Primitive grafice. Fața și spatele unui poligon convex

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2022 - 2023

Motivație

- Codurile sursă `02_C_1_poligoane.cpp`, `02_C_2_poligoane_quads` și `02_C_3_poligoane3d.cpp`

Motivație

- Codurile sursă `02_C_1_poligoane.cpp`, `02_C_2_poligoane_quads` și `02_C_3_poligoane3d.cpp`
- Ce proprietăți geometrice sunt / NU sunt implementate în OpenGL?

Motivație

- Codurile sursă `02_C_1_poligoane.cpp`, `02_C_2_poligoane_quads` și `02_C_3_poligoane3d.cpp`
- Ce proprietăți geometrice sunt / NU sunt implementate în OpenGL?
  - **NU:** reguli pentru aplicarea funcției `GL_POLYGON` - se presupune că vârfurile determină un poligon convex

Motivație

- Codurile sursă `02_C_1_poligoane.cpp`, `02_C_2_poligoane_quads` și `02_C_3_poligoane3d.cpp`
- Ce proprietăți geometrice sunt / NU sunt implementate în OpenGL?
  - **NU:** reguli pentru aplicarea funcției `GL_POLYGON` - se presupune că vârfurile determină un poligon convex
  - **DA:** fața și spatele unui poligon convex

Triunghiuri - reprezentare (I)

Un singur triunghi, determinat de vârfurile de coordonate (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) (vom lua $x_1, x_2, y_1, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{Z}$), poate fi trasat utilizând următoarea secvență de cod sursă:

```
glBegin (GL_TRIANGLES);
  glVertex2i (x1, y1);
  glVertex2i (x2, y2);
  glVertex2i (x3, y3);
glEnd;
```

De asemenea, pentru trasarea triunghiurilor/poligoanelor mai pot fi utilizate și constantele simbolice `GL_TRIANGLES`, `GL_TRIANGLE_STRIP`, `GL_TRIANGLE_FAN`, `GL_QUADS`, `GL_QUAD_STRIP`, `GL_POLYGON`.

Triunghiuri - reprezentare (IIa)

Să considerăm o mulțime de vârfuri (puncte) având coordonatele (pe care le presupunem numere întregi)
$P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \ldots, P_n = (x_n, y_n)$.
• Putem desena triunghiuri de forma $[P_{3k+1}P_{3k+2}P_{3k+3}]$ (în cazul în care n nu este divizibil prin 3, există vârfuri care nu aparțin niciunui triunghi) folosind instrucțiunile

```
glBegin (GL_TRIANGLES);
  glVertex2i (x1, y1);
  glVertex2i (x2, y2);
  .........
  glVertex2i (xn, yn);
glEnd;
```

Triunghiuri - reprezentare (IIb)

- Putem desena triunghiuri care au muchii in comun, definite de punctele $P_1, P_2, \ldots, P_n$ astfel:

```
glBegin (GL_TRIANGLE_STRIP);
  glVertex2i (x1, y1);
  glVertex2i (x2, y2);
  .........
  glVertex2i (xn, yn);
glEnd;
```

Triunghiuri - reprezentare (IIc)

- Un evantai de triunghiuri având vârful P_1 comun este desenat folosind comenzile:

```
glBegin (GL_TRIANGLE_FAN);
  glVertex2i (x1, y1);
  glVertex2i (x2, y2);
  .........
  glVertex2i (xn, yn);
glEnd;
```

Patrulatere

- Patrulatere pot fi desenate folosind instrucțiunile

```
glBegin (GL_QUADS);
  glVertex2i (x1, y1);
  glVertex2i (x2, y2);
  .........
  glVertex2i (xn, yn);
glEnd;
```

```
glBegin (GL_QUAD_STRIP);
  glVertex2i (x1, y1);
  glVertex2i (x2, y2);
  .........
  glVertex2i (xn, yn);
glEnd;
```

Alte primitive

- Pentru poligoane convexe (!!!) se poate folosi secvența de cod

```
glBegin (GL_POLYGON);
  glVertex2i (x1, y1);
  glVertex2i (x2, y2);
  .........
  glVertex2i (xn, yn);
glEnd;
```

- Există o funcție specială pentru desenarea unui dreptunghi care are ca vârfuri diagonal opuse punctele (x_1, y_1) și (x_2, y_2).

```
glRect* (x1,y1,x2,y2)
```

Atribute ale triunghiurilor/poligoanelor: culoarea

Culoarea (dată de culorile vârfurilor); când acestea din urmă au culori diferite, culorile punctelor segmentului sunt determinate folosind **interpolarea afină**. Modul de trasare se controlează, ca în cazul segmentelor, cu

```
glShadeModel (...);
```
,

fiind posibile variantele

```
glShadeModel (GL_SMOOTH);
```

```
glShadeModel (GL_FLAT);
```

Atribute ale triunghiurilor/poligoanelor: fața/spatele

Funcții OpenGL pentru desenarea feței / spatelui unui poligon

- Precizarea modului de redare

```
glPolygonMode (face, mode);
```

Pentru *face* sunt posibile valorile `GL_FRONT`, `GL_BACK`, `GL_FRONT_AND_BACK`, iar pentru *mode* sunt posibile valorile `GL_POINT`, `GL_LINE`, `GL_FILL`. Valoarea implicită este `GL_FILL`.

- Schimbarea ordinii vârfurilor

```
glFrontFace (GL_CW);
```

```
glFrontFace(GL_CCW);
```

Valoarea implicită este `GL_CCW` și revenirea la aceasta trebuie precizată în mod explicit.

- Renunțare la trasarea feței unor poligoane

Poligoanele văzute dinspre fața *face* pot fi eliminate cu secvența

```
glEnable (GL_CULL_FACE);
glCullFace (face);
......   listă poligoane convexe
glDisable (GL_CULL_FACE);
```

Reguli pentru aplicarea funcției `GL_POLYGON`

Se presupune că opțiunea `GL_POLYGON` este utilizată pentru un șir de vârfuri $P_1, P_2, \ldots, P_N$, distincte două câte două. Reguli referitoare la vârfurile indicate, pentru ca poligonul să poată fi desenat:

1. Punctele trebuie să fie coplanare, dar nu coliniare.

Reguli pentru aplicarea funcției `GL_POLYGON`

Se presupune că opțiunea `GL_POLYGON` este utilizată pentru un șir de vârfuri $P_1, P_2, \ldots, P_N$, distincte două câte două. Reguli referitoare la vârfurile indicate, pentru ca poligonul să poată fi desenat:

1. Punctele trebuie să fie coplanare, dar nu coliniare.
2. Vârfurile trebuie indicate în ordinea corectă, astfel încât linia poligonală să nu aibă autointersecții.

Reguli pentru aplicarea funcției GL_POLYGON

Se presupune că opțiunea GL_POLYGON este utilizată pentru un șir de vârfuri $P_1, P_2, \ldots, P_N$, distincte două câte două. Reguli referitoare la vârfurile indicate, pentru ca poligonul să poată fi desenat:

1. Punctele trebuie să fie coplanare, dar nu coliniare.
2. Vârfurile trebuie indicate în ordinea corectă, astfel încât linia poligonală să nu aibă autointersecții.
3. Poligonul trebuie să fie convex.

1. Coplanaritatea

De verificat: condiția de coplanaritate

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{P_1} & x_{P_2} & x_{P_3} & \dots & x_{P_N} \\ y_{P_1} & y_{P_2} & y_{P_3} & \dots & y_{P_N} \\ z_{P_1} & z_{P_2} & z_{P_3} & \dots & z_{P_N} \end{pmatrix} = 3 \qquad (1)$$

sau faptul că

$$\dim_{\mathbb{R}}\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \dots, \overrightarrow{P_1P_N}\rangle = 2. \qquad (2)$$

Fapt: O condiție alternativă este coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4}$, ..., $\overrightarrow{P_{N-1}P_N} \times \overrightarrow{P_NP_1}$, $\overrightarrow{P_NP_1} \times \overrightarrow{P_1P_2}$. Altfel spus: punctele $P_1, P_2, \dots, P_N$ sunt coplanare dacă și numai dacă vectorii $\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ ($i = 1, \dots, N$, cu convenții modulo N) sunt coliniari.

Exemplu

Punctele $P_1 = (7, 1, 1)$, $P_2 = (-3, 3, 9)$, $P_3 = (1, -1, 9)$, $P_4 = (8, -4, 5)$ sunt coplanare.

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (32, 32, 32)$$

$$\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4} = \dots = (16, 16, 16)$$

$$\overrightarrow{P_3P_4} \times \overrightarrow{P_4P_1} = \dots = (32, 32, 32)$$

$$\overrightarrow{P_4P_1} \times \overrightarrow{P_1P_2} = \dots = (48, 48, 48)$$

$\Rightarrow$ vectorii sunt coliniari (proporționali), deci punctele sunt coplanare

Calcul $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}$:

$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (-10, 2, 8)$

$\overrightarrow{P_2P_3} = P_3 - P_2 = (4, -4, 0)$.

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -10 & 2 & 8 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} \left(= \begin{vmatrix} -10 & 4 & e_1 \\ 2 & -4 & e_2 \\ 8 & 0 & e_3 \end{vmatrix} \right)$$

$\underline{\text{dezv. după}}$ prima linie

$$32i + 32j + 32k = (32, 32, 32)$$

Exemplu

Punctele $P_1 = (7, 1, 1), P_2 = (-3, 3, 9),\ P_3 = (1, -1, 9),\ P_4 = (11, -3, 1)$ sunt coplanare.

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (32, 32, 32)$$

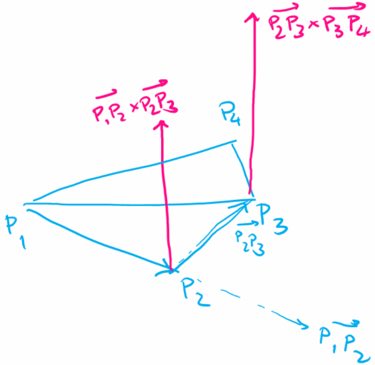
$$\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4} = (16, 16, 16)$$

$$\overrightarrow{P_3P_4} \times \overrightarrow{P_4P_1} = (32, 32, 32)$$

$$\overrightarrow{P_4P_1} \times \overrightarrow{P_1P_2} = (48, 48, 48)$$

Comentariu

De ce punctele P_1, P_2, P_3, P_4 sunt coplanare dacă și numai dacă vectorii $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}$ și $\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4}$ sunt coliniari? Justificare: vectorul $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}$ este perpendicular pe planul $(P_1P_2P_3)$, iar vectorul $\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4}$ pe planul $(P_2P_3P_4)$.



Comentariu

Vectori coliniari și vectori cu același sens (definiția).

• v_1 și v_2 sunt coliniari $\Longleftrightarrow$ $\underline{\exists\ \lambda \in \mathbb{R}}$ a.î. $v_2 = \lambda v_1$

• v_1 și v_2 $\left\{ \begin{array}{l} \text{sunt coliniari și} \\ \text{au același sens} \end{array} \right.$ $\Longleftrightarrow$ $\underline{\exists\ \lambda > 0}$ a.î. $v_2 = \lambda v_1$.

<u>Exemplu</u>: $v_1 = (1,2,3)$

$v_2 = (4,8,12)$

$v_2' = (-2,-4,-6)$

coliniari și au același sens

coliniari de sens opus

Comentariu

Vectori coliniari și vectori cu același sens (definiția).

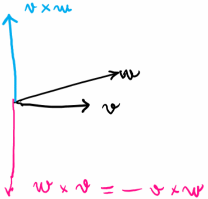
- v_1 și v_2 sunt coliniari $\Leftrightarrow$ $\underline{\exists\, \lambda \in \mathbb{R}}$ a.î. $v_2 = \lambda v_1$
- v_1 și v_2 sunt coliniari și au același sens $\Leftrightarrow$ $\underline{\exists\, \lambda > 0}$ a.î. $v_2 = \lambda v_1$.

Exemplu: $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (4,8,12)$, $v_2' = (-2,-4,-6)$

v_1, v_2: coliniari și au același sens

v_1, v_2': coliniari de sens opus

De exemplu, vectorii $v \times w$ și $w \times v$ sunt coliniari și au sens opus (pentru v, w necoliniari).



2. Linie poligonală fără autointersecții

De verificat: intersecții de segmente.

Varianta 1 Segmentele $[AB]$ și $[CD]$ se intersectează $\Leftrightarrow$ A și B sunt de o parte și de alta a dreptei CD **și** C și D sunt de o parte și de alta a dreptei AB. Două puncte M și N sunt de o parte și de alta a dreptei d de ecuație $f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \Leftrightarrow f(M) \cdot f(N) < 0$.

Varianta 2 Se folosește reprezentarea segmentelor cu ajutorul combinațiilor afine. Segmentele $[AB]$ și $[CD]$ se intersectează $\Leftrightarrow$

$$\exists s_0, t_0 \in [0,1] \quad \text{a.î.} \quad (1-t_0)A + t_0 B = (1-s_0)C + s_0 D.$$

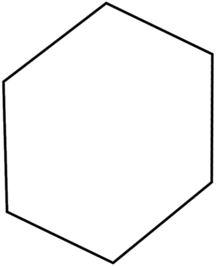
Această variantă poate fi aplicată și în context 3D.

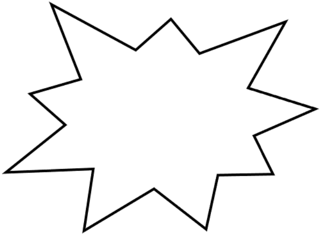
3. Convexitatea poligonului - poligoane convexe și poligoane concave

Intuitiv, știm să distingem între poligoane convexe și poligoane concave.

3. Convexitatea poligonului - poligoane convexe și poligoane concave

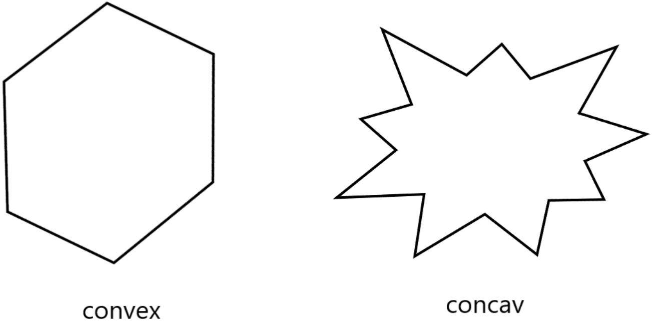
Intuitiv, știm să distingem între poligoane convexe și poligoane concave.





3. Convexitatea poligonului - poligoane convexe și poligoane concave

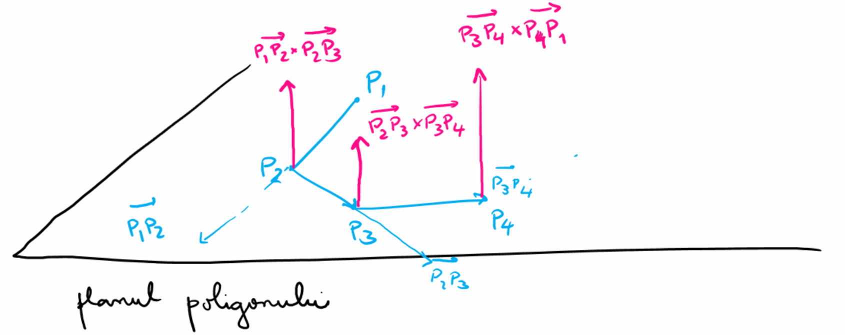
Intuitiv, știm să distingem între poligoane convexe și poligoane concave.



Problema pe care o abordăm în continuare este cum anume putem verifica acest lucru atunci când lucrăm cu date numerice. Pe următoarele slide-uri este explicat cum poate fi realizat acest lucru folosind **produsul vectorial.**

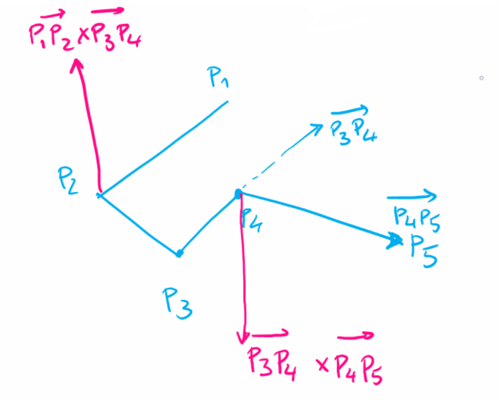
3. Convexitatea poligonului - figura

Dacă un poligon este convex, produsele vectoriale determinate de vârfurile alăturate au același sens.



3. Convexitatea poligonului - comentariu

Dacă un poligon este concav, produsele vectoriale determinate de vârfurile alăturate nu au același sens.



3. Convexitatea poligonului

De verificat: convexitatea (folosind produse vectoriale).
Observație. (i) Fie $=(P_1, P_2, \ldots, P_N)$ un poligon (sensul de parcurgere este important!). Poligonul $\mathcal{P}$ este convex dacă și numai dacă pentru orice trei vârfuri consecutive P_{i-1}, P_i, P_{i+1} (modulo N) ale poligonului sensul vectorului $\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ este independent de i.
(ii) Vectorii menționați au toți aceeași direcție (perpendiculari pe planul poligonului), deoarece punctele sunt coplanare (vezi condiția 1).
Exemplu. Punctele $P_1 = (7, 1, 1), P_2 = (-3, 3, 9)$, $P_3 = (1, -1, 9)$, $P_4 = (11, -3, 1)$ determină un poligon convex.

Definiție - vector normal

Lemă. Pentru un poligon convex, vectorul

$$n = \frac{\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}}{\| \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \|}$$

este independent de i.

Definiție. Fie $(P_1, P_2, \ldots, P_N)$ un poligon convex. Se alege $i = 1, \ldots, n$. Vectorul

$$n = \frac{\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}}{\| \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \|}$$

se numește **vector normal (normală)** la planul poligonului / poligonul $(P_1, P_2, \ldots, P_N)$.

Modalitate de calcul (I)

1. Se aleg trei vârfuri consecutive, de exemplu P_1, P_2, P_3, având coordonatele $P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1}, z_{P_1})$, $A_2 = (x_{P_2}, y_{P_2}, z_{P_2})$, respectiv $P_3 = (x_{P_3}, y_{P_3}, z_{P_3})$.

Modalitate de calcul (I)

1. Se aleg trei vârfuri consecutive, de exemplu P_1, P_2, P_3, având coordonatele $P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1}, z_{P_1})$, $A_2 = (x_{P_2}, y_{P_2}, z_{P_2})$, respectiv $P_3 = (x_{P_3}, y_{P_3}, z_{P_3})$.
2. Se scrie ecuația planului determinat de cele trei puncte sub forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde coeficienții A, B, C și D sunt dați de formulele

$$A = \begin{vmatrix} y_{P_1} & z_{P_1} & 1 \\ y_{P_2} & z_{P_2} & 1 \\ y_{P_3} & z_{P_3} & 1 \end{vmatrix}, \qquad B = -\begin{vmatrix} x_{P_1} & z_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & z_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & z_{P_3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{P_1} & 1 & z_{P_1} \\ x_{P_2} & 1 & z_{P_2} \\ x_{P_3} & 1 & z_{P_3} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} x_{P_1} & y_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & y_{P_3} & 1 \end{vmatrix}, \qquad D = -\begin{vmatrix} x_{P_1} & y_{P_1} & z_{P_1} \\ x_{P_2} & y_{P_2} & z_{P_2} \\ x_{P_3} & y_{P_3} & z_{P_3} \end{vmatrix},$$

fiind deduși din condiția de coliniaritate

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_{P_1} & y_{P_1} & z_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & z_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & y_{P_3} & z_{P_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pe scurt: se dezvoltă după linia I determinantul de mai sus.

Modalitate de calcul (II)

3 Are loc relația

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (A, B, C).$$

Modalitate de calcul (II)

3 Are loc relația

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (A, B, C).$$

4 În final:

$$\mathrm{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A, B, C).$$

Modalitate de calcul (II)

3 Are loc relația

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (A, B, C).$$

4 În final:

$$\mathrm{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A, B, C).$$

Observație. Dacă schimbăm sensul parcurgerii, se schimbă semnul vectorului normal.

Conceptul de față / spate al unui poligon convex

Definiție. Pentru un punct $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ notăm

$$\pi(M) = \pi(x, y, z) = Ax + By + Cz + D.$$

Noțiunile de **față/spate** a planului poligonului (și, implicit, a poligonului convex fixat) sunt definite astfel:

- $M = (x, y, z)$ se află **în fața planului (poligonului)** $\Leftrightarrow \pi(M) = \pi(x, y, z) > 0$;

Conceptul de față / spate al unui poligon convex

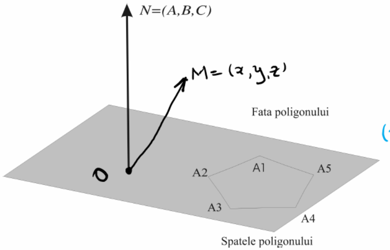
Definiție. Pentru un punct $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ notăm

$$\pi(M) = \pi(x, y, z) = Ax + By + Cz + D.$$

Noțiunile de **față/spate** a planului poligonului (și, implicit, a poligonului convex fixat) sunt definite astfel:

- $M = (x, y, z)$ se află **în fața planului (poligonului)** $\Leftrightarrow \pi(M) = \pi(x, y, z) > 0$;
- $M = (x, y, z)$ se află **în spatele planului (poligonului)** $\Leftrightarrow \pi(M) = \pi(x, y, z) < 0$.

Interpretare - “normala indică fața poligonului”



Pp. că $D = 0$, adică planul poligonului trece prin $O = (0,0,0)$

M este în fața poligonului $\iff$

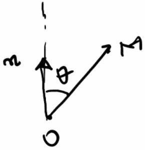
$\underset{(x,y,z)}{M}$: $\underbrace{Ax + By + Cz}_{\text{produs scalar dintre } N = (A,B,C) \text{ și } \overrightarrow{OM} = (x,y,z)} > 0$

$\iff \langle N, \overrightarrow{OM} \rangle > 0 \iff$

$\iff \cos(\widehat{N, \overrightarrow{OM}}) > 0 \iff$

unghiul dintre N și $\overrightarrow{OM}$ este $< 90^\circ$

$\iff$ unghiul θ dintre $n \left(= \frac{N}{\|N\|}\right)$ și $\overrightarrow{OM}$ este $< 90^\circ$



$\iff$ proiecția lui M de dreapta det. de n are același sens cu n $\iff$ n și $\overrightarrow{OM}$ de aceeași parte a planului $\Rightarrow$ normala indică fața

Intrepretare - sinteză

- Presupunem că $D = 0$, deci planul trece prin origine, iar ecuația sa este $\pi(x, y, z) = Ax + By + Cz = 0$.
- Considerând vectorul $\mathrm{n} = (A, B, C)$ care direcționează normala la plan, avem $\pi(A, B, C) > 0$, deci vectorul n indică partea din față a poligonului (planului).
- În general, un vector (x, y, z) este orientat înspre partea din față a planului dacă $\pi(x, y, z) > 0$, i.e. $\langle (x, y, z), \mathrm{n}, \rangle > 0$, ceea ce înseamnă că proiecția vectorului (x, y, z) pe N este la fel orientată ca și n.
- Prin translație, aceste rezultate pot fi extinse pentru un plan arbitrar. Mai mult, presupunând că parcurgem poligonul $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ în sens trigonometric și că rotim un burghiu drept în sensul indicat de această parcurgere, acesta se va deplasa în sensul indicat de vectorul N, deci înspre fața poligonului (vezi figura).

De reținut

- Se poate stabili dacă un punct este în fața / spatele unui poligon folosind formula de calcul (varianta algebrică).

De reținut

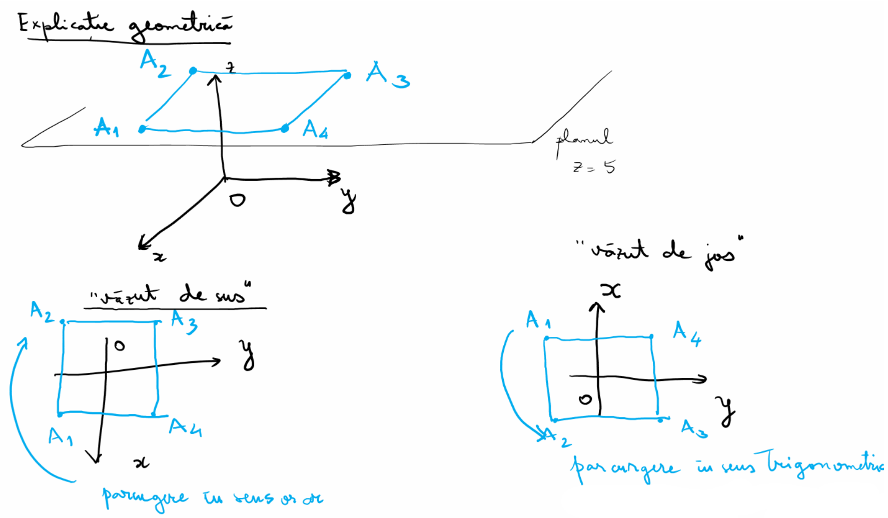
- Se poate stabili dacă un punct este în fața / spatele unui poligon folosind formula de calcul (varianta algebrică).
- Normala indică fața poligonului.

De reținut

- Se poate stabili dacă un punct este în fața / spatele unui poligon folosind formula de calcul (varianta algebrică).
- Normala indică fața poligonului.
- Din față un poligon este văzut ca fiind parcurs în sens trigonometric, iar din spate un poligon este văzut ca fiind parcurs în sens orar.

Exemplul 1. Cod sursă `02_C_3_poligoane3d.cpp`

$A_1 = (5, -5, 5), A_2 = (-5, -5, 5), A_3 = (-5, 5, 5), A_4 = (5, 5, 5)$



Exemplul 1. Cod sursă `02_C_3_poligoane3d.cpp`

$A_1 = (5,-5,5), A_2 = (-5,-5,5), A_3 = (-5,5,5), A_4 = (5,5,5)$

Explicatie algebrică

Scriem ecuatia planului sub forma $Ax + By + Cz + D = 0$ (cf. teorie).

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 5 & -5 & 5 & 1 \\ -5 & -5 & 5 & 1 \\ -5 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{dezvoltăm linia 1}}{=} 0\cdot x - 0\, y + (-100)z - (-500) = -100z + 500$$

$$z \rightarrow \begin{vmatrix} 5 & -5 & 1 \\ -5 & -5 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_3 + L_1}{\overset{L_2 \to L_2 + L_1}{=}} \begin{vmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -100$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -5 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \\ -5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \dots = -500$$

Ec. planului este

$\pi(z) = -100z + 500$

$\pi(0,0,40) = (-100)\cdot 40 + 500 = -3500 < 0 \rightarrow (0,0,40)$ în spatele planului

$\pi(0,0,0) = 500 > 0 \Rightarrow (0,0,0)$ în fața

Exemplul 1. Cod sursă 02_C_3_poligoane3d.cpp

$A_1 = (5, -5, 5), A_2 = (-5, -5, 5), A_3 = (-5, 5, 5), A_4 = (5, 5, 5)$

În concluzie: am obținut ecuația

$$-100z + 500 = 0 \quad (\underset{A}{0} \cdot x + \underset{B}{0} \cdot y \underset{C}{-100} \cdot z + 500 = 0)$$

altfel spus

$$(A, B, C) = (0, 0, -100) \Rightarrow$$

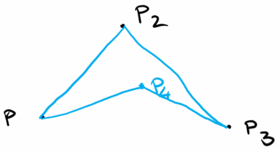
$$\underline{n = (0, 0, -1)} \Rightarrow$$ "fața poligonului este în jos"

$$\left(n = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \cdot (A, B, C)\right)$$

Exemplul 2. Cod sursă `02_C_4_poligoane3d_exemplu2.cpp`

Fie punctele $P_1 = (6, 2, 0)$, $P_2 = (-4, 4, 8)$, $P_3 = (0, 0, 8)$ (toate trei situate în planul de ecuație $x + y + z = 8$).

a) Să se determine P_4 astfel ca patrulaterul $P_1P_2P_3P_4$ să fie concav.



? P_4 a.î. patrulaterul $P_1P_2P_3P_4$ să fie concav

Alegem P_4 a.î. să fie o combinație convexă a punctelor P_1, P_2, P_3, de exemplu:

$$P_4 = \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{4} P_2 + \frac{1}{4} P_3$$

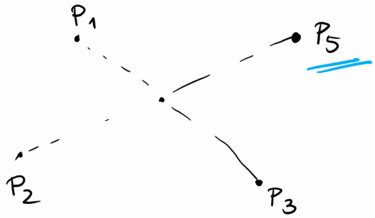
$$\left(= \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} P_2 + \frac{1}{2} P_3\right)\right)$$

$$\underline{\underline{P_4 = (2, 2, 4)}}$$

Exemplul 2. Cod sursă `02_C_4_poligoane3d_exemplu2.cpp`

Fie punctele $P_1 = (6, 2, 0)$, $P_2 = (-4, 4, 8)$, $P_3 = (0, 0, 8)$ (toate trei situate în planul de ecuație $x + y + z = 8$).

b) Să se determine P_5 astfel ca patrulaterul $P_1P_2P_3P_5$ să fie convex.



Alegem P_5 a.î. $P_1P_2P_3P_5$ să fie paralelogram.

$$\frac{P_1 + P_3}{2} = \frac{P_2 + P_5}{2}$$

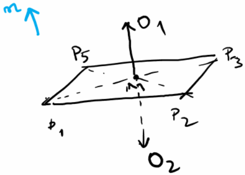
(mijloacele segmentelor $[P_1P_3]$ și $[P_2P_5]$ coincid)

$\Rightarrow P_5 = P_1 + P_3 - P_2 = (10, -2, 0)$

Exemplul 2. Cod sursă `02_C_4_poligoane3d_exemplu2.cpp`

Fie punctele $P_1 = (6, 2, 0)$, $P_2 = (-4, 4, 8)$, $P_3 = (0, 0, 8)$ (toate trei situate în planul de ecuație $x + y + z = 8$).

c) Să se determine puncte O_1 și O_2 astfel ca poligonul $P_1P_2P_3P_5$ să fie văzut din față, respectiv din spate.



- calculăm vectorul normal n :

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = \ldots = (32, 32, 32)$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- alegem, în mod convenabil un punct M în plan și un vector coliniar/același sens cu n.

am ales: $M = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_3 = (3, 1, 4)$ și vectorul coliniar cu n : $(10, 10, 10)$

· considerăm $O_1 = M + (10, 10, 10) = (13, 11, 14)$

$O_2 = M - (10, 10, 10) = (-7, -9, -6)$

$\left(\overrightarrow{MO_1} = 10\sqrt{3}\, n \quad \overrightarrow{MO_2} = -10\sqrt{3}\, n\right)$

Exemplu de poligon concav - context 2D

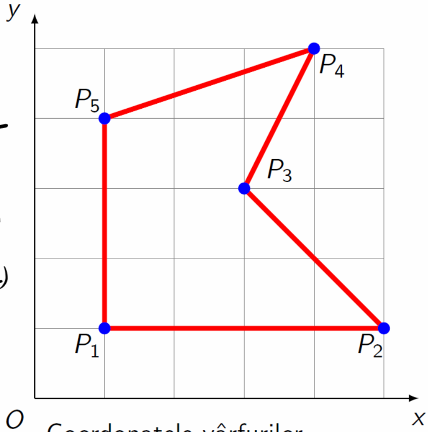
$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (0,0,6)$

$\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4} = (0,0,\underline{\underline{-6}})$

$\overrightarrow{P_3P_4} \times \overrightarrow{P_4P_5} = (0,0,5)$

$\overrightarrow{P_4P_5} \times \overrightarrow{P_5P_1} = (0,0,9)$

$\overrightarrow{P_5P_1} \times \overrightarrow{P_1P_2} = (0,0,12)$



! vf. cel mai din stânga este convex.

Coordonatele vârfurilor

$P_1 = (1,1), P_2 = (5,1), P_3 = (3,3), P_4 = (4,5), P_5 = (1,4)$

Criterii pentru convexitatea / concavitatea unui poligon

Fie $\mathcal{P} = (P_1 P_2 \dots P_n)$ un poligon 2D.

Criterii pentru convexitatea / concavitatea unui poligon

Fie $\mathcal{P} = (P_1 P_2 \ldots P_n)$ un poligon 2D.

- Poligonul $\mathcal{P}$ este convex $\Leftrightarrow$ toate produsele vectoriale de forma

$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \qquad (i \in \{1, 2, \ldots, n\};\ \text{conv. mod. } n)$$

  au ultima componentă fie pozitivă fie negativă (toate vârfurile sunt **vârfuri convexe**).

Criterii pentru convexitatea / concavitatea unui poligon

Fie $\mathcal{P} = (P_1 P_2 \dots P_n)$ un poligon 2D.

- Poligonul $\mathcal{P}$ este convex $\Leftrightarrow$ toate produsele vectoriale de forma

$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_i P_{i+1}} \qquad (i \in \{1, 2, \dots, n\}; \text{ conv. mod. } n)$$

  au ultima componentă fie pozitivă fie negativă (toate vârfurile sunt **vârfuri convexe**).
- În cazul poligoanelor concave avem, pe ultima componentă, și semnul '$+$' și semnul '$-$' (un vârf poate fi **convex** sau **concav**).

Criterii pentru convexitatea / concavitatea unui poligon

Fie $\mathcal{P} = (P_1 P_2 \ldots P_n)$ un poligon 2D.

- Poligonul $\mathcal{P}$ este convex $\Leftrightarrow$ toate produsele vectoriale de forma

$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_i P_{i+1}} \qquad (i \in \{1, 2, \ldots, n\}; \text{ conv. mod. } n)$$

  au ultima componentă fie pozitivă fie negativă (toate vârfurile sunt **vârfuri convexe**).
- În cazul poligoanelor concave avem, pe ultima componentă, și semnul '$+$' și semnul '$-$' (un vârf poate fi **convex** sau **concav**).
- Vârfurile convexe (corespund unor "unghiuri mai mici de 180°") au semnul vârfului celui mai din stânga.

Criterii pentru convexitatea / concavitatea unui poligon

Fie $\mathcal{P} = (P_1 P_2 \ldots P_n)$ un poligon 2D.

- Poligonul $\mathcal{P}$ este convex $\Leftrightarrow$ toate produsele vectoriale de forma

$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \qquad (i \in \{1, 2, \ldots, n\};\ \text{conv. mod. } n)$$

  au ultima componentă fie pozitivă fie negativă (toate vârfurile sunt **vârfuri convexe**).
- În cazul poligoanelor concave avem, pe ultima componentă, și semnul '$+$' și semnul '$-$' (un vârf poate fi **convex** sau **concav**).
- Vârfurile convexe (corespund unor "unghiuri mai mici de 180°") au semnul vârfului celui mai din stânga.
- **Concluzie:** Pentru un poligon 2D putem (i) stabili natura poligonului (convex / concav); (ii) stabili natura vârfurilor (**vârfuri convexe** sau **vârfuri concave**).

Criterii pentru convexitatea / concavitatea unui poligon

Fie $\mathcal{P} = (P_1 P_2 \ldots P_n)$ un poligon 2D.

- Poligonul $\mathcal{P}$ este convex $\Leftrightarrow$ toate produsele vectoriale de forma

$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \qquad (i \in \{1, 2, \ldots, n\};\ \text{conv. mod. } n)$$

  au ultima componentă fie pozitivă fie negativă (toate vârfurile sunt **vârfuri convexe**).
- În cazul poligoanelor concave avem, pe ultima componentă, și semnul '$+$' și semnul '$-$' (un vârf poate fi **convex** sau **concav**).
- Vârfurile convexe (corespund unor "unghiuri mai mici de 180°") au semnul vârfului celui mai din stânga.
- **Concluzie:** Pentru un poligon 2D putem (i) stabili natura poligonului (convex / concav); (ii) stabili natura vârfurilor (**vârfuri convexe** sau **vârfuri concave**).
- **Conceptul de viraj la dreapta / la stânga în parcurgerea unui poligon.**

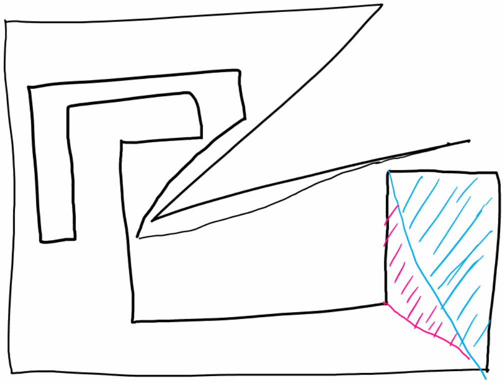
Criterii pentru convexitatea / concavitatea unui poligon

- Cum stabilim natura unui poligon în context 3D? (i) Punctele sunt coplanare. (ii) Linia poligonală $ABCD$ nu are autointersecții. (iii) Poligonul $ABCD$ este convex (dacă produsele vectoriale ale vectorilor determinați de vârfurile succesive au același sens) sau concav (în caz contrar).

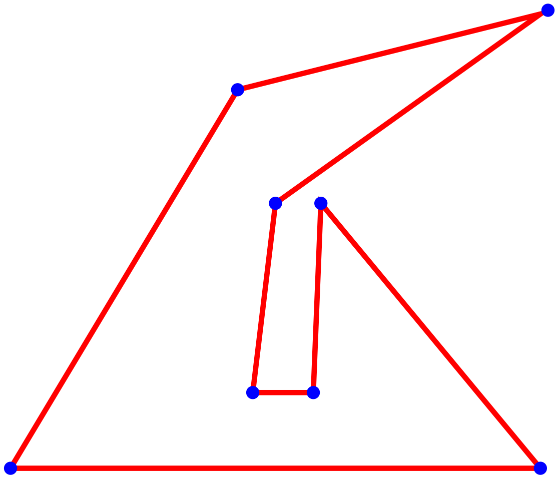
Criterii pentru convexitatea / concavitatea unui poligon

- Cum stabilim natura unui poligon în context 3D? (i) Punctele sunt coplanare. (ii) Linia poligonală $ABCD$ nu are autointersecții. (iii) Poligonul $ABCD$ este convex (dacă produsele vectoriale ale vectorilor determinați de vârfurile succesive au același sens) sau concav (în caz contrar).
- Exemplu: fie $A = (6, 2, 0), B = (-4, 4, 8), C = (0, 0, 8), D = (2, 2, 4)$. În acest caz, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (32, 32, 32)$, dar $\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{DA} = (-8, -8, -8)$. Cum am găsit doi vectori cu sensuri opuse, poligonul este concav.

Cum putem colora interiorul unui poligon concav?

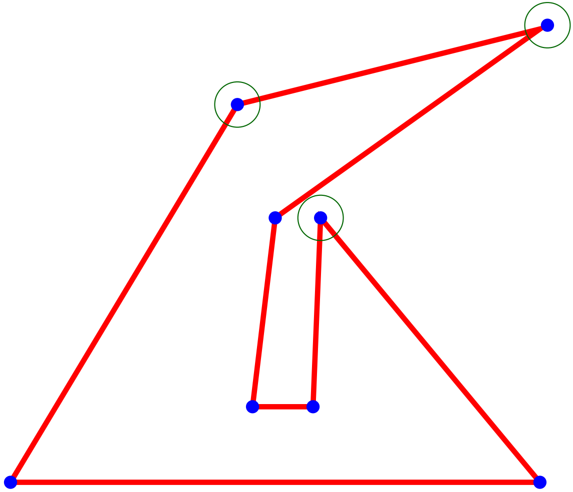


Triangularea unui poligon - algoritmul “Ear clipping”



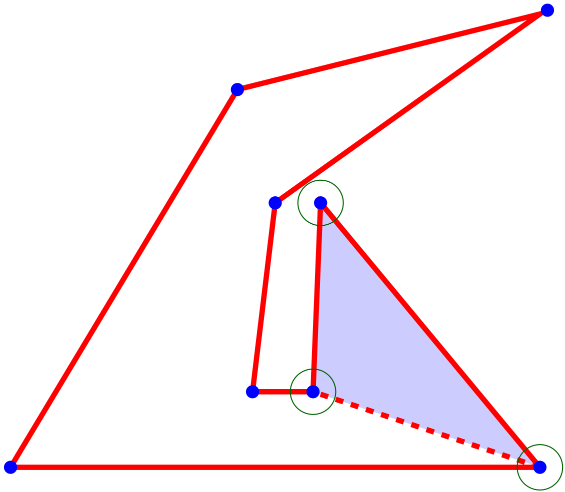
Poligon concav.

Triangularea unui poligon - algoritmul “Ear clipping”



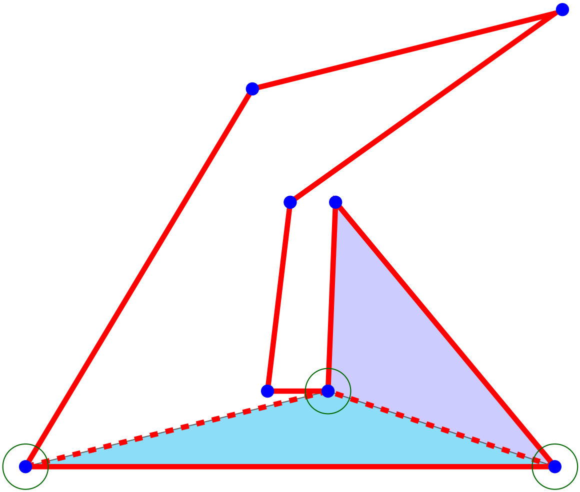
Vârfuri care pot fi selectate pentru start.

Triangularea unui poligon - algoritmul “Ear clipping”



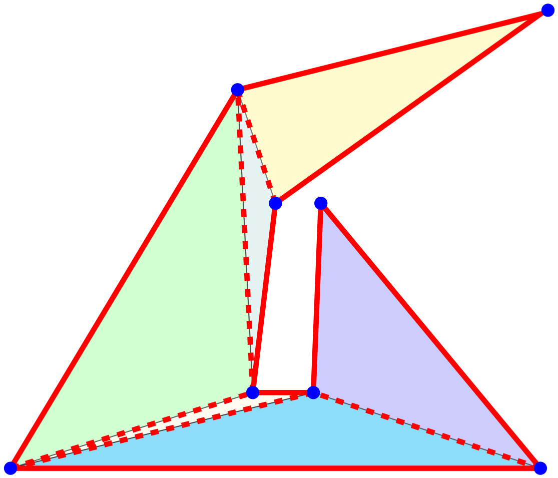
Ales un vârf, este considerat triunghiul determinat cu predecesorul și succesorul.

Triangularea unui poligon - algoritmul “Ear clipping”



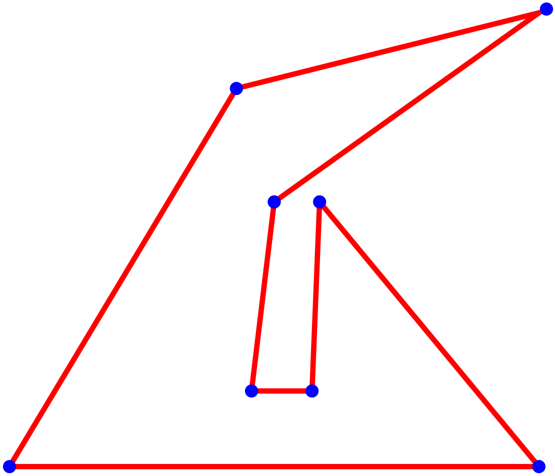
Procedura continuă....

Triangularea unui poligon - algoritmul “Ear clipping”



... se obţine o triangulare a poligonului.

Terminologie, exemple



Terminologie, exemple

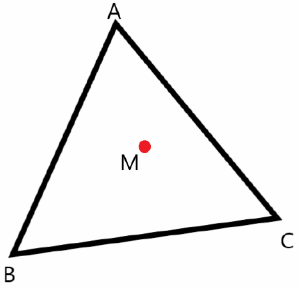
Dat un poligon 2D, vârfurile pot fi clasificate după două criterii:

- vârfuri **convexe / concave** (am discutat),
- vârfuri **principale / neprincipale**

Fie $P_0 P_1 \dots P_n$ un poligon. Un vârf P_i este **principal** dacă în interiorul sau pe laturile $\Delta P_{i-1} P_i P_{i+1}$ nu există niciun alt vârf al poligonului (sau, echivalent, $[P_{i-1} P_{i+1}]$ nu intersectează "restul" poligonului).

Observație

Fie ABC un triunghi în $\mathbb{R}^2$. Cum testăm dacă un punct M este în interiorul / pe laturile ΔABC?

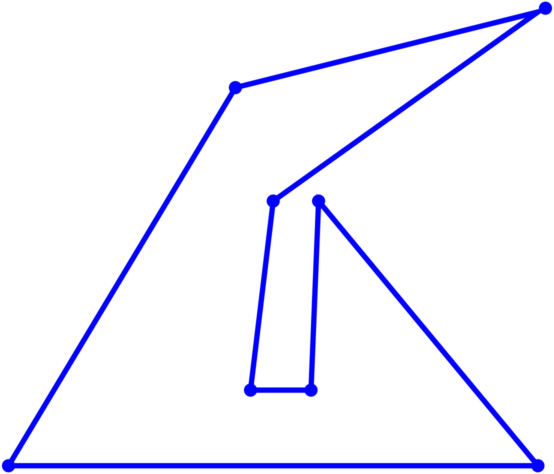


Var. 1. Folosind ecuațiile dreptelor și poziția lui M față de acestea.

Var. 2. Se stabilește dacă M este o combinație convexă dintre A, B, C.

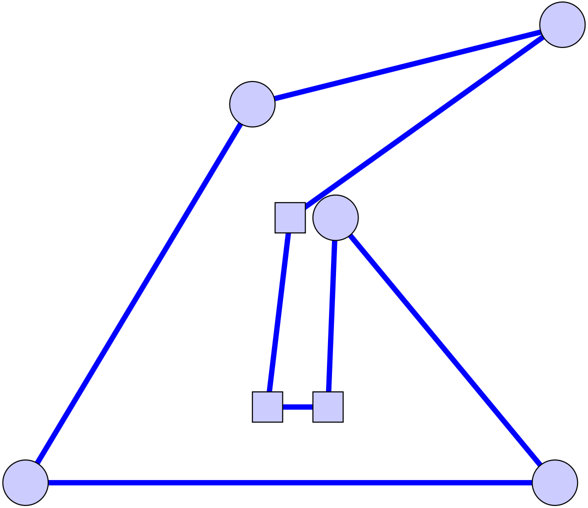
Var. 3. Folosind arii.

Clasificarea vârfurilor unui poligon - convexe/concave



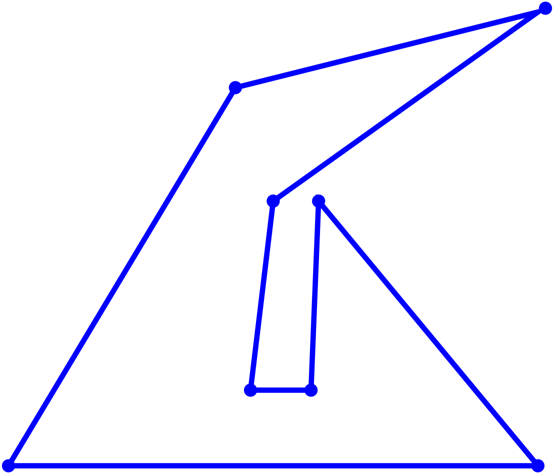
Vârfurile convexe / concave.

Clasificarea vârfurilor unui poligon - convexe/concave



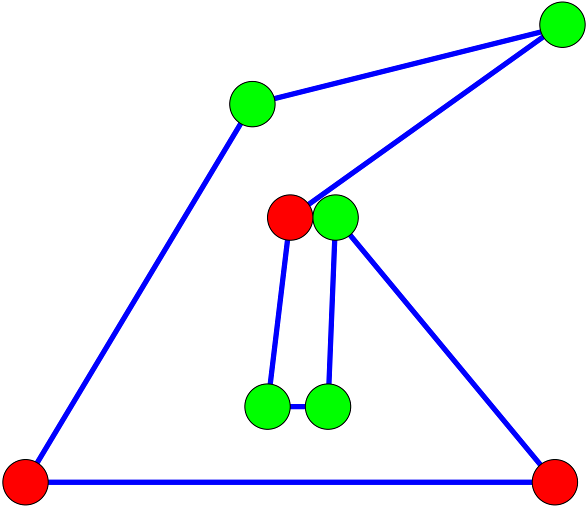
Vârfurile convexe (cerc) / concave (pătrat).

Clasificarea vârfurilor unui poligon - principale/neprincipale



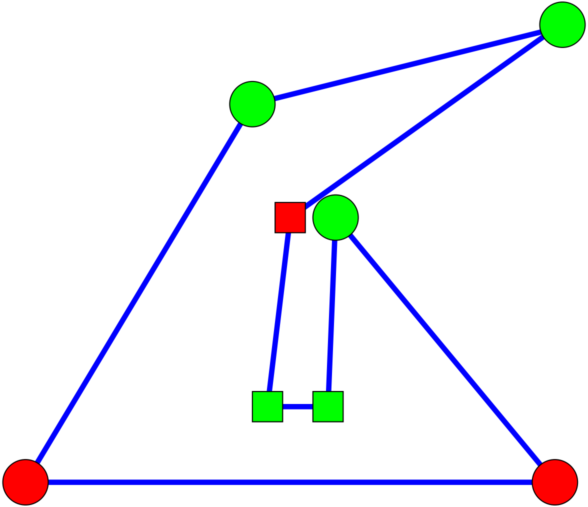
Vârfurile principale.

Clasificarea vârfurilor unui poligon - principale/neprincipale



Vârfurile principale (verde) / neprincipale (roșu).

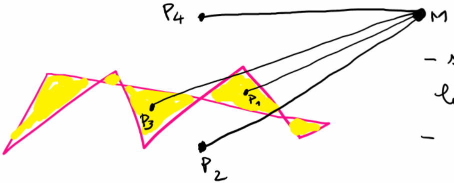
Clasificarea vârfurilor unui poligon



Patru tipuri de vârfuri.

Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Regula par-impar *(odd-even rule)*



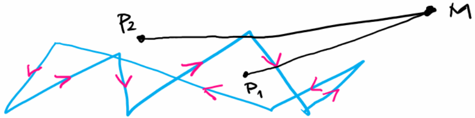
- se alege M în afara liniei poligonale
- se determină $x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}$ => "bounding box"
- se ia M în afara acestui bounding box

- pentru un punct P: <u>paritatea</u> nr. de intersecții dintre linia poligonală și [MP] → decizie

$\begin{cases} \text{nr. de intersecții par: } \underline{\text{exterior}} \\ \text{— „ — impar: } \underline{\text{interior}} \end{cases}$

Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Regula indexului nenul *(non-zero winding number rule)*



- sens de parcurgere
- convenții : stânga : "−" ; dreapta : "+"

⇒ nr. de intersecții:

cu semnul "+" : n_+

—"— "−" : n_-

Indexul unui punct $i_P = n_+ - n_-$

Un punct este exterior dacă indexul este 0

interior —"— $\neq 0$

Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Legătura dintre cele două reguli

- Are loc relația $(n_+ + n_-) =$ nr. total de intersecții, iar paritatea acestui număr ne dă regula par/impar.

Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Legătura dintre cele două reguli

- Are loc relația $(n_+ + n_-) =$ nr. total de intersecții, iar paritatea acestui număr ne dă regula par/impar.
- Dacă un punct P este exterior pentru regula indexului:

$$n_+ = n_- \;\Rightarrow (n_+ + n_-) \text{ este par,}$$

deci P este exterior și pentru regula par-impar.

Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Legătura dintre cele două reguli

- Are loc relația $(n_+ + n_-) =$ nr. total de intersecții, iar paritatea acestui număr ne dă regula par/impar.
- Dacă un punct P este exterior pentru regula indexului:

  $$n_+ = n_- \;\Rightarrow (n_+ + n_-) \text{ este par,}$$

  deci P este exterior și pentru regula par-impar.
- Reciproc nu este adevărat, adică există puncte care sunt exterioare pentru regula par-impar, dar nu sunt exterioare pentru regula indexului (v. exemplu).

Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Exemplu