Examen la analiză matematică[1]
an I, sem. I - seria 10
22.01.2021

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Punctaj seminar ....

Subiectul 1. **a)** Fie $A = \{1,2,3\} \cup \left\{\frac{5}{2n+1} : \quad n \in \mathbb{N}\right\} \cup (7,8)$ o submulţime a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$. Determinaţi interiorul, aderenţa, mulţimea punctelor de acumulare şi frontiera mulţimii A. Decideţi dacă mulţimea A este compactă sau conexă. Justificaţi!

b) Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+1}+\frac{n}{3n^2+4}+\frac{n}{3n^2+9}+....+\frac{n}{3n^2+n^2}\right).$$

Subiectul 2. **a)** Studiaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2\cdot(3x)^n}{4^n\cdot(2n+5)!}$$

în funcţie de valorile parametrului $x \in (0,\infty)$.

b) Studiaţi convergenţa şirului $\left(\frac{(n!)^2 . 7^{2n+1}}{4^n\cdot(2n+5)!}\right)_{n>0}$ şi calculaţi limita sa (în caz că aceasta există).

Subiectul 3. Considerăm funcţia $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x^2 \sin\frac{1}{x} + \frac{\sin 2x}{x}, & \text{dacă } \ x \in (0,\infty), \\ 2, & \text{dacă } \ x = 0. \end{cases}$$

i) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.

ii) Studiaţi uniform continuitatea funcţiei f.

Subiectul 4. Considerăm şirul de funcţii $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = (\sin x)\sqrt{x^2+\frac{1}{n}},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Studiaţi convergenţa simplă şi uniformă a şirului $(f_n)_{n\geq 1}$.

Subiectul 5. Fie $f_n, g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii definite prin

$$f_n(x) = \int_0^1 |x^n - t^n|\, dt, \text{pentru orice } x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N} \ \text{ şi}$$

,

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 2h. Fiecare subiect valoreaza 10 puncte (1 punct din oficiu). Nota pe lucrare este media aritmetică a notelor pe subiecte. Succes!**

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{dacă} \;\; x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ x - x^2, & \text{dacă} \;\; x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

i) Determinaţi

$$\inf_{x \in [0,1]} f_n(x) \;\; \text{şi} \;\; \sup_{x \in [0,1]} f_n(x).$$

ii) Determinaţi numărul $n \in \mathbb{N}$ pentru care funcţia g_n are cel puţin un punct în care este derivabilă.