Esercizi di Algebra Lineare

22 luglio 2020

INDICE

1

SOTTOSPAZI VETTORIALI

In questo capitolo vogliamo scoprire come verificare se un dato sottoinsieme di uno spazio vettoriale e' un sottospazio vettoriale.

1.1 TEOREMI E DEFINIZIONI UTILI

> **Definizione 1.1.1** (Sottospazio vettoriale)
>
> Sia V uno spazio vettoriale, $A \subseteq V$. Allora si dice che A e' un sottospazio vettoriale di V (o semplicemente sottospazio) se
>
> $$\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} \in A \tag{1}$$
> $$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \in A \qquad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in A \tag{2}$$
> $$(k\boldsymbol{v}) \in A \qquad \forall k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v} \in A \tag{3}$$

1.2 VERIFICA

Esempio 1.2.1. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - 2y + 3z = 0 \right\}.$$

Per verificare se S e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e' sufficiente verificare che S rispetti le tre condizioni di sopra:

($0 \in S$) Verifichiamo che il vettore $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ appartenga ad S, ovvero soddisfi la condizione $x - 2y + 3z = 0$:

$$0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

La condizione quindi e' verificata e $0_V \in S$.

($\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in S$) Verifichiamo che se

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

appartengono ad S, cioe'

$$v_1 - 2v_2 + 3v_3 = 0, \quad w_1 - 2w_2 + 3w_3 = 0$$

allora il vettore $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$ appartiene ad S, ovvero soddisfa la condizione $x - 2y + 3z = 0$.

$$\begin{aligned}(v_1 + w_1) - 2(v_2 + w_2) + 3(v_3 + w_3)& \\ &= v_1 + w_1 - 2v_2 - 2w_2 + 3v_3 + 3w_3 \\ &= (v_1 - 2v_2 + 3v_3) + (w_1 - 2w_2 + 3w_3)\end{aligned}$$

dunque per l'ipotesi che $\boldsymbol{v} \in S$ e $\boldsymbol{w} \in S$

$$\begin{aligned} &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dunque $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in S$.

($k\boldsymbol{v} \in S$) Verifichiamo che se

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

appartiene ad S, cioe'

$$v_1 - 2v_2 + 3v_3 = 0$$

allora per ogni $k \in \mathbb{R}$ il vettore $k\boldsymbol{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$ appartiene ad S, ovvero soddisfa la condizione $x - 2y + 3z = 0$.

$$\begin{aligned} (kv_1) - 2(kv_2) + 3(kv_3) &= kv_1 - 2kv_2 + 3kv_3 \\ &= k(v_1 - 2v_2 + 3v_3) \end{aligned}$$

dunque per l'ipotesi che $\boldsymbol{v} \in S$

$$\begin{aligned} &= k \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dunque $k\boldsymbol{v} \in S$.

Concludiamo che S e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esempio 1.2.2. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - 2y + 3z = 4 \right\}.$$

Per verificare se S e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e' sufficiente verificare che S rispetti le tre condizioni di sopra:

($0 \in S$) Verifichiamo che il vettore $\mathbf{o}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{3}} = (0, 0, 0)$ appartenga ad S, ovvero soddisfi la condizione $x - 2y + 3z = 4$:

$$0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0 \neq 4$$

La condizione quindi non e' verificata.

Possiamo subito concludere che S non e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esempio 1.2.3. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 - y^2 = 0 \right\}.$$

Per verificare se S e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e' sufficiente verificare che S rispetti le tre condizioni di sopra:

($0 \in S$) Verifichiamo che il vettore $\mathbf{0}^3_{\mathbb{R}} = (0, 0, 0)$ appartenga ad S, ovvero soddisfi la condizione $x^2 - y^2 = 0$:

$$0^2 - 0y^2 = 0 + 0 = 0$$

La condizione quindi e' verificata e $0_V \in S$.

($\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in S$) Verifichiamo che se

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

appartengono ad S, cioe'

$$v_1^2 - v_2^2 = 0, \quad w_1^2 - w_2^2 = 0$$

allora il vettore $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$ appartiene ad S, ovvero soddisfa la condizione $x^2 - y^2 = 0$.

$$\begin{aligned} &(v_1 + w_1)^2 - (v_2 + w_2)^2 \\ &= v_1^2 + w_1^2 + 2v_1w_1 - v_2^2 - w_2^2 - 2v_2w_2 \\ &= (v_1^2 - v_2^2) + (w_1^2 - w_2^2) + 2v_1w_1 - 2v_2w_2 \end{aligned}$$

dunque per l'ipotesi che $\boldsymbol{v} \in S$ e $\boldsymbol{w} \in S$

$$\begin{aligned} &= 0 + 0 + 2v_1w_1 - 2v_2w_2 \\ &= 2v_1w_1 - 2v_2w_2. \end{aligned}$$

Ma nessuno ci assicura che questa somma sia uguale a 0 (ad esempio basta scegliere $\boldsymbol{v} = (1, -1, 0)$ e $\boldsymbol{w} = (1, 1, 0)$), dunque la condizione non e' sempre rispettata.

Concludiamo che S non e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Esempio 1.2.4. Sia $V = \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ e sia $A \subseteq V$ tale che

$$A = \left\{ M \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \,:\, M = M^T \right\}.$$

Vedere se questo e' un sottospazio sembra piu' difficile degli esercizi precedenti. Tuttavia, possiamo cercare di rendere la definizione di A piu' esplicita in modo da capire meglio quale sia la condizione di appartenenza al sottospazio.

Notiamo che tutta la definizione di A si basa su una matrice generica $M \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$. Rendiamo piu' esplicita questa definizione, scrivendo

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ generici.

A questo punto ricordando la definizione di matrice trasposta (ovvero una matrice ottenuta trasformando le righe in colonne) possiamo scrivere la condizione di appartenenza al sottospazio A come

$$M = M^T \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

.

Dunque la matrice M appartiene ad A se e solo se $b = c$ (ovvero la seconda e la terza coordinata sono uguali), cioe'

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \, : \, b = c \right\}.$$

A questo punto possiamo verificare se A e' effettivamente un sottospazio di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

($0 \in A$) Verifichiamo che il vettore $\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ appartenga ad A, ovvero soddisfi la condizione $b = c$. La condizione e' ovviamente verificata e dunque $0_V \in A$.

($\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in A$) Verifichiamo che se

$$M_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

appartengono ad A, cioe'

$$q = r, \quad y = z$$

allora la matrice

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} p + x & q + y \\ r + z & s + t \end{pmatrix}$$

appartiene ad A, ovvero soddisfa la condizione $b = c$.

$$(q + y) \stackrel{?}{=} (r + z)$$

Per l'ipotesi che $M_1 \in A$ e $M_2 \in A$ sappiamo che $q = r$ e $y = z$:

$$\iff r + z = r + z$$

che e' ovvia. Dunque $M_1 + M_2 \in A$.

($k\boldsymbol{v} \in A$) Verifichiamo che se

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

appartiene ad A, cioe'

$$y = z$$

allora per ogni $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$kM = \begin{pmatrix} kx & ky \\ kz & kt \end{pmatrix}$$

appartiene ad A, ovvero soddisfi la condizione $ky = kz$.

Ma per ipotesi $y = z$, dunque moltiplicando entrambi i membri per k otteniamo $ky = kz$, che e' quello che stavamo cercando di dimostrare.

Dunque $k\mathcal{M} \in A$.

Segue quindi che A e' un sottospazio di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tale sottospazio si chiama *spazio delle matrici simmetriche*.

ESERCIZIO 1.2.5. Dire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi oppure no.

1. $V \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^4 \ : \ 3x - 2y + z + t = 0 \right\}$$

2. $V \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \ : \ \begin{cases} 3x - 2y + \ \ z = 0 \\ -x + \ \ y + 4z = 2 \end{cases} \right\}$$

3. $V \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che
$$V = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. $V \subseteq \mathbb{R}[x]^{\leqslant 3}$ tale che
$$V = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x]^{\leqslant 3} \ : \ p(2) = 0 \right\}$$

5. $V \subseteq \mathbb{R}[x]^{\leqslant 3}$ tale che
$$V = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x]^{\leqslant 3} \ : \ p(2) = -1 \right\}$$

6. $V \subseteq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che
$$V = \{ M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ : \ AM - MA = O_2 \}$$
dove A e O_2 sono due matrici 2×2 tali che
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 FORMA PARAMETRICA E CARTESIANA

2.1 DEFINIZIONI

Definizione 2.1.1 (Forma parametrica e cartesiana)
Sia V uno spazio vettoriale e sia A un sottospazio di V. Allora si dice che A e' espresso in forma parametrica se e' scritto come

$$A = \text{span}\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$$

con $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in A$.

Invece si dice che A e' espresso in forma cartesiana se e' scritto come

$$A = \{\, \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{v} \text{ rispetta qualche condizione} \,\}.$$

Ad esempio se A e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ allora

$$A = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \right\}$$

e' espresso in forma parametrica, mentre

$$A = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : x - 2y + 3 = 0 \}$$

e' espresso in forma cartesiana.

2.2 PASSARE DALLA FORMA CARTESIANA ALLA FORMA PARAMETRICA

Esempio 2.2.1. Sia $A \subseteq R^3$ tale che

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : \begin{cases} 3x - 2y + \ \ z = 0 \\ -x + \ \ y + 4z = 0 \end{cases} \right\}.$$

Per scriverlo in forma parametrica dobbiamo risolvere il sistema e sostituire le informazioni ricavate nell'espressione per il vettore.

Risolviamo il sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \times -1]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

Dunque la soluzione al sistema e' $x = -9z$, $y = -13z$ con $z \in \mathbb{R}$ libera. Sostituiamolo nell'espressione per (x, y, z):

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{ \begin{pmatrix} -9z \\ -13z \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : z \in R \right\} \\
&= \left\{ z \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^3 : z \in R \right\} \\
&= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

che e' la forma parametrica del sottospazio A.

ESERCIZIO 2.2.2. Dato A in forma cartesiana, scriverlo in forma parametrica.

(1) A sottospazio di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$
A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \, : \, \begin{cases} 4x - 2y + 2z - 6t = 0 \\ -x + 3y + 4z + 2t = 0 \end{cases} \right\}
$$

(2) A sottospazio di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$
A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : \, \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x \qquad + 9z = 0 \end{cases} \right\}
$$

(3) A sottospazio di $\mathbb{R}[x]^{\leqslant 2}$ tale che

$$
A = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x]^{\leqslant 2} \, : \, p(1) = 0 \right\}
$$

(4) A sottospazio di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che

$$
A = \left\{ M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \, : \, M = M^T \right\}
$$

HINT: se la condizione non e' totalmente esplicita (accade spesso quando si hanno spazi diversi da $\mathbb{R}^n$) basta esplicitarla.

Ad esempio, se lo spazio e' $\mathbb{R}[x]^{\leqslant 2}$, invece di scrivere la condizione in termini di un polinomio generico $p(x)$ basta esplicitare il polinomio scrivendolo per esteso (in questo caso scriviamo $p(x) = a + bx + cx^2$ lasciando libere $a, b, c \in \mathbb{R}$) e poi riscrivere la condizione in termini delle nuove variabili a, b, c.

A questo punto e' anche facile fare l'isomorfismo con $\mathbb{R}^{\text{quello che ti pare}}$ per risolvere l'esercizio come se fosse con i vettori colonna.

2.3 PASSARE DALLA FORMA PARAMETRICA ALLA FORMA CARTESIANA

ESEMPIO 2.3.1. Sia A sottospazio di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Per definizione di span, sappiamo che

$$A = \left\{ a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \;:\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dunque un vettore generico (x, y, z) e' in A se e solo se

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tali che } \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-b\\2a\\3a+b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

Dunque la condizione per cui $(x, y, z) \in A$ dipende dalla *risolubilita'* del sistema

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

Proviamo a risolverlo e imponiamo che non vi siano equazioni impossibili.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & x\\2 & 0 & y\\3 & 1 & z\end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & x\\0 & 2 & y-2x\\0 & 4 & z-3x\end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_2} \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & x\\0 & 2 & y-2x\\0 & 0 & z-3x-2(y-2x)\end{array}\right).$$

Dunque il sistema ha soluzione se e solo se

$$z - 3x - 2(y - 2x) = 0$$

ovvero se e solo se

$$x - 2y + z = 0$$

che e' la condizione che cercavamo.

Di conseguenza, il sottospazio A in forma cartesiana e' dato da

$$A = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; x - 2y + z = 0 \right\}.$$

ESERCIZIO 2.3.2. Dato A in forma parametrica, scriverlo in forma cartesiana.

(1) A sottospazio di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix} \right\}$$

(2) A sottospazio di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(3) A sottospazio di $\mathbb{R}^2$ tale che

$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(4) A sottospazio di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3 DETERMINARE BASI DI SOTTOSPAZI

Dati sottospazi di uno spazio vettoriale V, scritti in forma parametrica o cartesiana, vorremmo riuscire a ricavare una base del sottospazio.

3.1 TEOREMI E DEFINIZIONI UTILI

> **Definizione 3.1.1** (Base di uno spazio vettoriale)
>
> Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora si dice che $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ e' una base di V se
>
> - i vettori $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ generano V;
> - i vettori $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ sono linearmente indipendenti.

Le basi canoniche degli spazi vettoriali piu' comuni sono:

BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$

La base canonica di $\mathbb{R}^n$ e'

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

BASE CANONICA DI $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$

La base canonica di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e'

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ragionamento analogo per le $n \times m$. Lo spazio delle matrici $n \times m$ e' isomorfo a $\mathbb{R}^{nm}$.

BASE CANONICA DELLO SPAZIO DEI POLINOMI

La base canonica di $\mathbb{R}[x]^{\leqslant n}$ e'

$$\left\langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n \right\rangle.$$

Lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a n e' isomorfo a $\mathbb{R}^{n+1}$.

3.1.2. Proposizione.
(Mosse di colonna per ottenere uno span di vettori indipendenti)

Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ tale che $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_m} \in \mathbb{R}^n$ siano suoi generatori, ovvero

$$V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_m}\}.$$

Consideriamo la matrice A formata dai vettori $\boldsymbol{v_i}$ messi in colonna e riduciamola a scalini per colonna. Siano $\boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_k}$ le colonne non nulle della matrice A ridotta a scalini. Allora

(i) $\boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_k}$ *sono indipendenti;*

(ii) lo span di $\boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_k}$ *e' uguale allo span di* $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$

ovvero $\langle \boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_k} \rangle$ *e' una base di* V.

3.1.3. PROPOSIZIONE.
(ESTRAZIONE DI UNA BASE TRAMITE MOSSE DI RIGA)
Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ tale che $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_m} \in \mathbb{R}^n$ siano suoi generatori, ovvero

$$V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_m}\}.$$

Allora possiamo porre i vettori come colonne di una matrice e ridurla a scalini per riga. Alla fine del procedimento i vettori che originariamente erano nelle colonne con i pivot sono indipendenti e generano V, dunque formano una base di V.

3.2 TROVARE UNA BASE TRAMITE MOSSE DI COLONNA

Cerchiamo di sfruttare la proposizione 3.1.2 per trovare una base di sottospazi vettoriali.

ESEMPIO 3.2.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che

$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Per trovare una base di A tramite mosse di colonna mettiamo i vettori come colonne di una matrice e riduciamola a scalini per colonna.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4-4C_1]{C_2-3C_1, C_3+C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4-C_2}$$

$$\xrightarrow{C_4-C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4+4C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque per la proposizione 3.1.2 i vettori $(1, -2, 0), (0, 5, 4), (0, 0, -1)$ sono indipendenti e generano V, ovvero

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

dunque $\mathcal{B} = \langle (1, -2, 0);\ (0, 5, 4);\ (0, 0, -1) \rangle$ e' una base di V.

ESERCIZIO 3.2.2. Dati uno spazio vettoriale V e un sottospazio A, trovare una base di A.

1. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e A sottospazio di V dato da
$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e A sottospazio di V dato da
$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
3. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e A sottospazio di V dato da
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - 3y + 2z = 0 \right\}.$$
4. Sia $V = \mathbb{R}[x]^{\leqslant 2}$ e A sottospazio di V dato da
$$A = \{\, p(x) \in V \,:\, p(3) = 0 \,\}.$$
5. Sia $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e A sottospazio di V dato da
$$A = \left\{ M \in V \,:\, M + M^T = O_2 \right\}$$
dove O_2 e' la matrice 2×2 con zero in tutte le posizioni, mentre M^T e' la matrice trasposta di M (quella ottenuta trasformando le righe in colonne).

HINT: se il sottospazio e' in forma cartesiana, va prima portato in forma parametrica per fare i calcoli con gli span.

HINT: come nel capitolo precedente, se la condizione non e' totalmente esplicita (accade spesso quando si hanno spazi diversi da $\mathbb{R}^n$) basta esplicitarla.

Ad esempio, se lo spazio e' $\mathbb{R}[x]^{\leqslant 2}$, invece di scrivere la condizione in termini di un polinomio generico $p(x)$ basta esplicitare il polinomio scrivendolo per esteso (in questo caso scriviamo $p(x) = a + bx + cx^2$ lasciando libere $a, b, c \in \mathbb{R}$) e poi riscrivere la condizione in termini delle nuove variabili a, b, c.

A questo punto e' anche facile fare l'isomorfismo con $\mathbb{R}^{\text{quello che ti pare}}$ per risolvere l'esercizio come se fosse con i vettori colonna.

3.3 TROVARE UNA BASE TRAMITE ESTRAZIONE E MOSSE DI RIGA

Cerchiamo di sfruttare la proposizione 3.1.3 per trovare una base di sottospazi vettoriali.

ESEMPIO 3.3.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che

$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Per trovare una base di A tramite mosse di riga mettiamo i vettori come colonne di una matrice e riduciamola a scalini per riga.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \frac{1}{5}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

I pivot di questa matrice sono nelle colonne 1, 2 e 3, dunque per la proposizione 3.1.3 i vettori $(1, -2, 0), (3, -1, 4), (-1, 2, -1)$ sono indipendenti e generano V, ovvero

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

dunque $\mathcal{B} = \langle (1, -2, 0);\ (3, -1, 4);\ (-1, 2, -1) \rangle$ e' una base di V.

NOTA BENE: i due procedimenti (per colonna e per riga) danno quasi sempre due basi diverse, ma ugualmente valide.

ESERCIZIO 3.3.2. Dati uno spazio vettoriale V e un sottospazio A, estrarre una base di A.

1. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e A sottospazio di V dato da

$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e A sottospazio di V dato da

$$A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e A sottospazio di V dato da

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - 3y + 2z = 0 \right\}.$$

4. Sia $V = \mathbb{R}[x]^{\leqslant 2}$ e A sottospazio di V dato da

$$A = \{ p(x) \in V \,:\, p(3) = 0 \}.$$

5. Sia $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e A sottospazio di V dato da

$$A = \left\{ M \in V \, : \, M + M^T = O_2 \right\}$$

dove O_2 e' la matrice 2×2 con zero in tutte le posizioni, mentre M^T e' la matrice trasposta di M (quella ottenuta trasformando le righe in colonne).

HINT: valgono gli stessi hint della sezione predecente.

4 SOTTOSPAZI SOMMA E INTERSEZIONE

4.1 DEFINIZIONI E TEOREMI UTILI

DEFINIZIONE 4.1.1 (Sottospazio somma e intersezione)
Sia V uno spazio vettoriale e siano $U, W \subseteq V$ due sottospazi di V.
Allora definisco il sottospazio somma $U + W$ come

$$U + W := \{ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \in V : \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W \}$$

e il sottospazio intersezione $U \cap W$ come

$$U \cap W := \{ \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{v} \in U \wedge \boldsymbol{v} \in W \}.$$

4.1.2. TEOREMA.
(FORMULA DI GRASSMAN)
Sia V uno spazio vettoriale e siano $U, W \subseteq V$ due sottospazi di V.
Allora vale che

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

4.1.3. PROPOSIZIONE.
(GENERATORI DEL SOTTOSPAZIO SOMMA)
Sia V uno spazio vettoriale e siano $U, W \subseteq V$ due sottospazi di V. Siano inoltre

$$\mathcal{B}_U = \langle \boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n} \rangle$$
$$\mathcal{B}_W = \langle \boldsymbol{w_1}, \dots, \boldsymbol{w_m} \rangle$$

delle basi rispettivamente di U e di W.
Allora l'insieme

$$\{ \boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n}, \boldsymbol{w_1}, \dots, \boldsymbol{w_m} \}$$

e' un insieme di generatori di $U + W$, ovvero

$$U + W = \operatorname{span}\{ \boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n}, \boldsymbol{w_1}, \dots, \boldsymbol{w_m} \}. \tag{4}$$

OSSERVAZIONE. I vettori $\boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n}, \boldsymbol{w_1}, \dots, \boldsymbol{w_m}$ *generano* $U + W$ ma non sono necessariamente una base: dobbiamo renderli indipendenti tramite mosse di riga o di colonna.

Definizione 4.1.4 (Somma diretta)

Sia V uno spazio vettoriale e siano $U, W \subseteq V$ due sottospazi di V.

Allora il sottospazio somma $U + W$ si dice in *somma diretta* se per ogni $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{w} \in W$ allora $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ sono indipendenti. Se la somma e' diretta scrivo $U \oplus W$.

4.1.5. **Proposizione.**
(**Condizione necessaria e sufficiente per la somma diretta**)

Sia V uno spazio vettoriale e siano $U, W \subseteq V$ due sottospazi di V.

Allora il sottospazio somma $U + W$ e' in somma diretta se e solo se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

In tal caso la formula di Grassman diventa

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W.$$

4.2 trovare basi di somme/intersezioni

Esempio 4.2.1. Sia $V = \mathbb{R}^4$, $U, W \subseteq V$ tali che

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cerchiamo di trovare una base di $U + W$ e una base di $U \cap W$.

base di $U + W$ La cosa piu' semplice e' trovare una base di $U + W$: basta sfruttare la proposizione 4.1.3 e ricavare una base dai vettori trovati.

Per la proposizione 4.1.3 sappiamo che

$$U + W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Usiamo il metodo delle mosse di riga per trovare una base di $U + W$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-R_1]{R_2-2R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\times -1/2]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7/2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-3R_2]{R_3+2R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & -25/2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\times -2/5]{R_3\times 1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque i pivot sono sulle prime tre colonne, ovvero

$$\mathcal{B}_{U+W} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e' una base di $U + W$ e $\dim(U + W) = 3$.

base di $U \cap W$ Trovare una base di $U \cap W$ e' piu' difficile se abbiamo i sottospazi U e W in forma parametrica. Il primo passo sara' quindi portare U e W in forma cartesiana per poi trovare finalmente una base dell'intersezione.

Notiamo che se siamo soltanto interessati a $\dim(U \cap W)$ sappiamo gia' per Grassman che

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Scriviamo U in forma cartesiana.

$$\begin{aligned} U &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,:\, \exists a, b \in \mathbb{R}.\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,:\, \exists a, b \in \mathbb{R}.\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Dunque dobbiamo vedere per quali valori di $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ il sistema ha soluzione. Risolviamo il sistema e imponiamo che non ci siano equazioni impossibili.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & x \\ 0 & -2 & y \\ 1 & -2 & z \\ 1 & 0 & t \end{array}\right) \xrightarrow{\text{scambio}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t \\ 2 & 3 & x \\ 0 & -2 & y \\ 1 & -2 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_4-R_1]{R_2-2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t \\ 0 & 3 & x-2t \\ 0 & -2 & y \\ 0 & -2 & z-t \end{array}\right) \xrightarrow[\text{scambio}]{R_2+3/2R_4, R_3+R_4} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t \\ 0 & -2 & z-t \\ 0 & 0 & x-2t+3/2(z-t) \\ 0 & 0 & y-z+t \end{array}\right)$$

Dunque per non avere equazioni impossibili le due condizioni sono

1. $x - 2t + 3/2(z - t) = 0$, ovvero $2x + 3z - 7t = 0$;
2. $y - z + t = 0$.

Dunque

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} 2x \quad + 3z - 7t = 0 \\ \quad y - \ z + \ t = 0 \end{cases} \right\}.$$

Con lo stesso ragionamento scriviamo W in forma cartesiana, ottenendo

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x + 2y + z \qquad = 0 \\ x + \ y \qquad - 3t = 0 \end{cases} \right\}.$$

A questo punto se un vettore di V si trova in $U \cap W$ significa che rispetta entrambe le condizioni, ovvero che e' una soluzione al sistema creato combinando le soluzioni:

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} 2x \qquad + 3z - 7t = 0 \\ \qquad y - \ z + \ t = 0 \\ x + 2y + \ z \qquad = 0 \\ x + \ y \qquad - 3t = 0 \end{cases} \right\}.$$

Per trovarne una base devo tornare alla forma parametrica, risolvendo il sistema.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-R_1]{R_3-2R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-R_2]{R_3+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-2R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $(x, y, z, t) = (5t, -2t, -t, t)$, ovvero

$$U \cap W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e una base di $U \cap W$ e' data da

$$\mathcal{B}_{U\cap W} = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Esercizio 4.2.2. Dato V spazio vettoriale e due sottospazi $U, W \subseteq V$, determinare una base di $U + W$ e una base di $U \cap W$. Dire anche se la somma $U + W$ è diretta.

1. $V = \mathbb{R}^3$, U e W tali che

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

5 APPLICAZIONI LINEARI

5.1 definizioni e teoremi utili

Supponiamo che V e W siano due spazi vettoriali.

Definizione 5.1.1 (Applicazione lineare)
Un'applicazione $f : V \to W$ si dice lineare se

$$f(\mathbf{0_V}) = \mathbf{0_W} \tag{5}$$
$$f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w}) \qquad \forall v, w \in V \tag{6}$$
$$f(k\boldsymbol{v}) = kf(\boldsymbol{v}) \qquad \forall v \in V, k \in \mathbb{R} \tag{7}$$

V si dice dominio dell'applicazione lineare, W si dice codominio.

Definizione 5.1.2 (Immagine di un'applicazione lineare)
Sia $f : V \to W$ lineare. Allora si dice immagine di f l'insieme

$$\operatorname{Im} f = \{\, f(\boldsymbol{v}) \,:\, \boldsymbol{v} \in V \,\}. \tag{8}$$

Osservazione. Possiamo esprimere l'immagine di f anche come

$$\operatorname{Im} f = \{\, \boldsymbol{w} \in W \,:\, \exists \boldsymbol{v} \in V. f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} \,\}.$$

Definizione 5.1.3 (Kernel di un'applicazione lineare)
Sia $f : V \to W$ lineare. Allora si dice kernel (o nucleo) di f l'insieme

$$\ker f = \{\, \boldsymbol{v} \in V \,:\, f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0_W} \,\}. \tag{9}$$

5.1.4. Proposizione.
(Definizione di un'applicazione lineare attraverso una base)
Sia $f : V \to W$ lineare e sia $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ una base del dominio.

Se sappiamo i valori assunti da f quando applicata ai vettori di $\mathcal{B}$ allora possiamo calcolare il valore di f quando applicata ad un qualsiasi valore del dominio.

In particolare se $\boldsymbol{v} \in V$ e' tale che

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n}$$

allora

$$f(\boldsymbol{v}) = a_1 f(\boldsymbol{v_1}) + \cdots + a_n f(\boldsymbol{v_n}).$$

5.1.5. PROPOSIZIONE.
(UNA FUNZIONE MAPPA UNA BASE DEL DOMINIO IN UN INSIEME DI GENERATORI DEL CODOMINIO)

Sia $f : V \to W$ *lineare e sia* $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ *una base di* V.

Allora segue che $\{ f(\boldsymbol{v_1}), \dots, f(\boldsymbol{v_n}) \}$ *e' un insieme di generatori di* $\operatorname{Im} f$, *ovvero che*

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{span}\{f(\boldsymbol{v_1}), \dots, f(\boldsymbol{v_n})\}.$$

OSSERVAZIONE. I vettori $f(\boldsymbol{v_1}), \dots, f(\boldsymbol{v_n})$ potrebbero comunque non essere indipendenti, quindi se vogliamo trovare una base di $\operatorname{Im} f$ dobbiamo renderli indipendenti (tramite mosse di riga o di colonna).

5.1.6. TEOREMA.
(TEOREMA DELLE DIMENSIONI)

Sia $f : V \to W$ *lineare. Allora vale il seguente fatto:*

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f. \tag{10}$$

5.1.1 *Applicazioni iniettive e surgettive*

DEFINIZIONE 5.1.7 (Applicazione iniettiva)
Sia $f : V \to W$ lineare. Allora f si dice iniettiva se per ogni $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V$ vale che

$$f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) \implies \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$$

o equivalentemente che

$$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{u} \implies f(\boldsymbol{v}) \neq f(\boldsymbol{u}).$$

5.1.8. PROPOSIZIONE.
(CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER L'INIETTIVITA')

Sia $f : V \to W$ *lineare.*

Allora f *e' iniettiva se e solo se* $\ker f = \{ \boldsymbol{0_V} \}$.

5.1.9. COROLLARIO.

Sia $f : V \to W$ *lineare ed iniettiva. Allora*

(i) $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$ *(per il teorema delle dimensioni);*

(ii) necessariamente $\dim V \leqslant \dim W$.

5.1.10. PROPOSIZIONE.
(UN'APPLICAZIONE INIETTIVA PRESERVA L'INDIPENDENZA)

Siano $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in V$ *linearmente indipendenti e sia* $f : V \to W$ *lineare.*

Se f *e' iniettiva allora segue che* $f(\boldsymbol{v_1}), \ldots, f(\boldsymbol{v_n})$ *sono linearmente indipendenti.*

DEFINIZIONE 5.1.11 (Surgettiva)

Sia $f : V \to W$ lineare.

Allora f si dice surgettiva se per ogni $\boldsymbol{w} \in W$ esiste $\boldsymbol{v} \in V$ tale che $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$, ovvero se $\operatorname{Im} f = W$.

5.1.12. PROPOSIZIONE.
(CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER LA SURGETTIVITA')

Sia $f : V \to W$ *lineare.*

Allora f *e' surgettiva se e solo se* $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$*, ovvero (per il teorema delle dimensioni) se e solo se* $\dim V - \dim \ker f = \dim W$*.*

5.1.2 *Isomorfismi*

DEFINIZIONE 5.1.13 (Applicazione bigettiva)

Sia $f : V \to W$ lineare.

Allora f si dice bigettiva se f e' sia iniettiva che surgettiva.

In tal caso f e' anche invertibile (ovvero esiste la funzione inversa $f^{-1} : W \to V$) e f si dice *isomorfismo tra gli spazi vettoriali* V *e* W.

Gli spazi V e W si dicono isomorfi e si scrive $V \cong W$.

5.1.14. PROPOSIZIONE.

Sia $f : V \to W$ *lineare. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) f *e' un isomorfismo;*

(ii) f *e' iniettiva e* $\dim V = \dim W$*;*

(iii) f *e' surgettiva e* $\dim V = \dim W$*.*

5.2 CALCOLO DI APPLICAZIONI LINEARI

ESEMPIO 5.2.1. Sia $\mathcal{B} = \operatorname{span}\{(-1,0,3),\ (2,1,0),\ (0,0,4)\}$ una base di $\mathbb{R}^3$.

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare tale che

$$f\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}.$$

E′ possibile calcolare $f(1,1,1)$? E $f(1,0,0)$?

Dato che $\mathcal{B}$ e′ una base di $\mathbb{R}^3$ la proposizione 5.1.4 ci garantisce che e′ possibile.

Per farlo troviamo $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\\3 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\3 & 0 & 4 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{R_3+3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 6 & 4 & 4\end{array}\right) \xrightarrow{R_3-6R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 4 & -2\end{array}\right) \xrightarrow[R_1\times -1]{R_3\times 1/4} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & -1/2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & -1/2\end{array}\right)$$

Dunque $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1/2$. Sfruttiamo ora la linearita′ di f:

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} &= f\left(1\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right)\\
&= f\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}f\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1/2\\-3/2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Il procedimento e′ analogo per calcolare $f(1,0,0)$.

OSSERVAZIONE. Se dobbiamo risolvere molti sistemi tutti uguali puo′ essere conveniente risolvere il sistema usando un vettore di parametri (p, q, r) come termini noti, per poi sostituire i valori che ci interessano. Infatti le mosse di Gauss da fare dipendono solo dai coefficienti delle incognite e non dai termini noti.

ESERCIZIO 5.2.2. Dati due spazi vettoriali e una base del dominio, calcolare la funzione nei punti specificati.

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}.$$

Calcolare $f\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Calcolare $f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Calcolare $f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

(4) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Calcolare $f\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

(5) $f : \mathbb{R}[x]^{\leqslant 2} \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(1) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad f(-1+x) = \begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix}, \quad f(1-2x+x^2) = \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Calcolare $f(1+x+x^2)$, $f(2+x^2)$ e $f(3x+2x^2)$.

5.3 TROVARE UNA BASE DI $\operatorname{Im} f$ E $\ker f$

ESEMPIO 5.3.1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Trovare una base di $\operatorname{Im} f$ e $\ker f$.

BASE DI $\operatorname{Im} f$ Per trovare una base di $\operatorname{Im} f$ basta sfruttare la proposizione 5.1.5, che afferma che

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

Questi vettori tuttavia non sono necessariamente indipendenti, quindi provo a renderli indipendenti tramite mosse di riga.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dato che le prime due colonne contengono un pivot segue che i vettori $(1, 2, 3)$ e $(3, 5, 7)$ sono indipendenti e

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

dunque

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e' una base di $\operatorname{Im} f$ e $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

BASE DI $\ker f$ Notiamo che se volessimo calcolare solo $\dim \ker f$ non dovremmo svolgere nessun calcolo aggiuntivo, in quanto il teorema delle dimensioni ci garantisce che

$$\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1.$$

Per calcolare una base di $\ker f$ sfruttiamo la definizione: sia $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ generico. Allora $(x, y, z) \in \ker f$ se e solo se

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che abbiamo definito f su una base del dominio (cioe' $\mathbb{R}^3$), dunque possiamo esprimere (x, y, z) come combinazione lineare dei tre vettori della base:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ se e solo se

$$f \left(a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff af \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + bf \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + cf \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-2R_2]{R_2\times-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque le soluzioni del sistema sono della forma

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero $(x, y, z) \in \ker f$ se e solo se

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= -3c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= c \left(-3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= c \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= c \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\ker f = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\},$$

ovvero che

$$\mathcal{B}_{\ker f} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e' una base di $\ker f$ e $\dim \ker f = 1$, come ci aspettavamo.

ESERCIZIO 5.3.2. Date le seguenti applicazioni lineari, trovare una base di $\operatorname{Im} f$ e $\ker f$.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\14\\18\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}.$$

5. $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che

$$f\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

HINT: in questo caso f non e' definita su una base del dominio, ma abbiamo una definizione classica, con un generico elemento del dominio in input. Per passare alla definizione tramite base, basta calcolare f applicata agli elementi di una base del dominio.