Modelli della telecamera

f.pirri

Ringraziamenti:
le slide sono tratte dal libro di Hardley e Zisserman e dal testo di Trucco e Verri

Acquisizione

- Parametri fisici di un sistema di visione:
  - Parametri ottici (lenti, lunghezza focale, campo visivo, apertura angolare)
  - Parametri fotometrici (intensità, direzione dell'illuminazione..)
  - Parametri geometrici (proiezione, posizione e orientamento della camera, distorsioni)

Sistema di acquisizione

- Una camera tipicamente CCD (charged coupled device)
- Un frame grabber, dispositivo elettronico, digitalizza il video segnale in una matrice di pixel
- Un sistema di elaborazione, il computer

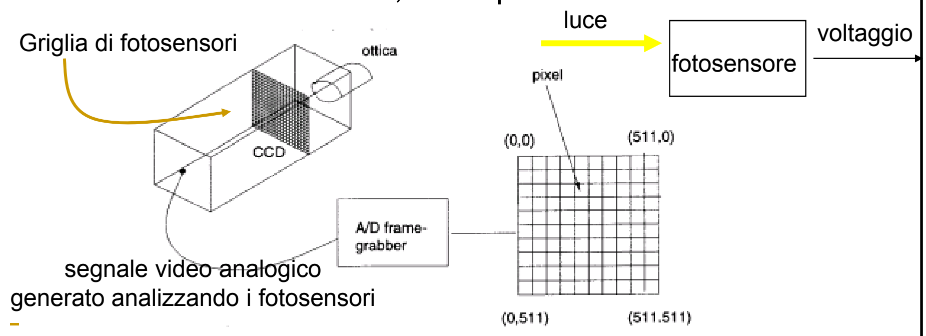


Immagine digitale

- Un immagine digitale è una matrice E, di dimensione N×M.
- E(i,j) denota il valore di luminosità del pixel (i,j) e codifica l'intensità acquisita dai fotosensori del CCD, è un intero compreso fra 0 e 255
- I numeri rappresentano intensità, distanza, quantità fisiche.

Digitalizzazione

pdc=4 bit (16 colori)

pdc=8 bit (256 colori)

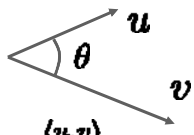
pdc=24 bit
(≅16 milioni di colori)

Geometria Euclidea trasformazioni affini

Prodotto interno e prodotto vettoriale

Prodotto interno fra due vettori:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$



$$\langle u, v \rangle \doteq u^T v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

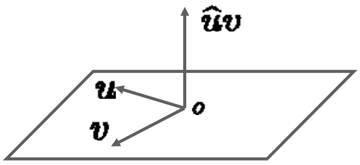
$$\cos(\theta) = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

$$\|u\| \doteq \sqrt{u^T u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^3}$$

Prodotto vettoriale fra due vettori:

$$u \times v \doteq \hat{u} v, \quad u, v \in \mathbb{R}^3$$

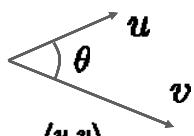
$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$



Prodotto interno e prodotto vettoriale

Prodotto interno fra due vettori:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$



$$\langle u, v \rangle \doteq u^T v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

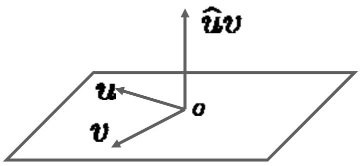
$$\cos(\theta) = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

$$\|u\| \doteq \sqrt{u^T u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^3}$$

Prodotto vettoriale fra due vettori:

$$u \times v \doteq \hat{u} v, \quad u, v \in \mathbb{R}^3$$

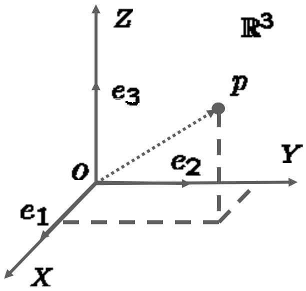
$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$



Spazio Euclideo– **Coordinate cartesiane**

Coordinate di un punto p nello spazio

$$X = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$



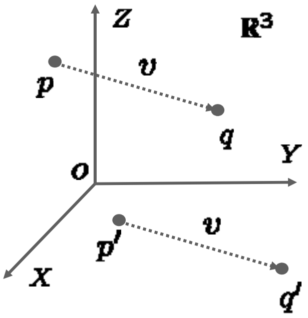
Basi:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vettori nello spazio Euclideo

Definiamo un vettore tramite una coppia di punti (p, q) :

$$X_p = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \; X_q = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$



Coordinate del vettore : v

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

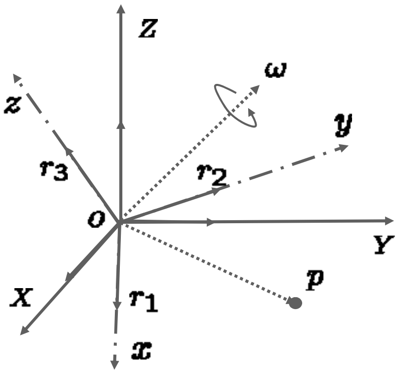
Rotazioni

Matrice di Rotazione:

$$R \doteq [r_1, r_2, r_3] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$R^T R = I, \ \det(R) = +1$$

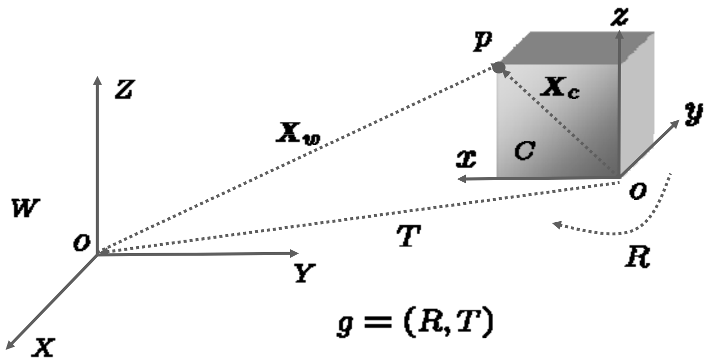
preserva orient.



Le coordinate sono in relazione tramite:

$$X_w = RX_c, \quad X_c = R^T X_w$$

Rotazione e Traslazione



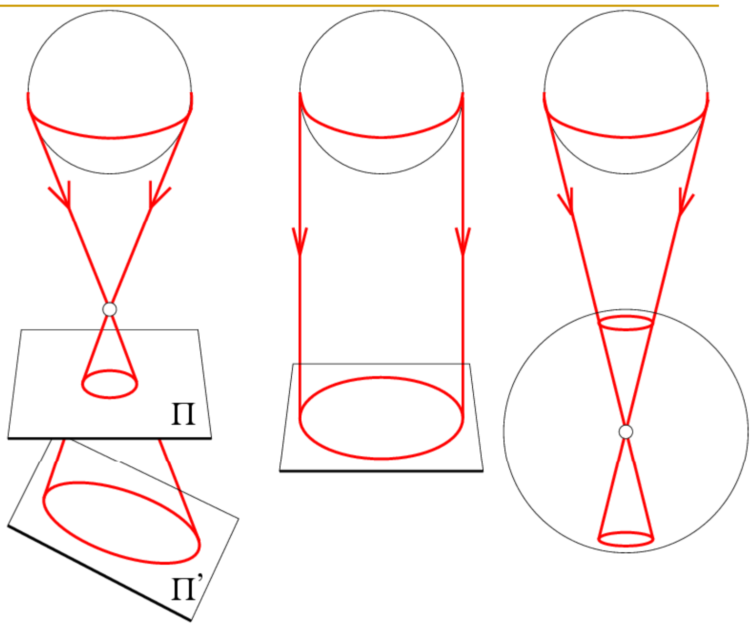
Relazione fra le coordinate:

$$X_c = RX_w + T,$$
$$X_c = g(X_w),$$

Geometria Euclidea→Geometria Proiettiva

- Una trasformazione rigida in GE preserva angoli, parallelismo e dimensioni

- Fornisce un modello per rappresentare come gli oggetti si possono rappresentare in una dimensione specificata. Es. oggetti 3D su una immagine 2D.

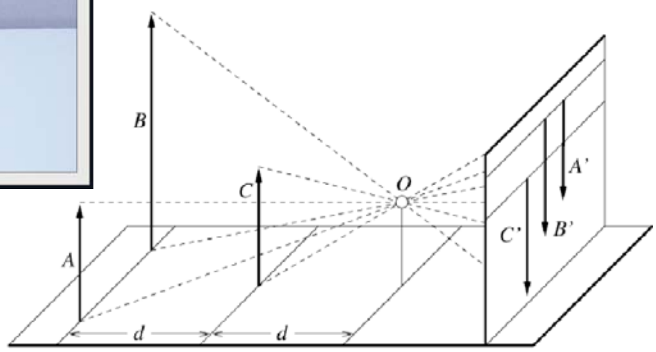


Proiezione Prospettica

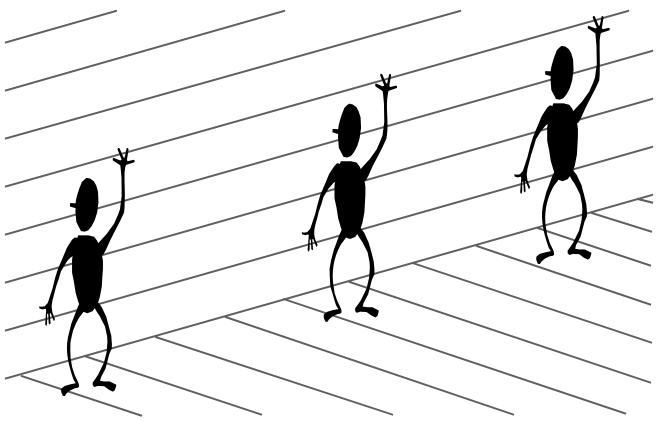
Proiezione Ortografica

Proiezione sferica

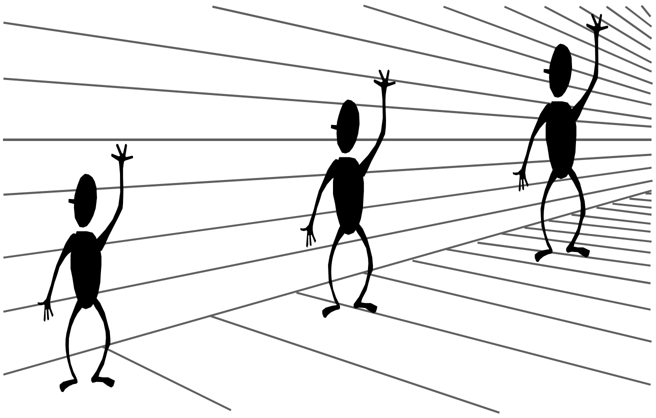
Percezione prospettica



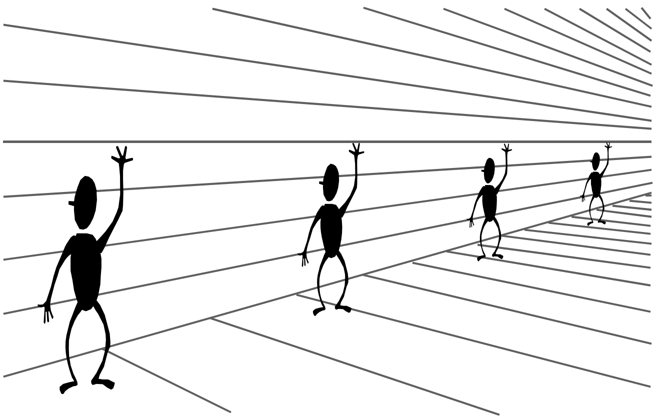
Percezione prospettica



Percezione prospettica

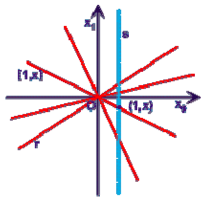


Percezione prospettica



Spazi proiettivi

$\mathbf{P}^1$

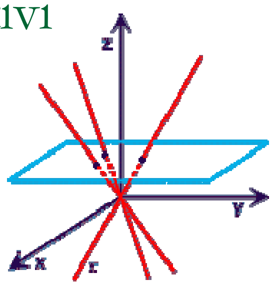


Se W e' un sottospazio di R^2 l'insieme delle linee che passano per l'origine e' un sottospazio proiettivo di dimensione 1:

$$\mathbf{P}^1 = \{\text{rette di } R^2 \text{ passanti per } 0\} = R \cup \{\infty\}$$

Spazi proiettivi

$\mathbf{P}^2$

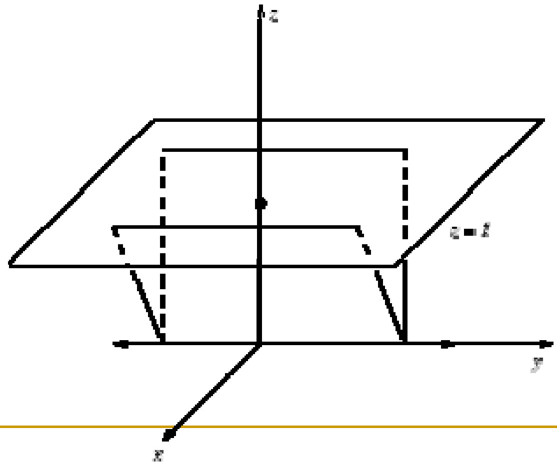


$$\mathbf{P}^2 = \{\text{rette di } \mathbf{R}^3 \text{ passanti per l'origine}\} =$$
$$= \{z = 1\} \cup \{\text{direzione delle rette di } z = 1\}$$

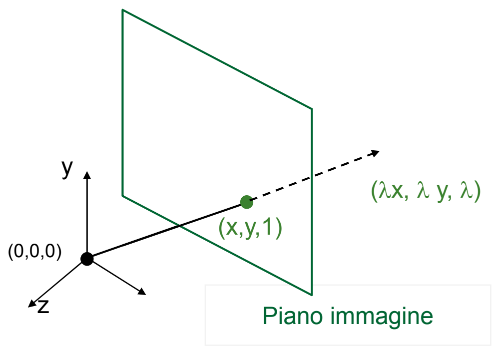
Verificare:
1. prese due linee proiettive, si intersecano in un punto.
2. Presi due punti sono uniti da un'unica linea proiettiva

Spazi proiettivi

Due linee sul piano z=1 sono parallele se le corrispondenti linee proiettive si intersecano all'infinito.



Coordinate omogenee



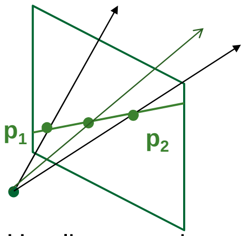
- Ciascun punto (x,y) nel piano e' rappresentato da $(\lambda x, \lambda y, \lambda)$
- Tutti i punti $(x, y, 1) \cong (\lambda x, \lambda y, \lambda)$

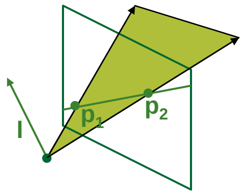
Coordinate Omogenee

Rappresentazione omogenea di linee

$ax + by + c = 0 \quad (a,b,c)^T \qquad (ka)x + (kb)y + kc = 0, \forall k \neq 0 \qquad (a,b,c)^T \sim k(a,b,c)^T$

Otteniamo una classe di linee, ogni vettore e' rappresentativo della classe





- Una linea corrisponde all'insieme di linee (x,y,z) che soddisfano : ax + by + cz = 0

$$\text{in notazione vettoriale:} \quad 0 = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Coordinate omogenee

Rappresentazione omogenea di punti

$\mathrm{x} = (x, y)^T$ su $\mathrm{l} = (a,b,c)^T$ sse $ax + by + c = 0$

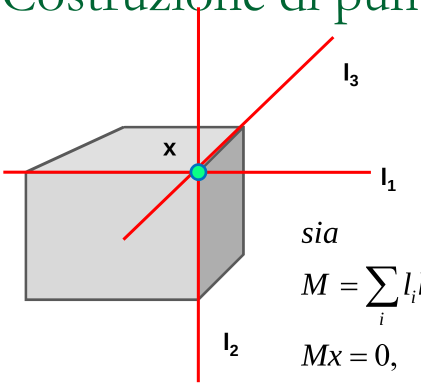
$(x,y,1)(a,b,c)^T = (x,y,1)\,\mathrm{l} = 0 \qquad (x, y,1)^T \sim k(x, y,1)^T, \forall k \neq 0$

il punto x giace sulla linea sse $x^T l = l^T x = 0$

Coordinate Omogenee $(x_1, x_2, x_3)^T$ Ma solo 2DOF

Coordinate inomogenee $(x, y)^T$

Costruzione di punti 2D



$x^T l_i = l_i^T x = 0$

$$\text{sia}$$
$$M = \sum_i l_i l_i^T$$
$$Mx = 0, \quad x \text{ e' il piu' piccolo autovalore di } M$$

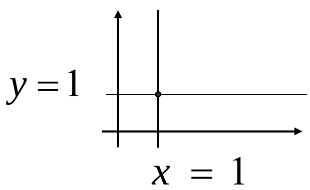
Da punti a linee e ritorno

Intersezione di linee

L'intersezione di due linee l e l' e' $\mathrm{x} = \mathrm{l} \times \mathrm{l}'$

La linea che congiunge due punti x e x' e'
$$\mathrm{l} = \mathrm{x} \times \mathrm{x}'$$

Esempio



X =(1, 0, -1)
Y =(0,-1, 1)

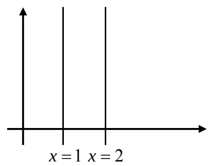
Punti ideali e linee all'infinito

Intersezione di linee parallele

$$\mathrm{l}=(a,b,c)^{\mathsf{T}} \text{ e } \mathrm{l}'=(a,b,c')^{\mathsf{T}} \qquad \mathrm{l}\times\mathrm{l}'=(b,-a,0)^{\mathsf{T}}$$

Esempio

$(b,-a)$ vettore tangente
(a,b) direzione normale



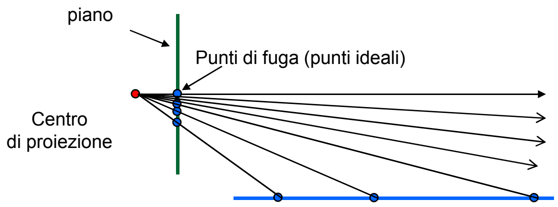
punto ideale $(x_1, x_2, 0)^{\mathsf{T}}$

Linea all'infinito $\mathrm{l}_\infty=(0,0,1)^{\mathsf{T}}$

$\mathbf{P}^2=\mathbf{R}^2 \cup \mathrm{l}_\infty$

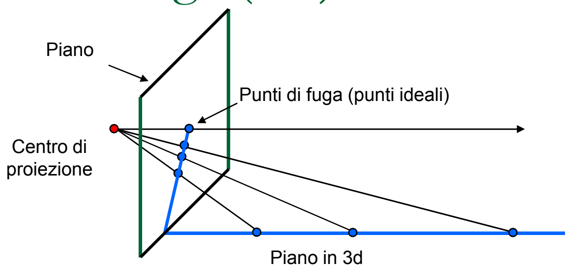
Nota che in **P**^{2} non c'e' alcuna distinzione tra punti ideali e altri punti

Punti di fuga

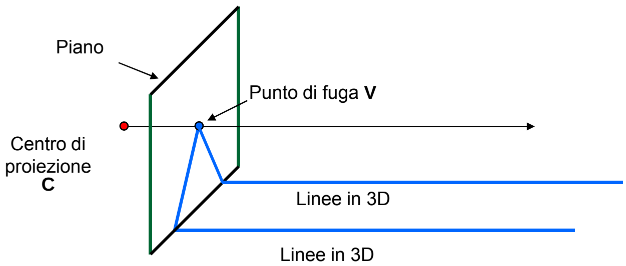


- Punti di fuga (punti ideali, all'infinito)
  - Proiezioni di punti all'infinito

Punti di fuga (2D)

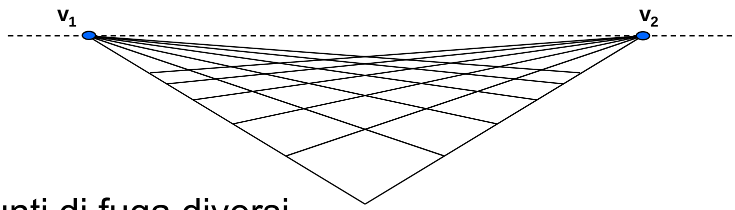


Punti di fuga



- Prese comunque due linee parallele hanno lo stesso punto ideal, punto di fuga **v**
- Un raggio che passa per **C** attraverso **v** e' parallelo alle linee
- Possiamo costruire diversi punti di fuga

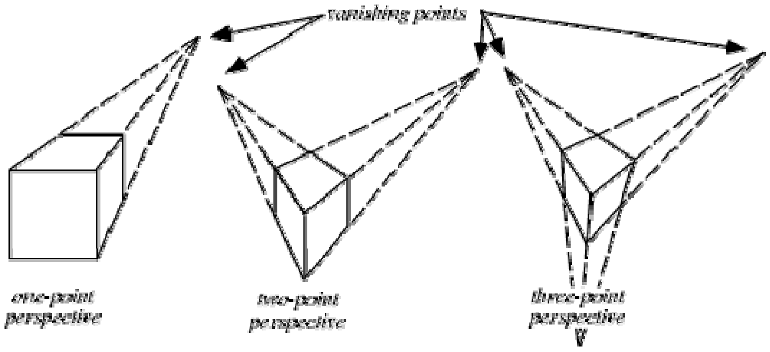
Linee di fuga (linee ideali)



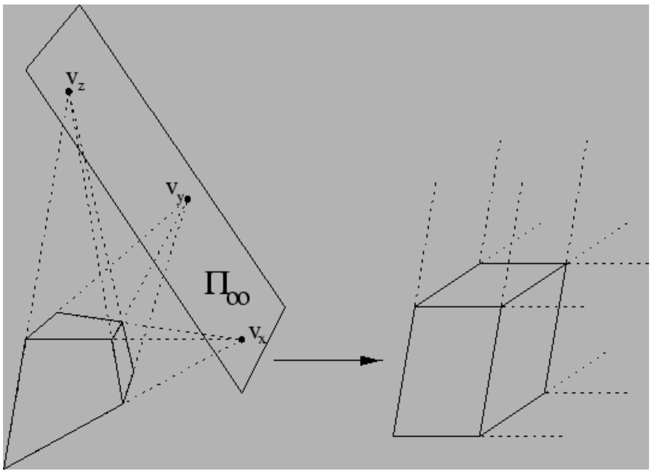
- Punti di fuga diversi
  - Ogni insieme di linee parallele definisce un punto di fuga
  - L'unione dei punti di fuga costituisce la linea di fuga/orizzonte

    Piani differenti definiscono linee di fuga differenti

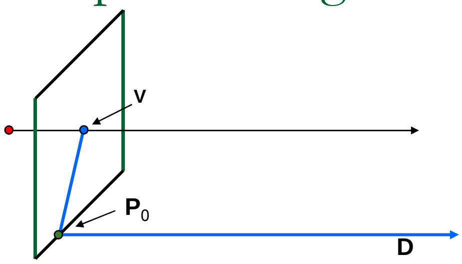
Linee di fuga



Piano all'infinito



Calcolo dei punti di fuga

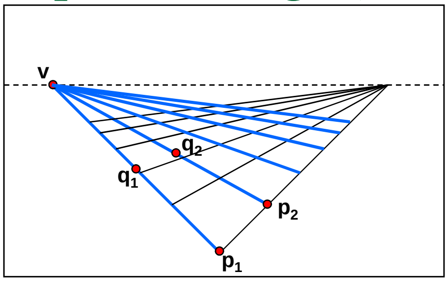


$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + t\mathbf{D}$$

$$\mathbf{P}_t = \begin{bmatrix} P_X + tD_X \\ P_Y + tD_Y \\ P_Z + tD_Z \\ 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} P_X / t + D_X \\ P_Y / t + D_Y \\ P_Z / t + D_Z \\ 1/t \end{bmatrix} \qquad t \to \infty \qquad \mathbf{P}_\infty \cong \begin{bmatrix} D_X \\ D_Y \\ D_Z \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Nota $\quad \mathbf{v} = \mathbf{\Pi P}_\infty$
  - $\mathbf{P}_\infty$ e' un punto all'infinito, **v** e' la sua proiezione
  - Dipendono dalla direzione della retta/linea
  - Le linee parallele $\mathbf{P}_0$ + t**D**, $\mathbf{P}_1$ + t**D** si intersecano a $\mathbf{P}_\infty$

Calcolo dei punti di fuga (da linee)

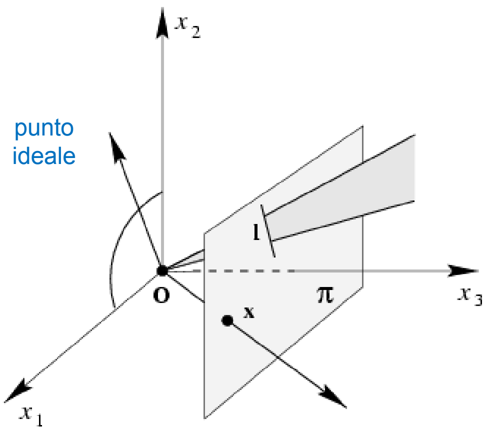


- Intersezione di p_1q_1 con p_2q_2

$$v = (p_1 \times q_1) \times (p_2 \times q_2)$$

Versione con minimi quadrati: usa piu' di due linee

Piano proiettivo



Modello del piano proiettivo. Punti e linee di P^2 sono rappresentati da linee e piani, rispettivamente, attraverso l'origine in R^3. Linee sul piano x_1x_2 sono punti ideali e il piano x_1-x_2 rappresenta la linea l_∞

Isometrie

Le isometrie sono trasformazioni del piano $\mathbb{R}^2$ che preservano la distanza euclidea:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon\cos\vartheta & -\sin\vartheta & t_x \\ \varepsilon\sin\vartheta & \cos\vartheta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \pm 1,$$

se ε =1 allora l'isometria preserva la direzione ed e' una trasformazione Euclidea (composizione di rotazione e traslazione) . Se e=-1 allora l'isometria inverte la direzione

---

Una trasformazione planare puo' essere scritta:

$$x' = H_E x = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dove R e' una matrice di rotazione 2X2 (ortogonale cioe' $R^TR=RR^T=I$) **t** e' un vettore di traslazione e **0** un vettore nullo. H_E e' la matrice di corrispondenza.

Casi speciali, traslazione =0, rotazione=I

Similarita'

Una similarita' e' una isometria composta con una scalatura nel piano $\mathbb{R}^2$

che preservano la distanza euclidea:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos\vartheta & -s\sin\vartheta & t_x \\ s\sin\vartheta & s\cos\vartheta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$s = scalatura$ isotropica,

Una trasformazione di similarita' puo' essere scritta:

$$x' = H_S x = \begin{bmatrix} sR & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} x$$

Dove R e' una matrice di rotazione 2X2 (ortogonale cioe' $R^T R = R R^T = I$) **t** e' un vettore di traslazione e **0** un vettore nullo. H_s e' la matrice di corrispondenza.

S rappresenta una scalatura isotropica, poiche' conserva la forma. Ha 4 DOF, 1=S, 2=t e 1=R

Trasformazioni proiettive in 2D

- Omografie 2D. Dato un insieme di punti **x** nel piano P2 e un insieme **x'** corrispondente (ad esempio calcolato con RANSAC) calcoliamo la trasformazione proiettiva che porta **x** in **x'**
- Proiezioni da 3D a 2D. Dato un insieme di punti **X** nello spazio 3D e un insieme di punti **x**, ad essi corrispondenti nell'immagine, troviamo una funzione di mappatua da 3D a 2D che porta **X** in **x**.
- Calcolo della matrice fondamentale. Dato un insieme di punti **x** in un'immagine e un insieme **x'** di punti corrispondenti in un'altra immagine troviamo la matrice fondamentale F consistente con le corrispondenze: Cioe', dato (x_i,x_i'), compute H (x_i'=Hx_i).

DLT: algoritmo di trasformazione lineare diretta

- Dobbiamo trovare H tale che $\mathrm{x}' = \mathrm{H}\mathrm{x}$

$$\lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Numero di punti richiesti

- H e' composta di 9 elementi (definita a meno di scalatura), quindi 8 DOF.
- Ogni corrispondenza ha 2 DOF
- Quindi sono necessari 4 punti
  - I dati hanno rumore
  - Cerchiamo una soluzione ottima in accordo ad una funzione di costo
  - Il costo puo' essere definito algebricamente o statisticamente

Algoritmo Gold Standard

- Funzione di costo ottimale, nel senso che la matrice H che minimizza il costo e' la stima migliore.
- L'algoritmo che minimizza la funzione di costo e' chiamato il GSa
- Serve per paragonare gli algoritmi

Trasformazione lineare diretta (DLT)

dove x e x' sono vettori omogenei

1. esprimiamo $\mathrm{x}' = \mathrm{H}\mathrm{x}$ come prodotto vettore $\mathrm{x}_i' \times \mathrm{H}\mathrm{x}_i = 0$
2. La j-ma riga di H si puo' scrivere

$$\mathrm{H}\mathrm{x}_i = \begin{pmatrix} \mathrm{h}^{1^\mathsf{T}}\mathrm{x}_i \\ \mathrm{h}^{2^\mathsf{T}}\mathrm{x}_i \\ \mathrm{h}^{3^\mathsf{T}}\mathrm{x}_i \end{pmatrix}$$

poniamo

$$\mathrm{x}_i' = (x_i', y_i', w_i')^\mathsf{T}$$

Il prodotto vettore possiamo riscriverlo come

$$\mathrm{x}_i' \times \mathrm{H}\mathrm{x}_i = \begin{pmatrix} y_i'\mathrm{h}^{3^\mathsf{T}}\mathrm{x}_i - w_i'\mathrm{h}^{2^\mathsf{T}}\mathrm{x}_i \\ w_i'\mathrm{h}^{1^\mathsf{T}}\mathrm{x}_i - x_i'\mathrm{h}^{3^\mathsf{T}}\mathrm{x}_i \\ x_i'\mathrm{h}^{2^\mathsf{T}}\mathrm{x}_i - y_i'\mathrm{h}^{1^\mathsf{T}}\mathrm{x}_i \end{pmatrix}$$

Poiche' $\mathrm{h}^{j\mathsf{T}}\mathrm{x}_i = \mathrm{x}_i^\mathsf{T}\mathrm{h}^j$, possiamo riscrive il prodotto vettore, usando la matrice skew symmetrica

$$\begin{bmatrix} 0^\mathsf{T} & -w_i'\mathrm{x}_i^\mathsf{T} & y_i'\mathrm{x}_i^\mathsf{T} \\ w_i'\mathrm{x}_i^\mathsf{T} & 0^\mathsf{T} & -x_i'\mathrm{x}_i^\mathsf{T} \\ -y_i'\mathrm{x}_i^\mathsf{T} & x_i'\mathrm{x}_i^\mathsf{T} & 0^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{h}^1 \\ \mathrm{h}^2 \\ \mathrm{h}^3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Queste equazioni hanno forma $\mathrm{A}_i\mathrm{h} = 0$

Dove H possiamo scriverlo

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathrm{h}^1 \\ \mathrm{h}^2 \\ \mathrm{h}^3 \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{bmatrix}$$

Se consideriamo (*) solo due vettori sono linearmente indipendenti, poiche' la terza riga puo' essere ottenuta a meno di scala. Possiamo ridurre la matrice come segue

$$\begin{bmatrix} 0^\mathsf{T} & -w_i'\mathrm{x}_i^\mathsf{T} & y_i'\mathrm{x}_i^\mathsf{T} \\ w_i'\mathrm{x}_i^\mathsf{T} & 0^\mathsf{T} & -x_i'\mathrm{x}_i^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{h}^1 \\ \mathrm{h}^2 \\ \mathrm{h}^3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathrm{A}_i\mathrm{h} = 0$$

Dove Ai e' ora una matrice 2X9. (eliminiamo solo se $w_i' \neq 0$)

Trasformazione lineare diretta (DLT)

- Per ogni corrispondenza abbiamo un sistema di equazioni $\mathrm{A}\mathbf{h} = 0$

A e' 8x9 or 12x9, ma rango 8

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A}_2 \\ \mathrm{A}_3 \\ \mathrm{A}_4 \end{bmatrix} \mathbf{h} = 0$$

Soluzione banale $\mathbf{h}=0_9^\mathsf{T}$ non e' interessante

Lo spazio nullo 1-D fornisce la soluzione di interesse

$$\|\mathbf{h}\| = 1$$

Algoritmo DLT

Objective

Given n≥4 2D to 2D point correspondences $\{x_i \leftrightarrow x_i'\}$, determine the 2D homography matrix H such that $x_i' = Hx_i$

Algorithm

(i) For each correspondence $x_i \leftrightarrow x_i'$ compute A_i. Usually only two first rows needed.

(ii) Assemble n 2x9 matrices A_i into a single $2n$x9 matrix A

(iii) Obtain SVD of A. Solution for h is last column of V

(iv) Determine H from h

Non consideriamo il caso di soluzioni non-omogenee o degenerate.

http://www.robots.ox.ac.uk/~vgg/hzbook/code/

Algoritmo DLT normalizzato

Objective

Given n≥4 2D to 2D point correspondences $\{x_i \leftrightarrow x_i'\}$, determine the 2D homography matrix H such that $x_i' = Hx_i$

Algorithm

(i) Normalize points $\tilde{x}_i = T_{norm} x_i, \tilde{x}_i' = T'_{norm} x_i'$

(ii) Apply DLT algorithm to $\tilde{x}_i \leftrightarrow \tilde{x}_i'$,

(iii) Denormalize solution $H = T'^{-1}_{norm} \tilde{H} T_{norm}$

T e' una trasformazione di similarita'

$$T_{norm} = \begin{bmatrix} w+h & 0 & w/2 \\ 0 & w+h & h/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Coordinate Omogenee in 3D

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

Relazione in 3D: $\boldsymbol{X}_c = R\boldsymbol{X}_w + T,$

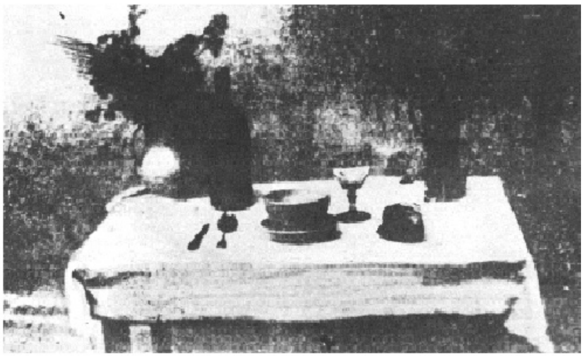
Dove:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_w \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Coordinate omogenee di un vettore:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

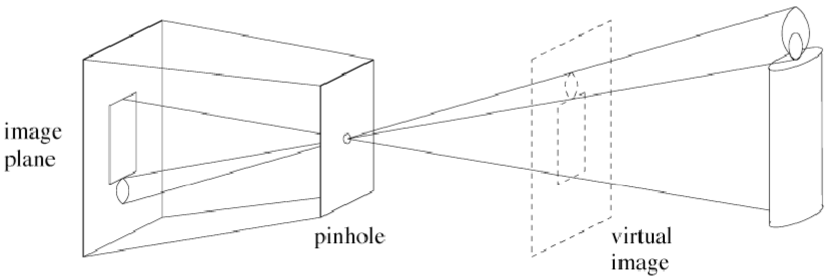
Modelli della Camera



- La camera
- Lenti
- Parametri della Camera e calibrazione

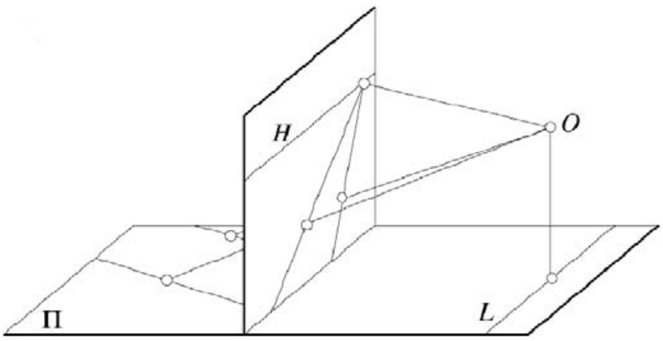
La prima fotografia la table servie, ottenuta da Nicéphore Niepce nel 1822. Collezione Harling'Viollet

La camera oscura



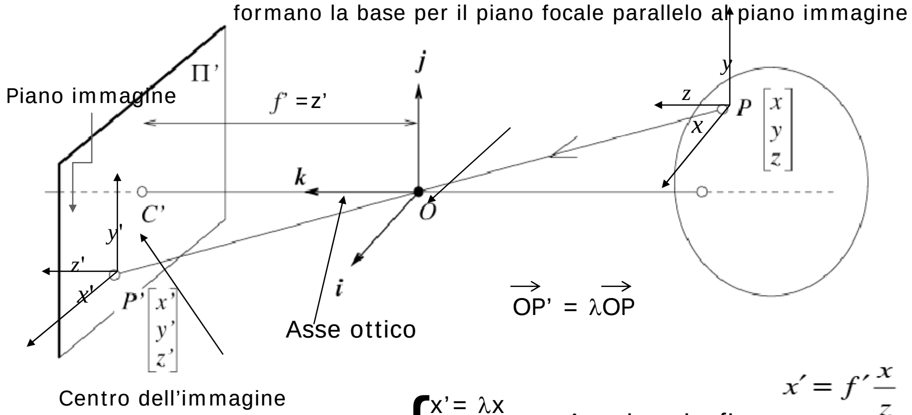
Proiezione prospettica

Due linee parallele sul piano Π si incontrano sulla linea di orizzonte H, intersezione del piano parallelo a Π, e che passa per il foro (pinhole), con il piano Immagine. Il piano immagine (virtuale) è di fronte al piano focale



Proiezione Prospettica

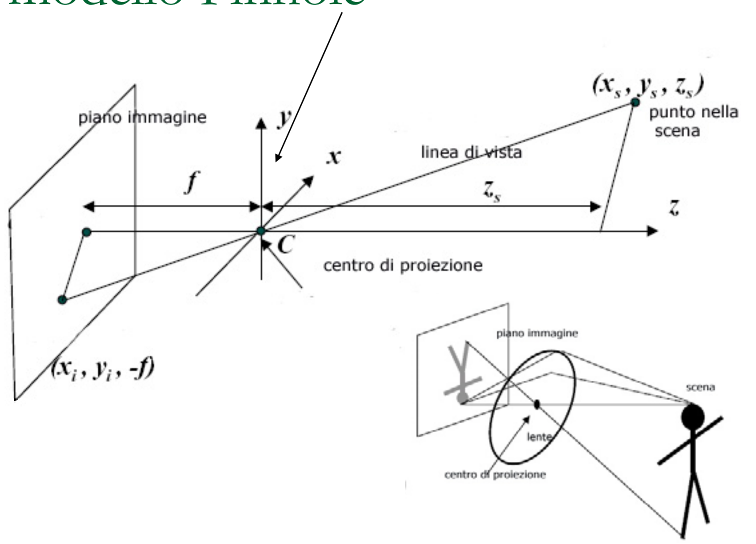
L'origine del sistema di coordinate coincide con il foro, **i** e **j** formano la base per il piano focale parallelo al piano immagine



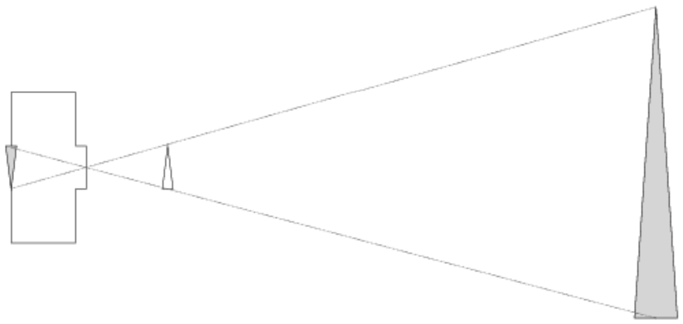
$$\overrightarrow{OP'} = \lambda\overrightarrow{OP}$$

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \\ f' = \lambda z \end{cases} \longrightarrow \lambda = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{f'}{z} \longrightarrow \begin{matrix} x' = f'\dfrac{x}{z} \\ y' = f'\dfrac{y}{z} \end{matrix}$$

Il modello Pinhole

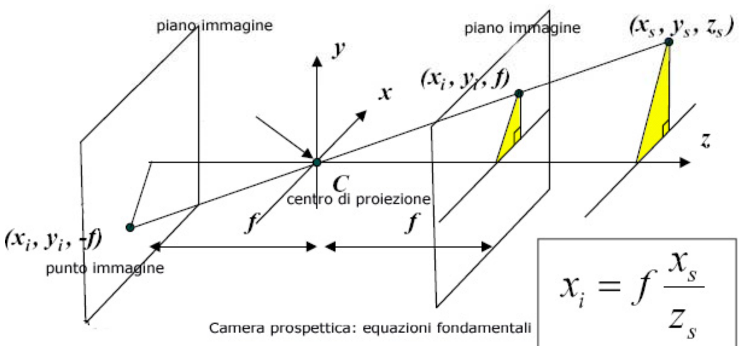


Spostiamo il piano immagine



Muoviamo il piano immagine di fronte al centro di proiezione.

Proiezione prospettica



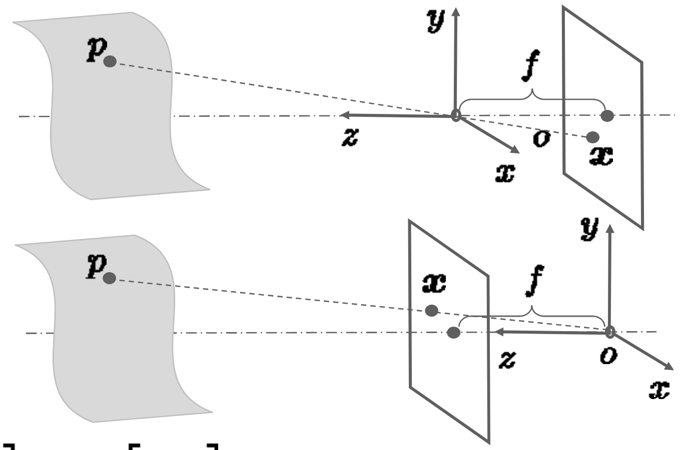
$$x_i = f\,\frac{x_s}{z_s}$$

$$y_i = f\,\frac{y_s}{z_s}$$

Modello Pinhole

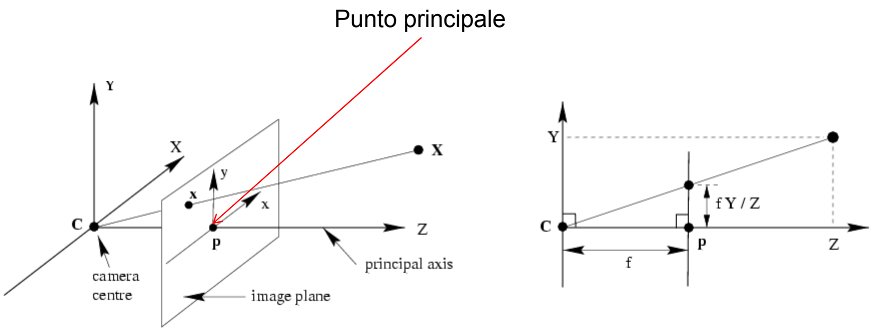
Pinhole

pinhole frontale



$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \frac{f}{Z}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

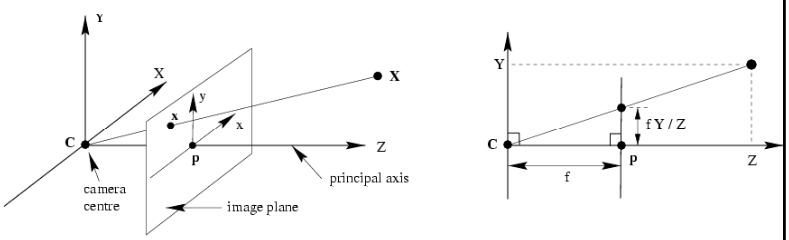
Nel modello Pinhole frontale un punto nello spazio con coordinate **X**=$(X,Y,Z)^T$ e' mappato su un punto del piano immagine dove la linea che congiunge il punto e il centro di proiezione.passa per l'immagine



Il punto $(X,Y,Z)^T$ e' mappato sul punto $(fX/Z, fY/Z,f)^T$

Abbiamo una trasformazione dallo spazio Euclideo 3D allo spazio Euclideo 2D.

modello Pinhole



$$(X, Y, Z)^T \mapsto (fX/Z,\ fY/Z)^T$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & & & 0 \\ & f & & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

modello Pinhole

Possiamo scrivere $\mathrm{diag}(f,f,1)[I \mid 0]$ dove $\mathrm{diag}(f,f,1)$ e' la matrice diagonale e $[I \mid 0]$ rappresenta la matrice divisa in un blocco $3X3$ (la matrice identita') piu' una colonna di zeri

X e' il vettore omogeneo $(X,Y,Z,1)^T$, $x=(x,y,1)$ e' il punto nell'immagine e P e' la matrice di proiezione della camera 3X4

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & & \\ & f & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punto nel mondo

Punto nell'immagine

$$x = PX \qquad P = \mathrm{diag}(f, f, 1)[I \mid 0]$$

Parametri della telecamera

- I *parametri intrinseci* sono i parametri necessari a collegare le coordinate di un pixel dell'immagine con le coordinate corrispondenti nel sistema di riferimento della camera.
- I *parametri estrinseci* sono i parametri che definiscono la posizione ed orientazione del sistema di riferimento della camera, rispetto al riferimento mondo, che è supposto noto.

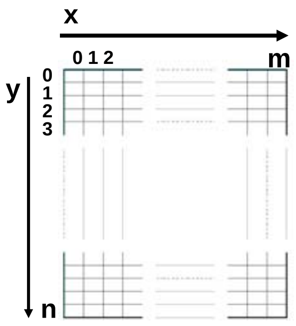
Parametri intrinseci

- Insieme di parametri necessari a specificare le caratteristiche ottiche, geometriche e digitali della camera, come sensore.
  - La lunghezza focale, per la proiezione prospettica
  - Le coordinate, in pixel, del centro dell'immagine
  - La distorsione geometrica causata dall'ottica.
  - La dimensione dei pixel (in millimetri)

$$(f, p_x, p_y, m_x, m_y, \gamma)$$

Parametri intrinseci

- I parametri intrinseci ci permettono di collegare le coordinate x_i, y_i, espresse in pixel, di un punto dell'immagine, con le coordinate dello stesso punto nel sistema di riferimento della telecamera



$$\begin{cases} x = -(x_i - p_x)m_x \\ y = -(x_i - p_y)m_y \end{cases}$$

Dove (p_x, p_y) sono le coordinate in pixel del centro dell'immagine e (m_x, m_y) indicano la dimensione effettiva dei pixel (in millimetri) nella direzione orizzontale e verticale.
il segno - e' dovuto al fatto che l'orientazione degli assi del sistema di riferimento dell'immagine e quelli della camera sono opposti

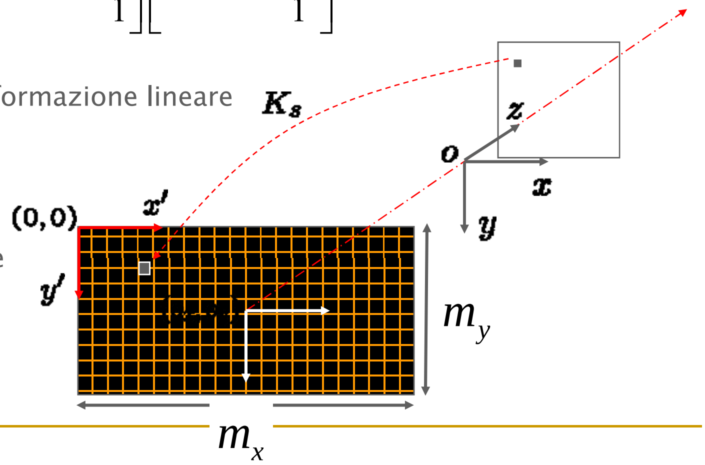
Parametri della telecamera: coordinate pixel

$$K = \begin{bmatrix} m_x & & \\ & m_y & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & & p_x \\ & f & p_y \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

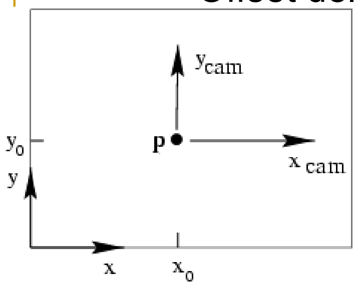
$m_y \ m_x$ e' il numero di pixel per distanza unitaria

Trasformazione lineare K_s

Coordinate pixel



Offset del punto principale

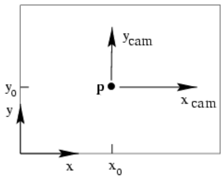


$(p_x, p_y)^T$ coordinate del punto principale

$$(X, Y, Z)^T \mapsto (fX/Z + p_x, fY/Z + p_y)^T$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} fX + Zp_x \\ fY + Zp_x \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & & p_x & 0 \\ & f & p_y & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

offset del punto principale



scriviamo $K = \begin{bmatrix} f & & p_x \\ & f & p_y \\ & & 1 \end{bmatrix}$ matrice di calibrazione

Possiamo riscrivere $\begin{pmatrix} fX + Zp_x \\ fY + Zp_x \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & & p_x & 0 \\ & f & p_y & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$

In forma sintetica $\mathrm{x} = \mathrm{K}[\mathrm{I} \mid 0]\mathrm{X}_{\mathrm{cam}}$ *camera coordinate frame*

Dove $\mathrm{X}_{\mathrm{cam}}$ e' $(\mathrm{X,Y,Z,1})^{\mathrm{T}}$ per enfatizzare che e' la camera all'origine del sistema di coordinate e l'asse principale della camera punta nella direzione Z

Parametri estrinseci

- Un insieme di parametri geometrici che identifica univocamente le trasformazioni tra il sistema di riferimento della camera, non noto, e quelli del mondo, noti.
  - Un vettore di traslazione $\boldsymbol{t}=[t_1\ t_2\ t_3]^T$.
  - Una matrice di rotazione 3×3, ortogonale ($R^TR=RR^T=I$).

$$\mathbf{P}_c = R(\mathbf{P}_w - \mathbf{t})$$

$\tilde{X}$ E' un vettore 3d inomogeneo che rappresenta un punto Nel sistema di coordinate mondo

$$X_{cam} = R(\tilde{X} - \tilde{C})$$

$\tilde{C}$ rappresenta le coordinate del centro della camera

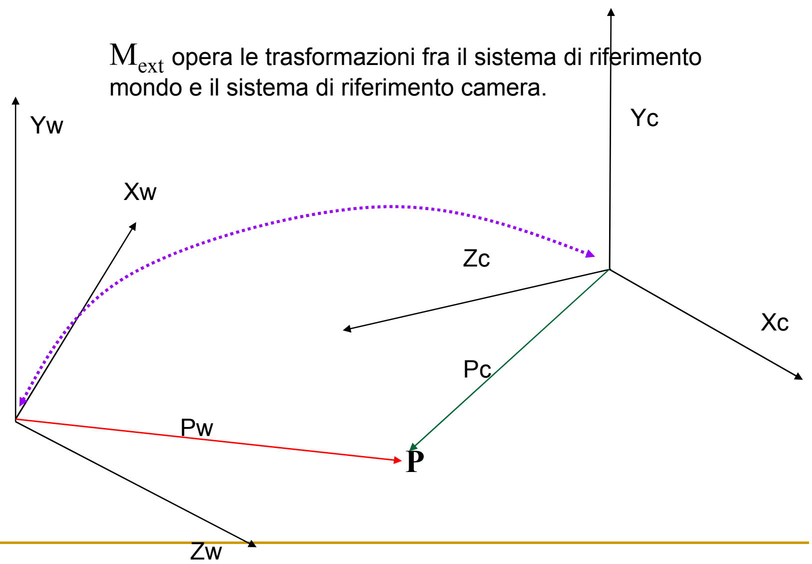
Parametri estrinseci

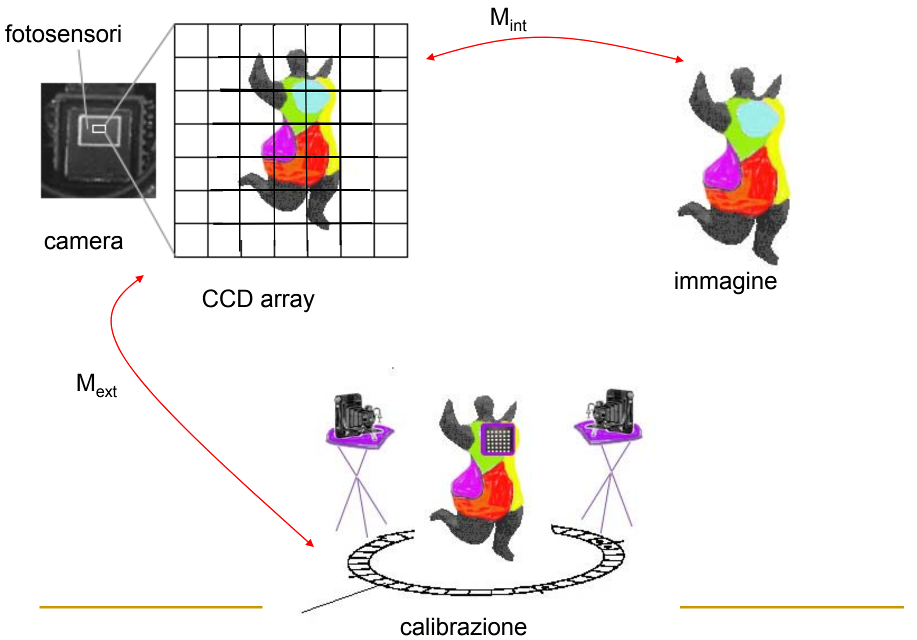
- Data una matrice ortogonale di rotazione ed un vettore di traslazione, la matrice dei parametri estrinseci è:

$$M_{ext} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & -\mathbf{R}_1^T\mathbf{t} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & -\mathbf{R}_2^T\mathbf{t} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & -\mathbf{R}_3^T\mathbf{t} \end{pmatrix}$$

Sistemi di coordinate camera e mondo

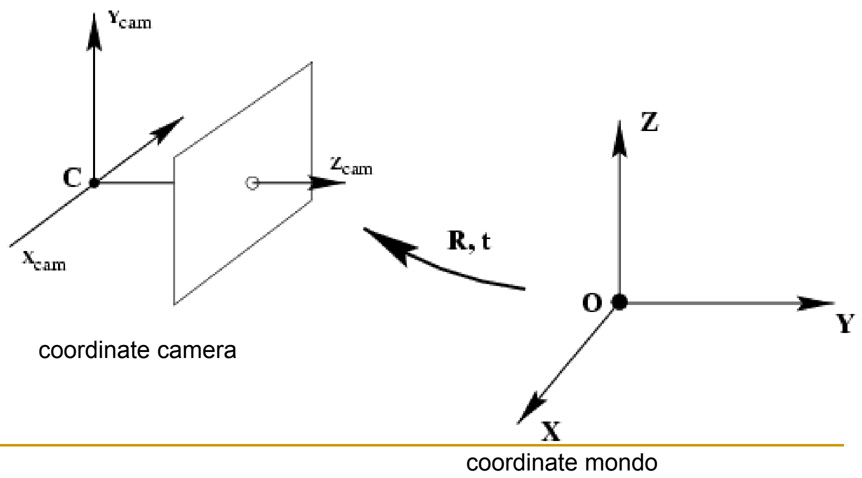
M_{ext} opera le trasformazioni fra il sistema di riferimento mondo e il sistema di riferimento camera.





Rotazione e traslazione della camera

I punti nello spazio della scena sono espressi in termini di coordinate Euclidee differenti noti come *world coordinate frame*.



Rotazione e traslazione

$$\tilde{X}_{cam} = R(\tilde{X} - \tilde{C})$$

$$X_{cam} = \begin{bmatrix} R & -R\tilde{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R & -RC \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

$\tilde{C}$ rappresenta le coordinate del centro della camera nel sistema di riferimento mondo e R e' la matrice di rotazione che rappresenta l'orientazione del sistema di riferimento camera

Mettendo insieme la definizione della matrice di calibrazione $x = K[I \mid 0]X_{cam}$

e $$X_{cam} = \begin{bmatrix} R & -R\tilde{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R & -R\tilde{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

Otteniamo $$x = KR[I \mid -\tilde{C}]X$$

9 gradi di liberta':
3 per K (f,px, py) ,3 per R, 3 per Ĉ

Dove X ora e' definito nel sistema di riferimento mondo e quindi $x = PX$

$P = KR\left[I \mid -\tilde{C}\right]$ se poniamo $t = -R\tilde{C}$ $\quad P = K[R \mid t]$

CCD camera

$$K = \begin{bmatrix} m_x & & \\ & m_x & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f & & p_x \\ & f & p_y \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_x & & p_x \\ & \alpha_x & p_y \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_x = fm_x, \alpha_y = fm_y$$

rappresentano la lunghezza focale della camera in termini della dimensione dei pixel lungo la x e la y

$\tilde{\mathbf{x}}_0 = (x_0, y_0)$ e' il punto principale in termini delle dimensioni dei pixel con coordinate

$$x_0 = m_x p_x, y_0 = m_y p_y$$

una camera CCD ha 10 gradi di liberta'

Camera proiettiva finita

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_x & & p_x \\ & \alpha_x & p_y \\ & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow K = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & p_x \\ & \alpha_x & p_y \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

skew parameter

$\mathrm{P} = \underbrace{\mathrm{KR}}\left[\mathrm{I} \mid -\tilde{\mathrm{C}}\right]$ 11 dof (5+3+3)

non-singolare

decomponiamo la matrice P in K,R,C. M=KR

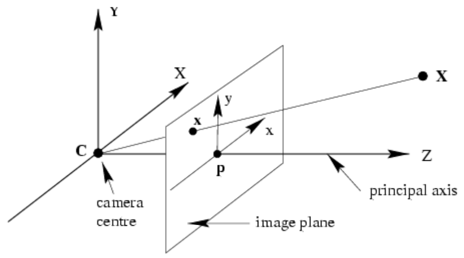
$$\mathrm{P} = M[I \mid M^{-1}\mathbf{p}_4] = KR[I \mid -\tilde{C}] \qquad \tilde{\mathrm{C}} = -\mathrm{M}^{-1}\mathrm{p}_4$$

$\mathbf{p}_4$ e' l'ultima colonna di P

Se rango P=3ma rango M<3, la camera si dice ad infinito

Anatomia

Centro della camera C rappresentato da un vettore 1X4 (null-space) di P

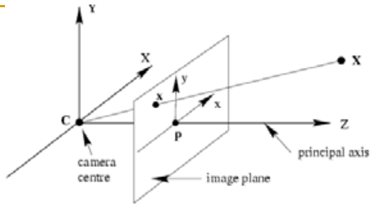


$$PC = 0$$

Camera Proiettiva

- Una camera proiettiva generale P trasforma un punt X nel mondo in un punto x nell'immagine.
- La trasformazione e' x=PX
- La camera proiettiva finita e' un caso particolare della camera proiettiva.

Anatomia



Consideriamo la linea che contiene C e un qualunque altro punto A nello spazio 3D. I punti su questa linea sono rappresentati da

$$X(\lambda) = \lambda A + (1-\lambda)C$$

Data la proiezione x =PX i punti su questa linea sono proiettati su

$$x = PX(\lambda) = \lambda PA + (1-\lambda)PC$$

Cioe' tutti i punti sulla linea sono proiettati sullo stesso punto immagine PA perche'PC=0. Quindi C e' il centro della telecamera perche' per qualunque scelta di A la linea X(λ) e' un raggio che passa dal centro..

L'immagine del centro della camera e' $(0,0,0)^T$, cioe' e' indefinito

Camera finita: $C = \begin{pmatrix} -M^{-1}p_4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Camera infinita: $C = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}, Md = 0$

La camera proiettiva P

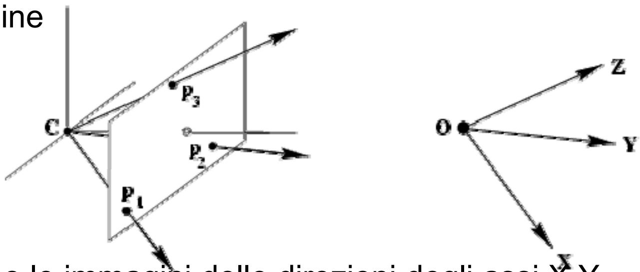
$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & -\mathbf{R}_1^T C \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & -\mathbf{R}_2^T C \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & -\mathbf{R}_3^T C \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{1\mathrm{T}} \\ \mathbf{P}^{2\mathrm{T}} \\ \mathbf{P}^{3\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

Le colonne di P

$$[\mathrm{p}_2] = [\mathrm{p}_1 \mathrm{p}_2 \mathrm{p}_3 \mathrm{p}_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Punti immagine che corrispondono ai punti di fuga delle coordinate mondo X,Y e Z e all'origine

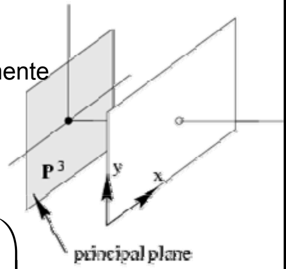


Sono le immagini delle direzioni degli assi X,Y e Z . p_4 e' l'immagine delle coordinate dell'origine, in coordinate mondo

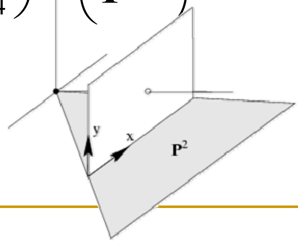
Vettori riga

Le righe di una camera proiettiva sono vettori di dimensione 4 che possono essere interpretati geometricamente Come specifici piani mondo.

La notazione e' la seguente



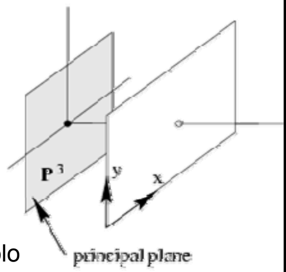
$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{1\mathrm{T}} \\ \mathbf{P}^{2\mathrm{T}} \\ \mathbf{P}^{3\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$



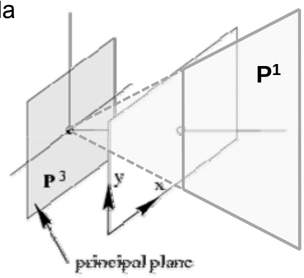
Piano Principale

Il piano principale passa attraverso il centro della camera ed e' parallelo al piano immagine. E' formato dall'insieme di punti X che sono sulla linea all'infinito dell'immagine.

$PX = (x,y,0)^T$

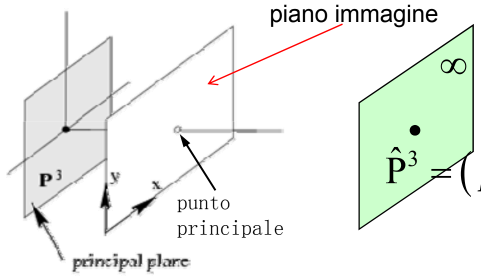


Un punto si trova sul piano principale della camera se e solo se $P^{3T}X = 0$
P^{3T} e' il vettore che rappresenta il piano principale della camera. Se C e' il centro della camera PC=0 e quindi se $P^{3T}C=0$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{p}^{1\mathrm{T}} \\ \mathrm{p}^{2\mathrm{T}} \\ \mathrm{p}^{3\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{p}^{1\mathrm{T}} \\ \mathrm{p}^{2\mathrm{T}} \\ \mathrm{p}^{3\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il punto principale



$$\hat{\mathrm{P}}^3 = \left(p_{31}, p_{32}, p_{33}, 0\right)^T$$

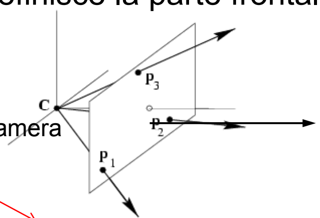
$$\mathrm{x}_0 = \mathrm{P}\hat{\mathrm{P}}^3 = \mathrm{Mm}^3$$

m^3 e' la terza riga di M = KR

Il vettore dell'asse principale

definisce la parte frontale della camera

Vettore in 3dW
Espresso in coordinate camera



m^3

vettore nella dir. asse principale

$$\mathrm{x} = \mathrm{P}_{\mathrm{cam}}\mathrm{X}_{\mathrm{cam}} = \mathrm{K}[\mathrm{I} \mid 0]\mathrm{X}_{\mathrm{cam}} \qquad \mathrm{v} = \det(\mathrm{M})\mathrm{m}^3 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{P}_{\mathrm{cam}} \mapsto k\mathrm{P}_{\mathrm{cam}} \qquad \mathrm{v} \mapsto k^4\mathrm{v}$$

(stessa direzione)

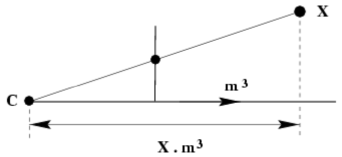
$$\mathrm{P} = k\mathrm{KR}\left[\mathrm{I} \mid -\widetilde{\mathrm{C}}\right] = [\mathrm{M} \mid \mathrm{p}_4] \qquad \det(\mathrm{R}) > 0$$

$$\mathrm{P}_{\mathrm{cam}} \mapsto k\mathrm{P}_{\mathrm{cam}}$$

$$\mathrm{v} \mapsto \det(\mathrm{M})\mathrm{m}^3$$

E' un vettore nella direzione dell'asse principale, diretto difronte alla camera

Profondita' di un punto



$$w = P^{3^T}X = P^{3^T}(X - C) = m^{3^T}(\tilde{X} - \tilde{C})$$

(PC=0)

Se $\det M > 0; \|m^3\| = 1$

allora m^3 e' un vettore unitario nella direzione positiva

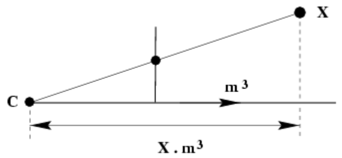
$$X = (X, Y, Z, T)^T$$

Sia $X=(X,Y,Z,1)^T$ un punto 3D e P =[M|p4] la matrice della camera.

Supponiamo che $P(X,Y,Z,1)^T = w(x,y,1)^T$ allora

$$\text{depth}(X;P) = \frac{\text{sign}(\det M)w}{T\|m^3\|}$$

e' la profondita' del punto X di fronte al piano principale della camera.



Decomposizione della matrice

Trova il centro della camera, numericamente:

$$\mathrm{PC} = 0$$ (null-space, decomposizione SVD)

Trova il centro della camera, algebricamente (intersezione dei tre piani):

C=(X,Y,Z,T)^T

$$X = \det([\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4]) \quad Y = -\det([\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4])$$

$$Z = \det([\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_4]) \quad T = -\det([\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3])$$

Orientazione camera e parametri intrinseci

$$\mathrm{M} = \mathrm{KR}$$

$$\square = (Q\,R)^{-1} = R^{-1}\,Q^{-1}$$