# Esercizi di Algebra Lineare

19 luglio 2020

# INDICE

# 1

# SOTTOSPAZI VETTORIALI

In questo capitolo vogliamo scoprire come verificare se un dato sottoinsieme di uno spazio vettoriale e' un sottospazio vettoriale.

## 1.1 TEOREMI E DEFINIZIONI UTILI

> **Definizione 1.1.1** (Sottospazio vettoriale)
>
> Sia $V$ uno spazio vettoriale, $A \subseteq V$. Allora si dice che $A$ e' un sottospazio vettoriale di $V$ (o semplicemente sottospazio) se
>
> $$\mathbf{0}_{V} \in A \tag{1}$$
> $$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \in A \qquad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in A \tag{2}$$
> $$(k\boldsymbol{v}) \in A \qquad \forall k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v} \in A \tag{3}$$

## 1.2 VERIFICA

**Esempio 1.2.1.** Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - 2y + 3z = 0 \right\}.$$

Per verificare se $S$ e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e' sufficiente verificare che $S$ rispetti le tre condizioni di sopra:

($0 \in S$) Verifichiamo che il vettore $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ appartenga ad $S$, ovvero soddisfi la condizione $x - 2y + 3z = 0$:

$$0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

La condizione quindi e' verificata e $0_V \in S$.

($\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in S$) Verifichiamo che se

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

appartengono ad $S$, cioe'

$$v_1 - 2v_2 + 3v_3 = 0, \quad w_1 - 2w_2 + 3w_3 = 0$$

allora il vettore $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$ appartiene ad $S$, ovvero soddisfa la condizione $x - 2y + 3z = 0$.

$$\begin{aligned}(v_1 + w_1) - 2(v_2 + w_2) + 3(v_3 + w_3) \\ &= v_1 + w_1 - 2v_2 - 2w_2 + 3v_3 + 3w_3 \\ &= (v_1 - 2v_2 + 3v_3) + (w_1 - 2w_2 + 3w_3)\end{aligned}$$

dunque per l'ipotesi che $\boldsymbol{v} \in S$ e $\boldsymbol{w} \in S$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Dunque $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in S$.

($k\boldsymbol{v} \in S$) Verifichiamo che se

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

appartiene ad S, cioe'

$$v_1 - 2v_2 + 3v_3 = 0$$

allora per ogni $k \in \mathbb{R}$ il vettore $k\boldsymbol{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$ appartiene ad S, ovvero soddisfa la condizione $x - 2y + 3z = 0$.

$$
\begin{aligned}
(kv_1) - 2(kv_2) + 3(kv_3) &= kv_1 - 2kv_2 + 3kv_3 \\
&= k(v_1 - 2v_2 + 3v_3)
\end{aligned}
$$

dunque per l'ipotesi che $\boldsymbol{v} \in S$

$$
\begin{aligned}
&= k \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Dunque $k\boldsymbol{v} \in S$.

Concludiamo che S e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esempio 1.2.2. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : \, x - 2y + 3z = 4 \right\}.$$

Per verificare se S e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e' sufficiente verificare che S rispetti le tre condizioni di sopra:

($0 \in S$) Verifichiamo che il vettore $\mathbf{o}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{3}} = (0, 0, 0)$ appartenga ad S, ovvero soddisfi la condizione $x - 2y + 3z = 4$:

$$0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0 \neq 4$$

La condizione quindi non e' verificata.

Possiamo subito concludere che S non e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esempio 1.2.3. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 - y^2 = 0 \right\}.$$

Per verificare se S e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e' sufficiente verificare che S rispetti le tre condizioni di sopra:

($0 \in S$) Verifichiamo che il vettore $\mathbf{0}_{\mathbb{R}}^3 = (0, 0, 0)$ appartenga ad S, ovvero soddisfi la condizione $x^2 - y^2 = 0$:

$$0^2 - 0y^2 = 0 + 0 = 0$$

La condizione quindi e' verificata e $0_V \in S$.

($\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in S$) Verifichiamo che se

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

appartengono ad S, cioe'

$$v_1^2 - v_2^2 = 0, \quad w_1^2 - w_2^2 = 0$$

allora il vettore $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$ appartiene ad S, ovvero soddisfa la condizione $x^2 - y^2 = 0$.

$$\begin{aligned} &(v_1 + w_1)^2 - (v_2 + w_2)^2 \\ &= v_1^2 + w_1^2 + 2v_1w_1 - v_2^2 - w_2^2 - 2v_2w_2 \\ &= (v_1^2 - v_2^2) + (w_1^2 - w_2^2) + 2v_1w_1 - 2v_2w_2 \end{aligned}$$

dunque per l'ipotesi che $\boldsymbol{v} \in S$ e $\boldsymbol{w} \in S$

$$\begin{aligned} &= 0 + 0 + 2v_1w_1 - 2v_2w_2 \\ &= 2v_1w_1 - 2v_2w_2. \end{aligned}$$

Ma nessuno ci assicura che questa somma sia uguale a 0 (ad esempio basta scegliere $\boldsymbol{v} = (1, -1, 0)$ e $\boldsymbol{w} = (1, 1, 0)$), dunque la condizione non e' sempre rispettata.

Concludiamo che S non e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esempio 1.2.4. Sia $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e sia $A \subseteq V$ tale che

$$A = \left\{ M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ : \ M = M^T \right\}.$$

Vedere se questo e' un sottospazio sembra piu' difficile degli esercizi precedenti. Tuttavia, possiamo cercare di rendere la definizione di A piu' esplicita in modo da capire meglio quale sia la condizione di appartenenza al sottospazio.

Notiamo che tutta la definizione di A si basa su una matrice generica $M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Rendiamo piu' esplicita questa definizione, scrivendo

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ generici.

A questo punto ricordando la definizione di matrice trasposta (ovvero una matrice ottenuta trasformando le righe in colonne) possiamo scrivere la condizione di appartenenza al sottospazio A come

$$M = M^T \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

.

Dunque la matrice $M$ appartiene ad $A$ se e solo se $b = c$ (ovvero la seconda e la terza coordinata sono uguali), cioe'

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,:\, b = c \right\}.$$

A questo punto possiamo verificare se $A$ e' effettivamente un sottospazio di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

($0 \in A$) Verifichiamo che il vettore $\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ appartenga ad $A$, ovvero soddisfi la condizione $b = c$. La condizione e' ovviamente verificata e dunque $0_V \in A$.

($\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in A$) Verifichiamo che se

$$M_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

appartengono ad $A$, cioe'

$$q = r, \quad y = z$$

allora la matrice

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} p+x & q+y \\ r+z & s+t \end{pmatrix}$$

appartiene ad $A$, ovvero soddisfa la condizione $b = c$.

$$(q+y) \stackrel{?}{=} (r+z)$$

Per l'ipotesi che $M_1 \in A$ e $M_2 \in A$ sappiamo che $q = r$ e $y = z$:

$$\iff r+z = r+z$$

che e' ovvia. Dunque $M_1 + M_2 \in A$.

($k\boldsymbol{v} \in A$) Verifichiamo che se

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

appartiene ad $A$, cioe'

$$y = z$$

allora per ogni $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$kM = \begin{pmatrix} kx & ky \\ kz & kt \end{pmatrix}$$

appartiene ad $A$, ovvero soddisfi la condizione $ky = kz$.

Ma per ipotesi $y = z$, dunque moltiplicando entrambi i membri per $k$ otteniamo $ky = kz$, che e' quello che stavamo cercando di dimostrare.

Dunque $k\mathcal{M} \in A$.

Segue quindi che $A$ e' un sottospazio di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tale sottospazio si chiama *spazio delle matrici simmetriche*.

ESERCIZIO 1.2.5. Dire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi oppure no.

1. $V \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^4 \; : \; 3x - 2y + z + t = 0 \right\}$$

2. $V \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \; : \; \begin{cases} 3x - 2y + \phantom{4}z = 0 \\ -x + \phantom{2}y + 4z = 2 \end{cases} \right\}$$

3. $V \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che
$$V = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. $V \subseteq \mathbb{R}[x]^{\leqslant 3}$ tale che
$$V = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x]^{\leqslant 3} \; : \; p(2) = 0 \right\}$$

5. $V \subseteq \mathbb{R}[x]^{\leqslant 3}$ tale che
$$V = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x]^{\leqslant 3} \; : \; p(2) = -1 \right\}$$

6. $V \subseteq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che
$$V = \{ M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \; : \; AM - MA = O_2 \}$$
dove $A$ e $O_2$ sono due matrici $2 \times 2$ tali che
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# 2 FORMA PARAMETRICA E CARTESIANA

## 2.1 DEFINIZIONI

**Definizione 2.1.1** (Forma parametrica e cartesiana)
Sia V uno spazio vettoriale e sia A un sottospazio di V. Allora si dice che A e' espresso in forma parametrica se e' scritto come

$$A = \mathrm{span}\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$$

con $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in A$.
Invece si dice che A e' espresso in forma cartesiana se e' scritto come

$$A = \{\, \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{v} \text{ rispetta qualche condizione } \}.$$

Ad esempio se A e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ allora

$$A = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \right\}$$

e' espresso in forma parametrica, mentre

$$A = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : x - 2y + 3 = 0 \}$$

e' espresso in forma cartesiana.

## 2.2 PASSARE DALLA FORMA CARTESIANA ALLA FORMA PARAMETRICA

**Esempio 2.2.1.** Sia $A \subseteq R^3$ tale che

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : \begin{cases} 3x - 2y + \phantom{4}z = 0 \\ -x + \phantom{2}y + 4z = 0 \end{cases} \right\}.$$

Per scriverlo in forma parametrica dobbiamo risolvere il sistema e sostituire le informazioni ricavate nell'espressione per il vettore.
Risolviamo il sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \times -1]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

Dunque la soluzione al sistema e' $x = -9z$, $y = -13z$ con $z \in \mathbb{R}$ libera. Sostituiamolo nell'espressione per $(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \begin{pmatrix} -9z \\ -13z \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : z \in R \right\} \\ &= \left\{ z \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^3 : z \in R \right\} \\ &= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

che e' la forma parametrica del sottospazio $A$.

ESERCIZIO 2.2.2. Dato $A$ in forma cartesiana, scriverlo in forma parametrica.

(1) $A$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} 4x - 2y + 2z - 6t = 0 \\ -x + 3y + 4z + 2t = 0 \end{cases} \right\}$$

(2) $A$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x \qquad + 9z = 0 \end{cases} \right\}$$

(3) $A$ sottospazio di $\mathbb{R}[x]^{\leqslant 2}$ tale che

$$A = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x]^{\leqslant 2} \ : \ p(1) = 0 \right\}$$

(4) $A$ sottospazio di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che

$$A = \left\{ M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ : \ M = M^T \right\}$$

HINT: se la condizione non e' totalmente esplicita (accade spesso quando si hanno spazi diversi da $\mathbb{R}^n$) basta esplicitarla.

Ad esempio, se lo spazio e' $\mathbb{R}[x]^{\leqslant 2}$, invece di scrivere la condizione in termini di un polinomio generico $p(x)$ basta esplicitare il polinomio scrivendolo per esteso (in questo caso scriviamo $p(x) = a + bx + cx^2$ lasciando libere $a, b, c \in \mathbb{R}$) e poi riscrivere la condizione in termini delle nuove variabili $a, b, c$.

A questo punto e' anche facile fare l'isomorfismo con $\mathbb{R}^{\text{quello che ti pare}}$ per risolvere l'esercizio come se fosse con i vettori colonna.

## 2.3 PASSARE DALLA FORMA PARAMETRICA ALLA FORMA CARTESIANA

ESEMPIO 2.3.1. Sia $A$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$A = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per definizione di span, sappiamo che

$$A = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,:\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dunque un vettore generico $(x, y, z)$ e' in $A$ se e solo se

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tali che } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 2a \\ 3a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Dunque la condizione per cui $(x, y, z) \in A$ dipende dalla *risolubilita'* del sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Proviamo a risolverlo e imponiamo che non vi siano equazioni impossibili.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y-2x \\ 0 & 4 & z-3x \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y-2x \\ 0 & 0 & z-3x-2(y-2x) \end{array}\right).$$

Dunque il sistema ha soluzione se e solo se

$$z - 3x - 2(y - 2x) = 0$$

ovvero se e solo se

$$x - 2y + z = 0$$

che e' la condizione che cercavamo.

Di conseguenza, il sottospazio $A$ in forma cartesiana e' dato da

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - 2y + z = 0 \right\}.$$

ESERCIZIO 2.3.2. Dato $A$ in forma parametrica, scriverlo in forma cartesiana.

(1) $A$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$A = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

(2) $A$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(3) $A$ sottospazio di $\mathbb{R}^2$ tale che

$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(4) $A$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

# 3 DETERMINARE BASI DI SOTTOSPAZI

Dati sottospazi di uno spazio vettoriale $V$, scritti in forma parametrica o cartesiana, vorremmo riuscire a ricavare una base del sottospazio.

## 3.1 TEOREMI E DEFINIZIONI UTILI

> **Definizione 3.1.1** (Base di uno spazio vettoriale)
> Sia $V$ uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora si dice che $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ e' una base di $V$ se
>
> - i vettori $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ generano $V$;
> - i vettori $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ sono linearmente indipendenti.

Le basi canoniche degli spazi vettoriali piu' comuni sono:

**base canonica di $\mathbb{R}^n$**
La base canonica di $\mathbb{R}^n$ e'

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**base canonica di $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$**
La base canonica di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e'

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ragionamento analogo per le $n \times m$. Lo spazio delle matrici $n \times m$ e' isomorfo a $\mathbb{R}^{nm}$.

**base canonica dello spazio dei polinomi**
La base canonica di $\mathbb{R}[x]^{\leqslant n}$ e'

$$\left\langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n \right\rangle.$$

Lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a $n$ e' isomorfo a $\mathbb{R}^{n+1}$.

**3.1.2. Proposizione.**
(Mosse di colonna per ottenere uno span di vettori indipendenti)

*Sia $V$ un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ tale che $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_m} \in \mathbb{R}^n$ siano suoi generatori, ovvero*

$$V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_m}\}.$$

*Consideriamo la matrice* $A$ *formata dai vettori* $\boldsymbol{v_i}$ *messi in colonna e riduciamola a scalini per colonna. Siano* $\boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_k}$ *le colonne non nulle della matrice* $A$ *ridotta a scalini. Allora*

*(i)* $\boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_k}$ *sono indipendenti;*

*(ii) lo span di* $\boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_k}$ *e' uguale allo span di* $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$

*ovvero* $\langle \boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_k} \rangle$ *e' una base di* $V$.

3.1.3. Proposizione.
(Estrazione di una base tramite mosse di riga)
*Sia* $V$ *un sottospazio di* $\mathbb{R}^n$ *tale che* $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_m} \in \mathbb{R}^n$ *siano suoi generatori, ovvero*

$$V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_m}\}.$$

*Allora possiamo porre i vettori come colonne di una matrice e ridurla a scalini per riga. Alla fine del procedimento i vettori che originariamente erano nelle colonne con i pivot sono indipendenti e generano* $V$*, dunque formano una base di* $V$.

## 3.2 trovare una base tramite mosse di colonna

Cerchiamo di sfruttare la proposizione 3.1.2 per trovare una base di sottospazi vettoriali.

Esempio 3.2.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che

$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Per trovare una base di $A$ tramite mosse di colonna mettiamo i vettori come colonne di una matrice e riduciamola a scalini per colonna.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4-4C_1]{C_2-3C_1, C_3+C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4-C_2}$$

$$\xrightarrow{C_4-C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4+4C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque per la proposizione 3.1.2 i vettori $(1, -2, 0)$, $(0, 5, 4)$, $(0, 0, -1)$ sono indipendenti e generano $V$, ovvero

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

dunque $\mathcal{B} = \langle (1, -2, 0);\ (0, 5, 4);\ (0, 0, -1) \rangle$ e' una base di $V$.

Esercizio 3.2.2. Dati uno spazio vettoriale $V$ e un sottospazio $A$, trovare una base di $A$.

1. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e $A$ sottospazio di $V$ dato da
$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $A$ sottospazio di $V$ dato da
$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $A$ sottospazio di $V$ dato da
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - 3y + 2z = 0 \right\}.$$

4. Sia $V = \mathbb{R}[x]^{\leqslant 2}$ e $A$ sottospazio di $V$ dato da
$$A = \{ p(x) \in V \,:\, p(3) = 0 \}.$$

5. Sia $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $A$ sottospazio di $V$ dato da
$$A = \left\{ M \in V \,:\, M + M^T = O_2 \right\}$$
dove $O_2$ e' la matrice $2 \times 2$ con zero in tutte le posizioni, mentre $M^T$ e' la matrice trasposta di $M$ (quella ottenuta trasformando le righe in colonne).

Hint: se il sottospazio e' in forma cartesiana, va prima portato in forma parametrica per fare i calcoli con gli span.

Hint: come nel capitolo precedente, se la condizione non e' totalmente esplicita (accade spesso quando si hanno spazi diversi da $\mathbb{R}^n$) basta esplicitarla.

Ad esempio, se lo spazio e' $\mathbb{R}[x]^{\leqslant 2}$, invece di scrivere la condizione in termini di un polinomio generico $p(x)$ basta esplicitare il polinomio scrivendolo per esteso (in questo caso scriviamo $p(x) = a + bx + cx^2$ lasciando libere $a, b, c \in \mathbb{R}$) e poi riscrivere la condizione in termini delle nuove variabili $a, b, c$.

A questo punto e' anche facile fare l'isomorfismo con $\mathbb{R}^{\text{quello che ti pare}}$ per risolvere l'esercizio come se fosse con i vettori colonna.

## 3.3 Trovare una base tramite estrazione e mosse di riga

Cerchiamo di sfruttare la proposizione 3.1.3 per trovare una base di sottospazi vettoriali.

Esempio 3.3.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che
$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Per trovare una base di $A$ tramite mosse di riga mettiamo i vettori come colonne di una matrice e riduciamola a scalini per riga.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \frac{1}{5}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

I pivot di questa matrice sono nelle colonne 1, 2 e 3, dunque per la proposizione 3.1.3 i vettori $(1,-2,0),(3,-1,4),(-1,2,-1)$ sono indipendenti e generano $V$, ovvero

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

dunque $\mathcal{B} = \langle (1,-2,0);\ (3,-1,4);\ (-1,2,-1) \rangle$ e' una base di $V$.

Nota bene: i due procedimenti (per colonna e per riga) danno quasi sempre due basi diverse, ma ugualmente valide.

Esercizio 3.3.2. Dati uno spazio vettoriale $V$ e un sottospazio $A$, estrarre una base di $A$.

1. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e $A$ sottospazio di $V$ dato da
$$A = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $A$ sottospazio di $V$ dato da
$$A = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

3. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $A$ sottospazio di $V$ dato da
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - 3y + 2z = 0 \right\}.$$

4. Sia $V = \mathbb{R}[x]^{\leqslant 2}$ e $A$ sottospazio di $V$ dato da
$$A = \{ p(x) \in V \,:\, p(3) = 0 \}.$$

5. Sia $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $A$ sottospazio di $V$ dato da
$$A = \left\{ M \in V \,:\, M + M^T = O_2 \right\}$$
dove $O_2$ e' la matrice $2 \times 2$ con zero in tutte le posizioni, mentre $M^T$ e' la matrice trasposta di $M$ (quella ottenuta trasformando le righe in colonne).

Hint: valgono gli stessi hint della sezione predecente.