Funções de Potencial

Referências: Cap 4 – Choset et al.

Prof. Guilherme Augusto Silva Pereira
gpereira@ufmg.br

Prof. Luciano Cunha de Araújo Pimenta
lucpim@cpdee.ufmg.br

UFMG

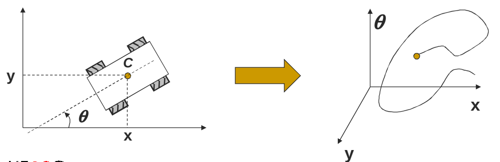
Planejamento de caminhos

Dada a configuração inicial do robô (q_{start}) em um espaço de configurações com regiões proibidas, qual deve ser a estratégia de movimentação para que o alvo (q_{goal}) seja atingido?

UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

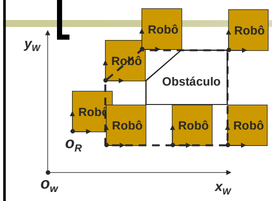
Relembrando...

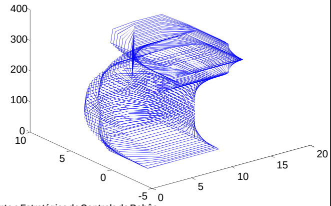
- Espaço de configurações
  - Robô é tratado como um ponto no espaço de configurações.
- Planejamento de caminhos/trajetórias
- Controle de robôs



UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

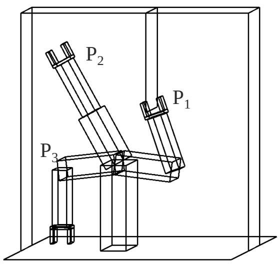
Obstáculos no Espaço de Configurações

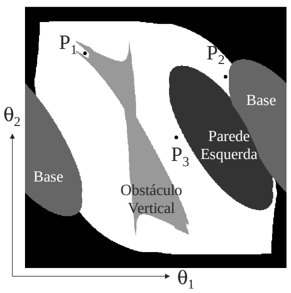




UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Manipulador





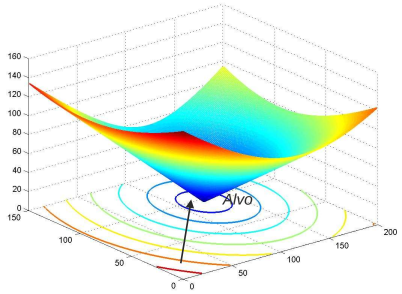
UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Funções de potencial

- O movimento do robô é influenciado por um campo vetorial artificial induzido pelo alvo e pelos obstáculos.
- O Campo é modelado por uma função de potencial ***U(q)***
- A ação de controle (campo vetorial) é proporcional ao negativo do gradiente da função de potencial
- Não existe garantia que o robô vai chegar ao alvo, a menos que a função não tenha mínimos locais.

UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

A idéia...



O que é gradiente?

- Seja a função $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
- O gradiente de g é definido como:

$$\nabla g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T$$

- O gradiente aponta para a direção de crescimento da função;
- O mínimo da função pode ser encontrado se o gradiente negativo for seguido.

Potencial Atrativo

$$U_{atrac}(q) = \frac{1}{2}\xi d_a{}^2(q, q_{goal})$$

$$U_{atrac}(x, y) = \frac{1}{2}\xi\left[(x - x_{goal})^2 + (y - y_{goal})^2\right]$$

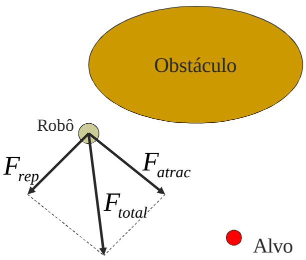
$$F_{atrac}(x, y) = -\nabla U_{atrac}(x, y) = -\xi\left[(x - x_{goal}), (y - y_{goal})\right]$$

Potencial Repulsivo

$$U_{rep}(q) = \begin{cases} \frac{1}{2}\eta\left(\frac{1}{d_{obs}(q)} - \frac{1}{d_o}\right), & d_{obs}(q) \le d_o \\ 0, & d_{obs}(q) > d_o \end{cases}$$

$$F_{rep}(q) = -\nabla U_{rep}(q) = \begin{cases} \eta\left(\frac{1}{d_{obs}(q)} - \frac{1}{d_o}\right)\frac{1}{d_{obs}{}^2(q)}\nabla d_{obs}(q), & d_{obs}(q) \le d_o \\ 0, & d_{obs}(q) > d_o \end{cases}$$

Força total



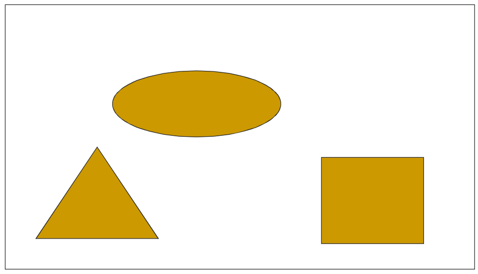
Funções de Potencial

- Trabalham em espaço contínuo
  - Não é necessária a decomposição do espaço de configurações em células;
- A geração de trajetórias é implícita;
- Podem ser calculados em tempo de execução. A posição dos obstáculos não precisa ser conhecida *a priori*.

Funções de Potencial

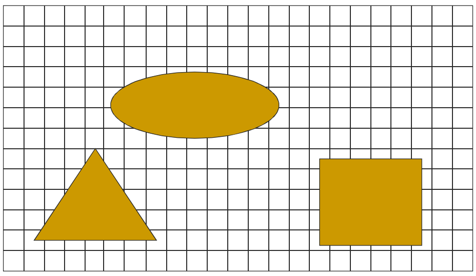
- Que informação é necessária?
  - Função atrativa: posição do robô em relação ao alvo
    - Localização!
  - Função repulsiva: distância até o obstáculo mais próximo e vetor normal a este obstáculo ($\nabla d_{obs}(q)$)
    - Sensor de proximidade (similar ao Bug); ou
    - Localização + Mapa.

Cálculo da função repulsiva



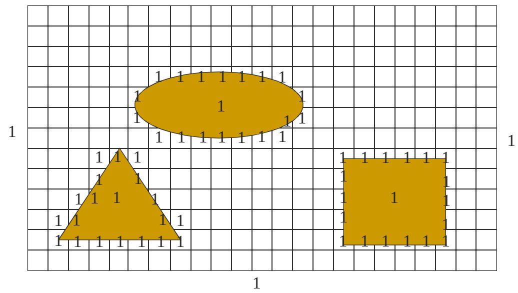
Cálculo da função repulsiva

Ambiente discretizado

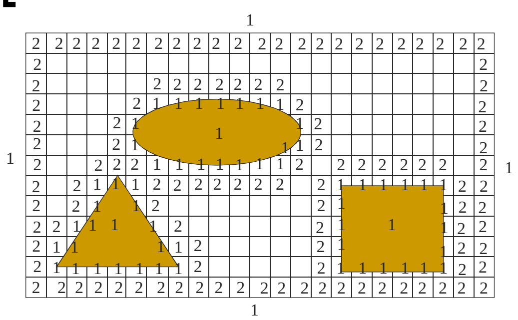


Algoritmo Brushfire

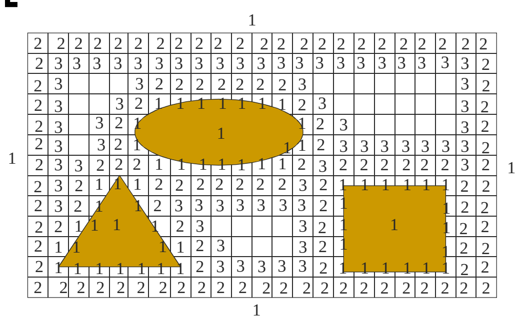
Bitmap: Células com obstáculos valem 1 e sem valem 0



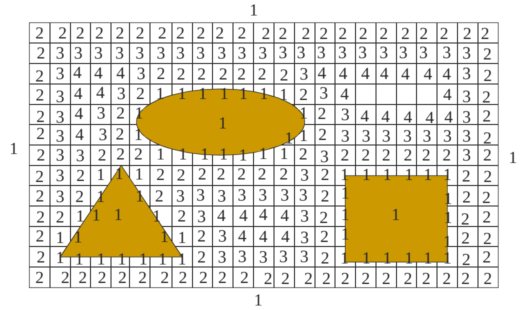
Algoritmo Brushfire



Algoritmo Brushfire

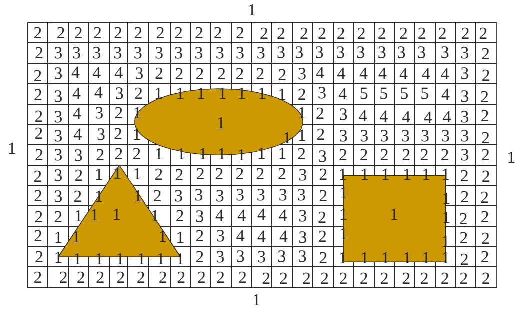


Algoritmo Brushfire



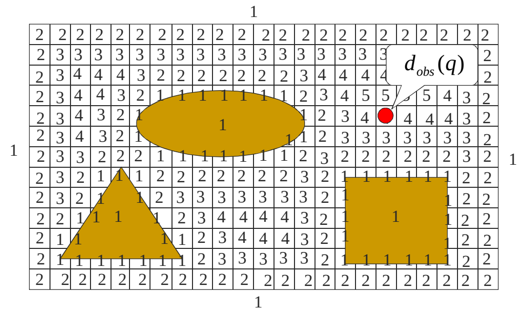
Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Algoritmo Brushfire



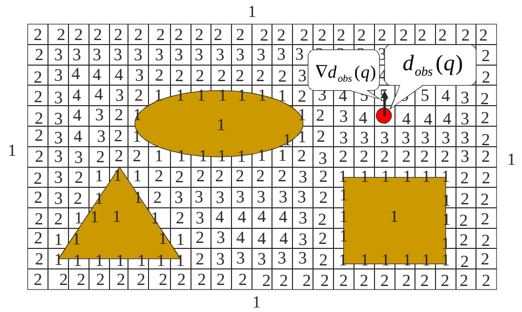
Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Algoritmo Brushfire



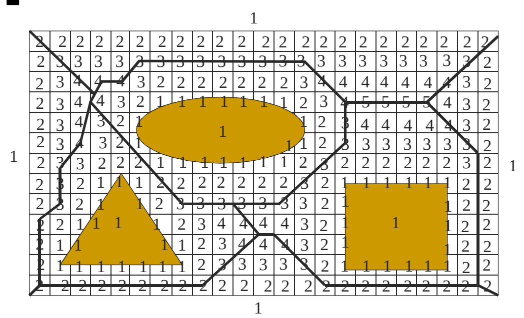
Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Algoritmo Brushfire



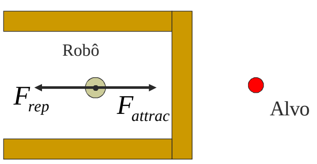
Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Algoritmo Brushfire



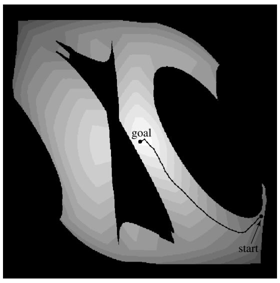
Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

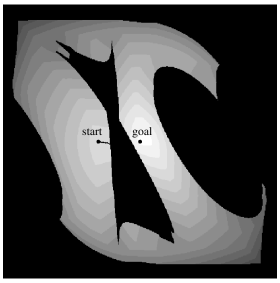
Problema: Mínimo local



Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Ex: Manipulador

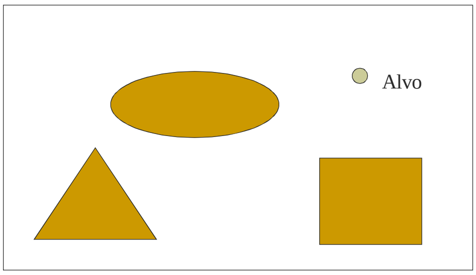




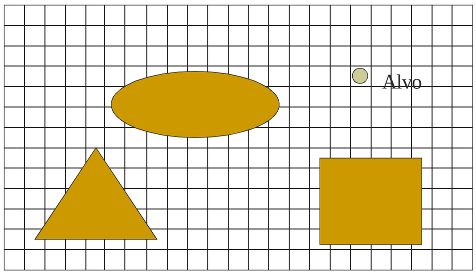
Wave-Front

- Evita o problema dos mínimos locais;
- Assume uma discretização do espaço;
  - Células do espaço livre começam com zero;
  - Células do espaço ocupadas começam com valor 1;

Wave-Front (Frente de onda)

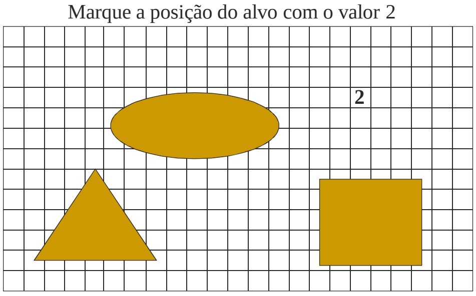


Wave-Front (Frente de onda)



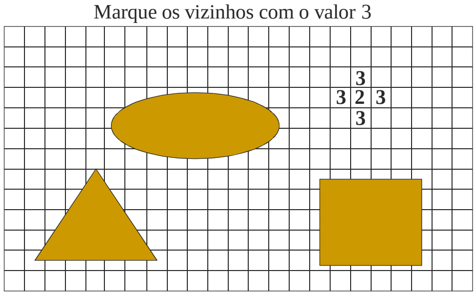
Wave-Front (Frente de onda)

Marque a posição do alvo com o valor 2



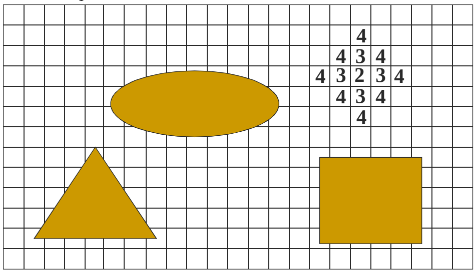
Wave-Front (Frente de onda)

Marque os vizinhos com o valor 3



Wave-Front (Frente de onda)

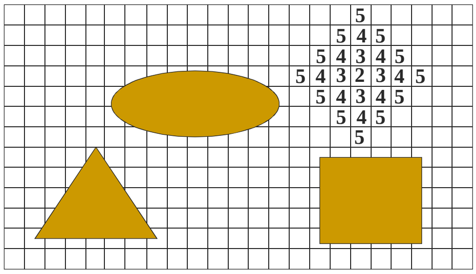
Marque os vizinhos dos vizinhos com o valor 4



UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Wave-Front (Frente de onda)

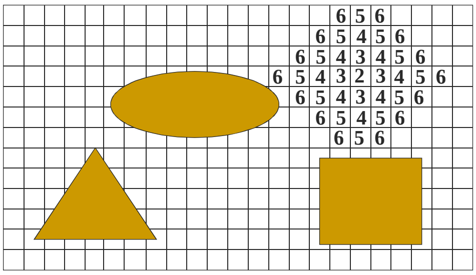
Continue marcando...



UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Wave-Front (Frente de onda)

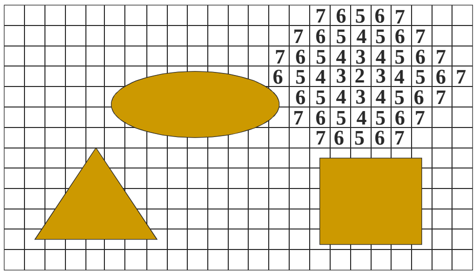
Continue marcando...



UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Wave-Front (Frente de onda)

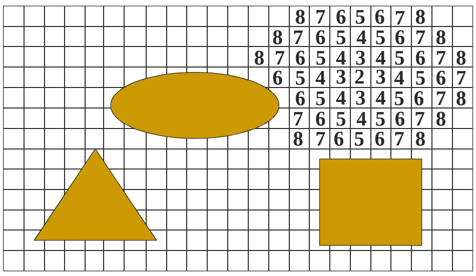
Continue marcando...



UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Wave-Front (Frente de onda)

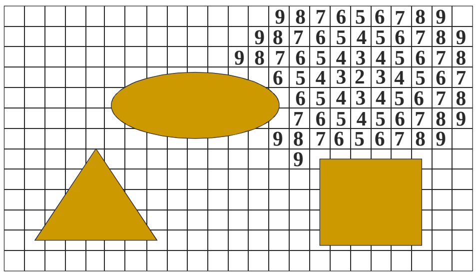
Continue marcando...



UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Wave-Front (Frente de onda)

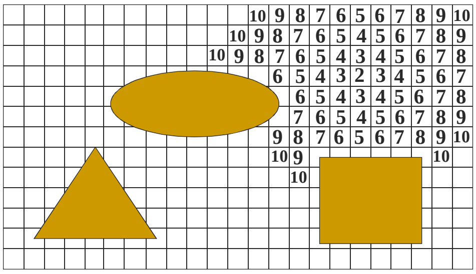
Continue marcando...



UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Wave-Front (Frente de onda)

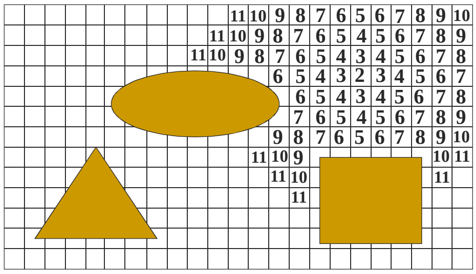
Continue marcando...



UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Wave-Front (Frente de onda)

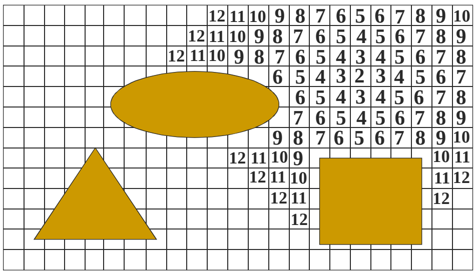
Continue marcando...



UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Wave-Front (Frente de onda)

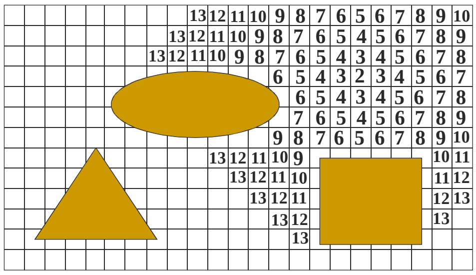
Continue marcando...



UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Wave-Front (Frente de onda)

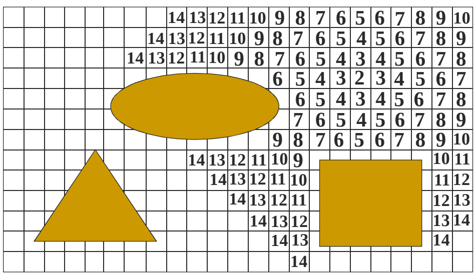
Continue marcando...



UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Wave-Front (Frente de onda)

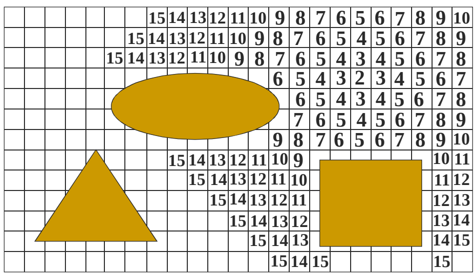
Continue marcando...



UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Wave-Front (Frente de onda)

Continue marcando...



UFMG Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Wave-Front (Frente de onda)

Continue marcando...

						16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	6	7	8	9	10
					16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	5	6	7	8	9
				16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	4	5	6	7	8
					16								6	5	4	3	2	3	4	5	6	7
														6	5	4	3	4	5	6	7	8
														7	6	5	4	5	6	7	8	9
													9	8	7	6	5	6	7	8	9	10
							16	15	14	13	12	11	10	9							10	11
								16	15	14	13	12	11	10							11	12
									16	15	14	13	12	11							12	13
										16	15	14	13	12							13	14
											16	15	14	13							14	15
												16	15	14	15	16				16	15	16

Wave-Front (Frente de onda)

Continue marcando...

					17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	6	7	8	9	10
				17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	5	6	7	8	9
			17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	4	5	6	7	8
				17	16								6	5	4	3	2	3	4	5	6	7
														6	5	4	3	4	5	6	7	8
														7	6	5	4	5	6	7	8	9
													9	8	7	6	5	6	7	8	9	10
						17	16	15	14	13	12	11	10	9							10	11
							17	16	15	14	13	12	11	10							11	12
								17	16	15	14	13	12	11							12	13
									17	16	15	14	13	12							13	14
										17	16	15	14	13							14	15
											17	16	15	14	15	16	17		17	16	15	16

Wave-Front (Frente de onda)

Continue marcando...

				18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	6	7	8	9	10
			18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	5	6	7	8	9
		18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	4	5	6	7	8
			18	17	16								6	5	4	3	2	3	4	5	6	7
				18										6	5	4	3	4	5	6	7	8
														7	6	5	4	5	6	7	8	9
													9	8	7	6	5	6	7	8	9	10
						17	16	15	14	13	12	11	10	9							10	11
						18	17	16	15	14	13	12	11	10							11	12
							18	17	16	15	14	13	12	11							12	13
								18	17	16	15	14	13	12							13	14
									18	17	16	15	14	13							14	15
										18	17	16	15	14	15	16	17	18	17	16	15	16

Wave-Front (Frente de onda)

Continue marcando...

			19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	6	7	8	9	10
		19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	5	6	7	8	9
	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	4	5	6	7	8
		19	18	17	16								6	5	4	3	2	3	4	5	6	7
			19	18										6	5	4	3	4	5	6	7	8
				19										7	6	5	4	5	6	7	8	9
													9	8	7	6	5	6	7	8	9	10
						17	16	15	14	13	12	11	10	9							10	11
						18	17	16	15	14	13	12	11	10							11	12
							18	17	16	15	14	13	12	11							12	13
								18	17	16	15	14	13	12							13	14
								19	18	17	16	15	14	13							14	15
									19	18	17	16	15	14	15	16	17	18	17	16	15	16

Wave-Front (Frente de onda)

Continue marcando...

		20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	6	7	8	9	10
	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	5	6	7	8	9
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	4	5	6	7	8
	20	19	18	17	16								6	5	4	3	2	3	4	5	6	7
		20	19	18										6	5	4	3	4	5	6	7	8
			20	19										7	6	5	4	5	6	7	8	9
				20									9	8	7	6	5	6	7	8	9	10
						17	16	15	14	13	12	11	10	9							10	11
						18	17	16	15	14	13	12	11	10							11	12
							18	17	16	15	14	13	12	11							12	13
								18	17	16	15	14	13	12							13	14
								19	18	17	16	15	14	13							14	15
								20	19	18	17	16	15	14	15	16	17	18	17	16	15	16

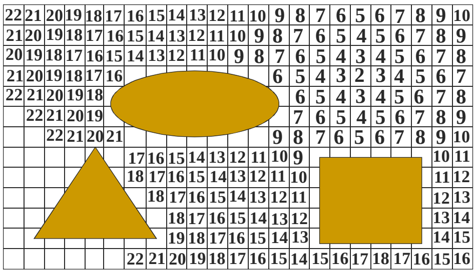
Wave-Front (Frente de onda)

Continue marcando...

	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	6	7	8	9	10
21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	5	6	7	8	9
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	4	5	6	7	8
21	20	19	18	17	16								6	5	4	3	2	3	4	5	6	7
	21	20	19	18										6	5	4	3	4	5	6	7	8
		21	20	19										7	6	5	4	5	6	7	8	9
			21	20	21								9	8	7	6	5	6	7	8	9	10
						17	16	15	14	13	12	11	10	9							10	11
						18	17	16	15	14	13	12	11	10							11	12
							18	17	16	15	14	13	12	11							12	13
								18	17	16	15	14	13	12							13	14
								19	18	17	16	15	14	13							14	15
							21	20	19	18	17	16	15	14	15	16	17	18	17	16	15	16

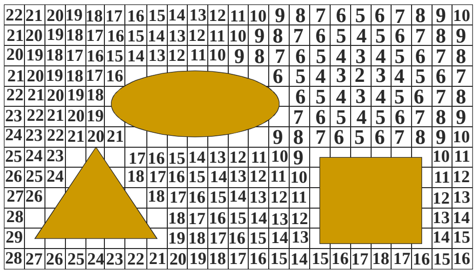
Wave-Front (Frente de onda)

Continue marcando...



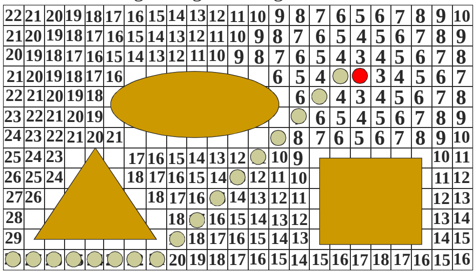
Wave-Front (Frente de onda)

Continue marcando...



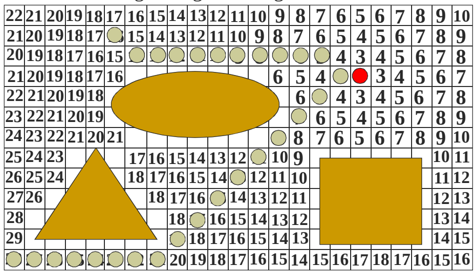
Movendo o robô

Siga o negativo do gradiente



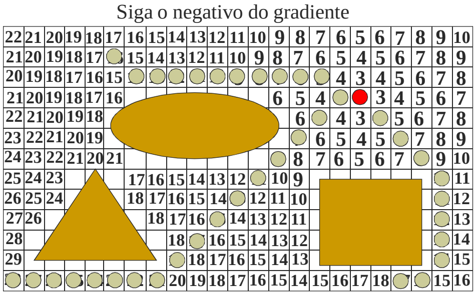
Movendo o robô

Siga o negativo do gradiente

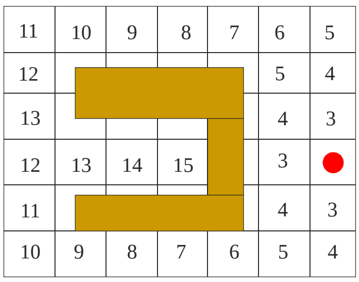


Movendo o robô

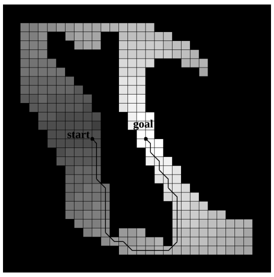
Siga o negativo do gradiente

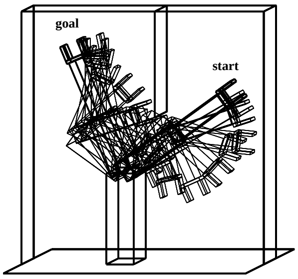


Abordagem sem mínimo local!



Exemplo: Manipulador





Resumo

- Funções de potencial
  - Não é completo:
    - Problema dos mínimos locais;
  - Espaços de configurações contínuos;
  - Espaços de configurações N-dimensionais;
- Wavefront
  - Completo;
  - Espaços de configurações discretizados
  - Espaços de 2 e 3 dimensões:
    - Tempo e espaço exponencial com a dimensão do espaço de configurações.

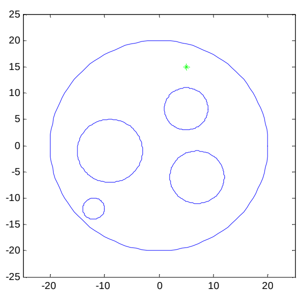
Funções de Navegação

- Funções de potencial sem mínimo local;
- Existem funções de navegação analíticas para uma classe limitada de espaços de N dimensões;
- Existem técnicas numéricas para o cálculo de funções para espaços genéricos de pequenas dimensões.

Funções de Navegação

- Uma função φ: $Q_{free} \rightarrow [0, 1]$ é uma Função de Navegação se ela:
  - é suave (ou pelo menos C^k *para* $k \geq 2$);
  - possui um único mínimo no componente conexo do espaço livre que contem q_{goal} e este está em q_{goal};
  - é uniformemente máxima nas bordas do espaço livre;
  - é Morse: os pontos críticos são não-degenerados

Espaço esférico



Espaço Esférico

$\beta(q) = \prod_{j=0}^{m} \beta_j(q)$	Função distância
$\beta_0(q) = -\|q - q_0\|^2 + r_0^2$	Função distância para a borda
$\beta_j(q) = \|q - q_j\|^2 - r_j^2$	Função distância para os obstáculos
$\gamma_\kappa(q) = \|q - q_{goal}\|^{2\kappa}$	Função atrativa
$\dfrac{\gamma_\kappa}{\beta}(q)$	Função que é igual a zero somente no alvo e tende a infinito próximo aos obstáculos. Para um k suficientemente grande possui somente um mínimo.

Espaço Esférico

- Para evitar que a função forneça valores arbitrariamente grandes, a função é composta com uma função limitada:

$$\sigma(x) = \frac{x}{1+x}$$

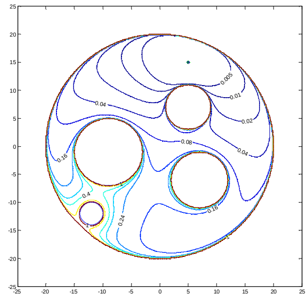
$$s(q) = \left(\sigma \circ \frac{\gamma_\kappa}{\beta}\right)(q) = \left(\frac{\gamma_\kappa}{\beta + \gamma_\kappa}\right)(q)$$

- Para garantir que ela seja Morse é usada uma *sharpening function* que “torna mais íngrime” a função anterior de forma que os pontos críticos se tornem não-degenerados:

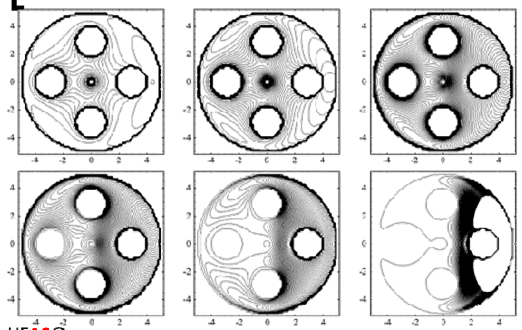
$$\xi_\kappa(x) = x^{\frac{1}{\kappa}}$$

$$\boxed{\phi_\kappa(q) = \left(\xi_\kappa \circ \sigma \circ \frac{\gamma}{\beta}\right)(q) = \frac{\|q - q_{goal}\|^2}{\left[\|q - q_{goal}\|^{2\kappa} + \beta(q)\right]^{1/\kappa}}}$$

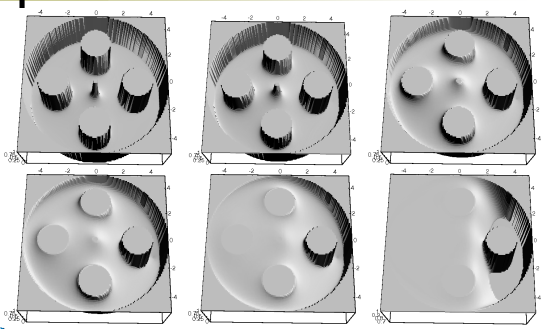
Espaço esférico



O efeito do *k*



O efeito do *k*



Exemplo Prático

E espaços não esféricos?

- O espaço esférico serve de “espaço modelo” para qualquer espaço de configurações que é difeomórfico para ele.
- Para dois espaços de configurações M e F, se

$$\varphi : M \longrightarrow [0,1]$$

é uma Função de Navegação em M e existe um mapeamento

$$h : F \longrightarrow M$$

que é um difeomorfismo, então

$$\phi = \varphi \circ h$$

é uma função de navegação em F.

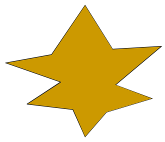
Espaços Estrela

- Um espaço estrela é difeomórfico a um espaço esférico (o livro apresenta o mapeamento *h* entre o espaço esférico e o espaço estrela.);
- Um espaço estrela é um espaço em forma de estrela populado por obstáculos em forma de estrela (*star-shaped*).
- Um conjunto *star-shaped* é aquele em que existe pelo menos um ponto que está na linha de visibilidade de todos os outros pontos do conjunto:

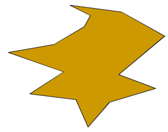
$$\exists x \text{ tal que } \forall y \in S, tx + (1-t)y \in S \ \forall t \in [0,1]$$

Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Espaços Estrela



Conjunto Star-Shaped



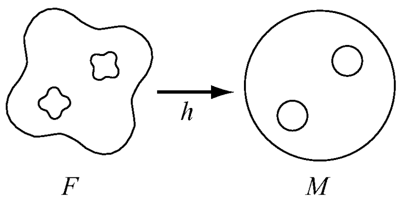
Conjunto Não Star-Shaped

Todo conjunto convexo é *star-shaped* mas o contrário não é verdadeiro.

Obs: O conjunto estrela acima não são difeomórificos para um conjunto esfera devido às descontinuidades nas quinas.

Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Espaços Estrela



Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Funções Harmônicas

- Existem outras possibilidades para se calcular funções de navegação:
  - Dependendo das condições de contorno, a solução da equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

é uma função de navegação. A solução da equação de Laplace é uma Função Harmônica.

Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Métodos de Elementos Finitos

- Método numérico para solução de Equações diferenciais parciais;
- Como pode ser mostrado que as Funções Harmônicas são equivalentes às Funções de Navegação, os métodos dos elementos finitos podem ser usados para calcular numericamente estas funções para espaços de configurações genéricos e N ≤ 3;

Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Método de Elementos Finitos

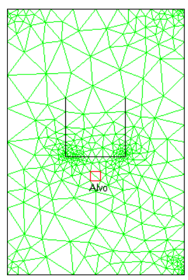
- Potenciais dos nós:

$$[SS]\{\phi\} = \{f\}$$

- Cálculo do Gradiente:

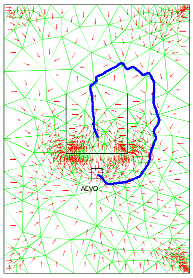
$$\nabla \varphi_x = \sum_{j=1}^{n} A_j \varphi_j \quad \nabla \varphi_y = \sum_{j=1}^{n} B_j \varphi_j$$

- O campo é constante dentro de cada elemento;

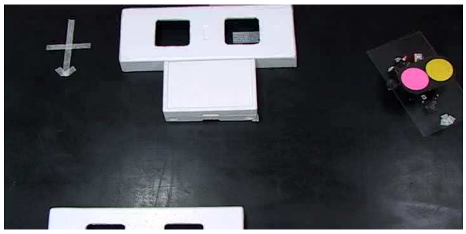


Planejamento de Movimento e Estratégias de Controle de Robôs
G. A. S. Pereira & L. C. A. Pimenta

Resultados



Espaço de configurações 3D



Funções de potencial no espaço de trabalho

- Até agora, funções de potêncial foram calculadas no Espaço de Configurações
  - E se este espaço for de difícil construção?
  - Não-Euclideano, por exemplo?
- Vamos tentar definir funções de potencial no espaço de trabalho.

Funções de potencial no espaço de trabalho

- Seja x e q, o vetor de coordenadas e o vetor de configurações, respectivamente;
- $x = \phi(q)$ é a cinemática direta do robô;
- $\dot{x} = J\dot{q}$, onde $J = \partial\phi/\partial q$ é o jacobiano;
- Seja f e u as forças generalizadas no espaço de trabalho e no espaço de configurações respectivamente;
- Pelo princípio de trabalho virtual, potência é uma grandeza que independe do espaço:

$$P = f^T\dot{x} = u^T\dot{q}$$

Funções de potencial no espaço de trabalho

- Assim,

$$f^T\dot{x} = u^T\dot{q}$$

$$f^T J\dot{q} = u^T\dot{q} \qquad (\dot{x} = J\dot{q})$$

$$f^T J = u^T$$

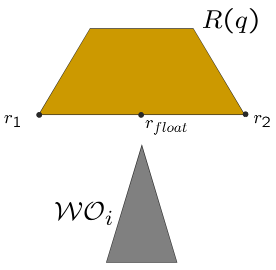
$$\boxed{J^T f = u}$$

Mapeamento entre forças do espaço de trabalho e espaço de configurações

Funções de potencial no espaço de trabalho

- Escolha pontos controle no robô (no espaço de trabalho);
  - O mínimo número de pontos depende do número de graus de liberdade do robô.
  - Ex: Para um robô no plano são necessários dois pontos, pois somente com dois pontos o robô pode ser fixado ("pin down") no espaço de trabalho.
- Para cada ponto é calculado um potencial atrativo e outro repulsivo
  - Alguns pontos "móveis" podem ser usados para garantir que colisões sejam evitadas.

Funções de potencial no espaço de trabalho



Funções de potencial no espaço de trabalho

- O gradiente da função de potencial é calculado no espaço de configurações a partir das forças calculadas no espaço de trabalho:

$$u(q) = \sum_j u_{att\,j} + \sum_{ij} u_{rep\,ij}$$

$$u(q) = \sum_j J_j^T(q) \nabla U_{att\,j}(q) + \sum_{ij} J_j^T(q) \nabla U_{rep\,ij}$$