Résumé cours de Maths - 2eme Session
Algèbre Linéaire

version du 18 mai (22h10)

Table des matières

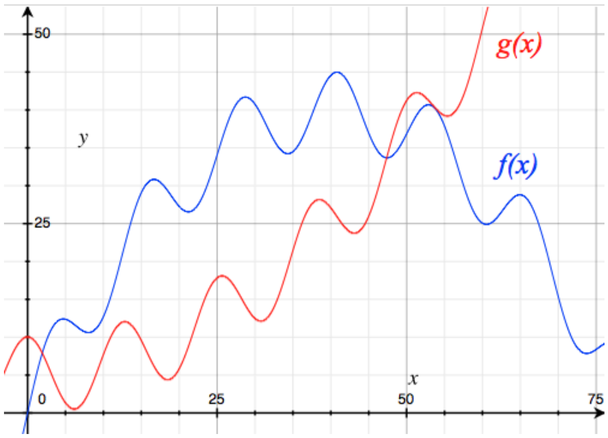
Contacts :

Henri Anciaux
Mail : henri.anciaux@gmail.com
Site : http ://homepages.ulb.ac.be/hanciaux/MATHF112.html
Bureau : P.O.7.110

Lien de partage (Google Drive) des scans du cours théorique :
LIEN - Cours théorique

1 Introduction à l'algèbre linéaire

On retrouve l'algèbre linéaire aussi nombreux que varié dans les mathématiques. Et elle nous permet de pouvoir **simplifier les choses**.



$f(x+h) \approx f(x) + h \times f'(x)$ (linéaire)

Par exemple le Polynôme de Taylor (qui est un cas d'algèbre linéaire) nous permet de simplifier des expressions mathématiques en les linéarisant et donc de pouvoir résoudre certains calculs insolubles sans. Comme la formule d'oscillation du pendule : $y'' + \sin(y) = 0$ qui est une équation différentielle du second ordre impossible à résoudre, peut être simplifiée en $y'' + y = 0$. Elle est aussi utile dans les nuages de points, pour calculer une matrice puissance n, approximer des fonctions, etc...

2 Espaces vectoriels

Notation :
$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \{0, 1\}$ ou n'importe quel "corps".

Définition :
Un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ (= "$\mathbb{K}$-espace vectoriel") est un ensemble E muni de 2 opérations :

— **addition interne** : $+ : E \times E \to E$ telle que, $\forall\, u, v, w \in E$:

1. + est **commutative** $\Leftrightarrow v + w = w + v$
2. + est **associative** $\Leftrightarrow u + (v + w) = (u + v) + w$
3. + admet un **élément neutre** noté $\overrightarrow{0_E}$ ou $0 \Leftrightarrow 0 + v = v$
4. + admet un **opposé** noté $-v \Leftrightarrow v + (-v) = 0$

— **Multiplication externe** : $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ telle que, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, v, w \in E$:

1. $\cdot$ est **distributive à gauche** $\Leftrightarrow \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
2. $\cdot$ est **distributive à droite** $\Leftrightarrow (v + w) \cdot \lambda = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
3. $\cdot$ est **associative** $\Leftrightarrow \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$
4. $\cdot$ admet un **élément neutre** $\Leftrightarrow 1 \cdot v = v$

Les éléments de E sont appelés vecteurs. Les 2 opérations + et $\cdot$ constituent une structure vectorielle.

Remarque :
Si E est un e.v. (= Espace Vectoriel),

$$\begin{cases} 0 \cdot v = \overrightarrow{0_E} \\ (-1) \cdot v = (-v) \end{cases}$$

Notation :
On appelle **scalaire** tout élément de $\mathbb{K}$

Théorème :
$\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-e.v. (par exemple $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$)

3 concepts fondamentaux :

1. **Applications linéaires**
2. **Sous-espaces vectoriels**
3. **Base et dimensions**

2.1 Sous-espace vectoriel

Définition :
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $F \subset E$, un sous-ensemble de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si et seulement si :

$$\begin{cases} v + w \in F & \forall v, w \in F, v + w \in F \\ \lambda \cdot v \in F & \forall \lambda \in \mathbb{K}, v \in F \end{cases}$$

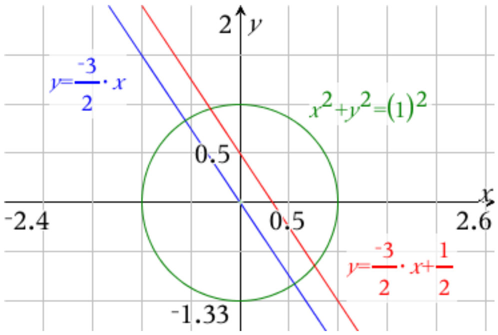
Théorème :
Soit $\{v\}$ où $v \neq 0_E$ n'est **pas** un e.v : $v + v = 2v \neq v$. Alors : $F = \{\lambda \cdot v \quad t.q.\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ est sous-e.v. de E. On l'appelle également *droite vectorielle de E engendrée par v*.

Notation :
On note la droite vectorielle $\{\lambda \cdot v \quad t.q.\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ de la manière suivante : $v\mathbb{K}$.

Exemple :
Pour $E = \mathbb{R}^2$, les sous-ensembles F_i ci dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

— $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad t.q.\ 3x + 2y = 0\}$
— $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad t.q.\ x^2 + y^2 = 1\}$
— $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad t.q.\ 3x + 2y = 1\}$

Sur un graphique :



1) F_1 est-il un sous-e.v. ?

— soit (x, y) et (x', y') dans F_1, est-ce que $(x, y) + (x', y') \ \in F_1$? $(x, y) + (x', y') = 3(x + x') + 2(y + y') = 3x + 3x' + 2y + 2y' = (3x + 2y) + (3x' + 2y') = 0 + 0 = 0 \in F_1$ étant donné que $3x + 2y = 0$ est notre "équation" de départ (voir énoncé). La première propriété pour que F_1 soit un sous-e.v. de E est donc vérifiée ;

— soit $(x, y) \in F_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, est-ce que $\lambda(x, y) \in F_1$? $\lambda(x, y) = 3(\lambda x) + 2(\lambda y) = \lambda(3x + 2y) = \lambda 0 = 0 \in F_1$. La seconde propriété est vérifiée également, donc F_1 est un sous-e.v. de E. Nous pouvons aussi dire que $3x + 2y = 0$ est une droite vectorielle de E.

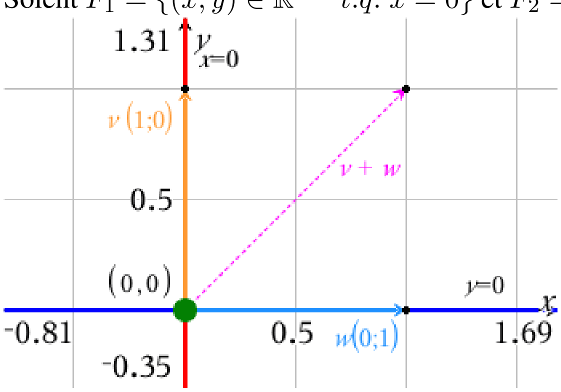
2) Prenons les points $(1, 0)$ et $(0, 1) \in F_2$. $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F_2$, car $1^2 + 1^2 = 2 \neq 1$. Donc grâce à un contre-exemple, nous pouvons affirmer que F_2 n'est pas un sous-e.v de E.

3) Idem que pour le 2) avec les points $(1, -1)$ et $(3, -4)$

Remarque :
Si F est un sous-ensemble de E, alors $0_E \in F$. Autrement dit, si le sous-ensemble F ne contient pas l'élément neutre de l'ensemble E auquel il appartient, il n'est pas un sous e.v de cet ensemble. (Cette remarque aurait pu permettre de résoudre le 2) et 3) de l'exemple juste au dessus).

Théorème :
Si F_1 et F_2 sont des sous-e.v. de E, alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-e.v. (attention, $F_1 \cup F_2$ ne l'est pas forcément).

Exemple :
Soient $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad t.q.\ x = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad t.q.\ y = 0\}$.



$F_1 \cap F_2$ est ici l'intersection des droites $x = 0$ et $y = 0$ qui est le singleton (ensemble de cardinal = 1)

$(0;0)$. L'union ($\cup$) est par exemple la somme du vecteur $v(1,0)$ et $w(0,1)$. $v+w=(1,1) \notin F_1$ ni F_2. Ce n'est donc pas un sous-e.v. de $\mathbb{R}$.

Théorème :
Si $(\mathtt{F}_i)_{i\in I}$ (I = n'importe quel ensemble) est une famille quelconque de sous-e.v., $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-e.v.

2.2 Applications linéaires

Définition :
Soient E et $\mathtt{F}$, 2 e.v. sur le même corps $\mathbb{K}$.

Une application $u : E \to \mathtt{F}$ est **linéaire** si elle préserve les structures vectorielles, c'est a dire les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} u(x+y) = u(x) + u(y) \ \forall x, y \in E \\ u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x) \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E \end{cases}$$

Exemple :
Les application suivantes sont elles linéaires ?

— $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (y,x)$

— $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (\sin(x), y)$

1) Si a est linéaire, elle doit respecter les 2 propriétés énoncées plus haut. Vérifions la première : $a(x+y) \stackrel{?}{=} a(x) + a(y)$.

Considérons (x,y) et (v,w), 2 antécédents de a. Pour vérifier la première propriété, il faut que $a((x,y)+(v,w)) = a(x,y) + a(v,w)$. Développons des 2 côtés :

(Gauche) $a((x,y)+(v,w)) = a(x+v, y+w)$

Maintenant on applique a qui va intervertir les coordonnées.

$a(x+v, y+w) = (y+w, x+v)$

(Droite) $a(x,y) + a(v,w) = (y,x) + (w,v) = (y+w, x+v)$.

Le coté gauche de l'équation est égal au coté droit, donc la première propriété est démontrée. Maintenant il nous faut démontrer la seconde propriété : $a(\lambda \cdot x) \stackrel{?}{=} \lambda \cdot a(x)$

On choisit un couple (x,y), antécédent de a. Une fois encore, on vérifie en développant des 2 côtés et on regarde s'ils sont égaux. Donc si $a(\lambda \cdot (x,y)) = \lambda \cdot a(x,y)$.

(Gauche) : $a(\lambda \cdot (x,y)) = a(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y, \lambda x)$

(Droite) : $\lambda \cdot a(x,y) = \lambda \cdot (y,x) = (\lambda y, \lambda x)$.

Les côtés gauche et droit sont égaux, la seconde propriété est donc respectée. Comme les 2 propriétés ont été vérifiées et approuvées, a est linéaire.

2) (Même principe que plus haut, donc voir a pour les détails)

Si b est linéaire elle doit respecter les 2 propriétés énoncées plus haut. Vérifions la première : $b(x+y) \stackrel{?}{=} b(x) + b(y)$ et donc $b((x,y)+(v,w)) = b(x,y) + b(v,w)$

(Gauche) : $b((x,y)+(v,w)) = b(x+v, y+w) = (\sin(x+v), y+w)$

(Droite) : $b(x,y) + b(v,w) = (\sin(x), y) + (\sin(v), w) = (\sin(x) + \sin(v), y+w)$

Or, $\sin(x+v) \neq \sin(x) + \sin(v) \forall x, v \in \mathbb{R}$, donc l'égalité est fausse. Comme nous avons une contradiction il n'est pas utile de vérifier la seconde propriété. b n'est pas linéaire. Il suffit de trouver un **contre-exemple** pour prouver qu'une hypothèse est fausse. Si l'on en trouve pas, il faut démontrer que les propriétés marchent dans notre cas. (Voir première séance d'exercice pour plus d'exercice sur les applications linéaires)

Remarque :
Si $u : E \to F$ est une application linéaire, alors $u(0_E) = 0_F$. Autrement dit, si le domaine de l'application ne contient pas l'élément neutre, alors elle est d'office pas linéaire (**Attention** cette affirmation n'est pas tout le temps vraie dans l'autre sens !).

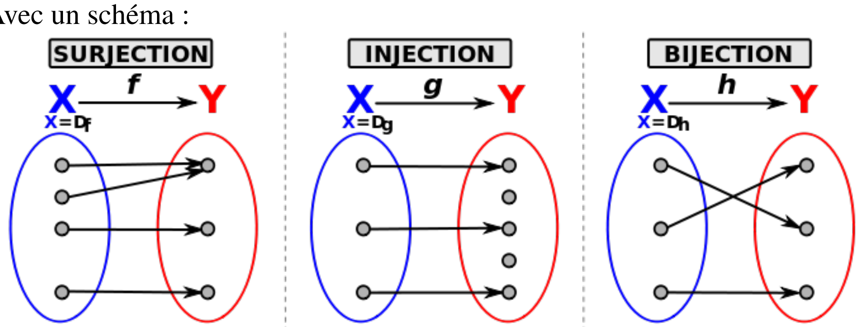
Théorème :
Soit A, un ensemble quelconque, soit E un $\mathbb{K}$-e.v.
On écrit $E^A = \{u : A \to E\}$ l'ensemble des applications allant de A dans E. E^A a une structure vectorielle.

Définition :
Une application linéaire qui est bijective (injective et surjective) est appelée **isomorphisme**.

Rappel pour $f : E \to F$:

- f est injective $\Leftrightarrow$ il n'existe pas 2 points qui ont la même image. Autrement dit, $f(v) = f(w) \Rightarrow v = w$.
  ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ car pour $f(x) = 1$, on a $x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$, mais elle est injective sur $\mathbb{R}^+$;
- f est surjective $\Leftrightarrow$ tout les points de l'ensemble des images sont atteints. Autrement dit, $\forall w \in F, \exists v \in E t.q.\ f(v) = w$.
  ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ n'est pas surjective sur l'ensemble image $\mathbb{R}$ car $\nexists x t.q.\ f^2 = -1$. Mais elle est surjective sur l'ensemble des images $\mathbb{R}^+$;
- f est bijective $\Leftrightarrow$ l'application est à la fois injective et surjective. ex : $f : \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$.

Avec un schéma :



Exemple :
Comment prouver qu'une application est bijective ?

$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto: (x + y - z, x - y, z)$

Si u est bijective, alors pour (a, b, c) fixé, il existe un unique élément $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(x, y, z) = (a, b, c)$. Nous avons donc un système d'équations !

$$\begin{cases} x + y - z = a \\ x - y = b \\ x = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c \\ y = -b + c \\ z = -a - b + 2c \end{cases}$$

Il existe donc qu'une et une seule solution au système, donc l'application u est bijective. Si elle est également linéaire (ce qu'elle est, la démonstration est laissée en exercice), alors u est un isomorphisme.

Théorème :
$\mathbb{K}^{\{0,1\}} \sim \mathbb{K}^2$ ($\sim$ veut dire *est comparable à*), c'est-à-dire qu'il existe un **isomorphisme canonique** : $\phi : \mathbb{K}^{\{0,1\}} \to \mathbb{K}^2$.

Soit A un ensemble fini : #$A = n$ (# = cardinal = nombre d'éléments). $\mathbb{K}^A \sim \mathbb{K}^n \longrightarrow$ ils sont canoniquement isomorphes.

Remarque :
Y a t-il une relation entre sous-espace vectoriel et application linéaire ?

Soit $u : E_1 \to E_2$, une application linéaire.

- Soit F_1, un sous-e.v de E_1, $u(F_1) = \{u(v) \quad t.q.\ v \in F_1\}(\subset E_2)$ est un sous-e.v. de E_2 ;
- soit F_2, un sous-e.v de E_2, $u^{-1}(F_2) = \{v \in E \quad t.q.\ u(v) \in F_2\}$ est sous-e.v de E_1

2.2.1 Noyau et Image

Définition :
Pour toute application linéaire $u : E_1 \to E_2$, on définit $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$, tels que
$\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{0_{E_2}\})$ est le *noyau* de u (sous-e.v. de E_1),
$\operatorname{Im} u = u(E_1)$ est l'*image* de u (sous-e.v. de E_2).

Autrement dit, $\operatorname{Ker} u = \{v \in E_1 t.q. u(v) = 0_{E_2}\}$, ce qui signifie concrètement : *l'ensemble des éléments qui sont envoyé sur l'élément neutre de l'ensemble d'arrivée*.
$\operatorname{Im} u = \{v \in E_2, \exists w \in E_1 t.q. u(w) = v\}$. C'est donc le sous-ensemble de E_2 contenant les images de tous les éléments de E_1.

Exemple : (Ex 2 fiche 2)
On fixe un vecteur $v_0 \in \mathbb{R}^3$. On définit l'application $\Phi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto v \times v_0$. Déterminer le noyau Ker et l'image Im de Φ_1.

2 méthodes sont possibles :

1. Par calculs :
   Soit $v_0 = (v_{0_x}, v_{0_y}, v_{0_z})$ fixé.
   Φ_1 est le produit vectoriel de 2 vecteurs. Son noyau est donc l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $v \times v_0 = (0,0,0)$.
   Or $v \times v_0 = (v_y v_{0_z} - v_{0_y} v_z, v_z v_{0_x} - v_x v_{0_z}, v_x v_{0_y} - v_y v_{0_x})$.
   $$v \times v_0 = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} v_y v_{0_z} - v_z v_{0_y} = 0 \\ v_z v_{0_x} - v_x v_{0_z} = 0 \\ v_x v_{0_y} - v_y v_{0_x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \quad v_x = v_z \dfrac{v_{0_x}}{v_{0_z}} \\ \quad v_y = v_z \dfrac{v_{0_y}}{v_{0_z}} \\ 0 = 0 \end{cases}$$
   Nous n'avons donc pas de contrainte pour v_z, il est donc toujours bon, peu importe sa valeur. (degré de liberté).
   $S = \{z\frac{v_{0_x}}{v_{0_z}}, z\frac{v_{0_y}}{v_{0_z}}, z\} = z\{\frac{v_{0_x}}{v_{0_z}}, \frac{v_{0_y}}{v_{0_z}}, 1\}$.
   $\mathrm{Ker}\,\Phi_1 = \mathbb{R}\{\frac{v_{0_x}}{v_{0_z}}, \frac{v_{0_y}}{v_{0_z}}, 1\} = \mathbb{R}\,\frac{1}{v_{0_z}}\{v_{0_x}, v_{0_y}, v_{0_z}\}$ qui est la droite vectorielle de $\mathbb{R}$ engendrée par v_0.
2. En utilisant la définition du produit vectoriel (rappel : $v \times w = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow v = \lambda w$) :
   $\mathrm{Ker}\,\Phi_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\Phi_1(v) = v \times v_0 = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \,| v = \lambda v_0\} = \{\lambda v_0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\, v_0$
   $\mathbb{R}\, v_0$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}$ engendrée par v_0.
   $\mathrm{Im}\,\Phi_1 = \{w \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels $\exists v \in \mathbb{R}^3 \,| w = v \times v_0\} = \{w \in \mathbb{R}^3 \,|(w \perp v) \wedge (w \perp v_0)\}$, ce qui est le plan perpendiculaire à v_0.

2.2.2 Combinaison linéaire

Définition :

Soient $v_1, \ldots, v_n \in E$ (vecteurs) et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ (scalaires). On dit que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i$ est une **combinaison linéaire** (c.l.) des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$.

Théorème :

$u : E_1 \to E_2$ est linéaire, ce qui signifie que pour toute c.l. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, on a $u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, u(v_i)$.

$F \subset E$ (avec E e.v. et F sous-e.v. de E), signifie que toute c.l. de F, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in F$ pour $\lambda_i, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, et $v_1, \ldots, v_n \in F$.

Définition :

Soit $A \subset E$, un espace quelconque compris dans E, Vect A (aussi noté $\langle A \rangle$) est défini ainsi :

$\text{Vect}\, A \equiv \bigcap_{\substack{F, sous-e.v. de E \\ t.q. A \subset F}} F \overset{lemme}{=} \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \forall (\lambda_i, v_i) \in \mathbb{K} \times A\}$ est l'ensemble de toutes les c.l possibles sur base des vecteurs de A.

$v \in \text{Vect } A \Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n | v = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i a_i$ avec $a \in A$. Vect A est un sous e.v. de E et on l'appelle l'**espace vectoriel engendré** par A.

Pour prouver ce lemme, il faut prouver que $\bigcap_{\substack{F, sous-e.v. de E \\ t.q. A \subset F}} F$ et $\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \forall(\lambda_i, v_i) \in \mathbb{K} \times A\}$ sont égaux. Il est possible d'utiliser le théorème de double inclusion pour cela. Rappel : soient A et B, 2 sous-ensembles de E. $A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$.

2.3 Base et dimension

2.3.1 Famille génératrice

Définition :
Soit $A \subset E$, on dit que A est une **famille génératrice** (ou partie génératrice) si Vect $A = E$. Autrement dit, $\forall v \in E, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, v_1, \ldots, v_n \in A \mid \; v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$

Lemmes :
- Si A est génératrice et $A \subset B$, alors B est génératrice.
- Soit A, une famille génératrice et $v \in A$, alors $A \setminus \{v\}$ est génératrice si et seulement si v est une c.l. de vecteurs de $A \setminus \{v\}$

Exemple :
Prenons $E = \mathbb{R}^3$. La famille $A = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ est-elle génératrice ?

Soit un vecteur quelconque (a, b, c), $\exists ?(x, y, z)$ tel que $(a, b, c) \stackrel{?}{=} x(0, 1, 0)+y(0, 0, 1)+z(1, 1, 1)$?

Ceci est équivalent à trouver une solution au système suivant :

$$\begin{cases} z = a \\ x + z = b \\ y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b - a \\ y = c - a \\ z = a \end{cases}$$

Étant donné que pour tout vecteur (a, b, c), $\exists x, y, z \in \mathbb{R} \mid \; (a, b, c) = x(0, 1, 0) + y(0, 0, 1) + z(1, 1, 1)$, on peut affirmer que A est génératrice.

2.3.2 Famille libre/liée

Définition :
Soit $A \subset E$, un sous-ensemble de E qulconque, on dit que A est **libre** si la seule c.l. de vecteurs $\in A$ égale à 0_E est la c.l. nulle triviale. C'est à dire si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E$, avec $v_1, \ldots, v_n \in A \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 0$

Si une famille n'est pas libre, elle est **liée**.

Exemple :

1. Prenons $E = \mathbb{R}^2, A = \{(-2,3),(2,-3)\}$. A est liée car $v_1 + v_2 = (-2,3) + (2,-3) = (-2,3) + (2,-3) = (0,0) = 0_E$.
   A est donc liée car on a trouvé $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \neq 0$
2. Prenons $E = \mathbb{R}^3$, $A' = \{(1,1,3),(5,2,-1),(4,1,-4)\}$. A' est liée aussi car $v_1 - v_2 + v_3 = 0_E$.
   A' est donc liée car on a trouvé $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1,-1,1) \neq (0,0,0)$
3. Prenons $E = \mathbb{R}^3, A'' = \{(1,1,3),(5,2,-1)\}$. À vu d'œil on ne sait pas dire si A'' est libre ou liée. Donc on résout le système, il faut donc essayer de trouver une c.l. des éléments de A'' égale à 0_E. C'est à dire : $\lambda_1(1,1,3) + \lambda_2(5,2,-1) = 0_E = (0,0,0)$
   Ce qui revient à résoudre le système :
   $$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -5\lambda_2 \\ \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ \lambda_1 = \dfrac{\lambda_2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$
   Donc A'' est libre !

Si on avait essayé de résoudre le système du 2, on aurait obtenu le calcul suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3$$

Donc $\forall \lambda, \lambda v_1 - \lambda v_2 + \lambda v_3 = 0_E$. La réponse (contrexemple) que nous avions trouvée : $v_1 - v_2 + v_3 = 0_E$ correspondant au vecteur (1, -1, 1) et correspond donc bien à une de nos réponses du système (avec $\lambda = 1$).

Définition :
Si A est libre, on dit que les vecteurs $\in A$ sont **linéairement indépendant** (l.i), et si A est liée, alors on dit que ses vecteurs sont **linéairement dépendant** (l.d.).

Remarque :
Si $0_E \in A$, A ne peux pas être libre (donc elle est d'office liée) car $\lambda 0_E = 0_E \quad \forall \lambda$.

Lemme :
Soit A, une famille de E.

— $A \subset B$ est liée $\Rightarrow B$ est liée ;

— $A \supset B$ est libre $\Rightarrow B$ est libre ;

— A est libre et $v \in \text{Vect}\, A \Rightarrow \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ avec $v_1, \ldots, v_n \in A$;

— A est libre et $v \in E \setminus A \Rightarrow A \cup \{v\}$ libre.

Théorème :

Si $A \subset E$ est libre, alors $v \in A \Rightarrow A \setminus \{v\}$ est libre et $(v \notin A) \wedge (A \cup \{v\}$ est libre$) \Leftrightarrow v \notin \text{Vect}\, A$.

Si $A \subset E$ est génératrice, alors $(v \in A) \wedge (A \setminus \{v\}$ est génératrice$) \Leftrightarrow v \in \text{Vect}\, A \setminus \{v\}$ et $v \notin A \Rightarrow A \cup \{v\}$ est génératrice.

2.3.3 Bases et dimensions

Définition :
Soit $B \subset E$, une partie de E. Si B est libre et génératrice, on dit que B est une **base** de e.

Soit E, un $\mathbb{K}$-e.v. alors E admet une base (voire même plusieurs). Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. C'est ainsi que l'on définit la dimension d'un espace vectoriel : $\dim E = \#B$.

Exemple :

— $\dim \mathbb{R}^n = n$;

— $\dim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \infty$ (car $\#\mathbb{N} = \infty$) ;

— $v \neq 0 \in E \Rightarrow \dim v\mathbb{K} = \dim \text{Vect}\{v\} = 1$;

— $\dim\{0_E\} = 0$ (par convention).

Théorème :
Si $A \subset E$ est libre, $\exists B \supset A$, une base de E. Inversement, si $A \subset E$ est génératrice, $\exists B \subset A$, une base de E. Autrement dit, une famille qui est libre/génératrice mais qui n'est pas génératrice/libre peut devenir une base (donc libre et génératrice) à condition que l'on rajoute/enlève des vecteurs correctement.

Exemple :
$A = \{(1, 0, 0)\}$ est libre mais pas génératrice. Donc on va essayer de rajouter des vecteurs dans A pour la rendre génératrice, en restant libre.

$A' = \{(1, 0, 0), (1, 5, 3)\}$ est toujours libre et toujours pas génératrice.

$A'' = \{(1, 0, 0), (1, 5, 3), (2, 5, 3)\}$ n'est plus libre car $\exists$ une c.l nulle non triviale : $v_3 - v_1 - v_2 = 0$. Il faut donc faire attention aux vecteurs que l'on ajoute, car même si la famille était génératrice, elle ne peut pas être une base car A'' n'est plus libre.

$A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1), (4, 3, 21)\}$ est génératrice mais pas libre. On va donc essayer d'enlever des vecteurs de A pour qu'elle devienne libre, tout en restant génératrice.

$A' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ est toujours génératrice et toujours pas libre

$A'' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ est génératrice et libre, c'est donc une base.

Théorème :
Soient B et B', deux bases de E, alors $\#B = \#B'$.

Rappel :
Soient E_1, E_2, deux $\mathbb{K}$-e.v. $(E_2)^{E_1} = \{f : E_1 \to E_2\}$ est un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition :
$L(E_1, E_2) \subset (E_2)^{E_1}$, $L(E_1, E_2) = \{u : E_1 \to E_2 \mid u \text{ linéaire}\}$.

Théorèmes :
- $L(E_1, E_2)$ est un sous e.v. de $(E_2)^{E_1}$;
- Si $\dim(E_1) < +\infty$ et $\dim(E_2) < +\infty$, $\dim(L(E_1, E_2)) = \dim(E_1) \times dim(E_2)$;
- Si $\#A < +\infty$ et E est un e.v. de dimension finie, $\dim(E^A) = (\dim(E))^{\#A}$.

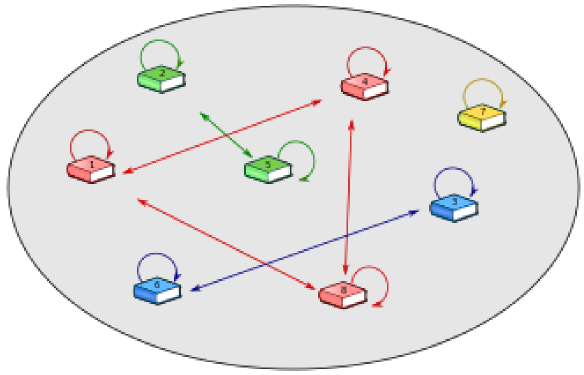
Théorème :
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. ed dimension n, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, une base de E.
$\phi : \mathbb{K}^n \to E : (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ est un isomorphisme.

3 Relations d'équivalence

Définition :
Une **relation d'équivalence** dans un ensemble A (quelconque) est une **relation binaire** (relation entre paires d'éléments) de A, notée $\sim$.

Une relation d'équivalence doit être :

1. **Réflexive** : $x \sim x \quad \forall x \in A$ *(tout le monde est en relation avec soi-même)* ;
2. **Symétrique** : $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x \quad \forall x, y \in A$ *(si x est en relation avec y, alors y est en relation avec x)*
3. **Transitive** : $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow x \sim z \quad \forall x, y, z \in A$ *(les amis de mes amis, sont mes amis)*



Notation :
$x \sim_p y$ s'écrit aussi communément $x \equiv y[p]$

Exemple :
La relation *être parallèle* // est une relation d'équivalence pour l'ensemble des droites du plans.

Preuve :

1. Réflexivité : Toute droite est parallèle à elle-même ;
2. Symétrie : $d \mathbin{/\!/} d' \Rightarrow d' \mathbin{/\!/} d$;
3. Transitivité : $(d \mathbin{/\!/} d') \wedge (d' \mathbin{/\!/} d'') \Rightarrow d \mathbin{/\!/} d''$.

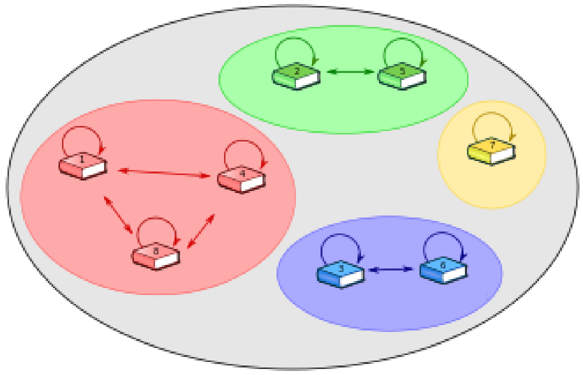
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que deux nombres entiers relatifs x et y sont *congrus modulo* p et on note : $x \equiv y[p] \Leftrightarrow x - y$ est un multiple de p. Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

$x \equiv y[p]$ si $x - y$ est un multiple de p. Revient au même que : si p divise $x - y$. Si c'est une relation d'équivalences, alors elle respecte les 3 propriétés :

1. Réflexivité : $x \sim x$
   $x \overset{?}{\equiv} x[p] \rightarrow x - x = 0$ (qui est bien un multiple de p) ;
2. Symétrie : $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
   $x \equiv y[p] \overset{?}{\Rightarrow} y \equiv x[p]$
   $x \equiv y[p] \rightarrow x - y$ est multiple de p.
   $y \equiv x[p] \rightarrow y - x$ est multiple de p ? $(x - y) \div p = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (y - x) \div p = -n \in \mathbb{Z}$;
3. Transitivité : $(x \ \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow x \sim z$
   $x \ \sim y \rightarrow p$ divise $x - y \rightarrow x - y = q_1 \times p \quad q_1 \in \mathbb{Z}$
   $y \ \sim z \rightarrow p$ divise $y - z \rightarrow y - z = q_2 \times p \quad q_2 \in \mathbb{Z}$.
   En sommant les 2 équations : $(x - y) + (y - z) = (q_1 \times p) + (q_2 \times p) \Leftrightarrow x - z = p \times (q_1 + q_2)$
   Or $x \ \sim z \rightarrow x - z = p \times q_3 \rightarrow q_3 = (q_1 + q_2) \in \mathbb{Z}$

Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence.

Définition :
Soit A muni d'une **relation d'équivalence** $\sim$. La classe d'un élément $x \in A$ est le sous-ensemble de A défini par $[x]_\sim = \{y \in A \mid \ x \sim y\}$.



Exemple :

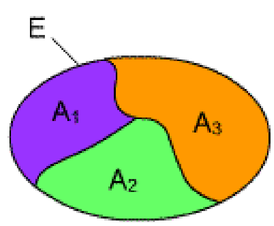
Le parallélisme, sur l'ensemble des droites du plan à comme classe les pentes (toutes les droites de même pente sont parallèles).

Prouvons que la relation de *congruence modulo* p ci-dessus contient exactement p classes d'équivalences.

Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, la congruence modulo p (pour un entier p fixé) est une relation d'équivalence dont les classes forment le groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Qui correspond à :
$\{x+p, x+2p, \ldots, x-p, x-2p, \ldots\} = \{x+kp \mid k \in \mathbb{Z}\} = x + p\mathbb{Z}$

Il y a donc p classes d'équivalence différentes : $[0] = [p] = [2p] = \ldots$, $[1] = [1+p] = [1+2p] = \ldots$, jusque $[p-1] = [2p-1] = [3p-1] = \ldots$

Théorème :
L'ensemble des classes d'équivalences de $\sim$ sur E forme une partition de E. $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E : $\forall i \in I, A_i \subset E$. On dit que A_i est une partition de E si :
- $A_i \cap A_j = \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$ (pas d'intersection entre les familles) ;
- $\bigcup_{i\in I} A_i = E$ (l'union de toute les familles forme l'ensemble)



Définition :
$\{[x] \mid x \in A\} = A/\sim$ et est appelé *quotient de* A *par* $\sim$ ou A *quotienté* $\sim$.

Exemple :

$\mathbb{Z}/\sim_p = \{[0],[1],\dots,[p-1]\} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
Pour $p=2$, on a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \approx \{[0],[1]\} = \{\{$"pairs" (multiples de 2)$\}, \{$"impairs"$\}\}$
Pour $p=3$, on a donc $\{\{n \mid n \mod 3 = 0\}, \{n \mid n \mod 3 = 1\}, \{n \mid n \mod 3 = 2\}\}$.

Théorème :
$E/F = E/\sim_F$, l'ensemble des classes d'équivalences, a une structure vectorielle canonique $\mathbb{K}$.

Remarque :
Une autre relation d'équivalence :
Soient A et B, 2 ensembles. On dit que A et B ont "le même cardinal" s'il existe une bijection $f : a \longrightarrow B$. Cette relation est notée $\sim_\#$.

Notation :
Si $\#A = \#\{1,\dots,n\}$, on dit que A est un ensemble fini et on note $\#A = n$

Théorème :
On dit que $\#A \leq \#B$ si $\exists f : a \to B$, une injection.
Théorème de Contor-Bernstein : $(\#A \leq \#B) \wedge (\#B \leq \#A) \Rightarrow \#A = \#B$.

Définition :
Si $\#A = \#\mathbb{N}$, on dit que A est **dénombrable**.
Si $\#A = \#\,\mathbb{R}$, on dit que A a la puissance du continu.

Propriétés :
- Si $\#A \leq \#\mathbb{N}$, soit A est fini, soit A est dénombrable ;
- Si $\#A = n$ et $\#B = m$, $\#(B^A) = m^n = \#B^{\#A} \quad (B^A = \{f : A \to B\})$;
- $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N}$ (idée de preuve : associer les éléments pairs des éléments de $\mathbb{N}$ aux éléments positifs de $\mathbb{Z}$ et les impaires aux négatifs. Du coup $\mathbb{Z}$ est dénombrable, $\mathbb{N}^2$ aussi et également $\mathbb{Q}$;
- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Autrement dit, il n'existe pas de bijection $f : \mathbb{N} \to \{0 ; \dots ; 9\}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \#\{0 ; \dots ; 9\}^{\mathbb{N}} > \#\mathbb{N}$

4 Applications et Matrices

Définition :
Soient $u : E \to E'$ avec E et E', 2 $\mathbb{K}$-e.v., $B = \{e_1,\dots,e_n\}$, une base de E, $B' = \{e'_1,\dots,e'_m\}$, une base de E'.

$u(\phi(\lambda_1,\dots,\lambda_n)) = \sum_{i,j=1}^{n,m} \lambda_i \, a_{j,i} \, e'_j$ (voir théorème précédent)

On définit $M = [a_{j,i}]_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$

M est la matrice associée à u dans les bases B et B'.

Exemple :

Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : u(x, y, z) = (x + 3y - z, y + 2z)$

Trouver la matrice associée à u dans les bases canoniques.

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\{e_1, e_2, e_3\}$ = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\{e'_1, e'_2\}$ = {(1, 0), (0, 1)}

Trouvons les images associées aux vecteurs de la base canonique de départ.

$$\begin{aligned} u(e_1) &= u(1, 0, 0) = (1 + 3 \times 0, 0 + 2 \times 0) = (1, 0) = e'_1 \\ u(e_2) &= u(0, 1, 0) = (3, 1) = 3 \times e'_1 + e'_2 \\ u(e_3) &= u(0, 0, 1) = (-1, 2) = -e'_1 + 2 \times e'_2 \end{aligned}$$

La matrice associée à u est l'ensemble des résultats précédents mis en colonnes :

$$M_u = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si on vérifie dans l'autre sens en utilisant la définition d'au-dessus, $u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} \lambda_i \, a_{j,i} \, e'_j$.

Si on décompose :

- $i = 1$
  — $j = 1 : \lambda_1 a_{1,1} e'_1 = \lambda_1 1(1, 0) = (\lambda_1, 0)$
  — $j = 2 : \lambda_1 a_{2,1} e'_2 = \lambda_1 0(0, 1) = 0$
- $i = 2$
  — $j = 1 : \lambda_2 a_{1,2} e'_1 = \lambda_2 3(1, 0) = (3\lambda_2, 0)$
  — $j = 2 : \lambda_2 a_{2,2} e'_2 = \lambda_2 1(0, 1) = (0, \lambda_2)$
- $i = 3$
  — $j = 1 : \lambda_3 a_{1,3} e'_1 = \lambda_2(-1)(1, 0) = (-\lambda_3, 0)$
  — $j = 2 : \lambda_3 a_{2,3} e'_2 = \lambda_2 2(0, 1) = (0, 2\lambda_3)$

La somme des 6 lignes donne : $(\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + 2\lambda_3)$.

$u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_2 + 2\lambda_3)$ Ce qui est bien se qu'on avait au départ (en remplaçant les λ par x, y et z)

Notation :

Les matrices sont aussi notée $\mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n)$ avec : m, le nombre de colonnes, n, le nombre de lignes.

Théorème :
Les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n)$ sont des $\mathbb{K}$-e.v. Chaque matrice à sa *propre* application linéaire qui lui est associée.

Théorème :
Soient $u : E \to E'$ et $u' : E' \to E''$ avec E, E' et E" des $\mathbb{K}$-e.v.

$(u \in L(E, E')) \wedge (u' \in L(E', E'')) \Rightarrow u' \circ u \in L(E, E'')$

Soient $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, une base de E, $B' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$, une base de E', $B'' = \{e''_1, \dots, e''_p\}$, une base de E".

$[a_{i,j}]$ est la matrice de u, $[b_{j,k}]$ est la matrice de u', et $[c_{i,k}]$ est la matrice de $u' \circ u$.

$$(u' \circ u)(e_i) = ... = \sum_{k=1}^{p} \underbrace{(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \cdot b_{j,k})}_{c_{i,k}} e''_k$$