Seminar 8 – Probabilitati, probabilitati conditionate

Proprietăţile probabilităţilor

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Dacă $A \subset B$ rezultă $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
4. Dacă $A \subset B$ rezultă $P(A) \leq P(B)$.
5. $0 \leq P(A) \leq 1$
6. $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$
7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
8. (**formula lui Poincare**) Fie $A_i \in \mathcal{F}, i = \overline{1,n}$. Atunci

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

Definiţia 1. Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp de probabilitate şi $A, B \in \mathcal{F}$ evenimente. Atunci **probabilitatea lui** A **condiţionată de** B se notează cu $P(A/B)$ sau $P_B(A)$ şi este definită prin

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Definiţia 3. Evenimentele $A_1, \ldots A_n$ se numesc **independente în ansamblu** (sau **în totalitatea lor**) dacă pentru orice $m \leq n$ şi $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_m \leq n$, avem

$$P(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_m}) = P(A_{j_1}) \ldots P(A_{j_m})$$

Teorema 1. ***(Formula de înmulţire a probabilităţilor)*** *Fie* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un câmp de probabilitate şi* $A_i \in \mathcal{F}, i = \overline{1,n}$ *evenimente astfel încât* $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) > 0$*. Atunci*

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Teorema 2. ***(Formula probabilităţii totale)*** *Fie* $(B_i)_{i \in I}$ *(I cel mult numărabilă) un sistem complet de evenimente (i.e.* $\Omega = \bigcup_{i \in I} B_i$ *şi* B_i *sunt incompatibile două câte două) cu* $P(B_i) > 0, \forall i \in I$*. Atunci* $\forall A \in \mathcal{F}$ *avem*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A/B_i) P(B_i).$$

Teorema 3. ***(Formula lui Bayes)*** *Fie* $(B_i)_{i \in I}$ *(I cel mult numărabilă) un sistem complet de evenimente cu* $P(B_i) > 0, \forall i \in I$ *şi* $A \in \mathcal{F}$ *un eveniment pentru care* $P(A) > 0$*. Atunci*

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i) P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A/B_j) P(B_j)}$$

1. **Schema lui Bernoulli (schema binomială)**

   Se efectuează n experimente independente şi fiecare dintre ele pune în evidenţă un eveniment A cu aceeaşi probabilitate de apariţie p. Să se determine probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze de k ori.

   $$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k = \overline{0,n}, \text{ unde } q = 1 - p$$

2. **Schema hipergeometrică (schema bilei neîntoarse)**

   Fie N bile, a albe şi b negre $(N = a + b)$. Se extrag n bile şi se cere probabilitatea ca x bile să fie albe şi $n - x$ negre.

   $$p = \frac{C_a^x \cdot C_b^{n-x}}{C_N^n}$$

3. **Schema polinomială** (**schema lui Bernoulli cu mai multe stări**)

Se efectuează n experimente independente care pun în evidenţă un sistem complet de evenimente $A_1, \ldots, A_r$ cu probabilităţile $p_1, \ldots, p_r$ $(p_1 + \ldots + p_r = 1)$. Să se determine probabilitatea ca fiecare A_i să se realizeze de k_i ori $(k_1 + \ldots + k_r = n)$.

$$P_n(k_1, \ldots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot \ldots p_r^{k_r}$$

Pentru $r = 2$ se obţine schema lui Bernoulli.

Model: Considerăm o urnă cu bile de culori $c_1, \ldots, c_r$ şi p_i probabilitatea de apariţie într-o extragere a unei bile de culoare c_i. Se fac n extrageri a câte o bilă cu condiţia ca la fiecare extragere urna să aibă aceeaşi compoziţie. Care este probabilitatea ca în extragerile efectuate să apară k_i bile de culoarea c_i, $i = \overline{1, r}$.

4. **Schema lui Poisson**

Schema binomială poate fi generalizată astfel: în diferite experimente independente evenimentul A apare cu diferite probabilităţi. De exemplu, dacă probabilitatea evenimentului A în experimentul al i-lea este p_i, atunci probabilitatea ca în n experimente independente evenimentul A să apară de k ori este dată de coeficientul lui x^k din dezvoltarea $\prod_{i=1}^{n}(p_i x + q_i)$, unde $q_i = 1 - p_i$.

Model: Se extrage câte o bilă din n urne ce conţin bile albe şi negre în diferite proporţii, asigurând probabilitatea p_i de obţinere a unei bile albe din urna U_i, $i = \overline{1, n}$. Probabilitatea ca din cele n bile extrase k să fie albe şi $n - k$ negre este $\sum p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k} q_{i_{k+1}} q_{i_{k+2}} \ldots q_{i_n}$

Ex: Intr-un spatiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ se considera evenimentele $A, B, C \in \mathcal{K}$ astfel incat $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Sa se determine $P(A^c), P(A^c \cup B), P(A \cup B^c), P(A^c \cup B^c), P(A^c \cap B^c)$.

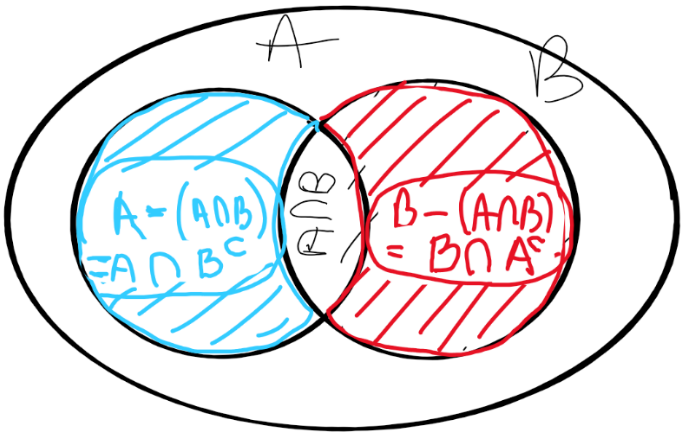
$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(A^c \cup B) = P(A^c) + P(B) - P(A^c \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \big(P(B) - P(A \cap B)\big) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$$

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P((A^c \cup B^c)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P((A^c \cap B^c)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$$



Ex: Este mai probabil sa obținem cel puțin un număr 6 în 4 aruncări cu zarul sau să obținem cel puțin o dublă șase în 24 de aruncări cu 2 zaruri?

A: sa obtinem cel putin un 6 din 4 aruncari cu zarul

B: sa obtinem cel putin o dubla 6 din 24 aruncari cu 2 zaruri

$$P(A) = 1 - P(nu\ obtinem\ nici\ un\ 6\ din\ 4\ aruncari\ cu\ zarul) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \cong 0{,}5177$$

$$P = \sum_{i=1}^{4} P(sa\ obtinem\ exact\ i\ fete\ de\ 6\ din\ 4\ aruncari\ cu\ zarul)$$

$$= C_4^1 \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3 + C_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 + C_4^4\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cong 0{,}5177$$

$$P = \underbrace{\frac{1}{6}}_{sa\ fie\ fata\ 6\ la\ prima\ aruncare} + \underbrace{\frac{5}{6}\frac{1}{6}}_{\substack{nu\ iese\ 6\ la\ prima\ aruncare, \\ dar\ iese\ la\ a\ doua\ aruncare}} + \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}}_{\substack{nu\ iese\ 6\ la\ primele\ 2\ aruncari, \\ dar\ iese\ la\ a\ treia\ aruncare}} + \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^3\frac{1}{6}}_{\substack{nu\ iese\ 6\ la\ primele\ 3\ aruncari, \\ dar\ iese\ la\ a\ patra\ aruncare}} \cong 0{,}5177$$

$$P(B) = 1 - P(sa\ nu\ obtinem\ nici\ o\ dubla\ de\ 6\ din\ 24\ de\ aruncari\ cu\ doua\ zaruri) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 0{,}49$$

Ex: O urnă conține 12 bile numerotate de la 1 la 12. Să se determine probabilitatea ca bilele numerotate cu 5,7,11 să iasă la extragerile de rangul 5,7,11.

$$P = \frac{9 * 8 * \dots * 1}{12 * 11 * \dots * 1} = \frac{9!}{12!}$$

Ex: O urnă conține 99 de bile identice, numerotate 1, 2,... 99. Care e probabilitatea ca printr-o extragere să obținem o bilă numerotată cu un pătrat perfect?

$$P = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

Ex: Un scafandru are 2 sisteme de oxigen independente, astfel încât dacă unul se defectează scafandrul să primească în continuare oxigen. Presupunem că probabilitatea ca sistemul I să funcționeze este 0,9, în timp ce probabilitatea ca sistemul II să funcționeze este 0,8.

a) Găsiți probabilitatea ca nici un sistem să nu se defecteze;

b) Găsiți probabilitatea ca cel puțin un sistem să funcționeze.

A: sistemul I sa functioneze

B: sistemul II sa functioneze

a)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}9 * 0{,}8 = 0{,}72$$

b)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}98$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - 0{,}1 * 0{,}2 = 0{,}98$$

$$P(A \cup B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B^c) + P(A \cap B) = P(A^c)P(B) + P(A)P(B^c) + P(A)P(B) = 0{,}98$$

Ex: Se consideră 3 urne, fiecare conținând bile albe și bile negre. În prima urnă avem 30 bile din care 18 sunt albe, în a doua urnă 20 bile din care 6 sunt albe, iar în a treia urnă 30 bile din care 10 sunt albe. Care este probabilitatea ca, extrăgând din fiecare urnă o bilă, să obținem 2 bile albe.

A: extrag bila alba din urna 1, $P(A) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

B: extrag bila alba din urna 2, $P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

C: extrag bila alba din urna 3, $P(C) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Se poate aplica schema lui Poisson, fiind extrageri din urne diferite. Probabilitatea ceruta este coeficientul lui X^2 din descompunerea

$$\left(\frac{3}{5}X+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{10}X+\frac{7}{10}\right)\left(\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{10}X^2+\cdots$$

Deci probabilitatea ceruta este $\frac{3}{10}$

Ex: Trăgătorul A nimerește ținta de 8 ori din 11 trageri, iar B de 9 ori din 10 trageri. Dacă trag simultan în aceeași țintă, care e probabilitatea ca ținta să fie atinsă.

A: tragatorul A nimereste tinta, $P(A)=\frac{8}{11}$

B: tragatorul B nimereste tinta, $P(B)=\frac{9}{10}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{8}{11}+\frac{9}{10}-\frac{8*9}{11*10}=\frac{107}{110}$$

Ex: Doi studenți care se prezintă la un examen au probabilitățile de promovare 0,5, respectiv 0,8. Care este probabilitatea ca:

a) ambii studenți să promoveze examenul;

b) un singur student să promoveze;

c) cel puțin un student să promoveze;

d) nici un student să nu promoveze.

$$P(A)=0{,}5, P(B)=0{,}8$$

a)

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0{,}4$$

b)

$$P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B)=0{,}5*0{,}2+0{,}5*0{,}8=0{,}5$$

c)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}9$$

d)

$$P(A^c\cap B^c)=1-P(A\cup B)=0{,}1$$

Ex: Se dau P(A) = 0,5 și P(A ∪ B) = 0,6. Găsiți P(B) in fiecare din urmatoarele cazuri:

a) A și B sunt incompatibile;

b) A și B sunt independente;

c) $P(A/B) = 0{,}4$

a)

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}5 - 0 = 0{,}1$$

b)

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A)P(B) =>$$

$$P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2$$

c)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A) + P(B)P(A|B) =>$$

$$P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A|B)} = \frac{0{,}1}{0{,}6} = \frac{1}{6}$$

Ex: Sase vânători au zărit o vulpe și au tras simultan. Presupunem că de la distanța respectivă, fiecare vânător nimerește în mod obișnuit vulpea cu probabilitatea 1/3. Să se afle probabilitatea ca vulpea să fie nimerita.

A_i: vanatorul i sa nimereasca vulpea

$$P(\cup A_i) = 1 - P(\cap A_i^c) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{665}{729}$$

Ex: Se consideră n plicuri pe care sunt scrise n adrese diferite. In aceste plicuri sunt introduse la întâmplare n scrisori, câte una pentru fiecare din cele n adrese. Să se determine probabilitatea ca cel puțin o scrisoare să nimerească în plicul cu adresa corespunzătoare?

A_i: scrisoarea i nimereste in plicul i

Aplicam formula lui Poincare

$$P(\cup A_i) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(\cap A_j)$$
$$= C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

Ex: Se dau $P\ (A/B)\ =\ 7/10$, $P\ (A/B^c)\ =\ 3/10$, $P\ (B/A)\ =\ 6/10$. Să se determine $P(A)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{7}{10}$$

$$P(A|B^c) = \frac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A) - P(A\cap B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A)\left(1 - \frac{P(A\cap B)}{P(A)}\right)}{P(A)\left(\frac{1}{P(A)} - \frac{P(B)}{P(A)}\right)} = \frac{1 - \frac{P(A\cap B)}{P(A)}}{\frac{1}{P(A)} - \frac{P(B)}{P(A)}} = \frac{1 - P(B|A)}{\frac{1}{P(A)} - \frac{P(B)}{P(A)}}$$

$$= \frac{3}{10}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{6}{10}$$

$$P(A\cap B) = \frac{7P(B)}{10}$$

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{7}{6}$$

Din relatiile anterioare se gaseste ca:

$$P(A) = \frac{21}{46}$$