Laboratorio di Elettronica
Esercizi della Lezione 5: Simulazione di circuiti con amplificatori operazionali; circuiti risonanti LC e RLC

Valentino Liberali, Alberto Stabile

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
Dipartimento di Fisica "Aldo Pontremoli"

E-mail: `valentino.liberali@unimi.it`, `alberto.stabile@unimi.it`

Milano, 5-6 maggio 2022

Comparatore

Comparatore invertente reale:

```
*INVERTING VOLTAGE COMPARATOR (REAL)
.INCLUDE UA741.SPI
VSP 10 0 10V
VSN 11 0 -10V
VIN 1 0 SIN (0 1.5 10 0 0)
VNOISE 2 1 SIN (0 -120M 10K 0 0)
XOA 0 2 10 11 3 UA741
.OP
.TRAN 1U 0.2
.PLOT TRAN V(1) V(3)
.END
```

L'effetto del rumore (VNOISE) è quello di far commutare l'uscita del comparatore quando l'ingresso (VIN) è molto vicino a zero.

Trigger di Schmitt

Trigger di Schmitt:

```
*INVERTING VOLTAGE COMPARATOR (REAL) -- with hysteresis
.INCLUDE UA741.SPI
VSP 10 0 10V
VSN 11 0 -10V
VIN 1 0 SIN (0 1.5 10 0 0)
VNOISE 2 1 SIN (0 -120M 10K 0 0)
XOA 9 2 10 11 3 UA741
R1 9 0 1K
R2 9 3 6.8K
.OP
.TRAN 1U 0.2
.PLOT TRAN V(1) V(3)
.END
```

La retroazione positiva elimina l'effetto del rumore.

Multivibratore astabile

Multivibratore:

```
* Multivibratore
.INCLUDE UA741.SPI
VSP 10 0 12V
VSN 11 0 -12V
R1 0 1 10K
R2 1 3 10K
R3 2 3 10K
C0 0 2 10N
XOA 1 2 10 11 3 UA741
.OP
.TRAN 1U 2M
.PLOT TRAN V(1) V(3)
.END
```

Cambiando il fattore di retroazione positiva (R1, R2) o la costante di tempo (R3, C) cambia la frequenza.

Risposta in frequenza del derivatore reale

Derivatore:

```
* DERIVATORE CON AMPLIFICATORE 741
.INCLUDE UA741.SPI
VSP 10 0 10V
VSN 11 0 -10V
V1 1 0 AC 1
C1 1 2 100N
R2 2 3 1K
XOA 0 2 10 11 3 UA741
.OP
.AC DEC 20 10 10MEG
.PLOT AC VDB(3) VP(3)
.END
```

C'è un "picco di risonanza" nella risposta in frequenza, perché il sistema è del secondo ordine e i poli sono complessi coniugati.

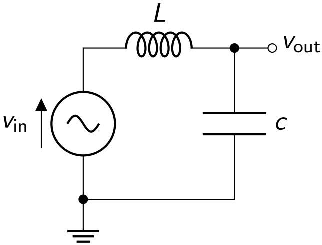
Circuiti del secondo ordine

I circuiti del secondo ordine sono descritti:

- nel dominio del **tempo**: da un'**equazione differenziale del secondo ordine**;
- nel dominio della **frequenza**: da una **risposta in frequenza razionale** (quoziente di due polinomi) in cui almeno uno dei due polinomi è **di secondo grado**.

Alcuni circuiti del secondo ordine sono detti **circuiti risonanti** perché presentano una *frequenza di risonanza*, cioè hanno una risposta in frequenza che presenta un picco centrato intorno ad una particolare frequenza.

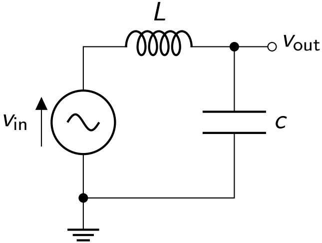
Circuito ideale LC serie



Circuito LC serie

Il circuito LC serie è chiamato così perché l'induttanza L e la capacità C sono collegate in serie.
Questo circuito è ideale, perché non contiene resistenze.
In un circuito reale bisogna considerare anche la resistenza del generatore di segnale in ingresso e le resistenze di fili e contatti.

Analisi del circuito LC nel dominio del tempo (1/3)



Indicando con i la corrente nella maglia, nel dominio del tempo la KVL si scrive:

$$v_{in} - L\frac{di}{dt} - v_{out} = 0$$

che, combinata con la

$$i = C\frac{dv_{out}}{dt},$$

fornisce l'equazione differenziale del secondo ordine:

$$LC\frac{d^2 v_{out}}{dt^2} + v_{out} = v_{in}$$

Analisi del circuito LC nel dominio del tempo (2/3)

L'equazione omogenea associata è:

$$LC \frac{d^2 v_{\text{out}}}{dt^2} + v_{\text{out}} = 0$$

che ammette la soluzione generale:

$$v_{\text{out}}(t) = A \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + B \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

con A e B costanti arbitrarie.
La soluzione dell'equazione omogenea si può scrivere come:

$$v_{\text{out}}(t) = V_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \varphi\right)$$

dove le costanti arbitrarie sono la tensione V_0 e la fase φ.
La soluzione generale dell'equazione omogenea con $v_{\text{in}} = 0$ (risposta libera del circuito) è un'onda sinusoidale con ampiezza e fase arbitrarie (dipendono dalle condizioni iniziali all'istante $t = 0$).

Analisi del circuito LC nel dominio del tempo (3/3)

$$v_{\text{out}}(t) = V_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \varphi\right)$$

Se nel circuito non c'è nessuna resistenza, l'oscillazione non si smorza.
Poiché induttore e condensatore ideali non dissipano energia, nel circuito avviene un continuo trasferimento di energia:

- quando il condensatore è carico alla massima tensione V_0 (e quindi ha un'energia $\frac{1}{2}CV_0^2$) la corrente è nulla ed è nulla l'energia nell'induttore;
- quando la corrente ha il valore massimo I_0 l'energia nell'induttore è $\frac{1}{2}LI_0^2$ mentre l'energia nel condensatore è nulla.

Il trasferimento di energia tra condensatore e induttore avviene con frequenza

$$f_{\text{osc}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Il circuito LC ideale è analogo ad un pendolo senza attrito, che converte energia cinetica in energia potenziale e viceversa.

Analisi del circuito LC nel dominio della frequenza (1/4)

L'equazione differenziale

$$LC\frac{d^2 v_{\text{out}}}{dt^2} + v_{\text{out}} = v_{\text{in}}$$

trasformata nel dominio della frequenza, diventa:

$$\left((j2\pi f)^2 LC + 1\right) V_{\text{out}} = V_{\text{in}}$$

Usando l'identità $j^2 = -1$:

$$\left(1 - (2\pi f)^2 LC\right) V_{\text{out}} = V_{\text{in}}$$

Se $V_{\text{in}} = 0$, allora abbiamo:

$$V_{\text{out}} = \begin{cases} 0 & \text{se } f \neq \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \\ \text{qualsiasi} & \text{se } f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \end{cases}$$

Questo risultato dice che un'oscillazione alla frequenza $f_{\text{osc}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ può esistere anche senza l'applicazione di un segnale in ingresso.

Analisi del circuito LC nel dominio della frequenza (2/4)

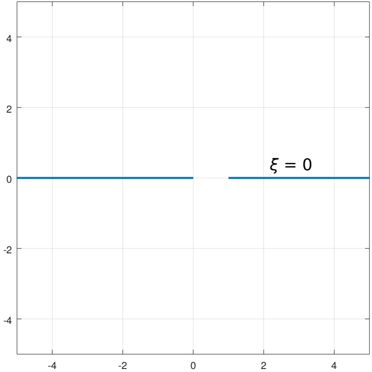
Dall'equazione

$$\left(1 - (2\pi f)^2 LC\right) V_{\text{out}} = V_{\text{in}}$$

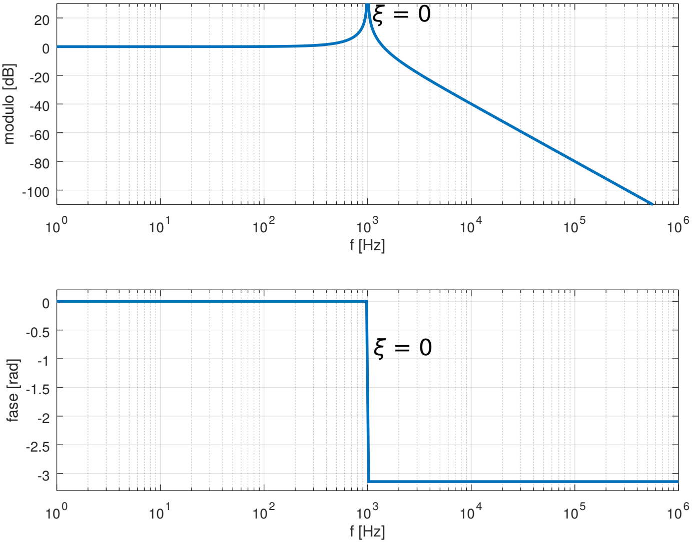
ricaviamo la risposta in frequenza del circuito LC:

$$H(f) = \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{1}{1 - (2\pi f)^2 LC}$$

Siccome $H(f)$ è reale per ogni f, il suo diagramma di Nyquist si trova sull'asse reale (in blu nella figura).



Analisi del circuito LC nel dominio della frequenza (3/4)



I diagrammi di Bode del circuito LC sono illustrati in blu nella figura.

Analisi del circuito LC nel dominio della frequenza (4/4)

In assenza di componenti resistivi, la risposta in frequenza

$$H(f) = \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{1}{1 - (2\pi f)^2 LC}$$

ha sempre valore reale, per $\forall f$; se $f < \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ allora $H(f) > 0$, mentre se $f > \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ allora $H(f) < 0$.

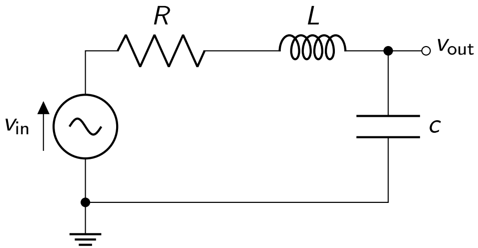
Per $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, la risposta in frequenza tende a infinito; questo significa che il circuito può presentare in uscita una sinusoide alla frequenza $f_{\text{osc}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, anche se l'ingresso è spento.

Il circuito LC continua ad oscillare, perchè durante metà del periodo di oscillazione viene trasferita energia dall'induttore al condensatore, mentre durante l'altra metà del periodo l'energia viene trasferita dal condensatore all'induttore.

In assenza di elementi dissipativi (resistenze), l'energia si conserva e l'oscillazione continua senza smorzarsi.

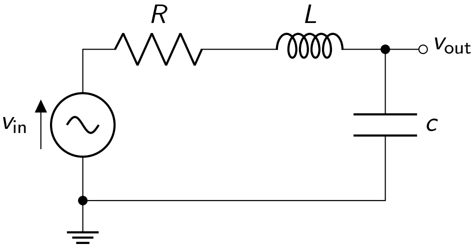
In un circuito reale, le resistenze parassite dei fili (e la resistenza interna del generatore) provocano un rapido smorzamento delle oscillazioni.

Circuito *RLC* serie



Nel circuito *RLC* serie tutti gli elementi resistivi, induttivi e capacitivi sono collegati in serie.
La resistenza R rappresenta la somma della resistenza interna del generatore e delle resistenze delle interconnessioni (fili e contatti).

Analisi del circuito *RLC* (1/7)



Nel dominio del tempo, si può scrivere la legge di Kirchhoff alla maglia:

$$v_{\text{in}} - Ri - L\frac{di}{dt} - v_{\text{out}} = 0$$

da cui si ricava l'equazione differenziale:

$$LC\frac{d^2 v_{\text{out}}}{dt^2} + RC\frac{dv_{\text{out}}}{dt} + v_{\text{out}} = v_{\text{in}}$$

Analisi del circuito *RLC* (2/7)

$$LC\frac{d^2 v_{\text{out}}}{dt^2} + RC\frac{dv_{\text{out}}}{dt} + v_{\text{out}} = v_{\text{in}}$$

Trasformando l'equazione nel dominio della frequenza, abbiamo:

$$\left((j2\pi f)^2 LC + j2\pi fRC + 1\right) V_{\text{out}} = V_{\text{in}}$$

da cui ricaviamo la risposta in frequenza del circuito RLC:

$$H(f) = \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC + (j2\pi f)^2 LC}$$

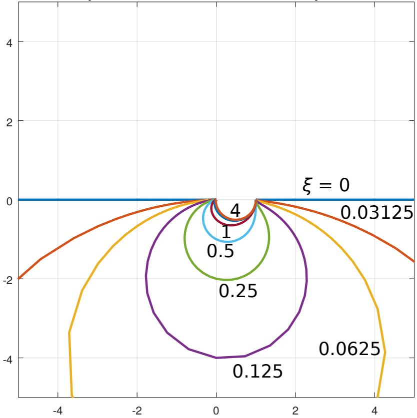
Analisi del circuito RLC (3/7)

Nella risposta in frequenza

$$H(f) = \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC + (j2\pi f)^2 LC}$$

il termine $j2\pi fRC$ al denominatore fa sì che la risposta in frequenza non sia più sull'asse reale, ma percorra una traiettoria nel semipiano con parte reale negativa.

La figura riporta le traiettorie per alcuni valori del parametro $\xi = \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}$.



Analisi del circuito *RLC* (4/7)

La risposta in frequenza è:

$$H(f) = \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC + (j2\pi f)^2 LC}$$

Ci sono due possibilità:

- la risposta in frequenza del secondo ordine può essere scomposta nel prodotto di due risposte del primo ordine, con due costanti di tempo τ_1 e τ_2:

  $$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f\tau_1} \cdot \frac{1}{1 + j2\pi f\tau_2}$$

  In questo caso, il circuito si comporta come il collegamento in cascata di due filtri passa-basso, aventi le due frequenze di taglio:

  $$f_1 = \frac{1}{2\pi\tau_1} \quad \text{e} \quad f_2 = \frac{1}{2\pi\tau_2}$$

- la risposta in frequenza del secondo ordine **NON** può essere scomposta nel prodotto di due fattori del primo ordine: in questo caso, il circuito ha una risonanza, con un picco ad un valore finito.

Analisi del circuito *RLC* (5/7)

Per sapere se una risposta in frequenza che ha un denominatore del secondo ordine presenta oppure no una risonanza, è utile riscrivere la risposta in frequenza introducendo la variabile complessa (frequenza angolare complessa) $s = j2\pi f$:

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC + s^2LC}$$

che può essere scritta esplicitando la frequenza angolare (o pulsazione) di risonanza ω_0:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e un introducendo un parametro ξ nel termine di primo grado, in modo da ottenere:

$$H(s) = \frac{1}{1 + 2\xi\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

Il parametro ξ è dato da:

$$\xi = \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

e si vede che $\xi \geq 0$.

Analisi del circuito *RLC* (6/7)

$$H(s) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

Il discriminante del polinomio al denominatore contiene il termine $\xi^2 - 1$, e quindi:

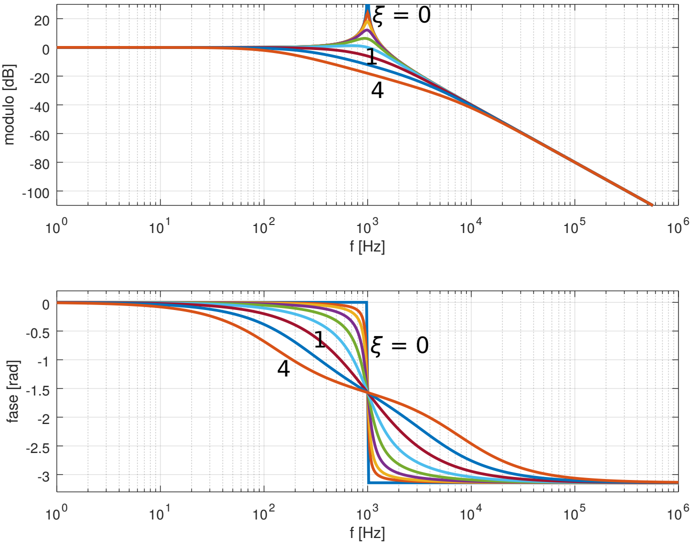
- per $\xi \geq 1$ il denominatore ha due radici reali, e la risposta in frequenza può essere scomposta nel prodotto di due fattori del primo ordine:

$$H(s) = \frac{1}{1 + s\tau_1} \cdot \frac{1}{1 + s\tau_2}$$

- per $0 \leq \xi < 1$ il denominatore ha due radici complesse coniugate e c'è il picco di risonanza.

Quando $0 \leq \xi < 1$, al crescere del valore del parametro ξ il picco di risonanza diminuisce.

Analisi del circuito *RLC* (7/7)



Nei diagrammi di Bode del circuito RLC, il picco di risonanza nel modulo e la pendenza della fase si riducono all'aumentare di ξ.

Fattore di qualità

Il **fattore di qualità** Q di un circuito risonante è definito come:

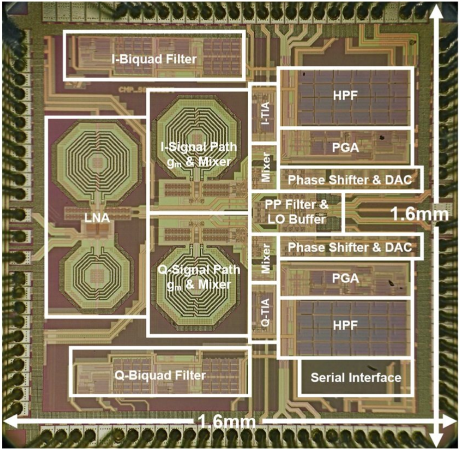
$$Q = 2\pi \frac{\text{energia immagazzinata}}{\text{energia dissipata in un periodo}}$$

Per il circuito RLC serie, si ha:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Nota importante: Le formule date per ξ e per Q valgono solo per il circuito RLC serie. Per altri circuiti risonanti occorre fare il calcolo, partendo dalla risposta in frequenza.
In ogni caso, si ha $Q = \frac{1}{2\xi}$.

Esempio di circuito risonante LC



Circuito ricevitore per telefonia mobile (CMOS 65 nm)

La cancellazione delle interferenze è ottenuta con filtri LC passa-banda.

A. Balankutty and P. Kinget, "0.6V, 5dB NF, –9.8dBm IIP3, 900MHz receiver with interference cancellation," 2010 Symposium on VLSI Circuits, Honolulu, HI, 2010, pp. 183-184, doi: 10.1109/VLSIC.2010.5560304.

Esercizi proposti

1. Simulare con Ngspice l'amplificatore invertente, l'amplificatore non invertente, l'amplificatore della differenze, il sommatore, l'inseguitore di tensione, il comparatore di tensione, ed il trigger di Schmitt, verificandone il funzionamento nel dominio del tempo:
   - Verificare (su un circuito a scelta) che con la simulazione nel tempo mediante Ngspice si possono osservare gli effetti dovuti alla limitazione della tensione in uscita e allo slew rate.
2. Simulare con Ngspice un amplificatore (a scelta), un derivatore e un integratore:
   - Verificare il comportamento nel tempo, al variare delle frequenza;
   - Ricavare i diagrammi di Bode mediante simulazione con Ngspice;
   - (opzionale) Ripetere l'esercizio per diversi valori di resistenza, capacità e modello di amplificatore.
   - Per quali circuiti si notano gli effetti dovuti al guadagno finito e alla banda finita dell'amplificatore operazionale reale?