Fisica

13 aprile 2020

Indice

Capitolo 1

Fondamentali

1.1 Sistemi di riferimento

Consideriamo un piano ortogonale XY, dove O e' l'intersezione tra gli assi. Allora la posizione di un punto P del piano e' data dalle coordinate delle sue proiezioni sugli assi:

$$coord(P) = (P_x, P_y)$$

Possiamo anche rappresentare un punto tramite coordinate polari: la sua posizione e' data dalla sua distanza dall'origine $r = \bar{OP}$ e dall'angolo θ formato dal segmento OP:

$$coord(P) = (r, \theta)$$

1.1.1 Dalle cartesiane alle polari

Per passare dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari e' sufficiente calcolare r e θ:

$$r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$
$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0,\ y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{se } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

1.1.2 Dalle polari alle cartesiane

Per passare dalle coordinate polari alle coordinate cartesiane e' sufficiente calcolare P_x e P_y:

$$P_x = r \cos \theta$$
$$P_y = r \sin \theta$$

1.2 Vettori

Si dice vettore nello spazio tridimensionale un oggetto $\vec{\mathbf{u}}$ che rappresenta una terna di numeri:

$$\vec{\mathbf{u}} = (u_x, u_y, u_z)$$

Esso puo' essere pensato come una freccia che parte dall'origine e punta verso il punto U di coordinate (u_x, u_y, u_z). Si definisce quindi l'intensita' di $\vec{\mathbf{u}}$ come la sua lunghezza, la sua direzione come la retta dello spazio a cui appartiene e il suo verso come la sua orientazione sulla retta.
Due vettori sono uguali se hanno uguali intensita', direzione e verso, o equivalentemente se le loro componenti sono uguali.

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}} \iff a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$$

Definizione 1.2.1. Si dice modulo di $\vec{\mathbf{v}}$ la grandezza

$$|\vec{\mathbf{v}}| \equiv v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Suppongo io sappia fare la somma tra vettori e il prodotto per uno scalare.

Definizione 1.2.2. Un versore e' un vettore di modulo unitario. I versori

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{i}} &= (1, 0, 0) \\ \hat{\mathbf{j}} &= (0, 1, 0) \\ \hat{\mathbf{k}} &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

sono la base di $\mathbb{R}^3$.

Ogni vettore $\vec{\mathbf{v}}$ puo' essere scritto come somma tra i suoi vettori componenti:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v_x}} + \vec{\mathbf{v_y}} + \vec{\mathbf{v_z}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$$

E' definita la somma tra vettori come somma tra componenti:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} &= (v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}) + (w_x\hat{\mathbf{i}} + w_y\hat{\mathbf{j}} + w_z\hat{\mathbf{k}}) \\ &= (v_x + w_x)\hat{\mathbf{i}} + (v_y + w_y)\hat{\mathbf{j}} + (v_z + w_z)\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Inoltre e' definito un prodotto tra vettori, detto prodotto scalare, in questo modo:

Definizione 1.2.3. Siano $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ due vettori. Allora si dice prodotto scalare tra v e w il prodotto

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} &= |\vec{\mathbf{v}}||\vec{\mathbf{w}}| \cos\theta \\ &= v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z \end{aligned}$$

Il prodotto scalare gode delle proprieta':

1. Commutativa: $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$
2. Distributiva: $\vec{\mathbf{v}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$

Inoltre dato che $\cos\theta = 1$ se $\theta = 0$, avremo che

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$$

e dato che $\cos\theta = 0$ se $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

Infine, la derivata di un vettore e' definita come la somma della derivata delle sue componenti, in quanto la derivata e' un operatore lineare:

$$\dot{\vec{\mathbf{V}}}(t) = \dot{V}_x(t)\hat{\mathbf{i}} + \dot{V}_y(t)\hat{\mathbf{j}} + \dot{V}_z(t)\hat{\mathbf{k}}$$

Capitolo 2

Cinematica del punto materiale

2.1 Definizioni fondamentali

Definizione 2.1.1. Si dice raggio vettore o **vettore posizione** il vettore $\vec{\mathbf{r}}$ che descrive la posizione del punto materiale rispetto ai tre assi al variare del tempo.

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$$

Definizione 2.1.2. Si dice **vettore spostamento** il vettore $\vec{\mathbf{s}}$ che descrive lo spostamento del punto materiale tra due istanti di tempo.

$$\vec{\mathbf{s}} = \Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r_f}} - \vec{\mathbf{r_i}} = \vec{\mathbf{r}}(t_f) - \vec{\mathbf{r}}(t_i)$$

Definizione 2.1.3. Si dice **velocita' media** il vettore $\langle\vec{\mathbf{v}}\rangle$ che descrive la velocita' media del punto materiale tra due istanti di tempo.

$$\langle\vec{\mathbf{v}}\rangle = \overrightarrow{\mathbf{v_m}}(t_1, t_2) = \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathbf{r}}(t_2) - \vec{\mathbf{r}}(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{2.1}$$

Si dice invece **velocita' istantanea** il vettore $\vec{\mathbf{v}}$ che descrive la velocita' del punto materiale in ogni istante di tempo. La velocita' istantanea e' definita come il limite della velocita' media quando $t_2 \to t_1$, o equivalentemente se supponiamo $t_2 = t_1 + \Delta t$ la velocita' istantanea e' il limite della velocita' media quando $\Delta t \to 0$.

$$\vec{\mathbf{v}} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{\mathbf{r}}(t_2) - \vec{\mathbf{r}}(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{r}}(t_1 + \Delta t) - \vec{\mathbf{r}}(t_1)}{\Delta t} = \dot{\vec{\mathbf{r}}}(t)$$

Notiamo che la velocita' istantanea e' un vettore parallelo allo spostamento infinitesimo, e quindi e' in particolare tangente alla traiettoria del punto materiale. Scrivendola come derivata delle componenti otteniamo:

$$\vec{\mathbf{v}} = \dot{x}(t)\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}(t)\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}(t)\hat{\mathbf{k}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$$

Definizione 2.1.4. Si dice **accelerazione media** il vettore $\langle\vec{\mathbf{a}}\rangle$ che descrive il cambiamento medio della velocita' del punto materiale tra due istanti di tempo.

$$\langle\vec{\mathbf{a}}\rangle = \overrightarrow{\mathbf{a_m}}(t_1, t_2) = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathbf{v}}(t_2) - \vec{\mathbf{v}}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Si dice invece **accelerazione istantanea** il vettore $\vec{\mathbf{a}}$ che descrive l'accelerazione del punto materiale in ogni istante di tempo.

$$\vec{\mathbf{a}} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{\mathbf{v}}(t_2) - \vec{\mathbf{v}}(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{v}}(t_1 + \Delta t) - \vec{\mathbf{v}}(t_1)}{\Delta t} = \dot{\vec{\mathbf{v}}}(t) = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}(t)$$

Osservazione. L'accelerazione e' diversa da 0 se la velocita' cambia in modulo, ma anche se cambia in direzione!

2.2 Moto ad una dimensione

Definizione 2.2.1. Si dice **legge oraria del moto** la legge che associa ad ogni istante di tempo la posizione del corpo sull'asse di riferimento:

$$x(t) = f(t)$$

Dalla legge oraria possiamo ricavare la velocita' e l'accelerazione del corpo tramite la derivata:

$$x(t) = f(t) \implies v(t) = \dot{x}(t) \implies a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

2.2.1 Stato di quiete

Si dice che un punto materiale e' in stato di quiete se vale che $x(t) = x_0$ costante $\forall t > 0$. Da questa relazione si ricavano la velocita' e l'accelerazione:

$$x(t) = x_0 \tag{2.2a}$$
$$v(t) = \dot{x}(t) = 0 \tag{2.2b}$$
$$a(t) = \dot{v}(t) = 0 \tag{2.2c}$$

2.2.2 Moto a velocita' costante

Si dice che un punto materiale si muove di moto rettilineo uniforme se vale che $v(t) = v_0$ costante $\forall t > 0$. Da questa relazione si ricavano la posizione e l'accelerazione:

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = x_0 + v_0 t \tag{2.3a}$$
$$v(t) = v_0 \tag{2.3b}$$
$$a(t) = \dot{v}(t) = 0 \tag{2.3c}$$

dove $x_0 = x(0)$. Se consideriamo il vettore posizione e il vettore velocita', otteniamo che

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \langle \vec{\mathbf{v}} \rangle = \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathbf{r}}(t) - \vec{\mathbf{r_0}}}{\Delta t}$$

da cui segue

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{r_0}} + \langle \vec{\mathbf{v}} \rangle (t - t_0)$$

dove $\langle \vec{\mathbf{v}} \rangle$ e' il vettore velocita' media (che e' sempre uguale alla velocita' istantanea nel caso di moto a velocita' costante). Da questo segue il fatto che il moto sia lungo una traiettoria rettilinea.

2.2.3 Moto ad accelerazione costante

Si dice che un punto materiale si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato se vale che $a(t) = a_0$ costante $\forall t > 0$. Da questa relazione si ricavano la posizione e la velocita':

$$a(t) = a_0 \tag{2.4a}$$
$$v(t) = \int_0^t a(t)dt = v_0 + a_0 t \tag{2.4b}$$
$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2}t^2 \tag{2.4c}$$

dove $x_0 = x(0)$ e $v_0 = v(0)$. Dalla seconda possiamo ricavare

$$v(t) = v_0 + a_0 t \implies \begin{cases} t = \dfrac{v(t) - v_0}{a_0} & (2.5) \\ a_0 = \dfrac{v(t) - v_0}{t} & (2.6) \end{cases}$$

Sostituendo la 2.5 nell'espressione per $x(t)$ e riordinando otteniamo

$$v^2(t) = v_0^2 + 2a_0(x - x_0) \tag{2.7}$$

Sostituendo invece la 2.6 nell'espressione per $x(t)$ e riordinando otteniamo

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}(v(t) + v_0)t \tag{2.8}$$

Se consideriamo il vettore velocita' e il vettore accelerazione, otteniamo che

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \langle \vec{\mathbf{a}} \rangle = \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathbf{v}}(t) - \vec{\mathbf{v_0}}}{\Delta t}$$

da cui segue

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \vec{\mathbf{v_0}} + \langle \vec{\mathbf{a}} \rangle (t - t_0)$$

dove $\langle \vec{\mathbf{a}} \rangle$ e' il vettore accelerazione media (che e' sempre uguale all'accelerazione istantanea nel caso di moto ad accelerazione costante). Da questo segue il fatto che il moto sia lungo una traiettoria rettilinea.

2.2.4 Moto a caduta libera

E' un caso particolare di un moto uniformemente accelerato. Consideriamo un sistema ortogonale XY e un corpo che si trova inizialmente nel punto $(x_0, y_0) = (0, y_0)$ e che si muove verso il basso con una velocita' di modulo iniziale v_0. I vettori che rappresentano lo stato del corpo saranno quindi:

$$\vec{\mathbf{r}}(0) = y_0\hat{\mathbf{j}} \tag{2.9a}$$
$$\vec{\mathbf{v}}(0) = v_0\hat{\mathbf{j}} \tag{2.9b}$$
$$\vec{\mathbf{a}}(0) = -g\hat{\mathbf{j}} \tag{2.9c}$$

dove g e' l'accelerazione di gravita' terrestre. Notiamo quindi che il moto si svolge unicamente nella direzione dell'asse Y.

Caduta da un'altezza

Supponiamo che il corpo cada da un'altezza h da fermo (cioe' $v_0 = 0$). Avremo:

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.10a}$$
$$v(t) = -gt \tag{2.10b}$$
$$a(t) = -g \tag{2.10c}$$

Da queste equazioni possiamo ricavare il tempo di caduta e la velocita' di impatto del corpo con il suolo. Infatti quando il corpo tocca il suolo all'istante t_f, avremo che

$$y(t_f) = h - \frac{1}{2}gt_f^2 = 0$$
$$\Longrightarrow \ t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad \text{(Tempo di caduta)} \tag{2.11}$$

dunque sostituendo t_f nell'equazione della velocita' 2.10b:

$$v(t_f) = -\sqrt{2gh} \qquad \text{(Velocita' finale)} \tag{2.12}$$

Lancio verso l'alto

Supponiamo ora che il corpo venga lanciato verso l'alto con una velocita' iniziale $v_0 \neq 0$. Avremo:

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.13a}$$
$$v(t) = v_0 - gt \tag{2.13b}$$
$$a(t) = -g \tag{2.13c}$$

Possiamo calcolare il punto di altezza massima y_M e il tempo necessario per raggiungerlo t_M da queste equazioni. Infatti al punto di altezza massima la velocita' sara' nulla, dunque avremo che

$$v(t_M) = v_0 - gt_M = 0$$
$$\Longrightarrow \ t_M = \frac{v_0}{g} \tag{2.14}$$

dunque sostituendo t_M nell'equazione della posizione 2.13a

$$y_M = y_0 + v_0 t_M - \frac{1}{2}gt_M^2$$
$$= y_0 + \frac{v_0^2}{2g} \tag{2.15}$$

2.3 Moto in due dimensioni

Consideriamo ora moti che avvengono in due dimensioni. Siano $\vec{\mathbf{r}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{a}}$ i vettori che descrivono la posizione, la velocita' e l'accelerazione del corpo nel tempo. Allora il moto e' rettilineo se $\vec{\mathbf{a}} \parallel \vec{\mathbf{v}}$ oppure se $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$, altrimenti il moto e' bidimensionale. Le leggi del moto sono le stesse del caso unidimensionale

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \vec{\mathbf{a_0}} \tag{2.16a}$$
$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \vec{\mathbf{v_0}} + \vec{\mathbf{a_0}}t \tag{2.16b}$$
$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{r_0}} + \vec{\mathbf{v_0}}t + \frac{\vec{\mathbf{a_0}}}{2}t^2 \tag{2.16c}$$

ma possono essere separate in due equazioni che si riferiscono al moto sui due assi

$$\vec{\mathbf{r}}\colon \begin{cases} x(t) = x_0 + (v_0 \cos\theta)t + \frac{1}{2}(a_0 \cos\psi)t^2 \\ y(t) = y_0 + (v_0 \sin\theta)t + \frac{1}{2}(a_0 \sin\psi)t^2 \end{cases} \tag{2.17a}$$
$$\vec{\mathbf{v}}\colon \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\theta + (a_0 \cos\psi)t \\ v_y(t) = v_0 \sin\theta + (a_0 \sin\psi)t \end{cases} \tag{2.17b}$$
$$\vec{\mathbf{a}}\colon \begin{cases} a_x(t) = a_0 \cos\psi \\ a_y(t) = a_0 \sin\psi \end{cases} \tag{2.17c}$$

dove v_0 e' il modulo del vettore $\vec{\mathbf{v_0}}$, θ e' l'angolo formato da $\vec{\mathbf{v_0}}$ con l'asse X, a_0 e' il modulo del vettore $\vec{\mathbf{a_0}}$ e ψ e' l'angolo formato da $\vec{\mathbf{a_0}}$ con l'asse X.

2.3.1 Moto del proiettile

Consideriamo un caso particolare del moto accelerato bidimensionale in cui $\vec{\mathbf{a}} = -g\hat{\mathbf{j}}$. Se sostituiamo nelle equazioni precedenti otteniamo

$$\vec{\mathbf{r}}\colon \begin{cases} x(t) = x_0 + (v_0 \cos\theta)t \\ y(t) = y_0 + (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{2.18a}$$
$$\vec{\mathbf{v}}\colon \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\theta \\ v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt \end{cases} \tag{2.18b}$$
$$\vec{\mathbf{a}}\colon \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases} \tag{2.18c}$$

Possiamo notare che, considerando i moti sui due assi separatamente, il moto del punto sull'asse X e' rettilineo uniforme, mentre quello sull'asse Y e' uniformemente accelerato.

Traiettoria del proiettile

Se ricaviamo t dalla formula di $x(t)$ da 2.18a (ottenendo $t = \frac{x-x_0}{v_0 \cos\theta}$) e lo sostituiamo nella formula di $y(t)$ otteniamo la traiettoria tracciata dal proiettile, cioe' una curva di secondo grado del tipo

$$y(x) = y_0 + \tan\theta(x - x_0) - \frac{g}{2(v\cos\theta)^2}(x - x_0)^2 \tag{2.19}$$

che rappresenta la traiettoria del proiettile al variare della x.

Punto di altezza massima

Come nel caso del corpo lanciato verticalmente, il punto di altezza massima viene raggiunto nell'istante di tempo t_h tale che $v_y(t_h) = 0$. Sostituendo nelle equazioni otteniamo:

$$\begin{aligned} v_y(t_h) &= v_0 \sin\theta - g t_h = 0 \\ \implies t_h &= \frac{v_0 \sin\theta}{g} \end{aligned} \tag{2.20}$$

dunque sostituendo t_h nell'equazione della posizione 2.18a

$$\begin{aligned} y(t_h) &= y_0 + (v_0 \sin\theta) t_h - \frac{1}{2} g t_h^2 \\ &= y_0 + \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{g} - \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g} \\ &= y_0 + \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g} \end{aligned} \tag{2.21}$$

che e' massimo quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, ed e' dunque uguale a

$$y_M = \frac{v_0^2}{2g} \tag{2.22}$$

Gittata

Per calcolare la gittata del proiettile ci bastera' capire in che punto esso raggiunge l'altezza che aveva all'inizio del lancio; bastera' cioe' trovare $\Delta x = x(t_g) - x_0$, dove $t_g > 0$ e' tale che $y(t_g) = y_0$.

$$\begin{aligned} y(t_g) &= y_0 + (v_0 \sin\theta) t_g - \frac{1}{2} g t_g^2 = y_0 \\ \implies t_g &= \frac{2 v_0 \sin\theta}{g} \end{aligned} \tag{2.23}$$

dunque sostituendo t_g nell'equazione della posizione 2.18a

$$\begin{aligned} \Delta x &= (v_0 \sin\theta) t_g \\ &= \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \end{aligned} \tag{2.24}$$

che e' massimo quando $\theta = \frac{\pi}{4}$ ed e' dunque uguale a

$$x_{g_M} = \frac{x_0^2}{g} \tag{2.25}$$

Impatto col suolo

Invece per calcolare la distanza percorsa per impattare il suolo e' sufficiente trovare l'intersezione con l'asse X; cioe' bastera' trovare $\Delta x = x(t_s) - x_0$, dove $t_s > 0$ e' tale che $y(t_s) = 0$.

$$\begin{aligned} y(t_s) &= y_0 + (v_0 \sin\theta) t_s - \frac{1}{2} g t_s^2 = 0 \\ \implies t_s &= \frac{1}{g} \left(v_0 \sin\theta + \sqrt{(v_0 \sin\theta)^2 + 2 g y_0} \right) \end{aligned} \tag{2.26}$$

dunque sostituendo t_s nell'equazione della posizione 2.18a

$$\Delta x = (v_0 \sin\theta)t_s \tag{2.27}$$

Capitolo 3

Dinamica

La dinamica e' la branca della fisica che si occupa di studiare le cause delle variazioni del moto. Ci occuperemo inizialmente della dinamica del punto materiale, cioe' il moto del corpo e le forze che agiscono su di esso sono riferiti ad un punto (x, y, z) dello spazio; passeremo poi a studiare la dinamica di sistemi con piu' gradi di liberta'.

Definizione 3.0.1. Si dice massa inerziale di un corpo la resistenza che il corpo oppone al cambiamento di velocita' risultante dall'azione di una forza.

La massa e' una grandezza scalare e additiva, la cui unita' di misura e' il chilogrammo.

Definizione 3.0.2. La forza e' una quantita' vettoriale che descrive le interazioni fra corpi.

La forza e' rappresentata da un vettore applicato, cioe' viene descritta da intensita', direzione, verso e punto di applicazione. Da un punto di vista pratico, per misurare una forza si sfrutta la proprieta' che esa ha di deformare gli oggetti.

Vi sono due tipi di forze, distinte dal loro raggio di azione.

1. Le forze a distanza (o forze a lungo raggio) non richiedono che i corpi su cui agiscono siano a contatto tra loro. Gli esempi piu' comuni sono le 4 iterazioni fondamentali:
   - iterazione gravitazionale (mediata dal gravitone (forse));
   - iterazione elettromagnetica (mediata dai fotoni);
   - iterazione nucleare debole (mediata dai bosoni W e Z);
   - iterazione nucleare forte (mediata dai gluoni);
2. Le forze a contatto (o forze a corto raggio) sono forze che agiscono a contatto tra i corpi macroscopici, e derivano dalle interazioni elettromagnetiche fra atomi e molecole che costituiscono la materia. Alcuni esempi sono:
   - forze esplicate dai vincoli (tensione di fili; forza normale associata ad una superficie che si oppone alla deformazione);
   - forze di attrito (dinamico e statico);
   - forze elastiche (interazioni elettromagnetiche che si oppongono alle deformazioni dei corpi).

3.1 Principi della dinamica

Principio 3.1.1 (Primo principio della dinamica)**.** *Sia $\vec{\mathbf{R}}$ la risultante delle forze che agiscono su un punto materiale. Allora se $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}$ allora il corpo permane nel suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme.*

Definizione 3.1.1. Si dice che un sistema di riferimento e' inerziale se dato un corpo e appurato che la risultante delle forze che agiscono su quel corpo e' nulla, allora il corpo e' in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al sistema.

Segue dalla definizione che un sistema in moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema inerziale e' anch'esso inerziale.

Principio 3.1.2 (Secondo principio della dinamica)**.** *Sia $\vec{\mathbf{R}}$ la risultante delle forze che agiscono su un punto materiale. Allora se $\vec{\mathbf{R}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ allora il corpo subisce un'accelerazione che e' direttamente proporzionale alla risultante delle forze. La costante di proporzionalita' e' la massa inerziale, secondo la formula:*

$$\vec{\mathbf{R}} = m\vec{\mathbf{a}} \tag{3.1}$$

Facciamo ora delle considerazioni sui primi due principi. I primi due principi della dinamica sono validi soltanto in sistemi di riferimento inerziali. Essi ci danno un modo per studiare il moto di un corpo a partire dalle forze che agiscono su di esso. Studiando il diagramma di corpo libero, cioe' il diagramma delle forze che agiscono su un corpo possiamo calcolarne la risultante e stabilire, a seconda del risultato, se il corpo ha un'accelerazione nulla o meno.

Principio 3.1.3 (Terzo principio della dinamica)**.** *Siano A, B due corpi puntiformi di massa m_A, m_B. Allora se il corpo A esercita sul corpo B una forza $\vec{\mathbf{F}}_{B,A}$, allora il corpo B esercitera' necessariamente una forza $\vec{\mathbf{F}}_{A,B}$ sul corpo A, tale che*

$$\vec{\mathbf{F}}_{B,A} = -\vec{\mathbf{F}}_{A,B} \tag{3.2}$$

Non bisogna confondere il terzo principio della dinamica con le forze vincolari: le forze vincolari sono applicate allo stesso corpo che esercita la forza, mentre il secondo principio coinvolge due corpi.

3.2 Iterazione gravitazionale

L'iterazione gravitazionale e' l'iterazione fondamentale che spiega la caduta dei gravi e il moto dei pianeti.

Definizione 3.2.1. Siano A, B, due corpi di massa m_A, m_B. Allora i due corpi si attraggono con forze che sono:

- dirette lungo la congiungente dei centri di massa;
- attrattive;
- di intensita' uguali, proporzionali al prodotto delle masse e inversamente proporzionali al quadrato della distanza dei centri di massa, secondo la formula

$$\left|\vec{\mathbf{F}}_{A,B}\right| = \left|\vec{\mathbf{F}}_{B,A}\right| = G\frac{m_A m_b}{r^2} \tag{3.3}$$

dove $G = 6,64 \times 10^{-11}\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}$ e' la costante di gravitazione universale.

Dato che il valore di G e' molto piccolo la forza gravitazionale ha un effetto trascurabile a meno che la massa dei corpi in esame sia grande (almeno 10^{10} kg) ed essi sono relativamente vicini.

In teoria la massa inerziale e la massa gravitazionale, cioe' la grandezza scalare proporzionale alla forza di gravita', rappresentano due concetti distinti di massa.

Se consideriamo un corpo sulla superficie terrestre oppure ad un'altezza trascurabile, la forza peso e' costante in modulo e in direzione (radiale, diretta verso il centro di massa della Terra). Dunque possiamo approssimarla con:

$$\left|\vec{\mathbf{P}}\right| = G\frac{m_T m_A}{(R_T + h)^2} \approx m_A G\frac{m_T}{R_T^2} = m_A g \tag{3.4}$$

dove $g = 9,81$ N/kg e' l'accelerazione di gravita' terrestre.

Dagli esperimenti e' stato poi dimostrato che la massa gravitazionale e' equivalente alla massa inerziale: dunque tutti i corpi in caduta libera hanno la stessa accelerazione quando si trovano sullo stesso pianeta e ad altitudini comparabili, sotto l'azione della sola forza gravitazionale. L'accelerazione di un corpo in caduta libera e' dunque

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{P}}}{m_A} = \vec{\mathbf{g}} = -g\hat{\mathbf{j}} \tag{3.5}$$

3.3 Forze di contatto

Quando due corpi macroscopici sono a contatto tra di loro agiscono delle forze che derivano dalle interazioni elettromagnetiche della materia. Il primo tipo che studieremo sono le forze legate ai vincoli Possono essere legate a vincoli di due tipi:

- vincoli di superfici (come forze di attrito, forze normali);
- vincoli unidimensionali (tensioni di corde, funi, fili).

3.3.1 Forze legate a vincoli di superfici

Le forze legate ai vincoli di superfici possono essere

1. forze di attrito statico o dinamico: esse sono parallele alla superficie di contatto e opposte al moto relativo dei due corpi;
2. forze normali: esse sono perpendicolari alla superficie di contatto e impediscono ai corpi di compenetrarsi.

Se la superficie di contatto e' piana allora le forze normali bilanciano il peso del corpo sulla superficie, dunque

$$\left(\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i\right)_\perp = \vec{\mathbf{0}} \implies \vec{\mathbf{a}}_\perp = \vec{\mathbf{0}}. \tag{3.6}$$

Se la superficie di contatto non e' piana allora le forze normali non bilanciano il peso del corpo sulla superficie, dunque

$$\left(\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i\right)_\perp \neq \vec{\mathbf{0}} \implies \vec{\mathbf{a}}_\perp \neq \vec{\mathbf{0}}. \tag{3.7}$$

Example 3.3.1 (Piano inclinato liscio)**.** Supponiamo di avere un piano inclinato con angolo alla base θ. Per descrivere il moto del corpo sul piano inclinato, scegliamo come sistema di riferimento un sistema XY dove l'asse X e' parallelo al piano inclinato, l'asse Y perpendicolare ad esso, e l'origine degli assi sia nel punto dove si trova il corpo al tempo $t_0 = 0\text{s}$.

Se disegnamo il diagramma del corpo libero notiamo che le forze in gioco sono il peso $\vec{\mathbf{P}}$ e la reazione vincolare del piano $\vec{\mathbf{N}}$. Sia $\vec{\mathbf{R}}$ la forza risultante; allora

$$\vec{\mathbf{R}} = \begin{cases} R_x = mg\sin\theta \\ R_y = N - mg\cos\theta \end{cases} \tag{3.8}$$

Per il secondo principio della dinamica vale allora

$$\begin{cases} R_x = mg\sin\theta = ma_x \\ R_y = N - mg\cos\theta = ma_y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_x = g\sin\theta \\ N = mg\cos\theta \end{cases} \tag{3.9}$$

Supponendo che la rampa sia lunga L e che il corpo si muova inizialmente con una velocita' $v_0 = 0$ possiamo calcolare la velocita' con cui il corpo giunge alla fine e il tempo che impiega per percorrerla t_f. Dalla legge oraria del moto uniformemente accelerato otteniamo

$$L = \frac{1}{2} g\sin\theta t_f^2$$

da cui possiamo ricavare t_f

$$\implies t_f = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\theta}}$$

Sostituendo $h = L\sin\theta$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\theta}} \\ &= \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}} \end{aligned}$$

Sostituendo t_f nella formula per la velocita' otteniamo infine

$$\begin{aligned} \implies v_f &= a_x t_f \\ &= g\sin\theta t_f \\ &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

Example 3.3.2 (Piano inclinato liscio e forza orizzontale)**.** Supponiamo di avere un piano inclinato con angolo alla base θ e un corpo di massa m che viene spinto su per il piano inclinato tramite una forza orizzontale $\overrightarrow{\mathbf{F_e}}$. Sappiamo inoltre che la velocita' del corpo e' costante. Calcoliamo quanto vale la forza orizzontale e la reazione vincolare $\overrightarrow{\mathbf{N}}$.

Dato che per ipotesi il corpo si muove a velocita' costante, allora $\overrightarrow{\mathbf{R}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, cioe' $R_x = 0$ e $R_y = 0$. Dunque disegnando il diagramma del corpo libero:

$$\begin{cases} R_x = mg\sin\theta - F_e\cos\theta = 0 \\ R_y = N - mg\cos\theta - F_e\sin\theta = 0 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} F_e\cos\theta = mg\sin\theta \\ N = mg\cos\theta + F_e\sin\theta \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} F_e = mg\tan\theta \\ N = mg\cos\theta + mg\tan\theta\sin\theta = mg\cos\theta(1+\tan^2\theta) \end{cases}$$

Le forze di attrito sono esercitate parallelamente alla superficie di contatto. Esse si dividono in due categorie:

- attrito statico: si oppone all'inizio del moto del corpo;
- attrito dinamico: si oppone al moto di un corpo che non e' in quiete.

Le forze di attrito dinamico sono inferiori a quelle di attrito statico.

Attrito statico

L'attrito statico si oppone al moto, e ha un'intensita' tale che l'accelerazione e' nulla. La forza di attrito ha direzione tangente alla superficie e ha verso opposto alla forza applicata. Finche' il corpo rimane in uno stato di quiete si ha che $\left|\overrightarrow{\mathbf{f_s}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{ext}}}\right|$ (dove $\overrightarrow{\mathbf{f_s}}$ e' la forza di attrito e $\overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{ext}}}$ e' la forza esterna). In generale si ha che $\left|\overrightarrow{\mathbf{f_s}}\right| \leq \mu_s N$, dove μ_s e' il coefficiente di attrito statico, dunque al massimo $\left|\overrightarrow{\mathbf{f_s}}\right| = \mu_s N$.

Attrito dinamico

Se la forza esterna supera il valore $\mu_s N$ il corpo comincia a muoversi e l'attrito diventa attrito dinamico, che ha la stessa direzione del moto, verso opposto e modulo

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{f_d}}\right| = \mu_d N$$

dove μ_d e' il coefficiente di attrito dinamico, e risulta sempre $\mu_d \leq \mu_s$.

Example 3.3.3. Un corpo e' lanciato con velocita' $\overrightarrow{\mathbf{v_0}}$ lungo un piano scabro con attrito dinamico μ_d. Dopo quanto tempo si ferma? Che tratto percorre prima di fermarsi?

Consideriamo il modo nelle due dimensioni. Sull'asse X il corpo si muove di moto accelerato (con accelerazione negativa data dall'attrito dinamico), mentre sull'asse Y il corpo e' fermo dunque la somma delle forze sara' 0. Dunque:

$$\begin{cases} R_x = -f_d \\ R_y = N - mg = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -f_d = -\mu_d N = -\mu_d mg = ma_x \\ N = mg \end{cases}$$

Quindi $a_x = -\mu_d g$. Sostituendolo nelle equazioni del moto otteniamo

$$t_f = \frac{v_0}{-a_x} = \frac{v_0}{\mu_d g}$$

e inoltre

$$x_f = v_0 t_f + \frac{1}{2} a_x t_f^2 = \frac{v_0^2}{\mu_d g} - \frac{1}{2}\mu_d g \frac{v_0^2}{\mu_d^2 g^2} = \frac{v_0^2}{2\mu_d g}.$$

Example 3.3.4. Un corpo e' lanciato con velocita' $\vec{\mathbf{v_0}}$ lungo un piano scabro con attrito dinamico μ_d. Se volessi mantenere il corpo a velocita' costante, che forza esterna dovrei fornire? Ci vuole meno forza a tirare verso l'alto ($\theta > 0$) oppure a spingere verso il basso ($\theta < 0$)?

Consideriamo il modo nelle due dimensioni includendo una forza F inclinata con un angolo θ: per il primo principio della dinamica la risultante delle forze sul corpo dovra' essere nulla. Dunque:

$$\begin{cases} R_x = -f_d + F\cos\theta = -\mu_d N + F\cos\theta = 0 \\ R_y = N - mg + F\sin\theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -\mu_d N + F\cos\theta = -\mu_d(mg - F\sin\theta) + F\cos\theta = -\mu \\ N = mg - F\sin\theta \end{cases}$$

dunque

$$F = \frac{\mu_d mg}{\cos\theta + \mu_d \sin\theta}.$$

Example 3.3.5 (Piano inclinato con attrito)**.** Supponiamo di avere un piano inclinato con attrito e che il corpo con massa m sia in uno stato di quiete.

Questo significa che la forza di attrito $\vec{\mathbf{f_a}}$ riesce a bilanciare le altre forze, in modo che la risultante lungo l'asse X sia nulla. Al massimo vale quindi $f_a = \mu_s N$.

$$\begin{cases} R_x = N - mg\cos\theta = 0 \\ R_y = -f_a + mg\sin\theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} N = mg\cos\theta \\ f_a = mg\sin\theta \end{cases}$$

Definiamo pendenza critica l'angolo θ_c oltre il quale la forza di attrito statica non riesce a controbilanciare la forza di gravita'. Quindi quando $\theta > \theta_c$ segue che NON HO CAPITO E NON MI VA DI CAPIRE

3.3.2 Tensioni

Quando non ci sono altre forze applicate in una qualsiasi sua parte una fune ideale (cioe' inestensibile e di massa trascurabile) esercita sui corpi fissati ai suoi estremi due forze che hanno la direzione della fune, stessa intensita' e versi opposti.

3.4 Moto circolare

Si dice moto circolare uniforme un moto su una traiettoria circolare di raggio R con velocita' costante in modulo. Dato che la velocita' cambia direzione avremo che $\vec{\mathbf{a}} \neq 0$.

Chiamiamo s lo spazio percorso sulla circonferenza, $\theta = \frac{s}{R}$ l'angolo spazzato. Allora valgono le seguenti:

$$\begin{cases} \Delta \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r_f}} - \vec{\mathbf{r_i}} \\ \Delta\theta = \theta_f - \theta_i \\ \Delta s = R\Delta\theta \end{cases}$$

Definizione 3.4.1. Diciamo velocita' angolare media di un moto circolare la grandezza $\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. Dunque la velocita' angolare istantanea sara' $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \langle\omega\rangle = \frac{d\theta}{dt}$.

Definizione 3.4.2. Diciamo accelerazione angolare media di un moto circolare la grandezza $\langle\alpha\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. Dunque la velocita' angolare istantanea sara' $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \langle\alpha\rangle = \frac{d\omega}{dt}$.