Calcul Numeric – Laboratorul#7
Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei, Anul I

Algorithm 1: Cuadratura dreptunghiului (Newton-Cotes, deschisă, $n = 0$)

Input: $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$
Result: $\mathbf{I} \in \mathbb{R}$

Pasul 1: (Determină lungimea intervalului)

$h \longleftarrow b - a.$

Pasul 2: (Aplică formula de calcul a ariei unui dreptunghi)

$I \longleftarrow \mathrm{h} \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right).$

Pasul 3: OUTPUT($\mathbf{I}$)
STOP.

Algorithm 2: Cuadratura trapezului (Newton-Cotes, închisă, $n = 1$)

Input: $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$
Result: $\mathbf{I} \in \mathbb{R}$

Pasul 1: (Determină lungimea intervalului)

$h \longleftarrow b - a.$

Pasul 2: (Aplică formula de calcul a ariei unui trapez)

$I \longleftarrow \frac{h}{2} \cdot (f(a) + f(b)).$

Pasul 3: OUTPUT($\mathbf{I}$)
STOP.

Algorithm 3: Cuadratura Simpson (Newton-Cotes, închisă, $n = 2$)

Input: $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$
Result: $\mathbf{I} \in \mathbb{R}$

Pasul 1: (Determină lungimea intervalului)

$h \longleftarrow b - a.$

Pasul 2: $I \longleftarrow \frac{h}{6} \cdot \left[f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$

Pasul 3: OUTPUT($\mathbf{I}$)
STOP.

Algorithm 4: Cuadratura **sumată** a dreptunghiului

Input: $\mathbf{f} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2m+1}$
Result: $\mathbf{I} \in \mathbb{R}$

Pasul 1: (Determină lungimea unei partiţii a lui X)

$$h \longleftarrow \frac{x_{2m+1} - x_1}{2m}.$$

Pasul 2: (Aproximarea integralei)

$$I \longleftarrow 2\text{h} \cdot \sum_{k=1}^{m} f(x_{2k}).$$

Pasul 3: OUTPUT($\mathbf{I}$)
STOP.

Algorithm 5: Cuadratura **sumată** a trapezului

Input: $\mathbf{f} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m+1}$
Result: $\mathbf{I} \in \mathbb{R}$

Pasul 1: (Determină lungimea unei partiţii a lui X)

$$h \longleftarrow \frac{x_{m+1} - x_1}{m}.$$

Pasul 2: (Aproximarea integralei)

$$I \longleftarrow \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_1) + 2 \cdot \sum_{k=2}^{m} f(x_k) + f(x_{m+1}) \right).$$

Pasul 3: OUTPUT($\mathbf{I}$)
STOP.

Algorithm 6: Cuadratura **sumată** Simpson

Input: $\mathbf{f} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2m+1}$
Result: $\mathbf{I} \in \mathbb{R}$

Pasul 1: (Determină lungimea unei partiţii a lui X)

$$h \longleftarrow \frac{x_{2m+1} - x_1}{2m}.$$

Pasul 2: (Aproximarea integralei)

$$I \longleftarrow \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_1) + 4 \cdot \sum_{k=1}^{m} f(x_{2k}) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k+1}) + f(x_{2m+1}) \right).$$

Pasul 3: OUTPUT($\mathbf{I}$)
STOP.

– Exerciţii –

Ex. 1
Implementează în **python** cuadratura *dreptunghiului, trapezului şi Simpson* cu numele **int_drept**, **int_trap** şi **int_simp**. Pentru implementare, urmăreşte algoritmii de mai sus.

Considerăm integrala:

$$I(f) = \int_{4}^{5} \frac{3x}{x^2 - 9}\, dx$$

(a) Calculează valoarea integralei exacte, $I(f)$;

(b) Să se calculeze cuadraturile, $I_n(f)$, $n \in \{0, 1, 2\}$, a integralei $I(f)$;

(c) Să se calculeze eroarea cuadraturilor determinate la punctul (b), $E_n = |I(f) - I_n(f)|$.

Ex. 2
Implementează în **python** *metodele de cuadratură sumate ale dreptunghiului, trapezului şi Simpson* cu numele **int_sum_drept**, **int_sum_trap** şi **int_sum_simp**. Pentru implementare, urmăreşte algoritmii de mai sus.

Considerăm integrala:

$$I(f) = \int_{0}^{1} \frac{1}{1 + x}\, dx$$

(a) Calculează valoarea integralei exacte, $I(f)$;

(b) Aproximaţi integrala exactă, $I(f)$ folosind formulele sumate de cuadratură. pentru $m \in \{3, 4, 5\}$;

(c) Să se calculeze eroarea cuadraturilor determinate la punctul (b), $E_n = |I(f) - I_{n,m}(f)|$.