

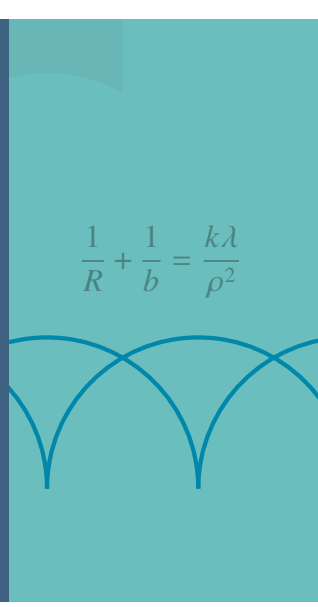


2022-10-28

# 基础物理学 2 半期辅导讲义

作者：未央书院 鲁睿 潘佳铭 解奕扬

指导教师 陈少敏

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{b} = \frac{k\lambda}{\rho^2}$$


# 目 录

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| 第一章 几何光学                         | 1  |
| 1.1 临界光线                         | 1  |
| 1.2 光学仪器                         | 2  |
| 第二章 波动光学                         | 3  |
| 2.1 干涉                           | 3  |
| 2.1.1 杨氏双缝及其变形                   | 3  |
| 2.1.2 薄膜干涉和迈克尔逊干涉仪               | 4  |
| 2.2 衍射                           | 5  |
| 2.2.1 半波带法                       | 5  |
| 2.2.2 振幅矢量法                      | 7  |
| 2.2.3 多缝干涉和艾里斑                   | 8  |
| 2.3 偏振                           | 9  |
| 2.3.1 菲涅尔反射折射公式                  | 9  |
| 2.3.2 双折射和 $\frac{\lambda}{4}$ 片 | 12 |
| 2.3.3 旋光性                        | 13 |
| 2.4 色散                           | 14 |
| 2.4.1 相速度、群速度                    | 14 |
| 2.4.2 柯西公式                       | 15 |
| 第三章 量子物理                         | 16 |
| 3.1 康普顿散射                        | 16 |
| 3.2 普朗克黑体辐射                      | 17 |
| 3.3 波函数、算符和对易性                   | 17 |

---

<sup>1</sup>本讲义 [L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 源代码](#) (github 仓库, 如果觉得有帮助, 麻烦点个 Star), 访问个人博客下载[本讲义最新版本](#)

# 1

## 几何光学

### 1.1 临界光线

#### 性质 1.1 最小偏向角

当一束光在顶角为  $\alpha$ 、折射率为  $n$  的三棱镜中发生两次折射时，其偏向角有极小值，当入射角和出射角相等时取极小值，最小偏向角满足的方程如下

$$n \sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sin\left(\frac{\delta_{\min} + A}{2}\right)$$

该性质的一个直观想法是，由于**光路可逆原理**，对称角附近偏离相同角度时互为可逆光，总偏向角不变，故为极值，至于是极大值还是极小值需要计算二阶导数。

**证明.** 设第一次折射对应的入射角和出射角分别为  $i_1, r_1$ ，第二次折射对应的入射角和出射角分别为  $i_2, r_2$ ，有几何关系  $\frac{\pi}{2} - r_1 + \frac{\pi}{2} - i_2 + A = \pi$ ，总偏折角度

$$\Delta = i_1 - r_1 + r_2 - i_2 = i_1 + r_2 - A$$

由折射定律关系  $\sin i_1 = n \sin r_1, n \sin i_2 = \sin r_2$ ，将总偏折角度代换为  $r_1$  的函数

$$\Delta(r_1) = \arcsin(n \sin r_1) + \arcsin(n \sin(A - r_1)) - A$$

上述函数关系具有对称性  $\Delta(r_1) = \Delta(A - r_1)$ ，在  $r_1 = \frac{A}{2}$  处求二阶导

$$\left. \frac{d^2\Delta}{dr_1^2} \right|_{r_1=\frac{A}{2}} = \frac{n(n^2-1)\sin r_1}{(1-n^2\sin^2 r_1)^{3/2}} + \frac{n(n^2-1)\sin(A-r_1)}{(1-n^2\sin^2(A-r_1))^{3/2}} = \frac{2n(n^2-1)\sin\frac{A}{2}}{(1-n^2\sin^2\frac{A}{2})^{3/2}} > 0$$

从而对应极小值，代表最小偏向角。 □

### 性质 1.2 掠入射

光从折射率为  $n_1$  的介质均匀地射入折射率为  $n_2$  的介质时 ( $n_1 < n_2$ )，出射临界角

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$$

由折射定律以及  $\sin i_1 \leq 1$  易证。

## 1.2 光学仪器

### 性质 1.3 显微镜

设显微镜的光学筒长  $\Delta = d - f_O - f_E$ ，人眼明视距离为  $s_0 (\approx 25 \text{ cm})$ ，物镜和目镜的焦距为  $f_O$  和  $f_E$ ，其角放大率为

$$M = \frac{\Delta s_0}{f_O f_E}$$

证明中约定物体成像在明视距离，并使用凸透镜的牛顿公式进行化简。

### 性质 1.4 望远镜

设望远镜的物镜和目镜的焦距为  $f_O$  和  $f_E$ ，则角放大率为

$$M = \frac{f_O}{f_E}$$

**证明.** 使用凸透镜焦平面的特性，当平行光入射至凸透镜时（可以倾斜），其汇聚于焦平面上的一点（即焦平面上的点共轭于无穷远），设汇聚点距离光轴为  $d$ ，则视场角度和原始角度之比为放大率  $M = \frac{d/f_E}{d/f_O} = \frac{f_O}{f_E}$ 。 □

# 2

## 波动光学

### 2.1 干涉

#### 2.1.1 杨氏双缝及其变形

##### 性质 2.1 经典杨氏双缝

当一束光经过两个相距为  $d$  ( $d$  很小) 的小孔之后, 在距离小孔为  $D$  的干涉屏上出现干涉条纹, 其间距为

$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$$

从公式上看, 相当于把波长放大  $\frac{D}{d}$  倍, 这是一种最典型的分波前干涉的方法。

##### 性质 2.2 杨氏双缝变形

各种杨氏双缝变式本质上也是两个点光源进行干涉, 只是前者更加直接

| 干涉名称 | 等效 $d$                  | 等效 $D$                  |
|------|-------------------------|-------------------------|
| 双棱镜  | 虚光源距离 $2s_1(n-1)\alpha$ | 虚光源与干涉平面的间距 $s_1 + s_2$ |
| 劳埃镜  | 光源与镜面像距离 $2d$           | 光源与干涉平面的间距 $D$          |
| 对切透镜 | 两个半透镜成像距离 $2y'$         | 成像平面与干涉平面的间距 $L - v$    |

以上都是将光束分成两束不同的子波进行干涉, 都属于分波前干涉, 还有一种干涉类型为分振幅干涉。

**定义 2.3 干涉类型**

- 分波前法：让光波通过并排的两个小孔或利用反射和折射方法，把光波的波前分割出两个部分（本质上是惠更斯原理），形成两个次波重新叠加发生干涉；
- 分振幅法：利用光在介质表面分割产生两个反射光或两透射光波（反射和透射如何分配，本质上是菲涅尔衍射公式），两者走过不同的光程，重新叠加并发生干涉。

**2.1.2 薄膜干涉和迈克尔逊干涉仪****性质 2.4 等厚干涉光程差**

一束光从空气射入厚度为  $h$  的薄膜，其折射角为  $i$ ，则该束光在薄膜上下反射的两束光光程差为

$$\Delta = 2nh \cos i$$

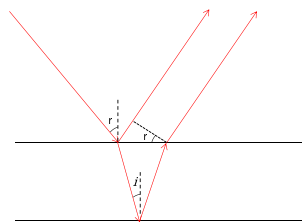


图 2-1 等厚干涉光路图

证明. 由折射定律  $\sin r = n \sin i$ ，而上束光多走了  $x_1 = h \cdot 2 \tan i \cdot \sin r$ ，下束光多走了  $x_2 = n \cdot \frac{2h}{\cos i}$ ，则光程差计算为

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2nh}{\cos i} - 2h \tan i \sin r = 2h \left( \frac{n}{\cos i} - \frac{\sin i \cdot \sin r}{\cos i} \right) \\ &= 2h \left( \frac{n}{\cos i} - \frac{\sin i \cdot n \sin i}{\cos i} \right) = 2nh \frac{1 - \sin^2 i}{\cos i} = 2nh \cos i \end{aligned}$$

□

**性质 2.5 迈克尔逊干涉仪光程差**

迈克尔逊干涉仪的结构类似“麻将”局，东西南北方都要经过，其光程差为长度差的两倍

$$\Delta = 2(l_1 - l_2)$$

## 2.2 衍射

- ▶ 菲涅尔衍射 (近场衍射): 光源或观察屏到衍射屏的距离为**有限**的衍射。
- ▶ 夫琅禾费衍射 (远场衍射): 光源和观察屏到衍射屏的距离均为**无限**的衍射。

### 2.2.1 半波带法

**▶ 夫琅禾费单缝衍射的半波带法**

把单缝分割成一系列条带，相邻条带之间的光程逐个相差半个波长，称为半波带。相邻半波带贡献的复振幅相位差为  $\pi$ ，在图示中表现为相邻矢量  $A_k$  和  $A_{k+1}$  向。容易知道，每条半波带的贡献相等，不妨记作  $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$

当半波带总数为奇数时， $A_{total} = A$ ，偶数时， $A_{total} = 0$

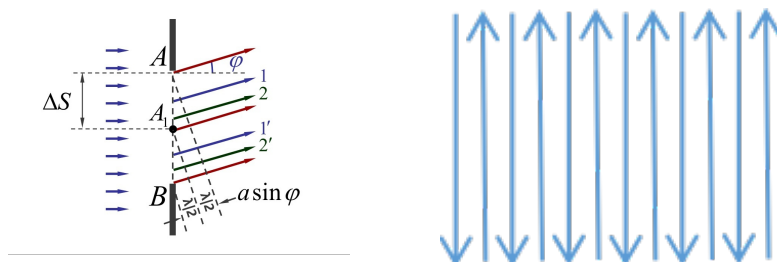


图 2-2 夫琅禾费单缝衍射的半波带法图例

**▶ 菲涅尔圆孔衍射的半波带法**

波前分割为一系列环形带，相邻环形带到像点的距离逐个相差半个波长，称为半波带。相邻半波带贡献的复振幅相位差为  $\pi$ ，在图示中表现为相邻矢量  $A_k$ ，和  $A_{k+1}$  反向。

不同于单缝衍射，由于倾斜因子影响，每条半波带的贡献，逐渐减小  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_K = 0$

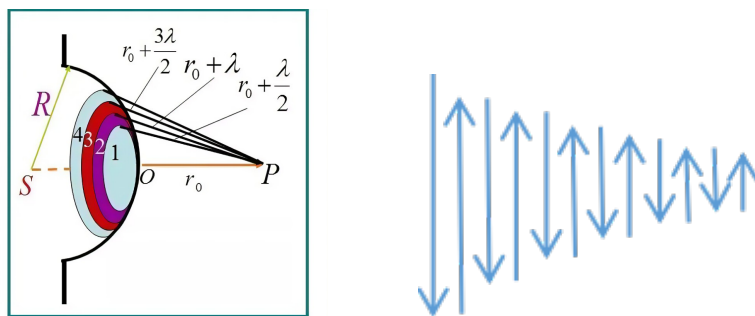


图 2-3 菲涅尔圆孔衍射的半波带法图例

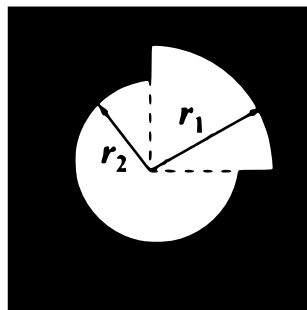
## 性质 2.6 菲涅尔波带片

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{b} = \frac{k\lambda}{\rho_k^2}$$

当物距  $R$ , 像距  $b$  时

|   |                 |
|---|-----------------|
| 1. 通过 $\rho_k$ 的光线<br>2. 通过 $\rho_0 = 0$ 的光线 (与光轴重合的光线) | 光程差为 $k\lambda$ |
|---|-----------------|

**例 2.7** 单色平面光波波长  $5000 \text{ \AA}$ , 正入射到如下图所示的衍射屏上,  $r_1 = \sqrt{2} \text{ mm}$ ,  $r_2 = 1 \text{ mm}$ , 轴上观察点离衍射屏  $2 \text{ m}$ , 计算观察点处的振幅和强度 (用  $A_0$  和  $I_0$  表示)。



(a) 例 2.4 题图

图 2-4 半波带法的具体例子



### 2.2.2 振幅矢量法

#### ► 夫琅禾费单缝衍射的振幅矢量法

振幅矢量法不要求  $\sin \varphi = k \frac{\lambda}{2}$ , 可以视作半波带法的细化 *i.e.* 普适版本。具体说来, 它将单缝分割成  $dx \rightarrow 0$  的微元, 相位差  $d\theta = \frac{2\pi}{\lambda} dx \sin \varphi$ , 于是总相位差

$$\Delta \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \varphi$$

因此, 若将  $\varphi = 0 \equiv \theta$  时的振幅记作  $A_0$ , 从而绘制矢量图得到

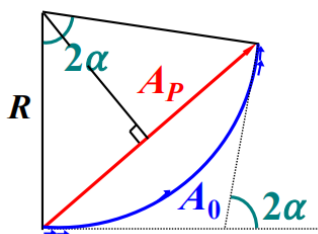


图 2-5 光栅振幅矢量法图例

#### 性质 2.8 单缝衍射因子

在单缝衍射中, 定义  $\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ , 则振幅和光强分布如下

$$A_\varphi = \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) A_0 \Rightarrow I_\theta = \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 I_0$$

#### ► 菲涅尔圆孔衍射的振幅矢量法

#### 定理 2.9 菲涅尔衍射公式

$$\tilde{U}(P) = K \iint_{\Sigma} F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \tilde{U}_0(Q) d\Sigma$$

$F$ : 倾斜因子  $\frac{e^{ikr}}{r}$ : 距离因子  $\tilde{U}_0(Q) d\Sigma$ : 次波源强度

当  $\Sigma$  代表点波源产生的球面波波前,  $\tilde{U}_0(Q)$  为常量,  $\frac{d\Sigma}{r} \propto dr$ , 故上式可写作

$$\tilde{U}(P) = C \int_{\Sigma} e^{ik(r-r_0)} F(\theta_0, \theta) dr$$

由于  $r$  变化时  $e^{ik(r-r_0)}$  变化较快,  $F(\theta_0\theta)$  变化较慢, 所以我们先忽略  $F(\theta_0\theta)$  的变化, 此时

$$\tilde{U}(P) = C' \int_{\Sigma} e^{ik(r-r_0)} dr$$

这一积分可以用复平面上的矢量图来表示。

至此, 与夫琅禾费单缝衍射的振幅矢量法别无二致。接下来考虑倾斜因子, 随着  $r$  的增大 *i.e.* 倾角的增倾斜因子  $F \rightarrow 0$ , 于是图中半径  $R \rightarrow 0$ , 形成菲涅尔螺线。可以发现若将每个半圆用其直径来代替, 则退化成半波带法。

### 2.2.3 多缝干涉和艾里斑

若光栅缝间距为  $d$ , 则缝间相位差

$$2\beta = \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi$$

Thus, 若将单缝振幅记作  $A_1$ , 矢量图如下

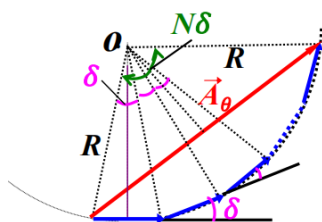


图 2-6 菲涅尔圆孔衍射的振幅矢量法图例

$$A_{\varphi} = \left( \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right) A_1 \Rightarrow I_{\varphi} = \left( \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2 I_1$$

这正是光栅的缝间干涉因子。于是

#### 性质 2.10 光栅衍射因子

在光栅衍射中, 定义  $\alpha = \frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda}$ ,  $\beta = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}$ , 则振幅和光强分布如下

$$A_{\varphi} = \left( \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right) \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) A_0 \Rightarrow I_{\varphi} = \left( \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 I_0$$

**定义 2.11 光栅本领**

- ▶  $k$  级主极大条件:  $\beta_k = k\pi \Leftrightarrow d \sin \varphi_k = k\lambda$  (微分:  $d \cos \varphi_k \delta \varphi_k = \delta(k\lambda)$ )
- ▶  $k$  级主极大半角宽:  $\Delta \beta_k = \frac{\pi}{N} \Leftrightarrow d \cos \varphi_k \Delta \varphi_k = \frac{\lambda}{N} \Leftrightarrow \Delta \varphi_k = \frac{\lambda}{Nd \cos \varphi_k}$
- ▶ 分辨本领:  $d \sin(\varphi_k \pm \Delta \varphi_k) = k(\lambda \pm \delta \lambda) \Leftrightarrow d \cos \varphi_k \Delta \varphi_k = k \delta \lambda = \frac{\lambda}{N} \Leftrightarrow R = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = k$
- ▶ 角色散本领:  $D_\theta \equiv \frac{\delta \varphi_k}{\delta \lambda} = \frac{k}{d \cos \theta_k}$
- ▶ 线色散本领:  $D_l = f \cdot D_\theta = \frac{kf}{d \cos \theta_k}$



**例 2.12** 一个三狭缝衍射屏, 缝宽均为  $a$ , 彼此间距为  $d$ , 中间缝盖有可以引起  $180^\circ$  相位改变的滤光片, 波长为  $\lambda$  的单色光正入射, 计算下列各种情况下的衍射角:

- (1) 第一衍射极小;
- (2) 第一干涉极小;
- (3) 第一干涉极大。

**性质 2.13 艾里斑**

艾里斑是点光源通过理想透镜成像时, 由于绕射而在焦点处形成的光斑, 其最小分辨角以及分辨本领分别公式为:

$$\delta \theta = \theta_1 \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}, R \equiv \frac{1}{\delta \theta} = \frac{D}{1.22 \lambda}$$



## 2.3 偏振

### 2.3.1 菲涅尔反射折射公式

斯托克斯公式、两个光路图推导公式定性推导、半波损失、全反射、隐失波的解释

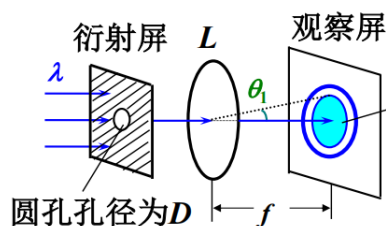


图 2-7 艾里斑示意图

**性质 2.14 斯托克斯倒逆关系**

如下图所示，设光从介质 A 传播到介质 B 的反射系数和透射系数分别为  $r, t$ ，从介质 B 到介质 A 的反射系数和透射为  $r', t'$ ，以下关系式成立（四个系数均为复数）

$$\begin{cases} r' = -r \\ r^2 + tt' = 1 \end{cases}$$

**证明。** 如图所示，由于光路可逆，将反射光和透射光按照原路照射返回，对应振幅不变即可。 □

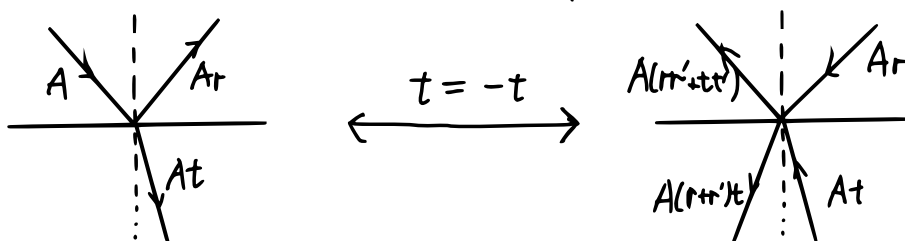


图 2-8 斯托克斯倒逆关系示意图

**性质 2.15 菲涅尔公式**

光在两种不同折射率的介质中传播时，其反射光和折射光在垂直平面和平行平面分量（ $p$  光和  $s$  光）对应系数如下：

$$\begin{cases} r_s = \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} & t_s = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \\ r_p = \frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} & t_p = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} \end{cases}$$

**证明。** 该公式推导需要运用到电磁场的边界条件，此处从略，可点击[此链接](#)查看。 □

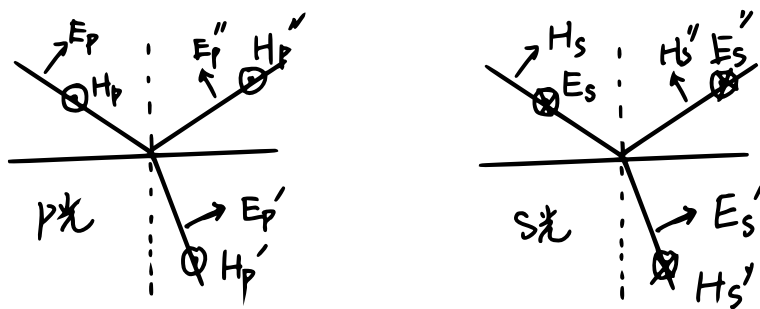


图 2-9 菲涅尔公式示意图

**性质 2.16 正入射情形**

当  $i_1 = i_2 = 0$  时,  $n_2 > n_1$

$r_s < 0$ ,  $E_s''$  与  $E_s$  正方向相同

$r_p > 0$ ,  $E_p''$  与  $E_p$  正方向相反, 产生严格的半波损失



**注 2.17.** 《光学》教材对于全反射情况下相位变化公式推导缺少负号 (见下), 本质上是求复数幅角  $\arg \frac{A - Bi}{A + Bi} = -2 \arctan \left( \frac{B}{A} \right)$

$$\delta_p = -2 \arctan \frac{n_1}{n_2} \frac{\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1 - 1}}{\cos i_1}, \delta_s = -2 \arctan \frac{n_2}{n_1} \frac{\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1 - 1}}{\cos i_1}.$$

**例 2.18**  $s$  光以  $\theta$  角从折射率  $n_1$  介质入射厚度为  $d$ 、折射率为  $n_2$  的玻璃平板后回到  $n_1$  介质 ( $n_2 > n_1$ ), 求以下两种情况的能量透射率:

- (1)  $d$  很小, 相邻出射光束间仍有相干性;
- (2)  $d$  很大, 相邻出射光束间无相干性。(提示: 类比法布里-珀罗干涉仪)



### 2.3.2 双折射和 $\frac{\lambda}{4}$ 片

#### 性质 2.19 光学介质

如下图所示，规定主截面为法线和光轴所在平面，o 光为偏振方向垂直主截面，e 光为偏振方向平行主截面：

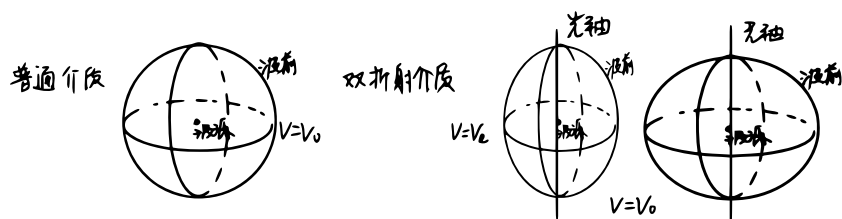


图 2-10 普通介质和光学介质示意图

**例 2.20** 求以下两种情况的折射角  $r$  和波矢与法线夹角  $\theta$  (入射光在主截面内)

- (1) 入射角为  $i$ ，光轴平行法线；
- (2) 入射光平行法线，光轴与法线夹角为  $\varphi$ 。

解

#### 性质 2.21 双折射应用

以下三种棱镜均使用了 o 光和 e 光双折射性质：

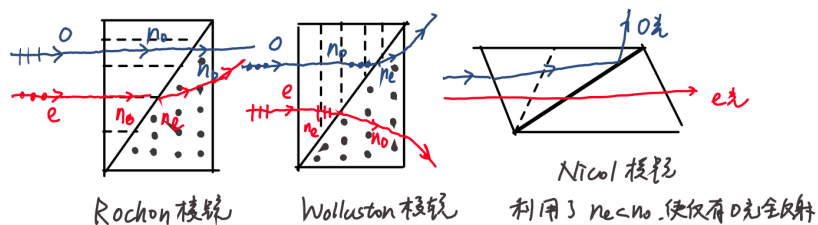


图 2-11 Rochon 棱镜、Wollaston 棱镜、Nicol 棱镜示意图

### 性质 2.22 $\frac{\lambda}{4}$ 片

对下图所示波晶片,  $o$  光、 $e$  光在通过波晶片后产生相位差, 其满足

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d$$

当  $(n_o - n_e) d = \frac{\lambda}{4}$  时,  $\Delta = \frac{\pi}{2}$ , 此时波片可以进行线偏振和圆偏振间的转化。

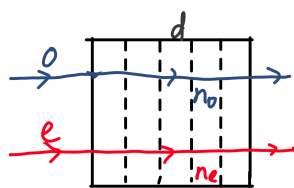


图 2-12  $\frac{\lambda}{4}$  片示意图

### 性质 2.23 琼斯矩阵初步

波晶片不同位置对应变换如下

$$\text{波晶片以光轴方向为 } x \text{ 轴: } \begin{bmatrix} A'_x \\ A'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$$

$$\text{波晶片以偏振方向为 } x \text{ 轴: } \begin{bmatrix} A'_x \\ A'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$$

### 2.3.3 旋光性

#### 定义 2.24 旋光性

当平面偏振光通过手性化合物溶液后, 偏振面的方向就被旋转了一个角度, 这种能使偏振面旋转的性能称为旋光性。其本质为存在手性, 则左右旋光与溶液中分子的作用方式不同。

**例 2.25** 令溶液左右旋折射率为  $n_L, n_R$ , 计算波长为  $\lambda$  的线偏振光经过长度为  $d$  的溶液后对应的振幅变换矩阵。



## 2.4 色散

### 2.4.1 相速度、群速度

#### 性质 2.26 相速度和群速度关系

只要有色散，相速度和群速度就不相等，其满足以下表达式：

$$n_g = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \text{ or } v_g = v_p + k \frac{dv_p}{dk}$$

证明. 群速度定义  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$  利用  $k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi n}{\lambda}$ ,  $\lambda$  为真空波长, 得到  $n_g = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}$   
or  $v_g = v_p + k \frac{dv_p}{dk}$ . 若  $v_g = \text{Const}$ , 此时  $\frac{dn}{d\lambda} = 0$ , 即  $n = \text{const}$ .  $\square$

**例 2.27** 汞灯的双黄线波长为  $\lambda$  和  $\lambda + \Delta\lambda$  ( $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1$ ). 在最小偏向角附近入射到一个顶角为  $\alpha$  的三棱镜上, 出射时两线角间距为  $\delta$ , 棱镜对汞双黄线的平均折射率为  $n$ , 已知  $\frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda}$  不是很小:

(1) 求最小偏向角;

(2) 求棱镜对汞灯双黄线的色散率  $\frac{dn}{d\lambda}$ ;

(3) 若一束波长为  $\lambda$  的黄光脉冲入射到与三棱镜材质相同的玻璃片上, 玻璃片厚度为  $d$ , 求黄光脉冲通过玻璃片所需要的时间  $t$ .





## 2.4.2 柯西公式

## 性质 2.28 柯西公式

光在透明材质下，其折射率和波长之间满足经验公式：

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \cdots$$

**证明.** 假设电子在库仑力的束缚下，在外电场中运动（光是电磁波），其运动方程和弹簧振子在余弦外力作用的运动方程类似，相应系数均为  $\omega^2$  的函数，严格计算有  $n(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j (\omega^2 - \omega_j^2)}{(\omega^2 - \omega_j^2)^2 + \omega^2 \gamma_j^2}$ ，将其泰勒展开可得上述关系，一般取前两项或者三项就能达到很高精度。 □

# 3

## 量子物理

### 3.1 康普顿散射

#### 性质 3.1 康普顿散射公式

康普顿散射是指当 X 射线或伽马射线的光子跟物质相互作用，因失去能量而导致波长变长的现象，其波长变化量公式如下

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

证明. 其中  $\underline{P}$  表示四维动量,  $i/f$  代表 initial/final,  $\theta$  是光子偏转角 (能、动量守恒也能做)

$$\begin{aligned} \underline{P}_{\gamma i} + \underline{P}_{ei} &= \underline{P}_{\gamma f} + \underline{P}_{ef} \Rightarrow \underline{P}_{\gamma i} + \underline{P}_{ei} - \underline{P}_{\gamma f} = \underline{P}_{ef} \Rightarrow (\underline{P}_{\gamma i} + \underline{P}_{ei} - \underline{P}_{\gamma f})^2 = (\underline{P}_{ef})^2 \\ &\Rightarrow 0 + (-m_e c^2) + 0 + 2 \left( -\underline{P}_{\gamma i} \cdot \underline{P}_{\gamma f} + \underline{P}_{ei} \cdot (\underline{P}_{\gamma i} - \underline{P}_{\gamma f}) \right) = -m_e c^2 \\ &\Rightarrow \underline{P}_{\gamma i} \cdot \underline{P}_{\gamma f} = \underline{P}_{ei} \cdot (\underline{P}_{\gamma i} - \underline{P}_{\gamma f}) \Rightarrow \frac{h^2}{\lambda_i \lambda_f} (\cos \theta - 1) = -m_e c \left( \frac{h}{\lambda_i} - \frac{h}{\lambda_f} \right) \end{aligned}$$

□

## 3.2 普朗克黑体辐射

$$\left. \begin{array}{l} \text{瑞利-金斯公式 (长波): } \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \\ \text{维恩公式 (短波): } \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T}} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{爱因斯坦受激辐射理论}]{\text{普朗克凑出}} \text{普朗克公式: } \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

## 3.3 波函数、算符和对易性

### 定义 3.2 波函数统计解释和归一性

$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi^*(\vec{r}, t) \times \Psi(\vec{r}, t)$  代表  $t$  时刻,  $\vec{r}$  附近的概率密度。

$$\text{概率的归一性: } 1 = \int_{\text{全空间}} dP = \int_{\text{全空间}} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dP$$

### 定义 3.3 算符的引入

$$\text{对自由粒子} \begin{cases} \Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \xrightarrow{\text{代入 } \vec{p} = \hbar \vec{k}, E = \hbar \omega} \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})} \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi(\vec{r}, t) = -i\hbar \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})} \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{r}) \right) = p_x \Psi(\vec{r}, t) \end{cases}$$

因此, 我们把  $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  称作  $x$  方向的动量算符, 记作  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$$\text{同样的, 我们有 } \hat{\vec{p}} = \begin{bmatrix} \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \\ \hat{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = -i\hbar \nabla \text{ 称作动量算符}$$

需要指出的是, 虽然我们选择从自由粒子导出, 但这些算符对于不同的波函数是普适的。对于其它的算符, 下面给出一些例子

**例 3.4** 尝试给出非相对论动能算符、坐标表象下的系统总能量算符、轨道角动量算符、轨道角动量平方算符。



### 定义 3.5 算符性质

- ▶ 标量  $A$  与  $B$  :  $AB = BA$
- ▶ 矢量  $\vec{A}$  与  $\vec{B}$  :  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$      $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- ▶ 算符  $\hat{p}$  与  $\hat{x}$  的关系

$$\hat{p}_x[x\psi(x)] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} [x\psi(x)] = -i\hbar\psi(x) - i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) = -i\hbar\psi(x) + x\hat{p}_x\psi(x)$$

由于波函数  $\psi(x)$  任意, 可以略去不写, 记作  $\hat{p}_x\hat{x} = -i\hbar + \hat{x}\hat{p}_x \Leftrightarrow \hat{p}_x\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x = -i\hbar$   
我们将用  $[\hat{p}_x, \hat{x}]$  来表示  $\hat{p}_x\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x$ , 则对易关系表示为:  $[\hat{p}_x, \hat{x}] = -i\hbar$ 。

### 定理 3.6 不确定关系

理论上可以证明, 若用  $\sigma_A$  表达物理量  $A$  的标准差,  $\hat{A}$  表示  $A$  对应的算符, 则有

$$\sigma_A\sigma_B \geq \left| \frac{\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle}{2i} \right|$$

**例 3.7** 取  $A, B$  为  $p_x, x$ , 代入定理 3.6 推导测不准原理。

