Résumé cours de Maths - 2eme Session

Algèbre Linéaire

Loan Sens du cours de Mr Anciaux

7 mai 2015

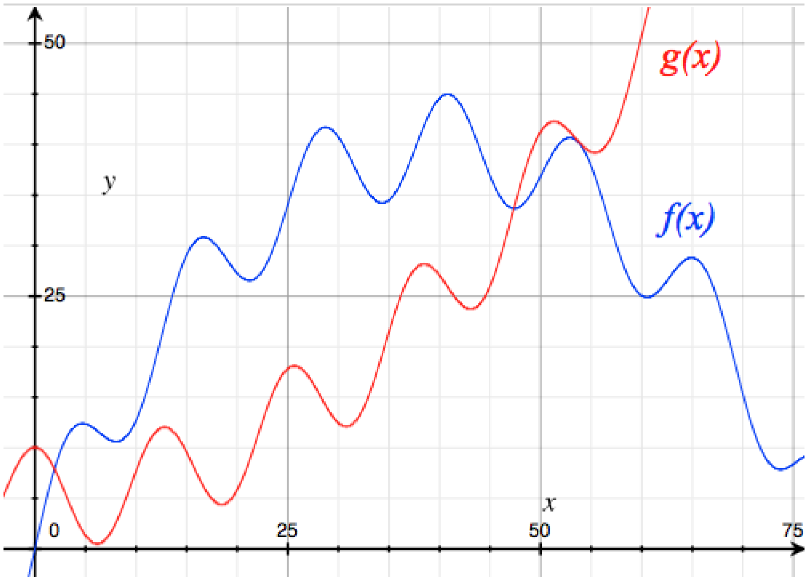
Table des matières

Contacts :
Henri Anciaux
Mail : henri.anciaux@gmail.com
Site : http ://homepages.ulb.ac.be/hanciaux/MATHF112.html
Bureau : P.O.7.110

Lien de partage (Google Drive) des scans du cours théorique :
LIEN - Cours théorique

1 Introduction à l'algèbre linéaire :

On retrouve l'algèbre linéaire aussi nombreux que varié dans les mathématiques. Et elle nous permet de pouvoir **simplifier les choses**.



$f(x+h) \approx f(x) + h * f'(x)$ (linéaire)

Par exemple le Polynôme de Taylor (qui est un cas d'algèbre linéaire) nous permet de simplifier des expressions mathématiques et donc de pouvoir résoudre certains calculs irrésolvable sans.
Comme la formule d'oscillation du pendule : $y'' + \sin(y) = 0$ qui est une équation différentielle du second ordre impossible à résoudre, peut être simplifiée en $y'' + y = 0$.
Elle est aussi utile dans les nuages de points, pour calculer une matrice puissance n, approximer des fonctions...

2 Vecteurs :

2.1 Espace vectoriel :

Notation : $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\{0; 1\}$ ou n'importe quel "corps"

Définition :
Un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ (="$\mathbb{K}$ espace vectoriel") est un ensemble $\mathtt{E}$ muni de 2 opérations :

— **Somme** : $+ : \mathtt{E} + \mathtt{E} \to \mathtt{E}$, telle que :

1. $+$ est **commutative** $\longrightarrow \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
2. $+$ est **associative** $\longrightarrow \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. $+$ admet un **élément neutre** noté $\overrightarrow{0_E}$ ou $0 \longrightarrow \overrightarrow{0_E} + \vec{v} = \vec{v}$
4. $+$ admet un **opposé** noté $-\vec{v} \longrightarrow \vec{v} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{0_E}$

— **Multiplication externe** : $\cdot : \mathbb{K} \times \mathtt{E} \to \mathtt{E}$, telle que :

1. $\cdot$ est **doublement distributive** $\longrightarrow \lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}$
2. $\cdot$ est **associative** $\longrightarrow \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v}$
3. $\cdot$ admet un **élément neutre** $\longrightarrow 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Les éléments de $\mathtt{E}$ sont appelés vecteurs. Les 2 opérations $+$ et $\cdot$ constituent une structure vectorielle.

Remarque :
Si $\mathtt{E}$ est un e.v. (= Espace Vectoriel) :

$$\begin{cases} 0 \cdot \vec{v} = \overrightarrow{0_E} \\ (-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v} \end{cases}$$

Notation :
On apellera **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$

Théorème :
$\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ e.v. (par exemple $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$)

3 concepts fondamentaux :

1. **Applications linéaires**
2. **Sous-espaces vectoriels**
3. **Base et dimensions**

2.2 Applications linéaires :

Définition :
Soient $\mathtt{E}$ et $\mathtt{F}$ 2 e.v. sur le même corps $\mathbb{K}$.
Une application $u : \mathtt{E} \to \mathtt{F}$ est **linéaire** si elle préserve les structures vectorielles, c'est a dire les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} u(x+y) = u(x) + u(y) & \forall x, y \in \mathtt{E} \\ u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x) & \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathtt{E} \end{cases}$$

Exemple :
Les application suivantes sont elles linéaires ?
- $\mathtt{A} : (x; y) \longmapsto (y; x)$
- $\mathtt{B} : (x; y) \longmapsto (\sin(x); y)$

1) Si $\mathtt{A}$ est linéaire elle doit respecter les 2 propriétés énoncés plus haut.
Vérifions la première : $\mathtt{A}(x+y) \stackrel{?}{=} \mathtt{A}(x) + \mathtt{A}(y)$
Considérons (x, y) et $(v; w)$ 2 doublets de points applications de $\mathtt{A}$. Pour vérifier la première propriété il faut que $\mathtt{A}$((x ;y)+(v ;w))=$\mathtt{A}$(x ;y)+$\mathtt{A}$(v ;w).
Développons des 2 côtés :
(Gauche) $\mathtt{A}((x; y) + (v; w)) = \mathtt{A}(x + v; y + w)$
Maintenant on applique l'application de $\mathtt{A}$ (qui va changer la place de x (qui est ici $x+v$) avec celle du y (ici $y+w$)
$\mathtt{A}(x + v; y + w) = (y + w; x + v)$
(Droite) $\mathtt{A}(x; y) + \mathtt{A}(v; w) = (y; x) + (w; v) = (y + w; x + v)$
Le coté gauche de l'équation est égale au coté droit, donc la première propriété est démontrée.
Maintenant il nous faut démontrer la seconde : $\mathtt{A}(\lambda \cdot x) \stackrel{?}{=} \lambda \cdot \mathtt{A}(x)$
On choisi un doublet $(x; y)$ application de $\mathtt{A}$.
Une fois encore on vérifie en développant des 2 côtés et l'on regarde s'ils sont égaux, donc que $\mathtt{A}(\lambda \cdot (x; y)) = \lambda \cdot \mathtt{A}(x; y)$
(Gauche) : $\mathtt{A}(\lambda \cdot (x; y)) = \mathtt{A}(\lambda x; \lambda y) = (\lambda y; \lambda x)$
(Droite) : $\lambda \cdot \mathtt{A}(x; y) = \lambda \cdot (y; x) = (\lambda y; \lambda x)$
Le côté gauche et droits sont égaux, la seconde propriétée est donc respectée.
Comme les 2 propriétés ont étaient vérifier et approuver, A est **linéaire**.

2) (Même principe que plus haut, donc voir $\mathtt{A}$ pour les détails) Si $\mathtt{B}$ est linéaire elle doit respecter les 2 propriétés énoncés plus haut.
Vérifions la première : $\mathtt{B}(x+y) \stackrel{?}{=} \mathtt{B}(x) + \mathtt{B}(y)$

et donc $\mathtt{B}((x;y)+(v;w)) = \mathtt{B}(x;y)+\mathtt{B}(v;w)$
(G) : $\mathtt{B}((x;y)+(v;w)) = \mathtt{B}(x+v;y+w) = (\sin(x+v);y+w)$
(D) : $\mathtt{B}(x;y)+\mathtt{B}(v;w) = (\sin(x);y)+(\sin(v);w) = (\sin(x)+\sin(v);y+w)$
Or, $\sin(x+v) \neq \sin(x)+\sin(v)$, donc le coté gauche et droite sont différent.
Comme nous avons une contradiction il n'est pas utile de vérifier la seconde propriété.
`B` n'est **pas linéaire**

Il suffit de trouver un **contre-exemple**, pour prouver qu'une hypothèse est fausse. Si l'on en trouve pas, il faut démontrer que les propriétés marchent dans notre cas.
(Voir première séance d'exercice pour plus d'exercice sur les applications linéaires)

Remarque :
Si u est linéaire, alors $u(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$ (dans les exemples : `A`,`B`).
Autrement dit, si l'application ne contient pas l'élément neutre, alors elle est d'office pas linéaire (**Attention** si elle le contient, elle n'est pas forcément linéaire).

Théorème :
Soit `A` un ensemble (pas forcément e.v.)
Soit `E` un e.v. sur $\mathbb{K}$
$\mathtt{E}^{\mathtt{A}} = \{\text{application } \mathtt{f} : \mathtt{A} \to \mathtt{E}\}$
$\mathtt{E}^{\mathtt{A}}$ à une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

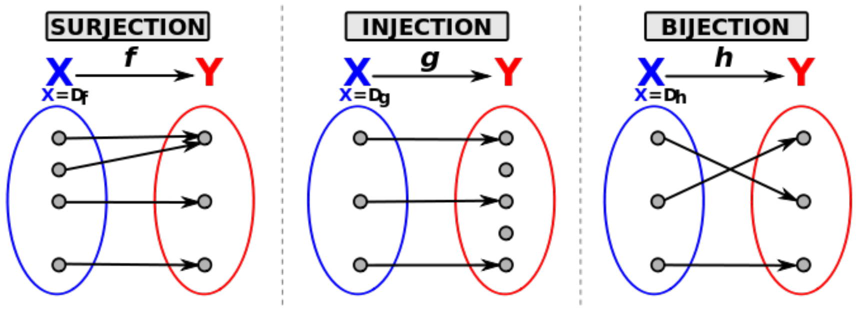
Définition :
Une application linéaire qui est bijective (injective et surjective) est appelée **isomorphisme**

— Injective : Il n'existe pas 2 points qui ont la même image.
Ex : ($f(x) = x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ car pour $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, mais elle l'est injective sur $\mathbb{R}^+$)
— Surjective : Si tout les points de l'ensemble images existent.
Ex : ($f(x) = x^2$ n'est pas surjective sur l'ensemble image $\mathbb{R}$ car pour $f(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow S = \emptyset$, mais elle l'est surjective

sur l'ensemble image $\mathbb{R}^+$)

— Bijective : Si l'application est à la fois injective ET surjective. Par exemple x^3 sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ comme domaine image.

Avec un schéma :



Exemple :

Comment prouver qu'une application est bijective ?

$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$u(x;y;z) : (x+y-z; x-y; z)$

Si $u(x;y;z)$ est bijective, alors il existe un unique élément $(x;y;z)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $u(x;y;z) = (a;b;c) \to$ système d'équations !

$$\begin{cases} x+y-z=a \\ x-y=b \\ x=c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=c \\ y=-b+c \\ z=-a-b+2c \end{cases}$$

Il existe donc qu'une et une seule solution au système, la fonction est bijective. Si elle est également linéaire, alors elle est isomorphe.

Théorème :

$\mathbb{K}^{\{0;1\}} \sim \mathbb{K}^2$ ($\sim$ = est la même chose que), c'est-à-dire qu'il existe un **isomorphisme canonique** : $\phi : \mathbb{K}^{\{0;1\}} \to \mathbb{K}^2$

Soit A un ensemble fini : $\#A = n$ $\quad$ ($\# =$ cardinal $=$ nombre d'éléments)

$\mathbb{K}^A \sim \mathbb{K}^n \longrightarrow$ ils sont canoniquement isomorphes

2.3 Sous-espaces vectoriels

Définition :
Soit $\mathtt{E}$ un e.v. sur $\mathbb{K}$ et $\mathtt{F} \subset \mathtt{E}$ un sous-ensemble de $\mathtt{E}$, on dira que $\mathtt{F}$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathtt{E}$, si :

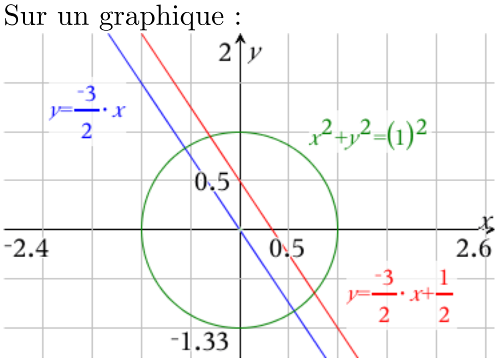
$$\begin{cases} v + w \in \mathtt{F} & \forall v, w \in \mathtt{F}, v + w \in \mathtt{F} \\ \lambda \cdot v \in \mathtt{F} & \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathtt{F} \end{cases}$$

Théorème :
Soit $v \neq 0_E$: $\{v\}$ n'est PAS un e.v ; $v + v = 2v \neq v$, alors :
$\mathtt{F} = \{\lambda \cdot v \quad \lambda \in \mathbb{K}\}$ est sous-e.v. de $\mathtt{E}$.

Notation :
On notera $= \{\lambda \cdot v \quad \lambda \in \mathbb{K}\}$: $v \cdot \mathbb{K}$, appellé la **droite vectorielle** engendrée pas v.

Exemple :
Pour $\mathtt{E} = \mathbb{R}^2$, les sous-ensembles F ci dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathtt{E}$?
- $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad 3x + 2y = 0\}$
- $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 + y^2 = 1\}$
- $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad 3x + 2y = 1\}$

Sur un graphique :



1) F_1 est-il un sous-e.v. ?

- Soit $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans F_1, est-ce que : $(x; y) + (x'; y') \ \in F_1$?
  $(x; y) + (x'; y') = 3 \cdot (x + x') + 2 \cdot (y + y') = 3x + 3x' + 2y + 2y' =$

$(3x + 2y) + (3x' + 2y') = 0 + 0 = 0 \in F_1$ Car $3x + 2y = 0$ est notre "équation" de départ (voir énoncé)
La première propriété pour que F_1 soit un sous-e.v. de `E` est donc vérifiée.

— Soit $(x; y)$ dans F_1 et $\lambda \in \mathbb{R}$, est-ce que : $\lambda \cdot (x; y) \in F_1$?
$\lambda \cdot (x; y) = 3 \cdot (\lambda x) + 2 \cdot (\lambda y) = \lambda \cdot (3x + 2y) = \lambda \cdot 0 = 0 \in F_1$
La seconde propriété est vérifiée également, donc F_1 est un sous-e.v. de `E`. Nous pouvons aussi dire que $3x+2y = 0$ est une droite vectorielle de `E`

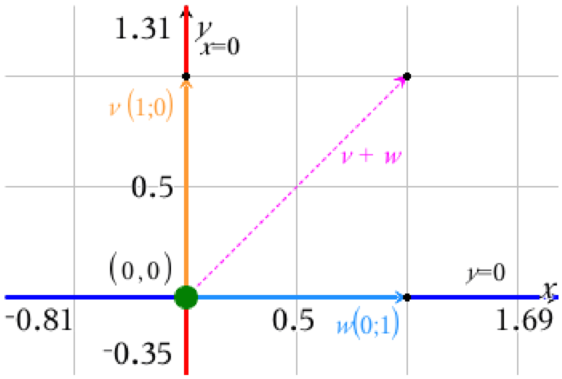
2) Prenons les points $(1; 0)$ et $(0; 1) \in F_2$
$(1; 0) + (0; 1) = (1; 1) \notin F_2$, car $1^2 + 1^2 = 2 \neq 1$
Donc grace à un contre-exemple, nous pouvons affirmer que F_2 n'est pas un sous-e.v de `E`.

3) Idem que pour le 2) avec les points $(1; -1)$ et $(3; -4)$

Remarque :
Si `F` est un sous-ensemble de `E`, alors $0_E \in$ `F`.
Autrement dit, si l'ensemble ne contient pas l'élément neutre de l'espace duquel il engendre, alors il n'est pas un sous e.v de cet ensemble.
(Cette remarque aurai pu permettre de résoudre le 2) et 3) de l'exemple juste au dessus)

Théorème :
Si F_1 et F_2 sont sous-e.v. de `E`, alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-e.v., mais pas $F_1 \cup F_2$

Exemple :
$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad y = 0\}$



$F_1 \cap F_2$ est ici l'intersection des droites $x = 0$ et $y = 0$ qui est le singleton (= point si on est dans le plan) $(0; 0)$.
L'union ($\cup$) est par exemple la somme du vecteur $\vec{v}(1; 0)$ et $\vec{w}(0; 1)$
$\vec{v} + \vec{w} = (1; 1) \notin F_1$ ni F_2. Ca n'est donc pas un sous-e.v

Théorème :
Si $(\mathtt{F}_i)_{i \in \mathtt{I}}$ ($\mathtt{I}$ = n'importe quel ensemble) est une famille quelconque de sous-e.v. $\bigcap\limits_{i \in I} \mathtt{F}_i$ est un sous-e.v.

Autrement dit, l'intersection de tout les $\mathtt{F}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Théorème :
Il y a t'il une relation entre sous-espace vectoriel et application linéaire ?
$u : \mathtt{E}_1 \to \mathtt{E}_2$ linéaire

- Soit $\mathtt{F}_1$ un sous-e.v de $\mathtt{E}_1$, alors je dis que :
  $u(\mathtt{F}_1) = \{u(v) \quad v \in \mathtt{F}_1\}(c\mathtt{E}_2)$ est un sous-e.v. de $\mathtt{E}_2$
- Soit $\mathtt{F}_2$ un sous-e.v de $\mathtt{E}_2$, alors je dis que :
  $u^{-1}(\mathtt{F}_2) = \{v \in \mathtt{E} \quad u(v) \in \mathtt{F}_2\}$ est sous-e.v de $\mathtt{E}_1$

2.3.1 Noyau et image :

Définition :
L'on définit **Ker** u et **Im** u, comme :
Ker $u = u^{-1}(\{0_{E_2}\})$ le noyau de u (sous-e.v. de $\mathtt{E}_1$)
Im $u = u(E_1)$ l'image de u (sous-e.v. de $\mathtt{E}_2$)

Autrement dit :

Soit $f : \mathtt{E}_1 \to \mathtt{E}_2$:
Ker $f = \{\ \vec{v} \in \mathtt{E}_1$ tel que $f(\vec{v}) = \vec{0}\ \}$ se qui signifie concrètement : l'ensemble des éléments qui sont envoyé sur l'élément neutre de l'ensemble d'arrivé.
Im $f = \{\ \vec{v} \in \mathtt{E}_2, \exists \vec{u} \in \mathtt{E}_1$ tel que $f(u) = \vec{v}\ \}$ C'est donc le sous-ensemble de $\mathtt{E}_2$ contenant toutes les images de tous les éléments de $\mathtt{E}_1$ et uniquement ces images.

Exemple :
(Ex 2 fiche 2) :
On fixe un vecteur $\vec{v}_0$ de l'espace tri-dimensionnel. On définit l'application Φ_1 de l'espace des vecteurs de l'espace dans lui-même par $\Phi_1(\vec{v}) = \vec{v} \times \vec{v}_0$. Déterminer le noyau Ker et l'image Im de Φ_1.
2 méthodes possibles :
1) Par calculs :
Soit $v_0 = (v_{0_x}, v_{0_y}, v_{0_z})$ fixé
$\Phi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto v \times v_0$ produit de 2 vecteurs = produit vectoriel :

$$v \otimes v_0 = \left(\begin{vmatrix} v_y & v_{0_y} \\ v_z & v_{0_z} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_x & v_{0_x} \\ v_z & v_{0_z} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_x & v_{0_x} \\ v_y & v_{0_y} \end{vmatrix} \right).$$

$= (v_y \cdot v_{0_z} - v_z \cdot v_{0_y}; -(v_x \cdot v_{0_z} - v_z \cdot v_{0_x}); v_x \cdot v_{0_y} - v_y \cdot v_{0_x}) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} v_y \cdot v_{0_z} - v_z \cdot v_{0_y} = 0 \\ v_z \cdot v_{0_x} - v_x \cdot v_{0_z} = 0 \\ v_x \cdot v_{0_y} - v_y \cdot v_{0_x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x = v_z \cdot \frac{v_{0_x}}{v_{0_z}} \\ v_y = v_z \cdot \frac{v_{0_y}}{v_{0_z}} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Nous n'avons donc pas de contraintes pour v_z, il vaut donc la valeur qu'on veut (degré de liberté).
$\mathtt{S} = \{z \cdot \frac{v_{0_x}}{v_{0_z}}; z \cdot \frac{v_{0_y}}{v_{0_z}}; z\} = z \cdot \{\frac{v_{0_x}}{v_{0_z}}; \frac{v_{0_y}}{v_{0_z}}; 1\}$
Ker $\Phi_1 = \mathbb{R}\{\frac{v_{0_x}}{v_{0_z}}; \frac{v_{0_y}}{v_{0_z}}; 1\} = \frac{\mathbb{R}}{v_{0_z}}\{v_{0_x}; v_{0_y}; v_{0_z}\}$ qui est une droite vectorielle contenant v_0.

2) En utilisant la définition :
Ker $\Phi_1 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 | \Phi_1(\vec{v}) = \vec{v} \times \vec{v}_0 = \vec{0}\} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 | \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}_0 \quad \forall v \in \mathbb{R}\}$
$\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}_0$ est une droite vectorielle contenant $\vec{v}_0$

Im $\Phi_1 = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3, \exists \vec{v} \in \mathbb{R}^3 | \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{v}_0\ \}$
$= \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 | \vec{w} \perp \vec{v}, \vec{w} \perp \vec{v}_0\}$ ce qui est le plan perpendiculaire à $\vec{v}_0$.

Oui si :

$$\left\{\begin{array}{l} x = a + 2b \\ y = 2a + 3b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2x - y \\ b = -3x + 2y \end{array}\right.$$

possible $\forall (x; y)$

2.3.2 Combinaison linéaire :

Définition :
Soit : $v_1, \ldots, v_n \in \mathtt{E}$ (vecteurs)
et : $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ (scalaires)
On dit que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i$ est une **combinaison linéaire** (c.l.) des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$

Théorème :
$u : \mathtt{E}_1 \to \mathtt{E}_2$ est linéaire, se qui est signifie que pour toute c.l. $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$:

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ u(v_i)$$

$\mathtt{F} \subset \mathtt{E}$ (avec $\mathtt{E}$ e.v. et $\mathtt{F}$ sous-e.v), signifie que toute c.l. de $\mathtt{F}$ est dans ($v_1 - v_n \in \mathtt{F}_1$ $\lambda_1 - \lambda_n \in \mathbb{K}$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in \mathtt{F}$)

Définition :
Soit $\mathtt{F}$ sous e.v.
Vect A (aussi noté <A>) $= \bigcap\limits_{A \subset \mathtt{F}} F \overset{lemme}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i ; v_1, \cdots, v_n \in A ; \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in$ $\mathbb{K}$ toutes les c.l de A.
Autremend dit : Vect A est l'ensemble des c.l. de vecteurs de A. $\vec{v}$ appartient à Vect A si et seulement s'il existe une famille finie de scalaires λ_i et telle que $\vec{v} = \sum\limits_{a \in A} \lambda_a \cdot a$
Vect A est sous e.v. de E, on l'appelle l'**espace vectoriel engendré** par A.
Soit A et B 2 sous-ensembles de $\mathtt{E}$. A = B $\Leftrightarrow$ A $\subset$ B et B $\subset$ A

2.3.3 Famille génératrice :

Définition :
Soit A $\subset$ $\mathtt{E}$, on dit que A est une **famille génératrice** (ou partie génératrice) si Vect A = E.
Autrement dit, $\forall v \in \mathtt{E}, \exists$ une c.l. (finies) de vecteurs de A tels que $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, v_1; \cdots; v_n \in \mathrm{A}$

Lemmes :

- Si A est génératrice et A $\subset$ B, alors B est génératrice.
- Soit A une famille génératrice et $v \in \mathrm{A}$, alors $\mathrm{A}\backslash\{v\}$ est génératrice si et seulement si v est une c.l. de vecteurs de $\mathrm{A}\backslash\{v\}$

Exemple :
Soit $\mathtt{E} = \mathbb{R}^3$
La famille $\mathtt{A} = \{(0;1;0);(0;0;1);(1;1;1)\}$ est elle génératrice ?
Soit un vecteur quelconque $(a;b;c)$, existe t'il une solution telle que :
$(a;b;c) \stackrel{?}{=} x \cdot (0;1;0) + y \cdot (0;0;1) + z \cdot (1;1;1)$
Ce qui est équivalent à trouver une solution au système :

$$\begin{cases} z = a \\ x + z = b \\ y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b - a \\ y = c - a \\ z = a \end{cases}$$

L'on remarque qu'il manque à $\mathtt{A}$ le vecteur canonique $(1;0;0)$ pour qu'elle soit une famille génératrice. Mais peut-être que ce vecteur manquant peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres (et du coup $\mathtt{A}$ serai une famille génératrice). Et donc :
$(1;0;0) \stackrel{?}{=} x \cdot (0;1;0) + y \cdot (0;0;1) + z \cdot (1;1;1)$
et en reprenant le système au-dessus et en remplaçant a, b et c par 1, 0 et 0, on trouve :

$$\begin{cases} x = 0 - 1 \\ y = 0 - 1 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Donc d'après le 2eme lemme $\mathtt{A}$ est une famille génératrice.
Remarque : si l'on remplace dans l'égalité les résultats de x, y et z trouvé dans le système, on retrouve le vecteur manquant.

$(1;0;0) \stackrel{?}{=} x \cdot (0;1;0) + y \cdot (0;0;1) + z \cdot (1;1;1)$
$(1;0;0) \stackrel{?}{=} (-1) \cdot (0;1;0) + (-1) \cdot (0;0;1) + 1 \cdot (1;1;1)$
$(1;0;0) \stackrel{?}{=} (0;-1;0) + (0;0;-1) + (1;1;1)$
$(1;0;0) \stackrel{?}{=} (1;0;0)$

2.3.4 Famille libre/liée :

Définition :
Soit `A` $\subset$ `E` sous-ensemble de `E`
On dit que `A` est **libre** si la seule c.l. de vecteurs de `A` égale à $\overrightarrow{0_E}$ est la c.l. triviale.
C'est à dire si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \overrightarrow{0_E}, v_1; ...; v_n \in$ `A` $\Rightarrow \lambda_1 = 0; ...; \lambda_n = 0$
Si elle n'est pas libre, elle est **liée**.

Exemple :

1. `E` $= \mathbb{R}^2$, `A` $=$ { (-2 ;3) ; (2 ;-3) }
   `A` est liée car $1 \cdot \vec{v}_1 + \ 1 \cdot \vec{v}_2 = 1 \cdot (-2;3) + 1 \cdot (2;-3) = (-2;3) + (2;-3) = (0;0) = \overrightarrow{0_E}$
   `A` est donc liée car on a trouvé $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \neq 0$
2. `E` $= \mathbb{R}^3$, `A'` $=$ { (1 ;1 ;3) ; (5 ;2 ;-1) ; (4 ;1 ;-4) }
   `A'` est liée aussi car $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \overrightarrow{0_E}$
   `A'` est donc liée car on a trouvé $\lambda_1 = \lambda_3 = 1 \neq 0$ et $\lambda_2 = -1 \neq 0$
3. `E` $= \mathbb{R}^3$, `A''` $=$ { (1 ;1 ;3) ; (5 ;2 ;-1) }
   A vu d'oeil on ne sait pas dire donc on résout le systèmes, il faut donc essayer de trouver une c.l. des éléments de `A''` pour trouver le $\overrightarrow{0_E}$. C'est à dire :
   $\lambda_1 \cdot (1;1;3) + \lambda_2 \cdot (5;2;-1) = \overrightarrow{0_E} =$ (0 ;0 ;0)
   Ce qui revient à résoudre le système :
   $$\begin{cases} \lambda_1 + 5 \cdot \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 = 0 \\ 3 \cdot \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -5 \cdot \lambda_2 \\ \lambda_1 = -2 \cdot \lambda_2 \\ \lambda_1 = \frac{\lambda_2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$
   Donc `A''` est libre !

Si on avait essayé de résoudre le système du 2. on aurait obtenu le calcul suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5 \cdot \lambda_2 + 4 \cdot \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3 \cdot \lambda_1 - \lambda_2 - 4 \cdot \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3$$

Donc $\forall \lambda, \lambda \cdot \vec{v}_1 - \lambda \cdot \vec{v}_2 + \lambda \cdot \vec{v}_3 = \overrightarrow{0_E}$
La réponse (contrexemple) que nous avions trouvé : $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \overrightarrow{0_E}$ correspondant au vecteur (1 ;-1 ;1) et correspond donc bien à une de nos réponses aux systèmes (avec $\lambda = 1$)

Définition :
Si $\mathtt{A}$ est libre, on dira que les vecteurs de $\mathtt{A}$ sont **linéairement indépendant** (l.i), si $\mathtt{A}$ n'est pas libre (liée), alors on dira que ses vecteurs sont **linéairement dépendant** (l.d.)

Remarque :
Si $\overrightarrow{0_E} \in \mathtt{A}$, $\mathtt{A}$ ne peux pas être libre (donc elle est d'office liée).
Car $\lambda \cdot \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E} \qquad \forall \lambda \neq 0$

Lemme :
Soit $\mathtt{A}$ partie de $\mathtt{E}$:
- $\mathtt{A}$ est liée, $\mathtt{A} \subset \mathtt{B}$, $\mathtt{B}$ est liée
- $\mathtt{A}$ est libre, $\mathtt{B} \subset \mathtt{A}$, $\mathtt{B}$ est libre
- $\mathtt{A}$ est libre, $v \in \text{vect}(\mathtt{A})$, alors il existe une unique c.l.de vecteurs de $\mathtt{A}$ égale à v. Autrement dit : $\exists (v_1; ...; v_n) \in \mathtt{A}, v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$
- $\mathtt{A}$ est libre, $v \in \mathtt{E}$, alors $\mathtt{A} \cup \{v\}$ est libre $\Leftrightarrow v \in \text{vect}(\mathtt{A})$

Théorème :

$$\text{Si } \mathtt{A} \text{ est libre : } \begin{cases} \text{Si } v \in \mathtt{A}, \ \mathtt{A} \setminus \{v\} \text{ est libre} \\ \text{Si } v \notin \mathtt{A}, \ \mathtt{A} \cup \{v\} \text{ est libre} \Leftrightarrow v \notin \text{vect}(\mathtt{A}) \end{cases}$$

$$\text{Si } \mathtt{A} \text{ est generatrice : } \begin{cases} \text{Si } v \notin \mathtt{A}, \ \mathtt{A} \cup \{v\} \text{ est generatrice} \\ \text{Si } v \in \mathtt{A}, \ \mathtt{A} \setminus \{v\} \text{ est generatrice} \Leftrightarrow v \in \text{vect}(\mathtt{A}) \end{cases}$$

$v \in \text{vect}(\mathtt{A})$: autrement dit : s'il existe dans $\mathtt{A}$ une c.l. de v qui ne soit pas v

2.3.5 Bases et dimensions

Définition :
Soit $\texttt{B} \subset \texttt{E}$ une partie de $\texttt{E}$.
Si $\texttt{B}$ est libre et génératrice on dit que $\texttt{B}$ est une **base**.
Soit $\texttt{E}$ un e.v. alors $\texttt{E}$ admet une base (et en fait beaucoup).
Toutes les bases de $\texttt{E}$ ont le même nombre d'éléments. C'est la **dimension** de $\texttt{E}$

Exemple :

— $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
— $\dim(\mathbb{R}^\mathbb{N}) = \infty$ (car $\mathbb{N}$ à une infinité d'éléments)
— $v \in \texttt{E}, v \neq 0$ $\dim(\mathbb{K}_v) = \dim(\text{vect}(\{v\})) = 1$ (que $\vec{v}$)
— $\dim(\{\ \overrightarrow{0_E}\ \}) = 0$ (par convention)

Théorème :
Si $\texttt{A}$ est libre, il existe $\texttt{B}$ telle que $\texttt{A} \subset \texttt{B}$, avec $\texttt{B}$ une base.
Inversement, si $\texttt{A}$ est génératrice, il existe une base $\texttt{B}$ contenue dans $\texttt{A}$.
Autrement dit une famille qui serai libre/génératrice mais qui ne serai pas génératrice/libre, peux devenir une base (donc libre et génératrice), à condition qu'on rajoute/enlève des vecteurs correctement.

Exemple :
$\texttt{A} = \{(1\,;0\,;0)\} \rightarrow$ est libre (mais pas génératrice, on va donc essayé de rajouter des vecteur dans $\texttt{A}$ pour que ca devienne générateur (en restant libre))
$\texttt{A'} = \{(1;\ 0;\ 0)\,;\ (1;\ 5;\ 3)\} \rightarrow$ est encore libre (mais toujours pas génératrice)
$\texttt{A''} = \{(1\,;0\,;0)\,;(1\,;5\,;3)\,;(2\,;5\,;3)\} \rightarrow$ n'est plus libre (il existe une c.l : $v_3 = v_1 + v_2$). Il faut donc faire attention au vecteurs que l'on rajoute, car même si la famillle était génératrice, elle ne serai pas une base car $\texttt{A''}$ n'est plus libre

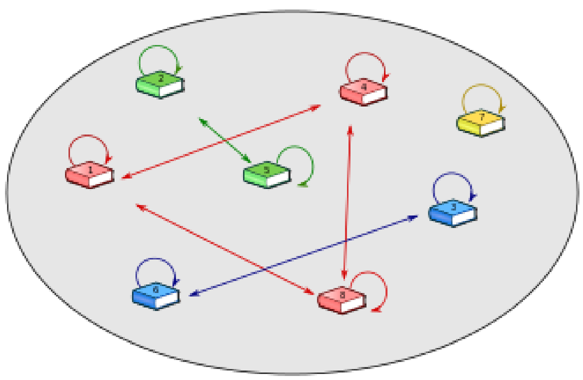
$\texttt{A} = \{(1;\ 0;\ 0)\,;\ (0;\ 1;\ 0)\,;\ (0;\ 0;\ 1)\,;\ (1;\ 1;\ 1)\,;\ (4;\ 3;\ 21)\} \rightarrow$ est génératrice (mais pas libre par ex : $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$), on va donc essayer d'enlever des vecteurs de $\texttt{A}$ pour que cela devienne libre, tout en

restant génératrice.
A' = $\{(1\,;0\,;0)\,;(0\,;1\,;0)\,;(0\,;0\,;1)\,;(1\,;1\,;1)\} \rightarrow$ est encore génératrice (mais toujours pas libre)
A" = $\{(1\,;\,0\,;\,0)\,;\,(0\,;\,1\,;\,0)\,;\,(0\,;\,0\,;\,1)\} \rightarrow$ est génératrice et libre, c'est donc une base.

2.3.6 Relation d'équivalence

Définition :
Une **relation d'équivalence** dans un ensemble A (quelconque) est une **relation binaire** (relation entre paires d'éléments) de A, notée $\sim$.
Elle est :

1. **Réfléxive** : $x \sim x \quad \forall x \in \mathtt{A}$
   (tout le monde est ami avec soi-même)
2. **Symétrique** : si $x \sim y$ alors $y \sim x \quad \forall x, y \in \mathtt{A}$
   (si je suis ami avec A, alors A est ami avec moi aussi)
3. **Transitive** : si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $x \sim z \quad \forall x, y, z \in \mathtt{A}$
   (les amis de mes amis, sont mes amis)



Notation :
$x \sim_p y$ s'écrit aussi communément $x \equiv y[p]$

Exemple :
La relation "être parallèle" (//) est une relation d'équivalence pour l'ensemble E des droites du plans.

1. Réflexivité : Toutes les droites sont parallèles à elle-même

2. Symétrie : Si D // D' alors D' // D
3. Transitivité : Si D // D' et que D' // D" alors D // D"

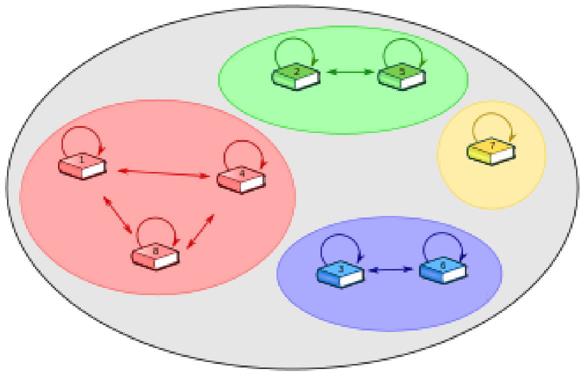
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dira que deux nombres entiers relatifs x et y sont congrus modulo p et on notera : $x \equiv y[p]$ si $x - y$ est un multiple de p. Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et qu'il y a exactement p classes d'équivalences.

$x \equiv y[p]$ si $x - y$ est un multiple de p. Revient au même que : si p divise $x - y$
Si c'est une classe d'équivalences, alors elle respecte les 3 propriétés :

1. Réflexivité : $x \sim x$
   $x \overset{?}{\equiv} x[p] \rightarrow x - x = 0$ (qui est bien un multiple de p)
2. Symétrie : $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
   $x \equiv y[p] \overset{?}{\Rightarrow} y \equiv x[p]$
   $x \equiv y[p] \rightarrow x - y$ multiple de p
   $y \equiv x[p] \rightarrow y - x$ multiple de p ? $y - x = -1 \cdot (x - y)$ qui sont tout 2 multiple de p OU si p divise $x - y$ alors p divise aussi $y - x$
3. Transitivité : $x \ \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x \sim z$
   $x \ \sim y \rightarrow p$ divise $x - y \rightarrow x - y = q_1 \cdot p \quad q_1 \in \mathbb{Z}$
   $y \ \sim z \rightarrow p$ divise $y - z \rightarrow y - z = q_2 \cdot p \quad q_2 \in \mathbb{Z}$
   En sommant les 2 équations :
   $(x - y) + (y - z) = (q_1 \cdot p) + (q_2 \cdot p) \Leftrightarrow x - z = p \cdot (q_1 + q_2)$
   Or $x \ \sim z \rightarrow x - z = p \cdot q_3 \rightarrow q_3 = (q_1 + q_2)$ qui est multiple de p

Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence

Définition :
Soit `A` muni d'une **classe d'équivalence** $\sim$.
La classe d'un élément $x \in$ `A` est le sous-ensemble de `A` défini par : $[x]_N = \{y \in \mathtt{A} \mid \ x \sim y \ \}$

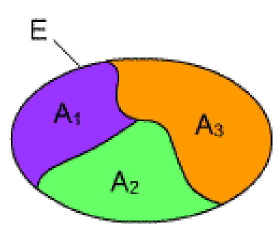


Exemple :
(Classes d'équivalences des exemple précédent)
Le parallélisme, sur l'ensemble des droites du plan à comme classe les directions.

Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, la congruence modulo n (pour un entier n fixé) est une relation d'équivalence, dont les classes forment le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Qui correspond à :
$\{\ x+p\ ;\ x+2p\ ;\ ...\ ;\ x-p\ ;\ x-2p\ ;\ ...\} = \{x+kp \mid k \in \mathbb{Z}\ \} = x+p\mathbb{Z}$

Théorème :
L'ensemble des classes d'équivalences de $\sim$ forme une partition de $\mathtt{E}$.
$(\mathtt{A}_i)_{i\in I}$ famille de partie de $\mathtt{E}$: $\forall i \in I, \mathtt{A}_i \subset \mathtt{E}$.
On dira que $(\mathtt{A}_i)_{\in I}$ est une partition de $\mathtt{E}$ si :

- $\mathtt{A}_i \cap \mathtt{A}_j = \emptyset$ si $i \neq j$ (pas d'intersection entre les familles)
- $\bigcup\limits_{i\in \mathtt{I}} \mathtt{A}_i = \mathtt{E}$ (l'union de toute les familles forme l'ensemble)



Définition :
$\{\ [x], x \in \mathtt{A}\} = \mathtt{A}/\sim$ et est appelé "quotient de $\mathtt{A}$ par $\sim$"

Exemple :
(Avec le modulo de l'exemple précédent)
$\mathbb{Z}/\sim_p = p$ éléments $:= \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
Pour $p = 2$ on à : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \approx \{[0]\,;[1]\} = \{\{$ "pairs" (multiples de 2) ; "impairs"$\}\}$
Pour $p = 3$ on a donc : $\{\{$"nombre % 3 = 0" ; "nombre % 3 = 1" ; "nombre % 3 = 2 "$\}\}$ (% est considéré comme le symbole du modulo comme en Python)

Théorème :
$\mathtt{E/F}$ (l'ensemble des classes d'équivalences) à une structure vectorielle canonique ($\mathtt{E/F}$ est un e.v. sur $\mathbb{K}$)

Remarque :
Une autre relation d'équivalence :
Soient $\mathtt{A}$ et $\mathtt{B}$ 2 ensembles, on dira que $\mathtt{A}$ et $\mathtt{B}$ ont "le même cardinal" s'il existe une bijection $f : \mathtt{A} \to \mathtt{B}$ noté : $\#\mathtt{A} = \#\mathtt{B}$ (et revient en gros au nombres d'éléments de l'ensemble).

Notation :
Si $\#\mathtt{A} = \#\{1\,; ...\,; n\}$ on dira que A est fini et on notera $\#\mathtt{A} = n$

Théorème :
On dira que $\#\mathtt{A} \leq \#\mathtt{B}$ s'il existe une injection $f : \mathtt{A} \to \mathtt{B}$
Contor-Bernstein : Si $\#\mathtt{A} \leq \#\mathtt{B}$ et $\#\mathtt{B} \leq \#\mathtt{A}$ alors $\#\mathtt{A} = \#\mathtt{B}$

Définition :
Si $\#\mathtt{A} = \#\mathbb{N}$, on dit que $\mathtt{A}$ est **dénombrable**
Si $\#\mathtt{A} = \#\mathbb{R}$, on dit que $\mathtt{A}$ à la puissance du continu

Propriétés :

- Si $\#\mathtt{A} \leq \#\mathbb{N}$, soit $\mathtt{A}$ est fini, soit $\mathtt{A}$ est dénombrable
- Si $\#\mathtt{A} = n$, $\#(\mathrm{P}(\mathtt{A})) = 2^n$ $\quad(\mathrm{P}(\mathtt{A}) = \{$ sous-ensemble de $\mathtt{A}$ $\})$
- Si $\#\mathtt{A} = n$ et $\#\mathtt{B} = m$, $\#(\mathtt{B}^{\mathtt{A}}) = m^n = \#\mathtt{B}^{\#\mathtt{A}}$ $\quad(\mathtt{B}^{\mathtt{A}} = \{f : \mathtt{A} \to \mathtt{B}\})$
- $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N}$ (en pouvant, par exemple, associé les éléments pairs des éléments de $\mathbb{N}$ aux éléments positifs de $\mathbb{Z}$ et ls impaires aux négatifs (Voir scan théorique page 17 pour détails)), du coup $\mathbb{Z}$ est dénombrable, $\mathbb{N}^2$ aussi et également $\mathbb{Q}$.
- Mais $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, autrement dit : il n'existe pas de bijection : $f : \mathbb{N} \to \{0\ ;\ ...\ ;\ 9\}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \#\{0\ ;\ ...\ ;\ 9\}^{\mathbb{N}} > \#\mathbb{N}$

2.3.7 Retour sur Bases et dimensions

Rappel :

Soit $\mathtt{E}$ un e.v sur $\mathbb{K}$. Alors il existe de(s) base(s) noté B, B', B'', ...
$\#B$ est appelé dimension de $\mathtt{E}$
S'il existe une famille génératrice finie dans $\mathtt{E}$, on dit que $\mathtt{E}$ est de **dimension finie**

Théorème :

Si j'ai 2 bases B et B' de $\mathtt{E}$, alors $\#B = \#B'$.

Rappel :

Soit $\mathtt{E}_2$ un e.v sur $\mathbb{K}$.
$\mathtt{E}_2^{\mathtt{E}_1} = \{f : \mathtt{E}_1 \to \mathtt{E}_2\}$ est un e.v. sur $\mathbb{K}$ on suppose de plus que $\mathtt{E}_1$ est un e.v. sur $\mathbb{K}$.

Définition :

$\mathrm{L}(\mathtt{E}_1, \mathtt{E}_2) \subset \mathtt{E}_2^{\mathtt{E}_1}$, $\mathrm{L}(\mathtt{E}_1, \mathtt{E}_2) = \{u : \mathtt{E}_1 \to \mathtt{E}_2 | u$ linéaire, c'est à dire : $u(\lambda \cdot v + w) = \lambda u(v) + u(w)\}$

Théorèmes :

- $\mathrm{L}(\mathtt{E}_1, \mathtt{E}_2)$ est un sous e.v. de $\mathtt{E}_2^{\mathtt{E}_1}$
- Si $\dim(\mathtt{E}_1) < +\infty$ et $\dim(\mathtt{E}_2) < +\infty$, $\dim(\mathrm{L}(\mathtt{E}_1, \mathtt{E}_2)) = \dim(\mathtt{E}_1)\times$

$\dim(\mathtt{E}_2)$

— Si $\#\mathtt{A} < +\infty$ et $\mathtt{E}$ un e.v. de dimension finie : $\dim(\mathtt{E}^{\mathtt{A}}) = (\dim(\mathtt{E}))^{\#\mathtt{A}}$

Théorème :

Soit $\mathtt{E}$ un e.v. sur $\mathbb{K}$, $B = \{e_1 \ ; \ ... \ ; \ e_n\}$ base de $\mathtt{E}$, $\dim(\mathtt{E}) = n$

$\phi : \mathbb{K}^n \to \mathtt{E}$

$(\lambda_1 \ ; \ ... \ ; \ \lambda_n) \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ alors ϕ est un isomorphisme

2.4 Matrices :

Définition :

Soit $u : \mathtt{E} \to \mathtt{E}'$ avec $\mathtt{E}$ et $\mathtt{E}$' 2 e.v sur $\mathbb{K}$ avec

$B = \{e_1 \ ; \ ... \ ; \ e_n\}$ base de $\mathtt{E}$

$B' = \{e'_1 \ ; \ ... \ ; \ e'_n\}$ base de $\mathtt{E}$'

$u(\phi(\lambda_1 \ ; \ ... \ ; \ \lambda_n)) = \sum\limits_{i,j=1}^{n,m} \lambda_i \ a_{j,i} \ e'_j$ (voir théorème précédent)

On dira que la matrice $M = [a_{j,i}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$

est la matrice associée à u dans les bases B et B'.

Exemple :

Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$u(x, y, z) = (x + 3y - z, y + 2z)$

Trouver la matrice associée à u.

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $\{e_1, e_2, e_3\} = \{(1 ;0 ;0), (0 ;1 ;0), (0 ;0 ;1)\}$

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est : $\{e'_1, e'_2\} = \{(1 ;0),(0 ;1)\}$

Nous allons trouver les vecteurs de la base canonique de départ, associé à u :

$u(e_1) = u((1; 0; 0)) = (1 + 3 \cdot 0; 0 + 2 \cdot 0) = (1; 0) = e'_1$

$u(e_2) = u((0; 1; 0)) = (3; 1) = 3 \cdot e'_1 + e'_2$

$u(e_3) = u((0; 0; 1)) = (-1; 2) = -e'_1 + 2 \cdot e'_2$

La matrice associée à u est les résultats précédents mis en colonnes :

$$\text{Matrice associée à } u = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si l'on vérifie dans l'autre sens en utilisant la définition au dessus : $u(\lambda_1\ ;\ \lambda_2\ ;\ \lambda_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} \lambda_i\ a_{j,i}\ e'_j$ qui peut etre interprété (pour les BG informaticiens :D) comme un `for` imbriqué en `Python`.
Si l'on décompose :

- $i = 1$:
  - $j = 1 : \lambda_1 \cdot a_{1,1} \cdot e'_1 = \lambda_1 \cdot 1 \cdot (1; 0) = (\lambda_1; 0)$
  - $j = 2 : \lambda_1 \cdot a_{2,1} \cdot e'_2 = \lambda_1 \cdot 0 \cdot (0; 1) = 0$
- $i = 2$:
  - $j = 1 : \lambda_2 \cdot a_{1,2} \cdot e'_1 = \lambda_2 \cdot 3 \cdot (1; 0) = (3\lambda_2; 0)$
  - $j = 2 : \lambda_2 \cdot a_{2,2} \cdot e'_2 = \lambda_2 \cdot 1 \cdot (0; 1) = (0; \lambda_2)$
- $i = 3$:
  - $j = 1 : \lambda_3 \cdot a_{1,3} \cdot e'_1 = \lambda_2 \cdot (-1) \cdot (1; 0) = (-\lambda_3; 0)$
  - $j = 2 : \lambda_3 \cdot a_{2,3} \cdot e'_2 = \lambda_2 \cdot 2 \cdot (0; 1) = (0; 2\lambda_3)$

La somme des 6 lignes donne : $(\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3; \lambda_2 + 2\lambda_3)$
$u(\lambda_1\ ;\ \lambda_2\ ;\ \lambda_3) = (\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3; \lambda_2 + 2\lambda_3)$ Ce qui est bien se qu'on avait au départ (en remplaçant les λ par x, y et z)

Notation :
Les matrices sont aussi notée $\mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n)$ avec :
m = nombre de colonnes
n = nombre de lignes

Théorème :
Les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n)$ sont des e.v. sur $\mathbb{K}$.
Chaque matrice à sa "propre" application linéaire qui lui est assciée.

Théorème :
Soit $u : \mathtt{E} \to \mathtt{E}'$ et $u' : \mathtt{E}' \to \mathtt{E}''$ avec $\mathtt{E}$, $\mathtt{E}$' et $\mathtt{E}$" e.v. sur $\mathbb{K}$.
Si $u \in L(\mathtt{E}, \mathtt{E}')$ et $u' \in L(\mathtt{E}', \mathtt{E}'')$, alors $u' \circ u \in L(\mathtt{E}, \mathtt{E}')$
Soit :
$B = \{e_1\ ;\ ...\ ;\ e_n\}$ base de $\mathtt{E}$

$B' = \{e'_1\ ;\ ...\ ;\ e'_n\}$ base de `E'`
$B'' = \{e''_1\ ;\ ...\ ;\ e''_n\}$ base de `E''`
$[a_{i,j}]$ matrice de u
$[b_{j,k}]$ matrice de u'
$[c_{i,k}]$ matrice de $u' \circ u$
$(u' \circ u)(e_i) = ... = \sum_{k=1}^{p} (\sum_{j=1}^{m} \underbrace{a_{i,j} \cdot b_{j,k}}_{c_{i,k}}) e''_k$