Algebra Lineare

20 marzo 2020

Indice

Capitolo 1

Matrici e sistemi lineari

1.1 Matrici

Definizione 1.1.1. Si dice matrice $m \times n$ una tabella di m righe e n colonne i cui elementi appartengono ad un campo $\mathbb{K}$ fissato, della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = [A_{ij}]_{i \leq m, j \leq n} \tag{1.1}$$

Definizione 1.1.2. Si dice vettore colonna una matrice $n \times 1$ del tipo

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Si dice vettore riga una matrice $1 \times n$ del tipo

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

L'insieme dei vettori colonna di n elementi appartenenti ad un campo $\mathbb{K}$ si indica con $\mathbb{K}^n$, mentre l'insieme dei vettori riga di n elementiappartenenti ad un campo $\mathbb{K}$ si indica con $\mathbb{K}^{\times n}$.

E' evidente che se i due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ hanno la stessa dimensione e contengono gli stessi elementi allora rappresentano la stessa informazione, ma sotto forme diverse. Verificheremo piu' avanti infatti che $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^{\times n}$ sono isomorfi, cioe' contengono gli stessi elementi in due forme diverse.

1.1.1 Operazioni sulle matrici

Consideriamo le operazioni fondamentali che coinvolgono matrici.

Somma di matrici

Siano A, B due matrici $m \times n$ a coefficienti reali. Allora possiamo definire un'operazione di somma $+ : \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tale che

$$A + B = [A_{ij} + B_{ij}]_{ij}. \tag{1.4}$$

Cioe' se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\implies A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Capitolo 2

Spazi vettoriali

2.1 Spazi vettoriali e prime proprieta'

Definizione 2.1.1. Si dice **spazio vettoriale su un campo** $\mathbb{K}$ un insieme V di elementi, detti **vettori**, insieme con due operazioni $+ : V \times V \to V$ e $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ e un elemento $\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} \in V$ che soddisfano i seguenti assiomi:

$$\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \in V, \quad \forall h, k \in \mathbb{K}$$

1.	$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \in V$	(chiusura di V rispetto a $+$)	(2.1)
2.	$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$	(commutativita' di $+$)	(2.2)
3.	$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u})$	(associativita' di $+$)	(2.3)
4.	$\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{v}$	($\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$ el. neutro di $+$)	(2.4)
5.	$\exists(-\boldsymbol{v}) \in V. \quad \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$	(opposto per $+$)	(2.5)
6.	$k\boldsymbol{v} \in V$	(chiusura di V rispetto a $\cdot$)	(2.6)
7.	$k(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = k\boldsymbol{v} + k\boldsymbol{w}$	(distributivita' 1)	(2.7)
8.	$(k + h)\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{v}$	(distributivita' 2)	(2.8)
9.	$(kh)\boldsymbol{v} = k(h\boldsymbol{v})$	(associativita' di $\cdot$)	(2.9)
10.	$1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$	(1 el. neutro di $\cdot$)	(2.10)

Spesso il campo $\mathbb{K}$ su cui e' definito uno spazio vettoriale V e' il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ o il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Supporremo che gli spazi vettoriali siano definiti su $\mathbb{R}$ a meno di diverse indicazioni. Le definizioni valgono comunque in generale anche su campi $\mathbb{K}$ diversi da $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Esempio 2.1.2. Possiamo fare diversi esempi di spazi vettoriali. Ad esempio sono spazi vettoriali:

1. i vettori geometrici dove:
   - l'elemento neutro e' il vettore nullo;
   - la somma e' definita tramite la regola del parallelogramma;
   - il prodotto per scalare e' definito nel modo usuale;

2. i vettori colonna $n \times 1$ o i vettori riga $1 \times n$ dove:
    - l'elemento neutro e' il vettore composto da n elementi 0;
    - la somma e' definita come somma tra componenti;
    - il prodotto per scalare e' definito come prodotto tra lo scalare e ciascuna componente;
3. le matrici $n \times m$, indicate con $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$;
4. i polinomi di grado minore o uguale a n, indicati con $\mathbb{K}[x]^{\leq n}$;
5. tutti i polinomi, indicati con $\mathbb{K}[x]$.

Definizione 2.1.3. Sia V uno spazio vettoriale e $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora il vettore $\boldsymbol{v} \in V$ si dice combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ se

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \tag{2.11}$$

per qualche $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.1.4. Sia V uno spazio vettoriale e $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Si indica con $\operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ l'insieme dei vettori che si possono ottenere come combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$:

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}\} = \{a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} \tag{2.12}$$

Definizione 2.1.5. Sia V uno spazio vettoriale, $A \subset V$. Allora si dice che A e' un sottospazio vettoriale di V (o semplicemente sottospazio) se

$$\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} \in A \tag{2.13}$$
$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \in A \qquad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in A \tag{2.14}$$
$$(k\boldsymbol{v}) \in A \qquad \forall k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v} \in A \tag{2.15}$$

Proposizione 2.1.6. *Le soluzioni di un sistema omogeneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ con n variabili formano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Chiamiamo S l'insieme delle soluzioni. Dato che le soluzioni sono vettori colonna di n elementi, $S \subset \mathbb{R}^n$. Verifichiamo ora le condizioni per cui S e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$:

1. $\mathbf{0}$ appartiene a S, poiche' $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$;
2. Se $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ appartengono ad S, allora $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in S$;
3. Se $\boldsymbol{x}$ appartiene ad S, allora $A(k\boldsymbol{x}) = kA\boldsymbol{x} = k\mathbf{0} = \mathbf{0} \in S$.

Dunque S e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. □

Proposizione 2.1.7. *Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora $A = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ e' un sottospazio di V.*

Dimostrazione. Dimostriamo che valgono le tre condizioni per cui A e' un sottospazio di V:

1. $\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$ appartiene ad A, in quanto basta scegliere $a_1 = \cdots = a_n = 0$;

2. Siano $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in A$. Allora per qualche $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ vale che

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} &= (a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n}) + (b_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + b_n\boldsymbol{v_n}) \\ &= (a_1 + b_1)\boldsymbol{v_1} + \cdots + (a_n + b_n)\boldsymbol{v_n} \in A\end{aligned}$$

3. Siano $\boldsymbol{v} \in A, k \in \mathbb{R}$. Allora per qualche $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ vale che

$$\begin{aligned}k\boldsymbol{v} &= k(a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n}) \\ &= (ka_1)\boldsymbol{v_1} + \cdots + (ka_n)\boldsymbol{v_n} \in A\end{aligned}$$

cioe' A e' un sottospazio di V. □

Definizione 2.1.8. Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora l'insieme $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ si dice insieme di vettori linearmente indipendenti se

$$a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0_V} \iff a_1 = \cdots = a_n = 0 \tag{2.16}$$

cioe' se l'unica combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ che da' come risultato il vettore nullo e' quella con $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Possiamo usare una definizione alternativa di dipendenza lineare, equivalente alla precedente, tramite questa proposizione:

Proposizione 2.1.9. *Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora l'insieme dei vettori $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ e' linearmente dipendente se e solo se almeno uno di essi e' esprimibile come combinazione lineare degli altri.*

Dimostrazione. Dimostriamo entrambi i versi dell'implicazione.

- Supponiamo che $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ sia linearemente dipendente, cioe' che esistano $a_1, \ldots, a_n$ non tutti nulli tali che

  $$a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0_V}.$$

  Supponiamo senza perdita di generalita' $a_1 \neq 0$, allora segue che

  $$\boldsymbol{v_1} = -\frac{a_2}{a_1}\boldsymbol{v_1} - \cdots - \frac{a_n}{a_1}\boldsymbol{v_n}$$

  dunque $\boldsymbol{v_1}$ puo' essere espresso come combinazione lineare degli altri vettori.

- Supponiamo che il vettore $\boldsymbol{v_1}$ sia esprimibile come combinazione lineare degli altri (senza perdita di generalita'), cioe' che esistano $k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ tali che

  $$\boldsymbol{v_1} = k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}.$$

  Consideriamo una generica combinazione lineare di $v_1, v_2, \ldots, v_n$:

  $$\begin{aligned}&a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \\ =&a_1(k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}) + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \\ =&(a_1k_2 + a_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (a_1k_n + a_n)\boldsymbol{v_n}\end{aligned}$$

Se scegliamo $a_1 \in \mathbb{R}$ libero, $a_i = -a_1 k_i$ per ogni $2 \leq i \leq n$, otterremo

$$
\begin{aligned}
&(a_1 k_2 + a_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (a_1 k_n + a_n)\boldsymbol{v_n} \\
=&(a_1 k_2 - a_1 k_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (a_1 k_n - a_1 k_n)\boldsymbol{v_n} \\
=&0\boldsymbol{v_2} + \cdots + 0\boldsymbol{v_n} \\
=&\boldsymbol{0_V}
\end{aligned}
$$

dunque esiste una scelta dei coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ diversa da $a_1 = \cdots = a_n = 0$ per cui la combinazione lineare da' come risultato il vettore nullo, cioe' l'insieme dei vettori non e' linearmente indipendente.

□

Inoltre per comodita' spesso si dice che i vettori $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ sono indipendenti, invece di dire che l'insieme formato da quei vettori e' un insieme linearmente indipendente.

Definizione 2.1.10. Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora si dice che $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ e' una base di V se

- span $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\} = V$;
- i vettori $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ sono linearmente indipendenti.

Definizione 2.1.11. Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v} \in V$ e $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ una base di V. Allora si dice vettore delle coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ il vettore colonna

$$
[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{2.17}
$$

tale che

$$
\boldsymbol{v} = a_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + a_n \boldsymbol{v_n} \tag{2.18}
$$

Proposizione 2.1.12. *Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v} \in V$ e $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ una base di V. Allora le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono uniche.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due vettori colonna distinti $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ che rappresentino le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{0_V} &= \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \\
&= (a_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + a_n \boldsymbol{v_n}) - (b_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + b_n \boldsymbol{v_n}) \\
&= (a_1 - b_1)\boldsymbol{v_1} + \cdots + (a_n - b_n)\boldsymbol{v_n}
\end{aligned}
$$

Ma per definizione di base $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ sono linearmente indipendenti, dunque l'unica combinazione lineare che da' come risultato il vettore $\boldsymbol{0_V}$ e' quella in cui tutti i coefficienti sono 0. Da cio' segue che

$$
\begin{gathered}
a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \cdots = a_n - b_n = 0 \\
\implies \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}
\end{gathered}
$$

cioe' i due vettori sono uguali. Ma cio' e' assurdo poiche' abbiamo supposto $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, dunque le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ devono essere uniche. $\square$

2.2 Applicazioni lineari

Definizione 2.2.1. Siano V, W spazi vettoriali. Allora un'applicazione $f : V \to W$ si dice lineare se

$$f(\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}) = \mathbf{0}_{\boldsymbol{W}} \tag{2.19}$$

$$f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w}) \qquad \forall v, w \in V \tag{2.20}$$

$$f(k\boldsymbol{v}) = kf(\boldsymbol{v}) \qquad \forall v \in V, k \in \mathbb{R} \tag{2.21}$$