TAREA 2

SANTIAGO BERMÚDEZ
FERNANDO GARZA

PROBLEMA 1

$c_1 n^2 \leq an^2 + bn + c$ Sea $c_1 = \frac{a}{4}$

$\Rightarrow \frac{an^2}{4} \leq an^2 + bn + c$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{3an^2}{4} + bn + c$

Usamos la fórmula general

$$\Rightarrow n \geq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{\frac{3a}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{b^2-3ac} - b}{a}\right)$$

hay que notar que $\sqrt{b^2-3ac} \geq 0$

$\Rightarrow b^2 - 3ac \geq 0$

$\Rightarrow b^2 \geq 3ac$

Analicemos los siguientes casos $\frac{|b|}{a} \geq \sqrt{\frac{|c|}{a}}$ (1) y $\frac{|b|}{a} \leq \sqrt{\frac{|c|}{a}}$ (2)

1) $$\frac{\sqrt{b^2 - 3ac} - b}{a} \leq \frac{\sqrt{4b^2} - b}{a} \leq \frac{3|b|}{a} \Rightarrow \frac{2 \cdot \cancel{3}|b|}{\cancel{3}\, a} = \frac{2|b|}{a}$$

2) $$\frac{\sqrt{b^2 - 3ac} - b}{a} \leq \frac{\sqrt{4a|c|} - b}{a} \leq 3\sqrt{\frac{|c|}{a}} \Rightarrow \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}\sqrt{\frac{|c|}{a}} = 2\sqrt{\frac{|c|}{a}}$$

hay que tomar el máximo

$$\Rightarrow n_0 = \max\left\{\frac{2|b|}{a}, 2\sqrt{\frac{|c|}{a}}\right\}$$

$$\Rightarrow n_0 = 2\max\left\{\frac{|b|}{a}, \sqrt{\frac{|c|}{a}}\right\}$$

$an^2 + bn + c \leq C_2 n^2$ Sea $C_2 = \frac{7a}{4}$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{3an^2}{4} - bn - c \quad \ldots *$$

Usamos la fórmula general

$$n > \frac{b + \sqrt{b^2 + 3ac}}{\frac{3a}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 3ac}}{a}\right)$$ hay que notar que $\sqrt{b^2 + 3ac} \geq 0$ Para los valores que permite $*$

analicemos los siguientes casos, $\frac{|b|}{a} \geq \sqrt{\frac{|c|}{a}}$ ① y $\frac{|b|}{a} \leq \sqrt{\frac{|c|}{a}}$ ②

① $$\frac{\sqrt{b^2 + 3ac} + b}{a} \leq \frac{\sqrt{4b^2} + b}{a} \leq \frac{3|b|}{a} \Rightarrow \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} \frac{|b|}{a} = \frac{2|b|}{a}$$

② $$\frac{\sqrt{b^2 + 3ac} + b}{a} \leq \frac{\sqrt{4a|c|} + b}{a} \leq 3\sqrt{\frac{|c|}{a}} \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{\frac{|c|}{a}} = 2$$

hay que tomar el máximo

$$\Rightarrow n_0 = \max\left\{ \frac{2|b|}{a}, 2\sqrt{\frac{|c|}{a}} \right\}$$

$$\Rightarrow n_0 = 2\max\left\{ \frac{|b|}{a}, \sqrt{\frac{|c|}{a}} \right\}$$

Sea $C_1 = 15$ y $C_2 = 105$

$\Rightarrow 15n^2 \leq 60n^2 + 5n + 1 \leq 105n^2$

$\Rightarrow 0 \leq 45n^2 + 5n + 1 \leq 105n^2$

$\Rightarrow 0 \leq 60n^2 - 5n - 1$

Usamos la fórmula general

$\dfrac{5 + \sqrt{25 + 240}}{120}$, de aquí sacamos que el está en $\dfrac{151}{60}$ ó $\sqrt{\dfrac{111}{60}}$

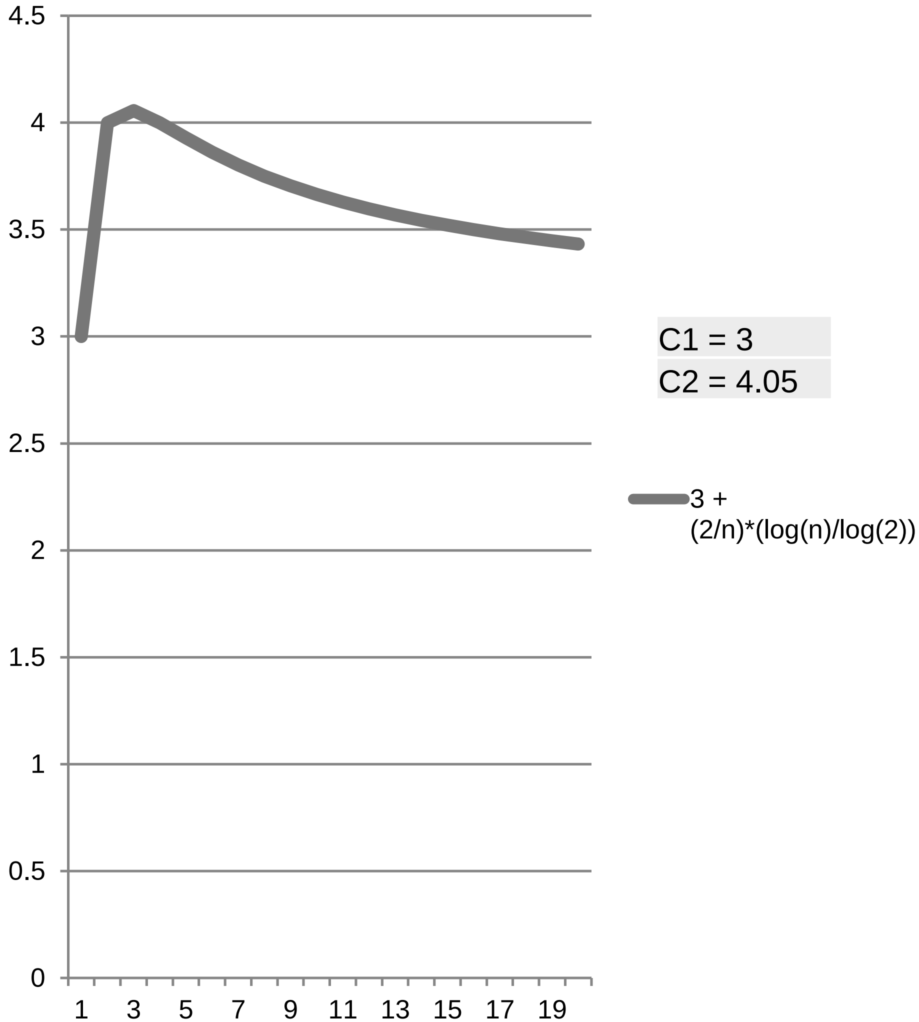
$$\frac{151}{60} < \sqrt{\frac{111}{60}}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{3600} < \frac{1}{60}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{60} < 1 \quad \therefore n_0 \geq 1$$

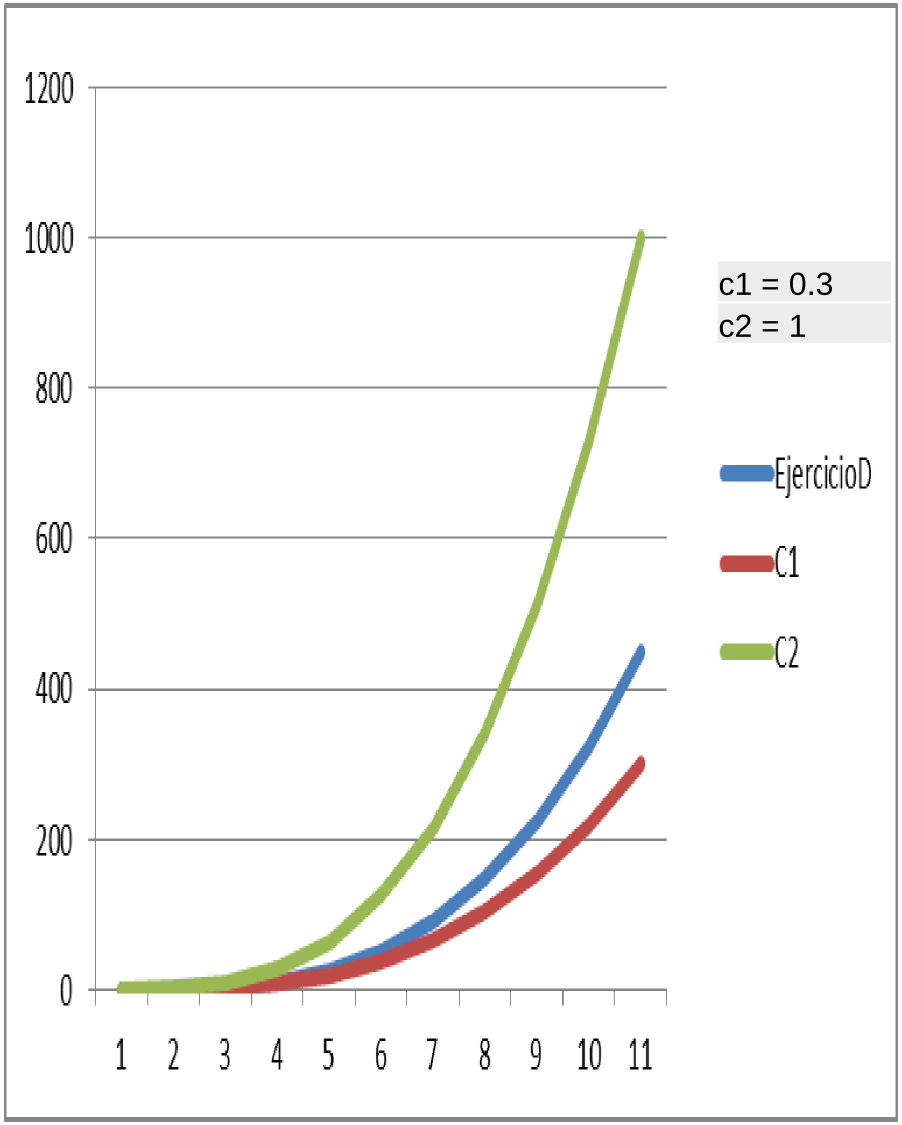
$\therefore 60n^2 + 5n + 1 = \Theta(n^2)$

Problema 3



C1 = 3
C2 = 4.05

valor de n	3 + (2/n)*(log(n)/log(2))
1	3
2	4
3	4.056641667
4	4
5	3.928771238
6	3.861654167
7	3.802101406
8	3.75
9	3.704427778
10	3.664385619
11	3.628987567
12	3.59749375
13	3.569298418
14	3.543907846
15	3.520918746
16	3.5
17	3.480877981
18	3.463325
19	3.447150265
20	3.432192809



n	Función	c1n^3	c2n^3
0	0	0	0
1	0	0.3	1
2	2	2.4	8
3	9	8.1	27
4	24	19.2	64
5	50	37.5	125
6	90	64.8	216
7	147	102.9	343
8	224	153.6	512
9	324	218.7	729
10	450	300	1000

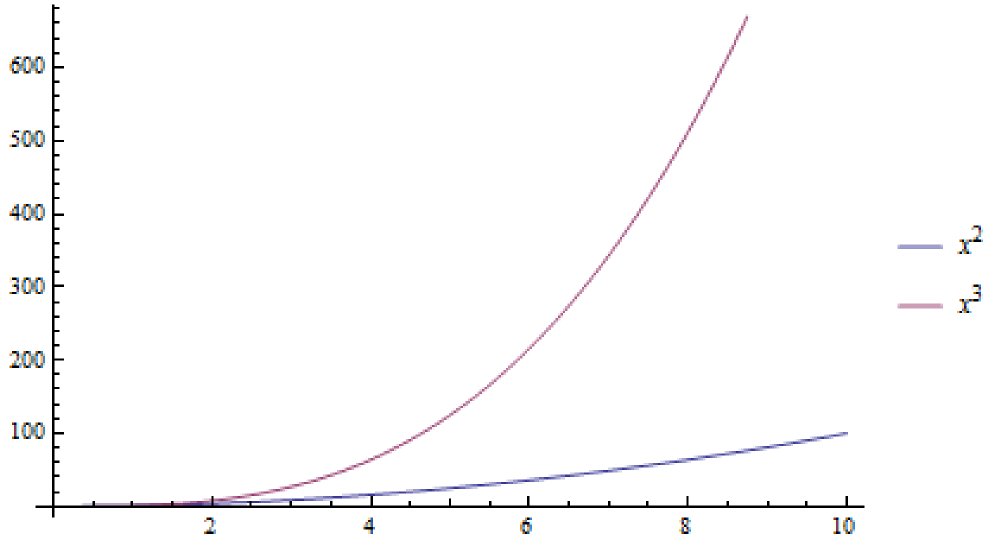
PROBLEMA 2

Ordenar una serie de funciones por orden de crecimiento. Es decir, si tenemos dos funciones f, g:

- f **tiene un orden de crecimiento mayor que** g **si** $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{g})$.
- **Recordar que Ω nos da el límite inferior de crecimiento de una función.**

ORDEN DE FUNCIONES

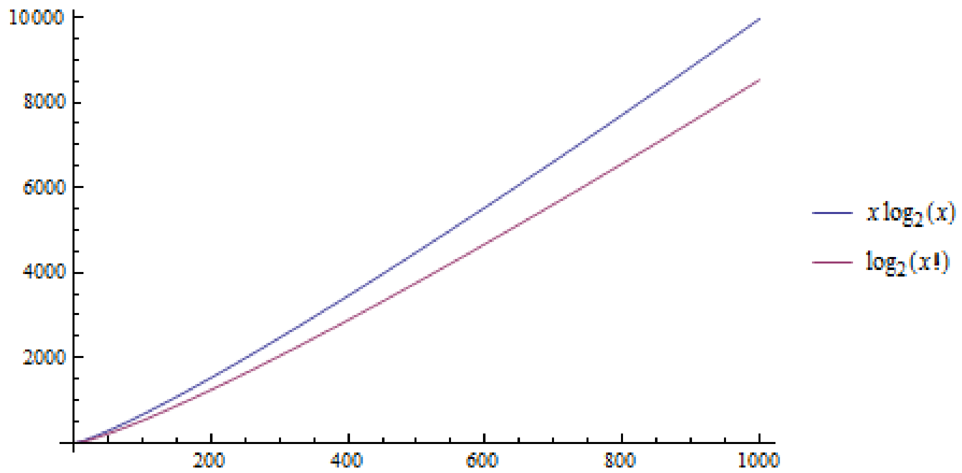
Una forma de ordenarlas sería utilizar una gráfica, por ejemplo:



Y entonces diríamos que x^3 crece más rápido que x^2…

ORDEN DE FUNCIONES

El problema es cuando las funciones son muy similares:



En realidad estas funciones tienen el mismo orden de crecimiento… $\lg(n!) = \theta(n \lg n)$

ORDEN DE FUNCIONES

Una mejor forma de hacerlo es usando límites:

Si $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) =$

- Constante, entonces $f(n) = \theta(g(n))$ si $c > 0$.
- 0 entonces $f(n) = O(g(n))$
- ∞ entonces $f(n) = \Omega(\mathbf{g}(\mathbf{n}))$

De esta forma, podríamos probar cada función y compararla con otra, y ordenarlas…

ORDEN DE FUNCIONES

Se identificaron 6 grupos de funciones:

a) Factoriales
b) Exponenciales
c) De potencias
d) Identidad
e) Logarítmicas
f) Constantes

En general:

$$\mathrm{a} = \Omega(b);\ \ b = \Omega(c);\ \ c = \Omega(d);\ \ d = \Omega(e);\ \ e = \Omega(f)$$

ORDEN DE FUNCIONES

- Hay ciertas funciones que son iguales a otras, sólo cambia la forma en que fueron escritas, por ejemplo:
  - $4^{\lg n} = n^2$
  - $n^{\lg(lg\, n)} = \lg n^{\lg n}$
  - $2^{\lg n} = n$
  - Etc.

ORDEN DE FUNCIONES

- Finalmente, las funciones ordenadas quedaron así:

1. 2^{2^n}
2. $(n+1)!$
3. $n!$
4. e^n
5. $n * 2^n$
6. 2^n
7. $\left(\frac{3}{2}\right)^n$
8. $n^{\lg \lg n}$ $(\lg n)^{\lg n}$
9. $(\lg n)!$
10. n^3
11. $4^{\lg n}$ n^2
12. $n \lg n$ $\lg(n!)$
13. $2^{\lg n}$ n
14. $\sqrt{2}^{\lg n}$
15. $\lg^2 n$
16. $\ln n$
17. $\sqrt{\lg n}$
18. $\ln \ln n$
19. $2^{\lg^* n}$
20. $\lg^*(\lg n)$ $\lg^*(n)$
21. $\lg(\lg^* n)$
22. 1 $n^{\frac{1}{\lg n}}$