Algebra Lineare

28 marzo 2020

Indice

1 Matrici e sistemi lineari **2**
- 1.1 Matrici 2
  - 1.1.1 Matrici particolari 2
  - 1.1.2 Operazioni sulle matrici 3
- 1.2 Matrici a scalini 5
- 1.3 Sistemi di equazioni lineari 7
- 1.4 Matrici come applicazioni lineari 9

2 Spazi vettoriali **11**
- 2.1 Spazi vettoriali e prime proprieta' 11
  - 2.1.1 Spazi vettoriali 11
  - 2.1.2 Combinazioni lineari e span 12
  - 2.1.3 Generatori e basi 15
- 2.2 Applicazioni lineari 16

Capitolo 1

Matrici e sistemi lineari

1.1 Matrici

Definizione 1.1.1. Si dice matrice $m \times n$ una tabella di m righe e n colonne i cui elementi appartengono ad un campo $\mathbb{K}$ fissato, della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = [A_{ij}]_{i \leq m, j \leq n} \tag{1.1}$$

Definizione 1.1.2. Si dice vettore colonna una matrice $n \times 1$ del tipo

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Si dice vettore riga una matrice $1 \times n$ del tipo

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

L'insieme dei vettori colonna di n elementi appartenenti ad un campo $\mathbb{K}$ si indica con $\mathbb{K}^n$, mentre l'insieme dei vettori riga di n elementi appartenenti ad un campo $\mathbb{K}$ si indica con $\mathbb{K}^{\times n}$.

E' evidente che se i due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ hanno la stessa dimensione e contengono gli stessi elementi allora rappresentano la stessa informazione, ma sotto forme diverse. Verificheremo piu' avanti infatti che $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^{\times n}$ sono isomorfi, cioe' contengono gli stessi elementi in due forme diverse.

1.1.1 Matrici particolari

Definizione 1.1.3. Si dice **matrice quadrata** una matrice il cui numero di righe e' uguale al numero di colonne.

Definizione 1.1.4. Si dice **matrice diagonale** una matrice quadrata tale che tutti gli elementi che non appartengono alla diagonale principale siano 0, cioe'

$$A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ e' diagonale se e solo se } \forall i \neq j.\,(a_{ij}) = 0. \tag{1.4}$$

Definizione 1.1.5. Si dice **matrice identita'** $n \times n$ una matrice diagonale per cui la diagonale principale contiene solo 1, cioe'

$$I \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ e' la matrice identita' se e solo se } (a_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}. \tag{1.5}$$

Ecco un esempio di una matrice quadrata 4×4, una matrice diagonale 4×4 e la matrice identita' 4×4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 10 & 1 \\ 0 & 34 & 3 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Operazioni sulle matrici

Consideriamo le operazioni fondamentali che coinvolgono matrici.

Somma di matrici

Siano A, B due matrici $m \times n$ a coefficienti reali. Allora possiamo definire un'operazione di somma $+ : \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tale che

$$A + B = [A_{ij} + B_{ij}]_{ij}. \tag{1.6}$$

Cioe'

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Prodotto per uno scalare

Sia A due matrici $m \times n$ a coefficienti reali e $k \in \mathbb{R}$. Allora possiamo definire un'operazione di prodotto per scalare $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tale che

$$kA = [kA_{ij}]_{ij}. \tag{1.7}$$

Cioe'

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \implies kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Prodotto riga per colonna

Consideriamo un vettore riga $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\times n}$ e un vettore colonna $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$. Allora definiamo il prodotto riga per colonna $\cdot : \mathbb{R}^{\times n} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 w_1 + \dots v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \tag{1.8}$$

Prodotto tra matrici

Possiamo estendere il prodotto riga per colonna a due matrici generiche, a patto che il numero di colonne della prima matrice sia uguale al numero di colonne della seconda. Quindi se $A \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R}), B \in \mathbb{M}_{m \times k}(\mathbb{R})$ esistera' anche $C = A \cdot B \in \mathbb{M}_{n \times k}(\mathbb{R})$ tale che l'elemento in posizione i, j di C sara' dato dal prodotto dell'i-esima riga di A e della j-esima colonna di B.

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{im} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1} b_{1j} + \dots a_{im} b_{mj} = \sum_{t=1}^{m} a_{it} b_{tj} \tag{1.9}$$

Il prodotto tra matrici rispetta le proprieta':

1. associativa: $(AB)C = A(BC)$
2. distributiva: $(A+B)C = AC + BC$
   $A(B+C) = AB + AC$

ma non la proprieta' commutativa: infatti in generale $AB \neq BA$ anche nel caso in cui entrambi i prodotti sono definiti (come nel caso delle matrici quadrate).

Esempio 1.1.6. Calcoliamo il prodotto tra $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$.

Soluzione.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}$$

Proposizione 1.1.7. *Sia A una matrice $m \times n$ e $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che*

$$(b_i) = \begin{cases} 0 & se\ i \neq j \\ 1 & se\ i = j \end{cases}$$

per qualche $j \leq n$. Allora $A\boldsymbol{v}$ e' la j-esima colonna di A.

Dimostrazione. Consideriamo il prodotto tra A e $\boldsymbol{v}$:

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0a_{11} + \dots + 1a_{1j} + \dots + 0a_{1n} \\ 0a_{21} + \dots + 1a_{2j} + \dots + 0a_{2n} \\ \vdots \\ 0a_{m1} + \dots + 1a_{mj} + \dots + 0a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

che e' esattamente la j-esima colonna di A. □

Trasposizione

Sia A una matrice $m \times n$. Allora si dice **trasposta di** A la matrice A^T di dimensione $n \times m$ tale che se $A = (a_{ij})$ allora $A^T = (b_{ij})$ dove $b_{ij} = a_{ji}$.

Piu' semplicemente, la trasposta di una matrice si ottiene trasformando le sue righe in colonne. Ad esempio

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Notiamo che:

- la trasposta di un vettore colonna e' un vettore riga e viceversa:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- la trasposta della trasposta di A e' A:

$$(A^T)^T = A$$

1.2 Matrici a scalini

Definizione 1.2.1. Una matrice A di dimensione $m \times n$ si dice a scalini se:

- eventuali righe vuote sono in fondo alla matrice;
- il primo elemento non nullo di ogni riga e' in una colonna piu' a destra del primo elemento non nullo della riga precedente.

Definizione 1.2.2. Sia A una matrice ridotta a scalini. Allora il primo elemento non nullo di una riga viene detto **pivot** della riga.

Ad esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e' a scalini ed ha come pivot gli elementi $(a_{11}) = 1, (a_{23}) = 10, (a_{34}) = -2$.

Prendiamo una generica matrice A di dimensione $m \times n$. Possiamo trasformare ogni A in una matrice a scalini $\bar{A}$ applicando le seguenti mosse, chiamate **mosse di Gauss per riga**:

- scambio la riga i con la riga j;
- sostituisco la riga i con la somma di se stessa e di un multiplo della riga j;
- moltiplico la riga i per un numero reale.

In particolare possiamo sfruttare il seguente **algoritmo di Gauss** per ridurre una matrice a scalini:

- se la matrice contiene una sola riga, oppure tutte le righe contengono solo zeri, allora la matrice e' a scalini;
- altrimenti scelgo la riga R con pivot piu' a sinistra possibile, chiamo c la colonna su cui si trova il pivot di R e applico il seguente procedimento:
    1. scelgo una riga R' con pivot sulla colonna c;
    2. sottraggo a R' un multiplo di R in modo che l'elemento nella riga R' e nella colonna c diventi 0;
    3. ripeto questo procedimento fino a quando solo R ha un pivot nella colonna c;
- a questo punto R e' l'unica riga con pivot sulla colonna c, dunque escludiamola dalla matrice e ripetiamo il procedimento sulle altre righe.

Definizione 1.2.3. Sia A una matrice e sia $\bar{A}$ la matrice a scalini ottenuta tramite le mosse di Gauss per riga su A. Il numero di pivot della matrice $\bar{A}$ si dice **rango riga** di A e si indica con $\text{rango}\,(A)$.

Ad esempio la matrice di prima

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha 3 pivot, dunque $\text{rango}\,(A) = 3$.

1.3 Sistemi di equazioni lineari

Definizione 1.3.1. Si dice **equazione lineare** nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \tag{1.10}$$

con $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ noti. Una **soluzione** di un'equazione lineare e' una n-upla $(x_1, \dots, x_n)$ per cui l'uguaglianza 1.10 vale. Due equazioni si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

Definizione 1.3.2. Si dice **sistema di equazioni lineari** un'insieme di k equazioni lineari a n incognite della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \tag{1.11}$$

Una **soluzione** del sistema e' una n-upla $(x_1, \dots, x_n)$ che e' soluzione di tutte le k equazioni del sistema. Due sistemi si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni. Se $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ allora il sistema si dice **omogeneo**.

Possiamo trasformare un sistema di equazioni in un'equazione tra vettori: infatti sappiamo che due vettori sono uguali se e solo se tutti i loro elementi nella stessa posizione sono uguali. Un sistema di k equazioni a n incognite diventa quindi:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + & \dots & + & a_{kn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Notiamo inoltre che

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + & \dots & + & a_{kn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}$$

Dunque arriviamo al seguente fatto:

Proposizione 1.3.3. *Ogni sistema di k equazioni in n incognite puo' essere scritto nella forma di una singola equazione matriciale della forma $A\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$, dove:*

- *A e' la matrice dei coefficienti, tale che a_{ij} e' il coefficiente del termine x_j nell'equazione nella riga i;*
- *$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e' il vettore colonna delle incognite;*
- *$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ e' il vettore colonna dei termini noti.*

Definizione 1.3.4. Consideriamo un'equazione matriciale della forma $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Allora la matrice $(A|\boldsymbol{b})$ ottenuta aggiungendo alla matrice A una colonna contenente il vettore colonna $\boldsymbol{b}$ si dice **matrice completa** associata al sistema lineare.

$$(A|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & & b_k \end{array}\right). \tag{1.12}$$

Se il sistema e' omogeneo si puo' omettere la colonna dei termini noti.

Il metodo piu' veloce per risolvere un sistema lineare consiste nel ridurre la matrice completa $(A|\boldsymbol{b})$ a scalini tramite le mosse di Gauss: a quel punto possono esserci due situazioni:

- se ci sono righe con solo zeri prima della barra verticale, ma con un coefficiente diverso da zero dopo, allora quell'equazione non ha soluzione in quanto e' della forma $0x_1 + \dots 0x_n = b_i \neq 0$, dunque il sistema e' impossibile;
- altrimenti il sistema ha almeno una soluzione.

Per stabilire le soluzioni del sistema si procede in questo modo:

- si scelgono libere tutte le variabili che sono su colonne che non contengono pivot;
- si ricavano le altre variabili passando al sistema associato alla matrice a scalini ottenuta alla fine.

Proposizione 1.3.5. *Le mosse di Gauss per riga applicate ad una matrice completa $(A|\boldsymbol{b})$ trasformano la matrice in una nuova matrice il cui sistema associato e' equivalente all'originale.*

Dimostrazione. Dimostriamo che le tre mosse trasformano il sistema in un sistema equivalente.

- La prima mossa consente lo scambio di due righe, che non modifica il sistema.
- Consideriamo due righe della matrice

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \end{array}\right) \text{ che corrispondono a } \begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \end{cases}$$

  Dato che aggiungendo quantita' uguali ad entrambi i membri di un'equazione otteniamo un'equazione equivalente a quella data, possiamo aggiungere al primo membro della prima equazione $k(a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n) = ka_{j1}x_1 + \cdots + ka_{jn}x_n$ e al secondo membro kb_j, ottenendo:

  $$\begin{cases} (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + \dots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = b_i + kb_j \\ \qquad\qquad a_{j1}x_1 + \dots + \qquad\qquad a_{jn}x_n = \qquad b_j \end{cases}$$

  che equivale a

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{i1} + ka_{j1} & \dots & a_{in} + ka_{jn} & b_i + kb_j \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \end{array}\right)$$

- Dato che una riga della matrice indica un'equazione, allora possiamo moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per uno stesso numero reale e ottenere un'equazione equivalente a quella data.

□

Teorema 1.3.6 (di Rouché-Capelli)**.** *Sia* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *un'equazione matriciale. Allora essa ha soluzione se e solo se* $\operatorname{rango}(A|\boldsymbol{b}) = \operatorname{rango}(A)$.

Intuizione. Infatti se il rango delle due matrici e' diverso significa che una riga nulla nella matrice A ha un pivot nella matrice $(A|\boldsymbol{b})$, cioe' che c'e' un'equazione del tipo $0x_1 + \dots 0x_n = b_i \neq 0$ che e' impossibile.

Proposizione 1.3.7. *Un sistema omogeneo* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *ammette sempre almeno una soluzione.*

Dimostrazione. Infatti viene sempre che $\operatorname{rango}(A|\boldsymbol{b}) = \operatorname{rango}(A|\boldsymbol{0}) = \operatorname{rango}(A)$, dunque per Rouché-Capelli (1.3.6) il sistema ha soluzione. □

Proposizione 1.3.8. *Le soluzioni di un sistema lineare* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *sono tutte e solo della forma* $\boldsymbol{x_0} + \bar{\boldsymbol{x}}$*, dove* $\boldsymbol{x_0}$ *e' una qualunque soluzione del sistema omogeneo associato* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *e* $\bar{\boldsymbol{x}}$ *e' una soluzione particolare di* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che $\boldsymbol{x_0} + \bar{\boldsymbol{x}}$ e' soluzione.

$$A(\boldsymbol{x_0} + \bar{\boldsymbol{x}}) = A\boldsymbol{x_0} + A\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

Dimostriamo poi che se $\boldsymbol{x}$ e' una soluzione di $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, allora $\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}$ e' soluzione del sistema omogeneo.

$$A(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}) = A\boldsymbol{x} - A\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

□

1.4 Matrici come applicazioni lineari

Abbiamo visto che moltiplicando una matrice per un vettore colonna con la giusta dimensione otteniamo un nuovo vettore colonna. Possiamo quindi interpretare una matrice come una funzione che manda vettori in vettori:

Definizione 1.4.1. Sia $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Allora si dice **applicazione lineare associata alla matrice** la funzione $L_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m. \quad L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \tag{1.13}$$

Proposizione 1.4.2. *Sia* $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *una matrice,* $L_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *la sua applicazione lineare associata. Allora valgono le seguenti:*

$$L_A(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \tag{1.14}$$
$$L_A(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = L_A(\boldsymbol{v}) + L_A(\boldsymbol{w}) \qquad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m \tag{1.15}$$
$$L_A(k\boldsymbol{v}) = kL_A(\boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{R}. \tag{1.16}$$

Dimostrazione. Per definizione di applicazione lineare:

- $L_A(\mathbf{0}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$;
- $L_A(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = A(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{w} = L_A(\boldsymbol{v}) + L_A(\boldsymbol{w})$;
- $L_A(k\boldsymbol{v}) = A(k\boldsymbol{v}) = kA\boldsymbol{v} = kL_A(\boldsymbol{v})$

che e' la tesi. □

Definizione 1.4.3. Sia $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ una matrice, $L_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la sua applicazione lineare associata. Allora si dice **immagine** dell'applicazione L_A (o della matrice A) l'insieme:

$$\operatorname{Im} L_A = \{L_A(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m\} \tag{1.17}$$

Definizione 1.4.4. Sia $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ una matrice, $L_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la sua applicazione lineare associata. Allora si dice **kernel** dell'applicazione L_A (o della matrice A) l'insieme:

$$\ker L_A = \{\boldsymbol{x} \mid L_A(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\} \tag{1.18}$$

Capitolo 2

Spazi vettoriali

2.1 Spazi vettoriali e prime proprieta'

2.1.1 Spazi vettoriali

Definizione 2.1.1. Si dice **spazio vettoriale su un campo** $\mathbb{K}$ un insieme V di elementi, detti **vettori**, insieme con due operazioni $+ : V \times V \to V$ e $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ e un elemento $\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} \in V$ che soddisfano i seguenti assiomi:

$$\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \in V, \quad \forall h, k \in \mathbb{K}$$

1.	$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \in V$	(chiusura di V rispetto a $+$)	(2.1)
2.	$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$	(commutativita' di $+$)	(2.2)
3.	$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u})$	(associativita' di $+$)	(2.3)
4.	$\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{v}$	($\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$ el. neutro di $+$)	(2.4)
5.	$\exists(-\boldsymbol{v}) \in V. \quad \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$	(opposto per $+$)	(2.5)
6.	$k\boldsymbol{v} \in V$	(chiusura di V rispetto a $\cdot$)	(2.6)
7.	$k(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = k\boldsymbol{v} + k\boldsymbol{w}$	(distributivita' 1)	(2.7)
8.	$(k + h)\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{v}$	(distributivita' 2)	(2.8)
9.	$(kh)\boldsymbol{v} = k(h\boldsymbol{v})$	(associativita' di $\cdot$)	(2.9)
10.	$1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$	(1 el. neutro di $\cdot$)	(2.10)

Spesso il campo $\mathbb{K}$ su cui e' definito uno spazio vettoriale V e' il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ o il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Supporremo che gli spazi vettoriali siano definiti su $\mathbb{R}$ a meno di diverse indicazioni. Le definizioni valgono comunque in generale anche su campi $\mathbb{K}$ diversi da $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Esempio 2.1.2. Possiamo fare diversi esempi di spazi vettoriali. Ad esempio sono spazi vettoriali:

1. i vettori geometrici dove:
   - l'elemento neutro e' il vettore nullo;
   - la somma e' definita tramite la regola del parallelogramma;

- il prodotto per scalare e' definito nel modo usuale;

2. i vettori colonna $n \times 1$ o i vettori riga $1 \times n$ dove:
   - l'elemento neutro e' il vettore composto da n elementi 0;
   - la somma e' definita come somma tra componenti;
   - il prodotto per scalare e' definito come prodotto tra lo scalare e ciascuna componente;
3. le matrici $n \times m$, indicate con $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$;
4. i polinomi di grado minore o uguale a n, indicati con $\mathbb{K}[x]^{\leq n}$;
5. tutti i polinomi, indicati con $\mathbb{K}[x]$.

Definizione 2.1.3. Sia V uno spazio vettoriale, $A \subset V$. Allora si dice che A e' un sottospazio vettoriale di V (o semplicemente sottospazio) se

$$\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} \in A \tag{2.11}$$
$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \in A \qquad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in A \tag{2.12}$$
$$(k\boldsymbol{v}) \in A \qquad \forall k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v} \in A \tag{2.13}$$

Proposizione 2.1.4. *Le soluzioni di un sistema omogeneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ con n variabili formano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Chiamiamo S l'insieme delle soluzioni. Dato che le soluzioni sono vettori colonna di n elementi, $S \subset \mathbb{R}^n$. Verifichiamo ora le condizioni per cui S e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$:

1. $\mathbf{0}$ appartiene a S, poiche' $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$;
2. Se $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ appartengono ad S, allora $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, dunque $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S$;
3. Se $\boldsymbol{x}$ appartiene ad S, allora $A(k\boldsymbol{x}) = kA\boldsymbol{x} = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$, dunque $k\boldsymbol{x} \in S$.

Dunque S e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. □

2.1.2 Combinazioni lineari e span

Definizione 2.1.5. Sia V uno spazio vettoriale e $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora il vettore $\boldsymbol{v} \in V$ si dice combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ se

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \tag{2.14}$$

per qualche $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.1.6. Sia V uno spazio vettoriale e $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Si indica con $\operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ l'insieme dei vettori che si possono ottenere come combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$:

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\} = \{a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\} \tag{2.15}$$

Proposizione 2.1.7. *Sia $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ e siano $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_m} \in \mathbb{R}^n$ le sue colonne. Allora l'immagine della matrice e' uguale allo span delle sue colonne.*

Dimostrazione. L'immagine della matrice e' l'insieme di tutti i vettori del tipo $\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$ tali che esiste $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^m$ tale che

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\
&= A \left(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= x_1 A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_m A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ma sappiamo per la proposizione 1.1.7 che moltiplicare una matrice per un vettore che contiene tutti 0 tranne un 1 in posizione j ci da' come risultato la j-esima colonna della matrice, dunque:

$$= x_1 \boldsymbol{a_1} + \dots + x_m \boldsymbol{a_m}$$

Ma i vettori che appartengono allo span delle colonne di A sono tutti e solo del tipo $x_1 \boldsymbol{a_1} + \dots + x_m \boldsymbol{a_m}$, dunque $\operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_m}\}$, come volevasi dimostrare. □

Proposizione 2.1.8. *Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora $A = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ e' un sottospazio di V.*

Dimostrazione. Dimostriamo che valgono le tre condizioni per cui A e' un sottospazio di V:

1. $\boldsymbol{0_V}$ appartiene ad A, in quanto basta scegliere $a_1 = \dots = a_n = 0$;
2. Siano $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in A$. Allora per qualche $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ vale che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} &= (a_1 \boldsymbol{v_1} + \dots + a_n \boldsymbol{v_n}) + (b_1 \boldsymbol{v_1} + \dots + b_n \boldsymbol{v_n}) \\
&= (a_1 + b_1)\boldsymbol{v_1} + \dots + (a_n + b_n)\boldsymbol{v_n} \in A
\end{aligned}$$

3. Siano $\boldsymbol{v} \in A, k \in \mathbb{R}$. Allora per qualche $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ vale che

$$\begin{aligned}
k\boldsymbol{v} &= k(a_1 \boldsymbol{v_1} + \dots + a_n \boldsymbol{v_n}) \\
&= (ka_1)\boldsymbol{v_1} + \dots + (ka_n)\boldsymbol{v_n} \in A
\end{aligned}$$

cioe' A e' un sottospazio di V. □

Definizione 2.1.9. Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora l'insieme $\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ si dice insieme di vettori linearmente indipendenti se

$$a_1 \boldsymbol{v_1} + \dots + a_n \boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0_V} \iff a_1 = \dots = a_n = 0 \tag{2.16}$$

cioe' se l'unica combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ che da' come risultato il vettore nullo e' quella con $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Possiamo usare una definizione alternativa di dipendenza lineare, equivalente alla precedente, tramite questa proposizione:

Proposizione 2.1.10. *Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora l'insieme dei vettori $\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ e' linearmente dipendente se e solo se almeno uno di essi e' esprimibile come combinazione lineare degli altri.*

Dimostrazione. Dimostriamo entrambi i versi dell'implicazione.

- Supponiamo che $\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ sia linearemente dipendente, cioe' che esistano $a_1, \dots, a_n$ non tutti nulli tali che

$$a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0_V}.$$

  Supponiamo senza perdita di generalita' $a_1 \neq 0$, allora segue che

$$\boldsymbol{v_1} = -\frac{a_2}{a_1}\boldsymbol{v_1} - \cdots - \frac{a_n}{a_1}\boldsymbol{v_n}$$

  dunque $\boldsymbol{v_1}$ puo' essere espresso come combinazione lineare degli altri vettori.

- Supponiamo che il vettore $\boldsymbol{v_1}$ sia esprimibile come combinazione lineare degli altri (senza perdita di generalita'), cioe' che esistano $k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\boldsymbol{v_1} = k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}.$$

  Consideriamo una generica combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_n$:

$$\begin{aligned}
&a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \\
=&a_1(k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}) + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \\
=&(a_1k_2 + a_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (a_1k_n + a_n)\boldsymbol{v_n}
\end{aligned}$$

  Se scegliamo $a_1 \in \mathbb{R}$ libero, $a_i = -a_1k_i$ per ogni $2 \leq i \leq n$, otterremo

$$\begin{aligned}
&(a_1k_2 + a_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (a_1k_n + a_n)\boldsymbol{v_n} \\
=&(a_1k_2 - a_1k_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (a_1k_n - a_1k_n)\boldsymbol{v_n} \\
=&0\boldsymbol{v_2} + \cdots + 0\boldsymbol{v_n} \\
=&\boldsymbol{0_V}
\end{aligned}$$

  dunque esiste una scelta dei coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_n$ diversa da $a_1 = \cdots = a_n = 0$ per cui la combinazione lineare da' come risultato il vettore nullo, cioe' l'insieme dei vettori non e' linearmente indipendente.

□

Inoltre per comodita' spesso si dice che i vettori $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ sono indipendenti, invece di dire che l'insieme formato da quei vettori e' un insieme linearmente indipendente.

Proposizione 2.1.11. *Sia V uno spazio vettoriale e $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora per ogni $k \in \mathbb{R}$ e per ogni $i, j \leq n$.*

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j}, \dots, \boldsymbol{v_n}\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_i} + k\boldsymbol{v_j}, \boldsymbol{v_j}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}. \quad (2.17)$$

Dimostrazione. Supponiamo che $v \in \text{span}\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$. Allora per definizione esisteranno $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$v = a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_i\boldsymbol{v_i} + a_j\boldsymbol{v_j} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n}$$

Aggiungiamo e sottraiamo $a_ik\boldsymbol{v_j}$ al secondo membro.

$$\begin{aligned}
&= a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_i\boldsymbol{v_i} + a_j\boldsymbol{v_j} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} + a_ik\boldsymbol{v_j} - a_ik\boldsymbol{v_j} \\
&= a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_i\boldsymbol{v_i} + a_ik\boldsymbol{v_j} + a_j\boldsymbol{v_j} - a_ik\boldsymbol{v_j} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \\
&= a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_i(\boldsymbol{v_i} + k\boldsymbol{v_j}) + (a_j - a_ik)\boldsymbol{v_j} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} \\
\implies & v \in \text{span}\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_i} + k\boldsymbol{v_j}, \boldsymbol{v_j}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}.
\end{aligned}$$

Si dimostra l'altro verso nello stesso modo.

Dunque in entrambi gli insiemi ci sono gli stessi elementi, cioe' i due span sono uguali. □

Notiamo inoltre che se scambiamo due vettori o se moltiplichiamo un vettore per uno scalare otteniamo uno span equivalente a quello di partenza. Quindi possiamo "semplificare" uno span di vettori tramite mosse di Gauss per colonna, come suggerisce la prossima proposizione.

Proposizione 2.1.12. *Siano $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in \mathbb{R}^m$ dei vettori colonna. Allora per stabilire quali di questi vettori sono indipendenti consideriamo la matrice A che contiene come colonna i-esima il vettore colonna v_i e riduciamola a scalini per colonna. Lo span delle colonne non nulle della matrice ridotta a scalini e' uguale allo span di $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$.*

Dimostrazione. Consideriamo la matrice $\bar{A}$ ridotta a scalini. Allora per la proposizione 2.1.11 lo span delle sue colonne e' uguale allo span dei vettori iniziali.

Tutte le colonne nulle possono essere eliminate da questo insieme, in quanto il vettore nullo e' sempre linearmente dipendente.

Le colonne rimanenti sono sicuramente linearmente indipendenti: infatti dato che la matrice e' a scalini per colonna per annullare il primo pivot dobbiamo annullare il primo vettore, per annullare il secondo dobbiamo annullare il secondo e cosi' via. Dunque lo span dei vettori colonna non nulli rimanenti e' uguale allo span dei vettori iniziali. □

Esempio 2.1.13. Sia

2.1.3 Generatori e basi

Definizione 2.1.14. Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora si dice che $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ e' un insieme di generatori di V, oppure che l'insieme $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ genera V, se

$$\text{span}\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}\} = V. \tag{2.18}$$

Per comodita' spesso si dice che i vettori $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ sono generatori di V, invece di dire che l'insieme formato da quei vettori e' un insieme di generatori.

Definizione 2.1.15. Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$. Allora si dice che $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ e' una base di V se

- i vettori $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ generano V;
- i vettori $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ sono linearmente indipendenti.

Definizione 2.1.16. Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v} \in V$ e $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ una base di V. Allora si dice vettore delle coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ il vettore colonna

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{2.19}$$

tale che

$$\boldsymbol{v} = a_1 \boldsymbol{v_1} + \dots + a_n \boldsymbol{v_n} \tag{2.20}$$

Proposizione 2.1.17. *Sia V uno spazio vettoriale, $\boldsymbol{v} \in V$ e $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ una base di V. Allora le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono uniche.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due vettori colonna distinti $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ che rappresentino le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Allora

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0_V} &= \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \\ &= (a_1 \boldsymbol{v_1} + \dots + a_n \boldsymbol{v_n}) - (b_1 \boldsymbol{v_1} + \dots + b_n \boldsymbol{v_n}) \\ &= (a_1 - b_1)\boldsymbol{v_1} + \dots + (a_n - b_n)\boldsymbol{v_n} \end{aligned}$$

Ma per definizione di base $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ sono linearmente indipendenti, dunque l'unica combinazione lineare che da' come risultato il vettore $\boldsymbol{0_V}$ e' quella in cui tutti i coefficienti sono 0. Da cio' segue che

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0$$
$$\implies \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

cioe' i due vettori sono uguali. Ma cio' e' assurdo poiche' abbiamo supposto $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, dunque le coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ devono essere uniche. □

2.2 Applicazioni lineari

Definizione 2.2.1. Siano V, W spazi vettoriali. Allora un'applicazione $f : V \to W$ si dice lineare se

$$f(\boldsymbol{0_V}) = \boldsymbol{0_W} \tag{2.21}$$
$$f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w}) \qquad \forall v, w \in V \tag{2.22}$$
$$f(k\boldsymbol{v}) = kf(\boldsymbol{v}) \qquad \forall v \in V, k \in \mathbb{R} \tag{2.23}$$