Logica per la programmazione

Luca De Paulis

29 settembre 2019

Capitolo 1

Calcolo proposizionale

1.1 Definizione di proposizione

(Proposizione). *Una proposizione e' un enunciato dichiarativo per il quale valgono il principio del terzo escluso e il principio di non contraddittorieta'.*

(Principio del terzo escluso). *Una proposizione e' vera oppure e' falsa.*

(Principio di non contraddittorieta'). *Una proposizione non e' contemporaneamente vera e falsa.*

1.2 Connettivi logici

1.3 Interpretazioni

(Interpretazione). *Una funzione che associa ogni variabile proposizionale che compare in una formula ad un valore compreso in* $0; 1$ *si chiama interpretazione.*

(Tavola di verita'). *Si chiama tavola di verita' una tavola che raccoglie tutte le interpretazioni di una formula.*

CONNETTIVI	SIMBOLO	OPERAZIONE
not	$\neg$	negazione
and	&	congiunzione
or	$\vee$	disgiunzione
se p allora q	$\Longrightarrow$	implicazione
p se e solo se q	$\equiv$	equivalenza
p se q	$\Longleftarrow$	conseguenza

1.4 Tautologie

(Tautologia). *Si dice tautologia una formula che vale T per ogni possibile interpretazione.*

(Contraddizione). *Si dice contraddizione una formula che vale F per ogni possibile interpretazione.*

Osservazione 1. *Se p e' una tautologia allora $\neg p$ e' una contraddizione.*

(Implicazione tautologica). *Si dice che p implica tautologicamente q se e solo se $(p \implies q)$ e' una tautologia.*

(Equivalenza tautologica). *Si dice che p equivale tautologicamente a q se e solo se $(p \equiv q)$ e' una tautologia.*

1.5 Leggi

1.5.1 Leggi per l'equivalenza

$$
\begin{aligned}
& p \equiv p && \text{(riflessivita')} \\
& (p \equiv q) \equiv (q \equiv p) && \text{(simmetria)} \\
& (p \equiv q) \wedge (q \equiv r) \implies (p \equiv r) && \text{(transitivita')} \\
& ((p \equiv q) \equiv r) \equiv (p \equiv (q \equiv r)) && \text{(associativita')} \\
& (p \equiv T) \equiv p && \text{(unita')}
\end{aligned}
$$

1.5.2 Leggi per congiunzione e disgiunzione

$$
\begin{aligned}
& p \vee q \equiv q \vee p && \text{(riflessivita')} \\
& p \wedge q \equiv q \wedge p && \\
& ((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r)) && \text{(associativita')} \\
& ((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r)) && \\
& p \vee p \equiv p && \text{(idempotenza)} \\
& p \wedge p \equiv p && \\
& p \vee F \equiv p && \text{(unita')} \\
& p \wedge T \equiv p && \\
& p \vee T \equiv T && \text{(zero/dominanza)} \\
& p \wedge F \equiv F && \\
& p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) && \text{(distributivita')} \\
& p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) &&
\end{aligned}
$$

1.5.3 Leggi per la negazione

$$
\begin{aligned}
&\neg(\neg p) \equiv p && \text{(doppia negazione)}\\
&p \vee \neg p \equiv T && \text{(terzo escluso)}\\
&p \wedge \neg p \equiv F && \text{(contraddizione)}\\
&\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q && \text{(De Morgan)}\\
&\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q
\end{aligned}
$$

1.5.4 Leggi di eliminazione

$$
\begin{aligned}
&(p \implies q) \equiv (\neg p \vee q) && \text{(elim-} \implies \text{)}\\
&\neg(p \implies q) \equiv (p \wedge \neg q) && \text{(elim-}\neg \implies \text{)}\\
&(p \equiv q) \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p) && \text{(elim-}\equiv\text{)}\\
&(p \equiv q) \equiv (p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q) && \text{(elim-}\equiv\text{-bis)}\\
&(p \impliedby q) \equiv (q \implies p) && \text{(elim-} \impliedby \text{)}
\end{aligned}
$$

1.5.5 Transitivita' dell'implicazione

$$((p \implies q) \wedge (q \implies r)) \implies (p \implies b) \qquad \text{(transitivita')}$$

1.5.6 Leggi di complemento e assorbimento

$$
\begin{aligned}
&p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q && \text{(complemento)}\\
&p \wedge (\neg p \vee q) \equiv p \wedge q\\
&p \vee (p \wedge q) \equiv p && \text{(assorbimento)}\\
&p \wedge (p \vee q) \equiv p
\end{aligned}
$$

1.5.7 Altre leggi utili

$$
\begin{aligned}
&p \wedge q \implies p && \text{(sempl-}\wedge\text{)}\\
&p \implies p \vee q && \text{(introd-}\vee\text{)}\\
&p \implies q \equiv \neg q \implies p && \text{(contropositiva)}\\
&p \wedge q \implies r \equiv p \wedge \neg r \implies \neg q && \text{(scambio)}\\
&(p \implies q) \wedge p \implies q && \text{(Modus Ponens)}
\end{aligned}
$$

OPERATORE	LIVELLO DI PRECEDENZA (crescente)
$\neg$	0
$\wedge$, $\vee$	1
$\implies$, $\impliedby$	2
$\equiv$	3

1.6 Dimostrazione delle leggi

1.6.1 Leggi di complemento

$$
\begin{aligned}
& p \vee (\neg p \wedge q) \\
\equiv & \textbf{??} \\
& (p \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \\
\equiv & \textbf{??} \\
& T \wedge (p \vee q) \\
\equiv & \textbf{??} \\
& p \vee q
\end{aligned}
$$

1.7 Inferenza corretta

Il calcolo proposizionale permette di dimostrare semplici inferenze, dimostrazioni o deduzioni del linguaggio naturale. Un'inferenza si dice corretta se e solo se la formula e' una tautologia.

1.8 Precedenza tra operatori

Per eliminare alcune delle parentesi e alleggerire la scrittura di formule si usano delle leggi sulla precedenza degli operatori.

La tabella non descrive l'associativita' degli operatori, che quindi va descritta tramite l'uso delle parentesi per non commettere errori sintattici.

1.8.1 Esempi di formule sintatticamente errate

$$p \wedge q \vee r$$

Errata perche' nessuna legge descrive l'associativita' di $\wedge$ e $\vee$, dunque la formula e' ambigua.

$$p \implies q \implies r$$

Errata perche' l'implicazione non e' associativa, dunque la formula e' ambigua.