Laborator Prelucrarea Numerică a Semnalelor
Analiza în frecvență a semnalelor și sistemelor

Ștefan-Adrian Toma

V1 2020

Cuprins

1. Introducere

1.1 Reprezentarea semnalelor prin dezvoltare în serie Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn2\pi f_0 t}$$	(1)
$$c_n = \lvert c_n \rvert e^{j\theta_n} = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$	(2)

1.2 Reprezentarea semnalelor cu ajutorul funcției de densitate spectrală

Transformata Laplace (unilaterala) se definește prin:

$$X(j\omega) = X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \forall\ \omega \,\epsilon\, R$$	(3)
$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$	(4)

1.3 Reprezentarea semnalelor cu ajutorul transformatei LaPlace

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \ cu\ s \in \mathbb{R}d$$	(5)
$$x(t) = \mathcal{L}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_0^{\infty} X(s) e^{st} ds$$	(6)

Regiunea de convergenta (RdC) este domeniul din planul variabilei $s = \sigma + j\omega$ asociat transformatei X(s) in care aceasta este absolut convergenta .

Perechea de funcții original x(t) si imagine X(s) legate prin transformarea Laplace se reprezintă prin:

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\Leftrightarrow} X(s)$$	(7)

1.4 Funcția de transfer a unui sistem

$$H(j\omega) = H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$	(8)
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$	(9)

1.5 Transformata Hilbert

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi t} * s(t)$$	(10)

2. Exerciții

2.1 Problema 1

Să se determine spectrul de amplitudini și cel de faze pentru semnalul periodic din Figura 1. Să se reprezinte grafic spectrul de amplitudini, cu ajutorul Matlab. Discuție în funcție de diferite valori ale parametrilor t_0 si t_1.

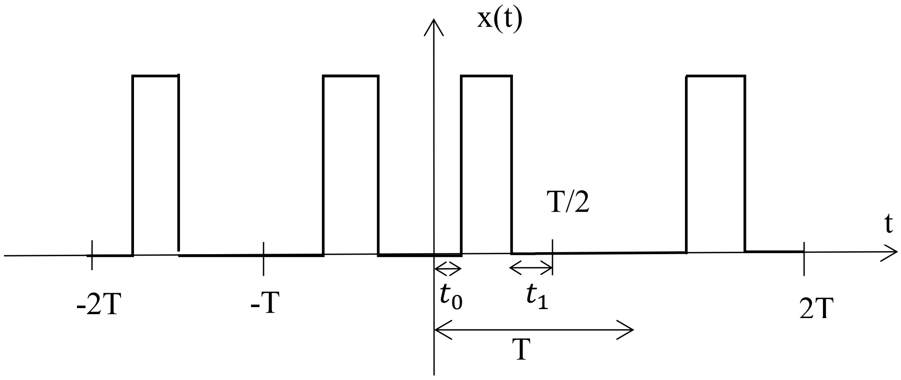


Figura 1 Semnalul x(t)

Pentru $t_0=t_1=0$

$$c_0 = \frac{E}{2}$$

$$|c_n| = \frac{E}{2} \cdot \left|sinc\ \frac{n\pi}{2}\right|$$

$$\theta_n = -n \cdot \frac{\pi}{2}$$

2.2 Problema 2

Să se calculeze funcția de densitate spectrală a semnalului din Figura 2.

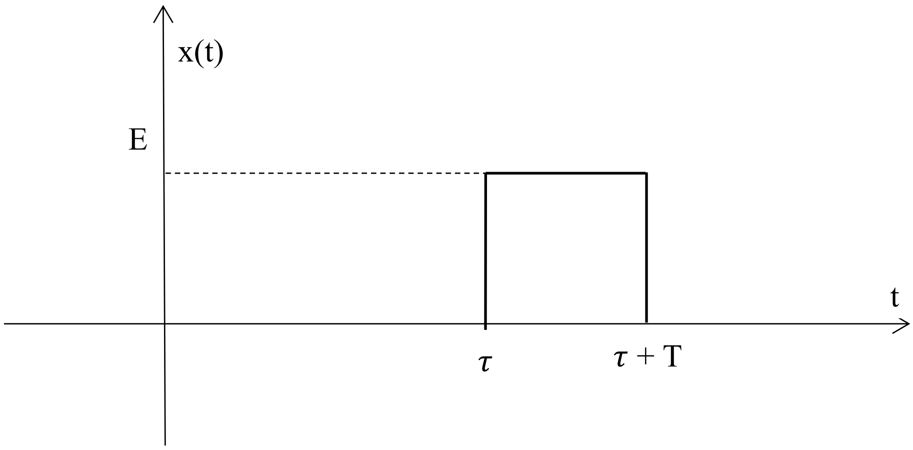


Figura 2 **Semnalul x(t)**

2.3 Problema 3

Să se calculeze funcția de densitate spectrală a semnalului din Figura 3. Discuție in funcție de valorile parametrului τ .

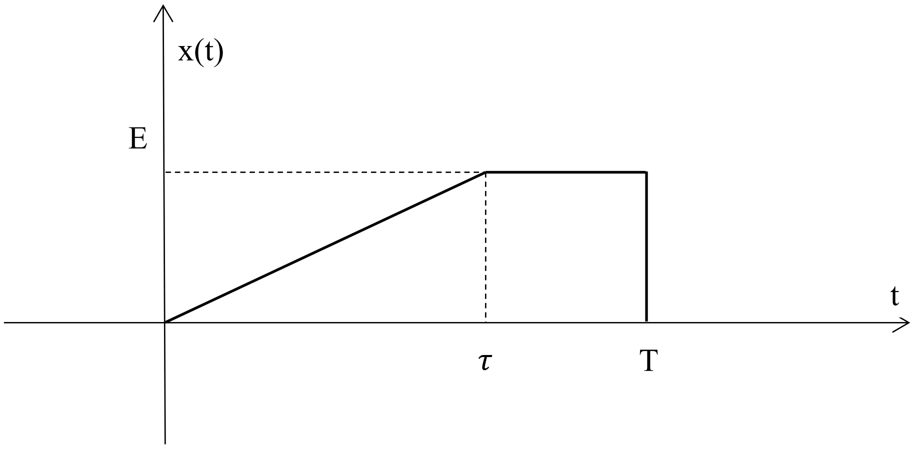


Figura 3 Semnalul x(t)

2.4 Problema 4

Să se calculeze transformata Fourier a unui semnal periodic.

$$x(t) = x(t+T)$$ $$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right) e^{-j\omega t} dt$$ $$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$	(11)

3. Diagrame Bode

1.1 Exercițiul 1

$$H(s) = \frac{100}{s+10}$$	(11)

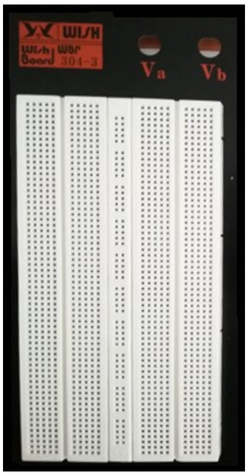
1.2 Exercițiul 2

$$H(s) = 4\frac{s^2+s+25}{s^3+100s^2}$$	(12)

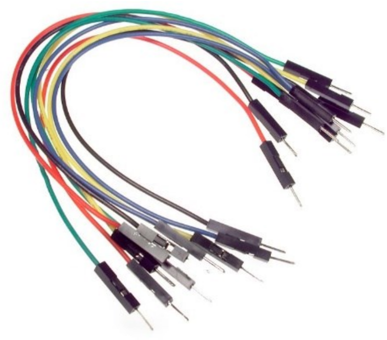
4. Analiza circuitului RC

1.3 Materiale necesare

Materialele necesare sunt bread-board, cabluri tata-tata, osciloscop Analog Discovery 2, rezistențe și condensatori.

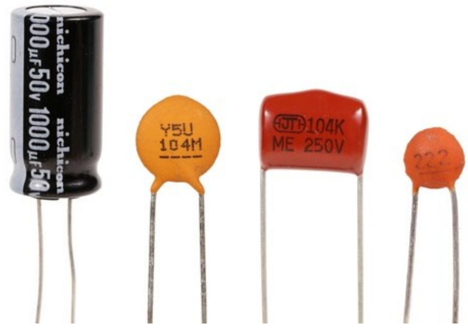


bread-board



cabluri tata-tata

Analog Discovery 2

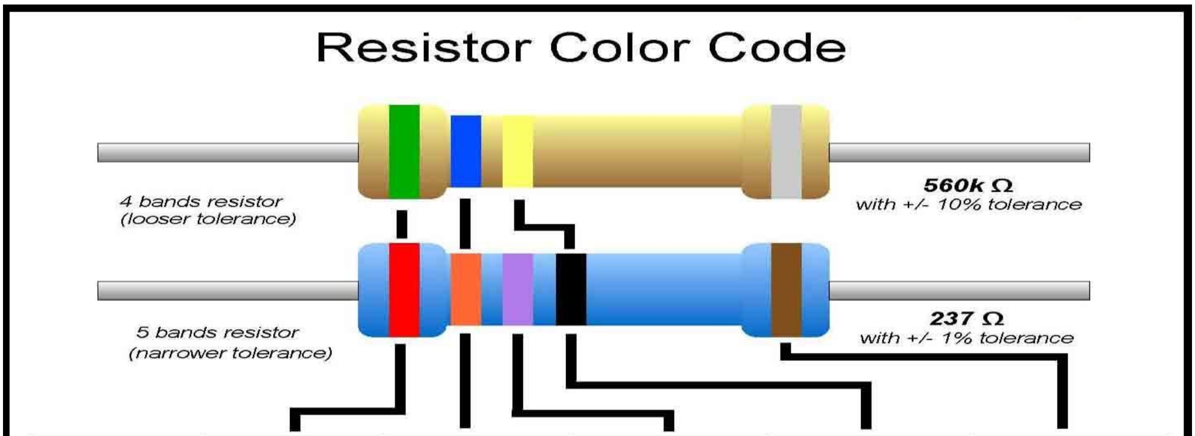


rezistențe și condensatori (nu sunt aceleași modele utilizate la laborator)

Figura 4. Materiale necesare

1.4 Codul culorilor pentru rezistențe

Vom porni de la o rezistență R a cărei valoare o putem afla urmărind codul culorilor sau folosind un multimetru.



Color	1st Band	2nd Band	3rd Band	Multiplier	Tolerance
Black	0	0	0	x 1 Ω	
Brown	1	1	1	x 10 Ω	+/- 1%
Red	2	2	2	x 100 Ω	+/- 2%
Orange	3	3	3	x 1K Ω	
Yellow	4	4	4	x 10K Ω	
Green	5	5	5	x 100K Ω	+/- .5%
Blue	6	6	6	x 1M Ω	+/- .25%
Violet	7	7	7	x 10M Ω	+/- .1%
Grey	8	8	8		+/- .05%
White	9	9	9		
Gold				x .1 Ω	+/- 5%
Silver				x .01 Ω	+/- 10%

Figura 5. Codul culorilor pentru rezistențe

1.5 Pin-out pentru Analog Discovery 2

Mai multe detalii despre dispozitiv pot fi găsite aici:
https://reference.digilentinc.com/reference/instrumentation/analog-discovery-2/reference-manual

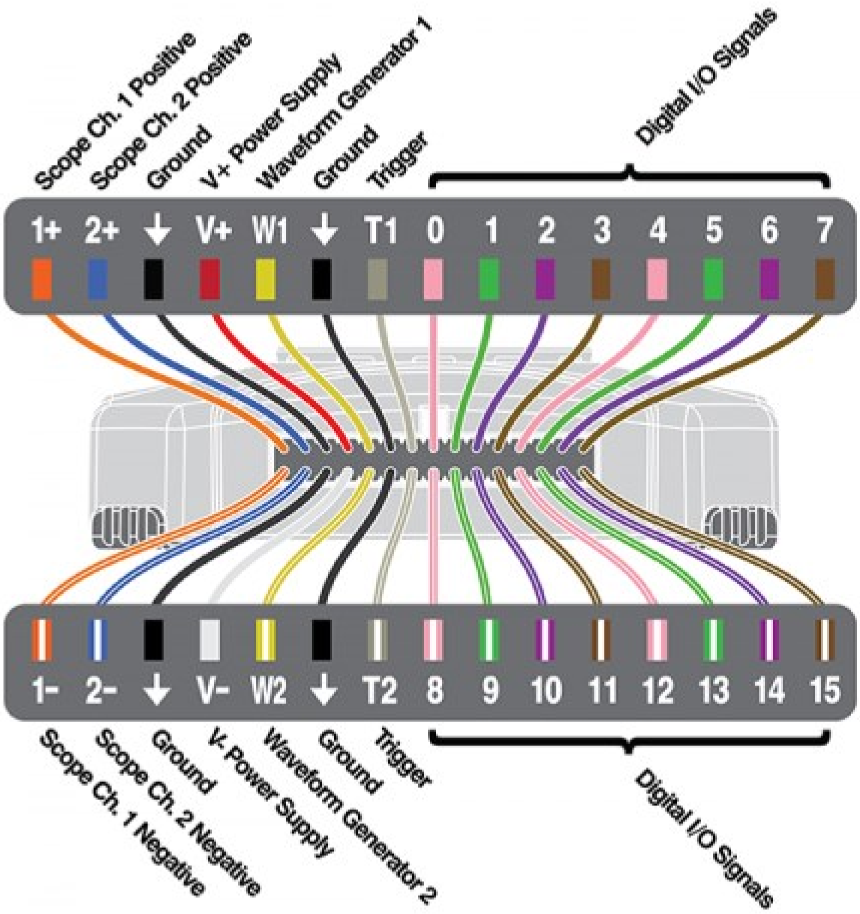


Figura 6. Diagrama de pini Analog Discovery 2

1.6 Circuitul RC

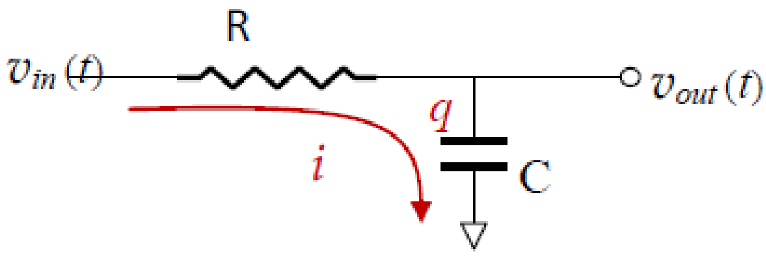


Figura 7. Circuit RC 2

1.7 Desfășurarea laboratorului

La realizarea acestui laborator s-a folosit o rezistență cu valoarea de 1 kΩ. Urmărind imaginea cu diagrama de pini a dispozitivului Analog Discovery 2 observăm:

- **Masa** - firul negru (pe schemă: 'Negru')
- **Generator de semnale** – firul galben (pe schemă: 'G')
- **Sondă pozitivă osciloscop (+)**: firul portocaliu (pe schemă: 'P')
- **Sondă negativă osciloscop (-)**: firul alb-portocaliu (pe schemă: 'AP')

Pornind de la acest circuit și folosind softul WaveForms (https://store.digilentinc.com/waveforms-previously-waveforms-2015/) vom genera diferite forme de unde: sinus, dreptunghiular periodic (de tip **simple**) și "chirp" (de tip **sweep**). Analog Discovery 2 oferă, printre altele, funcționalități de generator de semnale, osciloscop și analizor de spectru, în funcție de pinii folosiți.

Pentru realizarea circuitului vom folosi bread-board-ul, ale cărui linii sunt conectate după cum reiese din poză:

Figura 8. Modul de interconectare al conectorilor pe breadboard

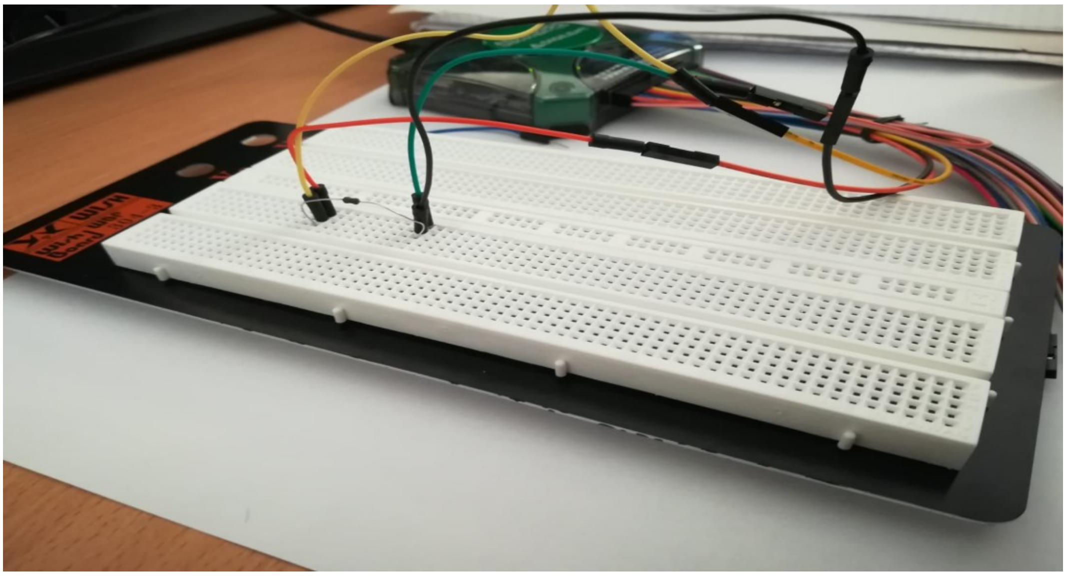


Figura 9. Dispunerea componentelor și a cablurilor de interconectare pe breadboard

Vom începe cu generarea unui **semnal sinus.** Un click pe item-ul **Wavegen** deschide un alt tab în program, în care putem modifica parametrii semnalului generat: frecvență, amplitudine, factor de umplere (**symmetry**) și faza. Pentru a vizualiza semnalul generat: **Welcome** -> **Scope**. (vezi **Figura 10**)

Observație: În tab-ul **Scope**, debifați din dreapta 'Channel 2'. (vezi **Figura 12**)

Observație: Folosind portul audio al Analog Discovery 2, putem auzi semnalul generat, care va fi mai înalt sau mai jos în funcție de frecvența pe care o alegem în **Wavegen**.

Pentru a vizualiza spectrograma semnalului, deschidem un nou tab din tab-ul **Welcome**, denumit sugestiv **Spectrum.** (vezi Figura 13)

Comutând pe tab-ul **Spectrum** (Ox – frecvența, Oy – amplitudinea) debifăm din dreapta 'Trace 2' și introducem 0 Hz la **Start** și 20 kHz la **Stop**. Vom observa pe spectrogramă un impuls Dirac în punctul de pe axa Ox corespunzător frecvenței semnalului sinusoidal generat.

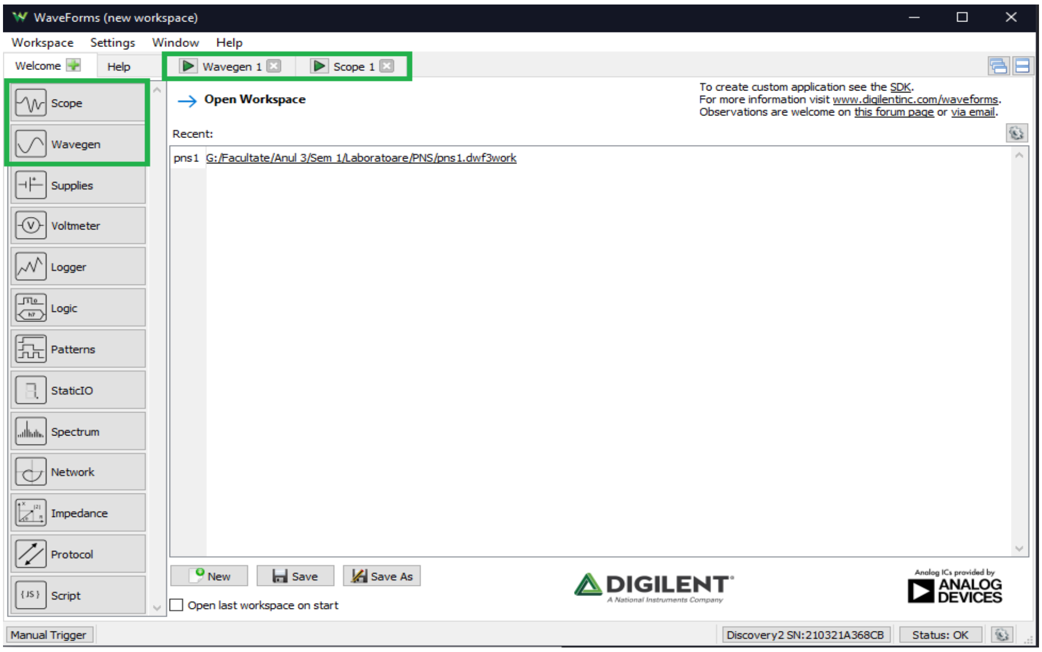


Figura 10. Waveforms – Scope și Wavegen

Figura 11. Waveforms – Scope și Wavegen

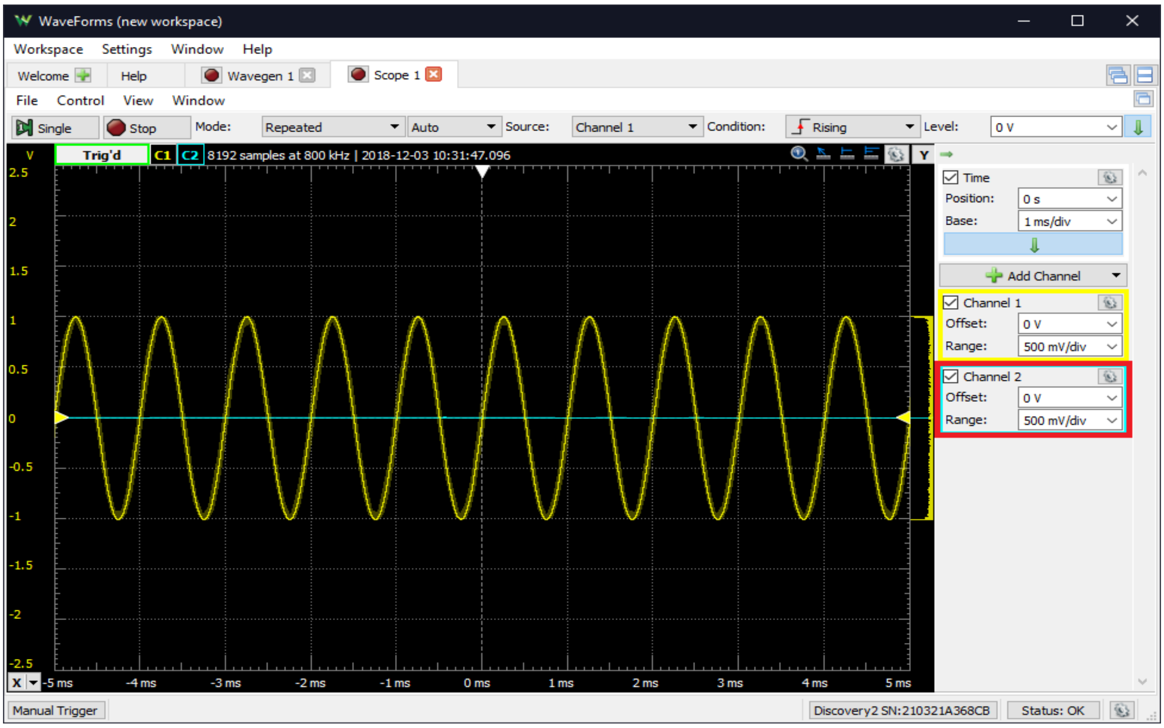


Figura 12. Waveforms – Scope și Wavegen

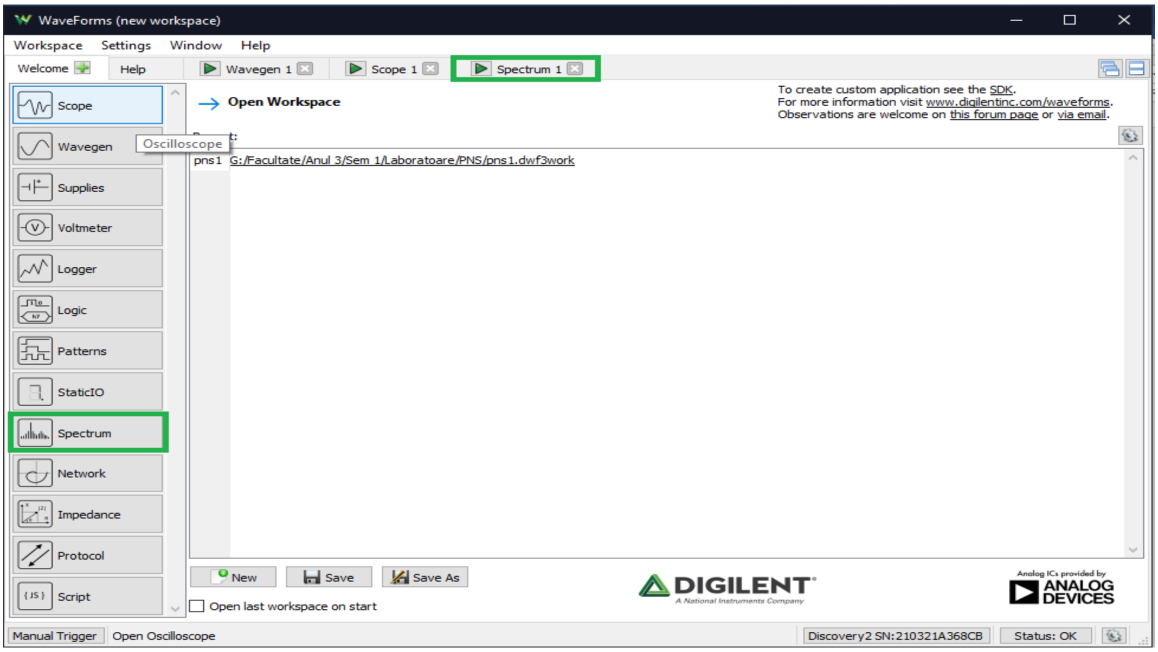
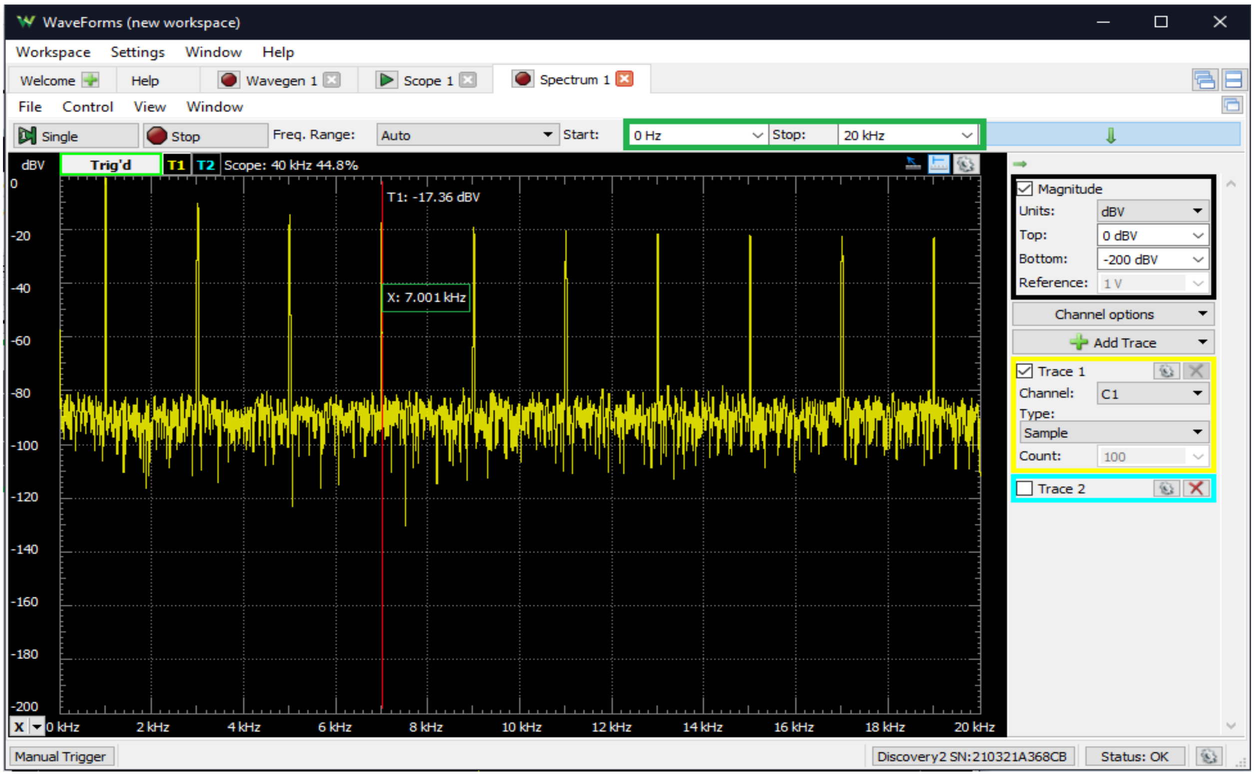
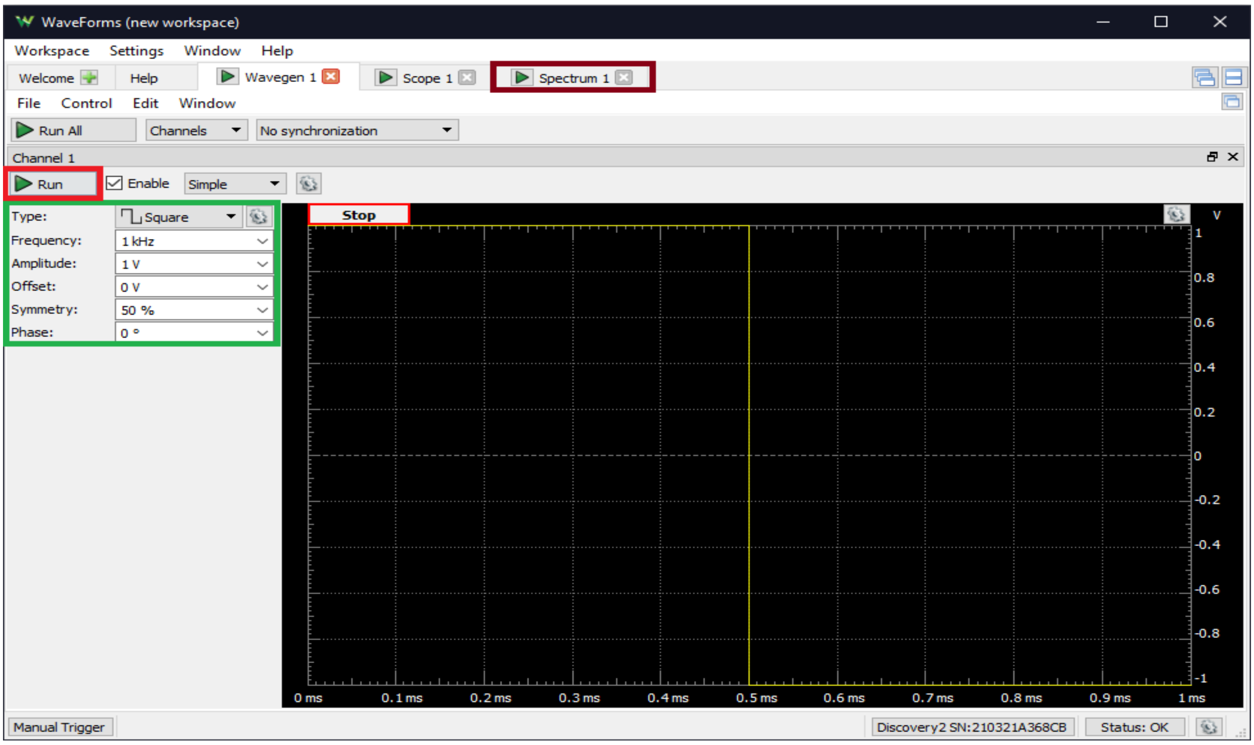


Figura 13. Waveforms – Scope și Wavegen

Figura 14. Waveforms – Scope și Wavegen





În continuare vom genera un **semnal dreptunghiular (square).**

Modificați parametrul **symmetry** și observați pe osciloscop cum se modifică forma semnalului și variațiile apărute în spectrogramă. Vom observa în tab-ul **Spectrum** impulsuri Dirac în punctele de pe axa Ox care corespund, în cazul unui factor de umplere de 50%, armonicelor impare ale semnalului generat, armonicele pare fiind nule în acest caz. Se observă că dacă mărim factorul de umplere, apar mai multe armonice. În cazul unui semnal dreptunghiular factorul de umplere ne “spune” ce procent din semnal are valoarea dată în căsuța **Amplitude** și ce procent are valoarea 0.

Observație: În cazul semnalului dreptunghiular, factorul de umplere 100% corespunde unui semnal constant.

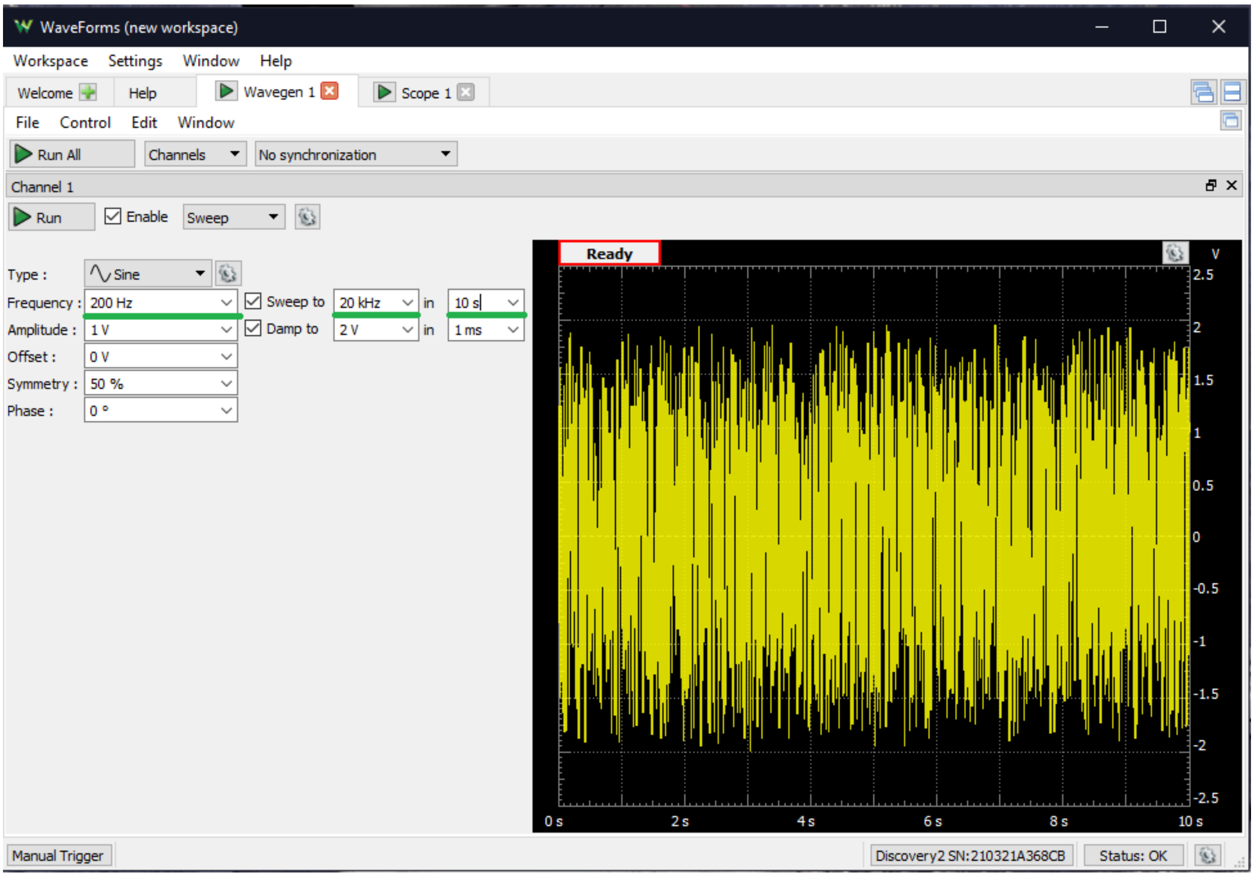
Q: Cum se aude semnalul dreptunghiular față de cel sinusoidal?

Făcând zoom pe unul din aceste impulsuri, observăm că acesta are, de fapt, o formă parabolică.

< Motivul pentru care arata asa impulsul Dirac cand dam zoom pe el. >

Observație: Pentru a vizualiza cursorul (linia roșie, verticală), faceți dublu click oriunde în jurul semnalului și poziționați mouse-ul în porțiunea de interes a acestuia.

În continuare vom analiza un **semnal “chirp”.**



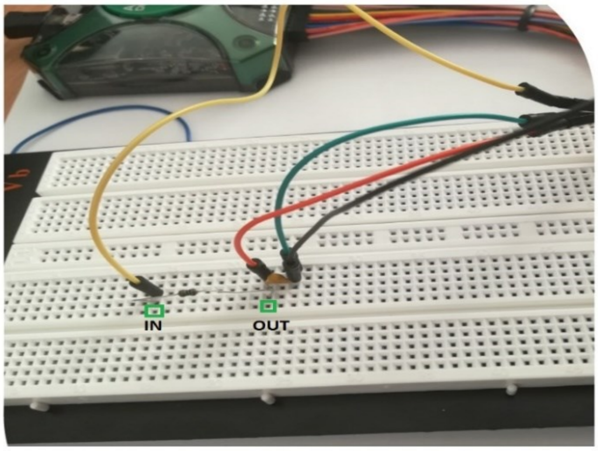
Pași: În tab-ul **Wavegen** se selectează **sweep** în loc de 'simple', **sine** în loc de **square** și se introduc valorile intervalului de baleiere și timpul în care să se realizeze baleierea: 200 Hz – 20 KHz în 10 secunde.

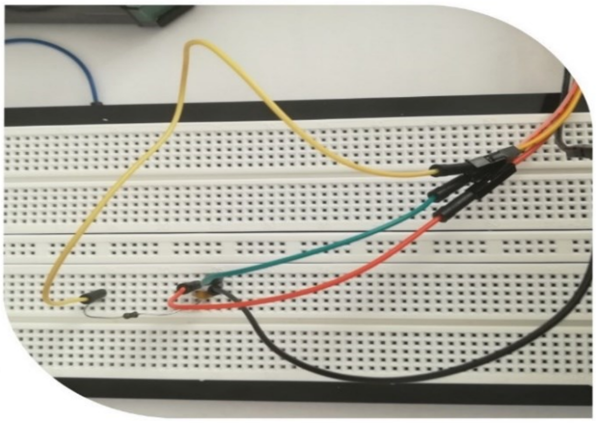
Comutând pe tab-ul **Spectrum**, debifăm din dreapta 'Trace 2' și introducem 0 Hz la **Start** și 20 kHz sau mai mult la **Stop**. Vom observa pe spectrogramă apariția unei serii de impulsuri Dirac. Modificați parametrii generatorului de semnale și vizualizați schimbările din spectrogramă.

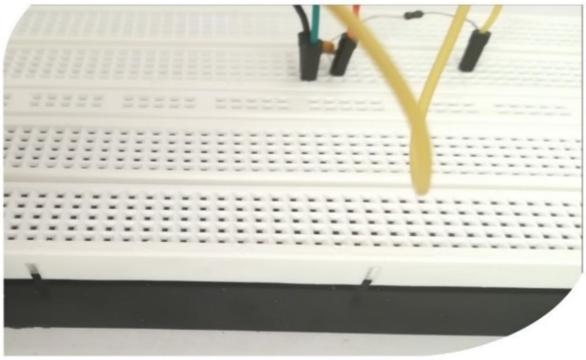
Observație: În cazul apariției erorilor sau afișărilor necorespunzătoare, încercați să modificați valorile din căsuțele **Stop** și **Top**.

Puteți folosi portul audio pentru a asculta semnalul **chirp**.

În continuare vom adăuga în circuit un condensator cu valoarea de 100 µF.



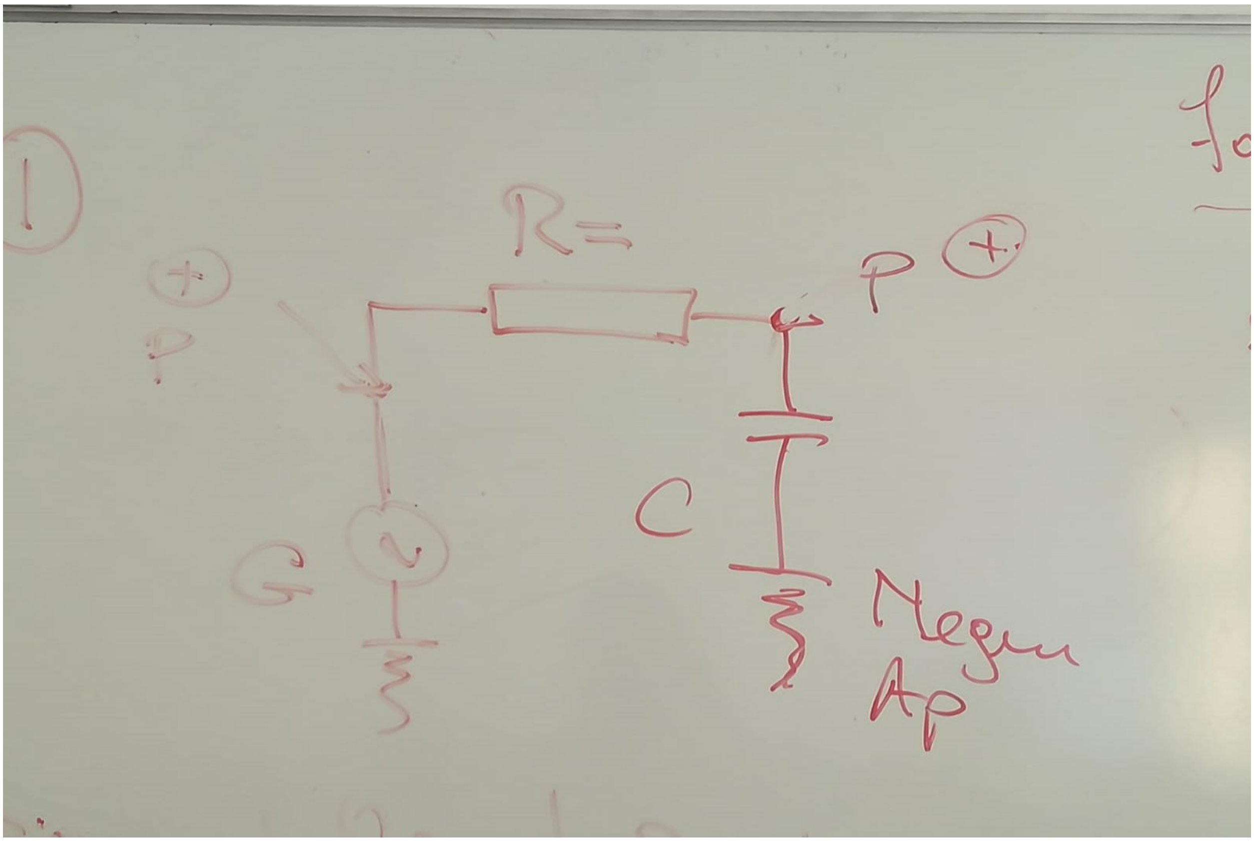




Realizați un tabel și completați-l cu valorile amplitudinii pentru diverse valori de frecvență față de **frecvența de frângere** f_0.

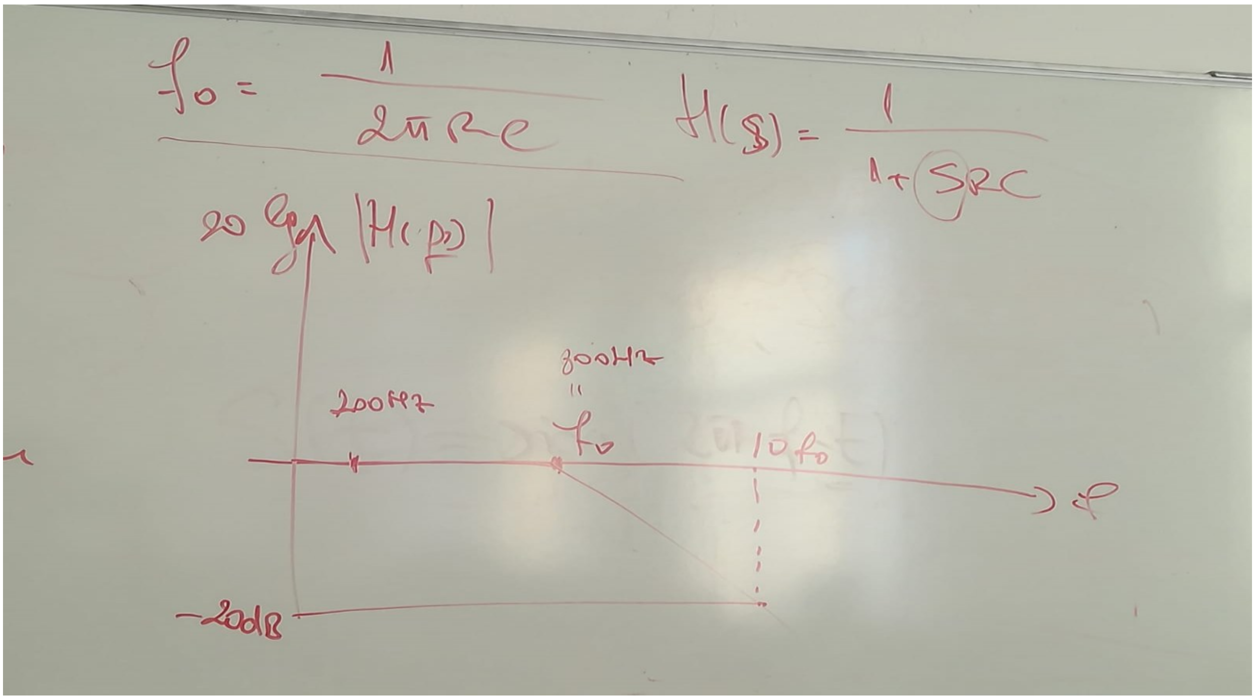
	$f << f_0$	**f_0**	**$f = 10 * f_0$**
IN	X_0	X_0	X_0
OUT	X_0	X_0 – 3 dBV	X_0 – 20 dBV

Observație: Pe liniile "IN" și "OUT" vom scrie valorile observate în program, pe osciloscop, pentru valori ale frecvenței mult mai mici decât frecvența de frângere f_0 (e.g. dacă f_0 = 1.6 kHz, alegem f = 200 Hz), egale cu f_0, de 10 ori mai mari decât f_0 (e.g. dacă f_0 = 1.6 kHz, alegem f = 16 kHz) și, opțional, de 100 de ori mai mari decât f_0, mutând sonda pozitivă a osciloscopului (firul portocaliu) din poziția inițială (IN) între rezistor și condensator (OUT). Pentru mai multă claritate consultați schema circuitului:



$f0 = \frac{1}{2\pi RC}$ (frecvența de frângere)

$H(S) = \frac{1}{1+SRC}$ (funcția de transfer)



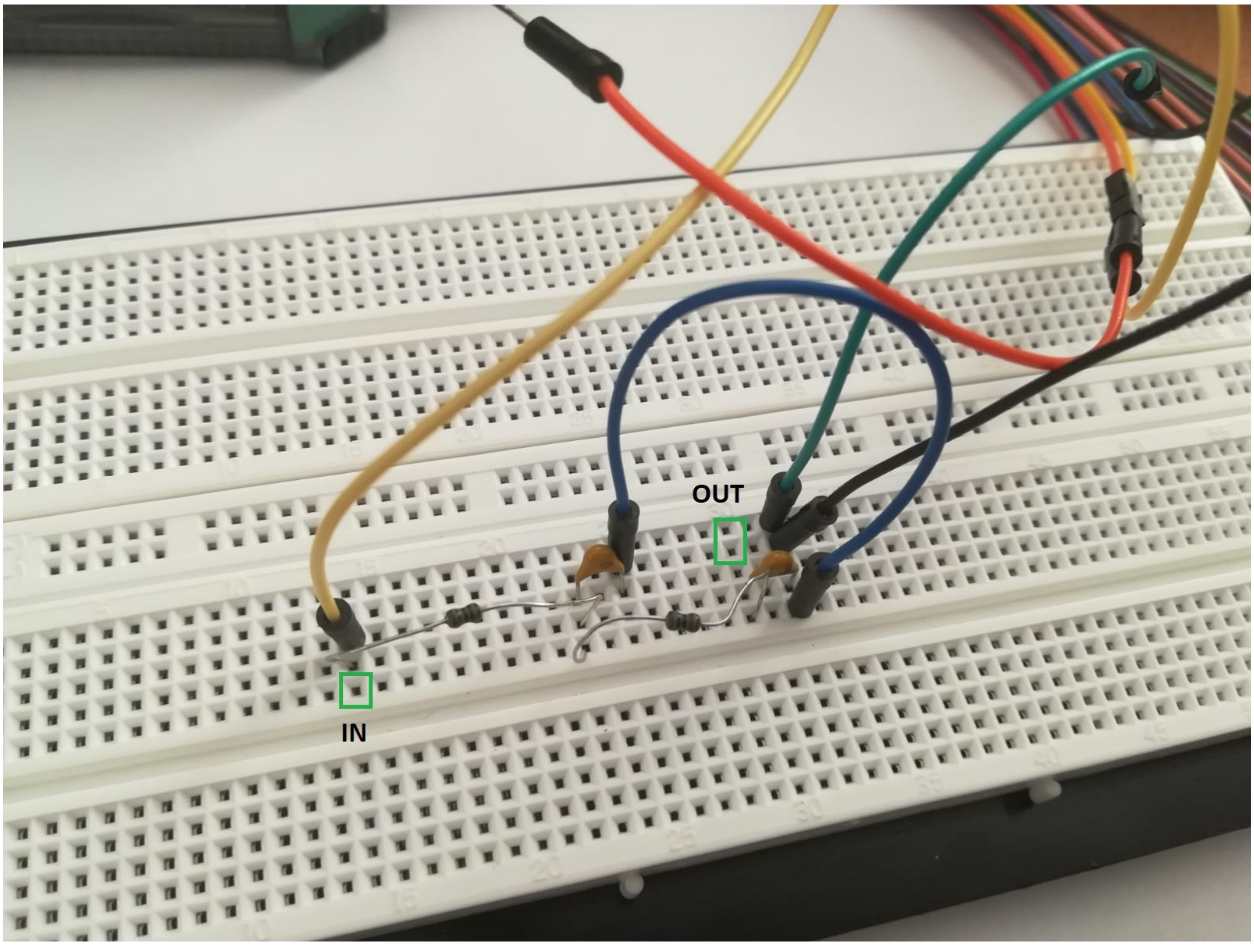
Cu parametrii aleși (R = 1 kΩ, C = 100 µF):

$$f0 = \frac{1}{2 * 3{,}14 * (10)^3 * (10)^{-7}} = 10^6$$

$$H(S) = \frac{1}{2}$$

	$f << f_0$	f_0	$f = 10 * f_0$	$f = 100 * f_0$
IN	-2,9 dBV	-2,9 dBV	-2,9 dBV	-2,9 dBV
OUT	-3 dBV	-5,9 dBV	-22,3dBV	-41,9 dBV

Adăugați încă o pereche rezistor 1 kΩ - condensator 100 µF în cascadă în circuit și refaceți tabelul.



	$f << f_0$	f_0	$f = 10 * f_0$	$f = 100 * f_0$
IN	-2,9 dBV	-3 dBV	-2,9 dBV	-2,9 dBV

OUT	-3,5 dBV	-12 dBV	-42 dBV	Sub pragul de zgomot <80 dBV