Oscilații amortisate

Risiparea de energie duce la amortizarea oscilațiilor unui oscilator liniar.

Considerăm cazul oscilațiilor liniare în care forța de rezistență este proporțională cu viteza. Aceasta se întâmplă în cazul mișcării într-un mediu <u>viscos</u>, în regim <u>laminar</u> de curgere.

Legea a 2-a a mecanicii se scrie:

$$\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F}_e + \vec{R} & (1a) \\ \vec{F}_e = -k\vec{x} \rightarrow \text{forța elastică} & (1b) \\ \vec{R} = -r\dot{\vec{x}} \rightarrow \text{forța de rezistență} & (1c) \end{cases}$$

$k>0 \rightarrow$ constanta elastică a resortului

$r>0 \rightarrow$ coeficient de rezistanță

$\vec{x} \rightarrow$ vector deformare

$\dot{\vec{x}} \rightarrow$ vector viteză

$\vec{a} = \ddot{\vec{x}}$

Mișcarea descrisă de ec.(1) este unidimensională. Proiecția pe axa de mișcare se scrie:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0 \quad | : m \\ \ddot{x} + \underset{2b}{\frac{r}{m}} + \underset{\omega^2}{\frac{k}{m}}x = 0 \end{cases}$$

; $b \to$ coeficient de amortizare

$$\to \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2)$$

Rezolvăm ec. (2) căutând soluții de forma $x = Ce^{kt}$ $\Rightarrow$

$k^2 + 2bk + \omega^2 = 0$ $\to$ ecuația caracteristică

$$k_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

Soluția generală este combinația liniară:

$$x(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \quad (3)$$

C_1 și C_2 se găsesc din condițiile inițiale: $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = v_0$

<u>Cazul ①</u>: $b < \omega$ $\to$ <u>oscilații amortizate pseudo-periodice</u>

$$\sqrt{b^2 - \omega^2} = \sqrt{i^2 \underbrace{(\omega^2 - b^2)}_{\omega'^2}} = \pm i\omega' \quad (4)$$

Ec. (3) se scrie:

$$x(t) = e^{-bt}\left(C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}\right) \qquad (5)$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow C_1 = C_2^* = \frac{A_0}{2} e^{i\alpha}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{A_0}{2} e^{-bt}\left[e^{i(\omega' t+\alpha)} + e^{-i(\omega' t+\alpha)}\right]$$

$$= A_0 e^{-bt} \cos(\omega' t + \alpha) \qquad (6)$$

A_0 şi α se obţin din condiţiile iniţiale: $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = v_0$

$T' = \frac{2\pi}{\omega'} \rightarrow$ perioada oscilaţiilor

$$(7) \quad \frac{x(t)}{x(t+T')} = \frac{A_0 e^{-bt} \cos(\omega' t + \alpha)}{A_0 e^{-b(t+T')} \cos[\omega'(t+T') + \alpha]} = e^{bT'}$$

$$\ln \frac{x(t)}{x(t+T')} \stackrel{\Delta}{=} D = bT' \rightarrow \text{decrement logaritmic}$$

$$(8) \quad bT' = \frac{2\pi b}{\omega'} = \frac{2\pi b}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}$$

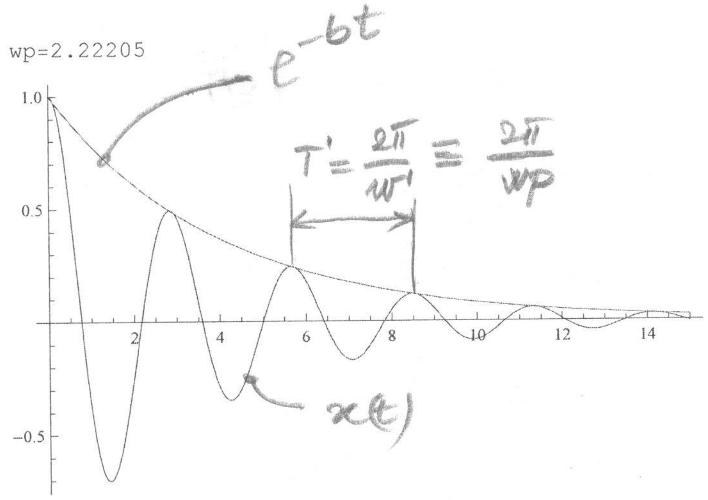
$$(9) \quad A(t) = A_0 e^{-bt}$$

```
Clear[b, wp, xo, vo, c1, c2, ws, b, m, r, k]
x[t_] := Exp[-b * t] * (c1 * Exp[ⅈ * wp * t] + c2 * Exp[-ⅈ * wp * t]);
v[t_] := D[x[t], t];
V[0] = v[t] /. t → 0;

(*Solve[x[0]==xo&&V[0]==vo,{c1,c2}]*)
```

$$c1 = -\frac{ⅈ\,vo + ⅈ\,b\,xo - wp\,xo}{2\,wp};\quad c2 = \frac{ⅈ\,vo}{2\,wp} + \frac{xo}{2} + \frac{ⅈ\,b\,xo}{2\,wp};\ (**)$$

```
b = r / (2 * m);
wp = √(k / m - b^2);
xo = 1; vo = 0; m = 1; r = .5; k = 5;
Print["wp=", wp];
Plot[{x[t], Exp[-b * t]}, {t, 0, 15}, PlotRange → All]
Clear[b, wp, xo, vo, c1, c2, ws, b, m, r, k]
```

wp=2.22205



τ = timp de relaxare → timpul după care $A(t)$ scade de "e" ori :

$$e = \frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e^{b\tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{b} \qquad (10)$$

$\Rightarrow \frac{1}{D} = \frac{1}{bT'} = \frac{\tau}{T'} = N$ → nr. de oscilații care se efectuează în timpul de relaxare

$T_{1/2}$ = timp de înjumătățire → timpul după care A(t) scade la jumătate:

$$\frac{A(t)}{A(t+T_{1/2})} = e^{bT_{1/2}} = 2 \Rightarrow$$

(11) $$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{b} \simeq \frac{0.693}{b}$$

② <u>Mișcarea amortizată aperiodică</u>:

$b > \omega$

soluția cu ec. (2) este:

(12) $$x(t) = e^{-bt}\left[C_1 e^{\sqrt{b^2-\omega^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{b^2-\omega^2}\,t}\right]$$

5

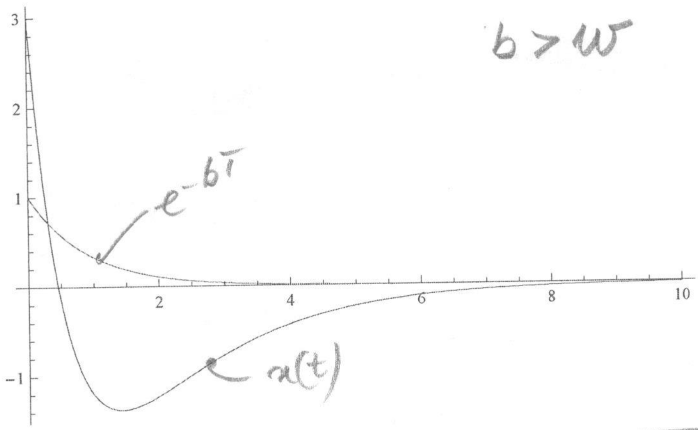
```
Clear[b, ws, xo, vo, c1, c2, ws, b, m, r, k]
x[t_] := Exp[-b * t] * (c1 * Exp[ws * t] + c2 * Exp[-ws * t]);
v[t_] := D[x[t], t];
V[0] = v[t] /. t → 0;

(*Solve[x[0]==xo&&V[0]==vo,{c1,c2}]*)
```

$$c1 = -\frac{-vo - b\,xo - ws\,xo}{2\,ws};\; c2 = -\frac{vo}{2\,ws} + \frac{xo}{2} - \frac{b\,xo}{2\,ws};\;(**)$$

```
b = r / (2 * m);
ws = Sqrt[-k / m + b^2];
(*xo = 3; vo = 10; m = 1; r = 2.2; k = 1;*)
xo = 3; vo = -10; m = 1; r = 2.2; k = 1;
Print["ws=", ws];
Plot[{x[t], Exp[-b * t]}, {t, 0, 10}, PlotRange → All]
Clear[b, ws, xo, vo, c1, c2, ws, b, m, r, k]
```

ws=0.458258

$b > w$



③ Mişcarea aperiodică critică:

$w = b$

Soluţia cu ec. (2) este:

$x(t) = e^{-bt}(C_1 + C_2 t)$

```
Clear[xo, vo, c1, c2, b, m, r, k]
x[t_] := Exp[-b * t] * (c1 + c2 * t);
v[t_] := D[x[t], t];
V[0] = v[t] /. t → 0;

(*Solve[x[0]==xo&&V[0]==vo,{c1,c2}]*)
c1 = xo; c2 = vo + b xo; (**)
b = r / (2 * m);
(* xo = 3; vo = 10; m = 0.8; r = 2.2; k = 1; *)
xo = 3; vo = -10; m = 0.8; r = 2.2; k = 1;

Plot[{x[t], Exp[-b * t]}, {t, 0, 10}, PlotRange → All]
Clear[xo, vo, c1, c2, ws, b, m, r, k]
```

$b = \omega$