

# Formulario di Campi Elettromagnetici

Lorenzo Rossi

Anno Accademico 2019/2020

Email: [lorenzo14.rossi@mail.polimi.it](mailto:lorenzo14.rossi@mail.polimi.it)

GitHub: <https://github.com/lorossi>

Quest'opera è distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione

Non commerciale 4.0 Internazionale 

Versione aggiornata al 10/02/2020

# Indice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Riguardo al formulario</b>                                     | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Richiami di base</b>   | <b>1</b>  |
| 2.1      | Trigonometria . . . . .   | 1         |
| 2.2      | Numeri complessi . . . . .  | 2         |
| 2.3      | Numeri complessi con una calcolatrice Casio . . . . .             | 2         |
| 2.3.1    | Calcolo delle radici . . . . .                                    | 2         |
| 2.3.2    | Conversione da forma cartesiana a forma polare . . . . .          | 2         |
| 2.3.3    | Conversione da forma polare a forma cartesiana . . . . .          | 2         |
| 2.4      | Decibel e Neper . . . . .   | 3         |
| 2.5      | Teoremi fondamentali . . . . .                                    | 4         |
| 2.6      | Sistemi di coordinate . . . . .                                   | 4         |
| 2.7      | Operatori differenziali . . . . .                                 | 4         |
| 2.8      | Equazioni di Maxwell nel vuoto . . . . .                          | 5         |
| <b>3</b> | <b>Metodo delle cariche immagine</b>                              | <b>6</b>  |
| 3.1      | Caso particolare: sfera conduttrice e carica a distanza . . . . . | 6         |
| <b>4</b> | <b>Elettrostatica</b>   | <b>7</b>  |
| 4.1      | Campo Elettrico . . . . .   | 7         |
| 4.1.1    | Interfaccia tra due mezzi . . . . .                               | 7         |
| 4.2      | Capacità elettrica . . . . .                                      | 8         |
| 4.3      | Corrente elettrica / Legge di Ohm . . . . .                       | 8         |
| <b>5</b> | <b>Magnetostatica</b>   | <b>9</b>  |
| 5.1      | Campo Magnetico . . . . .   | 9         |
| 5.1.1    | Campo Magnetico nei materiali . . . . .                           | 9         |
| 5.1.2    | Interfaccia tra due mezzi . . . . .                               | 10        |
| 5.2      | Resistenza elettrica / Legge di Joule . . . . .                   | 10        |
| <b>6</b> | <b>Regime dinamico</b>  | <b>11</b> |
| 6.1      | Teorema di Poynting . . . . .                                     | 11        |
| <b>7</b> | <b>Onde Piane</b>   | <b>11</b> |
| 7.1      | Polarizzazione . . . . .  | 12        |
| 7.2      | Incidenza delle onde . . . . .                                    | 12        |
| 7.2.1    | Incidenza normale su discontinuità piana . . . . .                | 12        |
| 7.2.2    | Incidenza non normale . . . . .                                   | 13        |
| 7.2.3    | Trasmissione totale . . . . .                                     | 13        |
| 7.3      | Mezzi attraversati dalle onde . . . . .                           | 14        |
| 7.3.1    | Mezzo senza perdite . . . . .                                     | 14        |
| 7.3.2    | Buon conduttore . . . . .   | 14        |
| <b>8</b> | <b>Linee di trasmissione</b>                                      | <b>15</b> |
| 8.1      | Linee TEM . . . . .   | 15        |
| 8.1.1    | Potenza ed energia in una linea . . . . .                         | 15        |
| 8.1.2    | Corrente e tensione in una linea non attenuativa . . . . .        | 15        |
| 8.1.3    | Cavo coassiale . . . . .  | 16        |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| 8.1.4     | Linea a conduttori piani paralleli . . . . .                 | 16        |
| 8.1.5     | Linea Bifilare . . . . .                                     | 17        |
| 8.2       | Linee quasi TEM - dielettrico non omogeneo . . . . .         | 17        |
| 8.3       | Modi TE/TM nella guida d'onda rettangolare . . . . .         | 18        |
| <b>9</b>  | <b>Adattamento di impedenza</b>                              | <b>19</b> |
| 9.1       | Strutture adattanti . . . . .                                | 19        |
| 9.1.1     | Trasformatore lambda-quarti . . . . .                        | 19        |
| 9.1.2     | Trasformatore lambda-quarti con neutralizzazione . . . . .   | 19        |
| 9.1.3     | Stub semplice . . . . .                                      | 19        |
| 9.1.4     | Stub doppio . . . . .  | 20        |
| 9.2       | Linea attenuativa . . . . .                                  | 21        |
| 9.3       | Potenza, tensione e corrente in una linea adattata . . . . . | 21        |
| 9.3.1     | Tensione e corrente in uno stub c.c. . . . .                 | 22        |
| 9.3.2     | Tensione e corrente in uno stub c.a. . . . .                 | 22        |
| 9.4       | Note sulla Carta di Smith . . . . .                          | 22        |
| <b>10</b> | <b>Antenne</b>   | <b>23</b> |
| 10.1      | Dipolo Hertziano . . . . .                                   | 23        |
| 10.1.1    | Dipoli Hertziani trasmettenti in gruppo . . . . .            | 24        |
| 10.2      | Spira magnetica . . . . .                                    | 24        |
| 10.3      | Nastro di corrente . . . . .                                 | 24        |
| 10.4      | Solenoide . . . . .  | 24        |
| 10.5      | Confronto tra spira e solenoide . . . . .                    | 25        |
| 10.6      | Note sugli esercizi . . . . .                                | 25        |

# 1 Riguardo al formulario

Quest'opera è distribuita con Licenza Creative Commons - Attribuzione Non commerciale 4.0 Internazionale 

Questo formulario verrà espanso (ed, eventualmente, corretto) periodicamente fino a fine corso (o finché non verrà ritenuto completo).

Link repository di GitHub: <https://github.com/lorossi/formulario-campi-elettromagnetici>

L'ultima versione può essere scaricata direttamente cliccando [su questo link](#).

## 2 Richiami di base

### 2.1 Trigonometria

- Teorema di Carnot  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$  con  $\alpha$  angolo compreso tra  $b$  e  $c$
- Formule di duplicazione

$$- \text{Seno } \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x), \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$- \text{Coseno } \cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1, \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

- Formule di addizione

$$- \text{Seno } \sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$- \text{Coseno } \cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$- \text{Tangente } \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

- Formule di Werner

$$- \sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$- \cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$- \sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

- Formule di bisezione

$$- \text{Seno } \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$$

$$- \text{Coseno } \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$$

$$- \text{Tangente } \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$$

- Formula di Eulero

$$- \text{Seno } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$- \text{Coseno } \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

- Approssimazioni (Taylor)

- **Ipotesi:**  $\theta \rightarrow 0$
- Seno  $\sin(\theta) \approx \theta$
- Coseno  $\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$
- Tangente  $\tan(\theta) \approx \theta$

## 2.2 Numeri complessi

- Radice quadrata di numeri complessi  $z \in \mathbb{C}$ ,  
 $z = \alpha + j\beta = re^{j\theta} \rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$   
con  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
- Parte reale di un numero complesso  $x \in \mathbb{C}$ ,  $Re[x] = \frac{x + x^*}{2}$
- Inverso della parte reale: siano  $z = \alpha + j\beta$ ,  $y = \frac{1}{z} \rightarrow Re(y) \neq \frac{1}{\alpha}$ ,  $Re(y) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$
- Somma dei moduli: siano  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \rightarrow |z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$

## 2.3 Numeri complessi con una calcolatrice Casio

Assicurarsi di essere in modalità **COMPLEX** prima di eseguire tutti questi calcoli.

### 2.3.1 Calcolo delle radici

Il calcolo di una espressione del tipo  $\sqrt{a + bi}$  darà origine ad un *MATH ERROR*.

- Radice quadrata  $\sqrt{\text{Abs}(\text{ANS})} \angle (\arg(\text{ANS}) \div 2)$
- Radice cubica  $\sqrt[3]{\text{Abs}(\text{ANS})} \angle (\arg(\text{ANS}) \div 3)$
- Radice N-esima  $(\text{Abs}(\text{ANS}))^{1/N} \angle (\arg(\text{ANS}) \div N)$

### 2.3.2 Conversione da forma cartesiana a forma polare

.

1. Scrivere il numero in forma cartesiana (ossia  $a + ib$ )
2. Premere =
3. Premere shift + option  $\rightarrow$  frecciagiu  $\rightarrow 1 \rightarrow$  =

### 2.3.3 Conversione da forma polare a forma cartesiana

1. Scrivere il numero in forma cartesiana (ossia  $\rho \angle \theta$ )
2. Premere =
3. Premere shift + option  $\rightarrow$  frecciagiu  $\rightarrow 2 \rightarrow$  =

## 2.4 Decibel e Neper

- Decibel
  - Adimensionali
    - \* Ampiezza, tensione, campo, ...  $x_{dB} = 20 \log \left( \frac{x}{x_0} \right)$
    - \* Potenza, densità di potenza, ...  $x_{dB} = 10 \log \left( \frac{x}{x_0} \right)$
    - \*  $x_0$  è un valore di riferimento
  - Potenza
    - \*  $1dBw = 10 \log \left( \frac{P}{1w} \right)$
    - \*  $1dBm = 10 \log \left( \frac{P}{1mw} \right)$
  - Ampiezza
    - \*  $1dBV = 20 \log \left( \frac{P}{1V} \right)$
    - \*  $1dB\mu V = 20 \log \left( \frac{P}{1\mu V} \right)$
  - Rumore
    - \*  $P_S - P_C = 10 \log \left( \frac{S}{C} \right)$
    - \*  $S$  segnale di rumore,  $C$  onda portante (carrier),  $P_S$  e  $P_C$  le loro rispettive potenze
- Neper: si usa il logaritmo naturale ( $\ln$ ) al posto del logaritmo in base 10 ( $\log$ ).
- Conversione
  - Neper  $\rightarrow$  Decibel  $\alpha_{dB} = \alpha_{Np} \cdot 8.686$
  - Decibel  $\rightarrow$  Neper  $\alpha_{Np} = \frac{\alpha_{dB}}{8.686}$

## 2.5 Teoremi fondamentali

- Teorema di Stokes (rotore)
  - Si applica a campi vettoriali su una linea chiusa orientabile ed orientata in modo coerente alla normale della superficie tramite regola della mano destra
  - $$\oint_s \vec{F} \times d\vec{l} = \iint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} d\Omega$$
- Teorema di Gauss (divergenza)
  - Si applica ad un campo vettoriale su una superficie chiusa semplice ed orientata con bordo regolare  $\Omega$
  - $$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} d\Omega = \iint_{\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Omega} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS$$

## 2.6 Sistemi di coordinate

- Coordinate cartesiane
  - Elemento di spostamento infinitesimo  $d\vec{l} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$
  - Elemento di volume  $dV = dxdydz$
- Coordinate cilindriche
  - Elemento di spostamento infinitesimo  $d\vec{l} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\phi\vec{u}_\phi + dz\vec{u}_z$
  - Elemento di volume  $dV = \rho d\rho d\phi dz$
- Coordinate polari
  - Elemento di spostamento infinitesimo  $d\vec{l} = dr\vec{u}_r + R d\theta\vec{u}_\theta + R \sin(\theta) d\phi\vec{u}_\phi$
  - Elemento di volume  $dV = R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi dR$

## 2.7 Operatori differenziali

- Gradiente
  - campo scalare  $\rightarrow$  campo vettoriale
  - $$\nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{u}_z$$
- Divergenza
  - campo vettoriale  $\rightarrow$  campo scalare
  - $$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$
- Rotore
  - campo vettoriale  $\rightarrow$  campo vettoriale
  - $$\nabla \times \vec{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

## 2.8 Equazioni di Maxwell nel vuoto

1. Legge di Gauss elettrica  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
2. Legge di Gauss magnetica  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
3. Legge di Faraday  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4. Legge di Ampere-Maxwell  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$



### 3 Metodo delle cariche immagine

Il vantaggio di questo metodo è la semplicità della sua applicazione rispetto alla più analiticamente dispendiosa sovrapposizione degli effetti. Per calcolare il campo elettrico di una carica (o più) in un punto del piano, in presenza di un conduttore, si dovrà

1. Chiudere la superficie piana del conduttore all'infinito includendo il semispazio comprendente la carica sorgente. Sulla superficie che racchiude questa regione di spazio, il potenziale sarà nullo.
2. Si considera una o più cariche simmetriche (rispetto al conduttore) alla carica in esame.
3. Si calcola il potenziale in un generico punto  $P$ .
4. Si impongono le condizioni al contorno. (*ad es. il potenziale sarà nullo sulla superficie del conduttore*)
5. Si calcola il campo elettrico applicando *il teorema di Gauss*.

Grazie al *teorema dell'unicità della soluzione*, è possibile affermare che la soluzione al problema elettrostatico sarà valida all'interno della superficie di spazio considerata.

#### 3.1 Caso particolare: sfera conduttrice e carica a distanza

**Ipotesi:** la sfera ha raggio  $R$ , la carica è disposta a distanza  $d$  ed ha valore  $q$ .

Prima di tutto bisogna introdurre, all'interno della sfera, una carica  $Q' = -\frac{R}{d} \cdot q$  a distanza  $D = \frac{R^2}{d}$  dal centro della circonferenza. **Questo passo è sufficiente se la sfera ha potenziale mantenuto costante e nullo ( $V = 0$ ).**

Se così non fosse, si distinguono 2 diversi scenari:

1. Sfera mantenuta a potenziale fisso  $V_0$ :
  - Bisogna considerare, al centro della sfera, una nuova carica  $Q'$  che faccia assumere tale potenziale alla stessa.
  - Il valore della nuova carica sarà quindi  $Q' = 4\pi\epsilon RV_0$
2. Sfera isolata con carica iniziale  $Q_0$ :
  - Bisogna considerare una carica ulteriore (*rispetto al caso della sfera mantenuta a potenziale fisso  $V_0$* )  $Q_0$  al centro della sfera che neutralizzi il valore di  $Q'$ .
  - Il la sfera assumerà un valore di tensione  $V = \frac{Q_0 - Q'}{4\pi\epsilon R}$

Nel caso si voglia calcolare la densità superficiale di carica sulla sfera, la formula per ricavarla è:

$$\sigma(R, \theta) = \frac{q}{4\pi R} \cdot \frac{R^2 - d^2}{(R^2 + d^2 - 2dR \cos \theta)^{3/2}}$$

Con  $R$  raggio della sfera e  $\theta$  angolo formato tra l'asse orizzontale e il segmento che congiunge il centro della sfera alla sua superficie.

**IMPORTANTE** il *Riva-Gentili*, nell'*appendice A* (pag. 193) calcola in modo errato i valori di  $Q''$  e di  $V$  negli scenari sopra indicati. Al denominatore,  $R$  ha esponente 2 anziché 1.

## 4 Elettrostatica

- Legge di Coulomb  $\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{a}_r = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{R}_q - \vec{R}_p)}{|\vec{R}_q - \vec{R}_p|^3}$
- Legge di Gauss  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\Omega \leftrightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_\Omega}{\epsilon}$

### 4.1 Campo Elettrico

- Campo  $\vec{E}$  in presenza di cariche puntiformi  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{R}_q - \vec{R}_p)}{|\vec{R}_q - \vec{R}_p|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \vec{a}_r$
- Densità di flusso elettrico  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{(\vec{R}_q - \vec{R}_p)}{|\vec{R}_q - \vec{R}_p|^3} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2} \vec{a}_r$
- Densità superficiale di carica  $\sigma = D_n = \epsilon E_n$
- Momento di dipolo elettrico  $\vec{p} = Q\vec{d}$
- Potenziale elettrostatico  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$
- Relazioni tra  $\vec{D}$  ed  $\vec{E}$   $\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_\Omega$ ,  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
- All'interno di mezzi lineari  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$  con  $\chi$  detta suscettività elettrica,  $\chi \geq 0$
- Relazione tra  $\epsilon$  e  $\chi$   $\epsilon = (1 + \chi_e)\epsilon_0 = \epsilon_0 \epsilon_r \rightarrow \epsilon_r = 1 + \chi_e \rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
- Relazione tra  $\vec{P}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  nei mezzi isotropi  $\vec{P} \parallel \vec{D} \parallel \vec{E}$
- Energia del sistema  $W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho_\Omega V d\Omega = \frac{1}{2} \int_s \vec{D} \cdot \vec{E} d\Omega = \frac{1}{2} \int_s \epsilon |\vec{E}|^2 d\Omega$
- Densità di energia  $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2$

#### 4.1.1 Interfaccia tra due mezzi

- **conduttori** (componente tangenziale)  $E_{1t} = E_{2t}$ ,  $\vec{a}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ ,  $\frac{\vec{D}_{1t}}{\vec{D}_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$
- **conduttori** (componente normale)  $D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$ ,  $\vec{a}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s$ ,  $\epsilon_{2n} E_{2n} - \epsilon_{1n} E_{1n} = \rho_s$
- **dielettrici** (componente tangenziale)  $E_{2t} = E_{1t}$ ,  $D_{2t} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} D_{1t}$
- **dielettrici** (componente normale)  $D_{2n} = D_{1n}$ ,  $E_{2n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{1n}$
- **conduttore e dielettrico** (componente tangenziale)  $E_{2t} = 0$ ,  $D_{2t} = 0$
- **conduttore e dielettrico** (componente normale)  $D_{2n} = \rho_s$ ,  $E_{2n} = \frac{\rho_s}{\epsilon_2}$

## 4.2 Capacità elettrica

- Condensatore a facce piane parallele  $C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$
- Formula generale  $C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{-\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$
- Energia immagazzinata in un condensatore  $W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

## 4.3 Corrente elettrica / Legge di Ohm

- Velocità di deriva  $\vec{v}_d = \mu_q \vec{E}$ ,  $\vec{v}_d \parallel \vec{E}$
- Densità di corrente  $\vec{J} = qN\vec{v}_d = qN\mu_q \vec{E} = \sigma \vec{E}$  con  $\sigma$  detta conducibilità del mezzo
- In un conduttore ideale, si ha  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $\sigma \rightarrow \infty$

## 5 Magnetostatica

- Legge di Ampere  $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} \leftrightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

### 5.1 Campo Magnetico

- Legge di Biot Savart (differenziale)  $d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times [I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{a}_{12}]}{R^2}$
- Legge di Biot Savart (integrale)  $\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{d\vec{l}_1 \times [d\vec{l}_2 \times \vec{a}_{12}]}{R^2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{\vec{a}_{12} \cdot [d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2]}{R^2}$ ,  
 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
- Densità di flusso magnetico (differenziale)  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{a}_{12}}{R^2}$
- Densità di flusso magnetico (integrale)  $\vec{B} = \oint_{c_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{a}_{12}}{R^2} = \oint_{c_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \cdot (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{R^2}$
- Campo magnetico  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$
- Autoinduttanza magnetica  $L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \frac{\int_{s_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_1}{I_1}$  con  $\vec{B}_1 = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{c_1} \frac{d\vec{l} \cdot \vec{a}_r}{R^2}$ ,  $\Phi_{m,11} =$   
 $\frac{\mu I_1}{4\pi} \int_{s_1} \left( \oint_{c_1} \frac{d\vec{l} \cdot \vec{a}_r}{R^2} \right) d\vec{s}$   
 $\Rightarrow L_{11} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{s_1} \left( \oint_{c_1} \frac{d\vec{l} \times \vec{a}_r}{R^2} \right) \cdot d\vec{s}$
- Mutua induttanza  $L_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{s_2} \left( \oint_{c_1} \frac{d\vec{l} \times \vec{a}_r}{R^2} \right) \cdot d\vec{s}$
- Energia del sistema  $W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2$
- Densità di energia  $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu H^2$

#### 5.1.1 Campo Magnetico nei materiali

- Momento di dipolo magnetico  $\vec{m} = A \cdot I \cdot \vec{a}_n$
- Densità di momento magnetico

– Mezzo qualsiasi  $\vec{M} = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta\Omega}$

- Se il mezzo è lineare  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$
- $\chi_m$  è detta suscettività magnetica
- Permeabilità del mezzo  $\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0(1 + \chi_m)$
- Relazione tra  $\vec{H}$  e  $\vec{M}$ :  $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

### 5.1.2 Interfaccia tra due mezzi

- Componente tangenziale  $H_{2t} - H_{1t} = J_{sn}, \frac{J_{2t}}{\sigma_2} = \frac{J_{1t}}{\sigma_1}$
- Componente normale  $H_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n}, B_{2n} = B_{1n}, \vec{a}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0, \rho_s = \left( \epsilon_2 - \epsilon_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) E_{2n}$
- Densità superficiale di carica  $\rho_s = \left( \epsilon_1 - \epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) E_{1n}$

## 5.2 Resistenza elettrica / Legge di Joule

- Resistenza  $R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s}} = \frac{1}{\sigma} \frac{\int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}$
- Relazione tra resistenza e capacità  $R \cdot C = \frac{\epsilon}{\sigma} \leftrightarrow \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon}$
- Legge di Joule (differenziale)  $\frac{\partial P}{\partial \Omega} = \vec{E} \cdot \vec{J}$  detta anche potenza specifica
- Legge di Joule (integrale)  $P = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} d\Omega$

## 6 Regime dinamico

- Legge di Faraday  $\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$  se la superficie non cambia nel tempo
- Circuitazione di  $\vec{H}$  e corrente di spostamento  $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt} \int_s \vec{D} \cdot d\vec{s}$
- Legge di conservazione della carica  $\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_\Omega d\Omega$

### 6.1 Teorema di Poynting

- Vettore di Poynting  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- Vettore di Poynting (dominio dei fasori)  $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$
- Teorema di Poynting  $P_{diss} = \oint_\Sigma \vec{S} \cdot d\Sigma$
- Vettore di Poynting associato ad un'onda piana  $\vec{S}_{ist} = \frac{A^2}{\eta_0} \cos^2(\omega t) \vec{a}_z$ ,  $\vec{S}_{ave} = \frac{A^2}{2\eta_0} \vec{a}_z$
- Vettore di Poynting associato ad un'onda piana (dominio dei fasori)  $\vec{S}_{ist} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]$

## 7 Onde Piane

- Formula generica di un'onda piana uniforme  $f(x, t) = A \cos(\omega t + \beta x) \vec{u}_z$
- Equazione di Helmholtz (onda piana uniforme senza perdite)  $\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} = 0$
- Equazione di Helmholtz (dominio dei fasori)  $\nabla^2 \vec{E} = \gamma^2 \vec{E}$
- Lunghezza d'onda nel vuoto  $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c}{f}$
- Lunghezza d'onda nel mezzo  $\lambda = \frac{c}{f} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$
- Costante di propagazione  $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \alpha + j\beta$  dove:
  - $\alpha$  = costante di attenuazione  $> 0$
  - $\beta$  = costante di fase  $= \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{f}{c} \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$
- Velocità della luce (velocità di propagazione delle onde)  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \cong 3 \cdot 10^8$
- Impedenza intrinseca del mezzo  $\eta = \frac{E^+}{H^+} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$

- Impedenza d'onda  $Z = \frac{E^+ - E^-}{H^+ - H^-}$
- Indice di rifrazione  $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$
- Densità di potenza trasportata  $|S| = \frac{1}{2} \frac{|\vec{E}|^2}{\eta} = \frac{1}{2} |\vec{H}|^2 \eta$

## 7.1 Polarizzazione

- Sia  $\vec{E}(x, y, z, t)$  un campo elettrico con componenti in sole  $x$  e  $z$ . Allora, sul piano trasverso ( $z = 0$ ) si ottiene:
  - $\vec{E}(z, t) = E_x \cos(\omega t) \vec{a}_x + E_y \cos(\omega t + \phi_0) \vec{a}_y$
  - Si distinguono due casi particolari:
    1.  $\phi_0 = 0$ ,  $E_x, E_y$  qualsiasi. Allora:  $\xi = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right)$ ,  $|\vec{E}(0, t)|^2 = (E_x^2 + E_y^2) \cos^2(\omega t)$

**Polarizzazione lineare**

  - 2.  $\phi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $E_x = E_y = E$ . Allora:  $\xi(t) = \mp \omega t$ ,  $|\vec{E}|^2 = E^2$  **Polarizzazione circolare**
- Se la polarizzazione non è né *lineare* né *circolare*, allora viene detta **ellittica**.

## 7.2 Incidenza delle onde

Leggi di Snell:

- Angolo di rifrazione  $n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$
- Riflessione interna totale  $\theta_{\text{crit}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$  e in questa condizione  $\Gamma = 1$ ,  $T = 0$
- Angolo di incidenza = angolo di riflessione

### 7.2.1 Incidenza normale su discontinuità piana

Mezzi ideali e senza perdite, onda elettromagnetica con componenti in  $x$  e  $y$  nella sezione  $z = \text{cost}$

- Coefficiente di riflessione  $\Gamma = \Gamma(0) \exp(2j\beta z)$ , dove  $\Gamma(0) = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$ ,  $|\Gamma(0)| \leq 1$
- Coefficiente di trasmissione  $T = T(0) \exp(2j\beta z)$ , dove  $T(0) = \frac{2n_2}{n_2 + n_1} = 1 + \Gamma(0)$ ,  $|T(0)| \leq 2$
- Onda riflessa  $E_1^-(0) = E_1^+(0) \cdot \Gamma(0)$
- Onda trasmessa  $E_2^+(0) = E_1^+(0) \cdot T(0)$
- Impedenza d'onda  $Z(z) = \eta_1 \left( \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \right)$

### 7.2.2 Incidenza non normale

**Ipotesi:** onda su piano  $xz$  *destrorso* (asse  $x$  verticale, asse  $z$  orizzontale). Può essere scomposta in componente TE e TM (per sovrapposizione lineare).

- L'angolo di incidenza sarà  $\theta = \arctan\left(\frac{\beta_z}{\beta_x}\right)$
- L'angolo di riflessione sarà calcolabile tramite legge di *Snell*
- Le componenti TE e TM possono essere dedotte usando la *regola della mano destra*
- $\beta = \sqrt{\beta_{1x}^2 + \beta_{1z}^2} \rightarrow f = \frac{\beta c}{2\pi}, \omega = c\beta$
- Componente TE
  - Ha componente  $y$
  - Impedenza  $\eta_n^{TE} = \frac{\eta}{\cos(\theta_n)}$
  - Coefficiente di riflessione  $\Gamma = \frac{\eta_2^{TE} - \eta_1^{TE}}{\eta_2^{TE} + \eta_1^{TE}}$
- Componente TM
  - Ha componenti  $xz$
  - Impedenza  $\eta_n^{TM} = \eta \cdot \cos(\theta_n)$
  - Coefficiente di riflessione  $\Gamma = -\frac{\eta_2^{TM} - \eta_1^{TM}}{\eta_2^{TM} + \eta_1^{TM}}$
- Angolo di incidenza  $\theta = \arctan\left(\frac{\beta_z}{\beta_x}\right)$
- La costante di propagazione  $\gamma \rightarrow$  va proiettata nelle direzioni  $x$  e  $y$  tramite sin e cos
- $\alpha$  va calcolato come segue:
  1.  $\beta_{1z} = \beta \cos(\theta_i) \rightarrow \beta = \frac{\beta_{1z}}{\cos(\theta_i)}$
  2.  $\beta_{2z} = \frac{\beta}{\sqrt{\epsilon_2}} \cos(\theta_t)$
  3. La parte reale di  $\beta$  sarà pari al coefficiente di attenuazione, espresso in  $m^{-1}$
  4. Bisogna fare una scelta di segno della radice coerente con la fisica  $\alpha < 0$

**EMPIRICAMENTE** l'angolo di incidenza sul piano  $xy$  è dato da  $\theta = \arctan\left(-\frac{x}{y}\right)$ , la componente  $x$  è la proiezione tramite  $\sin \theta$  ed è **negativa**. La componente  $y$  è proiettata tramite  $\cos \theta$  ed è **positiva**.

### 7.2.3 Trasmissione totale

- Indice di rifrazione  $\Gamma = 0 \leftrightarrow Z_L = Z_{in}$
- Angolo di Brewster  $\theta_P = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}\right) = \arctan \frac{n_2}{n_1}$



## 7.3 Mezzi attraversati dalle onde

### 7.3.1 Mezzo senza perdite

- $\sigma = 0 \Rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$
- $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 377 \Omega$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s}$
- $\lambda = \frac{v}{f}$
- Impedenza intrinseca del vuoto (dominio dei fasori)  $\frac{\vec{E}^+}{\vec{H}^+} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \eta, \frac{\vec{E}^-}{\vec{H}^-} = -\frac{j\omega\mu}{\gamma} = -\eta$

### 7.3.2 Buon conduttore

- $\sigma \gg \omega\epsilon \Rightarrow \gamma = \sqrt{-\omega^2\mu\epsilon}$
- $\eta = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} \Rightarrow \alpha \cong \beta \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$
- $v \cong \frac{\omega}{\beta} \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$
- $\lambda = 2\pi\delta = \frac{v}{f}$
- Spessore pelle  $\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$
- Costante dielettrica  $\epsilon = \epsilon' + j\epsilon''$
- Costante di permeabilità magnetica  $\mu = \mu' + j\mu''$
- Tangente di perdita  $\tan(\delta) = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$  **Non è lo spessore pelle**

## 8 Linee di trasmissione

- Coefficiente di riflessione  $\Gamma(l) = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} e^{-j2\beta l}$
- Velocità di fase  $v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

### 8.1 Linee TEM

- Equazione 1  $\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} \cdot L$  con  $L$  = induttanza per unità di lunghezza
- Equazione 2  $\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} \cdot C$  con  $C$  = capacità per unità di lunghezza
- Uguaglianze  $\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon}$ ,  $LC = \mu\epsilon$
- Impedenza  $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$
- Velocità di fase nel conduttore  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

#### 8.1.1 Potenza ed energia in una linea

- Potenza disponibile  $P_D = \frac{|V_g|^2}{8R_g} = P_D$
- Potenza sul carico  $P_L = P_D(1 - |\Gamma_L|^2) = \frac{|V_g|^2}{8R_g} P_D(1 - |\Gamma_L|^2)$
- Potenza sul carico (in funzione della tensione)  $P_L = \frac{1}{2}|V|^2 \text{Re}(Y)$
- Potenza sul carico (in funzione della corrente)  $P_L = \frac{1}{2}|I|^2 \text{Re}(Z)$
- Densità di energia trasmessa  $S_{tra} = S_{inc} (1 - |\Gamma|^2)$

#### 8.1.2 Corrente e tensione in una linea non attenuativa

- Tensione  $|V_L| = |V^+(0)| |1 + \Gamma_L|$
- Corrente  $|I_L| = |I^+(0)| |1 - \Gamma_L|$

### 8.1.3 Cavo coassiale

**Ipotesi:**  $a$  = raggio interno,  $b$  = raggio esterno

- Capacità per unità di lunghezza  $C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$  con  $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$
- Induttanza per unità di lunghezza  $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
- Attenuazione conduttore  $\alpha_c = \frac{R}{2Z_C} \left[ \frac{Np}{m} \right]$
- Attenuazione dielettrico  $\alpha_d = \frac{GZ_C}{2} = \frac{\pi\epsilon''}{\lambda\epsilon'} \left[ \frac{Np}{m} \right]$
- Impedenza  $Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\eta}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
- Resistenza per unità di lunghezza  $R = \frac{R_s}{2\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$
- Resistenza superficiale  $R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} = \frac{1}{\sigma \delta}$
- Conduttanza per unità di lunghezza  $G = C \frac{\omega \epsilon''}{\epsilon'} = \frac{2\pi \omega \epsilon''}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$
- Campo elettrico nel conduttore  $E_r = \frac{|V|}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \frac{1}{r}$

Nel caso di un conduttore diviso in *spicchi* pieni di dielettrici diversi, *divido* per la frazione di spicchio la *capacità* e *moltiplico* per la frazione di spicchio la *conduttanza*. Per *attenuazione specifica* si intende la *somma* delle attenuazioni del *dielettrico* ed del *conduttore*.

### 8.1.4 Linea a conduttori piani paralleli

- Capacità  $C = \epsilon \frac{w}{h}$
- Capacità per unità di lunghezza  $C = \epsilon \frac{w}{h} \cdot l$
- Induttanza  $L = \mu \frac{h}{w}$
- Induttanza per unità di lunghezza  $L = \mu \frac{h}{w} \cdot l$  **tuttavia normalmente si calcola come**  
 $L = \frac{\mu\epsilon}{C}$
- Impedenza  $Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{h}{W} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{C}$

- Attenuazione nel conduttore  $\alpha_c = \frac{R}{2Z_C} = \frac{1}{W Z_C \sigma_C \delta}$
- Attenuazione dovuta nel dielettrico  $\alpha_d = \frac{g}{2Y_c}$
- Ammettenza per unità di lunghezza  $g = \sigma_d \frac{\text{Area}}{h}$
- Potenza trasportata  $P = \frac{|E_0|^2 ab}{4 \cdot Z}$

### 8.1.5 Linea Bifilare

**Ipotesi:**  $R^+$ ,  $R^-$  raggi dei due conduttori,  $d$  distanza tra gli stessi, approssimazione conduttori sottili

- Tensione  $V = \frac{\rho l}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{d^2}{R^+ \cdot R^-}\right)$
- Capacità per unità di lunghezza  $C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{d^2}{R^+ \cdot R^-}\right)}$
- Impedenza  $Z = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{c} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{d}{R}\right)$

## 8.2 Linee quasi TEM - dielettrico non omogeneo

Esempio di una linea quasi TEM: microstriscia

- Costante dielettrica efficace  $\epsilon_{eff} = \frac{LC}{\mu_0}$
- Pulsazione di taglio  $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\omega\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$  con  $a, b$  interi
- Impedenza modale  $Z_{te} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$
- Frequenza di taglio  $f_c = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}$
- Velocità di gruppo  $v_g = v \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$
- Lunghezza d'onda di gruppo  $\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$
- Coefficiente di attenuazione  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_c} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$

### 8.3 Modi TE/TM nella guida d'onda rettangolare

Sia  $a$  il lato della guida che giace sull'asse  $x$  (*larghezza*) e sia  $b$  il lato della guida che giace sull'asse  $y$  (*altezza*). Allora le ampiezze e le frequenze di taglio dei modi  $TM_{mn}$  sono:

| Modo              | Lunghezza di taglio | Frequenza di taglio  |
|-------------------|---------------------|----------------------|
| $TE_{10}/TM_{10}$ | $\lambda_c = 2a$    | $f_c = \frac{c}{2a}$ |
| $TE_{01}/TM_{01}$ | $\lambda_c = 2b$    | $f_c = \frac{c}{2b}$ |
| $TE_{20}/TM_{20}$ | $\lambda_c = a$     | $f_c = \frac{c}{a}$  |
| $TE_{02}/TM_{02}$ | $\lambda_c = b$     | $f_c = \frac{c}{b}$  |

- $TE_{10}$  è detto modo fondamentale e la sua frequenza minima è detta *frequenza di taglio*
- Banda monomodale massima: banda minima compresa tra le frequenze minime di  $TE_{10}$  e  $TE_{20}$
- Potenza trasportata  $P = \frac{|E_0|^2 ab}{4 \cdot Z}$

## 9 Adattamento di impedenza

L'obiettivo dell'adattamento di impedenza è portare la massima potenza disponibile sul carico  $P_L = P_D$  annullando quindi il coefficiente di riflessione ( $\Gamma = 0$ ).

### 9.1 Strutture adattanti

Esistono 3 tipologie di strutture adattanti:

- Trasformatore  $\frac{\lambda}{4}$  - solo per carichi **reali**
- Stub semplice - per carichi **reali** o **complessi**
- Stub doppio - per carichi **reali** o **complessi**

#### 9.1.1 Trasformatore lambda-quarti

Funziona esclusivamente con carichi reali. È costituito da un pezzo di conduttore lungo un quarto della lunghezza d'onda  $\lambda$ . Impedenza del trasformatore:  $Z_x = \sqrt{Z_{in} \cdot Z_L}$  con  $Z_{in}$  impedenza di ingresso e  $Z_L$  impedenza di carico.

#### 9.1.2 Trasformatore lambda-quarti con neutralizzazione

Risolve il problema dell'impossibilità dei trasformatori lambda-quarti di adattare carichi complessi. È composto da un tratto di neutralizzazione lungo  $l_n$  e da un trasformatore lambda-quarti di impedenza  $Z_x$ . Il tratto di neutralizzazione sarà necessario a trasformare in impedenza puramente reale il carico. Il trasformatore lambda-quarti adatterà l'impedenza al valore caratteristico. Operativamente, si dovrà:

1. Normalizzare l'impedenza del carico  $Z_L$  all'impedenza caratteristica  $Z_C$  ottenendo  $\overline{Z_L}$
2. Tracciare la circonferenza con centro in 1 e passante per  $\overline{Z_L}$
3. Partendo da  $\overline{Z_L}$ , ruotare in senso orario sulla circonferenza appena tracciata fino ad intersecare l'asse reale nel punto  $A$
4. Il valore di  $l_n$ , normalizzato alla lunghezza d'onda  $\lambda$ , sarà letto come differenza tra il prolungamento del punto  $A$  sulla scala esterna della carta di Smith e medesimo prolungamento di  $\overline{Z_L}$
5. Denormalizzare  $\overline{Z_L}$  per ottenere  $Z_L$
6. Il valore dell'impedenza del trasformatore sarà data da  $Z_x = \sqrt{Z_{in} \cdot Z_L}$

#### 9.1.3 Stub semplice

Detto anche stub *singolo*, è realizzato con un tratto di linea di trasmissione in *c.c.* o in *c.a* di lunghezza  $l_s$ , opportunamente collegato in serie o in parallelo alla linea ad un tratto di distanza  $d_s$  dal carico. Esistono due tipi di stub semplice:

1. Stub parallelo - si lavora con le ammettenze  $\overline{Y_L} = \frac{Y_L}{Y_C} = \frac{Z_C}{Z_L}$
2. Stub serie - si lavora con le impedenze  $\overline{Z_L} = \frac{Z_L}{Z_C}$

Si può cercare  $l_s$  in modo che dia origine ad un *corto circuito* o a un *circuito aperto*, mentre  $d_s$  potrà assumere un solo valore.

1. Il *circuito aperto* si troverà a destra dell'asse reale della carta di Smith
2. Il *corto circuito* si troverà a sinistra dell'asse reale della carta di Smith

La differenza tra stub in *circuito aperto* e in *corto circuito* sarà pari a mezzo giro sulla carta di Smith ( $l = \frac{\lambda}{4}$ ).

Operativamente, per gli stub *serie* si dovrà:

1. Normalizzare l'impedenza del carico  $Z_L$  all'impedenza caratteristica  $Z_C$  (o impedenza di ingresso) ottenendo  $\overline{Z_L}$
2. Segnare sulla carta di Smith il valore di  $\overline{Z_L}$
3. Tracciare la circonferenza a modulo costante pari a  $\overline{Z_L}$
4. Partendo da  $\overline{Z_L}$ , ruotare in senso orario sulla circonferenza appena tracciata fino ad intersecare la circonferenza di raggio  $R_g/Z_C$  nel generico punto  $A$
5. Il valore di  $d_s$ , normalizzato alla lunghezza d'onda  $\lambda$ , sarà letto come differenza tra il prolungamento del punto  $A$  sulla scala esterna della carta di Smith e medesimo prolungamento di  $\overline{Z_L}$
6. Partendo da  $A$  si procede ruotando fino a  $Z = 0$  (per uno stub c.c.) o  $Z = \infty$  (per uno stub c.a.) nel generico punto  $B$
7. Analogamente a quanto trovato per  $d_s$ , la lunghezza dello stub sarà pari alla differenza tra il prolungamento del punto  $B$  e medesimo prolungamento di  $A$

Il procedimento sarà analogo per gli stub *parallelo* ma si dovrà lavorare con le ammettenze al posto delle impedenze.

#### 9.1.4 Stub doppio

È una struttura adattante formata da due stub semplici di lunghezza  $l_1$  e  $l_2$  posti a distanza  $d_s$  (fissata) tra di loro. I due stub possono essere sia collegati in serie che in parallelo

1. La lunghezza del primo stub (il più vicino al carico) è ricercata in modo da eguagliare la parte reale dell'impedenza carico a quella della linea
2. La lunghezza del secondo stub è ricercata in modo da annullare la parte immaginaria dell'impedenza di carico

Operativamente, per gli stub *parallelo* si dovrà

1. Normalizzare l'ammettenza del carico  $Y_L$  all'impedenza caratteristica  $Y_C$  (o impedenza di ingresso) ottenendo  $\overline{Y_L}$
2. Segnare sulla carta di Smith il valore di  $\overline{Y_L}$
3. Tracciare la circonferenza a parte reale costante pari a  $\text{Re}(\overline{Y_L})$  "circonferenza di partenza"
4. Ruotare la circonferenza di raggio  $R_g/Z_C$  in senso antiorario di un angolo pari a  $d_s$  attorno al suo centro "circonferenza di arrivo"

5. Si trovano quindi 2 intersezioni tra la due circonferenze ed è necessario sceglierne uno "*punto di partenza*"  $A$
6. Tracciare la circonferenza con centro in 1 e passante per  $A$  e ruotare di una lunghezza pari a  $d_s$  fino ad arrivare al "*punto di arrivo*"  $B$
7. Calcolare le ammettenze dei due stub  $Y_{S1} = A - \overline{Y_L}$  e  $Y_{S2} = -\text{Im}(B)$
8. Le lunghezze dei due stub saranno quelle che portano i loro rispettivi valori di ammettenza tale da avere un c.c.  $Y = \text{inf}$  o un c.a.  $Y = 0$ , dipendentemente dalla struttura che si sta cercando di realizzare

Il procedimento sarà analogo per gli stub *serie* ma si dovrà lavorare con le impedenze al posto delle ammettenze. **Nota:** generalmente  $d_s$  è un dato del problema.

## 9.2 Linea attenuativa

Per calcolare l'impedenza ad una certa distanza  $l$  dal carico di una linea attenuativa, bisogna

1. Assicurarsi che il valore di  $\alpha$  sia espresso in  $N_p/m$
2. Normalizzare l'impedenza del carico  $Z_L$  all'impedenza caratteristica  $Z_C$  (o impedenza di ingresso) ottenendo  $\overline{Z_L}$
3. Tracciare la circonferenza con centro in 1 e passante per  $\overline{Z_L}$
4. Partendo da  $\overline{Z_L}$ , ruotare in senso orario sulla circonferenza appena tracciata fino a percorrere una lunghezza normalizzata alla lunghezza d'onda pari alla lunghezza della linea
5. Tracciare un segmento che congiunga il centro della carta di Smith con il punto appena trovato
6. Calcolare il modulo del coefficiente di riflessione  $\Gamma$  in corrispondenza del carico e riportarlo in corrispondenza del generatore moltiplicandolo per un fattore  $e^{-2\alpha l}$
7. Misurare sulla scala lineare più esterna della carta di Smith (con la dicitura *TRASM. COEFF.*) una lunghezza  $l_\alpha$  pari al valore appena trovato
8. L'impedenza attenuata dalla linea (normalizzata)  $\overline{Z_{Latt}}$  sarà trovata sul segmento prima tracciato, a distanza  $l_\alpha$  dal centro
9. Denormalizzare il valore appena trovato per calcolare il valore effettivo di  $Z_{Latt}$
10. Calcolare il nuovo coefficiente di riflessione  $\Gamma$  tra impedenza del generatore  $Z_g$  e impedenza attenuata del carico  $Z_{Latt}$

## 9.3 Potenza, tensione e corrente in una linea adattata

- Potenza al carico  $P_L = P_D = \frac{|V_g|^2}{8R_g}$
- La potenza disponibile è uguale in qualsiasi punto della linea
- Al carico  $V_{BB} = V_{AA}^+ (e^{\gamma l} + \Gamma_{AA} e^{-\gamma l})$  con  $\gamma = \alpha + j\beta$
- Al generatore  $V_{AA} = V_{AA}^+ (1 + \Gamma_{AA})$



### 9.3.1 Tensione e corrente in uno stub c.c.

- Tensione  $|V(d)| = |V_g| |\sin(\beta d)|$
- Corrente  $|I(d)| = \frac{|V_g|}{Z_C} |\cos(\beta d)|$
- Massimo di tensione localizzato a  $l_s = \frac{\lambda}{4}$  dal c.c.

### 9.3.2 Tensione e corrente in uno stub c.a.

- Tensione  $|V(d)| = |V_g| \cos(\beta d)$
- Corrente  $|I(d)| = \frac{|V_g|}{Z_C} \sin(\beta d)$
- Massimo di corrente localizzato a  $l_s = \frac{\lambda}{4}$  dal c.a.

## 9.4 Note sulla Carta di Smith

- Ruotare in senso orario corrisponde ad una direzione verso il carico (allontanandosi quindi dal generatore)
- La carta di Smith può essere usata indifferentemente con impedenze e ammettenze
- Ogni tacca sulla circonferenza esterna corrisponde a  $\frac{1}{500} = 0.002$  di lambda
- 1 giro completo della carta corrisponde a  $0.5\lambda$ . Altri valori tipici:

| <i>Lunghezza</i>    | <i>Frazione</i>     | <i>Rotazione</i> |
|---------------------|---------------------|------------------|
| $0.125\lambda$      | $\frac{\lambda}{8}$ | $90^\circ$       |
| $0.1\bar{6}\lambda$ | $\frac{\lambda}{6}$ | $120^\circ$      |
| $0.25\lambda$       | $\frac{\lambda}{4}$ | $180^\circ$      |
| $0.\bar{3}\lambda$  | $\frac{\lambda}{3}$ | $240^\circ$      |
| $0.5\lambda$        | $\frac{\lambda}{2}$ | $360^\circ$      |

## 10 Antenne

- Direttività  $D = \frac{4\pi}{\int f(\theta, \phi) d\Omega} = \frac{S_{max}}{S_{iso}}$
- Area efficace  $A_e = \frac{|l_e|^2 \eta_0}{4R}$
- Relazione universale  $\frac{G}{A_e} = \frac{4\pi}{\lambda^2}$
- Tensione a vuoto  $V_0 = l_e \cdot E_{inc} \cdot \sqrt{f_r(\theta, \phi)}$
- Potenza ricevuta  $P_R = P_D = S_{inc} \cdot A_e \cdot f(\theta, \phi)$
- Decibel Anisotropici  $dB_i = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{\text{Potenza ricevuta sull'antenna}}{\text{Potenza ricevuta su un'antenna isotropica}} \right) = 10 \log 10(G) = G_{dB_i}$
- Decibel Dipolo  $dB_d = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{\text{Potenza ricevuta sull'antenna}}{\text{Potenza ricevuta su un dipolo hertziano}} \right) = 10 \log 10 \left( \frac{G}{1.64} \right) = G_{dB_d}$
- Link Budget  $P_R = P \cdot G_{tx} \cdot f_t(\theta_t, \phi_t) \cdot \left( \frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 \cdot G_{rx} \cdot f_r(\theta_r, \phi_r)$

### 10.1 Dipolo Hertziano

- Lunghezza efficace  $l_e = l$
- Area efficace  $A_e = \frac{3}{8} \frac{\lambda^2}{\pi}$
- Funzione di direttività  $f(\theta, \phi) = \sin^2(\theta)$
- Tensione a vuoto  $V_0 = l_e \cdot E_{inc}$
- Resistenza di radiazione  $R_R = \frac{2}{3} \pi \eta_0 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2$
- Densità di potenza  $S = \frac{P_t D}{4\pi R^2} f(\theta, \phi)$
- Potenza trasmessa  $P_T = \frac{\pi}{3} \eta |I|^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2$
- Campi irradiati (campi lontani)
  - **Ipotesi**  $\theta$  colatitudine,  $R$  distanza tra punto considerato e centro del dipolo
  - Campo elettrico  $E_\theta = \frac{j\omega\mu I l}{4\pi R} e^{-j\beta R} \sin \theta$
  - Campo magnetico  $H_\theta = \frac{j\omega\mu I l}{4\pi R \eta} e^{-j\beta R} \sin \theta$
  - $\frac{E_\theta}{H_\theta} = \eta$
  - I campi sono diretti come  $\overline{u_\theta}$

### 10.1.1 Dipoli Hertziani trasmettenti in gruppo

**Ipotesi:**  $n$  dipoli hertziani distanti  $d$  tra di loro, unifrequenziali, alimentati in egual modo e di egual lunghezza

- Campo elettrico di Radiazione  $E_\theta = \frac{j\omega\mu Il}{4\pi R} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot 2 \cos \left( \beta \frac{d}{2} \sin(\theta) \right)$

### 10.2 Spira magnetica

**Ipotesi:** incidenza perpendicolare, adattamento di polarizzazione

- Lunghezza efficace  $l_e = l_m \frac{Z_{in}}{\eta_0}$
- Funzione di direttività  $f(\theta, \phi) = 1$
- Tensione a vuoto  $V_0 = j\omega\mu \frac{E_{inc}}{\eta_0} S$
- Densità di potenza  $S = \frac{P_t D}{4\pi R^2} f(\theta, \phi)$
- Resistenza di radiazione  $R_R = \frac{|l_e|^2 \eta_0}{4A_e} = \eta_0 \frac{8\pi^3}{3} \left( \frac{S}{\lambda^2} \right)^2$  con  $S$  superficie della spira.
- Campi irradiati (campi lontani):
  - Campo elettrico  $E_\phi = \frac{j\omega\mu IS}{4\pi\eta} \left( \frac{j\beta}{r} \right) \sin \theta e^{-j\beta R}$
  - Campo magnetico  $H_\theta = -\frac{j\omega\mu IS}{4\pi} \left( \frac{j\beta}{r} \right) \sin \theta e^{-j\beta R}$
  - I campi sono perpendicolari alla superficie della spira

### 10.3 Nastro di corrente

**Ipotesi:**  $l_g$  = lunghezza fisica

- Lunghezza magnetica  $l_m = l_g$
- Induttanza  $L = \mu_0 \frac{S}{l_g}$

### 10.4 Solenoide

**Ipotesi:**  $l_g$  = lunghezza fisica,  $N$  spire su  $l_g$

- Lunghezza magnetica  $l_m = \frac{l_g}{N}$
- Induttanza  $L = \mu_0 N^2 \frac{S^2}{l_g}$

## 10.5 Confronto tra spira e solenoide

| in TX              | <i>Spira</i>                    | <i>Solenoide</i>                        |
|--------------------|---------------------------------|---|
| campo elettrico    | $E_0$                           | $N \cdot E_0$                           |
| campo magnetico    | $H_0$                           | $N \cdot H_0$                           |
| densità di potenza | $S_0 = \frac{ E_0 ^2}{2\eta_0}$ | $S_0 = \frac{ E ^2}{2\eta_0} = N^2 S_0$ |
| $P_T$              | $P_0$                           | $N^2 \cdot P_0$                         |
| $R_R$              | $R_{R0}$                        | $N^2 \cdot R_{R0}$                      |

| in RX               | <i>Spira</i> | <i>Solenoide</i> |
|---------------------|--------------|------------------|
| tensione a vuoto    | $V_0$        | $N \cdot V_0$    |
| potenza disponibile | $P_{D0}$     | $P_{D0}$         |

## 10.6 Note sugli esercizi

- In presenza di più **spire**, non è valida la relazione  $H_{\text{TOT}} = \frac{E_{\text{TOT}}}{\eta_0}$  **poiché questa relazione non vale per la sovrapposizione delle onde**
- In questi casi si calcolano i campi magnetici  $H$  e poi si sommano i contributi