Introduction au calcul scientifique
Arts & Métiers Sciences & Technologies
Année universitaire : 2020-2021

Recherche de racines

L'objectif de cette séance de travaux pratiques est de vous familiariser avec les méthodes de recherche de racines. Pour cela nous considérerons un problème classique d'artillerie : déterminer l'angle de hausse θ d'un canon afin d'atteindre une cible pré-déterminée. En partant des principes de Newton, on supposera que les équations du mouvement sont données par

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -k\dot{y} - mg \end{aligned}$$

où m est la masse du projectile, k le coefficient de friction avec l'air et g est l'accélération gravitationelle à la surface de la Terre. Ce jeu d'équations est supplémenté avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \cos(\theta) \\ \dot{y}(0) &= v_0 \sin(\theta) \end{aligned}$$

où v_0 est la vitesse d'éjection du canon. L'objectif est alors de déterminer l'angle de hausse θ du canon de façon à toucher la cible située à une distance D de l'artilleur.

Cas sans frottement

Commençons par étudier le cas sans frottement (i.e. $k = 0$). Les équations du mouvement se réduisent alors à

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 \cos(\theta) \\ \ddot{y} &= -g \end{aligned}$$

auxquelles on adjoint les conditions initiales

$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) &= v_0 \sin(\theta). \end{aligned}$$

1. Montrez que les équations horaires du mouvement sont données par

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos(\theta) t \\ y(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\theta) t. \end{aligned}$$

En déduire que la trajectoire du mouvement est donnée par

$$y(x, \theta) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2(\theta)} x^2 + \tan(\theta) x.$$

On rappelle que $\tan(\theta) = {}^{\sin(\theta)}/_{\cos(\theta)}$.

2. Montrez que la distance parcourue par le projectile avant de toucher le sol est donnée par
$$D(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$$
où l'on utilise le fait que $\cos(\theta)\sin(\theta) = \sin(2\theta)$. Montrez que la portée maximale du canon est atteinte pour un angle de hausse $\theta = \pi/4$.

3. En utilisant la fonction `root_scalar` du package `scipy.optimize`, écrivez une fonction `python` prenant en entrée la vitesse d'éjection v_0 du canon et la distance D à laquelle est située la cible et permettant de
   (a) vérifier que la cible est à portée du canon (i.e. $D \leq D_{\max}$),
   (b) si oui, alors calculez l'angle de hausse θ nécessaire pour toucher la cible. Vous pouvez utiliser la méthode de votre choix (i.e. `'bisect'`, `'secant'` ou `'newton'`).

4. Utilisez votre code pour déterminer l'angle de hausse θ si les données d'entrée sont $v_0 = 10$, $g = 10$ et $D = 5$.

Cas avec frottement

Intérressez nous maintenant au cas avec frottement (i.e. $k \neq 0$). Les équations du mouvement sont alors données par
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m}\dot{x} \\ \ddot{y} &= -g - \frac{k}{m}\dot{y} \end{aligned}$$
auxquelles on adjoint les conditions initiales suivantes
$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \cos(\theta) \\ \dot{y}(0) &= v_0 \sin(\theta). \end{aligned}$$
Afin de simplifier les calculs, on peut **adimensioner** les équations en introduisant les changements de variables suivants
$$\begin{aligned} x &\to \frac{v_0^2}{g} x \\ y &\to \frac{v_0^2}{g} y \\ t &\to \frac{v_0}{g} t. \end{aligned}$$
Ce faisant, les équations du mouvement addimensionnées s'écrivent
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\alpha \dot{x} \\ \ddot{y} &= -\alpha \dot{y} - 1 \end{aligned}$$
auxquelles on adjoint les conditions initiales
$$x(0) = y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \cos(\theta), \quad \text{et} \quad \dot{y}(0) = \sin(\theta).$$

Cette astuce mathématique permet de passer de 5 paramètres initialement (θ, v_0, g, k et m) à uniquement deux,

$$\alpha = \frac{k}{m}\frac{v_0}{g}.$$

et l'angle de hausse θ. Dans la suite, la distance de tir sera donc exprimée comme une fraction de la distance maximale en absence de frottement (i.e. $D_{\text{max}} = 1$).

1. Montrez que les équations horaires du mouvement sont données par

$$x(t) = \frac{\cos(\theta)}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$
$$y(t) = \frac{1}{\alpha}\left(\sin(\theta) + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha t}\right) - \frac{t}{\alpha}.$$

   En déduire que la trajectoire du projectile est donnée par

$$y(x, \theta, \alpha) = \left(\tan(\theta) + \frac{1}{\alpha\cos(\theta)}\right)x + \frac{1}{\alpha^2}\ln\left(1 - \frac{\alpha}{\cos(\theta)}x\right).$$

   On peut montre à l'aide d'un développement limité de la fonction logarithme que, lorsque $\alpha \to 0$, cette trajectoire tend vers celle parabolique étudiée dans la première partie de ce TP.

2. Dans la suite, on supposera $\alpha = 0.1$. Tracez les trajectoires du projectile pour des angles de hausse du canon compris dans $\pi/32 \leq \theta \leq 14\pi/32$. La figure à obtenir devrait ressembler à celle présentée sur la figure 1.

3. La fonction reliant l'angle de hausse du canon et la distance parcourue par le projectile avant impact est donnée par

$$F(x, \theta) := \left(\alpha^2\tan(\theta) + \frac{\alpha}{\cos(\theta)}\right)x + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{\cos(\theta)}x\right) = 0.$$

   Contrairement au cas sans frottement, la fonction $x(\theta)$ est alors définie de façon implicite via cette équation trascendantale.

   (a) En utilisant la fonction `root_scalar` du package `scipy.optimize`, écrivez une fonction permettant de trouver la distance x parcourue par le projectile en fonction de l'angle de hausse θ.

   (b) En utilisant cette fonction, tracez le graphe de $x(\theta)$ pour $\pi/32 \leq \theta \leq 14\pi/32$. Vous devriez obtenir un graphique ressemblant à celui présenté sur la figure 2.

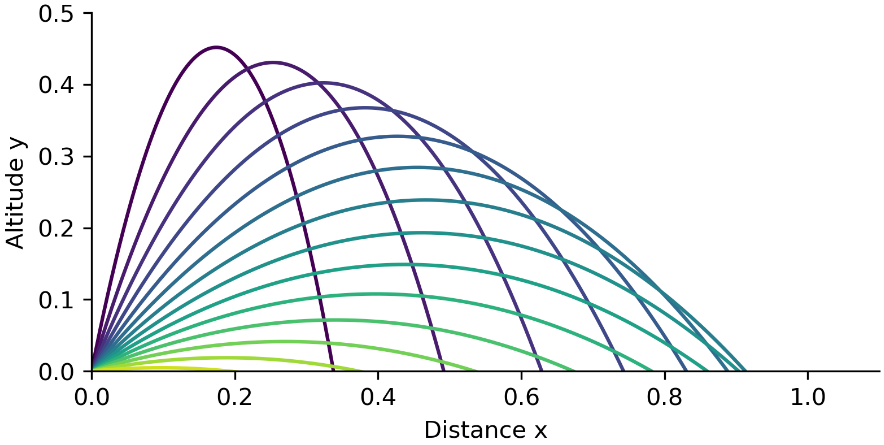

Figure 1: Trajectoires du projectile pour différentes valeurs de l'angle de hausse. A chaque fois, on suppose $\alpha = 0.1$.

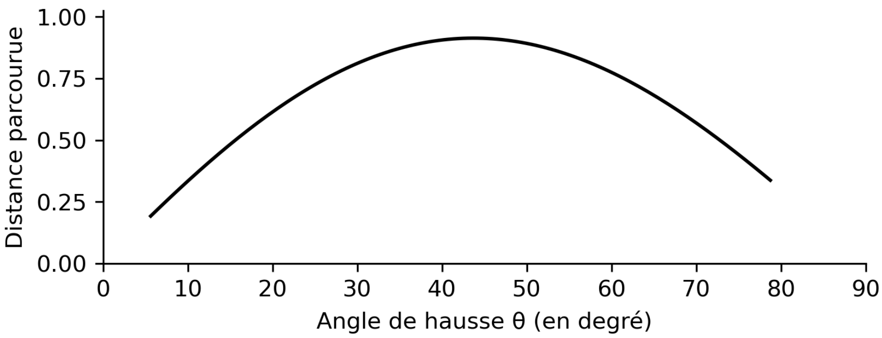

Figure 2: Distance parcourue par le projectile en fonction de l'angle de hausse du canon. On suppose $\alpha = 0.1$.