Tania Patiño

Javier Sagastuy

Ernesto Valdés

Víctor Peña

Tarea 2: Crecimiento de funciones

Análisis de Algoritmos

Doctor Osvaldo Cairó

ITAM

Otoño 2013

¿Por qué las siguientes expresiones son $\Theta(n^2)$?

Para que una función sea de orden $\Theta(n^2)$ sabemos que deben de existir constantes positivas c_1 y c_2 y un natural n_0 tales que la función quede perfectamente acotada entre c_1n^2 y c_2n^2 para todo valor de $n>n_0$. Por lo anterior, demostraremos la pertenencia de la función al orden $\Theta(n^2)$ encontrando dichas constantes y en caso de no encontrarlas probaremos que la función dada es de orden $\Theta(n^3)$.

a) $60n^2+5n+1$

$$60n^2 + 5n + 1$$
$$c_1n^2 < 60n^2 + 5n + 1 < c_2n^2$$
$$c_1 < 60 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < c_2$$

Sabemos que la n más pequeña para que la expresión tenga sentido es n=1 por lo que:

$$c_1 < 60 + 1 + 1 < c_2$$
$$c_1 < 62 < c_2$$
$$\therefore c_2 = 62$$

Ahora si hacemos tender a n a infinito observamos que los factores $1/n$ y $1/n^2$ se vuelven cero, por lo que:

$$c_1 < 60 < c_2$$
$$\therefore c_1 = 60$$

En conclusión $60n^2+5n+1$ queda perfectamente acotada con $c_1=60$ y $c_2=62$ demostrando que la función es de orden $\Theta(n^2)$.

Tania Patiño

Javier Sagastuy

Ernesto Valdés

Víctor Peña

b) $3n^2$+2nlg(n)

Queremos demostrar que

$$3n^2 + 2n\lg n \in \Theta(n^2)$$

Por lo tanto, buscaremos c_1 y c_2 que acoten a dicha función para todo valor de $n>n_0$.

$$c_1 n^2 \leq 3n^2 + 2n\lg n \leq c_2 n^2$$

La primera constante se encuentra de manera muy directa:

$$c_1 \leq 3 + \frac{2\lg n}{n} \leq c_2$$

$$n \geq 1 \implies \frac{2\lg n}{n} \geq 0 \implies 3 + \frac{2\lg n}{n} \geq 3 = c_1$$

Para encontrar la segunda constante, intentaremos acotar superiormente la siguiente función:

$$f(n) = \frac{\lg n}{n} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{\ln n}{n}$$

Para ello, usaremos cálculo diferencial.

$$f'(n) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\frac{\frac{1}{n}(n) - (1)(\ln n)}{n^2} \right) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\frac{1 - \ln n}{n^2} \right)$$

$$f'(n) = 0 \iff 1 - \ln n = 0 \iff \ln n = 1 \iff n = e$$

Tenemos un punto crítico en *n=e*. Analicemos si es un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión:

$$f''(n) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\frac{-\frac{1}{n}(n^2) - (1 - \ln n)(2n)}{n^4} \right)$$

$$f''(e) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\frac{-\frac{1}{e}(e^2) - (1 - \ln e)(2e)}{e^4} \right) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\frac{-e - 0}{e^4} \right) < 0$$

Dado que la segunda derivada es negativa en ese punto, se trata de un máximo local. Sin embargo, como

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

entonces se trata de un máximo global. Por lo tanto, tenemos lo siguiente.

$$f(n) = \frac{\lg n}{n} \leq \frac{1}{e \ln 2}$$

De aquí se desprende el cálculo de c_2 de manera muy sencilla:

$$3 + \frac{2 \lg n}{n} \leq 3 + \frac{2}{e \ln 2} \leq 3 + 2 = 5 = c_2$$

Finalmente:

$$3 \leq 3 + \frac{2 \lg n}{n} \leq 5 \implies 3n^2 \leq 3n^2 + 2n \lg n \leq 5n^2 \quad \forall n \geq 1$$

$$\therefore\ 3n^2 + 2n \lg n \in \Theta(n^2)$$

c) 2+4+6+...+2n

Tania Patiño
Javier Sagastuy
Ernesto Valdés
Víctor Peña

Demostrar que hay c_1, c_2 y n que cumplan con $\theta(n^2)$.

$c_1 \leq 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n \leq c_2$

Luego

$c_1 * n^2 \leq 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n \leq c_2 * n^2$

Aplicar inducción:

$$
\begin{aligned}
2\,(1+2+3+\ldots+n) &= 2\,(n(n+1)/2) \\
&= n\,(n+1) \\
&= n^2 + n
\end{aligned}
$$

Luego tenemos que:

$c_1 * n^2 \leq n^2 + n \leq c_2 * n^2$

$c_1 \leq 1 + 1/n \leq c_2$

Supongamos que: $n \geq 1 \to 1/n \leq 1$

$c_2 * (1 + 1/n) \leq 1 + 1 = 2$

$c_2 = 2$

y

$c_1 = 1$ $\therefore\ \theta(n^2)$

d) for i = 1 to n

for j = 1 to i

for k = 1 to i

x = x+1

De realizar el análisis necesario de la código anterior, se llega a la siguiente expresión para el número de veces que se ejecuta la última línea:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Primero demostraremos que dicha función no es de orden $\Theta(n^2)$ para posteriormente demostrar que es de orden $\Theta(n^3)$.

$$c_1 n^2 < \mathrm{n(n+1)(2n+1)} < c_2 n^2$$

$$c_1 < \frac{2n + 3 + \frac{1}{n}}{6} < c_2$$

$$\therefore \, la \; función \; no \; es \; de \; orden \; \theta(n^2)$$

Ahora probaremos que la función es de orden $\Theta(n^3)$.

$$c_1 n^3 < \mathrm{n(n+1)(2n+1)} < c_2 n^3$$

$$c_1 < \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} < c_2$$

Cuando n tiende a infinito, observamos que:

$$c_1 \leq \frac{2}{6} \leq c_2$$

$$\therefore c_1 = \frac{2}{6} \; y \; c_2 = 1$$

Así demostrándose que la función es de orden $\Theta(n^3)$.

Ordene las siguientes funciones por orden de crecimiento. Esto es, de tal manera que $g_i=O(g_j)$ si i<j

Solución:

Definamos primero el logaritmo iterado puesto que esta función aparece en repetidas ocasiones en la lista siguiente. El logaritmo iterado se denota con un "*" y se define como sigue:

$$\lg^*(n) = \begin{cases} 0 & n \leq 1 \\ 1 + \lg^*(\lg(n)) & n > 1 \end{cases}$$

Alternativamente, se puede definir de la siguiente manera:

$$\lg^*(n) = \text{mín}\{i \geq 0 | \lg^{(i)}(n) \leq 1\}$$

Tania Patiño
Javier Sagastuy
Ernesto Valdés
Víctor Peña

A continuación se encuentra la lista de funciones ordenadas de acuerdo a nuestro criterio.

$$g_1(n) = 1$$

$$g_2(n) = n^{1/\lg(n)} = 2$$

$$g_3(n) = \lg(\lg^*(n))$$

$$g_4(n) = \lg^*(\lg(n))$$

$$g_5(n) = \lg^*(n)$$

$$g_6(n) = 2^{\lg^*(n)}$$

$$g_7(n) = \ln(\ln(n))$$

$$g_8(n) = \sqrt{\lg(n)}$$

$$g_9(n) = \lg(n)$$

$$g_{10}(n) = \lg^2(n)$$

$$g_{11}(n) = 2^{\sqrt{2\lg(n)}}$$

$$g_{12}(n) = \sqrt{2}^{\lg(n)} = \sqrt{n}$$

$$g_{13}(n) = 2^{\lg(n)} = n$$

$$g_{14}(n) = \lg(n!)$$

$$g_{15}(n) = n\lg(n)$$

$$g_{16}(n) = 4^{\lg(n)} = n^2$$

$$g_{17}(n) = n^3$$

$$g_{18}(n) = (\lg(n))!$$

$$g_{19}(n) = (\lg(n))^{\lg(n)} = n^{\lg(\lg n))}$$

$$g_{20}(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$g_{21}(n) = 2^n$$

$$g_{22}(n) = e^n$$

$$g_{23}(n) = n!$$

$$g_{24}(n) = (n+1)!$$

$$g_{25}(n) = n \cdot 2^n$$

$$g_{26}(n) = 2^{2^n}$$

$$g_{27}(n) = 2^{2^{n+1}}$$

Breves justificaciones

En la siguiente lista, la justificación i corresponde a la justificación de que la función *i* es de menor orden de crecimiento que la función *i+1*.

Tania Patiño

Javier Sagastuy

Ernesto Valdés

Víctor Peña

3. $\lg(x) \leq \frac{1}{\ln(2)}(x-1)\ \forall x \in \mathbb{R}^+$

4. $\lg^*(\lg(x)) = \lg^*(n) - 1$

7. Sacando logaritmo en ambos lados: $\ln(\ln(\ln(n)))\text{"} \leq \text{"}\frac{1}{2}\ln(\lg(n))$

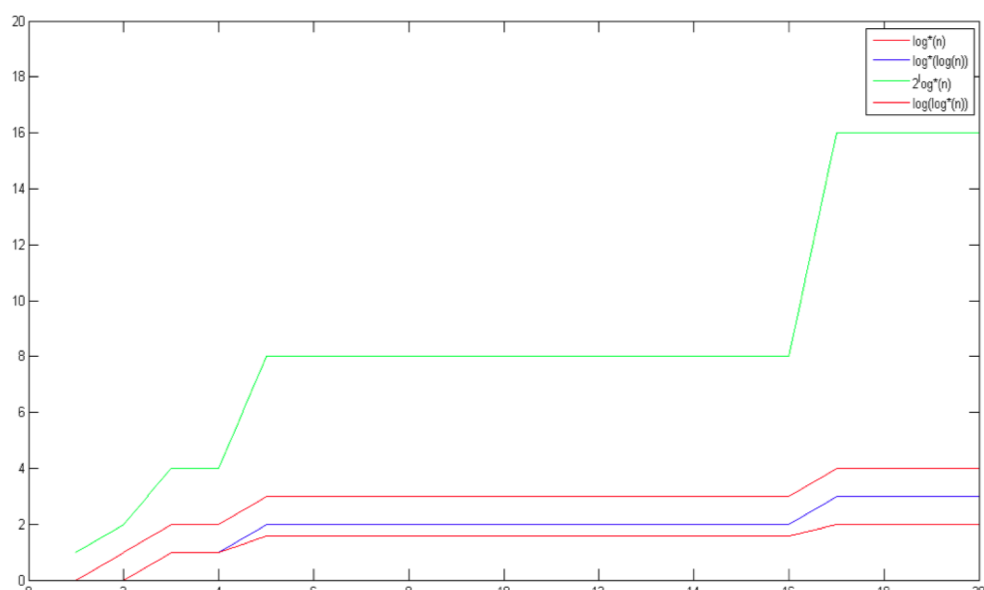
11. Sacando logaritmo en ambos lados: $\sqrt{2\lg(n)}\text{"} \leq \text{"}\frac{1}{2}\lg(n)$

13/14. $n-1 = 1+1+\ldots+1 \leq \lg(1)+\lg(2)+\ldots+\lg(n)(=\lg(n!)) \leq \lg(n)+\lg(n)+\ldots+\lg(n) = n\lg(n)$

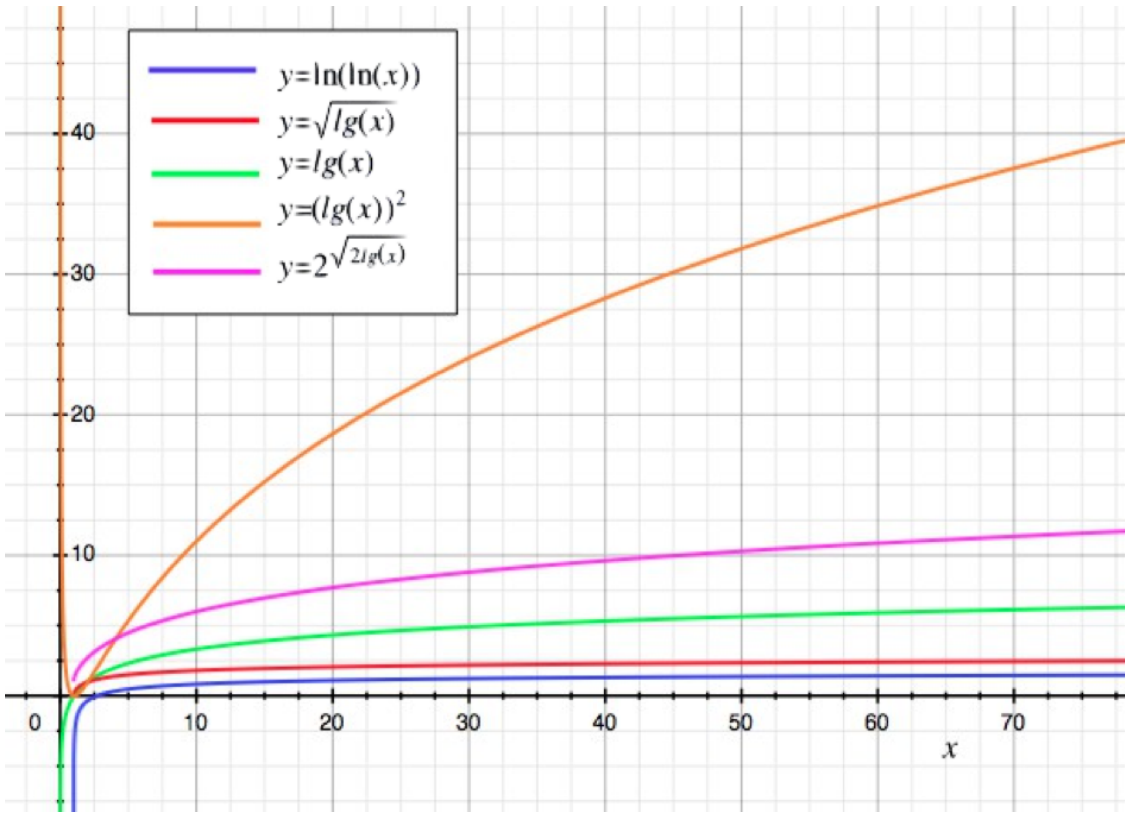
18. $x! \in O(x^x)$ usando la aproximación de Stirling.

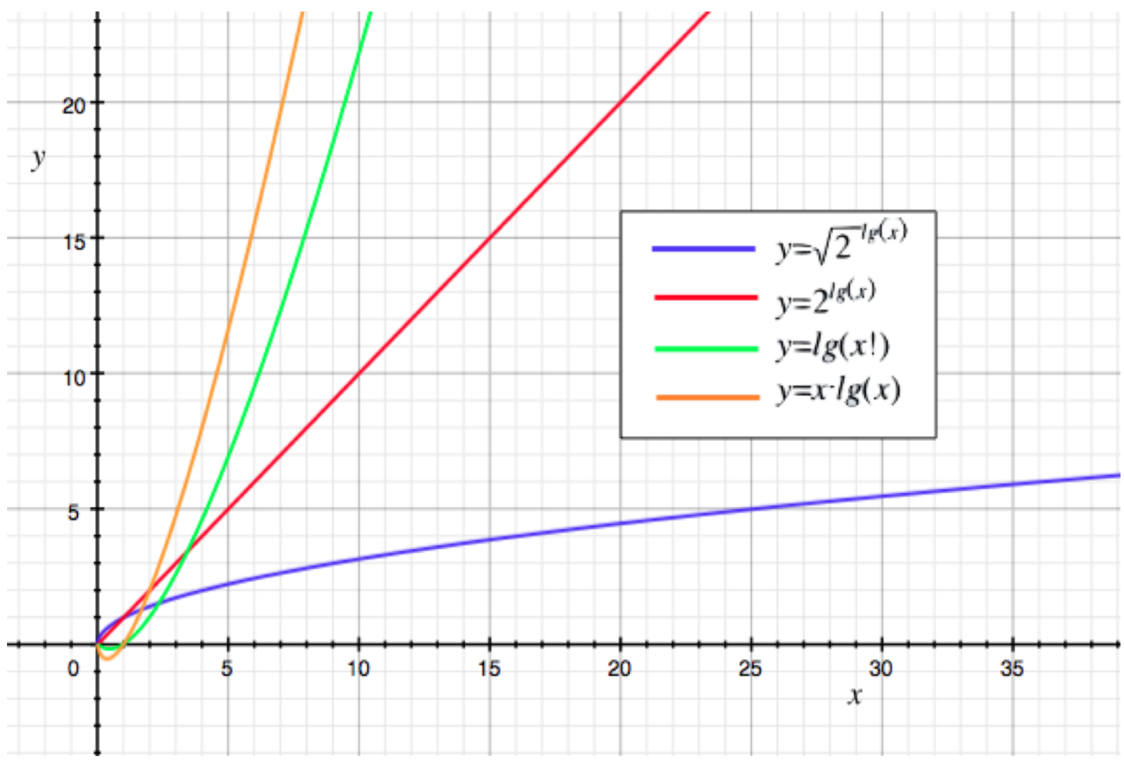
Gráficas

A continuación presentamos las gráficas de las funciones anteriores. Nótese que en algunas gráficas no coincide el crecimiento observado con el descrito en el orden anterior. Es posible que ésto se deba a que estamos graficando las funciones tal como aparecen en la lista. Esto es: falta la constante *c* que debe aparecer como múltiplo de la función "mayor" bajo la definición de O. De cualquier modo, las gráficas sirven para darse una idea del orden de crecimiento de las funciones.

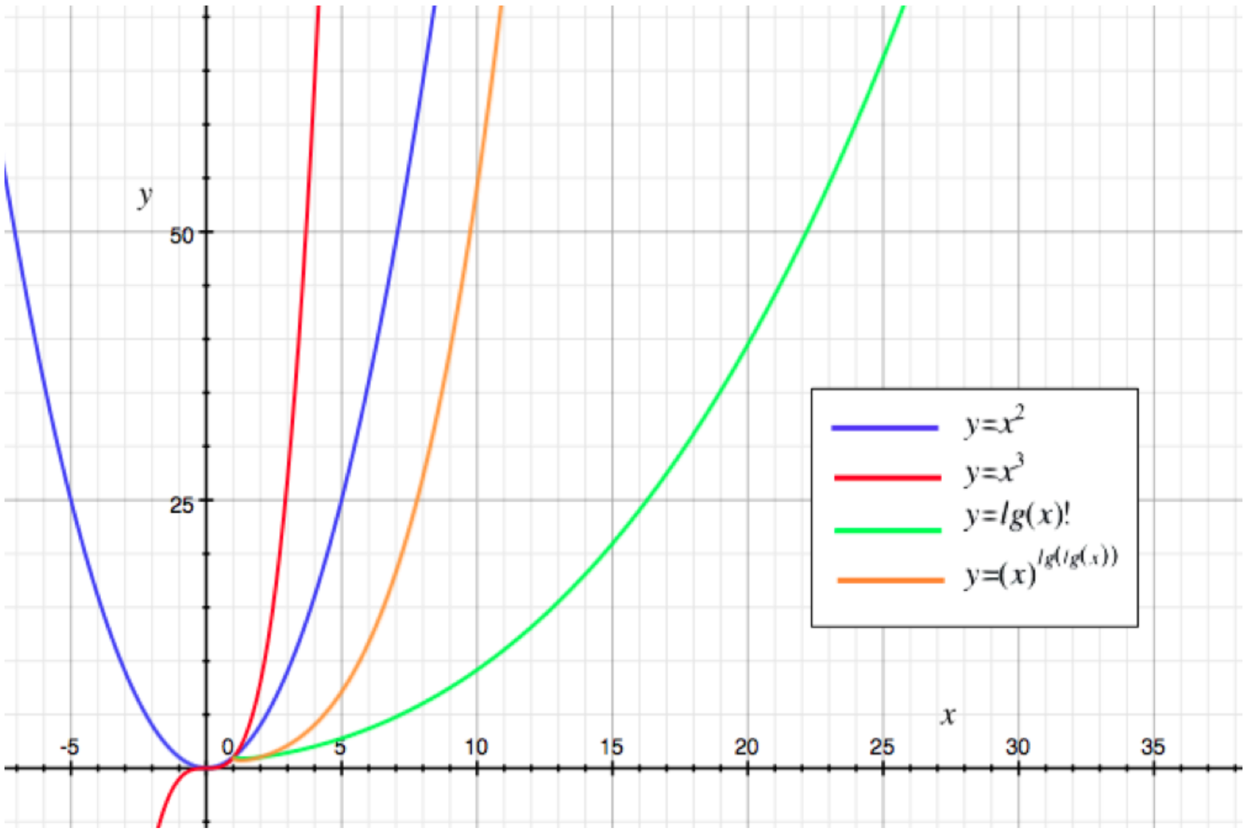


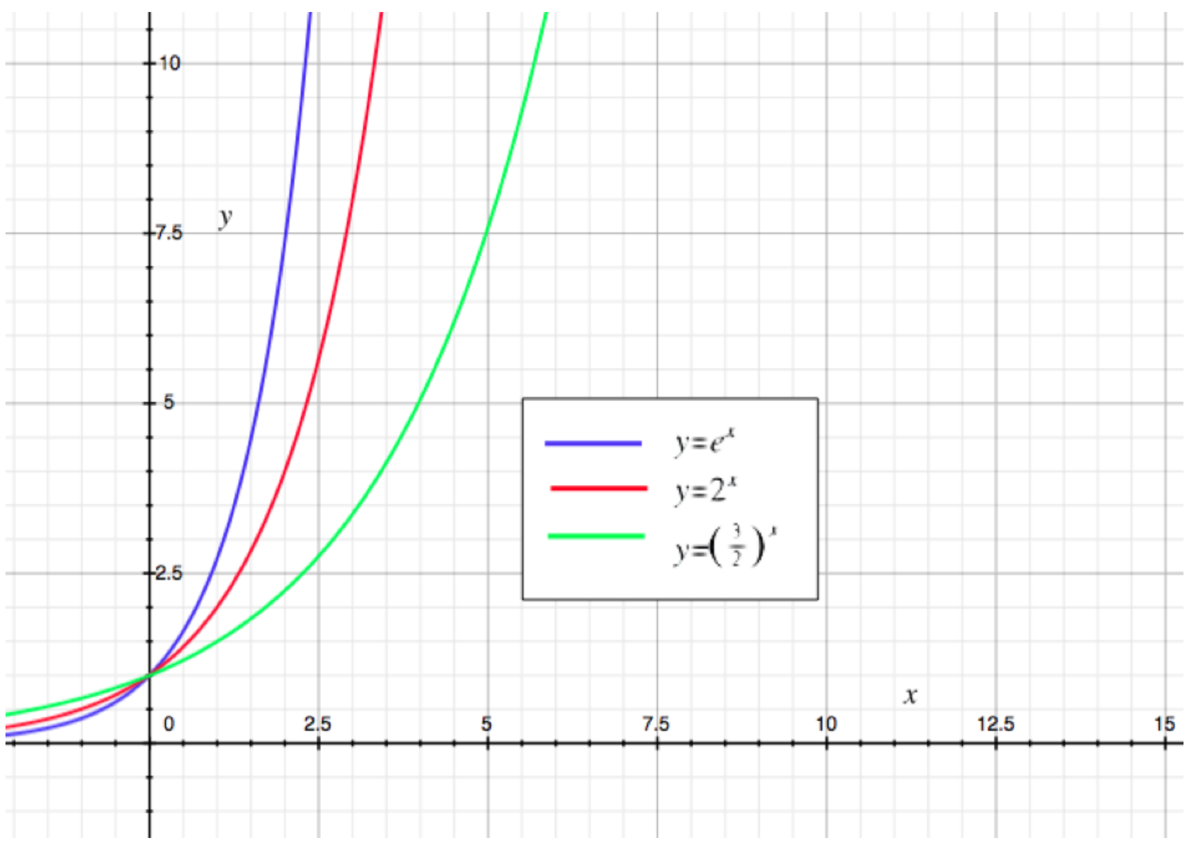
Tania Patiño
Javier Sagastuy
Ernesto Valdés
Víctor Peña

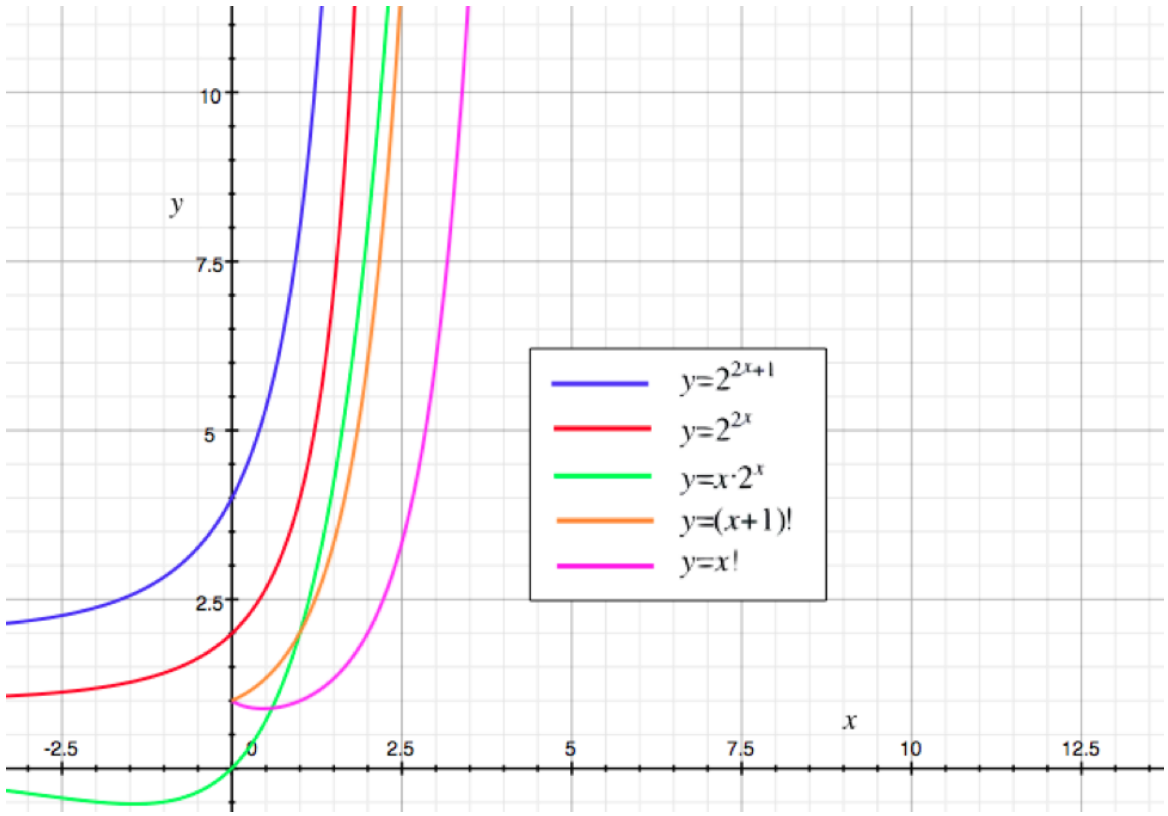




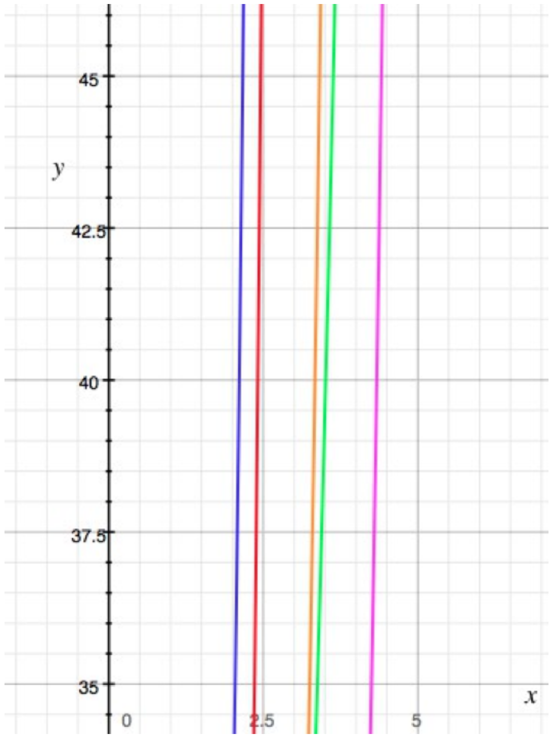
Tania Patiño
Javier Sagastuy
Ernesto Valdés
Víctor Peña

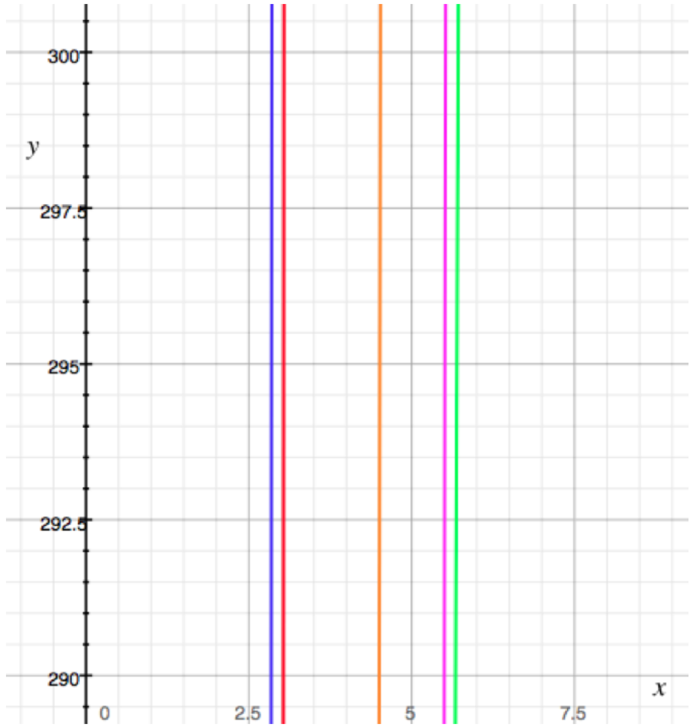






Si se observa el crecimiento de esta última gráfica con detalle, se puede ver que en realidad, la función verde acaba por crecer más lento que todas las anteriores. Esto se puede ver en las siguientes imágenes.





Finalmente, mostramos las funciones agrupadas de acuerdo a su orden de crecimiento. Comenzamos con el orden menor y terminamos agrupando a las funciones de orden mayor. Para simplificar las categorías, nos limitamos a usar órdenes de crecimiento que se utilizan frecuentemente. Por lo mismo hay funciones que quizás deberían tener su propia categoría entre algún par de las que se presentan. Para minimizar la cantidad de categorías, pusimos estas funciones en un orden "mayor" al propio.

• O(1)	• O(lg * n)	• O(lg lg n)	• O(lg n)	• O(n^k)
1	lg * n	ln (ln n)	ln n	$\sqrt{2}^{\lg n}$
$n^{1/\lg n}$	lg *(lg n)	$2^{\lg^* n}$	√(lg n)	$\lg^2 n$
	lg(lg* n)			$2^{\sqrt{(2 \lg n)}}$

Tania Patiño
Javier Sagastuy
Ernesto Valdés
Víctor Peña

• $O(n)$	• $O(n \lg n)$	• $O(n^k)$, $_{k>1}$	• $O(c^n)$	• $O(n!)$
n	n log n	n^2 - $\theta(n^2)$	e^n	(n+1)!
$2^{\lg n}$	$\lg^2 n$	n^3 - $\theta(n^3)$	2^n	n!
	lg (n!)	$4^{\lg n}$ - $\theta(n^2)$	$(3/2)^n$	
			(lg n)!	
			$(\lg n)^{\lg n} = n^{\lg(\lg n)}$	

• $O(n^n)$	• $O(2^{2^{\wedge}n})$
$n\,2^n$	$2^{2^{\wedge}n}$
	$2^{2^{\wedge}(n+1)}$

Anexo: extensión continua del factorial

Como se expuso en clase, las gráficas elaboradas para las funciones se realizaron en el programa Grapher para Mac OS X (versión 2.3). Indagando un poco, este graficador utiliza la función gamma (vieja conocida de teoría de probabilidad) como una extensión continua de la función factorial. Dicha función se define de la siguiente manera:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Tiene la propiedad de que si *z* es un número natural, entonces

$$\Gamma(z) = (z-1)!$$

Por lo tanto, podemos graficar

$$\Gamma(z+1)$$

y obtenemos una buena representación continua del factorial.

La función gamma tiene toda una serie de propiedades muy interesantes sobre las que el lector curioso puede indagar.

Referencias

1. Gamma function. (2013, September 13). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved 18:47, September 13, 2013, from <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gamma_function&oldid=572783010>
2. Cormen, Leiserson and Rivest, Stein. *Introduction to Algorithms*, The MIT Press; third edition. 2009.