Examen final

Février 2021 **Durée: 120 Minutes**

Ce sujet contient 4 pages (en comptant la page de garde) et 3 exercices.
Le nombre total de point est de 30.

Barême

Question	Points	Score
1	10	
2	10	
3	10	
Total:	30	

1. (10 points) **Ferrer le poisson**

Considérons une population de poissons dont l'évolution au cours du temps peut être modélisée à l'aide de l'équation logistique suivante

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

où $P(t) \in \mathbb{R}$ est la population au temps t, $r > 0$ le taux de reproduction et $N > 0$ la population maximale pouvant être supportée par l'environnement. Dans la suite de cet exercice, nous nous intéresserons à l'influence de deux stratégies de pêche sur l'évolution de cette population de poissons.

Pêche constante

La première stratégie que nous allons considérer est celle d'un prélèvement constant sans prise en compte de l'état courant de la population. Si l'on note par H ce taux constant, alors notre modèle peut être écrit comme suit

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{N}\right) - H$$

auquel on adjoint la condition initiale $P(0) = P_0$.

(a) (1 point) Le modèle ci-dessus possède trois paramètres : le taux de reproduction r, la population maximale N et le taux de prélèvement H. Montrer que deux de ces trois paramètres peuvent être éliminés de façon à ce que le modèle adimensionné s'écrive

$$\dot{x} = x\,(1 - x) - h.$$

(b) (2 points) En supposant $h \geq 0$ (et $h = 0$ si $x = 0$), calculez les points fixes du système et étudiez leur stabilité en fonction de h.

(c) (2 points) Faites un schéma du diagramme de bifurcation. De quel type de bifurcation s'agit-il ? D'un point de vue biologique, qu'arrive-t'il à la population de poissons si le taux de prélèvement h est trop élevé ?

Pêche proportionnelle

La seconde stratégie considérée est celle d'une pêche proportionelle, c'est à dire que la quantité de poissons autorisée à être prélevée est directement proportionelle à la population actuelle. Notre modèle devient alors

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{N}\right) - HP.$$

(a) (1 point) Tout comme pour la première stratégie, montrez que le modèle ci-dessus peut se ré-écrire comme

$$\dot{x} = x\,(1 - x) - hx$$

après un adimensionnement approprié.

(b) (2 points) En supposant $h \geq 0$, calculez les points fixes du système et étudiez leur stabilité en fonction de h.

(c) (2 points) Faites un schéma du diagramme de bifurcation. De quel type de bifurcation s'agit-il ? D'un point de vue biologique, qu'arrive-t'il à la population de poissons quand h est trop grand ? En quoi est-ce différent de ce qu'il se passe dans le cas d'une pêche constante ?

2. (10 points) **Modéliser une épidémie**

Ces deux dernières années ont été marquées par le COVID-19. Depuis le début de la pandémie, de nombreux modèles ont été proposés pour essayer de prédire son évolution. L'un des modèles les plus simples, remontant aux travaux fondateurs de Kermack & McKendrick à la fin des années 1920, est connu sous le nom de modèle *SIR*. Il s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\beta\frac{SI}{N} \\
\frac{dI}{dt} &= \beta\frac{SI}{N} - \gamma I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I,
\end{aligned}$$

où N est la population totale tandis que S, I et R correspondent au nombre d'invidus susceptibles (i.e. n'ayant pas encore contracté la maladie), actuellement infectés et s'étant remis de l'infection (ou morts), respectivement. Le paramètre β caractérise la probabilité qu'un contact avec une personne infectieuse conduise une personne susceptible à contracter la maladie tandis que γ est directement relié à la vitesse à laquelle un individu contaminé transitionne dans le compartiment R (i.e. récupère ou meurt de la maladie).

(a) (1 point) Montrez que $S(t) + I(t) + R(t)$ est une quantité conservée du système.

(b) (1 point) En adimensionnant correctement le temps t et les variables S, I et R, montrez que ce modèle peut se ré-écrire comme suit

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -R_0 xy \\ \dot{y} &= R_0 xy - y \\ \dot{z} &= y\end{aligned}$$

où R_0 est connu sous le nom de *nombre de reproduction de base*. Donnez son expression. D'un point de vue épidémiologique, que représente-t'il ?

(c) (1 point) L'équation pour z est découplée du reste de sorte que (x, y) forme un système du second-ordre. Calculez et classifiez tous les points fixes du système.

(d) (1 point) Tracez les isoclines du système et un schéma du portrait de phase.

(e) (1 point) Supposons qu'à l'émergence du nouveau virus, la majeure partie de la population est susceptible (i.e. $x_0 = 1 - \epsilon$ et $y_0 = \epsilon$ avec $\epsilon \ll 1$). Une épidémie a lieu si $y(t)$ croît initiallement au cours du temps. Sous quelle(s) condition(s) sur le nombre de reproduction de base R_0 est-ce qu'une épidémie peut avoir lieu ?

(f) (2 points) Montrez qu'au début de l'épidémie (i.e. $x_0 \simeq 1$), le nombre d'individus infectés croît initialement de façon exponentielle.

(g) (2 points) On considère que l'immunité collective a été atteinte dès lors que le nombre d'infections commence à décroître (i.e. $\dot{y} < 0$). Quelle fraction de la population doit avoir été infectée avant que cette immunité collective ne soit atteinte ?

(h) (1 point) En France, le nombre R_0 au début de l'épidémie a été estimé aux alentours de $R_0 \simeq 3$. Sachant que la population est d'environ 70 millions de personnes, combien de personnes auraient dû contracter la maladie avant que l'immunité collective ne soit atteinte ?

3. (10 points) **Un modèle simple pour l'allée tourbillonaire de Bénard-von Kàrmàn**

Considérez le système du troisième ordre suivant

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma x - y - xz - \alpha yz \\ \dot{y} &= x + \sigma y - yz + \alpha xz \\ \dot{z} &= -z + x^2 + y^2\end{aligned}$$

où l'on supposera $\sigma > 0$ et $\alpha > 0$. Ce modèle est une simplification de la dynamique non-linéaire de l'allée tourbillonaire de Bénard-von Kàrmàn se développant dans le sillage d'un cylindre bi-dimensionnel à faible nombre de Reynolds. Ici, x et y représente les deux degrés de liberté nécessaires à décrire cette dynamique oscillatoire (e.g. l'amplitude des parties réelles et imaginaires du mode d'instabilité), tandis que z caractérise la distortion entre le champ de base linéairement instable et le champ moyenné en temps. Le terme $x^2 + y^2$ dans l'équation pour z modélise ainsi l'influence des tensions de Reynolds des fluctuations sur le champ moyen.

(a) (2 points) Montrez que le système est équivariant vis à vis de la transformation

$$\gamma = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

i.e. $\gamma \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}\left(\gamma \cdot \boldsymbol{x}\right)$. Selon vous, à quoi correspond physiquement cette équivariance?

(b) (2 points) En introduisant la variable complexe $\eta = x + iy = re^{i\varphi}$, où r est l'amplitude des oscillations et φ la phase, exprimez les équations en terme des variables (r, φ, z).

(c) (2 points) Calculez les points fixes du système dans le plan (r, z) et étudiez leur stabilité. Physiquement, à quoi correspondent ces deux points fixes ?

(d) (2 points) L'équation pour la phase est

$$\dot{\varphi} = 1 + \alpha z.$$

Comment varie la fréquence propre $\omega(t)$ des oscillations lorsque le système transitionne de son point fixe linéairement instable vers son cycle limite ?

(e) (2 points) Tracez schématiquement le portrait de phase du système en trois dimensions (i.e. dans le repère (x, y, z)).