Luciano Rodriguez

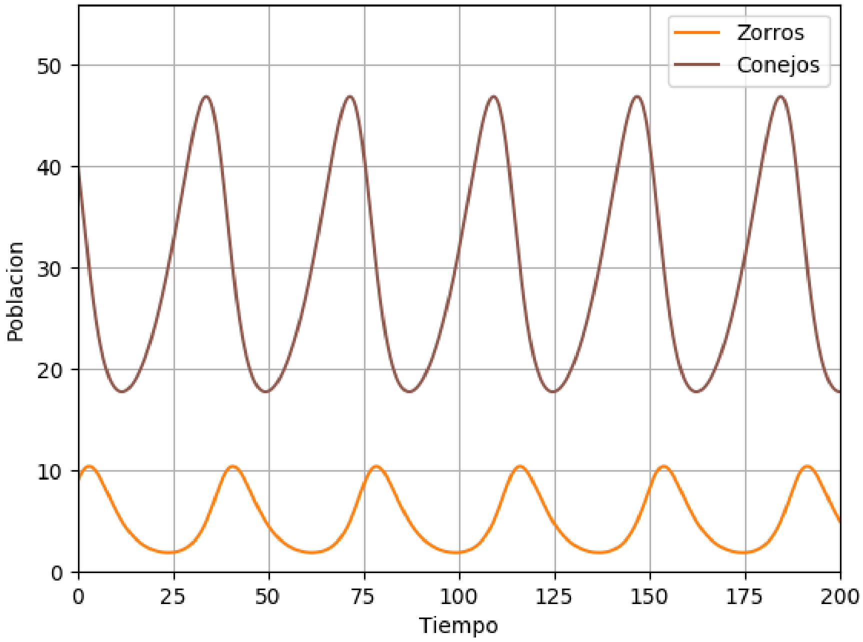
Trabajo Practico 1

Modelo depredador-presa de Lotka-Volterra

Desarrollo

a) Código en Python desarrollado en: *https://github.com/lucianoinso/LotkaVolterraPy*
Se utilizaron los siguientes valores:
Coeficientes: $a = 0.1$, $b = 0.02$, $c = 0.3$, $d = 0.01$
Paso de integración: $h = 0.05$
Tiempo entre: $t = 0$ y $t = 200$
Condiciones iniciales de las poblaciones: $x(0) = 40$, $y(0) = 9$

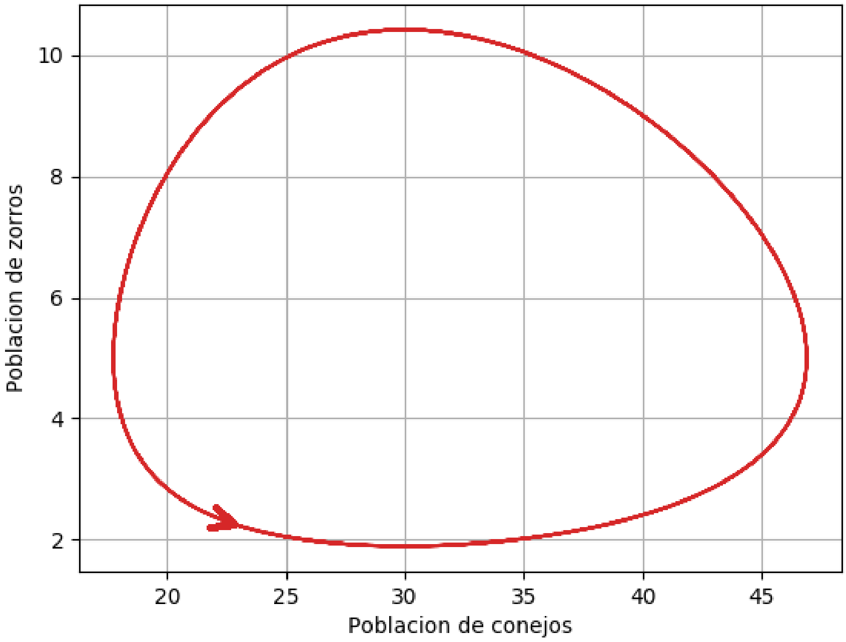
b)



En el grafico se puede observar una correlación entre el comportamiento de las poblaciones de zorros y conejos, al comienzo nos encontramos con que la población de conejos se encuentra alta, con la cantidad siendo 40, esto produce que la población de zorros crezca, mientras se da este crecimiento en la población de zorros, observamos que la población de conejos disminuye abruptamente hasta llegar a menos de 20, cuando la población de conejos es menor a 30 empieza a bajar también la población de zorros, se interpreta que al haber menos alimento para los zorros (su alimento siendo los conejos) éstos terminan sufriendo bajas en su población también, en cierto punto este decrecimiento en la población de zorros permite que la población de conejos pueda crecer nuevamente, esto se interpreta como que al haber menos zorros en el ambiente, los conejos tienen mas posibilidades de sobrevivir y reproducirse, llegando la población de conejos a su pico en 47, cuando la población de conejos se encuentra cerca de 35 se ve de nuevo un incremento en la población de zorros hasta que el crecimiento es tal que empieza a disminuir la población de conejos nuevamente, este comportamiento se da cíclicamente.

En resumen, cuando la población de conejos crece, la población de zorros crece también haciendo que la población de conejos decrezca en los siguientes pasos de tiempo, esto produce que los zorros tengan menos alimento y su población decrezca en los siguientes pasos de tiempo, dando lugar nuevamente a un crecimiento de la población de conejos, luego el comportamiento se repite.

c)



Se puede observar la correlación entre el comportamiento de poblaciones descriptas en el punto b) y sobre todo el aspecto cíclico de las mismas. Vemos un pico en la población de conejos (47) cuando la población de zorros es 5 de ahí en mas cuando la población de zorros sigue creciendo la población de conejos empieza a bajar, cuando la población de conejos llega a 30 se ve el máximo en la población de zorros (10) y de ahí empiezan a decrecer ambas poblaciones hasta llegar la de zorros a 5 y la de conejos a 18, la poca población de zorros deja lugar al crecimiento en la población de conejos, vemos que los zorros siguen decreciendo hasta llegar a ser solo 2 con una población de conejos en 30, de ahí en mas empiezan a crecer ambas hasta llegar a una población de conejos en 47 y zorros en 5, y el comportamiento descripto se vuelve a repetir.

d) En las ecuaciones:

$$\dot{R}(t) = aR(t) - bR(t)F(t)$$
$$\dot{F}(t) = -cF(t) + dR(t)F(t)$$

Donde:

$$R(t) : \text{Población de conejos en el tiempo t}$$
$$F(t) : \text{Población de zorros en el tiempo t}$$

• $\boldsymbol{aR(t)}$: El coeficiente $\boldsymbol{a}$ se puede interpretar como la razón de crecimiento de la población de conejos en el tiempo sin tener en cuenta encuentros con zorros en el ambiente, al ser positivos ambos números ($\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{R(t)}$) se asume que la población crece todo el tiempo sin tener en cuenta bajas por causas naturales (como llegar a edad de fallecimiento o falta de alimento).

• $-\boldsymbol{bR(t)F(t)}$: Este termino se puede interpretar como el decrecimiento en la población de conejos ante el encuentro entre miembros de ambas poblaciones, pudiéndose tomar $\boldsymbol{b}$ como el indice de perdidas en la población de conejos ante tales encuentros. Tenemos que mientras mas alto $\boldsymbol{R(t)}$, $\boldsymbol{F(t)}$ o $\boldsymbol{b}$ mas decrecimiento se da en la población de conejos.
Si pusiéramos un $\boldsymbol{b}$ mas chico podríamos observar que la población de conejos no baja tan abruptamente que con un $\boldsymbol{b}$ mas grande, permitiendo esto que la población de zorros crezca bastante mas, y la de conejos crezca un poco mas también pero no tanto como la de zorros, se puede interpretar como que los zorros se alimentan de menos cantidad de conejos ante tales encuentros, si cambiásemos los conejos por animales mas grandes tendría sentido poner un $\boldsymbol{b}$ mas chico.

• $-\boldsymbol{cF(t)}$: Al ser éste termino negativo podemos interpretar el coeficiente $\boldsymbol{c}$ como la proporción de perdidas en la población de zorros por causas naturales (sobre todo por no tener alimento) en el paso del tiempo , en estas ecuaciones se asume que los zorros si no poseen alimento (conejos) solamente mueren, y se reproducen solo si poseen alimento (existe suficiente población de conejos).

• $\boldsymbol{dR(t)F(t)}$: Este termino se puede interpretar como el crecimiento en la población de zorros ante el encuentro con miembros de la población de conejos, pudiéndose tomar el coeficiente $\boldsymbol{d}$ como el indice de crecimiento en la población de zorros ante tales encuentros, un $\boldsymbol{d}$ pequeño significaría que los zorros precisan de mas cantidad de conejos para alimentarse y así reproducirse, mientras que un $\boldsymbol{d}$ grande significaría lo contrario, que la población de zorros crece a un indice mas alto necesitando una menor cantidad de conejos como alimento para crecer. Tendría sentido poner un $\boldsymbol{d}$ mas alto si la presa fuera un animal mas grande, lo cual permitiría alimentar mas zorros permitiendo una mayor reproducción con una menor cantidad de presas que con un $\boldsymbol{d}$ mas chico.

Retrato de fase

Para el retrato de fase, primero, obtenemos la matriz jacobiana:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} \\ \\ \frac{dg}{dx} & \frac{dg}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - by & -bx \\ \\ dy & -c + dx \end{bmatrix}$$

Igualando a 0 y resolviendo encontramos dos puntos fijos:

$$(x, y) = (0, 0) \qquad (x, y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

Valuando A en cada punto fijo nos queda:

$$A(0,0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \qquad A\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-bc}{d} \\ \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, calculamos el polinomio característico de A valuada en cada punto fijo obtenido:

$\boldsymbol{Caso(x^*, y^*) = (0, 0)}$

$$0 = det(A_{(x^*,y^*)} - \lambda I) = det\left(\begin{bmatrix} a - \lambda & 0 \\ \\ 0 & -c - \lambda \end{bmatrix}\right) = (a - \lambda)(-c - \lambda)$$

Obtenemos así las raíces/autovalores: $\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = -c$
Valuando con los coeficientes dados nos queda $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = -0.3$
Como $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tenemos que el punto (0,0) es un ***punto de ensilladura***, en la grafica lo vamos a visualizar como una flecha que decrece hacia 0 en el eje y, y otra flecha que crece positivamente en el eje x. No tenemos en cuenta los demás cuadrantes ya que las poblaciones son siempre positivas.

$$\boldsymbol{Caso(x^*, y^*) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)}$$

$$0 = det(A_{(x^*,y^*)} - \lambda I) = det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & \frac{-bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + ac$$

Resolviendo nos queda:

$$0 = \lambda^2 + ac$$

Finalmente obtenemos las raíces/autovalores:

$$\lambda^+ = \sqrt{ac}i, \quad \lambda^- = -\sqrt{ac}i$$

Como las raíces obtenidas son complejas y además $Re(\lambda^+) = Re(\lambda^-) = 0$ estamos ante el caso en el que el punto fijo $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ es un ***centro***, valuando con los coeficientes dados obtenemos:

$$\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \left(\frac{0.3}{0.01}, \frac{0.1}{0.02}\right) = (30, 5)$$

Finalmente el retrato de fase queda de la siguiente manera: