11. Il campo elettrostatico

11.1 La legge di Coulomb

L'esperienza dimostra che tra due corpi elettricamente carichi si esercita una forza, che può essere, a seconda dei casi, attrattiva o repulsiva. La fenomenologia può essere spiegata ammettendo l'esistenza di due tipi di cariche, dette, secondo una convenzione risalente a Benjamin Franklin, positive o negative; cariche dello stesso segno si respingono, cariche di segno opposto si attraggono. Oggi si sa che tutta la materia che noi conosciamo è tenuta insieme dalle forze elettriche: gli atomi sono costituiti da un nucleo dotato di carica positiva, in cui è concentrata quasi totalmente la massa, e da particelle molto più leggere, gli elettroni, dotati di carica negativa. Le cariche sono quantizzate: la carica portata da una qualunque particella è, in valore assoluto, un multiplo esatto della carica dell'elettrone.

Dall'osservazione sperimentale si deduce che la forza con cui interagiscono due cariche di valore q_1 e q_2, supposte puntiformi, è diretta nella direzione della congiungente ed è inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. Indicando con r tale distanza e con $\hat{r}$ il versore che indica la direzione della congiungente, si arriva così a scrivere la *legge di Coulomb*:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \qquad [11.1]$$

in cui k è una costante di proporzionalità il cui valore numerico dipende dalla scelta delle unità di misura usate per misurare le forze, le distanze e le cariche.

Nel Sistema Internazionale viene definita come unità di misura delle cariche elettriche il *coulomb* (C) e la costante k assume il valore di circa $8.99 \cdot 10^9$ N m^2/C^2; la forza agente tra due cariche puntiformi di 1 C, poste ad una distanza di 1 m una dall'altra, è dunque pari a $8.99 \cdot 10^9$ N. Come si può notare, il valore della forza è molto grande: una carica statica di 1 coulomb è una carica enorme; si preferisce perciò utilizzare di norma i sottomultipli μC (=10^{-6} C) o nC (=10^{-9} C).

Di solito, si preferisce scrivere la legge di Coulomb ponendo $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ dove ε_0 è la *costante dielettrica del vuoto* che vale $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ C^2/(N m^2):

[11.2] $$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

11.2 Il campo elettrico

Come si è detto nel § 7.1, l'interazione tra due cariche può essere schematizzata supponendo che la prima carica q_1 generi nello spazio circostante un *campo elettrico* e che la seconda carica q_2 interagisca col campo esistente nel punto in cui essa è localizzata. La grandezza *campo elettrico* è perciò definita come il rapporto tra la forza di origine elettrica che agirebbe su una carica q_0, posta nel punto considerato, ed il valore della carica stessa (in breve, come *la forza agente sulla carica di valore unitario*):

[11.3] $$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}}.$$

Questa descrizione è operativamente identica alla legge di Coulomb enunciata nel paragrafo precedente, se si assume che il campo generato da una carica puntiforme q nello spazio circostante ad una distanza r valga:

[11.4] $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}.$$

Applicando formula [11.4], si ha infatti che il campo $\vec{E}_1$ generato dalla carica q_1 nel punto in cui si trova la carica q_2 vale $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$ ed inserendo tale valore nella [11.3] si trova che la forza agente sulla carica q_2 risulta quindi $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$, che è la forza di Coulomb.

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del campo elettrico si definisce a partire dalla definizione [11.3] come la forza agente sulla carica unitaria e si esprime in $\frac{newton}{coulomb}$ (N/C). Vedremo in seguito che tale unità può essere espressa in modo assolutamente equivalente anche in *volt/m*, utilizzando l'unità di potenziale elettrostatico, il *volt*, che introdurremo più avanti.

11.3 Il principio di sovrapposizione.

In generale una particella carica non interagisce semplicemente con un'altra carica puntiforme, ma con l'insieme di tutti gli altri corpi carichi esistenti nello spazio circostante. Consideriamo dunque una particella dotato di una carica q_0. Nello spazio circostante sono presenti altre cariche puntiformi q_1, q_2, q_3,... La forza globale agente sul corpo considerato è allora la somma **vettoriale** delle forze dovute all'interazione di q_0 con ciascuna delle cariche q_1, q_2, q_3, ... Cioè, in formula:

[11.5] $$\vec{F}=\sum_{i=1}^{N}\vec{f}_{0i}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_i}{r_{0i}^2}\hat{r}_{0i}=q_0\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_{0i}^2}\hat{r}_{0i}$$

dove con r_{0i} è la distanza tra il punto P_0 in cui si trova la particella di carica q_0 e il punto P_i in cui si trova la particella di carica q_i e $\hat{r}_{0i}$ è il versore che indica la direzione della congiungente i due punti.

Poiché il campo generato in un punto P_0 dalla carica puntiforme i-esima è $\vec{E}_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_{0i}^2}\hat{r}_{0i}$, dalla [11.5] si deduce che:

[11.6] $$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i$$

In conclusione, *il campo elettrico generato da un insieme di cariche puntiformi è punto per punto uguale alla somma vettoriale dei campi elettrici generati dalle singole cariche* (PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE).

Utilizzando i metodi dell'analisi infinitesimale si può estendere il principio di sovrapposizione al campo elettrico generato da una distribuzione continua di cariche. Il procedimento è quello solito: si suddivide la spazio occupato dalle cariche in tante parti abbastanza piccole da poterle considerare come puntiformi e si applica la [11.6]; il risultato esatto si ottiene calcolando il limite della somma quando le dimensioni delle singoli parti tendono a zero (calcolando cioè un integrale). Formalmente, il campo elettrico si scriverà allora nella forma:

[11.7] $$\vec{E}=\int_V\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\hat{r}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}$$

Il calcolo esplicito del campo generato da una distribuzione qualunque di cariche di norma richiede tecniche matematiche assai complesse. E' però possibile in alcuni casi particolari sfruttare alcune proprietà generali del campo elettrico (il teorema di Gauss che ora enunceremo) e le proprietà di simmetria della distribuzione delle cariche per aggirare tali difficoltà e giungere con facilità al risultato.

11.4 Linee di forza e flusso del campo elettrico

Per visualizzare l'andamento del campo elettrico si usa rappresentarlo graficamente con linee (*linee di forza*), la cui direzione è punto per punto quella del vettore campo elettrico e che sono più o meno addensate in funzione dell'intensità del campo. La Fig. 11-1 mostra le linee di forza che rappresentano l'andamento del campo elettrico generato da un carica elettrica puntiforme positiva.

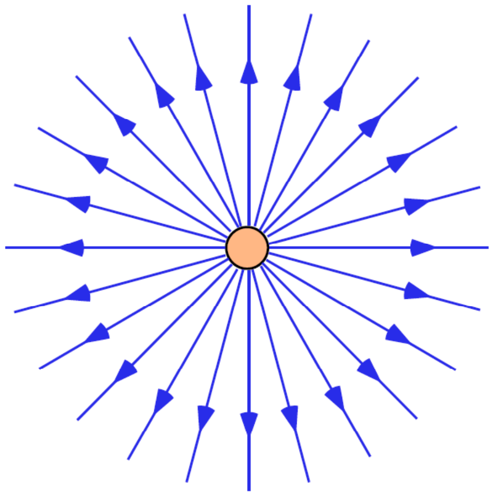

Fig. 11-1

Introduciamo ora il concetto di flusso di campo elettrico. Nel caso in cui il campo elettrico sia uniforme (abbia cioè in tutti i punti lo stesso modulo E e la stessa direzione). Considerando una superficie piana di area A, orientata ortogonalmente alla direzione del campo (Fig. 12-1), definiamo **flusso** Φ del vettore $\vec{E}$ attraverso la superficie piana il prodotto di $|\vec{E}|$ per A. Graficamente, il flusso è proporzionale al numero delle linee di forza del campo che attraversano la superficie.

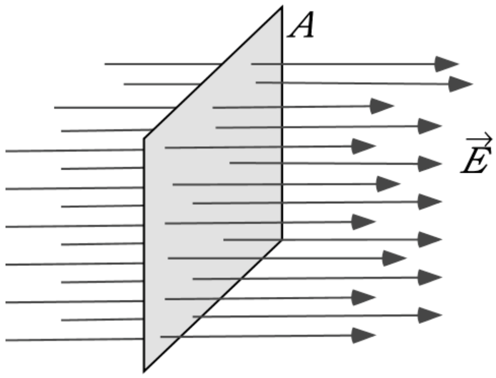

Fig. 11-2

Supponiamo ora che la superficie piana A tagli obliquamente le linee di forza del campo elettrico. Dalla Fig. 11-3 si osserva che il numero di linee di forza del campo tagliate dalla superficie A, lì disegnata in arancione, è uguale al numero di linee di forza del campo tagliate dalla superficie A', disegnata in azzurro, che è la proiezione di A su un piano ortogonale alla direzione del campo. Indicando con θ l'angolo compreso tra la normale al piano e la direzione del campo elettrico. l'area A' vale $A\cos\theta$. Il flusso tagliato da A risulta quindi pari al prodotto di E per $A\cos\theta$.

In questo cotesto è utile definire le superfici piane come grandezze vettoriali, esprimendole come vettori il cui modulo è il valore dell'area e la cui direzione è la direzione della normale al piano su cui giace la superficie. La definizione di flusso del campo elettrico uniforme $\vec{E}$ attraverso una superficie piana potrà allora essere espressa come il prodotto scalare del vettore $\vec{E}$ e del vettore $\vec{A}$, nella forma:

$$\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{A} = |\vec{E}|\,|\vec{A}| \cos\theta \qquad [11.8]$$

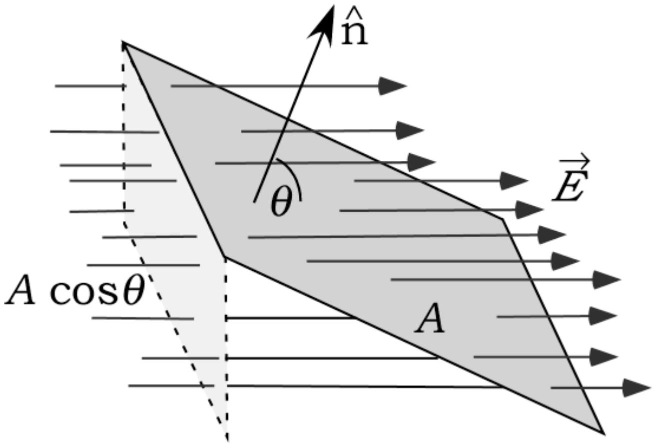

Fig. 11-3

Estendiamo ora la definizione al caso in cui $\vec{E}$ non sia uniforme o la superficie attraverso cui si deve calcolare il flusso non sia piana. A tal fine, si suddivide la superficie in elementi di area $\Delta\vec{A}_i$, abbastanza piccoli da poterli considerare piani e da poter considerare su di essi $\vec{E}$ uniforme Il flusso di $\vec{E}$ attraverso l'intera superficie si ottiene eseguendo la somma estesa a tutti gli elementi in cui è stata suddivisa la superficie dei flussi calcolati per ciascun elemento $\vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$ (Fig. 11-4). Questa operazione può essere formalizzata matematicamente, facendo tendere a zero la dimensione dei singoli elementi di superficie limite ed eseguendo l'operazione di integrazione.

$$\Phi = \sum_i \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}_i \xrightarrow[\Delta A_i \to 0]{} \Phi = \int_{\text{superficie}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad [11.9]$$

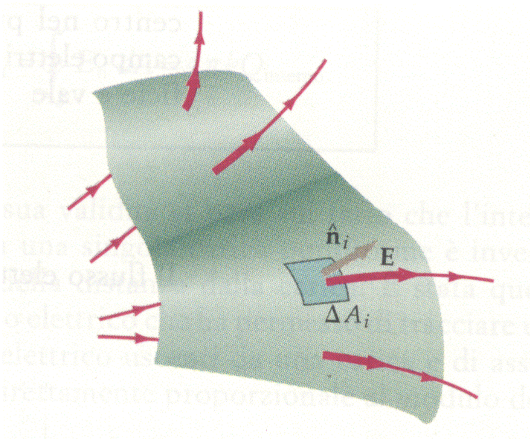

Fig. 11-4

11.5 Il teorema di Gauss.

Consideriamo un corpo puntiforme di carica Q e calcoliamo quale sia il flusso del campo elettrico generato da tale carica attraverso una superficie sferica, il cui centro coincida con il punto occupato dal corpo carico (Fig. 11-5). A tal fine suddividiamo la superficie sferica in tante piccole porzioni di area dA. Il campo $\vec{E}$ è diretto nella direzione del raggio e quindi è sempre perpendicolare alla superficie. Il flusso di $\vec{E}$ attraverso il singolo elemento di superficie dA è perciò dato dal prodotto tra dA ed il modulo di $\vec{E}$, che vale $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ in tutti i punti della superficie della sfera. Sommando su tutta la superficie della sfera, si ottiene:

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\oint \mathrm{d}S = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\frac{Q}{\cancel{R^2}}\,\cancel{4\pi R^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{11.10}$$

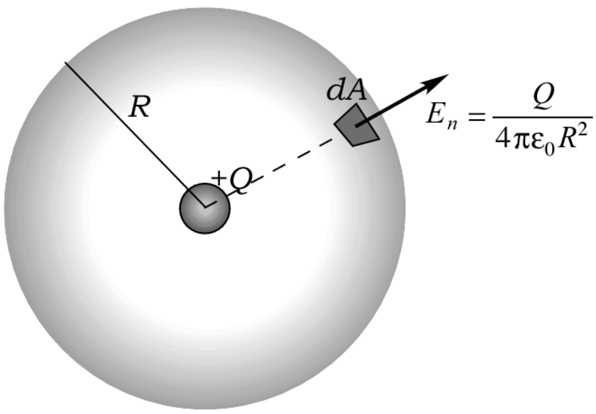

Fig. 11-5

Nel risultato non compare il valore del raggio della superficie sferica: il flusso del campo calcolato è indipendente dal valore del raggio della sfera. In effetti, la superficie cresce con il quadrato del raggio, ma contemporaneamente il valore del campo elettrico decresce in proporzione inversa. Non sarebbe difficile dimostrare, anche se qui non lo facciamo, che si otterrebbe per il flusso lo stesso risultato anche se noi lo attraverso una qualunque superficie, purché questa racchiuda al suo interno la carica *Q*. Se poi all'interno della superficie chiusa si trovano più cariche q_1, q_2, q_3, …, i flussi si sommano. Si perviene così in generale a formulare il seguente principio:

> **Teorema di Gauss:** Il flusso del campo generato da un insieme di cariche puntiforme q_i attraverso una superficie chiusa è pari alla somma algebrica delle cariche contenute all'interno della superficie, divisa per la costante dielettrica del vuoto:

$$\Phi = \frac{\sum_i q_i^{(\mathrm{int})}}{\varepsilon_0} \tag{11.11}$$

Notiamo che il teorema di Gauss si riferisce a superfici chiuse, che quindi dividono lo spazio in una parte interna ed una esterna. Il flusso attraverso una superficie chiusa del campo elettrico generato da una carica esterna al volume racchiuso in tale superficie è nullo. Dalla Fig. 11-6 si può infatti evidenziare come le linee di forza che entrano all'interno della superficie ne riescano poi dalla parte opposta.

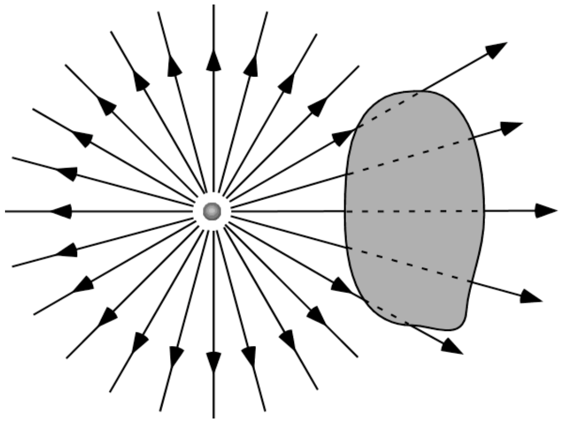

Fig. 11-6

11.6 Corpi conduttori e corpi isolanti .

I corpi in natura possono essere classificati come isolanti se le cariche al loro interno sono vincolate o come conduttori se esse sono libere di muoversi. Questa è chiaramente una definizione semplificata, ma più che sufficiente per i nostri scopi. Esempi di corpi isolanti sono i vetri, il quarzo, i materiali plastici, il sale da cucina; esempi di conduttori sono i metalli o le soluzioni saline.

Per i corpi conduttori, il teorema di Gauss permette di dedurre alcune interessanti proprietà. Consideriamo un conduttore in condizioni d'equilibrio, quando cioè non vi sia al suo interno un movimento macroscopico di cariche. *Per un conduttore all'equilibrio* valgono le seguenti proprietà:

- il campo elettrico all'interno del conduttore è uguale a zero
- le eventuali cariche libere sono distribuite esclusivamente sulla superficie
- il campo elettrico sulla superficie ha direzione ortogonale ad essa ed è proporzionale al valore locale della densità di carica.

Vediamo di giustificarle nell'ordine.

La prima affermazione discende direttamente dalla definizione di corpo conduttore. Se il campo elettrico all'interno del conduttore non fosse nullo, le cariche, che per definizione di conduttore sono libere di muoversi, sarebbero sottoposte ad una forza e si muoverebbero, contraddicendo l'ipotesi fatta di equilibrio.

In base al teorema di Gauss possiamo poi che dimostrare che in condizioni statiche l'interno del conduttore deve essere ovunque neutro. La presenza di una carica in un punto all'interno implicherebbe infatti che in un intorno di esso potremmo considerare una superficie chiusa interna al conduttore attraverso la quale il flusso del campo elettrico dovrebbe essere diverso da zero; ma questo è in contraddizione con quanto dimostrato nel punto precedente, poiché implica che da qualche parte dentro il conduttore ci sia un campo non nullo.

Si noti che ragionamento appena fatto non vale per un punto situato sulla superficie del conduttore. In effetti la presenza di un campo elettrico sulla superficie non è proibita, purché esso abbia una direzione ortogonale alla superficie stessa: la carica è infatti libera di muoversi nel conduttore, ma non di uscire da esso!

Le eventuali cariche presenti nel conduttore si distribuiscono quindi sulla sua superficie. Dato un elemento di superficie di area ΔA, definiamo come *densità di carica* σ il rapporto tra la quantità di carica Δq presente su tale superficie e l'area, ovvero:

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta A} \tag{11.12}$$

Il valore del campo in un punto sulla superficie del conduttore è legato al valore della densità locale di carica. Facendo riferimento alla Fig. 11-7, consideriamo un elemento di superficie di area ΔA sul quale la densità locale di carica sia σ. Ciò significa che nell'area ΔA è presente una carica pari a $\sigma\,\Delta A$. Consideriamo ora una superficie cilindrica (indicata in verde nel disegno), avente una base di area ΔA all'interno del conduttore, immediatamente al di sotto della superficie, e l'altra immediatamente fuori. Applichiamo il teorema di Gauss a tale superficie: il flusso di $\vec{E}$ attraverso di essa è pari alla quantità totale di carica racchiusa divisa per ε_0. Il campo elettrico interno al conduttore è nullo e quindi è nullo il flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie della base del cilindro interna al conduttore. Ancora nullo è il flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie laterale, essendo il campo diretto ortogonalmente alla superficie del conduttore. Il flusso totale è dato quindi esclusivamente dal flusso attraverso la base esterna al conduttore, che vale $E\,\Delta A$. Applicando il teorema di Gauss [11.11], si ottiene:

$$E\,\Delta A = \frac{\sigma\,\Delta A}{\varepsilon_0},$$

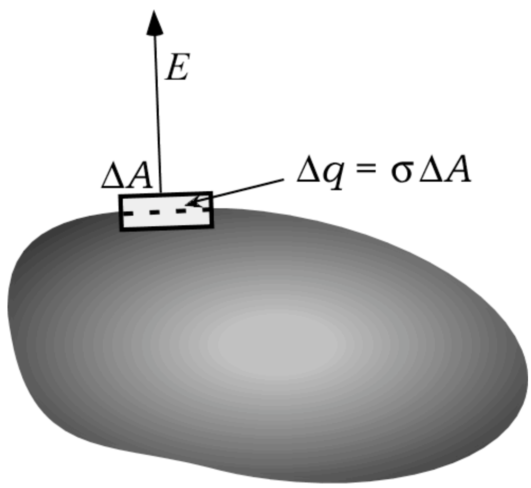

Fig. 11-7

ovvero:

[11.13] $$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

11.7 Campo generato da una sfera carica conduttrice

Il teorema di Gauss permette di ricavare con facilità il campo elettrico generato da alcune distribuzioni di carica sfruttandone le proprietà di simmetria.

Noi esamineremo qui il caso di una sfera conduttrice di raggio R su cui si trova una carica Q. Per quanto detto nel paragrafo precedente, in condizioni statiche questa carica si distribuisce sulla superficie della sfera. Data la simmetria della sfera, tutti i punti della superficie sono equivalenti tra loro e la carica si distribuisce sulla superficie in modo omogeneo.

Già sappiamo che all'interno della sfera il campo è nullo. Per calcolare il valore del campo all'esterno della sfera, ad una distanza r dal suo centro, applichiamo il teorema di Gauss. A tal fine, consideriamo (Fig. 11-8) una superficie sferica di raggio r concentrica alla sfera carica. Su ogni punto di questa superficie il campo elettrico, per rispettare la simmetria di distribuzione delle cariche, deve essere diretto in direzione radiale. Sempre per rispettare la simmetria di distribuzione delle cariche, il modulo $E(r)$ deve essere identico su tutti i punti della superficie. Il flusso totale attraverso la superficie è allora $\Phi = E(r) \cdot 4\pi\, r^2$ e, in base al teorema di Gauss:

$$E(r) \cdot 4\pi\, r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

da cui:

[11.14] $$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

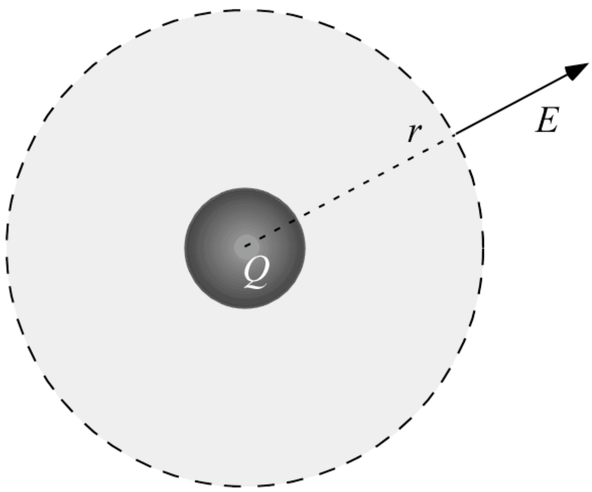

Fig. 11-8

Si può quindi concludere che *il campo elettrico generato da una sfera conduttrice carica è, esternamente alla sfera, esattamente identico a quello generato da un corpo puntiforme d'uguale carica posto nel centro della sfera.* Come si è già detto, all'interno della sfera il campo è invece nullo.

12. Il potenziale elettrostatico e i condensatori

12.1 Il potenziale elettrostatico

La forza $\vec{F}$ agente su un corpo di carica q e massa m all'interno di un campo elettrico $\vec{E}$ è, in base alla definizione [11.3],

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Il moto del corpo + quindi determinato dall'equazione:

$$m\vec{a} = q\vec{E} \qquad [12.1]$$

In generale il campo elettrico $\vec{E}$ varia da punto a punto e ricavare la legge oraria del moto dalla [12.1] non è immediato, a meno di casi particolari. Se il campo è uniforme (cioè ha lo stesso valore in tutti i punti dello spazio), dalla [12.1] si ricava che il corpo si muove di moto uniformemente accelerato con un'accelerazione costante $\frac{q\vec{E}}{m}$. In altri casi ricavare la legge del moto può essere un problema matematicamente complesso.

Riprendiamo qui i concetti sviluppati in meccanica nel cap. 6 e 7, riguardanti il lavoro e l'energia. Il lavoro effettuato dal campo elettrico su una carica in movimento si ricava dalla [6.10]:

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Il campo elettrostatico è un campo conservativo; si può quindi definire per un corpo carico posto all'interno del campo una *energia potenziale elettrostatica*. In base alla definizione [7.2], la differenza d'energia potenziale elettrostatica tra due punti A e B è data dalla formula

$$\Delta U = U(B) - U(A) = -\mathcal{L}_{AB} = -q\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \qquad [12.2]$$

Come si vede, la differenza d'energia potenziale [12.2] è il prodotto tra il valore della carica del corpo in movimento e un termine $-\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$, che dipende solo dal campo elettrico e quindi dalla distribuzione di cariche che generano il campo. Questo secondo termine, che possiamo interpretare come il valore della differenza di energia potenziale tra il punto B ed il punto A di un corpo che porta la carica unitaria, prende il nome di *differenza di potenziale elettrostatico.*

DEFINIZIONE: LA DIFFERENZA DI POTENZIALE ELETTROSTATICO TRA DUE PUNTI A E B È DEFINITA COME IL LAVORO CAMBIATO DI SEGNO PER PORTARE LA CARICA UNITARIA DA A A B.

[12.3] $$\Delta V = V(B) - V(A) = -\frac{\mathcal{L}_{AB}}{q} = -\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Da questa definizione si ricava che l'unità di misura nel sistema internazionale del potenziale elettrostatico è pari a 1 *joule* / 1 *coulomb*. Essa prende il nome di *volt* (V).

Di norma si assume il riferimento di zero del potenziale elettrostatico *all'infinito,* cioè a grande distanza dalla cariche generanti il campo. Il potenziale elettrostatico di un punto A è allora così definito:

[12.4] $$\boxed{V(A) = -\int_\infty^A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}}$$

12.2 Potenziale elettrostatico di una carica puntiforme

Si abbia una carica puntiforme q. Ci proponiamo di calcolare quale sia il valore del potenziale elettrostatico generato da essa nello spazio circostante. Sappiamo che il campo elettrico ad un distanza $\vec{r}$ dalla carica è $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$; il valore del potenziale elettrostatico in un punto A , posto alla distanza r_A dalla carica si calcola utilizzando la definizione [12.4]:

$$V(A) = -\int_\infty^A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_\infty^{r_A} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^{r_A}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r=\infty}^{r=r_A} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} \quad .$$

In funzione della distanza r si ha quindi:

[12.5] $$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad .$$

Se a generare il campo sono da più cariche puntiformi q_1, q_2, q_3,..., il potenziale in un punto A si calcola in base al principio di sovrapposizione dei campi elettrici [11.6]:

$$V(A) = -\int_\infty^A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_\infty^A \sum_i \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_\infty^A \sum_i \left(\vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{s}\right) = -\sum_i \int_\infty^A \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{s} \quad ,$$

essendo $\vec{E}_i$ il campo generato dalla carica q_i.

Osservando che $-\int_{\infty}^{A} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ è il valore del potenziale elettrostatico V_i generato in A dalla carica q_i, si ottiene infine:

$$V(A) = \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_i \frac{q_i}{r_{A,i}} \quad , \tag{12.6}$$

essendo $r_{A,i}$ la distanza tra A e la carica q_i.

Nel caso di una distribuzione continua di cariche, nella [12.6] la somma diviene un integrale:

$$V(A) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}q}{r} \tag{12.7}$$

dove l'integrale è esteso a tutto il volume $\mathcal{V}$ occupato dalle cariche.

Si noti qui una importante differenza tra le formule [11.6] e [11.7], che descrivono la sovrapposizione dei campi elettrostatici generati da un insieme di cariche, e le formule [12.7] e [12.9], che descrivono la sovrapposizione dei potenziali elettrostatici generati da un insieme di cariche. Mentre nelle prime occorre effettuare delle somme *vettoriali*, spesso assai laboriose, per sovrapporre i potenziali si effettuano somme *algebriche*.

12.3 Potenziale di un conduttore

Come si è visto nel § 11.6, in condizioni statiche all'interno di un conduttore il campo elettrico è nullo. Di conseguenza, la differenza di potenziale tra due punti di un conduttore è nulla ed il valore del potenziale è uniforme in ogni suo punto o, come si dice normalmente, il conduttore è *equipotenziale*. In condizioni statiche si può quindi definire un *potenziale del conduttore*. Esso è il lavoro, cambiato di segno, necessario a portare la carica unitaria dall'infinito alla superficie di esso.

Nel caso di una sfera conduttrice di raggio a e carica Q, essendo il campo elettrico all'esterno della sfera identico a quello generato da una carica puntiforme posto nel centro, il valore del potenziale è:

$$V_{conduttore} = -\int_{\infty}^{A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_{\infty}^{a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{a} . \tag{12.8}$$

Poiché la Terra può essere considerata nel suo insieme come un corpo conduttore, l'espressione *mettere a terra*, che esprime il fatto di collegare un corpo conduttore alla Terra tramite un altro conduttore, significa che tale corpo è posto a potenziale nullo.

14. Il campo magnetico

14.1 La forza di Lorentz

L'interazione tra corpi carichi in condizioni statiche è descritta dalle forze elettrostatiche che abbiamo studiato nei capitoli precedenti. Su un corpo carico agisce una forza proporzionale al valore q della carica e al valore $\vec{E}$ del campo elettrico esistente nel punto occupato dal corpo. Il valore di $\vec{E}$ è determinato dalla posizione dell'insieme di cariche che si trovano nello spazio circostante. Osservando però le forze agenti su un corpo carico in movimento o su un conduttore in cui passi una corrente elettrica, la descrizione va completata introducendo un altro campo $\vec{B}$, detto **campo magnetico**, la cui origine è legata alla presenza di correnti elettriche esistenti nello spazio circostante.

Trascurando per il momento il problema di come si producano i campi magnetici, osserviamo il moto di un corpo di carica q (per esempio un elettrone o uno ione atomico) che si muova con velocità $\vec{v}$ in una zona di spazio in cui ci sia un campo magnetico costante $\vec{B}$. Dai dati sperimentali si ricava che esso è soggetto ad una forza, proporzionale al valore del campo, che è anche direttamente proporzionale alla velocità e alla carica q. Questa forza è detta *forza di Lorentz*. Si osserva inoltre che il suo valore dipende anche dalla direzione relativa del vettore $\vec{v}$ rispetto al vettore $\vec{B}$ (ovvero dall'angolo θ compreso tra i due vettori) e che la sua direzione è ortogonale sia alla direzione di $\vec{v}$ che a quella di $\vec{B}$. Riassumendo in formula la relazione tra i moduli dei vettori:

[14.1] $$\left|\vec{f}\right| = qvB\sin\theta$$

La forza è quindi nulla se $\sin\theta = 0$ ($\theta = 0°$ oppure $\theta = 180°$): è il caso in cui la carica si muove parallelamente alla direzione del campo magnetico.

La forza di Lorentz può essere espressa In forma vettoriale, utilizzando l'operazione di prodotto vettoriale di due vettori che introdurremo nel paragrafo seguente, nella forma:

[14.2] $$\vec{f} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

14.2 Il prodotto vettoriale

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, le cui direzioni formano tra loro un angolo θ, si definisce prodotto vettoriale $\vec{a}\times\vec{b}$ il vettore $\vec{c}$, che ha come modulo il prodotto dei moduli moltiplicato per il seno dell'angolo θ ed è diretto ortogonalmente al piano definito dai due vettori, nella direzione da cui si osserva la rotazione di $\vec{a}$ verso $\vec{b}$ in senso antiorario (Fig. 14-1).

E' quindi:

[14.3] $$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

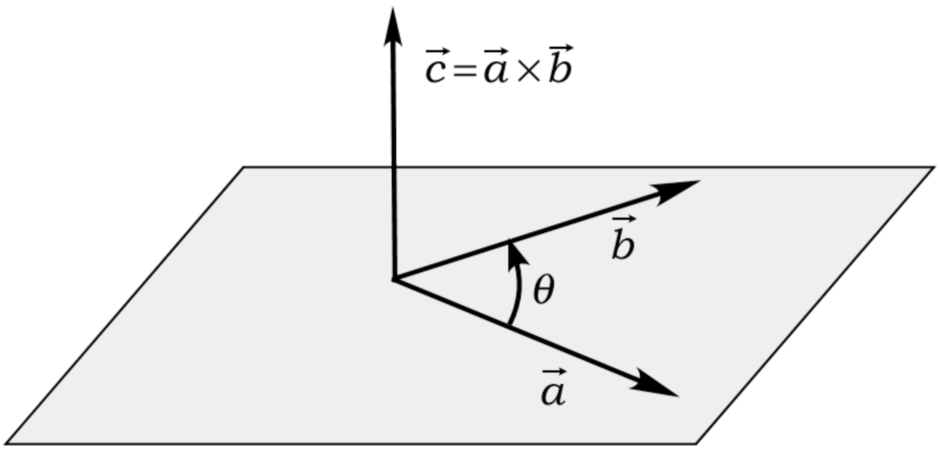

Fig. 14-1

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono hanno la stessa direzione oppure hanno direzione opposta ($\theta = 0°$ o $\theta = 180°$) il risultato è nullo. Naturalmente, invertendo nel prodotto i due fattori, si inverte il senso di rotazione; come conseguenza si inverte anche la direzione del vettore prodotto (Fig. 14-2). Il prodotto vettoriale non gode quindi della proprietà commutativa, propria del prodotto tra grandezze numeriche. In effetti si ha:

[14.4] $$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

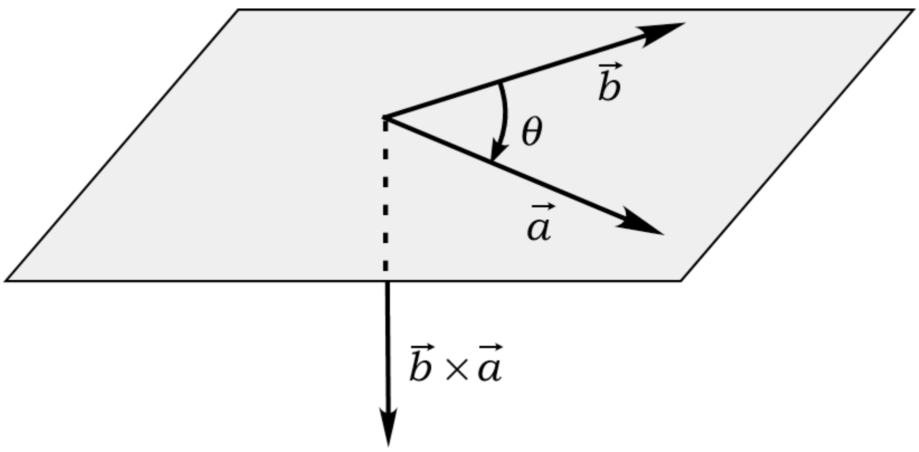

Fig. 14-2

14.3 Moto di una carica in un campo magnetico uniforme

Come si è detto, un corpo di massa m e carica q in moto in un campo magnetico è soggetta alla forza di Lorentz. Supponiamo che il campo sia uniforme (cioè il vettore $\vec{B}$ abbia lo stesso modulo e la stessa direzione in tutti i punti) e che inizialmente essa si muova con una velocità $\vec{v}$, diretta ortogonalmente a $\vec{B}$. E' dunque $\theta = 90°$ e l'accelerazione cui è sottoposta la carica è in modulo pari a $\frac{qvB}{m}$. La direzione di tale accelerazione è ortogonale a $\vec{v}$, cioè ortogonale alla traiettoria; essa quindi non fa cambiare il valore del modulo della velocità, ma ne cambia invece la direzione. Poiché l'accelerazione è anche ortogonale a $\vec{B}$, il moto resterà confinato nel piano ortogonale a $\vec{B}$. Non cambiando dunque né il modulo della velocità né l'angolo tra velocità e campo magnetico, non cambia neppure il valore del modulo dell'accelerazione. Dalla cinematica sappiamo che il moto di un corpo soggetto ad un'accelerazione ortogonale alla direzione del moto e costante in modulo è un moto circolare uniforme.

Il raggio R della traiettoria circolare si trova ricordando che nel moto circolare uniforme l'accelerazione centripeta deve essere uguale a $\frac{v^2}{R}$. Si ha quindi:

$$\frac{qvB}{m} = \frac{v^2}{R}$$

ovvero:

$$R = \frac{mv}{qB} \quad [14.5]$$

Il caso in cui $\theta = 0°$ è banale: la forza è nulla e quindi la particella continua a muoversi di moto rettilineo uniforme.

Esaminiamo il caso in cui l'angolo θ tra la direzione della velocità e quella del campo magnetico sia diversa da 0° e da 90°. Scomponiamo il vettore velocità $\vec{v}$ in due componenti, $v_{\parallel}$ e $v_{\perp}$, rispettivamente nella direzione di $\vec{B}$ e nella direzione ortogonale a $\vec{B}$. La componente della forza di Lorentz in direzione di $\vec{B}$, e quindi la componente dell'accelerazione della particella in tale direzione, è nulla; perciò $v_{\parallel}$ si mantiene costante. La forza di Lorentz agisce invece sul piano ortogonale a $\vec{B}$; la proiezione del moto della particella su tale piano è un moto circolare uniforme, con velocità $v_{\perp}$ e raggio $R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$. Il moto complessivo è dunque la composizione di un moto uniforme nella direzione di $\vec{B}$ e di un moto circolare uniforme nella direzione ortogonale a $\vec{B}$; ne risulta in definitiva un moto a spirale della particella intorno alle linee del campo. Il senso di rotazione dipende dal segno della carica: antiorario per una carica positiva, orario per una carica negativa.

Il fatto che la forza di Lorentz agente su una particella carica in movimento sia sempre diretta ortogonalmente alla traiettoria del corpo si manifesta anche sotto un altro aspetto. Infatti si è visto nel cap. che il lavoro effettuato da una forza che sia sempre ortogonale allo spostamento è sempre nullo. La forza di Lorentz non produce quindi lavoro e di conseguenza non può far variare l'energia cinetica del corpo carico: la velocità di questo potrà variare in direzione, ma non in valore assoluto.

14.4 La forza magnetica su un conduttore percorso da corrente

La corrente all'interno di un conduttore è stata definita come il flusso di cariche attraverso una sezione del conduttore. Quando il conduttore è posto all'interno di un campo magnetico, su queste cariche in movimento si esercita la forza di Lorentz. Consideriamo allora un filo rettilineo conduttore di lunghezza l e sezione di area A , percorso da una corrente i. La corrente per definizione è data dalla quantità di carica che passa attraverso la sezione nell'intervallo di tempo Δt . Come si è visto nel §13.1, in un conduttore metallico i portatori di carica sono gli elettroni, i quali si muovono ad una velocità media v_d , che avevamo chiamato *velocità di deriva*. Avevamo allora scritto la relazione [13.3] $i = -n\,e\,v_d\,A$, dove n è la densità (numero per unità di volume) degli elettroni di valenza nel conduttore.

Se ϕ è l'angolo tra la direzione del campo magnetico e la direzione del moto degli elettroni (che coincide con la direzione del filo conduttore), su ogni elettrone agisce una forza pari a $f = -e\,v_d\,B\sin\phi$. Poiché in un elemento di filo lungo l ci sono $n\,A\,l$ elettroni, sommando il contributo di tutti gli elettroni si ottiene che la forza complessiva agente sul filo è:

$$F = -n A l e v_d B \sin\phi$$

ovvero, ricordando che $i = -n\,e\,v_d\,A$:

$$F = i l B \sin\phi \,, \tag{14.6}$$

che può anche essere scritta in forma vettoriale:

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B} \,, \tag{14.7}$$

avendo definito con $\vec{l}$ il vettore che ha per modulo la lunghezza l del filo e per direzione la direzione del filo stesso.

Con i metodi dell'analisi infinitesimale si può generalizzare le formule [14.6] e [14.7] anche per fili conduttori che non siano rettilinei. A tal fine si suddivide il filo in tanti porzioni di lunghezza Δl, abbastanza corti da poterli considerare come rettilinei, si calcola la forza agente su ciascuno di tali porzioni e quindi si sommano (ricordando che si ha a che fare con dei vettori!) i vari contributi, facendo tendere a zero la lunghezza Δl . Con le convenzioni consuete, potremo scrivere, in termini di infinitesimi:

$$\mathrm{d}\vec{F} = i\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} \tag{14.8}$$

ed integrando:

$$\vec{F} = \int_a^b i\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} \tag{14.9}$$

essendo a e b gli estremi del filo.

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del campo magnetico si definisce a partire dalle formule [14.6] o [14.7] come la forza agente su un conduttore della lunghezza di 1 *m*, ortogonale al campo e percorso dalla corrente di 1 A. Tale unità prende il nome di **tesla** (**T**).

E' quindi:

$$1\, tesla = \frac{1\, newton}{1\, metro \cdot 1\, ampère}$$

14.5 Generazione dei campi magnetici

Affrontiamo ora il problema di capire come si generano i campi magnetici. Sperimentalmente, si manifestano forze di origine magnetica in prossimità di cariche in movimento (*correnti*) oppure di alcuni corpi detti appunto *magneti*. Noi qui considereremo solo i campi magnetici generati dalle correnti. In effetti, anche i campi magnetici generati dai magneti sono prodotti dalla presenza all'interno del materiale di correnti elettriche a livello microscopico.

Data quindi una distribuzione di correnti, occorre dunque determinare il campo magnetico prodotto da esse nello spazio circostante. Dato un elemento di conduttore di lunghezza infinitesima dl, che si trova nel punto O, percorso da una corrente i, esso contribuisce al campo magnetico nel punto P, posto ad una distanza r, per una quantità in modulo pari a:

$$[14.10] \qquad \left|\mathrm{d}\vec{B}\right| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,\mathrm{d}l}{r^2}\sin\phi \ ,$$

essendo ϕ l'angolo compreso tra la direzione della corrente ed il segmento OP. La direzione del vettore $\mathrm{d}\vec{B}$ è perpendicolare al piano determinato da segmento OP e dalla direzione della corrente.

In forma vettoriale:

$$[14.11] \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2} \ ,$$

dove $\hat{r}$ è il versore indicante la direzione del segmento OP e μ_0 è una costante, che prende il nome di suscettività magnetica del vuoto e che nel SI vale $4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A. L'espressione [14.10] e [14.11] costituiscono quella che è detta la **legge di Biot-Savart**.

Come si può vedere, la legge di Biot-Savart è simile alla legge di Coulomb che permetteva di calcolare il campo elettrico. Anche in questo caso il valore del campo decresce con la distanza proporzionatamente al suo quadrato; la sorgente del campo però è ora non una carica puntiforme (che è una quantità *scalare*), ma un elemento di corrente (che è una quantità *vettoriale*). Per ottenere il campo elettrico si effettuava quindi un semplice prodotto tra una quantità scalare (la carica) ed il versore $\hat{r}$, mentre per ottenere il campo magnetico occorre moltiplicare tra loro due grandezze vettoriali (la direzione della corrente ed il versore $\hat{r}$), e di conseguenza nella formula appare una dipendenza dalla direzione relativa dei due vettori e nella un prodotto vettoriale.

A partire dalla legge di Biot-Savart, calcolando un integrale, si possono calcolare i valori del campo magnetico nei diversi casi particolari. Considerando un filo rettilineo di lunghezza infinita, percorso da corrente da una corrente i, si trova ad esempio che ad una distanza r dal filo il campo vale in modulo:

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r} \quad [14.12]$$

Il vettore $\vec{B}$ è tangente alla circonferenza che giace sul piano perpendicolare al filo ed ha centro nella posizione del filo stesso, ed è orientato, guardando dalla direzione in cui fluisce la corrente, in senso antiorario. In Fig. 14-3 sono mostrate le linee di forza del campo magnetico generato dalla corrente che scorre verso l'alto in un filo rettilineo perpendicolare al piano del foglio

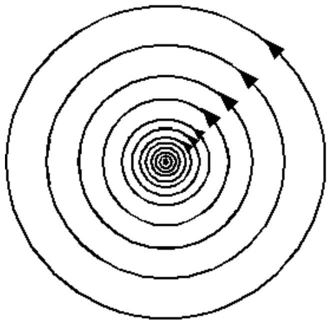

Fig. 14-3

Effettuando il calcolo del campo magnetico generato nel centro di una spira circolare conduttrice di raggio R (Fig. 14-4), percorsa da una corrente i si ottiene un campo diretto nella direzione dell'asse il cui valore assoluto è:

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0\, i}{2\, R} \quad [14.13]$$

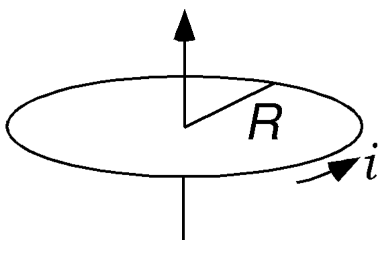

Fig. 14-4

14.6 Forza tra due conduttori paralleli percorsi da corrente

Mettendo insieme quanto detto nei §§ 14.4 e 14.5, possiamo calcolare quale sia la forza magnetica agente tra due fili rettilinei paralleli infiniti, posti ad una distanza d, percorsi da corrente, rispettivamente i_1 e i_2 (Fig. 14-5).

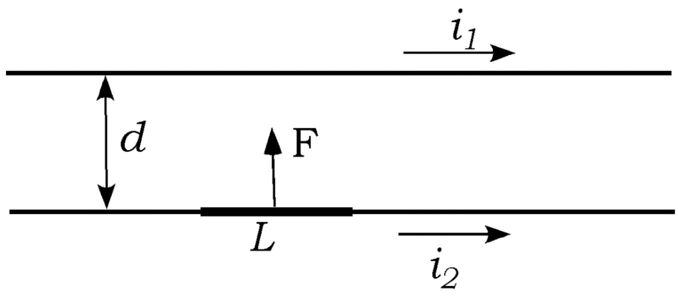

Fig. 14-5

Il campo magnetico generato dal filo 1 ad una distanza *d* vale infatti [14.12] in modulo:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1}{r}$$

e la sua direzione è ortogonale al piano definito dai due fili.

La corrente del filo 2 interagisce con il campo $\vec{B}_1$; poiché $\vec{B}_1$ ha direzione ortogonale alla direzione di flusso della corrente, la forza su una porzione di tale filo lunga *L* è [14.6]:

$$F = i_2 L B_1$$

e quindi:

[14.14] $$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2 L}{d}$$

Ricordando le regole relative alla direzione della forza magnetica, si trova che la forza è **attrattiva** se le due correnti sono **concordi**, è **repulsiva** se sono **discordi.**

La formula [14.14] è alla base della definizione nel SI dell'unità di misura di corrente quale grandezza fondamentale.

> **DEFINIZIONE**: 1 **AMPÈRE** È L'INTENSITÀ DI CORRENTE COSTANTE, CHE, MANTENUTA IN DUE CONDUTTORI PARALLELI, DI LUNGHEZZA INFINITA E DI SEZIONE TRASCURABILE, POSTI AD UNA DISTANZA DI **1 METRO** UNO DALL'ALTRO NEL VUOTO, PRODUCE TRA TALI CONDUTTORI LA FORZA DI **$2\cdot 10^{7}$ NEWTON** SU **1 METRO** DI LUNGHEZZA.

14.7 Legge di Ampère

Quando abbiamo studiato il campo elettrostatico, abbiamo trovato una relazione (il teorema di Gauss) che si è rivelata molto utile per determinare il valore del campo in presenza di distribuzioni di cariche che rispettano certe leggi di simmetria. La non esistenza di cariche magnetiche libere implica, applicando il teorema di Gauss al campo magnetico, che il flusso del vettore $\vec{B}$ attraverso una qualunque superficie chiusa sia nullo.

Nel caso del campo magnetico però esiste un'altra legge fondamentale che aiuta il calcolo del campo.

Partiamo da un'osservazione. Supponiamo di avere un filo rettilineo infinito percorso da una corrente i che quindi genera un campo magnetico nello spazio circostante; consideriamo una circonferenza di raggio R su un piano ortogonale al filo e concentrica ad esso e proponiamoci di calcolare il valore di $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, cioè del prodotto $\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ integrato su un giro intero della circonferenza (Fig. 14-6) o, come si dice in termine tecnico, la *circuitazione del vettore* $\vec{B}$. Come si è visto nel § 14.5, il campo magnetico generato dal filo è, punto per punto, tangente alla circonferenza e $\vec{B}$ e $\mathrm{d}\vec{s}$ sono sempre paralleli tra loro. Il modulo di B lungo la circonferenza è costante ed è dato dalla [14.12]; si ha perciò, assumendo come senso positivo di percorrenza della circonferenza il senso antiorario:

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint B \,\mathrm{d}s \cos\theta = \oint B \,\mathrm{d}s = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R} \oint \mathrm{d}s = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R} 2\pi R = \mu_0 i \ .$$

Come si vede, il risultato non dipende dal raggio della circonferenza considerata, ma solo dal valore della corrente. Invertendo la direzione della corrente, si inverte anche la direzione del campo magnetico e quindi anche il segno della circuitazione.

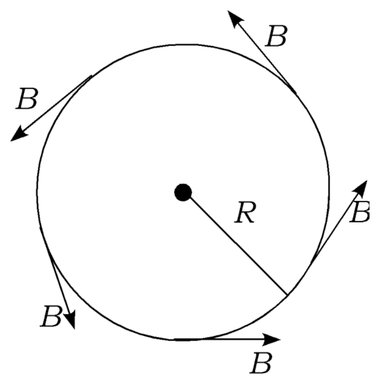

Fig. 14-6

Questo risultato può essere generalizzato: si può dimostrare che effettuando il calcolo di $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, qualunque sia la linea chiusa lungo la quale si calcola l'integrale, purché la corrente sia *concatenata* con la linea, il risultato non cambia e vale sempre $\mu_0 i$. Corrente concatenata significa che essa attraversa una qualunque superficie avente la linea come contorno.

Se ora si ha a che fare non con un solo filo percorso da corrente, ma con più conduttori, percorsi da correnti $i_1, i_2, \ldots, i_n$, si può ripetere lo stesso ragionamento per ognuna delle correnti e sommarne i contributi (tenendo conto positivo o negativo a seconda della loro direzione di flusso). Ciò costituisce il cosiddetto **teorema di Ampère**: *la circuitazione di $\vec{B}$ lungo una linea chiusa è uguale alla somma algebrica delle correnti concatenate ad essa.*

[14.15] $$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 \sum i_c$$