

Laboratorio di Elettronica

Lezione 8:

Algebra di Boole, porte logiche, circuiti aritmetici

Valentino Liberali, Alberto Stabile



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
Dipartimento di Fisica "Aldo Pontremoli"

E-mail: valentino.liberali@unimi.it, alberto.stabile@unimi.it

Milano, 25-26 maggio 2022

- 1 Algebra di Boole
- 2 XOR (OR esclusivo)
- 3 Somma aritmetica
- 4 Moltiplicazione
- 5 La serie 7400

Algebra di Boole (1/8)

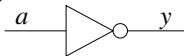
- VALORI:

- ▶ 1 = Alto = Vero
- ▶ 0 = Basso = Falso
- ▶ (ci sono estensioni a più di due valori)

- OPERAZIONI LOGICHE ELEMENTARI:

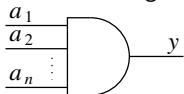
- ▶ NOT (negazione):

$$y = \bar{a} \iff y \text{ è vero se } a \text{ è falso, e viceversa}$$



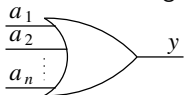
- ▶ AND (prodotto logico):

$$y = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \iff y \text{ è vero se tutti gli } a_i \text{ sono veri, altrimenti è falso}$$



- ▶ OR (somma logica):

$$y = a_1 + a_2 + \dots + a_n \iff y \text{ è falso se tutti gli } a_i \text{ sono falsi, altrimenti è vero}$$

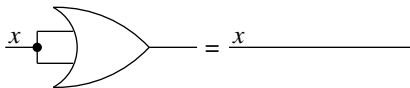


Algebra di Boole (2/8)

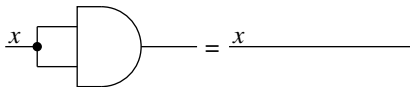
- PROPRIETÀ FONDAMENTALI:

- ▶ Idempotenza:

$$x + x = x$$

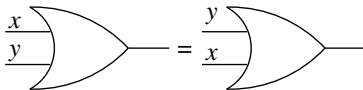


$$x \cdot x = x$$

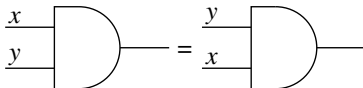


- ▶ Proprietà commutativa:

$$x + y = y + x$$



$$x \cdot y = y \cdot x$$

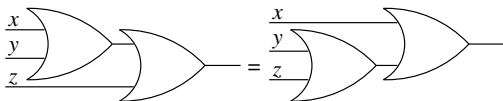


Algebra di Boole (3/8)

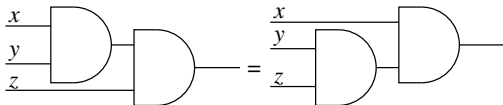
- PROPRIETÀ FONDAMENTALI (segue):

- Proprietà associativa:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

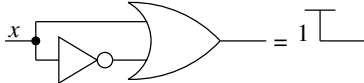


$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

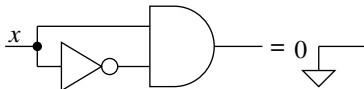


- Complementazione:

$$x + \bar{x} = 1$$



$$x \cdot \bar{x} = 0$$

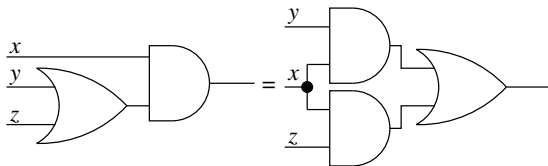


Algebra di Boole (4/8)

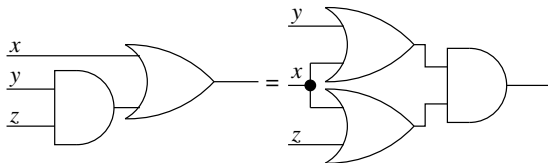
- PROPRIETÀ FONDAMENTALI (segue):

- Proprietà distributiva :

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$



$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

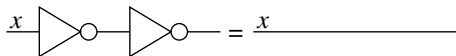


Algebra di Boole (5/8)

- PROPRIETÀ FONDAMENTALI (segue):

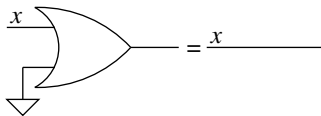
- Ricorsività della negazione:

$$\overline{(\overline{x})} = x$$

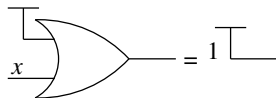


- Proprietà di assorbimento:

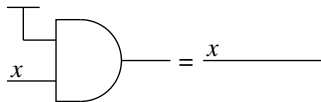
$$x + 0 = x$$



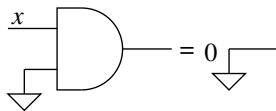
$$x + 1 = 1$$



$$x \cdot 1 = x$$

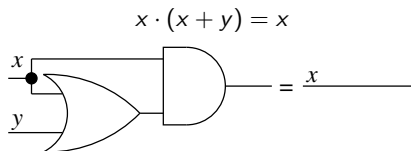
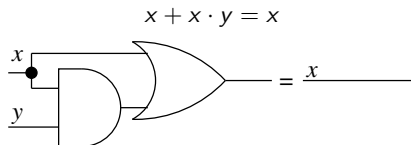


$$x \cdot 0 = 0$$



Algebra di Boole (6/8)

- PROPRIETÀ FONDAMENTALI (segue):

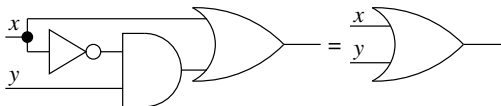


Algebra di Boole (7/8)

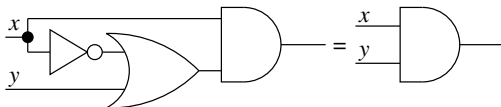
- PROPRIETÀ FONDAMENTALI (segue):



$$x + \bar{x} \cdot y = x + y$$



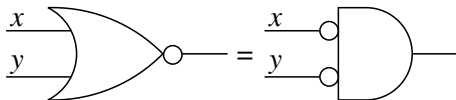
$$x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot y$$



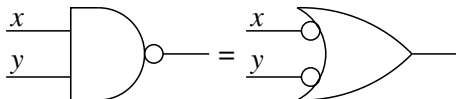
Algebra di Boole (8/8)

- TEOREMA DI DE MORGAN:

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$



$$\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = \bar{\bar{x}} + \bar{\bar{y}}$$

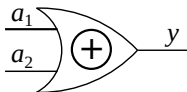


- DUALITÀ:

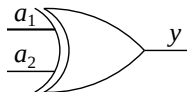
$$\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 1, +, \cdot) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, 1, 0, \cdot, +)$$

XOR (OR esclusivo)

$y = a_1 \oplus a_2 \iff y$ è vero se solo uno tra a_1 e a_2 è vero, altrimenti è falso



oppure



- Tabella della verità:

| a_1 | a_2 | y |
|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

- Funzione booleana:

$$y = a_1 \oplus a_2 = a_1 \cdot \overline{a_2} + \overline{a_1} \cdot a_2 = \overline{\overline{a_1 \cdot \overline{a_2}} \cdot \overline{\overline{a_1} \cdot a_2}}$$

(si può ottenere con porte NAND e NOT)

Half-adder (semisommatore) - 1/2

La somma aritmetica è diversa dalla somma logica.

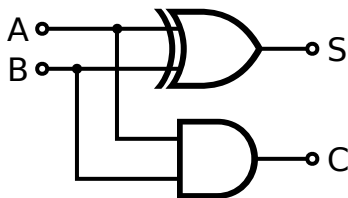
Infatti, mentre la somma logica è la semplice operazione OR, che produce in uscita un solo bit, la somma aritmetica di due bit a e b produce un risultato con due bit: il bit di somma s e il bit di riporto c (*carry*).

Il bit di somma s è 1 se uno e uno solo dei due addendi è 1:

$$s = a \oplus b$$

mentre il riporto c è 1 se entrambi gli addendi sono 1:

$$c = a \cdot b$$



(da Wikipedia)

Half-adder (semisommatore) - 2/2

Tabella della verità:

| <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>s</i> |
|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Calcolando prima il riporto c , la funzione booleana della somma s si può scrivere in un modo più semplice, che non richiede l'impiego della porta XOR:

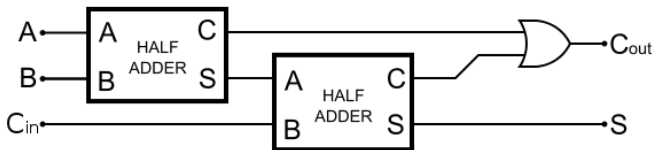
$$s = (a + b) \cdot \bar{c} = \overline{\overline{(a + b)} + c}$$

(si può ottenere solo con porte NOR)

Full-adder (sommatore) - 1/3

Nella somma aritmetica di numeri a più bit, bisogna tenere conto anche del bit di riporto proveniente dalla somma del bit precedente.

Un sommatore completo (o *full-adder*) riceve in ingresso tre bit a , b e c_{in} e produce un risultato con due bit: il bit di somma s e il bit di riporto c_{out} .



Il sommatore può essere realizzato con due semisommatori e una porta OR.

Full-adder (sommatore) - 2/3

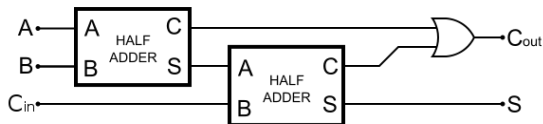
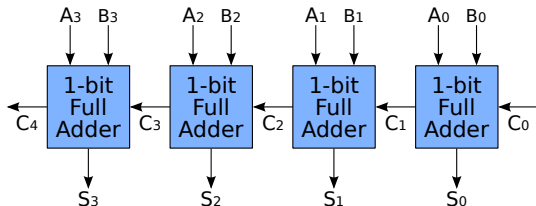


Tabella della verità:

| <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c_{in}</i> | <i>C_{out}</i> | <i>s</i> |
|----------|----------|-----------------------|------------------------|----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Sommando numeri a più bit, la somma viene eseguita partendo dal bit meno significativo (a destra), come nelle somme eseguite a mano.



(da Wikipedia)

Full-adder (sommatore) - 3/3

Se i semisommatori sono fatti con porte logiche XOR, si ha lo schema equivalente illustrato in figura.

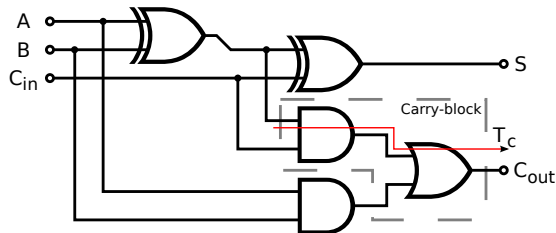


Tabella della verità:

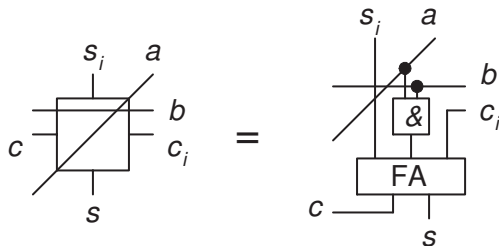
| <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> _{in} | <i>C</i> _{out} | <i>s</i> |
|----------|----------|------------------------|-------------------------|----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Moltiplicazione - 1/2

Il prodotto aritmetico tra due bit coincide con il prodotto logico.

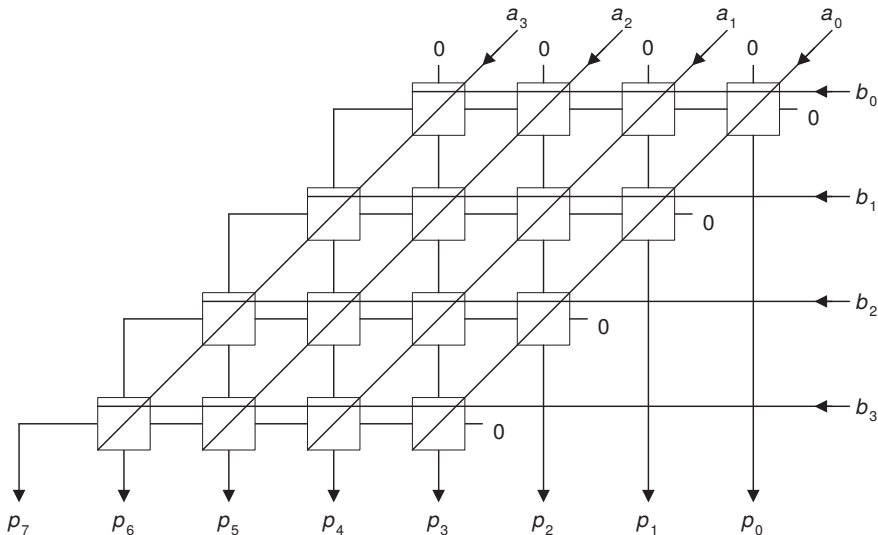
Quindi il prodotto tra due bit può essere ottenuto con una semplice porta AND (indicata con "&") nella figura.

Inoltre, occorre un full-adder per sommare i prodotti parziali lungo la colonna (dall'alto verso il basso).



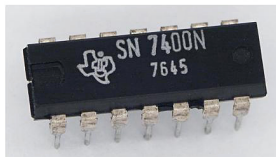
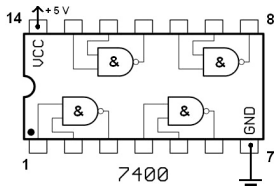
Moltiplicazione - 2/2

Il prodotto tra numeri a più bit si effettua incolonnando i prodotti parziali (come quando si esegue a mano una moltiplicazione tra due numeri con più cifre).



Circuiti integrati: serie 7400

La serie 7400 è stata una delle più famose famiglie logiche, con numerosi circuiti integrati (molti erano a 14 pin) che contenevano diverse porte logiche.



Circuito integrato 7400 della Texas Instruments, contenente 4 porte NAND
(da Wikipedia)

Per un elenco dei circuiti integrati della famiglia 7400, si veda
en.wikipedia.org/wiki/List_of_7400-series_integrated_circuits
Alcuni di questi (i più semplici) possono essere provati su Tinkercad.

Esercizi

Verificare il funzionamento delle porte logiche:

- 1 Inverter
- 2 NOR
- 3 NAND
- 4 OR
- 5 AND
- 6 XOR (come insieme di più porte logiche elementari)
- 7 Half Adder (<https://it.wikipedia.org/wiki/Half-adder>)