

# Résumé cours de Maths - 2eme Session

## Algèbre Linéaire

15 mai 2015

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction à l'algèbre linéaire</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Vecteurs</b>	<b>1</b>
2.1	Espace vectoriel . . . . .	1
2.2	Applications linéaires . . . . .	2
2.3	Sous-espaces vectoriels . . . . .	4
2.3.1	Noyau et image . . . . .	6
2.3.2	Combinaison linéaire : . . . . .	7
2.3.3	Famille génératrice : . . . . .	8
2.3.4	Famille libre/liée : . . . . .	9
2.3.5	Bases et dimensions . . . . .	10
2.3.6	Relation d'équivalence . . . . .	11
2.3.7	Retour sur Bases et dimensions . . . . .	14
2.4	Matrices : . . . . .	15

**Contacts :**

**Henri Anciaux**

Mail : [henri.anciaux@gmail.com](mailto:henri.anciaux@gmail.com)

Site : <http://homepages.ulb.ac.be/hanciaux/MATHF112.html>

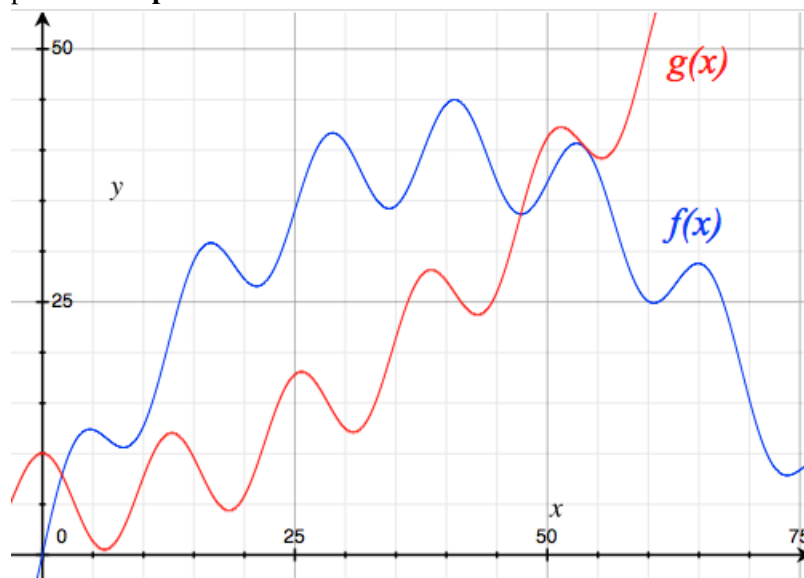
Bureau : P.O.7.110

Lien de partage (Google Drive) des scans du cours théorique :

[LIEN - Cours théorique](#)

# 1 Introduction à l'algèbre linéaire

On retrouve l'algèbre linéaire aussi nombreux que varié dans les mathématiques. Et elle nous permet de pouvoir **simplifier les choses**.



$$f(x+h) \approx f(x) + h \times f'(x) \text{ (linéaire)}$$

Par exemple le Polynôme de Taylor (qui est un cas d'algèbre linéaire) nous permet de simplifier des expressions mathématiques en les linéarisant et donc de pouvoir résoudre certains calculs insolubles sans. Comme la formule d'oscillation du pendule :  $y'' + \sin(y) = 0$  qui est une équation différentielle du second ordre impossible à résoudre, peut être simplifiée en  $y'' + y = 0$ . Elle est aussi utile dans les nuages de points, pour calculer une matrice puissance  $n$ , approximer des fonctions, etc...

## 2 Vecteurs

### 2.1 Espace vectoriel

#### Notation :

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \{0, 1\}$  ou n'importe quel "corps".

#### Définition :

Un **espace vectoriel** sur  $\mathbb{K}$  (= "K-espace vectoriel") est un ensemble  $E$  muni de 2 opérations :

– **addition interne** :  $+: E \times E \rightarrow E$  telle que,  $\forall u, v, w \in E$  :

1.  $+$  est **commutative**  $\Leftrightarrow v + w = w + v$
2.  $+$  est **associative**  $\Leftrightarrow u + (v + w) = (u + v) + w$
3.  $+$  admet un **élément neutre** noté  $\vec{0}_E$  ou  $0 \Leftrightarrow 0 + v = v$
4.  $+$  admet un **opposé** noté  $-v \Leftrightarrow v + (-v) = 0$

– **Multiplication externe** :  $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$  telle que,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, v, w \in E$  :

1.  $\cdot$  est **distributive à gauche**  $\Leftrightarrow \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
2.  $\cdot$  est **distributive à droite**  $\Leftrightarrow (v + w) \cdot \lambda = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
3.  $\cdot$  est **associative**  $\Leftrightarrow \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$
4.  $\cdot$  admet un **élément neutre**  $\Leftrightarrow 1 \cdot v = v$

Les éléments de  $E$  sont appelés vecteurs. Les 2 opérations  $+$  et  $\cdot$  constituent une structure vectorielle.

#### Remarque :

Si  $E$  est un e.v. (= Espace Vectoriel),

$$\begin{cases} 0 \cdot v = \vec{0}_E \\ (-1) \cdot v = (-v) \end{cases}$$

#### Notation :

On appelle **scalaire** tout élément de  $\mathbb{K}$

#### Théorème :

$\mathbb{K}^n$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v. (par exemple  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ )

3 concepts fondamentaux :

1. **Applications linéaires**
2. **Sous-espaces vectoriels**
3. **Base et dimensions**

## 2.2 Applications linéaires

#### Définition :

Soient  $E$  et  $F$ , 2 e.v. sur le même corps  $\mathbb{K}$ .

Une application  $u : E \rightarrow F$  est **linéaire** si elle préserve les structures vectorielles, c'est à dire les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} u(x + y) = u(x) + u(y) \quad \forall x, y \in E \\ u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E \end{cases}$$

#### Exemple :

Les application suivantes sont elles linéaires ?

- $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (y, x)$
- $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (\sin(x), y)$

1) Si  $a$  est linéaire, elle doit respecter les 2 propriétés énoncées plus haut. Vérifions la première :  
 $a(x + y) \stackrel{?}{=} a(x) + a(y)$ .

Considérons  $(x, y)$  et  $(v, w)$ , 2 antécédents de  $a$ . Pour vérifier la première propriété, il faut que

$a((x, y) + (v, w)) = a(x, y) + a(v, w)$ . Développons des 2 côtés :

(Gauche)  $a((x, y) + (v, w)) = a(x + v, y + w)$

Maintenant on applique  $a$  qui va intervertir les coordonnées.

$a(x + v, y + w) = (y + w, x + v)$

(Droite)  $a(x, y) + a(v, w) = (y, x) + (w, v) = (y + w, x + v)$ .

Le coté gauche de l'équation est égal au coté droit, donc la première propriété est démontrée.

Maintenant il nous faut démontrer la seconde propriété :  $a(\lambda \cdot x) \stackrel{?}{=} \lambda \cdot a(x)$

On choisit un couple  $(x, y)$ , antécédent de  $a$ . Une fois encore, on vérifie en développant des 2 côtés et on regarde s'ils sont égaux. Donc si  $a(\lambda \cdot (x, y)) = \lambda \cdot a(x, y)$ .

(Gauche) :  $a(\lambda \cdot (x, y)) = a(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y, \lambda x)$

(Droite) :  $\lambda \cdot a(x, y) = \lambda \cdot (y, x) = (\lambda y, \lambda x)$ .

Les côtés gauche et droit sont égaux, la seconde propriété est donc respectée. Comme les 2 propriétés ont été vérifiées et approuvées,  $a$  est linéaire.

2) (Même principe que plus haut, donc voir  $a$  pour les détails)

Si  $b$  est linéaire elle doit respecter les 2 propriétés énoncées plus haut. Vérifions la première :

$b(x + y) \stackrel{?}{=} b(x) + b(y)$  et donc  $b((x, y) + (v, w)) = b(x, y) + b(v, w)$

(Gauche) :  $b((x, y) + (v, w)) = b(x + v, y + w) = (\sin(x + v), y + w)$

(Droite) :  $b(x, y) + b(v, w) = (\sin(x), y) + (\sin(v), w) = (\sin(x) + \sin(v), y + w)$

Or,  $\sin(x + v) \neq \sin(x) + \sin(v) \forall x, v \in \mathbb{R}$ , donc l'égalité est fausse. Comme nous avons une contradiction il n'est pas utile de vérifier la seconde propriété.  $b$  n'est pas linéaire. Il suffit de trouver un **contre-exemple** pour prouver qu'une hypothèse est fausse. Si l'on en trouve pas, il faut démontrer que les propriétés marchent dans notre cas. (Voir première séance d'exercice pour plus d'exercice sur les applications linéaires)

### Remarque :

Si  $u : E \rightarrow F$  est une application linéaire, alors  $u(0_E) = 0_F$ . Autrement dit, si le domaine de l'application ne contient pas l'élément neutre, alors elle est d'office pas linéaire (**Attention** cette affirmation n'est pas tout le temps vraie dans l'autre sens !).

### Théorème :

Soit  $A$ , un ensemble quelconque, soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v.

On écrit  $E^A = \{u : A \rightarrow E\}$  l'ensemble des applications allant de  $A$  dans  $E$ .  $E^A$  a une structure vectorielle.

### Définition :

Une application linéaire qui est bijective (injective et surjective) est appelée **isomorphisme**.

Rappel pour  $f : E \rightarrow F$  :

–  $f$  est injective  $\Leftrightarrow$  il n'existe pas 2 points qui ont la même image. Autrement dit,  $f(v) = f(w) \Rightarrow v = w$ .

ex :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$  n'est pas injective sur  $\mathbb{R}$  car pour  $f(x) = 1$ , on a  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$ , mais elle est injective sur  $\mathbb{R}^+$  ;

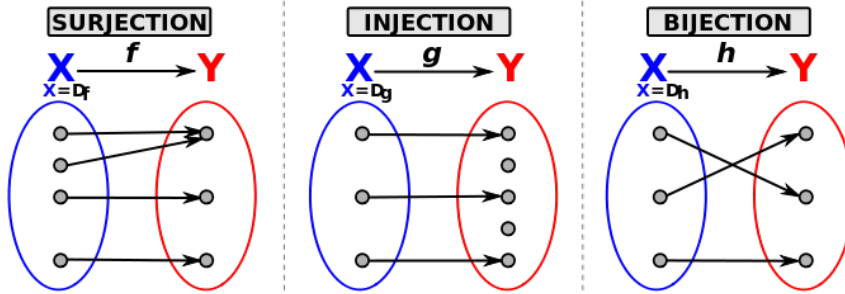
–  $f$  est surjective  $\Leftrightarrow$  tout les points de l'ensemble des images sont atteints. Autrement dit,  $\forall w \in$

$F, \exists v \in Et.q. f(v) = w.$

ex :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$  n'est pas surjective sur l'ensemble image  $\mathbb{R}$  car  $\nexists x.t.q. f^2 = -1$ . Mais elle est surjective sur l'ensemble des images  $\mathbb{R}^+$  ;

–  $f$  est bijective  $\Leftrightarrow$  l'application est à la fois injective et surjective. ex :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ .

Avec un schéma :



### Exemple :

Comment prouver qu'une application est bijective ?

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x + y - z, x - y, z)$$

Si  $u$  est bijective, alors pour  $(a, b, c)$  fixé, il existe un unique élément  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $u(x, y, z) = (a, b, c)$ . Nous avons donc un système d'équations !

$$\begin{cases} x + y - z = a \\ x - y = b \\ x = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c \\ y = -b + c \\ z = -a - b + 2c \end{cases}$$

Il existe donc qu'une et une seule solution au système, donc l'application  $u$  est bijective. Si elle est également linéaire (ce qu'elle est, la démonstration est laissée en exercice), alors  $u$  est un isomorphisme.

### Théorème :

$\mathbb{K}^{\{0,1\}} \sim \mathbb{K}^2$  ( $\sim$  veut dire *est comparable à*), c'est-à-dire qu'il existe un **isomorphisme canonique** :  $\phi : \mathbb{K}^{\{0,1\}} \rightarrow \mathbb{K}^2$ .

Soit  $A$  un ensemble fini :  $\#A = n$  ( $\#$  = cardinal = nombre d'éléments).  $\mathbb{K}^A \sim \mathbb{K}^n \longrightarrow$  ils sont canoniquement isomorphes.

## 2.3 Sous-espaces vectoriels

### Définition :

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. et  $F \subset E$ , un sous-ensemble de  $E$ . On dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  si et seulement si :

$$\begin{cases} v + w \in F & \forall v, w \in F, v + w \in F \\ \lambda \cdot v \in F & \forall \lambda \in \mathbb{K}, v \in F \end{cases}$$

### Théorème :

Soit  $\{v\}$  où  $v \neq 0_E$  n'est **pas** un e.v :  $v + v = 2v \neq v$ . Alors :  $F = \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$  est sous-e.v. de  $E$ . On l'appelle également *droite vectorielle de  $E$  engendrée par  $v$* .

### Notation :

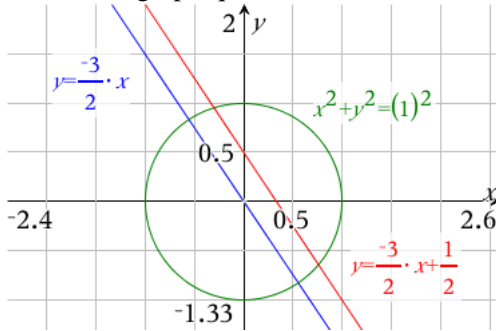
On note la droite vectorielle  $\{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$  de la manière suivante :  $v\mathbb{K}$ .

### Exemple :

Pour  $E = \mathbb{R}^2$ , les sous-ensembles  $F_i$  ci dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $E$  ?

- $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t.q. 3x + 2y = 0\}$
- $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t.q. x^2 + y^2 = 1\}$
- $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t.q. 3x + 2y = 1\}$

Sur un graphique :



1)  $F_1$  est-il un sous-e.v. ?

- soit  $(x, y)$  et  $(x', y')$  dans  $F_1$ , est-ce que  $(x, y) + (x', y') \in F_1$  ?  $(x, y) + (x', y') = 3(x + x') + 2(y + y') = 3x + 3x' + 2y + 2y' = (3x + 2y) + (3x' + 2y') = 0 + 0 = 0 \in F_1$  étant donné que  $3x + 2y = 0$  est notre "équation" de départ (voir énoncé). La première propriété pour que  $F_1$  soit un sous-e.v. de  $E$  est donc vérifiée ;
- soit  $(x, y) \in F_1$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , est-ce que  $\lambda(x, y) \in F_1$  ?  $\lambda(x, y) = 3(\lambda x) + 2(\lambda y) = \lambda(3x + 2y) = \lambda \cdot 0 = 0 \in F_1$ . La seconde propriété est vérifiée également, donc  $F_1$  est un sous-e.v. de  $E$ . Nous pouvons aussi dire que  $3x + 2y = 0$  est une droite vectorielle de  $E$ .

2) Prenons les points  $(1, 0)$  et  $(0, 1) \in F_2$ .  $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F_2$ , car  $1^2 + 1^2 = 2 \neq 1$ . Donc grâce à un contre-exemple, nous pouvons affirmer que  $F_2$  n'est pas un sous-e.v de  $E$ .

3) Idem que pour le 2) avec les points  $(1, -1)$  et  $(3, -4)$

### Remarque :

Si  $F$  est un sous-ensemble de  $E$ , alors  $0_E \in F$ . Autrement dit, si le sous-ensemble  $F$  ne contient pas

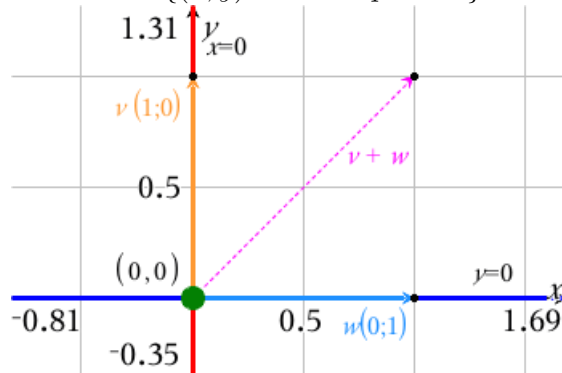
l'élément neutre de l'ensemble  $E$  auquel il appartient, il n'est pas un sous-e.v de cet ensemble. (Cette remarque aurait pu permettre de résoudre le 2) et 3) de l'exemple juste au dessus).

### **Théorème :**

Si  $F_1$  et  $F_2$  sont des sous-e.v. de  $E$ , alors  $F_1 \cap F_2$  est un sous-e.v. (attention,  $F_1 \cup F_2$  ne l'est pas forcément).

### **Exemple :**

Soient  $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x = 0\}$  et  $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y = 0\}$ .



$F_1 \cap F_2$  est ici l'intersection des droites  $x = 0$  et  $y = 0$  qui est le singleton (ensemble de cardinal = 1)  $(0; 0)$ . L'union ( $\cup$ ) est par exemple la somme du vecteur  $v(1, 0)$  et  $w(0, 1)$ .  $v + w = (1, 1) \notin F_1$  ni  $F_2$ . Ce n'est donc pas un sous-e.v. de  $\mathbb{R}$ .

### **Théorème :**

Si  $(F_i)_{i \in I}$  ( $I =$  n'importe quel ensemble) est une famille quelconque de sous-e.v.,  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un sous-e.v.

### **Théorème :**

Y a-t-il une relation entre sous-espace vectoriel et application linéaire ?

Soit  $u : E_1 \rightarrow E_2$ , une application linéaire.

- Soit  $F_1$ , un sous-e.v de  $E_1$ ,  $u(F_1) = \{u(v) \text{ t.q. } v \in F_1\} (\subset E_2)$  est un sous-e.v. de  $E_2$  ;
- soit  $F_2$ , un sous-e.v de  $E_2$ ,  $u^{-1}(F_2) = \{v \in E \text{ t.q. } u(v) \in F_2\}$  est sous-e.v de  $E_1$

## **2.3.1 Noyau et image**

### **Définition :**

Pour toute application linéaire  $u : E_1 \rightarrow E_2$ , on définit  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$ , tels que

$\text{Ker } u = u^{-1}(\{0_{E_2}\})$  est le *noyau* de  $u$  (sous-e.v. de  $E_1$ ),

$\text{Im } u = u(E_1)$  est l'*image* de  $u$  (sous-e.v. de  $E_2$ ).

Autrement dit,  $\text{Ker } u = \{v \in E_1 \text{ t.q. } u(v) = 0_{E_2}\}$ , ce qui signifie concrètement : *l'ensemble des éléments qui sont envoyés sur l'élément neutre de l'ensemble d'arrivée.*

$\text{Im } u = \{v \in E_2, \exists w \in E_1 \text{ t.q. } u(w) = v\}$ . C'est donc le sous-ensemble de  $E_2$  contenant les images de



tous les éléments de  $E_1$ .

**Exemple :** (Ex 2 fiche 2)

On fixe un vecteur  $v_0 \in \mathbb{R}^3$ . On définit l'application  $\Phi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : v \mapsto v \times v_0$ . Déterminer le noyau Ker et l'image Im de  $\Phi_1$ .

2 méthodes sont possibles :

1. Par calculs :

Soit  $v_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$  fixé.

$\Phi_1$  est le produit vectoriel de 2 vecteurs. Son noyau est donc l'ensemble des vecteurs  $v \in \mathbb{R}^3$  tels que  $v \times v_0 = (0, 0, 0)$ .

Or  $v \times v_0 = (v_y v_{0z} - v_z v_{0y}, v_z v_{0x} - v_x v_{0z}, v_x v_{0y} - v_y v_{0x})$ .

$$v \times v_0 = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} v_y v_{0z} - v_z v_{0y} = 0 \\ v_z v_{0x} - v_x v_{0z} = 0 \\ v_x v_{0y} - v_y v_{0x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x = v_z \frac{v_{0x}}{v_{0z}} \\ v_y = v_z \frac{v_{0y}}{v_{0z}} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Nous n'avons donc pas de contrainte pour  $v_z$ , il est donc toujours bon, peu importe sa valeur. (degré de liberté).

$$S = \left\{ z \frac{v_{0x}}{v_{0z}}, z \frac{v_{0y}}{v_{0z}}, z \right\} = z \left\{ \frac{v_{0x}}{v_{0z}}, \frac{v_{0y}}{v_{0z}}, 1 \right\}.$$

$\text{Ker } \Phi_1 = \mathbb{R} \left\{ \frac{v_{0x}}{v_{0z}}, \frac{v_{0y}}{v_{0z}}, 1 \right\} = \mathbb{R} \frac{1}{v_{0z}} \{v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\}$  qui est la droite vectorielle de  $\mathbb{R}$  engendrée par  $v_0$ .

2. En utilisant la définition du produit vectoriel (rappel :  $v \times w = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow v = \lambda w$ ) :

$\text{Ker } \Phi_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_1(v) = v \times v_0 = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \lambda v_0\} = \{\lambda v_0 \mid \forall \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} v_0$   
 $\mathbb{R} v_0$  est la droite vectorielle de  $\mathbb{R}$  engendrée par  $v_0$ .

$\text{Im } \Phi_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 \text{ pour lesquels } \exists v \in \mathbb{R}^3 \mid w = v \times v_0\} = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid w \perp v \wedge w \perp v_0\}$ , ce qui est le plan perpendiculaire à  $v_0$ .

### 2.3.2 Combinaison linéaire :

**Définition :**

Soit :  $v_1, \dots, v_n \in E$  (vecteurs)

et :  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  (scalaires)

On dit que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$  est une **combinaison linéaire** (c.l.) des vecteurs  $v_1, \dots, v_n$

**Théorème :**

$u : E_1 \rightarrow E_2$  est linéaire, se qui est signifie que pour toute c.l.  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i : u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(v_i)$

$F \subset E$  (avec  $E$  e.v. et  $F$  sous-e.v), signifie que toute c.l. de  $F$  est dans ( $v_1 - v_n \in F \mid \lambda_1 - \lambda_n \in \mathbb{K}$ , alors

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in F)$$

### Définition :

Soit  $F$  sous e.v.

$\text{Vect } A$  (aussi noté  $\langle A \rangle$ ) =  $\bigcap_{A \subset F} F \stackrel{\text{lemme}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i; v_1, \dots, v_n \in A; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  toutes les c.l. de  $A$ .

Autrement dit :  $\text{Vect } A$  est l'ensemble des c.l. de vecteurs de  $A$ .  $\vec{v}$  appartient à  $\text{Vect } A$  si et seulement s'il existe une famille finie de scalaires  $\lambda_i$  et telle que  $\vec{v} = \sum_{a \in A} \lambda_a \cdot a$

$\text{Vect } A$  est sous e.v. de  $E$ , on l'appelle l'espace vectoriel engendré par  $A$ .

Soit  $A$  et  $B$  2 sous-ensembles de  $E$ .  $A = B \Leftrightarrow A \subset B$  et  $B \subset A$

### 2.3.3 Famille génératrice :

#### Définition :

Soit  $A \subset E$ , on dit que  $A$  est une **famille génératrice** (ou partie génératrice) si  $\text{Vect } A = E$ .

Autrement dit,  $\forall v \in E, \exists$  une c.l. (finies) de vecteurs de  $A$  tels que  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, v_1, \dots, v_n \in A$

#### Lemmes :

- Si  $A$  est génératrice et  $A \subset B$ , alors  $B$  est génératrice.
- Soit  $A$  une famille génératrice et  $v \in A$ , alors  $A \setminus \{v\}$  est génératrice si et seulement si  $v$  est une c.l. de vecteurs de  $A \setminus \{v\}$

#### Exemple :

Soit  $E = \mathbb{R}^3$

La famille  $a = \{(0; 1; 0); (0; 0; 1); (1; 1; 1)\}$  est elle génératrice ?

Soit un vecteur quelconque  $(a; b; c)$ , existe t'il une solution telle que :

$$(a; b; c) \stackrel{?}{=} x \cdot (0; 1; 0) + y \cdot (0; 0; 1) + z \cdot (1; 1; 1)$$

Ce qui est équivalent à trouver une solution au système :

$$\begin{cases} z = a \\ x + z = b \\ y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b - a \\ y = c - a \\ z = a \end{cases}$$

L'on remarque qu'il manque à  $a$  le vecteur canonique  $(1; 0; 0)$  pour qu'elle soit une famille génératrice. Mais peut-être que ce vecteur manquant peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres (et du coup  $a$  sera une famille génératrice). Et donc :

$$(1; 0; 0) \stackrel{?}{=} x \cdot (0; 1; 0) + y \cdot (0; 0; 1) + z \cdot (1; 1; 1)$$

et en reprenant le système au-dessus et en remplaçant  $a, b$  et  $c$  par 1, 0 et 0, on trouve :

$$\begin{cases} x = 0 - 1 \\ y = 0 - 1 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Donc d'après le 2eme lemme a est une famille génératrice.

Remarque : si l'on remplace dans l'égalité les résultats de  $x$ ,  $y$  et  $z$  trouvé dans le système, on retrouve le vecteur manquant.

$$(1; 0; 0) \stackrel{?}{=} x \cdot (0; 1; 0) + y \cdot (0; 0; 1) + z \cdot (1; 1; 1)$$

$$(1; 0; 0) \stackrel{?}{=} (-1) \cdot (0; 1; 0) + (-1) \cdot (0; 0; 1) + 1 \cdot (1; 1; 1)$$

$$(1; 0; 0) \stackrel{?}{=} (0; -1; 0) + (0; 0; -1) + (1; 1; 1)$$

$$(1; 0; 0) \stackrel{?}{=} (1; 0; 0)$$

### 2.3.4 Famille libre/liée :

#### Définition :

Soit  $a \subset E$  sous-ensemble de  $E$

On dit que  $a$  est **libre** si la seule c.l. de vecteurs de  $a$  égale à  $\vec{0}_E$  est la c.l. triviale.

C'est à dire si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \vec{0}_E, v_1; \dots; v_n \in a \Rightarrow \lambda_1 = 0; \dots; \lambda_n = 0$

Si elle n'est pas libre, elle est **liée**.

#### Exemple :

1.  $E = \mathbb{R}^2, a = \{ (-2; 3); (2; -3) \}$

$$a \text{ est liée car } 1 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 = 1 \cdot (-2; 3) + 1 \cdot (2; -3) = (-2; 3) + (2; -3) = (0; 0) = \vec{0}_E$$

$$a \text{ est donc liée car on a trouvé } \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \neq 0$$

2.  $E = \mathbb{R}^3, A' = \{ (1; 1; 3); (5; 2; -1); (4; 1; -4) \}$

$$A' \text{ est liée aussi car } \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}_E$$

$$A' \text{ est donc liée car on a trouvé } \lambda_1 = \lambda_3 = 1 \neq 0 \text{ et } \lambda_2 = -1 \neq 0$$

3.  $E = \mathbb{R}^3, A'' = \{ (1; 1; 3); (5; 2; -1) \}$

A vu d'oeil on ne sait pas dire donc on résout le systèmes, il faut donc essayer de trouver une c.l. des éléments de  $A''$  pour trouver le  $\vec{0}_E$ . C'est à dire :

$$\lambda_1 \cdot (1; 1; 3) + \lambda_2 \cdot (5; 2; -1) = \vec{0}_E = (0; 0; 0)$$

Ce qui revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5 \cdot \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 = 0 \\ 3 \cdot \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -5 \cdot \lambda_2 \\ \lambda_1 = -2 \cdot \lambda_2 \\ \lambda_1 = \frac{\lambda_2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Donc  $A''$  est libre !

Si on avait essayé de résoudre le système du 2. on aurait obtenu le calcul suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5 \cdot \lambda_2 + 4 \cdot \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3 \cdot \lambda_1 - \lambda_2 - 4 \cdot \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3$$

Donc  $\forall \lambda, \lambda \cdot \vec{v}_1 - \lambda \cdot \vec{v}_2 + \lambda \cdot \vec{v}_3 = \vec{0}_E$

La réponse (contreexemple) que nous avons trouvé :  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}_E$  correspondant au vecteur (1 ; -1 ; 1) et correspond donc bien à une de nos réponses aux systèmes (avec  $\lambda = 1$ )

### Définition :

Si  $a$  est libre, on dira que les vecteurs de  $a$  sont **linéairement indépendant** (l.i), si  $a$  n'est pas libre (liée), alors on dira que ses vecteurs sont **linéairement dépendant** (l.d.)

### Remarque :

Si  $\vec{0}_E \in a$ ,  $a$  ne peut pas être libre (donc elle est d'office liée).  
Car  $\lambda \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E \quad \forall \lambda \neq 0$

### Lemme :

Soit  $a$  partie de  $E$  :

- $a$  est liée,  $a \subset B$ ,  $B$  est liée
- $a$  est libre,  $B \subset a$ ,  $B$  est libre
- $a$  est libre,  $v \in \text{vect}(a)$ , alors il existe une unique c.l. de vecteurs de  $a$  égale à  $v$ . Autrement dit :  

$$\exists (v_1; \dots; v_n) \in a, v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$
- $a$  est libre,  $v \in E$ , alors  $a \cup \{v\}$  est libre  $\Leftrightarrow v \in \text{vect}(a)$

### Théorème :

Si  $a$  est libre :  $\begin{cases} \text{Si } v \in a, a \setminus \{v\} \text{ est libre} \\ \text{Si } v \notin a, a \cup \{v\} \text{ est libre} \Leftrightarrow v \notin \text{vect}(a) \end{cases}$

Si  $a$  est génératrice :  $\begin{cases} \text{Si } v \notin a, a \cup \{v\} \text{ est génératrice} \\ \text{Si } v \in a, a \setminus \{v\} \text{ est génératrice} \Leftrightarrow v \in \text{vect}(a) \end{cases}$

$v \in \text{vect}(a)$  : autrement dit : s'il existe dans  $a$  une c.l. de  $v$  qui ne soit pas  $v$

## 2.3.5 Bases et dimensions

### Définition :

Soit  $B \subset E$  une partie de  $E$ .

Si  $B$  est libre et génératrice on dit que  $B$  est une **base**.

Soit  $E$  un e.v. alors  $E$  admet une base (et en fait beaucoup).

Toutes les bases de  $E$  ont le même nombre d'éléments. C'est la **dimension** de  $E$

**Exemple :**

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
- $\dim(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \infty$  (car  $\mathbb{N}$  à une infinité d'éléments)
- $v \in E, v \neq 0 \dim(\mathbb{K}_v) = \dim(\text{vect}(\{v\})) = 1$  (que  $\vec{v}$ )
- $\dim(\{\vec{0_E}\}) = 0$  (par convention)

**Théorème :**

Si  $a$  est libre, il existe  $B$  telle que  $a \subset B$ , avec  $B$  une base.

Inversement, si  $a$  est génératrice, il existe une base  $B$  contenue dans  $a$ .

Autrement dit une famille qui sera libre/génératrice mais qui ne sera pas génératrice/libre, peut devenir une base (donc libre et génératrice), à condition qu'on rajoute/enlève des vecteurs correctement.

**Exemple :**

$a = \{(1; 0; 0)\} \rightarrow$  est libre (mais pas génératrice, on va donc essayer de rajouter des vecteurs dans  $a$  pour que ça devienne générateur (en restant libre))

$a' = \{(1; 0; 0); (1; 5; 3)\} \rightarrow$  est encore libre (mais toujours pas génératrice)

$a'' = \{(1; 0; 0); (1; 5; 3); (2; 5; 3)\} \rightarrow$  n'est plus libre (il existe une c.l :  $v_3 = v_1 + v_2$ ). Il faut donc faire attention aux vecteurs que l'on rajoute, car même si la famille était génératrice, elle ne sera pas une base car  $a''$  n'est plus libre

$a = \{(1; 0; 0); (0; 1; 0); (0; 0; 1); (1; 1; 1); (4; 3; 21)\} \rightarrow$  est génératrice (mais pas libre par ex :  $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$ ), on va donc essayer d'enlever des vecteurs de  $a$  pour que cela devienne libre, tout en restant génératrice.

$a' = \{(1; 0; 0); (0; 1; 0); (0; 0; 1); (1; 1; 1)\} \rightarrow$  est encore génératrice (mais toujours pas libre)

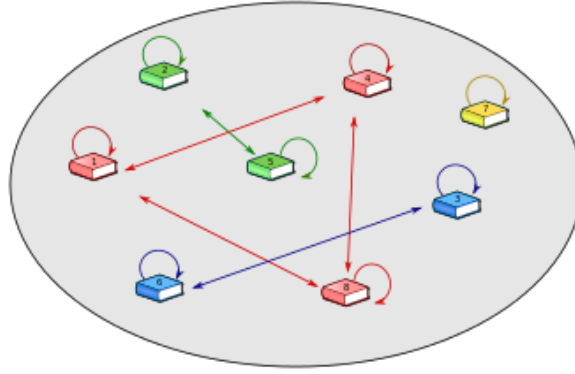
$a'' = \{(1; 0; 0); (0; 1; 0); (0; 0; 1)\} \rightarrow$  est génératrice et libre, c'est donc une base.

**2.3.6 Relation d'équivalence****Définition :**

Une **relation d'équivalence** dans un ensemble  $a$  (quelconque) est une **relation binaire** (relation entre paires d'éléments) de  $a$ , notée  $\sim$ .

Elle est :

1. **Réflexive** :  $x \sim x \quad \forall x \in a$   
(tout le monde est ami avec soi-même)
2. **Symétrique** : si  $x \sim y$  alors  $y \sim x \quad \forall x, y \in a$   
(si je suis ami avec A, alors A est ami avec moi aussi)
3. **Transitive** : si  $x \sim y$  et  $y \sim z$  alors  $x \sim z \quad \forall x, y, z \in a$   
(les amis de mes amis, sont mes amis)



### Notation :

$x \sim_p y$  s'écrit aussi communément  $x \equiv y[p]$

### Exemple :

La relation "être parallèle" ( $//$ ) est une relation d'équivalence pour l'ensemble  $E$  des droites du plans.

1. Réflexivité : Toutes les droites sont parallèles à elle-même
2. Symétrie : Si  $D // D'$  alors  $D' // D$
3. Transitivité : Si  $D // D'$  et que  $D' // D''$  alors  $D // D''$

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On dira que deux nombres entiers relatifs  $x$  et  $y$  sont congrus modulo  $p$  et on notera :  $x \equiv y[p]$  si  $x - y$  est un multiple de  $p$ . Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et qu'il y a exactement  $p$  classes d'équivalences.

$x \equiv y[p]$  si  $x - y$  est un multiple de  $p$ . Revient au même que : si  $p$  divise  $x - y$

Si  $c$ 'est une classe d'équivalences, alors elle respecte les 3 propriétés :

1. Réflexivité :  $x \sim x$

$$x \stackrel{?}{\equiv} x[p] \rightarrow x - x = 0 \text{ (qui est bien un multiple de } p \text{)}$$

2. Symétrie :  $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

$$x \equiv y[p] \stackrel{?}{\Rightarrow} y \equiv x[p]$$

$$x \equiv y[p] \rightarrow x - y \text{ multiple de } p$$

$$y \equiv x[p] \rightarrow y - x \text{ multiple de } p \text{ ? } y - x = -1 \cdot (x - y) \text{ qui sont tout 2 multiple de } p \text{ OU si } p \text{ divise } x - y \text{ alors } p \text{ divise aussi } y - x$$

3. Transitivité :  $x \sim y$  et  $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$$x \sim y \rightarrow p \text{ divise } x - y \rightarrow x - y = q_1 \cdot p \quad q_1 \in \mathbb{Z}$$

$$y \sim z \rightarrow p \text{ divise } y - z \rightarrow y - z = q_2 \cdot p \quad q_2 \in \mathbb{Z}$$

En sommant les 2 équations :

$$(x - y) + (y - z) = (q_1 \cdot p) + (q_2 \cdot p) \Leftrightarrow x - z = p \cdot (q_1 + q_2)$$

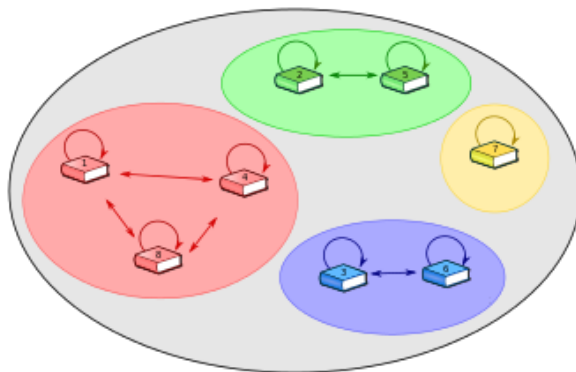
$$\text{Or } x \sim z \rightarrow x - z = p \cdot q_3 \rightarrow q_3 = (q_1 + q_2) \text{ qui est multiple de } p$$

Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence

**Définition :**

Soit  $a$  muni d'une **classe d'équivalence**  $\sim$ .

La classe d'un élément  $x \in a$  est le sous-ensemble de  $a$  défini par :  $[x]_N = \{y \in a \mid x \sim y\}$

**Exemple :**

(Classes d'équivalences des exemple précédent)

Le parallélisme, sur l'ensemble des droites du plan à comme classe les directions.

Sur l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs, la congruence modulo  $n$  (pour un entier  $n$  fixé) est une relation d'équivalence, dont les classes forment le groupe cyclique  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Qui correspond à :

$$\{x + p; x + 2p; \dots; x - p; x - 2p; \dots\} = \{x + kp \mid k \in \mathbb{Z}\} = x + p\mathbb{Z}$$

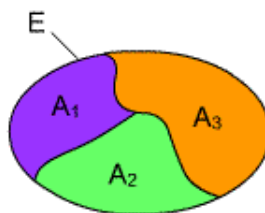
**Théorème :**

L'ensemble des classes d'équivalences de  $\sim$  forme une partition de  $E$ .

$(a_i)_{i \in I}$  famille de partie de  $E : \forall i \in I, a_i \subset E$ .

On dira que  $(a_i)_{i \in I}$  est une partition de  $E$  si :

- $a_i \cap a_j = \emptyset$  si  $i \neq j$  (pas d'intersection entre les familles)
- $\bigcup_{i \in I} a_i = E$  (l'union de toute les familles forme l'ensemble)

**Définition :**

$\{[x], x \in a\} = a / \sim$  et est appelé "quotient de  $a$  par  $\sim$ "

**Exemple :**

(Avec le modulo de l'exemple précédent)

$\mathbb{Z}/\sim_p = p \text{ éléments} := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Pour  $p = 2$  on a :  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \approx \{[0]; [1]\} = \{\{ \text{"pairs"} \text{ (multiples de 2)}; \text{"impairs"} \}\}$

Pour  $p = 3$  on a donc :  $\{\{ \text{"nombre \% 3 = 0"}; \text{"nombre \% 3 = 1"}; \text{"nombre \% 3 = 2"} \}\}$  (% est considéré comme le symbole du modulo comme en Python)

**Théorème :**

$E/F$  (l'ensemble des classes d'équivalences) à une structure vectorielle canonique ( $E/F$  est un e.v. sur  $\mathbb{K}$ )

**Remarque :**

Une autre relation d'équivalence :

Soient  $a$  et  $B$  2 ensembles, on dira que  $a$  et  $B$  ont "le même cardinal" s'il existe une bijection  $f : a \rightarrow B$  noté :  $\#a = \#B$  (et revient en gros au nombres d'éléments de l'ensemble).

**Notation :**

Si  $\#a = \#\{1; \dots; n\}$  on dira que  $A$  est fini et on notera  $\#a = n$

**Théorème :**

On dira que  $\#a \leq \#B$  s'il existe une injection  $f : a \rightarrow B$

Contor-Bernstein : Si  $\#a \leq \#B$  et  $\#B \leq \#a$  alors  $\#a = \#B$

**Définition :**

Si  $\#a = \#\mathbb{N}$ , on dit que  $a$  est **dénombrable**

Si  $\#a = \#\mathbb{R}$ , on dit que  $a$  à la puissance du continu

**Propriétés :**

- Si  $\#a \leq \#\mathbb{N}$ , soit  $a$  est fini, soit  $a$  est dénombrable
- Si  $\#a = n$ ,  $\#(P(a)) = 2^n$  ( $P(a) = \{ \text{sous-ensemble de } a \}$ )
- Si  $\#a = n$  et  $\#B = m$ ,  $\#(B^a) = m^n = \#B^{\#a}$  ( $B^a = \{f : a \rightarrow B\}$ )
- $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N}$  (en pouvant, par exemple, associé les éléments pairs des éléments de  $\mathbb{N}$  aux éléments positifs de  $\mathbb{Z}$  et les impaires aux négatifs (Voir scan théorique page 17 pour détails)), du coup  $\mathbb{Z}$  est dénombrable,  $\mathbb{N}^2$  aussi et également  $\mathbb{Q}$ .
- Mais  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable, autrement dit : il n'existe pas de bijection :  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0; \dots; 9\}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \#\{0; \dots; 9\}^{\mathbb{N}} > \#\mathbb{N}$

**2.3.7 Retour sur Bases et dimensions**



**Rappel :**

Soit  $E$  un e.v sur  $\mathbb{K}$ . Alors il existe de(s) base(s) noté  $B, B', B'', \dots$ .

$\#B$  est appelé dimension de  $E$

S'il existe une famille génératrice finie dans  $E$ , on dit que  $E$  est de **dimension finie**

**Théorème :**

Si j'ai 2 bases  $B$  et  $B'$  de  $E$ , alors  $\#B = \#B'$ .

**Rappel :**

Soit  $E_2$  un e.v sur  $\mathbb{K}$ .

$E_2^{E_1} = \{f : E_1 \rightarrow E_2\}$  est un e.v. sur  $\mathbb{K}$  on suppose de plus que  $E_1$  est un e.v. sur  $\mathbb{K}$ .

**Définition :**

$L(E_1, E_2) \subset E_2^{E_1}$ ,  $L(E_1, E_2) = \{u : E_1 \rightarrow E_2 | u \text{ linéaire, c'est à dire : } u(\lambda \cdot v + w) = \lambda u(v) + u(w)\}$

**Théorèmes :**

- $L(E_1, E_2)$  est un sous e.v. de  $E_2^{E_1}$
- Si  $\dim(E_1) < +\infty$  et  $\dim(E_2) < +\infty$ ,  $\dim(L(E_1, E_2)) = \dim(E_1) \times \dim(E_2)$
- Si  $\#a < +\infty$  et  $E$  un e.v. de dimension finie :  $\dim(E^a) = (\dim(E))^{\#a}$

**Théorème :**

Soit  $E$  un e.v. sur  $\mathbb{K}$ ,  $B = \{e_1 ; \dots ; e_n\}$  base de  $E$ ,  $\dim(E) = n$

$\phi : \mathbb{K}^n \rightarrow E$

$(\lambda_1 ; \dots ; \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$  alors  $\phi$  est un isomorphisme

**2.4 Matrices :****Définition :**

Soit  $u : E \rightarrow E'$  avec  $E$  et  $E'$  2 e.v sur  $\mathbb{K}$  avec

$B = \{e_1 ; \dots ; e_n\}$  base de  $E$

$B' = \{e'_1 ; \dots ; e'_n\}$  base de  $E'$

$u(\phi(\lambda_1 ; \dots ; \lambda_n)) = \sum_{i,j=1}^{n,m} \lambda_i a_{j,i} e'_j$  (voir théorème précédent)

On dira que la matrice  $M = [a_{j,i}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$

est la matrice associée à  $u$  dans les bases  $B$  et  $B'$ .

**Exemple :**

Soit  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$u(x, y, z) = (x + 3y - z, y + 2z)$$

Trouver la matrice associée à  $u$ .

La base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est :  $\{e_1, e_2, e_3\} = \{(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)\}$

La base canonique de  $\mathbb{R}^2$  est :  $\{e'_1, e'_2\} = \{(1; 0), (0; 1)\}$

Nous allons trouver les vecteurs de la base canonique de départ, associé à  $u$  :

$$u(e_1) = u((1; 0; 0)) = (1 + 3 \cdot 0; 0 + 2 \cdot 0) = (1; 0) = e'_1$$

$$u(e_2) = u((0; 1; 0)) = (3; 1) = 3 \cdot e'_1 + e'_2$$

$$u(e_3) = u((0; 0; 1)) = (-1; 2) = -e'_1 + 2 \cdot e'_2$$

La matrice associée à  $u$  est les résultats précédents mis en colonnes :

$$\text{Matrice associée à } u = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si l'on vérifie dans l'autre sens en utilisant la définition au dessus :  $u(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \lambda_i a_{j,i} e'_j$

qui peut être interprété (pour les BG informaticiens :D) comme un `for` imbriqué en Python.

Si l'on décompose :

- $i = 1$  :
  - $j = 1$  :  $\lambda_1 \cdot a_{1,1} \cdot e'_1 = \lambda_1 \cdot 1 \cdot (1; 0) = (\lambda_1; 0)$
  - $j = 2$  :  $\lambda_1 \cdot a_{2,1} \cdot e'_2 = \lambda_1 \cdot 0 \cdot (0; 1) = 0$
- $i = 2$  :
  - $j = 1$  :  $\lambda_2 \cdot a_{1,2} \cdot e'_1 = \lambda_2 \cdot 3 \cdot (1; 0) = (3\lambda_2; 0)$
  - $j = 2$  :  $\lambda_2 \cdot a_{2,2} \cdot e'_2 = \lambda_2 \cdot 1 \cdot (0; 1) = (0; \lambda_2)$
- $i = 3$  :
  - $j = 1$  :  $\lambda_3 \cdot a_{1,3} \cdot e'_1 = \lambda_3 \cdot (-1) \cdot (1; 0) = (-\lambda_3; 0)$
  - $j = 2$  :  $\lambda_3 \cdot a_{2,3} \cdot e'_2 = \lambda_3 \cdot 2 \cdot (0; 1) = (0; 2\lambda_3)$

La somme des 6 lignes donne :  $(\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3; \lambda_2 + 2\lambda_3)$

$u(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = (\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3; \lambda_2 + 2\lambda_3)$  Ce qui est bien ce qu'on avait au départ (en remplaçant les  $\lambda$  par  $x, y$  et  $z$ )

**Notation :**

Les matrices sont aussi notées  $\text{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n)$  avec :

$m$  = nombre de colonnes

$n$  = nombre de lignes

**Théorème :**

Les matrices  $\text{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n)$  sont des e.v. sur  $\mathbb{K}$ .  
 Chaque matrice à sa "propre" application linéaire qui lui est associée.

**Théorème :**

Soit  $u : E \rightarrow E'$  et  $u' : E' \rightarrow E''$  avec  $E, E'$  et  $E''$  e.v. sur  $\mathbb{K}$ .

Si  $u \in L(E, E')$  et  $u' \in L(E', E'')$ , alors  $u' \circ u \in L(E, E'')$

Soit :

$B = \{e_1 ; \dots ; e_n\}$  base de  $E$

$B' = \{e'_1 ; \dots ; e'_n\}$  base de  $E'$

$B'' = \{e''_1 ; \dots ; e''_n\}$  base de  $E''$

$[a_{i,j}]$  matrice de  $u$

$[b_{j,k}]$  matrice de  $u'$

$[c_{i,k}]$  matrice de  $u' \circ u$

$$(u' \circ u)(e_i) = \dots = \sum_{k=1}^p \left( \sum_{j=1}^m \underbrace{a_{i,j} \cdot b_{j,k}}_{c_{i,k}} \right) e''_k$$