Distribuição de Energia Elétrica

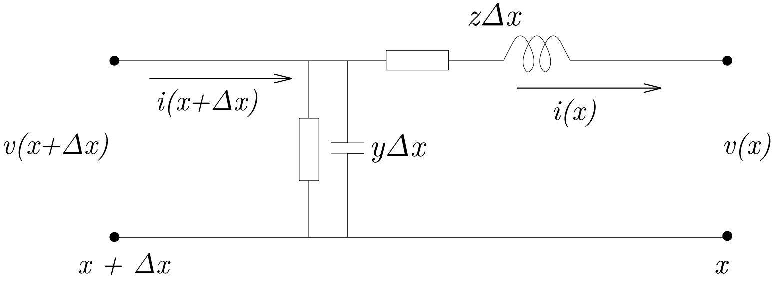
Adimitância em derivação de sistemas de distribuição aéreos e subterrâneos

Lucas Melo

Universidade Federal do Ceará

Abril de 2024

Modelo de uma linha de transmissão



- **Resistência série;**
- **Indutância série;**
- **Capacitância em derivação;**
- **Condutância em derivação.**

Adimitância em derivação de sistemas de distribuição aéreos e subterrâneos

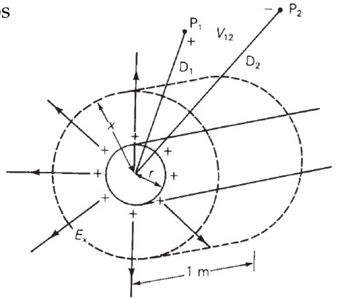
A adimitância em derivação de uma linha é considerado como:

- **Condutância;**
- **Susceptância Capacitiva.**

A condutância geralmente é ignorada devido seu valor muito baixo. Essa capacitância é resultado da diferença de potencial entre os condutores.

Line capacitance

- Conductors separated by insulating medium modeled as capacitance
- Electric field between conductors induces electric charges (currents) [Gauss' law]
- Capacitance calculated as charge-to-voltage ratios



[Glover-Sarma-Overybye]

- Voltage difference due to charge q [Cb/m]

$$V_{12} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D_2}{D_1}$$

permittivity $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ [F/m]}$$

- Superposition for multiple conductors

$$V_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{k=1}^{N} q_k \ln \frac{D_{kj}}{D_{ki}} \text{ [V]}$$

- Electric charges are *not* related to loads; exist due to voltage even with unloaded line

Adimitância em derivação de sistemas de distribuição aéreos e subterrâneos

A diferença de potencial entre os pontos P_1 e P_2 é resultante do campo elétrico presente no condutor. Calculada a diferença de potencial entre P_1 e P_2 é possível encontrar o valor da capacitância entre estes dois pontos.

Se houver outros condutores próximos a P_1 e P_2 estes também devem ser levados em consideração.

Cálculo da admitância em derivação

Para calcularmos a capacitância entre condutores em um meio com permissividade elétrica ε constante, é necessário seguir os seguintes passos:

- **Cáclulo do campo elétrico E que envolve o condutor, utilizando a lei de Gauss;**
- **Cálculo do campo de potencial elétrico que envolve o condutor;**
- **Cálculo da capacitância no entorno do condutor.**

Cálculo da admitância em derivação

A Lei de Gauss confirma que o fluxo de campo elétrico em uma superfície fechada é igual à carga total envolvida por essa superfície fechada:

$$\oiint D \perp dS = \oiint \varepsilon E \perp dS = Q \tag{1}$$

Em que $D \perp$ **representa a componente normal do fluxo elétrico e** $E \perp$ **representa a componente normal do campo elétrico.**

Cálculo da admitância em derivação

Analisando o campo elétrico no interior do condutor, tem-se que:

$$E_{int} = 0 \tag{2}$$

Aplicando a *Lei de Gauss* para cálculo do campo elétrico no exterior do condutor, utiliza-se uma superfície de raio $r > R$.
Pela simetria do problema sabe-se que $E = E_r$, ou seja, o campo elétrico é radial, assim é mais necessário utilizar a expressão vetorial, o que resulta em:

$$\varepsilon E_r(2\pi r) = Q \tag{3}$$

$$E_r = \frac{Q}{\varepsilon 2\pi r} \tag{4}$$

Considerando o vácuo: $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\ F/m$

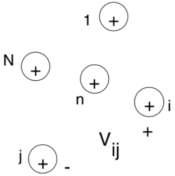
Como superfícies cilindricas em torno do condutor são equipotenciais, a diferença de potencial entre pontos pertendentes a estas superfícies equipotenciais distantes D_1 e D_2 do centro do condutor é dada por:

$$V_{12} = \int_{D_1}^{D_2} E_r \cdot dr = \int_{D_1}^{D_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon r} \cdot dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon} \cdot \ln\frac{D_2}{D_1} \tag{5}$$

$$V_{12} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon} \cdot \ln\frac{D_2}{D_1} \tag{6}$$

Equação da diferença de potencial geral

Dada uma matriz de condutores como a mostrada na figura, composta de N condutores positivamente carregados com uma densidade dada por $q \quad [C \cdot metros]$



A diferença de potencial entre os condutores *i* e *j* é dada por:

$$V_{ij} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\left[q_1 \ln\frac{D_{1j}}{D_{1i}} + \ldots + q_i \ln\frac{D_{ij}}{RD_i} + \ldots + q_j \ln\frac{RD_j}{D_{ij}} + \ldots + q_N \ln\frac{D_{Nj}}{D_{Ni}}\right]$$

Equação da diferença de potencial geral

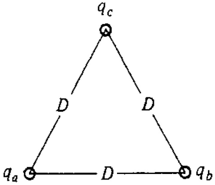
$$V_{ij} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\left[q_1 \ln\frac{D_{1j}}{D_{1i}} + \ldots + q_i \ln\frac{D_{ij}}{RD_i} + \ldots + q_j \ln\frac{RD_j}{D_{ij}} + \ldots + q_N \ln\frac{D_{Nj}}{D_{Ni}}\right]$$

Ou de forma geral:

$$V_{ij} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\sum_{n=1}^{N} q_n \ln\frac{D_{nj}}{D_{ni}} \qquad (7)$$

- $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ = **permissividade elétrica do meio;**
- q_n = **densidade de carga no condutor *n*;**
- D_{ni} = **distância entre o condutor *n* e o condutor *i*;**
- D_{nj} = **distância entre o condutor *n* e o condutor *j*;**
- RD_n = **raio do condutor *n*.**

Transmission lines

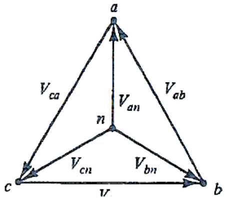


- Equidistant conductors (D) of radius r

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi\epsilon}\left[q_a \ln\frac{D}{r} + q_b \ln\frac{r}{D} + q_c \ln\frac{D}{D}\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi\epsilon}(q_a - q_b)\ln\frac{D}{r}$$

- Interested in phase voltages

- Assuming *(a1)* symmetry (or transposition); and *(a2)* balanced charges $q_a = -q_b - q_c$

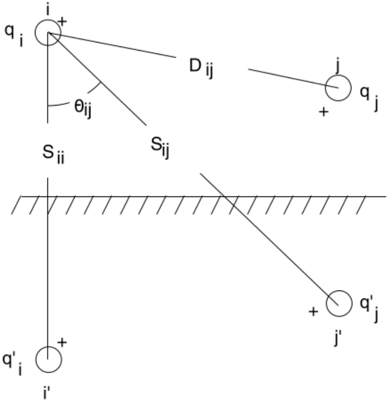


$$V_{an} = \frac{V_{ab} + V_{ac}}{3} = \frac{1}{2\pi\epsilon}\left[\frac{q_a - q_b + q_a - q_c}{3}\right]\ln\frac{D}{r} = \frac{1}{2\pi\epsilon}q_a \ln\frac{D}{r}$$

- Shunt capacitance for phase conductor *a:* $C_{an} = \frac{q_a}{V_{an}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{D}{r}}$ [F/m]

Linhas Aéreas

O método dos condutores e suas imagens também é aplicado para o cálculo da capacitância em derivação.
Assumindo que: $q_i^{`} = -q_i$ **e** $q_j^{`} = -q_j$



Linhas Aéreas

Calculando a diferença de potencial entre o condutor i e sua imagem i'.

$$V_{ii'} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\left(q_i \ln\frac{S_{ii}}{RD_i} + q_i^{'} \ln\frac{RD_i}{S_{ii}} + q_j \ln\frac{S_{ij}}{D_{ij}} + q_j^{'} \ln\frac{D_{ij}}{S_{ij}}\right) \tag{8}$$

Resolvendo:

$$V_{ii'} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\left(2 \cdot q_i \cdot \ln\frac{S_{ii}}{RD_i} + 2 \cdot q_j \ln\frac{S_{ij}}{D_{ij}}\right) \tag{9}$$

Linhas Aéreas

Dado que $V_{ii'}$ é a diferença de potencial entre o condutor i e sua imagem, assume-se então que a a diferença de potencial V_{in} será dada pela metade deste valor:

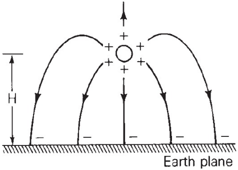
$$V_{in} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\left(q_i \cdot \ln\frac{S_{ii}}{RD_i} + q_j \ln\frac{S_{ij}}{D_{ij}}\right) \tag{10}$$

Ou, de forma suscinta:

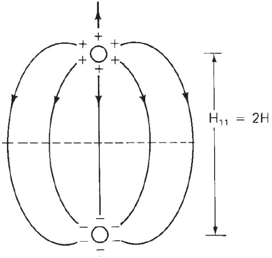
$$V_{in} = \hat{P}_{ii} \cdot q_i + \hat{P}_{ij} \cdot q_j \tag{11}$$

Method of images

- Earth is modeled by mirror conductor carrying opposite charges



[Glover-Sarma-Overybye]

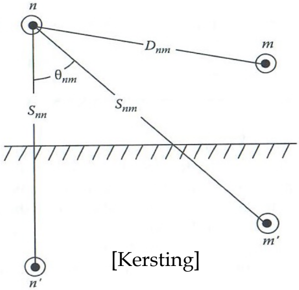


- Voltage difference across conductor and mirror

$$V_{ii'} = \frac{1}{2\pi\epsilon}\left[\sum_{k=1}^{N} q_k \ln\frac{S_{ki}}{D_{ki}} - \sum_{k=1}^{N} q_k \ln\frac{D_{ki}}{S_{ki}}\right]$$

- Due to symmetry

$$V_{in} = \frac{V_{ii'}}{2} = \frac{1}{2\pi\epsilon}\sum_{n=1}^{N} q_k \ln\frac{S_{ki}}{D_{ki}}$$



[Kersting]

Linhas Aéreas

$$V_{in} = \hat{P}_{ii} \cdot q_i + \hat{P}_{ij} \cdot q_j$$

Se considerarmos para as linhas aéreas:

$$\varepsilon_{ar} = 1,0 \times 8,85 \times 10^{-12} \;\; [F/metro] \tag{12}$$

$$\varepsilon_{ar} = 1,424 \times 10^{-2} \;\; [\mu F/milha] \tag{13}$$

Então:

$$P_{ii} = 11,17689 \cdot \ln \frac{S_{ii}}{RD_i} \;\; [milha/\mu F] \tag{14}$$

$$P_{ij} = 11,17689 \cdot \ln \frac{S_{ij}}{D_{ij}} \;\; [milha/\mu F] \tag{15}$$

P_{ii} e P_{ij} são os coeficientes de potencial próprios e mútuos.

Primitive potential coefficient matrix

- Phase voltages are linear combinations of charges at all non-dirt conductors

$$V_{in} = \sum_{k=1}^{N} P_{ik} q_k, \quad \text{where} \quad P_{ik} := 11.177 \cdot \ln \frac{S_{ki}}{D_{ki}} \ [\text{mile}/\mu\text{F}]$$

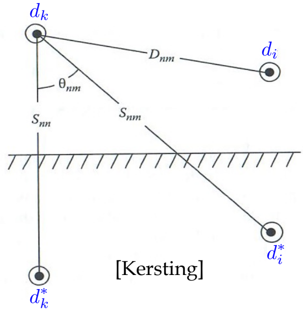
- *Primitive potential coefficient matrix* $\mathbf{P}$ $[\text{mile}/\mu\text{F}]$

not phasors $$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_\phi \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\phi\phi} & \mathbf{P}_{\phi n} \\ \mathbf{P}_{\phi n}^\top & \mathbf{P}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\phi \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$$

with P_{ik} as matrix entries

- *Trick:* If d_i is a complex number denoting the location of conductor i

$$D_{ki} = |d_k - d_i| \qquad \text{and} \qquad S_{ki} = |d_k - d_i^*|$$



[Kersting]

Phase potential and capacitance matrices

- Primitive potential coefficient matrix $$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_\phi \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\phi\phi} & \mathbf{P}_{\phi n} \\ \mathbf{P}_{\phi n}^\top & \mathbf{P}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\phi \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$$

- Kron reduction to eliminate $\boldsymbol{q}_n$ since $\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$

- *Phase potential coefficient matrix*

$$\mathbf{v}_\phi = \mathbf{P}_\phi \mathbf{q}_\phi \quad \text{where} \quad \mathbf{P}_\phi = \mathbf{P}_{\phi\phi} - \mathbf{P}_{\phi n}\mathbf{P}_{nn}^{-1}\mathbf{P}_{\phi n}^\top \; [\text{mile}/\mu\text{F}]$$

- *Phase capacitance matrix* $\mathbf{q}_\phi = \mathbf{C}_\phi \mathbf{v}_\phi \quad \text{where} \quad \mathbf{C}_\phi = \mathbf{P}_\phi^{-1} \quad \mu\text{F}/\text{mile}$

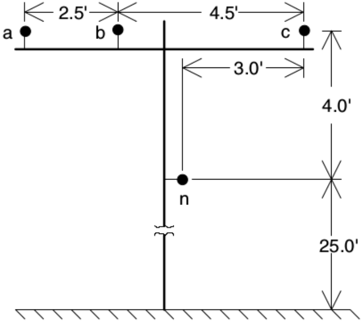
positive diagonal and negative off-diagonal entries

- *Phase shunt admittance matrix* $\mathbf{Y}_{\text{sh}} = j\omega \mathbf{C}_\phi \; \mu\text{S}/\text{mile}$

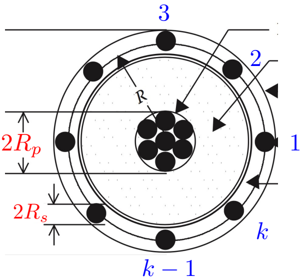
Linhas Aéreas

Exercício

Determine a matriz de adimitâncias em derivação para a linha aérea mostrada na figura:



Concentric neutral underground cables



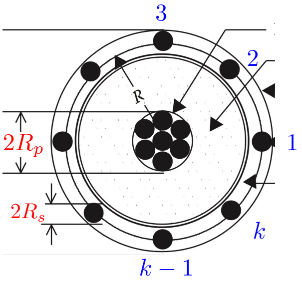
k : # concentric neutrals
R : radius of concentric arrangement
R_p : radius of phase conductor
R_s : radius of neutral strand
D_{1n} : distance between strand 1 and strand n

- Shielding confines electric fields within cables
- No coupling between phase cables, and between cables and earth
- All neutral strands are at the same potential (ground)
- Voltage between phase conductor and ground (e.g., neutral strand #1)

$$V_{pg} = \frac{1}{2\pi\epsilon}\left[q_p \ln\frac{R}{R_p} + \sum_{n=1}^{k} q_n \ln\frac{D_{1n}}{R}\right]$$

- Shielding does not confine magnetic fields; hence we still have mutual impedances

Concentric neutral underground cables (cont'd)



$$V_{pg} = \frac{1}{2\pi\epsilon}\left[q_p \ln\frac{R}{R_p} + \sum_{n=1}^{k} q_n \ln\frac{D_{1n}}{R}\right]$$

- Equal charge on neutral strands

$$q_n = -\frac{q_p}{k}, \ \forall n = 1, \ldots, k$$

- Distances between strands

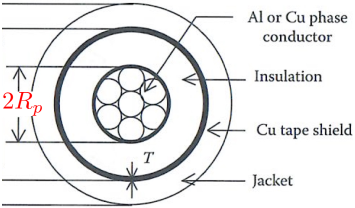
$$D_{1n} = |R - Re^{j\frac{2\pi(n-1)}{k}}|, \ n = 2, \ldots, k$$

- Using formula for bundled conductors uniformly spaced on the perimeter

$$C_{pg} = \frac{q_p}{V_{pg}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{R}{R_p} - \frac{1}{k}\ln\frac{kR_s}{R}}$$

Material	Range of Values of Relative Permittivity
Polyvinyl Chloride (PVC)	3.4–8.0
Ethylene-Propylene Rubber (EPR)	2.5–3.5
Polyethylene (PE)	2.5–2.6
Cross-Linked Polyethlyene (XLPE)	2.3–6.0

Tape-shielded cables



- Limiting case of concentric neutrals for $k \to \infty$

$$C_{pg} = \frac{q_p}{V_{pg}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R}{R_p}}$$

- For either cables, *no capacitive coupling across phases* or circuits in parallel lines

- Phase admittance matrix is diagonal $\mathbf{Y}_{\text{sh}} = \begin{bmatrix} j96.5569 & 0 & 0 \\ 0 & j96.5569 & 0 \\ 0 & 0 & j96.5569 \end{bmatrix} \mu\text{S/mile}$

- *For both overhead and underground lines, shunt admittances are typically ignored*

Sequence admittance

- Similarly to series impedances

$$\mathbf{i}_\phi = \mathbf{Y}_{\mathrm{sh},\phi}\mathbf{v}_\phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{i}_s = \mathbf{Y}_{\mathrm{sh},s}\mathbf{v}_s$$

- Sequence shunt admittance matrix

$$\mathbf{Y}_{\mathrm{sh},s} := \mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{Y}_{\mathrm{sh},\phi}\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} y_{00} & y_{01} & y_{02} \\ y_{01} & y_{11} & y_{12} \\ y_{02} & y_{12} & y_{22} \end{bmatrix}$$

- Diagonal for underground or transposed overhead lines

- In fact, for underground lines with three identical cables $\quad \mathbf{Y}_{\mathrm{sh},s} = \mathbf{Y}_{\mathrm{sh},\phi}$

Summary

- Find distances between (mirror) conductors
- Find primitive potential coefficient matrix
- Kron reduction to get the phase potential coefficient matrix
- Inversion to get the phase capacitance matrix
- For underground cables, the capacitance matrix is a scaled identity
- Shunt admittance is typically ignored