# Riduzioni di $K$ e $\overline{K}$ a $\mathsf{EXT}$

Luca De Paulis

6 novembre 2021

## 1 Risultati preliminari

Prima di mostrare le riduzioni $K \leq_{\mathsf{rec}} \mathsf{EXT}$ e $\overline{K} \leq_{\mathsf{rec}} \mathsf{EXT}$ introduciamo per comodità la funzione $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

- se $n \in K$, $\nu(n)$ è il minimo numero intero positivo tale che la computazione $\varphi_n(n)$ converge in $\nu(n)$ passi,
- se $n \notin K$, $\nu(n)$ è indefinito.

La funzione $\nu$ è calcolabile: si esegue il calcolo di $\varphi_n(n)$; se converge in un numero finito di passi si prende come risultato il numero minimo di passi per cui la funzione converge, altrimenti si continua all'infinito e quindi $\nu(n)$ diverge.

**Lemma 1.1** La funzione $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$\psi(n) := \begin{cases} \nu(n), & n \in K \\ \text{indef.}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è estendibile ad una funzione calcolabile totale.

**Dimostrazione.** Supponiamo per assurdo che esista $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che $g(n) = \nu(n)$ per ogni $n \in K$. Dato che $g$ è totale, per ogni $n \notin K$ il calcolo di $g(n)$ dovrà convergere ad un numero naturale, e dunque necessariamente $g \neq \nu$ al di fuori di $K$.

Possiamo allora costruire la funzione $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ definita da

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{se } \varphi_n(n) \text{ converge in } g(n) \text{ passi} \\ 0, & \text{se } \varphi_n(n) \text{ non converge in } g(n) \text{ passi.} \end{cases}$$

Tale funzione è certamente calcolabile: basta eseguire il calcolo di $\varphi_n(n)$ per $g(n)$ passi e controllare se si è arrivati alla convergenza oppure no. Notiamo inoltre che la prima condizione equivale a chiedere che $g(n)$ sia uguale a $\nu(n)$, la seconda invece equivale a chiedere che siano diversi.

Tuttavia $g(n) = \nu(n)$ se e solo se $n \in K$, dunque $f$ vale 1 se $n \in K$ e 0 altrimenti, cioè $f$ è la funzione caratteristica di $K$, che però non è calcolabile. Segue l'assurdo. □

## 2 Riduzioni

Usando il Lemma 1.1 possiamo mostrare l'esistenza di riduzioni di $\mathsf{K}$ e $\overline{\mathsf{K}}$ a $\mathsf{EXT}$.

**Riduzione di $\mathsf{K}$ a $\mathsf{EXT}$.** Consideriamo la funzione $\psi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da

$$\psi(x, y) := \begin{cases} \min\{\, \nu(x), \nu(y) \,\}, & \text{se } x \in \mathsf{K} \text{ oppure } y \in \mathsf{K} \\ \text{indef.} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\min\{\, \nu(x), \nu(y) \,\}$ è $\nu(x)$ se $\nu(y)$ è indefinito, e viceversa.

Tale funzione è intuitivamente calcolabile: eseguiamo contemporaneamente la computazione di $\varphi_x(x)$ e $\varphi_y(y)$. Se una delle due si ferma prima dell'altra diamo come risultato il numero di passi impiegati per il calcolo della computazione terminante; altrimenti il calcolo di $\psi$ non termina.

Per la Tesi di Church-Turing insieme al Teorema del Parametro segue che esiste una funzione calcolabile totale $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi_{f(x)}(y) = \psi(x, y)$$

per ogni $y \in \mathbb{N}$. Mostriamo che $\mathsf{K} \leq_f \mathsf{EXT}$.

- Se $x \in \mathsf{K}$ allora
$$\varphi_{f(x)}(y) = \min\{\, \nu(x), \nu(y) \,\}$$
e dunque è quantomeno totale. In particolare è banalmente estendibile ad una funzione calcolabile totale, e quindi $f(x) \in \mathsf{EXT}$.
- Se $x \notin \mathsf{K}$ allora
$$\varphi_{f(x)}(y) = \begin{cases} \nu(y), & \text{se } y \in \mathsf{K} \\ \text{indef.} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Per il Lemma 1.1 questa funzione non è estendibile ad una funzione calcolabile totale, e dunque $f(x) \notin \mathsf{EXT}$. $\square$

**Riduzione di $\overline{\mathsf{K}}$ a $\mathsf{EXT}$.** Consideriamo la funzione $\psi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da

$$\psi(x, y) := \begin{cases} \nu(y), & \text{se } x \in \mathsf{K} \text{ e } y \in \mathsf{K} \\ \text{indef.} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Tale funzione è intuitivamente calcolabile: eseguiamo in sequenza il calcolo di $\varphi_x(x)$ e poi quello di $\varphi_y(y)$, misurando il numero di passi necessari per la terminazione del calcolo della seconda. Se entrambe le computazioni terminano restituiamo come risultato $\nu(y)$, altrimenti $\psi$ è indefinita.

Per la Tesi di Church-Turing insieme al Teorema del Parametro segue che esiste una funzione calcolabile totale $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi_{f(x)}(y) = \psi(x, y)$$

per ogni $y \in \mathbb{N}$. Mostriamo che $\overline{\mathsf{K}} \leq_f \mathsf{EXT}$.

- Se $x \in \overline{\mathsf{K}}$ allora $\varphi_{f(x)}(y)$ è la funzione costantemente indefinita, che è estendibile ad esempio ad una qualunque funzione costante.

- Se $x \notin \overline{K}$ allora

$$\varphi_{f(x)}(y) = \begin{cases} \nu(y), & \text{se } y \in K \\ \text{indef.} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per il Lemma 1.1 questa funzione non è estendibile ad una funzione calcolabile totale, e dunque $f(x) \notin \mathsf{EXT}$. $\square$