Appunti sui numeri complessi

Luca De Paulis

16 settembre 2020

1 NUMERI COMPLESSI

Se consideriamo l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e i polinomi a coefficienti reali $\mathbb{R}[x]$ notiamo che non tutti i polinomi sono fattorizzabili *completamente*: alcuni polinomi di grado 2, in particolare quelli con discriminante negativo, non ammettono fattorizzazione in polinomi di grado 1. Lo scopo dei numeri complessi è quindi quello di permettere la risoluzione di equazioni di secondo grado con delta negativo.

La più semplice equazione di secondo grado senza soluzioni in $\mathbb{R}$ è

$$x^2 + 1 = 0.$$

Infatti essa è equivalente a $x^2 = -1$, e siccome il quadrato di ogni numero reale è non negativo, nessun $x \in \mathbb{R}$ può soddisfarla. Si introduce per questo l'*unità immaginaria* i.

Definizione 1.1 **Unità immaginaria.** Si dice *unità immaginaria* il numero i tale che

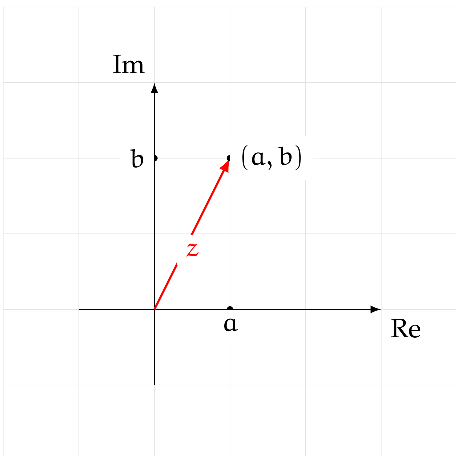
$$i^2 := -1. \tag{1}$$

Definizione 1.2 **Insieme dei numeri complessi.** Si dice *insieme dei numeri complessi* l'insieme $\mathbb{C}$ tale che

$$\mathbb{C} := \left\{ a + ib \,:\, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}. \tag{2}$$

Un numero complesso z può dunque essere pensato come una coppia di numeri reali: il primo viene detto *parte reale di z*, e lo si indica con $\mathrm{Re}(z)$; il secondo viene detto *parte immaginaria di z*, e lo si indica con $\mathrm{Im}(z)$.

Questa rappresentazione ci consente di rappresentare i numeri complessi come se fossero vettori nel piano (che viene quindi detto *piano complesso*): la parte reale di un numero complesso è l'ascissa, la parte immaginaria è l'ordinata.



Avendo rappresentato i numeri complessi come vettori, viene spontaneo definire una quantità che rappresenti la *lunghezza* del vettore.

Definizione 1.3 **Modulo di un numero complesso.** Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Si dice *modulo* di z il numero reale

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{3}$$

Il modulo di z è la lunghezza del vettore associato a z per il teorema di Pitagora: il vettore è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha un cateto lungo a e un cateto lungo b. Per questo l'unico numero complesso che ha modulo 0 è il numero $0 + i0$.

Ovviamente due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ sono uguali se e solo se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria, ovvero se e solo se rappresentano lo stesso vettore nel piano complesso.

Possiamo inoltre definire due operazioni sui numeri complessi: una somma

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \in \mathbb{C} \tag{4}$$

e un prodotto

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc). \tag{5}$$

Notiamo che $i^2bd = -bd$ per definizione dell'unità immaginaria.

La somma è definita come una qualunque somma tra vettori: nel piano complesso la somma si effettua con il metodo del parallelogramma, oppure sommando tra di loro le componenti (ovvero la parte reale e la parte immaginaria). Il prodotto non sembra avere un significato concreto; tuttavia nel seguito riusciremo a far vedere come i prodotti tra numeri complessi corrispondono a *rotazioni* dei vettori nel piano.

Le due operazioni di somma e prodotto soddisfano la proprietà commutativa, la proprietà associativa e la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto. Notiamo inoltre che il numero complesso $0 + i0$ è elemento neutro rispetto alla somma:

$$(a + ib) + (0 + i0) = (a + 0) + i(b + 0) = a + ib,$$

e il numero complesso $1 + i0$ è l'elemento neutro del prodotto:

$$(a + ib) \cdot (1 + i0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0) + i(a \cdot 0 + b \cdot 1) = a + ib.$$

Inoltre, ogni numero complesso ha un opposto: infatti dato $z = a + ib \in \mathbb{C}$ il suo opposto è dato da $-z = -a - ib$. Infatti

$$z + (-z) = (a + ib) + (-a - ib) = 0 + i0,$$

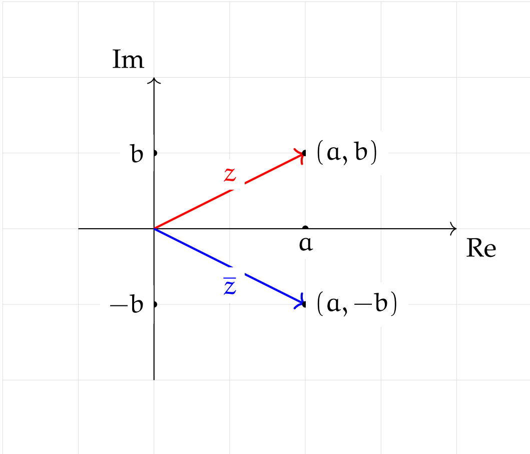
cioè l'elemento neutro della somma.

Prima di vedere se ogni numero ammette un *inverso moltiplicativo*, ovvero un reciproco, introduciamo una nuova operazione sui numeri complessi.

Definizione 1.4 **Coniugato complesso.** Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso tale che $z = a + ib$ (con $a, b \in \mathbb{R}$). Allora si dice *coniugato complesso* di z il numero

$$\overline{z} = a - ib. \tag{6}$$

Nel piano complesso il coniugato di un numero è il vettore ribaltato rispetto all'asse delle ascisse:



L'operazione di coniugio si comporta bene rispetto alla somma e al prodotto. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 1.5 *Siano $z, w \in \mathbb{C}$ tali che $z = a + ib$, $w = c + id$ (con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Valgono le seguenti affermazioni.*

(i) La somma dei coniugati è il coniugato della somma:

$$\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}.$$

(ii) Il prodotto dei coniugati è il coniugato del prodotto:

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{zw}.$$

(iii) $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$.

Dimostrazione. Dimostriamo i tre fatti separatamente.

(i) Per definizione di somma

$$\begin{aligned} \overline{z} + \overline{w} &= (a - ib) + (c - id) \\ &= (a + c) - i(b + d) \\ &= \overline{z + w}. \end{aligned}$$

(ii) Per definizione di prodotto

$$\begin{aligned} \overline{z} \cdot \overline{w} &= (a - ib)(c - id) \\ &= (ac - bd) + i(-ad - bc) \\ &= (ac - bd) - i(ad + bc) \\ &= \overline{zw}. \end{aligned}$$

(iii) Dimostriamolo per induzione su n.

CASO BASE. Se $n = 1$ allora banalmente $(\overline{z})^1 = \overline{z} = \overline{z^1}$.

PASSO INDUTTIVO. Supponiamo che la tesi valga per n e dimostriamola per $n + 1$. Allora

$$(\overline{z})^{n+1} = (\overline{z})^n \cdot \overline{z} = \overline{z^n} \cdot \overline{z} = \overline{z^{n+1}}$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal punto precedente della dimostrazione. □

Possiamo studiare inoltre le relazioni che un numero complesso ha con il suo coniugato.

Proposizione 1.6 *Sia* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *(con* $a, b \in \mathbb{R}$*). Allora valgono i seguenti fatti:*

(i) La somma di un z con il proprio coniugato è un numero reale, ed in particolare è il doppio della parte reale di z:

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z).$$

(ii) Il prodotto di z con il suo coniugato è un numero reale, ed in particolare è il modulo di z al quadrato:

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

Dimostrazione. Dimostriamo i due fatti.

(i) Per definizione di somma vale che

$$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z).$$

(ii) Per definizione di prodotto vale che

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (a + ib)(a - ib) \\ &= (a^2 - (-b^2)) + i(ab - ab) \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

□

Dalla seconda relazione della proposizione precendente possiamo ricavare il reciproco del numero complesso $z = a + ib$:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \iff \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2} \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Dunque ogni numero complesso diverso da $0 + i0$ (in quanto $|0|^2 = 0$) ha un inverso, calcolabile con la formula di sopra. L'insieme dei numeri complessi con le operazioni di somma e prodotto è quindi un *campo*:

- valgono la proprietà commutativa e associativa per entrambe le operazioni;
- vale la proprietà distributiva;
- esiste un elemento neutro per la somma e ogni numero ammette un opposto;
- esiste un elemento neutro per il prodotto e ogni numero non nullo ammette un reciproco.

2 I NUMERI REALI COME SOTTOINSIEME DEI COMPLESSI

I numeri complessi con parte immaginaria nulla, ovvero della forma

$$a + i0$$

possono essere interpretati molto semplicemente come numeri reali veri e propri. Infatti

- la somma di $z, w \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w) = 0$ ha ancora parte immaginaria nulla, e corrisponde alla somma delle parti reali:

$$z + w = (a + i0) + (b + i0) = (a + b) + i0.$$

- il prodotto di $z, w \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w) = 0$ ha ancora parte immaginaria nulla e corrisponde al prodotto delle parti reali:

$$zw = (a + i0)(b + i0) = (ab + 0) + i0 = ab + i0.$$

- il modulo di $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Im}(z) = 0$ corrisponde al valore assoluto della parte reale:

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|.$$

- il coniugato di $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Im}(z) = 0$ è z stesso:

$$\bar{z} = a - i0 = a + i0 = z.$$

- il reciproco di $z \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Im}(z) = 0$ corrisponde al reciproco della sua parte reale:

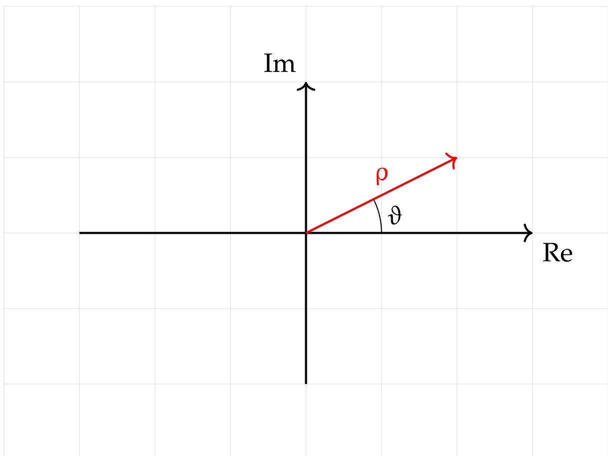
$$\frac{1}{z} = \frac{a}{|z|^2} + i\frac{0}{|z|^2} = \frac{a}{a^2} + i0 = \frac{1}{a} + i0.$$

Possiamo quindi identificare i numeri reali con il sottoinsieme dei numeri complessi con parte immaginaria nulla: graficamente, essi corrispondono all'asse delle ascisse.

3 FORMA POLARE

Nella sezione precedente abbiamo visto come ad ogni numero complesso può essere associato un vettore nel piano complesso le cui coordinate corrispondono alla parte reale e alla parte immaginaria del numero complesso in esame.

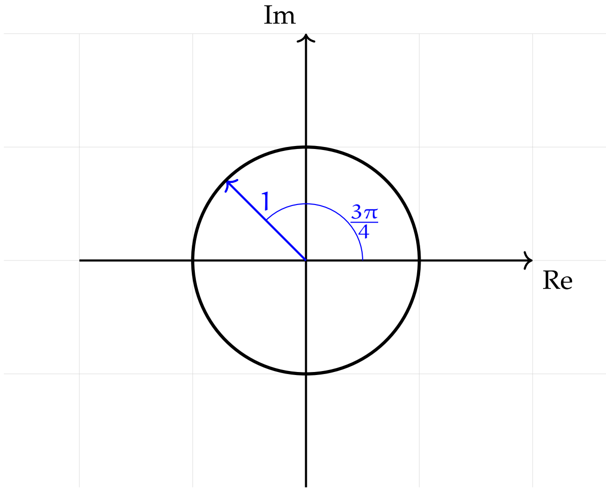
I vettori nel piano possono però essere rappresentati anche da un altro punto di vista: ad ogni vettore può essere associata la sua lunghezza e l'angolo che il vettore forma con l'asse delle ascisse:



Per formalizzare questa associazione, consideriamo innanzitutto l'insieme dei numeri complessi con modulo uguale ad 1. Per definizione di modulo, un numero complesso $z = a + ib$ ha modulo 1 se e solo se

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 1 \iff a^2 + b^2 = 1.$$

I numeri di modulo unitario formano quindi una circonferenza di raggio 1 con centro nell'origine degli assi:



Ogni vettore di questa circonferenza è univocamente determinato dall'angolo che forma con l'asse delle ascisse: dato un angolo ϑ, il vettore che corrisponde a ϑ avrà come coordinate $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, dunque il corrispondente numero complesso sarà

$$z = \cos\vartheta + i\sin\vartheta.$$

La prossima proposizione ci mostra come moltiplicare tra di loro numeri complessi di modulo unitario.

Proposizione 3.1 *Siano $z, w \in \mathbb{C}$ tali che*

$$z = \cos\vartheta + i\sin\vartheta, \quad w = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Allora vale che

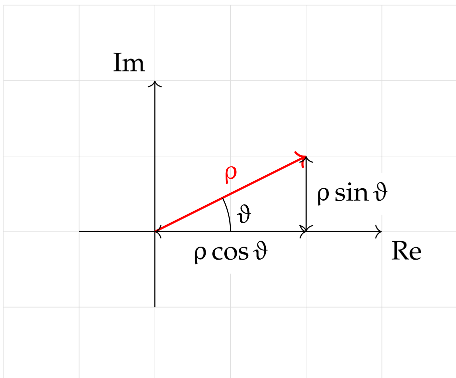
$$zw = \cos(\vartheta + \varphi) + i\sin(\vartheta + \varphi). \tag{8}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} zw &= (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= (\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi) + i(\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi) \\ &= \cos(\vartheta + \varphi) + i\sin(\vartheta + \varphi). \end{aligned}$$ □

Dunque molitplicare tra di loro due numeri complessi di angoli ϑ e φ e di modulo unitario ci restituisce un numero complesso di modulo unitario e di angolo $\vartheta + \varphi$: equivale quindi a ruotare uno dei due vettori per l'angolo associato all'altro.

Consideriamo ora un vettore con modulo $\rho \geqslant 0$ qualunque. Tramite la trigonometria possiamo ricavare le sue coordinate:



Dunque un vettore di modulo ρ e angolo ϑ ha come coordinate

$$(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta),$$

da cui segue che il corrispondente numero complesso è della forma

$$z = \rho\cos\vartheta + \rho\sin\vartheta = \rho(\cos\vartheta + \sin\vartheta).$$

Anche in questo caso moltiplicare due numeri complessi è particolarmente facile:

Proposizione 3.2 *Siano $z, w \in \mathbb{C}$ tali che*

$$z = r_1(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \quad w = r_2(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Allora vale che

$$zw = r_1 r_2(\cos(\vartheta+\varphi) + i\sin(\vartheta+\varphi)). \tag{9}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} zw &= r_1(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\cdot r_2(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= r_1 r_2 \cdot ((\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(per la Proposizione 3.1)} \\ &= r_1 r_2(\cos(\vartheta+\varphi) + i\sin(\vartheta+\varphi)). \qquad \square \end{aligned}$$

In questo caso il prodotto tra due numeri complessi corrisponde al vettore con

- modulo uguale al prodotto dei moduli,
- angolo dato dalla rotazione di uno dei due vettori per l'angolo definito dal secondo.

Possiamo quindi introdurre la *forma polare* di un numero complesso.

Definizione 3.3 **Forma polare.** Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso con modulo ρ e angolo associato ϑ. Si dice forma polare di z la forma

$$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \rho e^{i\vartheta}. \tag{10}$$

L'angolo ϑ viene detto *argomento* del numero complesso z e lo si indica con $\arg z$.

Per trasformare un numero complesso da una forma all'altra basta sfruttare un po' di trigonometria:

DALLA FORMA CARTESIANA ALLA POLARE Consideriamo un numero $z = a + ib \in \mathbb{C}$ espresso in forma cartesiana. Per portarlo in forma polare dobbiamo trovare $\rho = |z|$ e $\arg z$.

Per definizione di modulo, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Per trovare l'argomento basta fare l'arcotangente del rapporto tra i cateti, facendo attenzione al quadrante in cui ci troviamo:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a}, & \text{se } a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi, & \text{se } a < 0 \\ \pi/2 & \text{se } a = 0, b > 0 \\ 3\pi/2 & \text{se } a = 0, b < 0. \end{cases} \tag{11}$$

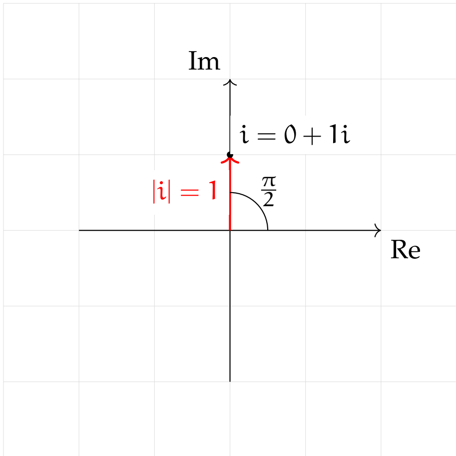
DALLA FORMA POLARE ALLA CARTESIANA Se $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ è un numero complesso in forma polare, per portarlo in forma cartesiana basta calcolare le due funzioni trigonometriche:

$$\begin{aligned} z &= \rho\cos\vartheta + i\rho\sin\vartheta \\ \implies a &= \rho\cos\vartheta, b = \rho\sin\vartheta. \end{aligned}$$

ESEMPIO 3.4. Il numero $i = 0 + 1i$ ha come forma polare $e^{i\frac{\pi}{2}}$. Infatti:

- $|i| = |0 + 1i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.
- $\arg i = \pi/2$ poiché ci troviamo nel terzo caso della (11).

Ciò è evidente anche disegnando il numero i nel piano complesso:



La forma "esponenziale", data da $z = \rho e^{i\vartheta}$ è comoda poiché più sintetica della forma con le funzioni trigonometriche. Inoltre, essa continua a rispettare la Proposizione 3.2:

$$r_1 e^{i\vartheta} \cdot r_2 e^{i\varphi} = r_1 r_2 e^{i(\vartheta+\varphi)}.$$

Prima di studiare le potenze e le radici n-esime nei complessi,facciamo alcune osservazioni finali.

OSSERVAZIONE. I numeri complessi di modulo unitario sono tutti e soli della forma $z = e^{i\vartheta}$, in quanto il loro modulo è uguale ad 1.

OSSERVAZIONE. Il coniugato in forma polare di $\rho e^{i\vartheta}$ è il numero $\rho e^{-i\vartheta}$, dunque la forma polare è comoda anche per calcolare i coniugati di numeri complessi.

OSSERVAZIONE. I numeri reali, essendo tutti sull'asse delle ascisse, hanno argomento 0 (se sono positivi) oppure π (se sono negativi): dunque i numeri reali sono tutti e solo delle forme $\rho e^{i0} = rho$ oppure $\rho e^{i\pi} = -\rho$.

OSSERVAZIONE. Due numeri complessi in forma polare sono uguali se e solo se

- i loro moduli sono uguali,
- i loro argomenti sono uguali, a meno di un multiplo intero di 2π.

Infatti gli angoli ϑ e $\vartheta + 2k\pi$ sono uguali per ogni $k \in \mathbb{Z}$, dunque è necessario considerare che gli argomenti non sono necessariamente in $[0, 2\pi)$.

4 POTENZE E RADICI COMPLESSE

Per risolvere equazioni nel campo dei complessi (o equivalentemente per fattorizzare polinomi in $\mathbb{C}[x]$) è necessario saper calcolare potenze di numeri complessi e radici n-esime.

La forma cartesiana non è particolarmente di aiuto in questo caso: calcolare le potenze è difficile in quanto dovremmo ricorrere costantemente a prodotti tra binomi della forma $a + ib$, mentre calcolare le radici è impossibile a causa della somma tra parte reale e immaginaria.

La forma polare risulta invece molto più comoda, come ci garantisce la seguente proposizione.

Proposizione 4.1 *Sia $z = \rho e^{i\vartheta}$ un numero complesso. Allora la sua potenza n-esima è*

$$z^n = \rho^n e^{in\vartheta}. \tag{12}$$

Dimostrazione. Lo mostriamo per induzione su n.

CASO BASE Se $n = 1$ allora

$$z^1 = (\rho e^{i\vartheta})^1 = \rho^1 e^{1\cdot 1\vartheta}.$$

PASSO INDUTTIVO Supponiamo la formula valga per k e dimostriamola per $k+1$.

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z && \text{(per hp. induttiva)} \\ &= \rho^k e^{ik\vartheta} \cdot \rho e^{i\vartheta} && \text{(per la Proposizione 3.2)} \\ &= (\rho^k \rho) e^{i(k\vartheta+\vartheta)} \\ &= \rho^{k+1} e^{i(k+1)\vartheta}. \end{aligned}$$

Dunque la formula è vera per ogni valore di n, come volevasi dimostrare. □

La potenza n-esima di un numero complesso di modulo unitario (diciamo $z = e^{i\vartheta}$) corrisponde alla rotazione del vettore corrispondente fino ad arrivare al vettore di angolo $n\vartheta$: equivale infatti a moltiplicare il vettore per se stesso n volte, e ognuna di queste moltiplicazioni ruota il vettore di un angolo di ϑ radianti (come abbiamo osservato nella sezione precedente).

Il problema di trovare la radice n-esima di un numero è completamente riconducibile al problema di calcolare potenze di numeri complessi. Supponiamo di voler calcolare la radice n-esima di un numero complesso $w \in \mathbb{C}$ dato, ovvero vogliamo trovare $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$z = \sqrt[n]{w}. \tag{13}$$

Riformulando il problema, vogliamo trovare $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$z^n = w. \tag{14}$$

CASO $w = 1$ Iniziamo studiando un caso più semplice: consideriamo il numero complesso $w = 1$. Nel campo dei numeri reali il numero 1 ha sempre una e una sola radice, ovvero se stesso. Nei numeri complessi, come vedremo, il numero 1 ha più di una radice n-esima; in particolare, ne ha esattamente n.

Sia $z \in \mathbb{C}$ una radice n-esima di 1 ($z = \sqrt[n]{1}$), ovvero equivalentemente sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $z^n = 1$. Siccome stiamo calcolando potenze di numeri complessi scriviamo ogni numero in forma polare: il numero 1 è esprimibile come $1 \cdot e^{i0}$; siano inoltre ρ e ϑ rispettivamente il modulo e l'argomento di z, cosicché $z = \rho e^{i\vartheta}$. Per la Proposizione 4.1 segue quindi che $z^n = \rho^n e^{in\vartheta}$.

Come abbiamo osservato alla fine della sezione precedente, due numeri complessi in forma polare sono uguali se e solo se

- hanno lo stesso modulo;
- i loro argomenti differiscono per un multiplo di 2π.

Applicando questo ragionamento all'equazione $z^n = 1$ (che è l'equazione che definisce z) otteniamo due condizioni che possiamo sfruttare per calcolare z:

- I moduli devono essere uguali, dunque segue che $\rho^n = 1$. Dato che ρ è un numero reale, questa equazione ha una e una sola soluzione: $\rho = 1$.
- Gli argomenti devono differire per un multiplo di 2π, ovvero $\arg z - \arg 1 = n\vartheta - 0 = 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

Dal primo vincolo otteniamo $\rho = 1$, mentre dal secondo ricaviamo che ϑ deve essere della forma $\frac{2k\pi}{n}$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

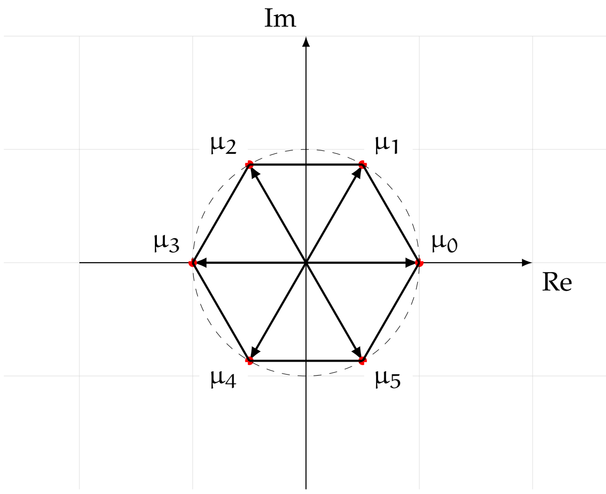
Anche se l'equazione sembra avere infinite soluzioni (una per ogni valore di k intero), in realtà le soluzioni distinte sono solo n, e si ottengono scegliendo $k = 0, \dots, n-1$. Infatti scegliendo $k = n$ l'argomento di z diventa $(2n\pi)/n = 2\pi = 0$ (poiché gli argomenti rappresentano angoli in radianti), che è lo stesso argomento ottenuto scegliendo $k = 0$.

Le possibili soluzioni dell'equazione $z^n = 1$, e quindi dell'equazione $z = \sqrt[n]{1}$, sono dunque della forma

$$1 \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

con $k = 0, \dots, n-1$. Questi numeri vengono detti *radici n-esime dell'unità* e vengono spesso chiamati $\mu_0, \dots, \mu_{n-1}$.

Rappresentando ad esempio le radici seste dell'unità possiamo notare immediatamente alcune caratteristiche interessanti:



Siccome l'angolo tra due radici consecutive è sempre di $\frac{\pi}{3}$ i vertici dei vettori corrispondenti alle sei radici delle unità formano un esagono regolare, inscritto nella circonferenza unitaria: in generale le radici n-esimi dell'unità formano un n-agono regolare inscritto nella circonferenza unitaria, e 1 è sempre un vertice di questo n-agono.

Inoltre le radici "non-reali" (come ad esempio μ_1, μ_2, μ_4 e μ_5) sono complesse coniugate a coppie, come si vede evidentemente dal disegno nel caso $n = 6$.