Análisis de Algoritmos: Tarea 2

Gabriela N. Gongora   Karen L. Poblete
Salvador B. Medina   Víctor R. Martínez

Septiembre 2013

Proposición 1. $f(n) = 60n^2 + 5n + 1 \in \theta(n^2)$

Proof: Basta encontrar $K_1, K_2 > 0$ tales que

$$K_1 n^2 \leq f(n) \leq K_2 n^2 \tag{1}$$

Diviendo ambos lados de la ecuación por el factor n^2 se tiene

$$K_1 \leq 60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \leq K_2 \tag{2}$$

Ahora bien, consideremos la sucesión $h(n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $h(n) = 60 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}$. Tomando unos cuantos valores resulta fácil observar que esta secuencia es decreciente, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
h(1) &= 60 + \frac{5}{1} + \frac{1}{1^2} = 66 \\
h(2) &= 60 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2^2} = 62.75 \\
h(3) &= 60 + \frac{5}{3} + \frac{1}{3^2} = 61.7777777778 \\
h(4) &= 60 + \frac{5}{4} + \frac{1}{4^2} = 61.3125 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

De ahí es fácil deducir las siguientes dos propiedades

1. $h(n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene máximo en $n = 1$.
2. $h(n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L = 60$ cuando $n \to \infty$ [1]

Por lo que podemos plantear la siguiente desigualdad y determinar valores ideales para K_1 y K_2

$$60 \leq h(n)_{n\in\mathbb{N}} \leq 66 \tag{3}$$

$$60n^2 \leq 60n^2 + 5n + 1 \leq 66n^2 \tag{4}$$

[1] La demostración está fuera del alcance de esta tarea

Proposición 2. $f(n) = 3n^2 + \frac{2n\log(n)}{\log(2)} \in \theta(n^2)$

Proof:
Sea $q(n) = \{\frac{\log(n)}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real. Dado que $q(n)$ es convergente, entonces está acotada superiormente. Podemos determinar la cota de $q(n)$ estudiando su superconjunto dado por $Q(x) = \{\frac{\log x}{x}\}_{x\in\mathbb{R}}$. Derivando $Q(x)$ obtenemos el máximo en $\frac{1}{\mathrm{e}}$, por lo que

$$
\begin{aligned}
0 \leq & q(n) \leq Q(x) \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \\
0 \leq & \frac{\log(n)}{n} \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \\
0 \leq & \frac{2}{\log(2)} \frac{\log(n)}{n} \leq \frac{2}{\log(2)} \frac{1}{\mathrm{e}} \\
3 \leq & 3 + \frac{2}{\log(2)} \frac{\log(n)}{n} \leq 3 + \frac{2}{\log(2)} \frac{1}{\mathrm{e}}
\end{aligned}
$$

Multiplicando ambos lados por $g(n) = n^2$ obtenemos la expresión deseada

$$3n^2 \leq 3n^2 + 2n\frac{\log(n)}{\log(2)} \leq 3 + \frac{2}{\log(2)} \frac{1}{\mathrm{e}} n^2$$

De donde deducimos valores para K_1 y K_2

$$K_1 = 3 \qquad K_2 = 3 + \frac{2}{\log(2)} \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Proposición 3. $f(n) = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n \in \theta(n^2)$

Proof: Reescribiendo $f(n)$ como dos veces la suma desde 1 hasta n y haciendo uso de la bien conocida fórmula de Euler, tenemos

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n && (5) \\
&= 2(1 + 2 + \ldots + n) && (6) \\
&= 2\frac{n(n+1)}{2} && (7) \\
&= n(n+1) && (8)
\end{aligned}
$$

De donde se puede ver que $K_1 = 1$ y $K_2 = 2$ satisface la desigualdad buscada.

Cuadro 1: Número de corridas para $n = 3$

i	j	k	total (por ciclo)
1	1	1	1
2	2	2	4
3	3	3	9

Proposición 4. *El siguiente pseudo-código pertenece a la clase* $\theta(n^2)$

```
begin
  for i := 1 to n do
     for j := 1 to i do
        for k := 1 to i do
           x = x + 1
        od
     od
  od
end
```

Proof:

Se tiene que el primer ciclo se ejecutará 3 veces, mientras que el ciclo para **k** corre por i veces por cada ciclo de **j**, que también corre i veces. Por ejemplo, para $n = 3$ se puede ver el número de ejecuciones en el cuadro 1.

El total de la corrida estará dado por $1 + 4 + 9$ que es igual a $1^2 + 2^2 + 3^2$, de lo cual podemos inferir que $T(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ que claramente no pertenece a $\theta(n^2)$.