U.PORTO
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO NA DETERMINAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO

Por

Benvindo Nsamu

Orientadora: Prof. Dra. Maria do Carmo Miranda Guedes

Co-orientador: Prof. Dr. Carlos Menezes

Mestrado em Engenhária Matemática

Departamento de Matemática

Maio de 2017

UNIVERSIDADE DO PORTO

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO EM ENGENHARIA MATEMÁTICA

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO NA DETERMINAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO

Por

Benvindo Nsamu

Dissertação submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Matemática.

Trabalho efetuado sob orientação da Professora Doutora Maria do Carmo Miranda Guedes e co-orientação do Professor Doutor Carlos Menezes.

Faculdade de Ciências do Porto

Maio de 2017

Agradecimentos

Meus agradecimentos vão especialmente para a professora Maria do Carmo Miranda Guedes pelo apoio, disponibilidade e orientação durante o processo de elaboração e desenvolvimento desse trabalho, sem esquecer o prof Carlos Menezes como Co-orientador.

Á minha família, meu pai Nsamu Kiakala e minha Mãe Luzolo Juliana, especialmente minha esposa Sofia Nsamu, aos meus filhos e meus irmãos. As famílias Abel Miguel, Afonso Luviluko, Carlos Diacanawa, Mbiyavanga Bemba Queria , Aleona Papusoi, Moises Vungo e Petesse por o apoio, amor , carinho e constante incentivo na formação.

Aos meus amigos e colegas pelas palavras de encorajamento.

A todos os professores do curso de Engenharia Matemática pelo seu contributo para a minha formação.

A todos agradeço, profundamente.

Resumo

Neste trabalho é analisado o modelo clássico de Markowitz (1952) em comparação ao modelo desenvolvido por Konno e Yamazaki (1991) e também são comparados os resultados obtidos por esses dois modelos de optimização na determinação de carteiras de títulos financeiros, e o seu desempenho.

Apesar dos dois modelos serem bastante semelhantes e determinarem uma carteira que minimiza o risco mediante um nível de retorno fixado, o modelo de Konno e Yamazaki apresenta uma maior simplicidade pois usa o desvio absoluto médio como medida de risco em vez da variância usada no modelo clássico de Markowitz. Isso permite formular um problema de programação linear em vez de programação quadrática.

Essas formulações foram ensaiadas com dados referentes ao mercado financeiro português. Para este efeito, em concreto, foram determinadas as carteiras óptimas tendo em conta as cotações diárias de fecho dos títulos do índice bolsista português *PSI20* durante o período de 2012 a 2015.

Foram usadas as rotinas adequadas do software R para obtenção de resultados que serão analisados comparativamente.

Palavras-chave: Carteiras de investimento, retorno, medidas de risco, otimização linear e quadrática.

Abstract

In this work the classic model of Markowitz (1952) is analyzed in comparison to the model developed by Konno and Yamazaki (1991), and the results obtained by these two models of optimization applied to financial portfolios are also compared, in terms of their performance.

Although the two models are quite similar and determine a portfolio that minimizes risk through a fixed return level, the Konno and Yamazaki model shows a greater simplicity as it uses the mean absolute deviation as a risk measure rather than the variance used in the classic Markowitz model. Also it formulates the problem as one of linear programming instead of quadratic programming.

These formulations will be tested with data referring to the case of the Portuguese financial market. For this purpose, in particular, the optimal portfolios were determined taking into account the daily closing prices of the Portuguese stock market index PSI20 during the period of 2012 to 2015. It was used R as software to obtain results that will be compared.

Key words: Portfolios of investment, return, risk measures, linear and quadratic optimization.

Conteúdo

Capítulo 1. Introdução

O mercado financeiro passou, nas ultimas décadas, a utilizar técnicas relativamente sofisticadas como ferramentas de apoio à tomada de decisões. A composição de carteiras de investimento que tragam o máximo de lucro possível a um investidor tem sido um problema muito estudado. Todo investimento que se faça, deverá ter em conta o grau de risco que possuem os produtos financeiros que o constituem para evitar uma perda monetária de grande escala. Surge desta forma a necessidade de se medir e controlar o risco financeiro de vários produtos financeiros para se tomarem decisões acertadas quanto ao retorno que estes podem trazer ao investidor.

O risco nas operações financeiras traz outro problema, o de retorno de uma carteira de investimentos, isto é a definição de uma medida de risco que seja capaz de quantificar o risco que tem um activo pertencente à carteira.

O uso de modelos matemáticos em mercados financeiros, nomeadamente de Estatística e de Investigação Operacional, deve-se essencialmente à inovação e ao amadurecimento destes mercados, que utilizam novos produtos financeiros, dando origem a uma maior necessidade de protecção contra riscos de diferentes naturezas para uma melhor composição de uma carteira de investimentos.

Foram os trabalhos realizados por Markowitz , em 1959, sobre a relação entre risco e retorno que marcaram uma nova história nas finanças modernas. O seu contributo fundamental foi a distinção entre a variabilidade do retorno de um activo fínanceiro e o seu impacto no risco de uma carteira de investimentos. A modelação matemática do modelo de Markowitz consiste num problema de Investigação Operacional, mais precisamente um problema de optimização quadrática com uma matriz de variâncias e covariâncias e sendo, por isso,muito exigente do ponto de vista computacional.

Pretende-se com este trabalho apresentar o modelo para selecção de carteiras de activos financeiros desenvolvido por Konno e Yamazaki em 1991, e compará-lo com o modelo de Markowitz.

O modelo de Konno e Yamazaki é apontado como um importante contributo para a resolução de problemas de gestão de carteiras por introduzir uma medida de risco mais simples , o desvio absoluto médio, do que a utilizada por Markowitz, a variáncia .
Através de uma análise de acções do mercado português, pretende-se investigar a efectiva possibilidade de emprego dos modelos a problemas reais na composição de carteiras de acções.

Neste trabalho vou considerar apenas carteiras constituídas de acções, por simplicidade de apresentação, ainda que os modelos sejam aplicáveis a situações de maior abrangência que incluem activos de outra natureza como, por exemplo, obrigações e derivados.

O trabalho está estruturado do seguinte modo, depois desta breve introdução:

- No capítulo 2, apresentam-se os elementos de teoria sobre os modelos de optimização, Programação Linear, Quadrática e dualidade, o retorno, a carteira de investimento e as medidas de riscos.
- No capítulo 3, apresentam-se os modelos em estudo para determinação de carteiras de investimento, isto é , os modelos de Markowitz e a do Konno e Yamazaki.
- No capítulo 4, são comparados os desempenhos dos dois modelos formulados, pela apresentação de uma experiência computacional.
- No capítulo 5, é apresentada uma síntese do que foi feito no trabalho.

Capitulo 2. Elementos da Teoria

Actualmente em diversas áreas da actividade humana como sejam o planeamento económico e social, os processos tecnológicos, o controlo da produção e a análise numérica, aparecem problemas de determinação de um máximo ou um mínimo de uma função de várias variáveis satisfazendo, ao mesmo tempo, certo número de restrições. Estes problemas são estudados em Programação Matematica.

Um problema de Programação Matematica pode ter diversas formas. Os resultados teóricos e os métodos de resolução, bem como os processos eficientes de cálculo, dependem de forma do problema.

2.1. Modelos de otimização

Seja $f_0(x)$ uma função de valores reais com $x \in R^n$. Se se pretende otimizar $f_0(x)$ sem restringir o vector x, então temos o problema:

$$\text{maximizar} \qquad f_0(x) \qquad\qquad (2.1)$$

O problema de otimização com restrições de igualdade tem a forma:

$$\begin{aligned} &maximizar \quad f_0(x) \\ &sujeito \quad a \quad f_i(x) = b_i, \quad i = 1,. \, . \, ., m \end{aligned} \qquad\qquad (2.2)$$

em que $f_0\, , f_i \; \in: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e , em geral , $m < n$.

Um outra forma de problema de otimização é do tipo:

$$\max \quad f_0(x)$$
$$(2.3)$$
$$sujeito \quad a \quad f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1,. . . , m$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ são as variáveis do problema , f_0: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a função objectivo e $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, . . . , m$ e as constantes $b_1, . . . , b_m$ definem as m restrições do problema.

Um problema de otimização é considerado convexo se as funções $f_{0,} f_1, . . . , f_m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ foram convexas, isto é, satisfazem a condição:

$$f_i(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f_i(x) + \beta f_i(y) \qquad (2.4)$$

sendo $x, y \in \mathbb{R}^n, i = 1, . . . , m$ e para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$ com $\alpha + \beta = 1$.

Apresentam-se a seguir algumas formas particulares de problemas de Programação Matemática.

2.1.1 Problema de Programação Linear

Um problema de Programação Linear (PL) é um problema de otimização que maximiza, ou minimiza, uma função linear das variáveis de decisão chamada função objetivo.

Os valores das variáveis de decisão devem satisfazer um conjunto de restrições, sob a forma de equação ou inequação linear.

O problema pode ter a forma:

$$\min \quad c^T x$$
$$(2.5)$$
$$sujeito\ a \quad Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

onde, $x \in \mathbb{R}^n$ são as variaveis e, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ são parâmetros do problema.

2.1.2 Modelo de Programação Quadrática.

O problema de Programação Quadrática (PQ) é o caso mais simples de programação não linear.

Neste problema a função objetivo é quadrática e as restrições são lineares.

$$\begin{array}{ll} \min & x^T D x + 2c^T x + d \\ sujeito\ a & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (2.6)$$

em que , $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^m$

2.1.3 Dualidade

Qualquer problema de Programação Matemática está sempre associado a um outro problema que é designado por *problema dual*. O primeiro problema denomina-se por *problema primal.*

Considerando, $x \in \mathbb{R}^n$ como variável do problema, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, se o *problema primal* for do tipo:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ sujeito\ a & Ax \geq b \\ & x \geq 0\ , \end{array} \qquad (2.7)$$

o seu *problema dual* é o seguinte:

$$\begin{array}{ll} \max & b^T u \\ sujeito\ a & A^T u \leq c^T \\ & u \geq 0\ , \end{array} \qquad (2.8)$$

onde, $u \in R^m$ a variável do *problema dual, chamada variável dual.*

Um resultado importante é o do teorema de dualidade forte.

- Se existir uma solução ótima para o *problema primal,* então existe uma solução ótima para o *problema dual,* e as duas funções objetivo têm o mesmo valor ótimo.

2.1.4 Métodos de resolução

Dois métodos importantes são muitos utlizados para resolver este tipo de problema são:

- O método simplex desenvolvido por Dantzig (1947), traduz-se em algoritmos de resolução que podem ser na forma primal ,dual ou primal-dual.
- *Os métodos de ponto interior,* que são mais recentes , são abordados em por Boyd e Vandenberghe (2004). Estes algoritmos permitem resolver em tempo útil um problema de programação linear com um número muito elevado de variáveis e restrições.

2.2 Retorno

O retorno é o ganho gerado por um ativo num certo intervalo de tempo. A taxa de retorno é a relação percentual entre o retorno e o valor do ativo.

Um ativo é um conjunto de bens, créditos ou direitos avaliados pelos respectivos custos e que forma o património de uma pessoa singular ou colectiva durante um determinado tempo.

Existem diferentes tipos de ativos como o *ativo circular* (acções, dívidas de terceiros de curto prazo, depósito bancário etc.), *ativo não circular (* imobilizado corpóreo como, por exemplo, um prédio e não corpóreo, por exemplo, investimento financeiro, dívidas de terceiros de longo prazo).

Uma carteira de investimento é um conjunto ou grupo de ativos que pertence a um investidor, a uma pessoa colectiva ou a uma empresa. A carteira permite ao investidor a possibilidade de diversificar os seus ativos bem como os riscos. Uma carteira com menor risco apresenta um possível menor retorno e uma carteira com maior risco, tem um possível maior retorno.

O risco no conceito financeiro é a possibilidade de prejuízo financeiro ou uma medida de probabilidade de ocorrência de prejuízo. Também pode ser definido como uma variabilidade de retornos de um ativo.

O valor do retorno da carteira é dado da seguinte forma:

$$r_\varphi = r^T\varphi = \sum_{i=1}^{n} R_i\varphi_i \qquad (2.9)$$

Sendo R_i uma variável aleatória que representa a taxa de retorno o activo i , com $i = 1, \ldots, n$ e φ_i o valor a investir no ativo i.

É habitual usar o retorno esperado da carteira r, associado ao risco, ou seja,

$$E[r_\varphi] = E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i\varphi_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[R_i]\varphi_i \qquad (3.0)$$

Outra forma de considerar o risco é tomar o segundo momento da distribuição dos retornos, ou seja, a variância V que é dada por:

$$V = V(r_\varphi) = E\left[\,(r_\varphi - E(r_\varphi))^2\right] \qquad (3.1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\varphi_i\varphi_j$$

em que

$\sigma_{ij} = Cov(r_i, r_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$

A variância da carteira de investimentos depende da covariância entre os pares de ativos das empresas que por sua vez dependem da correlação entre os ativos dessas empresas.

2.3 Medidas de Risco

Considera-se uma medida de risco como uma função que atribui a cada composição de carteira, um número representando o risco. Trata-se o retorno da carteira como uma variável aleatória com distribuição de probabilidade conhecida, e as medidas de risco dependem também desta distribuição.

No modelo de Markowitz (1952), o risco é medido através da variância do retorno da carteira. O modelo proposto por Konno e Yamazaki (1991) utiliza o desvio médio absoluto como medida de risco.

Markowitz admite que:

- A distribuição da variável aleatória rendimento dos retornos segue uma distribuição normal;
- Perante duas ou mais carteiras com mesmo retorno, a carteira com menor risco é a mais desejada pelos investidores;
- Perante duas ou mais carteiras de investimentos com mesmo risco, os investidores preferem a carteira com maior retorno;
- A avaliação de carteira é feita com o valor esperado e com a variância, ou desvio padrão, dos retornos num determinado período.

A preocupação de um investidor na gestão de sua carteira de ativos é retratada pelo tipo de risco que controla, seja este o risco de crédito, de liquidez, o risco operacional, o legal, entre outros.

Neste trabalho só há interesse no risco de mercado, que consiste na possibilidade de ocorrerem flutuações adversas nos preços dos ativos que compõem uma carteira de investimento.

Capítulo 3. Otimização aplicada a carteiras de Investimento

No mercado financeiro, um investidor que esteja a compor uma carteira de acções deve ter em mente as várias dimensões do risco, principalmente o risco de mercado, ou seja, o risco de ocorrer uma variação adversa dos preços dos activos em carteira, que conduza a uma redução do retorno do investimento.

Um investidor racional pretende manter uma carteira com retorno tão grande quanto possível ao mesmo tempo em que pretende tornar o risco tão pequeno quanto possível. Assim, para um fíxado nível de retorno que considere aceitável, o investidor deve encontrar uma carteira que minimize o risco.

Em Programação Matemática é estudado o problema da determinação de um máximo ou um mínimo, de uma função de várias variáveis satisfazendo, ao mesmo tempo, um certo número de restrições.

Matematicamente, como já se viu , o risco de mercado pode ser tratado como uma variável aleatória o que justifica a necessidade de aplicação dos modelos de Programação Matemática para obtenção do valor dessa variável aleatoria.

Neste trabalho, consideramos dois modelos de otimização muito importantes para a determinação de carteira de investimento. O modelo de Markowitz (1952) e o modelo de Konno e Yamazaki (1991).

3.1 Modelo de Markowitz

Harry Markowitz (1952) desenvolveu um modelo com o qual o investidor racional procura minimizar o risco da sua carteira de ações em função de uma determinada rentabilidade esperada.

O problema que se põe é a determinação de uma carteira de investimentos com $n\ activos$, minimizando o risco e exigindo um retorno mínimo.

Este tipo de problema pode ser visto como um problema de Programação Matemática da forma:

$$\begin{aligned} &\min && Risco \\ &sujeito\ a && E[r_j] \geq \rho M_o \\ &&& \sum_{j=1}^{n} x_j = M_o \\ &&& x_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

O retorno esperado da carteira de ações é dado por:

$$r(x_1\ , \dots, x_n) = E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j\ x_j\right] = \sum_{j=1}^{n} E\left[R_j\right] x_j \tag{3.2}$$

Onde,

$E[.]$: valor esperado da variável aleatória a considerar entre parênteses;

R_j: Variável aleatória, taxa de retorno do título j;

x_j: valor em unidades monetárias a investir no título j;

M_o: fundo ou capital inicial disponibilizado;

n: número de títulos disponíveis para investimento.

Tomando para medida de risco a variância de retorno, o problema formula-se do seguinte modo :

$$\min \qquad Var[r_\varphi] \qquad (3.3)$$

$$sujeito\ a \qquad \sum_{j=1}^{n} E\ [R_j]x_j \geq \rho M_o$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_o$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,.\ .\ .,n$$

Ao longo deste trabalho vamos considerar r_{jt} a realização da variável aleatória R_j no período $t, com\ t = 1,.\ .\ .,T\ e\ j = 1,.\ .\ .,n$ uma vez que se trabalha com os dados históricos. E supõe-se que o valor esperado da variável aleatória possa ser aproximado pela média aritmética desses valores.

Considerando, $r_j = E[R_j] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{jt}$

Nesta forma, o modelo para seleção de carteiras otimizadas, segundo Markowitz é:

$$\min \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}x_ix_j \qquad (3.4)$$

$$sujeito\ a \qquad \sum_{j=1}^{n} r_jx_j \geq \rho\ M_o$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_o$$

$$x_j\ \geq 0, \qquad j = 1, \quad .\ .\ . \quad ,n$$

Onde,

ρ : o parâmetro que representa a taxa mínima de retorno requerido pelo investidor.

μ_j: o montante máximo em unidades monetárias que pode ser investido no título j.

σ_{ij}: covariância entre as rentabilidades dos títulos i e j;

Este problema de Programação Quadrática tem $n\, variáveis$, e $n\, restrições$ de não negatividade e envolve o cálculo de uma matriz quadrada de $n \times n$ de valores de σ_{ij} (covariância), o que pode construir um problema para esse modelo.

É de notar que também se pode considerar apenas a composição da carteira em termos da percentagem do ativo $i, i = 1, \dots, n$. Assim, as restrições seriam

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \tag{3.5}$$

3.2 Modelo de Konno e Yamazaki

Em Konno e Yamazaki (1991) foi introduzido o desvio médio absoluto como medida de risco, em alternativa à variância.

Risco da carteira de títulos segundo Konno e Yamazaki

$$w(x) = E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right] \tag{3.6}$$

Com as medidas de risco utilizadas por Markowitz em (3.3) e por Konno e Yamazaki em (3.7), se $(R_1, \dots \dots .., R_n)$ for multivariado e normalmente distribuído, uma carteira ótima dada por um dos modelos é garantidamente uma carteira ótima no outro (Konno & Yamazaki, 1991).

Ou seja, estas duas medidas são essencialmente as mesmas se $(R_1, \dots\dots.., R_n)$ tem distribuição normal multivariada.

Modelo Konno e Yamazaki

$$\min \qquad w(x) = E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j\, x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right] \qquad (3.7)$$

$$sujeito\ a \qquad \sum_{j=1}^{n} E\left[R_j\right] x_j \geq \rho M_o$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_o,$$

$$x_j \geq 0 \quad , \quad j = 1, \;.\;.\; .n,$$

Vamos considerar r_{jt} uma realização de variável aleatória R_j durante o período t com $t = 1, \dots, T$, que supomos ser disponivel através dos dados históricos de alguma projeção futura . Também assumimos que o valor esperado da variável aleatória pode ser aproximada pela média destes dados.

Com a notação:

$$a_{jt} = r_{jt} - r_j, \qquad j = 1, \dots\dots, n \qquad t = 1, \dots\dots\dots., T \qquad (3.8)$$

Onde,

a_{jt} é desvio do rendimento do título j no momento t face ao rendimento médio do título j, ou seja, $w(x)$ pode ser estimado da seguinte forma:

$$w(x) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n}\left(r_{jt} - r_j\right)x_j\right| \qquad (3.9)$$

Então (3.8) conduz ao seguinte problema de minimização

$$\min \qquad \sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{jt}x_j\right| \Big/ T \qquad (4.0)$$

$$Sujeito\ a \qquad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M_o$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_o,$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,n$$

Assim, o problema de programação linear de Konno e Yamazaki pode tomar a forma:

$$\min \qquad \sum_{t=1}^{T} y_t/T \qquad (4.1)$$

$$sujeito\ a \qquad y_1 + \sum_{j=1}^{n} a_{jt}x_j \geq 0, \qquad t = 1, \ \ldots \ ,T$$

$$y_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{jt}x_j \geq 0, \qquad t = 1, \ \ldots \ ,T$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M_{o,}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_o,$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,\ldots,n$$

onde y_t é a variável representando o valor absoluto do somatório da diferença dos retornos $(r_{jt} - r_j)$ com produto x_j no tempo t, isto é o desvio do rendimento do título j no momento t , face ao rendimento médio do título j.

As principais vantagens do modelo de otimização de carteiras de títulos de Konno e Yamazaki sobre o modelo desenvolvido por Markowitz são as seguintes:

- dispensa o cálculo da matriz de variâncias e covariâncias que pode exigir elevado tempo de cálculo;
- proporciona grande facilidade na atualização do modelo com novos dados;
- é mais fácil a resolução de um problema de Programação Linear do que um problema de Programação Quadrática.

De igual modo pode não se usar explicitamente a quantia a investir $M_{o,}$ considerando a percentagem de cada ativo na composição da carteira.

Capítulo 4. Experiência Computacional

Neste capítulo , apresenta-se uma experiência computacional que visa comparar o desempenho do modelo clássíco de Markowitz com o modelo de desvio absoluto médio de Konno e Yamazaki.

Na actualidade a rentabilidade da maioria dos activos financeiros apresenta elevada volatilidade devido às crises financeiras que têm ocorrido. Esta incerteza é a principal razão pela qual é atribuída bastante importância às medidas de controlo do risco no momento de se tomar uma decisão de investimento.

O contributo do modelo de Markowitz sobre a relação entre a rentabilidade e o risco teve uma grande importância na gestão eficiente de carteiras de títulos, estabelecendo um marco na história da área financeira.

Desde então, vários autores dedicaram-se ao estudo de optimização de carteiras de títulos, incluindo propostas de melhoria do modelo de Markowitz nomeadamente a alternativa que se apresenta neste estudo, o modelo de Konno e Yamazaki.

4.1 Dados do mercado financeiro

A escolha de ações de empresas, para considerar como ativos, referentes ao caso do mercado financeiro português será proveniente do índice de empresas admitidas à negociação no Mercado de Cotações Oficiais.

A aposta nos mercados financeiros por parte dos investidores é uma prática comum nos dias de hoje, desde investidores de maior dimensão os investidores de menor dimensão. É possível, hoje em dia realizar investimentos numa grande variedade de aplicações financeiras.
O investimento nestes mercados tem associado um determinado nível de risco consoante o tipo de aplicação.

Tendo em conta uma base de dados de PSI20, foram escolhidas 10 companhias que compõem a carteira no período de 2012 á 2015, sómente as sextas-feiras, e o preço de fecho, com uma média de 50 retornos.

De 2012 à 2014, foi considerada a existencia do BES. Por razão do seu desaparecimento no mercado financeiro, no ano 2015 substituiu-se na carteira o BES pelos CTT. Será apresentada a composição das carteiras optimizadas nos diferentes períodos.

A partir dos retornos das 10 companhias, realizam-se os seguintes procedimentos para resolver os problemas de otimização propostos, em cada um dos períodos em estudo.

Para o Modelo de Markowitz:

1. Cálculo dos retornos medios das companhias escolhidas.
2. Cálculo da covariância entre os seus retornos diários.
3. Resolução de um problema de Programação quadratica
4. Determinação da carteira.

Para o Modelo de Konno e Yamazaki:

1. Cálculo dos retornos médios das companhias escolhidas.
2. Cálculo do desvio do rendimento do título j no momento t face ao rendimento médio do título j.
3. Resolução de um problema de Programação Linear
4. Determinação da carteira.

4.2 Resultados computacionais

Os resultados obtidos vieram de aplicação das rotinas apresentadas nos apéndices B e C.

Foram utilizados diferentes softwares como: Excel para obter alguns dos valores necessários para os cálculos, em particular a matriz de covariância; o R e o LINGO para resolver os modelos de optimização.

Considerando os dados do ano 2012 foram 10 as empresas escolhidas:

BPI, BCP, BES, EDP, GAL, JMT, MEN, ZON, PTC, SON.

Composição da carteira com o Modelo de Markowitz com dados do ano 2012

A composição da carteira obtida com o Modelo de Markowitz. Foi escolher BES e MEN com as seguintes percentagens respectivamente 14 % e 86 %

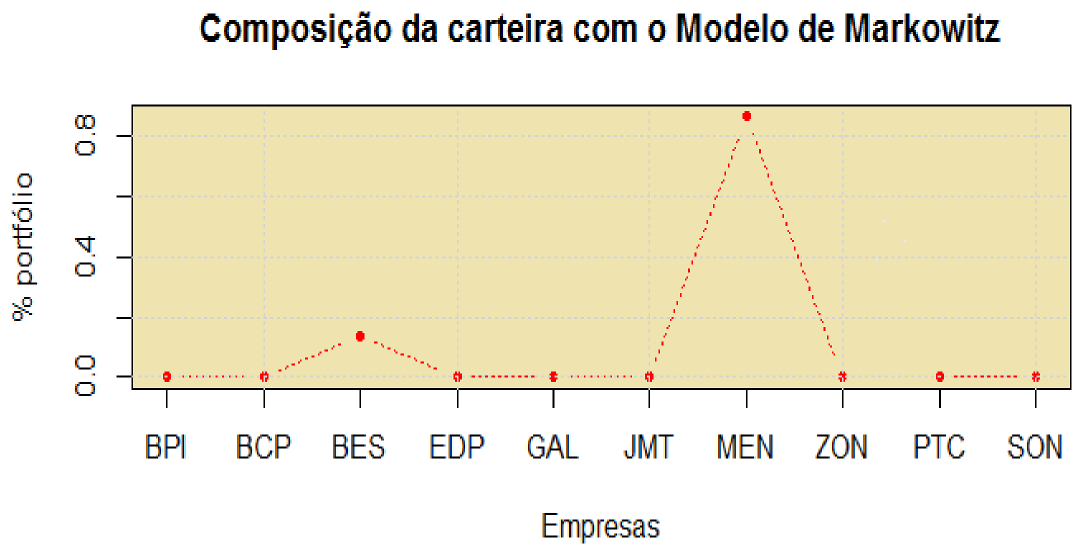

Figura 4.1 Composição da carteira com Modelo de Markowitz para ano 2012.

Composição da carteira com Modelo de Konno e Yamazaki com os dados do ano 2012

A composição de carteira foi feita por três empresas com seguinte percetagem:

BES= 6 %,

GAL= 6 %

MEN= 88 %

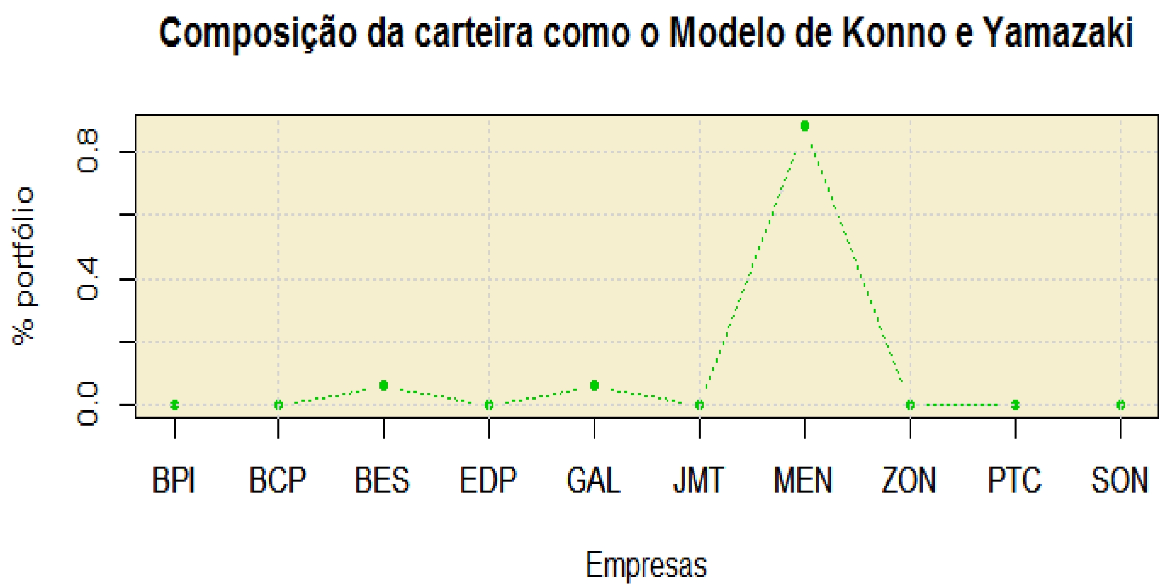

Figura 4.2 Composição da carteira com Modelo de Konno e Yamazaki para ano 2012.

Comparação do Modelo de Markowitz com o Modelo de Konno e Yamazaki com os mesmos dados do ano 2012.

Nota-se que duas empresas, BES e MEN fazem parte da composição da carteira dos dois modelos e a GAL aumenta a composição da carteira com Modelo de Konno e Yamazaki.

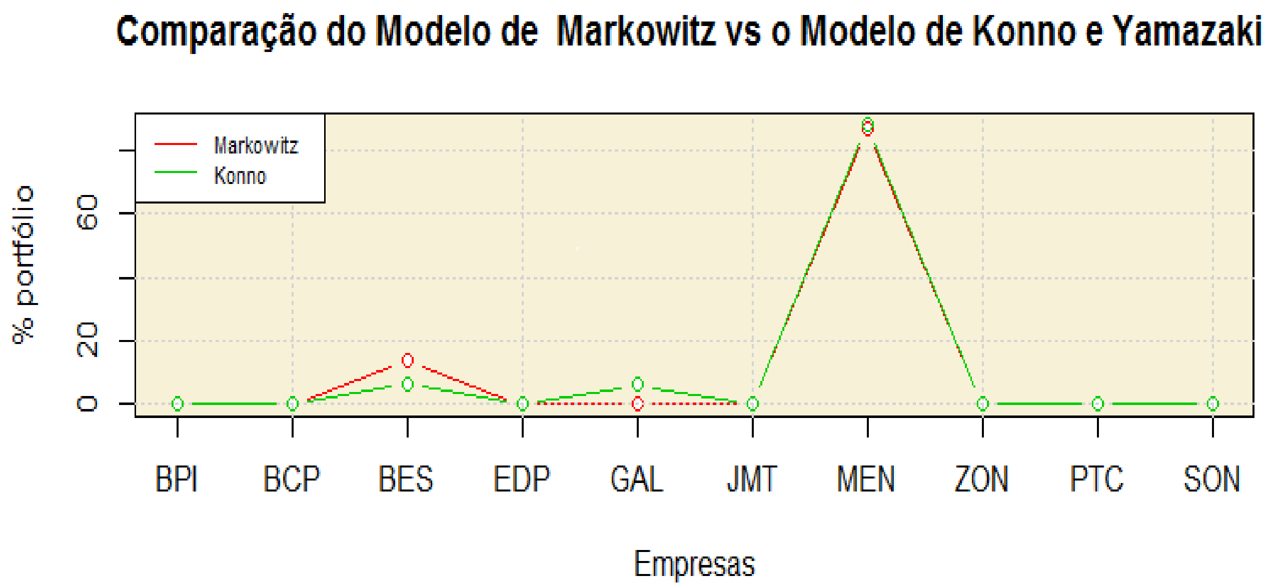

Figura 4.3 Comparação do Modelo de Markowitz vs o Modelo de Konno e Yamazaki para ano 2012.

Com os dados de Janeiro a Outubro de 2015, uma vez que o BES já não existia, escolheram-se as seguintes 10 empresas:

BPI, BCP,CTT,EDP,GALP,JMT,MEN,ZON,PTC,SON.

Foram feitos cálculos semelhantes ao anterior com modelos de Markowitz e Konno e Yamazaki.

Os cálculos nestas condições, levaram a seguinte composição da carteira:

Composição da carteira com o Modelo de Markowitz com dados do ano 2015 (Janeiro à Outubro)

A composição da carteira obtida com o Modelo de Markowitz, foi escolher JMT e ZON com as seguintes percentagens respectivamente 54 % e 46 %.

.

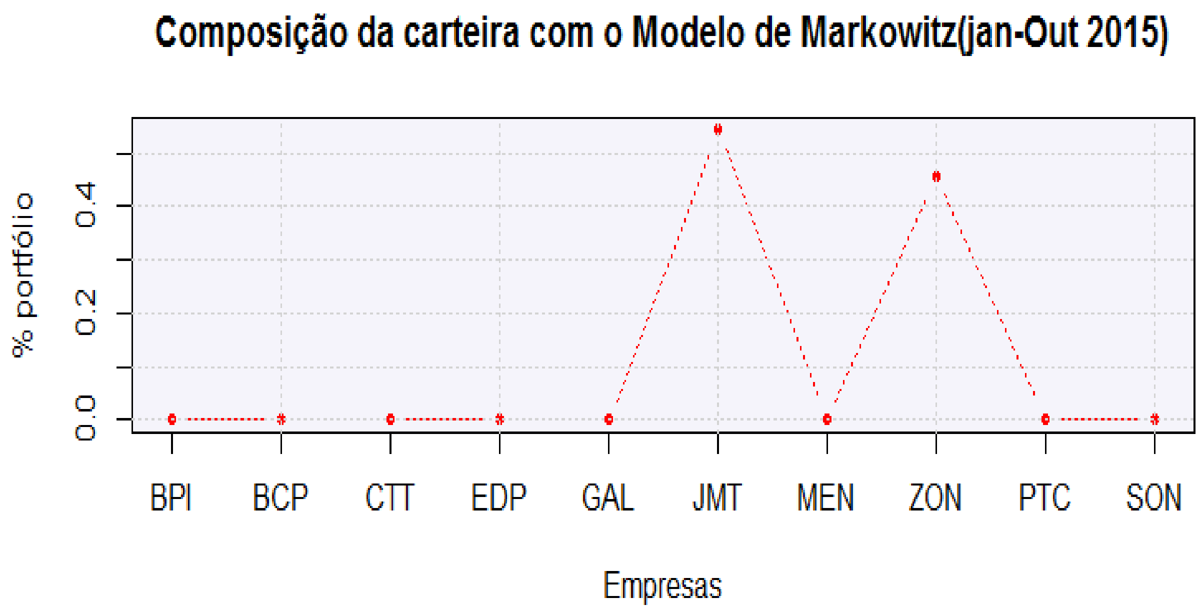

Figura 4.4 Composição da carteira com o Modelo de Markowitz para ano 2015 (Janeiro a Outubro).

Composição da carteira com Modelo de Konno e Yamazaki com os dados do ano 2015 (Janeiro à Outubro)

A composição da carteira obtida com o Modelo de Konno e Yamazaki é constuitida por JMT e ZON com as seguintes percentagens respectivamente 54 % e 46 %.

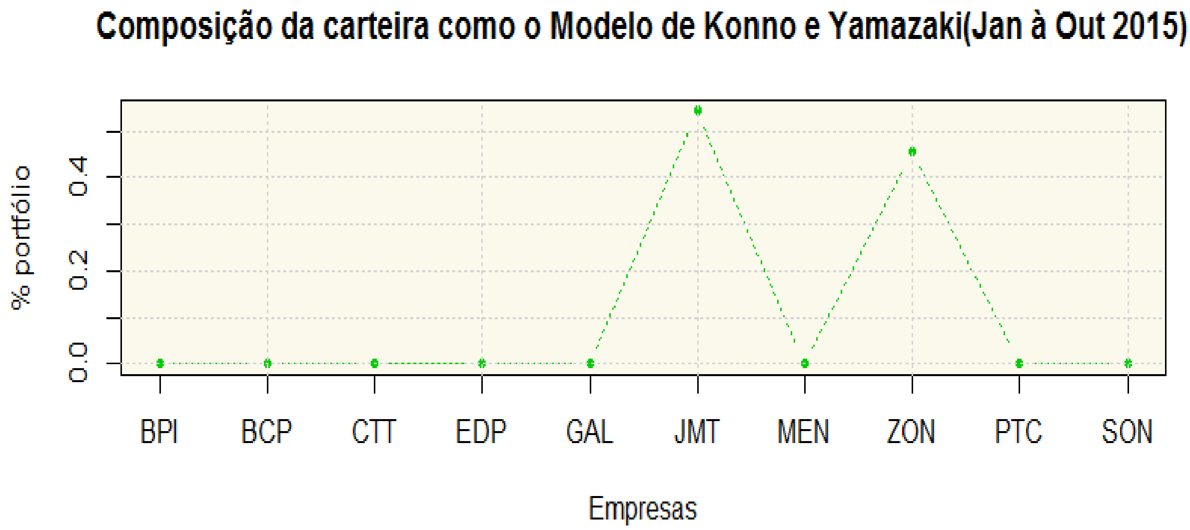

Figura 4.5 Composição da carteira com o Modelo de Konno e Yamazaki para ano 2015 (Janeiro a Outubro).

Considerando agora esta carteira calcularam-se os retornos para o periodo de Novembro à Dezembro de 2015 que se apresentam na figura a seguir.

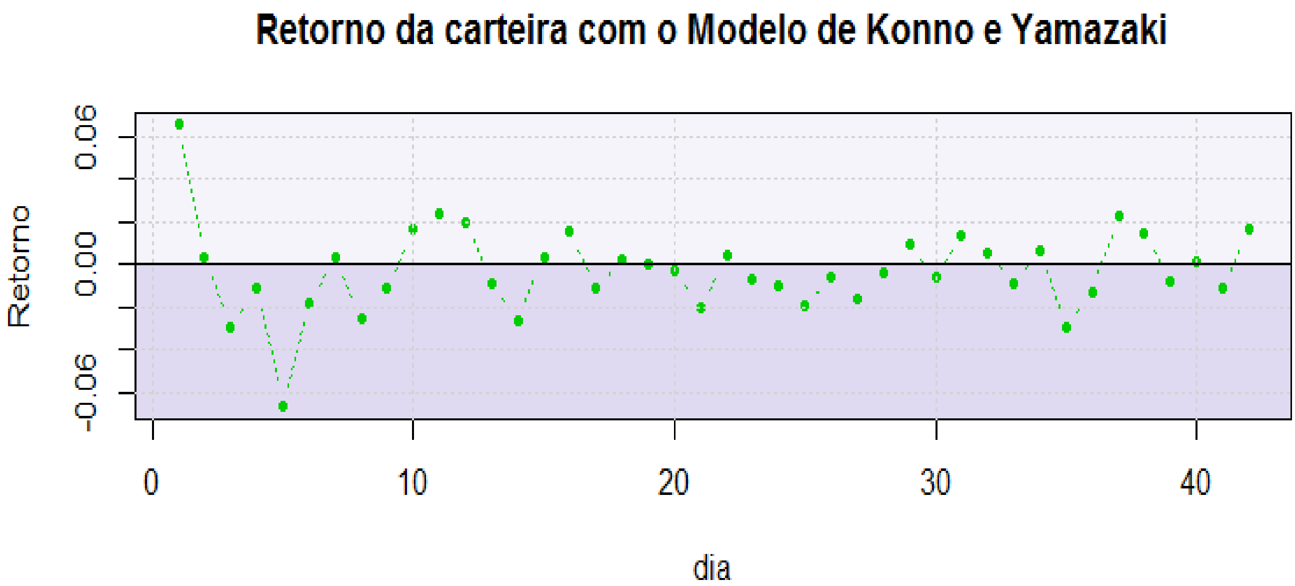

Figura 4.6 O retorno carteira com o Modelo de Konno e Yamazaki para ano 2015 (Novembro a Dezembro).

Tem interesse comparar o retorno desta carteira com o retorno do PSI20. Foram calculados os retornos do PSI20 dos dois meses finais do ano 2015, isto é, mês de Novembro e Dezembro com objectivo de comparar com o retorno da carteira calculado.

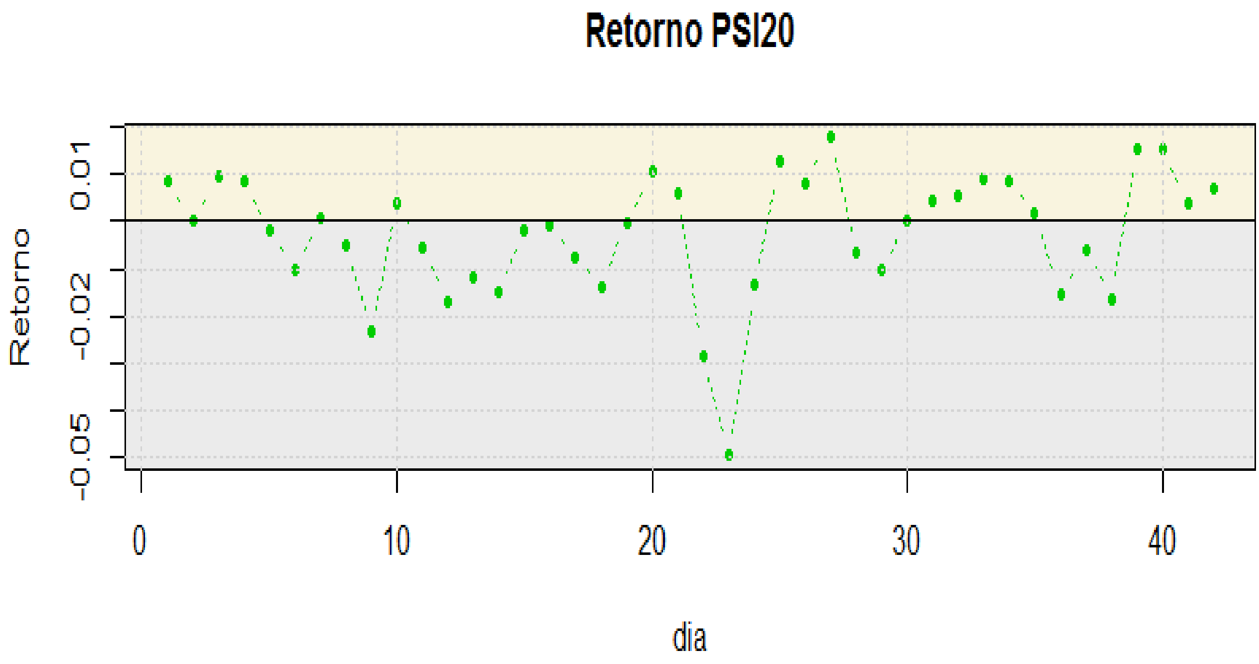

Figura 4.7 Retorno PSI20 ano 2015 (Novembro a Dezembro).

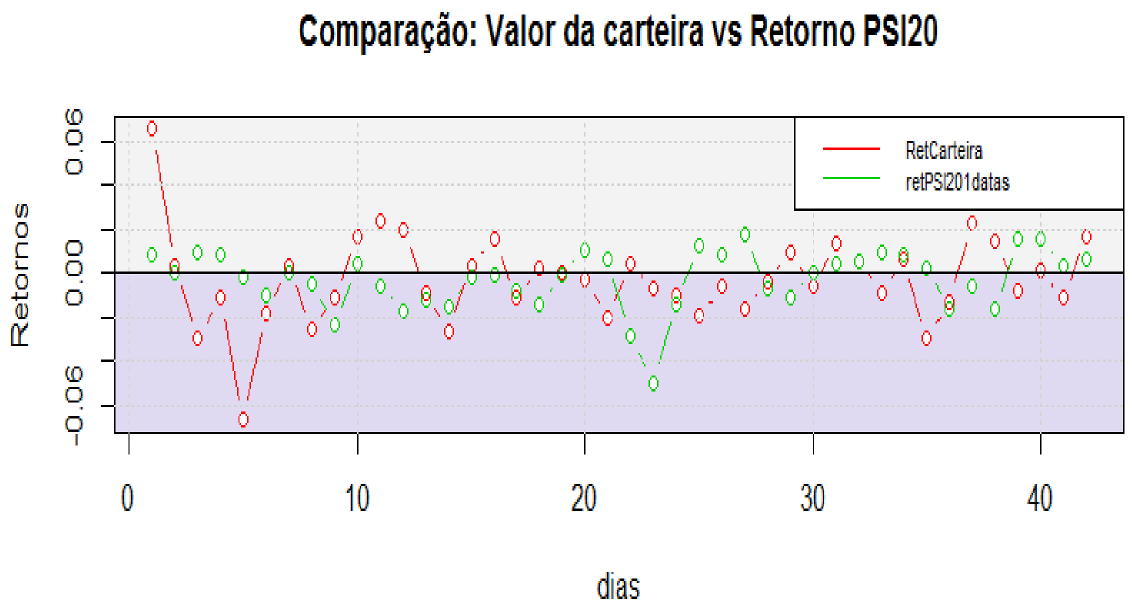

Figura 4.8 Comparação do retorno da carteira usando a composição da carteira com o modelo de Konno (Novembro á Dezembro 2015) vs o retorno do PSI20 (mesmo período).

Podemos concluir, com base nos dados considerados e com mesmo período da actividade, o retorno obtido com modelo de Konno e Yamazaki e com o modelo de Markowitz parece ser superior ao retorno do PSI20.

4.3 Conclusão

A aplicação prática dos modelos de Markowitz e de Konno e Yamazaki ao mercado financeiro português, com empresas cotadas no índice *PSI20*, aponta no sentido das vantagens do modelo de Konno e Yamazaki face ao modelo de Markowitz, conforme apresentadas na Apêndices. Em particular, uma maior rapidez se comparado o conjunto dos procedimentos necessários para o cálculo de carteiras óptimas de acções, sobretudo em carteiras onde está considerado um número elevado de acções, na simplicidade de actualização do modelo com novos dados e na facilidade de resolução de um problema de Programação Linear em relação ao problema de Programação Quadrática.

Capítulo 5. Considerações Finais.

Neste trabalho estudou-se uma aplicação de dois modelos de minimização de risco, comparando o desempenho do modelo de Markowitz, de minimização da variância e o modelo de Konno e Yamazaki, de minimização do desvio absoluto médio.

Da experiência computacional, e para a base de dados disponível, conclui-se que o desempenho das carteiras obtidas resolvendo o problema de programação com modelo de Konno e Yamazaki foi superior as obtidas pelo modelo de Markowitz.

Referências

Goldfarb, D e Iyengar, G (2003), *Robust Portfolio Selection Problem, Mathematics of Operations Research*, Vol. 28 , nº1, pp 1-38.

Guedes, M.C.M, *Apontamentos de Programação Matemática*, Faculdade de Ciências Porto, 2003.

Júdice, J. J., Ribeiro, C. O., & Santos, J. P. (2003), "*Análise Comparativa dos Modelos de Selecção de Carteiras de Acções de Markowitz e Konno*". *Inv. Op.,* Vol.*23 nº2*, pp. 211 - 224.

Konno, H. e Yamazaki, H. (1991), *Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to Tokyo Stock Market, Management Science*, Vol. 37, nº 5, pp. 519-531.

Markowitz, H.(1952), Portfolio Selection (1952), The Journal of Finance, Vol .7, nº1, pp 77-91.

Rockafellar.R.T e Uryasev. S (2000), Optimization of Conditional Value-at-Risk, The Journal of Risk, Vol. 2, pp 21-30.

Sharpiro, J. *Mathematical Programming: Structures and Algorithms, John Wiley e Son*s, Inc., 1979.

Winston, W.E. e Venkataramanan, M., *Introduction to Mathematical Programming,* Thomson, Brooks / Cole, 4th Edition, 2003.

Apêndices

Apêndice A : Algumas revisões e definições

Uma função $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma norma se:

- $f(x) \ \geq 0 \; para \; todo \; x \in \ \mathbb{R}^n$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ \ x = 0$
- $f(tx) = |t| f(x) \; para \; todo \; x \in \ \mathbb{R}^n \ \ e \; t \in \mathbb{R}$
- $f(x + y) \ \leq f(x) + f(y), \ para \; todo \; x.y \in \ \mathbb{R}^n$

Seja $x \in \ \mathbb{R}^n$.

As $l_p \ - normas \ (p \geq 1)$ definem-se como:

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/\ p}$$

Para $p = 1, l_1 -$ norma é a soma dos valores absolutos das componentes de x :

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

Para $p = 2, a \ \ l_2 -$ norma é a a norma Euclidiana de x :

$$\|x\| = (x^T x)^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

Para $p = \infty \, , tem - se \; a \; l_\infty -$ norma que também é denominada por norma de Chebyshev e define-se como:

$$\|x\|_\infty = max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

Normas Quadráticas

Para $P \in \ S_{++}^n$,

$$\|x\|_p = (x^T P x)^{1/2} = \left\| P^{1/2} \, x \right\|_2$$

Será a norma Euclidiana se P for a matriz identidade.

Funções Convexas

Def: Uma função $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa se o domínio da função (D_f) é um conjunto convexo e se

$$\forall x, y \in D_f, \theta \in [0,1], f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y).$$

Geometricamente, esta desigualdade significa que o segmento de recta entre $(x, f(x) e\ (y, f(y))$ fica sempre acima do gráfico de f.

Observação: Todas as funções afins e quadráticas com coeficiente de maior grau positivo são funções convexas.

Teorema: As seguintes proposições são equivalentes:

- f é convexa
- Dado $y \in \mathbb{R}^n$, existe $\gamma_y \in \mathbb{R}^n$ tal que.
  $f(x) \geq f(y) + \gamma_y (x - y), \forall x \in \mathbb{R}^n$
- Se f for diferenciável, então

  $$f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)^T (x - y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

- Se f tiver derivadas parciais de segunda ordem, então a matriz hessiana

  $$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i x_j} \right) i, j = 1, \dots, n$$

  é semidefinida positiva , isto é,

  $$y^T H_f(x) y \geq 0, \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

Algumas medidas de risco

Valor em Risco (VaR)

Sendo n o número de activos e representando por $Z \in \mathbb{R}^n$ o vector das alterações aleatórias do valor dos instrumentos financeiros que compõem a carteira, Z é uma variável aleatória com fiunção densidade de probabilidade $p(z)$. Assim, a perda associada a um vector de composição da carteira $\emptyset \in \mathbb{R}^n$, pode ser representada por uma função $f(\emptyset, Z)$.

$O\ VaR$ baseia-se nos percentis da função de distribuição da variável aleatória associada à variabilidade do mercado.

Para se definir o VaR, comece-se por considerar a função:

$$\psi(\phi, \alpha) = P\{f(\phi, Z) \leq \alpha\} = \int_{f\phi, Z) \leq \alpha} p(z)dz.$$

ou seja, o percentil.

Para um certo valor $\beta \in (0,1), o\ \beta - VaR$ é definido por:

$$\alpha_\beta = min\{\alpha \in \mathbb{R} : \ \psi(\phi, \alpha) \geq \beta\}.$$

Valor em Risco Condicionado ($CVaR$)

Com base na definição do VaR é possível definir outra medida de risco que consiste na média da cauda direita da distribuição em causa. Esta medida foi usada pela primeira vez por Rockafeller e Uryasev (2000), é o $\beta - CvaR$ ou $\beta - VaR$ condicionado.

$$\Phi_\beta(\phi) = \frac{1}{1-\beta} \int_{f\phi, Z) \leq \alpha\beta(\phi)} f(\phi, z)p(z)dz$$

Apêndice B : Rotinas de R

Composição da Carteira com Modelo de Markowitz.

```
# install.packages("quadprog")


library(quadprog) # pack programação quadrática

# https://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/72774_3c0d6cc265fb402a855949d4eceb3d2c.html


Activo <- read_excel("C:/Users/User/Desktop/TESE AGORA 23 Janeiro/DADOS/Dado do trabalho 2012.xlsx")

View(Activo)


Ndatas = min( 50, nrow(Activo)) # Nº de datas desde o início

colunas = c(2,3,4,5,6,7,8,9,10,11) # Índice das colunas das empresas da base de dados

Numpresas = length(colunas)

Numpresas

activo1 <- Activo[seq(1,Ndatas),colunas]

colnames(activo1) = colnames(Activo)[colunas]

Nomes.empresas=colnames(activo1)

Nomes.empresas

names(activo1)

View(activo1)


# calculo da função retorno


retorno<- function(m){

  m = as.matrix(m)

  a = matrix(0, nrow= nrow(m)-1, ncol = ncol(m))

  for (k in 2:nrow(m)){

    a[k-1,] = (m[k,]-m[k-1,])/m[k-1,]

  }
```

```
  return(a)
}

f.obj <- function(m,x){
  # m = matriz de covariância
  # x = vector (x1,x2,...,xn)
  m=as.matrix(m)
  x=as.vector(x)
  a = rep(0,nrow(m))
  for (k in 1:nrow(m)){
    # k- índice do ciclo for
    a[k] = sum(m[k,]*x[k]*x)
  }
  return(sum(a))
}


# Matriz do retorno

ret = retorno(activo1)
colnames(ret) = colnames(activo1)
View(ret)
ret.med = apply( ret, 2, mean)
ret.med

# Para escolher o meu rho sei que tem que estar entre max(min(ret.med),0) e max(ret)
(rho_inf = max(0, min(ret.med)))
(rho_sup = max(0, max(ret.med)))

pct = 0.9 # percentagem do rho max que eu quero como retorno para mim
(rho = rho_sup*pct)
```

```
# Matriz de covariâncias do retorno

cov.ret = cov(ret)

# View(cov.ret)

m=cov.ret



# Optimização Quadrática: Markowitz


m1 <- ret.med

m2 <- rep(1,Numpresas)

m3 <- diag(1,Numpresas)


A_t = rbind(m2,m1,m3)# Matriz das restrições: As igualdades surgem nas primeiras linhas

V <- cov.ret # Matriz de covariância


# Vou supor que M0=1, ou seja, é a quantidade que vou investir

M0 = 1


d = rep(0,Numpresas)

b = c(M0, rho*M0, d )

b


## Codificação usando a notação da função solve.QP

Dmat<-2*V

dvec<-d

Amat<-t(A_t)

bvec<-b

numigual<-1  ## número de igualdades nas restrições


s = solve.QP(Dmat, dvec, Amat, bvec, meq=numigual)
```

```
# O que devo investir em cada empresa para obter um retorno rho


eps = 10^(-7) # para valores da solução abaixo de eps, considero o investimento nulo

solucao_mark = s$solution

names(solucao_mark)=Nomes.empresas

names(solucao_mark)

solucao_mark[abs(solucao_mark)<eps]=0

solucao_mark


# Valor da função objectivo

s$value



plot(solucao_mark, type="b",col=2, xaxt = "n", xlab = "Empresas", ylab = "% portfólio",
ylim =  )

Nomes.empresas

axis(1, at=1:Numpresas, labels=Nomes.empresas)

title("Composição da carteira com Modelo de Markowitz")
```

Composição da Carteira com Modelo de Konno e Yamazaki.

```
# install.packages("linprog")

library(readxl)

library(linprog)  # pack programação linear


# https://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/72774_3c0d6cc265fb402a855949d4eceb3d2c.html


Activo <- read_excel("C:/Users/User/Desktop/TESE AGORA 23 Janeiro/DADOS/Dado do trabalho 2012.xlsx")

View(Activo)


Ndatas = min( 50, nrow(Activo)) # Nº de datas desde o início

colunas = c(2,3,4,5,6,7,8,9,10,11) # Índice das colunas das empresas da base de dados

Numpresas = length(colunas)

Numpresas

activo1 <- Activo[seq(1,Ndatas),colunas]

colnames(activo1) = colnames(Activo)[colunas]

Nomes.empresas=colnames(activo1)

Nomes.empresas

names(activo1)

View(activo1)


# calculo da função retorno
```

```
retorno<- function(m){
  m = as.matrix(m)
  a = matrix(0, nrow= nrow(m)-1, ncol = ncol(m))
  for (k in 2:nrow(m)){
    a[k-1,] = (m[k,]-m[k-1,])/m[k-1,]
  }
  return(a)
}

f.obj <- function(m,x){
  # m = matriz de covariância
  # x = vector (x1,x2,...,xn)
  m=as.matrix(m)
  x=as.vector(x)
  a = rep(0,nrow(m))
  for (k in 1:nrow(m)){
    # k- índice do ciclo for
    a[k] = sum(m[k,]*x[k]*x)
  }
  return(sum(a))
}


# Matriz do retorno
```

ret = retorno(activo1)

colnames(ret) = colnames(activo1)

View(ret)

ret.med = apply(ret, 2, mean)

ret.med

Para escolher o meu rho sei que tem que estar entre max(min(ret.med),0) e max(ret)

(rho_inf = max(0, min(ret.med)))

(rho_sup = max(0, max(ret.med)))

pct = 0.9 # percentagem do rho max que eu quero como retorno para mim

(rho = rho_sup*pct)

Optimização Linear: Konno

cvec = c(rep(1/(Ndatas-1), Ndatas-1), rep(0,Numpresas)) # ver help da função "rep"

1º rep é relativo aos coeficientes dos y's que aparecem na função objectivo

2º rep é relativo aos coeficientes dos x's que aparecem na função objectivo

b1 = c(M0, rep(0, Ndatas-1), rep(0, Ndatas-1), rho*M0) # o rep(0,Ndatas) é desigualdades que contêm y.

b2 = rep(0,Nempresas) # desigualdades para que todos os x sejam maiores ou iguais a zero.

bvec = c(b1,b2) # aqui junto bq e b2 para obter o vector b que quero.

```
a_jt<-function(ret,ret.med){
  Ncol = ncol(ret)
  a = matrix(0, ncol = Ncol, nrow=nrow(ret))
  for ( j in seq(1,Ncol)){
    a[,j]=ret[,j]-ret.med[j]
  }
  return(a)
}

a_mat = a_jt(ret,ret.med)

m1 = c( rep(0,Ndatas-1), rep(1,Numpresas) )
m2 = cbind(diag(1,Ndatas-1),a_mat)
m3 = cbind(diag(1,Ndatas-1),-a_mat)
m4 = c( rep(0,Ndatas-1), ret.med )
m5 = cbind( matrix(0, ncol = Ndatas-1, nrow = Numpresas), diag(1, Numpresas))

m = rbind( m1, m2, m3, m4, m5 )

Amat = m

s.konno = solveLP( cvec, bvec, Amat, const.dir = c( "=", rep( ">=", length( bvec )-1 ) ),
            lpSolve=TRUE ) #lpSolve =T se tivermos igualdades nas restrições

ans.konno = tail(s.konno$solution, Numpresas) # Valores de X1,...,X10
```

```
names(ans.konno) = Nomes.empresas # dar nomes a X1,...,X10

ans.konno


s.konno$opt # valor da função objectivo.


y_t=head(s.konno$solution,Ndatas-1)# valores de y1,y2,.....,y49

y_t



plot(ans.konno, type="b",col=3, xaxt = "n", xlab = "Empresas", ylab = "% portfólio", ylim
=  )

Nomes.empresas

axis(1, at=1:Numpresas, labels=Nomes.empresas)

title("Composição da carteira com Konno")
```

Comparação de Retorno da carteira vs Retorno PSI20

- Activos<-read_excel("C:/Users/User/Desktop/TESE AGORA 23 Janeiro/DADOS/Dado de trabalho Nov á Dez 2015.xlsx") # ler a base de dado de Excel

  View(Activos) # ver a tabela no R

- PSI20<- read_excel("C:/Users/User/Desktop/TESE AGORA 23 Janeiro/PSI20 (2010-2015).xls") # ler a tabela dos dados de PSI20

  View(PSI20) # ver a tabela no R

- Resp.konno<-read_excel("C:/Users/User/Desktop/TESEAGORA23 Janeiro/DADOS/% Konno jan Out 2015.xlsx") # ver a tabela da composição da carteira do Konno

  View(Resp.konno)

- Resp.konno1 = as.numeric(Resp.konno) # transformar a matriz em numero

  Resp.konno1

- Nudatas = min(44, nrow(Activos)) # Nºde datas desde o inicio
- colunas = c(2,3,4,5,6,7,8,9,10,11) # Indice das colunas das empresas da base de

  dados

- Nempresas = length(colunas) # numero das empresas.
- activo1 <- Activos[seq(1,Nudatas),colunas]

  activo1

- colnames(activo1) = colnames(Activos)[colunas] nomes das companhias.
- Nomes.empresas=colnames(activo1) # Nomes das empresas

- # calculo da funcao retorno

```
retorno<- function(m){
m = as.matrix(m)
a = matrix(0, nrow= nrow(m)-1, ncol = ncol(m))
```

```
  for (k in 2:nrow(m)){
    a[k-1,] = (m[k,]-m[k-1,])/m[k-1,]
  }
  return(a)
}
```

- # Matriz do retorno Nov-Dez 2015

```
ret = retorno(activo1)
colnames(ret) = colnames(activo1)

ListaDatas = Activos[,1]
DataInicial = "2015-11-03"
IxDataInicial = which(ListaDatas==DataInicial) # Linha da base de dados a que corresponde a data.
DataFinal = "2015-12-31"
IxDataFinal = which(ListaDatas==DataFinal) # Linha da base de dados a que corresponde a data.

retdatas = ret[seq(IxDataInicial:IxDataFinal),]
retdatas
```

- # Retorno PSI20

```
Nudat = min( 1537, nrow(PSI20)) # Nº de datas desde o inicio
col = c(2) # Indice das colunas das empresas da base de dados
col
PSI201 <- PSI20[seq(1,Nudat),col]
PSI201
retPSI201 = retorno(PSI201)
colnames(retPSI201) = colnames(PSI201)

ListaDatas = PSI20[,1]
DataInicial = "2015-11-03"
```

IxDataInicial = which(ListaDatas==DataInicial) # Linha da base de dados a que corresponde a data.

DataFinal = "2015-12-31"

IxDataFinal = which(ListaDatas==DataFinal) # Linha da base de dados a que corresponde a data.

retPSI201datas = retPSI201[seq(IxDataInicial:IxDataFinal),]

retPSI201datas

- ## Retorno da carteira

RetCarteira = rep(0, nrow(retdatas))

for (k in 1:nrow(retdatas)){

  RetCarteira[k] = sum(Resp.konno1*retdatas[k,])

}

- lgd1=c("RetCarteira","retPSI201datas")
- plot(RetCarteira, type="b",col=2, xaxt = "n", xlab = "dias", ylab = "Retornos")
- lines(retPSI201datas, type = "b", col=3)
- title("Comparação: Retorno da carteira vs Retorno PSI20") # titulo do grafico
- abline(0,0,col=1) # linha com o valor de Retornos
- legend("topright",lgd1, lty = c(1, 1), col = c(2,3), cex = 0.7) # legenda no gráfico