TAREA 5

SANTIAGO BERMÚDEZ
FERNANDO GARZA

EL PROBLEMA

Las relaciones de recurrencia presentadas son no homogéneas, es decir

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_m a_{n-m} + g(n)$$

Donde $c1,\ldots,cm$ **son constantes y** $gn \neq 0$**.**

EL PROBLEMA

Para resolverlas, es necesario separar el problema en dos partes:

1. **La recurrencia lineal homogénea asociada:**

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_m a_{n-m} + g(n)$$

2. **Una solución de la relación de recurrencia homogénea asociada.**

EL PROBLEMA

Si $a_n^{(p)}$ **es una solución de recurrencia**

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_m a_{n-m} + g(n)$$

entonces toda solución será de la forma *an(p)+an(h)*, donde *an(h)* es una solución de la relación de recurrencia homogénea asociada.

PROBLEMA 1

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4 * 3^n \\ a_1 = 36 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 1

Para este problema determinamos la ecuación característica de la parte homogénea:

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$$

Usando el método de las raíces, obtenemos que:

$$r^n - 5r^{n-1} + 6r^{n-2} = 0$$

Dividiendo entre r^{n-2}:

$r^2 - 5r + 6 = 0$, las raíces son: $r_1 = 2$; $r_2 = 3$. Entonces, la ecuación característica será de la forma:

$$\alpha 2^n + \beta 3^n$$

PROBLEMA 1

Para la parte no homogénea, determinamos que la solución debe ser de la forma $An3^n$, sustituyendo en la ecuación original:

$$An3^n + 6A(n-2)3^{n-2} - 5A(n-1)3^{n-1} = 4 * 3^n$$

$$\frac{6A(n-2)}{9} - \frac{5A(n-1)}{3} + An = 4$$

$$-\frac{12A}{9} + \frac{5A}{3} = 4$$

$$\frac{1}{3}A = 4 \rightarrow A = 12$$

PROBLEMA 1

Finalmente,

$$a_n = \alpha 2^n + \beta 3^n + 12n3^n$$

Usando las condiciones iniciales, resolvemos el problema:

$$36 = 2\alpha + 3\beta + 36 \rightarrow \alpha = -\beta$$

$$0 = \alpha + \beta + 0 \rightarrow \beta = 0, \alpha = 0$$

Luego, la solución de la recurrencia queda:

$$a_n = 12n3^n$$

PROBLEMA 2

```
> # Esto es lo que queremos resolver
> rsolve({a(n) = 3*a(n-1)-2*a(n-2)+2^(n-1)+2*3^n, a(1) = 29, a(0) =
  9}, a(n));
```

$$-2^n+(n+1)\,2^n+9\,3^n \quad (1)$$

```
> #resolvemos la homogénearea
> rsolve({a(n) = 3*a(n-1)-2*a(n-2), a(1) = 29, a(0) = 9}, a(n));
```

$$-11+20\,2^n \quad (2)$$

```
> #hay dos funciones generadoras a tomar en cuenta, a continuación
  las expondremos
> f:= x->x/(1-2*x)-x;
```

$$f := x \rightarrow \frac{x}{1-2x} - x \quad (3)$$

```
> taylor(f(x),x=0,20);
```

$$2x^2+4x^3+8x^4+16x^5+32x^6+64x^7+128x^8+256x^9+512x^{10}+1024x^{11}+2048x^{12} + 4096x^{13}+8192x^{14}+16384x^{15}+32768x^{16}+65536x^{17}+131072x^{18}+262144x^{19} + \mathrm{O}(x^{20}) \quad (4)$$

```
> g:= x->2/(1-3*x) -2 -6*x;
```

$$g := x \rightarrow \frac{2}{1-3x} - 2 - 6x \quad (5)$$

```
> taylor(g(x),x=0,20);
```

$$18x^2+54x^3+162x^4+486x^5+1458x^6+4374x^7+13122x^8+39366x^9+118098x^{10} + 354294x^{11}+1062882x^{12}+3188646x^{13}+9565938x^{14}+28697814x^{15} + 86093442x^{16}+258280326x^{17}+774840978x^{18}+2324522934x^{19}+\mathrm{O}(x^{20}) \quad (6)$$

PROBLEMA 2

```
> #Ahora resolvemos las sumas con el método de fracciones
  parciales, por un lado tenemos G(x)*(1-3*x+2*x^2)=...
> expr1 := 9+2*x + simplify(f(x)) + simplify(g(x));
```

$$expr1 := 9 + 2\,x - \frac{2\,x^2}{-1 + 2\,x} - \frac{18\,x^2}{-1 + 3\,x} \tag{7}$$

```
> simplify(expr1);
```

$$-\frac{-9 + 43\,x - 64\,x^2 + 30\,x^3}{(-1 + 3\,x)\,(-1 + 2\,x)} \tag{8}$$

```
> expr2 := 1-3*x+2*x^2;
```

$$expr2 := 1 - 3\,x + 2\,x^2 \tag{9}$$

```
> expr1/expr2;
```

$$\frac{9 + 2\,x - \frac{2\,x^2}{-1 + 2\,x} - \frac{18\,x^2}{-1 + 3\,x}}{1 - 3\,x + 2\,x^2} \tag{10}$$

```
> simplify(%);
```

$$-\frac{30\,x^2 - 34\,x + 9}{(-1 + 2\,x)^2\,(-1 + 3\,x)} \tag{11}$$

PROBLEMA 2

```
> convert(%,parfrac);
```

$$\frac{1}{-1+2x} - \frac{9}{-1+3x} + \frac{1}{(-1+2x)^2} \quad \textbf{(12)}$$

```
> #Aquí podemos ver las series resultantes, nosotros buscamos los
  términos que están multiplicados por x^n, de lo cual llegamos a
  que esto es...
> rsolve({a(n) = 3*a(n-1)-2*a(n-2)+2^(n-1)+2*3^n, a(1) = 29, a(0) =
  9}, a(n));
```

$$-2^n + (n+1)\,2^n + 9\,3^n \quad \textbf{(13)}$$

```
>
```

PROBLEMAS 2,3,4,5

Problema 2

$$a_n = 3^{2+n} + 2^n n$$

Problema 3

$$a_n = (n+1)^2$$

Problema 4

$$-11\, 3^n + 5 - 4\,(n+1)\left(\frac{1}{2}\,n+1\right) - 4\,n + (9\,n+9)\,3^n$$

Problema 5

$$a_n = 4\,(-1 + 2^{2\,n})$$