Analisi matematica

Luca De Paulis

29 settembre 2019

Capitolo 1

Fondamentali

Definizione 1.0.1 (Intervallo di $\mathbb{R}$)**.** *Un sottoinsieme I contenuto in RR ($I \subset \mathbb{R}$) si dice intervallo se e solo se $\forall x, y \in I$ con $x < y$ e per ogni z t.c. $x < y < z$, allora $z \in \mathbb{R}$.*

1.1 Insiemi

Definizione 1.1.1 (Massimo)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, allora $m \in \mathbb{R}$ si dice massimo di A se $m \geq a \; \forall a \in A \wedge m \in A$.*
Il massimo di un insieme A indica con $\max A$*.*

Definizione 1.1.2 (Minimo)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, allora $m \in \mathbb{R}$ si dice minimo di A se $m \leq a \; \forall a \in A \wedge m \in A$.*
Il minimo di un insieme A indica con $\min A$*.*

Definizione 1.1.3 (Maggiorante)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, allora $m \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di A se $m \geq a \; \forall a \in A$.*

Definizione 1.1.4 (Minorante)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, allora $m \in \mathbb{R}$ si dice minorante di A se $m \leq a \; \forall a \in A$.*

Osservazione. *Se esiste un maggiorante/minorante per A, allora ne esistono infiniti. Al contrario, esistono insiemi che non ammettono maggioranti o minoranti o entrambi.*

Definizione 1.1.5 (Insieme limitato superiormente)**.** *Un insieme si dice limitato superiormente se l'insieme dei suoi maggioranti non e' vuoto.*

Definizione 1.1.6 (Insieme limitato inferiormente)**.** *Un insieme si dice limitato inferiormente se l'insieme dei suoi minoranti non e' vuoto.*

Definizione 1.1.7 (Insieme limitato)**.** *Un insieme si dice limitato se e' limitato sia superiormente che inferiormente.*

Osservazione. *$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ si dice limitato se e solo se $\exists\, n, k \in \mathbb{R}$ t.c. $n \leq a \leq k$ $\forall a \in A$.*

Teorema 1.1.1 (Esistenza dell'estremo)**.** *Se $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e' superiormente limitato, allora l'insieme dei maggioranti di A ha minimo. Tale minimo si chiama estremo superiore di A e si indica con $\sup A$.*
Allo stesso modo, se $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e' inferiormente limitato, allora l'insieme dei minoranti di A ha massimo. Tale massimo si chiama estremo inferiore di A e si indica con $\inf A$.

Osservazione. *Se $\sup A \in A$, allora $\sup A = \max A$.*
Se $\inf A \in A$, allora $\inf A = \min A$.

Definizione 1.1.8. *Se A non e' superiormente limitato, allora per definizione $\sup A = +\infty$.*
Se A non e' inferiormente limitato, allora per definizione $\inf A = -\infty$.

Osservazione. *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e A superiormente limitato. Allora $\sup A = m$ se e solo se*

$$m \geq a \qquad \forall a \in A \tag{1.1}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists a_0 \text{ t.c. } a_0 > m - \varepsilon \tag{1.2}$$

1.2 Retta reale estesa

Definizione 1.2.1 (Retta reale estesa)**.** *Si definisce retta reale estesa l'insieme $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ in modo che valgano le seguenti condizioni:*

$$-\infty \leq x \leq +\infty \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \tag{1.3}$$

$$-\infty < x < +\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

Osservazione. *Per definizione, $\max \overline{\mathbb{R}} = +\infty$ e $\min \overline{\mathbb{R}} = -\infty$.*

Osservazione. *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Se $\sup A < +\infty$, allora A e' superiormente limitato. Se $\inf A > -\infty$, allora A e' inferiormente limitato.*

Definizione 1.2.2 (Operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$)**.** *In $\overline{\mathbb{R}}$ valgono tutte le operazioni che valgono in $\mathbb{R}$, piu' alcune:*

$$x + (-\infty) = -\infty \qquad \forall x \neq +\infty \tag{1.5}$$

$$x + (+\infty) = +\infty \qquad \forall x \neq -\infty \tag{1.6}$$

$$x \cdot (+\infty) = +\infty,\ x \cdot (-\infty) = -\infty \qquad \forall x > 0 \tag{1.7}$$

$$x \cdot (+\infty) = -\infty,\ x \cdot (+\infty) = +\infty \qquad \forall x < 0 \tag{1.8}$$

$$\tag{1.9}$$

1.3 Funzioni particolari

Osservazione. *Se $A \subset \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$, allora*

- *se A e' superiormente limitato A ammette massimo;*
- *se A e' inferiormente limitato A ammette minimo.*

Definizione 1.3.1 (Parte intera)**.** *Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice parte intera di x il numero*

$$[x] = \max\{m \in \mathbb{Z},\ m \leq x\}$$