

Algebra Lineare

30 maggio 2020

INDICE

1	MATRICI E SISTEMI LINEARI	3
1.1	Matrici	3
1.1.1	Matrici particolari	3
1.1.2	Operazioni sulle matrici	4
1.2	Matrici a scalini	6
1.3	Sistemi di equazioni lineari	8
1.4	Matrici come applicazioni lineari	12
2	SPAZI VETTORIALI	14
2.1	Spazi vettoriali	14
2.2	Combinazioni lineari e span	15
2.3	Generatori e basi	21
2.4	Sottospazi somma e intersezione	27
3	APPLICAZIONI LINEARI	30
3.1	Applicazioni lineari	30
3.2	Applicazioni iniettive e surgettive	32
3.3	Isomorfismi	34
3.4	Matrice associata ad una funzione	36
3.4.1	Inversa di una matrice	39
3.4.2	Composizione di funzioni come moltiplicazione tra matrici	40
3.4.3	Matrice del cambiamento di base	41
4	DETERMINANTI	43
4.1	Definizione e significato del determinante	43
4.1.1	Determinante di matrici particolari	44
4.2	Sviluppi di Laplace	46
4.3	Rango e determinanti	46
5	AUTOVETTORI E DIAGONALIZZABILITA'	50
5.1	Autovettori e matrici simili	50
5.1.1	Matrici simili	50
5.1.2	Autovettori, autovalori e autospazio	51
6	ORTOGONALITA'	55
6.1	Prodotto scalare e ortogonalita'	55
6.2	Complemento ortogonale	58
6.3	Proiezioni ortogonali	59
6.4	Matrici simmetriche e ortogonalita'	61
6.5	Matrici ortogonali	61

MATRICI E SISTEMI LINEARI

1.1 MATRICI

Definizione 1.1.1 (Matrice)

Si dice matrice $m \times n$ una tabella di m righe e n colonne i cui elementi appartengono ad un campo \mathbb{K} fissato, della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = [A_{ij}]_{i \leq m, j \leq n} \quad (1)$$

L'insieme delle matrici di dimensione $m \times n$ con coefficienti in un campo \mathbb{K} si indica con $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Definizione 1.1.2 (Vettore)

Si dice vettore colonna una matrice $n \times 1$ del tipo

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

Si dice vettore riga una matrice $1 \times n$ del tipo

$$w = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n) \quad (3)$$

L'insieme dei vettori colonna di n elementi appartenenti ad un campo \mathbb{K} si indica con \mathbb{K}^n , mentre l'insieme dei vettori riga di n elementi appartenenti ad un campo \mathbb{K} si indica con $\mathbb{K}^{\times n}$.

E' evidente che se i due vettori v e w hanno la stessa dimensione e contengono gli stessi elementi allora rappresentano la stessa informazione, ma sotto forme diverse. Verificheremo piu' avanti infatti che \mathbb{K}^n e $\mathbb{K}^{\times n}$ sono isomorfi, cioe' contengono gli stessi elementi in due forme diverse.

1.1.1 Matrici particolari

Definizione 1.1.3 (Matrice quadrata)

Si dice **matrice quadrata** una matrice il cui numero di righe e' uguale al numero di colonne.

Definizione 1.1.4 (Matrice triangolare superiore)

Si dice **matrice triangolare superiore** una matrice quadrata tale che tutti gli elementi sotto la diagonale principale siano 0, cioè'

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ e' triangolare superiore} \iff \forall i > j. (a_{ij}) = 0. \quad (4)$$

Definizione 1.1.5 (Matrice triangolare inferiore)

Si dice **matrice triangolare inferiore** una matrice quadrata tale che tutti gli elementi sopra la diagonale principale siano 0, cioè'

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ e' triangolare inferiore} \iff \forall i < j. (a_{ij}) = 0. \quad (5)$$

Definizione 1.1.6 (Matrice diagonale)

Si dice **matrice diagonale** una matrice quadrata tale che tutti gli elementi che non appartengono alla diagonale principale siano 0, cioè'

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ e' diagonale} \iff \forall i \neq j. (a_{ij}) = 0. \quad (6)$$

Definizione 1.1.7 (Matrice identita')

Si dice **matrice identita'** $n \times n$ una matrice diagonale per cui la diagonale principale contiene solo 1, cioè'

$$I \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ e' la matrice identita'} \iff (a_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}. \quad (7)$$

Ecco un esempio di una matrice quadrata 4×4 , una matrice triangolare superiore 4×4 , una matrice triangolare inferiore 4×4 , una matrice diagonale 4×4 e la matrice identita' 4×4 .

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 10 & 1 \\ 0 & 34 & 3 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 12 \end{pmatrix}, \quad T_s = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad T_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 34 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 2 & 12 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Operazioni sulle matrici

Consideriamo le operazioni fondamentali che coinvolgono matrici.

Somma di matrici

Siano A, B due matrici $m \times n$ a coefficienti reali. Allora possiamo definire un'operazione di somma $+$: $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ tale che

$$A + B = [A_{ij} + B_{ij}]_{ij}. \quad (8)$$

Cioe'

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Prodotto per uno scalare

Sia A due matrici $m \times n$ a coefficienti reali e $k \in \mathbb{R}$. Allora possiamo definire un'operazione di prodotto per scalare $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ tale che

$$kA = [kA_{ij}]_{ij}. \quad (9)$$

Cioe'

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Prodotto riga per colonna

Consideriamo un vettore riga $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\times n}$ e un vettore colonna $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Allora definiamo il prodotto riga per colonna $\cdot : \mathbb{R}^{\times n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v_1 \quad \dots \quad v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n = \sum_{i=1}^n v_i w_i \quad (10)$$

Prodotto tra matrici

Possiamo estendere il prodotto riga per colonna a due matrici generiche, a patto che il numero di colonne della prima matrice sia uguale al numero di colonne della seconda. Quindi se $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{m \times k}(\mathbb{R})$ esistera' anche $C = A \cdot B \in \mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{R})$ tale che l'elemento in posizione i, j di C sara' dato dal prodotto dell' i -esima riga di A e della j -esima colonna di B .

$$(c_{ij}) = (a_{i1} \quad \dots \quad a_{im}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{im} b_{mj} = \sum_{t=1}^m a_{it} b_{tj} \quad (11)$$

Il prodotto tra matrici rispetta le proprieta':

1. associativa: $(AB)C = A(BC)$
2. distributiva: $(A + B)C = AC + BC$
 $A(B + C) = AB + AC$

ma non la proprieta' commutativa: infatti in generale $AB \neq BA$ anche nel caso in cui entrambi i prodotti sono definiti (come nel caso delle matrici quadrate).

Esempio 1.1.8. Calcoliamo il prodotto tra $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

SOLUZIONE.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}$$

Proposizione 1.1.9

Sia A una matrice $m \times n$ e $v \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

per qualche $j \leq n$. Allora Av e' la j -esima colonna di A .

Dimostrazione. Consideriamo il prodotto tra A e v :

$$\begin{aligned} Av &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0a_{11} + \dots + 1a_{1j} + \dots + 0a_{1n} \\ 0a_{21} + \dots + 1a_{2j} + \dots + 0a_{2n} \\ \vdots \\ 0a_{m1} + \dots + 1a_{mj} + \dots + 0a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che e' esattamente la j -esima colonna di A . □

Trasposizione

Sia A una matrice $m \times n$. Allora si dice **trasposta di A** la matrice A^T di dimensione $n \times m$ tale che se $A = (a_{ij})$ allora $A^T = (b_{ij})$ dove $b_{ij} = a_{ji}$.

Piu' semplicemente, la trasposta di una matrice si ottiene trasformando le sue righe in colonne. Ad esempio

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Notiamo che:

- la trasposta di un vettore colonna e' un vettore riga e viceversa:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^T = (a \quad b \quad c), \quad (a \quad b \quad c)^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- la trasposta della trasposta di A e' A :

$$(A^T)^T = A$$

1.2 MATRICI A SCALINI

Definizione 1.2.1 (Matrice a scalini per riga)

Una matrice A di dimensione $m \times n$ si dice a scalini per riga (o semplicemente a scalini) se:

- eventuali righe vuote sono in fondo alla matrice;

- il primo elemento non nullo di ogni riga e' in una colonna piu' a destra del primo elemento non nullo della riga precedente.

Definizione 1.2.2 (Pivot di riga)

Sia A una matrice ridotta a scalini. Allora il primo elemento non nullo di una riga viene detto **pivot** della riga.

Ad esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e' a scalini ed ha come pivot gli elementi $(a_{11}) = 1, (a_{23}) = 10, (a_{34}) = -2$.

Definizione 1.2.3 (Matrice a scalini per colonna)

Una matrice A di dimensione $m \times n$ si dice a scalini per colonna se la sua trasposta A^T e' a scalini per riga.

Definizione 1.2.4 (Pivot di colonna)

Sia A una matrice ridotta a scalini per colonna. Allora il primo elemento non nullo di una colonna viene detto **pivot** della colonna.

Ad esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e' a scalini per colonna ed ha come pivot gli elementi $(a_{11}) = 1, (a_{32}) = 10, (a_{43}) = -2$. Notiamo che A^T e' la matrice dell'esempio precedente, che era a scalini per riga.

Prendiamo una generica matrice A di dimensione $m \times n$. Possiamo trasformare ogni A in una matrice a scalini \bar{A} applicando le seguenti mosse, chiamate **mosse di Gauss per riga**:

- scambio la riga i con la riga j ;
- sostituisco la riga i con la somma di se stessa e di un multiplo della riga j ;
- multiplico la riga i per un numero reale.

In particolare possiamo sfruttare il seguente **algoritmo di Gauss** per ridurre una matrice a scalini:

- se la matrice contiene una sola riga, oppure tutte le righe contengono solo zeri, allora la matrice e' a scalini;
- altrimenti scelgo la riga R con pivot piu' a sinistra possibile, chiamo c la colonna su cui si trova il pivot di R e applico il seguente procedimento:
 1. scelgo una riga R' con pivot sulla colonna c ;
 2. sottraggo a R' un multiplo di R in modo che l'elemento nella riga R' e nella colonna c diventi 0;

3. ripeto questo procedimento fino a quando solo R ha un pivot nella colonna c ;

- a questo punto R e' l'unica riga con pivot sulla colonna c , dunque escludiamola dalla matrice e ripetiamo il procedimento sulle altre righe.

Per semplificare ancora piu' la matrice possiamo annullare le righe sopra i pivot sommando ad esse multipli della riga contenente il pivot: l'algoritmo che ne risulta viene chiamato **algoritmo di Gauss-Jordan**.

In casi che vedremo in seguito potra' essere utile utilizzare le **mosse di Gauss per colonna**, che ci permettono di ridurre la matrice a scalini per colonna applicando le seguenti mosse:

- scambio la colonna i con la colonna j ;
- sostituisco la colonna i con la somma di se stessa e di un multiplo della colonna j ;
- multiplico la colonna i per un numero reale.

Definizione 1.2.5 (Rango)

Sia A una matrice e sia \bar{A} la matrice a scalini ottenuta tramite le mosse di Gauss per riga su A . Il numero di pivot della matrice \bar{A} si dice **rango riga** di A e si indica con $\text{rango}(A)$.

Ad esempio la matrice di prima

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha 3 pivot, dunque $\text{rango}(A) = 3$.

1.3 SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

Definizione 1.3.1 (Equazione lineare e soluzione di un'equazione)

Si dice **equazione lineare** nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (12)$$

con $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ noti. Una **soluzione** di un'equazione lineare e' una n -upla (x_1, \dots, x_n) per cui l'uguaglianza 12 vale. Due equazioni si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

Definizione 1.3.2 (Sistema di equazioni lineari)

Si dice **sistema di equazioni lineari** un'insieme di k equazioni lineari a n incognite della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \quad (13)$$

Una **soluzione** del sistema e' una n -upla (x_1, \dots, x_n) che e' soluzione di tutte le k equazioni del sistema. Due sistemi si dicono **equivalenti** se

hanno le stesse soluzioni. Se $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ allora il sistema si dice **omogeneo**.

Possiamo trasformare un sistema di equazioni in un'equazione tra vettori: infatti sappiamo che due vettori sono uguali se e solo se tutti i loro elementi nella stessa posizione sono uguali. Un sistema di k equazioni a n incognite diventa quindi:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Notiamo inoltre che

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\mathbf{x}$$

Dunque arriviamo al seguente fatto:

Proposizione 1.3.3 (Sistema sotto forma di matrici)

Ogni sistema di k equazioni in n incognite puo' essere scritto nella forma di una singola equazione matriciale della forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove:

- A e' la matrice dei coefficienti, tale che a_{ij} e' il coefficiente del termine x_j nell'equazione nella riga i ;
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e' il vettore colonna delle incognite;
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ e' il vettore colonna dei termini noti.

Definizione 1.3.4 (Matrice completa associata al sistema)

Consideriamo un'equazione matriciale della forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Allora la matrice $(A|\mathbf{b})$ ottenuta aggiungendo alla matrice A una colonna contenente il vettore colonna \mathbf{b} si dice **matrice completa** associata al sistema lineare.

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array} \right). \quad (14)$$

Se il sistema e' omogeneo si puo' omettere la colonna dei termini noti.

Il metodo piu' veloce per risolvere un sistema lineare consiste nel ridurre la matrice completa $(A|\mathbf{b})$ a scalini tramite le mosse di Gauss di riga: a quel punto possono esserci due situazioni:

- se ci sono righe con solo zeri prima della barra verticale, ma con un coefficiente diverso da zero dopo, allora quell'equazione non ha soluzione in quanto e' della forma $0x_1 + \dots + 0x_n = b_i \neq 0$, dunque il sistema e' impossibile;
- altrimenti il sistema ha almeno una soluzione.

Per stabilire le soluzioni del sistema si procede in questo modo:

- si scelgono libere tutte le variabili che sono su colonne che non contengono pivot;
- si ricavano le altre variabili passando al sistema associato alla matrice a scalini ottenuta alla fine.

Proposizione 1.3.5 (Le mosse di Gauss per riga trasformano un sistema in un sistema equivalente)

Le mosse di Gauss per riga applicate ad una matrice completa $(A|b)$ trasformano la matrice in una nuova matrice il cui sistema associato è equivalente all'originale.

Dimostrazione. Dimostriamo che le tre mosse trasformano il sistema in un sistema equivalente.

- La prima mossa consente lo scambio di due righe, che non modifica il sistema.
- Consideriamo due righe della matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{i1} & \dots & a_{in} & & b_i \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & & b_j \end{array} \right) \text{ che corrispondono a } \begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \end{cases}$$

Dato che aggiungendo quantità uguali ad entrambi i membri di un'equazione otteniamo un'equazione equivalente a quella data, possiamo aggiungere al primo membro della prima equazione $k(a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n) = ka_{j1}x_1 + \dots + ka_{jn}x_n$ e al secondo membro kb_j , ottenendo:

$$\begin{cases} (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + \dots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = b_i + kb_j \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \end{cases}$$

che equivale a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{i1} + ka_{j1} & \dots & a_{in} + ka_{jn} & & b_i + kb_j \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & & b_j \end{array} \right)$$

- Dato che una riga della matrice indica un'equazione, allora possiamo moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per uno stesso numero reale e ottenere un'equazione equivalente a quella data.

□

Esempio 1.3.6. Risolvere il seguente sistema di equazioni.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + y + 2z + 2t = 2 \\ 2x + 2y + 3z + 3t = 3 \end{cases}$$

SOLUZIONE. Troviamo le soluzioni semplificando la matrice completa associata al sistema tramite mosse di Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[R_2-R_1]{R_3-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-R_2} \\ & \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Le colonne senza pivot sono quelle della y e della t , dunque scegliamo y e t libere e torniamo al sistema associato, ottenendo:

$$\begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = 1 - t \\ t = t \end{cases}$$

Teorema 1.3.7 (Teorema di Rouché-Capelli)

Sia $Ax = b$ un'equazione matriciale. Allora essa ha soluzione se e solo se $\text{rango}(A|b) = \text{rango}(A)$.

INTUIZIONE. Infatti se il rango delle due matrici è diverso significa che una riga nulla nella matrice A ha un pivot nella matrice $(A|b)$, cioè che c'è un'equazione del tipo $0x_1 + \dots + 0x_n = b_i \neq 0$ che è impossibile.

Proposizione 1.3.8 (Un sistema omogeneo ammette sempre una soluzione)

Un sistema omogeneo $Ax = 0$ ammette sempre almeno una soluzione.

Dimostrazione. Infatti viene sempre che $\text{rango}(A|b) = \text{rango}(A|0) = \text{rango}(A)$, dunque per Rouché-Capelli (1.3.7) il sistema ha soluzione. \square

Proposizione 1.3.9

Le soluzioni di un sistema lineare $Ax = b$ sono tutte e solo della forma $x_0 + \bar{x}$, dove x_0 è una qualunque soluzione del sistema omogeneo associato $Ax = 0$ e \bar{x} è una soluzione particolare di $Ax = b$.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che $x_0 + \bar{x}$ è soluzione.

$$A(x_0 + \bar{x}) = Ax_0 + A\bar{x} = 0 + b = b$$

Dimostriamo poi che se x è una soluzione di $Ax = b$, allora $x - \bar{x}$ è soluzione del sistema omogeneo.

$$A(x - \bar{x}) = Ax - A\bar{x} = b - b = 0$$

che è la tesi. \square

Notiamo che per avere una e una sola soluzione per un sistema della forma $Ax = b$ è necessario che il numero di equazioni sia uguale al numero di incognite, cioè che la matrice dei coefficienti sia quadrata. Inoltre abbiamo bisogno di un'altra condizione, che viene specificata dalla proposizione seguente.

Proposizione 1.3.10

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $x, b \in \mathbb{R}^n$. Allora il sistema $Ax = b$ ha una e una sola soluzione se e solo se $\text{rango}(A) = n$.

Dimostrazione. Riduciamo la matrice completa $(A|b)$ a scalini, ottenendo la matrice $(A'|b')$.

Se $\text{rango}(A) = n$, allora $\text{rango}(A|b) = n$, dunque $(A'|b')$ avrà n pivot. Dato che non ci sono possibili scelte di variabili libere, sicuramente avremo una e una sola soluzione.

Se $\text{rango}(A) < n$, allora $\text{rango}(A') < n$. Abbiamo due casi:

- se $\text{rango}(A'|b') > \text{rango}(A')$ allora per il teorema di Rouché-Capelli (1.3.7) il sistema non ha soluzione;
- se $\text{rango}(A'|b') = \text{rango}(A') < n$ allora il sistema avrà delle variabili libere, dunque avrà infinite soluzioni.

Dunque se $\text{rango}(A) < n$ il sistema non può avere una ed una sola soluzione. \square

Esempio 1.3.11. Discutere il numero di soluzioni del seguente sistema al variare di k .

$$\begin{cases} x + ky + (1 + 4k)z = 1 + 4k \\ 2x + (k + 1)y + (2 + 7k)z = 1 + 7k \\ 3x + (k + 2)y + (3 + 9k)z = 1 + 9k \end{cases}$$

SOLUZIONE. Troviamo le soluzioni semplificando la matrice completa associata al sistema tramite mosse di Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1+4k & | & 1+4k \\ 2 & k+1 & 2+7k & | & 1+7k \\ 3 & k+1 & 3+9k & | & 1+9k \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-2R_1]{R_3-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & k & 1+4k & | & 1+4k \\ 0 & 1-k & -k & | & -k-1 \\ 0 & 2-2k & -3k & | & -3k-2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & k & 1+4k & | & 1+4k \\ 0 & 1-k & -k & | & -k-1 \\ 0 & 0 & -k & | & -k \end{pmatrix}$$

Discutiamo l'esistenza e il numero di soluzioni.

- Se $k \neq 0$ e $k \neq 1$ allora la matrice è quadrata ed ha un pivot per riga, dunque ammette una e una sola soluzione.
- Se $k = 0$ allora la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

che ha 2 pivot e una colonna senza pivot, dunque ha una variabile libera e nessuna equazione impossibile, quindi ha infinite soluzioni e la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 1.

- Se $k = 1$ allora la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 5 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 5 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

che ha un'equazione impossibile, dunque non ammette soluzioni.

1.4 MATRICI COME APPLICAZIONI LINEARI

Abbiamo visto che moltiplicando una matrice per un vettore colonna con la giusta dimensione otteniamo un nuovo vettore colonna. Possiamo quindi interpretare una matrice come una funzione che manda vettori in vettori:

Definizione 1.4.1 (Applicazione lineare associata ad una matrice)

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Allora si dice **applicazione lineare associata alla matrice** la funzione $L_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che

$$\forall x \in \mathbb{R}^m. \quad L_A(x) = Ax \quad (15)$$

Proposizione 1.4.2 (Linearità)

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ una matrice, $L_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ la sua applicazione lineare associata. Allora valgono le seguenti:

$$L_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (16)$$

$$L_A(v + w) = L_A(v) + L_A(w) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^m \quad (17)$$

$$L_A(kv) = kL_A(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Dimostrazione. Per definizione di applicazione lineare:

- $L_A(\mathbf{0}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$;
- $L_A(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = L_A(v) + L_A(w)$;
- $L_A(kv) = A(kv) = kAv = kL_A(v)$

che e' la tesi. \square

Proposizione 1.4.3 (Composizione come prodotto tra matrici)

Siano $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{m \times k}(\mathbb{R})$ e $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $L_B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$. Allora la funzione composta $L_B \circ L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ e' associata alla matrice $B \cdot A$.

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$(L_B \circ L_A)(x) = L_B(L_A(x)) = L_B(Ax) = B(Ax) = (BA)x$$

che e' la tesi. \square

Definizione 1.4.4 (Immagine di un'applicazione lineare)

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ una matrice, $L_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ la sua applicazione lineare associata. Allora si dice **immagine** dell'applicazione L_A (o della matrice A) l'insieme:

$$\text{Im } L_A = \{L_A(x) \mid x \in \mathbb{R}^m\}. \quad (19)$$

Definizione 1.4.5 (Kernel di un'applicazione lineare)

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ una matrice, $L_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ la sua applicazione lineare associata. Allora si dice **kernel** dell'applicazione L_A (o della matrice A) l'insieme:

$$\ker L_A = \{x \mid L_A(x) = \mathbf{0}\}. \quad (20)$$

OSSERVAZIONE. Il kernel di una matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ e' l'insieme dei vettori colonna $x \in \mathbb{R}^m$ tali che $Ax = \mathbf{0}$, cioe' e' l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = \mathbf{0}$.

Notiamo quindi che, essendoci una corrispondenza tra il kernel di una matrice e l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice, le mosse di Gauss di riga non modificano il kernel di una matrice. Infatti sappiamo che le mosse non modificano l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo, dunque non modificheranno neanche il kernel.

SPAZI VETTORIALI

2.1 SPAZI VETTORIALI

Definizione 2.1.1 (Spazio vettoriale)

Si dice **spazio vettoriale su un campo** \mathbb{K} un insieme V di elementi, detti **vettori**, insieme con due operazioni $+: V \times V \rightarrow V$ e $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ e un elemento $\mathbf{0}_V \in V$ che soddisfano i seguenti assiomi:

$$\forall v, w, u \in V, \quad \forall h, k \in \mathbb{K}$$

1. $(v + w) \in V$ (chiusura di V rispetto a $+$) (21)
2. $v + w = w + v$ (commutativita' di $+$) (22)
3. $(v + w) + u = w + (v + u)$ (associativita' di $+$) (23)
4. $\mathbf{0}_V + v = v + \mathbf{0}_V = v$ ($\mathbf{0}_V$ el. neutro di $+$) (24)
5. $\exists(-v) \in V. \quad v + (-v) = \mathbf{0}_V$ (opposto per $+$) (25)
6. $kv \in V$ (chiusura di V rispetto a \cdot) (26)
7. $k(v + w) = kv + kw$ (distributivita' 1) (27)
8. $(k + h)v = kv + hv$ (distributivita' 2) (28)
9. $(kh)v = k(hv)$ (associativita' di \cdot) (29)
10. $1v = v$ (1 el. neutro di \cdot) (30)

Spesso il campo \mathbb{K} su cui e' definito uno spazio vettoriale V e' il campo dei numeri reali \mathbb{R} o il campo dei numeri complessi \mathbb{C} . Supporremo che gli spazi vettoriali siano definiti su \mathbb{R} a meno di diverse indicazioni. Le definizioni valgono comunque in generale anche su campi \mathbb{K} diversi da \mathbb{R} o \mathbb{C} .

Esempio 2.1.2. Possiamo fare diversi esempi di spazi vettoriali. Ad esempio sono spazi vettoriali:

1. i vettori geometrici dove:
 - l'elemento neutro e' il vettore nullo;
 - la somma e' definita tramite la regola del parallelogramma;
 - il prodotto per scalare e' definito nel modo usuale;
2. i vettori colonna $n \times 1$ o i vettori riga $1 \times n$ dove:
 - l'elemento neutro e' il vettore composto da n elementi 0;
 - la somma e' definita come somma tra componenti;
 - il prodotto per scalare e' definito come prodotto tra lo scalare e ciascuna componente;
3. le matrici $n \times m$, indicate con $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$;
4. i polinomi di grado minore o uguale a n , indicati con $\mathbb{K}[x]^{\leq n}$;
5. tutti i polinomi, indicati con $\mathbb{K}[x]$.

Definizione 2.1.3 (Sottospazio vettoriale)

Sia V uno spazio vettoriale, $A \subseteq V$. Allora si dice che A è un sottospazio vettoriale di V (o semplicemente sottospazio) se

$$\mathbf{0}_V \in A \quad (31)$$

$$(v + w) \in A \quad \forall v, w \in A \quad (32)$$

$$(kv) \in A \quad \forall k \in \mathbb{R}, v \in A \quad (33)$$

Proposizione 2.1.4

Le soluzioni di un sistema omogeneo $Ax = \mathbf{0}$ con n variabili formano un sottospazio di \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. Chiamiamo S l'insieme delle soluzioni. Dato che le soluzioni sono vettori colonna di n elementi, $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Verifichiamo ora le condizioni per cui S è un sottospazio di \mathbb{R}^n :

1. $\mathbf{0}$ appartiene a S , poiché $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$;
2. Se x, y appartengono ad S , allora $A(x + y) = Ax + Ay = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, dunque $x + y \in S$;
3. Se x appartiene ad S , allora $A(kx) = kAx = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$, dunque $kx \in S$.

Dunque S è un sottospazio di \mathbb{R}^n . □

2.2 COMBINAZIONI LINEARI E SPAN**Definizione 2.2.1** (Combinazione lineare)

Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Allora il vettore $v \in V$ si dice combinazione lineare di v_1, v_2, \dots, v_n se

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \quad (34)$$

per qualche $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.2.2 (Span)

Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, \dots, v_n \in V$. Si indica con $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ l'insieme dei vettori che si possono ottenere come combinazione lineare di v_1, \dots, v_n :

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} \quad (35)$$

Proposizione 2.2.3 (Lo span delle colonne di una matrice è la sua immagine)

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ e siano $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ le sue colonne. Allora l'immagine dell'applicazione lineare associata alla matrice è uguale allo span delle colonne della matrice.

Dimostrazione. L'immagine dell'applicazione associata alla matrice A è l'insieme di tutti i vettori del tipo $L_A(\mathbf{x}) = A \cdot (x_1 \dots x_m)^T$ al variare di $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} &= A \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \right) \\ &= A \left(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= x_1 A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_m A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ma sappiamo per la proposizione 1.1.9 che moltiplicare una matrice per un vettore che contiene tutti 0 tranne un 1 in posizione j ci dà come risultato la j -esima colonna della matrice, dunque:

$$= x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_m \mathbf{a}_m$$

Ma i vettori che appartengono allo span delle colonne di A sono tutti e solo del tipo $x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_m \mathbf{a}_m$, dunque $\text{Im } A = \text{span} \{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \}$, come volevasi dimostrare. \square

Proposizione 2.2.4 (Ogni span è un sottospazio)

Sia V uno spazio vettoriale, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. Allora $A = \text{span} \{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \} \subseteq V$ è un sottospazio di V .

Dimostrazione. Dimostriamo che valgono le tre condizioni per cui A è un sottospazio di V :

1. $\mathbf{0}_V$ appartiene ad A , in quanto basta scegliere $a_1 = \dots = a_n = 0$;
2. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in A$. Allora per qualche $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ vale che

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n) + (b_1 \mathbf{v}_1 + \dots + b_n \mathbf{v}_n) \\ &= (a_1 + b_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (a_n + b_n) \mathbf{v}_n \in A \end{aligned}$$

3. Siano $\mathbf{v} \in A, k \in \mathbb{R}$. Allora per qualche $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ vale che

$$\begin{aligned} k\mathbf{v} &= k(a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n) \\ &= (ka_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (ka_n) \mathbf{v}_n \in A \end{aligned}$$

cioè A è un sottospazio di V . \square

Vale anche l'implicazione inversa: ogni sottospazio di V può essere descritto come span di alcuni suoi vettori.

Forma parametrica e cartesiana

Proposizione 2.2.5

Ogni sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n può essere descritto in due forme:

- *forma parametrica:* come span di alcuni vettori, cioè come immagine di una matrice;
- *forma cartesiana:* come insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, cioè come kernel di una matrice.

OSSERVAZIONE. Per essere piu' precisi dovremmo parlare di immagine e di kernel dell'applicazione lineare associata alla matrice.

Esempio 2.2.6. Consideriamo il sottospazio di \mathbb{R}^3 generato dall'insieme delle soluzioni dell'equazione $3x + 4y + 5z = 0$ (forma cartesiana) e chiamiamolo W . Cerchiamo di esprimere W in forma parametrica:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 4y + 5z = 0 \right\}$$

Scegliamo y, z libere, da cui segue $x = -\frac{4}{3}y - \frac{5}{3}z$. Sostituendolo otteniamo:

$$\begin{aligned} &= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}y - \frac{5}{3}z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Se torniamo indietro notiamo che

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}y - \frac{5}{3}z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}y - \frac{5}{3}z \\ y + 0z \\ 0y + z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

che e' la definizione di immagine della matrice $\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dunque $W = \text{Im} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esempio 2.2.7. Consideriamo il sottospazio di \mathbb{R}^3 generato dallo span dei vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ (forma parametrica) e chiamiamolo W . Cerchiamo di esprimere W in forma cartesiana:

$$\begin{aligned} W &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists a, b \in \mathbb{R}. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists a, b \in \mathbb{R}. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 4b \\ 2a + 5b \\ 3a + 6b \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists a, b \in \mathbb{R}. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

dunque e' sufficiente capire in che casi il sistema ha soluzione. Risolviamo il sistema e imponiamo che non ci siano equazioni impossibili:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & x \\ 2 & 5 & y \\ 3 & 6 & z \end{array} \right) \xrightarrow[R_2-2R_1]{R_3-3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & x \\ 0 & -3 & y-2x \\ 0 & -6 & z-3x \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & x \\ 0 & -3 & y-2x \\ 0 & 0 & x-2y+z \end{array} \right)$$

Dato che non devono esserci equazioni impossibili, segue che tutti i vettori di W sono della forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $x - 2y + z = 0$. Dunque

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0 \right\}$$

e' la forma cartesiana di W .

Notiamo che dire che $x, y, z \in \mathbb{R}$ sono tali che $x - 2y + z = 0$ e' equivalente a dire che

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

cioe' W e' formato da tutti e solo i vettori che fanno parte del kernel della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, cioe' $W = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Indipendenza e dipendenza lineare

Definizione 2.2.8 (Indipendenza lineare)

Sia V uno spazio vettoriale, $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ si dice insieme di vettori linearmente indipendenti se

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \mathbf{0}_V \iff a_1 = \dots = a_n = 0 \quad (36)$$

cioe' se l'unica combinazione lineare di v_1, \dots, v_n che da' come risultato il vettore nullo e' quella con $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Possiamo usare una definizione alternativa di dipendenza lineare, equivalente alla precedente, tramite questa proposizione:

Proposizione 2.2.9 (Un vettore e' dipendente se e solo se esprimibile come combinazione lineare degli altri)

Sia V uno spazio vettoriale, $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora l'insieme dei vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ e' linearmente dipendente se e solo se almeno uno di essi e' esprimibile come combinazione lineare degli altri.

Dimostrazione. Dimostriamo entrambi i versi dell'implicazione.

- Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_n\}$ sia linearmente dipendente, cioe' che esistano a_1, \dots, a_n non tutti nulli tali che

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = \mathbf{0}_V.$$

Supponiamo senza perdita di generalita' $a_1 \neq 0$, allora segue che

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1} v_n$$

dunque v_1 puo' essere espresso come combinazione lineare degli altri vettori.

- Supponiamo che il vettore v_1 sia esprimibile come combinazione lineare degli altri (senza perdita di generalità), cioè che esistano $k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$v_1 = k_2 v_2 + \dots + k_n v_n.$$

Consideriamo una generica combinazione lineare di v_1, v_2, \dots, v_n :

$$\begin{aligned} & a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \\ &= a_1 (k_2 v_2 + \dots + k_n v_n) + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \\ &= (a_1 k_2 + a_2) v_2 + \dots + (a_1 k_n + a_n) v_n \end{aligned}$$

Se scegliamo $a_1 = 1$, $a_i = -k_i$ per ogni $2 \leq i \leq n$, otterremo

$$\begin{aligned} & (a_1 k_2 + a_2) v_2 + \dots + (a_1 k_n + a_n) v_n \\ &= (k_2 - k_2) v_2 + \dots + (k_n - k_n) v_n \\ &= 0 v_2 + \dots + 0 v_n \\ &= 0_V \end{aligned}$$

dunque esiste una scelta dei coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n diversa da $a_1 = \dots = a_n = 0$ per cui la combinazione lineare dà come risultato il vettore nullo, cioè l'insieme dei vettori non è linearmente indipendente. \square

Inoltre per comodità spesso si dice che i vettori v_1, \dots, v_n sono indipendenti, invece di dire che l'insieme formato da quei vettori è un insieme linearmente indipendente.

Proposizione 2.2.10

Sia V uno spazio vettoriale, $v \in V$ e $v_1, \dots, v_n \in V$ indipendenti. Allora i due fatti seguenti sono equivalenti:

1. $v \notin \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$;
2. v_1, \dots, v_n, v è ancora un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Dimostriamo entrambi i versi dell'implicazione.

(\implies) Supponiamo che $v \notin \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Se v_1, \dots, v_n, v è un insieme di vettori linearmente indipendenti per definizione l'unica combinazione lineare $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + b v$ che dà come risultato il vettore nullo 0 deve essere quella con coefficienti tutti nulli.

Supponiamo per assurdo $b \neq 0$. Allora

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + b v \\ \iff -b v &= a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \\ \iff v &= -\frac{a_1}{b} v_1 - \dots - \frac{a_n}{b} v_n \end{aligned}$$

cioè $v \in \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$, che però è assurdo perché per ipotesi $v \notin \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Dunque $b = 0$, cioè

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + b v \\ \iff 0 &= a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \end{aligned}$$

Tuttavia v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti, dunque l'unica scelta dei coefficienti che annulla la combinazione lineare e' quella con tutti i coefficienti nulli:

$$\iff a_1 = \dots = a_n = b = 0$$

cioe' v_1, \dots, v_n, v e' ancora un insieme di vettori linearmente indipendenti.

(\Leftarrow) Supponiamo che v_1, \dots, v_n, v sia un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Per la proposizione 2.2.9 sappiamo che un insieme di vettori e' linearmente dipendente se e solo se almeno uno di essi puo' essere scritto come combinazione lineare degli altri, cioe' se e solo se almeno uno di essi e' nello span degli altri. Ma questo e' equivalente a dire che un insieme di vettori e' linearmente indipendente se e solo se nessuno di essi e' nello span degli altri, dunque dato che v_1, \dots, v_n, v e' un insieme di vettori linearmente indipendenti segue che v non puo' appartenere a $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. \square

Proposizione 2.2.11 (Mosse di Gauss per colonna non modificano lo span)

Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora per ogni $k \in \mathbb{R}$ e per ogni $i, j \leq n$.

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_i, v_j, \dots, v_n\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_i + kv_j, v_j, \dots, v_n\}. \quad (37)$$

Dimostrazione. Supponiamo che $v \in \text{span}\{v_1, \dots, v_i, v_j, \dots, v_n\}$. Allora per definizione esisteranno $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_i v_i + a_j v_j + \dots + a_n v_n$$

Aggiungiamo e sottraiamo $a_i k v_j$ al secondo membro.

$$\begin{aligned} &= a_1 v_1 + \dots + a_i v_i + a_j v_j + \dots + a_n v_n + a_i k v_j - a_i k v_j \\ &= a_1 v_1 + \dots + a_i v_i + a_i k v_j + a_j v_j - a_i k v_j + \dots + a_n v_n \\ &= a_1 v_1 + \dots + a_i (v_i + k v_j) + (a_j - a_i k) v_j + \dots + a_n v_n \\ \implies v &\in \text{span}\{v_1, \dots, v_i + k v_j, v_j, \dots, v_n\}. \end{aligned}$$

Si dimostra l'altro verso nello stesso modo.

Dunque in entrambi gli insiemi ci sono gli stessi elementi, cioe' i due span sono uguali. \square

Notiamo inoltre che se scambiamo due vettori o se moltiplichiamo un vettore per uno scalare otteniamo uno span equivalente a quello di partenza. Quindi possiamo "semplificare" uno span di vettori tramite mosse di Gauss per colonna, come suggerisce la prossima proposizione.

Proposizione 2.2.12

Siano $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ dei vettori colonna. Allora per stabilire quali di questi vettori sono indipendenti consideriamo la matrice A che contiene come colonna i -esima il vettore colonna v_i e riduciamola a scalini per colonna. Lo span delle colonne non nulle della matrice ridotta a scalini e' uguale allo span di v_1, \dots, v_n .

Dimostrazione. Consideriamo la matrice \bar{A} ridotta a scalini. Allora per la proposizione 2.2.11 lo span delle sue colonne e' uguale allo span dei vettori iniziali.

Tutte le colonne nulle possono essere eliminate da questo insieme, in quanto il vettore nullo e' sempre linearmente dipendente.

Le colonne rimanenti sono sicuramente linearmente indipendenti: infatti dato che la matrice è a scalini per colonna per annullare il primo pivot dobbiamo annullare il primo vettore, per annullare il secondo dobbiamo annullare il secondo e così via. Dunque lo span dei vettori colonna non nulli rimanenti è uguale allo span dei vettori iniziali. \square

Notiamo che alla fine di questo procedimento otteniamo vettori colonna che sono diversi dai vettori iniziali, ma questi vettori hanno pivot ad "altezze diverse".

Esempio 2.2.13. Siano $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si trovi un insieme di vettori di \mathbb{R}^3 indipendenti con lo stesso span di v_1, v_2, v_3, v_4 .

SOLUZIONE. Per la proposizione precedente mettiamo i vettori come colonne di una matrice e semplifichiamola tramite mosse di colonna:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[C_4+C_1]{C_2-3C_1, C_3-2C_1} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & -7 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[C_4-C_2]{C_3+2C_2} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -13 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{C_4-\frac{2}{13}C_3} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -13 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dunque i vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix}$ sono indipendenti e per la proposizione precedente vale che

$$\text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \text{span}\{w_1, w_2, w_3\}.$$

2.3 GENERATORI E BASI

Definizione 2.3.1 (Insieme di generatori)

Sia V uno spazio vettoriale, $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora si dice che v_1, \dots, v_n è un insieme di generatori di V , oppure che l'insieme v_1, \dots, v_n genera V , se

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = V. \quad (38)$$

Per comodità spesso si dice che i vettori v_1, \dots, v_n sono generatori di V , invece di dire che l'insieme formato da quei vettori è un insieme di generatori.

Definizione 2.3.2 (Base di uno spazio vettoriale)

Sia V uno spazio vettoriale, $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora si dice che $\mathcal{B} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ è una base di V se

- i vettori v_1, \dots, v_n generano V ;
- i vettori v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti.

Definizione 2.3.3 (Dimensione di uno spazio vettoriale)

Sia V uno spazio vettoriale. Allora il numero di vettori in una sua base

si dice dimensione dello spazio vettoriale V , e si indica con $\dim V$.

Sapendo che un insieme di vettori genera un sottospazio di \mathbb{R}^n (o \mathbb{R}^n stesso) si può trovare una base del sottospazio (o di \mathbb{R}^n) disponendo i vettori come colonne di una matrice e semplificandoli, come abbiamo visto in precedenza. Tuttavia se vogliamo **estrarre una base** dal nostro insieme di vettori allora possiamo procedere in un modo leggermente diverso, che utilizza le mosse di Gauss per riga.

Proposizione 2.3.4 (Algoritmo di estrazione di una base)

Siano $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ dei vettori che generano $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio di \mathbb{R}^n . Allora possiamo porre i vettori come colonne di una matrice e ridurla a scalini per riga. Alla fine del procedimento i vettori che originariamente erano nelle colonne con i pivot sono indipendenti e generano V , dunque formano una base di V .

Dimostrazione. Consideriamo i k vettori indipendenti che sono nell'insieme v_1, \dots, v_m e chiamiamoli w_1, \dots, w_k . Consideriamo una loro combinazione lineare qualunque $x_1 w_1 + \dots + x_k w_k$ e la poniamo uguale a 0 ; questo è equivalente a dire

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = 0$$

dove A è la matrice le cui colonne sono i vettori w_1, \dots, w_k .

Dato che i k vettori sono indipendenti l'unica soluzione di questo sistema è il vettore nullo, dunque il sistema ha una sola soluzione e quindi deve avere 0 variabili libere, cioè il numero di pivot della matrice ridotta a scalini deve essere uguale al numero di colonne.

Se aggiungessimo vettori non indipendenti a questo insieme per definizione di dipendenza lineare allora non avremmo più una singola soluzione, dunque le colonne che abbiamo aggiunto non possono contenere pivot. \square

Notiamo che alla fine del procedimento non otteniamo dei vettori colonna che generano il nostro sottospazio, ma dobbiamo andarli a scegliere dall'insieme iniziale: in questo senso possiamo estrarre una base da un insieme di generatori.

Esempio 2.3.5. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $V = \text{span} \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ dove

$$c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Si estragga una base di V da questi quattro vettori.

SOLUZIONE. Utilizziamo il metodo proposto dalla proposizione precedente.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 - \frac{1}{2}R_2]{R_3 - \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -2 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \times 6]{R_2 \times \frac{1}{2}, R_3 \times 2} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 & -3 & -2 \\ 0 & -9 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 - 9R_2]{R_3 - 7R_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{R_4 - \frac{1}{3}R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notiamo dunque che i pivot sono nelle colonne 1, 2 e 3, che corrispondono ai vettori c_1, c_2, c_3 che per la proposizione precedente sono indipendenti e generano V , dunque $\langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ e' una base di V .

Proposizione 2.3.6

Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di n vettori di V . Se valgono due dei seguenti fatti

- $n = \dim V$;
- $\{v_1, \dots, v_n\}$ e' un insieme di generatori di V ;
- $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti;

allora vale anche il terzo e $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ e' una base di V .

Esempio 2.3.7. Consideriamo lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a due $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$. Mostrare che $\alpha = \langle 1, (x-1), (x-1)^2 \rangle$ e' una base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

SOLUZIONE. Sappiamo che la base standard di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ e' la base $\langle 1, x, x^2 \rangle$, dunque $\dim(\mathbb{R}[x]^{\leq 2}) = 3$. Dato che la base α ha esattamente 3 vettori, per la proposizione 2.3.6 ci basta dimostrare una tra:

- i tre vettori sono indipendenti;
- i tre vettori generano $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

Per esercizio, verifichiamole entrambe.

- Verifichiamo che sono linearmente indipendenti: consideriamo una generica combinazione lineare dei tre vettori e poniamola uguale al vettore $\mathbf{0} = 0 + 0x + 0x^2$.

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + b \cdot (x-1) + c \cdot (x-1)^2 &= 0 + 0x + 0x^2 \\ \iff a + bx - b + cx^2 - 2cx + c &= 0 + 0x + 0x^2 \\ \iff (a - b + c) + (b - 2c)x + cx^2 &= 0 + 0x + 0x^2 \end{aligned}$$

Dunque a, b, c devono soddisfare il seguente sistema:

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione solo per $a = b = c = 0$. Dunque i tre vettori sono indipendenti e, sapendo che $\dim(\mathbb{R}[x]^{\leq 2}) = 3$, sono una base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

- Verifichiamo che i tre vettori generano $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$. Un modo per farlo e' verificare che i vettori che compongono la base canonica di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ sono nello span di $\{1, (x-1), (x-1)^2\}$: infatti, dato che la base canonica genera tutto lo spazio, se essa e' nello span anche tutto il resto dello spazio sara' nello span dei nostri tre vettori.
 - $1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x-1)^2$, dunque $1 \in \text{span}\{1, (x-1), (x-1)^2\}$
 - $x = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x-1)^2$, dunque $x \in \text{span}\{1, (x-1), (x-1)^2\}$
 - Dato che non e' immediato vedere come scrivere x^2 in termini di $1, (x-1), (x-1)^2$ cerchiamo di trovare i coefficienti algebricamente:

$$\begin{aligned} x^2 &= a \cdot 1 + b \cdot (x-1) + c \cdot (x-1)^2 \\ &= (a - b + c) + (b - 2c)x + cx^2 \end{aligned}$$

dunque uguagliando i coefficienti dei termini dello stesso grado otteniamo

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ c = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Quindi x^2 e' esprimibile come combinazione lineare di $1, (x - 1), (x - 1)^2$ (in particolare $x^2 = 1 + 2(x - 1) + (x - 1)^2$), dunque

$$x^2 \in \text{span} \{1, (x - 1), (x - 1)^2\}.$$

Abbiamo quindi verificato che i vettori che formano la base canonica di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ fanno parte dello span dei nostri tre vettori, dunque se la base canonica genera tutto lo spazio anche $\{1, (x - 1), (x - 1)^2\}$ sono generatori. Inoltre, dato che $\dim(\mathbb{R}[x]^{\leq 2}) = 3$ segue che $\langle 1, (x - 1), (x - 1)^2 \rangle$ e' una base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

Definizione 2.3.8 (Vettore delle coordinate rispetto ad una base)

Sia V uno spazio vettoriale, $v \in V$ e $\mathcal{B} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ una base di V . Allora si dice vettore delle coordinate di v rispetto a \mathcal{B} il vettore colonna

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (39)$$

tale che

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \quad (40)$$

Proposizione 2.3.9 (Unicit  delle coordinate rispetto ad una base)

Sia V uno spazio vettoriale, $v \in V$ e $\mathcal{B} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ una base di V . Allora le coordinate di v rispetto a \mathcal{B} sono uniche.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due vettori colonna distinti a, b che rappresentino le coordinate di v rispetto a \mathcal{B} . Allora

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_V &= v - v \\ &= (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) - (b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) \\ &= (a_1 - b_1) v_1 + \dots + (a_n - b_n) v_n \end{aligned}$$

Ma per definizione di base v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti, dunque l'unica combinazione lineare che da' come risultato il vettore $\mathbf{0}_V$ e' quella in cui tutti i coefficienti sono 0. Da cio' segue che

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0 \\ \implies a &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = b \end{aligned}$$

cioe' i due vettori sono uguali. Ma cio' e' assurdo poiche' abbiamo supposto $a \neq b$, dunque le coordinate di v rispetto a \mathcal{B} devono essere uniche. \square

Esempio 2.3.10. Sia $V \subseteq \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tale che V e' il sottospazio delle matrici simmetriche. Trovare una base di V e trovare le coordinate di $u = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \in V$ rispetto alla base trovata.

SOLUZIONE. Cerco di esprimere un generico vettore $v \in V$ in termini della condizione che definisce il sottospazio.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Isolando i contributi di a, b e c ottengo

$$\begin{aligned} &= \left\{ v \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \exists a, b, c \in \mathbb{R}. v = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \exists a, b, c \in \mathbb{R}. v = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ora dobbiamo mostrare che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti. Consideriamo una loro generica combinazione lineare e imponiamola uguale a 0:

$$\begin{aligned} x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \iff x = y = z &= 0. \end{aligned}$$

Dunque $\mathcal{B} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ e' una base di V .

Per trovare le coordinate di u esprimiamo in termini della base:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{dunque } [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che sembra esserci una relazione biunivoca tra un vettore di V e le sue coordinate in \mathbb{R}^n rispetto ad una base. Infatti (come vedremo nella prossima parte) la relazione tra vettore di V e vettore colonna delle sue coordinate e' un isomorfismo: essi rappresentano lo stesso oggetto sotto forme diverse. Quindi spesso per fare calcoli (ad esempio semplificare un insieme di vettori per trovare una base) possiamo passare allo spazio isomorfo \mathbb{R}^n , sfruttare i vettori colonna e le matrici (ad esempio facendo mosse di Gauss per riga o per colonna) e infine passare di nuovo allo spazio originale.

Abbiamo mostrato come estrarre una base di un sottospazio a partire da un insieme di generatori. Ora vogliamo **completare una base** di un sottospazio ad una base dello spazio vettoriale che lo contiene.

Teorema 2.3.11 (Teorema del completamento ad una base)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n = \dim V$ e sia $\mathcal{B} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ un insieme di k vettori linearmente indipendenti. Allora vale che $k \leq n$ ed esistono $n - k$ vettori di V , diciamo w_1, \dots, w_{n-k} tali che $\mathcal{B}' = \langle v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k} \rangle$ e' una base di V .

Dimostrazione. Non possono esserci piu' di n vettori indipendenti in uno spazio di dimensione n , dunque $k \leq n$. Ora dimostriamo che possiamo completare \mathcal{B} ad una base di V .

Se $k = n$ allora per la proposizione 2.3.6 gli n vettori indipendenti sono già una base, dunque abbiamo finito.

Se $k < n$ allora esisterà sicuramente $w_1 \notin \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ (altrimenti i vettori genererebbero l'intero spazio vettoriale e sarebbero quindi una base), dunque $\langle v_1, \dots, v_k, w_1 \rangle$ sono ancora indipendenti.

Continuiamo a ripetere questo processo fino a quando l'insieme di vettori non genera l'intero spazio vettoriale V . Sia \mathcal{B}' l'insieme creato tramite questo processo. Allora \mathcal{B}' è un insieme di vettori indipendenti che generano V , dunque è una base di V , dunque dovrà contenere n vettori. Ma dato che inizialmente avevamo k vettori, per completare ad una base di V abbiamo dovuto aggiungere $n - k$ vettori di V . \square

Procedimento per completare ad una base di \mathbb{R}^n

Sia $V = \mathbb{R}^n$ e siano $\{v_1, \dots, v_k\}$ indipendenti.

Allora formo la matrice M che ha come colonne i vettori v_1, \dots, v_k e la riduco a scalini per colonna tramite mosse di Gauss di colonna, ottenendo una matrice M' che ha come colonne i vettori v'_1, \dots, v'_k .

Questi vettori sono indipendenti (poiché le mosse di colonna non modificano lo span) e sono a scalini, dunque dovranno avere pivot su righe diverse, e dovranno averne esattamente $k \leq n$. Allora aggiungo $n - k$, ognuno con un pivot su una riga diversa da quelle già occupate: la matrice finale sarà una matrice quadrata con n pivot, dunque sarà formata da colonne indipendenti che formano una base di \mathbb{R}^n .

Esempio 2.3.12. Sia $V = \mathbb{R}^4$, $A \subseteq V$ tale che

$$A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

Trovare una base di A e completarla ad una base di \mathbb{R}^4 .

SOLUZIONE. Troviamo una base di A tramite mosse di colonna:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{scambio}} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{C}_4 - 2\text{C}_1]{\text{C}_3 - 3\text{C}_1} \\ & \xrightarrow[\text{C}_4 - 2\text{C}_1]{\text{C}_3 - 3\text{C}_1} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{C}_3 + 2\text{C}_1} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{C}_4 + \text{C}_3} \\ & \xrightarrow{\text{C}_4 + \text{C}_3} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dunque una base di A è formata dai vettori $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\rangle$.

Notiamo che i pivot di questi vettori sono ad altezza 1, 2 e 3, dunque per completare ad una base di \mathbb{R}^4 basta aggiungere un vettore che ha un pivot ad altezza 4, come $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dunque abbiamo completato la base di A alla seguente base di \mathbb{R}^4 :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2.4 SOTTOSPAZI SOMMA E INTERSEZIONE

Definizione 2.4.1 (Sottospazio somma e intersezione)

Sia V uno spazio vettoriale e siano $A, B \subseteq V$ due sottospazi di V . Allora sono sottospazi vettoriali di V :

$$A \cap B = \{v \in V \mid v \in A, v \in B\} \quad (41a)$$

$$A + B = \{(v + w) \in V \mid v \in A, w \in B\} \quad (41b)$$

Osservazione. Possiamo verificare molto semplicemente che i due spazi sopra sono effettivamente sottospazi di V . Inoltre $A \cup B$ non è un sottospazio vettoriale, ma possiamo notare che $(A \cup B) \subset (A + B)$ in quanto $A \subset A + B$ e $B \subset A + B$.

Proposizione 2.4.2

Sia V uno spazio vettoriale e siano $A, B \subseteq V$ due sottospazi di V tali che $A = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ e $B = \text{span}\{w_1, \dots, w_m\}$. Allora

$$A + B = \text{span}\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}. \quad (42)$$

Dimostrazione. Consideriamo un generico $u \in A + B$. Allora per definizione di $A + B$ segue che $u = v + w$ per qualche $v \in A, w \in B$. Dato che $A = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ e $B = \text{span}\{w_1, \dots, w_m\}$, allora possiamo scrivere

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, \quad w = b_1 w_1 + \dots + b_m w_m$$

per qualche $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. Quindi $u = v + w$ diventa

$$\implies v + w = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + b_1 w_1 + \dots + b_m w_m$$

dunque ogni vettore in $A + B$ può essere scritto come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$, dunque questi vettori generano $A + B$. \square

Osservazione. I vettori $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$ **generano** $A + B$ ma non sono una base: dobbiamo prima assicurarci che siano linearmente indipendenti.

Definizione 2.4.3 (Somma diretta)

Sia V uno spazio vettoriale e siano $A, B \subseteq V$ due sottospazi di V . Allora il sottospazio somma $A + B$ si dice in somma diretta se per ogni $v \in A, w \in B$ allora v, w sono indipendenti. Se la somma è diretta scrivo $A \oplus B$.

Proposizione 2.4.4 (La somma è diretta se e solo se l'intersezione è vuota)

Sia V uno spazio vettoriale e siano $A, B \subseteq V$ due sottospazi di V . Allora il sottospazio somma $A + B$ è in somma diretta se e solo se $A \cap B = \{0\}$.

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che $0 \in A$ e $0 \in B$, dunque $\{0\} \subseteq A \cap B$.

(\Rightarrow) Supponiamo $A \oplus B$.

Allora supponiamo per assurdo che esista $u \in A \cap B$ non nullo. Per definizione di intersezione segue che $u \in A$ e $u \in B$, ma questo significa che in A e in B ci sono almeno due vettori $v \in A$ e $w \in B$ non indipendenti tra loro: basta scegliere $v = u$ e $w = u$.

Tuttavia questo e' assurdo poiche' abbiamo assunto che A e B siano in somma diretta, dunque non puo' esserci un $u \in A \cap B$ non nullo, dunque $A \cap B = \{0\}$.

(\Leftarrow) Supponiamo che $A \cap B = \{0\}$.

Siano $v \in A$, $w \in B$ entrambi non nulli. Per dimostrare che A e B sono in somma diretta e' sufficiente dimostrare che sono necessariamente indipendenti, cioe' che l'unica combinazione lineare $av + bw$ che e' uguale a 0 e' quella con $a = b = 0$.

Notiamo che $av + bw = 0$ se e solo se $av = -bw$; ma dato che i due vettori (che fanno parte di sottospazi diversi) sono uguali segue che devono entrambi far parte del sottospazio intersezione, cioe' $av, -bw \in A \cap B$.

Per ipotesi $A \cap B = \{0\}$, dunque $av = -bw = 0$. Inoltre abbiamo assunto che i vettori v e w siano non nulli, dunque segue che $a = b = 0$, come volevasi dimostrare. \square

Teorema 2.4.5 (Teorema di Grassman)

Sia V uno spazio vettoriale e $A, B \subseteq V$ due sottospazi. Allora

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B). \quad (43)$$

Dimostrazione. Consideriamo una base $\gamma = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ di $A \cap B$.

Dato che $A \cap B$ e' un sottospazio sia di A che di B , allora per il teorema del completamento ad una base (2.3.11) possiamo completarla ad una base $\alpha = \langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n \rangle$ di A e ad una base $\beta = \langle u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m \rangle$ di B .

Dimostriamo che $\langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m \rangle$ e' una base di $A + B$.

- Mostriamo che $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ generano $A + B$.

Sia $u \in A + B$ generico. Allora esistono $v \in A, w \in B$ tali che $u = v + w$. Dato che α e' una base di A e β e' una base di B allora possiamo scrivere v e w come

$$\begin{aligned} v &= a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + a_{k+1} v_1 + \dots + a_{k+n} v_n \\ w &= b_1 u_1 + \dots + b_k u_k + b_{k+1} w_1 + \dots + b_{k+m} w_m \end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned} u &= v + w \\ &= a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + a_{k+1} v_1 + \dots + a_{k+n} v_n + \\ &\quad + b_1 u_1 + \dots + b_k u_k + b_{k+1} w_1 + \dots + b_{k+m} w_m \\ &= (a_1 + b_1) u_1 + \dots + (a_k + b_k) u_k + \\ &\quad + a_{k+1} v_1 + \dots + a_{k+n} v_n + \\ &\quad + b_{k+1} w_1 + \dots + b_{k+m} w_m. \end{aligned}$$

Dunque ogni elemento di $A + B$ puo' essere scritto come combinazione lineare di $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$, cioe' essi sono generatori di $A + B$.

- Mostriamo che $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ e' un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Consideriamo una combinazione lineare dei vettori $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$ e verifichiamo che essa e' uguale al vettore 0 se e solo se tutti i coefficienti sono uguali a 0 .

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 v_1 + \dots + x_n v_n + y_1 u_1 + \dots + y_k u_k + z_1 w_1 + \dots + z_m w_m \\ \iff x_1 v_1 + \dots + x_n v_n &= -(y_1 u_1 + \dots + y_k u_k + z_1 w_1 + \dots + z_m w_m). \end{aligned}$$

Notiamo che il primo membro e' un vettore del sottospazio A , mentre il secondo membro e' un vettore del sottospazio B : dato che i due vettori sono uguali allora devono trovarsi in entrambi i sottospazi e dunque anche nel sottospazio $A \cap B$. Dato che γ e' una base di $A \cap B$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} x_1 v_1 + \dots + x_n v_n &= a_1 u_1 + \dots + a_k u_k \\ \iff x_1 v_1 + \dots + x_n v_n - a_1 u_1 - \dots - a_k u_k &= 0 \end{aligned}$$

ma $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n$ formano una base di A , dunque devono essere indipendenti, quindi per definizione segue che

$$\iff x_1 = \dots = x_n = 0$$

Dunque nella combinazione lineare i termini con v_i scompaiono, e rimangono solo

$$0 = y_1 u_1 + \dots + y_k u_k + z_1 w_1 + \dots + z_m w_m$$

ma questi vettori formano la base β di B , dunque devono essere indipendenti, cioe' per definizione

$$\iff y_1 = \dots = y_k = z_1 = \dots = z_m = 0.$$

Segue quindi che $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ e' un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Dato che l'insieme $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ e' un insieme di vettori linearmente indipendenti e genera $A + B$, allora esso e' una base di $A + B$.

Dunque

$$\begin{aligned} \dim(A + B) &= n + k + m \\ &= (n + k) + (m + k) - k \\ &= \dim A + \dim B - \dim(A \cap B) \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. □

APPLICAZIONI LINEARI

3.1 APPLICAZIONI LINEARI

Definizione 3.1.1 (Applicazione lineare)

Siano V, W spazi vettoriali. Allora un'applicazione $f : V \rightarrow W$ si dice lineare se

$$f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W \quad (44)$$

$$f(v + w) = f(v) + f(w) \quad \forall v, w \in V \quad (45)$$

$$f(kv) = kf(v) \quad \forall v \in V, k \in \mathbb{R} \quad (46)$$

V si dice dominio dell'applicazione lineare, W si dice codominio.

Definizione 3.1.2 (Immagine di un'applicazione lineare)

Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \rightarrow W$ lineare. Allora si dice immagine di f l'insieme

$$\text{Im } f = \{f(v) \mid v \in V\}. \quad (47)$$

OSSERVAZIONE. Se $f : V \rightarrow W$ allora $\text{Im } f \subseteq W$. In particolare si può dimostrare che $\text{Im } f$ è un sottospazio di W , e dunque che $0 \leq \dim \text{Im } f \leq \dim W$.

Definizione 3.1.3 (Kernel di un'applicazione lineare)

Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \rightarrow W$ lineare. Allora si dice kernel (o nucleo) di f l'insieme

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \mathbf{0}_W\}. \quad (48)$$

Proposizione 3.1.4 (Una funzione mappa una base del dominio in un insieme di generatori del codominio)

Sia $f : V \rightarrow W$. Allora se $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ è una base di V segue che $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è un insieme di generatori di $\text{Im } f$.

Dimostrazione. Sia $w \in \text{Im } f$ generico; allora questo equivale a dire che esiste $v \in V$ tale che $f(v) = w$. Dato che $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ è una base di V , allora possiamo scrivere v come $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, dunque

$$w = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n).$$

Dunque per la generalità di w segue che ogni elemento di $\text{Im } f$ appartiene allo span di $f(v_1), \dots, f(v_n)$, cioè $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è un insieme di generatori di $\text{Im } f$. \square

Teorema 3.1.5 (Teorema delle dimensioni)

Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \rightarrow W$ lineare. Allora vale il seguente fatto:

$$\dim V = \dim \text{Im } f + \dim \ker f. \quad (49)$$

Dimostrazione. Sia k la dimensione di $\ker f$ e n la dimensione di V . Sia $\alpha = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ una base di $\ker f$. Dato che $\ker f$ e' un sottospazio di V , per il teorema del completamento ad una base (2.3.11) possiamo completare α ad una base $\beta = \langle v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{n-k} \rangle$ di V .

Per la proposizione 3.1.4 segue che l'immagine della base β , cioe' $f(\beta) = \langle f(v_1), \dots, f(v_k), f(u_1), \dots, f(u_{n-k}) \rangle$, e' una insieme di generatori di $\operatorname{Im} f$. Dato che $v_1, \dots, v_k \in \ker f$, allora

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{span} \{f(v_1), \dots, f(v_k), f(u_1), \dots, f(u_{n-k})\} \\ &= \operatorname{span} \{0, \dots, 0, f(u_1), \dots, f(u_{n-k})\} \\ &= \operatorname{span} \{f(u_1), \dots, f(u_{n-k})\}. \end{aligned}$$

Se $f(u_1), \dots, f(u_{n-k})$ sono indipendenti allora segue che essi formano una base di $\operatorname{Im} f$, cioe' che $\dim \operatorname{Im} f = n - k = \dim V - \dim \ker f$.

Consideriamo quindi una generica combinazione lineare

$$x_1 f(u_1) + \dots + x_{n-k} f(u_{n-k})$$

e dimostriamo che imponendola uguale a 0 segue che i coefficienti della combinazione devono essere uguali a 0 .

$$\begin{aligned} x_1 f(u_1) + \dots + x_{n-k} f(u_{n-k}) &= 0 \\ \iff f(x_1 u_1 + \dots + x_{n-k} u_{n-k}) &= 0 \end{aligned}$$

che per definizione di kernel significa

$$\iff x_1 u_1 + \dots + x_{n-k} u_{n-k} \in \ker f.$$

Dato che α e' una base di $\ker f$ allora segue che

$$\begin{aligned} x_1 u_1 + \dots + x_{n-k} u_{n-k} &= a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \\ \iff x_1 u_1 + \dots + x_{n-k} u_{n-k} - a_1 v_1 - \dots - a_k v_k &= 0. \end{aligned}$$

Ma $\beta = \langle v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{n-k} \rangle$ e' una base di V , dunque i vettori che la compongono devono essere indipendenti, da cui segue

$$x_1 = \dots = x_{n-k} = 0.$$

Dunque $\langle f(u_1), \dots, f(u_{n-k}) \rangle$ e' una base di $\operatorname{Im} f$ e dunque segue che $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$, come volevasi dimostrare. \square

Una conseguenza diretta del teorema delle dimensioni e' che data una matrice A e riducendola a scalini tramite mosse di riga non cambia la dimensione dello spazio delle colonne.

Proposizione 3.1.6 (La dimensione dello spazio delle colonne e' invariante sotto mosse di riga)

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ e siano $C_1, \dots, C_m \in \mathbb{R}^n$ le colonne della matrice. Sia S la matrice ottenuta riducendo a scalini per riga la matrice A , e siano C'_1, \dots, C'_m le colonne di S . Allora

$$\dim \operatorname{span} \{C_1, \dots, C_m\} = \dim \operatorname{span} \{C'_1, \dots, C'_m\}. \quad (50)$$

Dimostrazione. Dato che S e' ottenuta riducendo A a scalini, allora le soluzioni dei sistemi $Ax = 0$ e $Sx = 0$ devono essere le stesse.

Siano $L_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $L_S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ le applicazioni lineari associate ad A e S ; trascrivendo le equazioni di prima in termini delle applicazioni otteniamo che $L_A(x) = 0$ se e solo se $L_S(x) = 0$.

Allora segue che $\ker L_A = \ker L_S$, dunque $\dim \ker L_A = \dim \ker L_S$. Per la proposizione 2.2.3 e per il teorema delle dimensioni (3.1.5) segue quindi che

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{span} \{C_1, \dots, C_m\} &= \dim \operatorname{Im} L_A \\ &= \dim \mathbb{R}^m - \dim \ker L_A \\ &= \dim \mathbb{R}^m - \dim \ker L_S \\ &= \dim \operatorname{Im} L_S \\ &= \dim \operatorname{span} \{C'_1, \dots, C'_m\} \end{aligned}$$

che e' la tesi. \square

Ovviamente lo stesso ragionamento ci dice che ridurre una matrice a scalini tramite mosse di colonna non cambia la dimensione dello spazio delle righe.

Corollario 3.1.7 (La dimensione dello spazio delle righe e' invariante sotto mosse di colonna)

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ e siano $R_1, \dots, R_m \in \mathbb{R}^n$ le righe della matrice. Sia S la matrice ottenuta riducendo a scalini per colonna la matrice A , e siano R'_1, \dots, R'_m le righe di S . Allora

$$\dim \operatorname{span} \{R_1, \dots, R_m\} = \dim \operatorname{span} \{R'_1, \dots, R'_m\}. \quad (51)$$

Dimostrazione. Consideriamo la matrice A^T e riduciamola per righe, ottenendo la matrice S . Per la proposizione 3.1.6 la dimensione dello spazio delle righe di S e' uguale alla dimensione dello spazio delle righe di A^T . Notiamo inoltre che S e' la trasposta della matrice ottenuta riducendo A per colonne, dunque la dimensione dello spazio delle colonne di S^T e' la dimensione dello spazio delle colonne di A , cioe' la tesi. \square

3.2 APPLICAZIONI INIETTIVE E SURGETTIVE

Le applicazioni lineari sono funzioni, dunque possono essere iniettive e surgettive, ma essendo lineari hanno delle proprieta' particolari.

Definizione 3.2.1 (Applicazione iniettiva)

Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \rightarrow W$ lineare. Allora f si dice iniettiva se per ogni $v, u \in V$ vale che $f(v) = f(u)$ se e solo se $v = u$.

Proposizione 3.2.2 (Un'applicazione e' iniettiva se e solo se il kernel e' nullo)

Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \rightarrow W$ lineare. Allora f e' iniettiva se e solo se $\ker f = \{0_V\}$.

Dimostrazione. Notiamo che dato che f e' lineare allora per definizione $f(0_V) = 0_W$, dunque $0_V \in \ker f$.

(\implies). Supponiamo che f sia iniettiva e supponiamo che per qualche $v \in V$ valga $v \in \ker f$. Allora per definizione di kernel $f(v) = 0_W = f(0_V)$, dunque per iniettivita' di f da $f(v) = f(0_V)$ segue che $v = 0_V$. Dunque $\ker f = \{0_V\}$.

(\Leftarrow). Supponiamo che $\ker f = \{0_V\}$. Per dimostrare che f è iniettiva è sufficiente dimostrare che per ogni $v, w \in V$ segue che $f(v) = f(w) \Rightarrow v = w$.

$$\begin{aligned} f(v) &= f(w) \\ \Leftrightarrow f(v) - f(w) &= 0_W \\ \Leftrightarrow f(v - w) &= 0_W \\ \Leftrightarrow v - w &\in \ker f \end{aligned}$$

ma l'unico elemento di $\ker f$ è 0_V , dunque

$$\begin{aligned} \Rightarrow v - w &= 0_V \\ \Leftrightarrow v &= w \end{aligned}$$

cioè f è iniettiva. □

Corollario 3.2.3 (L'immagine di un'applicazione iniettiva ha la stessa dimensione del dominio)

Se f è iniettiva allora $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

Dimostrazione. Infatti per la proposizione 3.2.2 $\dim \ker f = 0$, dunque per il teorema delle dimensioni (3.1.5) segue che $\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f$. □

Corollario 3.2.4

Siano V, W spazi vettoriali tali che $\dim V > \dim W$. Allora non può esistere $f : V \rightarrow W$ iniettiva.

Dimostrazione. Infatti per il corollario 3.2.3 segue che $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$, ma $\dim \operatorname{Im} f < \dim W$ dunque non può essere che $\dim V > \dim W$. □

Proposizione 3.2.5 (Un'applicazione iniettiva mappa insiemi linearmente indipendenti in insiemi linearmente indipendenti)

Siano V, W spazi vettoriali, $v_1, \dots, v_n \in V$ linearmente indipendenti e sia $f : V \rightarrow W$ lineare. Se f è iniettiva allora segue che $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Consideriamo una combinazione lineare di $f(v_1), \dots, f(v_n)$ e dimostriamo che imponendola uguale al vettore nullo segue che i coefficienti devono essere tutti nulli.

$$\begin{aligned} x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n) &= 0_W \\ \Leftrightarrow f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) &= 0_W \end{aligned}$$

Per la proposizione 3.2.2 segue che

$$\Leftrightarrow x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0_V$$

Ma i vettori v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti, dunque l'unica combinazione lineare che li annulla è quella a coefficienti nulli, cioè

$$\Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$$

Quindi una combinazione lineare di $f(v_1), \dots, f(v_n)$ è uguale al vettore nullo se e solo se tutti i coefficienti sono nulli, dunque $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti. □

Definizione 3.2.6 (Surgettiva)

Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \rightarrow W$ lineare. Allora f si dice surgettiva se per ogni $w \in W$ esiste $v \in V$ tale che $f(v) = w$.

OSSERVAZIONE. Una funzione $f : V \rightarrow W$ è surgettiva se e solo se $\text{Im } f = W$.

Corollario 3.2.7 (Un'applicazione surgettiva mappa una base del dominio ad un insieme di generatori del codominio)

Sia $f : V \rightarrow W$ surgettiva. Allora se $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ è una base di V segue che $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è un insieme di generatori di W .

Dimostrazione. Segue direttamente dalla proposizione 3.1.4: infatti se una funzione è surgettiva allora $\text{Im } f = W$, dunque se $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è un insieme di generatori di $\text{Im } f$ segue che è anche un insieme di generatori di W . \square

3.3 ISOMORFISMI

Definizione 3.3.1 (Applicazione bigettiva)

Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \rightarrow W$ lineare. Allora f si dice bigettiva se f è sia iniettiva che surgettiva.

Definizione 3.3.2 (Applicazione invertibile)

Una funzione $f : V \rightarrow W$ si dice invertibile se esiste $f^{-1} : W \rightarrow V$ tale che

$$f(v) = w \iff f^{-1}(w) = v \quad (52)$$

Se f è invertibile allora f^{-1} è unica e si chiama inversa di f .

OSSERVAZIONE. Un'applicazione lineare è invertibile se e solo se è bigettiva.

Definizione 3.3.3 (Isomorfismo)

Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \rightarrow W$ lineare. Allora se f è bigettiva si dice che f è un isomorfismo.

Se esiste un isomorfismo tra gli spazi V e W allora si dice che V è isomorfo a W , e si indica con $V \cong W$.

OSSERVAZIONE. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f è bigettiva;
- f è invertibile;
- f è un isomorfismo.

Gli isomorfismi preservano la linearità dello spazio vettoriale e tutte le sue proprietà, come ci dicono le seguenti proposizioni.

Proposizione 3.3.4 (Un isomorfismo mappa una base del dominio in una base del codominio)

Sia V uno spazio vettoriale, $\alpha = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ una base di V . Allora se $f : V \rightarrow W$ è un isomorfismo segue che $\beta = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$ è una base di W (cioè' gli isomorfismi mappano basi in basi).

Dimostrazione. Dato che f è un isomorfismo allora f è bigettiva.

Dunque dato che f è iniettiva essa mappa un insieme di vettori indipendenti (come la base α di V) in un insieme di vettori linearmente indipendenti per la proposizione 3.2.5, dunque β è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Inoltre, dato che f è surgettiva, per la proposizione 3.2.7 essa mappa una base di V in un insieme di generatori del codominio W , dunque i vettori di β generano W .

Dunque β è un insieme di generatori linearmente indipendenti, e quindi è una base di W . \square

Proposizione 3.3.5 (Gli spazi isomorfi hanno la stessa dimensione)

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione $n = \dim V$, allora V è isomorfo a tutti e soli gli spazi vettoriali di dimensione n .

Dimostrazione. Deriva direttamente dalla proposizione precedente: infatti ogni isomorfismo che ha come dominio V deve portare una base di V in una base di W , dunque la dimensione di V deve essere uguale a quella di W . \square

Quindi per calcolare una base di un sottospazio W di uno spazio V spesso conviene passare allo spazio dei vettori colonna \mathbb{R}^n isomorfo allo spazio V , calcolare la base del sottospazio \tilde{W} isomorfo a W e infine tornare allo spazio di partenza.

Esempio 3.3.6. Sia $V = \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ e sia $W \subseteq V$ il sottospazio di V tale che $p \in W \iff p(2) = 0$. Dimostrare che W è un sottospazio e trovarne una base.

SOLUZIONE. Svolgiamo i due punti separatamente.

1. Dimostriamo che W è un sottospazio di V .

- Sia $0_V \in V$ tale che $0_V(x) = 0 + 0x + 0x^2$. Allora $0_V(2) = 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 = 0$, dunque $0_V \in W$.
- Supponiamo $p, q \in W$ e mostriamo che $p + q \in W$. Dunque

$$(p + q)(2) = p(2) + q(2) = 0 + 0 = 0$$

dunque $p + q \in W$.

- Supponiamo $p \in W$ e mostriamo che $kp \in W$ per un generico $k \in \mathbb{R}$. Dunque

$$(kp)(2) = kp(2) = k \cdot 0 = 0$$

cioè $kp \in W$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Dunque abbiamo dimostrato che W è un sottospazio di V .

2. Cerchiamo ora una base per W .

Consideriamo un generico $p \in V$, cioè $p(x) = a + bx + cx^2$. La condizione che definisce W è $p(2) = a + 2b + 4c = 0$.

Passiamo ora allo spazio isomorfo \mathbb{R}^3 . Il vettore corrispondente a p in \mathbb{R}^3 è $\tilde{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, mentre la condizione di appartenenza allo spazio $\tilde{W} \subseteq \mathbb{R}^3$ isomorfo a W è sempre $a + 2b + 4c = 0$. Cerchiamo una base di \tilde{W} passando alla forma parametrica, cioè cercando di esplicitare la condizione di appartenenza allo spazio e inserendola nella definizione stessa del vettore. Dato che la condizione è data dal sistema $a + 2b + 4c = 0$ che ha due variabili libere, scelgo b, c libere ottenendo $a = -2b - 4c$. Sostituendo in \tilde{p} :

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b - 4c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dato che ogni vettore generico di \tilde{W} può essere scritto come combinazione lineare dei due vettori $\tilde{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora segue che essi sono generatori di W .

Controlliamo ora che siano linearmente indipendenti riducendo a scalini per riga (secondo la proposizione 2.3.4) la matrice che ha come colonne \tilde{w}_1 e \tilde{w}_2 .

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & \\ 0 & -2 & \\ 0 & 1 & \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & \\ 0 & -2 & \\ 0 & 0 & \end{array} \right)$$

Dato che ci sono tanti pivot quante colonne segue che tutti i vettori originali sono indipendenti. I vettori \tilde{w}_1 e \tilde{w}_2 sono quindi indipendenti e generano \tilde{W} : segue che $\langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \rangle$ è una base di \tilde{W} , quindi $\dim \tilde{W} = 2$.

Tornando allo spazio originale, i vettori corrispondenti alla base sono quindi $w_1(x) = (-2 + x)$ e $w_2(x) = (-4 + x^2)$. L'insieme ordinato $\langle (-2 + x), (-4 + x^2) \rangle$ forma dunque una base di W e dunque $\dim W = 2$.

3.4 MATRICE ASSOCIATA AD UNA FUNZIONE

Come avevamo visto nel primo capitolo, le matrici sono associate ad applicazioni lineari da vettori colonna in vettori colonna. Possiamo generalizzare questo concetto e definire una matrice associata ad ogni applicazione lineare.

Definizione 3.4.1 (Matrice associata ad un'applicazione)

Siano V, W spazi vettoriali, $f : V \rightarrow W$ lineare, α base di V e β base di W . Allora si dice che chiama **matrice associata all'applicazione lineare** f la matrice $[f]_{\beta}^{\alpha}$ tale che

$$\forall v \in V. \quad [f]_{\beta}^{\alpha} \cdot (v)_{\alpha} = (f(v))_{\beta}. \quad (53)$$

Ovvero se f mappa v a w allora $[f]_{\beta}^{\alpha}$ è una matrice che porta (tramite il prodotto) il vettore colonna delle coordinate di v rispetto ad una base α nel vettore colonna delle coordinate di w rispetto ad una base β .

Per trovare la matrice associata ad f rispetto alle basi $\alpha = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ e $\beta = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$ possiamo seguire questo procedimento:

- calcoliamo $f(v_1) = u_1, \dots, f(v_n) = u_n$;
- scriviamo u_i in termini della base β , cioè

$$u_i = a_{1i}w_1 + \dots + a_{mi}w_m \iff [u_i]_{\beta} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix};$$

- notiamo che dato che v_i è l' i -esimo vettore della base α , allora la sua rappresentazione in termini della base sarà un vettore colonna con tutti 0 tranne un 1 in posizione i ;
- per la proposizione 1.1.9 il risultato del prodotto $[f]_{\beta}^{\alpha} \cdot (v_i)_{\alpha}$ sarà l' i -esima colonna della matrice $[f]_{\beta}^{\alpha}$, ma $[f]_{\beta}^{\alpha} \cdot (v_i)_{\alpha}$ deve essere uguale a $[f(v_i)]_{\beta} = [u_i]_{\beta}$, dunque l' i -esima colonna di $[f]_{\beta}^{\alpha}$ sarà data dal vettore colonna $[u_i]_{\beta}$;

- dunque la matrice avr  per colonne i vettori $[u_1]_\beta, \dots, [u_n]_\beta$, cio 

$$[f]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Esempio 3.4.2. Sia $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e sia $\alpha = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ una sua base. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in V$ e $f : V \rightarrow V$ tale che $f(B) = AB - BA$.

1. Dimostrare che f   lineare.
2. Calcolare $[f]_\alpha^\alpha$.
3. Dare una base di $\text{Im } f$.
4. Dare una base di $\ker f$.

SOLUZIONE. Verifichiamo i quattro punti.

1. Dimostriamo che f   lineare.

$$(a) f(\mathbf{0}) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} (b) f(B+C) &= A(B+C) - (B+C)A \\ &= AB + AC - BC - CA \\ &= (AB - BA) + (AC - CA) \\ &= f(B) + f(C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) f(kB) &= A(kB) - (kB)A \\ &= k(AB) - k(BA) \\ &= k(AB - BA) \\ &= kf(B) \end{aligned}$$

dunque f   lineare.

2. Seguo il procedimento per ottenere $[f]_\alpha^\alpha$. Innanzitutto calcolo il risultato di f sui vettori della base α :

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dunque le loro coordinate rispetto alla base α sono

$$\begin{aligned} [f(v_1)]_\alpha &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & [f(v_2)]_\alpha &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ [f(v_3)]_\alpha &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & [f(v_4)]_\alpha &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cio 

$$[f]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Per la proposizione 3.1.4 sappiamo che l'insieme $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)\}$ e' un insieme di generatori dell'immagine della funzione. Per eliminare i vettori indipendenti passiamo all'isomorfismo con \mathbb{R}^4 tramite la base di partenza α . Chiamiamo \tilde{W} lo spazio isomorfo a $\text{Im } f$, allora notiamo che il ruolo di f nel nuovo spazio e' dato dalla matrice $[f]_\alpha^\alpha$, dunque il corrispondente insieme di generatori di \tilde{W} sara'

$$\{[f]_\alpha^\alpha[v_1]_\alpha, [f]_\alpha^\alpha[v_2]_\alpha, [f]_\alpha^\alpha[v_3]_\alpha, [f]_\alpha^\alpha[v_4]_\alpha\}$$

che e' uguale a

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Semplifichiamolo tramite mosse di colonna:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_2+R_3]{R_1+R_4} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

dunque i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono indipendenti e generano \tilde{W} , dunque sono una base di \tilde{W} .

Tornando allo spazio originale otteniamo che una base di $\text{Im } f$ e' data da

$$\beta = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

e dunque $\dim \text{Im } f = 2$.

4. Per definizione di kernel

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sia $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^4$ lo spazio isomorfo a $\ker f$ tramite l'isomorfismo dato dalle coordinate dei vettori rispetto alla base α . Allora

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid [f]_\alpha^\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Dunque \tilde{V} e' formato da tutti e solo i vettori $x \in \mathbb{R}^4$ che sono soluzione del sistema lineare $[f]_\alpha^\alpha x = 0$. Risolviamolo tramite eliminazione gaussiana:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{\text{scambio}} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_4+R_1]{R_3+R_2} \\ &\xrightarrow[R_4+R_1]{R_3+R_2} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \iff \begin{cases} x - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = z \end{cases} \end{aligned}$$

dunque scegliendo $z, t \in \mathbb{R}$ libere otteniamo

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ z \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $\tilde{\gamma} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e' un insieme di generatori di \tilde{V} . Inoltre sono anche indipendenti (poiche' hanno pivot ad altezze diverse), dunque $\tilde{\gamma}$ e' una base di \tilde{V} .

Tornando tramite la base α allo spazio iniziale otteniamo che

$$\gamma = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e' una base di $\ker f$, dunque $\dim \ker f = 2$.

3.4.1 Inversa di una matrice

Definizione 3.4.3 (Matrice inversa)

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice quadrata. Allora se A e' invertibile si dice che la sua inversa e' la matrice A^{-1} tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Una matrice e' invertibile se e solo se la sua applicazione lineare associata e' invertibile, ovvero se e solo se e' bigettiva.

Proposizione 3.4.4

Siano V, W spazi vettoriali e sia $f : V \rightarrow W$. Allora vale che

$$[f]^{-1} = [f^{-1}]$$

ovvero l'inversa della matrice associata ad f e' la matrice associata all'inversa di f .

Possiamo sfruttare le inverse per risolvere sistemi lineari:

$$Ax = b \iff A^{-1}Ax = A^{-1}b \iff x = A^{-1}b.$$

Metodo di Gauss per l'inversa

Possiamo trovare la matrice inversa di una matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ in questo modo.

Consideriamo la matrice $n \times 2n$ formata affiancando alla matrice originale la matrice identita' $n \times n$, e indichiamola con $[A|I_n]$. Tramite mosse di riga riduciamo questa matrice alla forma $[I_n|B]$: allora $B = A^{-1}$.

Questa strategia funziona perche' risolvere il sistema $[A|I_n]$ tramite mosse di Gauss-Jordan e' equivalente a cercare una soluzione della seguente equazione matriciale:

$$A \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = I_n.$$

Dato che la matrice inversa e' unica, allora la matrice B ottenuta in questo modo dovra' essere l'inversa di A .

Proposizione 3.4.5 (Inversa del prodotto)

Siano A, B tali che AB è invertibile. Allora vale che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dimostrazione. Per definizione di inversa deve valere che

$$\begin{aligned}
 (AB)^{-1}(AB) &= I_n \\
 \iff (AB)^{-1}AB &= I_n \\
 \iff (AB)^{-1}ABB^{-1} &= B^{-1} \\
 \iff (AB)^{-1}A &= B^{-1} \\
 \iff (AB)^{-1}AA^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\
 \iff (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}
 \end{aligned}$$

che è la tesi. □

Esempio 3.4.6. Trovare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE. Usiamo il metodo di Gauss.

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 + \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + \frac{2}{3}R_2} \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 + \frac{3}{4}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 3/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + \frac{2}{3}R_2} \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & 0 & 3/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{\frac{1}{2} \times R_1, \frac{2}{3} \times R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{\frac{3}{4} \times R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array} \right) \\
 \implies A^{-1} &= \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Inversa di una matrice 2×2

Per trovare l'inversa di una matrice 2×2 possiamo usare questa formula:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Il numero $ad - bc$ è il determinante della matrice 2×2 e analizzeremo il suo significato in un capitolo successivo.

Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 7 - 2 \cdot 4} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.4.2 Composizione di funzioni come moltiplicazione tra matrici

Consideriamo tre spazi vettoriali U, V, W e due funzioni f, g tali che

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \iff U \xrightarrow{g \circ f} W$$

dunque per ogni $u \in U$ segue che $(g \circ f)(u) = g(f(u))$.

Consideriamo ora α base di U , β base di V e γ base di W e cerchiamo di rappresentare la relazione tra gli insiemi tramite le matrici associate alle funzioni:

$$U_\alpha \xrightarrow{[f]_\beta^\alpha} V_\beta \xrightarrow{[g]_\gamma^\beta} W_\gamma \iff U_\alpha \xrightarrow{[g \circ f]_\gamma^\alpha} W_\gamma.$$

Dunque per lo stesso ragionamento di prima dovrà valere che

$$[g \circ f]_\gamma^\alpha \cdot (u)_\alpha = [g]_\gamma^\beta \cdot ([f]_\beta^\alpha \cdot (u)_\alpha).$$

Teorema 3.4.7 (Composizione come prodotto tra matrici)

Siano U, V, W spazi vettoriali e siano α, β e γ delle basi rispettivamente di U, V e W . Siano $f : U \rightarrow V, g : V \rightarrow W$ e siano $[f]_\beta^\alpha$ e $[g]_\gamma^\beta$ le matrici associate a f e g . Allora vale che

$$[g \circ f]_\gamma^\alpha = [g]_\gamma^\beta \cdot [f]_\beta^\alpha. \quad (55)$$

Dimostrazione. Sia $u \in U$ generico e dimostriamo che $[g \circ f]_\gamma^\alpha \cdot (u)_\alpha = [g]_\gamma^\beta \cdot [f]_\beta^\alpha \cdot (u)_\alpha$, ricordando la definizione di matrice associata ad una funzione (3.4.1).

$$\begin{aligned} [g]_\gamma^\beta \cdot [f]_\beta^\alpha \cdot (u)_\alpha &= [g]_\gamma^\beta \cdot ([f]_\beta^\alpha \cdot (u)_\alpha) \\ &= [g]_\gamma^\beta \cdot (f(u))_\beta && \text{per def. di matrice associata ad } f \\ &= (g(f(u)))_\gamma && \text{per def. di matrice associata a } g \\ &= ((g \circ f)(u))_\gamma \\ &= [g \circ f]_\gamma^\alpha \cdot (u)_\alpha && \text{per def. di matrice associata a } g \circ f. \end{aligned}$$

Dunque dato che la relazione vale per qualunque $u \in U$, allora segue che

$$[g \circ f]_\gamma^\alpha = [g]_\gamma^\beta \cdot [f]_\beta^\alpha$$

che è la tesi. \square

3.4.3 Matrice del cambiamento di base

Definizione 3.4.8 (Funzione identità)

Sia V uno spazio vettoriale. Allora si dice funzione identità la funzione $\text{id}_V : V \rightarrow V$ tale che

$$\forall v \in V. \quad \text{id}_V(v) = v.$$

Scriveremo sempre id sottointendendo lo spazio di riferimento.

Possiamo costruire una matrice che trasforma le coordinate di un vettore rispetto ad una base nelle coordinate di un vettore rispetto ad un'altra base sfruttando la funzione identità.

Definizione 3.4.9 (Matrice del cambiamento di base)

Sia V uno spazio vettoriale, α e β basi di V .

Allora dato un vettore $v \in V$ la matrice $[\text{id}]_\beta^\alpha$ porta le coordinate di v rispetto ad α nelle coordinate di v rispetto a β , ovvero

$$[\text{id}]_\beta^\alpha \cdot (v)_\alpha = (v)_\beta. \quad (56)$$

$[\text{id}]_\beta^\alpha$ si dice **matrice del cambiamento di base**.

Esempio 3.4.10. Sia $\text{id} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, sia \mathcal{C} la base canonica di \mathbb{R}^2 e sia

$$\alpha = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$$

un'altra base di \mathbb{R}^2 .

Calcolare $[\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\alpha}$ e $[\text{id}]_{\alpha}^{\mathcal{C}}$.

SOLUZIONE. Scriviamo

$$[\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\alpha} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Allora:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = [\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\alpha} [\alpha_1]_{\alpha} = [\text{id}(\alpha_1)]_{\mathcal{C}} = [\alpha_1]_{\mathcal{C}} = \alpha_1$$

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = [\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\alpha} [\alpha_2]_{\alpha} = [\text{id}(\alpha_2)]_{\mathcal{C}} = [\alpha_2]_{\mathcal{C}} = \alpha_2$$

dunque

$$[\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare la matrice che porta i vettori dalla base \mathcal{C} alla base α basta notare che essa deve invertire il comportamento di $[\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\alpha}$, ovvero

$$[\text{id}]_{\alpha}^{\mathcal{C}} = ([\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\alpha})^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le prossime proposizioni aiutano a scrivere piu' semplicemente le matrici di cambiamento di base e le matrici associate ad applicazioni lineari.

Proposizione 3.4.11

Sia $\alpha = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ una base di \mathbb{R}^n e \mathcal{C} la base canonica di \mathbb{R}^n . Allora la matrice di cambiamento di base $[\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\alpha}$ e' la matrice che ha come colonne $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Dimostrazione. Consideriamo $[\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\alpha} [\alpha_i]_{\alpha}$. Allora

$$\begin{aligned} [\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\alpha} [\alpha_i]_{\alpha} &= [\text{id}(\alpha_i)]_{\mathcal{C}} \\ &= [\alpha_i]_{\mathcal{C}} \\ &= \alpha_i \end{aligned}$$

dato che rispetto alle basi canoniche le coordinate del vettore α_i e' proprio il vettore stesso.

Cerchiamo ora di ricavare $[\alpha_i]_{\alpha}$. Il vettore α_i rispetto alla base α si puo' scrivere come

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 0\alpha_1 + \dots + 1\alpha_i + \dots + 0\alpha_n \\ \implies [\alpha_i]_{\alpha} &= (a_{j1}) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

cioe' il vettore $[\alpha_i]_{\alpha}$ e' un vettore colonna con tutti zeri tranne un uno in posizione i .

Dunque per la proposizione 1.1.9 il prodotto $[\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\alpha} [\alpha_i]_{\alpha}$ deve dare la i -esima colonna della matrice $[\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\alpha}$, che deve essere quindi α_i .

Dato che questo ragionamento vale per ogni i , la matrice di cambiamento di base dalla base α alla canonica ha come colonne i vettori $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. \square

DETERMINANTI

4.1 DEFINIZIONE E SIGNIFICATO DEL DETERMINANTE

Definizione 4.1.1

Sia A una matrice quadrata $n \times n$ e siano $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}^n$ le sue colonne. Allora si dice determinante una funzione

$$\det : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

che rispetta le seguenti proprietà:

- (i) $\det I_n = 1$, cioè il determinante della matrice identità $n \times n$ deve essere 1;
- (ii) se per qualche i, j compresi tra 1 e n , con $i \neq j$, vale che $C_i = C_j$, allora $\det A = 0$, cioè se due colonne della matrice sono uguali il determinante deve essere 0;
- (iii) se A' è la matrice ottenuta moltiplicando una colonna della matrice A per $\lambda \in \mathbb{R}$, cioè $A' = (C_1 \dots \lambda C_i \dots C_n)$ allora

$$\det A' = \lambda \det A;$$

- (iv) se la colonna C_i è esprimibile come $v_1 + v_2$ con $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, cioè $A = (C_1 \dots v_1 + v_2 \dots C_n)$ allora

$$\det A = \det (C_1 \dots v_1 \dots C_n) + \det (C_1 \dots v_2 \dots C_n)$$

cioè il determinante è lineare nelle colonne della matrice.

Il determinante di una matrice si indica anche con

$$\det A = |A|.$$

Possiamo anche definire il determinante come una funzione che prende esattamente n vettori di \mathbb{R}^n e restituisce un numero reale, cioè $\det : (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$ e che rispetta le seguenti proprietà:

- (i) se c_1, \dots, c_n sono i vettori della base standard di \mathbb{R}^n , allora

$$\det(c_1, \dots, c_n) = 1;$$

- (ii) $\det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n) = 0$, cioè se due dei vettori sono uguali allora il determinante è nullo;
- (iii) $\det(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = \lambda \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$;
- (iv) le somme escono fuori dal determinante, cioè

$$\begin{aligned} & \det(v_1, \dots, v_i + w, \dots, v_n) \\ &= \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \det(v_1, \dots, w, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Dalle quattro proprietà base ne discendono altre, che elenchiamo in questa proposizione:

Proposizione 4.1.2

Il determinante ha le seguenti proprietà:

- (i) *se scambio due colonne della matrice tra loro il determinante cambia segno;*
- (ii) *le combinazioni lineari escono fuori dal determinante;*
- (iii) *se una delle n colonne è combinazione lineare delle restanti, cioè se gli n vettori formano un insieme di vettori linearmente dipendenti, allora il determinante è uguale a 0;*
- (iv) *sommando ad una colonna un multiplo di un'altra colonna il determinante non cambia;*
- (v) *il determinante di una matrice è uguale al determinante della trasposta.*

Notiamo che la mossa principale di Gauss-Jordan, cioè sommare ad una colonna un multiplo di un'altra colonna, non modifica il determinante di una matrice: possiamo calcolare i determinanti quindi tramite mosse di Gauss-Jordan, facendo attenzione a cambiare il segno se scambiamo due colonne o a portare fuori i fattori per cui moltiplichiamo le colonne.

Dall'ultima proprietà segue che ogni proprietà che si basa sulle colonne può anche essere riformulata in termini delle righe della matrice (che corrispondono alle colonne della trasposta).

Dalle proprietà precedenti segue che il determinante di una matrice è 0 se e solo se ci sono due colonne linearmente dipendenti: dunque il determinante è una funzione che indica la dipendenza lineare tra i vettori a cui viene applicato.

4.1.1 Determinante di matrici particolari

Determinante di matrici diagonali

Consideriamo la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Applicando il terzo assioma possiamo estrarre i coefficienti di ogni colonna, ottenendo

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} &= \lambda_1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ripetendo il procedimento per ogni colonna arriviamo a

$$\begin{aligned} &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \det I_n \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \end{aligned}$$

Dunque il determinante di una matrice diagonale e' il prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

Determinante di matrici triangolari superiori o inferiori

Consideriamo una matrice triangolare superiore (o inferiore), cioe' una matrice che ha tutti zeri sotto (o sopra) la diagonale principale. Tramite mosse di Gauss-Jordan possiamo trasformare questa matrice in una matrice diagonale senza dover scambiare colonne tra di loro, dunque il determinante della matrice triangolare e' uguale al determinante della matrice diagonale, cioe' e' il prodotto degli elementi sulla sua diagonale principale.

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

dove $*$ indica un qualsiasi numero reale.

Determinante di matrici 2×2

Consideriamo una matrice $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ generica e calcoliamone il determinante. Se $a \neq 0$ allora

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a}b \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Se $a = 0$ allora

$$\det \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & c \end{pmatrix} = -bc = 0d - bc = ad - bc.$$

Dunque il determinante di $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e' $ad - bc$.

Il determinante di una matrice 2×2 e' l'area del parallelogramma che ha come lati i vettori che formano le colonne della matrice. Notiamo infatti che se i due vettori sono sulla stessa retta, cioe' se sono dipendenti, allora l'area del parallelogramma e' 0, esattamente come il determinante.

Determinante di matrici 3×3

Per calcolare il determinante di una matrice $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ generica possiamo usare la regola di Sarrus: creiamo una matrice 3×5 dove le ultime due colonne sono le prime due ripetute. Il determinante sara' allora la somma dei prodotti delle prime tre diagonali da sinistra verso destra meno il prodotto delle tre diagonali da destra verso sinistra. Dunque se

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

consideriamo la matrice

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array} \right)$$

e otteniamo che

$$\det A = aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg.$$

Il determinante di una matrice 3×3 e' il volume del "parallelepipedo" che ha come lati i vettori che formano le colonne della matrice: infatti se un vettore e' nello span degli altri due allora il volume viene 0.

4.2 SVILUPPI DI LAPLACE

Definizione 4.2.1

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Allora diciamo che B è una sottomatrice di A se $B \in \mathcal{M}_{(n-k) \times (m-h)}(\mathbb{R})$ e B si ottiene eliminando k righe e h colonne di A .

Definizione 4.2.2

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Allora diciamo che B è un minore di A se è una sottomatrice quadrata di A .

Possiamo quindi enunciare il metodo degli sviluppi di Laplace per calcolare il determinante di una matrice.

Teorema 4.2.3 (Sviluppi di Laplace)

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice quadrata.

Sia $C_j = (a_{1j} \ \dots \ a_{nj})^T$ una colonna qualsiasi di A .

Chiamo M_{ij} il minore di A ottenuto eliminando la riga i -esima e la colonna j -esima. Inoltre per ogni i compreso tra 1 e n chiamo cofattore c_{ij} la quantità

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}.$$

Allora vale che

$$\det A = a_{1j}c_{1j} + \dots + a_{nj}c_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}c_{ij}. \quad (57)$$

Il metodo funziona anche scegliendo una colonna invece di una riga.

Esempio 4.2.4. Trovare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

tramite sviluppi di Laplace.

SOLUZIONE. Scegliamo come colonna la prima colonna. Allora

$$\begin{aligned} \det A &= a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + a_{33}(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(2 \cdot 3 - 1 \cdot 3) + (2 \cdot 2 - 1 \cdot 3) \\ &= -3 + 6 + 4 - 3 \\ &= 4. \end{aligned}$$

4.3 RANGO E DETERMINANTI

Diamo ora la definizione esatta di rango di una matrice.

Definizione 4.3.1

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ e sia $L_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare associata

alla matrice A . Allora si dice rango della matrice A la dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare associata, cioè'

$$\text{rango}(A) = \dim \text{Im } L_A \quad (58)$$

Proposizione 4.3.2

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Siano $R_1, \dots, R_n \in \mathbb{R}^m$ le righe di A e $C_1, \dots, C_m \in \mathbb{R}^n$ le colonne di A . Sia inoltre $L_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare associata alla matrice A .

Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

- $k = \text{rango}(A)$
- $k = \dim \text{span} \{C_1, \dots, C_m\}$;
- $k = \dim \text{span} \{R_1, \dots, R_n\}$;
- k è il numero di pivot della matrice a scalini A' ottenuta tramite mosse di Gauss a partire dalla matrice A ;

Dimostrazione. Se k è il rango della matrice, allora per definizione di rango $k = \dim \text{Im } L_A$. Per la proposizione 2.2.3 lo span delle colonne della matrice è uguale all'immagine dell'applicazione lineare associata, dunque $k = \dim \text{span} \{C_1, \dots, C_m\}$.

Supponiamo che la matrice sia a scalini per colonne. Allora le colonne indipendenti sono tutte e solo le colonne con i pivot, mentre le altre colonne sono nulle. Dato che le colonne con i pivot formano una base dell'immagine, segue che devono esserci esattamente $k = \text{rango}(A)$ colonne indipendenti, e quindi k pivot. Inoltre le righe indipendenti sono quelle con i pivot, dunque devono esserci anche k righe indipendenti, cioè $\dim \text{span} \{R_1, \dots, R_n\} = k$.

Supponiamo che la matrice non sia a scalini per colonne. Allora riduciamola a scalini per colonne tramite mosse di Gauss, ottenendo la matrice A' che ha per colonne i vettori C'_1, \dots, C'_m e per righe i vettori R'_1, \dots, R'_n . Per la proposizione 2.2.12 segue che $\text{span} \{C'_1, \dots, C'_m\} = \text{span} \{C_1, \dots, C_m\}$, dunque anche le loro dimensioni saranno uguali. Dato che la dimensione di $\text{span} \{C'_1, \dots, C'_m\}$ è data dal numero di colonne indipendenti, cioè dal numero di pivot per colonna, abbiamo dimostrato che il numero di pivot è uguale alla dimensione di $\text{span} \{C_1, \dots, C_m\}$, cioè al rango di A . Infine per la proposizione 3.1.7 ridurre una matrice a scalini per colonne non cambia la dimensione delle righe, dunque dato che la dimensione di $\text{span} \{R'_1, \dots, R'_n\}$ è uguale al numero di pivot (cioè k), allora anche la dimensione di $\text{span} \{R_1, \dots, R_n\}$ dovrà essere uguale a k . \square

Proposizione 4.3.3

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e sia $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare associata ad A . Allora L_A è bigettiva se e solo se $\text{rango}(A) = n$.

Dimostrazione. Dire che L_A è bigettiva equivale a dire che per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ esiste uno e un solo vettore \mathbf{x} tale che $L_A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, cioè che il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha una e una sola soluzione.

Per la proposizione 1.3.10 questo avviene se e solo se il sistema ridotto a scalini ha n pivot, cioè $\text{rango}(A) = n$. \square

Ora iniziamo ad analizzare la relazione tra determinanti e rango di una matrice.

Teorema 4.3.4

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Allora $\det A \neq 0$ se e solo se $\text{rango}(A) = n$.

Dimostrazione. Riduciamo A a scalini tramite mosse di Gauss, senza moltiplicare le righe per coefficienti. La matrice ottenuta tramite questo processo, chiamiamola S , dovrà avere lo stesso determinante di A a meno del segno:

$$|\det A| = |\det S|.$$

Dunque $\det A \neq 0$ se e solo se $\det S \neq 0$.

Dato che S è quadrata e a scalini segue che S dovrà essere triangolare superiore, dunque il determinante di S è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale, cioè dei pivot di S .

Dunque il determinante di S è diverso da 0 se e solo se S ha n pivot, cioè $\text{rango}(S) = n$. Dato che le mosse di Gauss non cambiano il rango di una matrice, segue che $\det A \neq 0$ se e solo se $\text{rango}(A) = n$, che è la tesi. \square

Proposizione 4.3.5

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Allora $\text{rango}(A) \geq k$ se e solo se esiste un minore M_k di dimensione $k \times k$ tale che $\det M_k \neq 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo l'implicazione nei due versi.

(\implies). Dato che $\text{rango}(A) \geq k$ dovranno esserci almeno k righe e k colonne indipendenti.

Scelgo k righe indipendenti e elimino le altre, ottenendo una sottomatrice S di dimensione $k \times n$ tale che $\text{rango}(S) = k$. Dato che il rango è anche il numero di colonne linearmente indipendenti, allora questa sottomatrice avrà anche almeno k colonne linearmente indipendenti, dunque ne scelgo k e elimino le altre.

A questo punto ho ottenuto una sottomatrice $k \times k$ di A con rango uguale a k , che è la tesi.

(\impliedby). Per la proposizione 4.3.4 segue che $\text{rango}(B) = k$, dunque B ha k righe indipendenti. Consideriamo le relative k righe di A : allora anche esse devono essere indipendenti, in quanto per annullare le prime k componenti è necessario che i coefficienti della combinazione lineare siano tutti uguali a 0. Dunque A ha almeno k righe indipendenti, dunque $\text{rango}(A) \geq k$. \square

Proposizione 4.3.6

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Allora $\text{rango}(A) = k$ se e solo se

- (i) esiste almeno un minore M_k di dimensione $k \times k$ tale che $\det M_k \neq 0$;
- (ii) per ogni minore M_{k+1} di dimensione $(k+1) \times (k+1)$ vale che $\det M_{k+1} = 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo l'implicazione nei due versi.

(\implies). Dato che $\text{rango}(A) = k$ segue che $\text{rango}(A) \geq k$, dunque per la proposizione precedente (4.3.5) esiste un minore di dimensione $k \times k$ con $\det M_k \neq 0$.

Dato che $\text{rango}(A) = k$ segue che $\text{rango}(A) < k+1$, dunque per la stessa proposizione non può esistere un minore di dimensione $(k+1) \times (k+1)$ con determinante diverso da 0, cioè $\det M_{k+1} = 0$ per ogni minore M_{k+1} di dimensione $(k+1) \times (k+1)$.

(\impliedby). Per la proposizione precedente (4.3.5), dato che esiste almeno un minore con determinante non nullo di dimensione $k \times k$, allora $\text{rango}(A) \geq k$.

Per la stessa proposizione, dato che non esistono minori di dimensioni $(k+1) \times (k+1)$ con determinante non nullo, segue che $\text{rango}(A) < k+1$, che è equivalente a $\text{rango}(A) \leq k$.

Dunque $\text{rango}(A) = k$. \square

Il seguente teorema riassume le varie definizioni di rango.

Teorema 4.3.7

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ e sia $L_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare associata alla matrice A . Siano inoltre $R_1, \dots, R_n \in \mathbb{R}^m$ le righe di A e $C_1, \dots, C_m \in \mathbb{R}^n$ le colonne di A .

Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

- (i) $k = \text{rango}(A) = \dim \text{Im } L_A$;
- (ii) $k = \dim \text{span} \{R_1, \dots, R_n\}$, cioè k è il numero di righe indipendenti di A ;
- (iii) $k = \dim \text{span} \{C_1, \dots, C_m\}$, cioè k è il numero di colonne indipendenti di A ;
- (iv) k è il numero di pivot della matrice S ottenuta riducendo a scalini la matrice A ;
- (v) k è il massimo numero tale che esiste $M_k \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$ tale che M_k è un minore di A con $\det M_k \neq 0$.

Il seguente teorema invece riassume le relazioni tra rango e determinante.

Teorema 4.3.8

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e sia $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare associata alla matrice A . Siano inoltre $R_1, \dots, R_n \in \mathbb{R}^n$ le righe di A e $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}^n$ le colonne di A .

Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

- (i) $\det A \neq 0$;
- (ii) $\text{rango}(A) = n$;
- (iii) L_A è bigettiva (ovvero $\text{Im } L_A = \mathbb{R}^n$ e $\ker L_A = \{\mathbf{0}\}$);
- (iv) A è invertibile;
- (v) le righe di A sono indipendenti, ovvero $\dim \text{span} \{R_1, \dots, R_n\} = n$;
- (vi) le colonne di A sono indipendenti, ovvero $\dim \text{span} \{C_1, \dots, C_n\} = n$.

AUTOVETTORI E DIAGONALIZZABILITA'

5.1 AUTOVETTORI E MATRICI SIMILI

5.1.1 Matrici simili

Definizione 5.1.1

Siano $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Allora A e' simile a B se esiste $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertibile tale che

$$A = M^{-1}BM. \quad (59)$$

OSSERVAZIONE. Posso anche scrivere la relazione di similitudine come $A = PBP^{-1}$: basta sostituire $P = M^{-1}$ da cui otteniamo $P^{-1} = (M^{-1})^{-1} = M$.

Proposizione 5.1.2

La relazione di similitudine e' una relazione di equivalenza, ovvero: siano $A, B, C \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$; allora valgono le seguenti:

- i. A e' simile ad A (riflessivita')
- ii. A e' simile a $B \implies B$ e' simile ad A (simmetria)
- iii. A e' simile a B , B e' simile a $C \implies A$ e' simile a C . (transitivita')

Dimostrazione. Dimostriamo i tre fatti.

- (i) Basta scegliere come matrice M l'identita' I_n . Dato che $(I_n)^{-1} = I_n$ allora vale che $A = I_n A I_n = (I_n)^{-1} A I_n$, cioe' A e' simile a se stessa.
- (ii) Dato che A e' simile a B possiamo scrivere $A = M^{-1}BM$. Allora vale che

$$\begin{aligned} A &= M^{-1}BM \\ \iff MA &= MM^{-1}BM \\ \iff MA &= BM \\ \iff MAM^{-1} &= BMM^{-1} \\ \iff MAM^{-1} &= B \end{aligned}$$

cioe' B e' simile ad A .

- (iii) Scriviamo $A = M^{-1}BM$ e $B = P^{-1}CP$. Allora segue che

$$\begin{aligned} A &= M^{-1}BM \\ &= M^{-1}(P^{-1}CP)M \\ &= (M^{-1}P^{-1})C(PM) \\ &= (PM)^{-1}C(PM) \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio e' giustificato dalla proposizione 3.4.5. \square

Proposizione 5.1.3

Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo e siano α, β due basi di V . Allora $[f]_\alpha^\alpha$ e' simile a $[f]_\beta^\beta$.

Dimostrazione. Basta moltiplicare la matrice $[f]_\alpha^\alpha$ a destra per la matrice del cambio di base da β ad α e a sinistra per la sua inversa. Infatti

$$([id]_\alpha^\beta)^{-1} [f]_\alpha^\alpha [id]_\alpha^\beta = [id]_\beta^\alpha [f]_\alpha^\alpha [id]_\alpha^\beta = [id]_\beta^\alpha [f]_\beta^\alpha = [f]_\beta^\beta$$

come volevasi dimostrare. \square

Definizione 5.1.4

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Allora A si dice **diagonalizzabile** se esiste una matrice diagonale D simile ad A .

5.1.2 Autovettori, autovalori e autospazio

Definizione 5.1.5

Sia V uno spazio vettoriale. Allora ogni applicazione lineare $f : V \rightarrow V$ si dice **endomorfismo**.

Definizione 5.1.6

Sia V uno spazio vettoriale, $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora si dice **autospazio di V relativo a λ** l'insieme

$$V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}. \quad (60)$$

Proposizione 5.1.7

V_λ e' un sottospazio vettoriale di V .

Definizione 5.1.8

Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Allora $v \in V$, $v \neq 0$ si dice **autovettore di V relativo a λ** se $v \in V_\lambda$.

Definizione 5.1.9

Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Allora $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice **autovalore di V** se $V_\lambda \neq \{0\}$.

Possiamo dare le stesse definizioni di autovalore, autovettore e autospazio considerando una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Teorema 5.1.10

Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ i suoi autovalori.

Allora per qualunque $v_1 \in V_{\lambda_1}, \dots, v_n \in V_{\lambda_n}$ (con $v_1, \dots, v_n \neq 0$) segue che $\{v_1, \dots, v_n\}$ e' un insieme di vettori linearmente indipendenti, ovvero gli autospazi $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_n}$ sono in somma diretta.

Dimostrazione. Per induzione su k .

CASO BASE. Se $k = 1$ allora c'e' un solo autovettore nell'insieme. Inoltre dato che $v_1 \neq 0$ sicuramente esso forma un insieme di vettori linearmente indipendenti.

PASSO INDUTTIVO. Supponiamo che l'insieme con $k-1$ vettori sia linearmente indipendente e dimostriamo che anche l'insieme formato da k vettori lo è.

Consideriamo una combinazione lineare di questi vettori e poniamola uguale al vettore nullo:

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}. \quad (61)$$

Applichiamo ad entrambi i membri l'applicazione lineare $(f - \lambda_k \text{id}) : V \rightarrow V$, ottenendo:

$$\begin{aligned} & (f - \lambda_k \text{id})(c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} + c_k \mathbf{v}_k) = (f - \lambda_k \text{id})(\mathbf{0}) \\ \Leftrightarrow & c_1(f - \lambda_k \text{id})(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_{k-1}(f - \lambda_k \text{id})(\mathbf{v}_{k-1}) + \\ & + c_k(f - \lambda_k \text{id})(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & c_1(f(\mathbf{v}_1) - \lambda_k \text{id}(\mathbf{v}_1)) + \cdots + c_{k-1}(f(\mathbf{v}_{k-1}) - \lambda_k \text{id}(\mathbf{v}_{k-1})) + \\ & + c_k(f(\mathbf{v}_k) - \lambda_k \text{id}(\mathbf{v}_k)) = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & c_1(\lambda_1 \mathbf{v}_1 - \lambda_k \mathbf{v}_1) + \cdots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} - \lambda_k \mathbf{v}_{k-1}) + \\ & + c_k(\lambda_k \mathbf{v}_k - \lambda_k \mathbf{v}_k) = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & c_1(\lambda_1 - \lambda_k) \mathbf{v}_1 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Per ipotesi induttiva sappiamo che i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ sono indipendenti, dunque segue che

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k) = \cdots = c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0.$$

Dato che gli autovalori sono distinti segue che $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ per $i < k$, dunque

$$c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0.$$

Sostituendo cioè nell'equazione 61 otteniamo $c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, ma dato che $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ segue che $c_k = 0$, cioè i vettori sono indipendenti. \square

Possiamo sfruttare gli autovettori per diagonalizzare una matrice, come ci conferma la prossima proposizione.

Proposizione 5.1.11

Sia V uno spazio vettoriale, $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo e siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ gli autovettori di f relativi agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Allora se $\beta = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ è una base di V la matrice $[f]_\beta^\beta$ è diagonale ed ha sulla diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Dimostrazione. Costruiamo la matrice $[f]_\beta^\beta$. La prima colonna di questa matrice sarà

$$[f]_\beta^\beta[\mathbf{v}_1]_\beta = [f(\mathbf{v}_1)]_\beta = [\lambda_1 \mathbf{v}_1]_\beta = \lambda_1 [\mathbf{v}_1]_\beta.$$

Ma dato che \mathbf{v}_1 può essere espresso nella base β dalla combinazione lineare

$$\mathbf{v}_1 = 1 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v}_n$$

segue che la prima colonna della matrice $[f]_\beta^\beta$ è

$$[f]_\beta^\beta[\mathbf{v}_1]_\beta = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ripetendo il procedimento per gli altri vettori, otteniamo che la colonna i -esima della matrice e' formata da un vettore con tutti 0 tranne che in posizione i , dove compare l'autovalore λ_i . Di conseguenza $[f]_\beta^\beta$ e' la matrice diagonale

$$[f]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad \square$$

Proposizione 5.1.12

Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Allora segue che

$$V_\lambda = \ker(f - \lambda \text{id})$$

ovvero che l'autospazio V_λ relativo a λ e' dato dal kernel della funzione $(f - \lambda \text{id})$.

Dimostrazione. Sia $v \in V$. Allora

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda v \\ \iff f(v) &= \lambda \text{id}(v) \end{aligned}$$

Sia $(\lambda \text{id}) : V \rightarrow V$ tale che $(\lambda \text{id})(v) = \lambda v$:

$$\begin{aligned} \iff f(v) &= (\lambda \text{id})(v) \\ \iff f(v) - (\lambda \text{id})(v) &= 0 \end{aligned}$$

Sia $(f - \lambda \text{id}) : V \rightarrow V$ tale che $(f - \lambda \text{id})(v) = f(v) - \lambda v$:

$$\begin{aligned} \iff (f - \lambda \text{id})(v) &= 0 \\ \iff v &\in \ker(f - \lambda \text{id}). \end{aligned} \quad \square$$

Corollario 5.1.13

Se A e' una matrice $n \times n$ allora l'autospazio V_λ relativo a λ e' dato dal kernel della matrice $A - \lambda I_n$, dove I_n e' la matrice identita' $n \times n$.

Proposizione 5.1.14

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Allora λ e' un autovalore di A se e solo se $\ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$.

Dimostrazione. Infatti per la proposizione 5.1.13 sappiamo che $V_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$. Inoltre per definizione di autovalore segue che λ e' un autovalore se e solo se $V_\lambda \neq \{0\}$, ovvero se e solo se $\ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$. \square

Definizione 5.1.15

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Allora si dice **polinomio caratteristico** di A il polinomio

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Teorema 5.1.16

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Allora λ_0 e' un autovalore di A se e solo se $p_A(\lambda_0) = 0$, ovvero se e solo se λ_0 e' radice del polinomio caratteristico.

Dimostrazione. Per la proposizione 5.1.14 sappiamo che λ_0 e' un autovalore se e solo se $\ker(A - \lambda_0 I_n) \neq \{0\}$.

Per i teoremi sulla relazione tra determinante e rango di una matrice (4.3.8) sappiamo che $\ker(A - \lambda_0 I_n) \neq \{0\}$ se e solo se $\det(A - \lambda_0 I_n) = 0$, ma dato che $\det(A - \lambda_0 I_n) = p_A(\lambda_0)$ questo e' equivalente a dire che $p_A(\lambda_0) = 0$, ovvero che λ_0 e' una radice di p_A , che e' la tesi. \square

Esempio 5.1.17. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix}$. Diagonalizzare $[f]$.

Dimostrazione. Innanzitutto troviamo la matrice $[f]$ rispetto alle basi standard.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

ORTOGONALITA'

6.1 PRODOTTO SCALARE E ORTOGONALITA'

Definizione 6.1.1 (Prodotto scalare)

Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ tali che $\mathbf{v} = (a_1, \dots, a_n)$ e $\mathbf{w} = (b_1, \dots, b_n)$.

Allora si dice prodotto scalare canonico tra \mathbf{v} e \mathbf{w} la funzione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{w} = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Se i vettori sono in \mathbb{C}^n si usa un prodotto scalare diverso, detto prodotto hermitiano.

Definizione 6.1.2 (Prodotto hermitiano)

Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ tali che $\mathbf{v} = (a_1, \dots, a_n)$ e $\mathbf{w} = (b_1, \dots, b_n)$.

Allora si dice prodotto hermitiano tra \mathbf{v} e \mathbf{w} la funzione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

tale che

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \cdot \overline{\mathbf{w}} = \sum_{k=1}^n a_k \overline{b_k}.$$

Proposizione 6.1.3

Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà':

- (i) se $k \in \mathbb{R}$ allora $\langle k\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = k\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, k\mathbf{w} \rangle$;
- (ii) $\langle \mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$;
- (iii) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = 0$;
- (iv) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$.

Definizione 6.1.4 (Norma di un vettore)

Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Allora si dice norma (o lunghezza) di \mathbf{v} il numero reale

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}.$$

Proposizione 6.1.5 (La norma e' nulla se e solo se il vettore e' nullo)

Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Allora $\|\mathbf{v}\| = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. Sia $v = (a_1, \dots, a_n)$. Allora

$$\begin{aligned}\|v\| &= 0 \\ \iff \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} &= 0 \\ \iff a_1^2 + \dots + a_n^2 &= 0.\end{aligned}$$

Ma $a_1^2 + \dots + a_n^2$ e' una somma di termini maggiori o uguali a 0, dunque $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 0$ se e solo se $a_1 = \dots = a_n = 0$, ovvero $v = \mathbf{0}$. \square

Definizione 6.1.6

Siano $v, w \in \mathbb{R}^n$, entrambi non nulli. Allora v e' ortogonale a w (e si indica con $v \perp w$) se $\langle v, w \rangle = 0$.

Proposizione 6.1.7 (Ortogonalità implica indipendenza)

Siano $v, w \in \mathbb{R}^n$ entrambi non nulli. Allora se $v \perp w$ segue che l'insieme $\{v, w\}$ e' un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Consideriamo una generica combinazione lineare di v, w (come $av + bw$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$) e poniamola uguale a $\mathbf{0}$. Dobbiamo dimostrare che segue che $a = b = 0$.

Consideriamo il prodotto scalare $\langle av + bw, v \rangle$. Allora

$$\begin{aligned}\langle av + bw, v \rangle &= \langle av, v \rangle + \langle bw, v \rangle \\ &= a\langle v, v \rangle + b\langle w, v \rangle \quad (\text{per ipotesi } \langle w, v \rangle = 0) \\ &= a\langle v, v \rangle \\ &= a\|v\|^2.\end{aligned}$$

Dato che abbiamo imposto che la combinazione lineare sia uguale a $\mathbf{0}$, avremo

$$\langle av + bw, v \rangle = \langle \mathbf{0}, v \rangle = 0.$$

Dunque segue che $a\|v\|^2 = 0$, ma per ipotesi $v \neq \mathbf{0}$, dunque per la proposizione 6.1.5 segue che $a = 0$.

Quindi $av + bw = \mathbf{0}$ se e solo se $bw = \mathbf{0}$, ma dato che w non e' nullo segue che anche $b = 0$, ovvero l'insieme $\{v, w\}$ e' un insieme di vettori linearmente indipendenti. \square

Corollario 6.1.8 (Ortogonalità implica indipendenza)

Siano $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ non nulli e ortogonali a due a due (ovvero per ogni $i, j \leq k$, $i \neq j$ segue che $v_i \perp v_j$). Allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ e' un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Consideriamo una generica combinazione lineare dei vettori e poniamola uguale a $\mathbf{0}$:

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = \mathbf{0}.$$

Dimostriamo che segue che $c_1 = \dots = c_k = 0$.

Consideriamo il prodotto scalare $\langle c_1 v_1 + \dots + c_k v_k, v_i \rangle$. Dato che la combinazione lineare e' uguale al vettore nullo, allora questo prodotto scalare sara' uguale a 0, ovvero:

$$\begin{aligned}0 &= \langle c_1 v_1 + \dots + c_i v_i + \dots + c_k v_k, v_i \rangle \\ &= \langle c_1 v_1, v_i \rangle + \dots + \langle c_i v_i, v_i \rangle + \dots + \langle c_k v_k, v_i \rangle \\ &= c_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + c_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + c_k \langle v_k, v_i \rangle\end{aligned}$$

Per ipotesi $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ per ogni $j \neq i$:

$$\begin{aligned} &= c_i \langle v_i, v_i \rangle \\ &= a \|v_i\|^2. \end{aligned}$$

Dunque $c_i \|v_i\|^2 = 0$, ma dato che $v_i \neq 0$ segue che $c_i = 0$.

Con un analogo ragionamento si dimostra che tutti i coefficienti devono essere 0, dunque i vettori sono indipendenti. \square

Definizione 6.1.9

Sia \mathcal{B} una base di \mathbb{R}^n . Allora si dice che \mathcal{B} è una base ortogonale di \mathbb{R}^n se per ogni $v, w \in \mathcal{B}$ con $v \neq w$ vale che $v \perp w$ (ovvero i vettori sono a due a due ortogonali).

Definizione 6.1.10

Sia \mathcal{B} una base ortogonale di \mathbb{R}^n . Allora si dice che \mathcal{B} è una base ortonormale di \mathbb{R}^n se per ogni $v \in \mathcal{B}$ vale che $\|v\| = 1$.

Proposizione 6.1.11

Siano $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali. Allora $\mathcal{B} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ è una base ortogonale di \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. Per la proposizione 6.1.8 gli n vettori sono indipendenti. Inoltre $\dim \mathbb{R}^n = n$, dunque per la proposizione 2.3.6 segue che \mathcal{B} è una base di \mathbb{R}^n . In particolare, dato che i vettori sono ortogonali a due a due, \mathcal{B} è una base ortogonale di \mathbb{R}^n . \square

Teorema 6.1.12 (Teorema di Gram-Schmidt)

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n . Allora esiste una base ortogonale di V .

Le basi ortogonali (e ortonormali) sono utili in quanto possiamo sfruttare la seguente proposizione per trovare le coordinate di un vettore rispetto alla suddetta base.

Proposizione 6.1.13 (Coordinate rispetto ad una base ortogonale)

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio di \mathbb{R}^n e sia $\mathcal{B} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ una base ortogonale di V . Sia inoltre $v \in V$.

Allora il vettore delle coordinate di v rispetto alla base \mathcal{B} è il vettore (c_1, \dots, c_k) tale che per ogni $i \leq k$:

$$c_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}.$$

Dimostrazione. Dato che (c_1, \dots, c_k) è il vettore delle coordinate di v rispetto a \mathcal{B} , allora segue che

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k.$$

Sia $i \leq k$ generico. Allora

$$\begin{aligned} &\langle v, v_i \rangle \\ &= \langle c_1 v_1 + \dots + c_i v_i + \dots + c_k v_k, v_i \rangle \\ &= c_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + c_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + c_k \langle v_k, v_i \rangle \quad (\text{per ortogonalità della base}) \\ &= c_i \langle v_i, v_i \rangle \\ &= c_i \|v_i\|^2. \end{aligned}$$

Dunque

$$c_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}.$$

\square

Corollario 6.1.14 (Coordinate rispetto ad una base ortonormale)

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio di \mathbb{R}^n e sia $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ una base ortonormale di V . Sia inoltre $\mathbf{v} \in V$.

Allora il vettore delle coordinate di \mathbf{v} rispetto alla base \mathcal{B} e' il vettore (c_1, \dots, c_k) tale che per ogni $i \leq k$:

$$c_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle.$$

Dimostrazione. Dato che una base ortonormale e' anche ortogonale, dalla proposizione 6.1.13 segue che per ogni $i \leq k$ vale che

$$c_i = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2}.$$

Per definizione di base ortonormale sappiamo che $\|\mathbf{v}_i\| = 1$, da cui segue la tesi. \square

6.2 COMPLEMENTO ORTOGONALE**Definizione 6.2.1 (Sottospazi ortogonali)**

Siano $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ due sottospazi di \mathbb{R}^n . Allora dico che V e' ortogonale a W (e scrivo $V \perp W$) se per ogni $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$ vale che $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$.

Proposizione 6.2.2 (Sottospazi ortogonali sono in somma diretta)

Siano $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ due sottospazi di \mathbb{R}^n tali che $V \perp W$. Allora V e W sono in somma diretta.

Dimostrazione. Dire che V e W sono in somma diretta significa che per ogni coppia di vettori $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$ segue che \mathbf{v}, \mathbf{w} sono indipendenti.

Siano $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$ due vettori generici. Dato che V e W sono ortogonali, $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$, ma per la proposizione 6.1.7 questo implica che \mathbf{v}, \mathbf{w} siano indipendenti, cioe' la tesi. \square

Definizione 6.2.3 (Ortoghonale di un sottospazio)

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio di \mathbb{R}^n . Allora si dice complemento ortoghonale di V (o semplicemente ortoghonale di V) il sottospazio

$$V^\perp = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{w} \perp \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V\}.$$

Proposizione 6.2.4

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio di \mathbb{R}^n e sia V^\perp il suo ortoghonale. Allora valgono le seguenti:

- (i) $V \perp V^\perp$;
- (ii) $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$, ovvero V^\perp e' un complemento di V ;
- (iii) $(V^\perp)^\perp = V$.

Proposizione 6.2.5 (Un vettore e' in V^\perp se e solo se e' ortoghonale ad una base di V)

Sia $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio di \mathbb{R}^n . $\mathcal{B} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ una base ortoghonale di V .

Allora $\mathbf{w} \in V^\perp$ se e solo se $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{w} \perp \mathbf{v}_k$.

Dimostrazione. Dimostriamo le due implicazioni.

- (\Rightarrow) Se w e' un vettore di V^\perp allora per definizione di V^\perp segue che $w \perp v$ per ogni $v \in V$; di conseguenza, w sara' ortogonale anche ai vettori della base \mathcal{B} .
- (\Leftarrow) Sia $v \in V$ generico. Dato che \mathcal{B} e' una base di V , allora esisteranno $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k.$$

E' quindi sufficiente dimostrare che $w \perp v$, ovvero che $\langle v, w \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle c_1 v_1 + \dots + c_k v_k, w \rangle \\ &= c_1 \langle v_1, w \rangle + \dots + c_k \langle v_k, w \rangle \end{aligned}$$

Ma per ipotesi $w \perp v_1, \dots, w \perp v_k$, dunque

$$= 0. \quad \square$$

6.3 PROIEZIONI ORTOGONALI

Definizione 6.3.1

Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$. Allora si chiama proiezione ortogonale di v su u il vettore

$$\text{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u.$$

Proposizione 6.3.2

Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ e sia $w \in \mathbb{R}^n$ tale che $w = v - \text{proj}_u(v)$. Allora $w \perp u$.

Dimostrazione. Basta dimostrare che $\langle w, u \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \langle w, u \rangle &= \langle v - \text{proj}_u(v), u \rangle \\ &= \langle v, u \rangle - \langle \text{proj}_u(v), u \rangle \\ &= \langle v, u \rangle - \left\langle \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u, u \right\rangle \\ &= \langle v, u \rangle - \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \langle u, u \rangle \\ &= \langle v, u \rangle - \langle v, u \rangle \\ &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

Definizione 6.3.3

Sia $v \in \mathbb{R}^n$ e sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio di \mathbb{R}^n . Sia inoltre $\mathcal{B} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ una base ortogonale di V .

Allora si chiama proiezione ortogonale di v sul sottospazio V il vettore

$$\text{proj}_V(v) = \text{proj}_{v_1}(v) + \dots + \text{proj}_{v_k}(v).$$

Proposizione 6.3.4

Siano $v \in \mathbb{R}^n$, sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio di \mathbb{R}^n e sia $w \in \mathbb{R}^n$ tale che $w = v - \text{proj}_V(v)$. Allora $w \perp u$ per ogni $u \in V$, ovvero $w \in V^\perp$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ una base di V . Per la proposizione 6.2.5 e' sufficiente dimostrare che $w \perp v_i$ per ogni vettore $v_i \in \mathcal{B}$.

Dimostriamo che $w \perp v_1$.

$$\begin{aligned}\langle w, v_1 \rangle &= \langle v - \text{proj}_V(v), v_1 \rangle \\ &= \langle v, v_1 \rangle - \langle \text{proj}_V(v), v_1 \rangle \\ &= \langle v, v_1 \rangle - \langle \text{proj}_{v_1}(v) + \cdots + \text{proj}_{v_k}(v), v_1 \rangle \\ &= \langle v, v_1 \rangle - (\langle \text{proj}_{v_1}(v), v_1 \rangle + \cdots + \langle \text{proj}_{v_k}(v), v_1 \rangle)\end{aligned}$$

Sia $c_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$ per ogni $i \leq k$:

$$\begin{aligned}&= \langle v, v_1 \rangle - (\langle c_1 v_1, v_1 \rangle + \cdots + \langle c_k v_k, v_1 \rangle) \\ &= \langle v, v_1 \rangle - (c_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \cdots + c_k \langle v_k, v_1 \rangle)\end{aligned}$$

Per ortogonalita' della base \mathcal{B} :

$$\begin{aligned}&= \langle v, v_1 \rangle - c_1 \langle v_1, v_1 \rangle \\ &= \langle v, v_1 \rangle - \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \langle v_1, v_1 \rangle \\ &= \langle v, v_1 \rangle - \langle v, v_1 \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Tramite un analogo ragionamento si dimostra che w e' perpendicolare a tutti i vettori di \mathcal{B} , dunque appartiene a V^\perp . \square

Mostriamo ora una dimostrazione del Teorema di Gram-Schmidt.

Teorema 6.1.12 (Teorema di Gram-Schmidt)

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n . Allora esiste una base ortogonale di V .

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ una base di V . Applichiamo il seguente algoritmo per trovare una base ortogonale di V .

Chiamiamo \mathcal{B}_k una base in cui i primi k vettori sono ortogonali a due a due. Mostriamo che questa base esiste per $k = 1$ e mostriamo come ottenerla per un k qualsiasi induttivamente.

CASO BASE Sia $k = 1$. Allora banalmente $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$, poiche' il primo vettore non deve essere ortogonale a nessun altro vettore.

PASSO INDUTTIVO Sia $k \geq 1$ e supponiamo (per ipotesi induttiva) che esista \mathcal{B}_k . Dimostriamo che esiste \mathcal{B}_{k+1} .

Sia $\mathcal{B}_k = \langle w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_m \rangle$ tale che i primi k vettori sono ortogonali a due a due. Sia inoltre $W_k = \text{span}\{w_1, \dots, w_k\}$.

Sia $\mathcal{B}_{k+1} = \langle w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_m \rangle$ dove $w_{k+1} = v_{k+1} - \text{proj}_{W_k}(v_{k+1})$. Dobbiamo dimostrare che

- (i) \mathcal{B}_{k+1} genera ancora tutto V (ovvero lo span dei vettori non e' cambiato);
- (ii) i primi $k+1$ vettori sono ortogonali tra loro a due a due.

Dimostriamo questi due punti:

- (i) Per definizione di w_{k+1} :

$$\begin{aligned}w_{k+1} &= v_{k+1} - \text{proj}_{W_k}(v_{k+1}) \\ &= v_{k+1} - \text{proj}_{w_1}(v_{k+1}) - \cdots - \text{proj}_{w_k}(v_{k+1}) \\ &= v_{k+1} - c_1 w_1 - \cdots - c_k w_k\end{aligned}$$

$$\text{dove } c_1 = \frac{\langle w_{k+1}, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}.$$

Dunque stiamo sottraendo ad un vettore della base multipli di altri vettori della base, dunque (per la proposizione 2.2.11) lo span non cambia e \mathcal{B}_{k+1} genera ancora tutto V (e in particolare dovra' essere ancora una base di V in quanto ha m elementi).

- (ii) Dato che per ipotesi induttiva i primi k vettori sono ortogonali tra loro, ci basta mostrare che w_{k+1} e' ortogonale con tutti i vettori w_1, \dots, w_k .

Dato che $w_{k+1} = v_{k+1} - \text{proj}_{W_k}(v_{k+1})$ per la proposizione 6.3.4 segue che $w_{k+1} \in W_k^\perp$, dunque per definizione di W_k^\perp segue che w_{k+1} dovra' essere ortogonale ad ogni vettore di W_k , ovvero $w_{k+1} \perp w_i$ per ogni $i \leq k$.

Dunque \mathcal{B}_{k+1} e' una base di V tale che i primi $k+1$ vettori sono ortogonali tra loro a due a due.

Per induzione dunque esistera' \mathcal{B}_m , cioe' una base di V in cui tutti i vettori sono ortogonali a due a due, ovvero \mathcal{B}_m e' una base ortogonale di V . \square

6.4 MATRICI SIMMETRICHE E ORTOGONALITA'

Proposizione 6.4.1

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{R})$, sia $v \in \mathbb{R}^k$ e sia $w \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^T w \rangle.$$

Dimostrazione. $\langle Av, w \rangle = (Av)^T w = v^T A^T w = \langle v, A^T w \rangle.$ \square

Corollario 6.4.2

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica e siano $v, w \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle.$$

Dimostrazione. Deriva direttamente dalla proposizione precedente: dato che A e' simmetrica segue che $A^T = A$, dunque $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^T w \rangle = \langle v, Aw \rangle.$ \square

Proposizione 6.4.3

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica e sia u un suo autovettore. Allora per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ segue che

$$v \perp u \implies Av \perp u.$$

Dimostrazione. Per la proposizione precedente $\langle Av, u \rangle = \langle v, Au \rangle$. Dato che u e' un autovettore di A segue che $Au = \lambda u$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned} \langle v, Au \rangle &= \langle v, \lambda u \rangle \\ &= \lambda \langle v, u \rangle \\ &= 0 \cdot \lambda \\ &= 0. \end{aligned}$$

\square

Teorema 6.4.4 (Teorema Spettrale)

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Allora

- (i) A e' diagonalizzabile su \mathbb{R} ;
- (ii) autospazi relativi ad autovalori diversi sono ortogonali tra loro.

Il teorema spettrale vale solo per matrici a valori in \mathbb{R} o in \mathbb{C} .

6.5 MATRICI ORTOGONALI

Definizione 6.5.1

Una matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ si dice ortogonale se le sue colonne sono ortonormali a due a due.

Proposizione 6.5.2

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ortogonale. Allora l'inversa di A è A^T .

Dimostrazione. Siano c_1, \dots, c_n le colonne di A ; allora c_1^T, \dots, c_n^T saranno le righe di A^T . Consideriamo il valore in posizione ij della matrice prodotto $A^T \cdot A$:

$$[A^T A]_{ij} = c_i^T \cdot c_j = \langle c_i, c_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Dunque $A^T A = I_n$, ovvero $A^T = A^{-1}$. □

Definizione 6.5.3

Si dice distanza tra i vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ il numero reale $\|v - w\|$.

Proposizione 6.5.4

Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ortogonale. Allora valgono le seguenti:

- (i) $\|Av\| = \|v\|$;
- (ii) $\|Av - Aw\| = \|v - w\|$

ovvero la matrice A trasforma lo spazio \mathbb{R}^n tramite una trasformazione rigida.

Dimostrazione. 1. $\|Av\| = \sqrt{\langle Av, Av \rangle} = \sqrt{\langle v, A^T Av \rangle} = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \|v\|$.

2. $\|Av - Aw\| = \|A(v - w)\| = \|v - w\|$ per il punto precedente. □