Statistică și Probabilități

An II, sem II

14. 02. 202.

Laborator

70% EXAMEN

30% LABORATOR

- proiect (de prezentat în sesiune, max. 4 per

"20 p.

- activitate = 10 p.

(teme
răspunsuri
- de citit 1 capi
și de prezentat
colegilor max
10 minute

- bonus 3 p.

Laborator - limbaj R - interpretat
- multiparadigmă - Poo
- Procedural
- Functional
- Array

RStudio - program

Download R + RStudio

Seminar

Experimente cu rezultate aleatoare:

ex: • aruncăm moneda

$S = \{C, P\}$ spațiul rezultatelor
$|S| = 2$ finit

• 2 monede $= 2^{2}$ elemente

o monedă = 2 fețe

$S = \{CC, CP, PC, PP\}$

contează ordinea

• aruncarea zarurilor

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$|S| = 6.$

• 2 zaruri

1 zar = 6 fețe

$S = \{(1,1), \dots (6,6)\}$

$|S| = 6^{2}$

Probleme de numărare: determinați nr. de rezultate pt. S

Eveniment $A \subset \Omega$

Notații: $A, B \ldots$

$P: \quad P(\Omega) \to [0,1]$ Probabilitate

$\downarrow$ $\mathcal{F}$ sigma algebră de mulțimi

Evenimente
- simple $A = \{(1,1)\}, B = \{(6,6)\}$ (pt zar)
- compuse: $A \cup B = A$ sau B

Teoria mulțimilor:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spațiu de probabilitate

Ex: 1: $A, B, C, \mathcal{F}$

$P(A) = 1/3$

$P(B) = 1/4)$

$P(\underbrace{A \cap B}_{A \text{ și } B}) = 1/6$

Se cere: $P(A^c)$, $P(A^c \cup B)$, $P(A \cup B^c)$, $P(A^c$

$P(A^c \cap B^c)$

$A^c = \Omega \setminus A$

$\hookrightarrow$ evenimentul contrar lui A

$A \cup B$: A sau B

$A \cap B$: A și B

Reguli de calcul cu prob.

$- P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$- P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

↳ doar când A și B disjuncte

$(A \cap B \neq 0)$

$- P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$

Ω - ev. singur.

$- P(A^c) = 1 - P(A)$

$- (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$- (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$\circ\ P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

$\circ\ P(A^c \cup B) = P(A^c) + P(B) - P(A^c \cap B)$

$= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} -$

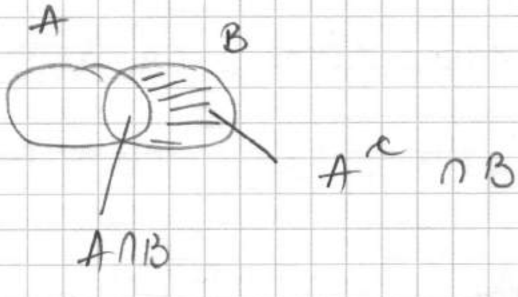
$(A^c \cap B)^c = A \cup B^c = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B)^c$

$P(B^c) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$= P(A) + P(B^c) - 1 + P(A^c \cup B)$

$= \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - P(A^c \cap B)$

$= 1 - P(A^c \cap B) \Rightarrow 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$



$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + P(A^c \cap B) \Rightarrow P(A^c \cap B) = \frac{1}{12}$

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

$P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c$

$1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

$$\frac{7 - \frac{2}{12}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}}$$

$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{7}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

- $P(A^c \cap B^c) = \frac{7}{12}$

(2) 75% păr negru
40% ochi negri.
25% ambele

a) care este probabilitatea de a avea păr negru sau ochi negri?

b) care este pr. de a NU avea păr sau ochi negri?

$$P(A) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}.$$

$$P(B) = \frac{4}{10}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{10}.$

b) $P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{10}$

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}.$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Dem:

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$

$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) + P(B \cap$
$+ P(A \cap B \cap C)$

③ $\Omega = \{1, \dots 1000\} \in N$

n divizibil cu 3, 5, 6

$A = \{ n \in \Omega \mid n \vdots 3 \}$

$B = \{ n \in \Omega \mid n \vdots 5 \}$

$C = \{ n \in \Omega \mid n \vdots 6 \}$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P($
$+ P(A \cap B \cap C)$

$P(A) = \frac{\text{nr caz fav}}{\text{nr caz pos}} = \frac{\left[\frac{1000}{3}\right]}{1000} = 0{,}333 = \frac{333}{100}$

$P(B) = \frac{[1000/5]}{1000} = 0{,}2$

$P(C) = \frac{[1000/6]}{1000} = 0{,}160.$

$P(A \cap B) = \frac{[1000/15]}{1000} =$

! $15 = 3 \cdot 5 = (A \cdot B)$

$P(A \cap C) = [1000 / 18] / 1000$

$P(B \cap C) = [1000 / 30] / 1000.$

$P(A \cap B \cap C) = [1000/90] / 1000$

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Omega$

Principiul includerii și al excluderii:

$$P(\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n}_{A}) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) +$$

realizarea a cel puțin unuia
din evenimentele $A_1, \ldots A_n$

$$+ \sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n)$$

Dem. prin inducție matematică
$n=2$, $n=3$ am verificat

Pres. $P(k)$

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le k} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < e \le k} P(A_i \cap A_j \cap A_e) + \ldots + (-1)^{k+1} P(A_1 \cup \ldots \cup A_k)$$

Dem. $P(k+1)$

$$P(\underbrace{(A_1 \cup \ldots \cup A_k)}_{A} \cup \underbrace{A_{k+1}}_{B})$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cup \dots \cup A_k) + P(A_{k+1}) - P\left((A_1 \cup \dots \cup A_k) \cap A_{k+1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le k} P(A_i \cap A_j) + \sum P(A_i \cap A_j \cap A_l) + \dots$$

$$+ (-1)^{k+1} P(A_1 \cup \dots A_k) + P(A_{k+1}) - \left[\sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap A_{k+1}) \right.$$

$$- \sum P(A_i \cap A_j \cap A_{k+1}) + \sum P(A_i \cap A_j \cap A_l \cap A_{k+1}) +$$

$$+ (-1)^{k+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le k+1} P(A_i \cap A_j) + \sum P(A_i \cap A_j \cap A_l)$$

$$+ (-1)^{k+1} P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{k+1})$$

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Prop $P(n)$ e adv $\forall\, n \geq 1$

Aplicație. Problema

a) n scrisori

- prob. cel puțin o scrisoare pusă în plicul care trebuie
- prob nicio scrisoare să nu fie în plicul ei

b) prob. ca soția să cu soțul ei.

21./02/2022

Laborator

orice în R = obiect = unitatea de bază

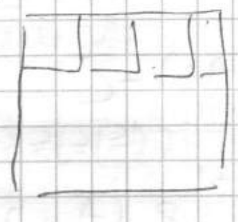
rm (objects()) NU MERGE

?rm => help

În R numărăm de la 1.

var. numite - mem permanentă → ENVIROMENT

var. nenumite - mem. STIVĂ



rm(objects())

întoarce o listă care, dc nu este salvată, se stochează pe stivă

=> este ștearsă înainte de rm

=> EROARE

vector = structură omogenă (toate var. au ac. tip)

listă = structură neomogenă

matrice = struct. omogenă

dataframes

colоane → variabile

linii → "observații".

DATAFRAME = structură de tip matriceal
= coloane omogene

NUME	VÂRSTĂ	- -

VARIABILE
- numerice ⇝ semn. concretă (ex: vârstă)
- categoriale = nenumerice ⇝ nominale (ex: nume) / ordinale

nominal ⇒ individualizează ceva / pe cineva

ordinal ⇒ pot fi ierarhizate

Implementarea valorilor categoriale în R se face cu FACTOR
↳ de ambele feluri

gândire
- programatică
- statistică

În R nu dăm <u>tipul</u> variabilelor

numere
- întregi fără ,
- double cu ,

← = op. de atribuire → ALT MINUS

CTRL + ENTER ⇒ RUN

Cine este în vârful săgeții ia valoarea

o expresie este evaluată de la ST. la DR. în ordinea precedenței op. !! ⇒ :, *, +

$d_2 + d_4 \to d6 \leftarrow d1$ ERОARE

↓ în urma atribuirii d6 nu mai e var., devine număr fixat ⇒ nu pot pune o var. peste un număr fixat.

9 : 120 ⇒ generează toate numerele dintre 9 și 120.

v5 ← c() ⇒ vector null

{ 1 : 7 ⇒ tip int
{ (1, 2, ..., 7) ⇒ tip numeric

a ← seq(5, 9, 0.1) ⇝ capetele nu sunt mereu incluse

a ← seq(5, 9, length.out = 11)

1 = vector de lungimea 1

ultim ⇝ combinatorics în Rcm
⇒ cran (7 pg.)
→ permutări
→ aranj.
→ combinări
⇒ temă

23. 02. 20..

CURS II

Experiment $\rightarrow \Omega$ mulțimea rezultatelor posibil..

$\mathcal{F}$ σ algebră de mulțimi pe Ω

<u>Def</u> $\mathcal{F}$ σ algebră
a) $\emptyset \in \mathcal{F}$
b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
c) $(A_n)_n$, $A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{F}$

Ex: 1) $\{\emptyset, \Omega\}$ σ - alg. pe Ω

2) $A \in \Omega$ $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$

3) $\mathcal{P}(\Omega)$

4) $A, B \in \Omega$

$\mathcal{F} = \{\emptyset, A, B, A^c, B^c, A\cup B, A\cap B, A\cup B^c$ ..., $B\cup A^c, A^c\cup B^c, (A\cup B)^c, (A\cup B^c)^c, (B\cup A^c)^c, (A^c\cup B^c)^c, \Omega) =$

$= \{\emptyset, A, B, A^c, B^c, A\cup B, A\cup B^c, B\cup A^c, A^c \cap$ ...

$A^c\cap B^c, \underbrace{A^c\cap B}_{B\setminus A}, \underbrace{A\cap B^c}_{A\setminus B}, A\cap B, \Omega$

$\cancel{A^c\cup B^c}$

Dacă $\mathcal{M}$ este o familie de mulțimi din Ω, $\overset{\mathcal{F}_0}{\sigma}$ algebră generată de $\mathcal{M}$ este cea mai mică σ algebră care conține $\mathcal{M}$ (adică dacă $\mathcal{F}$ este o altă σ algebră care conține pe $\mathcal{M}$, atunci $\mathcal{F}$ conț.. și pe $\mathcal{F}_0$).

Notăm $\mathcal{F}_0 = \langle M \rangle$

Ex: $M = \{A, B\}$

$\mathcal{F}_0$ este σ alg de mai sus.

Definim σ algebră Borel este σ algebră generată de intervalele din $\mathbb{R}$. Ea este formată din mulțimi care se obțin prin operații de reuniune, intersecție și ~~reuniune~~ diferență asupra intervalelor.

σ - algebră din $\mathbb{R}^n$ este generată de mulțimi de forma $B_1 \times B_2 \ldots \times B_n$, unde $B_i \in \mathcal{B}$ $i = 1, 2, \ldots, n$

mulțime boreliană

Def $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s.n. ~~PUNCT~~ CÂMP DE PROBABILITATE

Ex de funcții de probabilitate când Ω nu e finită

1) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

$P_1\{i\} = \frac{1}{2^i}$ $\forall i$; $i = 1, 2, \ldots$

$\sum_{i \geq 1} P(\{i\}) = 1.$

2) $\Omega = (0, \infty)$ $\mathcal{F} = \mathcal{B}$

$\forall I$ interval $\subset \Omega$

$P(I) = \int_I e^{-x} dx$

$P(I) \geq 0$

~~Aditivitatea rezultă din~~

~~Activitatea~~ rezultă din ~~activitatea~~ integrali
Aditivitatea aditivitatea

$P(\cup_n I_n) = \sum_n P(I_n)$ dc. integralele $(I_n)_n$ sunt
disjuncte 2 câte 2

$$\int_{\bigcup_n I_n} e^{-x}\,dx = \sum_n \int_{I_n} e^{-x}\,dx$$

Probabilități condiționate

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ câmp de probabilitate

Fie un eveniment $B \in \sigma$ algebră $\mathcal{F}$ cu propriet
: probabilitatea de realizare a evenimentului $B > 0$
$\Rightarrow P(B) > 0$

Def: $P_B(A) = P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $A \in \mathcal{F}$ (σ algebră)

$P_B(A) = P(A/B)$ este probabilitatea lui A condiționată de B

Ex: cameră digitală cumpărată de o mulțime de persoane.
60% pers cumpără 1 card de mem. în plus.

40 % cumpără o baterie în plus.
30 % cumpără ambele

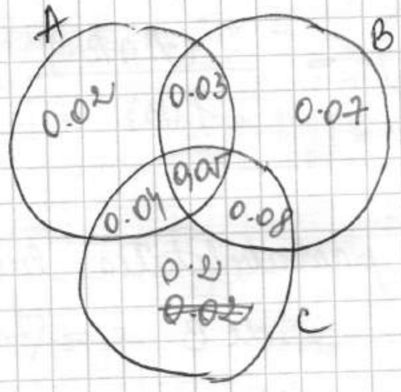
A = evenimentul ca o pers. să cumpere card $= P(A) = \frac{60}{100}$
$= 0,6$.
B = ev. ca pers. să cumpere baterii $= P(B) = \frac{40}{100} = 0.4$.
$P(A \cap B) = 0,3 = \frac{30}{100}$.

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100}$

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,6} = \frac{3}{6} = \frac{50}{100}$.

EX 2: o revistă are 3 rubrici (A = artă; B = cărți, C = cinema)
Un cititor citește la întâmplare 1 din cele 3 rubrici

Citește de regulă	A	B	C	$A \cap B$	$A \cap C$	$B \cap C$	$A \cap B \cap C$
Prob	0.14	0.23	0.37	0,08	0,09	0,13	0,05



$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.08}{0.23} = \frac{8}{23}$

$$P(A/B\cup C) = \frac{P(A\cap(B\cup C))}{P(B\cup C)} = \frac{P((A\cap B)\cup(A\cap C))}{P(B)+P(C)-P(B\cap C}$$

$$= \frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)}{P(B)+P(C)-P(B\cap C)} = \frac{0{,}08+0{,}09-0{,}05}{0{,}23+0{,}37-0{,}13}$$

$=$

(1) P (A / a citit cel puțin o rubrică) $=$

$= P(A/A\cup B\cup C) = \dots$

$=$

Regula de înmulțire pentru $P(A\cup B)$

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(A\cap B) = [P(A/B)\cdot P(B)]}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow \boxed{P(A\cap B) = P(B/A)\cdot P(A)}$$

Ex: un magazin care vinde 3 tipuri de produse { Bra / Bra / Bra

$B_1 \to 25\%$ (necesită reparație)
$B_2 \to 20\%$ — " —
$B_3 \to 10\%$ — " —

a) Se cere probabilitatea ca un cumpărător să cumpere un B_1 care necesită reparație

$P(B_1$, reparații$)$

b) P (B reparație) $\Rightarrow$ produs în general

c) $P(\text{brand } i / \text{reparație})$ $\Rightarrow$ produsul nu necesită reparație.
$i = 1, 2, 3.$

a) $P(B1, \text{rep.})$

Notăm $\begin{cases} A_i : \text{brand } i \quad i = 1, 2, 3. \\ B : \text{prod necesită rep.} \end{cases}$

$P(A_1) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

$P(A_2) = \frac{30}{100}$

$P(A_3) = \frac{20}{100}$

$P(B/A_1) = \frac{25}{100}$ A_1 necesită rep. în procent de ...

$P(B/A_2) = \frac{20}{100}$

$P(B/A_3) = \frac{10}{100}$

a) $P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) = \frac{25}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{200}$

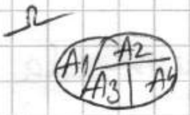
b) $P(B) = ? = P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3))$
$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$

Formula probabilității totale $= P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{100} + \frac{30}{100} \cdot \frac{20}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{10}{100} = 0,205.$

c) $P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0.125}{0.205} = 0.61$

Formula probabilității Totale



Fie $(A_1, \ldots A_n)$ un sistem compl de evenimente $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \right)$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pt } i \neq j.$$

Fie B eveniment.

$$\boxed{P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)}$$

Dem

$$P(B) = P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n))$$
$$= P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \ldots \cup (B \cap A_n))$$
$$= P((B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n))$$
$$= P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

Formula lui Bayes:

În ipoteza de mai sus,

$$\boxed{P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B/A_j) \cdot P(A_j)}}$$

$$\boxed{A, B \text{ independente } \Leftrightarrow P(A/B) = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

28.02.2022

(1) Se consideră n plicuri pe care sunt scrise n adrese diferite. În aceste plicuri sunt introduse, la întâmplare, n scrisori, câte 1 pt fiecare din cele n adrese. Să se determine probabilitatea ca cel puțin o scrisoare să nimerească în plicul cu adresa coresp.

Se rez cu $\boxed{\text{principiul includerii și al excluderii}}$.

A_i = evenimentul ca scrisoarea să corespundă adresei.

$$P(A_i) = \frac{\text{nr caz fav}}{\text{nr caz pos}} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{(n-3)!}{n!}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = \frac{1}{n!} = \frac{(n-n)!}{n!}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \cdot \frac{(n-2)!}{n!} +$$

$$C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$= n \cdot \frac{1}{n} - \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{(n-2)!}{n!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1}{n!}$$

(2) Se aruncă 2 zaruri.

a) care este probabilitatea de a obține o dublă condiționat de faptul că suma punctelor este 8

b) care este probabilitatea de a obține o dublă condiționat de faptul că suma punctelor obținute este ≥ 10

A => evenimentul de a avea o dublă

B => suma punctelor = 8

C => suma punctelor ≥ 10

$$P(A) = \frac{\text{nr. caz. fav.}}{\text{nr. caz. pos.}}$$

$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots (6,6)\}$

card $(\Omega) = 36$

$\Omega_1 =$ ~~ev. în care suma ≥ 8 sau ≤ 8~~, duble

$\Omega_1 = \{(1,1), (2,2), \dots (6,6)\}$

card $(\Omega_1) = 6$

$$P(A) = \frac{|\Omega_1|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$\Omega_2 =$ suma 8

$\Omega_2 = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$

$|\Omega_2| = 5$

$$P(B) = \frac{5}{36}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{36}\cdot\frac{36}{5} = \frac{1}{5}$$

$P(A\cap B) =$ suma $= 8$ și numerele sunt egale $= \frac{1 \text{ caz fav}}{36 \text{ pos}}$

$\Omega_3 =$ suma ≥ 10

$\Omega_3 = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,5),(6,4),(6,6)\}$

$|\Omega_3| = 6$

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{36}\cdot\frac{6}{1} = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} &P(A\cap B) = P(A)P(B/A) \\ &P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cap A_2)\dots \\ &\qquad P(A_n/A_1\cap A_2\dots\cap A_n) \end{aligned}}$$

(3) Într-o urnă, conținând 5 bile albe și 10 bile negre, se extrag succesiv, fără înlocuire, 4 bile. Să se determine probabilitatea ca cel puțin 1 să fie albă

A = cel puțin o bilă este albă

B = nicio bilă nu este albă, toate sunt negre

$$A^c = B_1\cap B_2\cap B_3\cap B_4.$$

$$P(A^c) = P(B_1\cap B_2\cap B_3\cap B_4)$$

$P(B_1)$ = „prima bilă este albă"

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) \cdot \underbrace{P(B_3/B_1 \cap B_2)}_{\frac{8}{13}} \cdot$$

$$\cdot P(\underbrace{B_4 / B_1 \cap B_2 \cap B_3}_{\frac{7}{12}})$$

$P(B_1) = \frac{10}{15}$

$P(B_2/B_1) = \frac{9}{14}$

$\Rightarrow P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12}$

$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \ldots$

(4) O uzină produce becuri cu ajutorul a 3 utilaje A, B astfel:

A asigură $\frac{1}{5}$ din producție

și $\frac{1}{20}$ din becuri sunt defecte

B asigură $\frac{3}{10}$ din produse și $\frac{1}{25}$ becuri sunt defecte

C asigură $\frac{1}{2}$ din producție și $\frac{1}{100}$ din becuri sunt defec

Se alege 1 bec la întâmplare

a) Să se calculeze prob. ca becul să fie defect și produs de A, resp. B, resp. C $= P(D \cap A_1)$

b) Dacă becul este defect, să se determine prob ca el să fie produs de A, resp B, resp C.

A_1 = becul provine din A   D = becul e defec

A_2 =   B

A_3 C

ine

a) $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \cdot P(D/A_1) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{100}$.

$P(A_2 \cap D) = P(A_2) \cdot P(D/A_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{25} = \frac{3}{250}$.

$P(A_3 \cap D) = P(A_3) \cdot P(D/A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{200}$.

b) $P(A_1/D) = \frac{P(A_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{100}}{P(D)}$

$P(D) = P(A_1) \cdot P(D/A_1) + \underbrace{P(A_2) \cdot P(D/A_2)} + \underbrace{P(A_3) \cdot P(D/A_3)}$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{20} + \frac{3}{250} + \frac{1}{200}$.

$= \frac{1}{100} + \frac{3}{250} + \frac{1}{200}$.

$= \frac{3}{200} + \frac{3}{250} = 3 \cdot \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{250}\right) = 3 \cdot \left(\frac{5+4}{1000}\right)$

$= \frac{3 \cdot 9}{1000} = \frac{27}{1000}$.

(5) Se consideră că o ~~bilă~~ urnă conține 5 bile albe și 4 neg[re]
Se extrag 3 bile

a) care este probabilitatea ca cele 3 bile extrase să fie de aceeași culoare.

b) care este probabilitatea ca 2 bile să fie albe și neagră?

5 albe
4 negre $\Rightarrow$ 9 bile total
3 extrageri

nr. cazuri posibile $= A_9^3$

A_1 = ev. ca prima bilă să fie albă
A_2 = ev. ca a doua bilă să fie albă
A_3 = ev. ca a 3 a bilă să fie albă
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = ?$

B_1 = ev. ca prima bilă să fie neagră
B_2 = even. ca a doua bilă să fie neagră
B_3 = ev. ca a-3a bilă să fie neagră.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot \underbrace{P(A_2 / A_1)}_{\frac{4}{8}} \cdot \underbrace{P(A_3 / (A_1 \cap A_2))}_{\frac{3}{7}}$$

$$P(A_1) = \frac{\text{nr bile albe}}{\text{nr tot. bile}} = \frac{5}{9}$$

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) \cdot P(B_2 / B_1) \cdot P(B_3 / B_1 \cap B_2)$$
$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$$

$$P\left(\begin{array}{c}\text{toate bilele} \\ \text{de aceeași culoare}\end{array}\right) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap B$$
$$= \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$$

b) 2 albe și 1 neagră =

$$= P(A_1 \cap A_2 \cap B_3) + P(A_1 \cap B_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) + P(B_3 / A_1 \cap A_2) +$$
$$P(A_1) \cdot P(B_2 / A_1) + P(A_3 / A_1 \cap B_2) +$$
$$P(B_1) \cdot P(A_2 / B_1) + P(A_3 / B_1 \cap A_2)$$

=

$$= \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \dots$$

(6) Populația Nicosiei este $\frac{3}{4}$ greacă și $\frac{1}{4}$ turcă, iar $\frac{1}{5}$ din greci și $\frac{1}{10}$ din turci vorbesc engleza.

a) Care este prob. de a întâlni o pers. care vorbește lb. engleză?

b) Un străin întâlnește 1 locuitor al Nicosiei care vb. engl. Care este probabilitatea să fie grec?

a). ev. ca pers. să vb. engleza $= A$

$B_1 =$ ev. ca pers. să fie greacă

$B_2 =$ ev. ca pers. să fie turcă

~~$P(A) = ?$~~

$$\Rightarrow P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = P(A) =$$

$$= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{20} + \frac{1}{40} = \frac{7}{40}.$$

b) $$P(B_1 | A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{\frac{7}{40}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{7}{40}} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{7}{40}} = \frac{3}{20} \cdot \frac{40}{7} = \frac{6}{7}.$$

Temă

O urnă conține 3 bile albe și 7 negre
Se extrag succesiv 2 bile
Să se calculeze

a) prob. ca ambele bile să fie albe
b) prob ca a doua bilă să fie neagră
c) prob ca prima bilă să fi fost albă dc
a doua a fost albă.

04.03.20

EVENIMENTE INDEPENDENTE

CURS III

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

Dacă $P(A/B) = P(A) \Rightarrow B$ nu are nicio influență asupra realizării lui $A \Rightarrow A$ și B sunt independente

Ex: 1 zar

$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

$C = \{1, 2, 3, 4\}$

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(A/B) = \frac{\text{nr cazuri fav}}{\text{nr cazuri pos.}} = \frac{1}{\underbrace{3}_{\text{nr elem. } B}}$

↓

pare din B

$P(A/B) \neq P(A) \Rightarrow A$ și B nu sunt independente

$P(A/C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(A) \Rightarrow A$ și C independente

Teoremă

A, B independente $\Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A/B) = P(A)$

$\Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

Ex: O firmă care vinde 2 produse

Prod 1 $\to$ 30% necesită reparație în perioada de garanție

prod 2 $\to$ 10% - - - -

1 pers. cumpără ambele produse.

Prob. ca ambele să aibă nevoie de reparații?

$$= P(prod1) \cdot P(prod2) = \frac{30}{100} \cdot \frac{10}{100} = \frac{300}{10000} = \frac{3}{100}$$

Generalizare:

① A, B, C independente $\Leftrightarrow$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

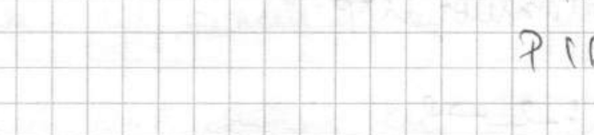
② $A_1, A_2, \dots A_n$ independente.

Orice submulțime $\Rightarrow$ indep.

$\forall k = \overline{1,n}\ \forall i_1, i_2, \dots i_k,\ i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\Rightarrow P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\, P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

Ex.



A_i = eveniment ca rez. i să funcționeze mai mult decât ...

t_0 dat

$P(A_i) = 0,9$

P(sistemul fct după t_0)

$= P\left((A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_4 \cap A_5 \cap A_6)\right)$

$= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_4 \cap A_5 \cap A_6) - P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_6)$

$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) + P(A_4) \cdot P(A_5) \cdot P(A_6) - P(A_1) P(A_2) \dots P(A_6)$

$= 0,9^3 + 0,9^3 - 0,9^6.$

VARIABILE ALEATOARE. (v.a)

Avem 1 experiment

Ω - mulțimea variabilelor exp.

X este v. a : $X: \Omega \to \mathbb{R}$

X = funcție definită pe Ω cu valori în $\mathbb{R}$

<u>Ex</u>:

Un student vrea să se conecteze la internet.

$\Omega = \{S, E\}$

succes, eșec

$X : \{S, E\} \to \mathbb{R}$

$\begin{cases} X(S) = 1 \\ X(E) = 0. \end{cases} \Rightarrow$ variabilă aleatoare care ia 2 valori

s.n. de tip <u>Bernoulli</u>

Ex2:

$T : \Omega \to [3.45 - 4.15]$

variabilă aleatoare care ia ca val. 1 interval

VAR.AL / v.a.
- DISCRETE → mulțimea de valori = finită sau număra[bilă]
- DE TIP CONTINUU → mulțimea de valori e interva[l] din $\mathbb{R}$.

VARIABILE ALEATOARE DISCRETE

Ex: Avem 6 loturi cu piese
în fiecare lot sunt piese defecte

lot	1	2	3	4	5	6
piese def	0	2	0	1	2	0

Alegem 1 lot din cele 6, la întâmplare

X = nr. de piese defecte din lot

X ia valorile 0, 1, 2.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$P(X=0) = P(\text{lot 1 sau lot 3 sau lot 6}) = \dfrac{\text{nr caz fav}}{\text{nr caz pos}}$

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(X=1) = P(\text{lot 4}) = \frac{1}{6}$.

$P(X=2) = P(\text{lot 2 sau lot 5}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Obs: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \geq 0$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

REPARTIȚIE DE PROBABILITATE

$(p_1, p_2, \ldots p_n)$ cu $p_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

$p_i = P(X = x_i) \qquad i = \overline{1,n}$

unde $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ este mulțimea valorilor variabilelor aleatoare

$\longrightarrow$

$X : \Omega \to \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = D.$

$p_i = P(X = x_i) \qquad i = \overline{1,n}$

$(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

Funcție masă de probabilitate

$p : R \to [0, 1]$

$$p(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin D \\ P(x) & , x = x_i \\ \parallel & \\ x_i & \quad i = \overline{1,n} \end{cases}$$

$P(X = x_i)$

Avem probabilități de forma

$P(X = x_i)$

ne interesează $P(X \leq x_i)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$0.5 \quad 0.167 \quad 0.333$

$P(X \le 0) = P(X=0) = 0.5$ (cele de jos)

$P(X < 0,5) = P(X=0) = 0.5$

$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0.5 + 0.167$
$= 0.667$

$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0.5 + 0,167 +$
$0.333 = 1.$

$P(X \le 3) = 1. = P(X \le 2)$

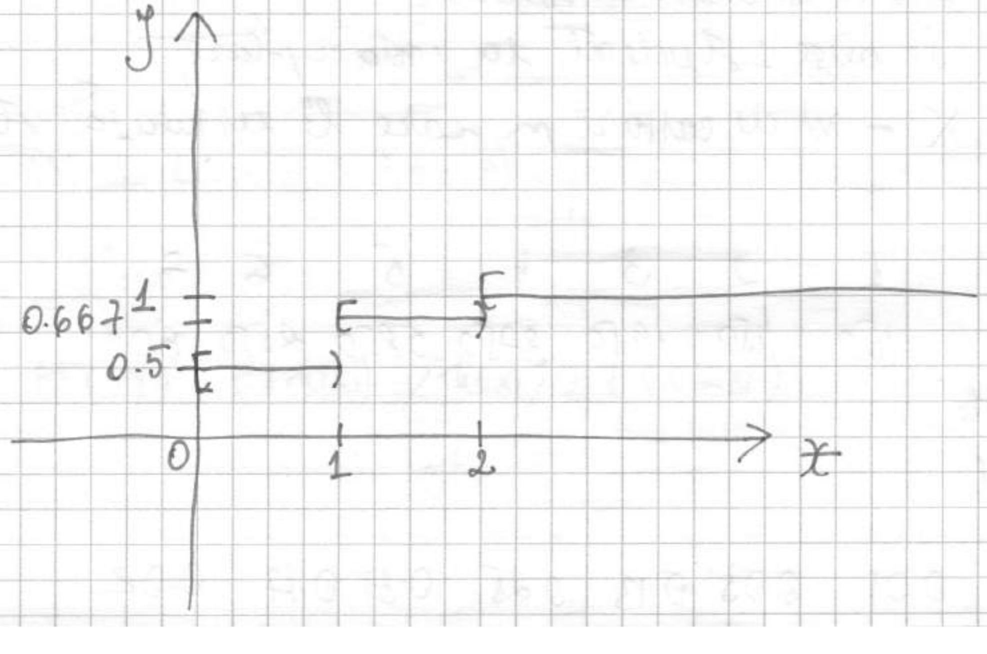
FUNCȚIE DE REPARTIȚIE CUMULATĂ

Fie X v.a $X : \Omega \to R$

$F_X : R \to [0,1]$, $F(x) = P(X \le x)$ $\forall x \in R$

Pentru exemplul anterior

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,5, & x \in [0,1) \\ 0,667, & x \in [1,2) \\ 1, & x \in [2,\infty), x \ge 2 \end{cases}$$



Proprietăți ale fct. de repartiție:

1) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

2) F_X este continuă la stânga

3) F_X crescătoare

4) $P(X = x_0) = P(X \leq x_0) - P(X < x_0)$

$= F_X(x_0) - \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F_X(x)$

5) $P(x \leq X < y) = P(X \leq y) - P(X < x)$

$= F(y) - \lim_{\substack{z \to x \\ z < x}} F(z)$

MEDIA și VARIANȚA UNEI VARIABILE ALEATOARE DISCRETE.

Ex:

Universitate cu 15.000 studenți

Se alege 1 student la întâmplare

X = nr de cursuri pe care le urmează studentul

nr cursuri dif.

x	1	2	3	4	5	6	7
stud. înregistrați la fiecare curs	150	450	1950	3750	5850	2550	300
$p(X = x)$	0.01	0.03	0.13	0.25	0.39	0.17	0.02

Val medie a lui X

$$M = \frac{1 \cdot 150 + 2 \cdot 450 + 3 \cdot 1950 + \dots + 7 \cdot 300}{15000}$$

$$= 1 \cdot \frac{150}{15000} + 2 \cdot \frac{450}{15000} + 3 \cdot \frac{1950}{15000} + \dots + 7 \cdot \frac{300}{15000}$$

$$= 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) + \dots + 7 \cdot P(X=7)$$

Def:

Fie $X : \Omega \to D = \{x_1, \dots, \}$ o variabilă aleatoare discretă

și $(p_1, p_2 \dots)$ repartiție de probabilitate

$P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, \dots$

$\Rightarrow$ Media variabilei aleatoare X este

$$E(X) = \sum_{i \geq 1} p_i \cdot x_i$$

Ex:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$ Bernoulli

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p.$$

$$Y = h(X)$$

$$E(Y) = E(h(X)) \sum_{i \geq 1} h(x_i) \cdot P(X = x_i)$$

Dacă $h(x) = ax + b$

$E(aX+b) =$

$X: \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n$

$h(x) = aX+b: \quad ax_1+b \quad ax_2+b \quad \dots \quad ax_n+b$

$$E(aX+b) = \sum_{i\geq 1} (ax_i+b)\cdot P(X=x_i)$$

$$= \underbrace{a\sum_{i\geq 1} x_i \cdot P(X=x_i)}_{E(X)} + b \underbrace{\sum_{i\geq 1} P(X=x_i)}_{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(aX+b) = aE(X)+b}$$

$$\boxed{E(X_1+X_2+\dots+X_n) = E(X_1)+E(X_2)+\dots+E(X_n)}$$

unde $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt variabile aleatoare

VARIANȚA UNEI VARIABILE ALEATOARE

Fie X = v. a. discretă

$X: \Omega \to A = \{x_1, x_2, \dots\}$

Fie $\boxed{\mu = E(X)}$

Se numește varianța lui X

$$V(X) = E(X-\mu)^2$$

notăm $V(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2$

Se numește abatere medie standard (deviația stand

$$\sqrt{V(X)} = \sigma_X = \sigma$$

O formulă mai simplă de calcul

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - \mu^2}$$

Dem:

$$V(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) =$$

$$= E(X^2) - E(2X\mu) + E(\mu^2) \qquad \boxed{E(ct) = ct}$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$

$$= E(X^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= E(X^2) - \mu^2.$$

07.03.2022.

Laborator

[,]
linii — coloane

$v3$ = vector

v7 <- v3[v3 > 100] => un vector cu dacă toate elementele sunt mai mici sau mai mari decât 100 => vector de true sau false

v3[v3>100] -> extrage pozițiile unde apare true
=> toate valorile din v3 > 100

funcția sample extrage aleator x nr. dintr-un range

mai eficientă

x[x%8 == 0][x[x%8==0] < 200] => toate el diviz cu 8 și < 200

denumire

SAU

x[(x%8 == 0) & (x < 200)]

SAU

y <- x[x%8 == 0]
y[y < 450]

Iau întâi valorile %8 și din ale a => val < 450.

sort(x) ⇒ sortare cresc

sort(x, decreasing = T) ⇒ sortare desc.

exp(1) = e

log(abs(x)) ⇒ log în baza e

log(abs(x), base = 15) ⇒ log în baza 15

? log ⇒ help

16^(1/4) ⇒ $16^{1/4} = \sqrt[4]{16}$.

a ← 1:3 ⇒ a = 1 2 3.

b ← 4:6 ⇒ b = 4 5 6.

c = a + b ⇒ c = 5 7 9

d = a * b ⇒ d = 4 10 18

a1 = 1 2 3 4 5 6

b = 4 5 6

c1 = a1 + b

c1 = 5 7 9 8 10 12

Se adună 2 structuri cu dim. diferite ⇒ vectorul mai mic se reciclează doar dc. lungime mic : lung. mare

$\underbrace{\text{complex}(3}_{\text{3nr}}, \underbrace{10}_{\text{parte reală}}, 2) \to$ p imag

NA = not available

x = vector de 10 elem.

Se poate face o selecție de 50 elem. din x ⇒ restul de 40 sunt trecute cu NA.

y ← y[!is.na(y)] ⇒ elimin valorile NA

x[1:5] < x[6:10] ⇒ compară pt elemente
⇒ vector de bool

(*) vector ce compară elem de pe poz i (imp.) cu poz i+1

n ← 10.

x ← sample (1:1000, n)

t ← x[2*1:(n/2) − 1] < x[2*1 : (n/2)]

(*) Condiția de mai sus e adevărată pt ce elemente? (poziții)

⇒ pozițiile unde am TRUE

⇒ which(t)

(*) numere între a și b, div. cu 8, nu și cu 7

a = 485.

b = 5879

c = 8

d = 7

x <- a:b

length(x[(x %% c == 0) && x(%% d != 0)])

---

library(prob)

rolldie(1) => 1 2 3 4 5 6 => cazuri aruncare 1 zar

rolldie(3) => cazuri aruncare 3 zaruri

rolldie(1, n=17) => 1 zar și 17 fețe

tosscoin(1) => aruncare o monedă => H (cap) T (ban)

Temă → TODO LAB 2

matrice[x,] => linia x

matrice[, x] => coloana x

parcurge LAB 3

11.03.2022

VARIABILE ALEATOARE

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

Ω finită sau numărabilă

$X_i \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & & x_n \\ \vdots & & & \\ p_1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix}$

$E(X) = \sum_{i \geq 1} x_i p_i \overset{not}{=} \mu$

$V(X) = \sum_{i \geq 1} (x_i - \mu)^2 p_i = E(X - \mu)^2$

TEOREMĂ: $V(X) = E(X^2) - \mu^2$

ex: $X : \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 0.5 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$ $\quad X^2 : \begin{pmatrix} 4^2 & 6^2 & 8^2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$

$\mu = E(X) = 4 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,4 = 5,4$.

$E(X^2) = 4^2 \cdot 0,5 + 6^2 \cdot 0,3 + 8^2 \cdot 0,4 = \dots$

$V(X) = E(X^2) - 5,4^2 = 2,44$

$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,44} = 1,562$

PROP: 1) $Y = h(X)$ $\quad V(Y) = E(h(X) - E(h(X))^2)$

$V(b) = 0$

$V(aX) = a^2 V(X)$

$V(aX + b) = a^2 V(X)$

$\sqrt{a}\, X + b = |a| \sqrt{X}$

X, Y v.a. $\quad X + Y$ v.a

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

X, Y indep $\Leftrightarrow P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$ $\forall$ $x \in D_X$, $y \in D_Y$

X, Y indep $\Leftrightarrow V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

$X: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ $\quad E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$.

$X \sim Bernoulli(p)$ $\quad E(X^2) = p$

$X^2: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ $\quad V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$

$= pq$ unde $q = 1-p$.

TIPURI DE DISCRETE

1) $X \sim Bernoulli(p)$

2) $X \sim Binomial(n, p)$

Avem un exp binomial:

Experim. este format din n încercări independente. Fiecare încercare având 2 rezultate, succes(S), eșec (E), iar la fiecare încer P de a avea succes este aceași (p). V. a. X de interes reps. n de succese din n încercări

$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ p_0 & p_1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix}$ $, p_i = P(X=i), i = \overline{0, n}$

ex: $n=3$

EEE, EES, ESE, SEE, SSE, SES, ESS, SSS.

$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$

$P(X=0) = P(EEE) = P(E) \cdot P(E) \cdot P(E) = (1-p)^3$

$P(X=1) = P(EES) + P(ESE) + P(SEE)$

$= P(E) \cdot P(E) \cdot P(S) + P(E) \cdot P(S) \cdot P(E) + P(S) \cdot P(E) \cdot P(E)$

$= (1-p)^2 \cdot p + (1-p^2) \cdot p + (1-p)^2 p$

$= 3p(1-p)^2$

$P(X=2) = 3p^2(1-p)$; $P(X=3) = P(SSS) = p^3$

NOT: funcția masă de probabilitate $bin(x; n, p)$ $x = \overline{0, n}$

TEOR: Dacă X este o v.a repartizată Binomial (n, p) atunci
$$P(X = n) = bin(x; n, p) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \quad x = \overline{0, n}$$

EXER: 20% dintre volumele dintr-o editură nu îndeplinesc cond de calitate. Fie X nr. de vol alese la întâmplare din 15 care nu îndeplinesc cond; $X \sim Bin(n, p)$ $n = 15$, $p = 0,2$

P ca dintre cele 15 vol, 8 să nu îndeplinească cond de calitate.

$P(X = 8) = C_{15}^8 \; (0,2)^8 \cdot (0,8)^7$

$P(X \leq 8) = P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=8)$.

TEOR: Dacă $X \overset{\text{repartizată}}{\sim} Bin(n, p) \Rightarrow E(X) = np$.

$V(X) = np(1-p) = npq$.

DEM. $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

$X_i : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ Bernoulli $i = \overline{1, n}$

$E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = p + \dots + p = np$.

$V(X) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = pq + \dots + pq = npq$.

exer: 75% dintre cumpărăturile făcute la 1 magazin se fac cu un card de credit. Se aleg 10 clienți la întâmplare și X este v.a care repr. nr. clienților care cumpără cu card de credit.

$X \sim Bin(10; 0,75)$

$E(X) = 10 \cdot 0,75 = 7,5$

$\sigma^2 = V(X) = 10 \cdot 0,75 \cdot 0,25 = 1,875$

$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,875}$

3. VA REPARTIZATE HIPERGEOMETRIC

Fie o mulțime cu N elem $\begin{cases} M \text{ „succese"} \\ N-M \text{ „eșecuri"} \end{cases}$

Se extrag n elem. X v.a care numără succesele

$X = x$ $\qquad\qquad \max(0, n-N+M) \le x \le \min(M, n)$

Notăm funcția masă de prob $h(x; N, M, n) = P(X=x)$

TEOR: $h(x; N, M, n) = \dfrac{C_M^x \, C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$ $\qquad$ $n - x \le N - M$

$x \ge n - N + M$

$x \ge 0 \Rightarrow$

EX: La o univ se defectează 20 de imprimante. 8 laser, 12 cerneală. Se aleg 5 imprimante pt reparare. Care e.p. ca 2 să fie cu cerneală $(X=2)$.

$$P(X=2) = \frac{C_{12}^2 \cdot C_8^3}{C_{20}^5} = 0{,}238.$$

TEOR: $X \sim h(x; n, N, M)$

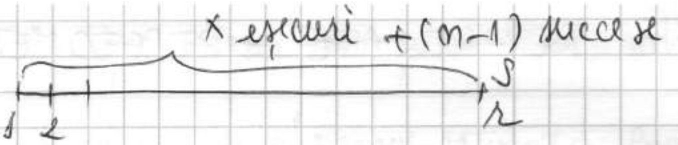
notăm $p = \frac{N}{M} \Rightarrow \begin{cases} E(X) = np \\ V(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot np(1-p) \end{cases}$

4. REPARTIȚIA NEGATIV BINOMIALĂ

Fie un exp. binomial format din n încercări indep, S, E

$P(S) = p$

X va care numără eșecurile până la succesul r



$n = 0, 1, 2, \ldots$

$$P(X = x) = C_{x+r-1}^{x}\,(1-p)^{x}\,p^{r-1}\cdot p = C_{x+r-1}^{x}\,(1-p)^{x}\cdot p^{r}$$

ex: Un doctor vrea să recruteze 5 pacienți care să urmeze 1 trat. nou.
Fie $p = 0,2$ prob ca pacientul să accepte
Care e prob să fie întrebați 15 pacienți?

Not: $P(X = x) = nb(x; p, r)$

$$P(X = 10) = nb(10; 0,2; 5) = C_{14}^{10}\cdot 0,2^{5}\cdot 0,8^{10} = 0,034$$

TEOR: $E(X) = \dfrac{r(1-p)}{p}$; $V(X) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$

5. REPARTIȚIA POISSON

Def: Fie $\lambda > 0$. Spunem că v.a X este repartizată Poisson de parametrul λ dacă fct. masă de prob este $P(X=x) = \dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x}}{x!}$
$x = 0, 1, 2, \ldots$

Not: $X \sim Poisson(\lambda)$

Obs: $\sum_{x \geq 0} P(X = x) = 1$.

$$\sum_{x\geq 0} P(X=x) = \sum_{x\geq 0} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{k}}{x!} = e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} + \ldots\right)$$

$$= e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1.$$

$$E(X) = \sum_{x\geq 0} x\cdot P(X=x) = \sum_{x\geq 0} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{x}}{x!}x = e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\sum_{x\geq 1}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda} = \lambda \Rightarrow E(X) = \lambda$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \lambda^2 \qquad E(X) = \lambda$$

$$E(X^2) = \sum_{x \geq 0} x^2 P(X=x) = \sum_{x \geq 0} (x^2 - x) P(X=x) + \overbrace{\sum_{x \geq 0} x P(X=x)}^{E(X)=\lambda}$$

$$= \sum_{x \geq 0} x(x-1) \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} + \lambda = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x \geq 2} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}}_{e^{\lambda}}$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$\Rightarrow V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

ex: La o vânătoare, X repr nr. de iepuri vânați. Prob să vânăm 5 iepuri $X \sim Poisson(\lambda)$; $\lambda = 4,5$

$$P(X=5) = e^{-4,5} \cdot \frac{4,5^5}{5!} = 0,1408$$

$$P(X \leq 5) = P(X=0) + \dots + P(X=5)$$

REPARTIȚIA POISSON CA LIMITĂ

$X \sim Bin(n, p)$

$n \to \infty$

$p \to 0$ $\qquad np = \lambda$

$b(x; n, p) \to Poisson(x, \lambda)$

ex: Probabilitatea ca o pagină să aibă cel puțin o eroare = 0,
Erorile sunt independente. Avem o carte cu 400 pg.
Probabilitatea să avem o sg pg cu erori

$p = 0,005 \quad n = 400 \quad X =$ nr pg cu erori

$P(X=1)$

$\lambda = np = 400 \cdot 0,005 = 2$

$$P(X=1) = Poisson(1; 2) = e^{-2} \cdot \frac{2^1}{1!} = 0,271$$

14.03.2022

LABORATOR STATISTICA SAPT. 5

1000 elem. aleat.

X ← sample(-3400 : 45 000, 1000)

y ← sample(-3400 : 45000, 1000)

Comparare vector x cu y

Câte elem. din x sunt mai mari decât y

t ← abs(x) < abs(y)

TRUE = 1

FALSE = 0.

⇒ t = vector de true și false

sum(t) = 497 ⇒ toate cele 497 valori TRUE. (nr.)

set.seed(15129) ⇒ 481

$15129 = 123^2$

plasează la o anumită poziție de unde extrage valori

TEMA

sum(abs(x) < abs(y)) ≤ 500

(matrice ← matrix(1:10, nrow = 5, ncol = 2))

mulțime de valori pe care le așează pe coloan

matrice[, 2] ⇒ extrage coloana 2, DAR o afișează ca linie

(*) Coloana 1, liniile 2 și 5

matrice[c(2,5), 1]

concatenare

nume ← c(letters[1:12]) ⇒ toate literele mici (12 litere)

vector cu litere mici

ft. LETTERS ⇒ toate literele mari

cbind ⇒ concatenare pe coloane

rbind ⇒ concatenare pe linii

(cub ← array(1:30, dim = c(3,2,5)))

⇒ 5 matrice de 3 linii și 2 coloane

listă ← list(a = 10:20, b = "text", c(TRUE, FALSE, TRUE, 2+1i)
length(listă) = 4
listă [[1]][2] ⇒ din primul element extrag a doua poz ⇒ 11.
listă $ a ⇒ vectorul a
listă $ a[5] ⇒ 14
class (listă $ a) ⇒ integer
class (lista[[4]]) ⇒ complex

când am matrice de tipuri diferite, când face conversii neconv
nabile ⇒ folosim dataframes pt a remedia problema

Șirul de caractere în dataframes este convertit la tip factor. r
coloane.

datasets:: mtcars
↓
bază de date cu mașini

length(dataframe) = 2 ⇒ un dataframe are dim. 2
dim(dataframe) ⇒ nr de linii și nr de coloane
nrow(dataframe) ⇒ nr de linii.

fluni ← as.factor(luni) ⇒ toate lunile, de la prima apariție
ex: apr apr dec march dec = luni.
⇒ apr dec march

table (fluni) = organizarea informației : apr dec marc
= nr de apariții. 2 2 1

table(fluni) / length (fluni) ⇒ câți % sunt născuți atunci (ex: 2

PACHETUL PROB

t3 ← tosscoin(3) → toate combinatiile posibile la aruncarea de 3ori a 3 monedei
t3$ toss 2 ⇒ coloana a doua

dataframe

H	T	H	T
T	H	H	T
T	T	H	T
H	T	T	H

⇝ Probabilitatea să am o secvență de 2T ?
Câte secvente de 2T sunt?

t3 ← tosscoin(1) ⇒ o aruncare
sum(omega1 == "H")/nrow(omega1) ⇒ 1/2.

⇒ Am o monedă. Probabilitatea ca la aruncare să am H (să pice H)

Tema de la final

SEMINAR Prob. + St. 14.03.2022

① O sacoşă conţine 4 bile roşii, 3 albe şi 2 ~~albastre~~ verzi. Se extrag 2.
Fie R, V = nr. bilelor roşii şi verzi din cele extrase.

a) găsiţi probabilitatea comună pt R şi V.

b) p. ca eşantionul să conţină cel puţin 1 bilă v. şi 1 roşie

$\{R=r;\ V=v\}$

$$P(\{R=r;\ V=v\}) = \frac{C_4^r \cdot C_2^v \cdot C_3^{2-r-v}}{C_9^2}$$

r \ v	0	1	2	
0	1/12	1/6	1/36	$= P(r=0)$ (suma)
1	1/3	2/9	0	$= P(r=1)$
2	$\frac{1}{6}$	0	0	$= P(r=2)$
	$P(v=0)$ ...			

$C_9^2 = \frac{9!}{7!\,2!} = 8.9$ ...

$C_3^2 = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = \ldots$

$C_2^1 = \frac{2!}{1!\,1!} = 2$

$C_4^1 = \frac{4!}{3!\,1!} = \ldots$

$r=0;\ v=0 \Rightarrow P = \frac{C_4^0 \cdot C_2^0 \cdot C_3^2}{36} = \frac{1 \cdot 1 \cdot}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

$r=0;\ v=1 \Rightarrow P = \frac{C_4^0 \cdot C_2^1 \cdot C_3^1}{36} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$r=0;\ v=2 \Rightarrow P = \frac{C_4^0 \cdot C_2^2 \cdot C_3^0}{36} = \frac{\cancel{0}\ 1 \cdot 1}{36} = \frac{1}{36}$.

$r=1;\ v=0 \Rightarrow P = \frac{C_4^1 \cdot C_2^0 \cdot C_3^1}{36} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 3}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

$r=1;\ v=1 \Rightarrow P = \frac{4 \cdot C_2^1 \cdot C_3^0}{36} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

$r=1;\ v=2 \Rightarrow P = \frac{4 \cdot C_2^2 \cdot C_3^{\cancel{0}\,-1}}{36} = ?$

$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{3} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36} = \frac{36}{36} = 1$

b) $P(r \leq 1 \text{ și } v \leq 1) = P(r=0 \text{ și } v=0) + P(r=0 \text{ și } v=1) + P(r=1 \text{ și } v=0)$
$+ P(r=1 \text{ și } v=1) = \frac{1}{12} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{29}{36}$

$P(X \leq x) = F_X(x)$ = funcție de repartiție
$P(X \leq x, Y \leq y) = F_{(X,Y)}(x, y)$

c) determinați repartițiile marginale ale v. a R, V

$r = 0, 1, 2$

$P(R=r) = P(R=r, V=0) + P(R=r, V=1) + P(R=r, V=2)$

$R: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{10}{36} & \frac{20}{36} = \frac{5}{9} & \frac{1}{6} = \frac{6}{36} \end{pmatrix}$ $R^2: \begin{pmatrix} 0, & 1, & 4 \\ \frac{10}{36} & \frac{5}{9} & \frac{6}{36} \end{pmatrix}$

$V: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{21}{36} & \frac{14}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$

$E(R)$; $E(V)$, $V(V)$, $V(R)$

d) prob ca $R=r$ cond. de $V=v$. $\Rightarrow P(R=r / V=v)$
prob ca $V=v$ cond de $R=r$ $\Rightarrow P(V=v | R=r)$

$P(R=0) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{10}{36}$
$P(R=1) = \frac{1}{3} + \frac{8}{36} + 0 = \frac{20}{36}$
$P(R=2) = \frac{1}{6} + 0 + 0 = \frac{1}{6}$
$P(V=0) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{21}{36}$
$P(V=1) = \frac{1}{6} + \frac{8}{36} = \frac{14}{36}$
$P(V=2) = \frac{1}{36}$

$E(R) = ?$.

$$\boxed{\begin{gathered} X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots \end{pmatrix} \\ E(X) = \sum_{i \geq 1} x_i p_i = \mu \\ V(X) = E(X-\mu)^2 = \cancel{E(X)^2}\, E(X^2) - \mu^2 \end{gathered}}$$

$$\sqrt{V(X)} = \sigma_X$$

$$E(R) = 1 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{9}, \; = \mu$$

$$E(V) = 1 \cdot \frac{14}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

$$E(R^2) = 1 \cdot \frac{5}{9} + 4 \cdot \frac{6}{36} = \frac{20}{36} + \frac{24}{36} = \frac{44}{36}.$$

$$V(R) = E(R^2) - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{44}{36} - \frac{64}{81} = \frac{11}{9} - \frac{64}{81} = \frac{99-64}{81} = \frac{35}{81}$$

$$V(V) = E(V^2) - \left(\frac{4}{9}\right)^2 = E(V^2) - \frac{16}{81} = \frac{\overset{9/}{18}}{\underset{9 \cdot 4}{36}} - \frac{\overset{4/}{16}}{\underset{9 \cdot 9}{81}} = \frac{117-64}{81} = \frac{4}{8}$$

$$E(V^2) = 1 \cdot \frac{14}{36} + 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{18}{36}$$

18
9
117

$\frac{49}{162}$ Ra

d) $P(R = r \mid V = v) = \dfrac{P(R = r, V = v)}{P(V = v)}$

$P(V = v \mid R = r) = \dfrac{P(R = r, V = v)}{P(R = r)}$

$P(R=r \mid V=v)$	0	1	2
0	$\frac{1/12}{21/36}$	$3/7$	1
1	$\frac{1/3}{21/36} = \frac{12}{21}$	$\frac{2/9}{7/18} = \frac{4}{7}$	0
2	$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{21}{36}} = \frac{6}{21}$	0	0.

$P(V=v \mid R=r)$	0	1	2
0	$3/10$	$6/10$	$1/10$
1	$3/5$	$2/5$	0
2	1.	0	0

② Un magazin vinde 1 nr C de computere pe și împreună cu 1 nr de garanții extinse G. Repartiția comună este

$$P(C=c, G=g) = \left(\frac{5}{2}\right)^c \cdot \frac{e^{-5}}{g!\,(c-g)!} \qquad \begin{array}{l} c = 0, 1, \dots \\ g = 0, 1, \dots c \end{array}$$

a) $P(C=c) = ? = \sum\limits_{g=0}^{c} P(C=c, G=g)$

b) $P(G=g) = \sum_{c} P(C=c, G=g)$

c) $P(G=g \mid C=c) = \dfrac{P(C=c, G=g)}{P(C=c)}$

a) $P(C=c) = \sum_{g=0}^{c} \left(\frac{5}{2}\right)^{c} \cdot \dfrac{e^{-5}}{g!(c-g)!} = \left(\frac{5}{2}\right)^{c} \cdot e^{-5} \sum_{g=0}^{c} \dfrac{1}{g!(c-g)!} =$

$= \left(\frac{5}{2}\right)^{c} \cdot \dfrac{e^{-5}}{c!} \underbrace{\sum_{g=0}^{c} C_{c}^{g}}_{2^{c}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{c} \cdot \dfrac{e^{-5}}{c!} \cdot 2^{c} = \dfrac{5^{c} \cdot e^{-5}}{c!}$

c) $P(G=g \mid C=c) = \dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^{c} \cdot \frac{e^{-5}}{g!(c-g)!}}{\frac{5^{c} \cdot e^{-5}}{c!}} = \dfrac{\cancel{5^{c}}}{2^{c}} \cdot \dfrac{\cancel{e^{-5}}}{g!(c-g)!} \cdot \dfrac{c!}{\cancel{5^{c} \cdot e^{-5}}}$

$= \dfrac{c!}{2^{c} \cdot g!(c-g)!} = \dfrac{1}{2^{c}} \cdot C_{c}^{g} \qquad g = \overline{0, c}$

b) $P(G=g) = \sum_{c} P(C=c, G=g) = \sum_{c} \left(\frac{5}{2}\right)^{c} \cdot \dfrac{e^{-5}}{g!(c-g)!} =$

$= \dfrac{1}{g!} \sum_{c} \left(\frac{5}{2}\right)^{c} \cdot \dfrac{e^{-5}}{(c-g)!} = \sum_{c} \left(\frac{5}{2}\right)^{c} \cdot \dfrac{e^{-5} \cdot c!}{g!(c-g)!} \cdot \dfrac{1}{c!}$

$= \sum_{c} \left(\frac{5}{2}\right)^{c} \cdot C_{c}^{g} \cdot \dfrac{e^{-5}}{c!} = \left(\frac{5}{2}\right)^{c} \cdot \dfrac{e^{-5}}{c!} \cdot \underbrace{\sum C_{c}^{g}}_{2^{c}} =$

$= \left(\frac{5}{2}\right)^{c} \cdot \dfrac{e^{-5}}{c!} \cdot 2^{c} = \dfrac{5^{c} \cdot e^{-5}}{c!}$

$$= \frac{e^{-5}}{g!} \cdot \sum_{c} \left(\frac{5}{2}\right)^{c} \cdot \frac{1}{(c-g)!} = \frac{e^{-5}}{g!} \cdot \sum \left(\frac{5}{2}\right)^{c} \cdot \frac{1 \cdot c}{(c-g)! \cdot c!} =$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^{g} \cdot \frac{e^{-5}}{g!} \cdot \underbrace{\sum_{c} \left(\frac{5}{2}\right)^{c-g} \cdot \frac{1}{(c-g)!}}_{e^{5/2}}$$

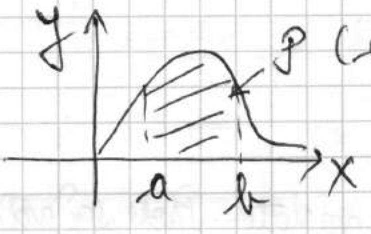
$$= \left(\frac{5}{2}\right)^{g} \cdot \frac{e^{-5}}{g!} \cdot e^{5/2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{g} \cdot \frac{e^{-5/2}}{g!}$$

18.03.2022

Variabile aleatoare de tip continuu.

Fie X v.a de tip continuu

def: S.n. fn densitate de probabilitate atașată v.a X fn $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ a.î. $P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$



Obs: f_X este funcție de densitate $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_X(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

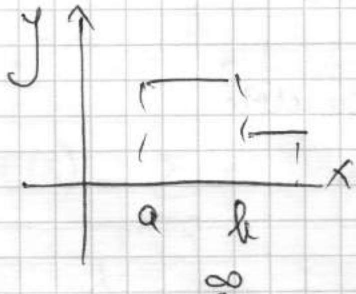
EX: Fie ~~$f: [0,1] \to \mathbb{R}$~~ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Determinați ct c a.î. f să fie fn. de probabilita

Repartiția uniformă:

def. $X \sim U([a,b])$ dacă $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

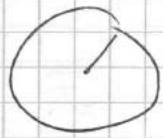


$f_X(x) \geq 0 \ \forall x.$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b-a}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} 0\,dx}_{0} + \int_a^b \frac{1}{b-a} + \int_b^{\infty} \underbrace{0\,dx}_{0} =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\,x\Big|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

Ex: ceas:



$$\theta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{360}, & x \in [0, 360] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Funcția de repartiție F_X:

X v.a de tip continuu cu fn de densitate f_X

Def. Funcția de repartiție a lui X este $F_X: \mathbb{R} \to [0, 1]$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Obs: F_X cresc

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

$$P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P(X > b) = 1 - P(X \le b) = 1 - F_X(b)$$

$$P(X \le b) = F_X(b)$$

~~Rezolvare ex. pe fc~~

Ex:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x, & x \in [0, 2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}x\right)dx = \frac{x}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{4}{2} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8}2 = \frac{8}{8} = 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = 0,\ x<0$$

$$\int_0^x \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}y\right)dy,\ x\in[0,2].$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dy}_{0} + \underbrace{\int_{2}^{x} 0dy}_{0} + \int_0^2 \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\right)dy = 1,\ x>2$$

$$\int_0^x \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}y\right)dy = \left(\frac{y}{8} + \frac{3}{8}\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^x =$$

$$= \frac{x}{8} + \frac{3}{8}\frac{x^2}{2} = \frac{x}{8} + \frac{3x^2}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x}{8} + \frac{3}{16}x^2, & x\in[0,2]. \\ 1, & x>2 \end{cases}$$ fn de repartiție

$$P(1\le X\le 2) = F(2) - F(1) = 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{16}\cdot 1\right) = \frac{11}{16}.$$

$$P(X>1) = 1 - P(X\le 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{5}{16}.$$

Obținerea fn. f_X din F_X.

Dacă $\exists$ derivata în x : $\exists$ $F_X(x)$ atunci.

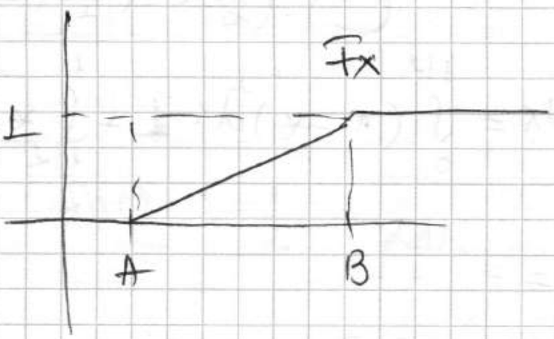
$F_X'(x) = f(x)$

<u>Ex</u>: $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq A \\ \frac{x - A}{B - A}, & x \in [A, B] \\ 1, & x > B \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x < A, \ F_X'(x) = 0 \\ x > B, \ F_X'(x) = 0. \\ x \in [A, B), \ F_X'(x) = \frac{1}{B - A} \end{array}\right| \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{B - A}, & x \in [A \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$X \sim U(A, B)$



Media unei v.a. $\to$ avem nev. de f. de densitate.

Fie X v.a. cu fn. de densitate f_X.

Def: 1) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$

2) $E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) + f_X(x)\, dx$

<u>EX</u>: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^2 x \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8} x\right.$

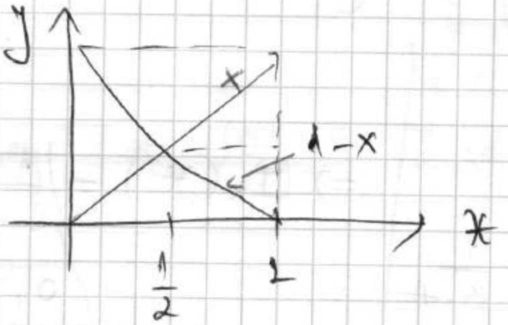
$= \frac{1}{8} \int_0^2 x\, dx + \frac{3}{8} \int_0^2 x^2\, dx = \frac{3}{8}$

Ex: $X \sim U([0,1])$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \max(x, 1-x)$

$E(h(X)) = E(\max(X, 1-X))$



$$h(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$h(X) = \begin{cases} 1-X, & X \in [0, \frac{1}{2}] \\ X, & X \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$E(h(X)) = \int_0^1 h(x) f_X(x)\,dx = \int_0^{1/2} (1-x)\,dx \cdot 1 + \int_{1/2}^1 x \cdot 1\,dx$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{1/2} + \frac{x^2}{2}\Big|_{1/2}^1 = \dots$$

Dacă $h(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f_X(x)\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

$$+ b\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = aE(X) + b \cdot 1 = aE(X) + b$$

$$\boxed{E(aX+b) = aE(X) + b.}$$

Dacă $E(X) = \mu$

$h(x) = (x-\mu)^2$, $x \in \mathbb{R}$

Def: $\sigma^2 = V(X) = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx$

varianța lui X

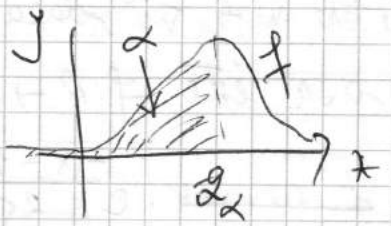
Ex: $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx = \int_0^2 \left(x-\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}x\right)$

$\sigma = \sqrt{V(X)}$ – deviația standard

$$\boxed{V(aX+b) = a^2 V(X)}$$

Cuantile de ordin α

X v.a cu funcția de densitate f



q_α = cuantila de ordin α dacă $\int_{-\infty}^{q_\alpha} f(x)\,dx = \alpha$

$$\boxed{F(q_\alpha) = \alpha}$$

Dacă $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow q_{1/2}$ s.n. mediana

Ex: $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\cdot(1-x^2), & x \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \int_{0}^{x} \frac{3}{2}(1-y^2)\,dy = \frac{3}{2}\left(y - \frac{y^3}{3}\right.$

$= \frac{3}{2}x - \frac{x^3}{2}, \quad x \in [0,1]$

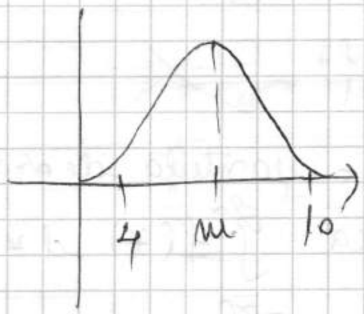
$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3}{2}x - \frac{x^3}{2}, & x \in [0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

$z_{1/2} = ?$

$F(z_{1/2}) = \frac{1}{2}$

$\frac{3}{2} z_{1/2} - \frac{z_{1/2}^3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow z_{1/2} = 0,347$

Repartiția normală $N(m, \sigma^2)$

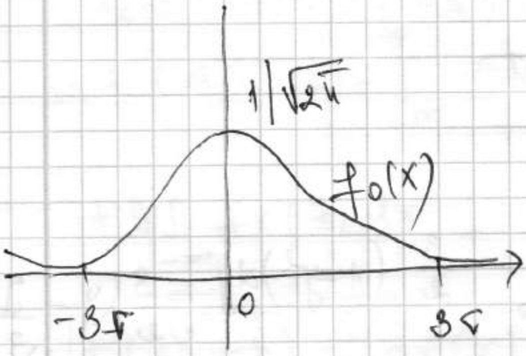


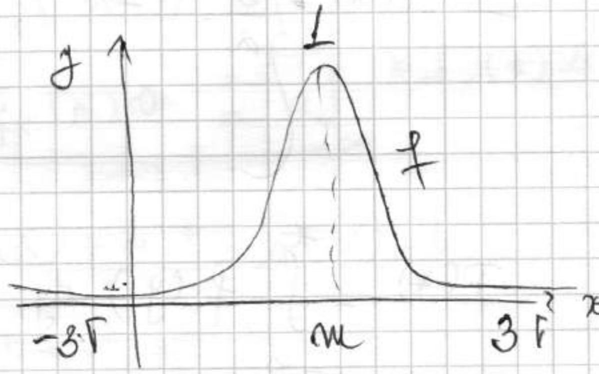
Def: X este v.a repartizată normal de parametri m și σ^2 dacă f de densitate a sa este $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \forall x$$

Pt. $m = 0, \sigma^2 = 1$ se obține repartiția normală standard cu f de densitate

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$





$x = m$ = axă de simetrie

$$\boxed{X \sim N(m, \sigma^2),\ Y = \frac{X - m}{\sigma} \sim N(0, 1)}$$

pt. $X \sim N(0,1)$

$$\Phi(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

repartiția normală standard

Aproximarea repartiției binomiale $Bin(n, p)$ cu repartiția normală $N(m, \sigma^2)$

unde $m = np$

$$\sigma^2 = npq = np(1-p)$$

$$X \sim N(m, \sigma^2) \Rightarrow E(X) = m$$
$$V(X) = \sigma^2$$

$$X \sim N(0,1) \Rightarrow E(X) = 0$$
$$V(X) = 1$$

Repartiția gamma

$$f(x, \alpha) = x^{\alpha - 1} e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

fn gamma

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x, \alpha)$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\,\Gamma(\alpha - 1), \quad \alpha > 0$$

dc $\alpha \in \mathbb{N}$ $\quad \Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(x)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}, & x \ge 0. \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

X v.a cu repartiția $\Gamma(\alpha)$ dc X are funcția de densitate f_X

$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ $\quad f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta} \\ 0 \quad , x<0 \end{cases} , \alpha, \beta > 0.$

$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

$$\begin{cases} E(X) = \alpha\beta \\ V(X) = \alpha\beta^2 \end{cases}$$

Caz particular:

$X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$.

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , x \geq 0. \\ 0 & , x < 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{\lambda} \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Temă

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \, dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 =$$

$$= \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} \, dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy = \int_0^{x} \lambda e^{-\lambda y} \, dy = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 . \end{cases}$$

21.03.2022.

Laborator Statistică săptămâna 6.

până luni întrebări din laboratoare

R nu are nevoie de cuv. „return", nu folosește
Se folosește doar când are mai multe iterări (atribuiri) prelucrări

Dacă o fct are 2 iterări. $\begin{cases} x+2 \\ x+1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ se efectuează ultima

x^2/3 ⇒ print implicit
x <- x^2/3 ⇒ nu avem print implicit

( ) ⇒ afișare

funcțiile se apelează pt cel mai recent parametru rulat

o fct integrabilă Riemann ⇒ interval închis și mărginit, rezultat = nr poz. sau negativ

integrale improprii ⇒ $\int_{-\infty}^{\infty}$
↓
nu rezultă mereu un rez = nr, poate fi rez = ∞

a <- integrate(f, 0, 1) ⇒ listă cu informații, cuprinde și valoarea
$\underbrace{0, 1}$ capete de integrare
f: funcția care va fi integrată

1.2e-15 ⇒ 1.2×10^{-15}

a$value ⇒ extrage valoarea din lista de info.

Curs 6

Vectori aleatori

Fie X, Y v a
(X, Y)

Pt cazul discret funcția masă de probabilitate comună

$$p_{x,y} = P(X = x, Y = y) \quad \forall x, y \text{ valori ale variabilelor } X, Y$$

Obs: $p_{x,y} \geq 0 \quad \forall x, y$

$$\sum_{x,y} p_{x,y} = 1$$

funcția masă de probabilitate marginală

$$p_x = P(X = x) = \sum_{y \in D_y} P(X = x, Y = y) \Rightarrow p_x$$
$\forall x \in$

și $\sum_{x \in D_x} p_x = 1$

$$p_y = P(Y = y) = \sum_{x \in D_x} P(X = x, Y = y) \Rightarrow p_y \geq 0 \quad \forall y$$

și $\sum_{y \in D_y} p_y = 1$

O agenție de asigurări vinde polițe de asigurare pt apartamente și pt autom. Pt fiecare poliță face un dis

auto 100 \$, 250 \$ $\quad$ Y = disc. polița casă

casă 0, 100 \$, 200 \$

X = ~~suma~~ discount poliță auto

$\Rightarrow (X,Y) = \{(100,0),(100,100),(100,200),$
$(250,0),(250,100),(250,200)\}$

$p_{X,Y}$	Y: 0	100	200	X
X: 100	0,2	0,1	0,2	0,5
250	0,05	0,15	0.3	0,5
	0.25	0.25	0.5	

$0.2+0,1+0,2+0,05+0,015+0,3=1 \Rightarrow$ fct masă de probabilitate

$$p_{100} = P(X=100) = P(X=100, Y=0) + P(X=100, Y=100) + P(X=100, Y=200) = 0,2+0,1+0,2 = 0,5.$$

$$p_{250} = P(X=250) = P(X=250, Y=0) + P(X=250, Y=100) + P(X=250, Y=200) = 0,05+0,15+0,3 = 0,5$$

$$\Rightarrow \quad X: \begin{pmatrix} 100 & 250 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \qquad Y: \begin{pmatrix} 0 & 100 & 200 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Pt cazul continuu fct. de densitate de probabilitate comună pt X, Y v.a

$f_{X,Y} : R\times R \to R_+$

$$\begin{cases} f(x,y) \geq 0 \ \forall x,y \in R \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1 \end{cases}$$

A = plan $\quad P((X,Y) \in A) = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$

Dacă $A = [a,b] \times [c,d]$ = dreptunghi

$P(X \in [a,b], Y \in [c,d]) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$

Ex 2.

Bancă, 2 ghișee

X = proporția de timp în care se lucrează la ghișeul 1

Y = – – – – – – – – – – – – – – – – 2

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5} \cdot (x+y^2), & (x,y) \in D \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{6}{5}\frac{x^2}{2} + \frac{6}{5}xy^2 \Big|_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}+y^2\right)dy = \int_0^1 \frac{6}{10} + \frac{6}{5}y^2\,dy$$

$$= \frac{6}{10}y + \frac{6}{5}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{6}{10} + \frac{6}{15} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1.$$

Funcții de densitate de probabilitate marginale

$f_X, f_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$$\boxed{\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R} \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx, \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

obs: f_X f. de densitate $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y} \underbrace{(x,y)}_{\geq 0}\,dy \geq 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\right)dx = 1$$

f_Y analog

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)\,dy =$$

$$= \frac{6}{5}xy + \frac{6}{5}\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{6}{5}x + \frac{2}{5}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}x + \frac{2}{5}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)\,dx = \frac{6}{5}\frac{x^2}{2} + \frac{6}{5}xy^2\Big|_0^1$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{6}{5}y^2$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{6}{10} + \frac{6}{5}y^2, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

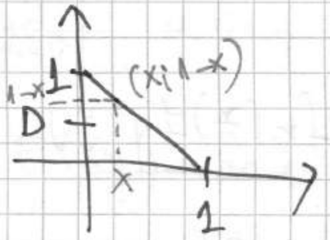
O firmă vinde cutii care conțin migdale, caju și nuci. Sp că greutatea unei cutii este de 1 Kg, iar greutățile de ~~alu~~ migdale, caju și nuci sunt aleatoare.

X = cantitate migdale din cutie

Y = caju

$1-X-Y$ = nuci

$$D = \{(x,y) \in [0,1]\times[0,1] \mid x+y \le 1\}$$



$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 24xy, & (x,y)\in D \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$\iint_D 24xy\, dy\, dx = 1$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} 24xy\, dy\, dx = \int_0^1 24x \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 12x(1-x)^2 dx = \int_0^1 12x(1-2x+x^2)dx$$

$$= \int_0^1 (12x - 24x^2 + 12x^3)dx$$

$$= 12\frac{x^2}{2} - 24\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^4}{4}\Big|_0^1$$

$$= \frac{12}{2} - \frac{24}{3} + \frac{12}{4} = 6 - 8 + 3 = 9 - 8 = 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx = \int_0^{1-y} 24xy\, dx$$

$$= 24y \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{1-y} = 24\cdot y \cdot \frac{(1-y)^2}{2} = 12y(1-y)^2$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Variabile aleatoare independente

I) Cazul discret

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

$A = X = x$

$B = Y = y$

X, Y independente

$\Leftrightarrow P(X=x, Y=y) =$

$= P(X=x)\cdot P(Y=y) \ \forall (x,y) \in D_{(X,Y)}$

II) cazul continuu

X, Y independente $\Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

Ex: $24xy = [12x(1-x)^2][12y(1-y)^2] \quad (x,y)\in D$

X, Y nu sunt independente

$\boxed{\text{• Generalizare:}}$ n variabile aleatoare

$X_1, X_2, \dots, X_n$

$f_{X_1, X_2, \dots X_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

sau $p_{X_1, X_2, \dots X_n} = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots X_n = x_n)$

$\boxed{\text{Media, Covarianta, Corelatia}}$

(X, Y)

$$E(h(X,Y)) = \begin{cases} \sum_i \sum_j h(x_i, y_j)\cdot P(X=x_i, Y=y_j) & \text{pt cazul discret} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\cdot f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx & \text{pt cazul continuu} \end{cases}$$

$$E(XY) = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i y_j \, P(X=x_i, Y=y_j) & \text{caz discret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \, f_{X,Y}(x,y) \, dy\,dx, & \text{caz continuu} \end{cases}$$

X\Y	0	100	200
100	0,2	0,1	0,2
250	0,05	0,15	0,3

$$E(XY) = 100 \cdot 0 \cdot 0,2 + 100 \cdot 100 \cdot 0,1 + 100 \cdot 200 \cdot 0,2 + 250 \cdot 0 \cdot 0,05 + 250 \cdot 100 \cdot 0,15 + 250 \cdot 200 \cdot 0,3$$

$$X : \begin{pmatrix} 100 & 250 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad Y : \begin{pmatrix} 0 & 100 & 200 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 100 \cdot 0,5 + 250 \cdot 0,5 = \mu_X$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0,25 + 100 \cdot 0,25 + 200 \cdot 0,5 = \mu_Y$$

b) $$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 24\,xy, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$E(X,Y) = \iint_D xy \, f_{XY}(x,y) \, dx\,dy = \iint_D xy \, 24\, xy \, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} 24\, x^2 y^2 \, dy\,dx = \dots$$

$$E(X) = \int_0^1 12\,x(1-x)^2 \, dx = \mu_X$$

$$E(Y) = \int_0^1 12\,y(1-y)^2 \, dy = \mu_Y$$

Covarianța

$$\boxed{Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E(XY) - E(X)\cdot E(Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y}$$

unde $\mu_X = E(X)$ și $\mu_Y = E(Y)$

Obs:

Dacă X, Y sunt independente $\Rightarrow Cov(X,Y) = 0$.

Reciproc, nu ; $Cov(X,Y) = 0 \not\Rightarrow X, Y$ sunt independente

Corelația

$$\boxed{Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\cdot\sqrt{V(Y)}}} \; ; \; |Corr(X,Y)| \le 1$$

$V(X), V(Y) =$ varianța

Probabilități condiționate

Cazul discret:

$$p_{x/y} = P(X=x / Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} \text{ dacă}$$

$P(Y=y) > 0$

$$p_{y/x} = P(Y=y / X=x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)} \text{ dacă } P(X=x) > 0.$$

$P(Y=0 \mid X=\cancel{0{,}5}^{100}) = 0{,}2/0{,}5$

$P(Y=100 \mid X=100) = 0{,}1/0{,}5$

$P(Y=200 \mid X=100) = 0{,}2/0{,}5$

$P(Y=0 \mid X=250) = 0{,}05/0{,}5$

$P(Y=100 \mid X=250) = 0{,}15/0{,}5$

$P(Y=200 \mid X=250) = 0{,}3/0{,}5$

Caz continuu: Densități condiționate

→ $f_{X|Y}(x|y)$ = fct. densitate a lui x cond. de y

• $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ dc $f_Y(y) > 0$

Calc. → $f_{Y|X}(y|0{,}8) = \dfrac{24xy}{12 \cdot 0{,}8(1-0{,}8)^2} = \dfrac{24 \cdot 0{,}8 \cdot y}{12 \cdot 0{,}8(1-0{,}8)^2}$,

$y \in [0,1]$

→ • $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ dacă $f_X(x) > 0$ $\forall y \in \mathbb{R}$

a <- c(1, 2, 7)
b <- c(8, 3, 2)
$a^b = 1^8, 2^3, 7^2$

system.time() ⇒ timpul de execuție

Seminar

Variabile aleatoare de tip continuu

$X \to f_X$ funcție de densitate; $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

F_X funcție de repartiție $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$

$P(X > b) = 1 - F_X(b)$

$P(X \le a) = F_X(a)$

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$$

media lui x^2 $= \sigma_X^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx\right] \cdot \mu_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$

Ex 1. $f(x) = \begin{cases} k x^2(1 - x^3) & , x \in [0,1] \\ 0 & , \text{altfel} \end{cases}$

a) $k = ?$ a.î. f = f de densitate

b) mediana $q_{1/2}$ a.î. $F_X(q_{1/2}) = \frac{1}{2}$

Rezolvare:

a) $\int_{-\infty}^{0} f = 0$

$\int_{1}^{\infty} f = 0.$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 k x^2(1 - x^3)\,dx = k\int_0^1 x^2(1 - x^3)\,dx$$

$$K\int_0^1 (x^2 - x^5)\,dx = K\cdot\left(\frac{\overset{2/}{x^3}}{3} - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= K\cdot\frac{2x^3 - x^6}{6}\Bigg|_0^1 = K\cdot\frac{2-1}{6} = \frac{K}{6}$$

$$\boxed{\int_0^1 f_X(x)\,dx = 1}$$

(proprietate)

$$\Rightarrow \frac{K}{6} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K = 6}}$$

b) Aflăm funcția de repartiție F_X

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \int_0^x f_X(y)\,dy = \int_0^x 6\cdot y^2(1-y^3)\,dy$$

$$= \int_0^x (6y^2 - 6y^5)\,dy = \frac{\overset{2)}{6\cdot y^3}}{3} - \frac{6\cdot y^6}{6}\Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{12y^3 - 6y^6}{6}\Bigg|_0^x = \frac{12x^3 - 6x^6}{6}.$$

$$F_X(q_{1/2}) = \frac{1}{2} \rightarrow \cancel{F_X}\frac{12q_{1/2}^3 - 6q_{1/2}^6}{6} = \frac{1}{2}$$

$$= 12q_{1/2}^3 - 6q_{1/2}^6 = 3$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\ \cancel{6q_{1/2}}\ 12q_{1/2}^3 - 6q_{1/2}^6 - 3 = 0.$$

$$12m^3 - 6m^6 - 3 = 0.$$

$$4m^3 - 2m^6 - 1 = 0.$$

$$m^3 = t$$

$$\Rightarrow -2t^2 + 4t - 1 = 0 \Rightarrow 2t^2 - 4t + 1 = 0.$$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 16 - 8 = 8$

$t_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

$m^3 = (q_{1/2})^3 = t = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow (q_{1/2})^3 = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow q_{1/2} = \sqrt[3]{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$

$\frac{2-\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow q_{1/2} = \sqrt[3]{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

Ex2 $f(x) = k \cdot e^{-|x-2|}$, $x \in \mathbb{R}$

$x > 2 \Rightarrow |x-2| = x-2$

$x < 2 \Rightarrow |x-2| = -x+2$

a) $k = ?$

b) F_X, $P(-1 \leq X \leq 3)$

$P(X \geq 0)$

c) mediana

d) μ_X, $V(X) = \sigma_X^2$

a) $f(x) = \begin{cases} k \cdot e^{-x+2} & ; x > 2 \\ k \cdot e^{x-2} & ; x < 2 \end{cases}$

$\int f_X(x)\,dx = \int_2^{\infty} k \cdot e^{-x+2}\,dx + \int_{-\infty}^{2} k \cdot e^{x-2}\,dx$

$= k\int_2^{\infty} e^{-x+2} \cdot (-1)\,dx + k\int_{-\infty}^{2} e^{x-2} \cdot 1\,dx$

$= (-k) \cdot e^{-x+2}\Big|_2^{\infty} + k \cdot e^{x-2}\Big|_{-\infty}^{2}$

$= (-k)(e^{-\infty} - e^{0}) + k \cdot (e^{0} - e^{-\infty}) = k \cdot e^{0} + k \cdot e^{0}$

$= \cancel{-k \cdot e^{-\infty} - k \cdot e^{-\infty} = -2k \cdot e^{-\infty}}$ $= 2k \cdot e^{0}$

$= 2k = 1$

$\Rightarrow k = \frac{1}{2}$

20 hours later

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2e^2} ; & x \leq 2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot e^{x-2}} ; & x > 2 \end{cases}$$

$$P(1 \leq x \leq 3) = F_X(3) - F_X(1) = \frac{e^3 - 1 - e^2}{2 \cdot e^3}$$

$$P(x \geq 0) = 1 - F_X(0) = 1 - \frac{1}{2e^2} = \frac{2e^2 - 1}{2e^2}$$

c) $q_{1/2}$ ai $F(q_{1/2}) = \frac{1}{2}$ $\qquad F_X(x) = \frac{1}{2}$.

$$\frac{e^x}{2e^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2e^2 = 2e^x \Rightarrow x = 2$$

d) $$J_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{2} x \cdot \frac{e^{x-2}}{2}\, dx + \int_{2}^{\infty} x \cdot \frac{e^{2-x}}{2}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{x \cdot e^{x-2}}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{2} x \cdot e^{x-2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{2} x \cdot (e^{x-2})'\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x \cdot e^{x-2} \Big|_{-\infty}^{2} - \int_{-\infty}^{2} e^{x-2}\, dx \right) = \frac{1}{2}\left(2 - 0 - e^{x-2} \Big|_{-\infty}^{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 - e^0 + e^{-\infty} \right) = \frac{1}{2} \cdot (2-1) = \frac{1}{2}.$$

$$\int_{2}^{\infty} \frac{e^{2-x}}{2} \cdot x\, dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{\infty} x \cdot e^{2-x}\, dx = -\frac{1}{2}\int_{2}^{\infty} x \cdot (e^{2-x})'\, dx =$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x\cdot e^{2-x}\Big|_2^{\infty}-\int_2 e^{2-x}\,dx\right)=\frac{1}{2}(0-2-0+1)=+\frac{1}{2}$$

$$\int x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Ex 3 $\quad f(x)=\begin{cases} k\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}, & x\geq 0\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$

a) $k=?$

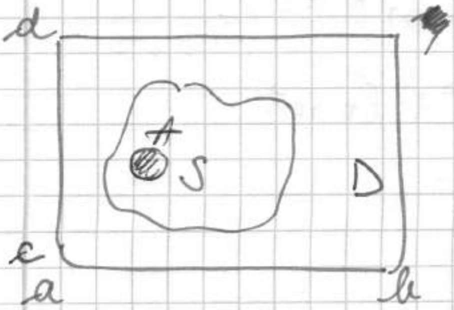
b) $F_X=?$

c) mediana

Făcut la tablă (eu)

01.04.2022

Curs Probabilități și Statistică
Săptămâna 7



$$A_{\square} = (b-a)(d-c)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)}, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$(X,Y) \sim Unif(D)$

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \forall\ x,y \in \mathbb{R}^2$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \qquad X \sim Unif([a,b])$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{d-c}, & y \in [c,d] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \qquad Y \sim Unif([c,d])$$

$\Rightarrow$ X, Y sunt independente

$A \subseteq S$

$$P(S \in A) = \frac{Area(A)}{Area(S)}$$

$X \sim Unif \Rightarrow$ repartiție uniformă

~~pt <- 3~~

pt <- runif (3, -1, 1) => 3 puncte, fiecare în intervalul [-1, 1].

Legea numerelor mari

$X_1, X_2, \dots X_n$, v.a. independente, identic repartiz

Fie $\mu = E(X_i)$, $\forall i = 1, 2, \dots$

$\sigma^2 = V(X_i)$ $\forall i = 1, 2, \dots$

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $n \geq 1$.

$\frac{S_n}{n} \to \mu$

Legea slabă a numerelor mari:

Probabilitatea ca diferența dintre $\frac{S_n}{n}$ și μ să fie mai mică decât orice ε tinde la 1

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right) \to 1, \quad n \to \infty$$

$$a_n = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right); \quad a_n \to 1$$

$$a_1 = P\left(\left|\frac{S_1}{1} - \mu\right| < \varepsilon\right) = P(|S_1 - \mu| < \varepsilon) = P(|X_1 - \mu|$$

$$a_2 = P\left(\left|\frac{X_1 + X_2}{2} - \mu\right| < \varepsilon\right)$$

$$\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{S_n}{n} - \mu < \varepsilon \Leftrightarrow \mu - \varepsilon < \frac{S_n}{n} < \mu +$$

$$n\mu - n\varepsilon < S_n < n\mu +$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ v. a. repartizate Bernoulli (p)

$$X_i : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim Bin(n, p)$$

$$P(X_1 + \dots + X_n = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Legea tare a numerelor mari

I) Inegalităţi Markov, Chebyshev

<u>Markov</u>: $\quad P(X \geq \varepsilon) \leq \dfrac{E(X)}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$

$$E(X) = \int_0^\infty \underbrace{x}_{\geq \varepsilon} f(x)\,dx \geq \int_{\substack{0 \\ x > \varepsilon}}^\infty \varepsilon f(x)\,dx = \varepsilon \int_0^\infty f(x)\,dx$$

$$= \varepsilon P(X \geq \varepsilon)$$

$$P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$$

$$A = [\varepsilon, \infty)$$

$$P(X \geq \varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty f(x)\,dx$$

$$\varepsilon = k \cdot \mu \Rightarrow P(X \geq k\mu) \leq \frac{\mu}{k\mu} = \frac{1}{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} X \geq \varepsilon \\ f \text{ crescătoare} \end{array}\right| \Rightarrow f(X) \geq f(\varepsilon)$$

$$P(X \geq \varepsilon) = P(f(X) \geq f(\varepsilon)) \leq \frac{E(f(X))}{f(\varepsilon)}$$

Chebyshev:

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Dc. $f(x) = x^2$

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) = P(|X-\mu|^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E|(X-\mu)^2|}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$X \sim Exp(\lambda)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$\lambda = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \\ 0, & \text{re} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\mu = 1, \sigma^2 = 1$

$$P(X \geq 4) = \int_4^\infty f(x)\,dx$$

M: $P(X \geq 4) \leq \frac{E(X)}{4} = \frac{1}{4}$

C: $P(X - 1 \geq 3) \leq \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

III Legea slabă a numerelor mari:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \to 0.$$

Dem:

$X_1, X_2, \ldots X_n$ v.a indep $\Rightarrow E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = n \cdot \mu$

$$\sigma^2(X_1 + \ldots + X_n) = \sigma^2(X_1) + \ldots + \sigma^2(X_n) = n\sigma^2$$

$$\boxed{E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu}$$

$$\boxed{\sigma^2\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\longrightarrow 0. \qquad ;\ \sigma=\sigma \quad n\to\infty.$$

III. Legea tare a numerelor mari

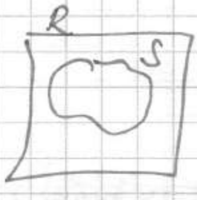
IV. Aplicații pe computer

III. $\frac{S_n}{n}\to\mu \quad ;\ S_n=x_1+x_2+\dots+x_n$

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\mu\right)=1$$

$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{a.s}\mu \quad \Rightarrow$ converge aproape sigur la μ

IV. 1. Arii:



$I_1, I_2, \dots, I_n$

$$I_k=\begin{cases}1, & x_k\in S\\ 0, & \text{în rest}\end{cases} \Rightarrow I_k:\begin{pmatrix}1 & 0\\ P(x_k\in S) & 1-P(x_k\in S)\end{pmatrix}$$

$$E(I_k)=1\cdot P(X_k\in S)+0\cdot(1-P(x_k\in S))$$

$$\Rightarrow E(I_k)=P(x_k\in S)=\frac{\text{Arie } S}{\text{Arie } R}.$$

$$S_n=\frac{I_1+I_2+\dots+I_n}{n}$$

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{a.s.}\frac{\text{Arie } S}{\text{Arie } R}$$

$\Rightarrow$ Aria S $=$ Arie R $\cdot \dfrac{I_1 + I_2 + \dots + I_n}{n}$ ~~Arie R~~.

2c. $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k \Rightarrow \dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \dfrac{k}{n}$

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$$

11.04.2022

(x,y)

1) $f(x,y) = \begin{cases} x e^{-x(y+1)}, & x>0, y>0, x,y \in (0,\infty) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

2) $f(x,y) = \begin{cases} cy^2, & 0<x<y<1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

a) $f_x, f_y = ?$

b) sunt x, y ind dep?

c) $F_x, F_y = ?$

(1) a) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x(y+1)}\,dy =$

$= x\int_0^{\infty} e^{-x(y+1)}\,dy = x\int_0^{\infty} e^{-xy+x}\,dy =$

$\cancel{\int_0^{\infty}} = \frac{x \cdot e^{-x(y+1)}}{-x}\Big|_0^{\infty} \cancel{= \frac{(-1)^{-\infty}}{\cdot e^{y+1}} - (-1)\cdot e^{0(y+1)}}$

$= 0 + e^{-x} = e^{-x}, \quad x>0.$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x(y+1)}\,dx =$

$\cancel{= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x(y+1)} - x(y+1)}$

$= \frac{x \cdot e^{-x(y+1)}}{-(y+1)}\Big|_0^{\infty} -$

$\boxed{\int f g' = fg - \int f' g}$ $\quad \int_0^{\infty} \frac{1 \cdot e^{-x(y+1)}}{-(y+1)}\,dx$

$$= \frac{x}{-e^{x(y+1)}(y+1)}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{y+1}\int e^{-x(y+1)}\,dx =$$

$$= \left(\frac{1}{+e^{x(y+1)}\cdot(y+1)^2}\right)_0^{\infty} + \frac{1}{y+1}\cdot\frac{e^{-x(y+1)}}{-(y+1)}\Big|_0^{\infty} =$$

$$= 0 - 0 + 0 - (-1)\cdot\frac{1}{(y+1)^2} = \frac{1}{(y+1)^2}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \qquad f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(y+1)^2}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

b) $f(x,y) \neq f_x(x)$

c) $F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\,dt = \int_0^x e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^x$

$$= \begin{cases} -e^{-x}+1, & x > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$F_y(y) = \int_0^y \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = -\frac{1}{t+1}\Big|_0^y$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{y+1}+1, & y > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

(2) a) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\int_0^1\int_0^y cy^2\,dx\,dy = \int_0^1 (cy^2\cdot x)\Big|_0^y\,dy =$$

$$\int_0^1 cy^3\,dy = c\frac{y^4}{4}\Big|_0^1 = c\cdot\frac{1}{4} = 1 \Rightarrow c = 4$$

b) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_x^1 4y^2\,dy = \frac{4y^3}{3}\Big|_x^1 =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{4x^3}{3} = \frac{4}{3}\left(1-x^3\right) \quad ; x>0.$$

$f_X(x) = 0$ dc $x<0$

$$f_Y(y) = \int_0^y cy^2\,dx = cy^2\cdot x\Big|_0^y = \begin{cases} 4y^3, & y<0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t)\,dt = \int_0^x \frac{4}{3} - \frac{4t^3}{3}\,dt =$$

$$= \frac{4}{3}t - \frac{\cancel{4}}{3}\cdot\frac{t^4}{\cancel{4}}\Big|_0^x = \frac{4}{3}t - \frac{t^4}{3}\Big|_0^x = \frac{4x - x^4}{3}$$

$$F_Y(y) = \int_0^y 4t^3\,dt = 4\frac{t^4}{4}\Big|_0^y = t^4\Big|_0^y = y^4$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} - \frac{4x^3}{3}, & x\in(0,1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0. \\ \frac{4x}{3} - \frac{x^4}{3}, & x\in(0,1) \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3, & y \in (0,1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ y^4, & y \in (0,1) \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

Ex3 $f(x,y) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1-x \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

a) $c = ?$

b) $f_X, f_Y = ?$

c) sunt X, Y indep?

d) F_X, F_Y

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x} cx\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{cx^2}{2}$

$\displaystyle = \int_0^1 y\Big|_0^{1-x} \cdot cx\,dx = \int_0^1 (1-x)\cdot cx\,dx$

$\displaystyle = \int_0^1 cx\,dx - \int_0^1 cx^2\,dx = \frac{cx^2}{2} - \frac{cx^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{c}{2} - \frac{c}{3}$

$= \frac{c}{6}$

$\frac{c}{6} = 1 \Rightarrow c = 6.$

b) $\displaystyle f_X = \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} cx\,dy = \int_0^{1-x} 6x\,dy$

$= 6xy\Big|_0^{1-x} = 6x(1-x) - 0 = 6x - 6x^2$

$$f_y = \int_0^{1-y} f(x,y)\,dx = \int_0^{1-y} 6x\,dx = \frac{6x^2}{2}\Big|_0^{1-y} = 3x^2\Big|_0^{1-y}$$

$$= \begin{cases} 3(1-y^2)^2 & , y \in (0,1] \\ 0 & , \text{în rest} \end{cases}$$

b) $f_x \cdot f_y = 6x(1-x) \cdot 3(1-y^2) \neq 6x$

$\Rightarrow$ x şi y nu sunt indep.

d) $F_x, F_y = ?$

$$F_x = \int_0^x f_x(t)\,dt = \int_0^x 6t(1-t)\,dt = \int_0^x 6t\,dt - \int_0^x 6t^2\,dt$$

$$= \frac{6t^2}{2}\Big|_0^x - \frac{6t^3}{3}\Big|_0^x = 3t^2\Big|_0^x - 2t^3\Big|_0^x$$

$$= 3x^2 - 2x^3 \quad , x \in (0,1]$$

$$F_x = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 1 \\ 3x^2 - 2x^3, & x \in (0,1] \end{cases}$$

$$F_y = \int_0^y f_y(t)\,dt = \int_0^y 3(1-t)^2\,dt = \int_0^y 3(1-2t+t^2)$$

$$= \int_0^y 3 - 6t + 3t^2 \,dt$$

$$= 3t - \frac{6t^2}{2} + \frac{3t^3}{3}\Big|_0^y$$

$$= 3t - 3t^2 + t^3\Big|_0^y$$

$$= 3y - 3y^2 + y^3$$

$$F_Y = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ 3y - 3y^2 + y^3, & y \in (0,1) \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

te mai

Ex4 $$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_1+1) \cdot e^{-(x_1+x_2)} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

a) f_{X_1}, f_{X_2}

b) $E(X_1), E(X_2)$

lt

ilt

15.04.2022

Curs Statistică Săptămâna 9

$$XK = \begin{cases} 1 & \text{, if A occurs the Kth trial} \\ 0 & \text{, if A does not occur the Kth trial} \end{cases}$$

$K = 1, 2, \ldots \Rightarrow \dfrac{X1 + \ldots + Xn}{n} \simeq P(A)$ pt n mare

$X1, \ldots Xn$ = variabile aleatoare

```
> simlist <- replicate(1000, simdivis())
```

vector cu 1000 de elemente 0 sau 1.

(1) Pr.: $x \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$

$A = x \vdots 3$ sau $x \vdots 5$ sau $x \vdots 6$

$P(A) = ?$

$$\text{simdis}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, dc } x \vdots 3 \text{ sau } 5 \text{ sau } 6 \\ 0 & \text{, în rest} \end{cases}$$

simlist = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, ...)

rezultate aleatoare !

mean (simlist ...) ⇒ $\boxed{\text{media}}$

$\boxed{\text{replicate}}$(n, expr)

Simulating the divisibility probability

simdis() simulates one trial

```
> simdivis <- function() {
        num <- sample (1:1000, 1)
        if( num % 3==0 || ... ) 1 else 0}
```

? simlist ← replicate (1000, simdivis())
mean(simlist)

$\longrightarrow$

sample (0:1, n, replace =T)

$\underline{C=1, P=0;}$

(2) $\Omega = \{CCC, CPP, PCP, PPC, CCP, CPC, PCC, PPP\}$

$P(CCC) =$

(3) $P(X_1=2 \mid X_1+X_2=7) = \dfrac{P(X_1=2 \text{ and } X_1+X_2=7)}{P(X_1+X_2=7)}$

$= \dfrac{P(X_1=2 \text{ and } 2+X_2=7)}{P(X_1+X_2)=7}$

$= \dfrac{P(X_1=2 \text{ and } X_2=5)}{P(X_1+X_2=7)}$

$= \dfrac{P(\{25\})}{P(\{16, 25, 34, 43, 52, 61\})} = \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6}$

Pas:

$X_1+X_2=7$ și $X_1=2 \Rightarrow 1$
altfel $\Rightarrow 0$.

(4)

n ← 1000
ctr ← 0.
simlist ← numeric (n)
while (ctr < n) {
trial ← sample (1: 6, 2, replace = TRUE)

```
if( sum(trial) ==7 )
        { succes ← if (trial [1] = =2) 1 else 0
          ctr ← ctr + 1
          simulist [ctr] ← succes }
```

```
< mean(simulist)
[1] 0.1611
```

I **Statistica:**

Date

Populatie:

↳ Esantion aleator

1. Prelucrarea datelor

Histograma - observații a unei variabile aleatoare x

relative frequency of a value = $\frac{\text{nb. of the times the value occurs}}{\text{nb. of observations in the dataset}}$

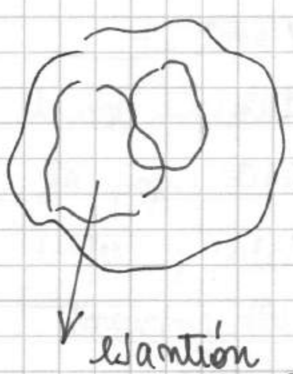
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$\bar{x}$ = sample mean

$x_1, \dots x_n$ = observation

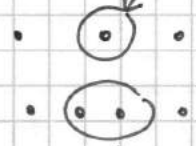
Populația statistică mărimea N

x_i = caracteristica numerică a elementului i („individului")



eșantion ales aleator de volum $\underline{n < N}$

pentru eșantion $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$



↳ media celor 2 = mediana ($\tilde{X}$; dar valorile trebuie ordonate)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1} = \text{varianța eșantionului} = s^2 = \frac{S_{xx}}{n}$$

$\sqrt{s^2}$ = abaterea medie standard / deviația medie standard eșantionului

~~Sxx =~~

Exemplu:

$N = 5$

$n = 3$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10.$$

Executive	Annual Salary	Sex
A	39	M
B	41	F
C	25	F
D	55	M
E	40.	M

a) Salary $\mu = \frac{\sum X}{N} = \frac{200}{5} = 40.$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{N} = \frac{452}{5} = 90{,}4$$

$$\sigma = \sqrt{904} = 9{,}508$$

b) Sex $\pi_F = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$\longrightarrow$

ABCDE

$\rightarrow$ $\bar{X}$ = VARIABILĂ ALEATOARE!!!! $\leftarrow$

$$\bar{X}: \begin{pmatrix} \bar{x}_{ABC} & \bar{x}_{ABD} & - - - - \\ 0{,}1 & 0{,}1 & , \ldots - \end{pmatrix}$$

$$S^2: \begin{pmatrix} s^2_{ABC} & s^2_{ABD} & - - - \\ 0{,}1 & 0{,}1 & - - - \end{pmatrix}$$

$\mu_{\bar{x}} = 40$ $\quad\quad$ $\mu_p = 40$

$\sigma^2_{\bar{x}} = 15.067$ $\quad\quad$ $\sigma^2_{x} = ,04$

$\sigma_{\bar{x}} = 3{,}882$ $\quad\quad$ $\sigma_x = 20.$

Central limit theorem:

As long as we take random samples that are sufficiently large absolutely ($n \geq 30$) but that are fairly small relative to population size ($n < .05N$), the theorem allows us to ~~refer~~ infer population parameters from sample statistics without knowing the shape of the population distribution (which is precisely the type of knoledge that is often unavailable). In adition, as the next section shows, the theorem can be adapted for use with discrete as well as continuous random variables.

$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$P(\bar{X} \leq 45) = P\left(\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{45-\mu}{\sigma}\right)$, unde $\mu = 40$, $\sigma = 4,655$

Temă laborator P.S. - S10.

Ex1. X și Y = două v.a discrete independente

a) $X : \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$, $Y : \begin{pmatrix} e & e^3 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$2 - X = ?$ $\qquad Y^{-1} = ?$

$X^3 = ?$ $\qquad \ln Y = ?$

$\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot X\right) = ?$

$2 - X : \begin{pmatrix} 2+3 & 2-6 \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \Rightarrow 2 - X : \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$

$X^3 : \begin{pmatrix} (-3)^3 & 6^3 \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \Rightarrow X^3 = \begin{pmatrix} -27 & 216 \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$

$\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot X\right) = ?$

$\frac{\pi}{6} \cdot X : \begin{pmatrix} -\frac{3\pi}{6} & \frac{6\pi}{6} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \cdot X : \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & \pi \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot X\right) = \cos\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & \pi \\ 1/8 & 7/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/8 & 7/8 \end{pmatrix}$.

$Y^{-1} = ?$

$Y^{-1} : \begin{pmatrix} e^{-1} & (e^{+3})^{-1} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow Y^{-1} : \begin{pmatrix} \frac{1}{e} & \frac{1}{e^3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$\ln Y : \begin{pmatrix} \ln(e) & \ln(e^3) \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \ln Y : \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

EX2. X și Y de la 1, determinați:

a) $X \cdot Y$, $\frac{X}{Y}$, $|X - Y^2|$

$X : \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \qquad Y : \begin{pmatrix} e & e^3 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$X \cdot Y : \begin{pmatrix} -3 \cdot e & 6 \cdot e & -3 \cdot e^3 & 6 \cdot e^3 \\ \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} & \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} & \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$X \cdot Y : \begin{pmatrix} -3e & 6 \cdot e & -3 \cdot e^3 & 6 \cdot e^3 \\ \frac{1}{32} & \frac{7}{32} & \frac{3}{32} & \frac{21}{32} \end{pmatrix}$

$\frac{X}{Y} = X \cdot Y^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{e} & \frac{1}{e^3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{e} & -\frac{3}{e^3} & \frac{6}{e} & \frac{6}{e^3} \\ \frac{1}{32} & \frac{3}{32} & \frac{7}{32} & \frac{21}{32} \end{pmatrix}$

$|X - Y^2| = ?$

$Y^2 = \begin{pmatrix} e^2 & e^6 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow X - Y^2 : \begin{pmatrix} -3-e^2 & -3-e^6 & 6-e^2 & 6 \\ \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} & \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X - Y^2 : \begin{pmatrix} -3-e^2 & -3-e^6 & 6-e^2 & 6-e^6 \\ \frac{1}{32} & \frac{3}{32} & \frac{7}{32} & \frac{21}{32} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |x-y^2| = \begin{pmatrix} 3+e^2 & 3+e^6 & -6+e^2 & -6+e^6 \\ \frac{1}{32} & \frac{3}{32} & \frac{7}{32} & \frac{21}{32} \end{pmatrix}$$

Ex3. d) Determinați parametrii reali p și q știind că:

$X: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2p & q \end{pmatrix}$ $Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 7q \end{pmatrix}$ sunt v.a bine definite

C.E: $\begin{cases} 2p \geq 0 \\ q \geq 0 \\ 7q \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} p \geq 0 \\ q \geq 0. \end{matrix}$

și $\begin{cases} 2p+q = 1 \\ q+7q = 1 \Rightarrow 8q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{8} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2p = 1-q \\ 2p = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}. \end{matrix}$

$\Rightarrow p = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{16} \geq 0$

Ex. 4 d) Folosind repartițiile v.a de la 1) și 2) calculați

$P(X \cdot Y \leq e^4) = ?$

$X \cdot Y: \begin{pmatrix} -3e & 6e & -3e^3 & 6 \cdot e^3 \\ \frac{1}{32} & \frac{3}{32} & \frac{7}{32} & \frac{21}{32} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P(XY \leq e^4) = \frac{1}{32} + \frac{3}{32} + \frac{7}{32} = \frac{11}{32}$.

$e^4 = 54,59$
$e^3 = 20,08$
$6e^3 = 120,51$

$\boxed{\text{2}}$ $P(x\cdot y \geq 7 \mid x<0) = ?$ $\qquad$ $P(A \mid B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$A \cap B = A$ și B

$P(x\cdot y \geq 7 \cap x<0) = 0$

$\Rightarrow P(x\cdot y \geq 7 \mid x<0) = 0$

$\boxed{\text{3}}$ $P(x\cdot y < 9 \mid y > 3) = ?$

$P(x\cdot y < 9 \cap y>3) = \dfrac{3}{32}$

$P(y>3) = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow P(xy < 9 \mid y>3) = \dfrac{3}{32}\cdot\dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$

$\boxed{\text{4}}$ $P\left(\dfrac{x}{y} < 1\right) = \dfrac{1}{32} + \dfrac{3}{32} + \dfrac{21}{32} = \dfrac{25}{32}$.

$\boxed{\text{5}}$ $P(|x-y^2| \geq 3) = \dfrac{1}{32} + \dfrac{3}{32} + \dfrac{21}{32} = \dfrac{25}{32}$

$\boxed{\text{6}}$ $P\left(\dfrac{x}{y} < |x-y^2|\right) = \dfrac{1}{32} + \dfrac{3}{32} + \dfrac{21}{32} = \dfrac{25}{32}$

18.04.2022

Laborator P.S. Statistică. Săpt 10.

Dispersie = Gradul de împrăștiere față de medie ≥ 0

medie

Dispersie $= 0 \Rightarrow$ obg. v.a de tipul $X: \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$

Media = nr. real

Formula 2 de la medie = valabilă mereu
Formula 2 de la dispersie = doar când X și Y sunt indep.

Medie	Dispersie

$y = 3$

$X \backslash Y$	1	2	3	4	p_i
0	4/40	3/40	2/40	1/40	1/4
1	1/40	4/40	3/40	2/40	1/4
2	2/40	1/40	4/40	3/40	1/4
3	3/40	2/40	1/40	4/40	1/4
q_j	1/4	1/4	1/4	1/4	1

Suma pe linie $= p_i$

$\sum p_i = q_j$ colț dr. jos

Suma pe col $= q_j$

$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ rep. marg.

$$\rho = \frac{E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}}$$

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = \frac{1}{4}\left(0+1+2+3\right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

$$E(Y) = \frac{1}{4}\left(1+2+3+4\right) = \frac{1}{4}\cdot 10 = \frac{5}{2}.$$

$$\boxed{E(X\cdot Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot \pi_{ij}}$$

$$E(X\cdot Y) = \frac{169}{40}.$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{\frac{169}{40} - \frac{15}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{19}{40}\cdot\frac{4}{5} = \frac{19}{10}\cdot\frac{1}{5} = \frac{19}{50} = \frac{38}{100} = 0$$

$\Rightarrow$ pozitiv corelate

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{7}{2} - \frac{9}{4} = \frac{5}{4}$$

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow E(X^2) = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}.$$

$$Y^2 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow E(Y^2) = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2 = \frac{30}{4} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$$

$$E(X\cdot Y) = 1\left(1\cdot\frac{4}{40} + 2\cdot\frac{4}{40} + 3\cdot\frac{3}{40} + 4\cdot\frac{2}{40}\right) + 2\left(\frac{2+2+12+12}{40}\right) +$$

$$3\cdot\frac{3+4+3+16}{40} = \frac{26+56+87}{40} = \frac{169}{40}.$$

$\boxed{X|Y=3}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{\frac{2}{40}}{\frac{1}{4}} & \frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{4}} & \frac{\frac{4}{40}}{\frac{1}{4}} & \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}$

coloana

$y=3$

$$E(X|Y=3) = 0 \cdot \frac{2}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{16}{10}.$$

$$Y|X=1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

$$Var(-X+5) = Var(-X) = (-1)^2 \cdot Var(X) = Var(X) = \frac{5}{4}$$

deja calculat

$$Var(2X-3) = Var(2X) = 2^2 \cdot Var(X) = 4 \cdot Var(X) = 5.$$

e) $P(X<1, Y>3) =$ sumă de p_i-uri $= 1/40$.

și

$$P(X \geq 2, Y \leq 2) = \frac{2}{40} + \frac{1}{40} + \frac{3}{40} + \frac{2}{40} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

ex2pdf $\quad X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \qquad Y: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

a) $K = P(X=1, Y=-1)$.

3

$\frac{1}{10}$

$$\begin{array}{c|ccc}
x \backslash y & -1 & 1 & P_i \\
0 & 0{,}5-K & K-0{,}1 & 0.4 \\
1 & K & 0{,}6-K & 0.6 \\
Q_j & 0.5 & 0.5 & 1
\end{array}$$

C.E: $0{,}5-K \geq 0$

$0{,}5-K \leq \min (0{,}4; 0{,}5)$

$0 \leq 0{,}5-K \leq 0{,}4$

$0 \leq -0{,}1+K \leq 0{,}1$

$0 \leq 0{,}6-K \leq 0{,}5$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \leq K \leq 0{,}5 \\ 0{,}1 \leq K \leq 0{,}5 \\ 0{,}1 \leq K \leq 0{,}6 \end{array}\right\} \Rightarrow 0{,}1 \leq K \leq 0{,}5$$

b) $$\rho = \frac{E(x \cdot y) - E(x)\cdot E(y)}{\sqrt{V(x)\cdot V(y)}}$$

$$x^2: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$y^2: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$E(x) = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}6 = 0{,}6.$

$E(y) = -1 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0$

$$E(x \cdot y) = 0 \cdot (-1)\cdot(0{,}5-K) + 0 \cdot 1 \cdot (K-0{,}1) + 1 \cdot (-1)\cdot(K) + 1 \cdot 1 \cdot (0{,}6-K)$$

$$= -K + 0{,}6 + K = 0{,}6.$$

$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = 0{,}6 - (0{,}6)^2 = 0{,}6 - 0{,}36 = 0{,}24$

$E(x^2) = 0{,}6$

$V(y) = E(y^2) - (E(y))^2 = 1 - 0 = 1.$

$E(y^2) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$

$$\Rightarrow \rho = \frac{0{,}6 - 2K}{\sqrt{0{,}24 \cdot 1}} = \cancel{\frac{0{,}6}{\sqrt{0{,}6}} = \frac{0{,}36}{0{,}6} = 0{,}6.}$$

$$= \frac{0{,}6-2K}{\sqrt{0{,}24}} = \cdot$$

c) X și Y necorelate $\Leftrightarrow \rho(X,Y) = 0$

ρ = coeficient de corelare

$$\Leftrightarrow \frac{E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{0,6 - 2k}{\sqrt{0,24}} = 0 \Rightarrow k = 0,3.$$

d)

X \ Y	-1	1	p_i
0	0,2	0,2	0,4
1	0,3	0,3	0,6
q_j	0,5	0,5	1

Necorelarea NU implică independența!

Necorelare = 0 → nu înseamnă că sunt indep.

Dacă X și Y indep ⇒ medie X, Y = 0.

Toate celelalte pb. ca temă

29. 04. 2022

Curs Statistică.

Populație

- indivizi
- X v. a care urmează o lege de probabilitate

Repartiția lui X poate depinde de 1 parametru sau mai mulți θ necunoscut.

Ex: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X$ urmează o lege normală
μ sau σ necunoscut
sau (μ, σ^2) necunoscut

x valoare a variabilei X

date: $x_1, x_2, \dots x_{10}$ cunoscute
fiecare este o val. a lui X

$X_1, X_2, \dots X_{10}$ sunt v. a independente cu aceeași lege de prob. ca X
(repartiție)

$X_1, \dots X_{10}$ - selecție aleatoare din populația X

x_1 = valoare a v. a X_1
x_2 = valoare a v. a X_2
$\vdots$
x_{10} = - - -

Problema este estimarea parametrului θ de care depinde repartiția lui X

De obicei, parametrul θ poate fi $\mu = E(X)$ sau $\sigma^2 = V(X)$

Construim variabile aleatoare

Media de selecție:

$\to \bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

Varianța de selecție:

$\to s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$

Ex: 3 persoane cu înălțimile $\overset{I}{69}$, $\overset{II}{72}$, $\overset{III}{70}$.

Facem o selecție aleatoare cu $n = 2$

$\bar{x} = ?$

$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{69 + 72}{2} = 70,5$

x_1	x_2	x_3
69	72	70

$\frac{x_1 + x_1}{2} = \frac{69 + 69}{2} = 69$

$\frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{69 + 70}{2} = 69,5$

$\frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{72 + 70}{2} = 71$

$\frac{x_2 + x_2}{2} = 72$

$\frac{x_3 + x_3}{2} = 70$

$\Rightarrow \bar{X} : \begin{pmatrix} 69 & 70,5 & 69,5 & 71 & 70 & 72 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

Media populației $= \frac{69 + 72 + 70}{3} = 70,3 = \mu = E(X) = \frac{211}{3}$

$\sigma^2 =$

Pt $\bar{X}$: $E(\bar{X}) = 69 \cdot \frac{1}{9} + 70{,}5 \cdot \frac{2}{9} + \dots = \frac{211}{3}$

$V(\bar{X}) = 69^2 \cdot \frac{1}{9} + 70{,}5^2 \cdot \frac{2}{9} + \dots - \left(\frac{211}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$

$\sigma^2 = V(X) = 69^2 \cdot \frac{1}{3} + 72^2 \cdot \frac{1}{3} + 70^2 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{211}{3}\right)^2 = \frac{14}{9}$

$X: \begin{pmatrix} 69 & 72 & 70 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Statistică

funcții de $X_1, X_2, \dots, X_n$ unde $X_1, \dots X_n$ reprez. o selec de volum n din populația X

Ex: $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ este o statistică

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ este o statistică

$X' = \frac{1}{2} \left[\min(X_1, \dots, X_n) + \max(X_1, \dots, X_n)\right]$

Pp. că repartiția lui X depinde de un parametru θ necunoscut

Notăm $\hat{\Theta}$ o funcție

$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ = estimator al param. θ
= variabilă aleatoare

Ex: $\bar{X} = h(X_1, \dots, X_n) = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

$\hat{\theta}$ = estimație a lui θ
= valori ale lui $\hat{\Theta}$

În exemplul anterior

$\hat{\theta}$: 69 estimatori ale mediei
70,5

$$\frac{211}{3}$$

Ce înseamnă un estimator bun? (al parametrului θ)

1) $\hat{\Theta}$ s.n. estimator nedeplasat pt. θ necunoscut dacă $E(\hat{\Theta}) = \theta$

Altfel, $\hat{\Theta}$ s.n. deplasat și deplasarea lui este

$$bias(\hat{\Theta}) = E(\hat{\Theta}) - \theta$$

2) $\hat{\Theta}$ s.n. estimator eficient pentru parametrul θ dacă este nedeplasat $E(\hat{\Theta}) = \theta$ și are varianta minimă MIRC (margine uniformă Rao-Cramer)

Dacă X are funcția de densitate $f(x, \theta)$, MIRC are formula:

n = volumul selecției $x_1, \dots, x_n$

$$MIRC = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{E\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln(x, \theta)\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{E\left(\frac{\partial^2}{\partial^2\theta} \cancel{\ln f(x, \theta)}\right)}$$

derivata

3) $\hat{\tilde{\Theta}}$ s.n. estimator constant ptr param θ dacă depinde de selecția aleatoare $X_1, \dots, X_n$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Teoremă:

Dacă 1) $E(\hat{\tilde{\Theta}}) = \theta$
2) $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\tilde{\Theta}}) = 0$ $\Rightarrow$ $\hat{\tilde{\Theta}}$ este estimator consistent pt θ

Ex 1: Media de selecție $\bar{X}$ este estimator deplasat și consistent pt $\theta = \mu = E(X)$ (media populației)

Fie X populație statistică cu $E(X) = \mu$

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ selecție aleatoare de mărime n

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \qquad V(X) = \sigma^2$$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \underbrace{\mu}_{E(X)} = \mu$$

$\Rightarrow$ $\bar{X}$ este estimator nedeplasat

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot V(X_1 + \dots + X_n) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Obs: 1) $E(\bar{X}) = \mu$
2) $\lim_{n\to\infty} V(\bar{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0 \Rightarrow$ $\bar{X}$ estimator consistent ptr μ

Fie X populație statistică, $\theta = \sigma^2$ necunoscut

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ repartiție aleatoare de volum n

statistica $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ este estimator nedeplasat pt σ^2

$\Rightarrow E(S^2) = \sigma^2$

Obs) Y v.a $\Rightarrow V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

$$\Rightarrow \boxed{E(Y^2) = V(Y) + [E(Y)]^2}$$

$$E(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}E\left[\sum X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{1}^{n}X_i\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right) - \frac{1}{n}E\left[\left(\sum_{1}^{n}X_i\right)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{1}^{n}E(X_i^2) - \frac{1}{n}\cdot E\left[\left(\sum_{1}^{n}X_i\right)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum\left[(V(X_i) + [E(X_i)]^2\right] - \frac{1}{n}\left[V\left(\sum_{1}^{n}(X_i)\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left[E\left(\sum_{1}^{n}X_i\right)\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{1}{n}\left[n\sigma^2 + (n\mu)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2) = \frac{1}{n-1}\cdot\sigma^2(n-1) = \sigma^2$$

$\Rightarrow E(S^2) = \sigma^2 \Rightarrow S$ este estimator nedeplasat

EX3: Determinați MIRC

$X \sim N^2(\mu, \sigma^2)$ $\quad \mu$ = param. necunoscut

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in R$$

$$Y = f(X,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \exp\left(-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \cancel{x \in R} \quad X = v.a.$$

$$\ln f(x,\theta) = \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \qquad \boxed{\theta = \mu}$$

$$\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} = \frac{(x-\theta)}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{1}{\sigma^2}$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln f(X,\theta)}{\partial\theta^2}\right) = E\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) = -\frac{1}{\sigma^2}$$

$$MIRC = -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{E\left(\frac{\partial^2 \ln}{\partial\theta^2} f(x,\theta)\right)} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{\sigma^2}} = \frac{\sigma}{n}$$

Concluzie: $\bar{X}$ estimator eficient pt μ

$$\underbrace{V(\bar{X})}_{EXC\ 1} = \frac{\sigma^2}{n} = \underbrace{MIRC}_{EXC\ 3}$$

1 problemă de statistică la examen:

- det MIRC
- det. estimatori (metode de estimare a parametrilor)

02.05.2022

Repartiții de v.a

I. $\boxed{\text{V.a discrete}}$

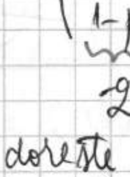
1. $X \sim Bern(p)$

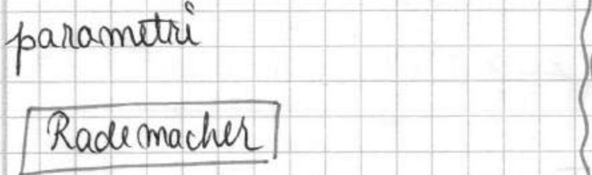
$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \underbrace{1-p}_{q} & p \end{pmatrix}$$

Se dorește 1 nr. cât mai mic de parametri

$\boxed{\text{Rademacher}}$

$$X: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$





2. Repartiția Binomială

$X \sim Binom(n, p)$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \ldots k \ldots n \\ & C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{pmatrix}$$

Încerc până reușesc prima dată

3. $X \sim Geom(p)$ → nu măsoară nr de eșecuri până la primul succes

Modelează nr. de încercări necesare până la primul succes.

II. $\boxed{\text{V.a continue}}$

lucrăm cu intervale de valori.

1. $X \sim Unif(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

2. $X \sim Exp(\lambda)$,

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

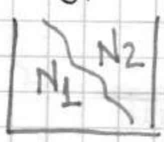
Timpul de așteptare până la apariția primului eveniment din Poisson (povestea cu gândacii)

3. $X \sim Norm(m, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ & & & & p \cdot q^{k-1} & \end{pmatrix}$$

4. $X \sim Hyper(N, N_1, n)$



$N_1 + N_2 = N$

facem n extrageri

$n = n_1 + n_2$

N = nr. inițial de bile

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k^{=n_1} & \dots & n \\ & & \dots & \dfrac{C_{N_1}^{k} \cdot C_{N_2}^{n-k\,=n_2}}{C_N^n} & & & \end{pmatrix}$$

5. Repartiția uniformă

(are caz discret și caz continuu)

$X \sim Unif(\{1, 2, \dots, n\})$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

6. $X \sim Pois(\lambda)$

λ = nr. mediu de gândaci

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ \dots & & \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} & \dots & \end{pmatrix}$$

02.05.2022.

Seminar P.S.

Estimarea parametrilor

Metoda verosimilității maxime.

X v.a., repartiția ei depinde de θ necunoscut

$X_1, X_2, \ldots X_n$ selecție aleatoare de volume

$x_1, \ldots, x_n$ datele selecției

X are $\begin{cases} f \text{ de densitate } f(x, \theta) \\ f \text{ masă de prob } p(x, \theta) \end{cases}$

Determinarea lui θ:

L - f de verosimilitate ~~maximă~~

$$L(x_1, x_2, \ldots x_n, \theta) = \begin{cases} f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta) \\ \text{funcție de } \theta \\ p(x_1, \theta) \cdot p(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot p(x_n, \theta) \end{cases}$$

Det. θ care maximizează $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Dacă L continuă. $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

Dacă f : $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$

Exerciții:

ptr. cazul X v.a. discretă:

$X: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ $\quad X \sim \text{Bernoulli}(p)$

$\theta = p$ necunoscut

Considerând: 1, 1, 0, 1, ...

$X_1, \dots, X_n$ selecția aleatoare cu valorile $x_1, \dots, x_n$, construi fct. de verosimilitate $L(x_1, x_2, \dots, x_n; p) = ?$

$f(x, p) = x^p$

$x_1, \dots, x_n \to$ de k ori 1, de $n-k$ ori 0.

$$L(x_1, x_2, \dots x_n; p) = p^{x_1} \cdot p^{x_2} \cdots p^{x_n} \cdot (1-p)^{1-x_1} \cdots (1-p)^{1-x_n} =$$

$$= p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{\sum (1-x_i)}, \ p \in ($$

$$= p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{n - \sum x_i}, \ p \in (0, 1$$

$$\ln(L(x_1, x_2, \dots, x_n; p)) = \ln\left(p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{n-\sum x_i}\right)$$

$$= \ln p^{\sum x_i} + \ln (1-p)^{n - \sum x_i} =$$

$$= \sum x_i \cdot \ln p + (n - \sum x_i) \cdot \ln(1-p)$$

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots x_n; p)}{\partial p} = \sum x_i \cdot \frac{1}{p} + (n - \sum x_i) \cdot \frac{1}{1-p} \cdot (-1)$$

$$= \sum x_i \cdot \frac{1}{p} - (n - \sum x_i) \cdot \frac{1}{1-p} = 0$$

$\Rightarrow$ Egalăm cu 0 pt a găsi punctele critice

$$\sum x_i \cdot (1-p) - (n - \sum x_i) \cdot p = 0.$$

$$\sum x_i - p \sum x_i - np + p \sum x_i = 0.$$

$$\Rightarrow \sum x_i - np = 0 \Rightarrow \sum x_i = np. \Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum x_i}{n}$$

și este o estimatie

depinde de x_i, care

variază

$$\hat{p} = \frac{\sum X_i}{n} \quad \underline{\text{estimator}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_i = \text{estimație} \\ X_i = \text{estimator} \end{cases}$$

$$L(1,1,0,1,0,p) = p \cdot p \cdot (1-p) \cdot p \cdot (1-p) = p^3 \cdot (1-p)^2$$

$$p^1 = \frac{3}{5}$$

Pentru cazul $X \sim Exp(\lambda)$

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0. \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \qquad \theta = \lambda \text{ necun.}$$

$X_1, \dots, X_n$ v.a cu valorile $x_1, \dots, x_n$.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = ?$$

$$L(\dots) = f(x_1,\lambda) \cdot f(x_2,\lambda) \cdot \dots \cdot f(x_n,\lambda)$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x_2} \cdot \dots \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x_n}$$

$$= \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum x_i}$$

$$\ln(L) = \ln(\lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum x_i}) = \ln \lambda^n + \ln e^{-\lambda \sum x_i}$$

$$= \ln \lambda^n - \lambda \sum x_i = n \ln \lambda - \lambda \sum x_i$$

$$\frac{\partial\left(n \ln(\lambda) - \lambda (\sum x_i)\right)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\lambda} = \sum x_i \Rightarrow \lambda = \frac{n}{\sum x_i}$$

de completat

EX3: Poisson

R regiune $\subset \mathbb{R}^2$

$a(R)$ = aria regiunii

X = Poisson $(\lambda \cdot a(R))$

λ = nr. mediu de evenimente pe unitate de arie.

Un ecologist selectează n regiuni care nu se suprapun: $R_1, \dots, R$ și numără plantele dintr-o anumită specie pe care le găsește într-o anumită regiune.

$$f(x, \theta) = \frac{[\lambda \cdot a(R)]^x \cdot e^{-\lambda \cdot a(R)}}{x!}$$

$$\Rightarrow L(x_1, \dots x_n; p) = \frac{[\lambda \cdot a(R_1)]^{x_1} \cdot e^{-\lambda \cdot a(R_1)}}{x_1!} \cdot \frac{[\lambda \cdot a(R_2)]^{x_2} \cdot e^{-\lambda \cdot a(R}}{x_2!}$$

$$\dots \frac{[\lambda \cdot a(R_n)]^{x_n} \cdot e^{-\lambda \cdot a(R_n)}}{x_n!}$$

Ex 4

$$X : f(x,\theta) = \begin{cases} (\theta+1) \cdot x^{\theta} ; & x \in [0,1] \\ 0 , & \text{altfel.} \end{cases}$$

$\theta > 1$

$x_1 = 0,92$

$x_2 = 0,79$

$x_3 = 0,9$

$x_{10} = 0,\cancel{77}$

$$L(x_1, x_2, \dots x_n) = (\theta+1) \cdot x_1^{\theta} \cdot (\theta+1) \cdot x_2^{\theta} \cdot \dots \cdot (\theta+1) \cdot x_n^{\theta}$$

$$= (\theta+1)^n \cdot x_1^{\theta} \cdot x_2^{\theta} \cdot \dots \cdot x_n^{\theta}$$

$$= (\theta+1)^n \cdot (x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{\theta}$$

$$\ln(L) = \ln(\theta+1)^n + \ln(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{\theta}$$

$$= n \cdot \ln(\theta+1) + \theta \ln(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)$$

$$= n \cdot \ln(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\theta+1} = -\sum \ln(x_i)$$

$$\Rightarrow \theta+1 = \frac{-n}{\sum \ln(x_i)} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{-n}{\sum \ln(x_i)} - 1$$

Timpul uniform de așteptare a unui avion este repartizat uniform pe $[0,\theta]$

Care este funcția de densitate?

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{dc. } x \in [0,\theta] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$x_1, x_2, \dots x_n$ timpi de revenire

$$L(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\frac{1}{\theta} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\theta}}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{1}{\theta^n}$$

$\ln(L) = ?$ $0 \le x_1 \le \theta$

$0 \le x_2 \le \theta \quad \Rightarrow \theta \geq \max(x_1, \dots, x_n)$

$\vdots$

$0 \le x_n \le \theta$

04.05.2022

Reluare Statistică 3 h.

d → density

dbinom(3, 5, 0,4) → Probabilitatea să reușesc de 3 ori din 5, încercările sunt indep., cu probabilitatea de succes de 0,4 (fiecare)

dgeom → numără eșecurile până la prima reușită
→ începe să numere de la 0.
→ este mai probabil să ~~înc~~ reușiți din primele încercări decât să reușiți după multe
→ f descrescătoare
→ șansa de succes scade odată cu creșterea nr. de încercări

$t \leftarrow seq(-3, 7, 0.001)$

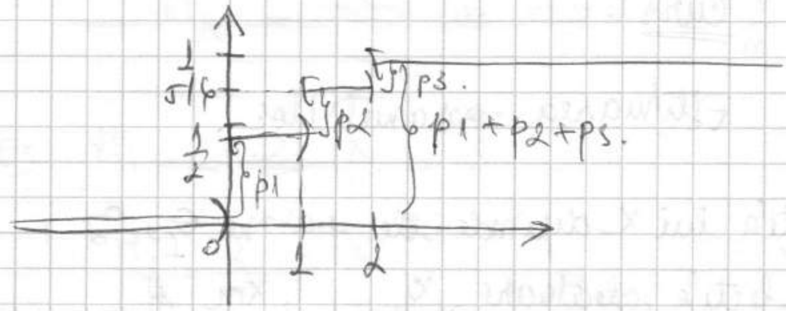
t = intervalul de discretizat
−3, 7 = capete
0,001 = măsura de discretizare

dexp(3, 1) ⇝ <u>NU</u> este o probabilitate!
⇝ Probabilitatea = aria de sub grafic

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Se face suma probabilităților

(Cumulative distribution function)



06.05.2022

Curs.

Estimarea parametrilor

X v.a, repartiția lui X depinde de param $\theta_1, \theta_2, \dots$

• Facem o selecție aleatoare $X_1, \dots, X_n$ și construim statistici (funcții de $X_1, \dots, X_n$)

Ex: $\overline{X}$, minim$(X_1, \dots, X_n)$

Observăm $x_1, \dots, x_n$ și obținem valori ale statisticilor

Aceste valori sunt ~~estimatori~~ estimații ale parametrilor.

estimatori ai param. statisticale ?

Metode de estimare a parametrilor:

I. Metoda momentelor

Momentele populației

$$\alpha_k = E(X^k)$$

Dacă X v.a de tip continuu cu funcția de densitate f:

$$E(X^k) = \int_R x^k \cdot f(x)\, dx$$

Ex: $E(X) = \int_R x f(x) dx \overset{not}{=} \mu$ sau m

$$E(X^2) = \int_R x^2 \cdot f(x)\, dx \overset{not}{=} \alpha_2$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \Rightarrow \alpha_2 = \sigma^2 + \alpha_1^2$$

2. momentele estimației

$$M_K = \text{mom. de ordin } K = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^K$$

Ex: $M_1 = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x}$

$M_2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2$

În ce constă metoda momentelor? Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha_1 = E(X) \\ M_2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 = \alpha_2 = E(X^2) = \sigma^2 + \alpha_1^2 \\ \vdots \\ M_K = \frac{1}{n}\sum x_i^K = \alpha_K = E(X^K) \end{cases}$$

Ex: Determinarea unui parametru (Estimarea)

Rezolvăm o ecuație: $M_1 = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x} = E$

Pp: $X \sim Exp(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$\theta = \lambda =$ necun

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$

1) devine $\bar{x} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\bar{x}}$

$\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{x}}$ $\boxed{\text{estimator}}$ pt $\theta = \lambda$

Ex2: Estimarea a 2 parametri:

$$\begin{cases} M_1 = \bar{x} = E(X) \\ M_2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 = E(X \end{cases}$$

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ $\qquad \theta_1 = m, \ \theta_2 = \sigma^2$ param. necun

$$f(x, m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$E(X) = m = \theta_1$$

$$E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = \sigma^2 + m^2 = \theta_2 + \theta_1^2$$

$$\begin{cases} \bar{X} = \theta_1 \\ \frac{1}{n}\sum x_i^2 = \theta_2 + \theta_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta}_1 = \bar{x} \\ \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \underbrace{\theta_1^2}_{\bar{x}^2} \end{cases}$$

Arătăm că: $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 =$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}_{s^2} = \frac{n-1}{n} \cdot s^2$$

Facem calculul: $\frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 =$

$$= \frac{1}{n}\sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{n}\left(\sum x_i^2 - 2n\bar{x}\sum_1^n \frac{x_i}{n} + \sum_1^n \bar{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_1^n x_i^2\right) - \bar{x}^2$$

Sol:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \hat{m} = \bar{x} \\ \hat{\theta}_2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n-1}{n} \cdot s^2 \end{cases}$$

Proprietăți ale estimatorilor:

① $\hat{\Theta}_1$ este nedeplasat $E(\hat{\Theta}_1) = E(X) = m$

② $\hat{\Theta}_2$ este deplasat $E(\hat{\Theta}_2) = \frac{n-1}{n} \cdot E(S^2) = \frac{n-1}{n} V(X) =$

$= \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2$

③ $\hat{\Theta}_1$ este consistent:

$$E(\hat{\Theta}_1) = m \xrightarrow{n\to\infty} m$$
$$V(\hat{\Theta}_1) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\hat{\Theta}_2$ este consistent

II. Estimatori de verosimilitate maximă

X : pp. st.

repartiția lui X depinde de θ (resp $\theta_1, \theta_2, \dots$)

Fie $X_1, X_2, \dots X_n$ selecție aleatoare

$X_1, \dots, X_n$ au aceeași repartiție cu X și sunt liniar indep.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta)$

↳ funcție de θ

$\theta \in \Theta$

$x_1, \dots, x_n$ sunt date observate

$f(x, \theta) =$ f. de densitate a v.a X

$=$ f masă de prob. pt v.a X, θ param, $x \in R$

$L =$ fct. de verosimilitate

Dc L continuă și derivabilă în θ, rezolvăm ecuația.

$$\frac{dL(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)}{d\theta} = 0.$$

ec de verosimilitate maximă

Dc $L =$ formă complicată, rezolvăm: $\frac{d \ln L(x_1, \dots}{d\theta}$

Dc avem mai mulți parametri $, \theta_1, \dots, \theta_n$, rezolvă sistem. de verosim. maximă:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, \dots x_n, \theta_1, \dots \theta_n)}{\partial \theta_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x_1, \dots x_n, \theta_1, \dots \theta_n)}{\partial \theta_n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{\theta}_1, \dots \hat{\theta}_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots x_n, \theta_1, \dots \theta_n)}{\partial \theta_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots x_n, \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n)}{\partial \theta_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots x_n, \theta_1 \theta_2, \dots \theta_n)}{\partial \theta_n} = 0 \end{cases}$$

<u>EX1</u>: Estimarea unui parametru:

X e repartizată geometric de param θ

$x \in N$: $p(x, \theta) = \theta(1-\theta)^x$, $\theta > 0$.

x_1 dată observată

$X_1, X_2, \dots X_n$ selecție aleatoare

$x_1, \dots x_n$ date observate

$$L(x_1, x_2, \dots x_n, \theta) = p(x_1, \theta) \cdot p(x_2, \theta) \dots p(x_n, \theta)$$

$\theta > 0$

$$[\theta(1-\theta)^{x_1}][\theta(1-\theta)^{x_2}] \dots [\theta(1-\theta)^{x_n}] =$$

$$= \theta^n (1-\theta)^{\sum x_i}$$

$$\partial \ln (x_1, \dots x_n, \theta) = \ln \theta^n + \ln (1-\theta)^{\sum x_i} =$$

$$= n \ln \theta + (\sum x_i) \cdot \ln (1-\theta)$$

$\theta > 0$

$$\frac{dL(x_1, \dots x_n, \theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} - \left(\sum_1^n x_i\right) \cdot \frac{1}{1-\theta} = 0.$$

$$\Rightarrow n(\theta - 1) - \left(\sum_1^n x_i\right) \cdot \theta = 0 \Rightarrow \theta\left(n - \sum_1^n x_i\right) = n$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{n}{n - \sum x_i} = \frac{1}{1 - \frac{\sum x_i}{n}} = \frac{1}{1 - \overline{x}}$$

Estimația : $\hat{\theta} = \frac{1}{1-\overline{x}}$, Estimatorul $\hat{\Theta} = \frac{1}{1-\overline{X}}$

Ex 2: Estimarea a 2 parametri :

$X \sim N(m, \sigma^2)$ $\theta_1 = m$, $\theta_2 = \sigma^2$ necunoscuți.

$$f(x, m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \cancel{x > 0} \; x \in R$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in$$

$m = \theta_1$, $\sigma^2 = \theta_2$

$$\Rightarrow f(x, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\sqrt{\theta_2}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_1-\theta_1)^2}{2\theta_2}}, x \in R.$$

Fie $x_1, x_2, \dots x_n$ date observate

$$L(x_1, x_2, \dots x_n, \theta_1, \theta_2) = f(x_1, \theta_1, \theta_2) \cdot f(x_2, \theta_1, \theta_2) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta_1, \theta_2); \; \theta_1 \in R, \; \theta_2 \in R$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\theta_2}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2}} =$$

$$= \theta_2 \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\sum_1^n (x_i - \theta_1)^2 / 2\theta_2}$$

$$\begin{cases} \theta_1 \in \mathbb{R} \\ \theta_2 > 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ln L(x_1, \ldots x_n, \theta_1, \theta_2) =$$

$$= -\frac{n}{2} \ln \theta_2 - \frac{n}{2} \ln 2\pi - \sum_1^n \frac{(x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(x_1, \ldots x_n, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} = 0. \\ \dfrac{\partial \ln L(x_1 \ldots x_n, \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{-\frac{n}{2} \frac{1}{\theta_1}} \sum_1^n \frac{x_i - \theta_1}{\theta_2} = 0 & (1) \\ -\frac{n}{2} \frac{1}{\theta_2} + \sum \frac{(x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2^2} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{d'où } 1) \Rightarrow \sum x_i = n\theta_1 \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$$

$$2 \Rightarrow -n\theta_2 + \sum (x_i - \bar{x})^2 = 0.$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})}{n}$$

$$\Rightarrow \hat{\Theta}_1 = \bar{X} \quad , \quad \hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$$

Ex:

- N - animale N - parametrii necunoscuți
- prindem M animale și le cipăm și le eliberăm
- prindem n animale, dintre care x sunt cipate

$$p(x, M, N, n) = \frac{C_M^x \, C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$$

Pentru a găsii maximul funcției calculăm raportul

$$\frac{p(x, M, N, n)}{p(x, M, N-1, n)} \geq 1$$

$$\frac{\cancel{C_M^x} \, C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} \cdot \frac{C_{N-1}^n}{\cancel{C_M^x} \, C_{N-M-1}^{n-x}} \geq 1$$

$$\frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-M-n+x} \geq 1$$

$$N < \frac{Mn}{x} \qquad N = \left[\frac{MN}{x} \right]$$

Ex: - M = 200 pești însemnați
- n = 100 pești recapturați x = 11 însemnați

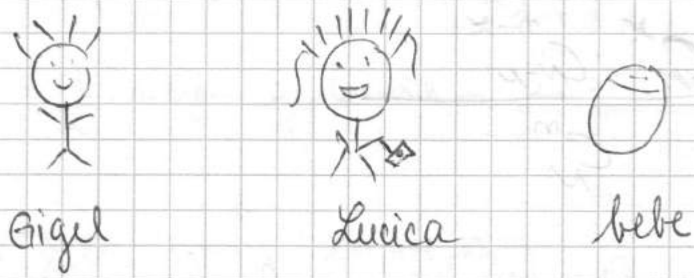
$$\hat{N} = \left[\frac{200 \cdot 100}{11} \right] = \lfloor 1818{,}4 \rfloor = 1818$$

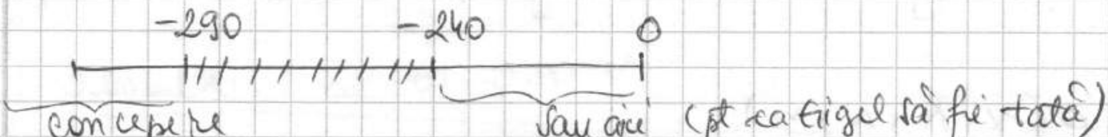
09.05.2022

Laborator P.S. Săpt. 12

Problema testului de paternitate

momentul 0 - momentul nașterii lui bebe





Fie X v.a ce reprezintă durata sarcinii, în zile

$P((X \le 240) \cup (X \ge 290))$

evenimente incompatibile (se exclud reciproc)

independente → pot fi și amândouă adev. în același timp.

$\rightarrow P((X \le 240) \cup (X \ge 290)) = P(X \le 240) + P(X \ge 290)$

$X \sim N(\underset{m}{270}, \underset{\sigma^2}{100})$

m = media

$\sigma = 10$

$P(X \le 240) = F_X(240)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$F_X(240) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 10} \cdot \int_{-\infty}^{x} \cdot e^{-\frac{(t-270)^2}{2 \cdot 100}}$$

$$E(Z) = E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X-m) = \frac{1}{\sigma}\left(E(X) - E(m)\right)$$
$$= \frac{1}{\sigma}(m-m) = 0.$$

Procesul de standardizare:

$$X \sim N(m, \sigma^2) \quad ; \quad Z = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$V(Z) = V\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot V(X-m) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot V(X) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1$$

$$P(X \le 240) = P(X-270 \le -30) = P\left(\frac{X-270}{10} \le -3\right)$$

$$P(X \ge 290) = P(X-270 \ge 20) = P\left(\frac{X-270}{10} \ge 2\right)$$

$$Z \sim N(0,1)$$

$$\cancel{\Phi(-3)}$$

$$\Rightarrow \cancel{P\left(\frac{X-270}{10} \ge 2\right) = \Phi(2)} \quad P\left(\frac{X-270}{10} \le -3\right) = \Phi(-3)$$

$$P\left(\underbrace{\frac{X-270}{10}}_{Z \sim N(0,1)} \ge 2\right) = 1 - P(Z \le 2) = P(Z \ge 2)$$

$$\Phi(-3) + 1 - \Phi(2) = 1 - \Phi(3) + 1 - \Phi(2) = 2 - (\Phi(3) + \Phi(2))$$

2 - (pnorm + pnorm(3)) = 0,0241

în R se lucrează cu radical din dispersie

\# prin calcul direct

$P(X \le 240)$

pnorm(240, 270, 10)

$P(X \ge 290) = 1 - P(X \le 290) = 1 - P(X < 290)$

1- pnorm (290, 270, 10)

#P („Gigel e tată"):

pnorm(240, 270, 10) + 1 - pnorm (290, 270, 10) = 0,024.

Problema 15 - Așteptarea la examen

$X \sim Exp\left(\frac{1}{20}\right) \Rightarrow media = 20.$

a) $P(X>20) = 1 - P(X \le 20)$

= 1 - pexp (20, 1/20)

t ← seq (0,001, 30, 0.001)

plot (t, dexp(t, 1/20), type = "l", col = "magenta")

⇒ densitatea fct exp. , -

abline (v = 20)

$P(X>20) = 1 - P(X \le 20) = 1 - F_X(20) = 1 - (1 - e^{-\lambda x})$

F_x

$\lambda = \frac{1}{20}$; $x = 20$

$\Rightarrow 1 - F_X(20) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{20} \cdot 20}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

sau

$P(X>20) = 1 - P(X \le 20) = 1 - \int_{-\infty}^{20} f_X(x)\,dx =$

$= 1 - \int_{0}^{20} f_X(x)\,dx =$

$= 1 - \int_{0}^{20} \lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx = \int_{20}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx$

$\lambda = \frac{1}{20}$; $x = 20$.

densitatea valabilă de la 0 →

b) $P(20 \le X \le 40) = F(40) - F(20)$

$pexp(40, 1/20) - pexp(20, 1/20)$

$\to P(20 \le X \le 40) = \int_{20}^{40} \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx \ ; \ \lambda = \frac{1}{20}$

sau

$P(20 \le x \le 40) = F(40) - F(20)$

Caz discret:

$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$

$P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$

$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b) + P(X = a)$

Caz continuu:

$P(a < x < b) = P(a \le x \le b) = P(a < x < b) = P(a \le x < b)$
$= F(b) - F(a)$

Laborator 16.05.2022.

Proiect

Pentru ambele proiecte trebuie să învățăm ceva a
avem documentație trimisă. Din cele 12 cerințe, mini
8 corecte

18 iunie deadline predare proiect

Prezentare proiect online, cu cameră.

Proiectul conține doar partea de probabilități.

I proiect - construire pachet R

II proiect - interfață grafică cu shiny

Titanic ⇒ lista cu informații despre supraviețuitorii de p
Titanic

Iris → info despre o colecție de flori

?volcano ⇒ informații despre dataset

Dreapta sus - import dataset - excel

mediana = stabilă în cazuri extreme

media = destul de volatilă în cazuri extreme

3, 4, 5

$\bar{x} = 4 =$ mediana $=$ ~~3+4+5~~

Me = mediana = 4

3, 4, 500

$\bar{x} = 4$, Me = 100+

$\bar{x} = 4$ = mediana
Me = media

OU
u

1 1 3 3 3 4 500 valoarea modală = 3 deoarece apare cel mai des.

4 5 6 = repartiție trimodală, toate cele 3 nr. au aceeași frecvență de apariție

Media = mediana = valoarea modală în repartiția NORMA "repartiție regine

e

Casă extrag valori dintr-o repartiție:
x ← rnorm (10^6, 0,1)
x ← norm (10^6, 2,2)

d ... ⇒ densitate / funcție de masă
p ... → funcția de repartiție
r ... ⇒ extragere / generare

~~x ← norm (10^6, 3, 9~~

x ← norm (10^6, 2, 3)
medie_x = mean (x)
mediana_x = median (x)

1 2 4 7 Me = 3

Centila → lasă la st 1%.

Quartila → la st 25
dr 75

= Seminar P.S. = 16.05.2022

Pentru examen

1) urnă 5 a, 5 n

Se scot 3 bile fără întoarcere.

P de a avea 2 bile albe și 1 neagră = ? = P(2a

2) 100 piese $\begin{cases} 6 \text{ defecte remediabile} \\ 4 \text{ retururi} \\ 90 \text{ bune} \end{cases}$

Se scot 10 piese la întâmplare

P(7 bune, 1 retur, 2 def.) = ?

① $$\frac{C_5^2 \cdot C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{\frac{5!}{2!\,3!} \cdot 5}{\frac{10!}{3!\,7!}} = \frac{5}{12}$$

② $$P = \frac{C_{90}^7 \cdot C_4^1 \cdot C_6^2}{C_{100}^{10}}$$

Proprietăți ale funcției de probabilitate

1) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

2) $A_1, A_2, \dots, A_n$ ev.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) & \text{dacă } A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall\, i \neq j \\ \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \end{cases}$$

$$- \dots + (-1)^{n+1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \text{ dc}$$

$A_1 \cap \dots \cap A_n \neq 0$

Aplicatii:

1) A, B independente

Prob. de a se realiza $= \frac{1}{2}$ unul sg dintre ele $\Rightarrow$ Dem. Atunci cel putin 1 din ele are prob. de 1/2 $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$ sau $P(B) = \frac{1}{2}$

2) $A_1, A_2 \dots A_n$ evenimente

a) $A_i \subset \bigcup_{j \neq i} A_j$

b) $A_i \cap A_j \cap A_K = \emptyset$

$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

1) $P(A \setminus B) = \frac{1}{2}$ ~~sau~~ si $P(B \setminus A) = \frac{1}{2}$

$P(A \setminus B) \cup P(B \setminus A) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \setminus B) + P(B \setminus A) = \frac{1}{2}$

A, B indep.

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\Rightarrow P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2}$.

$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{2}$

$P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A) P(B) - \frac{1}{2} = 0$.

$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} - P(B)\right]\left[2P(A) - 1\right] = 0 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$ sau $P(A) = \frac{1}{2}$

2 a) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j)$

$\Rightarrow$ Dem că $\sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 2 \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j)$

Dim a) $A_i \subset \bigcup_{j \neq i} A_j$; $A_i = \bigcup_{j \neq i} (A_j \cap A_i)$

$P(\bigcup_{j \neq i} (A_j \cap A_i)) = \sum_{j \neq i} P(A_i \cap A_j)$

$P(A_1) = \sum P(A_j \cap A_1)$

$P(A_2) = \sum P(A_j \cap A_2)$

$\vdots$

$P(A_n) = \sum P(A_j \cap A_n)$

$\sum P(A_i) = \sum_{j \neq 1} P(A_j \cap A_1) + \sum_{j \neq 2} P(A_j \cap A_2) + \dots + \sum_{j \neq n} P(A_j \cap A_n)$

$n=2 \quad P(A_1) + P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_1 \cap A_2) = 2P(A_1 \cap A_2)$

$n=3 \quad P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = [P(A_2 \cap A_1) + P(A_3 \cap A_1)] +$

$[P(A_1 \cap A_2) + P(A_3 \cap A_2)] + [P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)] =$

$= 2(P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)] = 2 \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j)$

Probabilități condiționate

Se dau 2 urne - Prima: 4 a, 5 n
II: 5 a, 6 n

Din una, la întâmplare, se extrage o bilă.
Care e prob ca bila să fie albă
Dacă e albă, care e prob să fie din prima urnă?

(3) 3 ateliere

A_1 – 2 mașini, 3 % rebut

A_2 – 2 mașini, 2 % rebut

A_3 – 3 mașini, 3 % rebut

a) $P(A) = ?$ formula prob. totale

b) $P(A_2/A)$

$P(A_3/A)$

(1) a) $P(a) = P(a/U_1) \cdot \overset{P(U_1)}{} + P(a/U_2) \cdot P(U_2) =$

$= \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9} + \frac{5}{11}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{44+45}{99}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{89}{99} = \frac{89}{198}$

b) $P(U_1/a) = \frac{P(U_1 \cap a)}{P(a)} = \frac{P(a/U_1) \cdot P(U_1)}{P(a)} = \frac{4}{18} \cdot \frac{198}{89}$

(2) a) $P(A) = P(A/A_1) \cdot P(A_1) + P(A/A_2) \cdot P(A_2) + P(A/A_3) \cdot P$

$= \frac{3}{100}$

$= \frac{3}{100} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{100} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{100} \cdot \frac{3}{7} = \frac{19}{700}$

b) $P(A_2/A) = \frac{P(A_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/A_2) \cdot P(A_2)}{P(A)} = \frac{4}{700} \cdot \frac{700}{19}$

$P(A_3/A) = \frac{P(A_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/A_3) \cdot P(A_3)}{P(A)} = \frac{9}{700} \cdot \frac{700}{19}$

$= \frac{9}{19}$

Ex: x, y v.a
f de dens. com.

$$\begin{cases} 9x^2y^2 & \text{de } 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Să găsim f de densitate marginale

Anastasia. media lui x_1

mediana lui y_2

covarianța dintre x și y

$\longrightarrow$

1 prb cu mai multe sub. I cap. (prob cond
sau mai multe prb. propr. f prob)

1 prb v.a continuu / discr.

1 prb statistică (estimatori)

Vezi model teams (examen dat online tho)
probleme cu indici cel mai prob.

→ dă'n pe nr / + indici

22 iun 10:00

4 iulie rest. 10:00.

$\longrightarrow$

- logo (nu apare / apare alb.)
- descrierea (modificările nu apar)
- platforma cu stand-ul

Statistica

$0,5 - k \leq 0,4$

$0,1 - k \leq 0$

$-k \leq -0,1$

$k \geq 0,1$