2022-10-27

基础物理学 2 半期辅导讲义

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{k\lambda}{\rho^2}$$

作者：未央书院 鲁睿 潘佳铭 解奕扬

指导教师 陈少敏

目　录

[1]本讲义 LaTeX 源代码（github 仓库），访问个人博客预览和下载本讲义最新版本

1

几何光学

1.1 临界光线

性质 1.1 最小偏向角

当一束光在顶角为 α、折射率为 n 的三棱镜中发生两次折射时，其偏向角有极小值，当入射角和出射角相等时取极小值，最小偏向角满足的方程如下

$$n\sin\left(\frac{A}{2}\right)=\sin\left(\frac{\delta_{\min}+A}{2}\right)$$

♠

该性质的一个直观想法是，由于**光路可逆原理**，对称角附近偏离相同角度时互为可逆光，总偏向角不变，故为极值，至于是极大值还是极小值需要计算二阶导数。

证明. 设第一次折射对应的入射角和出射角分别为 i_1, r_1，第二次折射对应的入射角和出射角分别为 i_2, r_2，有几何关系 $\frac{\pi}{2}-r_1+\frac{\pi}{2}-i_2+A=\pi$，总偏折角度

$$\Delta=i_1-r_1+r_2-i_2=i_1+r_2-A$$

由折射定律关系 $\sin i_1=n\sin r_1, n\sin i_2=\sin r_2$，将总偏折角度代换为 r_1 的函数

$$\Delta(r_1)=\arcsin(n\sin r_1)+\arcsin(n\sin(A-r_1))-A$$

上述函数关系具有对称性 $\Delta(r_1) = \Delta(A - r_1)$，在 $r_1 = \dfrac{A}{2}$ 处求二阶导

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\Delta}{\mathrm{d}r_1^2}\right|_{r_1=\frac{A}{2}} = \frac{n\left(n^2-1\right)\sin r_1}{\left(1-n^2\sin^2 r_1\right)^{3/2}} + \frac{n\left(n^2-1\right)\sin(A-r_1)}{\left(1-n^2\sin^2(A-r_1)\right)^{3/2}} = \frac{2n\left(n^2-1\right)\sin\dfrac{A}{2}}{\left(1-n^2\sin^2\dfrac{A}{2}\right)^{3/2}} > 0$$

从而对应极小值，代表最小偏向角。 □

性质 1.2 掠入射

光从折射率为 n_1 的介质均匀地射入折射率为 n_2 的介质时（$n_1 < n_2$），出射临界角

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$$

♠

由折射定律以及 $\sin i_1 \le 1$ 易证。

1.2 光学仪器

性质 1.3 显微镜

设显微镜的光学筒长 $\Delta = d - f_O - f_E$，人眼明视距离为 $s_0(\approx 25\,\mathrm{cm})$，物镜和目镜的焦距为 f_O 和 f_E，其角放大率为

$$M = \frac{\Delta s_0}{f_O f_E}$$

♠

证明中约定物体成像在明视距离，并使用凸透镜的牛顿公式进行化简。

性质 1.4 望远镜

设望远镜的物镜和目镜的焦距为 f_O 和 f_E，则角放大率为

$$M = \frac{f_O}{f_E}$$

♠

证明. 使用凸透镜焦平面的特性，当平行光入射至凸透镜时（可以倾斜），其汇聚于焦平面上的一点（即**焦平面上的点共轭于无穷远**），设汇聚点距离光轴为 d，则视场角度和原始角度之比为放大率 $M = \dfrac{d/f_E}{d/f_E} = \dfrac{f_O}{f_E}$。 □

2

波动光学

2.1 干涉

2.1.1 杨氏双缝及其变形

性质 2.1 经典杨氏双缝

当一束光经过两个相距为 d（d 很小）的小孔之后，在距离小孔为 D 的干涉屏上出现干涉条纹，其间距为

$$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda$$

从公式上看，相当于把波长放大 $\frac{D}{d}$ 倍，这是一种最典型的**分波前**干涉的方法。

性质 2.2 杨氏双缝变形

各种杨氏双缝变式本质上也是两个点光源进行干涉，只是前者更加直接

干涉名称	等效 d	等效 D
双棱镜	虚光源距离 $2s_1(n-1)\alpha$	虚光源与干涉平面的间距 s_1+s_2
劳埃镜	光源与镜面像距离 $2d$	光源与干涉平面的间距 D
对切透镜	两个半透镜成像距离 $2y'$	成像平面与干涉平面的间距 $L-v$

以上都是将光束分成两束不同的子波进行干涉，都属于**分波前干涉**，还有一种干涉类型为**分振幅干涉**。

定义 2.3 干涉类型

- **分波前法**：让光波通过并排的两个小孔或利用反射和折射方法，把光波的波前分割出两个部分（本质上是**惠更斯原理**），形成两个次波重新叠加发生干涉；
- **分振幅法**：利用光在介质表面分割产生两个反射光或两透射光波（反射和透射如何分配，本质上是**菲涅尔衍射公式**），两者走过不同的光程，重新叠加并发生干涉。

2.1.2 薄膜干涉和迈克尔逊干涉仪

性质 2.4 等厚干涉光程差

一束光从空气射入厚度为 h 的薄膜，其折射角为 i，则该束光在薄膜上下反射的两束光光程差为

$$\Delta = 2nh\cos i$$

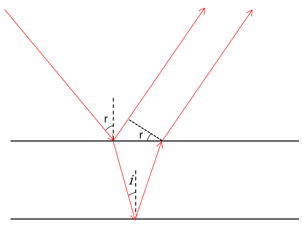


图 2–1 等厚干涉光路图

证明. 由折射定律 $\sin r = n\sin i$，而上束光多走了 $x_1 = h\cdot 2\tan i\cdot\sin r$，下束光多走了 $x_2 = n\cdot\dfrac{2h}{\cos i}$，则光程差计算为

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{2nh}{\cos i} - 2h\tan i\sin r = 2h\left(\frac{n}{\cos i} - \frac{\sin i\cdot \sin r}{\cos i}\right)\\ &= 2h\left(\frac{n}{\cos i} - \frac{\sin i\cdot n\sin i}{\cos i}\right) = 2nh\frac{1-\sin^2 i}{\cos i} = 2nh\cos i\end{aligned}$$

□

性质 2.5 迈克尔逊干涉仪光程差

迈克尔逊干涉仪的结构类似“麻将”局，东西南北方都要经过，其光程差为长度差的两倍

$$\Delta = 2(l_1 - l_2)$$

2.2 衍射

- **菲涅尔衍射 (近场衍射)**: 光源或观察屏到衍射屏的距离为**有限**的衍射。
- **夫琅禾费衍射 (远场衍射)**: 光源和观察屏到衍射屏的距离均为**无限**的衍射。

2.2.1 半波带法

- **夫琅禾费单缝衍射的半波带法**

把单缝分割成一系列条带, 相邻条带之间的光程逐个相差半个波长, 称为半波带。相邻半波带贡献的复振幅相位差为 π，在图示中表现为相邻矢量，A_k 和 A_{k+1} 向。容易知道，每条半波带的贡献相等，不妨记作 $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$

当半波带总数为奇数时，$A_{total} = A$，偶数时，$A_{total} = 0$

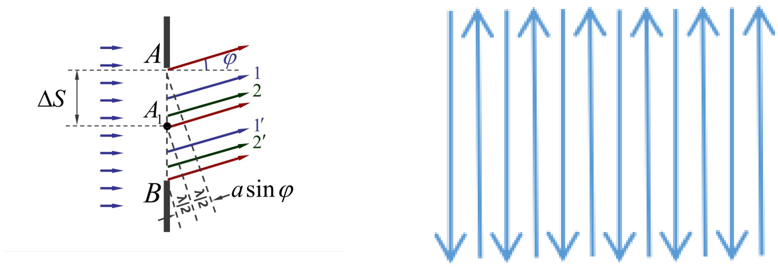


图 2–2 夫琅禾费单缝衍射的半波带法图例

- **菲涅尔圆孔衍射的半波带法**

波前分割为一系列环形带，相邻环形带到像点的距离逐个相差半个波长，称为半波带。相邻半波带贡献的复振幅相位差为 π，在图示中表现为相邻矢量 A_k，和 A_{k+1} 反向。

不同于单缝衍射，由于倾斜因子影响，每条半波带的贡献，逐渐减小 $\lim_{k\to\infty} A_K = 0$

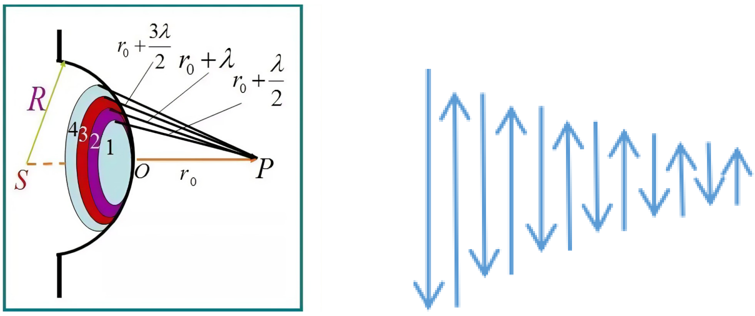


图 2–3 菲涅尔圆孔衍射的半波带法图例

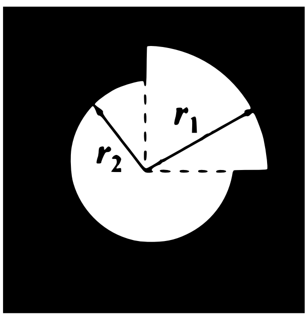
性质 2.6 菲涅尔波带片

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{k\lambda}{\rho_k^2}$$

当物距 R, 像距 b 时 $\left[\begin{array}{c}1.\ \text{通过}\rho_k\ \text{的光线} \\ 2.\ \text{通过}\rho_0=0\ \text{的光线 (与光轴重合的光线)}\end{array}\right]$ 光程差为 $k\lambda$ ♠

例 2.7 单色平面光波波长 5000 Å，正入射到如下图所示的衍射屏上，$r_1=\sqrt{2}$ mm, $r_2=1$ mm，轴上观察点离衍射屏 2 m，计算观察点处的振幅和强度 (用 A_0 和 I_0 表示)。

✍



(a) 例 2.4 题图

图 2–4 半波带法的具体例子

2.2.2 振幅矢量法

► **夫琅禾费单缝衍射的振幅矢量法**

振幅矢量法不要求 $\sin\varphi = k\frac{\lambda}{2}$，可以视作半波带法的细化 *i.e.* 普适版本。具体说来，它将单缝分割成 $dx \to 0$ 的微元，相位差 $d\theta = \frac{2\pi}{\lambda} dx \sin\varphi$，于是总相位差

$$\cancel{2}\,\alpha = \frac{\cancel{2}\pi}{\lambda} a \sin\varphi$$

因此, 若将 $\varphi = 0 \equiv \theta$ 时的振幅记作 A_0, 从而绘制矢量图得到

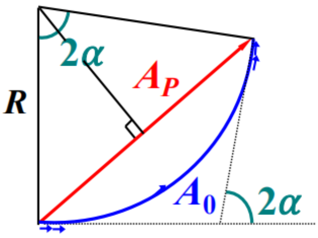


图 2–5 光栅振幅矢量法图例

性质 2.8 单缝衍射因子

在单缝衍射中，定义 $\alpha = \dfrac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$，则振幅和光强分布如下

$$A_\varphi = \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) A_0 \Rightarrow I_\theta = \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 I_0$$

► **菲涅尔圆孔衍射的振幅矢量法**

定理 2.9 菲涅尔衍射公式

$$\widetilde{U}(P) = K \iint\limits_{\Sigma} F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \widetilde{U_0}(Q) \mathrm{d}\Sigma$$

$$F: \text{倾斜因子} \quad \frac{e^{ikr}}{r}: \text{距离因子} \quad \widetilde{U_0}(Q)\mathrm{d}\Sigma: \text{次波源强度}$$

当 Σ 代表点波源产生的球面波波前，$\widetilde{U_0}(Q)$ 为常量，$\dfrac{\mathrm{d}\Sigma}{r} \propto \mathrm{d}r$，故上式可写作

$$\widetilde{U}(P) = C \int_{\Sigma} e^{ik(r-r_0)} F(\theta_0 \theta)\, \mathrm{d}r$$

由于 r 变化时 $e^{ik(r-r_0)}$ 变化较快，$F(\theta_0\theta)$ 变化较慢，所以我们先忽略 $F(\theta_0\theta)$ 的变化，此时

$$\widetilde{U}(P) = C' \int_{\Sigma} e^{ik(r-r_0)}\mathrm{d}r$$

这一积分可以用复平面上的矢量图来表示。

至此, 与夫琅禾费单缝衍射的振幅矢量法别无二致。接下来考虑倾斜因子, 随着 r 的增大 $i.e.$ 倾角的增倾斜因子 $F \to 0$，于是图中半径 $R \to 0$，形成菲涅尔螺线。可以发现若将每个半圆用其直径来代替, 则退化成半波带法。

使用`siunitx` 宏包可以方便地输入 SI 单位制单位，例如`\SI{5}{\um}` 可以得到5 μm。

2.2.3 多缝干涉和艾里斑

若光栅缝间距为 d, 则缝间相位差

$$2\beta = \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\varphi$$

Thus, 若将单缝振幅记作 A_1, 矢量图如下

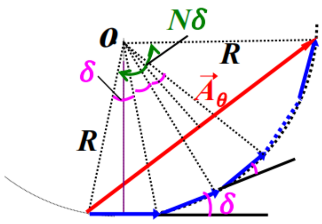


图 2–6 菲涅尔圆孔衍射的振幅矢量法图例

$$A_\varphi = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right) A_1 \Rightarrow I_\varphi = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 I_1$$

这正是光栅的缝间干涉因子。于是

性质 2.10 光栅衍射因子

在光栅衍射中，定义 $\alpha = \dfrac{\pi a\sin\varphi}{\lambda}, \beta = \dfrac{\pi d\sin\varphi}{\lambda}$，则振幅和光强分布如下

$$A_\varphi = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) A_0 \Rightarrow I_\varphi = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 I_0$$

♠

定义 2.11 光栅本领

- k 级主极大条件: $\beta_k = k\pi \Leftrightarrow d\sin\varphi_k = k\lambda$ ((微分: $d\cos\varphi_k\delta\varphi_k = \delta(k\lambda)$)
- k 级主极大半角宽: $\Delta\beta_k = \dfrac{\pi}{N} \Leftrightarrow d\cos\varphi_k\Delta\varphi_k = \dfrac{\lambda}{N} \Leftrightarrow \Delta\varphi_k = \dfrac{\lambda}{Nd\cos\varphi_k}$
- 分辨本领: $d\sin(\varphi_k \pm \Delta\varphi_k) = k(\lambda \pm \delta\lambda) \Leftrightarrow d\cos\varphi_k\Delta\varphi_k = k\delta\lambda = \dfrac{\lambda}{N} \Leftrightarrow R = \dfrac{\lambda}{\delta\lambda} = k$
- 角色散本领 : $D_\theta \equiv \dfrac{\delta\varphi_k}{\delta\lambda} = \dfrac{k}{d\cos\theta_k}$
- 线色散本领 : $D_l = f \cdot D_\theta = \dfrac{kf}{d\cos\theta_k}$

♣

例 2.12 一个三狭缝衍射屏, 缝宽均为 $\boldsymbol{a}$, 彼此间距为 $\boldsymbol{d}$, 中间缝盖有可以引起 180° 相位改变的滤光片, 波长为 λ 的单色光正人射, 计算下列各种情况下的衍射角:

(1) 第一衍射极小;

(2) 第一干涉极小;

(3) 第一干涉极大。

✍

性质 2.13 艾里斑

艾里斑是点光源通过理想透镜成像时, 由于绕射而在焦点处形成的光斑, 其最小分辨角以及分辨本领分别公式为:

$$\delta\theta = \theta_1 \approx 1.22\frac{\lambda}{D}, R \equiv \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda}$$

♠

2.3 偏振

2.3.1 菲涅尔反射折射公式

斯托克斯公式、两个光路图推导公式定性推导、半波损失、全反射、隐失波的解释

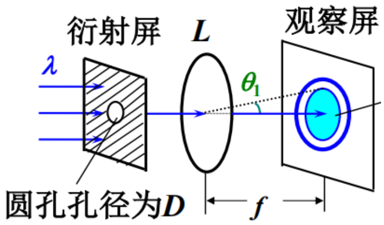


图 2–7 艾里斑示意图

性质 2.14 斯托克斯倒逆关系

如下图所示，设光从介质 A 传播到介质 B 的反射系数和透射系数分别为 r,t，从介质 B 到介质 A 的反射系数和透射为 r',t'，以下关系式成立（四个系数均为复数）

$$\begin{cases} r' = -r \\ r^2 + tt' = 1 \end{cases}$$

证明. 如图所示，由于光路可逆，将反射光和透射光按照原路照射返回，对应振幅不变即可。 □

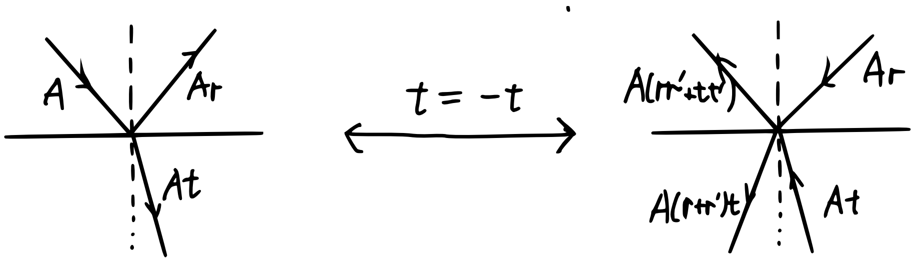


图 2–8 斯托克斯倒逆关系示意图

性质 2.15 菲涅尔公式

光在两种不同折射率的介质中传播时，其反射光和折射光在垂直平面和平行平面分量（p 光和 s 光）对应系数如下：

$$\begin{cases} r_s = \dfrac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} & t_s = \dfrac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \\ r_p = \dfrac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} & t_p = \dfrac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} \end{cases}$$

证明. 该公式推导需要运用到电磁场的边界条件，此处从略，可点击此链接查看。 □

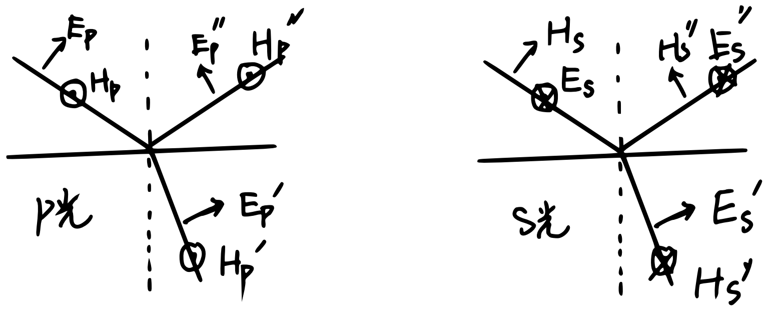


图 2–9 菲涅尔公式示意图

性质 2.16 正入射情形

当 $i_1 = i_2 = 0$ 时，$n_2 > n_1$

$$r_s < 0,\ E_s'' \text{与} E_s \text{正方向相同}$$
$$r_p > 0,\ E_p'' \text{与} E_p \text{正方向相反，产生严格的半波损失}$$

注 2.17. 《光学》教材对于全反射情况下相位变化公式推导缺少负号（见下），本质上是求复数幅角 $\arg \dfrac{A - Bi}{A + Bi} = -2\arctan\left(\dfrac{B}{A}\right)$

$$\delta_{\mathrm{p}} = -2\arctan \frac{n_1}{n_2}\frac{\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1 - 1}}{\cos i_1}, \delta_{\mathrm{s}} = -2\arctan \frac{n_2}{n_1}\frac{\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1 - 1}}{\cos i_1}.$$

例 2.18 s 光以 θ 角从折射率 n_1 介质入射厚度为 d、折射率为 n_2 的玻璃平板后回到 n_1 介质（$n_2 > n_1$），求以下两种情况的能量透射率：

(1) d 很小，相邻出射光束间仍有相干性；

(2) d 很大，相邻出射光束间无相干性。（提示：类比法布里-珀罗干涉仪）

2.3.2 双折射和 $\frac{\lambda}{4}$ 片

性质 2.19 光学介质

如下图所示，规定主截面为法线和光轴所在平面，o 光为偏振方向垂直主截面，e 光为偏振方向平行主截面：♠

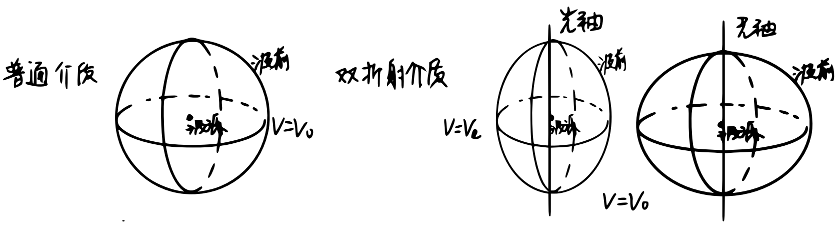


图 2–10 普通介质和光学介质示意图

例 2.20 求以下两种情况的折射角 r 和波矢与法线夹角 θ（入射光在主截面内）

(1) 入射角为 i，光轴平行法线；

(2) 入射光平行法线，光轴与法线夹角为 φ。

✍

性质 2.21 双折射应用

以下三种棱镜均使用了 o 光和 e 光双折射性质：♠

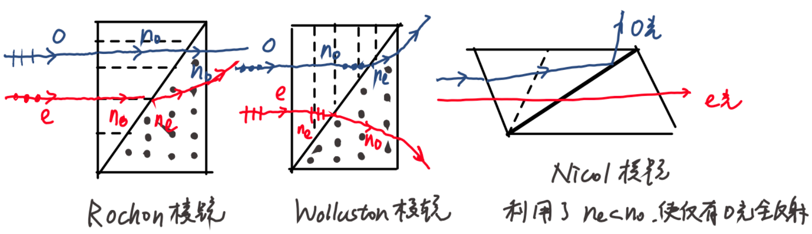


图 2–11 Rochon 棱镜、Wolluston 棱镜、Nicol 棱镜示意图

性质 2.22 $\frac{\lambda}{4}$ 片

对下图所示波晶片, o 光、e 光在通过波晶片后产生相位差，其满足

$$\Delta=\frac{2\pi}{\lambda}\left(n_o-n_e\right)d$$

当 $\left(n_o-n_e\right)d=\frac{\lambda}{4}$ 时，$\Delta=\frac{\pi}{2}$，此时波片可以进行线偏振和圆偏振间的转化。♠

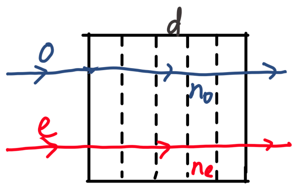


图 2–12 $\frac{\lambda}{4}$ 片示意图

性质 2.23 琼斯矩阵初步

波晶片不同位置对应变换如下

$$\text{波晶片以光轴方向为}x\text{ 轴:}\ \begin{bmatrix}A_x'\\A_y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&e^{-i\Delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix}$$

$$\text{波晶片以偏振方向为}x\text{ 轴:}\ \begin{bmatrix}A_x'\\A_y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix}$$

♠

2.3.3 旋光性

定义 2.24 旋光性

当平面偏振光通过手性化合物溶液后，偏振面的方向就被旋转了一个角度，这种能使偏振面旋转的性能称为旋光性。其本质为***存在手性***, 则左右旋光与溶液中分子的作用方式不同。♣

例 2.25 令溶液左右旋折射率为 n_L,n_R，计算波长为 λ 的线偏振光经过长度为 d 的溶液后对应的振幅变换矩阵。

✍

2.4 色散

2.4.1 相速度、群速度

性质 2.26 相速度和群速度关系

只要有色散，相速度和群速度就不相等，其满足以下表达式：

$$n_g = n - \lambda\frac{dn}{d\lambda} \text{ or } v_g = v_p + k\frac{dv_p}{dk}$$

♠

证明. 群速度定义 $v_y = \frac{d\omega}{dk}$ 利用 $k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi n}{\lambda}$，$\lambda$ 为真空波长，得到 $n_g = n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}$ or $v_g = v_p + k\frac{dv_p}{dk}$。若 $v_g = \text{Const}$，此时 $\frac{dn}{d\lambda} = 0$，即 $n = \text{const}$。 □

例 2.27 汞灯的双黄线波长为 λ 和 $\lambda + \Delta\lambda$（$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1$）。在最小偏向角附近入射到一个顶角为 α 的三棱镜上，出射时两线角间距为 δ，棱镜对汞双黄线的平均折射率为 n，已知 $\frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda}$ 不是很小：

(1) 求最小偏向角；

(2) 求棱镜对汞灯双黄线的色散率 $\frac{dn}{d\lambda}$；

(3) 若一束波长为 λ 的黄光脉冲入射到与三棱镜材质相同的玻璃片上，玻璃片厚度为 d，求黄光脉冲通过改玻璃片所需要的时间 t。

✍

2.4.2 柯西公式

性质 2.28 柯西公式

光在透明材质下，其折射率和波长之间满足经验公式：

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \cdots$$

♠

证明. 假设电子在库仑力的束缚下，在外电场中运动（光是电磁波），其运动方程和弹簧振子在余弦外力作用的运动方程类似，相应系数均为 ω^2 的函数，严格计算有 $n(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\sum_j \frac{f_j\left(\omega^2-\omega_j^2\right)}{\left(\omega^2-\omega_j^2\right)^2+\omega^2\gamma_j^2}$，将其泰勒展开可得上述关系，一般取前两项或者三项就能达到很高精度。 □

3

量子物理

3.1 康普顿散射

性质 3.1 康普顿散射公式

康普顿散射是指当 X 射线或伽马射线的光子跟物质相互作用，因失去能量而导致波长变长的现象，其波长变化量公式如下

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

♠

证明. 其中 $\underrightarrow{P}$ 表示四维动量, i/f 代表 initial/final, θ 是光子偏转角 (能、动量守恒也能做)

$$\underrightarrow{P_{\gamma i}} + \underrightarrow{P_{ei}} = \underrightarrow{P_{\gamma f}} + \underrightarrow{P_{ef}} \Rightarrow \underrightarrow{P_{\gamma i}} + \underrightarrow{P_{ei}} - \underrightarrow{P_{\gamma f}} = \underrightarrow{P_{ef}} \Rightarrow (\underrightarrow{P_{\gamma i}} + \underrightarrow{P_{ei}} - \underrightarrow{P_{\gamma f}})^2 = (\underrightarrow{P_{ef}})^2$$

$$\Rightarrow 0 + \left(-m_e c^2\right) + 0 + 2\left(-\underrightarrow{P_{\gamma i}} \cdot \underrightarrow{P_{\gamma f}} + \underrightarrow{P_{ei}} \cdot \left(\underrightarrow{P_{\gamma i}} - \underrightarrow{P_{\gamma f}}\right)\right) = -m_e c^2$$

$$\Rightarrow \underrightarrow{P_{\gamma i}} \cdot \underrightarrow{P_{\gamma f}} = \underrightarrow{P_{ei}} \cdot \left(\underrightarrow{P_{\gamma i}} - \underrightarrow{P_{\gamma f}}\right) \Rightarrow \frac{h^2}{\lambda_i \lambda_f}(\cos\theta - 1) = -m_e c\left(\frac{h}{\lambda_i} - \frac{h}{\lambda_f}\right)$$

□

3.2 普朗克黑体辐射

$$\left.\begin{array}{r}\text{瑞丽－金斯公式 (长波)}: \dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}k_BT \\ \text{维恩公式 (短波)}: \dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\dfrac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT}}\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{爱因斯坦受激辐射理论}]{\text{普朗克凑出}} \text{普朗克公式}: \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1}$$

3.3 波函数、算符和对易性

定义 3.2 波函数统计解释和归一性

$|\Psi(\vec{r},t)|^2 = \Psi^*(\vec{r},t)\times\Psi(\vec{r},t)$代表$t$时刻,$\vec{r}$附近的概率密度。

$$\text{概率的归一性}: 1 = \int_{\text{全空间}} dP = \int_{\text{全空间}} |\Psi(\vec{r},t)|^2 dP$$

♣

定义 3.3 算符的引入

$$\text{对自由粒子}\begin{cases}\Psi(\vec{r},t) = \Psi_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} \xlongequal{\text{代入}\vec{p}=\hbar\vec{k},E=\hbar\omega} \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})} \\ -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}\Psi(\vec{r},t) = -i\hbar\Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})\right) = p_x\Psi(\vec{r},t)\end{cases}$$

$$\text{因此，我们把}-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\text{称作}x\text{方向的动量算符，记作}\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\text{同样的，我们有}\hat{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix}\hat{p}_x\\ \hat{p}_y\\ \hat{p}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}\\ -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial y}\\ -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix} = -i\hbar\nabla\text{称作动量算符}$$

♣

需要指出的是，虽然我们选择从自由粒子导出，但这些算符对于不同的波函数是普适的。对于其它的算符，下面给出一些例子

例 3.4 尝试给出非相对论动能算符、坐标表象下的系统总能量算符、轨道角动量算符、轨道角动量平方算符。

✍

定义 3.5 算符性质

- 标量 A 与 B : $AB = BA$
- 矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- 算符 $\hat{p}$ 与 $\hat{x}$ 的关系

$$\hat{p}_x[x\psi(x)] = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}[x\psi(x)] = -i\hbar\psi(x) - i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = -i\hbar\psi(x) + x\hat{p}_x\psi(x)$$

由于波函数 $\psi(x)$ 任意，可以略去不写，记作 $\hat{p}_x\hat{x} = -i\hbar + \hat{x}\hat{x}_x \Leftrightarrow \hat{p}_x\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x = -i\hbar$
我们将用 $[\hat{p}_x\hat{x}]$ 来表示 $\hat{p}_x\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x$，则对易关系表示为: $[\hat{p}_x, \hat{x}] = -i\hbar$。 ♣

定理 3.6 不确定关系

理论上可以证明，若用 σ_A 表达物理量 A 的标准差，$\hat{A}$ 表示 A 对应的算符，则有

$$\sigma_A\sigma_B \geqslant \left|\frac{\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle}{2i}\right|$$

♡

例 3.7 取 A, B 为 p_x, x，代入定理 3.6 推导测不准原理。

✍