

Distribuição de Energia Elétrica

Impedância série de sistemas de distribuição aéreos e subterrâneos

Lucas Melo

Universidade Federal do Ceará

Abril de 2024

Motivation

- Different from transmission, in distribution systems
 - (a) lines are not transposed; and
 - (b) loads (currents) are unbalanced
- Study the effect of earth based on Carson's equations
- Model untransposed distribution lines with any number of conductors
- Derive two-port multi-phase network with the minimum information required
- Cover the cases of multiphase and multi-neutral (overhead or underground) lines

Resistência de linhas aéreas

Uma linha de distribuição pode ser modelada eletricamente como uma impedância série e dois ramos de admitância shunt nas extremidades (modelo π).

Os cálculos desses valores de impedância série e admitância shunt são necessários para determinação dos valores de queda de tensão, fluxo de corrente, curto-circuito, perdas, etc.

Iniciando pela resistência série da linha tem-se:

$$R_{dc} = \rho \frac{L}{A} \quad (1)$$

Em que L é o comprimento do condutor, A a sua área e ρ a resistividade elétrica do material.

Resistência de linhas aéreas

A resistência de um condutor também irá depender da temperatura do ambiente e da frequência da corrente elétrica.

Para resistência em uma dada temperatura T_1 é possível encontrar a resistência em uma temperatura T_2 , dado um coeficiente de temperatura do material M :

$$R_{T_2} = R_{T_1} \cdot \frac{M + T_2}{M + T_1} \quad (2)$$

$M = 228,1$ para o Alumínio;

$M = 241,5$ para Cobre.

Resistência de linhas aéreas

Para uma ampla faixa de temperatura é possível aproximar o comportamento da resistência como uma função linear:

$$R_{T_2} = R_{T_1} \cdot [1 + \alpha \cdot (T_2 - T_1)] \quad (3)$$

Em que,

- α = coeficiente de temperatura.
- $\alpha = 0,00404$ para alumínio 61,2% IACS à 20°C.
- $\alpha = 0,00347$ para aluminio alloy 6201-T81 à 20°C.
- $\alpha = 0,00383$ para cobre à 20°C.
- $\alpha = 0,0036$ para alumínio/aço à 20°C.

Por exemplo para o alumínio 61,2% IACS para cada 10°C de crescimento na temperatura ambiente há um acréscimo de 4% na resistência.

Resistência de linhas aéreas

Outro importante parâmetro que afeta o valor de resistência é a frequência da corrente. Conhecido como **Efeito Skin**, esse efeito tem a tendência de variar a resistência:

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = \frac{x}{2} \cdot \frac{\dot{ber}(x) \cdot \dot{bei}(x) - \dot{bei}(x) \cdot \dot{ber}(x)}{(\dot{bei}(x))^2 + (\dot{ber}(x))^2} \quad (4)$$

Em que:

$$x = 0,02768 \cdot \sqrt{\frac{f \cdot \mu}{R_{dc}}} \quad (5)$$

- μ = permeabilidade magnética relativa = 1 para condutores não magnéticos (incluindo alumínio e cobre).
- bei , \dot{bei} , ber e \dot{ber} são as partes real e imaginária das funções de Bessel.

Impedância série de linhas aéreas

A reatância indutiva (própria e mútua) é função direta do fluxo magnético concatenado por um condutor.

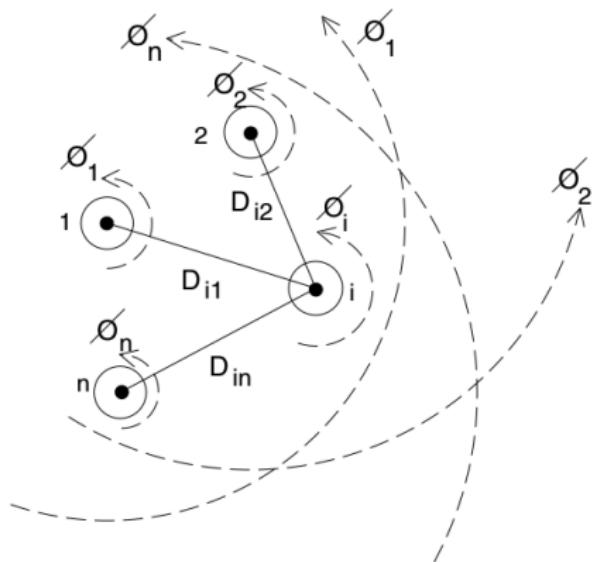


Figura: Campos Magnéticos

Impedância série de linhas aéreas

Assumindo:

$$I_1 + I_2 + \dots + I_i + \dots + I_n = 0 \quad (6)$$

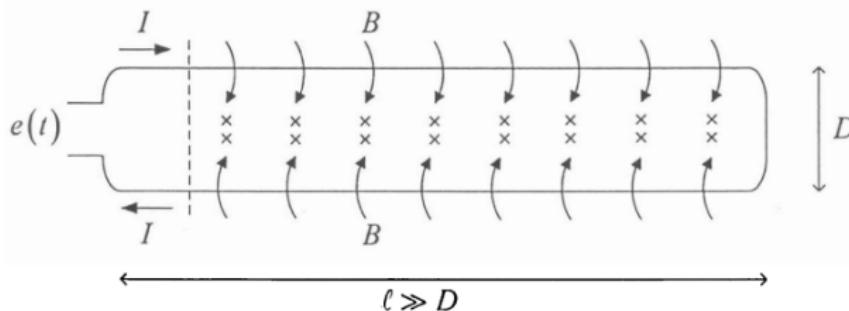
A expressão para o fluxo concatenado total em um condutor i é:

$$\lambda_i = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(I_1 \cdot \ln \frac{1}{D_{i1}} + I_2 \cdot \ln \frac{1}{D_{i2}} + \dots + I_i \cdot \ln \frac{1}{GMR_i} + I_n \cdot \ln \frac{1}{D_{in}} \right) \quad (7)$$

Impedância série de linhas aéreas

Para se chegar a expressão do fluxo concatenado em um condutor, inicia-se considerando dois condutores longos de comprimento l , espaçados por uma distância D , de modo que $l \gg D$.

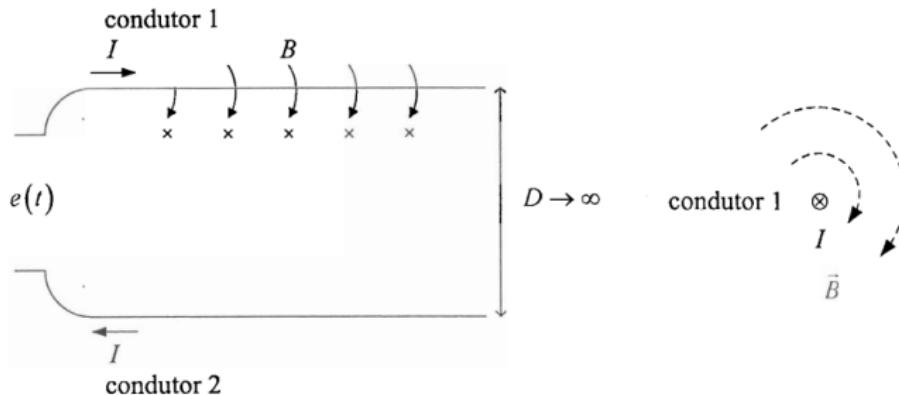
Analogamente ao fluxo concatenado por uma expira, é possível associar o conceito de fluxo concatenado pelo retângulo entre os dois condutores.



E como $l \gg D$, despreza-se o efeito do fluxo em suas extremidades.

Impedância série de linhas aéreas

Analisando inicialmente o fluxo concatenado com um condutor apenas é necessário supor que o outro condutor de retorno encontra-se a uma distância $D \rightarrow \infty$.

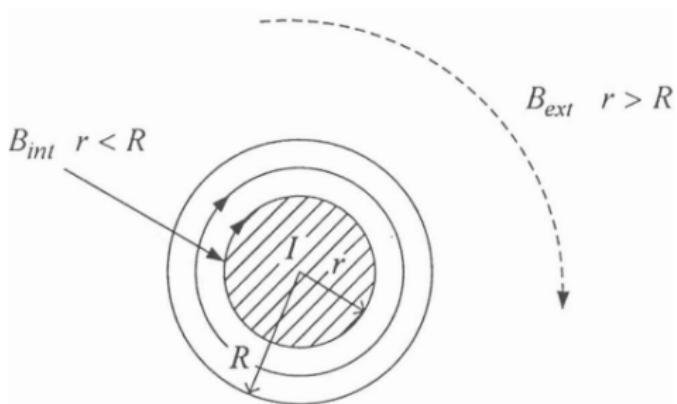


Essa suposição nos ajudará a realizar a modelagem matemática do problema, mas depois será abandonada para consideração de aspectos mais próximos da realidade.

Impedância série de linhas aéreas

Dessa forma é possível iniciar a análise admitindo o fluxo concatenado com um condutor apenas, que está dividido em:

- Fluxo magnético concatenado internamente ao condutor;
- Fluxo magnético concatenado externamente ao condutor.



Impedância série de linhas aéreas

Para o cálculo dos fluxos magnéticos adota-se a seguinte estratégia:

- Determinar uma expressão para a intensidade de campo magnético H , pela **Lei Circuital de Ampere**:

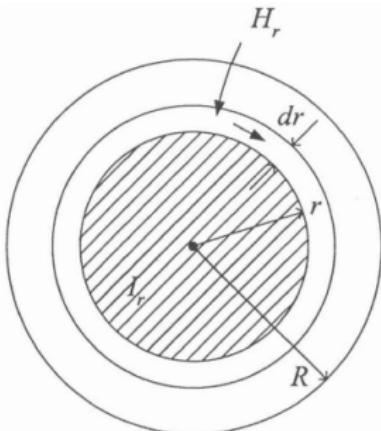
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_r \quad (8)$$

Com I_r sendo a corrente envolvida pelo caminho da integral de linha em função da distância r ao centro do condutor, dada por:

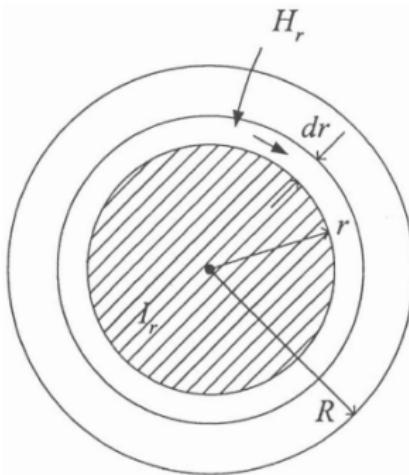
$$I_r = \frac{\pi r^2 I}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 I \quad (9)$$

Impedância série de linhas aéreas

A integral de linha da Lei de Ampere é calculada utilizando os vetores H e dL . No entanto, por conta da simetria do problema é possível simplificar a análise considerando apenas H_r , que é a componente de H tangencial em cada ponto ao círculo estabelecido pela integral de linha e dL que é a componente infinitesimal de comprimento desse mesmo caminho circular estabelecido e que também é tangencial ao círculo em cada ponto.



Impedância série de linhas aéreas

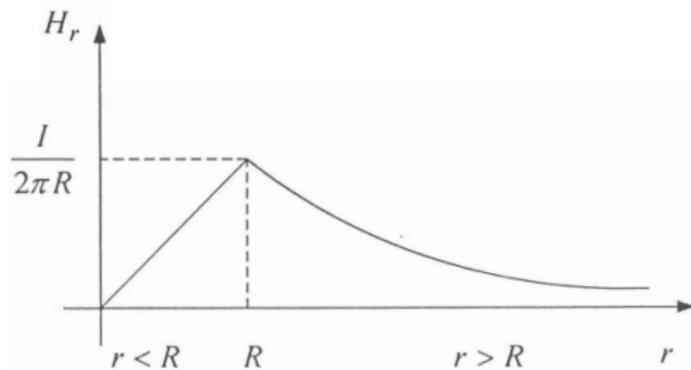


Considerando então as condições estabelecidas, é fácil encontrar o valor da intensidade de campo magnético, que é constante, ao longo do caminho estabelecido pela integra de linha e que é função de r :

$$H_r = \frac{r}{2\pi R^2} I \quad (10)$$

Impedância série de linhas aéreas

As expressões para a intensidade do campo magnético tanto no interior do condutor, quanto no seu entorno, em função da distância r considerada, são mostradas na figura abaixo para diferentes valores de r :



$$H_r = \frac{rI}{2\pi R^2}$$

$$H_r = \frac{I}{2\pi r}$$

Impedância série de linhas aéreas

- Determinar uma expressão para a densidade de fluxo magnético B , que se relaciona com H , por meio da seguinte expressão:

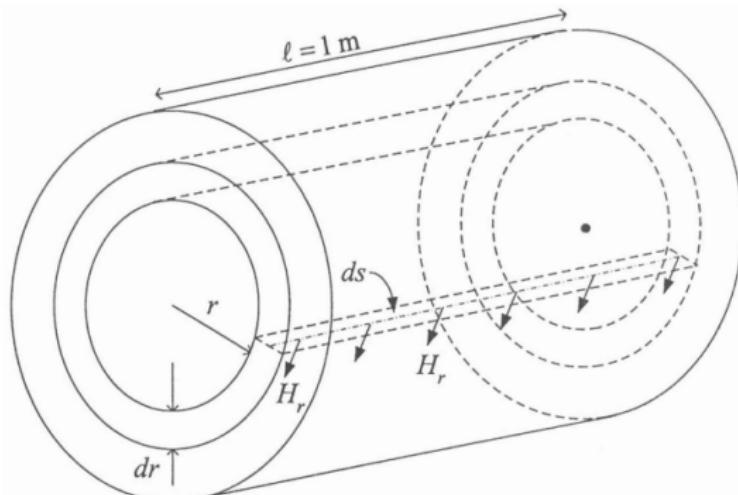
$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$B_r = \mu \cdot H_r = \frac{\mu r}{2\pi R^2} I [Wb/m^2]$$

novamente por conta da simetria do problema, é possível abandonar a notação vetorial, porque trata-se de uma componente tangencial (B_r) de \mathbf{B} e que portanto é constante para um valor constante de r .

Impedância série de linhas aéreas

Considerando agora o problema de **forma bidimensional**, usando um elemento de área $dS = dr \cdot l$, é possível empregar a expressão de densidade de fluxo magnético para o cálculo do próprio fluxo magnético neste elemento de área infinitesimal:



Obs: o termo l aparece na expressão de dS , pois estamos interessados em encontrar uma expressão de fluxo concatenado por unidade de comprimento do condutor.

Impedância série de linhas aéreas

- Determina-se então a expressão para o **fluxo magnético (Φ) no elemento de área infinitesimal, normal ao fluxo magnético**, em função da desidade de fluxo magnético (B_r) que é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} d\Phi &= \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ d\Phi &= B_r \cdot dS \end{aligned} \tag{II}$$

Com $dS = dr \cdot \mathbf{i}$, obtém-se um elemento infinitesimal de fluxo magnético por unidade de comprimento (1m):

$$d\Phi = B_r \cdot dr \cdot \mathbf{i} = \frac{\mu r}{2\pi R^2} Idr [Wb/m] \tag{12}$$

Impedância série de linhas aéreas

O próximo passo é determinar o **fluxo magnético concatenado pelo elemento de área considerado para o cálculo, por unidade de comprimento.**

Esse fluxo magnético concatenado é causado pelo fluxo magnético que passa no interior do elemento de área de espessura infinitesimal dr .

Esse valor é calculado pelo produto do **fluxo magnético $d\Phi$** e da **fração de área circular de raio $r < R$** considerada:

$$d\lambda = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} d\Phi = \frac{\mu r^3}{2\pi R^4} Idr \quad [Wb/m] \quad (13)$$

Impedância série de linhas aéreas

$$d\lambda = \frac{\mu r^3}{2\pi R^4} Idr \quad (14)$$

Integrando do centro do condutor até ponto em que $d = R$, obtém-se o fluxo concatenado total no interior do condutor:

$$\lambda = \int_0^R \frac{\mu r^3}{2\pi R^4} Idr = \frac{\mu I}{2\pi R^4} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{r=R} = \frac{\mu I}{8\pi} [Wb/m] \quad (15)$$

Impedância série de linhas aéreas

- Finalmente, a indutância relacionada ao fluxo concatenado no interior do condutor é determinada dividindo-se a expressão do fluxo magnético concatenado pela corrente que gera o fluxo:

$$L_{int} = \frac{\lambda}{I} = \frac{\mu}{8 \cdot \pi} [H/m] \quad (16)$$

Como $\mu \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, substituindo:

$$L_{int} = \frac{\lambda}{I} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{8 \cdot \pi} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-7} [H/m] \quad (17)$$

Impedância série de linhas aéreas

Realizando o mesmo procedimento descrito nos slides anteriores para a determinação do **fluxo magnético concatenado externamente a um condutor**, encontra-se as expressões para indutância interna e externa desse mesmo condutor:

$$L_{int} = \frac{\mu}{8 \cdot \pi} [H/m] \quad (18)$$

$$L_{ext} = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \left(\frac{D}{R} \right) [H/m] \quad (19)$$

Impedância série de linhas aéreas

$$L_{int} = \frac{\mu}{8 \cdot \pi} [H/m] \quad (20)$$

$$L_{ext} = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \left(\frac{D_2}{D_1} \right) = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \left(\frac{D}{R} \right) [H/m] \quad (21)$$

É importante observar que os valores D e r presentes no argumento do logaritmo presente na expressão de indutância externa significam, respectivamente:

- A distância entre o centro da fonte do fluxo concatenado até o ponto final do espaço considerado ($D_2 = D$) e
- A distância entre o centro da fonte do fluxo concatenado até o ponto inicial do espaço considerado ($D_1 = R$).

Impedância série de linhas aéreas

Assim, a indutância total por unidade de comprimento considerando todo o fluxo magnético concatenado que é gerado pela corrente elétrica que atravessa o condutor na região do espaço entre seu centro e um ponto P localizado a uma certa distância D é dada por:

$$L = L_{int} + L_{ext} = \frac{\mu}{8 \cdot \pi} + \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{D}{R}\right) = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{D}{R \cdot e^{-1/4}}\right) [H/m] \quad (22)$$

O termo $R \cdot e^{-1/4}$ é chamado de Raio Médio Geométrico do condutor.

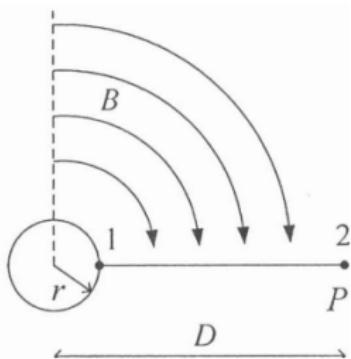
Substituindo $\mu \approx \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ e considerando $R' = R \cdot e^{-1/4}$, ficamos com:

$$L = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln\left(\frac{D}{R'}\right) [H/m] \quad (23)$$

Impedância série de linhas aéreas

$$L = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \left(\frac{D}{R'} \right) [H/m] \quad (24)$$

Novamente, essa é a expressão para a indutância, incluindo todo o fluxo concatenado do centro do condutor até um ponto externo P , localizado a uma distância D do seu centro.



Formula-se então uma expressão geral para indutância de um condutor devido ao fluxo concatenado por um conjunto de condutores dispersos no espaço por distâncias D_{ij} , de modo que este fluxo é gerado pelas correntes I_i em cada um dos condutores admitindo que: $\sum I_i = 0$.

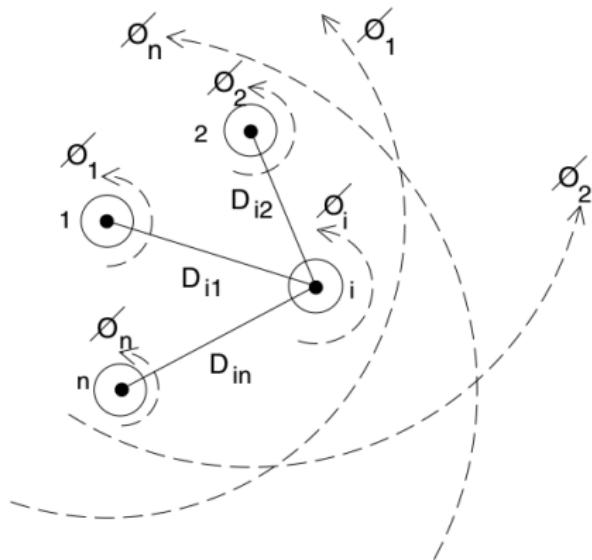


Figura: Campos Magnéticos

Começamos por calcular o fluxo concatenado pelo condutor 1 em relação ao ponto P.

O fluxo concatenado com o condutor 1 até o ponto P devido seu próprio fluxo é dado por:

$$\lambda_{1,P}^{(1)} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_1 \cdot \ln \frac{D_{1,P}}{R'_1} \quad (25)$$

Neste ponto é importante esclarecer o significado das distâncias consideradas na fração do logaritmo da expressão acima.

A distância $D_{1,P}$ é a distância da fonte do fluxo concatenado pelo condutor 1 até o ponto final (P) da região do espaço considerada.

Já a distância R'_1 é a distância da fonte do fluxo concatenado pelo condutor 1 até o ponto inicial (centro do condutor 1) da região do espaço considerada.

Esse esclarecimento é importante para o cálculo dos próximos termos de fluxo concatenado, ou seja, os termos de fluxo concatenado mútuo.

O fluxo concatenado pelo condutor 1 até o ponto P devido o fluxo gerado pelo condutor 2 é dado por:

$$\lambda_{1,P}^{(2)} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_2 \cdot \ln \frac{D_{2,P}}{D_{1,2}} \quad (26)$$

Obs: $D_{2,P}$ é a distância da fonte do fluxo concatenado pelo condutor 1, ou seja, o centro do condutor 2, até o ponto final da região do espaço considerada, ou seja, o ponto P.

Obs: $D_{1,2}$ é a distância da fonte do fluxo concatenado pelo condutor 1, ou seja, o centro do condutor 2, até o ponto inicial da região do espaço considerada, ou seja, o centro do condutor 1.

Da mesma forma, o fluxo concatenado com o condutor 1 até o ponto P devido o fluxo gerado pelo condutor 3 é dado por:

$$\lambda_{1,P}^{(3)} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_3 \cdot \ln \frac{D_{3,P}}{D_{1,3}} \quad (27)$$

Assim, o fluxo concatenado total no condutor 1 será dado por:

$$\lambda_{I,P} = \lambda_{I,P}^{(1)} + \lambda_{I,P}^{(2)} + \dots + \lambda_{I,P}^{(n)} \quad (28)$$

$$\lambda_{I,P} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(I_1 \cdot \ln \frac{D_{I,P}}{R'_I} + I_2 \cdot \ln \frac{D_{2,P}}{D_{I,2}} + \dots + I_n \cdot \ln \frac{D_{n,P}}{D_{I,n}} \right) \quad (29)$$

Aplicando propriedades logarítmicas:

$$\begin{aligned} \lambda_{I,P} &= 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(I_1 \cdot \ln \frac{I}{R'_I} + I_2 \cdot \ln \frac{I}{D_{I,2}} + \dots + I_n \cdot \ln \frac{I}{D_{I,n}} + \right. \\ &\quad \left. + I_1 \cdot \ln D_{I,P} + I_2 \cdot \ln D_{2,P} + \dots + I_n \cdot \ln D_{n,P} \right) \end{aligned}$$

Obs:

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b) \quad (30)$$

$$\ln a - \ln b = \ln \left(\frac{a}{b} \right) \quad (31)$$

Considerando:

$$I_n = -(I_1 + I_2 + \dots + I_{n-1}) \quad (32)$$

É possível embutir dentro dos logaritmos das distâncias $D_{i,P}$ a influência do termo da corrente I_n .

$$\begin{aligned} \lambda_{1,P} &= 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(I_1 \cdot \ln \frac{I}{R'_1} + I_2 \cdot \ln \frac{I}{D_{1,2}} + \dots + I_n \cdot \ln \frac{I}{D_{1,n}} + \right. \\ &\quad \left. + I_1 \cdot \ln \frac{D_{1,P}}{D_{n,P}} + I_2 \cdot \ln \frac{D_{2,P}}{D_{n,P}} + \dots + I_{n-1} \cdot \ln \frac{D_{n-1,P}}{D_{n,P}} \right) \end{aligned}$$

Deslocando o ponto P até uma distância muito grande do condutor 1, então:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{D_{i,P}}{D_{n,P}} \right) = 0 \quad (33)$$

Assim chega-se a expressão do fluxo concatenado pelo o condutor i em toda a região do espaço, considerando a presença de n condutores no seu entorno:

$$\lambda_i = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(I_1 \cdot \ln \frac{I}{R'_i} + I_2 \cdot \ln \frac{I}{D_{i,2}} + \dots + I_n \cdot \ln \frac{I}{D_{i,n}} \right) \quad (34)$$

Como esse raciocínio é idêntico para qualquer condutor i presente na distribuição de n condutores, é possível generalizar o resultado obtido para o condutor i e chegar à expressão inicial para o fluxo concatenado por um condutor:

$$\lambda_i = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(I_1 \cdot \ln \frac{I}{D_{i1}} + I_2 \cdot \ln \frac{I}{D_{i2}} + \dots + I_i \cdot \ln \frac{I}{GMR_i} + \dots + I_n \cdot \ln \frac{I}{D_{in}} \right) \quad (35)$$

Impedância série de linhas aéreas

Defini-se então a **indutância própria** de um condutor pela expressão:

$$L_{ii} = \frac{\lambda_i^{(i)}}{I_i} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{1}{GMR_i} \text{ H/m} \quad (36)$$

E a **indutância mútua** entre dois condutores por:

$$L_{ij} = \frac{\lambda_i^{(j)}}{I_j} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{1}{D_{ij}} \text{ H/m} \quad (37)$$

Impedância Série das Linhas de Distribuição

De posse das expressões dos valores de indutância é possível calcular os valores de impedância própria e mútua entre os condutores de uma linha de distribuição. Assumindo a frequencia do sistema em 60 Hz:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 60 \approx 377,0 \quad (38)$$

Calcula-se então a reatânciā

$$x_{ii} = \omega \cdot L_{ii} = 7,54 \cdot 10^{-5} \cdot \ln \frac{I}{GMR_i} [\Omega/\text{metro}] \quad (39)$$

$$x_{ij} = \omega \cdot L_{ij} = 7,54 \cdot 10^{-5} \cdot \ln \frac{I}{D_{ij}} [\Omega/\text{metro}] \quad (40)$$

Impedância Série das Linhas de Distribuição

Assim, a impedância de uma linha passa a ser representada não por um escalar mas por uma matriz $n \times n$, em que n é o número de condutores do arranjo, e que tem seus termos definidos pelas expressões:

$$z_{ii} = r_{ii} + j \cdot 0,12134 \cdot \ln \frac{I}{GMR_i} \quad \Omega/\text{milha} \quad (41)$$

$$z_{ij} = j \cdot 0,12134 \cdot \ln \frac{I}{D_{ij}} \quad \Omega/\text{milha} \quad (42)$$

Essa matriz é chamada de matriz de impedâncias primitiva.

Impedância Série das Linhas de Distribuição

Nesse ponto é possível caracterizar em 4 tipos de casos distintos o cálculo da impedância série de linhas de transmissão/distribuição:

- Linha Equilibrada e Simétrica (ou Transposta);
- Linha Equilibrada e Assimétrica (ou não Transposta);
- Linha Equilibrada/Desequilibrada e Assimétrica com retorno pela terra modelada como condutor ideal;
- Linha Equilibrada/Desequilibrada e Assimétrica com retorno pela terra modelada como condutor real.

Three-phase transposed line



- If (a1) currents sum up to zero; and (a2) lines are transposed

$$\begin{aligned}\lambda_a &= 2 \cdot 10^{-7} \left(\ln \frac{1}{D_{aa}} i_a + \ln \frac{1}{\bar{D}} (i_b + i_c) \right) \quad [i_b + i_c = -i_a] \\ &= 2 \cdot 10^{-7} \ln \frac{\bar{D}}{D_{aa}} i_a \quad \bar{D} := \sqrt[3]{D_{ab}^2 D_{ac}}\end{aligned}$$

- Mutual linkages vanish allowing for per-phase (separable and identical) analysis
- Assumption (a1) does not hold under faults
- Symmetry in transmission infrastructure allows for symmetrical components
- None of the (a1)-(a2) holds in distribution grids

Impedância série de linhas trifásicas não transpostas

Para aplicarmos as equações de fluxo concatenado em um condutor no meio de uma distribuição de condutores, admitimos a hipótese de que a soma de suas correntes é nula.

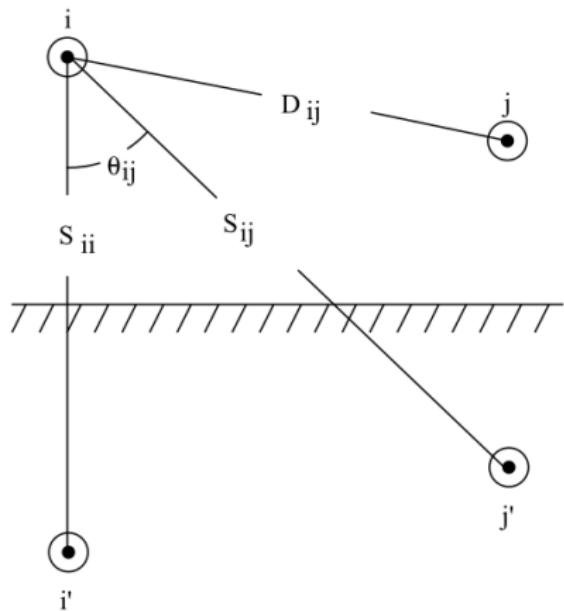
Isso implica que:

$$I_a + I_b + I_c = 3 \cdot I_o \neq 0 \quad (43)$$

A consideração do efeito do solo, quando aplica-se o método das imagens permite analisar casos em que a soma das correntes é não nula.

Método das imagens de Carson

A primeira parte da solução do problema de se determinar os termos relacionados ao condutor terra imaginário é aplicar o método das imagens.



Método das imagens de Carson

Para os condutores visualizados no slide anterior temos que:

$$\sum_{i=1}^n I_i = I \quad (44)$$

Para as imagens desses mesmos condutores:

$$\sum_{i=1}^n I_i = -I \quad (45)$$

Assim, para todo o conjunto de condutores, a soma total das correntes é nula, permitindo a aplicação da expressão do fluxo concatenado por um condutor i em um grupo de condutores.

Equações de Carson

Em seu desenvolvimento Carson propõe que a impedância de uma linha que sofre influência de correntes de retorno pela terra pode ser dada por dois termos distintos:

- Termo da Impedância da linha calculada sem influência das correntes de retorno pela terra;
- Termo de correção, tanto na parte resistiva quanto na reativa.

Dessa forma:

$$z_{ii} = (r_{ii} + \Delta r_{ii}) + j \cdot \left(0,12134 \cdot \ln \frac{I}{GMR_i} + \Delta x_{ii} \right) \Omega/\text{milha}$$

$$z_{ij} = \Delta r_{ij} + j \cdot \left(0,12134 \cdot \ln \frac{I}{D_{ij}} + \Delta x_{ij} \right) \Omega/\text{milha}$$

Equações de Carson

$$\begin{aligned} z_{ii} &= (r_{ii} + \Delta r_{ii}) + j \cdot \left(0,12134 \cdot \ln \frac{1}{GMR_i} + \Delta x_{ii} \right) \Omega/milha \\ z_{ij} &= \Delta r_{ij} + j \cdot \left(0,12134 \cdot \ln \frac{1}{D_{ij}} + \Delta x_{ij} \right) \Omega/milha \end{aligned}$$

Para o caso da terra modelada como um condutor ideal, numericamente tem-se $\rho = 0$, então:

$$\Delta r_{ii} = \Delta r_{ij} = 0 \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \Delta x_{ii} &= 0,12134 \cdot \ln S_{ii} \\ \Delta x_{ij} &= 0,12134 \cdot \ln S_{ij} \end{aligned} \quad (47)$$

Equações de Carson

Aplicando o resultado nas equações de impedância, para $\rho = 0$, então:

$$\hat{z}_{ii} = r_{ii} + j \cdot 0,12134 \cdot \ln \frac{S_{ii}}{GMR_i} \Omega/\text{milha} \quad (48)$$

$$\hat{z}_{ij} = j \cdot 0,12134 \cdot \ln \frac{S_{ij}}{D_{ij}} \Omega/\text{milha} \quad (49)$$

Equações de Carson

Como o solo não é um condutor real, apresenta resistividade $\rho \neq 0$.

Nesse caso, as correntes se distribuem de modo diferente de acordo com a frequência, ou seja:

- Para frequências mais elevadas as correntes tendem a se concentrar na superfície;
- Para frequências menos elevadas as correntes tendem a permanecer mais internas ao solo.

Esse efeito possui características semelhantes ao apresentado pelo efeito peculiar em um condutor submetido à correntes alternadas.

Equações de Carson

Quantificar a influência desse efeito, de dispersão das correntes no solo, é a segunda parte do problema da determinação dos termos de impedância realacionada ao condutor terra, após à modelagem das correntes de desequilíbrio pelo método das imagens.

A formulação matemática deste tratamento é relativamente complexa, envolvendo uma decomposição em séries de Bessel, proposta por Carson em 1926 e conhecida como correções de Carson.

Equações de Carson

Para o caso em que considera-se $\rho \neq 0$ (efeito de resistividade do solo não nula), chega-se as expressões das Equações de Carson:

Impedância própria de um condutor i :

$$z_{ii} = (r_{ii} + \Delta r_{ii}) + j \cdot \left(0,12134 \cdot \ln \frac{I}{GMR_i} + \Delta x_{ii} \right) \Omega/\text{milha} \quad (50)$$

Com $\Delta r_{ii} = 4\omega P_{ii}G$ e $\Delta x_{ii} = X_i + 2\omega G + 4\omega Q_{ii}G$:

$$\hat{z}_{ii} = r_{ii} + 4\omega P_{ii}G + j \left(2\omega G \cdot \ln \frac{S_{ii}}{RD_i} + X_i + 4\omega Q_{ii}G \right) \Omega/\text{milha} \quad (51)$$

Impedância mútua entre os condutores i e j :

$$z_{ij} = \Delta r_{ij} + j \cdot \left(0,12134 \cdot \ln \frac{I}{D_{ij}} + \Delta x_{ij} \right) \Omega/\text{milha} \quad (52)$$

Com $\Delta r_{ij} = 4\omega P_{ij}G$ e $\Delta x_{ij} = 2\omega G + 4\omega Q_{ij}G$:

$$\hat{z}_{ij} = 4\omega P_{ij}G + j \left(2\omega G \cdot \ln \frac{S_{ij}}{D_{ij}} + 4\omega Q_{ij}G \right) \Omega/\text{milha} \quad (53)$$

Equações de Carson

Em que:

$$G = 0,1609344 \times 10^{-3} \Omega/milha;$$

RD_i = Raio do condutor i em pés;

GMR_i = Raio Médio Geométrico do condutor i em pés;

$\omega = 2\pi f$ = frequencia angular do sistema em rad/seg;

ρ = resistividade da terra em $\Omega - metros$;

D_{ij} = distância entre os condutores i e j em pés;

S_{ij} = distância entre o condutor i e a imagem j em pés;

θ_{ij} = ângulo entre um par de linhas desenhadas do condutor i para sua própria imagem e para a imagem do condutor j .

Equações de Carson

Ainda,

$$X_i = 2\omega G \cdot \ln \frac{RD_i}{GMR_i} \quad \Omega/milha \quad (54)$$

$$P_{ij} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3\sqrt{2}}k_{ij}\cos(\theta_{ij}) + \frac{k_{ij}^2}{16}\cos(2\theta_{ij}) \cdot \left(0, 6728 + \ln \frac{2}{k_{ij}}\right) \quad (55)$$

$$Q_{ij} = -0,0386 + \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{2}{k_{ij}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}k_{ij}\cos(\theta_{ij}) \quad (56)$$

$$k_{ij} = 8,565 \times 10^{-4} \cdot S_{ij} \cdot \sqrt{\frac{f}{\rho}} \quad (57)$$

Equações de Carson Modificadas

Na verdade os termos P_{ij} e Q_{ij} são definidos como séries infinitas na formulação original de Carson e estão apresentados aqui como os três primeiros elementos dessa série.

No entanto é possível simplificar sobremaneira os cálculos das impedâncias de Carson simpificando ainda mais esses termos considerando apenas o primeiro termo de P_{ij} e os dois primeiros termos de Q_{ij} , eliminando os elementos $\cos(\theta_{ij})$ e $\cos(2\theta_{ij})$:

$$P_{ij} = \frac{\pi}{8} \quad (58)$$

$$Q_{ij} = -0,0386 + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{k_{ij}} \quad (59)$$

Equações de Carson Modificadas

Fazendo essas simplificações e substituindo $f = 60 \text{ Hz}$ e $\rho = 100 \Omega - \text{metro}$, chega-se as expressões simplificadas das equações de Carson:

$$\hat{z}_{ii} = r_i + 0,0953 + j \cdot 0,12134 \cdot \left(\ln \frac{1}{GMR_i} + 7,93402 \right) \Omega/\text{milha}$$

$$\hat{z}_{ij} = 0,0953 + j \cdot 0,12134 \cdot \left(\ln \frac{1}{D_{ij}} + 7,93402 \right) \Omega/\text{milha}$$

Equações de Carson Modificadas

Alguns valores de resistividade do solo podem ser dados por:

Tipo de Terreno	Resistividade $\Omega \cdot m$
Água do mar	0,01 - 1,0
Pântano	10 - 100
Terra úmida	100
Terra seca	1.000
Ardósia	10.000.000
Arenito	1.000.000.000

Impedância série de linhas trifásicas considerando o efeito da terra

Consideremos agora o caso em que as correntes de retorno pela terra são explicitamente consideradas para podermos aplicar as equações de Carson desenvolvidas nos slides anteriores. Iniciemos nossa análise com um circuito alimentado por uma fonte de tensão e aterrado no lado da carga:

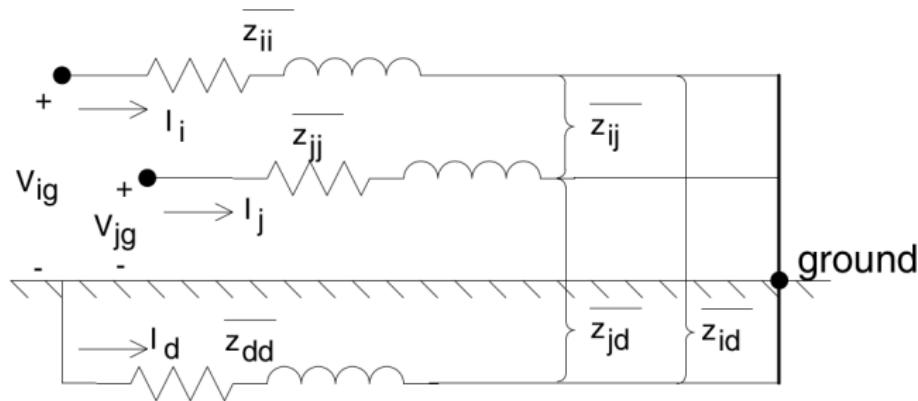


Figura: Condutores com retorno de corrente pelo terra

Impedância série de linhas trifásicas não transpostas

Aplicando lei de Kirchoff:

$$V_{ig} = z_{ii} \cdot I_i + z_{ij} \cdot I_j + z_{id} \cdot I_d - (z_{dd} \cdot I_d + z_{di} \cdot I_i + z_{dj} \cdot I_j) \quad (60)$$

Agrupando por correntes:

$$V_{ig} = (z_{ii} - z_{di}) \cdot I_i + (z_{ij} - z_{dj}) \cdot I_j + (z_{id} - z_{dd}) \cdot I_d \quad (61)$$

Substitutindo $I_i + I_j + I_d = 0 \rightarrow I_d = -(I_i + I_j)$, obtém-se

$$V_{ig} = \hat{z}_{ii} \cdot I_i + \hat{z}_{ij} \cdot I_j \quad (62)$$

$$\hat{z}_{ii} = z_{ii} + z_{dd} - z_{di} - z_{id} \quad (63)$$

$$\hat{z}_{ij} = z_{ij} + z_{dd} - z_{dj} - z_{id} \quad (64)$$

Impedância série de linhas trifásicas não transpostas

As novas equações já considerando o efeito das correntes de terra implicitamente são:

$$V_{ig} = \hat{z}_{ii} \cdot I_i + \hat{z}_{ij} \cdot I_j \quad (65)$$

$$\hat{z}_{ii} = z_{ii} + z_{dd} - z_{di} - z_{id} \quad (66)$$

$$\hat{z}_{ij} = z_{ij} + z_{dd} - z_{dj} - z_{id} \quad (67)$$

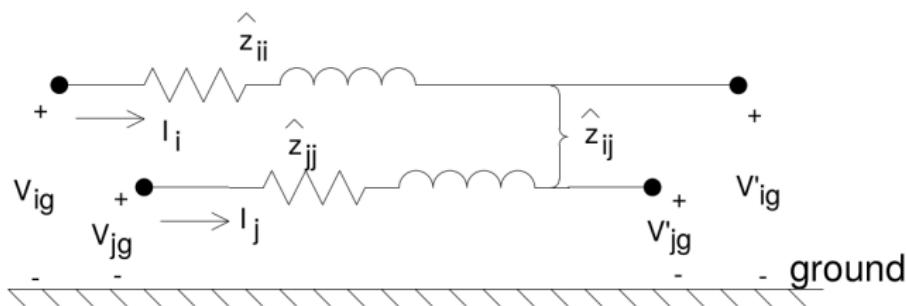


Figura: Circuito primitivo equivalente.

Impedância Série das Linhas de Distribuição

Assim, definem-se novas expressões para os termos da matriz de impedâncias primitiva, que já incluem a influência das correntes de retorno pela terra:

$$\hat{z}_{ii} = r_{ii} + r_{dd} + j \cdot o, 12134 \cdot \left(\ln \frac{I}{GMR_i} + \ln \frac{D_{id}D_{dj}}{GMR_d} \right) \Omega/milha$$

$$\hat{z}_{ij} = r_{dd} + j \cdot o, 12134 \cdot \left(\ln \frac{I}{D_{ij}} + \ln \frac{D_{id}D_{dj}}{GMR_d} \right) \Omega/milha$$

Equações de Carson Modificadas

Comparando os valores de impedâncias obtidos com os valores encontrados na primeira situação, as equações de Carson demonstram que:

$$\hat{z}_{ii} = r_{ii} + r_{dd} + j \cdot 0,12134 \cdot \left(\ln \frac{1}{GMR_i} + \ln \frac{D_{id} D_{dj}}{GMR_d} \right) \Omega/\text{milha}$$

$$\hat{z}_{ij} = r_{dd} + j \cdot 0,12134 \cdot \left(\ln \frac{1}{D_{ij}} + \ln \frac{D_{id} D_{dj}}{GMR_d} \right) \Omega/\text{milha}$$

Tal que:

$$\Delta r_{ii} = \Delta r_{ij} = r_{dd} = 0,09530 \Omega/\text{milha} \quad (68)$$

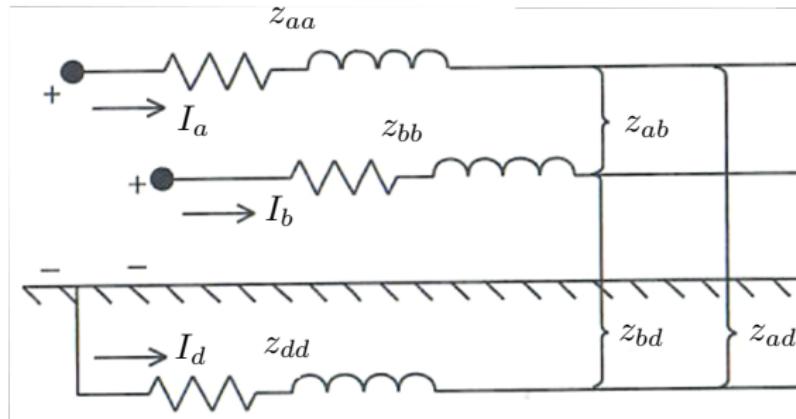
$$\Delta x_{ii} = \Delta x_{ij} = \ln \frac{D_{id} \cdot D_{dj}}{GMR_d} = 7,93402 \quad (69)$$

Equações de Carson Modificadas

Outra forma de obter o mesmo resultado aplicando LKT, de forma matricial, no mesmo circuito utilizado acima é apresentada nos slides do professor Vassilis Kekatos e contribui com o entendimento das questões aqui abordadas.

Esse desenvolvimento é apresentado nos próximos cinco slides.

Ground return

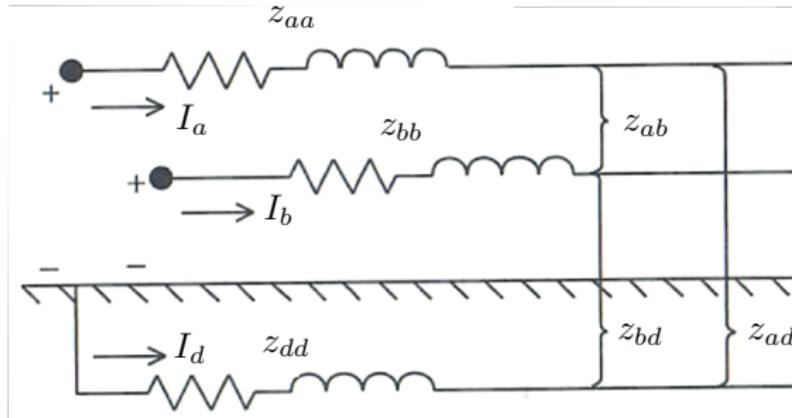


- Current flows through ground return or fictitious 'dirt' conductor
- Assumption (a1) on zero-sum currents re-established

$$i_d = - \sum_{n=1}^N i_n \quad \text{may have multiple non-dirt conductors (neutrals, phases)}$$

- Previous analysis holds with self and mutual inductances present

Self and mutual impedances



$$z_{mn} = \begin{cases} r_m + j0.1213 \cdot \ln \frac{1}{D_{mm}} [\Omega/\text{mile}], & m = n \\ j0.1213 \cdot \ln \frac{1}{D_{mn}} [\Omega/\text{mile}], & m \neq n \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{self impedance (non-dirt)} \\ \text{mutual impedance (non-dirt)} \end{matrix}$$

$$z_{md} = j0.1213 \cdot \ln \frac{1}{D_{md}} [\Omega/\text{mile}] \quad \text{mutual impedance (dirt/non-dirt)}$$

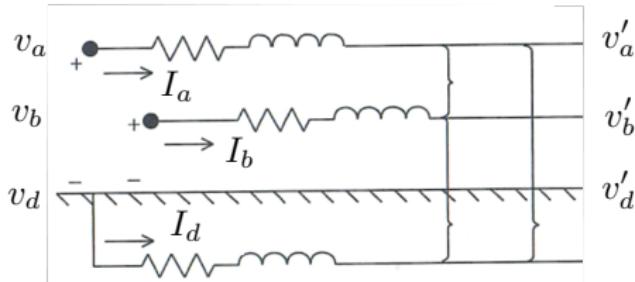
$$z_{dd} = r_d + j0.1213 \cdot \ln \frac{1}{D_{dd}} [\Omega/\text{mile}] \quad \text{self impedance (dirt)}$$

Primitive impedance matrix

- Partition into non-dirt and dirt parts

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} - \mathbf{v}' \\ v_d - v'_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{z}_d \\ \mathbf{z}_d^\top & z_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ i_d \end{bmatrix}$$

- Voltages are referenced to v_d
- Zero-sum currents yield $i_d = -\mathbf{1}^\top \mathbf{i}$

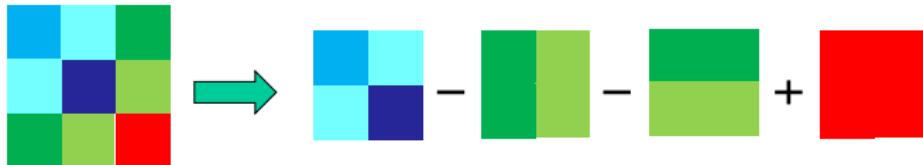


- Subtract last row from all other rows to refer voltages to their related grounds

$$\Delta \mathbf{v} = (\mathbf{v} - v_d \mathbf{1}) - (\mathbf{v}' - v'_d \mathbf{1}) = \underbrace{(\mathbf{Z} - \mathbf{1} \mathbf{z}_d^\top - \mathbf{z}_d \mathbf{1}^\top + z_{dd} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top)}_{\mathbf{Z}'} \mathbf{i}$$

Primitive impedance matrix (cont'd)

- Structure of *primitive matrix* \mathbf{Z}' ? $\mathbf{Z}' := \mathbf{Z} - \mathbf{1}\mathbf{z}_d^\top - \mathbf{z}_d\mathbf{1}^\top + z_{dd}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top$



- Entries of primitive matrix

$$\begin{aligned} z'_{mn} &= z_{mn} - j0.1213 \cdot \ln \frac{1}{D_{nd}} - j0.1213 \cdot \ln \frac{1}{D_{md}} + r_d + j0.1213 \cdot \ln \frac{1}{D_{dd}} \\ &= z_{mn} + r_d + j0.1213 \cdot \ln \frac{D_{nd} D_{md}}{D_{dd}} \quad [\Omega/\text{mile}] \end{aligned}$$

- Replace 0.1213 with $\omega \cdot 2 \cdot 10^{-7}$ for general formula [Ohms/meter]
- Dirt resistance and a reactance term are added on all entries of original \mathbf{Z} !
- However, we do not know $r_d, D_{nd}, D_{md}, D_{dd} \dots$

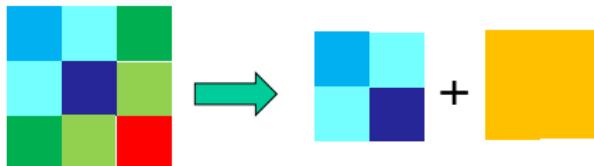
Primitive impedance matrix

- Modified Carson's equations showed that

Primitive impedance matrix

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z} + z_d \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$$

$$z_d = r_d + j\omega \cdot 2 \cdot 10^{-7} \ln D_e$$



- From now on, we will be using symbol \mathbf{Z} to denote \mathbf{Z}'
- Primitive impedance matrix is $N \times N$, where N is # of conductors
 - Overhead 4-wire grounded line: 4×4
 - Underground cable with three concentric neutral cables: 6×6

Matriz primitiva de linhas aéreas

As equações de Carson são utilizadas então para calcular uma matriz de impedâncias primitiva que é do tipo $n \times n$. De modo geral para um sistema trifásico com m condutores neutro:

$$[z_{\text{primitiva}}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} & | & z_{an1} & z_{an2} & z_{anm} \\ z_{ba} & z_{bb} & z_{bc} & | & z_{bn1} & z_{bn2} & z_{bnm} \\ z_{ca} & z_{cb} & z_{cc} & | & z_{cn1} & z_{cn2} & z_{cnm} \\ - & - & - & | & - & - & - \\ z_{n1a} & z_{n1b} & z_{n1c} & | & z_{n1n1} & z_{n1n2} & z_{n1nm} \\ z_{n2a} & z_{n2b} & z_{n2c} & | & z_{n2n1} & z_{n2n2} & z_{n2nm} \\ z_{nma} & z_{nmb} & z_{nmc} & | & z_{nmn1} & z_{nmn2} & z_{nmnm} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} z_{ij} & z_{in} \\ z_{nj} & z_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz de impedância de fase para linhas aéreas

Muitas vezes é conveniente reduzir a matriz de impedâncias primitiva para o tamanho de 3×3 (em sistemas trifásicos).

Uma técnica muito utilizada para realizar a redução do sistema é chamada de *redução de Kron*.

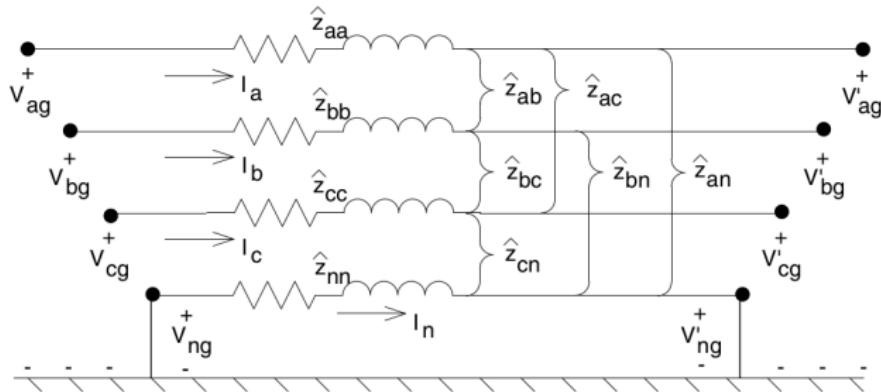


Figura: Sistema a 4 condutores com neutro aterrado.

Matriz de impedância de fase para linhas aéreas

Aplicando lei de Kirchoff:

$$\begin{bmatrix} V_{ag} \\ V_{bg} \\ V_{cg} \\ V_{ng} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V'_{ag} \\ V'_{bg} \\ V'_{cg} \\ V'_{ng} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} & z_{an} \\ z_{ba} & z_{bb} & z_{bc} & z_{bn} \\ z_{ca} & z_{cb} & z_{cc} & z_{cn} \\ z_{n1a} & z_{n1b} & z_{n1c} & z_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_n \end{bmatrix} \quad (70)$$

De forma particionada:

$$\begin{bmatrix} V_{abc} \\ V_{ng} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V'_{abc} \\ V'_{ng} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{ij} & z_{in} \\ z_{nj} & z_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{abc} \\ I_n \end{bmatrix} \quad (71)$$

Matriz de impedância de fase para linhas aéreas

Sabendo que a tensão de neutro nos dois lados da linha é zero:

$$V_{abc} = V'_{abc} + z_{ij} \cdot I_{abc} + z_{in} \cdot I_n \quad (72)$$

$$o = o + z_{nj} \cdot I_{abc} + z_{nn} \cdot I_n \quad (73)$$

Resolvendo a segunda equação para I_n :

$$I_n = -z_{nn}^{-1} \cdot z_{nj} \cdot I_{abc} \quad (74)$$

Matriz de impedância de fase para linhas aéreas

$$I_n = -z_{nn}^{-1} \cdot z_{nj} \cdot I_{abc} \quad (75)$$

Substituindo I_n na primeira equação:

$$V_{abc} = V'_{abc} + (z_{ij} - z_{in} \cdot z_{nn}^{-1} \cdot z_{nj}) \cdot I_{abc} \quad (76)$$

Em que podemos representar:

$$V_{abc} = V'_{abc} + z_{abc} \cdot I_{abc} \quad (77)$$

Com z_{abc} dado por:

$$z_{abc} = (z_{ij} - z_{in} \cdot z_{nn}^{-1} \cdot z_{nj}) \quad (78)$$

Matriz de impedância de fase para linhas aéreas

A forma final da redução de *Kron* é dada justamente por:

$$\mathbf{z}_{abc} = (\mathbf{z}_{ij} - \mathbf{z}_{in} \cdot \mathbf{z}_{nn}^{-1} \cdot \mathbf{z}_{nj}) \quad (79)$$

Que neste caso terá os seguintes elementos:

$$\mathbf{z}_{abc} = \begin{bmatrix} z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} \\ z_{ba} & z_{bb} & z_{bc} \\ z_{ca} & z_{cb} & z_{cc} \end{bmatrix} \Omega/milha \quad (80)$$

Transposed three-phase line

- Primitive impedance matrix

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{ii} & z_{ij} & z_{ij} & z_{in} \\ z_{ij} & z_{ii} & z_{ij} & z_{in} \\ z_{ij} & z_{ij} & z_{ii} & z_{in} \\ z_{in} & z_{in} & z_{in} & z_{nn} \end{bmatrix}$$

$$z_{ii} = r_i + r_d + j\omega \cdot 2 \cdot 10^{-7} \ln \frac{D_e}{R_i}$$

$$z_{ij} = r_d + j\omega \cdot 2 \cdot 10^{-7} \ln \frac{D_e}{\bar{D}_{ij}}$$

$$z_{in} = r_d + j\omega \cdot 2 \cdot 10^{-7} \ln \frac{D_e}{\bar{D}_{in}}$$

$$z_{nn} = r_n + r_d + j\omega \cdot 2 \cdot 10^{-7} \ln \frac{D_e}{R_n}$$

- Phase impedance matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_\phi &= \begin{bmatrix} z_{ii} & z_{ij} & z_{ij} \\ z_{ij} & z_{ii} & z_{ij} \\ z_{ij} & z_{ij} & z_{ii} \end{bmatrix} - \frac{1}{z_{nn}} \begin{bmatrix} z_{in} \\ z_{in} \\ z_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{in} \\ z_{in} \\ z_{in} \end{bmatrix}^\top \\ &= \begin{bmatrix} z_s & z_m & z_m \\ z_m & z_s & z_m \\ z_m & z_m & z_s \end{bmatrix} \\ &= (z_s - z_m) \mathbf{I}_3 + z_m \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \quad \text{where} \quad z_s = z_{ii} - \frac{z_{in}^2}{z_{nn}} \quad \text{and} \quad z_m = z_{ij} - \frac{z_{in}^2}{z_{nn}} \end{aligned}$$

Transposed three-phase line (cont'd)

- Voltage drop under transposed lines and zero-sum currents ($\mathbf{1}^\top \mathbf{i}_\phi = 0$)

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_\phi - \mathbf{v}'_\phi &= \mathbf{Z}_\phi \mathbf{i}_\phi \\ &= (z_s - z_m) \mathbf{i}_\phi + z_m \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \mathbf{i}_\phi \quad \text{0} \\ &= (z_s - z_m) \mathbf{i}_\phi\end{aligned}$$

- Single-phase equivalent and line impedance

$$\begin{aligned}z_s - z_m &= \left(z_{ii} - \frac{z_{in}^2}{z_{nn}} \right) - \left(z_{ij} - \frac{z_{in}^2}{z_{nn}} \right) \\ &= z_{ii} - z_{ij} \\ &= \left(r_i + r_d + j\omega \cdot 2 \cdot 10^{-7} \ln \frac{D_e}{R_i} \right) - \left(r_d + j\omega \cdot 2 \cdot 10^{-7} \ln \frac{D_e}{\bar{D}_{ij}} \right) \\ &= r_i + j\omega \cdot 2 \cdot 10^{-7} \ln \frac{\bar{D}_{ij}}{R_i}\end{aligned}$$

- Effect of earth disappears; no Carson's modification needed of line impedances!
- That is why approx. analysis of Chapter 3 involved single z for a line

Special cases

$$\mathbf{Z}_\phi := \mathbf{Z}_{\phi\phi} - \mathbf{Z}_{\phi n} \mathbf{Z}_{nn}^{-1} \mathbf{Z}_{\phi n}^\top = \begin{bmatrix} z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} \\ z_{ab} & z_{bb} & z_{bc} \\ z_{ac} & z_{bc} & z_{cc} \end{bmatrix} \quad \text{symmetric matrix}$$

- *Transposed three-phase line* $\mathbf{Z}_\phi := \begin{bmatrix} z_s & z_m & z_m \\ z_m & z_s & z_m \\ z_m & z_m & z_s \end{bmatrix} = (z_s - z_m)\mathbf{I}_3 + z_m \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$

due to averaging across segments $z_m = (z_{ab} + z_{ac} + z_{bc})/3$

- *two-phase line*

- primitive is 3×3
- Kron-reduced is 2×2
- zero-padded is 3×3

$$\mathbf{Z}_\phi := \begin{bmatrix} z_{aa} & 0 & z_{ac} \\ 0 & 0 & 0 \\ z_{ac} & 0 & z_{cc} \end{bmatrix}$$

- *single-phase line*

$$\mathbf{Z}_\phi := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- *three-wire delta connection:*

no need for Kron reduction, but Carson's correction is still needed

Componentes Simétricas

O método dos componentes simétricos, desenvolvido pela primeira vez por C.L. Fortescue em 1918, é uma técnica poderosa para analisar sistemas trifásicos desequilibrados.

Fortescue definiu uma transformação linear de componentes de fase para um novo conjunto de componentes chamados componentes simétricos.

A vantagem dessa transformação é que, para redes trifásicas平衡adas, os circuitos equivalentes obtidos para os componentes simétricos, chamados redes de seqüência, são separados em três redes desacopladas.

Componentes Simétricas

Além disso, para sistemas trifásicos desequilibrados, as três redes de sequência são conectadas apenas em pontos de desequilíbrio.

Como resultado, as redes de sequência para muitos casos de sistemas trifásicos desequilibrados são relativamente fáceis de analisar.

O método dos componentes simétricos é basicamente uma técnica de modelagem que permite a análise sistemática e o projeto de sistemas trifásicos.

A dissociação de uma rede trifásica detalhada em três redes de sequência mais simples revela fenômenos complicados em termos mais simplistas.

Os resultados da rede de sequência podem então ser sobrepostos para obter resultados da rede trifásica. Por exemplo, a aplicação de componentes simétricos a estudos de curto-círcuito assimétricos é indispensável.

Componentes Simétricas

O desequilíbrio do sistema pode ser causado por inúmeras condições:

- Faltas desequilibradas;
- Cargas monofásicas e desequilibradas;
- Linhas assimétricas e não transpostas.

Componentes Simétricas

As impedâncias dos diversos elementos, tais como geradores, transformadores e linha de transmissão são desacopladas umas das outras quando transformadas para componentes simétricas.

Fortescue demonstrou que um conjunto de n sistemas de fasores desequilibrados, podem ser representados por $n - 1$ sistemas de fasores equilibrados mais um sistema de *sequência zero*, em que todos os fasores têm módulos e ângulos iguais.

$$V_a = V_{a1} + V_{a2} + V_{a3} + \dots + V_{an}$$

$$V_b = V_{b1} + V_{b2} + V_{b3} + \dots + V_{bn}$$

$$V_c = V_{c1} + V_{c2} + V_{c3} + \dots + V_{cn}$$

$$\vdots = \ddots$$

$$V_n = V_{n1} + V_{n2} + V_{n3} + \dots + V_{nn}$$

Componentes Simétricas

Assumindo tensões de fase desequilibradas V_a , V_b e V_c , de acordo com o Teorema de Fortescue:

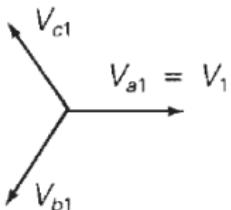
- Componentes de sequência zero: Consiste de três fasores de mesma magnitude e defasados de 0° ;
- Componentes de sequência positiva: Consiste de três fasores de mesma magnitude e defasados de $\pm 120^\circ$ e mesma sequencia do sistema original;
- Componentes de sequência negativa: Consiste de três fasores de mesma magnitude e defasados de $\pm 120^\circ$ e sequência oposta à do sistema original.

Componentes Simétricas

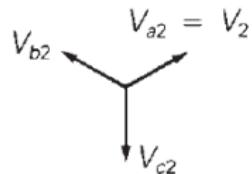
$$V_{a0} V_{b0} V_{c0} = V_0$$



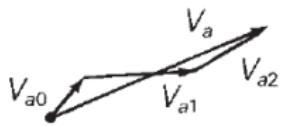
(a) Zero-sequence
components



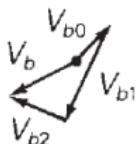
(b) Positive-sequence
components



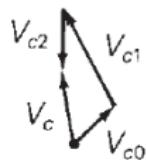
(c) Negative-sequence
components



Phase a



Phase b



Phase c

Componentes Simétricas

Representando as tensões de fase em função de suas componentes de sequência:

$$\begin{aligned} V_a &= V_a^{(o)} + V_a^{(1)} + V_a^{(2)} \\ V_b &= V_b^{(o)} + V_b^{(1)} + V_b^{(2)} \\ V_c &= V_c^{(o)} + V_c^{(1)} + V_c^{(2)} \end{aligned} \quad (81)$$

Considerando $\alpha = 1\angle 120^\circ$, então $\alpha^2 = 1\angle 240^\circ$, dessa forma é possível deixar a representação das tensões de fase (a, b, c) em função das tensões de sequência unicamente da fase a .

$$\begin{aligned} V_a &= V_a^{(o)} + V_a^{(1)} + V_a^{(2)} \\ V_b &= V_a^{(o)} + \alpha^2 V_a^{(1)} + \alpha V_a^{(2)} \\ V_c &= V_a^{(o)} + \alpha V_a^{(1)} + \alpha^2 V_a^{(2)} \end{aligned} \quad (82)$$

Componentes Simétricas

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I & I \\ I & a^2 & a \\ I & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a^{(0)} \\ V_a^{(1)} \\ V_a^{(2)} \end{bmatrix} \quad (83)$$

Em que,

$$A = \begin{bmatrix} I & I & I \\ I & a^2 & a \\ I & a & a^2 \end{bmatrix} \quad (84)$$

Componentes Simétricas

Calculando A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{I}{3} \begin{bmatrix} I & I & I \\ I & \alpha & \alpha^2 \\ I & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \quad (85)$$

É possível obter:

$$\begin{bmatrix} V_a^{(0)} \\ V_a^{(1)} \\ V_a^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{I}{3} \begin{bmatrix} I & I & I \\ I & \alpha & \alpha^2 \\ I & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (86)$$

Componentes Simétricas

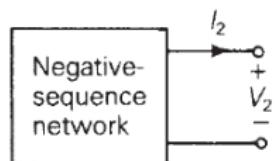
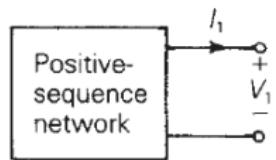
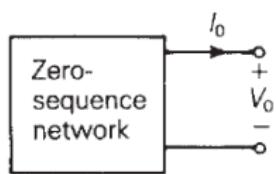
As mesmas relações obtidas para tensões, nos slides anteriores, também são válidas para obter as correntes em função de suas componentes de sequência:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a^{(o)} \\ I_a^{(1)} \\ I_a^{(2)} \end{bmatrix} \quad (87)$$

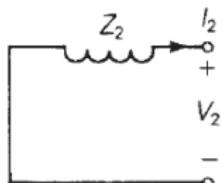
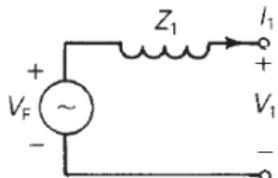
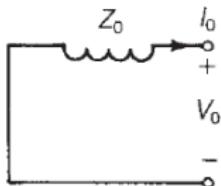
E as componentes de sequência em função das correntes:

$$\begin{bmatrix} I_a^{(o)} \\ I_a^{(1)} \\ I_a^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (88)$$

Componentes de Sequência



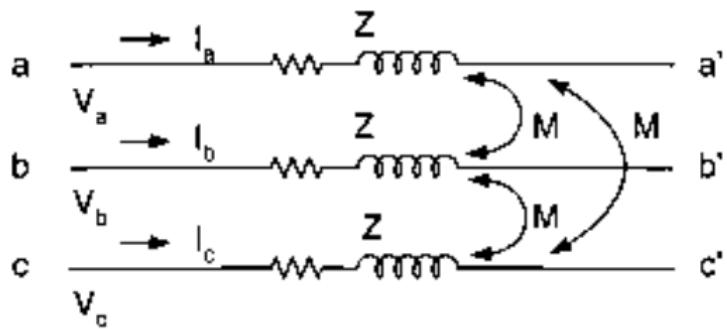
(a) General sequence networks



(b) Thévenin equivalents as viewed from fault terminals

Componentes Simétricas

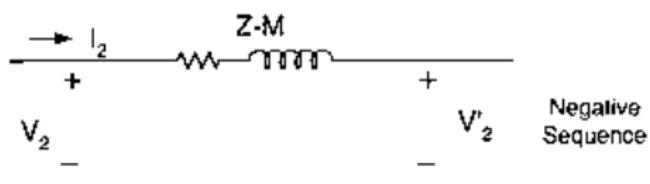
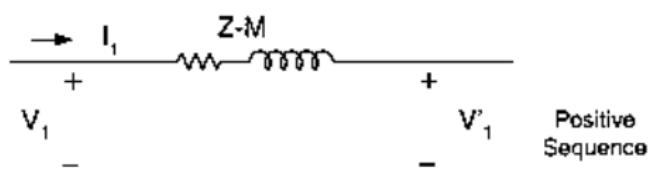
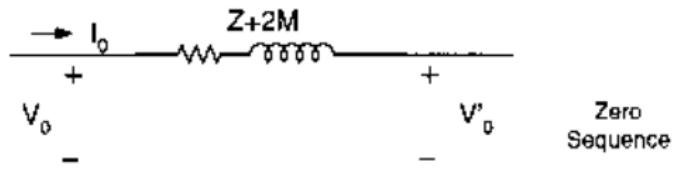
A transformação de componentes de fase para componentes simétricas têm como objetivo desacoplar os componentes do circuito, passando desta situação de acomplamento:



(a)

Componentes Simétricas

Para uma situação em que não há acoplamento:



(b)

Componentes Simétricas

Ou seja, dessa situação:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} \\ z_{ba} & z_{bb} & z_{bc} \\ z_{ca} & z_{cb} & z_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (89)$$

Para essa:

$$\begin{bmatrix} V_o \\ V_I \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_o & 0 & 0 \\ 0 & z_I & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_o \\ I_I \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (90)$$

Impedâncias de sequência

Para obtermos as impedâncias de sequência de uma linha de distribuição basta aplicarmos a teoria de Fortescue:

$$\begin{bmatrix} V_{ag} \\ V_{bg} \\ V_{cg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_o \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (91)$$

Em que $\alpha = 1, \text{o}/120^\circ$.

Impedâncias de sequência

De forma reduzida:

$$\mathbf{V}_{abc} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_{012} \quad (92)$$

Da mesma forma para as correntes de linha:

$$\mathbf{I}_{abc} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_{012} \quad (93)$$

Para obtermos a matriz de impedâncias de sequência a partir das impedâncias de fase:

$$\mathbf{V}_{012} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{V}_{abc} \quad (94)$$

Em que:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \quad (95)$$

Impedâncias de sequência

Aplicando a expressão das tensões de sequência em função das tensões de fase na seguinte expressão:

$$V_{abc_n} = V_{abc_m} + Z_{abc} \cdot \underbrace{I_{abc}}_{A \cdot I_{012}} \quad (96)$$

$$V_{012_n} = A^{-1} \cdot \underbrace{V_{abc_n}}_{V_{abc_m} + Z_{abc} \cdot A \cdot I_{012}} \quad (97)$$

Ficamos com:

$$V_{012_n} = \underbrace{A^{-1} \cdot V_{abc_m}}_{V_{012_m}} + \underbrace{A^{-1} \cdot Z_{abc} \cdot A \cdot I_{012}}_{Z_{012}} \quad (98)$$

$$V_{012_n} = V_{012_m} + Z_{012} \cdot I_{012} \quad (99)$$

Impedâncias de sequência

Em:

$$V_{012n} = V_{012m} + Z_{012} \cdot I_{012} \quad (\text{IOO})$$

Z_{012} é dada por:

$$Z_{012} = A^{-1} \cdot Z_{abc} \cdot A = \begin{bmatrix} z_{00} & z_{01} & z_{02} \\ z_{10} & z_{11} & z_{12} \\ z_{20} & z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{IOI})$$

As impedâncias de sequência são dadas pelos termos da diagonal de Z_{012} , ou seja:

- z_{00} : impedância de sequência zero;
- z_{11} : impedância de sequência positiva;
- z_{22} : impedância de sequência negativa.

Impedâncias de Sequência

Os termos que não estão na diagonal de Z_{012} representam um acoplamento entre as impedâncias de sequência.

Para que essas impedâncias mútuas fossem zero, era preciso assumir que a linha é transposta.

Nesse caso:

$$z_s = \frac{1}{3} \cdot (z_{aa} + z_{bb} + z_{cc}) \quad (102)$$

$$z_m = \frac{1}{3} \cdot (z_{ab} + z_{bc} + z_{ca}) \quad (103)$$

$$\mathbf{Z}_{abc} = \begin{bmatrix} z_s & z_m & z_m \\ z_m & z_s & z_m \\ z_m & z_m & z_s \end{bmatrix} \Omega/milha \quad (104)$$

Impedâncias de Sequência

Quando essa metodologia é utilizada, resulta em uma matriz de sequência *diagonal*, ou seja, os termos que não estão na diagonal principal são zero, e as impedâncias de sequência são dadas por:

$$z_{00} = z_s + 2 \cdot z_m \quad \Omega/milha \quad (105)$$

$$z_{11} = z_s - z_m \quad \Omega/milha \quad (106)$$

$$z_{22} = z_s - z_m \quad \Omega/milha \quad (107)$$

Sequence impedance matrix

- Voltage drop in two domains

$$\mathbf{v}_\phi - \mathbf{v}'_\phi = \mathbf{Z}_\phi \mathbf{i}_\phi \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}'_s) = \mathbf{Z}_\phi \mathbf{A}_s \mathbf{i}_s \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{A}_s (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}'_s) = \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{Z}_\phi \mathbf{A}_s \mathbf{i}_s \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_s - \mathbf{v}'_s = \mathbf{Z}_s \mathbf{i}_s$$
- Sequence impedance matrix

$$\mathbf{Z}_s = \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{Z}_\phi \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} z_{00} & z_{01} & z_{02} \\ z_{01} & z_{11} & z_{12} \\ z_{02} & z_{12} & z_{22} \end{bmatrix}$$

zero, positive, negative sequence
self/mutual impedances

- Special case: *Transposed lines* $\mathbf{Z}_\phi = (z_s - z_m) \mathbf{I}_3 + z_m \mathbf{1} \mathbf{1}^\top$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_s &= (z_s - z_m) \mathbf{I}_3 + z_m \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \mathbf{A}_s \\ &= (z_s - z_m) \mathbf{I}_3 + 3z_m \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^\top \\ &= \begin{bmatrix} z_s + 2z_m & 0 & 0 \\ 0 & z_s - z_m & 0 \\ 0 & 0 & z_s - z_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$r_i + j\omega \cdot 2 \cdot 10^{-7} \ln \frac{\bar{D}_{ij}}{\bar{R}_i}$

- Neutral impedance and ground effect appear only on $z_{00} = z_{ii} + 2z_{ij} - 3\frac{z_{in}^2}{z_{nn}}$

Impedância série de linhas aéreas

Exemplo:

Calcule a matriz de impedâncias de fase para a linha mostrada abaixo, utilizando as equações modificadas de Carson.

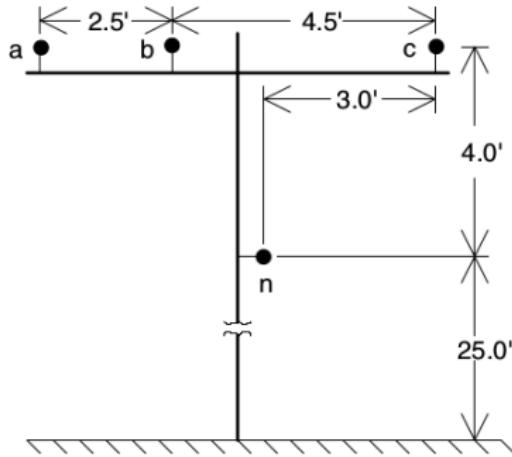
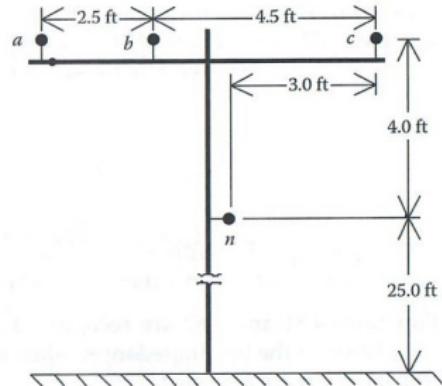


Figura: Configuração de linhas subterrâneas

Example

Find phase impedance matrix and zero-/positive-sequence impedances for the untransposed three-phase line



336,400 26/7 ACSR: $GMR = 0.0244 \text{ ft}$

$Resistance = 0.306 \Omega/\text{mile}$

4/0 6/1 ACSR: $GMR = 0.00814 \text{ ft}$

$Resistance = 0.5920 \Omega/\text{mile}$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0.4013 + j1.4133 & 0.0953 + j0.8515 & 0.0953 + j0.7266 & 0.0953 + j0.7524 \\ 0.0953 + j0.8515 & 0.4013 + j1.4133 & 0.0953 + j0.7802 & 0.0953 + j0.7865 \\ 0.0953 + j0.7266 & 0.0953 + j0.7802 & 0.4013 + j1.4133 & 0.0953 + j0.7674 \\ 0.0953 + j0.7524 & 0.0953 + j0.7865 & 0.0953 + j0.7674 & 0.6873 + j1.5465 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

$$\mathbf{Z}_\phi = \begin{bmatrix} 0.4576 + j1.0780 & 0.1560 + j.5017 & 0.1535 + j0.3849 \\ 0.1560 + j0.5017 & 0.4666 + j1.0482 & 0.1580 + j0.4236 \\ 0.1535 + j0.3849 & 0.1580 + j0.4236 & 0.4615 + j1.0651 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

- Compare r/x ratios; value range; and (off)-diagonal entries

Example (cont'd)

$$\mathbf{Z}_s = \begin{bmatrix} 0.7735 + j1.9373 & 0.0256 + j0.0115 & -0.0321 + j0.0159 \\ -0.0321 + j0.0159 & 0.3061 + j0.6270 & -0.0723 - j0.0060 \\ 0.0256 + j0.0115 & 0.0723 - j0.0059 & 0.3061 + j0.6270 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

$z_{11} = z_{22}$

- Assume now the line has been transposed
- Average the (off)-diagonal entries of the phase impedance matrix
- Find the related sequence impedance matrix

$$\mathbf{Z}_s^{\text{tr}} = \begin{bmatrix} 0.7735 + j1.9373 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3061 + j0.6270 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3061 + j0.6270 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

- How does \mathbf{Z}_s^{tr} compare to \mathbf{Z}_s ?

Discussion on symmetrical components

- Symmetrical components were used in older power distribution software (for computational efficiency)
- Analysis with symmetrical components (diagonal Z_s^{tr}) is equivalent to replacing diagonal and off-diagonal elements of Z_ϕ with their averages
- *Example:* balanced voltage source, untransposed 3-phase line; and unbalanced load

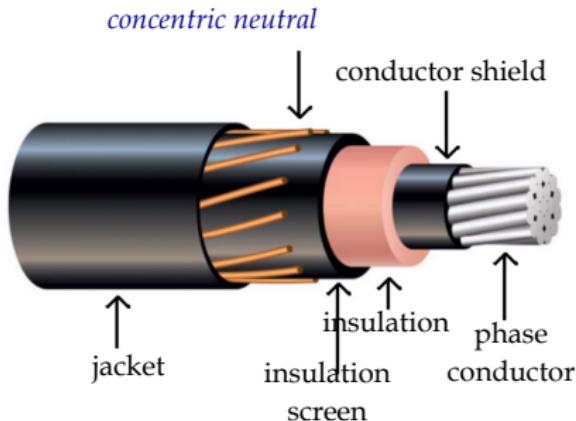
$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 155.24 \\ 156.86 \\ 98.167 \end{bmatrix} \text{V} \quad \begin{bmatrix} \hat{V}_a \\ \hat{V}_b \\ \hat{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 157.97 \\ 155.52 \\ 93.25 \end{bmatrix} \text{V}$$

exact voltages *voltages approximated
with symmetrical components* *errors*

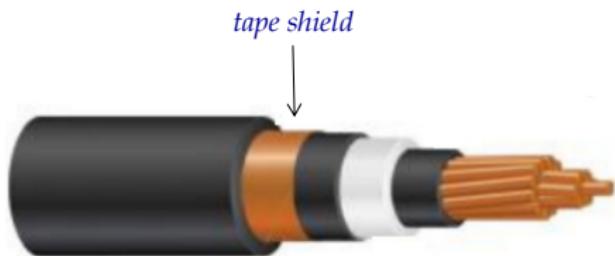
a : -1.75%
b : +0.85%
c : +5.00%

- Symmetrical components cannot be applied for 1- or 2-phase lines
- Full phase impedance analysis needed and is currently implemented in software

Underground cables



usually for unbalanced residential

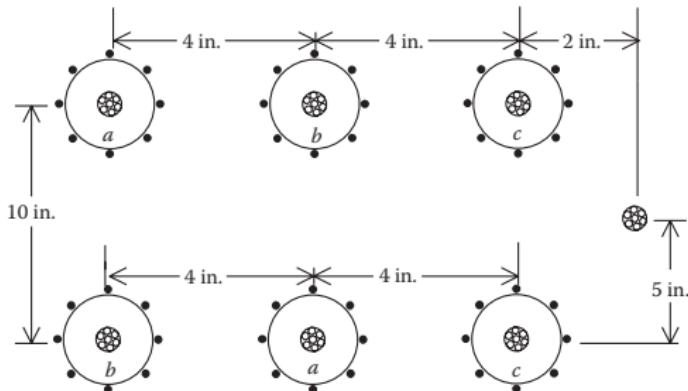


[PEguru.com]

usually for relatively balanced industrial

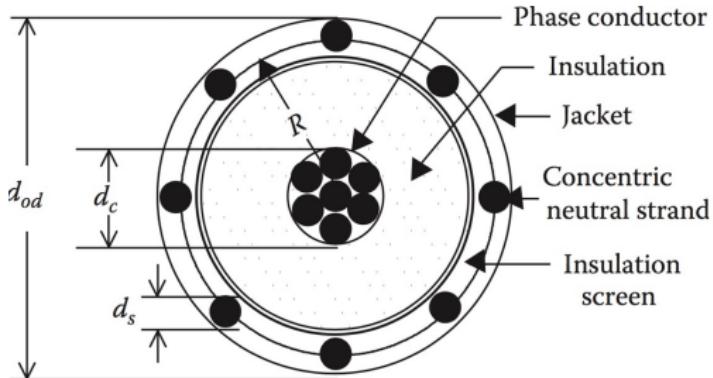
- Above 1kV, concentric neutrals/shields needed to reduce electrical stress on insulation
- Additional neutrals may also be present; all grounded

Primitive matrix for underground cables



- Apply Carson's equations and Kron reduction as before
- Resistances, GMRs, and GMDs are given for phase and regular neutral conductors
- Need to find resistances, GMRs, and GMDs for concentric & tape-shielded neutrals

Concentric neutrals



$$k : \# \text{ concentric neutrals}$$
$$r_s : \text{neutral strand resistance}$$
$$R = \frac{d_{od} - d_s}{2}$$

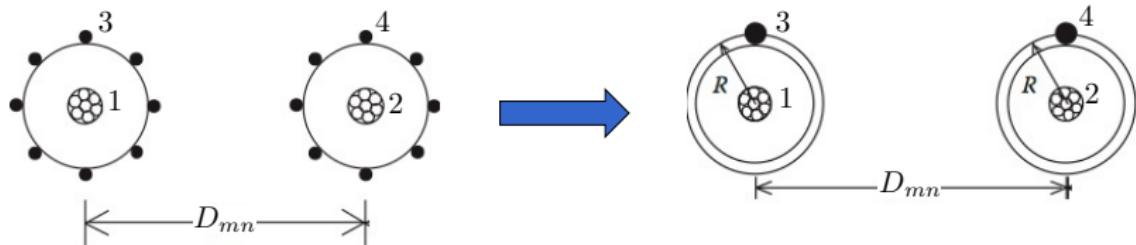
- Resistance $r_{cn} = \frac{r_s}{k} \Omega/\text{mile}$
- GMR follows from formula for *bundled* transmission lines

$$\text{GMR}_{cn} = \sqrt[k]{\text{GMR}_s \cdot k \cdot R^{k-1}}$$

see Problem 4.16 in
Glover, Sarma, & Overbye

- Textbook switches often between $\text{ft}=12 \text{ in}$, in , and $\text{mil}=0.001 \text{ in}$

Concentric neutrals (cont'd)

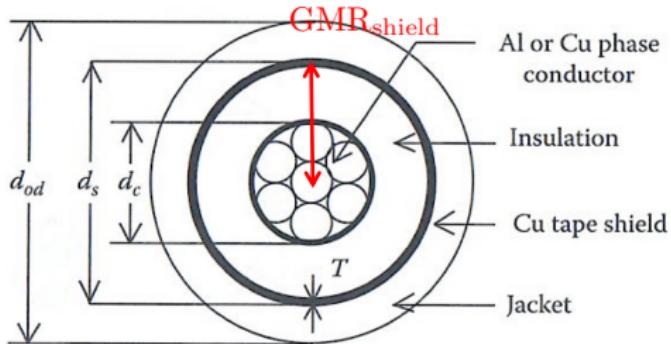


- GMD between neutral and related phase conductor $D_{13} = \sqrt[k]{R^k} = R$
- GMD between neutral and other phase conductor can be approximated by replacing the concentric neutral with one strand at the top

$$D_{14} = \sqrt{D_{12}^2 + R^2}$$

- In this way, GMD between neutrals captured correctly too

Tape-shielded cables



- Resistance of tape $r_{\text{shield}} = 7.93 \cdot 10^8 \cdot \frac{\rho}{d_s T} \Omega/\text{mile}$
- GMR of tape shield is radius from center to midpoint of tape [symmetry or limiting case for concentric neutrals]
- GMD between tape shields or a tape shield and another conductor equals distance between conductors

Summary

- Find impedances from geometric configurations
- Modify impedances to capture the effect of earth
- Convert primitive to phase impedance matrix via Kron reduction
- Two-port model for multiphase lines

$$\mathbf{v}_\phi - \mathbf{v}'_\phi = (\mathbf{Z}_{\phi\phi} - \mathbf{Z}_{\phi n} \mathbf{Z}_{nn}^{-1} \mathbf{Z}_{\phi n}^\top) \mathbf{i}_\phi$$

- Connection with special case of transposed lines and symmetric components
- Studied the cases of parallel lines and underground cables