Santiago Bermúdez
Fernando Garza

Análisis de Algoritmos - Tarea 2

Parte 1: complejidad de funciones.

$c_1 n^2 \leq an^2 + bn + c$ Sea $c_1 = \frac{a}{4}$

$\Rightarrow \frac{an^2}{4} \leq an^2 + bn + c$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{3an^2}{4} + bn + c$

Usamos la fórmula general

$\Rightarrow n \geq \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{\frac{3a}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{b^2-3ac} - b}{a}\right)$ hay que notar que $\sqrt{b^2-3ac} \geq 0$

$\Rightarrow b^2 - 3ac \geq 0$

$\Rightarrow b^2 \geq 3ac$

Analicemos los siguientes casos $\frac{|b|}{a} \geq \sqrt{\frac{|c|}{a}}$ ① y $\frac{|b|}{a} \leq \sqrt{\frac{|c|}{a}}$ ②

1) $\frac{\sqrt{b^2-3ac} - b}{a} \leq \frac{\sqrt{4b^2} - b}{a} \leq \frac{3|b|}{a} \Rightarrow \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}|b|}{a} = \frac{2|b|}{a}$

2) $\frac{\sqrt{b^2-3ac} - b}{a} \leq \frac{\sqrt{4a|c|} - b}{a} \leq 3\sqrt{\frac{|c|}{a}} \Rightarrow \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}\sqrt{\frac{|c|}{a}} = 2\sqrt{\frac{|c|}{a}}$

hay que tomar el máximo

$\Rightarrow n_0 = \max\left\{\frac{2|b|}{a}, 2\sqrt{\frac{|c|}{a}}\right\}$

$\Rightarrow n_0 = 2\max\left\{\frac{|b|}{a}, \sqrt{\frac{|c|}{a}}\right\}$

$an^2 + bn + c \leq C_2 n^2$ Sea $C_2 = \frac{7a}{4}$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{3an^2}{4} - bn - c \quad \ldots \quad *$$

Usamos la fórmula general

$$n > \frac{b + \sqrt{b^2 + 3ac}}{\frac{3a}{2}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 3ac}}{a}\right)$$ hay que notar que $\sqrt{b^2 + 3ac} \geq 0$ Para los valores que permite $*$

analicemos los siguientes casos, $\frac{|b|}{a} \geq \sqrt{\frac{|c|}{a}}$ ① y $\frac{|b|}{a} \leq \sqrt{\frac{|c|}{a}}$ ②

① $$\frac{\sqrt{b^2 + 3ac} + b}{a} \leq \frac{\sqrt{4b^2} + b}{a} \leq \frac{3|b|}{a} \Rightarrow \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}\frac{|b|}{a} = \frac{2|b|}{a}$$

② $$\frac{\sqrt{b^2 + 3ac} + b}{a} \leq \frac{\sqrt{4a|c|} + b}{a} \leq 3\sqrt{\frac{|c|}{a}} \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{\frac{|c|}{a}} = 2$$

hay que tomar el máximo

$$\Rightarrow n_0 = \max\left\{ \frac{2|b|}{a}, 2\sqrt{\frac{|c|}{a}} \right\}$$

$$\Rightarrow n_0 = 2\max\left\{ \frac{|b|}{a}, \sqrt{\frac{|c|}{a}} \right\}$$

Sea $C_1 = 15$ y $C_2 = 105$

$\Rightarrow 15n^2 \leq 60n^2 + 5n + 1 \leq 105n^2$

$\Rightarrow 0 \leq 45n^2 + 5n + 1 \leq 105n^2$

$\Rightarrow 0 \leq 60n^2 - 5n - 1$

Usamos la fórmula general

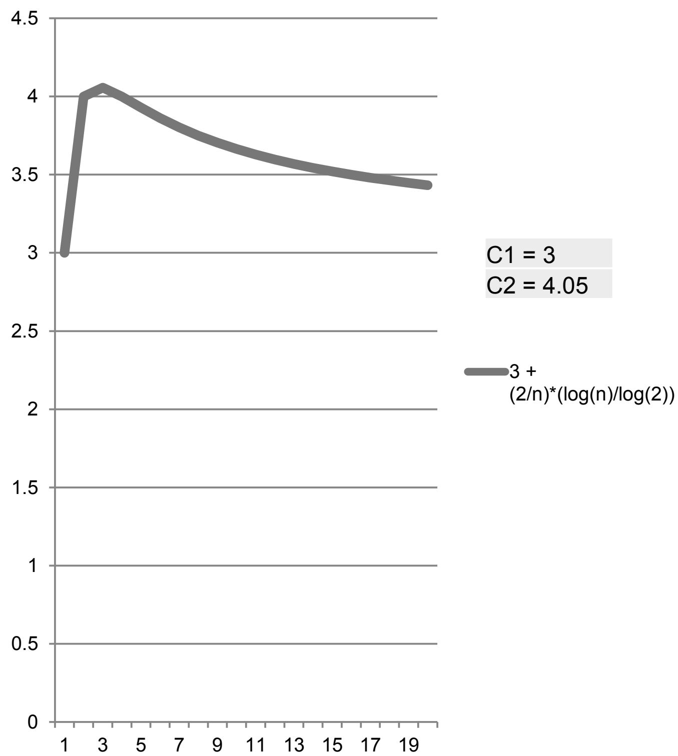
$$\frac{5 + \sqrt{25 + 240}}{120}$$, de aquí sacamos que el está en $\frac{151}{60}$ ó $\sqrt{\frac{111}{60}}$

$$\frac{151}{60} < \sqrt{\frac{111}{60}}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{3600} < \frac{1}{60}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{60} < 1 \quad \therefore n_0 \geq 1$$

$\therefore 60n^2 + 5n + 1 = \Theta(n^2)$



C1 = 3
C2 = 4.05

valor de n	3 + (2/n)*(log(n)/log(2))
1	3
2	4
3	4.056641667
4	4
5	3.928771238
6	3.861654167
7	3.802101406
8	3.75
9	3.704427778
10	3.664385619
11	3.628987567
12	3.59749375
13	3.569298418
14	3.543907846
15	3.520918746
16	3.5
17	3.480877981
18	3.463325
19	3.447150265
20	3.432192809

(3) $2+4+\dots+2n = \sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$

$$c_1 n^2 \leq n^2+n \leq c_2 n^2$$

Sea $c_1 = \frac{1}{4}$ y $c_2 = \frac{7}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1n^2}{4} \leq n^2+n \leq \frac{7n^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{3n^2}{4} + n \leq \frac{7n^2}{4}$$

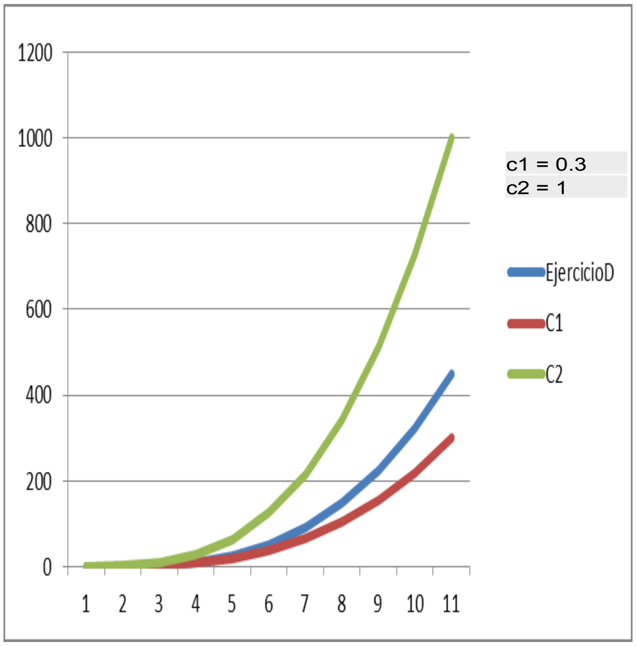
$$\Leftrightarrow 0 \leq n^2 - n$$

Usamos fórmula general

$\frac{1+\sqrt{1-0}}{2}$, dado que $c=0$, el máximo valor es $\frac{2\cdot 1}{\text{[illegible]}}$

$\therefore n_0 \geq 2 \quad \therefore n^2+n = \Theta(n^2)$

Inciso d): La siguiente gráfica ilustra el comportamiento de tipo $\theta(n^3)$ de la función derivada de los ciclos.



n	Función	c1n^3	c2n^3
0	0	0	0
1	0	0.3	1
2	2	2.4	8
3	9	8.1	27
4	24	19.2	64
5	50	37.5	125
6	90	64.8	216
7	147	102.9	343
8	224	153.6	512
9	324	218.7	729
10	450	300	1000

Parte 2: ranking de funciones.

Funciones en desorden:

$\lg(\lg^* n)$	$2^{\lg^* n}$	$\sqrt{2}^{\lg n}$	n^2	$n!$	$(\lg n!)$
$\left(\frac{3}{2}\right)^n$	n^3	$\lg^2 n$	$\lg(n!)$	2^{2^n}	$n^{\frac{1}{\lg n}}$
$\ln \ln n$	$\lg^* n$	$n * 2^n$	$n^{\lg(lg\, n)}$	$\ln n$	1
$2^{\lg n}$	$\lg n^{\lg n}$	e^n	$4^{\lg n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\lg n}$
$\lg^* \lg n$	n	2^n	$n \lg n$		

Lo primero que haremos será separar en grupos de funciones análogas, es decir, funciones cuyo crecimiento es similar. De esta manera, identificamos 6 grupos:

a) Factoriales
b) Exponenciales
c) De potencias
d) Identidad
e) Logarítmicas
f) Constantes

En general, podemos decir que:

$$\mathrm{a} = \Omega(b);\ \ b = \Omega(c);\ \ c = \Omega(d);\ \ d = \Omega(e);\ \ e = \Omega(f)$$

Es decir, las funciones de la clase a no crecen más lento que las funciones de la clase b, y así sucesivamente.

Funciones factoriales

$n!;\quad (n+1)!$

Funciones exponenciales

$2^n;\ \ e^n;\ \ n * 2^n;\ \ \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Funciones de potencias

$n^2;\ \ n^3;\ n^{\lg(lg\, n)}$

Además, tenemos que $4^{\lg n} = n^2$, y que $n^{\lg(lg\, n)} = \lg n^{\lg n}$, con lo cual la lista queda:

$n^2;\ \ n^3;\ n^{\lg(lg\, n)}; 4^{\lg n};\ \ \lg n^{\lg n}$

Funciones identidad

Tenemos que $2^{\lg n} = n$, luego la lista queda:

$n;\ \ 2^{\lg n}$

Funciones logarítmicas

$\lg(\lg^* n)\,;\ \lg^*(\lg n);\ \ln \ln n\,;\ \ \sqrt{\lg n}\,;\ \ln n\,;\ \lg^2 n\,;\ \lg^* n$

Además, tenemos que $\lg^*(\lg n) = \lg^*(n) - 1$

Funciones constantes

Tenemos que $n^{\frac{1}{\lg n}} = 2$ (pues es lg en base 2). Con lo cual la lista sería:

$1;\ \ n^{\frac{1}{\lg n}}$

Además, detectamos que algunas funciones se comportan de manera distinta, principalmente porque “anulan” el comportamiento de crecimiento o decrecimiento que una función genérica de ese tipo lograría:

$$2^{\lg^* n}; \sqrt{2}^{\lg n}; \ (\lg n\,!); \ \lg(n!)\,; \ 2^{2^n}; n\lg n$$

El siguiente paso será ordenar por grupos, para ello podemos decir que una función f crece más rápido que otra g siempre y cuando:

$$\lim_{x\to\infty} g(x)/f(x) = 0$$

En general si $\lim_{x\to\infty} g(x)/f(x)$

- = constante → $g(n) = \theta(f(n))$ si $c > 0$.
- = 0 entonces → $g(n) = O(f(n))$
- = ∞ → $g(n) = \Omega(f(n))$

De esta manera, podemos ordenar cada uno de los grupos, y quedan (notar que el signo de > indica que una función crece más rápido que la otra):

Funciones factoriales

$(n+1)! \ > \ n!$

Funciones exponenciales

$e^n > n * 2^n > 2^n > \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Funciones de potencias

$\begin{matrix} n^{\lg\lg n} \\ (\lg n)^{\lg n} \end{matrix} > n^3 > \begin{matrix} 4^{\lg n} \\ n^2 \end{matrix}$

Funciones identidad

$2^{\lg n}$

n

Funciones logarítmicas

Hemos dicho que: $\lg^*(\lg n) = \lg^*(n) - 1$ con lo cual la rapidez de crecimiento de ambas funciones será del mismo orden.

$\lg^2 n > \ln n > \sqrt{\lg n} > \ln\ln n > \begin{matrix} \lg^*(\lg n) \\ \lg^*(n) \end{matrix}$

$> \lg(lg^* n)$

Funciones constantes

$n^{\frac{1}{\lg n}} = 2$ por lo tanto la rapidez de crecimiento de ambas funciones será del mismo orden.

1

$n^{\frac{1}{\lg n}}$

Si pensamos en las funciones con comportamiento inusual, y las ordenamos, vemos que $2^{2^n} > (\lg n)!$ además, que el $\lim_{n\to\infty} \frac{n\lg n}{\lg\,(n!)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg\,(n!)}{n\lg n} = 1$, con lo cual podrían clasificarse dentro de un mismo orden, es decir: $\lg(n!) = \theta(n\lg n)$. De hecho, existe una aproximación (fórmula de Stirling) que dice que $\ln(n!) \approx n\ln(n) - n$, con lo cual tiene sentido.

$$2^{2^n} > (\lg n)! > \begin{matrix} n\lg n \\ \lg\,(n!) \end{matrix} > \sqrt{2}^{\lg n} > 2^{\lg^* n}$$

Finalmente, acomodamos estas funciones en el orden que correspondan (dentro de los grupos propuestos), y entonces la lista final quedaría:

1. 2^{2^n}
2. $(n+1)!$
3. $n!$
4. e^n
5. $n * 2^n$
6. 2^n
7. $\left(\frac{3}{2}\right)^n$
8. $n^{\lg \lg n}$ $(\lg n)^{\lg n}$
9. $(\lg n)!$
10. n^3
11. $4^{\lg n}$ n^2
12. $n \lg n$ $\lg (n!)$
13. $2^{\lg n}$ n
14. $\sqrt{2}^{\lg n}$
15. $\lg^2 n$
16. $\ln n$
17. $\sqrt{\lg n}$
18. $\ln \ln n$
19. $2^{\lg^* n}$
20. $\lg^*(\lg n)$ $\lg^*(n)$
21. $\lg (\lg^* n)$
22. 1 $n^{\frac{1}{\lg n}}$