TAREA 2 - Análisis de Algoritmos

Gabriela N. Gongora Svartzman, Karen L. Poblete Rodríguez,
Salvador B. Medina Maza, Victor R. Martinez Palacios

Problema 1

Proposición 1. $f(n) = 60n^2 + 5n + 1 \in \theta(n^2)$

Proof: Basta encontrar $K_1, K_2 > 0$ tales que

$$K_1 n^2 \leq f(n) \leq K_2 n^2 \tag{1}$$

Diviendo ambos lados de la ecuación por el factor n^2 se tiene

$$K_1 \leq 60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \leq K_2 \tag{2}$$

Problema 1

Ahora bien, consideremos la sucesión $h(n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $h(n) = 60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}$. Tomando unos cuantos valores resulta fácil observar que esta secuencia es decreciente, por ejemplo,

$$h(1) = 60 + \frac{5}{1} + \frac{1}{1^2} = 66$$
$$h(2) = 60 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2^2} = 62.75$$
$$h(3) = 60 + \frac{5}{3} + \frac{1}{3^2} = 61.7777777778$$
$$h(4) = 60 + \frac{5}{4} + \frac{1}{4^2} = 61.3125$$

.

Problema 1

De ahí es fácil deducir las siguientes dos propiedades

1. $h(n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene máximo en $n = 1$.
2. $h(n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L = 60$ cuando $n \to \infty$ [1]

Por lo que podemos plantear la siguiente desigualdad y determinar valores ideales para K_1 y K_2

$$60 \leq h(n)_{n\in\mathbb{N}} \leq 66 \tag{3}$$

$$60n^2 \leq 60n^2 + 5n + 1 \leq 66n^2 \tag{4}$$

Problema 2

Proposición 2. $f(n) = 3n^2 + \frac{2n\log(n)}{\log(2)} \in \theta(n^2)$

Proof:

Sea $q(n) = \{\frac{\log(n)}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real. Dado que $q(n)$ es convergente, entonces está acotada superiormente. Podemos determinar la cota de $q(n)$ estudiando su superconjunto dado por $Q(x) = \{\frac{\log x}{x}\}_{x\in\mathbb{R}}$. Derivando $Q(x)$ obtenemos el máximo en $\frac{1}{\mathrm{e}}$, por lo que

$$
\begin{aligned}
0 \leq & q(n) \leq Q(x) \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \\
0 \leq & \frac{\log(n)}{n} \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \\
0 \leq & \frac{2}{\log(2)} \frac{\log(n)}{n} \leq \frac{2}{\log(2)} \frac{1}{\mathrm{e}} \\
3 \leq & 3 + \frac{2}{\log(2)} \frac{\log(n)}{n} \leq 3 + \frac{2}{\log(2)} \frac{1}{\mathrm{e}}
\end{aligned}
$$

Problema 2

Multiplicando ambos lados por $g(n) = n^2$ obtenemos la expresión deseada

$$3n^2 \leq 3n^2 + 2n\frac{\log(n)}{\log(2)} \leq 3 + \frac{2}{\log(2)}\frac{1}{\mathrm{e}}n^2$$

De donde deducimos valores para K_1 y K_2

$$K_1 = 3 \qquad K_2 = 3 + \frac{2}{\log(2)}\frac{1}{\mathrm{e}}$$

Problema 3

Proposición 3. $f(n) = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n \in \theta(n^2)$

Proof: Reescribiendo $f(n)$ como dos veces la suma desde 1 hasta n y haciendo uso de la bien conocida fórmula de Euler, tenemos

$$\begin{aligned} f(n) &= 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n && (5) \\ &= 2(1 + 2 + \ldots + n) && (6) \\ &= 2\frac{n(n+1)}{2} && (7) \\ &= n(n+1) && (8) \end{aligned}$$

De donde se puede ver que $K_1 = 1$ y $K_2 = 2$ satisface la desigualdad buscada.

Problema 4

Proposición 4. *El siguiente pseudo-código pertenece a la clase* $\theta(n^2)$

begin
  for $i := 1$ to n do
      for $j := 1$ to i do
          for $k := 1$ to i do
              $x = x + 1$
          od
      od
  od
end

Problema 4

Cuadro 1: Número de corridas para $n = 3$

i	j	k	total (por ciclo)
1	1	1	1
2	2	2	4
3	3	3	9

Problema 4

Proof:

Se tiene que el primer ciclo se ejecutará 3 veces, mientras que el ciclo para **k** corre por i veces por cada ciclo de **j**, que también corre i veces. Por ejemplo, para $n = 3$ se puede ver el número de ejecuciones en el cuadro 1.

El total de la corrida estará dado por $1 + 4 + 9$ que es igual a $1^2 + 2^2 + 3^2$, de lo cual podemos inferir que $T(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ que claramente no pertenece a $\theta(n^2)$.

Orden de Crecimiento

Las siguientes funciones se organizaron según su orden de crecimiento satisfaciendo la siguiente condición:

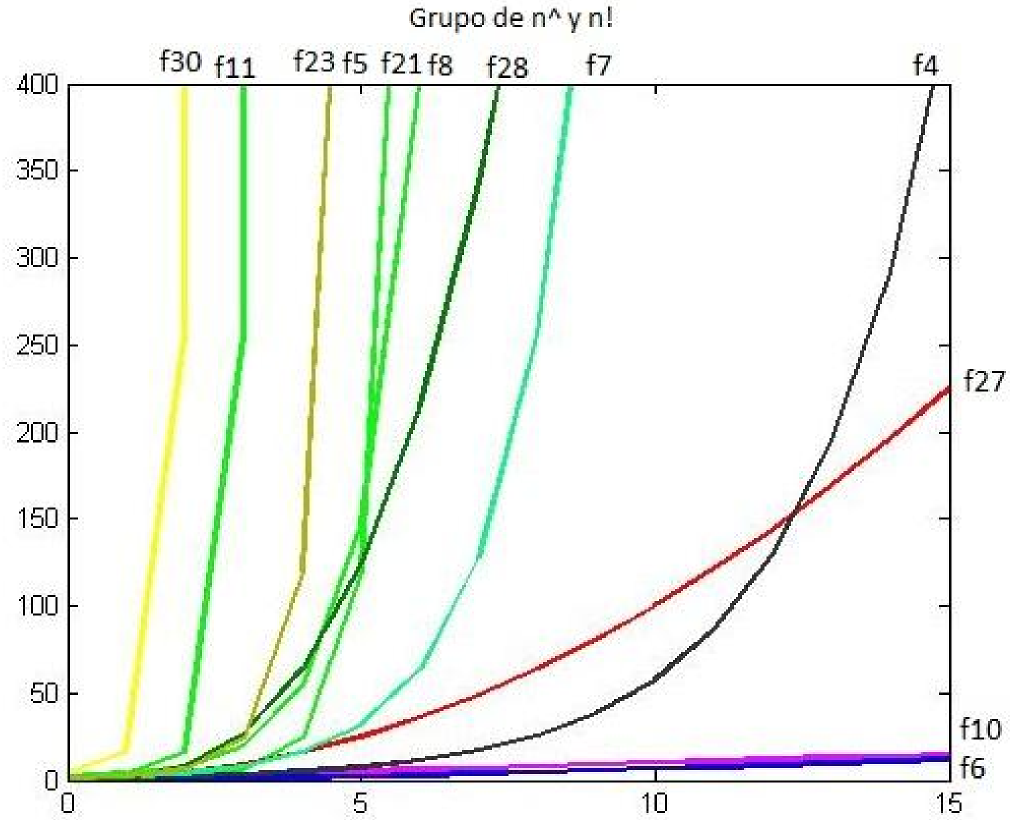
$$g1 = \Omega(g2),\ g2 = \Omega(g3), \dots,\ g(29) = \Omega(g(30))$$

Previo a comenzar a analizar las funciones dadas debemos establecer que $\log^* n$ significa lo siguiente:

$$\log^* n = \min_i \{ \log^{i}(n) \leq 1 \}$$

Orden de Crecimiento

GRUPO 1

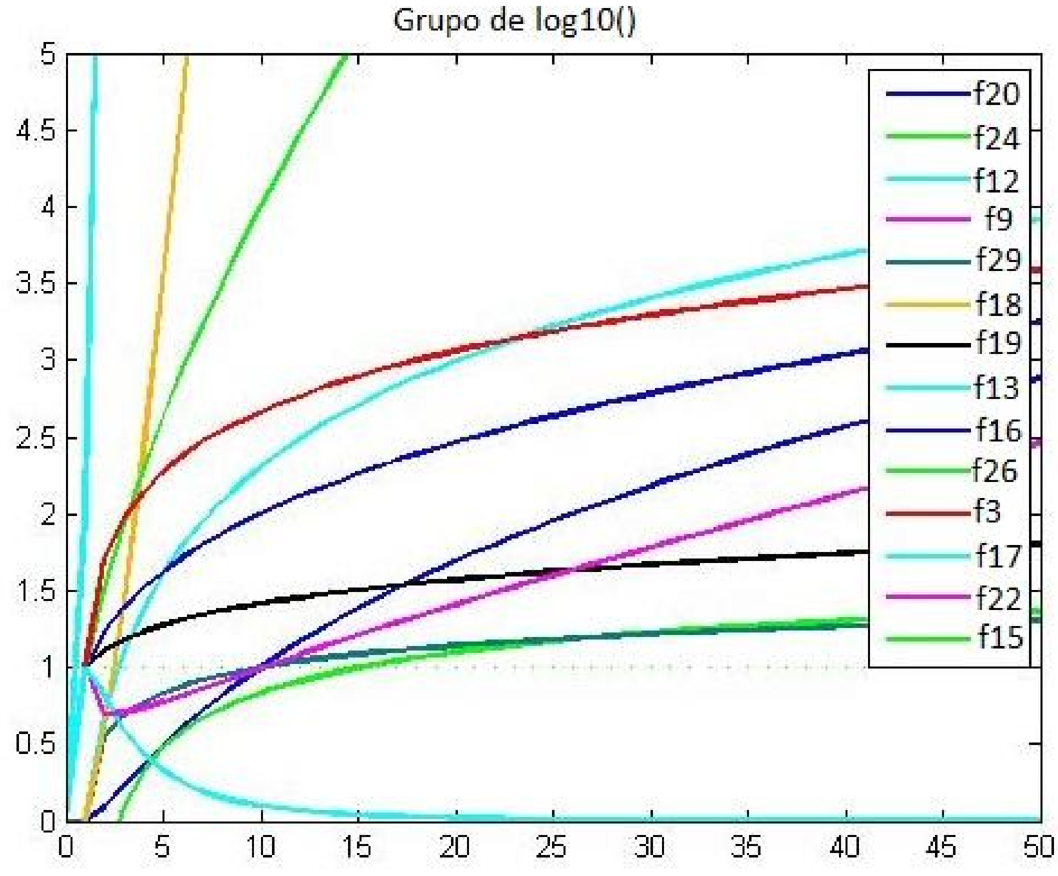


Orden de Crecimiento

Rank	Función	Índice
1	$2^{2^{(n+1)}}$	f30
2	$2^{2^{n}}$	f11
3	$(n+1)!$	f23
4	$n!$	f5
5	e^{n}	f21
6	n^{3}	f8
7	2^{n}	f28
8	$\frac{3}{2}^{n}$	f7
9	n^{2}	f4
10	n	f27
11	$log(n!)$	f10
12	$log(n)!$	f6

Orden de Crecimiento

GRUPO 2

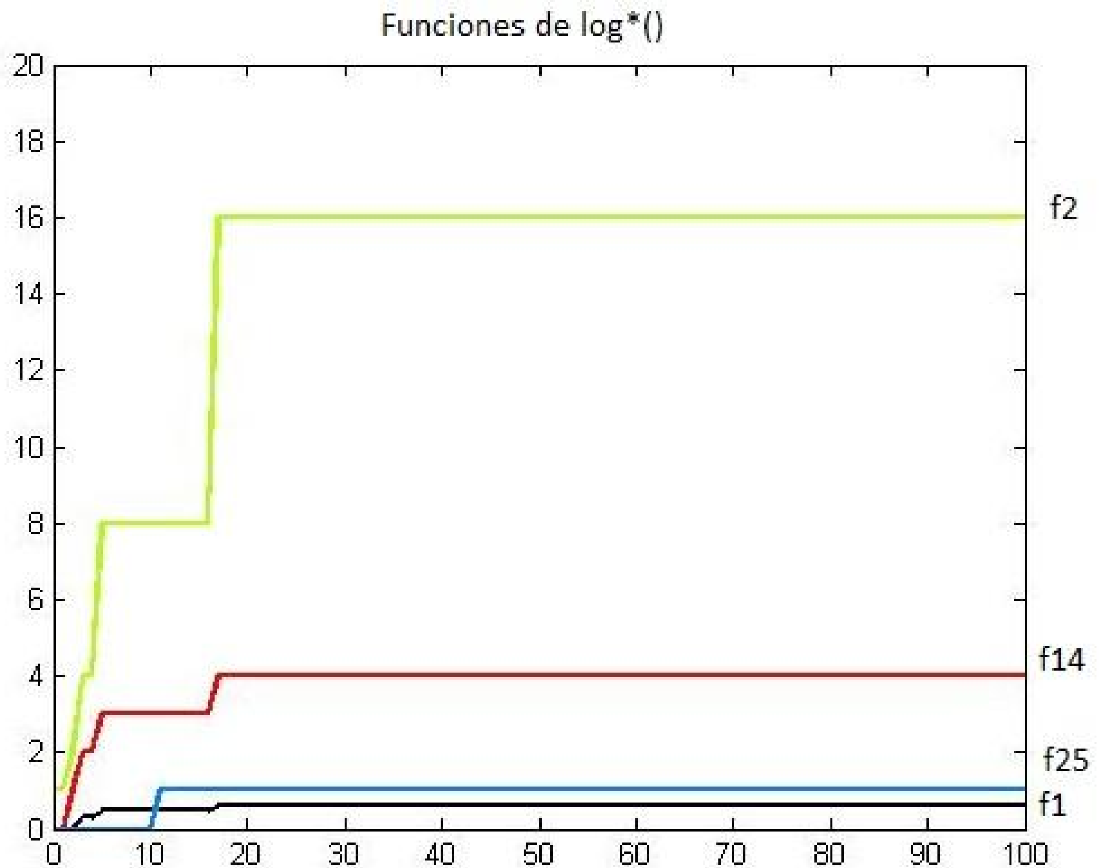


Orden de Crecimiento

Rank	Función	Índice
1	$n^{1/log(n)}$	f12
2	1	f18
3	$\sqrt{log(n)}$	f24
4	$log(log(n))$	f13
5	$\sqrt{2}^{log(n)}$	f3
6	$log(n)^{log(n)}$	f20
7	$n^{log(log(n))}$	f16
8	$log^{2}n$	f9
9	$2^{log(n)}$	f19
10	$2^{\sqrt{2log(n)}}$	f26
11	$log(n)$	f17
12	$4^{log(n)}$	f22
13	$nlog(n)$	f29
14	$n2^{n}$	f15

Orden de Crecimiento

GRUPO 3



Orden de Crecimiento

Rank	Función	Índice
1	$2^{\log * n}$	f2
2	$\log * n$	f14
3	$\log * (\log(n))$	f25
4	$\log(\log * n)$	f1

¡GRACIAS!