Algebra Lineare

19 luglio 2020

INDICE

1

FORMA PARAMETRICA E CARTESIANA

1.1 DEFINIZIONI

Definizione 1.1.1 (Forma parametrica e cartesiana)
Sia V uno spazio vettoriale e sia A un sottospazio di V. Allora si dice che A e' espresso in forma parametrica se e' scritto come

$$A = \text{span}\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$$

con $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in A$.

Invece si dice che A e' espresso in forma cartesiana se e' scritto come

$$A = \{\, \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{v} \text{ rispetta qualche condizione} \,\}.$$

Ad esempio se A e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ allora

$$A = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \right\}$$

e' espresso in forma parametrica, mentre

$$A = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : x - 2y + 3 = 0 \}$$

e' espresso in forma cartesiana.

1.2 PASSARE DALLA FORMA CARTESIANA ALLA FORMA PARAMETRICA

Esempio 1.2.1. Sia $A \subseteq R^3$ tale che

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : \begin{cases} 3x - 2y + \ \ z = 0 \\ -x + \ \ y + 4z = 0 \end{cases} \right\}.$$

Per scriverlo in forma parametrica dobbiamo risolvere il sistema e sostituire le informazioni ricavate nell'espressione per il vettore.

Risolviamo il sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \times -1]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

Dunque la soluzione al sistema e' $x = -9z$, $y = -13z$ con $z \in \mathbb{R}$ libera. Sostituiamolo nell'espressione per (x, y, z):

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{ \begin{pmatrix} -9z \\ -13z \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : z \in R \right\} \\
&= \left\{ z \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^3 : z \in R \right\} \\
&= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

che e' la forma parametrica del sottospazio A.

ESERCIZIO 1.2.2. Dato A in forma cartesiana, scriverlo in forma parametrica.

(1) A sottospazio di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$
A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \; : \; \begin{cases} 4x - 2y + 2z - 6t = 0 \\ -x + 3y + 4z + 2t = 0 \end{cases} \right\}
$$

(2) A sottospazio di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$
A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x \qquad + 9z = 0 \end{cases} \right\}
$$

(3) A sottospazio di $\mathbb{R}[x]^{\leqslant 2}$ tale che

$$
A = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x]^{\leqslant 2} \; : \; p(1) = 0 \right\}
$$

(4) A sottospazio di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che

$$
A = \left\{ M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \; : \; M = M^T \right\}
$$

HINT: se la condizione non e' totalmente esplicita (accade spesso quando si hanno spazi diversi da $\mathbb{R}^n$) basta esplicitarla.

Ad esempio, se lo spazio e' $\mathbb{R}[x]^{\leqslant 2}$, invece di scrivere la condizione in termini di un polinomio generico $p(x)$ basta esplicitare il polinomio scrivendolo per esteso (in questo caso scriviamo $p(x) = a + bx + cx^2$ lasciando libere $a, b, c \in \mathbb{R}$) e poi riscrivere la condizione in termini delle nuove variabili a, b, c.

A questo punto e' anche facile fare l'isomorfismo con $\mathbb{R}^{\text{quello che ti pare}}$ per risolvere l'esercizio come se fosse con i vettori colonna.

1.3 PASSARE DALLA FORMA PARAMETRICA ALLA FORMA CARTESIANA

ESEMPIO 1.3.1. Sia A sottospazio di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$
A = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.
$$

Per definizione di span, sappiamo che

$$A = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dunque un vettore generico (x, y, z) e' in A se e solo se

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tali che } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 2a \\ 3a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Dunque la condizione per cui $(x, y, z) \in A$ dipende dalla *risolubilita'* del sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Proviamo a risolverlo e imponiamo che non vi siano equazioni impossibili.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y-2x \\ 0 & 4 & z-3x \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y-2x \\ 0 & 0 & z-3x-2(y-2x) \end{array}\right).$$

Dunque il sistema ha soluzione se e solo se

$$z - 3x - 2(y - 2x) = 0$$

ovvero se e solo se

$$x - 2y + z = 0$$

che e' la condizione che cercavamo.

Di conseguenza, il sottospazio A in forma cartesiana e' dato da

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - 2y + z = 0 \right\}.$$

ESERCIZIO 1.3.2. Dato A in forma parametrica, scriverlo in forma cartesiana.

(1) A sottospazio di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$A = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

(2) A sottospazio di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$A = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(3) A sottospazio di $\mathbb{R}^2$ tale che

$$A = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(4) A sottospazio di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$A = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$