Laboratorio di Elettronica
Lezione 3:
Trasformata di Fourier; risposta in frequenza e diagrammi di Bode

Valentino Liberali, Alberto Stabile

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
Dipartimento di Fisica "Aldo Pontremoli"

E-mail: valentino.liberali@unimi.it, alberto.stabile@unimi.it

Milano, 6-7 aprile 2022

1. Segnali periodici e serie di Fourier
2. Trasformata di Fourier
3. Proprietà della trasformata di Fourier
4. Impedenza complessa
5. Risposta in frequenza
6. Diagrammi di Bode
7. Esempi: circuiti *RC* passa-basso e passa-alto

Notazione

- Lettere minuscole: indicano i **segnali in funzione del tempo**; ad esempio

$$v = v(t); i = i(t)$$

- Lettere maiuscole: indicano i **segnali in funzione della frequenza**; ad esempio

$$V = V(f); I = I(f)$$

- x indica un generico segnale in funzione del tempo (tensione o corrente)
- X indica un generico segnale in funzione della frequenza (tensione o corrente)
- Pedici (minuscoli): i = input (ingesso); o = output (uscita); ad esempio, X_i indica il segnale di ingresso in funzione della frequenza
- L'unità immaginaria viene indicata con j (perché i indica la corrente nel tempo):

$$j = \sqrt{-1}$$

Periodo e frequenza di un segnale periodico

Un segnale è periodico quando si ripete identicamente dopo un intervallo di tempo T, detto **periodo**:

$$x(t+T) = x(t), \forall t$$

L'inverso del periodo è la **frequenza**:

$$f = \frac{1}{T}$$

Dimensionalmente, la frequenza è l'inverso di un tempo e si misura in hertz (Hz). Per un moto rotatorio, la frequenza f è legata alla **velocità angolare** ω dalla relazione: $\omega = 2\pi f$. La velocità angolare si misura in radianti al secondo (rad/s). Poiché l'angolo giro è pari a 2π rad, risulta: 1 Hz $=$ 1 giro/s $= 2\pi$ rad/s.

Segnali periodici e serie di Fourier (1/2)

Ogni segnale $x(t)$ periodico con periodo $T = \frac{1}{f_0}$ può essere espresso come **serie di Fourier**:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2k\pi f_0 t + b_k \sin 2k\pi f_0 t)$$

dove

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos 2k\pi f_0 t \; dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin 2k\pi f_0 t \; dt$$

La serie di Fourier permette di esprimere una funzione periodica attraverso un **numero discreto di parametri**, che sono le ampiezze delle componenti cosinusoidali (a_k) e sinusoidali (b_k) alla frequenza fondamentale (f_0) e alle frequenze multiple (kf_0).

Formule di Eulero per seno, coseno ed esponenziale

Usando i numeri complessi, è possibile scrivere la funzione esponenziale come combinazione delle funzioni seno e coseno, e viceversa (formule di Eulero):

$$e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j\sin\vartheta$$

$$\cos\vartheta = \frac{e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta}}{2}$$

$$\sin\vartheta = \frac{e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}}{2j}$$

Nel dominio complesso, la funzione e^z è periodica, con periodo $j2\pi$.

Segnali periodici e serie di Fourier (2/2)

Usando le formule di Eulero per seno e coseno, la serie di Fourier può essere scritta in forma complessa:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \; e^{j2k\pi f_0 t}$$

dove

$$c_k = c^*_{-k} = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \; e^{-j2k\pi f_0 t} \; dt$$

I termini a_k, b_k e c_k sono detti **coefficienti di Fourier**. Ovviamente, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, mentre $c_k \in \mathbb{C}$.

Trasformata di Fourier (1/5)

La serie di Fourier è definita solo per segnali periodici. Tuttavia, la somma di due funzioni periodiche può essere non periodica: ad esempio $x(t) = \sin 2\pi f_1 t + \sin 2\pi\sqrt{2} f_1 t$ non è periodica pur essendo una combinazione lineare di funzioni periodiche, una con frequenza fondamentale f_1 e l'altra con frequenza fondamentale $\sqrt{2} f_1$.
Una funzione come $x(t)$, non periodica ma ottenuta come combinazione di due funzioni periodiche, è detta *2-periodica*.

Quindi non sempre si può scrivere sotto forma di serie di Fourier la funzione ottenuta dalla somma di funzioni esprimibili come serie di Fourier.

Trasformata di Fourier (2/5)

Un segnale non periodico può essere considerato come un segnale periodico avente $T \to \infty$ e $f_0 \to 0$. Con questo espediente, l'analisi di Fourier può essere generalizzata al caso non periodico, sostituendo la sommatoria con l'integrale:

$$X(f) = \mathscr{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi ft}\ dt$$

Questa è la definizione della **trasformata di Fourier**, ed è valida per tutti quei segnali $x(t)$ per cui l'integrale esiste.

Trasformata di Fourier (3/5)

$$X(f) = \mathscr{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi ft}\ dt$$

$x(t)$ è una funzione del tempo t, $X(f)$ è una funzione della frequenza f.
Indichiamo con $\mathscr{F}$ l'operatore che trasforma $x(t)$ in $X(f)$:

$$x(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X(f)$$

Osservazione: La trasformata di Fourier $X(f)$ ha la dimensione di $x(t)$ moltiplicata per un tempo. Ad esempio, se $x(t)$ è una tensione espressa in volt (V), $X(f)$ è in volt secondi (V $\cdot$ s).

Trasformata di Fourier (4/5)

Dalla funzione $X(f)$ si ottiene ancora $x(t)$ per mezzo dell'**antitrasformata di Fourier**:

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ e^{j2\pi ft}\ df$$

Trasformata e antitrasformata di Fourier coincidono (tranne che per il segno meno nell'esponenziale) e possiamo parlare di **coppie** di trasformate di Fourier, denotandole nel modo seguente:

$$x(t) \xleftrightarrow[\mathscr{F}^{-1}]{\mathscr{F}} X(f)$$

o, più semplicemente:

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

Trasformata di Fourier (5/5)

Nota: alcuni testi definiscono la trasformata di Fourier come l'operatore che trasforma una funzione del tempo t in una funzione della *frequenza angolare* (o *velocità angolare*) $\omega = 2\pi f$. Con questa definizione, la trasformata è:

$$X(\omega) = \mathscr{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j\omega t}\ dt$$

mentre l'antitrasformata è:

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}(X(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\ e^{j\omega t}\ d\omega$$

Nel seguito, useremo sempre $X(f)$.

Trasformata di Fourier: proprietà (1/4)

Linearità:

$$x_1(t) + x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) + X_2(f)$$

$$kx(t) \longleftrightarrow kX(f)$$

Cambio di scala:

$$x(kt) \longleftrightarrow \frac{1}{k}\, X\left(\frac{f}{k}\right)$$

Traslazione nel tempo:

$$x(t + t_0) \longleftrightarrow e^{j2\pi f t_0} X(f)$$

Traslazione in frequenza (o modulazione):

$$e^{-j2\pi f_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(f + f_0)$$

Trasformata di Fourier: proprietà (2/4)

Moltiplicazione e convoluzione:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) * X_2(f)$$

$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) \cdot X_2(f)$$

L'operazione di **convoluzione** tra due segnali è definita come:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\ d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tau) \cdot x_2(\tau)\ d\tau$$

Trasformata di Fourier: proprietà (3/4)

Derivazione:

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f X(f)$$

Integrazione:

$$\int x(t)\ dt \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f)$$

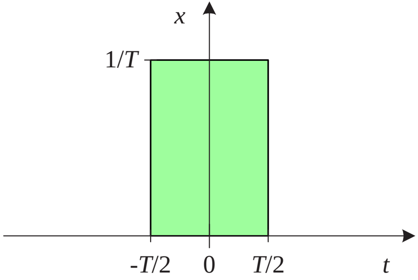
Le due ultime relazioni permettono di trasformare un'**equazione differenziale o integrale** nel dominio del tempo in un'**equazione algebrica** nel dominio della frequenza.

Trasformata di Fourier: proprietà (4/4)

$$
\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi ft}\ dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ (\cos 2\pi ft - j \sin 2\pi ft)\ dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ \cos 2\pi ft\ dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ \sin 2\pi ft\ dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
x(t) \text{ reale e pari} & \longleftrightarrow & X(f) \text{ reale e pari} \\
x(t) \text{ reale e dispari} & \longleftrightarrow & X(f) \text{ immaginaria e dispari}
\end{array}
$$

Esempio: calcolo della FT (1/4)



$$x(t) = A \operatorname{rect}\frac{t}{T} = \begin{cases} A & \text{se} -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il grafico di questa funzione è un rettangolo, la cui area è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ dt = AT$$

Esempio: calcolo della FT (2/4)

La trasformata di Fourier della funzione rettangolo è:

$$\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\ e^{-j2\pi ft}\ dt \\
&= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\ (\cos 2\pi ft - j \sin 2\pi ft)\ dt \\
&= A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos 2\pi ft\ dt \\
&= AT\ \frac{\sin \pi fT}{\pi fT} \\
&= AT\ \mathrm{sinc} fT
\end{aligned}$$

dove la funzione sinc è definita come: $\mathrm{sinc}\varphi = \frac{\sin \pi\varphi}{\pi\varphi}$

Esempio: calcolo della FT (3/4)

La trasformata della funzione sinc:

$$x(t) = A \operatorname{sinc} \frac{t}{T}$$

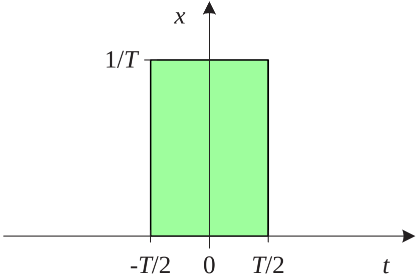
è la funzione rettangolo:

$$X(f) = AT \operatorname{rect} fT$$

La funzione delta di Dirac (1/3)

Consideriamo la funzione rettangolo con base T e altezza $\frac{1}{T}$:

$$x(t) = \frac{1}{T}\ \text{rect}\frac{t}{T} = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{se } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



L'area sottesa dal grafico di $x(t)$ è: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ dt = \frac{1}{T}\ T = 1$

La funzione delta di Dirac (2/3)

Per $T \to 0$, la funzione

$$x(t) = \frac{1}{T}\ \text{rect}\frac{t}{T} = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{se} - \frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

tende a coincidere con l'asse verticale: il grafico è un rettangolo, con la base tendente a zero e l'altezza tendente a infinito; l'area sotto il grafico ha sempre valore unitario.

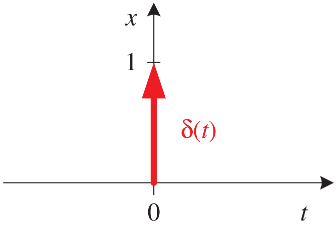
Definiamo la **funzione delta di Dirac** $\delta(t)$ come il limite della funzione rettangolo per $T \to 0$:

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} \text{rect}\ \frac{t}{T}$$

La funzione delta di Dirac (3/3)

La delta di Dirac $\delta(t)$ non è una funzione in senso classico, perché, pur essendo nulla per ogni $t \neq 0$, il suo integrale è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$



Dimensionalmente, la funzione delta di Dirac $\delta(t)$ è l'inverso di un tempo.

La funzione delta di Dirac (4/4)

La trasformata di Fourier della funzione delta di Dirac $\delta(t)$ si ottiene dalla trasformata del rettangolo ponendo $T \to 0$ e $AT = 1$:

$$\mathscr{F}(\delta(t)) = \text{sinc } 0 = \lim_{T \to 0} \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} = 1$$

Viceversa, la trasformata di Fourier della costante 1 è la delta di Dirac:

$$\mathscr{F}(1) = \delta(f)$$

Trasformata di Fourier del coseno

La trasformata di un segnale cosinusoidale a frequenza f_0 è:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}(\cos 2\pi f_0 t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi f_0 t \; e^{-j2\pi f t} \; dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \; e^{-j2\pi f t} \; dt = \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f - f_0) t} \; dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f + f_0) t} \; dt \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \right)
\end{aligned}
$$

Trasformata di Fourier del seno

La trasformata di un segnale sinusoidale è:

$$\mathscr{F}(\sin 2\pi f_0 t) = \frac{-j}{2}\left(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right)$$

(si calcola in maniera analoga a quella del coseno)

Relazione tra serie e trasformata

La trasformata di Fourier di un segnale periodico è una sommatoria di funzioni delta di Dirac, le cui ampiezze corrispondono ai coefficienti complessi della serie di Fourier.

$$x(t) \text{ periodico in } t \longleftrightarrow X(f) \text{ discreto (campionato) in } f$$

$$x(t) \text{ discreto (campionato) in } t \longleftrightarrow X(f) \text{ periodico in } f$$

Impedenza complessa (1/6)

Applicando la trasformata di Fourier alle grandezze elettriche, si possono esprimere la tensione e la corrente nel dominio della frequenza:

$$V(f) = \mathscr{F}(v(t))$$

$$I(f) = \mathscr{F}(i(t))$$

Per una resistenza R, la legge di Ohm nel dominio della frequenza è:

$$V(f) = RI(f)$$

Impedenza complessa (2/6)

La relazione corrente-tensione per un'induttanza nel dominio del tempo è:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

e la relazione nel dominio della frequenza si ricava trasformando (e usando la formula per la derivata):

$$V(f) = j2\pi fLI(f)$$

Impedenza complessa (3/6)

Per un condensatore la relazione corrente-tensione è:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t)\, dt$$

e la relazione nel dominio della frequenza si ricava trasformando (e usando la formula per l'integrale):

$$V(f) = \frac{1}{j2\pi fC} I(f)$$

Impedenza complessa (4/6)

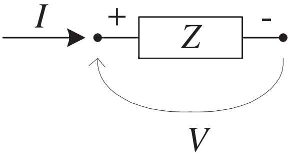
Dal confronto delle tre equazioni:

$$V(f) = RI(f)$$
$$V(f) = j2\pi fLI(f)$$
$$V(f) = \frac{1}{j2\pi fC} I(f)$$

si vede che è opportuno definire l'**impedenza complessa** $Z(f)$ (funzione della frequenza), in modo da poter scrivere, per tutti e tre i bipoli:

$$V(f) = Z(f)I(f)$$

Impedenza complessa (5/6)



$$V(f) = Z(f)I(f)$$

L'impedenza si misura in ohm (come la resistenza).

- Per un resistore, l'impedenza non dipende dalla frequenza: $Z(f) = R$.
- Per un'induttanza, l'impedenza è direttamente proporzionale alla frequenza: $Z(f) = j2\pi fL$.
- Per un condensatore, l'impedenza è inversamente proporzionale alla frequenza: $Z(f) = \frac{1}{j2\pi fC}$.

Impedenza complessa (6/6)

L'impedenza Z è una gradezza complessa; la sua parte reale è la **resistenza** R, mentre la parte immaginaria prende il nome di **reattanza** X:

$$Z = R + jX$$

Mentre la resistenza R può essere solo positiva (o nulla), la reattanza può essere positiva (come nel caso dell'induttanza) oppure negativa (come nel caso del condensatore).
Le impedenze in serie e in parallelo si combinano come le resistenze.
L'impedenza è lineare: per qualsiasi impedenza, un segnale di tensione sinusoidale alla frequenza f_0 produce un segnale di corrente sinusoidale alla stessa frequenza.

Ammettenza complessa

L'inverso dell'impedenza è l'**ammettenza** Y:

$$Y(f) = \frac{1}{Z(f)}$$

da cui risulta:

$$I(f) = Y(f)V(f)$$

L'ammettenza (che si misura in siemens) ha come parte reale la **conduttanza** G, mentre la parte immaginaria è la **suscettanza** B:

$$Y = G + jB$$

Risposta in frequenza (1/2)

Per un circuito lineare, la risposta ad un segnale sinusoidale in ingresso è sempre un segnale sinusoidale alla medesima frequenza.
La **risposta in frequenza** $H(f)$ di un circuito è definita come il rapporto tra i segnali di uscita e di ingresso nel dominio della frequenza.
Per un amplificatore di tensione:

$$H(f) = \frac{V_\mathrm{o}(f)}{V_\mathrm{i}(f)}$$

Solitamente, la risposta in frequenza (che è complessa) viene espressa sotto forma di **modulo** $|H(f)|$ e **fase** $\angle H(f)$ (cioè in coordinate polari nel piano complesso).

Risposta in frequenza (2/2)

In generale, indicando con $X_\mathrm{i}(f)$ e $X_\mathrm{o}(f)$ le trasformate di Fourier dei segnali in ingresso e in uscita da un circuito, la risposta in frequenza è:

$$H(f) = \frac{X_\mathrm{o}(f)}{X_\mathrm{i}(f)}$$

Se l'ingresso è unitario (nel dominio della frequenza), cioè se $X_\mathrm{i}(f) = 1$, allora l'uscita (nel dominio della frequenza) è $H(f)$.
Ricordando che $X_\mathrm{i}(f) = 1$ se $x_\mathrm{i}(t) = \delta(t)$, concludiamo che la risposta in frequenza $H(f)$ è la trasformata di Fourier della risposta all'impulso (o risposta impulsiva), che si indica con $h(t)$.

Risposta in frequenza

La risposta in frequenza di un sistema lineare $H(f)$ è una grandezza complessa, che varia con la frequenza f, e può essere scritta come:

$$H(f) = |H(f)|\, e^{j\angle H(f)}$$

dove $|H(f)|$ è il **modulo** o **ampiezza**, e $\angle H(f)$ è la **fase** o **sfasamento** (sia il modulo sia la fase dipendono da f).

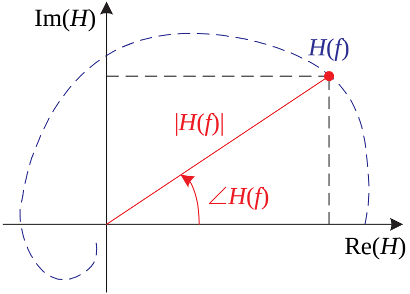


Diagramma di Nyquist (traiettoria di $H(f)$ nel piano complesso)

Guadagno in decibel

Il guadagno (cioè il modulo della risposta in frequenza) si misura di solito in **decibel**, che è la decima parte del **bel** (dal cognome di Alexander G. Bell).
Il guadagno in potenza si determina calcolando il rapporto tra la potenza assorbita da una resistenza di carico R nei due casi:

1. quando viene applicato il segnale di ingresso V_i, la potenza trasferita a R è:

$$P_1 = \frac{V_\mathrm{i}^2}{R}$$

2. quando alla resistenza viene applicato il segnale di uscita V_o: la relazione tra ingresso e uscita è $V_\mathrm{o} = HV_\mathrm{i}$, e la potenza trasferita a R è:

$$P_2 = \frac{V_\mathrm{o}^2}{R} = \frac{H^2 V_\mathrm{i}^2}{R}$$

Il guadagno in potenza è il **rapporto tra le potenze**:

$$G = \frac{P_2}{P_1}$$

Guadagno in decibel

$$G = \frac{P_2}{P_1}$$

Il guadagno G viene espresso in decibel, che è un'unità di misura in scala logaritmica:

$$G_{\mathrm{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

Il decibel è la decima parte del bel, ma il bel in pratica non si usa mai; siccome il guadagno di solito viene specificato con una precisione fino al decimo di bel, si usa il decibel per esprimerlo con numeri interi.
Anche la nostra percezione sensoriale è legata al **logaritmo** delle grandezze fisiche percepite; per questo motivo il decibel è un'unità di misura comoda, ad esempio, per esprimere il quadagno di un amplificatore audio.

Guadagno in decibel

$$G = \frac{P_2}{P_1}$$

Siccome $P_2 = \frac{V_\text{o}^2}{R}$ e $P_1 = \frac{V_\text{i}^2}{R}$, risulta:

$$G = \frac{RV_\text{o}^2}{RV_\text{i}^2} = \left(\frac{V_\text{o}}{V_\text{i}}\right)^2$$

e quindi

$$G_\text{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{V_\text{o}}{V_\text{i}}\right)^2 = 20\log_{10}\left(\frac{V_\text{o}}{V_\text{i}}\right) = 20\log_{10} H$$

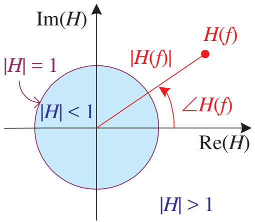
Attenzione: bisogna ricordare che passando dal rapporto tra due potenze al rapporto tra due **tensioni** *(o tra due* **correnti***) il guadagno in decibel si ottiene moltiplicando per 20 (e non per 10) il logaritmo del rapporto!*

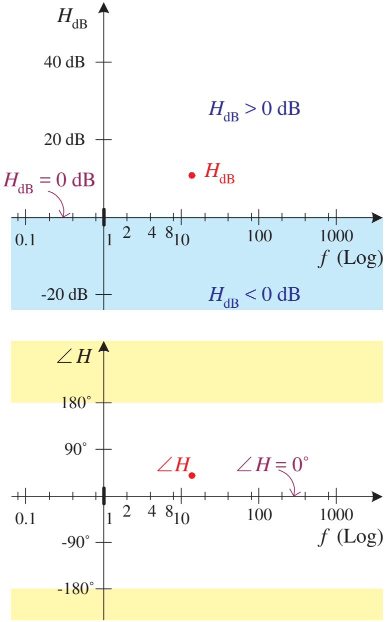
Diagrammi di Bode (1/4)

Per rappresentare graficamente $H(f)$, si usano i **diagrammi di Bode**:

- il diagramma di Bode dell'ampiezza (o modulo): in ascissa si riporta la frequenza f in scala logaritmica, in ordinata il modulo del guadagno in decibel (che è un'unità di misura logaritmica).
- il diagramma di Bode della fase (o sfasamento) in ascissa si riporta la frequenza f in scala logaritmica, in ordinata lo sfasamento (in radianti oppure in gradi).

Diagrammi di Bode (2/4)

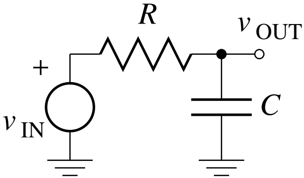




Diagrammi di Bode (3/3)

- Nel diagramma di Bode dell'ampiezza, l'uso della scala logaritmica permette di rappresentare con una retta sia la proporzionalità diretta, sia quella inversa.
- Di solito, l'asse delle frequenze è diviso in decadi, cioè in intervalli ai cui estremi la frequenza varia di un fattore 10.
- Più raramente, l'asse delle frequenze è diviso in ottave, cioè in intervalli ai cui estremi la frequenza varia di un fattore 2 (il termine "ottava" deriva dal fatto che tra il primo e l'ottavo tasto bianco del pianoforte la frequenza del suono è raddoppiata).
- La frequenza zero (cioè la continua) in scala logaritmica va a $-\infty$ sull'asse delle ascisse; il guadagno nullo corrisponde a $-\infty$ dB sull'asse delle ordinate.
- La fase non è univoca: aggiungendo o sottraendo 2π ($= 360^\circ$) il punto nel piano non cambia posizione. Nelle simulazioni con SPICE, la fase viene calcolata tra -180° e 180° (il risultato è in gradi).

Circuito *RC* passa-basso



Circuito *RC* passa-basso

Calcoliamo la corrente nella maglia, in funzione della frequenza:

$$I = \frac{V_{\text{in}}}{Z_R + Z_C} = \frac{V_{\text{in}}}{R + \frac{1}{j2\pi fC}} = \frac{V_{\text{in}} \cdot j2\pi fC}{1 + j2\pi fRC}$$

La tensione in uscita è:

$$V_{\text{out}} = Z_C I = \frac{1}{j2\pi fC} I = \frac{V_{\text{in}}}{1 + j2\pi fRC}$$

La risposta in frequenza è:

$$H(f) = \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

Circuito RC passa-basso

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} = \frac{1}{1 + j2\pi f\tau} = \frac{1}{1 + (2\pi f\tau)^2} - j\frac{2\pi f\tau}{1 + (2\pi f\tau)^2}$$

- A bassa frequenza ($f \to 0$) si ha $2\pi f\tau \ll 1$; quindi per $f = 0$ si ha: $H(0) = 1$, $H_{\mathrm{dB}}(0) = 0$ dB, e $\angle H(0) = 0$.
- Ad alta frequenza ($f \to \infty$) si ha $2\pi f\tau \gg 1$; quindi $H(f) \approx \frac{1}{j2\pi f\tau} = -j\frac{1}{2\pi f\tau}$ (il circuito si comporta come un *integratore approssimato*): $H(\infty) \to -j0$, $H_{\mathrm{dB}}(\infty) \to -\infty$ dB, e $\angle H(\infty) \to -\frac{\pi}{2}$.

Circuito *RC* passa-basso

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f\tau} = \frac{1}{1 + (2\pi f\tau)^2} - j\frac{2\pi f\tau}{1 + (2\pi f\tau)^2}$$

Nel piano complesso, la traiettoria di $H(f)$ al variare di f descrive una semicirconferenza nel IV quadrante, partendo da 1 e arrivando a 0.
Infatti, ponendo per semplicità $w = 2\pi f\tau$, la traiettoria di $H(f)$ è data dalle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \mathrm{Re}\{H(f)\} = \frac{1}{1+w^2} \\ y = \mathrm{Im}\{H(f)\} = -\frac{w}{1+w^2} \end{cases}$$

da cui $x^2 + y^2 = x$, che è la circonferenza di centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e raggio $\frac{1}{2}$, della quale dobbiamo considerare solo la metà inferiore perché $y \leq 0$.

Circuito *RC* passa-basso

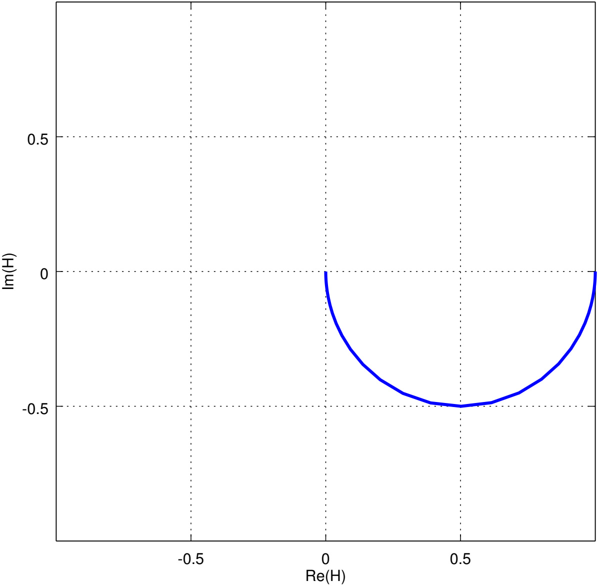
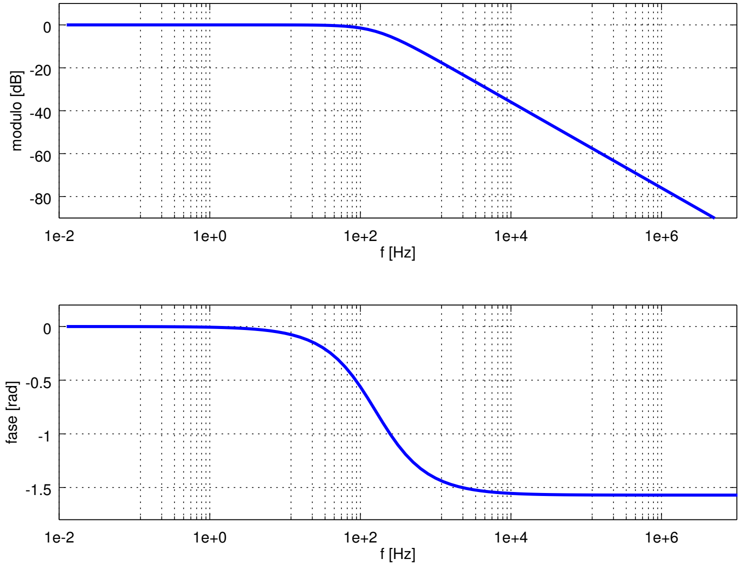


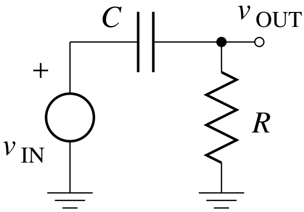
Diagramma di Nyquist del circuito *RC* passa-basso

Circuito *RC* passa-basso



Diagrammi di Bode (modulo e fase) del circuito *RC* passa-basso

Circuito RC passa-alto



Circuito RC passa-alto

Calcoliamo la corrente nella maglia, in funzione della frequenza:

$$I = \frac{V_{\text{in}}}{Z_C + Z_R} = \frac{V_{\text{in}}}{\frac{1}{j2\pi fC} + R} = \frac{V_{\text{in}} \cdot j2\pi fC}{1 + j2\pi fRC}$$

La tensione in uscita è:

$$V_{\text{out}} = RI = \frac{V_{\text{in}} \cdot j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC}$$

La risposta in frequenza è:

$$H(f) = \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC}$$

Circuito *RC* passa-alto

$$H(f) = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC} = \frac{j2\pi f\tau}{1 + j2\pi f\tau} = \frac{(2\pi f\tau)^2}{1 + (2\pi f\tau)^2} + j\frac{2\pi f\tau}{1 + (2\pi f\tau)^2}$$

- A bassa frequenza ($f \to 0$) si ha $2\pi f\tau \ll 1$; quindi $H(f) \to 0$ (il circuito si comporta come un *derivatore approssimato*). Per $f = 0$ si ha: $H(0) = 0$, $H_{\text{dB}}(0) = -\infty$ dB, e $\angle H(0) \to \frac{\pi}{2}$.
- Ad alta frequenza ($f \to \infty$) si ha $2\pi f\tau \gg 1$; quindi $H(\infty) \to 1$, $H_{\text{dB}}(\infty) \to 0$ dB, e $\angle H(\infty) \to 0$.

Circuito RC passa-alto

$$H(f) = \frac{j2\pi f\tau}{1 + j2\pi f\tau} = \frac{(2\pi f\tau)^2}{1 + (2\pi f\tau)^2} + j\frac{2\pi f\tau}{1 + (2\pi f\tau)^2}$$

Nel piano complesso, la traiettoria di $H(f)$ al variare di f descrive una semicirconferenza nel I quadrante, partendo da 0 e arrivando a 1.
(Si ricava scrivendo H in forma parametrica rispetto a $w = 2\pi f\tau$.)

Circuito RC passa-alto

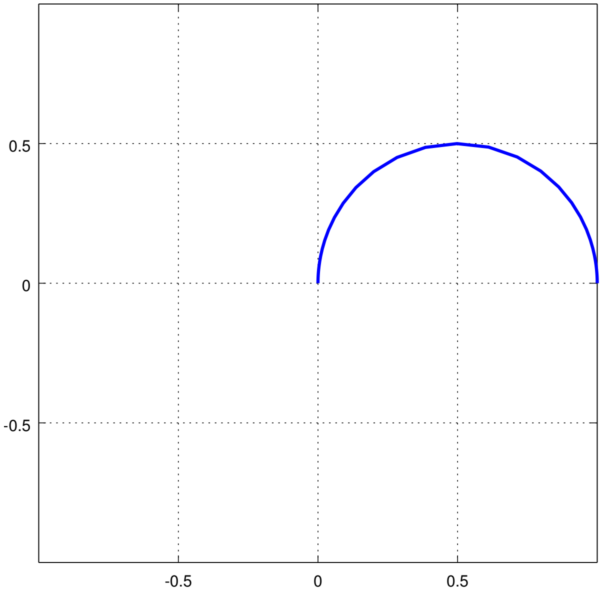
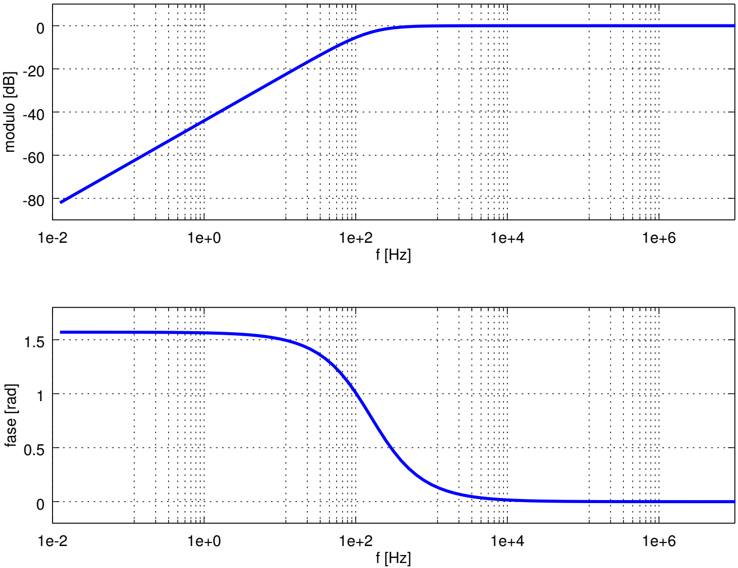


Diagramma di Nyquist del circuito RC passa-alto

Circuito *RC* passa-alto



Diagrammi di Bode (modulo e fase) del circuito *RC* passa-alto

Diagrammi di Bode ottenuti dalle misure all'oscilloscopio

Per ottenere sperimentalmente i digrammi di Bode della risposta in frequenza di un circuito, è necessario applicare un segnale di ingresso sinusoidale all'ingresso, e misurare le ampiezze delle tensioni di ingresso V_i e uscita V_o e il ritardo tra i due segnali Δt, misurato sulla scala dei tempi tra due attraversamenti dello zero.
Il modulo del guadagno in decibel è:

$$H_\mathrm{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{V_\mathrm{o}}{V_\mathrm{i}} \right)$$

mentre la fase φ si calcola dalla proporzione:

$$\varphi : 2\pi = \Delta t : T$$

da cui si ottiene

$$\varphi = 2\pi \Delta t \frac{1}{T} = 2\pi \Delta t \cdot f$$

Occorre notare che lo sfasamento è **positivo** quando il segnale di uscita attraversa lo zero **prima** del segnale di ingresso; mentre è **negativo** se il segnale di uscita attraversa lo zero **dopo** l'ingresso.