Seminar 5 Grafică pe calculator

Reprezentarea matriceală a transformărilor

a) Translaţia

O translaţie T=$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$ se reprezintă in OpenGL folosind o matrice $M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De exemplu translaţia T=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ se reprezintă in OpenGL folosind matricea $M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Scalarea

O scalare S=$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ se reprezintă in OpenGL folosind o matrice $M_s = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De exemplu scalarea S=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ se reprezintă in OpenGL folosind matricea $M_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Rotaţia 2D

O rotaţie R=$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ se reprezintă in OpenGL folosind o matrice $M_r = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pentru o rotaţie de unghi $\theta = \frac{\pi}{2}$ matricea R=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se reprezintă in OpenGL folosind o matrice $M_r = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aplicaţie rezolvată 1:

Se consideră matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Stabiliţi cum sunt transformate punctele:

a)Punctul real P=$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Punctul real $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ este transformat în punctul real $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b)Punctul real P=$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Punctul real $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ este transformat în punctul la infinit $\begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c)Punctul la infinit P=$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 5\\ 1\\ -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Punctul la infinit $\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$ este transformat în punctul real $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$.

Daţi exemplu de:

- un punct real care este transformat în punct real (posibil răspuns : [1,2,1,1])
- un punct real care este transformat în punct la infinit (posibil răspuns: [-1,-1,0,1])
- un punct la infinit care este transformat în punct real (posibil răspuns: [5,1,-1,0])
- un punct la infinit care este transformat în punct la infinit (posibil răspuns: [1,2,3,0])

Aplicaţie rezolvată 2:

Determinaţi matricea compunerii dintre o translaţie $t = (t_1, t_2, t_3)$ şi o scalare $s = (s_1, s_2, s_3)$ apoi dintre o scalare $s = (s_1, s_2, s_3)$ şi o translaţie $t = (t_1, t_2, t_3)$. Sunt la fel?

Cunoaştem cum arată matricele de translaţie respectiv scalare.

Matrice de translaţie: $M_t = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & t_1\\ 0 & 1 & 0 & t_2\\ 0 & 0 & 1 & t_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Matrice de scalare: $M_s = \begin{pmatrix}s_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & s_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & s_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Matricea compunerii dintre o translaţie şi o scalare:

$$T \cdot S = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & t_1\\ 0 & 1 & 0 & t_2\\ 0 & 0 & 1 & t_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}s_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & s_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & s_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_1 & 0 & 0 & t_1\\ 0 & s_2 & 0 & t_2\\ 0 & 0 & s_3 & t_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Matricea compunerii dintre o scalare şi o translaţie :

$$S \cdot T = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & s_1 \cdot t_1 \\ 0 & s_2 & 0 & s_2 \cdot t_2 \\ 0 & 0 & s_3 & s_3 \cdot t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reţinem că matricea compunerii dintre o translaţie şi o scalare este diferită de matricea compunerii dintre o scalare şi o translaţie (înmulţirea matricelor nu este o operaţie comutativă).

Pentru exemplul dat trebuie efectuată înlocuirea cu valorile numerice date pentru translaţie respectiv scalare.

Dacă dorim de exemplu să aflăm matricea compunerii dintre o translaţie, o scalare şi o translaţie trebuie sa efectuăm înmulţirea matricelor $(T \cdot S \cdot T)$ apoi înlocuim cu valorile numerice date în problema propusă .

Reprezentarea scenelor 3D

Coordonate de vizualizare

glMatrixMode (GL MODELVIEW);

gluLookAt $(x_0, y_0, z_0, x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}, V_x, V_y, V_z)$;

- coordonatele observalorului: $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
- coordonatele punctului de referinţă: $P_{ref} = (x_{ref}, y_{ref}, z_{ref})$
- coordonatele vectorului V: $V = (V_x, V_y, V_Z)$

Valori implicite $P_0 = (0, 0, 0), P_{ref} = (0, 0, -1), V = (0, 1, 0)$

Indicarea punctelor P_0, P_{ref}, V generează un nou sistem de coordonate, numite coordonate de vizualizare. Originea acestui sistem este punctul P0, iar axele sistemului sunt date de reperul ortonormat (u, v, n), obţinut după cum urmează:

$$N = \overrightarrow{P_{ref}P_0} = P_0 - P_{ref}$$

$$n = \frac{N}{||N||}, u = \frac{V \times n}{||V||}, v = n \times u$$

Aplicaţie rezolvată 3

Se apelează funcţia gluLookAt(1,1,1,2,1,1,0,1,0). Identificaţi P_0, P_{ref}, V, apoi alfaţi u, v, n.

$$P_0 = (1,1,1), P_{ref} = (2,1,1), V = (0,1,0)$$

$$N = \overrightarrow{P_{ref}P_0} = P_0 - P_{ref} = (-1,0,0) \Rightarrow n = (-1,0,0)$$

$$u = V \times n = \begin{vmatrix} 0 & -1 & e_1 \\ 1 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_3 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

$$u = n \times u = \begin{vmatrix} -1 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 1 & e_3 \end{vmatrix} = (0,1,0)$$

Trecerea de la coordonate de modelare la coordonate de vizualizare

1. Se translatează originea reperului de modelare în originea reperului de vizualizare, iar matricea acestei transformări este:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Se efectuează o rotaţie, astfel ca sistemul $(u; v; n)$ să fie transformat în sistemul canonic $(e1; e2; e3)$ care direcţionează axele reperului de modelare.

$$A = \begin{pmatrix} u_x & v_x & n_x \\ u_y & v_y & n_y \\ u_z & v_z & n_z \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ n_x & n_y & n_z \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Trecerea de la reperul de modelare la reperul de vizualizare este dată de matricea:

$$M = R \cdot T$$

Aplicaţie rezolvată 4

Calculaţi matricele T, R, M pentru: $P_0 = (1,1,1), n = (-1,0,0), u = (0,0,0), v = (0,0,0)$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, A^t=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Transformări de proiecţie-Proiecţii ortogonale

glMatrixMode (GL PROJECTION);
glOrtho (xwmin, xwmax, ywmin, ywmax, dnear, dfar);

Matricea 4×4 asociată:

Atenţie $z_{near}=-d_{near}, z_{far}=-d_{far}$

$$M=\begin{pmatrix}\frac{2}{xw_{max}-xw_{min}}&0&0&-\frac{xw_{max}+xw_{min}}{xw_{max}-xw_{min}}\\0&\frac{2}{yw_{max}-yw_{min}}&0&-\frac{yw_{max}+yw_{min}}{yw_{max}-yw_{min}}\\0&0&-\frac{2}{z_{near}-z_{far}}&\frac{z_{near}+z_{far}}{z_{near}-z_{far}}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Aplicaţie rezolvată 5

Se apelează funcţia glOrtho(10, 30, 20, 40, 5, 10). Calculaţi suma elementelor de pe diagonala principală a matricei.

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{10}&0&0&-2\\0&\frac{1}{10}&0&-3\\0&0&-\frac{2}{5}&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Suma elementelor de pe diagonala principală este: $\frac{4}{5}$

Transformări de proiecţie-Proiecţii perspective

glMatrixMode (GL PROJECTION);
glFrustum (xwmin, xwmax, ywmin, ywmax, dnear, dfar);

Pentru a obţine matricea 4×4 folosim o notaţie mai simplă:xwmin=l, xwmax=r, ywmin=b, ywmax=t, dnear=n, dfar=f.

Matricea 4×4 asociată este:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicaţie rezolvată 6

Se apelează funcţia glFrustum(-30, 30, -20, 20, 1, 1000). Calculaţi matricea asociată.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1001}{999} & -\frac{2000}{999} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$