac{25}{6^3} + \frac{24}{6^3} + \frac{21}{6^3} + \frac{15}{6^3} + \frac{2}{6^3}.$$

$$= \frac{153}{216} = 0,7$$

$153,0 \mid 216$
$12 \mid 7$

Scanned with CamScanner

<u>Teorema lui Cebâșev</u> m,

(Ω, K, P) f v.a., X_f, D^2, σ.

Atunci $P\left(|f-m|>\varepsilon\right) \leq \frac{D^2}{\varepsilon^2}$.

Abateri mari de la medie, sunt puțin probabile.

$$P\left(|f-m|\leq\varepsilon\right)=1-P\left(|f-m|>\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D^2}{\varepsilon^2}.$$

$\varepsilon=3\sigma$

$$P\left(|f-m|\leq 3\sigma\right)\geq 1-\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\frac{8}{9}.$$

$8 : 9 = 8{,}8$

$$\boxed{P\left(|f-m|\leq 3\sigma\right)\geq \frac{8}{9}=8{,}8}$$

<u>Problemă</u> Câte note trebuie să primească ($n=?$) un student, $f_1 \ldots f_n$ a.î. $\frac{f_1+f_2+\ldots+f_n}{n} \approx m$, m, nota „corectă" a studentului, cu aprox. $\varepsilon=0{,}5$

$\left|\frac{f_1+f_2+\ldots+f_n}{n}-m\right|\leq 0{,}5$ și această afirmație să fie valabilă cu o prob de $\alpha\geq 0{,}9$.

e (14.6)

f v.a. cu medie m, σ v.a.

care monitorizează notele studentului..

$$P\left(\left|\frac{f_1+\dots+f_n}{n}-m\right|\leq 0{,}5\right)\geq 0{,}9$$

ε p

$$P\left(\left|\frac{f_1+\dots+f_n}{n}-m\right|\leq\varepsilon\right)=1-P\left(\left|\frac{f_1+\dots+f_n}{n}-m\right|>\varepsilon\right)\geq p.$$

$$P\left(\left|\frac{f_1+\dots+f_n}{n}-m\right|>\varepsilon\right)\leq 1-p$$

$$P\left(\left|\frac{f_1+\dots+f_n}{n}-m\right|>\varepsilon\right)\leq\frac{D^2}{\varepsilon^2}\leq 1-p \quad \Rightarrow n=?$$

$$D^2\left(\frac{f_1+\dots+f_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\left(D^2(f_1)+\dots+D^2(f_n)\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot D^2(f)$$

$$=\frac{1}{n}\sigma^2 \qquad D^2=\sigma^2$$

$$\frac{\sigma}{n\cdot\varepsilon^2}\leq 1-p \qquad \boxed{n\geq\frac{\sigma}{(1-p)\cdot\varepsilon^2}}.$$

Cz. part. $p=0{,}9$

$\varepsilon=0{,}5$

$\sigma=1$

$$n\geq\frac{1}{0{,}1\cdot 0{,}25}=40. \qquad \boxed{n\geq 40}$$

Răspuns Pt. a fi sigur cu o prob. de 0,9

că $\frac{f_1+\dots+f_n}{n}\approx m\pm 0{,}5$ este ca $n\geq 40$

Experiența: se alege un nr. C. 14.7

Care este prob. să fie prim?

$p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < \dots$ șirul numerelor prime.

$2 \quad 3 \quad 5$

$A_{p_1} = A_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid p_1 \text{ divide pe } n\}$; $\boxed{P(A_1) = \frac{1}{p_1}}$

$\boxed{P(\overline{A_1}) = 1 - \frac{1}{p_1}}$

A_{p_2}, $\boxed{P(\overline{A_2}) = 1 - \frac{1}{p_2}}$ ..... $P(\overline{A}_{p_n}) = 1 - \frac{1}{p_n}$.

$P = \overline{A}_{p_1} \cap \overline{A}_{p_2} \cap \dots$ sunt ev. independente.

$P(\overline{A}_{p_1} \cap \overline{A}_{p_2}) = P(\overline{A}_{p_1}) \cdot P(\overline{A}_{p_2})$

$$\frac{1}{P(P)} = \frac{1}{P(\overline{A}_{p_1})} \cdot \frac{1}{P(\overline{A}_{p_2})} \dots =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_2}} \dots \dots$$

Euler

$$= \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots\right) \dots \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{p_n}.$$

$$\frac{1}{P(P)} \geq \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p_n}}_{\infty} \Rightarrow P(P) = 0.$$

$P(P) = 0 \qquad P(P) = P(\overline{A}_{p_1}) \cdot P(\overline{A}_{p_2}) \dots$

V.a. indep.

f, g v.a. pe $(\Omega, \mathcal{K}, P)$

$$X_f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array} ; \quad X_g = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \end{array} \text{ sunt indep.}$$

f, g s.n. indep. $\iff$ m. de niv. ale lui f sunt indep.

cu m. de nivel a lui g

A_i și B_j indep. $\iff$ $P(A_i \cap B_j) = P(A_i) \cdot P(B_j)$.

Să se det. $f+g$ și $f \cdot g$

$$f(\omega) = \begin{cases} -1 & \omega \in A_1 \\ 0 & \omega \in A_2 \\ 1 & \omega \in A_3 \end{cases} \qquad g(\omega) = \begin{cases} -1 & \omega \in B_1 \\ 1 & \omega \in B_2 \end{cases}$$

$$(f+g)(\omega) = \begin{cases} -2 & \omega \in A_1 \cap B_1 \\ -1 & \omega \in A_2 \cap B_1 \\ 0 & \omega \in (A_1 \cap B_2) \cup (A_3 \cap B_1) \\ 1 & \omega \in A_2 \cap B_2 \\ 2 & \omega \in A_3 \cap B_2 \end{cases}$$

$$X_{f+g} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,12 & 0,18 & 0,38 & 0,12 & 0,2 \end{pmatrix}$$

(Ω, K, P) un triplet Kolmogorov.
Cebîsev

$A, B \in K$ ev. indep.

Ex. om cu zar.

$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{3, 4\}$

Def intuitivă. $P(A)$ = prob. lui A după ce a apărut deja B.

$P(A) = \frac{1}{2}$

$\{3, 4\}$

$P(A|B) = \frac{1}{2}$.

Sunt ind.

Def mat. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$

Scanned with CamScanner

$P(A_1 \cap B_1) = P(A_1) \cdot P(B_1)$

$P\big((A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1)\big) = P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1)$

$= P(A_1) \cdot P(B_2) + P(A_2) \cdot P(B_1) =$

$= 0,2 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,6 =$

$P(A_2 \cap B_2) = P(A_2) \cdot P(B_2)$

Teoremă f, g v.a. atunci:

- $m_{f+g} = m_f + m_g$
- f și g indep. $\Rightarrow D^2(f+g) = D^2(f) + D^2(g)$

Teorema lui Cebîșev (T. fundam. a v.a)

(Ω, K, P) c.p. Kolmogorov.

f v.a., m_f, D_f^2, σ_f. Atunci

$\forall \varepsilon > 0 \quad P\big(|f - m| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{D_f^2}{\varepsilon^2}$

Abaterile mari de la medie a unei v.a. sunt puțin probabile.

Teorema celor 3σ

f v.a. m_f, D_f^2, σ_f.

Atunci $P(|f-m| \leq 3\sigma) \geq \frac{8}{9}$

Dem

$$P(|f-m| \leq 3\sigma) = 1 - \underbrace{P(|f-m| > 3\sigma)}$$

$$\geq 1 - \frac{\cancel{D_f^2}}{3^2 \cancel{\sigma^2}} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

$$\sigma = \sqrt{D_f^2}$$

$$P(|f-m| \leq 3\sigma) \geq \frac{8}{9}.$$

$-3\sigma \leq$ ~~$f(\omega) \leq 3\sigma \geq \frac{8}{9}$~~

$$-3\sigma < f - m < 3\sigma$$

$\boxed{m - 3\sigma \leq f(\omega) \leq m + 3\sigma}$ cu prob cel puțin $\frac{8}{9} = 0,9$

L.N.M

$\boxed{P(A) \simeq 0,63}$ L.N.M.

	f	p
1. (3,1,6)	1	1
2. (1,6,3)	2	1
3. (5,2,4)	3	1
4. (3,4,2)	3	0,75
5. (4,3,1)	4	0,8
6. (6,3,4)	5	0,83
7. (1,3,2)	5	0,71
8. (1,5,3)	6	0,75
9. (4,3,1)	6	0,66
10. (2,1,1)	6	0,6
11. (6,2,4)	7	0,63
12. (1,1,3)	7	0,58
13. (2,5,6)	8	0,61
14. (6,6,4)	9	0,64
15. (5,2,3)	10	0,66
16. (6,2,2)	11	0,68
17. (6,1,6)	12	0,7
18. (5,4,1)	13	0,72
19. (3,6,1)	14	0,73
20. (5,6,2)	15	0,75
21. (6,1,2)	15	0,71
22. (2,1,1)	15	0,68
23. (4,5,2)	16	0,69
24. (1,5,2)	16	0,66
25. (4,3,1)	16	0,64
26. (4,3,3)	17	0,65
27. (1,3,3)	17	0,62
28. (1,6,2)	17	0,6
29. (1,3,1)	18	0,62
30. (6,6,1)	19	0,63

$$X_{f_1+f_2} = \begin{array}{c} \quad A_1 \; A_2 \qquad\qquad A_6 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} B_1 \; B_2 \qquad\qquad B_6 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 6 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$X_{f_1+f_2+f_3} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

(4,6) $\qquad \frac{3}{216}$

(5,6), (5,5) $\qquad \frac{4}{216} + \frac{4}{216} = \frac{8}{216}$

$\frac{5}{216} + \frac{5}{216} + \frac{5}{216} = \frac{15}{216}$

$\frac{6}{216} + \frac{6}{216} + \frac{6}{216} + \frac{6}{216} = \frac{24}{216}$

$\frac{5}{216} \qquad = \frac{25}{216}$

$\frac{4}{216} \qquad = \frac{24}{216}$

$3 \qquad = \frac{18}{216}$

$= \frac{12}{216}$

$= \frac{6}{216}$

$P(A) = 0{,}625$

Scanned with CamScanner

Seminar 11

1. f, g două v.a. $\underbrace{\text{indep}}$ pe (Ω, K, P).

$X_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$; $X_g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

$M(f+g) = M_f + M_g$

X_{f+g} , X_{f-g} , $X_{f \cdot g}$, $D^2(f+g) = D^2_f + D^2_g$

2) Ex. lui Bernstein.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

$A = \{1, 2\}$ $\quad \{A, B, C\}$ sunt mutual independente

$B = \{1, 3\}$ $\quad \{A, B, C\}$ nu sunt independente.

$C = \{1, 4\}$

3) 3a, 2b, 1c $\quad$ 2a, 3b $\quad$ 4a, 3c.

Se alege câte o bilă din fiecare urnă.

Să se det. v.a. f $\underbrace{\text{care}}_{F}$ monitorizează numărul bilelor le extrase.

Să se determine M_f, D^2_f, σ_f

4) 3a, 2b, 1c.

Ex. B fără revenire.

Ex. B. cu rev. de fiecare dată.

Fie f, g v.a. care monitorizează nr. bilelor b extrase.

Să se det. $X_f, M_f, F, D^2_f, \sigma_f$, $X_g, M_g, F, D^2_g, \sigma_f$.

Nat 1 **L. N. M**

$\nu_n = \frac{f_n}{n}$

	f_n	ν_n
1. (74, 2, 74)	1	1
2. (57, 35, 8)	2	1
3. (3, 25, 72)	3	1
4. (10, 12, 78)	4	1
5. (60, 33, 7)	5	1
6. (46, 17, 31)	5	0,83
7. (56, 3, 41)	6	0,86
8. (67, 16, 17)	7	0,87
9. (6, 4, 90)	8	0,89
10. (37, 2, 61)	9	0,9
11. (56, 38, 61)	10	0,91
12. (5, 7, 88)	11	0,92
13 (93, 4, 3)	12	0,92
14. (18, 38, 44)	12	0,86
15. (60, 37, 3)	13.	0,86
16. (20, 50, 30)	13	0,81
17. (49, 40, 11)	13	0,76
18 (1, 76, 23)	14	0,78
19. (6, 3, 91)	15	0,79
20 (64, 8, 28)	16.	0,8
21. (34, 13, 53)	17	0,81
22. (13, 27, 60)	18	0,82
23. (15, 31, 54)	19	0,83
24 (36, 41, 23)	19	0,79
25. (84, 7, 9)	20	0,8
26. (38, 18, 44)	20	0,77
27 (3, 69, 28)	21	0,78
28 (14, 39, 42)	21	0,75
29 (44, 29, 17)	21	0,72
30 (23, 7, 70)	22	0,73

$\boxed{P(A) \approx 0,73}$

- O firmă are 3 acționari.
Care este prob. ca o firmă aleasă la întâmplare să aibă acționariat majoritar?

- <u>Problema lui Benford</u> (problema facturilor false).

a) Se alege aleator un număr de la $\underline{1}$ la $\underline{500}$.
Care este prob. ca prima lui cifră să fie 1,
Care este prob. ca ultima lui cifră să fie 1?

b) Se alege la <u>întâmplare</u> un nr. $n \in \mathbb{N}$. Aceeași problemă.

---

f v.a. X_f media de ... $X_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

$m_f = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,8 = 0,2 + 1,6 = 1,8$

$D^2 f =$

$\sigma =$

$P(A) = \frac{111}{500} = 0,222$

$P(B) = \frac{50}{500} = \frac{50}{500} = 0,1$

1
10 - 19
100 - 199

1
21
31
91

$P(A) = 0,21$
$P(B) = 0,1$

Se alege la întâmplare un Δ. din mulț. tuturor laturilor.

Care este prob. ca să aibă aria $\geq \frac{25}{3}$.

Cu prog. Gen

- **Paradoxul zilei de naștere**

O familie formată din mamă, tată și 2 copii serbează ziua de naștere a fiecărui membru. Care este prob. ca să se serbeze patru zile de naștere diferite.

Bernoulli cu revenire.

$$B(x_1, x_2, \dots, x_{365}) = \left(\frac{1}{365}x_1 + \frac{1}{365}x_2 + \dots + \frac{1}{365}x_{365}\right)^4 =$$

$$= \frac{1}{365^4}\left(x_1 + x_2 + \dots + x_{365}\right)^4$$

P(A) suma coef. monom. de tipul $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot x_{i_3} \cdot x_{i_4}$

$i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4$

$$= \frac{1}{365^4} \cdot \frac{4!}{1!\,1!\,1!\,1!} \cdot C_{365}^4 = \frac{1}{365^4} \cdot \cancel{4!} \cdot \frac{365!}{\cancel{4!} \cdot 361!} = \frac{362 \cdot 363 \cdot 364 \cdot \cancel{365}}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \cancel{365}}$$

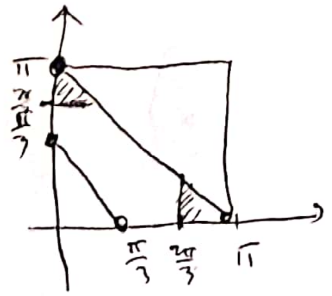
≈ 998

DEN

5) $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=\pi \\ \alpha \geq \frac{2\pi}{3} \text{ sau } \beta \geq \frac{2\pi}{3} \text{ sau } \gamma \geq \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

$\gamma = \pi - \alpha - \beta.$

$0 < \pi - \alpha - \beta < \frac{2\pi}{3}.$



$\begin{cases} \alpha+\beta > \frac{\pi}{3} \\ \alpha+\beta \leq \pi \end{cases}$

$$P = \frac{2 \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{2}}{\frac{\pi^2}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{2}} = \frac{\frac{\pi^2}{9}}{\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{18}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{8}{18}} = \frac{1}{4}$$

6) O grupă de studenți, de 20 studenți, hotărăsc să facă câte o petrecere la ziua de naștere a fiecărui membru. Care este prob. de a avea 20 de zile de naștere diferite.

$$B(x_1, \ldots, x_{365}) = \left(\frac{1}{365} x_1 + \cdots + \frac{1}{365} x_{365}\right)^{20} =$$

$$= \frac{1}{365^{20}} (x_1 + \cdots + x_{365})^{20} =$$

$$= \frac{1}{365^{20}} \sum \frac{20!}{1! \cdot 1! \cdots 1!} \cdot C_{365}^{20}$$

Mamă, tată, 2 copii

$$\left(\frac{1}{365} x_1 + \cdots + \frac{1}{365} x_{365}\right)^4 = \frac{1}{365^4} (x_1 + \cdots + x_{365})^4$$

$$= \boxed{\frac{1}{365^4} \cdot \frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} \cdot C_{365}^{4}} \quad i_1 < i_2 < i_3 < i_4$$

• Le Cursul v.a

$$X_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$$

F_f, m_f, D_f^2, σ_f

$F_f(x) = P(f \leq x) = P(\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq x)$

$$= \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0,3 & -1 \leq x < 0 \\ 0,7 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

$m_f = 0.$

$D_f^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 - m_f^2 = 0,6.$

$\sigma_f = \sqrt{D_f^2} = \sqrt{0,6} = 0,77$

f, g v. a.

$$X_f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad X_g = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ev. de nivel ale lui f cu ev. de niv. a lui g sunt independente

A_i și B_j sunt ind $\Leftrightarrow P(A_i \cap B_j) = P(A_i) \cdot P(B_j)$

Ev. indep.

(Ω, K, P) tripl. lui Kolmogorov.

Ω = campul de prob. $\mathcal{E}_6$

K = mult. ev.

P funcție de prob.

A și B ev. indep

$\mathcal{E}$ exp. aruncării cu un zar.

$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.

Matematic $\underbrace{P(A \cap B)}_{\frac{1}{6}} = P(A) \cdot P(B)$.

$= \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6}$

intuitiv

$P(A)$ = prob. de a apare A dacă a apărut deja B

$P(A) = \frac{2}{6}$

2, 3, 4 $\quad \frac{1}{3}$

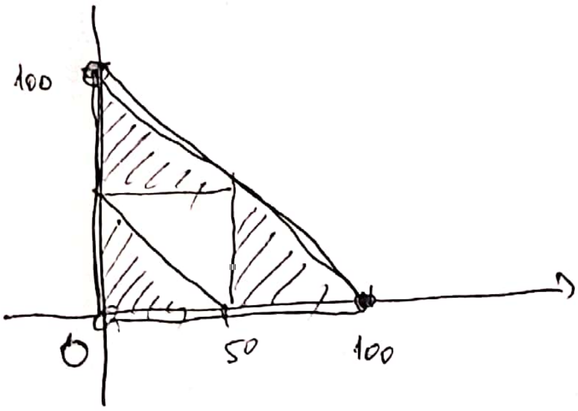
Scanned with CamScanner

Met. 2 Prob. geom.

$$\boxed{P(A) = 0,75}$$

$P(A) =$ „$\frac{\text{nr. încercări reușite}}{n}$"

este $P(A) = \lim_{n \to \infty} \nu_n$. L. M.



x I

y II

$100-x-y$ III

$0 \le 100-x-y \le 100$

$x \geq 50$

$y \geq 50$

$100-x-y \geq 50$

$x+y \leq 50$

$$P(A) = \frac{A_{rie\ f}}{A_{rie\ t}} = \frac{3\Delta}{4\Delta} = 0,75$$

$M(f)$

- $X_f = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ $\quad \underline{M(f) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_n p_n}$
- $D^2_f = \alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \cdots + \alpha_n^2 p_n - (M(f))^2$

<u>Problem</u>

• Met. 1 L.N.M.

• Met. 2 Fermat - Pascal

1, - - - - - , 5000

$P(A) = \frac{1111}{5000} = 0,22.$

1 -

10 - 19

100 - 199

1000 - 1999

1

11

21

31

41

91

$\left\{ \begin{array}{l} 101 \\ 111 \\ 111 \end{array} \right.$ 500

121

131

$P(A) = \frac{500}{5000} = 0,1$

$$\boxed{P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{\text{Card}\,\{1,2 \dots n\} \cap A}{n}}$$

A ev. să înceapă cu 1 $P(A) = 0,3$

B ev. să se term cu 1 $P(B) = \frac{1}{10} = 0,1$

	f_n	$\nu_n = \frac{f_n}{n}$
1. (28, 15, 60)	1	1
2. (5, 93, 2)	2	1
3. (58, 27, 15)	3	1
4. (13, 77, 10)	4	1
5. (8, 85, 7)	5	1
6. (33, 40, 27)	5	0,83
7. (25, 45, 30)	5	0,71
8. (23, 43, 34)	5	0,62
9. (27, 33, 40)	5	0,55
10. (42, 49, 9)	5	0,5
11 (46, 7, 47)	5	0,45
12 (62, 20, 18)	6	0,5
13 (49, 32, 19)	6	0,46
14 (35, 60, 5)	7	0,5
15 (34, 43, 23)	7	0,46
16 (15, 33, 52)	8	0,5
17 (22, 2, 76)	9	0,52
18. (24, 29, 47	9	0,5
19. (23, 42, 33)	9	0,47
20. (7, 73, 20)	10	0,5

(11 56)

	f	ν
21. (67, 32, 41)	11	0,52
22 (46, 36, 18)	11	0,5
23 (72, 6, 22)	12	0,52
24 (16, 49, 35)	12	0,5
25 (25, 3, 72)	13	0,52
26. (38, 27, 35)	13	0,5
27. (44, 29, 27)	13	0,48
28. (20, 32, 48)	13	0,46
29 (45, 8, 47)	13	0,44
30 (8, 39, 53)	14	0,46

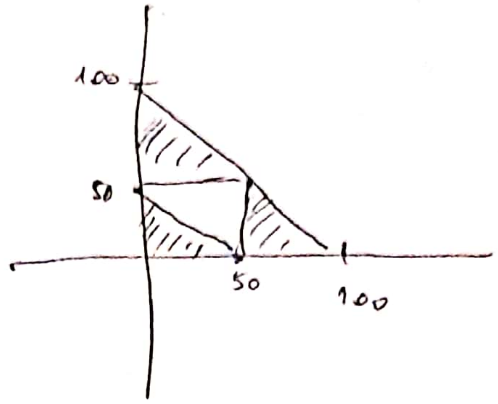
n nr. [illegible] = 30

$P(A) \approx 0,5$

11 54

$x+y+z=100$

$x\geq 50,\ y\geq 50,\ z\geq 50$



$0\leq x,y\leq 100$

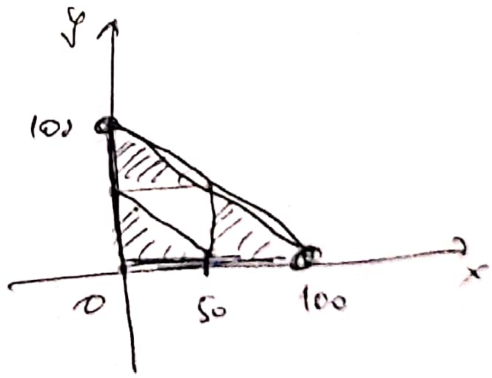
$0\leq 100-x-y\leq 100$

$x\geq 50$

$y\geq 0$

$100-x-y\geq 50$

$x\geq 0,\ y\geq 0,\ z=100-x-y\geq 0$



$$P=\frac{A_R}{A_T}=\frac{3\cdot\frac{50^2}{2}}{5000}=\frac{3\cdot\frac{2500}{2}}{5000}=\frac{3}{4}=0{,}75$$

$\frac{}{1000}$

$x\geq 50$

$y\geq 50$

$100-x-y\geq 50$

$x+y\leq 50$

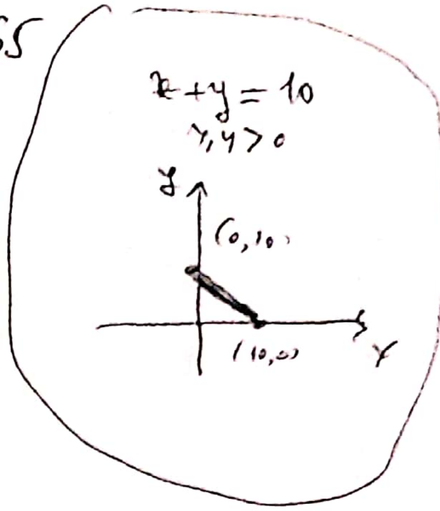
P(A)

0,5

0,75

Prob. geometrica

11.55

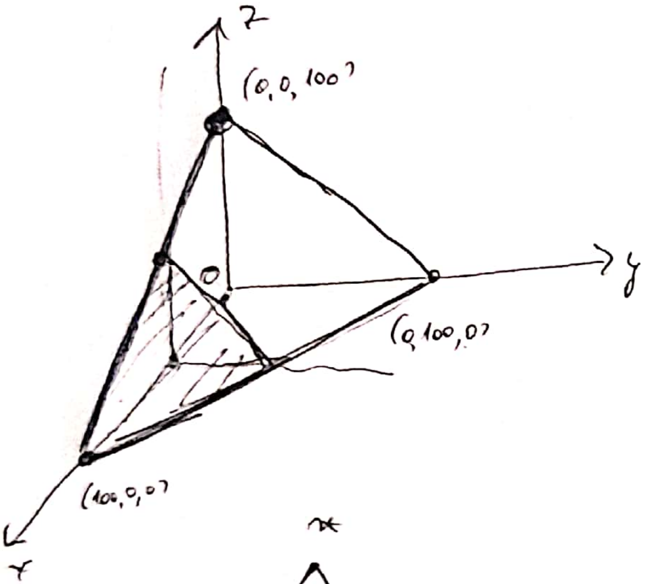


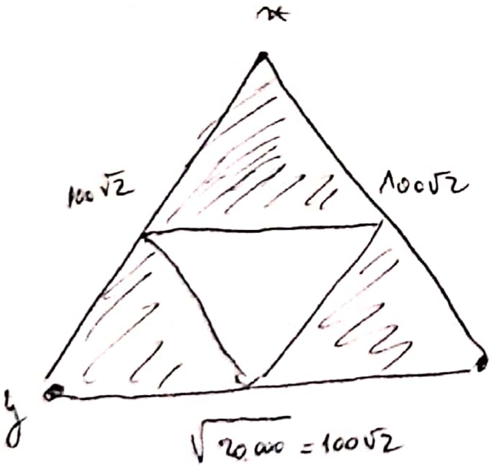
$x, y, z \in (0, 100)$ procedeul aleator

$x+y+z=100.$

Ac. nu-j. $x \geq 50$ sau $y \geq 50$ sau $z \geq 50$.

$x+y+z=100.$





$$P = \frac{3\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{3\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{10.000 \cdot 2\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{2500 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{\cancel{4}}}{\frac{10.000 \cdot 2\sqrt{3}}{\cancel{4}}} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\boxed{P(A) = 0{,}75}$$