Travail 1
Formulation, résolution et interprétation

Louis-Quentin Joucla	JOUL20069502
Simon Lecoq	LECS09129600
Matthieu Michenot	MICM30019605

8INF808
UQAC

February 14, 2019

Question 1 :

Question 1.a :

On liste toutes les combinaisons possibles pour fabriquer des rouleaux à partir des tailles standards de 140 pouces. Seules les combinaisons avec des chutes qui ne permettent plus de produire des rouleaux clients sont conservées (i.e. dont les chutes sont inférieures à 25 pouces).

N°	44 pouces	40 pouces	25 pouces	Equation	Chutes (en pouces)
0	0	0	5	$0*44+0*40+5*25$	15
1	0	1	4	$0*44+1*40+4*25$	0
2	1	0	3	$1*44+0*40+3*25$	21
3	0	2	2	$0*44+2*40+2*25$	10
4	2	0	2	$2*44+0*40+2*25$	2
5	0	3	0	$0*44+3*40+0*25$	20
6	3	0	0	$3*44+0*40+0*25$	8
7	1	2	0	$1*44+2*40+0*25$	16
8	2	1	0	$2*44+1*40+0*25$	12
9	1	1	2	$1*44+1*40+2*25$	6

Figure 1: Liste des 10 combinaisons possibles pour produire des rouleaux clients à partir des rouleaux standards.

Formulation du problème à l'aide d'un modèle linéaire :

1. On définit les variables de décisions suivantes :

- X_i le nombre de fois qu'on utilise la combinaison N°i avec $i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

2. On pose les contraintes concernant la découpe du rouleau standard :

Les demandes des clients doivent être satisfaites à partir des différentes combinaisons possibles. Il est possible que cela résulte en une "surproduction" en utilisant des contraintes de type "≥". Celle-ci peut être évitée en utilisant des contraintes "=", mais il est possible qu'il n'y ait de solution, le système étant potentiellement surcontraint.
Nous avons choisi les contraintes "≥".

$$0X_0+0X_1+1X_2+0X_3+2X_4+0X_5+3X_6+1X_7+2X_8+1X_9 \geq 200$$
$$0X_0+1X_1+0X_2+2X_3+0X_4+3X_5+0X_6+2X_7+1X_8+1X_9 \geq 250$$
$$5X_0+4X_1+3X_2+2X_3+2X_4+0X_5+0X_6+0X_7+0X_8+2X_9 \geq 160$$

3. On définit la fonction objective :

Minimiser les pertes totales de la commandes revient à minimiser le nombre de chutes liées à chaque combinaison utilisée (i.e. la dernière colonne du tableau). C'est-à-dire :

$$Minimiser\ \ Z = 15X_0 + 0X_1 + 21X_2 + 10X_3 + 2X_4 + 20X_5 + 8X_6 + 16X_7 + 12X_8 + 6X_9$$

4. On pose les contraintes de non linéarité :

$$X_i \geq 0, \forall i$$

5. Finalement, on formule le problème de la façon suivante :

SOIT

X_i le nombre de fois qu'on utilise la combinaison N°i avec $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

MINIMISER

$$Z = 15X_0 + 0X_1 + 21X_2 + 10X_3 + 2X_4 + 20X_5 + 8X_6 + 16X_7 + 12X_8 + 6X_9$$

AVEC LES CONTRAINTES

$$\begin{aligned}
0X_0 + 0X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 2X_4 + 0X_5 + 3X_6 + 1X_7 + 2X_8 + 1X_9 &\geq 200 \quad [\text{CLIENT_44_POUCES}]\\
0X_0 + 1X_1 + 0X_2 + 2X_3 + 0X_4 + 3X_5 + 0X_6 + 2X_7 + 1X_8 + 1X_9 &\geq 250 \quad [\text{CLIENT_40_POUCES}]\\
5X_0 + 4X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 2X_9 &\geq 160 \quad [\text{CLIENT_25_POUCES}]
\end{aligned}$$

ET LES CONTRAINTES DE NON–NÉGATIVITÉ

$$X_i \geq 0$$

Question 1.b :

Pour minimiser le nombre de rouleaux standard utilisés, il suffit d'altérer légèrement la fonction objective précédente en rendant le coût d'utilisation de chaque combinaison uniforme. C'est-à-dire :

$$Minimiser\ \ Z = X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9$$

Question 2 :

D'après la définition du problème, on remarque :

- Une capcité de production et de stockage supérieure par rapport à la demande client, ce qui signifie qu'il n'y a aucune raison que cette dernière ne puisse être comblée.
- Une capacité de stockage supérieure à la capacité de production des usines, ce qui implique que les entrepôts n'exploiteront pas forcément la totalité de leurs capacités de stockage.

1. On définit les variables de décisions suivantes :

- X_{ij} le nombre de produits qui transitent de l'usine $i \in \{1, 2, 3\}$ vers l'entrepôt $j \in \{A, B\}$.
- Y_{jk} le nombre de produits qui transitent de l'entrepôt $j \in \{A, B\}$ vers le client $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

2. On pose les contraintes concernant la découpe du rouleau standard :

Les produits livrés aux entrepôts A et B ne dépassent pas la capacité maximale de production des usines 1, 2 et 3.

$$X_{1A} + X_{1B} \leq 6000$$
$$X_{2A} + X_{2B} \leq 6000$$
$$X_{3A} + X_{3B} \leq 2500$$

Les produits livrés par les usines 1, 2 et 3 ne dépassent pas la capacité de stockage maximale des entrepôts A et B.

$$X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} \leq 6000$$
$$X_{1B} + X_{2B} + X_{3B} \leq 9000$$

Les produits livrés par les entrepôts A et B aux clients 1, 2, 3 et 4 ne dépassent pas les stocks livrés par les usines 1, 2 et 3 aux entrepôts A et B.

$$Y_{A1} + Y_{A2} + Y_{A3} + Y_{A4} - X_{1A} - X_{2A} - X_{3A} \leq 0$$
$$Y_{B1} + Y_{B2} + Y_{B3} + Y_{B4} - X_{1B} - X_{2B} - X_{3B} \leq 0$$

Les entrepôts A et B doivent satisfaire la demande des clients 1, 2, 3 et 4.

$$Y_{A1} + Y_{B1} = 4000$$
$$Y_{A2} + Y_{B2} = 6000$$
$$Y_{A3} + Y_{B3} = 2000$$
$$Y_{A4} + Y_{B4} = 1500$$

3. On définit la fonction objective :

$$\begin{aligned}Minimiser\ \ Z = 0.30X_{1A} + 0.20X_{1B} + 0.70X_{2A} + 0.50X_{2B} + 1.00X_{3A} + 0.60X_{3B} + \\ 0.40Y_{A1} + 0.60Y_{A2} + 0.70Y_{A3} + 0.60Y_{A4} + 0.50Y_{B1} + 0.40Y_{B2} + 0.20Y_{B3} + 0.30Y_{B4}\end{aligned}$$

4. On pose les contraintes de non linéarité :

$$X_{ij}, Y_{jk} \geq 0, \forall i, j, k$$

5. Finalement, on formule le problème de la façon suivante :

SOIT

X_{ij} le nombre de produits qui transitent de l'usine $i \in \{1, 2, 3\}$ vers l'entrepôt $j \in \{A, B\}$.
Y_{jk} le nombre de produits qui transitent de l'entrepôt $j \in \{A, B\}$ vers le client $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

MINIMISER

$Z = 0.30\mathrm{X}_{1A} + 0.20X_{1B} + 0.70X_{2A} + 0.50X_{2B} + 1.00X_{3A} + 0.60X_{3B} +$
$0.40Y_{A1} + 0.60Y_{A2} + 0.70Y_{A3} + 0.60Y_{A4} + 0.50Y_{B1} + 0.40Y_{B2} + 0.20Y_{B3} + 0.30Y_{B4}$

AVEC LES CONTRAINTES

$X_{1A} + X_{1B} \leq 6000$ [Production usine 1]
$X_{2A} + X_{2B} \leq 6000$ [Production usine 2]
$X_{3A} + X_{3B} \leq 2500$ [Production usine 3]

$X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} \leq 6000$ [Stockage A]
$X_{1B} + X_{2B} + X_{3B} \leq 9000$ [Stockage B]

$Y_{A1} + Y_{A2} + Y_{A3} + Y_{A4} - X_{1A} - X_{2A} - X_{3A} \leq 0$ [Livraison clients < Stockage A]
$Y_{B1} + Y_{B2} + Y_{B3} + Y_{B4} - X_{1B} - X_{2B} - X_{3B} \leq 0$ [Livraison clients < Stockage B]

$Y_{A1} + Y_{B1} = 4000$ [Livraison client 1]
$Y_{A2} + Y_{B2} = 6000$ [Livraison client 2]
$Y_{A3} + Y_{B3} = 2000$ [Livraison client 3]
$Y_{A4} + Y_{B4} = 1500$ [Livraison client 4]

ET LES CONTRAINTES DE NON–NÉGATIVITÉ

$X_{ij}, Y_{jk} \geq 0$

Question 3 :

Question 3.a :

```
MODEL:

[FCTObj] MAX = 100*X1 + 80*X2 + 75*X3 + 15*X4 + 40*X5;

[Budget] 3000*X1 + 2500*X2 + 2000*X3 + 200*X4 + 1500*X5 <= 51000;
[MSGTV] X1 + X2 + X3 >= 10;
[BudgetTV] 3000*X1 + 2500*X2 + 2000*X3 <= 36000;

[ADMAX1] X1 <= 30;
[ADMAX2] X2 <= 20;
[ADMAX3] X3 <= 30;
[ADMAX4] X4 <= 30;
[ADMAX5] X5 <= 20;

END
```

Question 3.b :

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              2040.000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             2
Elapsed runtime seconds:                          0.13

Model Class:                                        LP

Total variables:                      5
Nonlinear variables:                  0
Integer variables:                    0

Total constraints:                    9
Nonlinear constraints:                0

Total nonzeros:                      21
Nonlinear nonzeros:                   0


                           Variable           Value        Reduced Cost
                                 X1        0.000000            12.50000
                                 X2        0.000000            13.75000
                                 X3        18.00000            0.000000
                                 X4        30.00000            0.000000
                                 X5        6.000000            0.000000

                                Row    Slack or Surplus      Dual Price
                             FCTOBJ        2040.000            1.000000
                             BUDGET        0.000000        0.2666667E-01
                              MSGTV        8.000000            0.000000
                           BUDGETTV        0.000000        0.1083333E-01
                             ADMAX1        30.00000            0.000000
                             ADMAX2        20.00000            0.000000
                             ADMAX3        12.00000            0.000000
                             ADMAX4        0.000000            9.666667
                             ADMAX5        14.00000            0.000000
```

Question 4 :

La solution de LINGO permet d'obtenir un indice de contact maximal d'une valeur de 2040. Il évite l'utilisation des annonces TV CJPM (X_1) et CKRS (X_2) jugées pénalisantes (la colonne "Reduced cost" étant supérieure à 0). Il épuise donc le budget TV sur les annonces TV CFRE (X_3). Le reste du budget est ensuite utilisé sur la radio (X_4) puis sur la presse (X_5) une fois les 30 annonces radios utilisées.

Nom	Type	Valeur	Signification
X_1	Variable	0	Aucune annonce TV CJPM n'a été faite.
X_2	Variable	0	Aucune annonce TV CKRS n'a été faite.
X_3	Variable	18	18 annonces TV CFRE ont été faites.
X_4	Variable	30	30 annonces radio ont été faites.
X_5	Variable	6	6 annonces presse ont été faites.
FCTOBJ	Résultat	2040	L'indice de contact maximum trouvé est de 2040.
BUDGET	Écart	0	Il n'y a plus de budget disponible.
MSGTV	Surplus	8	8 annonces TV de plus que le minimum requis ont été faites.
BUDGETTV	Écart	0	Il n'y a plus de budget TV.
ADMAX1	Écart	30	Il est possible de faire encore 30 annonces CJPM.
ADMAX2	Écart	20	Il est possible de faire encore 20 annonces CKRS.
ADMAX3	Écart	12	Il est possible de faire encore 12 annonces CFRE.
ADMAX4	Écart	0	Il n'est plus possible de faire des annonces radio.
ADMAX5	Écart	14	Il est possible de faire encore 14 annonces presse.

Figure 2: Valeur et signification des variables de décision, d'écart et de surplus ainsi que de la fonction objective.