Algebra Lineare

1 aprile 2020

Indice

Capitolo 1

Matrici e sistemi lineari

1.1 Matrici

Definizione 1.1.1. Si dice matrice $m \times n$ una tabella di m righe e n colonne i cui elementi appartengono ad un campo $\mathbb{K}$ fissato, della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = [A_{ij}]_{i \leq m, j \leq n} \tag{1.1}$$

Definizione 1.1.2. Si dice vettore colonna una matrice $n \times 1$ del tipo

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Si dice vettore riga una matrice $1 \times n$ del tipo

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

L'insieme dei vettori colonna di n elementi appartenenti ad un campo $\mathbb{K}$ si indica con $\mathbb{K}^n$, mentre l'insieme dei vettori riga di n elementi appartenenti ad un campo $\mathbb{K}$ si indica con $\mathbb{K}^{\times n}$.

E' evidente che se i due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ hanno la stessa dimensione e contengono gli stessi elementi allora rappresentano la stessa informazione, ma sotto forme diverse. Verificheremo piu' avanti infatti che $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^{\times n}$ sono isomorfi, cioe' contengono gli stessi elementi in due forme diverse.

1.1.1 Matrici particolari

Definizione 1.1.3. Si dice **matrice quadrata** una matrice il cui numero di righe e' uguale al numero di colonne.

Definizione 1.1.4. Si dice **matrice diagonale** una matrice quadrata tale che tutti gli elementi che non appartengono alla diagonale principale siano 0, cioe'

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ e' diagonale se e solo se } \forall i \neq j.\, (a_{ij}) = 0. \tag{1.4}$$

Definizione 1.1.5. Si dice **matrice identita'** $n \times n$ una matrice diagonale per cui la diagonale principale contiene solo 1, cioe'

$$I \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ e' la matrice identita' se e solo se } (a_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}. \tag{1.5}$$

Ecco un esempio di una matrice quadrata 4×4, una matrice diagonale 4×4 e la matrice identita' 4×4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 10 & 1 \\ 0 & 34 & 3 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Operazioni sulle matrici

Consideriamo le operazioni fondamentali che coinvolgono matrici.

Somma di matrici

Siano A, B due matrici $m \times n$ a coefficienti reali. Allora possiamo definire un'operazione di somma $+ : \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tale che

$$A + B = [A_{ij} + B_{ij}]_{ij}. \tag{1.6}$$

Cioe'

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\implies A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Prodotto per uno scalare

Sia A due matrici $m \times n$ a coefficienti reali e $k \in \mathbb{R}$. Allora possiamo definire un'operazione di prodotto per scalare $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tale che

$$kA = [kA_{ij}]_{ij}. \tag{1.7}$$

Cioe'

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \implies kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Prodotto riga per colonna

Consideriamo un vettore riga $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\times n}$ e un vettore colonna $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$. Allora definiamo il prodotto riga per colonna $\cdot : \mathbb{R}^{\times n} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 w_1 + \dots v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \tag{1.8}$$

Prodotto tra matrici

Possiamo estendere il prodotto riga per colonna a due matrici generiche, a patto che il numero di colonne della prima matrice sia uguale al numero di colonne della seconda. Quindi se $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R}), B \in \mathbb{M}_{m\times k}(\mathbb{R})$ esistera' anche $C = A \cdot B \in \mathbb{M}_{n\times k}(\mathbb{R})$ tale che l'elemento in posizione i, j di C sara' dato dal prodotto dell'i-esima riga di A e della j-esima colonna di B.

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{im} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1} b_{1j} + \dots a_{im} b_{mj} = \sum_{t=1}^{m} a_{it} b_{tj} \tag{1.9}$$

Il prodotto tra matrici rispetta le proprieta':

1. associativa: $(AB)C = A(BC)$
2. distributiva: $(A + B)C = AC + BC$
   $A(B + C) = AB + AC$

ma non la proprieta' commutativa: infatti in generale $AB \neq BA$ anche nel caso in cui entrambi i prodotti sono definiti (come nel caso delle matrici quadrate).

Esempio 1.1.6. Calcoliamo il prodotto tra $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$.

Soluzione.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}$$

Proposizione 1.1.7. *Sia A una matrice $m \times n$ e $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che*

$$(b_i) = \begin{cases} 0 & se\ i \neq j \\ 1 & se\ i = j \end{cases}$$

per qualche $j \leq n$. Allora $A\boldsymbol{v}$ e' la j-esima colonna di A.

Dimostrazione. Consideriamo il prodotto tra A e $\boldsymbol{v}$:

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0a_{11} + \dots + 1a_{1j} + \dots + 0a_{1n} \\ 0a_{21} + \dots + 1a_{2j} + \dots + 0a_{2n} \\ \vdots \\ 0a_{m1} + \dots + 1a_{mj} + \dots + 0a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

che e' esattamente la j-esima colonna di A. □

Trasposizione

Sia A una matrice $m \times n$. Allora si dice **trasposta di** A la matrice A^T di dimensione $n \times m$ tale che se $A = (a_{ij})$ allora $A^T = (b_{ij})$ dove $b_{ij} = a_{ji}$.

Piu' semplicemente, la trasposta di una matrice si ottiene trasformando le sue righe in colonne. Ad esempio

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Notiamo che:

- la trasposta di un vettore colonna e' un vettore riga e viceversa:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- la trasposta della trasposta di A e' A:

$$(A^T)^T = A$$

1.2 Matrici a scalini

Definizione 1.2.1. Una matrice A di dimensione $m \times n$ si dice a scalini per riga (o semplicemente a scalini) se:

- eventuali righe vuote sono in fondo alla matrice;
- il primo elemento non nullo di ogni riga e' in una colonna piu' a destra del primo elemento non nullo della riga precedente.

Definizione 1.2.2. Sia A una matrice ridotta a scalini. Allora il primo elemento non nullo di una riga viene detto **pivot** della riga.

Ad esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e' a scalini ed ha come pivot gli elementi $(a_{11}) = 1, (a_{23}) = 10, (a_{34}) = -2$.

Definizione 1.2.3. Una matrice A di dimensione $m \times n$ si dice a scalini per colonna se la sua trasposta A^T e' a scalini per riga.

Definizione 1.2.4. Sia A una matrice ridotta a scalini per colonna. Allora il primo elemento non nullo di una colonna viene detto **pivot** della colonna.

Ad esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e' a scalini per colonna ed ha come pivot gli elementi $(a_{11}) = 1, (a_{32}) = 10, (a_{43}) = -2$. Notiamo che A^T e' la matrice dell'esempio precedente, che era a scalini per riga.

Prendiamo una generica matrice A di dimensione $m \times n$. Possiamo trasformare ogni A in una matrice a scalini $\bar{A}$ applicando le seguenti mosse, chiamate **mosse di Gauss per riga**:

- scambio la riga i con la riga j;
- sostituisco la riga i con la somma di se stessa e di un multiplo della riga j;
- moltiplico la riga i per un numero reale.

In particolare possiamo sfruttare il seguente **algoritmo di Gauss** per ridurre una matrice a scalini:

- se la matrice contiene una sola riga, oppure tutte le righe contengono solo zeri, allora la matrice e' a scalini;
- altrimenti scelgo la riga R con pivot piu' a sinistra possibile, chiamo c la colonna su cui si trova il pivot di R e applico il seguente procedimento:
  1. scelgo una riga R' con pivot sulla colonna c;
  2. sottraggo a R' un multiplo di R in modo che l'elemento nella riga R' e nella colonna c diventi 0;
  3. ripeto questo procedimento fino a quando solo R ha un pivot nella colonna c;
- a questo punto R e' l'unica riga con pivot sulla colonna c, dunque escludiamola dalla matrice e ripetiamo il procedimento sulle altre righe.

Per semplificare ancora piu' la matrice possiamo annullare le righe sopra i pivot sommando ad esse multipli della riga contenente il pivot: l'algoritmo che ne risulta viene chiamato **algoritmo di Gauss-Jordan**.

In casi che vedremo in seguito potra' essere utile utilizzare le **mosse di Gauss per colonna**, che ci permettono di ridurre la matrice a scalini per colonna applicando le seguenti mosse:

- scambio la colonna i con la colonna j;
- sostituisco la colonna i con la somma di se stessa e di un multiplo della colonna j;
- moltiplico la colonna i per un numero reale.

Definizione 1.2.5. Sia A una matrice e sia $\bar{A}$ la matrice a scalini ottenuta tramite le mosse di Gauss per riga su A. Il numero di pivot della matrice $\bar{A}$ si dice **rango riga** di A e si indica con $\operatorname{rango}(A)$.

Ad esempio la matrice di prima

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha 3 pivot, dunque $\operatorname{rango}(A) = 3$.

1.3 Sistemi di equazioni lineari

Definizione 1.3.1. Si dice **equazione lineare** nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \tag{1.10}$$

con $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ noti. Una **soluzione** di un'equazione lineare e' una n-upla $(x_1, \dots, x_n)$ per cui l'uguaglianza 1.10 vale. Due equazioni si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

Definizione 1.3.2. Si dice **sistema di equazioni lineari** un'insieme di k equazioni lineari a n incognite della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \tag{1.11}$$

Una **soluzione** del sistema e' una n-upla $(x_1, \dots, x_n)$ che e' soluzione di tutte le k equazioni del sistema. Due sistemi si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni. Se $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ allora il sistema si dice **omogeneo**.

Possiamo trasformare un sistema di equazioni in un'equazione tra vettori: infatti sappiamo che due vettori sono uguali se e solo se tutti i loro elementi nella stessa posizione sono uguali. Un sistema di k equazioni a n incognite diventa quindi:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + & \dots & + & a_{kn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Notiamo inoltre che

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + & \dots & + & a_{kn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}$$

Dunque arriviamo al seguente fatto:

Proposizione 1.3.3. *Ogni sistema di k equazioni in n incognite puo' essere scritto nella forma di una singola equazione matriciale della forma $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dove:*

- *A e' la matrice dei coefficienti, tale che a_{ij} e' il coefficiente del termine x_j nell'equazione nella riga i;*
- *$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e' il vettore colonna delle incognite;*
- *$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^k$ e' il vettore colonna dei termini noti.*

Definizione 1.3.4. Consideriamo un'equazione matriciale della forma $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Allora la matrice $(A|\boldsymbol{b})$ ottenuta aggiungendo alla matrice A una colonna contenente il vettore colonna $\boldsymbol{b}$ si dice **matrice completa** associata al sistema lineare.

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right). \tag{1.12}$$

Se il sistema e' omogeneo si puo' omettere la colonna dei termini noti.

Il metodo piu' veloce per risolvere un sistema lineare consiste nel ridurre la matrice completa $(A|\boldsymbol{b})$ a scalini tramite le mosse di Gauss di riga: a quel punto possono esserci due situazioni:

- se ci sono righe con solo zeri prima della barra verticale, ma con un coefficiente diverso da zero dopo, allora quell'equazione non ha soluzione in quanto e' della forma $0x_1 + \dots 0x_n = b_i \neq 0$, dunque il sistema e' impossibile;
- altrimenti il sistema ha almeno una soluzione.

Per stabilire le soluzioni del sistema si procede in questo modo:

- si scelgono libere tutte le variabili che sono su colonne che non contengono pivot;

- si ricavano le altre variabili passando al sistema associato alla matrice a scalini ottenuta alla fine.

Proposizione 1.3.5. *Le mosse di Gauss per riga applicate ad una matrice completa $(A|\boldsymbol{b})$ trasformano la matrice in una nuova matrice il cui sistema associato e' equivalente all'originale.*

Dimostrazione. Dimostriamo che le tre mosse trasformano il sistema in un sistema equivalente.

- La prima mossa consente lo scambio di due righe, che non modifica il sistema.

- Consideriamo due righe della matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \end{array}\right) \text{ che corrispondono a } \begin{cases} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j \end{cases}$$

  Dato che aggiungendo quantita' uguali ad entrambi i membri di un'equazione otteniamo un'equazione equivalente a quella data, possiamo aggiungere al primo membro della prima equazione $k(a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n) = ka_{j1}x_1 + \cdots + ka_{jn}x_n$ e al secondo membro kb_j, ottenendo:

$$\begin{cases} (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + \ldots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = b_i + kb_j \\ \qquad\qquad a_{j1}x_1 + \ldots + \qquad\qquad a_{jn}x_n = \qquad b_j \end{cases}$$

  che equivale a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{i1} + ka_{j1} & \dots & a_{in} + ka_{jn} & b_i + kb_j \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \end{array}\right)$$

- Dato che una riga della matrice indica un'equazione, allora possiamo moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per uno stesso numero reale e ottenere un'equazione equivalente a quella data.

□

Esempio 1.3.6. Risolvere il seguente sistema di equazioni.

$$\begin{cases} x + \ y + \ z + \ t = 1 \\ x + \ y + 2z + 2t = 2 \\ 2x + 2y + 3z + 3t = 3 \end{cases}$$

Soluzione. Troviamo le soluzioni semplificando la matrice completa associata al sistema tramite mosse di Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 - R_1]{R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le colonne senza pivot sono quelle della y e della t, dunque scegliamo y e t libere e torniamo al sistema associato, ottenendo:

$$\begin{cases} x = & -y \\ y = & y \\ z = & 1-t \\ t = & t \end{cases}$$

Teorema 1.3.7 (di Rouché-Capelli)**.** *Sia $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ un'equazione matriciale. Allora essa ha soluzione se e solo se* $\operatorname{rango}(A|\boldsymbol{b}) = \operatorname{rango}(A)$.

Intuizione. Infatti se il rango delle due matrici e' diverso significa che una riga nulla nella matrice A ha un pivot nella matrice $(A|\boldsymbol{b})$, cioe' che c'e' un'equazione del tipo $0x_1 + \dots 0x_n = b_i \neq 0$ che e' impossibile.

Proposizione 1.3.8. *Un sistema omogeneo $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ammette sempre almeno una soluzione.*

Dimostrazione. Infatti viene sempre che $\operatorname{rango}(A|\boldsymbol{b}) = \operatorname{rango}(A|\boldsymbol{0}) = \operatorname{rango}(A)$, dunque per Rouché-Capelli (1.3.7) il sistema ha soluzione. □

Proposizione 1.3.9. *Le soluzioni di un sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sono tutte e solo della forma $\boldsymbol{x_0} + \bar{\boldsymbol{x}}$, dove $\boldsymbol{x_0}$ e' una qualunque soluzione del sistema omogeneo associato $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ e $\bar{\boldsymbol{x}}$ e' una soluzione particolare di $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che $\boldsymbol{x_0} + \bar{\boldsymbol{x}}$ e' soluzione.

$$A(\boldsymbol{x_0} + \bar{\boldsymbol{x}}) = A\boldsymbol{x_0} + A\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

Dimostriamo poi che se $\boldsymbol{x}$ e' una soluzione di $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, allora $\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}$ e' soluzione del sistema omogeneo.

$$A(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}) = A\boldsymbol{x} - A\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

□

Proposizione 1.3.10. *Un sistema rappresentabile come una matrice quadrata a scalini che ha un pivot per riga ha una e una sola soluzione.*

Esempio 1.3.11. Discutere il numero di soluzioni del seguente sistema al variare di k.

$$\begin{cases} x + \quad ky + (1+4k)z = 1+4k \\ 2x + (k+1)y + (2+7k)z = 1+7k \\ 3x + (k+2)y + (3+9k)z = 1+9k \end{cases}$$

Soluzione. Troviamo le soluzioni semplificando la matrice completa associata al sistema tramite mosse di Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1+4k & 1+4k \\ 2 & k+1 & 2+7k & 1+7k \\ 3 & k+1 & 3+9k & 1+9k \end{array}\right) \xrightarrow[R_2-2R_1]{R_3-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1+4k & 1+4k \\ 0 & 1-k & -k & -k-1 \\ 0 & 2-2k & -3k & -3k-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1+4k & 1+4k \\ 0 & 1-k & -k & -k-1 \\ 0 & 0 & -k & -k \end{array}\right)$$

Discutiamo l'esistenza e il numero di soluzioni.

- Se $k \neq 0$ e $k \neq 1$ allora la matrice e' quadrata ed ha un pivot per riga, dunque ammette una e una sola soluzione.
- Se $k = 0$ allora la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  che ha 2 pivot e una colonna senza pivot, dunque ha una variabile libera e nessuna equazione impossibile, quindi ha infinite soluzioni e la dimensione dell'insieme delle soluzioni e' 1.
- Se $k = 1$ allora la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  che ha un'equazione impossibile, dunque non ammette soluzioni.

1.4 Matrici come applicazioni lineari

Abbiamo visto che moltiplicando una matrice per un vettore colonna con la giusta dimensione otteniamo un nuovo vettore colonna. Possiamo quindi interpretare una matrice come una funzione che manda vettori in vettori:

Definizione 1.4.1. Sia $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Allora si dice **applicazione lineare associata alla matrice** la funzione $L_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m. \quad L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \tag{1.13}$$

Proposizione 1.4.2. *Sia $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ una matrice, $L_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la sua applicazione lineare associata. Allora valgono le seguenti:*

$$L_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{1.14}$$

$$L_A(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = L_A(\boldsymbol{v}) + L_A(\boldsymbol{w}) \qquad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m \tag{1.15}$$

$$L_A(k\boldsymbol{v}) = kL_A(\boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{R}. \tag{1.16}$$

Dimostrazione. Per definizione di applicazione lineare:

- $L_A(\mathbf{0}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$;
- $L_A(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = A(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{w} = L_A(\boldsymbol{v}) + L_A(\boldsymbol{w})$;
- $L_A(k\boldsymbol{v}) = A(k\boldsymbol{v}) = kA\boldsymbol{v} = kL_A(\boldsymbol{v})$

che e' la tesi. □

Proposizione 1.4.3. *Siano $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{m\times k}(\mathbb{R})$ e $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $L_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Allora la funzione composta $L_B \circ L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e' associata alla matrice $B \cdot A$.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$(L_B \circ L_A)(\boldsymbol{x}) = L_B(L_A(\boldsymbol{x})) = L_B(A\boldsymbol{x}) = B(A\boldsymbol{x}) = (BA)\boldsymbol{x}$$

che e' la tesi. □

Definizione 1.4.4. Sia $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ una matrice, $L_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la sua applicazione lineare associata. Allora si dice **immagine** dell'applicazione L_A (o della matrice A) l'insieme:

$$\operatorname{Im} L_A = \{L_A(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m\} \tag{1.17}$$

Definizione 1.4.5. Sia $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ una matrice, $L_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la sua applicazione lineare associata. Allora si dice **kernel** dell'applicazione L_A (o della matrice A) l'insieme:

$$\ker L_A = \{\boldsymbol{x} \mid L_A(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\} \tag{1.18}$$

Osservazione. Il kernel di una matrice $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ e' l'insieme dei vettori colonna $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ tali che $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, cioe' e' l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

Notiamo quindi che, essendoci una corrispondenza tra il kernel di una matrice e l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice, le mosse di Gauss di riga non modificano il kernel di una matrice. Infatti sappiamo che le mosse non modificano l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo, dunque non modificheranno neanche il kernel.

Capitolo 2

Spazi vettoriali

2.1 Spazi vettoriali e prime proprieta'

2.1.1 Spazi vettoriali

Definizione 2.1.1. Si dice **spazio vettoriale su un campo** $\mathbb{K}$ un insieme V di elementi, detti **vettori**, insieme con due operazioni $+ : V \times V \to V$ e $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ e un elemento $\mathbf{0_V} \in V$ che soddisfano i seguenti assiomi:

$$\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \in V, \quad \forall h, k \in \mathbb{K}$$

1.	$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \in V$	(chiusura di V rispetto a $+$)	(2.1)
2.	$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$	(commutativita' di $+$)	(2.2)
3.	$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u})$	(associativita' di $+$)	(2.3)
4.	$\mathbf{0_V} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{0_V} = \boldsymbol{v}$	($\mathbf{0_V}$ el. neutro di $+$)	(2.4)
5.	$\exists(-\boldsymbol{v}) \in V. \quad \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0_V}$	(opposto per $+$)	(2.5)
6.	$k\boldsymbol{v} \in V$	(chiusura di V rispetto a $\cdot$)	(2.6)
7.	$k(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = k\boldsymbol{v} + k\boldsymbol{w}$	(distributivita' 1)	(2.7)
8.	$(k + h)\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{v}$	(distributivita' 2)	(2.8)
9.	$(kh)\boldsymbol{v} = k(h\boldsymbol{v})$	(associativita' di $\cdot$)	(2.9)
10.	$1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$	(1 el. neutro di $\cdot$)	(2.10)

Spesso il campo $\mathbb{K}$ su cui e' definito uno spazio vettoriale V e' il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ o il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Supporremo che gli spazi vettoriali siano definiti su $\mathbb{R}$ a meno di diverse indicazioni. Le definizioni valgono comunque in generale anche su campi $\mathbb{K}$ diversi da $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Esempio 2.1.2. Possiamo fare diversi esempi di spazi vettoriali. Ad esempio sono spazi vettoriali:

1. i vettori geometrici dove:
   - l'elemento neutro e' il vettore nullo;
   - la somma e' definita tramite la regola del parallelogramma;

- il prodotto per scalare e' definito nel modo usuale;

2. i vettori colonna $n \times 1$ o i vettori riga $1 \times n$ dove:
   - l'elemento neutro e' il vettore composto da n elementi 0;
   - la somma e' definita come somma tra componenti;
   - il prodotto per scalare e' definito come prodotto tra lo scalare e ciascuna componente;
3. le matrici $n \times m$, indicate con $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$;
4. i polinomi di grado minore o uguale a n, indicati con $\mathbb{K}[x]^{\leq n}$;
5. tutti i polinomi, indicati con $\mathbb{K}[x]$.

Definizione 2.1.3. Sia V uno spazio vettoriale, $A \subset V$. Allora si dice che A e' un sottospazio vettoriale di V (o semplicemente sottospazio) se

$$\mathbf{0_V} \in A \tag{2.11}$$
$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \in A \qquad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in A \tag{2.12}$$
$$(k\boldsymbol{v}) \in A \qquad \forall k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v} \in A \tag{2.13}$$

Proposizione 2.1.4. *Le soluzioni di un sistema omogeneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ con n variabili formano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Chiamiamo S l'insieme delle soluzioni. Dato che le soluzioni sono vettori colonna di n elementi, $S \subset \mathbb{R}^n$. Verifichiamo ora le condizioni per cui S e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$:

1. $\mathbf{0}$ appartiene a S, poiche' $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$;
2. Se $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ appartengono ad S, allora $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, dunque $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S$;
3. Se $\boldsymbol{x}$ appartiene ad S, allora $A(k\boldsymbol{x}) = kA\boldsymbol{x} = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$, dunque $k\boldsymbol{x} \in S$.

Dunque S e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. □

2.1.2 Combinazioni lineari e span

Definizione 2.1.5. Sia V uno spazio vettoriale e $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora il vettore $\boldsymbol{v} \in V$ si dice combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ se

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \tag{2.14}$$

per qualche $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.1.6. Sia V uno spazio vettoriale e $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Si indica con $\operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ l'insieme dei vettori che si possono ottenere come combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$:

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\} = \{a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\} \tag{2.15}$$

Proposizione 2.1.7. *Sia $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ e siano $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_m} \in \mathbb{R}^n$ le sue colonne. Allora l'immagine della matrice e' uguale allo span delle sue colonne.*

Dimostrazione. L'immagine della matrice e' l'insieme di tutti i vettori del tipo $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix}^T$ al variare di $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} &= A \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \right) \\ &= A \left(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= x_1 A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_m A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ma sappiamo per la proposizione 1.1.7 che moltiplicare una matrice per un vettore che contiene tutti 0 tranne un 1 in posizione j ci da' come risultato la j-esima colonna della matrice, dunque:

$$= x_1 \boldsymbol{a_1} + \dots + x_m \boldsymbol{a_m}$$

Ma i vettori che appartengono allo span delle colonne di A sono tutti e solo del tipo $x_1 \boldsymbol{a_1} + \dots + x_m \boldsymbol{a_m}$, dunque $\operatorname{Im} A = \operatorname{span} \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_m}\}$, come volevasi dimostrare. □

Proposizione 2.1.8. *Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora $A = \operatorname{span} \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ e' un sottospazio di V.*

Dimostrazione. Dimostriamo che valgono le tre condizioni per cui A e' un sottospazio di V:

1. $\boldsymbol{0_V}$ appartiene ad A, in quanto basta scegliere $a_1 = \dots = a_n = 0$;
2. Siano $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in A$. Allora per qualche $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ vale che
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} &= (a_1 \boldsymbol{v_1} + \dots + a_n \boldsymbol{v_n}) + (b_1 \boldsymbol{v_1} + \dots + b_n \boldsymbol{v_n}) \\ &= (a_1 + b_1) \boldsymbol{v_1} + \dots + (a_n + b_n) \boldsymbol{v_n} \in A \end{aligned}$$
3. Siano $\boldsymbol{v} \in A, k \in \mathbb{R}$. Allora per qualche $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ vale che
$$\begin{aligned} k\boldsymbol{v} &= k(a_1 \boldsymbol{v_1} + \dots + a_n \boldsymbol{v_n}) \\ &= (ka_1) \boldsymbol{v_1} + \dots + (ka_n) \boldsymbol{v_n} \in A \end{aligned}$$

cioe' A e' un sottospazio di V. □

Vale anche l'implicazione inversa: ogni sottospazio di V puo' essere descritto come span di alcuni suoi vettori.

Proposizione 2.1.9. *Ogni sottospazio vettoriale di R^n puo' essere descritto in due forme:*

- *forma parametrica: come span di alcuni vettori, cioe' come immagine di una matrice;*

- *forma cartesiana: come insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, cioe' come kernel di una matrice.*

Osservazione. Per essere piu' precisi dovremmo parlare di immagine e di kernel dell'applicazione lineare associata alla matrice.

Esempio 2.1.10. Consideriamo il sottospazio di R^3 generato dall'insieme delle soluzioni dell'equazione $3x + 4y + 5z = 0$ (forma cartesiana) e chiamiamolo W. Cerchiamo di esprimere W in forma parametrica:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 4y + 5z = 0 \right\}$$

Scegliamo y, z libere, da cui segue $x = -\frac{4}{3}y - \frac{5}{3}z$. Sostituendolo otteniamo:

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}y - \frac{5}{3}z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ y \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ y \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Se torniamo indietro notiamo che

$$\begin{aligned}
W &= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}y - \frac{5}{3}z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}y - \frac{5}{3}z \\ y + 0z \\ 0y + z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

che e' la definizione di immagine della matrice $\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dunque $W = \operatorname{Im}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esempio 2.1.11. Consideriamo il sottospazio di R^3 generato dallo span dei vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ (forma parametrica) e chiamiamolo W. Cerchiamo di esprimere

W in forma cartesiana:

$$
\begin{aligned}
W &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists a,b \in \mathbb{R}.\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists a,b \in \mathbb{R}.\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+4b\\2a+5b\\3a+6b\end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists a,b \in \mathbb{R}.\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}
$$

dunque e' sufficiente capire in che casi il sistema ha soluzione. Risolviamo il sistema e imponiamo che non ci siano equazioni impossibili:

$$
\left(\begin{array}{cc|c}1&4&x\\2&5&y\\3&6&z\end{array}\right) \xrightarrow[R_2-2R_1]{R_3-3R_1} \left(\begin{array}{cc|c}1&4&x\\0&-3&y-2x\\0&-6&z-3x\end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2R_2]{} \left(\begin{array}{cc|c}1&4&x\\0&-3&y-2x\\0&0&x-2y+z\end{array}\right)
$$

Dato che non devono esserci equazioni impossibili, segue che tutti i vettori di W sono della forma $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ con $x-2y+z=0$. Dunque

$$
W = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0\right\}
$$

e' la forma cartesiana di W.

Notiamo che dire che $x,y,z \in \mathbb{R}$ sono tali che $x-2y+z=0$ e' equivalente a dire che

$$
\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0
$$

cioe' W e' formato da tutti e solo i vettori che fanno parte del kernel della matrice $A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, cioe' $W = \ker\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Definizione 2.1.12. Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora l'insieme $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ si dice insieme di vettori linearmente indipendenti se

$$
a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} = \mathbf{0_V} \iff a_1 = \cdots = a_n = 0 \tag{2.16}
$$

cioe' se l'unica combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ che da' come risultato il vettore nullo e' quella con $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Possiamo usare una definizione alternativa di dipendenza lineare, equivalente alla precedente, tramite questa proposizione:

Proposizione 2.1.13. *Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora l'insieme dei vettori $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ e' linearmente dipendente se e solo se almeno uno di essi e' esprimibile come combinazione lineare degli altri.*

Dimostrazione. Dimostriamo entrambi i versi dell'implicazione.

- Supponiamo che $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ sia linearemente dipendente, cioe' che esistano $a_1, \ldots, a_n$ non tutti nulli tali che

$$a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0_V}.$$

  Supponiamo senza perdita di generalita' $a_1 \neq 0$, allora segue che

$$\boldsymbol{v_1} = -\frac{a_2}{a_1}\boldsymbol{v_1} - \cdots - \frac{a_n}{a_1}\boldsymbol{v_n}$$

  dunque $\boldsymbol{v_1}$ puo' essere espresso come combinazione lineare degli altri vettori.

- Supponiamo che il vettore $\boldsymbol{v_1}$ sia esprimibile come combinazione lineare degli altri (senza perdita di generalita'), cioe' che esistano $k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\boldsymbol{v_1} = k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}.$$

  Consideriamo una generica combinazione lineare di $v_1, v_2, \ldots, v_n$:

$$\begin{aligned} &a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \\ =&a_1(k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}) + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \\ =&(a_1k_2 + a_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (a_1k_n + a_n)\boldsymbol{v_n} \end{aligned}$$

  Se scegliamo $a_1 \in \mathbb{R}$ libero, $a_i = -a_1k_i$ per ogni $2 \leq i \leq n$, otterremo

$$\begin{aligned} &(a_1k_2 + a_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (a_1k_n + a_n)\boldsymbol{v_n} \\ =&(a_1k_2 - a_1k_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (a_1k_n - a_1k_n)\boldsymbol{v_n} \\ =&0\boldsymbol{v_2} + \cdots + 0\boldsymbol{v_n} \\ =&\boldsymbol{0_V} \end{aligned}$$

  dunque esiste una scelta dei coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ diversa da $a_1 = \cdots = a_n = 0$ per cui la combinazione lineare da' come risultato il vettore nullo, cioe' l'insieme dei vettori non e' linearmente indipendente.

□

Inoltre per comodita' spesso si dice che i vettori $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ sono indipendenti, invece di dire che l'insieme formato da quei vettori e' un insieme linearmente indipendente.

Proposizione 2.1.14. *Sia V uno spazio vettoriale e $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora per ogni $k \in \mathbb{R}$ e per ogni $i, j \leq n$.*

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_i} + k\boldsymbol{v_j}, \boldsymbol{v_j}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}. \tag{2.17}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $v \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$. Allora per definizione esisteranno $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$v = a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_i\boldsymbol{v_i} + a_j\boldsymbol{v_j} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n}$$

Aggiungiamo e sottraiamo $a_i k \boldsymbol{v_j}$ al secondo membro.

$$
\begin{aligned}
&= a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_i\boldsymbol{v_i} + a_j\boldsymbol{v_j} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} + a_ik\boldsymbol{v_j} - a_ik\boldsymbol{v_j} \\
&= a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_i\boldsymbol{v_i} + a_ik\boldsymbol{v_j} + a_j\boldsymbol{v_j} - a_ik\boldsymbol{v_j} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \\
&= a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_i(\boldsymbol{v_i} + k\boldsymbol{v_j}) + (a_j - a_ik)\boldsymbol{v_j} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \\
\implies &\ v \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_i} + k\boldsymbol{v_j}, \boldsymbol{v_j}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}.
\end{aligned}
$$

Si dimostra l'altro verso nello stesso modo.

Dunque in entrambi gli insiemi ci sono gli stessi elementi, cioe' i due span sono uguali. □

Notiamo inoltre che se scambiamo due vettori o se moltiplichiamo un vettore per uno scalare otteniamo uno span equivalente a quello di partenza. Quindi possiamo "semplificare" uno span di vettori tramite mosse di Gauss per colonna, come suggerisce la prossima proposizione.

Proposizione 2.1.15. *Siano $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in \mathbb{R}^m$ dei vettori colonna. Allora per stabilire quali di questi vettori sono indipendenti consideriamo la matrice A che contiene come colonna i-esima il vettore colonna v_i e riduciamola a scalini per colonna. Lo span delle colonne non nulle della matrice ridotta a scalini e' uguale allo span di $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$.*

Dimostrazione. Consideriamo la matrice $\bar{A}$ ridotta a scalini. Allora per la proposizione 2.1.14 lo span delle sue colonne e' uguale allo span dei vettori iniziali.

Tutte le colonne nulle possono essere eliminate da questo insieme, in quanto il vettore nullo e' sempre linearmente dipendente.

Le colonne rimanenti sono sicuramente linearmente indipendenti: infatti dato che la matrice e' a scalini per colonna per annullare il primo pivot dobbiamo annullare il primo vettore, per annullare il secondo dobbiamo annullare il secondo e cosi' via. Dunque lo span dei vettori colonna non nulli rimanenti e' uguale allo span dei vettori iniziali. □

Notiamo che alla fine di questo procedimento otteniamo vettori colonna che sono diversi dai vettori iniziali, ma questi vettori hanno pivot ad "altezze diverse".

Esempio 2.1.16. Siano $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4} \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$
\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.
$$

Si trovi un insieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ indipendenti con lo stesso span di $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}$.

Soluzione. Per la proposizione precedente mettiamo i vettori come colonne di una matrice e semplifichiamola tramite mosse di colonna:

$$
\left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[C_4+C_1]{C_2-3C_1, C_3-2C_1} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & -7 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[C_4-C_2]{C_3+2C_2} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -13 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{C_4-\frac{2}{13}C_3} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -13 & 0 \end{array}\right)
$$

Dunque i vettori $\boldsymbol{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix}$ sono indipendenti e per la proposizione precedente vale che

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \boldsymbol{w_3}\}.$$

2.1.3 Generatori e basi

Definizione 2.1.17. Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora si dice che $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ e' un insieme di generatori di V, oppure che l'insieme $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ genera V, se

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\} = V. \tag{2.18}$$

Per comodita' spesso si dice che i vettori $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ sono generatori di V, invece di dire che l'insieme formato da quei vettori e' un insieme di generatori.

Definizione 2.1.18. Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora si dice che $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ e' una base di V se

- i vettori $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ generano V;
- i vettori $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ sono linearmente indipendenti.

Definizione 2.1.19. Sia V uno spazio vettoriale. Allora il numero di vettori in una sua base si dice dimensione dello spazio vettoriale V, e si indica con $\dim V$.

Sapendo che un insieme di vettori genera un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{R}^n$ stesso) si puo' trovare una base del sottospazio (o di $\mathbb{R}^n$) disponendo i vettori come colonne di una matrice e semplificandoli, come abbiamo visto in precedenza. Tuttavia se vogliamo **estrarre una base** dal nostro insieme di vettori allora possiamo procedere in un modo leggermente diverso, che utilizza le mosse di Gauss per riga.

Proposizione 2.1.20. *Siano $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_m} \in \mathbb{R}^n$ dei vettori che generano $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Allora possiamo porre i vettori come colonne di una matrice e ridurla a scalini per riga. Alla fine del procedimento i vettori che originariamente erano nelle colonne con i pivot sono indipendenti e generano V, dunque formano una base di V.*

Dimostrazione. Consideriamo i k vettori indipendenti che sono nell'insieme $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_m}$ e chiamiamoli $\boldsymbol{w_1}, \ldots, \boldsymbol{w_k}$. Consideriamo una loro combinazione lineare qualunque $x_1\boldsymbol{w_1} + \cdots + x_k\boldsymbol{w_k}$ e la poniamo uguale a $\mathbf{0}$; questo e' equivalente a dire

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

dove A e' la matrice le cui colonne sono i vettori $\boldsymbol{w_1}, \ldots, \boldsymbol{w_k}$.

Dato che i k vettori sono indipendenti l'unica soluzione di questo sistema e' il vettore nullo, dunque il sistema ha una sola soluzione e quindi deve avere 0 variabili libere, cioe' il numero di pivot della matrice ridotta a scalini deve essere uguale al numero di colonne.

Se aggiungessimo vettori non indipendenti a questo insieme per definizione di dipendenza lineare allora non avremmo piu' una singola soluzione, dunque le colonne che abbiamo aggiunto non possono contenere pivot. □

Notiamo che alla fine del procedimento non otteniamo dei vettori colonna che generano il nostro sottospazio, ma dobbiamo andarli a scegliere dall'insieme iniziale: in questo senso possiamo estrarre una base da un insieme di generatori.

Esempio 2.1.21. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3}, \boldsymbol{c_4}\}$ dove

$$\boldsymbol{c_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Si estragga una base di V da questi quattro vettori.

Soluzione. Utilizziamo il metodo proposto dalla proposizione precedente.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 - \frac{1}{2}R_2]{R_3 - \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \times 6]{R_2 \times \frac{1}{2}, R_3 \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 & -3 & -2 \\ 0 & -9 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 - 9R_2]{R_3 - 7R_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 - \frac{1}{3}R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notiamo dunque che i pivot sono nelle colonne 1, 2 e 3, che corrispondono ai vettori $\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3}$ che per la proposizione precedente sono indipendenti e generano V, dunque $\langle \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3} \rangle$ e' una base di V.

Proposizione 2.1.22. *Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ un insieme di n vettori di V. Se valgono due dei seguenti fatti*

- $n = \dim V$;
- $\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ *e' un insieme di generatori di V;*
- $\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ *sono linearmente indipendenti;*

allora vale anche il terzo e $\langle \boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ e' una base di V.

Esempio 2.1.23. Consideriamo lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a due $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$. Mostrare che $\alpha = \left\langle 1, (x-1), (x-1)^2 \right\rangle$ e' una base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

Soluzione. Sappiamo che la base standard di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ e' la base $\left\langle 1, x, x^2 \right\rangle$, dunque $\dim\left(\mathbb{R}[x]^{\leq 2}\right) = 3$. Dato che la base α ha esattamente 3 vettori, per la proposizione 2.1.22 ci basta dimostrare una tra:

- i tre vettori sono indipendenti;
- i tre vettori generano $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

Per esercizio, verifichiamole entrambe.

- Verifichiamo che sono linearmente indipendenti: consideriamo una generica combinazione lineare dei tre vettori e poniamola uguale al vettore $\mathbf{0} = 0 + 0x + 0x^2$.

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + b \cdot (x-1) + c \cdot (x-1)^2 &= 0 + 0x + 0x^2 \\ \iff a + bx - b + cx^2 - 2cx + c &= 0 + 0x + 0x^2 \\ \iff (a - b + c) + (b - 2c)x + cx^2 &= 0 + 0x + 0x^2 \end{aligned}$$

  Dunque a, b, c devono soddisfare il seguente sistema:

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ \phantom{a - {}} b - 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

  che ha soluzione solo per $a = b = c = 0$. Dunque i tre vettori sono indipendenti e, sapendo che $\dim\left(\mathbb{R}[x]^{\leq 2}\right) = 3$, sono una base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

- Verifichiamo che i tre vettori generano $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$. Un modo per farlo e' verificare che i vettori che compongono la base canonica di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ sono nello span di $\{1, (x-1), (x-1)^2\}$: infatti, dato che la base canonica genera tutto lo spazio, se essa e' nello span anche tutto il resto dello spazio sara' nello span dei nostri tre vettori.

  - $1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x-1)^2$, dunque $1 \in \operatorname{span}\left\{1, (x-1), (x-1)^2\right\}$
  - $x = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x-1)^2$, dunque $x \in \operatorname{span}\left\{1, (x-1), (x-1)^2\right\}$
  - Dato che non e' immediato vedere come scrivere x^2 in termini di $1, (x-1), (x-1)^2$ cerchiamo di trovare i coefficienti algebricamente:

$$\begin{aligned} x^2 &= a \cdot 1 + b \cdot (x-1) + c \cdot (x-1)^2 \\ &= (a - b + c) + (b - 2c)x + cx^2 \end{aligned}$$

    dunque uguagliando i coefficienti dei termini dello stesso grado otteniamo

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ \phantom{a - {}} b - 2c = 0 \\ c = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

    Quindi x^2 e' esprimibile come combinazione lineare di $1, (x-1), (x-1)^2$ (in particolare $x^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2$), dunque

$$x^2 \in \operatorname{span}\left\{1, (x-1), (x-1)^2\right\}.$$

  Abbiamo quindi verificato che i vettori che formano la base canonica di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ fanno parte dello span dei nostri tre vettori, dunque se la base canonica genera tutto lo spazio anche $\{1, (x-1), (x-1)^2\}$ sono generatori. Inoltre, dato che $\dim(\mathbb{R}[x]^{\leq 2}) = 3$ segue che $\left\langle 1, (x-1), (x-1)^2 \right\rangle$ e' una base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

Definizione 2.1.24. Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v} \in V$ e $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ una base di V. Allora si dice vettore delle coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ il vettore colonna

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{2.19}$$

tale che

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v_1} + \dots + a_n\boldsymbol{v_n} \tag{2.20}$$

Proposizione 2.1.25. *Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v} \in V$ e $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ una base di V. Allora le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono uniche.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due vettori colonna distinti $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ che rappresentino le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0_V} &= \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \\ &= (a_1\boldsymbol{v_1} + \dots + a_n\boldsymbol{v_n}) - (b_1\boldsymbol{v_1} + \dots + b_n\boldsymbol{v_n}) \\ &= (a_1 - b_1)\boldsymbol{v_1} + \dots + (a_n - b_n)\boldsymbol{v_n} \end{aligned}$$

Ma per definizione di base $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ sono linearmente indipendenti, dunque l'unica combinazione lineare che da' come risultato il vettore $\boldsymbol{0_V}$ e' quella in cui tutti i coefficienti sono 0. Da cio' segue che

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0$$
$$\implies \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

cioe' i due vettori sono uguali. Ma cio' e' assurdo poiche' abbiamo supposto $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, dunque le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ devono essere uniche. $\square$

Esempio 2.1.26. Sia $V \subseteq \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che V e' il sottospazio delle matrici simmetriche. Trovare una base di V e trovare le coordinate di $\boldsymbol{u} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{smallmatrix}\right) \in V$ rispetto alla base trovata.

Soluzione. Cerco di esprimere un generico vettore $\boldsymbol{v} \in V$ in termini della condizione che definisce il sottospazio.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Isolando i contributi di a, b e c ottengo

$$\begin{aligned} &= \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \exists a, b, c \in \mathbb{R}. \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \exists a, b, c \in \mathbb{R}. \boldsymbol{v} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ora dobbiamo mostrare che $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ sono linearmente indipendenti. Consideriamo una loro generica combiazione lineare e imponiamola uguale a 0:

$$\begin{aligned} x\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix}x & y\\ y & z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \\ \iff x = y = z &= 0. \end{aligned}$$

Dunque $\mathcal{B} = \langle\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\rangle$ e' una base di V.

Per trovare le coordinate di $\boldsymbol{u}$ esprimiamo in termini della base:

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 6\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

dunque $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}3\\ 4\\ 6\end{pmatrix}$.

Notiamo che sembra esserci una relazione biunivoca tra un vettore di V e le sue coordinate in $\mathbb{R}^n$ rispetto ad una base. Infatti (come vedremo nella prossima parte) la relazione tra vettore di V e vettore colonna delle sue coordinate e' un isomorfismo: essi rappresentano lo stesso oggetto sotto forme diverse. Quindi spesso per fare calcoli (ad esempio semplificare un insieme di vettori per trovare una base) possiamo passare allo spazio isomorfo $\mathbb{R}^n$, sfruttare i vettori colonna e le matrici (ad esempio facendo mosse di Gauss per riga o per colonna) e infine passare di nuovo allo spazio originale.

2.2 Applicazioni lineari

Definizione 2.2.1. Siano V, W spazi vettoriali. Allora un'applicazione $f : V \to W$ si dice lineare se

$$f(\mathbf{0_V}) = \mathbf{0_W} \tag{2.21}$$
$$f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w}) \qquad \forall v, w \in V \tag{2.22}$$
$$f(k\boldsymbol{v}) = kf(\boldsymbol{v}) \qquad \forall v \in V, k \in \mathbb{R} \tag{2.23}$$

V si dice dominio dell'applicazione lineare, W si dice codominio.

Definizione 2.2.2. Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \to W$ lineare. Allora si dice immagine di f l'insieme

$$\operatorname{Im} f = \{f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\}\,. \tag{2.24}$$

Osservazione. Se $f : V \to W$ allora $\operatorname{Im} f \subseteq W$. In particolare si puo' dimostrare che $\operatorname{Im} f$ e' un sottospazio di W, e dunque che $0 \leq \dim \operatorname{Im} f \leq \dim W$.

Definizione 2.2.3. Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \to W$ lineare. Allora si dice kernel (o nucleo) di f l'insieme

$$\ker f = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0_W}\}\,. \tag{2.25}$$

Teorema 2.2.4 (delle dimensioni)**.** *Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \to W$ lineare. Allora vale il seguente fatto:*

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f. \tag{2.26}$$

2.2.1 Applicazioni iniettive e surgettive

Le applicazioni lineari sono funzioni, dunque possono essere iniettive e surgettive, ma essendo lineari hanno delle proprieta' particolari.

Definizione 2.2.5. Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \to W$ lineare. Allora f si dice iniettiva se per ogni $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V$ vale che $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u})$ se e solo se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$.

Proposizione 2.2.6. *Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \to W$ lineare. Allora f e' iniettiva se e solo se* $\ker f = \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}\}$.

Dimostrazione. Notiamo che dato che f e' lineare allora per definizione $f(\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}) = \mathbf{0}_{\boldsymbol{W}}$, dunque $\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} \in \ker f$.

($\Longrightarrow$). Supponiamo che f sia iniettiva e supponiamo che per qualche $\boldsymbol{v} \in V$ valga $\boldsymbol{v} \in \ker f$. Allora per definizione di kernel $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_{\boldsymbol{W}} = f(\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}})$, dunque per iniettivita' di f da $f(\boldsymbol{v}) = f(\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}})$ segue che $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$. Dunque $\ker f = \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}\}$.

($\Longleftarrow$). Supponiamo che $\ker f = \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}\}$. Per dimostrare che f e' iniettiva e' sufficiente dimostrare che per ogni $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ segue che $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{w}) \implies \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$.

$$\begin{aligned}
& f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{w}) \\
\iff & f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{w}) = \mathbf{0}_{\boldsymbol{W}} \\
\iff & f(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}_{\boldsymbol{W}} \\
\iff & \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \ker f
\end{aligned}$$

ma l'unico elemento di $\ker f$ e' $\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$, dunque

$$\begin{aligned}
\implies & \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} \\
\iff & \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}
\end{aligned}$$

cioe' f e' iniettiva. □

Corollario 2.2.7. *Se f e' iniettiva allora* $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

Dimostrazione. Infatti per la proposizione 2.2.6 $\dim \ker f = 0$, dunque per il teorema delle dimensioni (2.2.4) segue che $\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f$. □

Corollario 2.2.8. *Siano V, W spazi vettoriali tali che* $\dim V > \dim W$. *Allora non puo' esistere $f : V \to W$ iniettiva.*

Dimostrazione. Infatti per il corollario 2.2.7 segue che $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$, ma $\dim \operatorname{Im} f < \dim W$ dunque non puo' essere che $\dim V > \dim W$. □

Proposizione 2.2.9. *Siano V, W spazi vettoriali, $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$ linearmente indipendenti e sia $f : V \to W$ lineare. Se f e' iniettiva allora segue che $f(\boldsymbol{v_1}), \dots, f(\boldsymbol{v_n})$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Consideriamo una combinazione lineare di $f(\boldsymbol{v_1}), \dots, f(\boldsymbol{v_n})$ e dimostriamo che imponendola uguale al vettore nullo segue che i coefficienti devono essere tutti nulli.

$$\begin{aligned} & x_1 f(\boldsymbol{v_1}) + \dots + x_n f(\boldsymbol{v_n}) = \boldsymbol{0_W} \\ \iff & f(x_1 \boldsymbol{v_1} + \dots + x_n \boldsymbol{v_n}) = \boldsymbol{0_W} \end{aligned}$$

Per la proposizione 2.2.6 segue che

$$\iff x_1 \boldsymbol{v_1} + \dots + x_n \boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0_V}$$

Ma i vettori $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ sono linearmente indipendenti, dunque l'unica combinazione lineare che li annulla e' quella a coefficienti nulli, cioe'

$$\iff x_1 = \dots = x_n = 0$$

Quindi una combinazione lineare di $f(\boldsymbol{v_1}), \dots, f(\boldsymbol{v_n})$ e' uguale al vettore nullo se e solo se tutti i coefficienti sono nulli, dunque $f(\boldsymbol{v_1}), \dots, f(\boldsymbol{v_n})$ sono linearmente indipendenti. □

Definizione 2.2.10. Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \to W$ lineare. Allora f si dice surgettiva se per ogni $\boldsymbol{w} \in W$ esiste $\boldsymbol{v} \in V$ tale che $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$.

Osservazione. Una funzione $f : V \to W$ e' surgettiva se e solo se $\operatorname{Im} f = W$.

Proposizione 2.2.11. *Sia $f : V \to W$. Allora se $\langle \boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ e' una base di V segue che $\{f(\boldsymbol{v_1}), \dots, f(\boldsymbol{v_n})\}$ e' un insieme di generatori di W.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} f$ generico; allora questo equivale a dire che esiste $\boldsymbol{v} \in V$ tale che $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$. Dato che $\langle \boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ e' una base di V, allora possiamo scrivere $\boldsymbol{v}$ come $a_1 \boldsymbol{v_1} + \dots a_n \boldsymbol{v_n}$, dunque

$$\boldsymbol{w} = f(a_1 \boldsymbol{v_1} + \dots + a_n \boldsymbol{v_n}) = a_1 f(\boldsymbol{v_1}) + \dots + a_n f(\boldsymbol{v_n}).$$

Dunque per la generalita' di w segue che ogni elemento di $\operatorname{Im} f$ appartiene allo span di $f(\boldsymbol{v_1}), \dots, f(\boldsymbol{v_n})$, cioe' $\{f(\boldsymbol{v_1}), \dots, f(\boldsymbol{v_n})\}$ e' un insieme di generatori di W. □

Corollario 2.2.12. *Sia $f : V \to W$ surgettiva. Allora se $\langle \boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ e' una base di V segue che $\{f(\boldsymbol{v_1}), \dots, f(\boldsymbol{v_n})\}$ e' un insieme di generatori di W.*

Dimostrazione. Segue direttamente dalla proposizione 2.2.11: infatti se una funzione e' surgettiva allora $\operatorname{Im} f = W$, dunque se $\{f(\boldsymbol{v_1}), \dots, f(\boldsymbol{v_n})\}$ e' un insieme di generatori di $\operatorname{Im} f$ segue che e' anche un insieme di generatori di W. □

2.2.2 Isomorfismi

Definizione 2.2.13. Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \to W$ lineare. Allora f si dice bigettiva se f e' sia iniettiva che surgettiva.

Definizione 2.2.14. Una funzione $f : V \to W$ si dice invertibile se esiste $f^{-1} : W \to V$ tale che

$$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} \iff f^{-1}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \tag{2.27}$$

Se f e' invertibile allora f^{-1} e' unica e si chiama inversa di f.

Osservazione. Un'applicazione lineare e' invertibile se e solo se e' bigettiva.

Definizione 2.2.15. Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \to W$ lineare. Allora se f e' bigettiva si dice che f e' un isomorfismo.

Se esiste un isomorfismo tra gli spazi V e W allora si dice che V e' isomorfo a W, e si indica con $V \cong W$.

Osservazione. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f e' bigettiva;
- f e' invertibile;
- f e' un isomorfismo.

Gli isomorfismi preservano la linearita' dello spazio vettoriale e tutte le sue proprieta', come ci dicono le seguenti proposizioni.

Proposizione 2.2.16. *Sia V uno spazio vettoriale, $\alpha = \langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ una base di V. Allora se $f : V \to W$ e' un isomorfismo segue che $\beta = \langle f(\boldsymbol{v_1}), \ldots, f(\boldsymbol{v_n}) \rangle$ e' una base di W (cioe' gli isomorfismi mappano basi in basi).*

Dimostrazione. Dato che f e' un isomorfismo allora f e' bigettiva.

Dunque dato che f e' iniettiva essa mappa un insieme di vettori indipendenti (come la base α di V) in un insieme di vettori linearmente indipendenti per la proposizione 2.2.9, dunque β e' un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Inoltre, dato che f e' surgettiva, per la proposizione 2.2.12 essa mappa una base di V in un insieme di generatori del codominio W, dunque i vettori di β generano W.

Dunque β e' un insieme di generatori linearmente indipendenti, e quindi e' una base di W. □

Proposizione 2.2.17. *Se V e' uno spazio vettoriale di dimensione $n = \dim V$, allora V e' isomorfo a tutti e soli gli spazi vettoriali di dimensione n.*

Dimostrazione. Deriva direttamente dalla proposizione precedente: infatti ogni isomorfismo che ha come dominio V deve portare una base di V in una base di W, dunque la dimensione di V deve essere uguale a quella di W. □

Quindi per calcolare una base di un sottospazio W di uno spazio V spesso conviene passare allo spazio dei vettori colonna $\mathbb{R}^n$ isomorfo allo spazio V, calcolare la base del sottospazio $\tilde{W}$ isomorfo a W e infine tornare allo spazio di partenza.

Esempio 2.2.18. Sia $V = \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ e sia $W \subseteq V$ il sottospazio di V tale che $p \in W \iff p(2) = 0$. Dimostrare che W e' un sottospazio e trovarne una base.

Soluzione. Svolgiamo i due punti separatamente.

1. Dimostriamo che W e' un sottospazio di V.
    - Sia $\mathbf{0_V} \in V$ tale che $\mathbf{0_V}(x) = 0 + 0x + 0x^2$. Allora $\mathbf{0_V}(2) = 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 = 0$, dunque $\mathbf{0_V} \in W$.

- Supponiamo $p, q \in W$ e mostriamo che $p+q \in W$. Dunque
$$(p+q)(2) = p(2) + q(2) = 0 + 0 = 0$$
dunque $p+q \in W$.
- Supponiamo $p \in W$ e mostriamo che $kp \in W$ per un generico $k \in \mathbb{R}$. Dunque
$$(kp)(2) = kp(2) = k \cdot 0 = 0$$
cioe' $kp \in W$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Dunque abbiamo dimostrato che W e' un sottospazio di V.

2. Cerchiamo ora una base per W.

   Consideriamo un generico $p \in V$, cioe' $p(x) = a + bx + cx^2$. La condizione che definisce W e' $p(2) = a + 2b + 4c = 0$.

   Passiamo ora allo spazio isomorfo $\mathbb{R}^3$. Il vettore corrispondente a p in $\mathbb{R}^3$ e' $\tilde{\boldsymbol{p}} = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$, mentre la condizione di appartenenza allo spazio $\widetilde{W} \subseteq \mathbb{R}^3$ isomorfo a W e' sempre $a + 2b + 4c = 0$. Cerchiamo una base di $\widetilde{W}$ passando alla forma parametrica, cioe' cercando di esplicitare la condizione di appartenenza allo spazio e inserendola nella definizione stessa del vettore. Dato che la condizione e' data dal sistema $a + 2b + 4c = 0$ che ha due variabili libere, scelgo b, c libere ottenendo $a = -2b - 4c$. Sostituendo in $\tilde{\boldsymbol{p}}$:
$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b-4c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Dato che ogni vettore generico di $\widetilde{W}$ puo' essere scritto come combinazione lineare dei due vettori $\tilde{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{1}} = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $\tilde{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{2}} = \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, allora segue che essi sono generatori di W.

   Controlliamo ora che siano linearmente indipendenti riducendo a scalini per riga (secondo la proposizione 2.1.20) la matrice che ha come colonne $\tilde{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{1}}$ e $\tilde{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{2}}$.
$$\left(\begin{array}{c|c} -2 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{c|c} -2 & -4 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 + \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{c|c} -2 & -4 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Dato che ci sono tanti pivot quante colonne segue che tutti i vettori originali sono indipendenti. I vettori $\tilde{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{1}}$ e $\tilde{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{2}}$ sono quindi indipendenti e generano $\widetilde{W}$: segue che $\langle \tilde{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{1}}, \tilde{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{1}} \rangle$ e' una base di $\widetilde{W}$, quindi $\dim \widetilde{W} = 2$.

   Tornando allo spazio originale, i vettori corrispondenti alla base sono quindi $w_1(x) = (-2 + x)$ e $w_2(x) = (-4 + x^2)$. L'insieme ordinato $\big\langle (-2 + x), (-4 + x^2) \big\rangle$ forma dunque una base di W e dunque $\dim W = 2$.

2.2.3 Matrice associata ad una funzione

Come avevamo visto nel primo capitolo, le matrici sono associate ad applicazioni lineari da vettori colonna in vettori colonna. Possiamo generalizzare questo concetto e definire una matrice associata ad ogni applicazione lineare.

Definizione 2.2.19. Siano V, W spazi vettoriali, $f : V \to W$ lineare, α base di V e β base di W. Allora si dice chiama **matrice associata all'applicazione lineare** f la matrice $[f]_\beta^\alpha$ tale che

$$\forall \boldsymbol{v} \in V. \quad (f(\boldsymbol{v}))_\beta = [f]_\beta^\alpha \cdot (\boldsymbol{v})_\alpha \tag{2.28}$$