Examen[1] la Algebră şi Geometrie, seria 16, 3.02.2021

Nume și prenume: LICU MIHAI-GEORGE

Grupa: 162

I. Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false, justificând pe scurt alegerea:

1. Submulţimea $\{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$. **(0,5p)**

2. Mulţimea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ este un sistem liniar independent în $\mathbb{R}^3$. **(0,5p)**

3. Dacă $A = (2, 0), B = (3, -1), C = (0, 3)$ şi $D = (-1, 4)$, atunci $ABCD$ este un paralelogram de arie 1. **(0,5p)**

4. Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ iar coloanele lui A nu generează întreg spaţiul $\mathbb{R}^m$, atunci există $b \in \mathbb{R}^m$ pentru care sistemul $Ax = b$ este incompatibil. **(0,5p)**

5. Singurele matrice $n \times n$ diagonalizabile care au o singură valoare proprie sunt cele de tipul λI_n, pt un $\lambda \in \mathbb{R}$. **(0,5p)**

II. Redactaţi rezolvările complete:

1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, considerăm matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care are

- 2 pe toate poziţiile $(i, i+1)$ cu $1 \leq i \leq n-1$;
- -1 pe toate poziţiile $(i, i-1)$ cu $2 \leq i \leq n$;
- 1 pe toate poziţiile (i, i) cu $1 \leq i \leq n$;
- 0 pe celelalte poziţii, dacă mai rămân altele în afara de cele de mai sus.

Notăm cu $\Delta_n = \det(A_n)$.

a) Arătaţi că A_3 este inversabilă şi calculaţi inversa ei. **(0,5p)**

b) Arătaţi că $\Delta_n = \Delta_{n-1} + 2\Delta_{n-2}$, pentru orice $n \geq 4$. **(0,75p)**

c) Calculaţi Δ_4 şi Δ_5. **(0,25p)**

2. Fie $\mathbb{R}^3$ cu structura de spaţiu vectorial euclidian şi aplicaţia liniară

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (5x + 2y + 4z, 2x + 8y - 2z, 4x - 2y + 5z).$$

a) Scrieţi $A = [f]_{\mathcal{B}_0}$, matricea lui f în raport cu baza canonică. **(0,25p)**

b) Aflaţi $\dim \operatorname{Ker} f, \dim \operatorname{Im} f$. Este f surjectivă? **(0,25p)**

c) Găsiţi o bază ortonormală în $\operatorname{Im} f$. **(0,5p)**

d) Decideţi dacă f este diagonalizabilă; dacă da, determinaţi o bază în care are formă diagonală şi relaţia corespunzătoare între matricea lui f în baza canonică şi cea în raport cu acea bază. **(1p)**

e) Calculaţi A^{2021}. **(0,5p)**

f) Aflaţi signatura formei pătratice $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3$. **(0,5p)**

3. Aflaţi toţi vectorii $x \in \mathbb{R}^3$ pentru care $\|Ax - b\|$ este minimă, unde $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ şi $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. **(1p)**

4. Fie $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Aflaţi toate matricele simetrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu o valoare proprie -2 si pentru care $Av = -5v$. **(1p)**

[1] Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Succes!

3.02.2021

LICU MIHAI GEORGE
162

I

① Fals $\forall a,b\in\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b \\ a^2+b^2 \\ a^3+b^3 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} a+b \\ (a+b)^2 \\ (a+b)^3 \end{pmatrix}$

② Fals $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rang } B<3 \Rightarrow$ Nu e SLI

③ Adevărat

$A'=(0,0)$ $B'=(1,-1)$ $C'=(-2,3)$ $D'=(-3,4)$

$\text{Aria}_{A'B'C'D'} = \left|\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\right| = |1| = 1$

④ Adevărat

A poate fi o aplicație liniară $f \Rightarrow f(x)=b$

A nu generează întreg spațiul $\mathbb{R}^m \Rightarrow f$ nu e surjectivă $\Rightarrow \forall b\in\mathbb{R}^n$ ~~a.î. $f(x)\neq b$~~ a.î. $f(x)$ nu poate fi b

⑤ Fals

$\det(a I_n - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = (a-2)^2 \Rightarrow a=2$

dar, $\begin{vmatrix} a-2 & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = (a-2)^2 \Rightarrow a=2$

II ① a) $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3+2=5\neq 0 \Rightarrow A$ inversabilă

$(A\,|\,I_n)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2\leftarrow L_1}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_2\leftarrow L_2+3L_3}{=}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \overset{L_3+L_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \overset{L_1-2L_2}{=}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow A_3^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

b) $\Delta_n = \Delta_{n-1} + 2\Delta_{n-2} \quad n \geq 4$

$$\Delta_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & & & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{n} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{n-1} + \cancel{(-1)\cdot(-1)^{2+1}} + (-1)(-1)^{2+1} \cdot$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{n-1} = \Delta_{n-1} + (-1)^{1+1} \cdot 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{n-2} = \Delta_{n-1} + 2\Delta_{n-2} \quad \forall n \geq 4$$

c) $\Delta_4 = \Delta_3 + 2\Delta_2 = 5 + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 2 \cdot 3 = 5 + 6 = 11$

$\Delta_5 = \Delta_4 + 2\Delta_3 = 11 + 2 \cdot 5 = 11 + 10 = 21$

$\cancel{2 \ \nexists R^3}$

② $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(x,y,z) = (5x+2y+4z, 2x+8y-2z, 4x-2y+5z)$

a) $A = [f]_{B_0} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$Ker\, f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} 5x+2y+4z=0 \\ 2x+8y-2z=0 \\ 4x-2y+5z=0 \end{cases} \right\}$

b) $\begin{cases} 5x+2y+4z=0 \\ 2x+8y-2z=0 \\ 4x-2y+5z=0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$

$= 4 \cdot (50 - 4 - 4 - 32 - 5 - 5) = 0$

$\Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow rang\, A < 3$

$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 4 = 36 \neq 0 \Rightarrow rang A = 2$

Ec I, II principale. Notăm $z = \alpha$

$\Rightarrow \begin{cases} 5x+2y = -4\alpha \\ 2x+8y = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20x+8y = -16\alpha \\ 2x+8y = 2\alpha \end{cases}$

$18x = -18\alpha \Rightarrow x = -\alpha$

$-2\alpha + 8y = 2\alpha$

$8y = 4\alpha$

$y = \frac{1}{2}\alpha$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \frac{1}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$

$\Rightarrow Ker\, f = \{(-\alpha, \frac{1}{2}\alpha, \alpha)\} / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\langle (-1, \frac{1}{2}, 1) \rangle \Rightarrow \dim Ker\, f = 1 \Rightarrow \dim Im f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Ker f =$

$= 3 - 1 = 2 \neq 3 \Rightarrow$ nu i surj.

$\left.\begin{matrix} Im\, f \le \mathbb{R}^3_{\mathbb{R}} \\ \dim Im\, f = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Im f \neq \mathbb{R}^3$

c) $\dim Im f = 2 \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ bază pt $Im f$

3/6

$f_1' = (5,2,4)$

$$f_2' = b_2 - \frac{\langle b_2, f_1'\rangle}{\langle f_1', f_1'\rangle} f_1' = (2,8,-2) - \frac{\langle (2,8,-2),(5,2,4)\rangle}{\langle (5,2,4),(5,2,4)\rangle}(5,2,4) =$$

$$= (2,8,-2) - \frac{18}{45}(5,2,4) = (2,8,-2) - \left(\frac{18}{9}, \frac{36}{45}, \frac{72}{45}\right) =$$

$$= \left(0, \frac{324}{45}, \frac{-162}{45}\right) = \left(0, \frac{36}{5}, -\frac{18}{5}\right)$$

$$f_1 = \frac{f_1'}{\|f_1'\|} = \frac{(5,2,4)}{\sqrt{25+4+16}} = \frac{(5,2,4)}{\sqrt{45}} = \frac{(5,2,4)}{3\sqrt5} = \left(\frac{5}{3\sqrt5}, \frac{2}{3\sqrt5}, \frac{4}{3\sqrt5}\right) = \left(\frac{\sqrt5}{3}, \frac{2\sqrt5}{15}, \frac{4\sqrt5}{15}\right)$$

$$f_2 = \frac{f_2'}{\|f_2'\|} = \frac{\left(0, \frac{36}{5}, -\frac{18}{5}\right)}{\sqrt{\frac{1296}{25} + \frac{324}{25}}} = \frac{\left(0, \frac{36}{5}, -\frac{18}{5}\right)}{\sqrt{\frac{\cancel{1620}\ 324}{25}}} = \frac{\left(0, \frac{36}{5}, -\frac{18}{5}\right)}{\frac{18}{\sqrt5}} = \left(0, \frac{36\sqrt5}{18\cdot 5}, \frac{-18\sqrt5}{18\cdot5}\right) =$$

$$= \left(0, \frac{2\sqrt5}{5}, -\frac{\sqrt5}{5}\right) \Rightarrow \left\{\left(\frac{\sqrt5}{3}, \frac{2\sqrt5}{15}, \frac{4\sqrt5}{15}\right), \left(0, \frac{2\sqrt5}{5}, -\frac{\sqrt5}{5}\right)\right\}$$ bază ortonormală a lui f

d) $P_f(\lambda) = (\det A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 8-\lambda & -2 \\ 4 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda = -\lambda(\lambda-9)^2$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \qquad m_a(\lambda_1) = 1$ $\Rightarrow$ Toate valorile proprii sunt în corp

$\lambda_2 = 9 \qquad m_a(\lambda_2) = 2$

$1 \le m_g(\lambda_1) \le m_a(\lambda_1) = 1 \Rightarrow m_g(\lambda_1) = 1$ ~~$\not\Rightarrow f$ diagonalizabilă~~

$1 \le m_g(\lambda_2) \le m_a(\lambda_2) = 2 \Rightarrow m_g(\lambda_2) =$ Nu știu încă

4/6

$$pt\ \lambda_2 = 9 \Rightarrow V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{\lambda_2} : \begin{cases} -4x + 2y + 4z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ 4x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{V_{\lambda_2} : \begin{cases} 9x + 4y + 9z = 0 \\ 3x + 9y + 9z = 0 \\ 9x + 9y + 9z = 0 \end{cases}}$$

$$rg = 1 \Rightarrow m_g(\lambda_2) = 2 = m_a(\lambda_2)$$

$\Rightarrow f$ diagonalizabilă

Notăm $y = \alpha$ $\Rightarrow x = -\alpha - \beta$
$z = \beta$

$$V_{\lambda_2} = \{(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle (-1,1,0), (-1,0,1) \rangle$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ bază a lui } V_{\lambda_2}$$

$$pt\ \lambda_1 = 0 \Rightarrow V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{\lambda_1} = \begin{cases} 5x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 8y - 2z = 0 \\ 4x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \qquad m_g(\lambda_1) = 1 \Rightarrow rg = 2$$

Într-adevăr, $rg = 2$ $\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36 \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \frac{1}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$V_{\lambda_1} = \{(-\alpha, \tfrac{1}{2}\alpha, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, \tfrac{1}{2}, 1) \rangle \Rightarrow B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ bază a lui } V_{\lambda_1}$$

$$B = B_1 \cup B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[f]_B = \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & & \\ & 9 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

5/6

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & & \\ & 9 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & -9 & -9 \\ 9 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 9 & \frac{9}{2} \\ -9 & -9 & -9 \\ 9 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

c) $A^{2021} = PD^{2021}P^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & & \\ & 9 & \\ & & 0 \end{pmatrix}^{2021} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9^{2021} & & \\ & 9^{2021} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$=$

6/6