Laboratorio di Elettronica
Lezione 2:
Grandezze elettriche variabili nel tempo; consensatore e induttore; circuiti *RC* del primo ordine

Valentino Liberali, Alberto Stabile

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
Dipartimento di Fisica "Aldo Pontremoli"

E-mail: `valentino.liberali@unimi.it`, `alberto.stabile@unimi.it`

Milano, 30-31 marzo 2022

Contenuto

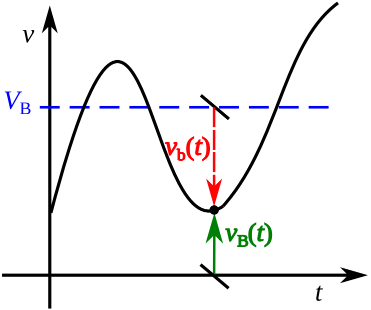
Segnali nel dominio del tempo

Una grandezza elettrica che varia nel tempo secondo una legge determinata costituisce un **segnale**. I segnali possono essere di tensione oppure di corrente, a seconda che la grandezza elettrica che ci interessa sia una tensione o una corrente. Per esprimere in modo esplicito la dipendenza dal tempo, scriviamo:

- $v(t)$ per un segnale di tensione
- $i(t)$ per un segnale di corrente

Talvolta la dipendenza dal tempo viene sottintesa; il carattere minuscolo indica comunque che si tratta di una grandezza variabile nel tempo.

Convenzioni tipografiche



tipo di carattere	significato	esempio
Maiuscolo, pedice Maiuscolo	Valore in continua (punto di lavoro)	V_B, I_C
minuscolo, pedice Maiuscolo	Valore istantaneo (funzione del tempo)	$v_B(t)$, $i_C(t)$
minuscolo, pedice minuscolo	Segnale $(v_B(t) - V_B(t))$	$v_b(t)$, $i_c(t)$

Segnali analogici e segnali digitali

Un segnale è **analogico** quando il suo contenuto di informazione varia con continuità, potendo assumere un'infinità di valori possibili (entro un certo intervallo).
Un segnale è **digitale** quando il suo contenuto di informazione varia in modo discreto (cioè a passi), potendo assumere soltanto un numero finito di valori possibili.
Il segnale digitale più semplice è il segnale binario, che può assumerre solo i valori 0 (zero) e 1 (uno), che in genere corrispondono ai valori "bassi" e "alti" di una grandezza fisica variabile con continuità.

Segnali periodici

Un segnale è periodico quando si ripete identicamente dopo un intervallo di tempo T, detto periodo:

$$x(t + T) = x(t) \qquad \forall t$$

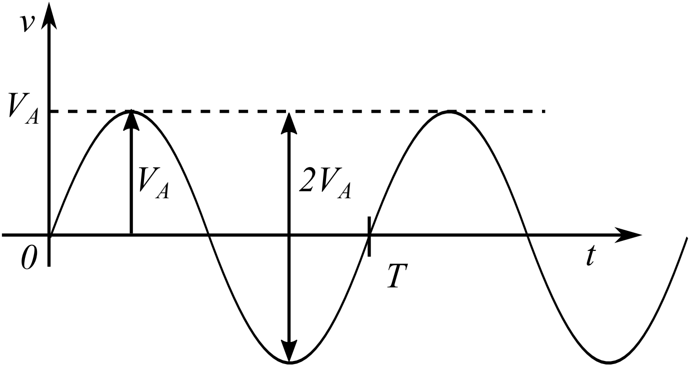
L'inverso del periodo è la frequenza $f = \frac{1}{T}$.

Dimensionalmente, la frequenza è l'inverso di un tempo e si misura in hertz (Hz).

Per un moto rotatorio, la frequenza f è legata alla velocità angolare dalla relazione: $\omega = 2\pi f$. La velocità angolare si misura in radianti al secondo (rad/s).

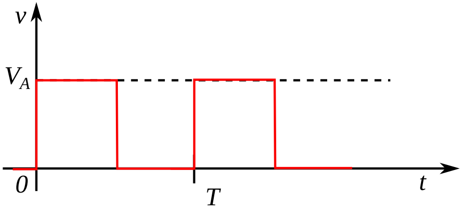
Poiché l'angolo giro è pari a 2π rad, risulta: 1 Hz = 1 giro/s = 2π rad/s.

Onda sinusoidale

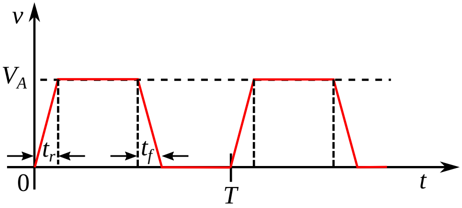


Una sinusoide può essere espressa come: $v(t) = V_A \sin(2\pi f t)$ con $f = \frac{1}{T}$.
Il valore di picco dell'ampiezza è V_A; il valore picco-picco, cioè la differenza tra il massimo e il minimo, è $2V_A$.

Onda quadra



Un esempio di onda quadra è costituito dal segnale di clock di un sistema digitale sincrono.



Nella realtà l'onda quadra ideale non esiste; un'approssimazione più adeguata del segnale di clock di un sistema digitale sincrono è costituito dall'onda trapezoidale, avente tempi di salita (t_r, "rise time") e di discesa (t_f, "fall time") diversi da zero.

Oscilloscopio

Fotografia dell'oscilloscopio TDS 1012B presente nei nostri laboratorio didattici; **manuale d'uso:**
`http://elianto.fisica.unimi.it/oefm/oscilloscopio.pdf`

Generatore di segnali

Fotografia del generatore di segnali Agilent 3322A presente nei nostri laboratorio didattici; **manuale d'uso:**
`http://elianto.fisica.unimi.it/oefm/generatore_di_segnali.pdf`

Valor medio e valore efficace

Il valor medio V_m di un segnale periodico è:

$$V_m = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

Il valore efficace o valore quadratico medio o valore *Root Mean Square (RMS)* di un segnale periodico è:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (v(t))^2 dt}$$

Leggi per grandezze variabili nel tempo

La legge di Ohm per grandezze variabili nel tempo è:

$$v(t) = Ri(t)$$

La corrente è legata alla carica elettrica dalla relazione:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Energia interna di un bipolo

Esistono elementi circuitali il cui comportamento non dipende solo dal valore istantaneo delle grandezze elettriche, ma anche dai valori assunti in precedenza.
Questi elementi circuitali hanno **memoria** cioè mantengono al loro interno un'informazione legata al loro funzionamento passato.
L'informazione è fisicamente immagazzinata sotto forma di energia variabile nel tempo $w(t)$. L'energia assorbita da un bipolo all'istante t è:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t)dt = \int_{0}^{t} p(t)dt + w(0)$$

L'espressione della potenza assorbita da un bipolo qualsiasi è data dal prodotto della tensione per la corrente. Esplicitando la dipendenza dal tempo:

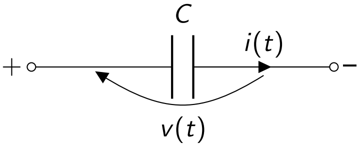
$$p(t) = v(t)i(t)$$

Quando la potenza varia nel tempo, si parla di potenza istantanea. La potenza istantanea $p(t)$ può essere positiva o negativa:

- è positiva quando aumenta l'energia immagazzinata nel bipolo,
- è negativa quando l'energia immagazzinata diminuisce

Condensatore

Il condensatore (in inglese: *capacitor*) è costituito da due superfici metalliche parallele separate da un isolante. La carica immagazzinata è proporzionale alla tensione applicata: $q(t) = Cv(t)$.



La costante C è la capacità del condensatore, che si misura in farad (F):

$$1\,\mathrm{F} = \frac{1\,\mathrm{C}}{1\,\mathrm{V}}$$

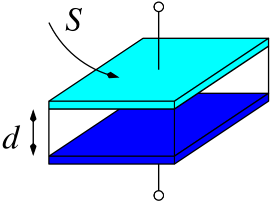
Il farad è un'unità di misura molto grande; di solito si usano i suoi sottomultipli: μF, nF, pF e fF.

Dalle due equazioni $q(t) = Cv(t)$ e $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ si ottiene:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

Nel condensatore la corrente è proporzionale alla derivata della tensione.
Se la tensione è costante, la derivata è nulla e non passa corrente.

Condensatore



Per un condensatore a facce piane e parallele, aventi area S e distanza d, fra le quali è interposto un materiale isolante con costante dielettrica ϵ, la capacità C è:

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

Condensatore

Invertendo l'equazione $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$ si ricava che in un condensatore la tensione è proporzionale all'integrale della corrente:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + v(0)$$

La tensione $v(0)$ (che matematicamente rappresenta la costante di integrazione) è la condizione iniziale:

$$v(0) = v(t = 0)$$

L'energia immagazzinata in un condensatore è:

$$w(t) = \frac{1}{2}C(v(t))^2$$

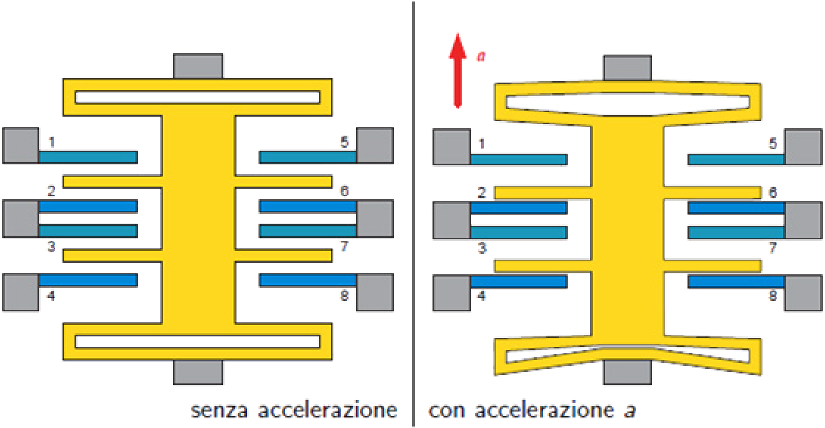
Si vede facilmente che derivando l'energia si ottiene la potenza istantanea:

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt} = Cv(t)\frac{dv(t)}{dt}$$

L'energia aumenta (e quindi la potenza viene assorbita) quando il valore assoluto della tensione ai capi del condensatore aumenta; l'energia diminuisce (e quindi la potenza viene erogata) quando il valore assoluto della tensione ai capi del condensatore diminuisce.

Condensatore

I condensatori vengono spesso usati per applicazioni industriali. Ad esempio vengono impiegati all'interno degli accelerometri usati nelle automobili, negli smartphone e nelle consolle per videogiochi.



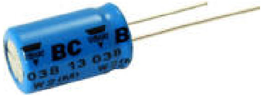
Elettrodi fissi in azzurro: A = {1, 3, 5, 7}; B = {2, 4, 6, 8}
La massa inerziale sospesa, sottoposta ad accelerazione, deforma gli anelli e si sposta.

Condensatore

I condensatori possono essere suddivisi in varie categorie, che dipendono dall'isolante.

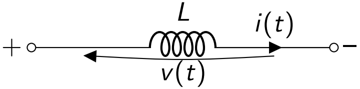
Condensatori ceramici multistrato: Questi condensatori sono costituiti da una serie di strati alternati di conduttori e ceramiche. I condensatori ceramici sono in assoluto quelli più utilizzati, più dell'80% dei condensatori prodotti annualmente sono di questo tipo.

Condensatori elettrolitici: hanno alta capacità in piccoli volumi, indicativamente da 1 µF a 10 mF con costo ridotto in rapporto alla capacità. Purtroppo, presentano cattive caratteristiche elettriche: valori elevati di ESR (resistenza serie) e ESL (induttanza serie) e elevate correnti di perdita. Alcuni modelli (indicati come *Low ESR*) sono migliori da questo punto di vista e sono adatti, per esempio, per alimentatori a commutazione. Inoltre, **questi condensatori sono polarizzati, cioè hanno un + e un – da rispettare, pena la distruzione del componente.**



Induttanza

L'induttore (in inglese: *inductor*) è costituito da un filo avvolto a spirale (solenoide).



All'interno dell'avvolgimento si ha un flusso magnetico Φ proporzionale alla corrente nel filo: $\Phi(t) = Li(t)$.
Il flusso magnetico Φ si misura in Weber (Wb):

$$1\,\mathrm{Wb} = 1\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}/(\mathrm{A}\,\mathrm{s}^2)$$

La costante L è l'induttanza dell'induttore, che si misura in henry (H):

$$1\,\mathrm{H} = \frac{1\,\mathrm{Wb}}{1\,\mathrm{A}}$$

Induttanza

Una variazione nel tempo del flusso magnetico produce una differenza di potenziale ai capi dell'induttore (legge di Faraday-Henry):

$$v(t) = \frac{d\Phi}{dt}$$

Combinando le due equazioni: $\Phi(t) = Li(t)$ e $v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$ si ottiene:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

La tensione è proporzionale alla derivata della corrente. Se la corrente è costante, la derivata è nulla e non c'è tensione ai capi del bipolo, quindi per la continua l'induttore si comporta come un cortocircuito.

Induttanza

Invertendo l'equazione $v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ si ricava che in un induttore la corrente è proporzionale all'integrale della tensione:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(t)dt + i(0)$$

L'energia immagazzinata in un induttanza è:

$$w(t) = \frac{1}{2}L(i(t))^2$$

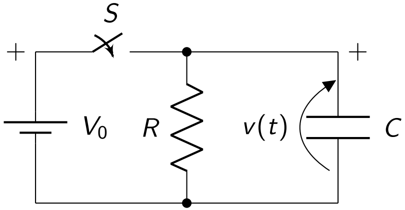
Si vede facilmente che derivando l'energia si ottiene la potenza istantanea:

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt} = Li(t)\frac{di(t)}{dt}$$

L'energia aumenta (e quindi la potenza viene assorbita) quando il valore assoluto della corrente ai capi del induttanza aumenta; l'energia diminuisce (e quindi la potenza viene erogata) quando il valore assoluto della induttanza ai capi del induttanza diminuisce.

Circuito RC

Un circuito del primo ordine è caratterizzato da un'equazione differenziale del primo ordine. I circuiti del primo ordine sono di due tipi: RL o RC.

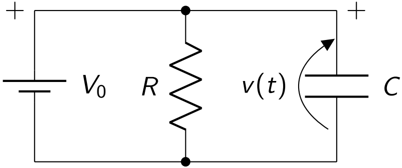


S è un **interruttore ideale**: si comporta come un circuito aperto quando è spento, e come un cortocircuito quando è acceso. L'interruttore S è acceso per $t < 0$, e viene spento all'istante $t = 0$.

Circuito RC

Per calcolare l'andamento nel tempo della tensione di uscita $v(t)$ si procede nel seguente modo:

- **interruttore acceso** per $t < 0$: dalla KVL alla maglia esterna si ricava la tensione di uscita $v(t) = V_0$



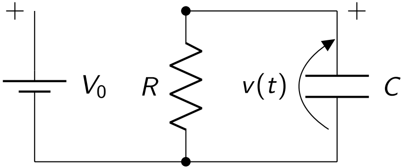
La corrente nel resistore è $i_R = \frac{V_0}{R}$. La carica immagazzinata nel condensatore è $q_C = CV_0$.

Circuito *RC*

- **interruttore spento** per $t \geq 0$: il generatore di tensione viene scollegato; per risolvere il circuito occorre scrivere la KCL al nodo di uscita contrassegnato con il segno $(+)$.

$$i_R(t) + i_C(t) = 0$$

dove $i_R(t)$ è la corrente nel resistore R e $i_C(t)$ è la corrente nel condensatore C.



Dalla KCL $i_R(t) + i_C(t) = 0$, sostituendo $i_R(t) = \frac{v(t)}{R}$ e $i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$, si ricava l'equazione differenziale:

$$\frac{v(t)}{R} + C\frac{dv(t)}{dt} = 0$$

Circuito RC

La tensione ai capi del condensatore deve essere una funzione continua nel tempo (perché in caso contrario dovremmo avere una corrente infinita, che è fisicamente impossibile). Quindi abbiamo la condizione iniziale $v(0+) = v(0-) = V_0$, e il **problema di Cauchy**:

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} v(t) \\ v(0) = V_0 \end{cases}$$

si risolve facilmente separando le variabili v e t:

$$\frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{dt}{RC}$$

Circuito RC

$$\frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{dt}{RC}$$

si risolve integrando a partire dalla condizione iniziale:

$$\int_{V_0}^{v(t)} \frac{dv(t)}{v(t)} = -\int_0^t \frac{dt}{RC}$$

Poiché $\int \frac{dv}{v} = \ln v$, si ottiene:

$$\ln v\Big|_{V_0}^{v(t)} = -\frac{t}{RC}\Big|_0^t$$

cioè

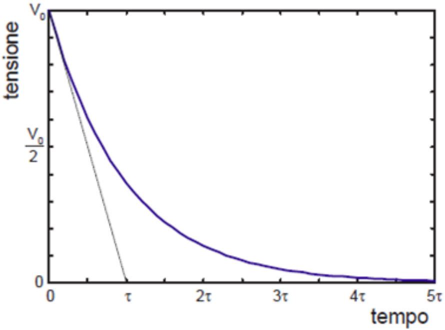
$$\ln \frac{v(t)}{V_0} = -\frac{t}{RC}$$

Calcolando l'esponenziale di entrambi i membri, si ha la soluzione:

$$v(t) = V_0 e^{\frac{-t}{RC}}$$

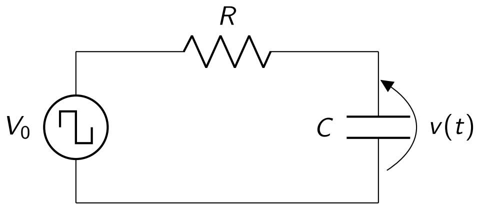
Circuito *RC*

$$v(t) = V_0 e^{\frac{-t}{RC}}$$



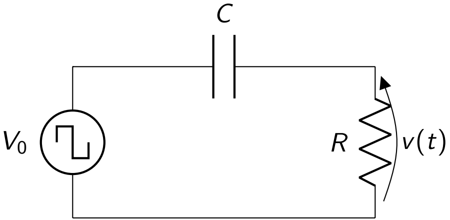
Nella soluzione del circuito RC, il prodotto RC prende il nome di costante di tempo e si indica con τ e si misura in secondi: $\tau = RC$. Geometricamente, la costante di tempo è l'intersezione della tangente alla curva $v(t)$ per $t = 0$ con l'asse dei tempi t.

Laboratorio (1)



1. Scegliere valori opportuni dei componenti R e C, in modo da avere una costante di tempo $\tau = 15\,\mu s$ (o altro valore a piacere).
2. Calcolare la frequenza caratteristica $f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$.
3. Applicare in ingresso un'onda quadra con frequenza molto inferiore alla frequenza caratteristica (ad esempio, $\approx \frac{1}{10} f_c$) e confrontare sull'oscilloscopio le forme d'onda in ingresso e in uscita.
4. Abilitare i cursori dell'oscilloscopio, misurare la pendenza massima del segnale di uscita e ricavare sperimentalmente la costante di tempo.
5. Applicare in ingresso un'onda quadra con frequenza molto maggiore della frequenza caratteristica (ad esempio, $\approx 10 f_c$) e confrontare sull'oscilloscopio le forme d'onda in ingresso e in uscita.

Laboratorio (2)



1. Modificare il circuito, usando gli stessi valori di R e di C.
2. Applicare in ingresso un'onda quadra con frequenza molto inferiore alla frequenza caratteristica (ad esempio, $\approx \frac{1}{10} f_c$) e confrontare sull'oscilloscopio le forme d'onda in ingresso e in uscita.
3. Abilitare i cursori dell'oscilloscopio, misurare la pendenza massima del segnale di uscita e ricavare sperimentalmente la costante di tempo.
4. Applicare in ingresso un'onda quadra con frequenza molto maggiore della frequenza caratteristica (ad esempio, $\approx 10 f_c$) e confrontare sull'oscilloscopio le forme d'onda in ingresso e in uscita.