Travail 3
PL en nombres entiers et optimisation multi-objectifs

Louis-Quentin Joucla	JOUL20069502	louisquentinjoucla@gmail.com
Simon Lecoq	LECS09129600	simon.lecoq@live.fr
Matthieu Michenot	MICM30019605	

8INF808
UQAC

March 19, 2019

Question 1 :

Question 1.a :

On résout tout d'abord le problème en programmation linéaire continu par la méthode graphique.

Pour cela on trace sur un graphe avec les contraintes du problème (Figure 1.a.) :

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4 (zonerouge) \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 16 (zonebleue) \\ 2x_1 - \ x_2 \leq 4 (zoneverte) \end{cases}$$

Ensuite, on repère l'espace des solutions admissibles, signalé en orange sur le graphe (Figure 1.b.).

Enfin, on trace et on fait "glisser" la fonction objective afin de trouver le dernier point de l'espace de solution, qui est le point optimum, signalé en orange (Figure 1.c.).

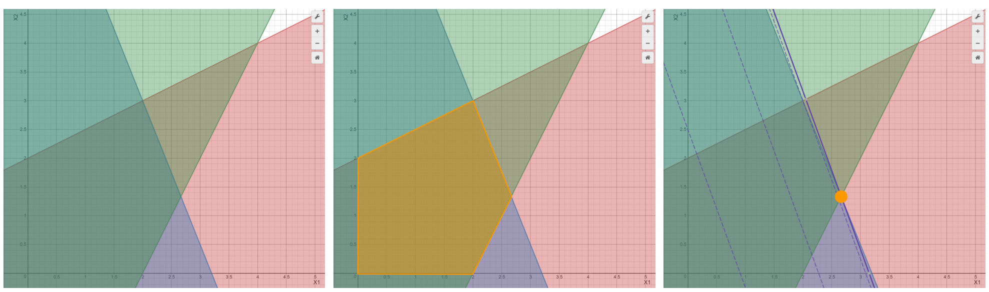

Figure 1: Résolution graphique étape par étape.

A partir du point trouvé, on résout le système d'équation formée par les deux contraintes qui forme le point d'intersection précédemment trouvé :

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 16 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 16 \\ x_2 = 2x_1 - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_1 - 8 = 16 \\ x_2 = 2x_1 - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_1 = 24 \\ x_2 = 2x_1 - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} \\ x_2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Finalement, notre solution optimale est composé de $X_1^* = 2.67$ et $X_2^* = 1.34$.

On calcule donc la valeur de la fonction objective pour ces deux valeurs :

$$Z^* = 220X_1^* + 80X_2^* = 693.34$$

Question 1.b :

On énumère les quatres solutions arrondies à partir de la solution obtenue à la question précédente.

X_1	X_2	Z	Réalisable
2	1	520	Oui
2	2	600	Oui
3	1	-	Non
3	2	-	Non

Question 1.c :

On applique l'algorithme du Branch-and-Bound pour optimiser le problème avec une solution entière.

On commence par appliquer les contraintes sur X_2 ($x_2 <= 1$ et $x_2 >= 2$) sur le problème initial afin d'obtenir les sous-problèmes 1 et 2, que l'on résout graphiquement (voir Figure 3.a et 3.b).

On trouve respectivement ($X_1 = 2.5$; $X_2 = 1$; $Z = 630$) et ($X_1 = 2.4$; $X_2 = 2$; $Z = 688$) en tant que solution.

Dans les deux cas, il ne s'agit pas d'un noeud terminal, néanmoins X_2 est devenue une valeur entière, il n'y aura donc pas de contrainte supplémentaire à appliquer sur cette variable.

On applique ensuite les contraintes sur X_1 ($x_1 <= 1$ et $x_1 >= 3$) afin d'obtenir les sous-problèmes 3, 4, 5 et 6, que l'on résout également de façon graphique (voir Figure 4.a, 4.b, 5.a et 5.b).

Les sous-problèmes 4 et 6 ne présentent aucune solution entière et sont donc des noeuds terminaux.

Les sous-problèmes 3 et 5 sont des noeuds terminaux (tous deux possèdent des variables entières). Toutefois, le sous-problème 5 possède une meilleure valeur objective que le 3, il s'agit donc de la solution que l'on retiendra.

Par conséquent, la solution entière optimale est $X_1 = 2$ et $X_2 = 3$ avec $Z = 680$.

On constate d'ailleurs un gain de performance non négligeable de 80 sur la fonction objective par rapport à la solution arrondie de la question b.

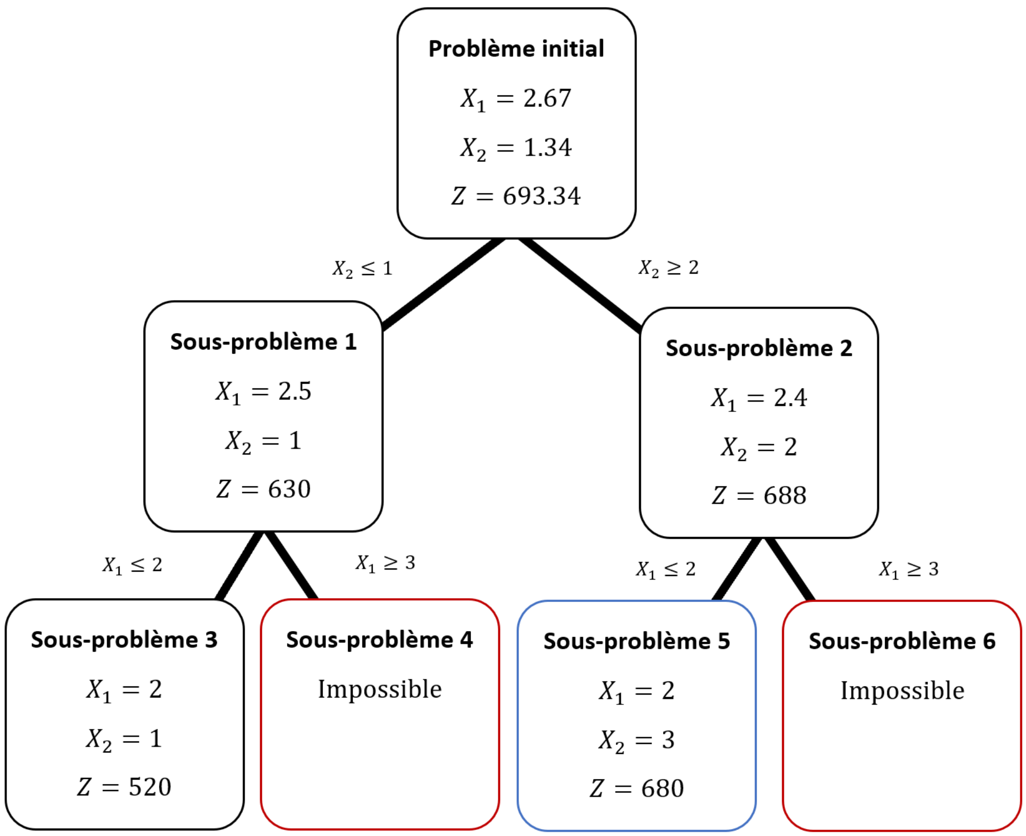

Figure 2: Branch-and-bound étape par étape (en commençant la séparation sur X_2)

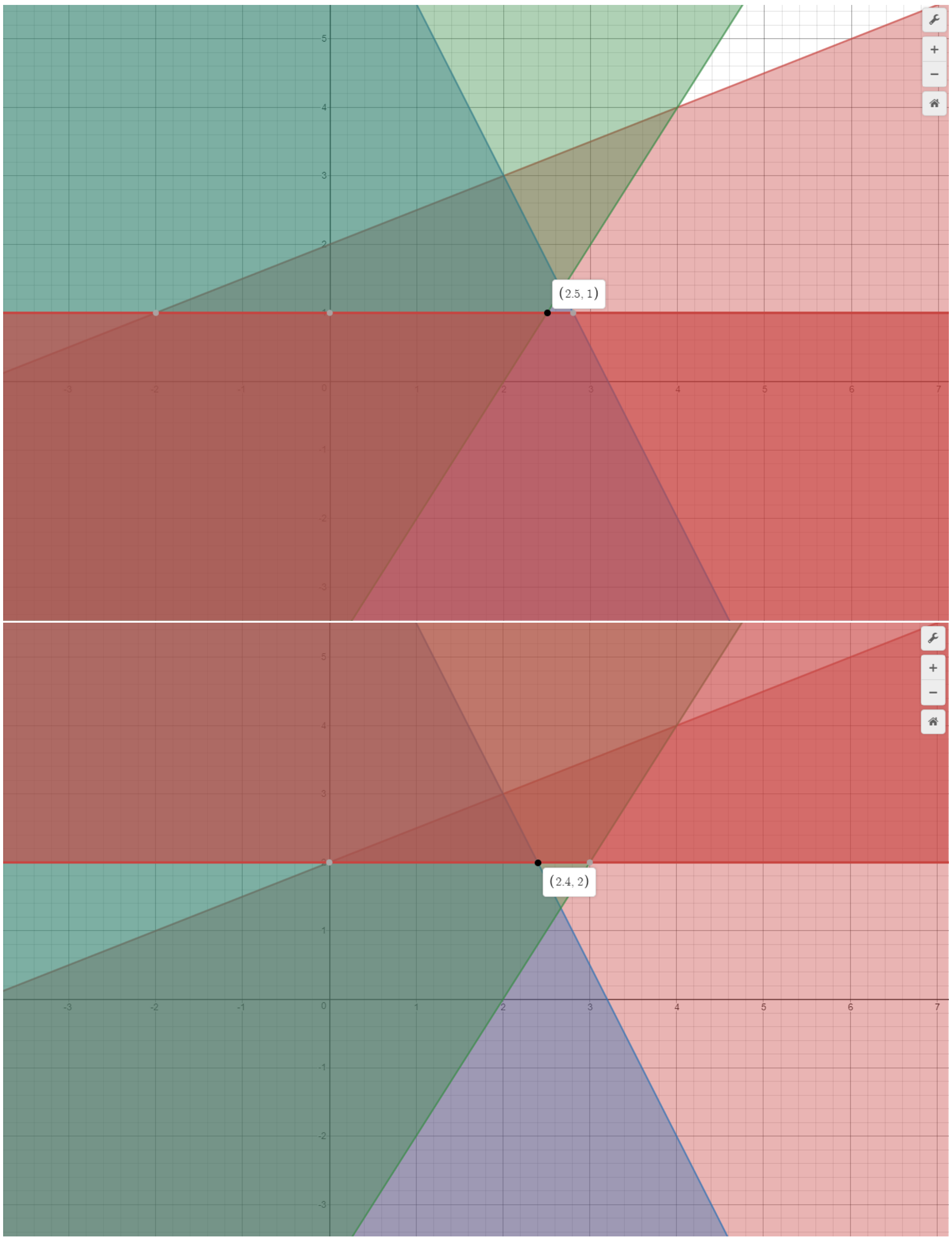

Figure 3: Solution des sous-problèmes 1 et 2.

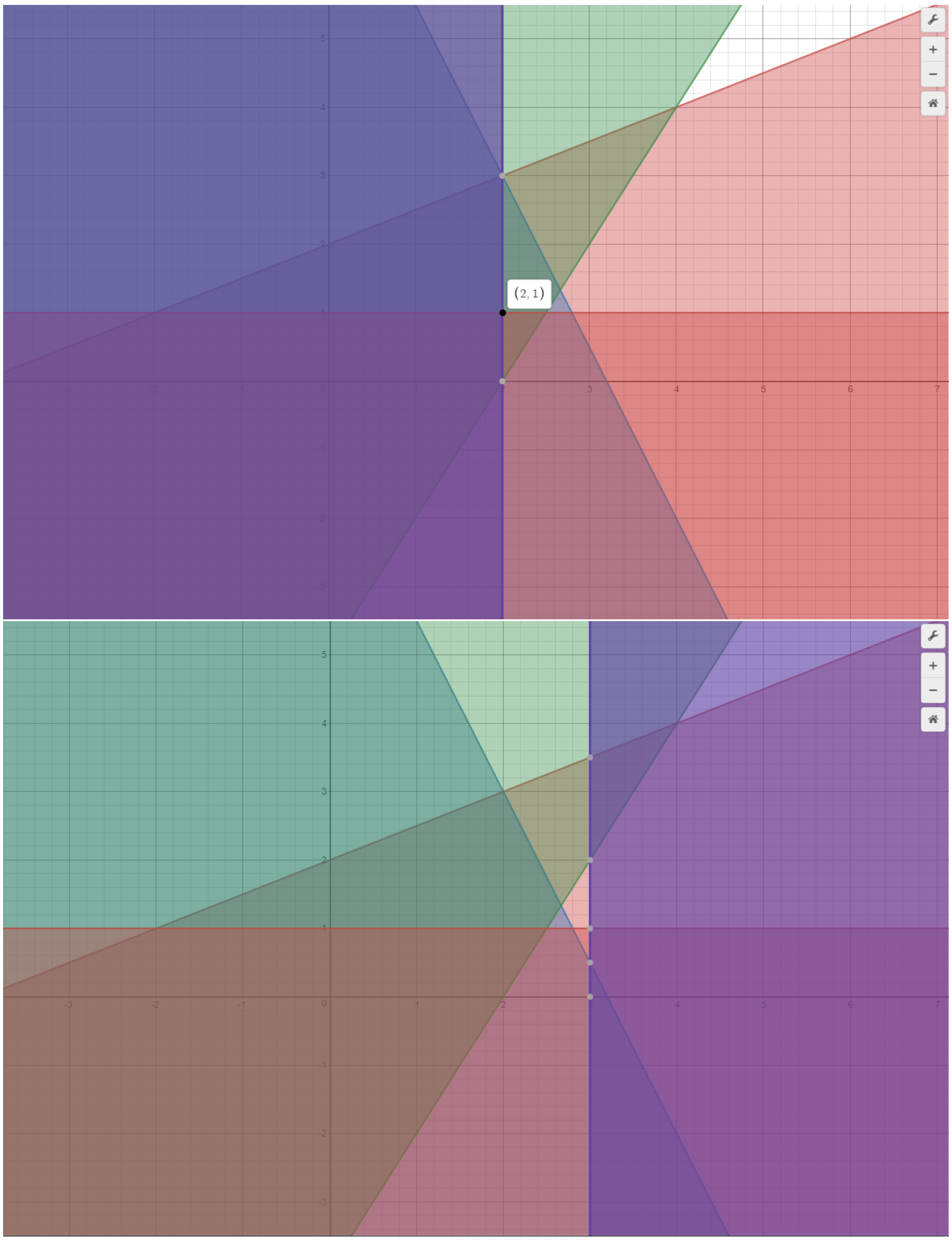

Figure 4: Solution des sous-problèmes 3 et 4.

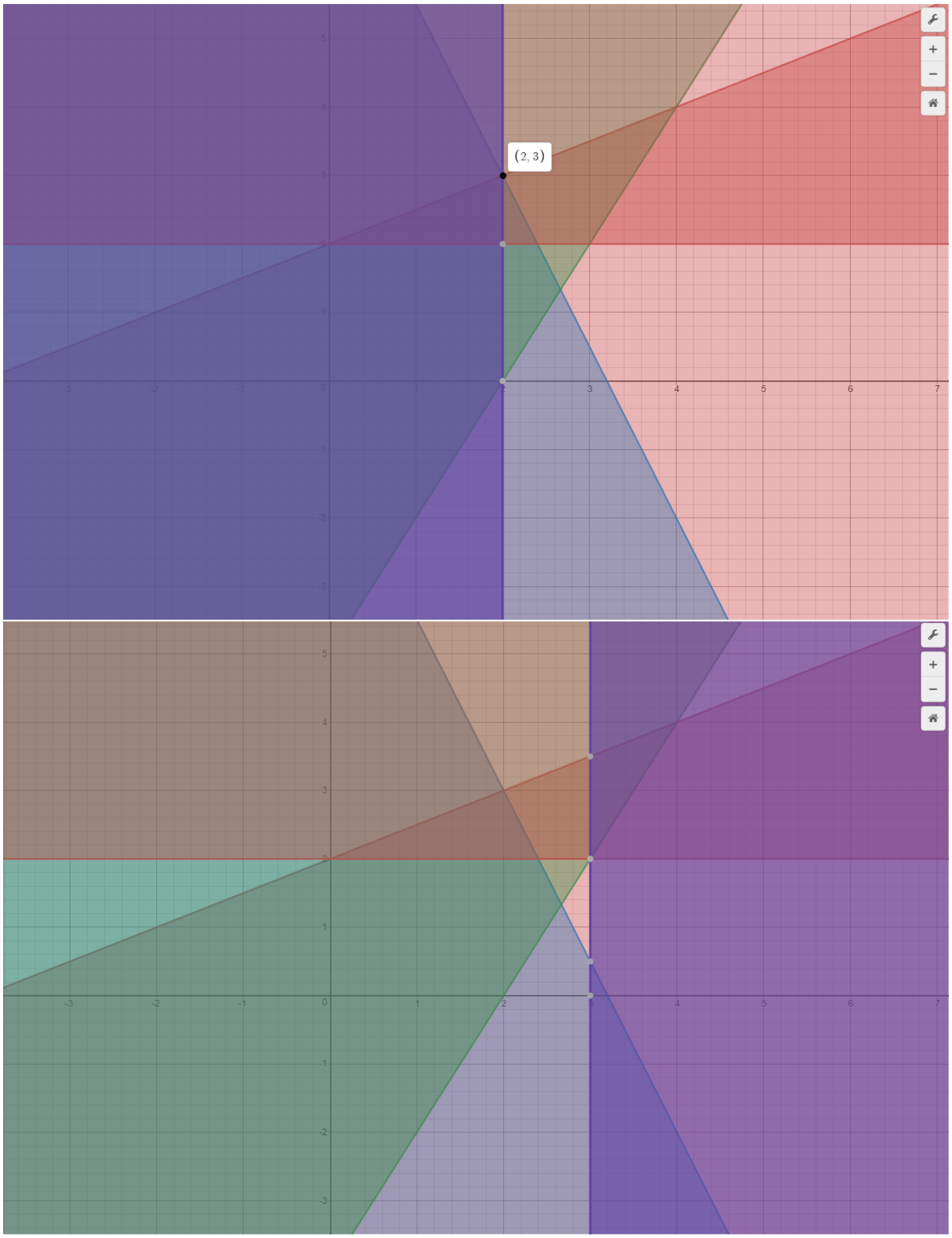

Figure 5: Solution des sous-problèmes 5 et 6.

Question 2 :

Question 2.a :

On résout tout d'abord le problème du sac alpin multi-objectifs avec Lingo de façon uni-objectif (on utilise une contrainte fictive sur l'objectif non utilisé afin d'avoir sa valeur dans la sortie de Lingo).

On obtient les résultats suivants :

Fonction objective privilégiée	Valeur de l'utilité	Valeur du profit
Utilité	1242	913
Profit	905	1236

```
!Fonction objectif UTILITE;
[FCT_UTIL] MAX = @SUM(OBJET(i):  UTILITE(i) * VD_SELEC(i));
!Fonction objectif PROFIT;
[FCT_PROFIT] @SUM(OBJET(i):  PROFIT(i) * VD_SELEC(i)) >= 0;

         Row    Slack or Surplus      Dual Price
    FCT_UTIL           1242.000        1.000000
  FCT_PROFIT           913.0000        0.000000

--------------------------------------------------------------------------------
!Fonction objectif UTILITE;
[FCT_UTIL] @SUM(OBJET(i):  UTILITE(i) * VD_SELEC(i)) >= 0;
!Fonction objectif PROFIT;
[FCT_PROFIT] MAX = @SUM(OBJET(i):  PROFIT(i) * VD_SELEC(i));

         Row    Slack or Surplus      Dual Price
    FCT_UTIL           905.0000        0.000000
  FCT_PROFIT           1236.000        1.000000
```

Figure 6: Code Lingo et la fenêtre de résultats obtenues respectivement pour chaque résolution uni-objectif.

Question 2.b :

D'après la question a, lorsque le profit est maximisé, on obtient un profit de 1236.

On applique la méthode lexicographique en appliquant la contrainte sur le profit (qui est l'objectif prioritaire) tel qu'affichée sur le code Lingo de la Figure 7.

En soit, il suffit de fixer notre objectif prioritaire à sa valeur maximisé en tant que contrainte et de passer la fonction d'utilité en tant que fonction objective.

```
!Fonction objectif UTILITE;
[FCT_UTIL] MAX = @SUM(OBJET(i):  UTILITE(i) * VD_SELEC(i));
!Fonction objectif PROFIT;
[FCT_PROFIT] @SUM(OBJET(i):  PROFIT(i) * VD_SELEC(i)) = 1236;

        Row    Slack or Surplus      Dual Price
   FCT_UTIL        905.0000            1.000000
 FCT_PROFIT        0.000000            0.000000
```

Figure 7: Code Lingo et la fenêtre de résultats obtenues par méthode lexicographique.

Toutefois, il semblerait que cette méthode ne soit pas très efficace dans le cas présent, étant donné qu'on retrouve une utilité de 905 comme à la question précédente.

Question 2.c :

A l'instar de la question a, on utilise deux contraintes fictives afin de pouvoir avoir les valeurs respectives de l'utilité et du profit.

On applique la méthode de la somme pondérée en créeant un nouvelle fonction objective (appelée $[FCT\_SUM]$) ainsi que deux paramètres complémentaires $W1$ et $W2$ (voir Figure 8) qui agiront en tant que poids sur les sous-fonctions objectives ($[FCT\_UTIL]$ et $[FCT\_PROFIT]$).

La nouvelle fonction objective est une somme des deux autres fonctions objectives ($[FCT\_UTIL]$ et $[FCT\_PROFIT]$) qui sont respectivement soumis aux poids $W1$ et $W2$ (compris entre 0 et 1) que l'on fait varier.

```
DATA:
      !... Données de l'énoncé ...;

      !Poids;
      W1 = 0.4;
      W2 = 0.6;
ENDDATA

!Fonction objectif SOMME pondérée;
[FCT_SUM] MAX = W1 * @SUM(OBJET(i):  UTILITE(i) * VD_SELEC(i)) + W2 * @SUM(OBJET(i):  PROFIT(i) * VD_SELEC(i)) ;
!Fonction objectif UTILITE;
[FCT_UTIL] @SUM(OBJET(i):  UTILITE(i) * VD_SELEC(i)) >= 0;
!Fonction objectif PROFIT;
[FCT_PROFIT] @SUM(OBJET(i):  PROFIT(i) * VD_SELEC(i)) >= 0;
```

Figure 8: Code Lingo utilisé pour la méthode par somme pondérée.

On obtient les résultats suivant en faisant varier $W1$ (W_{Profit}) et $W2$ ($W_{Utilite}$) d'un pas de 0.1 :

W_{Profit}	$W_{Utilite}$	Z	Z_{Profit}	$Z_{Utilite}$
0	1	1242	913	1242
0.1	0.9	1209.1	913	1242
0.2	0.8	1184.2	1041	1220
0.3	0.7	1166.3	1041	1220
0.4	0.6	1148.4	1041	1220
0.5	0.3	1145.5	1193	1098
0.6	0.4	1155	1193	1098
0.7	0.3	1164.5	1193	1098
0.8	0.2	1181	1219	1029
0.9	0.1	1203.1	1229	970
1	0	1236	1236	905

On constate que la valeur des objectifs évoluent par pallier progressif. La courbe dessinée montre qu'il faudrat faire un compromis entre profit et utilité, ces objectifs étant apparemment contradictoires dans le sens où maximiser le profit entrainera forcément une diminution de l'utilité et vice-versa.

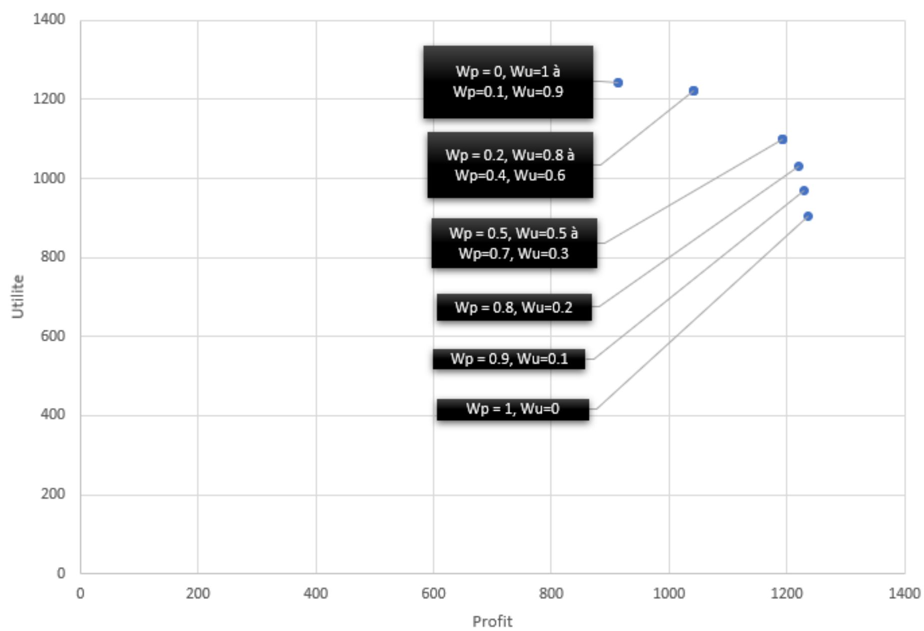

Figure 9: Graphique $Z_{utilite}$ en fonction de Z_{profit} obtenu par la méthode de la somme pondérée.

Question 2.d :

On applique désormais la méthode ϵ en appliquant une borne inférieure sur le profit, que l'on va faire varier tel qu'indiqué dans le tableau ci-dessous.

Les bornes inférieures min et max ont été choisiées à partir des résultats des questions précédentes.

$BorneInf_{Profit}$	$Z_{Utilite}$	Z_{Profit}
913	1242	913
943	1233	979
1003	1220	1041
1063	1200	1063
1093	1170	1099
1123	1149	1127
1153	1108	1165
1183	1098	1193
1213	1029	1219
1236	905	1236
1237	-	-

A l'instar des questions précédentes, on rajoute une contrainte fictive qui permettra de récupérer la valeur de la fonction objective du profit facilement via Lingo.

On obtient un graphe similaire à celui obtenu par la méthode de la somme pondérée. Toutefois, alors que les variations linéaires des poids offraient des solutions éparses, la méthode ϵ offre des solutions réparties linéairement pour une variation linéaire de la borne inférieure. On a donc une meilleure "vision" de la courbe présentant les solutions optimales et il est également plus facile de repérer les différents palliers.

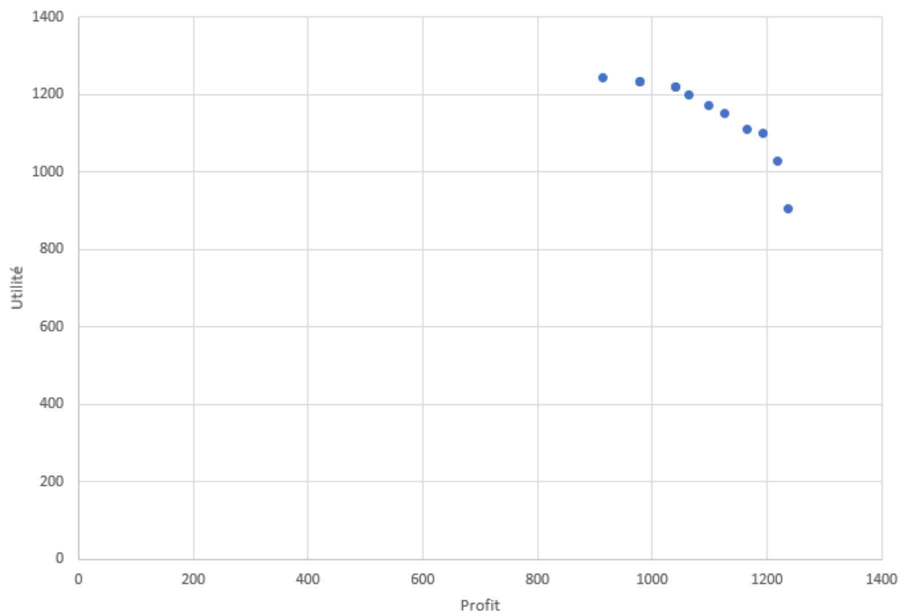

Figure 10: Graphique $Z_{utilite}$ en fonction de Z_{profit} obtenu par la méthode ϵ.

```
DATA

      !... Données de l'énoncé ...;

      !Borne inférieure (que l'on fait varier);
      BORNE_INF_PROFIT  = 913;

ENDDATA

!Fonction objectif UTILITE;
[FCT_UTIL] MAX = @SUM(OBJET(i):  UTILITE(i) * VD_SELEC(i));
!Fonction objectif PROFIT (utilisé pour avoir la valeur du profit);
[FCT_PROFIT] @SUM(OBJET(i):  PROFIT(i) * VD_SELEC(i)) >= 0;

!Borne inférieure (e-method);
[FCT_PROFIT_INF] @SUM(OBJET(i):  PROFIT(i) * VD_SELEC(i)) >= BORNE_INF_PROFIT;
```

Figure 11: Code Lingo utilisé pour la méthode ϵ.

Question 2.e :

Ici, cela dépend ultimement du choix du décideur. En effet, il faudrat dans tous les cas accepter de faire un compromis entre utilité et profit.

Il y a évidemment les choix extrêmes qui permettent de maximiser le profit au détriment de l'utilité (1236;905) ainsi que son contraire (913;1242)

Toutefois, il est possible de choisir des solutions plus modérées qui offrent un compromis respectable. Selon nous, les solutions qui sont les plus intéressantes sont les suivantes :

$Z_{Utilite}$	Z_{Profit}	Compromis
1220	1041	Orienté utilité
1029	1219	Orienté profit
1149	1127	Utilité et Profit

Les trois solutions citées ci-dessus ont l'avantage de proposer un profit et une utilité forte sans sacrifier l'une ou l'autre des valeurs, offrant ainsi un parfait entre-deux.