Instituto Tecnológico Autónomo de México

Relaciones de recurrencia

Andreu Boada de Atela
David Jaramillo
Anabell Sandoval
Fernando Aguilar

Octubre, 2013

¿Cómo resolver relaciones de recurrencia?

Funciones generadoras

Definición

Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de números reales.
La función

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

se llama la función generadora de la sucesión dada.

Ejemplo: El teorema del binomio

Dadas $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se puede expresar $(x+y)^n$ como

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

y entonces se tiene que

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

y además

$$(1+x^m)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{mi}.$$

Ejemplo: La serie geométrica

Dada $|x| < 1$ la expresión $\frac{1}{1-ax}$ define la serie

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i x^i.$$

De la serie geométrica se tiene que

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Definición: Serie de Maclaurin

Dada una función $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciable se tiene que

$$f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}\left(0\right)}{i!}x^i.$$

Ejemplo

La expansión de la serie de Maclaurin para $\left(1-x\right)^{-n}$ está dada por

$$\begin{aligned}\left(1-x\right)^{-n} &= 1+\left(-n\right)x+\left(-n\right)\left(-n-1\right)\frac{x^2}{2!}+\left(-n\right)\left(-n-1\right)\left(-n-2\right)\frac{x^3}{3!}+\cdots\\ &= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(-n\right)\left(-n-1\right)\left(-n-2\right)\cdots\left(-n-r+1\right)}{r!}x^r\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\left(-1\right)^r\binom{n+r-1}{r}x^r.\end{aligned}$$

Algunos resultados

Para toda $m, n \in \mathbb{Z}^+, a \in \mathbb{R}$

1. $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n$

2. $(1+ax)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} ax + \binom{n}{2} a^2x^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^nx^n$

3. $(1+x^m)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x^m + \binom{n}{2} x^{2m} + \cdots + \binom{n}{n} x^{nm}$

4. $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

5. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$

6. $\frac{1}{1-ax} = 1+(ax)+(ax)^2+(ax)^3+\cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (ax)^i = \sum_{i=0}^{\infty} a^ix^i = 1+ax+a^2x^2+\cdots$

7. $\frac{1}{(1+x)^n} = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1} x + \binom{-n}{2} x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} x^i$

8. $\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1} (-x) + \binom{-n}{2} (-x)^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} (-x)^i$

En 7 y 8 se tiene que
$\binom{-n}{i} = (-1)^i \binom{n+i-1}{i}$.

Si $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i, g(x) = \sum_{i=0} a_ix^i, g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_ix^i$, y $h(x) = f(x)\, g(x)$, entonces

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_ix^i,$$

donde para toda $k \geq 0$,

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 = \sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}.$$

Función Generadora exponencial

Se considera la sucesión $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$ cuando se tiene combinaciones de n objetos tomando r a la vez denotada por $C(n,r)$ tal que

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \left(\frac{1}{r!}\right) P(n,r)$$

donde $P(n,r)$ denota el número de permutaciones de n objetos tomando r a la vez.

Definición

Dada la sucesión $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ de números reales,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}$$

se llama la función generadora exponencial para la sucesión dada.

Ejemplo

Examinando la serie de Maclaurin para e^x encontramos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},$$

por lo que e^xes la función genradora exponencial de la sucesión $1, 1, 1, \ldots$.

La función e^x es la función generadora ordinaria de la sucesión

$$1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \cdots$$

La expansión en serie de Maclaurin para e^{-x} es

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

sumando (y restando) estas series, encontramos que

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

y que

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots .$$

Relaciones de recurrencia lineales de primer orden.

La única solución de la relación

$$a_{n+1} = da_n$$

donde $n \geq 0$, d constante y $a_0 = A$, está dada por

$$a_n = Ad^n.$$

Ejemplo

Consideremos la relación de recurrencia

$$a_{n+1} = 2a_n,$$

con $a_0 = 1$.

Entonces,

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} \\ &= 2\left(2a_{n-2}\right) \\ &= 2^2\left(2a_{n-3}\right) \\ &\vdots \\ &= 2^n a_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $a_n = 2^n$.

Relaciones de recurrencia lineales de primer orden no homogéneas

Si se tiene una relación de recurrencia no homogénea de la forma

$$a_{n+1} = da_n + f(n)$$

con condiciones iniciales a_0 y a_1 entonces se puede proceder de la siguiente forma:

- Sea $a_n = a_n^h + a_n^p$, donde a_n^h es la solución de la ecuación homogénea $a_{n+1} = da_n$ y a_n^p es una solución particular de la relación de recurrencia original.

- La solución homogénea a_n^h está dada por $a_n^h = Ad^n$.
- Consideramos ahora la solución particular a_n^p. Se tiene entonces que

  $$a_{n+1}^p = da_n^p + f(n)$$

  y a partir de las condiciones iniciales a_0 y a_1 se puede resolver un sistema y encontrar a_n^p.

Relaciones de recurrencia lineales de segundo orden.

Consideramos la relación de recurrencia de orden k con coeficientes constantes,

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} = 0.$$

Si el orden de la relación es $k = 2$ entonces

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} = 0$$

y por lo tanto planteamos la ecuación cuadrática

$$C_0 x^2 + C_1 x + C_2 = 0$$

con raíces r_1, r_2, para la cual tenemos los siguientes casos:

1. Si $r_1 \neq r_2$ y ambas raíces son reales entonces $a_n^h = A(r_1^n) + B(r_2^n)$.
2. Si $r = r_1 = r_2$ entonces $a_n^h = A(r^n) + Bn(r^n)$.
3. Si r_1, r_2 son raíces complejas conjugadas tales que

   $$\begin{aligned} r_1 &= \alpha + \beta i \\ r_2 &= \alpha - \beta i \end{aligned}$$

   y, si $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$, $|r| = |r_1| = |r_2| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, entonces tenemos que

   $$\begin{aligned} a_n^h &= A(r_1^n) + B(r_2^n) \\ &= |r|^n (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)). \end{aligned}$$

La técnica para encontrar a_n^p se generaliza de la siguiente forma.

Consideremos la relación no homogénea de primer orden

$$a_n + C_1 a_{n-1} = k\left(r^n\right),$$

donde k es constante.

Si r^n no es una solución de la relación homogénea asociada

$$a_n + C_1 a_{n-1} = 0,$$

entonces $a_n^p = A\left(r^n\right)$ con A constante. Si r^n es solución de la relación homogénea asociada entonces $a_n^p = Bnr^n$ con B constante.

Ahora consideremos el caso de la relación no homogénea de segundo orden

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} = kr^n$$

con k constante.

Entonces, se tiene que

- si r^n no es solución de la relación homogénea asociada, entonces $a_n^p = A\left(r^n\right)$;
- si $a_n^h = A\left(r_1^n\right) + B\left(r^n\right)$ con $r_1 \neq r$, entonces $a_n^p = Bnr^n$ con B constante; y
- si $a_n^h = \left(A + Bn\right) r^n$, entonces $a_n^p = Cn^2 r^n$ con C constante.

Método de las funciones generadoras

Sea

$$G\left(z\right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

y para una relación no homogénea se tiene que

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} = f\left(n\right).$$

Por lo tanto, para toda $i \geq 2$ se tiene que

$$C_0 \sum_{i=2}^{\infty} a_i z^i + C_1 z \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1} z^{i-1} + C_2 z^2 \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-2} z^{i-2} = \sum_{i=2}^{\infty} f\left(i\right) z^i.$$

Se tiene entonces que

$$C_0 \left\{G(z) - a_1 z - a_0\right\} + C_1 z \left\{G(z) - a_0\right\} + C_2 z^2 G(z) = \sum_{i=2}^{\infty} f(i)\, z^i.$$

Por lo tanto,

$$G(z) = \frac{C_0 (a_1 z + a_0) + C_1 a_0 z}{C_0 - C_1 z + C_2 z^2} + \frac{\sum_{i=2}^{\infty} f(i)\, z^i}{C_0 - C_1 z + C_2 z^2}.$$

Si se convierte la expresión de $G(z)$ a fracciones parciales, entonces es simple encontrar una forma cerrada para a_n.

Ejericios

1. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4(3^n)$
   $a_1 = 36$
   $a_0 = 0$

2. $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^{n-1} + 2(3^n)$
   $a_1 = 29$
   $a_0 = 9$

3. $a_n = a_{n-2} + 4n$
   $a_1 = 4$
   $a_0 = 1$

4. $a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - 3a_{n-3} + 16n + 8(3^n)$
   $a_2 = 117$
   $a_1 = 10$
   $a_0 = -1$

5. $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3(2^{2n-1})$
   $a_1 = 12$
   $a_0 = 0$

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.

Se desea resolver la relación de recuerrencia

$$a_n = 5_{n-1} - 6a_{n-2} + 4(3^n)$$

con $a_0 = 0, a_1 = 36$.

Sea

$$G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i.$$

Se tiene que

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4(3^n)$$

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} - 4(3^n) = 0.$$

Entonces,

$$(a_i - 5a_{i-1} + 6a_{i-2} - 4(3^i))z^i = 0 \ \forall i \geq 2$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i z^i - 5\sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1} z^i + 6\sum_{i=2}^{\infty} a_{i-2} z^i = 4\sum_{i=2}^{\infty} 3^i z^i$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i z^i - 5z\sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1} z^{i-1} + 6z^2\sum_{i=2}^{\infty} a_{i-2} z^{i-2} = 4\sum_{i=2}^{\infty} 3^i z^i$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i z^i - 5z\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i + 6z^2\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = 4\sum_{i=2}^{\infty} 3^i z^i.$$

Entonces, se tiene que

$$(G(z) - a_0 - a_1 z) - 5z(G(z) - a_0) + 6^2 G(z) = 4\sum_{i=2}^{\infty} 3^i z^i$$

Por otro lado,

$$\sum_{i=0}^{\infty} 3^i z^i = \frac{1}{1-3z}$$

$\implies$

$$\sum_{i=2}^{\infty} 3^i z^i = \frac{1}{1-3z} - 1 - 3z$$

$\implies$

$$4\sum_{i=2}^{\infty} 3^i z^i = \frac{4}{1-3z} - 4(1+3z) = \frac{4-4(1-3z)(1+3z)}{13z}$$

$$= \frac{4-4(1-9z^2)}{1-3z} = \frac{36z^2}{1-3z}$$

Por lo tanto,

$$(G(z) - a_0 - a_1 z) - 5z(G(z) - a_0) + 6z^2 G(z) = \frac{36z^2}{1-3z}$$

$\implies$

$$G(z) - 36z - 5zG(z) + 6z^2 G(z) = \frac{36z^2}{1-3z}$$

pues $a_0 = 0$ y $a_1 = 36$.
Entonces,

$$G(z)(1 - 5z + 6z^2) - 36z = \frac{36z^2}{1-3z}$$

$\implies$

$$G(z)(1 - 5z + 6z^2) = 36z + \frac{36z^2}{1-3z}$$

$$G(z)(1-3z)(1-2z) = 36z + \frac{36z^2}{1-3z}$$

$\implies$

$$G(z) = \frac{36z}{(1-3z)(1-2z)} + \frac{36z^2}{(1-3z)^2(1-2z)}$$

Aplicamos le técnica de fracciones parciales para reexpresar $G(z)$ como

$$G(z) = \frac{A}{1-3z} + \frac{B}{1-2z} + \frac{C}{(1-3z)^2}$$

$\implies$

$$\frac{36z(1-3z)+36z^2}{(1-3z)^2(1-2z)} = \frac{A(1-3z)(1-2z)+B(1-3z)^2+C(1-2z)}{(1-3z)^2(1-2z)}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$36z(1-3z)+36z^2 = A(1-3z)(1-2z)+B(1-3z)^2+C(1-2z).$$

Si $z = \frac{1}{3}$ entonces

$$4 = C(1-\frac{2}{3}) \Longrightarrow C = 12.$$

Si $z = \frac{1}{2}$ entonces

$$0 = -9+9 = \frac{B}{4} \Longrightarrow B = 0.$$

Si $z = 0$ entonces

$$0 = A+B+C \Longrightarrow A = -12.$$

De lo anterior,

$$G(z) = \frac{-12}{1-3z} + \frac{12}{(1-3z)^2}.$$

Como $G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ entonces buscamos el coeficiente de z^n, es decir a_n.

Pero,

$$G(z) = \frac{-12}{1-3z} + \frac{12}{(1-3z)^2}$$

y sabemos que $\sum_{i=0}^{\infty} 3^i z^i = \frac{1}{1-3z}$, y que

$$\frac{1}{(1-3z)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+1}{i} 3^i z^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) 3^i z^i.$$

Por lo tanto, el coeficiente de z^n en $G(z)$ es

$$-12(3^n) + 12(n+1)3^n$$

La solución a la relación de recurrencia es:

$$a_n = -12(3^n) + 12(n+1)3^n = \{-12 + 12(n+1)\}\, 3^n = 12n(3^n).$$

Ejercicio 2

Consideramos la relación de recurrencia

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^{n-1} + 2\left(3^n\right)$$

donde $a_0 = 9$ y $a_1 = 29$.

Sea $G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$

$$\left(a_i - 3a_{i-1} + 2a_{i-2} - 2^{i-1} - 2(3^i)\right) z_i = 0$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i z^i - 3z\sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1} z^{i-1} + 2z^2\sum_{i=2}^{\infty} a_{i-2} z^{i-2} - \sum_{i=2}^{\infty} 2^{i-1} z^i - 2\sum_{i=2}^{\infty} 3^i z^i = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\left(G\left(z\right) - 29z - 9\right) - 3z\left(G\left(z\right) - 9\right) + 2z^2 G(z) = z\sum_{i=2}^{\infty} 2^{i-1} z^{i-1} + 2\sum_{i=2}^{\infty} 3^i z^i$$

Por lo tanto,

$$G(z)\left\{1 - 3z + 2z^2\right\} - 29z - 9 + 27z = z\left(\frac{1}{1-2z} - 1\right) + 2\left(\frac{1}{1-3z} - 1 - 3z\right)$$

$$= \frac{2z^2}{1-2z} + \frac{18z^2}{1-3z}$$

$$G(z) = \frac{2z + 9 + \frac{2z^2}{1-2z} + \frac{18z^2}{1-3z}}{\left(1-2z\right)\left(1-z\right)}$$

$$G(z) = \frac{2z+9}{(1-2z)(1-z)} + \frac{2z^2}{(1-2z)^2(1-z)} + \frac{18z^2}{(1-3z)(1-z)(1-2z)} = \frac{A}{(1-2z)} + \frac{B}{(1-2z)^2} + \frac{C}{(1-z)} +$$

Por un lado,

$$G(z) = \frac{(2z+9)(1-3z)(1-2z) + 2z^2(1-3z) + 18z^2(1-2z)}{(1-2z)^2(1-z)(1-3z)}$$

Por otro lado,

$$G(z) = \frac{A(1-2z)(1-z)(1-3z) + B(1-z)(1-3z) + C(1-2z)^2(1-3z) + D(1-2z)^2(1-z)}{(1-2z)^2(1-z)(1-3z)}$$

Si $z = 1$ entonces

$$-2C = 11(-2)(-1) + 2(-2) + 18(-1) = -11 + 1 + 9 \Rightarrow C = 0.$$

si $z = \frac{1}{2}$ entonces

$$B\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right) \Longrightarrow B = 1$$

si $z = \frac{1}{3}$ entonces

$$D\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right) \Longrightarrow D = 9$$

si $z = 0$ entonces

$$A + B + C + D = 9 \Longrightarrow A + 1 + 0 + 9 = 9 \Longrightarrow A = -1.$$

Función generadora:

$$G(z) = \frac{-1}{1-2z} + \frac{1}{(1-2z)^2} + \frac{9}{1-3z}$$

tenemos

$$\frac{1}{(1-2z)^2} = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)2^i z^i$$

entonces

$$G(z) = (-1)\sum_{i=0}^{\infty} 2^i z^i + \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)2^i z^i + 9\sum_{i=0}^{\infty} 3^i z^i.$$

por lo tanto

$$a_n = (-1)2^n + (n+1)2^n + 9(3^n).$$

Ejercicio 3

Consideramos la relación de recurrencia

$$a_n = a_{n-2} + 4n$$

donde $a_0 = 1$ y $a_1 = 4$.

$$(a_i - a_{i-2} - 4_i)\, z^i = 0$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i z^i - \sum_{i=2}^{\infty} a_i - 2z^i - 4\sum_{i=0}^{\infty} i z^i = 0$$

Sea $G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$.

Entonces

$$(G(z) - 4z - 1) - z^2 G(z) = 4\sum_{i=2}^{\infty} i z^i$$

pero

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+1}{i} z^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}(i+1) z^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i z^i + \sum_{i=0}^{\infty} z^i$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{i=0}^{\infty} iz^i = -z + \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z}$$

$$= \frac{-z(1-z)^2 + 1 - (1-z)}{(1-z)^2}$$

$$= \frac{z^2(2-z)}{(1-z)^2}.$$

Entonces

$$G(z)\left\{1 - z^2\right\} = 4z + 1 + \frac{4z^2(2-z)}{(1-z)^2}$$

$$= \frac{4z+1}{(1-z)(1+z)} + \frac{4z^2(2-z)}{(1-z)^3(1+z)} = \frac{(4z+1)(1-z)^2 + 4z^2(2-z)}{(1-z)^3(1+z)}$$

Expresamos $G(z)$ como fracciones parciales de forma que,

$$G(z) = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{(1-z)^3} + \frac{D}{1+z}$$

$$= \frac{A(1-z)^2(1+z) + B(1-z)(1+z) + C(1+z) + D(1-z)^3}{(1-z)^3(1+z)}$$

Si $z = 1$ entonces

$$2C = 4 \ \Rightarrow C = 2$$

Si $z = -1$ entonces

$$8D = (-3)(4) + 4(3) = 0 \ \Rightarrow D = 0$$

si $z = 0$ entonces

$$A + B + C + D = 1 \ \Rightarrow A + B = -1$$

Si $z = 2$ entonces

$$3A - 3B + 3\mathrm{C}{=}9 \text{ es decir } 3A - 3B = 3$$

Por lo tanto, $A = 0,\ B = -1$
La función generadora es

$$G(z) = \frac{-1}{(1-z)^2} + \frac{2}{(1-z)^3}$$

$$= (-1)\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)z^i + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c} i+2 \\ i \end{array}\right)(-1)^i(-z)^i$$

$$= (-1)\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)z^i + 2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+2)(i+1)}{2}z^i$$

y por lo tanto,

$$a_n = (-1)(n+1) + (n+2)(n+1)$$

$$= (n+1)(-1+n+2)$$

$$= (n+1)^2.$$

Ejercicio 4

La relación de recurrencia a resolver

$$a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - 3a_{n-3} + 16n + 8\left(3^n\right)$$

con $a_0 = -1$, $a_1 = 10$ y $a_2 = 117$.
Procediendo del mismo modo tenemos que

$$\sum_{i=3}^{\infty} a_i z^i - 3z\sum_{i=3}^{\infty} a_{i-1}z^i - z^2\sum_{i=0}^{\infty} a_{i-2}z^{i-2} + 3z^3\sum_{i=0}^{\infty} a_{i-3}z^{i-3} = \sum_{i=3}^{\infty}\left(16i + 8\left(3^i\right)\right)z^i.$$

Entonces,

$$\Big(G(z)\,117z^2 - 10z + 1\Big) - 3z\left(G(z) - 10z + 1\right) - z^2\left(G(z) + 1\right) + 3z^3G(z) = 16\sum_{i=0}^{\infty} iz^i + 8\sum_{i=3}^{\infty} 3^i z^i.$$

Pero,

$$\sum_{i=3}^{\infty} iz^i = \frac{z^3\left(3-2z\right)}{\left(1-z\right)^2}$$

y

$$\sum_{i=3}^{\infty} 3^i z^i = \frac{27z^3}{1-3z}$$

pues

$$\sum_{i=3}^{\infty} 3^i z^i = 27z^3 \sum_{i=0}^{\infty} 3^i z^i = \frac{27z^3}{1-3z}$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{i=3}^{\infty} iz^i &= \sum_{i=0}^{\infty} iz^i - z - 2z^2 \\
&= z\sum_{i=0}^{\infty} iz^{i-1} - z - 2z^2 \\
&= z\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)z^i - z - 2z^2 \\
&= \frac{z}{\left(1-z\right)^2} - z - 2z^2 \\
&= \frac{z^3\left(32z\right)}{\left(1-z\right)^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$G\left(z\right)\left\{1-3z-z^2+3z^3\right\} - 117z^2 + 10z - 1 - 30z^2 + 3z + z^2 = \frac{16z^3\left(3-2z\right)}{\left(1-z\right)^2} + \frac{216z^3}{1-3z}.$$

Simplicando, obtenemos

$$\begin{aligned}
G\left(z\right) &= \frac{48z^4 - 79z^3 - 3z^2 + 19z - 1}{\left(1-3z\right)^2\left(1-z\right)^3} \\
&= \frac{9}{1-z} + \frac{-11}{1-3z} + \frac{-4}{\left(1-z\right)^2} + \frac{9}{\left(1-3z\right)^2} + \frac{-4}{\left(1-z\right)^3} \\
&= 9\sum_{i=0}^{\infty} z^i + \left(-11\right)\sum_{i=0}^{\infty} 3^i z^i + \left(-4\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(i+1\right)z^i \\
&\quad +9\sum_{i=0}^{\infty}\left(i+1\right)3^i z^i + \left(-4\right)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(i+2\right)\left(i+1\right)}{2}z^i.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_n &= 9 + (-11)\, 3^n - 4\,(n+1) + 9\,(n+1)\, 3^n - 2\,(n+2)\,(n+1) \\ &= 9 - 11\,(3^n) - 4n - 4 + 9\,(n+1)\, 3^n - 2n^2 - 6n - 4 \\ &= 1 - 10n - 2n^2 - 2\,(3^n) + 9n\,(3^n)\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 5

Sea

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3\left(2^{2n-1}\right)$$

con $a_0 = 0$ y $a_1 = 12$.

Calculamos $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \left(2^{2i-1}\right) z^i = \frac{8z^2}{1-4z}$ pues

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} \left(2^{2i-1}\right) z^i &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{\infty} 4^i z^i\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{\infty} 4^i z^i - 1 - 4z\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-4z}\right) - \frac{1}{2}\,(1+4z) \\ &= \frac{8z^2}{1-4z} \end{aligned}$$

Entonces:

$$(G(z) - 12z) - 3zG(z) + 2z^2 G(z) = \frac{24z^2}{1-4z}$$

$$G(z)\left\{1 - 3z + 2z^2\right\} = 12z + \frac{24z^2}{1-4z}$$

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{12z}{(1-2z)(1-z)} + \frac{24z^2}{(1-4z)(1-2z)(1-z)} \\ &= \frac{12z\,(1-4z) + 24z^2}{(1-2z)(1-z)(1-4z)} \\ &= \frac{4}{1-4z} + \frac{-4}{1-z} \Rightarrow a_n = 4\,(4^n) - 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$a_n = 4\left(4^n\right) - 4$$

Bibliografía

1. Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L., Stein C. (2009) *Introduction to Algorithms*. Massachusetts Institute of Technology, 3rd edition.

2. Grimaldi, R. P. (2003). *Discrete and Combinatorial Mathematics*. Pearson, 5th edition.