

Calcul Numeric
Test Laborator – Calculatoare și Tehnologia Informației, Anul I

INSTRUCȚIUNI:

1. Toate problemele sunt **obligatorii**.
2. Comentați și explicați toate rezolvările trimise. Codurile necomentate/neexplicate nu se punctează.
3. **TIMP DE LUCRU: 2 ore**
4. Rezolvările problemelor corespunzătoare acestui test vor fi trimise prin email:
 - **ca fișier .txt**, cu denumirea `Nume_Prenume_Grupa_Test.txt`
 - la adresa `alexandru.ghita@unibuc.ro`;
 - vor avea următoarea **linie de subiect**:
`Test Laborator CN - Nume și prenume student, Grupa 16X`
5. **Termenul limită** de trimitere prin email a rezolvărilor problemelor: **8 iunie 2021, orele 20:30**.

Algorithm 1: Interpolare Lagrange (Metoda Neville)

Input: $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}$

Result: $t \in \mathbb{R}$

Pasul 1: Construiește matricea $Q = (q_{ij})_{i,j=\overline{1,n+1}} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$:

- Se inițializează prima coloană a matricei Q cu Y ;
- Pentru $i = \overline{2, n+1}$ și $j = \overline{2, i}$ calculează termenii matricei Q :

$$q_{ij} \leftarrow \frac{q_{i,j-1}(z - x_{i-j+1}) - q_{i-1,j-1}(z - x_i)}{x_i - x_{i-j+1}};$$

Pasul 2: $t \leftarrow q_{n+1,n+1}$

Pasul 3: OUTPUT(t)
STOP.

Factorizarea QR :

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Numim descompunere QR a matricei A , descompunerea de forma $A = QR$, unde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este o matrice ortogonală, i.e. $Q^T Q = Q Q^T = I$, iar $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este o matrice superior triunghiulară.

Dacă $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este o matrice inversabilă, atunci există și este unică descompunerea QR a matricei A cu $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice ortogonală și $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice superior triunghiulară având componentele pe diagonala principală $r_{kk} > 0, k = \overline{1, n}$.

Sistemul $Ax = b$ devine $QRx = b$. Cum Q este ortogonală ($Q^T Q = I$), înmulțind relația $QRx = b$ cu Q^T obținem $Rx = Q^T b$. Cum R este superior triunghiulară sistemul $Rx = Q^T b$ se rezolvă conform metodei substituției descendente.

Algorithm 2: Metoda de descompunere QR

Input: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Result: $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Pasul 1: Determină prima coloană a matricei Q și prima linie a matricei R :

$$\begin{aligned} \bullet r_{11} &\leftarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{i1}^2}; \\ \bullet q_{i1} &\leftarrow \frac{a_{i1}}{r_{11}}, \quad \forall i = \overline{1, n}; \\ \bullet r_{1j} &\leftarrow \sum_{s=1}^n q_{s1} a_{sj}, \quad \forall j = \overline{2, n}; \end{aligned}$$

Pasul 2: Pentru $k = \overline{2, n}$ completează coloana k a matricei Q și linia k a matricei R :

$$\begin{aligned} \bullet r_{kk} &\leftarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ik}^2 - \sum_{s=1}^{k-1} r_{sk}^2}; \\ \bullet q_{ik} &\leftarrow \frac{1}{r_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} q_{is} r_{sk} \right), \quad \forall i = \overline{1, n}; \\ \bullet r_{kj} &\leftarrow \sum_{s=1}^n q_{sk} a_{sj}, \quad \forall j = \overline{k+1, n}; \end{aligned}$$

Pasul 3: OUTPUT(Q, R)
STOP.

Ex. 1

- (a) Rezolvați numeric ecuația $x^2 - 13 = 0$. Folosind comentarii se va argumenta aplicabilitatea metodei alese.
- (b) Să se illustreze grafic funcția și punctul/punctele de intersecție cu axa OX. Graficul va include minim notarea axelor OX și OY și legenda.

Ex. 2

Presupunem că avem datele cunoscute \mathbf{X} (date de client) în punctele obținute din discretizarea intervalului $[-1, 1]$ în 23 puncte echidistante. Valorile corespunzătoare punctelor rezultate \mathbf{Y} sunt obținute prin evaluarea funcției $f(x) = e^{2x}$ în acele puncte.

- (a) Implementează în **python** metoda *Neville de interpolare Lagrange* cu numele **interp_neville** care determină, conform metodei Neville, polinomul Lagrange $P_n(x)$. Pentru implementare, urmărește algoritmul de mai sus;
- (b) Clientul dorește aproximarea valorilor funcției în toate punctele din discretizarea cu 75 de puncte echidistante a domeniului. Pentru aproximarea valorilor lipsă, folosește datele oferite de client și metoda *Neville de interpolare Lagrange*. Într-o figură, afișează datele clientului, graficul funcției exacte cât și graficul aproximării obținute;
- (c) Într-o figură nouă, generează graficul erorii de interpolare $e_t = |P_n(x) - f(x)|$.

Ex. 3

- (a) Implementează în **python** factorizarea QR cu numele **fact_qr_new**. Pentru implementare, urmărește algoritmul de mai sus. În implementarea metodei **fact_qr_new**, verifică dacă:
 - (i) Matricea A este pătratică;
 - (ii) Matricea A este inversabilă.
- (b) Pentru implementare, verifică rezolvarea sistemului $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$, unde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -6 & -10 \\ 7 & -2 & -9 & -4 \\ -6 & -10 & 9 & 1 \\ 7 & 6 & -10 & -5 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -158 \\ -72 \\ -19 \\ -39 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Help: Ține cont că rezolvarea sistemului $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ atunci când $A = QR$ folosind algoritmul de mai sus se reduce la a rezolva sistemul $R \cdot \underline{x} = Q^T \cdot \underline{b}$.